O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA
O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

BUXORO MUHANDISLIK-TEXNOLOGIYA INSTITUTI

	Tasdiqlayman
Ro’yxatga olindi	**O’quv ishlari bo’yicha prorektor**
№___________________	**______________ Sh.M.Hodjiyev**
2019 «_____»_________	**2019 «_____»_________**

“ OLIY MATEMATIKA” KAFEDRASI

“ OLIY MATEMATIKA ” FANIDAN

O‘QUV-USLUBIY MAJMUA

Bilim sohasi 300000 – Ishlab chiqarish texnik sohasi

Ta’lim sohasi 320000 – Ishlab chiqarishlar texnologiyasi

Ta’lim yunalishlari: **5310100** – Энергетика (Тармоқлар бўйича);
5310700 – Электр техникаси, электр механикаси ва электр технологиялари (Тармоқлар бўйича);
5312100 - Энергоаудит ва саноат корхоналарининг энергетик текшируви;

Buxoro-2019

O‘quv-uslubiy majmua O‘zbekiston Respublikasi Oliy va o‘rta maxsus ta’lim vazirligida ro‘yxatga olingan va 2018 yil “-“_25_”_08_ da tasdiqlangan namunaviy fan dasturi asosida tuzilgan.

Tuzuvchi: “Oliy matematika” kafedrasi professori vazifasini bajaruvchi, f.-m.f.d. **M.X.Teshayev**

Taqrizchilar: BDU “Matematika” kafedrasi professori **D.Q.Durdiev**

BDU “Matematika” kafedrasi dotsenti **T.X. Rasulov**

O‘quv-uslubiy majmua Yengil sanoat fakultetining “ Oliy Matematika” kafedrasi majlisida (2019 yil “_ _” 1 - son bayonnoma) muhokama etildi va fakultetning o‘quv-uslubiy kengashiga tavsiya etildi.

Kafedra mudiri:_______________ t.f.n. **G‘.G‘.Yunusov**

O‘quv-uslubiy majmua Yengil sanoat fakultetining o‘quv-uslubiy kengashida ko‘rib chiqildi (2019 yil **“__” _ 1 -** son bayonnoma) va institutning Ilmiy-uslubiy kengashiga tasdiqlashga topshirildi.

O‘quv-uslubiy kengash raisi: _________ dots. **X.Q.Raxmonov**

Kelishildi:
O‘quv- uslubiy boshqarma boshlig’i: dots. **N. Qulliyev**

M U N D A R I J A

MATRITSALAR VA ULARNING XOSSALARI. MATRITSALAR USTIDA AMALLAR.

- ***Matritsalar va ularning turlari.***
- ***Matritsalar ustida amallar.***
- ***Matritsalarning iqtisodiy tatbiqlari.***

1.1. Matritsalar va ularning turlari. Matritsa bir qator matematik va iqtisodiy masalalarni yechishda juda ko‘p qo‘llaniladigan tushuncha bo‘lib, uning yordamida bu masalalar va ularning yechimlarini sodda hamda ixcham ko‘rinishda ifodalanadi.

1-TA'RIF: m ta satr va n ta ustundan iborat to'g'ri to'rtburchak shaklidagi $m\cdot n$ ta sondan tashkil topgan jadval $m\times n$ tartibli ***matritsa,*** uni tashkil etgan sonlar esa ***matritsaning elementlari*** deb ataladi.

Matritsalar $A,B,C,\dots$ kabi bosh harflar bilan, ularning i-satr va j-ustunida joylashgan elementlari esa odatda a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} kabi mos kichik harflar bilan belgilanadi. Masalan,

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1.2 \\ 0 & 7.5 & -1 \end{pmatrix}$$

matritsa 2×3 tartibli, ya'ni 2 ta satr va 3 ta ustun ko'rinishidagi 2·3=6 ta sondan tashkil topgan. Uning 1-satr elementlari $a_{11}=1$, $a_{12}=-3$, $a_{13}=1.2$ va 2-satr elementlari $a_{21}=0$, $a_{22}=7.5$, $a_{23}=-1$ sonlardan iborat. Bu matritsaning 1-ustuni $a_{11}=1$ va $a_{21}=0$, 2-ustuni $a_{12}=-3$ va $a_{22}=7,5$, 3-ustuni esa $a_{13}=1.2$ va $a_{23}=-1$ elementlardan tuzilgan.

Agar biror A matritsaning tartibini ko'rsatishga ehtiyoj bo'lsa, u $A_{m\times n}$ ko'rinishda yoziladi va umumiy holda

$$A_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

yoki qisqacha $A_{m\times n}=(a_{ij})$ ko'rinishda ifodalanadi.

2-TA'RIF: A_{mxn} matritsada $m=n\neq 1$ bo'lsa, u ***kvadrat matritsa***, $m\neq n$ ($m\neq 1$, $n\neq 1$) bo'lsa ***to'g'ri burchakli matritsa*** , $m=1$, $n\neq 1$ holda ***satr matritsa*** va $m\neq 1$, $n=1$ bo'lganda ***ustun matritsa*** deb ataladi.

A_{nxn} kvadrat matritsa qisqacha A_n kabi belgilanadi va n-tartibli kvadrat matritsa deyiladi. Masalan, xalq xo'jaligining n ta tarmoqlari orasidagi o'zaro mahsulot ayirboshlash $A_n=(a_{ij})$ kvadrat matritsa yordamida ifodalanadi. Bunda a_{ij} ($i,j=1,2,\dots,n$ va $i\neq j$) i-tarmoqda ishlab chiqarilgan mahsulotning j-tarmoq uchun mo'ljallangan miqdorini, a_{ii} ($i=1,2,\dots,n$) esa i-tarmoqning o'zi ishlab chiqargan mahsulotga ehtiyojini bildiradi.

Shuni ta'kidlab o'tish kerakki, $m=1$ va $n=1$ bo'lganda $A_{1\times 1}$ matritsa bitta sonni ifodalaydi va shu sababli ma'lum bir ma'noda matritsa son tushunchasini umumlashtiradi.

3-TA'RIF: A va B matritsalar bir xil tartibli va ularning mos elementlari o'zaro teng bo'lsa, ya'ni $a_{ij}=b_{ij}$ shart bajarilsa, ular ***teng matritsalar*** deyiladi.

A va B matritsalarning tengligi $A=B$ yoki $(a_{ij})=(b_{ij})$ ko'rinishda belgilanadi. Masalan, ixtiyoriy $a\neq 0$ soni uchun

$$A=\begin{pmatrix} a+a & a-a \\ a:a & a\cdot a \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 1 & a^2 \end{pmatrix}$$

matritsalar o'zaro teng, ya'ni $A=B$ bo'ladi.

4-TA'RIF: $A=\{a_{ij}\}$ matritsada i=j bo'lgan a_{ii} elementlar ***diagonal elementlar*** deb ataladi.

Masalan, yuqorida ko'rilgan $A_{2\times 3}$ matritsaning diagonal elementlari $a_{11}=1$ va $a_{22}=7.5$ bo'ladi.

5-TA'RIF: Diagonal elementlaridan boshqa barcha elementlari nolga teng bo'lgan ($a_{ij}=0$, $i\neq j$) kvadrat matritsa ***diagonal matritsa*** deyiladi.

Diagonal matritsaning diagonal elementlari nolga ham teng bo'lishi mumkin.
Masalan,

$$A_{2\times 2}=A_2=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad , \quad B_{3\times 3}=B_3=\begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

diagonal matritsalar bo'ladi.

6-TA'RIF: Barcha diagonal elementlari $a_{ii}=1$ bo'lgan n-tartibli diagonal matritsa n-tartibli birlik matritsa yoki qisqacha ***birlik matritsa*** deyiladi.

Odatda n-tartibli birlik matritsa E_n yoki qisqacha E kabi belgilanadi. Masalan,

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mos ravishda ikkinchi va uchinchi tartibli birlik matritsalardir.

7-TA'RIF: Barcha elementlari nolga teng ($a_{ij}=0$) bo'lgan ixtiyoriy $m\times n$ tartibli matritsa ***nol matritsa*** deyiladi.

$m\times n$ tartibli nol matritsa $O_{m\times n}$ yoki qisqacha O kabi belgilanadi. Masalan,

$$O_{2\times3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad O_{3\times2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad O_{3\times3} = O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ko'rsatilgan tartibli nol matritsalar bo'ladi.

1.2. Matritsalar ustida amallar. Endi matritsalar ustida algebraik amallar kiritib, matritsalar algebrasini hosil etamiz.

8-TA'RIF: Ixtiyoriy tartibli $A_{m\times n}=(a_{ij})$ matritsaning istalgan λ ***songa ko'paytmasi*** deb $C_{m\times n}=\{\lambda\, a_{ij}\}$ kabi aniqlanadigan matritsaga aytiladi.

Bunda A matritsaning λ songa ko'paytmasi λA deb belgilanadi. Masalan,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow 6A = \begin{pmatrix} 6\cdot5 & 6\cdot4 & 6\cdot(-1) \\ 6\cdot0 & 6\cdot2 & 6\cdot7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 24 & -6 \\ 0 & 12 & 42 \end{pmatrix}.$$

9-TA'RIF: Bir xil tartibli $A_{m\times n}=(a_{ij})$ va $B_{m\times n}=(b_{ij})$ ***matritsalar yig'indisi*** deb elementlari $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ kabi aniqlanadigan $C_{m\times n}=(c_{ij})$ matritsaga aytiladi.

Bunda A va B matritsalarning yig'indisi $A+B$ ko'rinishda belgilanadi va ularning mos elementlarini qo'shish orqali hisoblanadi. Masalan,

$$A = A_{2\times3} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 0 & 7 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = B_{2\times3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix},$$

matritsalar uchun

$$A+B = \begin{pmatrix} 5+1 & 3+0 & -1+1 \\ 0+2 & 7+(-3) & 2+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Matritsalarni songa ko'paytirish va o'zaro qo'shish amallari quyidagi qonunlarga bo'ysunishi bevosita ularning ta'riflaridan kelib chiqadi:

I. $A+B=B+A$ (qo'shish uchun kommutativlik qonuni);

II. $A+(B+C) = (A+B)+C$ (qo'shish uchun assotsiativlik qonuni);

III. $\lambda\,(A+B) = \lambda A + \lambda B$, $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$ (distrubutivlik qonuni)

Bundan tashqari yuqoridagi ta'riflar orqali bu amallar ushbu xossalarga ham ega bo'lishini ko'rsatish qiyin emas:

$$A + O = A, \quad A+A = 2A, \quad 0\cdot A = O, \quad \lambda\cdot O = O.$$

10-TA'RIF: Bir xil tartibli $A_{m\times n}=(a_{ij})$ va $B_{m\times n}=(b_{ij})$ ***matritsalar ayirmasi*** deb $A_{m\times n}$ va $(-1)B_{m\times n}$ matritsalarning yig'indisiga, ya'ni $A_{m\times n}+(-1)B_{m\times n}$ matritsaga aytiladi.

Bunda A va B matritsalarning ayirmasi $A-B$ ko'rinishda belgilanadi va ularning mos elementlarini o'zaro ayirish orqali hisoblanadi. Masalan,

$$A = A_{2\times3} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 0 & 7 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = B_{2\times3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix},$$

matritsalar uchun

$$A-B = \begin{pmatrix} 5-1 & 3-0 & -1-1 \\ 0-2 & 7-(-3) & 2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ -2 & 10 & -2 \end{pmatrix}.$$

11-TA'RIF: $A_{m\times p}=(a_{ij})$ va $B_{p\times n}=(b_{ij})$ ***matritsalarning ko'paytmasi*** deb shunday $C_{m\times n}=(c_{ij})$ matritsaga aytiladiki, uning c_{ij} elementlari ushbu

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}, \qquad i = 1, 2, \cdots, m; \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

yig'indilar kabi aniqlanadi.

Shunday qilib, $A_{m\times p}=(a_{ij})$ va $B_{q\times n}=(b_{ij})$ matritsalar uchun $p=q$, ya’ni A matritsaning ustunlari soni B matritsaning satrlari soniga teng bo‘lgandagina ularning ko‘paytmasi mavjud bo‘ladi va AB kabi belgilanadi. Bunda $AB=C_{m\times n}=(c_{ij})$ matritsaning satrlar soni m birinchi A ko‘paytuvchi matritsa, ustunlar soni n esa ikkinchi B ko‘paytuvchi matritsa orqali aniqlanadi. Bundan tashqari $AB=C_{m\times n}=(c_{ij})$ ko‘paytma matritsaning c_{ij} elementi A matritsaning i – satr elementlarini B matritsaning j-ustunidagi mos elementlariga ko‘paytirib, hosil bo‘lgan ko‘paytmalarni qo‘shish orqali hisoblanadi. Bu “satrni ustunga ko‘paytirish” qoidasi deb aytiladi. Masalan,

$$A_{3\times 2}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & -2\\ 4 & 5\end{pmatrix},\qquad B_{2\times 2}=\begin{pmatrix}6 & -4\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

matritsalar uchun $m=3$, $p=q=2$, $n=2$ bo‘lgani uchun ularning ko‘paytirish mumkin va ko‘paytma matritsa AB=C$_{3\text{x}2}$ quyidagicha bo‘ladi:

$$C_{3\times 2}=\begin{pmatrix}3\cdot 6+1\cdot 1 & 3\cdot(-4)+1\cdot 2\\ 0\cdot 6+(-2)\cdot 1 & 0\cdot(-4)+(-2)\cdot 2\\ 4\cdot 6+5\cdot 1 & 4\cdot(-4)+5\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}19 & -10\\ -2 & -4\\ 29 & -6\end{pmatrix}.$$

Matritsalar ko‘paytmasi uchun $AB\neq BA$, ya’ni kommutativlik qonuni o‘rinli bo‘lmaydi. Masalan, $A_{m\times q}B_{q\times n}=C_{m\times n}$ ko‘paytma mavjud, ammo $B_{q\times n}\,A_{m\times q}$ ko‘paytma har doim ham mavjud emas va mavjud bo‘lgan taqdirda, ya’ni $n=m$ holda ham ular teng bo‘lishi shart emas. Masalan,

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 4 & 5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & 7\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

matritsalar uchun $AB\neq BA$, chunki

$$AB=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 4 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 7\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 22\\ 8 & 23\end{pmatrix},\quad BA=\begin{pmatrix}2 & 7\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -1\\ 4 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}34 & 33\\ -4 & -5\end{pmatrix}.$$

Matritsalar ko‘paytmasi va yig‘indisi quyidagi qonunlarga bo‘ysunadi hamda ushbu xossalarga ega bo‘ladi:

I. $A(BC)=(AB)C$, $(\lambda A)B=A(\lambda B)$ (ko‘paytirish uchun assotsiativlik qonuni);

II. $A(B+C) = AB + AC$ (ko‘paytirish va qo‘shish amallari
$(A+B)C = AC + BC$ uchun distributivlik qonunlari);

III. $AE = EA = A$, $\text{O}\cdot A = \text{O}$, $A\cdot\text{O} = \text{O}$, $0\cdot A = \text{O}$.

Bunda E va O mos ravishda tegishli tartibli birlik va nol matritsalarni ifodalaydi.

Matritsa ko‘paytmasi ta’rifidan ko‘rinadiki, har qanday n-tartibli A kvadrat matritsani o‘ziga–o‘zini ko‘paytirish mumkin va natijada yana n-tartibli kvadrat matritsa hosil bo‘ladi.

12-TA’RIF: A kvadrat matritsani o‘zaro m marta (m – birdan katta ixtiyoriy natural son) ko‘paytirish natijasida hosil bo‘lgan kvadrat matritsa A ***matritsaning m- darajasi*** deyiladi.

A matritsaning m- darajasi A^m kabi belgilanadi. Bunda $A^0=E$ va $A^1=A$ deb olinib, A^m daraja ixtiyoriy nomanfiy butun m soni uchun aniqlanadi. Bu holda A^m daraja ta’rifdan uning quyidagi xossalari bevosita kelib chiqadi (m,k-natural sonlar, λ-haqiqiy son):

$$1.\,A^m\cdot A^k=A^{m+k}\ ;\quad 2.\,(A^m)^k=A^{mk}\ ;\quad 3.\,(\lambda A)^m=\lambda^m A^m\ ;\quad 4.\,E^m=E;\quad 5.\,\text{O}^m=\text{O}.$$

Shunday qilib, har qanday kvadrat matritsa uchun natural darajaga ko‘tarish amalini kiritish mumkin ekan. Masalan,

$$A=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & -3\end{pmatrix}\Rightarrow A^2=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & -5\\ -1 & 14\end{pmatrix},$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}9 & -5\\ -1 & 14\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13 & 60\\ 12 & -47\end{pmatrix}.$$

Shuni ta’kidlab o‘tish kerakki, 5-xossaning teskarisi o‘rinli emas, ya’ni A^m=O tenglikdan har doim ham A=O ekanligi kelib chiqmaydi. Masalan,

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\neq \mathrm{O}\Rightarrow A^2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\mathrm{O}.$$

Kelgusida matritsani darajaga ko‘tarish amalini ixtiyoriy m butun son uchun umumlashtiramiz.

13-TA’RIF: $B=(b_{ij})$ matritsa $A=(a_{ij})$ matritsaning ***transponirlangani*** deyiladi, agar i va j indekslarning barcha mumkin bo‘lgan qiymatlarida $a_{ij}=b_{ji}$ shart bajarilsa.

A matritsaning transponirlangani A^{T} kabi belgilanadi. Agar A matritsa $m\times n$ tartibli bo‘lsa, uning transponirlangani A^{T} $n\times m$ tartibli bo‘ladi.Masalan,

$$A_{2\times 3}=\begin{pmatrix}2 & -4 & 1\\ 3 & 0 & -5\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad A^T_{3\times 2}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -4 & 0\\ 1 & -5\end{pmatrix}.$$

Matritsani transponirlanganini topish ***transponirlash amali*** deyiladi va u quyidagi xossalarga ega bo‘lishini ko‘rsatish mumkin:

1. $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=A$; 2. $(\lambda A)^{\mathrm{T}}=\lambda A^{\mathrm{T}}$ (λ– ixtiyoriy haqiqiy son);
3. $(A\pm B)^{\mathrm{T}}= A^{\mathrm{T}}\pm B^{\mathrm{T}}$; 4. $(A\cdot B)^{\mathrm{T}}= B^{\mathrm{T}}\cdot A^{\mathrm{T}}$.

14-TA’RIF: Agar A kvadrat matritsa uchun $A^{\mathrm{T}}=A$ bo‘lsa, u ***simmetrik matritsa,*** $A^{\mathrm{T}}= -A$ bo‘lganda esa ***kososimmetrik matritsa*** deb ataladi.

Ta’rifdan har qanday simmetrik matritsaning elementlari $a_{ij}= a_{ji}$, kososimmetrik matritsaning elementlari esa $a_{ij}=- a_{ji}$ shartni qanoatlantirishi bevosita kelib chiqadi. Bundan kososimmetrik matritsaning barcha diagonal elementlari nolga teng bo‘lishi kelib chiqadi.
Masalan,

$$A=\begin{pmatrix}3 & 6 & 1\\ 6 & 0 & -4\\ 1 & -4 & -2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0 & 3 & 2\\ -3 & 0 & -4\\ -2 & 4 & 0\end{pmatrix}$$

matritsalardan A simmetrik, B kososimmetrik bo‘ladi.

XULOSA

Matritsa – satrlar va ustunlar shaklida joylashtirilgan sonlar jadvali bo‘lib, ma’lum bir ma’noda son tushunchasini umumlashtiradi. Matritsalar matematikaning ham nazariy, ham amaliy (jumladan iqtisodiy mazmunli) masalalarida keng qo‘llaniladi. Matritsalar ustida ularni songa ko‘paytirish, o‘zaro qo‘shish, ayirish va ko‘paytirish kabi algebraik amallar aniqlangan. Bunda hosil bo‘ladigan matritsalar algebrasidagi ko‘paytirish amalining o‘ziga xos xususiyati shundan iboratki, u kommutativlik qonuniga bo‘ysunmaydi. Bu algebrada nol va birlik matritsa 1 va 0 sonlariga o‘xshash xossalarga ega. Matritsalar uchun ko‘rsatilgan algebraik amallardan tashqari transponirlash amali ham aniqlangan.

Tayanch iboralar

Matritsa * Matritsa tartibi * Matritsa elementi * To‘rtburchakli matritsa
* Kvadrat matritsa * Ustun matritsa * Satr matritsa * Teng matritsalar
* Diagonal element * Diagonal matritsa * Birlik matritsa * Nol matritsa
* Matritsalar yig‘indisi * Matritsalar ayirmasi * Matritsalar ko‘paytmasi
* Matritsaning darajasi * Matritsaning transponirlangani * Simmetrik matritsa
* Kososimmetrik matritsa

Takrorlash uchun savollar

1. Matritsa deb nimaga aytiladi?
2. Matritsaning tartibi qanday aniqlanadi?
3. Matritsaning elementi deb nimaga aytiladi?
4. Matritsalar qanday turlarga ajratiladi?
5. Qachon ikkita matritsa teng deyiladi?
6. Matritsaning qanday elementi diagonal deyiladi?

7. Birlik matritsa qanday ta'riflanadi?
8. Qachon matritsa nol matritsa deyiladi?
9. Matritsani songa ko'paytirish qanday aniqlanadi?
10. Qaysi shartda matritsalarni qo'shish yoki ayirish mumkin?
11. Matritsalar yig'indisi yoki ayirmasi qanday topiladi?
12. Matritsalarni qo'shish amali qanday qonunlarga bo'ysunadi?
13. Matritsalarni qo'shish amali qanday xossalarga ega?
14. Qaysi shartda matritsalarni ko'paytirish mumkin?
15. Ko'paytma matritsa tartibi qanday topiladi?
16. Matritsalarning ko'paytmasi qanday aniqlanadi?
17. Matritsalarni ko'paytirish amali qanday qonunlarga bo'ysunadi?
18. Matritsalarni ko'paytirish amali qanday xossalarga ega?
19. Matritsaning natural darajasi qanday aniqlanadi?
20. Matritsani darajaga ko'tarish amali qanday xossalarga ega?
21. Matritsalarni transponirlash nima?
22. Matritsalarni transponirlash amali qanday xossalarga ega?
23. Qachon matritsa simmetrik deyiladi?
24. Qanday shartda matritsa kososimmetrik deb ataladi?
25. Matritsaning iqtisodiy tatbig'iga misol keltiring.

§2. ANIQLOVCHILAR VA ULARNING XOSSALARI (DETERMINANTLAR). MATRITSANING DETERMINANTI.

- ***Determinantlar va ularni hisoblash.***
- ***Determinantlarning asosiy xossalari.***

2.1. Determinantlar va ularni hisoblash. Matritsaning bir qator xususiyatlarini ta'riflash va o'rganish uchun uning determinanti tushunchasi kerak bo'ladi.

1-TA'RIF. n - tartibli A kvadrat matritsaning elementlaridan ma'lum bir qoida asosida hosil qilinadigan son *n – tartibli determinant* deyiladi.

A kvadrat matritsaning determinanti $|A|$ yoki det$A$ kabi belgilanadi. Ayrim o'quv adabiyotlarida determinant atamasi aniqlovchi deb aytiladi. Umumiy holda n-tartibli determinant quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$|A| = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

2-TA'RIF. Berilgan $|A|$ determinantni tashkil etgan a_{ij} (i,j=1,2, … ,n) sonlar *determinantning elementlari*, gorizontal ko'rinishda joylashgan a_{ij} (j=1,2, … ,n) elementlar *determinantning i-satri* (i=1,2, … ,n), vertikal ko'rinishda joylashgan a_{ij} (i=1,2, … ,n) elementlar esa *determinantning j ustuni* (j=1,2, … ,n) deyiladi.

Endi I, II va III tartibli determinantlarni hisoblash qoidasini formula ko'rinishida aniq ifodalaymiz.

I tartibli $|A|$ determinant faqat bitta a_{11} sondan iborat bo'lib, uning qiymati shu sonni o'ziga teng, ya'ni $|A|=|a_{11}|= a_{11}$ deb olinadi.

II tartibli determinantning qiymati quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \qquad (1)$$

Masalan,

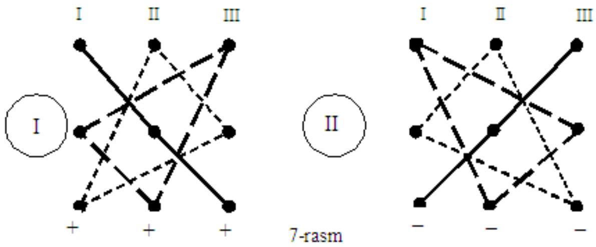
$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 3 \cdot 6 - 4 \cdot 5 = 18 - 20 = -2, \qquad \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -2 & 10 \end{vmatrix} = 5 \cdot 10 - 4 \cdot (-2) = 50 + 8 = 58$$

III tartibli determinant esa quyidagi formula bilan hisoblanadi:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13} - a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} - a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33} - a_{23}\cdot a_{32}\cdot a_{11} \quad (2)$$

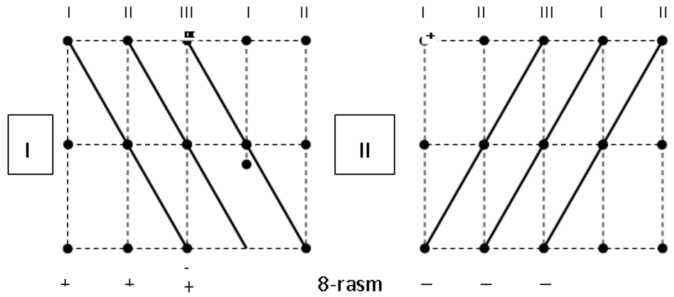
Bu yerda (2) formulani eslab qolish oson emas va shu sababli III tartibli determinantlarni quyidagi usullarda hisoblash mumkin.

❖ **Uchburchaklar usuli.** Bu usulda determinantning elementlari sxematik ko‘rinishda nuqtalar singari ifodalanadi (7-rasmga qarang). So‘ngra asoslari determinantning diagonallariga parallel bo‘lgan uchburchaklar qaraladi. Bu uchburchaklarning uchlarida va diagonallarda joylashgan elementlarning ko‘paytmalari hosil qilinadi. I holda chiziqlar bilan tutashtirilgan elementlarning ko‘paytmalari o‘z ishorasi, II holda esa qarama-qarshi ishora bilan olinadi



7-rasm

❖ **Sarrius usuli.** Bu usulda determinantning o‘ng tomoniga uning I va II ustunlari takroran yozilib, 3×5 tartibli matritsa hosil qilinadi. Bu matritsaning elementlari sxematik ko‘rinishda nuqtalar singari ifodalanadi (8-rasmga qarang) va chiziqlar bilan tutashtirilgan elementlarning ko‘paytmasi I holda o‘z ishorasi, II holda esa qarama-qarshi ishora bilan olinadi.



8-rasm

III tartibli determinantni hisoblashga doir misol keltiramiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 6 & -2 \\ 1 & 5 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2\cdot 5\cdot 0 + 6\cdot 4\cdot 3 + 1\cdot(-1)\cdot(-2) - (-2)\cdot 5\cdot 3 - 6\cdot 1\cdot 0 - 4\cdot(-1)\cdot(2) = 112.$$

Determinantlar va matritsalar orasida quyidagi o‘xshashlik va farqlar mavjud:

1) matritsa sonlar jadvalini ifodalaydi. Determinant esa sonlar jadvalidan hosil qilinadigan sonli ifoda bo‘lib, uning qiymati sondan iboratdir;

2) matritsa sonlar jadvalini dumaloq qavslar ichiga olish bilan belgilansa, determinant bu jadvalni vertikal chiziqlar orasiga olish bilan belgilanadi;

3) A matritsa va $|A|$ determinantni tashkil etuvchi sonlar ularning elementlari deyiladi;

4) matritsa va determinanant satrlar va ustunlardan iborat;

5) determinantlarda ustun va satrlar soni teng bo‘lishi kerak, matritsalarda esa bunday bo‘lishi shart emas.

2.2. Determinantlarning asosiy xossalari. Endi ixtiyoriy tartibli determinantlar uchun o‘rinli bo‘lgan xossalar bilan tanishamiz. Aniqlik va soddalik uchun umumiy holda ifodalangan bu xossalarni uchinchi tartibli determinantlar misolida ko‘rsatamiz va isbotlaymiz.

1-xossa. Agar determinantda har bir i-satr (i=1,2,3, ⋯,n) i-ustun bilan almashtirilsa, uning qiymati o‘zgarmaydi.

Masalan,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Bu tenglik bevosita III tartibli determinantni (2) hisoblash formulasidan kelib chiqadi.

Demak determinantning satr va ustunlari teng kuchlidir, ya'ni satr (ustun) uchun o'rinli bo'lgan tasdiq ustun (satr) uchun ham o'rinli bo'ladi. Bundan tashqari bu xossadan matritsani transponirlashda uning determinanti o'zgarmay qolishi, ya'ni $\det A = \det A^{T}$ bo'lishi kelib chiqadi. Shu sababli determinantning keyingi xossalarini faqat satrlar uchun ifodalaymiz.

2-xossa. Determinantda ixtiyoriy ikkita satrlar o'rni o'zaro almashtirilsa, determinantning qiymati faqat ishorasini o'zgartiradi.

Masalan,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}.$$

Bu tasdiq ham bevosita (2) formuladan kelib chiqadi.

3-xossa. Agar determinantda ikkita satr elementlari bir xil bo'lsa, uning qiymati nolga teng bo'ladi.

Isbot: Berilgan determinantning qiymatini Δ, uning bir xil elementli satrlarining o'rinlarini almashtirishdan hosil bo'lgan determinantning qiymatini esa Δ' deb belgilaymiz. Unda, 2-xossaga asosan, $\Delta' = -\Delta$ bo'ladi. Ammo determinantda bir xil elementli satrlarning o'rinlari almashtirilganligi uchun uning ko'rinishi o'zgarmay qoladi va shu sababli $\Delta' = \Delta$ bo'ladi. . Bu tengliklardan $\Delta = -\Delta$ natijani olamiz va undan $\Delta=0$ ekanligi kelib chiqadi.

Masalan, hozircha biz IV tartibli determinantni hisoblash formulasini bilmasakda, 3-xossaga asosan, birinchi va uchinchi satrlari bir xil bo'lgan ushbu determinantning qiymatini yozishimiz mumkin:

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 & 6 \\ 0 & 7 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 3 & 6 \\ 8 & 0 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

4-xossa. Determinantda biror satr elementlari umumiy λ ko'paytuvchiga ega bo'lsa, uni determinant belgisidan tashqariga chiqarib yozish mumkin.

Masalan,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Isbot: III tartibli determinantni (2) hisoblash formulasidagi yig'indining har bir qo'shiluvchisida λ umumiy ko'paytuvchi qatnashadi. Bu λ umumiy ko'paytuvchini qavsdan tashqariga chiqarib, 4-xossadagi tasdiqning o'rinli ekanligiga ishonch hosil etamiz.

5-xossa. Agar determinantda biror satr faqat nollardan iborat bo'lsa, uning qiymati nolga tang bo'ladi.

Bu xossaning isboti oldingi xossadan $\lambda=0$ bo'lgan holda kelib chiqadi.

Masalan, quyidagi III tartibli determinantning qiymatini (2) formula bilan hisoblab o'tirmay, 4-xossaga asosan to'g'ridan-to'g'ri

$$\begin{vmatrix} 11 & 20 & 401 \\ -8 & 37 & 139 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

deb ta'kidlay olamiz.

6-xossa. Agar determinantning ixtiyoriy ikkita satr elementlari o'zaro proporsional bo'lsa, uning qiymati nolga teng bo'ladi.

Masalan,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

Isbot: 4-xossaga asosan λ proporsionallik koeffitsiyentini determinant belgisi oldiga umumiy ko'paytuvchi sifatida chiqarish mumkin. Bu holda ikkita satri bir xil bo'lgan determinant hosil bo'ladi va uning qiymati, 3-xossaga asosan, nolga teng. Bundan berilgan determinantning ham qiymati nol ekanligi kelib chiqadi.

Masalan,

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 4 & 1 & 8 \\ 3 & 7.5 & -4.5 \end{vmatrix} = 0,$$

chunki bu determinantda I va III satrlar proporsional va proporsionallik koeffitsiyenti $\lambda=1.5$ ga teng.

7-xossa. Agar determinantning biror *i*-satri ikkita qo'shiluvchi yig'indisidan iborat, ya'ni $a_{ij}+b_{ij}$ ko'rinishda bo'lsa, bu determinantni ikkita determinantlar yig'indisi ko'rinishida yozish mumkin. Bunda bu determinantlarning *i*-satri mos ravishda a_{ij} va b_{ij} elementlardan iborat bo'lib, qolgan satrlari berilgan determinantniki singari bo'ladi.

Masalan,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Bu xossaning o'rinli ekanligiga bevosita (2) formula orqali ishonch hosil qilish mumkin.

8-xossa. Agar $|A|$ determinantning a_{ii} diagonal elementlaridan yuqorida yoki pastda joylashgan barcha elementlari nolga teng bo'lsa, uning qiymati diagonal elementlar ko'paytmasiga teng bo'ladi.

Masalan,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}.$$

Isbot: Bu determinantlar uchun ularni (2) hisoblash formulasidagi $a_{11}a_{22}a_{33}$ qo'shiluvchidan boshqa hamma qo'shiluvchilari nolga teng bo'ladi va shuning uchun ularning yig'indisi, ya'ni determinantning qiymati shu ko'paytmaga teng bo'ladi.

Masalan, ushbu IV tartibli determinantni hisoblaymiz:

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 4 & -5 \\ 0 & 5 & 11 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-3)\cdot 5\cdot 2\cdot(-1) = 30.$$

9-xossa. Diagonal matritsaning determinanti uning diagonal elementlari ko'paytmasiga teng bo'ladi.

Bu xossa isboti bevosita oldingi xossadan kelib chiqadi. Jumladan har qanday birlik matritsaning determinanti birga tengdir.

Navbatdagi xossani ifodalash uchun ikkita yangi tushuncha kiritamiz.

3-TA'RIF. Ixtiyoriy n-tartibli determinantning a_{ij} (i,j=1,2, … , n) elementining ***minori*** deb bu determinantdan shu element joylashgan i-satr va j- ustunni o'chirishdan hosil bo'lgan (n–1)-tartibli determinant qiymatiga aytiladi.

Determinantning a_{ij} elementining minori M_{ij} deb belgilanadi va ularning soni n^2 ta bo'ladi. Masalan,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 2 & -3 & 7 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} \qquad (3)$$

determinantning II satr elementlarining minorlarini yozamiz va hisoblaymiz:

$$M_{21} = \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2.$$

Bunda III tartibli determinantning minorlari II tartibli determinantlar ekanligini yana bir marta ta'kidlab o'tamiz.

4-TA'RIF. Ixtiyoriy n-tartibli determinantning a_{ij} (i,j=1,2, … , n) elementining ***algebraik to'ldiruvchisi*** deb $(-1)^{i+j}M_{ij}$ kabi aniqlanadigan songa aytiladi.

Determinantning a_{ij} (i,j=1,2, … , n) elementining algebraik to'ldiruvchisi A_{ij} kabi belgilanadi va, ta'rifga asosan,

$$A_{ij} = \begin{cases} M_{ij}, & i+j \text{ - juft bo'lsa;} \\ -M_{ij}, & i+j \text{ - toq bo'lsa.} \end{cases}$$

formula bilan hisoblanadi. Masalan, (3) determinantning II satr elementlarining algebraik to'ldiruvchilari quyidagicha bo'ladi:

$$A_{21} = -M_{21} = 1, \quad A_{22} = M_{22} = 1, \quad A_{23} = -M_{23} = 2. \qquad (4)$$

10-xossa (Laplas teoremasi). Determinantning ixtiyoriy bir i-satrida joylashgan a_{ij} (j=1,2, … , n) elementlarini ularning A_{ij} (j=1,2, … , n) algebraik to'ldiruvchilariga ko'paytmalarining yig'indisi shu determinantning qiymatiga teng bo'ladi. bo'lsa

Isbot: Bu xossa III tartibli $|A|$ determinantning birinchi satri uchun quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = |A| \qquad (5)$$

Bu tenglikni isbotlash uchun algebraik to'ldiruvchi ta'rifidan va determinantlarni hisoblashning (1), (2) formulalaridan quyidagicha foydalanamiz:

$$a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} = |A|.$$

Xuddi shunday tarzda determinantning ikkinchi va uchinchi satrlari uchun

$$a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = |A|, \quad a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} = |A| \qquad (6)$$

tengliklar o'rinli bo'lishi isbotlanadi

5-***TA'RIF.*** Yuqoridagi (5) va (6) tengliklar determinantning ***satrlar bo'yicha yoyilmasi*** deb ataladi.

Shunga o'xshash determinantning ***ustunlar bo'yicha yoyilmasini*** ham quyidagicha yozish mumkin:

$$a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} = |A|, \quad a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = |A|, \quad a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} = |A|. \qquad (7)$$

Masalan, yuqorida keltirilgan (3) determinant qiymatini uning II satrining (4) algebraik to'ldiruvchilari yordamida hisoblaymiz:

$$\Delta = 2A_{21} + (-3)A_{22} + 7A_{23} = 2\cdot 1 + (-3)\cdot 1 + 7\cdot 2 = 13.$$

Laplas teoremasidan foydalanib yuqori tartibli determinantlarni hisoblash mumkin. Bunda n-tartibli determinantni hisoblash n ta (n–1) - tartibli determinantni (A_{ij} algebraik to'ldiruvchilarni) hisoblash va uning ixtiyoriy satr yoki ustuni bo'yicha yoyilmasidan foydalanishga keltiriladi. Jumladan, I tartibli determinant qiymati $|A|=|a_{11}|=a_{11}$ ekanligidan foydalanib, (1) va (2) formulalarni keltirib chiqarish mumkin. Determinant qiymatini Laplas teoremasi yordamida hisoblash uchun uning ixtiyoriy satr yoki ustun bo‘yicha yoyilmasidan foydalanish mumkin. Ammo, amaliy nuqtai nazardan, ko‘proq elementlari nolga teng bo‘lgan satr yoki ustunni tanlash (agar shundaylar mavjud bo‘lsa) maqsadga muvofiqdir. Bu holda nolga teng elementlarning algebraik to‘ldiruvchilarini topishga hojat bo‘lmaydi va hisoblashlar hajmi ancha kamayadi.

Misol. Ushbu IV tartibli determinantni hisoblang:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 10 \\ 6 & 7 & 5 & -2 \\ 3 & 0 & 9 & 1 \end{vmatrix}$$

Yechish: Bu determinantni II ustun bo‘yicha yoyilmasidan foydalanib hisoblash qulaydir. Bunga sabab shuki, bu ustunda nol elementlar boshqa satr va ustunlarga qaraganda ko‘proq hamda a_{22}=0, a_{42}=0 elementlarning A_{22}, A_{42} algebraik to‘ldiruvchilarini hisoblash shart emas.

Dastlab A_{12} va A_{32} algebraik to‘ldiruvchilarni hisoblab, A_{12} =–389 va A_{32}=45 ekanligini aniqlaymiz. Endi determinant qiymatini II ustunga Laplas teoremasini tatbiq etib hisoblaymiz:

$$|A| = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} + a_{42}A_{42} = (-3)\cdot(-389) + 0\cdot A_{22} + 7\cdot 45 + 0\cdot A_{42} = 1482.$$

11-xossa. Agar |A| determinantni biror i-satrining algebraik to‘ldiruvchilari A_{ij} (j=1,2, … , n) va b_j (j=1,2, … , n) ixtiyoriy sonlar bo‘lsa, unda

$$b_1A_{i1} + b_2A_{i2} + b_3A_{i3} + \cdots + b_nA_{in} = |B|$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi. Bunda |B| determinant |A| determinantdan faqat i-satri bilan farq qilib, uning i-satri b_j (j=1,2, … , n) sonlardan tashkil topgan bo‘ladi.

Isbot: Bu xossa isbotini III tartibli |A| determinantning , masalan, birinchi satri uchun keltiramiz. Bu holda

$$b_1A_{11}+ b_2A_{12}+ b_3A_{13}= |B|$$

yig‘indining qo‘shiluvchilari |A| determinantning birinchi satr bo‘yicha yoyilmasini ifodalovchi

$$a_1A_{11}+ a_2A_{12}+ a_3A_{13} =|A|$$

yig‘indi qo‘shiluvchilaridan faqat birinchi ko‘paytuvchilari, ya’ni birinchi satr elementlari bilan farq qiladi. Shu sababli |A|, |B| determinantlar bir-biridan faqat birinchi satri bilan farq qiladi va |B| determinantning birinchi satri b_1, b_2 va b_3 sonlardan iborat bo‘ladi.

Masalan, A_{11}, A_{12} va A_{13}

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 0 & 7 & 3 \\ 9 & 12 & -4 \end{vmatrix}$$

determinantni birinchi satri elementlarining algebraik to‘ldiruvchilari bo‘lsa, unda

$$11A_{11} + 12A_{12} + 13A_{13} = |B| = \begin{vmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 0 & 7 & 3 \\ 9 & 12 & -4 \end{vmatrix}.$$

12-xossa. Agar |A| determinantni biror i-satrining a_{ij} (j=1,2, … , n) elementlari boshqa bir k-satr (i≠k) mos elementlarining A_{kj} (j=1,2, … , n) algebraik to‘ldiruvchilariga ko‘paytirilgan bo‘lsa, bu ko‘paytmalar yig‘indisi nolga teng bo‘ladi.

Isbot: **O**ldingi xossada b_j= a_{ij} (j=1,2, … , n) deb olsak, unda

$$b_1A_{k1} + b_2A_{k2} + b_3A_{k3} + \cdots + b_nA_{kn} = a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + a_{i3}A_{k3} + \cdots + a_{in}A_{kn} = |B|$$

Bu yerda |B| determinant berilgan |A| determinantning k-satriga i-satrining a_{ij} elementlarini qo‘yish bilan hosil qilinadi. Shu sababli |B| determinantning i-satri va k-satri bir xil bo‘lib, 3-xossaga asosan uning qiymati nolga teng bo‘ladi, ya’ni

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + a_{i3}A_{k3} + \cdots + a_{in}A_{kn} = 0, \quad i,k = 1,2,\cdots,n; \quad i \neq k. \quad (8)$$

13-xossa. Agar A va B bir xil tartibli kvadrat matritsalar bo‘lsa ularning ko‘paytmasining determinanti har birining determinantlari ko‘paytmasiga teng bo‘ladi, ya’ni |A·B|=|A|·|B| tenglik o‘rinlidir.

Bu xossani isbotsiz keltiramiz.

Ko‘rib o‘tilgan bu xossalar determinantlarni hisoblash va ularning turli tatbiqlarida qo‘llaniladi.

XULOSA

Kvadrat matritsa elementlaridan ma’lum bir usulda hosil qilinadigan sonli ifoda uning determinanti deyiladi. Bu tushuncha matematikaning turli bo‘limlarida ko‘p qo‘llaniladi va natijalarni ixcham ko‘rinishda ifodalashga imkon beradi. II va III tartibli determinantlarning hisoblash formulalari nisbatan sodda, ammo yuqori tartibli determinantlar uchun ular juda murakkab ko‘rinishga ega. Shu sababli bunday determinantlar ularning algebraik to’ldiruvchilari va Laplas teoremasi yordamida quyi tartibli determinantlarga keltirish orqali hisoblanadi. Bundan tashqari bir qator hollarda determinantlarning qiymatlari ularning xossalaridan foydalanib topilishi mumkin. Birlik matritsa va kvadratik nol matritsalarning determinantlari mos ravishda 1 va 0 qiymatga ega.

Tayanch iboralar

Determinant * Determinantning elementi * Determinantning satri
* Determinantning ustuni * Minor * Algebraik to‘ldiruvchi * Laplas teoremasi

Takrorlash uchun savollar

1. Determinant deyilganda nima tushuniladi?
2. II tartibli determinant qanday hisoblanadi?
3. III tartibli determinant uchburchak usulida qanday hisoblanadi?
4. III tartibli determinant Sarrius usulida qanday hisoblanadi?
5. Determinant va matritsa o‘rtasida qanday o‘xshashlik va farqlar bor?
6. Determinantda satr va ustunlar o‘zaro qanday xususiyatga ega?
7. Determinantda ikkita satr yoki ikkita ustun o‘rni almashtirilsa nima bo‘ladi?
8. Qaysi hollarda hisoblamasdan determinantning qiymati nol bo‘lishini aytish mumkin?
9. Determinant elementining minori deb nimaga aytiladi?
10. Determinant elementining algebraik to‘ldiruvchisi qanday aniqlanadi?
11. Determinantlar uchun Laplas teoremasi qanday ifodalanadi?
12. Laplas teoremasining ahamiyati nimadan iborat?
13. Matritsalar ko‘paytmasining determinanti qanday hisoblanishi mumkin?

§3. MINOR VA ALGEBRAIK TO‘LDIRUVCHILAR HAQIDA TUSHUNCHALAR. TESKARI MATRITSALAR. IXTIYORIY TARTIBLI DETERMINANTNI HISOBLASH.

- ***Teskari matritsa .***
- ***Matritsaning rangi.***

3.1. Teskari matritsa. Biz matritsalar ustida qo‘shish, ayirish va ko‘paytirish amallarini ko‘rib o‘tgan edik. Matritsalar son tushunchasini umumlashtirishdan hosil qilinganligi haqida ham aytilgan edi. Sonlar uchun qo‘shish, ayirish va ko‘paytirish amallaridan tashqari bo‘lish amali ham mavjud. Bunda ikkita b va a ($a\neq0$) sonlar bo‘linmasini quyidagi ko‘rinishda ifodalash mumkin:

$$\frac{b}{a}=\frac{1}{a}b=a^{-1}b\,.$$

Bundan ko‘rinadiki, bo‘lish amalini $a\neq0$ songa teskari bo‘lgan a^{-1} son yordamida ko‘paytirish amali orqali ifodalash mumkin. Bunda ixtiyoriy $a\neq0$ va unga teskari a^{-1} sonlar orasida $aa^{-1}=a^{-1}a=1$ munosabat o‘rinli bo‘ladi. Bu tenglik faqat o‘zaro teskari sonlar uchun o‘rinlidir va shu sababli teskari sonni ta’rifi sifatida qabul qilinishi mumkin. Shu sababli bu tenglikdan berilgan A matritsaga teskari matritsa tushunchasini kiritish uchun foydalaniladi.

1-TA’RIF: Berilgan n- tartibli A kvadrat matritsaga ***teskari matritsa*** deb $AB=BA=E$ (E–n-tartibli birlik matritsa) shartni qanoatlantiruvchi n-tartibli B kvadrat matritsaga aytiladi.

Berilgan A matritsaga teskari matritsa A^{-1} kabi belgilanadi va, ta’rifga asosan, ular uchun $AA^{-1}=A^{-1}A=E$ munosabat o‘rinli bo‘ladi.

Ma’lumki, ixtiyoriy $a\neq0$ soni uchun a^{-1} teskari son mavjud va yagonadir. $a=0$ sonining esa teskarisi mavjud emas. Shu sababli matritsalar uchun quyidagi savollar paydo bo‘ladi:

1. Qanday matritsalar uchun ularning teskarisi mavjud?
2. Teskari matritsa yagonami va uni qanday topish mumkin?
3. Qanday matritsalarning teskarisi mavjud emas?

2-TA’RIF: Agar A matritsaning determinanti $|A|=0$ bo‘lsa u ***maxsus matritsa*** , aks holda, ya’ni $|A|\neq0$ bo‘lsa ***maxsusmas matritsa*** deb ataladi.

Masalan,

$$A=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 4\\ 2 & 5 & -1\\ 1 & 11 & 2\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 5 & -1\\ 3 & 6 & 1\end{pmatrix}$$

matritsalardan A maxsus (chunki $|A|=0$), B esa maxsusmas (chunki $|B|=19\neq0$) matritsa bo‘ladi.

1-TEOREMA: Maxsus A matritsa uchun teskari A^{-1} matritsa mavjud emas.

Isbot: Teskarisini faraz qilamiz, ya’ni teskari A^{-1} matritsa mavjud deymiz. Ta’rifga asosan $AA^{-1}=A^{-1}A=E$ va, teorema sharti bo‘yicha, $|A|=0$ tengliklar o‘rinlidir. Bu holda, determinantning oldin ko‘rib o‘tilgan 13-xossasiga asosan,

$$|E|=|A^{-1}A|=|A\,A^{-1}|=|A||A^{-1}|=0\cdot|A^{-1}|=0$$

natijani olamiz. Ammo E birlik matritsaning determinanti $|E|=1$ bo‘ladi. Hosil bo‘lgan bu ziddiyat bizning farazimiz noto‘g‘ri ekanligini ko‘rsatadi va maxsus matritsa uchun uning teskarisi mavjud emasligini ifodalaydi.

Berilgan n- tartibli

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

kvadrat matritsa determinantinig A_{ij} algebraik to‘ldiruvchilaridan tuzilgan ushbu

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n}\\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn}\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn}\end{pmatrix}$$

matritsani kiritamiz.

3-TA’RIF: $\overline{A}$ berilgan A matritsaga ***birkitilgan matritsa*** deb ataladi.

Masalan,

$$A=\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 0 & 5 & -3\\ 4 & 0 & 1\end{pmatrix}\qquad(1)$$

matritsa determinantining algebraik to‘ldiruvchilari

$A_{11}=5$, $A_{12}=-12$, $A_{13}=-20$, $A_{21}=3$, $A_{22}=-2$, $A_{23}=-12$, $A_{31}=4$, $A_{32}=6$, $A_{33}=10$

bo‘lgani uchun unga birkitilgan matritsa quyidagicha bo‘ladi:

$$\bar{A}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ -12 & -2 & 6 \\ -20 & -12 & 10 \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

2-TEOREMA: Agar A maxsusmas matritsa bo‘lsa unga teskari A^{-1} matritsa mavjud va u

$$A^{-1}=\frac{\bar{A}}{|A|}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \qquad (3)$$

formula bilan topiladi.

Isbot: Dastlab

$$A\bar{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

ko‘paytmani topamiz. Determinantlarning 10 va 12-xossalariga asosan

$$a_{i1}A_{1k}+a_{i2}A_{2k}+a_{i3}A_{3k}+\cdots a_{in}A_{nk}=\begin{cases} |A|, & i=k \\ 0, & i\neq k \end{cases}$$

tengliklar o‘rinli bo‘ladi. Bundan, matritsalar ko‘paytmasining ta’rifiga asosan,

$$A\bar{A}=\begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & |A| \end{pmatrix}$$

tenglikni hosil etamiz. Unda, matritsalarni songa ko‘paytirish amalining ta’rifi va xossalariga asosan,

$$A\frac{1}{|A|}\bar{A}=\frac{1}{|A|}A\bar{A}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & |A| \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}=E$$

natijaga kelamiz. Shu tarzda

$$\frac{1}{|A|}\bar{A}A=E$$

tenglik ham o‘rinli bo‘lishini ko‘rsatish mumkin. Bu yerdan, teskari matritsa ta’rifiga asosan, (3) tenglik o‘rinli ekanligiga ishonch hosil qilamiz.

Misol sifatida yuqorida ko‘rilgan (1) matritsa uchun $|A|=26\neq0$ ekanligidan va unga birkitilgan (2) matritsadan foydalanib, A^{-1} teskari matritsani topamiz:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\bar{A}=\frac{1}{26}\begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ -12 & -2 & 6 \\ -20 & -12 & 10 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{5}{26} & \frac{3}{26} & \frac{2}{13} \\ -\frac{6}{13} & -\frac{1}{13} & \frac{3}{13} \\ -\frac{10}{13} & -\frac{6}{13} & \frac{5}{13} \end{pmatrix}.$$

3-TEOREMA: Maxsusmas A matritsa uchun A^{-1} teskari matritsa yagona ravishda aniqlanadi.

Isbot: Teskarisini faraz qilamiz. C va B matritsalar A matritsaga teskari va $C \neq B$ bo‘lsin. Unda, teskari matritsa ta’rifiga asosan,

$$AC=CA=E, \qquad AB=BA=E$$

tengliklar o‘rinli bo‘ladi. Bu tengliklar va birlik matritsa xossasidan foydalanib, quyidagi natijalarni olamiz:

$$C=CE=CAB, \quad B=BE=EB=CAB.$$

Bu ikkala tenglikning o‘ng tomonlarini taqqoslab, $C=B$ natijaga kelamiz. Hosil bo‘lgan bu ziddiyat farazimiz noto‘g‘ri ekanligini ko‘rsatadi va teskari matritsa yagona bo‘ladi.

Shunday qilib, A maxsusmas matritsa uchun A^{-1} teskari matritsa mavjud va u yagonadir. Teskari matritsa tushunchasidan foydalanib bir xil tartibli A va B kvadrat matritsalarning bo‘linmasini $A^{-1}B$ ($|A|\neq 0$) ko‘rinishda kiritish mumkin. Shuningdek A^{-1} teskari matritsani m marta o‘zaro ko‘paytirib, hosil bo‘lgan matritsani A maxsusmas matritsaning $-m$- darajasi deb olishimiz va A^{-m} (m-ixtiyoriy natural son) kabi belgilashimiz mumkin. Bundan A^k daraja (A-maxsusmas matritsa) ixtiyoriy k butun son uchun (§1 ga qarang) aniqlangan bo‘ladi.

Teskari matritsalar quyidagi xossalarga ega:

1-xossa. $E^{-1}=E$.

Isbot: Bu xossa (3) teskari matritsani topish formulasidan bevosita kelib chiqadi.

2-xossa. $(A^{-1})^{-1}=A$.

Isbot: Bu xossa bevosita teskari matritsaning ta’rifidan, ya’ni $AA^{-1}=A^{-1}A=E$ tenglikdan kelib chiqadi.

3-xossa. $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

Isbot: Teskari matritsa ta’rifi va matritsalar ko‘paytmasining assosiativlik xossasiga asosan quyidagi tengliklarni olamiz:

$$(AB)(B^{-1}A^{-1})=A(BB^{-1})A^{-1}=AEA^{-1}=AA^{-1}=E\ ,$$
$$(B^{-1}A^{-1})(AB)=B^{-1}(A^{-1}A)B=B^{-1}EB=B^{-1}B=E.$$

Bu tengliklardan AB va $B^{-1}A^{-1}$ o‘zaro teskari matritsalar ekanligi ko‘rinadi.

4-xossa. $(A^{-1})^{\mathrm{T}}=(A^{\mathrm{T}})^{-1}$.

Isbot: Matritsalarni transponirlash amalining $(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$ va $E^{\mathrm{T}}=E$ xossalaridan foydalanib ushbu tengliklarga ega bo‘lamiz:

$$A^{\mathrm{T}}(A^{-1})^{\mathrm{T}}=(A^{-1}A)^{\mathrm{T}}=E^{\mathrm{T}}=E, \quad (A^{-1})^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}=(AA^{-1})^{\mathrm{T}}=E^{\mathrm{T}}=E.$$

Bu tengliklardan, teskari matritsa ta’rifiga asosan, $(A^{-1})^{\mathrm{T}}=(A^{\mathrm{T}})^{-1}$ ekanligi kelib chiqadi.

5-xossa. $|A^{-1}|=1/|A|=|A|^{-1}$.

Isbot: Matritsalar ko‘paytmasining determinanti uchun $|AB|=|A||B|$ formula va $|E|=1$ tenglik hamda teskari son ta’rifidan foydalanib, ushbu natijaga kelamiz:

$$\left|A^{-1}\right|\cdot|A|=\left|A^{-1}A\right|=|E|=1\Rightarrow\left|A^{-1}\right|=\frac{1}{|A|}=|A|^{-1}.$$

3.1. Matritsaning rangi. Endi kelgusida kerak bo‘ladigan matritsa rangi tushunchasini kiritamiz. Dastlab oldin kvadrat matritsalar uchun aniqlangan minor tushunchasini ixtiyoriy to‘rtburchakli matritsa uchun umumlashtiramiz.

4-TA’RIF: Har qanday $A_{m\times n}$ matritsaning ixtiyoriy ravishda tanlangan k ta ($k\leq\min(m,n)$) satr va ustunlarining kesishmasida joylashgan elementlaridan tuzilgan k-tartibli determinant bu matritsaning ***k-tartibli minori*** deyiladi.

Masalan,

$$A_{4\times 3}=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 1\\ 3 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 5\end{pmatrix}$$

matritsaning har bir elementi uning I tartibli ,

$$\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 3 & 1\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}-2 & 3\\ 0 & 1\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 5\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}0 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}1 & 4\\ 2 & 5\end{vmatrix}$$

kabi determinantlar II tartibli,

$$\begin{vmatrix}-2 & 3 & 1\\ 3 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}-2 & 3 & 1\\ 3 & 1 & 4\\ 3 & 2 & 5\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}3 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 5\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}-2 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 5\end{vmatrix}$$

determinantlar esa berilgan matritsaning III tartibli minorlariga misol bo‘ladi.

5-TA’RIF: Berilgan A ***matritsaning rangi*** deb uning noldan farqli minorining eng katta tartibiga aytiladi.

Matritsaning rangi r(A) kabi belgilanadi va uni quyidagicha topish mumkin. Agar matritsaning barcha elementlari nolga teng, ya’ni u nol matritsa bo‘lsa, uning rangi r(A)=0 bo‘ladi. Matritsaning noldan farqli elementi mavjud bo‘lsa, uning rangi r(A)≥1 bo‘ladi. Bu noldan farqli elementni o‘z ichiga olgan barcha II tartibli minorlarni hisoblaymiz. Agar barcha II tartibli minorlar nolga teng bo‘lsa, unda r(A)=1 bo‘ladi. Aks holda r(A) ≥2 bo‘ladi va noldan farqli biror II tartibli minorni o‘z ichiga olgan barcha III tartibli minorlarni qaraymiz. Ularning hammasi nolga teng bo‘lsa r(A)=2, aks holda r(A) ≥2 bo‘ladi. Bu jarayonni shunday tarzda davom ettiramiz. Natijada, biror qadamda noldan farqli k-tartibli minorni o‘z ichiga oluvchi barcha (k+1)-tartibli minorlar nolga teng bo‘lgan holga kelamiz va bundan matritsaning rangi r(A)=k ekanligini topamiz.

Masalan,

$$A_{4\times3}=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 1\\ 3 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 5\end{pmatrix}$$

matritsaning rangini aniqlaymiz. Bu matritsaning noldan farqli elementi mavjud va shu sababli r(A) ≥1. Endi noldan farqli ixtiyoriy bir, masalan a_{11}= –2 elementni, o‘z ichiga olgan va noldan farqli bo‘lgan II tartibli minor mavjud yoki yo‘qligini aniqlaymiz:

$$\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 3 & 1\end{vmatrix}=-2-9=-11\neq 0\,.$$

Demak, r(A) ≥2 bo‘ladi. Bu noldan farqli II tartibli minorni o‘z ichiga olgan ikkita III tartibli minorlarni qaraymiz:

$$\begin{vmatrix}-2 & 3 & 1\\ 3 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=0\,,\quad \begin{vmatrix}-2 & 3 & 1\\ 3 & 1 & 4\\ 3 & 2 & 5\end{vmatrix}=0\,.$$

Bu yerdan ko‘rilayotgan matritsaning rangi r(A)=2 ekanligi kelib chiqadi.

Shuni ta’kidlab o‘tish lozimki, n-tartibli maxsusmas A matritsaning rangi r(A)=n bo‘ladi.

6-TA’RIF: Agar A matritsaning rangi r(A)=k bo‘lsa, uning noldan farqli ixtiyoriy bir k-tartibli minori ***bazis minor*** deb ataladi.

Masalan, yuqoridagi rangi r(A)=2 bo‘lgan $A_{4\times3}$ matritsa uchun bazis minor sifatida ushbu II tartibli minorni olish mumkin:

$$M_2=\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 3 & 1\end{vmatrix}.$$

XULOSA

Matritsalar algebrasida teskari matritsa tushunchasi teskari songa o‘xshash ko‘rinishda aniqlanadi. Bunda faqat determinanti noldan farqli bo‘lgan matritsalar uchun teskari matritsa mavjud bo‘ladi va yagona ravishda aniqlanadi. Teskari matritsani topish algoritmida algebraik to‘ldiruvchilarni hisoblash va transponirlash amalidan foydalaniladi. Matritsalarning tatbiqlarida uning rangi va bazis minorlari tushunchalari muhim ahamiyatga egadir.

Tayanch iboralar

Teskari matritsa * Maxsus matritsa * Maxsusmas matritsa * Birkitilgan matritsa
* Matritsaning k-tartibli minori * Matritsa rangi * Bazis minor.

Takrorlash uchun savollar

1. Teskari matritsa qanday ta’riflanadi?
2. Qachon matritsa maxsus deb ataladi?
3. Qanday matritsa maxsusmas deyiladi?
4. Qaysi shartda teskari matritsa mavjud bo‘ladi?
5. Teskari matritsa yagonami ?
6. Birkitilgan matritsa deb nimaga aytiladi?
7. Teskari matritsa qanday topiladi?
8. Teskari matritsa qanday xossalarga ega?
9. Matritsaning *k*-tartibli minori qanday ta’riflanadi?
10. Matritsaning rangi deb nimaga aytiladi?
11. Matritsaning rangi qanday topiladi?
12. Bazis minor nima?

4-5 § . CHIZIQLI TENGLAMALAR SISTEMASI VA UNI ECHISH USULLARI. KRAMER , GAUSS,METODLARI.CHIZIQLI TENGLAMALAR SISTEMASI VA UNI ECHISHNING MATRITSA USULI HAMDA CHIZIQLI TENGLAMALAR SISTEMASINI YECHISHDA DASTURLAR MAJMUASIDAN FOYDALANISH

- ***Chiziqli tenglamalar sistemasi va ularning yechimi***.
- ***Matritsalar usuli.***
- ***Kramer (determinantlar) usuli.***
- ***Gauss (noma’lumlarni yo‘qotish) usuli.***
- ***n noma’lumli m ta chiziqli tenglamalar sistemasi.***
- ***Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi.***
- ***Chiziqli tenglamalar sistemasining iqtisodiy tatbiqlari.***
- ***Leont’evning tarmoqlararo balans modeli.***

4.1. Chiziqli tenglamalar sistemasi va ularning yechimi. Ko‘pgina amaliy, jumladan iqtisodiy, masalalar chiziqli tenglamalar sistemasi tushunchasiga olib keladi.

1-TA’RIF: *n* noma’lumli *m* ta ***chiziqli tenglamalar sistemasi*** deb quyidagi ko‘rinishdagi sistemaga aytiladi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + a_{k3}x_3 + \cdots + a_{kn}x_n = b_k \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

Bu yerda a_{ij} va b_i (i=1,2, …, m; j=1,2, …, n) –berilgan va ixtiyoriy o‘zgarmas sonlar bo‘lib, a_{ij} sonlari (1) sistemaning ***koeffitsiyentlari,*** b_i esa ***ozod hadlari*** deyiladi. Bu sistemada x_j (j=1, 2, … , n) noma’lumlar bo‘lib, ularning qiymatlarini topish talab etiladi.

Yig‘indi belgisi yordamida (1) sistemani qisqacha quyidagicha yozish mumkin:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i\ , \quad i = 1, 2, \cdots, m\,. \qquad (2)$$

Endi (1) yoki (2) chiziqli tenglamalar sistemasining a_{ij} koeffitsiyentlaridan tuzilgan to‘rtburchakli *A* matritsani , x_j noma’lumlar va b_i ozod hadlardan hosil qilingan *X* va *B* ustun matritsalarni kiritamiz:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}^T, \quad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \qquad (3)$$

Unda, matritsalarni ko‘paytirish amalidan foydalanib, (1) sistemani ixcham va qulay bo‘lgan quyidagi matritsaviy ko‘rinishda yozish mumkin:

$$AX=B\,. \qquad (4)$$

2-TA'RIF: (1) yoki (2) chiziqli tenglamalar sistemaning ***yechimi*** deb shunday $x_1=\alpha_1$, $x_2=\alpha_2$, …, $x_n=\alpha_n$ sonlarga aytiladiki, ular tenglamalar sistemasiga qo‘yilganda har bir tenglama qanoatlantiriladi, ya'ni to‘gri tenglikka aylanadi.

Sistemaning yechimlari

$$X=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_k & \cdots & \alpha_n\end{pmatrix}^T$$

ustun matritsa ko‘rinishda yozilsa, u (4) matritsaviy tenglamani to‘gri tenglikka aylantiradi. Bunda n-ta sondan tuzilgan X ustun matritsa sistemaning bitta yechimi bo‘lib hisoblanadi.

Masalan,

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2-x_3=-6 \\ 2x_1-5x_2+4x_3=32 \end{cases} \qquad (5)$$

n=3 noma'lumli m=2 ta tenglamalar sistemasi uchun $x_1=1$, $x_2=-2$ va $x_3=5$ yoki

$$X=\begin{pmatrix}1 & -2 & 5\end{pmatrix}^T$$

ustun matritsani tashkil etgan sonlar yechim bo‘ladi. Haqiqatan ham bu sonlarni berilgan (5) sistema tenglamalariga qo‘ysak,

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2-x_3=3\cdot1+2\cdot(-2)-5\equiv-6 \\ 2x_1-5x_2+4x_3=2\cdot1-5\cdot(-2)+4\cdot5\equiv32 \end{cases}$$

to‘gri tengliklarga ega bo‘lamiz.

Sistemaning yechimini mavjudligini tekshirish va, yechim mavjud bo‘lgan taqdirda, uni topish ***sistemani yechish*** deb ataladi.Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishda uch hol bo‘lishi mumkin.

1-hol. Sistema yechimga ega va bu yechim yagona. Masalan,

$$\begin{cases} 3x_1+4x_2=-14 \\ 2x_1-3x_2=19 \end{cases}$$

sistema uchun $x_1=2$ va $x_2=-5$ yagona yechim bo‘ladi.

2-hol. Sistema yechimga ega va bu yechim bittadan ortiq. Masalan, yuqoridagi (5) sistema uchun ko‘rsatilgan yechimdan tashqari $x_1=-5$, $x_2=26$ va $x_3=43$ ham yechim bo‘lishini bevosita tekshirish mumkin.

3-hol. Sistema yechimga ega emas. Masalan,

$$\begin{cases} x_1+x_2=1 \\ x_1+x_2=0 \end{cases}$$

sistema yechimga ega emas, chunki yig‘indisi bir paytning o‘zida ham 1, ham 0 bo‘ladigan sonlar mavjud emas.

3-TA’RIF: Agar chiziqli tenglamalar sistemasi hech bo‘lmaganda bitta yechimga ega bo‘lsa, u holda bu sistema ***birgalikda*** deyiladi; agar yechimga ega bo‘lmasa sistema ***birgalikda emas*** deyiladi. Birgalikdagi tenglamalar sistemasi yagona yechimga ega bo‘lsa, u ***aniq*** deyiladi; bittadan ortiq yechimga ega bo‘lsa, u ***aniqmas*** tenglamalar sistemasi deyiladi.

Berilgan (1) tenglamalar sistemasini birgalikda yoki birgalikda emasligini aniqlash uchun uning koeffitsiyentlaridan tuzilgan (3) $m\times n$ tartibli A matritsaga B ozod hadlar ustunini birlashtirishdan hosil bo‘lgan $m\times(n+1)$ tartibli

$$A^b=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \qquad (6)$$

matritsani qaraymiz .

4-TA’RIF: A^b matritsa A matritsaning ***kengaytirilgani*** deb ataladi.

KRONEKER-KAPELLI TEOREMASI: (1) chiziqli tenglamalar sistemasi birgalikda bo‘lishi uchun uning matritsasi A va kengaytirilgan matritsa A^b ranglari o‘zaro teng, ya’ni r(A)=r(A^b)=r shart bajarilishi zarur va yetarlidir.

Bu teoremani isbotsiz qabul etamiz.

Birgalikda bo‘lgan chiziqli tenglamalar sistemasi uchun quyidagi tasdiqlar o‘rinli bo‘lishini ko‘rsatish mumkin:

1. Agar birgalikdagi (1) sistema matritsasining rangi r(A) va unga kiruvchi noma’lumlar soni n o‘zaro teng, ya’ni r(A)=n bo‘lsa, unda bu sistema yagona yechimga ega, ya’ni aniq bo‘ladi.
2. Agar birgalikdagi (1) sistema matritsasining rangi r(A)<n bo‘lsa, bu sistema cheksiz ko‘p yechimga ega , ya’ni aniqmas bo‘ladi.

Kroniker-Kapelli teoremasi va yuqorida keltirilgan tasdiqlar (1) sistema yechimini mavjud yoki mavjud emasligi, ularning soni haqida xulosa chiqarishga imkon beradi, ammo sistemaning yechimini topish yo‘lini ko‘rsatmaydi. Shu sababli endi chiziqli tenglamalar sistemasini yechish masalasiga o‘tamiz.

Dastlab (1) sistemada $m=n$, ya’ni noma’lumlar va tenglamalar soni o‘zaro teng hamda r(A)=n bo‘lgan holni ko‘ramiz. Bu shartlarda ko‘rilayotgan sistema yagona yechimga ega bo‘lib, uni yechishning turli usullari mavjud.

4.2. Matritsalar usuli. Bu usulda sistemaning matritsaviy ko‘rinishda yozilgan (4) ifodasidan foydalaniladi. Bunda r(A)=n shartdan sistemaning n – tartibli A kvadrat matritsasi maxsusmas ekanligi kelib chiqadi, chunki matritsa rangi ta’rifiga asosan $\Delta=|A|\neq 0$ bo‘ladi. Bu holda A matritsaga teskari matritsa A^{-1} mavjud va (4) matritsaviy tenglamaning ikkala tomonini unga chap tomondan ko‘paytirish mumkin. Natijada, teskari matritsa ta’rifi va birlik matritsa xossasidan foydalanib, ushbu formulani hosil etamiz:

$$AX=B\Rightarrow A^{-1}AX=A^{-1}B\Rightarrow EX=A^{-1}B\Rightarrow X=A^{-1}B. \qquad (7)$$

(4) matritsaviy ko‘rinishdagi n noma’lumli chiziqli n ta tenglamalar sistemasi yechimini ifodalovchi (7) formula bir noma’lumli $ax=b$ ($a\neq 0$) chiziqli tenglamaning yechimini determinant $x=b/a=a^{-1}b$ formulaga o‘xshash ekanligini ta’kidlab o‘tamiz.

Misol: Ushbu tenglamalar sistemasini matritsa usulida yeching:

$$\begin{cases} 2x_1-3x_2+4x_3=20 \\ 3x_1+4x_2-2x_3=-11 \\ 4x_1+2x_2+3x_3=9 \end{cases}$$

Yechish: Dastlab sistemaning A matritsasini yozib, uning determinantini hisoblaymiz:

$$A=\begin{pmatrix}2 & -3 & 4\\ 3 & 4 & -2\\ 4 & 2 & 3\end{pmatrix},\quad \Delta=|A|=\begin{vmatrix}2 & -3 & 4\\ 3 & 4 & -2\\ 4 & 2 & 3\end{vmatrix}=43\neq 0.$$

Demak A matritsa maxsusmas, unga teskari matritsa mavjud va uni §3 dagi (3) formulaga asosan topamiz:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}=\frac{1}{43}\begin{pmatrix}16 & 17 & -10\\ -17 & -10 & 16\\ 10 & -16 & 17\end{pmatrix}.$$

Endi (7) formula bo‘yicha noma’lumlardan tuzilgan X ustun matritsani aniqlaymiz:

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=A^{-1}B=\frac{1}{43}\begin{pmatrix}16 & 17 & -10\\ -17 & -10 & 16\\ 10 & -16 & 17\end{pmatrix}\begin{pmatrix}20\\ -11\\ 9\end{pmatrix}=\frac{1}{43}\begin{pmatrix}43\\ -86\\ 129\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 3\end{pmatrix}.$$

Demak, sistemaning yagona yechimi $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 3$ bo‘ladi.

Shunday qilib matritsalar usuli har qanday n noma’lumli n ta tenglamali aniq sistema yechimini oddiy va ixcham ko‘rinishdagi (7) formula bilan ifodalash imkonini beradi. Bu formula nazariy tadqiqotlar uchun qulaydir, ammo n oshib borishi bilan uning amaliy tatbig‘i murakkablashib boradi. Bunga sabab shuki, bu holda A^{-1} teskari matritsani topish uchun yuqori tartibli determinantlarni hisoblashga to‘g‘ri keladi.

4.3. Kramer (determinantlar) usuli. Matritsaviy ko‘rinishda (7) formula bilan ifodalanuvchi (1) sistema ($m=n$) yechimini teskari matritsa formulasidan foydalanib quyidagicha yozamiz:

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_k\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=A^{-1}B=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{i1} & \cdots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{i2} & \cdots & A_{n2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ A_{1k} & A_{2k} & \cdots & A_{ik} & \cdots & A_{nk}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{in} & \cdots & A_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_k\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}b_1A_{11}+b_2A_{21}+\cdots+b_nA_{n1}\\ b_1A_{12}+b_2A_{22}+\cdots+b_nA_{n2}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ b_1A_{1k}+b_2A_{2k}+\cdots+b_nA_{nk}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ b_1A_{1n}+b_2A_{2n}+\cdots+b_nA_{nn}\end{pmatrix}.$$

Bu yerdan sistemaning x_k (k=1, 2, …, n) yechimi uchun ushbu formulalar kelib chiqadi:

$$x_k=\frac{1}{\Delta}(b_1A_{1k}+b_2A_{2k}+\cdots+b_nA_{nk})=\frac{1}{\Delta}\Delta_k=\frac{\Delta_k}{\Delta},\ k=1,2,\cdots,n. \quad (8)$$

Bunda determinantning 11-xossasidan foydalanib, k=1, 2, …, n, uchun ushbu

$$b_1A_{1k}+b_2A_{2k}+\cdots+b_nA_{nk}=\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1k-1} & b_1 & a_{1k+1} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & \cdots & a_{2k-1} & b_2 & a_{2k+1} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{i1} & \cdots & a_{ik-1} & b_i & a_{ik+1} & \cdots & a_{in}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nk-1} & b_n & a_{nk+1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}\equiv\Delta_k$$

tengliklar o‘rinli bo‘lishidan foydalandik. (8) formulalarda (1) sistemaning a_{ij} koeffitsiyentlaridan tuzilgan

$$\Delta=|A|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{vmatrix}$$

determinant sistemaning ***asosiy determinanti,*** uning k-ustunini ozod hadlar ustuni B bilan almashtirishdan hosil bo‘lgan Δ_k ($k=1, 2, \ldots, n$) determinantlar esa ***yordamchi determinantlar*** deyiladi.

5-TA'RIF: (1) chiziqli tenglamalar sistemasining yechimini asosiy va yordamchi determinantlar orqali ifodalovchi (8) tengliklar ***Kramer formulalari*** deb ataladi.

Kramer usulining afzalligi shundan iboratki, u orqali sistemaning ma’lum

bir noma’lumlarini ham (masalan, faqat x_1 va x_2 noma’lumlarni) topish mumkin. Ammo bu usul ham n katta bo‘lganda yuqori tartibli determinantlarni hisoblashni taqozo etadi va shu sababli uni amalda qo‘llash katta qiyinchiliklar bilan bog‘liq.

Kramer formulalarini n=2 hol uchun yozamiz. Bunda (1) chiziqli tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases},$$

asosiy va yordamchi determinantlar

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

va Kramer formulalari

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Shunga o‘xshash n=3 bo‘lganda sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases},$$

asosiy va yordamchi determinantlar

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

va Kramer formulalari

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Misol: Ushbu uch noma’lumli chiziqli tenglamalar sistemasini Kramer usulida yeching:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Yechish: Asosiy va yordamchi determinantlarni hosil etamiz va hisoblaymiz:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&3&1\\2&1&-1\end{vmatrix}=18, \qquad \Delta_1=\begin{vmatrix}1&2&3\\0&3&1\\0&1&-2\end{vmatrix}=-5, \qquad \Delta_2=\begin{vmatrix}1&1&3\\2&0&1\\2&0&-2\end{vmatrix}=-1,$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}1&2&1\\2&3&0\\2&1&0\end{vmatrix}=7 \; .$$

Kramer formulalariga asosan sistema yechimini topamiz:

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=-\frac{5}{18}\;,\quad x_{21}=\frac{\Delta_2}{\Delta}=-\frac{1}{18}\;,\quad x_3=\frac{\Delta_{31}}{\Delta}=\frac{7}{18}\;.$$

Shuni yana bir marta ta’kidlab o‘tamizki, (1) sistema $n=m$ holda yagona yechimga ega, ya’ni birgalikda va aniq bo‘lishi uchun uning asosiy determinanti $\Delta\neq0$ bo‘lishi kerak va bunda yechim matritsalar usulida (7), Kramer usulida esa (8) formulalar bilan topiladi.

Ko‘rsatish mumkinki, agar $n=m$ holda (1) sistemaning asosiy determinanti $\Delta=0$ bo‘lsa, unda quyidagi ikki hol bo‘ladi:

1) Barcha yordamchi determinantlar $\Delta_k=0$ (k=1, 2, …, n) bo‘lsa, unda (1) sistema cheksiz ko‘p yechimga ega, ya'ni birgalikda va aniqmas bo‘ladi.

2) Agar yordamchi Δ_k (k=1, 2, …, n) determinantlardan kamida bittasi noldan farqli bo‘lsa , unda (1) sistema yechimga ega emas, ya’ni birgalikda bo‘lmaydi.

Masalan,

$$\begin{cases}3x_1-5x_2=4\\6x_1-10x_2=8\end{cases},\quad \begin{cases}3x_1-5x_2=4\\6x_1-10x_2=12\end{cases}$$

sistemalarning birinchisi uchun $\Delta=\Delta_1=\Delta_2=0$ va u $x_1=c$, $x_2=(3c-4)/5$ ko‘rinishdagi cheksiz ko‘p yechimga ega. Ikkinchi sistema uchun esa $\Delta=0$, ammo $\Delta_1=20\neq0$ bo‘lgani uchun u yechimga ega emas. Haqiqatan ham sistemaning II tenglamasidan $3x_1-5x_2=6$ ekanligi kelib chiqadi va u sistemaning I tenglamasiga ziddir.

4.4. Gauss (noma’lumlarni yo‘qotish) usuli. Chiziqli tenglamalar sistemasini matritsalar yoki Kramer usulida yechishda bevosita berilgan (1) sistemaning o‘zi bilan ish ko‘riladi. Endi qaralayotgan Gauss usulida esa berilgan (1) sistema boshqa bir sistemaga keltiriladi shu sababli bizga quyidagi tushuncha kerak bo‘ladi.

6-TA’RIF: Agar ikkita chiziqli tenglamalar sistemalarining yechimlar to‘plami o‘zaro teng bo‘lsa, ular ***ekvivalent (teng kuchli) sistemalar*** deyiladi.

Masalan,

$$\begin{cases}4x_1-3x_2=-23\\x_1+2x_2=8\end{cases},\quad \begin{cases}2x_1+x_2=1\\x_1+x_2=3\end{cases}$$

sistemalar ekvivalent , chunki ular bir xil $x_1=-2$, $x_2=5$ yechimga ega.

1-TEOREMA: Agar (1) sistemaning ikkita tenglamalari o‘rni o‘zaro almashtirilsa yoki ulardan biri ixtiyoriy λ songa ko‘paytirilib boshqa bir tenglamasiga qo‘shilsa, natijada berilgan sistemaga ekvivalent sistema hosil bo‘ladi.

Masalan,

$$\begin{cases}2x_1+3x_2-x_3=1\\4x_1-5x_2+2x_3=-3\\5x_1+x_2-3x_3=0\end{cases}$$

sistemaning ikkinchi va uchinchi tenglamalarini o‘rnini almashtirish va hosil bo‘lgan sistemaning birinchi tenglamasini λ= –2 songa ko‘paytirib, uchinchi tenglamasiga qo‘shish natijasida hosil bo‘lgan quyidagi sistema berilgan sistemaga ekvivalent bo‘ladi:

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3=1 \\ 5x_1+x_2-3x_3=0 \\ -11x_2+4x_3=-5 \end{cases}$$

Haqiqatan ham bu sistemalarni Kramer yoki matritsalar usulida yechib, ularning ikkalasini ham bir xil

$$x_1=-\frac{11}{63},\quad x_2=\frac{25}{63},\quad x_3=-\frac{10}{63}$$

yechimga ega ekanligiga ishonch hosil qilish mumkin.

Endi birgalikda va aniq bo‘lgan quyidagi n noma’lumli n ta chiziqli tenlamalar sistemasini Gauss usulida yechishga o‘tamiz:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\cdots a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+\cdots a_{2n}x_n=b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{k1}x_1+a_{k2}x_2+a_{k3}x_3+\cdots a_{kn}x_n=b_k \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+a_{n3}x_3+\cdots a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \qquad (9)$$

1- qadam. (9) sistemada $a_{11}\neq 0$ deb olish mumkin, chunki bu shart bajarilmagan bo‘lsa , (9) sistemadagi tenglamalar o‘rnini almashtirish orqali unga erishish mumkin. Sistemaning 1-tenglamasini ikkala tomonini $-a_{k1}/\,a_{11}$ songa ko‘paytirib, uning k-tenglamasiga (k=2, 3, …, n) qo‘shamiz. Natijada hosil bo‘ladigan ekvivalent sistemaning k-tenglamasida noma’lum x_1 qatnashmaydi va u quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\cdots a_{1n}x_n=b_1 \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2+a_{23}^{(1)}x_3+\cdots a_{2n}^{(1)}x_n=b_2^{(1)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad a_{k2}^{(1)}x_2+a_{k3}^{(1)}x_3+\cdots a_{kn}^{(1)}x_n=b_k^{(1)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad a_{n2}^{(1)}x_2+a_{n3}^{(1)}x_3+\cdots a_{nn}^{(1)}x_n=b_n^{(1)} \end{cases} \qquad (9^{(1)})$$

2- qadam. Hosil bo‘lgan ($9^{(1)}$) sistemada yuqoridagi singari yana $a_{22}^{(1)}\neq 0$ deb olish mumkin. Bu sistemaning 2-tenglamasini ikkala tomonini $-a_{k2}^{(1)}/a_{22}^{(1)}$ songa ko‘paytirib, uning k-tenglamasiga (k=3,4, …, n) qo‘shamiz. Natijada hosil bo‘ladigan ekvivalent sistemaning k-tenglamasida noma’lum x_2 qatnashmaydi va u quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots a_{1n}x_n = b_1 \\
\qquad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \cdots a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\
\qquad\qquad a_{33}^{(2)}x_3 + \cdots a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(2)} \\
\qquad\qquad a_{43}^{(2)}x_3 + \cdots a_{4n}^{(2)}x_n = b_4^{(2)} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\qquad\qquad a_{n3}^{(2)}x_3 + \cdots a_{nn}^{(2)}x_n = b_n^{(2)}
\end{cases}
\qquad (9^{(2)})
$$

***n*-qadam.** Yuqoridagi jarayonni ketma-ket n–1 marta takrorlab, quyidagi ko‘rinishdagi ekvivalent sistemaga kelamiz:

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots a_{1n}x_n = b_1 \\
\qquad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \cdots a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\
\qquad\qquad a_{33}^{(2)}x_3 + \cdots a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(2)} \\
\qquad\qquad\quad a_{44}^{(3)}x_4 + \cdots a_{4n}^{(3)}x_n = b_4^{(3)} \\
\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad a_{nn}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)}
\end{cases}
\qquad (9^{(n-1)})
$$

Bu ***Gauss usulining to‘g‘ri yo‘li*** , uning natijasida hosil bo‘lgan ($9^{(n-1)}$) sistema ***uchburchakli*** deyiladi.

Endi ($9^{(n-1)}$) sistemaning oxirgi tenglamasidan x_n noma’lumning qiymati topamiz. So‘ngra x_n qiymati ($9^{(n-1)}$) yoki ($9^{(n-2)}$) sistemaning oxirgidan oldingi tenglamasiga qo‘yib, undan x_{n-1} noma’lumning qiymati aniqlaymiz. Shunday tarzda davom etib, birin-ketin x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, …, x_2, x_1 noma’lumlar qiymatlarini topamiz. Bu jarayon ***Gauss usulining teskari yo‘li*** deyiladi.

Gauss usulining matritsalar va Kramer usullaridan afzalliklari quyidagilardan iborat:

- Bu usul yuqori tartibli determinantlarni hisoblashni talab etmaydi va faqat arifmetik amallar orqali bajariladi;
- Bu usulni deyarli yuqorida ko‘rsatilgan ko‘rinishda amalga oshirib, ixtiyoriy chiziqli tenglamalar sistemasini, jumladan noaniq sistemalarni ham yechish mumkin;
- Bu usul sodda hisoblash algoritmiga ega bo‘lib, uni kompyuterda amalga oshirish oson.

Misol: Ushbu sistemani Gauss usulida yeching:

$$
\begin{cases}
2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 20 \\
3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -11 \\
4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9
\end{cases}
$$

Yechish: Bu sistemadan noma’lumlarni birin-ketin yo‘qotamiz.

1-qadam. Sistemaning ikkinchi va uchinchi tenglamalardan x_1 noma’lumni

yo‘qotamiz. Kasr sonlarga kelmaslik va bu orqali hisoblashlarni soddalashtirish maqsadida buni quyidagicha amalga oshiramiz. Dastlab 1-tenglamani ikkala tomonini –3 soniga, 2-tenglamani esa 2 soniga ko‘paytirib, ularni o‘zaro qo‘shamiz. So‘ngra 1-tenglamani ikkala tomonini –2 soniga ko‘paytirib, hosil bo‘lgan tenglamani 3-tenglamaga qo‘shamiz. Natijada quyidagi ekvivalent sistemaga kelamiz:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 20 \\ \quad 17x_2 - 16x_3 = -82 \\ \quad 8x_2 - 5x_3 = -31 \end{cases}.$$

2-qadam. Oldingi qadamda hosil qilingan sistemaning 2-tenglamasini –8 soniga, 3-tenglamasini 17 soniga ko‘paytirib o‘zaro qo‘shamiz:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 20 \\ \quad 17x_2 - 16x_3 = -82 \\ \qquad\quad 43x_3 = 129 \end{cases}$$

Dastlab bu uchburchakli sistemaning 3- tenglamasidan x_3=3 ekanligini topamiz.

So‘ngra bu natijani sistemaning 2- tenglamasiga qo‘yib, undan $x_2 = -2$ ekanligini aniqlaymiz. Yakuniy qadamda $x_2 = -2$ va $x_3 = 3$ natijalarni sistemaning 1- tenglamasiga qo‘yib, undan x_1 =1 ekanligini topamiz. Demak berilgan sistemaning yagona yechimi x_1 =1, $x_2 = -2$ va x_3 =3 ekan.

4.5. n noma’lumli m ta chiziqli tenglamalar sistemasi. Endi (1) sistemani $m\neq n$ holda yechish masalasi ustida to‘xtalib o‘tamiz. Bunda doimo $m\leq n$, ya’ni tenglamalar soni noma’lumlar sonidan katta emas deb hisoblashimiz mumkin. Agar $m>n$ bo‘lsa, unda noma’lumlarni yo‘qotish usulidan quyidagicha foydalanib, $m\leq n$ holga kelamiz. 1-qadamda sistemaning ikkinchi va undan keyingi barcha tenglamalaridan x_1 noma’lumni yo‘qotib, ularda faqat x_2, x_3, …, x_n noma’lumlar qatnashishiga erishamiz. 2-qadamda sistemaning uchinchi va undan keyingi barcha tenglamalaridan x_2 noma’lumni yo‘qotib, ularda faqat x_3, x_4, …, x_n noma’lumlar qatnashishiga erishamiz. Bu jarayonni davom ettirib, (n–1)-qadamda n-tenglama va undan keyingi tenglamalarda faqat bitta x_n noma’lum qolishiga erishamiz. Navbatdagi qadamda n- tenglamadan foydalanib, (n+1)-tenglama va undan keyingi barcha tenglamalardan oxirgi x_n noma’lumni yo‘qotamiz. Natijada bu tenglamalar o‘rnida $0=b_k$ ($k=n+1, n+2, \ldots, m$) ko‘rinishidagi ifodalar paydo bo‘ladi. Agar (1) sistema birgalikda, ya’ni yechimga ega bo‘lsa, unda hamma b_k sonlar nollardan iborat bo‘ladi va aksincha. Agar b_k sonlardan kamida bittasi noldan farqli bo‘lsa, unda (1) sistema birgalikda emas, ya’ni yechimga ega bo‘lmaydi. Ikkala holda ham sistemada qolgan tenglamalar soni n ga teng yoki undan kichik bo‘ladi, chunki qolgan tenglamalar orasida ham $0=b_k$ ko‘rinishdagi ifodalar bo‘lishi mumkin.

Misol sifatida m=4, n=3 bo‘lgan ushbu sistemani qaraymiz:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 5 \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ 10x_1 - 3x_2 \quad = 11 \\ 7x_1 - x_2 - x_3 = 6 \end{cases}.$$

Bu sistemaning 1-tenglamasidan foydalanib keyingi tenglamalaridan x_1 noma’lumni yo‘qotamiz:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 5 \\ 11x_2 - 10x_3 = -17 \\ 11x_2 - 10x_3 = -17 \\ 11x_2 - 10x_3 = -17 \end{cases}.$$

Hosil bo‘lgan sistemaning 2-tenglamasidan foydalanib keyingi tenglamalaridan x_2 noma’lumni yo‘qotamiz:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 5 \\ 11x_2 - 10x_3 = -17 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}.$$

Demak berilgan sistema m=2, n=3 ($m<n$) bo‘lgan ushbu sistemaga ekvivalent ekan:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 5 \\ 11x_2 - 10x_3 = -17 \end{cases}.$$

Shunday qilib (1) sistemada $m≤n$ bo‘lsin. Bu sistema yechimga ega, ya’ni (3) va (6) matritsalarning ranglari teng va r(A)=r(A^b)=r bo‘lsin. Bunda r≤m bo‘ladi. Agar r=m=n bo‘lsa, unda sistemaning asosiy determinanti Δ=|A|≠0 bo‘ladi, ya’ni oldin ko‘rib o‘tilgan holga kelamiz va sistema yechimini matritsalar, Kramer yoki Gauss usullaridan birining yordamida topamiz.

Endi (1) sistema matritsasining rangi r(A)=r<n bo‘lgan holni ko‘ramiz (har doim r≤m bo‘lishini eslatib o‘tamiz). Bunga oldin qaralmagan m=n, ammo Δ=|A|=0 bo‘lgan hol ham kiradi. Bu holda matritsaning biror r-tartibli M bazis minorini (§3, 6-ta’rif) qaraymiz. (1) sistemaning koeffitsiyentlari shu bazis minorga kirgan r ta tenglamalarini qoldirib, qolgan m–r ta tenglamasini o‘chirib tashlaymiz. Bunga sabab shuki, bu m–r ta tenglamani qoldirilgan r ta tenglamalardan hosil qilish mumkin, ya’ni ular noma’lumlar to‘g‘risida yangi ma’lumot bermaydi. Qoldirilgan r ta tenglamalarni (1) sistemaning dastlabki r ta tenglamasi deb qarash mumkin (aks holda sistemadagi tenglamalar o‘rnini almashtirish orqali bunga erishib bo‘ladi). Bu holda (1) sistemaga ekvivalent bo‘lgan ushbu sistemaga kelamiz:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1r}x_r + a_{1r+1}x_{r+1} + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2r}x_r + a_{2r+1}x_{r+1} + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kr}x_r + a_{kr+1}x_{r+1} + \cdots + a_{kn}x_n = b_k \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rr}x_r + a_{rr+1}x_{r+1} + \cdots + a_{rn}x_n = b_r \end{cases}$$

Bu sistemaning tenglamalaridagi koeffitsiyentlari bazis minorga kirgan noma’lumli (ularni x_1, x_2, …, x_r deb olishimiz mumkin) qo‘shiluvchilarni o‘z joyida qoldirib, boshqa x_{r+1}, x_{r+2}, …, x_n noma’lumli qo‘shiluvchilarni tenglamalarni o‘ng tomoniga o‘tkazib, quyidagi sistemaga kelamiz:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1r}x_r = b_1 - (a_{1r+1}x_{r+1} + \cdots + a_{1n}x_n) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2r}x_r = b_2 - (a_{2r+1}x_{r+1} + \cdots + a_{2n}x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kr}x_r = b_k - (a_{kr+1}x_{r+1} + \cdots + a_{kn}x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rr}x_r == b_m - (a_{rr+1}x_{r+1} + \cdots + a_{rn}x_n) \end{cases} \qquad (10)$$

(10) sistemadagi x_1, x_2, …, x_r noma’lumlar ***asosiy o‘zgaruvchilar***, qolgan n–r ta x_{r+1}, x_{r+2}, …, x_n noma’lumlar esa ***erkli o‘zgaruvchilar*** deb ataladi. Erkli o‘zgaruvchilarga ixtiyoriy bir

$x_{r+1}=C_1$, $x_{r+2}=C_2$, …, $x_n=C_{n-r}$ qiymatlarni beramiz. Unda (10) x_1, x_2, …, x_r asosiy o‘zgaruvchilarga nisbatan r noma’lumli r ta chiziqli tenglamalar sistemasini ifodalaydi. Bu sistemaning asosiy determinanti M bazis minordan iborat bo‘lib, noldan farqlidir. Unda (10) sistema yagona yechimga ega bo‘lib, uni matritsalar yoki Kramer yoki Gauss usulida topish mumkin. Demak asosiy x_1, x_2, …, x_r o‘zgaruvchilarning qiymatlari $x_{r+1}=C_1$, $x_{r+2}=C_2$, …, $x_n=C_{n-r}$ erkli o‘zgaruvchilar qiymatlariga bog‘liq holda aniqlanadi, ya’ni

$$x_1 = x_1(C_1, C_2, \cdots, C_{n-r}),\, x_2 = x_2(C_1, C_2, \cdots, C_{n-r}), \cdots, x_r = x_r(C_1, C_2, \cdots, C_{n-r})$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Unda (1) yoki unga ekvivalent (10) sistema cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘lib, ular

$$X = (x_1 = x_1(C_1, C_2, \cdots, C_{n-r}) \quad \cdots \quad x_r = x_r(C_1, C_2, \cdots, C_{n-r}) \quad C_1 \quad \cdots \quad C_{n-r})^T$$

ustun matritsani tashkil etadi va sistemaning ***umumiy yechimi*** deyiladi. Bunda $C_1=0$, $C_2=0$, …, $C_{n-r}=0$ holga mos keladigan X ***bazis yechim*** deb ataladi.

Misol №1: Ushbu sistemani yeching:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 7 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 6 \\ 7x_1 + 12x_2 - 11x_3 = 9 \end{cases}$$

Yechish: Bu sistemada $m=n=3$ va uning asosiy determinanti

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 4 \\ 7 & 12 & -11 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Bu sistema matritsasining rangi r(A)=2 bo‘lib, bazis minor sifatida, masalan, ushbu II tartibli minorni olish mumkin:

$$M = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -11 \neq 0 \quad .$$

Bu minorga sistemaning dastlabki ikkita tenglamalarini koeffitsiyentlari kirgan va shu sababli ularni qoldirib, 3-tenglamani o‘chirib tashlaymiz hamda x_3 erkli o‘zgaruvchini tenglamani o‘ng tomoniga o‘tkazamiz:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 7 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 6 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = x_3 + 7 \\ x_1 - 3x_2 = -4x_3 + 6 \end{cases}.$$

Oxirgi sistemada $x_3=C$ deb va Kramer usulidan foydalanib, berilgan sistemaning umumiy yechimini topamiz:

$$x_1 = -\frac{1}{11}(5C - 33), \quad x_2 = \frac{1}{11}(13C - 11), \quad x_3 = C\,.$$

Topilgan umumiy yechimda $C=0$ deb

$$x_1 = 3, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 0$$

bazis yechimga ega bo‘lamiz.

Misol №2: Ushbu sistemani tekshiring va uning umumiy hamda bazis yechimni toping:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 5 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1 \end{cases}$$

Yechish: Bu sistemada m=3 va n=4, ya'ni $m<n$. Bu sistemaning matritsasi va uning kengaytirilganini qaraymiz:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2 & 3\\ 2 & -1 & 1 & -1\\ 3 & 1 & -1 & 2\end{pmatrix},\quad A^b=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2 & 3 & -6\\ 2 & -1 & 1 & -1 & 5\\ 3 & 1 & -1 & 2 & -1\end{pmatrix}.$$

Bu matritsalarning rangi r(A)= r(A^b)= r=2 ekanligini tekshirib ko'rish mumkin. Demak bu sistema birgalikda va uning rangi noma'lumlar sonidan kichik, ya'ni r=2<4 bo'lgani uchun bu sistema cheksiz ko'p yechimga egadir. Bu sistemaning x_1 va x_2 noma'lumlari oldidagi koeffitsiyentlardan tuzilgan determinant noldan farqli va shu sababli uni bazis minor, x_1 va x_2 noma'lumlarni esa asosiy o'zgaruvchilar deb olish mumkin. Bundan tashqari sistema matritsasining rangi r=2 bo'lgani uchun uning bir tenglamasini, masalan uchinchisini, o'chirib tashlash mumkin. Asosiy o'zgaruvchilarni hosil qilingan tenglamalar sistemasining chap tomonida qoldirib, qolgan x_3 va x_4 erkli o'zgaruvchilarni tenglamalarning o'ng tomoniga o'tkazamiz:

$$\begin{cases}x_1+2x_2-2x_3+3x_4=-6\\ 2x_1-x_2+x_3-x_4=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1+2x_2=2x_3-3x_4-6\\ 2x_1-x_2=-x_3+x_4+5\end{cases}$$

Bu sistemada erkli o'zgaruvchilarga ixtiyoriy $x_3=C_1$ va $x_4=C_2$ qiymatlar beramiz va uning umumiy yechimini Kramer usulida topamiz:

$$x_1=\frac{1}{5}(4-C_2),\quad x_2=\frac{1}{5}(5C_1-7C_2-17),\quad x_3=C_1,\quad x_4=C_2\quad .$$

Bu yerda $C_1=0$, $C_2=0$ deb ushbu bazis yechimni hosil etamiz:

$$x_1=\frac{4}{5},\quad x_2=-\frac{17}{5},\quad x_3=0,\quad x_4=0\quad .$$

Misol №3: Ushbu sistemani tekshiring:

$$\begin{cases}x_1+2x_2-2x_3+3x_4=-6\\ 2x_1-x_2+x_3-x_4=5\\ 3x_1+x_2-x_3+2x_4=3\end{cases}$$

Yechish: Bu sistemada m=3 va n=4, ya'ni $m<n$. Bu sistemaning matritsasi va uning kengaytirilganini qaraymiz:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2 & 3\\ 2 & -1 & 1 & -1\\ 3 & 1 & -1 & 2\end{pmatrix},\quad A^b=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2 & 3 & -6\\ 2 & -1 & 1 & -1 & 5\\ 3 & 1 & -1 & 2 & 3\end{pmatrix}.$$

Bunda A matritsalarning rangi r(A)=2, kengaytirilgan matritsa rangi esa r(A^b)=3 bo'ladi. Haqiqatan ham uning ushbu III tartibli minori

$$M=\begin{vmatrix}-2 & 3 & -6\\ 1 & -1 & 5\\ -1 & 2 & 3\end{vmatrix}=-14\neq 0.$$

Bundan r(A)≠r(A^b) ekanligini ko'ramiz va shu sababli, Kroniker-Kapelli teoremasiga asosan, bu sistema birgalikda emas, ya'ni uning yechimi mavjud emas.

4.6. Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi. Endi (1) n noma'lumli m ta tenglamalar sistemasining maxsus bir holini alohida ko'rib o'tamiz.

7-TA'RIF: Agar (1) chiziqli tenglamalar sistemaning o'ng tomonidagi barcha ozod hadlar nolga teng bo'lsa, u holda bu sistema ***bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi*** deyiladi.

Demak, n noma'lumli m ta bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + a_{k3}x_3 + \cdots + a_{kn}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (11)$$

Chiziqli bir jinsli tenglamalar sistemasi hamma vaqt birgalikdadir, chunki u hech bo'lmaganda bitta $x_1=0$, $x_2=0$, …, $x_n=0$ yechimga ega.

8-TA'RIF: (11) bir jinsli sistemaning yechimi faqat nollardan iborat bo'lsa, u ***trivial yechim*** **,** aks holda, ya'ni sistemaning yechimi ichida kamida bitta noldan farqli son mavjud bo'lsa, u ***notrivial yechim*** deb ataladi.

Kroniker-Kapelli teoremasidan quyidagi tasdiq bevosita kelib chiqadi.

2-TEOREMA: Agar (11) bir jinsli sistema determinantining rangi r(A)=n bo'lsa, bu sistema faqat trivial yechimga ega bo'ladi. Bu sistema notrivial yechimga ega bo'lishi uchun r(A)=r<min(m,n) shart bajarilishi zarur va yetarlidir.

Masalan,

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 = 0 \\ x_1 + 4x_2 = 0 \\ 5x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 0 \\ 10x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

bir jinsli sistemalardan birinchisi faqat trivial yechimga ega (chunki r(A)=2=n), ikkinchisi uchun esa notrivial yechimlar ham mavjud (chunki r(A)=2<n=3).

2-teoremadan quyidagi natija kelib chiqadi:

NATIJA: Bir jinsli (11) sistema m=n holda notrivial yechimga ega bo'lishi uchun uning asosiy determinanti Δ=0 bo'lishi zarur va yetarlidir.

Agar (11) bir jinsli sistemaning notrivial yechimi mavjud bo'lsa, u yuqorida ko'rsatilgan asosiy va erkli o'zgaruvchilarni tanlab olish orqali topiladi.

Misol №4: Ushbu bir jinsli sistemani tekshiring va uning notrivial yechimi mavjud bo'lsa, bu yechimni toping:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Yechish: Bu sistema matritsasining rangi r(A)=2 <n=4. Demak uning notrivial yechimi mavjud. Asosiy o'zgaruvchilar sifatida x_1 va x_2 , erkli o'zgaruvchilar sifatida x_3 va x_4 noma'lumlarni tanlashimiz hamda sistemaning uchinchi tenglamasini o'chirib tashlashimiz mumkin (Misol №2 yechimiga qarang) va natijada berilgan sistemaga ekvivalent bo'lgan ushbu sistemaga kelamiz:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 2x_3 - 3x_4 \\ 2x_1 - x_2 = -x_3 + x_4 \end{cases}.$$

Bu sistemada erkli o'zgaruvchilarga ixtiyoriy x_3=C_1 va x_4=C_2 qiymatlar berib, x_1 va x_2 asosiy o'zgaruvchilarni Kramer usulida topamiz:

$$x_1=-\frac{1}{5}C_2\,,\quad x_2=-\frac{1}{5}(5C_1-7C_2)\quad .$$

Demak, berilgan bir jinsli sistema cheksiz ko‘p notrivial yechimga ega va ular quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$x_1=-\frac{1}{5}C_2\,,\quad x_2=-\frac{1}{5}(5C_1-7C_2)\,,\quad x_3=C_1\,,\quad x_4=C_2\quad .$$

Bu yerda $C_1=C_2=0$ desak, trivial yechimga, qolgan hollarda esa notrivial yechimlarga ega bo‘lamiz. Masalan, $C_1=5$, $C_2=-10$ bo‘lganda sistemaning ushbu notrivial yechimi kelib chiqadi:

$$x_1=-1,\quad x_2=19,\quad x_3=5,\quad x_4=-10\ .$$

Bir jinsli (11) sistemaning $x_1=\kappa_1, x_2=\kappa_2, \ldots, x_n=\kappa_n$ yechimini $X=(\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3,\ldots,\kappa_n)$ satr matritsa ko‘rinishda belgilaymiz. Chiziqli bir jinsli tenglamalar sistemasining yechimlari quyidagi xossalarga ega bo‘lishini tekshirib ko‘rish mumkin:

1-xossa. Agar $X=(\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3,\ldots,\kappa_n)$ bir jinsli (11) sistemasining yechimi bo‘lsa, u holda ixtiyoriy λ soni uchun

$$\lambda X=\lambda(\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3,\ldots,\kappa_n)=(\lambda\kappa_1, \lambda\kappa_2, \lambda\kappa_3,\ldots, \lambda\kappa_n)$$

ham shu sistemaning yechimi bo‘ladi.

2-xossa. Agar $X_1=(\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3,\ldots,\kappa_n)$ va $X_2=(l_1,l_2,l_3,\ldots,l_n)$ bir jinsli (11) sistemaning yechimlari bo‘lsa, u holda ixtiyoriy C_1 va C_2 sonlar uchun

$$X= C_1X_1+ C_2X_2 = (C_1\kappa_1+C_2l_1,\ C_1\kappa_2+C_2l_2,\ldots,\ C_1\kappa_n+C_2l_n)$$

ham (11) sistemaning yechimi bo‘ladi. Bunda $C_1X_1+ C_2X_2$ algebraik yig‘indi X_1 va X_2 yechimlarning ***chiziqli kombinatsiyasi*** deyiladi.

9-TA’RIF: (11) sistemaning qandaydir $X_1, X_2, \ldots, X_\kappa$ yechimlari ***chiziqli bog‘liqmas*** deyiladi, agarda

$$C_1X_1+C_2 X_2+ \ldots+C_\kappa X_\kappa=O$$

tenglik faqat va faqat $C_1=C_2=\ldots=C_\kappa=0$ bo‘lganda bajarilsa. Aks holda bu yechimlar ***chiziqli bog‘liq*** deyiladi. Bu yerda $O=(0,0,\ldots,0)=O_{1\times n}$ –nol satr matritsani ifodalaydi.

Chiziqli bir jinsli tenglamalar sistemasi yechimlarining har qanday chiziqli kombinatsiyasi yana shu sistemaning yechimi bo‘lishi yuqoridagi xossalardan kelib chiqadi. Shuning uchun shunday chiziqli bog‘liq bo‘lmagan yechimlarni topish kerakki, ular orqali sistemaning barcha qolgan yechimlari chiziqli ifodalansin.

10-TA’RIF: Agar (11) bir jinsli tenglamalar sistemaning har qanday X yechimini qandaydir chiziqli bog‘liq bo‘lmagan $X_1, X_2, \ldots, X_\kappa$ yechimlarning chiziqli kombinatsiyasi ko‘rinishida ifodalab bo‘lsa, unda $X_1, X_2, \ldots, X_\kappa$ ***fundamental yechimlar sistemasi*** deyiladi.

3-TEOREMA: Agar (11) chiziqli bir jinsli tenglamalar sistemasining matritsaning rangi $r(A)<n$ bo‘lsa, bu sistemaning har qanday fundamental yechimlar sistemasi $n-r$ ta $X_1, X_2, \ldots, X_{n-r}$ yechimdan iborat bo‘ladi va umumiy yechim X ularning

$$X= C_1 X_1+C_2 X_2+ \ldots+C_{n-r} X_{n-r}$$

chiziqli kombinatsiyasi ko‘rinishida bo‘ladi. Bu yerda $C_1, C_2, \ldots, C_{n-r}$ –ixtiyoriy o‘zgarmas sonlardan iboratdir.

Endi n noma’lumli m та chiziqli tenglamadan iborat bir jinsli bo‘lmagan (1) va unga mos keluvchi bir jinsli (11) sistemalarning yechimlari orasidagi bog‘lanishlarni ko‘rib chiqamiz. Buning uchun ularning $AX=B$ va $AX=O$ matritsaviy yozuvlaridan foydalanamiz.

4-TEOREMA: Agar X_1 va X_2 bir jinsli bo‘lmagan sistemaning ixtiyoriy ikkita yechimi bo‘lsa, unda $X= X_1 – X_2$ bir jinsli sistemaning yechimi bo‘ladi.

Isbot: Matritsalarning xossalari va $AX_1=B$, $AX_2=B$ tengliklarga asosan

$$AX=A(X_1 – X_2)= AX_1 –A X_2=B–B=\mathrm{O}.$$

5-TEOREMA: Agar X_1 va X_0 mos ravishda bir jinsli bo‘lmagan (1) va bir jinsli (11) sistemalarning yechimlari bo‘lsa, unda $X= X_1 \pm X_0$ bir jinsli bo‘lmagan (1) sistemaning yechimi bo‘ladi.

Isbot: Matritsalarning xossalari va $AX_1=B$, $AX_0=\mathrm{O}$ tengliklarga asosan

$$AX=A(X_1 \pm X_0)= AX_1 \pm A X_0=B–\mathrm{O}=B.$$

Bu teoremalardan ko‘rinadiki, bir jinsli bo‘lmagan (1) sistemaning umumiy X yechimini topish uchun uning birorta xususiy X_1 yechimi bilan tegishli bir jinsli sistemaning umumiy X_0 yechimini bilish kifoya. Bu holda $X=X_1+X_0$ tenglik o‘rinli bo‘ladi. Keyinchalik bu tasdiq boshqa tur tenglamalar uchun ham o‘rinli bo‘lishini ko‘ramiz.

XULOSA

Chiziqli tenglamalar sistemasi matematikaning iqtisodiy masalalarni yechishda eng ko‘p qo‘llaniladigan tushunchalaridan biri bo‘lib hisoblanadi. Chiziqli tenglamalar sistemasining yechimi mavjud va yagona, mavjud va cheksiz ko‘p hamda mavjud bo‘lmasligi mumkin. Chiziqli tenglamalar sistemasini umumiy holda yechish usullari ishlab chiqilgan. Bunda oldin ko‘rib o‘tilgan matritsa va determinantlar tushunchalari muhim ahamiyatga ega bo‘ladi. Sistema yechimining mavjudligi yoki mavjud emasligi, yagona yoki cheksiz ko‘pligi matritsalarning rangi yordamida aniqlanadi. Shuningdek bu yerda bir jinsli tenglamalar sistemasi va uning notrivial yechimi mavjudligi masalalari ham qaralgan.

Chiziqli tenglamalar sistemasining iqtisodiy tatbig‘iga misol sifatida Leont’evning tarmoqlararo balans modelini ko‘rsatish mumkin.

Tayanch iboralar

* Chiziqli tenglamalar sistemasi * Sistema koeffitsiyentlari * Sistema ozod hadlari* Sistema yechimi * Birgalikda bo‘lgan sistema * Birgalikda bo‘lmagan sistema* Aniq sistema * Aniqmas sistema * Kengaytirilgan matritsa *Kroniker-Kapelli teoremasi * Matritsalar usuli * Kramer usuli * Asosiy determinant * Yordamchi determinantlar *Kramer formulalari * Ekvivalent sistemalar * Gauss usuli* Gauss usulining to‘g‘ri yo‘li * Gauss usulining teskari yo‘li * Asosiy o‘zgaruvchilar * Erkli o‘zgaruvchilar * Umumiy yechim * Bazis yechim
* Bir jinsli sistema * Trivial yechim * Notrivial yechim * Chiziqli bog‘liqmas yechimlar * Chiziqli bog‘liq yechimlar * Fundamental yechimlar * Balans munosabatlari * Tarmoqlararo balansning Leont’ev modeli * Samarali matritsa

Takrorlash uchun savollar

1. Chiziqli tenglamalar sistemasi qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
2. Sistemaning koeffitsiyentlari, noma’lumlari va ozod hadlari deb nimaga aytiladi?
3. Sistemaning yechimlari qanday ta’riflanadi?
4. Qachon sistema birgalikda yoki birgalikda emas deyiladi?
5. Qachon sistema aniq va qachon aniqmas deyiladi?
6. Kroniker-Kapelli teoremasi nimani ifodalaydi?
7. Qaysi shartda chiziqli tenglamalar sistemasi yagona yechimga ega?
8. Qaysi shartda chiziqli tenglamalar sistemasi cheksiz ko‘p yechimga ega?
9. Chiziqli tenglamalar sistemasi matritsa ko‘rinishda qanday yoziladi?

10. Sistema matritsa usulida qanday yechiladi?
11. Matritsalar usulining qanday qulayliklari va kamchiliklari bor?
12. Sistemani Kramer usulida yechishning mohiyati nimadan iborat?
13. Sistemaning asosiy determinanti deb nimaga aytiladi?
14. Sistemaning yordamchi determinantlari qanday hosil qilinadi?
15. Sistema yechimi uchun Kramer formulalari qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
16. Qachon tenglamalar sistemasi ekvivalent deyiladi?
17. Gauss usulining mohiyati nimadan iborat?
18. Gauss usulining to‘g‘ri yolida nimaga erishiladi?
19. Gauss usulining teskari yolida nimaga erishiladi?
20. Sistemaning asosiy o‘zgaruvchilari deb nimaga aytiladi?
21. Sistemaning erkli o‘zgaruvchilari deb nimaga aytiladi?
22. Qanday yechim bazis yechim deb ataladi?
23. Qachon chiziqli sistema bir jinsli deyiladi?
24. Trivial va notrivial yechimlar qanday ta’riflanadi?
25. Qaysi shartda bir jinsli sistema notrivial yechimga ega ?
26. Bir jinsli sistema yechimlari qanday xossalarga ega?
27. Fundamental yechimlar sistemasi qanday ta’riflanadi?
28. Fundamental yechimlar soni qanday topiladi?
29. Chiziqli tenglamalar sistemasining qanday iqtisodiy tatbiqlarini bilasiz?
30. Tarmoqlararo balans munosabatlari qanday aniqlanadi?
31. Leont’ev modeli nimani ifodalaydi?
32. Qanday matritsa samarali deyiladi?
33. Qaysi shartda matritsa samarali bo‘ladi?

6 § VEKTORLAR VA ULARNING AYRIM XOSSALARI. SKALYAR KO’PAYOTMA. VEKTORLARNING O’ZARO JOYLASHUVI.

- ***Vektorlar va ular bilan bog‘liq tushunchalar.***
- ***Vektorlar ustida amallar.***
- ***Vektorlarning koordinatalari.***

1.1. Vektorlar va ular bilan bog‘liq tushunchalar. Hayotda uchraydigan harorat, bajarilgan ish, ish haqi, jismning massasi, ishlab chiqarish hajmi, tovarning narxi, partiyadagi mahsulotlar soni kabi kattaliklar ularni ifodalovchi sonli qiymatlar orqali to‘liq aniqlanadi.

1-TA’RIF: Sonli qiymatlari bilan to‘liq aniqlanadigan kattaliklar ***skalyarlar*** deb ataladi.

“Skalyar” atamasi lotin tilidagi “scala” so‘zidan olingan bo‘lib, “pog‘ona” degan ma’noni ifodalaydi. Skalyarlar $a, b, c, \ldots$ kabi harflar bilan belgilanadi.

Kuch, kuch momenti, tezlik, tezlanish, bosim, siljish, elektr maydonining kuchlanishi, oqim kabi kattaliklarni aniqlash uchun ularning sonli qiymatlaridan tashqari yo‘nalishlarini ham ko‘rsatish zarurdir.

2-TA’RIF: Ham sonli qiymati, ham yo‘nalishi bilan aniqlanadigan kattaliklar ***vektorlar*** deyiladi.

“Vektor” lotincha ”vehere” so‘zidan olingan va “yo‘llovchi” ma’nosiga ega. Vektorlar $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \cdots$ yoki ***a***, ***b***, ***c***, … kabi belgilanadi.

3-TA’RIF: Har qanday ***a*** vektorning sonli qiymati uning ***moduli*** yoki ***uzunligi*** deb ataladi va |***a***| kabi belgilanadi.

Geometrik nuqtai-nazardan vektorlar yo‘naltirilgan kesmalar singari qaraladi. Boshi A va oxiri B nuqtada bo‘lgan yo‘naltirilgan kesma bilan aniqlanadigan vektor $\overrightarrow{AB}$ kabi belgilanadi. Bunda A nuqta ***vektorning boshi***, B nuqta esa ***vektorning uchi*** deyiladi. Bu yerda AB kesma uzunligi vektor modulini ifodalaydi, ya'ni $|AB|=|\overrightarrow{AB}|$ bo'ladi.

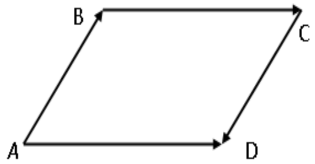
4-TA'RIF: Boshi va uchi bitta nuqtadan iborat bo'lgan vektor ***nol vektor*** deyiladi.

Nol vektor **0** kabi belgilanib, uning moduli $|\mathbf{0}|=0$ bo'ladi. Nol vektorning yo'nalishi to'g'risida so'z yuritib bo'lmaydi.

5-TA'RIF: Bir to'g'ri chiziqda yoki parallel to'g'ri chiziqlarda joylashgan vektorlar ***kollinear vektorlar*** deb ataladi.

Kelgusida $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ vektorlarning kollinear ekanligini $\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}$ kabi belgilaymiz.

Masalan, $ABCD$ parallelogramm bo'lsa (9-rasmga qarang), unda



$\overrightarrow{AD} || \overrightarrow{BC}$ va $\overrightarrow{AB} || \overrightarrow{CD}$, ammo $\overrightarrow{AD}$ va $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ va $\overrightarrow{CD}$ vektorlar kolllinear bo'lmaydi.

Izoh. Nol vektor **0** har qanday $\boldsymbol{a}$ vektorga kollinear deb hisoblanadi.

6-TA'RIF: Quyidagi uchta shartlar bajarilganda $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ ***teng vektorlar*** deyiladi:

1. $\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}$, ya'ni bu vektorlar kollinear;
2. $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$, ya'ni bu vektorlar bir xil uzunlikka ega;
3. $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ vektorlar bir xil yo'nalishga ega.

Agar $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ teng vektorlar bo'lsa, $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ deb yoziladi. Masalan, yuqoridagi $ABCD$ parallelogrammda $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ bo'ladi. Bu yerdan vektorlarni parallel ko'chirish mumkinligi kelib chiqadi.

7-TA'RIF: Bitta yoki parallel tekisliklarda joylashgan uch va undan ortiq vektorlar ***komplanar*** deyiladi.

Masalan, uchburchakning turli tomonlarida joylashgan vektorlar komplanar bo'ladi.

1.2.Vektorlar ustida amallar. Endi vektorlar ustida arifmetik amallar kiritamiz.

8-TA'RIF: $\boldsymbol{a}$ vektorni λ songa (skalyarga) ko'paytmasi deb quyidagi uchta shart bilan aniqlanadigan yangi bir $\boldsymbol{c}$ vektorga aytiladi:

1. $|\boldsymbol{c}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$, ya'ni $\boldsymbol{a}$ vektorning uzunligi $|\lambda|$ marta o'zgaradi;
2. $\boldsymbol{c} \parallel \boldsymbol{a}$, ya'ni bu vektorlar kollinear;
3. $\lambda>0$ bo'lsa $\boldsymbol{c}$ va $\boldsymbol{a}$ bir xil yo'nalgan, $\lambda<0$ bo'lsa $\boldsymbol{c}$ va $\boldsymbol{a}$ qarama-qarshi yo'nalgan.

$\boldsymbol{a}$ vektorni λ songa ko'paytmasi $\lambda\boldsymbol{a}$ kabi belgilanadi. Masalan, $ABCD$ trapetsiya bo'lib, uning AD va BC asoslarining uzunliklari $|AD|=8$ va $|BC|=4$ bo'lsa, unda $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{BC}$ va $\overrightarrow{AD}=-2\overrightarrow{CB}$ tengliklar o'rinli bo'ladi.

Vektorlarni songa ko'paytirish amali quyidagi xossalarga ega:

1. $\lambda(\beta\boldsymbol{a})=\beta(\lambda\boldsymbol{a})$ 2. $(\lambda\pm\beta)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}\pm\beta\boldsymbol{a}$ 3. $0\cdot\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$.

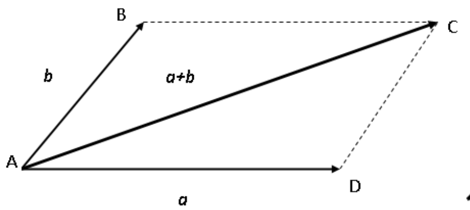
Bu yerda λ va β ixtiyoriy sonlarni, $\boldsymbol{a}$ esa ixtiyoriy vektorni ifodalaydi.

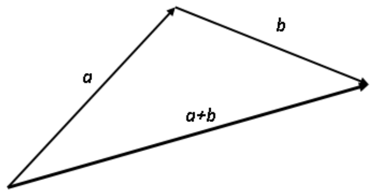
9-TA'RIF: $(-1)\boldsymbol{a}$ vektor $\boldsymbol{a}$ vektorga ***qarama-qarshi vektor*** deyiladi va $-\boldsymbol{a}$ kabi belgilanadi.

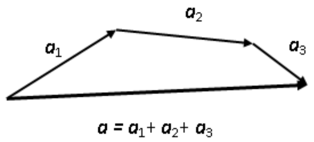
Masalan, yuqorida ko'rilgan $ABCD$ parallellogramda $\overrightarrow{AD}$ va $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AB}$ va $\overrightarrow{CD}$ qarama-qarshi vektorlar, ya'ni $\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{CD}$ bo'ladi.

Endi ikkita $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ vektorlarni qo'shish amalini kiritamiz. Buning uchun parallel ko'chirish orqali ularning boshlarini bitta A nuqtaga keltiramiz. Unda bu vektorlarni $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AD}$, $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}$ kabi belgilab, $ABCD$ parallelogrammni hosil qilamiz (10-rasm).

10-TA'RIF: ***a*** va ***b*** ***vektorlarning yig'indisi*** deb *ABCD* parallelogrammning *A* uchidan chiquvchi diagonalidan hosil qilingan $\overrightarrow{AC}$ vektorga aytiladi va ***a***+***b*** kabi belgilanadi.







Vektorlar yig'indisining bu usulda aniqlash ***parallelogramm qoidasi*** deyiladi va unga moddiy nuqtaga qo'yilgan ikkita kuchning teng ta'sir etuvchisini topish asos qilib olingan. Bu yig'indini ***uchburchak qoidasi*** deb ataladigan quyidagi usulda ham topish mumkin. Bunda dastlab parallel ko'chirish orqali ***b*** vektorning boshi ***a*** vektorning uchi ustiga keltiriladi (11-rasm). So'ngra ***a*** boshidan chiqib, ***b*** uchida tugaydigan vektor hosil qilinadi va u ***a***+***b*** yig'indini ifodalaydi.

Bir nechta $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, …, $\boldsymbol{a}_n$ ($n \geq 3$) vektorlarning yig'indisi parallelogramm qoidasini bir necha marta ketma-ket qo'llash yoki ***ko'pburchak qoidasi*** deb ataladigan ushbu usulda topiladi. Bu usulda parallel ko'chirish orqali $\boldsymbol{a}_1$ uchiga $\boldsymbol{a}_2$ boshi, $\boldsymbol{a}_2$ uchiga $\boldsymbol{a}_3$ boshi va hokazo $\boldsymbol{a}_{n-1}$ uchiga $\boldsymbol{a}_n$ boshi keltirib qo'yiladi. Hosil bo'lgan (16-rasmga qarang) siniq chiziqning boshi ($\boldsymbol{a}_1$ vektor boshi) bilan oxiri ($\boldsymbol{a}_n$ vektor uchi) tutashtirilib, $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3+\ldots+\boldsymbol{a}_n$ yig'indi vektor topiladi. Masalan, uchta $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ va $\boldsymbol{a}_3$ vektorlarning $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3$ yig'indisini topish quyidagi 12-rasmda ko'rsatilgan:

Agar $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ va $\boldsymbol{a}_3$ bir tekislikda joylashmagan vektorlar bo'lsa, ko'pburchak qoidasi bilan topilgan $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3$ yig'indi qo'shiluvchi vektorlarni parallel ko'chirish orqali umumiy bir 0 boshga keltirib hosil qilinadigan parallelepipedning 0 uchidan chiquvchi diagonali kabi ham topilishi mumkin. Bu ***parallelepiped qoidasi*** deb ataladi.

Vektorlarni qo'shish amali quyidagi xossalarga ega:

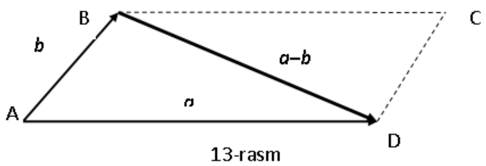
1. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$ — kommutativlik (o'rin almashtirish) qonuni;

2. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ — assotsiativlik (guruhlash) qonuni;

3. $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$; **4.** $\boldsymbol{a}+\mathbf{0}=\boldsymbol{a}$.

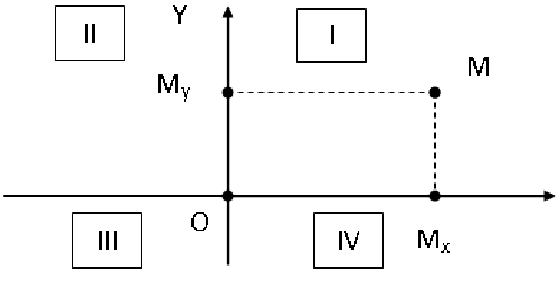
11-TA'RIF: ***a*** va ***b*** ***vektorlarning ayirmasi*** deb ***a*** va ***–b*** vektorlarning yig'indisiga aytamiz.

a va ***b*** vektorlarning ayirmasi ***a–b*** kabi belgilanadi bu vektorlardan hosil qilingan *ABCD* parallelogrammning B uchidan chiquvchi $\overrightarrow{BD}$ diagonalidan iborat bo'ladi (13-rasmga qarang).

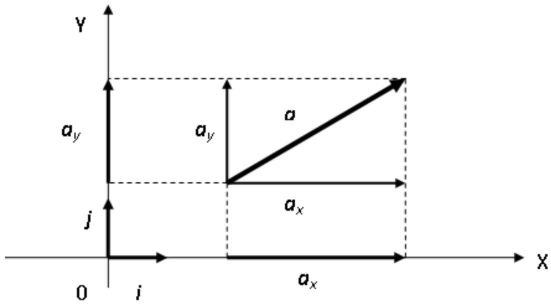


13-rasm

1.3. Vektorlarning koordinatalari. Dastlab tekislikdagi vektorlarning koordinatalari tushunchasini kiritamiz. Buning uchun tekislikda o'zaro perpendikulyar bo'lgan va O nuqtada kesishuvchi OX(abssissalar o'qi) va OY (ordinatalar o'qi) o'qlaridan tuzilgan XOY Dekart koordinatalar sistemasini olamiz. Bu sistemada tekislikdagi har bir M nuqta o'zining OX va OY o'qlardagi proyeksiyalari bo'lmish M_x va M_y nuqtalar orqali (14-rasmga qarang) quyidagicha aniqlanadi. M_x va M_y nuqtalardan O koordinata boshigacha bo'lgan $|OM_x|$ va $|OM_y|$ masofalar orqali M ***nuqtaning koordinatalari*** deb ataladigan $x=\pm|OM_x|$ (abssissa) va $y=\pm|OM_y|$ (ordinata) sonlar aniqlanadi. Bunda (x,y) koordinatalarning ishoralari I–IV choraklarda mos ravishda (+,+), (–,+), (–,–) va (+,–) kabi olinadi. Shunday qilib, tekislikdagi har bir M nuqta o'zining koordinatalari bo'lmish (x,y) sonlar juftligi orqali bir qiymatli aniqlanadi va bu hol $M(x,y)$ kabi yoziladi.



14-rasm



15-rasm

Xuddi shunday tarzda tekislikdagi har bir ***a*** vektorni sonlar juftligi orqali ifodalash mumkin. Buning uchun mos ravishda OX va OY koordinata o'qlarida joylashgan, musbat yo'nalishga ega va uzunliklari birga teng bo'lgan ***i*** va ***j*** vektorlarni kiritamiz (15-rasm).
Kiritilgan ***i*** va ***j*** vektorlar ***ort vektorlar*** yoki qisqacha ***ortlar*** deb ataladi. Endi berilgan ***a*** vektorni yo'naltirilgan kesma sifatida qarab, uning OX va OY o'qdagi proyeksiyalarini qaraymiz. Bu proyeksiyalar ham yo'naltirilgan kesmalar bo'lib, ular ***a*** vektorning OX va OY o'qdagi ***proyeksiyalari*** deb ataladi va $\boldsymbol{a}_x$, $\boldsymbol{a}_y$ kabi belgilanadi. Koordinatalar o'qlarida joylashgan $\boldsymbol{a}_x$, $\boldsymbol{a}_y$ vektorlar mos ravishda shu o'qlardagi ***i***, ***j*** ortlarga kollinear bo'ladi va shu sababli $\boldsymbol{a}_x=\pm|\boldsymbol{a}_x|\boldsymbol{i}$ hamda $\boldsymbol{a}_y=\pm|\boldsymbol{a}_y|\boldsymbol{j}$ deb yozish mumkin. Bunda proyeksiyalar va ortlar bir xil yo'nalishda bo'lsa +, qarama-qarshi bo'lsa – ishorasi olinadi. Unda vektorlarni qo'shish ta'rifiga asosan quyidagi tengliklarni yoza olamiz:

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_x+\boldsymbol{a}_y=(\pm|\boldsymbol{a}_x|)\boldsymbol{i}+(\pm|\boldsymbol{a}_y|)\boldsymbol{j}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}\,. \qquad (1)$$

12-TA'RIF: (1) tenglik ***a*** vektorning ortlar bo'yicha ***yoyilmasi***, *x* va *y* sonlari esa uning ***koordinatalari*** deb ataladi .

Koordinatalari *x* va *y* , ya'ni (1) yoyilmaga ega bo'lgan ***a*** vektor qisqacha $\boldsymbol{a}=(x,y)$ kabi ifodalanadi. Masalan, yoyilmasi $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}$ bo'lgan vektorning koordinatalari $x=2$, $y=-3$ bo'ladi va $\boldsymbol{a}=(2,-3)$ deb yoziladi. Nol vektor uchun yoyilma $\mathbf{0}=0\cdot\boldsymbol{i}+0\cdot\boldsymbol{j}=(0,0)$, ya'ni uning koordinatalari $x=0$, $y=0$ bo'ladi.

Shunday qilib tekislikdagi ixtiyoriy ***a*** vektor o'zining *x* va *y* koordinatalari, ya'ni (x,y) sonlar juftligi bilan (1) tenglik orqali to'liq aniqlanadi.

Xuddi shunday tarzda fazodagi nuqta va vektorlar uchun koordinatalar tushunchasi kiritiladi. Buning uchun fazoda o'zaro perpendikulyar bo'lgan va O nuqtada kesishuvchi OX, OY va OZ (applikatalar) o'qlarini kiritamiz. Bunda fazodagi har bir M nuqta o'zining OX, OY va OZ o'qlaridagi proyeksiyalari M_x , M_y va M_z orqali tekislikda qaralgani singari *x, y* va *z* koordinatalari bilan bir qiymatli aniqlanadi va bu M(*x, y, z*) kabi ifodalanadi.

Vektorlarning koordinatalarini aniqlash uchun oldin kiritilgan ***i*** va ***j*** ortlarga qo'shimcha ravishda OZ koordinata o'qida joylashgan ***k*** ort vektorni kiritamiz. Unda, fazodagi vektorlarni qo'shishning parallelepiped qoidasidan foydalanib,

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_x+\boldsymbol{a}_y+\boldsymbol{a}_z=(\pm|\boldsymbol{a}_x|)\boldsymbol{i}+(\pm|\boldsymbol{a}_y|)\boldsymbol{j}+(\pm|\boldsymbol{a}_z|)\boldsymbol{k}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k} \qquad (2)$$

yoyilmani hosil etamiz. Bu yerda *x, y, z* sonlar uchligi fazodagi ***a*** vektorning koordinatalari bo'lib, $\boldsymbol{a}=(x,y,z)$ deb yoziladi.

Koordinatalari bilan berilgan vektorlarning tengligi va ular ustidagi qo'shish, ayirish, songa ko'paytirish amallarining natijalari oson aniqlanadi. Bularni fazodagi vektorlar uchun ifodalaymiz. Tekisikdagi vektorlar uchun tegishli natijalar $z=0$ holda kelib chiqadi.

1-TEOREMA: $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$ va $\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$ vektorlar teng bo'lishi uchun ularning mos koordinatalari teng, ya'ni $x_1=x_2$, $y_1=y_2$, $z_1=z_2$ bo'lishi zarur va yetarli.

Teoremaning isboti (2) yoyilmadan kelib chiqadi va o'quvchiga havola etiladi.

2-TEOREMA: $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$ va $\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$ vektorlarning yig'indisi yoki ayirmasining koordinatalari qo'shiluvchilarning mos koordinatalari yig'indisi yoki ayirmasiga teng bo'ladi, ya'ni

$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(x_1,y_1,z_1)\pm(x_2,y_2,z_2)=(x_1\pm x_2,\,y_1\pm y_2,\,z_1\pm z_2). \qquad (3)$$

Isbot: Vektorlarning (2) yoyilmasi va ularni o‘zaro qo‘shish, songa ko‘paytirish amallarining xossalariga asosan

$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(x_1,y_1,z_1)\pm(x_2,y_2,z_2)=(x_1\,\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\,\boldsymbol{k})\pm(x_2\,\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\,\boldsymbol{k})=$$
$$=(x_1\pm x_2)\boldsymbol{i}+(y_1\pm y_2)\boldsymbol{j}+(z_1\pm z_2)\boldsymbol{k}$$

tenglikni olamiz va undan (3) formula o‘rinli ekanligini ko‘ramiz.

Masalan, $\boldsymbol{a}=(4,-2,1)$ va $\boldsymbol{b}=(5,9,0)$ vektorlar uchun

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(4+5,-2+9,1+0)=(9,7,1)\,,\qquad \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(4-5,-2-9,1-0)=(-1,-11,1).$$

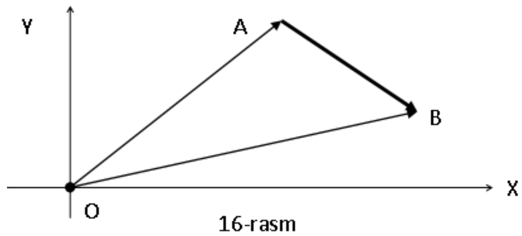
3-TEOREMA: Har qanday $\boldsymbol{a}=(x,\ y,\ z)$ vektorning ixtiyoriy λ songa ko‘paytmasining koordinatalari uning har bir koordinatasini λ songa ko‘paytirishdan hosil bo‘ladi, ya’ni $\lambda\boldsymbol{a}=\lambda\cdot(x, y, z)=(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$.

Teoremaning isbotini o‘quvchilarga mustaqil ish sifatida havola etamiz. Masalan, $\boldsymbol{a}=(3,-4,1)$ va $\lambda=6$ bo‘lsa, $6\boldsymbol{a}=6(3,-4,1)=(18,-24,6)$ bo‘ladi.

Bu natijalardan foydalanib ushbu masalalarni yechamiz.

Masala № 1: Boshi $A(x_1,\ y_1,\ z_1)$ va uchi $B(x_2,\ y_2,\ z_2)$ nuqtada joylashgan $\overrightarrow{AB}$ vektorning koordinatalarini toping.

Yechish: Berilgan vektorning A boshi va B uchini koordinatalar boshi O bilan tutashtirib $\overrightarrow{OA}$ va $\overrightarrow{OB}$ vektorlarni hosil etamiz (16-rasmga qarang).



16-rasm

Bunda $\overrightarrow{OA}=(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $\overrightarrow{OB}=(x_2,\ y_2,\ z_2)$ bo‘ladi va vektorlarning ayirmasi ta’rifi hamda 2-teoremaga asosan quyidagi natijani olamiz:

$$\overrightarrow{AB}=(x, y, z)=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_2, y_2, z_2)-(x_1, y_1, z_1)=(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1)\ .\ (4)$$

Demak, vektorning koordinatalarini topish uchun uchining koordinatalaridan boshini koordinatalarini ayirish kerak. Masalan, boshi A(5,–4, 2) va uchi B(7, 1, 0) nuqtalarda joylashgan vektorning koordinatalari quyidagicha bo‘ladi:

$$x=x_2-x_1=7-5=2,\ \ y=y_2-y_1=1-(-4)=5,\ \ z=z_2-z_1=0-2=-2.$$

Masala № 2: Uchlari $A(x_1,\ y_1,\ z_1)$ va $B(x_2,\ y_2,\ z_2)$ nuqtalarda joylashgan AB kesmani berilgan λ ($\lambda>0$) nisbatda bo‘luvchi $C(x_0, y_0, z_0)$ nuqtaning koordinatalarini toping.

Yechish: Oldingi masalaga asosan

$$\overrightarrow{AC}=(x_0-x_1,\ y_0-y_1,\ z_0-z_1),\qquad \overrightarrow{CB}=(x_2-x_0,\ y_2-y_0,\ z_2-z_0)$$

deb yozishimiz mumkin. Masala sharti, vektorni songa ko‘paytirish ta’rifi va 3-teoremaga asosan ushbu tengliklar o‘rinli bo‘ladi:

$$|\overrightarrow{AC}|=\lambda|\overrightarrow{CB}|\quad\Rightarrow\quad \overrightarrow{AC}=\lambda\,\overrightarrow{CB}\quad\Rightarrow\ (x_0-x_1,\ y_0-y_1,\ z_0-z_1)=\lambda(x_2-x_0, y_2-y_0,\ z_2-z_0)\ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x_0-x_1,\ y_0-y_1,\ z_0-z_1)=(\lambda\, x_2-\lambda\, x_0, \lambda\, y_2-\lambda\, y_0, \lambda\, z_2-\lambda\, z_0).$$

Bu yerdan, 1-teoremaga asosan, izlanayotgan x_0 koordinata ushbu tenglamadan topiladi:

$$x_0-x_1=\lambda(x_2-x_0)\Rightarrow(1+\lambda)x_0=\lambda x_2+x_1\Rightarrow x_0=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}\ .$$

Xuddi shunday tarzdagi mulohazalar orqali izlangan nuqtaning koordinatalari

$$x_0=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y_0=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z_0=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\qquad(5)$$

formulalar bilan topilishini aniqlaymiz.

Masalan, uchlari A(2,–3, 1) va B(16, 11, 15) nuqtalarda joylashgan AB kesmani $\lambda=2:5$ nisbatda bo‘luvchi nuqtaning koordinatalari (5) formulaga asosan quyidagicha bo‘ladi:

$$x_0=\frac{2+\frac{2}{5}\cdot 16}{1+\frac{2}{5}}=6,\quad y_0=\frac{-3+\frac{2}{5}\cdot 11}{1+\frac{2}{5}}=1,\quad z_0=\frac{1+\frac{2}{5}\cdot 15}{1+\frac{2}{5}}=7$$

Xususiy, $\lambda=1$ bo‘lgan, holda AB kesmaning o‘rta nuqtasi koordinatalari uchun ushbu formulaga ega bo‘lamiz:

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y_0=\frac{y_1+y_2}{2},\quad z_0=\frac{z_1+z_2}{2}. \qquad (6)$$

Masalan, uchlari A(4,–1, 5) va B(2, 11, –13) nuqtalarda joylashgan AB kesmaning o‘rta nuqtasining koordinatalari (6) formulaga asosan quyidagicha bo‘ladi:

$$x_0=(4+2)/2=3,\quad y_0=(-1+11)/2=5,\quad z_0=(5+(-13))/2=-4\ .$$

XULOSA

Amaliyotdan kelib chiqqan holda matematikada skalyar va vektor tushunchalari kiritiladi. Bunda skalyar faqat son qiymati bilan, vektor esa ham sonli qiymati, ham yo‘nalishi bilan aniqlanadi. Vektorlar ustida ularni songa ko‘paytirish, o‘zaro qo‘shish va ayirish amallari kiritilib, vektorlar algebrasi hosil qilinadi. Dekart koordinatalar sistemasida vektorlar o‘zlarining koordinatalari bilan ifodalanadi. Koordinatalari bilan berilgan vektorlar ustida amallar ularning koordinatalari orqali oson amalga oshiriladi. Vektorlar algebrasi yordamida bir qator matematik masalalar oson hal etiladi.

Tayanch iboralar

Skalyar * Vektor * Vektorning moduli * Vektorning geometrik talqini * Vektorning boshi * Vektorning uchi * Nol vektor * Kollinear vektorlar * Vektorlarning tengligi * Komplanar vektorlar*Vektorni songa ko‘paytmasi * Qarama-qarshi vektorlar* Vektorlarni qo‘shish * Parallelogramm qoidasi * Uchburchak qoidasi*Ko‘pburchak qoidasi *Parallelepiped qoidasi * Vektorlarni ayirish * Ort vektorlar*Vektorning o‘qdagi proyeksiyasi *Vektorning yoyilmasi * Vektorning koordinatlari

Takrorlash uchun savollar

1. Qanday kattaliklar skalyarlar deyiladi?
2. Skalyarlarga qanday misollar bilasiz?
3. Qanday kattaliklar vektorlar deb ataladi?
4. Vektorlarga qanday misollar bilasiz?
5. Vektorlarning geometrik ma’nosi nimadan iborat?
6. Vektorning moduli deb nimaga aytiladi?
7. Qanday vektor nol vektor deyiladi?
8. Qanday vektorlar kollinear deyiladi?
9. Qachon vektorlar teng deb hisoblanadi?
10. Vektorni songa ko‘paytmasi qanday aniqlanadi?
11. Vektorni songa ko‘paytmasi qanday xossalarga ega?
12. Vektorlar yig‘indisi qanday aniqlanadi?
13. Vektorlar yig‘indisi qanday xossalarga ega?
14. Ort vektorlar deb qanday vektorlarga tushuniladi?
15. Vektorning ortlar bo‘yicha yoyilmasi qanday aniqlanadi?
16. Vektorning koordinatalari qanday topiladi?
17. Koordinatalari bilan berilgan vektorlarning tenglik sharti nimadan iborat?

18. Koordinatalari bilan berilgan vektorlar ustida arifmetik amallar qanday bajariladi?
19. Vektorning koordinatalari uning boshi va uchi bo‘yicha qanday topiladi?
20. Kesmani berilgan nisbatda bo‘luvchi nuqtaning koordinatalari qanday topiladi?
21. Kesma o‘rta nuqtasining koordinatalari qanday topiladi?

VEKTORLARNING SKALYAR KO‘PAYTMASI, UNING XOSSALARI VA TATBIQLARI.

- ***Vektorlarning skalyar ko‘paytmasi va uning xossalari.***
- ***Skalyar ko‘paytmaning koordinatalardagi ifodasi.***
- ***Skalyar ko‘paytmaning tatbiqlari.***

2.1. Vektorlarning skalyar ko‘paytmasi va uning xossalari. Biz vektorlarni songa ko‘paytirish, qo‘shish va ayirish amallarini ko‘rib o‘tdik. Endi vektorlarni o‘zaro ko‘paytirish masalasiga o‘tamiz. Buning uchun dastlab fizikadan kuch bajargan ishni hisoblash formulasini eslaymiz. Biror moddiy nuqtaga $\boldsymbol{f}$ kuch vektori ta’sir etib, uni $\boldsymbol{s}$ vektor bo‘yicha harakatlantirgan bo‘lsin. Bunda kuch va harakat vektorlari orasidagi burchak φ bo‘lsa, unda moddiy nuqtani ko‘chirishda bajarilgan ish $A=|\boldsymbol{f}|\cdot|\boldsymbol{s}|\cdot\cos\varphi$ formula bilan hisoblanadi. Bu formulada $|\boldsymbol{f}|$ – kuch kattaligini, $|\boldsymbol{s}|$ – bosib o‘tilgan masofani ifodalaydi.

<u>1-ТАЪРИФ:</u> Ikkita $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ vektorlarning ***skalyar ko‘paytmasi*** deb ularning modullari bilan ular orasidagi burchak kosinusining ko‘paytmalariga aytiladi.

$\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ vektorlarning skalyar ko‘paytmasi $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{ab}$ yoki $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ kabi belgilanadi va , ta’rifga asosan,

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\varphi \qquad (1)$$

formula bilan aniqlanadi. Bu yerda φ orqali $(0\leq\varphi\leq\pi)$ $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ vektorlar orasidagi burchak belgilangan bo‘lib, u $\boldsymbol{a}$ vektordan $\boldsymbol{b}$ vektorgacha eng qisqa burilish burchagi kabi aniqlanadi. Ikki vektorni (1) ko‘rinishda ko‘paytirish natijasida son, ya’ni skalyar kattalik hosil bo‘ladi va shu sababli $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ vektorlarning skalyar ko‘paytmasi deb ataladi.

Skalyar ko‘paytma ta’rifi bo‘yicha yuqorida ko‘rib o‘tilgan ish formulasini $A=\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{s}$ deb yozish mumkin. Demak, kuch va harakat lektorlarining skalyar ko‘paytmasi bajarilgan ishni ifodalaydi va bu skalyar ko‘paytmani mexanik ma’nosi bo‘ladi.

Skalyar ko‘paytmaning ta’rifidan uning quyidagi xossalari kelib chiqadi:

1. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$, ya’ni skalyar ko‘paytma uchun kommutativlik qonuni bajariladi.
Haqiqatan ham, skalyar ko‘paytma ta’rifini ifodalovchi (1) formulaga asosan

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} =|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\varphi=|\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{a}|\cdot\cos\varphi=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}.$$

2. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|^2$, ya’ni vektorni o‘ziga - o‘zining skalyar ko‘paytmasi (bu ba’zan vektorning skalyar kvadrati deyiladi va $\boldsymbol{a}^2$ kabi belgilanadi) uning moduli kvadratiga teng. Bu xossa ham skalyar ko‘paytma ta’rifini ifodalovchi (1) formuladan bevosita kelib chiqadi:

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{a}|\cdot\cos 0=|\boldsymbol{a}|^2 .$$

3. Ixtiyoriy λ soni uchun $(\lambda\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a}, \lambda\boldsymbol{b})= \lambda(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$.

Dastlab $(\lambda\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a}, \lambda\boldsymbol{b})$ tenglikni o‘rinli ekanligini ko‘rsatamiz. (1) formulaga asosan

$$(\lambda\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})= |\lambda\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\varphi = |\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\varphi = |\boldsymbol{a}|\cdot|\lambda|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\varphi = |\boldsymbol{a}||\lambda\boldsymbol{b}|\cos\varphi= (\boldsymbol{a}, \lambda\boldsymbol{b}).$$

Endi $(\lambda\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})= \lambda(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ tenglikni to‘g‘riligini ko‘rsatamiz. Agar $\lambda\geq 0$ bo‘lsa

$$(\lambda\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})= |\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\varphi =\lambda\cdot|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\varphi= \lambda (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}).$$

Agar $\lambda<0$ bo‘lsa, $\lambda\boldsymbol{a}$ vektor $\boldsymbol{a}$ vektorga qarama-qarshi yo‘nalgan va shu sababli $\lambda\boldsymbol{a}$ bilan $\boldsymbol{b}$ vektor orasidagi burchak $\pi-\varphi$ bo‘ladi. Bu holda $\cos(\pi-\varphi)= -\cos\varphi$ va
$\lambda = -|\lambda|$ bo‘lgani uchun

$$(\lambda\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})= |\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos(\pi-\varphi) =-|\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\varphi= \lambda\cdot|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\varphi= \lambda (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}).$$

Jumladan $\lambda=0$ holda har qanday $\boldsymbol{a}$ vektor uchun $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}\cdot\boldsymbol{a}=0$ natijani olamiz.

4. $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{ac}$, ya’ni vektorlarning skalyar ko‘paytmasi uchun distributivlik qonuni bajariladi.

Bu xossani isbotsiz qabul etamiz.

2-TA’RIF: Agar $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ vektorlar orasidagi burchak $\varphi=90^0$ bo‘lsa, ular ***ortogonal vektorlar*** deyiladi.

Kelgusida $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ vektorlarning orthogonalligini $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ kabi belgilaymiz. Masalan, oldin kiritilgan $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ va $\boldsymbol{k}$ ort vektorlar o‘zaro ortogonal, ya’ni $\boldsymbol{i}\perp\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{i}\perp\boldsymbol{k}$ va $\boldsymbol{j}\perp\boldsymbol{k}$ bo‘ladi.

TEOREMA: Noldan farqli $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ vektorlar ortogonal bo‘lishi uchun ularning skalyar ko‘paytmasi $\boldsymbol{ab}=0$ bo‘lishi zarur va yetarli.

Isbot: Dastlab teorema shartini zaruriyligini ko‘rsatamiz:

$$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b} \Rightarrow \varphi=90^0 \Rightarrow \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos 90^0 = |\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot 0=0;$$

Endi teorema shartini yetarli ekanligini ko‘rsatamiz:

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\varphi=0\ ,\ |\boldsymbol{a}|\neq 0\ ,\ |\boldsymbol{b}|\neq 0 \Rightarrow \cos\varphi=0 \Rightarrow \varphi=90^0 \Rightarrow \boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\,.$$

2.2.Skalyar ko‘paytmaning koordinatalardagi ifodasi. Oldingi mavzuda koordinatalari bilan berilgan vektorlar ustida songa ko‘paytirish, qo‘shish va ayirish amallari oson bajarilishini ko‘rib o‘tgan edik. Endi bu masalani vektorlarning skalyar ko‘paytmasi uchun qaraymiz. Tekislikda koordinatalari bilan berilgan $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1)$ va $\boldsymbol{b}=(x_2, y_2)$ vektorlarning skalyar ko‘paytmasini topamiz. Skalyar ko‘paytmaning 2-xossasi va yuqoridagi teoremadan ortlar uchun ushbu tengliklar o‘rinli ekanligini ko‘ramiz:

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=|\boldsymbol{i}|^2=1,\quad \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=|\boldsymbol{j}|^2=1,\quad \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}=0\,.$$

Endi $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1)$ va $\boldsymbol{b}=(x_2, y_2)$ vektorlarning yoyilmasi hamda skalyar ko‘paytmaning 3 va 4 - xossalaridan foydalanamiz:

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = (x_1\boldsymbol{i}+ y_1\boldsymbol{j})\cdot(x_2\boldsymbol{i}+ y_2\boldsymbol{j})= x_1x_2\,\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+ x_1y_2\,\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j} + y_1x_2\,\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i} + y_1y_2\,\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j} =$$
$$= x_1x_2\cdot 1+ x_1y_2\cdot 0+ y_1x_2\cdot 0+ y_1y_2\cdot 1= x_1x_2+ y_1y_2.$$

Demak

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = x_1y_2+ y_1y_2 \qquad (2)$$

ya’ni vektorlarning skalyar ko‘paytmasi ularning mos koordinatalari ko‘paytmalarining yig‘indisiga teng bo‘ladi.

Masalan, $\boldsymbol{a}=(3,6)$ va $\boldsymbol{b}=(5,-2)$ vektorlarning skalyar ko‘paytmasi

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = x_1y_2+ y_1y_2=3\cdot 5+6\cdot(-2)=15-12=3.$$

Xuddi shunday tarzda fazodagi $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1, z_1)$ va $\boldsymbol{b}=(x_2, y_2, z_2)$ vektorlarning skalyar ko‘paytmasi uchun

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2 \qquad (3)$$

formula o‘rinli bo‘lishini ko‘rsatish mumkin.

2.3. Skalyar ko‘paytmaning tatbiqlari. Endi skalyar ko‘paytmaning tatbiqlari sifatida quyidagi masalalarni ko‘ramiz.

1-masala. Fazoda koordinatalari bilan berilgan $\boldsymbol{a}=(x, y, z)$ vektorning modulini toping.

Yechish. Skalyar ko‘paytmaning 2- xossasiga va (3) formulaga asosan

$$|\boldsymbol{a}|^2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=xx+yy+zz = x^2 +y^2 +z^2 \Rightarrow |\boldsymbol{a}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\ . \qquad (4)$$

Masalan, $\boldsymbol{a}=(3,4,12)$ vektorning moduli

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{3^2+4^2+12^2} = \sqrt{9+16+144} = \sqrt{169} = 13\,.$$

(4) formulada $z=0$ deb tekislikda koordinatalari bilan berilgan $\boldsymbol{a}=(x, y)$ vektorning moduli

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{x^2+y^2}$$

formula bilan hisoblanishini ko‘ramiz.

2-masala. Fazodagi koordinatalari bilan berilgan $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1, z_1)$ va $\boldsymbol{b}=(x_2, y_2, z_2)$ vektorlar orasidagi φ burchakni toping.

Yechish. Skalyar ko‘paytma ta’rifi (1), (3) va (4) formulalarga asosan

$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}\ . \qquad (5)$$

Masalan, $\boldsymbol{a}=(1,0,1)$ va $\boldsymbol{b}=(0,1,1)$ vektorlar orasidagi φ burchak uchun

$$cos\varphi = \frac{1\cdot 0+0\cdot 1+1\cdot 1}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}\sqrt{1^2+0^2+1^2}} = \frac{1}{2}$$

natijani olamiz va undan $\varphi=60^0$ ekanligini topamiz.

(5) formulada $z_1=0$, $z_2=0$ deb tekislikda koordinatalari bilan berilgan $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1)$ va $\boldsymbol{b}=(x_2, y_2)$ vektorlar orasidagi φ burchak

$$cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

formula bilan topilishini ko‘ramiz.

3-masala. $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1, z_1)$ va $\boldsymbol{b}=(x_2, y_2, z_2)$ vektorlarning ortogonallik shartini toping.

Yechish. $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ bo‘lgani uchun ular orasidagi burchak $\varphi=90^0$ bo‘ladi va shu sababli $\cos\varphi=0$. Unda (5) formuladan

$$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2 = 0 \qquad (6)$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu ikki vektorning ortogonallik shartidir.

Masalan, $\boldsymbol{a}=(3,–2,1)$ va $\boldsymbol{b}=(5,7, –1)$ vektorlar ortogonaldir, chunki

$$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2 = 3\cdot5+(–2)\cdot7+1\cdot(–1) = 15–14–1=0.$$

(6) formulada $z_1=0$, $z_2=0$ deb tekislikda koordinatalari bilan berilgan $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1)$ va $\boldsymbol{b}=(x_2, y_2)$ vektorlarning ortogonallik shartini topamiz:

$$x_1x_2+y_1y_2= 0$$

4-masala. Fazodagi $A(x_1,y_1, z_1)$ va $B(x_2, y_2, z_2)$ nuqtalar orasidagi d masofani toping.

Yechish. Bu nuqtalarni kesma bilan tutashtirib, boshi $A(x_1,y_1,z_1)$ nuqtada va uchi $B(x_2, y_2, z_2)$ nuqtada bo‘lgan $\boldsymbol{a}$ vektorni hosil qilamiz. Ma’lumki, bu vektorning koordinatalari uning uchi bilan boshi koordinatalari ayirmasiga teng bo‘ladi, ya’ni $\boldsymbol{a}=(x_2–x_1, y_2–y_1, z_2–z_1)$. Unda $d=|\boldsymbol{a}|$ va, (4) formulaga asosan,

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \qquad (7)$$

tenglikka ega bo‘lamiz.

Masalan, A(5, –3,1) va B(8,1,13) nuqtalar orasidagi masofa

$$d = \sqrt{(8-5)^2 + (1-(-3))^2 + (13-1)^2} = \sqrt{9+16+144} = \sqrt{169} = 13$$

bo‘ladi.

(7) formulada $z_1=0$, $z_2=0$ deb tekislikda koordinatalari bilan berilgan $A(x_1, y_1)$ va $B(x_2, y_2)$ nuqtalar orasidagi d masofa uchun

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

formula o‘rinli bo‘lishini ko‘ramiz.

XULOSA

Vektorlarning skalyar ko‘paytma tushunchasi kuch bajargan ish qiymatini hisoblash masalasidan kelib chiqadi. Skalyar ko‘paytma kommutativlik va distributivlik qonunlariga bo‘ysunadi. Skalyar ko‘paytmani vektorlarning koordinatalari yordamida hisoblash juda qulay. Skalyar ko‘paytma yordamida vektorlarning modulini topish, ular orasidagi burchakni aniqlash, ikki vektorning ortogonallik shartini ifodalash kabi masalalar oson yechiladi. Skalyar ko‘paytma iqtisodiy masalalarni yechishda ham keng qo‘llaniladi.

Tayanch iboralar

* Skalyar ko‘paytma * Skalyar ko‘paytmaning mexanik ma’nosi * Ortogonal vektorlar * Vektorlarning ortogonallik sharti .

Takrorlash uchun savollar

1. Vektorlarning skalyar ko‘paytmasi qanday aniqlanadi?

2. Vektorlar skalyar ko‘paytmasining mexanik ma’nosi nimadan iborat?
3. Skalyar ko‘paytma qanday xossalarga ega?
4. Qanday vektorlar ortogonal vektorlar deyiladi?
5. Vektorlar ortogonalligining zaruriy va yetarli sharti nimadan iborat?
6. Skalyar ko‘paytma vektorlarning koordinatalari orqali qanday ifodalanadi?
7. Ikki vektor orasidagi burchak qanday topiladi?
8. Ikki vektorning ortogonallik sharti koordinatalarda qanday ifodalanadi?
9. Ikki nuqta orasidagi masofa qanday topiladi ?

7 § VEKTORLARNING VEKTOR KO’PAYTMASI, ARALASH KO’PAYTMASI, XOSSALARI. VEKTORLAR ALGEBRASINING AMALIY QO’LLANISHI.

- ***Vektorial ko‘paytma va uning xossalari.***
- ***Vektorial ko‘paytmaning koordinatalardagi ifodasi.***
- ***Vektorial ko‘paytmaning tatbiqlari.***

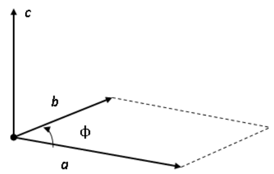
3.1. Vektorial ko‘paytma va uning xossalari. Ikkita ***a*** va ***b*** vektorlarning skalyar ko‘paytmasi natijasida son hosil bo‘lishini ko‘rib o‘tdik. Endi bu vektorlarning shunday ko‘paytmasini aniqlaymizki, natijada yana vektor hosil bo‘lsin.

1-TA’RIF: Fazodagi ***a*** va ***b*** vektorlarning ***vektorial ko‘paytmasi*** deb, quyidagi uchta shart bilan aniqlanuvchi yangi ***c*** vektorga (17-rasmga qarang) aytiladi:

1. ***c*** vektorning moduli ***a*** va ***b*** vektorlarga qurilgan parallelogramm yuziga teng bo‘lib, $|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\varphi$ formula bilan aniqlanadi. Bunda φ berilgan ***a*** va ***b*** vektorlar orasidagi burchakni ifodalaydi.

2. ***c*** vektor ***a*** va ***b*** vektorlar yotgan tekislikka perpendikulyar, ya’ni $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$ bo‘ladi .

3. ***c*** vektor shunday yo‘nalganki, uning uchidan qaraganda ***a*** vektordan ***b*** vektorga eng qisqa burilish soat mili harakatiga teskari bo‘ladi.



17-rasm

a va ***b*** vektorlarning vektorial ko‘paytmasi $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ yoki $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ kabi belgilanadi.

Vektorial ko‘paytma ta’rifi fizikadan kuch tushunchasi bilan bog‘liq masaladan kelib chiqqan. Agar radius vektori ***r*** bo‘lgan moddiy A nuqtaga ***f*** kuch ta’sir etayotgan bo‘lsa, unda $\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{r}$ vektorial ko‘paytma ***f*** kuchni A nuqtaga nisbatan momentini ifodalaydi.

Vektorial ko‘paytma xossalari bilan tanishamiz.

1. Vektorial ko‘paytmada ko‘paytuvchilar o‘rni almashsa, natijada faqat ishora o‘zgaradi, ya’ni

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}.$$

Bu tasdiq vektorial ko‘paytma ta’rifining 3-shartidan bevosita kelib chiqadi. Demak, vektorial ko‘paytma uchun kommutativlik qonuni bajarilmaydi.

2. Vektorial ko‘paytmada o‘zgarmas λ ko‘paytuvchini tashqariga chiqarish mumkin, ya’ni

$$[\lambda\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]=[\boldsymbol{a},\lambda\boldsymbol{b}]=\lambda[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}].$$

Jumladan, $\lambda=0$ holda har qanday $\boldsymbol{a}$ vektor uchun $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{0}]=[\boldsymbol{0},\boldsymbol{a}]=\boldsymbol{0}$ ekanligini ko'ramiz.

3. Vektorial ko'paytma uchun taqsimot qonuni o'rinli, ya'ni

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}.$$

4. Agar $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ kollinear vektorlar bo'lsa, ularning vektorial ko'paytmasi $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ bo'ladi. Aksincha noldan farqli $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ vektorlar uchun $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ bo'lsa, bu vektorlar kollinear bo'ladi.

Isbot: 1) $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ kollinear vektorlar bo'lsin. Bu holda ular orasidagi burchak $\varphi=0$ yoki $\varphi=\pi$ va shu sababli $\sin\varphi=0$ bo'ladi. Unda vektorial ko'paytma ta'rifining 1-shartiga asosan

$$|\,\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\,|=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\sin\varphi=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot 0=0 \Rightarrow \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}.$$

2) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ va $|\boldsymbol{a}|\neq 0$, $|\boldsymbol{b}|\neq 0$ bo'lsin. Unda

$$|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\sin\varphi=|\,\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\,|=0 \Rightarrow \sin\varphi=0 \Rightarrow \varphi=0 \text{ yoki } \varphi=\pi.$$

Bundan $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ kollinear vektorlar ekanligi kelib chiqadi.

Natija: Ixtiyoriy $\boldsymbol{a}$ vektor uchun $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ bo'ladi.

Misol: $(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\times(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ ko'paytmani soddalashtiring.

Yechish: Vektorial ko'paytmaning ko'rib o'tilgan xossalariga asosan

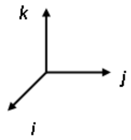
$(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\times(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=2\cdot\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}-4\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}-2\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}=2\cdot\boldsymbol{0}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+4\cdot\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}-2\cdot\boldsymbol{0}=5\cdot\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}.$

3.2. Vektorial ko'paytmaning koordinatalardagi ifodasi. Endi fazoda koordinatalari bilan berilgan $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$ va $\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$ vektorlarning vektorial ko'paytmasini topish masalasi bilan shug'ullanamiz. Dastlab $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ va $\boldsymbol{k}$ ortlarning vektorial ko'paytmalarini hisoblaymiz. Vektorial ko'paytmaning 4-xossasidan kelib chiqqan natijaga asosan

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}.$$

Vektorial ko'paytma va ortlar ta'riflaridan (18-rasm) quyidagi tengliklar kelib chiqadi:

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}.$$



Yuqoridagi natijalarni 18-rasmdan topish uchun vektorial ko'paytmadagi ikkinchi ko'paytuvchidan soat miliga teskari yo'nalishda burilib, vektorial ko'paytmani topamiz. Masalan, $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}$ ko'paytmani topish uchun $\boldsymbol{j}$ ortdan soat miliga teskari yo'nalishda burilib, $\boldsymbol{k}$ ort vektorga kelamiz.

Vektorial ko'paytmaning 1- xossasiga binoan

$$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j}$$

tengliklarni olamiz. Bu natijalarni yuqoridagi rasmda soat mili bo'yicha burilib topishimiz mumkin.

Yuqoridagi ortlar uchun tengliklar va vektorial ko'paytma xossalaridan foydalanib ushbu natijaga kelamiz:

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\times(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})=x_1x_2\,\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}+x_1y_2\,\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}+x_1z_2\,\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}+$

$+y_1x_2\,\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}+y_1y_2\,\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}+y_1z_2\,\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}+z_1x_2\,\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}+z_1y_2\,\boldsymbol{k}\times c\boldsymbol{j}+z_1z_2\,\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=$

$=x_1y_2\,\boldsymbol{k}-x_1z_2\,\boldsymbol{j}-y_1x_2\,\boldsymbol{k}+y_1z_2\,\boldsymbol{i}+z_1x_2\,\boldsymbol{j}-z_1y_2\,\boldsymbol{i}=$

$=(y_1z_2-z_1y_2)\boldsymbol{i}+(z_1x_2-x_1z_2)\,\boldsymbol{j}+(x_1y_2-y_1x_2)\,\boldsymbol{k}=(y_1z_2-z_1y_2\,,\,z_1x_2-x_1z_2,\,x_1y_2-y_1x_2).$

Demak, $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$ va $\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$ vektorlarning vektorial ko‘paytmasi $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(x, y, z)$ koordinatalari

$$x=y_1z_2-z_1y_2, \quad y=z_1x_2-x_1z_2, \quad z=x_1y_2-y_1x_2$$

formulalar bilan topiladi. Ammo bu formulalarni esda saqlab qolish oson emas. Shu sababli bu natijalarni qulayroq ko‘rinishda yozish maqsadida koordinatalar uchun topilgan natijalarni ikkinchi tartibli determinantlar orqali ifodalaymiz:

$$x=y_1z_2-z_1y_2=\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}; \quad y=z_1x_2-x_1z_2=-\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}; \quad z=x_1y_2-y_1x_2=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}; \qquad (1)$$

Laplas teoremasidan foydalanib, ushbu uchinchi tartibli determinantga kelamiz:

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}=\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\mathrm{i}-\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}\mathrm{j}+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\mathrm{k}=\begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Demak, $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$ va $\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$ vektorlarning vektorial ko‘paytmasini determinant orqali

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \qquad \mathbf{(2)}$$

formula bilan topish mumkin.

Misol: $\boldsymbol{a}=(2; 3; -1)$ va $\boldsymbol{b}=(3; -1; -4)$ vektorlarning vektorial ko‘paytmasini toping.

Yechish: (2) formulaga asosan

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix}=-13\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}-11\boldsymbol{k}=(-13, 5, -11). \qquad (3)$$

3.3. Vektorial ko‘paytmaning tatbiqlari. Endi vektorial ko‘paytmaning tatbiqlari sifatida quyidagi masalalarni yechamiz.

1-masala. $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1, z_1)$ va $\boldsymbol{b}=(x_2, y_2, z_2)$ vektorlardan hosil qilingan parallelogramm yuzini toping.

Yechish: Vektorial ko‘paytma ta’rifining 1-sharti va (1) formulaga asosan parallelogramm yuzi S quyidagicha topiladi:

$$S=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2} \qquad (4)$$

Misol: $\boldsymbol{a}=(2; 3; -1)$ va $\boldsymbol{b}=(3; -1; -4)$ vektorlarga yasalgan parallelogramm yuzasini toping.

Yechish: Bunda (3) tenglikdan $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-13\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}-11\boldsymbol{k}=(-13, 5, -11)$ ekanligi ma’lum. Shu sababli (4) formulaga asosan

$$S=\sqrt{(-13)^2+5^2+(-11)^2}=\sqrt{169+25+121}=\sqrt{315}=3\sqrt{35}$$

Natija. $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ vektorlardan yasalgan uchburchakning yuzi

$$S_{\Delta}=\frac{1}{2}|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2} \qquad (5)$$

formula bilan topiladi.

2-masala. $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1, z_1)$ va $\boldsymbol{b}=(x_2, y_2, z_2)$ vektorlarning kollinearlik shartini toping.

Yechish: Oldin ko'rilgan vektorial ko'paytmaning 4-xossasiga asosan $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$ va $\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$ vektorlar kollinear bo'lishi uchun ularning vektorial ko'paytmasi $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$ bo'lishi kerak. Unda (1) formuladan quyidagi tengliklar kelib chiqadi:

$$x = y_1z_2 - z_1y_2 = 0\,; \quad y = z_1x_2 - x_1z_2 = 0\,; \quad z = x_1y_2 - y_1x_2 = 0 \Rightarrow \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2};\ \frac{x_1}{x_2} = \frac{z_1}{z_2};\ \frac{y_1}{y_2} = \frac{x_1}{x_2} \quad \Rightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}.$$

Demak, $a=(x_1,y_1,z_1)$ **va** $b=(x_2,y_2,z_2)$ **vektorlar kollinear bo'lishi uchun**

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} \qquad \textbf{(6)}$$

shart bajarilishi, ya'ni ularning mos koordinatalari proporsional bo'lishi kerak.

Misol: $\boldsymbol{a}=(m,3,2)$ va $\boldsymbol{b}=(4,6,n)$ vektorlar m va n parametrlarning qanday qiymatlarida kollinear bo'lishini aniqlang.

Yechish: (6) kollinearlik shartiga asosan

$$\frac{m}{4} = \frac{3}{6} = \frac{2}{n} \Rightarrow m = 2, n = 4.$$

XULOSA

Vektorlarning skalyar ko'paytmasi natijasida son hosil bo'ladi. Ammo fizika, mexanikaning bir qator masalalarida ikkita vektorning shunday ko'paytmasini kiritishga to'g'ri keladiki, ko'paytmada vektor hosil bo'lishi kerak. Shu sababli vektorlarning vektorial ko'paytmasi tushunchasi kiritilgan. Bu ko'paytma uchun kommutattivlik qonuni bajarilmasada, distributivlik qonuni o'z kuchini saqlab qoladi. Vektorial ko'paytma koordinatalar orqali III tartibli determinant yordamida algebraik usulda ham topilishi mumkin. Vektorial ko'paytma orqali vektorlarning kollinearlik sharti oddiy ko'rinishda ifodalanadi.

Tayanch iboralar

* Vektorial ko'paytma * Vektorial ko'paytmaning mexanik ma'nosi
* Vektorial ko'paytmaning xossalari * Vektorial ko'paytmaning koordinatalardagi ifodasi
*Vektorlarning kollinearlik sharti

Takrorlash uchun savollar

1. Vektorial ko'paytma qanday ta'riflanadi?
2. Vektorial ko'paytmaning mexanik ma'nosi nimadan iborat?
3. Vektorial ko'paytma qanday xossalarga ega?
4. Ortlarning vektorial ko'paytmasi qanday topiladi?
5. Vektorial ko'paytma koordinatalarda qanday ifodalanadi?
6. Ikkita vektordan hosil qilingan parallelogramm va uchburchak yuzalari qanday topiladi?
7. Vektorlarning kollinearlik sharti nimadan iborat?

VEKTORLARNING ARALASH KO'PAYTMASI, UNING XOSSALARI VA TATBIQLARI

- ***Vektorlarning aralash ko'paytmasi va uning xossalari.***
- ***Aralash ko'paytmaning koordinatalardagi ifodasi.***
- ***Aralash ko'paytmaning tatbiqlari.***

4.1. Vektorlarning aralash ko‘paytmasi va uning xossalari. Uchta ***a, b, c*** vektorlarni o‘zaro ko‘paytirish masalasini ko‘raylik. Agar ***a*** ва ***b*** vektorlarni skalyar ko‘paytirib, natijada hosil bo‘lgan sonni ***c*** vektorga ko‘paytirsak, u holda ***c*** vektorga kollinear vektor hosil bo‘ladi. Agarda birinchi ikkita vektorni vektorial ko‘paytirib, natijada hosil bo‘lgan vektorni uchinchi ***c*** vektorga yana vektorial ko‘paytirsak, unda yangi bir ***d*** vektor hosil qilamiz. Bundan tashqari uchta vektorni quyidagi usulda ham ko‘paytirish mumkin.

<u>1-TA’RIF:</u> ***a, b, c*** vektorlarning ***aralash ko‘paytmasi*** deb dastlabki ikkita vektorlarning ***a×b*** vektorial ko‘paytmani uchinchi ***c*** vektorga skalyar ko‘paytmasi kabi aniqlanadigan songa aytiladi.

a, b, c vektorlarning aralash ko‘paytmasi ***abc*** kabi belgilanadi va , ta’rifga asosan, ushbu ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\boldsymbol{abc} = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} \qquad (1)$$

Bu yerda ham vektorial, ham skalyar ko‘paytma qatnashgani uchun (1) aralash ko‘paytma deb atalgan.

Aralash ko‘paytmaning geometrik ma’nosini ko‘rib o‘taylik. Buning uchun komplanar bo‘lmagan ***a, b, c*** vektorlarni qaraylik. Ma’lumki, ***a×b*** uzunligi ***a*** va ***b*** vektorlardan tuzilgan parallelogrammning yuzasiga teng va parallelogramm tekisligiga perpendikulyar yo‘nalgan vektordan iborat bo‘ladi. Agar ***a×b*** vektorga ***c*** vektorni proyeksiyalasak, u holda shu proyeksiya parallelogramm tekisligiga perpendikulyar bo‘lib, uning moduli ***a, b, c*** vektorlarga qurilgan parallelepiped balandligi H qiymatini ifodalaydi. Unda bu parallelopiped hajmi uchun

$$V=S_{asos}\cdot H= |(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{abc}| \qquad (2)$$

formulaga ega bo‘lamiz. Shunday qilib, ***abc*** aralash ko‘paytmaning absolut qiymati ***a, b, c*** vektorlarga qurilgan parallelepiped hajmini ifodalar ekan.

Endi aralash ko‘paytmaning xossalarini ko‘rib o‘tamiz:

❖ Aralash ko‘paytmada vektorial va skalyar ko‘paytma amallari o‘rnini almashtirish mumkin, ya’ni

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) .$$

Shu sababli aralash ko‘paytmada amallarni ko‘rsatmasdan, qisqacha ***abc*** kabi yozish mumkin.

❖ Aralash ko‘paytmada ko‘paytuvchilar o‘rnini soat miliga teskari yo‘nalish bo‘yicha doiraviy ravishda almashtirilsa, uning qiymati o‘zgarmasdan qoladi, ya’ni

$$\boldsymbol{abc} = \boldsymbol{cab} = \boldsymbol{bca} = \boldsymbol{abc}.$$

Bunga aralash ko‘paytmaning aylanma xossasi deb aytiladi.

❖ Aralash ko‘paytmada yonma – yon turgan vektorlarning o‘rni almashtirilsa, uning ishorasi qarama-qarshisiga o‘zgaradi, ya’ni

$$\boldsymbol{abc} = -\,\boldsymbol{bac} = \boldsymbol{bca} = -\,\boldsymbol{cba}.$$

Skalyar (vektorial) ko‘paytmani qaysi hollarda nolga (nol vektorga) teng bo‘lishini tahlil qilgan edik. Bu savolni endi aralash ko‘paytma uchun ko‘rib chiqaylik. Aralash ko‘paytma quyidagi hollarda nolga teng bo‘ladi:

1) ko‘paytuvchi vektorlardan kamida bittasi nol vektor;
2) ko‘paytuvchi vektorlardan kamida ikkitasi kollinear;
3) ko‘paytuvchi vektorlar komplanar bo‘lsa.

Birinchi holda aralash ko‘paytmaning nol bo‘lishi o‘z–o‘zidan kelib chiqadi. Ikkinchi holda, ya’ni ikkita vektor kollinear bo‘lsa, unda ularning vektorial ko‘paytmasi nol va shu sababli aralash ko‘paytma ham nolga teng bo‘ladi. Uchinchi holda ***a×b*** va ***c*** vektorlar perpendikulyar bo‘ladi va shu tufayli ularning skalyar ko‘paytmasi, ya’ni aralash ko‘paytma nolga teng bo‘ladi.

Natijada quyidagi tasdiqni olamiz:

TEOREMA. Noldan farqli uchta vektorning komplanar bo‘lishi uchun ularning aralash ko‘paytmasi nolga teng bo‘lishi zarur va yetarlidir.

4.2. Aralash ko‘paytmaning koordinatalardagi ifodasi. Endi koordinatalari bilan berilgan uchta $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1, z_1)$, $\boldsymbol{b}=(x_2, y_2, z_2)$ va $\boldsymbol{c}=(x_3, y_3, z_3)$ vektorlarning aralash ko‘paytmasini hisoblash formulasini keltirib chiqaramiz. Vektorial ko‘paytmani hisoblash formulasidagi determinantni Laplas teoremasiga asosan birinchi satr bo‘yicha yoyilmasini qaraymiz:

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\mathrm{i}-\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}\mathrm{j}+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\mathrm{k}=\mathrm{Xi}+\mathrm{Yj}+\mathrm{Zk}.$$

Skalyar ko‘paytmani hisoblash formulasi va yuqoridagi tenglikka hamda determinantning satr bo‘yicha yoyilmasiga asosan

$$\boldsymbol{abc}=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = \mathrm{X}x_3+\mathrm{B}\,y_3+\mathrm{C}\,z_3=\begin{vmatrix} x_3 & y_3 & z_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \quad (3)$$

Demak, ***abc*** aralash ko‘paytma birinchi, ikkinchi va uchinchi satrlari mos ravishda ***a, b*** va ***c*** vektorlarning koordinatalaridan tuzilgan III tartibli determinant kabi hisoblanadi.

Masalan, $\boldsymbol{a}=(3,1,-2)$, $\boldsymbol{b}=(4,0,1)$, $\boldsymbol{c}=(0,2,-1)$ vektorlarning aralash ko‘paytmasini (3) formula bo‘yicha topamiz:

$$\boldsymbol{abc}=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}=-18.$$

4.3. Aralash ko‘paytmaning tatbiqlari. Aralash ko‘paytmaning tatbiqlari sifatida quyidagi masalalarni qaraymiz.

1-masala: Koordinatalari bilan berilgan uchta $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1, z_1)$, $\boldsymbol{b}=(x_2, y_2, z_2)$ va $\boldsymbol{c}=(x_3, y_3, z_3)$ vektorlarning komplanarlik shartini toping.

Yechish: Yuqorida ko‘rib o‘tilgan teorema va (3) formulaga asosan bu vektorlarning komplanar bo‘lishi uchun

$$\boldsymbol{abc}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=0 \quad (4)$$

shart bajarilishi zarur va yetarli.

Misol: $\boldsymbol{a}=(m,-12,-2)$, $\boldsymbol{b}=(0,m,1)$ va $\boldsymbol{c}=(1,2,3)$ vektorlar m parametrning qanday qiymatlarida komplanar bo‘lishini toping .

Yechish: Komplanarlikning kordinatalardagi (4) shartiga asosan

$$\boldsymbol{abc}=\begin{vmatrix} m & -12 & -2 \\ 0 & m & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow 3m^2-12+2m-2m=0 \Rightarrow m^2=4 \Rightarrow m=\pm 2.$$

2-masala: Koordinatalari bilan berilgan uchta $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1, z_1)$, $\boldsymbol{b}=(x_2, y_2, z_2)$ va $\boldsymbol{c}=(x_3, y_3, z_3)$ vektorlardan yasalgan parallelepipedning V hajmini toping.

Yechish: Aralash ko‘paytmaning geometrik ma’nosini ifodalovchi (2) tenglik va (3) formulaga asosan

$$\mathrm{V}=|\,\boldsymbol{abc}\,|=\pm\,\boldsymbol{abc}=\pm\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \quad (5)$$

Misol: $\boldsymbol{a}=(3,-1,2)$, $\boldsymbol{b}=(0,3,1)$ va $\boldsymbol{c}=(1,2,3)$ vektorlardan yasalgan parallelepipedning V hajmini toping.

Yechish: (5) formulaga binoan

$$V=\begin{vmatrix}3 & -1 & 2\\ 0 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=14.$$

3-masala: Koordinatalari bilan berilgan uchta $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1, z_1)$, $\boldsymbol{b}=(x_2, y_2, z_2)$ va $\boldsymbol{c}=(x_3, y_3, z_3)$ vektorlardan tuzilgan piramidaning V hajmini toping.

Yechish: Berilgan ***a*** , ***b*** va ***c*** vektorlardan tuzilgan piramidaning asosidagi ***a*** va ***b*** vektorlar hosil qilgan uchburchak yuzasini S, balandligini h va hajmini V deb olsak, V=Sh ⁄ 3 tenglik o‘rinli bo‘ladi. Shu vektorlardan tuzilgan parallelepiped asosining yuzasi 2S, balandligi esa h bo‘ladi. Bu parallelepiped hajmini V_0 deb olsak, $V_0=2Sh=|\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}|$ bo‘ladi.

Bu holda piramida hajmi

$$V = V_0/6 = |\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}|/6 = \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix} \qquad (6)$$

formula bilan hisoblanadi.

4-masala: Fazodagi to‘rtta $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ va $M_4(x_4, y_4, z_4)$ nuqtalarni bir tekislikda yotish shartini toping.

Yechish: M_1, M_2, M_3 va M_4 nuqtalar bir tekislikda yotishi uchun

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1),\quad \overrightarrow{M_1M_3}=(x_3-x_1, y_3-y_1, z_3-z_1),\quad \overrightarrow{M_1M_4}=(x_4-x_1, y_4-y_1, z_4-z_1)$$

vektorlarni komplanar bo‘lishi zarur va yetarli. Shu sababli, (4) formulaga asosan,bu to‘rtta nuqtani bir tekislikda yotishi uchun

$$\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1\end{vmatrix}=0 \qquad (7)$$

shart bajarilishi zarur va yetarlidir.

Misol: $M_1(1,m,-1)$, $M_2=(0,1,2m+1)$, $M_3=(-1,m,1)$ va $M_4=(2,1,3)$ nuqtalar m parametrning qanday qiymatlarida bir tekislikda joylashgan bo‘lishini toping.

Yechish: (7) shartdan foydalanib, ushbu natijani olamiz:

$$\begin{vmatrix}-1 & 1-m & 2(m+1)\\ -2 & 0 & 2\\ 1 & 1-m & 4\end{vmatrix}=0\Rightarrow 4(1-m)(2-m)=0\Rightarrow m_1=1,\ m_2=2.$$

Demak, $m=1$ yoki $m=2$ bo‘lganda yuqoridagi to‘rtta nuqta bir tekislikda yotadi va ular

$M_1(1,1,-1)$, $M_2=(0,1,3)$, $M_3=(-1,1,1)$, $M_4=(2,1,3)$

yoki

$M_1(1,2,-1)$, $M_2=(0,1,5)$, $M_3=(-1,2,1)$, $M_4=(2,1,3)$

ko‘rinishda bo‘ladi.

XULOSA

Skalyar va vektortal ko‘paytmalar ikkita vektor uchun aniqlanadi. Uchta vektorning ko‘paytmasi tushunchasini kiritish uchun ularning dastlabki ikkitasi vektorial ko‘paytirilib, hosil bo‘lgan natija bilan uchinchisi skalyar ko‘paytiriladi. Natijada hosil bo‘lgan son uch vektorning aralash ko‘paytmasi deyiladi. Aralash ko‘paytma qiymati uchala vektorlarning koordinatalaridan hosil qilingan III tartibli determinantni hisoblash orqali topilishi mumkin. Aralash ko‘paytma yordamida vektorlarning komplanarlik shartini aniqlash, qirralari berilgan uchta vektordan iborat parallelepipedning hajmini hisoblash, to‘rtta nuqtani bir tekislikda yotishini aniqlash kabi masalalar oson yechiladi.

Tayanch iboralar

* Aralash ko‘paytma * Aralash ko‘paytmaning geometrik ma’nosi * Aralash ko‘paytmaning xossalari * Aralash ko‘paytmaning koordinatalardagi ifodasi

* Uch vektorning komplanarlik sharti

Takrorlash uchun savollar

1. Vektorlarning aralash ko‘paytmasi qanday aniqlanadi ?
2. Aralash ko‘paytmaning geometrik ma’nosi nimadan iborat ?
3. Aralash ko‘paytma natijasida qanaqa kattalik hosil bo‘ladi ?
4. Aralash ko‘paytma qanday xossalarga ega?
5. Qanday vektorlar komplanar deyiladi ?
6. Uchta vektor komplanarligining zaruriy va yetarli sharti nimadan iborat ?
7. Aralash ko‘paytma koordinatalar orqali qanday topiladi?
8. Uchta komplanar bo‘lmagan vektordan hosil qilingan parallelepiped hajmi qaysi formula bilan topiladi?
9. Uchta komplanar bo‘lmagan vektorga yasalgan piramida (tetraedr) hajmi qaysi formula bilan hisoblanadi ?
10. Uchta vektorning komplanarlik sharti koordinatalar orqali qanday ifodalanadi ?
11. Fazodagi to‘rtta nuqta qaysi shartda bir tekislikda yotadi?

TEKISLIKDA ANALITIK GEOMETRIYA

8 § TEKISLIKDA TO’G’RI CHIZIQNING UMUMIY TENGLAMASI VA UNING TURLI XUSUSIY KO’RINISHLARI.

- *Tekislikda analitik geometriya predmeti va asosiy masalalari.*
- *Tekislikdagi to‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi.*
- *Tekislikdagi to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasi.*
- *Tekislikdagi to‘g‘ri chiziqning kesmalardagi tenglamasi.*
- *Tekislikdagi to‘g‘ri chiziqning normal tenglamasi.*
- *Tekislikdagi to‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasi.*
- *Tekislikdagi to‘g‘ri chiziqning parametrik tenglamasi.*

1.1. Tekislikda **a**nalitik geometriya predmeti va asosiy masalalari. Tekislikda Dekart koordinatalar sistemasi kiritilgan bo‘lsin. Bu holda tekislikdagi har bir M nuqta uning *koordinatalari* deb ataladigan (x,y) sonlar juftligi bilan to‘liq aniqlanishi va $M(x,y)$ kabi yozilishi oldin (III bob, §2) aytib o‘tilgan edi. Tekislikdagi har bir geometrik obyektni (chiziq, geometrik figura va boshqalar) nuqtalar to‘plami kabi qarash mumkin. Bunda M nuqta biror chiziqqa tegishli bo‘lishi uchun ma’lum bir shartni qanoatlantirishi kerak. Bu shart matematik ko‘rinishda M nuqtaning koordinatalari orqali biror

$$F(x,y)=0 \qquad (*)$$

tenglama bilan ifodalanadi deb hisoblaymiz.

__1-TA‘RIF:__ Agar (*) tenglamani faqat tekislikdagi biror L chiziqqa tegishli $M(x,y)$ nuqtalarning koordinatalari qanoatlantirsa, u shu *chiziq tenglamasi* deb ataladi.

Agarda $M_0(x_0,y_0)$ nuqta uchun $F(x_0,y_0) = 0$ shart bajarilsa (tenglama qanoatlantirilsa), M_0 nuqta shu tenglama bilan aniqlanadigan chiziqqa tegishli, aks holda esa tegishli bo‘lmaydi. Shunday qilib tekislikdagi chiziq o‘zining tenglamasi bilan to‘liq aniqlanadi. Ammo har qanday tenglama ham biror chiziqni ifodalashi shart emas. Masalan, $x^2+ y^4=0$ tenglamani faqat bitta O(0,0) nuqta koordinatalari qanoatlantiradi va shu sababli bu tenglama chiziqni ifodalamaydi. Shuningdek, $x^2+y^2+1=0$ tenglamani tekislikdagi birorta ham nuqtaning koordinatalari qanoatlantirmaydi va u bo‘sh to‘plamni ifodalaydi.

__2-TA‘RIF:__ Tekislikdagi chiziqlarni ularning tenglamalari orqali o‘rganuvchi matematik fan *analitik geometriya* deb ataladi.

Analitik geometriya asoschisi bo‘lib farang matematigi va faylasufi Rene Dekart hisoblanadi. U kiritgan koordinatalar sistemasi orqali geometrik tushuncha bo‘lgan M nuqta va algebraik tushuncha bo‘lgan sonlar juftligi (x,y) orasida o‘zaro bir qiymatli moslik o‘rnatildi.

Bu bilan matematikaning ikkita bo‘limi bo‘lmish algebra va geometriya orasida bog‘lanish hosil etildi. Natijada tekislikdagi bir qator geometrik masalalarni algebraik va aksincha, bir qator algebraik masalalarni geometrik usullar bilan oson yechilishiga erishildi.

Tekislikdagi analitik geometriyada asosan ikkita masala qaraladi:

- Berilgan chiziqning tenglamasini topish va bu tenglama asosida uni analitik o‘rganish.
- Berilgan tenglamaga mos keluvchi chiziqni aniqlash.

Masala: Markazi M(a,b) nuqtada joylashgan R radiusli aylana tenglamasini toping.

Yechish: N(x,y) shu aylanada joylashgan ixtiyoriy nuqta bo‘lsin. Bizga maktabdan tanish bo‘lgan aylana ta’rifiga asosan u |MN|=R shartni qanoatlantiruvchi nuqtalar to‘plamidan (geometrik o‘rnidan) iborat. Unda ikki nuqta orasidagi masofa (III bob,§2, (7)) formulasiga ko‘ra aylananing ushbu tenglamasini hosil etamiz:

$$|MN| = R \Rightarrow \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = R \Rightarrow (x-a)^2+(y-b)^2 = R^2 \ . \qquad (1)$$

Masalan, markazi M(2,3) nuqtada joylashgan va radiusi R=5 bo‘lgan aylana $(x–2)^2 + (y–3)^2 = 25$ tenglamaga ega bo‘ladi. Bu yerdan N(5,7) nuqta shu aylanaga tegishli ekanligi kelib chiqadi, chunki $(5–2)^2 + (7–3)^2 = 25$. K(2,6) nuqta aylanada yotmaydi, chunki uning koordinatalari aylananing tenglamasini qanoatlantirmaydi:

$$(2–2)^2 + (6–3)^2 = 9\neq 25.$$

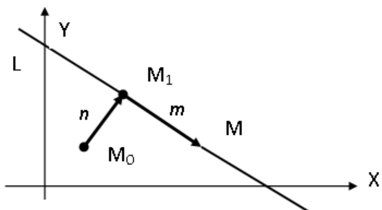
1.2. Tekislikdagi to‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi. To‘g‘ri chiziq geometriyaning boshlang‘ich tushunchalaridan biri bo‘lib, u ta’rifsiz qabul etiladi.

TEOREMA: Tekislikdagi har qanday L to‘g‘ri chiziq tenglamasi

$$Ax+By+C=0\ ,\ A^2+B^2\neq 0 \qquad (2)$$

ko‘rinishda, ya’ni I tartibli tenglamadan iborat bo‘ladi. Aksincha, har qanday I tartibli (2) tenglama tekislikda biror to‘g‘ri chiziqni ifodalaydi.

Isbot: Dastlab teoremaning birinchi qismini o‘rinli ekanligini ko‘rsatamiz. Buning uchun tekislikning berilgan L to‘g‘ri chiziqqa tegishli bo‘lmagan ixtiyoriy bir M_0 nuqtasini olamiz (19-rasmga qarang).



19-rasm

Bu nuqtadan L to‘g‘ri chiziqqa perpendikular o‘tkazamiz va ularning kesishish nuqtasini $M_1(x_1,y_1)$ deb belgilaymiz. Boshi M_0 , uchi esa M_1 nuqtada bo‘lgan $n\neq 0$ vektorni kiritamiz va uning koordinatalarini A va B, ya’ni n=(A,B) deb olamiz. Endi L to‘g‘ri chiziqda yotuvchi ixtiyoriy bir M(x,y) nuqtani olamiz va boshi $M_1(x_1,y_1)$, uchi esa M(x,y) nuqtada joylashgan $m=(x–x_1,\ y–y_1)$ vektorni qaraymiz. Bunda M(x,y) nuqta L to‘g‘ri chiziqda yotsa va faqat su holda n va m vektorlar ortogonal bo‘ladi. Vektorlarning ortogonallik shartini koordinatalardagi ifodasidan (III bob,§2) foydalanib, quyidagi natijalarni olamiz:

$$n\cdot m=A(x–x_1)+B(y–y_1)=0 \Rightarrow Ax+By+(–Ax_1 – By_1)=0 \Rightarrow Ax+By+C=0.$$

Bunda $n\neq 0$ ekanligidan $|n|^2=A^2+B^2\neq 0$ bo‘lishi kelib chiqadi.

Endi teoremaning ikkinchi qismini isbotlaymiz, ya’ni (2) tenglama to‘g‘ri chiziqni ifodalashini ko‘rsatamiz. Buning uchun (2) tenglamani quyidagi ko‘rinishda yozamiz:

$$Ax+By+C= Ax+B(y+C/B)=0 \Rightarrow A(x–0)+B(y– (–C/B))=0 \Rightarrow A(x–x_1)+B(y–y_1)=0.$$

Bunda $x_1=0$, $y_1=–C/B$ belgilash kiritildi. Agar n=(A,B) va $m=(x–x_1,\ y–y_1)$ vektorlarni qarasak, oxirgi tenglikdan $n\cdot m=0$, ya’ni bu vektorlar orthogonal ekanligi kelib chiqadi. n=(A,B) vektorga orthogonal bo‘lgan barcha $m=(x–x_1,\ y–y_1)$ vektorlarning M(x,y) uchlari bir to‘g‘ri chiziqda yotadi. Demak, (2) tenglama $M_1(0,\ –C/B)$ nuqtadan o‘tuvchi va n=(A,B) vektorga nisbatan perpendikular joylashgan to‘g‘ri chiziqni ifodalar ekan.

3-TA'RIF: (2) tenglama tekislikdagi to‘g‘ri chiziqning *umumiy tenglamasi* deb ataladi. Unda A va B *koeffitsiyentlar*, C esa *ozod had* deyiladi.

Teorema isbotidan ko‘rinadiki, (2) tenglama orqali aniqlanadigan n=(A,B) $\neq$0 vektor bu tenglama ifodalaydigan L to‘g‘ri chiziqqa nisbatan perpendikular bo‘ladi va uning *normal vektori* deb ataladi.

Masalan, $3x+4y-8=0$ tenglama $M_1(0,2)$ nuqtadan o‘tuvchi va $n=(3,4)$ vektorga perpendikular bo‘lgan to‘g‘ri chiziqni ifodalaydi.

Shunday qilib, biz har qanday to‘g‘ri chiziq tenglamasi (2) ko‘rinishda bo‘lishini (analitik geometriyaning I asosiy masalasi) aniqladik va aksincha, har qanday (2) tenglama biror to‘g‘ri chiziqni ifodalashini (analitik geometriyaning II asosiy masalasi) isbotladik.

Endi tekislikdagi to‘g‘ri chiziqning (2) umumiy tenglamasini ayrim xususiy hollarini tahlil etib, xulosalar chiqaramiz.

1) Ozod had C=0 bo‘lsin. Bunda (2) tenglama $Ax+By=0$ ko‘rinishda bo‘ladi. Bu tenglamani O(0,0) nuqta qanoatlantiradi. Demak, $Ax+By=0$ ko‘rinishdagi tenglamalar koordinatalar boshidan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlarni ifodalaydi.

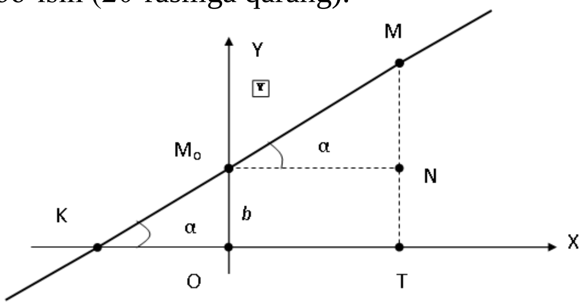
2) A=0, ya’ni L to‘g‘ri chiziq tenglamasi $By+C=0$ ko‘rinishda bo‘lsin. Bu holda uning normal vektori $n=(0,B)\perp OX$. Ammo $n=(0,B)\perp L$ bo‘lgani uchun bu holda L to‘g‘ri chiziq OX koordinata o‘qiga parallel ($L \parallel OX$) yoki $L\perp OY$ bo‘ladi.

3) B=0 holni ko‘ramiz. Bunda tenglama $Ax+C=0$ ko‘rinishda bo‘lib, $n=(A,0)\perp OY$. Demak, $L \parallel OY$ yoki $L\perp OX$ bo‘ladi.

4) C=0 va B=0 bo‘lsin. Bunda tenglama $Ax=0$ yoki, A$\neq$0 bo‘lgani uchun ($A^2+B^2\neq 0$ shartga asosan), $x=0$ tenglamaga kelamiz. Bu tenglama OX koordinata o‘qi joylashgan to‘g‘ri chiziqni ifodalaydi.

5) C=0 va A=0 holda $y=0$ tenglamaga kelamiz. Bu tenglama OY koordinata o‘qi joylashgan to‘g‘ri chiziqni ifodalaydi.

1.3. Tekislikdagi to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasi. Berilgan L to‘g‘ri chiziq OX o‘qi bilan α burchak ($\alpha\neq 90^0$) tashkil etishi (ya’ni OX o‘qini soat miliga teskari yo‘nalishda α burchakka burilsa, u L to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘ladi) va OY o‘qidagi $M_0(0,b)$ nuqtadan o‘tishi ma’lum bo‘lsin (20-rasmga qarang).



Bu to‘g‘ri chiziqda yotuvchi ixtiyoriy $M(x,y)$ nuqtaning koordinatalari qanday tenglamani qanoatlantirishini aniqlaymiz. Chizmadan

$$OM_0=TN=b,\ OT=M_0N=x,\ TM=y,\ \angle M_0KO=\angle MM_0N=\alpha$$

ekanligini ko‘ramiz. Bu yerda ΔM_0MN to‘g‘ri burchakli uchburchak bo‘lib, undan ushbu natijani olamiz:

$$\frac{MN}{M_0N}=tg\alpha \Rightarrow \frac{TM-TN}{M_0N}=tg\alpha \Rightarrow \frac{y-b}{x}=tg\alpha \Rightarrow y-b=x\cdot tg\alpha \Rightarrow y=x\cdot tg\alpha+b.$$

Oxirgi tenglikda $tg\alpha=k$ belgilash kiritib, berilgan shartlarda L to‘g‘ri chiziq tenglamasi quyidagi ko‘rinishda bo‘lishini topamiz:

$$y=kx+b \qquad (3)$$

4-TA'RIF: (3) tekislikdagi to‘g‘ri chiziqning *burchak koeffitsiyentli tenglamasi* deyiladi. Unda $k=tg\alpha$ to‘g‘ri chiziqning *burchak koeffitsiyenti*, b esa *boshlang‘ich ordinatasi* deb ataladi.

Izoh: Agar $L\perp OX$ bo‘lsa , unda $\alpha=90^0$ va $k=tg\alpha$ ma’noga ega bo‘lmaydi. Bu holda L vertikal to‘g‘ri chiziq tenglamasi $x=a$ ko‘rinishda bo‘ladi.

Agar L to‘g‘ri chiziq umumiy tenglamasi Ax+By+C=0 (B≠0) bilan berilgan bo‘lsa, uning burchak koeffitsiyentli tenglamasiga quyidagicha o‘tiladi:

$$Ax+By+C=0 \Rightarrow By=-Ax-C \Rightarrow y=-\frac{A}{B}x+(-\frac{C}{B}) \Rightarrow k=-\frac{A}{B}, \quad b=-\frac{C}{B}.$$

Masalan, umumiy tenglamasi 4x–6y+3=0 bo‘lgan to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasini topamiz:

$$4x-6y+3=0 \Rightarrow 6y=4x+3 \Rightarrow y=\frac{2}{3}x+\frac{1}{2} \Rightarrow k=\frac{2}{3}, \quad b=\frac{1}{2}.$$

1.4. Tekislikdagi to‘g‘ri chiziqning kesmalardagi tenglamasi. Koordinata boshidan o‘tmaydigan L to‘g‘ri chiziq OX va OY koordinata o‘qlarini mos ravishda $M_1(a,0)$ va $M_2(0,b)$ nuqtalarda kesib o‘tishi ma’lum bo‘lsin. Bu holda L tenglamasi qanday ko‘rinishda bo‘lishini topamiz.

Bu to‘g‘ri chiziq tenglamasini topish uchun $M_1(a,0)$ va $M_2(0,b)$ nuqtalar unda yotishidan foydalanamiz. Bu nuqtalarning koordinatalarini L to‘g‘ri chiziqning Ax+By+C=0 umumiy tenglamasini qanoatlantiradi, ya’ni

$$\begin{cases} Aa+B\cdot 0+C=0 \\ A\cdot 0+Bb+C=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-\dfrac{C}{a} \\ B=-\dfrac{C}{b} \end{cases}$$

Bu yerda C≠0, chunki L to‘g‘ri chiziq koordinata boshidan o‘tmaydi. Shu sababli umumiy tenglamadan quyidagi natijani olamiz:

$$Ax+By+C=0 \Rightarrow -\frac{C}{a}x+(-\frac{C}{b})y+C=0 \Rightarrow -C(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1)=0 \Rightarrow \frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1=0.$$

Demak, L to‘g‘ri chiziqning izlangan tenglamasi

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \qquad (4)$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Bunda $|a|$ va $|b|$ qaralayotgan L to‘g‘ri chiziqni mos ravishda OX va OY koordinata o‘qlaridan ajratgan kesma uzunliklarini ifodalaydi. Shu sababli quyidagi ta’rif kiritiladi.

5-TA‘RIF: (4) to‘g‘ri chiziqning ***kesmalardagi tenglamasi*** deyiladi.

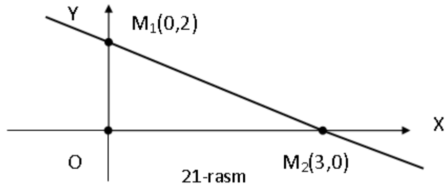
Agar koordinata boshidan o‘tmaydigan L to‘g‘ri chiziq Ax+By+C=0 (A≠0, B≠0, C≠0) umumiy tenglamasi bilan berilgan bo‘lsa, uning kesmalardagi tenglamasiga o‘tish uchun umumiy tenglamani (–C) soniga bo‘linadi:

$$Ax+By+C=0 \Rightarrow -\frac{A}{C}x+(-\frac{B}{C})y-1=0 \Rightarrow \frac{x}{(-C/A)}+\frac{y}{(-C/B)}=1 .$$

Masalan, umumiy tenglamasi 2x+3y–6=0 bo‘lgan to‘g‘ri chiziqning kesmalardagi tenglamasini topamiz:

$$2x+3y-6=0 \Rightarrow \frac{2}{6}x+\frac{3}{6}y-1=0 \Rightarrow \frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1.$$

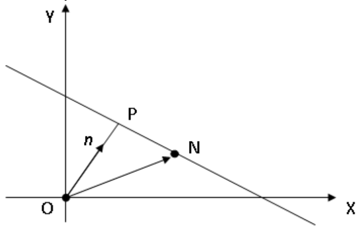
Demak, bu to‘g‘ri chiziq OX va OY o‘qlarni $M_1(3,0)$ va $M_2(0,2)$ nuqtalarda kesib o‘tadi. Bundan foydalanib L to‘g‘ri chiziqni quyidagicha osonlik bilan yasash mumkin (21-rasmga qarang):



21-rasm

1.5. Tekislikdagi to‘g‘ri chiziqning normal tenglamasi. Berilgan L to‘g‘ri chiziqqa perpendikular bo‘lgan ***n*** birlik vektor va koordinata boshidan bu to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa |0P|=p ma’lum bo‘lsin (22-rasm). Bu ma’lumotlar asosida L to‘g‘ri chiziq tenglamasini topamiz. Agar ***n*** birlik vektor OX koordinata o‘qi bilan ∠POX=α burchak tashkil etgan bo‘lsa, uning koordinatalari cos α va sinα bo‘ladi, ya’ni ***n*** =(cos α, sinα) deb yozish mumkin.

N(x,y) berilgan to‘g‘ri chiziqdagi ixtiyoriy bir nuqta va $\boldsymbol{r}=(x,y)$ uning radius-vektori bo‘lsin. $\boldsymbol{r}$ va $\mathbf{n}$ vektorlar orasidagi burchak $\angle PON=\varphi$ deb olamiz.



r va n vektorlarning $n{\cdot}r$ skalyar ko‘paytmasini ikki usulda hisoblaymiz. Skalyar ko‘paytmani koordinatalar orqali hisoblash formulasiga asosan

$$n\cdot r = x\cos\alpha + y\sin\alpha\ ;$$

Skalyar ko‘paytmaning ta’rifiga asosan va Δ PON da $\cos\varphi=|OP|/|ON|$ ekanligidan foydalanib, ushbu tenglikni hosil qilamiz:

$$n\cdot r=|n|\cdot|r|\cos\varphi = 1\cdot|r|\cdot\cos\varphi=|ON|\cdot|OP|/|ON| = |OP| = p.$$

$n{\cdot}r$ skalyar ko‘paytmasi uchun bu ikki ifodani tenglashtirib, berilgan L to‘g‘ri chiziqdagi barcha N(x,y) nuqtalarning koordinatalari

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha\ =p \Rightarrow x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0 \qquad (5)$$

tenglamani qanoatlantirishini ko‘ramiz.

<u>*6-TA‘RIF:*</u> (5) tekislikdagi to‘g‘ri chiziqning *normal tenglamasi* deyiladi.

Agar L to‘g‘ri chiziq $Ax+By+C=0$ umumiy tenglamasi bilan berilgan bo‘lsa, uning normal tenglamasiga o‘tish masalasini ko‘ramiz. Bu va (5) tenglama bitta to‘g‘ri chiziqni ifodalagani uchun ularning mos koeffitsiyentlari proporsional bo‘ladi. Agar noma’lum proporsionallik koeffitsiyentini μ deb belgilasak, unda

$$\mu A=\cos\alpha\,, \qquad \mu B=\sin\alpha\,, \qquad \mu C= -p$$

tengliklarga ega bo‘lamiz. Dastlabki ikki tenglikdan

$$(\mu A)^2+(\mu B)^2=\mu^2(A^2+ B^2)= \cos^2\alpha+ \sin^2\alpha=1 \Rightarrow \mu=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

natijaga kelamiz. Yuqoridagi uchinchi tenglikdan $\mu C= -p<0$ ekanligini ko‘ramiz. Demak, μ ishorasi C ozod had ishorasiga qarama-qarshi qilib olinishi kerak. Bunda μ *normallashtiruvchi ko‘paytuvchi* deyiladi. Natijada

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = \frac{Ax+By+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} \qquad (6)$$

tenglik orqali umumiy tenglamadan normal tenglamaga o‘tish mumkinligini ko‘ramiz.

Masalan, umumiy tenglamasi $3x+4y-15=0$ bo‘lgan to‘g‘ri chiziqning normal tenglamasi quyidagicha bo‘ladi:

$$3x+4y-15=0 \Rightarrow \frac{3x+4y-15}{\sqrt{3^2+4^2}}=0 \Rightarrow \frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-3=0\,.$$

1.6. Tekislikdagi to‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasi. Tekislikdagi L to‘g‘ri chiziqning biror $M_0(x_0,y_0)$ nuqtasi va unga parallel $a=mi+nj=(m,\ n)\neq 0$ vektor berilgan bo‘lsin. Bu holda berilgan M_0 nuqta va a vektor L to‘g‘ri chiziqni to‘liq aniqlaydi. Shu sababli a to‘g‘ri chiziqning *yo‘naltiruvchi vektori*, M_0 esa uning *boshlang‘ich nuqtasi* deyiladi. Bu ma’lumotlar asosida L to‘g‘ri chiziq tenglamasini aniqlaymiz. Buning uchun berilgan L to‘g‘ri chiziqda yotuvchi ixtiyoriy M(x,y) nuqtani olamiz. Bu nuqtani boshlang‘ich M_0 nuqta bilan tutashtirib, $x=(x-x_0,\ y-y_0)$ vektorni hosil qilamiz. Shartga asosan x va a vektorlar kollinear bo‘ladi. Vektorlarning kollinearlik shartiga asosan (IV bob, §3, (5) formulaga qarang) ularning mos koordinatalari proporsionaldir:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n} \qquad (7)$$

Izoh: Agar L to‘g‘ri chiziqning ***a***=(m, n) yo‘naltiruvchi vektorida m=0 (L-gorizontal to‘g‘ri chiziq) yoki n=0 (L-vertikal to‘g‘ri chiziq) bo‘lsa , unda (7) tenglamadagi tegishli kasrlarning suratlari nol deb olinadi va L to‘g‘ri chiziqning tenglamasi $y=y_0$ yoki $x=x_0$ ko‘rinishda yoziladi.

7-TA‘RIF: (7) tekislikdagi to‘g‘ri chiziqning ***kanonik tenglamasi*** deyiladi.
“Kanonik” so‘zi sodda, ixcham degan ma’noni ifodalaydi. Agar L to‘g‘ri chiziq umumiy Ax+By+C=0 tenglamasi bilan berilgan bo‘lsa, yo‘naltiruvchi vektor sifatida ***a***=(B,–A) vektorni, boshlang‘ich $M_0(x_0,y_0)$ nuqta sifatida esa koordinatalari $Ax_0+By_0=-C$ shartni qanoatlantiruvhchi ixtiyoriy bir nuqtani olish mumkin. Masalan, $x_0=0$, $y_0=-C/B$ yoki $x_0=-C/A$, $y_0=0$ deb olish mumkin.

Izoh: Agar L to‘g‘ri chiziq OX yoki OY o‘qiga perpendikular, ya’ni to‘g‘ri chiziq ***i*** yoki ***j*** vektorga perpendikular bo‘lsa, unda n=0 yoki m=0 bo‘ladi. Bu holda (7) tenglamadagi tegishli kasrning surati nolga teng deb olinadi va L to‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasi mos ravishda $x=x_0$ yoki $y=y_0$ ko‘rinishda bo‘ladi.

1.7. Tekislikdagi to‘g‘ri chiziqning parametrik tenglamasi. To‘g‘ri chiziqning (7) kanonik tenglamasidagi kasrlarning qiymatlari M(x,y) nuqta to‘g‘ri chiziq bo‘ylab harakat etganda o‘zgarib boradi va ixtiyoriy haqiqiy t soniga teng bo‘la oladi. Shu sababli bu tenglamani quyidagicha yozish mumkin:

$$\frac{y-y_0}{m}=\frac{x-x_0}{n}=t \Rightarrow \begin{cases} y-y_0=mt \\ x-x_0=nt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=y_0+mt \\ x=x_0+nt \end{cases}, t\in(-\infty,\infty). \quad (8)$$

8-TA‘RIF: (8) sistemada t – ***parametr***, sistemaning o‘zi esa tekislikdagi to‘g‘ri chiziqning ***parametrik tenglamasi*** deyiladi.

Agar to‘g‘ri chiziq umumiy Ax+By+C=0 (A≠0, B≠0) tenglamasi bilan berilgan bo‘lsa, uning parametrik tenglamasiga o‘tish uchun $x=t$ deb olamiz. Bundan to‘g‘ri chiziqning quyidagi parametrik tenglamasiga kelamiz:

$$\begin{cases} x=t \\ y=-\frac{A}{B}t-\frac{C}{B} \end{cases}.$$

Izoh: Agar umumiy tenglamada A=0 yoki B=0 bo‘lsa, (8) parametrik tenglama

$$\begin{cases} x=t \\ y=-\frac{C}{B} \end{cases} \text{ yoki } \begin{cases} x=-\frac{C}{A} \\ y=t \end{cases}$$

ko‘rinishda yoziladi.

To‘g‘ri chiziqqa doir har xil masalalarni yechishda uning u yoki bu ko‘rinishdagi tenglamasi qulay bo‘lishi mumkin va bunga biz kelgusida ishonch hosil etamiz.

XUYLOSA

Tekislikdagi analitik geometriyada chiziqlarning xususiyatlari ularning tenglamalari orqali algebraik usulda o‘rganiladi. Eng sodda va eng ko‘p uchraydigan chiziq–to‘g‘ri chiziqdir. Tekislikdagi to‘g‘ri chiziqlarning umumiy, burchak koeffitsiyentli, kesmalardagi, normal, kanonik va parametrik tenglamalarini ko‘rish mumkin. Bu tenglamalardan kelgusida to‘g‘ri chiziqqa doir turli masalalarni yechishda foydalaniladi.

Tayanch iboralar

* Geometrik obyekt tenglamasi * Analitik geometriya predmeti * Analitik geometriyaning ikkita asosiy masalasi * Aylana tenglamasi * To‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi * Burchak koeffitsiyentli tenglama * Kesmalardagi tenglama
* Normal tenglama * Kanonik tenglama * Parametrik tenglama.

Takrorlash uchun savollar

10. Geometrik obyekt tenglamasi deb nimaga aytiladi?
11. Analitik geometriya predmeti nimadan iborat?
12. Analitik geometriyaning ikkita asosiy masalasi qanday ifodalanadi?
13. Aylana tenglamasi qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
14. To‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
15. To‘g‘ri chiziqning normal vektori qanday aniqlanadi?
16. Umumiy tenglamaning ayrim xususiy hollarini tahlil eting.
17. To‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyenti deb nimaga aytiladi?
18. To‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasi qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
19. Umumiy tenglamadan burchak koeffitsiyentli tenglamaga qanday o‘tiladi?
20. To‘g‘ri chiziqning kesmalardagi tenglamasi qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
21. Qanday to‘g‘ri chiziqlar uchun ularning kesmalardagi tenglamasi mavjud bo‘ladi?
22. Umumiy tenglamadan kesmalardagi tenglamaga qanday o‘tiladi?
23. To‘g‘ri chiziqning normal tenglamasi qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
24. Umumiy tenglamadan normal tenglamaga qanday o‘tiladi?
25. Qanday vektor berilgan to‘g‘ri chiziqning yo‘naltiruvchi vektori deyiladi?
26. To‘g‘ri chiziqning boshlang‘ich nuqtasi deb nimaga aytiladi?
27. To‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasi qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
28. Umumiy tenglamadan kanonik tenglamaga qanday o‘tiladi?
29. To‘g‘ri chiziqning parametrik tenglamasi qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
30. Umumiy tenglamadan parametrik tenglamaga qanday o‘tiladi?

TO‘GRI CHIZIQLARGA DOIR AYRIM MASALALAR

- *To‘g‘ri chiziqlarga doir masalalar.*
- *To‘g‘ri chiziq tenglamalarining iqtisodiy tatbiqlari.*

2.1. To‘g‘ri chiziqlarga doir masalalar. Bu yerda biz to‘g‘ri chiziqlarga doir tez-tez uchrab turadigan ayrim masalalar va ularning yechimlari bilan tanishib chiqamiz.

1-masala: Berilgan $M_0(x_0,y_0)$ nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlar tenglamasini toping.

Yechish: Izlangan L to‘g‘ri chiziqlarning burchak koeffitsiyentli $y=kx+b$ tenglamasidan foydalanamiz. Berilgan $M_0(x_0,y_0)$ nuqta L to‘g‘ri chiziqda yotgani uchun uning koordinatalari bu tenglamani qanoatlantiradi, ya’ni $y_0=kx_0+b$ tenglik o‘rinli bo‘ladi. Bu tenglikni oldingi tenglamadan hadma-had ayirib, masala javobini quyidagi ko‘rinishda topamiz:

$$y-y_0=k(x-x_0). \qquad (1)$$

Bunda burchak koeffitsiyenti k bir qiymatli aniqlanmaydi va uning qiymatini ixtiyoriy ravishda tanlash mumkin. Buning sababi shundan iboratki, berilgan $M_0(x_0,y_0)$ nuqta orqali cheksiz ko‘p to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkin. (1) berilgan nuqtadan o‘tuvchi ***to‘g‘ri chiziqlar dastasi*** tenglamasi deyiladi. Masalan, $M_0(5,-3)$ nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlar dastasi tenglamasi

$$y+3=k(x-5) \Rightarrow y=kx-(5k+3)$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Agar $k=2$ desak, $M_0(5,-3)$ nuqtadan o‘tuvchi aniq bir to‘g‘ri chiziq tenglamasi $y=2x-13$ hosil bo‘ladi.

2-masala: Berilgan ikkita $M_1(x_1,y_1)$ va $M_2(x_2,y_2)$ nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini toping.

Yechish: Berilgan nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini topish uchun $M_1(x_1,y_1)$ nuqtani boshlang‘ich nuqta, ularni tutashtirishdan hosil bo‘lgan $\boldsymbol{a}=(x_2-x_1, y_2-y_1)$ vektorni esa yo‘naltiruvchi vektor deb olish mumkin. Shu sababli izlangan to‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasi

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \qquad (2)$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

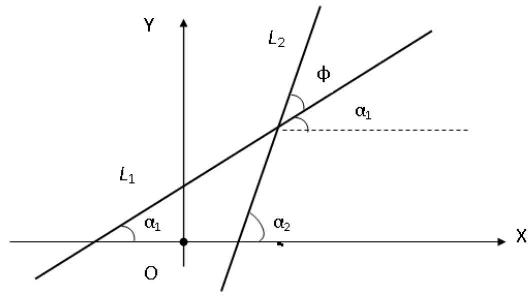
Masalan, $M_1(2,1)$ va $M_2(-3,0)$ nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi quyidagicha bo‘ladi:

$$\frac{x-2}{-3-2}=\frac{y-1}{0-1}\Rightarrow -(x-2)=-5(y-1)\Rightarrow x-5y+3=0\,.$$

TA‘RIF: L_1 va L_2 ***to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchak*** deb ularning birinchisini soat miliga teskari yo‘nalishda aylantirib ikkinchisi bilan ustma-ust tushirish uchun kerak bo‘ladigan burilish burchagiga aytiladi.

3-masala: Berilgan ikkita L_1 va L_2 to‘g‘ri chiziqlar orasidagi φ burchakni toping.

Yechish: ***I hol.*** L_1 va L_2 to‘g‘ri chiziqlar o‘zlarining burchak koeffitsyentli tenglamalari $y=k_1x+b_1$ va $y=k_2x+b_2$ bilan berilgan bo‘lsin. Bu to‘g‘ri chiziqlarning OX o‘qi bilan hosil qilgan burchaklarini mos ravishda α_1 va α_2 kabi belgilaymiz (23-rasmga qarang).



Chizmadan ko‘rinadiki izlanayotgan burchak $\varphi=\alpha_2-\alpha_1$ bo‘ladi va shu sababli uning tangensini quyidagicha topish mumkin:

$$tg\varphi=tg(\alpha_2-\alpha_1)=\frac{tg\alpha_2-tg\alpha_1}{1+tg\alpha_2\cdot tg\alpha_1}\,.$$

Bunda $tg\alpha_1=k_1$ va $tg\alpha_2=k_2$ ekanligini hisobga olib va $\varphi\neq 90^0$ shartda izlangan burchak uchun

$$tg\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_2\cdot k_1} \qquad (3)$$

formulaga ega bo‘lamiz.

II hol. L_1 va L_2 to‘g‘ri chiziqlar o‘zlarining $A_1x+B_1y+C_1=0$ va $A_2x+B_2y+C_2=0$ umumiy tenglamalari bilan berilgan bo‘lsin. Bu tenglamalardan L_1 va L_2 to‘g‘ri chiziqlarning $\boldsymbol{n}_1=(A_1, B_1)$ va $\boldsymbol{n}_2=(A_2, B_2)$ normal vektorlarini topamiz. Unda izlangan φ burchak normal vektorlar orasidagi burchak bilan teng bo‘ladi va, vektorlar orasidagi burchak formulasiga asosan ,

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}} \qquad (4)$$

formula bilan topiladi.

Misol sifatida umumiy tenglamalari $5x-y+7=0$ va $3x+2y-1=0$ bo‘lgan to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchakni (4) formulaga asosan topamiz:

$$\cos\varphi=\frac{5\cdot 3+(-1)\cdot 2}{\sqrt{5^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{3^2+2^2}}=\frac{13}{\sqrt{26\cdot 13}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\varphi=45^0.$$

4-masala: Berilgan ikkita L_1 va L_2 to‘g‘ri chiziqlarning parallellik va perpendikularlik shartlarini toping.

Yechish: ***I hol.*** L_1 va L_2 to‘g‘ri chiziqlar o‘zlarining burchak koeffitsiyentli tenglamalari $y=k_1x+b_1$ va $y=k_2x+b_2$ bilan berilgan bo‘lsin.

Agar L_1 va L_2 to‘g‘ri chiziqlar parallel bo‘lsa, y holda

$$\alpha_1 = \alpha_2 \Rightarrow \text{tg}\,\alpha_1 = \text{tg}\,\alpha_2 \Rightarrow k_1 = k_2.$$

Aksincha, agar $k_1 = k_2$ bo‘lsa, u holda (3) formuladan $tg\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0$, ya’ni L_1 va L_2 to‘g‘ri chiziq parallel bo‘ladi. Shunday qilib, burchak koeffitsiyentli tenglamalari bilan berilgan ikki to‘g‘ri chiziqning parallel bo‘lishining zaruriy va yetarli sharti

$$k_1 = k_2 \qquad (5)$$

bo‘ladi.

Agar L_1 va L_2 to‘g‘ri chiziqlar perpendikular bo‘lsa, unda $\varphi=90^0$ bo‘ladi. Yuqoridagi (3) formuladan

$$ctg\,\varphi = \frac{1+k_2\cdot k_1}{k_2-k_1}$$

ekanligini ko‘ramiz. $\varphi=90^0$ holda $ctg\varphi=0$ bo‘ladi va shu sababli uning formulasidagi kasrning surati nolga teng bo‘lishi kerak:

$$1+k_1k_2=0 \Rightarrow k_1k_2=-1. \qquad (6)$$

Aksincha, agar (6) shart bajarilsa, unda $ctg\varphi=0$ bo‘ladi va $\varphi=90^0$ ekanligi kelib chiqadi.

Demak, (6) ikkita to‘g‘ri chiziqning perpendikularligining zaruriy va yetarli shartini ifodalaydi.

II hol. L_1 va L_2 to‘g‘ri chiziqlar o‘zlarining $A_1x+B_1y+C_1=0$ va $A_2x+B_2y+C_2=0$ umumiy tenglamalari bilan berilgan bo‘lsin. Bu holda L_1 va L_2 to‘g‘ri chiziqlar parallel yoki perpendikular bo‘lishi uchun ularning $\boldsymbol{n}_1=(A_1, B_1)$ va $\boldsymbol{n}_2=(A_2, B_2)$ normal vektorlari mos ravishda kollinear yoki orthogonal bo‘lishi zarur va yetarlidir. Unda vektorlarning kollinearlik yoki ortogonallik shartlaridan foydalanib, masala javobini hosil etamiz:

$$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0, \qquad (7)$$

$$L_1 \| L_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}\ . \qquad (8)$$

Misol sifatida burchak koeffitsiyentli tenglamalari

$$y=-3x+5, \quad y=\frac{1}{3}x-1$$

bilan berilgan to‘g‘ri chiziqlarni qaraymiz. Bu yerda $k_1=-3$ va $k_2=1/3$ bo‘lgani uchun $k_1k_2=-1$. Demak, (6) shart bajarilmoqda va shu sababli L_1 va L_2 o‘zaro perpendikular joylashgan.

<u>Masala:</u> $M_0(-3,-1)$ nuqta orqali o‘tuvchi va umumiy tenglamasi $2x+y-3=0$ bo‘lgan to‘g‘ri chiziqqa perpendikular to‘g‘ri chiziqning tenglamasi topilsin.

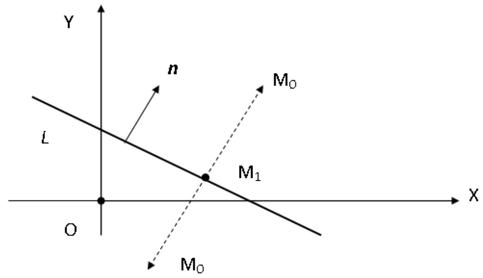
Yechish: Izlanayotgan to‘g‘ri chiziq $M_0(-3,-1)$ nuqta orqali o‘tadi va shu sababli (1) formulaga asosan uning tenglamasi $y+1=k_2(x+3)$ ko‘rinishda bo‘ladi. Bu tenglamadagi k_2 burchak koeffitsiyentini (6) perpendikularlik shartidan topamiz. Berilgan to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyenti $k_1=-1/2$ ekanligidan $k_2=-1/k_1=2$ bo‘lishi kelib chiqadi. Unda izlanayotgan to‘g‘ri chiziqning tenglamasi

$$y+1=k_2(x+3) \Rightarrow y+1=2(x+3) \Rightarrow y=2x+5$$

ekanligini topamiz.

5-masala: Berilgan $M_0(x_0,y_0)$ nuqtadan berilgan L to‘g‘ri chiziq‘gacha bo‘lgan d masofani toping.

Yechish: L to‘g‘ri chiziq umumiy tenglamasi $Ax+By+C=0$ bilan berilgan bo‘lsin. Berilgan $M_0(x_0,y_0)$ nuqta bu L to‘g‘ri chiziqda yotmaydi deb olamiz, chunki aks holda $d=0$ bo‘lishi ravshan. $M_0(x_0,y_0)$ nuqtadan L to‘g‘ri chiziqqa o‘tkazilgan perpendikular asosini $M_1(x_1,y_1)$ deb belgilaymiz (24-rasmga qarang).



Berilgan L to‘g‘ri chiziqning $\boldsymbol{n}=(A,B)$ normal va uchi M_1, boshi esa M_0 nuqtada joylashgan $\boldsymbol{d}=(x_0- x_1,\ y_0- y_1)$ vektorlarni qaraymiz. Bu vektorlar kollinear va ularning yo‘nalishlari bir xil yoki qarama-qarshi bo‘lishi mumkin.

Dastlab $\boldsymbol{n}=(A,B)$ va $\boldsymbol{d}=(x_0-x_1,\ y_0- y_1)$ vektorlar bir xil yo‘nalgan holni ko‘ramiz. Bu holda ular orasidagi burchak $\varphi=0$ bo‘ladi. Unda $\boldsymbol{n\cdot d}$ skalyar ko‘paytmani ta’rifi va koordinatalardagi ifodasiga asosan ushbu tenglikni hosil etamiz:

$$\boldsymbol{n\cdot d}=|\boldsymbol{n}|\cdot|\boldsymbol{d}|\cdot\cos\varphi=|\boldsymbol{n}|\cdot|\boldsymbol{d}|\cdot\cos 0=|\boldsymbol{n}|\cdot|\boldsymbol{d}|=d\cdot\sqrt{A^2+B^2}=A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1).$$

$M_1(x_1,y_1)$ nuqta L to‘g‘ri chiziqda yotganligi uchun

$$Ax_1+By_1+C=0 \Rightarrow C=-(Ax_1+By_1)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi. Shuning uchun

$$A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)=Ax_0+By_0-(Ax_1+By_1)=Ax_0+By_0+C$$

deb yozish mumkin. Unda yuqoridagi $\boldsymbol{n\cdot d}$ skalyar ko‘paytma ifodasidan

$$d=\frac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

formulaga ega bo‘lamiz.

Agar $\boldsymbol{n}=(A,B)$ va $\boldsymbol{d}=(x_0- x_1,\ y_0- y_1)$ vektorlar qarama-qarshi yo‘nalgan bo‘lsa, ular orasidagi burchak $\varphi=180^0$ va bu holda $\cos\varphi=\cos 180^0=-1$ bo‘ladi. Yuqoridagi mulohazalarni takrorlab, bu holda

$$d=\frac{-(Ax_0+By_0+C)}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

natijaga erishamiz. Bu ikkala holni birlashtirib

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} \qquad (9)$$

umumiy formulani hosil etamiz.

Izoh: Masala yechimidan kelib chidadiki, agar $Ax_0+By_0+C>0$ bo‘lsa $M_0(x_0,y_0)$ nuqta umumiy tenglamasi $Ax+By+C=0$ bo‘lgan L to‘g‘ri chiziqdan yuqorida va aksincha, $Ax_0+By_0+C<0$ bo‘lsa, L to‘g‘ri chiziqdan pastda joylashgan bo‘ladi. $Ax_0+By_0+C=0$ holda esa $M_0(x_0,y_0)$ nuqta L to‘g‘ri chiziqda yotishi tushunarlidir.

Masala: $M_0(-3,-1)$ nuqtadan umumiy tenglamasi $4x+3y-1=0$ bo‘lgan to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan D masofani toping va ular o‘zaro qanday joylashganini aniqlang.

Yechish: (9) formulaga asosan

$$d=\frac{|4\cdot(-3)+3\cdot(-1)-4|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{|-19|}{5}=3{,}8\,.$$

Bunda

$$Ax_0+By_0+C=4\cdot(-3)+3\cdot(-1)-4=-19<0$$

bo‘lgani uchun $M_0(-3,-1)$ nuqta L to‘g‘ri chiziqdan pastda joylashganligini ko‘ramiz.

Shuni ta’kidlab o‘tish kerakki, bu masala L to‘g‘ri chiziq normal tenglamasi

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$$

bilan berilganda juda oddiy yechiladi, chunki bu holda (9) formulani (V bob,§1, (6) formulaga qarang)

$$d=|x_0\cos\alpha+y_0\sin\alpha-p| \qquad (10)$$

ko‘rinishda yozish mumkin. Demak, $M_0(x_0,y_0)$ nuqtadan normal tenglamasi bilan berilgan to‘g‘ri chiziqqacha masofani topish uchun bu nuqta koordinatalarini normal tenglamaga qo‘yish va hosil bo‘lgan sonni absolut qiymatini olish kifoyadir.

6-masala: Berilgan L_1 va L_2 to‘g‘ri chiziqlarning $M_0(x_0,y_0)$ kesishish nuqtasini toping.

Yechish: Bu to‘g‘ri chiziqlarning

$$A_1x+B_1y+C_1=0\ (L_1),\quad A_2x+B_2y+C_2=0\ (L_2)$$

umumiy tenglamalarini qaraymiz. $M_0(x_0,y_0)$ kesishish nuqtasi ham L_1 va ham L_2 to‘g‘ri chiziqlarga tegishli bo‘lgani uchun uning koordinatalari yuqoridagi ikkala umumiy tenglamalarni qanoatlantiradi. Demak, $M_0(x_0,y_0)$ kesishish nuqtasining koordinatalari ushbu chiziqli tenglamalar sistemasidan topiladi:

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1=0\\A_2x+B_2y+C_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A_1x+B_1y=-C_1\\A_2x+B_2y=-C_2\end{cases}. \qquad (11)$$

Agar (11) sistemada

$$\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2}$$

shart bajarilsa, u yagona (x_0,y_0) yechimga ega bo‘ladi va L_1 , L_2 to‘g‘ri chiziqlar faqat bitta $M_0(x_0,y_0)$ nuqtada kesishadi.

Agar (11) sistemada

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$$

shart bajarilsa, u cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘ladi va L_1, L_2 to‘g‘ri chiziqlar ham cheksiz ko‘p nuqtalarda kesishadi, ya’ni ular ustma-ust tushadi.

Agar (11) sistemada

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$$

shart bajarilsa, u yechimga ega bo‘lmaydi va L_1 , L_2 to‘g‘ri chiziqlar birorta ham nuqtada kesishmaydi, ya’ni ular parallel joylashgan bo‘ladi.

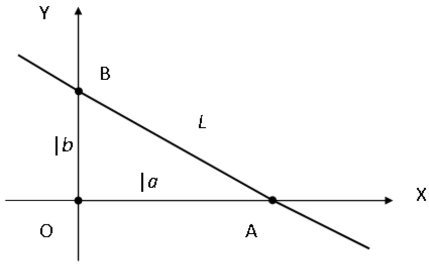
Misol sifatida umumiy tenglamalari $2x+y–1=0$ va $x+2y+1=0$ bo‘lgan to‘g‘ri chiziqlarning $M_0(x_0,y_0)$kesishish nuqtasini topamiz. Bu holda (11) sistema va uning yechimi quyidagicha bo‘ladi:

$$\begin{cases} 2x+y-1=0 \\ x+2y+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y=1 \\ x+2y=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}.$$

Demak, bu to‘g‘ri chiziqlar $M_0(1,–1)$ nuqtada kesishadi.

7-masala: Koordinata boshidan o‘tmaydigan L to‘g‘ri chiziq va OX, OY koordinata o‘qlari bilan chegaralangan uchburchakning S yuzasini toping.

Yechish: Berilgan L to‘g‘ri chiziqning kesmalardagi $(x/a)+(y/b)=1$ tenglamasini qaraymiz (25-rasmga qarang).



Chizmadan ko‘rinadiki, izlanayotgan S yuza to‘g‘ri burchakli ΔAOB yuzasidan iborat. Bu uchburchakning katetlari uzunliklari L to‘g‘ri chiziqning kesmalardagi tenglamasidan $|AO|=|a|$ va $|BO|=|b|$ kabi topiladi. Demak, izlangan yuza

$$S = \frac{1}{2}|AO|\cdot|BO| = \frac{1}{2}|a|\cdot|b| = \frac{|ab|}{2} \qquad (12)$$

formula bilan topiladi.

Misol: Umumiy tenglamasi $3x–8y+24=0$ bo‘lgan to‘g‘ri chiziq va koordinata o‘qlari bilan chegaralangan uchburchak yuzasini toping.

Yechish: Dastlab bu to‘g‘ri chiziqning kesmalardagi tenglamasini topamiz:

$$3x-8y+24=0 \Rightarrow \frac{3x-8y+24}{-24} = 0 \Rightarrow \frac{x}{-8} + \frac{y}{3} = 1.$$

Demak, $a=–8$, $b=3$ va (12) formulaga asosan

$$S = \frac{|-8\cdot 3|}{2} = 12 \text{ kv.birlik.}$$

XULOSA

Tekislikdagi to‘g‘ri chiziqning turli tenglamalaridan foydalanib ikki to‘g‘ri chiziq orasidagi burchakni, ularning parallellik va perpendikularlik shartlarini, nuqtadan to‘g‘ri chiziqqacha masofani topish kabi geometrik masalalar osonlik bilan o‘z yechimini topadi. To‘g‘ri chiziq tenglamalarining iqtisodiy tatbig‘iga misol sifatida talab va taklif funksiyalari chiziqli bo‘lganda ularning muvozanat narxini topish masalasini ko‘rsatish mumkin.

Tayanch iboralar

* To‘g‘ri chiziqlar dastasi * Ikkita nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq * Ikki to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak * Parallellik sharti * Perpendikularlik sharti * Nuqtadan to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa * Ikki to‘g‘ri chiziqning kesishish nuqtasi
* Uchburchak yuzasi

Takrorlash uchun savollar

1. To‘g‘ri chiziqlar dastasi tenglamasi deb nimaga aytiladi ?
2. Berilgan ikkita nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi qanday ko‘rinishda bo‘ladi ?
3. Ikki to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak qanday aniqlanadi?
4. Ikki to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak qanday topiladi?
5. To‘g‘ri chiziqlarning perpendikularlik sharti nimadan iborat?
6. To‘g‘ri chiziqlarning parallellik sharti nimadan iborat ?
7. Nuqtadan to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa qanday topiladi?
8. Ikki to‘g‘ri chiziqning kesishish nuqtasi qanday aniqlanadi?
9. To‘g‘ri chiziq va koordinata o‘qlari bilan chegaralangan uchburchak yuzasini topish formulasini yozing.

§ TEKISLIKDA 2-TARTIBLI CHIZIQLAR. AYLANA, ELLIPS, GIPERBOLA, PARABOLA.

ANALITIK GEOMETRIYANING AMALIY MASALALARGA TADBIG’I.

- ***II tartibli tenglama va chiziqlar.***
- ***Aylana va uning tenglamalari.***
- ***Ellips va uning kanonik tenglamasi.***
- ***Ellipsning xarakteristikalari.***

3.1. II tartibli tenglama va chiziqlar. Bu bobning boshida har qanday I tartibli $Ax+By+C=0$ tenglama tekislikda biror to‘g‘ri chiziqni aniqlashini va aksincha, tekislikdagi har qanday to‘g‘ri chiziq I tartibli tenglamaga ega bo‘lishini ko‘rib chiqqan edik.

Endi tekislikda II tartibli tenglamalarni qaraymiz. Bu tenglamalarning umumiy ko‘rinishi quyidagicha bo‘ladi:

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0 \qquad (1)$$

Bunda (1) tenglamadagi A, B, C koeffitsiyentlardan kamida bittasi noldan farqli, ya’ni $A^2+B^2+C^2\neq0$ shart bajarilishi kerak. Aks holda (1) tenglama I tartibli tenglamaga aylanadi.

<u>1-TA’RIF:</u> Tenglamasi (1) ko‘rinishda bo‘lgan tekislikdagi chiziqlar ***II tartibli chiziqlar*** deb ataladi.

Biz quyida bunday chiziqlarning turlari bilan tanishib chiqamiz. Hozircha esa (1) tenglama har doim ham biror egri chiziqni ifodalashi shart emasligini misollar orqali ko‘rsatamiz.

1-misol. (1) tenglamadan A=1, C=–1,B=D=E=F=0 holda hosil bo‘ladigan II tartibli $x^2-y^2=0$ tenglama ikkita I tartibli $y=\pm x$ tenglamalarga ajraladi va ikkita to‘g‘ri chiziqni ifodalaydi.

2-misol. A=C=F=1, D=–1, B=E=0 holda (1) tenglama

$$x^2+y^2-2x+1=0 \Rightarrow (x-1)^2+y^2=0$$

ko‘rinishga keladi va uni faqat bitta M(1,0) nuqta qanoatlantiradi.

3-misol. A=C=F=1, D=B=E=0 holda (1) tenglama $x^2+y^2+1=0$ ko‘rinishga keladi va uni birorta ham nuqta qanoatlantirmaydi, ya’ni bu tenglama bo‘sh to‘plamni ifodalaydi.

3.2. Aylana va uning tenglamalari. Bizga maktabdan tanish bo‘lgan aylana ta’rifini eslaymiz.

2-TA’RIF: Berilgan M(a,b) nuqtadan bir xil R masofada joylashgan tekislikdagi nuqtalar to‘plami (geometrik o‘rni) ***aylana*** deb ataladi. Bunda M(a,b) nuqta aylananing ***markazi***, R soni esa aylananing ***radiusi*** deyiladi.

Markazi M(a,b) nuqtada va radiusi R bo‘lgan aylananing tenglamasi

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \qquad (2)$$

ko‘rinishda bo‘lishini oldin ko’rib o‘tgan edik. (2) aylananing ***normal tenglamasi*** deb ataladi va undan aylana II tartibli egri chiziq ekanligi ko‘rinadi. Agar aylana markazi O(0,0) koordinata boshida joylashgan bo‘lsa, uning tenglamasi

$$x^2+y^2=R^2$$

ko‘rinishda bo‘ladi va u aylananing ***kanonik tenglamasi*** deyiladi.

Endi umumiy holdagi II tartibli (1) tenglama qaysi shartda aylanani ifodalashini aniqlaymiz. Qisqa ko‘paytirish formulalardan foydalanib (2) tenglamani

$$x^2+y^2–2ax–2by+a^2+b^2–R^2=0 \qquad (3)$$

ko‘rinishga keltiramiz. Bu yerdan aylananing (3) tenglamasi (1) umumiy tenglamadan

$$A=C=1,\ B=0,\ D=–2a,\ E=–2b; \qquad F=a^2+b^2–R^2$$

bo‘lgan holda kelib chiqishini ko‘ramiz..

Endi qanday holda (1) umumiy tenglama aylanani ifodalashini aniqlaymiz. (3) tenglamadan ko‘rinadiki birinchi navbatda B=0 va A=C bo‘lishi kerak. Bu holda $A^2+B^2+C^2\neq0$ shartdan A=C $\neq0$ ekanligi kelib chiqadi va (1) tenglama ushbu

$$Ax^2+Ay^2+2Dx+2Ey+F=0 \qquad (4)$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Bu tenglamani (2) ko‘rinishga keltirish uchun uni A$\neq$0 soniga bo‘lamiz va to‘liq kvadratlarni ajratamiz:

$$Ax^2+Ay^2+2Dx+2Ey+F=0 \Rightarrow x^2+y^2+2\frac{D}{A}x+2\frac{E}{A}y+\frac{F}{A}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+\frac{D}{A})^2+(y+\frac{E}{A})^2+\frac{AF-D^2-E^2}{A^2}=0 \Rightarrow (x-a)^2+(y-b)^2=\frac{D^2+E^2-AF}{A^2}. \qquad (5)$$

Bunda a=–D/A va b=–E/A belgilash kiritilgan. Bu yerda $\Delta=D^2+E^2–AF$ ishorasiga qarab uch hol bo‘lishi mumkin.

I hol: $\Delta<0$. Bu holda (5) tenglama bo‘sh to‘plamni (mavhum aylanani) ifodalaydi, chunki uning chap tomoni doimo nomanfiydir.

II hol: $\Delta=0$. Bu holda (5) tenglama faqat bitta M(a,b) nuqtani (markazi shu nuqtada va radiusi R=0 bo‘lgan aylanani) ifodalaydi.

III hol: $\Delta>0$. Bunda $\Delta=R^2$ deb belgilash mumkin va (5) tenglama (2) ko‘rinishni oladi, ya’ni aylanani ifodalaydi.

Demak, (4) ko‘rinishdagi II tartibli tenglamada $D^2+E^2–AF=\Delta>0$ shart bajarilsa, u M(a,b) markazining koordinatalari a=–D/A va b=–E/A, radiusi esa

$$R=\frac{\sqrt{D^2+E^2-AF}}{|A|}$$

bo‘lgan aylanani ifodalaydi va (4) ***aylananing umumiy tenglamasi*** deb aytiladi.

Masalan, $x^2+y^2-2x+6y-15=0$ tenglamani qaraymiz. Bu tenglamada

$$A=C=1,\ D=-1,\ E=3,\ F=-15,\ D^2+E^2-AF=1+9-(-15)=25>0.$$

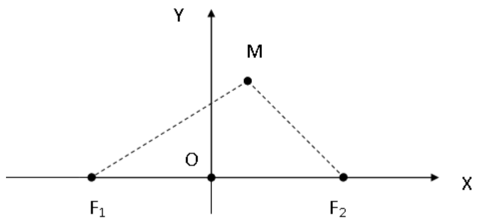
Demak, bu tenglama markazi M(1, –3) va radiusi R=5 bo‘lgan aylanani ifodalaydi. Haqiqatan ham

$$x^2+y^2-2x+6y-15=0 \Rightarrow (x-1)^2-1+(y+3)^2-9-15=0 \Rightarrow (x-1)^2+(y+3)^2=25=5^2.$$

3.3. Ellips va uning kanonik tenglamasi. Dastlab ellips ta’rifini keltiramiz**.**

<u>3-TA’RIF:</u> Berilgan ikkita F_1 va F_2 nuqtalargacha masofalarining yig‘indisi o‘zgarmas songa teng bo‘lgan tekislikdagi nuqtalarining geometrik o‘rni ***ellips*** deb ataladi. Bunda F_1 va F_2 nuqtalar ellipsning ***fokuslari*** deyiladi.

Ta’rif bo‘yicha ellips tenglamasini keltirib chiqaramiz. Buning uchun F_1 va F_2 fokuslar orasidagi masofani $2c$, ellipsning ixtiyoriy $M(x,y)$ nuqtasidan fokuslarigacha bo‘lgan masofalar yig‘indisini $|MF_1|+|MF_2|=2a$ deb belgilaymiz. XOY Dekart koordinatalar sistemasini quyidagicha kiritamiz. OX o‘qini F_1 va F_2 fokuslar orqali, OY o‘qini esa fokuslar o‘rtasidan o‘tkazamiz (26-rasmga qarang). Bunda F_1 va F_2 fokuslar koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik joylashadi va, belgilashimizga asosan $|F_1F_2|=2c$ bo‘lgani uchun, $|OF_1|=|OF_2|=c$ bo‘ladi. Shu sababli bu fokuslar $F_1(-c,0)$ va $F_2(c,0)$ koordinatalarga ega bo‘ladi.



Bu holda, ikki nuqta orasidagi masofa formulasiga asosan,

$$|MF_1|=\sqrt{(x+c)^2+y^2}\ ,\quad |MF_2|=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

va, ellips ta’rifiga asosan,

$$|MF_1|+|MF_2|=\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a\ .$$

Bu tenglikni quyidagicha soddalashtiramiz:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\Rightarrow[\sqrt{(x+c)^2+y^2}\,]^2=[2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\,]^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4a^2-4xc=4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\Rightarrow(a^2-xc)^2=[a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\,]^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^4-2a^2xc+(xc)^2=a^2(x-c)^2+a^2y^2\Rightarrow(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2). \qquad (6)$$

Yuqoridagi chizmadagi F_1MF_2 uchburchakdan uchburchak tengsizligiga asosan

$$|MF_1|+|MF_2|>|F_1F_2| \Rightarrow 2a>2c>0 \Rightarrow a^2-c^2>0$$

Ekanligini ko‘ramiz. Shu sababli $a^2-c^2=b^2$ deb belgilab olish mumkin. Bu belgilashda (6) tenglama $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ ko‘rinishga keladi. Bu tenglamani a^2b^2 ifodaga bo‘lib, ushbu tenglamaga kelamiz:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\quad(b^2=a^2-c^2) \qquad (7)$$

<u>4-TA’RIF:</u> (7) tenglama ellipsning ***kanonik tenglamasi*** deyiladi.

Ellips kanonik tenglamasini tahlil etib, uning xususiyatlarini aniqlaymiz.

✓ Kanonik (7) tenglamada ellipsga tegishli har bir M(x,y) nuqtaning koordinatalari kvadrati bilan qatnashmoqda. Shu sababli $M_1(-x,y)$, $M_2(-x,\ -y)$ va $M_3(x,\ -y)$ nuqtalarning koordinatalari ham (7) kanonik tenglamani qanoatlantiradi, ya'ni bu nuqtalar ham ellipsga tegishli bo'ladi. Bundan OX va OY koordinata o'qlari ellips uchun simmetriya o'qlari bo'lishi kelib chiqadi.

✓ (7) tenglamaga x=0 yoki y=0 qiymatlarni qo'yib va bunda hosil bo'ladigan tenglamalarni yechib, mos ravishda ellipsning OX yoki OY koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalarini topamiz:

$$x=0 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow y^2=b^2 \Rightarrow y=\pm b\,; \quad y=0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}=1 \Rightarrow x^2=a^2 \Rightarrow x=\pm a.$$

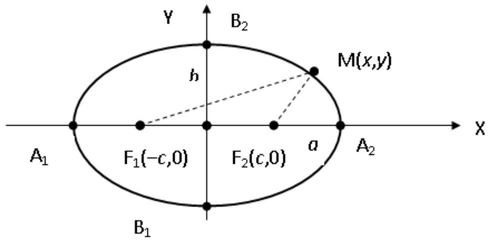
Demak, ellips OX o'qini $A_1(-a,0)$ va $A_2(a,0)$, OY o'qini esa $B_1(0,-b)$ va $B_2(0,b)$ nuqtalarda kesib o'tadi. Bu nuqtalar ellipsning ***uchlari*** deyiladi. Ellips uchlari orasidagi $A_1A_2=2a$ va $B_1B_2=2b$ kesmalar mos ravishda ellipsning ***katta o'qi*** va ***kichik o'qi***, $OA_1=OA_2=a$ va $OB_1=OB_2=b$ esa uning ***katta yarim o'qi*** va ***kichik yarim o'qi*** deyiladi.

✓ (7) kanonik tenglamadan ellipsga tegishli ixtiyoriy M(x,y) nuqtaning koordinatalari

$$\frac{x^2}{a^2}=1-\frac{y^2}{b^2}\le 1 \Rightarrow x^2\le a^2 \Rightarrow |x|\le a, \qquad \frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2}\le 1 \Rightarrow y^2\le b^2 \Rightarrow |y|\le b$$

tengsizliklarni qanoatlantirishini ko'ramiz. Demak, ellips OX o'qi bo'yicha $x=\pm a$ vertikal, OY o'qi bo'yicha esa $y=\pm b$ gorizontal to'g'ri chiziqlar orasida joylashgan chegaralangan egri chiziqdan iborat bo'ladi.

✓ Koordinata o'qlari ellips uchun simmetriya o'qlari bo'lgani uchun uning grafigini faqat birinchi chorakda aniqlash kifoya. Bu yerda $x\ge 0$ va $y\ge 0$ bo'lgani uchun (7) tenglamadan unga teng kuchli bo'lgan $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ tenglamaga kelamiz. Bunda $x\in[0;a]$ bo'lib, x o'zgaruvchining qiymati 0 dan a ga qarab oshib borganda, y o'zgaruvchining qiymati b dan boshlab nolgacha kamayib boradi. Bu ma'lumot asosida dastlab ellips grafigini I chorakdagi qismini chizamiz, so'ngra uni simmetriya asosida II, III va IV choraklarga davom ettirib, ellips grafigini quyidagi 27-rasmdagidek bo'lishini topamiz:



3.4. Ellipsning xarakteristikalari. Endi ellipsning ayrim xususiyatlarini ifodalovchi tushunchalar bilan tanishamiz.

5-TA'RIF: Ellipsning fokuslari orasidagi $2c$ masofani uning katta o'qi uzunligi $2a$ ga nisbati ellipsning ***ekssentrisiteti*** deb ataladi.

Ellipsning ekssentrisiteti ε kabi belgilanadi va ta'rifga hamda (7) kanonik tenglamaga asosan

$$\varepsilon=\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}\ . \qquad (8)$$

Bu formuladan $0\le\varepsilon<1$ ekanligi kelib chiqadi. Agar $\varepsilon=0$ bo'lsa, (8) formuladan $a=b$ ekanligini ko'ramiz. Bu holda $a=b=R$ deb olsak, (7) kanonik tenglama $x^2+y^2=R^2$ ko'rinishga keladi, ya'ni aylana tenglamasini ifodalaydi. Demak aylana ekssentrisiteti $\varepsilon=0$ bo'lgan ellipsdan iborat, ya'ni ellipsning xususiy bir holi ekan. Shunday qilib ellipsning ekssentrisiteti ε qiymati bo‘yicha uning shakli haqida xulosa chiqarish mumkin. Bunda ε qiymati qanchalik nolga yaqin bo‘lsa, ellipsning shakli shunchalik “dumaloqroq” ; ε qanchalik birga yaqin bo‘lsa, ellipsning shakli shunchalik “cho‘zinchoqroq” bo‘ladi.

6-TA’RIF: Ellipsning ixtiyoriy M(x,y) nuqtasidan uning F_1 va F_2 fokuslarigacha bo‘lgan $|MF_1|=r_1$ va $|MF_2|=r_2$ masofalar shu nuqtaning ***fokal radiuslari*** deyiladi.

Ellips ta’rifiga asosan $r_1+r_2=2a$ bo‘ladi. Ikki nuqta orasidagi masofa formulasiga asosan

$$r_1=|MF_1|=\sqrt{(x+c)^2+y^2}\,,\quad r_2=|MF_2|=\sqrt{(x-c)^2+y^2}\;.$$

Fokal radiuslarning bu ifodalarini kvadratga oshirib, so‘ngra hosil bo‘lgan ifodalarni hadma-had ayirib hamda $r_1+r_2=2a$ ekanligini eslab , r_1 va r_2 uchun ushbu tenglamalar sistemasiga kelamiz:

$$\begin{cases} r_1^2-r_2^2=4cx \\ r_1+r_2=2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (r_1+r_2)(r_1-r_2)=4cx \\ r_1+r_2=2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1-r_2=\dfrac{2cx}{a} \\ r_1+r_2=2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1-r_2=2\varepsilon x \\ r_1+r_2=2a \end{cases}$$

Bu tenglamalar sistemasini yechib, fokal radiuslar uchun quyidagi formulalarni olamiz:

$$r_1=a+\varepsilon x \qquad r_2=a-\varepsilon x \qquad (9)$$

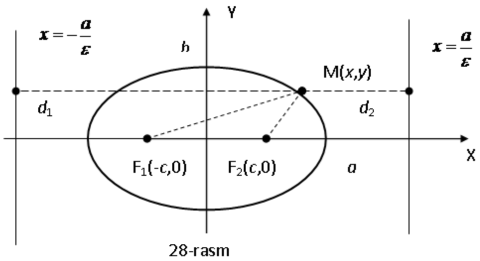
7-TA’RIF: Tenglamasi $x=\pm a/\varepsilon$ bo‘lgan vertikal to‘g‘ri chiziqlar ellipsning ***direktrisalari*** deyiladi.

Ellipsning ixtiyoriy M(x,y) nuqtasidan uning $x=-a/\varepsilon$ va $x=a/\varepsilon$ direktrisalarigacha masofalarni mos ravishda d_1 va d_2 deb belgilaymiz. Quyidagi chizmadan ko‘rinadiki $d_1=(a/\varepsilon)+x$ va $d_2=(a/\varepsilon)-x$. Bu tengliklar va (9) formulaga asosan quyidagi natijani olamiz:

$$\frac{r_1}{d_1}=\frac{a+\varepsilon x}{\frac{a}{\varepsilon}+x}=\varepsilon\frac{\frac{a}{\varepsilon}+x}{\frac{a}{\varepsilon}+x}=\varepsilon,\quad \frac{r_2}{d_2}=\frac{a-\varepsilon x}{\frac{a}{\varepsilon}-x}=\varepsilon\frac{\frac{a}{\varepsilon}-x}{\frac{a}{\varepsilon}-x}=\varepsilon\Rightarrow\ \frac{r_1}{d_1}=\frac{r_2}{d_2}=\varepsilon. \quad (10)$$

Shunday qilib ellipsning ixtiyoriy nuqtasidan uning OY o‘qiga nisbatan bir tomonda joylashgan fokusi va direktrisasigacha bo‘lgan masofalar nisbati o‘zgarmas son bo‘lib, doimo ε ekssentrisitetiga teng bo‘ladi.

Ellips va uning xarakteristikalari quyidagi 28-rasmda ko‘rsatilgan.



28-rasm

Misol: $x^2+4y^2=4$ tenglama ellipsni ifodalashini ko‘rsating va uning barcha xarakteristikalarini toping.

Yechish: Dastlab berilgan tenglamani ikkala tomonini 4 soniga bo‘lamiz:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1\,.$$

Bu yerdan berilgan tenglama yarim o‘qlari $a=2$ va $b=1$ bo‘lgan ellipsni ifodalashini ko‘ramiz. Unda $c^2=a^2-b^2=3$ bo‘lgani uchun qaralayotgan ellipsning fokuslari $F_1(-\sqrt{3},0)$ va $F_2(\sqrt{3},0)$

nuqtalarda joylashganligini ko‘ramiz. Bu natijalardan foydalanib, ellipsning ekssentrisiteti va direktrisalarini topamiz:

$$\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2};\quad x=\pm\frac{a}{\varepsilon}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\pm\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Ellipsga tegishli M(x,y) nuqtaning fokal radiuslari

$$r_1=a+\varepsilon x=2+\frac{\sqrt{3}}{2}x,\; r_2=a+\varepsilon x=2+\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

formulalar bilan topiladi.

XULOSA

Tekislikda I tartibli tenglamalar faqat va faqat to‘g‘ri chiziqlarni ifodalashini ko‘rib o‘tgan edik. Ammo tekislikda II tartibli tenglamalarga turli chiziqlar mos keladi va ular II tartibli chiziqlar deyiladi. Ulardan biri ellips bo‘lib hisoblanadi. Ellipsning grafigini qisilgan aylana kabi tasavvur etish mumkin. Ellipsning o‘ziga xos xususiyati shundan iboratki, uning ixtiyoriy nuqtasidan fokuslar deb ataluvchi ikkita nuqtalargacha bo‘lgan masofalar yig‘indisi o‘zgarmas sondir. Ellipslar amaliyotda ko‘p uchraydi va keng qo‘llaniladi. Masalan, planetalar Quyosh atrofida ellips bo‘yicha aylanadi. Ellipsning xususiyatlari uning kanonik tenglamasi bo‘yicha o‘rganiladi. Bunda uning ekssentrisitet, direktrisa va fokal radiuslar kabi xarakteristikalaridan foydalaniladi. Shuni ta’kidlab o‘tish kerakki, bizga maktabdan tanish bo‘lgan aylana ellipsning xususiy bir holidir.

Tayanch iboralar

* Ikki o‘zgaruvchili II tartibli tenglamalar * Tekislikdagi II tartibli chiziqlar
* Aylana * Aylana markazi * Aylana radiusi * Aylananing normal tenglamasi
* Aylananing kanonik tenglamasi * Aylananing umumiy tenglamasi * Ellips
* Ellipsning fokuslari * Ellipsning kanonik tenglamasi * Ellipsning uchlari
* Ellips o‘qlari * Fokal radiuslar * Ellips ekssentrisiteti * Ellips direktrisalari.

Takrorlash uchun savollar

1. Ikkinchi darajali tenglamaning umumiy ko‘rinishi qanday bo‘ladi?
2. Aylana qanday ta’riflanadi?
3. Aylananing normal tenglamasi qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
4. Aylananing kanonik tenglamasi qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
5. Aylananing umumiy tenglamasini yozing va u bo‘yicha aylana markazi hamda radiusi qanday topilishini ko‘rsating.
6. Ellips qanday ta’riflanadi?
7. Ellipsning kanonik tenglamasini yozing va undagi parametrlar ma’nosini ko‘rsating.
8. Ellipsning ekssentrisiteti qanday aniqlanadi va u nimani ifodalaydi?
9. Ellipsning fokal radiuslari deb nimaga aytiladi va ular qanday topiladi?
10. Ellips direktrisalari deb nimaga aytiladi?

GIPERBOLA VA PARABOLA. II TARTIBLI UMUMIY TENGLAMANING TAHLILI

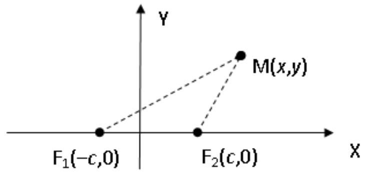
- ***Giperbola va uning kanonik tenglamasi.***
- ***Giperbolaning xarakteristikalari.***
- ***Parabola, uning kanonik tenglamasi va xarakteristikalari.***
- ***Dekart koordinatalar sistemasini almashtirish.***

- ***II tartibli tenglamalarning umumiy holdagi tahlili.***

4.1. Giperbola va uning kanonik tenglamasi. Biz II tartibli chiziqlardan birini, ya'ni ellips va uning xususiy holi bo'lmish aylanani ko'rib chiqdik va ularning xossalarini o'rgandik. Bu yerda biz II tartibli chiziqlar bilan tanishishni davom ettirib, ulardan yana ikkitasini qaraymiz.

1-TA'RIF: Tekislikdagi ikkita F_1 va F_2 nuqtalargacha masofalarining ayirmasining absolut qiymati o'zgarmas $2a$ soniga teng bo'lgan tekislikdagi nuqtalarning geometrik o'rni ***giperbola*** deb ataladi. Bunda F_1 va F_2 nuqtalar ***fokuslar*** deyiladi.

Giperbola tenglamasini tuzish uchun fokuslar orasidagi masofani $|F_1F_2|=2c$ deb olamiz Dekart koordinatalar sistemasini xuddi ellips holida ko'rilgan singari olamiz (29-rasmga qarang). Unda fokuslar koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik bo'lib, ular koordinatalari orqali $F_1(-c,0)$ va $F_2(c,0)$ ko'rinishda ifodalanadi. Giperboladagi ixtiyoriy bir $M(x,y)$ nuqtani olamiz.



Giperbola ta'rifga asosan $|MF_2| - |MF_1| = \pm 2a$ bo'ladi. Bu tenglikni koordinatalar orqali ifodalab va ellips tenglamasini keltirib chiqarish uchun qilingan soddalashtirishlarni takrorlab, quyidagi tenglamani hosil etamiz:

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Bu natija oldin ko'rilgan ellips tenglamasiga o'xshaydi, ammo bu yerda $a^2-c^2<0$ bo'ladi. Haqiqatan ham chizmadagi F_1MF_2 uchburchakdan uchburchak tengsizligiga asosan

$$\big|\,|MF_2| - |MF_1|\,\big| < |F_1F_2| \Rightarrow 2a<2c \Rightarrow a<c \Rightarrow a^2-c^2<0.$$

Shu sababli $a^2 - c^2 = -b^2$ deb belgilash mumkin va oxirgi tenglamani $a^2(a^2-c^2)$ songa bo'lib,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (b^2 = c^2 - a^2) \qquad (1)$$

tenglamani hosil qilamiz.

2-TA'RIF: (1) tenglama giperbolaning ***kanonik tenglamasi*** deyiladi.

Giperbolaning kanonik tenglamasini tahlil etish orqali uning xususiyatlarini aniqlaymiz.

❖ Giperbolaning (1) kanonik tenglamasida x va y koordinatalar juft darajada qatnashadi. Demak, $M(x,y)$ giperbolada yotgan nuqta bo'lsa, unda ushbu $M_1(-x,y)$, $M_2(-x, -y)$ va $M_3(x, -y)$ nuqtalar ham giperbolaga tegishli bo'ladi, ya'ni giperbola OX va OY koordinata o'qlariga nisbatan simmetrikdir.

❖ Giperbolaning OX va OY koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalarini topamiz.

$$y=0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}=1 \Rightarrow x^2 = a^2 \Rightarrow x = \pm a.$$

Bu yerdan giperbola OX o'qini ikkita $A_1(-a,0)$ va $A_2(a,0)$ nuqtalarda kesib o'tishini ko'ramiz. Bu nuqtalar giperbolaning ***uchlari*** , ular orasidagi $|A_1A_2|=2a$ masofa giperbolaning ***haqiqiy o'qi*** deyiladi.

Agar $x=0$ desak, u holda (1) tenglamadan $y^2= -b^2 \Rightarrow y\in\varnothing$ natijaga kelamiz. Bundan giperbola OY o'qi bilan kesishmasligi kelib chiqadi. Shu sababli (1) kanonik tenglama orqali aniqlanadigan $B_1(0,-b)$ va $B_2(0, b)$ nuqtalar giperbolaning ***mavhum uchlari***, ular orasidagi $|B_1B_2|=2b$ masofa esa giperbolaning ***mavhum o'qi*** deb ataladi. Mos ravishda a va b sonlariga giperbolaning ***yarim haqiqiy*** va ***yarim mavhum o‘qlari*** deyiladi. Giperbolaning o‘qlari kesishadigan nuqta uning ***markazi*** deb yuritiladi.

❖ Giperbolaning (1) kanonik tenglamasidan yana quyidagi natijalarni olamiz:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\Rightarrow\frac{x^2}{a^2}=1+\frac{y^2}{b^2}\geq 1\Rightarrow|x|\geq a\Rightarrow x\in(-\infty,-a]\cup[a,\infty);$$
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\Rightarrow\frac{y^2}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}-1\geq 0\Rightarrow|y|\geq 0\Rightarrow y\in(-\infty,\infty).$$

Bu yerdan giperbola $x=-a$ va $x=a$ tenglamali vertikal to‘g‘ri chiziqlardan mos ravishda chap va o‘ng tomonda joylashgan ikkita bo‘lakdan iborat chegaralanmagan chiziq ekanligini ko‘ramiz. Bu bo‘laklar giperbolaning ***tarmoqlari*** deb ataladi.

❖ Giperbola tenglamasini quyidagi ko‘rinishda qaraymiz:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\Rightarrow\frac{y^2}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}-1\Rightarrow y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}=\pm\frac{b}{a}x\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}\,.$$

Bu tenglamadan ikkita xulosa kelib chiqadi. Birinchidan, $|x|$ o‘zining eng kichik qiymati a dan boshlab cheksiz oshib borsa, unda $|y|$ qiymatlari 0 dan boshlab cheksiz oshib boradi. Ikkinchidan, $|x|$ oshib borgan sari

$$\frac{a^2}{x^2}\approx 0\Rightarrow\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}\approx 1\Rightarrow y\approx\pm\frac{b}{a}x\,.$$

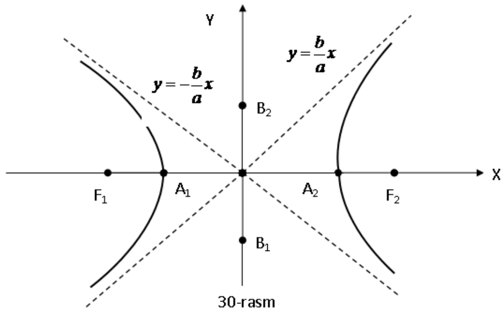
Demak, $|x|$ oshib borgan sari giperbolaning shoxlari tobora

$$y=\pm\frac{b}{a}x \qquad (2)$$

tenglamaga ega bo‘lgan to‘g‘ri chiziqlarga yaqinlashib boradi. Bu to‘g‘ri chiziqlar giperbolaning ***asimptotalari*** deb ataladi.

Izoh: Asimptota tushunchasining aniq ta’rifi keyinchalik VIII bobning, §5, IV qismida beriladi.

Bu ma’lumotlar asosida giperbola shaklini dastlab koordinatalar tekisligining I choragida ($x\geq0$, $y\geq0$), so‘ngra esa uning simmetrikligidan foydalanib, qolgan choraklarda aniqlaymiz. Natijada giperbolani va uning ikkita asimptotasini ifodalovchi quyidagi 30-rasmni hosil etamiz:



30-rasm

Giperbolaning xarakteristikalari. Endi giperbolaning xususiyatlarini ifodalovchi ayrim xarakteristikalar bilan tanishamiz.

<u>3-TA’RIF:</u> Giperbolani fokuslari orasidagi $2c$ masofani uning haqiqiy o‘qi uzunligi $2a$ ga nisbati giperbolaning ***ekssentrisiteti*** deyiladi.

Giperbolaning ekssentrisiteti ε kabi belgilanadi va uning ta’rifi hamda (1) kanonik tenglamaga asosan quyidagi formula bilan hisoblanadi:

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = \sqrt{1+(\frac{b}{a})^2}\ . \qquad (3)$$

Bu formuladan ko‘rinadiki, giperbolaning ekssentrisiteti $\varepsilon>1$ bo‘ladi va uning tarmoqlarini shaklini aniqlashtiradi. Agar ε qiymati birga qanchalik yaqin bo‘lsa, giperbolaning tarmoqlari OX o‘qiga qarab shunchalik siqiq, ε qiymati oshib borgan sari esa shunchalik yoyiq bo‘ladi.

4-TA’RIF: Giperbolaning $M(x,y)$ nuqtasidan uning F_1 va F_2 fokuslarigacha bo‘lgan masofalar shu nuqtaning ***fokal radiuslari*** deyiladi.

Bu fokal radiuslar $r_1=|MF_1|$ va $r_2=|MF_2|$ kabi belgilanadi. Ellipsning fokal radiuslarini topish uchun bajarilgan ishlarni takrorlab, giperbolaning fokal radiuslari uchun ushbu formulalarni hosil etamiz:

$$r_1= \pm(a+\varepsilon x), \qquad r_2=\pm(a-\varepsilon x) \qquad (4)$$

Bunda giperbolaning O koordinata boshidan o‘ng tomonda joylashgan tarmog‘i uchun “+”, chap tomondagi tarmog‘i uchun esa “–” ishorasi olinadi.

5-TA’RIF: Tenglamalari $x=\pm a/\varepsilon$ bo‘lgan ikkita l_1 va l_2 vertikal to‘g‘ri chiziqlar ***g***iperbolaning ***direktrisalari*** deb ataladi.

Giperbolada ektsentrisitet $\varepsilon>1$ bo‘lgani uchun $a/\varepsilon<a$. Demak, giperbolaning direktrisalari uning O markaz bilan A_1 va A_2 uchlari orasida joylashgan bo‘ladi.

TEOREMA: Giperboladagi ixtiyoriy $M(x,y)$ nuqtaning r_1 va r_2 fokal

radiuslarining shu nuqtadan mos l_1 va l_2 direktrisalarigacha bo‘lgan d_1 va d_2 masofalarga nisbati o‘zgarmas bo‘lib, bu nisbat ektsentrisitetga teng bo‘ladi, ya’ni

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{d_1}{d_2} = \varepsilon\ .$$

Teoremani isboti ellips uchun ko‘rilgan usulda amalga oshiriladi va o‘quvchiga havola qilinadi.

Endi (1) kanonik tenglamada $a=b$ bo‘lgan holni alohida ko‘rib chiqamiz.Bu holda giperbola ***teng yonli*** deyiladi. Teng yonli giperbolaning asimptotalari $qi\pm x$ tenglama bilan aniqlanib, koordinata burchaklarining bissektrisalaridan iborat va o‘zaro perpendikular bo‘ladi. Bu asimptotalarni OX^* va OY^* koordinata o‘qlari sifatida olsak, unda bu yangi koordinatalar sistemasida giperbolaning tenglamasi bizga maktabdan tanish bo‘lgan $x^*\cdot y^*=k \Rightarrow y^*=k/x^*$ $(k\neq0)$ ko‘rinishga keladi. Bunda $k>0$ bo‘lsa giperbola tarmoqlari koordinata tekisligining I va III choraklarida, $k<0$ holda esa II va IV choraklarda joylashgan bo‘ladi.

Iqtisodiy masalalarni qarashda ***kasr – chiziqli*** deb ataladigan va

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \quad (c \neq 0, bc - ad \neq 0) \qquad (5)$$

ko‘rinishda bo‘lgan tenglama ko‘p uchraydi. Masalan, iqtisodchi olim Tornkvist odamlarning daromadlari x va turli tovarlarga bo‘lgan talablari y orasidagi bog‘lanishning matematik modelini kasr – chiziqli tenglama ko‘rinishda qarash kerakligini asoslab bergan (VI bob, §3 ga qarang). Bu model x daromad oshib borishi bilan y talab ham dastlab oshib borishi, ammo borgan sari bu o‘sish sekinlashib, ma’lum bir chegaradan ortiq bo‘la olmasligini akslantiradi.

Agar ko‘rsatilgan kasr – chiziqli tenglamada yangi

$$x^* = x + \frac{d}{c},\ \ y^* = y - \frac{a}{c}$$

koordinatalarga o‘tsak va $k=(bc-ad)/c^2$ belgilash kiritsak, unda (5) $y^*=k/x^*$ ko‘rinishga kelishini tekshirib ko‘rish mumkin. Demak, (5) kasr – chiziqli tenglama teng yonli giperbolani ifodalaydi. Bu teng yonli giperbolaning asimptotalari $x=-d/c$ vertikal va $y=a/c$ gorizontal to‘g‘ri chiziqlardan iborat, markazi esa $M(-d/c, a/c)$ nuqtada joylashgan bo‘ladi.

Misol: Quyidagi kanonik tenglamasi bilan berilgan giperbolaning barcha xarakteristikalarini toping:

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1.$$

Bu giperbolaning abssissasi $x=8$, ordinatasi $y>0$ bo‘lgan M nuqtasining fokal radiuslarini aniqlang.

***Ye*chish:** Berilgan tenglamani (1) kanonik tenglama bilan taqqoslab, giperbolaning haqiqiy va mavhum yarim o‘qlari $a=4$, $b=3$ ekanligini ko‘ramiz. Bu holda $c^2=a^2+b^2=16+9=25 \Rightarrow c=5$ bo‘lgani uchun giperbolaning fokuslari $F_1(-5,0)$ va $F_2(5,0)$ nuqtalarda joylashganligini aniqlaymiz. Berilgan giperbolaning asimptotalari

$$y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\frac{3}{4}x=\pm 0{,}75x,$$

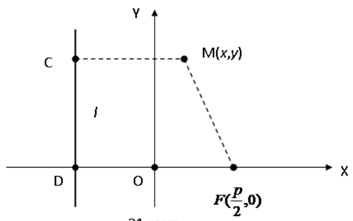
ekssentrisiteti $\varepsilon=c/a=5/4=1{,}25$, direktrisalarining tenglamasi esa $x=\pm a/\varepsilon=\pm 4/1{,}25=\pm 3{,}2$ bo‘ladi. Endi giperbolaning berilgan $M(8,y)$ nuqtasining fokal radiuslarini topamiz. Bu nuqta giperbolaning o‘ng shoxida joylashgan va shu sababli (4) formulani “+” ishora bilan qaraymiz:

$$r_1=a+\varepsilon x=4+1{,}25\cdot 8=14, \qquad r_2=-a+\varepsilon x=-4+1{,}25\cdot 8=6.$$

4.3. Parabola, uning kanonik tenglamasi va xarakteristikalari. Bizga parabola maktabdan ma’lum bo‘lib, u $y=ax^2+bx+c$ kvadratik funksiyaning grafigi singari qaralgan edi. Endi bu tushunchaga ma’lum bir xossaga ega II tartibli chiziq singari yondashamiz.

6-TA’RIF: Berilgan F nuqta va l to‘g‘ri chiziqqacha masofalari o‘zaro teng bo‘lgan tekislikdagi nuqtalarining geometrik o‘rni ***parabola*** deb aytiladi. Bunda F nuqta ***fokus***, l to‘g‘ri chiziq esa ***direktrisa*** deyiladi.

Parabola tenglamasini topish uchun OX koordinata o‘qini F fokusdan o‘tuvchi va l direktrisaga perpendikular qilib, OY o‘qini esa F va l o‘rtasidan o‘tkazamiz. Fokusdan direktrisagacha bo‘lgan masofani $|FD|=p>0$ deb belgilaymiz. Unda fokusning koordinatalari $F(p/2,0)$, direktrisa tenglamasi esa $x=-p/2$ bo‘ladi. Parabolaga tegishli ixtiyoriy $M(x,y)$ nuqtani olamiz va uning l direktrisadagi proyeksiyasini C deb belgilaymiz (31-rasmga qarang).



31-rasm

Parabola ta’rifiga ko‘ra $|MC|=|MF|$. Bu tenglikni koordinatalar orqali ifodalab va uni soddalashtirib, ushbu natijani olamiz:

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right| \Rightarrow \left(\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}\right)^2=\left|x+\frac{p}{2}\right|^2 \Rightarrow x^2-xp+\frac{p^2}{4}+y^2=x^2+xp+\frac{p^2}{4} \Rightarrow y^2=2px$$

Demak, ko‘rilayotgan parabola

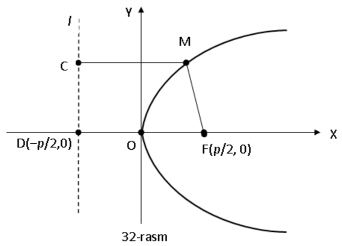
$$y^2=2px \qquad (6)$$

tenglama bilan ifodalanadi.

7-TA'RIF: (6) tenglama parabolaning ***kanonik tenglamasi***, p ($p>0$) esa uning ***parametri*** deyiladi.

Parabolaning kanonik tenglamasini tahlil etamiz.

- $y^2 \geq 0$, $p>0 \Rightarrow x \geq 0$. Demak, parabola O koordinata boshidan o'ng tomonda joylashgan.
- Bunda O(0,0) koordinata boshi (6) tenglamani qanoatlantiradi va shu sababli parabolada yotadi. O nuqta parabolaning ***uchi*** deb ataladi.
- (6) tenglamada y kvadrati bilan qatnashgani uchun M(x,y) parabolaga tegishli nuqta bo'lsa, unda N(x,–y) nuqta (6) tenglamani qanoatlantiradi, ya'ni parabolaga tegishli bo'ladi. Bundan bizning parabola OX o'qiga nisbatan simmetrik ekanligi kelib chiqadi.
- Agar (6) kanonik tenglamada x o'zining 0 qiymatidan boshlab o'sib borsa, unda $|y|$ ham 0 qiymatdan boshlab o'sib boradi. Demak, parabola chegaralanmagan chiziq ekan.
- Bu ma'lumotlar asosida dastlab parabola shaklini I chorakda ($x \geq 0$, $y \geq 0$) aniqlab, so'ngra OX o'qiga simmetrik tarzda davom ettiramiz. Natijada parabola quyidagi ko'rinishda ekanligini aniqlaymiz (32-rasmga qarang):



32-rasm

Parabolaning ixtiyoriy M nuqtasidan l direktirisagacha bo'lgan masofani $|MC|=d$, F fokusigacha bo'lgan masofani $|MF|=r$ (fokal radius) deb belgilaymiz. Unda parabola ta'rifga asosan $r=d=x+p/2$ bo'ladi. Ellips va giperbolani qaraganimizda ularning ekssentrisiteti uchun $\varepsilon=r/d$ tenglik o'rinli bo'lishini ko'rgan edik. Bu tenglikni ε ekssentrisitetning ta'rifi sifatida olsak, unda parabola uchun $\varepsilon=r/d=1$ bo'ladi.

Demak, ε ekssentrisitet qiymatiga qarab II tartibli chiziqning ko'rinishini aniqlash mumkin ekan. Agar $\varepsilon=0$ bo'lsa – aylana , $0<\varepsilon<1$ bo'lsa – ellips , $\varepsilon=1$ bo'lsa – parabola va $\varepsilon>1$ bo'lsa – giperbolaga ega bo'lamiz.

Misol: OX o'qi parabolaning simmetriya o'qi bo'lib, uning uchi koordinatalar

boshida yotadi. Parabola uchidan fokusigacha bo'lgan masofa 4 birlikka teng.

Parabola va uning direktrisasi tenglamasini toping.

Yechish: Dastlab, masala shartiga asosan, parabolaning p parametrini topamiz:

$$|OF|=4 \Rightarrow p/2=4 \Rightarrow p=8.$$

Unda, (5) formulaga asosan, parabola tenglamasini topamiz:

$$y^2=2px \Rightarrow y^2=2\cdot 8x=16x.$$

Bu yerdan direktrisa tenglamasi $x=-p/2 \Rightarrow x=-4$ ekanligini ko'ramiz.

Shuni ta'kidlab otish kerakki, $y=ax^2+bx+c$ ($a\neq 0$) kvadrat uchhadning grafigi uchi koordinatalari

$$x_0=-\frac{b}{2a},\ y_0=\frac{4ac-b^2}{4a}$$

bo‘lgan $M_0(x_0, y_0)$ nuqtada, simmetriya o‘qi esa OY o‘qiga parallel va $x=-b/2a$ tenglamaga ega bo‘lgan vertikal to‘g‘ri chiziqdan tashkil topgan paraboladan iboratdir. Agar $a>0$ bo‘lsa, parabola yuqoriga, $a<0$ bo‘lsa, pastga yo‘nalgan bo‘ladi.

Parabolaning iqtisodiy tatbig‘iga doir bir misol keltiramiz. Ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi x, uning bir birligining narxi P va ishlab chiqarish xarajatlari Z bo‘lsa , bu ko‘rsatkichlar $P=ax+b$ ($a<0$) va $Z=cx+d$ ($c>0$) ko‘rinishda chiziqli bog‘langan deb olish mumkin. Unda bu mahsulotni sotishdan olingan tushum T va foyda F bilan mahsulot hajmi x orasidagi bog‘lanish

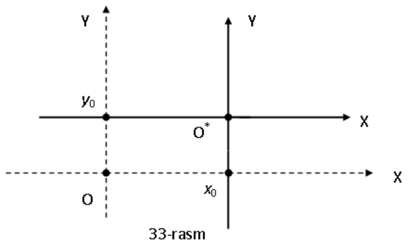
$$T=Px=ax^2+bx\ ,\quad F=T-Z=ax^2+bx-(cx+d)=ax^2+(b-c)x-d$$

ko‘rinishdagi kvadrat uchhadlar, ya’ni parabolalar orqali ifodalanadi.

4.4. Dekart koordinatalar sistemasini almashtirish. Ko‘p hollarda berilgan masala yechimini soddalashtirish, chiziq tenglamasini ixcham va qulay ko‘rinishda yozish uchun berilgan XOY Dekart koordinatalar sistemasidan boshqa bir X*O*Y* Dekart koordinatalar sistemasiga o‘tishga to‘g‘ri keladi. Bunda uch hol bo‘lishi mumkin.

I hol. Koordinatalar sistemasini parallel ko‘chirish. Berilgan XOY koordinatalar sistemasining boshi O(0,0) biror O* (x_0, y_0) nuqtaga parallel ko‘chiriladi. Bunda OX va OY o‘qlarning yo‘nalishi va holati o‘zgarmay qoladi va shu sababli bu yangi hosil bo‘lgan sistemani XO*Y kabi belgilaymiz (quyidagi 33-rasmga qarang).

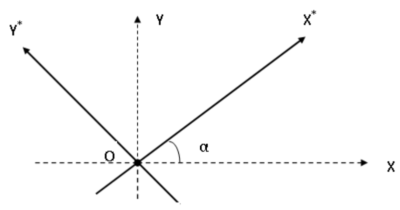
Bunda eski XOY sistemadagi x va y koordinatalar bilan yangi XO*Y sistemadagi x^* va y^* koordinatalar orasidagi bog‘lanish quyidagi formulalar bilan ifodalanadi:



33-rasm

$$\begin{cases} x = x^* + x_0 \\ y = y^* + y_0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x^* = x - x_0 \\ y^* = y - y_0 \end{cases}. \qquad (7)$$

II hol. Koordinatalar sistemasini burish. XOY koordinatalar sistemasining boshi O(0,0) o‘zgartirilmasdan, OX va OY o‘qlar bir xil α burchakka buriladi. Bunda hosil bo‘ladigan yangi sistemani X*OY* deb belgilaymiz (34-rasmga qarang).



34-rasm

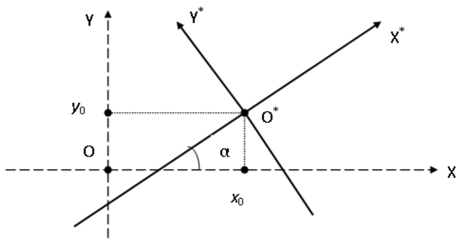
Bunda eski XOY sistemadagi x va y koordinatalar bilan yangi X*OY* sistemadagi x^* va y^* koordinatalar orasidagi bog‘lanish quyidagi formulalar bilan ifodalanadi:

$$\begin{cases} x = x^*\cos\alpha - y^*\sin\alpha \\ y = x^*\sin\alpha + y^*\cos\alpha \end{cases}, \qquad \begin{cases} x^* = x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ y^* = -x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases}. \qquad (8)$$

III hol. Koordinatalar sistemasini parallel ko‘chirish va burish. Dastlab berilgan XOY koordinatalar sistemasining boshi O(0,0) biror O*(x_0, y_0) nuqtaga parallel ko‘chiriladi. So‘ngra hosil bo‘lgan XO*Y sistemaning o‘qlarini bir xil α burchakka buramiz. Natijada yangi hosil bo‘lgan sistemada ham koordinata boshi, ham o‘qlar o‘zgaradi (quyidagi 35-rasmga qarang) va shu sababli uni $X^*O^*Y^*$ kabi belgilaymiz.

Bunda eski XOY sistemadagi x va y koordinatalar bilan yangi $X^*O^*Y^*$ sistemadagi x^* va y^* koordinatalar orasidagi bog‘lanish quyidagi formulalar bilan ifodalanadi:

$$\begin{cases} x = x^*\cos\alpha - y^*\sin\alpha + x_0 \\ y = x^*\sin\alpha + y^*\cos\alpha + y_0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x^* = (x-x_0)\cos\alpha + (y-y_0)\sin\alpha \\ y^* = -(x-x_0)\sin\alpha + (y-y_0)\cos\alpha \end{cases}. \quad (9)$$



4.5. II tartibli tenglamalarning umumiy holdagi tahlili. Biz tekislikdagi II tartibli tenglama umumiy holda XOY Dekart koordinatalar sistemasida

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0\,, \quad A^2+B^2+C^2\neq 0\,, \qquad (10)$$

ko‘rinishda bo‘lishini ko‘rgan edik. Ko‘rsatish mumkinki, koordinatalar boshini O(0,0) nuqtadan boshqa biror nuqtaga parallel ko‘chirish yoki OX, OY o‘qlarini biror α burchakka burish yoki parallel ko‘chirish va burish orqali yangi (qulaylik uchun uni ham XOY deb belgilaymiz) koordinatalar sistemasiga o‘tsak, (10) quyidagi tenglamalardan biriga keladi.

1. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Bu holda (10) tenglama ellipsni ifodalaydi;
2. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$. Bu holda (10) tenglamani birorta ham nuqta qanoatlantirmaydi, ya’ni u bo‘sh to‘plamni (mavhum ellipsni) ifodalaydi;
3. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$. Bu holda (10) tenglamani faqat O(0,0) nuqta qanoatlantiradi va u ikkita mavhum kesishuvchi to‘g‘ri chiziqlarni ifodalaydi;
4. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$. Bu holda (10) tenglama kesishuvchi bir juft $y=\pm(b/a)x$ to‘g‘ri chiziqlarni ifodalaydi;
5. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Bu holda (10) tenglama giperbolani ifodalaydi;
6. $\frac{x^2}{a^2}=1 \Rightarrow x^2=a^2 \Rightarrow x=\pm a$. Bu holda (10) tenglama bir juft vertikal to‘g‘ri chiziqlarni ifodalaydi;
7. $\frac{x^2}{a^2}=-1 \Rightarrow x^2=-a^2$. Bu holda (10) tenglamani birorta ham nuqta qanoatlantirmaydi, ya’ni u bo‘sh to‘plamni (bir juft mavhum vertikal to‘g‘ri chiziqlarni) ifodalaydi;
8. $x^2=0 \Rightarrow x=0$. Bu holda (10) tenglama bir juft ustma-ust tushgan vertikal to‘g‘ri chiziqlarni ifodalaydi;
9. $\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow y^2=b^2 \Rightarrow y=\pm b$. Bu holda (10) tenglama bir juft gorizontal to‘g‘ri chiziqlarni ifodalaydi;

10. $\frac{y^2}{b^2}=-1 \Rightarrow y^2=-b^2$. Bu holda (10) tenglamani birorta ham nuqta qanoatlantirmaydi, ya'ni u bo'sh to'plamni (bir juft mavhum gorizontal to'g'ri chiziqlarni) ifodalaydi;

11. $y^2=0 \Rightarrow y=0$. Bu holda (10) tenglama bir juft ustma-ust tushgan gorizontal to'g'ri chiziqlarni ifodalaydi;

12. $y^2=2px$. Bu holda (10) tenglama parabolani ifodalaydi.

Umumiy (10) tenglamadagi bosh A,B va C koeffitsiyentlardan tuzilgan va ***xarakteristik determinant*** deb ataladigan ushbu II tartibli determinantni qaraymiz:

$$\Delta=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}=AC-B^2$$

Agar (10) tenglamada $\Delta>0$ bo'lsa, u ***elliptik turdagi tenglama*** deyiladi va yuqorida ko'rib o'tilgan 1–3 kanonik tenglamalardan biriga keltiriladi.

Agar (10) tenglamada $\Delta<0$ bo'lsa, u ***giperbolik turdagi tenglama*** deyiladi va yuqorida ko'rib o'tilgan 4–5 kanonik tenglamalardan biriga keltiriladi.

Agar (10) tenglamada $\Delta=0$ bo'lsa, u ***parabolik turdagi tenglama*** deyiladi va yuqorida ko'rib o'tilgan 6–12 kanonik tenglamalardan biriga keltiriladi.

Xulosa qilib shuni aytish mumkinki, tekislikdagi II tartibli (10) umumiy tenglama bilan aniqlanadigan II tartibli egri chiziqlar faqat ellips (xususiy holda aylana), giperbola va paraboladan iborat ekan. Bu chiziqlar qadimgi yunon matematiklariga ma'lum bo'lib, ***konik kesimlar*** deb atalgan. Bunga sabab shuki, aylanma konusni turli tekisliklar bilan kesganda, kesimda aynan mana shu chiziqlar hosil bo'ladi.

Misol: Ushbu II tartibli tenglamalar bilan berilgan chiziqlar ko'rinishini aniqlang:

1) $36x^2+36y^2-36x-24y-23=0$; 2) $16x^2+25y^2-32x+50y-359=0$.

Yechish: 1) Tenglamani quyidagi ko'rinishga keltiramiz:

$$36x^2+36y^2-36x-24y-23=0 \Rightarrow 36(x^2-x)+36(y^2-\frac{2}{3}y)-23=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 36(x^2-2\cdot\frac{1}{2}x+\frac{1}{4})-9+36(y^2-2\cdot\frac{1}{3}y+\frac{1}{9})-4-23=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 36\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+36\left(y-\frac{1}{3}\right)^2-36=0 \Rightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2=1 \Rightarrow \left[x^*=x-\frac{1}{2},\quad y^*=y-\frac{1}{3}\right] \Rightarrow (x^*)^2+(y^*)^2=1^2.$$

Demak, bu tenglama markazi M(1/2, 1/3) nuqtada joylashgan va radiusi R=1 bo'lgan aylanani ifodalaydi.

2) Bu tenglamani ham ko'rinishini o'zgartiramiz:

$$16x^2+25y^2-32x+50y-359=0 \Rightarrow 16(x^2-2x+1)-16+25(y^2+2y+1)-25-359=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16(x-1)^2+25(y+1)^2=400 \Rightarrow \left|x^*=x-1,\quad y^*=y+1\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16(x^*)^2+25(y^*)^2=400 \Rightarrow \frac{16(x^*)^2}{400}+\frac{25(y^*)^2}{400}=1 \Rightarrow \frac{(x^*)^2}{25}+\frac{(y^*)^2}{16}=1.$$

Demak, bu tenglama markazi M(1,–1) nuqtada joylashgan va yarim o'qlari a=5, b=4 bo'lgan ellipsni ifodalaydi.

XULOSA

Giperbola II tartibli chiziqlardan biri bo'lib, fokuslar deb ataluvchi ikkita nuqtalargacha masofalar ayirmasining moduli o'zgarmas bo'lgan tekislikdagi nuqtalarning geometrik o'rni kabi aniqlanadi. Giperbola grafigi, ellips grafigidan farqli ravishda, chegaralanmagan chiziq bo'lib, ikkita tarmoqdan iboratdir. II tartibli chiziqlar ichida faqat giperbola uchun asimptota mavjud.

Giperbolaning iqtisodiy tatbig‘iga misol sifatida aholining daromadi va turli tovarlarga talabi orasidagi bog‘lanishni o‘rganish masalasini ko‘rsatish mumkin.

Parabola ham II tartibli chiziqdir. U direktrisa deb ataluvchi to‘g‘ri chiziq va fokus deb ataluvchi nuqtadan teng uzoqlikda joylashgan nuqtalardan tashkil topadi. Parabola grafigi ham chegaralanmagan egri chiziqdan iborat. Yerdan boshqa planetalarga uchirilgan kosmik raketalar trayektoriyasining bir qismi giperbola va parabola ko‘rinishida bo‘ladi. Parabolalar projektor, antennalar kabi texnik qurilmalarda o‘z tatbig‘ini topadi.

Tayanch iboralar

Giperbola * Fokus * Giperbolaning kanonik tenglamasi* Giperbolaning uchlari
* Giperbolaning o‘qlari * Giperbolaning markazi * Asimptotalar * Ekssentrisitet
* Direktrisa * Fokal radius * Teng yonli giperbola * Kasr – chiziqli tenglama * Tornkvist modeli
* Parabola * Parabolaning kanonik tenglamasi *Parallel ko‘chirish * Burish * Koordinatalar sistemasini almashtirish * Elliptik tenglama
* Parabolik tenglama * Giperbolik tenglama * Konik kesimlar.

Takrorlash uchun savollar

1. Giperbola qanday ta’riflanadi?
2. Giperbolaning kanonik tenglamasi qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
3. Giperbola kanonik tenglamasidagi parametrlar nimani ifodalaydi?
4. Giperbola ekssentrisiteti deb nimaga aytiladi?
5. Giperbola ekssentrisiteti qanday qiymatlar qabul qila oladi?
6. Giperbolaning fokal radiuslari deb nimaga aytiladi?
7. Giperbolaning fokal radiuslari kanonik tenglamadan qanday topiladi?
8. Giperbola direktrisalari qanday xossaga ega?
9. Giperbolaning asimptotasi kanonik tenglamadan qanday topiladi?
10. Qachon giperbola teng yonli deyiladi?
11. Kasr – chiziqli tenglama nima va u qanday chiziqni ifodalaydi?
12. Tornkvist modeli nima va u qanday tenglama bilan ifodalanadi?
13. Parabola qanday ta’riflanadi?
14. Parabolaning kanonik tenglamasi qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
15. Parabolaning ekssentrisiteti nimaga teng?
16. Parabola kanonik tenglamasidan fokus va direktrisa qanday topiladi?
17. Paraboladagi nuqtaning fokal radiusi qanday hisoblanadi?
18. Koordinatalar sistemasini parallel ko‘chirish mazmuni nimadan iborat?
19. Koordinatalar sistemasini burish deb nimaga aytiladi?
20. Koordinatalar sistemasini almashtirish nimani anglatadi?
21. Ikkinchi tartibli tenglama qachon elliptik turda deyiladi?
22. Ikkinchi tartibli tenglama qachon giperbolik turda deyiladi?
23. Ikkinchi tartibli tenglama qachon parabolik turda deyiladi?

MATEMATIK ANALIZGA KIRISH

11§ FUNKSIYA VA U BILAN BOG‘LIQ BO‘LGAN TUSHUNCHALAR.FUNTSIYANING LIMITI.

- ***Funksiya va u bilan bog‘liq tushunchalar.***
- ***Funksiya grafigi.***
- ***Funksiyani berilish usullari.***
- ***Funksiya ko‘rinishlari.***
- ***Murakkab va teskari funksiya.***
- ***Asosiy elementar va elementar funksiyalar.***

3.1. Funksiya va u bilan bog‘liq tushunchalar. Atrofimizdagi turli jarayonlarni matematik usullarda tadqiqot qilayotganimizda o‘zgarmas va o‘zgaruvchi miqdorlarga duch kelamiz.

1-TA’RIF: Faqat bitta sonli qiymat qabul qiladigan kattaliklar ***o‘zgarmas miqdorlar*** deyiladi.

Masalan, yorug‘lik tezligi c, erkin tushish tezlanishi g, aylana uzunligini uning diametriga nisbati π, izotermik jarayonlarda harorat t^0 o‘zgarmas miqdorlardir.

2-TA’RIF: Turli sonli qiymatlar qabul qila oladigan kattaliklar ***o‘zgaruvchi miqdorlar*** deyiladi.

Masalan, tekis harakatda v tezlik o‘zgarmas miqdor bo‘lib, vaqt t va bosib o‘tilgan masofa s o‘zgaruvchi miqdorlardir.

Biror jarayonni o‘rganayotganimizda bir nechta o‘zgaruvchi miqdorlar o‘rtasidagi o‘zaro bog‘lanishlarga duch kelamiz.

Masalan, tekis harakatda tezlikni v, vaqtni t va bosib o‘tilgan masofani s desak, u holda t va s o‘zgaruvchilar o‘zaro $s=v\cdot t$ ko‘rinishda bog‘langan bo‘ladi. Bunday bog‘lanishlarni juda ko‘p keltirish mumkin va shu sababli ularni atroflicha o‘rganish maqsadida funksiya tushunchasi kiritiladi.

3-TA’RIF: Agarda x o‘zgaruvchining biror D sonli to‘plamga tegishli har bir qiymatiga ma’lum bir qonun-qoida asosida y o‘zgaruvchining biror E to‘plamga tegishli yagona bir qiymati mos qo‘yilgan bo‘lsa, ya’ni $f: D \to E$ bo‘lsa, unda y o‘zgaruvchi x o‘zgaruvchining ***funksiyasi*** deyiladi.

Biror y o‘zgaruvchi x o‘zgaruvchining funksiyasi ekanligi $y=f(x)$ kabi belgilanadi (f harfi o‘rniga F, h, g, φ kabi boshqa harflar ham qo‘llanilishi mumkin). Bu yerda x ***erkli o‘zgaruvchi yoki argument***, y esa ***erksiz o‘zgaruvchi yoki funksiya*** deb ataladi.

Masalan, $y=2x+3$, $y=3x^2+4x-1$, $y=2/x$, $y=5xe^x+6$ funksiyalarga misol bo‘ladi.

4-TA’RIF: Berilgan $f: D \to E$ funksiyada D – funksiyaning ***aniqlanish sohasi***, E − ***o‘zgarish yoki qiymatlar sohasi*** deyiladi.

$y=f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasi D{f}, qiymatlar sohasi esa E{f} kabi belgilanadi. Masalan, $f(x)=\sin\sqrt{x}$ funksiya uchun D{f}=[0,∞), E{f}=[–1,1].

Shuni ta’kidlab o‘tish lozimki, oldingi paragrafda ko‘rilgan $\{a_n\}$ sonli ketma-ketlikni aniqlanish sohasi D{f}=N–natural sonlar to‘plami, qiymatlar sohasi esa $f(n)= a_n$, $n\in N$, haqiqiy sonlardan iborat funksiya deb qarash mumkin.

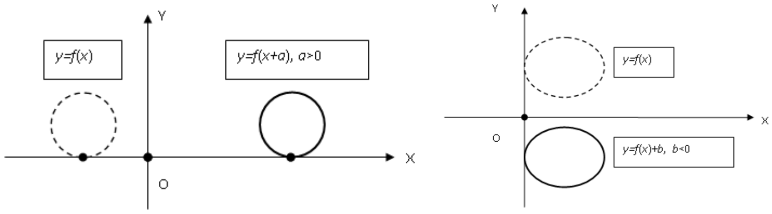
Matematik analiz fanida asosan funksiyalar a ular bilan bog‘liq bo‘lgan tasdiqlar o‘rganiladi.

3.2. Funksiya grafigi. Funksiya haqida geometrik tasavvur hosil etish uchun uning grafigi tushunchasi kiritiladi.

5-TA’RIF: XOY koordinata tekislikdagi $(x,y)=(x,f(x))$, $x\in$D{f}, koordinatali nuqtalarning geometrik o‘rni $y=f(x)$ funksiyaning ***grafigi*** deyiladi.

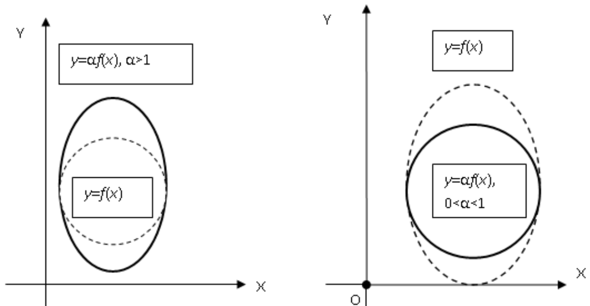
Turli masalalarni yechishda berilgan $y=f(x)$ funksiyaning L grafigini ma’lum bir ko‘rinishda o‘zgartirishga to‘g‘ri keladi.

➢ $y=f(x+a)$ funksiyaning grafigi L chiziqni OX o‘qi bo‘yicha $|a|$ birlik chapga (agar a>0 bo‘lsa) yoki o‘ngga (agar a<0 bo‘lsa) parallel ko‘chirishdan hosil bo‘ladi (41-rasmga qarang).



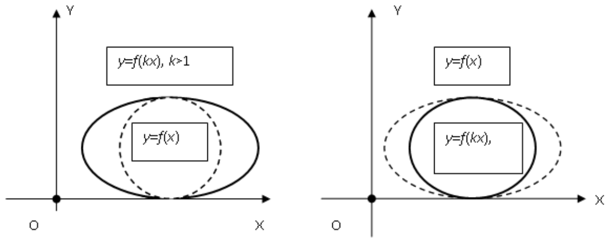
➢ $y=f(x)+b$ funksiyaning grafigi L chiziqni OY o‘qi bo‘yicha $|b|$ birlik yuqoriga (agar $b>0$ bo‘lsa) yoki pastga (agar $b<0$ bo‘lsa) parallel ko‘chirishdan hosil bo‘ladi (42-rasmga qarang). .

➢ $y=\alpha f(x)$ funksiyaning grafigi L chiziqni OY o‘qi bo‘yicha α marta cho‘zish (agar $\alpha>1$ bo‘lsa, 43-rasm) yoki qisish (agar $0<\alpha<1$ bo‘lsa, 44-rasm) orqali hosil bo‘ladi. Agar $\alpha<0$ bo‘lsa, unda L chiziq OX o‘qiga nisbatan simmetrik ravishda akslanadi.



43-rasm 44-rasm

➢ $y=f(kx)$ funksiyaning grafigi L chiziqni OX o‘qi bo‘yicha k marta cho‘zish (agar $k>1$ bo‘lsa, 45-rasm) yoki qisish (agar $0<k<1$ bo‘lsa, 46-rasm) orqali hosil bo‘ladi. Agar $k<0$ bo‘lsa, unda L chiziq OY o‘qiga nisbatan simmetrik ravishda akslanadi.



3.3. Funksiyani berilish usullari. Turli masalalarni qarashda funksiya asosan to‘rt usulda berilishi mumkin.

❖ ***Analitik usul.*** Ko‘p hollarda funksiyalar analitik usulda, ya’ni x argument ustida bajariladigan matematik amallarni formulalar orqali ifodalash orqali beriladi. Masalan, aylana radiusi x va uning yuzasi y orasidagi bog‘lanish funksiyasi $y=\pi x^2$ formula orqali analitik usulda aniqlanadi.

❖ ***Jadval usuli.*** Bu usulda funksiya

x_i	x_1	x_2	x_3	· · ·	x_{n-1}	x_n
$y_i=f(x_i)$	y_1	y_2	y_3	· · ·	y_{n-1}	y_n

ko‘rinishdagi jadval orqali beriladi. Masalan, Bradisning to‘rt xonali matematik jadvallar kitobchasida funksiyalarning qiymatlari shunday ko‘rinishda berilgan. Odatda x argument va y funksiya orasidagi bog‘lanish tajriba yoki kuzatuvlar asosida o‘rganilayotgan bo‘lsa, funksiya qiymatlari jadval ko‘rinishda ifodalanadi.

❖ ***Grafik usul.*** Bunda x argument va y funksiya orasidagi bog‘lanish bu funksiyaning grafigi orqali beriladi. Masalan, yurak faoliyatini ifodalovchi funksiya kardiogramma orqali grafik ko‘rinishda ifodalanadi. Shuningdek bu usuldan tenglamalarni grafik usulda yechishda ham foydalaniladi.

❖ ***Ta’rif usuli.*** Bu usulda funksiya qiymatini aniqlash qonuni uni ta’riflash orqali beriladi. Masalan, ***Dirixle funksiyasi*** deb ataluvchi va [0,1] kesmada aniqlangan D(x) funksiyani analitik, jadval yoki grafik ko‘rinishlarda ifodalab bo‘lmaydi. Bu funksiya qiymatlari ta’rif bo‘yicha quyidagicha aniqlanadi:

$$D(x)=\begin{cases}1, & \text{agar } x \text{ ratsional son bo'lsa};\\ 0, & \text{agar } x \text{ irratsional son bo'lsa}.\end{cases}$$

3.4. Funksiya ko‘rinishlari. Funksiyalar u yoki bu xususiyatlariga qarab turli ko‘rinishlarga ajratiladi.

6-TA’RIF: Berilgan $y=f(x)$ funksiya biror $D\subset D\{f\}$ sohaga tegishli ixtiyoriy x_1, $x_2 \in D$ va $x_1<x_2$ nuqtalar uchun $f(x_1)<f(x_2)$ [$f(x_1)\leq f(x_2)$] shartni qanoatlantirsa, u shu D sohada ***o‘suvchi (kamaymovchi) funksiya*** deyiladi.

Masalan, $y=x^3$ funksiya $(-\infty;\infty)$ oraliqda, $y=x^2$ funksiya esa aniqlanish sohasining $(0,\infty)$ oralig‘ida o‘suvchi bo‘ladi. ***Ant’ye funksiya*** deb ataladigan $y=[x]$ funksiyaning qiymati argument x qiymatiga eng yaqin va undan katta bo‘lmagan butun son kabi aniqlanadi. Masalan, $[1.2]=1$, $[2.98]=2$, $[12]=12$, $[-1.5]=-2$. Bu holda $f(x)=[x]$ funksiya uchun $D\{f\}=(-\infty;\infty)$ va $E\{f\}=Z=\{0,\pm1, \pm2,\cdots\}$ bo‘lib, u aniqlanish sohasida kamaymoqchi funksiya bo‘ladi.

7-TA’RIF: Berilgan $y=f(x)$ funksiya biror $D\subset D\{f\}$ sohaga tegishli ixtiyoriy x_1, $x_2\in D$ va $x_1<x_2$ nuqtalar uchun $f(x_1)>f(x_2)$ [$f(x_1)\geq f(x_2)$] shartni qanoatlantirsa , u shu D sohada ***kamayuvchi (o‘smoqchi) funksiya*** deyiladi.

Masalan, $y=-2x$ funksiya $(-\infty;\infty)$ oraliqda, $y=x^2$ funksiya esa aniqlanish sohasining $(-\infty,0)$ oralig‘ida kamayuvchi bo‘ladi. $y=1-[x]$ funksiya esa $(-\infty;\infty)$ oraliqda o‘smoqchi bo‘ladi.

O‘suvchi yoki kamaymoqchi, kamayuvchi yoki o‘smoqchi funksiyalar birgalikda ***monoton funksiyalar*** deyiladi.

8-TA’RIF: *A*niqlanish sohasi $D\{f\}$ nol nuqtaga nisbatan simmetrik bo‘lgan $y=f(x)$ funksiya ixtiyoriy $x\in D\{f\}$ uchun $f(-x)=f(x)$ [$f(-x)= -f(x)$] shartni qanoatlantirsa, u ***juft*** [***toq***] ***funksiya*** deyiladi .

Masalan, $f(x)=x^2$ –juft funksiya, $f(x)=x^3$ esa toq funksiya bo‘ladi. Lekin har qanday funksiya juft yoki toq bo‘lishi shart emas. Masalan, $f(x)=x^2-3x+1$ yoki $f(x)=2x-3$ funksiyalar na juft va na toqdir.

Ta’rifdan juft funksiya grafigi OY koordinata o‘qiga, toq funksiya grafigi esa O koordinata boshiga nisbatan simmetrik bo‘lishi kelib chiqadi.

TEOREMA: Agar $f(x)$ va $g(x)$ juft funksiyalar bo‘lsa, ularning umumiy D aniqlanish sohasida $f(x)\pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ va, $g(x)\neq0$ bo‘lsa, $f(x)/g(x)$ funksiyalar ham juft funksiyalardir. Agar $f(x)$ va $g(x)$ toq funksiyalar bo‘lsa $f(x)\pm g(x)$ toq, $f(x)\cdot g(x)$ va $f(x)/g(x)$ funksiyalar esa juft funksiya bo‘ladi. Agar $f(x)$ juft va $g(x)$ toq funksiya bo‘lsa, ularning ko‘paytmasi va bo‘linmasi toq funksiya bo‘ladi.

Isbot: Misol sifatida faqat bir hol uchun isbotni keltiramiz, chunki boshqa hollar ham xuddi shundek ko‘riladi. Masalan, qaralayotgan $f(x)$ va $g(x)$ juft funksiyalar, ya’ni $f(-x)=f(x)$ va $g(-x)=g(x)$ bo‘lsin. Bu holda $F(x)=f(x)\pm g(x)$ funksiya uchun

$$F(-x)=f(-x)\pm g(-x)= f(x)\pm g(x)=F(x)$$

tenglik o‘rinli va , ta’rifga asosan $F(x)$ juft funksiya bo‘ladi.

Izoh: Agar $f(x)$ aniqlanish sohasi $D\{f\}$ koordinata boshiga nisbatan simmetrik bo‘lgan ixtiyoriy funksiya bo‘lsa, unda $F(x)= f(x)+ f(-x)$ juft, $G(x)= f(x) -f(-x)$ esa toq funksiya bo‘lishini ko‘rish qiyin emas.

9-TA’RIF: Agar $y=f(x)$ funksiya uchun shunday $T>0$ son mavjud bo‘lsaki, $\forall x\in D\{f\}$ uchun $x\pm T\in D\{f\}$ bo‘lib, $f(x\pm T)=f(x)$ shart bajarilsa, u ***davriy funksiya*** deb ataladi. Bu shartni qanoatlantiruvchi eng kichik musbat T soni shu funksiyaning ***davri*** deyiladi.

Masalan, $y=\sin x$ davri $T=2\pi$, $y=\mathrm{tg}x$ esa davri $T=\pi$ bo‘lgan davriy funksiyalardir. $y=\{x\}=x-[x]$ funksiya qiymati argument x qiymatining nomanfiy kasr qismiga teng bo‘ladi. Masalan, $\{1.2\}=0.2$, $\{2.98\}=0.98$, $\{\pm8\}=0$, $\{-1.7\}= 0.3$ (bunda $-1.7= -2+0.3$ deb qaraladi). Bu holda $D\{f\}=(-\infty;\infty)$ va $E\{f\}=[0,1)$ bo‘lib, ixtiyoriy $x\in D\{f\}$ va $n\in N=\{1,2,3.\cdots\}$ uchun $\{x+n\}=\{x\}$ bo‘ladi. Bundan $f(x)=\{x\}$ davri $T=1$ bo‘lgan davriy funksiya ekanligini ko‘rish mumkin. $y=x^2$ yoki $y=e^x$ funksiyalar esa davriymas funksiyalarga misol bo‘ladi.

10-TA'RIF: Berilgan $y=f(x)$ funksiya uchun shunday M >0 soni topilsaki, ixtiyoriy $x\in D$ uchun $|f(x)|\leq M$ shart bajarilsa, u D sohada ***chegaralangan funksiya*** deyiladi. Aks holda $y=f(x)$ ***chegaralanmagan funksiya*** deb ataladi.

Masalan, $y=\sin x$ chegaralangan funksiya, chunki barcha x uchun $|\sin x|\leq 1$. $y=2^x$ funksiya $(-\infty,0)$ oraliqda chegaralangan va $2^x\leq 1$, ammo bu funksiya $(0,\infty)$ oraliqda chegaralanmagan, chunki ixtiyoriy M>0 katta soni uchun $x>\log_2 M$ bo'lganda $2^x>M$ bo'ladi.

11-TA'RIF: Agar $y=f(x)$ funksiya biror D sohaning har bir x nuqtasida o'zgarmas C soniga teng bo'lsa, u D sohada ***o'zgarmas funksiya*** deyiladi.

Masalan, $x\in(-\infty,\infty)$ sohada $f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x=1$, $x\in(-\infty,0)$ sohada $f(x)=x/|x|=-1$ o'zgarmas funksiya bo'ladi.

3.5. Murakkab va teskari funksiyalar. Funksiyalar bilan bog'liq yana ikkita tushunchani kiritamiz.

12-TA'RIF: Agar $z=\varphi(x)$ funksiya X→Z , $y=f(z)$ esa Z→Y akslantirishni ifodalasa , unda $y=f(\varphi(x))$ funksiya X→Y akslantirishni ifodalaydi va ***murakkab funksiya*** deb ataladi. Bu yerda φ ***ichki***, f esa ***tashqi funksiya*** deyiladi. $y=f(\varphi(x))$ murakkab funksiya f va φ funksiyalarning ***superpozitsiyasi*** deb ham aytiladi.

Masalan, $y=\sin x^2$ murakkab funksiya bo'lib, unda $\varphi(x)=x^2$ ichki, $f(\varphi)=\sin\varphi$ esa tashqi funksiya bo'ladi. $y=\sin^2 x$ murakkab funksiyada esa $\varphi(x)=\sin x$ ichki, $f(\varphi)=\varphi^2$ tashqi funksiya bo'ladi.

13-TA'RIF: Aniqlanish sohasi $D\{f\}$ va qiymatlar sohasi $E\{f\}$ bo'lgan $y=f(x)$ funksiya uchun har bir $y\in E\{f\}$ soniga $f(x)=y$ shartni qanoatlantiradigan yagona $x\in D\{f\}$ sonini mos qo'yadigan $x=\varphi(y)$ funksiya mavjud bo'lsa, u berilgan f funksiyaga ***teskari funksiya*** deb ataladi.

Berilgan f funksiyaga teskari funksiya f^{-1} kabi belgilanadi. Bunda f^{-1} faqat belgilash bo'lib, u $1/f$ degan ma'noni ifodalamasligini ta'kidlab o'tamiz.

Odatda argument x, funksiya esa y orqali belgilanganligi uchun, $y=f(x)$ funksiyaga teskari $x=\varphi(y)$ funksiya $y=\varphi(x)$ yoki $y=f^{-1}(x)$ ko'rinishda yoziladi.

Agar $y=f(x)$ funksiya o'suvchi yoki kamayuvchi bo'lsa ,unga teskari funksiya $y=f^{-1}(x)$ mavjudligini va uni $f(y)=x$ tenglama yechimi kabi topishimiz mumkinligini isbotlash mumkin. Masalan, $f(x)=3x-1$ bo'lsa, unda $3y-1=x$ tenglamadan teskari funksiya $f^{-1}(x)=(a+1)/3$ ekanligini aniqlaymiz.

Shuni ta'kidlab o'tish kerakki, o'zaro teskari funksiyalar uchun $D\{f\}=E\{f^{-1}\}$ va $E\{f\}=D\{f^{-1}\}$, $f[f^{-1}(x)]=x$ va $f^{-1}[f(x)]=x$ munosabatlar o'rinli bo'ladi. Bundan tashqari ularning grafiklari $y=x$ to'g'ri chiziqqa nisbatan simmetrik bo'ladi

3.6. Asosiy elementar va elementar funksiyalar. Maktab matematikasidan bizga ma'lum bo'lgan quyidagi funksiyalarni eslatib o'tamiz:

❖ **Darajali *funksiya.*** Bu funksiya $y=x^\alpha$ ko'rinishda bo'lib, o'zgarmas daraja ko'rsatkichi $\alpha\in R$ bo'ladi. Masalan,

$$y=1=x^0,\quad y=x^2,\quad y=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}},\quad y=\frac{1}{x}=x^{-1}$$

darajali funksiyalardir. Darajali funksiyaning xossalari α daraja ko'rsatkichi qiymatiga bog'liq bo'ladi. Masalan, α musbat butun son bo'lsa, $f(x)=x^\alpha$ aniqlanish sohasi $D\{f\}=(-\infty,\infty)$, qiymatlar sohasi esa toq α uchun $E\{f\}=(-\infty,\infty)$, juft α uchun $E\{f\}=[0,\infty)$ bo'ladi. Agar α manfiy butun son bo'lsa, $f(x)=x^\alpha$ aniqlanish sohasi $D\{f\}=\{x: x\neq 0\}$, qiymatlar sohasi esa $E\{f\}=(-\infty,\infty)$ bo'ladi. Bundan tashqari α juft son bo'lsa, $f(x)=x^\alpha$ juft, α toq bo'lsa toq funksiya bo'ladi.

❖ ***Ko'rsatkichli funksiya.*** Bu funksiya $y=a^x$ ko'rinishda va unda daraja asosi $a>0$ va $a\neq 1$ shartni qanoatlantiruvchi o'zgarmas son bo'ladi. Masalan, $y=3^x$, $y=(1/10)^x$, $y=e^x$ ko'rsatkichli funksiyalardir. Bu funksiya uchun $D\{f\}=(-\infty,\infty)$, $E\{f\}=(0,\infty)$ bo'ladi. Agar $a>1$ bo'lsa, $f(x)=a^x$ o'suvchi, $0<a<1$ bo'lsa kamayuvchi funksiyaga ega bo'lamiz.

❖ ***Logarifmik funksiya.*** Bu funksiya $y=\log_a x$, $(a>0,\ a\neq 1)$, ko'rinishda bo'lib, $y=a^x$ ko'rsatkichli funksiyaga teskari funksiyani ifodalaydi.

Masalan, $y=\log_2 x$, $y=\log_{0.8} x$, $y=\log_{10}x=\lg x$, $y=\log_e x=\ln x$ logarifmik funksiyalardir. Logarifmik $f(x)=\log_a x$ funksiya uchun $D\{f\}=(0,\infty)$, $E\{f\}=(-\infty,\infty)$ bo‘ladi. Agar logarifm asosi $a>1$ bo‘lsa, $f(x)=\log_a x$ o‘suvchi, $0<a<1$ holda esa kamayuvchi bo‘ladi.

❖ ***Trigonometrik funksiyalar.*** Bular $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\mathrm{tg}x$ va $y=\mathrm{ctg}x$ funksiyalardan iborat. Bu yerda $f(x)=\sin x$ va $f(x)=\cos x$ funksiyalar uchun $D\{f\}=(-\infty,\infty)$ va $E\{f\}=[0,1]$ bo‘lib, ular $T=2\pi$ davrli va chegaralangan bo‘ladi. Bunda $f(x)=\sin x$—toq, $f(x)=\cos x$—juft funksiyalardir.

$f(x)=\mathrm{tg}x$ va $f(x)=\mathrm{ctg}x$ funksiyalarning aniqlanish sohalari mos ravishda $D\{f\}=\{x: x\neq(2k+1)\pi/2,\ k\in Z\}$ va $D\{f\}=\{x: x\neq k\pi,\ k\in Z\}$, qiymatlar sohasi $E\{f\}=(-\infty,\infty)$ bo‘ladi. Bu funksiyalar $T=\pi$ davrli, toq va chegaralanmagan bo‘ladi.

❖ ***Teskari trigonometrik funksiyalar.*** Bularga $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\mathrm{arctg}x$, $y=\mathrm{arcctg}x$ funksiyalar kiradi.Ular mos trigonometrik funksiyalarga teskari bo‘ladi. $f(x)=\arcsin x$ va $f(x)=\arccos x$ uchun $D\{f\}=[-1,1]$, qiymatlar sohasi esa mos ravishda $E\{f\}=[-\pi/2, \pi/2]$ va $E\{f\}=[0, \pi]$ bo‘ladi. $f(x)=\mathrm{arctg}x$ va $f(x)=\mathrm{arcctg}x$ uchun $D\{f\}=(-\infty,\infty)$, qiymatlar sohasi esa mos ravishda $E\{f\}=(-\pi/2, \pi/2)$ va $E\{f\}=(0, \pi)$ bo‘ladi. Bundan tashqari $f(x)=\arcsin x$ va $f(x)=\mathrm{arctg}x$ toq funksiyalardir.

<u>14-TA’RIF:</u> 1-5 funksiyalar ***asosiy elementar funksiyalar*** deb ataladi.

Chekli sondagi asosiy elementar funksiyalar ustida chekli sondagi arifmetik va superpozitsiallash amallari orqali hosil qilingan funksiyalar ***elementar funksiyalar*** deyiladi. Masalan , $y=2\ln\sin x+x^2/5$, $y=a^x\ln(x+1)$ elementar funksiya bo‘ladi. $y=\{x\}$ va $y=[x]$ elementar bo‘lmagan funksiyalarga misol bo‘ladi.

XULOSA

Matematik analiz fanida funksiyalar va ular bilan bog‘liq turli tushuncha hamda tasdiqlar qaraladi. Funksiya deyilganda turli o‘zgaruvchi miqdorlar orasidagi bog‘lanishning matematik ifodasi tushuniladi. Funksiyalar analitik, jadval, grafik va ta’rif usullarida berilishi mumkin. Funksiyalar u yoki bu xususiyatlariga qarab monoton, juft-toq, davriy, chegaralangan va chegaralanmagan kabi ko‘rinishlarda bo‘lishi mumkin. Berilgan funksiyalar orqali murakkab va teskari funksiyalarni aniqlash mumkin. Darajali, ko‘rsatkichli, logarifmik, trigonometrik va teskari trigonometrik funksiyalar asosiy elementar funksiyalar bo‘lib hisoblanadi. Ulardan tuzilgan turli funksiyalar esa elementar funksiyalar deyiladi. Matematikada elementar bo‘lmagan funksiyalar ham qaraladi.

Funksiya tushunchasi iqtisodiy tadqiqotlarda ham keng qo‘llaniladi. Bularga x daromad va y iste’mol orasidagi bog‘lanishni ifodalovchi Tornkvist funksiyalarini misol sifatida ko‘rsatish mumkin. Kelgusida iqtisodiy mazmunli boshqa funksiyalar bilan ham tanishamiz.

<u>Tayanch iboralar</u>

* O‘zgarmas miqdorlar * O‘zgaruvchi miqdorlar * Funksiya * Aniqlanish sohasi * Qiymatlar sohasi * Funksiya grafigi * O‘suvchi (kamaymoqchi) funksiya * Kamayuvchi (o‘smoqchi) funksiya * Monoton funksiyalar * Juft funksiya * Toq funksiya * Davriy funksiya * Chegaralangan funksiya * Chegaralanmagan funksiya * O‘zgarmas funksiya * Murakkab funksiya * Teskari funksiya * Asosiy elementar funksiyalar * Elementar funksiyalar * Tornkvist funksiyalari

<u>Takrorlash uchun savollar</u>

1. Qanday miqdorlar o‘zgarmas deyiladi? Misollar keltiring.
2. Qanday miqdorlar o‘zgaruvchi deyiladi? Misollar keltiring.
3. Funksiya qanday ta’riflanadi?
4. Funksiyaning aniqlanish sohasi deb nimaga aytiladi?
5. Funksiyaning o‘zgarish (qiymatlar) sohasi qanday ta’riflanadi?
6. Funksiya grafigi deb nimaga aytiladi?
7. Funksiya qanday usullarda berilishi mumkin?

8. Qaysi shartda funksiya o‘suvchi (kamaymoqchi) deyiladi?
9. Qanday funksiya kamayuvchi (o‘smoqchi) deb ataladi?
10. Monoton funksiya deganda nima tushuniladi?
11. Qachon funksiya juft (toq) deb ataladi?
12. Davriy funksiya deb qanday funksiyaga aytiladi?
13. Chegaralangan (chegaralanmagan) funksiya ta’tifini keltiring.
14. O‘zgarmas funksiya qanday aniqlanadi?
15. Murakkab funksiya qanday hosil etiladi?
16. Teskari funksiya qanday ta’riflanadi?
17. Qaysi shartda teskari funksiya mavjud bo‘ladi va u qanday topiladi?
18. Qaysi funksiyalar asosiy elementar funksiyalar deyiladi?
19. Elementar funksiyalar deb qanday funksiyalarga aytiladi?
20. Elementar bo‘lmagan funksiyalarga qanday misollar bilasiz?

12§ CHEKSIZ KICHIK VA CHEKSIZ KATTA MIQDORLAR VA ULARNI TAQQOSLASH.LIMITLAR HAQIDAGI ASOSIY TEOREMALAR.AJOYIB LIMITLAR

- ***Funksiya limiti .***
- ***Cheksiz kichik miqdorlar va ularning xossalari.***
- ***Cheksiz katta miqdorlar.***
- ***Funksiya limitini hisoblash qoidalari.***
- ***Funksiya limitining mavjudlik shartlari.***
- ***Ajoyib limitlar.***

4.1. Funksiya limiti. Biz sonli ketma-ketlik uchun oliy matematikaning poydevorida yotgan asosiy tushunchalaridan biri bo‘lgan limit tushunchasini kiritgan edik. Endi bu tushunchani funksiya uchun umumlashtiramiz.

1-TA’RIF: Agarda oldindan berilgan ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son uchun unga bog‘liq shunday $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ son topilsaki, $0<|x-a|<\delta$ shartni qanoatlantiruvchi har qanday $x\in D\{f\}$ va biror A soni uchun $|f(x)-A|<\varepsilon$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, A soni $y=f(x)$ ***funksiyaning*** $x\to a$ ***bo‘lgandagi limiti*** deb ataladi.

Ta’rifdagi tasdiq

$$\lim_{x\to a} f(x)=A$$

ko‘rinishda yoziladi. Misol sifatida,

$$\lim_{x\to 3} x^2=9$$

ekanligini ta’rif bo‘yicha ko‘rsatamiz. Bu yerda $x\to 3$ bo‘lgani uchun $2<x<4$, ya’ni $|x+3|<7$ deb olishimiz mumkin. Bu holda ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun

$$|f(x)-A|=|x^2-9|=|x+3||x-3|<7|x-3|<\varepsilon$$

tengsizlik o‘rinli bo‘lishi uchun $|x-3|<\varepsilon/7$, ya’ni $\delta(\varepsilon)=\varepsilon/7$ deb olish mumkin. Demak, limit ta’rifiga asosan, $\lim_{x\to 3} x^2=9$ tenglik o‘rinli bo‘ladi.

2-TA’RIF: Agar har qanday katta $N>0$ son uchun shunday $\delta=\delta(N)>0$ son mavjud bo‘lsaki, $0<|x-a|<\delta$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $x\in D\{f\}$ uchun $|f(x)|>N$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, unda $y=f(x)$ funksiya $x\to a$ (a−chekli son) bo‘lganda ***cheksiz limitga*** ($+\infty$ yoki $-\infty$) ega deyiladi .

Ta’rifdagi tasdiq $\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty$ ko‘rinishda yoziladi.

Masalan,

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x^3-8)^2}=+\infty$$

ekanligini ko‘rsatish mumkin. Bu yerda $x\to 2$ bo‘lgani uchun $1<x<3$ deb olishimiz mumkin. Bu holda berilgan N>0 soni bo‘yicha δ=δ(N)>0 sonini quyidagicha aniqlaymiz:

$$\frac{1}{(x^3-8)^2}=\frac{1}{(x-2)^2(x^2+2x+4)^2}>\frac{1}{(x-2)^2(3^2+2\cdot 3+4)^2}=$$

$$=\frac{1}{361(x-2)^2}>N\Rightarrow (x-2)^2<\frac{1}{361N}\Rightarrow |x-2|<\frac{1}{19\sqrt{N}}=\delta(N) \quad .$$

Demak, ta’rifga asosan, yuqoridagi limit cheksiz bo‘ladi.

3-TA’RIF: Agar har qanday kichik ε>0 soni uchun shunday katta M=M(ε)>0 son mavjud bo‘lsaki, $|x|>M$ shartni qanoatlantiruvchi barcha $x\in D\{f\}$ va biror chekli A soni uchun $|f(x)-A|<\varepsilon$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, $y=f(x)$ funksiya $x\to\pm\infty$ bo‘lganda ***chekli limitga*** ega deyiladi.

Bu tasdiq $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=A$ ko‘rinishda yoziladi.

Masalan,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x}=1$$

ekanligini ko‘rsatamiz. Ixtiyoriy kichik ε>0 uchun

$$|f(x)-A|=\left|\frac{x+1}{x}-1\right|=\left|\frac{1}{x}\right|<\varepsilon\Rightarrow |x|>\frac{1}{\varepsilon}=M(\varepsilon)\,,$$

ya’ni $M(\varepsilon)=\varepsilon^{-1}$ deb olishimiz mumkin. Bu yerdan, ta’rifga asosan, yuqoridagi limit qiymati haqiqatan ham birga teng ekanligi kelib chiqadi.

4-TA’RIF: Agar har qanday katta N>0 soni uchun shunday M=M(N) son mavjud bo‘lsaki, $|x|>M$ shartni qanoatlantiruvchi barcha $x\in D\{f\}$ uchun $|f(x)|>N$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, $y=f(x)$ funksiya $x\to\pm\infty$ bo‘lganda ***cheksiz limitga*** ega deyiladi,

Ta’rifdagi tasdiq $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ ko‘rinishda yoziladi.

Masalan, ta’rifdan foydalanib, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^3=\pm\infty$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^2=+\infty$ ekanligini ko‘rsatish mumkin.

1-TEOREMA: Agar $x\to a$ bo‘lganda $y=f(x)$ funksiya limiti mavjud bo‘lsa, u holda bu limit yagona bo‘ladi.

5-TA’RIF: $y=f(x)$ funksiyaning argumenti x qandaydir chekli a soniga faqat chap ($x<a$) yoki o‘ng ($x>a$) tomondan yaqinlashib borganda ($x\to a-0$ yoki $x\to a+0$ kabi belgilanadi) funksiya limiti biror A_1 yoki A_2 sonidan iborat bo‘lsa, bu sonlar funksiyaning a nuqtadagi ***chap yoki o‘ng limiti*** deb ataladi.

$y=f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi chap yoki o‘ng limiti

$$\lim_{x\to a-0} f(x)=f(a-0) \qquad \text{yoki} \qquad \lim_{x\to a+0} f(x)=f(a+0)$$

kabi belgilanadi. Masalan , ***signum funksiya*** deb ataladigan ushbu

$$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, x>0\\ 0, x=0\\ -1, x<0\end{cases} \qquad (1)$$

funksiya uchun $x=0$ nuqtadagi chap va o‘ng limitlar mos ravishda quyidagicha bo‘ladi:

$$\operatorname{sgn}(0-0)=\lim_{x\to 0-0}\operatorname{sgn}(x)=\lim_{x\to 0-0}(-1)=-1,\ \operatorname{sgn}(0+0)=\lim_{x\to 0+0}\operatorname{sgn}(x)=\lim_{x\to 0+0}1=1..$$

2-TEOREMA: Biror a nuqtada $y=f(x)$ funksiya $x\to a$ bo‘lganda chekli A limitga ega bo‘lishi uchun uning shu a nuqtadagi chap va o‘ng limitlari o‘zaro teng va $f(a-0)=f(a+0)=A$ shart bajarilishi zarur va yetarlidir.

Shuni ta’kidlab o‘tish kerakki, funksiya limiti har doim ham mavjud bo‘lavermaydi. Masalan, $y=\operatorname{sgn}(x)$ funksiya $x\to 0$ bo‘lganda limitga ega emas, chunki bu holda $\operatorname{sgn}(0-0)=-1$ va $\operatorname{sgn}(0+0)=1$ bo‘lib, $\operatorname{sgn}(0-0)\neq\operatorname{sgn}(0+0)$.

4.2. Cheksiz kichik miqdorlar va ularning xossalari. Limitlarga doir turli tasdiqlarni isbotlashda cheksiz kichik miqdor va ularning xossalari muhim ahamiyatga ega.

6-TA'RIF: Agar $\alpha(x)$ funksiya uchun

$$\lim_{x\to a}\alpha(x)=0$$

shart bajarilsa, unda bu funksiya $x\to a$ (a−ixtiyoriy chekli yoki cheksiz son) bo'lganda ***cheksiz kichik miqdor*** deb ataladi .

Masalan, $\alpha(x)=x^2$ funksiya $x\to 0$, $\alpha(x)=(x-3)^2$ funksiya $x\to 3$ va $\alpha(x)=x^{-2}$ funksiya $x\to\pm\infty$ bo'lganda cheksiz kichik miqdor bo'ladi.

3-TEOREMA: Agar $x\to a$ bo'lganda $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ cheksiz kichik miqdorlar bo'lib, $f(x)$ esa ixtiyoriy chegaralangan funksiya bo'lsa, u holda $x\to a$ bo'lganda $\alpha(x)\pm\beta(x)$, $\alpha(x)\cdot\beta(x)$, $f(x)\cdot\alpha(x)$, $C\alpha(x)$ (C=const, ya'ni o'zgarmas son) funksiyalar ham cheksiz kichik miqdorlar bo'ladi.

NATIJA: Chekli sondagi cheksiz kichik miqdorlarning algebraik yig'indisi, ko'paytmasi yana cheksiz kichik miqdordan iborat bo'ladi.

Bu natijaning isboti oldingi teoremani bir necha marta qo'llash orqali keltirib chiqariladi.

Izoh: Agar $x\to a$ bo'lganda $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ cheksiz kichik miqdorlar bo'lsa, unda ularning nisbati $\alpha(x)/\beta(x)$ cheksiz kichik miqdor bo'lishi shart emas.

Masalan, $x\to 0$ bo'lganda $\alpha(x)=Ax^n$ va $\beta(x)=Bx^m$ (n,m–natural, A,B– noldan farqli ixtiyoriy haqiqiy sonlar) cheksiz kichik miqdorlar bo'ladi va

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{Ax^n}{Bx^m}=\lim_{x\to 0}\frac{A}{B}x^{n-m}=\begin{cases}0\,, & n>m\,;\\ A/B\,, & n=m\,;\\ \pm\infty\,, & n<m\,.\end{cases}$$

Bu yerdan ko'rinadiki, yuqoridagi misolda $\alpha(x)/\beta(x)$ nisbat faqat $n>m$ bo'lganda cheksiz kichik miqdor bo'ladi.

7-TA'RIF: $x\to a$ bo'lganda $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ cheksiz kichik miqdorlar va

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=A$$

bo'lsin. Bunda A=0 bo'lsa, $\alpha(x)$ $x\to a$ bo'lganda $\beta(x)$ ga nisbatan ***yuqori tartibli cheksiz kichik miqdor*** deyiladi va $\alpha(x)=o(\beta(x))$ kabi belgilanadi. Agar $A\neq 0$ va chekli son bo'lsa, unda $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ ***bir xil tartibli cheksiz kichik miqdorlar*** deyiladi va $\alpha(x)=O(\beta(x))$ kabi belgilanadi. Jumladan A=1 bo'lsa $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ ***ekvivalent cheksiz kichik miqdorlar*** deyiladi va $\alpha(x)\sim\beta(x)$ kabi belgilanadi. Agar $A=\pm\infty$ bo'lsa, $\alpha(x)$ $x\to a$ bo'lganda $\beta(x)$ ga nisbatan ***quyi tartibli cheksiz kichik miqdor*** deyiladi va $\beta(x)=o(\alpha(x))$ kabi belgilanadi.

4.3. Cheksiz katta miqdorlar. Endi cheksiz katta miqdor tushunchasi va uning xossalari bilan tanishamiz.

8-TA'RIF: Agar $f(x)$ funksiya uchun

$$\lim_{x\to a}f(x)=\pm\infty$$

shart bajarilsa, unda bu funksiya $x\to a$ (a−ixtiyoriy chekli yoki cheksiz son) bo'lganda ***cheksiz katta miqdor*** deb ataladi .

Masalan, $f(x)=\text{tg}x$ funksiya $x\to\pi/2$, $f(x)=(x-1)^{-3}$ funksiya $x\to 1$ va $f(x)=x^2$ funksiya $x\to\pm\infty$ bo'lganda cheksiz katta miqdor bo'ladi.

4-TEOREMA: Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $x\to a$ bo'lganda cheksiz katta miqdorlar bo'lsa, unda $x\to a$ shartda quyidagi tasdiqlar o'rinlidir:

1) $|f(x)|+|g(x)|$ va $f(x)\cdot g(x)$ cheksiz katta miqdor bo'ladi;

2) Agar $\lim\limits_{x\to a} h(x)\neq 0$ bo‘lsa, unda $f(x)\cdot h(x)$ va $f(x)/h(x)$ cheksiz katta miqdor bo‘ladi;

3) Ixtiyoriy C o‘zgarmas soni va chegaralangan $\varphi(x)$ funksiya uchun $Cf(x)$ va $\varphi(x)f(x)$ funksiyalar cheksiz katta miqdor bo‘ladi.

Teoremaning isboti bevosita 8-ta’rifdan kelib chiqadi va uning ustida to‘xtalib o‘tirmaymiz.

Izoh: Yuqoridagi teorema shartlarida $|f(x)|-|g(x)|$ va $f(x)/g(x)$ funksiyalar cheksiz katta miqdor bo‘lishi shart emas. Bu funksiyalar $x\to a$ bo‘lganda mos ravishda $\infty-\infty$ va ∞/∞ ko‘rinishdagi aniqmasliklar deyiladi va ular kelgusida(VIII bob, §6) to‘liqroq ko‘rib chiqiladi.

Cheksiz katta va cheksiz kichik miqdorlar orasidagi bog‘lanish quyidagi teorema orqali ifodalanadi.

5-TEOREMA: Agar $f(x)$ funksiya $x\to a$ bo‘lganda cheksiz katta miqdor bo‘lsa, unda shu holda $1/f(x)$ funksiya cheksiz kichik miqdor bo‘ladi. Aksincha, agar $\alpha(x)$ funksiya $x\to a$ bo‘lganda cheksiz kichik miqdor bo‘lsa, unda shu holda $1/\alpha(x)$ funksiya cheksiz katta miqdor bo‘ladi.

4.4.Funksiya limitini hisoblash qoidalari. Funksiya limitini uning ta’rifi bo‘yicha hisoblash har doim ham oson emas. Shu sababli funksiya limiti asosan uni hisoblash qoidalari yordamida topiladi.

LEMMA: $y=f(x)$ funksiya $x\to a$ bo‘lganda chekli A limitga ega bo‘lishi uchun uni $f(x)=A+\alpha(x)$ ko‘rinishda bo‘lishi zarur va yetarli. Bunda $\alpha(x)$ funksiya $x\to a$ bo‘lganda biror cheksiz kichik miqdorni ifodalaydi.

Lemma isboti limit va cheksiz kichik miqdor ta’riflaridan kelib chiqadi.

ASOSIY TEOREMA: Agar $x\to a$ bo‘lganda $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar chekli A va B limitlarga ega bo‘lsa, unda

$$\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]=\lim_{x\to a} f(x)\pm\lim_{x\to a} g(x)=A\pm B\ , \qquad (2)$$

$$\lim_{x\to a} Cf(x)=C\lim_{x\to a} f(x)=CA\ \ (C\text{=const.})\ , \qquad (3)$$

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x)=\lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} g(x)=A\cdot B \qquad (4)$$

va, agar $\lim\limits_{x\to\epsilon}$ g$(x)=B\neq0$ bo‘lsa,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=\frac{A}{B} \qquad (5)$$

tengliklar o‘rinlidir.

Asosiy teoremada keltirilgan limit hisoblash qoidalari va $f(x)=C$ (C-const.) o‘zgarmas funksiyaning limiti shu sonni o‘ziga teng bo‘lishidan foydalanib, murakkabroq limitlarni soddaroq limitlarga keltirish orqali hisoblash mumkin.

Masalan,

$$\lim_{x\to1} x^2e^x=\lim_{x\to1} x^2\cdot\lim_{x\to1} e^x=1\cdot e=e\,,\quad \lim_{x\to1}(x^2+e^x)=\lim_{x\to1} x^2+\lim_{x\to1} e^x=1+e\,,$$

4.5. Funksiya limitining mavjudlik shartlari. Yuqorida ko‘rsatilganidek, funksiya har doim ham limitga ega bo‘lavermaydi. Shu sababli funksiya limitini hisoblashdan oldin uning mavjudligini tekshirib ko‘rishga to‘g‘ri keladi. Oldin bu savolga chap va o‘ng limitlar orqali (2-teoremaga qarang) javob berilgan edi. Endi bu savol bo‘yicha quyidagi teoremalarni isbotsiz keltiramiz.

6-TEOREMA: Agar $x=a$ nuqtaning biror atrofida $\varphi(x)\leq f(x)\leq\psi(x)$ qo‘sh tengsizlik o‘rinli bo‘lib, $x\to a$ bo‘lganda $\varphi(x)$ va $\psi(x)$ funksiyalarining chekli limitlari mavjud va

$$\lim_{x\to a}\varphi(x)=\lim_{x\to a}\Psi(x)=A$$

shart bajarilsa, u holda $x\to a$ bo‘lganda $f(x)$ funksiya uchun ham chekli limit mavjud bo‘lib, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ munosabat o‘rinli bo‘ladi.

Masalan, barcha $x\neq 0$ uchun

$$-\frac{1}{x^2} \leq \frac{\sin x}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}, \quad \lim_{x\to\infty}(-\frac{1}{x^2}) = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x^2} = 0.$$

7-TEOREMA: Agarda $x=a$ nuqtaning biror atrofida $y=f(x)$ funksiya o‘suvchi (yoki kamayuvchi) bo‘lib, yuqoridan (yoki quyidan) biror M (yoki m) soni bilan chegaralangan bo‘lsa, u holda bu funksiya $x\to a$ bo‘lganda limitga ega va bu limit uchun

$$\lim_{x\to a} f(x) \leq M \quad (\text{yoki} \lim_{x\to a} f(x) \geq m)$$

munosabatlar o‘rinli bo‘ladi.

Masalan, $x>1$ bo‘lganda

$$f(x) = \frac{2x^4 + 3x^2}{x^4} = 2 + \frac{3}{x^2}$$

funksiya kamayuvchi va quyidan $m=2$ soni bilan chegaralangan. Bu yerda

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}(2 + \frac{3}{x^2}) = 2$$

bo‘lib, teorema tasdig‘i o‘rinlidir.

4.6. Ajoyib limitlar. Turli funksiyalarning limitini hisoblashda quyidagi tengliklardan foydalanish mumkin:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{(I)}, \qquad \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2{,}718281.... \quad \text{(II)}, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+ax)}{x} = a \quad \text{(III)},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{€}^x - 1}{x} = \ln a \quad \text{(IV)}, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha \quad \text{(V)}.$$

Bu tengliklar matematikada ***ajoyib limitlar*** deb ataladi va ularning isboti keyinchalik (VII bob,§6) beriladi.

XULOSA

Matematik analiz fanining asosida yotgan eng muhim tushunchalardan biri funksiya limiti bo‘lib hisoblanadi. Undan biz oldin ko‘rib o‘tgan sonli ketma-ketlik limiti tushunchasi xususiy hol sifatida kelib chiqadi. Funksiya limiti yagona ravishda aniqlanadi. Funksiya uchun chap, o‘ng limit tushunchalari ham kiritiladi va ular orqali limitning mavjudlik sharti ifodalanadi. Funksiya limitini bevosita uning ta’rifi asosida hisoblash har doim ham oson kechmaydi va shu sababli funksiya limitini hisoblash qoidalari ishlab chiqilgan. Bunda cheksiz kichik miqdor tushunchasi va uning xossalari muhim ahamiyatga ega bo‘ladi. Bundan tashqari ayrim funksiyalarning limitini hisoblashda ajoyib limitlardan foydalanish mumkin. Funksiya limiti iqtisodiy tadqiqotlarda ham keng qo‘llaniladi va bunga misol sifatida jamg‘arma haqidagi masalani ko‘rsatish mumkin.

Tayanch iboralar

* Funksiyaning limiti * Limitning yagonaligi * Chap limit * O‘ng limit * Limitning mavjudlik sharti * Cheksiz kichik miqdor * Cheksiz katta miqdor * Algebraik yig‘indining limiti * Ko‘paytmaning limiti * Bo‘linmaning limiti * Ajoyib limitlar * Jamg‘arma haqidagi masala

Takrorlash uchun savollar

1. Funksiyaning chekli limiti qanday ta’riflanadi?
2. Funksiyaning cheksiz limiti qanday ta’riflanadi?
3. Funksiyaning limiti yagonami?
4. Funksiyaning chap (o‘ng) limiti deb nimaga aytiladi?
5. Qanday shartda funksiyaning limiti mavjud bo‘ladi?
6. Limiti mavjud bo‘lmagan funksiyaga misol keltiring.

7. Cheksiz kichik miqdor deb nimaga aytiladi?
8. Cheksiz kichik miqdorlar qanday xossalarga ega?
9. Cheksiz kichik miqdorlarning nisbati to‘g‘risida nima deyish mumkin?
10. Qachon ikkita cheksiz kichik miqdor bir xil tartibli deyiladi?
11. Qaysi shartda ikkita cheksiz kichik miqdor o‘zaro ekvivalent deb ataladi?
12. Qachon funksiya cheksiz katta miqdor deb aytiladi?
13. Cheksiz katta miqdorlar qanday xossalarga ega?
14. Cheksiz katta va cheksiz kichik miqdorlar o‘zaro qanday bog‘langan?
15. Funksiya limiti mavjudligining zaruriy va yetarli sharti nimadan iborat?
16. Algebraik yig‘indining limiti qaysi shartda va qanday formula bilan hisoblanadi?
17. Ko‘paytmaning limiti qaysi shartda va qanday formula bilan hisoblanadi?
18. Bo‘linmaning limiti qaysi shartda va qanday formula bilan hisoblanadi?
19. Funksiya limiti mavjudligining zaruriy shartlari haqidagi qanday teoremalarni bilasiz?
20. Ajoyib limitlarni yoza olasizmi?

13§ FUNKSIYALARNING UZLUKSIZLIGI.

- ***Uzluksiz funksiyalar va ularning xossalari.***
- ***Kesmada uzluksiz funksiyalar uchun asosiy teoremalar.***
- ***Funksiyaning uzilish nuqtalari va ularning turlari.***

5.1. Uzluksiz funksiyalar va ularning xossalari. Bu paragrafda matematik analizning muhim tushunchalaridan biri bo‘lgan uzluksiz funksiya tushunchasi bilan tanishib, unga doir asosiy tasdiqlarni ko‘rib o‘tamiz.

<u>1-TA’RIF:</u> Berilgan $y=f(x)$ funksiya o‘zining aniqlanish sohasiga biror atrofi bilan kiruvchi x_0 nuqtada

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \qquad (1)$$

shartni qanoatlantirsa, bu funksiya x_0 nuqtada ***uzluksiz*** deyiladi.

Masalan, oldingi paragrafda $f(x)=x^2$ funksiya uchun $x\to 3$ holda hisoblangan limit qiymatidan foydalanib,

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} x^2 = 9 = 3^2 = f(3)$$

ekanligini ko‘ramiz. Demak, $f(x)=x^2$ funksiya $x=3$ nuqtada uzluksiz bo‘ladi.

Yuqoridagi funksiya uzluksizlik shartini, $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$ ekanligini hisobga olib,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(\lim_{x\to x_0} x)$$

kabi yozish mumkin. Demak, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo‘lishi uchun funksiya olish va limit olish amallarini o‘rnini almashtirish mumkin bo‘lishi kerak ekan.

Amaliy masalalarda funksiya uzluksizligini orttirma tushunchasi orqali tekshirish qulay. Agar x nuqta x_0 nuqta atrofidan olingan bo‘lsa, $x–x_0$ ayirma ***argument orttirmasi*** deyiladi va Δx kabi belgilanadi. Bu holda $f(x)–f(x_0)$ ayirma ***funksiya orttirmasi*** deyiladi va Δf yoki Δy kabi belgilanadi.

Demak, Δx orttirma argumentning o‘zgarishini, Δf esa funksiya o‘zgarishini ifodalaydi. Agarda $x\to x_0$ bo‘lsa, u holda $\Delta x\to 0$ bo‘ladi. Bundan, $x=x_0+\Delta x$ ekanligidan foydalanib, (1) uzluksizlik shartini

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x) = f(x_0) \qquad (2)$$

ko‘rinishida yozish mumkin. Bu shartni o‘z navbatida, $\Delta f=f(x)–f(x_0)=f(x_0+\Delta x)–f(x_0)$ ekanligidan foydalanib,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0 \qquad (3)$$

ko‘rinishda ifodalash mumkin. Demak $f(x)$ funksiya uzluksiz bo‘lishi uchun argumentning “kichik” Δx o‘zgarishiga funksiyaning ham “kichik” Δf o‘zgarishi mos kelishi kerak.

Misol sifatida $y=f(x)=x^2$ funksiyaning har qanday x_0 nuqtada uzluksiz ekanligini (3) shart yordamida ko‘rsatamiz:

$\Delta y=\Delta f=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2$
$= x_0^2 + 2x_0 \cdot \Delta x + (\Delta x^2) - x_0^2 = (2x_0 + \Delta x)\Delta x \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$.

2-TA’RIF: Berilgan $y=f(x)$ funksiya biror (a,b) oraliqning har bir nuqtasida uzluksiz bo‘lsa, u shu ***oraliqda uzluksiz funksiya*** deyiladi.

Masalan, yuqorida ko‘rsatilganga asosan, $f(x)=x^2$ funksiya ixtiyoriy (a,b) oraliqda uzluksizdir. $y=(1-x^2)^{-1}$ funksiya esa $(-1,1)$ va uning ichida joylashgan ixtiyoriy oraliqda uzluksiz bo‘ladi, ammo $x=\pm1$ nuqtalardan kamida bittasi kirgan sohalarda uzluksiz bo‘lmaydi.

Geometrik nuqtai-nazardan biror (a,b) oraliqda uzluksiz funksiyani grafigi shu oraliqda yaxlit bir (uzluksiz) chiziqdan iborat funksiya deb qarash mumkin. Masalan, $y=x^2$ funksiya grafigi ixtiyoriy (a,b) oraliqda uzluksiz bo‘lgan paraboladan iborat.

ASOSIY TEOREMA: Barcha asosiy elementar funksiyalar o‘zining aniqlanish sohasidagi har bir x_0 nuqtada uzluksizdir.

Bu teoremani isbotsiz qabul qilamiz.

1-TEOREMA: Agarda $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar x_0 nuqtada uzluksiz bo‘lsa, u holda $f(x)\pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ funksiyalar ham bu nuqtada uzluksiz bo‘ladi. Agarda qo‘shimcha ravishda $g(x_0)\neq 0$ shart bajarilsa, $f(x)/g(x)$ nisbat ham x_0 nuqtada uzluksizdir.

2-TEOREMA: Agar $y=g(x)$ funksiya x_0 nuqtada, $z=f(y)$ funksiya esa $y_0=g(x_0)$ nuqtada uzluksiz bo‘lsa, unda $f(g(x))=F(x)$ murakkab funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo‘ladi.

Natija: Barcha elementar funksiyalar o‘zlarining aniqlanish sohasidagi har bir x_0 nuqtada uzluksiz bo‘ladi.

Bu natijaga ishonch hosil etish uchun elementar funksiyalar ta’rifini eslash kifoyadir.

3-TA’RIF: Berilgan $y=f(x)$ funksiya biror $x=a$ nuqtada aniqlangan bo‘lib, bu nuqtada uning o‘ng (chap) limiti mavjud va

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = f(a+0) = f(a) \quad \left(\lim_{x \to a-0} f(x) = f(a-0) = f(a) \right)$$

shartni qanoatlantirsa, u holda $f(x)$ funksiya a nuqtada ***o‘ngdan(chapdan) uzluksiz*** deyiladi.

Masalan,

$$y = f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \geq 3 \\ 2x-1, & x < 3 \end{cases} \qquad (4)$$

funksiya $x=3$ nuqtada o‘ngdan uzluksiz, chunki

$$\lim_{x \to 3+0} f(x) = \lim_{x \to 3}(2x+1) = 7 = f(3).$$

Ammo bu funksiya $x=3$ nuqtada chapdan uzluksiz emas, chunki

$$\lim_{x \to 3-0} f(x) = \lim_{x \to 3}(2x-1) = 5 \neq f(3).$$

Aksincha,

$$y = f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 1 \\ x^2-1, & x > 1 \end{cases} \qquad (5)$$

funksiya x=1 nuqtada chapdan uzluksiz, o‘ngdan esa uzluksiz emas.

Oldin ko‘rib o‘tilgan

$$y = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases} \qquad (6)$$

funksiya x=0 nuqtada chapdan ham, o‘ngdan ham uzluksiz bo‘lmaydi, chunki

$$\operatorname{sgn}(0-0) = -1 \neq 0 = \operatorname{sgn}(0), \quad \operatorname{sgn}(0+0) = 1 \neq 0 = \operatorname{sgn}(0).$$

3-TEOREMA: Berilgan $y=f(x)$ funksiya qaralayotgan $x=a$ nuqtada uzluksiz bo‘lishi uchun bu nuqtada u ham chapdan, ham o‘ngdan uzluksiz bo‘lishi zarur va yetarlidir.

Izoh: $y=f(x)$ funksiya uchun $x=a$ nuqtada chap va o‘ng limitlar mavjud hamda ular o‘zaro teng, ya’ni $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \lim\limits_{x\to a+0} f(x) = A$ ekanligidan har doim ham uni bu nuqtada uzluksiz bo‘lishi kelib chiqavermaydi. Masalan,

$$y = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases} \qquad (7)$$

funksiya uchun, 1-ajoyib limitga asosan,

$$\lim_{x\to 0-0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0+0} \frac{\sin x}{x} = 1 \neq 0 = f(0).$$

Demak, bu funksiya x=0 nuqtada funksiya chapdan ham, o‘ngdan ham uzluklidir.

5.2. Kesmada uzluksiz funksiyalar uchun asosiy teoremalar. Dastlab funksiyaning kesmada uzluksizligi tushunchasini kiritamiz.

4-TA’RIF: Berilgan $y=f(x)$ funksiya biror (a,b) oraliqning har bir nuqtasida uzluksiz, $x=a$ ($x=b$) chegaraviy nuqtada o‘ngdan (chapdan) uzluksiz bo‘lsa , bu funksiya $[a,b]$ ***kesmada uzluksiz*** deyiladi.

Masalan, $y=\sin x$, $y=x^2$ funksiyalar har qanday $[a,b]$ kesmada uzluksizdir.

Agar $y=f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo‘lsa, uning grafigini shu kesmaga mos keluvchi qismi yaxlit (uzluksiz) chiziqdan iborat bo‘ladi. Uzluksizlikning bu geometrik talqini uzluksiz funksiyalarning quyidagi xossalari va ularning isbotini tasavvur etishga imkon beradi.

4-TEOREMA: Agarda $y=f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo‘lsa, bu kesmada kamida bitta shunday x_1 (yoki x_2) nuqta mavjudki, har qanday $x\in[a,b]$ uchun $f(x_1)\geq f(x)$ (yoki $f(x_2)\leq f(x)$) munosabat o‘rinli bo‘ladi.

Bu teoremadagi $f(x_1)$ yoki $f(x_2)$ berilgan $f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ ***kesmadagi eng katta yoki eng kichik qiymati*** deb ataladi va

$$\max_{x\in[a,b]} f(x) = M, \qquad \min_{x\in[a,b]} f(x) = m$$

kabi belgilandi.

Masalan, $f(x)=x^2$, $x\in[2,4]$ funksiya uchun x_1=2, x_2=4 bo‘ladi, chunki bu kesmada $m=4\leq x^2\leq 16=M$, ya’ni $f(2)\leq f(x)\leq f(4)$ munosabat o‘rinli.

Kiritilgan yangi tushunchadan foydalanib, 4-teoremani quyidagicha ifodalash mumkin.

TEOREMA (Veyershtrass): Berilgan $[a,b]$ kesmada uzluksiz $y=f(x)$ funksiya shu kesmada o‘zining eng katta M va eng kichik m qiymatiga erishadi, ya’ni bu kesmada kamida bittadan shunday x_1 va x_2 nuqta mavjudki, $f(x_1)=M$ va $f(x_2)=m$ tenglik o‘rinli bo‘ladi.

5-TEOREMA: Agar $y=f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz va uning chegaralarida turli ishorali qiymatlarni qabul qilsa, ya’ni $f(a)\cdot f(b)<0$ shart bajarilsa, u holda kamida bitta shunday $c\in(a,b)$ nuqta mavjudki, unda $f(c)=0$ tenglik bajariladi.

Bu teorema yordamida $f(x)=0$ ko‘rinishdagi tenglamaning ildizlari yotgan oraliqlarni topish mumkin. Masalan, $x-\cos x=0$ tenglama $(0,\pi)$ oralikda ildizga ega, chunki $f(x)=x-\cos x$

funksiya $[0,\pi]$ kesmada uzluksiz va $f(0)=-1<0$, $f(\pi)=\pi+1>0$. Demak, qandaydir $x_0\in(0,\pi)$ nuqtada $f(x_0)=x_0-\cos x_0=0$ bo‘ladi va x_0 berilgan tenglama ildizini ifodalaydi.

6-TEOREMA: Agarda $y=f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz va $f(a)=A$, $f(b)=B$, $A\neq B$ bo‘lsa, har qanday $\mu\in(A,B)$ son uchun kamida bitta shunday $c\in(a,b)$ nuqta topiladiki, unda $f(c)=\mu$ tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Masalan, $f(x)=x^3$, $x\in[1,3]$, funksiya uchun A=1, B=27 va har qanday $\mu\in(1,27)$ uchun $c=\sqrt[3]{\mu}$ deb olsak, $f(c)=c^3=(\sqrt[3]{\mu})^3=\mu$ tenglik bajariladi.

NATIJA: Agarda $y=f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz va bu yerda uning eng katta va eng kichik qiymatlari mos ravishda M va m bo‘lsa, u holda funksiyaning $x\in[a,b]$ bo‘lgandagi qiymatlari $[m, M]$ kesmani to‘liq to‘ldiradi.

Kelgusida ayrim masalalarni qarashda bizga tekis uzluksizlik tushunchasi kerak bo‘ladi.

5-TA’RIF: Berilgan $y=f(x)$ funksiya uchun ixtiyoriy $\varepsilon>0$ soni bo‘yicha shunday $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ soni topilsaki, biror $D\subset D\{f\}$ sohadagi $|x_1-x_2|<\delta$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy x_1 va x_2 nuqtalar uchun $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, unda $y=f(x)$ funksiya D sohada ***tekis uzluksiz*** deb ataladi.

Shuni ta’kidlab o‘tish kerakki, agar $y=f(x)$ funksiya biror D sohada tekis uzluksiz bo‘lsa, unda bu funksiya D sohaning har bir x_0 nuqtasida albatta uzluksiz bo‘ladi. Haqiqatan ham tekis uzluksizlik ta’rifida $x_2=x_0$ va $x_1=x$ deb olsak, unda ixtiyoriy $\varepsilon>0$ soni bo‘yicha shunday $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ soni topiladiki,

$$|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)\,.$$

Ammo teskari tasdiq har doim ham o‘rinli emas. Masalan, $f(x)=\sin(1/x)$ funksiya (0,1) oraliqda uzluksiz, lekin uni bu oraliqda tekis uzluksiz emasligini ko‘rsatish mumkin.

6-TEOREMA (Kantor): Agar $y=f(x)$ funksiya biror $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo‘lsa, unda bu funksiya shu kesmada tekis uzluksiz bo‘ladi.

5.3. Funksiyaning uzilish nuqtalari va ularning turlari. Endi funksiyaning uzlukliligi ustida to‘xtalib o‘tamiz.

6-TA’RIF: $y=f(x)$ funksiya uchun uzluksizlikka qo‘yiladigan shartlardan kamida bittasi bajarilmaydigan nuqtalar uning ***uzilish nuqtalari,*** funksiyaning o‘zi esa bu nuqtalarda ***uzlukli*** deb ataladi.

Ta’rifga asosan, biror $x=a$ nuqtada $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ mavjud va $\lim\limits_{x\to a} f(x)\neq f(a)$, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$ yoki $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ mavjud bo‘lmasa, bu nuqta $y=f(x)$ funksiyaning uzilish nuqtasi bo‘ladi.

Masalan, $f(x)=(1-x^2)^{-2}$ funksiya uchun $x=\pm1$ uning uzilish nuqtasi bo‘ladi, chunki bu nuqtalarda $\lim\limits_{x\to\pm1} f(x)=\infty$. (6) signum funksiya uchun $x=0$ uzilish nuqtasi bo‘ladi , chunki $\lim\limits_{x\to0}\operatorname{sgn}(x)$ mavjud emas.

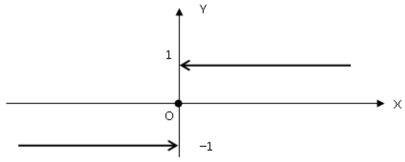
Funksiyaning uzilish nuqtalari uch sinfga ajratiladi.

7-TA’RIF: Agar $y=f(x)$ funksiyaning $x=a$ uzilish nuqtasida $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ limit mavjud, ammo $a\notin D\{f\}$ yoki $f(a)\neq A$ bo‘lsa, unda $x=a$ funksiyaning ***tuzatib bo‘ladigan uzilish nuqtasi*** deyiladi.

Bu yerda $x=a$ funksiyaning tuzatib bo‘ladigan uzilish nuqtasi deyilishiga sabab shuki, agar $f(a)=A$ deb olsak, unda funksiya $x=a$ nuqtada uzluksiz funksiyaga aylanadi. Masalan, yuqorida ko‘rib o‘tilgan (7) funksiya $f(x)=\sin x/x$ uchun $f(0)=0$ demasdan, $f(0)=1$ desak, u hamma joyda uzluksiz bo‘ladi.

8-TA’RIF: Agarda $x=a$ nuqta $y=f(x)$ funksiyaning uzilish nuqtasi bo‘lib, bu nuqtada funksiyaning chap $f(a-0)$ va o‘ng $f(a+0)$ limitlari mavjud hamda chekli sonlardan iborat bo‘lsa, $x=a$ funksiyaning ***I tur uzilish nuqtasi*** deyiladi. Bunda $\Delta=f(a+0)-f(a-0)$ soni funksiyaning a uzilish nuqtasidagi ***sakrashi*** deb ataladi.

Masalan, (6) signum funksiya uchun x=0 I tur uzilish nuqtasi bo'ladi. Bu holda sgn(0–0)=–1, sgn(0+0)=1 va funksiya bu nuqtada o'z qiymatini uzluksiz ravishda o'zgartirmasdan, Δ=1–(–1)=2 sakrash bilan o'zgartiradi (50-rasm).



50-rasm

8-TA'RIF: Agarda $y=f(x)$ funksiyaning $x=a$ uzilish nuqtasida uning chap va o'ng limitlaridan kamida bittasi cheksiz yoki mavjud bo'lmasa, $x=a$ funksiyaning ***II tur uzilish nuqtasi*** deyiladi.

Endi ushbu funksiyani qaraymiz:

$$f(x)=\begin{cases} x\cos\dfrac{1}{x}, & x<0, \\ 0, & x=0, \\ \sin\dfrac{1}{x}, & x>0. \end{cases}$$

Bu funksiya barcha nuqtalarda, jumladan x=0 nuqtada aniqlangan. Bunda $x\to0$ bo'lganda $|\cos(1/x)|\le1$, ya'ni chegaralangan funksiya bo'lgani uchun

$$\lim_{x\to0-0} f(x)=\lim_{x\to0} x\cos\frac{1}{x}=0=f(0)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Demak, bu funksiya uchun x=0 nuqtada chap limit mavjud va bundan tashqari u chapdan uzluksiz. Endi bu funksiyaning x=0 nuqtadagi o'ng limitini qaraymiz. Agar $x=(2\pi n+\pi/2)^{-1}$, $n\in N$, deb olsak, unda $n\to\infty$ bo'lganda $x\to0+0$ bo'ladi va bu holda

$$\lim_{x\to0+0} f(x)=\lim_{n\to\infty}\sin(2\pi n+\frac{\pi}{2})=\lim_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}1=1$$

natijani olamiz. Xuddi shu tarzda $x=(2\pi n)^{-1}$, $n\in N$, deb olsak, unda $n\to\infty$ bo'lganda yana $x\to0+0$ bo'ladi, ammo bu holda

$$\lim_{x\to0+0} f(x)=\lim_{n\to\infty}\sin 2\pi n=\lim_{n\to\infty}\sin 0=\lim_{n\to\infty}0=0$$

natijaga kelamiz. Oxirgi ikki tenglikdan qaralayotgan funksiyaning x=0 nuqtada o'ng limiti mavjud emasligi kelib chiqadi. Demak, bu funksiya uchun x=0 II tur uzilish nuqtasi bo'ladi.

XULOSA

Funksiyaning eng muhim xususiyatlaridan biri uning uzluksizligi bo'lib hisoblanadi. Bunga sabab shuki, atrofimizdagi ko'p jarayonlar uzluksiz ravishda davom etadi va ular uzluksiz funksiyalar orqali ifodalanadi. Funksiya uzluksizligi uning limiti orqali aniqlanadi. Oraliqda uzluksiz funksiyani grafigi uzluksiz, yaxlit chiziqdan iborat funksiya singari tasavvur etish mumkin. Barcha asosiy elementar funksiyalar o'zlarining aniqlanish sohasida uzluksiz bo'ladi. Kesmada uzluksiz funksiya shu kesmada o'zining eng katta va eng kichik qiymatiga erishadi.

Biror nuqtada uzluksiz bo'lmagan funksiya shu nuqtada, bu nuqta esa uning uzilish nuqtasi deyiladi. Uzilish nuqtalari atrofida funksiya qanday qiymatlar qabul qilishiga qarab, ular tuzatib bo'ladigan, I va II tur uzilish nuqtalariga ajratiladi.

Tayanch iboralar

* Funksiyaning nuqtadagi uzluksizligi * Argument orttirmasi * Funksiya orttirmasi * Uzluksizlikni orttirma orqali ifodasi * Oraliqda uzluksizlik * O‘ng tomondan uzluksizlik * Chap tomondan uzluksizlik * Kesmada uzluksizlik
* Kesmadagi eng katta qiymat * Kesmadagi eng kichik qiymat * Veyershtrass teoremasi * Tekis uzluksizlik * Kantor teoremasi * Uzilish nuqtalari * Tuzatib bo‘ladigan uzilish nuqtalari * I tur uzilish nuqtalari * II tur uzilish nuqtalari

Takrorlash uchun savollar

1. Qachon funksiya nuqtada uzluksiz deyiladi?
2. Argument va funksiya orttirmalari qanday aniqlanadi?
3. Orttirmalar tilida funksiya uzluksizligi qanday ifodalanadi?
4. Qaysi shartda funksiya oraliqda uzluksiz deyiladi?
5. Asosiy elementar funksiyalar uzluksizligi to‘g‘risida nima deyish mumkin?
6. Uzluksiz funksiyalarning asosiy xossalari nimalardan iborat?
7. Elementar funksiyalar uzluksizligi haqida nima deyish mumkin?
8. Qachon funksiya nuqtada chap (o‘ng) tomondan uzluksiz deyiladi?
9. Funksiyaning nuqtada uzluksizligining zaruriy va yetarli sharti nimadan iborat?
10. Qaysi shartda funksiya kesmada uzluksiz deyiladi?
11. Funksiyaning kesmadagi eng katta qiymati deb nimaga aytiladi?
12. Funksiyaning kesmadagi eng kichik qiymati deb nimaga aytiladi?
13. Veyershtrass teoremasida nima tasdiqlanadi?
14. Qachon funksiya biror sohada tekis uzluksiz deyiladi?
15. Uzluksizlik va tekis uzluksizlik orasida qanday bog‘lanish mavjud?
16. Kantor teoremasida qanday tasdiq keltiriladi?
17. Funksiyaning uzilish nuqtalari deb nimaga aytiladi?
18. Tuzatib bo‘ladigan uzilish nuqtasi nima?
19. I tur uzilish nuqtasi qanday ta’riflanadi?
20. Qaysi shartda uzilish nuqtasi II turga kiritiladi?

14§ FUNKSIYANING NUQTADAGI HOSILASI. HOSILANING MEXANIK, GEOMETRIK, IQTISODIY, KIMYOVIY VA BOSHQA TALQINLARI. HOSILA OLISHNING ASOSIY QOIDALARI.

- ***Hosila tushunchasiga olib keladigan amaliy masalalar.***
- ***Hosila ta’rifi va uning amaliy ma’nolari.***
- ***Differensiallanuvchi funksiya va uning uzluksizligi.***

Differensial hisob oliy matematikaning eng asosiy va eng kuchli, samarali usullaridan biri bo‘lib hisoblanadi. Matematik tahlilning bu bo‘limi nisbatan yosh bo‘lib, uning dastlabki kurtaklari XVII asrda Ferma, Paskal, Dekart kabi matematiklarning ishlarida shakllangan va XVIII asrda buyuk ingliz olimi Nyuton (1642–1727) va mashhur olmon matematigi Leybnits (1646–1716) tomonidan unga asos solingan va turli masalalarni yechish uchun keng qo‘llanilgan.

1.1. Hosila tushunchasiga olib keladigan amaliy masalalar. Differensial hisob asosida funksiya hosilasi tushunchasi yotadi va u tarixan quyidagi amaliy masalalarni yechish jarayonida paydo bo‘lgan.

❖ **Oniy tezlik masalasi.** Bizga ma’lumki, to‘g‘ri chiziq bo‘yicha tekis harakat qilayotgan moddiy nuqtaning ixtiyoriy t vaqtdagi tezligi $v(t)=v_0$=const, ya’ni o‘zgarmas bo‘ladi. Bunda harakat boshlangandan keyin t vaqt o‘tgach nuqtaning bosib o‘tgan masofasi $S(t)=vt$

funksiya bilan aniqlanadi va ***harakat tenglamasi*** deb ataladi. Endi bu nuqta to‘g‘ri chiziq bo‘yicha notekis harakatda bo‘lgan holni qaraymiz. Bu holda moddiy nuqtaning tezligi t vaqt o‘tishi bilan o‘zgarib boradi va biror $v=v(t)$ funksiyani hosil qiladi. Moddiy nuqtaning t vaqt momentidagi tezligi ***oniy tezlik*** deb ataladi. Biz notekis harakat tenglamasi $S=S(t)$ ma’lum bo‘lgan taqdirda moddiy nuqtaning biror t_0 vaqtdagi $v_0=v(t_0)$ oniy tezligini topish masalasini qaraymiz. Buning uchun ikkinchi bir $t=t_0+\Delta t$ vaqtni qaraymiz. Unda moddiy nuqtaning ko‘rilayotgan $(t_0, t)=(t_0, t_0+\Delta t)$ vaqt oralig‘ida bosib o‘tgan masofasi

$$S(t)–S(t_0)= S(t_0+\Delta t)–S(t_0)= \Delta S,$$

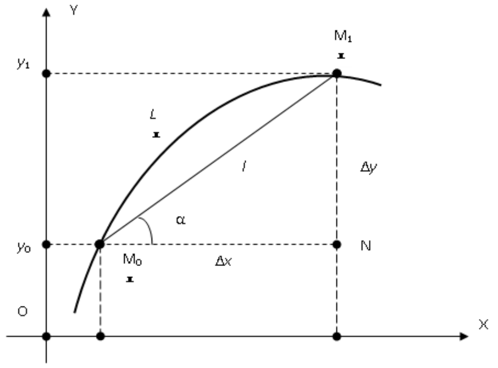
ya’ni harakat tenglamasini ifodalovchi $S=S(t)$ funksiyaning orttirmasiga teng bo‘ladi. Agar notekis harakatdagi moddiy nuqtaning bu vaqt oralig‘idagi o‘rtacha tezligini $\bar{v}(\Delta t)$ deb belgilasak, uning qiymati $\bar{v}(\Delta t)=\Delta S/\Delta t$ formula bilan aniqlanadi. Bu holda $v(t_0)$ oniy tezlik $\bar{v}(\Delta t)$ o‘rtacha tezlikning $t\to t_0$, ya’ni $\Delta t\to 0$ bo‘lgandagi limiti kabi aniqlanadi. Demak, notekis harakatda $v(t_0)$ oniy tezlik

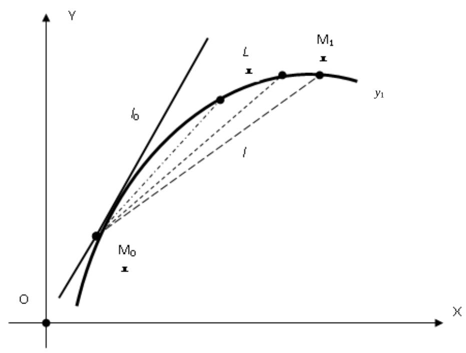
$$v(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\bar{v}(\Delta t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t} \qquad \textbf{(1)}$$

limitni hisoblash orqali topiladi.

❖ **Urinma masalasi.** Dastlab tekislikdagi berilgan L chiziqning $M_0(x_0, y_0)$ nuqtasiga o‘tkazilgan urinma tushunchasini kiritamiz.

Berilgan L chiziqda yotuvchi ikkita M_0 va M_1 nuqtalarni tutashtiruvchi M_0M_1 kesma ***vatar*** deb ataladi (53-rasmga qarang).





Bu vatar yotgan to‘g‘ri chiziq M_0 nuqtadan o‘tgani uchun uning tenglamasi

$$y-y_0=k(x-x_0)\,,\quad k=tg\alpha=\frac{|NM_1|}{|NM_0|}=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

<u>1-TA’RIF:</u> Agar L chiziqning M_0M_1 vatari yotgan l to‘g‘ri chiziq M_1 nuqta L chiziq bo‘ylab M_0 nuqtaga cheksiz yaqinlashib borganda ($M_1\to M_0$) biror l_0 to‘g‘ri chiziqqa cheksiz yaqinlashib borsa ($l\to l_0$), unda l_0 berilgan L chiziqning M_0 nuqtadagi ***urinmasi*** deyiladi.

Egri chiziqning $M_0(x_0, y_0)$ nuqtadagi urinmasi shu nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq bo‘lgani uchun (54-rasmga qarang) uning ham tenglamasi vatar tenglamasi singari $y–y_0=k_0(x–x_0)$ ko‘rinishda bo‘ladi. Bu tenglamadagi k_0 burchak koeffitsiyentini topish uchun L chiziq tenglamasini ifodalovchi $y=\varphi(x)$ funksiya berilgan deb hisoblaymiz. Urinma ta’rifiga asosan

$$M_1\to M_0\ \Rightarrow x_1\to x_0\,,\, y_1\to y_0\Rightarrow \Delta x\to 0\,,\,\Delta y\to 0$$

bo‘lgani uchun M_0M_1 vatarning k burchak koeffitsiyenti uchun yuqorida keltirilgan formulaga asosan

$$k_0=\lim_{M_1\to M_0}k=\lim_{M_1\to M_0}tg\alpha=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta x} \qquad (2)$$

natijani olamiz.

❖ **Mehnat unumdorligi masalasi.** Ishchining ish kuni davomidagi mehnat unumdorligi o‘zgaruvchi miqdor bo‘ladi. Ertalab ish kuni boshlangach, ma’lum bir paytgacha u ishga kirishish jarayonida bo‘lib, bu davrda uning mehnat unumdorligi oshib boradi. So‘ngra ma'lum bir vaqt davomida ishchi deyarli bir xil mehnat unumdorligi bilan ishini davom ettiradi. Ish kuni oxiriga yaqinlashgan sari toliqish natijasida ishchining mehnat unumdorligi pasayib boradi. Shunday qilib, ish kuni davomida t vaqt o'zgarib borishi bilan ishchining mehnat unumdorligi biror $z=z(t)$ funksiya orqali ifodalanadi. Uni topish uchun ishchining ish kuni boshlangandan keyin t vaqt o'tgach ishlab chiqargan mahsulot hajmini ifodalovchi $h=h(t)$ funksiya ma'lum deb olamiz. Bu funksiya yordamida ishchining $t=t_0$ vaqtdagi $z_0=z(t_0)$ mehnat unumdorligini topamiz. Bu maqsadda ish kunining t_0 va $t_1=t_0+\Delta t$ vaqt oralig'ini qaraymiz. Bu vaqt oralig'ida ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi $h(t_0+\Delta t)-h(t_0)=\Delta h$ kabi aniqlanadi. U holda uzunligi Δt bo'lgan bu vaqt oralig'idagi ishchining o'rtacha mehnat unumdorligi $\bar{z}(\Delta t)=\Delta h/\Delta t$ nisbat orqali aniqlanadi. Bu yerdan ishchining $t=t_0$ vaqtdagi $z_0=z(t_0)$ mehnat unumdorligini topish uchun $\Delta t\to 0$ deb olishimiz kerak va natijada

$$z(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\bar{z}(\Delta t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta h}{\Delta t} \qquad (3)$$

formulaga ega bo'lamiz.

Bu uchala masala mazmunan turlicha bo'lsa ham, ularni yechish bir xil matematik usulda amalga oshirilganligi va bu yechimlar (1)–(3) formulalar orqali bir xil ko'rinishida ifodalanganligini ta'kidlab o'tamiz.

1.2. Hosila ta'rifi va uning amaliy ma'nolari. Yuqoridagi masalalarni yechish uchun amalga oshirilgan ishlarni umumiy holda qaraymiz. Bizga biror $y=f(x)$ funksiya berilgan. Bu funksiyaning aniqlanish sohasiga kiruvchi x_0 va $x=x_0+\Delta x$ argument qiymatlarini qaraymiz, ya'ni x_0 nuqtada argumentga Δx orttirma beramiz. Argumentning bu Δx orttirmasiga mos keluvchi $y=f(x)$ funksiyaning $\Delta y=\Delta f= f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ orttirmasini topamiz. So'ngra Δf funksiya orttirmasining Δx argument orttirmasiga nisbatini $\Delta x\to 0$ holdagi limitini hisoblaymiz.

2-TA'RIF: Berilgan $y=f(x)$ funksiyaning Δf orttirmasining Δx argument orttirmasiga nisbati $\Delta x\to 0$ bo'lganda chekli limitga ega bo'lsa, bu limit qiymati funksiyaning x_0 nuqtadagi ***hosilasi*** deb ataladi.

Berilgan $y=f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi $f'(x_0)$ yoki $y'(x_0)$ kabi belgilanadi va, ta'rifga asosan,

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \qquad (4)$$

tenglik orqali aniqlanadi.

Misol sifatida $f(x)=x^2$ funksiya hosilasini uning ta'rifiga asosan topamiz: $\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x) =$

$(x+\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2 \;\Rightarrow$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x.$$

Demak, $(x^2)'=2x$. Shunday tarzda $x'=1$ va $(x^3)'=3x^2$ ekanligini ko'rsatish mumkin.

Oldin ko'rilgan masalalarning (1)–(3) javoblarini kiritilgan hosila tushunchasi orqali ifodalaymiz. Harakat tenglamasi $S=S(t)$ funksiya bilan ifodalanadigan notekis harakatda t_0 vaqtdagi oniy tezlik uchun topilgan (1) natijadan

$$v(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t}=S'(t_0) \qquad (1')$$

formulani hosil qilamiz.

Demak, $y=f(x)$ funksiyaning hosilasi uning o'zgarish tezligini ifodalaydi va bu ***hosilani mexanik ma'nosi*** deyiladi. Nyuton hosila tushunchasiga mana shu yo'nalishdagi tadqiqotlari orqali kelgan va uni "flyuktsiya" deb atagan. Shuni ta'kidlab o'tish kerakki, bu yerda "tezlik" tushunchasi faqat harakat tezligini ifodalamasdan, u keng ma'noda tushuniladi. Masalan, ximiyaviy reaksiya tezligi, texnologik jarayon tezligi, iqtisodiy islohotlarni amalga oshirish tezligi va hokazo.

Endi $y=\varphi(x)$ funksiya orqali berilgan L chiziqning $M_0(x_0,y_0)= M_0(x_0, \varphi(x_0))$ nuqtasiga o'tkazilgan l_0 urinmaning k burchak koeffitsiyenti ifodalovchi (2) formulani eslab, undan

$$k=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}=\varphi'(x_0) \qquad (2')$$

natijaga kelamiz.

Demak, $y=f(x)$ funksiyaning hosilasi uning grafigini $M_0(x_0,y_0)=M_0(x_0, f(x_0))$ nuqtasiga o‘tkazilgan urinmaning burchak koeffitsiyentini ifodalaydi va bu ***hosilani geometrik ma’nosi*** deyiladi. Nyutonning hosila bo‘yicha ishlaridan bexabar holda Leybnits mana shunday geometrik masalalarni yechish jarayonida hosila tushunchasiga kelgan.

Shunday qilib, $y=f(x)$ funksiya grafigining $M_0(x_0,y_0)=M_0(x_0, f(x_0))$ nuqtasiga o‘tkazilgan urinma tenglamasi

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Rightarrow y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0) \qquad (5)$$

ko‘rinishda topiladi.

Misol sifatida $f(x)=x^2$ parabolaning $x_0=3$ abssissali nuqtasiga o‘tkazilgan urinma tenglamasini topamiz. Bunda $f(x_0)=f(3)=3^2=9$, $f'(x_0)=2x_0=2\cdot 3=6$ va shu sababli, (5) formulaga asosan, izlangan urinma tenglamasi

$$y=6(x–3)+9 \Rightarrow y=6x–9$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Mehnat unumdorligi to‘g‘risidagi masalaning (3) javobini hosila orqali

$$z(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta h}{\Delta t}=h'(t_0) \qquad (3')$$

ko‘rinishda yozish mumkin. Demak, $y=f(x)$ funksiya x vaqtgacha ishlab chiqarilgan mahsulot hajmini ifodalasa, uning hosilasi $f'(x)$ shu x vaqtdagi mehnat unumdorligini ifodalaydi va buni ***hosilaning iqtisodiy ma’nosi*** deb qarash mumkin.

1.3. Differensiallanuvchi funksiya va uning uzluksizligi. Dastlab differensiallanuvchi funksiya tushunchasini kiritamiz.

3-*TA’RIF:* Agar $y=f(x)$ funksiya x nuqtada chekli $f'(x)$ hosilaga ega bo‘lsa, u shu nuqtada ***differensiallanuvchi*** deyiladi. Aks holda $y=f(x)$ funksiya x nuqtada ***differensiallanmovchi*** deb ataladi. Funksiyani $f'(x)$ hosilasini topish amali ***differensiallash amali*** deb ataladi.

Funksiyaning differensiallanuvchiligi va uzluksizligi orasidagi bog‘lanish quyidagi teorema orqali ifodalanadi.

TEOREMA: Agarda $y=f(x)$ funksiya x nuqtada differensiallanuvchi bo‘lsa, u shu nuqtada uzluksiz bo‘ladi.

Izoh: Teoremadagi tasdiqning teskarisi umuman olganda o‘rinli emas. Masalan, $f(x)=|x|$ funksiya $x=0$ nuqtada uzluksiz, ammo bu nuqtada differensiallanuvchi emas. Haqiqatan ham, $x=0$ nuqtada argumentga Δx orttirma berganimizda funksiya orttirmasi uchun $\Delta f=f(0+\Delta x)–f(0)=f(\Delta x)=|\Delta x|$ tenglik o‘rinli bo‘ladi. Bu yerdan ko‘rinadiki

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f=\lim_{\Delta x\to 0}|\Delta x|=0,$$

ya’ni $f(x)=|x|$ funksiya $x=0$ nuqtada uzluksiz. Ammo

$$\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1,\ \lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1.$$

Bu yerdan ko‘rinadiki $\Delta x\to 0$ bo‘lganda $\Delta f/\Delta x$ nisbat limitga ega emas va shu sababli $x=0$ nuqtada $f'(0)$ hosila mavjud emas.

4-TA’RIF: Berilgan $y=f(x)$ funksiya (a,b) oraliqning har bir x nuqtasida differensiallanuvchi bo‘lsa, u shu ***oraliqda differensiallanuvchi*** deb ataladi.

Masalan, $y=x^2$ funksiya har qanday (a,b) oraliqda differensiallanuvchi. $y=|x|$ funksiya esa $x=0$ nuqtani o‘z ichiga olmaydigan barcha oraliqlarda differensiallanuvchi, ammo $x=0$ nuqtani o‘z ichiga oluvchi oraliqlarda differensiallanuvchi bo‘lmaydi

XULOSA

Funksiya hosilasi matematik tahlilning asosiy tushunchasi bo‘lib, juda ko‘p nazariy va amaliy tatbiqlarga egadir. Notekis harakatda tezlik, egri chiziqqa urinmaning burchak koeffitsiyenti, iqtisodiyotda mehnat unumdorligi yoki ishlab chiqarish sur'ati hosila yordamida aniqlanadi. Kelgusida hosila funksiya xususiyatlarini o'rganishning kuchli quroli ekanligini ko'ramiz. Har qanday funksiya ham hosilaga ega bo'lavermaydi. Masalan, $y=|x|$ funksiya $x=0$ nuqtada hosilaga ega emas. Hosilasi mavjud funksiya differensiallanuvchi deyiladi. Agar funksiya biror oraliqda differensiallanuvchi bo'lsa, unda u bu oraliqda uzluksiz bo'ladi.

Hosila tushunchasi iqtisodiy nazariyada ko'p qo'llaniladi. Masalan, limitik xarajat, limitik daromad, funksiya elastikligi kabi iqtisodiy tushunchalar hosila yordamida aniqlanadi va hisoblanadi.

Tayanch iboralar

* Funksiyaning hosilasi * Hosilaning mexanik ma'nosi * Hosilaning geometrik ma'nosi * Hosilaning iqtisodiy ma'nosi * Differensiallanuvchi funksiya * Differensiallash amali * Oraliqda differensiallanuvchi funksiya * Funksiyaning elastikligi

Takrorlash uchun savollar

1. Oniy tezlik masalasi qanday ifodalanadi?
2. Urinma haqidagi masala qanday mazmunga ega?
3. Mehnat unumdorligi masalasi nimadan iborat?
4. Funksiyaning nuqtadagi hosilasi ta'rifi qanday ifodalanadi?
5. Hosilaning mexanik ma'nosi nimadan iborat?
6. Hosilaning geometrik ma'nosi qanday ifodalanadi?
7. Hosilaning iqtisodiy ma'nosi qanday misol bilasiz?
8. Qachon funksiya differensiallanuvchi deyiladi?
9. Differensiallanuvchi funksiyaning uzluksizligi haqida nima deyish mumkin?
10. Uzluksiz funksiya differensiallanuvchi bo'lishi shartmi?
11. Qachon funksiya oraliqda differensiallanuvchi deyiladi?
12. Funksiyaning elastikligi deb nimaga aytiladi?
13. Funksiyaning elastikligi qanday iqtisodiy ma'noga ega?

15§ MURAKKAB VA TESKARI FUNKSIYALARNING HOSILALARI. OSHKORMAS VA PARAMETRIK KO'RINISHDAGI FUNKSIYALARNI DEIFFERENSIALLASH

- ***Hosilani hisoblash algoritmi.***
- ***Differensiallash qoidalari.***
- ***Logarifmik differensiallash usuli.***
- ***Hosilalar jadvali.***

2.1. Hosilani hisoblash algoritmi. Berilgan $y=f(x)$ funksiyaning $f'(x)$ hosilasini topish, ya'ni uni differensiallash, oldingi paragrafda keltirilgan ta'rifga asosan quyidagi algoritm bo'yicha amalga oshiriladi:

- funksiyaning x argumentiga $\Delta x\neq 0$ orttirma berib, $x+\Delta x$ nuqtani topamiz;
- funksiya orttirmasini $\Delta f= f(x+\Delta x)-f(x)$ formula bo'yicha hisoblaymiz;
- $\Delta f/\Delta x$ orttirmalar nisbatni topamiz;
- $\Delta f/\Delta x$ nisbatning $\Delta x\to 0$ bo'lgandagi limitini aniqlaymiz.

Misol sifatida asosiy elementar funksiyalardan biri bo'lgan $f(x)=\sin x$ hosilasini yuqorida

keltirilgan algoritm bo'yicha topamiz:

✓ x va $x+\Delta x$ nuqtalarda funksiyaning $f(x)=\sin x$ va $f(x+\Delta x)=\sin(x+\Delta x)$ qiymatlarini hisoblaymiz;

✓ trigonometrik ayirmani ko‘paytmaga keltirish formulasidan foydalanib, Δf funksiya orttirmasini quyidagi ko‘rinishda yozamiz:

$$\Delta f= f(x+\Delta x)-f(x)=\sin(x+\Delta x)-\sin x= 2\sin(\Delta x/2)\cdot\cos(x+\Delta x/2);$$

✓ $\Delta f/\Delta x$ orttirmalar nisbatni tuzamiz:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{2\sin(\Delta x/2)\cos(x+\Delta x/2)}{\Delta x}=\frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2}\cdot\cos(x+\Delta x/2)\ ;$$

✓ Ko‘paytmaning limiti, I ajoyib limit hamda $y=\cos x$ funksiya uzluksizligidan foydalanib, $\Delta f/\Delta x$ nisbatning $\Delta x\to 0$ bo‘lgandagi limitini hisoblaymiz:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}[\frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2}\cdot\cos(x+\Delta x/2)]=(\frac{\Delta x}{2}=\alpha)=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}\cdot\lim_{\alpha\to 0}\cos(x+\alpha)=1\cdot\cos x=\cos x\,.$$

Demak,

$$(\sin x)'=\cos x \qquad (1)$$

formula o‘rinli ekan. Xuddi shunday tarzda

$$(\cos x)'=-\sin x \qquad (2)$$

ekanligini aniqlaymiz.

Yana bir misol sifatida $f(x)=a^x$ ko‘rsatkichli funksiya hosilasini topamiz:

$$(a^x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x}=a^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=a^x\ln a\,. \qquad (3)$$

Bu yerda ajoyib limitlardan biri (VI bob, §3) bo‘lgan

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$$

limit qiymatidan foydalanildi. Jumladan, $a=e$ holda $(e^x)' = e^x \ln e=e^x$ natijaga ega bo‘lamiz.

2.2. Differensiallash qoidalari. Har qanday funksiya hosilasini yuqoridagi algoritm bo‘yicha hisoblash oson emas va ancha murakkab hisoblashlarni talab etadi. Shu sababli amalda $y=f(x)$ funksiya hosilasini hisoblash quyidagi ***differensiallash qoidalari*** yordamida osonroq amalga oshirilishi mumkin.

1-qoida: O‘zgarmas funksiya, ya’ni ixtiyoriy C o‘zgarmas sonning hosilasi nolga teng , ya’ni

$$(C)'=0 \quad (C\text{–const}). \qquad (4)$$

Isbot: Har qanday o‘zgarmas $f(x)$=C funksiya uchun argumentning ixtiyoriy $\Delta x\neq 0$ orttirmasida

$$\Delta f= f(x+\Delta x)-f(x)=C-C=0, \qquad \Delta f/\Delta x=0$$

tenglik o‘rinli ekanligidan va hosila ta’rifidan

$$(C)'=f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}0=0$$

ekanligi kelib chiqadi.

Masalan, $(3,2)'=0$, $(-7)'=0$, $(\sin 25^0)'=0$, $(\pi)'=0$ va hokazo.

2-qoida: Agar $u=u(x)$ va $v=v(x)$ funksiyalar x nuqtada differensiallanuvchi bo‘lsa, bu nuqtada $y=u(x)\pm v(x)=u\pm v$ funksiya ham differensiallanuvchi va uning hosilasini

$$(u\pm v)'=u'\pm v' \qquad (5)$$

formula bilan hisoblash mumkin.

Isbot: Funksiya orttirmasi ta’rifidan foydalanib, har qanday Δx argument orttirmasida $\Delta(u\pm v)=\Delta u\pm\Delta v$ ekanligini ko‘rish qiyin emas. Bu yerdan hosila ta’rifi va limit hisoblash qoidasiga asosan kerakli tenglikni olamiz:

$$(u\pm v)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta(u\pm v)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u\pm\Delta v}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\pm\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=u'\pm v' \quad .$$

Demak, ikkita differensiallanuvchi funksiyalarning algebraik yig‘indisi differensiallanuvchi funksiya bo‘lib, algebraik yig‘indining hosilasi hosilalarning algebraik yig‘indisiga teng bo‘ladi.

Masalan,

$$(x^2+\sin x)'=(x^2)'+(\sin x)'=2x+\cos x, \quad (5-\cos x)'=(5)'-(\cos x)'=0-(-\sin x)=\sin x .$$

1-natija: Differensiallanuvchi $y=f(x)$ funksiyaga ixtiyoriy C o‘zgarmas sonni qo‘shsak, uning hosilasi o‘zgarmaydi.

Haqiqatan ham $(f(x)+C)'=f'(x)+C'=f'(x)+0=f'(x)$.

Izoh: Yuqoridagi 2- qoidada keltirilgan tasdiqning teskarisi umuman olganda o‘rinli emas. Masalan, $u=|x|$ va $v=1-|x|$ funksiyalar yig‘indisi $u+v=1$ o‘zgarmas funksiya sifatida barcha x nuqtalarda, jumladan $x=0$ nuqtada differensiallanuvchi. Ammo u va v qo‘shiluvchi funksiyalar $x=0$ nuqtada differensiallanuvchi emas.

3-qoida: Agar $u=u(x)$ va $v=v(x)$ funksiyalar x nuqtada differensiallanuvchi bo‘lsa, bu nuqtada $y=u(x)\cdot v(x)=u\cdot v$ funksiya ham differensiallanuvchi va uning hosilasi uchun

$$(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v' \qquad (6)$$

formula o‘rinli bo‘ladi.

Isbot: Funksiya orttirmasi ta’rifiga asosan

$$\Delta u=u(x+\Delta x)-u(x) \Rightarrow u(x+\Delta x)=u(x)+\Delta u,$$

$$\Delta v=v(x+\Delta x)-v(x) \Rightarrow v(x+\Delta x)=v(x)+\Delta v$$

ekanligidan foydalanib, $\Delta(u\cdot v)$ funksiya orttimasini topamiz:

$$\Delta(u\cdot v)=u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)-u(x)\cdot v(x)=[u(x)+\Delta u]\cdot[v(x)+\Delta v]-u(x)\cdot v(x)=$$

$$=u(x)\cdot\Delta v+v(x)\cdot\Delta u+\Delta u\cdot\Delta v.$$

Bu yerdan, hosila ta’rifi va limit hisoblash qoidalariga asosan,

$$(u\cdot v)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta(u\cdot v)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x)\cdot\Delta v + v(x)\cdot\Delta u + \Delta u\cdot\Delta v}{\Delta x} = u(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} + v(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta v$$

natijani olamiz. Shartga asosan $u=u(x)$ va $v=v(x)$ funksiyalar x nuqtada differensiallanuvchi , demak uzluksiz ham bo‘lgani uchun

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} = v', \quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = u', \quad \lim_{\Delta x\to 0}\Delta v = 0$$

tengliklar o‘rinli bo‘ldi. Bu tengliklarni oldingi natijaga qo‘yib, $y=u\cdot v$ funksiya differensiallanuvchi va

$$(u\cdot v)' = u\cdot v' + v\cdot u' + u'\cdot 0 = u\cdot v' + v\cdot u' ,$$

ya’ni (6) formula o‘rinli ekanligiga ishonch hosil qilamiz.

Masalan,

$$(e^x\cdot\sin x)' = (e^x)'\cdot\sin x + e^x\cdot(\sin x)' = e^x\cdot\sin x + e^x\cdot\cos x = (\sin x + \cos x)e^x.$$

2-natija: O‘zgarmas C ko‘paytuvchini hosila belgisidan tashqariga chiqarish mumkin.

Haqiqatan ham, (4) va (6) formulalarga asosan

$$[C\cdot f(x)]' = C'\cdot f'(x) + C\cdot f'(x) = 0\cdot f(x) + C\cdot f'(x) = C\cdot f'(x) .$$

Masalan, $(5x^2)'=5\cdot(x^2)'= 5\cdot 2x=10x$.

4-qoida: Agar $u=u(x)$ va $v=v(x)$ funksiyalar x nuqtada differensiallanuvchi va bu yerda $v=v(x)\neq 0$ shart bajarilsa, unda bu nuqtada $y=u(x)/v(x)=u/v$ funksiya ham differensiallanuvchi va uning hosilasi uchun

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \qquad (7)$$

formula o‘rinli bo‘ladi.

Bu tasdiqni isboti oldingi qoida isbotiga o‘xshash tarzda amalga oshiriladi va o‘quvchiga mustaqil ish sifatida taklif etiladi.

Bu qoidadan foydalanib, $y=\mathrm{tg}x$ va $y=\mathrm{ctg}x$ asosiy elementar funksiyalarning hosilasini topamiz. $\cos x\neq 0$ shartda, ya’ni $x\neq(\pi/2)\pm\pi n$ ($n=0,1,2,3, \ldots$.) bo‘lganda

$$(tgx)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cdot\cos x - \sin x\cdot(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x\cdot\cos x - \sin x\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} .$$

Xuddi shunday ravishda, $\sin x\neq 0$ shartda, ya’ni $x\neq\pm\pi n$ ($n=0,1,2,3, \ldots$.) bo‘lganda, $(\mathrm{ctg}x)'=-1/(\sin^2 x)$ ekanligi topiladi. Demak, $y=\mathrm{tg}x$ va $y=\mathrm{ctg}x$ funksiyalar o‘zlarining aniqlanish sohasida differensiallanuvchi bo‘lib, ularning hosilalari

$$(\mathrm{tg}x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \mathrm{tg}^2 x, \quad (\mathrm{ctg}x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \mathrm{ctg}^2 x) \qquad (8)$$

formula bilan topiladi.

5-qoida: Berilgan $y=f(x)$ funksiya x nuqtaning biror atrofida qat’iy monoton (o‘suvchi yoki kamayuvchi) va uzluksiz bo‘lsin. Bundan tashqari $y=f(x)$ funksiya bu x nuqtada differensiallanuvchi va $f'(x)\neq 0$ bo‘lsin. Bu shartlarda $x=f^{-1}(y)$ teskari funksiya mavjud va differensiallanuvchi bo‘lib, uning hosilasi uchun

$$\left\{f^{-1}(y)\right\}' = \frac{1}{f'(x)} \text{ yoki } x'_y = \frac{1}{y'_x} \qquad (9)$$

formula o‘rinli bo‘ladi.

Dastlab $y=f(x)=\arcsin x$ teskari trigonometrik funksiya hosilasini topamiz. Ta'rifga asosan, $x\in(-1, 1)$ bo'lganda bu funksiya $y\in(-\pi/2, \pi/2)$ qiymatlarni qabul etadi hamda $x=\sin y$ funksiyaga teskari bo'ladi. Bu yerda $y\in(-\pi/2, \pi/2)$ bo'lgani uchun, $x=\sin y$ teskari funksiyaning hosilasi

$$x'_y = (\sin y)' = \cos y > 0,$$

ya'ni noldan farqli bo'ladi. Bu holda, (9) formulaga asosan,

$$(\arcsin x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

natijani hosil qilamiz. Demak, $$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x\in(-1,1)$$

(10)

formula o'rinli ekan. Xuddi shunday usulda

$$(\arccos x)' = -(\arcsin x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\mathrm{arctg}x)' = -(\mathrm{arcctg}x)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad (11)$$

formulalarni isbotlash mumkin.

Endi $y=\log_a x$ ($a>0$, $a\neq1$) logarifmik funksiya hosilasini topamiz. Bunda $x\in(0,\infty)$ va $y\in(-\infty, \infty)$ hamda logarifmik funksiya qat'iy monoton bo'lib, u $x=a^y$ ko'rsatkichli funksiyaga teskaridir. Bundan tashqari $x=a^y$ differensiallanuvchi va $(a^y)'=a^y\ln a\neq0$. Shu sababli, (9) formulaga asosan, logarifmik funksiya hosilasi mavjud va

$$(\log_a x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(a^y)'} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x\ln a}$$

ekanligini topamiz. Demak,

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a} = \frac{\log_a e}{x}, \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}\quad . \qquad (12)$$

5-qoida: Berilgan $y=f(u)$ murakkab funksiyada tashqi $f(u)$ va ichki $u(x)$ funksiyalar argumentlari bo'yicha differensiallanuvchi bo'lsin. Bu holda $y=f(u)$ murakkab funksiya x bo'yicha differensiallanuvchi bo'lib, uning hosilasi

$$f'_x(u) = f'_u(u)\cdot u'(x) \qquad (13)$$

formula bilan, ya'ni tashqi va ichki funksiyalar hosilalarining ko'paytmasi kabi topiladi.

Masalan, $(\sin x^2)'= (u=x^2) =(\sin u)'_x =(\sin u)'_u \cdot u' =\cos u\cdot(x^2)'=2x\cos x^2$, $(\sin^2 x)'= (u=\sin x) =(u^2)'_x =(u^2)'_u \cdot u' =2u\cdot(\sin x)'=2\sin x\cdot\cos x=\sin 2x$.

Bu qoidadan foydalanib, $y=x^\alpha$ (α–ixtiyoriy haqiqiy son), $x\in(0, \infty)$, darajali funksiyaning differensiallanuvchi ekanligini ko'rsatamiz. Buning uchun darajali funksiyani $y = x^\alpha = e^{\ln x^\alpha} = e^{\alpha\ln x}$ ko'rinishdagi murakkab ko'rsatkichli funksiya kabi ifodalaymiz. Unda, (13) formula, ko'rsatkichli va logarifmik funksiya hosilasidan foydalanib,

$y' = (x^\alpha)' = (e^{\alpha\ln x})' = (u=\alpha\ln x) = (e^u)' = e^u u' = e^{\alpha\ln x}(\alpha\ln x)' = x^\alpha\alpha\cdot\frac{1}{x} = \alpha\cdot x^{\alpha-1}$ natijaga kelamiz. Demak, $y=x^\alpha$, $x\in(0,\infty)$, darajali funksiya differensiallanuvchi va uning hosilasi

$$(x^\alpha)' = \alpha\cdot x^{\alpha-1} \qquad (14)$$

formula orqali hisoblanadiю

Izoh: (15) formula nafaqat $x\in(0, \infty)$ sohada, balkim $y=x^{\alpha-1}$ funksiyaning aniqlanish sohasida ham o‘rinli bo‘ladi. Jumladan, $\alpha=n\in N$, ya’ni natural son bo‘lsa, (15) formula ixtiyoriy $x\in(-\infty, \infty)$, $\alpha=-n\in Z^{-}$, ya’ni manfiy butun son bo‘lganda esa barcha $x\neq0$ uchun o‘rinli bo‘ladi.

2.3. Logarifmik differensiallash usuli. Ba’zi hollarda differensiallanuvchi $y=f(x)>0$ funksiya hosilasini uning logarifmi orqali quyidagicha topish mumkin:

$$[\ln f(x)]' = (u = f(x)) = (\ln u)' = \frac{1}{u}u' = \frac{f'(x)}{f(x)} \Rightarrow f'(x) = [\ln f(x)]' \cdot f(x). \quad (16)$$

1-TA’RIF: Funksiyaning $f'(x)$ hosilasini (16) formula orqali topish ***logarifmik differensiallash usuli*** deyiladi.

Masalan, $f(x)=x^2e^{2x}(1+x^4)^3$ funksiya hosilasini bevosita hisoblash ancha murakkab. Biroq logarifmik differensiallash usulida bu hosila osonroq topiladi:

$$\ln f(x) = \ln[x^2e^{2x}(1+x^4)^3] = 2\ln x + 2x + 3\ln(1+x^4) \Rightarrow [\ln f(x)]' = [2\ln x + 2x + 3\ln(1+x^4)]' = \frac{2}{x} + 2 + \frac{12x^3}{1+x^4} =$$

$$= \frac{f'(x)}{f(x)} \Rightarrow f'(x) = (\frac{2}{x} + 2 + \frac{12x^3}{1+x^4})f(x) = (\frac{2}{x} + 2 + \frac{12x^3}{1+x^4}) \cdot x^2e^{2x}(1+x^4)^3 = 2xe^{2x}(1+x^4)^3 + 2x^2e^{2x}(1+x^4)^3 +$$

$$+12x^5e^{2x}(1+x^4)^2 = 2xe^{2x}(1+x^4)^2[1+x^4+x(1+x^4)+6x^4] = 2xe^{2x}(1+x^4)^2(x^5+7x^4+x+1).$$

Yana bir misol sifatida $f(x)=x^\alpha$ ($x>0$, α-ixtiyoriy haqiqiy son) darajali funksiya hosilasini logarifmik differensiallash usulida aniqlaymiz:

$$\ln f(x) = \ln x^\alpha = \alpha\ln x \Rightarrow [\ln f(x)]' = (\alpha\ln x)' = \frac{\alpha}{x} \Rightarrow (x^\alpha)' = \frac{\alpha}{x}\cdot x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Bu yerdan (15) formula o‘rinli ekanligiga yana bir marta ishonch hosil etamiz.

2-TA’RIF: Agar $u=u(x)>0$, $v=v(x)$ esa ixtiyoriy funksiya bo‘lsa, unda $y=u(x)^{v(x)} = u^v$ ko‘rinishdagi murakkab funksiya ***darajali-ko‘rsatkichli funksiya*** deyiladi.

Agar $u=u(x)>0$ va $v=v(x)$ funksiyalar differensiallanuvchi bo‘lsa, unda $y= u^v$ darajali-ko‘rsatkichli funksiya ham differensiallanuvchi bo‘ladi va uning hosilasini logarifmik differensiallash usulida quyidagicha hisoblash mumkin:

$$\ln y = v\cdot\ln u \Rightarrow (\ln y)' = (v\cdot\ln u)' \Rightarrow \frac{y'}{y} = v'\cdot\ln u + v\cdot\frac{u'}{u} \Rightarrow y' = y\cdot(v'\cdot\ln u + v\cdot\frac{u'}{u}).$$

Bu natijani ushbu ko‘rinishda yozamiz:

$$(u^v)' = u^v\cdot\ln u\cdot v' + v\cdot u^{v-1}\cdot u'. \quad (17)$$

Bu yerdan ko‘rinadiki, $y= u^v$ darajali-ko‘rsatkichli funksiya hosilasi ikkita qo‘shiluvchidan iborat. Bunda birinchi qo‘shiluvchi $y= u^v$ funksiyani murakkab ko‘rsatkichli funksiya (u o‘zgarmas) singari qarab, undan hosila olish natijasida hosil bo‘ladi. Ikkinchi qo‘shiluvchi esa bu funksiyani murakkab darajali funksiya (v o‘zgarmas) deb, undan hosila olish orqali topilishi mumkin.

Misol sifatida $y=x^x$ funksiya hosilasini (17) formula orqali topamiz:

$$(x^x)' = x^x\cdot\ln x\cdot x' + x\cdot x^{x-1}\cdot x' = (1+\ln x)\, x^x. \quad (18)$$

2.4. Hosilalar jadvali. Oldin ko‘rilganlarga asosan barcha asosiy elementar funksiyalar o‘zlarining aniqlanish sohasida differensiallanuvchi bo‘ladi. Ularning hosilalari va differenrsiallash qoidalarini ***hosilalar jadvali*** ko‘rinishda ifodalaymiz. Bu jadvaldan foydalanib ixtiyoriy elementar funksiyani hosilasini topish mumkin va u matematik tahlil “Differensial hisob” bo‘limining asosiy quroli bo‘lib hisoblanadi. Bunda elementar funksiyalarning hosilalari yana elementar funksiya bo‘lishini ta’kidlab o‘tamiz.

H O S I L A L A R   J A D V A L I

I. DARAJALI FUNKTSIYALAR			
1	$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}, \quad \alpha \in (-\infty, \infty)$	2	$(u^{\alpha})' = \alpha u^{\alpha-1}u', \ u = u(x)$
II. KO‘RSATGICHLI FUNKTSIYALAR			
5	$(a^x)' = a^x \ln a, a > 0, a \neq 1$	6	$(a^u)' = a^u u' \ln a, u = u(x)$
7	$(e^x)' = e^x, \quad (10^x)' = 10^x \ln 10$	8	$(e^u)' = e^u \cdot u', \quad u = u(x)$
III. LOGARIFMIK FUNKTSIYALAR			
9	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} = \frac{\log_a e}{x}$	10	$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} = \frac{u' \log_a e}{u}, u = u(x)$
11	$(\ln x)' = \frac{1}{x} \qquad (\lg x)' = \frac{1}{x \ln 10} = \frac{\lg e}{x}$	12	$(\ln u)' = \frac{1}{u} u', \quad u = u(x)$
IV. TRIGONOMETRIK FUNKTSIYALAR			
13	$(\sin x)' = \cos x \ , \quad (\cos x)' = -\sin x$	14	$(\sin u)' = \cos u \cdot u', \quad (\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
15	$(\mathrm{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \ (\mathrm{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	16	$(\mathrm{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}, \quad (\mathrm{ctg} u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$
V. TESKARI TRIGONOMETRIK FUNKTSIYALAR			
17	$(\arcsin x)' = -(\arccos x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	18	$(\arcsin u)' = -(\arccos u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
21	$(\mathrm{arctg} x)' = -(\mathrm{arcctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$		$(\mathrm{arctg} u)' = -(\mathrm{arcctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2}$

XULOSA

Istalgan differensiallanuvchi funksiya hosilasini uning ta’rifidan kelib chiqadigan algoritm bo‘yicha bevosita hisoblash noqulay va murakkab bo‘ladi. Shu sababli funksiyalar hosilasini hisoblash uchun differensiallash qoidalaridan foydalaniladi. Ular yordamida funksiyalar yig‘indisi, ayirmasi, ko‘paytmasi va bo‘linmasining hosilalarini topish mumkin. Bundan tashqari murakkab va teskari funksiyalarning hosilalarini hisoblash formulalari ham mavjud. Ayrim hollarda funksiya hosilasini logarifmik differensiallash usulidan foydalanib osonroq hisoblash mumkin. Barcha asosiy elementar funksiyalar differensiallanuvchi, ularning hosilalari va differensiallash qoidalari hosilalar jadvalini tashkil etadi. Bu jadvaldan foydalanib ixtiyoriy differensiallanuvchi funksiyaning hosilasini hisoblab bo‘ladi.

Tayanch iboralar

* Hosilani hisoblash algoritmi * O‘zgarmas son hosilasi * Algebraik yig‘indi hosilasi * Ko‘paytmaning hosilasi * Bo‘linmaning hosilasi * Teskari funksiya hosilasi * Murakkab funksiya hosilasi * Logarifmik differensiallash * Darajali-ko‘rsatkichli funksiya * Hosilalar jadvali

Takrorlash uchun savollar

1. Funksiya hosilasini topish algoritmi qanday qadamlardan iborat?
2. O‘zgarmas sonning hosilasi nimaga teng?

3. Funksiyalar algebraik yig‘indisining hosilasi qanday hisoblanadi?
4. Funksiyalar algebraik yig‘indisi differensiallanuvchi bo‘lsa, qo‘shiluvchilar differensiallanuvchi bo‘lishi shartmi?
5. Funksiyalar ko‘paytmasining hosilasi qanday topiladi?
6. Differensiallashda o‘zgarmas ko‘paytuvchini nima qilish mumkin?
7. Funksiyalar nisbatining hosilasi qanday hisoblanadi?
8. Teskari funksiyaning hosilasi qaysi shartda mavjud va qanday topiladi?
9. Murakkab funksiyaning hosilasi qanday hisoblanadi?
10. Logarifmik differensiallash usulining mohiyati nimadan iborat?
11. Darajali – ko‘rsatkichli funksiya qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
12. Darajali – ko‘rsatkichli funksiyaning hosilasi qaysi formula bilan aniqlanadi?
13. Elementar funksiyalarning hosilasi qanday funksiyadan iborat bo‘ladi?
14. Asosiy elementar funksiyalarning hosilalari jadvalini yozing .

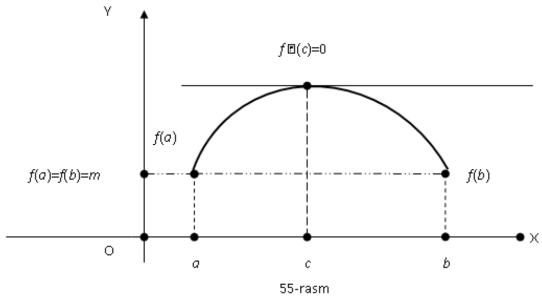
16§ YUQORI TARTIBLI HOSILA VA DIFFERENSIAL HISOBNING ASOSIY TEOREMALARI: FERMA, ROLL, LAGRANJ VA KOSHI TEOREMALARI. LOPITAL QOIDASI. YUQORI TARTIBLI HOSILA VA DIFFERENTSIALLAR.

- ***Roll teoremasi.***
- ***Lagranj teoremasi.***
- ***Koshi teoremasi.***

3.1. Roll teoremasi. Biz bu paragrafda kelgusida qaraladigan differensial hisobning amaliy tatbiqlarini asoslash uchun zarur bo‘ladigan teoremalarni keltiramiz. Dastlab farang matematigi M.Roll (1652-1719) tomonidan oldin ko‘phadlar, so‘ngra esa kengroq funksiyalar sinfi uchun isbotlangan ushbu teoremani qaraymiz.

1-TEOREMA (Roll teoremasi): Berilgan $y=f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz va uning ichki nuqtalarida differensiallanuvchi bo‘lib, chegaralarida teng qiymatlar qabul etsin, ya’ni $f(a)=f(b)$ bo‘lsin. Bu holda shu kesma ichida kamida bitta shunday “c” nuqta topiladiki, bu nuqtada funksiyaning hosilasi nolga teng, ya’ni $f'(c)=0$ bo‘ladi.

Roll teoremasi quyidagi geometrik talqinga ega: (a,b) oraliqda differensiallanuvchi (ya’ni oraliqning har bir nuqtasida urinmaga ega) funksiya bu oraliq chegaralarida bir xil qiymatlar qabul etsa, u holda urinmalar orasida kamida bittasi OX o‘qiga parallel va uning burchak koeffitsiyenti $k=f'(c)=0$ bo‘ladi. (55-rasmga qarang).



55-rasm

Masalan, $f(x)=(x–1)\cdot(x–3)= x^2–4x+3$ funksiya [1,3] kesmada Roll teoremasini barcha shartlarini qanoatlantiradi. Bu funksiya hosilasi $f'(x)=2x–4$ bo‘lib, haqiqatan ham u [1,3] kesmaning ichki $c=2$ nuqtasida nolga aylanadi.

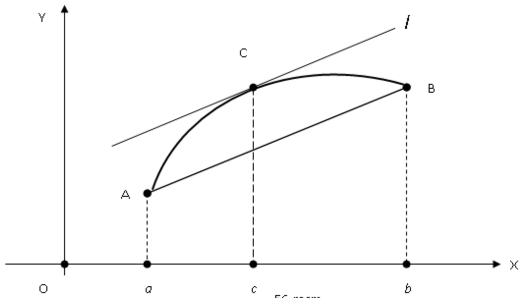
3.2. Lagranj teoremasi. **Endi yana bir farang matematigi Lagranj (1736-1813) nomi bilan ataladigan teoremani qaraymiz.**

2-TEOREMA (Lagranj teoremasi): **Agar $y=f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz va kesmaning ichida differensiallanuvchi bo‘lsa, u holda (a,b) oraliqda kamida bitta shunday “c” nuqta topiladiki, unda**

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)\Rightarrow f(b)-f(a)=f'(c)\cdot(b-a) \qquad (1)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Lagranj teoremasining geometrik ma’nosi aniqlash uchun (1) tenglikning o‘ng tomonidagi $f'(c)$ hosila $y=f(x)$, $x\in[a,b]$, funksiya grafigini ifodalovchi AB egri chiziqning (56-rasmga qarang) biror C(c, $f(c)$) nuqtasiga o‘tkazilgan l urinmasining, chap tomonidagi kasr esa uning A(a, $f(a)$) va B(b, $f(b)$) nuqtalarini tutashtiruvchi AB vatarining burchak koeffitsiyentini bo‘ladi.



56-rasm

Demak, ikkita to‘g‘ri chiziqning parallellik shartiga asosan (V bob,§2, (5) tenglikka qarang), AB egri chiziqning kamida bitta nuqtasidagi l urinma uning AB vatariga parallel joylashgan bo‘ladi.

Izoh: Agar $f(b)–f(a)=\Delta f$–funksiya orttirmasi, $b–a=\Delta x$–argument orttirmasi ekanligini hisobga olsak, (1) tenglik $\Delta f=f'(c)\cdot\Delta x$ ko‘rinishni oladi va orttirmalar orasidagi munosabatni ifodalaydi. Shu sababli (1) tenglik ***chekli orttirmalar yoki Lagranj formulasi*** deb ataladi.

Shuni ta’kidlab o‘tish kerakki, Lagranj teoremasi Roll teoremasidan keltirib chiqarildi. Ammo Roll teoremasi o‘z navbatida Lagranj teoremasining xususiy holi bo‘lib, undan $f(a)=f(b)$ holda kelib chiqadi.

3.3. Koshi teoremasi. Lagranj teoremasini farang matematigi Koshining (1789 - 1857) ushbu teoremasi umumlashtiradi.

3-*TEOREMA (Koshi teoremasi):* Berilgan $y=f(x)$ va $y=g(x)$ funksiyalar $[a,b]$ kesmada uzluksiz va uning ichki nuqtalarida differensiallanuvchi hamda (a,b) oraliqda $g'(x)\neq 0$ bo‘lsin. Bu holda kamida bitta shunday $c\in(a,b)$ nuqta
topiladiki, unda

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(-)}{g'(-)} \qquad (2)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Izohlar: 1) Koshi teoremasidan $g(x)=x$ xususiy holda Lagranj teoremasi kelib chiqadi va shu sababli (2) ***chekli orttirmalarning umumlashgan formulasi yoki Koshi formulasi*** deb ataladi.

2) $f(a)= f(b)$ holda Koshi teoremasidan Roll teoremasi kelib chiqadi.

XULOSA

Differensial hisobning bir qator nazariy va amaliy masalalarini qarashda farang matematiklari Roll, Lagranj va Koshi teoremalardan foydalaniladi. Bu teoremalar orqali biror kesmada uzluksiz, uning ichki nuqtalarida esa differensiallanuvchu bo‘lgan funksiyalarning ma’lum bir xossalari ifodalanadi.

Tayanch iboralar

* Roll teoremasi * Lagranj teoremasi * Koshi teoremasi

Takrorlash uchun savollar

1. Roll teoremasining shartlari nimadan iborat?
2. Roll teoremasida nima tasdiqlanadi?

3. Roll teoremasining geometrik ma’nosi qanday ifodalanadi?
4. Lagranj teoremasi qanday mazmunga ega?
5. Lagranj teoremasining geometrik ma’nosi nimadan iborat?
6. Qaysi holda Lagranj teoremasidan Roll teoremasi kelib chiqadi?
7. Koshi teoremasi qanday ifodalanadi?
8. Qaysi holda Koshi teoremasidan Lagranj teoremasi kelib chiqadi?
9. Qaysi holda Koshi teoremasidan Roll teoremasi kelib chiqadi?

FUNKSIYA DIFFERENSIALI. YUQORI TARTIBLI HOSILA VA DIFFERENSIALLAR

- ***Differensial va uni hisoblash.***
- ***Differensialni taqribiy hisoblashlarda qo‘llanilishi.***
- ***Yuqori tartibli hosila va differensiallar.***
- ***Parametrik ko‘rinishda berilgan funksiyalarni differensiallash.***

4.1. Differensial va uni hisoblash. Berilgan $y=f(x)$ funksiyada x argument Δx orttirma olganda funksiya orttirmasi $\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)$ kabi aniqlanishini eslatib o‘tamiz. Masalan, $f(x)=x^2$ va $g(x)=x^3$ funksiyalar uchun ularning orttirmalari

$$\Delta f=2x\Delta x+(\Delta x)^2,\quad \Delta g=3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3=3x^2\Delta x+[3x+\Delta x](\Delta x)^2$$

ko‘rinishda bo‘lib, birinchi qo‘shiluvchi Δx argument orttirmasiga nisbatan chiziqli (birinchi darajali), ikkinchi qo‘shiluvchi esa Δx orttirmaning ikkinchi va uchinchi darajalaridan iborat bo‘lmoqda. Bunda $\Delta x\to 0$, ya’ni cheksiz kichik miqdor bo‘lsa, unda ikkinchi qo‘shiluvchi Δx argument orttirmasiga nisbatan yuqori tartibli cheksiz kichik miqdor, ya’ni $o(\Delta x)$ bo‘ladi (VII bob, §4, 7-ta’rifga qarang). Shunday qilib, yuqorida ko‘rilgan funksiyalarning orttirmalari

$$\Delta f=2x\cdot\Delta x+o(\Delta x)\ ,\quad \Delta g=3x^2\Delta x+o(\Delta x)$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

1-TA’RIF: Agar $y=f(x)$ funksiya orttimasi $\Delta x\to 0$ holda

$$\Delta f=A\cdot\Delta x+o(\Delta x) \qquad (1)$$

ko‘rinishda ifodalansa va bunda A ko‘paytuvchi Δx argument orttirmasiga bog‘liq bo‘lmasa (x argumentni o‘ziga bog‘liq bo‘lishi mumkin), unda $A\cdot\Delta x$ ifoda funksiyaning ***differensiali***, funksiyani o‘zi esa x nuqtada ***differensiallanuvchi*** deb ataladi.

Funksiya differensiali df kabi belgilanadi va ta’rifga asosan $df=A\cdot\Delta x$, ya’ni Δf funksiya orttirmasining Δx argument orttirmasiga nisbatan chiziqli qismini ifodalaydi.

Yuqorida ko‘rilgan funksiyalarning orttirmalari ifodalaridan $df= d(x^2)=2x\cdot\Delta x$, $dg= d(x^3) =3x^2\cdot\Delta x$ ekanligini ko‘ramiz.

Ammo umumiy holda $y=f(x)$ funksiyaning df differensialini ta’rif bo‘yicha, ya’ni (1) tenglik orqali topish ancha murakkab masaladir. Shu sababli bu differensialni osonroq usulda topish masalasi paydo bo‘ladi. Bu masala quyidagi teoremada o‘z yechimini topadi.

1-TEOREMA: Agar $y=f(x)$ funksiya biror x nuqtada chekli $f'(x)$ hosilaga ega bo‘lsa, uning shu nuqtadagi differensiali

$$df= f'(x)\cdot\Delta x \qquad (2)$$

formula bilan topilishi mumkin.

2-TEOREMA: Agar $y=f(x)$ funksiyaning biror x nuqtada df differensiali mavjud bo‘lsa, uning shu nuqtadagi $f'(x)$ hosilasi ham mavjud va

$$f'(x)=\frac{df}{dx} \qquad (4)$$

formula bilan topilishi mumkin.

Bu ikkala teoremadan $y=f(x)$ funksiya differensiallanuvchi bo‘lishi uchun uning chekli $f'(x)$ hosilasi mavjud bo‘lishi zarur va yetarli ekanligi kelib chiqadi. Shu sababli hosila tushunchasi

kiritilgan oldingi §1da hosilaga ega funksiyani differensiallanuvchi deb ataganimiz bejiz emas va ba’zan hosila (4) kasr ko‘rinishida ham belgilanadi.
(3) tenglik va hosila olish qoidalaridan differensiallarni hisoblashning quyidagi qoidalari kelib chiqadi:

1. $dC=0$, C-const. ; **2.** $d[Cf(x)] = Cdf(x)$; **3.** $d[f(x)\pm g(x)]=df(x)\pm dg(x)$;
4. $df(x)g(x)= f(x)dg(x)+g(x)df(x)$;

5. $$d\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{g(x)df(x)-f(x)dg(x)}{[g(x)]^2} \quad (g(x)\neq 0).$$

Endi $y=f(u)$, $u=u(x)$, murakkab funksiyaning differensialini hisoblash masalasini qaraymiz. Bunda tashqi $f(u)$ va ichki $u(x)$ funksiyalar differensiallanuvchi deb qaraladi. Differensial hisoblashning (3) formulasi va murakkab funksiya hosilasini hisoblash qoidasiga asosan ushbu tenglikni hosil etamiz:

$$df(u)=(f(u))'_x dx = f'(u)\cdot u'dx = f'(u)\cdot du \qquad (5)$$

Bu yerdan, (3) va (5) formulalarni taqqoslab, oddiy va murakkab funksiya differensiali bir xil usulda hisoblanishini ko‘ramiz. Bu ***differensialning invariantlik xossasi*** deyiladi.

Masalan, $y=\cos\sqrt{x}$ murakkab funksiya uchun

$$dy = d\cos\sqrt{x} = (\cos\sqrt{x})'dx = -\sin\sqrt{x}\,(\sqrt{x})'dx = -\sin\sqrt{x}\,d(\sqrt{x}) .$$

4.2. Differensialni taqribiy hisoblashlarda qo‘llanilishi. (1) tenglik va differensial ta’rifidan foydalanib

$$\Delta f=A\cdot\Delta x+o(\Delta x)=df + o(\Delta x) \qquad (6)$$

tenglikni yozish mumkin. Bu tenglikdan argument orttirmasi Δx kichik son bo‘lganda funksiya orttirmasi Δf va differensiali df qiymatlari bir-biriga yaqin, ya’ni $\Delta f \approx df$ taqribiy tenglik o‘rinli bo‘lishini ko‘ramiz.

Masalan, $f(x)=x^2$ funksiyaning $x=40$ va $\Delta x=dx=0,01$ bo‘lgandagi Δf orttirmasi va df differensialini topamiz. Bu yerda

$$\Delta f=2x\Delta x+(\Delta x)^2=2\cdot40\cdot0,01+0,0001=0,8001 , \quad df=2xdx=2\cdot40\cdot0,01=0,8 .$$

Bu natijalardan ko‘rinib turibdiki, Δf va df qiymatlarining farqi atigi 0,0001 bo‘lib, bir-biriga juda yaqin.

Shu sababli (6) tenglik bo‘yicha funksiya uchun ushbu taqribiy hisoblash formulasini yozish mumkini:

$$\Delta f \approx df \Rightarrow f(x+\Delta x)-f(x) \approx f'(x)\,\Delta x \Rightarrow f(x+\Delta x) \approx f(x)+ f'(x)\,\Delta x \qquad (7)$$

(7) formula yordamida, funksiyaning ma’lum yoki oson hisoblanadigan $f(x)$ qiymatidan foydalanib, uning noma’lum yoki hisoblanishi qiyin bo‘lgan $f(x+\Delta x)$ qiymati taqribiy hisoblanadi.

Misol sifatida sin31° taqribiy qiymatini topamiz. Buning uchun $f(x)=\sin x$ funksiyani qaraymiz. Bu funksiyada $x=30°$, $x+\Delta x=31°$ deb olamiz. Bu holda $\Delta x=1°$ va $f'(x)=\cos x$ bo‘lgani uchun, (7) formulaga asosan, quyidagi natijani olamiz:

$$\sin 31^0 = \sin(30^0+1^0) \approx \sin 30^0 + \cos 30^0\cdot 1^0 = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{180} \approx 0,515 .$$

Bu yerda $\sqrt{3}\approx 1.73, \pi\approx 3.14$ deb olindi. Bu natijani aniqligi to‘g‘risida xulosa chiqarish uchun trigonometrik funksiyalarning jadvaliga asosan to‘rt xona aniqlikda $\sin 31^0\approx 0.5150$ ekanligini ko‘rsatib o‘tamiz.

Differensial yordamida funksiyalar uchun taqribiy formulalar ham hosil qilish mumkin. Bu maqsadda (7) formulada $x=0$ deb olib, kichik Δx qiymatlari uchun

$$f(\Delta x) \approx f(0)+ f'(0)\Delta x$$

natijani olamiz. Bu yerda Δx o‘rniga x qo‘yib, argumentning kichik qiymatlarida $y=f(x)$ funksiya uchun

$$f(x) \approx f(0)+ f'(0)\cdot x \qquad (8)$$

taqribiy formulaga ega bo‘lamiz. Masalan, x kichik son bo‘lganda,

$$\sin x \approx x, \quad (1+x)^{\alpha} \approx 1+\alpha x, \quad e^{x} \approx x, \quad \ln(1+x) \approx x, \quad \mathrm{tg}\, x \approx x \qquad (9)$$

taqribiy formulalardan foydalanish mumkin.

4.3. Yuqori tartibli hosila va differensiallar. Endi funksiyaning yuqori tartibli hosilasi va differensiali tushunchalarini kiritamiz.

Ma’lumki, $y=f(x)$ funksiya biror (a,b) oraliqda differensiallanuvchi bo‘lsa, uning hosilasi $f'(x)$ shu oraliqda aniqlangan yangi bir funksiya bo‘ladi. Shu sababli $f'(x)$ funksiyaning hosilasi to‘g‘risida so‘z yuritish mumkin.

2-TA’RIF: Agar $f'(x)$ hosila differensiallanuvchi funksiya bo‘lsa, uning hosilasi $y=f(x)$ ***funksiyaning II tartibli hosilasi*** deyiladi.

Berilgan $y=f(x)$ funksiyaning II tartibli hosilasi $f''(x)$, y'' yoki $f^{(2)}(x)$,$y^{(2)}$ kabi belgilanadi va , ta’rifga asosan, $f''(x)=[f'(x)]'$ formula bilan hisoblanadi.

Masalan, $f(x)=x^4$ funksiya uchun $f'(x)=4x^3$, $f''(x)=(4x^3)'=12x^2$ bo‘ladi.

Agar moddiy nuqta to‘g‘ri chiziq bo‘ylab $S=S(t)$ tenglama bilan harakatlanayotgan bo‘lsa, unda $S'(t)$ uning t vaqtdagi $v(t)$ oniy tezligini ifodalashini ko‘rib o‘tgan edik. Unda $S''(t)$ nuqtaning harakat davomidagi tezligini o‘zgarish tezligini, ya’ni $a(t)$ tezlanishini ifodalaydi.

Yuqorida ko‘rib o‘tilgan tarzda differensiallanuvchi II tartibli $f''(x)$ hosila bo‘yicha ***III tartibli hosila*** $[f''(x)]'$ kabi aniqlanadi va $f'''(x)$ yoki $f^{(3)}(x)$ kabi belgilanadi. Bu jarayonni davom ettirilib, $f^{(n)}(x)$ ***n–tartibli hosila*** tushunchasi quyidagi rekkurent formula orqali kiritiladi:

$$f^{(n)}(x)=[f^{(n-1)}(x))', \quad n=2,3,4,\ldots \,. \qquad (10)$$

Izoh: Hosila tartibi tushunchasi kiritilgach, qulaylik uchun $f(x)$ funksiyaning o‘zi 0-tartibli hosila, ya’ni $f(x)=f^{(0)}(x)$, $f'(x)$ esa I tartibli hosila, ya’ni $f'(x)=f^{(1)}(x)$ deb qaraladi.

Masalan, $f(x)=x^3$ uchun $f^{(0)}(x)=x^3$, $f^{(1)}(x)=3x^2$, $f^{(2)}(x)=6x$, $f^{(3)}(x)=6$ va $n\geq 4$ holda $f^{(n)}(x)=0$ bo‘ladi. Umuman olganda, $f(x)=P_m(x)$ – m-darajali ko‘phad bo‘lsa, unda $n>m$ holda $f^{(n)}(x)=0$ bo‘ladi.

3-TA’RIF: Agar $y=f(x)$ funksiya uchun n–tartibli hosila mavjud bo‘lsa, u ***n marta differensiallanuvchi*** funksiya deb ataladi.

n–tartibli hosila ta’rifini ifodalovchi (10) formuladan ko‘rinadiki, umuman olganda $f^{(n)}(x)$ berilgan funksiyadan ketma-ket n marta hosila olish orqali birin-ketin topiladi. Ammo ba’zi funksiyalar uchun n–tartibli hosila ifodasini birdaniga yozish mumkin. Masalan,

$$(e^x)^{(n)}=e^x\,, \quad (a^x)^{(n)}=a^x \ln^n a\,, \quad (\sin x)^{(n)}=\sin(x+\pi n/2)\,, \quad (\cos x)^{(n)}=\cos(x+\pi n/2)\,.$$

n–tartibli hosila hisoblanadigan (11) formula va hosila olish qoidalaridan foydalanib, n marta differensiallanuvchi $u=u(x)$ va $v=v(x)$ funksiyalar uchun

$$(C)^{(n)}=0 \ (C\text{-const})\,, \quad (C\cdot u)^{(n)}=C\cdot u^{(n)}\,, \quad (u\pm v)^{(n)}=u^{(n)}\pm v^{(n)}$$

formulalar o‘rinli ekanligini ko‘rsatish qiyin emas.

Ammo $y=uv$ ko‘paytmaning n–tartibli hosilasi uchun formula murakkab bo‘lib, quyidagi ko‘rinishda ifodalanadi:

$$(uv)^{(n)}=u^{(n)}+nu^{(n-1)}v'+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}u^{(n-2)}v''+\cdots+nu'v^{(n-1)}+v^{(n)}=\sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)}v^{(n-k)}$$

Bu tenglik ***Leybnits formulasi*** deyiladi va unda qatnashadigan binomial koeffitsiyentlar [I bob,§4, (4)]

$$C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}\,, \quad n!=1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)\cdot n$$

formula bilan hisoblanishini eslatib o‘tamiz.

Berilgan $y=f(x)$ funksiya differensiallanuvchi bo‘lsa, uning differensiali $df=f'(x)dx$ ko‘rinishda bo‘ladi. Demak, df differensialning qiymati x argument va $dx=\Delta x$ argument orttirmasiga (differensialiga) bog‘liq bo‘ladi. Biz argument differensiali dx ixtiyoriy, ammo o‘zgarmas va x argumentning qiymatiga bog‘liq bo‘lmagan son deb qaraymiz. Bu holda df differensial x argumentning biror funksiyasidan iborat bo‘ladi va shu sababli uning differensiali to‘g‘risida so‘z yuritish mumkin.

4-TA'RIF: Berilgan $y=f(x)$ funksiyaning differensiali df o'z navbatida differensiallanuvchi funksiya bo'lsa, uning differensiali $y=f(x)$ funksiyaning ***ikkinchi tartibli differensiail*** deb ataladi.

$y=f(x)$ funksiyaning II tartibli differensiali d^2f kabi belgilanadi va, ta'rifga asosan, quyidagi formula bilan topiladi:

$$d^2f=d(df)=d(f'(x)dx)=[f'(x)dx]'dx=[f'(x)]'\,dx\,dx=f''(x)(dx)^2=f''(x)dx^2\,.$$

Demak, $y=f(x)$ funksiyaning II tartibli differensiali uning II tartibli hosilasi orqali

$$d^2f=f''(x)dx^2\,,\quad dx^2=(dx)^2,$$

formula yordamida topiladi. Xuddi shunday tarzda $y=f(x)$ funksiyaning *n – tartibli differensiali* $\boldsymbol{d^n f}$

$$d^nf=d(d^{n-1}f)=f^{(n)}(x)(dx)^n=f^{(n)}(x)dx^n\,,\ n=2,3,4,\ \dots \qquad (11)$$

kabi aniqlanadi va hisoblanadi.

Bunda funksiyaning o'zi $f=d^0f$ – 0-tartibli, differensiali esa $df=d^1f$– 1- tartibli differensial singari qaraladi.

Masalan, $f(x)=x^3$ funksiya uchun $df=3x^2dx$, $d^2f=6xdx^2$, $d^3f=6dx^3$ va $n\geq 4$ holda $d^nf=0$ bo'ladi.

Yuqori tartibli differensiallardan foydalanib, yuqori tartibli hosilalarni

$$f''(x)=\frac{d^2f}{dx^2}\,,\quad f'''(x)=\frac{d^3f}{dx^3}\,,\cdots,\quad f^{(n)}(x)=\frac{d^nf}{dx^n}$$

kabi yozish mumkin.

4.4. Parametrik ko'rinishda berilgan funksiyalarni differensiallash. **Bir qator masalalarni yechishda** funksiyaning parametrik ko'rinishdagi ifodasi qulay bo'ladi.

5-TA'RIF: Agar x va y o'zgaruvchilar orasidagi bog'lanish bevosita emas, balkim uchinchi bir t o'zgaruvchi yordamida biror $x=\varphi(t)$ va $y=\psi(t)$, $\alpha\leq t\leq\beta$, funksiyalar orqali bavosita berilgan bo'lsa, unda x argumentning y funksiyasi *parametrik* ko'rinishda berilgan, t esa *parametr* deyiladi.

Masalan, $x=t^3=\varphi(t)$, $y=t^6=\psi(t)$, $t\in(-\infty,\infty)$, parametrik ko'rinishda bavosita berilgan funksiya $y=f(x)=x^2$, $x\in(-\infty,\infty)$, ko'rinishdagi bevosita berilgan funksiyani ifodalaydi.

Parametrik ko'rinishda berilgan funksiyaning x bo'yicha hosilasini topish uchun dastlab uni $y=f(x)$ ko'rinishda yozib, so'ngra uning hosilasini hisoblab topish mumkin. Masalan, yuqoridagi misolda parametrik ko'rinishda berilgan funksiyaning hosilasi $y'=f'(x)=2x$ ekanligi oson topiladi. Ammo har doim ham bu usul qulay bo'lmaydi, chunki parametrik ko'rinishda berilgan funksiyani $y=f(x)$ ko'rinishda yozish qiyin yoki $y=f(x)$ funksiya ko'rinishi juda murakkab bo'lib, undan hosila olish noqulay bo'lishi mumkin. Shu sababli parametrik ko'rinishda berilgan funksiyaning hosilasini to'g'ridan-to'g'ri $x=\varphi(t)$ va $y=\psi(t)$ funksiyalar orqali topish masalasi paydo bo'ladi. Bizni qiziqtiradigan $y=f(x)$ funksiya $x=\varphi(t)$ va $y=\psi(t)$ funksiyalar orqali parametrik ko'rinishda berilgan bo'lsin. Agar $\varphi(t)$ va $\psi(t)$ funksiyalar keraklicha marta differensiallanuvchi bo'lsa, u holda hosilani differensiallar orqali ifodasi va differensiallash qoidalaridan foydalanib,

$$y'_x=\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\,, \qquad (12)$$

$$y''_x=(y'_x)'_x=\frac{d(y'_x)}{dx}=\frac{d(y'_x)/d(t)}{dx/d(t)}=\frac{[\psi'(t)/\varphi'(t)]'}{\varphi'(t)}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3} \qquad (13)$$

formulalar o'rinli ekanligini ko'ramiz. Bu formulalar parametrik ko'rinishda berilgan funksiya hosilalarini topishni ifodalaydi.

Masalan, $x=2\cos t$ va $y=3\sin t$, $t\in[0,\pi/2]$, funksiyalar orqali parametrik ko'rinishda berilgan funksiyani qaraymiz. Bunda

$$\frac{x}{2}=\cos t\,,\quad \frac{y}{3}=\sin t\Rightarrow\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{3}\right)^2=\cos^2t+\sin^2t=1\Rightarrow\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$$

tenglik o‘rinli va shu sababli bu funksiya yarim o‘qlari a=2 va b=3 bo‘lgan ellipsni (V bob,§3, (7)) I chorakdagi bo‘lagini ifodalaydi. Bu funksiya uchun $y'(x)$ va $y''(x)$ hosilalarni (12) va (13) formulalardan topamiz:

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{3\cos t}{-2\sin t}=-\frac{3}{2}\operatorname{ctg} t\,,\quad y''_x=\frac{y''x'-y'x''}{[x']^3}=\frac{6\sin^2 t+6\cos^2 t}{-8\sin^3 t}=\frac{-3}{4\sin^3 t}\,.$$

XULOSA

Funksiya orttirmasining argument orttirmasiga nisbatan chiziqli qismi mavjud bo‘lsa, u differensial deb ataladi. Funksiya differensiali mavjud bo‘lishi uchun uning hosilasi mavjud bo‘lishi zarur va yetarlidir. Shu sababli ham hosilaga ega funksiyalar differensiallanuvchi deyiladi. Bu holda funksiya differensiali uning hosilasini argument orttirmasiga (differensialiga) ko‘paytirish orqali topilishi mumkin. Differensial yordamida funksiya qiymatlarini taqribiy hisoblash va natijalarni baholash mumkin.

Funksiyaning hosilasi yana biror funksiyadan iborat bo‘ladi va shu sababli uning hosilasi to‘g‘risida so‘z yuritib bo‘ladi. Agar bu hosila mavjud bo‘lsa, u berilgan funksiyaning II tartibli hosilasi deb ataladi. Shunday tarzda n-tartibli ($n\geq 2$) hosilalar aniqlanadi. Shuningdek n-tartibli ($n\geq 2$) differensiallar tushunchasi ham qaraladi.

Ayrim masalalarda x argument va y funksiya orasidagi bog‘lanish bevosita berilmasdan, parametr deb ataladigan yordamchi t o‘zgaruvchi orqali bavosita aniqlanadi. Bu holda funksiya parametrik ko‘rinishda berilgan deyiladi va uning hosilasini hisoblash formulalari mavjud.

Tayanch iboralar

* Funksiya differensiali * Differensialning mavjudlik sharti * Algebraik yig‘indi differensiali * Ko‘paytma differensiali * Bo‘linma differensiali * Differensialning invariantligi * Differensialning tatbiqlari * Yuqori tartibli hosilalar * II tartibli hosilaning mexanik ma’nosi * Leybnits formulasi * Yuqori tartibli differensiallar* Parametrik ko‘rinishda berilgan funksiya hosilasi

Takrorlash uchun savollar

1. Funksiya differensiali deb nimaga aytiladi?
2. Differensial mavjudligini zaruriy va yetarli sharti nimadan iborat?
3. Funksiya orttirmasi va differensiali orasida qanday bog‘lanish mavjud?
4. O‘zgarmas son differensiali nimaga teng?
5. Algebraik yig‘indining differensiali qanday topiladi?
6. Ko‘paytmaning differensiali qanday hisoblanadi?
7. Bo‘linmani differensiallash qoidasi qanday ifodalanadi?
8. Murakkab funksiyani differensiallash qoidasi nimadan iborat?
9. Differensialning invariantlik xossasi nimani ifodalaydi?
10. Differensial taqribiy hisoblashlarda qanday qo‘llaniladi?
11. Funksiyaning II tartibli hosilasi deb nimaga aytiladi?
12. II tartibli hosilaning mexanik ma’nosi nimadan iborat?
13. Yuqori tartibli hosilalar qanday aniqlanadi?
14. Yuqori tartibli hosilalarni hisoblash qoidalari nimadan iborat?
15. Leybnits formulasi qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
16. Yuqori tartibli differensiallar qanday aniqlanadi?
17. Parametrik ko‘rinishda berilgan funksiyaning hosilasi qanday topiladi?

FUNKSIYA MONOTONLIK SHARTI.FUNKSIYA EKSTREMUMI, EKSTREMUM BO'LISHINING ZARURIY VA YETARLI SHARTI VA UZLUKSIZ FUNKSYALARNING ENG KATA ENG KICHIK QIMATLARINI TOPISH FUNKSIYA GRAFIGINING QAVARIQLIGI, BOTIQLIGI VA BURILISH NUQTALARI. FUNKSIYANI TEKSHIRISHNING UMUMIY SXEMASI

- ***Funksiyaning monotonlik oraliqlari.***
- ***Funksiyaning lokal ekstremumlari.***
- ***Funksiya grafigining qavariqlik va botiqlik sohalari***.
- ***Botiqlik va qavariqlikning iqtisodiy tatbiqlari.***
- ***Funksiya grafigining burilish nuqtalari.***
- ***Logistik funksiya.***
- ***Funksiya grafigining asimptotalari.***
- ***Funksiyani tekshirishning umumiy sxemasi.***
- ***Funksiyaning global ekstremumlari.***

Agar $y=f(x)$ funksiya differensiallanuvchi bo'lsa, uning juda ko'p xususiyatlarini $f'(x)$ hosila yordamida aniqlash mumkin. Shu sababli hosila funksiyani tekshirish uchun asosiy va kuchli qurol bo'lib hisoblanadi.

5.1. Funksiyaning monotonlik oraliqlari. Biz VI bob §2 da o'suvchi va kamayuvchi funksiyalar ta'rifini bergan edik. Bu ta'rifni yana bir marta eslatib o'tamiz.

1-TA'RIF: Agarda $y=f(x)$ funksiya biror (a,b) oraliqda aniqlangan va bu oraliqqa tegishli ixtiyoriy ikkita $x_1<x_2$ nuqtalarda $f(x_1)<f(x_2)$ $[f(x_1)>f(x_2)]$ shartni qanoatlantirsa, u shu oraliqda ***o'suvchi* [*kamayuvchi*]** deb ataladi.

Masalan, $y=2^x$ $[y=(0,2)^x]$ funksiya barcha nuqtalarda, ya'ni $(-\infty , \infty)$ oraliqda o'suvchi [kamayuvchi], $y=1+x^2$ funksiya $(-\infty ,0)$ oraliqda kamayuvchi, $(0,\infty)$ oraliqda esa o'suvchi bo'ladi.

Funksiyaning o'sish va kamayish oraliqlarini birgalikda uning ***monotonlik oraliqlari*** deb ataymiz. Differensiallanuvchi $y=f(x)$ funksiyaning monotonlik oraliqlarini topish masalasini qaraymiz.

1-TEOREMA: **I.** Differensiallanuvchi $y=f(x)$ funksiya biror (a,b) oraliqda o'suvchi [kamayuvchi] bo'lsa, bu oraliqda uning hosilasi $f'(x)\geq 0$ $[f'(x) \leq 0]$ shartni qanoatlantiradi.

II. Agar differensiallanuvchi bo'lgan $y=f(x)$ funksiyaning hosilasi biror (a,b) oraliqda $f'(x)>0$ $[f'(x)<0]$ shartni qanoatlantirsa, unda bu (a,b) oraliqda funksiya o'suvchi [kamayuvchi] bo'ladi.

II. $y=f(x)$ funksiyaning hosilasi (a,b) oraliqdagi har bir x nuqtada $f'(x)>0$ shartni qanoatlantirsin. Bu holda, chekli orttirmalar haqidagi Lagranj teoremasiga asosan (§3, (1) formula), (a,b) oraliqdagi har qanday $x_1<x_2$ nuqtalar uchun

$$f(x_2)-f(x_1) = (x_2-x_1)\, f'(\xi)\, ,\ x_1 < \xi < x_2$$

tenglik bajariladi. Bu tenglikdan, $x_2-x_1>0$ va $f'(\xi)>0$ bo'lgani uchun,

$$f(x_2)-f(x_1)>0 \Rightarrow f(x_2) >f(x_1),$$

ya'ni $y=f(x)$ funksiya (a,b) oraliqda o'suvchi ekanligi kelib chiqadi.

Xuddi shunday usulda (a,b) oraliqdagi har bir x nuqtada $f'(x) < 0$ bo'lsa, unda bu oraliqda $y=f(x)$ funksiya kamayuvchi ekanligi ko'rsatiladi. Teorema to'liq isbotlandi.

1-izoh: Teoremaning I qismi (a,b) oraliq $y=f(x)$ funksiyaning monotonlik oralig'i bo'lishini zaruriy, II qismi esa yetarli shartini ifodalaydi.

2-izoh: Monotonlik oralig'ining yetarlilik sharti har doim ham uning uchun zaruriy shart bo'lmaydi. Masalan, $f(x)=e^x$ funksiya $(-\infty, \infty)$ oraliqda o'suvchi va bu oraliqda uning hosilasi $f'(x)=e^x>0$ shartni qanoatlantiradi. Ammo shu oraliqda o'suvchi $f(x)=x^3$ funksiyaning hosilasi $f'(x)=3x^2$ bu oraliqdagi $x=0$ nuqtada nolga teng bo'ladi, ya'ni yetarlilik sharti $f'(x)>0$ bajarilmaydi.

Yuqoridagi teoremadan kelib chidadiki, berilgan differensiallanuvchi $y=f(x)$ funksiyaning o'sish yoki kamayish oraliqlarini topish uchun $f'(x)>0$ yoki $f'(x)<0$ tengsizlikni yechish kerak.

Masalan, $f(x)=x+1/x$ funksiya uchun $f'(x)=1-1/x^2>0$ tengsizlikning yechimi $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ sohadan iborat va shu sababli bu sohada berilgan funksiya o'suvchi bo'ladi. $x=0$ nuqtada funksiya aniqlanmaganligini hisobga olib, bu funksiya $(-1, 0) \cup (0,1)$ sohada kamayuvchi ekanligini ko'ramiz.

5.2. Funksiyaning lokal ekstremumlari. Biz biror ishlab chiqarishni tashkil etayotganimizda mahsulot ishlab chiqarish xarajatlarini iloji boricha kamaytirish (minimallashtirish) va mahsulot ishlab chiqarishdan olinadigan foydani iloji boricha ko'paytirish (maksimallashtirish) masalasini yechishga harakat qilamiz. Bu kabi masalalar funksiyani ekstremumlari tushunchasiga olib keladi.

2-TA'RIF: Berilgan $y=f(x)$ funksiya x_0 nuqta va uning biror atrofida aniqlangan bo'lib, bu atrofdagi ixtiyoriy x nuqta uchun $f(x_0)\geq f(x)$ $[f(x_0) \leq f(x)]$ shartni qanoatlantirsa, u shu x_0 nuqtada ***lokal maksimumga (minimumga)*** ega deb ataladi.

Masalan, $f(x)=\sin x$ funksiya $x=\pi/2$ nuqtada $\sin(\pi/2)=1$ lokal maksimumga, $x=3\pi/2$ nuqtada esa $\sin(3\pi/2)=-1$ lokal minimumga ega bo'ladi.

Funksiyaning lokal maksimum va minimum qiymatlari birgalikda uning ***lokal ekstremumlari*** deyiladi. Lokal ekstremumning zaruriy sharti quyidagi Ferma teoremasi orqali ifodalanadi.

2-TEOREMA: ***(Ferma teoremasi):*** Agar $y=f(x)$ funksiya x_0 nuqtada differensiallanuvchi va lokal ekstremumga ega bo'lsa, unda bu nuqtada funksiyaning hosilasi $f'(x_0)=0$ shartni qanoatlantiradi.

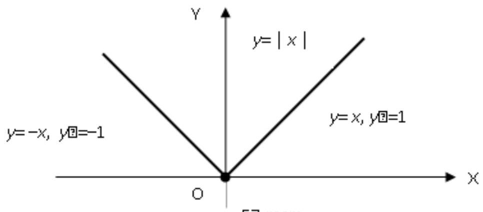
Masalan, $f(x)=\sin x$ funksiya $x_0=\pi/2$ nuqtada lokal maksimumga ega va bu nuqtada uning hosilasi $f'(\pi/2)=\cos(\pi/2)=0$ tenglikni qanoatlantiradi.

Ferma teoremasining bir iqtisodiy talqinini keltiramiz. Ishlab chiqarish nazariyasining asosiy qonunlaridan biri quyidagicha ifodalanadi: ishlab chiqarishda mahsulotning optimal (maqsadga muvofiq, eng qulay) hajmi limitik xarajat MS va limitik daromad MD tengligi bilan aniqlanadi. Demak, mahsulotning x_0 optimal hajmi $MS(x_0)=MD(x_0)$ tenglamadan topiladi. Bu tasdiq bevosita Ferma teoremasidan kelib chiqadi. Haqiqatan ham, korxonaning x hajmdagi mahsulot ishlab chiqarishdagi xarajatlari $S(x)$, daromadi $D(x)$ bo'lsa, unda uning olgan foydasi $F(x)=D(x)-S(x)$ funksiya bilan aniqlanadi.Bu holda mahsulotning optimal hajmi x_0 foyda $F(x)$ maksimal bo'ladigan nuqta kabi aniqlanadi. Buning uchun, Ferma teoremasiga asosan,

$$F'(x_0)=0 \Rightarrow D'(x_0)-S'(x_0)=0 \Rightarrow D'(x_0)=S'(x_0) \Rightarrow MS(x_0)=MD(x_0)$$

tenglik, ya'ni yuqorida keltirilgan iqtisodiy qonun bajarilishi kerak.

Funksiya $f'(x)=0$ shartni qanoatlantiruvchi nuqtalardan boshqa nuqtada ham lokal ekstrmumga ega bo'lishi mumkin. Masalan, $f(x)=|x|$ funksiya $x=0$ nuqtada minimumga ega (57-rasmga qarang), ammo bu nuqtada uning hosilasi mavjud emas.



57-rasm

Xulosa: Funksiya ekstremumga ega bo‘lgan nuqtada uning hosilasi nolga teng yoki mavjud bo‘lmaydi.

3-TA’RIF: Funksiya hosilasi nolga teng yoki mavjud bo‘lmagan nuqtalar shu funksiyaning ***kritik yoki statsionar nuqtalari*** deyiladi.

Demak, funksiya x_0 nuqtada ekstremumga ega bo‘lsa, x_0 nuqta uning kritik nuqtasi bo‘ladi. Ammo bu tasdiqning teskarisi har doim ham o‘rinli bo‘lmaydi, ya’ni ekstremumning yuqorida ko‘rsatilgan $f'(x_0)=0$ zaruriy sharti yetarli shart emas.

Masalan, $y=x^3$ funksiyaning $f'(x)=3x^2$ hosilasi $x=0$ nuqtada nolga teng va shu sababli bi funksiya uchun $x=0$ kritik nuqta bo‘ladi. Ammo bu nuqtada funksiya ekstremumga ega emas, chunki $x<0$ bo‘lganda $f(x)<0=f(0)$ va $x>0$ bo‘lganda $f(x)>0= f(0)$.

3-TEOREMA (***lokal ekstremumning I yetarli sharti***): Agar $y=f(x)$ funksiya x_0 kritik nuqtaning biror atrofida differensiallanuvchi bo‘lib, bu kritik nuqtani chapdan ($x<x_0$) o‘ngga ($x>x_0$) qarab bosib o‘tishda $f'(x)$ hosila o‘z ishorasini o‘zgartirsa, u holda x_0 kritik nuqtada $f(x)$ funksiya lokal ekstremumga erishadi. Jumladan, bunda $f'(x)$ hosila o‘z ishorasini musbatdan manfiyga (manfiydan musbatga) o‘zgartirsa, unda x_0 kritik nuqtada $f(x)$ funksiya lokal maksimumiga (lokal minimumiga) erishadi.

Misol sifatida $f(x)=x+1/x$ funksiyani ekstremumga tekshiramiz. Buning uchun dastlab $f'(x)=1–1/x^2$ hosilani topamiz. Bunda $f'(x)=0$ tenglamadan $x_1=–1$ va $x_2=1$ kritik nuqtalarni aniqlaymiz. Bundan tashqari $x=0$ nuqtada $f'(x)$ mavjud emas, ammo bu nuqta funksiyani aniqlanish sohasiga kirmaydi va shu sababli uni ekstremumga tekshirish ma’noga ega emas

Dastlab $x_1=–1$ kritik nuqtani qaraymiz. Bunda $x<–1$ bo‘lganda $f'(x)>0$ va $x>–1$ bo‘lganda $f'(x)<0$ ekanligini ko‘ramiz. Demak, $x_1=–1$ kritik nuqtada funksiya lokal maksimumga ega va $f_{max}=f(–1)=–2$.

Xuddi shunday ravishda $x_2=1$ kritik nuqtada funksiya lokal minimumga ega va $f_{min}=f(1)=2$ ekanligini aniqlaymiz.

Endi $f(x)=1+(x–1)^{2/3}$ funksiyani qaraymiz. Bu holda

$$f'(x)=[1+(x-1)^{2/3}]'=\frac{2}{3}(x-1)^{-1/3}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x-1}}$$

va hosila birorta ham nuqtada nolga teng bo‘lmaydi. Ammo $x=1$nuqtada hosila mavjud emas va bu nuqta funksiyani aniqlanish sohasiga kiradi. Demak, $x=1$ kritik nuqta bo‘ladi. Bunda $x<1$ bo‘lganda $f'(x)<0$ va $x>1$ bo‘lganda $f'(x)>0$. Demak, $x=1$ kritik nuqtada funksiya lokal minimumga ega va $f_{min}=f(1)=1$ bo‘ladi.

4-TEOREMA: Agar $y=f(x)$ funksiya hosilasi x_0 kritik nuqtaning chap va o‘ng atrofida ishorasini o‘zgartirmasa, bu nuqtada funksiya ekstremumga ega bo‘lmaydi.

Masalan, $f(x)=\ln(x^3+1)$ funksiyaning hosilasi $f'(x)=3x^2/(x^3+1)$ bo‘lib, undan $x=0$ kritik nuqta ekanligini ko‘ramiz. Bu kritik nuqta atrofida $f'(x)>0$ va shu sababli unda funksiya ekstremumga ega bo‘lmaydi.

Ayrim hollarda kritik nuqta atrofida $f'(x)$ hosilaning ishorasini aniqlash murakkab bo‘ladi. Bunday hollarda, $y=f(x)$ funksiya x_0 kritik nuqtada ikki marta differensiallanuvchi va $f''(x)$ bu nuqtaning biror atrofida uzluksiz bo‘lsa, quyidagi teoremadan foydalanish mumkin.

5-TEOREMA (***lokal ekstremumning II yetarli sharti***)***:*** Agar x_0 kritik nuqtada $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)\neq 0$ va chekli bo‘lsa, unda bu nuqtada $y=f(x)$ funksiya lokal ekstremumga ega bo‘ladi. Jumladan, $f''(x_0)<0$ ($f''(x_0)>0$) bo‘lsa, $f(x_0)$ funksiyaning lokal maksimumi (lokal minimumi) bo‘ladi.

Misol sifatida $f(x)=x^4-4x$ funksiyani ekstremumga II tartibli hosila yordamida tekshiramiz. $f'(x)=4x^3-4=4(x^3-1)=0$ tenglamadan funksiya yagona $x_0=1$ kritik nuqtaga ega ekanligini aniqlaymiz. Funksiyaning II tartibli hosilasi $f''(x)=12x^2$ bu kritik nuqtada $f''(1)=12>0$ qiymatni qabul qiladi. Demak, berilgan funksiya $x_0=1$ kritik nuqtada lokal minimumga ega va $f_{\min}=f(1)=1-4=-3$ bo‘ladi.

Agar x_0 kritik nuqtada ikkinchi tartibli hosila $f''(x_0)=0$ bo‘lsa, unda funksiyaning x_0 nuqtada ekstremumga ega bo‘lishi yoki bo‘lmasligini 5-teorema orqali aniqlab bo‘lmaydi. Masalan, $f(x)=x^3$ va $g(x)=x^4$ funksiyalar uchun $x=0$ kritik nuqta bo‘ladi. Bu nuqtada II tartibli hosilalar $f''(x)=6x$, $g''(x)=12x^2$ nolga tengdir. Bu kritik nuqtani birinchi tartibli hosila orqali, ya’ni 3-teorema yordamida tekshirib, unda $f(x)=x^3$ ekstremumga ega emas, $g(x)=x^4$ esa lokal minimumga ega ekanligini aniqlaymiz.

Demak, lokal ekstremumning II yetarli shartini tekshirish osonroq, ammo uning qo‘llanish sohasi torroq ekan.

Bu bo‘limni ekstremumga doir bir iqtisodiy masalani qarash bilan yakunlaymiz.

Masala: Fermer bog‘ida n dona olma daraxti bor.Agar hosil hozir yig‘ib olinsa, har bir daraxtdan m kg olma olinib, uni p so‘mdan sotish mumkin. Agar hosilni yig‘ish orqaga surilsa, har haftada bitta daraxtdan olinadigan hosil miqdori r kg oshadi, ammo uning narxi q so‘mdan pasayib boradi. Bunda m, p, r va q musbat sonlardir. Fermer hosilni qachon yig‘ib olganda maksimal foyda ko‘radi ?

Yechish: Hosilni yig‘ib olinguncha o‘tgan haftalar sonini x deb belgilaymiz. Bu holda bog‘dan yig‘ilgan hosil miqdori $n(m+xr)$ kg, uning narxi esa $p-xq$ so‘mga teng bo‘ladi. Unda olmani sotishdan olingan foyda $f(x)=n(m+xr)(p-xq)$ funksiya bilan ifodalanadi. Bu funksiyani ekstremumga tekshiramiz. Dastlab uning hosilasini hisoblab, x_0 kritik nuqtasini topamiz:

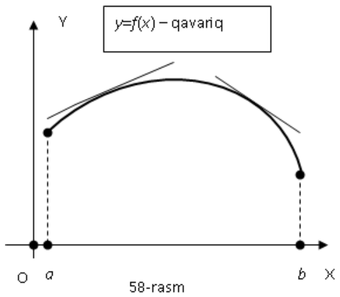
$$f'(x)=n(m+xr)'(p-xq)+n(m+xr)(p-xq)'=n[(rp-mq)-2qrx]=0\Rightarrow x_0=\frac{rp-mq}{2qr}.$$

Bu yerda $f''(x)=-2qr<0$ bo‘lgani uchun x_0 kritik nuqtada foyda funksiyasi $f(x)$ maksimumga erishadi va foydaning maksimal qiymati quyidagicha bo‘ladi:

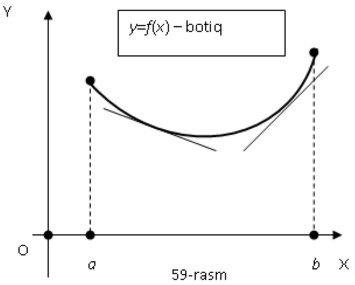
$$f_{\max}=f\left(\frac{rp-mq}{2qr}\right)=\frac{n(rp+mq)^2}{4rq}\ .$$

5.3. Funksiya grafigining qavariqlik va botiqlik sohalari. Funksiyaning yana bir muhim xususiyatlaridan biri uning qavariqligi va botiqligi bo‘lib hisoblanadi. Bunga misol sifatida fizikaning optika bo‘limida qaraladigan qavariq va botiq linzalarni ko‘rsatish mumkin.

4-TA’RIF: Agar $y=f(x)$ funksiya (a,b) oraliqda differensiallanuvchi va uning grafigi bu oraliqdagi har bir $M(x,f(x))$ nuqtada o‘tkazilgan urinmasidan pastda (yuqorida) joylashgan bo‘lsa, u shu oraliqda ***qavariq*** (***botiq***) deyiladi (58-59- rasmlarga qarang).



58-rasm



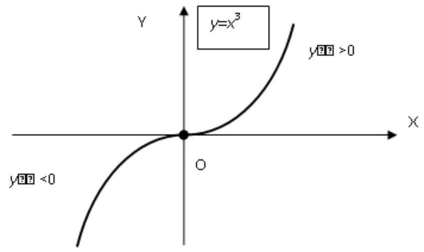
59-rasm

Masalan, $y=e^x$ grafigi $(-\infty, \infty)$ oraliqda botiq; $y=\ln x$ grafigi $(0, \infty)$ oraliqda, ya'ni aniqlanish sohasidagi barcha nuqtalarda qavariq; $y=\sin x$ funksiyaning grafigi $(0,\pi)$ oraliqda qavariq, $(\pi,2\pi)$ oraliqda esa botiq bo'ladi.

Umumiy holda $y=f(x)$ funksiya grafigining qavariqlik va botiqlik sohalari uning II tartibli hosilasi orqali quyidagi teorema yordamida aniqlanadi.

6-TEOREMA: Agar $y=f(x)$ funksiya (a,b) oraliqning har bir nuqtasida ikki marta differensiallanuvchi va barcha $x\in(a, b)$ nuqtalarda $f''(x)>0$ ($f''(x)<0$) shart bajarilsa, funksiya grafigi bu oraliqda botiq (qavariq) bo'ladi.

Masalan, $f(x)=x^3$ funksiya uchun $f''(x)=6x>0$ tengsizlik yechimi $(0,\infty)$ oraliqdan iborat bo'ladi va unda bu funksiya grafigi botiq bo'ladi.Xuddi shunday $f''(x)=6x<0$ tengsizlik yechimi bo'lgan $(-\infty, 0)$ oraliqda funksiya grafigi qavariq bo'ladi (60-rasmga qarang).



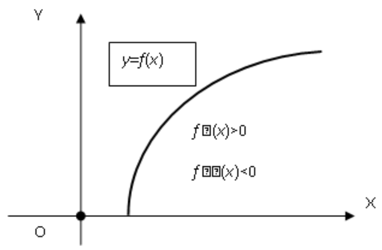
60-rasm

Izohlar: 1. Agar biror (a,b) oraliqning har bir nuqtasida $f''(x)=0$ bo'lsa, unda $f(x)=Ax+B$ ko'rinishda va uning grafigi to'g'ri chiziqdan iborat bo'ladi. To'g'ri chiziqni qavariq ham, botiq ham deb olish mumkin.

2. II tartibli hosila ta'rifiga asosan $f''(x)=[f'(x)]'$ bo'lgani uchun, funksiya grafigining botiqlik sohasida $f'(x)$ hosila o'suvchi (chunki $[f'(x)]'=f''(x)>0$) va qavariqlik sohasida kamayuvchi (chunki $[f'(x)]'=f''(x)<0$) bo'ladi.

5.4. Botiqlik va qavariqlikning iqtisodiy tatbiqlari. Funksiya grafigining botiqlik va qavariqligi bir qator iqtisodiy jarayonlarni tavsiflashda qo'llaniladi.

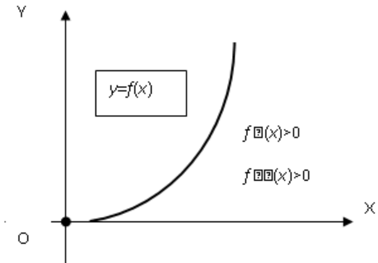
❖ ***O'sish tezligi monoton kamayib boradigan o'suvchi iqtisodiy jarayonlar.*** Bunday xususiyatli iqtisodiy jarayonlar o'suvchi ($f'(x)>0$) va grafigi qavariq ($f''(x)<0$) bo'lgan $y=f(x)$ funksiya orqali ifodalanadi (61-rasmga qarang).



Bularga $y=ax^{\alpha}$ ($a>0$, $0<\alpha<1$)-darajali, $y=a\ln x+b$ [$a>0$, $b\in(-\infty, \infty)$] -logarifmik, $y=x/(ax+b)$-kasr-ratsional funksiyalar misol bo‘ladi.

Masalan, monopoliyalashgan bozor sharoitida sotilgan mahsulot hajmi x oshib borishi bilan uning tushumi y ham o‘sib boradi, ammo talab qonuni ta’sirida uning o‘sish tezligi kamayib boradi.

❖ ***O‘sish tezligi monoton o‘sib boradigan o‘suvchi iqtisodiy jarayonlar.*** Bunday iqtisodiy jarayonlar o‘suvchi ($f'(x)>0$) va grafigi botiq bo‘lgan ($f''(x)>0$) $y=f(x)$ funksiya orqali ifodalanadi (62-rasmga qarang).

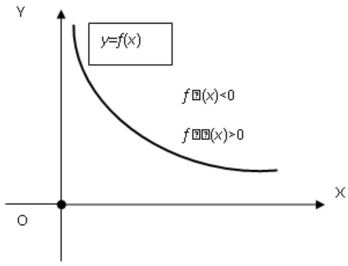


62-rasm

Bularga $y=ax^{\alpha}$ ($a>0$, $\alpha>1$)-darajali, $y=ax^2+bx+c$ ($a>0$)-kvadratik , $y=ae^{kx}$ ($a>0$, $k>0$)-ko‘rsatkichli funksiyalar misol bo‘la oladi.

Masalan, mikroiqtisodiyotda sarflangan resurslar miqdori x va ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi y orasidagi bog‘lanishni ifodalovchi $y=f(x)$ ishlab chiqarish funksiyasi ishlab chiqarish jarayonining boshlang‘ich bosqichida, ya’ni x qiymati kichik bo‘lganda, yoki samaradorligi yuqoriroq bo‘lgan yangi texnologiyalarni joriy etish natijasida yuqorida ko‘rsatilgan xususiyatga ega bo‘ladi.

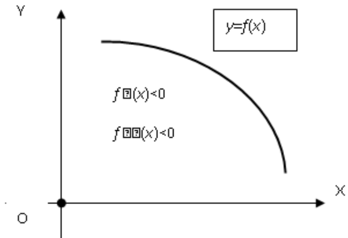
❖ ***O‘sish tezligi monoton o‘sib boradigan kamayuvchi iqtisodiy jarayonlar.*** Bunday xossali iqtisodiy jarayonlar kamayuvchi ($f'(x)<0$) va grafigi botiq ($f''(x)>0$) bo‘lgan $y=f(x)$ funksiya orqali ifodalanadi (63-rasmga qarang).



Bularga $y=ax^{\alpha}$ ($a>0$, $\alpha<0$)-darajali, $y=ae^{kx}+b$ ($a>0$, $b\geq0$, $k<0$)- ko‘rsatkichli, $y=x/(ax-b)$ ($a>0$, $b>0$)-kasr-ratsional funksiyalar misol bo‘ladi.

Masalan, xodimlarni boshqarish nazariyasidan ma’lumki, ish haqi x kattaligini oshirish natijasida xodimlarning mehnat unumdorligi y ma’lum bir paytgacha o‘sib boradi. Ammo x ish haqi oshib borgan sari mehnat sur’ati ham kattalashib boradi va shu tufayli ish haqining keyingi qo‘shimcha Δx o‘sishi mehnat unumdorligini Δy miqdorga o‘zgarishiga ta’siri tobora kamayib boradi.

❖ ***O‘sish tezligi monoton kamayib boradigan kamayuvchi iqtisodiy jarayonlar.*** Bunday iqtisodiy jarayonlar kamayuvchi ($f'(x)<0$) va grafigi qavariq ($f''(x)<0$) bo‘lgan $y=f(x)$ funksiya orqali ifodalanadi (64-rasmga qarang).



64-rasm

5.5. Funksiya grafigining burilish nuqtalari. Funksiya xossalarini o‘rganish va ularni tatbiq etishda uning burilish nuqtasi tushunchasi ham muhim ahamiyatga egadir.

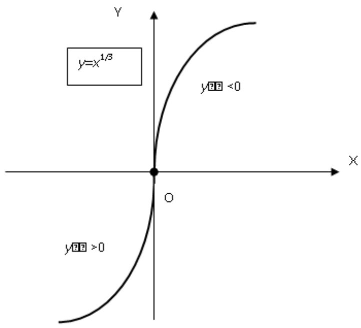
<u>5-TA’RIF:</u> Funksiya grafigi biror $M(x_0,f(x_0))$ nuqtadan o‘tayotganda botiqligini qavariqlikka yoki aksincha, qavariqligini botiqlikka o‘zgartirsa, bu nuqta uning ***burilish (egar) nuqtasi*** deyiladi.

Masalan, ko‘rib o‘tilgan $f(x)=x^3$ funksiya uchun koordinatalar boshi O(0,0) burilish nuqtasi bo‘ladi. $F(x)=x^2$ funksiya grafigi paraboladan iborat bo‘lib, u hamma joyda botiq va shu sababli burilish nuqtasiga ega emas. Umumiy holda $y=f(x)$ funksiya grafigining burilish nuqtasi mavjudligi va uni topish masalasini qaraymiz.

<u>7-TEOREMA</u> (Burilish nuqtasi mavjudligining zaruriy sharti): Agar $y=f(x)$ funksiya uchun $M(x_0,f(x_0))$ burilish nuqtasi va x_0 nuqta hamda uning biror atrofida $y=f(x)$ funksiya ikki marta differensiallanuvchi bo‘lsa, unda $f''(x_0)=0$ tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Masalan, $f(x)=\sin x$ funksiya uchun $x_0=\pi$ abssissali nuqta burilish nuqtasi va unda $f''(\pi)=-\sin\pi=0$ bo‘ladi.

Izoh: $y=f(x)$ funksiyaning $M(x_0,f(x_0))$ burilish nuqtasida $f''(x_0)$ mavjud bo‘lmasligi ham mumkin. Masalan, $f(x)=x^3$ funksiyaga teskari $g(x)=x^{1/3}$ funksiya uchun O(0,0) burilish nuqtasi bo‘ladi (65-rasmga qarang) va bu $x_0=0$ nuqtada II tartibli hosila $g''(x)=(-2/9)x^{-5/3}$ mavjud emas.



65-rasm

Shuni ta’kidlab o‘tish lozimki, $f''(x_0)=0$ burilish nuqtasi mavjudligini zaruriy sharti har doim ham yetarli emas. Masalan, $f(x)=x^4$ funksiyaning $f''(x)=12x^2$ hosilasi $x_0=0$ nuqtada nolga teng, ammo bu nuqtada funksiya grafigi burilishga ega emas. Haqiqatan ham $x< x_0=0$ va $x> x_0=0$ hollarda $f''(x)=12x^2>0$, ya’ni bu funksiya grafigi barcha nuqtalarda botiq va shu sababli burilish nuqtasiga ega emas. Shuning uchun burilish nuqtasini aniqlashga imkon beradigan yetarli shartni topish masalasi paydo bo‘ladi. Bu masala quyidagi teoremada o‘z yechimini topadi.

<u>8-TEOREMA</u> (Burilish nuqtasi mavjudligining yetarli sharti): Agar biror x_0 nuqtada $y=f(x)$ funksiyaning II tartibli hosilasi $f''(x_0)=0$ yoki mavjud bo‘lmasa va bu nuqta biror atrofining chap va o‘ng tomonida $f''(x)$ turli ishorali qiymatlarga ega bo‘lsa, unda $M(x_0, f(x_0))$ funksiya grafigining burilish nuqtasi bo‘ladi.

Misol sifatida $f(x)=x^3-3x^2$ funksiya grafigining burilish nuqtasini topamiz. Bu yerda $f''(x)=6x-6=0$ tenglamadan $x_0=1$ nuqtani topamiz. Bu nuqtani tekshiramiz. Bunda $x<x_0=1$

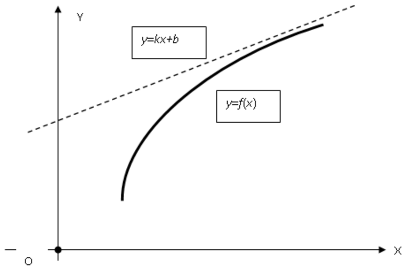
bo‘lganda $f''(x)<0$ (grafik qavariq) va $x>x_0=1$ bo‘lganda $f''(x)>0$ (grafik botiq) bo‘lgani uchun $M(1,–2)$ funksiya grafigining burilish nuqtasi bo‘ladi.

Funksiya grafigining asimptotalari. Biz II tartibli egri chiziq bo‘lgan giperbola bilan tanishganimizda uning asimptotasi (V bob,§4, (2)) haqida so‘z yuritgan edik. Unda bu tushuncha aniq bir ta’rif orqali berilmagan , chunki buning uchun yetarli ma’lumotlar poydevori mavjud emas edi.

6-TA’RIF: Biror $y=kx+b$ tenglama bilan berilgan to‘g‘ri chiziq va $y=f(x)$ funksiya grafigi bilan ifodalaydigan egri chiziq uchun

$$\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-kx-b\right]=0 \qquad (2)$$

shart bajarilsa, unda $y=kx+b$ to‘g‘ri chiziq $y=f(x)$ funksiya grafigining ***og‘ma asimptotasi*** deyiladi (67-rasmga qarang).



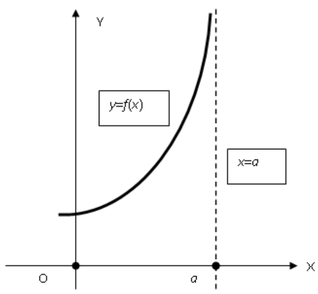
Masalan, $f(x)=x+1/x$ funksiya grafigi uchun $y=x$ to‘g‘ri chiziq og‘ma asimptota bo‘ladi, chunki

$$\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim_{x\to\infty}[x+\frac{1}{x}-x]=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0\,.$$

7-TA’RIF: Agar biror $x=a$ nuqtada $y=f(x)$ funksiyaning

$$\lim_{x\to a-0}f(x)\,,\quad \lim_{x\to a+0}f(x)$$

chap va o‘ng limitlaridan kamida bittasi cheksiz bo‘lsa, unda $x=a$ tenglamali vertikal to‘g‘ri chiziq $y=f(x)$ funksiya grafigining ***vertikal asimptotasi*** deyiladi (68-rasmga qarang).



Odatda vertikal asimptotalar funksiyaning aniqlanish sohasi bo‘yicha uning uzilish nuqtalari orqali topiladi. Masalan, $f(x)=1/(x^3–1)$ funksiya grafigi uchun $x=1$ to‘g‘ri chiziq vertikal asimptota bo‘ladi.

Funksiyaning og‘ma asimptotalarining mavjudligi va ularning tenglamasi quyidagi teorema bilan aniqlanadi.

8-TEOREMA: Berilgan $y=f(x)$ funksiya grafigi og‘ma asimptotaga ega bo‘lishi uchun

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=k,\qquad \lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]=b \qquad (3)$$

limitlarning ikkalasi ham mavjud hamda chekli bo‘lishi zarur va yetarlidir. Bu holda og‘ma asimptota $y=kx+b$ tenglamaga ega bo‘ladi.

Masalan, $f(x)=(2x^2+3x–5)/x$ funksiya uchun

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x-5}{x^2}=\lim_{x\to\infty}(2+\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2})=2+0-0=2,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-2x]=\lim_{x\to\infty}[\frac{2x^2+3x-5}{x}-2x]=\lim_{x\to\infty}\frac{3x-5}{x}=\lim_{x\to\infty}(3-\frac{5}{x})=3$$

ekanligini topamiz. Demak, bu funksiyaning grafigi $y=2x–3$ og‘ma asimptotaga ega bo‘ladi.

5.6. Funksiyani tekshirishning umumiy sxemasi. Yuqorida olingan natijalar bo‘yicha $y=f(x)$ funksiya xususiyatlarini quyidagi tartibda aniqlash mumkin ;

- ✓ Funksiyaning D{f} aniqlanish sohasini topamiz ;
- ✓ Funksiyaning E{f} qiymatlar sohasini topishga harakat qilamiz. Bu sohani to‘g‘ridan-to‘g‘ri topish qiyin bo‘lsa, uni funksiyaning keyingi qadamlarda aniqlanadigan xususiyatlaridan foydalanib aniqlash mumkin ;
- ✓ Funksiyani juft yoki toqlikka tekshiramiz ;
- ✓ Funksiyani davriylikka tekshiramiz va u davriy bo‘lsa, uning davrini aniqlaymiz;
- ✓ Funksiyani uzilish nuqtalari mavjudligini tekshiramiz va ular mavjud bo‘lsa, ularning turini aniqlaymiz ;
- ✓ $f(x)$ =0 tenglamadan funksiya nollarini topamiz va ular orqali funksiya o‘z ishorasini o‘zgartirmaydigan oraliqlarni hamda funksiya grafigini OX o‘qi bilan kesishish nuqtalarini aniqlaymiz ;
- ✓ $f'(x)>0$ va $f'(x)<0$ tengsizliklarni yechib, funksiyaning o‘sish va kamayish, ya’ni monotonlik sohalarini aniqlaymiz ;
- ✓ $f'(x)=0$ yoki $f'(x)$ mavjud emas shartlardan funksiyaning kritik nuqtalarni topamiz va bu nuqtalarda funksiyani I yoki II tartibli hosila yordamida ekstremumga tekshiramiz ;
- ✓ $f''(x)>0$ va $f''(x)<0$ tengsizliklarni yechib, funksiya grafigining botiqlik va qavariqlik sohalarini topamiz ;
- ✓ $f''(x)= 0$ yoki $f''(x)$ mavjud emas shartlardan foydalanib funksiya grafigining burilish nuqtalarini aniqlaymiz ;
- ✓ Funksiya grafigi asimptotalarini, agarda ular mavjud bo‘lsa, topamiz ;
- ✓ Argument $x\to\pm\infty$ bo‘lganda funksiya limitini tekshiramiz;
- ✓ Oldingi qadamlarda olingan ma’lumotlar asosida funksiya grafigini chizamiz .

5.7. Funksiyaning global ekstremumlari. Berilgan $y=f(x)$ funksiya biror $[a,b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz bo‘lsin. Unda, Veyershtrass teoremasiga (VII bob,§4) asosan, funksiya bu kesmadagi qandaydir x_1 va x_2 nuqtalarda o‘zining eng katta va eng kichik

$$\max_{x\in[a,b]} f(x)=f(x_1)=M\,,\qquad \min_{x\in[a,b]} f(x)=f(x_2)=m$$

qiymatlarini qabul etadi. Agar $y=f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmadagi biror x_0 nuqtada lokal ekstremumga ega bo‘lsa, unda $f(x)\le f(x_0)$ yoki $f(x)\ge f(x_0)$ tengsizliklardan biri x_0 nuqtaning biror atrofidagi x nuqtalar uchun bajarilib, barcha $x\in[a,b]$ uchun o‘rinli bo‘lmasligi ham mumkin. Shu sababli ular ***lokal (tor doiradagi) ekstremumlar*** deyiladi. Ammo $M=f(x_1)\ge f(x)$, $m=f(x_2)\le f(x)$ tengsizliklar barcha $x\in[a,b]$ uchun o‘rinli bo‘ladi va shu sababli ular mos ravishda $y=f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ kesmadagi global maksimumi (M) va global minimumi (m), birgalikda ***global (keng doiradagi) ekstremumlari*** deyiladi.

Veyershtrass teoremasida kesmada uzluksiz funksiyalar uchun global ekstremumlar mavjudligi tasdiqlanadi, ammo ularni qanday topish masalasi qaralmaydi. Agar $y=f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesma ichida differensiallanuvchi bo‘lsa, bu masala quyidagi algoritm asosida hal etiladi:

- Berilgan funksiyaning $f'(x)$ hosilasi hisoblanadi ;
- $f'(x)=0$ tenglamadan $[a,b]$ kesma ichida joylashgan $x_1, x_2, \dots, x_n$ kritik nuqtalar topiladi;

- Berilgan funksiyaning kritik nuqtalardagi $f(x_1)$, $f(x_2)$, ... , $f(x_n)$ va kesma chegaralaridagi $f(a)$, $f(b)$ qiymatlari hisoblanadi;
- Yuqorida hisoblangan funksiya qiymatlari orasidan eng katta va eng kichigi topiladi. Ular biz izlayotgan m va M global ekstremumlarni ifodalaydi.

Misol sifatida $f(x)=x^4–2x^2+3$ funksiyaning [–3,2] kesmadagi global ekstremumlarini topamiz. Buning uchun dastlab $f\,'(x)=4x(x^2–1)=0$ tenglamadan $x_1=–1$, $x_2=0$ va $x_3=1$ kritik nuqtalarni topamiz. Ularning uchalasi ham biz qarayotgan [–3,2] kesma ichida joylashgan va shu sababli bu nuqtalarning barchasini qaraymiz. Kritik va chegaraviy nuqtalarda berilgan funksiya qiymatlarini hisoblab,

$$f(–3)=66,\ \ f(–1)= f(1)=2,\ \ f(0)=3,\ f(2)=11$$

natijalarni olamiz. Bu natijalarni taqqoslab, berilgan funksiyaning global ekstremumlari

$$M=\max_{x\in[-3,2]} f(x)=f(-3)=66\,,\quad m=\min_{x\in[-3,2]} f(x)=f(\pm1)=2$$

ekanligini aniqlaymiz.

XULOSA

Hosila – funksiya xususiyatlarini tekshirish uchun kuchli va qulay vositadir. Differensiallanuvchi funksiyalarning monotonlik oraliqlari va lokal ekstremumlarini topishning umumiy usullari I tartibli hosila orqali ifodalanadi. II tartibli hosila yordamida esa funksiyani kritik nuqtalarining xarakteri, botiqlik va qavariqlik sohalari va burilish nuqtalari aniqlanadi. Bu tushunchalar turli iqtisodiy masalalarni yechishda, ishlab chiqarish bilan bog‘liq jarayonlarni matematik usullarda o‘rganishda keng qo‘llaniladi. Bunga misol sifatida logistik funksiyani ko‘rsatish mumkin.

Funksiyani to‘liq tekshirish uchun uning asimptotalarini aniqlash ham muhim ahamiyatga ega. Funksiya grafigining og‘ma va vertikal asimptotalarini topish usullari ham ishlab chiqilgan.

Kesmada uzluksiz va uning ichida differensiallanuvchi bo‘lgan funksiyaning shu kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatlari, ya’ni uning global ekstremumlari ham hosila yordamida topiladi.

Tayanch iboralar

* Funksiyaning o‘sish sohasi * Funksiyaning kamayish sohasi * Funksiyaning monotonlik sohasi * Lokal maksimum * Lokal minimum * Lokal ekstremumlar * Kritik nuqta * Botiqlik sohasi * Qavariqlik sohasi * Burilish nuqtasi * Logistik funksiya * Og‘ma asimptota * Vertikal asimptota * Global ekstremumlar

Takrorlash uchun savollar

1. Funksiyaning o‘sish (kamayish) oraliqlari deb nimaga aytiladi?
2. Funksiyaning monotonlik oraliqlari qanday ta’riflanadi?
3. Differensiallanuvchi funksiyaning monotonlik oraliqlari qanday topiladi?
4. Funksiyaning lokal maksimumi (minimumi) deb nimaga aytiladi?
5. Funksiyaning lokal ekstremumlari qanday ta’riflanadi?
6. Ekstremumning zaruriy sharti nimadan iborat va u yetarli shart bo‘ladimi?
7. Kritik nuqta deb nimaga aytiladi?
8. Ekstremumning yetarli sharti I tartibli hosila orqali qanday ifodalanadi?
9. Ekstremumning yetarli sharti II tartibli hosila orqali qanday ifodalanadi?
10. Funksiya grafigining botiqlik (qavariqlik) sohalari qanday ta’riflanadi?
11. Funksiya grafigining botiqlik (qavariqlik) sohalari qanday topiladi?
12. Funksiya grafigining burilish nuqtasi nima?
13. Differensiallanuvchi funksiya grafigining burilish nuqtalari qanday topiladi?
14. Funksiya grafigining og‘ma asimptotalari qanday ta’riflanadi?

15. Funksiya grafigining vertikal asimptotalari qanday ta’riflanadi va topiladi?
16. Og‘ma asimptotalar mavjudligining zaruriy va yetarli sharti nimadan iborat?
17. Funksiyani to‘liq tekshirish qanday bosqichlardan tashkil topadi?
18. Funksiyaning kesmadagi global ekstremumlari nima va ular qanday topiladi?

ANIQMASLIKLAR VA LOPITAL QOIDALARI

- ***Aniqmasliklar va ularni ochish.***
- ***Lopitalning I qoidasi va uning tatbiqlari.***
- ***Lopitalning II qoidasi.***
- ***Turli aniqmasliklarni ochish.***

6.1. Aniqmasliklar va ularni ochish. Cheksiz kichik (katta) miqdorlar xossalari o‘rganilganda (VI bob,§3) ularning nisbatlari cheksiz kichik (katta) miqdor bo‘lishi shart emas ekanligi misollar orqali ko‘rsatilgan edi. Funksiya hosilasi yordamida bu nisbatlarning qiymatlarini topish masalasini umumiy holda qarash va uning yechimini berish mumkin.

1-TA’RIF: Agar $x \to a$ (a–chekli yoki cheksiz son) bo‘lganda $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar cheksiz kichik miqdorlar, ya’ni

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

munosabatlar o‘rinli bo‘lsa, ularning $f(x)/g(x)$ nisbati $x \to a$ bo‘lganda **0/0** ***ko‘rinishdagi aniqmaslik*** deyiladi.

Masalan, $x\to 0$ bo‘lganda $\sin x/x$, $x\to 1$ holda $(x^3-1)/(x^2-1)$ va $x\to\infty$ bo‘lgan holda $[\ln(1+1/x)]/(e^{1/x}-1)$ nisbatlar 0/0 ko‘rinishdagi aniqmasliklar bo‘ladi.

2-TA’RIF: Agar $x \to a$ (a–chekli yoki cheksiz son) bo‘lganda $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar cheksiz katta miqdorlar bo‘lsa, ya’ni

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty, \qquad \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$$

munosabatlar o‘rinli bo‘lsa, ularning $f(x)/g(x)$ nisbati $x \to a$ bo‘lganda ∞/∞ ***ko‘rinishdagi aniqmaslik*** deyiladi.

Masalan, $x\to 0$ bo‘lganda $\ln|\sin x|/\ln|x|$, $x\to\infty$ holda $(x+1)^2/(x^2+1)$ nisbatlar ∞/∞ ko‘rinishdagi aniqmaslikdir.

3-TA’RIF: Berilgan 0/0 yoki ∞/∞ ko‘rinishdagi $f(x)/g(x)$ aniqmaslikning $x\to a$ bo‘lgandagi limitini topish shu ***aniqmaslikni ochish*** deb ataladi.

Limitlarni hisoblash mavzusi bo‘yicha misollar yechganimizda ayrim aniqmasliklarni ochish masalasi bilan shug‘ullangan edik. Ammo unda har bir aniqmaslikni ochish uchun ko‘paytuvchilarga ajratish, qo‘shmasiga ko‘paytirish, eng katta darajasiga bo‘lish, ajoyib limitlarga keltirish kabi sun’iy usullardan foydalanilgan edi. Shunday qilib, har bir aniqmaslikni ochish uchun o‘ziga xos xususiy usuldan foydalangan edik.

6.2. Lopitalning I qoidasi va uning tatbiqlari. Endi aniqmasliklarni ochishning umumiy qoidasini ko‘rib chiqamiz. Bu qoidani farang matematigi Fransua Lopital (1661–1704 y.) o‘zining 1696 yilda bosmadan chiqqan «Cheksiz kichik miqdorlar tahlili» nomli kitobida birinchi marta keltirgan va shuning uchun ***Lopital qoidalari*** nomi bilan tarixga kirgan.

1-TEOREMA (***Lopitalning I qoidasi***)**:** $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $x=a$ nuqta atrofida aniqlangan, differensiallanuvchi va $g'(x) \neq 0$ bo‘lsin. Bundan tashqari $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $x\to a$ shartda cheksiz kichik miqdorlar bo‘lsin, ya’ni

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \quad , \qquad \lim_{x\to a} g(x) = 0 \qquad (1)$$

tengliklar bajarilsin. Bu holda, agar

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

mavjud bo‘lsa (chekli yoki cheksiz),   unda

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

ham mavjud bo‘ladi va ushbu tenglik o‘rinli bo‘ladi:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad (2)$$

Izoh: Agar 1-teoeremada qo‘shimcha ravishda $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalar chekli $x=a$ nuqtada uzluksiz deb shart qo‘ysak, unda (2) tenglikni

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$$

ko‘rinishda yozish mumkin.

6.3. Lopitalning II qoidasi. Endi ∞/∞ ko‘rinishdagi aniqmasliklarni ochish masalasini qaraymiz.

<u>2-TEOREMA</u> (***Lopitalning II qoidasi***)**:** $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $x=a$ nuqta atrofida aniqlangan, differensiallanuvchi va $g'(x) \neq 0$ bo‘lsin. Bundan tashqari $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $x\to a$ shartda cheksiz katta miqdorlar bo‘lsin, ya’ni

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty, \qquad \lim_{x\to a} g(x)=\infty \qquad (7)$$

munosabatlar o‘rinli bo‘lsin. Bu holda, agar

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

mavjud bo‘lsa (chekli yoki cheksiz),   unda

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

ham mavjud bo‘ladi va ushbu tenglik o‘rinli bo‘ladi:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad (8)$$

1-izoh: Yuqoridagi (2) yoki (8) tengliklarda $f'(x)/g'(x)$ nisbat $x\to a$ holda yana 0/0 yoki ∞ / ∞ ko‘rinishdagi aniqmaslikdan iborat bo‘lib, $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalar 1-teorema yoki 2-teorema shartlarini qanoatlantirsin. Bu holda

$$\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}$$

mavjud bo‘lsa, quyidagi tenglik o‘rinli bo‘ladi:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)} \quad . \qquad (9)$$

Shunday qilib, aniqmaslikni ochish uchun Lopital qoidasini bir necha marta ketma-ket qo‘llash mumkin. Buning uchun har gal Lopital qoidasi shartlarini bajarilishini tekshirib ko‘rish kerak.

2-izoh: Lopital qoidasiga teskari tasdiq doimo ham o‘rinli bo‘lishi shart emas, ya’ni

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

mavjud , ammo

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

mavjud bo‘lmasligi mumkin.

3-izoh: Lopital qoidasi har doim ham aniqmaslikni ochishga imkon beravermaydi. Masalan, ushbu limitni qaraymiz:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}=(\frac{\infty}{\infty})=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x-1})'}{(\sqrt{x+1})'}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}=(\frac{\infty}{\infty})=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x+1})'}{(\sqrt{x-1})'}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}=\cdots$$

Bu yerdan ko‘rinadiki berilgan limit, Lopital qoidasi ikki marta qo‘llanilgach, yana o‘ziga qaytib kelmoqda. Demak, bu aniqmaslikni Lopital qoidasi orqali ochib bo‘lmaydi. Holbuki bu limit surat va maxrajni x o‘zgaruvchiga bo‘lish usulida oson hisoblanadi:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1-1/x}}{\sqrt{1+1/x}}=\frac{\sqrt{1-0}}{\sqrt{1+0}}=1.$$

6.4. Turli aniqmasliklarni ochish. Oldin ko‘rilgan va shartli ravishda 0/0 yoki ∞/∞ kabi belgilangan aniqmasliklar bilan bir qatorda shartli ravishda $0\cdot\infty$, 1^∞, 0^0, ∞^0, , $\infty-\infty$ kabi belgilanadigan aniqmasliklar ham mavjud.

4-TA’RIF: Agar $\lim_{x\to a} f(x)=0$, $\lim_{x\to a} g(x)=\infty$ bo‘lsa, $f(x)\cdot g(x)$ ko‘paytma $x\to a$ bo‘lganda $\mathbf{0\cdot\infty}$ ***ko‘rinishdagi aniqmaslik*** deyiladi.

Masalan, $x\to 0$ bo‘lganda $f(x)=x$, $g(x)=\ln|x|$ funksiyalar ko‘paytmasi $f(x)\cdot g(x)=x\ln|x|$ yuqorida ta’riflangan $0\cdot\infty$ ko‘rinishidagi aniqmaslikdir.

Bunday aniqmasliklarni ochish uchun ularni

$$f(x)\cdot g(x)=\frac{f(x)}{1/g(x)} \quad \text{yoki} \quad f(x)\cdot g(x)=\frac{g(x)}{1/f(x)}$$

kabi yozib, 0/0 yoki ∞/∞ ko‘rinishdagi aniqmaslikka keltiriladi va so‘ngra Lopital qoidalaridan foydalaniladi. Masalan,

$$\lim_{x\to 0} x\ln|x|=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln|x|}{1/x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln|x|)'}{(1/x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1/|x|}{-1/x^2}=-\lim_{x\to 0}|x|=0.$$

4-TA’RIF: Agar $\lim_{x\to a} f(x)=1, \lim_{x\to a} g(x)=\infty$ bo‘lsa, $f(x)^{g(x)}$ ($f(x)>0$) ifoda $x\to a$ bo‘lganda $\mathbf{1^\infty}$ ***ko‘rinishdagi aniqmaslik*** deyiladi.

Masalan, $f(x)=1+1/x$, $g(x)=x$ funksiyalar uchun $f(x)^{g(x)}=(1+1/x)^x$ ifoda 1^∞ ko‘rinishdagi aniqmaslik bo‘ladi.

Bunday aniqmasliklarni ochish uchun $u=f(x)^{g(x)}$ deb belgilaymiz va bu tenglikni ikkala tomonidan logarifm olib, $\ln u=\ln f(x)^{g(x)}=g(x)\ln f(x)$ ko‘paytmaga kelamiz. Bunda

$$\lim_{x\to a} g(x)=\infty, \quad \lim_{x\to a}\ln f(x)=\ln 1=0$$

bo‘lgani uchun $\ln u=g(x)\ln f(x)$ ko‘paytma $0\cdot\infty$ ko‘rinishidagi aniqmaslik va uni yuqorida ko‘rsatilgan usulda ochish mumkin. Agar

$$\lim_{x\to a}\ln u=\lim_{x\to a}\{[\ln f(x)]g(x)\}=b$$

bo‘lsa, unda ko‘rsatkichli funksiyalarning uzluksizligidan foydalanib, ushbu natijani olamiz:

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}=\lim_{x\to a} u=\lim_{x\to a} e^{\ln u}=e^{\lim_{x\to a}\ln u}=e^b. \qquad (10)$$

Misol sifatida $\lim_{x\to\infty}(1+1/x)^x=e$ II ajoyib limitni (VI bob, §3) isbotlaymiz.

Bunda $f(x)=1+1/x$, $g(x)=x$ bo‘lib, $\ln u=g(x)\ln f(x)=x\ln(1+1/x)$ va

$$\lim_{x\to\infty}\ln u=\lim_{x\to\infty}x\ln(1+\frac{1}{x})=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+1/x)}{1/x}=(\frac{0}{0})=\lim_{x\to\infty}\frac{[\ln(1+1/x)]'}{(1/x)'}=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{1+1/x}\cdot\frac{(1+1/x)'}{(1/x)'}\right]=1.$$

Bu yerdan, (10) tenglikka asosan,

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\ln u}=e^1=e\ ,$$

ya'ni II ajoyib limitga ega bo'lamiz.

<u>5-TA'RIF:</u> Agar berilgan $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar uchun

$$\lim_{x\to a}f(x)=0,\ \lim_{x\to a}g(x)=0\quad \text{yoki}\quad \lim_{x\to a}f(x)=\infty,\ \lim_{x\to a}g(x)=0$$

bo'lsa, unda $f(x)^{g(x)}$ $(f(x)>0)$ ifoda $x\to a$ bo'lganda $\mathbf{0^0}$ ***yoki*** $\boldsymbol{\infty^0}$ ***ko'rinishdagi aniqmaslik*** deyiladi.

Bunday ko'rinishdagi aniqmasliklarni ochish yuqorida 1^∞ ko'rinishdagi aniqmasliklar uchun ko'rib o'tilgan usulda amalga oshiriladi.

Masalan, $f(x)=x$, $g(x)=x$ va $x\to 0+0$ holda $u=f(x)^{g(x)}=x^x$ ifoda 0^0 ko'rinishdagi aniqmaslik bo'ladi. Bunda

$$\lim_{x\to 0+0}\ln u=\lim_{x\to 0+0}x\ln x=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to 0+0}\frac{\ln x}{1/x}=(\frac{\infty}{\infty})=\lim_{x\to 0+0}\frac{(\ln x)'}{(1/x)'}=\lim_{x\to 0+0}\frac{1/x}{-1/x^2}=-\lim_{x\to 0+0}x=0$$

va, (10) tenglikka asosan,

$$\lim_{x\to 0+0}x^x=e^{\lim\limits_{x\to 0+0}\ln u}=e^0=1\ .$$

<u>6-TA'RIF:</u> Agar berilgan $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar uchun

$$\lim_{x\to a}f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to a}g(x)=\infty$$

bo'lsa, unda $f(x)–g(x)$ ayirma $x\to a$ bo'lganda $\infty–\infty$ ***ko'rinishdagi aniqmaslik*** deyiladi.

Bunday aniqmasliklarni ochish uchun ularni

$$f(x)–g(x)=f(x)[1–g(x)/f(x)]$$

ko'rinishda yozamiz. Bunda ikki hol bo'lishi mumkin.

I. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)}{f(x)}=A\neq 1$. Bu holda $f(x)–g(x)=f(x)[1–g(x)/f(x)]$

ifodani $x\to a$ bo'lganda shartli ravishda (1–A)·∞ ko'rinishda deb qarash mumkin va shu sababli

$$\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)]=\pm\infty.$$

Masalan, $f(x)=x$, $g(x)=\ln x$ va $x\to+\infty$ deb olsak, $f(x)–g(x)=x–\ln x$ ayirma $\infty–\infty$ ko'rinishdagi aniqmaslik bo'ladi. Bu holda

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=(\frac{\infty}{\infty})=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{x'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0=A\neq 1$$

bo'lgani uchun

$$\lim_{x\to+\infty}(x-\ln x)=+\infty.$$

II. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)}{f(x)}=A=1$. Bu holda $f(x)–g(x)=f(x)[1–g(x)/f(x)]$

ifoda $x\to a$ bo'lganda 0·∞ ko'rinishidagi aniqmaslik bo'ladi va uni yuqorida ko'rilgan usulda ochish mumkin.

XULOSA

Oldin biz hosilani funksiyani tekshirishga tatbiqlari bilan tanishib chiqqan edik. Ammo hosilaning tatbiqlari bu bilan chegaralanib qolmaydi. Buning tasdig'i sifatida aniqmasliklarni ochish masalasini ko'rish mumkin.

Bunda 0/0 ko'rinishdagi aniqmasliklar hosila yordamida Lopitalning I qoidasi orqali ochiladi. Bu qoida yordamida oldin keltirilgan bir qator ajoyib limitlar oson isbotlanadi.

Agar aniqmaslik ∞/∞ ko'rinishda bo'lsa, uni ochish uchun Lopitalning II qoidasidan foydalaniladi. Bu qoida ham hosila tushunchasi orqali ifodalanadi.

Yuqorida ko‘rilgan aniqmasliklardan tashqari $0\cdot\infty$, 1^{∞}, 0^0, ∞^0, , $\infty - \infty$ kabi belgilanadigan aniqmasliklar ham Lopital qoidalariga keltirish orqali ochiladi.

Tayanch iboralar

* 0/0 ko‘rinishdagi aniqmaslik * ∞/∞ ko‘rinishdagi aniqmaslik * Aniqmasliklarni ochish * Lopitalning I qoidasi * Lopitalning II qoidasi * $0\cdot\infty$ ko‘rinishdagi aniqmaslik * 1^{∞} ko‘rinishdagi aniqmaslik * 0^{0} ko‘rinishdagi aniqmaslik * ∞^{0} ko‘rinishdagi aniqmaslik * $\infty - \infty$ ko‘rinishdagi aniqmaslik

Takrorlash uchun savollar

1. 0/0 ko‘rinishdagi aniqmaslik ta’rifini bering.
2. ∞/∞ ko‘rinishdagi aniqmaslik qanday ta’riflanadi?
3. Aniqmasliklarni ochish deb nimaga aytiladi?
4. Lopitalning I qoidasi qanday ifodalanadi?
5. Lopitalning II qoidasi qanday mazmunga ega?
6. Lopitalning I qoidasi yordamida I ajoyib limit qanday isbotlanadi?
7. Lopital qoidasiga teskari tasdiq har doim o‘rinlimi? Misol keltiring.
8. 0/0 va ∞/∞ aniqmasliklardan tashqari yana qanday ko‘rinishdagi aniqmasliklar mavjud?
9. $0\cdot\infty$ ko‘rinishdagi aniqmaslik qanday ochiladi?
10. II ajoyib limit Lopital qoidasi yordamida qanday isbotlanadi?
11. 1^{∞}, 0^0 va ∞^0 ko‘rinishdagi aniqmasliklar qanday ochiladi?
12. $\infty-\infty$ ko‘rinishdagi aniqmaslik qanday ochiladi?

20§ BOSHLANG’ICH FUNKSIYA VA ANIQMAS INTEGRAL.INTEGRALLASH QOIDALARI.

- ***Boshlang‘ich funksiya va aniqmas integral.***
- ***Aniqmas integral xossalari.***
- ***Integrallar jadvali.***

1.1. Boshlang‘ich funksiya va aniqmas integral. Differensial hisob bobida berilgan $y=F(x)$ funksiya sining $F'(x)=f(x)$ hosilasini topish masalasi bilan shug‘ullangan edik. Ammo bir qator savollarga javob izlashda teskari, ya’ni $y=F(x)$ funksiyani uning ma’lum bo‘lgan $F'(x)=f(x)$ hosilasi bo‘yicha topish masalasiga duch kelamiz.

Masalan, moddiy nuqtaning harakat tenglamasi $S=S(t)$ berilgan bo‘lsa, unda t_0 vaqtgacha bosib o‘tilgan masofa $S_0=S(t_0)$ kabi aniqlanadi.Ammo harakat tenglamasi $S=S(t)$ noma’lum bo‘lib, uning hosilasi $S'(t)=v(t)$, ya’ni oniy tezlik berilgan holda $S_0=S(t_0)$ masofani qanday topish masalasi paydo bo‘ladi. Bu kabi masalalar integral tushunchasiga olib keladi va uni o‘rganishga kirishamiz.

<u>1-TA’RIF:</u> Biror chekli yoki cheksiz (a,b) oraliqdagi har bir x nuqtada differensiallanuvchi va hosilasi

$$F'(x)=f(x) \qquad (1)$$

shartni qanoatlantiruvchi $F(x)$ berilgan $f(x)$ funksiya uchun ***boshlang‘ich funksiya*** deyiladi.

Masalan, $f(x)=a^x$ $(a>0,\ a\neq 1)$, $x\in(-\infty,\ \infty)$, funksiya uchun $F(x)=a^x/\ln a$ boshlang‘ich funksiya bo‘ladi, chunki ixtiyoriy x uchun

$$F'(x)=(a^x/\ln a)'=a^x\ln a/\ln a=a^x=f(x)$$

tenglik o‘rinlidir.

Xuddi shunday $F(x)=x^5/5$ funksiya barcha x nuqtalarda $f(x)=x^4$ uchun boshlang‘ich funksiya bo‘ladi, chunki bunda (1) tenglik bajariladi.

Berilgan $y=F(x)$ funksiyaning $y'=F'(x)=f(x)$ hosilasi bir qiymatli aniqlanadi. Masalan, $y=x^2$ funksiya yagona $y'=2x$ hosilaga ega. Ammo $y=f(x)$ funksiyaning boshlang‘ich $F(x)$ funksiyasini topish masalasi bir qiymatli hal qilinmaydi. Haqiqatan ham, agar $F(x)$ funksiya $f(x)$ uchun boshlang‘ich funksiya bo‘lsa, u holda ixtiyoriy C o‘zgarmas son uchun $F(x)+C$ funksiya ham $f(x)$ uchun boshlang‘ich funksiya bo‘ladi. Haqiqatan ham, differensiallash qoidalariga asosan,

$$(F(x)+C)'= F'(x)+(C)'=f(x)+0= f(x)$$

va, ta’rifga asosan, $F(x)+C$ funksiya $f(x)$ uchun boshlang‘ich funksiya bo‘ladi.

Masalan, $f(x)=2x$ uchun ixtiyoriy C o‘zgarmasda x^2+C boshlang‘ich funksiyalar bo‘ladi.

Demak, berilgan $y=f(x)$ funksiya uchun $F(x)+C$ ko‘rinishdagi cheksiz ko‘p boshlang‘ich funksiya mavjud bo‘ladi. Bunda $F(x)$ birorta boshlang‘ich funksiyani, C esa ixtiyoriy o‘zgarmas sonni ifodalaydi.

Bu yerda berilgan $y=f(x)$ funksiya uchun barcha boshlang‘ich funksiyalarni topish masalasi paydo bo‘ladi. Bu savolga javob berish uchun dastlab ushbu lemmani (yordamchi teoremani) qaraymiz.

<u>LEMMA:</u> Agar y=Q(x) funksiya biror (a,b) oraliqda differensiallanuvchi va bu oraliqning har bir nuqtasida uning hosilasi Q′(x)=0 bo‘lsa, unda bu funksiya (a,b) oraliqda o‘zgarmas, ya’ni Q(x)=C (C - const) bo‘ladi.

<u>1-TEOREMA:</u> Agar $F(x)$ va $\Phi(x)$ berilgan $f(x)$ funksiyaning ixtiyoriy ikkita boshlang‘ich funksiyalari bo‘lsa, u holda biror C o‘zgarmas sonda $\Phi(x)=F(x)+C$ tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Bu teoremadan ushbu muhim xulosa kelib chiqadi: agar $F(x)$ berilgan $f(x)$ funksiyaning birorta boshlang‘ich funksiyasi bo‘sa, uning barcha boshlang‘ich funksiyalari $F(x)+C$ (C-ixtiyoriy o‘zgarmas son) kabi aniqlanadi. Demak, $f(x)$ funksiyaning barcha boshlang‘ich funksiyalarini topish uchun uning birorta $F(x)$ boshlang‘ich funksiyasini topib, unga C o‘zgarmas sonni qo‘shib qo‘yish kifoyadir. Masalan, $f(x)=2x$ funksiyaning barcha boshlang‘ich funksiyalari x^2+C ko‘rinishda bo‘ladi.

<u>2-TA’RIF:</u> Agar $F(x)$ biror (a,b) oraliqda $f(x)$ funksiyaning boshlang‘ich funksiyasi bo‘lsa, unda $F(x)+C$ (C – ixtiyoriy o‘zgarmas son) funksiyalar to‘plami shu oraliqda $f(x)$ funksiyaning ***aniqmas integrali*** deyiladi .

Berilgan $f(x)$ funksiyaning aniqmas integrali $\int f(x)dx$ kabi belgilanadi va, ta’rifga asosan, birorta $F(x)$ boshlang‘ich funksiya bo‘yicha

$$\int f(x)dx = F(x) + C \qquad (2)$$

tenglik bilan aniqlanadi. Bunda C ixtiyoriy o‘zgarmas son ekanligini yana bir marta eslatib o‘tamiz.

(2) tenglikda $\int$ - integral belgisi, $f(x)$ ***integral ostidagi funksiya*** , $f(x)dx$ ***integral ostidagi ifoda***, x esa ***integrallash o‘zgaruvchisi*** deyiladi. Berilgan $f(x)$ funksiyaning $\int f(x)dx$ aniqmas integralini topish amali bu funksiyani ***integrallash*** deb ataladi.

Izoh: Berilgan $f(x)$ uchun qaysi shartda $F(x)$ boshlang‘ich funksiya , demak $\int f(x)dx$ aniqmas integral, mavjud bo‘lish masalasi kelgusida, §6 da qaraladi.

Yuqorida topilgan boshlang‘ich funksiyalar bo‘yicha quyidagi aniqmas integrallarni yozish mumkin:

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \ , \ \int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + C \ , \ \int 2x dx = x^2 + C .$$

Aniqmas integral ta’rifini ifodalovchi (2) tenglikdan ko‘rinadiki, aniqmas integral $y=F(x)+C$(C-ixtiyoriy o‘zgarmas son) funksiyalar sinfini ifodalaydi. Shu sababli, geometrik nuqtai-nazardan, aniqmas integral $y=F(x)$ funksiya grafigini OY koordinata o‘qi bo‘ylab parallel ko‘chirishdan (VII bob,§3) hosil bo‘ladigan chiziqlar sinfidan iborat bo‘ladi.

1.2. Aniqmas integral xossalari. Aniqmas integral ta’rifidan uning quyidagi xossalari kelib chiqadi:

I. Aniqmas integral hosilasi integral ostidagi funksiyaga teng, ya’ni

$$(\int f(x)dx)' = f(x)$$

II. Aniqmas integral differentsiali integral ostidagi ifodaga teng, ya’ni

$$d(\int f(x)dx) = f(x)dx .$$

III. Biror funksiyaning hosilasidan olingan aniqmas integral shu funksiya bilan ixtiyoriy C o‘zgarmasning yig‘indisiga teng, ya’ni

$$\int F'(x)dx = F(x) + C .$$

IV. Biror funksiyaning differentsialidan olingan aniqmas integral shu funksiya bilan o‘zgarmas yig‘indisiga teng, ya’ni

$$\int dF(x) = F(x) + C .$$

V. O‘zgarmas k ko‘paytuvchini integral belgisidan tashqariga chiqarish mumkin, ya’ni $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$.

Bu tenglik o‘zgarmas son aniqligida tushuniladi.

VI. Ikkita funksiya algebraik yig‘indisidan olingan aniqmas integral shu funksiyalarning har biridan olingan aniqmas integrallarning algebraik yig‘indisiga teng, ya’ni

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx .$$

Bu yerda ham tenglik o‘zgarmas son aniqligida tushuniladi.

<u>3-TA’RIF:</u> V va VI xossalar aniqmas integralning ***chiziqlilik xossalari*** deyiladi.

Aniqmas integralning chiziqlilik xossalarini bitta

$$\int [Af(x) + Bg(x)]dx = A\int f(x)dx + B\int g(x)dx \qquad (3)$$

tenglik orqali ham ifodalash mumkin.

VII. Agar a va b o‘zgarmas sonlar bo‘lsa, unda quyidagi tasdiq o‘rinlidir:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C .$$

1.3. Integrallar jadvali.

1. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$
2. $\int dx = x + C$
3. $\int xdx = \frac{x^2}{2} + C$
4. $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$
5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$
6. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
7. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
8. $\int e^x dx = e^x + C$
9. $\int \sin xdx = -\cos x + C$
10. $\int \cos xdx = \sin x + C$
11. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int (1+\mathrm{tg}^2 x)dx = \mathrm{tg}x + C \quad (x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$
12. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}x + C \quad (x \neq \pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$
13. $\int \mathrm{tg}xdx = -\ln|\cos x| + C \quad (x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$
14. $\int \mathrm{ctg}xdx = \ln|\sin x| + C \quad (x \neq \pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$
15. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \mathrm{arctg}x + C \\ -\mathrm{arcctg}x + C \end{cases}$
16. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}$

17. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$ 18. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

Bu jadval, integralning ko‘rib o‘tilgan xossalari va kelgusida qaraladigan integrallash usullaridan foydalanib juda ko‘p integrallarni hisoblash mumkin.

XULOSA

Matematik tahlilda hosila bilan bir qatorda yana bir muhim tushuncha integral bo‘lib hisoblanadi. Hosilasi berilgan $f(x)$ funksiyaga teng bo‘lgan differensiallanuvchi $F(x)$ funksiya $f(x)$ uchun boshlang‘ich funksiya deb ataladi. Berilgan funksiya uchun boshlang‘ich funksiyalar cheksiz ko‘p bo‘lib, ular bir-biridan faqat o‘zgarmas C soniga farq qiladi. Berilgan $f(x)$ funksiya uchun barcha boshlang‘ich funksiyalar sinfi $F(x)+C$ (C–ixtiyoriy o‘zgarmas son) shu funksiyaning aniqmas integrali deyiladi. Funksiyaning aniqmas integralini topish integrallash amali deyiladi va u differensiallash amaliga teskari bo‘ladi. Berilgan funksiyaning integralini topish integral xossalari va jadvali yordamida amalga oshirilishi mumkin.

Tayanch iboralar

* Boshlang‘ich funksiya * Aniqmas integral * Integral ostidagi funksiya * Integral ostidagi ifoda * Integrallash o‘zgaruvchisi * Aniqmas integralning geometrik ma’nosi * Integrallash amali * Integralning chiziqlilik xossasi* Integrallar jadvali

Takrorlash uchun savollar

1. Berilgan funksiyaning boshlang‘ich funksiyasi deb nimaga aytiladi?
2. Boshlang‘ich funksiya qanday xossalarga ega?
3. Berilgan funksiyaning aniqmas integrali qanday ta’riflanadi?
4. Integral ostidagi funksiya deb nimaga aytiladi?
5. Integral ostidagi ifoda deb nimaga aytiladi?
6. Integrallash amali nimani ifodalaydi?
7. Aniqmas integralning geometrik ma’nosi nimadan iborat?
8. Aniqmas integral qanday xossalarga ega?
9. Integrallash va differensiallash amallari o‘zaro qanday bog‘langan?
10. Aniqmas integralning chiziqlilik xossasi nimadan iborat?
11. Integral hisoblash natijasini qanday tekshirish mumkin?
12. Darajali funksiyaning aniqmas integrali nimadan iborat?
13. Ko‘rsatkichli funksiya qanday integrallamadi?
14. Trigonometrik funksiyalarning integrallarini yozing.

21§ ASOSIY ELEMENTAR FUNKSIYALAR INTEGRALI. INTEGRALLASH USULLARI. BEVOSITA INTEGRALLASH, O’ZGARUVCHILARNI ALMASHTIRISH USULI

- ***Yoyish usuli.***
- ***Differensial belgisi ostiga kiritish usuli.***
- ***O‘zgaruvchilarni almashtirish usuli.***
- ***Bo‘laklab integrallash usuli.***
- ***Kvadrat uchhadli integrallarni hisoblash.***

Oldingi boblarda differensiallanuvchi har qanday elementar funksiyaning hosilasini hosilalar jadvali va differensiallash qoidalari yordamida topish mumkin ekanligini ko‘rib o‘tgan edik. Bunda elementar funksiyaning hosilasi yana elementar funksiyadan iborat bo‘ladi. Endi berilgan funksiyani integrallash masalasiga kelsak, vaziyat ancha murakkab bo‘ladi. Bunda berilgan elementar funksiya uchun boshlang‘ich funksiya (aniqmas integral) mavjudligini aniqlash bir masala bo‘lib (bu masala yechimi keyinroq keltiriladi), integral mavjudligi ma’lum taqdirda uni hisoblash ancha qiyin muammo bo‘ladi. Bundan tashqari bir qator elementar funksiyalarning aniqmas integrali elementar funksiyalar orqali ifodalanmaydi. Masalan,

$$I_1=\int e^{-x^2}dx\,,\quad I_2=\int \cos x^2 dx\,,\quad I_3=\int\frac{dx}{\ln x}\,(x>0,\,x\neq 1)\,,\quad I_4=\int\frac{\sin x}{x}dx$$

kabi integrallar mavjud, ammo elementar funksiya bo‘lmaydi. Bu integrallar bilan aniqlanadigan funksiyalar maxsus funksiyalar deb ataladi va ular turli amaliy masalalarni yechishda qo‘llaniladi. Masalan, I_1 orqali aniqlanadigan maxsus funksiya Puasson (farang olimi, 1781 - 1840) integrali deb ataladi va ehtimolliklar nazariyasida, diffuziya va issiqlik o‘tkazish masalasini o‘rganishda keng qo‘llaniladi. I_2 Frenel (farang fizigi va matematigi, 1788 - 1827) integrali deyiladi va optika masalalarini yechishda juda ko‘p qo‘llaniladi. I_3 va I_4 mos ravishda integral logarifm va integral sinus deb ataladi.

Shunday qilib, aniqmas integralni hisoblashning umumiy usuli mavjud bo‘lmasdan, har bir integral o‘ziga xos bir usulda topilishi mumkin. Ammo ma’lum bir hollar uchun integralni hisoblash usullari ishlab chiqilgan va ular bilan tanishishga o‘tamiz.

2.1. Yoyish usuli. Bu usulda dastlab berilgan integral ostidagi murakkabroq $f(x)$ funksiya soddaroq (masalan, integrallari bevosita jadval orqali topiladigan) $f_k(x)$ $(k=1,2,\ldots,n)$ funksiyalarning chiziqli kombinatsiyasiga yoyiladi. So‘ngra bu chiziqli yoyilma integrali oldingi paragrafda ko‘rilgan integralning chiziqlilik xossalaridan foydalanilib hisoblanadi. Bu usulni matematik ko‘rinishda quyidagicha ifodalash mumkin:

$$\int f(x)dx=\int[A_1f_1(x)+A_2f_2(x)+\cdots+A_nf_n(x)]dx=A_1\int f_1(x)dx+A_2\int f_2(x)dx+\cdots+A_n\int f_n(x)dx \quad (1)$$

Misol sifatida bu usulda quyidagi integrallarni hisoblaymiz:

$$\int\frac{7x-5x^2+1}{x^2}dx=\int\left(\frac{7}{x}-5+\frac{1}{x^2}\right)dx=7\int\frac{dx}{x}-5\int dx+\int\frac{dx}{x^2}=7\ln|x|-5x-\frac{1}{x}+C\,;$$

$$\int \mathrm{tg}^2 x dx=\int\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\int\frac{1}{\cos^2 x}dx-\int dx=\mathrm{tg}x-x+C\,;$$

$$\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\int\frac{1}{2a}\left[\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right]dx=\frac{1}{2a}\left[\int\frac{dx}{x-a}-\int\frac{dx}{x+a}\right]=\frac{1}{2a}[\ln|x-a|-\ln|x+a|]+C=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C\,.$$

Bu asosiy integrallar jadvalidagi 17-integral ekanligini eslatib o‘tamiz.

2.2.Differensial belgisi ostiga kiritish usuli. Bu usul aniqmas integralning ushbu ***invariantlik xossasi*** orqali amalga oshiriladi:

$$\int f(x)dx=F(x)+C\Rightarrow\int f(u)du=F(u)+C. \qquad (2)$$

Bu tenglik differensialning invariantlik xossasidan [VII bob,§4, (5)] kelib chiqadi va unda $u=u(x)$ ixtiyoriy differentsiallanuvchi funksiyani ifodalaydi. Shunday qilib, integrallash o‘zgaruvchisi x biror differentsiallanuvchi $u=u(x)$ funksiya bilan almashtirilsa, integral javobida ham x o‘rniga $u=u(x)$ funksiya qo‘yiladi.

Ko‘p hollarda bu usulni qo‘llash uchun dastlab integral ostidagi funksiyaning bir qismi differensial ostiga kiritiladi va integral kerakli ko‘rinishga keltiriladi. Misol sifatida quyidagi integrallarni hisoblaymiz.

$$\int\ln x d\ln x=(u=\ln x)=\int udu=\frac{u^2}{2}+C=\frac{\ln^2 x}{2}+C\,.$$

$$\int(x+4)^{99}dx=\int(x+4)^{99}d(x+4)=(u=x+4)=\int u^{99}du=\frac{u^{100}}{100}+C=\frac{(x+4)^{100}}{100}+C\,.$$

Bu yerda $dx=d(x+4)$ ekanligidan foydalandik.

$$\int\mathrm{tg}xdx=\int\frac{\sin xdx}{\cos x}=\int\frac{-d\cos x}{\cos x}=(u=\cos x)=-\int\frac{du}{u}=-\ln|u|+C=-\ln|\cos x|+C\,.$$

Bu asosiy integrallar jadvalidagi 13-integral javobining isbotini ifodalaydi.

Bu usul yordamida quyidagi ko‘rinishdagi integrallarni ham hisoblash mumkin:

$$\int \frac{f'(x)dx}{f(x)} = \int \frac{df(x)}{f(x)} = \ln|f(x)| + C \ , \qquad \int \frac{f'(x)dx}{\sqrt{f(x)}} = \int \frac{df(x)}{\sqrt{f(x)}} = 2\sqrt{f(x)} + C \ .$$

2.3.O‘zgaruvchilarni almashtirish usuli. Bu usulda berilgan $\int f(x)dx$ integraldagi “eski” x o‘zgaruvchidan “yangi” t o‘zgaruvchiga biror $x=\varphi(t)$ funksiya orqali o‘tamiz. Bunda $\varphi(t)$ funksiya ***almashtirma*** deb ataladi va u differensiallanuvchi, hosilasi uzluksiz hamda teskari funksiyasi $t=\varphi^{-1}(x)$ mavjud deb olinadi. Bu holda

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]d\varphi(t) = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt \qquad (3)$$

tenglik (o‘zgarmas son aniqligida) o‘rinli bo‘ladi. Bunda tenglikning o‘ng tomonidagi integral hisoblangandan keyin, t o‘zgaruvchi o‘rniga $t=\varphi^{-1}(x)$ qo‘yilib, berilgan integral javobi olinadi.

Yuqoridagi (3) tenglikni o‘rinli ekanligini isbotlash uchun uning har ikki tomonining hosilalari o‘zaro teng ekanligi ko‘rsatish kifoya. Bunda, oldingi paragrafda ko‘rsatilgan aniqmas integralning I xossasiga asosan, chap tomondagi integral hosilasi integral ostidagi $f(x)$ funksiyaga teng bo‘ladi. O‘ng tomondagi integralda $t=\varphi^{-1}(x)$ bo‘lgani uchun u x o‘zgaruvchining murakkab funksiyasi bo‘ladi. Shu sababli murakkab funksiyani differensiallash qoidasi va teskari funksiya hosilasi formulasiga asosan

$$\left(\int f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)dt\right)'_x = \left(\int f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)dt\right)'_t \cdot \frac{dt}{dx} = f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)\cdot\frac{1}{\varphi'(t)} = f[\varphi(t)] = f(x)$$

natijani olamiz. Demak, haqiqatan (3) tenglikning ikkala tomoni bir xil $f(x)$ hosilaga ega va shu sababli u o‘rinlidir.

Berilgan integralni (3) tenglik yordamida hisoblash ***o‘zgaruvchilarni almashtirish usuli*** deb ataladi. Agar (3) tenglikda $f\,[\varphi(t)]\cdot\varphi\,'(t)=g(t)$ deb belgilasak, unda o‘zgaruvchilarni almashtirish usulida $f(x)$ funksiyani integrallash masalasi $g(t)$ funksiyani integrallash masalasiga keladi. Ayrim hollarda $x=\varphi(t)$ yoki $t=\varphi^{-1}(x)$ almashtirmani shunday tanlash mumkinki, $g(t)$ funksiya oson integrallamadi. Bu almashtirmani tanlash berilgan integral ko‘rinishiga qarab amalga oshiriladi va integral hisoblovchini mahorati va tajribasiga bog‘liq bo‘ladi.

O‘zgaruvchilarni almashtirish usuliga misol sifatida ushbu integrallarni hisoblaymiz.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x+4}} = \begin{bmatrix} \sqrt{x+4}=t,\ x+4=t^2 \\ x=t^2-4,\ dx=2tdt \end{bmatrix} = \int \frac{2tdt}{(t^2-4)\cdot t} = 2\int \frac{dt}{t^2-2^2} = 2\cdot\frac{1}{2\cdot 2}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = (a\neq 0) = \begin{bmatrix} x=at\,, \quad t=x/a, \\ dx=d(at)=adt \end{bmatrix} = \int \frac{adt}{a^2t^2+a^2} = \frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\,t + C = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C\ .$$

Xuddi shunday tarzda

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$$

ekanligini ko‘rsatish mumkin. Bu natijalar asosiy integrallar jadvaldagi 15-16 integrallarni umumlashtiradi.

2.4. Bo‘laklab integrallash usuli. Faraz qilaylik, $u=u(x)$ va $v=v(x)$ funksiyalar differentsiallanuvchi funksiyalar bo‘lsin. Bu funksiyalar ko‘paytmasining differentsialini yozamiz:

$$d(uv) = vdu + udv\ .$$

Bu yerdan

$$udv = d(uv) - vdu$$

tenglikka ega bo‘lamiz. Bu tenglikning ikkala tomonini hadma-had integrallab, quyidagi natijani hosil qilamiz:

$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu\ .$$

Bu yerdan, integralning oldingi paragrafda ko‘rsatilgan IV xossasiga asosan, ushbu formulaga ega bo‘lamiz:

$$\int udv = uv - \int vdu. \qquad (4)$$

Bu natija ***bo'laklab integrallash formulasi*** deyiladi. Ayrim hollarda (4) formulaning chap tomonidagi integralni hisoblash murakkab, o'ng tomondagi integral esa osonroq hisoblanadi.

Demak, berilgan $\int f(x)dx$ integralni (4) formula orqali bo'laklab integrallash usulida hisoblash quyidagi algoritm asosida amalga oshirilishi mumkin:

- ❖ Integral ostidagi $f(x)dx$ ifodani ikki bo'lakka ajratamiz;
- ❖ Hosil bo'lgan bo'laklardan dx qatnashganini dv, ikkinchisini esa u orqali belgilaymiz;
- ❖ Hosil qilingan dv differensial bo'yicha biror v boshlang'ich funksiyani topamiz. Buning uchun $v = \int dv$ aniqmas integralni hisoblab, unda ixtiyoriy C o'zgarmas sonni C=0 deb olish mumkin;
- ❖ Hosil qilingan u funksiya bo'yicha du differensialni hisoblaymiz;
- ❖ (4) tenglikni o'ng tomonidagi $\int vdu$ integralni hisoblaymiz;
- ❖ Berilgan $\int f(x)dx = \int udv$ integralni (4) tenglikning o'ng tomoni orqali topamiz.

Bunda $f(x)dx=udv$ bo'laklashda u va dv shunday tanlanishi kerakki, (4) formuladagi $\int vdu$ jadval integrali yoki hisoblanishi osonroq bo'lgan integraldan iborat bo'lsin.

Bo'laklab integrallash usuliga misol sifatida $\int xe^x dx$ integralni hisoblaymiz. Bunda ikki holni qaraymiz.

1-hol. Integral ostidagi $xe^x dx$ ifodani $u=e^x$, $dv=xdx$ ko'rinishda bo'laklaymiz. Bu holda

$$du = de^x = (e^x)'dx = e^x dx, \quad v = \int dv = \int xdx = \frac{x^2}{2} + C$$

bo'lgani uchun, C=0 deb, (4) formuladan

$$\int xe^x dx = \frac{x^2}{2}e^x - \frac{1}{2}\int x^2 e^x dx$$

tenglikka kelamiz. Ammo bunda hosil bo'lgan o'ng tomondagi integral berilgan integralga nisbatan murakkabroq ko'rinishga ega. Demak, bunday bo'laklash maqsadga muvofiq emas.

2-hol. Bu holda $u=x$, $dv=e^x dx$ deb olamiz. Bunda

$$du = dx, \quad v = \int dv = \int e^x dx = e^x + C$$

bo'ladi. Bu yerda C=0 deb va (4) formuladan foydalanib, berilgan integralni quyidagicha oson hisoblaymiz:

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C = (x-1)e^x + C.$$

Ayrim integrallarni hisoblash uchun bo'laklab integrallash formulasini bir necha marta qo'llashga to'g'ri keladi. Bunga misol sifatida ushbu integralni qaraymiz:

$$\int x^2 \sin xdx = \left[\begin{array}{c} u = x^2, \quad dv = \sin xdx, \\ du = 2xdx, \quad v = \int \sin xdx = -\cos x \end{array} \right] = -x^2 \cos x + 2\int x\cos xdx =$$

$$= \left[\begin{array}{c} u = x, \quad dv = \cos xdx, \\ du = dx, \ v = \int \cos xdx = \sin x \end{array} \right] = -x^2 \cos x + 2(x\sin x - \int \sin xdx) = -x^2 \cos x + 2(x\sin x + \cos x) + C.$$

Shunday qilib, bu yerda (4) bo'laklab integrallash formulasidan ikki marta foydalandik.

Izoh: Yuqoridagidek mulohaza yuritib, $\int x^n \sin xdx$, n=1,2,3, … , integral bo'laklab integrallash formulasini n marta qo'llash orqali hisoblanishini ko'rish mumkin.

Bo'laklab integrallash usulida

$$\int x^n \cos axdx, \quad \int x^n \sin axdx, \quad \int \sqrt{a^2 - x^2}dx, \quad \int x^n a^x dx, \quad \int x^n \ln xdx,$$

$$\int e^{ax} \cos bxdx, \quad \int e^{ax} \sin bxdx, \quad \int x^n \arccos xdx, \quad \int x^n \mathrm{arctg} xdx, \quad \int \sin \ln xdx$$

va shularga o‘xshash integrallarni hisoblash mumkin.

2.5. Kvadrat uchhadli integrallarni hisoblash. Endi kvadrat uchhad qatnashgan ayrim aniqmas integrallarni hisoblash masalasini ko‘rib chiqamiz.

Dastlab ushbu integrallarni qaraymiz:

$$I_1=\int\frac{dx}{ax^2+bx+c},\quad I_2=\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\ .$$

Avvalo maxrajdagi kvadrat uchhaddan to‘liq kvadratni ajratib olamiz:

$$ax^2+bx+c=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right]=a\left[x^2+2\frac{b}{2a}x+(\frac{b}{2a})^2+\frac{c}{a}-(\frac{b}{2a})^2\right]=a\left[(x+\frac{b}{2a})^2\pm\kappa^2\right].$$

Bu yerda

$$\pm k^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}=\frac{b^2-4ac}{4a^2}=\frac{D}{4a^2}$$

belgilash kiritilgan. Bunda, agar kvadrat uchhad diskriminanti $D=b^2–4ac>0$, ya’ni uning ildizlari haqiqiy sonlar bo‘lsa, k^2 manfiy ishora bilan; $D<0$ bo‘lsa k^2 musbat ishora bilan olinadi. Ikkala holda ham $k\neq0$ bo‘lishini ta’kidlab o‘tamiz. $D=0$ holni keyinchalik ko‘ramiz.

Yuqoridagi tenglik asosida I_1 integralni o‘zgaruvchilarni almashtirish usulida quyidagi ko‘rinishga keltiramiz:

$$I_1=\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{(x+\frac{b}{2a})^2\pm\kappa^2}=\begin{bmatrix}t=x+\frac{b}{2a}, \\ dt=d(x+\frac{b}{2a})=dx\end{bmatrix}=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^2\pm\kappa^2}.$$

Bu tenglikning o‘ng tomonida jadval integrali turibdi va

$$\int\frac{dt}{t^2+k^2}=\frac{1}{k}\operatorname{arctg}\frac{t}{k}+C\ ,\qquad \int\frac{dt}{t^2-k^2}=\frac{1}{2k}\ln\left|\frac{t-k}{t+k}\right|+C$$

ekanligini eslatib o‘tamiz.

Endi $a<0$ holni ko‘ramiz. Bu holda kvadrat uchhad diskriminanti $D>0$ deb olishimiz kerak, chunki aks holda barcha nuqtalarda $ax^2+bx+c\leq0$ va I_2 integral ostidagi funksiya aniqlanmagan bo‘ladi. Bu shartda

$$I_2=\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{1}{\sqrt{|a|}}\int\frac{dx}{\sqrt{k^2-(x+\frac{b}{2a})^2}}=\begin{bmatrix}t=x+\frac{b}{2a}, \\ dt=dx\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{|a|}}\int\frac{dt}{\sqrt{\kappa^2-t^2}}=\frac{1}{\sqrt{|a|}}\arcsin\frac{t}{k}+C=\frac{1}{\sqrt{|a|}}\arcsin\frac{2ax+b}{2ak}+C\ .$$

Endi umumiyroq ko‘rinishdagi quyidagi integrallarni qaraymiz:

$$I_3=\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx,\quad I_4=\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx\ .$$

Oldin I_3 integralni hisoblash yo‘lini ko‘rsatamiz:

$$I_3=\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx=\int\frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+(B-\frac{Ab}{2a})}{ax^2+bx+c}dx=$$

$$=\frac{A}{2a}\int\frac{(2ax+b)dx}{ax^2+bx+c}+(B-\frac{A}{2a})\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\frac{A}{2a}\int\frac{(2ax+b)dx}{ax^2+bx+c}+(B-\frac{A}{2a})\cdot I_1=$$

$$=\frac{A}{2a}\int\frac{d(ax^2+bx+c)}{ax^2+bx+c}+(B-\frac{A}{2a})\cdot I_1=\frac{A}{2a}\ln\left|ax^2+bx+c\right|+(B-\frac{A}{2a})\cdot I_1.$$

Bu yerda I_1 yuqorida ko‘rib o‘tilgan integraldir va uni hisoblashni bilamiz.

I_4 integral ham shu kabi hisoblanadi:

$$I_4=\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=\frac{A}{2a}\int\frac{d(ax^2+bx+c)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}+(B-\frac{A}{2a})\cdot I_2=\frac{A}{a}\sqrt{ax^2+bx+c}+(B-\frac{A}{2a})\cdot I_2\ .$$

Bu yerdagi I_2 integralni hisoblash usuli yuqorida ko‘rsatilgan edi.

XULOSA

Differensiallash amaliga nisbatan integrallash amali ancha murakkabdir. Hatto ayrim elementar funksiyalarning aniqmas integrallari elementar funksiyalar sinfida mavjud boʻlmasdan, ular maxsus (noelementar) funksiyalar orqali ifodalanadi. Bundan tashqari ixtiyoriy aniqmas integralni hisoblashga imkon beradigan universal, umumiy usul mavjud emas. Shu sababli faqat ayrim , maʼlum bir xususiyatlarga ega boʻlgan, aniqmas integrallarni hisoblash usullarini koʻrsatish mumkin. Ularga yoyish, differensial ostiga kiritish, oʻzgaruvchilarni almashtirish va boʻlaklab integrallash usullari kiradi.

Koʻrsatilgan usullardan foydalanib kvadrat uchhad qatnashgan ayrim aniqmas integrallarni hisoblash mumkin.

Tayanch iboralar

* Yoyish usuli * Differensial ostiga kiritish usuli * Oʻzgaruvchilarni almashtirish usuli * Boʻlaklab integrallash usuli * Kvadrat uchhadli integrallar

Takrorlash uchun savollar

1. Elementar funksiyalarning integrali har doim ham elementar funksiyadan iborat boʻladimi?
2. Elementar funksiyalar orqali ifodalanmaydigan integrallarga misol keltiring.
3. Yoyish usulida integral qanday hisoblanadi?
4. Integralni yoyish usulida hisoblashga misol keltiring.
5. Differensial ostiga kiritish usulining mohiyati nimadan iborat?
6. Differensial ostiga kiritish usulining tatbigʻiga misol koʻrsating.
7. Oʻzgaruvchilarni almashtirish usuli nimadan iborat?
8. Almashtirma deb nimaga aytiladi?
9. Aniqmas integralni oʻzgaruvchilarni almashtirish usulida hisoblashga doir misol keltiring.
10. Boʻlaklab integrallash formulasi qanday koʻrinishda boʻladi?
11. Boʻlaklab integrallashda qanday hollar boʻlishi mumkin?
12. Qanday koʻrinishdagi aniqmas integrallarni boʻlaklab integrallash usulida hisoblash mumkin?
13. Kvadrat uchhadli I_1 integral qanday koʻrinishda boʻladi?
14. Kvadrat uchhadli I_1 integral qanday hisoblanadi?
15. Kvadrat uchhad qatnashgan I_2 integral qanday koʻrinishga ega?
16. Kvadrat uchhad qatnashgan I_2 integral qanday hisoblanadi?
17. Kvadrat uchhadli I_3 integral qanday hisoblanadi?
18. Kvadrat uchhad qatnashgan I_4 integral qanday qilib I_2 integral koʻrinishiga keltiriladi?
19. Kvadrat uchhadli integrallar qanday funksiyalar orqali ifodalanadi?

RATSIONAL KASRLAR VA ULARNI INTEGRALLASH

- ***Ratsional funksiyalar.***
- ***Eng sodda ratsional funksiyalar va ularni integrallash.***
- ***Kompleks sonlar haqida tushunchalar.***
- ***Ratsional funksiyalarni integrallash.***

Oldingi paragrafda har qanday elementar funksiya integrali yana elementar funksiyadan iborat boʻlishi shart emas ekanligini misollarda koʻrsatgan edik. Shu sababli qanday elementar funksiyalarning integrallari elementar funksiyalar orqali ifodalanishini, ya’ni elementar funksiyalarda integrallanuvchi funksiyalar sinflarini aniqlash masalasi paydo bo‘ladi. Ushbu paragrafda bunday funksiyalarning muhim bir sinfini qisqacha ko‘rib o‘tamiz.

3.1. Ratsional funksiyalar. Ma’lumki ,

$$P_n(x)=a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} +\dots a_1x + a_0 \quad (a_n\neq 0) \qquad (1)$$

ko‘rinishdagi funksiya ***ko‘phad*** deyiladi. Bunda a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, …, a_1, a_0 o‘zgarmas sonlar bo‘lib, ular ko‘phadning ***koeffitsiyentlari*** , n esa ko‘phadning ***darajasi*** deb ataladi.

Masalan, $P_3(x)=5x^3-x^2+2x+4$ – III darajali, $P_2(x)=3x^2-5x+2$ – II darajali, $P_1(x)=8x+3$ – I darajali ko‘phadlardir.

Izoh: Har qanday o‘zgarmas funksiyani $P_0(x)=a_0$ – 0-darajali ko‘phad deb qarash mumkin.

<u>1-TA’RIF:</u> Ikkita ko‘phad nisbatidan iborat funksiya ***ratsional kasr yoki ratsional funksiya*** deyiladi.

Odatda ratsional kasr $R(x)$ kabi belgilanadi va, ta’rifga asosan,

$$R(x)=\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}=\frac{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\dots+b_1x+b_0}{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0} \qquad (2)$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Masalan,

$$\frac{3x-5}{x^2-2x+7},\quad \frac{4x^2+x-3}{5x^2-3x+1},\quad \frac{6x^3+5x^2+9x-3}{5x^2-3x+1}$$

ratsional kasrlardir.

Izoh: Har qanday $Q_m(x)$ ko‘phadni maxraji $P_0(x)=1$ bo‘lgan ratsional kasr kabi qarash mumkin va shu nuqtai nazardan ko‘phadlar ba’zan butun funksiyalar deb ataladi.

Ma’lumki, m/n oddiy (sonli) kasrda maxraj suratdan katta, ya’ni $n>m$ bo‘lsa, bu kasr to‘g‘ri, $n\leq m$ holda esa noto‘g‘ri kasr deyiladi. Bu tushuncha ratsional kasrlar uchun quyidagicha kiritiladi.

<u>2-TA’RIF:</u> Agar (2) ratsional kasrda maxrajning darajasi $n>m$ bo‘lsa, u ***to‘g‘ri***, $n\leq m$ holda esa ***noto‘g‘ri ratsional kasr*** deb aytiladi.

Masalan,

$$R(x)=\frac{3x^4-x^3+2x^2-5x+1}{x^6+2x^4+3x^2+7}$$

to‘g‘ri,

$$R_1(x)=\frac{2x^3-3x^2+4x-5}{x^3+x^2-6x+1},\quad R_2(x)=\frac{2x^5-3x^3+x+5}{x^3+2x^2-4x+1}$$

noto‘g‘ri ratsional kasrlar bo‘ladi.

Har qanday noto‘g‘ri m/n ($m>n$) oddiy kasrni

$$\frac{m}{n}=k+\frac{r}{n},\quad k\in Z,\quad r<n$$

ko‘rinishda, ya’ni butun son va to‘g‘ri kasr yig‘indisi kabi ifodalash mumkin. Xuddi shunday tasdiq noto‘g‘ri ratsional kasrlar uchun ham o‘rinli bo‘ladi, ya’ni ular uchun ushbu tenglikni hosil qilish mumkin:

$$R(x)=\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}=L_{m-n}(x)+\frac{G_r(x)}{P_n(x)},\quad r<n\,. \qquad (3)$$

Bunda $L_{m-n}(x)$ va $G_r(x)$ ko‘rsatilgan tartibli ko‘phadlar bo‘ladi.

Demak, har doim noto‘g‘ri ratsional kasrni ko‘phad (butun funksiya) va to‘g‘ri ratsional kasr yig‘indisi kabi ifodalash mumkin.

Masalan,

$$R(x)=\frac{2x^4-3x^3+1}{x^2+x-2}$$

noto‘g‘ri ratsional kasr suratini maxrajiga ustun usulida bo‘lib, uni

$$R(x)=\frac{2x^4-3x^3+1}{x^2+x-2}=2x^2-5x+9+\frac{-19x+19}{x^2+x-2}$$

ko‘rinishga keltira olamiz.

Har qanday ko‘phad darajali funksiyalarning algebraik yig‘indisi sifatida oson integrallamadi va uning integrali yana ko‘phaddan iborat, ya’ni elementar funksiya bo‘ladi. Demak, (3) tenglikka asosan, har qanday ratsional kasrni integrallash masalasi to‘g‘ri ratsional kasrni integrallash masalasiga olib keladi. Shu sababli kelgusida faqat to‘g‘ri ratsional kasrlarni integrallash bilan shug‘ullanamiz.

3.2. Eng sodda ratsional funksiyalar va ularni integrallash. Quyidagi ko‘rinishdagi to‘g‘ri ratsional kasrlarni qaraymiz:

I. $R_I(x)=\dfrac{A}{x-a}$, II. $R_{II}(x)=\dfrac{A}{(x-a)^k}$, III. $R_{III}(x)=\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$, IV. $R_{IV}(x)=\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$.

Bunda A, B, a, p, q–haqiqiy sonlar, k=2,3,4, ... , va x^2+px+q kvadrat uchhad haqiqiy ildizlarga ega emas, ya’ni uning diskriminanti $D=p^2-4q<0$ deb olinadi.

<u>3-TA’RIF:</u> Yuqorida kiritilgan $R_{\text{I}}(x)$ – $R_{\text{IV}}(x)$ mos ravishda I–IV tur ***eng sodda ratsional kasrlar*** deb ataladi.

Eng sodda ratsional kasrlarni integrallash masalasini qaraymiz.

I va II turdagi oddiy kasrlarni integrallash jadval integrallariga oson keltiriladi:

$$\int R_I(x)dx=\int\frac{Adx}{x-a}=A\int\frac{d(x-a)}{x-a}=A\ln|x-a|+C\,;$$

$$\int R_{II}(x)dx=\int\frac{Adx}{(x-a)^{\kappa}}=A\int(x-a)^{-\kappa}d(x-a)=A\frac{(x-a)^{-\kappa+1}}{-\kappa+1}+C=\frac{A}{(1-\kappa)(x-a)^{\kappa-1}}+C\,,\quad k=2,3,4,\cdots\,.$$

III turdagi eng sodda $R_{\text{III}}(x)$ ratsional kasrning integralini hisoblash usuli oldingi paragrafda (I_3 integral) ko‘rilgan edi. Shunday bo‘lsada, bayonimizni to‘liq bo‘lishi va hisoblashlarni so‘ngi nuqtasigacha yetkazish maqsadida , bu usulni biz qarayotgan

$$p^2-4q<0\Rightarrow q-\frac{p^2}{4}=\sigma^2>0$$

hol uchun yana bir marta eslatamiz:

$$\int R_{III}(x)dx=\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx=\int\frac{\frac{A}{2}(2x+p)-\frac{Ap}{2}+B}{x^2+px+q}dx=\frac{A}{2}\int\frac{(2x+p)dx}{x^2+px+q}+(B-\frac{Ap}{2})\int\frac{dx}{x^2+px+q}=$$

$$=\begin{bmatrix}x^2+px+q=t\\(2x+p)dx=dt\end{bmatrix}=\frac{A}{2}\int\frac{dt}{t}+(B-\frac{Ap}{2})\int\frac{dx}{x^2+px+q}=\frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right|+(B-\frac{Ap}{2})\int\frac{d(x+\frac{p}{2})}{(x+\frac{p}{2})^2+\sigma^2}=$$

$$=\frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right|-(B-\frac{Ap}{2})\cdot\frac{1}{\sigma}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sigma}+C\quad.$$

Endi IV turdagi eng sodda $R_{\text{IV}}(x)$ kasrning integralini hisoblaymiz:

$$\int R_{IV}(x)dx=\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}dx=\int\frac{\frac{A}{2}(2x+p)+B-\frac{Ap}{2}}{(x^2+px+q)^k}dx=\frac{A}{2}I_k+(B-\frac{Ap}{2})J_k\,.$$

Bu yerdagi

$$I_k=\int\frac{(2x+p)dx}{(x^2+px+q)^k}\,,\ k=2,3,4,\cdots\quad,\ J_k=\int\frac{d(x+\frac{p}{2})}{[(x+\frac{p}{2})^2+\sigma^2]^k}\,,\ \sigma=\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\,,\ k=2,3,4,\cdots$$

integrallarni hisoblaymiz:

$$I_k=\int\frac{(2x+p)dx}{(x^2+px+q)^k}=\begin{bmatrix}x^2+px+q=t\\(2x+p)dx=dt\end{bmatrix}=\int\frac{dt}{t^k}==\frac{1}{(1-k)t^{k-1}}+C=\frac{1}{(1-k)(x^2+px+q)^{k-1}}+C\,;$$

$$J_k=\int\frac{d(x+\frac{p}{2})}{[(x+\frac{p}{2})^2+\sigma^2]^k}=\begin{bmatrix} t=x+\frac{p}{2}, \\ dt=dx\end{bmatrix}=\int\frac{dt}{(t^2+\sigma^2)^k}=\frac{1}{\sigma^2}\int\frac{t^2+\sigma^2-t^2}{(t^2+\sigma^2)^n}dt=\frac{1}{\sigma^2}\int\frac{dt}{(t^2+\sigma^2)^{k-1}}-\frac{1}{\sigma^2}\int\frac{t^2dt}{(t^2+\sigma^2)^k}$$

Bu tenglikdagi oxirgi integralga bo‘laklab integrallash formulasini qo‘llaymiz. Buning uchun integral ostidagi ifodani

$$u=t\,,\quad dv=\frac{tdt}{(t^2+\sigma^2)^k}$$

ko‘rinishda bo‘laklaymiz. Bu holda $du=dt$ va

$$v=\int dv=\int\frac{tdt}{(t^2+\sigma^2)^k}=\frac{1}{2}\int\frac{d(t^2+\sigma^2)}{(t^2+\sigma^2)^k}=\frac{1}{2(1-k)(t^2+\sigma^2)^{k-1}}$$

bo‘lgani uchun , bo‘laklab integrallash formulasiga asosan, ushbu tenglikni hosil qilamiz:

$$\int\frac{t^2dt}{(t^2+\sigma^2)^k}=\frac{t}{2(1-k)(t^2+\sigma^2)^{k-1}}-\frac{1}{2(1-k)}\int\frac{dt}{(t^2+\sigma^2)^{k-1}}\,.$$

Natijada J_k integralni hisoblash uchun

$$J_k=\frac{1}{\sigma^2}\int\frac{dt}{(t^2+\sigma^2)^{k-1}}-\frac{1}{\sigma^2}\int\frac{t^2dt}{(t^2+\sigma^2)^k}=\frac{1}{\sigma^2}\int\frac{dt}{(t^2+\sigma^2)^{k-1}}+\frac{t}{2(k-1)\sigma^2(t^2+\sigma^2)^{k-1}}-$$

$$-\frac{1}{2(k-1)\sigma^2}\int\frac{dt}{(t^2+\sigma^2)^{k-1}}=\frac{1}{2(k-1)\sigma^2}\left[\frac{t}{(t^2+\sigma^2)^{k-1}}+(2k-3)\int\frac{dt}{(t^2+\sigma^2)^{k-1}}\right]$$

formulani hosil etamiz. Bu yerdan J_k integralni hisoblash uchun ushbu

$$J_k=\int\frac{dt}{(t^2+\sigma^2)^k}=\frac{1}{2(k-1)\sigma^2}[\frac{t}{(t^2+\sigma^2)^{k-1}}+(2k-3)J_{k-1}]\quad(4)$$

rekkurent formula o‘rinli ekanligini ko‘ramiz. Bu rekkurent formula bo‘yicha J_k integralni hisoblash xuddi shu ko‘rinishdagi, ammo k parametrining qiymati bittaga kichik bo‘lgan J_{k-1} integralni hisoblashga olib keladi. O‘z navbatida J_{k-1} integralni hisoblash J_{k-2} integralga keltiriladi va bu jarayon quyidagi J_1 jadval integrali hosil bo‘lguncha davom ettiriladi:

$$J_1=\int\frac{dt}{t^2+\sigma^2}=\frac{1}{\sigma}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sigma}+C\,.$$

J_k integral uchun hosil qilingan ifodaga t va σ o‘rniga ularning

$$t=x+\frac{p}{2}\,,\quad \sigma=\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$$

qiymatlarini qo‘yib, bu integral javobini topamiz.

Shunday qilib, I–IV turdagi eng sodda ratsional kasrlar elementar funksiyalarda integrallanuvchi va ularning integrallari logarifmik, arctg($ax+b$) ko‘rinishdagi teskari trigonometrik funksiyalar hamda ratsional kasrlar orqali ifodalanadi.

3.3. Kompleks sonlar haqida tushunchalar. Ratsional funksiyalarni integrallash bo‘yicha keyingi tasdiqlarni ifodalash uchun bizga kompleks son tushunchasi kerak bo‘ladi. $i^2=-1$ yoki $i=\sqrt{-1}$ tenglik bilan aniqlanadigan i belgi ***mavhum birlik*** deb ataladi. Mavhum birlik yordamida manfiy sondan ham kvadrat ildiz olish imkoniyati paydo bo‘ladi. Masalan,

$$\sqrt{-25}=\sqrt{25\cdot(-1)}=\sqrt{25\cdot i^2}=5i\,.$$

Mavhum birlik i va x, y haqiqiy sonlar orqali $z=x+yi$ kabi aniqlanadigan ifodalar ***kompleks sonlar*** deyiladi. Bunda y=0 desak, $z=x$ haqiqiy son hosil bo‘ladi, ya’ni kompleks sonlar to‘plami haqiqiy sonlarni o‘z ichiga oladi.

Ikkita $z_1=x_1+y_1i$, $z_2=x_2+y_2i$ kompleks sonlarning yig‘indisi, ayirmasi va ko‘paytmasi algebraik ikkihadlar yig‘indisi, ayirmasi va ko‘paytmasi kabi aniqlanadi:

$$z_1+z_2=(x_1+x_2)+(y_1+y_2)i\,,\quad z_1-z_2=(x_1-x_2)+(y_1-y_2)i\,,$$

$$z_1z_2=(x_1+y_1i)\cdot(x_2+y_2i)=x_1x_2+(x_1y_2+x_2y_1)i+y_1y_2i^2=(x_1x_2-y_1y_2)+(x_1y_2+x_2y_1)i\,.$$

Masalan, $z_1=3+4i$, $z_2=5–2i$ kompleks sonlar uchun

$z_1+z_2=8+2i$, $z_1–z_2=–2+6i$, $z_1z_2=23+14i$.

Ikkita $x+yi$ va $x–yi$ ko‘rinishdagi kompleks sonlar ***qo‘shma kompleks sonlar*** deyiladi. Qo‘shma kompleks sonlar yig‘indisi $2x$ va ko‘paytmasi x^2+y^2 doimo haqiqiy son bo‘ladi.

Agar $x^2+px+q=0$ kvadrat tenglamaning diskriminanti $D=(p/2)^2–q<0$ bo‘lsa, unda bu tenglama ikkita $a\pm ib$ ko‘rinishdagi qo‘shma kompleks sonlardan iborat ildizlarga ega bo‘ladi .

Masalan, $x^2–8x+25=0$ kvadrat tenglamada diskriminanti

$$D=(–4)^2–25=–9 \text{ va } \sqrt{D}=\sqrt{-9}=\sqrt{9\cdot(-1)}=\sqrt{9i^2}=3i$$

bo‘lgani uchun, bu tenglamaning ildizlari $x_1=4–3i$ va $x_2=4+3i$ qo‘shma kompleks sonlardan iborat ekanligi kelib chiqadi.

3.4. Ratsional funksiyalarni integrallash. Endi umumiy holda $R(x)=Q_m(x)/P_n(x)$ to‘g‘ri ratsional kasrni integrallash masalasi ustida qisqacha to‘xtalib o‘tamiz. Bunda “Oliy algebra” fanida ko‘riladigan va isbotlanadigan bir qator teoremalarni isbotsiz keltiramiz. Ularning orasida ushbu teorema asosiy vazifani bajaradi:

1-TEOREMA: Har qanday (2) ko‘rinishdagi $R(x)$ to‘g‘ri ratsional kasrni

$$R(x)=\sum_{k=1}^{r}R_k(x) \qquad (6)$$

ko‘rinishda yozish mumkin. Bunda $R_k(x)$ I–IV turdagi eng sodda ratsional kasrlar, ularning umumiy soni $r\leq n$ bo‘ladi.

Demak, har qanday to‘g‘ri ratsional kasrni eng sodda ratsional kasrlarning (4) chiziqli kombinatsiyasi ko‘rinishida yozish mumkin. Kelgusida (6) tenglikni $R(x)$ ratsional kasrning yoyilmasi deb yuritamiz.

Masalan, ushbu ratsional kasrlar uchun

$$\frac{x^2+2x+6}{x^3-7x^2+14x-8}=\frac{3}{x-1}-\frac{7}{x-2}+\frac{5}{x-4}, \qquad (7)$$

$$\frac{3x-2}{x^3+3x^2+4x+2}=\frac{-5}{x+1}+\frac{5x+8}{x^2+2x+2} \qquad (8)$$

yoyilmalar o‘rinli ekanligini bevosita tekshirib ko‘rish mumkin.

1-teoremadan har qanday $R(x)=Q_m(x)/P_n(x)$ ratsional kasr, eng sodda ratsional kasrlarning yig‘indisi sifatida, elementar funksiyalarda integrallanuvchi va uning integrali logarifmik, arktangens hamda ratsional funksiyalar orqali ifodalanishi kelib chiqadi. Ammo bu integralni hisoblash uchun bizga ratsional kasrning (6) yoyilmasi kerak bo‘ladi. Shu sababli $R(x)=Q_m(x)/P_n(x)$ ratsional kasrning (6) yoyilmasini topish masalasini qaraymiz.

Dastlab (4) yoyilmada qatnashadigan eng sodda $R_k(x)$ kasrlarning turi va soni qanday aniqlanishini ko‘ramiz. Bu savolga javob maxrajining nollari, ya’ni

$$P_n(x)=0 \qquad (9)$$

algebraik tenglamaning ildizlari yordamida topiladi. Shu sababli (9) algebraik tenglamaning ildizlari to‘g‘risidagi ayrim ma’lumotlarni va ulardan kelib chiqadigan natijalarni qisqacha, isbotsiz keltiramiz.

Biror $x=a$ soni (9) tenglamani ayniyatga aylantirsa, ya’ni $P_n(a)\equiv0$ bo‘lsa, u shu tenglamaning ***ildizi*** deyiladi. Masalan, $x=–1$ soni

$$P_3(x)=x^3+3x^2+4x+2=0 \qquad (10)$$

tenglamaning ildizi bo‘ladi, chunki $P_3(–1)=(–1)^3+3\cdot(–1)^2+4\cdot(–1)+2\equiv0$.

(9) tenglama uchun $x=a$ ildiz bo‘lib, $P_n'(a)\neq 0$ shart bajarilsa, unda $x=a$ bu tenglamaning ***oddiy ildizi*** deyiladi. Bu holda (9) tenglamani chap tomonidagi ko‘phadni $P_n(x)=(x–a)L_{n–1}(x)$ ko‘paytma ko‘rinishda ifodalab bo‘ladi. Bu tenglikda $L_{n–1}(x)$ ko‘paytuvchi biror $(n–1)$- darajali ko‘phad bo‘lib, u $L_{n–1}(a)\neq0$ shartni qanoatlantiradi.

Masalan, $x=–1$ soni (10) tenglamaning oddiy ildizi bo‘ladi, chunki

$$P_3'(x)=(x^3+3x^2+4x+2)'=3x^2+6x+4 \Rightarrow P_3'(-1)=1\neq 0\,.$$

Bunda haqiqatan ham yuqorida aytilgan tasdiq o‘rinli bo‘lib,

$$P_3(x)=x^3+3x^2+4x+2=(x+1)(x^2+2x+2)=(x+1)L_2(x) \qquad (11)$$

tenglik bajarilishini va $L_2(–1)=1\neq0$ ekanligini tekshirib ko‘rish mumkin.

2-TEOREMA: Agar $x=a$ soni (9) tenglamaning, ya'ni $R(x)=Q_m(x)/P_n(x)$ ratsional kasr maxrajining oddiy ildizi bo'lsa, unda $R(x)$ kasrning (6) yoyilmasida bitta $A/(x–a)$ ko'rinishdagi I tur eng sodda ratsional kasrdan iborat qo'shiluvchi qatnashadi.

Masalan, (8) ratsional kasrning maxraji uchun $x=–1$ oddiy ildizi bo'lishini yuqorida ko'rib o'tdik va shu sababli ratsional kasrning (8) yoyilmasida bitta $–5/(x+1)$ qo'shiluvchi qatnashmoqda.

Agar (9) tenglamaning $x=a$ ildizi uchun

$$P_n^{(k)}(a)=0\ (k=1,2,\cdots,s-1)\,,\quad P_n^{(s)}(a)\neq 0$$

shartlar bajarilsa, $x=a$ bu tenglamaning ***s karrali ildizi*** deyiladi. Bu holda (7) tenglamaning chap tomonini $P_n(x)=(x–a)^s L_{n–s}(x)$ $[L_{n–s}(a)\neq 0]$ ko'rinishda ifodalab bo'ladi.

Masalan, $P_3(x)=x^3–x^2–8x+12=0$ tenglama uchun $x=2$ ikki karrali ildiz bo'ladi. Haqiqatan ham

$P_3(2)=0\,,\ P_3'(x)\big|_{x=2}=(3x^2-2x-8)\big|_{x=2}=0\,,\ P_3''(x)\big|_{x=2}=(6x-2)\big|_{x=2}=10\neq 0$ va $P_3(x)=x^3–x^2–8x+12=(x–2)^2(x+3)$ (12)

tenglik o'rinli.

3-TEOREMA: Agar $x=a$ soni (9) tenglamaning, ya'ni $R(x)=Q_m(x)/P_n(x)$ ratsional kasr maxrajining s karrali ildizi bo'lsa, unda $R(x)$ kasrning (6) yoyilmasida

$$\frac{A_k}{(x-a)^k}\,,\quad k=1,2,\cdots,s$$

ko'rinishdagi bitta I tur va $s–1$ ta II tur eng sodda ratsional kasrlardan iborat qo'shiluvchilar qatnashadi.

Masalan, (12) tenglikdan

$$R(x)=\frac{2x^2-2x+1}{x^3-x^2-8x+12}$$

ratsional kasrning maxraji uchun $x=2$ ikki karrali va $x=–3$ oddiy ildiz ekanligi kelib chiqadi va bunda

$$R(x)=\frac{2x^2-2x+1}{x^3-x^2-8x+12}=\frac{1}{x-2}+\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{1}{x+3}$$

yoyilma o'rinli bo'lishini tekshirib ko'rish mumkin.

Agar biror $x_1=a+bi$ kompleks son (9) algebraik tenglamaning ildizi bo'lsa, unda $x_2=a–bi$ qo'shma kompleks son ham bu tenglamaning ildizi bo'lishini isbotlash mumkin. Demak, $P_n(x)=0$ tenglama kompleks ildizlarga ega bo'lsa, bu ildizlar albatta qo'shma kompleks sonlar juftliklaridan iborat bo'ladi.

Agar $x_{1,2}=a\pm bi$ qo'shma kompleks sonlar $P_n(x)=0$ tenglamaning oddiy ildizi bo'lsa, unda

$$P_n(x)=(x–x_1)(x–x_2)L_{n–2}(x)=(x^2+px+q)L_{n–2}(x)\quad [L_{n–2}(x_{1,2})\neq 0,\ p=–2a,\ q=a^2+b^2]$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Masalan,

$$P_4(x)=2x^4–17x^3+77x^2–107x–75$$

ko'phad uchun $x_{1,2}=3\pm 4i$ oddiy kompleks ildiz bo'ladi. Bu holda

$$(x–x_1)(x–x_2)=x^2–6x+25 \Rightarrow P_4(x)=(x^2–6x+25)(2x^2–5x–3)\quad (13)$$

ekanligini ko'rsatish mumkin.

4-TEOREMA: Agar $R(x)=Q_m(x)/P_n(x)$ ratsional kasrning maxraji $x_{1,2}=a\pm bi$ qo'shma kompleks sonlar juftligidan iborat oddiy ildizga ega bo'lsa, unda $R(x)$ kasrning (4) yoyilmasida bitta

$$\frac{Ax+B}{x^2+px+q}\quad (p=-2a\,,\quad q=a^2+b^2)$$

ko'rinishdagi III tur eng sodda ratsional kasr qatnashadi.

Masalan, (13) tenglikka asosan,

$$\frac{2x^3-x^2+5x+1}{(x^2-6x+25)(2x^2-5x-3)}=\frac{2x^3-x^2+5x+1}{(x^2-6x+25)(2x+1)(x-3)}=\frac{Ax+B}{x^2-6x+25}+\frac{C}{2x+1}+\frac{D}{x-3}$$

ko‘rinishdagi yoyilma o‘rinli bo‘ladi.

5-TEOREMA: Agar $R(x)=Q_m(x)/P_n(x)$ ratsional kasrning maxraji uchun $x_{1,2}=a\pm bi$ qo‘shma kompleks sonlar s karrali ildizi bo‘lsa, unda

$$P_n(x)=(x^2+px+q)^s L_{n-2s}(x) \quad [L_{n-2s}(x_{1,2})\neq 0,\ p=-2a,\ q=a^2-b^2]$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi va $R(x)$ ratsional kasrning chiziqli yoyilmasida

$$\frac{A_k x+B_k}{(x^2+px+q)^k},\quad k=1,2,\cdots,s$$

ko‘rinishdagi bitta III tur va s–1 ta IV tur eng sodda ratsional kasrlar qatnashadi.

Masalan, $P_4(x)=(x^2+9)^3(x-5)=0$ tenglama uchun $x=\pm 3i$ uch karrali kompleks ildiz, $x=5$ esa oddiy haqiqiy ildiz bo‘lgani uchun ushbu ratsional kasr quyidagi ko‘rinishdagi yoyilmaga ega bo‘ladi:

$$\frac{4x^3-3x^2+x-6}{(x^2+9)^3(x-5)}=\frac{A_1x+B_1}{x^2+9}+\frac{A_2x+B_2}{(x^2+9)^2}+\frac{A_3}{x-5}\ .$$

Demak, yuqoridagi 2–5- teoremalardan

$$R(x)=\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$$

to‘g‘ri ratsional kasrning (6) yoyilmasidagi eng sodda ratsional kasrlarning turlari va sonlari aniqlanadi. Ammo (6) yoyilmani to‘liq aniqlash uchun unga kiruvchi eng sodda ratsional kasrlarning suratlaridagi A_k , B_k koeffitsiyentlarni ham aniqlash kerak bo‘ladi. Bu masala ***noma’lum koeffitsiyentlar usuli*** deb ataluvchi usulda hal qilinishi mumkin. Bu usulning mohiyatini quyida misol orqali tushuntiramiz.

Shunday qilib, ratsional kasrning $\int R(x)dx$ integralini hisoblash uch bosqichda amalga oshiriladi.

I. Dastlab $R(x)$ kasr maxrajning nollari orqali uning (6) yoyilmasidagi eng sodda ratsional kasrlarning turlari va sonlari 2-5 teoremalar yordamida aniqlanadi.

II. Yoyilmadagi eng sodda ratsional kasrlarning suratlaridagi A_k va B_k qiymatlari noma’lum koeffitsiyentlar usulida topiladi.

III. $R(x)$ kasrning eng sodda ratsional kasrlardagi (6) chiziqli yoyilmasi to‘liq topilgach, $\int R(x)dx$ integral bu yoyilma bo‘yicha integralning chiziqlilik xossalari (§1, (3) formula) va eng sodda ratsional kasrlarning integrallaridan foydalanilib hisoblanadi.

Yuqorida aytilganlarni

$$I=\int\frac{x+1}{x^5-x^2}dx$$

integralni hisoblashga tatbiq etamiz.

I. Dastlab maxrajning nollarini aniqlaymiz:

$$x^5-x^2=0\Rightarrow x^2(x^3-1)=0\Rightarrow x^2(x-1)(x^2+x+1)=0\,.$$

Bu yerdan ko‘rinadiki, maxraj uchun $x_1=0$ ikki karrali, $x_2=1$ oddiy haqiqiy ildizlar bo‘ladi. Bundan tashqari uchinchi ko‘paytuvchidan maxrajning bir juft oddiy qo‘shma kompleks ildizi ham mavjudligini ko‘ramiz. Shu sababli integral ostidagi ratsional kasr quyidagi ko‘rinishda eng sodda ratsional kasrlarga yoyiladi:

$$\frac{x+1}{x^5-x^2}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{A_3}{x-1}+\frac{A_4x+B}{x^2+x+1}\ .$$

II. Bu yoyilmadagi A_1, A_2, A_3, A_4 va B sonlarni noma’lum koeffitsiyentlar usulida topamiz. Buning uchun yoyilmaning o‘ng tomonidagi kasrlarni umumiy maxrajga keltiramiz. So‘ngra hosil bo‘lgan kasrning suratini yoyilmaning chap tomonidagi kasrning suratiga tenglashtiramiz. Natijada quyidagi tenglikka kelamiz:

$$A_1x(x-1)(x^2+x+1)+A_2(x-1)(x^2+x+1)+A_3x^2(x^2+x+1)+(A_4x+B)x^2(x-1)=x+1\ .$$

Bu tenglikdagi qo‘shiluvchilarni x darajalari bo‘yicha guruhlaymiz:

$$(A_1+A_3+A_4)x^4+(A_2+A_3-A_4+B)x^3+(A_3-B)x^2-A_1x-A_2=x+1.$$

Bu tenglik x o‘zgaruvchining barcha qiymatlarida o‘rinli, ya’ni ayniyat bo‘lishi kerak. Bu esa x o‘zgaruvchining mos darajalari oldidagi koeffitsiyentlarni teng bo‘lishini taqozo etadi. Bundan A_1, A_2, A_3, A_4 va B noma’lumlar uchun quyidagi 5 noma’lumli chiziqli tenglamalar sistemasiga ega bo‘lamiz:

$$\begin{cases} A_1+A_3+A_4=0 \\ A_2+A_3-A_4+B=0 \\ A_3-B=0 \\ -A_1=1 \\ -A_2=1 \end{cases}$$

Bu sistemani yechib,

$$A_1=-1,\ A_2=-1,\ A_3=2/3,\ A_4=1/3,\quad B=2/3$$

ekanligini topamiz. Demak, integral ostidagi ratsional kasr

$$\frac{x+1}{x^5-x^2}=-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{3(x-1)}+\frac{x+2}{3(x^2+x+1)}$$

ko‘rinishda eng sodda ratsional kasrlar orqali ifodalanadi. Shu bilan ratsional kasrli integralni hisoblashning I –II bosqichlari yakunlandi. Endi III bosqichga, ya’ni bevosita integralni hisoblashga o‘tamiz.

III. $$I=\int\frac{x+1}{x^5-x^2}dx=\int\left[-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{3(x-1)}+\frac{x+2}{3(x^2+x+1)}\right]dx=-\int\frac{1}{x}dx-\int\frac{1}{x^2}dx+\int\frac{2}{3(x-1)}dx+$$

$$+\int\frac{x+2}{3(x^2+x+1)}dx=-\ln|x|+\frac{1}{x}+\frac{2}{3}\ln|x-1|+\frac{1}{3}J\ .$$

XULOSA

Har qanday aniqmas integral elementar funksiyalar orqali ifodalanishi shart emas ekanligi oldin ta’kidlab o‘tilgan edi. Shu sababli elementar funksiyalarda ifodalanadigan integrallar sinfini topish masalasi paydo bo‘ladi. Bu masalaning xususiy bir javobi sifatida ratsional funksiyalardan olingan integrallarni ko‘rsatish mumkin. Bunda dastlab I-IV turdagi eng sodda ratsional funksiyalarni integrallash usuli ko‘rsatiladi. So‘ngra, ixtiyoriy ratsional funksiyani ularning algebraik yig‘indisi kabi yozish mumkinligidan foydalanib, umumiy holda ratsional funksiyadan olingan integrallarni hisoblash amalga oshiriladi. Bu integrallar logarifmik, arctg($ax+b$) ko‘rinishdagi teskari trigonometrik funksiyalar hamda ratsional kasrlar, ya’ni elementar funksiyalar orqali ifodalanadi.

Tayanch iboralar

* Ko‘phad * Ratsional kasr (funksiya) * Noto‘g‘ri ratsional kasr * To‘g‘ri ratsional kasr * I tur eng sodda ratsional kasr * II tur eng sodda ratsional kasr
* III tur eng sodda ratsional kasr * IV tur eng sodda ratsional kasr * Mavhum birlik * Kompleks son * Qo‘shma kompleks sonlar * Ratsional kasr yoyilmasi
* Noma’lum koeffitsiyentlar usuli

Takrorlash uchun savollar

1. Qanday ko‘rinishdagi funksiyalar ko‘phadlar deb ataladi?
2. Ko‘phad darajasi qanday aniqlanadi?
3. Ratsional kasr deb nimaga aytiladi?
4. Qachon ratsional kasr noto‘g‘ri kasr deyiladi?
5. Qaysi shartda ratsional kasr to‘g‘ri kasr bo‘ladi?
6. Noto‘g‘ri ratsional kasrni qanday ko‘rinishda yozish mumkin?
7. I tur eng sodda ratsional kasr qanday ko‘rinishda bo‘ladi?

8. II tur eng sodda ratsional kasr qanday aniqlanadi?
9. III tur eng sodda ratsional kasr qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
10. IV tur eng sodda ratsional kasr deb nimaga aytiladi?
11. I tur eng sodda ratsional kasrning integrali qanday funksiyadan iborat?
12. II tur eng sodda ratsional kasrning integrali qanday ifodalanadi?
13. III tur eng sodda ratsional kasrning integrali qanday hisoblanadi?
15. IV tur eng sodda ratsional kasr qanday integrallamadi?
16. Eng sodda ratsional kasrlarning integrallari qanday funksiyalar orqali ifodalanadi?
17. Har qanday ratsional kasrni qanday ko‘rinishda yozish mumkin?
18. Ratsional kasrning eng sodda ratsional kasrlar orqali yoyilmasining ko‘rinishi nimaga asosan aniqlanadi?
19. Ratsional kasrning eng sodda ratsional kasrlar orqali yoyilmasidagi koeffitsiyentlar qanday topiladi?
20. Noma’lum koeffitsiyentlar usulining mohiyati nimadan iborat?
21. Ratsional kasrning integralini hisoblash qanday bosqichlardan iborat?

AYRIM IRRATSIONAL VA TRIGONOMETRIK IFODALI INTEGRALLAR

- ***Irratsional funksiyalarni integrallash.***
- ***Eyler almashtirmalari.***
- ***Trigonometrik ifodali integrallar.***

Oldingi paragrafda har qanday $R(x)$ ratsional kasr elementar funksiyalarda integrallanuvchi ekanligini va bu integralni hisoblash usullarini ko‘rib o‘tdik. Shu sababli berilgan biror funksiyaning aniqmas integrali u yoki bu yo‘l bilan biror ratsional kasrdan olingan integralga keltirilsa, unda bu integral hisoblandi deb olish mumkin. Bu paragrafda mana shunday funksiyalarning ayrim sinflari bilan tanishamiz.

4.1. Irratsional funksiyalarni integrallash. Agar $y=f(x)$ funksiya x argumentning kasr darajalari ishtirok etgan algebraik ifodadan iborat bo‘lsa, uni ***irratsional funksiya*** deb ataymiz. Masalan,

$$y=\sqrt[3]{x^6+x^3+1}\,,\quad y=2x-5\sqrt{x}+\sqrt[6]{x^5}=2x-5x^{1/2}+x^{5/6}\,,\quad y=\frac{1+\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}+x}$$

kabilar irratsional funksiyalar bo‘ladi.

Biz bu yerda ayrim irratsional funksiyalarni integrallash masalasi bilan shug‘ullanamiz. Oldin shuni ta’kidlab o‘tamizki, har qanday irratsional funksiyadan olingan aniqmas integral elementar funksiyalarda ifodalanmaydi.

Masalan, ushbu

$$I_1=\int\sqrt{1+x^2}\,dx\,,\quad I_2=\int\sqrt[3]{1+x^2}\,dx$$

irratsional ifodali integrallardan I_1 elementar funksiyalar orqali ifodalanadi, ammo I_2 uchun bunday deb bo‘lmaydi.

❖ Dastlab ***binomial integral*** deb ataladigan va

$$I(r,s,p)=\int x^r(a+bx^s)^p\,dx$$

ko‘rinishda bo‘lgan integrallarni qaraymiz. Bunda r, s, p – ratsional va a, b – haqiqiy sonlarni ifodalaydi. Agar r, s, p sonlarning uchalasi ham butun son bo‘lsa, unda integral ostida ratsional funksiya hosil bo‘ladi va bu holda binomial integral elementar funksiyalarda ifodalanadi. Agar r, s, p sonlardan kamida bittasi butun bo‘lmasa, unda binomial integral ostida irratsional funksiya hosil bo‘ladi. Bunda binomial integral faqat quyidagi uch holda elementar funksiyalarda ifodalanishi mumkinligi buyuk rus matematigi P.L.Chebishev(1821-1894 y.) tomonidan isbotlangan:

1) *p*–butun son. Bu holda $t=\sqrt[m]{x}$, $x=t^m$ almashtirma (*m* – integral ostidagi *r* va *s* sonlarning umumiy maxraji) bajaramiz. Agar *r=k/m, s=q/m* deb olsak, unda

$$x^r=t^k,\ x^s=t^q,\ dx=dt^m=mt^{m-1}dt$$

bo‘ladi va binomial integral

$$I(r,s,p)=m\int t^{k+m-1}(a+bt^q)^p\,dt$$

ko‘rinishni olib, ratsional funksiyadan olingan integralga keladi.

n=(*r*+1)/*s* – butun son . Bu holda *p=k/m* bo‘lsa, unda $a+bx^s=t^m$ almashtirmadan foydalaniladi. Bunda

$$(a+bx^s)^p=t^k,\quad x^r=\left(\frac{t^m-a}{b}\right)^{\frac{r}{s}},\quad dx=\frac{m}{bs}\left(\frac{t^m-a}{b}\right)^{\frac{1}{s}-1}t^{m-1}dt$$

bo‘lib, binomial integral quyidagi ratsional kasrli integralga keladi:

$$I(r,s,p)=\frac{m}{b^n s}\int (t^m-a)^{n-1}t^{k+m-1}dt\ .$$

2) *n=p+*(*r*+1)/*s* – butun son. Bu holda *p=k/m* bo‘lsa, unda $ax^{-s}+b=t^m$ almashtirma qo‘llaniladi. Bunda

$$x=\left(\frac{a}{t^m-b}\right)^{\frac{1}{s}},\ (a+bx^s)^p=x^{ps}(ax^{-s}+b)^p=\left(\frac{a}{t^m-b}\right)^p t^k,\ \ x^r=\left(\frac{a}{t^m-b}\right)^{\frac{r}{s}},\ dx=-\frac{ma}{s}\left(\frac{a}{t^m-b}\right)^{\frac{1}{s}-1}\frac{t^{m-1}}{(t^m-b)^2}dt$$

bo‘ladi va binomial integral quyidagi ratsional kasrli integralga keladi:

$$I(r,s,p)=-\frac{ma^n}{s}\int\frac{t^{k+m-1}}{(t^m-b)^{n-1}}dt\ .$$

❖ $I=\int R(x,x^{\frac{m}{n}},\ldots,x^{\frac{r}{s}})dx$ ko‘rinishdagi integrallarni qaraymiz. Bunda *R* orqali unga kiruvchi *x*, $x^{m/n}$,..., $x^{r/s}$ o‘zgaruvchilarga nisbatan faqat ratsional amallar bajarilishi ifodalangan va *m, n, ..., r, s* –natural sonlardir. Bu integralni hisoblash uchun unda qatnashuvchi kasr daraja ko‘rsatkichlarining *k* umumiy maxrajini topamiz va $x=t^k, dx=kt^{k-1}dt$ almashtirma bajaramiz. Bu holda *x*, $x^{m/n}$,..., $x^{r/s}$ kasr ko‘rsatkichli darajalar yangi *t* o‘zgaruvchining butun darajalari orqali ifodalanadi va natijada $I=\int R_1(t)dt$ ratsional kasrli integralni hosil etamiz. Bu integralni hisoblab va olingan natijada $t=x^{1/n}$ deb, berilgan aniqmas integralni topamiz.

❖ $I=\int R\left[x,(\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{m}{n}},\ldots,(\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{r}{s}}\right]dx$ ko‘rinishdagi integralni qaraymiz By yerda *R, m, n, s, r* uchun oldingi integralda qo‘yilgan shartlar saqlanadi. Kasrdagi *a,b,c* va *d* haqiqiy sonlar uchun $a/b\neq c/d$ shartni qo‘yamiz, chunki bu shart bajarilmasa

$$\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{b}{d}\cdot\frac{\frac{a}{b}x+1}{\frac{c}{d}x+d}=\frac{b}{d}$$

bo‘ladi va integraldagi irratsionallik yo‘qoladi.

Agar *m*/*n*, … , *r*/*s* kasrlarning umumiy maxraji *k* bo‘lsa, bu integralni hisoblash uchun

$$\frac{ax+b}{cx+d}=t^K,\quad t=\sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

almashtirma bajaramiz. Bu holda

$$x=\frac{b-dt^m}{ct^m-a},\quad dx=\frac{mt^{m-1}(ad-bc)}{(ct^m-a)^2}dt,$$

ya’ni *x* va *dx* yangi *t* o‘zgaruvchi orqali ratsional ifodalanadi. Shu sababli yuqoridagi almashtirma natijasida berilgan integral uchun $I=\int R_1(t)dt$ ratsional funksiyaning integraliga ega bo‘lamiz. Bu integralni hisoblab va hosil bo‘lgan natijada *t* o‘rniga uning yuqoridagi ifodasini qo‘yib, berilgan *I* integral javobini topamiz.

4.2. Eyler almashtirmalari. Shu bobning boshida (§2, 2.5. ga qarang) kvadrat uchhad qatnashgan integrallarni ayrim xususiy hollarda hisoblash masalasini ko‘rib o‘tgan edik. Endi bu masalani nisbatan umumiyroq bo‘lgan

$$IE=\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\,)dx\ (a\neq 0)$$

ko‘rinishdagi integrallar uchun qaraymiz. Bunday irratsional ifodali integrallar shveysariyalik buyuk matematik L. Eyler (1707-1783 y.) tomonidan taklif etilgan almashtirmalar yordamida ratsional kasrli integralga keltiriladi va hisoblanadi. Bu yerda uch hol qaraladi.

I hol. Bunda ko‘rilayotgan *IE* integralda *a*>0 deb olinadi. Bu holda integralda *x* o‘zgaruvchidan yangi *t* o‘zgaruvchiga ***Eylerning I alshmashtirmasi*** deb ataladigan va

$$t=x\sqrt{a}-\sqrt{ax^2+bx+c}\Rightarrow\sqrt{ax^2+bx+c}=x\sqrt{a}-t$$

ko‘rinishda bo‘lgan almashtirma orqali o‘tiladi. Bu holda IE integraldagi *x*, $\sqrt{ax^2+bx+c}$ va *dx* yangi *t* o‘zgaruvchi orqali ratsional kasr ko‘rinishida ifodalanadi. Demak, qaralayotgan *IE* integral ratsional kasrli integralga keltirilib, ko‘zlangan maqsadga erishildi.

II hol. Endi *c*>0 bo‘lsin. Bu holda *IE* integralni hisoblash uchun ushbu ***Eylerning II almashtirmasidan*** foydalanamiz:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=xt+\sqrt{c}\ .$$

Bu almashtirma natijasida ratsional kasrli integralga kelamiz

III hol. Qaralayotgan *IE* integral ostidagi ax^2+bx+c kvadrat uchhad α va β haqiqiy ildizlarga ega, ya’ni diskriminant $D=b^2-4ac>0$ bo‘lsin. Bu holda

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=(x-\alpha)t$$

ko‘rinishdagi ***Eylerning III almashtirmasidan*** foydalanib, integral ostidagi ifodani ratsional kasr ko‘rinishiga keltiramiz.

4.3. Trigonometrik ifodali integrallar. Bu yerda biz trigonometrik funksiyalar qatnashgan

$$IT=\int R(\sin x,\cos x)dx$$

ko‘rinishdagi integrallarni qaraymiz. Bunda *R*(sin*x*,cos*x*) ifoda sin*x* va cos*x* ustida faqat arifmetik amallar bajarilgan ifodani belgilaydi. Bu integral $tg\frac{x}{2}=t$ almashtirma yordami bilan hamma vaqt ratsional kasrning integraliga keltirilishi mumkinligini ko‘rsatamiz. Haqiqatan ham

$$\sin x=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}{1}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{2tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{1}=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

va

$$\frac{x}{2}=\mathrm{arctg}t\Rightarrow x=2\mathrm{arctg}t\ ,\ dx=2d\mathrm{arctg}t=\frac{2dt}{1+t^2}$$

ekanligidan sin*x*, cos*x*, *x*, *dx* kiritilgan *t* orqali ratsional ifodalanadi. Shu sababli *t*=tg(*x*/2) ***universal almashtirma*** deb ataladi.Demak , universal almashtirma orqali *IT* integral ratsional kasrli integralga keltiriladi:

$$IT=\int R(\sin,\cos x)dx=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}=\int R_1(t)dt\ .$$

- $\int R(\sin x)\cos xdx$ ko‘rinishdagi integralni hisoblash uchun *t*=sin*x* almashtirmadan foydalanish mumkin. Bunda *dt*=cos*xdx* bo‘ladi va $\int R(\sin x)\cos xdx=\int R(t)dt$ ratsional kasrli integralga kelinadi. Masalan, Agar trigonometrik ifodali aniqmas integral $\int R(\cos x)\sin x dx$ ko‘rinishda bo‘lsa, unda t=cos$x$ almashtirma maqsadga muvofiqdir. Chunki bu holda dt= –sinxdx bo‘lib, berilgan integral to‘g‘ridan-to‘g‘ri ratsional kasrli integralga keladi: $\int R(\cos x)\sin x dx = -\int R(t)dt$.

$\int R(\mathrm{t}gx)dx$ ko‘rinishdagi trigonometrik ifodali aniqmas integrallar t=tg$x$, x=arctg$x$, $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$ almashtirma yordamida darhol ratsional funksiyaning integraliga keltiriladi:

$$\int R(tgx)dx = \int R(t)\cdot\frac{dt}{1+t^2} = \int R_1(t)dt.$$

- $\int R(\sin^2 x, \cos^2 x)dx$ ko‘rinishdagi, ya’ni integral ostidagi ifodada sin$x$ va cos$x$ funksiyalar faqat juft darajalarda qatnashgan integrallarni qaraymiz. Bu holda tg$x$=t almashtirmadan foydalanish mumkin. Bunda,

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+tg^2 x} = \frac{1}{1+t^2}, \quad \sin^2 x = \frac{tg^2 x}{1+tg^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2}, \; dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

bo‘lgani uchun, qaralayotgan integral ostidagi ifoda ratsional kasrga quyidagicha almashinadi:

$$\int R(\sin^2 x, \cos^2 x)dx = \int R\left(\frac{t^2}{1+t^2}, \frac{1}{1+t^2}\right)\frac{dt}{1+t^2} = \int R_1(t)dt.$$

Bu paragrafni quyidagi integrallarni ko‘rish bilan yakunlaymiz:

$$\int \sin mx \cos nx dx, \quad \int \sin mx \sin nx dx, \quad \int \cos mx \cos nx dx \quad (m \neq n).$$

Bu integrallar quyidagi trigonometrik formulalar orqali yoyish usulida ikkita oson hisoblanadigan integrallarga keltiriladi:

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x], \quad \sin mx \sin nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x],$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x].$$

XULOSA

Oldin ixtiyoriy ratsional funksiyadan olingan integralni hisoblash mumkinligi va natija elementar funksiyalar orqali ifodalanishini ko‘rib o‘tgan edik. Bu masala irratsional ifodali integrallar uchun qaralganda vaziyat butunlay o‘zgaradi. Birinchidan barcha irratsional funksiyalarni ratsional funksiya singari umumiy ko‘rinishda yoza olmaymiz. Ikkinchidan ma’lum bir ko‘rinishdagi irratsional funksiyalarning integrallari, unda qatnashuvchi parametrlarning qiymatlariga qarab, ayrim holda elementar funksiyalar orqali ifodalansa, boshqa hollarda esa maxsus funksiyalar ko‘rinishida bo‘ladi. Bunga misol sifatida binomial integrallarni ko‘rsatish mumkin. Chebishev tomonidan bu integral faqat uch holda elementar funksiyalarda ifodalanishi isbotlangan. Ammo ayrim ko‘rinishdagi irratsional ifodali integrallarni ma’lum bir almashtirmalar yordamida ratsional funksiyadan olingan integrallarga keltirish orqali hisoblash mumkin. Kvadrat uchhad qatnashgan ayrim irratsional ifodalar Eyler almashtirmalari orqali ratsional funksiyaga keltiriladi va hisoblanadi.

Trigonometrik funksiyalar ishtirok etgan integrallar ham doimo elementar funksiyalarda ifodalanmasligini oldin (§2 ga qarang) Frenel integrali va integral sinus misollarida ta’kidlab o‘tgan edik. Ammo trigonometrik funksiyalar ratsional ko‘rinishda qatnashgan bir qator integrallarni universal almashtirma yordamida ratsional funksiyaga keltirish orqali elementar funksiyalarda ifodalash mumkin.

Tayanch iboralar

* Irratsional funksiya * Binomial integral * Eyler almashtimalari * Ratsional trigonometrik ifoda * Universal almashtirma

Takrorlash uchun savollar

1. Qachon funksiya irratsional deyiladi?
2. Binomial integral qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
3. Qaysi hollarda binomial integral elementar funksiyalar orqali ifodalanadi?
4. Binomial integrallarni hisoblash uchun qanday almashtirmalardan foydalaniladi?
5. $\int R(x, x^{\frac{m}{n}}, ..., x^{\frac{r}{s}})dx$ ko‘rinishdagi irratsional ifodali integrallar qanday hisoblanadi?
6. $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ ko‘rinishdagi irratsional ifodali integralni hisoblash uchun Eylerning almashtirmalari qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
7. $\int R(\sin x, \cos x)dx$ ko‘rinishdagi trigonometrik ifodali integrallarni hisoblash uchun qo‘llaniladigan universal almashtirma qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
8. $\int R(\sin x, \cos x)dx$ ko‘rinishdagi trigonometrik ifodali integrallar universal almashtirma orqali qanday hisoblanadi?
9. $\int R(\sin x)\cos x dx$ ko‘rinishdagi integrallar qanday hisoblanadi?
10. $\int R(tgx)dx = \int R(t)\cdot\frac{dt}{1+t^2}$ ko‘rinishdagi integrallar qanday almashtirma yordamida hisoblanadi?
11. $\int \sin mx \cos nx dx$ ko‘rinishdagi integrallar qanday hisoblanadi?

22§ ANIQ INTEGRAL TA’RIFI VA UNING ENG SODDA XOSSALARI. ANIQ INTEGRALNI HISOBLASH USULLARI

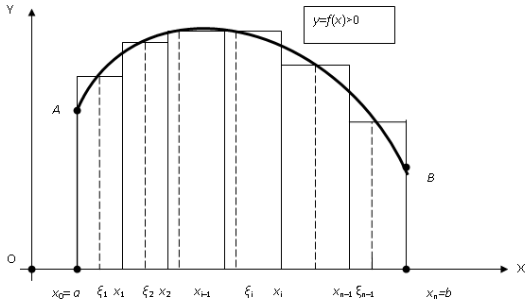
- ***Aniq integral tushunchasiga olib keluvchi masalalar.***
- ***Aniq integralning ta’rifi va mavjudlik sharti.***
- ***Aniq integralning xossalari.***

5.1. Aniq integral tushunchasiga olib keluvchi masalalar. Bir qator matematik, fizik, mexanik va iqtisodiy masalalarni yechish uchun aniq integral tushunchasi juda katta ahamiyatga ega. Bu tushunchani kiritishdan oldin unga olib keladigan ayrim masalalarni qaraymiz.

- ***Egri chiziqli trapetsiya yuzasini hisoblash masalasi.*** Turli geometrik shakllarning yuzalarini topish masalasi matematikaning eng qadimgi masalalaridan biri bo‘lib hisoblanadi. Qadimgi Vavilon va Misrda ko‘pburchaklarning yuzalarini hisoblay olganlar. Buyuk yunon olimi Arximed (miloddan oldingi 287-212 y.) parabola segmentining yuzasini hisoblashni bilgan.O‘rta Osiyolik yurtdoshlarimiz Beruniy va Al-Xorazmiy doira va doiraviy sektor yuzalarini topa olganlar. Ammo bu geometrik shaklarning yuzalari o‘ziga xos usullarda aniqlangan bo‘lib, ixtiyoriy geometrik shaklning yuzasini hisoblashga imkon beradigan umumiy usul ma’lum emas edi. Differensial va integral hisob yaratilgach bu masala geometrik shakllarning nisbatan keng sinfi uchun o‘z yechimini topdi.

1-TA’RIF: Berilgan $y=f(x)$ uzluksiz funksiya grafigi, $x=a$ va $x=b$ vertikal to‘g‘ri chiziqlar hamda OX o‘qi bilan chegaralangan geometrik shakl ***egri chiziqli trapetsiya*** deb ataladi.

Quyidagi 70-rasmda ko‘rsatilgan $aABb$ egri chiziqli trapetsiyaning S yuzasini topish masalasini qaraymiz.



Buning uchun dastlab *aABb* egri chiziqli trapetsiyaning asosini ifodalovchi $[a,b]$ kesmani $x_1 < x_2 < \ldots < x_i < \ldots < x_{n-1}$ bo‘lgan ixtiyoriy $n-1$ ta nuqta yordamida bo‘laklarga ajratamiz. Bu nuqtalarga $a=x_0$ va $b=x_n$ nuqtalarni birlashtirsak, $[a,b]$ kesma ular orqali

$$[x_0, x_1]\,,\quad [x_1, x_2]\,,\quad \ldots\,,\quad [x_{i-1}, x_i]\,,\quad \ldots\,,\quad [x_{n-1}, x_n]$$

n ta kichik kesmachalarga bo‘linadi.

So‘ngra x_i , $i=1,2, \ldots, n-1$ bo‘linish nuqtalaridan OY o‘qiga parallel to‘g‘ri chiziqlar o‘tqazib, berilgan *aABb* egri chiziqli trapetsiyani n ta kichik egri chiziqli trapetsiyalarga (yuqoridagi 69-rasmga qarang) ajratamiz. Ravshanki *aABb* egri chiziqli trapetsiyaning S yuzasi n ta kichik egri chiziqli trapetsiyalarning yuzalari yig‘indisiga teng bo‘ladi. Shu sababli, agar asosi $[x_{i-1}, x_i]$ $(i=1,2,3,\ldots, n)$ bo‘lgan egri chiziqli kichik trapetsiyalarning yuzalarini ΔS_i kabi belgilansa, quyidagi tenglik o‘rinli bo‘ladi:

$$S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \cdots + \Delta S_i + \cdots + \Delta S_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i \qquad (1)$$

Bu yerda ΔS_i $(i=1,2, \ldots , n)$ ham egri chiziqli trapetsiyalarning yuzalari bo‘lgani uchun ularning aniq qiymatlarini topa olmaymiz. Bu yuzalarning taqribiy qiymatini aniqlash uchun $[x_{i-1}, x_i]$ $(i=1,2, \ldots , n)$ kesmalarning har biridan ixtiyoriy ravishda ξ_i nuqtalarni tanlab olamiz. Tanlangan ξ_i nuqtalarda AB egri chiziqni ifodalovchi $y=f(x)>0$ funksiyaning $f(\xi_i)$ qiymatlarini hisoblaymiz. Endi har bir ΔS_i $(i=1,2, \ldots , n)$ yuzalarni asoslari $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ va balandliklari $h_i = f(\xi_i)>0$ bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchaklarning yuzalari bilan almashtirib, quyidagi taqribiy tengliklarga ega bo‘lamiz:

$$\Delta S_1 \approx f(\xi_1)\Delta x_1\,,\ \Delta S_2 \approx f(\xi_2)\Delta x_2,\ \ldots,\ \Delta S_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i\,,\ \ldots,\ \Delta S_n \approx f(\xi_n)\Delta x_n\ .$$

Bu taqribiy tengliklarni (1) yig‘indiga qo‘yib, berilgan *aABb* egri chiziqli trapetsiyaning izlanayotgan S yuzasi uchun ushbu taqribiy tenglikka ega bo‘lamiz:

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \ . \qquad (2)$$

(2) taqribiy tenglikning geometrik ma’nosi shundan iboratki, biz hozircha hisoblay olmaydigan egri chiziqli trapetsiyaning S yuzasi to‘g‘ri to‘rtburchaklardan hosil qilingan pog‘onasimon shakl yuzasi bilan almashtirildi. Bunda bo‘laklar soni n qanchalik katta qilib olinsa, pog‘onasimon shaklning yuzasi egri chiziqli trapetsiyaning S yuzasini shunchalik darajada aniqroq ifodalaydi. Bu mulohazadan izlanayotgan S yuzaning aniq qiymati

$$S = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \qquad (3)$$

limit bilan aniqlanishi mumkinligini ko‘ramiz.

- ***O‘zgaruvchi kuch bajargan ishni hisoblash masalasi.*** Yo‘nalishi va kattaligi o‘zgarmas bo‘lgan kuch ta’sirida moddiy nuqta L to‘g‘ri chiziq bo‘ylab harakat qilayotgan bo‘lsin. Bunda kuch yo‘nalishi bilan moddiy nuqtaning harakat yo‘nalishi bir xil deb olamiz. Agar bu shartlarda kattaligi f bo‘lgan kuch ta’sirida moddiy nuqta L to‘g‘ri chiziq bo‘ylab a nuqtadan b nuqtaga ko‘chirilsa, ya’ni $b-a$ masofaga siljigan bo‘lsa, unda bajarilgan ish $A=f\cdot(b-a)$ formula bilan aniqlanishi bizga maktab fizika kursidan ma’lum.

Endi yuqoridagi shartlardan kuch kattaligi o‘zgarmas degan shartdan voz kechib, u harakatning har bir x nuqtasida biror uzluksiz $f(x)$ funksiya bo‘yicha o‘zgarib boradigan umumiyroq holni qaraymiz. Bu holda kuch moddiy nuqtani $[a,b]$ kesma bo‘yicha harakatlantirganda bajarilgan A ishni hisoblash masalasi paydo bo‘ladi. Bu masalani yechish uchun moddiy nuqtani bosib o‘tgan yo‘lini ifodalovchi $[a,b]$ kesmani oldingi masaladagi singari n ta bo‘laklarga ajratib, har bir $[x_{i-1}, x_i]$ $(i=1,2, \ldots , n)$ kichik kesmada o‘zgaruvchi kuchning bajargan ishini ΔA_i deb belgilaymiz. Bu holda $[a, b]$ kesmada bajarilgan umumiy A ish qiymatini

$$A=\Delta A_1+\Delta A_2+\cdots+\Delta A_n=\sum_{i=1}^{n}\Delta A_i \qquad (4)$$

yig‘indi ko‘rinishida ifodalash mumkin. Bu yerda ham ΔA_i ishning aniq qiymatini hisoblay olmaymiz. Ularning taqribiy qiymatlarini hisoblash uchun $[x_{i-1}, x_i]$ kesmachalarning har biridan ixtiyoriy ξ_i nuqtani tanlab olamiz va unda kuchning $f(\xi_i)$ qiymatini hisoblaymiz. Uzunligi $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ bo‘lgan bu kichik kesmada kuch kattaligi o‘zgarmas va $f(\xi_i)$ deb hisoblab, ushbu taqribiy tengliklarni yoza olamiz:

$$\Delta A_1 \approx f(\xi_1)\cdot \Delta x_1 ,\ \Delta A_2 \approx f(\xi_2)\cdot \Delta x_2 ,\ \ldots,\ \Delta A_i \approx f(\xi_i)\cdot \Delta x_i ,\ \ldots,\ \Delta A_n \approx f(\xi_n)\cdot \Delta x_n .$$

Bularni (4) yig‘indiga qo‘yib, izlanayotgan A ishning taqribiy qiymatini topamiz:

$$A\approx\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \ . \qquad (5)$$

Bu yerda ham $[x_{i-1}, x_i]$ bo‘laklar soni n oshib borgan sari (5) taqribiy tenglik xatoligi tobora kamayib boradi deb kutish mumkin. Shu sababli A ishning aniq qiymati

$$A=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \qquad (6)$$

limit orqali ifodalanadi.

• ***Mahsulot hajmini topish masalasi.*** Agar ish kuni davomida mehnat unumdorligi o‘zgarmas, ya’ni ixtiyoriy t vaqtda uning kattaligi f bo‘lsa, unda (T_1,T_2) vaqt oralig‘ida ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi $V=f\cdot(T_2-T_1)$ formula bilan hisoblanadi. Masalan, sozlangan avtomatik qurilma uchun bu holni o‘rinli deb olish mumkin.

Ammo ishchining mehnat unumdorligi to‘g‘risida bunday deb bo‘lmaydi. Masalan, ish kunining boshlang‘ich davrida (ishga ko‘nikish) uning mehnat unumdorligi ma’lum bir vaqtgacha o‘sib boradi. So‘ngra, ishga kirishib ketgandan keyin, ma’lum bir vaqt oralig‘ida bir xil unumdorlik bilan mahsulot ishlab chiqaradi. Ish kuni oxiriga yaqinlashgan sari, charchash tufayli, mehnat unumdorligi pasayib boradi. Shunday qilib mehnat unumdorligi o‘zgaruvchan va t vaqtga bog‘liq ravishda biror uzluksiz $f(t)$ funksiya orqali aniqlangan bo‘ladi. Bu holda (T_1,T_2) vaqt oralig‘ida ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi V uchun yuqoridagi formula o‘rinli bo‘lmasligi ravshandir va uni topish masalasi paydo bo‘ladi. Bu masala ham oldingi masalalardagi mulohazalar asosida quyidagicha yechiladi. (T_1,T_2) vaqt oralig‘ini ixtiyoriy ravishda tanlangan

$$T_1=t_0< t_1< t_2< \cdots t_i<\cdots t_{n-1}< t_n=T_2$$

nuqtalar bilan n ta (t_{i-1}, t_i) $(i=1,2,3, \cdots , n)$ vaqt oraliqchalariga bo‘laklaymiz. Bu vaqt oraliqchalarida ishlab chiqarilgan mahsulot hajmini ΔV_i $(i=1,2,3, \cdots , n)$ deb belgilasak, unda butun vaqt oralig‘ida ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi

$$V=\Delta V_1+\Delta V_2+\cdots+\Delta V_n=\sum_{i=1}^{n}\Delta V_i \qquad (7)$$

yig‘indi kabi ifodalanadi. Bu yig‘indidagi qo‘shiluvchilarning taqribiy qiymatlarini topish maqsadida (t_{i-1}, t_i) $(i=1,2,3, \cdots , n)$ vaqt oraliqchalaridan ixtiyoriy bir ξ_i vaqtni tanlab olamiz va unda $f(\xi_i)$ mehnat unumdorligini aniqlaymiz. Kichkina (t_{i-1}, t_i) oraliqda uzluksiz $f(t)$ funksiya o‘z qiymatini unchalik ko‘p o‘zgartira olmaydi va shu sababli bu yerda mehnat unumdorligini o‘zgarmas va uning qiymati $f(\xi_i)$ deb olishimiz mumkin. Shu sababli $\Delta t_i= t_i- t_{i-1}$ vaqt ichida ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi uchun

$$\Delta V_i \approx f(\xi_i)\cdot\Delta t_i ,\quad i=1,2,3, \cdots , n,$$

taqribiy tengliklarni yozish mumkin. Bu taqribiy tengliklarni (7) yig‘indiga qo‘yib,

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta t_i \qquad (8)$$

taqribiy natijaga ega bo‘lamiz. Bu holda mahsulot hajmining aniq qiymati

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta t_i \qquad (9)$$

limit orqali topiladi.

Yuqoridagi geometrik, fizik va iqtisodiy mazmunli uchta turli masala bir xil matematik usulda o‘z yechimini topib, (3), (6) va (9) ko‘rinishdagi bir xil limit orqali ifodalandi. Shu sababli bu usul va limitni umumiy holda qarash ma’noga egadir.

5.2. Aniq integralning ta’rifi va mavjudlik sharti. Berilgan $y=f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada aniqlangan bo‘lsin. Bu kesmani ixtiyoriy

$$a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_i<\ldots x_{n-1}<x_n=b$$

bo‘linish nuqtalari yordamida n ta

$$[x_0, x_1],\ [x_1, x_2],\ \ldots,\ [x_{i-1}, x_i],\ \ldots,\ [x_{n-1}, x_n]$$

kichik kesmachalarga ajratamiz. Hosil bo‘lgan har bir $[x_{i-1}, x_i]$ (i=1, 2, 3, …, n) kichik kesmachalardan ixtiyoriy bir ξ_i nuqtani tanlaymiz. Tanlangan ξ_i nuqtalarda berilgan $f(x)$ funksiyaning $f(\xi_i)$ (i=1, 2, 3, …, n) qiymatlarini va $[x_{i-1}, x_i]$ kesmachalarning $x_i-x_{i-1}=\Delta x_i$ (i=1, 2, 3, …, n) uzunliklarini hisoblaymiz. Bu qiymatlaridan foydalanib ushbu yig‘indini tuzamiz:

$$S_n(f) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \qquad (10)$$

2-TA’RIF: (10) tenglik bilan aniqlanadigan $S_n(f)$ yig‘indi $y=f(x)$ funksiya uchun $[a,b]$ kesma bo‘yicha ***integral yig‘indi*** deb ataladi.

$S_n(f)$ integral yig‘indi ta’rifidan ko‘rinadiki uning qiymati $[x_{i-1}, x_i]$ kichik kesmachalar uzunligi Δx_i, ularning soni n va tanlangan ξ_i nuqtalarga bog‘liq bo‘ladi. $\Delta_n = \max\limits_{1\le i\le n} \Delta x_i$ belgilash kiritamiz.

3-TA’RIF: Agar $S_n(f)$ integral yig‘indilar ketma-ketligi $n\to\infty$ va $\Delta_n\to 0$ bo‘lganda x_i bo‘linish nuqtalari hamda $[x_{i-1}, x_i]$ kichik kesmachalardan olinadigan ξ_i nuqtalarning tanlanishiga bog‘liq bo‘lmagan biror chekli $S(f)$ limitga ega bo‘lsa, bu limit qiymati $S(f)$ berilgan $f(x)$ funksiyadan $[a,b]$ kesma bo‘yicha olingan ***aniq integral*** deyiladi.

Berilgan $f(x)$ funksiyadan $[a,b]$ kesma bo‘yicha olingan aniq integral $\int_a^b f(x)dx$ kabi belgilanadi va ta’rifga asosan quyidagicha aniqlanadi :

$$\int_a^b f(x)dx = S(f) = \lim_{\substack{n\to\infty,\\ \Delta_n\to 0}} S_n(f) = \lim_{\substack{n\to\infty,\\ \Delta_n\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\ . \qquad (11)$$

Bu yerda a – aniq integralning ***quyi chegarasi***, b – ***yuqori chegarasi***, $[a, b]$ –integrallash kesmasi, x–integrallash o‘zgaruvchisi, $f(x)$ – ***integral ostidagi funksiya***, $f(x)dx$ – ***integral ostidagi ifoda*** deyiladi.

4-TA’RIF: Agar $f(x)$ funksiyadan $[a,b]$ kesma bo‘yicha olingan aniq integral $\int_a^b f(x)dx$ mavjud bo‘lsa, unda $f(x)$ bu kesmada ***integrallanuvchi funksiya*** deb ataladi.

Izoh: Aniq integralning yuqorida keltirilgan ta’rifi olmoniyalik buyuk matematik Riman (1826–1866 y.) tomonidan taklif etilgan va shu sababli Riman integrali deb yuritiladi. Bundan tashqari aniq integralning Koshi, mashhur farang matematigi Lebeg (1875–1941 y.) va niderlandiyalik matematik Stilt’yes (1856–1894 y.) tomonlaridan kiritilgan ta’riflari ham mavjud va keng qo‘llaniladi.

Oldin ko‘rilgan masalalarga qaytsak, (3) va (11) tengliklarga asosan egri chiziqli trapetsiyaning yuzasi

$$S=\int_a^b f(x)dx,$$

(6) va (11) tengliklarga asosan o‘zgaruvchi kuch bajargan ish

$$A=\int_a^b f(x)dx,$$

(9) va (11) tengliklarga asosan ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi

$$V=\int_a^b f(t)dt$$

aniq integrallar orqali ifodalanishi kelib chiqadi. Bu tengliklarni aniq integralning geometrik, mexanik va iqtisodiy ma’nolari deb olishimiz mumkin.

Aniq integral ta’rifidan ko‘rinadiki, berilgan $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada integrallanuvchi bo‘lishi uchun ancha og‘ir shartlarni qanoatlantirishi kerak. Haqiqatan ham, qaralayotgan $[a,b]$ kesmani bo‘linish nuqtalari x_i (i=1,2, ···, n) va $[x_{i-1}, x_i]$ kesmalardan tanlanadigan ξ_i nuqtalar qanday bo‘lmasin aniq integralni ifodalovchi (11) limit qiymati $S(f)$ bir xil bo‘lishi kerak. Bu esa har qanday funksiya uchun bajarilavermaydi. Masalan, [0,1] kesmada aniqlangan D(x) Dirixle funksiyasi (VII bob, §3) uchun integral yig‘indini qaraymiz. Agar $[x_{i-1}, x_i]$ kesmachalardan olinadigan ξ_i nuqtalar ratsional sonlarni ifodalasa, unda D(ξ_i)=1 va integral yig‘indi

$$S_n(D)=\sum_{i=1}^{n} D(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n} 1\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=1-0=1\ ;$$

agar ξ_i nuqtalar irratsional sonlarni ifodalasa, unda D(ξ_i)=0 va integral yig‘indi

$$S_n(D)=\sum_{i=1}^{n} D(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n} 0\cdot\Delta x_i=0$$

bo‘ladi. Bu yerdan ko‘rinadiki, $n\to\infty$ bo‘lganda $S_n(f)$ integral yig‘indi limitining qiymati ξ_i nuqtalarning tanlanishiga bog‘liq. Bundan esa $D(x)$ funksiya [0,1] kesmada integrallanuvchi emasligi kelib chiqadi.

Shu sababli (11) limitni, ya’ni $\int_a^b f(x)dx$ integralni qaysi shartda mavjud bo‘lishini aniqlashimiz kerak. Bu savolga javob isbotsiz beriladigan ushbu teoremalarda keltiriladi.

<u>1-TEOREMA:</u> Berilgan $[a,b]$ kesmada chegaralangan va unda chekli sondagi uzilish nuqtalariga ega bo‘lgan $f(x)$ funksiya shu kesmada integrallanuvchi bo‘ladi.

NATIJA: Berilgan $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo‘lgan $f(x)$ funksiya shu kesmada integrallanuvchi bo‘ladi.

Haqiqatan ham, Veyershtrass teoremasiga asosan (VI bob, §4) $[a,b]$ kesmada uzluksiz $f(x)$ funksiya shu kesmada chegaralangan bo‘lib, oldingi teorema shartlarini qanoatlantiradi va shu sababli bu kesmada integrallanuvchidir.

Bu tasdiqlardan funksiyalarning nisbatan keng sinfi uchun ularning aniq integrallari mavjud ekanligini ko‘ramiz. Aniq integrallarning qiymatini topish (integralni hisoblash) masalasini kelgusiga qoldirib, bu masalani yechish uchun kerak bo‘ladigan aniq integralning xossalari bilan tanishamiz.

5.3. Aniq integralning xossalari. Avvalo yuqorida ko‘rib o‘tilgan aniq integral ta’rifiga ikkita qo‘shimcha kiritamiz.

- Aqar aniq integralda quyi a va yuqori b chegaralar (a<b) o‘rni almashsa, unda

$$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx \qquad (12)$$

tenglik o‘rinli deb qabul etamiz. Bunday qarorni quyidagicha tushuntirish mumkin. (12) tenglikning chap tomonidagi integralda x integrallash o‘zgaruvchisi OX o‘qda $x=a$ nuqtadan $x=b$ nuqtaga qarab o‘sadi va shu sababli $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}>0$ bo‘ladi. O‘ng tomondagi integralda esa aksincha bo‘lib, x integrallash o‘zgaruvchisi $x=b$ nuqtadan $x=a$ nuqtaga qarab kamayib boradi va unda $\delta x_i= x_{i-1}-x_i= -\Delta x_i<0$ bo‘ladi. Demak, (12) tenglikdagi integrallar uchun ularning integral yig‘indilari faqat ishoralari bilan farq qiladi. Bu yerdan, limit xossasiga asosan, (12) tenglikni qabul etish mumkinligini ko‘ramiz.

❖ (12) tenglikdan

$$\int_a^a f(x)dx=0 \qquad (13)$$

deb qabul qilishimiz mumkinligi kelib chiqadi. Haqiqatan ham bu holda

$$\int_a^a f(x)dx=-\int_a^a f(x)dx \Rightarrow 2\int_a^a f(x)dx=0 \Rightarrow \int_a^a f(x)dx=0\,.$$

Izoh: Aniq integral ta’rifini ifodalovchi (11) tenglikdan ko‘rinadiki, uning qiymati biror sondan iborat bo‘ladi. Bu son faqat integral ostidagi $f(x)$ funksiya va $[a,b]$ integrallash kesmasiga bog‘liq bo‘lib, integrallash o‘zgaruvchisiga bog‘liq emas. Shu sababli aniq integralda integrallash o‘zgaruvchisini har xil belgilash mumkin, ya’ni

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(s)ds=\cdots \quad .$$

I xossa: Aniq integralda o‘zgarmas ko‘paytuvchini integral belgisidan tashqariga chiqarish mumkin, ya’ni k o‘zgarmas son bo‘lsa,unda

$$\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx \qquad (14)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

II xossa: Ikki yoki undan ortiq funksiyalar algebraik yig‘indisining aniq integrali qo‘shiluvchilar aniq integrallarining algebraik yig‘indisiga teng bo‘ladi, ya’ni

$$\int_a^b [f_1(x)\pm f_2(x)\pm\cdots\pm f_m(x)]dx=\int_a^b f_1(x)dx\pm\int_a^b f_2(x)dx\pm\cdots\pm\int_a^b f_m(x)dx \qquad (15)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi. Bunda tenglikning o‘ng tomonidagi aniq integrallar mavjud deb hisoblanadi.

III xossa: Agar $[a, b]$ kesmada $f(x)\geq 0$ va integrallanuvchi bo‘lsa, unda uning aniq integrali uchun

$$\int_a^b f(x)dx\geq 0 \qquad (16)$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

IV xossa: Agar $[a, b]$ kesmada $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar integrallanuvchi hamda $f(x)\leq g(x)$ bo‘lsa, unda ularning aniq integrallari uchun

$$\int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b g(x)dx \qquad (17)$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

V xossa: Agar $a<c<b$ va $f(x)$ funksiya $[a,c]$, $[c,b]$ kesmalarda integrallanuvchi bo‘lsa, unda u $[a,b]$ kesmada ham integrallanuvchi va

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx \qquad (18)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Izoh: III xossani ifodalovchi (18) tenglik $c<a$ va $c>b$ holda ham o'rinli bo'ladi. Masalan, $c>b$ holda $a<b<c$ bo'lgani uchun (18) tenglik yuqoridagi mulohazalar va (12) tenglikka asosan quyidagicha keltirib chiqariladi:

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx .$$

VI xossa: Har qanday $[a,b]$ kesmada o'zgarmas $f(x)=1$ funksiya integrallanuvchi va

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b dx = b-a \qquad (19)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Izoh: Integralning geometrik ma'nosiga ko'ra (19) tenglikdagi aniq integral asosi $[a,b]$ kesmadan iborat va balandligi $f(x)=1$ bo'lgan to'g'ri to'rtburchak yuzasini ifodalaydi va bu yuza $S=1\cdot(b-a)=b-a$ ekanligidan ham (19) tenglikka ishonch hosil etish mumkin.

VII xossa: Agar $[a,b]$ kesmada ($a<b$) integrallanuvchi $y=f(x)$ funksiyaning shu kesmadagi eng kichik va eng katta qiymatlari mos ravishda m va M bo'lsa, unda aniq integral uchun

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a) \qquad (20)$$

qo'sh tengsizlik o'rinli bo'ladi.

VIII xossa: Agar $|f(x)|$ funksiya $[a,b]$ kesmada integrallanuvchi bo'lsa, unda $f(x)$ funksiya ham bu kesmada integrallanuvchi va quyidagi tengsizlik o'rinli bo'ladi:

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx \qquad (21)$$

IX xossa(O'rta qiymat haqidagi teorema): Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, bu kesmada shunday ξ nuqta mavjudki, unda

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a) \qquad (22)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

5-TA'RIF: (22) tenglik orqali aniqlanadigan

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

soni $f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ kesmadagi ***o'rta qiymati*** deb ataladi.

XULOSA

Juda ko'p amaliy masalalarni yechish aniq integral tushunchasiga olib keladi. Masalan, geometriyada egri chiziqli trapetsiya yuzasini topish, fizikada o'zgaruvchi kuch bajargan ishni hisoblash, iqtisodiyotda ishlab chiqarilgan mahsulot hajmini aniqlash kabi masalalar shular jumlasidandir. Aniq integral berilgan funksiya va kesma bo'yicha tuziladigan integral yig'indining limiti kabi aniqlanadi. Berilgan kesmada chegaralangan va faqat chekli sondagi uzilish nuqtalariga ega bo'lgan funksiya uchun aniq integral mavjud bo'ladi. Yuqorida ko'rsatilgan masalalardan aniq integralning geometrik, mexanik va iqtisodiy ma'nolari kelib chiqadi. Aniq integral qiymatini hisoblash yoki baholash uchun uning bir qator xossalaridan foydalanish mumkin.

Tayanch iboralar

* Integral yig‘indi * Aniq integral * Integral ostidagi funksiya * Integral ostidagi ifoda * Integrallash o‘zgaruvchisi * Quyi chegara * Yuqori chegara * Integrallanuvchi funksiya * Integralning geometrik ma’nosi * Integralning mexanik ma’nosi * Integralning iqtisodiy ma’nosi * Funksiyaning o‘rta qiymati

Takrorlash uchun savollar

1. Funksiyaning berilgan kesma bo‘yicha integral yig‘indisi qanday hosil qilinadi?
2. Aniq integral qanday ta’riflanadi?
3. Qaysi shartda funksiya berilgan kesmada integrallanuvchi deyiladi?
4. Integrallanmovchi funksiyaga misol keltira olasizmi?
5. Qaysi shartda funksiya berilgan kesmada integrallanuvchi bo‘ladi?
6. Integralning geometrik ma’nosi nimadan iborat?
7. Integralning mexanik ma’nosi qanday ifodalanadi?
8. Integralning iqtisodiy ma’nosi nimadan iborat?
9. Aniq integralning quyi va yuqori chegaralari nima?
10. Aniq integralda quyi va yuqori chegaralar o‘rni almashtirilsa nima bo‘ladi?
11. Aniq integralda o‘zgarmas ko‘paytuvchini nima qilish mumkin?
12. Funksiyalarning algebraik yig‘indisidan olingan aniq integral qanday xossaga ega?
13. O‘zgarmas funksiyaning [a,b] kesma bo‘yicha aniq integrali nimaga teng?
14. Funksional tengsizlikni hadlab integrallash mumkinmi?
15. Integrallash kesmasida musbat bo‘lgan funksiyadan shu kesma bo‘yicha olingan aniq integral qiymati haqida nima deyish mumkin?
16. Integrallash kesmasida manfiy bo‘lgan funksiyadan shu kesma bo‘yicha olingan aniq integral qiymati haqida nima deyish mumkin?
17. Aniq integral uchun o‘rta qiymat haqidagi teorema qanday ifodalanadi?
18. Funksiyaning kesma bo‘yicha orta qiymati deb nimaga aytiladi?

ANIQ INTEGRALLARNI HISOBLASH USULLARI

- ***Aniq integralni ta’rif bo‘yicha hisoblash.***
- ***Nyuton – Leybnits formulasi.***
- ***Bo‘laklab integrallash usuli.***
- ***Aniq integralda o‘zgaruvchini almashtirish usuli.***
- ***Aniq integrallarni taqribiy hisoblash .***

6.1. Aniq integralni ta’rif bo‘yicha hisoblash. Biz aniq integral ta’rifi va asosiy xossalarini o‘rgangan bo‘lsak ham, ammo hozircha faqat bitta $f(x)=1$ o‘zgarmas funksiyadan [a,b] kesma bo‘yicha olingan aniq integral qiymatini bilamiz xolos. Bu yo‘nalishda yana bir misol sifatida $f(x)=x$ funksiyadan [a,b] kesma bo‘yicha olingan

$$I=\int_a^b xdx$$

aniq integralni uning ta’rifidan foydalanib hisoblaymiz. $f(x)=x$ funksiya [a,b] kesmada uzluksiz bo‘lgani uchun u integrallanuvchi, ya’ni I aniq integral mavjud. Unda, ta’rifga asosan, [a,b] kesmani ixtiyoriy ravishda kichik [x_{i-1}, x_i] kesmachalarga bo‘laklab va ulardan istalgan ξ_i nuqtalarni tanlab,

$$S_n(f)=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\xi_i(x_i-x_{i-1})$$

integral yig‘indini hosil etib, uning $n\to\infty$, $\max\Delta x_i\to 0$ bo‘lgandagi limitini topsak, bu limit qiymati doimo bir xil bo‘ladi va I integral qiymatini ifodalaydi. Shu sababli biz [a,b] kesmani o‘zaro teng bo‘lgan n bo‘lakka ajratamiz. Bu holda hosil bo‘lgan har bir $[x_{i-1}, x_i]$ kesmachaning uzunligi bir xil va $\Delta x_i=h=(b-a)/n$, ularning chegaralari esa $x_i=a+ih$, $i=0,1,2,\cdots, n-1, n$ kabi aniqlanadi.Har bir $[x_{i-1}, x_i]$ kesmachalardan ξ_i nuqta sifatida uning chap chegarasini, ya’ni $\xi_i=x_{i-1}$ $(i=1,2,\cdots, n)$ deb olamiz. Bu holda integral yig‘indi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$S_n(f)=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\Delta x_i=h\sum_{i=1}^{n}\xi_i=h\sum_{i=1}^{n}[a+(i-1)h]=h[\sum_{i=1}^{n}a+h\sum_{i=1}^{n}(i-1)]=h[na+h\frac{n(n-1)}{2}]=(b-a)[a+\frac{b-a}{n}\cdot\frac{n-1}{2}]\ .$$

Bu yerdan, aniq integral ta’rifi va limit xossalariga asosan,

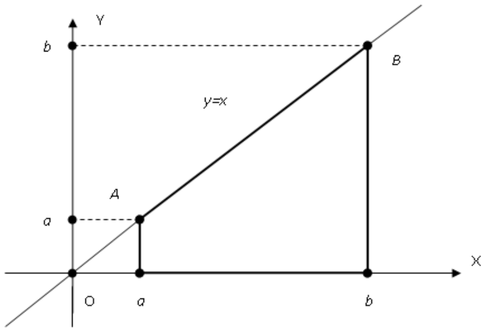
$$I=\lim_{n\to\infty}S_n(f)=\lim_{n\to\infty}(b-a)[a+\frac{b-a}{2}\cdot\frac{n-1}{n}]=(b-a)[a+\frac{b-a}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}]=(b-a)\cdot\frac{b+a}{2}=\frac{b^2-a^2}{2}$$

natijani olamiz. Demak,

$$\int_a^b xdx=\frac{b^2-a^2}{2}\ . \qquad (1)$$

Bu natijaga aniq integralning geometrik ma’nosidan foydalanib ham kelish mumkin. Haqiqatan ham, (1) aniq integral $y=x$, $x=a$, $x=b$ va $y=0$ chiziqlar bilan chegaralangan $aABb$ trapetsiya (73-rasmga qarang) yuzini ifodalaydi. Chizmadan ko‘rinadiki, bu trapetsiyaning balandligi $H=b-a$, asoslari esa a va b. Shu sababli

$$I=\int_a^b xdx=S_{aABb}=\frac{a+b}{2}H=\frac{a+b}{2}(b-a)=\frac{b^2-a^2}{2}\ .$$



6.2. Nyuton – Leybnits formulasi. Oldingi natijalardan ko‘rinadiki, aniq integralni uning ta’rifi, ya’ni integral yig‘indining limiti orqali topish masalasi hatto oddiy $y=x$ funksiya misolida ancha qiyinchilik bilan yechiladi. Shu sababli aniq integralni hisoblashning qulayroq, osonroq usulini topish masalasi paydo bo‘ladi. Bu masala integral hisobning asosiy formulasi bo‘lmish Nyuton – Leybnits formulasi orqali o‘z yechimini topadi. $y=f(x)$ biror $[a,b]$ kesmada uzluksiz funksiya bo‘lsin. Unda $y=f(x)$ bu $[a,b]$ kesmada integrallanuvchi funksiya bo‘ladi. Bu yerdan ixtiyoriy $x\in[a,b]$ uchun

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt \qquad (2)$$

aniq integral mavjud ekanligi kelib chiqadi. Bunda quyi chegara a o‘zgarmas, yuqori chegara x esa o‘zgaruvchi deb qaralsa, unda (2) tenglik $[a,b]$ kesmada aniqlangan biror $\Phi(x)$ funksiyani ifodalaydi va ***yuqori chegarasi o‘zgaruvchi integral*** deb ataladi. Bu funksiya differensial va integral hisob orasidagi chuqur bog‘lanishni ifodalovchi quyidagi muhim xususiyatga ega.

1-TEOREMA: Agar (1) tenglikda $f(x)$ uzluksiz funksiya bo‘lsa , unda $\Phi(x)$ funksiya differensiallanuvchi va

$$\Phi'(x)=(\int_a^x f(t)dt)'=f(x) \qquad (3)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Izoh: Bu teoremadan (2) tenglik bilan aniqlangan *Φ*(*x*) berilgan uzluksiz *f*(*x*) funksiya uchun boshlang‘ich funksiya bo‘lishi kelib chiqadi. Demak, har qanday uzluksiz funksiya uchun uning boshlang‘ich funksiyasi mavjud va uni (2) formula orqali topish mumkin ekan.

2-TEOREMA: Agar *F*(*x*) uzluksiz *f*(*x*) funksiyaning biror boshlang‘ich funksiyasi bo‘lsa, u holda

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \qquad (4)$$

tenglik o‘rinlidir.

Izoh: (4) formulada *F*(*x*) sifatida *f*(*x*) funksiyaning ixtiyoriy bir boshlang‘ich funksiyasini olish mumkin. Bunga sabab shuki, *f*(*x*) funksiyaning ixtiyoriy ikkita $F_1(x)$ va $F_2(x)$ boshlang‘ich funksiyalari bir – biridan faqat biror *C* o‘zgarmas son bilan farqlanadi va $F_1(b)–F_1(a)= F_2(b)–F_2(a)$ bo‘ladi.

1-TA'RIF: (4) tenglik aniq integralni hisoblashning ***Nyuton-Leybnits formulasi*** deyiladi.

Aniqmas va aniq integral tushunchalari bir-biriga bog‘liqmas ravishda kiritilgan edi. Aniqmas integral *f*(*x*) funksiyaning boshlang‘ich funksiyalari sinfi singari , aniq integral esa *f*(*x*) funksiyaning [*a,b*] kesma bo‘yicha integral yig‘indilarining limiti singari kiritilganligini eslatamiz. Ammo bu ikkala tushuncha orasida chambarchas bog‘lanish mavjudligi va ularning ikkalasi ham “integral” deb atalishi bejiz emasligini ko‘rsatish uchun Nyuton – Leybnits formulasini shartli ravishda quyidagicha yozamiz:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b = [F(x)+C]\Big|_a^b = \int f(x)dx\,\Bigg|_a^b \qquad (5)$$

Demak, aniq integralni Nyuton – Leybnits formulasi bo‘yicha hisoblash uchun dastlab uning chegaralarini “unutib”, uni aniqmas integral singari qaraymiz va hisoblaymiz. So‘ngra chegaralar borligini “eslab”, aniqmas integralni hisoblangan ifodasiga *x* o‘rniga yuqori chegara *b* va quyi chegara *a* qiymatlarini qo‘yamiz. Natijada hosil bo‘lgan sonlar ayirmasini olib, berilgan aniq integral qiymatini topamiz. Bunda aniqmas integral javobidagi ixtiyoriy *C* o‘zgarmas sonni hisobga olmasak ham bo‘ladi.

Misol sifatida, $f(x)=x^\alpha$ ($\alpha\neq-1$) darajali funksiyadan [*a,b*] kesma bo‘yicha olingan aniq integralni (4) Nyuton – Leybnits formulasi yordamida hisoblaymiz:

$$\int_a^b x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Bigg|_a^b = \frac{b^{\alpha+1}-a^{\alpha+1}}{\alpha+1}\,.$$

Bevosita ta’rif bo‘yicha hisoblangan (1) natija bu yerdan α=1 bo‘lganda kelib chiqadi.

6.3. Bo‘laklab integrallash usuli. ***u*=*u*(*x*) va *v*=*v*(*x*) differentsiallanuvchi funksiyalar bo‘lsin. Bu holda (*uv*)′=*u*′*v*+*uv*′ ekanligidan *uv* funksiya *u*′*v*+*uv*′ uchun boshlang‘ich funksiya bo‘ladi. Shu sababli, Nyuton – Leybnits formulasiga asosan,**

$$\int_a^b [u'v+uv']dx = uv\Big|_a^b$$

tenglikni yozish mumkin. Bu yerdan, aniq integralning II xossasi va *u*′*dx*=*du*, *v*′*dx*=*dv* ekanligidan foydalanib, ushbu natijalarni olamiz:

$$\int_a^b u'vdx + \int_a^b uv'dx = uv\Big|_a^b \Rightarrow \int_a^b vdu + \int_a^b udv = uv\Big|_a^b \Rightarrow \int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu \qquad \textbf{(6)}$$

2-TA’RIF: **(6) tenglik aniq integralni** *bo‘laklab integrallash formulasi* **deb ataladi.**

Aniq integralda o‘zgaruvchini almashtirish usuli. Berilgan uzluksiz *y*=*f*(*x*) funksiyadan [*a,b*] kesma bo‘yicha olingan

$$\int_a^b f(x)dx$$

aniq integralni ba'zi hollarda biror $x=\varphi(t)$ differensiallanuvchi funksiya orqali "eski" x o'zgaruvchidan "yangi" t o'zgaruvchiga o'tish usulida hisoblash mumkin bo'ladi. Bunda $\varphi(t)$ funksiya ***almashtirma*** deb ataladi va unga quyidagi shartlar qo'yiladi:

1. $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$;
2. $\varphi(t)$ va $\varphi'(t)$ funksiyalar $t\in[\alpha, \beta]$ kesmada uzluksiz ;
3. $f[\varphi(t)]$ murakkab funksiya $[\alpha, \beta]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz.

Bu shartlarda ushbu formula o'rinli bo'ladi:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt \qquad (7)$$

<u>3-TA'RIF:</u> (7) tenglik aniq integralda ***o'zgaruvchilarni almashtirish formulasi*** deb ataladi.

6.4. Aniq integrallarni taqribiy hisoblash . Yuqorida ko'rib o'tilgan usullarda $I=\int_a^b f(x)dx$ aniq integral qiymatini hisoblash masalasi integral ostidagi $f(x)$ funksiyaning biror $F(x)$ boshlang'ich funksiyani topish va uning qiymatlarini hisoblash masalasiga keltiriladi. Ammo ayrim aniq integrallar uchun bu usullarni qo'llashda quyidagi muammolar paydo bo'lishi mumkin:

1) $F(x)$ boshlang'ich funksiyani topish murakkab ;

2) $F(x)$ boshlang'ich funksiya murakkab ko'rinishda bo'lib, uning $F(a)$ va $F(a)$ qiymatlarini hisoblash qiyinchilik tug'diradi ;

3) $F(x)$ boshlang'ich funksiya elementar funksiyalarda ifodalanmaydi;

4) integral ostidagi $f(x)$ funksiya jadval ko'rinishida berilgan .

Bunday hollarda aniq integralning qiymatini taqribiy hisoblash masalasi paydo bo'ladi. Bu masalani yechish uchun matematikada turli formulalar topilgan bo'lib, ular umumiy holda ***kvadratur formulalar*** deb ataladi. Shu formulalardan eng soddalaridan ikkitasini qisqacha ko'rib o'tamiz.

I. ***To'g'ri to'rtburchaklar formulasi.*** Bu formulani keltirib chiqarish uchun dastlab $[a,b]$ kesmani uzunligi bir xil va $\Delta x=(b-a)/n$ bo'lgan n ta $[x_{i-1}, x_i]$ kesmachalarga ($i=1, 2, \cdots, n$) ajratamiz. Bunda x_i bo'linish nuqtalari

$$x_i = a + i\Delta x = a + \frac{b-a}{n}i, \quad i = 0, 1, 2, \cdots, n \qquad (8)$$

formula bilan topiladi.

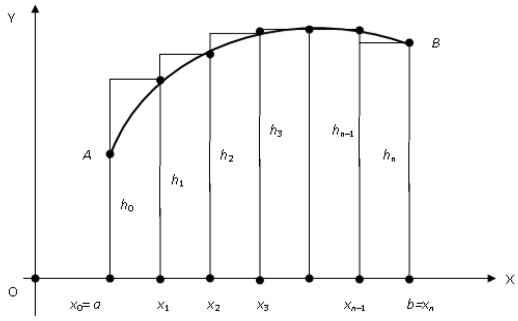
So'ngra integral ostidagi $f(x)$ funksiyaning x_i bo'linish nuqtalaridagi $f(x_i)$ ($i=1, 2, \cdots, n$) qiymatlarini hisoblaymiz. Bu qiymatlar va $[x_{i-1}, x_i]$ kesmachalar uzunligi Δx bo'yicha

$$S_n(f)= f(x_1)\Delta x+ f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x+ \cdots + f(x_n)\Delta x$$

integral yig'indini hosil qilamiz. Ta'rifga asosan I aniq integral $S_n(f)$ integral yig'indilar ketma – ketligining $n\to\infty$ bo'lgandagi limitiga teng. Shu sababli, n katta son bo'lganda, $I \approx S_n(f)$ deb olish mumkin. Natijada ushbu taqribiy formulaga ega bo'lamiz:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \Delta x\cdot[f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+\cdots+f(x_n)] = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,. \qquad (9)$$

Agar $[a,b]$ kesmada $f(x)>0$ deb olsak, unda (9) taqribiy tenglikning o'ng tomonidagi yig'indi asoslari bir xil Δx uzunlikli $[x_{i-1}, x_i]$ kesmachalardan, balandliklari esa $h_i= f(x_i)$ ($i=1, 2, \cdots, n$) bo'lgan to'g'ri to'rtburchaklardan tuzilgan pog'onasimon geometrik shaklning (74-rasmga qarang) yuzini ifodalaydi. Chap tomondagi aniq integral qiymati esa $aABb$ egri chiziqli trapetsiya yuziga teng.



<u>*3-TA'RIF:*</u> **Aniq integral uchun (9) taqribiy tenglik** *to'g'ri to'rtburchaklar formulasi* **deyiladi.**

To'g'ri to'rtburchaklar formulasining xatoligi

$$\Delta \le M_1 \frac{(b-a)^2}{4n}, \quad M_1 = \max_{x\in[a,b]} |f'(x)| \qquad \textbf{(10)}$$

formula bilan baholanadi.

Misol sifatida to'g'ri to'rtburchaklar formulasi yordamida

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg}\, x\Big|_0^1 = \mathrm{arctg}1 - \mathrm{arctg}0 = \frac{\pi}{4} \qquad \textbf{(11)}$$

aniq integralning taqribiy qiymatini topamiz. Buning uchun [0,1] integrallash kesmasini n=10 teng bo'lakka ajratamiz va hisoblashlar natijalarini quyidagi jadval ko'rinishida ifodalaymiz.

i	x_i**=0.1*i***	**1+**x_i^2	$f(x_i)=\frac{1}{1+x_i^2}$	$\sum_i f(x_i)$
1	**0.1**	**1.01**	**0.9901**	**0.9901**
2	**0.2**	**1.02**	**0.9615**	**1.9516**
3	**0.3**	**1.09**	**0.9174**	**2.8690**
4	**0.4**	**1.16**	**0.8621**	**3.7311**
5	**0.5**	**1.25**	**0.8000**	**4.5311**
6	**0.6**	**1.36**	**0.7353**	**5.2664**
7	**0.7**	**1.49**	**0.6711**	**5.9375**
8	**0.8**	**1.64**	**0.6098**	**6.5473**
9	**0.9**	**1.81**	**0.5525**	**7.0998**
10	**1.0**	**2.0**	**0.5000**	**7.5998**

Bizning misolda Δx=(1–0)/10=0.1 bo'lgani uchun, (9) formulaga asosan, ushbu natijani olamiz:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx 0.1 \cdot 7.5998 = 0.75998 .$$

Bu taqribiy natijani xatoligini (10) formula bo'yicha baholaymiz. Bizning misolda

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \Rightarrow |f'(x)| = \left| -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \right| < \frac{2\cdot 1}{(1+0^2)^2} = 2$$

va shu sababli (10) formulada M_1=2 deb olish mumkin. Bu holda

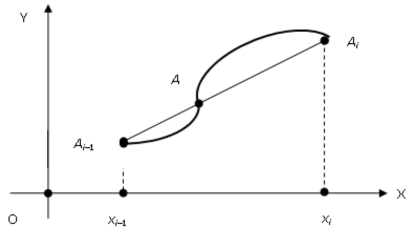
$\Delta \le 2\cdot(1-0)^2/(4\cdot 10)=1/20=0.05$

bo'lgani uchun (11) aniq integralning qiymati

0.75998–0.05 < I < 0.75998+0.05 => 0.70998 < I < 0.80998

oraliqda yotadi. Bu natijani (11) integralning aniq qiymati $\pi/4\approx 0.7854$ bilan taqqoslab, yo'l qo'yilgan absolut xatolik Δ=0.0255 ekanligini ko'rishimiz mumkin. Shunday qilib, hatto unchalik katta bo'lmagan n=10 holda ham (9) to'g'ri to'rtburchaklar formulasi ancha yaxshi natija berdi.

II. *Trapetsiyalar formulasi.* Soddalik uchun bu formulani I integral ostidagi funksiya $f(x)>0$ bo‘lgan holda qaraymiz.Bu yerda ham $[a,b]$ integrallash kesmasini (8) nuqtalar bilan bir xil Δx uzunlikli n ta $[x_{i-1}, x_i]$ (i=1, 2, ···, n) kesmachalarga bo‘laklaymiz. So‘ngra $y=f(x)$ funksiya grafigidagi $A_{i-1}(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ va $A_i(x_i, f(x_i))$ nuqtalarni to‘g‘ri chiziq kesmasi (vatar) bilan tutashtirib, egri chiziqli $x_{i-1}A_{i-1}AA_ix_i$ trapetsiyani to‘g‘ri chiziqli $x_{i-1}A_{i-1}A_ix_i$ trapetsiya bilan (75-rasmga qarang) almashtiramiz.



75-rasm

Bu holda to‘g‘ri chiziqli $x_{i-1}A_{i-1}A_ix_i$ trapetsiyaning yuzi

$$S_i = \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}(x_i - x_{i-1}) = \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}\Delta x \quad (i = 1,2,3,\cdots,n)$$

egri chiziqli $x_{i-1}A_{i-1}AA_ix_i$ trapetsiyaning yuziga taqriban teng deb olish mumkin. Unda bu yuzalarning yig‘indisi aniq integralning taqribiy qiymatiga teng bo‘ladi, ya’ni

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}[\frac{f(a)+f(b)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1})] \qquad (12)$$

taqribiy formula o‘rinli bo‘ladi.

<u>*4-TA’RIF:*</u> Aniq integral uchun (12) taqribiy tenglik *trapetsiyalar formulasi* deyiladi.

Trapetsiyalar formulasining absolut xatoligi

$$\Delta \le \frac{(b-a)^3}{12n^2}M_2 \quad , \quad M_2 = \max_{x\in[a,b]}|f''(x)| \qquad (13)$$

formula bilan baholanadi.

Misol sifatida (11) aniq integralning taqribiy qiymatini n=10 bo‘lgan holda trapetsiyalar formulasi orqali hisoblaymiz. Oldingi hisoblash natijalaridan foydalanib,

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx 0.1\cdot[\frac{1+0.5}{2} + 7.0998] = 0.78498$$

taqribiy tenglikni hosil etamiz. Bunda hosil qilingan taqribiy natijaning absolut xatoligi

$\Delta=\pi/4-0.78498=0.7854-0.78498=0.0004$

bo‘lib, to‘g‘ri to‘rtburchaklar formulasi absolut xatoligiga (unda Δ=0.0255 ekanligini eslatib o‘tamiz) qaraganda ancha kichikdir. Demak, trapetsiyalar formulasi to‘g‘ri to‘rtburchaklar formulasiga nisbatan aniqroq natija beradi. Buni ularning xatoliklarini ifodalovchi (10) va (13) formulalar orqali ham ko‘rish mumkin.

Ko‘rib o‘tilgan to‘g‘ri to‘rtburchaklar va trapetsiyalar formulalariga nisbatan aniq integralning taqribiy qiymatini aniqroq hisoblashga imkon beradigan boshqa kvadratur formulalar ham mavjudligini ta’kidlab o‘tamiz. Masalan, ingliz matematigi Simpson (1710 – 1761) tomonidan topilgan parabolalar formulasi, Chebishevning kvadratur formulasi shular jumlasidandir.

XULOSA

Oldin aniq integral ta’rifga asosan integral yig‘indining limiti singari aniqlanishini ko‘rgan edik. Ammo kamdan-kam funksiyaning aniq integralini bevosita ta’rif bo‘yicha hisoblash mumkin. Bunda juda murakkab hisoblashlarni bajarishga to‘g‘ri keladi. Shu sababli aniq integralni qulay va osonroq hisoblash usulini topish masalasi paydo bo‘ladi. Bu masalaning javobi Nyuton-Leybnits formulasi orqali beriladi. Bu formula integral hisobning eng asosiy formulasi bo‘lib, aniq va aniqmas integrallar orasidagi bog‘lanishni ifodalaydi. Agar berilgan aniq integralni to‘g‘ridan-to‘g‘ri Nyuton-Leybnits formulasi yordamida hisoblash murakkab bo‘lsa, unda ayrim hollarda bo‘laklab integrallash yoki o‘zgaruvchilarni almashtirish usullaridan foydalanish mumkin.

Bir qator hollarda integralning aniq qiymatini topish masalasi juda murakkab bo‘lishi mumkin. Bunday hollarda aniq integral qiymatini taqribiy hisoblash usullariga murojaat qilinadi. Ularga to‘g‘ri to‘rtburchaklar va trapetsiyalar formulalarini misol qilib ko‘rsatib bo‘ladi.

Tayanch iboralar

* Yuqori chegarasi o‘zgaruvchan integral * Nyuton-Leybnits formulasi* Bo‘laklab integrallash formulasi * O‘zgaruvchilarni almashtirish usuli* Kvadratur formulalar * To‘g‘ri to‘rtburchaklar formulasi * Trapetsiyalar formulasi

Takrorlash uchun savollar

1. Yuqori chegarasi o‘zgaruvchan integralning hosilasi nimaga teng?
2. Nyuton-Leybnits formulasi qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
3. Aniq integralni bo‘laklab integrallash formulasini keltirib chiqaring.
4. Aniq integralda o‘zgaruvchilarni almashtirish formulasi qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
5. Aniq integralni taqribiy hisoblash masalasi qayerdan paydo bo‘ladi?
6. Kvadratur formulalar nima?
7. To‘g‘ri to‘rtburchaklar formulasining mazmuni nimadan iborat?
8. To‘g‘ri to‘rtburchaklar formulasining xatoligi qanday baholanadi?
9. Trapetsiyalar formulasi qanday aniqlanadi?
10. Trapetsiyalar formulasining xatoligi qanday baholanadi?

23§ ANIQ INTEGRALNING GEOMETRIK VA MEXANIK TATBIQLARI.

- ***Tekislikdagi geometrik shakllarning yuzalarini hisoblash.***
- ***Tekislikdagi egri chiziq yoyi uzunligini hisoblash.***
- ***Aniq integral yordamida jismlar hajmini hisoblash.***
- ***Aniq integralni mexanika masalalariga tatbiqlari.***
- ***Aniq integralni ayrim iqtisodiy tatbiqlari.***

Aniq integral yordamida egri chiziqli trapetsiyaning yuzasi, o‘zgaruvchi kuch bajargan ishni va mehnat unumdorligi o‘zgaruvchan bo‘lgan holda ishlab chiqarilgan mahsulot hajmini topish mumkinligini oldin ko‘rib o‘tgan edik. Ammo aniq integralning amaliy tatbiqlari bu bilan chegaralanib qolmasdan, bulardan tashqari uning yordamida yana juda ko‘p masalalar o‘z yechimini topadi. Bu paragrafda ulardan ayrimlari bilan tanishamiz.

7.1. Tekislikdagi geometrik shakllarning yuzalarini hisoblash. Bizga ma’lumki, $y=f(x)\geq 0$ funksiya grafigi, $x=a$ va $x=b$ vertikal to‘g‘ri chiziqlar hamda $y=0$, ya’ni OX koordinata o‘qi bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning yuzasi aniq integral orqali

$$S=\int_a^b f(x)dx \qquad (1)$$

formula bilan hisoblanadi. Bu formulani umumiyroq hollarda qaraymiz.

❖ Agar $[a,b]$ kesmada $f(x)\leq 0$ bo‘lsa, unda tegishli egri chiziqli trapetsiya OX o‘qidan pastda joylashgan va aniq integral qiymati manfiy son bo‘ladi. Shu sababli bu holda egri chiziqli trapetsiya yuzasi

$$S = -\int_a^b f(x)dx = \left|\int_a^b f(x)dx\right| \qquad (2)$$

formula orqali topiladi.

Masalan, $x\in[\pi/2,\pi]$ holda $y=\cos x\leq 0$ va bunda hosil bo‘ladigan egri chiziqli trapetsiya yuzasi

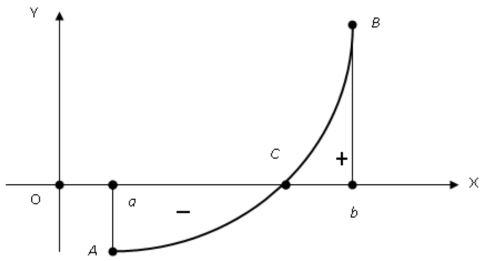
$$S = \left|\int_{\pi/2}^{\pi} \cos x dx\right| = \left|\sin x\Big|_{\pi/2}^{\pi}\right| = |0-1| = 1 \quad .$$

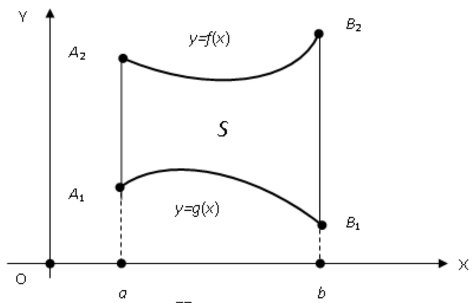
❖ Agar $[a,b]$ kesmada $f(x)$ ishorasi o‘zgaruvchan funksiya bo‘lsa, unda tegishli egri chiziqli trapetsiyaning bir qismi OX o‘qidan yuqorida , bir qismi esa pastda joylashgan bo‘ladi (keyingi betdagi 76-rasmga qarang).

Bu holda hosil bo‘ladigan egri chiziqli trapetsiyaning yuzasi (1) va (2) formulalardan foydalanib topiladi va ularni birlashtirib

$$S = \int_a^b |f(x)|dx \qquad (3)$$

ko‘rinishda yozish mumkin.





77-rasm

Masalan, $x\in[0,\pi]$ holda $y=\cos x$ funksiya $[0,\pi/2)$ sohada musbat, $(\pi/2,\pi]$ sohada esa manfiy qiymatlar qabul etadi. Bunda hosil bo‘ladigan egri chiziqli trapetsiya yuzasi

$$S = \int_0^{\pi} |\cos x| dx = \int_0^{\pi/2} \cos x dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (-\cos x)dx = \sin x\Big|_0^{\pi/2} - \sin x\Big|_{\pi/2}^{\pi} = 1-(-1) = 2 \quad .$$

❖ $y=f(x)$ va $y=g(x)$ $[f(x)\geq g(x)]$ egri chiziqlar hamda $x=a$ va $x=b$ to‘g‘ri chiziqlar bilan chegaralangan geometrik shaklning (77-rasm) S yuzasini hisoblash talab etiladi.

Chizmadan va aniq integralning geometrik ma’nosidan foydalanib, quyidagi tengliklarni yoza olamiz:

$$S = S_{A_1A_2B_2B_1} = S_{aA_2B_2b} - S_{aA_1B_1b} = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b [f(x)-g(x)]dx \quad . \qquad (4)$$

Masalan, $y=x^2$ va $y=x$, $x=2$ va $x=4$ chiziqlar bilan chegaralangan yassi geometrik shakl yuzasini (4) formuladan foydalanib hisoblaymiz:

$$S = \int_2^4 (x^2-x)dx = \left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_2^4 = \left(\frac{64}{3}-8\right)-\left(\frac{8}{3}-2\right) = \frac{56}{3}-6 = \frac{38}{3} = 12\frac{2}{3} \quad .$$

❖ Endi $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ ($t\in[\alpha, \beta]$) parametrik tenglama bilan berilgan chiziqdan hosil qilingan egri chiziqli trapetsiya yuzasini hisoblash masalasini qaraymiz. Unda (1) formuladagi aniq integralda x o‘zgaruvchini t o‘zgaruvchi bilan almashtirib, quyidagi formulaga ega bo‘lamiz:

$$S = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b ydx = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t)d\varphi(t) = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t)\varphi'(t)dt \quad . \qquad (5)$$

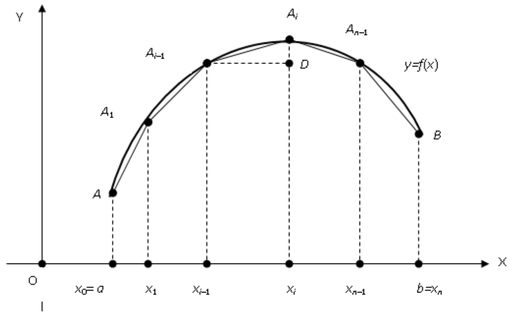
Misol sifatida yarim o‘qlari a va b bo‘lgan ellipsning S yuzasini topamiz. Bu ellipsning parametrik tenglamasi $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ $(t\in[0,2\pi])$ ekanligi bizga ma’lum. Ellipsning simmetrikligidan hamda (5) formuladan foydalanib, uning yuzasi S uchun

$$S=4\int_0^a f(x)dx=4\int_{\pi/2}^0 b\sin t(-a\sin t)dt=-4ab\int_{\pi/2}^0 \sin^2 t dt=-4ab\int_{\pi/2}^0 \frac{1-\cos 2t}{2}dt=-2ab(t-\frac{1}{2}\sin 2t)\Big|_{\pi/2}^0=\pi ab$$

formulaga ega bo‘lamiz. Bunda $a=b=R$ desak, unda ellips aylanaga o‘tadi va yuqoridagi formuladan doira yuzasi uchun bizga tanish bo‘lgan $S=\pi R^2$ formula kelib chiqadi.

7.2. Tekislikdagi egri chiziq yoyi uzunligini hisoblash. Maktab geometriyasida tekislikdagi egri chiziqlardan faqat aylana va uning yoylari uzunligini hisoblash formulasi beriladi. Parabola, giperbola, sinusoida kabi egri chiziqlarning turli yoylari uzunligini hisoblash masalasi amaliyotda kerak bo‘ladi. Bu masala ham aniq integral yordamida o‘z yechimini topadi.

$y=f(x)$, $x\in[a,b]$, funksiya bilan berilgan egri chiziqning AB yoyi uzunligini topish masalasini qaraymiz (78-rasmga qarang).



Bunda $f(x)$ differensiallanuvchi va uning $f'(x)$ hosilasi $[a,b]$ kesmada uzluksiz deb hisoblaymiz. Berilgan $[a,b]$ kesmani

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_n=b$$

nuqtalar bilan ixtiyoriy n bo‘lakka ajratamiz. Natijada AB yoy n ta kichik $A_{i-1}A_i$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ yoychalarga ajraladi.

Agar AB yoy uzunligi l va $A_{i-1}A_i$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ yoychalar uzunliklari Δl_i deb olsak, unda

$$l=\sum_{i=1}^n \Delta l_i$$

deb yozish mumkin. Endi kichik $A_{i-1}A_i$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ yoychalarni ularning vatari , ya’ni $A_{i-1}A_i$ kesmalar bilan almashtiramiz. To‘g‘ri burchakli $A_{i-1}A_iD$ uchburchakda

$$|A_{i-1}D|=x_i-x_{i-1}=\Delta x_i, \qquad |A_iD|=f(x_i)-f(x_{i-1})=\Delta f(x_i)$$

katetlar bo‘yicha $A_{i-1}A_i$ gipotenuza uzumligini Pifagor teoremasidan foydalanib topamiz:

$$|A_{i-1}A_i|=\sqrt{|A_{i-1}D|^2+|A_iD|^2}=\sqrt{(\Delta x_i)^2+(\Delta f(x_i))^2}=\sqrt{1+\left(\frac{\Delta f(x_i)}{\Delta x_i}\right)^2}\cdot\Delta x_i\,.$$

Bu yerda $\Delta l_i\approx|A_{i-1}A_i|$ deb, izlanayotgan yoy uzunligi l uchun ushbu taqribiy tenglikni hosil etamiz:

$$l=\sum_{i=1}^n \Delta l_i\approx\sum_{i=1}^n |A_{i-1}A_i|=\sum_{i=1}^n\sqrt{1+\left(\frac{\Delta f(x_i)}{\Delta x_i}\right)^2}\Delta x_i=L_n\quad.$$

Bu taqribiy tenglikdan aniq tenglikka o‘tish uchun $n\to\infty$, $\Delta_n\to 0$ deb olamiz. Bu holda, hosila ta’rifiga asosan,

$$\frac{\Delta f(x_i)}{\Delta x_i}\approx f'(x_i)$$

deb olish mumkin. Shu sababli yuqoridagi L_n yig‘indini $\sqrt{1+[f'(x)]^2}$ funksiya uchun $[a,b]$ kesma bo‘yicha integral yig‘indi deb qarash mumkin. Unda, aniq integral ta’rifiga asosan, izlanayotgan yoy uzunligi l uchun quyidagi formulani hosil etamiz:

$$l=\lim_{\substack{n\to\infty,\\ \Delta_n\to 0}} L_n=\lim_{\substack{n\to\infty,\\ \Delta_n\to 0}}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\left(\frac{\Delta f(x_i)}{\Delta x_i}\right)^2}\Delta x_i=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx \quad . \qquad (6)$$

Misol sifatida y=lnsin$x$ egri chiziqning x=π/3 va x=π/2 abssissali nuqtalari orasidagi yoyining uzunligini topamiz. Bunda y'=ctg$x$ ekanligidan va universal almashtirmadan foydalanib, (6) formulaga asosan, ushbu natijani olamiz:

$$l=\int_{\pi/3}^{\pi/2}\sqrt{1+(y')^2}dx=\int_{\pi/3}^{\pi/2}\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2 x}dx=\int_{\pi/3}^{\pi/2}\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2 x}dx=\int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{dx}{\sin x}=\begin{bmatrix} t=tg\frac{x}{2},\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\, dx=\frac{2dt}{1+t^2} \\ \alpha=\mathrm{tg}\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}},\, \beta=tg\frac{\pi}{4}=1 \end{bmatrix}=$$

$$=\int_{1/\sqrt{3}}^{1}\frac{1+t^2}{2t}\frac{2dt}{1+t^2}=\ln t\Big|_{1/\sqrt{3}}^{1}=\ln\sqrt{3} \quad .$$

Agar egri chiziq $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ ($t\in[\alpha,\beta]$) parametrik tenglamasi bilan berilgan bo‘lsa, unda $dx=\varphi'(t)dt$, $dy=\psi'(t)dt$ va

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

bo‘lgani uchun (6) formula quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{1+[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t))}]^2}\varphi'(t)dt=\int_\alpha^\beta\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}dt \quad . \qquad (7)$$

Misol sifatida $x=e^t\cos t$, $y=e^t\sin t$ ($t\in[0,\ln\pi]$) parametrik tenglamasi bilan berilgan egri chiziq yoyi uzunligini topamiz. Bunda

$$x'=\varphi'(t)=e^t(\cos t-\sin t)\ ,\ y'=\psi'(t)=e^t(\cos t+\sin t)$$

bo‘lgani uchun, (7) formulaga asosan, quyidagi javobga ega bo‘lamiz:

$$l=\int_0^{\ln\pi}\sqrt{[e^t(\cos t-\sin t)]^2+[e^t(\cos t+\sin t)]^2}dt=\sqrt{2}e^t\Big|_0^{\ln\pi}=\sqrt{2}(\pi-1) \quad .$$

7.3. Aniq integral yordamida jismlar hajmini hisoblash. Maktab geometriyasidan biz faqat eng sodda jismlar bo‘lmish prizma, piramida, konus, silindr va shar hajmlarini hisoblash formulalarini bilamiz. Aniq integral yordamida bir qator murakkabroq jismlarning hajmini hisoblash imkoniyatiga ega bo‘lamiz.

- ***Jism hajmini uning ko‘ndalang kesimi yuzasi bo‘yicha hisoblash.*** Bizga biror J jism berilgan bo‘lib, uni OX o‘qiga perpendikular tekisliklar bilan kesganimizda hosil bo‘ladigan kesimlarning yuzasi ma’lum va bu yuza biror uzluksiz $S(x)$, $x\in[a,b]$, funksiya orqali ifodalansin. Bu holda J jismning V hajmini topish masalasini qaraymiz. Buning uchun $[a,b]$ kesmani

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_n=b$$

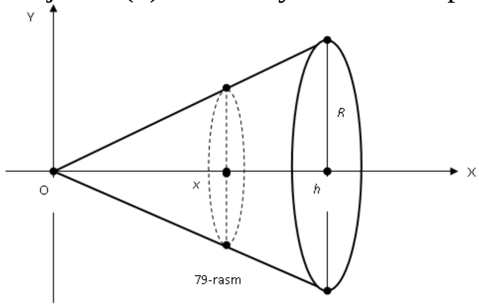
nuqtalar bilan ixtiyoriy n bo‘lakka ajratamiz va bu nuqtalar orqali OX o‘qiga perpendikular tekisliklar o‘tkazamiz. Bu tekisliklar jismni J_i (i=1, 2, ···, n) qatlamlarga ajratadi. Bu qatlamlarning hajmlarini ΔV_i (i=1, 2, ···, n) deb belgilasak, unda izlangan V hajmni $V=\Delta V_1+\Delta V_2+\cdots+\Delta V_n$ yig‘indi ko‘rinishida yozish mumkin. Yuqorida ko‘rsatilgan x_i bo‘linish nuqtalari orqali hosil qilingan har bir $[x_{i-1}, x_i]$ kesmachalardan (i=1, 2, ···, n) ixtiyoriy bir ξ_i nuqtalarni tanlab olamiz. Endi J_i (i=1, 2, ···, n) qatlamlarning har birini balandligi $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$, asosining yuzasi esa $S(\xi_i)$ bo‘lgan silindrik jismlar bilan almashtiramiz. Bu holda $\Delta V_i\approx S(\xi_i)\Delta x_i$ taqribiy tenglik o‘rinli ekanligini nazarga olsak, yuqoridagi yig‘indidan

$$V=\sum_{i=1}^{n}\Delta V_i\approx\sum_{i=1}^{n}S(\xi_i)\Delta x_i=V_n$$

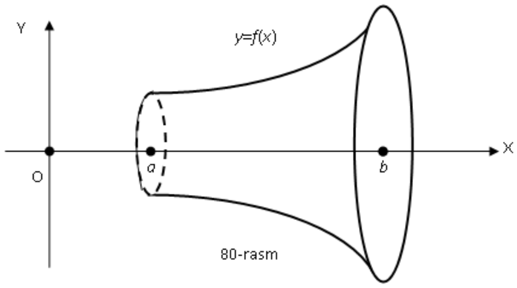
taqribiy natijaga ega bo‘lamiz. Bu taqribiy tenglikda bo‘laklar soni n qanchalik katta va $\Delta_n=\max\limits_{1\le i\le n}\Delta x_i$ qanchalik kichik bo‘lsa, V_n yig‘indi izlanayotgan V hajm qiymatiga shunchalik yaqin bo‘ladi deb olish mumkin. Shu sababli J jismning hajmi V yuqoridagi V_n yig‘indilar ketma-ketligining $n\to\infty$, $\Delta_n\to 0$ bo‘lgandagi limiti deb olinadi. Unda V_n yig‘indi $S(x)$ funksiya uchun $[a,b]$ kesma bo‘yicha integral yig‘indi ekanligini hisobga olib va aniq integral ta’rifidan foydalanib, berilgan J jismning V hajmini uning ko‘ndalang kesimi yuzasi $S(x)$ bo‘yicha hisoblash uchun quyidagi formulaga ega bo‘lamiz:

$$V=\lim_{\substack{n\to\infty,\\ \Delta_n\to 0}} V_n=\lim_{\substack{n\to\infty,\\ \Delta_n\to 0}}\sum_{i=1}^{n} S(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b S(x)dx\ . \qquad (8)$$

Misol sifatida asosining radiusi R, balandligi esa h bo‘lgan doiraviy konusning (79-rasmga qarang) V hajmini (8) formula yordamida topamiz.



79-rasm



80-rasm

Bunda ko‘ndalang kesimlar doiralardan iborat bo‘lib, ularning radiuslari $r=Rx/h$, $x\in[0,h]$, funksiya bilan aniqlanadi. Demak, ko‘ndalang kesim yuzasi

$$S(x)=\pi r^2=\pi(Rx/h)^2$$

funksiya bilan ifodalanadi. Unda bu konus hajmi uchun, (8) tenglikka asosan,

$$V=\int_0^h S(x)dx=\int_0^h \frac{\pi R^2x^2}{h^2}dx=\left.\frac{\pi R^2x^3}{3h^2}\right|_0^h=\frac{\pi R^2h^3}{3h^2}=\frac{\pi R^2h}{3}=\frac{1}{3}S_{asos}\cdot h$$

formulaga , ya’ni bizga maktabdan tanish bo‘lgan natijaga kelamiz.

- ***Aylanma jismlarining hajmini hisoblash.*** Endi $y=f(x)$, $x\in[a,b]$, funksiya grafigi orqali hosil qilingan egri chiziqli trapetsiyaning OX koordinata o‘qi atrofida aylanishdan hosil bo‘lgan J aylanma jismning (80-rasmga qarang) V hajmini topish masalasini ko‘ramiz.

Bunda aylanma jismning ko‘ndalang kesimlari doiralardan iborat bo‘lib, ularning yuzasi $S(x)=\pi f^{\,2}(x)$ funksiya bilan ifodalanadi. Demak, (8) formulaga asosan, aylanma jism hajmi V uchun ushbu formulaga ega bo‘lamiz:

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx\ . \qquad (9)$$

Misol sifatida oldin ko‘rib o‘tilgan doiraviy konusning hajmini yana bir marta hisoblaymiz. Bu konusni uning $y=Rx/h$ tenglamali yasovchisini OX koordinata o‘qi atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan aylanma jism deb qarash mumkin ya shu sababli, (9) formulaga asosan,

$$V=\pi\int_0^h \frac{R^2x^2}{h^2}dx=\left.\frac{\pi R^2x^3}{3h^2}\right|_0^h=\frac{\pi R^2h^3}{3h^2}=\frac{\pi R^2h}{3}=\frac{1}{3}S_{asos}\cdot h$$

natijaga, ya’ni oldin hosil qilingan formula o‘rinli ekanligiga yana bir marta ishonch hosil etamiz.

Yana bir misol sifatida yarim o‘qlari a va b bo‘lgan ellipsni OX o‘q atrofida aylantirishdan hosil bo‘ladigan ellipsoidning hajmini topamiz. Ellipsning kanonik tenglamasidan (V bob,§3, (7))

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\Rightarrow y^2=b^2\Big(1-\frac{x^2}{a^2}\Big)\,,\ x\in[-a,a]$$

ekanligini topamiz. Bu natijani (7) formulaga qo‘yib, ellipsoidning V hajmini hisoblaymiz:

$$V=\pi\int_{-a}^{a} f^2(x)dx=\pi\int_{-a}^{a} y^2dx=\pi b^2\int_{-a}^{a}\Big(1-\frac{x^2}{a^2}\Big)dx=\pi b^2\Big(x-\frac{x^3}{3a^2}\Big)\Big|_{-a}^{a}=\frac{4}{3}\pi ab^2\,.$$

Agar bunda $a=b=R$ deb olsak, unda ellipsoid radiusi R bo‘lgan sharga aylanadi va bu holda sharning halmi uchun yuqoridagi natijadan bizga maktabdan tanish bo‘lgan $V=4\pi R^3/3$ formula kelib chiqadi.

7.4. Aniq integralni mexanika masalalariga tatbiqlari. Biz oldin kattaligi o‘zgaruvchan va $f(x)$ funksiya bilan aniqlanadigan kuch moddiy nuqtani $[a,b]$ kesma bo‘yicha harakatlantirganda bajarilgan A ish qiymati aniq integral orqali

$$A=\int_a^b f(x)dx$$

formula bilan hisoblanishini ko‘rsatgan edik. Ammo bu bilan aniq integralni mexanika masalalarini yechishga tatbig‘i chegaralanib qolmaydi. Bunga misol sifatida bu yo‘nalishda yana ikkita masalani ko‘rib o‘tamiz.

- ***Notekis harakatda bosib o‘tilgan masofani hisoblash.*** Ma’lumki, biror v o‘zgarmas tezlik bilan to‘g‘ri chiziq bo‘ylab tekis harakat qilayotgan moddiy nuqtaning $[a,b]$ vaqt oralig‘ida bosib o‘tgan s masofasi $s=v(b-a)$ formula bilan hisoblanadi. Endi tezligi har bir t vaqtda o‘zgaruvchan va $v=v(t)$ funksiya bilan aniqlanadigan notekis harakatda moddiy nuqtaning $[a,b]$ vaqt oralig‘ida bosib o‘tadigan s masofani hisoblash masalasini ko‘ramiz. Buning uchun $[a,b]$ vaqt oraligini $a=t_0, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, t_n=b$ nuqtalar bilan ixtiyoriy n bo‘lakka ajratamiz. Har bir (t_{i-1}, t_i) vaqt oraliqchalari uzunliklarini Δt_i kabi belgilaymiz va undan ixtiyoriy bir $\tilde{t}_i$ nuqtani tanlaymiz. Moddiy nuqtaning (t_{i-1}, t_i) vaqt oraliqchalarida bosib o‘tgan masofasini s_i kabi belgilab, bu vaqtda uning v_i tezligi taqriban o‘zgarmas va $v_i=v(\tilde{t}_i)$deb olamiz. Bu holda $s_i \approx v_i\Delta t_i =v(\tilde{t}_i)\Delta t_i$ bo‘lib, bosib o‘tilgan s masofa uchun

$$s=\sum_{i=1}^n s_i \approx \sum_{i=1}^n v_i\Delta t_i=\sum_{i=1}^n v(\tilde{t}_i)\Delta t_i$$

taqribiy tenglikni hosil qilamiz. Bu masofaning aniq qiymatini topish maqsadida bo‘lakchalar soni n ni cheksiz oshirib boramiz. Bunda $\Delta_n=\max\limits_{1\le i\le n}\Delta x_i$ cheksiz kamayib boradi deb hisoblaymiz. Natijada, aniq integral ta’rifiga asosan,

$$s=\lim_{\substack{n\to\infty,\\ \Delta_n\to 0}}\sum_{i=1}^n v(\tilde{t}_i)\Delta t_i=\int_a^b v(t)dt \qquad (10)$$

formulaga ega bo‘lamiz.

Misol sifatida tezligi $v(t)=t^2+3t$ qonun bo‘yicha o‘zgaradigan notekis harakatda [3,8] vaqt oralig‘ida bosib o‘tilgan s masofani (10) formulaga asosan topamiz:

$$s=\int_3^8(3t^2+4t)dt=(t^3+2t^2)\Big|_3^8=(8^3+2\cdot8^2)-(3^3+2\cdot3^2)=640-45=595.$$

Bundan tashqari aniq integral bir jinsli bo‘lmagan sim massasini, yassi chiziq va geometrik shaklning og‘irlik markazi, inersiya momentlarini hisoblash uchun ham qo‘llaniladi.

XULOSA

Oldin aytilgandek aniq integral juda ko‘p amaliy masalalarni yechish uchun qo‘llaniladi. Geometriyada aniq integraldan turli ko‘rinishdagi egri chiziqli trapetsiyalarning yuzalarini hisoblash, egri chiziq yoyining uzunligini topish, jismlar hajmini aniqlash kabi masalalarni yechishda foydalaniladi. Aniq integralning mexanik tatbiqlariga misol sifatida kuch bajargan ishni hisoblash, notekis harakatda bosib o‘tilgan masofani aniqlash, sim massasini topish kabilarni ko‘rsatish mumkin. Iqtisodiy nazariyada esa aniq integral yordamida ishlab chiqarilgan mahsulot hajmini topish, iqtisodiy ko‘rsatkich bo‘lgan Djini koeffitsiyentini hisoblash, iste’molchi va ishlab chiqaruvchining yutug‘ini aniqlash kabi masalalar o‘z yechimini topadi.

Tayanch iboralar

* Egri chiziqli trapetsiya yuzasi * Tekislikdagi shakl yuzasi * Egri chiziq yoyi uzunligi * Ko‘ndalang kesim bo‘yicha jism hajmi * Aylanma jism hajmi* O‘zgaruvchi kuch bajargan ish * Notekis harakatda bosib o‘tilgan masofa * Lorents egri chizig‘i * Djini koeffitsiyenti * Talab funksiyasi * Taklif funksiyasi * Bozor muvozanati * Iste’molchining yutug‘i * Ishlab chiqaruvchining yutug‘i

Takrorlash uchun savollar

1. Tekislikdagi geometrik shakllarning yuzasi aniq integral orqali qanday hisoblanadi?
2. Tekislikdagi egri chiziq yoyi uzunligi aniq integral orqali qanday hisoblanadi?
3. Jism hajmini uning ko‘ndalang kesimi yuzasi orqali hisoblash formulasi qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
4. Aylanma jismning hajmi aniq integral yordamida qanday hisoblanadi?
5. O‘zgaruvchi kuch bajargan ish aniq integral orqali qanday ifodalanadi?
6. Notekis harakatda bosib o‘tilgan masofani hisoblash formulasini yozing.

24§ XOSMAS INTEGRALLAR

- ***I tur xosmas integrallar.***
- ***II tur xosmas integrallar.***
- ***Aralash turli xosmas integrallar.***

Berilgan $y=f(x)$ funksiyaning aniq integrali tushunchasini ikkita shart bajarilgan holda qaragan edik. Birinchidan, $[a,b]$ integrallash sohasining a va b chegaralari chekli sonlardan iborat deb olingan edi. Ikkinchidan, integral ostidagi $f(x)$ funksiya $[a,b]$ integrallash sohasida chegaralangan deb hisoblangan edi.

Ammo bir qator masalalarni yechishda quyi yoki yuqori chegaralaridan kamida bittasi cheksiz ($\pm\infty$) yoki integral ostidagi $f(x)$ funksiya integrallash sohasida chegaralanmagan integrallar paydo bo‘ladi. Masalan, $y=e^{-x}$, $x=0$ va $y=0$ chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyani yuzasini topish masalasi $[0,\infty)$ cheksiz soha bo‘yicha integral tushunchasini kiritishni va uni hisoblashni taqozo qiladi. Yoki $y=2\sqrt{x}$, $x\in[0,1]$, parabola yoyining uzunligini topish masalasi [0,1] kesmada chegaralanmagan $f(x)=\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}$ funksiyani integrallash masalasiga keladi.

Shu sababli aniq integral tushunchasini bunday hollar uchun umumlashtirishga to‘g‘ri keladi va bu yerda biz shu masala bilan shug‘ullanamiz.

8.1. I tur xosmas integrallar. Berilgan $y=f(x)$ funksiya $[a, +\infty)$ cheksiz yarim oraliqda aniqlangan va ixtiyoriy chekli $b\geq a$ uchun $[a,b]$ kesmada integrallanuvchi , ya’ni

$$F(b)=\int_a^b f(x)dx$$

integral mavjud bo‘lsin.

<u>1-TA’RIF:</u> $y=f(x)$ funksiyaning $[a, +\infty)$ cheksiz yarim oraliq bo‘yicha ***I tur xosmas integrali*** deb yuqori chegarasi o‘zgaruvchi $F(b)$ integralning $b\to+\infty$ bo‘lgandagi limitiga aytiladi.

$y=f(x)$ funksiyaning $[a, +\infty)$ cheksiz yarim oraliq bo‘yicha I tur xosmas integrali

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \qquad (1)$$

deb belgilanadi va , ta’rifga asosan,

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx \qquad (2)$$

kabi aniqlanadi.

Geometrik nuqtai nazardan (1) xosmas integral $y=f(x)$ $[f(x)\geq 0]$, $x=a$ va $y=0$ chiziqlar bilan chegaralangan cheksiz shaklning yuzasini ifodalaydi.

2-TA'RIF: Agar (2) limit mavjud va chekli bo'lsa, unda (1) xosmas integral ***yaqinlashuvchi***, aks holda esa ***uzoqlashuvchi*** deyiladi.

(1) xosmas integralni qarashda ikkita masala paydo bo'ladi.

I. (1) xosmas integral yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi ekanligini aniqlash;

II. (1) xosmas integral yaqinlashuvchi bo'lgan holda uning qiymatini topish.

Misol sifatida ushbu I tur xosmas integralni qaraymiz:

$$I_\alpha = \int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha},\ a>0 \qquad (3)$$

Bu integralni uch holda tahlil etamiz.

1) Dastlab α>1 holni qaraymiz. Bu holda xosmas integral ta'rifi va Nyuton – Leybnits formulasiga asosan quyidagi natijani olamiz:

$$I_\alpha = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b\frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to+\infty}\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Bigg|_a^b = \frac{1}{1-\alpha}\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{b^{\alpha-1}} - a^{1-\alpha}\right) = \frac{1}{1-\alpha}(0-a^{1-\alpha}) = \frac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1}$$

Demak, bu holda qaralayotgan (3) xosmas integral yaqinlashuvchi va uning qiymati $a^{1-\alpha}$ /(α–1) bo'ladi.

2) Endi α=1 holni tahlil etamiz:

$$I_1 = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b\frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty}\ln x\Big|_a^b = \lim_{b\to+\infty}(\ln b - \ln a) = \infty\ .$$

Demak, bu holda (3) xosmas integral uzoqlashuvchi.

3) α<1, ya'ni 1–α>0 holni ko'rib chiqamiz:

$$I_\alpha = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b\frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to+\infty}\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Bigg|_a^b = \frac{1}{1-\alpha}\lim_{b\to+\infty}(b^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}) = \infty\,.$$

Demak, bu holda ham (3) xosmas integral uzoqlashuvchi ekan.

Shunday qilib, (3) xosmas integral α>1 holda yaqinlashuvchi, aks holda, ya'ni α≤1 bo'lganda uzoqlashuvchi bo'ladi. Bu natijaning geometrik ma'nosi shundan iboratki, tekislikdagi

$$y = \frac{1}{x^\alpha}\ (\ x\in[a,\infty)\,,\ a>0)\,,\ x=1\,,\ y=0$$

chiziqlar bilan chegaralangan yarim cheksiz geometrik shakllar α>1 holda qiymati $S=a^{1-\alpha}$ /(α–1) bo'l gan chekli yuzaga ega (83-rasmga qarang).

Aksincha, α≤1 bo'lganda esa bu geometrik shakllar cheksiz yuzaga ega bo'ladi.

Ko'p hollarda (1) xosmas integralning aniq qiymatini bilish shart bo'lmasdan, uning yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi ekanligini va, yaqinlashuvchi bo'lgan holda, qiymatini baholash yetarlidir. Bunday hollarda quyidagi teoremalardan foydalaniladi.

1-TEOREMA: Agar $a\leq x<\infty$ cheksiz yarim oraliqda $0\leq f(x)\leq g(x)$ va $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ xosmas integral yaqinlashuvchi bo'lsa, unda $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ xosmas integral ham yaqinlashuvchi va quyidagi tengsizlik o'rinli bo'ladi:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \leq \int_a^{+\infty} g(x)dx$$

2-TEOREMA: Agar $a \le x < \infty$ cheksiz yarim oraliqda $0 \le g(x) \le f(x)$ va $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ xosmas integral uzoqlashuvchi bo‘lsa, unda $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ xosmas integral ham uzoqlashuvchi bo‘ladi.

Bu teoremaning isboti 1-teorema isboti singari amalga oshiriladi va o‘quvchiga mustaqil ish sifatida havola etiladi.

Masalan, $I = \int_1^{\infty} \frac{x+4}{\sqrt{x^3}}dx$ xosmas integral uzoqlashuvchi ekanligini ko‘rsatamiz. Haqiqatan ham, $x \ge 1$ bo‘lganda, integral ostidagi funksiya

$$f(x) = \frac{x+4}{\sqrt{x^3}} > \frac{x}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{\sqrt{x}} = g(x)$$

shartni qanoatlantiradi va

$$\int_1^{+\infty} g(x)dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^{b} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b\to+\infty} 2\sqrt{x}\Big|_1^b = \lim_{b\to+\infty} (2\sqrt{b}-2) = +\infty \quad .$$

Bu yerdan, 2-teoremaga asosan, berilgan I integral uzoqlashuvchi ekanligi kelib chiqadi.

Agar xosmas integral ostidagi $f(x)$ funksiya turli ishorali qiymatlarni qabul etsa, unda quyidagi teoremadan foydalanish mumkin.

3-TEOREMA: Agar $x \ge a$ bo‘lganda $|f(x)| \le g(x)$ va $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ xosmas integral yaqinlashuvchi bo‘lsa, unda $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ xosmas integral ham yaqinlashuvchi va

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \le \int_a^{+\infty} |f(x)|dx \le \int_a^{+\infty} g(x)dx \qquad (4)$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

Masalan, ixtiyoriy λ haqiqiy soni uchun

$$\int_a^{+\infty} \frac{\cos \lambda x}{x^{\alpha}}dx \quad (\alpha > 1, a > 0) \qquad (5)$$

xosmas integral yaqinlashuvchi bo‘ladi, chunki

$$\left|\frac{\cos \lambda x}{x^{\alpha}}\right| \le \frac{1}{x^{\alpha}} = g(x) \Rightarrow \int_a^{+\infty} \frac{\cos \lambda x}{x^{\alpha}}dx \le \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \frac{a^{1-\alpha}}{\alpha - 1} \quad .$$

3-TA’RIF: Agar $J = \int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ xosmas integral yaqinlashuvchi bo‘lsa, unda $I = \int_a^{+\infty} f(x)dx$ xosmas integral ***absolut yaqinlashuvchi*** deyiladi. Agar I yaqinlashuvchi, J esa uzoqlashuvchi bo‘lsa, unda I xosmas integral ***shartli yaqinlashuvchi*** deb ataladi.

Masalan, (5) xosmas integral $\alpha > 1$ holda absolut yaqinlashuvchi, $0 < \alpha \le 1$ holda esa shartli yaqinlashuvchi ekanligini ko‘rsatish mumkin.

Yuqoridagi (4) tengsizlikdan absolut yaqinlashuvchi xosmas integral yaqinlashuvchi ekanligi kelib chiqadi.

Agar $y = f(x)$ funksiya $(-\infty, b]$ cheksiz yarim oraliqda aniqlangan bo‘lsa, uning bu soha bo‘yicha I tur xosmas integrali yuqoridagi (2) tenglikka o‘xshash tarzda quyidagicha aniqlanadi:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^{b} f(x)dx \quad . \qquad (6)$$

Bu xosmas integral uchun ham uning yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi ekanligi 2-ta’rif asosida aniqlanadi.

Masalan, har qanday chekli b va $\lambda>0$ sonlari uchun $I=\int_{-\infty}^{b} e^{\lambda x}dx$ xosmas integral yaqinlashuvchi, chunki

$$I=\int_{-\infty}^{b} e^{\lambda x}dx=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} e^{\lambda x}dx=\lim_{a\to-\infty}\frac{1}{\lambda}e^{\lambda x}\Big|_a^b=\lim_{a\to-\infty}\frac{1}{\lambda}(e^b-e^a)=\frac{1}{\lambda}(e^b-0)=\frac{e^b}{\lambda}\ .$$

Agar $y=f(x)$ funksiya cheksiz $(-\infty,\infty)$ oraliqda aniqlangan bo‘lsa, uning bu oraliq bo‘yicha I tur xosmas integrali yuqorida kiritilgan xosmas integrallar orqali

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{c} f(x)dx+\int_{c}^{\infty} f(x)dx=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{c} f(x)dx+\lim_{b\to\infty}\int_{c}^{b} f(x)dx \qquad (7)$$

tenglik bilan aniqlanadi. Bunda c – ixtiyoriy chekli son, jumladan 0 bo‘lishi mumkin.

4-TA’RIF: Agar (7) tenglikning o‘ng tomonidagi ikkala xosmas integral yaqinlashuvchi bo‘lsa, unda tenglikning chap tomonidagi xosmas integral ham ***yaqinlashuvchi*** deyiladi. Agar o‘ng tomondagi xosmas integrallardan kamida bittasi uzoqlashuvchi bo‘lsa, unda chap tomondagi xosmas integral ***uzoqlashuvchi*** deb ataladi.

Masalan,

$$J=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{a\to-\infty}\mathrm{arctg}x\Big|_a^0+\lim_{b\to+\infty}\mathrm{arctg}x\Big|_0^b=\pi\ ,$$

ya’ni J xosmas integral yaqinlashuvchi ekan. Demak, $y=1/(1+x^2)$, $x\in(-\infty,+\infty)$, va $y=0$ chiziqlar bilan chegaralangan cheksiz geometrik shakl (84-rasmga qarang) chekli va π soniga teng yuzaga ega bo‘ladi.

8.2. II tur xosmas integrallar. Endi chegaralanmagan funksiyalar uchun aniq integral tushunchasini umumlashtiramiz. Berilgan $y=f(x)$ funksiya $(a,b]$ yarim oraliqda chegaralanmagan, ammo ixtiyoriy $\varepsilon\in(0,b-a]$ uchun bu funksiya $[a+\varepsilon,b]$ kesmada chegaralangan va integrallanuvchi bo‘lsin. Bu holda

$$F(\varepsilon)=\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx\,,\quad \varepsilon\in(0,b-a]\,,$$

funksiyani qarash mumkin.

5-TA’RIF: $F(\varepsilon)$ funksiyaning $\varepsilon\to0+0$ holdagi o‘ng limiti berilgan $f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ kesma bo‘yicha ***II tur xosmas integrali*** deb ataladi.

Berilgan $f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ kesma bo‘yicha II tur xosmas integrali quyidagicha belgilanadi va aniqlanadi:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to0+0}F(\varepsilon)=\lim_{\varepsilon\to0+0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx \qquad \mathbf{(8)}$$

limitga aytiladi.

6-TA’RIF: Agar (8) limit mavjud va chekli bo‘lsa, u holda II tur xosmas integral ***yaqinlashuvchi*** deyiladi. Aks holda bu xosmas integral ***uzoqlashuvchi*** deb ataladi.

Misol sifatida ushbu II tur xosmas integralni ko‘ramiz:

$$I(\alpha)=\int_{0}^{b}\frac{dx}{x^\alpha}\qquad(0<b<+\infty\,,\ \alpha>0)\quad . \qquad (9)$$

Bu yerda uch holni qaraymiz.

1) Dastlab $0<\alpha<1$ holni tahlil etamiz:

$$I(\alpha)=\lim_{\varepsilon\to0+0}\int_{\varepsilon}^{b}\frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{\varepsilon\to0+0}\frac{x^{1-\alpha}}{\alpha-1}\Bigg|_{\varepsilon}^{b}=\frac{1}{\alpha-1}\lim_{\varepsilon\to0+0}(b^{1-\alpha}-\varepsilon^{1-\alpha})=b^{1-\alpha}\ .$$

Demak, bu holda (9) II tur xosmas integral yaqinlashuvchi va uning qiymati $b^{1-\alpha}$.

2) Endi α=1 holni o‘rganamiz:

$$I(1)=\lim_{\varepsilon\to0+0}\int_{\varepsilon}^{b}\frac{dx}{x}=\lim_{\varepsilon\to0+0}\ln x\Big|_{\varepsilon}^{b}=\lim_{\varepsilon\to0+0}(\ln b-\ln\varepsilon)=+\infty\ .$$

Demak, bu holda (9) II tur xosmas integral uzoqlashuvchi bo‘ladi.

3) α>1 holni qaraymiz:

$$I(\alpha)=\lim_{\varepsilon\to0+0}\int_{\varepsilon}^{b}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\lim_{\varepsilon\to0+0}\frac{x^{1-\alpha}}{\alpha-1}\Bigg|_{\varepsilon}^{b}=\frac{1}{\alpha-1}\lim_{\varepsilon\to0+0}(b^{1-\alpha}-\varepsilon^{1-\alpha})=-\infty\,.$$

Demak, bu holda ham (9) II tur xosmas integral uzoqlashuvchi bo‘ladi.

Shunday qilib, (9) xosmas integral 0<α<1 holda yaqinlashuvchi, α≥1 holda esa uzoqlashuvchi ekan. Bu natijaning geometrik ma’nosi shundan iboratki, $y=1/x^{\alpha}$, $x=0$, $x=b>0$, $y=0$ chiziqlar bilan chegaralangan cheksiz geometrik shaklning S yuzasi 0<α<1 holda chekli va $S=b^{1-\alpha}$ (keyingi betdagi 85-rasmga qarang), α≥1 holda esa bu shakl yuzasi cheksiz bo‘lar ekan.

$y=f(x)$ funksiya $[a,b)$ yarim oraliqda chegaralanmagan, ammo ixtiyoriy $\varepsilon\in(0,b-a]$ uchun bu funksiya $[a,b\!-\!\varepsilon]$ kesmada chegaralangan va integrallanuvchi bo‘lsin. Bu holda $f(x)$ funksiyaning II tur xosmas integrali quyidagicha kiritiladi:

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to0+0}\int_a^{b-\varepsilon}f(x)dx\ .$$

Bu yerda ham tenglikning o‘ng tomonidagi limit mavjud va chekli bo‘lsa xosmas integral yaqinlashuvchi, aks holda – uzoqlashuvchi deyiladi.

Masalan,

$$I=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x}}=\lim_{\varepsilon\to0+0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-x}}=-2\lim_{\varepsilon\to0+0}\sqrt{1-x}\Big|_0^{1-\varepsilon}=-2\lim_{\varepsilon\to0+0}(\sqrt{\varepsilon}-1)=2\,.$$

Demak, bu II tur xosmas integral yaqinlashuvchi.

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\cos^2x}=\lim_{\varepsilon\to0+0}\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\frac{dx}{\cos^2x}=\lim_{\varepsilon\to0+0}\mathrm{tg}x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to0+0}\mathrm{tg}(\frac{\pi}{2}-\varepsilon)=+\infty\,.$$

Demak, bu II tur xosmas integral uzoqlashuvchi.

Agar $y=f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmaning biror ichki $x=c$ nuqtasida chegaralanmagan bo‘lsa, bu holda II tur xosmas integral

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx \qquad (10)$$

tenglik orqali kiritiladi. Bu xosmas integralning yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi bo‘lishi 4-ta’rif singari aniqlanadi.

II tur xosmas integrallarning yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi ekanligini yetarli shartlari oldin I tur xosmas integrallar uchun ifodalangan 1-3 teoremalarga o‘xshash ifodalanadi.

8.3. Aralash turdagi xosmas integrallar. Agar $y=f(x)$ funksiya $x=a$ nuqtada chegaralanmagan bo‘lsa, unda $[a,+\infty)$ yoki $(-\infty,\ a]$ cheksiz yarim oraliqlar bo‘yicha aralash turdagi xosmas integrallar

$$\int_a^{+\infty}f(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_b^{+\infty}f(x)dx\quad(a<b<+\infty),\qquad \int_{-\infty}^{a}f(x)dx=\int_{-\infty}^{c}f(x)dx+\int_c^a f(x)dx\quad(-\infty<c<a)$$

kabi aniqlanadi. Bunda tengliklarning o‘ng tomonidagi I va II turdagi xosmas integrallarning ikkalasi ham yaqinlashuvchi bo‘lsa aralash turdagi xosmas integral ham yaqinlashuvchi, aks holda esa uzoqlashuvchi deb hisoblanadi.

Masalan,

$$f(x)=\begin{cases}1/\sqrt{x}\,, & 0<x\le1\\ 1/x^2\,, & 1\le x<+\infty\end{cases}$$

funksiya uchun $I=\int_0^{+\infty} f(x)dx$ xosmas integralni qaraymiz:

$$I=\int_0^{+\infty} f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^{+\infty} f(x)dx=\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx=I_1+I_2\ ,$$

$$I_1=\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx=\lim_{\varepsilon\to 0+0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx=\lim_{\varepsilon\to 0+0} 2\sqrt{x}\Big|_\varepsilon^1=2\ ,\quad I_2=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{1}{x^2}dx=\lim_{b\to+\infty}(-\frac{1}{x})\Big|_1^b=1\ .$$

Demak, aralash turdagi I integral yaqinlashuvchi va uning qiymati $I=I_1+I_2=3$.

Xuddi shunday tarzda aralash turdagi

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}\ ,\quad \int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2}\ ,\quad \int_0^{+\infty}\frac{dx}{x}$$

xosmas integrallar uzoqlashuvchi ekanligini ko‘rsatish mumkin va bu o‘quvchiga mustaqil ish sifatida havola etiladi.

XULOSA

Aniq integral ta’rifida integrallash sohasi chekli kesma va integral ostidagi funksiya chegaralangan deb qaralgan edi. Ammo bir qator masalalarni yechishda bu shartlardan kamida bittasi bajarilmaydigan vaziyatlar paydo bo‘ladi. Misol sifatida cheksiz geometrik shakllarning yuzasini hisoblash masalasini ko‘rsatish mumkin. Bunday hollarda xosmas integrallar tushunchasidan foydalaniladi. Ular ma’lum bir aniq integral qiymatlarining u yoki bu holdagi limiti kabi aniqlanadi. Bu limit mavjud va chekli bo‘lsa, xosmas integral yaqinlashuvchi, aks holda esa uzoqlashuvchi deyiladi.

Integrallash sohasining kamida bitta chegarasi cheksiz bo‘lgan holda I tur xosmas integral tushunchasiga kelamiz. Agar integral ostidagi funksiya chegaralanmagan bo‘lsa, unda II tur xosmas integralga ega bo‘lamiz. Chegaralaridan kamida bittasi cheksiz va integral ostidagi funksiya chegaralanmagan bo‘lgan xosmas integrallar aralash turli deb ataladi.

Tayanch iboralar

* I tur xosmas integral * Xosmas integralning geometrik ma’nosi * Yaqinlashuvchi xosmas integral * Uzoqlashuvchi xosmas integral *Absolut yaqinlashuvchi xosmas integral * Shartli yaqinlashuvchi xosmas integral * II tur xosmas integral * Aralash turdagi xosmas integral .

Takrorlash uchun savollar

1. Xosmas integral tushunchasi qayerdan paydo bo‘ladi?
2. I tur xosmas integral qanday ta’riflanadi?
3. I tur xosmas integralning geometrik mazmuni nimadan iborat?
4. Qachon xosmas integral yaqinlashuvchi deyiladi?
5. Qachon xosmas integral uzoqlashuvchi deyiladi?
6. Xosmas integral yaqinlashuvchi bo‘lishining yetarli sharti nimadan iborat?
7. Xosmas integral qaysi shartda uzoqlashuvchi bo‘ladi?
8. Qachon xosmas integral absolut yaqinlashuvchi deyiladi?
9. Absolut yaqinlashuvchi xosmas integral qanday xossaga ega?
10. Qachon xosmas integral shartli yaqinlashuvchi deyiladi?
11. II tur xosmas integral qanday ta’riflanadi?
12. Aralash turdagi xosmas integral qanday aniqlanadi?

25§ IKKI O‘ZGARUVCHILI FUNKSIYA , UNING LIMIT IVA UZLUKSIZLIGI.IKKI O‘ZGARUVCHILI FUNKSIYANING XUSUSIY HOSILALARI.TO‘LA DIFFERENSIAL.

REJA

- ***Ko‘p o‘zgaruvchili funksiya tushunchasiga olib keluvchi masalalar.***
- ***Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalar va ular bilan bog‘liq tushunchalar.***
- ***Ikki o‘zgaruvchili funksiyaning limiti.***
- ***Ikki o‘zgaruvchili funksiyaning uzluksizligi.***
- ***Ikki o‘zgaruvchili uzluksiz funksiyalarning xossalari.***

Tayanch iboralar

* Skalyar ko‘paytma * Evklid fazosi * Masofa * Ko‘p o‘zgaruvchili funksiya * Aniqlanish sohasi * Qiymatlar sohasi * Funksiya grafigi * Sirt tenglamasi * Sath chizig‘i * Funksiya limiti * Takroriy limit * Funksiya uzluksizligi * Funksiyaning argument bo‘yicha uzluksizligi * Ichki nuqta * Chegaraviy nuqta * Ochiq soha * Yopiq soha * Veyershtrass teoremasi * Chegaralangan funksiya * Bog‘lamli soha * Boltsano-Koshi teoremasi * Funksiyaning uzlukliligi

Ko‘p o‘zgaruvchili funksiya tushunchasiga olib keluvchi masalalar. Biz $y=f(x)$ ko‘rinishdagi bir o‘zgaruvchili funksiyalar bilan tanishgan va ularni o‘rgangan edik. Bunda ikkita x va y o‘zgaruvchilar orasidagi bog‘lanish qaralib, bitta erkli o‘zgaruvchi (argument) x qiymatlari bo‘yicha ikkinchi y erksiz o‘zgaruvchi (funksiya) qiymatlari to‘liq aniqlanar edi. Masalan, kvadratning yuzini ifodalovchi S funksiya uning tomoni x orqali $S=x^2$, kubning hajmi V uning qirrasi x orqali $V=x^3$ ko‘rinishda to‘liq aniqlanadi. Ko‘rib o‘tilgan talab $p=f(q)$ va taklif $p=g(q)$ funksiyalarida mahsulot hajmini ifodalovchi bitta q o‘zgaruvchini (omilni) p mahsulot narxiga ta’siri qaralgan edi.

Ammo bir qator amaliy masalalarni o‘rganishda ikkitadan ortiq o‘zgaruvchilar orasidagi shunday bog‘lanishlarni qarashga to‘g‘ri keladiki, ulardan birining qiymatlari qolganlarining qiymatlari orqali to‘liq aniqlanadi.

Masalan, matematikada turli to‘g‘ri to‘rtburchaklarning yuzi S uning tomonlarini ifodalovchi ikkita erkli x va y o‘zgaruvchilar orqali $S=xy$, to‘g‘ri burchakli parallelepipedning hajmi V uning qirralarini ifodalovchi uchta x, y va z erkli o‘zgaruvchilar yordamida $V=xyz$ ko‘rinishda aniqlanadi.

Fizikada jismning turli nuqtalardagi zichligi $\rho=\rho(x,y,z)$, harorati $T=T(x,y,z)$ va shu kabi kattaliklar bu nuqtaning vaziyatini ifodalovchi uchta erkli x, y, z koordinatalar orqali aniqlanadi. Bunga qo‘shimcha ravishda t vaqtni ham hisobga olsak, unda yuqoridagi kattaliklar to‘rtta a, a, z va t erkli o‘zgaruvchilar orqali ifodalanadi.

Iqtisodiyotda ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori y va turli x_1, x_2 , x_3, $\cdots$, x_n omillar orasidagi bog‘lanish

$$y = a_0 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

ko‘rinishdagi ishlab chiqarish funksiyasi orqali o‘rganiladi. Birinchi marta bunday ishlab chiqarish funksiyalari 1928 yilda amerikalik olimlar K.Kobb va P. Duglas tomonidan ikki omilli hol uchun

$$y = a_0 x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha} \text{ , } 0 < \alpha < 1$$

ko‘rinishda taklif etilgan va shu sababli Kobb – Duglas funksiyasi deb ataladi. Bunda x_1–asosiy ishlab chiqarish fondi hajmi, x_2–sarflangan mehnat resurslari hajmi bo‘lib hisoblanadi.

Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalar va ular bilan bog‘liq tushunchalar. Yuqorida ko‘rib o‘tilgan masalalar qiymati n ta $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ erkli o‘zgaruvchilar orqali aniqlanadigan funksiyalar nazariyasini yaratishni taqozo qiladi. Buning uchun ixtiyoriy $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ haqiqiy sonlardan hosil qilingan $\mathbf{x}=(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$ vektorlardan tuzilgan n o‘lchovli chiziqli fazoni (IV bob, §5) qaraymiz va uni R^n kabi belgilaymiz. Bu fazodagi ikkita

$$\mathbf{x}'=(x_1', x_2', \cdots, x_n')\ ,\ \mathbf{x}''=(x_1'', x_2'', \cdots, x_n'')$$

vektorlar uchun $(\mathbf{x}', \mathbf{x}'')$ kabi belgilanadigan ***skalyar ko‘paytma*** tushunchasini quyidagicha kiritamiz:

$$(\mathbf{x}', \mathbf{x}'')= x_1'x_1''+x_2'x_2''+\cdots+x_n'x_n'' \ . \qquad (1)$$

1-TA’RIF: Ixtiyoriy ikkita vektorlari uchun (1) tenglik orqali skalyar ko‘paytma kiritilgan R^n chiziqli fazo ***n o‘lchovli evklid fazo*** deb ataladi.

Kelgusida R^n evklid fazosiga tekislik va uch o‘lchovli fazoga o‘xshash geometrik talqin berish maqsadida unga tegishli har bir $\mathbf{x}=(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$ vektorni shu fazoning nuqtasi deb ataymiz va uni bitta M harfi bilan belgilaymiz. Bunda $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ sonlari M nuqtaning koordinatalari deb olinadi va bu tasdiq $M(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$ ko‘rinishda ifodalanadi.

Endi R^n evklid fazodagi ikkita

$$M'(x_1', x_2', \cdots, x_n'), \quad M''(x_1'', x_2'', \cdots, x_n'')$$

nuqtalar orasidagi masofa tushunchasini kiritamiz. Bu masofani $d(M', M'')$ kabi belgilaymiz va R^2 tekislik yoki R^3 fazodagi masofaga o‘xshash tarzda quyidagicha kiritamiz:

$$d(M', M'')=\sqrt{(x_1'-x_1'')^2+(x_2'-x_2'')^2+\cdots+(x_n'-x_n'')^2} \ .$$

Bu tushunchani skalyar ko‘paytma orqali $d^2(M_1, M_2)=(\mathbf{x}'-\mathbf{x}'', \mathbf{x}'-\mathbf{x}'')$ tenglik bilan ham kiritish mumkin.

2-TA’RIF: Agar n o‘lchovli R^n evklid fazosidagi biror D to‘plamdagi har bir $M(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$ nuqtaga ma’lum bir qonun asosida qandaydir u haqiqiy son mos qo‘yilgan bo‘lsa, unda u berilgan D to‘plamda aniqlangan ***n o‘zgaruvchili funksiya*** deb ataladi.

$D \subset R^n$ to‘plamda aniqlangan n o‘zgaruvchili funksiya $u=f(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$ yoki qisqacha $u=f(M)$ kabi belgilanadi. Bunda $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ sonlari funksiyaning ***argumentlari*** deb yuritiladi.

3-TA’RIF: Berilgan n o‘zgaruvchili $u=f(M)$ funksiya ma’noga ega bo‘lgan R^n evklid fazosidagi barcha $M(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$ nuqtalar to‘plami funksiyaning ***aniqlanish sohasi*** , $u=f(M)$ funksiya qabul etadigan haqiqiy sonlar to‘plami esa bu funksiyaning ***qiymatlar to‘plami*** deyiladi.

Funksiyaning aniqlanish sohasi D$\{f\}$, qiymatlar sohasi esa E$\{f\}$ kabi belgilanadi. Masalan,

$$u=\sqrt{r^2-x_1^2-x_2^2-\cdots-x_n^2}$$

funksiyaning D$\{f\}$ aniqlanish sohasi R^n evklid fazosini

$$r^2-x_1^2-x_2^2-\cdots-x_n^2 \geq 0 \ \Rightarrow x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2 \leq r^2$$

shartni qanoatlantiruvchi nuqtalar to‘plamidan iborat bo‘ladi. Bu to‘plam, uch o‘lchovli fazodagi sharga o‘xshatib, R^n evklid fazosidagi markazi O$(0,0,\cdots,0)$ nuqtada joylashgan r radiusli ***n o‘lchovli shar*** deb ataladi. Ko‘rilayotgan funksiyaning qiymatlar sohasi E$\{f\}=[0, r]$ kesmadan iborat bo‘ladi.

Kelgusida soddalik uchun va olinadigan natijalarni geometrik talqinini berish maqsadida asosan ikki o‘zgaruvchili funksiyalarni qarash bilan cheklanamiz. Shuni ta’kidlab o‘tish lozimki, bu xususiy n=2 holda olinadigan natijalar osonlik bilan n>2 holga umumlashtirilishi mumkin. Bundan tashqari yozuvlarni soddalashtirish va uch o‘lchovli fazodagi (kelgusida uni qisqacha fazo deb yuritamiz) nuqta koordinatalariga moslashtirish maqsadida ikki o‘zgaruvchili funksiyani z, uning argumentlarini esa x va y kabi belgilaymiz. Shunday qilib, umumiy holda ikki o‘zgaruvchili funksiya $z=f(x,y)$, $z=g(x,y)$ va hokazo ko‘rinishda yoziladi. Masalan,

$$z = f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}, \quad z = g(x,y) = 3x+5y-1, \quad z = h(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$$

ikki o‘zgaruvchili funksiyalar bo‘ladi.

Ikki o‘zgaruvchili $z=f(x,y)$ funksiyaning D{f} aniqlanish sohasi tekislikdagi $M(x,y)$ nuqtalardan tashkil topganligi uchun u tekislik yoki undagi biror sohadan iborat bo‘ladi. Masalan, yuqorida keltirilgan funksiyalar uchun D{f} markazi O(0,0) koordinata boshida joylashgan va radiusi r=1 bo‘lgan birlik doiradan, D{g} butun tekislikdan (D{g}=R^2), D{h}= R^2–{O}, ya’ni tekislikning koordinata boshidan tashqari barcha nuqtalaridan iboratdir.

Ikki o‘zgaruvchili $z=f(x,y)$ funksiyani geometrik mazmuni uning grafigi tushunchasidan kelib chiqadi. Bu tushunchani kiritish uchun fazoda XYZ to‘g‘ri burchakli Dekart koordinatalari sistemasini olamiz. XOY koordinata tekisligida funksiyaning D{f} aniqlanish sohasini qaraymiz va uning har bir $M(x,y)$ nuqtasidan XOY koordinata tekisligiga perpendikular o‘tkazamiz. Bu perpendikularga funksiyaning $z= f(x,y)$ qiymatini qo‘yamiz. Natijada fazoda koordinatalari $(x, y, f(x,y))$ bo‘lgan P nuqtani hosil qilamiz (keyingi betdagi 86-rasmga qarang).

<u>4-TA’RIF:</u> $z=f(x,y)$ funksiyaning ***grafigi*** deb fazodagi

$$P(x, y, z)=P(x, y, f(x,y))= P(x, y, f(M)),\ M=M(x,y)\in \text{D}\{f\},$$

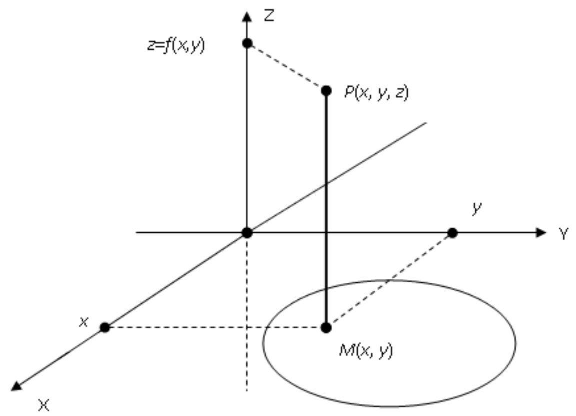
nuqtalarning geometrik o‘rniga aytiladi.

Umuman olganda ikki o‘zgaruvchili $z=f(x,y)$ funksiyaning grafigi fazodagi biror sirtdan iborat bo‘ladi va shu sababli $z=f(x,y)$ fazodagi ***sirt tenglamasi*** deb ham ataladi.

Masalan, yuqorida keltirilgan $z=f(x,y)$ funksiyaning grafigi tenglamasi

$$z = \sqrt{1-x^2-y^2} \Rightarrow z^2 = 1-x^2-y^2 \Rightarrow x^2+y^2+z^2 = 1$$

bo‘lgan sferadan, $z=g(x,y)$ funksiyaning grafigi esa tenglamasi z=3x+5y–1 yoki 3x+5y–z–1 =0 bo‘lgan tekislikdan iboratdir.



Ammo yuqoridagi $z=h(x,y)$ funksiya grafigini to‘g‘ridan-to‘g‘ri tasavvur etish oson emas. Bunday hollarda funksiyaning sath chiziqlari tushunchasidan foydalanish mumkin.

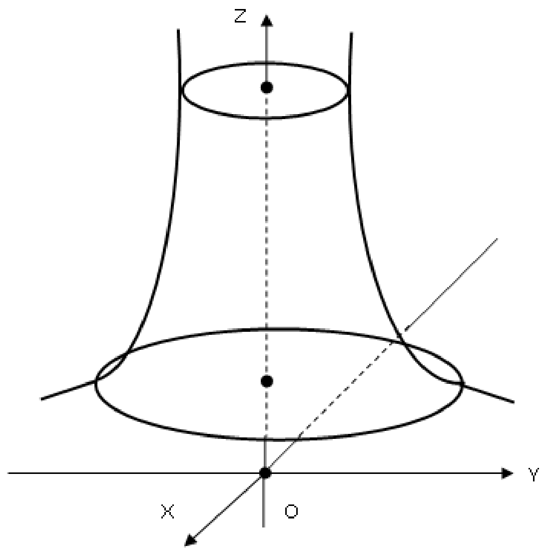
5-TA'RIF: $z=f(x,y)$ funksiyaning qiymatlari biror o'zgarmas C soniga teng bo'ladigan XOY koordinata tekisligidagi nuqtalar to'plamidan iborat chiziq funksiyaning ***sath chizig'i***, C soni esa ***sath*** deb ataladi.

Ta'rifdan ko'rinadiki, $z=f(x,y)$ funksiyaning C sathli sath chizig'i tenglamasi $f(x,y)=C$ bo'lgan chiziqdan iborat bo'ladi. Ko'p hollarda sath chiziqlarini chizish osonroq bo'lib, ular asosida $z=f(x,y)$ funksiya grafigi haqida tasavvur hosil qilish mumkin bo'ladi. Masalan, $z=h(x,y)$ funksiyaning sath chiziqlarini topamiz:

$$z = h(x,y) = C \Rightarrow \frac{1}{x^2+y^2} = C(C>0) \Rightarrow x^2+y^2 = \frac{1}{C} = r^2,\ r = \sqrt{\frac{1}{C}}$$

Bu yerdan ko'rinadiki, bu funksiyaning barcha sath chiziqlari markazi koordinata boshida joylashgan aylanalardan iborat. Bu aylanalarning radiuslari C sath oshgan sari kichrayib boradi. Demak, bu funksiyaning grafigi "asosi" XOY tekislikka yaqinlashgan sari ($z\to 0$) radiusi cheksiz kattalashib boradigan, "uchi" esa OZ o'qi bo'yicha yuqoriga chiqqan sari radiusi cheksiz kamayib boradigan aylanalardan iborat (teleminoraga o'xshash) aylanma sirt kabi bo'ladi (keyingi betdagi 87-rasmga qarang).

Sath chiziqlaridan tashqari $z=f(x,y)$ funksiya grafigi haqida tasavvur hosil qilish uchun uni XOZ yoki YOZ koordinata tekisliklariga parallel bo'lgan $y=y_0$ yoki $x=x_0$ tekisliklar bilan kesishdan hosil bo'ladigan $z=f(x,y_0)$ yoki $z=f(x_0,y)$ chiziqlardan ham foydalanish mumkin. Masalan, biz ko'rib o'tgan $z=h(x,y)$ funksiya uchun bu chiziqlar



$$z = h(x,y_0) = \frac{1}{x^2+y_0^2}, \quad z = h(x_0,y) = \frac{1}{x_0^2+y^2}$$

tenglamali egri chiziqlardan iboratdir.

Ikki o'zgaruvchili funksiyaning limiti. Bir o'zgaruvchili $y=f(x)$ funksiyalar nazariyasida limit tushunchasi muhim ahamiyatga ega ekanligini ko'rib o'tgan edik. Shu sababli bu tushunchani ko'p o'zgaruvchili funksiyalar uchun ham kiritish maqsadga muvofiqdir.

6-TA'RIF: Berilgan $M_0(x_0,y_0)$ nuqtaning ***r radiusli atrofi*** deb tekislikdagi

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < r$$

tengsizlikni qanoatlantiradigan $M(x,y)$ nuqtalar to'plamiga aytiladi.

Ta'rifdan ko'rinadiki, $M_0(x_0,y_0)$ nuqtaning r radiusli atrofi markazi shu nuqtada joylashgan va radiusi r bo'lgan ochiq doiradan [uni $U_r(x_0,y_0)$ kabi belgilaymiz] iborat bo'ladi. Demak, $M(x,y)\in U_r(x_0,y_0)$ bo'lishi uchun undan $M_0(x_0,y_0)$ nuqtagacha masofa $d(M,M_0)<r$ shartni qanoatlantirishi kerak.

<u>7-TA'RIF:</u> Biror chekli A soni ikki o'zgaruvchili $z=f(x,y)$ funksiyaning uning argumentlari $x\to x_0$, $y\to y_0$ (yoki $M(x,y)\to M_0(x_0,y_0)$) bo'lgandagi ***limiti*** deb aytiladi, agar har qanday kichik $\varepsilon>0$ soni uchun unga bog'liq shunday $r(\varepsilon)=r>0$ son topilsaki, $M_0(x_0,y_0)$ nuqtaning $r=r(\varepsilon)$ radiusli atrofiga tegishli bo'lgan barcha $M(x,y)\neq M_0(x_0,y_0)$ nuqtalar uchun

$$| f(x,y)-A|<\varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa.

Ikki o'zgaruvchili $f(x,y)$ funksiyaning $x\to x_0$, $y\to y_0$ holdagi limiti

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A \quad yoki \quad \lim_{M\to M_0} f(M)=A$$

kabi belgilanadi.

Masalan,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2+y^2}{1-\sqrt{x^2+y^2+1}}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{(x^2+y^2)(1+\sqrt{x^2+y^2+1})}{(1-\sqrt{x^2+y^2+1})(1+\sqrt{x^2+y^2+1})}=$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{(x^2+y^2)(1+\sqrt{x^2+y^2+1})}{-(x^2+y^2)}=-\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(1+\sqrt{x^2+y^2+1})=-2 \ .$$

Ikki o'zgaruvchili $z=f(x,y)$ funksiya uchun $M(x,y)\to M_0(x_0,y_0)$ bo'lganda A limitni mavjud bo'lishi va uni hisoblash masalasi bir o'zgaruvchili funksiya holiga nisbatan ancha murakkab bo'ladi. Bunga sabab shuki to'g'ri chiziqda $x\to x_0$ intilish faqat ikki yo'nalishda, o'ng va chap tomondan bo'lishi mumkin. Tekislikda esa $M(x,y)\to M_0(x_0,y_0)$ intilish cheksiz ko'p yo'nalishda amalga oshirilishi mumkin va bularning har birida $z=f(x,y)$ funksiya bir xil A soniga yaqinlashib borishi kerak. Buni bir necha misollarda ko'ramiz.

1-misol. $f(x,y)=\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$ funksiya $x\to 0$, $y\to 0$ bo'lganda limitga ega, chunki ma'lum $x^2+y^2\geq 2|x||y|$ tengsizlikka asosan

$$|f(x,y)|=\left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right|\leq\frac{|xy^2|}{2|x||y|}=\frac{|y|}{2}\Rightarrow\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy^2}{x^2+y^2}=0 \ .$$

2-misol. $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ funksiya $x\to 0$, $y\to 0$ bo'lganda limitga ega emasligini ko'rsatamiz. Buning uchun $y=kx$ deb olamiz, ya'ni O(0,0) nuqtaga to'g'ri chiziqlar bo'yicha yaqinlashamiz. Bu holda

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2} \ .$$

Bu yerdan ko'rinadiki limit qiymati barcha k uchun bir xil bo'lmasdan, k o'zgarishi bilan u ham o'zgaradi va shu sababli bu limit mavjud emas.

3-misol. $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ funksiyaning $x\to0$, $y\to0$ holda limiti qanday bo‘lishini tekshiramiz. Bunda $y=kx$ deb olsak

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{x\to0}\frac{kx^3}{x^4+k^2x^2}=\lim_{x\to0}\frac{kx}{x^2+k^2}=0 \quad .$$

Demak, O(0,0) nuqtaga ixtiyoriy to‘g‘ri chiziqlar bo‘yicha yaqinlashganimizda limit qiymati bir xil va nolga teng. Ammo hali bundan berilgan limit mavjud va uning qiymati nol deya olmaymiz, chunki bu natija ixtiyoriy yo‘nalish bo‘yicha bir xil bo‘lishi kerak. Masalan, $y=kx^2$, ya’ni parabola bo‘yicha yaqinlashishni qaraymiz:

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{x\to0}\frac{kx^4}{x^4+k^2x^4}=\frac{k}{1+k^2}.$$

Bu holda limit qiymati k qiymatiga bog‘liq bo‘lmoqda. Demak,qaralayotgan funksiyaning $x\to0$, $y\to0$ bo‘lganda limiti mavjud emas ekan.

Yuqorida 7-ta’rif orqali aniqlangan limitda funksiyaning ikkala argumenti x va y bir paytda x_0 va y_0 sonlariga intiladi deb olamiz va bunda

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)=A$$

karrali limit deb yuritiladi. Ammo bu yerda x yoki y argumentlarni u yoki bu tartibda x_0 yoki y_0 sonlariga ketma-ket yaqinlashtirib,

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)=A_1,\quad \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)=A_2$$

limitlarni ham hosil etish mumkin. Bular ***takroriy limitlar*** deb ataladi va ularni hisoblash osonroq.

4-misol. $f(x,y)=3x+5xy-y^2$ funksiyaning $x\to2$, $y\to-3$ holdagi takroriy limitlarini qaraymiz :

$$\lim_{x\to2}\lim_{y\to-3} f(x,y)=\lim_{x\to2}\lim_{y\to-3}(3x+5xy-y^2)=\lim_{x\to2}(3x-15x-9)=-33=A_1\ ,$$

$$\lim_{y\to-3}\lim_{x\to2} f(x,y)=\lim_{y\to-3}\lim_{x\to2}(3x+5xy-y^2)=\lim_{y\to-3}(6+10y-y^2)=-33=A_2\,.$$

Demak, bu funksiya uchun ikkala takroriy limit mavjud va ular o‘zaro teng.

5-misol. Ushbu funksiyaning $x\to0$, $y\to0$ holdagi takroriy limitlarini hisoblaymiz:

$$f(x,y)=\frac{x-y+x^2+y^2}{x+y}.$$

$$\lim_{x\to0}\lim_{y\to0} f(x,y)=\lim_{x\to0}\lim_{y\to0}\frac{x-y+x^2+y^2}{x+y}=\lim_{x\to0}\frac{x+x^2}{x}=\lim_{x\to0}(1+x)=1=A_1\,,$$

$$\lim_{y\to0}\lim_{x\to0} f(x,y)=\lim_{y\to0}\lim_{x\to0}\frac{x-y+x^2+y^2}{x+y}=\lim_{y\to0}\frac{-y+y^2}{y}=-1=A_2\,.$$

Demak, bu funksiya uchun ikkala takroriy limit mavjud, ammo ular o‘zaro teng emas.

Yuqoridagi misollardan ko‘rinadiki takroriy limitlar doimo o‘zaro teng bo‘lishi shart emas ekan. Bundan tashqari karrali va takroriy limitlar orasida qanday munosabat mavjudligini ham umumiy holda aytib bo‘lmaydi. Bunday hollarda quyidagi teoremadan foydalanish mumkin.

1-TEOREMA: Berilgan $z=f(x,y)$ funksiya $M_0(x_0,y_0)$ nuqtaning biror $U_r(x_0,y_0)$ atrofida aniqlangan va karrali limit

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$$

mavjud bo‘lsin. Agar ixtiyoriy $M(x,y)\in U_r(x_0,y_0)$ uchun

$$\varphi(y)=\lim_{x\to x_0} f(x,y)\,,\quad \psi(x)=\lim_{y\to y_0} f(x,y)$$

oddiy limitlar mavjud bo‘lsa, unda ikkala takroriy limit

$$A_1=\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)=\lim_{x\to x_0}\psi(x)\,,\quad A_2=\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)=\lim_{y\to y_0}\varphi(y)$$

mavjud va $A_1=A_2=A$ tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Bu teoremani isbotsiz qabul etamiz.

Ammo takroriy limitlar mavjudligi va ularning o‘zaro tengligidan karrali limitning mavjudligi va $A_1=A_2=A$ tenglik o‘rinli bo‘lishi kelib chiqmaydi. Masalan, yuqorida ko‘rilgan 2-misolda $A_1=A_2=0$, ammo karrali limit mavjud emas.

Ikki o‘zgaruvchili funksiyaning limiti uchun bir o‘zgaruvchili funksiya limitining oldin ko‘rib o‘tilgan barcha xossalari (VII bob, §3, asosiy teorema) saqlanib qolishini ushbu teorema ko‘rsatadi.

2-TEOREMA: Agar $z=f(x,y)$ va $z=g(x,y)$ funksiyalarning ikkalasi ham $M_0(x_0,y_0)$ nuqtaning biror $U_r(x_0,y_0)$ atrofida aniqlangan va ularning karrali limitlari

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A\,,\quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} g(x,y)=B$$

mavjud bo‘lsa, unda quyidagi tengliklar o‘rinli bo‘ladi:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} C=C\quad (C-const.),\quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} Cf(x,y)=C\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=CA\ ,$$

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}[f(x,y)\pm g(x,y)]=\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)\pm\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} g(x,y)=A\pm B\ ,$$

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}[f(x,y)\cdot g(x,y)]=\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)\cdot\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} g(x,y)=AB,$$

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\frac{f(x,y)}{g(x,y)}=\frac{\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)}{\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} g(x,y)}=\frac{A}{B}\quad (\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} g(x,y)=B\neq 0).$$

Bu teorema yuqorida eslatilgan teorema singari isbotlanadi va shu sababli uning ustida to‘xtalib o‘tirmaymiz.

Masalan, bu teorema asosida ushbu karrali limitlarni hisoblaymiz:

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}(3x+5y+1)=\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}3x+\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}5y+\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}1=$$

$$=3\lim_{x\to 1}x+5\lim_{y\to 2}y+\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}1=3\cdot 1+5\cdot 2+1=14,$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{2x+5xy-3y+1}{x^2+y^3+2}=\frac{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(2x+5xy-3y+1)}{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^3+2)}=\frac{1}{2}.$$

Ikki o‘zgaruvchili $z=f(x,y)$ funksiyaning karrali limiti ta’rifini $x\to\pm\infty$, $y\to\pm\infty$ yoki $A=\pm\infty$ hollar uchun ham berish mumkin, ammo ular ustida to‘xtalib o‘tirmaymiz.

1.1. Ikki o‘zgaruvchili funksiyaning uzluksizligi. Bir o‘zgaruvchili $y=f(x)$ funksiyalar uchun limit tushunchasi kiritilgach, uning yordamida funksiyaning uzluksizlik ta’rifi berilgan edi. Bu tushunchani ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalar uchun ham kiritish mumkin.

8-TA’RIF: $M_0(x_0,y_0)$ nuqta $z=f(x,y)$ funksiyaning D{f} aniqlanish sohasidagi biror nuqta bo‘lib, o‘zgaruvchi $M(x,y)$ nuqta funksiyaning aniqlanish sohasida qolgan holda M_0 (x_0,y_0) nuqtaga ixtiyoriy usulda intilganda ($M\to M_0$ bo‘lganda)

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0) \quad yoki \quad \lim_{M\to M_0} f(M)=f(M_0) \qquad (2)$$

tenglik o‘rinli bo‘lsa, $z=f(x,y)$ funksiya M_0 (x_0,y_0) nuqtada ***uzluksiz*** deyiladi. Bu holda $M_0(x_0,y_0)$ funksiyaning ***uzluksizlik nuqtasi*** deyiladi. Biror D sohaning har bir nuqtasida uzluksiz bo‘lgan funksiya shu ***sohada uzluksiz*** deyiladi.

Masalan, $f(x,y)=2x^2+3xy-5y^2$ funksiya tekislikdagi barcha nuqtalarda aniqlangan va ularning har birida uzluksizdir. Demak, bu funksiya butun tekislikda uzluksiz. Xuddi shunday,

$$f(x,y)=\sqrt{36-4x^2-9y^2}$$

funksiya D{f}={(x,y): $(x/3)^2+(y/2)^2\leq 1$}aniqlanish sohasida, ya’ni yarim o‘qlari a=3, b=2 bo‘lgan ellips va uning ichida uzluksiz bo‘ladi.

Geometrik nuqtayi nazardan biror D sohada uzluksiz $z=f(x,y)$ funksiya XOY koordinata tekisligidagi proyeksiyasi shu sohadan iborat bo‘lgan yaxlit bir sirtni ifodalaydi. Shu sababdan tekislik, sfera, uzluksiz chiziqni OX o‘qi atrofida aylantirishdan hosil bo‘lgan aylanma sirt kabilarni ifodalovchi ikki o‘zgaruvchili funksiyalar uzluksiz bo‘ladi.

Endi $z=f(x,y)$ funksiyaning $M_0(x_0,y_0)$ nuqtada uzluksizligini boshqa bir ta’rifini keltiramiz. Agar $M(x,y)$ o‘zgaruvchi nuqta bo‘lsa, unda $\Delta x=x-x_0$ va $\Delta y=y-y_0$ ayirmalar mos ravishda x va y argumentlarning o‘zgarishlarini ifodalaydi hamda ***argument orttirmalari*** deyiladi. Bu holda $x=x_0+\Delta x$, $y=y_0+\Delta y$ deb yozish mumkin. Bunda $z=f(x,y)$ funksiyaning o‘zgarishi

$$\Delta z=\Delta f=f(x,y)-f(x_0,y_0)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0) \qquad (3)$$

ayirma orqali aniqlanadi va u funksiyaning ***to‘la orttirmasi*** deb ataladi. Orttirmalar tilida (2) tenglikdagi $x\to x_0$, $y\to y_0$ munosabatlardan $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$ ekanligi kelib chiqadi. Shu sababli (2) tenglikni

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta f=0 \qquad (4)$$

ko‘rinishda ifodalash mumkin. Bu $z=f(x,y)$ funksiya uzluksizligini orttirmalar tilidagi ifodasidir. Undan uzluksiz funksiyada x va y argumentlar qanchalik kichik o‘zgarishga ega bo‘lsa, funksiya ham shunchalik kichik o‘zgarishga ega bo‘lishi kelib chiqadi. Amaliy masalalarda $z=f(x,y)$ funksiya uzluksizligini (4) tenglik bilan aniqlash osonroq bo‘ladi.

Ikki o‘zgaruvchili funksiyaning uzluksizligi ta’rifini ifodalovchi (2) tenglikdan va limit xossalarini ifodalovchi 2-teoremadan bevosita quyidagi teorema kelib chiqadi.

3-TEOREMA: Agar $f(x,y)$ va $g(x,y)$ funksiyalar $M_0(x_0,y_0)$ nuqtada uzluksiz bo‘lsa, unda shu nuqtada $C\,f(x,y)$ (C-const.), $f(x,y)\pm g(x,y)$, $f(x,y)\cdot g(x,y)$ va $g(x,y)\neq 0$ qo‘shimcha shartda $f(x,y)/g(x,y)$ funksiyalar ham uzluksiz bo‘ladi.

Bu teoremadan foydalanib murakkabroq ko‘rinishdagi funksiya uzluksizligini tekshirish masalasini soddaroq ko‘rinishdagi funksiyalarning uzluksizligini tekshirish masalasiga keltirish mumkin. Masalan,

$$z=\frac{2x^3+3x^2y^2-y^3}{x^4+x^2y^2+y^4+1}=\frac{f(x,y)}{g(x,y)}$$

funksiyada $f(x,y)$ va $g(x,y)$ tekislikdagi barcha nuqtalarda uzluksiz, $g(x,y)\neq 0$ (hatto $g(x,y)\geq 1$) ekanligidan uni butun tekislikda uzluksizligi teoremadan kelib chiqadi.

Yuqoridagi 8-ta’rifda ikki o‘zgaruvchili $z=f(x,y)$ funksiyaning ikkala x va y argumentlari bo‘yicha uzluksizligi qaralgan edi. Bu yerda funksiyaning alohida har bir argumenti bo‘yicha uzluksizligini qarash mumkin. Buning uchun dastlab funksiyaning xususiy orttirmasi tushunchasini kiritamiz.

9-TA’RIF: Berilgan $z=f(x,y)$ funksiya uchun argumentlarning Δx va Δy orttirmalarida

$$\Delta_x f=f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)\,,\quad \Delta_y f=f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0) \qquad (5)$$

ayirmalar mos ravishda funksiyaning x va y argumentlari bo‘yicha $M_0(x_0,y_0)$ nuqtadagi ***xususiy orttimalari*** deb ataladi.

(3) tenglik bilan aniqlangan Δf orttirma funksiyaning ikkala x va y argumentlari bo‘yicha o‘zgarishini ifodalaydi va shu sababli to‘la orttirma deyiladi. (5) tenglik bilan aniqlangan $\Delta_x f$ yoki $\Delta_y f$ orttirmalar esa funksiyaning faqat x (bunda y o‘zgarmas) yoki y argumenti bo‘yicha (bunda x o‘zgarmas) o‘zgarishini ifodalaydi va shu sababli xususiy orttirma deyiladi.

Masalan, $f(x,y)=x^2+3xy-4y$ funksiya uchun ixtiyoriy $M(x,y)$ nuqtada to‘la va xususiy orttirmalarni topamiz:

$$\Delta f=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)=[(x+\Delta x)^2+3(x+\Delta x)(y+\Delta y)-4(y+\Delta y)]-$$

$$-[x^2+3xy-4y]=2x\Delta x+(\Delta x)^2+3[x\Delta y+y\Delta x+\Delta x\Delta y]-4\Delta y\ ,$$

$$\Delta_x f=f(x+\Delta x,y)-f(x,y)=[(x+\Delta x)^2+3(x+\Delta x)y-4y]-[x^2+3xy-4y]=$$

$$=2x\Delta x+(\Delta x)^2+3xy\Delta x\ ,$$

$$\Delta_y f=f(x,y+\Delta y)-f(x,y)=[x^2+3x(y+\Delta y)-4(y+\Delta y]-[x^2+3xy-4y]=$$

$$=3x\Delta y-4\Delta y\,.$$

10-TA’RIF: Berilgan $z=f(x,y)$ funksiya uchun $M_0(x_0,y_0)$ nuqtada

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta_x f=0 \quad yoki \quad \lim_{\Delta y\to 0}\Delta_y f=0 \qquad (6)$$

tengliklar bajarilsa, unda bu funksiya $M_0(x_0,y_0)$ nuqtada ***x yoki y argumenti bo‘yicha uzluksiz*** deyiladi .

Masalan, yuqorida ko‘rilgan $f(x,y)=x^2+3xy-4y$ funksiya uchun ixtiyoriy $M(x,y)$ nuqtada (6) shartlar bajariladi. Demak, bu funksiya butun tekislikda x va y argumentlari bo‘yicha uzluksizdir.

Agar $z=f(x,y)$ funksiya $M_0(x_0,y_0)$ nuqtada ikkala argumentlari bo‘yicha uzluksiz bo‘lsa, unda bu nuqtada har bir argumenti bo‘yicha ham uzluksiz bo‘ladi, chunki (4) tenglikdan (6) tengliklar xususiy hol sifatida kelib chiqadi. Ammo teskari tasdiq o‘rinli bo‘lishi shart emas. Masalan,

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0\ , & x^2+y^2=0\end{cases} \qquad (7)$$

funksiyani O(0,0) nuqtada uzluksizlikka tekshiramiz. Bunda

$$\Delta_x f = f(0+\Delta x,0)-f(0,0)=f(\Delta x,0)=\frac{\Delta x\cdot 0}{(\Delta x)^2+0^2}=0\Rightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\Delta_x f=0,$$

$$\Delta_y f = f(0,0+\Delta y)-f(0,0)=f(0,\Delta y)=\frac{0\cdot\Delta y}{0^2+(\Delta y)^2}=0\Rightarrow \lim_{\Delta y\to 0}\Delta_y f=0.$$

Demak, bu funksiya O(0,0) nuqtada *x* va *y* argumentlari bo‘yicha uzluksiz . Ammo $y=kx$ ($k\neq 0$)) deb olsak, unda

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot kx}{x^2+(kx)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{k}{1+k^2}=\frac{k}{1+k^2}\neq 0=f(0,0).$$

Demak, bu funksiya O(0,0) nuqtada ikkala *x* va *y* argumentlari bo‘yicha uzluksiz emas.

11-TA’RIF: Agar biror $M_0(x_0,y_0)$ nuqtada (2) tenglik bajarilmasa, bu nuqtada berilgan z=$f(x,y)$ funksiya ***uzlukli***, $M_0(x_0,y_0)$ esa funksiyaning ***uzilish nuqtasi*** deyiladi.

Masalan, oldin ko‘rib o‘tilgan (7) funksiya O(0,0) nuqtada uzlukli,

$$f(x,y)=\frac{2xy}{x^2-y^2}$$

funksiya esa $y=\pm x$ to‘g‘ri chiziqda yotgan barcha nuqtalarda uzlukli , chunki bu nuqtalar funksiyaning aniqlanish sohasiga kirmaydi va ularda (2) tenglik bajarilmaydi.

Ikki o‘zgaruvchili uzluksiz funksiyalarning xossalari. Ikki o‘zgaruvchili uzluksiz $z=f(x,y)$ funksiyaning xossalarini ifodalash uchun dastlab to‘g‘ri chiziqdagi (a,b) oraliq (ochiq soha) va [a,b] kesma (yopiq soha) tushunchalarini tekislik uchun umumlashtiramiz.

12-TA’RIF: Tekislikdagi *D* sohaning $M_0(x_0,y_0)$ nuqtasi o‘zining biror *r* atrofi bilan (6-ta’rifga qarang) shu sohada joylashgan bo‘lsa, u ***ichki nuqta*** deb ataladi .

Masalan, doira, kvadrat, uchburchak kabi figuralarning ichidagi nuqtalar ularning ichki nuqtalari bo‘ladi.

13-TA’RIF: Tekislikdagi $M_0(x_0,y_0)$ nuqtaning ixtiyoriy *r* atrofida ham *D* sohaga tegishli, ham *D* sohaga tegishli bo‘lmagan nuqtalar mavjud bo‘lsa, u *D* soha uchun ***chegaraviy nuqta*** deb ataladi .

Masalan, doira uchun uning aylanasidagi har bir nuqta chegaraviy bo‘ladi.

Shuni ta’kidlab o‘tish kerakki, *D* sohaning chegaraviy nuqtasi bu sohaga tegishli bo‘lishi ham, tegishli bo‘lmasligi ham mumkin.

14-TA’RIF: Tekislikdagi *D* sohaning barcha chegaraviy nuqtalar to‘plami uning ***chegarasi*** deb ataladi.

Masalan, doira uchun uning aylanasi chegara bo‘ladi.

15-TA’RIF: Agar *D* sohaga tegishli barcha nuqtalar ichki bo‘lsa, *D* ***ochiq soha*** deb ataladi.

Masalan, doira, kvadrat, uchburchak kabi figuralarning ichidagi barcha nuqtalardan iborat sohalar ochiq bo‘ladi.

Agar D ochiq soha bo‘lsa, unga chegaraviy nuqtalari kirmaydi.

16-TA'RIF: Agar D sohaning barcha chegaraviy nuqtalari bu sohaga tegishli bo‘lsa u ***yopiq soha*** deyiladi.

Masalan, doira o‘zining aylanasi bilan birgalikda yopiq sohani tashkil etadi.

17-TA'RIF: Agar D soha to‘liq biror chekli r radiusli doira ichida yotsa, u ***chegaralangan soha*** , aks holda esa ***chegaralanmagan soha*** deb ataladi.

Masalan, ellips ichidagi nuqtalardan iborat soha chegaralangan, parabola bilan chegaralangan soha esa chegaralanmagan bo‘ladi .

Yopiq va chegaralangan D sohada uzluksiz bo‘lgan ikki o‘zgaruvchili $z=f(x,y)$ funksiyaning bir nechta muhim xossalarini ko‘rsatib o‘tamiz. Bu xossalar $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo‘lgan bir o‘zgaruvchili funksiyalarning xossalarini (VII bob, §4) ikki o‘zgaruvchili funksiyalar uchun umumlashtiradi. Bu xossalar VII bob, §4 dagi tegishli teoremalarga o‘xshash isbotlanadi va shu sababli ularni takrorlab turmaymiz.

4-TEOREMA **(*Veyershtrass teoremasi*):** Agar $z=f(x,y)$ funksiya yopiq va chegaralangan D sohada aniqlangan va uzluksiz bo‘lsa, bu D sohada kamida bitta shunday $M_0(x_0, y_0)$ $[M_1(x_1, y_1)]$ nuqta topiladiki, D sohaning boshqa hamma $M(x,y)$ nuqtalari uchun

$$f(x_0,y_0)\geq f(x,y), \qquad [f(x_1,y_1)\leq f(x,y)]$$

munosabat bajariladi.

Bu holda $f(x, y)$ funksiyaning $f(x_0,y_0)=A, \quad f(x_1,y_1)=B$ qiymatlari mos ravishda uning D sohadagi ***eng katta va eng kichik qiymati*** deb aytiladi hamda max$f$ va min$f$ kabi belgilanadi.

Masalan, $f(x,y)=2(x^2+y^2)+3$ funksiya $D=\{(x,y): x^2+y^2\leq 4\}$ yopiq doirada aniqlangan va uzluksiz. Bu funksiya D sohada o‘zining eng katta max$f$ qiymatini sohaning $x^2+y^2=4$ chegarasidagi ixtiyoriy $M_0(x_0, y_0)$ nuqtada qabul etadi va bunda max$f=2\cdot 4+3=11$ bo‘ladi. Bu funksiya D sohada o‘zining eng kichik qiymatiga $x^2+y^2=0$ bo‘lganda, ya’ni O(0,0) nuqtada erishadi va min$f=2\cdot 0+3=3$ bo‘ladi.

18-TA'RIF: Agar D sohada aniqlangan $z=f(x, y)$ funksiya uchun shunday chekli A (yoki B) soni mavjud bo‘lsaki, ixtiyoriy $M(x,y)\in D$ nuqtada $f(x, y)\leq A$ (yoki $f(x, y)\geq B$) shart bajarilsa, bu funksiya D sohada ***yuqoridan (yoki quyidan) chegaralangan*** deb ataladi.

Masalan, $f(x, y)=5-x^2-y^2$ funksiya yuqoridan $A=5$, $g(x, y)= x^2+y^2-2$

funksiya esa quyidan $B=-2$ soni bilan chegaralangan.

19-TA'RIF: Agar D sohada aniqlangan $z=f(x, y)$ funksiya bu sohada ham yuqoridan, ham quyidan chegaralangan bo‘lsa, u D sohada ***chegaralangan funksiya*** deb ataladi.

Masalan, $f(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}$ funksiya o‘zining $D\{f\}=\{(x,y): x^2+y^2\leq 9\}$ aniqlanish sohasida yuqoridan $A=3$, quyidan esa $B=0$ soni bilan chegaralangan. Demak, bu funksiya chegaralangandir.

Yuqoridagi Veyershtrass teoremasidan bevosita quyidagi teorema kelib chiqadi.

5-TEOREMA: Yopiq sohada uzluksiz funksiya shu sohada chegaralangan bo‘ladi.

Ikki o‘zgaruvchili funksiyaning navbatdagi xossasini ifodalash uchun quyidagi tushunchani kiritamiz.

20-TA'RIF: Tekislikdagi D sohaning ixtiyoriy ikkita nuqtasini biror uzluksiz chiziq bilan tutashtirish mumkin bo‘lsa, u ***bog‘lamli soha*** deyiladi.

Masalan, aylana bilan chegaralangan soha (ochiq yoki yopiq doira) bog‘lamli soha bo‘ladi. Ammo ikkita konsentrik aylana bilan chegaralangan soha (ochiq yoki yopiq holda) bog‘lamli soha emas.

6-TEOREMA ***(Boltsano – Koshi teoremasi):*** Agar $f(x,y)$ funksiya yopiq va chegaralangan bog‘lamli D sohada uzluksiz bo‘lib, uning ikkita $M_1(x_1, y_1)$ va $M_2(x_2, y_2)$ nuqtasida qarama-qarshi ishorali qiymatlarga ega bo‘lsa, u holda bu sohaga tegishli kamida bitta $M_0(x_0, y_0)$ nuqtada berilgan $f(x,y)$ funksiya nol qiymatga ega bo‘ladi .

Masalan, $f(x,y)=x^2+y^2-3$ funksiya $D=\{(x,y): x^2+y^2\le 4\}$ yopiq doirada ham manfiy (misol uchun $f(1,1)=-1<0$), ham musbat (misol uchun $f(1.5,1)=0{,}25>0$) qiymatlarni qabul etadi. Bu funksiya D sohaga tegishli bo‘lgan $x^2+y^2=3$ aylanadagi har bir nuqtada nol qiymatni qabul etadi.

26§ MURAKKAB FUNKSIYANING HOSILASI.TO‘LA HOSILA. YO‘NALISH BO‘YICHA HOSILA VA DIFFERENSIAL. YUQORI TARTIBLI HOSILA VA DIFFERENSIALLAR.

REJA

- ***Ikki o‘zgaruvchili funksiyaning xususiy hosilalari.***
- ***Yo‘nalish bo‘yicha hosila va gradient.***
- ***Ikki o‘zgaruvchili funksiya differensiallari va ularning tatbiqlari.***
- ***Yuqori tartibli differensiallar.***

Tayanch iboralar

* Xus就 hosilalar * Yo‘nalish bo‘yicha hosila * Gradient * Yuqori tartibli xususiy hosilalar * Aralash hosilalar * Differensiallanuvchi funksiya * Xususiy differensial *To‘la differensial * Differensialning geometrik ma’nosi * Yuqori tartibli differensiallar

Bir o‘zgaruvchili funksiya xususiyatlarini o‘rganishda va juda ko‘p masalalarni yechishda funksiyaning hosilasi muhim ahamiyatga ega ekanligini ko‘rib o‘tgan edik. Shu sababli bu tushunchani ikki o‘zgaruvchili funksiya uchun ham aniqlash masalasi bilan shug‘ullanamiz. Bunda ikki o‘zgaruvchili funksiya uchun kiritiladigan tushunchalar va keltiriladigan tasdiqlar deyarli o‘zgarishsiz ikkidan ortiq o‘zgaruvchili funksiyalar uchun ham umumlashtirilishi mumkinligini yana bir marta ta’kidlab o‘tamiz.

2.1. Ikki o‘zgaruvchili funksiyaning xususiy hosilalari. Bir o‘zgaruvchili funksiyaning hosilasi Δf funksiya orttirmasining Δx argument orttirmasiga nisbatining $\Delta x\to 0$ bo‘lgandagi limiti kabi aniqlanishini eslatib o‘tamiz. Ikki o‘zgaruvchili funksiya uchun ham hosila tushunchasini shunday tarzda kiritamiz.

Berilgan $z=f(x,y)$ funksiya biror D sohada aniqlangan va $M(x,y)$ shu sohaning ichki nuqtasi bo‘lsin. Bu nuqtaning x abssissasiga Δx orttirma berib, y ordinatani o‘zgartirmay qoldiramiz. Bunda hosil bo‘ladigan $N(x+\Delta x,y)$ nuqta ham D sohaga tegishli deb hisoblaymiz. Bu holda $z=f(x,y)$ funksiyaning o‘zgarishi

$$\Delta_x f = f(x+\Delta x, y) - f(x, y),$$

ya’ni x argument bo‘yicha xususiy orttirma orqali ifodalanadi.

1-TA’RIF: Agar $z=f(x,y)$ funksiyaning x bo‘yicha $\Delta_x f$ xususiy orttirmasining Δx argument orttirmasiga nisbati $\Delta x\to 0$ bo‘lganda chekli limitga ega bo‘lsa, bu limit qiymati funksiyaning ***x bo‘yicha xususiy hosilasi*** deb ataladi.

Bu hosila

$$z'_x\,,\quad f'_x\,,\quad f'_x(x,y)\,,\quad \frac{\partial z}{\partial x}\,,\quad \frac{\partial f}{\partial x}$$

kabi belgilardan biri bilan belgilanadi. Bunda indeks yoki maxrajdagi *x* belgi hosila *x* argument bo‘yicha olinayotganligini ifodalaydi. Ta’rifga ko‘ra

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Bu yerda $\Delta_x f$ xususiy orttirma faqat *x* hisobiga o‘zgarib, unda *y* o‘zgarmas bo‘ladi. Shu sababli f'_x xususiy hosila bir *x* o‘zgaruvchili funksiyaning hosilasi singari aniqlanadi. Bundan $z=f(x,y)$ funksiyaning *x* bo‘yicha xususiy hosilasini hisoblashda ikkinchi *y* o‘zgaruvchini o‘zgarmas son kabi qarash kerakligi va oldin ko‘rib o‘tilgan hosilalar jadvali hamda differensiallash qoidalaridan foydalanish mumkinligi kelib chiqadi.

Masalan,

$$f(x,y)=3x^2\sin y+5xy+y^2 \Rightarrow f'_x(x,y)=(3x^2\sin y+5xy+y^2)'_x=$$

$$=(3x^2\sin y)'_x+(5xy)'_x+(y^2)'_x=3\sin y(x^2)'_x+5y(x)'_x+(y^2)'_x= \; 6x\sin y+5y \; .$$

Xuddi shunday tarzda $z=f(x,y)$ funksiyaning

$$z'_y\,,\quad f'_y\,,\quad f'_y(x,y)\,,\quad \frac{\partial z}{\partial y}\,,\quad \frac{\partial f}{\partial y}$$

kabi belgilanadigan *y* bo‘yicha xususiy hosilasi kiritiladi:

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y f}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}. \qquad (2)$$

Yuqoridagi misolda *x* o‘zgaruvchini o‘zgarmas deb qarab, *y* bo‘yicha xususiy hosilani hisoblaymiz:

$$f'_y(x,y)=(3x^2\sin y+5xy+y^2)'_y=(3x^2\sin y)'_y+(5xy)'_y+(y^2)'_y=$$

$$=3x^2(\sin y)'_y+5x(y)'_y+(y^2)'_y=3x^2\cos y+5x+2y$$

Yana bir misol sifatida

$$f(x,y)=arctgxy^2$$

funksiyaning xususiy hosilalarini hisoblaymiz:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(arctgxy^2)=\frac{1}{1+(xy^2)^2}\frac{\partial}{\partial x}(xy^2)=\frac{y^2}{1+x^2y^4}\,,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(arctgxy^2)=\frac{1}{1+(xy^2)^2}\frac{\partial}{\partial y}(xy^2)=\frac{2xy}{1+x^2y^4}\quad .$$

Bir o‘zgaruvchili funksiya hosilasining geometrik mazmuniga o‘xshash ikki o‘zgaruvchili $z=f(x,y)$ funksiyaning xususiy hosilalarining ham geometrik mazmuni mavjud. Yuqorida aytilgandek, bu funksiya grafigi biror *S* sirtni ifodalaydi. Bu sirtga tegishli $M_0(x_0, y_0)$ nuqtani qaraymiz. Bu holda $f(x,y_0)=\varphi(x)$ bir o‘zgaruvchili funksiya bu *S* sirtni $y=y_0$ tekislik bilan kesishda hosil bo‘ladigan biror *L* chiziqni ifodalaydi. Shu sababli *x* bo‘yicha xususiy hosilaning $f'_x(x_0,y_0)$ son qiymati *L* chiziqqa $M_0(x_0, y_0)$ nuqta o‘tkazilgan urinmaning burchak koeffitsiyentini ifodalaydi.

Demak, $f'_x(x_0,y_0)=tg\alpha$ bo‘lib, bunda α burchak *S* sirtni $y=y_0$ tekislik bilan kesishda hosil bo‘ladigan *L* chiziqqa $M_0(x_0, y_0)$ nuqtada o‘tkazilgan urinmaning OX koordinata o‘qi bilan hosil etgan burchakni ifodalaydi. Xuddi shunday, $f'_y(x_0,y_0)$ soni S sirtni $x=x_0$ tekislik bilan kesishda hosil bo‘ladigan G chiziqqa $M_0(x_0, y_0)$ nuqtada o‘tkazilgan urinmaning burchak koeffitsiyentini ifodalaydi.

Bir o‘zgaruvchili funksiya $M_0(x_0)$ nuqtada hosilaga ega bo‘lsa, unda bu nuqtada uzluksiz bo‘lar edi. Ammo ikki o‘zgaruvchili funksiyaning $M_0(x_0, y_0)$ nuqtada f'_x, f'_y xususiy hosilalari mavjudligidan uni bu nuqtada uzluksizligi har doim ham kelib chiqmaydi.

Masalan,

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0\ , & x^2+y^2=0\end{cases}$$

funksiya O(0,0) nuqtada uzlukli (§1, (7) ga qarang) ekanligini ko‘rgan edik.

Ammo $f(x,0)\equiv 0$ va $f(0,y)\equiv 0$ bo‘lgani uchun bu funksiyaning O(0,0) nuqtada ikkala xususiy hosilalari mavjud va $f'_x(0,0)=0$, $f'_y(0,0)=0$ bo‘ladi.

Berilgan $z=f(x,y)$ funksiyaning

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}$$

xususiy hosilalari mavjud bo‘lsin. Bu holda ular x va y o‘zgaruvchilarning funksiyalari bo‘ladi va shuning uchun ulardan yana xususiy hosilalar olish mumkin. Agar bu xususiy hosilalar mavjud bo‘lsa, unda

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\equiv\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f''_{xx},\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\equiv\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f''_{yy}$$

$z=f(x,y)$ funksiyaning x va y argumentlari bo‘yicha ***II tartibli xususiy hosilalari***,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\equiv\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=f''_{xy},\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\equiv\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=f''_{yx}$$

esa $z=f(x,y)$ funksiyaning ***II tartibli aralash hosilalari*** deyiladi. Shunday qilib jami 4 ta II tartibli hosilalarga ega bo‘lamiz.

Masalan, $z=3x^2y+5x-3y+4$ funksiyaning I tartibli xususiy hosilalari

$$f'_x=(3x^2y+5x-3y+4)'_x=6xy+5,\quad f'_y=(3x^2y+5x-3y+4)'_y=3x^2-3,$$

bo‘lgani uchun uning II tartibli hosilalari quyidagicha bo‘ladi:

$$f''_{xx}=(f'_x)'_x=(6xy+5)'_x=6y,\quad f''_{yy}=(f'_y)'_y=(3x^2-3)'_y=0,$$
$$f''_{xy}=(f'_x)'_y=(6xy+5)'_y=6x,\quad f''_{yx}=(f'_y)'_x=(3x^2-3)'_x=6x.$$

Yana bir misol sifatida yuqorida ko‘rib o‘tilgan $f(x,y)=arctg(xy^2)$ funksiyaning II tartibli hosilalarini topamiz:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y^2}{1+x^2y^4}\right)=-\frac{2xy^6}{(1+x^2y^4)^2},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2xy}{1+x^2y^4}\right)=\frac{2x-6x^3y^4}{(1+x^2y^4)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y^2}{1+x^2y^4}\right)=\frac{2y-2x^2y^5}{(1+x^2y^4)^2},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2xy}{1+x^2y^4}\right)=\frac{2y-2x^2y^5}{(1+x^2y^4)^2}\ .$$

Bu misollarda II tartibli aralash hosilalar o‘zaro teng, ya’ni $f''_{xy} = f''_{yx}$ ekanligini ko‘ramiz. Ammo bu tenglik barcha funksiyalar uchun o‘rinli bo‘lishi shart emas. Masalan, ushbu funksiyani qaraymiz:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}xy\,, & x^2+y^2\neq 0\,,\\ 0\,, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

Bu funksiyani x bo‘yicha xususiy hosilasini hisoblab, quyidagi natijani olamiz:

$$f'_x(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y(x^4-y^4+4x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2}\,, & x^2+y^2\neq 0\,,\\ 0\,, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

Bu yerda x=0 deb,

$$f'_x(0,y)=-y\Rightarrow f''_{xy}(0,y)=-1\Rightarrow f''_{xy}(0,0)=-1$$

natijaga kelamiz. Xuddi shunday tarzda $f''_{yx}(0,0)=1$ekanligini ko‘rish mumkin. Demak, bu funksiya uchun O(0,0) nuqtada II tartibli aralash hosilalar o‘zaro teng emas.

Ammo ma’lum bir shartlarni qanoatlantiradigan funksiyalar uchun yuqoridagi misollarda ko‘rilgan aralash hosilalar tengligi o‘rinli bo‘ladi.

1-TEOREMA: Agar $z=f(x,y)$ funksiya va uning f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx} hosilalari $M(x,y)$ nuqta va uning biror atrofida aniqlangan, bu nuqtada II tartibli f''_{xy}, f''_{yx} aralash hosilalar uzluksiz bo‘lsa, unda aralash hosilalar bu nuqtada o‘zaro teng, ya’ni $f''_{xy} = f''_{yx}$ bo‘ladi.

Bu teorema ***aralash hosilalar haqidagi teorema*** deb ataladi va uni isbotsiz qabul qilamiz.

O‘z navbatida $z=f(x,y)$ funksiyaning II tartibli hosilalaridan yana xususiy hosilalar olib (ular mavjud bo‘lgan taqdirda), quyidagi 8 ta III tartibli hosilalarga ega bo‘lamiz:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3},\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y},\ \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial x},\ \frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x^2},\ \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2},\ \frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x\partial y},\ \frac{\partial^3 f}{\partial y^2\partial x},\ \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\ .$$

Bu jarayonni davom ettirib, ikki o‘zgaruvchili funksiyalar uchun 2^n ta n- tartibli hosilalarni n–1-tartibli hosilalar orqali birin-ketin aniqlab borish mumkin.

Ikki o‘zgaruvchili funksiya xususiy hosilalarining iqtisodiy tatbig‘iga doir bir misol qaraymiz. Yo‘lovchilar soni z bilan aholi soni x va shaharlar orasidagi masofa y o‘zaro $z=x^2/y$ ikki o‘zgaruvchili funksiya ko‘rinishida bog‘langan. Bu holda $z'_x=2x/y$ xususiy hosila shaharlar orasidagi masofa y bir xil bo‘lganda yo‘lovchilar sonini oshishi x aholi soniga k=2 koeffitsiyent bilan to‘g‘ri proporsional bog‘langanligini ifodalaydi. $z'_y=-x^2/y^2$ xususiy hosiladan esa aholi soni x o‘zgarmaganda yo‘lovchilar sonini oshishi shaharlar orasidagi y masofaning kvadratiga teskari proporsional bo‘lishi kelib chiqadi .

2.2. Yo‘nalish bo‘yicha hosila va gradient. Endi $z=f(x,y)$ funksiyaning xususiy hosilalari tushunchasining bir umumlashmasini kiritamiz. Buning uchun funksiya $M(x,y)$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan va bu nuqtadan o‘tuvchi l to‘g‘ri chiziq bo‘yicha yo‘nalish biror ***e***={cosα, cosβ} birlik vektor orqali berilgan bo‘lsin. Bunda cosα, cosβ berilgan ***e*** birlik vektorning mos ravishda OX va OY koordinata o‘qlari bilan hosil etgan α va β (β=90^0–α) burchaklar bilan aniqlanadi va ***yo‘naltiruvchi kosinuslar*** deb ataladi. Bu l to‘g‘ri chiziqda yotuvchi va $M(x,y)$ nuqtaning atrofiga tegishli yana bir N(x+Δx,y+Δy) nuqtani qaraymiz. Bunda $z=f(x,y)$ funksiyaning o‘zgarishi

$$\Delta_l f = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

ayirma orqali ifodalanadi va u funksiyaning ***l* *yo'nalish bo'yicha orttirmasi*** deyiladi. Bu yerda $MN=\Delta l$ belgilash kiritamiz. Bunda $N\to M$ desak, ya'ni $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$ bo'lsa, unda $\Delta l\to 0$ bo'ladi.

2-TA'RIF: Agar $\Delta l\to 0$ bo'lganda $\Delta_l f/\Delta l$ nisbat chekli limitga ega bo'lsa, bu limit qiymati $z=f(x,y)$ funksiyaning ***l* *yo'nalish bo'yicha hosilasi*** deb ataladi.

$z=f(x,y)$ funksiyaning l yo'nalish bo'yicha hosilasi

$$f_l', \quad z_l', \quad \frac{\partial f}{\partial l}, \quad \frac{\partial z}{\partial l}$$

kabi belgilanadi va , ta'rifga asosan,

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \lim_{\Delta l\to 0}\frac{\Delta_l f}{\Delta l}$$

kabi aniqlanadi. $\Delta l=\Delta x\cos\alpha+\Delta y\cos\beta$ tenglikdan foydalanib,

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta \qquad (4)$$

formula o'rinli ekanligini keltirib chiqarish mumkin.

Masalan, $f(x,y)=x^2-y^2$ funksiyaning $M(x,y)$ nuqtadagi $\alpha=60^0$ yo'nalish bo'yicha hosilasi

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta = 2x\cos 60^0 - 2y\sin 60^0 = x - y\sqrt{3}$$

formula bilan hisoblanadi. Xususan, $M(1,1)$ nuqtada bu hosilaning qiymati $1-\sqrt{3}$ bo'ladi.

Agar l yo'nalish biror $\boldsymbol{a}=\{a_1, a_2\}$ vektor orqali berilgan bo'lsa, unda bu yo'nalish bo'yicha hosila

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}$$

formula bilan hisoblanadi.

Masalan, yuqoridagi funksiyaning $M(1,1)$ nuqtadagi $\boldsymbol{a}=\{4,3\}$ vektor bilan aniqlanadigan l yo'nalishi bo'yicha hosilasining qiymatini topamiz:

$$\frac{\partial f}{\partial l} = 2x\cdot\frac{4}{\sqrt{4^2+3^2}} - 2y\cdot\frac{3}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{8x-6y}{5} \Rightarrow \quad \frac{\partial f(1,1)}{\partial l} = \frac{8-6}{5} = \frac{2}{5}.$$

Agar l sifatida OX (yoki OY) koordinata o'qining yo'nalishini olsak , unda

$\alpha=0$, $\beta=90^0$ (yoki $\alpha=90^0$, $\beta=0$) bo'ladi va (4) formuladan

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x} \quad yoki \quad \frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial y}$$

natijalarni olamiz. Demak, $z=f(x,y)$ funksiyaning x yoki y bo'yicha xususiy hosilalari uning l yo'nalish bo'yicha hosilasining xususiy holi bo'ladi.

3-TA'RIF: $z=f(x,y)$ funksiyaning ***gradienti*** deb koordinatalari f_x' va f_y' xususiy hosilalardan iborat vektorga aytiladi.

$z=f(x,y)$ funksiyaning gradienti odatda grad$f$ kabi belgilanadi. Gradient ma'nosini aniqlash uchun, vektorlarning skalyar ko'paytmasidan (III bob, §2) foydalanib, l yo'nalish bo'yicha hosilaning (4) ifodasini quyidagicha yozib chiqamiz:

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\vec{e}\cdot gradf=|\vec{e}|\cdot|gradf|\cdot\cos\varphi=|gradf|\cdot\cos\varphi \quad .$$

Bu yerda φ orqali l yo'nalishni ifodalovchi ***e*** birlik vektor bilan gradient vektor orasidagi burchak ifodalangan. Oxirgi tenglikdan ko'rinadiki, φ=0 bo'lganda yo'nalish bo'yicha hosila berilgan nuqtada o'zining eng katta qiymatiga erishadi. Demak, berilgan nuqtada $z=f(x,y)$ funksiyaning turli l yo'nalishlar bo'yicha hosilasi (o'zgarish tezligi) bu yo'nalish gradient bilan ustma-ust tushganda eng katta qiymatiga erishadi va bu qiymat gradient moduliga teng bo'ladi. Gradient , majoziy qilib aytganda, tog' cho'qqisida olib chiqadigan eng tikka yo'nalishni ifodalaydi.

Masalan,yuqorida ko'rilgan $f(x,y)=x^2-y^2$ funksiyaning $M(x,y)$ nuqtadagi gradienti grad$f$={2x, –2y} bo'ladi. Xususan, M(1,1) nuqtada grad$f$={2, –2} va bu nuqtadagi funksiyaning eng katta o'zgarish tezligi | grad$f$ |= $2\sqrt{2}$ bo'ladi.

2.3. Ikki o'zgaruvchili funksiya differensiallari va ularning tatbiqlari. Oldin $z=f(x,y)$ funksiyaning aniqlanish sohasidagi biror $M(x,y)$ nuqtadagi to'la orttirmasini eslaymiz (§1, (3) ga qarang):

$$\Delta z=\Delta f = f(x+\Delta x\,,\,y+\Delta y)-f(x\,,\,y)\,.$$

<u>4-TA'RIF:</u> Agar $z=f(x,y)$ funksiyaning berilgan $M(x,y)$ nuqtadagi to'la orttirmasi

$$\Delta f=A\Delta x+B\Delta y+\alpha\Delta x+\beta\Delta y \qquad (5)$$

ko'rinishda ifodalanib, unda $A=A(x,y)$ va $B=B(x,y)$ argumentlarning Δx va Δy orttirmalariga bog'liq bo'lmagan sonlar, α va β esa $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$ holda cheksiz kichik miqdorlar bo'lsa, unda bu funksiya $M(x,y)$ nuqtada ***differensiallanuvchi*** deb ataladi. To'la orttirmaning Δx va Δy orttirmalariga nisbatan bosh, chiziqli qismi $A\Delta x+B\Delta y$ funksiyaning ***differensiali*** deyiladi.

$z=f(x,y)$ funksiyaning differensiali df yoki $df(x,y)$ kabi belgilanadi va, ta'rifga asosan, (5) tenglikdan

$$df=A\Delta x+B\Delta y \qquad (6)$$

formula orqali topiladi.

Misol sifatida $f(x,y)=x^2+xy+3y$ funksiyaning differensiallanuvchi ekanligini ta'rif bo'yicha tekshiramiz. Buning uchun dastlab funksiyaning to'la orttirmasini topamiz:

$$\Delta f=[(x+\Delta x)^2+(x+\Delta x)(y+\Delta y)+3(y+\Delta y)]-[x^2+xy+3y]=$$
$$=2x\Delta x+(\Delta x)^2+x\Delta y+y\Delta x+\Delta x\Delta y+3\Delta y=(2x+y)\Delta x+(x+3)\Delta y+\Delta x\Delta x+\Delta x\Delta y.$$

Bu tenglikni (5) bilan taqqoslab, $A=2x+y$, $B=x+3$, $\alpha=\Delta x$, $\beta=\Delta x$ ekanligini ko'ramiz. Bunda 4-ta'rifdagi barcha shartlar bajarilmoqda va shu sababli bu funksiya tekislikdagi ixtiyoriy $M(x,y)$ nuqtada differensiallanuvchi va uning differensiali , (6) tenglikka asosan, quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$df=(2x+y)\Delta x+(x+3)\Delta y.$$

Ammo funksiyani differensiallanuvchi ekanligini har doim ham uning ta'rifi asosida tekshirish oson bo'lmaydi. Shu sababli bu savolga umumiy holda javob topish masalasi paydo bo'ladi. Bu masala quyidagi teoremada o'z yechimini topadi.

<u>2-TEOREMA:</u> Agar $z=f(x,y)$ funksiyaning f'_x, f'_y xususiy hosilalari $M(x,y)$ nuqta va uning biror atrofida aniqlangan hamda uzluksiz bo'lsa, unda funksiya bu nuqtada differensiallanuvchi va uning differensiali

$$df = f'_x\Delta x+f'_y\Delta y=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y \qquad (7)$$

formula bilan aniqlanadi.

Isbot: $z=f(x,y)$ funksiyaning $M(x,y)$ nuqtadagi to‘la orttirmasini quyidagi ko‘rinishda yozamiz:

$\Delta f=f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y)=[f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y+\Delta y)]+[f(x, y+\Delta y)-f(x, y)]$.(8)

Bu yerda kvadrat qavs ichidagi ayirmalar bir o‘zgaruvchili funksiyaning orttirmalarini ifodalaydi. I qavsdagi bir o‘zgaruvchili funksiya $f(x,y+\Delta y)$ ko‘rinishda bo‘lib, uning argumenti $[x, x+\Delta x]$ kesmada o‘zgaradi. Teorema shartiga ko‘ra $f(x,y+\Delta y)$ funksiya bu kesmada f'_x hosilaga ega. Unda I qavsdagi orttirmaga Lagranj teoremasini (VIII bob, §3) qo‘llash mumkin:

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y+\Delta y)=\frac{\partial f(\bar{x}, y+\Delta y)}{\partial x}\Delta x, \quad x<\bar{x}<x+\Delta x \text{ .(9)}$$

Xuddi shunday tarzda

$$f(x, y+\Delta y)-f(x, y)=\frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y}\Delta y, \quad y<\bar{y}<y+\Delta y \qquad (10)$$

tenglikni hosil qilamiz. Teorema shartiga ko‘ra xususiy hosilalar uzluksiz va $\Delta x\to 0, \Delta y\to 0 \Rightarrow \bar{x}\to x, \bar{y}\to y$ bo‘lgani uchun

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\partial f(\bar{x}, y+\Delta y)}{\partial x}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \quad , \quad \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\partial f(x,\bar{y})}{\partial y}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

tengliklar o‘rinli bo‘ladi. Bu tengliklardan, limit xossasiga asosan (VII bob, §3, lemmaga qarang), quyidagi tengliklar kelib chiqadi:

$$\frac{\partial f(\bar{x}, y+\Delta y)}{\partial x}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+\gamma_1, \quad \frac{\partial f(x,\bar{y})}{\partial y}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}+\gamma_2 \qquad (11)$$

Bu yerda γ_1 va γ_2 $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$ bo‘lganda cheksiz kichik miqdorlar bo‘ladi.

Endi (8) tenglikka dastlab (9)-(10), so‘ngra ular o‘rniga (11) tengliklarni qo‘yib, funksiyaning to‘la orttirmasini ushbu ko‘rinishga keltiramiz:

$$\Delta f=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y+\gamma_1\Delta x+\gamma_2\Delta y \text{ .} \qquad (12)$$

Bu yerdan, (12) natijani (5) tenglik bilan taqqoslab, $z=f(x,y)$ funksiya $M(x,y)$ nuqtada differensiallanuvchi va uning differensiali uchun (7) formula o‘rinli ekanligini ko‘ramiz. Teorema to‘la isbotlandi.

Masalan, yuqorida ko‘rib o‘tilgan $f(x,y)=x^2+xy+3y$ funksiyaning differensialini endi (7) formula bo‘yicha topamiz:

$$df=(x^2+xy+3y)'_x\Delta x+(x^2+xy+3y)'_y\Delta y=(2x+y)\Delta x+(x+3)\Delta y.$$

Bu oldin olingan natijani ifodalaydi, ammo unga ancha oson erishildi.

Endi xususiy $f(x,y)=x$ holda funksiya differensialini (7) formula orqali topamiz:

$$dx=df=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y=1\cdot\Delta x+0\cdot\Delta y=\Delta x.$$

Xuddi shunday ravishda $f(x,y)=y$ holda $dy=\Delta y$ ekanligini ko‘ramiz. Shu sababli funksiya differensiali uchun (7) formulani ushbu ko‘rinishda yozish mumkin:

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy\text{ .} \qquad (13)$$

Bu tenglikning o‘ng tomonidagi qo‘shiluvchilar $z=f(x,y)$ funksiyaning mos ravishda x va y bo‘yicha ***xususiy differensiallari*** deyiladi va $d_x f$, $d_y f$ kabi belgilanadi. Bu holda df ***to‘la differensial*** deb yuritiladi.

Izoh: Bir o‘zgaruvchili $y=f(x)$ funksiya $M(x)$ nuqtada differensiallanuvchi bo‘lishi uchun uning shu nuqtada faqat $f'(x)$ hosilasi mavjudligi talab qilinib, uning uzluksizligi talab etilmas edi. Ikki o‘zgaruvchili funksiya uchun esa uning xususiy hosilalarini mavjudligi differensiallanuvchi bo‘lishi uchun yetarli emas.

Masalan,

$$f(x,y)=\begin{cases} 0, & x=0 \ yoki \ y=0, \\ 1, & x\neq 0 \ va \ y\neq 0 \end{cases}$$

funksiya uchun $f(x,0)=0$ va $f(0,y)=0$ bo‘lgani uchun O(0,0) nuqtada uning xususiy hosilalari mavjud va $f'_x(0,0)=0$, $f'_y(0,0)=0$. Ammo O(0,0) nuqtada bu funksiya to‘la orttirmasini (5) ko‘rinishda yozib bo‘lmaydi. Haqiqatan ham, ixtiyoriy $\Delta x\neq 0$, $\Delta y\neq 0$ uchun $\Delta f=f(0+\Delta x, 0+\Delta y)-f(0,0)=1-0=1$, ya’ni $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$ bo‘lganda cheksiz kichik miqdor emas. Demak, O(0,0) nuqtada bu funksiyaning xususiy hosilalari mavjud, ammo differensiallanuvchi emas.

5-TA’RIF: Fazodagi S sirtda yotuvchi va uning $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtasidan o‘tuvchi barcha egri chiziqlarining shu nuqtadagi barcha urinmalaridan hosil bo‘lgan P tekislik S sirtning $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtasidagi ***urinma tekisligi*** deb ataladi.

3-TEOREMA: Agar $z=f(x,y)$ funksiyaning grafigi S sirtdan iborat bo‘lsa, bu sirtning biror $M_0(x_0, y_0, z_0)= M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ nuqtasida urinma P tekislik mavjud bo‘lishi uchun funksiya shu nuqtada differensiallanuvchi bo‘lishi zarur va yetarli.

Bu teoremani isbotsiz qabul etamiz.

Bunda df to‘la differensial S sirtning $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtadagi urinma tekisligi applikatasining orttirmasiga teng bo‘ladi va bu tasdiq ***to‘la differensialning geometrik ma’nosini*** ifodalaydi. Bu holda S sirtning $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtasiga o‘tkazilgan P urinma tekislik tenglamasi

$$z-f(x_0,y_0)=f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0) \qquad (14)$$

ko‘rinishda bo‘lishini keltirib chiqarish mumkin.

Masalan, $z=f(x,y)=x^2-2xy+y^2-x+2y$ funksiya bilan aniqlangan S sirtning $M(1,1,1)$ nuqtasiga o‘tkazilgan urinma tekislik tenglamasini topamiz. Bunda xususiy hosilalar mavjud, uzluksiz va

$$f'_x(1,1)=(2x-2y-1)\Big|_{y=1}^{x=1}=-1, \quad f'_y(1,1)=(-2x+2y+2)\Big|_{y=1}^{x=1}=2 \quad ,$$

$f(1,1)=1$ bo‘lgani uchun, (14) tenglikka asosan izlangan urinma tekislik tenglamasi

$$z-1=-(x-1)+2(y-1) \Rightarrow x-2y+z=0$$

ekanligini aniqlaymiz.

(5) tenglikdan ko‘rinadiki, agar $z=f(x,y)$ funksiya $M(x,y)$ nuqtada differensiallanuvchi bo‘lsa, unda u bu nuqtada uzluksiz bo‘ladi. Haqiqatan ham, bu holda

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta f=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}(A\Delta x+B\Delta y+\alpha\Delta x+\beta\Delta y)=0$$

va, ta’rifga asosan, funksiya $M(x,y)$ nuqtada uzluksiz bo‘ladi.

Ammo teskari tasdiq umuman olganda o‘rinli emas, ya’ni funksiyani biror $M(x,y)$ nuqtada uzluksiz ekanligidan uni bu nuqtada differensiallanuvchi bo‘lishi kelib chiqmaydi.

Masalan, $f(x,y)=|x|(y+1)$ funksiyani O(0,0) nuqtada qaraymiz. Bu nuqtada uning to‘la orttirmasini uchun

$$\Delta f=f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)=|\Delta x|\Delta y \Rightarrow \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta f=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}|\Delta x|\Delta y=0$$

tenglik o‘rinli ekanligidan funksiyani uzluksizligi kelib chiqadi. Endi bu nuqtada funksiyaning x bo‘yicha xususiy orttirmasini qaraymiz:

$$\Delta_x f=f(0+\Delta x,0)-f(0,0)=f(\Delta x,0)=|\Delta x|.$$

Bu yerdan ko‘rinadiki, O(0,0) nuqtada funksiyaning x bo‘yicha xususiy hosilasi mavjud emas, chunki $\Delta x\to 0$ bo‘lganda $|\Delta x|/\Delta x$ nisbatning limiti mavjud emas. Demak, O(0,0) nuqtada funksiya uzluksiz, ammo differensiallanuvchi emas.

Yuqorida isbotlangan 2-teoremadan ushbu natija kelib chiqadi.

NATIJA: Agar $z=f(x,y)$ funksiyaning f'_x, f'_y xususiy hosilalari $M(x,y)$ nuqta va uning biror atrofida aniqlangan hamda uzluksiz bo‘lsa, unda bu funksiya $M(x,y)$ nuqtada uzluksiz bo‘ladi.

Haqiqatan ham bu shartlarda funksiya $M(x,y)$ nuqtada differensiallanuvchi va shu sababli uzluksiz bo‘ladi.

Endi to‘la differensialning tatbig‘iga doir bir masalani qaraymiz. Buning uchun yuqoridagi (12) tenglikda $z=f(x,y)$ funksiyaning Δx va Δy argument orttirmalari kichik sonlardan iborat deb olamiz. Bu holda bu tenglikda $\gamma_1\Delta x+\gamma_2\Delta y$ qo‘shiluvchi ham kichik son bo‘ladi. Shu sababli (12) tenglikda bu qo‘shiluvchini hisobga olmasak, undan quyidagi taqribiy tengliklar kelib chiqadi:

$$\Delta f \approx df \Rightarrow f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) \approx \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy \Rightarrow$$

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x,y) + \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y. \qquad (15)$$

Bu formuladan foydalanib, $z=f(x,y)$ funksiyaning hisoblash uchun “noqulay” bo‘lgan $N(x+\Delta x, y+\Delta y)$ nuqtadagi qiymati uning hisoblash uchun “qulay” bo‘lgan $M(x,y)$ nuqtadagi qiymati yordamida taqriban topilishi mumkin.

Misol sifatida $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ funksiyaning $N(2.98,\ 4.03)$ nuqtadagi qiymatini, ya’ni $\sqrt{2.98^2+4.03^2}$ ildizni taqribiy qiymatini topamiz. Bunda “qulay” nuqta $M(3,4)$ bo‘ladi, chunki unda funksiyaning qiymati oson hisoblanadi va $f(3,4)=5$ bo‘ladi. Bu holda $\Delta x=2.98–3=–0.02$, $\Delta y=4.03–4=0.03$ va

$$f'_x(3,4) = \left.\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|_{x=3}^{y=4} = \frac{6}{5} = 1.2, \quad f'_y(3,4) = \left.\frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|_{x=3}^{y=4} = \frac{8}{5} = 1.6\ .$$

Bu natijalarni (15) taqribiy formulaga qo‘yib,

$$f(2.98, 4.03) = \sqrt{2.98^2+4.03^2} \approx 5+1.2\cdot(-0.02)+1.6\cdot 0.03 = 5.024$$

ekanligini topamiz. Bu ildizning uch xona aniqlikdagi qiymati 5.012 ekanligidan olingan taqribiy natijaning aniqligi haqida tasavvur hosil qilishimiz mumkin.

2.4. Yuqori tartibli differensiallar. Endi yuqori tartibli differensiallar tushunchasini kiritamiz. $z=f(x,y)$ funksiya II tartibli uzluksiz hosilalarga ega bo‘lsin. Bu holda

$$df = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy$$

to‘la differensial ikki o‘zgaruvchili funksiya sifatida uzluksiz xususiy hosilalarga ega bo‘ladi. Shu sababli df differensialning $d(df)$differensiali haqida so‘z yuritish mumkin .

6-TA’RIF: Agar $z=f(x,y)$ funksiya df differensialning $d(df)$differensiali mavjud bo‘lsa, u funksiyaning ***II tartibli differensiali*** deb ataladi va d^2f kabi belgilanadi.

Agar $z=f(x,y)$ funksiya II tartibli uzluksiz hosilalarga ega bo‘lsa, uning II tartibli differensiali d^2f mavjud va uning ta’rifi hamda to‘la differensial formulasiga asosan quyidagi natijani olamiz:

$$d^2f = d(df) = \frac{\partial(df)}{\partial x}dx + \frac{\partial(df)}{\partial y}dy = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right]dx + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right]dy =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dydx + \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2\,.$$

Bunda argument differensiallari dx va dy o‘zgarmas son singari qaraldi hamda aralash hosilalar haqidagi teoremadan foydalanildi.

Demak, II tartibli differensial d^2f funksiyaning II tartibli hosilalari orqali quyidagicha ifodalanadi:

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2 \qquad (16)$$

I tartibli df differensialni ifodalovchi (13) tenglikdan f "umumiy ko'paytuvchini" shartli ravishda qavsdan tashqariga chiqarib va tenglikni ikkala tomonini unga "qisqartirib", ushbu operator belgisiga ega bo'lamiz:

$$d = \frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\,. \qquad (17)$$

Izoh: Matematik analizda operator atamasi funksiyaga funksiyani mos qo'yadigan akslantirishni ifodalaydi. (17) operator har bir f funksiyaga uning df to'la differensialini mos qo'yadi.

(17) operator orqali II tartibli d^2f differensialni hisoblashni ifodalaydigan (16) formulani quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$d^2 f = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 f\,. \qquad (18)$$

Umuman olganda, $z=f(x,y)$ funksiya n-tartibli uzluksiz hosilalarga ega bo'lsa, uning n-tartibli differensiali d^nf mavjud bo'lib, $d^nf=d(d^{n-1}f)$ rekurrent formula orqali aniqlanadi va

$$d^n f = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n f \qquad (19)$$

operator formula yordamida hisoblanadi. Nyuton binomi formulasidan (I bob,§3, (5) formula) foydalanib, (19) operatorli tenglikdan n-tartibli d^nf differensialni
$z=f(x,y)$ funksiyaning n-tartibli hosilalari orqali ifodalovchi ushbu formulaga ega bo'lamiz:

$$d^n f = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{\partial^n f}{\partial^k x \partial^{n-k} y}dx^k dy^{n-k}\,. \qquad (20)$$

Ikki o'zgaruvchili funksiyaning n-tartibli d^nf differensiali bir o'zgaruvchili funksiyaning n-tartibli differensialiga o'xshash vazifani bajaradi va ulardan funksiyalarning xususiyatlarini o'rganishda va turli masalalarni yechishda foydalaniladi.

27§ IKKI O'ZGARUVCHILI FUNKSIYANING LOKAL VA SHARTLI EKSTREMUMLARI.

REJA

- ***Ikki o'zgaruvchili funksiyaning lokal ekstremumlari.***
- ***Ikki o'zgaruvchili funksiyaning shartli ekstremumlari.***
- ***Ikki o'zgaruvchili funksiyaning global ekstremumlari.***
- ***Eng kichik kvadratlar usuli.***

Tayanch iboralar

* Lokal maksimum * Lokal minimum * Lokal ekstremum * Ferma teoremasi
* Kritik nuqta * Ekstremumning yetarli sharti * Ekstremumga tekshirish algoritmi
*Bog'lanish tenglamasi * Shartli lokal maxsimum * Shartli lokal minimum
* Shartli lokal ekstremum * Lagrang funksiyasi * Global maksimum * Global minimum * Global ekstremum * Kuzatuv natijalarini silliqlash * Empirik formulalar * Eng kichik kvadratlar usuli

3.1. Ikki o'zgaruvchili funksiyaning lokal ekstremumlari. Berilgan $z=f(x,y)$ funksiya tekislikdagi biror D sohada aniqlangan bo'lib, $M_0(x_0, y_0)$ bu sohaning ichki nuqtasi bo'lsin.

1-TA'RIF: Agar $M_0(x_0, y_0)$ nuqtaning biror $U_r(x_0, y_0)$ atrofiga tegishli ixtiyoriy $M(x,y)$ nuqta uchun

$$f(x_0, y_0) \geq f(x,y) \quad [f(x_0, y_0) \leq f(x,y)] \qquad (1)$$

tengsizlik bajarilsa, unda $z=f(x,y)$ funksiya $M_0(x_0, y_0)$ nuqtada ***lokal maksimumga*** **(*minimumga*)** ega deyiladi.

Masalan, $f(x,y)=4-x^2-y^2$ funksiya $M_0(0,0)$ nuqtada lokal maksimumga ega, chunki bu nuqtaning ixtiyoriy atrofidagi $M(x,y)$ nuqtalar uchun $f(x,y)\geq 4=f(0,0)$. Xuddi shunday $g(x,y)=4+x^2+y^2$ funksiya $M_0(0,0)$ nuqtada $g(0,0)=4$ lokal minimumga ega ekanligi ko‘rsatiladi.

1-ta’rifda $f(x_0, y_0)\geq f(x,y)$ $[f(x_0, y_0)\leq f(x,y)]$ tengsizlik faqat $M_0(x_0, y_0)$ nuqtaning biror kichik atrofida bajarilishi talab etiladi. Bu tengsizlik, biz yuqorida ko‘rgan misoldagi singari, $M_0(x_0, y_0)$ nuqtaning ixtiyoriy atrofida o‘rinli bo‘lishi shart emas. Shu sababli $f(x_0, y_0)$ lokal maksimum yoki minimum deb atalmoqda.

Agar (1) tengsizlikda $x=x_0+\Delta x$ va $y=y_0+\Delta y$ deb olsak, uni lokal maksimum holida

$$f(x_0,y_0)\geq f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)\Rightarrow f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\leq 0\Rightarrow \Delta f\leq 0,$$

lokal minimum holida esa $\Delta f\geq 0$ ko‘rinishda yozish mumkin. Shu sababli 1-ta’rifni funksiyaning to‘la orttirmasi orqali quyidagicha ifodalash mumkin.

2-TA’RIF: Agar $M_0(x_0, y_0)$ nuqtaning biror $U_r(x_0, y_0)$ atrofida $z=f(x,y)$ funksiyaning to‘la orttirmasi uchun $\Delta f(x_0, y_0)\leq 0$ $(\Delta f(x_0, y_0)\geq 0)$ tengsizlik bajarilsa, unda bu funksiya $M_0(x_0, y_0)$ nuqtada ***lokal maksimumga*** **(*minimumga*)** ega deyiladi.

3-TA’RIF: Funksiyaning lokal maksimum va minimumlari birgalikda ***funksiyaning lokal ekstremumlari*** deyiladi.

2-ta’rifga asosan funksiya $M_0(x_0, y_0)$ nuqtada lokal ekstremumga ega bo‘lishi uchun uning bu nuqtadagi $\Delta f(x_0, y_0)$ to‘la orttirmasi Δx va Δy argument orttimalarining turli kichik qiymatlarida o‘z ishorasini o‘zgartirmasligi lozim.

Yuqoridagi misolda ko‘rib o‘tilgan $f(x,y)=4-x^2-y^2$ va $g(x,y)=4+x^2+y^2$ funksiyalar uchun lokal ekstremumlar $f(x,y)$ va $g(x,y)$ ifodalari bo‘yicha bevosita topildi. Ammo murakkabroq ko‘rinishdagi funksiyalar uchun bunday qilib bo‘lmaydi. Shu sababli umumiy holda ikki o‘zgaruvchili funksiyaning lokal ekstrimumlarini topish masalasi paydo bo‘ladi. Bu masala bir o‘zgaruvchili funksiyalar uchun oldin (VI bob,§5) ko‘rilgan edi. Bu yerda $z=f(x,y)$ funksiyani ekstremumga tekshirish ham shunga o‘xshash amalga oshirilishini ko‘ramiz.

1-TEOREMA**(*Ferma teoremasi*):** Agar $z=f(x,y)$ funksiya $M_0(x_0,y_0)$ nuqtada lokal ekstremumga erishsa va bu nuqtada uning ikkala xususiy hosilalari mavjud bo‘lsa, unda ular nolga teng bo‘ladi, ya’ni

$$\begin{cases} f'_x(x_0,y_0)=0 \\ f'_y(x_0,y_0)=0 \end{cases} \tag{2}$$

tengliklar o‘rinli bo‘ladi.

Isbot: $z=f(x,y)$ funksiyada $y=y_0$ deb olamiz va bunda hosil bo‘ladigan bir o‘zgaruvchili $h(x)=f(x,y_0)$ funksiyani qaraymiz. Teorema shartiga ko‘ra bu funksiya $x=x_0$ nuqtada lokal ekstremumga ega va uning hosilasi $h'(x)=f'_x(x,y_0)$ mavjud. Unda, bir o‘zgaruvchili funksiyalar uchun oldin isbotlangan Ferma teoremasiga asosan (VII bob,§5), $h'(x_0)=f'_x(x_0,y_0)=0$ ekanligi kelib chiqadi. Xuddi shunday tarzda $f'_y(x_0,y_0)=0$ tenglik o‘rinli ekanligi ko‘rsatiladi va teoremaning isboti yakunlanadi.

Bu teorema ***ekstremumning zaruriy shartini*** ifodalaydi va undan ushbu natija kelib chiqadi.

NATIJA: Agar $z=f(x,y)$ funksiya $M_0(x_0,y_0)$ nuqtada lokal ekstremumga erishsa va differensiallanuvchi bo‘lsa, unda bu nuqtada uning differensiali $df(x_0,y_0)=0$ va gradienti $\text{grad}f(x_0,y_0)=0$ bo‘ladi.

Bu tasdiq bevosita (2) tengliklardan va differensial, gradient ta’riflaridan kelib chiqadi.

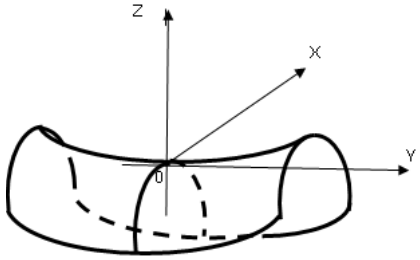
Masalan, yuqorida ko‘rilgan $f(x,y)=4-x^2-y^2$ funksiya uchun haqiqatan ham u lokal maksimumga erishadigan $M_0(0,0)$ nuqtada

$$f'_x(0,0)=2x\big|_{x=0}^{y=0}=0 \quad , \quad f'_y(0,0)=-2y\big|_{x=0}^{y=0}=0\Rightarrow df(0,0)=0\,,\ gradf(0,0)=0$$

tengliklar bajariladi.

(2) tengliklar lokal ekstremumning faqat zaruriy shartini ifodalab, lokal ekstremum bo‘lishi uchun yetarli emas.

Masalan, $f(x,y)=x^2-y^2$ differensiallanuvchi funksiya grafigi 88-rasmda ko‘rsatilgan sirtdan iborat.



Bu funksiya uchun O(0,0) nuqtada (2) tengliklar bajariladi, ammo bu nuqtada funksiya lokal ekstremumga ega emas. Haqiqatan ham bu holda to‘la orttirma

$$\Delta f = f(0+\Delta x, 0+\Delta y) - f(0,0) = f(\Delta x, \Delta y) = \Delta x^2 - \Delta y^2$$

ko‘rinishda bo‘lib, $\Delta x>\Delta y$ bo‘lganda musbat, $\Delta x<\Delta y$ holda esa manfiy qiymat qabul etadi. Demak, O(0,0) nuqtaning ixtiyoriy atrofida $\Delta f(0, 0)$ to‘la orttirma o‘z ishorasini o‘zgartiradi va shu sababli bu nuqtada lokal ekstremum mavjud emas.

Bu funksiyaning grafigi bo‘lmish sirt quyidagi chizmada ko‘rsatilgan va unda O(0,0) nuqta ***egar nuqta*** deb ataladi. Sirtlar uchun egar nuqta egri chiziqlar uchun burilish nuqtasiga o‘xshash xususiyatga ega bo‘ladi.

4-TA’RIF: Agar $z=f(x,y)$ funksiyaning xususiy hosilalari mavjud bo‘lsa, unda (2) tengliklarni qanoatlantiruvchi nuqtalar bu funksiyaning ***kritik yoki statsionar nuqtalari*** deb ataladi.

Ferma teoremasidan funksiya lokal ekstremumlariga kritik nuqtalarida erishishi mumkinligi kelib chiqadi. Shu sababli funksiyani ekstremumga tekshirish uchun birinchi navbatda uning kritik nuqtalarini topish kerak. Agar $z=f(x,y)$ funksiya uchun $M_0(x_0,y_0)$ kritik nuqta bo‘lsa, unda funksiya bu nuqtada yoki lokal maksimumga, yoki lokal minimumga ega yoki umuman lokal ekstremumga ega bo‘lmasligi mumkin. Shu sababli $M_0(x_0,y_0)$ kritik nuqta bu xususiyatlardan qaysi biriga ega ekanligini aniqlash masalasi paydo bo‘ladi. Bu masala ekstremumning yetarli shartini topish orqali hal etiladi. Buning uchun $z=f(x,y)$ funksiya $M_0(x_0,y_0)$ kritik nuqtaning biror atrofida aniqlangan, uzluksiz hamda uzluksiz I va II tartibli hosilalarga ega deb hisoblaymiz. Quyidagi belgilashlar kiritamiz:

$$A=f''_{xx}(x_0,y_0)\,,\; B=f''_{xy}(x_0,y_0)\,,\; C=f''_{yy}(x_0,y_0)\,,\; \Delta=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}=AC-B^2\,. \quad (3)$$

2-TEOREMA(Ekstremumning yetarli shartlari): Agar $z=f(x,y)$ funksiya uchun $M_0(x_0,y_0)$ kritik nuqta bo‘lsa, unda (3) belgilashlarda quyidagi tasdiqlar o‘rinli :

1. $\Delta>0$, $A>0$ holda funksiya $M_0(x_0,y_0)$ kritik nuqtada lokal minimumga ega;
2. $\Delta>0$, $A<0$ holda funksiya $M_0(x_0,y_0)$ kritik nuqtada lokal maksimumga ega;
3. $\Delta<0$ holda funksiya $M_0(x_0,y_0)$ kritik nuqtada lokal ekstremumga ega emas.

Bu teoremani isbotsiz qabul etamiz.

Izoh: Agar $\Delta=0$ bo‘lsa funksiyaning $M_0(x_0,y_0)$ kritik nuqtadagi xususiyatini bu teorema orqali aniqlab bo‘lmaydi. Bu holda javob funksiyaning $\Delta f(x_0,y_0)$ to‘la orttirmasining ishorasini tekshirish orqali topiladi.

Shunday qilib ikki o‘zgaruvchili $z=f(x,y)$ funksiyani ekstremumga tekshirish quyidagi algoritm asosida amalga oshiriladi:

- ✓ funksiyaning $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ xususiy hosilalari hisoblanadi;
- ✓ xususiy hosilalar nolga tenglashtirilib,

$$\begin{cases} f'_x(x,y)=0 \\ f'_y(x,y)=0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasi hosil etiladi;

- ✓ hosil etilgan tenglamalar sistemasi yechilib, funksiyaning kritik nuqtalari topiladi. Agar kritik nuqtalar mavjud bo‘lmasa, unda funksiya ekstremumga ega bo‘lmaydi;
- ✓ funksiyaning II tartibli hosilalari topiladi;
- ✓ kritik nuqtada (3) formulalar bo‘yicha A, B, C va Δ qiymatlari hisoblanadi;
- ✓ A, B, C va Δ qiymatlari bo‘yicha kritik nuqtada funksiyaning xususiyati 2-teorema yordamida aniqlanadi.

Misol sifatida, $f(x,y) = x^2+ xy+y^2 -3x- 6y$ funksiyani ekstremumga tekshiramiz. Bu holda

$$f'_x(x,y)=2x+y-3\,,\quad f'_y(x,y)=2y+x-6$$

bo‘lib, ulardan tuzilgan

$$\begin{cases} 2x+y-3=0 \\ x+2y-6=0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasidan $M_0(0,3)$ kritik nuqtani topamiz. Bu yerda

$$f''_{xx}(x,y)=2\,,\quad f''_{xy}(x,y)=1\,,\quad f''_{yy}(x,y)=2$$

bo‘lgani uchun A=2 , B=1 , C=2 va $\Delta=AC-B^2=3$ ekanligini ko‘ramiz.

Bunda $\Delta>0$, $A>0$ va shu sababli,ekstremumning yetarli shartiga asosan, bu funksiya $M_0(0,3)$ kritik nuqta lokal minimumga ega va $f_{min}=f(0,3)=3^2-18=-9$ bo‘ladi.

Ikki o‘zgaruvchili funksiya lokal ekstremumiga doir ushbu iqtisodiy mazmunli masalani qaraymiz.

Masala: Ishlab chiqarish funksiyasi pul birligida ifodalanib, $f(x,y)=30\sqrt[6]{x^3y^2}$ ko‘rinishga ega. Bunda x–I xomashyo , y–II xomashyo birliklari miqdorini ifodalaydi. I xomashyo bir birligining qiymati – 5, II xomashyoniki esa–10 pul birligiga teng. Bu xomashyolardan foydalanish natijasida erishiladigan foydaning maksimal qiymatini toping.

Yechish: Bizga ma’lumki, ishlab chiqarish funksiyasi $f(x,y)$ xomashyolardan foydalanish natijasida olingan daromadni ifodalaydi. Bunda, masala shartiga asosan, xomashyolar uchun qilingan xarajatlar $g(x,y)=5x+10y$ ikki o‘zgaruvchili funksiya orqali topiladi. Shu sababli xomashyolardan foydalanish natijasida olingan foyda ushbu

$$F(x,y)= f(x,y)- g(x,y)=30x^{1/2}y^{1/3}-5x-10y$$

ikki o‘zgaruvchili funksiya orqali aniqlanadi. Bu funksiyani yuqorida ko‘rsatilgan algoritm bo‘yicha ekstremumga tekshiramiz. Bu yerda xususiy hosilalar

$$F'_x(x,y)=15x^{-1/2}y^{1/3}-5\,,\quad F'_y(x,y)=10x^{1/2}y^{-2/3}-10\ .$$

Bu xususiy hosilalarni nolga tenglashtirib, ushbu tenglamalar sistemasiga kelamiz va uni yechamiz:

$$\begin{cases} 3x^{-1/2}y^{1/3}=1 \\ x^{1/2}y^{-2/3}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^{1/2}=3y^{1/3} \\ 3y^{1/3}y^{-2/3}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=9y^{2/3}=81 \\ y=27 \end{cases}.$$

Demak, $M_0(81,27)$ kritik nuqta bo‘ladi. Bu kritik nuqtani II tartibli hosilalar yordamida tekshiramiz:

$$F''_{xx}(x,y)=-\frac{15}{2}x^{-3/2}y^{1/3} \Rightarrow A=F''_{xx}(81,27)=-\frac{15}{2}\cdot\frac{1}{9^3}\cdot 3=-\frac{5}{162}\ ,$$

$$F''_{xy}(x,y)=F''_{yx}(x,y)=5x^{-1/2}y^{-2/3} \Rightarrow B=F''_{xy}(81,27)=5\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9}=\frac{5}{81}\ ,$$

$$F''_{xx}(x,y)=-\frac{20}{3}x^{1/2}y^{-5/3} \Rightarrow C=F''_{xx}(81,27)=-\frac{20}{3}\cdot 9\cdot\frac{1}{243}=-\frac{20}{81}\ ,$$

$$\Delta=AC-B^2=(-\frac{5}{162})(-\frac{20}{81})-(\frac{5}{81})^2=\frac{50-25}{81^2}=(\frac{5}{81})^2>0.$$

Bu kritik nuqtada $\Delta>0$, $A<0$ bo‘lgani uchun unda foydani ifodalovchi $F(x,y)$ funksiya maksimumga ega bo‘ladi maksimal foyda qiymati pul birligida

$$F(81,27)=30\cdot 9\cdot 3-5\cdot 81-10\cdot 27=135$$

bo‘ladi.

3.2. Ikki o‘zgaruvchili funksiyaning shartli ekstremumlari. Oldingi qismda $z=f(x,y)$ funksiyani ekstremumga tekshirishda uning x va y argumentlari butun $D\{f\}$ aniqlanish sohasida qaralgan edi. Ammo bir qator masalalarni yechishda x va y argumentlarni faqat ma’lum bir shartni qanoatlantiradigan qiymatlarida funksiya ekstremumini topishga to‘g‘ri keladi.

Masalan, perimetri $2p$ bo‘lgan barcha to‘g‘ri to‘rtburchaklar orasidan yuzi eng katta bo‘lganini topish masalasini qaraymiz. Agar to‘g‘ri to‘rtburchak tomonlarini x va y deb olsak, bu masala $S(x,y)=xy$ funksiyaning uning argumentlari $2(x+y)=2p$ yoki $x+y=p$ shartni qanoatlantirganda, ya’ni $y=–x+p$ tenglamali to‘g‘ri chiziqda yotganda, ekstremumini topish masalasiga keladi. Bu masala yechimini quyidagicha topamiz:

$$\begin{cases} S(x,y)=xy \\ y=p-x \end{cases} \Rightarrow S(x,y)=x(p-x)=px-x^2=g(x)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow g'(x)=p-2x=0\Rightarrow x_0=\frac{p}{2}\Rightarrow g(x_0)=p\cdot\frac{p}{2}-(\frac{p}{2})^2=\frac{p^2}{4}\ .$$

Shunday qilib, bu masalani yechish uchun x va y argumentlarga qo‘yilgan shartdan foydalanib, ikki o‘zgaruvchili $S(x,y)$ funksiyadan bir o‘zgaruvchili $g(x)$ funksiyaga o‘tdik va uni ekstremumga tekshirdik. Bu yerda $g''(x)=–2<0$ bo‘lgani uchun $g(x)$ funksiya topilgan $x_0=p/2$ kritik nuqtada maksimumga ega bo‘ladi. Demak, perimetri $2p$ bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchaklar orasida eng katta yuzaga tomonlari $x_0=p/2$ => $y_0=p–p/2=p/2$ bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchak, ya’ni kvadrat erishadi va bu yuza qiymati $S=p^2/4$ bo‘ladi.

Endi ko‘rib o‘tilgan bu masalani umumlashtiramiz. Bizga $z=f(x,y)$ ikki o‘zgaruvchili funksiya berilgan bo‘lib, uning x va y argumentlari $D\{f\}$ aniqlanish sohasida biror

$$\varphi(x,y)=0 \qquad (4)$$

tenglama bilan ifodalanadigan shartni qanoatlantirsin.

5-TA’RIF: $z=f(x,y)$ funksiyaning argumentlari qanoatlantiradigan (4) tenglama ***bog‘lanish tenglamasi*** deb ataladi.

6-TA’RIF: Koordinatalari (4) bog‘lanish tenglamasini qanoatlantiruvchi $M_0(x_0,y_0)$ nuqtaning biror atrofidagi koordinatalari (4) shartni qanoatlantiruvchi barcha $M(x,y)$ nuqtalar uchun $z=f(x,y)$ funksiya $f(x_0,y_0)\geq f(x,y)$ $[f(x_0,y_0)\leq f(x,y)]$ tengsizlikni qanoatlantirsa, unda bu funksiya $M_0(x_0,y_0)$ nuqtada ***shartli maksimumga (mimnimumga)*** ega deyiladi va ular birgalikda ***shartli ekstremumlar*** deb ataladi.

Umumiy holda ham funksiyaning shartli ekstremumini yuqorida ko‘rilgan xususiy masaladagi singari usulda quyidagicha topish mumkin:

1) dastlab (4) bog‘lanish tenglamasidan $y=\psi(x)$ funksiyani topamiz ;

2) so‘ngra ikki o‘zgaruvchili $z=f(x,y)$ funksiyadan, $y=\psi(x)$ ekanligini hisobga olib, bir o‘zgaruvchili $g(x)=f(x,\psi(x))$ funksiyaga o‘tamiz;

3) Hosil bo‘lgan $g(x)$ funksiyani bizga ma’lum usulda (VIII bob,§5) ekstremumga tekshiramiz.

Ammo bu usul har doim ham qulay emas, jumladan $y=\psi(x)$ funksiyani topish masalasi murakkab bo‘lishi mumkin. Shu sababli bu masalani Lagranj tomonidan taklif etilgan usulda yechamiz. Buning uchun berilgan $z=f(x,y)$ funksiya va (4) bog‘lanish tenglamasi bo‘yicha

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda\,\varphi(x,y) \qquad (5)$$

uch o‘zgaruvchili funksiyani hosil qilamiz. Bunda $L(x,y,\lambda)$–***Lagranj funksiyasi***, λ–***Lagranj ko‘paytuvchisi*** deb ataladi. Bu holda quyidagi teorema o‘rinli ekanligini isbotlash mumkin.

3-TEOREMA Agar $M_0(x_0,y_0)$ nuqtada $z=f(x,y)$ funksiya shartli ekstremumga ega bo‘lsa, unda shunday λ_0 soni topiladiki, $N(x_0,y_0,\lambda_0)$ nuqtada $L(x,y,\lambda)$ Lagranj funksiyasi ekstremumga (shartsiz) ega bo‘ladi.

Bu teoremadan ko‘rinadiki, $z=f(x,y)$ funksiyaning shartli ekstremumini topish masalasi $L(x,y,\lambda)$ Lagranj funksiyasini ekstremumga tekshirishga keltiriladi. Bu xulosadan, ekstremumning zaruriy (2) shartiga asosan, quyidagi tenglamalar sistemasiga ega bo‘lamiz:

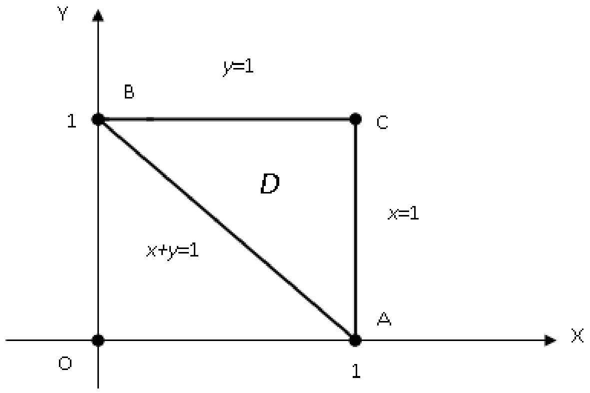
$$\begin{cases} L'_x = f'_x(x,y) - \lambda\varphi'_x(x,y) = 0 \\ L'_y = f'_y(x,y) - \lambda\varphi'_y(x,y) = 0 \\ \quad L'_\lambda = \varphi(x,y) = 0 \end{cases} \qquad (6)$$

Bu sistemani yechib, λ_0, x_0, y_0 ildizlarni topamiz. Unda $z=f(x,y)$ funksiyaning shartli ekstremumlari (6) sistema ildizlari orqali aniqlanadigan $M_0(x_0,y_0)$ nuqtalarda bo‘lishi mumkin.

Ikki o‘zgaruvchili funksiyaning global ekstremumlari. Berilgan $z=f(x,y)$ funksiya biror yopiq va chegaralangan D sohada aniqlangan va uzluksiz , bu sohaning ichki nuqtalarida chekli xususiy hosilalarga ega bo‘lsin. Unda bu funksiya, Veyershtrass teoremasiga asosan (§1, 4-teorema), D sohada o‘zining eng katta *maxf* (global maksimum) va eng kichik *minf* (global minimum) qiymatlariga erishadi. Bu qiymatlar, funksiyani lokal ekstremumga tekshirishdan foydalanilib, quyidagi tartibda topiladi:

- ❖ Funksiyaning $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ xususiy hosilalari hisoblanadi ;
- ❖ Xususiy hosilalar nolga tenglashtirilib, kritik nuqtalar topiladi ;
- ❖ Topilgan kritik nuqtalardan faqat D soha ichida yotuvchilari qaralib, ularda berilgan funksiyaning qiymatlari hisoblanadi ;
- ❖ D soha chegarasini ifodalovchi chiziqning $y=\varphi(x)$, $x\in[a,b]$, tenglamasidan foydalanilib, chegarada ikki o‘zgaruvchili $f(x,y)$ funksiyani $g(x)= f(x, \varphi(x))$ bir o‘zgaruvchili funksiyaga keltiriladi va uning $[a,b]$ kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatlarini topiladi (VIII bob,§5);
- ❖ Funksiyaning oldingi ikki qadamda hisoblangan barcha qiymatlarini taqqoslab, uning D sohadagi eng katta *maxf* va eng kichik *minf* qiymatlarini, ya’ni global ekstremumlarini topamiz.

Misol sifatida, $f(x,y)=x^2+2y^2-x-3y+5$ funksiyaning $x=1$, $y=1$ va $x+y=1$ to‘g‘ri chiziqlar bilan chegaralangan uchburchakdan iborat D sohadagi eng katta va eng kichik qiymatlarini topamiz (89-rasmga qarang) .



1) Berilgan funksiyaning kritik nuqtalarini topamiz:

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = 2x-1=0 \\ f'_y(x,y) = 4y-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 1/2 \\ y_0 = 3/4 \end{cases}.$$

Demak, funksiyaning bitta $M_0(1/2, 3/4)$ kritik nuqtasi mavjud. Bu kritik nuqta qaralayotgan D soha ichida joylashgan va shu sababli uni hisobga olib, bu nuqtada $f(1/2, 3/4)=29/8$ ekanligini aniqlaymiz.

2) Berilgan funksiyani AC chegarada qaraymiz. Unda $x=1$ bo‘lgani uchun funksiyamiz

$$f(1,y)=1^2+2y^2-1-3y+5=2y^2-3y+5\ ,\ 0\le y\le 1,$$

ko‘rinishga keladi, ya’ni bir o‘zgaruvchili funksiyaga aylanadi. Uning kritik nuqtasini topamiz:

$$f'(1,y)=4y-3=0 \Rightarrow y=3/4\ .$$

Bu kritik nuqta va [0,1] kesmaning chegaraviy nuqtalarida berilgan funksiya qiymatlarini hisoblab, $f(1,3/4)=31/8$, $f(1,0)=5$, $f(1,1)=4$ ekanligini topamiz;

3) Berilgan funksiyani BC chegarada qaraymiz. Unda $y=1$ bo‘lgani uchun funksiyamiz

$$f(x,1)=x^2-x+4\ ,\ 0\le x\le 1,$$

ko‘rinishga keladi. Bu yerda kritik nuqta $x=1/2$ bo‘lib, unda va [0,1] kesma chegaralarida $f(1/2,1)=15/4$, $f(0,1)= f(1,1)=4$ ekanligini topamiz;

4) Berilgan funksiyani AB chegarada qaraymiz. Unda y=1–x bo‘lgani uchun funksiyamiz

$$f(x,1–x)=3x^2–2x+4\ ,\ 0\le x\le 1,$$

ko‘rinishga keladi. Bunda kritik nuqta x=1/3 va unda f(1/3,2/3)=11/3 bo‘ladi. Chegaraviy nuqtalarda f(0,1)=4, f(1,0)=5 ekanligi oldin ko‘rilgan edi.

Shunday qilib, berilgan funksiyaning hisoblangan

$$f(1/2,\ 3/4)=29/8,\ f(1,\ 3/4)=31/8,\ f(1,0)=5,\ f(1,\ 1)=4,$$
$$f(1/2,\ 1)=15/4,\ f(0,1)=4,\ f(1/3,\ 2/3)=11/3$$

qiymatlarini taqqoslab, uning global minimumi $minf=f$(1/2,3/4)=29/8 va global maksimumi $maxf=f$(1,0)=5 ekanligini ko‘ramiz.

37 – M A ' R U Z A

KOMPLEKS SONLARNING MODULI VA ARGUMENTI. KOMPLEKS SONLAR USTIDA AMALLAR. KOMPLES SONNING TRIGONOMETRIK VA KO’RSATGICHLI SHAKLI. MUAVR FORMULASI. KOMPLES SONDAN ILDIZ CHIQARISH.

Ma'ruza rejasi:

1. Kompleks sonning algebraik ko’rinishi.
2. Algebraik ko’rinishda berilgan kompleks sonlar ustida amallar.
3. Kompleks sonlarning trigonometrik shakli.
4. Trigonometrik ko’rinishda berilgan kompleks sonlar ustida amallar.

Adabiyotlar:

1. Yo.U. Soatov. “Oliy matematika”, I qism. Toshkent. “O’qituvchi” nashriyoti , 1992 y. V bob, § 7,8,9 ; 256-264 betlar.

1. Kompleks sonning algebraik ko’rinishi.

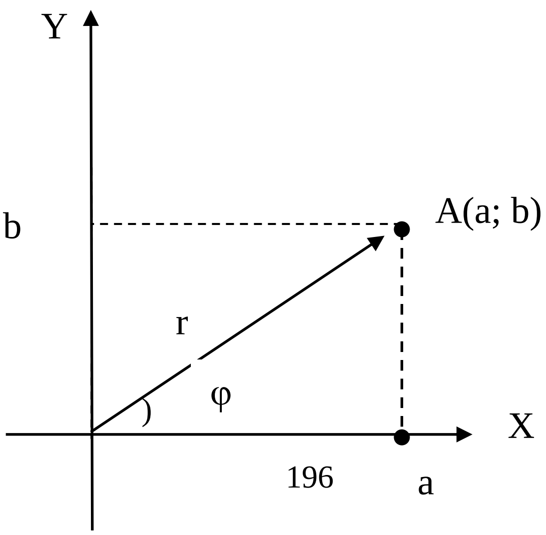
Kompleks son deb z=a+ib ifodaga aytiladi. Bu yerda a va b haqiqiy sonlar bo’lib, i - ***mavhum birlik*** deyiladi va quyidagicha aniqlanadi:

$$i=\sqrt{-1},\quad i^2=-1.$$

z=a+ib kompleks sonning ***algebraik ko’rinishi*** deb ataladi. Bunda a -z kompleks sonning ***haqiqiy qismi*** , b - ***mavhum qismi*** deyiladi va a=Rez, b=Imz kabi belgilanadi.

Agar a=0 bo’lsa 0+ib=ib ***sof mavhum son*** deyiladi. Agar b=0 bo’lsa a+i·0=a haqiqiy son hosil bo’ladi, ya’ni haqiqiy sonlar kompleks sonlarning xususiy holi bo’ladi.

Har qanday kompleks sonni z=a+ib OXY tekisligida koordinatalari a va b



1-rasm

bo'lgan A(a,b) nuqta shaklida tasvirlash mumkin. Aksincha, OXY tekislikdagi har qanday A(a,b) nuqta z=a+ib kompleks songa mos keladi (1-rasm). Faqat mavhum qismining ishorasi bilan farq qiladigan ikki kompleks son Z=a+ib va $\overline{Z}$ =a-ib bir-biriga ***qo'shma kompleks sonlar*** deyiladi.

Quyidagi ikkita qoidani aytib o'tamiz:

a) Agar $z_1 = a_1 + i\, b_1$ va $z_2 = a_2 + i\, b_2$ ikki kompleks son uchun $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$ bo'lsa, bu kompleks sonlar ***teng*** deyiladi.

b) Agar a=0, b=0 bo'lsa va faqat shundagina kompleks son z nolga teng bo'ladi.

Kompleks son tasvirlanadigan tekislik o'zgaruvchi Z ning kompleks tekisligi deyiladi

OA=r kesma kompleks sonning ***moduli*** deb aytiladi, va quyidagicha hisoblanadi:

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

2.Algebraik ko'rinishda berilgan kompleks sonlar ustida amallar.

1)Kompleks sonlarni qo'shish va ayirish.

Ikki $Z_1=a_1+ib_1$ va $Z_2=a_2+ib_2$ kompleks sonning ***yig'indisi va ayirmasi*** deb, ushbu

$$Z_1 \pm Z_2 = (a_1 + ib_1) \pm (a_2 + ib_2) = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)i$$

tenglik bilan aniqlangan kompleks songa aytiladi.

M i s o l:

Z_1=4-2i, Z_2=6+3i uchun Z_1+Z_2=4-2i+6+3i=10+i, Z_1-Z_2=(4-2i)-(6+3i)=-2-5i

2)Kompleks sonlarni ko'paytirish.

k son butun bo'lganda

$$i^{4k} = 1,\ i^{4k+1} = i,\ i^{4k-2} = -1,\ i^{4k+3} = -i,$$

tengliklar to'g'ri ekanligini tekshirish qiyin emas.

$Z_1=a_1+ ib_1$ va $Z_2=a_2 + ib_2$ kompleks sonlar ko'paytmasi deb, ularni ikki hadlar singari algebra qoidasiga muvofik ko'paytirilganda hosil bo'lgan kompleks songa aytiladi:

$$Z_1 \cdot Z_2 = (a_1 + ib_1)(a_1 + ib_1) = a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(b_1 a_2 + a_1 b_2)$$

M i s o l:

$Z_1 = 4 - 2i$, $Z_2 = 6 + 3i \Rightarrow Z_1 \cdot Z_2 = (4 - 2i)(6 + 3i) = 24 + 12i - 12i - 6i^2 = 30$

3)Kompleks sonlarni bo'lish.

Kompleks sonlarni bo'lish ko'paytirishga teskari amal kabi ta'riflanadi;

$$Z_1 = a_1 + ib_1, Z_2 = a_2 + ib_2, |Z_2| = \sqrt{a_2^2 + b_2^2} \neq 0$$

deb faraz qilamiz.U holda $\frac{Z_1}{Z_2} = Z$ shunday kompleks sonki, unda $Z_1 = Z_2 \cdot Z$ bo'ladi.

Agar $\frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = x + iy$ bo'lsa, u holda
$$a_1 + ib_1 = (a_2 + ib_2)(x + iy),$$
$$a_1 + ib_1 = (a_2 x - b_2 y) + i(a_2 y + b_2 x)$$

x va u ushbu

$$a_1 = a_2 x - b_2 y,\ b_1 = b_2 x + a_2 y$$

tenglamalar sistemasidan aniqlanadi:

$$x = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}, \; y = \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

Nihoyatda, quyidagi natijani olamiz:

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

3.Kompleks sonlarning trigonometrik shakli.

Koordinatalar boshini kutb, OX o'qining musbat yo'nalishini kutb o'qi deb olib, A(a;b) nuqtasining kutb koordinatalarini φ va r (r≥0) bilan belgilaymiz. Unda ushbu tengliklarni yozish mumkin (18-rasm):

a = r cos φ , b = r sin φ,

demak kompleks sonni quyidagicha tasvirlash mumkin:

a + ib = r cos φ + ir sinφ

yoki

Z = r (cos φ + i sin φ)

Bu kompleks sonning ***trigonometrik shakl*** deb aytiladi. r- kompleks son Z ning moduli va φ kompleks Z sonning argumenti deb aytiladi:

r = | Z | , φ = arg Z

r va φ miqdorlar a va v orqali bunday ifodalanadi:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}; \varphi = arctg\frac{b}{a}$$

Kompleks sonning argumenti φ burchak OX o'qining musbat yo'nalishidan soat strelkasi harakatiga teskari yo'nalishda hisoblansa, musbat, qarama-qarshi yo'nalishda hisoblansa, manfiy bo'ladi. Ravshanki, argument bir qiymatli bo'lmaydi, balki $2k\pi$ qo'shiluvchigacha (k butun) aniqlikda belgilanadi.

a) Trigonometrik shaklda berilgan kompleks sonlarni ko'paytirish.

$Z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), Z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$

Kompleks sonlar berilgan bo'lsin.

Bu sonlar ko'paytmasini topamiz:

$Z_1 Z_2=r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)\cdot r_2(\cos \varphi_2+i \sin \varphi_2)=$

$=r_1r_2[\cos\varphi_1 \cos\varphi_2+i\sin\varphi_1 \cos\varphi_2+ + i\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 + i^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2] =$

$= r_1r_2 [(\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 -\sin\varphi_1\sin\varphi_2)+i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2+ +i^2\cos\varphi_1\sin\varphi_2]=$

$=r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]$

Shunday qilib, $Z_1Z_2 = r_1r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$

M i s o l :

$$Z_1 = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}),$$

$$Z_2 = 4(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$$

bo'lsin, unda

$$Z_1Z_2 = 2 \cdot 4[\cos(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2})] =$$

$$8(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6})$$

bo'ladi.

b) Trigonometrik shaklda berilgan kompleks sonlarni bo'lish.

Ketma-ket quyidagi tengliklarni ko'ramiz:

$$\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_{21})}=\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_{21})}\frac{(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_{21})}{(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}=$$

$$=\frac{r_1}{r_2}\frac{[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i(\sin\varphi_1-\varphi_2)]}{1}$$

Demak,

$$\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)] \qquad (62)$$

tenglik hosil bo'ladi.

M i s o l: $Z_1=2(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}), Z_2=4(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}),$

$$\frac{Z_1}{Z_2}=?$$

Echimi: (62) – formuladan foydalanamiz:

$$\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{2(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})}{4(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})}=\frac{1}{2}[\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3})+i\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3})]=$$

$$=\frac{1}{2}[\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}]$$

4.Kompleks sonning ko'rsatgichli shakli.

Kompleks sonni trigonometrik shaklda tasvirlaymiz:

$$Z = (\cos\varphi + i\sin\varphi)\, r$$

Eyler formulasiga ko'ra: $e^{i\varphi}=\cos\varphi + i\sin\varphi$

Demak, har qanday kompleks sonni ushbu ko'rsatgichli shaklda tasvirlash mumkin:

$$Z = r\cdot e^{i\varphi}$$

M i s o l :

$$Z=5(\cos\frac{\pi}{7}+\sin\frac{\pi}{7})$$

Bu kompleks son quyidagi ko'rsatgichli shaklda yozilishi mumkin.

$$Z=5e^{\frac{\pi}{7}i}$$

1) $Z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ va $Z_2 = r_2\ e^{i\varphi_2}$ kompleks sonlarning ko'paytmasi va bo'linmasini aniqlaymiz:

$$Z_1 Z_2 = r_1\ e^{i\varphi_1}\ r_2\ e^{i\varphi_2} = r_1 r_2\ e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$$

M i s o l: $Z=2e^{i\frac{\pi}{2}}, Z_2=4e^{i\frac{\pi}{4}}$

Bu sonlarning ko'paytmasini va bo'linmasini topamiz:

$$Z_1Z_2=2e^{i\frac{\pi}{2}}4e^{i\frac{\pi}{4}}=8e^{i(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4})}=8e^{i\frac{3\pi}{4})}$$

$$\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{2e^{i\frac{\pi}{2}}}{4e^{i\frac{\pi}{4}}}=\frac{1}{2}e^{i(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})}=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$$

2) Kompleks sonni n – darajaga ko'tarish amalini qaraymiz:

$$Z=re^{i\varphi}, Z^2=re^{i\varphi}re^{i\varphi}=r^2e^{2i\varphi}$$

Shu kabi $\quad Z^n=r^ne^{in\varphi}, n=1,2,...$

Oxirgi formula ***Muavr formulasi*** deb ham ishlatiladi.

M i s o l : $Z = 2e^{i\frac{\pi}{60}}$ kompleks son berilgan bo'lsin. Bu holda Muavr formulasiga asosan n=6 bo'lganda

$$Z^6 = 2^6 e^{\frac{i6\pi}{60}} = 64e^{\frac{i\pi}{10}}$$

bo'ladi.

3) Kompleks sondan n – darajali ildiz chiqarish.

$Z = re^{i\varphi}$ berilgan bo'lsin. Bu kompleks sondan n – tartibli ildiz olamiz (k=1,2,…):

$$\sqrt[n]{Z} = \sqrt[n]{re^{i\varphi}} = (re^{i\varphi})^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}$$

Demak $$\sqrt[n]{Z} = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}, (k = 1,2,...) \qquad (1)$$

Eyler formulasidan foydalanib (1) formulani trigonometrik ko'rinishda yozish mumkin:

$$\sqrt[n]{Z} = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}), \quad (k = 1,2,...) \qquad (2)$$

5. Ikki hadli tenglamalarni echish.

$z^n = A$ shakldagi tenglama ***ikki hadli tenglama*** deyiladi. Bu tenglamaning ildizlarini topamiz.

1) A haqiqiy musbat son bo'lsin.

$$z = \sqrt[n]{A}(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}), \quad (k = 0,1,2,..., n-1)$$

Qavs ichidagi ifoda 1 sonning n – darajali ildizining hamma qiymatlarini beradi.

2) A haqiqiy manfiy son bo'lsa,

$$z = \sqrt[n]{|A|}(\cos\frac{\pi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{n}), (k = 0,1,2,...n-1)$$

Kavs ichidagi ifoda – 1 sonning n – darajali ildizining hamma qiymatlarini beradi.

3) A son komplleks son bo'lsa, z ning qiymatlari (2) formula orqali hisoblanadi.

M i s o l : $z^4=1$ tenglamani eching.

$$z = \sqrt[4]{\cos 2\pi k + i\sin 2\pi k} = \cos\frac{2\pi k}{4} + i\sin\frac{2\pi k}{4}$$

K ga 0,1,2,3, qiymatlar berib ildizlarni aniqlaymiz:

$$z_1 = \cos 0 + i\sin 0 = 1$$

$$z_2 = \cos\frac{2\pi}{4} + i\sin\frac{2\pi}{4} = 1$$

$$z_3 = \cos\frac{4\pi}{4} + i\sin\frac{4\pi}{4} = -1$$

$$z_4 = \cos\frac{6\pi}{4} + i\sin\frac{6\pi}{4} = -i$$

M i s o l: $z^3 + Z = 0$ tenglamani eching, bu erda

$$Z = 2(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$$

Echimi:

$$z = \sqrt[3]{-Z} = \sqrt[3]{2(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4})} = \sqrt[3]{2}(\cos\frac{225^0 + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{225^0 + 2k\pi}{3}$$

k o'rniga 0,1,2,larni qo'yib, barcha ildizlarni topamiz

$$z_1 = \sqrt[3]{2}(\cos 75^0 + i\sin 75^0)$$
$$z_2 = \sqrt[3]{2}(\cos 195^0 + i\sin 195^0)$$
$$z_3 = \sqrt[3]{2}(\cos 315^0 + i\sin 315^0)$$

Takrorlash uchun savollar:

1. Muavr formulasini yozing.
2. Kompleks sondan ildiz chiqarish tartibi qanday?
3. Ikki hadli tenglama deb qanday tenglamalarga aytiladi va ular qanday echiladi.

Tayanch iboralar: Kompleks sonni ko'rsatgichli ko'rinishi, Muavr formulasi, ikki hadli tenglamalar.

38 - M A ' R U Z A

KOMPLEKS O'ZGARUVCHILI FUNKTSIYALAR, ULARNING ANIQLANISH SOHASI. KOMPLEKS O'ZGARUVCHILI FUNKSIYANING LIMITI VA UZLUKSIZLIGI. KOMPLES O'ZGARUVCHILI FUNKSIYALARNI DIFFERENSIALLASH KOSHI RIMAN SHARTI. KOMPLEKS O'ZGARUVCHILI FUNKSIYANING INTEGRALI VA UNI HISOBLASH.

Ma'ruza rejasi:

1. Kompleks o'zgaruvchili funktsiya ta'rifi.
2. Kompleks o'zgaruvchili funktsiyaning nuqtadagi limiti.
3. Uzluksiz kompleks o'zgaruvchili funktsiya.
4. Analitik funktsiya ta'rifi
5. Koshi – Riman shartlari.

Adabiyotlar:

1. Sh.Maksudov, M. Saloxiddinov, S.Sirojiddinov. Kompleks o'zgaruvchining funktsiyalari nazariyasi. Toshkent, «O'qituvchi», 1970yil.
II bob, §1-5, 36-53 betlar.

E-kompleks sonlar to'plami bo'lsin. z = $x + i\,y$ kompleks son shu to'plam ixtiyoriy elementi bo'lishi mumkin. U holda z = $x + i\,y$ ga kompleks o'zgaruvchi deyilib, E ga uning o'zgarish soxasi deyiladi.

T A ' R I F: Erkli kompleks o'zgaruvchi z = $x + i\,y$ ning funktsiyasi deb shunday ω ga aytiladiki, agar E to'plamning har bir z elementiga aniq bir $\omega = u + vi$ komleks son mos qo'yilgan bo'lsa.

Kompleks o'zgaruvchili funktsiya ω=f(z) ko'rinishida belgilanadi. E to'plamning har bir nuqtasiga aniq bir ω kompleks son mos keladi. Ana shu mos kompleks sonlarni E' to'plam bilan belgilaymiz.

Demak, ω ning berilishi E va E' kompleks sonlar to'plamlari orasida moslik o'rnatishdegan so'zdir yoki E to'plam elementlarining E' to'plam elementlariga akslantirilishi ham deyiladi. Agar z ning har xil qiymatlariga, ω ning har xil qiymatlari mos keltirilsa, u holda akslantirish bir qiymatli bo'ladi va ω = f (z) funktsiya ham bir qiymatli bo'ladi.

T A ' R I F: A o'zgarmas soniga f(z) funktsiyaning $z \to z_0$ dagi limiti deyiladi, agar etarlicha kichik musbat son ε uchun, shunday $\delta = \delta(\varepsilon)$ topish mumkin bo'lsaki, $|z - z_0| < \delta$ shart bajarilganda $|f(z) - A| < \varepsilon$ shart bajarilsa.

f(z) funktsiyaning $z \to z_0$ dagi limitini $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$ bilan belgilanadi.

T A ' R I F : Agar $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta = \delta(\varepsilon)$ topish mumkin bo'lsaki, $|z - z_0| < \delta$ shart bajarilganda $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ shart bajarilsa, f(z) funktsiyaga z = z_0 nuqtada uzluksiz deyiladi.

Uzluksiz funktsiya uchun $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$ bo'ladi.

T A ' R I F: ω = f (z) funktsiya z $\in G$ nuqtada differentsiallanuvchi deyiladi, agar

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

nisbat $\Delta z \to 0$ da chekli aniq limitga ega bo'lsa. Bu limitni biz funktsiya hosilasi deb ataymiz va uni $f'(z)$ bilan belgilaymiz.

Hosila ta'rifini quyidagicha yozish mumkin:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z).$$

T A ' R I F : Agar G soxaning har bir nuqtasida bir qiymatli f(z) funktsiya hosilaga ega bo'lsa, u G sohada ***analitik funktsiya*** deyiladi.

M i s o l: f(z) =zRe(z) funktsiya z=0 nuqtada hosilaga ega va bu hosila nolga teng, chunki

$$\frac{\Delta \omega}{\Delta z} = \frac{\Delta z \operatorname{Re}(\Delta z)}{\Delta z} = \operatorname{Re}(\Delta z)$$

nisbat $\Delta z \to 0$ bo'lganda 0 ga intiladi. Bu funktsiya z =0 da differentsiallanuvchi, lekin analitik emas. Chunki

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{(z + \Delta z)\operatorname{Re}(z + \Delta z) - z\operatorname{Re}(z)}{\Delta z} =$$

$$= z \cdot \frac{\operatorname{Re}(z + \Delta z) - \operatorname{Re}(z)}{\Delta z} + \operatorname{Re}(z + \Delta z),$$

ifoda $z \neq 0$ va $\Delta z \to 0$ da aniq bir limitga intilmaydi. Haqiqatan ham agar $\Delta z = \Delta z_1 + \Delta z_2 i$ deb olsak, u holda $\dfrac{\operatorname{Re}(z + \Delta z) - \operatorname{Re}(z)}{\Delta z} = \dfrac{\Delta z_1}{\Delta z_1 + \Delta z_2 i}$ nisbat $\Delta z_2 = 0$, $\Delta z_1 \to 0$ da aniq bir limitga, ya'ni 1 ga intiladi. Xuddi shu nisbat $\Delta z_1 = 0$, $\Delta z_2 \to 0$ da 0 ga intiladi. Bu esa limit mavjud emasligini bildiradi.

Bu misolimizdan shu narsani aytish mumkinki, butun tekislikda uzluksiz funktsiya, z = 0 nuqtadan boshqa hamma nuqtalarda differentsiallanuvchi emas bo'lishi mumkin ekan.

Faraz qilaylik, z = *x* + *iu* kompleks o'zgaruvchining bir qiymatli funktsiyasi *w*= f(z) = *u* + *iv* qandaydir G sohada aniqlangan bo'lsin. Agar *u* va *v* funktsiyalar berilgan bo'lsa , f(z) funktsiya aniq bo'ladi. Agar *u*(*x,y*), *v*(*x,y*) funktsiyalar bir-biriga bog'liq bo'lmagan holda berilgan va ularning *x* va *y* bo'yicha hususiy hosilalari mavjud bo'lsa ham f(z) funktsiya differentsiallanuvchi bo'lmasligi mumkin.

Masalan, $w = \bar{z} = x - iy$ funktsiya uzluksiz, lekin hech qaerda differentsiallanuvchi emasligini ko'rsatish mumkin. Bu yerda *u*(*x,y*) = *x* va *v*(*x,y*)=- *y* funktsiyalarning har biri *x* va *y* bo'yicha hususiy hosilalarga ega . Aytaylik, f(z) funktsiya qandaydir z nuqtada aniq bir chekli hosilaga ega bo'lsin:

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta u+i\Delta v}{\Delta x+i\Delta y}=f'(z).$$

$\Delta z=\Delta x+i\Delta y$ ifoda ixtiyoriy qonun bo'yicha nolga intilishi mumkinligi uchun $\Delta y=0$, $\Delta x\to 0$ deb olish ham mumkin.

U holda

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta u+i\Delta v}{\Delta x+i\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u+i\Delta v}{\Delta x}=f'(z) \quad \text{yoki} \quad \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}+i\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=f'(z)$$

Oxirgi ifodani

$$\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=f'(z) \quad (1)$$

deb yozish mumkin.

Xuddi shunday tartibda $\Delta x=0$, $\Delta y\to 0$ bo'lgan holni ko'rib chiqamiz:

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta u+i\Delta v}{\Delta x+i\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta u+i\Delta v}{i\Delta y}=-i\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta y}+\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta y}=f'(z)$$

$$\text{yoki} \qquad -i\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}=f'(z). \qquad (2)$$

(1) va (2) ifodalarning ung taraflari teng bo'lgani uchun chap taraflari ham teng bo'lishi kerak, ya'ni

$$\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=-i\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}$$

Oxirgi ifodaning haqiqiy va mavhum qismlarini tenglashtiramiz:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y} \qquad (3)$$

Demak *w*=u+*i*v funktsiya z nuqtada differentsiallanuvchi bo'lsa, u holda bu nuqtada u va v funktsiyalarning hususiy hosilalari mavjud bo'ladi va ular uchun (3) shartlar bajariladi. Bu shartlar ***Koshi-Riman shartlari*** deyiladi. Aksincha, w=u(*x*;*y*)+*i*v(*x*;*y*) funktsiya uchun (3) shartlar bajarilsa, unda f(z) funktsiya differentsiallanuvchi bular ekan va uning hosilasini (1) yoki (2) formula bilan topish mumkin.

M i s o l №1. $w=\bar{z}=x-iy, \quad u(x;y)=x, \quad v(x;y)=-y:$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=(x)'_x=1, \qquad \frac{\partial v}{\partial y}=(-y)'_y=-1: \qquad \frac{\partial u}{\partial x}\neq\frac{\partial v}{\partial y}$$

Demak (3) shart bajarilmadi va shu sabablii *w*=x-iy funktsiya hech qaerda differentsiallanuvchi emas.

Misol №2.

$$w=z^2=(x+iy)^2=x^2-y^2+2xyi: \quad u(x;y)=x^2-y^2, \quad v(x;y)=2xy:$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x}=(x^2-y^2)'_x=2x, \quad \frac{\partial v}{\partial y}=(2xy)'_y=2x\right]\Rightarrow 2x=2x\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\left[\frac{\partial v}{\partial x}=(2xy)'_x=2y, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=(x^2-y^2)'_y=-2y\right]\Rightarrow 2y=-(-2y)\Rightarrow\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Bu erdan ko'rinadiki, (3) shartlar bajarilmoqda. Demak, $w = z^2$ funktsiya hamma nuqtalarda differentsiallanuvchi. Uning hosilasi (1) yoki (2) formulaga asosan

$$w' = (z^2)' = 2x - i(-2y) = 2(x + iy) = 2z$$

kabi hisoblanadi.

T A ' R I F : Berilgan z=z(t) funktsiya grafigiga ***silliq chiziq*** deyiladi, agar $z'(t)$ hosila mavjud, noldan farqli va o'zaro bir qiymatli bo'lsa.

Aytaylik w=f(z) funktsiya qandaydir kompleks o'zgaruvchili G sohada uzluksiz ixtiyoriy funktsiya bo'lsin. S esa shu sohada butunlay yotuvchi silliq chiziq bo'lsin va uning boshlang'ch nuqtasi z_0 , oxirgi nuqtasi esa z bo'lsin. z_0z chiziqni n ta hususiy bo'laklarga z_0 , z_1 ,z_2 , …, z_n , z lar orqali ajratamiz va har bir bo'lakda funktsiyaning $f(z_k)$ (k=0, … , n-1) qiymatlarini hisoblaymiz. $\Delta z_k = z_{k+1} - z_k$ orqali bo'lakchalar uzunligini belgilab, ushbu yig'ndini tuzamiz:

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(z_k)\Delta z_k \qquad (1)$$

Har bir hususiy bo'lakchalar uzunligini nolga intiltiramiz va bu holda (1) yig'ndining limitini qaraymiz. Agar

$z_k = x_k + iy_k$, $f(z_k) = u(x_k, y_k) + iv(x_k, y_k) = u_k + iv_k$, $\Delta z_k = \Delta x_k + i\Delta y_k$

deb belgilab olsak

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(z_k)\Delta z_k = \sum_{k=0}^{n-1}(u_k + iv_k)(\Delta x_k + i\Delta y_k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}(u_k\Delta x_k - v_k\Delta y_k) + +i\sum_{k=0}^{n-1}(v_k\Delta x_k + u_k\Delta y_k) \qquad (2)$$

bo'ladi. Agar bu ifodada $\Delta x \to 0, \ \Delta y \to 0$ bo'lsa, (2) ifodadagi yig'ndilar

$\int\limits_c udx - vdy$ ва $i\int\limits_c vdx + udy$ egri chiziqli integrallarga intiladi.

(1) yig'ndining $\Delta x \to 0$ ва $\Delta y \to 0$ dagi limiti mavjud bo'lsa, uni berilgan funktsiyaning S chiziq bo'yicha integrali deb ataymiz va $\int\limits_C f(z)dz$ kabi belgilaymiz. U holda

$$\int\limits_C f(z)dz = \int\limits_C udx - vdy + i\int\limits_C vdx + udy \qquad (3)$$

Oxirgi ifoda kompleks o'zgaruvchili f(z) funktsiyadan olingan integralning ikkita egri chiziqli integral orqali ifodalanishini ko'rsatadi.

(3) ni eslab kolish oson bo'lishi uchun

$$\int\limits_C f(z)dz = \int\limits_C (u + vi)(dx + idy)$$

ko'rinishda ham yozish mumkin. Agar z=z(t) t∈[α;β] bo'lsa , u holda

$$\int\limits_C f(z)dz = \int\limits_\alpha^\beta \{u[z(t)]x'(t) - v[z(t)]y'(t)\}dt + i\int\limits_\alpha^\beta \{v[z(t)]z'(t) + u[z(t)]z'(t)\}dt =$$

$$= \int\limits_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)dt \qquad (4)$$

yoki

$$\int\limits_C f(z)dz = \int\limits_\alpha^\beta R(t)dt + i\int\limits_\alpha^\beta I(t)dt$$

bu erda R(t) va I(t) funktsiyalar $f|z(t)|z'(t)$ funktsiyaning haqiqiy va mavhum qismlarini ifodalaydi.

Misol. $\int\limits_{\Gamma} z^n dz,$ *G*={ z_0 va z ni tutashtiruvchi silliq chiziq}, integralni hisoblang.

$\int\limits_{\Gamma} z^n dz = \frac{1}{n+1}(z^{n+1} - z_0^{n+1}) \quad n \neq -1$ butun son.

Endi z=z(t) bo'lib α≤ t ≤β bo'lsin, u holda

$$\int\limits_{\Gamma} z^n dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} z^n z'(t)dt = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{n+1}\frac{t}{dt}[z(t)]^{n+1} dt = \frac{1}{n+1}(z^{n+1} - z_0^{n+1})$$

agar z_0=z bo'lsa $\int\limits_{\Gamma} z^n dz = 0$ bo'ladi.

Kompleks o'zgaruvchili funktsiya integrallarining xossalari.

1 xossa: $\int\limits_{\Gamma^-} f(z)dz = -\int\limits_{\Gamma^+} f(z)dz$

2 xossa: $\int\limits_{\Gamma} af(z)dz = a\int\limits_{\Gamma} f(z)dz \qquad a = const.$

3 xossa: $\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = \int\limits_{\Gamma_1} f(z)dz + \int\limits_{\Gamma_2} f(z)dz + ... + \int\limits_{\Gamma_n} f(z)dz$.

Bu erda *G*=G_1+ G_2+ G_3+…+ G_n;

4 xossa:

$$\int\limits_{\Gamma}[f_1(z) + f_2(z) + f_3(z) + ... + f_n(z)]dz = \int\limits_{\Gamma} f_1(z)dz + \int\limits_{\Gamma} f_2(z)dz + ... + \int\limits_{\Gamma} f_n(z)dz.$$

5 xossa: Agar *G* silliq chiziqda $|f(z)| \leq M$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda $\left|\int\limits_{\Gamma} f(z)dz\right| \leq Ml$ bo'ladi. $l - G$ silliq chiziq uzunligi.

Bu xossalarning isbotlari bevosita integral ta'rifidan kelib chiqadi.

KOShI FORMULASI. KOShI INTEGRALI.

Kompleks o'zgaruvchili funktsiyadan olingan $\int\limits_{C} f(z)dz$ integral nafaqat f(z) funktsiyaga, balki integrallash yo'li S ga ham bog'liqligini ko'rib o'tdik. Unda z_0 va z_1 nuqtalarga G_1 va G_2 yo'llar bilan keladigan bo'lsak, $\int\limits_{\Gamma_1} f(z)dz$ va $\int\limits_{\Gamma_2} f(z)dz$ larning qiymati ham har xil bular edi. Shunday bir kizik savol tugiladi. f(z) funktsiya qanday bo'lganda $\int\limits_{\Gamma} f(z)dz$ funktsiyaning qiymati *G* integrallash yo'liga bog'liq bulmay, faqat uning boshlang'ch z_0 va oxirgi z_1 nuqtalariga bog'liq bo'ladi?

Bu savolga javob berish uchun haqiqiy o'zgaruvchili funktsiyalar uchun egri chiziqli integralning integrallash yo'liga bog'liq bo'lmaslik sharti – «berilgan integralning ixtiyoriy yopiq kontur bo'yicha qiymati nolga teng bo'lishi kerak» ekanligini eslash kifoya.

Biz bilamizki kompleks o'zgaruvchili funktsiyadan olingan integral ikkita haqiqiy o'zgaruvchili funktsiyalardan olingan egri chiziqli integral bilan ifodalanadi.

Bir bog'lamli G soxaning har bir nuqtasida uzluksiz hosilaga ega bo'lgan f(z)=$u(x;y)+iv(x;y)$ funktsiya shu sohada analitik bo'ladi. Demak, $i(x;u)$ va $v(x;u)$ funktsiyalar o'zlarning hususiy hosilalari bilan G sohada uzluksiz bo'ladi va

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y} \qquad (1)$$

shartlarini kanoatlantiradi. G sohada to'la yotuvchi yopiq G konturni olamiz.

$$\int_{\Gamma} f(z)dz=\int_{\Gamma} udx-vdy+i\int_{\Gamma} vdx+udy$$

U holda haqiqiy o'zgaruvchili funktsiyalar uchun Grin formulasiga asosan

$$\iint_{\sigma}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)d\sigma=\oint_{L} Pdx+Qdy$$

tenglikni yoza olamiz. U holda

1) $$\int_{\Gamma} udx-vdy=\iint_{\sigma}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)d\sigma=\iint_{\sigma}\left(-\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)d\sigma=$$

$$=\iint_{\sigma}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)d\sigma=0 \Leftrightarrow \int_{\Gamma} udx-vdy=0$$

2) $$\int_{\Gamma} vdx+udy=\iint_{\sigma}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)d\sigma=\iint_{\sigma}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)d\sigma=\iint_{\sigma}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)d\sigma=0$$

$$\Leftrightarrow \int_{\Gamma} vdx+udy=0$$

Demak, $\int_{\Gamma} f(z)dz=0$ va shu sababli quyidagi teorema isbotlandi.

KOShI TEOREMASI: Agar f(z) funktsiya G bir bog'lamli sohada bir qiymatli va uning har bir nuqtasida uzluksiz hosilaga ega bo'lsa, u holda G sohada to'la yotuvchi G yopiq kontur bo'yicha f(z) funktsiyadan olingan integral nolga teng bo'ladi.

Bir bog'lamli G soxa G silliq chiziq bilan chegaralangan bo'lsin. f(z) funktsiya $\overline{G}$ cohada analitik bo'lsin. U holda quyidagi Koshi formulasi o'rinli bo'ladi:

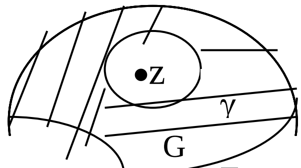
$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi-z}\ , \text{ bu erda } z\in G .$$

I s b o t : z nuqta G dagi ixtiyoriy nuqta bo'lsin. G sohada ξ=z dan tashkari hamma nuqtada analitik bo'lgan

$$\varphi(\xi)=\frac{f(\xi)-f(z)}{\xi-z} \quad \text{funktsiyani qaraymiz.}$$

$\varphi(\xi)$ funktsiya G va γ konturlar orasidagi barcha nuqtalarda ham analitik bo'ladi. Koshi teoremasiga asosan

$$\int_{\Gamma} f(z)dz=0=\int_{\gamma} f(z)dz, \text{ u holda}$$



$$\int_{\Gamma} f(\xi)d\xi=\int_{\gamma}\varphi(\xi)d\xi$$

1-rasm

Bu tenglikdan shunday xulosa qilish mumkinki, $\int_{\gamma}\varphi(\xi)d\xi$ ning qiymati z nuqta yotgan kichik soxacha radiusiga bog'liq emas ekan.

$$\lim_{\xi\to z}\varphi(\xi)=\lim_{\xi\to z}\frac{f(\xi)-f(z)}{\xi-z}=f'(z),$$

f(z) ni φ(ξ) funktsiyaning ξ=z nuqtadagi qiymati deb qabul qilsak, u holda φ(ξ) funktsiya $\overline{G}$ yopiq sohada butunlay uzluksiz bo'ladi.

$\int\limits_{\Gamma}\varphi(\xi)d\xi=0$ ligini e'tiborga olgan holda.

$$\int\limits_{\Gamma}\varphi(\xi)d\xi=\int\limits_{\Gamma}\frac{f(\xi)-f(z)}{\xi-z}d\xi=\int\limits_{\Gamma}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi-\int\limits_{\Gamma}\frac{f(z)}{\xi-z}dz=0$$

$$\int\limits_{\Gamma}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi=f(z)\int\limits_{\Gamma}\frac{dz}{\xi-z}=f(z)\cdot 2\pi i\Rightarrow f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi$$

Teorema isbot bo'ldi.

Agar L yopiq yoki yopiq emas silliq chiziq bo'lsa va φ(z) funktsiya G bo'yicha uzluksiz bo'lsa, unda $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{\varphi(\xi)d\xi}{\xi-z}$ integral L da yotmaydigan har bir z nuqta uchun aniq qiymatga ega bo'ladi. Demak, u qandaydir F(z) funktsiya hosil qiladi hamda bu funktsiya L da yotmaydigan z lar uchun bir qiymatli bo'ladi. Agar L yopiq va φ(z) funktsiya L ning ichida va tashkarisida analitik bo'lsa, u holda $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{\varphi(\xi)d\xi}{\xi-z}$ =φ(z), agar z nuqta L ning ichida bo'lsa va

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{\varphi(\xi)d\xi}{\xi-z}=0$$

bo'ladi, agar z nuqta L ning tashkarisida yotsa.

$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{\varphi(\xi)d\xi}{\xi-z}$ integralni Koshi integrali deb ataymiz. U holda φ(z) funktsiyaga nisbatan aytilgan shartlar bo'yicha $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{\varphi(\xi)d\xi}{\xi-z}$ ni Koshi tipidagi integrallar deyiladi.

TEOREMA. Agar F(z) funktsiya Koshi tipidagi integral bilan aniqlangan bo'lsa, u L chiziqning biror nuqtasida yotmaydigan bir bog'lamli har qanday G sohada analitik bo'ladi va uning hosilasi uchun

$$F'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{\varphi(\xi)d\xi}{(\xi-z)^2}$$

formula o'rinli bo'ladi.

Takrorlash uchun savollar: :

1. f(x) funktsiyadan S chiziq bo'yicha olingan integral qiymati nimalarga bog'liq bo'ladi ?
2. f(x) funktsiya qanday bo'lganda $\int\limits_{L}f(z)dz$ ning qiymati z_0 va z ga bog'liq bo'ladi?
3. Grin formulasi qanday ko'rinishda bo'ladi ?
4. Koshi teoremasini tushuntirib bering.
5. Koshi formulasini qanday ko'rinishda bo'ladi ?
6. Koshi integrali deb nimaga aytiladi?
7. Koshi tipidagi integral qanday xossaga ega?

Tayanch iboralar : Koshi formulasi, Koshi integrali.

39-MAVZU. DIFFERENSIAL TENGLAMALARGA KELUVCHI MASALALAR. DIFFERENSIAL TENGLAMALAR NAZARIYASINING ASOSIY TUSHUNCHALARI.N-TARTIBLI DIFFERENSIAL TENGLAMA UCHUN KOSHI MASALASI YECHISHNING MAVJUDLIGI VA YAGONALIGI HAQIDAGI TEOREMA. O'ZGARUVCHILARGA AJRALGAN VA AJRALADIGAN TENGLAMA.

M a' r u z a r e j a s i:

1. Differentsial tenglamaga olib keluvchi masala. Umumiy va xususiy echimlar.

2. O'zgaruvchilari ajraladigan differentsial tenglamalar.

3. Birinchi tartibli chiziqli tenglamalar

Adabiyotlar.

1. YO.U. Soatov. "Oliy matematika" I qism. Toshkent. O'qituvchi nashriyoti 1992 y. 8 bob, § 1,2,3 lar, 418-430 betlar.

2. N.S. Piskunov. Differentsial va integral hisob. II tom. Toshkent, O'qituvchi, 1974 yil. XIII bob, § 1-7, 7-26 betlar.

1. Differentsial tenglamaga olib keluvchi masala. Umumiy va xususiy echimlar.

M i s o l : Massasi m bo'lgan jism biror balandlikdan tashlab yuborilgan. Agar jismga og'irlik kuchidan tashqari xavoning tezlikka proportsional bo'lgan (proportsionallik koeffitsienti k) qarshilik kuchi ta'sir etsa, bu jismning tushish tezligi v qanday qonun bilan o'zgarishini bilish, ya'ni v=f(t) munosobatni topish talab etiladi.

Echimi. Nyutonning ikkinchi qonuniga muvofiq

$$m\cdot\frac{dv}{dt}=F,$$

bunda $\frac{dv}{dt}$ harakatdagi jismning tezlanishi, F esa jismga harakat yo'nalishida ta'sir etuvchi kuch bo'lib, u og'irlik kuchi va xavoning qarshilik kuchidan tashkil topadi. Demak,

$$m\frac{dv}{dt}=mg-kv$$

Biz noma'lum v funktsiya bilan $\frac{dv}{dt}$ hosilasi orasidagi bog'lanishni ifodalovchi tenglamasini topdik. Uning echimi

$$v=ce^{\frac{-kt}{m}}+\frac{mg}{k}$$

bo'ladi.

TA'RIF: ***Differentsial tenglama*** deb erkli o'zgaruvchi x, noma'lum $y=f(x)$ funktsiya va uning $y', y'',..., y^{(n)}$ hosilalari orasidagi bog'lanishni ifodalaydigan tenglamaga aytiladi va

$$F(x,y, y', y'',..., y^{(n)})=0$$

ko'rinishda yoziladi. Agar bu tenglamani $y^{(n)}$ hosilaga nisbatan echsak, u quyidagi ko'rinishga keladi:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}).$$

Izlangan funktsiya $y=f(x)$ bitta erkli o'zgaruvchiga bog'liq, shuning uni ***oddiy differentsial tenglama*** deb ataymiz. Bu keyingi ma'ruzalarimizda faqat oddiy differentsial tenglamalarni qaraymiz.

TA'RIF: ***Differentsial tenglamaning tartibi*** deb tenglamaga kirgan hosilaning eng yuqori tartibiga aytiladi.

Masalan,

$$y'-4xy+7=0$$

birinchi tartibli differentsial tenglama,

$$y''+8y'-xy\text{-tg}=0$$

ikkinchi tartibli differentsial tenglamadir.

TA'RIF: Birinchi tartibli

$$y'= f(x, y) \qquad (1)$$

differentsial tenglamaning umumiy echimi deb bitta ixtiyoriy C o'zgarmas miqdorga bog'liq bo'lgan va (1) tenglamaga qanoatlantiradigan $y=\varphi(x,C)$ funktsiyaga aytiladi.

TA'RIF: Ixtiyoriy C o'zgarmas miqdorga ma'lum $C=C_0$ qiymat berish natijasida $y=\varphi(x,C)$ umumiy echimdan hosil bo'ladigan har qanday $y=\varphi(x,C_0)$ funktsiyaga ***xususiy echim*** deb aytiladi.

M i s o l: Birinchi tartibli

$$y'=-\frac{y}{x}$$

tenglama uchun $y=\dfrac{C}{x}$ funktsiyalar umumiy echim bo'ladi, ularning grafiklari esa integral chiziqlar deb aytiladi. Umumiy echimda C=1 deb olib

$$y=\frac{1}{x}.$$

xususiy echimni hosil qilamiz

Endi birinchi tartibli differentsial tenglama echimining mavjudligi haqidagi teoremani isbotsiz keltiramiz.

TEOREMA: Agar

$$y' = f(x, y)$$

tenglamada $f(x,y)$ funktsiya va undan y bo'yicha olingan $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ xususiy hosila XOY tekislikdagi (x_0,y_0) nuqtani o'z ichiga oluvchi biror sohada uzluksiz funktsiyalar bo'lsa, u holda berilgan tenglamaning $x=x_0$ bo'lganda $y=y_0$ shartni qanoatlantiruvchi birgina $y=u(x)$ echimi mavjuddir.

$x=x_0$ bo'lganda y funktsiya berilgan y_0 songa teng bo'lishi kerak degan shart boshlang'ich shart deyiladi va ko'pincha $y\big|_{x=x_0}=y_0$ ko'rinishda yoziladi.

2. O'zgaruvchilari ajraladigan differentsial tenglamalar.

TA'RIF: Ushbu

$$M_1(x)N_1(y)dx+ M_2(x)N_2(y)dy=0$$

ko'rinishdagi tenglama ***o'zgaruvchilari ajraladigan differentsial tenglama*** deyiladi.

Bu tenglamaning ikkala tomonini $N_1(y)\, M_2(x)$ ifodaga bo'lish yo'li bilan uni o'zgaruvchilari ajralgan tenglamaga keltirish mumkin:

$$\frac{M_1(x)N_1(y)}{N_1(y)M_2(x)}dx=-\frac{M_2(x)N_2(y)}{N_1(y)M_2(x)}dy, \qquad \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx=-\frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy,$$

Oxirgi tenglikni ikkala tomonini integrallab $y=\varphi(x,c)$ umumiy echimni hosil qilamiz.

M i s o l: Tenglamani eching:

$$(1+x)ydx+(1-y)dy=0$$

Echimi. O'zgaruvchilarini ajratamiz va echamiz:

$$\frac{(1+x)ydx}{xy}+\frac{(1-y)xdy}{xy}=0\ , \qquad \frac{(1+x)dx}{x}+\frac{(1-y)dy}{y}=0\ ,$$

$$\int\left(\frac{1}{x}+1\right)dx+\int\left(\frac{1}{y}-1\right)dy=c \qquad \ln|x|+x+\ln|y|-y=c,$$

$$ln|xy|+x-y=c.$$

Keyingi munosabat berilgan differentsial tenglamaning umumiy integrali deyiladi.

3. Birinchi tartibli chiziqli differentsial tenglamalar.

TA'RIF: ***Birinchi tartibli chiziqli differentsial tenglama*** deb

$$y'+P(x)y=Q(x) \qquad (2)$$

ko'rinishdagi tenglamaga aytiladi.Bunda P(x) va Q(x) lar x ning berilgan uzluksiz funktsiyalari yoki o'zgarmas sonlardir.

(2) tenglamaning echimini x ning ikkita funktsiyasining ko'paytmasi, ya'ni $y=u(x)v(x)$ shaklda izlaymiz. Bu tenglikning ikkala tomonini differen- siallaymiz va y bilan y' qiymatlarini (2) tenglamaga qo'yamiz:

$$y'=u'v+uv' \Rightarrow \quad u'v+uv'+puv=Q$$

yoki

$$uv'+u(v'+pv)=Q\,. \qquad (3)$$

Bu tenglamadagi v funktsiyani

$$v'+pv=0$$

tenglamadan topamiz. Buning uchun uning o'zgaruvchilarini ajratamiz:

$$\frac{dv}{v}=pdx\,,$$

$$\int\frac{dv}{v}=-\int pdx \quad , \ \ln\cdot|v|=-\int p(x)dx \quad , \ v=e^{-\int pdx}$$

Aniqlangan v funktsiya qiymatini (3) tenglamaga qo'yib, noma'lum u funktsiyani topishimiz mumkin:

$$u'e^{-\int pdx}=Q \ \ , \ du=e^{-\int pdx}Q(x)dx \ ,u=\int e^{-\int pdx}Q(x)dx+C$$

Demak, chiziqli birinchi tartibli differentsial tenglamaning umumiy echimi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$y=e^{-\int pdx}(\int e^{-\int pdx}\cdot Q(x)dx+C)$$

M i s o l : Ushbu tenglamani eching:

$$y' - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^3$$

Echimi. Umumiy echimni $y=u\cdot v$ ko'rinishda qidiramiz.

$y=u\cdot v$ va $y' = u'v + uv'$ hosilaning ifodalarini dastlabki tenglamaga qo'ysak, u

$$u'v + uv' - \frac{2}{x+1}u \cdot v = (x+1)^3 \quad ,$$

$$u'v + u(v' - \frac{2}{x+1}v) = (x+1)^3 \qquad (4)$$

ko'rinishga keladi.

v ni aniqlash uchun

$$v' - \frac{2}{x+1}v = 0$$

tenglamani echamiz:

$$\frac{dv}{v} = \frac{2dx}{x+1} \quad , \int \frac{dv}{v} = 2\int \frac{dx}{x+1}$$

$$\ln|v| = 2\ln|x+1| \quad , v = (x+1)^2$$

Berilgan v funktsiyaning qiymatini (4) tenglamaga qo'yib u funktsiyani aniqlaymiz:

$$u'(x+1)^2 = (x+1)^3 \quad , \ u' = x+1$$

$$du = (x+1)dx \quad , \quad \int du = \int (x+1)dx \quad , \quad u = \frac{(x+1)^2}{2} + C$$

Endi dastlabki tenglamaning umumiy echimini yozishimiz mumkin:

$$y = (x+1)^2\left(\frac{(x+1)^2}{2} + C\right) \quad .$$

Takrorlash uchun savollar :

1. Oddiy differentsial tenglamaga ta'rif bering.
2. Umumiy va xususiy echimlar nima?
3. O'zgaruvchilari ajraladigan differentsial tenglamalarni ta'riflang va umumiy echimini aniqlash tartibini keltiring.
4.Chiziqli birinchi tartibli differentsial tenglamalarni ta'riflang va umumiy echimni aniqlash tartibini keltiring.

<u>Tayanch iboralar:</u> Differentsial tenglama, umumiy echim, xususiy echim differentsial tenglamaning tartibi, o'zgaruvchilari ajraladigan tenglama, chiziqli birinchi tartibli differentsial tenglama.

40-MAVZU. BIR JINSLI DIFFERENSIAL TENGLAMALAR. BIRINCHI TARTIBLI CHIZIQLI DIFFERENSIAL TENGLAMALAR. BERNULLI TENGLAMASI. TO'LA DIFFERENSIAL TENGLAMA.

<u>Ma'ruza rejasi:</u>

1. Bir jinsli differentsial tenglamalar.
2. To’la differentsialli tenglamalar.

Adabiyotlar.

1. Yo.U. Soatov. “Oliy matematika” I qism. Toshkent. O’qituvchi nashriyoti 1992 y. 8 bob, § 3 , 421-432 betlar, § 9, 10 ; 440-446 betlar.

2. N.S. Piskunov. Differentsial va integral xisob. II tom. Toshkent, «O’qituvchi», 1974 yil. XIII bob, § 5, 9-10, 16-17; 21-23, 31-36,54-59 betlar.

__1) Birjinsli differentsial tenglamalar__.

__**TA’RIF:**__ Agar λ ning har qanday qiymatida

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$$

ayniyat o’rinli bo’lsa, unda $f(x,y)$ funktsiya x va y o’zgaruvchilarga nisbatan ***n- tartibli birjinsli funktsiya*** deb ataladi.

M i s o l : $f(x, y) = x^4 - y^4$,

$$f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^4 - (\lambda y)^4 = \lambda^4 (x^4 - y^4)$$

Demak, berilgan funktsiya 4-tartibli birjinsli funktsiya ekan.

__**TA'RIF:**__ Agar birinchi tartibli

$$y' = f(x, y)$$

tenglamada $f(x, y)$ funktsiya x va y ga nisbatan nolinchi tartibli bir jinsli funktsiya bo’lsa, bunday tenglama ***bir jinsli birinchi tartibli differentsial tenglama*** deyiladi.

Bir jinsli I tartibli differentsial tenglamani doimo

$$y' = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$$

ko’rinishda yozish mumkinligini ko’rsatish qiyin emas. Bundan umumiy echimni $\frac{y}{x} = t(x)$ ko’rinishda izlash mumkinligi kelib chiqadi.

Darhaqiqat $y = t \cdot x$, $y' = t + xt'$ ekanligi uchun dastlabki bir jinsli birinchi tartibli tenglama

$$t + xt' = f(1, t)$$

ko’rinishga keladi. Bu erda o’zgaruvchilarni ajratib va kelib chiqqan tenglikning ikkala tomonini integrallab, $t(x)$ funktsiyani aniqlaymiz:

$$x\frac{dt}{dx} = f(1,t) - t$$

$$\frac{dt}{f(1,t) - t} = \frac{dx}{x}, \qquad \int \frac{dt}{f(1,t) - t} = \int \frac{dx}{x}.$$

Oxirgi tenglikdan $t(x)$ ni topib $y = t \cdot x$ ga qo’ysak izlangan umumiy echimni topgan bo’lamiz.

M i s o l: Tenglamani eching:

$$y' = \frac{x + y}{x}$$

Echimi. $f(x, y) = \dfrac{x + y}{x}$, $f(\lambda x, \lambda y) = \dfrac{\lambda x + \lambda y}{\lambda x} = \dfrac{x + y}{x} = f(x, y)$.

Demak, berilgan tenglama bir jinsli ekan. Umumiy echimni

$y=t\cdot x,\quad y'=t+xt'$

ko'rinishda qidiramiz:

$$t+xt'=\frac{x+tx}{x},\qquad xt'=1+t-t\ ,\qquad \frac{dt}{dx}=\frac{1}{x},$$

$$dt=\frac{dx}{x},\qquad \int dt=\int\frac{dx}{x},\qquad t=ln\left|x\right|+C,$$

$$y=t\cdot x=(\,ln\left|x\right|+C)\cdot x.$$

2)To'la differentsialli tenglamalar.

TA'RIF: Agar

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \qquad (1)$$

tenglamada $M(x,y)$ ма $N(x,y)$ funktsiyalar uzluksiz, differentsiallanuvchi bo'lib, ular uchun

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x} \qquad (2)$$

munosobat bajarilsa, (1) tenglama ***to'la differentsialli tenglama*** deyiladi.

Agar (1) tenglamaning chap tomoni to'la differentsial bo'lsa, u holda (2) shartning bajarilishini va aksincha, (2) shart bajarilsa, (1) tenglamaning chap tomoni biror $u(x,y)$ funktsiyaning to'la differentsiali bo'lishini isbotlaymiz. Unda (1) tenglamani ko'rinishi d $u(x,y)=0$ bo'ladi va uning umumiy integrali $u(x,y)=c$ bo'ladi.

Dastlab, (1)tenglamaning chap tomonini biror $u(x,y)$ funktsiyaning to'la differentsiali deb faraz qilamiz, ya'ni

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy, \qquad (3)$$

Bu holda

$$M=\frac{\partial u}{\partial x},\qquad N=\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Birinchi munosobatni y bo'yicha, ikkinchi munosobatni esa x bo'yicha differentsiallab

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\quad,\quad \frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$$

tengliklarni hosil qilamiz.

Ikkinchi tartibli hosilalar uzluksiz deb faraz qilsak,

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

bo'ladi. (2) tenglikning to'g'riligi isbotlandi. (3) tenglamadan

$$\frac{\partial u}{\partial x}=M(x,y)$$

ekanligi kelib chiqadi. Bundan

$$u=\int_{x_0}^{x}M(x,y)dx+\varphi(y)$$

munosabatni topamiz, bu erda x_0 echim mavjud bo'lgan sohadagi ixtiyoriy nuqtaning abstsissasi, $\varphi(y)$ esa aniqlanishi kerak bo'lgan funktsiya.

Oxirgi tenglikning ikkala tomonini y bo'yicha differentsiallaymiz va natijani $N(x,y)$ ga tenglaymiz:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial M}{\partial y}dx+\varphi'(x)=N(x,y)\quad ,$$

ammo $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ bo'lganligi uchun

$$\int_{x_0}^{x}\frac{\partial N}{\partial x}dx+\varphi'(y)=N\qquad ,\qquad N(x,y)\Big|_{x_0}^{x}+\varphi'(y)=N(x,y)\quad ,$$

$$N(x,y)-N(x_0,y)+\varphi'(y)=N(x,y)\ ,\ \varphi'(y)=N(x_0,y)$$

$$\varphi(y)=\int_{y_0}^{y}N(x_0,y)dy$$

Shunday qilib, to'la differentsialli tenglamaning umumiy echimi

$$\int_{x_0}^{x}M(x,y)dx+\int_{y_0}^{y}N(x_0,y)dy=C$$

3)Yuqori tartibli differentsial tenglamalar.

n –tartibli differentsial tenglama berilgan bo'lsin:

$$y^{(n)}=f(x,y,y',y'',...y^{(n-1)})\ . \qquad (4)$$

TA'RIF: n –tartibli differentsial tenglamaning ***umumiy echimi*** deb n ta c_1 , c_2 ,…,c_n ixtiyoriy o'zgarmas miqdorga bog'liq bo'lgan va (4) tenglamaga qanoatlantiradigan

$$y=\varphi(x, c_1 , c_2 ,…,c_n)$$

funktsiyaga aytiladi.

Umumiy echimdan c_1, c_2 ,…,c_n o'zgarmas miqdorlarning tayin qiymatlarida hosil bo'ladigan har qanday funktsiya ***xususiy echim*** deb ataladi.

4) $y^{(n)} = f(x)$ ko'rinishdagi tenglamalar.

Eng sodda n - tartibli tenglama

$$y^{(n)} = f(x)$$

ko'rinishdagi tenglama bo'ladi. Uning har ikkala tomonini n marta integrallab umumiy echimini quyidagi ko'rinishda olamiz:

$$y=\int_{x_0}^{x}...\int_{x_0}^{x}f(x)dx....dx+\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}C_1+\frac{(x-x_0)^{n-2}}{(n-2)!}C_2+...+C_n$$

M i s o l: Ushbu

$$y''=\sin\ x$$

tenglamaning umumiy echimini toping.

Echimi. $$y'=\int_{0}^{x}\sin\ dx+C_1=-\cos x+1+C_1$$

$$y=-\int_{0}^{x}(cosx-1)dx+\int_{0}^{x}c_1dx+c_2\ ,\ e=-\sin\ x+c_1x+c_2 .$$

Takrorlash uchun savollar:

1.Birjinsli birinchi tartibli tenglamalarni ta'riflang. Ularning umumiy echimlari qanday aniqlanadi.

2.**To'la differentsial tenglamalarni ta'riflang. Ularning umumiy echimlari qanday aniqlanadi.**
3.Yuqori tartibli differentsial tenglamalarni ta'riflang.
4. $y^{(n)}=f(x)$ ko'rinishdagi tenglamalarning umumiy echimini keltiring.

Tayanch iboralar: O'zgaruvchilari ajraladigan differentsial tenglama, to'la differentsialli tenglama, birjinsli funktsiya, bir jinsli differentsial tenglama, yuqori tartibli tenglama.

41-MAVZU. YUQORI TARTIBLI DIFFERENSIAL TENGLAMALAR UCHUN KOSHI MASALASI YECHIMNING MAVJUDLIGI VA YAGONALIGI. TARTIBINI PASAYTIRADIGAN DIFFERENSIAL TENGLAMALAR.

Ma'ruza rejasi:

1. Yuqori tartibli differentsial tenglamalar.
2. $y^{(n)}=f(x)$ ko'rinishdagi tenglamalar.
3. Tartibi pasayuvchi differentsial tenglama.
4. Umumiy integral tushunchasi.
5. Zanjir chiziq tenglamasi.

Adabiyotlar.

1. Yo.U. Soatov. "Oliy matematika" I qism. Toshkent. O'qituvchi nashriyoti 1992 y. 8 bob, § 9, 10 440-446 betlar.

2. N.S. Piskunov. Differentsial va integral xisob. II tom. Toshkent, «O'qituvchi», 1974 yil. XIII bob, § 18, 59-67 betlar.

1) Ushbu

$$y''=f(x,y')$$

ko'rinishdagi tenglama noma'lum y funktsiyani oshkor holda o'z ichiga olmaydi. Bu tenglamaning umumiy echimini topish uchun

$$y' = p(x)$$

belgilash kiritamiz. Bu holda $y''= p'$ bo'ladi. y' va y'' belgilanishlarini dastlabki tenglamaga qo'yib x ning noma'lum p funktsiyaga nisbatan birinchi tartibli

$$p'= f(x,,p)$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglamani integrallab, uning

$$p=p(x,C_1)$$

umumiy echimni topamiz va undan keyin y'=p munosobatdan

$$y=\int p(x,C_1)dx + C_2$$

umumiy echimni topamiz.
M i s o l: Zanjir chiziqning

$$y'' = \frac{1}{a}\sqrt{1+y'}$$

differentsial tenglamasini qaraymiz.

$y' = p$ deb olamiz, u holda $y'' = p'$. Unda x ning yordamchi p funktsiyasiga nisbatan birinchi tartibli

$$p' = \frac{1}{a}\sqrt{1+y'}$$

differentsial tenglama hosil bo'ladi.

O'zgaruvchilarini ajratsak,

$$\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{dx}{a},$$

$$\ln(p + \sqrt{1+p^2}) = \frac{x}{a} + C_1$$

$$p = sh\frac{x}{a} + C_1$$

Ammo y'=p bo'lgani uchun, keyingi munosobat izlanayotgan y funktsiyaga nisbatan differentsial tenglamani ifodalaydi. Uni integrallasak, zanjir chiziqning tenglamasi hosil bo'ladi:

$$y = a\,ch\frac{x}{a} + C_1 x + C_2$$

Ushbu

$$y\big|_{x=0} = a, \qquad y'\big|_{x=0} = 0$$

boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy echimni topamiz. Birinchi shart $C_2=0$ va birinchi shart $C_1=0$ ni beradi.

Natijada

$$y = a\cdot ch\frac{x}{a}$$

ifodani hosil qilamiz.

I z o x: Shunday usul bilan

$$y^{(n)} = f(x, y^{(n-1)})$$

tenglamani ham integrallash mumkin.

$y^{(n-1)}$= p deb olib, p ni aniqlash uchun

$$p^{(l)} = f(x,,p)$$

tenglamani hosil qilamiz.

Bundan p ni x ning funktsiyasi kabi aniqlab, $y^{(n-1)}$=p munosobatdan y ni topamiz.

2) x erkli o'zgaruvchini oshkor holda o'z ichiga olmagan

$$y'' = f(y\,;\,y')$$

ko'rinishdagi tenglamani qaraymiz. Bu tenglamani echish uchun yana y'=p(y) deb olamiz. Ammo endi p ni y ning funktsiyasi deb hisoblaymiz. Bu holda

$$y'' = \frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = p'\cdot p.$$

y' va y'' hosilalarning ifodalarini

$$y'' = f(y\,;\,y')$$

tenglamaga qo'yib, yordamchi p funktsiyaga nisbatan birinchi tartibli

$$pp' = f(y,p)$$

tenglamani hosil qilamiz. Bunda p ni y va ixtiyoriy C_1 o'zgarmas miqdorning funktsiyasi kabi aniqlaymiz:

$$p=p(y,C_1)$$

Bu qiymatni y'=p munosobatga qo'ysak, x ning y funktsiyasi uchun

$$y'=p(y,C_1)$$

differentsial tenglama hosil bo'ladi. O'zgaruvchilarni ajratib,

$$\frac{dy}{p(y,C_1)}=dx$$

tenglamani hosil qilamiz.

Oxirgi tenglamani integrallab, dastlabki tenglamaning

$$\Phi(x,y,C_1,C_2)=0$$

umumiy integralni topamiz.

M i s o l: Ushbu

$$3y''=y^{-\frac{5}{3}}$$

tenglamaning umumiy integralini toping.

Echimi. p ni y ning funktsiyasi ekanini bilgan holda y'=p deb olamiz. Bu holda y''=p$'\cdot$p bo'ladi va biz yordamchi p funktsiya uchun birinchi tartibli tenglama hosil qilamiz:

$$3pp'=y^{-\frac{5}{3}}$$

Bu tenglamani integrallaymiz:

$$p^2=C_1 - y^{-\frac{2}{3}}, \qquad p=\pm\sqrt{C_1-y^{-\frac{2}{3}}}$$

Ammo y'=p , demak, y ni aniqlash uchun

$$\pm\frac{dy}{\sqrt{C_1-y^{-\frac{2}{3}}}}=dx \quad , \quad \frac{y^{\frac{1}{3}}dy}{\pm\sqrt{C_1y^{\frac{2}{3}}-1}}=dx$$

tenglamani hosil qilamiz, bundan

$$x+C_2=\pm\int\frac{y^{\frac{1}{3}}dy}{\sqrt{C_1y^{\frac{2}{3}}-1}}$$

Keyingi integralni hisoblash uchun

$$C_1y^{\frac{2}{3}}-1=t^2$$

almashtirish bajaramiz. Bu holda

$$y^{\frac{1}{3}}=(t^2+1)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{C_1^{\frac{1}{2}}} \quad , \quad dy=3t(t^2+1)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{C_1^{\frac{1}{2}}}dt$$

Demak

$$\int \frac{y^{\frac{1}{2}}dy}{\sqrt{C_1 y^{\frac{2}{3}}-1}} = \frac{1}{C_1^2}\int \frac{3t(t^2+1)}{t}dt = \frac{3}{C_1^2} = \left(\frac{t^3}{3}+t\right) =$$

$$= \frac{1}{C_1^2}\sqrt{C_1 y^{\frac{2}{3}}-1}\cdot(C_1 y^{\frac{2}{3}}+2) \quad .$$

Oxirgi natijadan

$$x + C_2 = \pm\frac{1}{C_1^2}\sqrt{C_1 y^{\frac{2}{3}}-1}\cdot(C_1 y^{\frac{2}{3}}+2)$$

ekanini topamiz.

Takrorlash uchun savollar:

1. Tartibi pasayuvchi ikkinchi tartibli differentsial tenglamalar turlarini keltiring**.**
2. Tartibi pasayuvchi ikkinchi tartibli differentsial tenglamalarning umumiy echimlari qanday aniqlanadi?

Tayanch iboralar: Tartibi pasayuvchi tenglamalar, umumiy integral, zanjir chiziq tenglamasi.

42-MAVZU. CHIZIQLI BIR JINSLI DIFFERENSIAL TENGLAMALAR. O'ZGARMAS KOEFFITSIENTLI YUQORI TARTIBLI BIR JINSLI TENGLAMALAR.

Ma'ruza rejasi:

1. Bir jinsli chiziqli tenglamalar.
2. O'zgarmas koeffitsentli 2-tartibli differentsial tenglamalar.
3. O'zgarmas koeffitsentli n-tartibli bir jinsli tenglamalar.

Adabiyotlar.

1. Yo.U. Soatov. "Oliy matematika" I qism. Toshkent. O'qituvchi nashriyoti 1992 y. 8 bob, § 11-20, 447-470 betlar.
2. N.S. Piskunov. Differentsial va integral xisob. II tom. Toshkent, «O'qituvchi», 1974 yil. XIII bob, § 20-22, 69-84 betlar.

1) Bir jinsli chiziikli tenglamalar.

TA'RIF: Agar n-tartibli differrentsial tenglama noma'lum u funktsiya va uning y', y'',…, $y^{(n-1)}$ hosilalariga nisbatan birinchi darajali bo'lsa, bunday tenglama ***chiziqli differentsial tenglama*** deyiladi.

Chiziqli differentsial tenglama

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x), \qquad (1)$$

ko'rinishda bo'lib, unda a_0,, a_1, a_2,…, a_n va $f(x)$ lar x ning ma'lum funktsiyalari yoki o'zgarmas sonlardir. Bundan keyin a_0,, a_1, a_2,…, a_n va $f(x)$ funktsiyalarning x ning barcha qiymatlarida uzluksiz funktsiya va a_0 koeffitsent birga teng deb faraz qilamiz. (1) tenglamaning ung tomonida turgan $f(x)$ funktsiya ***tenglamaning ung tomoni*** deb ataladi.

Agar $f(x)\neq 0$ bo'lsa, bu holda tenglama ***bir jinsli chiziqli tenglama*** deyiladi.

Agar $f(x)=0$ bo'lsa, bu holda tenglama

$$y^{(n)}+a_1 y^{(n-1)}+\ldots+a_n y=0 \qquad (2)$$

ko'rinishda bo'ladi va ***bir jinsli chiziqli tenglama*** deb aytiladi.

Bir jinsli chiziqli tenglamalarning ba'zi xossalarini 2-tartibli tenglamalar misolida kursatamiz.

TEOREMA : Agar y_1 va y_2 funktsiyalar 2-tartibli bir jinsli chiziqli

$$y''+a_1 y'+a_2 y=0 \qquad (3)$$

tenglamaning ikkita xususiy echimi bo'lsa , u holda y_1+y_2 ham bu tenglamaning echimi bo'ladi.

I s b o t: Teoremaning shartlari bajarilgan bo'lsa, quyidagi tengliklar o'rinli bo'ladi:

$$(y_1+y_2)''+a_1(y_1+y_2)'+a_2(y_1+y_2)=(y_1''+a_1y_1'+a_2y_1)+y_2''+a_1y_2'+a_2y=0$$

Teorema isbotlandi.

TEOREMA : Agar y_1 funktsiya (3) ning echimi bo'lsa , u holda ixtiyoriy C o'zgarmas son uchun $C\cdot y_1$ ham (3) tenglamaning echimi bo'ladi.

I s b o t: Teoremaning sharti bajarilgan bo'lsa, unda uning isboti quyidagi tengliklardan kelib chiqadi:

$$(C\cdot y_1)''+a_1(C\cdot y_1)'+a_2(C\cdot y_1)=C(y''+a_1y'+a_2y)=C\cdot 0=0.$$

TA'RIF: Agar $[a;b]$ kesmada (3) tenglamaning ikkita y_1 va y_2 echimlarining nisbati o'zgarmas miqdorga teng bo'lmasa, ya'ni $\dfrac{y_1}{y_2}\neq const$ bo'lsa, unda y_1 va y_2 echimlar $[a;b]$ kesmada ***chiziqli bog'liq bulmagan echimlar*** deyiladi.

TA'RIF: Agar y_1 va y_2 differentsiallanuvchi funktsiyalar bo'lsa, u holda

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

determinant ***Vronskiy determinanti*** deyiladi.

TEOREMA : Agar y_1 va y_2 funktsiyalar $[a;b]$ kesmada chiziqli bog'liq bo'lsa, u holda bu kesmada Vronskiy determinanti aynan nolga teng bo'ladi.

I s b o t: $y_2=\lambda y_1$ bo'lsa , u holda $y'_2=\lambda y'_1$ bo'ladi va

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} y_1 & \lambda y_2 \\ y_1' & \lambda y_2' \end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=0$$

TEOREMA : Agar (3) tenglamaning y_1 va y_2 echimlari $[a;b]$ kesmada chiziqli erkli bo'lsa, bu echimlardan tuzilgan Vronskiy determinanti W kursatilgan kesmaning xech bir nuqtasida nolga aylanmaydi.

Bu va keyingi teoremani isbotsiz qabul qilamiz.

TEOREMA : Agar y_1 va y_2 funktsiyalar (3) tenglamaning ixtiyoriy ikkita chiziqli erkli echimi bo'lsa, u holda

$$y=C_1y_1+C_2y_2$$

(bunda C_1 va C_2 ixtiyoriy o'zgarmas miqdorlar), (3) tenglamaning umumiy echimi bo'ladi.

Bunda y_1 va y_2 echimlar (3) tenglamaning asosiy echimlari deb aytiladi.

2) O'zgarmas koeffitsientli 2-tartibli bir jinsli chiziqli tenglamalar.

Ikkinchi tartibli bir jinsli chiziqli tenglama

$$y''+p\,y'+q\,y=0 \qquad (4)$$

berilgan bo'lib, unda p va qo'zgarmas haqiqiy sonlar bo'lsin.

Bu tenglamaning ikkita chiziqli erkli xususiy echimini $y=e^{kx}$ ko'rinishda izlaymiz (k=const). Bu holda $y'=ke^{kx}$, $y''=k^2e^{kx}$ bo'ladi·

y, y', y'' lar qiymatlarini (4) tenglamaga qo'ysak,

$$e^{kx}\cdot(k^2+pk+q)=0$$

munosobat hosil bo'ladi. Ammo $e^{kx}\neq0$ va shu sababli bu erdan

$$k^2+pk+q=0$$

tenglama hosil bo'ladi. Bu tenglama (4) tenglamaning ***harakteristik tenglamasi*** deb aytiladi. Bu tengllamaning

$$k_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\ ,\qquad k_2=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\,.$$

Ildizlari uchun quyidagi hollar bo'lishi mumkin.

1) k_1 va k_2 haqiqiy va bir-biriga teng bulmagan sonlar ($k_1\neq k_2$). Bu holda

$$y_1=e^{k_1x}\ ,\quad y_2=e^{k_2x}$$

funktsiyalar (4) tenglamaning ikkita xususiy echimlari bo'ladi.

Bu echimlar

$$\frac{y_2}{y_1}=\frac{e^{k_2x}}{e^{k_1x}}=e^{(k_2-k_1)x}\neq0$$

bo'lgani uchun chiziqli erkli bo'ladi. Demak umumiy echim

$$y=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}$$

куринишда bo'ladi.

2) Harakteristik tenglamaning ildizlari haqiqiy va teng bo'lganda, ya'ni $k_1=k_2=k_0$ holda umumiy echim

$$y=(C_1+C_2x)e^{k_0x} \qquad (5)$$

ko'rinishda bo'ladi.

3) Harakteristik tenglamaning ildizlari kompleks sonlar bo'lgan holda. ya'ni $k_1=\alpha-i\beta$ va $k_2=\alpha+i\beta$ bo'lganda, umumiy echim

$$y=e^{\alpha k}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x) \qquad (6)$$

куринишда bo'ladi.

(5) va (6) munosobatlarni isbotsiz qabul qilamiz.

<u>3) O'zgarmas koeffitsientli n-tartibli bir jinsli tenglamalar.</u>

n-tartibli bir jinsli chiziqli

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\ldots+a_ny=0 \qquad (7)$$

tenglamani qaraymiz va unda $a_1, a_2,\ldots, a_n$ larni o'zgarmas sonlar deb faraz qilamiz.

<u>TA'RIF:</u> Agar $[a;b]$ kesmada x ning barcha qiymatlari uchun

$$\varphi_n(x)=A_1\varphi_1(x)+A_2\varphi_2(x)+\ldots+A_{n-1}\varphi_{n-1}(x)$$

tenglik o'rinli bo'lsa (bunda A_1, $A_2,\ldots$, A_n hammasi bir vaktda nolga teng bo'lmaydigan o'zgarmas sonlar), u holda $\varphi_n(x)$ funktsiya $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\ldots,\varphi_{n-1}(x)$ funktsiyalar orqali chiziqli ifoda etiladi deyiladi. Agar qandaydir n ta $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x),\ldots$, $\varphi_{n-1}(x)$, $\varphi_n(x)$ funktsiyalarning xech biri kolganlari orqali chiziqli ifoda etilmasa, u funktsiyalar ***chiziqli erkli funktsiyalar*** deb ataladi.

TEOREMA : Agar y_1 , y_2 ,…, y_n funktsiyalar (7) tenglamaning chiziqli erkli echimlari bo'lsa, u holda

$$y=C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_ny_n$$

(7) tenglamaning umumiy echimi bo'ladi. Bunda $C_1, C_2,\ldots C_n$ ixtiyoriy o'zgarmas sonlar.

Chiziqli erkli echimlar quyidagicha topiladi:
1) Harakteristik tenglamani tuzamiz: $k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \ldots + a_n = 0$.
2) Harakteristik tenglamaning $k_1, k_2, \ldots, k_n$ ildizlarini topamiz.
3) Har bir karrali bulmagan k ildizga e^{kx} xususiy echim mos keladi.
4) Har bir juft $k^{(1)} = \alpha - i\beta$, $k^{(2)} = \alpha + i\beta$ kushma kompleks bir karrali ildizlarga ikkita $e^{\alpha x}\cos\beta x$ va $e^{\alpha x}\sin\beta x$ xususiy echimlar to'g'ri keladi.
5) Har bir r karrali haqiqiy ildizga r ta chiziqli erkli

$$e^{kx},\ x e^{kx},\ \ldots,\ x^{r-1} e^{kx}$$

xususiy echimlar to'g'ri keladi.
6) Har bir μ karrali juft $k^{(1)} = \alpha - i\beta$, $k^{(2)} = \alpha + i\beta$ kushma kompleks ildizga 2μ ta

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ x e^{\alpha x}\cos\beta x,\ \ldots,\ x^{\mu-1} e^{\alpha x}\cos\beta x;\ e^{\alpha x}\sin\beta x,\ x e^{\alpha x}\sin\beta x,\ \ldots,\ x^{\mu-1} e^{\alpha x}\sin\beta x$$

xususiy echimlar to'g'ri keladi.
7) n ta chiziqli erkli $y_1, y_2, \ldots, y_n$ xususiy echimlarni topgandan sung (7) tenglamaning umumiy echimi

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$$

kabi aniqlanadi.

M i s o l : Tenglamaning umumiy echimini toping:

$$y^{(4)} - y = 0$$

Echimi. Harakteristik tenglamani to'zib, ildizlarini aniqlaymiz:

$$k^4 - 1 = 0 \Rightarrow k_1 = 1,\ k_2 = -1,\ k_3 = i,\ k_4 = -i$$

Endi umumiy echimni yozishimiz mumkin:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x\ .$$

Takrorlash uchun savollar:

1. Yuqori tartibli chiziqli o’zgarmas koeffitsientli

birjinsli differentsial tenglamalarni ta'riflang.

2. Yuqori tartibli chiziqli o'zgarmas koeffitsientli birjinsli differentsial tenglamalarning xossalarini keltiring.
3. Yuqori tartibli chiziqli o'zgarmas koeffitsientli birjinsli differentsial tenglamalarni echimlari qanday topiladi?

Tayanch iboralar: Chiziqli erkli funktsiyalar, Vronskiy determinanti, harakteristik tenglama.

43-mavzu. O'ZGARMAS KOEFFISENTLI YUQORI TARTIBLI BIR JINSLI BO'LMAGAN, O'NG TOMONI MAXSUS KO'RINISHGA EGA BO'LGAN DIFFERENSIAL TENGLAMA.

Ma'ruza rejasi:

1. Bir jinslimas chiziqli tenglamalar.
2. Ixtiyoriy o'zgarmaslarni variatsiyalash usuli.
3. O'zgarmas koeffitsentli ikkinchi tartibli bir jinslimas chiziqli tenglamalar.

Adabiyotlar.

Yo.U. Soatov. "Oliy matematika" I qism. Toshkent. O'qituvchi nashriyoti 1992 y. 8 bob, § 18,19,20 457-470 betlar.

N.S. Piskunov. Differentsial va integral xisob. II tom. Toshkent, «O'qituvchi», 1974 yil. XIII bob, § 23-25, 84-100 betlar.

1)Bir jinslimas ikkinchi tartibli chiziqli tenglamalar.

TA'RIF: ***Bir jinslimas ikkinchi tartibli chiziqli tenglamalar*** deb

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x) \qquad (1)$$

ko'rinishdagi tenglamaga aytiladi. Bunda a_1, a_2,, $f \neq 0$ bir o'zgaruvchili funktsiyalar yoki o'zgarmas sonlardir.

TEOREMA: Bir jinslimas (1) tenglama umumiy echimi bu tenglamaning biror y^* xususiy echimi bilan mos bir jinsli

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \qquad (2)$$

tenglamaning $\bar{y}$ umumiy echimi yig'indisi kabi ifodalanadi, ya'ni

$$y = \bar{y} + y^*.$$

Teoremani isbotsiz qabul qilamiz.

2) O'zgarmaslarni variatsiyalash usuli.

Bir jinsli (2) tenglamaning umumiy echimi topildi deb faraz qilamiz:

$$\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2 \qquad (3)$$

Bu erda C_1 va C_2 lar ixtiyoriy o'zgarmas sonlardir.

(1) tenglamaning y^* xususiy echimini aniqlash uchun (3) munosobatda C_1 va C_2 o'zgarmas miqdorlarni x ning funktsiyasi deb olib, y^* ni

$$y^* = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2 \qquad (4)$$

ko'rinishda qidiramiz. Bunda $C_1(x)$ va $C_2(x)$ funktsiyalar aniqlash kerak bo'lgan noma'lum funktsiyalar. Ularni topish uchun (4) tenglikni differentsiallaymiz:

$$(y^*)' = C_1(x) y_1' + C_2(x) y_2' + C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2$$

$C_1(x)$ va $C_2(x)$ funktsiyalarni

$$C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 = 0 \qquad (5)$$

tenglik bajariladigan qilib tanlab olamiz. U holda birinchi tartibli $(y^*)'$ xosila

$$(y^*)' = C_1(x) y_1' + C_2(x) y_2' \qquad (6)$$

ko'rinishga keladi. Endi bu ifodani differentsiallab, $(y^*)''$ ni topamiz:

$$(y^*)'' = C_1(x)\,y_1'' + C_2(x)\,y_2'' + C_1'(x)\,y_1' + C_2'(x)\,y_2' \qquad (7)$$

(4), (6), (7) lardagi y^*, $(y^*)'$, $(y^*)''$ qiymatlarini (1) tenglamaga qo'yib

$$C_1(x)\,y_1'' + C_2(x)\,y_2'' + C_1'(x)\,y_1' + C_2'(x)\,y_2' +$$

$$+a_1(C_1(x)\,y_1' + C_2(x)\,y_2') + a_2(C_1(x)\,y_1 + C_2(x)\,y_2) = f(x)$$

yoki

$$C_1(x)(y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1) + C_2(x)(y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2) +$$

$$+ C_1'(x)\,y_1' + C_2'(x)\,y_2' = f(x)$$

tenglikni hosil qilamiz. Agar y_1 va y_2 funktsiyalar (2) tenglamaning echimlari ekanligini nazarga olsak, oxirgi tenglik

$$C_1'(x)\,y_1' + C_2'(x)\,y_2' = f(x) \qquad (8)$$

kurinishni oladi.Shunday qilib, noma'lum $C_1(x)$ va $C_2(x)$ funktsiyalarni aniqlash uchun (5) va (8) tengliklardan tuzilgan tenglamalar sistemasini echish kerak. Aniqlangan $C_1(x)$ va $C_2(x)$ funktsiyalarni (4) ga qo'yib, y^* xususiy echimni topamiz.

M i s o l: Ushbu

$$y'' - \frac{1}{x}\,y' = x$$

tenglamaning umumiy echimini toping.

Echimi. Umumiy echimni

$$y = \bar{y} + y^*$$

ko'rinishda qidiramiz. $\bar{y}$ umumiy echimni

$$\bar{y}'' - \frac{1}{x}\,\bar{y}' = 0$$

tenglamadan topamiz:

$$\frac{\bar{y}''}{\bar{y}'} = \frac{1}{x}, \qquad \frac{d\bar{y}'}{\bar{y}'} = \frac{dx}{x},$$

$$\ln \bar{y}' = \ln x + \ln C, \qquad \bar{y}' = C_1 x.$$

Demak

$$\bar{y} = C_1 x^2 + C_2.$$

Xususiy y^* echimni

$$y^* = C_1(x)\cdot x^2 + C_2(x)$$

ko'rinishda qidiramiz. Buning uchun (5) va (8) tenglamalar sistemasini to'zib, $C_1(x)$ va $C_2(x)$ noma'lum funktsiyalarni topamiz:

$$\begin{cases} C_1'(x)\cdot x^2 + C_2'(x) = 0 \\ 2C_1'(x)\cdot x^2 + C_2'(x)\cdot 0 = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1'(x) = \dfrac{1}{2} \\ C_2'(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1(x) = \dfrac{x}{2} + \bar{C}_1 \\ C_2(x) = -\dfrac{x^3}{2} + \bar{C}_2 \end{cases}.$$

Demak y^* xususiy echim

$$y^* = \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6} = \frac{x^3}{3}$$

ko'rinishda ekan.

Unda dastlabki tenglamaning umumiy echimi

$$y=C_1x^2+C_2+\frac{x^3}{3}$$

bo'ladi.

3)O'zgarmas koeffitsientli ikkinchi tartibli bir jinslimas chiziqli tenglamalar.

Ushbu

$$y''+py'+qy=f(x) \qquad (9)$$

tenglama berilgan bo'lib, unda p va q haqiqiy sonlar bo'lsin.
(9) tenglamaning umumiy echimini

$$y=\bar{y}+y^*$$

ko'rinishda izlaymiz. Bunda $\bar{y}$ (9)tenglamaga mos bir jinsli tenglamaning umumiy echimi, y^* esa (9) tenglamaning xususiy echimi.
$\bar{y}$ ni topish uchun

$$k^2+pk+q=0$$

harakteristik tenglamani echib,

$$\bar{y}=C_1y_1+C_2y_2$$

umumiy echimni tuzamiz.

(9) o'zgarmas koeffitsientli tenglama ekanligi uchun, ba'zi xususiy hollarda y^* echimni osonrok topish mumkin. (9) tenglamaning ung tomoni kursatkichli funktsiya bilan kuphad ko'paytmasidan iborat, ya'ni

$$f(x)=P_n(x)\,e^{\alpha_k}$$

ko'rinishda bo'lib, unda $P_n(x)$ n-darajali kuphad bo'lsin. U holda quyidagi xususiy hollar bo'lishi mumkin:

1) α soni $k^2+pk+q=0$ harakteristik tenglamaning ildizi emas.

Bu holda xususiy echimni

$$y^*=(A_0x^n+A_1x^{n-1}+\ldots+A_n)\,e^{\alpha_k}.$$

ko'rinishda izlash kerak. Bu erdagi y^* ni (9) tenglamaga qo'yib va tenglamaning ikkala tomoninii e^{α_k} ga qisqartiramiz. Sungra bir xil darajali x lar oldidagi koeffitsientlarni bir-biriga tenglashtirib, noma'lum A_0, A_1,… ,A_n koeffitsientlarni topish uchun (n+1) noma'lumli (n+1) ta tenglamali chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Bunday usul ***noma'lum koeffitsientlar usuli*** deb aytiladi. Agar shu sistemadan A_0, A_1,… ,A_n larni topsak, y^* ni yozishimiz mumkin bo'ladi.

2) α harakteristik tenglamaning bir karrali ildizi bo'lsin. Bunday holda xususiy echimni

$$y^*=x(A_0x^n+A_1x^{n-1}+\ldots+A_n)\,e^{\alpha_k}.$$

ko'rinishda kidirish maksadga muvofik. Undagi A_0, A_1,… ,A_n lar yuqorida kursatilgan noma'lum koeffitsientlar usuli orqali aniqlanadi.

3) α harakteristik tenglamaning ikki karrali ildizi bo'lgan holda xususiy y^* echimni

$$y^*=x^2(A_0x^n+A_1x^{n-1}+\ldots+A_n)\,e^{\alpha_k}.$$

ko'rinishda izlab, A_0, A_1,… ,A_n larni noma'lum koeffitsientlar usuli orqali aniqlaymiz.

M i s o l : Ushbu tenglama echilsin:

$$y''-7y'+6y=(x-2)\,e^x.$$

Echimi. Umumiy echimni

$$y=\bar{y}+y^*$$

ko'rinishda qidiramiz. $\bar{y}$ mos bir jinsli tenglamaning umumiy echimidir. Uni topish uchun

$$k^2-7k+6=0$$

harakteristik tenglamaning ildizlarini topamiz: $k_1=1$, $k_2=6$.

Demak, $\bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{6x}$.

Bizning holda $\alpha = k_1 = 1$ bo'lgani uchun y^* xususiy echimni

$$y^* = x(Ax + B)\, e^x$$

ko'rinishda qidiramiz. Bundagi A va B larni topish uchun noma'lum koeffitsientlar usulidan foydalanamiz:

$$y^{*\prime\prime} - 7y^{*\prime} + 6y^* = \left[(Ax^2 + Bx) + (4Ax + 2B) + 2A - 7(Ax^2 + Bx) - 7(2Ax + 2B) + \right.$$

$$\left. + 6(Ax^2 + Bx)\right] e^x = (x-2)\, e^x,$$

yoki $\qquad (-10Ax - 5B + 2A)\, e^x = (x-2)\, e^x,$

$$-10A = 1, \quad -5B + 2A = -2, \quad A = -\frac{1}{10}, \quad B = \frac{9}{25}.$$

Shunday qilib xususiy echim

$$y^* = x\left(-\frac{1}{10}x + \frac{9}{25}\right) e^x$$

va umumiy echim quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{6x} + x\left(-\frac{1}{10}x + \frac{9}{25}\right) e^x.$$

Takrorlash uchun savollar :

1. O'zgarmas koeffitsientli ikkinchi tartibli bir jinslimas chiziqli tenglamalarni ta'riflang.
2. O'zgarmaslarni variatsiyalash usulining moxiyati nimadan iborat?
3. O'zgarmas koeffitsientli ikkinchi tartibli bir jinslimas chiziqli tenglamalarni xususiy echimi maxsus hollada qanday tanlanadi?

<u>Tayanch iboralar:</u> Variatsiyalash usuli, noma'lum koeffitsientlar usuli.

44-mavzu. Differensial tenglamalarning normal sistemasi. Normal sistemani yechishda nomalumlarni yo'qotish usuli.

<u>Ma'ruza rejasi:</u>

1. Differentsial tenglamalar sistemasi.
2. Sistemaning xususiy echimlari.
3. Sistemaning umumiy echimlari.
4. Sistemaning determinanti.
5. Harakteristik tenglama.

Adabiyotlar.

1. Yo.U. Soatov. "Oliy matematika" I qism. Toshkent. O'qituvchi nashriyoti 1992 y. 8 bob, § 22, 479-485 betlar.

2. N.S. Piskunov. Differentsial va integral xisob. II tom. Toshkent, «O'qituvchi», 1974 yil. XIII bob, § 29-30; 110-122 betlar.

Ushbu

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + ... + a_{1n}y_n \\
&\frac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{2n}y_n \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\frac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + ... + a_{nn}y_n
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

differentsial tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin. Bu sistemada a_{ij} koeffitsientlar o'zgarmas sonlarni, x argument va $y_1(x)$, $y_2(x)$,…,$y_n(x)$ izlanayotgan funktsiyalarni ifodalaydi.

TA'RIF: (1) sistema ***o'zgarmas koeffitsientli chiziqli bir jinsli differentsial tenglamalar sistemasi*** deyiladi.

Bu sistemaning xususiy echimini quyidagi ko'rinishda izlaymiz:

$$y_1 = \alpha_1 e^{\kappa x},\ y_2 = \alpha_2 e^{\kappa x},\ \dots,\ y_n = \alpha_n e^{\kappa x} \qquad (2)$$

Bu erdagi $\alpha_1 e^{\kappa x}$, $\alpha_2 e^{\kappa x}$,…, $\alpha_n e^{\kappa x}$ funktsiyalar (1) tenglamalar sistemasini qanoatlantiradigan o'zgarmas α_1 , α_2 ,…, α_n va k sonlarni aniqlash talab kilinadi. Buning uchun ularni (1) sistemaga qo'yib, ushbu tenglamalarni hosil qilamiz:

$$\left.\begin{aligned}
&\kappa\alpha_1 e^{\kappa x} = (a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + ... + a_{1n}\alpha_n)e^{\kappa x} \\
&\kappa\alpha_2 e^{\kappa x} = (a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + ... + a_{2n}\alpha_n)e^{\kappa x} \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\kappa\alpha_n e^{\kappa x} = (a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + ... + a_{nn}\alpha_n)e^{\kappa x}
\end{aligned}\right\}$$

Tenglamalarni $e^{\kappa x}$ ga qisqartiramiz va barcha hadlarini bir tomonga utkazib hamda α_1 , α_2 , …,α_n oldidagi koeffitsientlarni tuplab, quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\left.\begin{aligned}
&(a_{11} - \kappa)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + ... + a_{1n}\alpha_n = 0 \\
&a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - \kappa)\alpha_2 + ... + a_{2n}\alpha_n = 0 \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + ... + (a_{nn} - \kappa)\alpha_n = 0
\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

α_1, α_2, … ,α_n va k larni (3) sistemani qanoatlantiradigan qilib tanlab olamiz. Bu tenglama α_1, α_2, … ,α_n , ga nisbatan chiziqli algebraik tenglamalar sistemasidir. (3) sistemaning determinantini tuzamiz:

$$\Delta(\kappa) = \begin{vmatrix} a_{11} - \kappa \quad a_{12}...a_{1n} \\ a_{21} \quad a_{22} - \kappa ... \, a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} \quad a_{n2}.....(a_{nn} - \kappa) \end{vmatrix} \qquad (4)$$

Agar $\Delta \neq 0$ bo'lsa, u holda (3) sistema faqat

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$

trivial echimga ega bo'ladi va (2) dan (1) sistemaning

$$y_1 = y_2 = \ldots = y_n = 0$$

echimi kelib chiqadi. Bunday echimlar bizni kiziktirmaydi. (1) tenglamalar sistemasining noldan farqli (2) ko'rinishdagi echimlarni kning shunday qiymatlarida hosil qilamizki, bu qiymatlarda (4) determinant nolga aylanadi. Demak, k ni aniqlash uchun quyidagi tenglamaga kelamiz:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\kappa & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\kappa & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\kappa \end{vmatrix} = 0 \qquad (5)$$

Bu tenglama (1) sistemaning ***harakteristik tenglamasi*** deyiladi, uning ildizlari harakteristik tenglamaning ildizlari deyiladi. Bir necha holni ko'rib chiqamiz.

I z o x : Harakteristik tenglamaning ildizlari haqiqiy va har xil.

Harakteristik tenglamaning ildizlarini κ_1, κ_2 ,…, κ_n bilan belgilaymiz. Har bir κ_i ildiz uchun (3) sistemani yozamiz va

$$\alpha_1^{(i)}, \alpha_2^{(i)}, \ldots, \alpha_n^{(i)}$$

koeffitsientlarni aniqlaymiz. Shunday qilib, quyidagilarni hosil qilamiz:

κ_1 ildiz uchun (1) sistemaning echimi

$$y_1^{(1)}=\alpha_1^{(1)} e^{\kappa_1 x}, \quad y_2^{(1)}=\alpha_2^{(1)} e^{\kappa_1 x}, \quad \ldots, y_n^{(1)}=\alpha_n^{(1)} e^{\kappa_1 x},$$

κ_2 ildiz uchun (1) sistemaning echimi

$$y_1^{(2)}=\alpha_1^{(2)} e^{\kappa_2 x}, \quad y_2^{(2)}=\alpha_2^{(2)} e^{\kappa_2 x}, \quad \ldots, y_n^{(2)}=\alpha_n^{(2)} e^{\kappa_2 x};$$

. . . .

κ_n ildiz uchun (1) sistemaning echimi

$$y_1^{(n)}=\alpha_1^{(n)} e^{\kappa_n x}, \quad y_2^{(n)}=\alpha_2^{(n)} e^{\kappa_n x}, \quad \ldots, y_n^{(n)}=\alpha_n^{(n)} e^{\kappa_n x}.$$

Bevosita (1) tenglamaga qo'yish yo'li bilan

$$\begin{cases} y_1 = C_1\alpha_1^{(1)}e^{\lambda_1 x} + C_2\alpha_1^{(2)}e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n\alpha_1^{(n)}e^{\lambda_n x} \\ y_2 = C_1\alpha_2^{(1)}e^{\lambda_1 x} + C_2\alpha_2^{(2)}e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n\alpha_2^{(n)}e^{\lambda_n x} \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ y_1 = C_1\alpha_n^{(1)}e^{\lambda_1 x} + C_2\alpha_n^{(2)}e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n\alpha_n^{(n)}e^{\lambda_n x} \end{cases}$$

funktsiyalar sistemasi ham, bunda $C_1, C_2, \ldots, C_n$ ixtiyoriy o'zgarmas miqdorlar, (1) differentsial tenglamalar sistemasining echimi bo'lishiga ishonch hosil qilish mumkin. Bu (1) sistemaning umumiy echimidir. Bu umumiy echimda o'zgarmas C_1, C_2, …,C_n miqdorlarning shunday qiymatlarini topish mumkinki, bu qiymatlarda echim berilgan boshlang'ich

$$y_1\big|_{x=x_0}=y_{10}, \qquad y_2\big|_{x=x_0}=y_{20}, \ \ldots, \qquad y_n\big|_{x=x_0}=y_{n0}$$

shartlarni qanoatlantiradi. Bunda x_0, y_{10}, y_{20}, … , y_{n0} oldindan berilgan ma'lum sonlardir.

M i s o l: Ushbu

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = 2y_1 + 2y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = y_1 + 3y_2 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasiningumumiy echimini toping.

Echimi. Harakteristik tenglama tuzamiz:

$$\begin{vmatrix} 2-\kappa & 2 \\ 1 & 3-\kappa \end{vmatrix}=0$$

yoki $k^2-5k+4=0$. Bu erdan ildizlar $k_1=1$, $k_2=4$ ekanligini topamiz. Sistema echimini quyidagi ko'rinishda izlaymiz:

$$y_1^{(1)}=\alpha_1^{(1)}e^x, \qquad y_2^{(1)}=\alpha_2^{(1)}e^x,$$

$$y_1^{(2)}=\alpha_1^{(2)}e^{4x}, \qquad y_2^{(2)}=\alpha_2^{(2)}e^{4x},$$

$k_1=1$ ildiz uchun (3) sistemani tuzamiz va $\alpha_1^{(1)}$ va $\alpha_2^{(1)}$ ni aniqlaymiz:

$$\begin{cases}(2-1)\alpha_1^{(1)}+2\alpha_2^{(1)}=0\\ \alpha_1^{(1)}+(3-2)\alpha_2^{(1)}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha_1^{(1)}+2\alpha_2^{(1)}=0\\ \alpha_1^{(1)}+2\alpha_2^{(1)}=0\end{cases}$$

Bu tengliklardan $\alpha_2^{(1)}=-\frac{1}{2}\alpha_1^{(1)}$ ni topamiz. $\alpha_1^{(1)}=1$ desak, $\alpha_2^{(1)}=-\frac{1}{2}$ ni hosil qilamiz.

Shunday qilib, sistemaning echimini hosil kildik:

$$y_1^{(1)}=e^x, \qquad y_2^{(1)}=-\frac{1}{2}e^x.$$

Endi $k_2=4$ ildiz uchun (3) sistemani tuzamiz va $\alpha_1^{(2)}$ va $\alpha_2^{(2)}$ ni aniqlaymiz:

$$\begin{cases}-2\alpha_1^{(2)}+2\alpha_2^{(2)}=0\\ \alpha_1^{(2)}-\alpha_2^{(2)}=0\end{cases}\Rightarrow\{\alpha_1^{(2)}=\alpha_2^{(2)}.$$

$\alpha_1^{(2)}=1$ desak $\alpha_2^{(2)}=1$ bo'ladi. Sistemaning ikkinchi echimini hosil kildik:

$$y_1^{(2)}=e^{4x}, \qquad y_2^{(2)}=e^{4x}.$$

Endi sistemaning umumiy echimini yozamiz:

$$y_1=C_1e^x+C_2e^{4x}$$

$$y_2=-\frac{1}{2}C_1e^x+C_2e^{4x}$$

2-hol. Harakteristik tenglamaning ildizlari har xil, ammo ular orasida kompleks ildizlar ham bor.

Harakteristik tenglamaning ildizlari orasida ikkita kushma kompleks ildiz bo'lsin :

$$\kappa_1=\alpha+i\beta, \quad \kappa_2=\alpha-i\beta$$

Bu ildizlarga ushbu echimlar mos keladi:

$$y_j^{(1)}=\alpha_j^{(1)}e^{(\alpha+i\beta)}, \qquad j=1,2,...,n.$$

$$y_j^{(2)}=\alpha_j^{(2)}e^{(\alpha-i\beta)}, \qquad j=1,2,...,n.$$

$\alpha_j^{(1)}$ va $\alpha_j^{(2)}$ koeffitsientlar (3) tenglamalar sistemasidan aniqlanadi.

Dastlabki sistemaning kompleks echimining haqiqiy qismlari yana echim bo'lishidan foydalanib, quyidagilarni yozishimiz mumkin:

$$\begin{cases} \bar{y}_j^{(1)} = e^{\alpha x}(\lambda_j^{(1)} \cos\beta x + \lambda_j^{(2)} \sin\beta x) \\ \bar{y}_j^{(2)} = e^{\alpha x}(\bar{\lambda}_j^{(1)} \sin\beta x + \bar{\lambda}_j^{(2)} \cos\beta x) \end{cases}$$

Bunda $\lambda_j^{(1)}$, $\lambda_j^{(2)}$, $\bar{\lambda}_j^{(1)}$, $\bar{\lambda}_j^{(2)}$, lar $\alpha_j^{(1)}$ va $\alpha_j^{(2)}$ orqali aniqlanadigan haqiqiy sonlardir. Oxirgi funktsiyalarning mos kombinatsiyalari sistemaning umumiy echimini tashkil etadi.

M i s o l: Ushbu

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = -7y_1 + y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = -2y_1 - 5y_2 \end{cases}$$

sistemaning umumiy echimini toping.

Echimi. Harakteristik tenglamaning ildizlarini topamiz:

$$\begin{vmatrix} -7-\kappa & 1 \\ -2 & -5-\kappa \end{vmatrix} = 0 \qquad \kappa^2+12\kappa+37=0, \quad \kappa_1 = -6+i, \quad \kappa_2 = -6-i$$

$\kappa_1 = -6+i$ ni (3) sistemaga qo'yib, ushbuni topamiz:

$$\alpha_1^{(1)} = 1, \quad \alpha_2^{(1)} = 1+i$$

Demak, $y_1^{(1)} = e^{(-6+i)x}$, $y_2^{(1)} = (1+i)e^{(-6+i)x}$.

$\kappa_1 = -6-i$ ni (3) sistemaga qo'yib, ushbuni topamiz:

$$\alpha_1^{(1)} = 1, \quad \alpha_2^{(1)} = 1-i$$

Demak, $y_1^{(1)} = e^{(-6-i)x}$, $y_2^{(1)} = (1-i)e^{(-6-i)x}$.

Eyler formulasidan foydalanib, quyidagilarni yozamiz:

$$y_1^{(1)} = e^{-6x}\cos x + ie^{-6x}\sin x$$

$$y_2^{(1)} = e^{-6x}(\cos x - \sin x) + ie^{-6x}(\cos x + \sin x)$$

$$y_1^{(2)} = e^{-6x}\cos x - ie^{-6x}\sin x$$

$$y_2^{(2)} = e^{-6x}(\cos x - \sin x) - ie^{-6x}(\cos x + \sin x)$$

Haqiqiy qismlarni ayirib olib, dastlabki tenglamalar sistemasining umumiy echimini

$$y_1 = C_1e^{-6x}\cos x + C_2e^{-6x}\sin x$$

$$y_2 = C_1e^{-6x}(\cos x - \sin x) + C_2e^{-6x}(\cos x + \sin x).$$

ko'rinishda hosil qilamiz.

Takrorlash uchun savollar:

1.O'zgarmas koeffitsientli chiziqli differentsial tenglamalar sistemasini ta'riflang.
2.Differentsial tenglamalar sistemasining umumiy echimini aniqlash tartibini keltiring.

Tayanch iboralar : Differentsial tenglamalar sistemasi, sistemaning xususiy echimlari, sistemaning umumiy echimlari, sistemaning determinanti, harakteristik tenglama.

45 - M A ' R U Z A

LAPLAS ALAMASHTIRILISHI, UNING XOSSALARI ORGINALLAR SINFI, TASVIRLAR SINFI. OPERATSION HISOBNING ASOSIY TEOREMALARI. ORGINALLARNI TASVIR BO'YICHA TIKLASH USULLARI.

Ma'ruza rejasi :

1. Operatsion hisobning maksadi.
2. Original funktsiyaga qo'yilgan talablar.
3. Original bo'lmagan funktsiya.
4. Usish ko'rsatgichi.
5. Original funktsiya va tasvir.
6. Laplas operatori yoki almashtirishi.
7. Tasvirning mavjudlik teoremasi.
8. Originalning yagonalik teoremasi.
9. Xevisayd funktsiyasi va uning tasviri.
10. Ko'rsatgichli funktsiya tasviri.

Adabiyotlar:

1. Shneyder V.E. Oliy matematika kiska kursi. II tom, Toshkent, «O'qituvchi», 1987yil. XIV bob, §1, 319-320 betlar.
2. Piskunov N.S. Differentsial va integral hisob. 2-tom, Toshkent, «O'qituvchi», 1974 yil. XIX bob, §1-2, 436-439 betlar.

Operatsion hisob amaliy matematik analiz metodlaridan biri hisoblanadi. Uning yordamida ko'p hollarda mexanika, elektronika, avtomatika hamda fan va texnikaning boshqa soxalarida uchraydigan masalalarni echish soddalashadi. Operatsion hisob avtomatik sistemalarni hisob qilish va loyixalashga doir bir qator injenerlik metodlarining nazariy asosini tashkil etadi.

Original va tasvir.

T A' R I F: Barcha $t \in R$ da aniqlangan va quyidagi xossalarga ega f(t) funktsiyani ***original*** deb ataymiz:

1. f(t) funktsiya sonlar o'qining istalgan chekli intervalida yo uzluksiz, yo chekli sondagi I tur uzilish nuqtalariga ega;
2. $t<0$ da $f(t)=0$;
3. Shunday $M>0$ va $S_0 \geq 0$ sonlar mavjudki, barcha t lar uchun $|f(t)| < Me^{S_0 t}$.

Har bir f (t) original funktsiyaga

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt \qquad (1)$$

funktsiyani mos keltiramiz. Bunda $p=S+i\tau$ $(S \geq S_0)$ kompleks son, F(p)-kompleks o'zgaruvchili funktsiya bo'ladi. Bu funktsiya boshqacha qilib

$$L\{f(t)\} = F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt$$

kabi yoziladi. F(p) funktsiya f(t) funktsiyaning ***tasviri***, f(t) ga esa F(p) funktsiyaning ***originali*** deyiladi. L ga esa ***Laplas operatori yoki Laplas almashtirishi*** deyiladi.

Laplas operatori originallar to'plamini tasvirlar to'plamiga akslantiradi.

L: f (t) $\rightarrow$ F(p) yoki $L\{f(t)\} = F(p)$ yoki f (t) $\leftrightarrow$ F(p).

Savol tugiladi. Har qanday funktsiya ham original bo'ladimi? Yo'q, faqat yuqoridagi ta'rifning uchala shartini kanoatlantirgan funktsiyalargina original bo'ladi. Masalan, tgt, $\frac{1}{t}$ funktsiyalar original bo'lmaydi, chunki ular t=0 da II tur uzilishga ega.

TEOREMA (Tasvirning mavjudlik teoremasi).Har qanday f(t) original uchun Rep=S>S_0 yarim tekislikda aniqlangan F(p) tasvir mavjuddir. Bu yarim tekislikning har bir nuqtasida F(p) funktsiya istalgan tartibli hosilaga ega. Bundan tashkari, agar Rep=S$\to\infty$ bo'lsa, u holda tasvir F(p)$\to$0.

TEOREMA (Originalning yagonalik teoremasi). Agar F(r) ikkita $f_1(t)$ va $f_2(t)$ originalning tasviri bo'lsa, u holda bu originallar, ular uzluksiz bo'lgan barcha nuqtalarda, o'zaro teng bo'ladilar.

Tasvir va originallar quyidagi xossalarga ega:

Xossa 1. Originalning songa ko'paytmasining tasviri, tasvirning bu songa ko'paytmasiga teng, ya'ni agar f (t) $\leftrightarrow$ F(p) bo'lsa, sf (t) $\leftrightarrow$ sF(p) bo'ladi.

Xossa 2. Bir nechta original algebraik yig'indisining tasviri bu originallar tasvirlarining algebraik yig'indisiga teng, ya'ni agar

$f_1(t) \leftrightarrow F_1(p)$, $f_2(t) \leftrightarrow F_2(p)$ bo'lsa, u holda

$[f_1(t) \pm f_2(t)] \leftrightarrow F_1(p) \pm F_2(p)$ bo'ladi.

Lemma: Agar z=*x*+*iy* kompleks son uchun Rez=*x*>0 va *b* haqiqiy o'zgaruvchi bo'lsa, u holda $\lim\limits_{b\to\infty} e^{-zb} = 0$ bo'ladi.

Ana shu lemmadan foydalanib Xevisayd funktsiyasi deb ataluvchi va $\sigma_0(t)$kabi belgshilanuvchi ushbu funktsiyaningg tasvirini topamiz:

$$\sigma_0(t) = f(t) = \begin{cases} 1, & \text{агар } t \ge 0 \\ 0, & \text{агар } t < 0 \end{cases}$$

Xevisayd funktsiya original funktsiya ta'rifini tula kanoatlantiradi.

$$L\{f(t)\} = L\{\sigma_0(t)\} = \int_0^{+\infty} 1 \cdot e^{-pt} dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^b 1 \cdot e^{-pt} dt = \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{e^{-pt}}{p} \right]_0^b =$$

$$= -\frac{1}{p}\left(\lim_{b\to\infty} e^{-pb} - 1\right) = \frac{1}{p}. \text{ Демак } \sigma_0(t) \leftrightarrow \frac{1}{p} \quad \text{yoki} \quad 1 \leftrightarrow \frac{1}{p};$$

Endi ko'rsatgichli funktsiya $e^{\alpha t}$ ning tasvirini topamiz. Uni

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{агар } t < 0 \\ e^{\alpha t}, & \text{агар } t \ge 0 \end{cases}$$

original funktsiya ko'rinishida yozamiz.

$$L\{f(t)\} = L\{e^{\alpha t}\} = \int_0^{+\infty} e^{\alpha t} \cdot e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} e^{(\alpha - p)t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(p-\alpha)t} dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-(p-\alpha)t} dt =$$

$$= \frac{\lim\limits_{b\to\infty} \left[e^{-(p-\alpha)t}\right]_0^b}{-(p-\alpha)} = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{e^{-(p-\alpha)b}}{-(p-\alpha)} + \frac{1}{p-\alpha} \right] = \frac{1}{p-\alpha}; \qquad (\mathrm{Re}(p-\alpha) > 0).$$

Demak f (t)= $e^{\alpha t} \leftrightarrow \dfrac{1}{p-\alpha}$ ёки $e^{-\alpha t} \leftrightarrow \dfrac{1}{p+\alpha}$.

Ana shundan foydalanib *sinwt* va *coswt* funktsiyalar tasvirlarini topamiz.

Buning uchun Eyler formulasini eslaymiz:

$$e^{iy}=\cos y+i\sin y,\; e^{-iy}=\cos y-i\sin y.$$

Ularni hadma-had qushsak

$$e^{iy}+e^{-iy}=2\cos y,\;\; \cos y=\frac{1}{2}(e^{iy}+e^{-iy}).$$

$$e^{iy}-e^{-iy}=i2\sin y,\;\; \sin y=\frac{1}{2i}(e^{iy}-e^{-iy}).$$

bo'ladi. U holda

$$\text{L}\{\sin wt\}=\frac{w}{P^2+w^2},\qquad \text{L}\{\cos wt\}=\frac{P}{P^2+w^2}.$$

TEOREMA. O'zgarmaslarga ko'paytirilgan bir nechta original funktsiyalar yig'indisining tasviri shu original funktsiyalar tasvirlarining mos o'zgarmaslarga ko'paytmalari yig'indisiga teng, ya'ni

$$f(t)=\sum_{i=1}^{n}c_i f_i(t) \quad ,$$

bunda c_i o'zgarmaslar va $L\{f_i\}=F_i(p)\leftrightarrow f_i(t)$ bo'lsa, u holda

$$L\{f\}=F(p)=\sum_{i=1}^{n}c_iF_i(p)=\sum_{i=1}^{n}c_iL\{f_i\}$$

bo'ladi.

I s b o t : $f(t)=\sum_{i=1}^{n}c_i f_i(t)$ berilgan bo'lib, har bir $f_i(t)$ funktsiya original funktsiya bo'lsin. U holda

$$F(p)=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-pt}dt=\int_0^{+\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}c_i f_i(t)e^{-pt}\right)dt=\sum_{i=1}^{n}c_i\int_0^{+\infty}f_i(t)e^{-pt}dt=\sum_{i=1}^{n}c_iF_i(p).$$

M i s o l . f (t)=3sin4t−2cos5t bo'lsin. Tasvirni topamiz:

$$F(p)=L\{f(t)\}=L\{3\sin 4t-2\cos 5t\}=3L\{\sin 4t\}-2L\{\cos 5t\}=$$

$$=3\cdot\frac{4}{p^2+16}-2\cdot\frac{p}{p^2+25}=\frac{12}{p^2+16}-\frac{2p}{p^2+25}.$$

Ushbu funktsiyalar ketma-ketligini qaraymiz:

$$\delta_n(t)=\begin{cases}0, & \text{t}\notin[0,\frac{1}{\text{n}}]\\ \text{n}, & \text{t}\in[0,\frac{1}{\text{n}}]\end{cases}$$

Bu funktsiyalar ketma-ketligining n→∞ bo'lgandagi limiti Dirakning impuls funktsiyasi deyiladi va $\delta(t)$ kabi belgilanadi. Bu funktsiyani t≠0 nuqtalarda nolga teng, t=0 nuqtada esa cheksiz qiymatni qabul qiladigan funktsiya deb qarash mumkin. Masalan, portlash jarayoni Dirak funktsiyasi orqali ifodalanadi.

Dirak funktsiyasi tasvirini topish uchun dastlab $\delta_n(t)$ funktsiyalar tasvirlvrini topamiz:

$$L\{\delta_n\}=\int_0^{\infty}\delta_n(t)e^{-pt}dt=\int_0^{\frac{1}{n}}ne^{-pt}dt=\frac{n}{p}(1-e^{-\frac{p}{n}}).$$

Unda II ajoyib limitdan foydalanib,

$$L\{\delta\}=\lim_{n\to\infty}\delta_n(t)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{p}(1-e^{-\frac{p}{n}})=1$$

natijani olamiz.

TEOREMA. Agar f(t)↔ F(p) bo'lsa, $f(at)\leftrightarrow\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)$ bo'ladi.

Isbot: L{f(t)}=F(p) , L{f(at)}= $\int_0^{+\infty}f(at)e^{-pt}dt=$

$$=\begin{bmatrix} at=z \\ dt=\dfrac{dz}{a}\end{bmatrix}=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-\frac{pz}{a}}=\frac{1}{a}\int_0^{+\infty}f(t)e^{-\frac{pz}{a}}dz=\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)$$

Bu teorema ***o'xshashlik teoremasi*** deb yuritiladi.

Masalan, $L\{\cos t\}=\dfrac{p}{p^2+1}$ ekanligidan,

$$L\{\cos wt\}=\frac{1}{w}\cdot\frac{\frac{p}{w}}{\left(\frac{p}{w}\right)^2+1}=\frac{1}{w^2}\cdot\frac{p}{\frac{p^2+w^2}{w^2}}=\frac{p}{p^2+w^2}$$

natijani olamiz.

Darajali funktsiyaning tasviri.

$f(t)=t^n$ bo'lsin. $L\{t^n\}=\int_0^{+\infty}t^n\cdot e^{-pt}dt$ tasvirni topish uchun bu integralni n marta bo'laklab integrallashga to'g'ri keladi. Shuning uchun oddiy yo'ldan boramiz:

$$f(t)=t\Rightarrow L\{t\}=\int_0^{+\infty}t\cdot e^{-pt}dt=\lim_{b\to\infty}\int_0^b t\cdot e^{-pt}dt=\begin{bmatrix} u=t,\ dv=e^{-pt}dt \\ du=dt,\ \ v=-\dfrac{1}{p}e^{-pt}\end{bmatrix}=$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{t}{p}\cdot e^{-pt}\Big|_0^b+\int_0^b\frac{e^{-pt}}{p}dt\right]=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{b\cdot e^{-pb}}{p}+0\right)+\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{p^2}\right)\cdot e^{-pt}\Big|_0^{+\infty}=$$

$$=0-\frac{1}{p^2}\lim_{b\to\infty}(e^{-pt}-1)=-\frac{1}{p^2}(0-1)=\frac{1}{p^2};$$

Xuddi shunday $f(t)=t^2$ deb olib $L\{t^2\}=\dfrac{2}{p^3}$ ni hosil qilamiz. Demak,

$f(t)=t^n$ bo'lsa, $L\{t^n\}=\dfrac{n!}{p^{n+1}}$ bo'ladi.

teorema (Siljish teoremasi).

$$f(t) \leftrightarrow F(t) \Rightarrow e^{-\alpha t} f(t) \leftrightarrow F(p+\alpha) \ .$$

Isboti. Laplas almashtirishidan foydalanamiz. $L\{f(t)\} = F(p)$ ekanligini e'tiborga olgan holda

$$L\{e^{-\alpha t} f(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-(p+\alpha)t} dt = F(p+\alpha).$$

Xuddi shunday, agar $f_1(t) = e^{\alpha t} f(t)$ bo'lsa

$$L\{f_1(t)\} = L\{e^{\alpha t} f(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{\alpha t} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-(p-\alpha)t} dt = F(p-\alpha) \text{ bo'ladi.}$$

M i s o l. $f(t) = \sin wt$ tasviri bo'yicha $e^{-\alpha t} \sin wt$ funktsiyaning tasviri $\dfrac{w}{(p+\alpha)^2 + w^2}$ ekanligini topamiz.

Xuddi shunday $f(t) = \cos wt$ tasviri bo'yicha $e^{\alpha t} \cos wt$ ning tasviri $\dfrac{p-\alpha}{(p+\alpha)^2 + w^2}$ bo'ladi.

teorema (Kechiqish teoremasi). Agar $\tau > 0$ ва $f(t) \leftrightarrow F(p)$ bo'lsa, u holda $f(t-\tau) \leftrightarrow e^{-p\tau} F(p)$ bo'ladi.

Isbot: Laplas almashtirishidan foydalanamiz:

$$L\{f(t-\tau)\} = \int_0^{+\infty} f(t-\tau) e^{-p\tau} dt = \begin{bmatrix} t-\tau = z \\ t = z+\tau \\ dt = dz \end{bmatrix} = \int_0^{+\infty} f(z) e^{-p(z+\tau)} dz =$$

$$= \int_0^{+\infty} f(z) \cdot e^{-pz} \cdot e^{-p\tau} dz = e^{-p\tau} \int_0^{+\infty} f(z) \cdot e^{-pz} dz = e^{-p\tau} \cdot F(p);$$

M i s o l . . f(t) = (t-2)^3 bo'lsa, uning tasvirini toping.

Echish: Kechiqish teoremasi va $t^3 \leftrightarrow \dfrac{3!}{p^4}$ ekanligidan foydalanib,

$$f(t-\tau) \leftrightarrow e^{-p\tau} F(p) \quad \Rightarrow \quad (t-2)^3 \leftrightarrow e^{-2p} \cdot \frac{3!}{p^4} = \frac{6e^{-2p}}{p^4} \ .$$

natijani olamiz.

Takrorlash uchun savollar: :

1. Tasvirning chiziqlilik xossasini ayting.
2. Dirak funktsiyasi qanday aniqlanadi?
3. Dirak funktsiyasi tasviri qanday ko'rinishda bo'ladi?
4. O'xshashlik teoremasini ayting.
5. coswt va sinwt funktsiyalar tasvirini yozing.
6. Darajali funktsiyaning tasviri nimaga teng?
7. f (t)= $(1+t)^2$ ning tasvirini toping.

8. Siljish teoremasini ayting.
9. Kechiqish teoremasi qanday ifodalanadi?

Tayanch iboralar: Tasvirning chiziqlilik xossasi, Dirak funktsiyasi, o'xshashlik teoremasi, siljish teoremasi, kechiqish teoremasi.

46 - M A ' R U Z A

DIFFERENSIAL TENGLAMALAR VA TENGLAMALAR SISTEMASINI OPERATSION HISOB YORDAMIDA YECHISH.

Ma'ruza rejasi:

1. Hosilaning tasviri.
2. Ikkinchi va yuqori tartibli hosilalar tasvirlari.
3. Tasvirni differentsiallash.
4. Originalni integrallash.
5. Kompozitsiyalash teoremasi.
6. Originallar va ularning tasvirlari jadvali.

Adabiyotlar:

1. Shneyder V.E. Oliy matematika kiska kursi. II tom, Toshkent, «O'qituvchi», 1987yil. XIV bob, §4-5; 327-331 betlar.
2. Piskunov N.S. Differentsial va integral hisob. 2-tom, Toshkent, «O'qituvchi», 1974 yil. XIX bob, §7-9,13; 443-448, 456-458 betlar.

Original funktsiyalarni differentsiallash.

TEOREMA. Agar differentsiallanuvchi funktsiya tasviri f(t) $\leftrightarrow F(p)$ va $f'(t)$ hosila original funktsiya bo'lsa, u holda

$$f'(t) \leftrightarrow pF(p) - f(0)$$

formula o'rinli bo'ladi.

I s b o t . Laplas almashtirishidan foydalanamiz:

$$L\{f'(t)\} = \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt}dt = \begin{bmatrix} u = e^{-pt} \quad , \quad du = -p \cdot e^{-pt}dt \\ dv = f'(t)dt \quad , \quad v = f(t) \end{bmatrix} = \lim_{в\to\infty}\int_0^{в} f'(t)e^{-pt}\,\mathrm{dt} =$$

$$= \lim_{в\to\infty}\left[f(t)\cdot e^{-pt}\Big|_0^{в} + p\int_0^{в} f'(t)e^{-pt}\,\mathrm{dt}\right] = \lim_{в\to\infty}\left[f(в)\cdot e^{-pв} - f(0) + p\int_0^{в} f'(t)e^{-pt}\,\mathrm{dt}\right] =$$

$$= p\int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt - f(0) = pF(p) - f(0).$$

Xususan f(0)=0 bo'lsa, $f'(t) \leftrightarrow pF(p)$ bo'ladi.

Xuddi shunday yo'l bilan

$$f''(t) = (f'(t))' = p(pF(p) - f(0)) - f'(0) = p^2F(p) - pf(0) - f'(0),$$

$$f'''(t) \leftrightarrow p[p^2F(p) - pf(0) - f'(0)] - f''(0) =$$

$$= p^3F(p) - p^2 f(0) - pf'(0) - f''(0)$$

formulalarni hosil etamiz. Hususiy holda *f*(0)=0, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$ bo'lsa,

$$f''(t) \leftrightarrow p^2F(p, \quad f'''(t) \leftrightarrow p^3F(p)$$

bo'ladi. Umumiy holda

$$f^{(n)} \leftrightarrow p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - p^{n-3}f''(0) - pf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

bo'ladi.

Agar, $f(0) = f'(0) = f''(0) = ...f^{(n-1)}(0) = 0$ bo'lsa, u holda

$$f^{(n)}(t) \leftrightarrow p^nF(p)$$

bo'ladi.

Mavjudlik teoremasida ko'rsatilishicha $p \to \infty$ da har qanday originalning tasviri nolga intiladi.

Shuning uchun agar $f'(t) \leftrightarrow F_1(p)$ bo'lsa, u holda $\lim_{p\to\infty} F_1(p) = 0$ bo'ladi. Ammo $f'(t) \leftrightarrow pf(p) - f(0)$ formulaga ko'ra

$$\lim_{p\to\infty} F_1(p) = \lim_{p\to\infty}[pF(p) - f(0)] = \lim_{p\to\infty} pF(p) - f(0) = 0$$

Oxirgi tenglikdan. $f(0) = \lim_{p\to\infty} pF(p)$ Bu formula f(t) originalning boshlang'ch qiymatini originalni hisoblab o'tirmasdan uning F(p) tasviri bo'yicha topishga imkon beradi.

M i s o l. $F(p) = \dfrac{p}{p^2+1}$ tasvir berilgan bo'lsa, f(0) boshlang'ch qiymatni toping. $f(0) = \lim_{p\to\infty} pF(p)$ ekanligidan

$$f(0) = \lim_{p\to\infty}\frac{pp}{p^2+1} = \lim_{p\to\infty}\frac{p^2}{p^2+1} = \lim_{p\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{p^2}} = \frac{1}{1+0} = 1$$

Demak , f(0)=1 ekan.

<u>Tasvirni differentsiallash</u>.

TEOREMA: Agar $F(p) \leftrightarrow f(t)$ bo'lsa, unda

$$(-1)^nF^{(n)}(p) \leftrightarrow t^nf(t)$$

formula o'rinli bo'ladi.

Bu teorema Isbotini keltirib utirmaymiz.

<u>Originallarni integrallash.</u>

TEOREMA. Agar $f(t) \leftrightarrow F(p)$ bo'lsa, u holda $\int_0^t f(x)dx \leftrightarrow \dfrac{F(p)}{p}$ bo'ladi.

I s b o t . $\int_0^t f(x)dx = g(t)$ bo'lsin. Uning original funktsiya ekaniniko'rsatish mumkin.

$g(0) = \int_0^0 f(x)dx = 0$ bo'lgani uchun va $g(t) \leftrightarrow \Phi(p)$ ekanligini e'tiborga oladigan bo'lsak, $g(t) \leftrightarrow p\Phi(p)$ bo'ladi.

Biroq $g'(t) = \dfrac{d\int_0^t f(x)dx}{dt} = f(t) \leftrightarrow F(p)$

Demak, pΦ(p)= F(p), bundan $\Phi(p)=\frac{F(p)}{p}$ bo'ladi.

Demak, $\int_0^t f(x)dx \leftrightarrow \frac{F(p)}{p}$.

TEOREMA (Kompozitsiyalash teoremasi): Agar berilgan ikkita original tasvirlari $f_1(t)\leftarrow F_1(p)$, $f_2(t)\leftarrow F_2(p)$ bo'lsa, u holda

$$\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau \leftrightarrow F_1(p)F_2(p) \quad \text{bo'ladi.}$$

Olingan barcha natijalarni birlashtirib, ushbu tasvirlar jadvalini hosil qilamiz.

№	Original funktsiya f(t)	Tasvir funktsiya F(p)
1	$\sigma_0(t)$ (Xevisayd funktsiyasi)	$\frac{1}{p}$
2	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p-\alpha}$
3	$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{p+\alpha}$
4	$\sin wt$	$\frac{w}{p^2+w^2}$
5	$\cos wt$	$\frac{p}{p^2+w^2}$
6	$shwt=\frac{e^{wt}-e^{-wt}}{2}$	$\frac{w}{p^2-w^2}$
7	$chwt=\frac{e^{wt}+e^{-wt}}{2}$	$\frac{p}{p^2-w^2}$
№	**Original funktsiya f(t)**	**Tasvir funktsiya F(p)**
8	$e^{-\alpha t}\sin wt$	$\frac{w}{(p+\alpha)^2+w^2}$
9	$e^{-\alpha t}\cos wt$	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+w^2}$
10	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
11	$e^{-\alpha t}t^n$	$\frac{n!}{(p+\alpha)^{n+1}}$

12	$e^{\alpha t} t^n$	$\frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$
13	$t \sin wt$	$\frac{2pw}{(p^2+w^2)^2}$
14	$t \cos wt$	$\frac{p^2-w^2}{(p^2+w^2)^2}$
15	$f(\alpha t)$	$\frac{1}{\alpha} F(\frac{p}{\alpha})$
16	$e^{-wt} f(t)$	$F(p+w)$
17	$f'(t)$	$pF(p) - f(0)$
18	$f''(t)$	$p^2 F(p) - pf(0) - f'(0)$
19	$f(t-\tau)$	$e^{-p\tau} F(p)$
20	$\delta(t)$ **(**Dirak funktsiyasi)	1
21	$\int_0^t f(x)dx$	$\frac{F(p)}{p}$
22	$\int_0^t f_1(s) f_2(t-s)ds$	$F_1(p)F_2(p)$

M i s o l . $\frac{d^2x}{dt^2} + x = f(t)$ differentsial tenglamaning $x(0) = x'(0) = 0$ shartni qanoatlantiruvchi echimini toping.

Differentsial tenglama yordamchi tenglamasini tuzamiz

$$\bar{x}(p)(p^2+1) = F(p) \quad \text{bo'ladi.} \quad f(t) \leftarrow F(p).$$

U holda $\bar{x}(p) = \frac{F(p)}{p^2+1} = \frac{1}{p^2+1} \cdot F(p)$ deb qaraydigan bo'lsak,

$$\frac{1}{p^2+1} \to \sin t \quad , \quad f(t) \leftarrow F(p) \quad \text{ligini hisobga olsak}$$

$$x(t) = \int_0^t f(\tau) \sin(t-\tau) d\tau \quad \text{bo'ladi.}$$

Takrorlash uchun savollar:

1. Hosilaning tasviri qanday topiladi ?
2. Tasvirni differentsiallanganda original qanday o'zgaradi?
3. Originalni integrallashda tasvir qanday bo'ladi ?
4. Kompozitsiyalash teoremasini ayting.
5. Boshlang'ch shartni qanday topish mumkin ?
6. Tasvirlar jadvalini yozing.

Tayanch iboralar : Hosilaning tasviri, originalning integrali, kompozitsiyalash xossasi.

47 - M A ‘ R U Z A

XUSUSIY HOSILALI DIFFERENSIAL TENGLAMALAR HAQIDA TUSHUNCHA. IKKINCHI TARTIBLI XUXUSIY HOSILALI DIFFERENSIAL TENGLAMALAR VA ULARNING KLASSIDIKATSIYASI. ASOSIY MASALANING QO’YILISHI KOSHI MASALASI, CHEGARAVIY MASALALAR VA ARALASH MASALALAR.

Ma’ruza rejasi:

1. Matematik fizikaning ikkinchi tartibli hususiy hosilali asosiy differentsial tenglamalarining umumiy ko’rinishi.
2. Matematik fizika tenglamalarining asosiy turlari.
3. Giperbolik turdagi tenglamalar.
4. Parabolik turdagi tenglamalar.
5. Elliptik turdagi tenglamalar.
6. Tor tebranishlari tenglamasini keltirib chiqarish**.**

Adabiyotlar:

1. Yo.U. Soatov. “Oliy matematika” II qism. Toshkent. «O’qituvchi» nashriyoti, 1994 y. 13-bob, § 1-2, 188-191 betlar.
2. Piskunov N.S. Differentsial va integral hisob. 2-tom, Toshkent, «O’qituvchi», 1974 yil. XVIII bob, §1-2, 397-400 betlar.

Matematik fizikaning ikkinchi tartibli asosiy differentsial tenglamalari ikki o’zgaruvchili noma'lum u=u(x,y) funktsiya va uning hususiy hosilalariga nisbatan chiziqli bo’lib, umumiy holda quyidagi ko’rinishda bo’ladi:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}+Fu=f(x,y).$$

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}+Fu=0$$

tenglama ***bir jinsli*** deyiladi. Bir jinsli tenglamada B^2 -4AC>0 bo’lsa u ***giper*** bolik, B^2 -4AC =0 bo’lsa–***parabolik***, B^2 -4AC <0 bo’lsa–***elliptik*** turdagi tenglama deyiladi.

Matematik fizikaning asosiy tenglamalari deb quyidagi ikkinchi tartibli hususiy hosilali differentsial tenglamalarga aytiladi:

I. To’lqin tenglamasi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (1)$$

Bu tenglama torning ko’ndalang tebranishi, sterjenning buylama tebranishi, o’tkazgichda elektr tebranishlari, valning aylanma tebranishi, gaz tebranishi jarayonlarini ifoda qiladi. Bu tenglama giperbolik tipdagi tenglamalarning eng soddasi hisoblanadi.

II.Issiqlik o’tkazuvchanlik yoki Fure tenglamasi.

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (2)$$

Bu tenglama issiqlikning tarqalish, gaz va suyuqliklarning govak muxitda filtrlanish jarayonlarini hamda ehtimollar nazariyasining ba'zi masalalarini o’rganishga olib keladi. Bu tenglama parabolik tipdagi tenglamalarning eng soddasi hisoblanadi.

III. Laplas tenglamasi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (3)$$

Bu tenglama elektr va magnit maydonlari, statsionar issiqlik xolati, gidrodinamika, diffuziya masalalarini o'rganishga olib keladi. Bu tenglamaga elliptik tipdagi tenglamalarning eng soddasi deyiladi.

Demak, matematik fizika tenglamalari uchta tipdan iborat ekan. Ko'rilgan tenglamalarda u=u(x,y) ikki o'zgaruvchili funktsiyalarni ifodalaydi. Bu tenglamalar uch va undan ortiq o'zgaruvchili funktsiyalar uchun ham ko'rilishi mumkin. Masalan, to'lqin tenglamasi uchta o'zgaruvchi bilan

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),$$

Fure tenglamasi

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),$$

Laplas tenglamasi

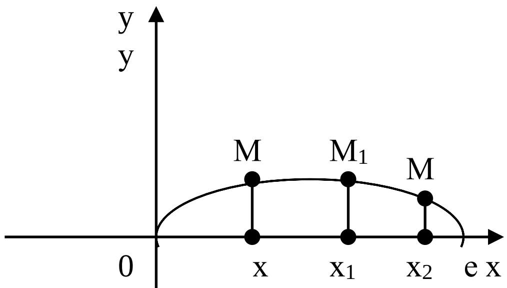
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

ko'rinishda yoziladi.

Tor tebranishi tenglamasi.

Matematik fizikada tor deganda tarang ingichka ip tushuniladi. Aytaylik *l* uzunlikdagi torning ikki tarafi x=0 va x=*l* nuqtalarga maxkamlangan bo'lsin (1-rasm).

Agar torning biror nuqtasini bosib qo'yib yuborsak, yoki uni biroz tortib yuborsak u harakatga keladi, ya'ni tebrana boshlaydi. Bizning asosiy masalamiz istalgan vaqtda torning joylashgan ko'rinishini aniqlash va torning har bir nuqtasi harakat qonunini aniqlashdan iborat. Boshlang'ch paytda tor OX o'qida yotibdi deb faraz qilib, uning juda kichik chetlanishini qaraymiz. Torning harakati OX o'qiga perpendikulyar yo'nalishda bo'ladi. Bu holda torning tebranish jarayoni u(x; t) funktsiya orqali bo'ladi. Juda kichik tebranishda $\overset{\cup}{M_1 M_2}$ yoyning uzunligi OX o'qdagi proektsiyasiga teng bo'ladi: $\left|\overset{\cup}{M_1 M_2}\right| = x_2 - x_1$



1-расм

Bu erda torning zuriqishi hamma nuqtalarida bir xil bo'ladi deb qaraymiz va uni T bilan belgilaymiz. Torning MM' bo'lagini qaraymiz. Bu bo'lak chetlarida torga urinmalar bo'yicha $\vec{T}$ kuchlar ta'sir qiladi. Aytaylik, urinmalar OX o'qi bi-lan φ va φ +Δφ burchaklar hosil qilsin. U holda MM' bo'lakcha ta'sir qiluvchi OY o'qdagi proektsiyasi (2-rasm). $T\sin(\varphi + \Delta\varphi) - Ttg\varphi$

Burchak φ juda kichik bo'lganda sinφ =tgφ bo'ladi. Shuni e'tiborga oladigan bo'lsak, (AMS dan)

$$\sin\varphi = \frac{AC}{-T}, \quad \sin(\varphi + \Delta\varphi) = \frac{BK}{T}$$

AB-AC=T*sin*(φ+Δφ)-T*sin*φ≈T*tg* (φ+Δφ)-T*tg*φ=T$\left(\frac{\partial u(x+\Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right) =$

$$=T\frac{\partial^2 u(x+\theta\Delta x,t)}{\partial x^2}\Delta x \approx T\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\Delta x. \quad . \qquad (0<\theta<1).$$

Biz bu erda f(b)-f(a)=f′(c)(b-a), $c\in(a;b)$, ya'ni Lagranj teoremasini ishlatdik MM' bo'lakka qo'yilgan tashqi kuchlarni ham hisobga olish kerak bo'ladi, ya'ni inertsiya kuchlarini tenglashtirish kerak. Torning chiziqli zichligi ρ bo'lsin, u holda bo'lak massasi ρΔx bo'ladi. Bo'lak tezlanishi $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ ga teng bo'ladi. Dalamber printsipiga asosan

$$\rho\Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x \qquad (\Delta x\neq 0)\Rightarrow(:\Delta x)$$

va $\frac{T}{\rho}=a^2$ bilan beligilaymiz. Natijada harakat tenglamasi $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ga ega bo'lamiz. Bu tenglama to'lqin tenglamasi – tor tebranishi tenglamasi deyiladi. Noma'lum funktsiya u(x; t) yana chegaraviy va boshlang'ch shartlarni ham kanoatlantirishi kerak bo'ladi.

Fizik xodisalarni matematik nuqtai nazardan ifodalashda usha xodisani bir qiymatli ifodalash uchun kerakli bo'ladigan shartlarni hisobga olish etarli bo'ladi. Torning ko'ndalang tebranishlari haqidagi masalani qaraylik Torning ikki cheti maxkamlangan . Demak,

$$u(0,t)=0,\ u(l,t)=0 \qquad (1)$$

shart bajarilishi kerak. (1) ga ***chegaraviy shart*** deyiladi. Torning tebranishi uning boshlang'ch ko'rinishidan va nuqtalardagi tezliklarining taksimlanishidan bog'liq bo'ladi, ya'ni

$$u(x,t_0)=\varphi(x),\ \frac{\partial u(x,t_0)}{\partial t}=\psi(x) \qquad (2)$$

shartga bog'liq bo'ladi. (2) ***boshlang'ch shart*** deyiladi.

Demak, tor tebranishi masalasida qushimcha shartlar chegaraviy (1) va boshlang'ch (2) shartlardan iborat bo'ladi. Ikkala (1) va (2) shartlar birgalikda ***chegaraviy shartlar*** ham deb ataladi.

Keyinchalik biz shuni ko'rsata olamizki, bu shartlar $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ tor tebranishi tenglamasini echish uchun tula etarli bo'ladi.

Agar torning chetki nuqtalari biror qonun bo'yicha harakatlansa chegaraviy shart

$$u(0;t)=M_1(t),\ u(l;t)=M_2(t) \qquad (3)$$

ko'rinishda bo'ladi.

Agar bizni juda qisqa vaqt oraligidagi jarayon qiziqtirsa, ya'ni chegaralar bor- yo'qligi ahamiyatga ega bo'lmasa, u holda quyidagicha masala qo'yish mumkin:

Masala: Quyidagi

$$U_{tt}=a^2U_{xx}+f(x;t) \qquad -\infty<x<+\infty,\ t>0$$

tenglamaning

$$U(x;0)=\varphi(x),\ \ U_t(x;0)=\psi(x) \qquad -\infty<x<+\infty$$

boshlang'ch shartlarni qanoatlantiruvchi echimi topilsin. Ana shu masalani to'lqin tenglamasi uchun ***Koshi masalasi*** deyiladi.

Umuman chegaraviy masala quyidagicha qo'yiladi:

Masala: Ushbu $0\le x\le l,\ \ t\ge 0$ sohada aniqlangan va

$$U_{tt}=a^2U_{xx}+f(x,t)\ \ 0<x<l,\ \ t>0$$ tenglamani va

$U(0,t)=\mu_1(t),\ \ U(l,t)=\mu_2(t)\quad (t>0)$ chegaraviy shartni hamda

$U(x;0)=\varphi(x),\ U_t(x;0)=\psi(x)\quad (0<x<l)$ boshlang'ch shartlarni qanoatlantiruvchi U(x,t) funktsiya topilsin. Yuqorida aytib o'tilgan Koshi masalasini quyidagicha yozish mumkin.

Masala: Ushbu $U_{tt}=a^2U_{xx}+f(x,t)\quad -\infty<x<+\infty,\ \ t>0$ tenglamaning boshlang'ch shartlarni qanoatlantiruvchi U(x,t) funktsiya topilsin.

Isbot qilish mumkinki, U(x,t) funktsiya yagona bo'ladi, xuddi shunday yana shuni Isbotlash mumkinki f(x; t) funktsiyaning kichik o'zgarishiga, Koshi masalasi echimining kichik o'zgarishi mos keladi, agar albatta soxa t bo'yicha chegaralangan bo'lsa. Bu erdan shuni xulosa qilib aytish mumkinki, to'lqin tenglamasi uchun Koshi masalasi, korrekt qo'yilgan masala bular ekan. Korrekt qo'yilmagan masalada albatta yagona echim va f(x; t) funktsiyaning kichik o'zgarishiga, echim U(x,t) ning kichik o'zgarishi mos kelishi buzilar ekan.

Yuqoridagilardan xulosa qilib korrekt masalaga quyidagicha ta'rif berish mumkin.

T A' R I F. Matematik masala korrekt qo'yilgan deyiladi agar :

1) Masala echimi mavjud bo'lsa;
2) Masala yagona echimga ega bo'lsa;
3) Masala echimi berilgan shartlarga uzluksiz bog'liq bo'lsa:

3) shartni ba'zi ***xollarda turgunlik***, ya'ni echimning turgunlik sharti ham deb atashadi.

Nokorrekt masalaga misol keltiramiz. Laplas tenglamasi

$U_{xx}+U_{yy}=0$ нинг $U(x;0)=\varphi(x),\ U_y(x;0)=\psi(x)$ boshlang'ch shartlarni qanoatlantiruvchi U(x;y) echimini topish masalasi Laplas tenglamasi uchun Koshi masalasi deyiladi. Ushbu

$$U^{(1)}(x;y)=0,\quad U^{(2)}(x;y)=\frac{1}{\lambda}\sin\lambda x ch\lambda y$$

funktsiyalar Laplas tenglamasini kanoatlantiradi.

$$U^{(1)}(x;y)=0,\ \ U_y^{(1)}(x;0)=0$$

$$U^{(2)}(x;y)=\varphi(x)=\frac{1}{\lambda}\sin\lambda x$$

$$U_y^{(2)}(x;0)=\psi(x)=\sin\lambda x\cdot sh\lambda y\Big|_{y=0}=0$$

kurinib turibdiki .

Qo'yilayotgan boshlang'ch shartlar keraklicha katta λ larda bir-biridan juda kam farq qiladi. Ammo echim $U^{(2)}(x;y)$ λ ning qiymati qanday bo'lmasin, keraklicha katta bo'lishi mumkin. Chunki giperbolik kosinus funktsiya ishtirok qilmoqda.

Bu esa 3) shartning bajarilmasligini bildiradi. Demak, Laplas tenglamasi uchun qo'yilgan Koshi masalasi korrekt emas ekan.

Takrorlash uchun savollar::

1. Chegaraviy shart deb qanday shartga aytiladi?
2. Boshlang'ch shart deb qanday shartga aytiladi?
3. Chegaraviy masalaga ta'rif bering.
4. Koshi masalasiga ta'rif bering.
5. Korrekt va nokorrekt masalalarga ta'rif bering.

Tayanch iboralar: Boshlang'ch shart, chegaraviy shart, korrekt qo'yilgan va kuyilmagan masala, Koshi masalasi, Laplas tenglamasi uchun Koshi masalasi.

48 - M A ' R U Z A

TOR TEBRANISH MASALARI, ISSIQLIK TARQALISH TENGLAMALARI UCHUN KOSHI MASALASI. MATEMATIK FIZIKA TENGLAMALARINING YECHISHNING TO'R USULI.

Ma'ruza rejasi:

1. Tor tenglamasi uchun boshlang'ch shart.
2. Tor tenglamasi uchun chegaraviy shart.
3. Chetki shart.
4. To'lqin tenglamasi uchun Koshi masalasi.
5. Korrekt masala.
6. Laplas tenglamasi uchun Koshi masalasi.
7. Tor tebranishi tenglamasini Dalamber usuli bilan echish**.**

Adabiyotlar:

1. Yo.U. Soatov. "Oliy matematika" II qism. Toshkent. «O'qituvchi» nashriyoti, 1994 y. 13-bob, § 3, 191-197 betlar.
2. Piskunov N.S. Differentsial va integral hisob. 2-tom, Toshkent, «O'qituvchi», 1974 yil. XVIII bob, §4-5, 406-410 betlar.

Biz to'lqin tenglamasi qanday jarayonlar qonuniyatini urganadi degan savolga javob berishda simlarda elektr tebranishlari qonunlarini ham urganadi deb o'tgan edik.

Simlarda elektr toki u(x;t), kuchlanish v(x;t) kattaliklar bilan belgilanadi. Ular simdagi nuqtaning koordinatasiga va vaqtga bog'liq bo'ladi. Simning Δx bo'lagini qaraylik. Bu bo'lakdagi kuchlanishning kamayishi

$$v(x;t)-v(x+\Delta x;t)\approx -\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x$$

ga tengbo'ladi.

Bu ikkita kattalik iRΔx va $\frac{\partial i}{\partial t}L\Delta x$ lar yigindisiga teng bo'ladi. Bu erda R qarshilik, L-induktivlik koeffitsenti bo'lib, ular iRΔx qarshilik, $\frac{\partial i}{\partial t}L\Delta x$ induktivlikni bildiradi.

Minus belgi olinganiga sabab shuki, simda tok v kuchlanishning usishiga teskari yo'nalishda bo'ladi.

Demak, $-\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x = iR\Delta x+\frac{\partial i}{\partial t}L\Delta x$, Δx ga qisqartiramiz,

$$-\frac{\partial v}{\partial x}=iR+\frac{\partial i}{\partial t}L \quad \text{yoki} \quad \frac{\partial v}{\partial x}+iR+\frac{\partial i}{\partial t}L=0 \quad (1)$$

Agar Δx bo’lakdan chikuvchi va unga kiruvchi toklar ayirmasining Δt vaqt ichidagi qiymatini e'tiborga oladigan bo’lsak, u

$$[i(x;t)-i(x+\Delta x;t)]\,\Delta t\approx -\frac{\partial i}{\partial x}\Delta x\cdot\Delta t$$

ga teng bo’ladi va u Δx bo’lakni zaryadlashga $C\Delta x\frac{\partial v}{\partial t}\Delta t$ ni va AvΔxΔt ni izolyatsiyaga sarf qiladi (bu erda A izolyatsiya koeffitsenti). U holda

$$-\frac{\partial i}{\partial x}\Delta x\cdot\Delta t=C\Delta x\cdot\frac{\partial v}{\partial t}\cdot\Delta t+A\cdot v\cdot\Delta x$$

$\Delta x\cdot\Delta t$ga qisqartiramiz.

$$-\frac{\partial i}{\partial x}=C\cdot\frac{\partial v}{\partial t}+A\cdot v \quad \text{yoki} \quad \frac{\partial i}{\partial x}+C\cdot\frac{\partial v}{\partial t}+A\cdot v=0 \qquad (2)$$

va (2) tenglamalarga telegraf tenglamalari deyiladi.

(1) va (2) tenglamalarni sistema qilib, faqat i(x;t) va v(x;t) funktsiyalari bor differentsial tenglamaga kelish mumkin. Bu uchun (2) tenglamani x bo’yicha differentsiallaymiz, (1) ni esa t bo’yicha differentsiallaymiz va uni C ga ko’paytiramiz.

$$\frac{\partial i}{\partial x}+c\cdot\frac{\partial v}{\partial t}+Av=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial^2 i}{\partial x^2}+c\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial t\partial x}+A\frac{\partial v}{\partial x}=0 \qquad (3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}+iR+\cdot\frac{\partial i}{\partial t}L=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial^2 v}{\partial x\partial t}+R\cdot\frac{\partial i}{\partial t}+\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}L=0$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial t}+R\cdot\frac{\partial i}{\partial t}+\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}L=0 \quad\Rightarrow\quad C\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial t}+CR\cdot\frac{\partial i}{\partial t}+CL\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}=0 \qquad (4)$$

(3)dan, (4) ni hadma-had ayiramiz.

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2}+A\frac{\partial v}{\partial x}-CR\frac{\partial i}{\partial t}-CL\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}=0 \qquad (5)$$

(1) tenglamadan $\frac{\partial v}{\partial x}$ ni topib, (5) ga qo’yamiz, $\frac{\partial v}{\partial x}=-iR-\frac{\partial i}{\partial t}L$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}+A(-iR-\frac{\partial i}{\partial t}L)-CR\cdot\frac{\partial i}{\partial t}-CL\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}=0 \qquad \text{ёки}$$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}=CL\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}+(CR+AL)\frac{\partial i}{\partial t}+ARV \qquad (6).$$

Xuddi shunga o’xshash holda

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=CL\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+(CR+AL)\frac{\partial v}{\partial t}+ARV \quad (7)$$

ni hosil qilish mumkin. Agar A=0 , R=0 deb oladigan bo’lsak

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = CL\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = CL\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad a^2 = \frac{1}{CL} \text{ деб белгиласак},$$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 i}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2},$$

formulalarga ega bo'lamiz. Ular uchun chegaraviy shartlar

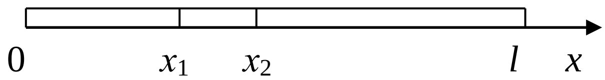
$$u(0;t) = 0, \quad u(l;t) = 0 \quad \text{ва } u(x;0) = f(x), \quad u_t(x;0) = \varphi(x)$$

ko'rinishda qo'yiladi.

Endi issiqlikning tarqalish tenglamasini qaraymiz.

Uzunligi l ga teng bir jinsli sterjenni qaraymiz. Bu sterjenning yon sirtlari issiqlik o'tkazadigan va ko'ndalang kesim barcha nuqtalarida temprratura bir xil bo'lsin. Ana shu xolatda sterjenda issiqlikning tarkalish jarayonini urganamiz.

Sterjenning bir uchi OX o'qining O nuqtasiga, ikkinchi uchi $x=l$ nuqtasiga tushadigan qilib joylashtiramiz, hamda t momentda sterjen kesimidagi temperatura u (x; t) bo'lsin deb faraz qilamiz. Tajriba shuni ko'rsatadiki abtsissasi x ga teng bo'lgan kesimdan vaqt birligi ichida oqib o'tgan issiqlik miqdori



$$Q=-k\cdot\frac{\partial u}{\partial x}S \quad (1)$$

formula bilan aniqlanadi.Bunda S –sterjen kesimining yuzi , k –issiqlik o'tkazuvchanlik koeffitsentidir. x_1 va x_2 lar orasiga joylashgan $x_2 - x_1 = \Delta$ sterjen bo'lagini qaraylik. Bu bo'lakning Δt vaqt ichida oqib o'tgan issiqlik miqdori

$$\Delta Q_1 = -k\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=x_1}\cdot S\Delta t \quad (2) \quad \text{ga}$$

x_2 ga teng bo'lgan kesimidan Δt vaqt ichida oqib turgan issiqlik miqdori

$$\Delta Q_1 = -k\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=x_2}\cdot S\Delta t \quad (3) \quad \text{ga teng bo'ladi.}$$

Issiqlikning sterjenning x_1 nuqtasidan x_2 nuqtasigacha tarqalgandagi

$\Delta Q_1 - \Delta Q_2$ miqdori Δt vaqt ichida

$$\Delta Q_1 - \Delta Q_2 = \left[-k\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=x_1}\cdot S\Delta t\right] - \left[-k\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=x_2}\cdot S\Delta t\right] \approx k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x S\Delta t \quad (4)$$

Bu issiqlik oqimi Δt vaqt ichida sterjen bo'lagi temperaturasini Δu miqdorga oshirganligini inobatga olsak, u holda

$\Delta Q_1 - \Delta Q_2 = c\rho\Delta x\cdot S\cdot\Delta u$ yoki

$$\Delta Q_1 - \Delta Q_2 \approx S\rho\cdot\Delta x\cdot S\cdot\frac{\partial u}{\partial t}\Delta t \quad (5) \text{ bo'ladi.}$$

c- sterjen moddasining issiqlik xajmi, ρ- sterjen moddasining zichligi, $\rho\Delta x\cdot S$- sterjen bo'lagi massasi. (4) va (5) formulalarni tenglashtirib

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x S\Delta t = c\rho\cdot\Delta x\cdot S\cdot\frac{\partial u}{\partial t}\Delta t \quad \text{yoki}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{k}{c\rho}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad a^2=\frac{k}{c\rho}\quad \text{deb olsam}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\quad (6)\,\text{formulaga ega bo'lamiz.}$$

Bu formula bir jinsli sterjenda issiqlikning tarqalish tenglamasi bo'ladi. Bu tenglama echimi tula aniqlangan bo'lishi uchun u (x; t) funktsiya chegaraviy shartlarni kanoatlantirishi kerak. Ular har xil bo'lishi mumkin . Birinchi chegaraviy masalaga mos shartlar quyidagicha bo'ladi:

$u(x;0)=\varphi(x)$, $u(0;t)=\psi_1(t)$, $u(l;t)=\psi_2(t)$

$u(x;0)=\varphi(x)$ shartni ko'pincha fizik shart deb ataydilar, bu shart shundan dalolat beradiki, sterjenning har xil kesimlarida t=0 da φ(x) ga teng temperatura berilgan deyiladi. $u(0;t)=\psi_1(t)$, $u(l;t)=\psi_2(t)$ chegaraviy shartlar shuni ko'rsatadiki sterjenning chetki nuqtalarida $\psi_1(t)$ va $\psi_2(t)$ tempraturalar mavjud deyiladi:

M a s a l a : Ushbu $\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ tenglamaning 0<t<T sohadagi

$u(x;0)=\varphi(x)$, $u(0;t)=\psi_1(t)$, $u(l;t)=\psi_2(t)$

shartlarni qanoatlantiruvchi u (x; t) echimi topilsin.

O'zgaruvchilarni ajratish yoki Fure usuli ko'pgina matematik fizika tenglamalarini echishda qo'llaniladi.

Misol. Ushbu $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (1)tenglamaning

$u(0;t)=0$, (2) , $u(l;t)=0$ (3) , $u(x;0)=f(x)$ (4) , $u_t=(x;0)=\varphi(x)$ (5)

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi u (x; t) echimi topilsin. u (x; t)≠0 echimni bittasi t ga, ikkinchisi x ga bog'liq funktsiyalar ko'paytmasi ko'rinishida izlaymiz va ularni keraklicha tartibda differentsiallash mumkin deb hisoblaymiz.

$$u(x;t)=X(x)T(t) \qquad (6)$$

Kerakli hususiy hosilalarni topib (1) ga qo'yamiz.

$X(x)T''(t)=a^2X''(x)T(t)$

Buni $a^2X(x)T(t)$ ga bo'lamiz.

$$\frac{T''}{a^2T}=\frac{X''}{X} \qquad (7)$$

Chap tarafda faqat t ga bog'liq , ung tarafda esa faqat x ga bog'liq differentsial tenglamalar turibdi. Tenglik faqat shu holda o'rinli bo'ladiki, ular biror o'zgarmas songa teng bo'lsa. Shu o'zgarmasni -λ bilan (λ>0) bilan belgilaymiz.

$$\frac{T''}{a^2T}=\frac{X''}{X}=-\lambda$$

$X''+\lambda X=0$ (8) , $T''+a^2\lambda T=0$ (9)

Bu tenglamalarni umumiy echimlari

$$X(x)=A\cos\sqrt{\lambda}\,x+B\sin\sqrt{\lambda}\,x \qquad (10)$$

$$T(t)=C\cos a\sqrt{\lambda}\,t+D\sin a\sqrt{\lambda}\,t \qquad (11)$$

bu erda A, B, C, D lar o'zgarmaslar.

Topilganlarni (3) ga qo'yib,

$$u(x;t)=(A\cos\sqrt{\lambda}\,x+B\sin\sqrt{\lambda}\,x)(C\cos a\sqrt{\lambda}\,t+D\sin a\sqrt{\lambda}\,t)$$

natijani hosil qilamiz.

A va B o'zgarmaslarni shunday tanlaymizki, natijada (2) va (3) shartlar bajarilsin.$T(t)\neq 0$ bo'lgani uchun

$$0=u\,(0;\,t)=A+B\cdot 0\,,\quad 0=A\cos\sqrt{\lambda}\,l+B\sin\sqrt{\lambda}\,l$$

A=0, $B\sin\sqrt{\lambda}\,l=0$, $B\neq 0$ bo'lishi kerak, aks holda A=0 ekanligidan X(x)=u(x; t)=0 bo'ladi.

$$\sin\sqrt{\lambda}\,l=0,\quad \sqrt{\lambda}=\frac{n\pi}{e}\quad (12)\ \ (n=1,\,2,\,3,\,\dots)$$

$$X(x)=\sin\frac{n\pi}{e}x\qquad (13)$$

bunga chegaraviy masalaning xos funktsiyasi, λ ning qiymatlariga esa xos qiymatlar deyiladi.

$$T(t)=C\cos\frac{an\pi}{e}t+D\sin\frac{an\pi}{e}t\quad (n=1,\,2,\,\dots)\quad (14)$$

$$u_n(x;\,t)=\sin\frac{n\pi}{e}x\left(C_n\cos\frac{an\pi}{e}t+D_n\sin\frac{an\pi}{e}t\right)\qquad (15)$$

Bu erda har bir n ning qiymati uchun, shu jumladan har bir (uchun (8) va (9) ifodalarni (1) tenglamalarni qo'yib (2) va (3) shartlarni qanoatlantiruvchi echimlarni hosil qilamiz, shuning uchun un(x; t) bilan belgilaymiz.

$u\,(x;\,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x;t)$ deb belgilash kiritamiz. U holda echim

$$u\,(x;\,t)\ \left(C_n\cos\frac{an\pi}{e}t+D_n\sin\frac{an\pi}{e}t\right)\sin\frac{n\pi}{e}x\qquad (16)$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu echim ham (2) va (3) chegaraviy shartlarni kanoatlantiradi. Yana shu narsa kurinib turibdiki (10) echim (1) differentsial tenglamaning echimi bo'ladi, faqat va faqat shu holdaki C_n va D_n koeffitsentlar shunday bo'lishi kerakki (10) kator yakinlashganda, uni ikki martadan x va t bo'yicha differentsiallaganda ham hosil bo'lgan kator yakinlashuvchi bo'lishi kerak. u (x; t) echim (2) va (3) boshlang'ch shartlarni ham kanoatlantirishi kerak. Bu ishni biz C_n va D_n koeffitsentlarni tanlash orqali amalga oshiramiz. u (x; t) funktsiya (4) va (5) boshlang'ch shartlarni kanoatlantirishi kerak. Birinchidan :

t=0 da u (x; t)=f(x) bo'lishi kerak,

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{n\pi}{e}x\qquad (17)$$

Agar f(x) (17) ko'rinishda bo'ladigan bo'lsa, uni (0;e) oraliqda Fur'e qatoriga yoyish mumkin, agar

$$C_n=\frac{2}{e}\int_0^e f(x)\sin\frac{n\pi}{e}dx\qquad (18)$$

bo'lsa. Ikkinchidan (10) echimni t bo'yicha differentsiallaymiz va t=0 da $\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}D_n\frac{an\pi}{e}\sin\frac{n\pi}{e}x$ ga ega bo'lamiz, uning uchun Fur'e koeffitsentlarini topamiz,

$$D_n\frac{an\pi}{e}=\frac{2}{e}\int_0^e\varphi(x)\sin\frac{n\pi}{e}xdx\ \text{ёки}\ \ D_n=\frac{2}{an\pi}\int_0^e\varphi(x)\sin\frac{n\pi}{e}xdx\quad (19).$$

Demak, (16) trigonometrik qatorning C_n va D_n koeffitsentlari (18) va (19) formulalar bilan aniqlangan bo'lib, uzi ikki marta x va t bo'yicha hadma-had differentsiallanuvchi bo'lsa, u albatta (1) tenglamaning (2), (3), (4), (5) chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi u (x; t) echimi bo'ladi.

Xulosa. Demak , $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ tor tebranishi tenglamasining
u (x; 0)=f(x) , u_t(x; 0)=φ(x) , u (0; t)=0 , u (*l*; t)=0
chegaraviy shartni qanoatlantiruvchi echimi

$$u(x;t)=\sum_{n=1}^{\infty}(C_n \cos\frac{an\pi}{e}t + D_n \sin\frac{an\pi}{e}t)\sin\frac{n\pi}{e}x$$

ko'rinishda bo'lib, koeffitsentlari

$$C_n = \frac{2}{e}\int_0^e f(x)\sin\frac{n\pi}{e}xdx \ , \quad D_n = \frac{2}{an\pi}\int_0^e \varphi(x)\sin\frac{n\pi}{e}xdx$$

formulalar bo'yicha aniqlanar ekan.

Aytaylik bizga chegaralanmagan sterjen berilgan bo'lib, har xil kesimlariga boshlang'ch momentda tempratura berilgan bo'lsin va keyingi momentlarda sterjenda tempraturaning taksimlanishini aniqlash kerak bo'lsin. Agar sterjen Ox o'qi bilan ustma-ust tushadigan bo'lsa, masala quyidagicha bo'ladi**:**

M a s a l a . Ushbu $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (1) differentsial tenglamaning -∞<x<+∞, t>0, sohada u(x,0)=φ(x) (2) boshlang'ch shartni qanoatlantiruvchi echimi topilsin.
Bu masala echimini topishda Fure usulidan foydalanamiz (1) differentsial tenglama hususiy echimini ikkita funktsiya ko'paytmasi ko'rinishida izlaymiz:

u(x; t)=X(x)(T(t) (3)

Kerakli hususiy hosilalarni topib, ularni (1) ga qo'yamiz va
X (x)T′(t)=a^2 X′′(x)T(t) yoki

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2 \qquad (4)$$

tenglamani hosil qilamiz.
Oxirgi tenglikni bu ko'rinishda yozish har bir nisbatning na x ga, na t ga bog'liq bo'lishidan kelib chiqadi.U holda

$$T' + a^2\lambda^2 T = 0 \quad (5), \ \ X'' + \lambda^2 X = 0 \quad (6)$$

differentsial tenglamalarga ega bo'lamiz. Ularni echib

$$T = C \cdot e^{-a^2\lambda^2 t} \ \text{ва} \quad X = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x$$

larni hosil qilamiz. U holda topilganlarni (3) ga qo'ysak

$$u_\lambda(x;t) = e^{-a^2\lambda^2 t}\left[A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x\right] \qquad (7)$$

echimni hosil qilamiz. Bu erda har bir λ ning qiymati uchun, yangi bir echim hosil qilingani uchun A va B lar λ ga bog'liq bo'ladi.

$$u(x;t) = \sum_\lambda u_\lambda(x;t) = \sum_\lambda e^{-a^2\lambda^2 t}\left[A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x\right]$$

(7) ifodani λ parametr bo'yicha (0;+∞) da integralaymiz

$$\int_0^\infty u_\lambda(x;t)d\lambda = \int_0^{+\infty} e^{-a^2\lambda^2 t}\left[A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x\right]d\lambda$$

$$u(x;t) = \int_0^{+\infty} e^{-a^2\lambda^2 t}\left[A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x\right]d\lambda \qquad (8)$$

ni hosil qilamiz.
Bu echim (2) shartni kanoatlantirishi uchun A(() va V(() larni aniqlaymiz. Oxirgi echimda t=0 deb olsak

$$u(x;0)=\varphi(x)=\int_0^{+\infty}\left[A(\lambda)\cos\lambda x+B(\lambda)\sin\lambda x\right]d\lambda \qquad (9)$$

Faraz qilaylik, φ(x) funktsiya Fur'e integral orqali ifodalanadigan bo'lsin.

$$\varphi(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}[\varphi(\alpha)\cos\lambda(\alpha-x)]d\alpha\right)\mathrm{d}\lambda \quad \text{ёки}$$

$$\varphi(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[(\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\alpha)\cos\lambda\alpha d\alpha)\cos\lambda x+(\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\alpha)\sin\lambda\alpha d\alpha)\sin\lambda x\right]d\lambda \qquad (10)$$

(9) va (10) ifodalarning o'ng tomonlarini tenglashtiramiz va

$$A(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\alpha)\cos\lambda\alpha d\alpha, \qquad B(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\alpha)\sin\lambda\alpha d\alpha \qquad (11)$$

ni hosil qilamiz. Natijada A(λ) va B(λ) larni (8) ga qo'ysak

$$u(x;t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}e^{-a^2\lambda^2 t}\left[(\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\alpha)\cos\lambda\alpha d\alpha)\cos\lambda x+(\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\alpha)\sin\lambda\alpha d\alpha)\sin\lambda x\right]d\lambda=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}e^{-a^2\lambda^2 t}\left[(\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\alpha)(\cos\lambda\alpha\cos\lambda x+\sin\lambda\alpha\sin\lambda x)d\alpha\right]d\lambda=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}e^{-a^2\lambda^2 t}\,(\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\alpha)\cos(\alpha-x)\lambda d\alpha)d\lambda$$

integrallash tartibini o'zgartiramiz.

$$u(x;t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}[\varphi(\alpha)(\int_0^{+\infty}e^{-a^2\lambda^2 t}cos\lambda(\alpha-\lambda)d\lambda]d\alpha \qquad (12)$$

Oxirgiifodani yana o'zgartiramiz, bu uchun ichki integralni hisoblaymiz,

$$\int_0^{+\infty}e^{-a^2\lambda^2 t}cos\lambda(\alpha-\lambda)d\lambda=\frac{1}{a\sqrt{t}}\int_0^{+\infty}e^{-z^2}\cos\beta zdz \qquad (13)$$

bu erda biz

$$z=a\lambda\sqrt{t} \qquad \text{ва} \qquad \beta=\frac{\alpha-x}{a\sqrt{t}} \qquad (14)$$

belgilashlar kiritdik.

U holda $z^2=a^2\lambda^2 t$, $-z^2=-a^2\lambda^2 t$, $\beta\cdot z=a\lambda\sqrt{t}\cdot\frac{\alpha-x}{a\sqrt{t}}=\lambda(\alpha-x)$

bo'ladi.
Oxirgi integralni

$$K(\beta)=\int_0^{\infty}e^{-z^2}\cos\beta zdz \qquad (15)$$

bilan belgilaymiz va uni (bo'yicha differentsiallaymiz, u holda

$$K'(\beta) = -\int_0^{\infty} e^{-z^2} z \sin\beta z dz$$

bo'ladi. Bo'laklab integrallaymiz

$$K'(\beta) = \begin{bmatrix} u = \sin\beta z, & du = \beta cos\beta z dz \\ \mathrm{dv} = \mathrm{z} \cdot e^{-z^2}, & \mathrm{v} = -\frac{1}{2} e^{-z^2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\Big[e^{-z^2} \sin\beta z\Big]_0^{+\infty} - \frac{\beta}{2}\int_0^{+\infty} e^{-z^2} z \cos\beta z dz =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\beta z}{e^{-z^2}} - \frac{\sin 0}{e^0}\right] - \frac{\beta}{2}\int_0^{+\infty} e^{-z^2} z\cos\beta z dz = -\frac{\beta}{2}\int_0^{+\infty} e^{-z^2} z \cos\beta z dz$$

$K'(\beta) = -\frac{\beta}{2} K(\beta)$ differentsial tenglamaga ega bo'lamiz. Oxirgi ifodani integrallaymiz, ya'ni differentsial tenglamani echamiz.

$$K'(\beta) + \frac{\beta}{2} K(\beta) = 0: \qquad \frac{dK(\beta)}{d\beta} = -\frac{\beta}{2} K(\beta)$$

$$\frac{dK(\beta)}{d\beta} = -\frac{\beta}{2} d\beta \Leftrightarrow \int \frac{dK(\beta)}{d\beta} = -\frac{1}{2}\int \beta d\beta,\ \ln\left|K(\beta)\right| = -\frac{1}{2}\frac{\beta^2}{2} + \ln c$$

$K(\beta) = ce^{-\frac{\beta^2}{4}}$ ga ega bo'lamiz, s ni aniqlaymiz, bu uchun $K(\beta) = \int_0^{\infty} e^{-z^2} \cos\beta z dz$ dan foydalanamiz. $K(0) = \int_0^{\infty} e^{-z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$

$$K(0) = c \cdot e^{-0} = c = \frac{\sqrt{\pi}}{2}; \quad c = \frac{\sqrt{\pi}}{2};$$

u holda

$$K(\beta) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{\beta^2}{4}} \tag{17}$$

teng bo'ladi. Oxirgi topilgan ifodani (15) integraldan foydalanib (13) ga qo'yamiz.

$$\int_0^{+\infty} e^{-a^2\lambda^2 t} \cos\lambda(\alpha - x) d\lambda = \frac{1}{a\sqrt{t}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{\beta^2}{4}}$$

o'ng tarafga (ning o'rniga (14) ifodani qo'yamiz, natijada

$$\int_0^{+\infty} e^{-a^2\lambda^2 t} \cos\lambda(\alpha - x) d\lambda = \frac{1}{2a} \cdot \sqrt{\pi} e^{-\frac{(\alpha - x)^2}{4a^2 t}}$$

bu ifodani (12) echimga eltib qo'yamiz va

$$u(x;t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\alpha) e^{-\frac{(\alpha - x)^2}{4a^2 t}} d\alpha \tag{19}$$

ni hosil qilamiz.

Bu formula, Puasson integrali deyiladi va u chegaralanmagan sterjen uchun qo'yilgan (1), (2) masalaning echimi bo'ladi. Yuqorida qo'yilgan masalani ba'zi Adabiyotlarda Koshi-Dirixle masalasi ham deb yuritiladi. Demak, (19) echimni Koshi-Dirixle masalasining echimi deyiladi.

Takrorlash uchun savollar: .

1. Chegaralanmagan sterjen deganda nimani tushunasiz?
2. $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ tenglama uchun boshlang'ch shart qanday ko'rinishda bo'ladi?
3. (1) tenglama echimi qanday ko'rinishda yoziladi va u qanday nomlanadi?
4. Puasson integrali qanday ko'rinishda bo'ladi?
5. Koshi-Dirixle masalasi qanday ko'rinishda bo'ladi.

<u>Tayanch iboralar:</u> Chegaralanmagan sterjen, boshlang'ch shart.

49 - M A ' R U Z A

EHTIMOLLAR NAZARIYASINING ASOSIY TUSHUNCHALARI, KAMBINATORIKA ELEMENTLARI. XODISALAR ALGEBRASI. EHTIMOLNING KLASSIK TA'RIFI. GEOMETRIK EHTIMOLLIK.

<u>M a ' r u z a r e j a s i :</u>

1. Kombinatorik masalalar.
2. Kombinatorika predmeti.
3. Kombinatorikaning qo'shish qoidasi.
4. Kombinatorikaning ko'paytirish qoidasi.
5. Kombinatsiya ta'rifi va uni hisoblash formulasi.
6. Urin almashtirish ta'rifi va uni hisoblash formulasi.
7. Urinlashtirish ta'rifi va uni hisoblash formulasi.
8. Nyuton binomi.
9. Ba'zi bir kombinatorik ayniyatlar.

Adabiyotlar:

[10] II bob § 8-11 [12] I bob § 7

<u>T A ' R I F 1 :</u> Biror chekli to'plam elementlari ichidan ma'lum bir xossaga ega bo'lgan elementlardan iborat qism to'plamlarni tanlab olish yoki to'plam elementlarini ma'lum bir tartibda joylashtirish bilan bog'liq masalalar **kombinatorik masalalar** deyiladi.
<u>T A ' R I F 2 :</u> To'plamlar nazariyasining kombinatorik masalalar bilan shug'ullanadigan qismi **kombinatorika** deyiladi.

Masalan, o'nta talabani ikki kishilik partali sinfga necha xil usulda o'tkazish mumkinligi, molekulada atomlar qanday usullarda birlashishi mumkinligi (ximiya), oqsil moddalarda aminokislotalarning qanday tartiblarda joylashtirish mumkinligi (biologiya), turli bloklardan iborat mexanizmda bu bloklarni turlicha tartiblarda birlashtirish (konstruktorlik), bir necha dala uchastkalarida turli xil ekinlarini har xil tartibda ekish (agronomiya), ehtimolliklar nazariyasining turli masalalarini echishda natijalarni u yoki bu guruhlarini kurish kombinatorik masalalarga Misol bo'ladi va kombinatorikani ham matematikada, ham insonning boshqa faoliyatlarida kullanilishini ko'rsatadi.

Kombinatorikada qo'shish va ko'paytirish qoidasi deb ataluvchi ikkita asosiy qoida mavjud. Ularni ifodalash uchun dastlab to'plamlar nazariyasiga doir bir teoremani keltiramiz.

TEOREMA : Agarda A va V chekli to'plamlar bo'lib, ulardagi elementlar soni n(A) va n(B) bo'lsa, u holda $A\bigcup V$ to'plamdagi elementlar soni $n(A\bigcup V)$quyidagicha topiladi:

$$n(A\bigcup V)= n(A)+ n(V), \text{ agarda } A\bigcap V= \varnothing \text{bo'lsa},$$

$$n(A\bigcup V)= n(A)+ n(V)- n(A\bigcap V), \text{agarda } A\bigcap V\neq\varnothing \text{ bo'lsa.}$$

Bu teoremadan kombinatorikaning qo'shish qoidasi kelib chiqadi

<u>Qo'shish qoidasi</u> : Agarda biror α tanlovnin (α)usulda, β tanlovni esa n(β) usulda amalga oshirish mumkin bo'lsa va bu erda α ni ixtiyoriy tanlash usuli β ni ixtiyoriy tanlash usulidan farq kilsa, u holda «α yoki β» tanlovni amalga oshirish usullari soni

$$n(\alpha \text{ yoki}\beta) = n(\alpha) + n(\beta)$$

formula bilan topiladi.

M i s o l : Korxonada 10 erkak va 8 ayol xodim ishlaydi. Shu korxonadan bitta xodimni necha xil usulda tanlab olish mumkin?

<u>Echish*:*</u> α -erkak xodimni tanlash, β - ayol xodimni tanlash bo'lsin. Unda

$$n(\alpha) = 10,\ n(\beta) = 8 \text{ va bitta xodimni}$$

$$n(\alpha \text{yoki}\beta) = n(\alpha) + n(\beta) = 10+8 = 18$$

usulda tanlash mumkin.

<u>Ko'paytirish qoidasi.</u> Agarda biror α tanlovnin (α) usulda,β tanlovnin (β)usulda amalga oshirish mumkin bo'lsa, u holda «α va β» tanlovni (yoki (α,β) juftlikni) amalga oshirish usullari soni

$$n(\alpha \text{ va } \beta) = n(\alpha)\, n(\beta)$$

formula bilan topiladi.

Masalan, korxonada 10 erkak va 8 ayol ishlasa, ulardan bir erkak va bir ayol xodimdan iborat juftlikni $n(\alpha \text{va } \beta) = 10 \cdot 8 = 80$usulda tanlash mumkin.

M i s o l : 10 talabadan iborat guruhga ikkita yo'llanma berildi. Bu yo'llanmalarni necha xil usulda tarkatish mumkin ?

<u>Echish *:*</u> α Iyo'llanmani, β esa II yo'llanmani tarkatish usullari bo'lsin. Unda n (α) = 10 va n (β) = 9, chunki bitta talabaga I yo'llanma berilganda II yo'llanmaga 9 talaba ega bo'lishi mumkin. Demak, ikkita yo'llanmani tarkatishlar sonin (α va β) = 10 · 9 = 90 bo'ladi.

Umumiy holda $\alpha_1, \alpha_2 \ldots\alpha_m$ tanlovlarni mos ravishda $n(\alpha_1), n(\alpha_2), \ldots, n(\alpha_m)$ usullarda amalga oshirish mumkin bo'lsa,

$$n(\alpha_{1 \text{ yoki}}\ \alpha_2 \text{ yoki}\ldots\text{yoki}\alpha_m) = n(\alpha_1)+ n(\alpha_2)+\ldots+n(\alpha_m),$$

$$n(\alpha_1 \text{ va } \alpha_2 \text{ va}\ldots\text{va } \alpha_m) = n(\alpha_1) \cdot n(\alpha_2) \cdot\ldots\cdot n(\alpha_m)$$

formulalar o'rinli bo'ladi.

<u>T A ' R I F 3 :</u> n ta elementli to'plamning k (k ≤ n) ta elementli ixtiyoriy qism to'plami n ta elementdan k tadan olingan **kombinatsiya** deyiladi va ularning soni C_n^k kabi belgilanadi.

Faqat elementlarning joylashish tartibi bilan farq qiladigan barcha qism to'plamlar bitta kombinatsiya hisoblanadi

Kombinatsiyalarda elementlarning joylashish tartibi ahamiyatga ega emas va bu qism to'plamlar bir-biridan kamida bitta elementi bilan farq qilishi kerak .

Masalan,{a,v,s} n=3elementli to'plamdan ikkita elementli kombinatsiyalar {a;v}, {a;s}, {v;s} bo'ladi . Bu erda {v;a}={a;v}, {s;a}={a;s}, {v;s}={s;v} deb hisoblanadi

Umumiy holda quyidagi formula o'rinli:

$$S_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad (1)$$

Bu erda n! (en faktorial) = 1 · 2 · 3 · …· n va 0! = 1 deb olinadi

M i s o l : Beshta odamdan uch kishidan iborat komissiyani

$$S_5^3 = \frac{5!}{3!\cdot 2!} = 10$$

usulda tuzish mumkin:

T A ' R I F 4 : n ta elementdan iborat to'plamning elementlarini joylashish tartibini uzgartirish natijasida hosil bo'lgan n ta elementli ixtiyoriy to'plam urin almashtirish deb ataladi va ularning soni R_n kabi belgilanadi.

M i s o l
: 1) n = 2 => {a;v},{v;a}=> R_2=2
2) n = 3 =>{a;v;s},{a;s;v},{s;a;v},{v;a;s},{v;s;a},{s;v;a}=> R_3=6

Umumiy holda n elementli urin almashtirishlar soni uchun

$$R_n = n! \qquad (2)$$

formula o'rinli.

M i s o l : Navbat kutib turgan 5 ta odamni R_5= 5! = 120 usulda navbatga joylashtirish mumkin.

T A ' R I F 5 : n ta elementlardan iborat to'plamning k ta elementdan iborat qism to'plamlari bir-biridan yoki elementlari, yoki elementlarning joylashish tartibi bilan farq kilsa, ular n ta elementdan k tadan **urinlashtirish** deb ataladi va ularning soni A_n^k kabi belgilanadi.

M i s o l : 1) {a;v;s} n=3, k=2 =>{a;v},{a;s},{v;s},{v;a},{s;a},{s;v}=>A_4^2=6.

2) {a;v;s;d} n=4, k=3 =>{a;v;s},{a;s;v},{v;a;s},{s;a;v},{s;v;a} …=> A_4^3= 16.

Umumiy holda urinlashtirishlar soni quyidagicha topiladi:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \qquad (3)$$

M a s a l a : Talaba 8 kunda 4 ta imtixon topshirishi kerak. Buni necha xil usulda amalga oshirish mumkin?

Echish *:* Kunlarni 1,2,3, … ,8 kabi nomerlab chiksak, imtixonlar kuyilish kunlari {1;2;3;4}, {1;3;2;5} kabi turtliklardan iborat va ularning soni

$$A_8^4 = 1680$$

S_n^k sonlari yordamida quyidagi formulani yozish mumkin:

$$(a+v)^n = S_n^0\, a^n v^0 + S_n^1\, a^{n-1} v^1 + \ldots + S_n^k\, a^{n-k} v^k + \ldots + S_n^n\, a^0 v^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k \quad (4)$$

Bu **Nyuton binomi** formulasi deyiladi, S_n^k esa binomial koeffitsentlar deb ataladi. Nyutondan oldin bu formulani natural daraja uchun ***Umar Xayyom*** (1048-1131), ***Giyosiddin ali - Qushchi*** (1430) ham bilishgan. Nyutonning xizmati sho'qi, u (4) formulani nafaqat natural n daraja uchun, balkim kasr darajalar uchun ham o'rinli ekanligi ko'rsatgan.

Nyuton binomidan va ta'rifdan S_n^k uchun quyidagi kombinatorik ayniyatlar kelib chiqadi:

1) a = v = 1 $\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$ 2) a=1, v= -1 $\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0$

3) $C_n^k = C_n^{n-k}$ 4) $C_n^0 = C_n^n = 1.$

Bu ayniyatlarning to'g'riligini tekshirish talabalarga xavola qilinadi

Xodisa tushunchasi ehtimolliklar nazariyasining boshlang'ch tushunchalaridan biri bo'lib hisoblanadi va shuning uchun ta'riflanmaydi.

T A ' R I F 1: Ma'lum bir shartlar majmuasi (kompleksi) **Sh** bajarilganda albatta ro'y beradigan xodisa ***muqarrar xodisa*** deyiladi.

Masalan,normal atmosfera bosimi shartida suvni 1000 temperaturada (darajada) kaynashi,olti yokli oddiy o'yin sokkasi tashlanganda chiqadigan raqamni (ochkoni) 6 sonidan katta bo'lmaganligi,sifatli maxsulotlar partiyasidan ixtiyoriy olingan maxsulotning sifatli chiqishi, O'zbekistonda yilda 4 fasl bo'lishi kabi xodisalar muqarrardir.

Barcha muqarrar xodisalar Ω kabi belgilanadi.

T A ' R I F 2: Ma'lum bir shartlar majmuasi **Sh** bajarilganda hech qachon ro'y bermaydigan xodisa mumkin bo'lmagan xodisa deb ataladi.

Masalan, energiya sarflamasdan biror ishni bajarilishi, ikkita olti yokli o'yin sokkasi tashlanganda ularda chiqqan raqamlarning (ochkolarning) yig'indisi 2 sonidan kichik bo'lishi, qobiliyatsiz va bilimsiz kishini fanda katta kashfiyot qilishi kabi xodisalar mumkin bo'lmaganlarga kiradi.

Barcha mumkin bo'lmagan xodisalar ham bir xil hususiyatlarga ega va shuning uchun ular bitta $\varnothing$ belgi bilan ifodalanadi.

T A ' R I F 3: Ma'lum bir shartlar majmuasi ***sh*** bajarilganda ba'zan ro'y beradigan, ba'zan esa ro'y bermaydigan va ularni qachon ro'y berish –bermasligini oldindan aytib bo'lmaydigan xodisalar **tasodifiy xodisalar** deb ataladi.

Masalan, tanga tashlanganda uni «gerb» tomoni bilan tushishi, ishlab chiqarilgan maxsulotning bozordagi narxi, tekshirishga olingan maxsulotni sifatli bo'lishi, sotib olingan lotoreyaga yutuq chiqishi kabi xodisalar tasodifiydir.

Tasodifiy xodisalar A,V,S,D,E … kabi harflar bilan belgilanadi.

T A ' R I F 4: Ma'lum bir shartlar majmuasi ***sh*** bajarilganda har safar A va V xodisalarning ikkalasi bir paytda yoki ro'y bersa, yoki ro'y bermasa, ular **teng kuchli xodisalar** deyiladi va A q V kabi belgilanadi.

Masalan, olti yokli o'yin sokkasi tashlanganda

A q {tok raqam chiqdi},

V q {1 yoki 3 yoki 5 raqamlar chiqdi}

tasodifiy xodisalar teng kuchli bo'ladi. Biror korxona xodimlari faqat 50 yoshdan boshlab albatta nafaqaxurlar (pensionerlar) safiga o'tkazilsa,

A q {korxonada ishlagan xodim S nafaqaxur},

V q {korxonada ishlagan xodim S yoshi 50 dan kichik emas}

xodisalari teng kuchlidir.

Barcha muqarrar yoki mumkin bo'lmagan xodisalar teng kuchlidir va shuning uchun ham ular mos ravishda Ω yoki $\varnothing$ kabi bitta belgi bilan ifodalangan edi.

T A' R I F 5: A va V xodisalarni ikkalasini bir paytda ro'y berishidan iborat S xodisa A va V **xodisalarning ko'paytmasi** (kesishmasi) deyiladi hamda $S=A\cap V$ kabi belgilanadi.

Masalan, o'yin sokkasi tashlanganda

A ={1 yoki 2 yoki 5 raqam chikdi}≡{1,2,5}

V = {2 yoki 4 yoki 5 yoki : raqam chikdi}≡{2,4,5,6}

tasodifiy xodisalarni ko'rsak, ularning ko'paytmasi

A∩V=S={2 yoki 5 raqam chikdi}= {2,5} xodisani bildiradi.

Haqiqatan ham,o'yin soqqasi tashlanganda faqatgina 2 yoki 3 raqam chiqqandagina ham A, ham V xodisalari bir paytda ro'y beradi. Non maxsulotining namligi tekshirilayotgan bo'lib,

A q { maxsulot namligi 20% dan katta emas}

V q {maxsulot namligi 15% dan kichik emas}

xodisalarni ko'rsak, ularning ko'paytmasi

S = A∩V = {maxsulot namligi 15% bilan 20% orasida}degan xodisani bildiradi.

Ta'rifdan ixtiyoriy A va V xodisalar uchun

$$A\cap V= V\cap A,\ A\cap\Omega=A,\ V\cap\varnothing=\varnothing$$

munosabatlar o'rinli bo'lishi kelib chiqadi.

T A ' R I F 6 : A va V xodisalardan kamida bittasini ro'y berishidan iboart S xodisaA va V **xodisalarning yig'indisi yoki** (birlashmasi) deb ataladi va $S=A\cup V$ kabi belgilanadi.

Masalan, o’yin soqqasi tashlanganda

Aq{1,2,4,5}, Vq{2,3,5} tasodifiy xodisalar qaralsa, ularning yig’indisi SqA(Vq{1,2,3,4,5} xodisani, ya'ni 6 raqami chiqmaganligi xodisasini bildiradi. Bunda 1 yoki 4 raqam chiqqanda faqat A xodisasi, 3 raqami chiqqanda faqat V xodisasi, 2 yoki 5 raqami chiqqanda esa A va V xodisalar ikkalasi ham ro’y beradi.

Xuddi shunday korxona xodimlarining ish staji tekshirilayotgan bo’lib,

Aq{xodimning ish staji 3 yil bilan 5 yil orasida}

Vq{xodimning ish staji 4 yil bilan 10 yil orasida}

xodisalari ko’rilayotgan bo’lsa, ularning yig’indisi

S=A∪V={xodimning ish staji 3 yil bilan 10 yil orasida} degan xodisani anglatadi.

Ta'rifdan va Misollardan ko’rinadiki, A∪V xodisa faqatgina ham A, ham V xodisalari ro’y bermagandagina ro’y bermaydi.

Bundan tashkari? ta'rifdan ixtiyoriy A va V xodisalari uchun

$$A\cup V = V\cup A,\ A\cup\Omega=\Omega,\ V\cup\varnothing=V$$

munosabatlar o’rinli ekanligini kurish mumkin.

<u>T A ' R I F 7:</u> A xodisani ro’y bermasligini bildiruvchi xodisa A xodisaga qarama-qarshi xodisa deyiladi va $\bar{A}$ kabi belgilanadi.

Masalan, Aq{gerb}, $\bar{A}$={raqam}; korxonalar asosiy ishlab chiqarish fondlari xajmi (bo’yicha urganilayotgan bo’lib

Aq {tasodifiy tanlangan korxonada F(10 mlrd.so’m} degan xodisani bildirsa,unga qarama-qarshi xodisa

$\bar{A}$ = {tasodifiy tanlangan korxonada F<10 mldr.sum} bo’ladi.

Ixtiyoriy A xodisa uchun

$$A\cup\bar{A}=\Omega\ ,\quad A\cap\bar{A}=\varnothing\ ,\quad \Omega-A=\bar{A}\ ,\quad \Omega-\bar{A}=A$$

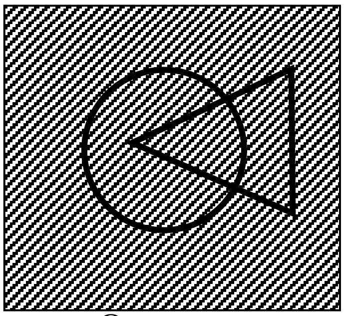
munosobatlar o’rinli bo’ladi.

Kiritilgan tushunchalarni chizmada ko’rsatish uchun berilgan kvadratda tasodifiy ravishda nuqtani tanlab olish Misolida quyidagi tasodifiy xodisalarni ko’ramiz:

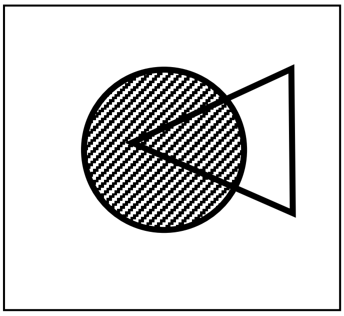
Aq{tanlangan nuqta doira ichida joylashgan}

Vq{tanlangan nuqta uchburchak ichida joylashgan}

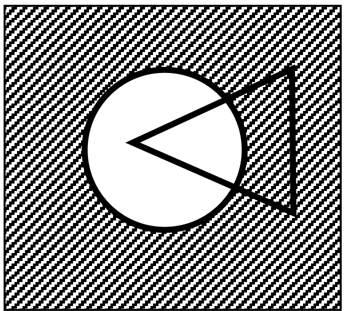
Chizmada Ω, A, $\bar{A}$, V, $\bar{B}$, A∩V, A∪V, A–V, V–A xodisalar shtrixlangn soxalarni bildiradi.



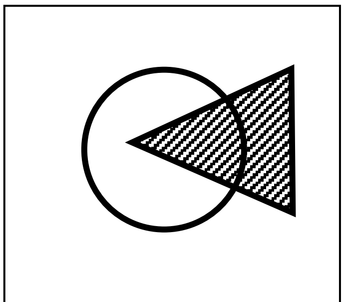
Ω



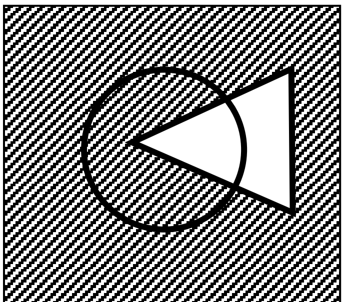
A



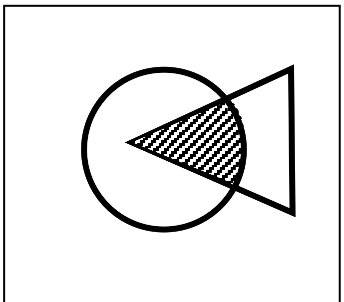
$\bar{A}$



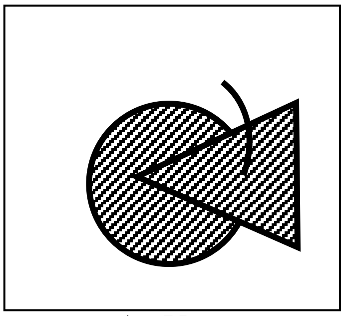
V



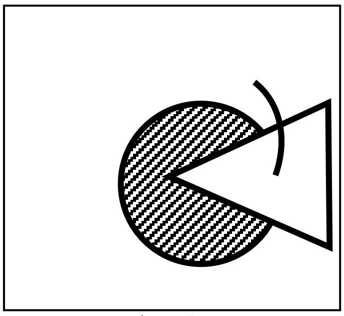
$\bar{B}$



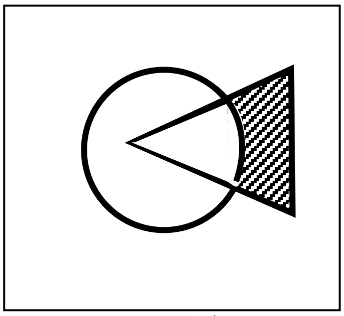
A∩V



A∪V



A−V



V−A

Yuqorida kiritilgan ikkita A va V xodisalarni ko'paytmasi va yig'indisi ta'rifini chekli sondagi A_1, A_2, … A_n xodisalar uchun umumlashtirish mumkin. Bunda $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{k=1}^{n} A_k$ ko'paytma A1, A2, … An xodisalarni bir paytda ro'y berishini,

$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ yig'ndi esa A1, A2, … An xodisalardan kamida bittasini ro'y berishini ifodalaydi.

Ehtimollar nazariyasini boshlang'ch tushunchalaridan yana biri exti-mollik tushunchasidir. Bu tushunchani kiritishga sabab sho'qi xodisalar ro'y berish yoki ro'y bermaslik darajasi nuqtai nazaridan turlicha bo'ladi.

Masalan, «Sportloto» bileti olinib,undagi 36 ta sondan 6 tasi tasodifiy ravishda tanlangan bo'lsin.U holda quyidagi

Aq{tanlangan sonlardan birortasi ham tirajda chikmaydi}

Vq{tanlangan sonlardan ikkitasi tirajda chikdi}

Sq{tanlangan sonlarning hammasi tirajda chikdi}

xodisalarning hammasi tasodifiy xodisadir.«Sportloto» tiraji nati-jalaridan kurish mumkinki, A tasodifiy xodisa tez-tez ro'y berib turadi,chunki juda ko'p biletlarga yutuq chikmaydi.V tasodifiy xodisa A xodisaga nisbatan kamrok ro'y berib turadi. S tasodifiy xodisa esa juda kam,onda-sonda ro'y berib turadi.

Bu Misollardan ko'rinadiki,ba'zi xodisalar «juda ham tasodifiy» ya'ni onda-sonda ro'y berib turadi, ba'zi xodisalar esa «unchalik tasodifiy emas», ya'ni ancha-muncha ro'y berib turadi, ba'zi xodisalar esa «deyarli tasodifiy emas», ya'ni ular tez-tez ro'y berib turadi. Shu sababli ehtimollar nazariyasida har bir A xodisaga uning « tasodifiylik darajasini» ifodalovchi biror sonli kattalik shu A xodisaning ehtimolligi deb tushuniladi va R(A) kabi belgilanadi.Shunday qilib R(A) ehtimollik A xodisadan olingan qandaydir funktsiya deb karalishi mumkin.

Endi ba'zi bir hususiy xollarda R(A) ehtimollikni hisoblash usullariga o'tamiz.

I.Ehtimollikning klassik ta'rifi.

T A' R I F 1: $A \in \Im$, $V \in \Im$ xodisalar **birgalikda emas** deyiladi, agar ulardan biri ro'y berganda ikkinchisi ro'y bermasa, ya'ni $A \cap V = \varnothing$ shart bajarilsa. Aks holda ular **birgalikda** deb aytiladi.

Masalan, korxona xodimlarining uzluksiz ish staji miqdori I ko'rilayotgan bo'lsa,

Aq{tasodifiy tanlangan xodim uchun I<10},

Vq{tasodifiy tanlangan xodim uchun I>15},

Cq{tasodifiy tanlangan xodim uchun I<20}

xodisalaridan A va V birgalikda emas, A va S yoki V va S xodisalar esa birgalikda bo'ladi.

Ma'lum bir shartlar majmuasi (kompleksi) ***sh*** bajarilganda kuzatuvlarda har safar chekli sondagi

$$E_1, E_2, \ldots E_n \qquad (1)$$

xodisalardan birortasi ro'y bersin. Bu xodisalar quyidagi shartlarni kanoatlantirsin:

1) Kuzatuv natijasida (1) xodisalardan kamida bittasi albatta ro'y beradi, ya'ni

$$E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n = \Omega \qquad (2)$$

Bu shartda (1) xodisalarning to'liq gruppasi deyiladi.

2) (1) xodisalar birgalikda emas, ya'ni kuzatuvda biror Ej xodisa ro'y bergan bo'lsa, qolgan E_i, $i \neq j$, xodisalar ro'y bera olmaydi. Bu shartni $E_i \cap E_j = \varnothing$, $i \neq j$, kabi ham yozish mumkin.

T A' R I F 2: 1) va 2) shartlarni qanoatlantiruvchi xodisalar gruppasi elementar xodisalar yoki elementar natijalar deb ataladi.

Masalan, tanga tashlashda

E1q{tanga gerbli tomoni bilan tushdi}q{gerb}

E2q{tanga raqamli tomoni bilan tushdi}q{raqam}

elementar xodisalar bo'ladi. Yoki tasodifan olingan talabaning «Ehtimolliklar nazariyasi» fani bo'yicha imtixonda qanday baxo olishini ko'rsak, unda

E1q{talaba «a'lo» baxo oldi}q{a'lo},

E2q{yaxshi}, E3q{qoniqarli}, E4q{qoniqarsiz}

elementar natijalar bo'ladi.

3) elementar natijalar ichidan ma'lum bir

$$E_{i_1}, E_{i_2}, \ldots E_{i_m}, \; m \leq n \qquad (3)$$

elementar natijalarning birortasini ro'y berishini ifodalovchi

$$A = E_{i_1} \cup E_{i_2} \cup \ldots \cup E_{i_m} \qquad (4)$$

tasodifiy xodisani ko'ramiz. (3) elementar natijalar A tasodifiy xodisa uchun qulaylik tug'diruvchi yoki tashqil etuvchi natijalar deb ataladi. Kelgusida (4) ko'rinishdagi A tasodifiy xodisani kiskacha

$A=\{E_{i_1}, E_{i_2}, \ldots E_{i_m}\}$ko'rinishda yozamiz va (1) elementar natijalar to'plamini to'plam osti deb qaraymiz.

Endi (1) elementar natijalarga yana bir shart qo'yamiz:

4) E_1 , E_2,…, En elementar natijalar teng imkoniyatli.

Natijalarning teng imkoniyatliligi ham ehtimollik va xodisa kabi ehtimolliklar nazariyasining boshlang'ch tushunchalaridan biri bo'lib hisoblanadi va shuning uchun uni ta'riflab bo'lmaydi.

Odatda natijalarning teng imkoniyatliligi to'g'risidagi xulosa ko'rilayotgan masalaning moxiyati va simmetriklik shartlari asosida chiqariladi.

Masalan, yuqorida ko'rib o'tilgan tanga tashlash Misolida tangani simmetrik deb olsak, E1q{gerb}, E2q{raqam} elementar natijalar teng imkoniyatli bo'ladi. Ammo tanga nosimmetrik bo'lsa, bu natijalar teng imkoniyatli bo'lmaydi. Xuddi shunday o'yin sokkasi tashlanganda,

E1q{kubik 1 raqamli tomoni bilan tushadi}={1},

$E_2=\{2\}$, $E_3=\{3\}$, $E_4=\{4\}$, $E_5=\{5\}$, $E_6=\{6\}$ elementar natijalar teng imkoniyatli bo'ladi. Ammo talabani imtixon topshirishi Misolidagi

E1q{a'lo}, E2q{yaxshi}, E3q{qoniqarli}, E4q{qoniqarsiz}

elementar natijalar teng imkoniyatli emas,chunki "a'lo" baxo bilan o'quvchi talabalar boshqa baxolar bilan o'quvchi talabalarga nisbatan kamrok uchraydi. Shu sababli E1 natija ro'y berishi qolgan E2,E3,E4 natijalarga nisbatan kamrok imkoniyatga ega bo'ladi.

Agarda n ta teng imkoniyatli elementar natijalardan m(A) tasi A xodisa uchun qulaylik tug'diruvchi bo'lsa, A xodisa ehtimolligi deb

$$R(A) = \frac{m(A)}{n} \qquad (5)$$

formula bilan aniqlanadigan songa aytiladi.

1-M i s o l . Simmetrik o'yin sokkasi tashlanganda nq6 ta teng imkoniyatli elementar natijalardan

A q {3 yoki 5 raqami chiqadi}=$\{E_3,E_5\}$={3,5} tasodifiy xodisa uchun E3 va E5 , ya'ni m(A)q2 tasi qulaylik tug'diruvchi va shu sababli

$$R(A) = \frac{m(A)}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

2-M i s o l . n=180ta maxsulot ichida mq9 ta sifatsiz maxsulot bor. Shu maxsulotlardan tasodifiy ravishda bittasi tanlab olingan.

A q {tanlangan maxsulot sifatsiz}

tasodifiy xodisasi ehtimolligini topamiz.

Tanlovga ixtiyoriy maxsulot tushishi mumkin va shuning uchun bu erda nq180 ta elementar natijalar bo'ladi. Tanlov tasodifiy bo'lgani uchun har bir maxsulot teng imkoniyat bilan tanlanishi mumkin,ya'ni ko'rilayotgan elementar natijalar teng imkoniyatli. A xodisa ro'y berishi uchun tanlangan maxsulot sifatsiz bo'lishi kerak va shuning uchun qulaylik tug'diruvchi natijalar soni m(A)q9 bo'ladi. Demak, klassik ta'rifga asosan,

$$R(A)=\frac{m(A)}{n} = \frac{9}{180} = 0{,}05 .$$

Ehtimollikning klassik ta'rifidan uning quyidagi asosiy xossalari kelib chiqadi.

I xossa. Ixtiyoriy A xodisa uchun uning ehtimolligi

$$0 \le R(A) \le 1 \qquad (6)$$

shartni kanoatlantiradi.

I s b o t. A xodisaga qulaylik tug'diruvchi natijalar soni barcha natijalar sonidan katta bula olmaydi, ya'ni m(A)≤ n . Ma'nosiga ko'ra n>0, m(A)≥0.

Shuning uchun

$$0 \le m(A) \le n \Rightarrow \frac{0}{n} \le \frac{m(A)}{n} \le \frac{n}{n} \Rightarrow 0 \le R(A) \le 1.$$

II xossa. Muqarrar xodisa Ω ehtimolligi birga teng, ya'ni

$$R(\Omega)=1 \qquad (7)$$

I s b o t . Muqarrar xodisa ta'rifiga asosan u ixtiyoriy E_i , i = $\overline{i,n}$ natijada ro'y beradi ((2) tenglikka ham karang), ya'ni barcha n ta natijalar Ω uchun qulaylik tug'diruvchi bo'ladi. Shu sababli $m(\Omega)$=n va klassik ta'rifga asosan

$$R(\Omega) = \frac{m(\Omega)}{n} = \frac{n}{n} = 1$$

III xossa. Mumkin bo'lmagan xodisa ∅ ehtimolligi nolga teng,ya'ni

$$R(\varnothing) = 0 \qquad (8)$$

I s b o t . Mumkin bo'lmagan xodisa ∅ta'rifiga asosan u ixtiyoriy Ei natijada ham ro'y bermaydi, ya'ni uning uchun qulaylik tug'diruvchi natijalar yuk. Demak m(∅)=0 va n>0 bo'lgani uchun

$$R(\varnothing)=\frac{m(\varnothing)}{n} = \frac{0}{n} = 0$$

II. Ehtimolning geometrik ta'rifi.

Yuqorida biz elementar natijalar to'plami $\Omega = \{E_\alpha ,\alpha \in I\}$ chekli yoki sanokli bo'lgan holda tasodifiy xodisalarning ehtimolligini topish masalasi bilan shugullangan edik. Amaliyotda bu xollar bilan bir katorda ko'pincha Ω sanokli bo'lmagan (sanoksiz) cheksiz to'plam bo'lgan holda turli tasodifiy xodisalar ehtimolligini topish masalasiga duch kelamiz. Bu masalani quyidagi hususiy holda ko'rib chiqamiz.

To'g'ri chiziq , tekislik yoki fazoda biror Ω soxa berilgan bo'lsin va u μ(Ω)o'lchamga ega bo'lsin. Bu erda (o'lcham deganda uzunlik (to'g'ri chiziqda), yuza (tekislikda) yoki xajm (fazoda) ko'zda tutiladi. Ω soxaga tasodifiy ravishda tashlangan nuqtani o'lchamli A⊂Ω soxaga tushish xodisasini ham A deb belgilaymiz. Bu xodisani R(A) ehtimolligini topish uchun quyidagi shartlarni qo'yamiz:

Tasodifiy tashlangan nuqta Ω soxaning ixtiyoriy nuqtasiga tushishi mumkin,ya'ni Ωsoxaning barcha nuqtalari teng imkoniyatli**.**

R(A) ehtimollik A soxani faqat μ(A) o'lchamiga proportsional ravishda bog'liq bo'lib, bu soxaning ko'rinishiga (shakliga) va Ω soxani kaerida joylashganiga bog'liq emas.

Bu shartlarda A xodisa ehtimolligi deb

$$R(A)=\frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} \qquad (9)$$

formula bilan aniqlanadigan songa aytiladi. Bu ehtimollikning geometrik ta'rifi deb aytiladi.(9) formula bilan aniqlangan ehtimollik ham (6)-(8) xossalarni kanoatlantirishini ko'rsatish talabalarga mustaqil ish sifatida xavola qilinadi.

M i s o l : Ωdoira ichiga tasodifiy tashlangan nuqtani unga ichki chizilgan A kvadrat ichiga tushish ehtimolligini topamiz.

<u>Echish:</u> Doira diametrini d deb olsak, u holda barcha elementar natijalar to'plami o'lchami

$$\mu(\Omega) = S\ (\text{doira})=\frac{\pi d^2}{4}\ ,$$

qulaylik tug'diruvchi elementar natijalar to'plami o'lchami kvadrat yuzasi bo'lib,

$$\mu(A)= S\ (\text{kvadrat}) = \frac{d^2}{2}$$

Ehtimolning geometrik ta'rifiga asosan

$$R(A)=\mu(A)/\ \mu(\Omega) = \frac{\pi d^2}{4} / \frac{d^2}{2} = \frac{\pi}{2}$$

III. Ehtimollikning statistik ta'rifi.

A tasodifiy xodisa statistik turgunlikka ega bo'lsa, uning $\nu_N(A) = N(A)/N$ chastotasi turli N qiymatlarida bir-biridan keskin farq kilmaydigan sonlardan iborat bo'lishi aytilgan edi. Shu sababli $N\to\infty$ bo'lganda $\nu_N(A)$ limiti to'g'risida suz yuritish mumkin. Agarda bu limit mavjud bo'lsa, uning qiymati A xodisaning R(A) ehtimolligi sifatida qabul qilinadi. Shunday qilib ehtimollikning statistik ta'rifi

$$P(A) = \lim_{N\to\infty} \nu_N(A) = \lim_{N\to\infty} \frac{N(A)}{N} \qquad (10)$$

ko'rinishda ifodalanadi. Bu holda ham ehtimollikning barcha asosiy xossalari saklanib kolishini ko'rsatish qiyin emas.

Ehtimolliklar nazariyasining asosiy masalalaridan biri «soddarok» tasodifiy xodisalar ehtimolliklari asosida ulardan tashqil topgan « murakkabrok » xodisalarni ehtimolliklari haqida xulosa chiqarish bo'lib hisoblanadi. Misol sifatida A va V xodisalarining ehtimolliklari yordamida ularning yig'indisi AQV va ko'paytmasi AV xodisalari ehtimolliklarini topish masalasini ko'ramiz.

T E O R E M A № 1. Agarda A va V xodisalari birgalikda bulmasa, u holda

$$R(A+V)=R(A)+R(V) \qquad (1)$$

I s b o t : A,V, A+V xodisalar ko'rilayotgan kuzatuvlarda n ta elementar natijalar bo'lib, A va V xodisalarga qulaylik tug'diruvchi elementar natijalar soni m(A) va m(V) bo'lsin. Ehtimollikning klassik ta'rifiga asosan

$$R(A) = \frac{m(A)}{n}, \qquad R(V) = \frac{m(B)}{n} \qquad\qquad (a)$$

A va V birgalikda bo'lmagani uchun ularga qulaylik tug'diruvchi natijalarning birortasi ham ustma-ust tushmaydi. Bu holda AQV yig'ndi ta'rifiga asosan unga qulaylik tug'diruvchi elementar natijalar soni m(AQV) uchun

$$m(A+V) = m(A)+m(V) \qquad\qquad (v)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. AQV xodisa uchun ehtimollikning klassik ta'rifini kullab va (a),(v) munosabatlardan foydalanib Isbotlash kerak bo'lgan (1) formulani olamiz:

$$R(A+V) = \frac{m(A+B)}{n} = \frac{m(A)+m(B)}{n} = \frac{m(A)}{n} + \frac{m(B)}{n} = P(A) + P(B)$$

N a t i j a № 1. Agarda $A_1, A_2,\ldots,A_n$ birgalikda bo'lmagan xodisalar bo'lsa

$$R(A_1+ A_2,\ldots+A_n) = R(A_1) + R(A_2)+\ldots+ R(A_n) = \sum_{\kappa=1}^{n} R(A_k) \qquad (1')$$

<u>**I s b o t :**</u> Bu xulosa (1) formulani ketma-ket qo'llash orqali va matematik induktsiya yordamida keltirib chiqariladi.

N a t i j a № 2 . $A_1, A_2,\ldots,A_n$ birgalikda bo'lmagan xodisalar to'liq gruppani tashqil etsa, u holda

$$R(A_1)+R(A_2)+\ldots+R(A_n)= \sum_{\kappa=1}^{n} R(A_k)=1 \qquad (1'')$$

<u>**I s b o t :**</u> $A_1, A_2,\ldots,A_n$ to'liq gruppa bo'lgani uchun

$$A_1+ A_2+\ldots+A_n=\Omega \qquad\qquad (s)$$

Ular birgalikda bo'lmagani uchun (1() tenglik va (s) munosabatga asosan

$$R(A_1)+R(A_2)+\ldots+R(A_n)= R(A_1+A_2+\ldots+A_n)=R(\Omega)=1$$

Bu erda muqarrar xodisa Ω uchun R{Ω}=1 ekanligidan foydalanildi.

N a t i j a № 3. Qarama-qarshi xodisalar ehtimolliklari yig'indisi birga teng,ya'ni

$$R(A)+R(\overline{A}) =1 \qquad\qquad (1''')$$

Bu natija Isboti talabalarga mustaqil ish sifatida koldiriladi.

T E O R E M A № 2. Agarda A va V xodisalar birgalikda bo'lsa, u holda

$$R(A+V)=R(A)+R(V)-R(AV) \qquad\qquad (2)$$

teoremani Isbotsiz qabul etamiz.

<u>**T A ' R I F 1:**</u> teorema №1 va №2 **ehtimollarni qo'shish teoremalari** deb ataladi.

Endi A va V xodisalar ko'paytmasi AV ehtimolligini hisoblash formulasiga o'tamiz. Buning uchun ehtimollar nazariyasining muxim tushunchalaridan biri bo'lgan shartli ehtimollik tushunchasini kiritamiz.

<u>**T A ' R I F 2**</u>: **A xodisaning V xodisa ro'y berdi shartda hisoblangan ehtimolligi uning** *shartli ehtimolligi* **deyiladiva R(A/B)** ko'rinishda belgilanadi.

Bu nuqtai nazardan R(A) **shartsiz ehtimol** deb tushuniladi.

***M i s o l* :** Qutida 2 ta sifatli va bitta sifatsiz maxsulot bor. Bu qutidan tasodifiy ravishda ikkita maxsulot olindi. Bu erda

Aq{I tanlangan maxsulot sifatli }

B={II tanlangan maxsulot sifatli} xodisalarni ko'ramiz.V xodisa ro'y berganligi yoki ro'y bermaganligi ma'lum bulmasa, ya'ni II tanlangan maxsulot sifati to'g'risida ma'lumot bulmasa, shartsiz ehtimollik R(A)q2G`3 bo'ladi. Agarda V xodisa ro'y bergan bo'lsa, ya'ni II maxsulot sifatli bo'lsa, shartli ehtimollik R(AG`V)q1G`2 bo'ladi. Talabaga mustaqil ish sifatida R(A/$\overline{B}$), R(V/A), R(V/$\overline{A}$) ehtimolliklarni hisoblash va ixtiyoriy A,V xodisalar uchun

$$R(A/V) + R(\overline{A}/V) = 1$$

ayniyatni Isbotlash tavsiya qilinadi.

T E O R E M A № 3 : Ixtiyoriy A va V xodisalar uchun

$$R(AV) = R(A)R(V/A) = R(V)R(A/V) \qquad (3)$$

formula o'rinli bo'ladi.

<u>I s b o t :</u> A,V,AV xodisalar ko'rilayotgan kuzatuvlarda n ta elementar natija bo'lib, ulardan m(A) tasi A uchun , m(AB) tasi AV uchun qulaylik tug'diruvchi bo'lsin. Ehtimollikni klassik ta'rifiga asosan

$$R(AV) = \frac{m(AB)}{n}, \quad R(A) = \frac{m(A)}{n} \qquad (d)$$

Endi R(VG`A) shartli ehtimollikni topamiz. A xodisa ro'y berganligi ma'lum bo'lgani uchun, endi n ta emas, balkim faqatgina m(A) ta elementar natijalar ro'y berishi mumkin. Shartga asosan ulardan m(AV) tasida V ro'y berishi mumkin va shu sababli klassik ta'rif bo'yicha

$$R(V/A) = \frac{m(AB)}{m(A)} \qquad (e)$$

(d) va (e)munosabatlardan (3)formula quyidagicha kelib chiqadi :

$$R(AV) = \frac{m(AB)}{n} = \frac{m(AB)}{n} \cdot \frac{m(A)}{m(A)} = \frac{m(A)}{n} \cdot \frac{m(AB)}{m(A)} = R(A)R(V/A)$$

Ko'paytma ta'rifiga asosan AVqVA bo'lgani uchun bu tenglikdan

$$R(AV) = R(VA) = R(V)R(A/B)$$

tenglik ham kelib chiqadi.

<u>M i s o l :</u> Oldingi ko'rilgan Misolda

S q {ikkala tanlangan maxsulot sifatli}

xodisa ehtimolligini topamiz. SqAV, R(A)q2G`3, R(VG`A)q1G`2 bo'lgani uchun

$$R(S) = R(AV) = R(A)\,R(V/A) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

<u>T A ' R I F 3</u> : Agarda R(A/B)=R(A) shart bajarilsa, A va V xodisalar bog'liq emas deyiladi. Aks holda ular bog'liq xodisalardeb ataladi.

Shunday qilib A xodisaning ehtimolligi V xodisani ro'y bergan yoki ro'y bermasligiga bog'liq bulmasa, u holda A va V xodisalar bog'liqmas bo'ladi. Bu tushuncha ham ehtimolliklar nazariyasining muxim tushunchalaridan biri bo'lib hisoblanadi.

Amaliyotda ko'pincha A va V xodisalarni bog'liq yoki bog'liqmasligi ularni mazmuniga asosan aniqlanadi. Masalan, tanga yoki o'yin sokkasi ikki marta tashlanganda, har gal ularni ma'lum bir tomoni bilan tushishini ifodalovchi A va V xodisalar bog'liqmas bo'ladi.

T E O R E M A № 4 : Agarda A va V xodisalar bog'liq emas bo'lsa, u holda

$$R(AV) = R(A)R(V) \qquad (4)$$

formula o'rinli bo'ladi.

<u>I s b o t :</u> R(V/A)=R(V) bo'lgani uchun (3) formulaga asosan

$$R(AV) = R(A)R(V/A) = R(A)R(V)$$

<u>M i s o l :</u> Ishlab chiqarilayotgan maxsulot sifati ketma-ket ikki nazoratchi tomonidan tekshirilmokda. Bunda I nazoratchi maxsulot sifatini 0,85 ehtimollik bilan,II nazoratchi esa 0,7 ehtimollik bilan to'g'ri baxolaydi.

Aq{ikkala nazoratchi maxsulot sifatini to'g'ri baxoladi}

tasodifiy xodisa ehtimolligini topamiz. Buning uchun

A_k ={k –nazoratchi maxsulot sifatini to'g'ri baxoladi}, k=1,2

tasodifiy xodisalarni kiritamiz. Shartga asosan $R(A_1)=0,85$, $R(A_2)=0,7$.
Mazmuniga kura $A=A_1\cdot A_2$ va A_1,A_2- bog'liqmas xodisalar. Shuning uchun

$$R(A)=R(A_1A_2)= R(A_1)\cdot R(A_2)=0,85\cdot 0,7=0,595$$

T A ' R I F 4: teorema №3 va №4 ehtimolliklarni **ko'paytirish** teoremalari deyiladi.

Takrorlash uchun savollar::

1. Birgalikda bo'lmagan xodisalar uchun qo'shish teoremasini keltiring.
2. Qarama-qarshi xodisalarning ehtimolliklari qanday shartni kanoatlantiradi ?
3. Birgalikda bo'lgan xodisalar uchun qo'shish teoremasini ifodalang.
4. Shartli ehtimollik qanday aniqlanadi ?
5. Qachon xodisalar bog'liqmas (bog'liq) deyiladi ?
6. Bog'liqmas xodisalar uchun ko'paytirish teoremasi qanday ifodalanadi ?
7. Bog'liq xodisalar ko'paytmasi ehtimolligiqanday formula bilan topiladi ?

Tayanch iboralar: ehtimolliklarni qo'shish teoremalari, shartli ehtimollik, bog'liq va bog'liqmas xodisalar, ehtimolliklarni ko'paytirish teoremalari.

50 - M A ' R U Z A

SHARTLI EHTIMOL. TO'LA EHTIMOL. BEYES FORMULASI. HODISANING BOG'LIQLIGI.

M a' r u z a r e j a s i :

1. Xodisalarning to'liq guruhi.
2. To'liq ehtimol formulasi.
3. To'liq ehtimol formulasidan klassik ta'rifni keltirib chiqarish.
4. Bayes formulasi.
5. Bayes formulasinitaxminlarni tekshirishga tatbiqi.

Adabiyotlar:

1. .U. Soatov. "Oliy matematika" II qism. Toshkent. «O'qituvchi» nashriyoti, 1994 y. 14-bob, § 11-12 , 245- 247 betlar.
2. Piskunov N.S. Differentsial va integral hisob. 2-tom, Toshkent, «O'qituvchi», 1974 yil. X X bob, §5-6, 482-488 betlar.

Bizni kiziktirayotgan A tasodifiy xodisa ko'rilayotgan kuzatuvda E1,E2,…En birgalikda bo'lmagan elementar natijalarning to'liq gruppasini tashqil etsin, ya'ni

$$E_i\, E_j =\varnothing\ ,\ i\neq j\ \ , \text{va}\quad E_1+E_2+\ldots E_n = \Omega \qquad (1)$$

Oldin ko'rib o'tilgan klassik va chekli sistemalarda har bir A xodisa uchun bu elementar natijalarning ba'zilari qulaylik tug'diruvchi, qolganlari esa qulaylik tugdirmovchi sifatida ikki guruhga ajratilar edi. Agarda A xodisa uchun Ei qulaylik tug'diruvchi (yoki tugdirmovchi) elementar natija bo'lsa, buni shartli ehtimollik orqali $R(A\,|\,E_i)=1$ (yoki $R(A\,|\,E_i)=0$ deb ifodalash mumkin. Endi barcha elementar natijalarni bunday usulda ikki guruhga ajratib bo'lmaydigan holni ko'rib o'tamiz, ya'ni E1,E2,…En elementar natijalarning har birida A xodisa

$$R(A\,|\,E_1),\ R(A\,|\,E_2),\ldots,\ R(A\,|\,E_n) \qquad (2)$$

shartli ehtimolliklar bilan ro'y berishi mumkin bo'lsin.

Klassik sxemadagi E1,E2,…En elementar natijalar albatta teng imkoniyatli degan shartdan voz kechib, ular ixtiyoriy

$$R(E_1), R(E_2),\dots,R(E_n) \qquad (3)$$

ehtimolliklar bilan ro'y berishi mumkin deb qabul qilamiz. Albatta (3) ehtimolliklar

$$R(E_1)+ R(E_2)+\dots+ R(E_n)=1$$

shartga buysunishi kerak. (1)-(3) ma'lumotlar asosida ko'rilayotgan A xodisaning R(A) shartsiz ehtimolligini

$$R(A)= R(E_1) R(A\mid E_1)+ R(E_2) R(A\mid E_2)+\dots+$$

$$+R(E_n) R(A\mid E_n)=\sum_{k=1}^{n} P(E_i)P(A|E_i) \qquad (4)$$

formula bilan topilishi mumkinligini ko'rsatamiz. (1) munosobatdan foydalanib, quyidagi tenglikni yozish mumkin:

$$A=\Omega\, A=(E_1+E_2+\dots+E_n) = E_1 A+E_2 A+\dots+E_nA$$

Bu erda E1 A, E2 A,…,EnA xodisalar birgalikda emas va ehtimolliklarni qo'shish hamda ko'paytirish teoremalariga asosan (4) formulani hosil qilamiz:

$$R(A)= R (E_1A+E_2A+\dots+E_nA) = R(E_1 A)+R(E_2 A)+\dots+R(E_nA)=$$

$$= R(E_1) R(A\mid E_1)+ R(E_2) R(A\mid E_2)+\dots+ R(E_n) R(A\mid E_n)$$

(4) formula **to'liq ehtimol formulasi** deyiladi va undan klassik chekli sxema hususiy xol sifatida kelib chiqadi.

M i s o l : Konserva zavodining tomat tayyorlash sexiga uchta jamoa xujaligidan pomidor keltiriladi. Sexdagi umumiy maxsulotning 20% i I- jamoa xujaligidan, 35%i II- jamoa xujaligidan va qolgani III-jamoa xujaligidan keltirilgan. I,II,III jamoa xujaliklaridan keltirilgan pomidor mos ravishda 0,8 , 0,85 va 0,75 ehtimollik bilan standartga mos keladi.Tsexdagi umumiy maxsulotdan tasodifiy ravishda pomidor tanlab olindi.

Aq{tanlangan pomidor standartga mos keladi}

tasodifiy xodisani ehtimolligini topamiz. E1, E2, E3 orqali tanlangan pomidor mos ravishda I,II va III jamoa xujaligidan keltirilganligini belgilaymiz. Ular (1) shartlarni kanoatlantiradi va masala shartiga ko'ra

$$R(E_1)= 0{,}2, \qquad R(E_2)=0{,}35, \qquad R(E_3)=0{,}45$$

$$R(A\mid E_1)=0{,}8 \qquad R(A\mid E_2)=0{,}85 \qquad R(A\mid E_3)=0{,}75$$

To'liq ehtimol formulasiga asosan

$$R(A)= R(E_1) R(A\mid E_1)+ R(E_2) R(A\mid E_2)+R(E_3) R(A\mid E_3)=$$

$$= 0{,}2\cdot 0{,}8+0{,}35\cdot 0{,}85+0{,}45\cdot 0{,}75 = 0{,}795$$

Endi (1),(2),(3) shartlarda kuzatuvda A xodisasi ro'y bergan bo'lsin va

$$R(E_1\mid A) ,\ R(E_2\mid A),\dots, R(E_n\mid A)$$

shartli ehtimolliklarni topish talab kilinsin. Ehtimolliklarni ko'paytirish teoremasiga asosan k=1,2,…,n uchun

$$R(AE_k)=R(A)R(E_k\mid A)=R(E_k)R(A\mid E_k)$$

tenglikni yozish mumkin. Bu erdan (4) to'liq ehtimol formulasidan foydalanib, izlangan ehtimolliklar uchun

$$R(AE_k)=\frac{P(E_\kappa)P(A|E_\kappa)}{P(A)}=\frac{P(E_\kappa)P(A|E_\kappa)}{\sum_{i=1}^{n} P(E_i)P(A|E_i)}, \qquad k=1,2,\dots,n \qquad (5)$$

formulalarga kelamiz. (5) formula ingliz matematigi Bayes (1702-1761) sharafiga **Bayes formulasi** yoki **taxminlarini tekshirish formulasi** deb ataladi. Bu formulani keyingi nomi quyidagicha tushuntiriladi. Bizda biror fikr (fakt) to'g'risida E1,E2,…,En taxminlar bor va bu taxminlarga biz qandaydir

$$R(E_1), R(E_2), \dots, R(E_n)$$

ehtimolliklar bilan ishonamiz. Bu taxminlarda qandaydir A xodisa

$$R(A|E_1),\ R(A|E_2),\ \ldots,\ R(A|E_n)$$

ehtimollik bilan ro'y berishi mumkin bo'lsin.

Yuqoridagi taxminlarni tekshirish uchun A xodisa ustida kuzatuv o'tkazamiz. Bu kuzatuv natijasida A xodisa ro'y berganligi ma'lum bo'lsin. Bu olingan qushimcha ma'lumot asosida E1, E2, …, En taxminlarga endi

$$R(E_1|A),\ R(E_2|A),\ \ldots,\ R(E_n|A)$$

ehtimolliklar bilan ishonamiz, ya'ni bu taxminlarga bo'lgan munosabatimizni kayta ko'rib chiqamiz.

M i s o l : Oldingi Misolda tasodifiy tanlangan pomidor standartga mos kelgan bo'lsin, ya'ni A xodisa ro'y bergan bo'lsin. Endi shu pomidorni I,II va III jamoa xujaligidan keltirilganligi haqidagi E1, E2 va E3 xodisalarning (taxminlarning) ehtimolliklarini kayta hisoblab chiqamiz. Bayes formulasiga asosan

$$R(E_1|A)=\frac{1}{P(A)}R(E_1)\cdot R(A|E_1)=\frac{0,2\cdot 0,8}{0,795}\approx 0,201$$

$$R(E_2|A)=\frac{1}{P(A)}R(E_2)\cdot R(A|E_2)=\frac{0,35\cdot 0,85}{0,795}\approx 0,374$$

$$R(E_3|A)=\frac{P(E_3)P(A|E_3)}{P(A)}=\frac{0,45\cdot 0,75}{0,795}=0,425$$

Shunday qilib, E1,E2 va E3 taxminlarga kuzatuv (tekshiruv) o'tkazguncha mos ravishda 0,2 , 0,35 va 0,45 ehtimolliklar bilan ishongan bo'lsak, kuzatuvdan (tekshiruvdan) keyin ularga 0,201 , 0,374 va 0,425 ehtimollik bilan ishonamiz.

Takrorlash uchun savollar::

1. To'liq ehtimol formulasini yozing.
2. To'liq ehtimol formulasidan hususiy xod sifatida ehtimollikni klassik ta'rifini keltirib chikaring.
3. Bayes formulasini yozing.
4. Bayes formulasiningmoxiyati nimadan iborat?

Tayanch iboralar : to'liq ehtimol formulasi, Bayes formulasi.

51 - *M A ‘ R U Z A*

TAJRIBALAR KETMA-KETLIGI. BERNULLI SXEMASI. PUASSON TEOREMASI; MUAVR-LAPLASNING LOKAL VA INTEGRAL TEOREMALARI. BERNULLI SXEMASINING ENG EHTIMOL SONI.

M A ‘ R U Z A   r e j a s i :

1. Bog’liqmas sinovlar sxemasi.
2. Bernulli formulasi.
3. Nyuton formulasi va ehtimolliklar yig’indisi.
4. Eng katta ehtimolga ega sinov natijasi.
5. Bernulli formulasini umumlashtirish.

Adabiyotlar:

1. .U. Soatov. “Oliy matematika” II qism. Toshkent. «O’qituvchi» nashriyoti, 1994 y. 14-bob, § 13 , 247- 249 betlar.
2. Piskunov N.S. Differentsial va integral hisob. 2-tom, Toshkent, «O’qituvchi», 1974 yil. X X bob, §8, 491-496 betlar.

Ilmiy va amaliy tadkikodlarda har bir yangilik (masalan yangi goya, mashina, texnologiya, dori-darmon) avvalo ko’p sonli sinovlarda, tajribalarda, kuzatuvlarda tekshiriladi. Bu tekshiruvlar natijalari bo’yicha ko’rilayotgan yangilik to’g’risida ma'lum bir fikrga kelinadi (masalan uni amaliyot uchun qabul qilish yoki qabul kilmaslik). Ko’pincha o’tkazilgan tekshiruv sinovlari natijalari tasodifiy harakterga ega bo’ladi va shu sababli ular asosida qabul kilinayotgan karor ehtimolliklar nazariyasi yordamida ilmiy asoslangan bo’lishi kerak. Biz bu masalani quyidagi eng oddiy holda ko’rib chiqamiz.

Chekli sondagi n ta sinovlar o’tkazilmokda va ularning har birida biror A tasodifiy xodisa ro’y berishi yoki ro’y bermasligi mumkin. Quyidagi shartlarni qo’yamiz:

1. Ixtiyoriy sinovda A tasodifiy xodisani ro’yo berishi yoki ro’y bermasligi barcha oldingi va keyingi natijalarga bog’liq emas.
2. Ixtiyoriy sinovda A tasodifiy xodisa bir xil R(A)=r ehtimollik bilan ro’y berishi mumkin. Bu holda uning ro’y bermasligi,ya'ni qarama-qarshi $\overline{A}$ tasodifiy xodisa

$$R(\overline{A}) = 1 - R(A) = 1 - r \equiv q$$

ehtimollikka ega bo’ladi.

Bunday sinovlar birinchi marta shveytsariyalik matematik Yakob Bernulli (1654-1705) tomonidan urganilgan va shu sababliish ***Bernulli*** sxemasi deb ataladi. Masalan, tanga bir necha marta tashlanganda har safar uni “gerb” tomoni bilan tushish yoki tushmasligini yoki ma'lum bir texnologik va tashqiliy sharoitlar uzgarmay turganda tinimsiz ishlab chiqarilayotganbir xil maxsulotni bir nechtasini tekshirganda har safar uni sifatli yoki sifatsiz bo’lishini tekshirish Bernulli sxemasiga keladi.

Endi Bernulli sxemasida n ta sinovlarda kuzatilayotgan A tasodifiy xodisani roppa-rosa m marta ($0 \le m \le n$) ro’y berish xodisasi ehtimolligini topish masalasini ko’ramiz. Bu xodisani A_m, uning $R(A_m)$ ehtimolligini $R_n(m)$ deb belgilaymiz. A_m xodisa ro’y berishi uchun barcha n ta sinovlarning ixtiyoriy m tasida A xodisa,qolgan n-m tasida esa $\overline{A}$ xodisa ro’y berishi kerak. Kombinatorikadan ma'lumki bunday variantlar umumiy soni

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

formula bilan aniqlanadi. Sinov natijalari bog'liqmas bo'lgani uchun ehtimolliklarni ko'paytirish teoremasiga asosan A_m xodisa ro'y beradigan har bir variant bir xil $r^m q^{n-m}$ ehtimollikka ega bo'ladi. Bu S_n^m ta variantlar birgalikda bo'lmagani uchun ehtimolliklarni qo'shish teoremasiga asosan

$$R(A_m)=R_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}, \quad m=\overline{o,n} \tag{1}$$

formulani hosil qilamiz. Talabalarga n=3, m=0,1,2,3 xollarda bu formulani kelib chiqishini batafsil kurish mustaqil ish sifatida xavola qilinadi.

(1)formulani ung tomoni Nyuton binomi deb ataladigan

$$(r+q)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m} \tag{2}$$

tenglikdagi qo'shiluvchilardan iborat bo'lgani uchun u ehtimoliklarning binomial taqsimoti deb ataladi. Ma'nosiga kura A_m, $m=\overline{0,n}$, xodisalarning to'liq gruppasini tashqil etadi va shuning uchun

$$\sum_{m=0}^{n} P(A_m) = \sum_{m=0}^{n} P_n(m) = \sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m} = 1 \tag{3}$$

tenglik o'rinli bo'lishi kerak. Haqiqatan ham bu tenglik (2) Nyuton binomidan kelib chiqadi,chunki belgilashimizga asosan q=1-p edi va shu sababli

$$\sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m} = (r+q)^n = (p+1-p)^n = 1^n=1$$

Ba'zi bir masalalarda Bernulli sxemasida ko'rilayotgan A xodisa eng katta ehtimollik bilan necha marta ro'y berishini topish talab etiladi, ya'ni (1) formula bilan aniqlangan $R_n(m)$ ehtimollik n,r va q qiymatlari ma'lum bo'lganda qandaym, m=$\overline{0,n}$, uchun eng katta qiymatga ega bo'lishini aniqlash suraladi. $0 \le m< n$ bo'lganda (1) formuladan

$$\frac{P_n(m+1)}{P_n(m)} = \frac{(n-m)p}{(m+1)q}$$

tenglik o'rinli bo'lishini oddiy hisoblashlar orqali keltirib chiqarish mumkin. Bu erdan, *p*r-q butun songa teng bo'lsa $m = m_0 = pr \pm q$ va *p*r-q butun son bo'lmaganda esa

$$pr-q < m_0 < pr+r \tag{4}$$

tengsizlik bilan aniqlanadigan yagona mo butun sonda Pn(m) eng katta qiymatga ega bo'ladi.

<u>M i s o l :</u> Har biri r=0,8 ehtimollik bilan sifatli bo'lishi mumkin bo'lgan n=10 ta maxsulot tekshirilganda, ulardan m=7 tasi sifatli bo'lishi ehtimolligini topamiz.(1) formulaga asosan

$$P_{10}(7) = C_{10}^7 0{,}8^7 (1-0{,}8)^{10-9} = \frac{10!}{7!(10-7)!} \cdot 0{,}8^7 \cdot 0{,}2^3 =$$

$$= \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 0{,}8^7 \cdot 0{,}008 = 0{,}96 \cdot 0{,}8^7$$

Bizning Misolimizda np-q 10·0,8-0,2=7,8 np+p=10·0,8+0,8=8,8

bo'lgani uchun (4) formulaga asosan tekshirilayotgan n=10 ta maxsulot ichida m_0=8 tasi sifatli bo'lishi eng katta ehtimollikka ega.Bu eng kattta ehtimollik qiymati $R_{10}(8) = 1{,}8 \cdot 0{,}8^8$ bo'lishini ko'rsatish talabaga mustaqil ish sifatida beriladi.

Endi Bernulli sxemasida tekshirilayotgan A xodisaning ro'y berishlar soni m1 bilan m2 orasida bo'lish ehtimolligini topamiz.Bu holda ehtimolliklarni qo'shish teoremasiga asosan u

$$R_n(m_1,m_2)= \sum_{m=m_1}^{m_2} P_n(m) = \sum_{m=m_1}^{m_2} C_n^m p^m q^{n-m} \tag{5}$$

formula bilan hisoblanadi.

Bu mavzuni quyidagi masalani kurish bilan boshlaymiz.

Chigitni unib chiqish ehtimoli 0,7 bo'lsa, ekilgan 1000 ta chigitdan 670 tasi unib chiqish ehtimoli topilsin.

Bu masala parametrlari n=1000, p=0,7 bo'lgan binomial taqsimot yordamida echiladi va izlangan ehtimollikning aniq qiymati

$$R_{1000}(670) = S_{1000}^{670}\, 0{,}7^{670}\, 0{,}3^{330} = \frac{1000!}{670!400!} 0{,}7^{670} \cdot 0{,}3^{330}$$

tenglik bilan aniqlanadi. Ammo bu erda hisoblash nuqtai-nazardan ikki turdagi qiyinchilikka duch kelamiz:

1. 1000! , 600! , 400! faktoriallarni hisoblash qiyin va ular juda katta sonlardan iborat bo'ladi;

2. $0{,}7^{670}$, $0{,}3^{330}$ darajalarni hisoblash ham murakkab va ular juda kichik sonlardan iboratdir.

Shu sababli binomial taqsimotda kuzatuvlar soni n etarli katta bo'lganda

$$R_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} \qquad (1)$$

ehtimollikning qiymatini osonrok hisoblashga imkon beradigan taqribiy formulani topish masalasi paydo bo'ladi. Bu masala birinchi marta 1733 yilda frantsuz matematigi Muavr (1667-1754) tomonidan r=0,5 hususiy xol uchun xal etildi. Muavr formulasi keyinchalik frantsuz matematigi Laplas (1749-1827) tomonidan r(0,5 xol uchun umumlashtirildi va shuning uchun u Muavr-Laplas lokal teoremasi deb yuritiladi.

MUAVR-LAPLASNING LOKAL TEOREMASI:

Agarda (1) binomial taqsimotda sinovlar soni n etarli kattava 0<p<1 bo'lsa, $R_n(m)$ehtimollik uchun asimptotik harakterdagi quyidagi taqribiy formula o'rinli bo'ladi:

$$R_n(m) \approx P(m) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x_m), \quad x_m = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \qquad (2)$$

Bu erda

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

va φ(x) funktsiya qiymatlari maxsus jadvaldan olinishi mumkin. (2) taqribiy formulani asimptotik harakterdaligi shuni bildiradiki, sinovlar soni n kanchalik katta bo'lsa, bu formula xatoligi shunchalik kichik bo'ladi.

Bu teorema Isboti ustida tuxtalib o'tirmasdan, uni tasdiklovchi quyidagi jadvalni keltiramiz:

M	10	15	20	25	30
$P_{100}(m)$	0,0034	0,0481	0,0993	0,0439	0,0052
P(m)	0,0044	0,0456	0,0997	0,0456	0,0044

Bu jadvalni ikkinchi satrida n=100, p=0,2 parametrli binomial taqsimotdagi ehtimolliklarning (1) formula bilan hisoblangan $R_n(m)$ aniq qiymatlari (turt xona aniqlikda), uchinchi satrida esa uning (2) formula bilan topilgan R(m) taqribiy qiymatlari keltirilgan. (2) taqribiy formula r≈0,5 bo'lganda eng yaxshi natijalar beradi. Amaliyotda (2) taqribiy formuladan *p*rq>9 shart bajarilgandagina foydalanish tavsiya etiladi. Ko'rib o'tilgan chigitni unib chiqishi haqidagi masalaning taqribiy javobi (2) formulaga asosan

$$R_{1000}(670) \approx \frac{1}{\sqrt{1000\cdot 0,7\cdot 0,3}}\varphi\left(\frac{670-1000\cdot 0,7}{\sqrt{1000\cdot 0,7\cdot 0,3}}\right)=\frac{1}{\sqrt{210}}\varphi\left(-\frac{30}{\sqrt{210}}\right)\approx 0,0293$$

bo'ladi. Bu erda $\varphi(-x)=\varphi(x)$ va jadvalga asosan $\varphi(2.1)\approx 0,0440$ekanligidan foydalanildi.

(2) taqribiy formula r yoki q=1-pqiymatlari kichkina son va $prq\leq 9$ bo'lganda yaxshi natijalar bermaydi. Bu holda $R_n(m)$ ehtimollik uchun qoniqarli taqribiy formula frantsuz matematigi Puasson tomonidan topildi.

PUASSON TEOREMASI: Agarda (1) binomial taqsimotda n etarli katta, r esa kichik son bo'lib, $pr=\lambda$ bo'lsa, $R_n(m)$ ehtimollik uchun asimptotik harakterdagi quyidagi formula o'rinli:

$$R_n(m) \approx R_m = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} \qquad (3)$$

<u>**I s b o t :**</u> (1) formula va r=$\frac{\lambda}{n}$ tenglikdan foydalanib, $R_n(m)$ ehtimollikni quyidagi ko'rinishda ifodalaymiz:

$$R_n(m)=S_n^m p^m q^{n-m} =$$

$$\frac{n!}{m!(n-m)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^m\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-m}=\frac{\lambda^m}{m!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\frac{(n-m+1)(n-m+2)...(n-1)n}{n^m}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-m}=$$

$$=\frac{\lambda^m}{m!}\cdot\frac{n-m+1}{n}\cdot\frac{n-m+2}{n}...\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n}{n}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-m} \qquad (*)$$

Limitlar nazariyasidan ma'lumki, ixtiyoriy chegaralangan k va λ soni uchun

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-k}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{k}{n}\right)=1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k=1$$

va ikkinchi ajoyib limitga asosan

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n=e^{-\lambda}$$

Demak n etarli katta bo'lganda

$$\frac{n-k}{n}\approx 1,\ \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-m}\approx 1,\ \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\approx e^{-\lambda}$$

va shu sababli $(*)$ tenglikdan (3) taqribiy formula kelib chiqadi.

Shuni ta'kidlab utish kerakki, berilganm va λ qiymatlarida

$$R_m = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$$

ehtimollik qiymati maxsus jadval yordamida topilishi mumkin.

<u>***M i s o l :***</u> Mineral suv qo'yish sexida shisha idishning (butilka) sinish ehtimolligi r=0,002 bo'lsa, 1000 ta idishdan uchtasini sinish ehtimolligi topilsin.

Ko'rilayotgan masala n=1000, r=0,002 parametrli binomial taqsimotga mos keladi va

$$nrq = 1000\cdot 0,002\cdot 0,998 = 1,996<9$$

bo'lgani uchun $R_{1000}(3)$ ehtimollikni Puassonning (3) taqribiy formulasi yordamida hisoblaymiz. Bunda $\lambda=pr=1000\cdot 0{,}002=2$ va jadval yordamida $R_{1000}(3)\approx \frac{2^3 e^{-2}}{3!}\approx 0{,}1804$ ekanligini topamiz.

Endi Bernulli sxemasida kuzatuvlar soni n katta bo'lganda xodisani ro'y berishlar soni m1 bilan m2 orasida bo'lish ehtimolligining aniq qiymati

$$R_n(m_1,m_2)=\sum_{m=m_1}^{m_2} C_n^m p^m q^{n-m} \qquad (4)$$

uchun taqribiy formula topish masalasini ko'ramiz. Bu masala Muavr-Laplasning integral teoremasida uz echimini topadi.

MUAVR-LAPLASNING INTEGRAL TEOREMASI: Agarda binomial taqsimotda kuzatuvlar soni n etarli katta va r ehtimollikuchun $0<p<1$shart bajarilsa, u holda ixtiyoriy m_1 va m_2 ($m_1\le m_2$) sonlari uchun asimptotik harakterdagi

$$R_n(m_1,m_2)\approx F(x_2)-F(x_1) \qquad (5)$$

taqribiy tenglik o'rinli bo'ladi. Bu erda

$$x_k=\frac{m_k-np}{\sqrt{npq}}, \qquad k=1{,}2$$

va

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}dt=\int_0^x \varphi(t)dt$$

$F(x)$ funktsiya qiymatlari $4\ge x>0$ bo'lganda maxsus jadvaldan olinadi. Agarda $x<0$ bo'lsa $F(-x)=-F(x)$ tenglikdan, $x>4$ bo'lganda esa $F(x)=0{,}5$ munosabatdan foydalanib $F(x)$ qiymati topiladi.

M i s o l : Simmetrik tanga 1000 marta tashlanganda gerb chiqishlar soni 400 bilan 600 orasida bo'lish ehtimoli topilsin.

Bu erda n=1000 , r=0,5 , m_1 = 400 , m_2 = 600 va R_{1000} (400,600) ehtimollikni topish talab etiladi. (5) taqribiyformulaga asosan

$$R_{1000}(400,600)\approx F\left(\frac{600-1000\cdot 0{,}5}{\sqrt{1000\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5}}\right)-F\left(\frac{400-1000\cdot 0{,}5}{\sqrt{1000\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5}}\right)=$$

$$=2F\left(\frac{100}{\sqrt{250}}\right)=2F(6{,}3)=2\cdot 0{,}5=1$$

S a v o l l a r:

1. Bernulli formulasining kamchiligi nimadan iborat?
2. Muavr-Laplasning lokal teoremasida nima tasdiklanadi ?
3. Puasson teoremasi qanday ifodalanadi ?
4. Muavr-Laplasning integral teoremasini aytib bering.
5. Laplas funktsiyasini yozing va uning xossalarini ko'rsating.

Tayanch iboralar : Muavr-Laplasning lokal teoremasi, Puasson teoremasi, Muavr-Laplasning integral teoremasi.

52 - M A ‘ R U Z A

TASODIFIY MIQDOR TUSHUNCHASI. DISKRET TASODIFIY MIQDORLAR VA ULARNING TAQSIMOT QONUNI. UZLUKSIZ TASODIFIY MIQDOR. ZICHLIK FUNKSIYASI. UZLUKSIZ TASODIFIY MIQDORNING TAQSIMOT FUNKSIYASI.

M A ‘ R U Z A r e j a s i :

1. Tasodifiy miqdor.
2. Diskret tasodifiy miqdorlar.
3. Taqsimot qonuni.
4. Matematik kutilish.
5. Matematik kutilish xossalari.
6. Dispersiya.
7. Dispersiya xossalari.
8. O’rta kvadratik chetlanish.

Adabiyotlar:

1..U. Soatov. “Oliy matematika” II qism. Toshkent. «O’qituvchi» nashriyoti, 1994 y. 14-bob, § 16-18 , § 21-23 ; 251- 256 , 261- 267 betlar.
2. Piskunov N.S. Differentsial va integral hisob. 2-tom, Toshkent, «O’qituvchi», 1974 yil. X X bob, §7-10, 489-505 betlar.

Kundalik xayotimizda biz o’zining turli qiymatlarini tasodifga bog’liq ravishda qabul qiladigan o’zgaruvchi miqdorlar bilan tez-tez uchrashib turamiz. Masalan :

1) sotib olingan lotoreya biletiga chiqqan yutuq kattaligi ;
2) tekshiruv natijasida aniqlangan sifatsiz maxsulotlar soni ;
3) ekilgan 1000 ta urugdan unib chiqqanlari soni ;
4) polizning bir gektaridan olingan hosil miqdori ;
5) sogilgan sutning tarkibidagi yog miqdori ;

bekatda kerakli avtobusni kutishga ketgan vaqt.
Bunday miqdorlar ehtimolliklar nazariyasida tasodifiy miqdorlar deb tushuniladi.

Tasodifiy miqdorlar $X=X(\omega)$, $Y=Y(\omega)$, $Z=Z(\omega)$ kabi bosh harflar bilan, ularning mumkin bo’lgan qiymatlari esa x,u,z kabi mos kichik harflar bilan belgilanadi.

T A ' R I F 1 : Mumkin bo’lgan qiymatlarini x_1, x_2, …. , x_n kabi belgilab bo’ladigan X tasodifiy miqdorlar **diskret tasodifiy miqdor** deyiladi.

Ta'rifga asosan yuqoridagi 1), 2) va 3) Misollarda ko’rilgan tasodifiy miqdorlar diskretdir. Ammo 4), 5) va 6) Misollarda ko’rilgan tasodifiy miqdorlarni diskret deb bo’lmaydi, chunki ularning mumkin bo’lgan qiymatlari to’plami to’liq biror intervalni tashqil etadi va shu sababli ularni sanab bo’lmaydi. Bunday tasodifiy miqdorlar uzluksiz deb ataladi va ular keyinrok kuriladi.

X diskret tasodifiy miqdor o’zining mumkin bo’lgan x_1, x_2, …. , x_n qiymatlari bilangina to’liq aniqlanmaydi. Kuzatuvlarda bu qiymatlarning ba'zilari tez-tez, ba'zilari nisbatan kam, ba'zilari esa onda-sonda ro’yobga chikib turishi mumkin. Shu sababli X tasodifiy miqdorning har bir mumkin bo’lgan x_i qiymatining $r_i=P\{X=x_i\}$ehtimolligini ham ko’rsatish kerak. Odatda bu ma'lumotlar quyidagi jadval ko’rinishida beriladi :

X	x_1	x_2	….	x_n	….
R	r_1	r_2	….	r_n	….

(1)

Bu jadvalda

$$r_1+r_2+\ldots r_n+\ldots=\sum_i r_i = 1 \qquad (2)$$

shart bajarilishi kerak.

T A ' R I F ***№23 :*** (2) shartga buysunuvchi (1) jadval X diskret tasodifiy miqdorning **taqsimot qonuni** (yoki katori) deb ataladi.

Ehtimolliklar nazariyasi nuqtai nazaridan (1) taqsimot qonuni X diskret tasodifiy miqdor to'g'risida to'liq ma'lumot beradi. Ammo bir kator amaliy masalalarni kurganda X to'g'risida bunchalik to'liq ma'lumotga xojat bo'lmaydi.

Masalan, korxonaning yil davomida ishlab chikaradigan maxsulotining kundalik xajmi X tasodifiy miqdor bo'ladi. Ammo bu ko'rsatgichni harakterlash uchun X ni yilning har bir kundagi $x_1, x_2, \ldots, x_{365}$ qiymatlarini bilish shart bulmasdan, balkim bir kunlik o'rtacha maxsulot xajmi $\overline{X}$ ni bilish etarli.

Diskret tasodifiy miqdor X o'zining chekli sondagi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mumkin bo'lgan qiymatlarini bir xil ehtimollik bilan qabul kilsin, ya'ni

$$p_1 = r_2 = \ldots = r_n = \frac{1}{n}$$

Ma'lumki bu holda o'rta qiymat $\overline{X}$

$$\overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

formula bilan aniqlanadi. Endi o'rta qiymat tushunchasini r1 ,r2,…,rn ehtimolliklar ixtiyoriy bo'lgan xol uchun umumlashtiramiz. Buning uchun yuqorida keltirilgan $\overline{X}$ formulasini $r_k = \frac{1}{n}$, $k = \overline{1,n}$ ekanligini hisobga olgan holda quyidagicha yozib chiqamiz:

$$\overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = x_1 \cdot \frac{1}{n} + x_2 \cdot \frac{1}{n} + \ldots x_n \cdot \frac{1}{n} = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n$$

Bu formula ixtiyoriy r_k , $k=\overline{1,n}$, ehtimolliklar uchun ham ma'noga ega bo'ladi va u bilan aniqlangan son X tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlarini sonlar o'qida joylashuvini harakterlaydi.

T A ' R I F ***№ 3:*** X diskret tasodifiy miqdorning **matematik kutilishi** yoki o'rta qiymati deb M(X) kabi belgilanadigan va

$$M(X) = x_1 r_1 + x_2 r_2 + \ldots + x_n r_n = \sum_{\kappa=1}^{n} x_k r_k \qquad (3)$$

formula bilan hisoblanadigan songa aytiladi.

Turli tasodifiy miqdorlarning matematik kutilishlarini hisoblashda uning quyidagi xossalari foydali bo'lishi mumkin:

I x o s s a : O'zgarmas S sonning matematik kutilishi shu sonni uziga teng, ya'ni

$$M(S)=S \;, \quad S\text{-sonst} \qquad (4)$$

I s b o t : O'zgarmas S sonini faqatgina bitta S qiymatni r=1 ehtimollik bilan qabul qiladigan tasodifiy miqdor deb karash mumkin va shuning uchun (3) formulaga asosan

$$M(S)=S\cdot 1=S$$

II x o s s a : O'zgarmas S ko'paytuvchini matematik kutilish belgisidan tashkariga chiqarish mumkin, ya'ni

$$M(SX)=S\cdot M(x) \qquad (5)$$

I s b o t : Agarda X tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari xk , ularning ehtimolliklari R{X=x_k}=r_k bo'lsa, u holda SX tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari Sx_k ko'rinishda bo'lib, ularning ehtimolliklari uchun

$$R\{CX=Sx_k\} = R\{X=x_k\}= r_k$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Shuning uchun (3) formulaga asosan

$$M(SX) = \sum_{\kappa} (Sx_k)r_k = S\sum_{\kappa} x_k r_k = SM(X)$$

Keyingi xossalarni bayon qilish uchun X va Y diskret tasodifiy miqdorlarni yig'indisi va ko'paytmasi tushunchasini kiritamiz. X (yoki Y) tasodifiy miqdor o'zining x_k (yoki u) mumkin bo'lgan qiymatlarini R{X=x_k}=r(x_k) (yoki R{Y=u_j}=p(u_j)) ehtimollik bilan qabul kilsin. Bu X va Y tasodifiy miqdorlar bir paytda kuzatilayotgan bo'lsin. Bu kuzatuvlarda X va Y bir paytni uzida X=x_k va Y=u_j qiymatlarini qabul qilishi tasodifiy xodisa va uning ehtimolligini

$$R\{X=x_k, Y=u_j\}= p\,(x_k, u_i)$$

deb belgilaymiz.

<u>T A ' R I F</u> <u>№ 4 :</u> X va Ydiskret tasodifiy miqdorlarning X±Y algebraik yig'indisi (XU ko'paytmasi) deb shunday Z diskret tasodifiy miqdorga aytiladiki, uning mumkin bo'lgan qiymatlari $Z_{kj}=x_k\pm u_j$
($Z_{kj} = x_k u_j$) ko'rinishda bo'lib, ularning ehtimolliklari

$$R\{Z=z_{kj}\}=P\{X=x_k,Y=u_j\}= p(x_k ,u_j)$$

formula bilan aniqlanadi.

<u>T A ' R I F</u> <u>№ 5 :</u> X va Y diskret tasodifiy miqdorlar bog'liqmas deyiladi, agarda ixtiyoriy k va j uchun

$$R(x_k, u_j)= R\{X= x_k, Y=u_j\}= P\{X =x_k\}\, P\{Y= u_i\} = r(x_k)\, p(u_j)$$

tenglik bajarilsa. Bu shart bajarilmasa X va Yo'zaro bog'liq tasodifiy miqdorlar deb ataladi.

<u>M i s o l:</u> Ikkita o'yin sokkasi tashlangan va ularda chiqqan sonlar X va Y bilan belgilangan. Bu erda klassik ta'rifga asosan

$$R\{X=k\}=\frac{1}{6} \quad , \quad R\{Y=j\}=\frac{1}{6} \quad , \quad k,j = \overline{1,6}$$

Ikkita o'yin sokkasi tashlanganda barcha natijalar soni 36 ta bo'lib, ixtiyoriy k,j = $\overline{1,6}$ uchun ularning faqat bittasida {X=k, Y=j} xodisa ro'y beradi. Shu sababli

$$R\{X=k, Y=j\} = \frac{1}{36} = \frac{1}{6} = \frac{1}{6} = R\{X=k\}R\{Y=j\}$$

Demak X va Y bog'liqmas tasodifiy miqdorlardir.

Amaliyotda X va Y tasodifiy miqdorlarning bog'liq yoki bog'liqmasligi ko'pincha ularning mazmuniga karab belgilanadi. Masalan, ikkita zavodda bir xil maxsulot turli texnologiyada ishlab chiqarilayotgan bo'lsin. Bu zavodlarda har kuni ishlab chiqarilayotgan maxsulotlarning ichidagi sifatsizlari sonini X va Y bilan belgilasak, ular bog'liqmas tasodifiy miqdor bo'ladi.

<u>III x o s s a :</u> Agarda X va Y chekli M(X) va M(Y) matematik kutilishga ega bo'lgan ixtiyoriy tasodifiy miqdorlar bo'lsa, ularning algebraik yig'indisi X±Y ham matematik kutilishga ega bo'ladi va

$$M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y) \qquad (6)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

<u>IV – x o s s a :</u> Agarda X va Y chekli M(X) va M(Y) matematik kutilishga ega bo'lgan bog'liqmas tasodifiy miqdorlar bo'lsa, ularning XU ko'paytmasi ham matematik kutilishga ega bo'ladi va

$$M(XU) = M(X)\, M(Y) \qquad (7)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Bu xossalarni Isbotlash talabalarga mustaqil ish sifatida topshiriladi.

Shuni ta'kidlab utish kerakki, (7) formula o'zaro bog'liq tasodifiy miqdorlar uchun o'rinli bo'lmaydi.

M(X) matematik kutilish X tasodifiy miqdorning barcha mumkin bo’lgan qiymatlari sonlar o’qining kaysi nuqtasi atrofida tudalanganligini harakterlaydi. Bir kator masalalarda X tasodifiy miqdor qiymatlari o’zining M(X) matematik kutilishi atrofida kanchalik yoyilganligini (tarkalganligini) harakterlashga to’g’ri keladi.

Masalan biror kattalik ikki xil asbob yordamida bir necha marta ulchangan bo’lib, kaysi asbobda ulchash natijalari o’zining o’rta qiymatiga yakinrok joylashgan bo’lsa, ya'ni kamrok yoyilgan (tarkalgan) bo’lsa, shu asbob yaxshirok deb olinadi.

Ehtimolliklar nazariyasida X tasodifiy miqdor qiymatlarining tarkokligi ko’rsatgichi sifatida dispersiya va o’rta kvadratik chetlanish qabul qilingan.

T A ' R I F № 6 : X tasodifiy miqdorning dispersiyasi deb D(X) kabi belgilanadigan va

$$D(X) = M\,(X-M(X))^2 \qquad (8)$$

formula bilan hisoblanadigan songa aytiladi.

X diskret tasodifiy miqdor taqsimot qonuni berilgan bo’lsa, (8) formulani

$$D(X)=\sum_{\kappa} (x_k - m_x)^2\, p_k \qquad (9)$$

ko’rinishda yozish mumkin. Bu erda $m_x = M(X)$.

Kiskalik uchun $M(X)=a$ belgilash kiritib va matematik kutilish xossalaridan foydalanib dispersiyaning (8) formulasini quyidagicha yozish mumkin:

$$D(X)=M(X-a)^2 =M(X^2-2aX+a^2) =M(X^2)-M(2aX)+M(a^2)=M(X^2)-2aM(X)+a^2=$$
$$=M(X^2)-a^2 = M(X^2)-[M(X)]^2$$

Shunday qilib

$$D(X) = \sum_{\kappa} x_{\kappa}^2\, p_k - [M(X)]^2 \qquad (10)$$

va amaliyotda dispersiyani shu formula bilan hisoblash qulaydir. Dispersiya quyidagi xossalarga ega :

I x o s s a : Dispersiya manfiy bo’lmagan sondir, ya'ni

$$D(X) \geq 0 \qquad (11)$$

I s b o t : $(X-M(X))^2 \geq 0$ bo’lgani uchun matematik kutilishning III xossasiga asosan

$$D(X) =M\,(X-M(X))^2 \geq 0$$

II x o s s a : O’zgarmas S sonining dispersiyasi nolga teng, ya'ni

$$D(C) = 0 \qquad (12)$$

I s b o t : Matematik kutilishning I xossasiva (8) formulaga asosan

$$D(C) = M(S-M(S))^2 = M(S-S)^2 = M(0) = 0$$

III x o s s a : O’zgarmas S ko’paytuvchini dispersiya belgisidan kvadratga oshirib chiqarish mumkin, ya'ni

$$D(CX) = C^2D(X) \qquad (13)$$

I s b o t : Matematik kutilishning III xossasiga asosan

$$D(CX) = M(SX-M(SX))^2 = M(SX-SM(X))^2 =$$
$$= M[C^2(X-M(X))^2] = S^2\, M(X-M(X))^2 = S^2D(X)$$

IV x o s s a : Agarda X va Y bog’liqmas tasodifiy miqdorlar bo’lsa, ularning yig’indisini dispersiyasi har birining dispersiyalari yig’indisiga teng bo’ladi , ya'ni

$$D\,(X+Y)=D(X)+D(Y) \qquad (14)$$

Bu xossani Isbotsiz qabul etamiz.

V x o s s a : Bog’liqmas X va Y tasodifiy miqdorlar ayirmasining dispersiyasi X va Y dispersiyalarining yig’indisiga teng, ya'ni

$$D(X-Y) = D(X) + D(Y) \qquad (15)$$

I s b o t : Dispersiyani IV va II xossalariga asosan

$$D(X-Y)=D(X+(-Y))= D(X)+D(-Y)=D(X)+(-1)^2D(Y)=D(X)+D(Y)$$

VI x o s s a : X tasodifiy miqdorga ixtiyoriy S o’zgarmas son qushilsa, uning dispersiyasi uzgarmaydi, ya'ni

$$D(X+C) = D(X) \qquad (16)$$

Bu xossaning Isboti talabalarga xavola qilinadi.

Agarda ko'rilayotgan masalada X tasodifiy miqdor qiymatlarining o'lcham birligini ham hisobga olish kerak bo'lsa, bu holda dispersiya$D(X)$ o'rniga ko'pincha o'rta kvadratik chetlanish deb ataladigan,

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} \qquad (17)$$

formula bilan aniqlanadigan ko'rsatgichdan foydalaniladi. Bunga sabab sho'qi X qanday o'lcham birligiga ega bo'lsa, $M(X)$ va $\sigma(X)$ ko'rsatgichlar ham usha o'lcham birligiga ega bo'ladi, $D(X)$ esa bu o'lcham birligining kvadrati bilan ulchanadi.

Bu erda biz amaliy masalalarni echishda juda ko'p uchrab turadigan ba'zi bir diskret tasodifiy miqdorlarning taqsimot qonunlarini ko'rib chiqamiz.

I.Binomial taqsimot. Bernulli sxemasida,ya'ni R(A)=r ehtimolli A tasodifiy xodisa ustida n ta bog'liqmas kuzatuv o'tkazilganda, A xodisaning ro'y berishlar sonini X bilan belgilaylik. Aniqlanishi bo'yicha X diskret tasodifiy miqdor bo'lib u o'zining k=0,1,2,…,n mumkin bo'lgan qiymatlarini

$$R\{X=k\} = R_n(k) = S_n^k r^k q^{n-k}, \; q=1-p \qquad (1)$$

ehtimolliklar bilan qabul qilishi va

$$\sum_{k=0}^{n} P\{X=k\} = 1$$

bo'lishi oldin ko'rib o'tilgan edi. (1) ehtimolliklarga ega bo'lgan X binomial taqsimotli tasodifiy miqdor deyiladi. Shu tasodifiy miqdorning matematik kutilishi va dispersiyasini topamiz. Ta'rif bo'yicha ular

$$M(X) = \sum_{k=0}^{n} x_k r_k = \sum_{k=0}^{n} k S_n^k r^k q^{n-k},$$

$$D(X) = \sum_{k=0}^{n} x_k^2 p_k - [M(X)]^2 = \sum_{k=0}^{n} k S_n^k r^k q^{n-k} - [M(X)]^2$$

formula bilan topiladi. Ammo bu formulalardagi yig'ndilarni hisoblash ancha murakkab va shu sababli $M(X)$, $D(X)$ ko'rsatgichlarni boshqacha usulda topamiz. Buning uchun X_m, m=1,2,…,n, yordamchi tasodifiy miqdorlarni kiritamiz. Bu erda $X_m=1$ ($X_m=0$) agarda m – kuzatuvda A xodisa ro'y bersa (ro'y bermasa) deb olamiz. Shartga asosan R(A)=r , R(A) =1-r=q bo'lgani uchun, X_m diskret tasodifiy miqdorlar bir xil

X_m	1	0
P	r	q

m=1,2,…, n. taqsimot qonuniga ega bo'ladi. U holda ixtiyoriy $m=\overline{1,n}$ uchun

$$M(X_m) = x_1 r_1 + x_2 r_2 = 1\cdot p + 0\cdot q = p,$$

$$D(X_m) = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 - [M(x)]^2 = 1^2\cdot p + 0^2\cdot q - p^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq$$

X_m, $m==\overline{1,n}$ tasodifiy miqdorlarning aniqlanishiga kura ularning yig'indisi n ta kuzatuvda A xodisa necha marta ro'y berganini bildiradi, ya'ni

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_m = X$$

kuzatuvlar bog'liqmas bo'lgani uchun X_m, $m=\overline{1,n}$, tasodifiy miqdorlar ham bog'liqmas bo'ladi. Shu sababli $M(X)$ va $D(X)$ xossalariga asosan

$$M(X) = M(X_1+X_2+\ldots+X_m) = M(X_1)+M(X_2)+\ldots+M(X_n) = p+p+\ldots+r = pr$$

$$D(X) = D(X_1+X_2+\ldots+X_n) = D(X_1)+D(X_2)+\ldots+D(X_n) = pq+pq+\ldots+rd = prq.$$

Demak (1) binomial taqsimotga ega bo'lgan X tasodifiy miqdor uchun

$$M(X) = pr, \quad D(X)=prq, \quad \sigma(X) = \sqrt{npq} \qquad (2)$$

II. Puasson taqsimoti. Binomial taqsimot uchun

$$R_n(k) \approx \frac{\lambda^{\kappa} e^{-\lambda}}{\kappa!}, \quad \lambda = np, \quad \kappa = \overline{0,n}$$

Puasson asimptotik formulasini chikargan edik. Endi mumkin bo'lgan qiymatlari manfiy bo'lmagan k=0,1,2,… butun sonlardan iborat bo'lgan X diskret tasodifiy miqdorni ko'ramiz va uning bu qiymatlari ehtimolliklarini

$$R\{X=k\}= R(k) = \frac{\lambda^{\kappa} e^{-\lambda}}{\kappa!}, \lambda > 0 \qquad (3)$$

formula bilan aniqlaymiz. Avvalo (3) ehtimolliklardan tuzilgan kator yig'indisi birga teng bo'lishini ko'rsatamiz:

$$\sum_{\kappa=0}^{\infty} P(\kappa) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{\lambda^{\kappa} e^{-\lambda}}{\kappa!} = e^{-\lambda} \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{\lambda^{\kappa}}{\kappa!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1$$

Bu erda $u = e^x$ funktsiya uchun

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{x^{\kappa}}{\kappa!}$$

Makloren katoridan foydalanildi. Demak (3) ehtimolliklar taqsimot qonunini tashqil etadi va u λ parametrli Puasson taqsimoti deyiladi.

Masalan, kichik ehtimollik bilan sifatsiz bo'lishi mumkin bo'lgan maxsulotlarning katta xajmli partiyasidagi sifatsiz maxsulotlar soni Puasson taqsimotiga ega bo'ladi.

Puasson taqsimotining matematik kutilishini uning ta'rifi bo'yicha hisoblaymiz:

$$M(X)= \sum_{\kappa=0}^{\infty} \kappa P(\kappa) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \kappa \frac{\lambda^{\kappa} e^{-\lambda}}{\kappa!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{\kappa \lambda^{\kappa-1}}{\kappa!} =$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \left(\sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{\lambda^{\kappa}}{\kappa!} \right)'_{\lambda} = \lambda e^{-\lambda} (e^{\lambda})' = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda .$$

Xuddi shunday hisoblashlar orqali $D(X)=\lambda$ ekanligini ko'rsatish mumkin. Shunday qilib Puasson taqsimotida

$$M(X) = D(X) = \lambda \qquad (4)$$

Bu hususiyat faqatgina Puasson taqsimotiga xosdir.

III. Geometrik taqsimot. Bog'liqmas kuzatuvlarning har birida A tasodifiy xodisa bir xil R(A)=r ehtimollik bilan ro'y berishi mumkin bo'lsin. X orqali A xodisa birinchi marta ro'y bergan kuzatuvning tartib raqamini belgilaymiz. Bu holda X diskret tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari barcha natural sonlardan iborat bo'ladi va

$$\{X = n\} = \overline{A} \cdot \overline{A} \ldots \overline{A}\ A, \quad n=1,2,3,\ldots..$$

Kuzatuvlar bog'liqmas bo'lgani uchun ehtimolliklarni ko'paytirish teoremasiga asosan

$$R\{X=n\} = P\{ \overline{A} \cdot \overline{A} \ldots \overline{A}\ A \} =$$

$$=P(\overline{A}) \cdot P(\overline{A}) \ldots P(\overline{A}) \cdot R(A) = q^{n-1}p = pq^{n-1}, \quad q=1-p.$$

Shunday qilib kiritilgan X tasodifiy miqdoruchun

$$R\{X=n\} = pq^{n-1}, \quad n = 1,2,3,\ldots \qquad (5)$$

(5) ehtimolliklar taqsimot qonuni tashqil etishini ko'rsatish uchun ulardan tuzilgan kator yig'indisini topamiz :

$$\sum_{\kappa=1}^{\infty} R\{X=n\} = r\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = p\cdot\frac{1}{1-q} = 1$$

Bu erda biz $0<q<1$ bo'lgani uchun q^{n-1}, $n=1,2,3,\ldots$ cheksiz kamayuvchi geometrik progressiya tashqil etishidan va uning barcha hadlar yig'indisi $S=1/(1-q)$ bo'lishidan foydalandik.

(5) ehtimolliklar birinchi hadi r,maxraji esa q bo'lgan geometrik progressiya hadlaridan tashqil topgani uchun u geometrik taqsimot qonuni deb ataladi. Matematik kutilish ta'rifiga asosan

$$M(X)= \sum_{n=1}^{\infty} n\, R\{X=n\}=\sum_{n=1}^{\infty} prq^{n-1}= p\left(\sum_{n=1}^{\infty} q^{n}\right)'_q =$$

$$= p\cdot\left(\frac{q}{1-q}\right)' = p\cdot\frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}$$

Xuddi shunday hisoblashlar orqali $D(X)=q/p^2$ ekanligini topish mumkin. Shunday qilib geometrik taqsimotda

$$M(X) = \frac{1}{p},\quad D(X) = \frac{q}{p^2} \qquad (6)$$

Takrorlash uchun savollar::

1. Binomial taqsimot qonunini yozing va nechta parametrga bog'liqligini aniqlang.
2. Binomial taqsimotning asosiy sonli harakteristikalari qanday formula bilan hisoblanadi?
3. Puasson taqsimot qonunini yozing va nechta parametr bilan aniqlanishini ko'rsating.
4. Puasson taqsimotida matematik kutilish va dispersiyani qanday hisoblash mumkin?
5. Puasson taqsimotining uziga xos hususiyati nimadan iborat ?
6. Geometrik taqsimot qonunini yozing va unda nechta parametr katnashishini ko'rsating.
7. Geometrik taqsimotning sonli harakteristkalari qanday hisoblanadi?

<u>Tayanch iboralar :</u> Binomial taqsimot, Puasson taqsimoti, geometrik taqsimot.

53 - M A ‘ R U Z A

TASODIFIY MIQDORNING SONLI XARAKTERISTIKALARI. MATEMATIK KUTILMA, DISPERSIYA VA O’RTA KVADRATIK CHETLANISH

M A ‘ R U Z A r e j a s i :

1. Taqsimot funktsiyasi ta'rifi.
2. Taqsimot funktsiyasining asosiy xossalari.
3. Taqsimot funktsiyasi tadbiqlari.
4. Zichlik funktsiyasi.
5. Uzluksiz tasodifiy miqdorlar.
6. Zichlik funktsiyasi xossalari.
7. Zichlik funktsiyasining tadbiqlari.
8. Uzluksiz tasodifiy miqdorlarning matematik kutilishi va dispersiyasi.

Adabiyotlar:

1..U. Soatov. “Oliy matematika” II qism. Toshkent. «O’qituvchi» nashriyoti, 1994 y. 14-bob, § 19-23 ,256- 266 betlar.
2. Piskunov N.S. Differentsial va integral hisob. 2-tom, Toshkent, «O’qituvchi», 1974 yil. X X bob, §12-14, 506-517 betlar.

Biz diskret X tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni uni to’liq aniqlashini ko’rib utdik. Ammo mumkin bo’lgan qiymatlari biror chekli yoki cheksiz intervalni to’liq tuldiradigan X uzluksiz tasodifiy miqdor uchun taqsimot qonuni ma'noga ega bo’lmaydi. Shu sababli biz endi X tasodifiy miqdorni biror x qiymatni qabul qilish ehtimolligi o’rniga uni biror soxaga tushish ehtimolligini kurishimiz kerak. Ehtimolliklar nazariyasida bunday soxalar sifatida $(-\infty,x)$ intervallar kuriladi va x o’zgaruvchining ixtiyoriy qiymatida ularuchun

$$R\{X\in(-\infty,x)\} = R\{X<x\}$$

ehtimolliklar aniqlangan deb qabul qilinadi. Bu ehtimolliklar x o’zgaruvchini qiymatiga bog’liq bo’ladi, ya'ni biror

$$F(x) = P\{X<x\},\ x\in(-\infty,\infty) \qquad (1)$$

funktsiyani aniqlaydi.

T A ' R I F 1: (1) tenglik bilan aniqlangan $F(x)$ funktsiya X tasodifiy miqdorning **taqsimot funktsiyasi** deb ataladi.

Shuni ta'kidlab utish kerakki $F(x)$ taqsimot funktsiyasi ham diskret, ham uzluksiz tasodifiy miqdorlar uchun ma'noga ega.

Taqsimot funktsiyalari quyidagi xossalarga ega :

I –x o s s a : $F(x)$ kamaymovchi funktsiya , ya'ni

$$x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \le F(x_2) \qquad (2)$$

I s b o t : Quyidagi tasodifiy xodisalarni kiritamiz :

$$A\{x<x_2\}\ ,\ B\{x<x_1\}\ ,\ C\{x_1 \le X < x_2\}$$

Ular birgalikda emas va $x_2>x_1$ bo’lgani uchun A=V+S tenglik o’rinli bo’ladi. Ehtimolliklarni qo’shish teoremasiga asosan

$$R(A)=R(V)+R(S) \Rightarrow R(A)-R(V)=R(S)$$

$$R\{X<x_2\}- R\{X<x_1\} = P\{x_1 \le X< x_2\}\ge 0 \qquad (3)$$

Bu erdan, (1) formulaga asosan,

$$F(x_2) – F(x_1) \ge 0 \Rightarrow F(x_2) \ge F(x_1).$$

II x o s s a : $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty)=1$

I s b o t : Taqsimot funktsiyasi ta'rifi va ehtimolliklar xossasiga asosan

$$F(-\infty) =R\{X<+\infty\} = P\{\varnothing\} = 0$$

$$F(+\infty) =R\{X<\infty\} = P\{\Omega\} = 1$$

Bu erda $\varnothing$ va Ω mumkin bo'lmagan va muqarrar xodisa ekanligini eslatib o'tamiz.

III xossa: $0 \le F(x) \le 1$, $x \in (-\infty, \infty)$

Isbot: Bu xossa (1) formula va ehtimollikni xossalaridan kelib chiqadi.

TEOREMA: Agar $F(x)$ diskret yoki uzluksiz X tasodifiy miqdorning taqsimot funktsiyasi bo'lsa, ixtiyoriy $[a,v)$ yarim interval uchun

$$R\{X \in [a,v)\} = R\{a \le X < v\} = F(v) - F(a) \qquad (4)$$

formula o'rinli bo'ladi.

Isbot: Oldin ko'rilgan (3) formulada $x_1 = a$, $x_2 = v$ deb (4) formulani hosil qilamiz.

Bu teoremadan kelib chiqadiki $F(x)$ Xtasodifiy miqdorni to'liq harakterlaydi, chunki uni ixtiyoriy oralikka tushishini aniqlaydi.

TA'RIF 2: Agarda $F(x)$ taqsimot funktsiyasi differentsiallanuvchi bo'lsa, uning hosilasi **zichlik funktsiyasi** deb ataladi.

Shunday qilib zichlik funktsiyasi $f(x)$

$$f(x) = F'(x) \qquad (5)$$

formula bilan aniqlanadi.

Diskret tasodifiy miqdorlar uchun $f(x)$ zichlik funktsiyasi aniqlanmagan (ma'noga ega emas). Shu sababli uzluksiz tasodifiy miqdorlarni quyidagicha ta'riflash mumkin.

TA'RIF 3: Agarda X tasodifiy miqdorning $F(x)$ taqsimot funktsiyasi differentsiallanuvchi bo'lsa, u **uzluksiz tasodifiy miqdor** deyiladi.

Endi $f(x)$ zichlik funktsiyasini asosiy xossalarini ko'rib o'tamiz.

I xossa: $f(x) \ge 0$, $x \in (-\infty, \infty)$ (6)

Isbot: Taqsimot funktsiyasi $F(x)$ kamaymovchi bo'lgani uchun uning hosilasi $F'(x) = f(x)$ manfiy bula olmaydi.

II xossa: X uzluksiz tasodifiy miqdor $f(x)$ zichlik funktsiyasi bilan berilgan bo'lsa, uning taqsimot funktsiyasi$F(x)$ quyidagicha topiladi:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \qquad (7)$$

Isbot: Zichlik funktsiyasi ta'rifi va taqsimot funktsiyasi 2 –xossasiga asosan

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} F'(t)\,dt = F(t)\Big|_{-\infty}^{x} = F(x) - F(-\infty) = F(x)$$

Demak $f(x)$ zichlik funktsiyasi ham X tasodifiy miqdorni to'liq harakterlaydi.

III –xossa: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ (8)

Isbot: (7) formula va taqsimot funktsiyasining 2-xossasiga asosan

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = F(\infty) = 1$$

IV - xossa: Ixtiyoriy $[a,v)$ yarim interval uchun

$$R\{X \in [a,v)\} = R\{a \le X < v\} = \int_{a}^{в} f(x)\,dx \qquad (9)$$

Isbot: Zichlik funktsiyasi ta'rifi, Nyuton Leybnits formulasi va (5) formulaga asosan

$$\int_{a}^{в} f(x)\,dt = \int_{a}^{в} F'(x)\,dx = F(x)\Big|_{a}^{в} = F(v) - F(a) = R\{a \le X < v\}$$

V –xossa: X uzluksiz tasodifiy miqdorning barcha mumkin bo'lgan qiymatlari $[a,v]$ kesmada yotsa, ya'ni $X \in [a,v]$ bo'lsa, u holda

$$f(x) = 0, \quad x \notin [a,v] \qquad (10)$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

I s b o t : X∈[a,v] bo'lgani uchun F(x) taqsimot funktsiyasi ta'rifiga asosan ixtiyoriy x<a (x>v) uchun F(x)=0 (F(x)=1) va shuning uchun bu coxalarda

$$f(x) = F'(x) = 0.$$

Oldingi ma'ruzada diskret tasodifiy miqdorlar uchun M(X) matematik kutilish va D(X) dispersiya ko'rsatgichlarini kiritgan edik. Endi bu ko'rsatgichlarni uzluksiz tasodifiy miqdorlar uchun aniqlaymiz.

T A ' R I F 4: Zichlik funktsiyasi f (x) bo'lgan uzluksiz X tasodifiy miqdorning matematik kutilishi M(X) va dispersiyasi D(X) deb quyidagi integrallar bilan aniqlangan sonlarga aytiladi:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx \qquad (12)$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(x)]^2 f(x) dx \qquad (13)$$

Diskret holda ko'rsatilgan M(X) va D(X) xossalari bu erda ham to'liq saklanib kolishini ko'rsatish mumkin. Jumladan, dispersiya uchun amaliy hisoblashlarda qulay bo'lgan

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - [M(x)]^2 \qquad (14)$$

formulani keltirib chiqarishni talabalarga mustaqil ish sifatida beramiz.

I z o x : (14) yoki ham (14) ham (13) integrallar mavjud bo'lmasligi mumkin. Bu holda X uchun D(X) yoki ham D(X) ham M(X) mavjud emas deyiladi va bu narsa D(X) = ∞ yoki D(X) = ∞, M(X)= ∞ yozuv bilan ifodalanadi.

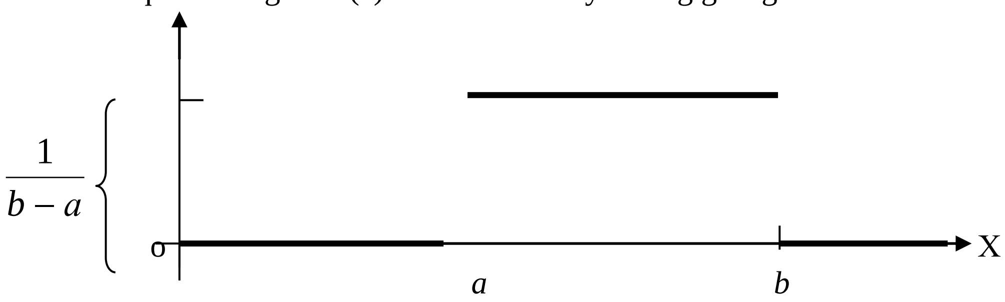
I.Tekis taqsimot.

T A ' R I F 1: Qiymatlari [a,v] kesmani tuldiruvchi X uzluksiz tasodifiy miqdor tekis taqsimotga ega deyiladi, agarda uning f (x) zichlik funktsiyasi

$$f(x) = \begin{cases} 1/(b-a), x \in [a,b] \\ 0, \; x \notin [a,b] \end{cases} \qquad (1)$$

ko'rinishda bo'lsa.

Tekis taqsimotning u=f(x) zichlik funktsiyasining grafigini chizamiz: Y



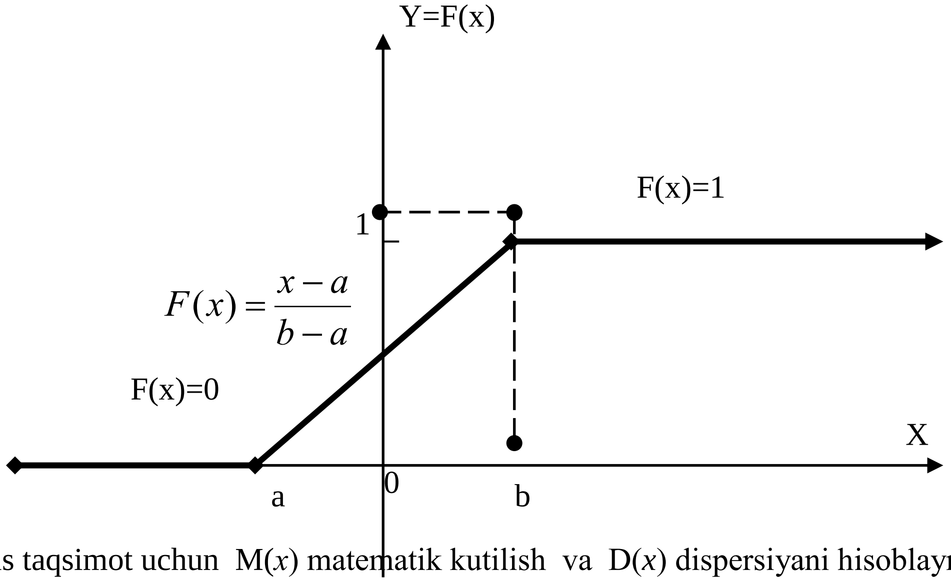
Endi bu tekis taqsimotning F(x) taqsimot funktsiyasini topamiz. X∈[a,v] bo'lgani uchun x <a(x>v) bo'lganda F(x)=0 (F(x)=1) bo'ladi.

x∈[a,v] bo'lsa, f(x) va F(x) orasidagi boglanish formulasiga kura

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{a} f(t)dt + \int_{a}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{a} 0dx + \int_{a}^{x} \frac{1}{в - a} dx = \frac{x - a}{в - a}$$

Demak F(x) = $\begin{cases} 0, x < a \\ \dfrac{x-a}{в-a}, x \in [a, в] \\ 1, x > в \end{cases}$ (2)

u=F(x) taqsimot funktsiyasi grafigini chizamiz:



Endi tekis taqsimot uchun M(x) matematik kutilish va D(x) dispersiyani hisoblaymiz:

$$\text{M(X)} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{a}^{в} dx \cdot \frac{1}{в-a}dx = \frac{в^2-a^2}{2(в-a)} = \frac{a+в}{2} \qquad (3)$$

Demak tekis taqsimotda matematik kutilish [a,v] kesmaning o'rta nuqtasidan iborat (matematik kutilish o'rta qiymat deb ham atalishini eslang)

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_{a}^{в} x^2 \frac{1}{в-a}dx = \frac{в^3-a^3}{3(в-a)}$$

bo'lgani uchun

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - [M(X)]^2 = \frac{(в^3-a^3)}{3} - (\frac{a+в}{2})^2 =$$

$$= \frac{в^2+aв+a^2}{3} - \frac{a^2+2aв+в^2}{4} = \frac{(в-a)^2}{12} \qquad (4)$$

Bu erdan ko'rinadiki [a,v] kesma uzunligi $v - a$ kancha katta bo'lsa, D(X) ham shuncha katta bo'ladi (D(X) tasodifiy miqdor qiymatlarining yoyilganligini ifodalashini eslang).

M i s o l : 0,5 l xajmli shishalarga avtomatik liniyada mineral suv kuyilmokda. Avtomatik liniya tasodifan buzilib tuxtagan paytda shishaga kuyilib bo'lgan suv xajmini X orqali belgilasak, u [0,0.5] oralikda tekis taksimlangan tasodifiy miqdor bo'ladi.

II.Normal taqsimot.

T A ' R I F 2 : Mumkin bo'lgan qiymatlari ixtiyoriy sondan iborat bo'lgan X uzluksiz tasodifiy miqdor a va σ>0 parametrlinormal taqsimotga ega deyiladi, Agarda uning f (x) zichlik funktsiyasi

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},-\infty<x<\infty \qquad (5)$$

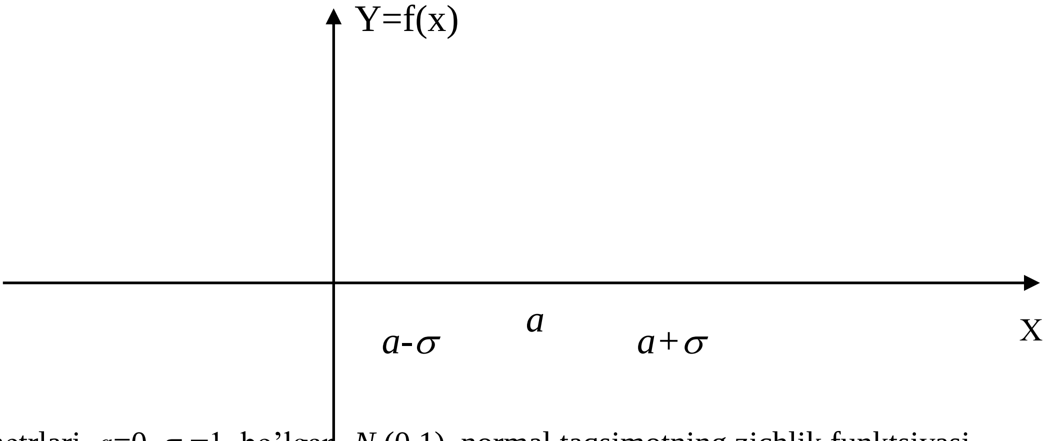
ko'rinishda bo'lsa.
Normal taqsimotning F(x) taqsimot funktsiyasi

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt \qquad (6)$$

ko'rinishda bo'ladi va u elementar funktsiyalar orqali ifodalanmasligini ko'rsatish mumkin.

Bu taqsimotni kiskacha $N(a,\sigma^2)$ deb belgilaymiz va uning sonli harakteristikalari M(X)=a, D(X)= σ^2 ekanligini ko'rsatish mumkin. Demak, a parametr matematik kutilishni, σ parametr kvadrati normal taqsimotning dispersiyasini, uzi esa o'rta kvadratik chetlanishini aniqlar ekan.

Bu erdan normal taqsimot o'zining matematik kutilishi M(X) = a va dispersiyasi D(X) = σ^2 orqali to'liq aniqlanadi degan muxim xulosaga kelamiz.
Bularga asosan normal taqsimot zichlik funktsiyasining grafigini chizamiz.



Parametrlari a=0, σ =1 bo'lgan N (0,1) normal taqsimotning zichlik funktsiyasi

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$$

va taqsimot funktsiyasi

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-t^2/2}dt$$

aloxida ahamiyatga ega. Bu funktsiyalar bilan biz oldin Muavr-Laplas teoremalarida uchrashgan va ularning qiymatlari maxsus jadvaldan olinishi mumkin ekanligini kurgan edik.

Odatda $\varphi(x)$, $\Phi(x)$ funktsiyalar jadvallarida ularning qiymatlari argumentning $x\geq 0$ qiymatlari uchun keltirilgan. Agarda $x<0$ bo'lsa , ularning qiymatlarini

$$\varphi(-x)=\varphi(x),\ \Phi(-x)=1-\Phi(x) \qquad (7)$$

munosabatlardan foydalanib topish mumkin.
Bu munosabatlarni birinchisi $\varphi(x)$ funktsiya juftligidan, ikkinchisi esa quyidagi almashtirmalardan kelib chikadi :

$$\Phi(-x)=\int_{-\infty}^{-x}\varphi(t)dt=\int_{x}^{\infty}\varphi(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)dt-\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)dt=\Phi(\infty)-\Phi(x)=1-\Phi(x)$$

Bu jadvallar yordamida ixtiyoriy normal taqsimotning $f(x)$ zichlik va F(x) taqsimot funktsiyalari qiymatlarini

$$f(x) = \frac{1}{\sigma}\varphi(\frac{x-a}{\sigma}), \qquad F(x) = \Phi(\frac{x-a}{\sigma}) \qquad (8)$$

munosabatlardan foydalanib topish mumkin. Bu munosabatlarni talabalar mustakil ish sifatida keltirib chikarishi mumkin.

(7) –(8) munosabatlardan foydalanib ixtiyoriy $N(a,\sigma^2)$ normal taqsimotli X tasodifiy miqdor uchun quyidagi muxim xulosalarga kelamiz:

1. Ixtiyoriy (α,β) interval uchun

$$R\{\alpha<X<\beta\} = F(\beta) - F(\alpha) = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right) \qquad (9)$$

2. Ixtiyoriy $\delta>0$ uchun

$$R\{|X-a|<\delta\} = P\{a-\delta<X<a+\delta\} = F\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - F - \left(\frac{\delta}{\sigma}\right) = 2F\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - 1 \qquad (10)$$

3. $R\{|X-a|<3\sigma\} = 2F(3)-1 = 2\cdot 0{,}9986-1 = 1{,}9972-1 = 0{,}9972 \qquad (11)$

Bu erdan kurinadiki, amaliy kuzatuvlarda X qabul kiladigan qiymatlar $(a-3\sigma,\ a+3\sigma)$ intervalda yotadi deb xisoblash mumkin. Bu natija “uch sigma koidasi” deb ataladi.

Normal taqsimot extimolliklar nazariyasida aloxida ahamiyatga ega bo’lgan taqsimot bo’lib xisoblanadi va amaliy masalalarni echishda juda ko’p qo’llaniladi.

Masalan, ulchash natijalari xatoliklari, paxta tolasining uzunligi,oilaning oylik daromadi, sutdagi yog miqdori normal taqsimotga ega bo’lgan tasodifiy miqdorlar bo’ladi.

III. Kursatgichli taqsimot.

T A ‘ R I F 3 : Faqat manfiy bo’lmagan qiymatlarni qabul qiluvchi va zichlik funktsiyasi

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0 \\ 0, x < 0 \end{cases} \qquad (12)$$

ko’rinishda bo’lgan uzluksiz X tasodifiy miqdor kursatgichli taqsimotga ega deyiladi. Bu erda λ ixtiyoriy musbat son va u kursatgichli taqsimotning parametri deyiladi.

Bu taqsimotning $F(x)$ taqsimot funktsiyasini topamiz:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, x \geq 0 \\ 0, x < 0 \end{cases} \qquad (13)$$

Endi kursatgichli taqsimotning $M(x)$, $D(x)$ va $\sigma(x)$ sonli harakteristikalarini xisoblaymiz. Bulaklab integrallash formulasidan va

$$\lim_{x\to\infty} x^n e^{-\lambda x} = 0, \qquad n = 1,2$$

munosabatdan foydalanib,

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{0}^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda} \qquad (14)$$

$$D(X) = \int_{0}^{\infty} x^2\lambda e^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda^2} \qquad (15)$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \frac{1}{\lambda} = M(X) \qquad (16)$$

natijalarni olamiz.

Turli texnik kurilmalarni birinchi marta buzilguncha ishlagan vaqtini X bilan belgilasak, u kursatgichli taqsimotli tasodifiy miqdor bo’ladi.

Takrorlash uchun savollar::

1. Tekis taqsimot zichlik va taqsimot funktsiyasini yozing.
2. Tekis taqsimotda matematik kutilish va dispersiya qanday xisoblanadi ?
3. Normal taqsimot zichlik funktsiyasini yozing va nechta parametrga boglik ekanligini aniqlang.
4. Normal taqsimot parametrlari qanday extimoliy ma’noga ega ?
5. Uch sigma koidasi ma’nosi nimadan iborat ?
6. Kursatgichli taqsimotning zichlik va taqsimot funktsiyalarini yozing.
7. Kursatgichli taqsimotning sonli harakteristikalarini xisoblash formulasini yozing.

Tayanch iboralar: Tekis taqsimot, normal taqsimot, uch sigma koidasi, kursatgichli taqsimot.

54 - M A ‘ R U Z A

MATEMATIK STATISTIKA ELEMENTLARI, TANLANMA. STATISTIK QATOR VA UNING XOSSALARI. POLIGON VA GISTOGRAMMA. EMPERIK TAQSIMOT FUNKSIYASI. TANLANMANING SONLI XARAKTERISTIKALARI. TANLANMANING XARAKTERISTIKALARINI NUQTAVIY VA INTERVALLI BAHOLASH.

M a ‘ r u z a   r e j a s i :

1. Matematik statistika predmeti.
2. Matematik statistikaning asosiy masalalari.
3. Bosh to’plam va uning hajmi.
4. Tanlanma va uning hajmi.
5. Tanlanmaning reprezentativligi.
6. Tanlanma turlari.

Adabiyotlar:

1. .U. Soatov. “Oliy matematika” II qism. Toshkent. «O’qituvchi» nashriyoti, 1994 y. 14-bob, § 45-46 ,310- 313 betlar.
2. Piskunov N.S. Differentsial va integral xisob. 2-tom, Toshkent, «O’qituvchi», 1974 yil. X X bob, §27, 542-543 betlar.

Matematik statistika va extimolliklar nazariyasi o’zaro boglik fanlar bo’lib, buni quyidagi Misolda ko’rsatish mumkin.

Partiyada N dona bir xil maxsulot bo’lib, ularning har biri r(0<p<1) extimollik bilan sifatli bo’lishi mumkin bo’lsin. SHu partiyadan n dona maxsulot tavakkaliga tanlab olingan desak, ularni tekshiruvdan utkazmasdan roppa-rosa k donasi sifatli bo’lishini aniq ayta olmasdan,faqatgina bu xodisaning extimolligini xisoblab, uning to’g’risida ma’lum bir xulosa chikara olamiz. Bu extimolliklar nazariyasining asosiy masalalaridan biridir.

Endi shu partiyadagi maxsulotning sifatli bo’lish extimolligi r noma’lum bo’lsin.

Tavakkaliga olingan n dona maxsulot tekshiruvdan utkazilib, ulardan roppa-rosa k donasi sifatli ekanligi aniqlandi. SHu ma’lumotlarga asosan noma’lum r extimollik xakida ma’lum bir xulosalar chikarish mumkin. Bu matematik statistikaning masalalaridan biridir.

Bu Misoldan extimolliklar nazariyasi va matematik statistika masalalari bir-biriga teskari deb aytish mumkin. Extimollik nazariyasi biror A xodisa xakida uning ustida kuzatuv, tajriba utkazilgunga kadar xulosa chikarishga imkon beradi. Matematik statistika esa bu A xodisa xakida uning ustida utkazilgan kuzatuv, tajriba natijalari asosida xulosa chikaradi.

SHunday qilib matematik statistika,extimolliklar nazariyasiga asoslangan holda, tasodifiy xodisa yoki miqdorlarni ular ustida utkazilgan kuzatuv natijalariga asosan urganuvchi fandir.

Matematik statistikaning asosiy masalalaridan bir nechtasini keltiramiz:

1. Tasodifiy X miqdor ustida utkazilgan kuzatuv natijalaridan foydalanib, uning noma'lum F(x) taqsimot funktsiyasi xakida xulosalar chikarish. Bu taqsimotni baholash masalasi deb ataladi.
2. X tasodifiy miqdorning taqsimot funktsiyasi $F(x,a_1,a_2,\ldots,a_m)$ ko'rinishda bo'lib, $a_1,a_2,\ldots,a_m$ noma'lum parametrlarga boglik bo'lsin. Bu holda parametrlarning qiymatlarini kuzatuv natijalariga asosan baholashga to'g'ri keladi.

Bu parametrlarni baholash masalasi deyiladi.

3. Ma'lum bir muloxazalarga asosan taqsimot funktsiyasi F(x) deb taxmin kilinmokda. Kuzatuv natijalariga asosan bu taxmin to'g'ri yoki noto'g'ri ekanligi xakida xulosa chikarishimiz lozim.

Bu statistik taxminlarni tekshirish masalasi deyiladi.

4. Ikkita X va Y tasodifiy miqdorlar ustida utkazilgan kuzatuv natijalariga asosan ular boglik yoki boglik emas, bogliklik kuchi va ko'rinishi to'g'risida xulosalar chikarish talab etiladi.

Bu korrelyatsion va regression masala deyiladi.

Endi matematik statistikaning asosiy tushunchalariga o'tamiz.

T A ' R I F 1 : O'rganilayotgan X tasodifiy miqdorning kurilayotgan ob'ektda mumkin bo'lgan barcha qiymatlar to'plami ***bosh to'plam*** , undagi elementlar soni esa bosh to'plamning ***hajmi*** deb ataladi.

Bosh to'plam hajmi chekli yoki cheksiz bo'lishi mumkin. Masalan, korxonada 120 ishchi bo'lib, X ularning har birini kun davomida ishlab chikargan maxsulotlar sonini ifodalasa, bu holda bosh to'plam hajmi chekli va 120 ga teng bo'ladi. Agarda X orqali avtomatda kadoklanayotgan sariyog ogirligini (gr.) belgilasak, bu holda, masalan, $X\in[195,205]$ bo'lib, bosh to'plam hajmi cheksiz bo'ladi.

T A ' R I F 2 : O'rganilayotgan X tasodifiy miqdorning tekshiruvda kuzatilgan qiymatlar to'plami ***tanlanma to'plam*** yoki kiskacha ***tanlanma,*** undagi elementlar soni esa ***tanlanma hajmi*** deb ataladi.

Ta'rifdan kelib chikadiki, tanlanma bosh to'plamning qismi (to'plam osti) bo'lib, amaliy nuqtai-nazardan uning hajmi doimo chekli bo'ladi.

T A ' R I F 3 : Agarda tanlanma o'rganilayotgan X tasodifiy miqdor bo'yicha bosh to'plamni nisbatan to'g'ri ifodalasa, u *reprezentativ* (vakolatli) *tanlanma* deyiladi.

Masalan, partiyadagi 100 dona maxsulotdan 85 donasi sifatli, kolgani sifatsiz bo'lsin. SHu partiyadan 10 dona maxsulot olindi, ya'ni hajmi 10 bo'lgan tanlanma hosil kilindi. SHu tanlanma bo'yicha partiyadagi sifatli maxsulotlar ulushi % qiymati xakida xulosa chikarish talab etilsin. Agarda tanlanmaga 10 dona faqat sifatsiz yoki aksincha, 10 dona faqat sifatli maxsulotlar tushgan bo'lsa, partiyadagi sifatli maxsulotlar ulushi 0% yoki 100% degan noto'g'ri xulosalar kelib chikadi. SHunday qilib, bu ikkala tanlanma reprezentativ bulmaydi. Bu Misolda tanlanma reprezentativ bo'lishi uchun unda taxminan 15% sifatsiz va 85% sifatli maxsulot bo'lishi kerak.

Tanlanmaning reprezentativligini ikki usulda amalga oshirish mumkin:

1. tanlanma hajmini katta qilib olish;
2. tanlanmaga elementlarni bosh to'plamdan tasodifiy ravishda olish;

Bu shartlarda tanlanmaning reprezentativ bo'lishi extimolliklar nazariyasining katta sonlar qonuniga asosan kelib chikadi.

Tanlanma ikki xil yo'l bilan hosil kilinishi mumkin va mos ravishda takroriy yoki notakroriy tanlanma deb ataladi.

T A ' R I F 4 : Agarda bosh to'plamdan kuzatuv uchun tanlab olingan element tekshiruvdan keyin bosh to'plamga kaytarilsa (kaytarilmasa), natijada hosil bo'lgan tanlanma ***takroriy (notakroriy)*** deb ataladi.

SHunday qilib takroriy tanlanmada bosh to'plamning elementi bir necha marta katnashishi mumkin. Notakroriy tanlanmada esa bosh to'plamning elementi faqat bir marta katnashishi mumkin.

Tekshirilayotgan X belgining kuzatilgan qiymatlari

$$x_1, x_2, x_3, ..., x_n \qquad (1)$$

bo'lib, hajmi n bo'lgan tanlanmani tashkil etsin. Bu erda x_i , i =1,2,…,n, ***variantalar*** deb ataladi.
(1) tanlanmadagi variantalarni usib borish tartibida joylashtirishdan hosil kilingan

$$x_1^* \le x_2^* \le ... \le x_n^* \qquad (2)$$

ketma-ketlik ***variatsion kator*** deyiladi.
(1) tanlanmadagi turli qiymatli variantalarni $x_1, x_2, ..., x_m$ va ularning takrorlanishlar sonini $n_1, n_2, ..., n_m$ deb belgilaymiz. Bu holda
n_i ; i =1,2,…,m, sonlar ***chastotalar*** deb ataladi va ular

$$n_1 + n_2 +…+n_m = n \qquad (3)$$

tenglikni kanoatlantiradi. Bunda n – tanlanma hajmidir. Bu holda tanlanmani ushbu

x_i	x_1	X_2	….	x_m
n_i	n_1	N_2	….	n_m

(4)

jadval ko'rinishda ifodalash mumkin va u X belgining berilgan tanlanma bo'yicha ***statistik taqsimot qonuni*** deb ataladi. Ko'pincha n_i chastota urniga ***nisbiy chastota*** deb ataladigan $w_i = n_i/n$ sonlardan foydalaniladi. Bu holda statistik taqsimot qonuni

x_i	x_1	x_2	….	x_m
w_i	w_1	w_2	….	w_m

(5) ko'rinishda bo'ladi va unda

$$w_1 + w_2 +…+ w_m =1 \qquad (6)$$

munosabat o'rinli bo'ladi.
M i s o l : Dukonda kun davomida sotilgan televizorlar soni X bo'lsin. 10 kun davomida utkazilgan kuzatuvlarda

5, 2, 4, 0, 2, 5, 0, 4, 1, 2

natijalardan iborat tanlanma olindi. Bu tanlanmaning variatsion katori

0, 0, 1, 2, 2, 2, 4, 4, 5, 5

bo'yicha undagi turli variantalar

$$x_1 = 0, \; x_2 = 1, \; x_3 = 2 , x_4 = 4 , x_5 = 5 ,$$

ularning chastotalari

$$n_1 = 2, \; n_2 = 1, n_3 = 3 , n_4 = 2 , n_5 = 2 ,$$

nisbiy chastotalari

$$w_1 =0.2 , \; w_2 = 0.1, \; w_3 = 0.3, w_4 = 0.2, w_5 = 0.2$$

ekanligini topamiz. Demak bu tanlanma bo'yicha X belgining statistik taqsimot qonuni quyidagicha bo'ladi :

x_i	0	1	2	4	5
n_i	2	1`	3	2	2
w_i	0,2	0,1	0,3	0,2	0,1

Bu erda

$$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 = 2+1+3+2+2=10 = n$$
$$w_1+ w_2 + w_3 + w_4 + w_5 = 0,2+0,1+0,3+0,2+0,2 = 1$$

tengliklar bajariladi.

Endi ixtiyoriy x xakikiy soni uchun n_x orqali (1) tanlanmadagi qiymati x sondan kichik bo'lgan variantalar sonini belgilaymiz. Bu n_x sonini (2) variatsion katordan aniqlash osonrok bo'lishini ta'kidlab o'tamiz.

Bu holda (n – tanlanma hajmi)

$$F_n^*(x)=\frac{n_x}{n} \qquad (7)$$

formula barcha xakikiy sonlar to'plamida aniqlangan funktsiyani ifodalaydi.

Bu funktsiya quyidagi xossalarga ega:

I. $0 \le F_n^*(x) \le 1, x \in (-\infty,\infty)$

Bu xossa $0 \le n_x \le n$ ekanligidan kelib chikadi.

II. $F_n^*(x)$ kamaymovchi funktsiya , ya'ni $x_1<x_2$ bo'lsa, u holda $F_n^*(x_1) \le F_n^*(x_2)$

Bu xossa $x_1<x_2$ bo'lganda $n_{x_1} \le n_{x_2}$ ekanligidan kelib chikadi.

III. . $F_n^*(x)=0$,Agar $x \le x_1^*$ bo'lsa. Bunda x_1^* - tanlanmaning variatsion katoridagi birinchi elementni bildirib, kuzatuv natijalarining eng kichik qiymatini ifodalaydi.

Bu xossa $x \le x_1^*$ bo'lganda $n_x=0$ ekanligidan kelib chikadi.

Jumladan , doimo $F_n^*(-\infty)=0$ munosabat o'rinli.

IV. $F_n^*(x)=1$, Agar $x > x_n^*$ bo'lsa. Bu erda x_n^* variatsion katordagi oxirgi element bo'lib, kuzatuv natijalarining eng katta qiymatiga teng bo'ladi.

Bu xossa $x > x_n^*$ bo'lganda $n_x=n$ ekanligidan kelib chikadi.

Jumladan, doimo $F_n^*(+\infty)=1$ munosabat o'rinlidir.

Bu erdan $F_n^*(x)$ xossalari taqsimot funktsiyasi xossalariga uxshashligi kelib chikadi. Bu uxshashlik bejiz bulmasdan, katta sonlar qonunining Bernulli teoremasiga asosan ixtiyoriy kichik $\varepsilon>0$ va har qanday $x \in (-\infty,\infty)$ uchun

$$\lim_{n\to\infty} P(|F_n^*(x)-F(x)|<\varepsilon)=1$$

munosabat o'rinli ekanligi kelib chikadi. Bu erda F(x) qaralayotgan X belgining taqsimot funktsiyasini bildiradi. Sh sababli $F_n^*(x)$ o'rganilayotgan X belgining berilgan tanlanma bo'yicha ***empirik taqsimot funktsiyasi*** deyiladi va noma'lum F(x) taqsimot funktsiyasi uchun baxo sifatida, ya'ni F(x)≈ $F_n^*(x)$ deb karaladi.

Bizning Misolda empirik taqsimot funktsiyasi

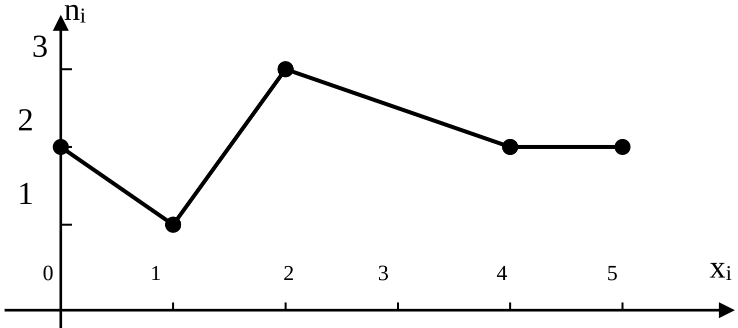
$$F_{10}^*(x)=\begin{cases} 0, x \le 0 \\ 0{,}2, 0 < x \le 1 \\ 0{,}3, 1 < x \le 2 \\ 0{,}6, 2 < x \le 4 \\ 0{,}8, 4 < x \le 5 \\ 1, x > 5 \end{cases}$$

ko'rinishda bo'lib, uning grafigi pogonasimon bo'ladi.

Tanlanmaning taqsimotini grafik ravishda ifodalash uchun poligon va gistogrammadan foydalaniladi.

XOY Dekart koordinatalar sistemasini kiritib, uning abstsissalar o'qiga x_i , i = 1,2,…,m, variatalarni,ordinatalar o'qiga ega n_i chastotalarni yoki w_i nisbiy chastotalarni joylashtiramiz. Sungra koordinata tekisligida (x_i , n_i) yoki (x_i , w_i) i =1,2,…,m, nuqtalarni topamiz va ularni ketma-ket to'g'ri chiziq kesmalari bilan tutashtiramiz. Natijada hosil bo'lgan sinik chiziq chastotalar yoki nisbiy chastotalar ***poligoni*** deyiladi.

Bizning Misolda chastotalar poligoni quyidagicha bo'ladi :



Agarda tanlanma hajmi n katta yoki X belgi uzluksiz tasodifiy miqdordan iborat bo'lsa, poligon urniga gistogramma chiziladi.

Buning uchun X belgining kuzatilgan qiymatlari joylashgan $(x_1^*, x_m^*)=(x_{min}, x_{max})$ oraliq k ta teng h uzunlikdagi Δ_1 , Δ_2 ,…, Δ_k intervallarga bulinadi. Bu intervallarga tushgan variantalar soni m_1 , m_2,…,m_k bo'lsin. Endi asoslari h uzunlikli Δ_i intervallardan, balandliklari esa m_i /h, i=1,2,…,k bo'lgan to'g'ri to'rtburchaklarni chizamiz. Bu to'g'ri to'rtburchaklar hosil qilgan pogonasimon shakl ***chastotalar gistogrammasi*** deyiladi va uning yuzasi

$$S = \frac{m_1}{h}\cdot h + \frac{m_2}{h}\cdot h + ... + \frac{m_k}{h}\cdot h = m_1 + m_2 + ... + m_k = n,$$

bo'ladi. Bu erda n-tanlanma hajmidir.

Ko'pincha m_i chastotalar urniga v_i=m_i/n nisbiy chastotalar olinib, ***nisbiy chastotalar gistogrammasi*** hosil qilinadi va uning yuzasi

$$S = \frac{v_1}{h}\cdot h + \frac{v_2}{h}\cdot h + ... + \frac{v_k}{h}\cdot h = v_1 + v_2 + ... + v_k = 1$$

bo'ladi.

M i s o l : X belgi ustida utkazilgan 30 ta kuzatuv natijalari quyidagicha:

3.5	2.3	-1.5	5.0	3.2	1.7	1.0	-1.8	4.2	2.2
0.7	5.4	2.9	1.7	-0.6	3.2	6.0	2.9	3.3	0.7
-2.0	3.5	1.5	4.7	5.0	3.1	1.8	2.7	3.5	1.7

Bu erda x_{min} = -2 , x_{max} =6 va tanlanmani gistogrammasini hosil qilish uchun kuzatuvlar joylashgan [-2,6] kesmani k=4 ta bir xil uzunlikli oraliqlarga ajratamiz. Bu oraliqlar uzunligi

$$h = \frac{x_{max} - x_{min}}{k} = \frac{6-(-2)}{4} = 2$$

oraliqlar esa

$$\Delta_1 = [-2,0)\ ,\quad \Delta_2 = [0,2)\ ,\quad \Delta_3 = [2,4)\ ,\quad \Delta_4 = [4,6]$$

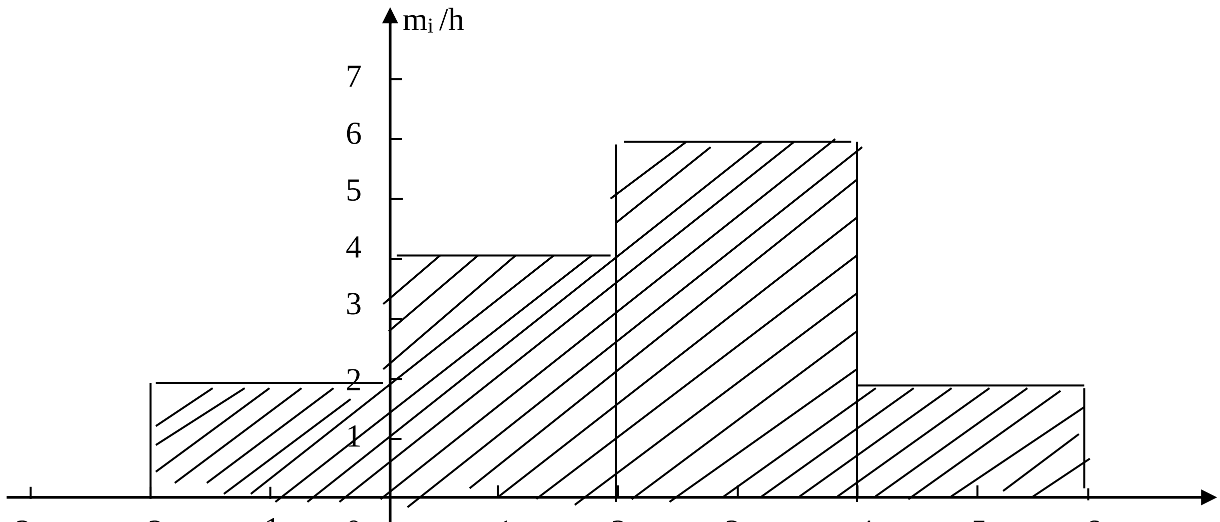
bo'ladi. Tanlanma bo'yicha

$$m_1 = 4\ ,\ m_2 = 8\ ,\ m_3 = 12\ ,\ m_4 = 6$$

ekanligini topamiz. Bu holda

$$\frac{m_1}{h}=\frac{4}{2}=2 \quad , \quad \frac{m_2}{h}=\frac{8}{2}=4 \quad , \quad \frac{m_3}{h}=\frac{12}{2}=6 \ , \quad \frac{m_4}{h}=\frac{6}{2}=3$$

bo’ladi va chastotalar gistogrammasi quyidagi ko’rinishda bo’ladi:



Shuni ta’kidlab utish kerakki, nisbiy chastotalar gistogrammasini noma’lum $f(x) = F'(x)$ zichlik funktsiyasi uchun baxo sifatida karash mumkin. Tanlanma hajmi n oshgan va intervallar uzunligi h kamaygan sari bu baxo yaxshilanib boradi.

Ko’p hollarda o’rganilayotgan X tasodifiy miqdor taqsimotining ko’rinishi maьlum bo’lib, ammo uni to’liq aniqlovchi parametrlar qiymati nomaьlum bo’ladi. Masalan, biror kursatkichni ulchashda yo’l kuyilayotgan xatolik X tasodifiy bo’lib,u normal taqsimotga ega bo’lishini nazariy ko’rsatish mumkin . Ammo bu $N(a,\sigma^2)$ normal taqsimotni tula aniqlash uchun kerak bo’lgan a va σ^2 parametrlar qiymatini nazariy topib bulmaydi. SHu sababli bu parametrlarning takribiy qiymatlarini statistik kuzatuv natijalariga asosan topish masalasi paydo bo’ladi.

Soddalik uchun X tasodifiy miqdor taqsimoti bitta noma’lum θ parametrga boglik va F(x,θ) ko’rinishda deb xisoblaymiz. Qaralayotgan X tasodifiy miqdor ustida utkazilgan n ta boglikmas kuzatuv natijalari $x_1, x_2, ..., x_n$ sonlardan iborat bo’lib,ular hajmi n bo’lgan tanlanmani hosil kiladi. Statistik nazariyada bu kuzatuv natijalari o’zaro boglikmas,bir xil F(x,θ) taqsimotga ega bo’lgan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketlik kabi karaladi.

<u>T A ‘ R I F 1:</u> Statistik kuzatuv natijalaridan tuzilgan ixtiyoriy $h(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ funktsiya ***<u>statistika</u>*** yoki ***<u>statistik baxo</u>*** deb ataladi.

Har bir statistik baxo $X_1, X_2, \ldots, X_n$ tasodifiy miqdorlardan hosil kilingani uchun uning uzi ham tasodifiy miqdordan iborat bo’ladi. Amaliy tatbiklarda $X_1, X_2, \ldots, X_n$ tasodifiy miqdorlarlar urniga $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tanlanma olinadi va bu holda $h(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ statistik baxoning kuzatilgan qiymatidan iborat bo’lib, aniq bir songa teng bo’ladi.

Nomaьlum θ parametr uchun olingan statistik baxoni $\theta^*(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ yoki kiskacha θ_n^* kabi belgilaymiz. Bunda θ_n^* tasodifiy miqdor, θ esa tasodifiy bo’lmagan noma’lum bir son bo’lgani uchun, $\theta_n^* \approx \theta$ takribiy tenglik xakida gapirib bulmaydi. SHu sababli θ_n^* statistik baxoni θ parametr qiymatiga yakinligini faqat extimollar bilan boglik tushunchalar orqali ifodalash mumkin.

T A ‘ R I F 2 : Noma’lum θ parametr uchun olingan θ_n^* statistik baxo ***siljimagan*** deyiladi, Agarda uning matematik kutilishi

$$M(\theta_n^*) = \theta \qquad (1)$$

shartni kanoatlantirsa.

(1) shart θ_n^* statistik baxo sistematik, ya’ni doimiy xatolikka ega bulmasdan, faqat tasodifiy xatoliklarga ega ekanligini ifodalaydi. Agarda $M(\theta_n^*) = \theta+\varepsilon$ ($\varepsilon\neq 0$) bo’lsa, statistik baxo ***siljigan*** deb ataladi. Masalan, biror kattalik santimetrli chizgichda ulchanayotgan bo’lsa, unda albatta sistematik ε (|ε|<1sm) xatolikka yo’l kuyilayotgan bo’ladi va shu sababli bu holda qaralayotgan baholar siljigan bo’ladi.

T A ‘ R I F 3 : Statistik baxo θ_n^* ***asosli*** deyiladi, Agarda ixtiyoriy ε>0 kichik son uchun

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\theta_n^* - \theta_n^* - \theta\right| < \varepsilon\right\} = 1 \qquad (2)$$

shart bajarilsa.

SHunday qilib asosli baxo uchun n→∞ da extimollik bo’yicha $\theta_n^* \to \theta$ munosabat o’rinli bo’ladi va ma’lum ma’noda θ_n^* qiymatlari noma’lum θ songa yakin deb aytish mumkin.

T E O R E M A : Agarda θ_n^* siljimagan statistik baxo bo’lib, uning dispersiyasi

$$\lim_{n\to\infty} D(\theta_n^*) = 0 \qquad (3)$$

shartni kanoatlantirsa, u asosli baxo bo’ladi.

T A ‘ R I F 4 : Berilgan n xajmli tanlanmada θ parametr uchun mavjud barcha statistik baholar ichida eng kichik dispersiyaga ega bo’lgan θ_n^* baxo ***effektiv*** (samarali) deb ataladi.

Effektiv θ_n^* baxoning qiymatlari θ parametrga boshka baholarga nisbatan yakinrok joylashgan deb tushunish mumkin.

T A ‘ R I F 5 : Agarda θ_n^* statistik baxo

$$\lim_{n\to\infty} M(\theta_n^*) = \theta \qquad (4)$$

shartni kanoatlantirsa, u ***asimptotik siljimagan baxo*** deyiladi.

Agarda $\tilde{\theta}_n$ noma’lum θ parametr uchun effektiv, θ_n^* esa boshka bir baxo bo’lsa, $e_n = D(\tilde{\theta}_n) / D(\theta_n^*)$ con shu baxoning effektivligi deb ataladi. Ma’nosiga ko’ra, har qanday θ_n^* baxo va ixtiyoriy n uchun $0\leq e_n\leq 1$ munosabat o’rinli bo’ladi.

T A ‘ R I F 6: Agarda θ_n^* statistik baxo uchun

$$\lim_{n\to\infty} e_n = 1 \qquad (5)$$

shart bajarilsa, u ***asimptotik effektiv baxo*** deyiladi.

Ko’p hollarda asimptotik siljimagan yoki effektiv baholarni topish masalasi nisbatan osonrok xal etilishi mumkin .

Endi $\Im(x,\theta)$ taqsimotdagi noma’lum θ parametr uchun $x_1, x_2, ..., x_n$ tanlanma bo’yicha θ_n^* statistik baxo hosil qilish usullardan birini ko’rib o’tamiz . Bu ***xakikatga maksimal uxshashlik*** usuli deb ataladi. Bunda dastlab berilgan taqsimot ko’rinishi va tanlanma bo’yicha

$$L(x_1, x_2, ..., x_n, \theta) = \Im(x_1,\theta)\cdot \Im(x_2,\theta)\cdots \Im(x_n,\theta) \qquad (6)$$

funktsiyani hosil qilamiz. (6) ***xakikatga maksimal uxshashlik funktsiyasi*** deyiladi va u n ta boglikmas kuzatuvlarda X tasodifiy miqdorimiz $x_1, x_2, ..., x_n$ qiymatlar qabul qilish extimolligi xakida ma'lumot beradi. Bu funktsiyada $x_1, x_2, ..., x_n$ kuzatuv natijalari bo'lgani uchun uzgarmas sonlar sifatida karaladi va θ o'zgaruvchi deb olinadi. Noma'lum θ parametrga θ_n^* baxo sifatida (6) funktsiyaga eng katta (maksimum) qiymat beruvchi θ o'zgaruvchi qiymati olinadi va u ***xakikatga maksimal uxshashlik*** baxosi deb ataladi.

Demak, xakikatga maksimal uxshashlik baxosi (6) funktsiyaning kritik nuqtasi kabi aniqlanadi va shu sababli, ekstremumlar nazariyasiga asosan,

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, ..., x_n, \theta)}{\partial \theta} = 0 \qquad (7)$$

tenglamadan topiladi. (7) ***xakikatga maksimal uxshashlik tenglamasi*** deyiladi. Xisoblashlarni osonlashtirish maksadida ba'zi taqsimotlar uchun (7) tenglama urniga

$$\frac{\partial \ln L(x_1, x_2, ..., x_n, \theta)}{\partial \theta} = 0 \qquad (8)$$

tenglamani ham karash mumkin. Bunga sabab sho'qi, (7) va (8) tenglama ildizlari doimo bir xil bo'ladi.

Agarda X tasodifiy miqdorning taqsimoti $\Im(x, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m)$ ko'rinishda bo'lib, m ta θ_i, i =1,2,..,m, noma'lum parametrlarga boglik bo'lsa, ular uchun xakikatga maksimal uxshashlik baholari $\theta_n^*(i)$, i=1,2,…,m.

$$\frac{\partial L(x_1, x_2 ..., x_n, \theta_1, \theta_2, ..., \theta_m)}{\partial \theta_i} = 0 , \quad i = 1,2,\ldots,m$$

yoki

$$\frac{\partial \ln L(x_1, x_2 ..., x_n, \theta_1, \theta_2, ..., \theta_m)}{\partial \theta_i} = 0 , \quad i = 1,2,\ldots,m$$

tenglamalar sistemasidan topiladi.

Isbotlash mumkinki, $\Im(x)$ taqsimotlarning ancha keng sinflari uchun xakikatga maksimal uxshashlik baholari asosli va asimptotik effektiv bo'ladi. Ammo ular siljigan baholar bo'lishi mumkin.

O'rganilayotgan X tasodifiy miqdor $N(a, \sigma^2)$ normal taqsimotga ega bo'lib,uning a va σ^2 noma'lum parametrlarini $X_1, X_2, ..., X_n$ tanlanma bo'yicha xakikatga maksimal uxshashlik usulida baholash masalasini ko'ramiz. Bu erda normal taqsimotning

$$f(x, a, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left\{ -\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2} \right\}$$

zichlik formulasidan foydalanamiz.Bu holda xakikatga maksimal uxshashlik funktsiyasini topamiz:

$$L(X_1, X_2, ..., X_n, a, \sigma^2) = f(X_1, a, \sigma^2) \cdot f(X_2, a, \sigma^2) \cdots f(X_n, a, \sigma^2) =$$

$$= (2\pi\sigma^2)^{-n/2} exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (X_i - a)^2 \right\} .$$

Xisoblashlarni soddalashtirish maksadida bu funktsiyaning natural logarifmini karaymiz:

$$\ln L(X_1, X_2 ..., X_n, a, \sigma^2) = -\frac{n}{2}\ln 2\pi\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} (X_i - a)^2$$

Bu funktsiyadan a va σ^2 parametrlar bo'yicha hosilalar olib, ushbu

$$\frac{\partial \ln L(X_1, X_2,..., X_n a, \sigma^2)}{\partial a} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} (X_1 - a) = 0 \ ,$$

$$\frac{\partial \ln L(X_1, X_2,..., X_n a, \sigma^2)}{\partial a} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n} (X_1 - a)^2 = 0$$

xakikatga maksimal uxshashlik tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Bu sistemani echib, a va σ^2 parametrlar uchun $a_n^*, (\sigma^2)_n^*$ xakikatga maksimal uxshashlik baholarini topamiz:

$$a_n^* = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + ... + X_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad (1)$$

$$(\sigma^2)_n^* = \frac{1}{n}\left[(X_1 - a_n^*)^2 + (X_2 - a_n^*)^2 + ... + (X_n - a_n^*)^2\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i - a_n^*)^2 \qquad (2)$$

Agarda X tasodifiy miqdor $N(a, \sigma^2)$ normal taqsimotga ega bo'lsa, u holda

$$a = M(X), \quad \sigma^2 = D(X)$$

bo'ladi. Demak (1) va (2) formulalar bilan aniqlanadigan $a_n^*, (\sigma^2)_n^*$ normal taqsimotning o'rta qiymati (matematik kutilishi) M(X) va dispersiyasi D(X) uchun statistik baholar bo'ladi. Ular normal taqsimotdan tashkari boshka juda ko'p taqsimotlarning o'rta qiymati va dispersisi uchun ham yaxshi statistik baxo bo'lishini ko'rsatish mumkin. SHu sababli (1) va (2) formulalar orqali topiladigan statistik baholar mos ravishda ***tanlanma o'rta qiymat*** va ***tanlanma dispersiya*** deb ataladi hamda $\overline{X}$ va S^2 kabi belgilanadi :

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \ , \ S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2 \qquad (3)$$

Bu baholarning xossalarini urganamiz.

Buning uchun $X_i, i = 1,2,..., n,$ boglikmas, bir xil taksimlangan tasodifiy miqdorlar bo'lib,

$$M(X_i) = a \ , \ D(X_i) = \sigma^2, \ i = 1,2,..., n$$

ekanligidan foydalanamiz.

$$M(\overline{X}) = M(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a = a \qquad (4)$$

Demak $\overline{X}$ tanlanma o'rta qiymat noma'lum M(X)=a matematik kutilish uchun siljimagan baxo bo'ladi.

$$D(\overline{X}) = D(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D(X_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n} \qquad (5)$$

Bu erdan

$$\lim_{n\to\infty} D(\overline{X}) = \lim_{n\to\infty}\frac{\sigma^2}{n} = 0$$

ekanligi kelib chikadi. Demak $\overline{X}$ tanlanma o'rta qiymat a= M(X) matematik kutilish uchun asosli baxo bo'ladi.

Bundan tashkari normal taqsimot uchun bu baxo effektiv,boshka taqsimotlarning ko'pi uchun esa asimptotik effektiv bo'lishini Isbotlash mumkin.

S^2 tanlanma dispersiya xossalarini urganish uchun uni quyidagi ko'rinishga keltiramiz:

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left[(X_i - a) - (\overline{X} - a)\right]^2 =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i - a)^2 - \frac{2}{n}(\overline{X} - a)\sum_{i=1}^{n} (X_i - a) + \frac{1}{n}\cdot n(\overline{X} - a)^2 =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i - a)^2 - \frac{2}{n}(\overline{X} - a)\cdot n(\overline{X} - a) + (\overline{X} - a)^2 =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i - a)^2 - (\overline{X} - a)^2 \qquad (6)$$

Bu erda

$$\sum_{i=1}^{n} (X_i - a) = \sum_{i=1}^{n} X_i - na = n\overline{X} - na = n(\overline{X} - a)$$

ekanligidan foydalanildi.

Endi,dispersiya ta'rifiga asosan

$$M(X_i - a)^2 = M(X_i - M(X_i))^2 = D(X_i) = \sigma^2$$

va (4)-(5) tengliklarga asosan

$$M(\overline{X} - a)^2 = M(\overline{X} - M(\overline{X}))^2 = D(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

ekanligidan foydalanib, (6) tenglikdan ushbu natijani olamiz:

$$M(S^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i - a)^2 - M(\overline{X} - a)^2 =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n} = \frac{1}{n}n\sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n} = \frac{n-1}{n}\sigma^2 \qquad (7)$$

Demak,

$$M(S^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2 \neq \sigma^2$$

va S^2 tanlanma dispersiya noma'lum $D(X)=\sigma^2$ dispersiya uchun siljigan baxo bo'ladi. Ammo

$$\lim_{n\to\infty} M(S^2) = \sigma^2 \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = \sigma^2 \quad ,$$

ya'ni S^2 asimptotik siljimagan baxo bo'ladi. SHu sababli tanlanma hajmi n etarli katta bo'lsa, S^2 baxoni siljimagan deb xisoblash mumkin. Agar tanlanma hajmi n katta bulmasa, σ^2 dispersiya uchun siljimagan baxo sifatida

$$(S^2)^* = \frac{n}{n-1}S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2 \qquad (8)$$

baxoni karash mumkin. Bu baxo ***tuzatilgan tanlanma dispersiya*** deb ataladi va uning uchun

$$M(S^2)^* = M(\frac{n}{n-1}S^2) = \frac{n}{n-1}M(S^2) = \frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}\sigma^2 = \sigma^2$$

munosabat o'rinli bo'ladi, ya'ni $(S^2)^*$ siljimagan baxo bo'ladi. S^2 va $(S^2)^*$ tanlanma dispersiyalar σ^2 = D(X) dispersiya uchun asosli baxo bo'lishini ko'rsatish mumkin.

Agarda X ustidagi kuzatuv natijalari statistik taqsimot qonuni orqali berilgan bo'lsa, tanlanma o'rta qiymat $\overline{X}$ va tanlanma dispersiya S^2

$$\overline{X} = \frac{\sum\limits_{\kappa=1}^{m} X_\kappa n_\kappa}{\sum\limits_{\kappa=1}^{m} n_\kappa}, \qquad S^2 = \frac{\sum\limits_{\kappa=1}^{m} (X_\kappa - \overline{X})^2 n_\kappa}{\sum\limits_{\kappa=1}^{m} n_\kappa} \tag{9}$$

formulalar bilan topiladi. Bu erda X_k , k =1,2,…,m, qaralayotgan X tasodifiy miqdorning o'zaro teng bo'lmagan kuzatilgan qiymatlarini, n_k esa shu qiymatlar chastotasini ifodalaydi. Masalan, X ustidagi n=10 ta kuzatuv natijalari

x_k	1	1	2	5
n_k	1	3	4	2

statistik taqsimot qonuni bilan berilgan bo'lsin. Bu holda

$$\overline{X} = \frac{-1\cdot 1 + 1\cdot 3 + 2\cdot 4 + 5\cdot 2}{1+3+4+2} = \frac{20}{10} = 2 \;,$$

$$S^2 = \frac{(-1-2)^2\cdot 1 + (1-2)^2\cdot 3 + (2-2)^2\cdot 4 + (5-2)^2\cdot 2}{1+3+4+2} = \frac{30}{10} = 3$$

Takrorlash uchun savollar::

1. Tanlanma o'rta qiymat qanday aniqlanadi va nima maqsadda qo'llaniladi?
2. Tanlanma o'rta qiymat qanday xossalarga ega?
3. Tanlanma dispersiya qanday aniqlanadi va nima maqsadda qo'llaniladi?
1. Tanlanma dispersiya kamchiligi nimadan iborat va u qanday tuzatiladi?
2. Tuzatilgan tanlanma dispersiya formulasini yozing.

Tayanch iboralar : Tanlanma o'rta qiymat, tanlanma dispersiya, tuzatilgan tanlanma dispersiya.

1-amaliyot .

Matntsalar va ulaming xossalari. Matritsalar ustida amallar.

Sonlardan tashkil topgan to`g'ri burchakli jadval matritsa deyiladi. Agar matritsa m - qator va n - ustundan tashkil topgan bo`lsa, uni o`lchami $m\times n$ bo`ladi. Matritsaning umumiy ko`rinishi quyidagi ko`rinishda bo`ladi

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \tag{1.1}$$

uning i - qator va j - ustunidagi elementi a_{ij} ko`rinishda bo`ladi. Ba`zida matritsa

$$A=\{a_{ij}\},\quad i=1,2,..m,\quad j=1,2,..n$$

ko`rinishda ham yoziladi.

Har qanday kvadrat A matritsaga $|A|$ yoki $\det A$ derminat yoki aniqlovchi mos keladi. Ikkinchi tartibli matritsani

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

Aniqlovchisi quyidagi ko`rinishda bo`ladi.

$$|A|=\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$$

Uchinchi tartibli kvadrat matritsani

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

ko`rinishda yozish mumkin, uning aniqlovchisi

$$|A|=\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}= \qquad (1.2)$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{32}a_{23}a_{11}-a_{33}a_{21}a_{12}$$

Uchinchi tartibli aniqlovchini sxematik hisoblash quyida keltirilgan

$$\Delta=|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} \qquad (1.3)$$

Agar (1.1) kvadrat matritsasini aniqlovchini i - qator va j - ustuniga o`chirishdan hosil bo`lgan aniqlovchi a_{ij} elementni minori deyiladi. Minor uchun M_{ij} belgi ishlatiladi.

Berilgan A va B matritsalar uchun C maritsani toping.

1.1. $A=\begin{pmatrix} -4 & 5 & 1 \\ 2 & -3 & 8 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -7 & 4 \\ 10 & -5 \\ 3 & 16 \end{pmatrix}$, $C=B-2A^T$ Javob: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

1.2. $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $C=(3A)^T-B$ Javob: $\begin{pmatrix} 11 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 3 \\ 8 & 5 & -2 \end{pmatrix}$

1.3. $A=\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -4 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix}$, $C=A+B^T$ Javob: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 6 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$

1.4. $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $C=2A+3B$ Javob: $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 7 \\ 10 & 13 & -2 \end{pmatrix}$

1.5. $A=\begin{pmatrix}3&0\\-3&1\\1&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4&1\\-3&1\\2&1\end{pmatrix}$, $C=A^T-B^T$ Javob: $\begin{pmatrix}-1&0&-1\\-1&0&2\end{pmatrix}$

Uyga vazifa

1.6. $A=\begin{pmatrix}2&-4\\3&7\\6&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4&0&1\\6&1&-3\end{pmatrix}$, $C=2A-B^T$ Javob: $\begin{pmatrix}0&-14\\6&13\\11&1\end{pmatrix}$

1.7. $A=\begin{pmatrix}3&1&0\\-2&-1&4\\7&2&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&-1&3\\2&-1&4\\4&6&2\end{pmatrix}$, $C=(2B)^T+A$ Javob: $\begin{pmatrix}3&5&8\\-4&-3&16\\13&10&5\end{pmatrix}$

1.8. $A=\begin{pmatrix}3&-4&2\\7&5&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2&4\\6&6\\-3&1\end{pmatrix}$, $C=A-B^T$ Javob: $\begin{pmatrix}5&-10&5\\3&-1&0\end{pmatrix}$

1.9. $A=\begin{pmatrix}7&-4\\0&-3\\1&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&4\\-1&2\\6&3\end{pmatrix}$, $C=3B-2A$ Javob: $\begin{pmatrix}-17&20\\-3&12\\16&5\end{pmatrix}$

1.10. $A=\begin{pmatrix}6&1&-3\\2&-1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7&3&1\\-5&1&4\end{pmatrix}$, $C=A^T+B^T$ Javob: $\begin{pmatrix}13&-3\\4&0\\-2&4\end{pmatrix}$

A va B matritsani ko\`paytmasini hisoblang.

1.11. $A=\begin{pmatrix}1&-1&2&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2\\3&6\\5&-1\\1&-3\end{pmatrix}$ Javob: $\begin{pmatrix}11\\-15\end{pmatrix}$

1.12. $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&1&0\\5&7&1\\1&4&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5&-1&2&1\\2&2&0&1\\1&-1&5&4\end{pmatrix}$ Javob: $\begin{pmatrix}4&-4&7&4\\12&0&4&3\\40&8&15&16\\16&4&17&17\end{pmatrix}$

1.13. $A=\begin{pmatrix}-2&3&0&1\\1&1&2&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&0\\1&-1\\-1&2\\1&3\end{pmatrix}$ Javob: $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

1.14. $A=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&0&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1\\1&3\\1&2\end{pmatrix}$ Javob: $\begin{pmatrix}1&4\\2&3\\0&1\end{pmatrix}$

1.15. $A=\begin{pmatrix}1&2\\1&1\\0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&2&1\\5&1&1\end{pmatrix}$ Javob: $\begin{pmatrix}13&4&3\\8&3&2\\5&1&1\end{pmatrix}$

1.16. $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ Javob: $\begin{pmatrix} -4 & 6 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 4 & -3 \\ 1 & 6 & 6 & -2 \end{pmatrix}$

1.17. $A=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ Javob:

1.18. $A=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ Javob: $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

1.19. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 6 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Javob: $\begin{pmatrix} 28 & 27 & 8 \\ 15 & 14 & 13 \end{pmatrix}$

1.20. $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Javob: $\begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$

Uyga vazifa

1.21. $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ Javob: $\begin{pmatrix} 12 & 21 \\ 21 & 27 \end{pmatrix}$

1.22. $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Javob: $\begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 7 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

1.23. $A=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -4 \\ 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ Javob: $\begin{pmatrix} 11 & -1 \end{pmatrix}$

1.24. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ Javob: $\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}$

1.25. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ -2 & -1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$ Javob: $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 14 & 1 \\ 2 & 6 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & 22 & 2 \end{pmatrix}$

1.26. $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -3 & 5\\ 3 & -5\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ Javob: $\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & 4\end{pmatrix}$

1.27. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$ Javob: $\begin{pmatrix}4\\ 1\\ 3\end{pmatrix}$

1.28. $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}$ Javob: $\begin{pmatrix}9 & 3 & 4\\ 7 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$

2-amaliyot .

Ikkinchi va uchinchi tartibli detirmanantlami hisoblash usullari. Determinantlaming xossalari. Minorlar va algebraik to'ldiruvchilari

Quyidagi ikkinchi tartibli aniqlovchilarni hisoblang:

1.31. $\begin{vmatrix}-3 & -5\\ 4 & 5\end{vmatrix}$ Javob: 5 1.32. $\begin{vmatrix}0,(3) & -0,(42)\\ 99 & 3\end{vmatrix}$ Javob: -2

1.33. $\begin{vmatrix}3 & -6\\ -5 & 7\end{vmatrix}$ Javob: -9 1.34. $\begin{vmatrix}\sqrt{2} & -3\\ \frac{1}{3} & \sqrt{2}\end{vmatrix}$ Javob: 3

1.35. $\begin{vmatrix}\sqrt{a} & -1\\ a & 1+\sqrt{2}\end{vmatrix}$ Javob: $\sqrt{a}+\sqrt{2a}+a$ 1.36. $\begin{vmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{vmatrix}$ Javob: 1

1.37. $\begin{vmatrix}a^{\frac{3}{4}} & a^{\frac{1}{2}}\\ -a^{\frac{1}{2}} & a^{\frac{1}{4}}\end{vmatrix}$ Javob: $2a$ 1.38. $\begin{vmatrix}2\sin^2\alpha & \cos^2\alpha\\ 2\sin^2\beta & \cos^2\beta\end{vmatrix}$ Javob: $2\sin^2\alpha\cdot\cos^2\beta-\sin^2\beta\cos^2\alpha$

1.39 . $\begin{vmatrix}\sqrt[4]{5} & \sqrt{2}\\ \sqrt{2} & \sqrt[4]{125}\end{vmatrix}$ Javob: 3 1.40. $\begin{vmatrix}\cos\frac{x}{2} & \sin\frac{x}{2}\\ \sin\frac{x}{2} & \cos\frac{x}{2}\end{vmatrix}$ Javob: 1

Quyidagi uchunchi tartibli aniqlovchilarni hisoblang:

1.41. $\begin{vmatrix}2 & 0 & 4\\ 5 & -2 & 1\\ -1 & -2 & 3\end{vmatrix}$ Javob: -56 1.42. $\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 7 & 2\\ 2 & 3 & -7\end{vmatrix}$ Javob: 264

1.43. $\begin{vmatrix}3 & 2 & -1\\ 1 & 2 & 9\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}$ Javob: 0 1.44. $\begin{vmatrix}5 & 3 & 2\\ -1 & 2 & 4\\ 7 & 3 & 6\end{vmatrix}$ Javob: 68

1.45. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$ Javob: 8 1.46. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -4 & 7 \\ -3 & 12 & -15 \end{vmatrix}$ Javob: 0

1.47. $\begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}$ Javob: 9 1.48. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ Javob: 21

1.49. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ Javob: -15 1.50. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ Javob: 5

Uyga vazifa

1.51. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ Javob: 40 1.52. $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ Javob: 1

1.53. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$ Javob: -3 1.54. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ Javob:2

1.55. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$ Javob: 1 1.56. $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix}$ Javob: 100

1.57. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix}$ Javob: -5 1.58. $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix}$ Javob: 4

1.59. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & 6 \\ 6 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ Javob: 8 1.60. $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$ Javob: 0

1.61. $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 25 \\ 1 & 7 & 49 \\ 1 & 8 & 64 \end{vmatrix}$ Javob: 6 1.62. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$ Javob: $a^3+b^3+c^3-3abc$

1.63. $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & c & d \\ 0 & e & 0 \end{vmatrix}$ Javob: 0 1.64. $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha\cos\beta & \sin\alpha\sin\beta \\ -\sin\alpha & \cos s\alpha\cos\beta & \cos\alpha\sin\beta \\ 0 & -\sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$ Javob: 1

1.65. $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \\ \sin\beta & \cos\beta & 1 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix}$ Javob: $\sin(\beta-\gamma)+\sin(\gamma-\alpha)+\sin(\alpha-\beta)$

Tenglamani yeching:

1.66. $\begin{vmatrix} x^2-4 & -1 \\ x-2 & x+2 \end{vmatrix}=0$ Javob: $x_1=-1+\sqrt{2}i,\quad x_2=-1-\sqrt{2}i$ 1.67. $\begin{vmatrix} 4\sin x & 1 \\ 1 & \cos x \end{vmatrix}=0$ Javob:

1.68. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \\ 1 & 6 & x+5 \end{vmatrix}=0$ Javob: -4 1.69. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3-x & 3 \\ 1 & 2 & 5+x \end{vmatrix}=0$ Javob: $x_1=1,\quad x_2=-2$

1.70. $\begin{vmatrix} \cos^2\varphi-\sin^2\varphi & 2\cos\varphi\sin\varphi \\ 2\sin\varphi\cos\varphi & \cos^2\varphi-\sin^2\varphi \end{vmatrix}=0$ Javob: $\frac{\pi}{8}$; 1.71 $\begin{vmatrix} 3-x & 2 \\ 2 & 4-x \end{vmatrix}=0$ Javob:
$x_1=\frac{7+\sqrt{17}}{2},\quad x_2=\frac{7-\sqrt{17}}{2}$

1.72 $\begin{vmatrix} 5-x & 2 \\ 2 & 8-x \end{vmatrix}=0$ Javob: $x_1=9,\quad x_2=4$, 1.73 $\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$ Javob: $x_1=3,\quad x_2=2$

1.74 $\begin{vmatrix} x^2 & 3 & 2 \\ x & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}=0$ Javob: $x_1=\frac{5+\sqrt{35}}{-5},\quad x_2=\frac{5-\sqrt{35}}{-5}$ 1.75 $\begin{vmatrix} 3-x & -1 & 1 \\ -1 & 5-x & -1 \\ 1 & -1 & 3-x \end{vmatrix}=0$ Javob:
$x_1=6,\quad x_2=2$

Tengsizlikni hisoblang:

1.76 $\begin{vmatrix} x-1 & 3 \\ 2x-3 & -2 \end{vmatrix}<0$ Javob: $x>\frac{11}{8}$,1.77 $\begin{vmatrix} 2x-3 & 4x \\ -5 & 3 \end{vmatrix}>0$ Javob: $x>\frac{9}{26}$

1.78 $\begin{vmatrix} x & 3x-4 \\ 6 & -2 \end{vmatrix}<0$ Javob: $x>1\frac{1}{5}$,1.79 $\begin{vmatrix} 3-x & 4 \\ 2 & 4-x \end{vmatrix}<0$ Javob: $x_1\in(\frac{7+\sqrt{33}}{2};\frac{7-\sqrt{33}}{2})$

Uyga vazifa

1.80 $\begin{vmatrix} x^2+7 & 2 \\ 3x & 1 \end{vmatrix}>-1$ Javob: $(-\infty;2)\cup(4;+\infty)$, 1.81 $\begin{vmatrix} x^2+3 & x \\ 2 & 5 \end{vmatrix}>5$ Javob: $x\in\left(-\infty;\frac{1-7i}{5}\right)\cup\left(\frac{1+7i}{5};+\infty\right)$

1.82 $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \\ 1 & 6 & x+5 \end{vmatrix}>0$ Javob: $x>-4$ 1.83 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3-x & 3 \\ 1 & 2 & 5+x \end{vmatrix}<0$ Javob: $x\in(-2;1)$

1.84 $\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix}>0$ Javob: $\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k;\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k\right)$, 1.85 $\begin{vmatrix} x\cos x & x \\ -x & x \end{vmatrix}>0$ Javob: $(-\infty;\pi+2k\pi)\cup(\pi+2k\pi;+\infty)$

Amaliyot darsida yechiladigan misollar

Aniqlovchilarni hisoblang:

1.86 $\begin{vmatrix} -1 & 6 & 5 & 1 \\ -2 & 8 & 6 & 2 \\ 2 & 16 & 7 & 3 \\ -3 & 9 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ Javob: 16 ; 1.87. $\begin{vmatrix} 5 & 62 & -79 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 6 & 183 & 201 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$ Javob: 1; 1.88. $\begin{vmatrix} -5 & 6 & 10 & 6 \\ -9 & 8 & 8 & 5 \\ -8 & 5 & 9 & 5 \\ -11 & 7 & 7 & 4 \end{vmatrix}$

Javob: 1012 ; 1.89. $\begin{vmatrix} 9 & 7 & 9 & 7 \\ 8 & 6 & 8 & 6 \\ -9 & -7 & 9 & 7 \\ -8 & -6 & 8 & 6 \end{vmatrix}$ Javob: 16 1.90. $\begin{vmatrix} 6 & 8 & -9 & -12 \\ 4 & 6 & -6 & -9 \\ -3 & -4 & 6 & 8 \\ -2 & -3 & 4 & 6 \end{vmatrix}$ Javob: 1 1.91.

$\begin{vmatrix} 6 & -5 & 1 & 2 \\ -4 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ Javob: 48

1.92. $\begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$ Javob: 18 1.93. $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}$ Javob: 4 1.94. $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ -5 & 7 & -7 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & -6 \end{vmatrix}$ Javob: 269

1.95. $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \end{vmatrix}$ Javob: -10; 1.96. $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}$ Javob: 120 ; 1.97. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 9 & -8 & 5 & 10 \\ 5 & -8 & 5 & 8 \\ 6 & -5 & 4 & 7 \end{vmatrix}$ Javob: 6

1.98. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ Javob: 30; 1.99. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ -5 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$ Javob: 0 ; 1.100. $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 & 2 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 3 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ Javob: 7

1.101. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ Javob: 54

Uyga vazifa

1.102. $\begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ Javob: 22 1.103. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \\ -1 & 1 & 5 & 3 \end{vmatrix}$ Javob: 86

1.104. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -2 \\ 6 & 0 & 3 & -3 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$ Javob: 120 1.105. $\begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 & -3 \\ 4 & 6 & -6 & -9 \\ -3 & -4 & 6 & 8 \\ -5 & -7 & 10 & 14 \end{vmatrix}$ Javob: 128

1.106. $\begin{vmatrix} -4 & 10 & 0 & -2 & 6 \\ 1 & 0 & 3 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 5 & -5 \\ 2 & 6 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ Javob: 2064 1.107. $\begin{vmatrix} 6 & 6 & 10 & -5 \\ 5 & 8 & 8 & -9 \\ 5 & 5 & 9 & -8 \\ 4 & 7 & 7 & -11 \end{vmatrix}$ Javob: 12

1.108. $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 & 8 & 3 \\ 4 & 8 & -2 & 16 & 6 \\ 5 & -1 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 7 & 0 & 8 & 1 \end{vmatrix}$ Javob: 0 1.109. $\begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 & -1 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}$ Javob: 112

1.110. $\begin{vmatrix} 3 & 5 & -4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$ Javob: 7 1.111. $\begin{vmatrix} 9 & 7 & 9 & 7 \\ 4 & 3 & 4 & 3 \\ 9 & 7 & -9 & -7 \\ -8 & -6 & 8 & 6 \end{vmatrix}$ Javob: 384

1.112. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$ Javob: -56 1.108. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ Javob: 15

1.109. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 5 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}$ Javob: -372 1.110. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 7 & 8 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ Javob: -3

3-amaliyot .

Teskari matritsani topish. Matritsani rangini hisoblash.

Teskari matrisani toping.

1.111. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -7 & 3 \end{pmatrix}$ Javob: $A^{-1}=\begin{pmatrix} 4/3 & -1/3 & 1/3 \\ 7/3 & -4/3 & 1/3 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ 1.112. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ Javob: $A^{-1}=\begin{pmatrix} -8 & -5 & 6 \\ 18 & 11 & -13 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

1.113. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ Javob: $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 1.114. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ Javob: $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

1.115. $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ Javob: $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1/5 & 3/5 & -2/5 \\ -3/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & -2/5 & 3/5 \end{pmatrix}$

1.116. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & 8 & 0 & -4 \\ 2 & 2 & -4 & -3 \\ 3 & 8 & -1 & -6 \end{pmatrix}$ Javob: $A^{-1}=\begin{pmatrix} 24 & 3 & -4 & -8 \\ -23/2 & -1 & 2 & 7/2 \\ 10 & 1 & -2 & -3 \\ -5 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1.117. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ Javob: $A^{-1}=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

Uyga vazifa

1.118. $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ Javob: $A^{-1}=\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$ 1.119. $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ Javob: $A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

1.120. $A=\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ Javob: $A^{-1}=\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ 1.121. $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ Javob: $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$

1.122. $A=\begin{pmatrix}3&-4&5\\2&-3&1\\3&-5&-1\end{pmatrix}$ Javob: $A^{-1}=\begin{pmatrix}-8&29&-11\\-5&18&-7\\1&-3&1\end{pmatrix}$ 1.123. $A=\begin{pmatrix}2&7&3\\3&9&4\\1&5&3\end{pmatrix}$ Javob: $A^{-1}=\begin{pmatrix}-7/3&2&-1/3\\5/3&-1&-1/3\\-2&1&1\end{pmatrix}$

1.124. $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{pmatrix}$ Javob: $A^{-1}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{pmatrix}$

Amaliyot darsida yechiladigan misollar

Matritsaning rangini toping.

1.129. $\begin{pmatrix}2&-1&3&-2&4\\4&-2&5&1&7\\2&-1&1&8&2\end{pmatrix}$ Javob: 2 1.130. $\begin{pmatrix}1&3&5&-1\\2&-1&-3&4\\5&1&-1&7\\7&7&9&1\end{pmatrix}$ Javob: 3 1.131. $\begin{pmatrix}3&-1&3&2&5\\5&-3&2&3&4\\1&-3&-5&0&-7\\7&-5&1&4&1\end{pmatrix}$ Javob: 3

Aniqlovchilarni hisoblang.

1.132 $\begin{vmatrix}a&3&0&5\\0&b&0&2\\1&2&c&3\\0&0&0&d\end{vmatrix}$ Javob: $abcd$ 1.133 $\begin{vmatrix}1&0&2&a\\2&0&b&0\\3&c&4&5\\d&0&0&0\end{vmatrix}$ Javob: $abcd$

Uyga vazifa

1.134. $\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&-1&1&1\\1&1&-1&1\\1&1&1&-1\end{vmatrix}$ Javob: -8 1.135. $\begin{vmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{vmatrix}$ Javob: -3

1.136 $\begin{vmatrix}3&5&7&2\\7&6&3&7\\5&4&3&5\\-5&-6&-5&-4\end{vmatrix}$ 1.137. $\begin{vmatrix}1&2&3&0\\0&1&2&3\\3&0&1&2\\2&3&0&1\end{vmatrix}$ 1.138. $\begin{vmatrix}-3&9&3&6\\-5&8&2&7\\4&-5&-3&-2\\7&-8&-4&-5\end{vmatrix}$ Javob: 18

4-amaliyot .

Chiziqli tenglamapar sistemasini yechishning Kramer, Gauss va matritsalar usuli. Chiziqli tenglamalar sistemasining turlari, echimga ega bo'lishi va xk

Chiziqli tenglamalar sistemasini umumiy ko'rinishi quyidagicha bo'ladi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (2.1)$$

bu yerda m – tenglamalar soni; n – noma’lumlar soni; a_{ij} $\left(i = 1,2,..m; \quad j = 1,2..n\right)$ номаълум катталиклар олдидаги коэффициентлар; $b_1, b_2..b_m$ - эркин хадллар; $x_1, x_2..x_n$ - номаълум катталаиклар.

Amaliyotdarsidayechiladiganmisollar

1.Quyidagi 2 noma’lumliikkitatenglamadantashkiltopgansistemaniKramervamatrisalarusulidayeching.

2.1. $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 = 13 \\ 2x_1 + 7x_2 = 81 \end{cases}$ J: $(\frac{486}{31}, \frac{217}{31})$ 2.2. $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 = -6 \\ 3x_1 + 4x_2 = 18 \end{cases}$ J: (2;3) 2.3. $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = -1 \\ 3x_1 + 5x_2 = 7 \end{cases}$ J: (-5,5;2)

2.4. $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 = -7 \end{cases}$ J: $(1{,}36, -1\frac{18}{19})$ 2.5. $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = -1 \\ 3x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$ J: (5;-13) 2.6. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 5 \\ 2x_1 - 5x_2 = -1 \end{cases}$ J: (2;1) 2.7. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 2 \\ 3x_1 + 5x_2 = 4 \end{cases}$ J: (2;-2) 2.8. $\begin{cases} -x_1 + 3x_2 = 1 \\ 5x_1 + x_2 = 4 \end{cases}$ J: (1,25; 2,75)

2.9. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 3 \\ 3x_1 + x_2 = 6 \end{cases}$ J: (1,8; 0,6) 2.10. $\begin{cases} -2x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 + 5x_2 = -12 \end{cases}$ J: (-1,9; -2,45)

Uyga vazifa

2.11 $\begin{cases} 5x - 3y = 1 \\ x + 11y = 6 \end{cases}$ 2.12 $\begin{cases} 2x + y = 1/8 \\ 4x + 2y = 1/3 \end{cases}$

J: $\left(1/2; 1/2\right)$J: yechimmavjudemas. $\left(x, y\right) \in \emptyset$

2.13 $\begin{cases} ax - by = a^2 + b^2 \\ bx + ay = a^2 + b^2 \end{cases}$ 2.14 $\begin{cases} 3x + 2y = 1/6 \\ 9x + 6y = 1/2 \end{cases}$

J: $\left(a + b; \, a - b\right)$J: sistemacheksizko’pyechimgaega, ya’nix ixtiyoriybo’libqoladi $y = -\left(3/2\right)x + 1/12$

2.15 $\begin{cases} x\cos\alpha - y\sin\alpha = \cos 2\alpha \\ x\sin\alpha + y\cos\alpha = \sin 2\alpha \end{cases}$ 2.16 $\begin{cases} \left(a + b\right)x - \left(a - b\right)y = 4ab \\ \left(a - b\right)x + \left(a + b\right)y = 2\left(a^2 - b^2\right) \end{cases}$

J: $\left(\cos\alpha; \quad \sin\alpha\right)$J: $\left(a + b; \, a - b\right)$

2.17. $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 = 4 \\ 2x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$ 2.18 $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 = -6 \\ 3x_1 + 4x_2 = 18 \end{cases}$

J: (2;3) J: (2;3)

Amaliyotdarsidayechiladiganmisollar

2.19. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 + 3x_3 = 16 \\ 5x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$ J: (1; 3; 5)2.20. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16 \end{cases}$ J: (3; 1; -1)

2.21. $\begin{cases} 5x_1+8x_2+x_3=2 \\ 3x_1-2x_2+6x_3=-7 \\ 2x_1+x_2-x_3=-5 \end{cases}$ J: (-3; 2; 1) 2.22. $\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3=-7 \\ x_1+4x_2+2x_3=-1 \\ x_1-4x_2 \qquad =-5 \end{cases}$ J: (-1; 1; -2)

2.23. $\begin{cases} 7x+2y+3z=15 \\ 5x-3y+2z=15 \\ 10x-11y+5z=36 \end{cases}$ J: (2; 1; 1) 2.24 $\begin{cases} 3x+2y+z=5 \\ 2x-y+z=6 \\ x+5y \quad =36 \end{cases}$ J: $(-\frac{113}{2};\ \frac{37}{2};\frac{275}{2})$

2.25 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=22 \\ 3x_1+2x_2+x_3=47 \\ x_1+3x_2-x_3=18 \end{cases}$ J: (10; 5; 7) 2.26 $\begin{cases} x_1-3x_2+2x_3=5 \\ 3x_1+x_2-5x_3=4 \\ 4x_1-2x_2-3x_3=10 \end{cases}$ J: yechimyo'q

2.27 $\begin{cases} x+2y+3z=2 \\ 2x+3y-4z=-5 \\ 3x+y+z=3 \end{cases}$ J: (1; -1; 1) 2.28 $\begin{cases} 6x_1+x_2+3x_3=-1 \\ -2x_1-5x_2+2x_3=6 \\ 3x_1 \qquad +2x_3=1 \end{cases}$ J: (-3; 2; 5)

Uyga vazifa

2.29. $\begin{cases} \qquad x_2+3x_3-x_4=10 \\ x_1+3x_2+8x_3-x_4=22 \\ 4x_1+2x_2 \qquad -3x_4=11 \end{cases}$ 2.30. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=10 \\ x_1+x_2-x_3-x_4=-4 \\ x_1-x_2+x_3-x_4=-2 \end{cases}$

2.31 $\begin{cases} x_1+3x_2+4x_3-2x_4=2 \\ -3x_1-7x_2-8x_3+2x_4=-4 \\ 2x_1-x_2+3x_3 \qquad =4 \\ 2x_1+4x_2+4x_3 \qquad =3 \end{cases}$ 2.32 $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+x_4=1 \\ 3x_1-x_2+2x_3-x_4=-1 \\ 2x_1-2x_2+3x_3 \qquad =5 \\ 2x_1+3x_2-2x_3+x_4=-3 \end{cases}$

2.33 $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2+x_3=4 \\ 3x_1-x_2+2x_3=2 \end{cases}$ J: (-1; 1; 3) 2.34 $\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3=2 \\ 3x_1-x_2+x_3=-3 \\ 2x_1+2x_2-x_3=5 \end{cases}$ J: (0; 2; -1)

2.35 $\begin{cases} 3x_1+x_2-x_3=3 \\ x_1+2x_2-x_3=2 \\ 4x_1+3x_2-2x_3=2 \end{cases}$ 2.36 $\begin{cases} 3x_1-x_2+2x_3=7 \\ x_1+2x_2-x_3=2 \\ 2x_1-3x_2+5x_3=11 \end{cases}$ J: (1; 2; 3)

2.37 $\begin{cases} 2x_1-x_2+2x_3=1 \\ 3x_1+2x_2-x_3=9 \\ x_1-4x_2+3x_3=-5 \end{cases}$ 2.38 $\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3=5 \\ x_1+4x_2-x_3=-3 \\ 3x_1+2x_2+3x_3=1 \end{cases}$ J: (1; -1; 0)

2.39 $\begin{cases} 3x+2y+z=5 \\ 2x+3y+z=1 \\ 2x+y+3z=11 \end{cases}$ J: (2; -2; 3) 2.40 $\begin{cases} x+2y+4z=31 \\ 5x+y+2z=29 \\ 3x-y+z=10 \end{cases}$ J: (3; 4; 5)

2.41 $\begin{cases} x+5y-4z+5=0 \\ 2x-3y+z-2=0 \\ 4x+y-3z+4=0 \end{cases}$ J: (5; 6; 10) 2.42 $\begin{cases} x-2y+4z=3 \\ 2x-4y+3z=1 \\ 3x-y+5z=2 \end{cases}$ J: (-1; 0; 1)

2.43 $\begin{cases} 2x-y+z=2 \\ 3x+2y+2z=-2 \\ x-2y+z=1 \end{cases}$ J: (2; -1; -3) 2.44 $\begin{cases} x+3y+4z=6 \\ 2x-y-z=1 \\ x+2y+3z=5 \end{cases}$ J: (1; -1; 2)

2.45 $\begin{cases} x+y+z-3=0 \\ 2x+3y-z=0 \\ x-y+3z-7=0 \end{cases}$ J: (1; 0; 2) 2.46 $\begin{cases} 2x-4y+9z=28 \\ 7x+3y-6z=-1 \\ 7x+9y-9z=5 \end{cases}$

2.47 $\begin{cases} x+y+z-3=0 \\ 2x+y-2z-1=0 \\ x+y-3z+1=0 \end{cases}$ 2.48 $\begin{cases} 2x+2y+2z=6 \\ x+2y+3z=1 \\ x+3y+6z=2 \end{cases}$ J: (8; -8; 3)

Amaliyotdarsidayechiladiganmisollar

3. Chiziqli tenglamalar sistemasi ниyeching.

2.49 $\begin{cases} -2x_1+3x_2-2x_3=2 \\ 3x_1-2x_2+x_3=2 \\ -5x_1+10x_2-7x_3=10 \end{cases}$ J: (0; -6; -10) 2.50 $\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3=7 \\ -4x_1+2x_2 \quad =-2 \\ 6x_1-3x_2+x_3=-3 \end{cases}$ J: cheksiz ko'p

2.51 $\begin{cases} x_1+2x_2 \quad =2 \\ 2x_1+x_2+3x_3=1 \\ 2x_1+7x_2-3x_3=31 \end{cases}$ 2.52 $\begin{cases} 5x_1+3x_2+5x_3+12x_4=10 \\ 2x_1+2x_2+3x_3+5x_4=4 \\ x_1+7x_2+9x_3+4x_4=2 \end{cases}$

2.53 $\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3+5x_4=3 \\ -3x_1-2x_2+12x_3-7x_4=-5 \\ x_2+3x_3+4x_4=2 \end{cases}$ 2.54 $\begin{cases} -6x_1+9x_2+3x_3+2x_4=4 \\ -2x_1+3x_2+5x_3+4x_4=2 \\ -4x_1+6x_2+4x_3+3x_4=3 \end{cases}$

2.55 $\begin{cases} x_1+5x_2+3x_3 \quad =2 \\ 2x_1+9x_2+5x_3+3x_4=7 \\ x_1+3x_2+x_3+6x_4=8 \end{cases}$ 2.56 $\begin{cases} 6x_1+4x_2+5x_3+2x_4+3x_5=1 \\ 3x_1+2x_2-2x_3+x_4 \quad =-7 \\ 9x_1+6x_2+x_3+3x_4+2x_5=2 \\ 3x_1+2x_2+4x_3+x_4+2x_5=3 \end{cases}$

Uyga vazifa

2.57 $\begin{cases} x_1+ \quad 2x_3=3 \\ 3x_1+\alpha x_2+6x_3=9 \\ -2x_1+x_2+x_3=-4 \end{cases}$ J: $(\frac{11}{5}; 0; 2)$ 2.58 $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3=2 \\ -x_1+2x_2+x_3=\alpha-2 \\ 3x_1-3x_2+6x_3=6-\alpha \end{cases}$ J: yechimga ega emas

2.59 $\begin{cases} 2x-y-z=4 \\ 3x+4y-2z=11 \\ 3x-2y+4z=11 \end{cases}$ J: (3; 1; 1/3) 2.50 $\begin{cases} x+y+2z=-1 \\ 2x-y+2z=-4 \\ 4x+y+4z=-2 \end{cases}$ J: (1; 2; -2)

2.51 $\begin{cases} 3x_1+x_2+x_3=2 \\ x_1-2x_2+2x_3=-1 \\ 4x_1-3x_2-x_3=5 \end{cases}$ 2.52 $\begin{cases} -2x_1+2x_2-x_3=-7 \\ x_1-3x_2+x_3=6 \\ 3x_1+x_2+2x_3=7 \end{cases}$

2.53 $\begin{cases} -2x_1+2x_2-x_3=4 \\ -4x_1+5x_2+2x_3=-12 \\ 4x_1+0\cdot x_2+8x_3=-48 \end{cases}$ 2.54 $\begin{cases} -3x_1+x_2+4x_3=-5 \\ 2x_1-6x_2-4x_3=26 \\ -2x_1+0\cdot x_2+9x_3=19 \end{cases}$

Amaliyotdarsidayechiladiganmisollar

Birjinslitenglamalarsistemasiniyeching. $(-\infty<t<\infty)$

2.55 $\begin{cases} 3x_1+2x_2+2x_3=0 \\ 5x_1+2x_2+3x_3=0 \end{cases}$ 2.56. $\begin{cases} 2x_1-5x_2+2x_3=0 \\ x_1+4x_2-3x_3=0 \end{cases}$

J: $(x_1=2t; \quad x_2=t; \quad x_3=-4t)$ J: $(x_1=7t; \quad x_2=8t; \quad x_3=13t)$

2.57 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

J: $(x_1 = -11t; \quad x_2 = 7t; \quad x_3 = t)$

2.58 $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ 7x_1 - 9x_2 - 11x_3 = 0 \end{cases}$

J: $(x_1 = 39t; \quad x_2 = 23t; \quad x_3 = 6t)$

2.59 $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$

J: $(x_1 = -22t; \quad x_2 = 14t; \quad x_3 = 2t)$

2.60 $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

J: $\left(x = \frac{2}{5}t; \quad y = -\frac{3}{5}t; \quad z = t \right)$

Uyga vazifa

2.61 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$

J: $\left(x_1 = -\frac{31}{21}t; \quad x_2 = \frac{43}{21}t; \quad x_3 = -\frac{4}{3}t; \quad x_4 = t \right)$

2.62. $\begin{cases} -5x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 6x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 7x_3 = 0 \end{cases}$

J: $(x_1 = 0; \quad x_2 = 0; \quad x_3 = 0)$

2.63 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

J: $(x_1 = t; \quad x_2 = 2t; \quad x_3 = -3t)$

2.64 $\begin{cases} ax_1 + bx_2 + (a+b)x_3 = 0 \\ bx_1 + ax_2 + (a+b)x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$

J: $(x = t; \quad y = t; \quad z = -t)$

2.65 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0 \\ 6x_1 - 12x_2 + 17x_3 - 9x_4 = 0 \\ 7x_1 - 14x_2 + 18x_3 + 17x_4 = 0 \end{cases}$

2.66 $\begin{cases} 14x_1 + 35x_2 - 7x_3 - 63x_4 = 0 \\ -10x_1 - 25x_2 + 5x_3 + 45x_4 = 0 \\ 26x_1 + 65x_2 - 13x_3 - 117x_4 = 0 \end{cases}$

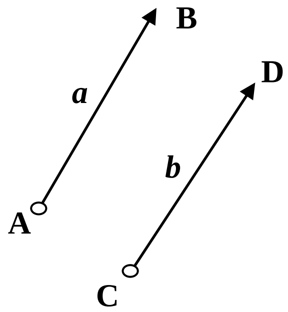
5-amaliyot .

Vektorlar ustida chiziqli amallar. Vektomi o'qdagi proektsiyasi. Vektomi bazis bo'yicha yoyish. Vektor uzunligi. Vektomi songa ko'paytirish. Vektoming yo'naltiruvchi kosinuslari

Vektorlarni qo'shish va ularni skalyar ko'paytirish.

Vektorlarhaqidatushunchalar. Yo'naltirilgan $\overline{AB}$ kesma (3.1- chizma) vektor deyiladi. Bunda A nuqta vektorning boshi, B nuqta esa uning oxiri deb qaraladi. Vektor boshi va oxiri ko`rsatilib yuqorisiga strelkali chiziqcha qo`yilgan $\overrightarrow{AB}$ ko`rinishda yoki qandaydir biror harf, masalan $\vec{a}$ (bosmada qalin yozilgan yozmasida esa teppasiga chiziqcha qo`yilgan) bilan belgilanadi. Vektorning moduli (uzunligi) $\left|\overline{AB}\right|$, yoki $\left|\overline{a}\right|$, yoki AB, yoki a bilan belgilanadi. Bir to`g'ri chiziqqa parallel bo`lgan vektorlar kollinear vektorlar deyiladi. Agar ikki $\overline{a}$ va $\overline{b}$ (3.1 chizma) vektorlar:

1) teng modulga ega. 2) o`zaro kollinear. 3) bir tomonga yo'nalgan bo`lsa, ular o`zaro teng deyiladi.



3.1- chizma. Коllinear vektorlar.

Skalyar ko'paytma va uning xossalari. ***Ikki vektorning skalyar ko`paytmasi*** deb shu vektorlar modullarining ular orasidagi burchak kosinusi bilan ko`paytmasiga aytiladi. Quyidagi $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning skalyar ko`paytmasi $\bar{a}\cdot\bar{b}$ ko`rinishida belgilanadi. Demak,

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cos\varphi \quad (3.1)$$

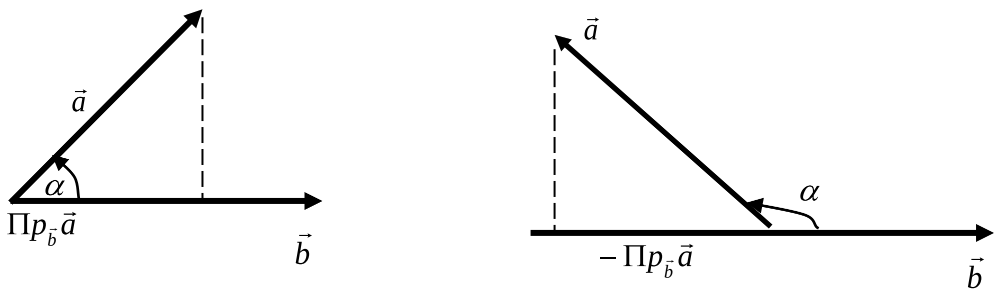
Ikki vektor orasidagi burchak

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}+\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}} \quad (3.2)$$

Parallelik sharti: $\vec{b}=m\vec{a}$ yoki $\frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}=m$; Perpendikulyar sharti $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ yoki $a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$. Vektorni boshqa vektor yo'nalishidagi proyeksiyasi.

Berilgan $\vec{a}$ vektorni $\vec{b}$ vektor yo'nalishdagi proyeksiyasi (3.8 - chizma) quyidagi formula orqali topiladi.

$$\Pi p_{\vec{b}}\vec{a}=|\vec{a}|\cos\alpha=\frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{b}|}$$



3.2 –chizma. $\vec{a}$ vektorni $\vec{b}$ yo'nalishidagi proyeksiyasi.

6. Vektorlarnivektorko'paytmasi. Ikkita $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning vektor ko`paytmasi deb shunday uchinchi $\vec{c}$ vektorga ytiladiki (3.3 - chizma), $\vec{c}=\left[\vec{a};\vec{b}\right]$ yoki $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$

1) $\vec{c}$ vektorson qiymati bo`yicha berilgan $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlardan yasalgan parallellogram yuziga teng moduliga ega;
2) u parallellogram tekisligiga perpendikulyar;

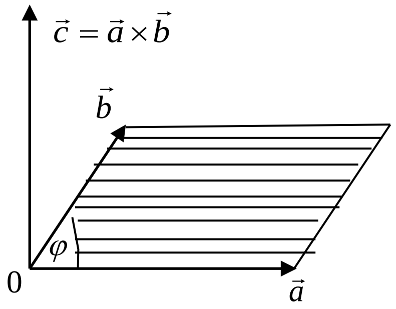
Ikkita vektordan qo'shilgan parallelogramning yuzi quyidagicha topiladi.

$$|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\alpha = \left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right| \qquad (3.3)$$

Bu $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning ko'rilgan uchburchakni yuzi

$$S_{nap} = \frac{1}{2}\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right| \qquad (3.4)$$

3) $\vec{c}$ vektorning yo'nalishi



3.3 –chizma. Vektorlarni vektor ko'paytirishga doir.

Aralash ko'paytma. $\vec{a},\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlarni R^3 fazoda aralash ko'paytmasi sondan iborat bo'lib, $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$ ko'rinishda belgilanadi.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \quad (3.5)$$

bu yerda

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}; \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}; \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix}$$

Agar $\vec{a},\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar noldan farqli vektorlar bo'lsa, u holda

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c} = 0$$

bo'lishi uchun bu vektorlar chiziqli bog'liq (yoki komplanar) bo'lishi kerak. $\vec{a},\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlardan qurilgan parallelipipedning hajmi

$$V_{nap} = |\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}|$$

teng. Xuddi shunday shu uchta vektordan qurilgan tetraedrning hajmi

$$V_T = \frac{1}{6}|\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}|$$

Amaliyot darsida yechiladigan misollar

3.1-3. 30. $\overrightarrow{AB}$ **vektorning koordinatasi va uzunligi toping.**

3.1. $A(1;1;3)$, $B(2;2;3)$ Javob: $\overrightarrow{AB}(1;1;0)$; $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2}$

3.2. $A(0;1;3)$, $B(1;2;3)$ Javob: $\overrightarrow{AB}(1;1;0)$; $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2}$

3.3. $A(0;1;-1)$, $B(1;2;0)$ Javob: $\overrightarrow{AB}(1;1;1)$; $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3}$

3.4. $A(2;2;3)$, $B(3;2;4)$ Javob: $\overrightarrow{AB}(1;0;1)$; $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{2}$

3.5. $A(2;1;2)$, $B(3;2;2)$ Javob: $\overrightarrow{AB}(1;1;0)$; $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{2}$

3.6. $A(0;1;1)$, $B(1;2;2)$ Javob: $\overrightarrow{AB}(1;1;1)$; $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{3}$

3.7. $A(0;1;4)$, $B(1;2;4)$ Javob: $\overrightarrow{AB}(1;1;0)$; $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{2}$

3.8. $A(1;1;1)$, $B(1;2;2)$ Javob: $\overrightarrow{AB}(0;1;1)$; $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{2}$

3.9. $A(0;-4;3)$, $B(1;-3;4)$ Javob: $\overrightarrow{AB}(1;1;1)$; $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{3}$

3.10. $A(1;2;1)$, $B(0;1;2)$ Javob: $\overrightarrow{AB}(-1;-1;1)$; $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{3}$

3.11. $A(2;1;3)$, $B(3;2;4)$ Javob: $\overrightarrow{AB}(1;1;1)$; $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{3}$

3.12. $A(0;1;1)$, $B(1;2;2)$ Javob: $\overrightarrow{AB}(1;1;1)$; $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{3}$

3.13. $A(2;1;3)$, $B(3;2;4)$ Javob: $\overrightarrow{AB}(1;3;1)$; $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{11}$

3.14. $A(2;0;7)$, $B(0;2;4)$ Javob: $\overrightarrow{AB}(-2;2;-3)$; $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{17}$

3.15. $A(8;2;-5)$, $B(7;1;4)$ Javob: $\overrightarrow{AB}(-1;-1;9)$; $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{83}$

3.16. $A(-2;1;3)$, $B(5;1;2)$ Javob: $\overrightarrow{AB}(7;0;-1)$; $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 5\sqrt{2}$

3.17. $A(2;-1;4)$, $B(5;2;3)$ Javob: $\overrightarrow{AB}(3;3;-1)$; $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{19}$

3.18. $A(3;1;3)$, $B(2;2;-1)$ Javob: $\overrightarrow{AB}(-1;1;-4)$; $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 3\sqrt{2}$

3.19. $A(2;2;3)$, $B(3;1;3)$ Javob: $\overrightarrow{AB}(1;-1;0)$; $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{2}$

3.20. $A(0;7;3)$, $B(4;7;-5)$ Javob: $\overrightarrow{AB}(4;0;-8)$; $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 4\sqrt{5}$

Uyga vazifa

3.21. $A(4;-3;2)$, $B(1;2;3)$ Javob: $\overrightarrow{AB}(-3;5;1)$; $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{35}$

3.22. $A(5;1;1)$, $B(6;2;1)$ Javob: $\overrightarrow{AB}(1;1;0)$; $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{2}$

3.23. $A(0;4;2)$, $B(3;6;-4)$ Javob: $\overrightarrow{AB}(3;2;-6)$; $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 7$

3.24. $A(1;3;2)$, $B(4;6;5)$ Javob: $\overrightarrow{AB}(3;3;3)$; $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 3\sqrt{3}$

3.25. $A(0;-2;1)$, $B(2;0;3)$ Javob: $\overrightarrow{AB}(2;2;2)$; $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 2\sqrt{3}$

3.26. $A(2;-2;3)$, $B(2;1;7)$ Javob: $\overrightarrow{AB}(0;3;4)$; $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 5$

3.27. $A(1;3;3)$, $B(2;4;2)$ Javob: $\overrightarrow{AB}(1;1;-1)$; $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{3}$

3.28. $A(2;0;-1)$, $B(4;2;0)$ Javob: $\overrightarrow{AB}(2;2;1)$; $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 3$

3.29. $A(1;3;-2)$, $B(3;2;0)$ Javob: $\overrightarrow{AB}(2;-1;2)$; $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 3$

3.30. $A(1;3;-1)$, $B(3;1;0)$Javob: $\overrightarrow{AB}(2;-2;1)$; $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 3$

Amaliyot darsida yechiladigan misollar

3.31.Koordinatalar boshidan *M*(*12;-3;4*) nuqtagacha bo'lgan masofani aniqlang.
Javob: 13
3.32. $\vec{r}(0;\ 2;-3)$ radius vektorning ortlar bo'yicha yoyilmasini yozing va modulini hisoblang.
Javob: $\vec{r} = 2\vec{j} - 3\vec{k}$; $|\vec{r}| = \sqrt{13}$
3.33. $A(-2;\ +1;\ +3)$ va $B(0;\ -1;\ +2)$ nuqtalar orasidagi masofani toping.
Javob: 3
3.34. $\vec{a}\{3;\ 2;\ 7\}$ va $\vec{b}\{4;\ 1;-5\}$ vektorlar yig'indisini va ayirmasini toping.
Javob: $\vec{a} + \vec{b} = 7\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{a} - \vec{b} = -\vec{i} + \vec{j} + 12\vec{k}$
3.35. Uchlari *A*(*5;2;6*), *B*(*6;4;4*), *C*(*4;3;2*) va *D*(*3;1;4*) nuqtalarda bo'lgan to'rtburchakning kvadrat ekanligini tekshiring.
3.36. α va β larning qanday qiymatlarida $\vec{a} = 2\vec{i} + \alpha\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} - 6\vec{j} + \beta\vec{k}$ vektorlar kollinear bo'ladi?
Javob: $\alpha = -4$; $\beta = 3/2$
3.37.Uchlari *A*(*2;1;-4*), *B*(*1;3;5*), *C*(*7;2;3*) va *D*(*8;0;-6*) nuqtalarda bo'lgan to'rtburchakning paralleogramm ekanligini isbotlang va parallelogramm tomonlarining uzunliklarini toping.
Javob: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ bo'lgani uchun paralleogrammdir. $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{86} \approx 9{,}3$; $\left|\overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{41} \approx 6{,}4$
3.38. *A*(*-1;2;3*), *B*(*2;-1;1*), *C*(*1;-3;-1*) va *D*(*-5;3;3*) nuqtalar trapetsiyaning uchlari bo'lishini tekshiring.
3.39. *AB* kesmaning boshlang'ich nuqtasi *A*(*-1;2;4*) va uni 1/2 nisbada bo'luvchi *C*(*2;0;2*) nuqta berilgan. *B* uchning koordinatalarini toping.
Javob: $x_B = 8$; $y_B = -4$; $z_B = -2$; $B(8;-4;-2)$
3.40.Uchlari *A*(*1;2;3*) va *B*(*4;2;-1*) bo'lgan *AB* kesmani teng ikkiga bo'luvchi *M* nuqtaning koordinatalarini toping.
3.41. *AB* kesmaning boshlang'ich nuqtasi *A*(*-1;3;2*). Uni teng ikkiga bo'luvchi nuqta esa *C*(*2;0;2*) bo'lsin. *B* uchning koordinatalarini toping.
Javob: *B*(*5;-2;0*)

6-amaliyot .

Ikki vektommg skalyar ko'paytmasi. Ikki vektor orasidagi burchak. Ikki vektoming parallelik va pedpendikulyarlik shartlari. Ikki vektoming vektor ko'paytmasi. Uch vektoming aralash ko'paytmasi

3.42. Boshlang'ich nuqtasi *A*(*-1;3;2*), oxirgi nuqtasi *B*(*0;1;4*) bo'lgan *AB* vektorning yo'naltiruvchi kosinuslarini toping.

Javob: $\cos\alpha = \frac{1}{3}; \quad \cos\beta = -\frac{2}{3}; \quad \cos\gamma = \frac{2}{3}$

3.43. $\vec{a}$ vektor Ox o'q bilan $\alpha = 45^0$, Oy o'q bilan $\beta = 60^0$ burchak hosil qiladi. Agar $|\vec{a}| = 5$ bo'lsa, uning koordinatalarini aniqlang.

Javob: $\vec{a}\left\{\frac{5}{\sqrt{2}}; \frac{5}{2}; \frac{5}{2}\right\}$.

3.44. Uchlari *A*(*5;3;-10*), *B*(*0;1;4*) va *C*(*-1;3;2*) nuqtalarda bo'lgan uchburchak berilgan. *B* ichki burchak bissektrissasining yo'naltiruvchi kosinuslarini toping.

Javob: $\cos\alpha = 0; \quad \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}; \quad \cos\gamma = -\frac{2}{\sqrt{5}}$

3.45. *a* va *b* vektorlar orasidagi buchak $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ga teng va $|\vec{a}| = \sqrt{2}; \quad |\vec{b}| = 3$ ekanligi ma'lum. $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ vektorninguzunligini hisoblang.

Javob: $|\vec{c}| = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$

3.46. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchak $\varphi = \frac{\pi}{3}$ ga teng. $|\vec{a}| = 3; \quad |\vec{b}| = 4$. $\vec{c} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$ vektorning uzunligini hisoblang.

Javob: $|\vec{c}| = \sqrt{217}$

3.47. Agar $|\vec{a}| = 7\sqrt{2}, \quad |\vec{b}| = 4$ va $\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) = \frac{\pi}{4}$ bo'lsa? $3\vec{a} + \alpha\vec{b}$ va $\vec{a} - 2\vec{b}$ vektorlar α ning qanday qiymatlarida o'zaro perpendikulyar bo'ladi?

Javob: $\alpha = 31{,}5$

3.48. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning koordinatalari berilgan:

$$\vec{a} = 7\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}, \quad \vec{b} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}.$$

Bu vektorlarning skalyar ko'paytmasini toping.

Javob: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 22$

3.49. Uchalri *A*(*-1;5;1*), *B*(*1;1;-2*) va *C*(*-3;3;2*) nuqtalarda bo'lgan uchburchak berilgan. *AC* tomonni davom ettirishdan hosil bo'lgan tashqi burchakni aniqlang.

Javob: $\varphi = \arccos\left(\frac{4}{9}\right)$

3.50. Uchalri *A*(*-2;3;1*), *B*(*-2;-1;4*) va *C*(*-2;-4;0*) nuqtalarda bo'lgan uchburchak berilgan. Bu uchburchakning *C* ichki burchagini hisoblang.

Javob: $\angle BCA = \frac{\pi}{4}$

3.51. $\vec{a}, \vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlarning koordinatalari berilgan:

$$\vec{a}\{1;-4;8\} = \vec{i} - 4\vec{j} + 8\vec{k}, \quad \vec{b}\{4;4;-2\} = 4\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}, \quad \vec{c}\{2;3;6\} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k}.$$

$(\vec{b} + \vec{c})$ vaktor $\vec{a}$ vektordagi proyeksiyasini toping.

Javob: $\Pi p_a(\vec{b} + \vec{c}) = \frac{10}{9}$

3.52. $|\vec{a}| = 8, \quad |\vec{b}| = 15, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 96$ berilgan. $\vec{a}$ vektorning $\vec{b}$ vektor bilan vektor ko'paytmasining uzunligini toping.

Javob: $\left|\left[\vec{a}\vec{b}\right]\right| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) = 8 \cdot 15 \cdot \frac{3}{5} = 72$

3.53. Uchalri $A(1;2;0)$, $B(3;0;-3)$ va $C(5;2;6)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchak yuzini hisoblang.
Javob: $S_{ABC} = 14$ kv.birlik.
3.54. $\overrightarrow{AB} = -3\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}$ va $\overrightarrow{BC} = -2\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}$ vektorlar ΔABC tomonlari. $\overrightarrow{AD}$ balandlikning uzunligini hisoblang.
Javob: $\left|\overrightarrow{AD}\right| = \dfrac{2S_{ABC}}{\left|\overrightarrow{BC}\right|} = \dfrac{8\sqrt{5}}{3}$
3.55. $\vec{a}\{6;0;2\}$, $\vec{b}\{1,5;2;1\}$ vektorlardan tuzilgan parallelogrammning yuzini va diagonallarining uzunliklarini toping.
Javob: $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \dfrac{1}{2}\sqrt{277}$; $\left|\overrightarrow{BD}\right| = \dfrac{1}{2}\sqrt{101}$, $S_{ABCD} = 13$ kv. birlik.
3.56. Vektorning koordinatalarini ayting: 1) $3\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$; 2) $2\vec{i} - \vec{k}$; 3) $0{,}5\vec{i} + \sqrt{2}\vec{j}$;
4) $3\vec{k}$; 5) $-4\vec{i}$; 6) $\vec{0}$.
Javob: 1) (3;2;-5); 2) (2;0;-1); 3) (0,5; $\sqrt{2}$;0); 4) (0;0;3); 5) (-4;0;0); 6) (0;0;0).
3.57. Quyidagi vektorlar berilgan: 1) $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}$; 2) $\vec{b} = -\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$. Ularning koordinatalarini toping.
Javob: 1) $\vec{a} = (2;3;-5)$; 2) $\vec{b} = (-1;-2;3)$.
3.58. $A(4;-3;2)$ va $B(-2;4;-3)$, $M(0;5;1)$ va $N(-4;0;-3)$ nuqtalarning koordinatalarini bilgan holda $\overrightarrow{AB}$ va $\overrightarrow{MN}$ vektorlarning koordinatalarini toping.
Javob: $\overrightarrow{AB} = (-6;7;-5)$, $\overrightarrow{MN} = (-4;-5;-4)$
3.59. $\vec{a} = (2;3;-4)$, $\vec{b} = (-1;2;1)$ va $\vec{c} = (3;0;2)$ vektorlarning koordinatalarini bilgan holda quyidagi vektorlarning koordinatalarini toping: 1) $\vec{a} + \vec{b}$; 2) $\vec{a} + \vec{c}$;
3) $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$; 4) $3\vec{a}$; 5) $-\vec{a} + 2\vec{c}$; 6) $2\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c}$.
Javob: 1) (1;5;-3); 2) (5;3;-2); 3) (-2;5;-5); 4) (6;9;-12); 5) (4;-3;8); 6) (-5;12;-9).
3.60. Ikki vektorning kolleniarlik shartidan foydalanib, quyidagi vektorlarning kolleniar emasligini tekshiring: 1) $\vec{a} = (2/5;-1/3;4/5)$ va $\vec{b} = (3/5;-1/2;6/5)$;
2) $\vec{c} = (-6;1/3;3)$ va $\vec{d} = (-2;1/9;-1/3)$.
Javob: 1) kolleniar 2) nokolleniar.
3.61. n va p ning qanday qiymatlarida $\vec{a} = (-3;n;4)$ va $\vec{b} = (-2;4;p)$ vektorlar kolleniar bo'ladi?
Javob: n=6, p=8/3
3.62. Vektorning uzunligini hisoblang: 1) $\vec{a} = -\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$; 2) $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$;
3) $\vec{c} = \vec{i} - \vec{k}$; 4) $\vec{d} = -3\vec{k}$.
Javob: 1) 3; 2) $\sqrt{14}$; 3) $\sqrt{2}$; 4) 3.
3.63. $\vec{a} + \vec{b}$ vektorning uzunligini hisoblang; bunda: 1) $\vec{a} = (-1;2;1)$; $\vec{b} = (-2;2;-1)$;
2) $\vec{a} = (1;-2;3)$; $\vec{b} = (-1;2;-3)$.
Javob: 1) 5; 2) 0.
3.64. Agar $\vec{a} = (2;0;0)$, $\vec{b} = (1;1;-1)$ bo'lsa, $3\vec{a} + 2\vec{b}$ vektorning uzunligini hisoblang.
Javob: $6\sqrt{2}$.
3.65.Agar $A(5;3;1)$ va $B(4;5;-1)$ bo'lsa, $\overrightarrow{AB}$ vektorning uzunligini hisoblang.
Javob: 3
3.66. Agar $A(8;0;6)$, $B(8;-4;6)$, $C(6;-2;5)$ bo'lsa, $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ va $\overrightarrow{CA}$ vektorlardan hosil bo'lgan uchburchakning perimetrini toping.
Javob: 10

3.67. [*AB*] kesma (bunda *A*(*7;2;-3*), *B*(*-5;0;4*)) *C* nuqta bilan $\lambda = |AC| : |CB| = 1:5$ nisbatda bo'linadi. *C* nuqtaning koordinatalarini toping.
Javob: *C*(*5;5/3;-11/6*)
3.68. [*AB*] kesma uchlarining koordinatalari bilan berilgan: *A*(*4;2;-3*), *B*(*6;-4;-1*). Bun kesmani teng ikkiga bo'luvchi *C* nuqtaning koordinatalarini toping.
Javob: *C*(*5;-1;-2*)
3.69. [*AB*] kesma uchlarining koordinatalari berilgan: *A*(*3;-2;-5*) va *B*(*7;6;-1*). Kesmani $\lambda = |AC| : |CB| = 1:3$ nisbatda bo'luvchi *C* nuqtaning koordinatalarini toping.
Javob: *C*(*4;0;-4*)
3.70. Agar uchburchakning uchlari *A*(*7;-4;5*), *B*(*-1;8;-2*) va *C*(*-12;-1;6*) bo'lsa, uchburchak medianalarining kesishgan nuqtasini toping.
Javob: (-2;1;3)
3.71. $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$ vektor bazis vektorlar bilan tashkil etgan burchaklarning kosinusini toping.
Javob: $\cos\alpha = \frac{1}{3}; \quad \cos\beta = -\frac{2}{3}; \quad \cos\gamma = \frac{2}{3}$.
3.72. Quyidagi vektorlarning bazis vektorlar bilan tashkil etgan burchaklarining kosinuslarini toping: 1) $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$; 2) $\vec{b} = (4;3;0)$; 3) $\vec{c} = -\vec{j} - 3\vec{k}$; 4) $\vec{d} = 3\vec{i}$.
Javob: 1) $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \sqrt{3}/3$; 2) $\cos\alpha = 4/5; \quad \cos\beta = 3/5; \quad \cos\gamma = 0$;
3) $\cos\alpha = 0; \quad \cos\beta = -\sqrt{10}/10; \quad \cos\gamma = -3/\sqrt{10}/10$; 4) $\alpha = 0; \quad \beta = \gamma = 90^0$
3.73. $\vec{a} = (4;-3;1)$ va $\vec{b} = (5;-2;-3)$ vektorlarning skalyar ko'paytmasini toping.
Javob: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 23$.
3.74. Vektorlarning skalyar ko'paytmasini toping: 1) $\vec{a} = (3;-2;1)$ va $\vec{b} = (4;-7;-3)$;
2) $\vec{c} = (2/3;-5/6;1/4)$ va $\vec{d} = (3/2;6/5;4/3)$.
Javob: 1) 23; 2) 1/3.
3.75. $\vec{a} = \vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}, \quad \vec{b} = -2\vec{i} - 4\vec{j} + 3\vec{k}$ va $\vec{c} = 4\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}$ vektorlar berilgan. Dastlabki ikki vektor yig'indisining uchinchisiga skalyar ko'paytmasini toping.
Javob: -8
3.76. $\vec{a} = -4\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$ va $\vec{b} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$ vektorlar berilgan. Ular orasidagi burchakni toping.
Javob: $\varphi = \arccos\frac{2\sqrt{7}}{35}$
3.77. $\vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{k}$ va $\vec{b} = 5\vec{i} - 12\vec{k}$ vektorlar orasidagi burchakni toping.
Javob: arccos(63/65)
3.78. $\vec{a} = (-2;2;-1)$ va $\vec{b} = (-6;3;6)$ vektorlar orasidagi burchakni toping.
Javob: arccos(4/9)
3.79. Agar $\vec{a} = (1;-1;2)$ va $\vec{b} = (0;2;1)$ bo'lsa, $\vec{a} + \vec{b}$ va $\vec{a} - \vec{b}$ vektorlar orasidagi burchakni toping.
Javob: arccos(1/11)

Uyga vazifa

3.80. Uchburchakning uchlari berilgan: *A*(*-1;4;1*), *B*(*3;4;-2*) va *C*(*5;2;-1*). $A\hat{B}C$ ni toping.

Javob: $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}\right) = -\frac{1}{3}$.

3.81. *ABC* uchburchakda $\widehat{ACB}$ ni toping, bunda *A*(*1;1;5*), *B*(*-2;0;7*), *C*(*-3;-2;5*).

Javob: $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}\right) = 2/3$

3.82. Vektorlar perpendikulyarni, tekshiring. 1) $\vec{a} = (3;0;-6)$ va $\vec{b} = (4;7;2)$;
2) $\vec{c} = (-3;2;5)$ va $\vec{d} = (6;-3;1)$.
Javob: 1) ha, 2) yo'q.
3.83. Uchburchak berilgan: *A*(*2;4;5*), *B*(*-3;2;2*), *C*(*-1;0;3*) $\overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{BC}$ ekanini ko'rsating.
Javob:
3.84. Agar $\vec{a} = \vec{p} + 2\vec{q}$ va $\vec{b} = 5\vec{p} - 4\vec{q}$ ekani ma'lum bo'lsa, $\vec{p}$ va $\vec{q}$ birlik vektorlar qanday burchak tashkil qiladi?

Javob: $\left(\widehat{\vec{p},\vec{q}}\right) = 60^0$

3.85. Berilgan: $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 6$, $\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) = \varphi$, $\vec{a} \times \vec{b}$ ni toping, bunda 1) $\varphi = 0$;
2) $\varphi = 90^0$; 3) $\varphi = 150^0$.
Javob: 1) 0; 2) $24\vec{e}$; 3) $12\vec{e}$
3.86. $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$ va $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ vektorlarning vektor ko'paytmasini toping.
Javob: $5\vec{i} - 10\vec{j} - 5\vec{k}$
3.87. $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ va $\vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ vektorlarda yasalgan paralellogrammning yuzini toping.
Javob: $S = 3$ kv.birlik.
3.88. $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ va $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ vektorlarda yasalgan paralellogrammning yuzini toping.
Javob: $S = \sqrt{26} \approx 5{,}1$ kv.birlik.
3.89. Uchining koordinatalariga ko'ra uchburchakning yuzini toping: *A*(*2;-3;4*), *B*(*1;2;-1*) va *C*(*3;-2;1*).
Javob: $S = 5\sqrt{2} = 7{,}07$ kv.birlik
3.90. Ordinata o'qida *A*(*1;-3;7*) va *B*(*5;7;-5*) nuqtalardan baravar uzoqlikdagi nuqtani toping.
Javob: (0;2;0)
3.91. Ikkita vektor berilgan: $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$ va $\vec{b} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k} \cdot \vec{a} + \vec{b}$ va $\vec{a} - \vec{b}$ vektorlarning koordinatalarini toping.
Javob: $\vec{a} + \vec{b} = (1;5;-1)$, $\vec{a} - \vec{b} = (5;1;-9)$
3.92. $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ vektor uchlarining koordinatalari berilgan: *A*(*-4;1;3*), *B*(*2;-5;6*). $\vec{a}$ vektorninf bazis vektorlar bilan tashkil qilgan burchaklarning kosinuslarini hisoblang.
Javob: $\cos\alpha = 2/3$; $\cos\beta = -2/3$; $\cos\gamma = -1/3$
3.93. $\vec{a} = (2;2;-1)$ va $\vec{b} = (-3;6;-6)$ vektorlar berilgan. Bu vektorlar orasidagi burchakning kosinusini hisoblang.

Javob: $\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) = 4/9$

3.94. $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j}$ va $\vec{b} = -\vec{j} + \vec{k}$ vektorlarda parallelogramm yasalgan. Uning diagonallari orasidagi o'tkir burchakni toping.
Javob: $\arccos\sqrt{5}/5$

Amaliyot darsida yechiladigan misollar

3.95-3.120. Quyidagi $\vec{c}_1 = 2\vec{a} - \vec{b}$ va $\vec{c}_2 = -\vec{a} + 3\vec{b}$ vektorlarni skalyar va vektor ko'paytmasini toping.

31. $\vec{a}\{-2;1;1\}$, $\vec{b}\{3;-2;4\}$ Javob: $c_1 \cdot c_2 = -127$, $\vec{c} \times \vec{c} = 30\vec{i} + 55\vec{j} + 5\vec{k}$
32. $\vec{a}\{0;1;1\}$, $\vec{b}\{-1;-3;0\}$ Javob: $c_1 \cdot c_2 = -55$, $\vec{c} \times \vec{c} = 15\vec{i} - 5\vec{j} + 5\vec{k}$
33. $\vec{a}\{-2;1;1\}$, $\vec{b}\{0;-2;-5\}$ Javob: $c_1 \cdot c_2 = -27$, $\vec{c} \times \vec{c} = 23\vec{i} - 31\vec{j} + 12\vec{k}$
34. $\vec{a}\{0;1;1\}$, $\vec{b}\{3;-1;0\}$ Javob: $c_1 \cdot c_2 = -41$, $\vec{c} \times \vec{c} = 5\vec{i} + 26\vec{j} - 15\vec{k}$
35. $\vec{a}\{0;-1;-1\}$, $\vec{b}\{1;-3;8\}$ Javob: $c_1 \cdot c_2 = -261$, $\vec{c} \times \vec{c} = -55\vec{i} - 110\vec{j} + 5\vec{k}$
36. $\vec{a}\{0;-1;-1\}$, $\vec{b}\{2;0;2\}$ Javob: $c_1 \cdot c_2 = -42$, $\vec{c} \times \vec{c} = -10\vec{i} - 10\vec{j} + 10\vec{k}$
37. $\vec{a}\{0;-1;-1\}$, $\vec{b}\{1;2;-1\}$ Javob: $c_1 \cdot c_2 = -29$, $\vec{c} \times \vec{c} = 15\vec{i} - 5\vec{j} + 5\vec{k}$
38. $\vec{a}\{1;-1;0\}$, $\vec{b}\{-2;1;0\}$ Javob: $c_1 \cdot c_2 = -40$, $\vec{c} \times \vec{c} = -5\vec{k}$
39. $\vec{a}\{-2;1;2\}$, $\vec{b}\{1;0;-1\}$ Javob: $c_1 \cdot c_2 = -52$, $\vec{c} \times \vec{c} = -5\vec{i} - 5\vec{k}$
40. $\vec{a}\{0;1;1\}$, $\vec{b}\{-3;-1;1\}$ Javob: $c_1 \cdot c_2 = -37$, $\vec{c} \times \vec{c} = 10\vec{i} - 15\vec{j} + 15\vec{k}$

Uyga vazifa

41. $\vec{a}\{-2;1;-2\}$, $\vec{b}\{-1;0;3\}$ Javob: $c_1 \cdot c_2 = -76$, $\vec{c} \times \vec{c} = 15\vec{i} + 10\vec{j} + 5\vec{k}$
42. $\vec{a}\{1;-1;-1\}$, $\vec{b}\{-2;3;-1\}$ Javob: $c_1 \cdot c_2 = -76$, $\vec{c} \times \vec{c} = 20\vec{i} + 15\vec{j} + 5\vec{k}$
43. $\vec{a}\{2;-1;3\}$, $\vec{b}\{0;1;1\}$ Javob: $c_1 \cdot c_2 = -33$, $\vec{c} \times \vec{c} = -25\vec{i} - 10\vec{j} + 10\vec{k}$
44. $\vec{a}\{2;1;-2\}$, $\vec{b}\{-1;0;-2\}$ Javob: $c_1 \cdot c_2 = -19$, $\vec{c} \times \vec{c} = -10\vec{i} + 30\vec{j} + 5\vec{k}$
45. $\vec{a}\{2;0;0\}$, $\vec{b}\{-3;1;1\}$ Javob: $c_1 \cdot c_2 = -83$, $\vec{c} \times \vec{c} = -10\vec{i} + 10\vec{k}$
46. $\vec{a}\{2;1;0\}$, $\vec{b}\{1;1;3\}$ Javob: $c_1 \cdot c_2 = -22$, $\vec{c} \times \vec{c} = 15\vec{i} - 30\vec{j} + 5\vec{k}$
47. $\vec{a}\{1;-1;0\}$, $\vec{b}\{0;3;2\}$ Javob: $c_1 \cdot c_2 = -64$, $\vec{c} \times \vec{c} = -10\vec{i} - 10\vec{j} + 15\vec{k}$
48. $\vec{a}\{2;1;-2\}$, $\vec{b}\{0;1;1\}$ Javob: $c_1 \cdot c_2 = -31$, $\vec{c} \times \vec{c} = 15\vec{i} - 10\vec{j} + 10\vec{k}$
49. $\vec{a}\{1;0;-1\}$, $\vec{b}\{0;3;-1\}$ Javob: $c_1 \cdot c_2 = -27$, $\vec{c} \times \vec{c} = 15\vec{i} + 5\vec{j} + 15\vec{k}$
50. $\vec{a}\{2;-1;4\}$, $\vec{b}\{-1;0;0\}$ Javob: $c_1 \cdot c_2 = -59$, $\vec{c} \times \vec{c} = 20\vec{j} - 5\vec{k}$
51. $\vec{a}\{1;0;-1\}$, $\vec{b}\{-1;-3;0\}$ Javob: $c_1 \cdot c_2 = -41$, $\vec{c} \times \vec{c} = -15\vec{i} + 5\vec{j} - 15\vec{k}$
52. $\vec{a}\{1;0;-1\}$, $\vec{b}\{-1;-3;0\}$ Javob: $c_1 \cdot c_2 = -41$, $\vec{c} \times \vec{c} = -15\vec{i} - 5\vec{j} - 15\vec{k}$
53. $\vec{a}\{5;2;-2\}$, $\vec{b}\{3;3;4\}$ Javob: $c_1 \cdot c_2 = -77$, $\vec{c} \times \vec{c} = 70\vec{i} - 120\vec{j} + 45\vec{k}$
54. $\vec{a}\{-1;-1;-1\}$, $\vec{b}\{0;0;-1\}$ Javob: $c_1 \cdot c_2 = -2$, $\vec{c} \times \vec{c} = 5\vec{i} - 5\vec{j}$
55. $\vec{a}\{2;2;1\}$, $\vec{b}\{-2;-3;0\}$ Javob: $c_1 \cdot c_2 = -127$, $\vec{c} \times \vec{c} = 15\vec{i} - 10\vec{j} - 10\vec{k}$
56. $\vec{a}\{2;-4;1\}$, $\vec{b}\{3;1;-2\}$ Javob: $c_1 \cdot c_2 = -84$, $\vec{c} \times \vec{c} = 35\vec{i} + 35\vec{j} + 70\vec{k}$
57. $\vec{a}\{0;2;1\}$, $\vec{b}\{2;1;-3\}$ Javob: $c_1 \cdot c_2 = -59$, $\vec{c} \times \vec{c} = -35\vec{i} + 10\vec{j} - 20\vec{k}$

Amaliyot darsida yechiladigan misollar

3.121-3.140. Quyidagi $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ vektorlarni komplanarligini tekshiring.

91. $\vec{a}\{-2;1;1\}$, $\vec{b}\{0;-2;-5\}$, $\vec{c}\{2;-1;-1\}$ 92. $\vec{a}\{0;1;1\}$, $\vec{b}\{0;4;-2\}$, $\vec{c}\{2;1;0\}$
93. $\vec{a}\{2;0;1\}$, $\vec{b}\{2;0;-1\}$, $\vec{c}\{-2;-1;4\}$ 94. $\vec{a}\{1;-1;-1\}$, $\vec{b}\{-2;3;-1\}$, $\vec{c}\{0;1;0\}$
95. $\vec{a}\{1;1;1\}$, $\vec{b}\{2;3;0\}$, $\vec{c}\{3;-1;-1\}$ 96. $\vec{a}\{-1;0;-2\}$, $\vec{b}\{-3;2;-1\}$, $\vec{c}\{2;0;-2\}$
97. $\vec{a}\{1;0;3\}$, $\vec{b}\{0;1;1\}$, $\vec{c}\{2;-1;3\}$ 98. $\vec{a}\{-3;1;4\}$, $\vec{b}\{2;0;0\}$, $\vec{c}\{-3;1;1\}$
99. $\vec{a}\{1;0;-1\}$, $\vec{b}\{0;-1;-1\}$, $\vec{c}\{0;0;-2\}$ 100. $\vec{a}\{-1;0;-2\}$, $\vec{b}\{0;0;-1\}$, $\vec{c}\{-1;0;3\}$
101. $\vec{a}\{-1;0;-2\}$, $\vec{b}\{1;0;-4\}$, $\vec{c}\{2;0;-2\}$ 102. $\vec{a}\{1;0;-2\}$, $\vec{b}\{-3;2;-1\}$, $\vec{c}\{4;2;-3\}$
103. $\vec{a}\{1;2;4\}$, $\vec{b}\{-3;6;4\}$, $\vec{c}\{3;-6;4\}$ 104. $\vec{a}\{1;-1;1\}$, $\vec{b}\{1;1;1\}$, $\vec{c}\{2;3;4\}$
105. $\vec{a}\{5;3;-1\}$, $\vec{b}\{1;-2;3\}$, $\vec{c}\{2;0;-4\}$ 106. $\vec{a}\{-3;3;3\}$, $\vec{b}\{2;1;1\}$, $\vec{c}\{19;11;17\}$
107. $\vec{a}\{1;6;5\}$, $\vec{b}\{3;-2;4\}$, $\vec{c}\{7;-18;2\}$ 108. $\vec{a}\{7;-3;2\}$, $\vec{b}\{3;-7;8\}$, $\vec{c}\{1;-1;1\}$
109. $\vec{a}\{2;1;-1\}$, $\vec{b}\{1;-4;1\}$, $\vec{c}\{3;-2;2\}$ 110. $\vec{a}\{3;1;-1\}$, $\vec{b}\{-2;-1;0\}$, $\vec{c}\{5;2;-1\}$

Javob: $\lambda_1=1;\quad \lambda_2=9;\quad \lambda_3=2;$
$(40c_1;-c_1;-8c_1;9c_1),(0;c_2;-2(c_1+c_2);c_3),(0;2c_4;c_4;2c_4)c_1\neq 0, c_2^2+c_3^2\neq 0, c_4\neq 0$

6-amaliyot .

Dekart va qutb koordinatalar sistemalari. Tekislikda to'g'ri chiziq tenglamalari. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak. Parallelik va perpendikulyarlik shartlari. Bir va ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamalari.

ANALITIK GEOMETRIYA

TO'G'RI CHIZIQLI TEKISLIKDAGI TENGLAMASI VA ODDIY MASALALAR.

1.Koordinata o'qidagi $M(x_1)$ va $M(x_2)$ nuqtalar orasidagi masofa d quyidagicha aniqlanadi

$$d=|x_2-x_1| \quad . \qquad (4.1)$$

2. Tekislikdagi $M(x_1,y_1)$ va $M(x_2,y_2)$ nuqtalar orasidagi masofa d quyidagi formula yordamida aniqlanadi:

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \qquad (4.2)$$

3. Oxirlari $M(x_1,y_1)$ va $M(x_2,y_2)$ nuqtalar bilan berilgan kesimni $M(x,y)$ nuqta yordamida $\lambda(\lambda=|M_1M|:|MM_2|)$ nisbatda bo'lsak, u holda

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda};\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} \qquad (4.3)$$

4. Agar $M(x,y)$ nuqta M_1M_2 kesmani o'rtasidagi nuqtani belgilasa, u holda

$$x=\frac{x_1+x_2}{2};\quad y=\frac{y_1+y_2}{2} \qquad (4.4)$$

5. To'g'ri chiziq tenglamasi:

- boshlang'ich ordinatasi b va burchak koeffisienti κ bo'lgan chiziq tenglamasi

$$y = kx + b \qquad (4.5)$$

- berilgan $M(x_1, y_1)$ nuqtadan o'tuvchi (burchak koeffisienti κ) to'g'ri chiziq tenglamasi

$$y - y_1 = \kappa(x - x_1) \qquad (4.6)$$

- ikki $M(x_1, y_1)$ va $M(x_2, y_2)$ nuqtalaridan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \qquad (4.7)$$

(burchak koeffisienti $\kappa = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$) yoki $y = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x + \dfrac{y_1x_2 - y_2x_1}{x_2 - x_1}$ yoki $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x_1 & x_2 \\ y & y_1 & y_2 \end{vmatrix} = 0$

- kesimdagi to'gri chiziq tenglamasi

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (4.8)$$

(a va b lar mos ravishda to'g'ri chiziqli OX va OY o'qlarini kesib o'tgan nuqtalarini koordinata boshigacha bo'lgan masofa $a \neq 0, \quad b \neq 0$)

- to'g'ri chiziqni umumiy tenglamsi

$$Ax + By + C = 0 \qquad (4.9)$$

6. A(x_0;y_0) nuqtadan o'tuvchi $Ax + By + C = 0$ to'gri chiziqgacha bo'lgan masofa

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \text{ yoki } d = |x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha - p| \,, \qquad (4.10)$$

хаммда koordinata boshidan to'g'ri chiziqgacha bo'lgan masofa quyidagicha topiladi:

$$d = \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \text{ yoki } d = |-p|.$$

7. Ixtiyoriy M(x_0;y_0) nuqtadan o'tuvchi va $\vec{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ vektorga perpendikulyar bo'lsa, to'g'ri chiziq tenglamasi

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

bo'ladi (4.1-chizma).

Amaliyotdarsidayechiladiganmisollar

4.1. Oy o'qdan miqdori 7 birlikka teng kesma kesib, Ox o'qning musbat yo'nalishi bilan: 1) 30^0; 2) 120^0; 3) 135^0 li burchak hosil qiluvchi to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

Javob: 1) $y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}x + 7$ 2) $y = x + 7$ 3) $y = \sqrt{3}x + 7$ 4) $-\sqrt{3}x + 7$ 5) $y = -x + 7$

4.2. Oyo'qdanmiqdori 2 birlikkatengkesma, Oxo'qningmusbatyo'nalishibilan 150^0liburchaktashkilqiluvchito'g'richiziqtenglamasinituzing.

Javob: 1) $y = -x\dfrac{\sqrt{3}}{3} - 2$

4.3. Koordinatalarboshidano'tibOxo'qningmusbatyo'nalishibilan 1) 45^0li; 2) 135^0liburchakhosilqiluvchito'g'richiziqtenglamasinituzing.

Javob: 1) $y = x$ 2) $y = -x$

4.4. Quyidagito'g'richiziqlartenglamalariberilgan. Buto'g'richiziqlarkoordinatao'qlariganisbatanjoylashganiniaytibbering.

1) $2x - y = 0$; 2) $x - 3 = 0$; 3) $x - 5 = 0$; 4) $x = 0$; 5) $y = 0$.

Javob: 1) koordinatalarboshidano'tganto'g'richiziq; 2) *Oy*o'qigaparallel; 3) *Ox*o'qigaparallel, 4) *Oy*o'qningtenglamasi; 5) *Ox*o'qningtenglamasi

4.5. To'g'richiziqningumumiyko'rinishdagitenglamalariberilgan. Ularniburchakkoeffisiyentlitenglamalarshakligakeltiring:

1) $x-2y+1=0$, 2) $3x+5y-1=0$, 3) $8x+3y=0$.

Javob:1) $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ 2) $y=-\frac{3}{5}x+\frac{1}{5}$ 3) $y=-\frac{8}{3}x$ 4) $y=ax+\frac{3}{5}$

4.6. Abssissalaro'qidanajratgankesmaningmiqdori 2 birlik, ordinatalaro'qidanajratgankesmaningmiqdori 3 birlikbo'lganchiziqningtenglamasinituzing.

Javob: $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$

4.7. Abssissalaro'qidanajratgankesmaningmiqdori -5 birlik, ordinatalaro'qidanajratgankesmasiningmiqdori 5 birlikbo'lganto'g'richiziqningtenglamasinituzing.

Javob: $\frac{x}{-5}+\frac{y}{5}=1$

4.8. Ushbu

1) $2x+3y-6=0$; 2) $3x-5y-15=0$; 3) $ax+by-ab=0$; 4) $y=5x-2$;

5) $y=x+1$; 6) $ay=-bx+c$.

To'g'richiziqlarningtenglamalariniularningkesmalarganisbatantenglamalarishaklidayozing.

Javob: 1) $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$ 2) $\frac{x}{5}-\frac{y}{3}=1$ 3) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 4) $\frac{x}{\frac{2}{5}}-\frac{y}{2}=1$

5) $x+y=1$ 6) $\frac{x}{\frac{c}{b}}+\frac{y}{\frac{c}{a}}=1$

4.9.*O*(0;0) va*A*(-5,0) nuqtalarberilganbo'lib, *OA*kesmadadiagonallari*B*(0,3) nuqtadakesishuvchiparallelogrammyasalgan. Bu parallelogrammning tomonlari hamda diagonallarining tenglamalarini tuzing.

Javob: tomonlarining tenglamalari: $y=0,\ \frac{x}{5}+\frac{y}{6}=1,\ y=6,\ \frac{-x}{5}+\frac{y}{6}=1$

Diagonallarining tenglamalari: $x=0,\ \frac{x}{-5}+\frac{y}{3}=1$

4.10.*M*(5,2) nuqtadan o'tib, koordinata burchagidan yuzi 20 kv. birlikka uchburchak kesuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

Javob: $\frac{x}{5}+\frac{y}{4}=1$

4.11. Rombning diagonallari mos ravishda 6 va 4 birlikka teng bo'lib, ular koordinata o'qlari uchun qabul qilngan. Rombning tomonlari tenglamalari yozilsin.

Javob: $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$; $\frac{x}{-2}+\frac{y}{3}=1$; $\frac{x}{3}+\frac{y}{3}=-1$; $\frac{x}{2}-\frac{y}{3}=1$

4.12. Quyidagi tengsizliklarning geometric ma'nosini aniqlang:

1) $y>2x+1$, 2) $y<2x+1$, 3) $x>3$, 4) $x<3$.

4.13.*M*(*x*,*y*) nuqta harakati davomida A(-3,3) va B(3,-3) nuqtalarga masofalar kvadratlarining ayirmasi hamma vaqt 36 ga teng bo'lib qoladi. Bu nuqta trayektoriyasi tenglamasini tuzing.

Javob: $x-y-3=0$

4.14. Tomonlari $x-2y=0,\ \ 4x-3y-3=0,\ \ 3x-y-7=0$ to'g'ri chiziqlardan iborat uchburchakning yuzini toping.

Javob: $\frac{154}{845}$

4.15. Quyidagi to'g'ri chiziqlarning tenglamasini normal ko'rinishga keltiring:

1) $3x+4y-20=0$, 2) $2x-3y=6$.

Javob: 1) $\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-4=0$ 2) $\frac{2}{\sqrt{13}}x-\frac{3y}{\sqrt{13}}-\frac{6}{\sqrt{13}}=0$ 3) $x-y=2$

4.16. Koordinatalar boshidan to'g'ri chiziqqa o'tkazilgan perpendikulyar bilan Ox o'qi orasidagi burchak: 1) 45^0, 2) 135^0, 3) 60^0. To'g'ri chiziqning tenglamasini tuzing va berilgan ma'lumotlarga binoan to'g'ri chiziqni yasang.

Javob: 1) $\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{y}{\sqrt{2}}=2$; 2) $\frac{y}{\sqrt{2}}-\frac{x}{\sqrt{2}}=2$ 3) $\frac{x}{2}+\frac{y\sqrt{3}}{2}=2$ 4) $\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{y}{\sqrt{2}}=2$

4.17. *A*(2,3) va *B*(3,0) nuqtalarning har biridan $3x+4y-20=0$ to'g'ri chiziqqa bo'lgan masofani toping.

Javob: $\frac{2}{5}$; $\frac{4}{5}$; $2\frac{1}{5}$

4.18. $y=kx+3$ to'g'ri chiziq koordinatalar boshidan $\sqrt{3}$ masofa uzoqdano'tgan. Burchak koeffisiyent *k* topilsin.

Javob: $\pm\sqrt{2}$

4.19. $4x-3y=0$ to'g'ri chiziqdan 5 birlik uzoqda yotuvchi tekislik nuqtalarining geometrik o'rnining tenglamasi tuzilsin.

Javob: $4x-3y+25=0$ yoki $4x-3y-25=0$

4.20. Quyidagi berilgan to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.

1) $5x-y-7=0$ va $3x+2y=0$ 2) $x-2y-4=0$ va $2x-4y+3=0$,

3) $3x+2y+7=0$ va $2x-3y-3=0$ 4) $3x-2y-1=0$ va $5x+2y+3=0$

Javob: 1) $\frac{\pi}{4}$; 2) 0; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) $\varphi=arctg\,\frac{16}{11}$.

Uyga vazifa

4.21. *M*(1,2) nuqtadan o'tib, $3x+2y-5=0$ to'g'ri chiziq bilan 45^0 li burchaktashkil qiluvchi chiziqning tenglamasini tuzing.

Javob: $5x-y+3=0$ yoki $5x+y-7=0$

4.22. *A*(-4,5) nuqta diagonali $7x-y+8=0$ to'g'ri chiziq yotgan kvadratning bitta uchidir. Kvadratning tomonlari va ikinchi diagonalining yotadi. Kvadrat tomonlarining tenglamalarni tuzing.

Javob: kvadrat tomonlari tenglamasi: $4x+3y+1=0$.

$3x-4y+32=0,\ \ 4x+3y-24=0,\ \ 3x-4y+7=0$.

Ikkinchi dioganal tenglamasi: $x+7y-31=0$

4.23. Kvadratning ikkita qarama – qarshi uchi *A*(-1,3) va *C*(6,2) nuqtalarda yotadi. Kvadrat tomonlarining tenglamalarni tuzing.

Javob: $3x-4y+15=0,\ \ 4x+3y-30=0,\ \ 3x-4y-10=0,\ \ 4x+3y-5=0$

4.24. *A*(-2,3) nuqtadan *Ox* o'q bilan α burchak tashkil qiluvchi yorug'lik nuri yuborilgan. Nur *Ox* o'q o'qqa yetib borib, undan qaytgan. Tushgan va qaytgan nurlar tenglamalarini tuzing.

Javob: $3x-4y+9=0,\ \ 3x+y+9=0$

4.25. $x-2y+5=0$ to'g'ri chiziq bo'yicha yo'naltirilgan yorug'lik nuri $3x-2y+7=0$ to'g'ri chiziqdan qaytgan. Qaytgan nur tenglamasini tuzing.

Javob: $29x-2y+33=0$

4.26. $M(x,y)$ nuqtadan o'tib, $Ax+By+C=0$ to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan to'g'ri chiziqning tenglamasini tuzing.

Javob: $A(x-x_1)+B(y-y_1)=0$

4.27. 21 – mashqning natijasiga asoslanib $M(1,4)$ nuqtadan o'tib:

1) $x-3y+5=0$, 2) $3x-4y+5=0$, 3) $8x-12y+3=0$, 4) $5x-2=0$, 5) $6y-5=0$

To'g'ri chiziqlarning har biriga parallel bo'lgan to'g'ri chiziqning tenglamasi tuzing.

Javob: 1) $x-3y-13=0$; 2) $3x-4y-19=0$; 3) $x-12y-49=0$; 4) $x-1=0$; 5) $y+4=0$

4.28. Quyidagi to'g'ri chiziqlarning o'zaro joylashishini 27 mashqning natijasiga muvofiq tekshiring:

1) $x+2y+5=0$ va $3x-6y+8=0$ 2) $9x-12y-4=0$ va $8x+6y+1=0$

3) $9x-12y-4=0$ va $8x+6y+1=0$ 4) $4x+6y-7=0$ va $12x+18y-21=0$.

Javob: 1) parallel, 2) perpendikulyar, 3) perpendikulyar, 4) parallel.

4.29. $M(-1,2)$ nuqtadan o'tib: 1) $5x-2y+3=0$, 2) $x+4y-1=0$, 3) $3x+7y-8=0$, 4) $2x+3y+5=0$ to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan to'g'ri chiziqning tenglamasini tuzing.

Javob: 1) $5x-2y+9=0$; 2) $x+4y-7=0$; 3) $3x+7y-11=0$; 4) $2x+3y-4=0$

4.30. Ikkita to'g'ri chiziq orasidagi burchak aniqlansin:

1) $3x-y+5=0$ $2x+y-7=0$ 2) $\frac{y}{12}-\frac{x}{3}=1$ $\frac{x}{25}-\frac{y}{15}=1$

Javob: 1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $\frac{3\pi}{4}$

4.31. Uchlari A(2,1), B(3,1) va C(1,2) nuqtada bo'lgan uchburchak tomonlarining uzunliklari va ichki burchaklarini toping.

Javob: $1; \sqrt{5}; \sqrt{2}; 135^0; arctg\,\frac{1}{2}\ arctg\,\frac{1}{3}$

4.32. koordinatalar boshidan o'tib: 1) $y=2x+3$ to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan, 2) $x-3y-1=0$ to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lgan, 3) $y=3x-5$ to'g'ri chiziq bilan 45^0 li burchak hosil qiladigan to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

Javob: 1) $y=2x$; 2) $y+3x=0$; 3) $x-2y=0$ va $2x+y=0$

4.33. Uchburchakning ikkita uchi $A(3,4)$ va $B(5,1)$ nuqtada bo'lib, unin balandliklari (4,1) nuqtada kesishadi. Uchburchakning uchlari C uchini toping.

Javob: $\left(\frac{37}{7},\frac{13}{7}\right)$. Ko'rsatma. AB tomon tenglamasini tuzamiz: $3x+2y-11=0$. CD tomon tenglamasi $2x-3y-5=0$. AM balandlik tenglamasi: $3x+y-10=0$, endi BC tomon tenglamasini tuzamiz: $3x-y-14=0$. C nuqta BC tomon bilan CD tomonning kesihsgan nuqtasi.

4.34. $2x+3y-6=0$ to'g'ri chiziq Ox, Oy o'qlarni A,B nuqtalarda kesib o'tadi. C nuqta AB kesmani AC:CB=1:2 nisbatda bo'ladi. C nuqtadan AB to'g'ri chiziqqa tushirilgan perpendikulyarning tenglamasini tuzing.

Javob: $9x-6x-14=0$

4.35. Uchburchakning $3x+4y-12=0$ va $3x-7y+21=0$ tomonlari berilgan. $M(4;3)$ nuqta uning medianalarining kesishish nuqtasi ekanligi ma'lum. Uchburchakning uchinchi tomoni tenglamasi tuzing.

Javob: $2x-y-9=0$

4.36. Birinchi chorakda joylashgan va tomonining uzunligi 5 uzunlik birligiga teng bo'lgan rombning ikki tomoni abscissa o'qi va $4x-3y=0$ to'g'ri chiziq bilan ustma – ust tushadi. Rombning qolgan tomonlarining tenglamalari va dioganallari tenglamalari tuzilsin.
Javob: Tomonlarining tenglamasi: $4x-3y-20=0, \quad y=4$. Diagonallarning tenglamasi: $x-2y=0$ va $2x+y-10=0$.
4.37. Koordinatalari mos ravishda (1;-1), (5;2) va (4;5) bo'lgan *A*, *B*, *C* nuqtalar berilgan. *AC* to'g'ri chiziqqa nisbatan *B* nuqtaga simmetrik bo'lgan *D* nuqtaning koordinatalari topilsin va shu nuqtadan *A*, *C* nuqtalar orqali o'tkazilgan to'g'ri chiziqlarning tenglamalari tuzilsin.
Javob: $(1,4), \quad x=1, \quad x-3y+11=0$
4.38. Parallelogramm ikki uchining koordinatalari mos ravishda (1;1) va (2;-2) nuqtalarda bo'lib, dioganallari (-1;0) nuqtada kesishadi. Parallelogramm tomonlarining tenglamalari tuzilsin.
Javob: $3x+4y-4=0; \quad x+5y-6=0; \quad x+5y+8=0; \quad 3x+y+10=0$
4.39. $2x+3y-12=0$ to'g'ri chiziqda (4;5) va (1;-2) nuqtalardan teng uzoqlikda yotgan nuqtaning koordinatalari topilsin.
Javob: (6,0)
4.40. *A*(-3;5) nuqtadan o'tuvchi va ordinata hamda abscissa o'qlaridan kesgan kesmalarning uzunliklari nisbati 1:2 kabi bo'lgan to'g'ri chiziqning tenglamasi tuzilsin.
Javob: $x+2y-7=0$

Amaliyot darsida yechiladigan misollar

4.41. *A*(-1;3) nuqtadano'tuvchishundayto'g'richiziqningtenglamasituzilsinki, buto'g'richiziqning $x+2y+5=0$ va $x+2y-2=0$ parallelto'g'richiziqlarorasidagikesmaningo'rtanuqtasi 2x-3y-11=0 to'g'richiziqdayotsin.
Javob: $10x+7y-11=0$
4.42.
Tekislikdagi $x-2y+2=0$ to'g'richiziqqa $x+2y-6=0$ to'g'richiziqqanisbatanikkimartayaqinja olashgannuqtalargeometriko'rinlariningtenglamalarituzilsin.
Javob: $3x-2y-2=0, \quad x-6y-10=0$
4.43. Uchlari *A*(-2;1), *B*(2;5) va *C*(2;-1) nuqtalardajoylashganuchburchakkatashqichizilganaylanamarkazningkoordinatalaritopilsinvaradiusininguzunligihisoblansin.
Javob: $(1,2), \quad \sqrt{10}$ uzunlikbirligi
4.44. Koordinataboshidano'tuvchivaA(1;3) nuqtagaB(4;2) nuqtaganisbatan 4 martayaqinmasofadanto'g'richiziqningtenglamasituzilsin.
Javob: $7x-4y=0$
4.45. Gipotenuzasiningtenglamasi $3x+2y-6=0$ bo'lganvauni*A*(-1;-2) nuqtadajoylashganto'g'riburchaklitengtomoniuchburchakningqolganikkitomonitenglamalarituzilsin.
Javob: $5x-y+3=0; \quad x+5y+11=0$
4.46. Birinchichorakdajoylashganrombningikkitomoni $x-3y+4=0$ va $3x-y-4=0$ tenglamalar bilanifodalangan.
Shutomonlarningkesishishnuqtasidano'tgandiagonalininguzunligi $4\sqrt{2}$ uzunlikbirligigateng. Rombningqolgantomonlariningvadiagonallariningtenglamalarituzilsin.
Javob: tomonlari: $x-3y+12=0; \quad 3x-y-12=0$.
Dioganallari: $x-y=0$ va $x+y-8=0$
4.47. Quyidagito'g'richiziqlarorasidagiburchakaniqlansin:

1) $\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = \frac{1}{2}x + 1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x - y + 7 = 0 \\ 2x - 3y + 1 = 0 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ y = 3x - 4 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ 6x + 4y + 9 = 0 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 3x - 4y = 6 \\ 8x + 6y = 11 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \\ \frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1 \end{cases}$

Javob: 1) $arctg\,\frac{3}{4}$; 2) 45^0; 3) 45^0; 4)0^0; 5) 90^0; 6) $arctg\,\frac{a^2 - b^2}{2ab}$

4.48. $3x - 2y + 7 = 0, \quad 6x - 4y - 9 = 0, \quad 6x + 4y - 5 = 0, \quad 2x + 3y - 6 = 0$ to'g'richiziqlardanparallelvaperpendikulyarbo'lganlariko'rsatilgan.

4.49.A(2,3)nuqtadano'tuvchito'g'richiziqlardastasiningtenglamasiyozilsin. Shudastadan 1) 45^0, 2) 60^0, 3) 135^0, 4) 0^0burchaktashkiletuvchito'g'richiziqlartanlabolinsinvaularyasalsin.

4.49.A(-2;5) nuqta va $2x - y = 0$ to'g'ri chiziq yasalsin. A nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqlar dastasining tenglamasi yozilsin va o'sha dastadan berilgan to'g'ri chiziqqa: 1) parallel; 2) perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq tanlab olinsin.

4.50. $2x - 5y - 10 = 0$ to'g'ri chiziqning koordinata o'qlari bilan kesishgan nuqtalaridan bu to'g'ri chiziqqa perpendikulyarlar chiqarilgan. Ularning tenglamalari yozilsin.

Javob: $5x + 2y + 4 = 0, \quad 5x + 2y = 25$

4.51.A(-1,3) va B(4,-2) nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi yozilsin.

4.52. Uchlari A(-2,0), B(2,6) va C(4,2) nuqtalarda bo'lgan uchburchakning BD balandligi va BE medianasi o'tkazilgan. AC tomon, BE mediana va BD balandlikning tenglamalari tuzilsin.

Javob: $x - 3y + 2 = 0, \quad 5x - y = 4, \quad 3x + y = 12$

4.53. Uchburchak tomonlari $x + 2y = 0, \quad x + 4y - 6 = 0, \quad x - 4y - 6 = 0$ tenglamalar bilan berilgan. Uning ichki burchklari topilsin.

Javob: 28^0, $12^0 30'$ va $139^0 30'$

4.54. Koordinatalar boshidan o'tib, $y = 4 - 2x$ to'g'ri chiziq bilan 45^0 burchak tashkil etuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi yozilsin.

Javob: $y = 3x$ va $y = -\frac{1}{3}x$

4.55.A(-1,1) nuqtadan o'tib, $2x + 3y = 6$ to'g'ri chiziq bilan 45^0 burchak to'g'ri chiziq tenglamasi yozilsin.

Javob: $x - 5y + 6 = 0, \quad 5x + y = -4$

4.56.Ox o'q bilan $\varphi = arctg\,2$ burchak tashkil etuvchi yorug'lik nuri A(5,4) nuqtadan chiqadi va shu o'qdan qaytadi. Tushuvchi va qaytuvchi nurlarning tenglamalari yozilsin.

Javob: $y = 2x - 6, \quad y = -2x + 6$

4.57. Uchlari A(-2,0), B(2,4) va C(4,0) nuqtalarda bo'lgan uchburchak berilgan. Uning tomonlari, AE mediana, AO balandligining tenglamalari yozilsin va AE mediana uzunligi topilsin.

Javob:AE: $2x - 5y = -4$; AD: $x - 2y = -2$; $\sqrt{29}$

4.58. Uchlari A(0,7), B(6,-1) va C(2,1) nuqtalarda bo'lgan uchburchak tomonlarining tenglamalari yozilsin va burchaklari topilsin.

Javob:$A = 18^0 26'$, $B = 26^0 34'$, $C = 135^0$

4.59. $2x - y + 8 = 0$ to'g'ri chiziq Ox va Oy o'qlarni A va B nuqtalarda kesib o'tadi. N nuqta AB ni AN : NB = 3:1 nisbatda bo'ladi. AB to'g'ri chiziqqa N nuqtadan chiqarilgan perpendikulyarning tenglamasi yozilsin.

Javob: $x + 2y - 11 = 0$

4.58. Tomonlari $x+y=4,\quad 3x-y=0,\quad x-3y-8=0$ tenglamalar bilan berilgan uchburchak yasalsin, uning burchaklari va yuzi topilsin.

Javob: $tgA=\frac{4}{2};\quad tgB=tgC=2,\quad S=16$

4.59. Uchlari A(-4,2), B(2,-5) va C(5,0) nuqtalarda bo'lgan uchburchak medianalarining kesishgannuqtasi va balandliklarining kesishgan nuqtasi topilsin.

Javob: (1,-1), (8/3,-2)

4.60. 1) $3x4y-20=0$, 2) $x+y+3=0$, 3) $y=kx+b$ to'g'ri chiziqlarning tenglamalari normal ko'rinishga keltirilsin.

Javob: 2,8; 0; 1,4

Uyga vazifa

4.61. Normal uzunligi $p=2$ va uning Ox o'qqa og'ish burchagi β: 1) 45^0; 2) 135^0; 3) 225^0, 4) 315^0 bo'lgan to'g'ri chiziqlar yasalsin. Bu to'g'ri chiziqlarning tenglamalari yozilsin.

4.62. A(4,3), B(2,1) va C(1,0) nuqtalardan $3x+4y-10=0$ to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofalar topilsin. Nuqtalar va to'g'ri chiziq yasalsin.

4.63. Koordinatalar boshidan $12x-5y+39=0$ to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa topilsin.

4.64. $2x-3y=6$ va $4x-6y=25$ to'g'ri chiziqlar o'zaro parallel ekanligi ko'rsatilgan va ular orasidagi masofa aniqlansin. **Javob:** $\frac{\sqrt{13}}{2}$

4.65. $y=kx+5$ to'g'ri chiziqkoordinatalar boshidan $d=\sqrt{5}$ masofa uzoqlikda bo'lsa, k topilsin.

Javob: $k=\pm 2$

4.66. $4x-3y=0$ to'g'ri chiziqdan 4 birlik uzoqlikdagi nuqtalar geometrik o'rnining tenglamasi yozilsin.

Javob: Berilganiga parallel ikki to'g'ri chiziq: $4x-3y\pm 20=0$

4.67. $8x-15y=0$ to'g'ri chiziqqa parallel bo'lib, A(4,-2) nuqtadan 4 birlik uzoqlikdagi to'g'ri chiziqning tenglamasi yozilsin. **Javob:** $8x-15y+6=0;\quad 8x-15y=130$

4.68. $2x+3y=12$ va $3x+2y=12$ to'g'ri chiziqlar orasidagi burchaklar bissektrisalarining tenglamalari yozilsin.

Javob: $x-y=0$ va $x+y-4=0$

4.69. $3x+4y=12$ va $y=0$ to'g'ri chiziqlar orasidgi burchaklar bissektrissalarining tenglamalari yozilsin.

Javob: $3x-y=12$ va $x+3y=4$

4.70. $M(x,y)$ nuqta $y=4-2x$ to'g'ri chiziqqa nisbatan $y=2x-4$ to'g'ri chiziqdan uch marta uzoqroqda harakat qiladi. o'sha nuqta trayektoriyasining tenglamasi yozilsin. **Javob:** $x+y=2$ yoki $4x+y-8=0$

4.71. $2x+y+6=0$ va $3x+5y-15=0$ to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasi M va N(1,-2) nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq englamasi (M nuqtani topmasdan) yozilsin. **Javob:** $31x+26y=-21$

4.72. $5x-y+10=0$ va $8x+4y+9=0$ to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasi M dan o'tib $x+3y=0$ to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasi (M nuqtani topmasdan) yozilsin. **Javob:** $x+3y=2$

4.73. Uchlari A(-3,0), B(2,5) va C(3,2) nuqtalarda bo'lgan uchburchak BD balandligining uzunligi topilsin.

Javob: $\sqrt{10}$

4.74. $A(2,4)$ nuqtadan o'tuvchi va koordinatalar boshidan $d = 2$ uzoqlikda bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasi yozilsin.
Javob: $3x - 4y + 10 = 0, \quad x = 2$

4.75. $A(-4,-3)$, $B(-5,0)$, $C(5,6)$ va $D(1,0)$ nuqtalar trapetsiyaning uchlari bo'lishi tekshirilsin va uning balandligi topilsin.

Javob: $h = \frac{18}{\sqrt{34}}$

4.76. Koordinatalar boshidan $A(2,2)$ va $B(4,0)$ nuqtalargacha masofalari bir xil bo'lgan to'g'ri chiziq o'tkazilgan. Bu masofa topilsin.
Javob: $x + y = 0$ va $x - 3y = 0$ to'g'ri chiziqlar; masofalar: $d_1 = 2\sqrt{2}, \quad d_2 = 0{,}4\sqrt{10}$

4.77. $x + 2y - 5 = 0$ to'g'ri chiziq $\sqrt{5}$ masofa uzoqlikda bo'lgan geometric o'rnining tenglamasi yozilsin.
Javob: Ikkita to'g'ri chiziq: $x + 2y = 0$ va $x + 2y = 10$

4.78. $y = -x$ to'g'ri chiziqqa nisbatan $y = x$ to'g'ri chiziqdan ikki marta uzoqroqda harakat qiluvchi $M(x,y)$ nuqta trayektoriyasining tenglamasi yozilsin. **Javob:** $x + 3y = 0$ va $3x + y = 0$

4.79. $2x - 3y + 5 = 0$ va $3x + y - 7 = 0$ to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasi $M(x,y)$ dan o'tuvchi va $y = 2x$ to'g'ri chiziqqa perpendikulyar to'g'ri chiziq tenglamasi (M nuqtani topmasdan) yozilsin. **Javob:** $11x + 22y = 74$

4.80. $A(-4,0)$ va $B(0,6)$ nuqtalar berilgan. AB kesma o'rtasidan Oy o'qidagiga qaraganda Ox o'qdan ikki baravar katta kesma ajratuvchi chiziq o'tkazilsin. **Javob:** $x + 2y = 4$

4.81. $A(-2,0)$ va $B(2,-2)$ nuqtalar berilgan. OA kesmani tomon deb olib, diagonallari B nuqtada kesishuvchi $OACD$ parallelogramm yasalgan. Parallelogramm tomonlarining, diagonallarining tenglamalari yozilsin va CAD burchak topilsin. **Javob:**
$y = 0, \quad 2x + 3y = -4; \; y = -4; \quad 2x + 3y = 0, \quad x + 2y = -2, \quad y = -x, \; tg\alpha = \frac{1}{8}$

8-amaliyot .

Ikkinchi tartibli egri chiziqlar. Aylana, ellips, giperbola va parabola.

1. Ikkinchi tartibli chiziqning umumiy tenglamasi

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Ey + F = 0 \qquad (4.11)$$

2. Radiusi R va markazi $C(x_0;y_0)$ va $O(0;0)$ nuqtada bo'lgan aylana tenglamasi quyidagicha ko'rinishda bo'ladi:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \qquad (4.12)$$

$$x^2 + y^2 = R^2 \qquad (4.13)$$

3. Ellipsning kanonik tenglamasi (koordinata o'qlari ellips o'qi bilan ustma-ust tushadi)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (4.14)$$

bu yerda a va b –ellips o'qlari:

$$b^2=a^2-c^2 \qquad (4.15)$$

$F_1(-c_1;0)$ va $F_2(c;0)$- ellips fokuslarini ifodalaydi $(a>b)$.

Ellipsning eksttisiteti ($\varepsilon<1$-ellips uchun)

$$\varepsilon=\frac{c}{a} \qquad (4.16)$$

Ellipsning ixtiyoriy M(x;y) nuqtasidan focus masofagacha bo'lgan masofa quyidagi formula bilan topiladi.

$$r_1=a-\varepsilon x, \quad r_2=a+\varepsilon x \qquad (4.17)$$

4. Giperbolani kanonik tenglamasi (giperbola o'qi koordinata o'qlari ustma-ust tushadi)

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (4.18)$$

bu yerda a,b mos ravishda haqiqiy va mavhum yarim o'qlari,

$$c^2=a^2+b^2, \qquad (4.19)$$

$F_1(-c_1;0)$ va $F_2(c;0)$ - giperbola fokuslari, $c>a$.

Giperbolaning ekstrentsiteti (4.23) formula orqali topiladi ($\varepsilon>1$).

Giperbolaning M(x;y) nuqtadan fokusgacha bo'lgan masofa () quyidagi formula yordamida aniqlanadi.

$$r_1=|\varepsilon x-a|, \quad r_2=|\varepsilon x+a| \qquad (4.20)$$

Giperbolaning ikkita asimptotasi quyidagi formula bilan aniqlanadi.

$$y=\pm\frac{b}{a}x$$

5. Koordinata boshida joylashgan parabolaning kanonik tenglamasi

$$y^2=2px$$

(agar OX o'qiga nisbatan simmetrik bo'lsa), yoki

$$x^2=2px \;\; y=Ax^2$$

(agar Oyo'qiga nisbatan simmetrik bo'lsa), bu yerda p yoki $A = \frac{1}{2p}$ -parabola parametri.

Parabolaning focus nuqtasi $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ dan OX (fokus radius) bo'lgan masofa quyidagi formula bilan aniqlanadi

$$r = x + \frac{p}{2}$$

Parabola direktrissasining tenglamasi $x = -\frac{p}{2}$

Amaliyot darsida yechiladigan misollar

4.82. Markazi C(-4,3), rasiusi $R = 5$ bo'lgan aylana tenglamasi yozilsin va u yasalsin. A(-1,-1), B(3,2), O(0,0) nuqtalar bu aylanada yotadimi? **Javob:** $x^2 + y^2 + 8x + 6y = 0$; A va O aylanada, B –undan tashqarida.

4.83. A(-4,6) nuqta berilgan. Diametrik OA kesmadan iborat aylana tenglamasi yozilsin.
Javob: $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0$

4.84. 1) $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$; 2) $x^2 + y^2 - 8x = 0$; 3) $x^2 + y^2 + 4y = 0$ aylanalar yasalsin.

4.85. $x^2 + y^2 + 5x = 0$ aylana $x + y = 0$ to'g'ri chiziq yasalgan va ularning kesishgan nuqtalari topilsin.
Javob: (0;0), (-2,5;2,5)

4.86. A(1,2) nuqtadan o'tuvchi va koordinata o'qlariga urinuvchi aylana tenglamasi yozilsin.
Javob: $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ yoki $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$

4.87. $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 0$ aylananing Oy o'q bilan kesishgan nuqtalariga o'tkazilgan radiuslari orasidagi burchak topilsin. **Javob:** $tg\alpha = -2,4, \quad \alpha = 112^0 37'$

4.88. A(-1,3), B(0,2) va C(1,-1)nuqtalardan o'tuvchi aylana tenglamasi yozilsin. **Javob:** $(x+4)^2 + (y+1)^2 = 25$

4.89. A(4,4) nuqtadan va $x^2 + y^2 + 4x - 4y = 0$ aylana bilan $y = -x$ to'g'ri chiziqning kesishgan nuqtalaridan o'tuvchi aylana tenglamasi yozilsin. **Javob:** $x^2 + y^2 - 8y = 0$

4.90. $y = -\sqrt{-x^2 - 4x}$ egri chiziqning joylashish sohasi aniqlab, shakli chizilsin.

4.91. $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 16 = 0$ aylanaga koordinatalar boshidan o'tkazilgan urinmalarning tenglamalari yozilsin.
Javob: $y = \frac{4}{3}x$ va $y = 0$

Uyga vazifa

4.92. $A(a,0)$ nuqta berilgan. M nuqta shunday harakat qiladiki, $\Delta\, OMA$ da OMA burchak doimo to'g'ri burchak bo'lib qoladi. M nuqta trayektoriyasining tenglamasi yozilsin. **Javob:** $y^2 = x(a-x)$

4.93. A(-6,0) va B(2,0) nuqtalar berilgan. Shunday nuqtalarning geometrik o'rni topilsinki, ulardan OA va OB kesmalar teng burchaklar ostida ko'rinsin. **Javob:** $(x-3)^2 + y^2 = 9$

4.94. $M(x,y)$ nuqta shunday harakarlanadiki, undan $A(-a,0)$, $B(0,a)$ va $C(a,0)$ nuqtalargacha bo'lgan masofalar kvadratlarining yig'indisi $3a^2$ ga teng bo'lib qolaveradi. Nuqta trayektoriyasining tenglamasi yozilsin.

Javob: $x^2+\left(y-\frac{a}{3}\right)=\frac{a^2}{9}$

4.95. $M(x,y)$ nuqta shunday harakarlanadiki, undan koordinat burchaklarining bissektrisalarigacha bo'lgan masofalar kvadratlarining yig'indisi a^2 ga teng bo'lib qolaveradi. Nuqta trayektoriyasining tenglamasi yozilsin.

Javob: $x^2+y^2=a^2$

4.96. $x^2+y^2=a^2$ aylana berilgan. Uning $A(a,0)$ nqutasidan mumkin bo'lgan barcha vatarlar o'tkazilgan. Bu vatarlar o'rtalarining geometrik o'rni aniqlansin. **Javob:** $x^2+y^2=ax$

4.97. $A(-3;0)$ va $B(3,6)$ nuqtalar berilgan. Diametrik AB kesmadan iborat aylana tenglamasi yozilsin.

Javob: $x^2+y^2-6y-9=0$

4.98. $x^2+4y^2=16$ ellips yasalsin, uning fokuslari va ekssentrisiteti topilsin.

Javob: $a=4,\ b=2,\ c=2\sqrt{3},\ \varepsilon=\frac{\sqrt{3}}{2}$

4.99. Agar ellipsning: 1) fokuslari orasidagi masofa 8 ga teng bo'lib, kichik yarim o'qi $b=3$; 2) katta yarim o'qi $a=6$, ekstrensiteti $\varepsilon=0{,}5$ bo'lsa, uning kanonik tenglamasi yozilsin. **Javob:** 2) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$, 2) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1$

4.100. Ellipsning katta yarimo'qi $a=5$ va c parametri: 1) 4,8; 2) 4; 3) 3; 4) 1,4; 5) 0 ga teng bo'lsa, uning kichik yarim o'qi b va ekstrensiteti ε topilsin. **Javob:** $b=1{,}4;\quad 3;\ 4;\ 4{,}8;\ 5;\ \varepsilon=0{,}96;\ 0{,}8;\ 0{,}6;\ 0{,}28;\ 0$

4.101. Yer fokuslaridan birida quyosh joylashgan ellips bo'yicha harakat qiladi. quyoshdan yergacha bo'lgan eng kichik masofa taxminan 147,5 million kilometrga, eng katta masofa 152,5 million kilometrga teng bo'lsa, yer orbitasining katta yarim o'qi va eksentrisiteti topilsin. **Javob:** $a=150\ m\ln.km;\quad \varepsilon=\frac{1}{60}$

4.102. Koordinata o'qlariga nisbatan simmetrik bo'lgan ellips $M(2,\sqrt{3})$ va $B(0,2)$ nuqtalardan o'tadi. Uning tenglamasi yozilsin va M nuqtadan fokuslargacha bo'lgan masofa topilsin.

Javob: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1;\ \varepsilon=\frac{\sqrt{3}}{2};\ r=4-\sqrt{3};\quad r_1=4+\sqrt{3}$

4.103. Fokuslati Ox o'qda yotuvchi ellips koordinata o'qlariga nisbatan simetrik bo'lib, $M(-4,\sqrt{21})$ nuqtadan o'tadi va $\varepsilon=\frac{3}{4}$ ekstrensitetiga ega. Ellips tenglamasi yozilsin va M nuqtaning fokal radiuslari topilsin.

Javob: $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{28}=1;;\ r=11;\quad r_1=5$

4.104. $x^2+2y^2=18$ ellipsning o'qlari orasidagi burhckani teng ikkiga bo'luvchi vatar uzunligi topilsin.

Javob: $4\sqrt{3}$

4.105. $9x^2+25y^2=225$ ellipsda shunday $M(x,y)$ nuqta topilsinki, undan o'ng fokusgacha bo'lgan masofa chap fokusgacha bo'lgan masofadan 4 marta katta bo'lsin. **Javob:** $\left(-\frac{15}{4};\pm\frac{\sqrt{63}}{4}\right)$

Amaliyot darsida yechiladigan misollar

4.106. $x^2 - 4y^2 = 16$ giperbolavauningasimptotalariyasalsin. Giperbolaningfokuslari, ekstrensitetivaasimptotalariorasidagiburchkatopilsin.**Javob:** $\varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad 53^0 08'$

4.107. $x^2 - 4y^2 = 16$ giperbolada ordinatasi 1 ga teng M nuqta olingan. Undan fokuslargacha bo'lganb masofalar topilsin. **Javob:** $r = 1; \quad r_1 = 9$

4.108. Giperbola koordinata o'qlariga nisbatan simmetrik bo'lib, M(6,2 $\sqrt{2}$) nuqtadan o'tadi va $b = 2$ mavhum yarim o'qqa ega. Uning tenglamasi yozilsin hamda M nuqtadan fokuslargacha bo'lgan masofalar topilsin.

Javob: $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1;\ 2\sqrt{3}$ va $6\sqrt{3}$

4.109. Uchlari $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ ellipsning fokuslari esa uning uchlarida bo'lgan giperbolaning tenglamasi yozilsin.

Javob: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

4.110. $y^2 = a^2 + x^2$ giperbola yasalsin, uning fokuslarining koordinatalari va asimptotalari orasidagi burchak topilsin. **Javob:** $\left(0; \pm a\sqrt{2}\right); \quad 90^0$

4.111. $x^2 - 4y^2 = 16$ giperbolaga A(0,-2) nuqtadan io'tkazilgan urinmalarning tenglamalari yozilsin.

Javob: $y + 2 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} x$

4.112. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ giperbolaning fokusidan asimptotalarigacha bo'lganmasofalar va asimptotalari orasidagi burchak topilsin. **Javob:** $b,\ 2arctg\, \frac{b}{a}$

4.113. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ giperbolaga ichki chizilgan kvadratning tomoni topilsin va qanday giperbolalarga kvadartni ichki chizish mumkinligi tekshirilsin. **Javob:** $\frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2}}; b > a$

4.14.F(0,2) nuqtadan va y = 4 chiziqdan bir xil uzoqlashgan nuqtalar geometrik o'rnining tenglamasi tuzilsin. Bu egri chiziqning koordinata o'qlari bilan kesishgan nuqtalari topilsin va u yasalsin. **Javob:** $y = 3 - \frac{x^2}{4}$

4.115. Koordinatalar boshidan va x = -4 to'g'ri chiziqdan bir xil uzoqlikda bo'lgan nuqtalar geometrik o'rnining tenglamasi tuzilsin. Bu egri chiziqning koordinata o'qlari bilan kesishgan nuqtalari topilsin va u yasalsin.

Javob: $y^2 = 8(x + 2)$

4.116. 1) (0,0) va (1,-3) nuqtalardan o'tuvchi va Ox o'qqa nisbatan simmetrik; 2) (0,0) va (2,-4) nuqtalardan o'tuvchi Oy o'qqa simmetrik bo'lgan parabola tenglamasi yozilsin. **Javob:** 1) $y^2 = 9x$; 2) $y = x^2$.

4.117. Markazi $y^2= 2px$ parabolaning fokusida bo'lib, parabola direktrissasiga urinuvchi aylana tenglamasi yozilsin parabola va aylananing kesishgan nuqtalari topilsin. **Javob:** $\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2=p^2; \left(\frac{p}{2};\pm p\right)$

4.118. $x^2+y^2+4y=0$ aylana $x+y=0$ to'g'ri chiziqning kesishgan nuqtalaridan o'tib, Oy o'qqa nisbatan simmetrik bo'lgan parabolaning va uning direkttissasining tenglamalari yozilsin. Aylana, to'g'ri chiziq va parabola yasalsin. **Javob:** $y=-\frac{x^2}{2}$

4.119. $y^2= 6x$ parabolada fokal radius – vektori 4,5 ga teng bo'gan nuqta topilsin. **Javob:** $\left(3;\pm 3\sqrt{2}\right)$

4.120. Projektorning oynali sirti parabolaning o'z simmaterik o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan. Oynaning diametric 80 sm, chuqurligi 10 sm. Nurlarning parallel dasta sharlida qaytishi uchun yorug'lik manbai parabolaning fokuslida o'rnatilishi kerak bo'lsa, yorug'lik manbai parabola uchidan qanday masofada o'rnatilishi kerak?
Javob: 40 sm.

4.121. $y=-\sqrt{x}$ egri chiziqning joylashish sohasi aniqlansin. bu egri chiziq yasalsin.

4.122. $y^2= 6x$ parabola uchidan o'tishi mumkin bo'lgan barcha vatarlar o'tkazilgan, bu vatarlar o'rtalari geometriko'rning tenglamasi yozilsin. **Javob:** $y^2=px$

9-amaliyot .

Fazoda tekislik tenglamalariga doir mashqlar. Fazoda to'gTi chiziq tenglamalariga doir mashqlar.

1. Tekislik tenglamalari - umumiy tenglamasi:

$$Ax+By+Cz+D=0\ , \qquad (4.21)$$

bu yerda A,B,C,D lar haqiqiy sonlar;

- $M_0(x_0;y_0;z_0)$ nuqtadan o'tuvchi va $\vec{n}=(A,B,C)$ vektorlarga perpendikulyar bo'lgan tekislik tenglamasi

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0\ ; \ (4.22)$$

- koordinata o'qlarini mos ravishda a,b,c, nuqtalardan kesib o'tgan tekislik tenglamasi

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1; \qquad (4.23)$$

2. $A(x_0;y_0;z_0)$ nuqtadan $Ax+By+Cz+D=0$ tekislikgacha bo'lgan d masofa

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \qquad (4.24)$$

3. Berilgan ikkita $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ va $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ tekisliklar orasidagi burchak (φ) quyidagicha topiladi

$$\cos\varphi = \pm\frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \quad . \qquad (4.25)$$

4. Ikki tekislikka parallelik

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \qquad (4.26)$$

va perpendikulyarlik shartlari:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0 \qquad (4.28)$$

5. Tekislikdagi to'g'ri chiziq ikki tekislikni kesishidan to'g'ri chiziq hosil bo'ladi

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \qquad (4.41)$$

6. M($x_1;y_1;z_1$) nuqtadan o'tuvchi va $\vec{S} = (m, n, p)$ vektorlarga parallel bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasi

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p} \qquad (4.29)$$

to'g'ri chiziqning kanonik tenglama yoki

$$x = x_1 + mt; \quad y = y_1 + nt; \quad z = z_1 + pt \qquad (4.30)$$

to'g'ri chiziqning parallelik tenglamasi дейилади.

7. M$_1$($x_1;y_1;z_1$) va M$_2$($x_2;y_2;z_2$) nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

8. agar ikki to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori berilgan bo'lsa, $\vec{S}_1 = (m_1, n_1, p_1)$ va $\vec{S}_2 = (m_2, n_2, p_2)$, u holda

$$\cos\varphi = \pm\frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$$

9. Ikki to'g'ri chiziqning parallelligi

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

bo'ladi.

10. Ikki to'g'ri chiziqning perpendikulyarlik sharti

$$m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0$$

11. Berilgan $\frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_1}{n} = \frac{z-z_1}{p}$ to'g'ri chiziq va $Ax + By + Cz + D = 0$ tekisliklar orasidagi burchak

$$\sin\varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$$

12.To'g'ri chiziq va tekislik ikkinchi parallelik sharti

$$Am + Bn + Cp = 0$$

13. To'g'ri chiziq va tekislikning parallelik sharti

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$$

bo'ladi.

Amaliyotdarsidayechiladiganmisollar

4.123. $A\left(a; -\frac{a}{2}; a\right)$va $B\left(0; \frac{a}{2}; 0\right)$nuqtalardantenguzoqlikdabo'lgannuqtalargeometriko'rniningtenglamasiyozilsin. **Javob:** $x - y + z = a$

4.124.M_1(-4; 0; 4) nuqtadano'tuvchiOxvaOyo'qlardan$a$=4 va$b$=3 kesmalarajratuvchitekislikningtenglamasiyozilsin. **Javob:** $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 1$

4.125. 1) $x - 2y + 2z - 8 = 0$ va $x + z - 6 = 0$; 2) $x + 2z - 6 = 0$ va $x + 2y - 4 = 0$ tekisliklar orasidagi burchak topilsin. **Javob:** 1) 45^0; 2) $78^0 30'$.

4.126. (-1; -1; 2) nuqtadan o'tuvchi va $x - 2y + z - 4 = 0$ hamda $x + 2y - 2z + 4 = 0$ tekisliklarga perpendikulyar tekislikning tenglamasi yozilsin. **Javob:** $2x + 3y + 4z = 3$

4.127. $4x + 3y - 5z - 8 = 0$ va $4x + 3y - 5z + 12 = 0$ parallel tekisliklar orasidagi masofa topilsin.

Javob: $2\sqrt{2}$

4.128. $2x - y + 3z - 9 = 0$; $x + 2y + 2z - 3 = 0$; $3x + y - 4z + 6 = 0$ tekislikning kesishgan nuqtasi topilsin.

Javob: (1; -1; 2)

4.129. 1) $\begin{cases} x = z + 5 \\ y = 4 - 2z \end{cases}$ va 2) $\left\{ \frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{1} \right.$ to'g'ri chiziqlarniung xOy va xOz tekisliklardagi izlari topilsin va to'g'ri chiziqlar yasalsin. **Javob:** 1) (5; 4; 0) va (7; 0; 2); 2) (0; -4; 0) va (2; 0; 2)

4.130. $\left.\begin{array}{r} x + 2y + 3z - 13 = 0 \\ 3x + y + 4z - 14 = 0 \end{array}\right\}$ to'g'ri chiziq tenglamalarini: 1) proyeksiyalari bo'yicha; 2) kanonik ko'rinishda yozilsin. To'g'ri chiziqning koordinata tekisliklaridagi izlari topilsin hamda to'g'ri chiziq va uning proyeksiyalari yasalsin.

Javob: $x = -z + 3,\quad y = -z + 5,\quad \frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{1} = \frac{z}{-1}$

4.131. 1) $\begin{cases} y = 3 \\ z = 2, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = 2 \\ z = x + 1 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = 4 \\ z = y \end{cases}$ to'g'ri chiziq yasalsin va ularning vektorlari aniqlansin.

Javob: 1) $P=i$;   2) $P=i+k$;   3) $P=j+k$

4.132.A(-1; 2; 3) va B(2; 6; -2) nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamalari yozilsin va uning yo'naltiruvchi kosinuslari topilsin.

Javob: $\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{-5}$, $\cos\alpha=0{,}3\sqrt{2}$; $\cos\beta=0{,}4\sqrt{2}$; $\cos\gamma=-0{,}5\sqrt{2}$

4.133.A(2; -1; 3) va B(2; 3; 3) nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq yasalsin va uning tenglamalari yozilsin.

Javob: $x=2,\quad z=3$

4.134. $\begin{cases} x-y+z-4=0 \\ 2x+y-2z+5=0 \end{cases}$ va $\begin{cases} x+y+z-4=0 \\ 2x+3y-z-6=0 \end{cases}$ to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak topilsin.

Javob: $\cos\varphi=\frac{11}{26}$

4.135. $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{1}$ to'g'ri chiziqning $x=z+1,\quad y=1-z$ to'g'ri chiziqqa perpendikulyar ekanini ko'rsating.

4.136. (-4; 3; 0) nuqtadan o'tuvchi va $\left.\begin{matrix} x-2y+z=4 \\ 2x+y-z=0 \end{matrix}\right\}$ to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamalari yozilsin.

Javob: yo'naltiruvchi vektor $P=N\times N_1=i+3j+5k$. To'g'ri chiziq tenglamalari: $\frac{x+4}{1}=\frac{y-3}{3}=\frac{z}{5}$

4.137. (2; -3; 4) nuqtadan Oz o'qqa tushilgan perpendikulyarning tenglamalari yozilsin.

Javob: $3x+2y=0,\quad z=4$

4.138.N(2; -1; 3) nuqtadan $\frac{x+1}{3}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-1}{5}$ to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa topilsin.

Javob: $0{,}3\sqrt{38}$

4.139. $\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+3}{2}$ va $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{2}$ parallel to'g'ri chiziqlar orasidagi masofa topilsin.

Javob: $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

4.139. $y=3x-1,\quad 2z=-3x+2$ to'g'ri chiziq bilan $2x+y+z-4=0$ tekislik orasidagi burchak topilsin.

Javob: $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{6}}$

10-amaliyot .

To'g'ri chiziq va tekislik orasidagi munosabatlar. Ikkinchi tartibli sirtlarga doir mashqlar.

4.140. $\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-1}{3}$ to'g'ri chiziq $2x+y-z=0$ tekislikka parallel ekanligi, $\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z+3}{3}$ to'g'ri chiziq esa shu tekislik ustida yotishi ko'rsatilgan.

Javob: ikkala to'g'ri chiziq uchun ham $Am+Bn+Cp=2\cdot2+1\cdot(-1)+(-1)\cdot3=0$, lekin birinchisining (-1; -1; 3) nuqtasi tekislikda yotmaydi, ikkinchisining (-1; -1; -3) nuqtasi esa tekislikda yotadi.

4.141. (-1; 2; -3) nuqtadan o'tuvchi va $x=2,\ \ y-z=1$ to'g'ri chiziqqa perpendikulyar tekislikning tenglamasi yozilsin. **Javob:** $y+z+1=0$ (to'g'ri chiziqning tenglamalarini $\frac{x-2}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}$ ko'rinishda yozish mumkin).

4.142. $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+1}{3}$ to'g'ri chiziqdan va (3; 4; 0) nuqtadan o'tuvchi tekislikning tenglamasi yozilsin.

Javob: $x-2y+z+5=0$

4.143. $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+2}{2}$ to'g'ri chiziqdan o'tuvchi va $2x+3y-z=4$ tekislikka perpendikulyar tekislikning tenglamasi yozilsin. **Javob:** $8x-5y+z-11=0$

Uyga vazifa

4.144. $\frac{x-3}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{2}$ va $\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{2}$ parallel to'g'ri chiziqlardan o'tuvchi tekislikning tenglamasi yozilsin.

Javob: $x+2y-2z=1$

4.145. Koordinatalar boshidan o'tuvchi va $4y=3x,\ y=0$ va $z=0$ tekisliklar bilan teng burchaklar tashkil etuvchi to'g'ri chiziq tenglamalari yozilsin va o'sha burchaklar topilsin. **Javob:** $\frac{x}{3}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1};\quad 17^0 33'$

4.146. $x=2t-1,\quad y=t+2,\quad z=1-t$ to'g'ri chiziqning $3x-2y+z=3$ tekislik bilan kesishgan nuqtasi topilsin. **Javob:** (5; 5; -2)

4.147(2; 3; 4) nuqtaning $x=y=z$ to'g'ri chiziqdagi proyeksiyasi topilsin. **Javob:** (3; 3; 3)

11-amaliyot .

Funksiya tushunchasi. Funksiyaning aniqlanish va o'zgarish sohasi. Juft va toqligi, davriyligi. Ketma-ketlikning limiti, funksiyaning limita, bir tomonlama limitlar.

Funksiya va u bilan bog'liq tushunchalar.

1. Agar X to'plamning har bir *x* elementiga Y to'plamning ma'lum bir *y* elementi biror *f* qonun-qoida asosida mos qo'yilgan bo'lsa, u holda X to'plamda $y=f(x)$***funksiya*** berilgan deyiladi. Bunda *x*-***erkli o'zgaruvchi yoki argument***, *y*-***erksiz o'zgaruvchi yoki funksiya*** deyiladi.

$y=f(x)$ funksiyada x argument qabul qila oladigan barcha qiymatlar to'plami funksiyaning ***aniqlanish sohasi*** deyiladi va D{*f*} kabi belgilanadi. $x\in D\{f\}$ bo'lganda $y=f(x)$ funksiya qabul qiladigan qiymatlar to'plami funksiyaning ***o'zgarish sohasi*** deb ataladi va E{*f*} kabi belgilanadi.

2. Agar $y=f(x)$ funksiya uchun $f(-x)=f(x)$ yoki $f(-x)=-f(x)$ shart bajarilsa u mos ravishda ***juft yoki toq funksiya*** deyiladi.

3. Agar $y=f(x)$ funksiyada argumentning har qanday $x_1<x_2$ qiymatlari uchun $f(x_1)<f(x_2)$ yoki $f(x_1)>f(x_2)$ shart bajarilsa, u mos ravishda ***o'suvchi yoki kamayuvchi funksiya*** deyiladi. O'suvchi va kamayuvchi funksiyalar birgalikda ***monoton funksiyalar*** deyiladi.

4. Agarda ixtiyoriy $x \in D\{f\}$ va biror chekli *M* soni uchun $|f(x)| < M$ tengsizlik bajarilsa, unda $y = f(x)$***chegaralangan funksiya*** deyiladi. Aks holda $y = f(x)$ chegaralanmagan funksiyani ifodalaydi.

5. Quyidagilar ***asosiy elementar funksiyalar*** deb ataladi:

1) $y = x^{\alpha}$ - ***darajali funksiya***. Bunda daraja ko'rsatkichi αixtiyoriy haqiqiy son bo'lishi mumkin. Darajali funksiyaning aniqlanish D{*f*} va o'zgarish E{*f*} sohalari αqiymatiga qarab topiladi.

2) $y = a^x; a > 0\ a \neq 1$ - ***ko'rsatkichli funksiya***. Bunda $D\{f\} = (-\infty, \infty)$ va $E\{f\} = (0, +\infty)$ bo'ladi.

3) $y = \log_u x \quad a > 0,\ a \neq 1$-***logarifmik funksiya***. Bunda $D\{f\} = (0, +\infty)$ va $E\{f\} = (-\infty, +\infty)$ bo'ladi.

4) $y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad y = tgx, \quad y = ctgx$ - ***trigonometrik funksiyalar***. Bu yerda

$$D\{\sin x\} = D\{\cos x\} = (-\infty, +\infty), \quad E\{\sin x\} = E\{\cos x\} = [-1, 1],$$

$$D\{tgx\} = \{x : x \neq \frac{\pi}{2}(2k+1), k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}, \quad E\{tgx\} = (-\infty, +\infty),$$

$$D\{ctgx\} = \{x : x \neq \pi k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}, \quad E\{ctgx\} = (-\infty, +\infty).$$

5) $y = \arcsin x, \ y = \arccos x, \quad y = arctgx, \quad y = arcctgx$ - ***teskari trigonometrik funksiyalar***. Bu funksiyalar uchun

$$D\{\arcsin x\} = [-1, 1], \quad E\{\arcsin x\} = [-\pi/2, \pi/2],$$

$$D\{\arccos x\} = [-1, 1], \quad E\{\arccos x\} = [0, \pi],$$

$$D\{arctgx\} = (-\infty, +\infty), \quad E\{arctgx\} = (-\pi/2, \pi/2),$$

$$D\{arcctgx\} = (-\infty, +\infty), \quad E\{arcctgx\} = (0, \pi).$$

6. *y*=*f*(*x*) va *y*=*g*(*x*) funksiyalar berilgan bo'lib, $E\{g\} \subseteq D\{f\}$ shart bajarilgan bo'lsin. Bu holda *y*=*f*(*g*(*x*)) funksiya aniqlangan bo'lib, u ***murakkab funksiya*** deb ataladi. Bunda *y*=*f*(·) – ***tashqi***, *y*=*g*(*x*)- ***ichki funksiya*** deyiladi. Murakkab funksiya hosil etish amali funksiyalarni kompozitsiyalash deb yuritiladi.

7. Chekli sondagi asosiy elementar funksiyalar ustida arifmetik va kompozitsiyalash amallarini bajarish orqali hosil qilingan funksiyalar ***elementar funksiyalar*** deyiladi.

8. Agar $y = f(x)$ funksiya uchun biror *T*>0 soni va *x* argumentning barcha qiymatlarida $f(x+T) = f(x)$ tenglik o'rinli bo'lsa, unda *y*=*f*(*x*) ***davriy funksiya***, *T* esa uning ***davri*** deyiladi.

Amaliyot darsida yechiladigan misollar

1. Quyidagi funksiyalarning aniqlanish sohasini toping:

1.1) $y = \dfrac{\sqrt[5]{\lg(x+1)}}{x-1} + 2^{\sqrt{10-x}}$; 1.2) $y = \dfrac{\sqrt[6]{16-x^2}}{\lg(x-1)^2}$; 1.3) $y = \sqrt{4-x^2}\,tgx$;

1.4) $y = \dfrac{\arcsin(x-1)}{\lg x}$; 1.5) $y = \dfrac{\sqrt{\sin x - 0.5}}{\sqrt[3]{x-2}} - \lg(x-1)\ln(4-x)$;

1.6) $y = \dfrac{x}{\sqrt[4]{25-x^2}}$; 1.7) $y = \dfrac{3^{\sqrt{x}}}{\lg(3-x)}$; 1.8) $y = \sqrt{x+2} - \ln(4-x)$;

1.9) $y = \dfrac{\sqrt{1-x^2}\ln(x+1)}{(x^2+1)\sqrt{5^x}} - \dfrac{\sqrt[4]{x-1}}{x}$; 1.10) $y = \dfrac{\arcsin x}{\sin 5x}$.

2. Quyidagi funksiyalarning o’zgarish sohasini toping:

2.1) $y=3\sin x+4\cos x$; 2.2) $y=e^{-\frac{x^2}{2}}$; 2.3) $y=\frac{3x}{1+x^2}$;

2.4) $y=\frac{3}{(\sin x+\cos x)^2+2}$; 2.5) $y=\log_\pi(\arccos x)$; 2.6) $y=\frac{2\sqrt{2}x-1}{x^2+1}$;

2.7) $y=6\sin x-8\cos x$; 2.8) $y=2\cdot 5^{-2x^2}$; 2.9) $y=-3x^2+10x-3$;

2.10) $y=-5x^2+26x+5$.

Uyga vazifalar

3. Quyidagi funksiyalarni juft va toqlikka tekshiring:

3.1) $y=x+\sin x$; 3.2) $y=x\sin^3 x$; 3.3) $y=x\cos x$;

3.4) $y=\frac{\lg(1-x^2)}{\sqrt[3]{\cos x}}$; 3.5) $y=\frac{x^3\cos x}{2^{x^2}}$; 3.6) $y=\lg\left(\frac{2-x^2}{2+x^3}\right)$; 3.7) $y=\frac{\sin x}{x^3}$;

3.8) $y=(\sin^2 x+\cos x)x^3$; 3.9) $y=x^2\ln x$; 3.10) $y=3^{4x}\cdot x^2+\cos x$.

4. Murakkab funksiyaga doir quyidagi masalalarni yeching:

4.1) $y(x)=\frac{1+x}{1-x}$, $y\left(\frac{4-x}{2+x}\right)=?$; 4.2) $y(x)=2^x$, $y(\log_{\frac{1}{2}} x)=?$;

4.3) $y(x)=\frac{3-x}{2+x}$, $y\left(\frac{1+z(x)}{2}\right)=\frac{1}{x}$, $z(x)-?$;

4.4) $y=3^x$, $y(4z(x))=\frac{1}{x^2}$, $z(x)-?$.

4.5) $f(g(x))=tg\sqrt{1+x^2}$. $f(x)$=? , $g(x)$=?

4.6) $f(g(x))=\sqrt{1+tg^2x}$. $f(x)$=? , $g(x)$=?

Javoblar:

1.1) $(-1,1)\cup(1,10]$;1.2) $[-4,0)\cup(0,1)\cup(1,2)\cup(2,4]$; 1.3) $[-2,2]$;

1.4) $(0,1)$; 1.5) $[\pi/3,2)\cup(2,2\pi/3]$; 1.6) $(-5,5)$; 1.7) $[0,2)\cup(2,3)$;

1.8) $[-2,4)$; 1.9) $\{1\}$; 1.10) $[-1,-\pi/5)\cup(-\pi/5,0)\cup(0,\pi/5)\cup(\pi/5,1]$.

2.1) $[-5,5]$; 2.2) $(0,1]$; 2.3) $[-3/2, 3/2]$; 2.4) $[3/4,3/2]$;

2.5) $(-\infty,1]$; 2.6) $[-2, 1]$ (Ko’rsatma: teskari funksiyadan foydalaning) ;

2.7) $[-10,10]$; 2.8) $(0, 2]$; 2.9) $(-\infty, 16/3]$; 2.10) $(-\infty, 194/5]$.

3.1) toq ; 3.2) juft; 3.3) toq; 3.4) juft; 3.5) toq ; 3.6) na juft, na toq ;
3.7) juft; 3.8) toq; 3.9) na juft, na toq ; 3.10) na juft, na toq .

4.1) $\frac{3}{x-1}$; 4.2) $\frac{1}{x}$; 4.3) $z=\frac{5(x-1)}{x+1}$; 4.4) $-\frac{1}{2}\log_3|x|$;

4.5) $f(x)=tgx,\ g(x)=\sqrt{1+x^2}$; 4.6) $f(x)=\sqrt{1+x^2},\ g(x)=tgx$.

Funksiyaning limiti

1. Agar ixtiyoriy kichik $\varepsilon > 0$ soni uchun shunday $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ son topilsaki, $|x - a| < \delta$ shartni qanoatlantiruvchi barcha *x* va biror chekli *A* soni uchun $|f(x) - A| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, u holda *A* soni $y = f(x)$ ***funksiyaning*** $x \to a$ ***holdagi limiti*** deyiladi va $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ kabi ifodalanadi.

2. Agar ixtiyoriy kichik $\varepsilon > 0$ soni uchun shunday $N = N(\varepsilon) > 0$ son topilsaki, $|x| > N$ shartni qanoatlantiruvchi barcha *x* va biror chekli *A* soni uchun $|f(x) - A| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, u holda *A* soni $y = f(x)$ ***funksiyaning*** $x \to \pm\infty$ ***holdagi limiti*** deyiladi va $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = A$ kabi ifodalanadi.

3. Agar $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$ yoki $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \alpha(x) = 0$ bo'lsa, unda $\alpha(x)$ funksiya mos ravishda $x \to a$ yoki $x \to \pm\infty$ holda ***cheksiz kichik miqdor*** deyiladi.

Amaliyot darsida yechiladigan misollar

1. Ko'phadlar nisbatidan iborat funksiyaning limitini hisoblang.

1.1) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}{x^3 + 8}$; 1.2) $\lim\limits_{x \to 6} \dfrac{x^2 - 8x + 12}{x^3 - 7x^2 + 6x}$; 1.3) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{2x^2 + x - 1}{x^3 - 3x - 2}$;

1.4) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 3x - 2}{x^2 - 5x + 6}$; 1.5) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1 + x)^3 - (1 + 3x)}{x + x^5}$; 1.6) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^2 + x}$;

1.7) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(x^2 + 2x - 3)^2}{x^3 + 4x^2 + 3x}$; 1.8) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(2x^2 - x - 1)^2}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$; 1.9) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4 - x^3 + x - 1}{2x^2 - x - 1}$;

1.10) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$; 1.11) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^3 + 4x^2 + 3x}$; 1.12) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{(x^2 + 2x - 3)^2}{x^3 + 4x^2 + 3x}$;

1.13) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4 - 1}{2x^4 - x^2 - 1}$; .14) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^3 - 3x - 2}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$; 1.15) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 4x^2 + 3x}{x^2 + x - 6}$;

1.16) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4 - 1}{x^3 - x^2 - x + 1}$; 1.17) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}$; 1.18) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^3 - 2x - 1}{x^4 + 2x + 1}$

1.19) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^4 + 2x + 1}{x^2 - x - 2}$; 1.20) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^4 - 4x^2}$;

Uyga vazifalar

1.21) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{3x^3 - 4x^2 - 2}{5x^3 + 8x^2 + 1}$; 1.22) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 3x - 2}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$; 1.23) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{4x^2 - 5x - 6}{3x^3 - 7x^2 + 2x}$;

1.24) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^4 + 2x^3 + x^2}{x^4 + 2x + 1}$; 1.25) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x^3 - 3x - 2}$; 1.26) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(1 + x)^3 - (1 + 3x)}{x^2 + x^5}$;

1.27) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x^3 - 7x^2 + 2x}{4x^2 - 5x - 6}$; 1.28) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 - 3x - 2}{x + x^2}$; 1.29) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3 - 2x - 1}{(x^2 - x - 2)^2}$;

1.30) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 - 3x - 2}{x^2 - x - 2}$.

2. Irratsional ifodali funksiya limitini hisoblang.

2.1) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2+2x-1}-\sqrt{x^2-5x+3}\right)$; 2.2) $\lim\limits_{x\to5}\frac{x^2-25}{2-\sqrt{x-1}}$; 2.3) $\lim\limits_{x\to16}\frac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$;

2.4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+\sqrt[3]{1-x^3}\right)$; 2.5) $\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$; 2.6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x+3}\right)$;

2.7) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}}{\sqrt[3]{x^2+x^3}}$; 2.8) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1-2x+x^2}-(1+x)}{x}$; 2.9) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[7]{x}}$;

2.10) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{2x}}$;

Amaliyot darsida yechiladigan misollar

2.11) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x+2}$; 2.12) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}\right)$; 2.13) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{25-2x}-3}{\sqrt[3]{x}-2}$;

2.14) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{(x+2)^2}-\sqrt[3]{(x-2)^2}\right)$; 2.15) $\lim\limits_{x\to-8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$; 2.16) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{(x+3)(x-2)}-x\right)$;

2.17) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+3x^2}-(1+x)}{\sqrt[3]{x}}$; 2.18) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$; 2.19) $\lim\limits_{x\to8}\frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$;

2.20) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+5x+4}-\sqrt{x^2+x}\right)$;

Uyga vazifalar

2.21) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+\sqrt[3]{1-x^3}\right)$; 2.22) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{\sqrt{1+x}-1}$; 2.23) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x^3+2}-\sqrt{x^3-2}\right)$;

2.24) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-5x+6}-x\right)$; 2.25) $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{3}{1-\sqrt{x}}-\frac{2}{1-\sqrt[3]{x}}\right)$; 2.26) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$;

2.27) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[5]{x}}$; 2.28) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)$; 2.29) $\lim\limits_{x\to8}\frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x^2}-4}$;

2.30) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{8+3x+x^2}-2}{x+x^2}$.

3. Trigonometrik ifodali funksiya limitini hisoblang.

3.1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin x-1}{\sin 6x}$; 3.2) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{1-\sin\frac{x}{2}}{\pi-x}$; 3.3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1-7x)}{\sin(\pi(x+7))}$; 3.4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2^{\cos^2 x}-1}{\ln\sin x}$;

3.5) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(\alpha+x)-\sin(\alpha-x)}{x}$; 3.6) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 3x-\sin 2x}{\ln(1+2tg3x)}$; 3.7) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos 2x-\cos x}{1-\cos x}$; 3.8) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{tg3x}$;

Amaliyot darsida yechiladigan misollar

3.9) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos\left(x+\frac{5\pi}{2}\right)\cdot tgx}{\arcsin 2x^2}$; 3.10) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{\cos 7x-\cos 3x}$; 3.11) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2-2x}{tg[2\pi(x+0.5)]}$; 3.12) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\cos 2x}{\sin^2 3x}$; 3.13) $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sin 7\pi x}{tg8\pi x}$; 3.14) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2\sin x-\sqrt{3}}{\cos\frac{3x}{2}}$; 3.15) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1+x\sin x-\cos 2x}{\sin^2 x}$;

3.16) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+\cos\pi x}{tg^2\pi x}$; 3.17) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x\sin^2\sqrt{x}}$; 3.18) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$; 3.19) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x+tg^2 x}{x\sin^2 3x}$;
3.20) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{1-2\cos x}{\pi-3x}$;

3.21) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{1-2\cos x}{\sin(\pi-3x)}$; 3.22) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos 4x}-1}{\sin^2 8x}$; 3.23) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{(2x-1)^2}{e^{\sin\pi x}-e^{-\sin 3\pi x}}$; 3.24) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{2^{\cos^2 x}-1}{\ln\sin x}$; 3.25) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x-2\sin 2x}{x\ln\cos 6x}$; 3.26) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{tg(3^{\frac{\pi}{x}}-3)}{3^{\cos\frac{3x}{2}}-1}$; 3.27) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x-\sin x}{x\ln(1-x\sin x)}$;
3.28) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\cos 5x-\cos 3x}{\sin^2 x}$; 3.29) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{\cos^2 x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$; 3.30) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{x^2+\sin^3 x}$.

4. Berilgan limitlarni hisoblang.

4.1) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{\ln(4x-1)}{\sqrt{1-\cos\pi x}-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x^2+2x)-\ln(x^2+3)}{e^{\frac{x}{x^2-1}}-1}$; 4.3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt[5]{x^4+1}}$; 4.4) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin(x^2/\pi)}{2^{\sqrt{\sin x+1}}-2}$; 4.5) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{tg(x+1)}{e^{\sqrt[3]{x^3-4x^2+6}}-e}$; 4.6) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2-3x+3}-1}{\sin\pi x}$;4.7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x^2-1)-\ln(x^2+1)}{\sqrt[3]{x-1}-1}$; 4.8) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\ln(x+2)-\ln(2x-1)}{\sin\pi x}$; 4.9) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(5-2x)}{\sqrt{10-3x}-2}$; 4.10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+xe^x)}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}$;

Uyga vazifalar

4.11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x^2+e^x)}{\ln(x^4+e^{2x})}$; 4.12) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3^{5x-3}-3^{2x^2}}{\ln(5x^2-4x)}$; 4.13) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^{x^2-a^2}-1}{tg\ln\frac{x}{a}}$; 4.14) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\arcsin\frac{x+2}{2}}{3^{\sqrt{2+x+x^2}}-9}$;4.15) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{\ln x}$;4.16) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{\sin^2 6x}-e^{\sin^2 3x}}{\log_3\cos 6x}$;4.17) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{tg\pi x}$; 4.18) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{x+1}-3}{\ln\left(1+x\sqrt{1+xe^{2x}}\right)}$;
4.19) $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{\lg x-1}{\sqrt{x-9}-1}$;4. 20) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{tg\left(e^{x+2}-e^{x^2-4}\right)}{\ln(3x+7)}$; 4.21) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{e^{\sin x}-e^{tg 2x}}{\ln\frac{2}{\pi}}$;4.22) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{2^{\sin\pi x}-1}{\ln(x^2-2x+1)}$;

4.23) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+x\sqrt{1+xe^x}\right)}{\sqrt{\cos x}-1}$;4.24) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\left(e^x-e^{-x}\right)}{e^{x^3+1}-e}$; 4.25) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x}-\sqrt{3x^2-5x+2}}{arctg\frac{x-2}{2}}$;

4.26) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{2+3x}-\sqrt{2x}}{\ln(x+2)-2\ln x}$; 4.27) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2-5x+5}-1}{tg\pi x}$;4.28) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln 2x-\ln\pi}{e^{tg\,2x}-e^{-\sin 2x}}$;

4.29) $\lim\limits_{x\to 2\pi}\dfrac{\ln\cos x}{tg(\cos x-1)}$;4.30) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{tg\ln(3x-5)}{e^{x+3}-e^{x^2+1}}$

.

12-amaliyot .

Ajoyib limitlar. Limitlarga doir aralash misollar. Funksiyaning uzluksizligi.

5. Murakkab ko'rsatkichli-darajali funksiya limitini hisoblang.

5.1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(6-\dfrac{5}{\cos x}\right)^{ctg^2 x}$;5.2) $\lim\limits_{x\to 0}(2-\cos 3x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}$; 5.3) $\lim\limits_{x\to 2\pi}(\cos x)^{\frac{ctg\,2x}{\sin 3x}}$;5.4) $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\frac{\sin\frac{\pi x}{2}}{\ln(2-x)}}$;5.5) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2x-1}{x}\right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}}$; 5.6) $\lim\limits_{x\to 2}(2e^{x-2}-1)^{\frac{1}{x-2}}$;

5.7) $\lim\limits_{x\to 0+0}(\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$; 5.8) $\lim\limits_{x\to 0}[1-\ln(1+x^3)]^{\frac{3}{x^2\arcsin x}}$; 5.9) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}$; 5.10) $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-3^{arctg^2\sqrt{x}}\right)^{\frac{2}{\sin x}}$; 5.11) $\lim\limits_{x\to 0}\left(6-\dfrac{5}{\cos x}\right)^{\frac{1}{tg^2 x}}$; 5.12) $\lim\limits_{x\to 0}\left(5-\dfrac{4}{\cos x}\right)^{\frac{1}{\sin^2 3x}}$; 5.13) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x^2]{2-\cos x}$; 5.14) $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-e^{x^2}\right)^{\frac{1}{1-\cos\pi x}}$ 5.15) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+5}{x^2+3}\right)^{4x^2}$;5.16) $\lim\limits_{x\to 0}(3-2\cos x)^{-\operatorname{cosec}^2 x}$;

5.17) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{\sin x}{\sin 3}\right)^{\frac{1}{x-3}}$; 5.18) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2x-1}{x}\right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}}$;

5.19) $\lim\limits_{x\to 1}\left(2e^{x-1}-1\right)^{\frac{x}{x-1}}$; 5.20) $\lim\limits_{x\to 0}\left[1-x\sin^2 x\right]^{\frac{1}{\ln(1+\pi x^3)}}$;

Uyga vazifalar

5.21) $\lim\limits_{x\to 0}\left[1-\ln\left(1+x^3\right)\right]^{3/\sin^4\sqrt[3]{x}}$; 5.22) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x+\sin x)^{\frac{1}{x}}$; 5.23) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{5}{tg\,5x\sin 2x}}$;

5.24) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 3\pi x)^{\frac{1}{x\sin 2\pi x}}$;5.25) $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-3^{arctg^2\sqrt{x}}\right)^{\frac{2}{\sin x}}$; 5.26) $\lim\limits_{x\to 2\pi}(\cos x)^{\frac{ctg\,2x}{\sin 3x}}$;

5.27) $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-e^{\arcsin^2\sqrt{x}}\right)^{\frac{3}{x}}$; 5.28. $\lim\limits_{x\to 0}\left(4-\dfrac{3}{\cos x}\right)^{\frac{1}{tg^2 2x}}$;

5.29) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos\pi x)^{\frac{1}{x\sin\pi x}}$; 5.30) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(tg\,\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}}$.

Javoblar

1.1) 0 ;1.2) 2/15 ; 1.3) –5/4 ; 1.4) –9 ; 1.5) 0 ; 1.6) 2 ;
1.7) ∞ ; 1.8) 0 ; 1.9) 2/3 ; 1.10) 0 ; 1.11) –3/2 ; 1.12) 0 ;
1.13) 2/3 ; 1.14) 1 ; 1.15) –1/2 ; 1.16) ∞ ; 1.17) 3/5 ; 1.18) –11/38 ;
1.19) 2/3 ; 1.20) 0 ; 1.21) 6 ; 1.22) 3 ; 1.23) 11/10 ; 1.24) 0 ;
1.25) 4/3 ; 1.26) 0 ; 1.27) 10/11 ; 1.28) 0 ; 1.29) 0 ; 1.30) 0 .

2.1) 7/2 ; 2.2) –40 ; 2.3) 1/4 ; 2.4) 0 ; 2.5) –1/16 ; 2.6) ∞ ;
2.7) ∞ ; 2.8) –2 ; 2.9) 0 ; 2.10) $-2\sqrt{2}/3$; 2.11) 1/12 ; 2.12) 0 ;
2.13) –1 ; 2.14) 0 ; 2.15) –2 ; 2.16) 1/2 ; 2.17) 0 ; 2.18) 1/144 ;
2.19) 12/5 ; 2.20) 2 ; 2.21) 0 ; 2.22) 2/3 ; 2.23) 2 ; 2.24) –5/2 ;
2.25) 1/2 ; 2.26) 3/4 ; 2.27) 0 ; 2.28) 1 ; 2.29) 3/5 ; 2.30) 1/4 .

3.1) 1/3 ; 3.2) 0 ; 3.3) 7/π ; 3.4) ln4 ; 3.5) 2cosα ; 3.6) 1/6 ;
3.7) –3 ; 3.8) 1/3 ; 3.9) –1/2 ; 3.10) 1/10 ; 3.11) –1/ π ; 3.12) 2/3 ;
3.13) 7/8 ; 3.14) –2/3 ; 3.15) 3 ; 3.16) –1/2 ; 3.17) 1/2 ; 3.18) 0 ;
3.19) ∞ ; 3.20) $-1/\sqrt{3}$; 3.21) $-1/\sqrt{3}$; 3.22) –1/16 ; 3.23) $1/\pi^2$;
3.24) –2ln2 ; 3.25) ∞; 3.26) –2/π ; 3.27) ∞ ; 3.28) 8 ;
3.29) –1/6 ; 3.30) 3/2 .

4.1) 8/π ; 4.2) 2 ; 4.3) ∞ ; 4.4) 2/ln2 ; 4.5) ∞ ; 4.6) 1/2π ; 4.7) 0 ;
4.8) 1/5π ; 4.9) 8/3 ; 4.10) 1 ; 4.11) … ; 4.12) … ; 4.13) … ;
4.14) … ; 4.15) … ; 4.16) … ; 4.17) … ; 4.18) … ; 4.19) … ;
4.20) … ; 4.21) … ; 4.22) … ; 4.23) … ; 4.24) … ; 4.25) … ;
4.26) … ; 4.27) … ; 4.28) … ; 4.29) … ; 4.30) … .

5.1) $e^{-5/2}$; 5.2) $e^{1/2}$; 5.3) –1/12 ; 5.4) e ; 5.5) 1 ; 5.6) e^2 ;
5.7) $e^{-1/2}$; 5.8) e^{-3} ; 5.9) 1 ; 5.10) 1/9 ; 5.11) $e^{-5/2}$; 5.12) $e^{-2/9}$;
5.13) $e^{-1/2}$; 5.14) e^{-2/π^2} ; 5.15) e^8 ; 5.16) … ; 5.17) …; 5.18) …;
5.19) … ; 5.20) …; 5.21) …; 5.22) … ; 5.23) …; 5.24) …;
5.25) … ; 5.26) …; 5.27) …; 5.28) … ; 5.29) …; 5.30) … .

Funksiyaning uzluksizligi va uzulish nuqtalari

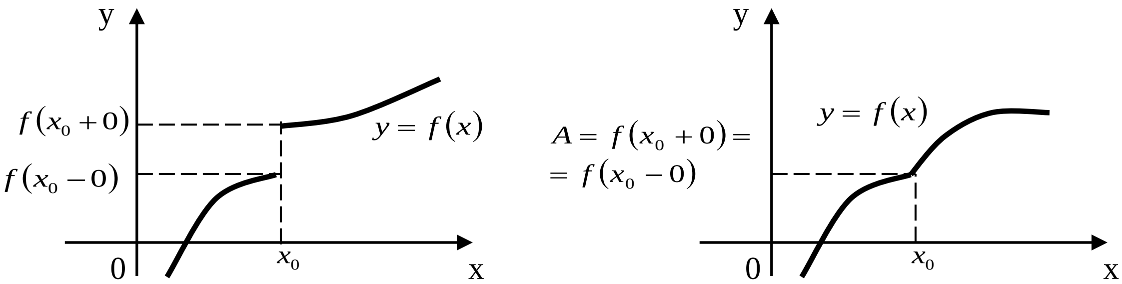
1.Quyidagi shartlar bajarilsa, $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ***uzluksiz*** deyiladi:

- $f(x)$ funksiya x_0 nuqta va uning atrofida aniqlangan;
- $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada chekli chap $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)= f(x_0-0)$ va o’ng $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)= f(x_0+0)$ limitlarga ega;
- $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi chap va o’ng limitlari o’zaro teng, ya’ni $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)= \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) \Rightarrow f(x_0-0)= f(x_0+0)\cdot$

2. Agar x_0 nuqtada yuqorida keltirilgan shartlardan kamida bittasi bajarilmasa, $f(x)$ funksiya bu nuqtada ***uzlukli***, x_0 esa uning ***uzilish nuqtasi*** deyiladi. Funksiya quyidagi ko'rinishdagi uzulishlarga ega bo'lishi mumkin.

a) Agar x_0 nuqtada $f(x)$ funksiyaning chap va o'ng limitlari mavjud va chekli, ammo $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$ bo'lsa, unda funksiya ***birinchi tur uzulishga*** ega deb ataladi. Bu holda $\delta=\left|f(x_0-0)-f(x_0+0)\right|$ ifoda $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi ***sakrashi*** deyiladi (5.1 - chizma).

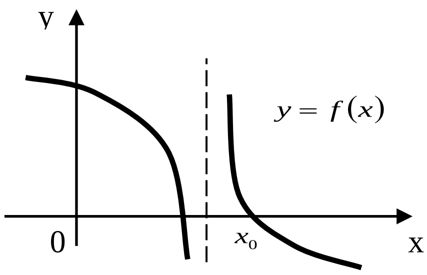
b) Agar $f(x_0-0)=f(x_0+0)\neq f(x_0)$ yoki $f(x_0-0)=f(x_0+0)$ bo'lib, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada aniqlanmagan bo'lsa, unda funksiya ***tuzatib bo'ladigan uzulishga*** ega deyiladi (5.2- chizma). Bu holda $f(x_0)=f(x_0-0)=f(x_0+0)$ deb olinsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'ladi



5.1- chizma.

.

c) Agar x_0 nuqtada $f(x_0-0)$, $f(x_0+0)$ bir tomonlama limitlardan kamida bittasi cheksiz qiymatga ega yoki mavjud bo'lmasa, unda funksiya ***ikkinchi tur uzulishga*** ega deyiladi (5.3- chizma).



5.2- chizma

.

Amaliyot darsida yechiladigan misollar

1. Quyidagi funksiyalarning uzilish nuqtalarini topib, unda uzulish turini aniqlang va funksiyaning sxematik grafigini chizing:

1.1) $y = arctg\dfrac{1}{x-4}$; 1.2) $y = 3^{\frac{1}{x}}$; 1.3) $y = \dfrac{x^3-1}{x^2-1}$; 1.4) $y = 0.5^{\frac{1}{x}}$;

1.5) $y = \begin{cases} 2x, & \text{agar} \quad x \le 1 \text{ bo'lsa} \\ 2-x, & \text{agar} \quad x > 1 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$

1.6) $y = E(x)$. Bunda $E(x)$ ifoda x sonning butun qismini, ya'ni undan katta bo'lmagan eng katta butun sonni ifodalaydi.

1.7) $y = \begin{cases} 0.5x^2, & |x| < 2 \\ 2.5, & |x| = 2 \\ 3, & |x| > 2 \end{cases}$; 1.8) $y = \begin{cases} \sin x, & x \le 0; \\ 1+\cos x, & 0 < x \le 2\pi; \\ x, & x > 2\pi. \end{cases}$;

1.9) $y = \begin{cases} \sin\dfrac{\pi}{2x}, & x \ne 0; \\ 1, & x = 0. \end{cases}$; 1.10) $y = \begin{cases} \cos\dfrac{\pi}{2x}, & x \ne 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$.

Uygа vazifalar

2. Funksiyalarni uzluksizlikka tekshiring va uzilish nuqtalarini aniqlang.

2.1) $y = \dfrac{2^{\frac{1}{x-2}} - 1}{2^{\frac{1}{x-2}} + 1}$; 2.2) $y = \dfrac{1}{(x-1)(x-5)}$; 2.3) $y = \dfrac{\ln(x+1)}{x}$;

2.4) $y = xtgx$; 2.5) $y = \cos(1+\ln x)$; 2.6) $y = \ln(1+\cos x)$.

3. Quyidagi funksiyalar barcha nuqtalarda uzkuksiz bo'ladigan αparametrning qiymatlarini toping:

3.1) $y = \begin{cases} \alpha\sin x, & x < \dfrac{\pi}{2}; \\ x+\pi, & x \ge \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$; 3.2) $y = \begin{cases} (\alpha^2+3\alpha-3)e^x, & x < 0; \\ \ln(x^2+x+e), & x \ge 0. \end{cases}$

Javoblar

1.1) x=4 - I tur uzilish nuqtasi va unda funksiya $\Delta=\pi$ sakrashga ega ;
1.2) x=0 - II tur uzilish nuqtasi ;
1.3) x=1 - tuzatib bo'ladigan va x= –1 - II tur uzilish nuqtasi ;
1.4) x=0 - II tur uzilish nuqtasi ;
1.5) x=1 - I tur uzilish nuqtasi va unda funksiya Δ=1 sakrashga ega ;
1.6) $x_k=k$, k=0, ±1, ±2, … - I tur uzilish nuqtalari va ularda funksiya Δ_k=1 sakrashga ega ;
1.7) x=±2 - I tur uzilish nuqtalari va ularda funksiya Δ=1 sakrashga ega ;
1.8) x_1=0, $x_2=2\pi$ - I tur uzilish nuqtalari va ularda funksiya Δ_1=2, $\Delta_2=2(\pi-1)$ sakrashga ega ;
1.9) x=0 - II tur uzilish nuqtasi ;
1.10) x=0 - II tur uzilish nuqtasi ;

2.1) funksiya $x\ne2$ nuqtalarda uzluksiz, x=2 – tuzatub bo'ladigan uzilish nuqtasi ;
2.2) funksiya $x\ne1$ va $x\ne5$ nuqtalarda uzluksiz, x=1 va x=5 – II tur uzilish nuqtalari;
2.3) funksiya $x\ne0$ nuqtalarda uzluksiz, x=0 – tuzatub bo'ladigan uzilish nuqtasi ;
2.4) funksiya $x_k\ne(2k+1)\pi/2$, k=0, ±1, ±2, …nuqtalarda uzluksiz, $x_k=(2k+1)\pi/2$ - II tur uzilish nuqtalari ;
2.5) funksiya $(0,\infty)$ oraliqda uzluksiz, x=0 - II tur uzilish nuqtasi ;

2.6) funksiya $x_k \neq (2k+1)\pi$, $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$nuqtalarda uzluksiz, $x_k=(2k+1)\pi$ - II tur uzilish nuqtalari .

22.5. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{x-1}=1$

22.6. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-2x-3}$

22.7. $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{tgx}{\sin 2x}$

22.8. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\cos 2x}$

22.9. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$

22.10. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$

22.11. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+mx}-1}{x}$

22.12. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

22.13. $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\sqrt{1-tgx}-\sqrt{1+tgx}}{Sin2x}$

22.14. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{5x^3-7x}{1-2x^3}$

22.15. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{x^3-1}{x^2+1}$

22.16. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{\sqrt{x}-6x}{3x+1}$

22.17. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{3x+6}{x^3+8}$

22.18. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-x-2}{x^3+1}$

22.19. $\lim\limits_{x\to \pi+0}\frac{\sqrt{1+Cosx}}{Sinx}$

22.20. $\lim\limits_{x\to 7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$

22.21. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}{3x^4-5x^3+2x^2-x+1}$

22.22. $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{6-x}-1}{3-\sqrt{4+x}}$

22.23. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x-2-\sqrt{4x^2-x-2}}{x^2-3x+2}$

22.24. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}}{x^2-x}$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{Sinx}{x}=1$ ajoyib limitdan foydalanib, quyidagi limitlarni toping:

22.25. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{Sin6x}{Sin7x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{Sin6x}{6x}6x}{\frac{Sin7x}{7x}7x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{6x}{7x}=\frac{6}{7}$

22.26. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{Sin4x}{x}$

22.27. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-Cos2x}{xSinx}$

22.28. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{Sin(x+h)-Sin(x-h)}{h}$

22.29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-Cosx}{x^2}$

22.30. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{Sin4x}{\sqrt{x+1}-1}$

22.31. $\lim\limits_{x\to 0-0}\dfrac{\sqrt{1-Cos2x}}{x}$

22.32. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\cdot Sinx}{\sec x-1}$

22.33. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-Cos2x+tg^2x}{xSinx}$

22.34. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\arcsin(x+2)}{x^2+2x}$

22.35. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-Cos5x}{1-Cos3x}$

22.36. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{Cos5x}{Sin4x}$

22.37. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+Cosx}-\sqrt{2Cosx}}{\sqrt{3+Cosx}-2\sqrt{Cosx}}$

22.38. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{1-Sinx}{(\frac{\pi}{2}-x)}$

22.39. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{Cos\frac{x}{2}-Sin\frac{x}{2}}{Cosx}$

Limitlarni toping:

22.40. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-x-2}{x^3+1}$

22.41. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{9-x^2}{\sqrt{3x}-3}$

22.42. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{ax}-x}{x-a}$

22.43. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{5x^2-3x+2}{2x^2+4x+1}$

22.44. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{5x^2+2^{\frac{1}{x}}}{1-x^2}$

22.45. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{Sin2x-Cos2x-1}{Cosx-Sinx}$

22.46. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{Sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$

22.47. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{Sin3x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$

22.48. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{5}}\dfrac{\arcsin(1-2x)}{4x^2-1}$

22.49. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-Cosmx}{x^2}$

22.50. $\lim\limits_{x\to 2}\left[\dfrac{Sin(x-2)}{x^2-4}+2^{\frac{-1}{(x-2)^2}}\right]$

22.51. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-Sinx}{x^3}$

22.52. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{Cos(x+h)-Cos(x-h)}{h}$

22.53. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{tgx-tgx_0}{x-x_0}$

22.54. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{Sinx-Cosx}{\pi-4x}$ 22.55. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^4+3x^2+5x-6}{x^3+3x^2+7x-1}$

22.56. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2x^3+4x+5)(x^2+x+1)}{(x+2)(x^4+2x^3+7x^2+x-1)}$

22.57. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3x}-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+3x}+x\right)}{\sqrt{x^2+3x}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+3x-x^2}{\sqrt{x^2+3x}+x}=\frac{3}{2}$

22.58. $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)$ 22.59. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x}\right)$

22.60. $\lim\limits_{x\to2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{12}{x^3-8}\right)$ 22.61. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{Sin^2x}-\frac{1}{4Sin^2\frac{x}{2}}\right)$

22.62. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-4x}\right)$ 22.63. $\lim\limits_{x\to-2}\left(\frac{1}{x+2}+\frac{4}{x^2-4}\right)$

22.64. $\lim\limits_{x\to\pi}Sin2x\cdot ctgx$

22.65. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^x$; Bu limitni hisoblashda $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ ajoyib limitdan foydalanamiz:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-x^2}\right)^{-x^2}\right]^{\frac{x}{-x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{-x}{x^2}\right)}=e^{-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}}=e^0=1$$

22.66. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{2x}$ 22.67. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^x$

22.68. $\lim\limits_{x\to0}(1-4x)^{\frac{1-x}{x}}$ 22.69. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+8}{x-2}\right)^x$

22.70. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+1}\right)^x$ 22.71. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1}{3x-1}\right)^{3x+1}$

22.72. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{2x-3}\right)^{2-5x}$

Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalarning limitini toping:

22.73. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}} \frac{Sin(x^2 \cdot y)}{x^2}$

$$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}} \frac{\sin(x^2 \cdot y)}{x^2} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}} \frac{\sin(x^2 \cdot y)}{x^2 \cdot y} \cdot y = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}} y = 3$$

22.74. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{a-\sqrt{a^2-xy}}{xy}$, $a \neq 0$

22.75. $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ y\to 0}} \frac{tg(xy)}{y}$ 22.76. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2+y^2)\cdot Sin\frac{1}{xy}$

22.77. $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to a}} \left(1+\frac{y}{x}\right)^x$ 22.78. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sqrt{1+x^2y^2}-1}{x^2+y^2}$

22.79. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(1+x^2+y^2\right)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$

13-amaliyot .

Funksiyaning hosilasi. Elementar funksiyalaming hosilalari.

Funksiya hosilasi. Agar $y = f(x)$ funksiya quyidagi cheksiz limit mavjud bo'lsa,

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

u holda funksiya hosilaga ega deyiladi.

Hosila ta'rifidan foydalanib, $y=f(x)$ funksiyalar uchun y` hosilasini toping:

24.2. a) $y=\frac{1}{x}$ b) $y=\sqrt{x}$

c) $y=\frac{1}{x^2}$ d) $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$

Differensiallash qoida va formulalaridan foydalanib, quyidagi funksiyalarning hosilasini toping:

24.3. $y = x+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{5x^5}$ 24.4. $y = 3x^2+5\sqrt[3]{x^5}-\frac{4}{x^3}$

24.5. $y = x^3 Sinx$

24.6. $y = Sinx \cdot \ln x$

24.7. $y = \dfrac{x^4+1}{x^4-1}$

24.8. $y = x^2 ctgx$

24.9. *y=x arccos x*

24.10. $y = e^x arctgx$

24.11. $y = \dfrac{Cosx}{x^2}$

24.12. $y = \dfrac{x^2}{x^2+1}$

24.13. $y = 3x^3 \ln x - x^3$

24.14. $y = \dfrac{Cosx}{1 - Sinx}$

24.15. $y = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$

24.16. $y = x^2 \log_3 x$

24.17. $y = \dfrac{\ln x}{Sinx} + x\,ctgx$

24.18. $y = \dfrac{x\,tgx}{1+x^2}$

24.19. $y = arctgx - arcctgx$

24.20. a) $y = |\ln x|$ funksiya *x*=1 da hosilaga egami? Tekshiring.

b) $y = |x|$ funksiyani *x*=0 da bir tomonli hosilalarini toping. Bu funksiya *x*=0 da hosilaga egami?

Quyidagi masalalarda egri chiziqlarga o'tkazilgan urinmalarning tenglamalari yozilsin va egri chiziqlar hamda urinmalari yasalsin:

24.21. $x^2 + 2xy^2 + 3y^4 = 6$ egri chiziqqa M(1,-1) nuqtada.

Egri chiziq tenglamasidan *y*` hosilani topamiz:

$2x + 2y^2 + 4xyy`+12y^3y`= 0,$ ya'ni $y`= -\dfrac{x+y^2}{2xy+6y^3}$.

Demak $y`(-1;1) = -\dfrac{1+(-1)^2}{2\cdot 1(-1)+6(-1)^3} = \dfrac{1}{4}$.

Urinma tenglamasi $y+1 = \dfrac{1}{4}(x-1)$

$$x - 4y + 5 = 0$$

Normal tenglamasi $y+1 = -4(x-1)$

$$4x + y - 3 = 0.$$

24.22. $y = \dfrac{x^3}{3}$ $x = -1$ nuqtada;

24.23. $y = \dfrac{8}{4+x^2}$ $x = 2$ nuqtada;

24.24. $y = Sinx$ $x = \pi$ nuqtada;

24.25. $y = x^2 + 2x - 1$ parabolaning $y = 2x^2$ parabola bilan kesishgan nuqtasida o‘tkazilgan urinma va normal tenglamalarini yozing.

24.26. $y = x^2$ *va* $y^2 = x$ parabolalar qanday burchak ostida kesishadi?

24.27. $y = Sinx$ sinusoida *Ox* o‘qini qanday burchak ostida kesib o‘tadi?

24.28. $y = x - x^3$ *va* $y = 5x$ chiziqlar orasidagi burchakni toping.

24.29. $y = 1 + Sinx,\ y = 1$ chiziqlar orasidagi burchakni toping.

24.30. $y = 2x^3 + 5x^2$ funksiyaning orttirmasini va differensialini toping.

24.31. $f(x) = x^3 - 7x^2 + 8$ funksiya uchun $\Delta x = 0.01$ bo`lsa, $\Delta f(5)$ *va* $df(5)$ ni hisoblang.

24.32. Quyidagi funksiyalarning differensialini toping:

a) $y = \frac{3}{4} x \sqrt[3]{x}$ b) $y = (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$

c) $y = x^2 Sinx + 2xCosx - 2Sinx$ d) $y = \frac{2^{3x}}{3^{2x}}$

Quyidagilarni taqribiy hisoblang:

24.33. *arcsin* 0.51

y=*arcsin x* funksiya uchun *x*=0.5 va $\Delta x = 0{,}01$ deb olamiz. Taqribiy hisoblash formulasiga ko‘ra topamiz. $\arcsin(x + \Delta x) \approx \arcsin x + (\arcsin x)` \cdot \Delta x$

$$\arcsin 0.51 \approx \arcsin 0.5 + \frac{1}{\sqrt{1 - (0.5)^2}} \cdot 0.01 = \frac{\pi}{6} + 0.011 = 0.513.$$

24.34. $\sqrt[3]{1.02}$ 24.35. $\sqrt[5]{33}$

24.36. $Sin29^o$ 24.37. $arctg1.05$

Funksiyalarning hosilasini toping:

24.38. $y = (1 + \sqrt[3]{x})^2$ 24.39. $y = \frac{3}{\sqrt[3]{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}}$

24.40. $y = x^{\frac{3}{2}} Sinx$ 24.41. $y = \sqrt[5]{x} arctgx$

24.42. $y = \dfrac{x^7 - 5x^4 + 1}{x^2 + 1}$ 24.43. $y = \dfrac{Cosx}{1 + 2Sinx}$

Amaliyot darsida yechiladigan misollar

Hosilaning geometrik va fizik ma`nosiga doir masalalarni yeching

6.1.$y=2x^3-x$ egri chiziq *Oy* o'qini *Ox* o'qiga nisbatan qanday burchak ostida kesib o'tadi? Javob: 135^0

6.2.$y=(4x-x^2)/3$ parabolaga uning (0;0), (2;2), (4;0) nuqtalaridan urinmalar o'tkazilgan. Ularning *Ox* o'qiga og'ish burchaklarini toping. Javob: $arctg\,\frac{4}{3}$; 0; $-arctg\,\frac{4}{3}$

6.3.$y=(x^3+1)/3$ funktsiya grafigiga uning abtsissa o'qi bilan kesilgan nuqtasida o'tkazilgan urinma tenglamasini yozing. Javob: $y= x +1$

6.4.$xy=1$ giperbolauning$M(1;1)$ nuqtadano'tkazilganurinmaning*Ox*o'qigaog'ishburchaginitoping. Javob: 45^0

6.5.$y=3x^2-x$ parabolaga uning abtsissasi $x=-1$ bo'lgan nuktasidan urinma va normal o'tkazilgan. Ularning tenglamalarini tuzing. Javob: $y = -7x - 3$; $y = \frac{1}{7}x + \frac{27}{7}$

6.6.$y=3x-4$ to’g’ri chiziq $y=x^3-2$ egri chiziqqa urinma bo'ladimi? Javob: yo’q.

6.7.$xy=1$ giperbola uning $M(-1;3)$ nuqtadan o'tkazilgan urinmaning tenglamasini tuzing. Javob: $y = -2-x$

6.8.$y=x^2-2x-8$ parabolada shunday bir M nuqta topish kerakki, undan o'tkazilgan urinma $4x+y+4=0$ to'g'ri chiziqqa parallel bo'lsin. Javob: (-1; -5)

6.9.Nuqta $S=2t^3+t^2-4$ qonun bo'yicha harakat qiladi. t=4 sek. vaqtdagi tezlik va tezlanish qiymati topilsin. Javob: 108 *m/s*, 50 m/s^2

6.10. Nuqta $S=6t-t^2$ qonun bo'yicha to'g'ri chiziqli harakat qiladi. Qaysi bir daqiqada nuqta tezligi nolga teng bo'ladi? Javob: 3

Differentsiallashning oddiy qoidalaridan foydalanib quyidagi funktsiyalarning hosilalari topilsin.

6.11. $y=3x^3-4x^2+7x-9$; Javob: $y'= 9x^2-8x+7$ 6.12. $y = \dfrac{2}{x} + \ln x$; Javob: $y' = -\dfrac{2}{x^2} + \dfrac{1}{x}$

6.13. $y=3\sin x+5^x$; Javob: $y' = 3\cos x + 5^x \ln 5$ 6.14. $y=-2\sin x+\mathrm{tg}x$; Javob: $y' = 2\cos x + \dfrac{1}{\cos^2 x}$

6.15. $y=\dfrac{1}{x} - 1000$; Javob: $y' = -\dfrac{1}{x^2}$ 6.16. $y = 25t^{10} + 2\sqrt{t}$; Javob: $y' = 250t^9 + \dfrac{1}{\sqrt{t}}$

6.17. $y=\sin x+\cos x$; Javob: $y' = \cos x - \sin x$ 6.18. $y = 6x^{15} - 9x^{20}$; Javob: $y' = 90x^{14} - 180x^{19}$

6.19. $y=100x^2-100$; Javob: $y' = 200x$ 6.20. $y = e - 3^x$ +4. Javob: $y' = 3^x \ln 3$

6.21. $y=3x^7-6x^6+5x^2-7$; Javob: $y' = 21x^6 - 36x^5 + 10x$ 6.22. $y=(x^3-2x^2-1)(x^5+x^2)$;

6.23.$y=\sqrt[3]{3x} + \sqrt{2x} + 10$; Javob: $y' = \dfrac{1}{\sqrt[3]{9x^2}}$ 6.24. $y = \dfrac{1}{x\sqrt{2x}}$; Javob: $y' = -\dfrac{3}{2\sqrt{2}} \cdot \dfrac{1}{x^2\sqrt{x}}$

Uyga vazifalar

6.25. $y=10^{x+3}-7$; Javob: $y'=10^{x+3}\ln 10$ 6.26. $y=5\sqrt[5]{x^2}+7$; Javob: $y'=2\cdot\frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}$

6.27. $y=\frac{11-5x+x^6}{\sqrt{x}}$; Javob: $y'=-\frac{5}{2\sqrt{x}}+\frac{11}{2}x^{\frac{9}{2}}$ 6.28. $y=e^{2x^2+3x-5}$; Javob: $y'=(4x+3)e^{2x^2+3x-5}$

6.29. $y=\frac{1}{2x}-\ln x+e^{x+2}$; Javob: $y'=-\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{x}+e^{x+2}$ 6.30. $y=e^{2x^2-\frac{1}{\sqrt{x}}+1}$. Javob: $y=\left(4x+\frac{1}{2\sqrt{x^3}}\right)e^{2x^2-\frac{1}{\sqrt{x}}+1}$

6.31. $y=(ax^2+вx+c)^3$; Javob: $y'=3\left(ax^2+bx+c\right)^2$

6.32. $y=\left(e^{2x}-\frac{2}{x^3}+\ln\sqrt{x}\right)^2$; Javob: $y'=2\left(e^{2x}-\frac{1}{x^3}+\ln\sqrt{x}\right)\cdot\left(2e^{2x}+\frac{6}{x^4}+\frac{1}{2x}\right)$

6.33. $y=\sin 3(ax+в)$; Javob: $y'=3a\cos 3(ax+b)$

6.34. $y=\cos(e^x-e^{-x})$; Javob: $y'=-(e^x+e^{-x})\sin(e^x-e^{-x})$

6.35. $y=\mathrm{tg}^2(\ln 2x)$; Javob: $y'=2tg(\ln 2x)\frac{1}{x\cos^2(\ln 2x)}$

6.36. $y=ctg^3(tg2x)$; Javob: $y'=3ctg^2(tg2x)(21\sin^2(tg2x)\cos^2 2x)$

6.37. $y=\ln^2(\ln 4x)$; Javob: $y'=\frac{2}{x}\frac{\ln(\ln 4x)}{\ln(4x)}$

6.38. $y=(e^{\sin x}+3^{4x})^5$; Javob: $y'=5\left(e^{\sin x}+3^{4x}\right)$

6.39. $y=7^{\cos^3 4x}$; Javob: $y'=-7\cos^3 4x\cdot 12\cos^2 4x\cdot\sin 4x\cdot\ln 7$

6.40. $y=\sin^m x\cdot\sin mx.$ Javob: $y'=m\cdot\sin^{m-1}\cos x\cdot\sin mx+m\cdot\cos mx\cdot\sin^m x$

Amaliyot darsida yechiladigan misollar

6.41. 1) $y=\frac{x^3}{3}-2x^2+4x-5$ **Javob:** $(x-2)^2$ 2) $y=\frac{bx+c}{a}$ **Javob:** $\frac{b}{a}$

6.42. 1) $y=\frac{x^5}{5}-\frac{2x^3}{3}+x$ **Javob:** $(x^2-1)^2$ 2) $y=\left(1-\frac{x^2}{2}\right)^2$ **Javob:** x^3-2x

6.43. 1) $y=x+2\sqrt{x}$ **Javob:** $1+\frac{1}{\sqrt{x}}$ 2) $y=\left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)^2$ **Javob:** $-\sqrt{\frac{a}{x}}$

6.44. 1) $y=\frac{10}{x^3}$ **Javob:** $-\frac{30}{x^4}$ 2) $y=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}$ **Javob:** $-\frac{x^2+2x+3}{x^4}$

6.45. 1) $y=x+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{5x^5}$ **Javob:** $\left(1-\frac{1}{x^3}\right)^2$ 2) $y=3x-6\sqrt{x}$ **Javob:** $3\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

Uyga vazifalar

6.46. 1) $y=6\sqrt[3]{x}-4\sqrt[4]{x}$ **Javob:** $\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$ 2) $y=\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2$ **Javob:** $\frac{2}{3x}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)$

6.47. 1) $y=\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{3x^3}$ **Javob:** $\frac{1-x}{x^4}$ 2) $y=\frac{8}{\sqrt[4]{x}}-\frac{6}{\sqrt[3]{x}}$ **Javob:** $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)$

6.48. 1) $y = x - \sin x$ **Javob:** $2\sin^2 \frac{x}{2}$ 2) $y = x - tgx$ **Javob:** $-tg^2 x$

6.49. 1) $y = x^2 \cos x$ **Javob:** $x(2\cos x - x\sin x)$ 2) $y = y^2 ctgx$ **Javob:** $\frac{x(\sin 2x - x)}{\sin^2 x}$

6.50. 1) $y = \frac{\cos x}{x^2}$ **Javob:** $-\frac{x\sin x + 2\cos x}{x^3}$ 2) $y = \frac{x^2}{x^2+1}$ **Javob:** $\frac{2x}{(x^2+1)^2}$

14-amaliyot .

Murakkab funksiyani hosilasi. Oshkormas va parametrik funksiyani hosilasi. Funksiyani differentsiallash.

Murakkab funksiya hosilasi. Quyidagi funksiyalarning hosilalari topilsin.

6.51. 1) $y = \sin 6x$ **Javob:** $6\cos 6x$ 2) $y = \cos(a - bx)$ **Javob:** $b\sin(a - bx)$

6.52. 1) $y = \sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}$ **Javob:** $\frac{1}{2}\left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)$ 2) $y = 6\cos\frac{x}{3}$ **Javob:** $-2\sin\frac{x}{3}$

6.53. 1) $y = (1-5x)^4$ **Javob:** $-20(1-5x)^3$ 2) $y = \sqrt[3]{(4+3x)^2}$ **Javob:** $\frac{2}{\sqrt[3]{4+3x}}$

6.54. 1) $y = \frac{1}{(1-x^2)^5}$ **Javob:** $\frac{10x}{(1-x^2)^6}$ 2) $y = \sqrt{1-x^2}$ **Javob:** $-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

3) $y = \sqrt{\cos 4x}$ **Javob:** $-2tg4x\sqrt{\cos 4x}$

6.55. $y = \sqrt{2x - \sin 2x}$ **Javob:** $\frac{2\sin^2 x}{\sqrt{2x - \sin 2x}}$

Uyga vazifalar

6.56. $y = \sin^4 x = (\sin x)^4$ **Javob:** $4\sin^3 x\cos x$ 6.57. $y = \sqrt{4x + \sin 4x}$ **Javob:** $\frac{4\cos^2 2x}{\sqrt{4x + \sin 4x}}$

6.58. $y = x^2\sqrt{1-x^2}$ **Javob:** $\frac{x(2-3x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$ 6.59. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$ **Javob:** $-\sin 4x$

5.60. $y = \sqrt[3]{1+\cos 6x}$ **Javob:** $-\frac{2\sin 6x}{\sqrt[3]{(1+\cos 6x)^2}}$

6.61. 1) $y = tgx + \frac{2}{3}tg^3 x + \frac{1}{5}tg^5 x$ **Javob:** $\sec^2 x$ 2) $y = \sin^2 x^3$ **Javob:** $3x^2 \sin 2x^3$

Tekis egri chiziqqa o'tkazilgan urinma va normalga doir.
Egri chiziqlarga o'tkazilgan urinmalarning tenglamalari yozilsin va egri chiziqlar hamda urinmalar yasalsin.

6.62. $y = \frac{x^3}{3}$ egri chiziqqa $x = -1$ nuqtada. **Javob:** $y = x + \frac{2}{3}$

6.63. $y^2 = x^3$ egri chiziqqa $x_1 = 0$ va $x_2 = 1$ nuqtalarda. **Javob:** $y = 0$ va $y = \pm\frac{1}{2}(3x - 1)$

6.64. $y = \frac{8}{4 + x^2}$ lokonga (zulfga) $x = 2$ nuqtada. **Javob:** $y = -\frac{x}{2} + 2$

6.65. $y=\sin x$ sinusoidaga $x=\pi$ nuqtada. **Javob:** $y=\pi-x$

6.66. $y=\sin x$ egri chiziq Ox o'q bilan qanday burchak orasida kesishadi? **Javob:** 45^0 va 135^0

6.67. $2y=x^2$ va $2y=8-x^2$ egri chiziqlar qanday burchak ostida keshishadi? **Javob:** $arctg\,\frac{4}{3}$

6.68. 1) $y=x^2$; 2) $y^2=x^3$ egri chiziqlarga $x=1$ nuqtada o'tkazilgan urinma osti, normal osti, urinma va normalning uzunliklari topilsin. **Javob:** 1) $\frac{1}{2}$; 2; $\frac{\sqrt{5}}{2}$; $\sqrt{5}$; 2) $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{2}$; $\frac{\sqrt{13}}{3}$; $\frac{\sqrt{13}}{2}$

6.69. $y^2=2px$ parabolaning urinma nuqta abssissasining ikkilanganiga, normal osti esa p ga teng ekani isbot qilinsin.

6.70. Agar $y=x^2+bx+c$ parabola $x=2$ nuqtada $y=x$ to'g'ri chiziqqa urinsa, parabola tenglamasidagi b va c aniqlansin. **Javob:** $y=x^2-3x+4$. Paraemtr b $y'=2x+b=4+b=1$ shartdan, c esa (2; 2) ning urinma nuqta bo'lishidan topiladi.

6.71. $y=x^2-4x+5$ parabola uchidan unga Oy o'q bilan kesishgan nuqtasida o'tkazilgan bo'lgan masofa topilsin**. Javob:** $\frac{4}{\sqrt{17}}$

6.72. $y=0{,}5$ to'g'ri chiziq $y=\cos x$ egri chiziqni qanday burchak ostida kesadi?
Javob: $40^0 54'$ yoki $139^0 6'$

6.73. $y=x^2+4x$ parabolaga qaysi nuqtada o'tkazilgan urinma Ox o'qqa parallel bo'ladi?
Javob: (-2; -4)

6.74. $y=x^2-2x+5$ parabolaga o'tkazilgan urinma, birinchi koordinatalar burchagining bissektrissasiga perpendikulyar bo'lishi uchun, urinma parabolaning qaysi nuqtasida o'tkazilishi kerak? **Javob:** $\left(\frac{1}{2};\frac{17}{4}\right)$

6.75. $y=\frac{2}{1+x^2}$ egri chiziqqa $x=1$ nuqtada o'tkazilgan urinma osti, normal osti, urinma va normal uzunliklari topilsin. **Javob:** 1; 1; $\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$

Amaliyot darsida yechiladigan misollar

Ko'rsatkichli va logarifmik funksiyalarning hosilalariga doir
Quyidagi funksiyalarning hosilalari topilsin.

6.76. 1) $y=x\ln x$ **Javob:** $\ln x+1$ 2) $y=\frac{1+\ln x}{x}$; $y=\lg(5x)$ **Javob:** $-\frac{\ln x}{x^2}$

6.77. 1) $y=\ln x-\frac{2}{x}-\frac{1}{2x^2}$ **Javob:** $\frac{(x+1)^2}{x^3}$ 2) $y=\ln(x^2+2x)$ **Javob:** $\frac{2(x+1)}{x(x+2)}$

6.78. 1) $y=\ln(1+\cos x)$ **Javob:** $-tg\frac{x}{2}$ 2) $y=\ln\sin x-\frac{1}{2}\sin^2 x$ **Javob:** $ctgx\cos^2 x$

6.79. $y=\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)$ **Javob:** $\frac{1}{2\sqrt{x^2+x}}$

Quyidagi funksiyalarning hosilalari topilsin.

6.80. 1) $y=x^2+3^x$ **Javob:** $2x+3^x\ln 3$ 2) $y=x^2 2^x$ **Javob:** $(2x+x^2\ln 2)2^x$
3) $y=x^2e^x$ **Javob:** $x(2+x)e^x$ 6.81. 1) $y=a^{\sin x}$ **Javob:** $a^{\sin x}\cos x\ln a$
2) $y=e^{-x^2}$ **Javob:** $-2xe^{-x^2}$ 3) $y=x^2e^{-2x}$ **Javob:** $2x(1-x)e^{-2x}$

6.82. $y=2\left(e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}\right)$ **Javob:** $e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}$ 6.83. $y=\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}$ **Javob:** $\frac{1}{2}e^{\sqrt{x}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

6.84. $y=\frac{1+e^x}{1-e^x}$ **Javob:** $\frac{2e^x}{(1-e^x)^2}$ 6.85. $y=e^{\frac{x}{a}}\cos\frac{x}{a}$ **Javob:** $\frac{1}{a}e^{\frac{x}{a}}\left(\cos\frac{x}{a}-\sin\frac{x}{a}\right)$

Uyga vazifalar

Teskari trigonometric funksiyalarning hosilalariga doir
Quyidagi funksiyalarning hosilalari topilsin.

6.86. $y=\sqrt{1-x^2}+\arcsin x$ **Javob:** $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

6.87. $y=x-arctgx$ **Javob:** $\frac{x^2}{1+x^2}$

6.88. $y=\arcsin\sqrt{1-4x}$ **Javob:** $-\frac{1}{\sqrt{x-4x^2}}$

6.89. $y=\arcsin\frac{x}{a}$ **Javob:** $\frac{a}{|a|\sqrt{a^2-x^2}}$

6.90. $y=arctg\frac{x}{a}$ **Javob:** $\frac{a}{a^2+x^2}$

6.91. $y=\arccos(1-2x)$ **Javob:** $\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$

6.92. $y=arctg\frac{1+x}{1-x}$ **Javob:** $-\frac{1}{1+x^2}$

6.93. 1) $y=x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x$ **Javob:** $2\sqrt{1-x^2}$ 2) $y=\arcsin(e^{3x})$ **Javob:** $\frac{3e^{3x}}{\sqrt{1-e^{6x}}}$

Differensiallashga doir aralash misol va masalalar
Quyidagi funksiyalarning hosilalari topilsin.

6.94. 1) $y=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+\arcsin\frac{1}{x}$ **Javob:** $\frac{1-x}{x^2\sqrt{x^2-1}}$ 2) $y=\frac{tg^2x}{2}+\ln\cos x$ **Javob:** tg^3x

6.95. $y=\sqrt{4x-1}+arcctg\sqrt{4x-1}$ **Javob:** $\frac{\sqrt{4x-1}}{2x}$

6.96. $x=\ln(e^{2t}+1)-2arctg(e^t)$ **Javob:** $\frac{dx}{dt}=\frac{2e^t(e^t-1)}{e^{2t}+1}$

6.97. $y=4\ln\left(\sqrt{x-4}+\sqrt{x}\right)+\sqrt{x^2-4x}$ **Javob:** $\frac{x}{\sqrt{x^2-4x}}$

Oshkormas funksiyaning hosilasiga doir.
Quyidagi tenglamalardan y' topilsin.

6.98. 1) $x^2+y^2=a^2$ **Javob:** $-\frac{x}{y}$ 2) $y^2=2px$ **Javob:** $\frac{p}{y}$

3) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ **Javob:** $\frac{b^2x}{a^2y}$

6.99. 1) $x^2+xy+y^2=6$ **Javob:** $-\dfrac{2x+y}{x+2y}$ 2) $x^2+y^2-xy=0$ **Javob:** $\dfrac{2x-y}{x-2y}$

Quyidagi funksiyalarnin differensiallari topilsin:

6.100. 1) $y=x^n$ **Javob:** $dy=nx^{n-1}dx$ 2) $y=x^3-3x^2+3x$ **Javob:** $dy=3\ \ (x-1)^2dx$

6.101. 1) $y=\sqrt{1+x^2}$ **Javob:** $dy=\dfrac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$ 2) $S=\dfrac{gt^2}{2}$ **Javob:** $ds=gtdt$

6.102. 1) $r=2\varphi-\sin 2\varphi$ **Javob:** $dr=4\sin^2\varphi d\varphi$ 2) $x=\dfrac{1}{t^2}$ **Javob:** $dx=-\dfrac{2dt}{t^3}$

Amaliyot darsida yechiladigan misollar

Hosilaning tatbiqlari

6.103. Zenit snaryad boshlang'ich *am/sek* tezlik bilan vertikal yo'nalishda otilgan. t sekunddan so'ng snaryar qanday x balandlikda bo'ladi? Snaryadning harakat tezligi va tezlanishi aniqlansin. Necha sekunddan so'ng snaryad eng yuqori balandlikka ko'tariladi va yerdan qanday masofada bo'ladi? **Javob:** $x=at-\dfrac{g^{2t}}{2}$; $\dfrac{dx}{dt}=a-gt$; $\dfrac{d^2x}{dt^2}=-g$; $t=\dfrac{a}{g}$ orqali, $x=\dfrac{a^2}{2g}$

6.104. Jism $x=\dfrac{t^3}{3}-2t^2+3t$ qonunga asosan Ox to'g'ri chiziq bo'yicha harakat qiladi. harakat tezligi va tezlanishi aniqlansin. Qaysi paytlarda jism harakat yo'nalishini o'zgartiradi?

Javob: $\dfrac{dx}{dt}=t^2-4t+3;\ t_1=1;\quad t_2=3$

6.105. Moddiy nuqta $x=a\cos\omega t$ qonun bo'yicha tebranma harakat qiladi. $x=\pm a$ va $x=0$ nuqtalardagi tezlik va tezlanish aniqlansin.

$\dfrac{d^2x}{dt^2}$ tezlanish hamda nuqtaning uzoqlashishi x ushbu $\dfrac{d^2x}{dt^2}=-\omega^2x$ "differensial" tenglama bilan bog'langani ko'rsatilsin.

6.106. $f(x)=x^2-4x+3$ funksiya ildizlari orasida uning hosilasining ham ildizi bor ekani tekshirilsin. Bu grafik usulda tushuntirilsin.

Javob: Funksiyaning ildizlari 1; 3. $f'(x)=2x-4$ hosilaning ildizi 2 ga teng: 1<2<3.

6.107. Roll teoremasini $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ funksiyaga [-1; 1] segmentda tatbiq qilish mumkinmi?

Javob: Tatbiq qilib bo'lmaydi, chunki x = 0 bo'lganda hosila mavjud emas.

6.108. $y=|\sin x|$ egri chiziqning $[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}]$ segmentdagi $\overset{\cup}{AB}$ yoyi yasalsin. Nima uchun bu yoyda AB vatarga parallel urinma yo'q? Roll teoremasining qaysi sharti bu yerda bajarilmaydi?

Javob: Chunki x = 0 sinish nuqtasi (urinma ikkita).

6.109. [1, 4] segmentda $f(x)=\sqrt{x}$ funksiya uchun Lagranj formulasi yozilsin va c topilsin.

Javob: c = 9/4

6.110.[-1, 2] segmentda $\dfrac{4}{x}$ va $1-\sqrt[3]{x^2}$ funksiyalarga Lagranj teoremasini tatbiq qilish mumkin emasligi ko'rsatilsin. Grafik usulda tushuntirilsin.

Uyga vazifalar

6.111. $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$ segmentda $y = |\cos x|$ egri chiziqning $\overset{\cup}{AB}$ yoyi yasalsin. Nima uchun bu yoyda AB vatarga parallel urinma yo'q? Lagranj teoremasining qaysi sharti bunda bajarilmaydi?

Javob: $x = \frac{\pi}{2}$ bo'lganda yoy ustida sinish nuqtasi ichki nuqtada funksiya hosilaga ega emas.

6.112. $f(x) = x^3$ funksiya uchun Lagranjning $f(b) - f(a) = f(b-a)f'(c)$ formulasi yozilsin va c topilsin. **Javob:** $c = \sqrt{\frac{a^2 + ab + b^2}{3}}$

6.113. Quyidagi funksiyalar uchun Lagranj formulasi yozilsin va c topilsin.

1) [0, 1] segmentda $f(x) = arctgx$;

2) [0, 1] segmentda $f(x) = \arcsin x$;

3) [1, 2] segmentda $f(x) = \ln x$.

Javob: 1) $\sqrt{\frac{4}{\pi} - 1}$ 2) $\sqrt{1 - \frac{4}{\pi^2}}$ 3) $\frac{1}{\ln 2}$

6.114. Quyidagi funksiyalar uchun Koshi formulasi yozilsin va c topilsin:

1) [0, $\frac{\pi}{2}$] segmentda $\sin x$ va $\cos x$;

2) [1, 4] segmentda x^2 va $\sqrt{x}$.

Javob: 1) $\frac{\pi}{4}$ 2) $\sqrt[3]{\left(\frac{15}{4}\right)^2} \approx 2{,}4$

Quyidagi funksiyalarning ekstremumlari topilsin va grafiklari yasalsin:

6.115. $y = 4x - x^2$ **Javob:** $x = 2$ bo'lganda $y_{\max} = 4$; $y = 0$ bo'lganda $x_1 = 0,\ x_2 = 4$

6.116. $y = x^2 + 2x - 3$ **Javob:** $x = -1$ bo'lganda $y_{\min} = -4$; $y = 0$ bo'lganda $x_1 = 1,\ x_2 = -3$

6.117. $y = \frac{x^3}{3} + x^2$

Javob: $x = 0$ bo'lganda $y_{\min} = 0$; $x = -2$ bo'lganda $y_{\max} = \frac{4}{3}$; $y = 0$ bo'lganda $x_1 = 0,\ x_2 = 3$

6.118. $y = x^3 + 6x^2 + 9x$ **Javob:** $x = -1$ bo'lganda $y_{\min} = -4$; $x = -3$ bo'lganda $y_{\max} = 0$

6.119. $y = \frac{x^2}{x-2}$

Javob: $x = 0$ bo'lganda $y_{\max} = 0$; $x = 2$ bo'lganda $y = \pm\infty$; $x = 4$ bo'lganda $y_{\min} = 8$; asimptotalar $x = 2$ va $y = x + 2$

6.120. $y = x^3 + \frac{x^4}{4}$ **Javob:** $x = -3$ bo'lganda $y_{\min} = -6.75$; $x = 0$ bo'lganda y burilish 0; $y = 0$ bo'lganda $x_1 = 0,\ x_2 = -4$

6.121. $y = \frac{x^4}{4} - 2x^2$ **Javob:** $x = \pm 2$ bo'lganda $y_{\min} = -4$; $x = 0$ bo'lganda $y_{\max} = 0$; $y = 0$ bo'lganda $x_1 = 0,\ x_{2,3} = \pm\sqrt{8} \approx \pm 2{,}8$

6.122. $y = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$ **Javob:** $x = 0$ bo'lganda qaytish nuqtasi $y_{\max} = 0$; $x = 1$ bo'lganda $y_{\min} = -1$; $y = 0$ bo'lganda $x_1 = 0,\ x_2 = 3\frac{3}{8}$

6.123. $y=\frac{(x-1)^2}{x^2+1}$ **Javob:** $x=-1$ bo'lganda $y_{\max}=2$; $x=1$ bo'lganda $y_{\min}=0$; $x=0$ bo'lganda $y=1$ asimptota $y=1$

6.124. $y=xe^{-\frac{x^2}{2}}$ **Javob:** $x=-1$ bo'lganda $y_{\min}=-\frac{1}{\sqrt{e}}\approx -0{,}6$; $x=1$ bo'lganda $y_{\max}\approx 0{,}6$; Ox o'qi asimptota.

15-amaliyot .

Yuqori tartibli hosila va differentsial. Aniqmasliklami Lopital qoidasi yordamida ochish.

Funksiya hosilasini toping:

25.1. $y=\frac{1}{3}Sin^3\sqrt{x}-\frac{2}{5}Sin^5\sqrt{x}+\frac{1}{7}Sin^7\sqrt{x}$

$$y`=\frac{1}{3}\cdot 3Sin^2\sqrt{x}Cos\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{2}{5}\cdot 5Sin^4\sqrt{x}\cdot Cos\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{7}\cdot 7Sin^6\sqrt{x}\cdot Cos\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}Sin^2\sqrt{x}\cdot Cos\sqrt{x}\cdot\left(1-2Sin^2\sqrt{x}+Sin^4\sqrt{x}\right)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot Sin^2\sqrt{x}\cdot Cos^5\sqrt{x}$$

25.2. $y=\ln\left(2x^3+3x^2\right)$

25.3. $y=\sqrt{4x+Sin4x}$

25.4. $y=\sqrt{\frac{x}{2}-Sin\frac{x}{2}}$

25.5. $y=e^{\frac{x}{a}}\cdot Cos\frac{x}{a}$

25.6. $y=\sqrt{1-3x^2}$

25.7. $y=Cos^3\left(\frac{x}{3}\right)$

25.8. $y=-ctg^2\frac{x}{2}-2\ln\left(Sin\frac{x}{2}\right)$

25.9. $y=\arccos\frac{9-x^2}{9+x^2}$

25.10. $y=1-e^{Sin^2 3x}\cdot Cos^2 3x$

25.11. $y=e^{\sqrt{2x}}\left(\sqrt{2x}-1\right)$

25.12. $y=-\mathrm{cos}ec^2\left(\frac{x}{2}\right)$

25.13. $y=\arcsin\sqrt{1-0.2x^2}$

25.14. $y=\frac{1}{\sqrt{1-mx^2}}$

25.15. $y=\frac{Sinx}{1+\ln Sinx}$

25.16. $y=arctg(x+1)+\frac{x+1}{x^2+2x+2}$

25.17. $y=\ln tg\frac{x}{2}+Cosx+\frac{1}{3}Cos^3x$

25.18. $y=\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x}$

25.19. $y=\ln\ln x(\ln\ln\ln x-1)$

25.20. $y = tg^3 tgx + 3tgtgx$

25.21. $y = 2^{Cos\,3x - 3Cosx}$

25.22. $y = \frac{x^2 e^{x^2}}{x^2+1}$

25.23. $y = arctg\,\frac{2x^4}{1-x^2}$

25.24. $y = \arccos\sqrt{1-2^x}$

25.25. $y = \log_2 Sin^2 x$

25.26. $y = xe^x(Sinx - Cosx) + e^x Cosx$

25.27. $y = \log_x e$

25.28. $y = x^x$

25.29. $y = \sqrt[3]{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$

25.30. $y = \sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$

Oshkor bo’lmagan ko‘rinishda berilgan funksiyalar hosilasini toping:

25.31. $x^3 + \ln y - x^2 e^y = 0\ 3x^2 + \frac{y`}{y} - x^2 e^y y` - 2xe^y = 0, \quad ya'ni \quad y` = \frac{(2xe^y - 3x^2)y}{1 - x^2 ye^y}$

25.32. $Ax^2 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$

25.33. $x^4 - 6x^2y^2 + 9y^4 - 5x^2 + 15y^2 - 100 = 0$

25.34. $x^y - y^x = 0$

25.35. $xSiny + ySinx = 0$

25.36. $e^x + e^y - 2^{xy} - 1 = 0$

25.37. $Sin(y - x^2) - \ln(y - x^2) + 2\sqrt{y - x^2} - 3 = 0$

25.38. $\frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}} - 3\sqrt{\frac{y}{x}} = 0$

Parametrik ko‘rinishda berilgan quyidagi funksiyalarni differensiallang:

25.39. $\begin{cases} x = aCost \\ y = aS\,\text{int} \end{cases}$ $\quad y_x^{`} = \frac{y_t^{`}}{x_t^{`}} = \frac{a\cos t}{-a\sin t} = -\operatorname{ctg} t$

25.40. $\begin{cases} x = aCos^3 t \\ y = aSin^3 t \end{cases}$

25.41. $\begin{cases} x = \frac{3at}{1+t^2} \\ y = \frac{3at^2}{1+t^3} \end{cases}$

25.42. $\begin{cases} x = cht \\ y = sht \end{cases}$

25.43. Funksiyalarning 2-tartibli hosilalari topilsin:

1) $y = Sin^2 x;$ 2) $y = tgx;$ 3) $y = \sqrt{1+x^2}.$

25.44. Quyidagi funksiyalarning 3-tartibli hosilalari topilsin:

1) $y = x\ln x;$ 2) $s = t \cdot e^{-t};$ 3) $y = arctg\,\frac{x}{a}.$

Quyidagi funksiyalarning n-tartibli hosilalari topilsin:

25.45. $y = \ln x$

$y` = \frac{1}{x} = x^{-1};\quad y`` = -1 \cdot x^{-2};\quad y``` = 1 \cdot (-2) \cdot x^{-3};\quad y^{(IV)} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot x^{-4};$

$y^{(n)} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot (-1)^{n-1} \cdot x^{-n} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{x^n}.$

25.46. $y = e^{-\frac{x}{a}};$

25.47. $y = \sqrt{x};$

25.48. $y = x^n;$

25.49. $y = Sinx;$

25.50. $y = Cos^2 x;$

25.51. $\begin{cases} x = \ln t \\ y = 1/t \end{cases}$

Quyidagi funksiyalarning 1, 2, 3-tartibli differensiallarini toping:

25.52. $y = xSinx$

25.53. $y = x(\ln x - 1)$

Funksiyalarning hosilasini toping:

25.54. $y = \frac{3}{4} \cdot 4x^3 \sqrt{x}$

25.55. $y = (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$

25.56. $y = \ln(2x^3 + 3x^2)$

25.57. $y = \ln tg\,\frac{2x+1}{4}$

25.58. $y = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}$

25.59. $y = arctg\sqrt{4x^2 - 1}$

25.60. $y = e^{-x} - Sin\,e^{-x} Cos\,e^{-x}$

25.61. $y = \ln\frac{x^5}{x^5 + 2}$

25.62. $y = \frac{x - e^{2x}}{x + e^{2x}}$

25.63. $y = 3x\ Sin^3 x + 3Cosx - Cos3x$

25.64. $y = \ln\frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{x + 1}$

25.65. $y = \frac{\ln x}{x^5} + \frac{1}{5x^5}$

25.66. $y = 2(tg\sqrt{x} - \sqrt{x})$

25.67. $y = \log_a(x + \sqrt{x^2 + 9})$

25.68. $y = \log_{Cosx} Sinx$

25.69. $y = x^{1/\ln x}$

25.70. $y = x^2 e^{x^2} \ln x$

25.71. $(u^v)' = vu^{v-1}u' + u^v v' \ln u$ ekanini ko‘rsating.

Quyidagi tenglamalardan $y`$ ni toping:

25.72. 1) $x^2 + y^2 = a^2$; 2) $y^2 = 2px$ 3) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

25.73. 1) $x^2 + xy + y^2 = 6$; 2) $x^2 + y^2 - xy = 0$

25.74. 1) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$; 2) $e^y - e^{-x} + xy = 0$

25.75. $e^x Sinu - e^{-y} Cosx = 0$ 25.76. $x = y + arctgy$

25.77. 1) $x^2 + y^2 = a^2$; 2) $ax + ay - xy = c$; 3) $x^m y^n = 1$

tenglamalardan $y``$ topilsin.

25.78. $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}$ formuladan foydalanib tenglamalardan $\frac{d^2y}{dx^2}$ topilsin:

1) $\begin{cases} x = aCost \\ y = aS\text{int} \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = t^2 \\ y = \frac{t^3}{3} - t \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = a(t - S\text{int}) \\ y = a(1 - Cost) \end{cases}$

25.79. Funksiyalarning 2-tartibli hosilalari topilsin:

1) $y = e^{-x^2}$; 2) $y = ctgx$; 3) $\arcsin\frac{x}{2}$

Funksiyalarning n-tartibli hosilalari topilsin:

25.80. $y = x\sqrt[n]{x}$ 25.81. $y = \frac{1}{2x+1}$

25.82. $y = 5 - 3Cos^2 x$ 25.83. $y = 2^x + 2^{-x}$

25.84. $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ 25.85. $y = e^{kx}$

25.86. $y = (2x-3)^3$ funksiyaning 1, 2, 3-tartibli differensiallarini toping.

Quyidagi funksiyalar limitini hisoblang:

26.13. $\lim_{x\to 0}\frac{Sinax}{Sinbx} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to 0}\frac{aCosax}{bCosax} = \frac{a}{b}$

26.14. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x^2-6x+8}$ 26.15. $\lim\limits_{x\to a}\frac{e^x-e^a}{x-a}$

26.16. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx-x}{x-Sinx}$ 26.17. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-4Sin^2\frac{\pi x}{6}}{1-x^2}$

26.18. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-Sinx}{x^3}$ 26.19. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$

26.20. $\lim\limits_{x\to\infty}(1-x)^{\frac{1}{x}}$; $y=(1-x)^{\frac{1}{x}}$ deb belgilab, tenglikning ikkala qismini logarifmlaymiz $lny=\frac{1}{x}\ln|1-\mathrm{x}|=\frac{\ln|1-x|}{x}$. Endi limitga o’tamiz

$$\lim_{x\to\infty}\ln y=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln|1-x|}{x}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-1}{|1-x|}}{1}=0.\ \ln y=0,\quad y=1$$

26.21. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{tgx}$ 26.22. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{Sinx}$

26.23. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(tgx)^{2Cosx}$ 26.24. $\lim\limits_{x\to 0}(Sinx)^{Sinx}$

26.25. $\lim\limits_{x\to 0}x\ln x$

Funksiyaning uzluksizligi va uzulish nuqtalari

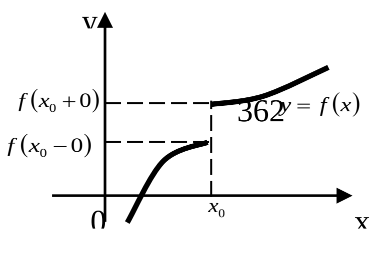
1.Quyidagi shartlar bajarilsa, $y=f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ***uzluksiz*** deyiladi:

- $f(x)$ funksiya x_0 nuqta va uning atrofida aniqlangan;
- $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada chekli chap $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=f(x_0-0)$ va o’ng $\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=f(x_0+0)$ limitlarga ega;
- $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi chap va o’ng limitlari o’zaro teng, ya’ni $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)\Rightarrow f(x_0-0)=f(x_0+0)$.

2. Agar x_0 nuqtada yuqorida keltirilgan shartlardan kamida bittasi bajarilmasa, $f(x)$ funksiya bu nuqtada ***uzlukli***, x_0 esa uning ***uzilish nuqtasi*** deyiladi.

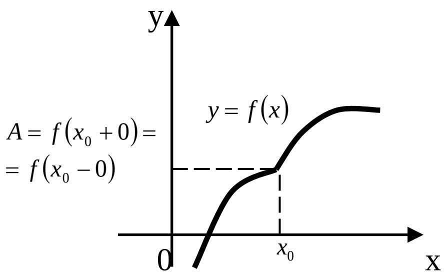
Funksiya quyidagi ko’rinishdagi uzulishlarga ega bo’lishi mumkin.

b) Agar x_0 nuqtada $f(x)$ funksiyaning chap va o’ng limitlari mavjud va chekli, ammo $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$ bo’lsa, unda funksiya ***birinchi tur uzulishga*** ega deb ataladi. Bu holda $\delta=|f(x_0-0)-f(x_0+0)|$ ifoda $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi ***sakrashi*** deyiladi (5.1 - chizma).



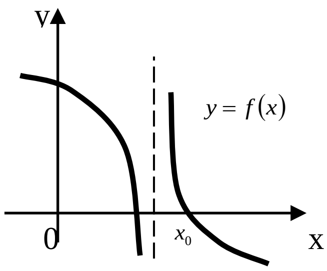
5.1- chizma.

b) Agar $f\left(x_0-0\right)=f\left(x_0+0\right)\neq f\left(x_0\right)$yoki $f\left(x_0-0\right)=f\left(x_0+0\right)$bo'lib, $f\left(x\right)$funksiya x_0 nuqtadaaniqlanmaganbo'lsa, undafunksiya***tuzatibbo'ladiganuzulishga***egadeyiladi (5.2- chizma).
Buholda $f\left(x_0\right)=f\left(x_0-0\right)=f\left(x_0+0\right)$debolinsa, $f\left(x\right)$funksiya x_0 nuqtadauzluksizbo'ladi.



5.2- chizma .

c)
Agar x_0 nuqtada $f\left(x_0-0\right), f\left(x_0+0\right)$birtomonlamalimitlardankamidabittasicheksizqiymatgaegayokimavjudbo'lmasa, undafunksiya***ikkinchituruzulishga***egadeyiladi (5.3- chizma).



5.3- chizma

Mustaqil ishlash uchun misol-masalalar

10. Quyidagi funksiyalarning uzilish nuqtalarini topib, unda uzulish turini aniqlang va funksiyaning sxematik grafigini chizing:

10.1) $y=arctg\,\dfrac{1}{x-4}$; 10.2) $y=3^{\frac{1}{x}}$; 10.3) $y=\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$; 10.4) $y=0.5^{\frac{1}{x}}$;

10.5) $y=\begin{cases}2x, & \text{agar} \quad x\leq 1 \text{ bo'lsa}\\ 2-x, & \text{agar} \quad x>1 \text{ bo'lsa.}\end{cases}$.

10.6) $y=E\left(x\right)$. Bunda *E*(*x*) ifoda *x* sonning butun qismini, ya'ni undan katta bo'lmagan eng katta butun sonni ifodalaydi.

10.7) $y=\begin{cases}0.5x^2, & |x|<2\\ 2.5, & |x|=2\\ 3, & |x|>2\end{cases}$; 10.8) $y=\begin{cases}\sin x, & x\le 0;\\ 1+\cos x, & 0<x\le 2\pi;\\ x, & x>2\pi.\end{cases}$;10.9) $y=\begin{cases}\sin\dfrac{\pi}{2x}, & x\ne 0;\\ 1, & x=0.\end{cases}$;

10.10) $y=\begin{cases}\cos\dfrac{\pi}{2x}, & x\ne 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$.

11. Funksiyalarni uzluksizlikka tekshiring va uzilish nuqtalarini aniqlang.

11.1) $y=\dfrac{2^{\frac{1}{x-2}}-1}{2^{\frac{1}{x-2}}+1}$; 11.2) $y=\dfrac{1}{(x-1)(x-5)}$; 11.3) $y=\dfrac{\ln(x+1)}{x}$;

11.4) $y=xtgx$; 11.5) $y=\cos(1+\ln x)$; 11.6) $y=\ln(1+\cos x)$.

12. Quyidagi funksiyalar barcha nuqtalarda uzkuksiz bo'ladigan αparametrning qiymatlarini toping:

12.1) $y=\begin{cases}\alpha\sin x, & x<\dfrac{\pi}{2};\\ x+\pi, & x\ge\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$; 12.2) $y=\begin{cases}(\alpha^2+3\alpha-3)e^x, & x<0;\\ \ln(x^2+x+e), & x\ge 0.\end{cases}$

JAVOBLAR:

1.1) $(-1,1)\cup(1,10]$; 1.2) $[-4,0)\cup(0,1)\cup(1,2)\cup(2,4]$; 1.3) $[-2,2]$;
1.4) $(0,1)$; 1.5) $[\pi/3,2)\cup(2,2\pi/3]$; 1.6) $(-5,5)$; 1.7) $[0,2)\cup(2,3)$;
1.8) $[-2,4)$; 1.9) $\{1\}$; 1.10) $[-1,-\pi/5)\cup(-\pi/5,0)\cup(0,\pi/5)\cup(\pi/5,1]$.

1.11) $\begin{cases}x^2-4\ge 0\\ 2^x(x-6)\ne 0\\ x+10>0\end{cases}$ => $\begin{cases}(x-2)(x+2)\ge 0\\ x\ne 6\\ x>-10\end{cases}$ => $\begin{cases}x\in(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)\\ x\ne 6\\ x\in(-10;+\infty)\end{cases}$

Bu yerdan D{*f*}= $x\in(-10;-2]\cup[2;6)\cup(6;+\infty)$ ekanligini topamiz

2.1) $[-5,5]$; 2.2) $(0,1]$; 2.3) $[-3/2,\ 3/2]$; 2.4) $[3/4,3/2]$;
2.5) $(-\infty,1]$; 2.6) $[-2,\ 1]$ (Ko'rsatma: teskari funksiyadan foydalaning) ;
2.7) $[-10,10]$; 2.8) (0, 2] ; 2.9) $(-\infty,16/3]$; 2.10) $(-\infty,194/5]$.

2.11) $\sqrt{3^2+4^2}=5$ ekanligini hisobga olib, kasrning maxrajini

$$y=\frac{1}{5\left(\frac{3}{5}\sin 2x+\frac{4}{5}\cos 2x\right)}$$

ko'rinishda yozamiz. Bunda $\frac{3}{5}=\cos\beta,\ \ \frac{4}{5}=\sin\beta$ deb olish mumkin, chunki $\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2=1$. Bu holda berilgan funksiyani

$$y=\frac{1}{5(\cos\beta\sin 2x+\sin\beta\cos 2x)}=\frac{1}{5\sin(2x+\beta)}$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bu yerdan quyidagi natijalarni olamiz:

$$-1 \le \sin(2x+\beta) \le 1 \Rightarrow -5 \le 5\sin(2x+\beta) \le 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{5\sin(2x+\beta)} \le -\dfrac{1}{5} \\ \dfrac{1}{5\sin(2x+\beta)} \ge \dfrac{1}{5} \end{array} \right. .$$

Demak,

$$E\{f\} = \left(-\infty; -\frac{1}{5}\right] \cup \left[\frac{1}{5}; +\infty\right).$$

2.12**).** Berilgan $y = 10^{-2x^2} = f(x)$ funksiyaga teskari bo'lgan $f^{-1}(x)$ funksiyani va uning aniqlanish sohasini topamiz:

$$y = 10^{-2x^2} \Rightarrow \ln y = -2x^2 \Rightarrow x^2 = -\frac{1}{2}\ln y \ge 0 \Rightarrow x = \sqrt{-\frac{1}{2}\ln y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{-\frac{1}{2}\ln x} \Rightarrow \ln x \le 0 \Rightarrow D\{f^{-1}\} = (0, 1]$$

Bu yerdan, teskari funksiyalarning xossasiga asosan, $E\{f\} = D\{f^{-1}\} = (0, 1]$ ekanligini topamiz.

3.1) toq ; 3.2) juft; 3.3) toq; 3.4) juft; 3.5) toq ; 3.6) na juft, na toq ; 3.7) juft; 3.8) toq; 3.9) na juft, na toq ; 3.10) na juft, na toq .

3.11)*a*) $y(-x) = \dfrac{(-x)^4}{\cos(-x)} - \sqrt{1-(-x)^2} = \dfrac{x^4}{\cos x} - \sqrt{1-x^2} = y(x)$.

Demak, $y(-x) = y(x)$ va shu sababli u juft funksiyadir.

c) $y(-x) = |-x| tg(-x) + (-x)^3 = -|x| tgx - x^3 = -(|x| tgx + x^3) = -y(x)$.

Demak, $y(-x) = -y(x)$ va shu sababli u toq funksiyadir.

c) $y(-x) = 3^{-x}\sin(-x) = -3^{-x}\sin x$.

Bu yerda $y(-x) \ne y(x)$ va $y(-x) \ne -y(x)$. Demak, bu funksiya na juft, na toqdir.

3.12)Davriy funksiya uchun $y(x+T) = y(x)$ tenglik ixtiyoriy *x* va biror $T > 0$ uchun bajarilishi kerak.

$y = y(x) = 2\sin 4x$ funksiya uchun davriylik shartidan quyidagilarni olamiz:

$2\sin(4(x+T)) = 2\sin 4x$ => $\sin(4x+4T) - \sin 4x = 0$ =>

$2\sin\dfrac{4x+4T-4x}{2} \cdot \cos\dfrac{4x+4T+4x}{2} = 0$ => $\sin 2T \cdot \cos(4x+2T) = 0$ => sin2*T*=0.

Oxirgi trigonometrik tenglamaning ildizlari $T = \dfrac{\pi}{2}n,\ n = 0, \pm1, \pm2, \cdots,$ bo'lgani uchun berilgan funksiyaning eng kichik davri *T*=π/2 ekanligi kelib chiqadi.

4.1) $\dfrac{3}{x-1}$; 4.2) $\dfrac{1}{x}$; 4.3) $z = \dfrac{5(x-1)}{x+1}$; 4.4) $-\dfrac{1}{2}\log_3|x|$;

4.5) $f(x) = tgx,\ g(x) = \sqrt{1+x^2}$; 4.6) $f(x) = \sqrt{1+x^2},\ g(x) = tgx$.

4.7) $y\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\dfrac{1}{x}+2}{\dfrac{1}{x}-2} = \dfrac{1+2x}{1-2x}$.

4.8) . Dastlab $y(3-2z(x))$ murakkab funksiyani topamiz:

$$y(x)=2x+5 \Rightarrow y(3-2z(x))=2\left(3-2z(x)\right)+5=-4z(x)+11.$$

Bu natija va masala shartiga asosan

$$y(3-2z(x))=-4z(x)+11=10-6x \Rightarrow 4z(x)=6x+1 \Rightarrow z(x)=1.5x+0.25.$$

5.1) 0 ;5.2) 2/15 ; 5.3) –5/4 ; 5.4) –9 ; 5.5) 0 ; 5.6) 2 ;
5.7) ∞ ; 5.8) 0 ; 5.9) 2/3 ; 5.10) 0 ; 5.11) –3/2 ; 5.12) 0 ;
5.13) 2/3 ; 5.14) 1 ; 5.15) –1/2 ; 5.16) ∞ ; 5.17) 3/5 ; 5.18) –11/38 ;
5.19) 2/3 ; 5.20) 0 ; 5.21) 6 ; 5.22) 3 ; 5.23) 11/10 ; 5.24) 0 ;
5.25) 4/3 ; 5.26) 0 ; 5.27) 10/11 ; 5.28) 0 ; 5.29) 0 ; 5.30) 0 .

5.31) Bu limit qiymati $\frac{0}{0}$ ko’rinishdagi aniqmaslikni ochish orqali quyidagicha aniqlanadi:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x}\right)\left(\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x}\right)}{2x\left(\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{4-x})^2-(\sqrt{4+x})^2}{2x\left(\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{-2x}{2x\left(\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x}\right)}=-\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x}}=-\frac{1}{4}$$

5.32)Bu limit qiymati $\frac{0}{0}$ ko’rinishdagi aniqmaslikni ochish orqali quyidagicha aniqlanadi:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+2x}-1}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left|\begin{matrix}1+2x=t^3, x=(t^3-1)/2\\ x\to 0\Rightarrow t\to 1\end{matrix}\right|=\lim_{t\to 1}\frac{t-1}{(t^3-1)/2}=$$

$$=\lim_{t\to 1}\frac{2(t-1)}{(t-1)\left(t^2+t+1\right)}=\lim_{t\to 1}\frac{2}{t^2+t+1}=\frac{2}{3}.$$

5.33) Bu limit qiymati $\frac{\infty}{\infty}$ ko’rinishdagi aniqmaslikni ochish orqali quyidagicha aniqlanadi:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3-3x^2+2x-1}{x^3+3x^2-5x+4}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3[4-(3/x)+(2/x^2)-(1/x^3)]}{x^3[1+(3/x)-(5/x^2)+(4/x^3)]}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4-(3/x)+(2/x^2)-(1/x^3)}{1+(3/x)-(5/x^2)+)4/x^3)}=\frac{4-0+0-0}{1+0-0+0}=4.$$

5.34) Bu limit qiymati $\frac{0}{0}$ ko’rinishdagi aniqmaslikni ochish orqali quyidagicha aniqlanadi:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^3+4x^2+3x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)}{x(x-1)(x-3)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-2}{x(x-3)}=\frac{1-2}{1\cdot(1-3)}=\frac{-1}{-2}=\frac{1}{2}.$$

5.35**)** Bu limit qiymati $\infty-\infty$ ko’rinishdagi aniqmaslikni ochish orqali quyidagicha aniqlanadi:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2x}{x^2-1}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to 1}\frac{x+1-2x}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{x^2-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=-\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}=-\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=-\frac{1}{1+1}=-\frac{1}{2}.$$

5.36) Bu limit qiymati $\infty-\infty$ ko'rinishdagi aniqmaslikni ochish orqali quyidagicha aniqlanadi:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}\right)}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}\right)^2-\left(\sqrt{x^2-x}\right)^2}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x^2+x)-(x^2-x)}{\sqrt{x^2(1+1/x)}+\sqrt{x^2(1-1/x)}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x(\sqrt{1+1/x}+\sqrt{1-1/x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1+1/x}+\sqrt{1-1/x}}=\frac{2}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}}=1.$$

5.37) Bu limit qiymati $0\cdot\infty$ ko'rinishdagi aniqmaslikni ochish va I ajoyib limitdan foydalanish orqali quyidagicha aniqlanadi:

$$\lim_{x\to0}(xctgx)=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to0}\left(\frac{x}{\sin x}\cos x\right)=\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}\cdot\lim_{x\to0}\cos x=1^{-1}\cdot1=1$$

5.38) Bu limit qiymati 1^∞ ko'rinishdagi aniqmaslikni ochish va II ajoyib limitdan foydalanish orqali quyidagicha aniqlanadi:

$$\lim_{x\to\pi/2}(1+ctgx)^{tgx}=[1^\infty]=\lim_{x\to\pi/2}(1+ctgx)^{1/ctgx}=$$

$$=[ctgx=t,x\to\pi/2\Rightarrow t\to0]=\lim_{t\to0}(1+t)^t=e\ .$$

5.39) Dastlab bu limit qaysi ko'rinishdagi aniqmaslikka kelishini aniqlaymiz:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]^\infty=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x(1-1/x)}{x(1+1/x)}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-1/x}{1+1/x}\right)^{2x}=\left(\frac{1-0}{1+0}\right)^\infty=1^\infty\cdot$$

Demak, bu limit qiymati 1^∞ ko'rinishdagi aniqmaslikni ochish va II ajoyib limitdan foydalanish orqali quyidagicha aniqlanadi:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2x}=[1^\infty]=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x-1}{x+1}-1\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2}{x+1}\right)^{2x\cdot\frac{-2}{x+1}\cdot\frac{x+1}{-2}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{-2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{-2}}\right)^{\frac{-4x}{x+1}}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{-2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{-2}}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-4x}{x+1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-4x}{x+1}}=e^{-4}.$$

5.40) $$\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-e^{2x}}{\cos4x-\cos2x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}\left(e^{x^2-2x}-1\right)}{-2\sin\frac{4x+2x}{2}\sin\frac{4x-2x}{2}}=\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}\left(e^{x^2-2x}-1\right)}{-2\sin3x\sin x}$$

Cheksiz kichik miqdorlarning ekvivalentlik shartidan $x\to0$ bo'lganda

$$e^{x^2-2x}-1\sim x^2-2x\sim-2x,\quad \sin3x\sim3x,\sin x\sim x$$

bo'ladi. Demak,

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}\left(e^{x^2-2x}-1\right)}{-2\sin3x\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}(-2x)}{-2\cdot3x\cdot x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}}{3x}=\left[\frac{1}{0}\right]=\infty$$

6.1) 7/2 ; 6.2) –40 ; 6.3) 1/4 ; 6.4) 0 ; 6.5) –1/16 ; 6.6) ∞ ;
6.7) ∞ ; 6.8) –2 ; 6.9) 0 ; 6.10) $-2\sqrt{2}/3$; 6.11) 1/12 ; 6.12) 0 ;
6.13) –1 ; 6.14) 0 ; 6.15) –2 ; 6.16) 1/2 ; 6.17) 0 ; 6.18) 1/144 ;
6.19) 12/5 ; 6.20) 2 ; 6.21) 0 ; 6.22) 2/3 ; 6.23) 2 ; 6.24) –5/2 ;
6.25) 1/2 ; 6.26) 3/4 ; 6.27) 0 ; 6.28) 1 ; 6.29) 3/5 ; 6.30) 1/4 .
7.1) 1/3 ; 7.2) 0 ; 7.3) 7/π ; 7.4) ln4 ; 7.5) 2cosα ; 7.6) 1/6 ;

7.7) –3 ; 7.8) 1/3 ; 7.9) –1/2 ; 7.10) 1/10 ; 7.11) $-1/\pi$; 7.12) 2/3 ;
7.13) 7/8 ; 7.14) –2/3 ; 7.15) 3 ; 7.16) –1/2 ; 7.17) 1/2 ; 7.18) 0 ;
7.19) ∞ ; 7.20) $-1/\sqrt{3}$; 7.21) $-1/\sqrt{3}$; 7.22) –1/16 ; 7.23) $1/\pi^2$;
7.24) –2ln2 ; 7.25) ∞; 7.26) $-2/\pi$; 7.27) ∞ ; 7.28) 8 ;
7.29) –1/6 ; 7.30) 3/2 .
8.1) $8/\pi$; 8.2) 2 ; 8.3) ∞ ; 8.4) 2/ln2 ; 8.5) ∞ ; 8.6) $1/2\pi$; 8.7) 0 ;
8.8) $1/5\pi$; 8.9) 8/3 ; 8.10) 1 ; 8.11) … ; 8.12) … ; 8.13) … ;
8.14) … ; 8.15) … ; 8.16) … ; 8.17) … ; 8.18) … ; 8.19) … ;
8.20) … ; 8.21) … ; 8.22) … ; 8.23) … ; 8.24) … ; 8.25) … ;
8.26) … ; 8.27) … ; 8.28) … ; 8.29) … ; 8.30) … .
9.1) $e^{-5/2}$; 9.2) $e^{1/2}$; 9.3) –1/12 ; 9.4) e ; 9.5) 1 ; 9.6) e^2 ;
9.7) $e^{-1/2}$; 9.8) e^{-3} ; 9.9) 1 ; 9.10) 1/9 ; 9.11) $e^{-5/2}$; 9.12) $e^{-2/9}$;
9.13) $e^{-1/2}$; 9.14) e^{-2/π^2} ; 9.15) e^8 ; 9.16) … ; 9.17) …; 9.18) …;
9.19) … ; 9.20) …; 9.21) …; 9.22) … ; 9.23) …; 9.24) …;
9.25) … ; 9.26) …; 9.27) …; 9.28) … ; 9.29) …; 9.30) … .
10.1) x=4 - I tur uzilish nuqtasi va unda funksiya $\Delta=\pi$ sakrashga ega ;
10.2) x=0 - II tur uzilish nuqtasi ;
10.3) x=1 - tuzatib bo'ladigan va $x=-1$ - II tur uzilish nuqtasi ;
10.4) x=0 - II tur uzilish nuqtasi ;
10.5) x=1 - I tur uzilish nuqtasi va unda funksiya Δ=1 sakrashga ega ;
10.6) $x_k=k$, k=0, ±1, ±2, … - I tur uzilish nuqtalari va ularda funksiya Δ_k=1 sakrashga ega ;
10.7) $x=\pm2$ - I tur uzilish nuqtalari va ularda funksiya Δ=1 sakrashga ega ;
10.8) $x_1=0$, $x_2=2\pi$ - I tur uzilish nuqtalari va ularda funksiya $\Delta_1=2$, $\Delta_2=2(\pi-1)$ sakrashga ega ;
10.9) x=0 - II tur uzilish nuqtasi ;
10.10) x=0 - II tur uzilish nuqtasi ;
11.1) funksiya $x\neq2$ nuqtalarda uzluksiz, x=2 – tuzatub bo'ladigan uzilish nuqtasi ;
11.2) funksiya $x\neq1$ va $x\neq5$ nuqtalarda uzluksiz, x=1 va x=5 – II tur uzilish nuqtalari;
11.3) funksiya $x\neq0$ nuqtalarda uzluksiz, x=0 – tuzatub bo'ladigan uzilish nuqtasi ;
11.4) funksiya $x_k\neq(2k+1)\pi/2$, k=0, ±1, ±2, …nuqtalarda uzluksiz, $x_k=(2k+1)\pi/2$ - II tur uzilish nuqtalari ;
11.5) funksiya $(0,\infty)$ oraliqda uzluksiz, x=0 - II tur uzilish nuqtasi ;
11.6) funksiya $x_k\neq(2k+1)\pi$, k=0, ±1, ±2, …nuqtalarda uzluksiz, $x_k=(2k+1)\pi$ - II tur uzilish nuqtalari

Funksiyaning o'sishi va kamayishi. Funksiyaning ekstremumlari. Teylor va Makloren formulalariga doir mashqlar.

Қуйидаги функциялар экстремумга текширилсин:

1322. $\mathbf{y = x^2 - 6x + 8}$ 1323. $\mathbf{y = 2x^2 - x^4}$

1324. $\mathbf{y = \frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{11}{2}\cdot x^2 - 6x + 3}$ 1325. $\mathbf{y = (x-1)^3}$

1326. $\mathbf{y = x^2 \cdot e^{-x}}$ 1327. $\mathbf{y = e^x + e^{-x}}$

1328. $y=\frac{1}{x}\cdot\ln^2 x$

1329. $y=x-\operatorname{arctg}x$

1330. $y=x\cdot\sqrt{1-x^2}$

1331. $y=x^3-3x^2+3x$

1332. $y=\sin x-x$

1333. $y=2\sin 2x+\sin 4x$

1334. $y=\frac{x}{\ln x}$

1335. $y=|x^2-5x+6|$

1336. $y=|x^2-1|\cdot e^{|x|}$

1337. $y=x^{\frac{1}{x}}$

1338. $y=|x^3-3x^2|$

1339. $y=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & \text{агар } x\neq 0 \text{ бўлса} \\ 0, & \text{агар } x=0 \text{ бўлса}\end{cases}$

1340. Ушбу $y=(x-a_1)^2+(x-a_2)^2+...+(x-a_n)^2$ функция x нинг қандай қийматида минимумга эришади. $a_1, a_2, ..., a_n$ -берилган сонлар.

Қуйидаги функцияларнинг экстремумлари топилсин:

1341. $y=\sqrt[5]{x^4}$

1342. $y=x^3-6x^2+9x-4$

1343. $y=\frac{4}{\sqrt{x^2+8}}$

1344. $y=\frac{(x-2)(8-x)}{x^2}$

1345. $y=x+\frac{1}{x}$

1346. $y=x-\ln(1+x)$

1347. $y=\frac{x^2-3x+2}{x^2+2x+1}$

1348. $y=\sqrt[3]{(x^2-1)^2}$

1349. $y=\frac{e^x}{x}$

1350. $y=x\cdot\ln^2 x$

1351. $y=\sqrt[3]{2x^3+3x^2-36x}$

1352. $y=\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x$

1353. $y=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^4}{n!}\right)\cdot e^{-x}, n\in N$

Қуйидаги функцияларнинг ўсувчи, камаювчи бўладиган оралиқлари топилсин.

1247. $f(x)=3x-x^3$

1248. $f(x)=8x^3-x^4$

1249. $f(x)=x^3-3x+5$

1250. $f(x)=x(1+2\sqrt{x})$

1251. $f(x)=e^{kx}$

1252. $f(x)=x\,|x|$

1253. $f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$

1254. $f(x)=|x|^3$

1255. $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$

1256. $f(x)=\cos x-x$

1257. $f(x)=x+\sin x$

1258. $f(x)=x^2-10\ln x$

1259. $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$

1260. $f(x)=x^2e^{-x^2}$

1262. $f(x)=x+|\sin 2x|$

1263. $f(x)=x^2\ln x$

1264. $f(x)=\dfrac{x^3}{3-x^2}$

1265. $f(x)=x^2-\ln x^2$

1266. $f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2x}{x^2-1}$

1267. $f(x)=x^ne^{-x}\quad (n>0,\ \ x\geq 0)$

1268. $f(x)=\sqrt{8x^2-x^4}$

1269. $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$

1270. $f(x)=3^{\frac{1}{x-3}}$

1271. $f(x)=(x+1)\sqrt{x^2-1}$

1272. $f(x)=\operatorname{arctg}x-\ln x$

Kesmada uzluksiz funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlari. Funksiya grafigining qavarikligi va botiqligi. Burilish nuqtalari. Asimtotalari. Funksiyani to’la tekshirish.

Қуйидаги функциялар ўсувчиликка ва камаювчиликка текширилсин:

1273. $f(x)=\ln|x|$

1274. $f(x)=x+\operatorname{arctg}x$

1275. $f(x)=x^3+\arcsin x$

1276. $f(x)=\lg^3 x+x^4$

1277. $f(x)=x^5\lg^7 x\quad (x\geq 1)$

1278. $f(x)=\lg\cos x\quad \left(0\leq x<\dfrac{\pi}{2}\right)$

1279. $f(x)=\arcsin(3x-1)$

1280. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}(x-1)\operatorname{arctg}x^n$

1281. $f(x)=|\ln x|$

1282. $f(x)=\operatorname{arctg}(x^2-2x+3)$

1283. $f(x)=(x^2+4x+6)\cdot\ln(x^2+4x+6)$

1284. $f(x)=\dfrac{1}{1+\cos^2 x}$

1285. $f(x)=\dfrac{x}{x^2-6x-16}$

1286. $f(x)=2\cdot e^{x^2-4x}$

1287. $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-8x+20)$

Қуйидаги функцияларнинг энг катта ва энг кичик фийматлари топилсин:

1364. $y=x^3-3x^2-9x+35$ $\quad(-4\le x\le 4)$

1365. $y=e^{-x^2}$ $\quad(0\le x\le 1)$

1366. $y=x\cdot|x|$ $\quad(-2\le x\le 2)$

1367. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1-x}{1+x}$ $\quad(0\le x\le 1)$

1368. $y=x^4-2x^2+5$ $\quad(-2\le x\le 2)$

Қуйидаги функцияларнинг қаварик ва ботиқ бўлиш оралиқлари топилсин.

1389. $y=x^3-4x$

1390. $y=\dfrac{1}{x^2}$

1391. $y=3x^4-8x^3-6x^2+12$

1392. $y=\dfrac{a^3}{a^2+x^2}$ $\quad(a>0)$

1393. $y=\dfrac{1}{(x+1)^3}$

1394. $y=x+2-\sqrt[3]{x^5}$

1395. $y=\arcsin\dfrac{1}{x}$

1396. $y=\dfrac{\sqrt{x}}{1+x}$

1397. $y=\sqrt{1+x^2}$

1398. $y=e^{-x^2}$

1399. $y=x+\sin x$

1400. $y=\ln(1+x^3)$

1401. $y=\dfrac{|x-1|}{x\cdot\sqrt{x}}$

1402. $y=4\cdot\sqrt{(x-1)^5}+20\sqrt{(x-1)^3}$

1403. $y=1-|x^2-2|$

1404. $y=(1+x^2)e^x$

1405.Ушбу $y = x^4 + ax^3 + \frac{3}{2} \cdot x^2 + 1$ функция a нинг қандай қийматида $(-\infty, +\infty)$ да ботиқ бўлади.

Ekstremumlar nazariyasining geometriya, mexanika va boshqa sohalarga doir masalalariga tadbiqi.

Қуйидаги функция графигининг эгилиш нуқталари топилсин.

1409. $y = 3x^5 - 5x^4 + 4$

1410. $y = \cos x$

1411. $y = 1 + x^2 - \frac{x^4}{2}$

1412. $y = e^{\frac{1}{x}}$

1413.y=1-ln(x2-4)

1414.y=arctg$\frac{1}{x}$

1415. $y = 4x^2 + \frac{1}{x}$

1416. $y = \frac{|x - 1|}{x^2}$

1417. $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

1418. $y = 2x^2 + \ln x$

1419. $y = \frac{x^4}{(1 + x)^3}$

1420. $y = \sqrt{1 - x^3}$

Қуйидаги функцияларни қавариқликка, ботиқликка текширилсин, эгилиш нуқталари топилсин.

1421. $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 9$

1422. $y = \frac{1}{x^2 - 4}$

1423. $y = (x + 1)^4 + e^x$

1424. $y = \operatorname{arctg} x - x$

1425. $y = \sqrt[3]{4x^3 - 12x}$

1426. $y = 2 - |x^5 - 1|$

1427. $y = x + x^{\frac{5}{3}}$

1428. $y = e^{\sin x} \quad \left(-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$

Қуйидаги функцияларнинг эгилиш нуқталари топилсин.

1429. $y = x^5 - 10x^2 + 3$

1430. $y = e^{arctgx}$

1431. $y = 4x^2 + \frac{1}{x}$

1432. $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

1433. a ва b қандай қийматларида $y = ax^3 + bx^2$ функциянинг эгилиш нуқтаси $x = 1$ бўлади?

1434.Ушбу $y = x^3 + x^4 \sin\frac{\pi}{x}$ функциянинг эгилиш нуқтаси $x = 0$ бўлиши исботлансин.

1435.Ушбу $y = x\sin x$ функциянинг эгилиш нуқтаси қуйидаги

$$y^2(4 + x^2) = 4x^2$$

тенгликни қаноатлантириши кўрсатилсин.

1436. h нинг қандай қийматларида $x = \pm\sigma$ нуқта

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-h^2 \cdot x^2} \quad (h > 0)$$

функциянинг эгилиш нуқтаси бўлади?

Қуйидаги функцияларнинг эгилиш нуқталари топилсин.

1437. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$

1438. $y = |e^x - 1|$

Қуйидаги функция графикларининг асимптоталари топилсин.

1439. $y = \frac{2x^2 + x - 2}{x - 1}$

1440. $y = \frac{1}{x^2 - 4x + 3}$

1441. $y = \frac{x^5}{x^4 - 1}$

1442. $y = \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x}$

1443. $y = 2x - \frac{\cos x}{x}$

1445. $y = 4x + arctg\frac{x}{4}$

1446. $y=\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$

1447. $y=\dfrac{x^2}{|x|+1}$

1448. $y=x\cdot \operatorname{arctg} x$

1449. $y=\sqrt{x^2-1}-x$

1450. $y=1+x\cdot e^{\frac{x}{2}}$

1451. $y=|e^x-1|$

1452. $y=x+\dfrac{\ln x}{x}$

1453. $y=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$

1454. $y=x\sin\dfrac{1}{x}$

1455. $y=x^2\ln x$

1456. $y=\ln\left(1+e^{-x}\right)$

1457. $y=\dfrac{1}{\sin x+\cos x}$

1458. $y=\ln \operatorname{sh} x$

1459. $y=\ln x-\operatorname{arctg} x$

Қуйидаги функциялар тўлиқ текширилсин, графиклари чизилсин.

1460. $y=x|x|$

1461. $y=\dfrac{1}{5}\cdot(4x^3-x^4)$

1462. $y=(x-1)^2\cdot(x+2)$

1463. $y=\dfrac{(x+1)^2}{x-2}$

1464.y= $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$

1465. $y=16x(x-1)^3$

1466. $y=\dfrac{x^4+3}{x}$

1467. $y=x^2+\dfrac{2}{x}$

1468. $y=\dfrac{4x-12}{(x-2)^2}$

1469. $y=\dfrac{4x}{4+x^2}$

1470. $y=\dfrac{16}{x^2(x-4)}$

1471. $y=(x-3)\cdot\sqrt{x}$

1472. $y=\sqrt{8+x}-\sqrt{8-x}$

1473. $y=2(x+1)-3\cdot\sqrt[3]{(x+1)^2}$

1474. $y=\sqrt[3]{1-x^3}$

1475. $y=\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x^2+1}$

$$1476.\ y=\frac{4}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$1477.\ y=\frac{x}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}$$

$$1478.\ y=\frac{|1+x|^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$$

$$1479.\ y=\sqrt[3]{(x-2)^2}+\sqrt[3]{(x-4)^2}$$

$$1480.\ y=xe^{-x}$$

$$1481.\ y=x\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$1482.\ y=e^{2x-x^2}$$

$$1483.\ y=\left(2+x^2\right)\cdot e^{-x^2}$$

$$1484.\ y=x+e^{-x}$$

$$1485.\ y=\frac{e^x}{1+x}$$

$$1486.\ y=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

$$1487.\ y=\frac{x^2}{2}\cdot\ln\frac{x}{a}$$

$$1488.\ y=\ln\left(x^2-1\right)+\frac{1}{x^2-1}$$

$$1489.\ y=\ln\left(1+e^{-x}\right)$$

$$1490.\ y=\sin x-\cos x$$

$$1491.\ y=\sin x+\frac{1}{2}\cdot\sin 2x$$

$$1492.\ y=\sin x\cdot\sin 2x$$

$$1493.\ y=x+\sin x$$

$$1494.\ y=x-|\sin x|$$

$$1495.\ y=2x-\operatorname{tg}x$$

$$1496.\ y=\arcsin|x|$$

$$1497.\ y=x-2\operatorname{arctg}x$$

$$1498.\ y=\ln(\sin x)$$

$$1499.\ y=\ln x-\operatorname{arctg}x$$

I BOSQICH BAKALAVRLARI UCHUN KUZGI O'QUV MAVSUMI

MUSTAQIL ISH TOPSHIRIQLARI

I topshiriq.

Ushbu chiziqli tenglamalar sistemasini Kramer, Gauss hamda matritsalar usulida yeching:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Izoh: Sistemadagi a_{ij} koeffitsient va b_i ozod hadlardan iborat parametrlar variant boʻyicha jadvaldan olinadi.

Variant №	Sistema tenglamalarining parametrlari											
	a_{11}	a_{12}	a_{13}	b_1	a_{21}	a_{22}	a_{23}	b_2	a_{31}	a_{32}	a_{33}	b_3
1	1	−3	3	–2	2	1	−3	1	1	−1	4	3
2	2	1	6	2	3	−1	−3	10	−2	4	−1	3
3	−2	3	2	0	4	−4	−4	4	1	6	1	13
4	5	−3	2	−3	−5	2	6	2	0	−1	−4	−1
5	1	1	1	0	1	0	2	−2	0	2	3	−1
6	3	−2	3	4	0	2	1	–4	2	−4	0	2
7	0	2	−1	3	1	3	0	9	5	−2	1	12
8	1	1	2	−3	2	1	1	−4	1	2	3	−7
9	2	−5	7	−1	1	1	−1	1	−3	2	−3	0
10	1	1	−1	1	1	−1	1	5	1	1	1	9
11	3	2	−1	5	0	2	−2	6	–3	7	−3	2
12	10	3	4	7	2	3	−4	–1	7	−5	−4	−9
13	3	2	−3	5	0	1	−1	–1	4	−2	8	4
14	8	1	−4	1	3	−3	1	–4	4	9	−1	1
15	9	−3	7	–7	−8	−2	1	1	1	−1	1	–3
16	8	6	−1	−6	6	1	−2	0	2	4	2	−2
17	1	−6	−6	4	2	–1	2	5	1	3	6	1
18	1	−2	3	−1	2	1	−2	2	4	3	−3	10
19	5	3	4	−1	4	4	1	9	4	2	3	–1
20	1	0	−1	3	5	−1	7	–10	4	9	5	3
21	2	−3	6	–7	3	4	−1	–6	1	−5	2	10
22	1	4	−2	8	1	−5	2	−3	5	6	1	−1
23	2	−2	1	−6	4	3	−1	1	1	−4	2	−9
24	1	3	1	−2	1	4	2	−4	1	−5	−3	10
25	3	0	5	−1	0	2	1	−1	1	−3	1	2
26	3	2	1	9	2	3	1	5	2	1	3	11
27	4	−3	2	12	2	5	−3	−3	5	6	−2	0
28	1	1	−3	6	2	−1	1	−1	3	1	2	3
29	7	2	4	1	1	−3	−2	6	1	−4	−1	6
30	2	−3	−2	3	3	−2	1	1	3	−4	−1	5

II topshiriq

Fazoda uchlari $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ va $D(x_4, y_4, z_4)$ nuqtalarda joylashgan piramida berilgan. Bu piramida bo'yicha quyidagilarni bajaring:

1. $\overrightarrow{AB}$ vektor koordinatalarini toping va undan foydalanib AB qirra uzunligini hisoblang;

2. $\overrightarrow{AB}$ va $\overrightarrow{AD}$ vektorlardan foydalanib *AB* va *AD* qirralar orasidagi φ burchak kosinusini toping;

3. $\overrightarrow{AB}$ va $\overrightarrow{AD}$ vektorlardan foydalanib piramidaning ABD tomoni yuzasini toping ;

4. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ va $\overrightarrow{AD}$ vektorlar yordamida *ABCD* piramidaning hajmini aniqlang;

5. *AD* qirra yotgan toʻgʻri chiziqning kanonik va parametrik tenglamalarini yozing;

6. *ABC* yoq yotgan tekislikning umumiy, kesmalardagi va normal tenglamalarni yozing;

7. Piramidaning *ABC* va *ABD* yoqlari orasigi ikki yoqli α burchak kosinusini toping;

8. Piramidaning *D* uchidan tushirilgan *DH* balandligi yotuvchi *L* to’g’ri chiziqning kanonik tenglamasini aniqlang;

9. Piramidaning *D* uchidan tushirilgan *DH* balandligining uzunligini toping.

Izoh: $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ va $D(x_4, y_4, z_4)$ nuqtalarning koordinatalari variantga asosan jadvaldan olinadi.

Variant №	x_1	y_1	z_1	x_2	y_2	z_2	x_3	y_3	z_3	x_4	y_4	z_4
1	2	4	8	−3	5	1	6	−4	3	5	8	−1
2	−1	−3	−7	2	−4	0	−5	3	−2	−4	−7	2
3	3	5	9	0	6	−2	7	1	4	6	9	0
4	0	−2	7	−3	−3	5	−4	4	−1	−3	−6	3
5	−4	6	−3	7	7	−1	8	0	5	7	−3	1
6	1	−2	3	−4	5	−6	7	−8	9	−3	6	−5
7	2	−3	4	−5	6	−7	8	−9	3	−4	7	1
8	3	−4	−5	6	7	−8	9	−3	7	−4	−1	−2
9	4	5	−6	−7	8	−9	3	−5	7	1	2	−3
10	−5	6	7	−8	9	−2	−1	3	−4	−2	3	4
11	−6	7	−8	−9	0	3	2	1	−3	−3	−4	−5
12	7	−8	9	0	−1	2	1	−2	3	4	5	6
13	8	−9	1	−1	2	−3	−4	−5	−6	−7	0	4
14	9	−1	1	−2	1	−2	3	4	5	6	7	8
15	0	−1	2	1	−2	−3	−4	5	−6	7	−8	−9
16	1	−2	−1	−2	3	4	5	6	7	−5	0	8
17	2	1	2	3	−4	−5	−6	7	8	−9	0	−3
18	−3	4	−5	1	−8	7	−4	−2	1	2	−1	0
19	2	−5	3	−2	7	−8	3	−1	2	−3	1	5
20	−4	3	−5	0	−9	6	5	−3	0	1	−3	2
21	2	−3	6	17	3	4	−1	3	1	−5	2	10
22	1	4	−2	8	1	−5	−3	1	−4	6	1	4
23	2	−2	1	−6	4	3	−1	3	1	−4	2	−9
24	1	3	1	−2	1	4	2	−36	1	−5	−3	10
25	3	0	5	−1	0	2	1	−1	1	−3	1	2
26	3	2	1	5	2	3	1	1	2	1	3	11
27	4	−3	2	9	2	5	−3	4	5	6	−2	18
28	1	1	−3	6	2	−1	1	5	3	1	2	7
29	7	2	4	1	1	−3	−2	2	1	−4	−1	8
30	2	−3	−2	4	3	−2	1	11	3	−4	−1	7

III topshiriq

III.1-masala

Berilgan a), b), c) va d) hollardagi $y=f(x)$ funksiyalarning hosilalarini toping.

№	a) b)	$y = f(x)$	c) d)	$y = f(x)$
1	a)	$y=\frac{x-1}{x+1}$	c)	$y=\mathrm{arctg}\,(1+\ln x);$
	b)	$y=(x+1)\ln(x+1);$	d)	$x=\ln t$, $y=t^2$
2	a)	$y=\frac{x-2x^2}{1-\sin x};$	c)	$y=\arcsin(1-\ln x);$
	b)	$y=(x^2+1)\sin x;$	d)	$x=\sin t$, $y=t^2-t$
3	a)	$y=\frac{10^x+x^{10}}{\sin x}$	c)	$y=\arccos\sqrt{1-\ln x};$
	b)	$y=(x^2+1)\mathrm{arcctg}x$	d)	$x=\cos t$, $y=t+t^2$
4	a)	$y=\frac{\mathrm{tg}x+\sin x}{x^2}$	c)	$y=e^{1-\cos 5x}$
	b)	$y=(1-x^2)\arcsin x;$	d)	$x=2t+1$, $y=\cos t^2$
5	a)	$y=\frac{\cos x+\sin x}{1+x}$	c)	$y=\arcsin(1-x^3)$
	b)	$y=x^2\ln(1+x^2);$	d)	$x=\ln(t^2+1)$, $y=t^3$
6	a)	$y=\frac{\ln x}{1+x^2}$	c)	$y=\ln(1-\sqrt{x-1});$
	b)	$y=x\mathrm{tg}(1+x^2);$	d)	$x=e^{2t}$, $y=t^2$
7	a)	$y=\frac{x}{x^2-1};$	c)	$y=\mathrm{arctg}\sqrt{1+x^2};$
	b)	$y=(x+\sin x)(x-\cos x);$	d)	$x=t^2$, $y=t^3+t^2+1$
8	a)	$y=\frac{1+\sin x}{1-\cos x};$	c)	$y=\sqrt{1-\sin(x^2+1)};$
	b)	$y=(x-\mathrm{tg}x)(x-\mathrm{ctg}x)$	d)	$x=t^2+t$, $y=t^3+1$
9	a)	$y=\frac{1-\mathrm{tg}x}{1+\mathrm{ctg}x}$	c)	$y=\sin(e^x+\cos x)$
	b)	$y=(x-1)\mathrm{arctg}\sqrt{x-2}$	d)	$x=t^2-4t$, $y=t^3+t$
10	a)	$y=\frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}};$	c)	$y=\ln(x+\ln x)$

	b)	$y=(x-1)\arcsin\sqrt{2-x};$	d)	$x=t^2-4t$, $y=(t+1)^3$
11	a)	$y=\dfrac{x-1}{5x-2}$	c)	$\left(\sqrt{x+1}\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-1\right)$
	b)	$y=\ln x\cdot\sin\sqrt{\ln x}$	d)	$x=(t-2)^2$, $y=t^3+t$
12	a)	$y=\dfrac{2x+3}{3x+7}$	c)	$y=5\,\mathrm{arctg}\,e^{\sqrt{5x}}$
	b)	$y=\left(x^2-3x+3\right)\left(x^2+2x-1\right)$	d)	$x=\sin(t-4)$, $y=\cos(t+3)$
13	a)	$y=\dfrac{5x^2}{x-3}$	c)	$(\dfrac{2}{\sqrt{x}}-\sqrt{3})(4\sqrt[3]{x}+\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{3x})$
	b)	$y=\ln\left(e^{5x}+1\right)$	d)	$x=\sin(2t-1)$, $y=\cos 2(2t-1)$
14	a)	$y=\dfrac{x^2+2x}{3-4x}$	c)	$y=\mathrm{tg}(2^x+x+1)$
	b)	$y=\left(1-x^2\right)\left(1-2x^3\right)$	d)	$x=2^t$, $y=t^2$
15	a)	$y=\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$	c)	$y=\sin 3^x\cdot\cos^2 3^x$
	b)	$y=\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)$	d)	$x=\sin(2t+1)$, $y=\cos 2(2t+1)$
16	a)	$y=\dfrac{x^2}{x+1}$	c)	$y=(x-1)(x-2)(x-3)$
	b)	$y=2\ln\mathrm{tg}(x/8)$	d)	$x=(2t-1)^2$, $y=\ln(2t+1)$
17	a)	$y=\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}$	c)	$y=\dfrac{1}{2}\cdot\left(\mathrm{tg}\,2x+\ln\cos^2 2x\right)$
	b)	$y=\left(\sqrt[3]{x}+1\right)(x-1)$	d)	$x=\ln(2t-1)$, $y=\ln(2t+1)$
18	a)	$y=\dfrac{\sqrt{x^3}-x}{x+\sqrt[3]{x^2}}$	c)	$y=\mathrm{ctg}^2\mathrm{ctg}x$
	b)	$y=\left(x^2-4\right)\left(x^2-9\right)$	d)	$x=\mathrm{tg}(2t-1)$, $y=(2t+1)^2$
19	a)	$y=\dfrac{x^2+7x+5}{x^2-3x}$	c)	$y=\arcsin\sqrt{1-e^x}$
	b)	$y=\left(1+\sqrt{2x}\right)\left(1+\sqrt{3x}\right)$	d)	$x=(2t-1)^2$, $y=(2t+1)^3$
20	a)	$y=\dfrac{-x^2+2x+3}{x^3-2}$	c)	$y=\ln\dfrac{1-\sin 3x}{1+\sin 3x}$
	b)	$y=\left(x^2+x-1\right)\left(x^3+1\right)$	d)	$x=10^{2t-1}$, $y=\lg(2t-1)$
21	a)	$y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1};$	c)	$y=\mathrm{tg}(1+\ln x)$

	b)	$y=(x+2)^2\ln(x+2);$	d)	$y=(x^2-1)\mathrm{tg}x;$
22	a)	$y=\dfrac{2x-x^2}{1-\cos x};$	c)	$y=\arccos(1+\ln x)$
	b)	$y=(x^2-1)\mathrm{tg}x;$	d)	$x=10^{\sin t}$, $y=t^2-2t$
23	a)	$y=\dfrac{1+e^{3x}}{\ln x}$	c)	$y=\cos\sqrt{1-\ln x}$
	b)	$y=(x^2-1)\mathrm{arcctg}x$	d)	$x=\arccos t$, $y=\arcsin t$
24	a)	$y=\dfrac{x+\ln x}{x^3}$	c)	$y=e^{\sin x}+e^{-\cos x}$
	b)	$y=(1+x^2)\mathrm{arctg}x$	d)	$x=(2t-3)^2$, $y=\sin t^2$
25	a)	$y=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$	c)	$y=\arccos(1+x^2)$
	b)	$y=e^x\ln(1+x^2)$	d)	$x=(t^2+1)^3$, $y=t^3$
26	a)	$y=\dfrac{x-1}{1+x^2}$	c)	$y=\ln(1+\sqrt{x+1})$
	b)	$y=x^3\sin(1+x^2)$	d)	$x=e^{-4t}$, $y=t^2+2t$
27	a)	$y=\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$	c)	$y=\ln(x-\ln x)$
	b)	$y=(x-1)\arccos\sqrt{2-x}$	d)	$x=t^2+2t$, $y=(t+2)^3$
28	a)	$y=\dfrac{2x-1}{4x+3}$	c)	$y=\ln x\cdot\cos\sqrt{\ln x}$
	b)	$y=\left(\sqrt{x-1}\right)\left(1-\sqrt{x}\right)$	d)	$x=(t+2)^3$, $y=t^3+3t$
29	a)	$y=\dfrac{2x^2+1}{3x^2+5}$	c)	$y=\mathrm{ctg}(2^x-x^2+3)$
	b)	$y=\left(x^2+5x-3\right)\left(x^2-4x+5\right)$	d)	$x=\ln(t^2-4)$, $y=\lg(t+2)$
30	a)	$y=\dfrac{5x^2+3}{x^2-1}$	c)	$y=\ln\left(e^{5x}+1\right)$
	b)	$y=\left(1-x^2\right)\left(1-2x^3\right)$	d)	$x=\sin(2t+1)$, $y=\cos 2(2t+1)$

III.2-masala

$y=f(x)$ tenglama bilan berilgan egri chiziqning absissasi $x=x_0$ bo'lgan nuqtasiga o'tkazilgan urinma va normal tenglamalarini yozing.

№	$y=f(x)$	x_0	№	$y=f(x)$	x_0

1	$y=x^2+2x$	2	16	$y=3tg2x+1$	π/2
2	$y=80x-x^2$	−1	17	$y=1-4x+e^{3x}$	0
3	$y=1+2\cos x$	π/2	18	$y=6tg5x$	π/20
4	$y=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3$	1	19	$y=4\sin 6x$	π/18
5	$y=\frac{1}{3}x^3+4x+3$	4	20	$y=\frac{x^2}{3}-\frac{x^2}{2}-7x+9$	1
6	$y=x+\sin 2x$	π/4	21	$y=x^2-3x+1$	−1
7	$y=xe^x$	0	22	$y=8x^3-x^2+1$	3
8	$y=13+tgx$	π/3	23	$y=1-2\cos x$	−π/2
9	$y=1-x^2$	1	24	$y=4tg3x$	π/9
10	$y=1+3x+e^{2x}$	0	25	$y=x^3-3x+5$	−2
11	$y=x^3-5x^2+7x-2$	−1	26	$y=x-\cos 2x$	π/4
12	$y=x^2-6x+2$	2	27	$y=e^x\cos x$	0
13	$y=\frac{x^2}{4}-x+5$	4	28	$y=\mathrm{ctg}x+\mathrm{tg}x$	π/4
14	$y=\frac{x^4}{4}-27x+60$	−2	29	$y=\sin(1-x^2)$	−1
15	$y=-\frac{x^2}{2}+7x-\frac{15}{2}$	3	30	$y=1-5x+e^{3x}$	0

III.3-masala

Moddiy nuqta $s=s(t)$ tenglama bo'yicha harakatlanmoqda. Bu moddiy nuqtaning berilgan $t=t_0$ vaqtdagi $v(t_0)$ tezligini va $a(t_0)$ tezlanishini aniqlang.

№	$s=s(t)$	t_0	№	$s=s(t)$	t_0
1	$s=e^{\sin 2t}$	π/2	16	$s=2^{\ln t}$	*E*
2	$s=te^t$	0	17	$s=e^t\cos t$	0
3	$s=\ln(t^2-9)$	5	18	$s=\ln^2(t-1)$	2
4	$s=t^2\ln t$	1	19	$s=\frac{\ln t}{t}$	*E*
5	$s=\frac{t^2}{t+2}$	4	20	$s=\frac{1}{1-e^t}$	ln2
6	$s=\frac{4t}{4-t^2}$	$\sqrt{2}$	21	$s=\ln(t^2+1)$	0

7	$s=\dfrac{t^2+1}{t^2-1}$	3	22	$s=\dfrac{4t}{4+\sin t}$	π/2
8	$s=\dfrac{t^2}{t-2}$	5	23	$s=t\sqrt{5+t}$	4
9	$s=\ln(4-t^2)$	1	24	$s=\sqrt{t^2-t}$	2
10	$s=\dfrac{t^2+1}{t-1}$	0	25	$s=\dfrac{t^2}{t-1}$	3
11	$s=e^{2\cos t}$	π/2	26	$s=\sqrt{t}e^t$	1
12	$s=t\sin t$	π/4	27	$s=t^3\ln t$	1
13	$s=\ln(t^2-1)$	3	28	$s=\dfrac{t}{t^2+1}$	2
14	$s=(2+t^2)\ln t$	e	29	$s=\ln^2(t+1)$	0
15	$s=e^t\ln(t+1)$	0	30	$s=\dfrac{t^2}{t+4}$	0

III.4-masala

Berilgan $y=f(x)$ funksiyani ekstremumga tekshiring va uning monotonlik oraliqlarini toping.

№	$y=f(x)$	№	$y=f(x)$	№	$y=f(x)$
1	$y=e^{2x-x^2}$	11	$y=2^{1/x}$	21	$y=e^{2x+x^2}$
2	$y=xe^{x^2}$	12	$y=x\cdot e^{-x}$	22	$y=xe^x$
3	$y=\ln(x^2-1)$	13	$y=e^x-x$	23	$y=\ln(x^2-9)$
4	$y=(2+x^2)e^{-x^2}$	14	$y=\dfrac{\ln x}{x}$	24	$y=x^2+2\ln x$
5	$y=x^2-2\ln x$	15	$y=\ln(x^2-1)$	25	$y=\dfrac{x^2}{x+2}$
6	$y=\dfrac{x^2}{x-1}$	16	$y=\dfrac{1}{1-e^x}$	26	$y=\dfrac{4x}{4-x^2}$
7	$y=\dfrac{4x}{4+x^2}$	17	$y=x-\ln x$	27	$y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$
8	$y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$	18	$y=x\sqrt{x+5}$	28	$y=\dfrac{x^2}{x-2}$
9	$y=\ln(9-x^2)$	19	$y=\sqrt{x^2-x}$	29	$y=\ln(4-x^2)$
10	$y=\dfrac{x^2}{x+4}$	20	$y=\sqrt{x-x^2}$	30	$y=\dfrac{x^2+1}{x-1}$

I BOSQICH BAKALAVRLARI UCHUN KUZGI O'QUV MAVSUMI MUSTAQIL ISH TOPSHIRIQLARIDAGI MASALALARNING NAMUNAVIY YECHIMLARI.

<u>I topshiriq</u>

Berilgan uch noma'lumli chiziqli tenglamalar sistemasini Kramer, Gauss va matritsalar usullarida yeching:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$$

<u>Yechish:</u> Berilgan sistemani Kramer usulida yechish uchun dastlab uning asosiy Δ va yordamchi Δ_1, Δ_2, Δ_3 aniqlovchilarini hisoblaymiz. Asosiy Δ aniqlovchi sistemaning koeffitsientlaridan tuziladi:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot(-3)\cdot 3 + (-1)\cdot 1\cdot 5 + 1\cdot 2\cdot 2 - 2\cdot 1\cdot(-3) - 2\cdot 1\cdot(-1) - 5\cdot 1\cdot 3 =$$

$$= -9 - 5 + 4 + 6 + 2 - 15 = -17,$$

Yordamchi Δ_1, Δ_2, Δ_3 aniqlovchilar asosiy Δ aniqlovchining mos ravishda birinchi, ikkinchi, uchinchi ustunlarini ozod hadlar bilan almashtirishdan hosil qilinadi:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -3 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 + 3 + 2 + 3 - 0 + 9 = 17,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 5 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -9 + 5 + 0 - (-6) - 2 - 0 = 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -3 + 0 - 6 - 0 - 3 - 5 = -17.$$

Bu aniqlovchilar yordamida berilgan chiziqli tenglamalar sistemasining ildizlarini Kramer formulalari orqali quyidagicha topamiz:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{17}{-17} = -1 \ , \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{0}{-17} = 0 \ , \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-17}{-17} = 1.$$

Demak, berilgan sistemaning ildizlari $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ bo'ladi.

Yechim to'g'riligini tekshirish uchun bu ildizlar qiymatlarini berilgan sistemaga qo'yamiz:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -1 + 0 + 1 \equiv 0 \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 5 \cdot (-1) - 3 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \equiv -3 . \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \cdot (-1) - 0 + 3 \cdot 1 \equiv 1 \end{cases}$$

Bu yerdan koʻrinadiki $x_1 = -1$, $x_2=0$, $x_3=1$ boʻlganda berilgan sistemaning uchala tenglamasi ham ayniyat boʻldi. Demak, sistema toʻgʻri yechilgan va $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=1$ berilgan sistema ildizlari boʻladi.

Bu sistemani Gauss usulida yechish uchun dastlab uni «toʻrtburchakli» shakldan «uchburchakli» shaklga keltiramiz. Buning uchun dastlab sistemaning ikkinchi va uchinchi tenglamalaridan x_1 noma’lumni yoʻqotamiz. Bunga erishish uchun sistemaning birinchi tenglamasini 5ga (yoki 2ga) koʻpaytirib, uning ikkinchi (yoki uchinchi) tenglamasidan ayiramiz. Natijada quyidagi sistemaga kelamiz:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -8x_2 - 3x_3 = -3 \\ -3x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Endi bu sistemaning uchinchi tenglamasidan x_2 noma’lumni yoʻqotamiz. Buning uchun oxirgi sistemaning ikkinchi tenglamasini 3 ga, uchinchi tenglamasini esa 8 ga koʻpaytirib, hosil boʻlgan uchinchi tenglamadan ikkinchi tenglamani ayiramiz. Natijada ushbu «uchburchak» shaklidagi sistemaga kelamiz:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -8x_2 - 3x_3 = -3 . \\ -17x_3 = -17 \end{cases}$$

Oxirgi uchburchakli sistemaning uchinchi tenglamasidan x_3 noma’lumni topamiz:

$$-17x_3 = -17 \Rightarrow x_3 = \frac{-17}{-17} = 1.$$

$x_3=1$ natijani uchburchakli sistemaning ikkinchi tenglamasiga qoʻyib, x_2 noma’lumni topamiz:

$$-8x_2 - 3 \cdot 1 = -3 \Rightarrow -8x_2 - 3 = -3 \Rightarrow -8x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0.$$

Topilgan $x_3=1$ va $x_2=0$ natijalarni uchburchakli sistemaning birinchi tenglamasiga qoʻyib, x_1 noma’lum qiymatini topamiz:

$$x_1 + 0 + 1 = 0 \Rightarrow x_1 + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -1.$$

Demak, berilgan sistemaning ildizlari $x_1= -1$, $x_2=0$, $x_3=1$ boʻladi va Kramer usulida topilgan natijalar bilan ustma‒ust tushadi.

Endi bu sistemani matritsalar usulida yechamiz. Buning uchun berilgan sistema boʻyicha quyidagi matritsalarni kiritamiz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Bu holda berilgan chiziqli tenglamalar sistemasi $AX= B$ koʻrinishga keladi va uning ildizlaridan iborat X matritsa $X=A^{-1}\cdot B$ formula bilan topiladi. Bu yerda A^{-1} yuqoridagi A matritsaga teskari matritsa boʻlib, u

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}$$

formula orqali topiladi. Shu sababli dastlab Δ=detA aniqlovchini va A_{ij} algebraik toʻldiruvchilarni hisoblaymiz. Kramer usuli koʻrilayotganda

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ 5 & -3 & 2\\ 2 & -1 & 3\end{vmatrix}=-17$$

ekanligi topilgan edi. Algebraik toʻldiruvchi ta’rifiga asosan

$$A_{11}=\begin{vmatrix} -3 & 2\\ -1 & 3\end{vmatrix}=-7\ ,\quad A_{12}=-\begin{vmatrix} 5 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix}=-11\ ,\quad A_{13}=\begin{vmatrix} 5 & -3\\ 2 & -1\end{vmatrix}=1$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix} 1 & 1\\ -1 & 3\end{vmatrix}=-4\ ,\quad A_{22}=\begin{vmatrix} 1 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix}=1\ ,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix} 1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=3$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix} 1 & 1\\ -3 & 2\end{vmatrix}=5\ ,\quad A_{32}=-\begin{vmatrix} 1 & 1\\ 5 & 2\end{vmatrix}=3\ ,\quad A_{33}=\begin{vmatrix} 1 & 1\\ 5 & -3\end{vmatrix}=-8$$

ekanligini topamiz.

Demak,

$$A^{-1}=\frac{1}{-17}\begin{pmatrix} -7 & -4 & 5\\ -11 & 1 & 3\\ 1 & 3 & -8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{7}{17} & \frac{4}{17} & -\frac{5}{17}\\ \frac{11}{17} & -\frac{1}{17} & -\frac{3}{17}\\ -\frac{1}{17} & -\frac{3}{17} & \frac{8}{17}\end{pmatrix}$$

va matritsalarni koʻpaytirish ta’rifiga asosan

$$X=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=A^{-1}B=\begin{pmatrix} \frac{7}{17} & \frac{4}{17} & -\frac{5}{17}\\ \frac{11}{17} & -\frac{1}{17} & -\frac{3}{17}\\ -\frac{1}{17} & -\frac{3}{17} & \frac{8}{17}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0\\ -3\\ 1\end{pmatrix}=\frac{1}{17}\begin{pmatrix} -17\\ 0\\ 17\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}.$$

Bu yerdan yana bir marta berilgan sistemaning yechimi $x_1=-1$, $x_2=0$ va $x_3=1$ ekanligini koʻramiz.

II topshiriq

Fazoda uchlari $A(8,6,4)$, $B(10,5,5)$, $C(5,6,8)$ va $D(9,10,7)$ nuqtalarda joylashgan piramida berilgan. Bu piramida bo’yicha quyidagilarni bajaring:

1. $\overrightarrow{AB}$ vektor koordinatalarini toping va undan foydalanib *AB* qirra uzunligini hisoblang;

2. $\overrightarrow{AB}$ va $\overrightarrow{AD}$ vektorlardan foydalanib *AB* va *AD* qirralar orasidagi φ burchak kosinusini toping;

3. $\overrightarrow{AB}$ va $\overrightarrow{AD}$ vektorlardan foydalanib piramidaning ABD tomoni yuzasini toping ;

4. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ va $\overrightarrow{AD}$ vektorlar yordamida *ABCD* piramidaning hajmini aniqlang;

5. AD qirra yotgan toʻgʻri chiziqning kanonik va parametrik tenglamalarini yozing;

6. ABC yoq yotgan tekislikning umumiy, kesmalardagi va normal tenglamalarni yozing;

7. Piramidaning ABC va ABD yoqlari orasigi ikki yoqli α burchak kosinusini toping;

8. Piramidaning D uchidan tushirilgan DH balandligi yotuvchi L to’g’ri chiziqning kanonik tenglamasini aniqlang;

9. Piramidaning D uchidan tushirilgan DH balandligining uzunligini toping.

Yechish: **1.** $\overrightarrow{AB}=(x,\ y,\ z)$ vektorning x, y va z koordinatalari uning B(10,5,5) uchi va A(8,6,4) boshi mos koordinatalarining ayirmasiga teng , ya’ni

$$\overrightarrow{AB}=(x, y, z)=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)=(10-8, 5-6, 5-4)=(2, -1, 1).$$

AB qirraning |AB| uzunligi topilgan $\overrightarrow{AB}$ vektor moduliga teng bo’ladi va $|\overrightarrow{AB}|$ modul formulasiga asosan

$$|AB|=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{6}.$$

2. Dastlab yuqoridagi singari A(8,6,4) va D(9,10,7) nuqtalar bo’yicha $\overrightarrow{AD}$ vektor koordinatalarini topamiz:

$$\overrightarrow{AD}=(9-8, 10-6, 7-4)=(1, 4, 3).$$

AB va AD qirralar orasidagi φ burchak kosinusini $\overrightarrow{AB}=(2, -1, 1)$ va $\overrightarrow{AD}=(1, 4, 3)$ vektorlar orasidagi burchak formulasi, vektorlar skalyar ko’paytmasi va modullarini koordinatalar orqali ifodasidan foydalanib topamiz:

$$\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AD}\right|}=\frac{2\cdot1+(-1)\cdot4+1\cdot3}{\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+4^2+3^2}}=\frac{1}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{26}}=\frac{1}{\sqrt{156}}.$$

3. Piramidaning ABD yog’ining S yuzasini topish uchun $\overrightarrow{AB}=(2, -1, 1)$ va $\overrightarrow{AD}=(1, 4, 3)$ vektorlarning vektorial ko’paytmasidan foydalanamiz. Vektorial ko’paytmaning koordinatalardagi ifodasi va III tartibli aniqlovchini hisoblash formulasiga asosan

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 4 & 3\end{vmatrix}=-3i+8k+j+k-4i-6j=-7i-5j+9k=(-7,-5,9).$$

Bu yerdan, vektorial ko’paytma modulining geometrik ma’nosiga asosan,

$$S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{(-7)^2+(-5)^2+9^2}=\frac{\sqrt{155}}{2}\ \text{kv.birlik}$$

javobga ega bo’lamiz.

4. Dastlab A(8,6,4) va C(5,6,8) nuqtalar bo’yicha $\overrightarrow{AC}$ vektor koordinatalarini topamiz:

$$\overrightarrow{AC}=(5-8, 6-6, 8-4)=(-3, 0, 4).$$

$ABCD$ piramidaning V hajmini

$$\overrightarrow{AB}=(2, -1, 1),\quad \overrightarrow{AC}=(-3, 0, 4),\quad \overrightarrow{AD}=(1, 4, 3)$$

vektorlarning aralash ko’paytmasi yordamida topamiz. Aralash ko’paytmaning koordinatalar orqali ifodasi formulasidan foydalanib

$$V=\pm\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix}2 & -1 & 1\\ -3 & 0 & 4\\ 1 & 4 & 3\end{vmatrix}=$$

$$=\pm\frac{1}{6}(0+(-4)+(-12)-0-32-9)=\pm\frac{1}{6}\cdot(-57)=\frac{57}{6}=9\frac{1}{2}\text{ kub birlik}$$

natijani olamiz.

5. *AD* qirra yotgan toʻgʻri chiziqning kanonik tenglamasini ikkita A(8,6,4) va D(9,10,7) nuqtalardan oʻtuvchi toʻgʻri chiziq tenglamasi formulasidan foydalanib topamiz:

$$AD:\quad \frac{x-8}{9-8}=\frac{y-6}{10-6}=\frac{z-4}{7-4}\Rightarrow\frac{x-8}{1}=\frac{y-6}{4}=\frac{z-4}{3}.$$

Endi AD qirraning kanonik tenglamasidagi kasrlarni *t* parametrga tenglashtirib, uning parametrik tenglamasini hosil qilamiz :

$$\frac{x-8}{1}=\frac{y-6}{4}=\frac{z-4}{3}=t\Rightarrow x-8=t,\quad y-6=4t,\quad z-4=3t\Rightarrow$$

$$x=t+8,\quad y=4t+6,\quad z=3t+4.$$

6. *ABC* yoq yotgan tekislikning *Ax+By+Cz+D*=0 koʻrinishdagi umumiy tenglamasini uchta *A*(8,6,4) , *B*(10,5,5) va *C*(5,6,8) nuqtalardan oʻtuvchi tekislik tenglamasining ifodasi yordamida topamiz:

$$\begin{vmatrix}x-8 & y-6 & z-4\\ 10-8 & 5-6 & 5-4\\ 5-8 & 6-6 & 8-4\end{vmatrix}=0\Rightarrow\begin{vmatrix}x-8 & y-6 & z-4\\ 2 & -1 & 1\\ -3 & 0 & 4\end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow -4(x-8)-3(y-6)-3(z-4)-8(y-6)=0\Rightarrow$$

$$-4x+32-3y+18-3z+12-8y+48=0$$

$$-4x-11y-3z+110=0\Rightarrow 4x+11y+3z-110=0$$

Endi *ABC* yoqning kesmalarga nisbatan $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ tenglamasini topish uchun uning umumiy tenglamasini –*D* = 110 ga boʻlamiz:

$$\frac{4x}{110}+\frac{11y}{110}+\frac{3z}{110}-\frac{110}{110}=0\Rightarrow\frac{x}{5/2}+\frac{y}{10}+\frac{z}{110/3}=1.$$

Bu yerdan izlangan kesmalardagi tenglamada *a*=5/2 , *b*=10 va *c*=110/3 ekanligini koʻramiz.

ABC yoqning normal $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$ tenglamasini topish uchun normallashtiruvchi *M* koʻpaytuvchini topib, *ABC* yoqning umumiy tenglamasining ikkala tomonini *M* ga koʻpaytiramiz. Umumiy tenglamada ozod had *D* = –110<0 boʻlgani uchun

$$M=\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{1}{\sqrt{4^2+11^2+3^2}}=\frac{1}{\sqrt{16+121+9}}=\frac{1}{\sqrt{146}}\quad\Rightarrow$$

$$\frac{4}{\sqrt{146}}x+\frac{11}{\sqrt{146}}y+\frac{3}{\sqrt{146}}z-\frac{110}{\sqrt{146}}=0.$$

Demak, $\cos\alpha=4/\sqrt{146}$, $\cos\beta=11/\sqrt{146}$, $\cos\gamma=3/\sqrt{146}$ va $p=110/\sqrt{146}$.

7. Dastlab *ABD* yoq yotgan tekislikning umumiy tenglamasini topamiz:

$$\begin{vmatrix} x-8 & y-6 & z-4 \\ 10-8 & 5-6 & 5-4 \\ 9-8 & 10-6 & 7-4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-8 & y-6 & z-4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -3(x-8)+(y-6)+8(z-4)+(z-4)-6(y-6)+4(x-8)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-5y+9z-14=0.$$

Umumiy tenglamalari $4x+11y+3z-110=0$ va $x-5y+9z-14=0$ bo'lgan *ABC* va *ABD* tekisliklar orasidagi burchak formulasiga asosan cosα qiymatini topamiz:

$$\cos\alpha = \frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}} =$$

$$= \frac{4\cdot 1+11\cdot(-5)+3\cdot 9}{\sqrt{4^2+11^2+3^2}\cdot\sqrt{1^2+(-5)^2+9^2}} = -\frac{24}{\sqrt{146}\cdot\sqrt{107}} = -\frac{24}{\sqrt{15622}}\ .$$

8. Piramidaning D(9,10,7) uchidan tushirilgan *DH* balandlik yotgan *L* to'g'ri chiziq tenglamasini topish uchun dastlab bu nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqlar dastasi tenglamasidan foydalanamiz:

$$L:\quad \frac{x-9}{m} = \frac{y-10}{n} = \frac{z-7}{p}.$$

Bu to'g'ri chiziq *ABC* yoq yotgan va $4x+11y+3z-110=0$ umumiy tenglama bilan aniqlangan tekislikka perpendikulyar joylshgan. Shu sababli, fazodagi to'g'ri chiziq va tekislikning perpendikulyarlik shartiga asosan, $m=4$, $n=11$ va $p=3$ deb olish mumkin. Demak, *DH* balandlik yotgan *L* to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasi quyidagicha bo'ladi:

$$L:\quad \frac{x-9}{4} = \frac{y-10}{11} = \frac{z-7}{3}\ .$$

9. Piramidaning D(9,10,7) uchidan tushirilgan *DH* balandlikning *h* uzunligini bu nuqtadan umumiy tenglamasi $4x+11y+3z-110=0$ boʻlgan *ABC* yoq yotgan tekislikkacha boʻlgan *d* masofa formulasidan foydalanib topamiz:

$$h = d = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{|4\cdot 9+11\cdot 10+3\cdot 7-110|}{\sqrt{4^2+11^2+3^2}} =$$

$$= \frac{|36+110+21-110|}{\sqrt{146}} = \frac{57}{\sqrt{146}}.$$

III topshiriq

III.1-masala

Quyidagi berilgan funksiyalarning hosilalarini toping:

a) $y = \dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$, b) $y = (3x^2+5x-4)\sin x$,

c) $y = \ln(3tgx + e^x)$ d) $x = t(\cos t - \sin t),\ y = t(\cos t + \sin t)$.

<u>Yechish:</u> *a*) Bo'linmaning hosilasi

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$$

formulasida $u = x, \quad v = \sqrt{a^2-x^2}$ deb olib va hosilalar jadvalidan foydalanib, ushbu natijani olamiz:

$$y' = \left(\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)' = \frac{x'\sqrt{a^2-x^2} - x\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)'}{(\sqrt{a^2-x^2})^2} = \frac{\sqrt{a^2-x^2} - \dfrac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}}(a^2-x^2)'}{a^2-x^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{a^2-x^2} + \dfrac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}}{a^2-x^2} = \frac{(\sqrt{a^2-x^2})^2 + x^2}{\sqrt{\left(a^2-x^2\right)^3}} = \frac{a^2-x^2+x^2}{\sqrt{\left(a^2-x^2\right)^3}} = \frac{a^2}{\sqrt{\left(a^2-x^2\right)^3}} \ .$$

b) Ko'paytmaning hosilasi $(uv)' = u'v + uv'$ formulasida

$$u = 3x^2 + 5x - 4, \quad v = \sin x$$

deb olib va hosilalar jadvalidan foydalanib, ushbu javobga kelamiz:

$$y' = \left((3x^2+5x-4)\sin x\right)' = (3x^2+5x-4)'\sin x + (3x^2+5x-4)(\sin x)' =$$
$$= (6x+5)\sin x + (3x^2+5x-4)\cos x.$$

c) Murakkab funksiyaning hosilasi $\left[f(u)\right]' = f'(u)\cdot u'$ formulasida $f(u) = \ln u, \quad u = 3tgx + e^x$ deb olib va hosilalar jadvaliga asosan

$$y' = [\ln(3tgx + e^x)]' = (u = 3tgx + e^x) = (\ln u)' = \frac{1}{u}u' =$$

$$= \frac{1}{3tgx+e^x}(3tgx+e^x)' = \frac{1}{3tgx+e^x}(3\cdot\frac{1}{\cos^2 x} + e^x) = \frac{3+e^x\cos^2 x}{(3tgx+e^x)\cos^2 x}$$

natijaga erishamiz.

d) Parametrik $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ ko'rinishda berilgan funksiyaning hosilasini topish

$$y' = \frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}$$

formulasida $x=\varphi(t)=t(\cos t - \sin t)$, $y=\psi(t)= t(\cos t+\sin t)$ deb, izlanayotgan y' hosilaning parametrik ko'rinishdagi ifodasini topamiz:

$$y' = \frac{[t(\cos t - \sin t)]'}{[t(\cos t + \sin t)]'} = \frac{t'(\cos t - \sin t) + t(\cos t - \sin t)'}{t'(\cos t + \sin t) + t(\cos t + \sin t)'} =$$

$$= \frac{(\cos t - \sin t) + t(-\sin t - \cos t)}{(\cos t + \sin t) + t(-\sin t + \cos t)} = \frac{\cos t - \sin t - t(\sin t + \cos t)}{\cos t + \sin t - t(\sin t - \cos t)} \ .$$

III.2-masala

Ushbu $y=\sqrt[3]{x^2}-2x-2$ funksiya grafigiga absissasi x_0 =1 bo'lgan nuqtada o'tkazilgan urinma va normal tenglamasini tuzing.

Yechish: Ma'lumki, differentsiallanuvchi $y=f(x)$ funksiya grafigining $(x_0, y_0)=(x_0, f(x_0))$ nuqtasiga o'tkazilgan urinma tenglamasi

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0),$$

normal tenglamasi esa

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$$

formulalar bilan topiladi. Bizning masalada $f(x)=\sqrt[3]{x^2}-2x-2$, x_0=1 va

$$y_0=f(x_0)=f(1)=\sqrt[3]{1^2}-2\cdot 1-2=1-4=-3,$$

$$y'(x)=f'(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}-2 \Rightarrow f'(x_0)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x_0}}-2=\frac{2}{3\sqrt[3]{1}}-2=\frac{2}{3}-2=-\frac{4}{3}$$

bo'ladi. Bu yerdan urinma tenglamasi

$$y+3=-\frac{4}{3}(x-1) \Rightarrow 3y+9=-4x+4 \Rightarrow 4x+3y+5=0,$$

normal tenglamasi esa

$$y+3=\frac{3}{4}(x-1) \Rightarrow 4y+12=3x-3 \Rightarrow 3x-4y-15=0$$

ko'rinishda ekanligi kelib chiqadi.

III.3-masala

Moddiy nuqta $s=t\sin^2 t$ tenglama bo'yicha harakatlanmoqda. Bu moddiy nuqtaning berilgan t=π/4 vaqtdagi $v(\pi/4)$ tezligini va $a(\pi/4)$ tezlanishini aniqlang.

Yechish: Harakat tenglamasi $s=s(t)$ bo'lgan moddiy nuqtaning $t=t_0$ vaqtdagi tezligi $v(t_0)=s'(t_0)$ va tezlanishi $a(t_0)=s''(t_0)$ hosilalar orqali topiladi. Shu sababli dastlab I tartibli $s'(t)$ va II tartibli $s''(t)$ hosilalarni hisoblaymiz:

$$s'(t)=(t\sin^2 t)'=t'\sin^2 t+t(\sin^2 t)'=\sin^2 t+t\cdot 2\sin t\cos t=\sin^2 t+t\sin 2t,$$

$$s''(t)=[s'(t)]'=[\sin^2 t+t\sin 2t]'=\sin 2t+\sin 2t+2t\cos 2t=2(\sin 2t+t\cos 2t)$$ B

u yerdan, yuqoridagi formulalarga asosan,

$$v(\frac{\pi}{4})=s'(\frac{\pi}{4})=\sin^2\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{2}=(\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{\pi}{4}\cdot 1=\frac{2+\pi}{4},$$

$$a(\frac{\pi}{4})=s''(\frac{\pi}{4})=2(\sin\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{2})=2(1+\frac{\pi}{4}\cdot 0)=2 .$$

III.4-masala

Berilgan $f(x)=x^3+4{,}5x^2-12x+1$ funksiyani ekstremumga tekshiring va uning monotonlik oraliqlarini toping.

Yechish: Berilgan $f(x)=x^3+4{,}5x^2-12x+1$ funksiyani ekstremumga tekshirish uchun dastlab $f'(x)=0$ tenglamadan uning kritik nuqtalarini topamiz:

$$f'(x)=(x^3+4{,}5x^2-12x+1)'=3x^2+9x-12=0 \Rightarrow 3x^2+9x-12=0 \Rightarrow x^2+3x-4=0,$$

$$x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{2}=\frac{-3\pm 5}{2} \Rightarrow x_1=-4,\ x_2=1.$$

Dastlab funksiyaning $x_1=-4$ kritik nuqtadagi xarakterini aniqlaymiz. Bunda $x<-4$ holda $f'(x)>0$ va $x>-4$ holda $f'(x)<0$ bo'ladi. Demak, $x_1=-4$ kritik nuqtada funksiya lokal maksimumga ega bo'ladi va

$$f_{max}=f(-4)=(-4)^3+4.5\cdot(-4)^2-12\cdot(-4)+1=57.$$

Endi funksiyaning $x_2=1$ kritik nuqtadagi xarakterini aniqlaymiz. Bunda $x<1$ holda $f'(x)<0$ va $x>1$ holda $f'(x)>0$ bo'ladi. Demak, $x_2=1$ kritik nuqtada funksiya lokal minimumga ega bo'ladi va

$$f_{min}=f(1)=1^3+4.5\cdot 1^2-12\cdot 1+1=-5.5\ .$$

Funksiyaning monotonlk oraliqlari, ya'ni o'sish va kamayish sohalari, $f'(x)>0$ va $f'(x)<0$ tengsizliklarning yechimlari kabi topiladi. Bunda

$$f'(x)>0 \Rightarrow 3x^2+9x-12>0 \Rightarrow x<-4,\ x>1$$

bo'lgani uchun funksiyaning o'sish sohasi $(-\infty,-4)\cup(1,\infty)$ ekanligi kelib chiqadi.

Xuddi shunday tarzda

$$f'(x)<0 \Rightarrow 3x^2+9x-12<0 \Rightarrow -4<x<1$$

bo'lgani uchun funksiyaning kamayish sohasi $(-4,1)$ oraliqdan iborat ekanligi kelib chiqadi.

ILOVA. HOSILALAR JADVALI

	I. DARAJALI FUNKSIYALAR	
1	$(x^n)'=nx^{n-1},\quad n\in(-\infty,\infty)$	2 $(u^n)'=nu^{n-1}u',\ u=u(x)$
3	$(C)'=0, C-const.\quad (x)'=1\qquad (x^2)'=2x$ $(x^3)'=3x^2$	4 $(\frac{1}{x})'=-\frac{1}{x^2}\qquad (\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$
	II. KO'RSATGICHLI FUNKSIYALAR	
5	$(a^x)'=a^x\ln a, a>0, a\neq 1$	6 $(a^u)'=a^u u'\ln a, u=u(x)$
7	$(e^x)'=e^x\qquad (10^x)'=10^x\ln 10$	8 $(e^u)'=e^u\cdot u',\quad u=u(x)$
	III. LOGARIFMIK FUNKSIYALAR	
9	$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}=\frac{\log_a e}{x}, a>0, a\neq 1$	10 $(\log_a u)'=\frac{u'}{u\ln a}=\frac{u'\log_a e}{u}, u=u(x)$
11	$(\ln x)'=\frac{1}{x}\qquad (\lg x)'=\frac{1}{x\ln 10}=\frac{\lg e}{x}$	12 $(\ln u)'=\frac{1}{u}u',\quad u=u(x)$
	IV. TRIGONOMETRIK FUNKSIYALAR	
13	$(\sin x)'=\cos x\qquad (tgx)'=\frac{1}{\cos^2 x}$	14 $(\sin u)'=\cos u\cdot u'\qquad (tgu)'=\frac{u'}{\cos^2 u}$

15	$(\cos x)' = -\sin x \quad (ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	16 $(\cos u)' = -\sin u \cdot u' \quad (ctgu)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$
17	$(\sec x)' = (\dfrac{1}{\cos x})' = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x} = \sec x \cdot tgx$	18 $(\cos ecx)' = (\dfrac{1}{\sin x})' = -\dfrac{\cos x}{\sin^2 x} = -\cos ecx \cdot ctgx$
V. TESKARI TRIGONOMETRIK FUNKSIYALAR		
19	$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, (\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	20 $(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}, (\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
21	$(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2} \quad (arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$	22 $(arctgu)' = \dfrac{u'}{1+u^2} \quad (arcctgu)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$
VI. GIPERBOLIK FUNKSIYALAR		
23	$(shx)' = \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = chx$	24 $(chx)' = \left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = shx$
25	$(thx)' == \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)' = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = cthx$	26 $(cthx)' == \left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\right)' = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = thx$
VII. DIFFERENSIALLASH QOIDARLARI		
27	$(C \cdot u)' = C \cdot u' \quad (u \pm v)' = u' \pm v'$	28 $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$
29	$(\dfrac{u}{v})' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$	30 $[f(u)]' = f'(u) \cdot u', \quad u = u(x)$
31	$(u \cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}, \quad C_n^k = \dfrac{k!}{n!(n-k)!}$	32 $(u^v)' = u^v v' \ln u + v u^{v-1} u'$

55-MAVZU

KOMPLEKS SONLAR VA ULAR USTIDA AMALLAR. KOMPLEKS O'ZGARUVCHILI FUNKSIYA

§14.1. Kompleks sonlar ustida amallar

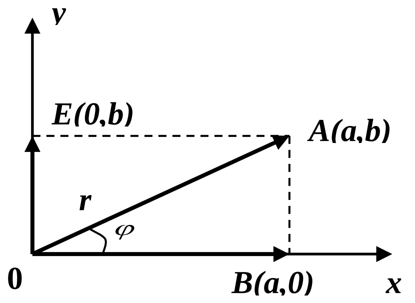
Ta'rif: z=*a*+*bi* ko'rinishidagi son kompleks son deyiladi. Bu yerda *a*=Rez;*b*=ImZ $i^2 = -1$ yoki $\sqrt{-1} = i$. $\bar{z} = a - ib$ -berilgan kompleks sonning qo'shmasi deyiladi. E- kompleks sonlar to'plami bo'lsin. z = *x* + *i y* kompleks son shu to'plam ixtiyoriy elementi bo'lishi mumkin. $z_1 = a_1 + ib_1, \quad z_2 = a_2 + ib_2$ kompleks sonlar berilgan bo'lsa, ular ustida quyidagi amallar bajarish mumkin:

1) Qo'shish: $z_1 + z_2 = (a_1 + b_1) + i(b_1 + b_2)$

2) Ayirish: $z_1 - z_2 = (a_1 - b_1) + i(b_1 - b_2)$

3) Ko'paytirish: $z_1z_2 = (a_1b_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1)$

4) Bo'lish: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1}{z_2}\cdot\dfrac{z_2}{z_2} = \dfrac{a_1+ib_1}{a_2+ib_2}\cdot\dfrac{a_2-ib_2}{a_2-ib_2} = \dfrac{(a_1a_2+b_1b_2)+i(a_2b_1-a_1b_2)}{a_2^2+b_2^2}$



1-chizma. Kompleks sonning geometrik tasviri

Kompleks sonning trigonometrik shakli. $z = a + bi$ kompleks son $\overline{OA}$ vektor bilan tasvirlangan bo'lsin (14.1-chizma). $\overline{OA}$ vektorning OA uzunligini r deb, bu vektor bilan OX o'qning musbat yo'nalishi orasidagi burchakni φ deb belgilasak $a = r\cos\varphi;\quad b = r\sin\varphi$.

Bu qiymatlarni $z = a + bi$ ga qo'yib, r ni qavsdan tashqariga chiqarsak: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ni $z = a + bi$ kompleks sonning trigonometrik shakli deyiladi, bu yerda $r = |z|$, $r = \sqrt{a^2+b^2}$, $\arg z = \varphi = arctg\,\dfrac{b}{a}$.

Trigonometrik shakldagi kompleks sonlarni ko'paytirish va bo'lish. Ushbu :

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),\ z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

kompleks sonlarni ko'paytirib, quyidagini hosil qilamiz:

$$z_1z_2 = r_1r_2[\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)]$$

yoki $z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]$.

Umuman, matematik induksiya metodi bilan, n ta

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),......., z_n = r_n(\cos\varphi_n + i\sin\varphi_n)$$

kompleks sonlar uchun :

$$z_1z_2..z_n = r_1r_2..r_n[\cos(\varphi_1+\varphi_2+...+\varphi_n) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2+...+\varphi_n)]$$

ekanligini ko'rsatih mumkin. Shunday qilib, bu hol uchun

$$z_1z_2..z_n = r_1r_2..r_n[\cos(\varphi_1+\varphi_2+...+\varphi_n) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2+...+\varphi_n)]$$

tenglikdan

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

yoki

$$[r(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

kelib chiqadi.

Kompleks sondan ildiz chiqarish. $a + bi$ kompleks sonning kvadrat ildizi deb, kvadrati $a + bi$ songa teng bo'lgan $x + yi$ kompleks songa aytiladi. Shunday qilib, $a + bi = (x + yi)^2$.

$a + bi$ kompleks sonning kvadrat ildizi $\sqrt{a+bi}$ ko'rinishida belgilanadi.

Demak, x va y ning $x = \pm\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}$ va $y = \pm\sqrt{\dfrac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}$ qiymatlarini $a + bi = x + yi$ ga qo'yib, $b>0$ va $b<0$ ga mos quyidagi ikki formulani hosil qilamiz:

$$\sqrt{a+bi} = \pm\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} + i\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right) \quad b>0 \text{ uchun,}$$

$$\sqrt{a+bi}=\pm\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}-i\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right) \quad b<0 \text{ uchun.}$$

Ushbu $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ kompleks sonning n – darajali ildizini

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right) \qquad (14.1)$$

ko'rinishida yozish mumkin. (14.1) formulada k istalgan butun sonni ifodalaydi. Lekin k ga $0, 1, 2, 3, \ldots, n-1$ qiymatlarni berish kifoya.

A guruh

Quyidagilarni toping: 1) z_1+z_2; 2) z_1-z_2; 3) $\overline{z_1}$; 4) $z_1\cdot z_2$; 5) $z_1:z_2$; 6) z_2^3,
7) z_1+z_2 va z_1-z_2 chizmada tasvirlang.

14.1. $z_1=-2,\quad z_2=2i$ 14.2. $z_1=2i,\quad z_2=-2i$ 14.3. $z_1=-2i,\quad z_2=1+i$

14.4. $z_1=2i,\quad z_2=-2i$ 14.5. $z_1=\sqrt{15}-i,\quad z_2=1-i\sqrt{15}$.

14.6. $z_1=-3+4i,\quad z_2=3-4i$ 14.7. $z_1=6+11i,\quad z_2=7+3i$ $\frac{75}{58}+\frac{59}{58}i$; $154+414i$. 14.8. $z_1=3-i,\quad z_2=4+5i$

14.9 Quyidagi kompleks sonlarni tasvirlovchi vektorlar yasalsin:

a) $3+i$; b) $-4+5i$; v) $7-4i$; g) $-2-6i$;

d) 1; e) -1; j) $i\sqrt{2}$; z) $1+i\sqrt{3}$; i) $2-\sqrt{3}+4i$;

k) 8; l) $1-2i\sqrt{2}$; m) -7; n) $-5i$.

14.10. Quyidagi ildizlarni hisoblang:

a) $\sqrt{2i}$; b) $\sqrt{-8i}$; v) $\sqrt{3-4i}$; g) $\sqrt{-15+8i}$;

d) $\sqrt{-11+60i}$; e) $\sqrt{2-3i}$; j) $\sqrt{1-i\sqrt{3}}$; z) $\sqrt{4+i}+\sqrt{4-i}$;

i) $\sqrt[4]{-7+24i}$; k) $\sqrt[4]{-4}$; l) $\sqrt[4]{-1}$; m) $\sqrt[4]{2+i\sqrt{12}}$.

n) $\sqrt{15+8i}$ ni hisoblang.

o) $x^2-(5-i)x+(8-i)=0$ kvadrat tenglamani yeching.

14.11. $\sqrt{7+3i}$ ni hisoblang.

B guruh

14.12. Ushbu kvadrat tenglamalarni yeching.

a) $x^2-(3+2i)x+(1+3i)=0$; b) $(7+i)x^2-(7+i)x+2=0$;

v) $(1+i)x^2-(7+2i)x+(8-i)=0$.

14.13. Ushbu kompleks sonlarni trigonometrik shaklga keltiring:

a) 3; b) -2; v) $\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$; g) $2i$; d) $\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$; e) $-1+i\sqrt{3}$;

j) $3+i$; z) $4-i$; i) $-2+i$; k) $-1-2i$;

Quyidagi ildizlarining barcha qiymatlarini toping. Ildiz ostida turgan sonlarni ko'rsatkichli ko'rinishda tasvirlang.

14.14. $\sqrt{1+i}$ 14.15. $\sqrt{3+4i}$ 14.16. $\sqrt{-1+i}$ 14.17. $\sqrt[3]{\sqrt{15}-i}$

14.18. $\sqrt[3]{-3+4i}$ 14.19. $\sqrt[3]{3-4i}$ 14.20. $\sqrt[4]{-1}$ 14.21. $\sqrt[5]{1-i}$

14.22. $\sqrt[5]{-1-i}$ 14.23. $\sqrt[8]{-2+2i}$

14.24. Quyidagi ildizlarni hisoblang.

a) $\sqrt[3]{-1+i}$; b) $\sqrt[n]{-1}$; v) $\sqrt[4]{32}$; g) $\sqrt[3]{i}$; d) $\sqrt[3]{-i}$; e) $\sqrt[6]{2}$.

Quyidagi ifodalarni sinus va kosinusning darajalari orqali ifodalang.

14.25. $\sin 3x$ 14.26. $\cos 3x$ 14.27. $\sin 4x$ 14.28. $\cos 4x$ 14.29. $\sin 5x$

Quyidagi ifodalarni sinus va kosinusning karrali yoylari orqali ifodalang.

14.30. $\sin^2 x$ 14.31. $\sin^3 x$ 14.32. $\sin^4 x$ 14.33. $\cos^4 x$ 14.34. $\cos^5 x$ 14.35. $\cos^6 x$

C guruh

14.36. Chiziq tenglamasini kompleks ko'rinishda yozing.

a) $3x+y=1$ b) $(x-1)y=2$ v) $2(x-1)^2+3(y+2)^2=6$

14.37. $z=2+2i$ sonni trigonometrik shakldа ifodalang.

14.38. $z=3\left(\cos\frac{2\pi}{3}-i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ sonning moduli va argumentini toping.

14.39. Ushbu $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$ kompleks sonni $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$ kompleks soniga bo'ling.

14.40. $z_1=3(\cos 30^0+i\sin 30^0)$, $z_2=2(\cos 60^0+i\sin 60^0)$ berilgan. $\frac{z_1}{z_2}$ ni hisoblang.

14.41. $\sin 2\varphi$ va $\cos 2\varphi$ ni $\sin\varphi$ va $\cos\varphi$ orqali ifodalang. 13.42. $\left[2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right]^6$ ni hisoblang.

14.43. $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{20}$ ni hisoblang.

14.44. Quyidagi kompleks sonlarni trigonometrik shaklga keltirib, so'ngra ko'rsatilgan amallarni bajaring:

a) $(-5+5i\sqrt{3})(1-i)$; b) $\frac{-5+5i\sqrt{3}}{(1-i)^2}$; v) $(1+i)^{25}$; g) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$; d) $\frac{(-1+i\sqrt{3})^{15}}{(1-i)^{20}}+\frac{(-1-i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{20}}$.

14.45. Ushbu $(\cos 15^0+i\sin 15^0)(\cos 30^0+i\sin 30^0)=\cos 45^0+i\sin 45^0$ ayniyatdan foydalanib, $\sin 15^0$ va $\cos 15^0$ ning qiymatlarini toping.

14.46. $\frac{(1-i\sqrt{3})(\cos\alpha+i\sin\alpha)}{2(1-i)(\cos\varphi-i\sin\varphi)}$ ni hisoblang.

14.47. Quyidagi ayniyatlarni isbotlang (n – butun son):

a) $(1+i)^n=2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$, b) $(\sqrt{3}-i)^n=2^n\left(\cos\frac{n\pi}{6}-i\sin\frac{n\pi}{6}\right)$.

14.48. $(1+\cos\varphi+i\sin\varphi)^n$ ni bajaring.

14.49. $(\cos\varphi-i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi-i\sin n\varphi$ ayniyatni isbotlang.

14.50. $\left(\frac{1+itg\varphi}{1-itg\varphi}\right)^n=\frac{1+itgn\varphi}{1-itgn\varphi}$ ayniyatni isbotlang.

14.51. $\left|\alpha^{-n}\right|=|\alpha|^{-n}$ tenglikni isbotlang.

14.52. Quyidagi modullarni hisoblang :

a) $\left|\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}i\right)(3+2i)\right|$; b) $\left|\frac{\sqrt{2}-i}{\sqrt{3}+i}\right|$; v) $\left|\left(8+\frac{1}{\sqrt{5}}i\right)^5\right|$; g) $\left|\frac{\left(2+\frac{1}{2}i\right)^4\cdot\left(\sqrt{2}-2i\right)^3\cdot\left(1-\sqrt{3}i\right)}{\left(2+i\sqrt{2}\right)^2\cdot\left(\sqrt{3}+i\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-2i\right)^6}\right|$;

d) $\left|\left(\sqrt{5}+\frac{1}{\sqrt{3}}i\right)^{-2}\right|$; e) $\left|\sqrt[5]{(2+7i)^2+(1-i)^{-4}\cdot(5+3i)}\right|$; j) $\left|\left(\frac{\sqrt[3]{(3-4i)^3}\cdot\sqrt{(1+2i)(3-i)}}{\sqrt{(4+5i)^3}(1+i)\sqrt{2+i}}\right)^2\right|$.

56-MAVZU
KOMPLES O'ZGARUVCHILI FUNKSIYANING LIMITI, UZLUKSIZLIGI. KOMPLEKS O'ZGARUVCHILI FUNKSIYANING HOSILASI. ANALITIK FUNKSIYALAR. GARMONIK FUNKSIYALAR.

$z=x+iy$ kompleks o'zgaruvchining o'zgarishiga bog'liq holda ikkinchi kompleks o'zgaruvchi w o'zgarsin. Bu ikki kompleks o'zgaruvchiga bog'liq holda o'zgarishini

$$w=f(z) \qquad (14.2)$$

simvol bilan ifodalanib, uni odatdagidek funskiya deb ataymiz. Bunda argument kompleks o'zgaruvchi z bo'lgani uchun w kompleks o'zgaruvchili funksiya deyiladi. z o'rniga $x+iy$ ni yozib, hamda amallarni bajarib, haqiqiy va mavhum qismlarini ajratsak,

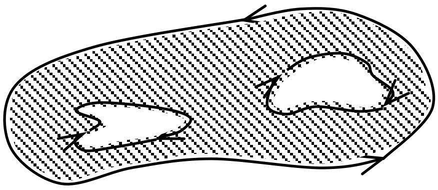
$$w=u(x,y)+iv(x,y) \qquad (14.3)$$

bo'ladi, bunda $u(x,y)$ va $v(x,y)$ mos ravishda kompleks funksiyaning haqiqiy va mavhum qismlaridir.

Agar tekislikning biror qismini qaraydigan bo'lsak, bu qismini tekislikning qolgan qismidan chiziq bilan ajratish kerak. Tekislik qismini ajratuvchi chiziq tenglamalari $x=\varphi(t),\quad y=\psi(t)$ bo'lsin. Bu chiziq ochiq va yopiq bo'lishi mumkin.

Agar chiziqning bosh va oxirgi nuqtalari bitta nuqtada bo'lsa, bunday chiziq yopiq deyiladi. Biz qaraydigan chiziqlarning karrali nuqtalari yo'q, ya'ni t parametrning ikkita qiymatiga (chiziqning bosh va oxirgi nuqtasidan boshqa) ikkita nuqta mos keladi, boshqacha aytganda, chiziq o'z-o'zini kesmaydi va o'z-o'ziga urinmaydi.

Tekislikning ushbu: 1) agar birorta nuqta to'plamga tegishli bo'lsa, bu nuqtaning atrofi ham shu to'plamga tegishli; 2) to'plamning ikkita ixtiyoriy nuqtasini birlashtiruvchi har qanday uzluksiz egri chiziqning nuqtalari to'plamga tegishli degan shartlarga bo'ysunuvchi nuqtalar to'plami soha deb ataladi.



14.2 –chizma.

Biz yuqorida ta'riflangan chiziqlar bilan chegaralangan sohalar bilangina ish ko'ramiz. Soha chegralangan chiziq sohaning konturi yoki chegarasi deyiladi. Sohaning ichki nuqtasi deganda nuqtaning o'zi va atrofi shu sohaga tegishli bo'lgan nuqta tushuniladi. Soha konturi bilan birga qaralsa, yopiq soha deyiladi. Konturi bitta chiziq bo'lgan soha bir bog'lamli, konturi bir necha yopiq chiziqlar bo'lgan soha ko'p bog'lamli deyiladi. Umuman, agar sohaning hamma nuqtalarini markazi koordinatalar boshida bo'lgan ixtiyoriy katta radiusli aylana ichiga joylashtirish mumkin bo'lsa, bu holda soha chegaralangan deyiladi. Aks holda soha chegaralanmagan deyiladi.

Kontur bo'ylab harakatlanganda soha chap tomonda qolsa, yo'nalish musbat, aks holda manfiy deyiladi (14.2-chizma).

Misol. $|z|<1$ yoki $x^2+y^2<1$ markazi koordinatalar boshida, radiusi 1 ga teng bo'lgan aylana bilan chegaralangan ochiq soha. $|z|=1$ yoki $x^2+y^2=1$ shu sohaning konturi.

z o'zgaruvchi *xOy* tekislikdagi *B* sohaning nuqtasi bo'lsin. Agar $f(z)$ funksiya *B* sohaning har bir buqtasida aniq chekli qiymatga ega bo'lsa, u holda B soha $w = f(z)$ funksiya *xOy* tekislikdagi (yoki *z* tekislikdagi) nuqtalarni *uOv* teskislikdagi (yoki *w* tekislikdagi) nuqtalarga o'takazadi. Xususan, funskiyaning aniqlash sohasi *B* bo'lsa, bu funksiya *B* sohani *B* sohaga o'zkazadi yoki akslantiradi deyiladi.

Kompleks o'zgaruvchili funksiyaning uzluksizligi. *B* soha $w = f(z)$ funksiyaning mavjudlik sohasi bo'lib, z_0 nuqta *B* sohaga tegishli bo'lsin.

Oldindan berilgan har qanday kichik musbat ε son uchun shunday musbat $\eta(\varepsilon) = \eta$ sonni toppish mumkin bo'saki, bunda $|z - z_0| < \eta(\varepsilon)$ bo'lganda, $|f(z) - A| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, $f(z)$ funksiya o'zgarmas A g intiladi deyiladi va $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$ ko'rinishida yoziladi. Xususan, agar $A = f(z_0)$ bo'lsa, $f(z)$ funsksiya z_0 nuqtada uzluksiz deyiladi. Demak, oldindan berilgan har qanday kichik musbat ε soni uchun musbat $\eta(\varepsilon) = \eta$ sonni topish mumkin bo'lsaki, bunda $|z - z_0| < \eta(\varepsilon)$ bo'lganda
$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, $f(z)$ funksiya z_0 nuqtada uzluksiz deyiladi.

Hosila. *B* sohada aniqlangan va bir qiymatli $f(z)$ funksiya berilgan bo'lsin; $f(z)$ funksiyaning z nuqtadagi hosilasi

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to z} \frac{\mathrm{f}(\mathrm{z} + \Delta\mathrm{z}) - f(z)}{\Delta \mathrm{z}} \qquad (14.4)$$

bo'ladi.

Elementar funksiyalardan hosilalari jadvali:

$$(z^n)' = nz^{n-1},$$

$$(e^z)' = e^z,$$

$$(\cos z)' = -\sin z$$

$$(\sin z)' = \cos z$$

$$(\ln z)' = \frac{1}{z}$$

$$(\arcsin z)' = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}$$

$$(\arccos z)' = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}$$

$$(arctgz)' = \frac{1}{\sqrt{1 + z^2}}$$

$$(shz)' = chz$$

$$(chz)' = shz$$

Agar $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ funksiya $z=x+iy$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u holda bu nuqtada xususiy hosilalar $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ mavjud bo'ladi. Binobarin,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (14.5)$$

Koshi-Riman shartlari (differensialanuvchi bo'lishining zaruriy va yetarli shartlari) o'rinli bo'ladi.

Misol. $w=z^2=(x+iy)^2=x^2-y^2+2xyi$: $u(x;y)=x^2-y^2$, $v(x;y)=2xy$:

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x}=(x^2-y^2)'_x=2x,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=(2xy)'_y=2x\right]\Rightarrow 2x=2x$$

$$\left[\frac{\partial v}{\partial x}=(2xy)'_x=2y,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=(x^2-y^2)'_y=-2y\right]\Rightarrow 2y=-(-2y).$$

(14.5) shartlar bajariladi, demak $w=z^2$ funksiya differensiallanuvchi.

B sohaning har bir nuqtasida hosilaga ega bo'lgan $w=f(z)$ funksiya shu sohada analitik deyiladi.

Bu tengliklarning bajarilishi funksiyaning hosilaga ega bo'lishligining zaruriy va yetarli shartlaridir. (14.5) Koshi-Riman yoki Dalamber-Eyler shartlari deyilib, bu funksiyaning analitiklik shartlaridir.

A guruh

143.53. $\left|\sqrt[n]{\alpha}\right|=\sqrt[n]{|\alpha|}$ tenglikni isbotlang.

14.54. $w=z^2+z$ funksiya berilgan. Funksiyaning 1) $z=1+i$; 2) $z=2-i$; 3) $z=i$; 4) $z=-1$ nuqyalaridagi qiymatini toping.

14.55. $f(z)=x^2+iy^2$ ($z=x+yi$) funksiya berilgan. Quyidagilarni toping. 1) $f(1+2i)$; 2) $f(2-3i)$; 3) $f(0)$; 4) $f(-i)$.

14.56. $w=|z|$ z 14.57. $w=z^2$ z 14.58. $\ln\left(\sqrt{3}+i\right)$ ni toping.

14.59. $\cos(i/2)$ ni $\varepsilon=0{,}0001$ aniqlikda toping.

14.60. $w=e^z$ funksiyani 1) $z=\pi i/2$ 2) $z=\pi(1-i)$ 3) $z=1+(\pi/2+2\pi k)i$, ($k\in Z$) buqtadagi qiymatin topilsin.

14.61. $f(z)=1/(x-yi)$, $z=x+yi$. $f(1+i)$, $f(i)$, $f(3-2i)$ larni toping.

14.62. $w=2z^3$ 14.63. $\ln(1-i)$ ni toping. 14.64. $\sin i\cdot ch1=i\cos i\cdot sh1$ ni isbotlang.

14.65. $\cos z=2$ tenglamani yeching. 14.66. $\arcsin i$ ni toping.

14.67. $\sin i$ ni hisoblang ($\varepsilon=0{,}001$). 14.68. $\sin(\pi/6+i)$ ni hisoblang ($\varepsilon=0{,}001$).

14.69. $f(z)=e^{e^z}$ funksiya berilgan. 1) $z=i$; 2) $z=1+\pi i/2$

14.70. Quyidagi tenglamalar bilan *xOy* tekisligida qanday chiziqlar ifodalangan.

a) $z=3+t^2+it$ b) $z=2t-4+i(3-4t^2)$ v) $z=i+3e^{it}$

B guruh

14.71. Limitlarni toping.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{n+2}-i\frac{n^2-2}{n^2+3}\right)$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2n+3i}{8n-7i}}$; c) $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\frac{2i}{n}$

d) $\lim\limits_{z\to 3i}\frac{z^2+9}{z-3i}$ e) $\lim\limits_{z\to -i}\frac{z^2+4}{z+i}$ f) $\lim\limits_{z\to 2+i}\frac{z^2-4z+5}{z^2-2iz-5}$ g) $\lim\limits_{z\to 0}\frac{1-\cos z}{z^2}$

14.72. Funksiyaning uzluksizligini tekshiring.

a) $w = z\operatorname{Re} z - 2z^2$ b) $w = \dfrac{2z-1}{z^2-6z+10}$ v) $w = \dfrac{2-3z}{1-|z|}$

Agar $z = re^{i\varphi}$ bo'lsa, $Argf(z)$ ni toping.

14.73. $f(z) = z^2$ 14.74. $f(z) = z^3$ 14.75. $f(z) = \sqrt[3]{z+1}$

14.76. $f(z) = \sqrt{z-8}$ 14.77. $f(z) = \sqrt{z^2-4}$ 14.78. $f(z) = \sqrt{\dfrac{z-2}{z+1}}$

Ko'rsatilgan nuqtadagi funksiyaning qiymatini hisoblang.

14.79. $\cos(1+i)$ 14.80. chi 14.81. $sh(-2+i)$

14.82. $Ln(-1)$ 14.83. $\ln i$ 14.84. $Ln\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$

Funksiyani Koshi –Riman shartlariga $f'(z)$ ni toping.

14.85. $f(z) = e^{3z}$ 14.86. $f(z) = shz$

14.87. $f(z) = z^n, \quad n \in N$ 14.88. $f(z) = \cos z$

14.89. $f(z) = \ln(z^2)$ 14.90. $f(z) = \sin\dfrac{z}{3}$

C guruh

14.91. Quyidagi o'zgaruvchilarning geometrik o'rni aniqlansin: a) $|z| \le \sqrt{3}$;
b) $|z-2| = 2$; v) $|z-2| = |z+2|$; g) $|z-C| + |z+C| \le 2a$; d) $\alpha < \arg z < \beta, \quad \alpha < \operatorname{Re} z < b$.

14.92. Quyidagi funksiyalarning analitikligi tekshirilsin: e^z; $\sin z$; $\cos z$; z^2; e^{-z^2}.

14.93. Funksiya hosilasining ta'rifidan foydalanib, quyidagi tengliklarning to'g'riligi isbotlansin: $(e^z)' = e^z$; $(\sin z)' = \cos z$; $(\cos z)' = -\sin z$.

14.94. Mavhum qismi $v = \dfrac{y}{x^2+y^2}$, va o'zi $w(2) = 0$ shartni qanoatlantiruvchi funskiya topilsin.

14.95. Haqiqiy qismi $u = x^2 - y^2 + xy$ va o'zi $w(0) = 0$ shartni qanoatlantiruvchi funksiya topilsin.

14.96. $w = z^2 + 2i$ funksiya vositasida akslantirishda $z = i$ nuqtadagi cho'zilish koeffisiyenti va burilish burchagi aniqlansin.

14.97. $x = 2 + 3\cos t, \quad y = -1 + 3\sin t \quad (0 \le t \le 2\pi)$ chiziq tenglamasini kompleks ko'rinishda yozing.

14.98. $2x^2 + 3y^2 = 12$ chiziq tenglamasini kompleks ko'rinisda yozing.

14.99. a) $z = 5e^{it} + 2e^{-it}$ b) $z = 2t - 1 + i(1 + 2t - 4t^2)$ tenglama xOy tekisligidan qanday chiziqni ifodalaydi?

14.100. Kompleks z tekisligida berilgan chiziqlarning xOy tekisligidagi tenglamasini toping. a) $|z + 4 - i \cdot 2| = 3$; b) $\operatorname{Re}\dfrac{z-2}{z+i} = 2$; v) $\arg(z-1) = \dfrac{\pi}{4}$

14.101.Limitni hioblang.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-3}{n+1} + i\dfrac{3n^2-2n+1}{1+n^2}\right)$; b) $\lim\limits_{z\to 2-3i}\dfrac{\operatorname{Re}(z^2)}{|z|^2}$; v) $\lim\limits_{z\to -1+2i}\dfrac{z^2+2z+5}{z+1-2i}$.

14.102. Quyidagi funksiyalarning uzluksizligini tekshiring.

a) $w = z^2\operatorname{Re}\bar{z} - i\operatorname{Im}(z^2)$ b) $w = \dfrac{z^2-3z+1}{|z-2i|-3}$

14.103. w funksiyaning analitik bo'lishini tekshiring.

a) $w = (z-1)\operatorname{Re}(z+1)$ b) $w = e^{i\cdot 2z+1}$

14.104. $u = x^2 e^{x/y}$ garmonik funksiya bo'la oladimi?
14.105. Quyidagi funksiyalarning analitikligini tekshiring.
a) $\omega = z\bar{z} - z\operatorname{Im} z$ b) $\omega = x^2 - 2iy$ v) $\omega = 2z^2 - 3iz$

Quyidagi limitlar hisoblansin.

14.106. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{2n+3i}{8n-7i}}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\dfrac{2i}{n}$ v) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\cos z}{z^2}$ g) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{z^2+4}{z+i}$
14.107. $f(z) = (x^2 - y^2) + 2xyi$ differensillanuvchi funksiya bo'ladimi?
14.108. $f(z) = e^x\cos y + ie^x\sin y$ differensillanuvchi funksiya bo'ladimi?
14.109. Differensillanuvchi $f(z)$ funksiyaning haqiqiy qismi $u(x,y) = x^2 - y^2 - x,\quad x = x + yi$ berilgan bo'lsa, $f(z)$ ni toping.
14.110. Differensillanuvchi $f(z)$ funksiyaning mavhum qismi $v(x,y) = x + y$ bo'lsa, $f(z)$ ni toping.
14.111. $f(z) = (x^2 + y^2) - 2xyi$ differensillanuvchi funksiya bo'ladimi?
14.112 $f(z) = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3)$ funksiyaning hosilasini toping.
14.113 $f(z) = \sin xchy + i\cos xshy$ funksiyaning hosilasini toping.
14.114 $f(z) = a\bar{z}$ $(\bar{z} = x - yi)$ a ning qanday qiymatida differensiallanuvchi bo'ladi?

Kompleks o'zgaruvchili funksiyani integrallash

xOy tekislikda (z tekislikda) tenglamalari $x = \varphi_1(t)$; $y = \varphi_2(t)$ bo'lgan yo'naltirilgan silliq yoki bo'laklari silliq egri chiziq (*C*) berilgan. Bu egri chiziqda f(z) uzluksiz funksiya aniqlangan bo'lsin. Egri chiziqni M_0~A, M_1, M_2,...,M_{n-1}, M_n~B, nuqtalar bilan n ta bo'lakka (bo'laklar o'zaro teng bo'lishi shart emas) bo'lamiz. $M_k(z_k)$ deb $M_{k-1}M_k$ bo'lakning ixtiyoriy ζ_k nuqtasini olib, quyidagi yig'indini tuzaylik:

$$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}).$$

Bo'laklar sonini cheksiz orttira borib, max $|z_k - z_{k-1}| \to 0$ shart bajarilgandagi yig'indining limitiga f(z) funksiyadan (*C*) chiziq bo'yicha olingan egri chiziqli integral deyiladi va quyidagicha belgilanadi:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}) = \int_{(C)} f(z)dz.$$

Agarda $z_k = x_k + iy_k$; $\zeta_k = \xi_k + i\eta_k$ desak,

$$f(z_k) = u(x_k, y_k) + iv(x_k, y_k), \quad f(\zeta_k) = u(\xi_k, \eta_k) + iv(\xi_k, \eta_k)$$

va yig'indini haqiqiy o'zgaruvchilar orqali ifodalash mumkin:

$$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k) f(z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n}[u(\xi_k,\eta_k) + iv(\xi_k,\eta_k)][(x_k + iy_k) - (x_{k-1} + iy_{k-1})] =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}[u(\xi_k,\eta_k)(x_k - x_{k-1}) + u(\xi_k,\eta_k)(y_k - y_{k-1})].$$

Agar C chiziq $x = x(t)$, $y = y(t)$ parametrik tenglamalar yordamida yoki $z = z(t) = x(t) + iy(t)$ formada berilgan bo'lsa, u holda $z(t_1) = a$, $z(t_2) = b$ (a,b lar C chiziqning oxirlari), u holda

$\int\limits_C f(z)dz = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(z(t))z'(t)dt$ bo'ladi. Faraz qilaylik, w = $f(z)$ bir bog'lamli D sohada analitik funksiya va C yopiq bo'lgan chiziq (z_1-boshi z_2-oxirgi nuqtalari) bo'lsa, u holda

$\int\limits_C f(z)dz = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(z(t))z'(t)dt = F(z_2) - F(z_1)$, bu yerda $F(z)$ funksiya $f(z)$ ning boshlang'ich funksiyasi $F'(z) = f(z)$

Yopiq B sohada analitik f(z) funksiya berilgan bo'lsin. Sohaning konturini *C* deylik. Funksiyaning konturdagi qiymatlari bo'yicha kontur ichidagi qiymatlarini aniqlash mumkin. Bu $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$ ko'rinishdagi Koshi formulasiga asosan topiladi. Koshi integrali yopiq kontur bo'yicha olinsa,

$$\oint\limits_C \frac{f(z)dz}{(z-\zeta)^{n+1}} = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(\zeta), \quad (n = 0,1,2...)$$

bu yerda ζ -C chiziqning ichki nuqtasi bo'lib, konturi musbat yo'nalishda aylanib o'tadi. $w = f(z)$ analitik funksiya uchun $f^{(n)}(\zeta) = \frac{n!}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{f(z)dz}{(z-\zeta)^{n+1}}$ $(n = 0,1,2...)$ bu yerda $f^{(0)}(\zeta) = f(\zeta)$. C – bir bog'lamli soha.

Misol. 1) $\int\limits_{(C)} \frac{(z^2-1)^n}{z-x}dz$ integral hisoblansin. Koshi formulasi va Koshi teoremasiga asosan, *x* nuqta *c* kontur ichida bo'lsa, integral $2\pi i(x^2-1)^n$ ga, *x* nuqta konturdan tashqarida bo'lsa 0 ga teng.

2) Koshi formulasiga asosan $\int\limits_{(C)} \frac{dz}{1+z^2}$ integralning a) *C* kontur $|z-i| = 1$ aylana, b) *C* kontur $|z+i| = 1$ aylana, c) *C* kontur $|z| = 2$ aylana bo'lgandagi qiymati hisoblansin. Bu integralni $\frac{1}{2i}\left[\int\limits_{(C)} \frac{dz}{z-i} - \int\limits_{(C)} \frac{dz}{z+i}\right]$ ko'rinishda yozish mumkin. Qavs ichidagi ikkala integralning ham suratidagi funksiyalar o'zgarmas son 1 ga teng, shuning uchun $|z-i| = 1$ aylana bo'yicha integrallaganda Koshi formulasiga asosan birinchi integral $2\pi i$ ga, ikkinchi integral esa 0 ga teng.

$|z+i| = 1$ aylana bo'yicha integrallaganda aksincha, birinchi integral 0 ga, ikkinchisi esa $2\pi i$ ga teng. $|z| = 2$ aylana bo'yicha integrallaganda $z = i$ va $z = -i$ nuqtalar aylana ichida bo'lib, birinchi integral suratdagi funskiyaning *i* nuqtadagi qiymatining $2\pi i$ ga ko'paytmasini, ikkinchi integral esa o'sha funksiyaning *–i* nuqtadagi qiymatining yana $2\pi i$ ga ko'paytmasiga teng bo'lib, natija ikkalasining yig'indisi bo'lishi kerak edi. Integral ostidagi ifodaning suratidagi funksiya o'zgarmas 1 ga teng bo'lgani uchun ikkala integral 0 ga teng.

A guruh

14.115. $\int\limits_{AB} z^2 dz$, AB $z_A = 1 \quad va \quad z_B = i$ nuqtalarni tutashtiruvchi to'g'ri chiziq.

14.116. $\int\limits_C z^{10} dz$, C: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$-ellips.

14.117. $\int\limits_C \frac{dz}{z^2}$, C: $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 1$ - aylana.

14.118. $\int\limits_C \frac{dz}{z}$, C: $z = e^{it}$ - aylana.

14.119. $\int\limits_{AB} f(z)dz$ integralni $f(z)=x^2+y^2i, \quad AB-A(1+i)$ va $B(2+3i)$ nuqtalarni tutashtiruvchi to'g'ri chiziq bo'lgan hol uchun hisoblang.

14.120. $\int\limits_{1}^{1+i} zdz$ integralni hisobalng.

B guruh

14.121. $\int\limits_{\gamma} \bar{z}dz, \quad \gamma$ -yopiq soha bo'lib parametrik tenglamasi $x=\cos t, \quad y=\sin t$.

14.122. $\int\limits_{\gamma} \frac{dz}{z-4}, \quad \gamma$ -ellips $x=3\cos t, \quad y=2\sin t$

14.123. $\int\limits_{\gamma} \frac{dt}{z-(1+i)}, \quad \gamma$ -aylana $|z-(i+1)|=1$

C guruh

14.124. $w=f(z)$ analitik funksiya z tekislikdagi B sohani w tekislikdagi B_1 sohaga akslantiradi. $B_1=\iint\limits_{(B)} |f'(z)|^2\,dxdy$ ekanligi isbotlansin. Bu formulaga asosan $w=z^2$ funksiya vositasida $1\le|z|\le 2; \quad \frac{\pi}{4}\le \arg z\le\frac{\pi}{4}$ soha aksining yuzi topilsin.

14.125. Integralning ta'rifiga asosan $\int\limits_{|z|=a} |dz|$ va $\int\limits_{|z|=a} dz$ integrallar hisoblansin.

14.126. Ushbu $\int\limits_{(L)} \frac{dz}{z^2+4}$ integral Koshi formulasiga asosan hisoblansin, bunda L: a) $-2i$ va $+2i$ nuqtalarni o'z ichiga olgan kontur; b) $-2i$ nuqtani o'z ichiga olgan kontur; v) $+2i$ nuqtani o'z ichiga olgan kontur.

14.127. Ushbu $\int |z|zdz$ integral yarim halqa konturi bo'yicha hisoblansin.

14.128. $\int\limits_{C} \left(iz^2-2ze^{z^2}\right)dz, \quad C: \ z_1=e^{-i\pi/4}$ va $z=i$ nuqtalarni tutashtiruvchi ixtiyoriy chiziq.

14.129. $\oint \frac{2z-e^z}{z^2(z-3)}dz, \quad C: \quad |z+1|=2$ -aylana.

14.130. $\int\limits_{C} \frac{2z-1-i}{(z-1)(z-i)}dz \quad |z|=2$ -aylana.

14.131. $\int\limits_{C} f(z)dz$, agar $f(z)=y+xi$ C – uchi $z_0=0, \quad z_A=i, \quad z_B=1+i$ bo'lgan siniq chiziq.

J A V O B L A R

14.1. 1) $-2+2i$; 2) $-2-2i$; 3)-2; 4) $-4i$; 5) i; 6) $-8i$. **14.2.** 1) 0; 2) $4i$; 3) $-2i$; 4) 4; 5) -1; 6) $8j$. **14.3.** 1) $1-i$; 2) $-1-3i$; 3) $2i$; 4) $2-2i$; 5) $-1-i$; 6) $-2+2i$.
14.4. 1) -2; 2) $2i$; 3) $-1-i$; 4) 2; 5) -i; 6) $2-2i$. **14.5.** 1) $(\sqrt{15}+1)(1-i)$; 2) $(\sqrt{15}-1)(1-i)$; 3) $\sqrt{15}+i$; 4) $-16i$; 5) $\frac{\sqrt{15}}{8}+\frac{7}{8}i$; 6) $-4(11-3\sqrt{15}i)$. **14.6.** 1) 0; 2) $-6+8i$; 3) $-3-4i$; 4) $7+i$; 5) -1; 6) $-117-44i$. **14.7.** 1) $13+14i$; 2) $-1+8i$;

3) $6-11i$; 4) $9+95i$; 5) $\frac{75}{58}+\frac{59}{58}i$; 6) $154+414i$. **14.8.** 1) $7+4i$; 2) $-1-6i$; 3) $3+i$;

4) $17+11i$; 5) $\frac{7}{41}-\frac{19}{41}i$; 6) $236+115i$. **14.9** a) $3+i$; b) $-4+5i$; v) $7-4i$; g) $-2-6i$;

d) 1; e) -1; j) $i\sqrt{2}$; z) $1+i\sqrt{3}$; i) $2-\sqrt{3}+4i$; k) 8; l) $1-2i\sqrt{2}$; m) -7; n) $-5i$.

14.10. a) $\pm(1+i)$ b) $(2-2i)$ v) $\pm(2-i)$ g) $\pm(1+4i)$

d) $\pm(5+6i)$ e) $\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{13}+2}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{13}-2}{2}}\right)$ j) $\pm\left(\sqrt{\frac{3}{2}}-i\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$ z) $\pm\sqrt{8+2\sqrt{17}},\ \pm i\sqrt{-8+2\sqrt{17}}$

i) $\pm(2+i)$ va $\pm(1-2i)$ k) $\pm(1+i)$ va $\pm(1-i)$ l) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ va $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$

m) $i^3\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}i\right),\quad \alpha=0,1,2,3.$ n) $\pm(4+i)$

o) $x_1=\frac{(5-i)+(1-3i)}{2}=3-2i,\quad x_2=\frac{(5-i)-(1-3i)}{2}=2+i$

14.11. $\pm\left(\sqrt{\frac{7+\sqrt{58}}{2}}+i\sqrt{\frac{-7+\sqrt{58}}{2}}\right)$ **14.12.** a) $x_1=2+i,\quad x_2=1+i$

b) $x_1=\frac{3-i}{7+i},\quad x_2=\frac{4+2i}{7+i}$ v) $x_1=\frac{2+i}{1+i},\quad x_2=3-2i$

14.13. a) $3(\cos 0+i\sin 0)$. b) $2(\cos\pi+i\sin\pi)$. v) $\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}$. g) $2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$.

d) $\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}$. e) $2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$. j) $\sqrt{10}(\cos 18^0 26'+i\sin 18^0 26')$.

z) $\sqrt{17}(\cos 345^0 57'48''+i\sin 345^0 57'48'')$. i) $\sqrt{5}(\cos 153^0 26'6''+i\sin 153^0 26'6'')$.

k) $\sqrt{5}(\cos 243^0 26'6''+i\sin 243^0 26'6'')$. l) $2[\cos(-45^0)+i\sin(-45^0)]$.

m) $\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi$. n) $3(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. o) $\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$. p) $\cos\left(-\frac{\varphi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\varphi}{4}\right)$.

14.14. $\pm\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right);\quad \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ **14.15.** $\sqrt{5}\left(\cos\frac{arctg\frac{4}{3}+2k\pi}{2}+i\sin\frac{arctg\frac{4}{3}+2k\pi}{2}\right);\quad k=0;\ 5e^{iarctg\frac{4}{3}}$

14.16. $\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{3+8k}{8}\pi+i\sin\frac{3+8k}{8}\pi\right);\quad k=0,1;\ \sqrt{2}e^{i\frac{3}{4}\pi}$ **14.17.** $\sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{2k\pi-arctg\frac{\sqrt{15}}{15}}{3}+i\sin\frac{2k\pi-arctg\frac{\sqrt{15}}{15}}{3}\right);\quad k=0,1,2;\ 4e^{-iarctg\frac{\sqrt{15}}{15}}$

14.18. $\sqrt[3]{5}\left(\cos\frac{(2k+1)\pi-arctg\frac{4}{3}}{3}+i\sin\frac{(2k+1)\pi-arctg\frac{4}{3}}{3}\right);\quad k=0,1,2;\ 5e^{i\left(\pi-arctg\frac{4}{3}\right)}$

14.19. $\sqrt[3]{5}\left(\cos\frac{2k\pi-arctg\frac{4}{3}}{3}+i\sin\frac{2k\pi-arctg\frac{4}{3}}{3}\right);\quad k=0,1,2;\ 5e^{-iarctg\frac{4}{3}}$

14.20. $\cos\frac{2k+1}{4}\pi+i\sin\frac{2k+1}{4}\pi;\quad k=0,1,2,3;\ e^{i\pi}$ **14.21.** $\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{7+8k}{20}\pi+i\sin\frac{7+8k}{20}\pi\right);\quad k=0,1,2,3,4;\ \sqrt{2}e^{i\frac{7}{4}\pi}$

14.22. $\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{5+8k}{20}\pi+i\sin\frac{5+8k}{20}\pi\right);\quad k=0,1,2,3,4;\ \sqrt{2}e^{i\frac{5}{4}\pi}$ **14.23.** $\sqrt[16]{8}\left(\cos\frac{3+8k}{32}\pi+i\sin\frac{3+8k}{32}\pi\right);\quad k=0,1,2,3,4,5,6,7;\ 2\sqrt{2}e^{i\frac{3}{4}\pi}$

14.24. a) $\sqrt[6]{\frac{1}{4}}(1+i);\ -\frac{\sqrt[6]{2}}{4}\left[(\sqrt{6}+\sqrt{2})-i(\sqrt{6}-\sqrt{2})\right];\ -\frac{\sqrt[6]{2}}{4}\left[(\sqrt{6}-\sqrt{2})+i(\sqrt{6}+\sqrt{2})\right]$

b) $\cos\frac{2k+1}{n}\pi+i\sin\frac{2k+1}{n}\pi,\quad k=0,1,2,\dots,n-1$ v) $2\sqrt[4]{2};\quad -2\sqrt[4]{2};\quad 2\sqrt[4]{2}i;\quad -2\sqrt[4]{2}i$

g) $\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+i\right);\quad -\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-i\right);\quad -i$ d) $-\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+i\right);\quad \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-i\right);\quad i$

e) $\sqrt[6]{2};\ \sqrt[6]{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right);-\sqrt[6]{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right);-\sqrt[6]{2};\ \sqrt[6]{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right);-\sqrt[6]{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

14.25. $3\sin x\cos^2 x-\sin^3 x$ **14.26.** $\cos^3 x-3\sin^2 x\cos x$

14.27. $4\sin x\cos^3 x-4\sin^3 x\cos x$ **14.28.** $\cos^4 x-6\sin^2 x\cos^2 x+\sin^4 x$

14.29. $5\cos^4 x\sin x-10\cos^2 x\sin^2 x+\sin^5 x$

14.30. $\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ **14.31.** $\frac{1}{4}(3\sin x-\sin 3x)$ **14.32.** $\frac{1}{8}(\cos 4x-4\cos 2x+3)$

14.33. $\frac{1}{8}(\cos 4x+4\cos 2x+3)$ **14.34.** $\frac{1}{16}(\cos 5x+5\cos 3x+10\cos x)$

14.35. $\frac{1}{32}(\cos 6x+6\cos 4x+15\cos 2x+10)$

14.36. a) $z=t+i(1-3t)$ b) $z=t+i2/(t-1)$ v) $z=1+\sqrt{3}\cos t+i\left(\sqrt{2}\sin t-2\right)$

14.37. $2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ **14.38.** $r=|z|=3,\quad \varphi=\arg z=-\frac{2\pi}{3}$

14.39. $\frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right]$ **14.40.** $1{,}5\left(\cos 30^0-i\sin 30^0\right)$ **14.41.** $\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi$

14.42. -64 **14.43.** $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ **14.44.** a) $10\sqrt{2}\left(\cos 75^0+i\sin 75^0\right)=5\left[\left(\sqrt{3}-1\right)+i\left(\sqrt{3}+1\right)\right]$

b) $5\left(\cos 210^0+i\sin 210^0\right)=-\frac{5}{2}\left(i+\sqrt{3}\right)$ v) $2^{12}\sqrt{2}\left(\cos 45^0+i\sin 45^0\right)=2^{12}(1+i)$

g) $32\left(\cos 330^0+i\sin 330^0\right)=16\left(\sqrt{3}-i\right)$ d) $2^5\left[\left(\cos 180^0+i\sin 180^0\right)+\left(\cos 180^0+i\sin 180^0\right)\right]=-2^6$

14.45. $\sin 15^0=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; $\cos 15^0=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ **14.46.** $\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(2\varphi-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(2\varphi-\frac{\pi}{12}\right)\right]$

14.47. a) $(1+i)^n=2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$, b) $\left(\sqrt{3}-i\right)^n=2^n\left(\cos\frac{n\pi}{6}-i\sin\frac{n\pi}{6}\right)$.

14.52. a) $\frac{13}{6}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ v) $\frac{321^2}{25}\sqrt{\frac{321}{5}}$ g) $\frac{4\sqrt{6}}{17}$ d) $\frac{3}{16}$ e) $\sqrt[5]{\frac{1802}{4}}$ j) $\frac{25}{82}\sqrt{\frac{2}{41}}\sqrt[12]{5}$

14.54. 1) $\omega=(1+i)^2+1+i=1+2i-1+1+i=1+3i$; 2) $\omega=(2-i)^2+2-i=4-4i-1+2-i=5(1-i)$;

3) $\omega=i^2+i=-1+i$; 4) $\omega=1-1=0$.

14.55. 1) $x=1,\quad y=2,\quad f(1+2i)=1+4i$; 2) $x=2,\quad y=-3,\quad f(2-3i)=4+9i$;

3) $x=0,\quad y=0,\quad f(0)=0+0\cdot i=0$; 4) $x=0,\quad y=-1,\quad f(-i)=i$.

14.58. $\ln\left(\sqrt{3}+i\right)=\ln 2+(\pi/6+2k\pi)i,\quad k\in Z$ **14.59.** 1,1276

14.60. 1) $\omega=i$; 2) $\omega=-e^{\pi}$; 3) $\omega=ei$. **14.61.** $(1+i)/2$**;** i**;** $(3-2i)/13$.

14.63. $(1/2)\ln 2+(2k\pi-\pi/4)i,\quad k\in Z$ **14.65.** $z=\pm i\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$

14.66. $i\ln\left(1\pm\sqrt{2}\right)$ **14.67.** $1{,}1752i$ **14.68.** $0{,}772+1{,}018i$

14.69. 1) $e^{\cos 1}\left[\cos(\sin 1)+i\sin(\sin 1)\right]$; 2) $\cos e+i\sin e$.

14.70 a) $x=3-y^2$ b) $y=3-(x+4)^2$ v) $x^2+(y-1)^2=9$

14.71. a) $2-i$ b) $1/2$ v) $2i$ g) $6i$ d) ∞ e) $0{,}5i$ j) $1/2$

14.72 a) Z ning barcha nuqtalarida uzluksiz b) $z\neq 3\pm i$ da uzluksiz v) $|z|=1$ aylananing nuqtalaridan tashqari Z ning barcha nuqtalarida uzluksiz

14.73. $2\varphi+4k\pi,\quad k=0,\quad \pm1,\ldots$ **14.74.** $3\varphi+6k\pi,\quad k=0,\quad \pm1,\ldots$

14.75. $\frac{1}{3}\psi+\frac{2k\pi}{3}, \quad k=0, \quad \pm 1,...$ bu yerda $tg\psi=\frac{r\sin\varphi}{1+r\cos\varphi}, \sin\psi=\frac{r\sin\varphi}{\sqrt{1+r^2+2r\cos\varphi}}$

14.76. $\frac{1}{2}\psi+k\pi, \quad k=0, \quad \pm 1,...$ bu yerda $tg\psi=\frac{r\sin\varphi}{r\cos\varphi-8}, \sin\psi=\frac{r\sin\varphi}{\sqrt{64+r^2-16r\cos\varphi}}$

14.77. $\frac{1}{2}\psi+k\pi, \quad k=0, \quad \pm 1,...$bu yerda $tg\psi=\frac{r^2\sin 2\varphi}{r^2\cos\varphi-4}, \sin\psi=\frac{r^2\sin 2\varphi}{\sqrt{r^4+16-8r^2\cos 2\varphi}}$

14.78. $\frac{1}{2}\psi+k\pi, \quad k=0, \quad \pm 1,...$ bu yerda $tg\psi=\frac{3r\sin\varphi}{r^2-2-\cos\varphi}, \sin\psi=\frac{3r\sin\varphi}{\sqrt{9r^2\sin^2\varphi+\left(r^2-2-r\cos\varphi\right)^2}}$

14.79. $ch1\cos 1-ish1\sin 1$ **14.80.** $\cos 1$ **14.81.** $-sh2\cos 1+ich2\sin 1$

14.82. $(2k+1)\pi i, \quad k\in Z$ **14.83.** $\frac{\pi}{2}i$ **14.84.** $\left(2k+\frac{1}{4}\right)\pi i, \quad k\in Z$

14.85. $\left(e^{3z}\right)'=3e^{3z}$ **14.86.** $(shz)'=chz$ **14.87.** $\left(z^n\right)'=nz^{n-1}$

14.88. $(\cos z)'=-\sin z$ **14.89.** $\left(\ln\left(z^2\right)\right)'=2/z$ **14.90.** $\left(\sin\frac{z}{3}\right)'=\frac{1}{3}\cos\frac{z}{3}$

14.91. a) yopiq oyna; b) aylana; v) (-2;0) va (2;0) nuqtalarni birlahstiruvchi kesma o’rtasidan o’tgan tik chiziq; g) ellips; d) trapetsiya. **14.94.** $\omega=\frac{1}{2}-\frac{1}{z}$ **14.95.** $\omega(z)=\frac{2-i}{2}z^2$ **14.96.** $2, \frac{\pi}{2}$

14.97. $z=2-i+3e^{it}$

14.98. $z=\sqrt{6}\cos t+i2\sin t$ **14.99.** a) $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{9}=1$ - ellips; b) $y=1-x-x^2$ - parabola

14.100. a) $|z+4-i\cdot 2|=|x+iy+4-i\cdot 2|=|(x+4)+i(y-2)|=\sqrt{(x+4)^2+(y-2)^2}=3$.

Demak, $(x+4)^2+(y-2)^2=9$ - radiusi 3 ga va markazi (-4;2) nuqtada bo’lgan aylananing tenglamasi. b) $(x+1)^2+(y+1{,}5)^2=5/4$.

Ko’rsatma. $\frac{z-2}{z+i}=\frac{(x-2)+iy}{x+i(y-1)}=\frac{(((x-2)+iy)(x-i(y+1)))}{(x+i(y+1))(x-i(y+1))}=\frac{\left(x^2-2x+y^2+y\right)+i(2-x+2y)}{x^2+(y+1)^2}$

$$\operatorname{Re}\frac{z-2}{z+i}=\frac{x^2-2x+y^2+y}{x^2+(y+1)^2}=2$$

v) $y=x-1$

14.101. a) $2+3i$ b) $-\frac{5}{13}$. **Ko’rsatma**. $\lim\limits_{z\to 2-3i}\frac{\operatorname{Re}\left(z^2\right)}{|z|^2}=\left|\begin{matrix}\operatorname{Re}\left(z^2\right)=x^2-y^2\\ |z|=\sqrt{x^2-y^2}\end{matrix}\right|=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 3}}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ v) $4i$

14.102. a) $u(x,y)=x\left(x^2-y^2\right), v(x,y)=2xy(x-1)$ bu funksiyalar *xOy* tekisligida uzluksiz. Demak, ω ham z tekislikda uzluksiz.

Ko’rsatma. $\omega=(x+iy)^2\operatorname{Re}(x-iy)-i\operatorname{Im}(x+iy)^2=\left(x^2+2ixy-y^2\right)x-i\operatorname{Im}\left(x^2+2ixy-y^2\right)$

b) ω funksiya $|z-2i|=3$ aylanani nuqtalaridan boshqa barcha nuqtalarda uzluksiz.

14.103. a) ω funksiya $z=1$ nuqtada analitik funksiya emas. b) z kompleks tekisligida analitik funksiya hisoblanadi.

14.104. bo’lmaydi. **Ko’rsatma**. Garmonik funksiya bo’lishi uchun $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ shartni qanoatlantirishi kerak.

14.105. a) $z=0$ analitik emas. b) z ning barcha nuqtalarida analitik emas.
v) barcha nuqtalarda analitik.

14.106. a) $\frac{1}{2}$ b) $2i$ v) $\frac{1}{2}$ g) ∞ **14.107.** differensillanuvchi

14.108. differensillanuvchi **14.109.** $f(z)=z^2-z+C_1$

Ko'rsatma. Koshi-Riman shartidan foydalanamiz $\frac{\partial u}{\partial x}=2x-1$; $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ ekanligidan $\frac{\partial v}{\partial y}=2x-1$, $v(x,y)=2xy-y+\varphi(x)$. Ikki shart $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$ foydalanib, $\frac{\partial u}{\partial y}=-2y-\varphi'(x)$ topiladi.Masala shartidan $\frac{\partial u}{\partial y}=-2y$. Binobarin $-2y-\varphi'(x)=-2y$, $\varphi'(x)=0$, $\varphi(x)=C$ bu yerda $f(z)=x^2-y^2-x+i(2xy-y+C)-x^2-y^2+2xyi-(x+yi)+C_1$.

14.110. $f(z)=(1+i)z+C$ **14.111.** differensillanuvchi emas **14.112.** $f'(z)=3z^2$

14.113. $f'(z)=\cos z$ **14.114.** $a=0$ **14.115.** $-\frac{(1+i)}{3}$ **14.116.** 0 **14.117.** 0

14.118. $2\pi i$ **14.119.** $-\frac{19}{3}+9i$ **Ko'rsatma**. $u=x^2$ va $v=y^2$ bo'lgani uchun $\int\limits_{AB} f(z)dz=\int\limits_{AB} x^2dx-y^2dy+i\int\limits_{AB} y^2dx+x^2dy$. Bu yerda x^2dx-y^2dy- to'liq differensiail, demak

$$\int\limits_{AB} x^2dx-y^2dy=\int\limits_1^2 x^2dx=\int\limits_1^3 x^2dx=\left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2-\left.\frac{y^3}{3}\right|_1^3=\frac{7}{3}-\frac{26}{3}=-\frac{19}{3}$$

AB chiziq tenglamasi $y=2x-1$ dan $\int\limits_{AB} y^2dx+x^2dx=\int\limits_1^2\left[(2x-1)^2+2x^2\right]dx=9$

14.120. $\frac{1}{2}+i$ **14.121.** $2\pi i$ **Ko'rsatma**. $\bar z=x-yi$, $dz=dx+i$, u holda $\int\limits_\gamma \bar z dz=\int\limits_\gamma xdx+ydy+i\int\limits_\gamma xdy-ydx$; $\int\limits_\gamma xdx=0$ Ikkinchi integral $dx=-\sin tdt$, $dy=\cos tdt$, u holda $xdy-ydx=\cos^2 t+\sin^2 tdt=dt$. $\int\limits_\gamma \bar z dz=i\int\limits_0^{2\pi} dt=2\pi i$ **14.122.** 0 **14.123.** $2\pi i$ **Ko'rsatma**. $(x-1)^2+(y-1)^2=1$, aylana yoki $x=1+\cos t$, $y=1+\sin t$ yoki $z=1+i+e^{it}$.

14.124. $\frac{15}{2}\pi$ kv.birlik **14.125.** $2\pi a, 0$ **14.126.** a) 0; b) $-\frac{\pi}{2}$; v) $\frac{\pi}{2}$. **14.127.** $-\frac{25}{3}$

14.128. $iz^2-2ze^{z^2}$ funksiya z tekisligida analitik funksiya, shuning uchun

$$\int\limits_C\left(iz^2-2ze^{z^2}\right)dz=\int\limits_{e^{-i\pi/4}}^{i}\left(iz^2-2ze^{z^2}\right)dz=\left.\left(i\frac{z^3}{3}-e^{z^2}\right)\right|_{e^{-i\pi/4}}^{i}=$$

$$=\left(i\frac{i^3}{3}-e^{i^2}\right)-\left(i\frac{1}{3}e^{-i3\pi/4}-e^{-i\pi/2}\right)=\frac{1}{3}-e^{-1}-\frac{i}{3}\left(\cos\frac{3\pi}{4}-i\sin\frac{3\pi}{4}\right)+$$

$$+e^{\cos\pi/2-i\sin\pi/2}=\frac{1}{3}-e^{-1}-\frac{\sqrt{2}}{6}+\cos 1+i\left(\frac{\sqrt{2}}{6}-\sin 1\right)$$

14.129. $\oint\frac{2z-e^z}{z^2(z-3)}dz=\oint\frac{\frac{2z-e^z}{(z-3)}}{z^2}dz=\frac{2\pi i}{1!}\left.\left(\frac{2z-e^z}{(z-3)}\right)'\right|_{z=0}=2\pi i\left.\frac{(2z-e^z)(z-3)-(2z-e^z)}{(z-3)^2}\right|_{z=0}=-i\frac{4\pi}{9}$

14.130. $4\pi i$. **Ko'rsatma**. $z=1+re^{i\varphi}$ deb olinadi. **14.131**. $1+i$

57-mavzu. Birinchi tartibli differensial tenglamalar. O’zgaruvchilari ajraladiga va ajraladigan differensial tenglamalar.

Birinchi tartibli differensial tenglamalarning umumiy va xususiy yechimlari.
O’zgaruvchilari ajaralagan va ajraladigan differensial tenglamalar.

1. n – tartibli oddiy differensial tenglama deb

$$F\left(x, y, y', y'', .. y^{(n)}\right) = 0 \qquad (11.1)$$

ko’rinishdagi tenglamaga aytiladi. Agar noma’lum funksiya bitta o’zgaruvchiga bog’liq bo’lsa, bunday differensial tenglama oddiy differensial tenglama deyiladi. Agar noma’lum funksiya ikki yoki undan ortiq o’zgaruvchilarga bog’liq bo’lsa, bunday differensial tenglama xususiy hosilali differensial tenglama deyiladi.

2.Differensial tenglamaning yechimi yoki integrali deb tenglamaga qo’yganda uni ayniyatga aytiladigan har qanday differensiallanuvchi $y = \varphi(x)$ funksiyaga aytiladi. Shu funksiyani aniqlovchi $y = \varphi(x)$ yoki $f(x, y) = 0$ funksiya differensial tenglamaning integrali deyiladi. Har bir integral x*Oy* tekisligida differensial tenglamaning integral chizig’i deb ataluvchi egri chiziqni aniqlaydi.

3. Agar *x*,*y* va *n* ta ixtiyoriy $c_1, c_2, ..., c_n$ o’zgarmaslarni o’z ichiga olgan

$$\phi(x, y, c_1, c_2, ..., c_n) = 0 \qquad (11.2)$$

tenglamadagi ixtiyoriy o’zgarmaslarga har xil qiymatlar berganda (11.1) tenglama yechimlarining mavjudlik va yagonalik sohasidan o’tuvchi hamma integral chiziqlar va faqat o’sha chiziqlargina hosil bo’lsa, (11.2) tenglama (11.1) differensial tenglamaning o’sha sohadagi umumiy integrali deyiladi. Ixtiyoriy o’zgarmaslarga aniq qiymatlar berib, umumiy integraldan hosil qilingan integral xususiy integral deyiladi.

Umumiy integral (11.2) ni *n* marta *x* bo’yicha differensiallab, hosil bo’lgan *n* ta tenglamadan va (11.2) tenglamadan *n* ta ixtiyoriy o’zgarmasni yo’qotsak, berilgan (11.1) differensial tenglamaga ega bo’lamiz. Differensial tenglamaning tartibi deb noma’lum funksiyaning bu tenglamaga kiruvchi hosilalarning eng yuqori tartibiga aytiladi.

4. Ushbu $F(x, y, y') = 0$ tenglama umumiy ko’rinishdagi birinchi tartibli differensial tenglama deb ataladi. Agar uni y' ga nisbatan yechish mumkin bo’lsa, bu quyidagicha yoziladi,

$$y' = f(x, y) \qquad (11.3)$$

Hosilaga nisbatan yozilgan bu shakldan differensiallar ishtirok etgan

$$dy - f(x, y)dx = 0 \quad \text{yoki} \quad M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \qquad (11.4)$$

shaklga yozish mumkin.

5. $y = \varphi(x, c)$ umumiy yechim $c = c_0$ qiymati uchun olingan $y = \varphi(x, c_0)$ yechim xususiy yechim deyiladi.

$y' = f(x, y)$ tenglamaning $y(x_0) = y_0$ boshlang’ich shartni qanoatlantiruvchi xususiy yechimini topish masalasi Koshi masalasi deyiladi.

6. $M(x)dx + N(y)dy = 0$ ko’rinishdagi tenglama o’zgaruvchilari ajralgan tenglama deyiladi.

7. $M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0, \quad (N_1(y) \neq 0 \quad va \quad M_2(x) \neq 0) \qquad (11.5)$

ko’rinishdagi tenglama o’zgaruvchilari ajraladigan tenglama deyiladi. (11.5) tenglamani $M_2(x)N_1(y)$ ko’paytmaga bo’lib

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0 \qquad (11.6)$$

tenglamani hosil qilamiz. (11.13) tenglamaning umumiy integrali

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = C$$

dan iborat bo’ladi.

A guruh

Quyidagi funksiyalar berilgan differensial tenglamalarning umumiy integrallari bo’ladimi?

11.1. $a)\ \ y=c_1e^x+c_2e^{2x}\ ;\ y''-3y'+2y=0$
$в)\ x^2-xy+y^2=c^2;\quad (x-2y)y'=2x-y$
11.2. $a)\ \ y^3-cx^3+3xy=0\ ;\ y^3-(xy^2+x^2)y'+2xy=0$ $\qquad в)\ x\sqrt{1+y^2}=cy;\ xy'-y=y^3$
11.3. $y^2-2=ce^{1/x};\ 2x^2yy'+y^2=2$ $\qquad$ 11.4. $y=c_1\ln x-x^2/4+c_2;\ x(y''+1)+y'=0$

Berilgan a kattalikning qanday qiymatlarida funksiya differensial tenglamani yechimi bo'ladi?
11.5. $x=cy^2-y^a,\quad y^2-(2xy+3)y'=0$ $\quad$ 11.6. $x=ax^4+c/x^2,\quad y'+2y/x=x^3$

Quyidagi berilgan egri chiziqlar oilasining differensial tenglamasini tuzing.
11.7. $y=ce^x$ $\quad$ 11.8. $x^2+cy^2=2y$ $\quad$ 11.9. $cy=\sin cx$ $\quad$ 11.11. $y^3=c_1(x+c_2)^2$
11.11.O'rniga qo'yish yo'li bilan $y=cx^3$ funksiya $3y-xy'=0$ tenglamaning yechimi ekanligi tekshirilsin. Ushbu 1) $\left(1;\frac{1}{3}\right)$; 2) $(1;1)$; 3) $\left(1;-\frac{1}{3}\right)$ nuqtalardan o'tuvchi integral chiziqlar yasalsin.
11.12. O'rniga qo'yish yo'li bilan 1) $y''+4y=0$ va 2) $y'''-9y'=0$ differensial tenglamalar mos ravishda 1) $y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x$ va 2) $y=c_1+c_2e^{3x}+c_3e^{-3x}$ umumiy integrallarga ega ekanliklari tekshirilsin.
11.13. $c=0,\pm1;\pm2$ bo'lganda $y=cx^2$ parabolalar yasalsin va shu parabolalar oilasining differensial tenglamasi tuzilsin.
11.14. 1) $x^2+y^2=2cx$ aylanalar, 2) $y=x^2+2cx$ parabolalar oilasining tasviri yasalsin va ularning differensial tenglamalari tuzilsin.
O'zgaruvchilari ajraladigan 1-tartibli differensial tenglamalarning umumiy yechimini toping.
11.15. $(3x-1)dy+y^2dx=0$ $\qquad$ 11.16. $3x^2ydx+2\sqrt{4-x^3}dy=0$

58-mavzu. Bir jinsli differensial tenglamalar. Bir jinsli differensial tenglamaga keladigan tenglamalar. Birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar. Bernulli tenglamasi.

Bir jinsli funksiyalar.
Birinchi tartibli bir jinsli differensial tenglamalarni yechish usullari.

Agar $f(x,y)$ funksiyada x va y o'zgaruvchilarni mos ravishda tx va ty ga almashtirilganda (bu yerda t – ixtiyoriy parametr) $f(xt,yt)=t^n f(x,y)$ shart bajarilsa, $f(x,y)$ funksiya n o'lchovli bir jinsli funksiya deb ataladi. $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ funksiya bir o'lchovli bir jinsli funksiyadir, chunki $f(tx,ty)=\sqrt{t^2x^2+t^2y^2}=t\sqrt{x^2+y^2}=tf(x,y)$.Ushbu $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y}$ funksiya nol o'lchovli bir jinsli funksiya, chunki $f(tx,ty)=f(x,y)$yoki $f(tx,ty)=t^0f(x,y)$. $f(tx,ty)=f(x,y)$ shartga bo'ysunadigan nol o'lchovli bir jinsli funksiyani $f(x,y)=\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ ko'rinishda yozish mumkin. (11.4) ko'rinishdagi tenglama M va N funksiyalar x va y ning bir xil o'lchovli bir jinsli funksiyalari bo'lganda, bir jinsli tenglama deyiladi. Bu tenglamani $\dfrac{dy}{dx}=\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ ko'rinishga keltirib, $\dfrac{y}{x}=z$ yoki $y=zx$ almashtirish bilan yechiladi. Haqiqat $y=zx$ almashtirish bajarilsa, $\dfrac{dy}{dx}=x\dfrac{dz}{dx}+z;\ x\dfrac{dz}{dx}+z=f(z)$, yoki ba'zi bir almashtirishlar bajarilgandan so'ng $\dfrac{dz}{f(z)-z}=\dfrac{dx}{x}$

ko'rinishdagi tenglamaga kelamiz. Oxirgi tenglamani integrallab $\ln|x| = \int \frac{dz}{f(z)-z} + C$ integralni olamiz.

Differensial tenglama ko'rinishda $y' = h\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$ bo'lsa, bir jinsli tenglamaga olib kelish uchun $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ yoki $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ to'g'ri chiziqlarni kesishish nuqtasiga koordinata boshi olib kelinadi. Agar to'g'ri chiziqlar kesishmasa, ya'ni $a_1x + b_1y + c_1$ va $a_2x + b_2y + c_2$ bir-biriga proporsional bo'lsa, u holda $z = a_1x + b_1y$ almashtirish bajariladi.

Birinchi tartibli chiziqli differensial tenglama. Noma'lum funksiya y ham uning hosilasi y' ham faqat birinchi darajada qatnashgan differensial tenglama birinchi tartibli chiziqli differensial tenglama deyiladi. Uning umumiy ko'rinishi quyidagicha bo'ladi.

$$y' + f(x)y = g(x) \qquad (11.7)$$

bu yerda $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar x ning uzluksiz funksiyalar. Agar $g(x) = 0$ bo'lsa, (11.7) differensial tenglama bir jinsli, aks holda bir jinsli bo'lmagan differensial tenglama deyiladi. Bu (11.7) tenglamaning yechimi $y = f(x)$ ni $y = u\vartheta$ ko'rinishda izlanadi. Bu yerda $u = u(x)$ va $\vartheta = \vartheta(x)$ bo'ladi, ya'ni

$$y' = u'\vartheta + \vartheta' u \qquad (11.8)$$

(11.8) ni (11.7) ga qo'ysak, $u'\vartheta + \vartheta' u + f(x)u\vartheta = g(x)$ yoki $\vartheta\frac{du}{dx} + u\left(\frac{d\vartheta}{dx} + f(x)\vartheta\right) = g(x)$

u yoki ϑ funksiyalarning birini ixtiyoriy tanlash mumkinligi hisobiga, ϑ funksiyani

$$\frac{d\vartheta}{dx} + f(x)\vartheta = 0 \qquad (11.9)$$

ko'rinishda olish mumkin. U holda

$$\vartheta\frac{du}{dx} = g(x) \qquad (11.10)$$

ham o'rinli bo'ladi. (11.9) tenglamani quyidagi ko'rinishda yozish mumkin

$$\frac{d\vartheta}{\vartheta} = -f(x)dx,$$

bundan $\int\frac{d\vartheta}{\vartheta} = -\int f(x)dx, \quad \ln|\vartheta| = -\int f(x)dx$ va $\vartheta = e^{-\int f(x)dx}$

ϑ funksiyani bunday tanlab olganimizda (11.10) tenglama ushbu ko'rinishga ega bo'ladi:

$$e^{-\int f(x)dx}\cdot\frac{du}{dx} = g(x) \qquad (11.11)$$

(11.11) ni integrallab, $u = \int\left[g(x)e^{-\int f(x)dx}\right]dx + C$ va nihoyat

$$y = e^{-\int f(x)dx}\left\{\int\left[g(x)e^{-\int f(x)dx}\right]dx + C\right\} \qquad (11.12)$$

Oxirgi (11.12) funksiya (11.7) chiziqli differensial tenglamaning umumiy yechimini ifodalaydi.

"A" guruh

Quyidagi bir jinsli differensial tenglamalarning umumiy yechimitopilsin.

11.51. *a)* $y' = \frac{x^2 + y^2}{2x^2}$ *в)* $y' = \frac{y^2}{x^2} - 2$ 11.52. $y' = \frac{x + y}{x - y}$

11.53. $xdy - ydx = ydy$ 11.54. $y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$

11.55. $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ 11.56. $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$

11.57. $y^2+x^2y'=xyy'$ 11.58. $y'=e^{y/x}+\dfrac{y}{x}$

11.59. $xy'=y\ln\dfrac{y}{x}$ 11.60. $(3y^2+3xy+x^2)dx=(x^2+2xy)dy$

11.61. $y^2+x^2y'=xyy'$ 11.62. $xy'=y-xe^{y/x}$

11.63. $xy\sin\dfrac{y}{x}+x=y\sin\dfrac{y}{x}$ 11.64. $yy'=2y-x$

11.65. a) $y^2dx+(x^2-xy)dy=0$ в) $x^2+y^2-2xyy'=0$ 11.66. $\dfrac{dS}{dt}=\dfrac{S}{t}-\dfrac{t}{S}$

11.67.a) $y'=\dfrac{y}{x}+tg\dfrac{y}{x}$ в) $y'-\dfrac{3y}{x}=x$ 11.68. $y'=\dfrac{x+2y-3}{2x-2}$

11.69. $y'=\dfrac{x+2y-3}{4x-y-3}$ 11.70. $y'=\dfrac{x+6y-7}{8x-y-7}$

"B" guruh

Berilgan boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi differensial tenglamalarning xususiy yechimini toping.

11.71. a) $xy'-y=xtg\dfrac{y}{x}$, $y(1)=\dfrac{\pi}{2}$ в) $(xy'-y)arctg\dfrac{y}{x}=x,\quad y(1)=0$

11.72. $(y^2+3x^2)dy+2xydx=0,\quad y(0)=1$

11.73. a) $y'=\dfrac{x-2y+3}{2x-4y-1}$ в) $y'=\dfrac{y^2-2xy-x^2}{y^2+2xy-x^2}$; $y(1)=-1$

11.74. $(x^2-3y^2)dx+2xydy=0;\quad y(2)=1$

Quyidagi chiziqli differensial tenglamalarning yechimi topilsin.

11.75. $y'+2y=4x$ 11.76 $y'+2xy=xe^{-x^2}$

11.77. $y'+\dfrac{1-2x}{x^2}y=1$ 11.78. $(1+x^2)y'-2xy=(1+x^2)^2$

11.79. $y'+y=\cos x$ 11.80. $y'+ay=e^{mx}$

11.81. $2ydx+(y^2-6x)dy=0$ 11.82. $y'-y\sin x=\sin x\cos x$

11.83. $y'-2xy=3x^2-2x^4$ 11.84. $y'+y\cos x=e^{-\sin x}$

59-mavzu. To'la differensial tenglamalar. Yuqori tartibli differensial tenglamalar. Tartibini pasaytiradigan differensial tenglamalar.

Birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar.
Chiziqli tenglamalarni hisoblashning umumiy formulasi, Bernulli va Lagranj usullari. Bernulli tenglamasi.

Bernulli tenglamasi. $y'+py=Qy^n$ (11.13) chiziqli tenglamaga o'xshash $y=u\vartheta$ almashtirish bilan yoki ixtiyoriy o'zgarmasni variatsiya qilish bilan yechiladi. Bernulli tenglamasi $z=y^{1-n}$ almashtirsh natijasida chiziqli tenglamaga keltiriladi, ya'ni

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+p(x)y^{1-n}=Q(x)\Rightarrow y^{1-n}=z\Rightarrow(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}\Rightarrow\frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx}+p(x)z=Q(x).$$

(11.13) tenglama $n=0$ da chiziqli tenglamaga keladi, $n=1$ da esa o'zgaruvchilari ajraladigan tenglamaga keladi.

Quyidagi differensial tenglamalar yechilsin.

11.91. $y'+\frac{n}{x}y=\frac{a}{x^n},\quad y(1)=0$ 11.92. $(1+x^2)y'+y=arctgx$

11.93. $y'\sqrt{1-x^2}+y=\arcsin x,\quad y(0)=0$ 11.94. $y'-\frac{y}{\sin x}=\cos^2 x\ln tg\frac{x}{2}$

11.95. $y'-\frac{y}{x\ln x}=x\ln x,\quad y(e)=e^2/2$ 11.96. $y'\sin x-y\cos x=1,\quad y(\pi/2)=0$

11.97. $y'+3ytg3x=\sin 6x,\quad y(0)=1/3$ 11.98. $xy'+2y=x^2$

11.99. $y'+2xy=2xe^{-x^2}$ 11.100. $y'+2xy=2xe^{-x^2}$

Bernulli tenglamalarini yeching.

11.101. a) $y'-2xy=2x^3y^2,\quad y(0)=1$ в) $y'=y^4\cos x+ytgx$

11.102.a) $y'-\frac{y}{2x}=\frac{x^2}{2y}$ в) $xy^2y'=x^2+y^3$

11.103. $y'+\frac{2y}{x}=2x^2y^{4/3}$ 11.104. $y'+\frac{2y}{x}=\frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$

11.105. $y'+y=e^{x/2}\sqrt{y}$ 11.106. $y'+xy=xy^3$

11.107. $y'=\frac{y^2}{x^2}-\frac{y}{x},\quad y(-1)=1$ 11.108. $3y^2y'+y^3=(x+1),\quad y(1)=-1$

11.109. $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=-xy^2$ 11.110. a) $y'=\frac{4}{x}y+x\sqrt{y}$ b) $2xy\frac{dy}{dx}-y^2+x=0$

60-mavzu. O'zgarmas koeffitsientli yuqori tartibli bir jinsli tenglamalar.

Tartibini pasaytirish mumkin bo'lgan yuqori tartibli tenglamalarning ba'zi bir tiplari.
Tartibini pasaytirish usullari.

Agar $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ differensial tenglamada

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x} \qquad (11.13)$$

bo'lsa, bu tenglama $du=0$ ko'rinishga va uning umumiy integrali $u=c$ bo'ladi.

Agar (11.13) shart bajarilmasa, ya'ni $\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$ bo'lsa, u holda ba'zi bir shartlar bajarilganda shunday $\mu(x,y)$ funksiya topish mumkinki, $\mu M(x,y)dx+\mu N(x,y)dy=du$ bo'ladi. Bu $\mu(x,y)$ funksiya integrallovchi ko'paytuvchi deyiladi.

Quyidagi hollarda integrrallovchi ko'paytuvchini topish oson

1) $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\phi(x)$ bo'lganda $\ln\mu=\int\phi(x)dx$ bo'ladi.

2) $\dfrac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M}=\phi_1(x)$ bo'lganda $\ln\mu=\int\phi_1(x)dx$ bo'ladi.

10. Tartibini pasaytirish mumkin bo'lgan yuqori tartibli differensial tenglamalar. $y^{(n)}=f(x)$ ko'rinishdagi tenglama o'ng tomonini ketma-ket n marta integrallab yechiladi. Har bir integrallashda bitta ixtiyoriy o'zgarmas hosil bo'ladi, oxirgi natijada n ta ixtiyoriy o'zgarmas ishtirok etadi.

$$y=\int dx\int\ldots\int f(x)dx+c_1x^{n-1}+c_2x^{n-2}\ldots+c_n.$$

y oshkor ishtirok etmagan $F(x,y',y'')=0$ tenglama $y'=p,\quad y''=\frac{dp}{dx}$ almashtirish bilan $F\left(x,p,\frac{dp}{dx}\right)=0$ ko'rinishga keltiriladi. x oshkor etmagan $F(x,y',y'')=0$ tenglama $y'=p,\quad y''=\frac{dp}{dx}=p\frac{dp}{dy}$ almashtirish bilan $F\left(y,p,p,\frac{dp}{dy}\right)=0$ ko'rinishga keltiriladi.

"A" guruh

Quyidagi to'liq differensialli differensial tenglamalar yechilsin:

11.111. a) $(2x^3-xy^2)dx+(2x^3-xy^2)dy=0$ b) $\left(4-\frac{y^2}{x^2}\right)dx+\frac{2y}{x}dy=0$ 11.112. $3x^2e^ydx+(x^3e^y-1)dy=0$

11.113. $e^{-y}dx+(1-xe^{-y})dy=0$ 11.114. $2x\cos^2 ydx+(2x-x^2\sin 2y)dy=0$

11.115. $2x\cos^2 ydx+(2x-x^2\sin 2y)dy=0$ 11.116. $(3x^2+6xy^2)dx+(6x^2y+4x^3)dy=0$

11.117. $(x+y)dx+(x+2y)dy=0$ 11.118. $(x^2+y^2+2x)dx+2xydy=0$

11.119. $(x^3-3xy^2+2)dx-(3x^2y-y^2)dy=0$ 11.120. $xdx+ydy=\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$

Quyidagi differensial tenglamalarning integrallovchi ko'paytuvchilarini topilsin va tenglamalar yechilsin:

11.121. a) $(y+\ln x)dx-xdy=0$ b) $(x^2-\sin^2 y)dx+x\sin 2ydy=0$ 11.122. $(x^2-3y^2)dx+2xydy=0$

11.123. $(x\sin y+y\cos y)dx+(x\cos y-y\sin y)dy=0$ 11.124. $\cos xdy+(\sin x+e^y)dx=0$

11.125. $(x^2-y)dx+xdy=0$ 11.126. $2xtgydx+(x^2-2\sin y)dy=0$

11.127. $(e^{2x}-y^2)dx+ydy=0$ 11.128. $(1+3x^2\sin y)dx-xctgydy=0$

11.129. $y^2dx+(yx-1)dy=0$ 11.130. $(\sin x+e^y)dx+\cos xdy=0$

61-mavzu. O'zgarmas koeffisentli yuqori tartibli bir jinsli bo'lmagan, o'ng maxsus ko'rinishga ega bo'lgan differensial tenglama.

Tartibini pasaytirish mumkin bo'lgan yuqori tartibli tenglamalarning ba'zi bir tiplari. Tartibini pasaytirish usullari.

Quyidagi tenglamalar yechilsin.

11.131.a) $y''=y'ctgx$ в) $y'''=\frac{6}{x^2}$ boshlang'ich shartlar $x=1$ bo'lganda $y=2,\ y'=1,\ y''=1$

11.132. $y''=4\cos 2x$ boshlang'ich shartlar $x=0$ bo'lganda $y=0,\ y'=0$

11.133. $y''=\frac{1}{1+x^2}$ 11.134. $y''=\frac{1}{x}$ 11.135. $y''=\frac{1}{2y^3}$

11.136. $y''=1-y'^2$ 11.137. $xy''+y'=0$ 11.138. $yy''=y'^2$

11.139. $yy''+y'^2=0$ 11.140. $(1+x^2)y''+y'^2+1=0$ 11.141. $y'(1+y'^2)=ay''$

11.142. $x^2y''+xy'=1$ 11.143. $yy''=y^2y'+y'^2$ 11.144. $yy''-y'(1+y')=0$

11.145. $y''=-\dfrac{x}{y}$ 11.146. $x^3y''+x^2y'=1$ 11.147. $y''+y'tgx=\sin 2x$

11.148. $y''+2y(y')^3=0$ 11.149. $y''x\ln x=y'$ 11.150. $y''tgy=2(y')^2$

11.151. $y''=-\dfrac{x}{y}$ 11.152. $xy''+y'=0$ 11.153. $xy''=y'\ln\dfrac{y'}{x}$

11.154. $yy''-y(1+y')=0$ 11.155. $y'''=2(y''-1)ctgx$ 11.156. $y''-4y'+3y=0$ 11.157. $y''-4y'+4y=0$

11.158. $y''-4y'+13y=0$ 11.159. $y''-4y'=0$

11.160. $y''+4y=0$ 11.161. $y''+4y'=0$

11.162. $y''+3y'+2y=0$ 11.163. $y''+2ay'+a^2y=0$

11.164. $y''+2y'+5y=0$ 11.165. $\dfrac{d^2x}{dt^2}-2\dfrac{dx}{dt}-3x=0$

11.166. $\dfrac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0$ 11.167. $\dfrac{d^2S}{dt^2}+a\dfrac{dS}{dt}-3x=0$

11.168. $\ddot{x}_{tt}+2\dot{x}_t+3x=0$ 11.169. $\dfrac{d^2x}{dt^2}+3\dfrac{dx}{dt}-4x=0$

11.170. $4\dfrac{d^2S}{d\varphi^2}+S=0$ 11.171. $\dfrac{d^2S}{dt^2}+2\dfrac{dS}{dt}+2S=0$

62-mavzu. Differensial tenglamalar sistemasi. Differensial tenglamalarni taqribiy yechish usullari.

Bir jinsli bo’lmagan differensial tenglama.
O’zgarmas koeffitsiyentli chiziqli bir jinsli bo’lmagan differensial tenglamalarni yechish usullari.

O’zgarmas koeffisisyentli ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar. Ushbu

$$y''+py'+qy=r(x) \qquad (11.14)$$

ko’rinishdagi tenglama $(p=const,\ q=const)$ ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglama deyiladi. Bu yerda $r(x)$ berilgan funksiya. Agar $r(x)=0$ bo’lsa, (11.14) bir jinsli $r(x)\neq 0$ bo’lsa, bir jinsli bo’lmagan tenglama differensial tenglama deyiladi.

Bir jinsli ikkinchi tartibli differensial tenglamani

$$y''+py'+qy=0 \qquad (11.15)$$

yechimni

$$y=Ce \qquad (11.16)$$

ko’rinishda qidiramiz. Agar (11.16) ni (11.15) qo’ysak

$$\lambda^2+p\lambda+q=0, \quad (\lambda=const)$$

xarakteristik tenglamani olamiz.

1. Agar xarakteristik tenglama ikkita λ_1 va λ_2 yechimlari mavjud bo’lsa, $(\lambda_1\neq\lambda_2)$ u holda differensial tenglama (11.16) umumiy yechimi

$$y=c_1e^{\lambda_1x}+c_2e^{\lambda_2x} \qquad (11.17)$$

2. Agar xarakteristik tenglamani yechimlari $\lambda_1=\lambda_2$ bo’lsa, u holda

$$y=c_1e^{\lambda_1x}+c_2xe^{\lambda_2x}.$$

3. Agar xarakteristik tenglamani yechimlari kompleks son, ya’ni

$$\lambda = \alpha \pm \beta i \left(\alpha = -p/2, \quad \beta = \sqrt{q - p^2/4}\right)$$

bo’lsa, u holda $y = c_1 e^{\alpha x} \sin \beta x + c_2 e^{\alpha x} \cos \beta x$

Ixtiyoriy o’zgarmasni variatsiyalash usuli. Bir jinsli bo’lmagan chiziqli tenglamani yechish usullari umumiyrog’I bo’lib, Lagranj metodi yoki ixtiyoriy o’zgarmasni variatsiyalash metodi hisoblanadi.

$y'' + py' + qy = 0$ tenglamaning o’zaro bog’liq bo’lmagan ikkita yechimi bo’lsa, u holda $y'' + py' + qy = r(x)$ tenglamaning yechimi, Lagranj metodiga asosan, $y = Ay_1 + By_2$ ko’rinishda izlanadi, bundagi A va B lar x ning funksiyalari bo’lib, ular

$$\left.\begin{aligned} A'y_1 + B'y_2 &= 0 \\ A'y_1' + B'y_2' &= r(x) \end{aligned}\right\}$$

Tenglamlar sistemasini qanoatlantirishi kerak. Bundan

$$A' = -\frac{y_2 r(x)}{\Delta}, \quad B' = \frac{y_1 r(x)}{\Delta}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

“A” guruh

Quyidagi bir jinsli ikkinchi tartibli *y* differensial tenglamalar yechilsin.

11.156. $y'' - 4y' + 3y = 0$

11.157. $y'' - 4y' + 4y = 0$

11.158. $y'' - 4y' + 13y = 0$

11.159. $y'' - 4y' = 0$

11.160. $y'' + 4y = 0$

11.161. $y'' + 4y' = 0$

11.162. $y'' + 3y' + 2y = 0$

11.163. $y'' + 2ay' + a^2 y = 0$

11.164. $y'' + 2y' + 5y = 0$

11.165. $\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} - 3x = 0$

11.166. $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$

11.167. $\frac{d^2S}{dt^2} + a\frac{dS}{dt} - 3x = 0$

11.168. $\ddot{x}_{tt} + 2\dot{x}_t + 3x = 0$

11.169. $\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} - 4x = 0$

11.170. $4\frac{d^2S}{d\varphi^2} + S = 0$

11.171. $\frac{d^2S}{dt^2} + 2\frac{dS}{dt} + 2S = 0$

“B” guruh

Bir jinsli bo’lmagan differensial tenglamalarni yeching.

11.172. $y'' - 4y = x^2 e^{2x}$

11.173. $y'' + 9y = \cos 2x$

11.174. $y'' - 4y' + 4y = \sin 2x + e^{2x}$

11.175. $y'' + 2y' + 2y = e^x \sin x$

11.176. $y'' - 7y' + 12y = -e^{4x}$

11.177. $y'' - 2y' = x^2 - 1$

11.178. $y'' - 2y' + y = 2e^x$

11.179. $y'' - 2y' = e^{2x} + 5$

11.180. $y'' - 4y' + 4y = x^2$

11.181. $y'' - y' + y = x^3 + 6$

Boshlang’ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimni toping.

11.182. $y'' + 5y' + 6y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -6$

11.183. $y'' - 10y' + 25y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

11.184. $y'' - 2y' + 10y = 0, \quad y(\pi/6) = 1, \quad y'(\pi/6) = e^{\pi/6}$

11.185. $3y'' + y = 0, \quad y(3\pi/2) = 2, \quad y'(3\pi/2) = 0$

11.186. $y'' + 3y' = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$

11.187. $y'' + 9y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(\pi/4) = 1$
11.188. $y'' + y = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y'(\pi/3) = 0$
11.189. $y'' - 4y' + 3y = e^{5x}, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 9$
11.190. $y'' + y = \cos 3x, \quad y(\pi/2) = 4, \quad y'(\pi/2) = 1$
11.191. $y'' - 8y' + 16y = e^{4x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

63-MAVZU. LAPLAS ALMASHTIRILISHI, UNING XOSSALARI. ORGINALLAR SINFI. TASVIRLAR SINFI. OPERATSION HISOBNING ASOSIY TEOREMALARI. ORGINALNI TASVIR BO'YICHA TIKLASH.

Haqiqiy sonlr o'qida aniqlangan $f(t)$ funksiya quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

a) $f(t)$ funksiya istalgan chekli intervalda uzluksiz yoki I – tur uzulish nuqtalariga ega:

b) $f(t)$ funksiya argumentning manfiy qiymatlarida aynan nolga teng, ya'ni $t < 0$ bo'lganda $f(t) \equiv 0$

c) shunday $M > 0,\ S_0 > 0$ sonlar mavjudki, t argumentning barcha qiymatlari uchun $f(t)$ funksiyaning moduli $Me^{S_0 t}$ funksiyadan oshmaydi, ya'ni barcha t lar uchun $|f(t)| \le M^{S_0 t}$ tengsizlik bajariladi.Yuqoridagi a), b), c) shartlarni qanoatlantiruvchi har qanday $f(t)$ funksiya boshlang'ich funksiya deyiladi.

Endi $f(t)$ boshlang'ich funksiyani e^{-pt} (p-kompleks sonlar)funksiyaga ko'paytiraylik va undan quyidagi

$$\int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt, \qquad (\operatorname{Re} p > 0)$$

xosmas integralni ko'rib o'taylik. Bu xosmas integral, $f(t)$ boshlang'ich funksiya bo'lganligi uchun, doimo yaqinlashuvchi va p argumentning funksiyasi bo'ladi.

Quyidagi

$$g(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt, \qquad \operatorname{Re} p > 0 \qquad (15.1)$$

munosabat bilan aniqlangan $g(p)$ funksiya $f(t)$ funksiyaning tasviri yoki Laplas almashtirishi deyiladi va

$$g(p) = L[f]$$

kabi belgilanadi.

Shuni ta'kidlab o'tamizki har qanday $f(t)$ boshlang'ich funksiyaning tasviri (15.1) munosabat orqali yagona aniqlanganligi kabi, har qanday $g(p)$ tasvirning ham yagona $f(t)$ boshlang'ich funksiyasi mavjud. Berilgan tasvirdan uning boshlang'ich funksiyasiga o'tish

$$f(t) = L^{-1}[g]$$

tenglik orqali ifodalanadi. Agar $f(t)$ funksiya a), b), c) shartlarning birortasini qanoatlantirmasa, u boshlang'ich funksiya bo'la olmaydi va (15.1) xosmas integral uzoqlashadi.

Masalan, $f(t) = ctgt$ boshlang'ich funksiya bo'la olmaydi, chunki u tasvirning a) shartini qanoatlantirmaydi, ya'ni $t = k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ nuqtalarda II tur uzulishga ega. Shuning uchun $f(t) = ctgt$ funksiyaning tasviri mavjud emas. Bir qator boshlang'ich funksiyalarning tasvirlarini hisoblashni ko'rib chiqaylik.

I. Chiziqlilik xossasi.

a) boshlang'ich funksiya bo'lmish $f(t)$ va ixtiyoriy olingan c o'zgarmas miqdor uchun

$$L[cf(t)] = cL[f(t)] \qquad (15.2)$$

tenglik o'rinlidir.

b) chekli sondagi boshlang'ich funksiyalar yig'indisining tasviri mos tasvirlar yig'indisiga teng, ya'ni

$$L[f_1 \pm f_2 \pm \ldots \pm f_n] = L[f_1] \pm L[f_2] \pm \ldots \pm L[f_3] \qquad (15.3)$$

munosabat o'rinli.

II. O'xshashlik teoremasi. Agar $a > 0$ va $L[f(t)] = g(p)$ bo'lsa, u holda $L[f(at)] = \frac{1}{a} g(\frac{p}{a})$ munosabat o'rinli bo'ladi.

III. Kechikish teoremasi. Agar s ixtiyoriy musbat son va $L[f(t)] = g(p)$ bo'lsa, u holda

$$L[f(t-s)] = e^{-sp} g(p)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

IV. Siljish teoremasi. Agar $L[f] = g(p)$ bo'lsa, u holda

$$L[e^{-\alpha t} \cdot f(t)] = g(p+\alpha)$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

V.Kompozitsiyalash teoremasi.

Ta'rif. Berilgan f_1 *va* f_2 funksiyalarning kompozitsiyasi deb

$$f(t) = \int_0^t f_1(s) \cdot f_2(t-s)ds = \int_0^t f_2(s) f_1(t-s)ds$$

tenglik bilan aniqlanuvchi $f(t)$ funksiyaga aytiladi. Odatda ikkita funksiyaning kompozitsiyasi

$$f(t) = f_1(t) * f_2(t)$$

kabi belgilanadi.

15.1-jadval. Ba'zi funksiyalarning tasvirlari

Original	**Tasvir**	**Original**	**Tasvir**
1	$\frac{1}{p}$	$sh\beta t$	$\frac{\beta}{p^2-\beta^2}$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p-\alpha}$	$ch\beta t$	$\frac{p}{p^2-\beta^2}$
$\sin\beta t$	$\frac{\beta}{p^2+\beta^2}$	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$\cos\beta t$	$\frac{p}{p^2+\beta^2}$	$t^n e^{\alpha t}$	$\frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$
$e^{\alpha t}\cos\beta t$	$\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$	$e^{\alpha t}\sin\beta t$	$\frac{\beta}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$
$t\cos\beta t$	$\frac{p^2-\beta^2}{(p^2+\beta^2)^2}$	$t\sin\beta t$	$\frac{2p\beta}{(p^2+\beta^2)^2}$

A guruh

Quyidagi funksiyalarni orginali mavjudmi?

15.1. $f(t) = \begin{cases} 0, & agar \quad t < 0 \\ 4, & agar \quad t > 0 \end{cases}$ 15.2. $f(t) = \begin{cases} 0, & agar \quad t < 0 \\ tgt, & agar \quad t > 0 \end{cases}$

Laplas almashtirishining xossalaridan foydalanib quyidagi funksiyalarning tasvirlarini toping.

15.3. $f(t)=\begin{cases}1, & t\ge 0\\ 0, & t<0\end{cases}$ 15.4. $f(t)=13$ 15.5. $f(t)=\begin{cases}e^{at}, & t\ge 0\\ 0, & t<0\end{cases}$

15.6. $f(t)=a^t$ 15.7. $f(t)=e^{3t}\sin\pi t$ 15.8. $f(t)=\cos\omega t,\ \ t\ge 0$

15.9 $f(t)=t^n$ 15.10 $f(t)=\sin\beta t$ 15.11 $f(t)=74t$.

B guruh

Laplas almashtirishining xossalaridan foydalanib quyidagi funksiyalarning tasvirlari topilsin.

15.12. $f(t)=(t+1)^2$ 15.13. $f(t)=(t-1)^4$ 15.15. $f(t)=te^t$

15.15. $f(t)=e^{-3t}\sin 4t$ 15.16. $f(t)=t^4e^{3t}$ 15.17. $f(t)=t^6e^{-5t}$

15.18 $f(t)=e^{-2t}\cos 4t$ 15.19. $e^{-\alpha t}\sin\omega t\ \ va\ \ e^{-\alpha t}\cos\omega t$ 15.20. $f(t)=e^{-2t}\cos 13t$

15.21. $f(t)=e^{3t}\sin t$ 15.22. $f(t)=2e^{-it}-3+5\cos t$ 15.23. $f(t)=\sin 2t\cos 5t$

15.24. $f(t)=e^{-3t}\sin\pi t$ 15.25. $f(t)=sh\beta t\cos\beta t$

15.26. $f(t)=\begin{cases}t, & agar\quad 0<t<2\pi\\ \sin 2t, & agar\quad t\ge 2\pi\end{cases}$ 15.27. $f(t)=\sin^2 t$ 15.28. $f(t)=e^t\cos^2 t$

15.29. $f(t)=shat\cos bt$ 15.30 $f(t)=chat\sin bt$ 15.31. $f(t)=chat\cos bt$

15.32. $f(t)=tchbt$ 15.33. $f(t)=cos^3 t$

C guruh

Laplas almashtirishining xossalaridan foydalanib quyidagi funksiyalarning tasvirlari topilsin.

15.34. $f(t)=e^{t+2}\cos 5t$

15.35. $f_1(t)=t,\quad f_2(t)=e^t$ funksyalarning kompozitsyasi topilsin.

15.36 $f(t)=e^t(\cos 2t-\sin t)$

Quyidagi funksyalarning tasvirlari mavjudmi?

15.37. $f(t)=\begin{cases}0, & agar\quad t<0\\ e^{(3+i)t}, & agar\quad t>0\end{cases}$ 15.38. $f(t)=\begin{cases}0, & agar\quad t<0\\ \sin(2-i)t, & agar\quad t\ge 0\end{cases}$

15.39. $f(t)=\begin{cases}0, & agar\quad t<0\\ 2^{t^2}, & agar\quad t\ge 0\end{cases}$

Hosilaning tasviri va tasvirning hosilasi

Faraz qilaylik $f(t)$ funksiya va uning $n-$ tartibligacha bo'lgan $f', f'',\dots,f^{(n)}$ hosilalari boshlang'ich funksiyalar bo'lsin.

Hosilaning tasviri. Agar $f(t)$ funksiyaning tasviri $g(p)$ bo'lsa, u holda $f'(t)$ hosilaning tasviri

$L[f']=pg(p)-f(0)$ munosabat bilan aniqlanadi va bu yerda $f(0)=\lim\limits_{t\to+0}f(t)$ deb tushuniladi.

Xuddi shunday usulda $f''(t), f'''(t),\dots,f^{(n)}(t)$ yuqori tartibli hosilalarning ham tasvirlarini $f(t)$ funksiyaning tasviri orqali ifodalash mumkin. Agar $L[f]=g(p)$ bo'lsa u holda

$L[f']=pg(p)-f(0)$

$L[f'']=p^2g(p)-pf(0)-f'(0)$

$L[f''']=p^3g(p)-p^2f(0)-pf'(0)-f''(0)$

……………………………………………..

………………………………………………..

$$L\left[f^{(n)}\right]=p^n g(p)-p^{n-1}f(0)-\ldots-pf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)=p^n g(p)-\sum_{k=0}^{n-1}f^{(k)}(0)p^{n-k-1}$$

Tasvirning hosilasi:

$g(p)$ tasvir p parametrning funksiyasi bo'lganligi uchun undan p ga nisbatan hosilalar olish masalasini ko'rib o'taylik.

Tasvirning ta'rifiga asosan $g(p)=\int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt$ va shuning uchun

$$g'(p)=\int_0^\infty (e^{-pt})'_p\cdot f(t)dt=\int_0^\infty e^{-pt}(-t)f(t)dt=\int_0^\infty e^{-pt}\left[-tf(t)\right]dt$$

olingan natijadan $g'(p)=\left[-tf(t)\right]$ ekanligini ko'ramiz.

Demak tasvirning hosilasi $-tf(t)$ boshlang'ich funksiyaning tasviriga teng ekan. Shuningdek, tasvirning yuqori tartibli hosilalari uchun

$g''(p)=L\left[t^2 f(t)\right]$

$g'''(p)=L\left[-t^3 f(t)\right]$

………………………

$g^{(n)}(p)=L\left[(-1)^n t^n f(t)\right]$

tengliklarni keltirib chiqarish mumkin.

Tasvirning hosilalari uchun topilgan munosabatlardan foydalanib quyidagi

$$L\left[t^n e^{\alpha t}\right]=\frac{n!}{(p-\alpha)^{n-1}}$$

tenglikni keltirib chqaraylik. Darhaqiqat $g_1(p)=L\left[e^{\alpha t}\right]=\dfrac{1}{p-\alpha}$ tenglikni nazarda tutib, uning uning hosilalarini hisoblaymiz:

$$g'_1(p)=-\frac{1}{(p-\alpha)^2}, \qquad g''_1(p)=\frac{1\cdot 2}{(p-\alpha)^3}$$

$$g'''_1(p)=-\frac{1\cdot 2\cdot 3}{(p-\alpha)^4}, \qquad g_1^{(n)}(p)=(-1)^n\frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$$

Lekin biz $g^{(n)}(p)=L\left[(-1)^n t^n f(t)\right]$ ekanligini yuqorida hosil qilgan edik. Demak $f(t)=e^{\alpha t}$ bo'lsa $g_1^{(n)}(p)=L\left[(-1)^n t^n e^{\alpha t}\right]$ bo'ladi. Natijada

$$(-1)^n L\left[t^n e^{\alpha t}\right]=(-1)^n\frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}} \quad \text{yoki} \quad L\left[t^n e^{\alpha t}\right]=\frac{n!}{(p-\alpha)^{n-1}}$$

tenglikka erishamiz. Bu yerda $\alpha=0$ deb, ushbu

$$L\left[t^n\right]=\frac{n!}{p^{n+1}}$$

muhim formulaga yana bir bora kelamiz.

A guruh

15.40.Agar $y(0)=y'(0)=0$ va $y(t)=\bar{y}(p)$ bo'lsa, $y(t)=y''(t)-y'(t)-y(t)$ funksyaning tasvirni toping.

15.41. Agar $y(0)=0,\quad y'(0)=1,\quad y'(0)=2,\quad y(t)=\bar{y}(p)$ bo'lsa, $y(t)=y'''(t)-y''(t)+2y'(t)-2y(t)$ ning tasvirini toping

14.42. Agar $y(0)=0,\quad y'(0)=1,\quad y'(0)=2,\quad y(t)=\bar{y}(p)$ bo'lsa, $y(t)=y'''(t)-y''(t)+2y'(t)-2y(t)$ ning tasvirini toping.

B guruh

15.43.Agar $y(0)=-1, \quad y'(0)=2, \quad y'(0)=-3, \quad va \quad y(t)=\bar{y}(p)$ bo'lsa, $F(t)=y'''(t)-3y''(t)+2y'(t)-4y(t)+1$ ning tasvirini toping.

15.44. $\int_0^t (e^{-3t}ch2t+e^{4t}\sin 2t)dt$ tasvirni toping.

15.45. $\int_0^t (t^7-5t^4-2t^2+3)e^{2t}dt$ tasvirni yeching.

15.46. Agar $y(0)=0, \quad y(t)=\bar{y}(p)$ bo'lsa, u holda $F(t)=y'(t)-\int_0^t y(\tau)d\tau$ ning tasvirini toping.

15.47. Agar $y(0)=1, \quad y'(0)=2$ bo'lsa, $y''(t)-4y'(t)+3y(t)$ ning tasvirini toping.

15.48. Agar $y(0)=-3, \quad y'(0)=7, \quad y''(0)=1$ bo'lsa, $y'''(t)+6y''(t)+y'(t)-2y(t)+3$ ning tasvirini toping.

15.49. $\int_0^t (\sin t+3e^2)dt$ tasvirni yeching.

15.50. $\int_0^t t^4e^{-2e}dt$ tasvirni yeching.

15.51. Davri $T=2\pi$ bo'lgan funksiyani originalini toping. $f(t)=\begin{cases}1-2t/\pi, & agar \quad 0<t<\pi\\ 2t/\pi-3, & agar \quad \pi<t<2\pi\end{cases}$

Tasvirga ko'ra originalni tiklash

Tasvirga ko'ra originalni tiklash uchun oddiy hollarda (asosan elementar funksiyalarda) 15.1-jadvaldan foydalaniladi. Boshqa hollarda yoyish birinchi va ikkinchi teoremalaridan foydalaniladi. Bu teorema kasr –ratsional funksiyalarni tasviridan $F(p)=u(p)/v(p)$ originalga o'tishga imkon yaratadi.

$$F(p)=\sum_{j=1}^{r}\sum_{S=1}^{k_i}\frac{A_{j,S}}{(p-p_j)^{k_j-S+1}} \qquad (15.4)$$

koeffiyentlar $A_{j,S}$ quyudagi formula bilan aniqlanadi.

$$A_{j,S}=\frac{1}{(S-1)!}\lim_{p-p_j}\left\{\frac{d^{S-1}}{dp^{S-1}}\left[(p-p_j)^{k_j}F(p)\right]\right\}$$

Agar $v(p)$ ko'p handing ildizlari oddiy bo'lsa,

$$v(p)=(p-p_1)(p-p_2)\ldots(p-p_n) \quad (p_j\neq p_k)$$

u holda

$$F(p)=\sum_{j=1}^{n}\frac{A_j}{p-p_j}, \text{ bu yerda } A_j=\frac{u(p_j)}{v'(p_j)}$$

Tasvir funksiyasini (1/p) bo'yicha dajani qatorga yoyib hisoblash mumkin

$$F(p)=\frac{a_0}{p}+\frac{a_1}{p^2}+\ldots+\frac{a_n}{p^{n+1}}+\ldots$$

$F(p)$ qator $|p|>R$ da yaqinlashuvchi $(R=\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}/a_n\neq\infty))$, u holda

$$f(t)=a_0+a_1\frac{t}{1!}+a_2\frac{t^2}{2!}+\ldots+a_n\frac{t^n}{n!}+\ldots$$

qator ham t ning barcha qiymatlarini yaqinlashuvchi bo'ladi.

A guruh

Quyidagi $F(p)$ tasvirlarning originallarini toping.

15.52. $F(p)=\frac{p}{p^2-2p+5}$ 15.53. $F(p)=\frac{2p+1}{p^2+5p+10}$

15.54. $F(p)=e^{-p}\frac{p}{p^2-9}+\frac{1}{p^2+5}$ 15.55. $F(p)=\frac{1}{p^3-8}$

15.56. $F(p)=\frac{1}{p(p^2+4)}$ 15.57. $F(p)=\frac{1}{p^2(p^2+4)}$

B guruh

Quyidagi tasvirlarning originallari topilsin

15.58. $\frac{2p+1}{p^2+5p+10}$ 15.59. $F(p)=\frac{1}{(p-3)^5}$ 15.60. $F(p)=\frac{1}{(p-1)^3(p+2)^2}$

15.61. $F(p)=\frac{1}{(p-1)(p^2-4)}$ 15.62. $F(p)=\frac{p+3}{p(p^2-4p+3)}$

15.63. $F(p)=\frac{1}{p(p^4-5p^2+4)}$ 15.64. $F(p)=\frac{1}{p(1+p^4)}$

15.65. $F(p)=\frac{1}{p^2-1}+\frac{3p-2}{(p-1)^2+3}$ 15.66. $F(p)=\frac{p-3}{2p^2-6p+1}$

15.67. $F(p)=\frac{e^{-2p}}{p^2+4p+3}$ 15.68. $F(p)=\frac{p}{(p^2+1)(p^2+4)}$

C guruh

Quyidagi tasvirlarning originallari tiklansin

15.69. $e^{-p}\frac{p}{p^2-9}+\frac{1}{p^2+5}$ 15.70. $F(p)=\frac{p^2}{p^4+13p^2+36}$

15.71. $F(p)=\frac{p^3e^{-2p}}{(p^2+9)^2}$ 15.72. $F(p)=\frac{p+1}{p(p-1)(p-2)(p-3)}$

15.73. $F(p)=\frac{4-p-p^2}{p^3-p^2}$ 15.74. $F(p)=\frac{1}{p^4-6p^3+11p^2-6p}$

15.75. $F(p)=\frac{1}{(p-1)(p^3+1)}$

64-MAVZU. DIFFERENSIAL TENGLAMALAR VA TENGLAMALAR SISTEMASINI OPERATSION HISOB USULLAR YORDAMIDA YECHISH.

Faraz qilaylik, $x(0)=x_0$; $x'(0)=x_1 \ldots x^{(n-1)}(0)=x_{n-1}$ boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi o'zgarmas koeffisiyentli n-tartibli oddiy differensial tenglama

$$a_n x^{(n)}(t)+a_{n-1}x^{(n-1)}(t)+\ldots+a_1x^1(t)+a_0x(t)=f(t), \qquad (15.5)$$

berilgan bo'lsin. Hamda $Y(t)\xleftarrow{=}X(p)$ va $f(t)\Leftarrow F(p)$ bo'lsin. Laplas almashtirish natijasida $A(p)Y(p)=F(p)+B(p)$, bu yerda $A(p), B(p)$-ko'p hadlar. Bu tenglamani yechib, $Y(p)=\frac{F(p)+B(p)}{A(p)}$ ni olamiz.

Endi umumiy holda ikkinchi tartibli chiziqli o'zgarmas koeffisentli bir jinsli bo'lmagan differensial tenglamaning

$$y''+ay'+by=\varphi(t) \qquad (15.6)$$

$$y(0)=y_0 \quad va \quad y'(0)=y'_0$$

boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimning tasvirini topaylik. Buning uchun (15.6) tenglamaning har ikkala tomonidan Laplas almashtirishi olamiz

$$L[y'']+aL[y']+bL[y]=L[\varphi]$$

yoki

$$p^2\overline{y}(p)-py(o)-y'(0)+a(p\overline{y}(p)-y(0))+b\overline{y}(p)=L[\varphi]$$

yordamchi chiziqli tenglamaga kelamiz. Bundan

$$\overline{y}(p)[p^2+ap+b]=L[\varphi]+py(0)+y'(0)+ay(0)$$

tenglamani hosil qilamiz va uni yechib

$$\overline{y}(p)=\frac{L[\varphi]+(p+a)y(0)+y'(0)}{p^2+ap+b} \qquad (15.7)$$

tasvirni topamiz. Agar differensial tenglamaning o'ng tomoni $\varphi(t)$ va yechimning boshlang'ich y_0, y'_0 qiymatlari berilgan bo'lsa (15.7) tenglamadan $y(t)$ yechimni yuqoridagi jadval yordamida tiklash mumkin.

A guruh

15.76. $y''+3y'+2y=0$ differensial tenglamaning $y(0)=0,\ y'(0)=1$ boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimi topilsin.

Yechish: Tasvirini $\overline{y}(p)=L[y]$ orqali belgilasak, y' va y'' funksiyalarning tasvirlari quyidagicha aniqlanadi:

$$L[y']=p\overline{y}(p)-y(0), \quad L[y'']=p^2\overline{y}(p)-py(0)-y'(0)$$

Berilgan differensial tenglamaning har ikkala tomonidan Laplas almashtirishi olib, yordamchi algebraik tenglamaga kelamiz;

$$L[y''+3y'+2y]=L[0]=0, \quad L[y'']+3L[y']+2L[y]=0 \text{ yoki}$$

$$p^2\overline{y}(p)-py(0)-y'(0)+3(p\overline{y}(p)-y(0))+2\overline{y}(p)=0$$

misolning shartiga ko'ra $y(0)=0,$ va $y'(0)=1$ ekanligini hisobga olsak, $\overline{y}(p)$ tasvirga nisbatan $p^2\overline{y}(p)+3p\overline{y}(P)+2\overline{y}(p)-1=0$ yoki $\overline{y}(p)[p^2+3p+2]=1$ tenglamaga ega bo'lamiz. Bu tenglamadan izlanayotgan yechimning tasviri

$$\overline{y}(p)=\frac{1}{p^2+3p+2}=\frac{1}{p+1}-\frac{1}{p+2}$$

topiladi va jadvaldagi 3– formuladan uning o'zi $y(t)=e^{-t}-e^{-2t}$ ekanligi aniqlanadi.

15.77. $y'-2y=0, \quad y(0)=1$ 15.78. $y'+y=e^t, \quad y(0)=0$ 15.79. $y''-9y=0, \quad y(0)=y'(0)=0$

$y'+cy=\varphi(t)$ **differensial tenglamaning** $y(0)=y_0$ **shartni qanoatlantiruvchi yechimi topilsin:**

15.80. a) $c=2;\ y_0=0;\ \varphi(t)=3$ в) $c=1;\ y_0=1;\ \varphi(t)=5t$

15.81. $c=-4;\ y_0=1;\ \varphi(t)=e^{3t}$ 15.82. $c=0;\ y_0=2;\ \varphi(t)=\sin t$

15.83. $c=0;\ y_0=2;\ \varphi(t)=te^{-t}$

B guruh

$y''+ay'+by=\varphi(t)$ **differensial tenglamaning** $y(0)=y_0,\ y'(0)=y'_0$ **shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi topilsin, agar**

15.84. $a=-2;\ b=-3;\ y_0=0;\ y'_0=0;\ \varphi(t)=e^{3t}$

15.85. $a=3;\ b=3;\ y_0=1;\ y'_0=2;\ \varphi(t)=0$

15.86. $a=-7;\ b=10;\ y_0=1;\ y'_0=1;\ \varphi(t)=5$

15.87. $a=0;\ b=-3;\ y_0=0;\ y'_0=0;\ \varphi(t)=e^{2t}-2$

15.88. $a=-2;\ b=1;\ y_0=1;\ y'_0=0;\ \varphi(t)=\sin t$

15.89. $a=4;\ b=0;\ y_0=0;\ y'_0=0;\ \varphi(t)=\sin 3t$

15.90. $a=-2c_1;\ b=c_1^2+c_2^2\ \ \varphi(t)=0$

15.91. $a=0;\ b=s^2;\ \ \varphi(t)=c\cdot\cos\varpi t$

15.92. Yuqori tartibli $y^{(IV)}-y''+y=\sin t$ differensial tenglamaning $y(0)=y'(0)=y''(0)=y'''(0)=0$ shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi topilsin.

15.93. $y''+y'-2y=e^t,\quad y(0)=-1,\quad y'(0)=0$

15.94. $y'''-6y''+11y'-6y=0,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=1, y''(0)=0$

C guruh

Quyidagi birinchi tartibli, chiziqli, o’zgarmas koiffisentli differensial tenglamalar sistemasining berilgan boshlang’ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi topilsin:

15.95. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x+2y, & x(0)=0\\ \dfrac{dy}{dt}=2x+y+1, & y(0)=5\end{cases}$

Yechish. Tasvirga o’tib oddiy tenglamalar sistemasini tuzamiz

$$\begin{cases}p\bar{x}(p)=\bar{x}(p)+2\bar{y}(p)\\ p\bar{y}(p)-5=2\bar{x}(p)+\bar{y}(p)+\dfrac{1}{p}\end{cases}$$

sistemani $\bar{x}$ va $\bar{y}$ larga nisbatan yechamiz.

$$\bar{x}(p)=\frac{10p+2}{p(p+1)(p-3)},\quad \bar{y}(p)=\frac{5p^2-4p-1}{p(p+1)(p-3)}$$

Original topish uchun §15.2da keltirilgan yoyish usulidan foydalanamiz. U holda

$$x=-\frac{2}{3}-2e^{-t}+\frac{8}{3}e^{3t};\quad y=\frac{1}{3}+2e^{-t}+\frac{8}{3}e^{3t}.$$

15.96 $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=2y, & x(0)=2\\ \dfrac{dy}{dt}=2x, & y(0)=2\end{cases}$

15.97. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=3x+4y,\\ \dfrac{dy}{dt}=4x-3y, & x(0)=y(0)=1\end{cases}$

15.98 . $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}+4x-y=0, & x(0)=1\\ \dfrac{dy}{dt}-2x-y=0, & y(0)=2\end{cases}$

15.99. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}+x+y=t, & x(0)=0\\ \dfrac{dy}{dt}+x+y=0, & y(0)=0\end{cases}$

J A V O B L A R

15.1. Mavjud **15.2.** Mavjud emas

15.3.a) $p=S+i\tau$ ekanligini nazarda tutib, xosmas integralning ta’rifiga ko’ra, quyidagilarga ega bo’lamiz:

$g(p)=\int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^{b} e^{-pt} dt = -\frac{1}{p}\lim_{b\to\infty} e^{-pt}\Big|_0^b = -\frac{1}{p}\lim_{b\to\infty}(e^{-pb}-1=\frac{1}{p})$ bu yerda e^{-pb}

$\left|e^{-pb}\right| = \left|e^{-(S+i\tau)b}\right| = e^{-Sb}\left|e^{-i\tau b}\right| = e^{-Sb}\left|\cos\tau b - i\sin\tau b\right| = e^{-Sb}\sqrt{\cos^2\tau b+\sin^2\tau b} = e^{-Sb}$ bundan $\operatorname{Re} p = S > 0$ ekanligi hisobiga $\lim_{b\to\infty}\left|e^{-pb}\right| = \lim_{b\to\infty} e^{-pb} = 0$.

Natijada moduli nolga intilgan kompleks funksiyaning o'zi ham nolga intiladi, ya'ni $\lim_{b\to\infty} e^{-pb} = 0$ va $g(p)=\frac{1}{p}$ natijaga erishamiz. **15.4.** $\frac{13}{p}$

15.5. Tasvirning ta'rifiga ko'ra va $\operatorname{Re} p \succ \operatorname{Re}\alpha$ bo'lganligidan

$$g(p)=\int_0^{\infty} e^{-pt}e^{\alpha t}dt = \int_0^{\infty} e^{-(p-\alpha)}dt = -\frac{1}{p-\alpha}\int_0^{\infty} d(e^{-(p-\alpha)t}) = -\frac{1}{p-\alpha}\lim_{b\to\infty}\int_0^{b} d(e^{-(p-\alpha)t}) =$$

$$= -\frac{1}{p-\alpha}\lim_{b\to\infty}(e^{-(p-\alpha)b}-1) = \frac{1}{p-\alpha}$$

kelib chiqadi, ya'ni $L\left[e^{\alpha t}\right]=\frac{1}{p-\alpha}$. Agar 2- misolda α ni $-\alpha$ ga almashtirsak $\operatorname{Re} p \succ \operatorname{Re}(-\alpha)$ u holda $L\left[e^{-\alpha t}\right]=\frac{1}{p+\alpha}$ munosabatga erishamiz.

15.6. $\frac{1}{p-\ln a}$ **15.7.** $\frac{\pi}{(p-3)^2+\pi^2}$ **15.8.** $\cos\omega=\frac{1}{2}\left(e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}\right)$ tenglikni va xosmas integralning chiziqligini hisobga olib

$$L[\cos\omega t]=\int_0^{\infty} e^{-pt}\cos\omega t dt = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-pt}\left(e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}\right)dt = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-(p-i\omega)t}dt + \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-(p+i\omega)t}dt =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p-i\omega}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p+i\omega} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{p-i\omega}+\frac{1}{p+i\omega}\right) = \frac{p}{p^2+\omega^2}$$

ekanligini ko'ramiz. Demak, ixtiyoriy ω haqiqiy son uchun $L[\cos\omega t]=\frac{p}{p^2+i\omega^2}$.

15.9 $\frac{n!}{p^{n+1}}$ **15.10** $\frac{\beta}{p^2+\beta^2}$ **15.11** $g(p)=\frac{74}{p^2}$.

15.12. $\frac{2+2p+p^3}{p^3}$ **15.13.** $\frac{24-24p+12p^2-4p^3+p^4}{p^5}$ **15.14.** $\frac{1}{(p-1)^2}$

15.15. $\frac{4}{(p+3)^2+16}$ **15.16.** $\frac{24}{(p-3)^5}$ **15.17.** $\frac{720}{(p+5)^7}$

15.18 $\frac{p+2}{(p+2)^2+16}$

15.19. $L\left[e^{-\alpha t}\sin\omega t\right]=\frac{\omega}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$; $L\left[e^{-\alpha t}\cos\omega t\right]=\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$

15.20. $\frac{p+2}{(p+2)^2+169}$ **15.21.** $\frac{1}{(p-3)^2+1}$

15.22. $F(p)=\frac{2}{p+i}-\frac{3}{p}+\frac{5p}{p^2+1}$ **15.23.** $F(p)=\frac{1}{2}\frac{7}{p^2+49}-\frac{1}{2}\frac{3}{p^2+9}$

15.24.. $F(p)=\frac{\pi}{(p+3)^2+\pi^2}$ **15.25..** $F(p)=\frac{1}{2}\frac{p-\beta}{(p-\beta)^2+\beta^2}-\frac{p+\beta}{(p+\beta)^2+\beta^2}$

15.26. $F(p)=\frac{1}{p}-e^{-2\pi p}\frac{1}{p^2}-2\pi e^{-2\pi p}\frac{1}{p}+e^{-2\pi p}\frac{1}{p^2+1}$

15.27. $F(p)=\frac{2}{p(p^2+4)}$ **15.28**. $F(p)=\frac{p(p^2+2p+3)}{(p-1)(p^2-2p+5)}$

15.29. $F(p)=\frac{a(p^2-a^2-b^2)}{p[(p-a)^2+b^2][(p+a)^2+b^2]}$ **15.30** $F(p)=\frac{b(p^2+a^2-b^2)}{[(p-a)^2+b^2][(p+a)^2+b^2]}$

15.31. $F(p)=\frac{p(p^2-a^2-b^2)}{[(p-a)^2+b^2][(p+a)^2+b^2]}$ **15.32**. $F(p)=\frac{2pb}{(p^2-b^2)^2}$

15.33. Yechish. Eyler formulasidan $\cos t=(e^{it}+e^{-it})/2$ ekanligidan

$\cos^3 t=\left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^3=\frac{1}{8}(e^{3it}+3e^{it}+3e^{-it}+e^{-3it})=\frac{1}{4}\frac{e^{3it}+e^{-3it}}{2}+\frac{3}{4}\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}=\frac{1}{4}\cos 3t+\frac{3}{4}\cos t$ Demak, $F(p)=\frac{1}{4}\frac{p}{p^2+9}+\frac{3}{4}\frac{p}{p^2+1}=\frac{p(p^2+9)}{(p^2+1)(p^2+9)}$ **15.34**. $\frac{e^2(p-1)}{(p-1)^2+25}$

15.35. funksiyaning aniqlanishiga ko'ra $f_1(t-s)=t-s$ va $f_2(s)=e^s$ ularning kompozitsiyasi esa $f(t)=t*e^t=\int_0^t(t-s)e^s ds$ kabi aniqlanadi. Tenglikning o'ng tomonidagi integralni ikkita integral ayirmasi ko'rinishida yozib $f(t)=\int_0^t e^s(t-s)ds=t\int_0^t e^s ds-\int_0^t se^s ds=t(e^t-1)-te^t+\int_0^t e^s ds=e^t-t-1$ tenglikni olamiz. Demak $f(t)=t*e^t=e^t-t-1$ bo'lar ekan.

15.36 $\frac{p-1}{(p-1)^2+4}-\frac{1}{(p-1)^2+1}$ **15.37**. mavjud $s_0=3$

15.38. mavjud $s_0=0$ **15.39**.. mavjud emas $s_0=+\infty$

15.40. Original differensial lash qoidasiga asosan $y'(t)=p\bar{y}(p)-y(0)=p\bar{y}(p)$

$$y''(t)=p^2\bar{y}(p)-py(0)-y'(0)=p^2\bar{y}(p)$$

Bu yerdan

$$y''(t)-y'(t)-y(t)=(p^2-p-1)\bar{y}(p).$$

15.41. $(1-2p)\bar{y}(p)$ **15.42.** $(p^3-p^2+2p-2)\bar{y}(p)-p-1$

15.43. $(p^3-3p^2+2p-4)\bar{y}(p)+p^2-5p+11+1/p$

15.44. $e^{-3t}ch2t+e^{4t}\sin 2t=\frac{p+3}{(p+3)^2-4}+\frac{2}{(p-4)^2+4}$

Originalni integrallash qoidasidan foydalansak,

$$\int_0^t(e^{-3t}ch2t+e^{4t}\sin 2t)dt=\frac{1}{p}\left(\frac{p+3}{(p+3)^2-4}+\frac{2}{(p-4)^2+4}\right)$$

15.45. $\frac{1}{p}\left(\frac{7!}{(p-2)^8}-\frac{5!}{(p-2)^5}-\frac{4!}{(p-2)^3}+\frac{3}{p-2}\right)$ **15.46**. $\frac{\bar{y}(p)}{p}(p^2-1)$

15.47. $(p^2-4p+3)\bar{y}(p)-p+2$ **15.48.** $(p^3+6p^2+p-2)\bar{y}(p)+3p^2+11p-40+3/p$

15.49. $\frac{1}{p}\left(\frac{1}{p^2+1}+\frac{6}{p^2}\right)$ **15.50**. $\frac{4!}{p(p+2)^5}$ **15.51.** $\frac{1}{p}-\frac{2th\pi p}{\pi p^2}$

15.52. $\frac{p}{p^2-2p+5}=\frac{p-1+1}{(p-1)^2+4}=\frac{p-1}{(p-1)^2+4}+\frac{1}{(p-1)^2+4}$, 15.1-jadvaldan foydalanib

$$\frac{p-1}{(p-1)^2+4} \to e^t \cos 2t; \quad \frac{1}{(p-1)^2+4} = \frac{1}{2}\frac{2}{(p-1)^2+4} \Rightarrow \frac{1}{2}e^t \sin 2t$$

Shuning uchun $\dfrac{p}{p^2-2p+5} = e^t\left(\cos 2t + \dfrac{1}{2}\sin 2t\right)$.

15.53. $2e^{-5t/2}\cos\dfrac{\sqrt{15}}{2}t - \dfrac{8}{\sqrt{15}}e^{-5t/2}\sin\dfrac{\sqrt{15}}{2}t$ **15.54.** $ch3(t-1)l(t-1) + \dfrac{1}{\sqrt{5}}\sin\sqrt{5}tl(t)$

15.55. $\dfrac{1}{12}e^{2t} - \dfrac{1}{12}e^{-t}\left(\cos\sqrt{3}t + \sqrt{3}\sin\sqrt{3}t\right)$ **15.56.** $\dfrac{1}{4}(1-\cos 2t)$ **15.57.** $\dfrac{1}{4}\left(1 - \dfrac{1}{2}\sin 2t\right)$

15.58. $\dfrac{2p+1}{p^2+5p+10} = \dfrac{2p+1}{p^2+2\frac{5}{2}p+\frac{25}{4}-\frac{25}{4}+10} = \dfrac{2(p+5/2-5/2)+1}{\left(p+\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2} - 4\dfrac{2}{\sqrt{15}}\dfrac{\sqrt{15}/2}{\left(p+\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2}$

Bu yerda $\dfrac{p}{p^2+\left(\sqrt{15}/2\right)^2} \Leftarrow \cos\sqrt{15}/2t; \quad \dfrac{\sqrt{15/2}}{p^2+\left(\sqrt{15}/2\right)^2} \Leftarrow \sin\dfrac{\sqrt{15}}{2}t$.

Demak, $\dfrac{2p+1}{p^2+5p+10} = 2e^{-5t/2}\cos\dfrac{\sqrt{15}}{2}t - \dfrac{8}{\sqrt{15}}e^{-5t/2}\sin\dfrac{\sqrt{15}}{2}t$

15.59. $e^{3t}\dfrac{t^4}{4!}$ **15.60.** $\dfrac{3t^2+2t-2}{54}e^t + \dfrac{2t+1}{27}e^{-2t}$ **15.61.** $-\dfrac{1}{3}e^t + \dfrac{1}{4}e^{2t} + \dfrac{1}{12}e^{-2t}$

15.62. $1-2e^t+e^{3t}$ **15.63.** $\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{3}cht+\dfrac{1}{12}ch2t$ **15.64.** $\dfrac{t^4}{4!}-\dfrac{t^8}{8!}+\dfrac{t^{12}}{12!}-\dfrac{t^{16}}{16!}+\dots$

15.65. $\dfrac{1}{2}sh2t + 3e^t\cos\sqrt{3}t + \dfrac{1}{\sqrt{3}}e^t\sin\sqrt{3}t$ **15.66.** $\dfrac{1}{2}e^{3t/2}\left(ch\dfrac{\sqrt{11}}{2}t - \dfrac{3}{\sqrt{11}}sh\dfrac{\sqrt{11}}{2}t\right)$

15.67. $\dfrac{1}{2}\left(e^{-(t-2)} - e^{-3(t-2)}\right)$ **15.68.** $\dfrac{1}{3}(\cos t - \cos 2t)$

15.69. $ch3(t-1)l(t-1) + \dfrac{1}{\sqrt{5}}\sin\sqrt{5}tl(t)$ bu yerda $l(t) = \begin{cases} 0, & agar \quad t<0 \\ 1, & agar \quad t>0 \end{cases}$ birlik funksiya.

15.70. $\dfrac{1}{5}(3\sin 3t - 2\sin 2t)$ **15.71.** $\cos 3(t-2) - 1{,}5(t-2)\sin 3(t-2)$ **15.72.** $-\dfrac{1}{6}+e^t-\dfrac{3}{2}e^{2t}+\dfrac{2}{3}e^{3t}$

15.73. $2e^t - 4t - 3$ **15.74.** $-\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{2}e^t-\dfrac{1}{2}e^{2t}+\dfrac{1}{6}e^{3t}$

15.75. $\dfrac{1}{8}\left(2t^2-6t+3\right)e^t - \dfrac{1}{24}e^{-t} + \dfrac{2}{3}\sin\left(t\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\pi}{6}\right)$

15.76. Tasvirini $\overline{y}(p) = L[y]$ orqali belgilasak, y' va y'' funksiyalarning tasvirlari quyidagicha aniqlanadi: $L[y'] = p\overline{y}(p) - y(0), \quad L[y''] = p^2\overline{y}(p) - py(0) - y'(0)$

Berilgan differensial tenglamaning har ikkala tomonidan Laplas almashtirishi olib, yordamchi algebraik tenglamaga kelamiz; $L[y''+3y'+2y] = L[0] = 0, \quad L[y''] + 3L[y'] + 2L[y] = 0$

yoki $p^2\overline{y}(p) - py(0) - y'(0) + 3(p\overline{y}(p) - y(0)) + 2\overline{y}(p) = 0$ misolning shartiga ko'ra $y(0)=0,$ va $y'(0)=1$ ekanligini hisobga olsak, $\overline{y}(p)$ tasvirga nisbatan

$p^2\overline{y}(p) + 3p\overline{y}(P) + 2\overline{y}(p) - 1 = 0$ yoki $\overline{y}(p)\left[p^2+3p+2\right] = 1$ tenglamaga ega bo'lamiz. Bu tenglamadan izlanayotgan yechimning tasviri

$$\overline{y}(p) = \frac{1}{p^2+3p+2} = \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+2}$$

topiladi va jadvaldagi 3 – formuladan uning o'zi $y(t) = e^{-t} - e^{-2t}$ ekanligi aniqlanadi.

15.77. $y=e^{2t}$ **15.78.** $y=sht$ **15.79.** $y=0$ **15.80.**a) $y(t)=\frac{3}{2}(1-e^{-2t})$

b) $y(t)=-5+5t+6e^{-t}$ **15.81.** $y(t)=e^{4t}-e^{3t}$ **15.82.** $y(t)=\frac{1}{2}(\sin t-\cos t+e^{-t})$ **15.83.** $y(t)=3-e^{-t}-e^{-t}$ **15.84.** $y''-2y'-3y=e^{3t}$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$ tasvirni topamiz.

$p^2\bar{y}-py(0)-y'(0)-2(p\bar{y}-y(0))-3\bar{y}=\frac{1}{p-3}$ yoki

$p^2\bar{y}-2p\bar{y}-3\bar{y}=\frac{1}{p-3}$; $\bar{y}=\frac{1}{(p+1)(p-3)^2}$

Kasr ko'rinishdagi ifodani oddiy kasrlar algebraik yig'indisi ko'rinishida olamiz.

$\bar{y}=\frac{1}{4(p-3)^2}-\frac{1}{16(p-3)}+\frac{1}{16(p+1)}$; bu yerdan $y=\frac{1}{4}te^{3t}-\frac{1}{10}e^{3t}+\frac{1}{10}e^{t}$.

15.85. $y(t)=4e^{-t}-3e^{-2t}$ **15.86.** $y(t)=\frac{1}{2}(1+e^{2t})$ **15.87.** $y(t)=e^{t}-e^{2t}+te^{2t}$

15.88. $y(t)=\frac{1}{2}e^{t}-\frac{1}{2}te^{t}+\frac{1}{2}\cos t$ **15.89.** $y(t)=\frac{3}{10}\sin 2t-\frac{1}{5}\sin 3t$

15.90. $y(t)=\frac{e^{c_1 t}}{c_2^2}\left[y_0c_2\cos c_2t+(y'_0-y_0c_1)\sin c_2t\right]$

15.91. $y(t)=\frac{c}{s^2-\varpi^2}\left[\cos\varpi t-\cos st+y_0\cos 3t+\frac{y'_0}{s}\sin 3t\right]$

15.92. $y(t)=\frac{1}{8}\left[e^{t}(t-2)+e^{-t}(t+2)+2\sin t\right]$

15.93. $\frac{1}{3}te^{t}-\frac{7}{9}e^{t}-\frac{2}{9}e^{-2t}$ **15.94.** $-\frac{5}{2}e^{t}+4e^{2t}-\frac{3}{2}e^{3t}$

15.95. Tasvirga o'tib oddiy tenglamalar sistemasini tuzamiz

$$\begin{cases} p\bar{x}(p)=\bar{x}(p)+2\bar{y}(p) \\ p\bar{y}(p)-5=2\bar{x}(p)+\bar{y}(p)+\frac{1}{p} \end{cases}$$

sistemani $\bar{x}$ va $\bar{y}$ larga nisbatan yechamiz.

$$\bar{x}(p)=\frac{10p+2}{p(p+1)(p-3)},\quad \bar{y}(p)=\frac{5p^2-4p-1}{p(p+1)(p-3)}$$

Original topish uchun §15.2da keltirilgan yoyish usulidan foydalanamiz. U holda

$$x=-\frac{2}{3}-2e^{-t}+\frac{8}{3}e^{3t};\quad y=\frac{1}{3}+2e^{-t}+\frac{8}{3}e^{3t}.$$

15.96 $x=\frac{5}{2}e^{2t}-\frac{1}{2}e^{2t}-\frac{1}{2}e^{-2t}$, $y=\frac{5}{2}e^{2t}-\frac{1}{2}e^{-2t}$

15.97. $x=\frac{6}{5}e^{5t}-\frac{1}{5}e^{5t}$, $y=\frac{3}{5}e^{5t}+\frac{2}{5}e^{-5t}$

15.98 . $y(t)=\frac{10}{3}-\frac{4}{3}e^{-3t}$ **15.99.** $y(t)=\frac{e^{-2t}}{8}-\frac{t^2}{4}+\frac{t}{4}-\frac{1}{8}$

65-MAVZU. IKKINCHI TARTIBLI XUXUSIY HOSILALI DIFFERENSIAL TENGLAMALARNING KANONIK FORMULALARI VA TASVIRI. XARAKTERISTIK TENGLAMASI. KOSHI MASALASINING QO'YILISHI.

Tor tebranish tenglamasi matematik fizikaning oddiy tenglamasi hisoblanadi. Uning ko'rinishi quyidagicha

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \qquad (16.1)$$

bu yerda $a^2 = T/\rho$, T – tor nuqtalaridagi taranglik kuchi, ρ-tor materiali zichligi, $u(x,t)$ - tor nuqtalarining t vaqtda muvozanat vaziyati atrofidagi ko'chishi. (16.1) quyidagi boshlang'ich shartlarni qanoatlantiradi:

$$u(x,t)\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x) \qquad (16.2)$$

harakat tenglamasi (16.1) ning (16.2) boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi $(|x| < \infty, \quad t > 0)$ yechimini topish Koshi masalasi deyiladi.

Bu masalani yechishda Dalamber usuli qo'llanilishi mumkin. Buning uchun (16.1) tenglamaning umumiy yechimi quyidagicha izlanadi:

$$u(x,t) = f_1(x+at) + f_2(x-at).$$

Bu yerda f_1, f_2-ixtiyoriy ikki marta differensiallanuvchi funksiya bo'lib, (16.2) shartlardan topiladi va umumiy yechim quyidagi ko'rinishga ega:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x+at) + \varphi(x-at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(S)dS \qquad (16.3)$$

A guruh

Masalalarda berilgan shartlarni qanoatlantiruvchi Koshi masalasi yechimi $u(x;t)(-\infty < x < \infty)$ ni toping.

16.1 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (-\infty < x < \infty)$ differensial tenglamaning $u(x,t)\big|_{t=0} = \cos 2x, \quad \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \sin x$ shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini toping.

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(\cos 2(x+at) + \cos 2(x-at)) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \sin S dS = \cos 2x \cos 2at + \frac{1}{2}\sin x \sin at.$$

16.2. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (-\infty < x < \infty)$ tenglamaning $u(x,t)\big|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = x$ shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini toping.

16.3 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (-\infty < x < \infty)$ tenglamaning $u(x,t)\big|_{t=0} = \sin x, \quad \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \cos x$ masalalarda berilgan shartlarni qanoatlantiruvchi Koshi masalasi yechimini $u(x,t) \quad (-\infty < x < \infty, \quad t > 0)$ shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini toping.

16.4. Quyidagi $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ tenglama bilan ifodalanuvchi tor tebranish tenglamasining $u(x,t)\big|_{t=0} = \cos x, \quad \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 2$ boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi $t = \frac{\pi}{3}$ vaqtdaga yechimini aniqlang.

16.5. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (-\infty < x < \infty)$ tenglamaning $u(x,0) = x(1+x^2)^{-1}, \quad \left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \sin x$ shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini toping.

16.6. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (-\infty < x < \infty)$ tenglamaning yechimini $u(x,t)|_{t=0}=x, \quad \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=-x$ shartlar asosida toping.

16.7. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (-\infty < x < \infty)$ tenglamaningyechimini $u(x,t)|_{t=0}=0, \quad \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=\cos x$ shartlar asosida toping.

16.8. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (-\infty < x < \infty)$ tenglamaning $t=\pi$ vaqtdagi $u(x,t)|_{t=0}=\sin x, \quad \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=\cos x$ shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini toping.

16.9. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (-\infty < x < \infty)$ tenglamaning $u(x,t)|_{t=0}=0, \quad \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=x$ shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini toping.

16.10. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (-\infty < x < \infty)$ tenglamaning $u(x,t)|_{t=0}=\sin x, \quad \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=1$ shartlarni qanoatlantiruvchi $t=\frac{\pi}{2a}$ vaqtdagi yechimini toping.

66-MAVZU. BIR O'LCHOVLI TO'LQIN TENGLAMALARI UCHUN KOSHI MASALASI. DALAMBER FORMULASI

Tor tebranish tenglamasining

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \alpha^2=\frac{T}{\rho} \qquad (16.4)$$

$$u(0,t)=0; \quad u(e,t)=0 \quad (t\geq 0)$$

chegaraviy va

$$u(x,t)|_{t=0}=\varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x) \qquad (0\leq x\leq t)$$

boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini topish talab etiladi. Bu (16.4) tenglamani yechishga Fur'e usulini qo'llash mumkin. U holda $u(x,t)$ yechim qator yordamida ifoda qilinadi:

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi at}{\ell}+b_k\sin\frac{k\pi at}{\ell}\right)\sin\frac{k\pi t}{\ell}, \quad (16.5)$$

bu yerda

$$a_k=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx; \quad b_k=\frac{2}{k\pi a}\int_0^{\ell}\psi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx$$

Agar $A_k=\sqrt{a_k^2+b_k^2}$, $\sin\varphi_\kappa=\frac{a_\kappa}{A_\kappa}$, $\cos\varphi_\kappa=\frac{b_\kappa}{A_\kappa}$ belgilash kiritsak, u holda yechim

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}A_k\sin\frac{k\pi x}{\ell}\sin\left(\frac{k\pi at}{\ell}+\varphi_\kappa\right)$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu qatorning har bir hadi turg'un to'lqinni ifoda qiladi va uning amplitudasi $A_k\sin(k\pi x/\ell)$, chastotasi - $\omega_k=\frac{k\pi a}{\ell}$ va fazasi - φ_k bo`ladi.

B guruh

16.11. Uzunligi l bo'lgan ikki tomoni mahkamlangan ($x=0$ va $x=l$) tor nuqtalarining ko'chishi

$$u(x,t)\big|_{t=0}=\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{5}, & agar \quad 0<x<\dfrac{\ell}{2}\\ -\dfrac{1}{5}(x-\ell), & agar \quad \dfrac{\ell}{2}<x<\ell\end{cases},$$

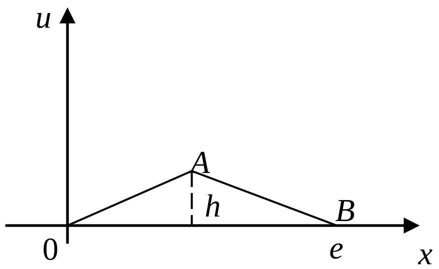
chegaraviy $u(0,t)=0;\quad u(l,t)=0 \quad (t\geq 0)$ va boshlang'ich

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x)=0 \ \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x)=0 \ (0\leq x\leq l)$$ shartlarni

qanoatlantiruvchi yechimini toping.

16.12. Ikki uchi mahkamlangan ($x=0$ va $x=l$) tor boshlang'ich vaqtdagi holati parabola ko'rinishida $u=\left(4h/l^2\right)\cdot x(l-x)$. Torning abtsissa o'qi bo'yicha ko'chishini toping (boshlang'ich tezlik hisobga olinmasin).

16.13 Torning boshlang'ich holatdagi ko'rinishi OAB siniq chiziq ko'rinishda bo'lsa, ixtiyoriy t vaqtdagi $u(x,t)$ tor nuqtalari ko'chishini toping (16.1- chizma).



16.1- chizma

16.14. Ikki tomoni mahkamlangan tor nuqtalarining boshlang'ich ko'chishi nolga va tezligi

$$\frac{\partial u}{\partial t}=u_t'=\begin{cases}v_0(const), & agar \quad |x-l/2|<h/2\\ 0, & agar \quad |x-l/2|>h/2\end{cases}$$

bo'lsa, t vaqtda torning holatini aniqlang.

16.16. Torning ikkala tomoni mahkamlangan ($x=0$ va $x=2$). Boshlang'ich holatda $u=\left(2x-x^2\right)$. Ixtiyoriy t vaqtga tor nuqtalarning $u(x,t)$ ko'chishini toping.

Issiqlik tarqalish tenglamasi

Bitta Ox o'qi bo'yicha issiqlik tarqalish tenglamasining

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (t>0, \quad -\infty<x<\infty), \quad (16.6)$$

$u(x,t)\big|_{t=0}=f(x)$ shartni qanoatlantiruvchi yechimi Fur'e usuli yordamida

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)e^{-(\xi-x)^2/\left(4a^2t\right)}d\xi$$

ko'rinishida topiladi.

B guruh

16.17. Differensial tenglamaning $u\big|_{t=0} = f(x) = u_0$ va $u\big|_{x=0} = 0$ shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini toping.

16.18. Differensial tenglamaning $u\big|_{t=0} = f(x) = \begin{cases} x, & agar \quad 0 < x < e/2 \\ e - x, & agar \quad e/2 \le x < e \end{cases}$ va $u\big|_{x=0} = u\big|_{x=e} = 0$ shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini toping.

C guruh

16.19. $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ tenglamaning quyidagi boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini toping.

$$u(x,t)\big|_{t=0} = f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{\ell}, \ 0 \le x \le \ell; \\ 1 + \frac{x}{\ell}, -\ell \le x \le 0; \\ 0 \quad , \ x \ge \ell \text{ и } x \le -\ell \end{cases}$$

16.20. Quyidagi $u_t' = a^2 u_{xx}$ tenglamaning $u(x,t)\big|_{t=0} = f(x) = \begin{cases} u_0, & agar \quad x_1 < x < x_2 \\ 0, & agar \quad x < x_1 \quad yoki \quad x > x_2 \end{cases}$ shartni qanoatlantiruvchi yechimi topilsin

16.21. Yarim cheksiz sterjenning chapdagi oxiri issiqlik o'tkazmaydigan bo'lsa va issiqlik tarqalishining boshlang'ich tezligi quyidagi $u\big|_{t=0} = f(x) = \begin{cases} 0, \ x < 0; \\ u_0, \ 0 < x < \ell; \\ 0 \ , \ell < x. \end{cases}$ formula bilan berilgan bo'lsa, issiqlik tarqalish tenglamasining yechimini toping.

16.22. Yupqa bir jinsli, uzunligi ℓ ga teng bo'lgan sterjen berilgan. U tashqi muhitdan ajratilgan bo'lib, boshlang'ich harorati $f(x) = \frac{cx(\ell - x)}{\ell^2}$ ga teng. Sterjenning oxirlarida nolga teng bo'lgan harorat saqlanadi. Sterjenning ixtiyoriy $t > 0$ vaqtdagi harorati aniqlansin.

16.23. Umumiy OZ o'qqa ega bo'lgan ikki silindr orasidagi fazoda issiqlikning statsionar tarqalishi qonunini toping. Silindrlar sirtlarida harorat o'zgarmas.

J A V O B L A R

16.1. **(**16.3**)** yechimning umumiy ko'rinishidan:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(\cos 2(x + at) + \cos 2(x - at)) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \sin S dS = \cos 2x \cos 2at + \frac{1}{2}\sin x \sin at.$$

16.2. xt. 16.3. $\sin(x+t)$ 16.4. Bu yerda $a = 1$, $\varphi(x) = \cos x$, $\psi(x) = 2$, u holda $u(x,t) = \frac{1}{2}(\cos(x+t) + \cos(x-t)) + \frac{1}{2a}\int_{x-t}^{x+t} 2dS = \cos x \cos t + 2t$. Agar $t = \frac{\pi}{3}$ bo'lsa, u holda $u\left(x, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\cos x + \frac{2\pi}{3}$. 16.5. $\frac{1}{2}\left(\frac{x+t}{1+(x+t)^2} + \frac{x-t}{1+(x-t)^2}\right) + \sin x \sin t$ 16.6. $u = x(1-t)$

16.7. $u = (\cos x - \sin at)/a$ 16.8. $u = -\sin x$ 16.9. $u = xt$

16.10. $u = \sin x \cos at + t, \quad t = \frac{\pi}{(2a)}$ bo'lganda $u = \frac{\pi}{(2a)}$ bo'ladi

16.11. O’rganilayotgan holat uchun $\psi(x)=0$. Demak $b_n=0 \quad (n=1,2,...)$,

$$a_n=\frac{2}{e}\int_0^e \varphi(x)\sin\frac{\pi nx}{e}dx=\frac{u}{5e}\frac{e^2}{\pi^2 n^2}\sin\frac{\pi n}{2}$$

juft n lar uchun $a_n=0$ va $\sin\frac{\pi n}{2}=\sin\frac{2\pi k}{2}=0$. Agar $n=2k-1$, ya’ni toq n lar uchun

$$a_{2n-1}=(-1)^{n-1}\frac{ue}{5\pi^2(2n-1)^2} \quad (n=1,2,...).$$

Demak yechimni quyidagicha yozish mumkin**:**

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{\pi an}{e}t\sin\frac{\pi nx}{e}=\frac{ue}{5\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{\pi an}{e}t\sin\frac{\pi nx}{e}.$$

16.12. $u(x,t)=\frac{32n}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos\frac{(2n+1)\pi at}{e}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{e}$

16.13. $u(x,t)=\frac{8h}{\pi^2}\left(\sin\frac{\pi x}{e}\cos\frac{\pi at}{e}-\frac{1}{3^2}\sin\frac{3\pi x}{e}\cos\frac{3\pi at}{e}+\frac{1}{5^2}\sin\frac{5\pi x}{e}\cos\frac{5\pi at}{e}-\frac{1}{7^2}\sin\frac{7\pi x}{e}\cos\frac{7\pi at}{e}+...\right)$

16.14. $u(x,t)=\frac{4v_0 e}{\pi^2 a}\left(\sin\frac{\pi h}{2e}\sin\frac{\pi at}{e}\sin\frac{\pi x}{e}-\frac{1}{3^2}\sin\frac{3\pi h}{2e}\sin\frac{3\pi at}{e}\sin\frac{3\pi x}{e}+\frac{1}{5^2}\sin\frac{5\pi h}{2e}\sin\frac{5\pi at}{e}\sin\frac{5\pi x}{e}\right)$

16.16. $u(x,t)=(32/\pi^3)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos(2n+1)\frac{\pi at}{2}t\sin(2n+1)\frac{\pi x}{2}.$

16.17. $u(x,t)=u_0\phi\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)$

16.18. $u(x,t)=\frac{4e}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}e^{-(2n+1)^2\pi^2 t/e^2}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{e}$

16.19. $u(x,t)=\frac{1}{2}[(1+\frac{x}{\ell})\Phi(\frac{x+\ell}{2\sqrt{t}})-2\cdot\frac{x}{\ell}\cdot\Phi(\frac{x}{2\sqrt{t}})-(1-\frac{x}{\ell})\Phi(\frac{x-\ell}{2\sqrt{t}})]+\frac{1}{\ell}\sqrt{\frac{\ell}{\pi}}\cdot[e^{-\frac{(x+l)^2}{4t}}-2e^{-\frac{x^2}{4t}}+e^{-\frac{(x-\ell)^2}{4t}}]$

Ko’rsatma: Yechim quyidagicha izlanadi. $\mathrm{u(x,t)}=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\cdot\int_{-\ell}^{0}(1+\frac{\xi}{\ell})\cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}d\xi+\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\cdot\int_0^{\ell}(1-\frac{\xi}{\ell})\cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}d\xi$, $\frac{x-\xi}{2\sqrt{t}}=\mu$ almashtirish bajarib javobni soddalashtiring.

16.20. Sterjen uzunligi cheksiz bo’lganligi uchun, (16.5) tenglamaning yechimi Puasson integrali orqali ifoda qilinadi:

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)e^{-(\xi-x)^2/(4a^2e)}d\xi$$

Bu yerda $]x_1,x_2[$ oraliqda temperatura u_0 o’zgarmas, oraliqdan tashqarida nolga teng, u holda yechim quyidagicha bo’ladi.

$$u(x,t)=\frac{u_0}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{x_1}^{x_2}e^{-(\xi-x)/(4a^2e)}d\xi.$$

Bu integralni shakl almashtirish bilan hisoblab, yechimni olamiz:

$$u(x,t)=\frac{u_0}{2}\left[\phi\left(\frac{x-x_1}{2a\sqrt{t}}\right)-\phi\left(\frac{x-x_2}{2a\sqrt{t}}\right)\right]$$

bu yerda $\phi(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-\mu^2}d\mu$.

16.21. $u(x,t)=\frac{u_0}{2}\cdot\left[\Phi\left(\frac{x+l}{2a\sqrt{t}}\right)-\Phi\left(\frac{x-l}{2a\sqrt{t}}\right)\right].$

16.22. $u(x,t)=\frac{8c}{\pi^2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\cdot e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2a^2t}{\ell^2}}\cdot\sin\frac{(2n+1)\pi x}{\ell}.$

Ko'rsatma. Sterjen haroratining tarqalish qonuni quyidagi tenglama bilan beriladi:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Boshlang'ich sharti $u|_{t=0}=f(x)=\frac{cx(\ell-x)}{\ell^2}$ va chegaraviy shartlari $u|_{x=0}=u|_{x=\ell}=0$ tengliklar bilan beriladi.

16.23. $u=u_a+(u_b-u_a)\cdot\frac{\ln\frac{r}{a}}{\ln\frac{b}{a}}=u_a+(u_b-u_a)\frac{\ln r-\ln a}{\ln b-\ln a}$. **Ko'rsatma**. u funksiya θ va z larga bog'liq emas deb faraz qilib, silindrik koordinatalar sistemasiga o'ting.

67-MAVZU. EHTIMOLLAR NAZARIYASINING PRIDMETI. ASOSIY TUSHUNCHALAR. EHTIMOLLIKLARNING KLASSIK TARIFI. NISBIY CHASTOTA. EHTIMOLLIKNING GEOMETRIK TA'RIFI

Ehtimol termini hodisaning amalgam oshish, ro'y berish imkoniyatining obyektiv o'lchovini ifodalaydi.

Biror tajriba natijasida sondagi $e_1,e_2,...,e_n$ elementar hodisalardan birortasi ro'y berishi mumkin bo'lsin, ya'ni $U=\{e_1,e_2,...,e_n\}$ bo'lsin. Bu elementar hodisalarga quyidagi shartlarni qo'yamiz:

1) hodisalar juft-jufti bilan birgalikda emas, boshqacha qilib aytganda, istalgan ikkita e_i va e_j $(i\neq j)$ hodisa uchun ulardan biri ro'y bersa, ikkinchisi albatta ro'y bermaydi.

2) $e_1,e_2,...,e_n$ hodisalar yagona mumkin bo'lgan hodisalar, ya'ni ularning birortasi albatta ro'y berishi lozim.

3) $e_1,e_2,...,e_n$ hodisalar teng imkoniyatli. Bu shart $e_1,e_2,...,e_n$ hodisalardan birortasining boshqalaridan ko'proq ro'y berishiga yordam beradigan hech qanday obyektiv sabablar yo'qligini anglatadi.

Aytaylik, A hodisa berilgan bo'lib, u $e_i\left(i=\overline{1,n}\right)$ elementar hodisalardan ba'zilari ro'y bergandagina ro'y bersin. Bunday holda biz $e_i\left(i=\overline{1,n}\right)$ elementar hodisalardan ro'y berishi A hodisaning ro'y berishiga ham olib keladiganlarini A hodisa qulaylik tug'diradigan hodisalar deb ataymiz.

Aytaylik, qaralayotgan n ta $e_1,e_2,...,e_n$ elementar hodisadan m tasi A hodisaning ro'y berishiga qulaylik tugdirsin, ya'ni $A=\left(e_{k_1},e_{k_2},...,e_{k_m}\right)$ bo'lsin.

1. Ehtimolning klassik ta'rifi. A hodisaning ehtimoli deb A hodisaning ro'y berishiga qulaylik tug'diruvchi hodisalar sonining teng imkoniyatli barcha elementar hodisalar soniga nisbatiga aytiladi va quyidagicha belgilanadi:

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{A\ \ ga\ kirgan\ elementar\ hodisalar\ soni}{barcha\ elementar\ hodisalar\ soni}$$

Ehtimolning xossalari.

a) muqarrar hodisaning ehtimoli birga teng:

$$P(U)=1.$$

b) mumkin bo'lmagan hodisaning ehtimoli nolga teng:

$$P(V)=0,$$

c) istalgan A hodisaning ehtimoli quyidagi qo'sh tengsizlikni qanoatlantiradi:

$$0 \le P(A) \le 1.$$

Klassik ta'rifdan foydalanib masalalar yechishda kombinatorika elementlari muhim rol o'ynaydi, shuni e'tiborga olib kombinatorikaga doir ba'zi tushunchalar bilan tanishib o'taylik.

Har qanday narsalardan tuzilgan va bir – biridan yo shu narsalarning tartibi bilan, yoki shi narsalarning o'zlari bilan farq qiluvchi turli gruppalar birlashmalar deb ataladi.

Birlashmalar uch xil bo'lishi mumkin: o'rinlashtirish, o'rin almashtirish va gruppalash. Ularning har birini ko'rib chiqaylik.

1) n elementini m tadan (bunda $m \le n$) o'rinlashtirish deb shunday birlashmalarga aytiladiki, ularning har birida berilgan n ta elementdan olingan m ta element bo'lib, ular bir – biridan yo elementlari bilan, yoki elementlarning tartibi bilan farq qiladi. n ta elementdan m tadan barcha o'rinlashtirishlar soni A_n^m kabi belgilanib, u

$$A_n^m = n(n-1)\ldots[n-(m-1)]$$

formula bilan hisoblanadi.

2) Agar o'rinlashtirishlar n ta elementdan n tadan olingan bo'lsa (ya'ni faqat elementlarining tartibi bilan farq qilsa), bunday o'rinlashtirishlar o'rin almashtirishlar deb ataladi, u holda yuqoridagi formulaga ko'ra n ta elementdan barcha o'rin almashtirishlar soni quyidagicha bo'ladi:

$$P_n = n(n-1)\ldots 1 = n!$$

3) Agar n ta elementdan m tadan tuzish mumkin bo'lgan barcha o'rinlashtirishlardan bir – biridan eng kamida bir element bilan farq qiladiganlarini tanlab olsak, u holda gruppalar (kombinatsiyalar) deb atalgan birlashmalarni hosil qilamiz.

n ta elementdan m tadan barcha gruppalashlar (kombinatsiyalar) soni

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} = \frac{n(n-1)\ldots[n-(m-1)]}{m!}$$

formula yordamida topiladi.

Yuqoridagi 3 ta formula uchun $A_n^m = C_n^m \cdot P_n$ munosabat o'rinlidir.

2. Ehtimolning geometrik ta'rifi. Biror Q soha berilgan bo'lib, bu soha Q_1 sohani o'z ichiga olsin, Q sohaga tavakkaliga tashlangan nuqtaning Q_1 sohaga tushish ehtimolini topish talab qilinadi. B yerda barcha elementlar hodisalar to'plami Q ning barcha nuqtalaridan iborat. Binobarin, bu holda klassik ta'rifdan foydalana olmaymiz. Tanlangan nuqta Q ga albatta tushsin va uning biror Q_1 qismiga tushish ehtimoli shu Q_1 qismining o'lchoviga (uzunligiga, yuziga, hajmiga) proparsional bo'lib, Q_1 ning formasiga va Q_1 qism Q ning qayerda joylashganligiga bog'liq bo'lmasin. Bu shartlarda qaralayotgan hodisaning ehtimoli

$$P = \frac{mesQ_1}{mesQ}$$

formula yordamida aniqlanadi. Bu formula yordamida aniqlangan p funksiya ehtimolning barcha xossalarini qanoatlantirishini ko'rish qiyin emas.

3. Ehtimolning statistik ta'rifi. Ehtimollar nazariyasining ko'pgina tatbiqlarida ehtimolning statik ta'rifi deb ataluvchi ta'rifdan foydalaniladi. Har birida biror hodisaning ro'y berishi yoki ro'y bermasligi kuzatiladigan tajribalarni sharoitni o'zgartirmagan holda cheksiz ko'p marta tajrorlash mumkin bo'lsin deb faraz qilaylik. Masalan, o'yin soqqasini yoki tangani tahslash, nishonga o'q uzish va shunga o'xshash tajribalarni cheksiz ko'p marta takrorlash mumkin.

Aytaylik, tajribalar soni n yetatlicha katta bo'lganda bizni qiziqtirayotgan A hodisa m marta ro'y bergan bo'lsin.

$W(A)=\dfrac{m}{n}$ nisbat A hodisaning nisbiy chastotasi deb ataladi.

Ko'p kuzatishlar shuni ko'rsatadiki, agar bir xil shart-sharoitda tajribalar o'tkazilib, ularning har birida sinovlar soni yetarlicha katta bo'lsa, u holda nisbiy chastota turg'unlik xossasiga ega bo'ladi.

A guruh

17.**1**.Gruppada 10 ta fan o'qitiladi. Agar har kuni 4 xil dars o'tilsa, bir kunlik darsni necha xil usul bilan taqsimlash mumkin?

17.2. 8 ta stulga 8 kishini necha xil usul bilan o'tkazish mumkin?

17.**3**. $C_n^m = C_n^{n-m}$ tenglik o'rinli ekanini isbotlang.

17.**4**. Ikkita tanga bir vaqtda tashlangan $m\ (m=0,1,2)$ marta gerbli tomon tushish ehtimolini toping.

17.**5**. Yoqlariga 1, 2, 3, 4, 5, 6 raqamlar yozilgan ikkita soqqa bir vaqtda tashlanadi. Ikkala soqqada tushgan ochkolar yig'indisi 8 ga teng bo'lish ehtimolini toping.

17.**6**. Ikkita soqqa tashlangan. Tushgan ochkolar yig'indisi beshga, ko'paytmasi to'rtga teng bo'lish ehtimolini toping.

17.**7**. Tanga ikki marta tashlangan. Hech bo'lmaganda bir marta "gerbli" tomon tushishi ehtimolini toping.

17.**8**. Yashikda 15 ta detal bo'lib, ulardan 10 tasi bo'yalgan. Yig'uvchi tavakkaliga 3 ta detal oladi. Olingan detallarning bo'yalgan bo'lishi ehtimolini toping.

17.**9**. Abonent telefon nomerini terayotib nomerning oxirgi uchta raqamini eslay olmadi va bu raqamlarni turli ekanligini bilgani holda ularni tavakkaliga terdi. Kerakli raqamlar terilganligi ehtimolini toping.

17.**10**.Sexda 6 erkak va 4 ayol ishlaydi. Table nomerlari bo'yicha tavakkaliga 7 kishi ajratilgan. Ajratilganlar orasida 9 ayol bo'lishi ehtimolini toping.

17.**11**. Radiusi R bo'lgan doiraga radiusi r bo'lgan kichik doira joylashtirilgan. Katta doiraga tasodifan tashlangan nuqtaning kichik doiraga tushish ehtimolini toping. Nuqtaning doiraga tushish ehtimoli doira yuziga proporsional bo'lib, uning joylashishiga bog'liq emas deb faraz qilinadi.

17.12. tekislik bir – biridan $2a$ masofada joylashgan to'gri chiziqlar bilan bo'lingan. Tekislikka radiusi $r<a$ bo'lgan tanga tavakkaliga tashlangan. Tanga to'g'ri chiziqlarning birortasini ham kesmasligi ehtimolini toping.

17.13. Ikki do'st kunduzgi soat 12 bilan 13 orasida tayin bir joyda uchrashishga va oldin kelgan kishi do'stini 1/4 soat kutib, kelmagandan kelmagandan keyin ketishga kelishib olishdi. Agar har bir kishi o'zining kelish momentini tavakkaliga (soat 12 bilan 13 orasida) tanlasa, ularning uchrashish ehtimolini toping.

17.14.Ox o'qining uzunligi L bo'lgan OA kesmasiga ikkita $B(x)$ va $C(y)$ nuqta tavakkaliga qo'yilgan. Hosil bo'lgan uchta kesmadan uchburchak yasash mumkin bo'lishi ehtimolini toping.

17.15. Radiusi R bo'lgan doira ichiga tavakkaliga nuqta tahslangan. Tahslangan nuqta doiraga ichki chizilgan: a) kvadrat ichiga; b) muntazam uchburchak ichiga tushish ehtimolini toping. Nuqtaning doira bo'lagiga tushish ehtimoli bu bo'lakning yuziga proporsional bo'lib, uning doiraa nisbatan joylashishiga bog'liq emas deb faraz qilinadi.

68-MAVZU. EHTIMOLLIKLARNI QO'SHISH. HODISALARNING TO'LA GURUHI. EHTIMOLLIKLARNI KO'PAYTIRISH. TO'LA EHTIMOL. BAYES FORMULASI.

Berilgan hodisaga qulaylik tug'diruvchi hollarni bevosita hisoblash ancha bo'lishi mumkin. Shuning uchun hodisaning ehtimolini hisoblashda uni boshqa soddaroq hodisalar kombinatsiyasi ko'rinishida ifodalash qulayroqdir. Biroq bunda boshqa hodisalarning kombinatsiyasi ko'rinishida ifodalashda hodisaning ehtimoli bo'ysunadigan qoidalarni bilish kerak. quyida ular bilan tanishib o'tamiz.

1. Birgalikda bo'lmagan hodisalar ehtimollarini qo'shish teoremasi. Ikkita birgalikda bo'lmagan *A* va *B* hodisadan istalgan birirning ro'y berish ehtimoli bu hodisalar ehtimolarining yig'indisiga teng:

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Umuman har ikkitasi birgalikda bo'lmagan bir nechta $A_1, A_2, ..., A_n$ hodisalardan istalgan birining ro'y berish ehtimoli bu ehtimollarining yig'indisiga teng:

$$P(A_1+A_2+...+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n).$$

Natija. Agar $A_1, A_2, ..., A_n$ hodisalardan faqat bittasi albatta ro'y beradigan va ular birgalikda bo'lmagan hodisalar bo'lsa, u holda

$$P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)=1.$$

Xususiy holda, agar *A* va $\overline{A}$ hodisalar o'zaro qarama – qarshi hodisalarni ifodalasa, u holda

$$P(A)+P(\overline{A})=1.$$

Bu teoremaga keyinroq misol ko'armiz.

2. Shartli ehtimollar. Hodisalarning bog'liqsizligi. Hodisalarning ehtimolini aniqlash asosida biror *S* shartlar komleksi yotishini aytgan edik. Agar $P(A)$ ehtimolni hisoblash *S* shartlar kompleksidan boshqa hech qanday shartlar talab qilinmasa bunday ehtimol, shartsiz ehtimol deyiladi. Ko'p hollarda *A* hodisaning ehtimolini biror *B* hodisa ($P(B)>0$ deb faraz qilinadi) ro'y bergan shartda hisoblashga to'g'ri keladi. Bunday ehtimol shartli ehtimol deyiladi va $P(A/B)$ kabi belgilanadi. Agar ikkita *A* va *B* hodisadan birning ehtimoli ikkinchisining ro'y berishi yoki ro'y bermasligi natijasida o'zgarmasa, u holda bu hodisalar o'zaro bog'liqsiz hodisalar deyiladi, aksholda bu hodisalar o'zaro bog'liq hodisalar deyiladi.

Masalan, oq va qora sharlar solingan yashikdan olingan birinchi shar unga qayta solinsa, ikkinchi martaolingan sharning oq bo'lish ehtimoli birirnchi olingan sharning oq yoki qora bo'lishiga bog'liq emas. Shuning uchun birnchi va ikkinchi shar olish natijalari o'zaro bog'liqsiz bo'ladi.

Aksincha, agar birinchi olingan shar yashikka qayta solimasa, u holda ikkinchi marta shar olinishidagi natija birinchi marta shar olish natijasiga bog'liq ravishda o'zgaradi, chunki birinchi marta shar olinishi natijasida yashikdagi sharlarning sostavi o'zgaradi. Bu yerda biz bog'liq hodisalar misoliga egamiz.

Shartli ehtimollar uchun qabul qilingan belgilashlardan foydalanib, *A* va *B* hodisalarning o'zaro bog'liqsiz bo'lishi shartini

$$P(A/B)=P(A) \quad \text{yoki} \quad P(A/B)=P(B)$$

ko'rinishda yozish mumkin.

3. Hodisalar ehtimollarini ko'paytirish teoremasi. Ikkita bog'liq hodisaning birgalikda ro'y berish ehtimoli ulardan birinchisining ehtimolini ikkinchisining birinchisi ro'y bergan shart ostidagi shrtli ehtimoliga ko'paytirilganiga teng va aksincha, ya'ni

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B/A),$$

$$P(A\cdot B)=P(B)\cdot P(A/B).$$

Xususiy holda, agar A va B hodisalar o'zaro bog'liq bo'lmasa, ularning birgalikda ro'y berish ehtimoli bu hodisalar ehtimolining ko'paytmasiga teng:

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B).$$

4. Birgalikda bo'lgan hodisalar ehtimollarini qo'shish teoremasi. Ikkita birgalikda bo'lgan *A* va *B* hodisadan hech bo'lmaganda birining ro'y berish ehtimoli bu hodisalar ehtimollari yig'indisidan ularning birgalikda ro'y berish ehtimolining ayrilganiga teng:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B).$$

Agar *A* va *B* hodisalar o'zaro bog'liq bo'lmasa, u holda ushbu formula o'rinli bo'ladi:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A)\cdot P(B)$$

Масала №1. **Цехда иккита бригада бир хил махсулот ишлаб чикармокда. Кун давомида I** бригада (II бригада) *n* дона (*t* дона) махсулот тайёрлади ва уларнинг *m* донаси (*s* донаси) олий навли деб топилди. Хар бир бригада тайёрлаган махсулотлар ичидан тасодифий равишда биттадан махсулот танлаб олинди. Куйидаги тасодифий ходисаларнинг эхтимолликларини топинг:

A={I бригададан танланган махсулот олий навли},

B={II бригададан танланган махсулот олий навли эмас},

C={Иккала бригададан танланган махсулотлар олий навли},

D={Танланган махсулотларнинг факат биттаси олий навли},

E={Танланган махсулотларнинг камида биттаси олий навли},

$n = 30$, $m = 22$, $t = 50$, $s = 44$

Ечиш. Эхтимолликнинг классик таърифи буйича

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{22}{30} = 0{,}73$$

Карама-карши ходисаларнинг эхтимолликлари формуласига асосан

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \frac{s}{t} = 1 - \frac{44}{50} = \frac{6}{50} = 0{,}12 \ .$$

Ходисалар купайтмаси таърифига асосан $C = A\overline{B}$ ва A , $\overline{B}$ богликмас ходисалар булгани учун эхтимолликларни купайтириш теоремаси буйича

$$P(C) = P(A\overline{B}) = P(A)P(\overline{B}) = \frac{22}{30} \cdot \frac{44}{50} \approx 0{,}73 \cdot 0{,}88 \approx 0{,}64$$

D ходиса эхтимоллигини топиш учун

D_1 = {Факат I бригададан танланган махсулот олий навли}

D_2 = {Факат II бригададан танланган махсулот олий навли}

тасодифий ходисаларни киритамиз.

Ходисаларни кушиш таърифига асосан $D = D_1 + D_2$ деб ёзиш мумкин. ходисалар купайтмаси таърифига асосан $D_1 = AB$, $D_2 = \overline{A}\overline{B}$ деб ёзиш мумкин. D_1 ва D_2 биргаликда булмаган ходисалар булгани учун , эхтимолликларни кушиш ва купайтириш теоремаларига асосан ушбу натижани оламиз :

$$P(D) = P(D_1 + D_2) = P(D_1) + P(D_2) = P(AB) + P(\overline{A}\overline{B}) =$$

$$P(A)P(B)+P(\overline{A})P(\overline{B}) = \frac{22}{30} \cdot \frac{6}{50} + \left(1 - \frac{22}{30}\right) \cdot \frac{44}{50} = 0{,}73 \cdot 0{,}12 + 0{,}27 \cdot 0{,}88 = 0{,}0876 + 0{,}2376 = 0{,}3252$$

Энди E ходисага карама-карши $\overline{E}$ ходисани караймиз.

$\overline{E}$ = {иккала махсулот хам олий навли эмас} = $\overline{A} \cdot B$ булгани учун

$$P(\overline{E}) = P(\overline{A} \cdot B) = P(\overline{A}) \cdot P(B) = 0{,}27 \cdot 0{,}12 = 0{,}0324$$

Бу холда

$$P(E) = 1 - P(\overline{E}) = 1 - 0{,}0324 = 0{,}9676 \approx 0{,}97 \ .$$

Масала №2. Омборда уч партия махсулот сакланмокда. Бу партиялардаги махсулотлар сони мос равишда n_1, n_2, n_3 булиб, улар p_1, p_2, p_3 эхтимоллик билан сифатли булиши мумкин. Омбордаги махсулотлар ичидан битта махсулот тасодифий равишда танлаб олинди.

а) Танланган махсулотни сифатли булиш эхтимоллигини хисобланг.

б) Агар танланган махсулот сифатли булса, уни *i*-партияга тегишли булиш эхтимоллигини топинг.

$n_1 = 10$, $n_2 = 15$, $n_3 = 20$, $p_1 = 0{,}9$, $p_2 = 0{,}8$, $p_3 = 0{,}7$ i = II

Ечиш. *а*) Махсулотни танлаб олишда ушбу учта натижа булиши мумкин.

E_1 = {Танланган махсулот I партиядан}

E_2 = {Танланган махсулот II партиядан}

E_3 = {Танланган махсулот III партиядан}

Масала шартига асосан ва эхтимолликнинг классик таърифи буйича

$$P(E_1) = \frac{n_1}{n_1+n_2+n_3} = \frac{10}{10+15+20} = \frac{10}{45} = \frac{2}{9}$$

$$P(E_2) = \frac{n_2}{n_1+n_2+n_3} = \frac{15}{45} = \frac{3}{9}$$

$$P(E_3) = \frac{n_3}{n_1+n_2+n_3} = \frac{20}{45} = \frac{4}{9}$$

Бунда ушбу A = {Танланган махсулот сифатли} тасодифий ходисанинг P(A) эхтимоллиги кизиктиради. Масала шартига кура A ходисанинг шартли эхтимолликлари куйидагича :
$P(A/E_1) = p_1 = 0{,}9$, $P(A/E_2) = p_2 = 0{,}8$, $P(A/E_3) = p_3 = 0{,}7$
Бу холда тулик эхтимолик формуласига кура

$$P(A) = P(E_1)P(A/E_1) + P(E_2)P(A/E_2) + P(E_3)P(A/E_3) = \frac{2}{9}\cdot 0{,}9 + \frac{3}{9}\cdot 0{,}8 + \frac{4}{9}\cdot 0{,}7 =$$

$$= \frac{1{,}8+2{,}4+2{,}8}{9} = \frac{7}{9} \approx 0{,}78$$

б) Бу ерда $P(E_2/A)$ шартли эхтимолликни хисоблаш талаб этилади. Бу эхтимолликни Байес формуласи буйича топамиз :

$$P(E_2/A) = \frac{P(E_2)P(A/E_2)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{9}\cdot 0{,}8}{\frac{7}{9}} = \frac{2{,}4}{7} \approx 0{,}34$$

Бу натижани шартсиз эхтимоллиги $P(E_2) = 3/9 \approx 0{,}33$ эди. Демак кузатув натижаси буйича E_2 эхтимоллиги 0,01 га ошди.

17.16. Pul – buyum loteriyasida 1000 ta biletli har bir seriyaga 120 ta pul yutug’i va 80 ta buyum yutug’i to’g’ri keladi. Bitta loteriyasi bor kishiga pul yutug’i yoki buyum yutug’i, umuman yutuq chiqish ehtimolini toping.

17.17. Merganning bitta o’q uzishda 10 ochko urish ehtimoli 0,15 ga, 9 ochko urish ehtimoli 0,35 ga, 8 yoki undan kam ochko urish ehtimoli 0,5 ga teng. Merganning bitta o’q uzishda kamida 9 ochko urish ehtimolini toping.

17.18. 10 ta detalli partiyada 8 ta standart detal bor. Tavakkaliga olingan ikkita detaldan kamida bittasi standart bo’lish ehtimolini toping.

17.19. Uchta yashikning har birida 10 tadan detal bor. Birnchi yashikda 9 ta, ikkinchi yashikda 8 ta, uchinchi yashikda 7 ta standart detal bor. Har bir yashikdan tavakkaliga bittadan detal olinadi. Olingan uchala detal standart bo’lish ehtimolini toping.

17.20. Yashikda 10 oq va 5 ta qora shar bor. Yashikdan ikki marta tavakkaliga bittadan shar olinadi. Olingan sharlar yashikka solinmaydi. Agar birinchi olingan shar qora bo’lsa (*A* hodisa), ikkinchi olingan shar oq bo’lish (*B* hodisa) ehtimolini toping.

17.21. Yashikda 6 ta shar bor, ulardan uchtasi qizil rangda. Yashikdan tavakkaliga 2 ta shar olidi. Ikkala sharning ham qizil rangda bo’lish ehtimolini toping.

17.22. Ikkita mergan bittadan o’q uzishdi. Birinchi merganningnishonga tekkazish ehtimoli 0,7 ga, ikkinchisiniki esa 0,6 ga teng. Merganlardan aqalli bittasining nishonga tekkazish ehtimolini toping.

17.23. Student imtihonga programmadagi 25 ta savoldan 20 tasini bilib keldi. Imtihon oluvchi studentga 3 ta savol berdi. Studentning uchala savolni ham bilish ehtimolini toping.

17.24. Student imtihon biletlaridan ba’zilarini bilmaydi. Student uchun qaysi holda u bilmaydigan biletni olish ehtimoli kichik bo’ladi: birinchi bo’lib olgandami yoki eng oxirida olgandami?

17.25. Uchta o’yin soqqasi tashlandi. Kamida bitta soqqada 6 ochko tushish ehtimolini toping.

69-mavzu. EHTIMOLLIKLARNING TAQSIMOT FUNKSIYASI. DISKIRET TASODIFIY MIQDORLAR. BERNULLI TAQSIMOTI. PUASSON TAQSIMOTI. GEOMETRIK VA GIPERGEOMETRIK TAQSIMOTLAR

Murakkab hodisalarning ehtimolarini hisoblashda ko'pincha bu hodisalarga qo'shish va ko'paytirish teoremalarini birga tatbiq qilib hosil qilingan formulalardan foydalanishga to'g'ri keladi. Quyidagi ana shunday muhim formulalarning ba'zilari bilan tanishib o'tamiz.

1. To'la ehtimol formulasi. Faraz qilaylik, A hodisa n ta juft – jufti bilan birgalikda bo'lmagan $H_1; H_2,...,H_n$ hodisalar (gipotezalar)ning bittasi va faqat bittasi bilangina ro'y berishi mumkin bo'lsin, boshqacha qilib aytganda:

$$A = AH_1 + AH_2 + ... + AH_n \text{ (}A\text{ – murakkab hodisa).}$$

Bu yerda $AH_i \cap AH_j = V(i \neq j)$, u holda birgalikda bo'lmagan hodisalar ehtimollarini qo'shish teoremasiga asosan:

$$P(A) = P(AH_1) + P(AH_2) + ... + P(AH_n).$$

Ko'paytirish teoremasiga ko'ra $P(AH_i) = P(H_i) \cdot P(A / H_i)$ ekanligini e'tiborga olsak, u holda

$$P(A) = P(H_1)P(A / H_1) + P(H_2)P(A / H_2) + ... + P(H_n)P(A / H_n)$$

yoki

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A / H_i) \cdot$$

Bu tenglik to'la ehtimol formulasi deyiladi. To'la ehtimol formulasidan foydalanib, Bayes formulasi yoki gipotezalar ehtimollari formulasi deb ataluvchi muhim formulani hosil qilish mumkin.

2. Bayes formulasi. Birgalikda bo'lmagan $H_1; H_2,...,H_n$ hodisalarning (gipotezalarning) to'la gruppasi berilgan bo'lib, tajribani o'tkazishga qadar ularning har birining $P(H_i), i = \overline{1, n}$ ehtimollari tayin qiymatiga ega bo'lsin. Tajriba natijasida A hodisa ro'y berdi degan shart ostida H_i $(i = \overline{1, n})$ gipotezalarning ehtimollari tajribadan so'ng qanday bo'ladi?

H_i va A hodisalarning ko'paytmasi uchun ushbu

$$P(AH_i) = P(A) \cdot P(A / H_i) = P(H_i)P(A / H_i)$$

formulaning o'rinliligidan

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i)P(A / H_i)}{P(A)}$$

munosabatga ega bo'lamiz, bu yerda to'la ehtimol formulasini qo'llasak, ushbu Bayes formulasi deb ataluvchi formulani hosil qilamiz:

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i)P(A / H_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(H_k)P(A / H_k)} \cdot$$

Bu formulalar yordamida yechiladigan masalalarni ko'raylik.

1- masala. Omborga 360 ta mahsulot keltirildi. Bulardan 300 tasi 1 – korxonada tayyorlangan bo'lib, ularning 250 tasi yaroqli mahsulot; 40 tasi 2-korxonada tayyorlangan bo'lib, ularning 30 tasi yaroqli hamda 20 tasi 3-korxonada tayyorlangan bo'lib, ulardan 10 tasi yaroqli. Tavakkaliga olingan mahsulotning yaroqli bo'lish ehtimolini toping.

Tavakkaliga olingan mahsulot uchun quyidagi gipotezalar o'rinli bo'ladi:

H_1 gipoteza – mahsulotning 1 – korxonada tayyorlangan bo'lishi;

H_2 gipoteza – mahsulotning 2 – korxonada tayyorlangan bo'lishi;

H_3 gipoteza – mahsulotning 3 – korxonada tayyorlangan bo'lishi.

Ularning ehtimollari quyidagicha bo'ladi:

$$P(H_1) = \frac{5}{6}; \quad P(H_2) = \frac{1}{9}; \quad P(H_3) = \frac{1}{18}.$$

Agar olingan mahsulotning yaroqli bo'lishini A hodisa deb belgilasak, u holda bu hodisaning turli gipotezashartlari ostidagi ehtimollari quyidagicha bo'ladi:

$$P(A/H_1)=\frac{5}{6};\quad P(A/H_2)=\frac{3}{4};\quad P(A/H_3)=\frac{1}{2}.$$

Yuqorida topilganlarni to'la ehtimol formulasiga qo'yib, izlanayotgan hodisa ehtimolini topamiz:

$$P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)+P(H_3)P(A/H_3)=\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}+\frac{1}{9}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{18}\cdot\frac{1}{2}=\frac{29}{36}.$$

2-masala. Ikki mergan nishonga bittadan o'q uzdi. Birinchi merganning o'qi nishonga 0,8 ehtimol bilan, ikkinchi merganniki esa 0,4 ehtimol bilan tegadi. O'q uzilgandan so'ng nishonga bitta o'q tekkanligi (*A* hodisa) ma'lum bo'ldi, bu o'qni birinchi mergan uzgan bo'lishi ehtimolini toping.

Tajriba o'tkazishdan oldin quyidagi gipotezalarni qo'yamiz:

H_1 - birinchi mergan otgan o'q ham, ikkinchi mergan otgan o'q ham nishonga tegmaydi;

H_2 - ikkala merganning otgan o'qi ham nishonga tegadi;

H_3 - birinchi merganing otgan o'qi nishonga tegadi, ikkinchisiniki esa tegmaydi;

H_4 - birinchi merganing otgan o'qi nishonga tegmaydi, ikkinchisiniki esa tegadi.

Gipotezalardan bittasi va faqat bittasi tajriba natijasida albatta ro'y beradi, ya'ni H_1, H_2, H_3, H_4 lar bog'liq bo'lmagan hodisalarning to'liq gruppasini tashkil etadi.

Bu gipotezalarning tajribadan oldingi ehtimollari:

$$P(H_1)=0{,}2\cdot 0{,}6=0{,}12,$$
$$P(H_2)=0{,}8\cdot 0{,}4=0{,}32,$$
$$P(H_1)=0{,}8\cdot 0{,}6=0{,}48,$$
$$P(H_1)=0{,}2\cdot 0{,}4=0{,}08.$$

Bu gipotezalarda kuzatilayotgan A hodisaning shartli ehtimollari quyidagilarga teng: $P(A/H_1)=0,\quad P(A/H_2)=0,\quad P(A/H_3)=1,\quad P(A/H_4)=1$.

Tajribadan keyin (*A* hodisa ro'y berganidan keyin) H_1, H_2 gipotezalar ro'y bermasligi ma'lum bo'ladi.

H_3 va H_4 gipotezalarning tajribadan keyingi ehtimollari Bayes formulasiga ko'ra quyidagicha:

$$P(H_3/A)=\frac{0{,}48\cdot 1}{0{,}48\cdot 1+0{,}08\cdot 1}=\frac{6}{7};$$
$$P(H_4/A)=\frac{0{,}08\cdot 1}{0{,}48\cdot 1+0{,}08\cdot 1}=\frac{1}{7}.$$

Demak, nishonga tekkan o'qning birinchi merganga tegishli bo'lish ehtimoli $\frac{6}{7}$ ekan.

3. Agar biror *A* hodisaning ro'y berish yoki ro'y bermasligini kizatish uchun bir nechta tajribalar o'tkazilayotgan bo'lib, ularning har biriga *A* hodisaning ro'y berish yoki ro'y bermaslik ehtimoli qolgan tajribalarning natijalariga bog'liq bo'lmasa (bog'liq bo'lsa), u holda bu tajribalar *A* hodisaga nisbatan bog'liq bo'lmagan (bog'liq bo'lgan) tajribalar ketma-ketligini tashkil etadi deyiladi.

Masalan, yashikda *s* ta oq va *l* ta qora shar bo'lsin. Shu yashikdan bir necha marta bittadan shar olish tajribalari ketma-ketligini ko'raylik. Bunda har bir tajribadan so'ng olingan shar yashikka qaytarib solinsa (qaytarib solinmasa), bu tajribalar ketma-ketligi bir-biriga bog'liq bo'lmaydi (bir-biriga bog'liq bo'ladi).

Bog'liq bo'lmagan *n* ta tajriba o'tkazilayotgan bo'lib, har bir tajribada kuzatilayotgan *A* hodisaning ro'y berish ehtimoli *p* va ro'y bermaslik ehtimoli $q=1-p$ bo'lsin. Bu holda kuzatilayotgan *A* hodisaning *n* ta tajribada *k* marta ro'y berish ehtimoli $P_n(k)$ quyidagi formula yordamida topiladi:

$$P_n(k)=C_n^k q^{n-k},\quad (0\le k\le n)$$

bu yerda

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Bu formula *Bernulli formulasi* deyiladi.

3-masala. Chigitning unuvchanligi 80 % bo'lsa, ekilgan 4 ta chigitdan:
a) uchtasining unib chiqish; b) hech bo'lmaganda ikkitasining unib chiqish ehtimolini toping.

a) Shartga ko'ra $n = 4; k = 3; \quad p = 0,8; \quad q = 0,2$. Bernulli formulasiga ko'ra:

$$P_4(3) = C_4^3 \cdot 0,8^3 \cdot 0,2 = 0,4096.$$

b) A hodisa ekilgan 4 ta chigitdan 2 tasi yoki 3 tasi, yoki 4 tasi unib chiqishini, ya'ni hech bo'maganda ikkitasining unib chiqishini bildirsin. Ehtimollarni qo'shish teoremasiga ko'ra:

$$P_4(A) = P_4 \text{ (yoki 2, yoki 3, yoki 4) } = P_4(2) + P_4(3) + P_4(4).$$

$P_4(3)$ ehtimol (a) punktda hisoblangan;

$$P_4(2) = C_4^2 \cdot 0,8^2 \cdot 0,2^2 = 0,1536;$$

$$P_4(4) = C_4^4 \cdot 0,8^4 \cdot 0,2^0 = 0,4096.$$

Demak, $P(A) = 0,9728$.

4-masala. Bitta detalning yaroqsiz bo'lish ehtimoli $p = 0,05$ bo'lsin.ixtiyoriy olingan 10 000 detal ichida yaroqsiz detallarning soni 50 tadan ko'p bo'lmaslik ehtimolini toping.

μ - yaroqsiz detallar soni bo'lsin.

$$\mu : 0, 1, 2, \dots, 50.$$

$$P_{10000}\{0 \le \mu \le 50\} = \dots?$$

$$P_{10000}\{0 \le \mu \le 50\} = \sum_{k=0}^{50} P_n(k) = \sum_{k=0}^{50} C_{10000}^k (0,05)^k (0,95)^{10000-k}$$

(bundan keyingi hisoblash ancha qiyin, shuning uchun ularni keltirmaymiz).

3-masala. Texnik kontrol bo'limi 24 ta detaldan iborat partiyani tekshirmoqda. Detalning standart bo'lish ehtimoli 0,6 ga teng. Standart deb tan olinadigan detallarning eng katta ehtimolli sonini toping.

Shartga ko'ra $n = 24; \quad p = 0,6; \quad q = 0,4$. Standart deb tan olingan detallarning eng katta ehtimolli sonini quyidagi qo'sh tengsizlikdan topamiz:

$$np - q \le k_0 < np + p.$$

$np - q = 24 \cdot 0,6 - 0,4 = 14$ butun son bo'lgani uchun eng katta ehtimolli son ikkita:

$k_0 = 14$ va $k_0 + 1 = 15$.

B guruh

17.26. Sportchilar gruppasida 20 chang'ichi, 6 velosipedchi va 4yuguruvchi bor. Saralash normasini bajarish ehtimoli chang'ichi uchun 0,9 ga, velosipedchi uchun 0,8 ga, yuguruvchi uchun 0,75 ga teng. Tavakkaliga ajratilgan sportchining normani bajara olish ehtimolini toping.

17.27. Birinchi yashikda 10 ta detal bo'lib, ulardan 15 tasi standart, ikkinchi yashikda 30 detal bo'lib, ulardan 24 tasi standart, uchinchi yashikda 10 ta detal bo'lib, ulardan 6 tasi standart. Tavakkaliga tanlangan yashikdan tavakkaliga olingan detalning standart bo'lish ehtimolini toping.

17.28. 1 – masala shartida, agar tavakkaliga olingan mahsulot yaroqli ekanligi ma'lum bo'lsa, uni 1 – korxonada tayyorlangan bo'lish ehtimolini toping.

17.29. Ichida 2 ta shar bo'lgan idishga bitta oq shar solinib, shundan keyin idishdan tavakkaliga bitta shar olingan. Sharlarning dastlabki tartibi (rangi bo'yicha) haqida mumkin bo'lgan barcha gipotezalar teng imkoniyatli bo'lsa, u holda olingan sharning oq rangda bo'lish ehtimolini toping.

17.30. Benzokolonka joylashgan shossedan yuk mashinalari sonining o'sha shossedan o'tadigan yengil mashinalar soniga nisbatan 3:2 kabi. Yuk mashinasining benzin olish ehtimoli 0,1 ga teng, yengilmashina uchun bu ehtimol 0,2 ga teng. Benzokolonka yoniga benzin olish uchun mashina kelibto'xtadi. Uning yuk mashina bo'lish ehtimolini toping.

17.31. Chigitning unuvchanligi 70 % bo'lsa, ekilgan 5 ta chigitdan: a) uchtasining; b) ko'pi bilan uchtasining; c) kamida uchtasining unib chiqish ehtimolini toping.

17.32. Ikki teng kuchli raqib shaxmat o'ynamoqda. Qaysi ehtimol kattaroq:
a) raqiblardan birining ikki partiyadan bittasini yutish ehtimolimi yoki to'rt partiyadan ikkitasini yutish ehtimolimi?
b) to'rt partiyadan kamida ikkitasini yutish ehtimolimi yoki besh partiyadan kamida uchtasini yutish ehtimolimi? Durang natijalar e'tiborga olinmaydi.
17.33. Ikki mergan bir vaqtda nishonga o'q uzmoqda. Bitta o'qni uzishda nishonga tekkizish ehtimoli birinchi mergan uchun 0,8 ga, ikkinchi mergan uchun 0,6 ga teng. Agar bir yo'la 15 marta o'q uziladigan bo'lsa, ikkala merganning ham nishonga tekkizishlarning eng katta ehtimolli sonini toping.
17.34. Agar 49 ta bog'liq bo'lmagan tajribada hodisa ro'y berishning eng katta ehtimolli soni 30 ga teng bo'lsa, tajribalarning har birida hodisaning ro'y berish ehtimoli *p* ni toping.

70-mavzu. Ehtimollar taqsimotining zichlik funksiyasi. Absalyut uzluksiz tasodifiy miqdorlar. Tekis taqsimot. Normal va ko'rsatgichli taqsimotlar.

Yuqoridagi keltirilgan misollardan ko'rinadiki, tajribalar soni *n* yetarlicha katta bo'lganda $P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}$ ehtimolni hisoblash katta qiyinchiliklarga olib keladi. Bunday hollarda hisoblashni osonlashtiruvchi formulalarga, hatto ular izlanayotgan ehtimolning taqribiy qiymatini bersa ham ehtiyoj tug'iladi. Bunday formulalar asimptotik formulalar deb ataladi. Ushbu paragrafda shunday formulalar bilan tanishamiz.
1. Muavr – Laplasning teoremasi. Har birida hodisaning ro'y berish ehtimoli $p(0<p<1)$ ga teng bo'lgan *n* ta bog'liqsiz tajribada hodisaning *k* marta ro'y berish ehtimoli (*n* yetarlicha katta bo'lganda) taqriban

$$P_n(k)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x) \qquad (17.1)$$

ga teng. Bu yerda

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}.$$

$\varphi(x)$ funksiyaning qiymatlar jadvali 1 – ilovada keltirilgan ($\varphi(-x)=\varphi(x)$ - juft funksiya). (17.1) formula Muavr –Laplasning local formulasidir.
2.Puasson formulasi. Agar tajribalar soni yetarlicha katta bo'lib, har bir tajribada hodisaning ro'y berish ehtimoli *p* juda kichik bo'lsa, u holda

$$P_n(k)\approx\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \qquad (17.2)$$

bu yerda $\lambda=np$. (17.2) – Puasson formulasidir.
3. Muavr – Laplasning integral formulasi. Har birida hodisaning ro'y berish ehtimoli $p(0<p<1)$ ga teng bo'lgan *n* ta bog'liqsiz tajribada hodisaning kamida k_1 marta ro'y berish ehtimoli (*n* yetarlicha katt bo'lganda) taqriban

$$P_n(k_1\le\mu\le k_2)\approx\Phi(x'')-\Phi(x') \qquad (17.3)$$

ga teng. Bu yerda

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

Laplas finksiyasi bo'lib, bunda

$$x'=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}, \quad x''=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}.$$

x ning ($0\le x\le5$) musbat qiymatlari uchun Laplas funksiyaning qiymatlari jadvali 2 – ilovada keltirilgan. $x>5$ qiymatlar uchun $\Phi(x)=0{,}5$ deb olinadi ($\Phi(x)=-\Phi(x)$, ya'ni $\Phi(x)$-toq funksiya).

Quyidahi masalalarning yechilishi bilan tanishaylik.

1-masala. Korxonada ishlab chiqarilgan detalning yaroqsiz bo'lish ehtimoli 0,005 ga teng. 10 000 ta detaldan iborat partiyadagi yaroqsiz detallar sonining 40 ta bo'lish ehtimolini toping.

Masalaning shartiga ko'ra $n = 10000$;

$$k = 40; \quad p = 0{,}005; \quad q = 0{,}995.$$

$n = 10000$ yetarlicha katta son bo'lgani uchun Muavr – Laplasning local formulasidan foydalanamiz:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x), \text{ bu yerda } x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}.$$

x ning qiymatini topamiz:

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{40 - 10000 \cdot 0{,}005}{\sqrt{10000 \cdot 0{,}005 \cdot 0{,}995}} \approx -\frac{10}{7{,}05} = -1{,}42 \cdot$$

Jadvaldan $\varphi(-1{,}42) = \varphi(1{,}42) = 0{,}1456$ ni topamiz.

Demak, izlanayotgan ehtimol:

$$P_{10000}(40) \approx \frac{1}{7{,}05} \cdot 0{,}1456 \approx 0{,}0206 \cdot$$

2-masala. Darslik 200 000 nusxada bosib chiqarilgan. Darslikning brak bo'lish ehtimoli ehtimoli 0,00005 ga teng. Butun tirajda rosa brak bo'lish kitob ehtimolini toping.

Shartga ko'ra $n = 200000, \quad p = 0{,}00005, \quad k = 5$. n son katta va p ehtimol kichik, shu sababli Puasson formulasidan foydalanamiz:

$$P_n(k) \cong \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},$$

bu yerda $\lambda = np, \quad \lambda$ ning qiymatini topamiz:

$$\lambda = 200000 \cdot 0{,}00005 = 10.$$

Demak, izlanayotgan ehtimol:

$$P_{200000}(5) = \frac{10^5}{5!}e^{-10} = \frac{10^5}{120} \cdot 0{,}000045 \approx 0{,}0375.$$

3-masala. Tavakkaliga olingan pillaning yaroqsiz chiqish ehtimoli 0,2 ga teng. Tasodifan olingan 400 ta pilladan 70 tadan 130 tagacha yaroqsiz bo'lish ehtimolini toping.

Masala shartga ko'ra:

$$p = 0{,}2; \quad q = 0{,}8; \quad n = 400; \quad k_1 = 70; \quad k_2 = 130.$$

Muavr – Laplasning integral formulasidan foydalanamiz:

$$P_n(k_1 \le \mu \le k_2) = \Phi(x'') - \Phi(x').$$

x' va x'' larning qiymatilarini topamiz:

$$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = -\frac{10}{8} = -1{,}25,$$

$$x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{130 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 - 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = \frac{55}{8} = 6{,}25 \cdot$$

Jadvaldan topamiz:

$$\Phi(-1{,}25) = -\Phi(1{,}25) = -0{,}39435,$$

$$\Phi(6{,}25) = 0{,}5, \text{ chunki } x > 5 \text{ da } \Phi(x) = 0{,}5.$$

Demak, izlanayotgan ehtimol:

$$P_{400}(70 \le \mu \le 130) = \Phi(6{,}25) + \Phi(1{,}25) = 0{,}5 + 0{,}39435 = 0{,}89435.$$

A guruh

17.35. Har bir tajribada A hodisaning ro'y berish ehtimoli 0,2 ga teng bo'lsa, uning 400 ta tajribadan 80 tasida ro'y berish ehtimolini toping.

17.36. O'g'il bola tug'ilish ehtimoli 0,51 ga teng. Tug'ilgan 100 chaqaloqning 50 tasi o'g'il bola bo'lish ehtimolini toping.

17.37. Har birida *A* hodisaning ro'y berish ehtimoli $p=0{,}5$ ga teng bo'lgan 10 000 ta tajriba o'tkaziladi. Shuncha tajribada *A* hodisa ro'y berishining eng katta ehtimolli sonining ehtimolini toping.
17.38. Ishchi ayol 800 ta urchuqqa xizmat ko'rsatadi. Δt vaqt oralig'ida har bir urchuqda yigirilayotgan ipning uzilish ehtimolli sonini va bu sonning ehtimolini toping.
17.39. Bir soat davomida istalgan abonentning kommutatorga telefon qilish ehtimoli 0,01 ga teng. Telefon stnsiyasi 300 abonentga xizmat qiladi. Bir soat davomida 4 ta abonentning telefon qilish ehtimolini toping.
17.40. Har bir otilgan o'qning nishonga tegish ehtimoli 0,001 ga teng. Agar 5000 ta o'q otilgan bo'lsa, kamida 2 ta o'qning nishonga tegish ehtimolini toping.
17.41. Fakultet studentlarining imtihon komissiyasidan "4" va "5" baholar bilan o'tish ehtimoli 0,9 ga teng. Tavakkaliga olingan 400 studentdan 34 tadan 55 tagacha hech bo'lmaganda bitta fandan "4" dan past baho olish ehtimolini toping.
17.42. Hodisaning 2100 ta bog'liq bo'lmagan tajribalarning har birida ro'y berish ehtimoli 0,7 ga teng. Hodisaning: a) kamida 1470 marta va ko'pi bilan 1500 marta; b) kamida 1470 marta; v) ko'pi bilan 1469 marta ro'y berish ehtimolini toping.
17.43. O'zaro bog'liq bo'lmagan 625 ta tajribaning har birida *A* hodisaning ro'y berish ehtimoli 0,8 ga teng. Hodisaning ro'y berish nisbiy chastotasining uning ehtimolidan chetlashishi absolyut qiymati bo'yicha 0,04 dan katta bo'lmaslik ehtimolini toping.
17.44.O'zaro bog'liq bo'lmagan tajribalarning har birida *A* hodisaning ro'y berish ehtimoli 0,5 ga teng. Hodisa ro'y berish nisbiy chastotasining uning ehtimolidan chetlashishi absolyut qiymati bo'yicha 0,02 dan ortiq bo'lmasligining 0,7698 ehtimol bilan kutish mumkin bo'lishi uchun nechta tajriba o'tkazish kerak?
17.45. O'yin soqqasini ushbu $\left|\frac{m}{n}-\frac{1}{6}\right|\le 0{,}01$ tengsizlikning ehtimoli qarama – qarshi tengsizlikning ehtimolidan kichik bo'lmasligi uchun nechta marta tashlash lozim (bu yerda *m* o'yin soqqasini *n* marta tashlashda besh ochko chiqish soni)?
17.46. Texnik kontrol bo'limi 900 ta detalning standartga muvofiqligini tekshiring. Detalning standartga muvofiq bo'lish ehtimoli 0,9 ga teng. Shunday ε musbat son topingki, detalning standart bo'lish ehtimoli nisbiy chastotasining uning ehtimoli 0,9 dan chetlashishining absolyut qiymati ε dan katta bo'lmasligini 0,9544 ehtimol bilan kutish mumkin bo'lsin.
17.47. Texnik kontrol bo'limi 475 ta buyumning yaroqligini tekshiradi. Buyumning brak bo'lish ehtimoli 0,05 ga teng. Tekshirilgan buyumlar orasida braklari soni m ning yotadigan chegaralarini 0,9426 ehtimol bilan toping.

§ 17.5 Diskret tasodifiy miqdor va uning taqsimot qonuni.
Diskret tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikalari.Uzluksiz tasodifiy miqdorlar va ularning sonli xarakteristikalari**.**

71-Mavzu. Tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikalari. Matematik kutilish, dispersiya, o'rta kvadratik chetlanish.

O'zining turli qiymatlarini tasodifga bog'liq ravishda qabul qiladigan o'zgaruvchi miqdorlar *tasodifiy miqdorlar* deyiladi va X, Y, Z kabi bosh harflar bilan belgilanadi. Tasodifiy miqdor qabul qiladigan qiymatlar uning *mumkin bo'lgan qiymatlari* deb ataladi.

Masalan, o'yin soqqasi tashlanganda chiqqan ochko (X), tasodifiy tanlangan sonning kasr qismi (Y)-tasodifiy miqdorlar bo'ladi. Tasodifiy miqdorlar diskret va uzluksiz bo'lishi mumkin.
Mumkin bo'lgan qiymatlari chekli yoki sanoqli to'plamni tashkil etuvchi tasodifiy miqdorlar *diskret* deb ataladi.

Agarda X diskret tasodifiy miqdor bo'lsa, uning mumkin bo'lgan qiymatlarini $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ kabi belgilab chiqish mumkin. Yuqorida ko'rsatilgan misoldagi X-diskret tasodifiy miqdor bo'lib, uning mumkin bo'lgan qiymatlari $x_1=1, x_2=2, \ldots, x_6=6$ chekli to'plamni tashkil etadi.

X diskret tasodifiy miqdorni to'la aniqlash uchun faqat uning mumkin bo'lgan $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ qiymatlarini bilish kifoya bo'lmasdan, shu qiymatlarning

$$P\{X = x_1\} = p_1 , \quad P\{X = x_2\} = p_2 , \ldots, \quad P\{X = x_n\} = p_n , \ldots$$

ehtimolliklarini ham bilish zarurdir. Bu holda X diskret tasodifiy miqdorni ushbu

X	x_1	x_2	…	x_n	…
P	p_1	p_2	…	p_n	…

(1)

jadval ko'rinishida aniqlash mumkin. Bu yerda

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n + \ldots = 1 \qquad (2)$$

shart bajarilishi kerak. Bu shart (1) jadvalning birinchi satrida X tasodifiy miqdorning barcha mumkin bo'lgan qiymatlari keltirilganligini ifodalaydi.

T A ' R I F : (2) shartni qanoatlantiruvchi (1) jadval X diskret tasodifiy miqdorning *taqsimot qonuni* deyiladi.

Masalan, simmetrik tanga ikki marta tashlanganda uning gerb tomoni bilan tushishlar sonini X deb olaylik. Bu holda X tasodifiy miqdor bo'ladi. Uning mumkin bo'lgan qiymatlari $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ chekli to'plam bo'lgani uchun X diskret tasodifiy miqdor bo'ladi. Bu qiymatlarning ehtimolliklarini klassik ta'rif yordamida topish mumkin. Bunda barcha natijalar soni n = 4 va x_1 , x_2 va x_3 uchun qulaylik tug'diruvchi natijalar soni $m_1 = 1$, $m_2 = 2$, $m_3 = 1$ bo'lgani uchun

$$P\{X = 0\} = \frac{1}{4} = 0{,}25 \quad , P\{X =1\} = \frac{2}{4} = 0{,}5 \quad , P\{X =2\} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

Demak, ko'rilayotgan X tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni

X	0	1	2
P	0,25	0,5	0,25

(3)

ko'rinishda bo'lib, (2) shart

$$p_1 + p_2 + p_3 = 0{,}25 + 0{,}5 + 0{,}25 = 1$$

bajariladi.

Diskret X tasodifiy miqdor to'g'risidagi barcha ma'lumotni

$$F(x) = P\{X < x\} , \ x \in (-\infty , \infty) \qquad (4)$$

funktsiya orqali ham berish mumkin.

$y = F(x)$ funktsiya X tasodifiy miqdorning *taqsimot funktsiyasi* deyiladi.

Ehtimollikning xossalaridan foydalanib, $F(x)$ taqsimot funktsiyasining quyidagi uchta asosiy xossasini isbotlash mumkin:

I. Ixtiyoriy $x \in (-\infty , \infty)$ uchun $0 \le F(x) \le 1$;

II. $y = F(x)$ kamaymovchi funktsiya, ya'ni $\forall\, x_1 < x_2$ uchun $F(x_1) \le F(x_2)$ bo'ladi.

III. $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $F(\infty) = \lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$.

Yuqorida ko'rib o'tilgan X diskret tasodifiy miqdorning taqsimot funktsiyasini topamiz:

a) $x \le 0 \Rightarrow F(x) = P\{X<x\} = P\{X<0\} = P(\varnothing) = 0$;

b) $0 < x \le 1 \Rightarrow F(x) = P\{X<x\} = P\{X=0\} = 0{,}25$;

c) $1 < x \le 2 \Rightarrow F(x) = P\{X<x\} = P\{X=0\} + P\{X=1\} = 0{,}25 + 0{,}5 = 0{,}75$;

d) $x > 2 \Rightarrow F(x) = P\{X<x\} = P\{X=0\} + P\{X=1\} + P\{X=2\} = P(\Omega) = 1$.

Bu misoldan diskret tasodifiy miqdorning taqsimot funktsiyasi uzlukli, pog'onasimon (zinapoyasimon) bo'lishi kelib chiqadi. Bu funktsiyaning uzilish nuqtalari X diskret tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlarini, shu nuqtalardagi sakrashlari esa bu qiymatlarning ehtimolliklarini ifodalaydi.

Mumkin bo'lgan qiymatlari biror chekli yoki cheksiz (a,b) oraliqni to'la qoplaydigan X tasodifiy miqdor *uzluksiz* deyiladi.

Masalan, tasodifiy tanlangan sonning kasr qismini ifodalovchi Y tasodifiy miqdor uzluksiz bo'lib, uning mumkin bo'lgan qiymatlari $[0,1)$ yarim oraliqni qoplaydi.

Uzluksiz X tasodifiy miqdorni (1) taqsimot qonuni orqali aniqlab bo'maydi, chunki uning mumkin bo'lgan qiymatlari sanoqsiz bo'lib, ularni natural sonlar bilan belgilab chiqib bo'maydi. Bundan tashqari $\forall x\in(a,b)$ mumkin bo'lgan qiymatning ehtimolligi $p_x = P\{X = x\} =0$ bo'ladi. Ammo uzluksiz X tasodifiy miqdorning $F(x)$ taqsimot funktsiyasini (4) munosabat bilan aniqlash mumkin va bu funktsiya uzluksiz tasodifiy miqdor to'g'risida to'liq ma'lumotni o'z ichiga oladi. Bu holda uzluksiz tasodifiy miqdorning barcha mumkin bo'lgan qiymatlari to'plamida taqsimot funktsiyasi $F(x)$ uzluksiz bo'lishini ko'rsatish mumkin va shu sababli uning hosilasi to'g'risida so'z yuritish mumkin.

Agarda $F(x)$ taqsimot funktsiya differentsillanuvchi bo'lsa, uning hosilasi $F'(x) = f(x)$ X tasodifiy miqdorning *zichlik funktsiyasi* deyiladi.

Shuni ta'kidlab o'tish kerakki, $f(x)$ zichlik funktsiyasi faqat uzluksiz tasodifiy miqdorlar uchun aniqlangandir.

Har qanday $f(x)$ zichlik funktsiyasi quyidagi ikkita asosiy xossaga ega :

I. $f(x) \geq 0$, $x\in(-\infty,\infty)$; II. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

Masalan, tasodifiy ravishda tanlangan sonning kasr qismini ifodalovchi uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funktsiyasi

$$f(x) = \begin{cases} 1, x \in [0,1) \\ 0, x\overline{\in} [0,1) \end{cases} \qquad (5)$$

b'olishini ko'rsatish mumkin va bu funktsiya yo'qoridagi ikkita shartni qanoatlantiradi.

Tasodifiy miqdor X o'zining taqsimot qonuni yoki taqsimot funktsiyasi yoki zichlik funktsiyasi bilan berilganda u to'liq aniqlangan bo'ladi. Ba'zi hollarda X tasodifiy miqdor to'g'risida bunday to'liq ma'lumot kerak bo'lmasdan, uning ma'lum bir xususiyatlarini ifodalovchi sonli xarakteristikalarini bilish kifoyadir. Masalan, X biror tarmoq xodimlarining ish haqini ifodalovchi tasodifiy miqdor bo'lsa, uning har bir xodim uchun qiymatlarini bilish shart bo'masdan, barcha xodimlar bo'yicha o'rta qiymatini bilish yetarlidir.

Ehtimolliklar nazariyasida tasodifiy miqdorni ifodalovchi juda ko'p sonli xarakteristikalar bo'lib, ularning eng asosiylari matematik kutilish M(X) , dispersiya D(X) va o'rta kvadratik chetlanish $\sigma(X)$ bo'lib hisoblanadi.

X tasodifiy miqdorning *matematik kutilishi* deb, uning qiymatlarini vaznlashtirilgan o'rta miqdorini ifodalovchi va diskret holda

$$M(X)=x_1p_1+ x_2p_2+\ldots+ x_np_n+\ldots \quad , \qquad (6)$$

uzluksiz holda esa

$$M(X)= \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \quad , \qquad (7)$$

formulalar bilan hisoblanadigan songa aytiladi.

Masalan , (3) taqsimot qonunli diskret tasodifiy miqdor uchun

$$M(X)=0\cdot0,25+1\cdot0,5+2\cdot0,25=1,$$

(5) zichlik funktsiyali uzluksiz tasodifiy miqdor uchun

$$M(X)=\int\limits_0^1 x\cdot 1dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = 0,5$$

Matematik kutilish quyidagi xossalarga ega:

1. Har qanday o'zgarmas C soni uchun M(C)=C.
2. Har qanday o'zgarmas C ko'paytuvchi uchun M(CX)=C M(X);
3. Matematik kutilishlari mavjud bo'lgan X va Y tasodifiy miqdorlar uchun $M(X\pm Y)= M(X)\pm M(Y)$ tenglik o'rinli bo'ladi.

X tasodifiy miqdorning *dispersiyasi* deb, uning qiymatlarini matematik kutilmasi atrofida tarqoqligini ifodalovchi va diskret holda

$$D(X)=(x_1-m)^2p_1+(x_2-m)^2p_2+\ldots+(x_n-m)^2p_n+\ldots \quad , \qquad (8)$$

uzluksiz holda esa

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-m)^2 f(x)dx, \qquad m = M(X), \qquad (9)$$

formula bilan aniqlanuvchi songa aytiladi.

Yuqorida ko'rib o'tilgan (3) X diskret tasodifiy miqdor uchun m=M(X)=1 va

$$D(X)=(0-1)^2\cdot 0{,}25+(1-1)^2\cdot 0{,}5+(2-1)^2\cdot 0{,}25=0{,}5,$$

(5) uzluksiz tasodifiy miqdor uchun esa m=M(X)=0,5 va

$$D(X)=\int_0^1 (x-0{,}5)^2 dx = \left.\frac{(x-0{,}5)^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{12}$$

Dispersiya quyidagi xossalarga ega:

1. Har qanday X tasodifiy miqdor uchun D(X)≥0.
2. Har qanday C o'uzgarmas son uchun D(C)=0.
3. Har qanday o'zgarmas C ko'paytuvchi uchun $D(CX)=C^2 D(X)$.
4. Har qanday o'zgarmas C son uchun D(X±C)= D(X).

Agarda X biror narsani massasini ifodalab, uning o'lchov birligi kilogramm (kg) bo'lsa, dispersiya o'lchovi kg^2 bo'lib, ma'nosiz bo'ladi. Shu sababli bunday paytlarda $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$ formula bilan aniqlanadigan va *<u>o'rta kvadratik chetlanish</u>* deb ataladigan ko'rsatgichdan foydalaniladi.

Масала №1. Дискрет тасодифий микдор X узининг ушбу куринишдаги таксимот конуни билан берилган:

X	-2	1	4	6
P	0,4	*p*	0,2	0,1

а) Таксимот конунидаги номаълум *p*=P{X=1} эхтимоллик кийматини топинг;

б) X тасодифий микдорни (-1,5) ораликка тушиш эхтимолигини хисобланг;

в) M(X)- математик кутилиши, D(X)- дисперсия ва σ(X) урта квадратик четланишини аникланг.

г) X тасодифий микдорнинг F(*x*) таксимот функциясини топинг ва унинг графигини чизинг.

<u>Ечиш.</u> *а*) Таксимот конунида барча эхтимолликлар йигиндиси бирга тенг булиши шартидан номаълум *p* эхтимолликни топамиз :

$$0{,}4 + p + 0{,}2 + 0{,}1=1 \Rightarrow 0{,}7+p=1 \Rightarrow p = 0{,}3 = P\{X=1\}$$

б) Эхтимолликларни кушиш теоремасига асосан

$$P\{X\in(-1{,}5)\}= P\{X=1\}+P\{X=4\}=0{,}3+0{,}2=0{,}5 \ ,$$

чунки (-1,5) ораликда X факатгина 1 ёки 4 кийматларни кабул кила олади.

в) Математик кутилиш формуласига асосан

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4 = -2\cdot 0{,}4+1\cdot 0{,}3+4\cdot 0{,}2+6\cdot 0{,}1=$$
$$= -0{,}8+0{,}3+0{,}8+0{,}6 = 0{,}9$$

Дисперсия формуласига асосан

$$D(X) = x_1^2p_1 + x_2^2p_2 + x_3^2p_3 + x_4^2p_4 - (M(X))^2 = (-2)^2\cdot 0{,}4 + 1^2\cdot 0{,}3 +$$
$$+ 4^2\cdot 0{,}2 + 6^2\cdot 0{,}1 - 0{,}9^2 = 4\cdot 0{,}4 + 1\cdot 0{,}3 + 16\cdot 0{,}2 + 36\cdot 0{,}1 - 0{,}81 =$$
$$= 8{,}7 - 0{,}81 = 7{,}89$$

Урта квадратик четланиш таърифига асосан

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{7{,}89} \approx 2{,}81$$

г) Таксимот функциясини F(*x*) = P{X<*x*} таърифи буйича топамиз.

x≤-2 булганда A = {X<-2} мумкин булмаган ходиса булади ва шу сабабли бу сохада

F(*x*) = P(∅) = 0

-2<*x*≤1 сохада

F(*x*) = P{X= -2} = 0,4

$1<x\leq 4$ сохада эхтимолликларни кушиш теоремасига асосан

$F(x) = P\{X= -2\} + P\{X=1\} = 0,4+0,3=0,7$

$4<x\leq 6$ сохада

$F(x) = P\{X= -2\} + P\{X=1\} + P\{X=4\}= 0,4+0,3+0,2=0,9$

$x>6$ сохада $\{X<x\}$ мукаррар ходиса ва шу сабабли бу сохада $F(x) = P(\Omega) = 1$.

Tasodifiy miqdor ehtimollari taqsimotining integral funksiyasi:

Ta'rif: Har bir x qiymat uchun X tasodifiy miqdorning x dan kichik qiymat qabul qilish ehtimoliga taqsimotning integral funksiyasi deyiladi.

$$P(X<x)=F(x)$$

Agar $F(x)$- integral funksiya uzluksiz differensiallanuvchi bo'lsa, X tasodifiy miqdor uzluksiz deyiladi.

Integral funksiyasi ba'zan taqsimot funksiyasi deb ham nomlanadi.

Integral funksiya xossalari.

1-xossasi: Integral funksiya qiymatlari $[0;1]$ oraliqda joylashgandir.

$$0\leq F(x)\leq 1$$

2-xossasi: Integral funksiya kamaymaydigan funksiyadir, ya'ni $x_1<x_2$ bo'lganda $F(x_1)\leq F(x_2)$ bo'ladi.

3-xossasi: X tasodifiy miqdorning (a,b) oraliqda yotgan qiymatlarni qabul qilish ehtimoli: $P(a<x<b)=F(b)-F(a)$ ga teng.

Xulosa: Agar X tasodifiy miqdorning barcha mumkin bo'lgan qiymatlari (a,b) oraliqga tegishli bo'lsa, u holda

$$F(x)=\begin{cases}0, agar\ x\leq a, bo'lsa\\ 1, agar\ x>b, bo'lsa\end{cases}$$

72-mavzu. Matematika statika elementlari. Emperik taqsimot funksiyasi. Tanlanma xarakteristikalari va ularning taqsimot qonunlar. Tanlanma taqsimotlari parametrlarining nuqtaviy va integral baholash.

Uzluksiz tasodifiy miqdor ehtimollari taqsimotining differensial funksiyasi.

Integral funksiyadan olingan birinchi tartibli hosilaga ehtimollar taqsimotining differesial funksiyasi deyiladi. $f(x)=F^1(x)$

Ba'zan differensial funksiyasini zichlik funksiyasi deb ham atashadi.

X uzluksiz tasodifiy miqdorning (a,b) oraliqqa tegishli qiymatlarni qabul qilish ehtimoli.

$$P(a<x<b)=\int_a^b f(x)dx \text{ ga teng.}$$

Integral funksiya differensial funksiya orqali quyidagi formula bilan ifodalanadi.

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

Differensial funksiya xossalari.

1-xossasi: Differensial funksiya manfiy emas:

$$f(x)\geq 0$$

2-xossasi: Quyidagi xosmas integral birga teng:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$$

Agar tasodifiy miqdor (a,b) oraliqqa tegishli qiymat qabul qilsa, u holda:

$$\int_a^b f(x)dx=1 \text{ bo'ladi.}$$

Uzluksiz tasodifiy miqdorning matematik kutilishi dispersiyasi va o’rtacha kvadratik chetlanishi quyidagi formulalar orqali ifodalanadi.

1) $\mathrm{M}(x)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$, yoki $\mathrm{M}(x)=\int_{a}^{b} xf(x)dx$

2) $D(x)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mathrm{M}(x))^2 f(x)dx$, yoki $D(x)=\int_{a}^{b} x^2 f(x)dx-\mathrm{M}^2(x)$

3) $\sigma(x)=\sqrt{D(x)}$

Masalalar yechish uchun namunalar.

1) Masala. Agar X-tasodifiy miqdor (0:2) oraliqda quyidagi differensial funksiya bilan berilgan bo’lsa,

$$f(x)=\begin{cases} 1/4, agar, x\in(0;1] bo'lsa, \\ 3/4, agar, x\in(1;2) bo'lsa \end{cases}$$

uning integral funksiyasi topilsin.

Yechish: $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int_0^1\frac{dx}{4}+\int_1^x\frac{3}{4}dx=\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}$ dan $F(x)=\begin{cases} 0, agar x\le 0, bo'lsa, \\ \frac{x}{4}, agar 0<x\le 1, bo'lsa, \\ \frac{3}{4}x-\frac{1}{2}, agar 1<x<2, bo'lsa, \\ 1, agar, x>2, bo'lsa, \end{cases}$ ga ega bo’lamiz.

2) Masala. X-tasodifiy miqdorning integral funksiyasi berilgan bo’lsa,

$$F(x)=\begin{cases} 0, agar x<0, bo'lsa, \\ x, agar 0\le x\le 1, bo'lsa, \\ 1, agar x>1, bo'lsa, \end{cases}$$

uning differensial funksiyasi va o’rtacha kvadratik chetlanishi topilsin.

Yechish: $f(x)=F^1(x)=\begin{cases} 0, agar, x<0, bo'lsa, \\ 1, agar, 0\le x\le 1, bo'lsa, \\ 0, agar, x>1, bo'lsa \end{cases}$

$$\mathrm{M}(x)=\int_0^1 xdx=\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}\quad,\quad D(x)=\int_0^1 x^2dx-\frac{1}{4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12},\quad \sigma(x)=\sqrt{D(x)}=\sqrt{\frac{1}{12}}=\frac{\sqrt{3}}{6}.$$

B guruh

17.58. 2 ta o’yin kubigi bir marta tashlanganda chiqadigan ochkolar ko’paytmasining matematik kutilishi topilsin.

17.59. Avvalgi masala shartlarida yig’indining matematik kutilishi topilsin.

17.60. Qutida 5 ta shar bo’lib, ulardan 2 tasi oq va 3 tasi esa qora rangda. Tavakkaliga qutidan ikkita shar olindi. X-tasodifiy miqdor oq shar chiqish soni taqsimotining matematik kutilishi topilsin.

17.61. Avvalgi masala shartlarida X tasodifiy miqdorining dispersiyasi hisoblansin.

17.62. Diskret 2 ta erkli tasodifiy miqdorlarning taqsimot qonunlari berilgan.

X	1	2
p	0,2	0,8

Y	0,5	1
p	0,3	0,7

XY-ko’paytmasining matematik kutilishini toping.

17.63. X -tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni berilgan.

X	2	4	8
p	0,1	0,5	0,4

Uning o'rtacha kvadratik chetlanishi topilsin.

17.64. 10 ta detaldan iborat to'plamda 3 ta nostandart detal bor. Tavakkaliga 2 ta detal olingan. X-diskret tasodifiy miqdor, olingan 2 ta detal orasidagi nostandart detallar sonining matematik kutiliiihini toping.

17.65. Geolog safardan qayta turib, tog'dan 6 ta namuna olib keldi. Shulardan 4 tasida izlanayotgan metal qotishmasi bor. Tavakkaliga 3 ta namuna tanlandi. X-diskret tasodifiy miqdor olingan namunalar orasida izlanayotgan metal qorishmasi borligi soni taqsimotining o'rtacha kvadratik chetlanishi topilsin.

17.66. X-diskret tasodifiy miqdor faqat 2 ta mumkin bo'lgan x_1 va x_2 qiymatlarga ega, shu bilan birga $x_1 < x_2$, X tasodifiy miqdorning x_1 qiymatni qabul qilish ehtimoli 0,2 ga teng. $\mathrm{M}(X) = 2{,}6$ ni o'rtacha kvadratik chetlanish $\sigma(X) = 0{,}8$ ni bilgan holda, X ning taqsimot qonuni topilsin.

17.67. X diskret tasodifiy miqdor faqat 3 ta mumkin bo'lgan $x_3 = 3, x_1, x_2$ qiymatlarga ega shu bilan birga $x_1 < x_2 < x_3$ X ning x_3 va x_2 qiymatlarini qabul qilish ehtimoli mos ravishda 0,5 va 0,4 ga teng. X miqdorning matematik kutilishi $\mathrm{M}(X) = 2{,}4$ va dispersiyasi $D\,(X) = 0{,}44$ ni bilgan holda uning taqsimot qonunini toping.

17.68. Sinov paytida biror detalning buzilish ehtimoli 0,3 ga teng. Sinov paytida kuzatilgan 20 ta detaldan ishdan chiqqan detallar sonining matematik kutilishi topilsin.

17.69. Har bir tajribada biror qurilmadagi elementning ishdan chiqish ehtimoli 0,1 ga teng. X diskret tasodifiy miqdor-elementning 5 ta erkli tajribada ishdan chiqish sonining dispersiyasi topilsin.

17.70. Agar x va y tasodifiy miqdorlar erkli bo'lib, $D\,(X) = 12$ va $D\,(Y) = 7$ ga teng ekanligi ma'lum bo'lsa, $\mathrm{Z} = 5X - 4Y$ tasodifiy miqdorning dispersiyasini toping.

17.71. 3 ta erkli sinovlar o'tkazilayotgan bo'lib, ularning har birida A hodisasi 0,4 ehtimol bilan ro'y bersin. X tasodifiy miqdor-A hodisaning ro'y berish sonining matematik kutilishi topilsin.

17.72. 14-masala shartlarida X tasodifiy miqdor dispersiyasi topilsin.

17.73. Agar X va Y tasodifiy miqdorlarning matematik kutilishi ma'lum bo'lsa, $\mathrm{M}(X) = 5;$ $\mathrm{M}(Y) = 3;$ $\mathrm{Z} = 4X - 2Y$ tasodifiy miqdorning matematik kutilishini toping.

17.74. Agar 3 ta erkli sinovda A hodisaning ro'y berish ehtimoli bir xil va $\mathrm{M}(X) = 0{,}6$ bo'lsa, bu sinovlarda A hodisaning ro'y berishlari sonidan iborat X diskret tasodifiy miqdorning dispersiyasi topilsin.

17.75. X diskret tasodifiy miqdor faqat ikkita mumkin bo'lgan x_1 va x_2 qiymatga ega bo'lib, $x_1 < x_2$ bo'lsin. Agar x ning x_2 qiymatni qabul qilish ehtimoli 0,8 ga, matematik kutilishi 2,6 ga, dispersiyasi esa 0,64 ga teng bo'lsa, x ning x_1 qiymatni qabul qilish ehtimoli topilsin.

17.76. X tasodifiy miqdor faqat 3 ta mumkin bo'lgan qiymatlar $x_1 < x_2 < x_3$ qabul qiladi. X ning x_2 va x_3 qiymatlarni qabul qilish ehtimollari mos ravishda 0,2 va 0,5 ga teng. Matematik kutilishi esa 3,2 va dispersiyasi 0,76 ga teng bo'lsa, X ning taqsimot qonuni topilsin.

17.77. **X tasodifiy miqdor integral funksiyasi bilan berilgan.**

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{8}{x^3}, agar, x \geq 2, bo'lsa \\ 0, agar, x < 2, bo'lsa. \end{cases}$$

X ning sonli xarakteristikalari, ya'ni matematik kutilishi, dispersiyasi va o'rtacha kvadratik chetlanishi topilsin.

17.78.X tasodifiy miqdor (0:1) oraliqda differensial funksiyasi $f(x) = x,$ bu oraliqdan tashqarida esa $f(x) = 0$ bo'lsa, uning sonli xarakteristikalari hisoblansin.

17.79. X tasodifiy miqdorining (3:5) oraliqda $f(x)=\frac{1}{2}$ differensial funksiya bilan berilgan bu oraliqdan tashqarida esa $f(x)=0$ ga teng. X ning integral funksiyasi topilsin.

17.80. X ning integral funksiyasi berilgan bo'lsa,

$$F(x)=\begin{cases} 1 & ,agar \quad x\ge a, bo'lsa \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\,arcSin\frac{x}{a} & , \quad агар, \; -a<x<a, bo'lsa \\ 0 & , \quad agar, x\le -a, bo'lsa \end{cases}$$

X ning $\left(-\frac{a}{2};\frac{a}{2}\right)$ oraliqqa tushish ehtimoli topilsin.

17.81. X ning zichlik funksiyasi $f(x)=ae^{-x}$ $[0;\infty)$ oraliqda berilgan bo'lsa, a-koeffitsient topilsin.

17.82. X ning differentsial funksiyasi $f(x)=kxe^{-x}$ $x\in[0;\infty)$ oraliqda berilgan bo'lsa, $k-$koeffitsient topilsin.

17.83. **Tekis taqsimlangan tasodifiy miqdor X ning integral funksiyasi berilgan.**

$$F(x)=\begin{cases} 0, & agar, x<0, bo'lsa, \\ x, agar & 0\le x\le 1 \quad bo'lsa, \\ 1, & agar, x>1, bo'lsa \end{cases}$$

X ning differensial funksiyasi topilsin.

17.84. X ning taqsimot funksiyasi berilgan.

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

Uning zichlik funksiyasi topilsin.

17.85. Agar zichlik funksiyasi $f(x)=\frac{a}{1+x^2}$ $x\in(-\infty;\infty)$ bo'lsa,

1) a-koeffitsient topilsin.
2) integral funksiyasi topilsin.

17.86. Avvalgi 9-masala shartlarida. X tasodifiy miqdorning (-1;1) oraliqqa tegishli qiymat qabul qilish ehtimoli topilsin.

17.87. $f(x)=ae^{-x^2}$ X tasodifiy miqdorning $(-\infty;\infty)$ oraligida zichlik funksiyasi bo'lishi uchun a-qanday bo'lishi kerak?

17.88. X tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & agar, x\le -1, bo'lsa, \\ \frac{1}{\pi}\cdot arc\sin x, agar, & -1\le x\le 1, \quad bo'lsa, \\ 1, agar & x\ge 1, bo'lsa \end{cases}$$

berilgan. Uning matematik kutilishi va dispersiyasi qanday?

17.89. Agar X (10:20) oraliqda tekis taqsimlangan tasodifiy miqdor bo'lsa, uning matematik kutilishi dispersiyasi topilsin.

17.90. (1:7) oraliqda tekis taqsimlangan X tasodifiy miqdorning o'rtacha kvadratik chetlanishi topilsin.

17.91. (a;b) oraliqda tekis taqsimlansin X tasodifiy miqdorning matematik kutilishini toping.

17.92. 15-masala shartlarida X tasodifiy miqdorning dispersiyasini toping.

17.93. X tasodifiy miqdor (0:2) oraliqda $f(x)=\frac{x}{2}$ differensial funksiyasi bilan berilgan, bu oraliqdan tashqarida esa $f(x)=0$ ga teng. X ning dispersiyasi topilsin.

17.94. X tasodifiy miqdorning $(1;\infty)$ oralikda integral funksiyasi $F(x)=1-\frac{1}{x^3}$ ga teng bu oraliqdan tashqarida esa $F(x)=0,$ ga teng bo'lsa, uning matematik kutilishini toping.

17.95. X tasodifiy miqdor (2:4) oraliqda $f(x)=\frac{3x^2}{4}-\frac{9}{2x}x+\frac{14}{2}$ differensial funksiya bilan berilgan. Bu oraliqdan tashqarida esa $f(x)=0$ ga teng. X miqdorning matematik kutilishi topilsin.

17.96. X tasodifiy miqdor differensial funksiyasi berilgan.

$$f(x)=\begin{cases} 0, agar & x \le \frac{-\pi}{2}, bo'lsa, \\ \cos x & ,агар \frac{-\pi}{2} < x \le 0, bo'lsa, \\ 0, agar & x > 0, bo'lsa \end{cases}$$

Uning integral funksiyasi topilsin.

R E F E R A T   M A V Z U L A R I

	I-S E M E S T R.
1	To’plamlar va ular ustida amallar.Chekli va cheksiz to’plamlar.To’plamlarning ekvivalentligi.
2	Matritsalar va ular ustida amallar. Aniklovchilar va ularning xossalari
3	Aniklovchilar va ularning xossalari. Yukori tartibli aniklovchilar.
4	Chiziqli tenglamalar sistemasini Kramer usulida echish.
5	Chiziqli tenglamalar sistemasini Gauss usulida echish.
6	Chiziqli tenglamalar sistemasini matritsalar usulida echish.
7	Vektorlar, ularning berilish usullari. Vektorlar ustida arifmetik amallar. Vektorlarning koordinatalari va ular ustida amallar.
8	Vektorlarning skalyar kupaytmasi ,uning xossalari va tadbiklari.
9	Vektorial kupaytma, xossalari va tadbiklari.
10	Aralash kupaytma, xossalari va tadbiklari.
11	Tekislikda analitik geometriya. Chiziq englamalari. Analitik geometriyaning asosiy masalalari. Tekislikdagi To’g’ri chiziq tenglamalari.
12	Tekislikdagi To’g’ri chiziqlarga doir asosiy masalalar.
13	Ikkinchi tartibli chiziqlar.Ellips.
14	Giperbola va parabola
15	Fazoda analitik geometriya. Tekislik va uning tenglamalari. Tekislikka doir asosiy masalalar.
16	Fazodagi to’g’ri chiziq tenglamalari va asosiy masalalar.
17	Funktsiya va u bilan boglik bulgan tushunchalar.
18	Funktsiya limiti va uning xossalari.
19	Ajoyib limitlar.
20	Uzluksiz funktsiyalar va ularning xossalari.
21	Funktsiyaning xosilasi va uning geometrik, mexanik ma'nosi.

22	Funktsiyani differentsiallash koidalari. Xosilalar jadvali.
23	Funktsiyaning differentsiali. Yukori tartibli xosila va differentsiallar.
24	Funktsiyani xosila yordamida tekshirish.
25	Anikmasliklar va Lopital koidalari.
	II C E M E S T R
1	Boshlangich funktsiya va anikmas integral. Integrallar jadvali.
2	Anikmas integralni hisoblash usullari.
3	Kvadratik uchxad katnashgan integrallar.
4	Eng sodda ratsional kasrlarva ularni integrallash.
5	Ratsional kasrlarni eng sodda ratsional kasrlarga ajratish.Ratsional kasrlarni integrallash.
6	Irratsional ifodalarni integrallash. Eyler almashtirmalari.
7	Trigonometrik funktsiyalar katnashgan ba'zi ifodalarni integrallash.
8	Anik integralga olib keluvchi masalalar, uning ta'rifi va xossalari.
9	Anik integralni hisoblash usullari.
10	Xosmas integrallar.
11	Anik integralni takribiy hisoblash.
12	Anik integralning geometrik va mexanik tadbiklari.
13	Ikki uzgaruvchili funktsiya, uning limiti va uzluksizligi.
14	Ikki uzgaruvchili funktsiyaning xosilalari
15	Murakkab funktsiyaning xosilasi. Tula xosila. Murakkab funktsiyaning tula xosilasi.
16	Ikki uzgaruvchili funktsiyaning differentsiali.
17	Yukori tartibli xosilalar va differentsiallar.
18	Ikki uzgaruvchili funktsiyaning ekstremumlari.
19	Ikki karrali integral va uning asosiy xossalari.
20	Ikki karrali integralni hisoblash usullari.
21	Ikki karrali integralning tadbiklari.
22	Uch karrali integral va uning asosiy xossalari.
23	Uch karrali integralni hisoblash usullari.
24	Uch karrali integralning tadbiklari..
25	Egri chiziqli integral, uning xossalari va hisoblash usullari.
26	Egri chiziqli integralni tadbiklari.
29	Sonli qatorlar va ularning yakinlashishi.
30	Musbat xadli sonli qator yakinlashishining etarli shartlari.
31	Ishorasi uzgaruvchi qatorlar. Leybnits teoremasi.
32	Funktsional qatorlar.

33	Darajali qatorlar. Teylor va Makloren qatorlari.
34	Ba'zi funktsiyalarning Makloren qatorlari.
35	Trigonometrik qatorlar. Fure qatorlari.
36	Juft va tok, davri 2l bulgan funktsiyalarning Fure qatorlari.
	III S E M E S T R
1	Kompleks sonlar va ular ustida arifmetik amallar. Kompleks sonning algebraik, trigonometrik va kursatkichli kurinishlari. Ikki xadli tenglamalar.
2	Kompleks argumentli funktsiya va uning xosilasi. Koshi–Riman shartlari.
3	Kompleks uzgaruvchili funktsiyalarni integrali. Koshi formulasi.
4	Differentsial tenglamalarga keluvchi masalalar. Differentsial tenglamalar va ularning echimlari.
5	Ba'zi I tartibli differentsial tenglamalar va ularni echish.
6	Yukori tartibli differentsial tenglamalar.
7	Yukori tartibli chiziqli uzgarmas koeffitsientli bir jinsli differentsial tenglamalar.
8	Ikkinchi tartibli chiziqli uzgarmas koeffitsientli birjinslimas differentsial tenglamalar.
9	II tartibli chiziqli uzgarmas koeffitsientli bir jinslimas tenglamalarni maxsus xollarda echish.
10	Uzgarmas koeffitsientli chiziqli differentsial tenglamalar sistemasi.
11	Operatsion hisob elementlari. Laplas almashtirmasi va uning xossalari
12	Xosila tasviri va tasvir xosilasi.
13	Tasvirga kura boshlangich funktsiyani tiklash.
14	Operatsion hisob yordamida differentsial tenglamalar va ularning sistemalarini echish.
15	Matematik fizika tenglamalari va ularning asosiy turlari. Tor tebranish tenglamasini keltirib chikarish va uni Dalamber va Fure usulida echish..
16	Korrekt masalalar. Koshi va chegaraviy masalalarning ta'rifi. Laplas tenglamasi uchun Koshi masalasi.
17	Simlarda elektr tebranishlari va issiklik tarkalish tenglamalarini keltirib chikarish. Issiklikni chegaralangan sterjenda tarkalishi.
18	Kombinatorika elementlari.
19	Kombinatorik masalalar
20	Extimollar nazariyasining predmeti va asosiy tushunchalari. Xodisalar va ular ustida amallar.
21	Extimollik, uning klassik ta'rifi va asosiy xossalari.
22	Extimolliklarni kushish va kupaytirish teoremalari.
23	Tulik extimol va Bayes formulasi.
24	Boglikmas sinovlar ketma-ketligi va Bernulli formulasi.
25	Diskret tasodifiy miqdorlar, ularning taksimot konuni va sonli xarakteristikalari.
26	Asosiy diskret taksimotlar.
27	Uzluksiz tasodifiy miqdorlar, ularning taksimot va zichlik funktsiyasi.

28	Uzluksiz tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikasi.
29	Asosiy uzluksiz taqsimotlar
30	Matematik statistika masalalari. Tanlanma va uning taksimotlari.
31	Statistik baxolar va ularga qo'yiladigan talablar. Tanlanma o'rta qiymat va dispersiya.
32	Statistik taxminlarni tekshirish elementlari

II KURSNING KUZGI MAVSUMI UCHUN TALABALAR MUSTAQIL ISHINING TOPSHIRIQLARI

I TOPSHIRIQ

I.1−masala

Algebraik formada berilgan $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ kompleks sonlar bo'yicha quyidagilarni bajaring:

1) $\bar{z}_1 + z_2$ yig'indi va $z_1 - \bar{z}_2$ ayirmani toping ;

2) $z = \alpha z_1 + \beta z_2$ algebraik yig'indini aniqlang ;

3) $z_1 \cdot z_2$ ko'paytma va z_1 / z_2 bo'linmani hisoblang ;

4) z_1 kompleks sonni trigonometrik formada yozib, z_1^4 darajani hisoblang va $z^3=z_1$ ikki hadli tenglama yechimlarini toping.

Izoh: Masala shartidagi $x_1, y_1, x_2, y_2, \alpha, \beta$ parametrlarning qiymatlari talabaning varianti bo'yicha quyidagi jadvaldan olinadi:

Variant №	x_1	y_1	x_2	y_2	α	β
1	1	1	−4	−3	2	−3
2	1	−1	−6	−8	4	1
3	−1	1	1	7	−3	2
4	−1	−1	4	−3	−1	1
5	1	$\sqrt{3}$	−7	1	4	−3
6	1	$-\sqrt{3}$	4	3	3	2
7	−1	$\sqrt{3}$	−7	−1	−4	3
8	−1	$-\sqrt{3}$	3	4	5	3
9	$\sqrt{3}$	1	4	−3	1	−4
10	$\sqrt{3}$	−1	7	−1	−3	4
11	$-\sqrt{3}$	1	−7	7	2	−5
12	$-\sqrt{3}$	−1	1	−7	1	3
13	1	1	12	−5	2	5
14	1	−1	−12	5	5	−3
15	−1	1	12	−12	−3	−2
16	−1	−1	−5	12	4	−1
17	1	$\sqrt{3}$	4	3	3	4

18	1	$-\sqrt{3}$	−3	−4	−2	5
19	−1	$\sqrt{3}$	−5	−12	5	7
20	−1	$-\sqrt{3}$	−7	1	5	4
21	$\sqrt{3}$	1	3	−4	−7	3
22	$\sqrt{3}$	−1	4	3	1	−5
23	$-\sqrt{3}$	1	12	−5	4	7
24	$-\sqrt{3}$	−1	1	7	−7	4
25	1	1	5	12	1	9
26	1	−1	7	1	8	5
27	−1	1	−5	12	−6	1
28	−1	−1	3	4	3	7
29	1	$\sqrt{3}$	5	−5	−7	4
30	1	$-\sqrt{3}$	−1	−7	3	−8

I.2− masala

Berilgan kompleks o’zgaruvchili $f(z)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$ funksiyani differensiallanuvchi ekanligini Koshi – Riman shartlari bo’yicha tekshiring va uning $f'(z)$ hosilasini hisoblang.

Izoh: Masala shartidagi $u(x, y)$ va $v(x, y)$ ikki o’zgaruvchili funksiyalarning ifodalari talaba varianti bo’yicha quyidagi jadvaldan olinadi:

Variant №	$u(x, y)$	$v(x, y)$	Variant №	$u(x, y)$	$v(x, y)$
1	$e^x\cos y$	$e^x\sin y$	**16**	x^3-3xy^2	$3x^2y-y^3+4$
2	x^2-y^2-x	$2xy-y$	**17**	$x-y-4$	$x+y+3$
3	$x-y$	$x+y$	**18**	$(e^x+e^{-x})\cos y$	$(e^x-e^{-x})\sin y$
4	x^3-3xy^2	$3x^2y-y^3$	**19**	x^2-y^2-x	$2xy-y+3$
5	$e^x\cos y+1$	$e^x\sin y-2$	**20**	$x/(x^2+y^2)$	$-y/(x^2+y^2)$
6	$(e^y+e^{-y})\sin x$	$(e^y-e^{-y})\cos x$	**21**	x^2-y^2+x	$2xy+y$
7	$2x+7$	$2y-5$	**22**	x^2-y^2-4x	$2xy-4y$
8	x^2-y^2+2x	$2xy+2y+7$	**23**	$(e^x-e^{-x})\cos y$	$(e^x+e^{-x})\sin y$
9	$-x/(x^2+y^2)$	$y/(x^2+y^2)$	**24**	$10x^2-10y^2$	$20xy$
10	x^3-3xy^2+4	$3x^2y-y^3-2$	**25**	$e^x\cos y+x$	$e^x\sin y+y$
11	$5x^2-5y^2$	$10xy$	**26**	x^3-3xy^2+5	$3x^2y-y^3-2$
12	$e^x\cos y-5$	$e^x\sin y+3$	**27**	x^2-y^2-6x	$2xy-6y+3$
13	$(e^y+e^{-y})\cos x$	$(e^{-y}-e^y)\sin x$	**28**	$x-y+3$	$x+y-5$
14	x^2-y^2+5x	$2xy+5y$	**29**	$e^x\cos y+7$	$e^x\sin y-2$
15	$e^x\cos y-x$	$e^x\sin y-y$	**30**	x^2-y^2-1	$-2xy+5$

II TOPSHIRIQ

II.1− masala

I tartibli chiziqli differensial tenglama uchun Koshi masalasini yeching:

$$y' + 2axy = (2Ax + B)e^{-ax^2}\ , \qquad y(0) = y_0$$

Izoh: Masala shartidagi a, A , B va y_0 parametrlarning qiymatlari talaba varianti bo'yicha quyidagi jadvaldan olinadi:

Variant №	a	A	B	y_0	Variant №	a	A	B	y_0
1	2	5	−1	7	**16**	10	3	−5	7
2	−4	1	3	−2	**17**	8	−6	5	1
3	1	−3	6	1	**18**	5	10	−2	−3
4	3	9	−2	−4	**19**	−1	4	9	−2
5	−5	−1	3	2	**20**	3	5	7	10
6	6	−4	5	3	**21**	7	−4	6	−9
7	9	6	−7	−1	**22**	2	3	6	−1
8	8	−3	1	4	**23**	4	5	−7	8
9	4	2	−5	−3	**24**	−3	9	−4	5
10	−8	7	3	−9	**25**	6	−1	1	4
11	5	−2	4	3	**26**	5	3	−10	2
12	3	1	−5	−7	**27**	1	8	3	−6
13	7	5	9	5	**28**	−2	7	−9	10
14	−9	2	−4	6	**29**	−4	2	5	4
15	2	−3	5	1	**30**	−10	9	2	3

II-2 masala

II tartibli o'zgarmas koeffitsientli chiziqli birjinslimas

$$ay'' + by' + cy = Ax + B$$

differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Izoh: Differensial tenglamadagi a, b, c va A, B parametrlarning qiymatlari talaba varianti bo'yicha quyidagi jadvaldan olinadi:

Variant №	a	b	c	A	B	Variant №	a	b	c	A	B
1	15	−1	−6	−7	−1	**16**	2	−7	5	2	5
2	2	−7	−15	1	4	**17**	3	−14	8	−4	1
3	9	−9	−4	−5	−3	**18**	2	−5	3	1	−3
4	2	−7	10	3	−9	**19**	1	−2	−3	3	9
5	3	−14	8	4	3	**20**	6	11	3	−5	−1
6	12	−25	12	−5	−7	**21**	−12	5	3	6	−4
7	15	−31	−24	9	5	**22**	2	−9	7	9	6
8	49	−49	10	−4	6	**23**	1	−11	30	8	−3
9	35	−34	−21	−3	9	**24**	2	1	−1	4	2
10	2	−9	9	6	−1	**25**	4	−8	−5	−8	7
11	12	−23	−24	5	3	**26**	1	−7	6	3	−9
12	10	−43	28	1	8	**27**	25	−50	21	4	3
13	1	−13	36	−2	7	**28**	4	8	−5	−5	−7
14	3	−2	8	−4	2	**29**	1	4	−5	9	5
15	1	3	−10	−10	9	**30**	21	50	25	−4	6

II-3 masala

Operatsion hisobga doir ushbu masalalarni yeching:

1) quyidagi $f(t)$ original funksiyaning $F(p)$ Laplas tasvirini toping:

$$f(t)=\begin{cases}(A\sin\beta t+B\cos\beta t+Ct^{n})e^{\alpha t}\ ,t\geq 0\,,\\ 0\,,\quad t<0\,.\end{cases}$$

2) $f(t)$ original funksiyani uning quyidagi $F(p)$ Laplas tasviri bo'yicha toping:

$$F(p)=\frac{Ap+B}{p^{2}-2\alpha p+\beta}\ .$$

Izoh: Masala shartidagi A , B, C , α , β va n parametrlarning qiymatlari talaba varianti bo'yicha quyidagi jadvaldan olinadi:

Variant №	A	B	C	α	β	n
1	−2	4	3	$\sqrt{10}$	14	1
2	1	−5	−7	9	90	2
3	5	9	5	8	73	3
4	2	−4	6	7	65	4
5	−3	5	1	6	72	5
6	10	3	−5	5	29	1
7	8	−6	5	4	25	2
8	5	10	−2	3	18	3
9	−1	4	9	2	20	4
10	3	5	7	1	10	5
11	7	−4	6	$\sqrt{10}$	19	1
12	2	3	6	9	97	2
13	4	5	−7	8	65	3
14	−3	9	−4	7	53	4
15	6	−1	1	6	45	5
16	5	3	−10	5	41	1
17	1	8	3	4	32	2
18	−2	7	−9	3	34	3
19	15	−1	−6	2	29	4
20	2	−7	−15	1	17	5
21	9	−9	−4	$\sqrt{10}$	26	1
22	2	−7	10	9	82	2
23	3	−14	8	8	68	3
24	12	−5	12	7	58	4
25	15	−3	4	6	40	5
26	9	−4	10	5	61	1
27	6	−7	1	4	65	2
28	−5	1	4	3	13	3
29	−4	−5	−3	2	40	4
30	10	3	−9	1	37	5

III TOPSHIRIQ

III-1 masala

I va II o'quv guruhlarida mos ravishda n_1 va n_2 ta talaba bo'lib, ulardan m_1 va m_2 tasi kontrakt asosida ta'lim oladi. Har bir guruhdan tasodifiy ravishda bittadan talaba tanlab olindi. Quyidagi tasidifiy hodisalarning ehtimollarini toping:

A={I guruhdan tanlangan talaba kontrakt asosida ta’lim oladi} ,
B={II guruhdan tanlangan talaba kontrakt asosida ta’lim oladi} ,
C={tanlangan ikkala talaba ham kontrakt asosida ta’lim oladi} ,
D={ tanlangan ikkala talabadan kamida bittasi kontrakt asosida ta’lim oladi} ,
E={ tanlangan ikkala talabalardan faqat bittasi kontrakt asosida ta’lim oladi} .

Izoh: Masala shartidagi n_1 va m_1 , n_2 va m_2 parametrlarning qiymatlari talaba varianti bo’yicha quyidagi jadvaldan olinadi:

Variant №	n_1	m_1	n_2	m_2	Variant №	n_1	m_1	n_2	m_2
1	25	20	21	15	**16**	28	18	24	14
2	24	16	20	12	**17**	25	15	18	9
3	22	14	18	10	**18**	22	12	16	10
4	20	12	15	9	**19**	30	21	26	13
5	18	10	27	18	**20**	21	15	14	7
6	16	10	30	21	**21**	20	14	28	21
7	14	8	28	16	**22**	24	15	12	8
8	26	18	22	10	**23**	16	10	27	15
9	30	20	18	8	**24**	18	12	22	14
10	28	16	22	12	**25**	28	16	24	16
11	24	12	27	21	**26**	27	18	25	20
12	22	10	25	15	**27**	30	18	20	10
13	20	10	16	8	**28**	26	16	15	10
14	18	9	21	14	**29**	25	18	24	15
15	15	6	30	18	**30**	21	12	30	22

III-2 masala

Diskret X tasodifiy miqdor quyidagi taqsimot qonuni orqali berilgan:

x_i	x_1	x_2	x_3	x_4
p_i=P{X= x_i}	p_1	p_2	p_3	p_4

Bu taqsimot qonuni bo’yicha quyidagilarni toping:
1) noma’lum p_k=P{X= x_k}=p ehtimol qiymatini ;
2) $Y=AX+B$ tasodifiy miqdorning $M(Y)$ matematik kutilishini ;
3) $Y=AX+B$ tasodifiy miqdorning $D(Y)$ dispersiyasini .

Izoh: Taqsimot qonunidagi x_i , p_i (i=1,2,3,4) va masala shartidagi A , B parametrlarning qiymatlari talaba varianti bo’yicha quyidagi jadvaldan olinadi:

Variant №	x_1	x_2	x_3	x_4	p_1	p_2	p_3	p_4	A	B
1	2	1	4	6	0,4	p	0,2	0,1	−1	5
2	−3	0	1	5	0,2	0,1	0,3	p	−4	2
3	−1	3	4	6	p	0,3	0,1	0,4	2	5
4	0	2	4	5	0,3	0,4	p	0,2	−1	3
5	−3	−1	2	4	0,2	p	0,3	0,3	−2	6
6	−2	0	3	6	0,3	0,4	0,1	p	−1	4
7	−1	3	5	6	p	0,1	0,3	0,2	3	8
8	0	1	4	5	0,5	0,2	p	0,1	1	6

9	−3	2	4	6	0,1	*p*	0,2	0,4	−2	5
10	−2	3	5	6	0,2	0,3	0,4	*p*	1	7
11	−3	−1	2	4	0,3	0,5	*p*	0,1	−2	3
12	−1	0	2	5	*p*	0,1	0,2	0,3	−3	4
13	2	3	5	6	0,2	*p*	0,3	0,4	6	4
14	1	4	5	8	0,5	0,1	*p*	0,2	−1	6
15	−4	−2	3	5	0,2	0,1	0,3	*p*	−3	4
16	2	5	7	10	0,2	0,5	*p*	0,1	3	9
17	−3	2	5	7	0,3	*p*	0,1	0,2	2	6
18	0	3	6	8	*p*	0,3	0,2	0,1	−1	5
19	−1	2	5	7	0,3	*p*	0,1	0,4	3	6
20	−3	0	4	6	0,4	0,1	*p*	0,2	1	8
21	1	4	6	8	0,3	0,2	0,4	*p*	−1	7
22	−2	1	3	5	0,1	0,3	*p*	0,2	−4	4
23	2	3	4	7	0,3	*p*	0,1	0,4	1	6
24	1	2	5	10	*p*	0,4	0,3	0,2	8	9
25	−2	−1	3	6	0,3	*p*	0,1	0,4	−3	5
26	−3	0	4	8	0,1	0,4	*p*	0,2	−1	7
27	1	4	6	9	0,2	0,1	0,3	*p*	4	8
28	0	2	4	6	0,4	0,2	*p*	0,1	1	5
29	−1	3	5	7	0,3	*p*	0,1	0,4	−2	6
30	−2	4	6	8	*p*	0,3	0,4	0,1	1	7

III-3 masala

Uzluksiz X tasodifiy miqdorning barcha qiymatlari [0, b] kesmada joylashgan bo’lib, uning zichlik taqsimot funksiyasi

$$f(x)=\begin{cases} C\cdot(b-x), & x\in[0,b] \\ 0, & x\notin[0,b] \end{cases}$$

ko’rinishga ega. Quyidagilarni bajaring:

1) C parametr qiymatini toping ;
2) $P\{\alpha<X<\beta\}$ ehtimol qiymatini aniqlang ;
3) $M(X)$ matematik kutilish va $D(X)$ dispersiyani hisoblang ;
4) $F(x)$ taqsimot funksiyasini toping .

Izoh: Masala shartidagi b va α , β parametrlarning qiymatlari talaba varianti bo’yicha quyidagi jadvaldan olinadi:

Variant №	b	α	β	Variant №	b	α	β
1	10	6	9	**16**	5	1	3
2	9	5	7	**17**	4	2	4
3	8	4	6	**18**	3	2	3
4	7	3	6	**19**	2	1	2
5	6	2	5	**20**	1	0,5	1
6	5	2	4	**21**	10	2	7
7	4	1	3	**22**	9	4	8
8	3	1	2	**23**	8	1	5
9	2	0	1	**24**	7	4	6
10	1	0	0,8	**25**	6	1	4
11	10	3	8	**26**	5	3	5
12	9	5	8	**27**	4	1	2

13	8	3	7	**28**	3	0	2
14	7	2	5	**29**	2	0,5	1,5
15	6	3	5	**30**	1	0,2	0,7

II BOSQICH BAKALAVRLARI UCHUN KUZGI O'QUV MAVSUMI MUSTAQIL ISH TOPSHIRIQLARIDAGI MASALALARNING NAMUNAVIY YECHIMLARI

I TOPSHIRIQ

I-1 masala

Algebraik formada berilgan $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ kompleks sonlar bo'yicha quyidagilarni bajaring:

1) $\bar{z}_1 + z_2$ yig'indi va $z_1 - \bar{z}_2$ ayirmani toping ;

2) $z = \alpha z_1 + \beta z_2$ algebraik yig'indini aniqlang ;

3) $z_1 \cdot z_2$ ko'paytma va z_1/z_2 bo'linmani hisoblang ;

4) z_1 kompleks sonni trigonometrik formada yozib, z_1^4 darajani hisoblang va $z^3=z_1$ ikki hadli tenglama yechimlarini toping.

Izoh: Masala shartidagi parametrlarning qiymatlari variant bo'yicha $x_1=-1$, $y_1=\sqrt{3}$, $x_2=4$, $y_2=5$, $\alpha=2$, $\beta=-3$ deb olamiz.

Yechish: 1) Dastlab berilgan $z_1=x_1+iy_1=-1+i\sqrt{3}$ va $z_2=x_2+iy_2=4+5i$ kompleks sonlarga qo'shma $\bar{z}_1$, $\bar{z}_2$ kompleks sonlarni ularning ta'rifiga asosan topamiz:

$$\bar{z}_1 = \overline{x_1 + iy_1} = x_1 - iy_1 = -1 - i\sqrt{3}, \quad \bar{z}_2 = \overline{x_2 + iy_2} = x_2 - iy_2 = 4 - 5i \ .$$

Algebraik formadagi kompleks sonlarni qo'shish va ayirish ta'riflariga ko'ra

$$\bar{z}_1 + z_2 = (x_1 - iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + (-y_1 + y_2)i =$$
$$= (-1 - i\sqrt{3}) + (4 + 5i) = (-1 + 4) + (-\sqrt{3} + 5)i = 3 + (5 - \sqrt{3})i \ ,$$
$$z_1 - \bar{z}_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 - iy_2) = (x_1 - x_2) - (y_1 - (-y_2))i =$$
$$= (-1 + i\sqrt{3}) - (4 - 5i) = (-1 - 4) - (\sqrt{3} - (-5))i = -5 - (\sqrt{3} + 5)i \ .$$

2) Dastlab kompleks sonlarni haqiqiy sonlarga ko'paytirish ta'rifidan foydalanib, $\alpha z_1= 2z_1$ va $\beta z_2 =-3z_2$ ko'paytmalarni topamiz:

$$\alpha z_1 = \alpha(x_1 + iy_1) = \alpha x_1 + i\alpha y_1 \Rightarrow 2z_1 = 2(-1 + \sqrt{3}i) = -2 + 2\sqrt{3}i \ ,$$
$$\beta z_2 = \beta(x_1 + iy_1) = \beta x_1 + i\beta y_1 \Rightarrow -3z_2 = -3(4 + 5i) = -12 + 15i \ .$$

Kompleks sonlarni qo'shish amali ta'rifiga asosan

$$z = \alpha z_1 + \beta z_2 = 2z_1 + (-3z_2) = (-2 + 2\sqrt{3}i) + (-12 + 15i) = -14 + (2\sqrt{3} + 15)i \ .$$

3) Algebraik formadagi kompleks sonlarni ko'paytirish ta'rifiga ko'ra

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i \Rightarrow$$
$$z_1 \cdot z_2 = (-1 + \sqrt{3}i) \cdot (4 + 5i) = (-1 \cdot 4 - \sqrt{3} \cdot 5) + (-1 \cdot 5 + 4 \cdot \sqrt{3})i =$$
$$= -(4 + 5\sqrt{3}) + (4\sqrt{3} - 5)i \ .$$

4) Algebraik formadagi kompleks sonlarni bo'lish ta'rifiga asosan

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 - iy_2)}{|x_2 + iy_2|^2} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) - (x_1 y_2 - x_2 y_1)i}{x_2^2 + y_2^2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{4 + 5i} = \frac{(-1 + \sqrt{3}i) \cdot (4 - 5i)}{|4 + 5i|^2} =$$
$$= \frac{(-1 \cdot 4 + \sqrt{3} \cdot 5) - (-1 \cdot 5 - 4 \cdot \sqrt{3})i}{4^2 + 5^2} = \frac{(5\sqrt{3} - 4)}{41} + \frac{4\sqrt{3} + 5}{41} i \ .$$

4) Algebraik formadagi $z=x+iy$ kompleks sonning trigonometrik formasi

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ko'rinishda bo'ladi. Bunda $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ va

$$\varphi = \begin{cases} arctg(y/x), & x>0, y>0; \\ \pi - arctg(y/|x|), & x<0, y>0; \\ \pi + arctg(y/x), & x<0, y<0; \\ 2\pi - arctg(|y|/x), & x>0, y<0 \end{cases}$$

formulalar orqali aniqlanadi. Berilgan $z_1 = -1 + \sqrt{3}i$ kompleks son uchun

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2,$$

$$\varphi = \pi - arctg\frac{\sqrt{3}}{|-1|} = \pi - arctg\sqrt{3} = 180^0 - 60^0 = 120^0.$$

Demak, $z_1 = -1 + \sqrt{3}i = 2(\cos 120^0 + i\sin 120^0)$.

Trigonometrik formadagi kompleks sonni darajaga ko'tarish

$$z^n = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

formulasiga asosan

$$z_1^4 = [2(\cos 120^0 + i\sin 120^0)]^4 = 2^4[\cos(4\cdot 120^0) + i\sin(4\cdot 120^0)] =$$
$$= 16(\cos 480^0 + \sin 480^0) = 16[\cos(120^0 + 360^0) + i\sin(120^0 + 360^0)] =$$
$$= 16(\cos 120^0 + i\sin 120^0) = 16(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = -8 + 8\sqrt{3}i.$$

Trigonometrik formadagi kompleks sondan ildiz chiqarish

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}),\ k = 0,1,\cdots,n-1$$

formulasiga asosan $z^3 = z_1 = 2(\cos 120^0 + i\sin 120^0)$ ikki hadli tenglamaning ildizlari

$$z = \sqrt[3]{2}(\cos\frac{120^0 + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{120^0 + 2\pi k}{3}),\ k = 0, 1, 2$$

formula orqali topiladi. Demak, berilgan ikki hadli tenglama uchta ildizga ega va ular quyidagi kompleks sonlardan iborat:

$$k = 0 \Rightarrow z(1) = \sqrt[3]{2}(\cos\frac{120^0 + 2\pi\cdot 0}{3} + i\sin\frac{120^0 + 2\pi\cdot 0}{3}) = \sqrt[3]{2}(\cos 40^0 + i\sin 40^0),$$

$$k = 1 \Rightarrow z(2) = \sqrt[3]{2}(\cos\frac{120^0 + 2\pi\cdot 1}{3} + i\sin\frac{120^0 + 2\pi\cdot 1}{3}) = \sqrt[3]{2}(\cos 160^0 + i\sin 160^0),$$

$$k = 2 \Rightarrow z(3) = \sqrt[3]{2}(\cos\frac{120^0 + 2\pi\cdot 2}{3} + i\sin\frac{120^0 + 2\pi\cdot 2}{3}) = \sqrt[3]{2}(\cos 280^0 + i\sin 280^0).$$

I.2− masala

Berilgan kompleks o'zgaruvchili $f(z) = u(x,y) + i\cdot v(x,y)$ funksiyaning differensiallanuvchi ekanligini Koshi – Riman shartlari bo'yicha tekshiring va uning $f'(z)$ hosilasini hisoblang.

Izoh: Masala shartidagi ikki o'zgaruvchili funksiyalar variant bo'yicha

$$u(x,y) = x^2 - y^2 + e^x\cos y,\quad v(x,y) = 2xy + e^x\sin y$$

deb olamiz.

Yechish: Kompleks o'zgaruvchili $f(z) = u(x,y) + i\cdot v(x,y)$ funksiyaning differensiallanuvchi ekanligini ushbu Koshi-Riman shartlari orqali tekshiramiz:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Bizning masalada, ikki o'zgaruvchili funksiyaning xususiy hosilalarini hisoblash qoidasiga asosan,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - y^2 + e^x\cos y) = 2x + e^x\cos y,$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(2xy+e^x\sin y)=2x+e^x\cos y \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \ ;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(x^2-y^2+e^x\cos y)=-2y-e^x\sin y=-(2y+e^x\sin y),$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(2xy+e^x\sin y)=2y+e^x\cos y \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \ .$$

Demak, berilgan $f(z)$ kompleks funksiya Koshi-Riman shartlarini qanoatlantiradi va shu sababli u differensiallanuvchi bo'ladi. Uning $f'(z)$ hosilasini quyidagi formula bo'yicha hisoblaymiz:

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=(2x+e^x\cos y)+(2y+e^x\cos y)i \ .$$

II TOPSHIRIQ

II.1− masala

I tartibli chiziqli differensial tenglama uchun Koshi masalasini yeching:

$$y'+2axy=(2Ax+B)e^{-ax^2}\ , \quad y(0)=y_0$$

Izoh: Masala shartidagi parametrlarning qiymatlari variant bo'yicha a=4, A=5, B= −6 va y_0=8 deb olamiz.

Yechish: Biz berilgan I tartibli chiziqli $y'+8xy=(10x-6)e^{-4x^2}$ differensial tenglamaning $y(0)=8$ boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimini topish haqidagi Koshi masalasini hal etishimiz kerak. Buning uchun dastlab berilgan differensial tenglamaning ixtiyoriy o'zgarmas son C qatnashgan umumiy $y=y(x,C)$ yechimini topamiz. Bu yechimni Bernulli usulida $y=u\cdot v$ ko'rinishda izlaymiz. Bunda $u=u(x)$ va $v=v(x)$ noma'lum funksiyalar bo'lib, ularni topish uchun $y=u\cdot v$, $y'=(u\cdot v)'= u'\cdot v+u\cdot v'$ ifodalarni berilgan differensial tenglamaga qo'yib, quyidagi natijalarni olamiz:

$$y'+8xy=(10x-6)e^{-4x^2}\Rightarrow u'v+uv'+8xuv=(10x-6)e^{-4x^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow u'v+u(v'+8xv)=(10x-6)e^{-4x^2}\ . \qquad (*)$$

Noma'lum $v=v(x)$ funksiyani quyidagi shartdan va integrallar jadvalidan (I ilovaga qarang) foydalanib topamiz:

$$v'+8xv=0\Rightarrow v'=-8xv\Rightarrow\frac{dv}{dx}=-8xv\Rightarrow\frac{dv}{v}=-8xdx\Rightarrow\int\frac{dv}{v}=-\int 8xdx\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln v=-8\cdot\frac{x^2}{2}+C=-4x^2+C\Rightarrow(C=0)\Rightarrow\ln v=-4x^2\Rightarrow v=e^{-4x^2}\ . \ (**)$$

(**) natijani (*) tenglamaga qo'yib va integrallar jadvalidan (I ilovaga qarang) foydalanib, ikkinchi noma'lun $u=u(x)$ funksiyani topamiz:

$$u'e^{-4x^2}+u\cdot 0=(10x-6)e^{-4x^2}\Rightarrow u'=10x-6\Rightarrow$$

$$u=\int(10x-6)dx=10\cdot\frac{x^2}{2}-6x+C=5x^2-6x+C\ . \ (***)$$

(***) va (**) natijalardan differensial tenglamaning umumiy yechimini topamiz:

$$y=y(x,C)=u\cdot v=(5x^2-6x+C)e^{-4x^2}\ .$$

Umumiy yechimdagi C o'zgarmas son qiymatini $y(0)=8$ boshlang'ich shartdan topamiz:

$$y(0)=(5x^2-6x+C)e^{-4x^2}\Big|_{x=0}=(5\cdot 0^2-6\cdot 0+C)e^{-4\cdot 0^2}=C=8\ .$$

Demak, berilgan Koshi masalasining yagona yechimi quyidagidan iborat:

$$y=y(x,8)=(5x^2-6x+C)e^{-4x^2}\Big|_{C=8}=(5x^2-6x+8)e^{-4x^2}\ .$$

II-2 masala

II tartibli o'zgarmas koeffitsientli chiziqli birjinslimas

$$ay'' + by' + cy = Ax + B$$

differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Izoh: Differensial tenglamadagi parametrlarning qiymatlari variant bo'yicha a=32, b=−20, c=3 va A=5, B=−4 deb olamiz .

Yechish: Berilgan $32y''-20y'+3y=5x-4$ birjinslimas differensial tenglamaning umumiy $y=y(x,C_1,C_2)$ yechimini topish uchun dastlab tegishli bir jinsli $32y''-20y'+3y=0$ differensial tenglamaning umumiy $y_0=y_0(x,C_1,C_2)$ yechimini topamiz. Buning uchun y'' , y' va y o'rniga mos ravishda λ^2, λ va $\lambda^0=1$ qo'yib, $32\lambda^2-20\lambda+3=0$ xarakteristik tenglamani tuzamiz va uning ildizlarini topamiz:

$$32\lambda^2-20\lambda+3=0 \Rightarrow D=(-10)^2-3\cdot32=4=2^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lambda_{1,2}=(10\pm2)/32 \Rightarrow \lambda_1=8/32=1/4,\ \ \lambda_2=12/32=3/8 .$$

Demak, bir jinsli differensial tenglamaning umumiy yechimi

$$y_0(x,C_1,C_2) = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x} = C_1e^{x/4} + C_2e^{3x/8} .$$

Endi berilgan birjinslimas tenglamaning biror $y^*=y^*(x)$ xususiy yechimini topamiz. Tenglamaning o'ng tomoni $5x-4=Ax+B$ ko'rinishda va $\lambda=0$ xarakteristik tenglama ildizi bo'lmagani uchun xususiy yechimni $y^*=A^*x+B^*$ ko'rinishda izlaymiz. Noma'lum A^* va B^* koeffitsientlani topish uchun $y^*=A^*x+B^*$, $(y^*)'=(A^*x+B^*)'=A^*$ va $(y^*)''=(A^*)'=0$ tengliklarni birjinslimas tenglamaga qo'yamiz:

$$32(y^*)''-20(y^*)'+3y^*=5x-4 \Rightarrow 32\cdot0-20A^*+3(A^*x+B^*)=5x-4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3A^*x+(-20A^*+3B^*)=5x-4 \Rightarrow 3A^*=5,\ -20A^*+3B^*=-4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A^*=5/3\ ,\ B^*=(-4+20\,A^*)/3=(-4+100/3)/3=(88/3)/3=88/9\ .$$

Demak, xususiy yechim sifatida $y^*=5x/3+88/9=(15x+88)/9$ funksiyani olish mumkin. Unda izlangan umumiy yechim quyidagidan iborat bo'ladi:

$$y(x,C_1,C_2) = y_0(x,C_1,C_2) + y^* = C_1e^{x/4} + C_2e^{3x/8} + (15x+88)/9\cdot$$

II-3 masala

Operatsion hisobga doir ushbu masalalarni yeching:

1) quyidagi $f(t)$ original funksiyaning $F(p)$ Laplas tasvirini toping:

$$f(t)=\begin{cases}(A\sin\beta t + B\cos\beta t + Ct^n)e^{\alpha t}\ , t\ge 0\,,\\ 0\,,\quad t<0\,.\end{cases}$$

2) $f(t)$ original funksiyani uning quyidagi $F(p)$ Laplas tasviri bo'yicha toping:

$$F(p) = \frac{Ap+B}{p^2-2\alpha p+\beta}\ .$$

Izoh: Masala shartidagi parametrlarning qiymatlari variant bo'yicha A=6 , B=5, C= −3 , α=4 , β=20 va n=5 deb olamiz.

Yechish: 1) Berilgan $f(t)=(6\sin20t+5\cos20t-3t^5)e^{4t}$ $(t\ge0)$ originalning $F(p)=L\{f(t)\}$ Laplas tasvirini topish uchun uning chiziqlilik xossasidan va tasvirlar jadvalidan (II ilovaga qarang) foydalanamiz:

$$L\{f(t)\}=L\{(6\sin20t+5\cos20t-3t^5)e^{4t}\}=L\{6e^{4t}\sin20t\}+L\{5e^{4t}\cos20t\}+L\{-3t^5e^{4t}\}=$$
$$=6L\{e^{4t}\sin20t\}+5L\{e^{4t}\cos20t\}-3L\{t^5e^{4t}\}=$$
$$=6\cdot\frac{20}{(p-4)^2+20^2}+5\cdot\frac{p-4}{(p-4)^2+20^2}-3\cdot\frac{5!}{(p-4)^{5+1}}=$$
$$=\frac{120}{(p-4)^2+400}+\frac{5(p-4)}{(p-4)^2+400}-\frac{360}{(p-4)^6}\ .$$

Bu yerda tasvirlar jadvalidagi (II ilova)

$$L\{e^{\alpha t}\sin\beta t\}=\frac{\beta}{(p-\alpha)^2+\beta^2}\,,\ L\{e^{\alpha t}\cos\beta t\}=\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\beta^2}\,,\ L\{t^ne^{\alpha t}\}=\frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$$ te

ngliklardan va $n!=1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdot n$ formuladan , jumladan $5!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5=120$ ekanligi -dan foydalandik.

2) $f(t)$ original funksiyani uning Laplas tasviri

$$F(p)=\frac{6p+5}{p^2-8p+20}$$

bo'yicha topish uchun bu tasvirni quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$F(p)=\frac{6p+5}{p^2-8p+20}=\frac{6p+5}{p^2-8p+16+4}=\frac{6p+5}{(p-4)+2^2}=$$

$$=6\cdot\frac{p+5/6}{(p-4)+2^2}=6\cdot\frac{p-4+4+5/6}{(p-4)+2^2}=6\cdot\frac{p-4}{(p-4)+2^2}+6\cdot\frac{29/6}{(p-4)+2^2}=$$

$$=6\cdot\frac{p-4}{(p-4)+2^2}+\frac{29}{2}\cdot\frac{2}{(p-4)+2^2}\quad .$$

Tasvirlar jadvalidan (II ilovaga qarang) teskarisiga foydalanib, izlangan $f(t)=L^{-1}(F(p))$ original funksiyani topamiz:

$$f(t)=L^{-1}\{F(p)=L^{-1}\{6\cdot\frac{p-4}{(p-4)^2+2^2}+\frac{29}{2}\cdot\frac{2}{(p-4)^2+2^2}\}=$$

$$=L^{-1}\{6\cdot\frac{p-4}{(p-4)^2+2^2}\}+L^{-1}\{\frac{29}{2}\cdot\frac{2}{(p-4)^2+2^2}\}=$$

$$=6L^{-1}\{\frac{p-4}{(p-4)^2+2^2}\}+\frac{29}{2}L^{-1}\{\frac{2}{(p-4)^2+2^2}\}=6e^{4t}\cos 2t+\frac{29}{2}e^{4t}\sin 2t\ .$$

Bu yerda, tasvirlar ladvaliga (II ilova) asosan

$$L^{-1}\{\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\beta^2}\}=e^{\alpha t}\cos\beta t\ ,\quad L^{-1}\{\frac{\beta}{(p-\alpha)^2+\beta^2}\}=e^{\alpha t}\sin\beta t$$

ekanligidan foydalandik.

<u>III TOPSHIRIQ</u>

III-1 masala

I va II o'quv guruhlarida mos ravishda n_1 va n_2 ta talaba bo'lib, ulardan m_1 va m_2 tasi kontrakt asosida ta'lim oladi. Har bir guruhdan tasodifiy ravishda bittadan talaba tanlab olindi. Quyidagi tasidifiy hodisalarning ehtimollarini toping:

A={I guruhdan tanlangan talaba kontrakt asosida ta'lim oladi} ,
B={II guruhdan tanlangan talaba kontrakt asosida ta'lim oladi} ,
C={tanlangan ikkala talaba ham kontrakt asosida ta'lim oladi} ,
D={ tanlangan ikkala talabadan kamida bittasi kontrakt asosida ta'lim oladi} ,
E={ tanlangan ikkala talabalardan faqat bittasi kontrakt asosida ta'lim oladi} .

Izoh: Masala shartidagi parametrlarning qiymatlari variant bo'yicha n_1=24 va m_1=15 , n_2 = 18 va m_2 =10 deb olamiz.

<u>Yechish:</u> Ehtimolning klassik ta'rifiga asosan

$$P(A)=\frac{m_1}{n_1}=\frac{15}{24}=\frac{5}{8},\quad P(B)=\frac{m_2}{n_2}=\frac{10}{18}=\frac{5}{9}\quad .$$

Hodisalarni ko'paytirish amali ta'rifiga asosan $C=A\cdot B$ deb yozish mumkin. Bunda A , B bog'liqmas hodisalardir va tegishli ehtimollarni ko'paytirish teoremasidan ushbu natija kelib chiqadi:

$$P(C)=P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)=\frac{5}{8}\cdot\frac{5}{9}=\frac{25}{72}$$

Hodisalar yig'indisi ta'rifiga asosan $D=A+B$ deb yozish mumkin. Bunda A va B birgalikda bo'lgan hodisalar va shu sababli tegishli ehtimollarni qo'shish teoremasi hamda yuqoridagi natijalardan ushbu javob kelib chiqadi:

$$P(D)=P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)=\frac{5}{8}+\frac{5}{9}-\frac{25}{72}=\frac{9\cdot5+8\cdot5-25}{72}=\frac{60}{72}=\frac{5}{6}$$

Hodisalar ko'paytmasi, yig'indisi va qarama-qarshi hodisalar ta'riflaridan foydalanib, $E=A\cdot\overline{B}+\overline{A}\cdot B\equiv E_1+E_2$ deb yozish mumkin. Bunda E_1 va E_2 birgalikda bo'lmagan hodisalar va shu sababli tegishli ehtimollarni qo'shish teoremasiga asosan $P(E)=P(E_1+E_2)=P(E_1)+P(E_2)$. A va B hodisalar bog'liqmas bo'lgani uchun, tegishli ehtimollarni ko'paytirish teoremasi va qarama-qarshi hodislar ehtimollari orasidagi bog'lanish formulasidan foydalanib, izlangan $P(E)$ ehtimolni topamiz:

$$P(E)=P(E_1)+P(E_2)=P(A\cdot\overline{B})+P(\overline{A}\cdot B)=P(A)\cdot P(\overline{B})+P(\overline{A})\cdot P(B)=$$
$$=P(A)\cdot[1-P(B)]+[1-P(A)]\cdot P(B)=\frac{5}{8}\cdot(1-\frac{5}{9})+(1-\frac{5}{8})\cdot\frac{5}{9}=\frac{20}{72}+\frac{15}{72}=\frac{35}{72}\ .$$

III-2 masala

Diskret X tasodifiy miqdor quyidagi taqsimot qonuni orqali berilgan:

x_i	x_1	x_2	x_3	x_4
p_i=P{X= x_i}	p_1	p_2	p_3	p_4

Bu taqsimot qonuni bo'yicha quyidagilarni toping:
1) noma'lum p_k=P{X= x_k}=p ehtimol qiymatini ;
2) $Y=AX+B$ tasodifiy miqdorning $M(Y)$ matematik kutilishini ;
3) $Y=AX+B$ tasodifiy miqdorning $D(Y)$ dispersiyasini .

Izoh: Taqsimot qonunidagi va masala shartidagi parametrlarning qiymatlari variant bo'yicha $x_1=-3$, $x_2=-1$, $x_3=2$, $x_4=5$, $p_1=0{,}3$, $p_2=0{,}2$, $p_3=p$, $p_4=0{,}4$ va $A=3$, $B=-2$ deb olamiz.

Yechish: Dastlab variantga mos keluvchi taqsimot qonunini yozamiz:

x_i	-3	-1	2	5
p_i=P{X= x_i}	0,3	0,2	p	0,4

1) Noma'lum p_3=P{X=2}=p ehtimol qiymatini topish uchun taqsimot qonunidagi barcha ehtimollar yig'indisi birga teng bo'lishidan foydalanamiz:

$p_1+p_2+p_3+p_4=1$ => $0{,}3+0{,}2+p+0{,}4=1$ =>$0{,}9+p=1$ => $p=1-0{,}9=0{,}1$.

2) Dastlab taqsimt qonuni va matematik kutilish ta'rifidan foydalanib $M(X)$ matematik kutilishni hisoblaymiz:

$$M(X)=x_1\cdot p_1+x_2\cdot p_2+x_3\cdot p_3+x_4\cdot p_4=-3\cdot0{,}3+(-1)\cdot0{,}2+2\cdot0{,}1+5\cdot0{,}4=1{,}1$$

Matematik kutilish xossalaridan foydalanib, ushbu natijani olamiz:

$$M(AX+B)=A\cdot M(X)+B\Rightarrow M(Y)=M(3X-2)=3\cdot M(X)-2=3\cdot1{,}1-2=1{,}3\cdot$$

3) Dastlab taqsimot qonuni va dispersiya ta'rifidan foydalanib, $M(X)$=1,3 ekanligini hisobga olib, $D(X)$ dispersiyani hisoblaymiz:

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2=x_1^2p_1+x_2^2p_2+x_3^2p_3+x_4^2p_4-[M(X)]^2=$$
$$=(-3)^2\cdot0{,}3+(-1)^2\cdot0{,}2+2^2\cdot0{,}1+5^2\cdot0{,}4-(1{,}3)^2=13{,}3-1{,}69=11{,}61\ .$$

Dispersiya xossalaridan foydalanib, ushbu natijani olamiz:

$$D(AX+B)=A^2\cdot D(X)\Rightarrow D(Y)=D(3X-2)=3^2\cdot D(X)=9\cdot11{,}61=104{,}49.$$

III-3 masala

Uzluksiz X tasodifiy miqdorning barcha qiymatlari $[0,\ b]$ kesmada joylashgan bo'lib, uning zichlik taqsimot funksiyasi

$$f(x)=\begin{cases} C\cdot(b-x), & x\in[0,b] \\ 0, & x\notin[0,b] \end{cases}$$

ko'rinishga ega. Quyidagilarni bajaring:

1) C parametr qiymatini toping ;
2) $P\{\alpha<X<\beta\}$ ehtimol qiymatini aniqlang ;
3) $M(X)$ matematik kutilish va $D(X)$ dispersiyani hisoblang ;
4) $F(x)$ taqsimot funksiyasini toping .

Izoh: Masala shartidagi parametrlarning qiymatlari variant bo'yicha b=8 va α=2 , β=6 deb olamiz.

Yechish: 1) Berilgan

$$f(x)=\begin{cases} C\cdot(8-x), & x\in[0,8] \\ 0, & x\notin[0,8] \end{cases}$$

zichlik funksiyasi ifodasidagi C parametr qiymatini quyidagi xossadan topamiz:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1\Rightarrow\int_0^8 C\cdot(8-x)dx=1\Rightarrow C\cdot(8x-\frac{x^2}{2})\Big|_0^8=1\Rightarrow 32C=1\Rightarrow C=\frac{1}{32}\ .$$

2) Oraliqqa tushish ehtimolini hisoblash formulasiga asosan

$$P\{\alpha<X<\beta\}=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx\Rightarrow P\{2<X<6\}=\int_2^6\frac{8-x}{32}dx=\frac{1}{32}(8x-\frac{x^2}{2})\Big|_2^6=$$

$$=\frac{1}{32}(8\cdot6-\frac{6^2}{2})-\frac{1}{32}(8\cdot2-\frac{2^2}{2})=\frac{30}{32}-\frac{14}{32}=\frac{16}{32}=0{,}5\ .$$

3) Matematik kutilishni hisoblash formulasiga asosan

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx=\int_0^8 x\frac{8-x}{32}dx=\frac{1}{32}\int_0^8(8x-x^2)dx=$$

$$=\frac{1}{32}(4x^2-\frac{x^3}{3})\Big|_0^8=\frac{1}{32}\cdot(4\cdot8^2-\frac{8^3}{3})=\frac{1}{32}\cdot\frac{256}{3}=\frac{8}{3}=2\frac{2}{3}\ .$$

Dispersiyani hisoblash formulasiga asosan

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx-[M(X)]^2=\int_0^8 x^2\frac{8-x}{32}dx-[M(X)]^2=$$

$$=\frac{1}{32}\int_0^8(8x^2-x^3)dx-[M(X)]^2=\frac{1}{32}(\frac{8x^3}{3}-\frac{x^4}{4})\Big|_0^8-[M(X)]^2=$$

$$=\frac{1}{32}\cdot(\frac{8\cdot8^3}{3}-\frac{8^4}{4})-(\frac{8}{3})^2=\frac{32}{3}-\frac{64}{9}=\frac{32}{9}=3\frac{5}{9}\ .$$

4) $F(x)$ taqsimot funksiyasini zichlik funksiyasi $f(x)$ orqali $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ formula bilan topamiz. Bunda quyidagi uch holni qaraymiz:

*) agar $x<0$ bo'lsa, unda $f(x)=0$ va shu sababli

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{x}0dt=0\ ;$$

**) Agar $0\le x\le8$ bo'lsa, unda $f(x)=(8-x)/32$ va shu sababli

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{0} f(t)dt+\int_0^x f(t)dt=$$

$$=\int_{-\infty}^{0}0dt+\int_0^x\frac{8-t}{32}dt=\frac{1}{32}(8t-\frac{t^2}{2})\Big|_0^x=\frac{1}{32}(8x-\frac{x^2}{2})=(16x-x^2)/64\ .$$

***) Agar $x>8$ bo'lsa, unda $f(x)=0$ va shu sababli

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\int_{-\infty}^{0}f(t)dt+\int_{0}^{8}f(t)dt+\int_{8}^{x}f(t)dt=$$

$$=\int_{-\infty}^{0}0dt+\int_{0}^{8}\frac{8-t}{32}dt+\int_{8}^{\infty}0dt=\frac{1}{32}(8t-\frac{t^2}{2})\bigg|_0^8=\frac{1}{32}\cdot 32=1\cdot$$

Demak, izlangan $F(x)$ taqsimot funksiya quyidagi formula bilan ifodalanadi:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ (16x-x^2)/32, & 0\le x\le 8;\\ 1, & x>8.\end{cases}\cdot$$

GLOSSARIY

Aksioma - biror matematik nazariya yaratishda boshlang'ich fakt (asos) deb qaraladigan va isbotsiz qabul qilinadigan jumla. Matematik nazariyani asoslashning mantiqiy poydevori hisoblangan aksoimalar sistemasi hamma vaqt ham tugallangan va takomillashgan bo'lmaydi, balki aksiomalarning o'zi kabi o'zgarib va takomillashib turadi. Grek.aξίωμa-hurmatga sazovor bo'lgan shubhasiz jumla; hurmat, ehtirom, obro'.

Algebra - (aljabr) matematik fan bo'lib, unda gruppa, xalqa, struktura va shu ob'yektlar o'rganiladi. Algebraning alohida shoxobchasi algebradir. Qisqaroq ma'noda algebra tenglamalaryechish haqidagi ta'limt deb qaraladi. Ancha keng ma'noda algebra deganda ixtiyoriy tabiatli to'plamning elementlari ustida sonlarni qo'shish va ko'paytirish kabi odatdagi amallarni umumlashtiruvchi va amallarni o'rganuvchi fan tushuniladi.

Algoritm – biror operatsiyalar (amallar) sistemasini ma'lum tartibda bajarish haqida aniq qoida bo'lib, ma'lum sinfga oid masalalarni yechishga imkon beradi.

Tahlil –noma'lumdan ma'lumga, izlanayotgan berilganga o'tish yo'li bilan fikr yuritish yoki isbotlash metodi (usuli).

Matematik analiz – funksiya va limitga o'tish tushunchalariga asoslangan bir qator matematik fanlarning umumiy nomi matematik analizga odatda differensial va integral hisoblari, qatorlar nazariyasi, differensial tenglamalar nazariyasi, analitik funksiyalar nazariyasi, variatsion hisob, integral tenglamalar nazariyasi, funksional analiz kiritiladi.

Analitik geometriya – matematikaning bo'limi bo'lib, unda obrazlar koordinatalar ususlida asoslanib algebra vositalari bilan tekshiriladi.

Arab raqamlari – quyidagi o'nta matematik ishoraning nomi: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9. O'nli sanoq sistemasida istalgan kichik va istagancha katta bo'lgan har qanday sonni arab raqamlari bilan yozish mumkin.

Arifmetika – (hisob) sonlar va ular ustida bajariladigan amallar haqidagi fan. Arifmetikada birinchi navbatda natural va kasr sonlar o'rganiladi. Arifmetika inson bilimining eng qadimgi tarmoqlaridan biridir. Arifmetika o'quv predmeti sifatida maktabda I-VI sinflarda o'qitiladi va tasviriy ta'riflarga asosan quriladi. Pedagogika institutlari fizika-matematika fakultetlarining uchta nazariy kursida: ratsional sonlar arifmetikasi, sonlar nazariyasi va arifmetika asoslarida arifmetika ancha chuqur o'rganiladi.

Arifmetik son – dastlabki tushunchaga ko'ra, har qanday manfiy bo'lmagan son. Birmuncha keng ma'noda har qanday son arifmetika son deb qaraladi.

Oliy matematika – oliy o'quv yurtlarida o'qitiladigan matematik fanlar turkumi bo'lib, unga analitik geometriya, differensial vaintegral hisoblari, differensial tenglamalr, differensial geometriya va boshqalar kiradi. Lekin bu termin ancha shartli termindir. Elementar matematika asosan o'zgarmas miqdorlar tekshirilgani va matematik masalalarni tekshirishda xususiy metodlar qo'llanilgani holda oliy matematikada o'zgaruvchi miqdorlar tekshiriladi va tekshirishning umumiy metodlari qo'llaniladi. Bular orasida keskin farq yo'q, ular bir-biridan faqat mamlakatimizda ta'lim berish sistemasining tuzilishi va maktabda matematika o'qitish metodikasiga bog'liq ravishda shunday ajratilgan.

Geometriya – dastlab geometriya shakllar haqidagi, ularning turli qismlarining o'zaro joylanishi va o'lchamlari haqida, shakllarning almashtirilishihaqidagi fan..

Gradus – tekis burchaklarining o'lchov birligi, ya'ni u to'g'ri burchakning $\frac{1}{90}$ qismiga teng bo'lgan tekis burchak. Grek.gradus-qadam, bosqich.

Differensial hisob – matematikaning bo'limi bo'lib, funksiyalarni hosila va differensiallar yordami bilan tekshiradi. Differensial hisobning asosiy tushunchalari hosila va differensial bo'lib, bular o'z navbatida ketma-ketlik yaki funksiyaning limiti va cheksiz kichik miqdorlar tushuchalari bilan bog'langan. Funksiya hosilasini bilish funksiyaning qayerda o'sishi yoki kamayishi, qayerda maksimumga, munimumga va burilish nuqtasiga ega ekanligi haqida mulohaza yuritishga imkon beradi. Bu tushunchalar ko'p o'zgaruvchili funksiyalarni o'rganishda ham tatbiq etiladi. Egri chiziqlarga urinma o'tkazish haqidagi masalalarni yechish munosabati bilan XVII asr matematikalaridan Dekart, Ferma va boshqalar differensial hisob yaratish sohasida birinchi qadam qo'ygan edilar. Differensial hisobning uzil-kesil yaratilishi I.Nyuton va G.Leybnisning ilmiy ishlari bilan bog'liqdir.

Differensial tenglamalar – noma'lum funksiyalar ularning har qanday tartibli hosilalari va erkli o'zgaruvchilarni o'z ishiga olgan tenglamadir.

Differensiallash – differensial yoki hosila, xususiy hosila, to'la differensiallarning hisoblash. Differensiallash differensial hisobning asosiy amali bo'lib, bunda differensiallash qoidalari va differensiallash formulalari keltirilib chuqariladi.

Isbot – biror tasdiq (mulohaza, fikr, teorema) ning haqiqan yoki noto'g'ri ekanligini aniqlashga imkon beradigan fikr yuritish. Teoremani isbot qilishda biz tushunchalarga berilgan ta'riflardan foydalanib, aksiomalarga yoki oldin isbot etilgan teoremalarga tayanamiz. Isbotlash usulida qarab ular quyidagilarga bo'linadi: analitik; sintetik; induktiv; deduktiv usullari, teskaridan isbotlash yoki bema'nilikka (ziddiyatlikka) keltirish yo'li bilan isbotlahs usullari.

Kommutatiblik qonuni – binary operatsiyasi bo'ysunishi mumkin bo'lgan qonun. Agar binary operatsiyasini ko'paytirish deb tushunilsa, u holda kommutatiblik qonuni bunday ko'rinishda bo'ladi: $ab = bc$. Kommutatiblik qonuni ko'pincha o'rin almashtirish qonuni deb kommutatiblik qonuniga bo'ysunuvchi operatsiyalarga misol qilib sonlari qo'shish va ko'paytirish, to'plamlarning kesishmasi hamda to'plamlar birlashmasini ko'rsatish mumkin.

Kibernetika – mashina, tirik organism va ularning birikmalari kabi tashkil qilingan sistemalarda boshqarish va aloqa prostesslarining umumiy qonuniyatlari birikmalarida informasiya idrok etish, yetkazish, saqlash, foydalanish va qayta ishlash haqidagi fan sifatida ham ta'riflasa bo'ladi.

Koordinatalar – ma'lum tartibda olingan va nuqtaning chiziqdagi, tekislikdagi sirtdagi yoki fazodagi vaziyatini xarakterlaydigan sonlar. Biror ob'yektni tekshirish xarakteri va maqsadiga qarab har xil koordinata sistemalari tanlanadi, bular yordamida fazoning har bir nuqtasiga aniq sonlar to'plami – nuqta koordinatalari mos keltiriladi.

Kontangens – trigonometrik funksiyalardan biri bo'lib, $ctgx$ (x-argument) orqali belgilanadi. Lotincha co (complementum – to'ldirish so'zining qisqartirilgani) va tangens so'zlaridan yasalgan.

Koeffisient – algebraik ifodaagi koeffisient – bu ifodadagi ko'paytuvchidir. Undosh harf bilan boshlanuvchi latincha so'z bilan birikkanda "co" ga aylanadigan "cum" va efficiens (qaratqich kelishigi - efficientis) – tayyorlovchi, biror narsaga sabab bo'luvchi so'zlaridan yasalgan (kofunksiya, kologarifm bilan solishtiring); so'zma-so'ziga; koeffisient-ko'maklashuvchi.

Chiziqli algebra - algebraning bo'limi bo'lib, unda chekli o'lchovli chiziqli fazolardagi chiziqli almashtirishlar o'rganiladi. Chiziqli algebra chiziqli tenglamalar sistemasini, ya'ni o'zgaruvchiga (noma'lumga) nisbatan birinchi darajali bo'lgan tenglamalarni yechish munosabati bilan paydo bo'lgan. Chiziqli algebraning yaxshi rivojlangan bo'limlari matrisalar nazariyasi, formalar (xususan, kvadrat formalar) nazariyasi, invariantlar nazariyasidir.

Logarifm – N sonining a asosga ko'ra logarifm deb shunday n soniga aytiladiki, a asosni $(a > 0, \quad a \neq 1)$ n – darajaga ko'targanda N soni hosil bo'ladi. Kompleks o'zgaruvchili funksiyalar nazariyada kompleks sonlarining logarifm (natural logarifm) lari qaraladi. Ta'rifiga ko'ra, z kompleks sonning logarifm (Ln z bilan belgilanadi) quyidagiga teng:

$$Lnz = \ln|z| + iArgz.$$

Logarim XV-XVI asrlarda astronomiya va dengizda suzishning barq urib rivojlanganda kishilik jamiyatining hisoblashga bo'lgan ehtiyojiga javob sifatida paydo bo'ladi.

Matematik logika – matematik isbotlarni o'rganadigan fan. Matematik logikaning tekshirish ob'yektlari firk (mulohazalar) bo'lib, ular ustida ham algebradagi sonlar ustida bajariladigan amallarga o'xshash amallar bajariladi. Matematik logika ba'zan matematika deb ham ataladi. Matematik logika electron hisob mashinalari nazariyasida qo'llanadi.

Matematik statistika – eksperiment natijalarini ishlab chiqishning umumiy usullari haqidagi fan. Fizika, ximiya, biologiya, meditsina va boshqa fanlarda ekspremenlar natijasiga faqatgina eksperimentator boshqaradigan faktorlargina emas, balki juda ko'p boshqa tasodifiy faktorlar ham ta'sir etadi. Demak, ekspremen natijasi odatda tasodifiy miqdor bo'ladi. Olimning vazifasi tasodifiy tebranishlarga suyanib turib bunga sabab bo'lgan qonun ta'sirini ko'ra bilishdan iborat. Bunda qo'llaniladigan usullar har xil fanlar uchun umumiy bo'lishi mumkin. Xuddi ana shu usullar matematik statistikada o'rganiladi.

Natural logarifm – asosi $e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2{,}71828...$ transcendent son bo'lgan logarifm (lnN bilan belgilanadi). Natural logarifm Neper nomi bilan bog'lanadi, biroq logarifm jadvallarini Neper, Brigg, Byurgi va boshqa matematiklar bir-birlaridan mustaqil ravishda deyarli bir vaqtda tuzdilar.

Teskari trigonometrik funksiyalar - $\sin x,\ \cos x,\ tgx,\ ctgx,\ \sec x,\ \operatorname{cosec} x$ trigonometrik funksiyalarga teskari bo'lgan funksiyalardir. Teskari trigonometrik funksiya ko'pgina ratsional kasrlar va kvadratik irratsionalliklarni integrallashda hosil bo'ladi. Teskari trigonometrik funksiya arkfunksiyalar, ba'zan esa arkukslar deb ham ataladi. Teskari trigonometrik funksiya trigonometrik funksiyalar bo'la olmaydi, shuning uchun ularni trigonometrik funksiyalarga teskari bo'lgan funksiyalar yoki akrfunksiyalar deb atash to'g'ri bo'lar edi. Lotincha arcus – yoy (burchak).

Potensirlash – logarifmlashga teskari amal potensiallash – berilgan logarifmga qarab sonning o'zini toping. Potensillash tushunchasi logarifmik tenglamalarni yechishga qo'llaniladi. Nemischa potenzieren, Potenz – daraja so'zidan olingan.

Tadbiqiy matematika – bu termin matematikani fan va texnikaning boshqa sohalariga (fizika, ximiya, astronomiya, iqtisod, geodeziya, harbiy ish va injenerlik ishlari va boshqalari) tatbiq etish to'g'risida gapirilganda qo'llaniladi. Tatbiqiy matematika bilan tatbiqiy bo'lmagan matematika orasida aniq chegara yo'q.

Radikal – (yoki ildiz) biror a sondan n – darajali ildiz chiqarish amalini ifodalovchi $\sqrt[n]{\ }$ matematik ishora, bu bunday yoziladi; $\sqrt[n]{a}$. Lotincha radix – ildiz.

Radius – aylananing har qanday nuqtasini markazi bilan tutashtiruvchi kesma. Bu kesmaning uzunligi ham radius deb ataladi. Aylananing radiusi aylana bilan chegaralangan doiraning (sharning) radius deb ham ataladi. Lotincha radius – g'ildirakning kegayi, nur.

Signum ot x – x ning signumi – haqiqiy x sonning funksiyasi bo'lib, xmusbat bo'lganda funksiya 1 ga teng, x nol bo'lganda nolga teng, x manfiy bo'lganda – 1 ga teng. Bu funksiya $signx$ yoki $\operatorname{sgn} x$ simvol bilan belgilanadi. Lotincha singnum – ishora.

Sofizm – ataylik chiqarilgan noto'g'ri xulosa, biror jumlaning noto'g'ri isboti. Bunda isbotdagi xato isbotning biror bosqichida ancha ustalik bilan bilintirmay yuboriladi.

Steradian – fazoviy burchakning o'lchov birligi. Bir steradian uchi O(R) sfera markazida bo'lgan va shu sfera sirtida yuzi R^2 gat eng bo'lgan figura ajratuvchi fazoviy burchakdir. Butun sferada 4π steradian burchak bo'ladi. Grekcha στερεοζ – fazoviy, radian lotincha radius – nur, kegay so'zlaridan olingan.

Tangens – trigonometrik funksiyalardan biri. Lotincha tangens – urinma (tango - urinaman).

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ
БУХОРО МУҲАНДИСЛИК-ТЕХНОЛОГИЯ ИНСТИТУТИ

Рўйхатга олинди
№ 0497
“30” 08 2018 йил

ТАСДИҚЛАЙМАН
Ўқув ишлари бўйича проректор
К.Т.Олимов
“29” 2018 йил

ОЛИЙ МАТЕМАТИКА
ФАНИ
ИШЧИ ЎҚУВ ДАСТУРИ

Билим соҳалари: 300000 Ишлаб чиқариш-техник соҳа;

Таълим соҳалари: 320000 Ишлаб чиқариш технологиялари;

Таълим йўналишлари:

№	Таълим йўналиши (мутахассислик) коди ва номи	Талабаниниг ўқув юкламаси, соат					Семестрлардаги хафталик соат		
		Умумий юклама ҳажми	Аудитория машғулотлари			Мустақил иш	I	II	III
			Жами	Маъруза	Амалий машғулот				
1	**5310100** – Энергетика (Тармоқлар бўйича);	420	252	*108*	*144*	168	4	6	4
2	**5310700** – Электр техникаси, электр механикаси ва электр технологиялари (Тармоқлар бўйича);	420	252	*108*	*144*	168	4	6	4
3	**5310900** – Метрология, стандартлаштириш ва маҳсулот сифати менежменти (Тармоқлар бўйича);	420	252	*108*	*144*	168	4	6	4
4	**5312100** - Энергоаудит ва саноат корхоналарининг энергетик текшируви;	420	252	*108*	*144*	168	4	6	4
5	**5321500** - Нефт-газкимё саноати технологияси;	252	144	72	72	108	4	4	-
6	**5321500** - Технологиялар ва жиҳозлар: Машинасозлик;	420	252	*108*	*144*	168	4	6	4
7	**5321700** - Технологик жараёнларни бошқаришнинг ахборот - коммуникация тизимлари;	420	252	*108*	*144*	168	4	6	4

Бухоро – 2018

Respublikasi oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi
Buxoro muhandislik-texnologiya instituti

"Ro'yxatga olindi"
№ _______________
«_____» _________ 2019 yil

"TASDIQLAYMAN"
O'quv ishlari bo'yicha prorektor
___________Xodjiev SH.M
«_____»__________ 2019 yil

OLIY MATEMATIKA
FANINING ISHCHI O'QUV DASTURI

Bilim sohasi: 300000 – Ishlab chiqarish texnik soha
Ta'lim sohasi: 320000 – Ishlab chiqarishlar texnologiyasi

№	Ta'lim yo'nalishi (mutaxassislik) kodi va nomi	Tala baninig o'quv yuklamasi, soat					Semestrlardagi haftalik soat		
		Umumiy yuklama hajmi	Auditoriya mashg'ulotlari			Mustaqil ish	I	II	III
			Jami	Ma'ruza	Amaliy mashg'ul				
1	**5310100** – Energetika (Tarmoqlar bo'yicha);	**420**	252	*108*	*144*	168	**4**	**6**	**4**
2	**5310700** – Elektr texnikasi, elektr mexanikasi va elektr texnologiyalari (Tarmoqlar bo'yicha);	**420**	252	*108*	*144*	168	**4**	**6**	**4**
3	**5640200** – Mehnat muxovazasi va texnika xavfsizligi;	**420**	252	*108*	*144*	168	**4**	**6**	**4**
4	**5312100** - Energoaudit va sanoat korxonalarining energetik tekshiruvi;	**420**	252	*108*	*144*	168	**4**	**6**	**4**
5	**5321500** - Texnologiyalar va jihozlar: Mashinasozlik;	**420**	252	*108*	*144*	168	**4**	**6**	**4**
6	**5321700** - Texnologik jarayonlarni boshqarishning axborot - kommunikatsiya tizimlari;	**420**	252	*108*	*144*	168	**4**	**6**	**4**
7	**5310900** – Metrologiya ,standartlashtirish va maxsulot sifati menejmenti.(Tarmoqlar bo'yicha);	**420**	252	108	144	168	**4**	**6**	**4**

Buxoro – 2019

Fanning ishchi o'quv dasturi O'z bekiston Respu blikasi Oliy va O'rta maxsus ta'lim vazirligida 201_ yil "__" _____dagi ___ - sonli buyruq bilan (buyruqning № _-ilovasi) tasdiqlangan "Oliy matematika" fani dasturi asosida tuzilgan.

Tuzuvchilar:

Teshaev M.X.	BuxMTI, “Oliy matematika ” kafedrasi professori v.b., f.m.f. doktori.
Boboraximova M.I.	BuxMTI, “Oliy matematika” kafedrasi o’qituvchi -stajyori.

Taqrizchilar:

Ismatov H. B.	BuxMTI, “Oliy matematka ” kafedrasi dotsenti, texnika fanlari nomzodi.
Rasulov T.X.	BuxDU “Matematika” kafedrasi mudiri, f.-m.f.n., dotsent

“Oliy matematika” kafedrasi mudiri:
2019 yil “____” ________ dots. G’.G’.Yunusov

BuxMTI, “Engil sanoat” fakulteti dekani:
2019 yil “____” ________ prof. H.Q.Raxmonov

1. O’quv fani o’qitilishi bo’yicha uslu biy ko’rsatmalar.

Ushbu fan dasturi yuqorida keltirilgan ta’lim yo’nalishlar bo’yicha bakalavrlar tayyorlash tizimida, o’quv rejalari va o’quv dasturlarni davlat malaka talablariga mos qo’yish zarurati tug’uldi. Shu bilan birga xalqaro ta’lim berish malaka talablarini qo’llash, ajdodlarimizning boy milliy meroslarini shu jarayonga jalb qilish kerak bo’ladi. Tavsiya etilayotgan ushbu dastur ana shu maqsadni ko’zda tutadi.

Oliy mtematika fani matematikaning analitik geometriya, oiy algebra elementlari, chiziqli algebra, matematik analiz, differensial tenglamalar, qatorlar nazariyasi, ehtimollar nazariyasi va metamatik statistika bo'limlarini o'z ichiga oladi. Unda birinchi va ikkinchi tartibli chiziqlar, determinantlar va matritsalar, chiziqli tenglamalar sistemasini yechish, chiziqli almashtirishlar, differensial va integral hisob, birinchi va yuqori tartibli differensial tenglamalr, sonli va funsional qatorlar, hodisalar ehtimolining taqsimot va zichlik funksiyalari, tasodifiy miqdorlarning xarakteristikalari, xatoliklar nazariyasi, algebraic va transsendent tenglamalarni sonli yechish usullari yordamida yechish masalalari o'rganiladi.

Bakalavriat ta'lim yo'nalishining xususiyatiga, dars soatlari hajmiga, a'lim yo'nalishi uchun zarur mavzularga ko'ra ishchi dasturlar tuziladi.

Oliy matematika fanining usullari har xil mulkchilik shaklida faoliyat yuritayotgan korxonlarning faoliyatini samarali rejalashtirish xususiyatlarini o'rganishda biznes-rejalarni tuzishda, har xil hisob kitob isghlarini olib borishda ahamiyati kattadir.

Oliy matematika fanini o'qitishdan maqsad – barcha ta'lim yo'nalishlari bo'yicha bakalavrlar tayyorlash tizimida, o'quv rejalari va malaka talablariga mos qo'yish zarurati tug'iladi. Shu bilan birga xalqaro ta'lim berish sifatlarini qo'llash, ajdodlarimizning boy milliy meroslarii shau jarayonga jalb qilish kerak bo'ladi.

Oliy matematika fanning o'qitishning vazifasi – talabalarga matematika nazariyasiga oid oliy bilimlar berish, olgan nazariy bilimlarni amaliyotga qo'llay bilishga o'rgatishdan va oqibat natijada ularni yo'nalishga mos jarayonlar matematik modelini tuzish va tekshira olishga o'rgatishdir.

Oliy matematika fani bo'yicha talabalarning bilim, ko'nikma va malakalriga quyidagi talablar qo'yiladi. ***Talaba:***

- matematika dunyoviy bilishning o'ziga xos usuli, uning tushunchalari va tassavurlarining umumiyligi, matematik modellar, matematik modellashtirish usullari to'g'risida ***tasavvurga wga bo'lishi***;
- ob'yektning miqdoriy va sifat nisbatlarini ifodalsh uchun matematik simvollardan foydalanish;
- matematik analiz, analitik geometriya, chiziqli algebra, ehtimollar nazariyasi va matematik statistikaning asosiy tushunchalari va metodlari;
- muayyan jarayonlar uchun ehtimoliy modellarini va tuzilgan model doirasida hisoblarni olib borishini;
- funksional va hisoblash masalalarini yechish modellarini ***bilish va ulardan foydalana olishi***;
- algebraik tenglamalarni analitik va sonli usullarda yechish;
- oddiy differensial tenglamalarni tadbiq qilish, ularni analitik va sonli usullarda yechish;
- eksperemental ma'lumotlarga ishlov berishning asosiy metodlaridan foydalanish ***ko'niukmalariga*** ega bo'lish kerak.

2. Ma'ruza mashg'ulotlari

1-jadval

№	Ma'ruzalar mavzulari	Dars soatlari hajmi
	I semestr	
1.	Matritsalar va ularning xossalari.Matritsalar ustida amallar.	2
2.	Teskari matritsani topish.Matritsaning ragini hisoblash.	2
3.	Ikkinchi va uchinchi tartibli determinantni hisoblash	2

	usullari.Determinantning xossalari.Minorlar va algebraik to’ldiruvchilar.	
4.	Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Kramaer, Gauss va matritsa usullari.Chiziqli tenglamalar sistemasining turlari, echimga ega bo’lishi va h.k.	2
5.	Vektorlar ustida chiziqli amallar. Vektorni o’qdagi proektsiyasi. Vektorni bazis bo’yicha yoyish. Vektor uzunligi. Vektorni songa ko’paytirish. Vektorning yo’naltiruvchi kosinuslari.	2
6.	Ikki vektorning skalyar ko’paytmasi. Ikki vektor orasidagi burchak. Ikki vektorning parallelik va pedpendikulyarlik shartlari. Ikki vektorning vektor ko’paytmasi. Uch vektorning aralash ko’paytmasi.	2
7.	Dekart va qutb koordinatalar sistemalari. Tekislikda to’g‘ri chiziq tenglamalari. Ikki to’g‘ri chiziq orasidagi burchak. Parallelik va perpendikulyarlik shartlari. Bir va ikki nuqtadan o’tuvchi to’g‘ri chiziq tenglamalari.	2
8.	Ikkinchi tartibli egri chiziqlar. Aylana, ellips, giperbola va parabola.	2
9.	Fazoda tekislikning, vektor, umumiy, normal tenglamalari. Tekislikning o’zaro joylashishi. Ikki tekislik orasidagi burchak. Tekislikning o’zaro parallelik va perpendikulyarlik shartlari.Tekisliklar dastasi.	2
10.	Fazoda to’g‘ri chiziqning vektor, kanonik, parametrik va umumiy tenglamalari. To’g‘ri chiziqning o’zaro joylashishi. Ikki to’g‘ri chiziq orasidagi burchak, parallellik va perpendikulyarlik shartlari.To’g‘ri chiziq bilan tekislikning o’zaro joylashishi.	2
11.	Sirtning fazodagi tenglamasi.Ikkinchi tartibli sirtlar.	2
12.	Funksiya tushunchasi. Funksiyaning aniqlanish va o’zgarish sohasi. Juft va toqligi, davriyligi. Ketma-ketlikning limiti, funksiyaning limita, bir tomonlama limitlar.	2
13.	Ajoyib limitlar. Limitlarga doir aralash misollar. Funksiyaning uzluksizligi. Funksiyaning hosilasi. Elementar funksiyalarning hosilalari.	2
14.	Murakkab funksiyani hosilasi. Oshkormas va parametrik funksiyani hosilasi. Funksiyani differentsiallash	2
15.	YUqori tartibli hosila va differentsial. Aniqmasliklarni Lopital qoidasi yordamida ochish.	2
16.	Funksiyaning o’sishi va kamayishi. Funksiyaning ekstremumlari. Teylor va Makloren formulalariga doir mashqlar.	2
17.	Kesmada uzluksiz funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlari. Funksiya grafigining qavarikligi va botiqligi. Burilish nuqtalari. Asimtotalari. Funksiyani to’la tekshirish.	2
18.	Ekstremumlar nazariyasining geometriya, mexanika va boshqa sohalarga doir masalalariga tadbiqi.	2
	II semestr	
19.	Ko’p o’zgaruvchili funksiya, uniing aniqlanish sohasi, limiti va uzluksizligi. Xususiy hosilalar. To’la differentsial. Ko’p zgaruvchili murakkab funksiyaning hosilasi. Yuqori tartibli xususiy hosilalar va to’la differentsiallar.	2

20.	Ikki o’zgaruvchili funksiyaning ekstremumi. Sirtga o’tkazilgan urinma tekislik va normal tenglamasi.	2
21.	Boshlang‘ich funksiya va aniqmas integralning ta’rifi, xossalari. Aniqmas integral jadvali. Integrallash qoidalari: o’zgaruvchini almashtirish va bo’laklab integrallash.	2
22.	Eng sodda kasrlarni integrallash. Ratsional kasrlarni sodda kasrlarga ajratish. Ratsional funksiyalarni integrallash algoritmi.	2
23.	Irratsional funksiyalarni integrallash. Trigonometrik funksiyalar qatnashgan ba’zi integrallarni integrallash.	2
24.	Aniq integralga keltiriluvchi masalalar. Aniq integralning ta’rifi va uning asosiy xossalari. Nyuton-Leybnits formulasi. Aniq integralda o’zgaruvchini almashtirish. Bo’laklab integrallash.	2
25.	Xosmas integrallar. Chegaralari cheksiz xosmas integrallar. Chegaralanmagan funksiyalarning xosmas itegrallari. Xosmas integrallarning yaqinlashish alomatlari.	2
26.	Aniq integralni taqribiy hisoblash formulalari. Aniq integralni geometriya va mexanikaga tadbiqlari. Aniq integralning muxandislik masalalarini echishga tadbiqi.	2
27.	Sonli qatorning asosiy tushunchalari. Qator yaqinlashishining zaruriy shartlari. Yaqinlashuvchi qatorlar va ularning xossalari. Garmonik qatorlar.	2
28.	Musbat hadli qatorlarni taqqoslash teoremalari. Musbat hadli sonli qatorlar yaqinlashishining etarli shartlari: Dalamber alomati, Koshining radikal va integral alomatlari.	2
29.	Ishorasi almashinuvchi va o’zgaruvchan ishorali sonli qatorlar. Leybnits teoremasi. Absolyut va shartli yaqinlashuvchi qatorlar.	2
30.	Funktsional qatorlar. Nuqtada yaqinlashuvchi funktsional qatorlar. Funktsional qatorlarning yaqinlashish sohasi. Tekis yaqinlashish. Kuchaytirilgan qatorlar. Kdgor hadlari yigindisining uzluksizligi.	2
31.	Darajali qatorlar. Abel teoremasi. Yaqinlashish radiusi. Yaqinlashuvchi darajali qatorlarning xossalari. Qatorlarni differentsiallash va integrallash.	2
32.	Funksiyalarni Teylor va Makloren qatorlariga yoyish. Binomial qator. Asosiy elementar funksiyalarni qatorlarga yoyish.	2
33.	Ikki va uch o’lchovli integral, uning xossalari, geometrik va mexanik ma’nosi. Ikki va uch o’lchovli integralni hisoblash. Ikki va uch karrali integralda o’zgaruvchilarni almashtirish. Ikki o’lchovli integralni qutb koordinatalar sistemasida hisoblash. Ikki va uch o’lchovli integrallarning geometriya va mexanikaga tadbiqi.	2
34.	Birinchi va ikkinchi tur egri chiziqli integrallarning ta’rifi, ularning xossalari va ularni hisoblash. Grin formulasi. Egri chiziqli integral yordamida yuzani hisoblash. Egri chiziqli integrallarning integrallash yuliga bog‘liq bo’lmasligi sharti. Egri chiziqli integrallarni geometriya va mexanika masalalarini echishga tadbiqlari.	2
35.	Sirt integrallari va ularni hisoblashga doir mashqlar. Skalyar va vektor maydonlar. Yo’nalish bo’yicha hosila.Gradient. Yuksaklik	2

	chiziqlari va sirtlar Orientirlangan va orientirlanmagan sirtlar. Vektor chiziqlar.	
36.	Vektor maydonning divergentsiyasi. Ostragradskiy teoramasining tadbiqlari. Vektor maydonning tsirkulyatsiyasi. Solenoidal maydonlar. Stoqs teoremasi tadbiqlari. Vektor maydonning rotori. Potentsial maydon. Potentsial maydonda egri chiziqli integralni hisoblash. Gamilton (Nabla) operatori. Laplas operatori. Garmonik maydon.	2
	III semestr	
37.	Kompleks sonlarning moduli va argument. Kompleks sonlar ustida amallar. Kompleks sonning trigonometrik va kursatkichli shakli. Muavr formulasi. Kompleks sondan ildiz chiqarish.	2
38.	Kompleks o'zgaruvchili funksiyalar, ularning aniqlanish sohasi. Kompleks o'zgaruvchili funksiya limita va uzluksizligi. Kompleks o'zgaruvchili funksiyalarni differentsiallash. Koshi-Riman sharti. Kompleks o'zgaruvchili funksiyalarning integrali va uni hisoblash.	2
39.	Differentsial tenglama keltiriluvchi masalalar. Differentsial tenglamalar nazariyasining asosiy tushunchalari. n-tartibli differentsial tenglama uchun Koshi masalasi echimining mavjudligi va yagonaligi xakidagi teorema. O'zgaruvchilari ajralgan va ajraladigan differentsial tenglamalar.	2
40.	Bir jinsli differentsial tenglamalar. Birinchi tartibli chiziqli differentsial tenglamalar. Bernulli tenglamasi.To'la differentsial tenglama.	2
41.	Yuqori tartibli differentsial tenglamalar uchun Koshi masalasi echimining mavjudligi va yagonaligi. Tartibi pasaytiriladigan differentsial tenglamalar.	2
42.	Chiziqli bir jinsli differentsial tenglamalar. O'zgarmas koeffitsientli yuqori tartibli bir jinsli tenglamalar.	2
43.	O'zgarmas koeffitsientli yuqori tartibli bir jinsli bo'lmagan, o'ng tomoni maxsus ko'rishishga ega bo'lgan differentsial tenglamalar.	2
44.	Differentsial tenglamalarning normal sistemasi. Normal sistemani echishda noma'lumlarni yo'kotish usuli.	2
45.	Laplas apmashtirilishi, uning xossalari. Originallar sinfi, tasvirlar sinfi. Operatsion hisobning asosiy teoremalari. Originalni tasvir bo'yicha tiklash usullari.	2
46.	Differentsial tenglamalarni va tenglamapar sistemasini operatsion hisob yordamida echish.	2
47.	Xususiy hosilali differensial tenglamalar haqida tushuncha. Ikkinchi tartibli chiziqli xususiy hosilali differensial tenglamalar va ularning klassifikatsiyasi. Asosiy masalalarning qo'yilishi:Koshi masalasi,chegaraviy masalalar va arlash masalalar.	2

48.	Tor tebranish masalalari, issiqlik tarkalish tenglamasi uchun Koshi masalasi. Matematik fizika tenglamalarini echishning to’r usuli.	2
49.	Ehtimollar nazariyasi fanining asosiy tushunchalari. Kombinatorika elementlari. Xodisalar algebrasi. Ehtimolning klassik ta’rifi. Geometrik ehtimollik.	2
50.	Shartli ehtimol. To’la ehtimol. Beyes formulasi. Hodisalarning bog‘liqmasligi.	2
51.	Tajribalar ketma-ketligi. Bernulli sxemasi. Puasson teoremasi; Muavr-Laplasning lokal va integral teoremalari. Bernulli sxemasining eng ehtimolli soni.	2
52.	Tasodifiy miqdor tushunchasi. Diskret tasodifiy miqdor va uning taqsimot konuni. Uzluksiz tasodifiy miqdor. Zichlik funksiyasi. Uluksiz tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi.	2
53.	Tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikalari: matematik kutilma, dispersiya va urta kvadratik chetlanish.	2
54.	Matematik statistika elementlari. Tanlanma. Statistik qator va uning xossalari. Poligon va gistogramma. Empirik taqsimot funksiyasi. Tanlanmaning sonli xarakteristikalari. Tanlanmaning xarakteristikalarini nuqtaviy va intervalli baxolash.	2
	Jami :	**108**

Ma’ruza mashg’ulotlarida fanni mavzulari mantiqiy ketma-ketlikda keltiriladi. Har bir mavzuning mohiyati asosiy tushunchalar va tezislar orqali ochib beriladi. Ma’ruza mashg’ulotlari multemedia qurulmaliri bilan jihozlangan auditoriyada akademik guruhlar oqimi uchun o’tiladi.

3. Amaliy mashg’ulotlar

2-jadval

№	Amaliy mashg’ulotlar mavzulari	Dars soatlari hajmi
	I-semestr	
1.	Matritsalar va ularning xossalari. Matritsalar ustida amallar.	2
2.	Teskari matritsani topish. Matritsani rangini hisoblash.	
3.	Ikkinchi va uchinchi tartibli detirmanantlarni hisoblash usullari. Determinantlarning xossalari. Minorlar va algebraik to’ldiruvchilari.	2
4.	Chiziqli tenglamapar sistemasini yechishning Kramer, Gauss va matritsalar usuli. Chiziqli tenglamalar sistemasining turlari, echimga ega bo’lishi va xk.	2
5.	Vektorlar ustida chiziqli amallar. Vektorni o’qdagi proektsiyasi. Vektorni bazis bo’yicha yoyish. Vektor uzunligi. Vektorni songa ko’paytirish. Vektorning yo’naltiruvchi kosinuslari.	2
6.	Ikki vektorning skalyar ko’paytmasi. Ikki vektor orasidagi burchak. Ikki vektorning parallelik va pedpendikulyarlik shartlari. Ikki vektorning vektor ko’paytmasi. Uch vektorning aralash ko’paytmasi.	2
7.	Dekart va qutb koordinatalar sistemalari. Tekislikda to’g‘ri chiziq tenglamalari. Ikki to’g‘ri chiziq orasidagi burchak. Parallelik va perpendikulyarlik shartlari. Bir va ikki nuqtadan o’tuvchi to’g‘ri chiziq tenglamalari.	2
8.	Ikkinchi tartibli egri chiziqlar. Aylana, ellips, giperbola va parabola.	2
9.	Fazoda tekislik tenglamalariga doir mashqlar. Fazoda to’g‘ri chiziq tenglamalariga doir mashqlar.	2

10.	To’g‘ri chiziq va tekislik orasidagi munosabatlar. Ikkinchi tartibli sirtlarga doir mashqlar.	2
11.	Funksiya tushunchasi. Funksiyaning aniqlanish va o’zgarish sohasi. Juft va toqligi, davriyligi. Ketma-ketlikning limiti, funksiyaning limita, bir tomonlama limitlar.	2
12.	Ajoyib limitlar. Limitlarga doir aralash misollar. Funksiyaning uzluksizligi.	2
13.	Funksiyaning hosilasi. Elementar funksiyalarning hosilalari.	
14.	Murakkab funksiyani hosilasi. Oshkormas va parametrik funksiyani hosilasi. Funksiyani differentsiallash.	2
15.	Yuqori tartibli hosila va differentsial. Aniqmasliklarni Lopital qoidasi yordamida ochish.	2
16.	Funksiyaning o’sishi va kamayishi. Funksiyaning ekstremumlari. Teylor va Makloren formulalariga doir mashqlar.	2
17.	Kesmada uzluksiz funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlari. Funksiya grafigining qavarikligi va botiqligi. Burilish nuqtalari. Asimtotalari. Funksiyani to’la tekshirish.	2
18.	Ekstremumlar nazariyasining geometriya, mexanika va boshqa sohalarga doir masalalariga tadbig‘i.	2
	II semester	
19.	Ko’p o’zgaruvchili funksiya, uniing aniqlanish sohasi, limiti va uzluksizligi.	2
20.	Xususiy hosilalar. To’la differentsial.	2
21.	Ko’p o’zgaruvchili murakkab funksiyaning hosilasi.	2
22.	Yuqori tartibli xususiy hosilalar va to’la differentsiallar.	2
23.	Ikki o’zgaruvchili funksiyaning ekstremumi.	2
24.	Sirtga o’tkazilgan urinma tekislik va normal tenglamasi.	2
25.	Aniqmas integral. Integralda o’zgaruvchini almashtirish. Bo’laklab intefallash.	2
26.	Kvadrat uchhad qatnashgan ba’zi bir funksiyalarni integrallash.	2
27.	Eng sodda ratsional kasrlarni integrallash.	2
28.	Ratsional funksiyalarni integrallash. Ba’zi trigonometrik funksiyalar sinfini integrallash.	2
29.	Irratsional funksiyalarni integrallash.	2
30.	Aniq integral ta’rifi va uning xossalari. Aniq integrapda o’zgaruvchini almashtirish.	2
31.	Aniq integralda bo’laklab integrallash.	2
32.	Xosmas integrallar.	2
33.	Aniq integralning geometrik va mexanika masalalariga tadbiqlari.	2
34.	Musbat hadli sonli qatorlar. Qator yigindisi.	2
35.	Qator yaqinlashishining zaruriy shartlari. Musbat hadli sonli qatorlarni taqqoslash.	2
36.	Musbat hadli sonli qatorlar yaqinlashishining etarli shartlari: Dalamber alomati, Koshining radikal va integral alomatlari.	2
37.	Ishorasi almashinuvchi va o’zgaruvchan ishorali sonli qatorlar. Leybnits teoremasi.	2
38.	Absolyut va shartli yaqinlashish. Funktsional qatorlarning yaqinlashish sohasi.	2
39.	Darajali qatorlar. Yaqinlashish radiusi.	2
40.	Qatorlarni differentsiallash va integrallash.	2
41.	Funksiyalarni Teylor va Makloren qatorlariga yoyish.	2
42.	Binomial qator. Asosiy elementar funksiyalarni qatorlarga yoyish.	2
43.	Qatorlarni taqribiy hisoblashlarga kullash.	2
44.	Ikki o’lchovli integralni hisoblash, geometrik va mexaniq	2

	ma’nosi.	
45.	Ikki o’lchovli integrallarning geometriya va mexanikaga tadbiqlariga doir mashqlar.	2
46.	Uch o’lchovli integralni hisoblash.	2
47.	Uch o’lchovli integralning tadbiqlariga doir mashqlar.	2
48.	Birinchi tur egri chiziqli integralni hisoblashga doir mashqlar.	2
49.	Egri chiziqli integral yordamida yuzani hisoblash.	2
50.	Ikkinchi tur egri chiziqli integralni hisoblashga doir mashqlar.	2
51.	Grin formulasi. Egri chiziqli integralni tadbiqiga doir mashqlar.	2
52.	Sirt integrallari va ularni hisoblashga doir mashqlar.	2
53.	Skalyar va vektor maydonlar. Yo’nalish bo’yicha hosila.Gradient.	2
54.	Yuksaklik chiziqlari va sirtlar. Orientirlangan va orientirlanmagan sirtlar. Vektor chiziqlar.	2
III semestr		
55.	Kompleks sonlar va ular ustida amallar. Kompleks o’zgaruvchili funksiyalar.	2
56.	Kompleks o’zgaruvchili funksiyaning limiti, uzluksizligi. Kompleks o’zgaruvchili funksiyaning hosilasi. Analitik funksiyalar. Garmonik funksiyalar.	2
57.	Birinchi tartibli differentsial tenglamalar. O’zgaruvchilari ajralgan va ajrapadigan differentsial tenglamalar.	2
58.	Bir jinsli differentsial tenglamalar. Bir jinsli differentsial tenglamaga keltiriladigan tenglamalar. Birinchi tartibli chiziqli differentsial tenglamalar. Bernulli tenglamasi.	2
59.	To’la differentsialli tenglama. Yuqori tartibli differentsial tenglamalar. Tartibi pasaytiriladigan differentsial tenglamalar.	2
60.	O’zgarmas koeffitsientli yuqori tartibli chiziqli bir jinsli differentsial tenglamalar.	2
61.	O’zgarmas koeffitsientli yuqori tartibli chiziqli bir jinsli bo’lmagan, o’ng tomoni maxsus ko’rishishga ega bo’lgan differentsial tenglamalar.	2
62.	Differentsial tenglamalar sistemasi. Differentsial tenglamalarni taqribiy echish usullari.	2
63.	Laplas almashtirishi, uning xossalari. Originallar sinfi. Tasvirlar sinfi. Operatsion hisobning asosiy teoremalari.Operatsion hisobning asosiy teoremalari. Originalni tasvir bo’yicha tiklash usullari.	2
64.	Differentsial tenglamalar va tenglamapar sistemasini operatsion hisob usullari yordamida echish.	2
65.	Ikkinchi tartibli xususiy hosilali differentsial tenglamalarning kanonik formalari va tavsifi. Xarakteristik tenglamasi. Koshi masalasining kuyilishi.	2
66.	Bir o’lchovli to’lqin tenglamalari uchun Koshi masalasi. Dalamber formulasi.	2
67.	Ehtimollar nazariyasining predmeti. Asosiy tushunchalar. Ehtimollikning klassik ta’rifi. Nisbiy chastota. Ehtimollikning geometrik ta’rifi.	2
68.	Ehtimolliklarni qo’shish.Hodisalarning to’la guruhi.Ehtimolliklarni ko’paytirish.To’la ehtimol .Bayes formulasi.	2
69.	Ehtimollarning taqsimot funksiyasi. Diskret tasodifiy miqdorlar. Bernulli taqsimoti. Puasson taqsimoti. Geometrik va gipergeometrik taqsimotlar.	2
70.	Ehtimollar taqsimoting zichlik funksiyasi. Absalyut uzluksiz tasodifiy miqdorlar. Tekis taqsimot. Normal va ko’rsatkichli taqsimotlar.	2
71.	Tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikalari. Matematik kutilish, dispertsiya, o’rta kvadratik chetlanish.	2
72.	Matematik statistika elementlari. Empirik taqsimot funksiyasi. Tanlanma xarakteristikalari va ularning taqsimot qonunlari.	2

	Tanlanma taqsimotlari parametrlarining nuqtaviy va integralli baholari.	

Jami: **144**

Amaliy mashg'ulotlarda talabalar berilgan nazariy bilimlar asosida mavzularga oid misol va masalalar yechish yo'llarini o'rganadilar, kerakli bilim, ko'nikma va malakalarini egallaydilar.

4. Mustaqil ta'lim

3-jadval

№	Mustaqil ta'lim mavzulari	Dars soatlari hajmi
	I-semestrda	
1.	Dekart va qutb koordinatalari orasidagi bog'lanish. Koordinatalarni almashtirish. Silindrik va sferik koordinatalar.	6
2.	Konussimon sirtlar. Sfera. Aylanish sirtlar. Ikkinchi tartibli sirtlarga doir mashqlar.	6
3.	Yuqori tartibli hosilalar. Oshkormas va parametrik kurinishda berilgan funksiyalarning yuqori tartibli hosilalari.	4
4.	Funksiyalarni Teylor va Makloren qatorlariga yoyishga misollar. Lopital qoidasi.	4
5.	Ekstremmumlar nazariyasining geometriya, mexanika va fizika masalalariga tadbiqlari.	2
6.	Eyler almashtirishlari.	2
7.	Xosmas integrallarning yaqinlashish alomatlari. Xosmas integralga doir mashqlar.	2
8.	Aniq integralni taqribiy hisoblash formulalari. Mavzuga doir mashqlar.	4
9.	Birinchi tartibli differentsial tenglamaning maxsus echimi. Klero tenglamasi. Lagranj tenglamasi.	6
10.	Differentsial tenglamalar sistemasi. Normal sistema. Noma'lumlarni yukotish usuli.	6
11.	Differentsial tenglamalarni taqribiy echish usullari.(Eyler, Runge- Kutta, ketma-ket yaqinlashish, Adams metodi, Teylor formulasi).	6
12.	Differentsial tenglamalarning amaliy masalalar echishga tadbiqlari. Mexaniq tebranishlarning differentsial tenglamasi. Erkin tebranish, majburiy tebranish.	6
13.	Qatorlarni taqribiy hisoblashlarga tadbiqlari. Differentsial tenglamalarni qatorlar yordamida echish.	4
14.	Fure integrali. Fure almashtirishlari.	4
15.	Ikki o'lchovli integralni qutb koordinatalar sistemasida o'zgaruvchilarni almashtirib hisoblash. Jordan o'lchovlari.	4
16.	Ikki o'lchovli integrallarni geometriya va mexanika masalalarini echishga tadbiqlari.	2
17.	Uch o'lchovli integrallarni geometriya va mexanika masalalarini echishga tadbiqlari.	2
18.	Birinchi va ikkinchi tur egri chiziqli integrallar orasidagi bog'lanish. Ostrogradskiy-Grin formulasining tadbiqlari.	6
19.	Birinchi va ikkinchi tur sirt integrallarini hisoblashga doir mashqlar. Stoqs formulasining tadbiqlari.	4
20.	Sirt integrallarini tadbiqlari.	2
21.	Ostragradskiy teoremasining tadbiqlari.	2
22.	Vektor maydonidagi ikkinchi tartibli amallar. Nabla	4

	operatori bilan amallar bajarish.	
23.	Laplas operatorining tsilindirik va sferik koordinatalarda ifodalanishi. Maydonlar nazariyasining tadbiqi.	4
24.	Giperbolik va teskari giperbolik funksiyalar. Yopiq egri chiziq bo'yicha olingan integral.	4
25.	Modulning maksimum printsipi. Koshi turidagi integral. Yuqori tartibli hosilaning mavjudligi. Analitik funksiyaning yuqori tartibli hosilasi.	8
26.	Funksiyalarni Loran qatoriga yoyish. Qutbga nisbatan funksiyaning chegirmasini toppish.	4
27.	Operatsion hisob yordamida differentsial tenglamalar va tenglamalar sistemasini echish. Tebranishlar differentsial tenglamalarni echish.	4
28.	Tor tebranishlari tenglamasini Dalamber usuli va o'zgaruvchilarini ajratish (Fure) usuli bilan echish. Torning majburiy tebranishi.	6
29.	Issiklik tarkalish tenglamalarini metall sterjenda, chegaralanmagan sterjenda, fazoda tekshirish. Laplasning ikkinchi tenglamasiga keltiriladigan masalalar. Dirixle masalasini echish.	6
30.	Amaliyotda ko'p uchraydigan muhim diskret va uzluksiz taqsimotlar, normal taqsimotni tadbiqlari.	4
31.	Ehtimollar nazariyasining limit teoremalari. Katta sonlar konuni. Chebishev tengsizligi. Bir xil taksimlangan o'zaro bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar yigindisi uchun markaziy limit teoremasi.	8
32.	Tasodifiy miqdorlar sistemasi, ularning taqsimot konunlari, shartli taqsimot konunlari. Kovariatsiya va korrelyatsiya. Ikki o'lchovli normal taqsimot qonuni va uning o'z i ga xos xususiyati.	6
33.	Ehtimollar nazariyasining texnikaviy masalalarda qo'llanilishi. Taqsimotning noma'lum parametrlari uchun statistik baholarni ko'rishda masalaning kuyilishi. Statistik baxolarga talablar: siljimaslik, asoslilik, effektivlik.	6
34.	Dispertsiya baxosining xossalari, tanlanmaning tugirlangan dispersiyasi. Statistik baxolar kurish uslublari. Ishonchlilik intervallari. Statistik gipotezalar va ularning sinflari. Gipotezalarni tekshirish algoritmi. Birinchi va ikkinchi turdagi xatoliklar.	8
35.	Eng kuvvatli me'zonlar. Neyman-Pirson mezoni, Kolmagorov mezoni, Pirsonning Xi kvadrat mezoni.	6
36.	Korrelyatsion-regression taxdil elementlari. Korrelyatsiya tushunchasining kelib chikish tarixi va xossalari.	4
37.	Regressiyaning xar xil kurininshdagi tenglamalarini topishda eng kichik kvadratlar usulining moxiyati va xar xil modifikatsiyalari.	2
	Jami	**168**

Izoh: Mustaqil ta'lim soatlari hajmlaridan kelib chiqqan holda ishchi dasturda mazkur mavzular ichidan mustaqil ta'lim mavzulari shakllantiriladi.

Fan bo'yicha tajriba mashg'uloti rejalashtirilmagan**.**

Fan bo'yicha kurs ishi va kurs loyihasi rejalashtirilmagan**.**

Talaba mustaqil ta'limning asosiy maqsadi auditoriya va auditoriyadan tashqari vaqtda o'qituvchining rahbarligi hamda nazoratida muayyan o'quv ishlarini mustal bajarish uchun bilim, ko'nikma va malakalarni shaklantirish hamda rivojlantirishdan iborat.

Mustaqil ishning maqsadi olingan nazariy bilimlarni mustahkamlash, belgilangan mavzular asosida qo'shimcha bilim olishdan iborat. Bunda ushbu ishlarni bajaradilar:

- Amaliy mashg'ulotlarga tayyorgarlik;

- O’tilgan materiallar mavzularini qaytarish;
- Mustaqil ish uchun mo’ljallangan nazariy bilim mavzularini o’zlashtirish.

Bunda talabalar ma’ruzalarda olgan bilimlarini amaliy mashg’ulotlarni bajarislari bilan mustahkamlashi hamda matematikaning ba’zi mavzularini tushunishi hamda ularga oid masalalarni yechishi kerak.

Mustaqil o’zlashtiriladigan mavzular bo’yicha talabalar tomonidan referatlar tayyorlash va uni taqdimot qilish tavsiya etiladi.

Fan bo’yicha talabalar bilimini baholash va nazorat qilish mezonlari

Talabani baholash oraliq va yakuniy nazorat turlarida aniqlanadi. Oraliq nazoratlar 1- va 2-oraliq nazoratlaridan tashkil topadi. Talaba ikkala oraliq nazoratdan o’tgan holatda (kamida qoniqarli baho bilan) yakuniy nazorat topshirishga ruxsat etiladi.

Oraliq nazoratlar mashg’ulot o’tgan professor-o’qituvchilar tomonidan o’tkaziladi va baholanadi. Olgan bahosidan norozi bo’lgan talaba fan bo’yicha mashg’ulot olib borilayotgan kafedra mudiri yoki dekanatga murojaat qilishi va bu murojaat asosida kafedrada ichki komissiya tuzilib oraliq nazoratla qayta ko’rib chiqilishi ta’minlanadi.

Yakuniy nazorat, mashg’ulot olib borgan professor-o’qituvchilardan tashqari xolis professor-o’qituvchilar (zarur bo’lganda boshqa OTM professor-o’qituvchilari) tomonidan olib boriladi va baholanadi.

<table>
<tr><td colspan="3">Baholash usullari.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Test, yozma ish, og’zaki so’rov, ijodiy loyiha ishi</td></tr>
<tr><td colspan="3">Baholash mezonlari</td></tr>
<tr><td>Baho</td><td colspan="2">Bilish darajasi</td></tr>
<tr><td>5 baho yoki “a’lo”</td><td colspan="2">- Fanga oid xulosa va qaror qabul qilish;
- Fanga oid mustaqil mushohada yurita olish;
- Ijodiy fikrlay olish;
- Olgan bilimlarini amalda qo’llay olish;
- Mohiyatini tushuntirish;
- Bilish, aytib berish;
- Tasavvurga ega bo’lish.</td></tr>
<tr><td>4 baho yoki “yaxshi”</td><td colspan="2">- Fanga oid mustaqil mushohada yurita olish;
- Olgan bilimlarini amalda qo’llay olish;
- Mohiyatini tushuntirish;
- Bilish, aytib berish;
- Tasavvurga ega bo’lish.</td></tr>
<tr><td>3 baho yoki “qoniqarli”</td><td colspan="2">- Mohiyatini tushuntirish;
- Bilish, aytib berish;
- Tasavvurga ega bo’lish.</td></tr>
<tr><td>2 baho “qoniqarsiz”</td><td colspan="2">- Aniq tasavvurga ega bo’lmaslik;
- Bilmaslik.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Nazorat turlari</td></tr>
<tr><td>1-Oraliq nazorat</td><td>2-Oraliq nazorat</td><td>Yakuniy nazorat</td></tr>
<tr><td>Kafedra majlis qarori bilan baholash usuli aniqlanadi</td><td>Kafedra majlis qarori bilan baholash usuli aniqlanadi</td><td>Kafedra majlis qarori bilan baholash usuli aniqlanadi va dekan farmoyishi orqali belgilangan jadval asosida olib boriladi</td></tr>
</table>

5. Asosiy va qo’shimcha o’quv ada biyotlar hamda ax borot man balari.

Asosiy adabiyotlar

1. Claudio Canuto, Anita Tabacco. Mathematical Analysis I, II. Springer-Verlag Italia, Milan 2015,2010.
2. Д.Писменный. «Конспект лекции по высшей математике», 1,2,3 часть. -М.: Айрис Пресс, 2008.
3. Ю.Ф. Сенчук. Математический анализ для инженеров. 1,2 часть-Харков: НТУ «ХПИ», 2003.-408 с.
4. Axmedov A.B., SHodmonov G., Esonov E.E., Abdukarimov A.A., SHamsiyev D.N. Oliy matematikadan individual topshririqlar. -Toshkent: O'zbekiston ensiklopediyasi, 2014.
5. Xurramov SH. R. Oliy matematika.l,2-qism. - Toshkent: "Tafakkur" nashriyoti, 2018.
6. Xolmurodov E., Yusupo A.I., Aliqulov T.A. Oliy matematika. 1,2,3-qismlar. - Toshkent: "NEXT MEDIA GROUP", 2017.

Qo'shimcha adabiyotlar.

7. Мирзиёев Ш.М. Танкидий тахдил, катъий тартиб-интизом ва шахсий жавобгарлик — хар бир рахбар фаолиятининг кундалик коидаси булиши керак. Узбекистон Республикаси Вазирлар Махкамасининг 2016 йил якунлари ва 2017 йил истикболларига багишланган мажлисидаги Узбекистон Республикаси Президентининг нутки. // "Халк сузи" газетаси. 2017 й., 16 январь, №11.
8. Узбекистон Республикаси Конституцияси. - Т.: Узбекистон, 2017. - 46 б.
9. John James Stewart. Calculus.Seventh editions. Metric version. Brooks/Cole, Cengage Learning, 2012.
10. Y. Suhov, M. Kelbert. Probability and Statistics by Example. 2nd edition. United Kingdom. University printing house, Cambridge CB2 8BS, 2014.
11. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для ВТУЗов. 2 частях -М.: Наука, 2001.
12. Черненко В.Д. Высшая математика в примерах и задачах. Учебное пособие для вузов. - СПб.: Политехника, 2003. - 703 с.
13. В.Е.Гмурман. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. -М.: Высшей школа, 2004.
14. П.Минорский. Сборник задач по высшей математике. ФИЗМАТЛИТ 2010й.
15. Жураев Т.Ж., Худойберганов Р.Х., Борисов А.К., Мансуров Х. Олий математика асослари. 1 ва 2 кием. -Т. Узбекистон, 1995, 1999.-2906.
16. X.A. Axmedova, G'.P. Arziqulov, A. Tilavov. Matematika masala va misollar to'plami.-T. NISIM, 2016.
17. A. Yusupov, Z.I. Sadritdinova, X.A. Axmedova. Oliy matematika. -T. NISIM, 2015.
18. R.N.SHamsiyev. Oliy matematika fanining "Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika" qismidan misol va malalar. -T.ToshDTU bosmaxobasi, 2017.

Internet saytlari.

1. www.gov.uz- O'zbekiston Respublikasi hukumat portali.
2. www.catback.ru - научные статьи и учебные материалы
3. www. zivonet.uz ;
4. www.gaap.ru;
5. www.cip.com ;
6. www. aicpa.ord ;
7. www.bilim.uz ;

R E F E R A T   M A V Z U L A R I

	I-S E M E S T R.
1	To'plamlar va ular ustida amallar.Chekli va cheksiz to'plamlar.To'plamlarning ekvivalentligi.
2	Matritsalar va ular ustida amallar. Aniklovchilar va ularning xossalari
3	Aniklovchilar va ularning xossalari. Yukori tartibli aniklovchilar.
4	Chiziqli tenglamalar sistemasini Kramer usulida echish.
5	Chiziqli tenglamalar sistemasini Gauss usulida echish.
6	Chiziqli tenglamalar sistemasini matritsalar usulida echish.
7	Vektorlar, ularning berilish usullari. Vektorlar ustida arifmetik amallar. Vektorlarning koordinatalari va ular ustida amallar.
8	Vektorlarning skalyar kupaytmasi ,uning xossalari va tadbiklari.
9	Vektorial kupaytma, xossalari va tadbiklari.
10	Aralash kupaytma, xossalari va tadbiklari.
11	Tekislikda analitik geometriya. Chiziq englamalari. Analitik geometriyaning asosiy masalalari. Tekislikdagi To'g'ri chiziq tenglamalari.
12	Tekislikdagi To'g'ri chiziqlarga doir asosiy masalalar.
13	Ikkinchi tartibli chiziqlar.Ellips.
14	Giperbola va parabola
15	Fazoda analitik geometriya. Tekislik va uning tenglamalari. Tekislikka doir asosiy masalalar.
16	Fazodagi to'g'ri chiziq tenglamalari va asosiy masalalar.
17	Funktsiya va u bilan boglik bulgan tushunchalar.
18	Funktsiya limiti va uning xossalari.
19	Ajoyib limitlar.
20	Uzluksiz funktsiyalar va ularning xossalari.
21	Funktsiyaning xosilasi va uning geometrik, mexanik ma'nosi.
22	Funktsiyani differentsiallash koidalari. Xosilalar jadvali.
23	Funktsiyaning differentsiali. Yukori tartibli xosila va differentsiallar.
24	Funktsiyani xosila yordamida tekshirish.
25	Anikmasliklar va Lopital koidalari.
	II C E M E S T R
1	Boshlangich funktsiya va anikmas integral. Integrallar jadvali.
2	Anikmas integralni hisoblash usullari.
3	Kvadratik uchxad katnashgan integrallar.
4	Eng sodda ratsional kasrlarva ularni integrallash.
5	Ratsional kasrlarni eng sodda ratsional kasrlarga ajratish.Ratsional kasrlarni integrallash.
6	Irratsional ifodalarni integrallash. Eyler almashtirmalari.

7	Trigonometrik funktsiyalar katnashgan ba'zi ifodalarni integrallash.
8	Anik integralga olib keluvchi masalalar, uning ta'rifi va xossalari.
9	Anik integralni hisoblash usullari.
10	Xosmas integrallar.
11	Anik integralni takribiy hisoblash.
12	Anik integralning geometrik va mexanik tadbiklari.
13	Ikki uzgaruvchili funktsiya, uning limiti va uzluksizligi.
14	Ikki uzgaruvchili funktsiyaning xosilalari
15	Murakkab funktsiyaning xosilasi. Tula xosila. Murakkab funktsiyaning tula xosilasi.
16	Ikki uzgaruvchili funktsiyaning differentsiali.
17	Yukori tartibli xosilalar va differentsiallar.
18	Ikki uzgaruvchili funktsiyaning ekstremumlari.
19	Ikki karrali integral va uning asosiy xossalari.
20	Ikki karrali integralni hisoblash usullari.
21	Ikki karrali integralning tadbiklari.
22	Uch karrali integral va uning asosiy xossalari.
23	Uch karrali integralni hisoblash usullari.
24	Uch karrali integralning tadbiklari..
25	Egri chiziqli integral, uning xossalari va hisoblash usullari.
26	Egri chiziqli integralni tadbiklari.
29	Sonli qatorlar va ularning yakinlashishi.
30	Musbat xadli sonli qator yakinlashishining etarli shartlari.
31	Ishorasi uzgaruvchi qatorlar. Leybnits teoremasi.
32	Funktsional qatorlar.
33	Darajali qatorlar. Teylor va Makloren qatorlari.
34	Ba'zi funktsiyalarning Makloren qatorlari.
35	Trigonometrik qatorlar. Fure qatorlari.
36	Juft va tok, davri 2l bulgan funktsiyalarning Fure qatorlari.
	III S E M E S T R
1	Kompleks sonlar va ular ustida arifmetik amallar. Kompleks sonning algebraik, trigonometrik va kursatkichli kurinishlari. Ikki xadli tenglamalar.
2	Kompleks argumentli funktsiya va uning xosilasi. Koshi–Riman shartlari.
3	Kompleks uzgaruvchili funktsiyalarni integrali. Koshi formulasi.
4	Differentsial tenglamalarga keluvchi masalalar. Differentsial tenglamalar va ularning echimlari.
5	Ba'zi I tartibli differentsial tenglamalar va ularni echish.

6	Yukori tartibli differentsial tenglamalar.
7	Yukori tartibli chiziqli uzgarmas koeffitsientli bir jinsli differentsial tenglamalar.
8	Ikkinchi tartibli chiziqli uzgarmas koeffitsientli birjinslimas differentsial tenglamalar.
9	II tartibli chiziqli uzgarmas koeffitsientli bir jinslimas tenglamalarni maxsus xollarda echish.
10	Uzgarmas koeffitsientli chiziqli differentsial tenglamalar sistemasi.
11	Operatsion hisob elementlari. Laplas almashtirmasi va uning xossalari
12	Xosila tasviri va tasvir xosilasi.
13	Tasvirga kura boshlangich funktsiyani tiklash.
14	Operatsion hisob yordamida differentsial tenglamalar va ularning sistemalarini echish.
15	Matematik fizika tenglamalari va ularning asosiy turlari. Tor tebranish tenglamasini keltirib chikarish va uni Dalamber va Fure usulida echish..
16	Korrekt masalalar. Koshi va chegaraviy masalalarning ta'rifi. Laplas tenglamasi uchun Koshi masalasi.
17	Simlarda elektr tebranishlari va issiklik tarkalish tenglamalarini keltirib chikarish. Issiklikni chegaralangan sterjenda tarkalishi.
18	Kombinatorika elementlari.
19	Kombinatorik masalalar
20	Extimollar nazariyasining predmeti va asosiy tushunchalari. Xodisalar va ular ustida amallar.
21	Extimollik, uning klassik ta'rifi va asosiy xossalari.
22	Extimolliklarni kushish va kupaytirish teoremalari.
23	Tulik extimol va Bayes formulasi.
24	Boglikmas sinovlar ketma-ketligi va Bernulli formulasi.
25	Diskret tasodifiy miqdorlar, ularning taksimot konuni va sonli xarakteristikalari.
26	Asosiy diskret taksimotlar.
27	Uzluksiz tasodifiy miqdorlar, ularning taksimot va zichlik funktsiyasi.
28	Uzluksiz tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikasi.
29	Asosiy uzluksiz taqsimotlar
30	Matematik statistika masalalari. Tanlanma va uning taksimotlari.
31	Statistik baxolar va ularga qo'yiladigan talablar. Tanlanma o'rta qiymat va dispersiya.
32	Statistik taxminlarni tekshirish elementlari

GLOSSARIY

Aksioma - biror matematik nazariya yaratishda boshlang'ich fakt (asos) deb qaraladigan va isbotsiz qabul qilinadigan jumla. Matematik nazariyani asoslashning mantiqiy poydevori hisoblangan aksoimalar sistemasi hamma vaqt ham tugallangan va takomillashgan bo'lmaydi, balki aksiomalarning o'zi kabi o'zgarib va takomillashib turadi. Grek.aξίωμa-hurmatga sazovor bo'lgan shubhasiz jumla; hurmat, ehtirom, obro'.

Algebra - (aljabr) matematik fan bo'lib, unda gruppa, xalqa, struktura va shu ob'yektlar o'rganiladi. Algebraning alohida shoxobchasi algebradir. Qisqaroq ma'noda algebra tenglamalaryechish haqidagi ta'limt deb qaraladi. Ancha keng ma'noda algebra deganda ixtiyoriy tabiatli to'plamning elementlari ustida sonlarni qo'shish va ko'paytirish kabi odatdagi amallarni umumlashtiruvchi va amallarni o'rganuvchi fan tushuniladi.

Algoritm – biror operatsiyalar (amallar) sistemasini ma'lum tartibda bajarish haqida aniq qoida bo'lib, ma'lum sinfga oid masalalarni yechishga imkon beradi.

Tahlil –noma'lumdan ma'lumga, izlanayotgan berilganga o'tish yo'li bilan fikr yuritish yoki isbotlash metodi (usuli).

Matematik analiz – funksiya va limitga o'tish tushunchalariga asoslangan bir qator matematik fanlarning umumiy nomi matematik analizga odatda differensial va integral hisoblari, qatorlar nazariyasi, differensial tenglamalar nazariyasi, analitik funksiyalar nazariyasi, variatsion hisob, integral tenglamalar nazariyasi, funksional analiz kiritiladi.

Analitik geometriya – matematikaning bo'limi bo'lib, unda obrazlar koordinatalar ususlida asoslanib algebra vositalari bilan tekshiriladi.

Arab raqamlari – quyidagi o'nta matematik ishoraning nomi: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9. O'nli sanoq sistemasida istalgan kichik va istagancha katta bo'lgan har qanday sonni arab raqamlari bilan yozish mumkin.

Arifmetika – (hisob) sonlar va ular ustida bajariladigan amallar haqidagi fan. Arifmetikada birinchi navbatda natural va kasr sonlar o'rganiladi. Arifmetika inson bilimining eng qadimgi tarmoqlaridan biridir. Arifmetika o'quv predmeti sifatida maktabda I-VI sinflarda o'qitiladi va tasviriy ta'riflarga asosan quriladi. Pedagogika institutlari fizika-matematika fakultetlarining uchta nazariy kursida: ratsional sonlar arifmetikasi, sonlar nazariyasi va arifmetika asoslarida arifmetika ancha chuqur o'rganiladi.

Arifmetik son – dastlabki tushunchaga ko'ra, har qanday manfiy bo'lmagan son. Birmuncha keng ma'noda har qanday son arifmetika son deb qaraladi.

Oliy matematika – oliy o'quv yurtlarida o'qitiladigan matematik fanlar turkumi bo'lib, unga analitik geometriya, differensial vaintegral hisoblari, differensial tenglamalr, differensial geometriya va boshqalar kiradi. Lekin bu termin ancha shartli termindir. Elementar matematika asosan o'zgarmas miqdorlar tekshirilgani va matematik masalalarni tekshirishda xususiy metodlar qo'llanilgani holda oliy matematikada o'zgaruvchi miqdorlar tekshiriladi va tekshirishning umumiy metodlari qo'llaniladi. Bular orasida keskin farq yo'q, ular bir-biridan faqat mamlakatimizda ta'lim berish sistemasining tuzilishi va maktabda matematika o'qitish metodikasiga bog'liq ravishda shunday ajratilgan.

Geometriya – dastlab geometriya shakllar haqidagi, ularning turli qismlarining o'zaro joylanishi va o'lchamlari haqida, shakllarning almashtirilishihaqidagi fan..

Gradus – tekis burchaklarining o'lchov birligi, ya'ni u to'g'ri burchakning $\frac{1}{90}$ qismiga teng bo'lgan tekis burchak. Grek.gradus-qadam, bosqich.

Differensial hisob – matematikaning bo'limi bo'lib, funksiyalarni hosila va differensiallar yordami bilan tekshiradi. Differensial hisobning asosiy tushunchalari hosila va differensial bo'lib, bular o'z navbatida ketma-ketlik yaki funksiyaning limiti va cheksiz kichik miqdorlar tushuchalari bilan bog'langan. Funksiya hosilasini bilish funksiyaning qayerda o'sishi yoki kamayishi, qayerda maksimumga, munimumga va burilish nuqtasiga ega ekanligi haqida mulohaza yuritishga imkon beradi. Bu tushunchalar ko'p o'zgaruvchili funksiyalarni o'rganishda ham tatbiq etiladi. Egri chiziqlarga urinma o'tkazish haqidagi masalalarni yechish munosabati bilan XVII asr matematikalaridan Dekart, Ferma va boshqalar differensial hisob yaratish sohasida birinchi qadam qo'ygan edilar. Differensial hisobning uzil-kesil yaratilishi I.Nyuton va G.Leybnisning ilmiy ishlari bilan bog'liqdir.

Differensial tenglamalar – noma'lum funksiyalar ularning har qanday tartibli hosilalari va erkli o'zgaruvchilarni o'z ishiga olgan tenglamadir.

Differensiallash – differensial yoki hosila, xususiy hosila, to’la differensiallarning hisoblash. Differensiallash differensial hisobning asosiy amali bo’lib, bunda differensiallash qoidalari va differensiallash formulalari keltirilib chuqariladi.

Isbot – biror tasdiq (mulohaza, fikr, teorema) ning haqiqan yoki noto’g’ri ekanligini aniqlashga imkon beradigan fikr yuritish. Teoremani isbot qilishda biz tushunchalarga berilgan ta’riflardan foydalanib, aksiomalarga yoki oldin isbot etilgan teoremalarga tayanamiz. Isbotlash usulida qarab ular quyidagilarga bo’linadi: analitik; sintetik; induktiv; deduktiv usullari, teskaridan isbotlash yoki bema’nilikka (ziddiyatlikka) keltirish yo’li bilan isbotlahs usullari.

Kommutatiblik qonuni – binary operatsiyasi bo’ysunishi mumkin bo’lgan qonun. Agar binary operatsiyasini ko’paytirish deb tushunilsa, u holda kommutatiblik qonuni bunday ko’rinishda bo’ladi: $ab = bc$. Kommutatiblik qonuni ko’pincha o’rin almashtirish qonuni deb kommutatiblik qonuniga bo’ysunuvchi operatsiyalarga misol qilib sonlari qo’shish va ko’paytirish, to’plamlarning kesishmasi hamda to’plamlar birlashmasini ko’rsatish mumkin.

Kibernetika – mashina, tirik organism va ularning birikmalari kabi tashkil qilingan sistemalarda boshqarish va aloqa prostesslarining umumiy qonuniyatlari birikmalarida informasiya idrok etish, yetkazish, saqlash, foydalanish va qayta ishlash haqidagi fan sifatida ham ta’riflasa bo’ladi.

Koordinatalar – ma’lum tartibda olingan va nuqtaning chiziqdagi, tekislikdagi sirtdagi yoki fazodagi vaziyatini xarakterlaydigan sonlar. Biror ob’yektni tekshirish xarakteri va maqsadiga qarab har xil koordinata sistemalari tanlanadi, bular yordamida fazoning har bir nuqtasiga aniq sonlar to’plami – nuqta koordinatalari mos keltiriladi.

Kontangens – trigonometrik funksiyalardan biri bo’lib, $ctgx$ (x-argument) orqali belgilanadi. Lotincha co (complementum – to’ldirish so’zining qisqartirilgani) va tangens so’zlaridan yasalgan.

Koeffisient – algebraik ifodaagi koeffisient – bu ifodadagi ko’paytuvchidir. Undosh harf bilan boshlanuvchi latincha so’z bilan birikkanda “co” ga aylanadigan “cum” va efficiens (qaratqich kelishigi - efficientis) – tayyorlovchi, biror narsaga sabab bo’luvchi so’zlaridan yasalgan (kofunksiya, kologarifm bilan solishtiring); so’zma-so’ziga; koeffisient-ko’maklashuvchi.

Chiziqli algebra - algebraning bo’limi bo’lib, unda chekli o’lchovli chiziqli fazolardagi chiziqli almashtirishlar o’rganiladi. Chiziqli algebra chiziqli tenglamalar sistemasini, ya’ni o’zgaruvchiga (noma’lumga) nisbatan birinchi darajali bo’lgan tenglamalarni yechish munosabati bilan paydo bo’lgan. Chiziqli algebraning yaxshi rivojlangan bo’limlari matrisalar nazariyasi, formalar (xususan, kvadrat formalar) nazariyasi, invariantlar nazariyasidir.

Logarifm – N sonining a asosga ko’ra logarifm deb shunday n soniga aytiladiki, a asosni $(a > 0, \quad a \neq 1)$ n – darajaga ko’targanda N soni hosil bo’ladi. Kompleks o’zgaruvchili funksiyalar nazariyada kompleks sonlarining logarifm (natural logarifm) lari qaraladi. Ta’rifiga ko’ra, z kompleks sonning logarifm (Ln z bilan belgilanadi) quyidagiga teng:

$$Lnz = \ln|z| + iArgz.$$

Logarim XV-XVI asrlarda astronomiya va dengizda suzishning barq urib rivojlanganda kishilik jamiyatining hisoblashga bo’lgan ehtiyojiga javob sifatida paydo bo’ladi.

Matematik logika – matematik isbotlarni o’rganadigan fan. Matematik logikaning tekshirish ob’yektlari firk (mulohazalar) bo’lib, ular ustida ham algebradagi sonlar ustida bajariladigan amallarga o’xshash amallar bajariladi. Matematik logika ba’zan matematika deb ham ataladi. Matematik logika electron hisob mashinalari nazariyasida qo’llanadi.

Matematik statistika – eksperiment natijalarini ishlab chiqishning umumiy usullari haqidagi fan. Fizika, ximiya, biologiya, meditsina va boshqa fanlarda ekspermentlar natijasiga faqatgina eksperimentator boshqaradigan faktorlargina emas, balki juda ko’p boshqa tasodifiy faktorlar ham ta’sir etadi. Demak, ekspremeent natijasi odatda tasodifiy miqdor bo’ladi. Olimning vazifasi tasodifiy tebranishlarga suyanib turib bunga sabab bo’lgan qonun ta’sirini ko’ra bilishdan iborat. Bunda qo’llaniladigan usullar har xil fanlar uchun umumiy bo’lishi mumkin. Xuddi ana shu usullar matematik statistikada o’rganiladi.

Natural logarifm – asosi $e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=2{,}71828...$ transcendent son bo'lgan logarifm (lnN bilan belgilanadi). Natural logarifm Neper nomi bilan bog'lanadi, biroq logarifm jadvallarini Neper, Brigg, Byurgi va boshqa matematiklar bir-birlaridan mustaqil ravishda deyarli bir vaqtda tuzdilar.

Teskari trigonometrik funksiyalar - $\sin x$, $\cos x$, tgx, $ctgx$, $\sec x$, $\cos ecx$ trigonometrik funksiyalarga teskari bo'lgan funksiyalardir. Teskari trigonometrik funksiya ko'pgina ratsional kasrlar va kvadratik irratsionalliklarni integrallashda hosil bo'ladi. Teskari trigonometrik funksiya arkfunksiyalar, ba'zan esa arkukslar deb ham ataladi. Teskari trigonometrik funksiya trigonometrik funksiyalar bo'la olmaydi, shuning uchun ularni trigonometrik funksiyalarga teskari bo'lgan funksiyalar yoki akrfunksiyalar deb atash to'g'ri bo'lar edi. Lotincha arcus – yoy (burchak).

Potensirlash – logarifmlashga teskari amal potensiallash – berilgan logarifmga qarab sonning o'zini toping. Potensillash tushunchasi logarifmik tenglamalarni yechishga qo'llaniladi. Nemischa potenzieren, Potenz – daraja so'zidan olingan.

Tadbiqiy matematika – bu termin matematikani fan va texnikaning boshqa sohalariga (fizika, ximiya, astronomiya, iqtisod, geodeziya, harbiy ish va injenerlik ishlari va boshqalari) tatbiq etish to'g'risida gapirilganda qo'llaniladi. Tatbiqiy matematika bilan tatbiqiy bo'lmagan matematika orasida aniq chegara yo'q.

Radikal – (yoki ildiz) biror a sondan n – darajali ildiz chiqarish amalini ifodalovchi $\sqrt[n]{\ }$ matematik ishora, bu bunday yoziladi; $\sqrt[n]{a}$. Lotincha radix – ildiz.

Radius – aylananing har qanday nuqtasini markazi bilan tutashtiruvchi kesma. Bu kesmaning uzunligi ham radius deb ataladi. Aylananing radiusi aylana bilan chegaralangan doiraning (sharning) radius deb ham ataladi. Lotincha radius – g'ildirakning kegayi, nur.

Signum ot x – x ning signumi – haqiqiy x sonning funksiyasi bo'lib, xmusbat bo'lganda funksiya 1 ga teng, x nol bo'lganda nolga teng, x manfiy bo'lganda -1 ga teng. Bu funksiya $signx$ yoki $\operatorname{sgn} x$ simvol bilan belgilanadi. Lotincha singnum – ishora.

Sofizm – ataylik chiqarilgan noto'g'ri xulosa, biror jumlaning noto'g'ri isboti. Bunda isbotdagi xato isbotning biror bosqichida ancha ustalik bilan bilintirmay yuboriladi.

Steradian – fazoviy burchakning o'lchov birligi. Bir steradian uchi O(R) sfera markazida bo'lgan va shu sfera sirtida yuzi R^2 gat eng bo'lgan figura ajratuvchi fazoviy burchakdir. Butun sferada 4π steradian burchak bo'ladi. Grekcha στερεοζ – fazoviy, radian lotincha radius – nur, kegay so'zlaridan olingan.

Tangens – trigonometrik funksiyalardan biri. Lotincha tangens – urinma (tango - urinaman).

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ
БУХОРО МУҲАНДИСЛИК-ТЕХНОЛОГИЯ ИНСТИТУТИ

Рўйхатга олинди
№ 0497
"30" 08 2018 йил

ТАСДИҚЛАЙМАН
Ўқув ишлари бўйича проректор
К.Т.Олимов
"29" ___ 2018 йил

ОЛИЙ МАТЕМАТИКА
ФАНИ
ИШЧИ ЎҚУВ ДАСТУРИ

Билим соҳалари: 300000 Ишлаб чиқариш-техник соҳа;

Таълим соҳалари: 320000 Ишлаб чиқариш технологиялари;

Таълим йўналишлари:

№	Таълим йўналиши (мутахассислик) коди ва номи	Талабанинг ўқув юкламаси, соат					Семестрлардаги хафталик соат		
		Умумий юклама ҳажми	Аудитория машғулотлари			Мустақил иш	I	II	III
			Жами	Маъруза	Амалий машғулот				
1	**5310100** – Энергетика (Тармоқлар бўйича);	**420**	252	*108*	*144*	168	**4**	**6**	**4**
2	**5310700** – Электр техникаси, электр механикаси ва электр технологиялари (Тармоқлар бўйича);	**420**	252	*108*	*144*	168	**4**	**6**	**4**
3	**5310900** – Метрология, стандартлаштириш ва маҳсулот сифати менежменти (Тармоқлар бўйича);	**420**	252	*108*	*144*	168	**4**	**6**	**4**
4	**5312100** - Энергоаудит ва саноат корхоналарининг энергетик текшируви;	**420**	252	*108*	*144*	168	**4**	**6**	**4**
5	**5321500** - Нефт-газкимё саноати технологияси;	**252**	144	72	72	108	**4**	**4**	**-**
6	**5321500** - Технологиялар ва жиҳозлар: Машинасозлик;	**420**	252	*108*	*144*	168	**4**	**6**	**4**
7	**5321700** - Технологик жараёнларни бошқаришнинг ахборот - коммуникация тизимлари;	**420**	252	*108*	*144*	168	**4**	**6**	**4**

Бухоро – 2018

Respublikasi oliy va o’rta maxsus ta’lim vazirligi
Buxoro muhandislik-texnologiya instituti

“Ro’yxatga olindi”
№ _______________
«_____» _________ 2019 yil

“TASDIQLAYMAN”
O’quv ishlari bo’yicha prorektor
___________Xodjiev SH.M
«_____»__________ 2019 yil

OLIY MATEMATIKA
FANINING ISHCHI O’QUV DASTURI

Bilim sohasi: 300000 – Ishlab chiqarish texnik soha
Ta’lim sohasi: 320000 – Ishlab chiqarishlar texnologiyasi

№	Ta’lim yo’nalishi (mutaxassislik) kodi va nomi	Tala baninig o’quv yuklamasi, soat					Semestrlardagi haftalik soat		
		Umumiy yuklama hajmi	Auditoriya mashg’ulotlari			Mustaqil ish	I	II	III
			Jami	Ma’ruza	Amaliy mashg’ul				
1	**5310100** – Energetika (Tarmoqlar bo’yicha);	**420**	252	*108*	*144*	168	**4**	**6**	**4**
2	**5310700** – Elektr texnikasi, elektr mexanikasi va elektr texnologiyalari (Tarmoqlar bo’yicha);	**420**	252	*108*	*144*	168	**4**	**6**	**4**
3	**5640200** – Mehnat muxovazasi va texnika xavfsizligi;	**420**	252	*108*	*144*	168	**4**	**6**	**4**
4	**5312100** - Energoaudit va sanoat korxonalarining energetik tekshiruvi;	**420**	252	*108*	*144*	168	**4**	**6**	**4**
5	**5321500** - Texnologiyalar va jihozlar: Mashinasozlik;	**420**	252	*108*	*144*	168	**4**	**6**	**4**
6	**5321700** - Texnologik jarayonlarni boshqarishning axborot - kommunikatsiya tizimlari;	**420**	252	*108*	*144*	168	**4**	**6**	**4**
7	**5310900** – Metrologiya ,standartlashtirish va maxsulot sifati menejmenti.(Tarmoqlar bo’yicha);	**420**	252	108	144	168	**4**	**6**	**4**

Buxoro – 2019

Fanning ishchi o’quv dasturi O’z bekiston Respu blikasi Oliy va O’rta maxsus ta’lim vazirligida 201_ yil “__” _____dagi ___ - sonli buyruq bilan (buyruqning № __-ilovasi) tasdiqlangan “Oliy matematika” fani dasturi asosida tuzilgan.

Tuzuvchilar:

Teshaev M.X.	BuxMTI, “Oliy matematika ” kafedrasi professori v.b., f.m.f. doktori.
Boboraximova M.I.	BuxMTI, “Oliy matematika” kafedrasi o’qituvchi -stajyori.

Taqrizchilar:

Ismatov H. B.	BuxMTI, “Oliy matematka ” kafedrasi dotsenti, texnika fanlari nomzodi.
Rasulov T.X.	BuxDU “Matematika” kafedrasi mudiri, f.-m.f.n., dotsent

“Oliy matematika” kafedrasi mudiri:
2019 yil “____” ________ dots. G’.G’.Yunusov

BuxMTI, “Engil sanoat” fakulteti dekani:
2019 yil “____” ________ prof. H.Q.Raxmonov

6. O’quv fani o’qitilishi bo’yicha uslu biy ko’rsatmalar.

Ushbu fan dasturi yuqorida keltirilgan ta’lim yo’nalishlar bo’yicha bakalavrlar tayyorlash tizimida, o’quv rejalari va o’quv dasturlarni davlat malaka talablariga mos qo’yish zarurati tug’uldi.

Shu bilan birga xalqaro ta’lim berish malaka talablarini qo’llash, ajdodlarimizning boy milliy meroslarini shu jarayonga jalb qilish kerak bo’ladi. Tavsiya etilayotgan ushbu dastur ana shu maqsadni ko’zda tutadi.

Oliy mtematika fani matematikaning analitik geometriya, oiy algebra elementlari, chiziqli algebra, matematik analiz, differensial tenglamalar, qatorlar nazariyasi, ehtimollar nazariyasi va metamatik statistika bo’limlarini o’z ichiga oladi. Unda birinchi va ikkinchi tartibli chiziqlar, determinantlar va matritsalar, chiziqli tenglamalar sistemasini yechish, chiziqli almashtirishlar, differensial va integral hisob, birinchi va yuqori tartibli differensial tenglamalr, sonli va funsional qatorlar, hodisalar ehtimolining taqsimot va zichlik funksiyalari, tasodifiy miqdorlarning xarakteristikalari, xatoliklar nazariyasi, algebraic va transsendent tenglamalarni sonli yechish usullari yordamida yechish masalalari o’rganiladi.

Bakalavriat ta’lim yo’nalishining xususiyatiga, dars soatlari hajmiga, a’lim yo’nalishi uchun zarur mavzularga ko’ra ishchi dasturlar tuziladi.

Oliy matematika fanining usullari har xil mulkchilik shaklida faoliyat yuritayotgan korxonlarning faoliyatini samarali rejalashtirish xususiyatlarini o’rganishda biznes-rejalarni tuzishda, har xil hisob kitob isghlarini olib borishda ahamiyati kattadir.

Oliy matematika fanini o’qitishdan maqsad – barcha ta’lim yo’nalishlari bo’yicha bakalavrlar tayyorlash tizimida, o’quv rejalari va malaka talablariga mos qo’yish zarurati tug’iladi. Shu bilan birga xalqaro ta’lim berish sifatlarini qo’llash, ajdodlarimizning boy milliy meroslarii shau jarayonga jalb qilish kerak bo’ladi.

Oliy matematika fanning o’qitishning vazifasi – talabalarga matematika nazariyasiga oid oliy bilimlar berish, olgan nazariy bilimlarni amaliyotga qo’llay bilishga o’rgatishdan va oqibat natijada ularni yo’nalishga mos jarayonlar matematik modelini tuzish va tekshira olishga o’rgatishdir.

Oliy matematika fani bo’yicha talabalarning bilim, ko’nikma va malakalriga quyidagi talablar qo’yiladi. ***Talaba:***

- matematika dunyoviy bilishning o’ziga xos usuli, uning tushunchalari va tassavurlarining umumiyligi, matematik modellar, matematik modellashtirish usullari to’g’risida ***tasavvurga wga bo’lishi***;
- ob’yektning miqdoriy va sifat nisbatlarini ifodalsh uchun matematik simvollardan foydalanish;
- matematik analiz, analitik geometriya, chiziqli algebra, ehtimollar nazariyasi va matematik statistikaning asosiy tushunchalari va metodlari;
- muayyan jarayonlar uchun ehtimoliy modellarini va tuzilgan model doirasida hisoblarni olib borishini;
- funksional va hisoblash masalalarini yechish modellarini ***bilish va ulardan foydalana olishi***;
- algebraik tenglamalarni analitik va sonli usullarda yechish;
- oddiy differensial tenglamalarni tadbiq qilish, ularni analitik va sonli usullarda yechish;
- eksperemental ma’lumotlarga ishlov berishning asosiy metodlaridan foydalanish ***ko’niukmalariga*** ega bo’lish kerak.

7. Ma’ruza mashg’ulotlari

1-jadval

№	Ma’ruzalar mavzulari	Dars soatlari hajmi
	I semestr	
55.	Matritsalar va ularning xossalari.Matritsalar ustida amallar.	2
56.	Teskari matritsani topish.Matritsaning ragini hisoblash.	
57.	Ikkinchi va uchinchi tartibli determinantni hisoblash usullari.Determinantning xossalari.Minorlar va algebraik to’ldiruvchilar.	2
58.	Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Kramaer, Gauss va matritsa usullari.Chiziqli tenglamalar sistemasining turlari, echimga ega bo’lishi va h.k.	2
59.	Vektorlar ustida chiziqli amallar. Vektorni o’qdagi proektsiyasi. Vektorni bazis bo’yicha yoyish. Vektor uzunligi. Vektorni songa ko’paytirish. Vektorning yo’naltiruvchi kosinuslari.	2
60.	Ikki vektorning skalyar ko’paytmasi. Ikki vektor orasidagi burchak. Ikki vektorning parallelik va pedpendikulyarlik shartlari. Ikki vektorning vektor ko’paytmasi. Uch vektorning aralash ko’paytmasi.	2
61.	Dekart va qutb koordinatalar sistemalari. Tekislikda to’g‘ri chiziq tenglamalari. Ikki to’g‘ri chiziq orasidagi burchak. Parallelik va perpendikulyarlik shartlari. Bir va ikki nuqtadan o’tuvchi to’g‘ri chiziq tenglamalari.	2
62.	Ikkinchi tartibli egri chiziqlar. Aylana, ellips, giperbola va parabola.	2
63.	Fazoda tekislikning, vektor, umumiy, normal tenglamalari. Tekislikning o’zaro joylashishi. Ikki tekislik orasidagi burchak. Tekislikning o’zaro parallelik va perpendikulyarlik shartlari.Tekisliklar dastasi.	2
64.	Fazoda to’g‘ri chiziqning vektor, kanonik, parametrik va umumiy tenglamalari. To’g‘ri chiziqning o’zaro joylashishi. Ikki to’g‘ri chiziq orasidagi burchak, parallellik va perpendikulyarlik shartlari.To’g‘ri chiziq bilan tekislikning o’zaro joylashishi.	2
65.	Sirtning fazodagi tenglamasi.Ikkinchi tartibli sirtlar.	
66.	Funksiya tushunchasi. Funksiyaning aniqlanish va o’zgarish sohasi. Juft va toqligi, davriyligi. Ketma-ketlikning limiti, funksiyaning limita, bir tomonlama limitlar.	2
67.	Ajoyib limitlar. Limitlarga doir aralash misollar. Funksiyaning uzluksizligi. Funksiyaning hosilasi. Elementar funksiyalarning hosilalari.	2
68.	Murakkab funksiyani hosilasi. Oshkormas va parametrik funksiyani hosilasi. Funksiyani differentsiallash	2
69.	YUqori tartibli hosila va differentsial. Aniqmasliklarni Lopital qoidasi yordamida ochish.	2
70.	Funksiyaning o’sishi va kamayishi. Funksiyaning ekstremumlari. Teylor va Makloren formulalariga doir mashqlar.	2
71.	Kesmada uzluksiz funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlari. Funksiya grafigining qavarikligi va botiqligi. Burilish	2

	nuqtalari. Asimtotalari. Funksiyani to'la tekshirish.	
72.	Ekstremumlar nazariyasining geometriya, mexanika va boshqa sohalarga doir masalalariga tadbiqi.	2
	II semestr	
73.	Ko'p o'zgaruvchili funksiya, uniing aniqlanish sohasi, limiti va uzluksizligi. Xususiy hosilalar. To'la differentsial. Ko'p zgaruvchili murakkab funksiyaning hosilasi. Yuqori tartibli xususiy hosilalar va to'la differentsiallar.	2
74.	Ikki o'zgaruvchili funksiyaning ekstremumi. Sirtga o'tkazilgan urinma tekislik va normal tenglamasi.	2
75.	Boshlang'ich funksiya va aniqmas integralning ta'rifi, xossalari. Aniqmas integral jadvali. Integrallash qoidalari: o'zgaruvchini almashtirish va bo'laklab integrallash.	2
76.	Eng sodda kasrlarni integrallash. Ratsional kasrlarni sodda kasrlarga ajratish. Ratsional funksiyalarni integrallash algoritmi.	2
77.	Irratsional funksiyalarni integrallash. Trigonometrik funksiyalar qatnashgan ba'zi integrallarni integrallash.	2
78.	Aniq integralga keltiriluvchi masalalar. Aniq integralning ta'rifi va uning asosiy xossalari. Nyuton-Leybnits formulasi. Aniq integralda o'zgaruvchini almashtirish. Bo'laklab integrallash.	2
79.	Xosmas integrallar. Chegaralari cheksiz xosmas integrallar. Chegaralanmagan funksiyalarning xosmas itegrallari. Xosmas integrallarning yaqinlashish alomatlari.	2
80.	Aniq integralni taqribiy hisoblash formulalari. Aniq integralni geometriya va mexanikaga tadbiqlari. Aniq integralning muxandislik masalalarini echishga tadbiqi.	2
81.	Sonli qatorning asosiy tushunchalari. Qator yaqinlashishining zaruriy shartlari. Yaqinlashuvchi qatorlar va ularning xossalari. Garmonik qatorlar.	2
82.	Musbat hadli qatorlarni taqqoslash teoremalari. Musbat hadli sonli qatorlar yaqinlashishining etarli shartlari: Dalamber alomati, Koshining radikal va integral alomatlari.	2
83.	Ishorasi almashinuvchi va o'zgaruvchan ishorali sonli qatorlar. Leybnits teoremasi. Absolyut va shartli yaqinlashuvchi qatorlar.	2
84.	Funktsional qatorlar. Nuqtada yaqinlashuvchi funktsional qatorlar. Funktsional qatorlarning yaqinlashish sohasi. Tekis yaqinlashish. Kuchaytirilgan qatorlar. Kdgor hadlari yigindisining uzluksizligi.	
85.	Darajali qatorlar. Abel teoremasi. Yaqinlashish radiusi. Yaqinlashuvchi darajali qatorlarning xossalari. Qatorlarni	

	differentsiallash va integrallash.	
86.	Funksiyalarni Teylor va Makloren qatorlariga yoyish. Binomial qator. Asosiy elementar funksiyalarni qatorlarga yoyish.	
87.	Ikki va uch o'lchovli integral, uning xossalari, geometrik va mexanik ma'nosi. Ikki va uch o'lchovli integralni hisoblash. Ikki va uch karrali integralda o'zgaruvchilarni almashtirish. Ikki o'lchovli integralni qutb koordinatalar sistemasida hisoblash. Ikki va uch o'lchovli integrallarning geometriya va mexanikaga tadbiqi.	
88.	Birinchi va ikkinchi tur egri chiziqli integrallarning ta'rifi, ularning xossalari va ularni hisoblash. Grin formulasi. Egri chiziqli integral yordamida yuzani hisoblash. Egri chiziqli integrallarning integrallash yuliga bog'liq bo'lmasligi sharti. Egri chiziqli integrallarni geometriya va mexanika masalalarini echishga tadbiqlari.	2
89.	Sirt integrallari va ularni hisoblashga doir mashqlar. Skalyar va vektor maydonlar. Yo'nalish bo'yicha hosila.Gradient. Yuksaklik chiziqlari va sirtlar Orientirlangan va orientirlanmagan sirtlar. Vektor chiziqlar.	
90.	Vektor maydonning divergentsiyasi. Ostragradskiy teoramasining tadbiqlari. Vektor maydonning tsirkulyatsiyasi. Solenoidal maydonlar. Stoqs teoremasi tadbiqlari. Vektor maydonning rotori. Potentsial maydon. Potentsial maydonda egri chiziqli integralni hisoblash. Gamilton (Nabla) operatori. Laplas operatori. Garmonik maydon.	
	III semestr	
91.	Kompleks sonlarning moduli va argument. Kompleks sonlar ustida amallar. Kompleks sonning trigonometrik va kursatkichli shakli. Muavr formulasi. Kompleks sondan ildiz chiqarish.	2
92.	Kompleks o'zgaruvchili funksiyalar, ularning aniqlanish sohasi. Kompleks o'zgaruvchili funksiya limita va uzluksizligi. Kompleks o'zgaruvchili funksiyalarni differentsiallash. Koshi-Riman sharti. Kompleks o'zgaruvchili funksiyalarning integrali va uni hisoblash.	2
93.	Differentsial tenglama keltiriluvchi masalalar. Differentsial tenglamalar nazariyasining asosiy tushunchalari. n-tartibli differentsial tenglama uchun Koshi masalasi echimining mavjudligi va yagonaligi xakidagi teorema. O'zgaruvchilari ajralgan va ajraladigan differentsial tenglamalar.	2
94.	Bir jinsli differentsial tenglamalar. Birinchi tartibli chiziqli differentsial tenglamalar. Bernulli tenglamasi.To'la differentsial tenglama.	2
95.	Yuqori tartibli differentsial tenglamalar uchun Koshi masalasi echimining mavjudligi va yagonaligi. Tartibi pasaytiriladigan	2

	differentsial tenglamalar.	
96.	Chiziqli bir jinsli differentsial tenglamalar. O'zgarmas koeffitsientli yuqori tartibli bir jinsli tenglamalar.	2
97.	O'zgarmas koeffitsientli yuqori tartibli bir jinsli bo'lmagan, o'ng tomoni maxsus ko'rishishga ega bo'lgan differentsial tenglamalar.	2
98.	Differentsial tenglamalarning normal sistemasi. Normal sistemani echishda noma'lumlarni yo'kotish usuli.	2
99.	Laplas apmashtirilishi, uning xossalari. Originallar sinfi, tasvirlar sinfi. Operatsion hisobning asosiy teoremalari. Originalni tasvir bo'yicha tiklash usullari.	2
100.	Differentsial tenglamalarni va tenglamapar sistemasini operatsion hisob yordamida echish.	2
101.	Xususiy hosilali differensial tenglamalar haqida tushuncha. Ikkinchi tartibli chiziqli xususiy hosilali differensial tenglamalar va ularning klassifikatsiyasi. Asosiy masalalarning qo'yilishi:Koshi masalasi,chegaraviy masalalar va arlash masalalar.	2
102.	Tor tebranish masalalari, issiqlik tarkalish tenglamasi uchun Koshi masalasi. Matematik fizika tenglamalarini echishning to'r usuli.	2
103.	Ehtimollar nazariyasi fanining asosiy tushunchalari. Kombinatorika elementlari. Xodisalar algebrasi. Ehtimolning klassik ta'rifi. Geometrik ehtimollik.	2
104.	Shartli ehtimol. To'la ehtimol. Beyes formulasi. Hodisalarning bog'liqmasligi.	2
105.	Tajribalar ketma-ketligi. Bernulli sxemasi. Puasson teoremasi; Muavr-Laplasning lokal va integral teoremalari. Bernulli sxemasining eng ehtimolli soni.	2
106.	Tasodifiy miqdor tushunchasi. Diskret tasodifiy miqdor va uning taqsimot konuni. Uzluksiz tasodifiy miqdor. Zichlik funksiyasi. Uluksiz tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi.	2
107.	Tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikalari: matematik kutilma, dispersiya va urta kvadratik chetlanish.	2
108.	Matematik statistika elementlari. Tanlanma. Statistik qator va uning xossalari. Poligon va gistogramma. Empirik taqsimot funksiyasi. Tanlanmaning sonli xarakteristikalari. Tanlanmaning xarakteristikalarini nuqtaviy va intervalli baxolash.	2
	Jami :	**108**

Ma’ruza mashg’ulotlarida fanni mavzulari mantiqiy ketma-ketlikda keltiriladi. Har bir mavzuning mohiyati asosiy tushunchalar va tezislar orqali ochib beriladi. Ma’ruza mashg’ulotlari multemedia qurulmaliri bilan jihozlangan auditoriyada akademik guruhlar oqimi uchun o’tiladi.

8. Amaliy mashg’ulotlar

2-jadval

№	Amaliy mashg’ulotlar mavzulari	Dars soatlari hajmi
	I-semestr	
73.	Matritsalar va ularning xossalari. Matritsalar ustida amallar.	2
74.	Teskari matritsani topish. Matritsani rangini hisoblash.	
75.	Ikkinchi va uchinchi tartibli detirmanantlarni hisoblash usullari. Determinantlarning xossalari. Minorlar va algebraik to’ldiruvchilari.	2
76.	Chiziqli tenglamapar sistemasini yechishning Kramer, Gauss va matritsalar usuli. Chiziqli tenglamalar sistemasining turlari, echimga ega bo’lishi va xk.	2
77.	Vektorlar ustida chiziqli amallar. Vektorni o’qdagi proektsiyasi. Vektorni bazis bo’yicha yoyish. Vektor uzunligi. Vektorni songa ko’paytirish. Vektorning yo’naltiruvchi kosinuslari.	2
78.	Ikki vektorning skalyar ko’paytmasi. Ikki vektor orasidagi burchak. Ikki vektorning parallelik va pedpendikulyarlik shartlari. Ikki vektorning vektor ko’paytmasi. Uch vektorning aralash ko’paytmasi.	2
79.	Dekart va qutb koordinatalar sistemalari. Tekislikda to’g‘ri chiziq tenglamalari. Ikki to’g‘ri chiziq orasidagi burchak. Parallelik va perpendikulyarlik shartlari. Bir va ikki nuqtadan o’tuvchi to’g‘ri chiziq tenglamalari.	2
80.	Ikkinchi tartibli egri chiziqlar. Aylana, ellips, giperbola va parabola.	2
81.	Fazoda tekislik tenglamalariga doir mashqlar. Fazoda to’g‘ri chiziq tenglamalariga doir mashqlar.	2
82.	To’g‘ri chiziq va tekislik orasidagi munosabatlar. Ikkinchi tartibli sirtlarga doir mashqlar.	2
83.	Funksiya tushunchasi. Funksiyaning aniqlanish va o’zgarish sohasi. Juft va toqligi, davriyligi. Ketma-ketlikning limiti, funksiyaning limita, bir tomonlama limitlar.	2
84.	Ajoyib limitlar. Limitlarga doir aralash misollar. Funksiyaning uzluksizligi.	2
85.	Funksiyaning hosilasi. Elementar funksiyalarning hosilalari.	
86.	Murakkab funksiyani hosilasi. Oshkormas va parametrik funksiyani hosilasi. Funksiyani differentsiallash.	2
87.	Yuqori tartibli hosila va differentsial. Aniqmasliklarni Lopital qoidasi yordamida ochish.	2
88.	Funksiyaning o’sishi va kamayishi. Funksiyaning ekstremumlari. Teylor va Makloren formulalariga doir mashqlar.	2
89.	Kesmada uzluksiz funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlari. Funksiya grafigining qavarikligi va botiqligi. Burilish nuqtalari. Asimtotalari. Funksiyani to’la tekshirish.	2
90.	Ekstremumlar nazariyasining geometriya, mexanika va boshqa sohalarga doir masalalariga tadbig‘i.	2
	II semester	
91.	Ko’p o’zgaruvchili funksiya, uniing aniqlanish sohasi, limiti va	2

	uzluksizligi.	
92.	Xususiy hosilalar. To'la differentsial.	2
93.	Ko'p o'zgaruvchili murakkab funksiyaning hosilasi.	2
94.	Yuqori tartibli xususiy hosilalar va to'la differentsiallar.	2
95.	Ikki o'zgaruvchili funksiyaning ekstremumi.	2
96.	Sirtga o'tkazilgan urinma tekislik va normal tenglamasi.	2
97.	Aniqmas integral. Integralda o'zgaruvchini almashtirish. Bo'laklab intefallash.	2
98.	Kvadrat uchhad qatnashgan ba'zi bir funksiyalarni integrallash.	2
99.	Eng sodda ratsional kasrlarni integrallash.	2
100.	Ratsional funksiyalarni integrallash. Ba'zi trigonometrik funksiyalar sinfini integrallash.	2
101.	Irratsional funksiyalarni integrallash.	2
102.	Aniq integral ta'rifi va uning xossalari. Aniq integrapda o'zgaruvchini almashtirish.	2
103.	Aniq integralda bo'laklab integrallash.	2
104.	Xosmas integrallar.	2
105.	Aniq integralning geometrik va mexanika masalalariga tadbiqlari.	2
106.	Musbat hadli sonli qatorlar. Qator yigindisi.	2
107.	Qator yaqinlashishining zaruriy shartlari. Musbat hadli sonli qatorlarni taqqoslash.	2
108.	Musbat hadli sonli qatorlar yaqinlashishining etarli shartlari: Dalamber alomati, Koshining radikal va integral alomatlari.	2
109.	Ishorasi almashinuvchi va o'zgaruvchan ishorali sonli qatorlar. Leybnits teoremasi.	2
110.	Absolyut va shartli yaqinlashish. Funktsional qatorlarning yaqinlashish sohasi.	2
111.	Darajali qatorlar. Yaqinlashish radiusi.	2
112.	Qatorlarni differentsiallash va integrallash.	2
113.	Funksiyalarni Teylor va Makloren qatorlariga yoyish.	2
114.	Binomial qator. Asosiy elementar funksiyalarni qatorlarga yoyish.	2
115.	Qatorlarni taqribiy hisoblashlarga kullash.	2
116.	Ikki o'lchovli integralni hisoblash, geometrik va mexaniq ma'nosi.	2
117.	Ikki o'lchovli integrallarning geometriya va mexanikaga tadbiqlariga doir mashqlar.	2
118.	Uch o'lchovli integralni hisoblash.	2
119.	Uch o'lchovli integralning tadbiqlariga doir mashqlar.	2
120.	Birinchi tur egri chiziqli integralni hisoblashga doir mashqlar.	2
121.	Egri chiziqli integral yordamida yuzani hisoblash.	2
122.	Ikkinchi tur egri chiziqli integralni hisoblashga doir mashqlar.	2
123.	Grin formulasi. Egri chiziqli integralni tadbiqiga doir mashqlar.	2
124.	Sirt integrallari va ularni hisoblashga doir mashqlar.	2
125.	Skalyar va vektor maydonlar. Yo'nalish bo'yicha hosila.Gradient.	2

126.	Yuksaklik chiziqlari va sirtlar. Orientirlangan va orientirlanmagan sirtlar. Vektor chiziqlar.	2
	III semestr	
127.	Kompleks sonlar va ular ustida amallar. Kompleks o’zgaruvchili funksiyalar.	2
128.	Kompleks o’zgaruvchili funksiyaning limiti, uzluksizligi. Kompleks o’zgaruvchili funksiyaning hosilasi. Analitik funksiyalar. Garmonik funksiyalar.	2
129.	Birinchi tartibli differentsial tenglamalar. O’zgaruvchilari ajralgan va ajrapadigan differentsial tenglamalar.	2
130.	Bir jinsli differentsial tenglamalar. Bir jinsli differentsial tenglamaga keltiriladigan tenglamalar. Birinchi tartibli chiziqli differentsial tenglamalar. Bernulli tenglamasi.	2
131.	To’la differentsialli tenglama. Yuqori tartibli differentsial tenglamalar. Tartibi pasaytiriladigan differentsial tenglamalar.	2
132.	O’zgarmas koeffitsientli yuqori tartibli chiziqli bir jinsli differentsial tenglamalar.	2
133.	O’zgarmas koeffitsientli yuqori tartibli chiziqli bir jinsli bo’lmagan, o’ng tomoni maxsus ko’rishishga ega bo’lgan differentsial tenglamalar.	2
134.	Differentsial tenglamalar sistemasi. Differentsial tenglamalarni taqribiy echish usullari.	2
135.	Laplas almashtirishi, uning xossalari. Originallar sinfi. Tasvirlar sinfi. Operatsion hisobning asosiy teoremalari.Operatsion hisobning asosiy teoremalari. Originalni tasvir bo’yicha tiklash usullari.	2
136.	Differentsial tenglamalar va tenglamapar sistemasini operatsion hisob usullari yordamida echish.	2
137.	Ikkinchi tartibli xususiy hosilali differentsial tenglamalarning kanonik formalari va tavsifi. Xarakteristik tenglamasi. Koshi masalasining kuyilishi.	2
138.	Bir o’lchovli to’lqin tenglamalari uchun Koshi masalasi. Dalamber formulasi.	2
139.	Ehtimollar nazariyasining predmeti. Asosiy tushunchalar. Ehtimollikning klassik ta’rifi. Nisbiy chastota. Ehtimollikning geometrik ta’rifi.	2
140.	Ehtimolliklarni qo’shish.Hodisalarning to’la guruhi.Ehtimolliklarni ko’paytirish.To’la ehtimol .Bayes formulasi.	2
141.	Ehtimollarning taqsimot funksiyasi. Diskret tasodifiy miqdorlar. Bernulli taqsimoti. Puasson taqsimoti. Geometrik va gipergeometrik taqsimotlar.	2
142.	Ehtimollar taqsimoting zichlik funksiyasi. Absalyut uzluksiz tasodifiy miqdorlar. Tekis taqsimot. Normal va ko’rsatkichli taqsimotlar.	2
143.	Tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikalari. Matematik kutilish, dispertsiya, o’rta kvadratik chetlanish.	2
144.	Matematik statistika elementlari. Empirik taqsimot funksiyasi. Tanlanma xarakteristikalari va ularning taqsimot qonunlari. Tanlanma taqsimotlari parametrlarining nuqtaviy va integralli baholari.	2
	Jami:	**144**

Amaliy mashg’ulotlarda talabalar berilgan nazariy bilimlar asosida mavzularga oid misol va masalalar yechish yo’llarini o’rganadilar, kerakli bilim, ko’nikma va malakalarini egallaydilar.

9. Mustaqil ta'lim

3-jadval

№	Mustaqil ta'lim mavzulari	Dars soatlari hajmi
I-semestrda		
38.	Dekart va qutb koordinatalari orasidagi bog'lanish. Koordinatalarni almashtirish. Silindrik va sferik koordinatalar.	6
39.	Konussimon sirtlar. Sfera. Aylanish sirtlar. Ikkinchi tartibli sirtlarga doir mashqlar.	6
40.	Yuqori tartibli hosilalar. Oshkormas va parametrik kurinishda berilgan funksiyalarning yuqori tartibli hosilalari.	4
41.	Funksiyalarni Teylor va Makloren qatorlariga yoyishga misollar. Lopital qoidasi.	4
42.	Ekstremmumlar nazariyasining geometriya, mexanika va fizika masalalariga tadbiqlari.	2
43.	Eyler almashtirishlari.	2
44.	Xosmas integrallarning yaqinlashish alomatlari. Xosmas integralga doir mashqlar.	2
45.	Aniq integralni taqribiy hisoblash formulalari. Mavzuga doir mashqlar.	4
46.	Birinchi tartibli differentsial tenglamaning maxsus echimi. Klero tenglamasi. Lagranj tenglamasi.	6
47.	Differentsial tenglamalar sistemasi. Normal sistema. Noma'lumlarni yukotish usuli.	6
48.	Differentsial tenglamalarni taqribiy echish usullari.(Eyler, Runge- Kutta, ketma-ket yaqinlashish, Adams metodi, Teylor formulasi).	6
49.	Differentsial tenglamalarning amaliy masalalar echishga tadbiqlari. Mexaniq tebranishlarning differentsial tenglamasi. Erkin tebranish, majburiy tebranish.	6
50.	Qatorlarni taqribiy hisoblashlarga tadbiqlari. Differentsial tenglamalarni qatorlar yordamida echish.	4
51.	Fure integrali. Fure almashtirishlari.	4
52.	Ikki o'lchovli integralni qutb koordinatalar sistemasida o'zgaruvchilarni almashtirib hisoblash. Jordan o'lchovlari.	4
53.	Ikki o'lchovli integrallarni geometriya va mexanika masalalarini echishga tadbiqlari.	2
54.	Uch o'lchovli integrallarni geometriya va mexanika masalalarini echishga tadbiqlari.	2
55.	Birinchi va ikkinchi tur egri chiziqli integrallar orasidagi bog'lanish. Ostrogradskiy-Grin formulasining tadbiqlari.	6
56.	Birinchi va ikkinchi tur sirt integrallarini hisoblashga doir mashqlar. Stoqs formulasining tadbiqlari.	4

57.	Sirt integrallarini tadbiqlari.	2
58.	Ostragradskiy teoremasining tadbiqlari.	2
59.	Vektor maydonidagi ikkinchi tartibli amallar. Nabla operatori bilan amallar bajarish.	4
60.	Laplas operatorining tsilindirik va sferik koordinatalarda ifodalanishi. Maydonlar nazariyasining tadbiqi.	4
61.	Giperbolik va teskari giperbolik funksiyalar. Yopiq egri chiziq bo’yicha olingan integral.	4
62.	Modulning maksimum printsipi. Koshi turidagi integral. Yuqori tartibli hosilaning mavjudligi. Analitik funksiyaning yuqori tartibli hosilasi.	8
63.	Funksiyalarni Loran qatoriga yoyish. Qutbga nisbatan funksiyaning chegirmasini toppish.	4
64.	Operatsion hisob yordamida differentsial tenglamalar va tenglamalar sistemasini echish. Tebranishlar differentsial tenglamalarni echish.	4
65.	Tor tebranishlari tenglamasini Dalamber usuli va o’zgaruvchilarini ajratish (Fure) usuli bilan echish. Torning majburiy tebranishi.	6
66.	Issiklik tarkalish tenglamalarini metall sterjenda, chegaralanmagan sterjenda, fazoda tekshirish. Laplasning ikkinchi tenglamasiga keltiriladigan masalalar. Dirixle masalasini echish.	6
67.	Amaliyotda ko’p uchraydigan muhim diskret va uzluksiz taqsimotlar, normal taqsimotni tadbiqlari.	4
68.	Ehtimollar nazariyasining limit teoremalari. Katta sonlar konuni. Chebishev tengsizligi. Bir xil taksimlangan o’zaro bog‘liqsiz tasodifiy miqdorlar yigindisi uchun markaziy limit teoremasi.	8
69.	Tasodifiy miqdorlar sistemasi, ularning taqsimot konunlari, shartli taqsimot konunlari. Kovariatsiya va korrelyatsiya. Ikki o’lchovli normal taqsimot qonuni va uning o’z i ga xos xususiyati.	6
70.	Ehtimollar nazariyasining texnikaviy masalalarda qo’llanilishi. Taqsimotning noma’lum parametrlari uchun statistik baholarni ko’rishda masalaning kuyilishi. Statistik baxolarga talablar: siljimaslik, asoslilik, effektivlik.	6
71.	Dispertsiya baxosining xossalari, tanlanmaning tugirlangan dispersiyasi. Statistik baxolar kurish uslublari. Ishonchlilik intervallari. Statistik gipotezalar va ularning sinflari. Gipotezalarni tekshirish algoritmi. Birinchi va ikkinchi turdagi xatoliklar.	8
72.	Eng kuvvatli me’zonlar. Neyman-Pirson mezoni, Kolmagorov mezoni, Pirsonning Xi kvadrat mezoni.	6
73.	Korrelyatsion-regression taxdil elementlari. Korrelyatsiya tushunchasining kelib chikish tarixi va xossalari.	4
74.	Regressiyaning xar xil kurininshdagi tenglamalarini topishda eng kichik kvadratlar usulining moxiyati va xar xil modifikatsiyalari.	2
	Jami	**168**

Izoh: Mustaqil ta'lim soatlari hajmlaridan kelib chiqqan holda ishchi dasturda mazkur mavzular ichidan mustaqil ta'lim mavzulari shakllantiriladi.

Fan bo'yicha tajriba mashg'uloti rejalashtirilmagan**.**

Fan bo'yicha kurs ishi va kurs loyihasi rejalashtirilmagan**.**

Talaba mustaqil ta'limning asosiy maqsadi auditoriya va auditoriyadan tashqari vaqtda o'qituvchining rahbarligi hamda nazoratida muayyan o'quv ishlarini mustal bajarish uchun bilim, ko'nikma va malakalarni shaklantirish hamda rivojlantirishdan iborat.

Mustaqil ishning maqsadi olingan nazariy bilimlarni mustahkamlash, belgilangan mavzular asosida qo'shimcha bilim olishdan iborat. Bunda ushbu ishlarni bajaradilar:

- Amaliy mashg'ulotlarga tayyorgarlik;
- O'tilgan materiallar mavzularini qaytarish;
- Mustaqil ish uchun mo'ljallangan nazariy bilim mavzularini o'zlashtirish.

Bunda talabalar ma'ruzalarda olgan bilimlarini amaliy mashg'ulotlarni bajarislari bilan mustahkamlashi hamda matematikaning ba'zi mavzularini tushunishi hamda ularga oid masalalarni yechishi kerak.

Mustaqil o'zlashtiriladigan mavzular bo'yicha talabalar tomonidan referatlar tayyorlash va uni taqdimot qilish tavsiya etiladi.

Fan bo'yicha talabalar bilimini baholash va nazorat qilish mezonlari

Talabani baholash oraliq va yakuniy nazorat turlarida aniqlanadi. Oraliq nazoratlar 1- va 2-oraliq nazoratlaridan tashkil topadi. Talaba ikkala oraliq nazoratdan o'tgan holatda (kamida qoniqarli baho bilan) yakuniy nazorat topshirishga ruxsat etiladi.

Oraliq nazoratlar mashg'ulot o'tgan professor-o'qituvchilar tomonidan o'tkaziladi va baholanadi. Olgan bahosidan norozi bo'lgan talaba fan bo'yicha mashg'ulot olib borilayotgan kafedra mudiri yoki dekanatga murojaat qilishi va bu murojaat asosida kafedrada ichki komissiya tuzilib oraliq nazoratla qayta ko'rib chiqilishi ta'minlanadi.

Yakuniy nazorat, mashg'ulot olib borgan professor-o'qituvchilardan tashqari xolis professor-o'qituvchilar (zarur bo'lganda boshqa OTM professor-o'qituvchilari) tomonidan olib boriladi va baholanadi.

Baholash usullari.	
Test, yozma ish, og'zaki so'rov, ijodiy loyiha ishi	
Baholash mezonlari	
Baho	Bilish darajasi
5 baho yoki "a'lo"	- Fanga oid xulosa va qaror qabul qilish; - Fanga oid mustaqil mushohada yurita olish; - Ijodiy fikrlay olish; - Olgan bilimlarini amalda qo'llay olish; - Mohiyatini tushuntirish; - Bilish, aytib berish; - Tasavvurga ega bo'lish.
4 baho yoki "yaxshi"	- Fanga oid mustaqil mushohada yurita olish; - Olgan bilimlarini amalda qo'llay olish; - Mohiyatini tushuntirish; - Bilish, aytib berish; - Tasavvurga ega bo'lish.
3 baho yoki "qoniqarli"	- Mohiyatini tushuntirish; - Bilish, aytib berish; - Tasavvurga ega bo'lish.
2 baho "qoniqarsiz"	- Aniq tasavvurga ega bo'lmaslik;

	- Bilmaslik.

Nazorat turlari		
1-Oraliq nazorat	**2-Oraliq nazorat**	**Yakuniy nazorat**
Kafedra majlis qarori bilan baholash usuli aniqlanadi	Kafedra majlis qarori bilan baholash usuli aniqlanadi	Kafedra majlis qarori bilan baholash usuli aniqlanadi va dekan farmoyishi orqali belgilangan jadval asosida olib boriladi

10. Asosiy va qo'shimcha o'quv ada biyotlar hamda ax borot man balari.

Asosiy adabiyotlar

19. Claudio Canuto, Anita Tabacco. Mathematical Analysis I, II. Springer-Verlag Italia, Milan 2015,2010.
20. Д.Писменный. «Конспект лекции по высшей математике», 1,2,3 часть. -М.: Айрис Пресс, 2008.
21. Ю.Ф. Сенчук. Математический анализ для инженеров. 1,2 часть-Харков: НТУ «ХПИ», 2003.-408 с.
22. Axmedov A.B., SHodmonov G., Esonov E.E., Abdukarimov A.A., SHamsiyev D.N. Oliy matematikadan individual topshririqlar. -Toshkent: O'zbekiston ensiklopediyasi, 2014.
23. Xurramov SH. R. Oliy matematika.l,2-qism. - Toshkent: "Tafakkur" nashriyoti, 2018.
24. Xolmurodov E., Yusupo A.I., Aliqulov T.A. Oliy matematika. 1,2,3-qismlar. - Toshkent: "NEXT MEDIA GROUP", 2017.

Qo'shimcha adabiyotlar.

25. Мирзиёев Ш.М. Танкидий тахдил, катъий тартиб-интизом ва шахсий жавобгарлик — хар бир рахбар фаолиятининг кундалик коидаси булиши керак. Узбекистон Республикаси Вазирлар Махкамасининг 2016 йил якунлари ва 2017 йил истикболларига багишланган мажлисидаги Узбекистон Республикаси Президентининг нутки. // "Халк сузи" газетаси. 2017 й., 16 январь, №11.
26. Узбекистон Республикаси Конституцияси. - Т.: Узбекистон, 2017. - 46 б.
27. John James Stewart. Calculus.Seventh editions. Metric version. Brooks/Cole, Cengage Learning, 2012.
28. Y. Suhov, M. Kelbert. Probability and Statistics by Example. 2nd edition. United Kingdom. University printing house, Cambridge CB2 8BS, 2014.
29. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для ВТУЗов. 3 частях -М.: Наука, 2001.
30. Черненко В.Д. Высшая математика в примерах и задачах. Учебное пособие для вузов. - СПб.: Политехника, 2003. - 703 с.
31. В.Е.Гмурман. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. -М.: Высшей школа, 2004.
32. П.Минорский. Сборник задач по высшей математике. ФИЗМАТЛИТ 2010й.
33. Жураев Т.Ж., Худойберганов Р.Х., Борисов А.К., Мансуров Х. Олий математика асослари. 1 ва 2 кием. -Т. Узбекистон, 1995, 1999.-2906.
34. X.A. Axmedova, G'.P. Arziqulov, A. Tilavov. Matematika masala va misollar to'plami.-T. NISIM, 2016.
35. A. Yusupov, Z.I. Sadritdinova, X.A. Axmedova. Oliy matematika. -T. NISIM, 2015.
36. R.N.SHamsiyev. Oliy matematika fanining "Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika" qismidan misol va malalar. -T.ToshDTU bosmaxobasi, 2017.

Internet saytlari.

8. www.gov.uz- O'zbekiston Respublikasi hukumat portali.
9. www.catback.ru - научные статьи и учебные материалы
10. www. zivonet.uz ;
11. www.gaap.ru;
12. www.cip.com ;
13. www. aicpa.ord ;
14. www.bilim.uz ;