ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

БУХОРО МУҲАНДИСЛИК-ТЕХНОЛОГИЯ ИНСТИТУТИ

ТАСДИҚЛАЙМАН

Рўйхатга олинди	**Ўқув ишлари бўйича проректор**
№________________________	**_______________проф.Қ.Т.Олимов**
2018 йил «____»___________	**2018 йил. «___»_____________**

“ОЛИЙ МАТЕМАТИКА” КАФЕДРАСИ

“ОЛИЙ МАТЕМАТИКА” ФАНИДАН

ЎҚУВ-УСЛУБИЙ МАЖМУА

Билим соҳаси: 300 000 – Ишлаб чиқариш техник соха

Таълим соҳаси: 310 000 – Муҳандислик иши

Таълим йуналишлари:

5310700 - Электр техникаси, электр механикаси ва электр технологиялари

5111000 - Касб таълими (5310700-Электр техникаси, электр механикаси ва технологиялари)

Бухоро-2019

Ўқув-услубий мажмуа Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлигида № __БД-2_ рақам билан рўйхатга олинган ва 2012 йил "-"_14_"_03_ да _07_- сонли буйруқ билан тасдиқланган намунавий фан дастури асосида тузилган.

Тузувчи: "Олий математика" кафедраси доценти **М.Х.Тешаев**

Тақризчилар: БДУ "Математика" кафедраси профессори **Д.Қ.Дурдиев**

БДУ "Математика" кафедраси доценти **Н.Маматова**

Ўқув-услубий мажмуа Е ва ИЧАКТ факультетининг "Математика" кафедраси мажлисида (2018 йил " " август 1 - сон баённома) мухокама этилди ва факультетнинг ўқув-услубий кенгашига тавсия этилди.

Кафедра мудири:**______________** т.ф.н. **Ғ.Ғ.Юнусов**

Ўқув-услубий мажмуа Е ва ИЧАКТ факультетининг ўқув-услубий кенгашида кўриб чиқилди (2017 йил **" "** _август **1 -** сон баённома) ва институтнинг Илмий-услубий кенгашига тасдиқлашга топширилди.

Ўқув-услубий кенгаш раиси: _________ доц. **Ш.И.Раззаков**

Келишилди:
Ўқув- услубий бошкарма бошлиги: доц. **Ш.М.Ходжиев**

МУНДАРИЖА

Эслатмалар:

1. Ўқув-услубий мажмуаларни чоп этишга тайёрлаш Вазирликнинг 2017 йил 1 март 107 - сонли буйруғи иловаси асосида тайёрланади.
2. Ўқув-услубий мажмуа А4 шаклда икки томонлама ёзилиши мумкин.

MINISTRY OF HIGHER AND SECONDARY SPECIAL EDUCATION

OF THE REPUBLIC OF UZBEKISTAN

BUKHARA ENGENEERIG - TECHNOLOGICAL INSTITUTE

Registered

№ ____________

"___" ____________2017

"CONFURMED"

Prorector on educational work

____

"___" ____________2017

WORKING EDUCATIONAL PROGRAM ON

" MATHEMATICS "

Field of research: 300 000 - Industrial Engineering

Education: 310 000 - Engineering work

Educations:

5310700 - Power engineering, electromechanics and electrotechnology;

5321700 - Information communication systems in the management of technological processes;

5310100 - Power engineering (by branches);

5312100 -Energo inspection of industrial enterprises and energy.

Bukhara - 2016

INTRODUCTION

The mathematics curriculum of the Higher Education State Education Standard, which is taught in the field of Education and Science, is required for the students to be trained in bachelor degrees: accelerated algebra, analytic geometry elements, mathematical analysis, theory of ordinary differential equations, complex numbers and the theory of complex variable functions, mathematical physics equations, the theory of probability and the basic concepts of mathematical statistics. which includes office.

THE AIMS AND TASKS OF THESUBJECT

"Mathematics" refers to a complex of natural mathematical sciences, and students study it in I, II, and III semesters.The main task of Mathematics is to provide the students with basic knowledge necessary to successfully master natural sciences such as "Physics", "Theoretical Mechanics", "Resistance to Materials" and so on.

REQUIREMENTS FOR STUDENTS' KNOWLEDGE, ABILITIES AND SKILLS ON SUBJECT

During the study of mathematics, students should be able to:
- calculate the functions on matrices, calculate the determinant value by its definition and properties (including the Laplace theorem), find the matrix color and inverse matrices in different ways;
-studying system of linear algebraic equations and finding solutions in various ways;
- to know different equations of line and plane, to calculate the angles between them, to know the conditions of parallelism and perpendicularity, to calculate the distance from point to line and plane;
- analyze and understand the second order curves, their equations;
- the ability to use the differentiation and integration formulas without confusion;
- to have good experience in elementary computation, writing Taylor formula for a given function without difficulty;
- to have skills in computing the integral, apply the necessary methods to check the line approach;
- to know differential and integral calculus;
- the simplest differential equations, multivariate functions, their differential and integral calculus;
- have the skills of probability theory and mathematical statistics.

INTERDEPENDENCE AND METHODOLOGICAL CLOSENESS OF SUBJECT TO OTHER SUBJECTS IN CURRICULUM

"Mathematics" is a mathematical and natural science and is taught in the 1st, 2nd, and 3rd seasons . This subject is closely related to the subjects such as "Physics", "Theoretical mechanics", "Resistance of materials", "Mechanics and mechanisms theory".

THE ROLE OF SUBJECT IN SCIENCE AND PRODUCTION

Given the fact that the production process is based on direct mathematical methods, Statistical analyzes and calculations, the role of this science in the production is indifferent. In production, the engineer-technologist optimally optimizes the design process by applying some or all of these mathematical operations.

MODERN INFORMATION AND PEDAGOGICAL TECHNOLOGIES IN TEACHING SUBJECT

The use of advanced and up-to-date teaching methods, and the introduction of new information, and pedagogical technologies are important for students to master the subject of "Mathematics". Textbooks, educational and methodological manuals, lecture texts, handouts, electronic materials,virtual stands and models are used in science. Successful pedagogical technologies are used in the lectures and practical classes.

THE DISTRIBUTION OF SUBJECT OF MATHEMATIC LESSONS IN CHAPTERS AND HOURS :

№	Theme name	Total hour	Themes Subjects	Practical training	Independent training
1	Introduction	6	2	2	2
2	Linear algebra	26	8	8	10
3	Vector algebra	22	6	6	10
4	Analytic geometry in the plane	38	10	10	18
5	Analytical geometry in the field	28	8	8	12
6	Introduction to Mathematical Analysis	28	8	8	12
7	Differential calculation of one variable function	42	12	12	18
For the 1st season:		**180**	**54**	**54**	**72**
	Integral calculus of one variable function.	64	20	20	24
	Functions of Several Variables	34	10	10	14
	Multiple and intersecting integrals	34	10	10	14
	Theory of series	48	14	14	20
For the 2nd season:		**180**	**54**	**54**	**72**

	Complex Numbers and function of Complex Variables	20	6	6	8
	Differential Equations	32	10	10	12
	Operational Accounts	14	4	4	6
	Mathematical physics equations	14	4	4	6
	Probability Theory and Mathematical Statistics	30	12	12	16
		120	**36**	**36**	**48**
For the 3rd season:		**480**	**144**	**144**	**192**
	Total:				

THE DISTRIBUTION OF SUBJECT OF MATHEMATIC LESSONS IN THEMES AND HOURS

№	Theme Subjects	Total hour	SubjectsThemes	Practical training	Independent training
1	Matrix and action on them.	8	4	2	2
2	Determinants and their properties	8	2	2	4
3	System of Linear equations and their methods of solutions.	14	4	4	6
4	Vectors and arithmetic operations on them. Coordinates and vectors of vectors	8	2	2	4
5	Scalar product of vectors, their properties and application. Vector product, their properties and applications.Mixt products of vectors, their properties and applications	12	4	2	6
6	Analytical geometry in the plane and its basic problems.	10	2	2	4
7	Equations in line on plane. Basic problems of line on plane	14	4	4	6
8	Second order lines. Circles and ellipses. Hyperbola and parabola. Conical cuts.	16	4	4	8

9	Analytical geometry in the field.Equations of plane. Basic Problems of plane.	14	4	4	6
10	Line Equations onfield. Basic problems of Line on field. Mixed problems.	14	4	4	6
11	Functions and related concepts.	8	2	2	4
12	Limit of a Function and its properties	8	2	2	4
13	Continuous Functions and Their Properties	10	4	2	4
14	Derivative of a Functionand calculation rules of it.	6	2	2	2
15	Rules of Differentiation of a Function.High order derivatives and differentials.	8	2	2	4
16	Investigation of the Function Using one order derivative.	6	2	2	2
17	Investigation of the Function Using two order derivative.	6	2	2	2
18	Complately Investigation of the Function	8	2	2	\4
19	Indefinityes and L'Hôpital's Rules	8	2	2	4
For the 1st season:		**180**	**54**	**54**	**72**
20	Primitive function and indefinite integral.Integral table.	6	2	2	2
21	Methods for calculating Indefinite integral.	6	2	2	2
22	Rational fractions and their integration	6	2	2	2
23	Integration of irrational expressions. Euler changes.	8	2	2	4
24	Integration of some expressions involving trigonometric functions.	8	2	2	4
25	Defination of definite integral and its simplest properties. Properties of a precise integral.	8	2	2	4
26	Methods for calculating definite integral	6	2	2	2
27	Improper integrals	6	2	2	2
28	Geometric and mechanical applications of	8	2	2	4

	definiteintegral.				
29	Elements of approximate computation of definite integral	6	2	2	2
30	Two variable functions, its limit and continuity.	8	2	2	4
31	Partial Differentiation of function of SeveralVariables Total Differential.	6	2	2	2
32	Derivative of a complex function. Complete derivative. Derived in direction and gradient.	6	2	2	2
33	High order direvatives and differentials.	6	2	2	2
34	Local extremes of functions of two variables.	6	2	2	2
35	Double-integral integral and its basic properties. Methods ofcalculation of double-integral	6	2	2	2
36	Geometric and mechanical applications of dooble integral.Geometric and mechanical applications of doobleintegral	6	2	2	2
37	Multiple integral, its basic properties and calculation methods.	6	2	2	2
38	Geometrical and mechanical applications of the multiple integral.	6	2	2	2
39	Curl integral and its properties.	6	2	2	2
40	Numeric Series and their approximation.	6	2	2	2
41	Sufficient conditions for approaching a positive number of series.	8	2	2	4
42	Sign - variable numericl series	6	2	2	2
43	Functional series.	6	2	2	2
44	Power series.	8	2	2	4
45	Taylor and McLauren series.	8	2	2	4
46	Fure series	8	2	2	4
	For the 2nd season:	**180**	**54**	**54**	**72**
47	Complex numbers and arithmetic operations on them.	8	2	2	4
48	Function of a complex argument and its derivative.The Cauchy-Riemann conditions. Integral of Complex Variable Functions. Formula of Cauchy.	8	2	2	4
49	Differential Equations. Differential Equations and Their Solutions	6	2	2	2
50	Some Differential Equations of first order and Their	8	2	2	4

	Solutions				
51	High order differential equations	6	2	2	2
52	A homogeneous linear Differential equations of second order with constant coefficients	6	2	2	2
53	Nonhomogeneous linear Differential equations of second order with constant coefficients	8	2	2	4
54	Laplace Transforms and its properties.	6	2	2	2
55	Restore the initial function of the Laplace transforms. Solving differential equations with the help Laplace Transforms	6	2	2	2
56	Mathematical physics equations and their types. Equation of oscillations of a string.	6	2	2	2
57	The distribution of heat in the restricted sterile. Correct issues.	6	2	2	2
58	Theory of Probability. Events and action on them. Probability, its classical, geometrical, statistical definitions and main properties	6	2	2	2
59	Theorems of adding and multiplication of probabilities.	6	2	2	2
60	Full probability and Bayesian theorem.	6	2	2	2
61	Bernoulli's theorem. Mower-Laplace theorems.	6	2	2	2
62	Discrete accidental variables, their distribution laws and basic numericalcharacteristics.	6	2	2	2
63	Distribution function. Density function. Maincontinuous distributions and their numerical characteristics	8	2	2	4
64	Elements of Mathematical statistics.	8	2	2	4
	For 3rdseason:	**120**	**36**	**36**	**48**
	On the full:	**480**	**144**	**144**	**192**

THE MAIN PART: THE INTEGRAL SEQUENCE OF METHODOLOGICAL ASPECT OF THE SUBJECT

In the main part (lecture) topics of the science are presented in a logical sequence. The essence of each topic is explained by the basic concepts and theses. At the same time, it is important for the students to have the knowledge and skills required to be brought to State education standards (SES).

It is advisable to take into account the relevance of the requirements of the quality of the main parts, their compliance with the requirements of the employer and the needs of the production, the socio-political and democratic changes in our country, the liberalization of the economy, the priorities of economic reforms and other areas, and the latest achievements in science and technology are offered.

Classroom tutorials

Subject and tasks of "Mathematics". Mathematics is a powerful means of solving practical issues, a universal language of science, a component of world culture and culture. Some simple concepts for modeling and modeling processes.

Used Learning Technologies: *Dialogue, Problematic Education. Bingo, blitz, seperate saw, lilac blossom, menu, algorithm, discussion, control of Google.*

References**:** B1; B2; B3; B4;; A9; A10; A11.

Matrix and determinants. Matrix and linear actions on them. Transponder matrix and its properties. The determinant of the quadratic matrix. High order determinants. Minors and algebraic floodplain. Determinants properties. Calculation of high order determinants. Matrix color. Matrix Color Calculation. The matrix does not matter. Theorem about the inverse matrix and its existence. Methods of inverse matrix construction.

UsedLearning Technologies: *Dialogue, Problematic Education. Bingo, blitz, seperate saw, lilac blossom, menu, algorithm, discussion, control of Google.*

References:B1; B2; B3; B4; B5; A9; A10; A11.

Linear equations system. Basic concepts of linear equations and their solutions. Gauss, Cramer and Matrix Methods for Solving Equations of Linear Equations. The general theory of linear equations. Kroneker - Kapelli theorem. Basic solutions of linear equations. The condition of existence of a homogeneous linear equations system and its notrival solutions. A set of fundamental solutions for the homogeneous linear equations system. Vector shape of general solution of linear equations system.

Used Learning Technologies: *Dialogue, Problematic Education. Pog'ona, Coca-Cola method, Venn diagram, T-scheme,*

References:B1; B2; B3; B4; A9; A10; A11.

R^n arithmetic vector space. Scattered events on arithmetic vectors. Skull production. The length of the vector. The angle between the vectors. Combination of vectors. Writing linear equations system in vector format. Theorems about the vector intensity. Base and color of the vector system. System of orthogonal and orthonormal vectors and their construction.

Used Learning Technologies: *Dialogue, Problematic Education. Blitz Survey, Zig-Zag Method, Debugging, BBB, Insert, Domain Control.*

References:B1; B2; B3; B4; A8; A9; A10; A11.

Elements of Analytical geometry. Analytical Geometry in Plants. Linear equation in plane.

The general and normal equations, of angular coefficients in plane. Linear equations of the given

nucleus and the two points. Corner between two lines. Parallelism and verticality of hollow curves. The distance from the given point to the exact line. Secondary plane curves on the plane.

Circles and ellipses. Hyperbola and parabola.Linear equations in plane. Corner between two planes. Distance from point to plane. Interpretation of plane, fault lines, plane and linear spaces. The conditions of parallelism and perpendicularity.

Used Learning Technologies*:* *Dialogue, Problematic Education. B / B / B table, debate, Venn diagram, T-scheme, domain control.*

References:B1; B2; B3; B4; A8;AK9; A10; A11

Scattered phases. Euclidean spaces. Linear operators Scheduled space and its transitions.

Basis and coordinates in the phase. Sub-space spaces of a satiated space. Euclid space.

Replacement of bases. Line operator. Line operator matrix. Operations on linear operators.

Original vectors of the linear operator and its original value. Properties of original vectors. Drawing the matched operator matrix in diagonal form. Positive vector and positive matrix.

Used Learning Technologies:*Dialogue, Problematic Education. Subaru saw, boomerang, 3x3, talk, control of Google Domain.*

References:B1; B2; B4; A4, A9;

Squared forms. Concept of a quadratic shape. Its matrix and color. Quadratic form for canonical wear. Positive squared forms.

Used Learning Technologies:*Dialogue, Problematic Education. Blite, 4x4, talk, check the profiles.*

References:B1; B2; B3; B4, A8; A9;A14.

A variable function. Multiple multivariable features. p -the atrophy of the outer space. R^n is space bounded in space. Internal and boundary bulk of the package. The cumulative pumping of the mass. Open and closed compartments. Compact-compact (limited and closed) compartment. The sequence of the nucleus in the R^n phase. Numerical sequence. Limit of the sequence. of Numeric sequence limit. An infinite, infinitely large number of sequences and their properties. Multiple sequences of monotonous numbers.

Used Learning Technologies:*Dialogue, Problematic Education. Blite, 4x4, talk, check the profiles.*

References: B1; B2; B3; B4; A8 A9; A10; A11.

Function of single and multiple variables.Definition of Function. Methods of presentation, aria of definition and value of functions. General properties of a multiple variable function. Graph of Function and its substitution. Inverse function. Classification, properties and graphs of elementary functions. Restricted features. Limit of Function. Great limits. Basic theorems about limits. The limit of the function's. Unilateral limits. Equivalent unlimited small functions. Comparison of functions. Continuous function. Properties of continuous functions on the nucleus and cut. One-way unbundled function. Discontinuity points of the function and their types.

The function of a variable function. The necessary and sufficient conditions for the differentiation of function. Differentiation of function and its approximate calculation. Geometric and mechanic meanings of the series. The basic theorems on oscillas. Elements of Elementary Functions. Advanced functional variability and differentiation. High Order Extravagant and Differentials. Inverse function interval. Basic theorems for differentiating properties (Roll, Lagrange and Ferma). Taylor – Mc-Lauren formulas and their application. Opening discrepancies. L'Hopitale rule. Sufficient conditions of monotony of the function. Extracts of the function. Necessary and sufficient conditions of functional extract. Global extremes of the function of two variables. The function of the function is its thrust. Analyze the function and create a graphic.

The concept of multi-variable function. limit and continuity function of several variables. Properties of function ofseveralvariables. Differentiation of the function of several variables. Differential of the function of several variables and its use in approximate calculations. Gradient of the function and its basic properties. Derivatives Higher order. Local extremes of function of several variables. Stationary points. Necessary condition of extremum. Sufficient condition of the extremum of two variables function. Conditions of Globalextremes of the function of two variables.

Initial Function and Independent Integral. DefiniteIndependent integral and its properties. Elementary Functions Integrity Schedule. Basic methods of integration. An definite integral and its properties. Formula of Newton-Leibniz. Methods of calculating the definite integral. Geometric applications of an definite integral. Approximate calculation of an definite integral in triangular, trapezoidal, parabola methods. Pure integral and their types. Geometric and mechanical applications of an definite integral.

Used Learning Technologies: *Dialogue, Problematic Education. Presentation, demonstration, question and answer, "Boomerang", "Cluster", "Blitz Survey", "Thinking Map", "Intermediate Tester", "Veer", Charxpalak, B.B.B.*

References: A1; A2; A3; A4; K6; K7 K8; K9; K10; K14 DO.

Differential equations. Basic concepts about simple differential equations. General solution and common integral. Differential equations of the first order. Koshi problem. The basic methods of solving differential equations of the first order. Differential equations with first order linearity. Differential equations with second order linear velocity coefficients. The first system of differential equations. Application of Differential Equations

CALENDAR PLAN FOR LECTURE STUDY OF SUBJECT "MATHEMATICS"

№	Theme Subjects	Size (in hours)
1	Matrix and action on them.	4
2	Determinants and their properties	2
3	System of Linear equations and their methods of solutions.	4
4	Vectors and arithmetic operations on them.	2
5	Scalar product of vectors, their properties and application. Vector product, their properties and applications.Mixt products of vectors, their properties and applications	4
6	Analytical geometry in the plane and its basic problems.	2
7	Equations in line on plane. Basic problems of line on plane	4
8	Second order lines. Circles and ellipses.	4

	Hyperbola and parabola. Conical cuts.	
9	Analytical geometry in the field.Equations of plane. Basic Problems of plane.	4
10	Line Equations onfield. Basic problems of Line on field. Mixed problems.	4
11	Functions and related concepts.	2
12	Limit of a Function and its properties	2
13	Continuous Functions and Their Properties	4
14	Derivative of a Functionand calculation rules of it.	2
15	Rules of Differentiation of a Function.High order derivatives and differentials.	2
16	Investigation of the Function Using one order derivative.	2
17	Investigation of the Function Using two order derivative.	2
18	Complately Investigation of the Function	2
19	Indefinityes and L'Hôpital's Rules	2
For the 1st season:		**54**
20	Primitive function and indefinite integral.Integral table.	2
21	Methods for calculating Indefinite integral.	2
22	Rational fractions and their integration	2
23	Integration of irrational expressions. Euler changes.	2
24	Integration of some expressions involving trigonometric functions.	2
25	Defination of definite integral and its simplest properties. Properties of a precise integral.	2
26	Methods for calculating definite integral	2

27	Improper integrals	2
28	Geometric and mechanical applications of definiteintegral.	2
29	Elements of approximate computation of definite integral	2
30	Two variable functions, its limit and continuity.	2
31	Partial Differentiation of function of SeveralVariables Total Differential.	2
32	Derivative of a complex function. Complete derivative. Derived in direction and gradient.	2
33	High order direvatives and differentials.	2
34	Local extremes of functions of two variables.	2
35	Double-integral integral and its basic properties. Methods ofcalculation of double-integral	2
36	Geometric and mechanical applications of dooble integral. Geometric and mechanical applications of integral integral	2
37	Multiple integral, its basic properties and calculation methods.	2
38	Geometrical and mechanical applications of the multiple integral.	2
39	Curl integral and its properties.	2
40	Numeric Series and their approximation.	2
41	Sufficient conditions for approaching a positive number of series.	2
42	Sign - variable numericl series	2
43	Functional series.	2
44	Power series.	2
45	Taylor and McLauren series.	2
46	Fure series	2
For the 2nd season:		**54**
47	Complex numbers and arithmetic operations on them.	2
48	Function of a complex argument and its derivative. The Cauchy-Riemann conditions. Integral of Complex Variable Functions. Formula of Cauchy.	2
49	Differential Equations. Differential Equations and Their Solutions	2
50	Some Differential Equations of first order and Their Solutions	2
51	High order differential equations	2
52	A homogeneous linear Differential equations of second order with constant coefficients	2
53	Nonhomogeneous linear Differential equations of second order with constant coefficients	2

54	Laplace Transforms and its properties.	2
55	Restore the initial function of the Laplace Transforms. Solving differential equations with the help Laplace Transforms	2
56	Mathematical physics equations and their types. Equation of oscillations of a string.	2
57	The distribution of heat in the restricted sterile. Correct issues.	2
58	Theory of Probability. Events and action on them. Probability, its classical, geometrical, statistical definitions and main properties	2
59	Theorems of adding and multiplication of probabilities.	2
60	Full probability and Bayesian theorem.	2
61	Bernoulli's theorem. Mower-Laplace theorems.	2
62	Discrete accidental variables, their distribution laws and basic numericalcharacteristics.	2
63	Distribution function. Density function. Maincontinuous distributions and their numerical characteristics	2
64	Elements of Mathematical statistics.	2
For 3rd season:		**36**
	On the full:	**144**

RECOMMENDED THEMES OF PRACTICAL STUDYES

Matrix and determinants. Matrices and actions on them. Determinant. Determinants calculation. Determinant properties. Matrix color. Inverse matrix.

Used Learning Technologies: Dialogue, Problematic Education.

References: A4; K5; K7; K11; K12; K14.

Systemoflinear equations. Kramer's theorem. Methods of solving system of linear equations. The general theory of linear equations. Kroneker-Kapelli theorem.

Used Learning Technologies: *Dialogue, Problematic Education, Individual Education.*

References: A4; K5; K7; K11; K12; K14.

R^n - arifmet vector space. Arithmetic vector space. N^{th} Knowing the basic concepts about space vector. The vector system. R^n space vector coordinates. Same-sex fundamental equations system solutions. Norms of the system of equations of the line. Vector format solutions, the line Analysis of the theory of algebra and economic issues. Implementation.

Study technologies, used in education: dialogue, education, uujum automatic, case-study, pinbord paradoxes.

References: A4; K5; K7; K11; K12; K14.

Analytical geometry elements. A straight line on the plain. Secondary plane curves on the plane. Linear equations in the phase. Fuzzy Line Equations in Phase.

Used Learning Technologies:*Dialogue, Problematic Education, Key Stage, Pinkbord, Paradoxes.*

References: A4; K5; K7; K11; K12; K14.

Scattered phases. Euclidean spaces. Linear operators. Original vectors of a linear operator. Squared forms.

Technologies, used in education: *the pop-up Study, education, case-study, pinbord, paradoxes.*

References: A4; K5; K7; K11; K12; K14.

A variable function. Multiple multivariable features. R^n space in the space between the points. R^n is the limit of the sequence of pixels in the space. Single and multiple variables. Limit of the function of one and multiple variables. Single and multiple variability function continuity. Functional variability and variation of variables. Differentiation rules. High Order Extravagant and Differentials. Basic theorems about differentiable functions. Taylor formula. Lopital rule. Analyze the function using an elementary integral. An integral integral. Newton - Leibniz formula. Geometric and economic applications of an integral integral. X, osm integrals.

Study of technologies used in education: *dialogue, education, case-study, pinbord paradoxes.*

References: A4; K5; K7; K11; K12; K14.

Differential equations. Basic concepts about differential equations. Differential equations of the first order. Second order linear differential equations. Differential Equations System.

Study of technologies used in education: *dialogue, education, tomatic, case-study, pinbord paradoxes.*

References: A4; K5; K7; K11; K12; K14.

CALENDAR PLAN FOR PRACTICAL STUDY OF SUBJECT "MATHEMATICS"

№	Theme Subjects	Size (in hours)
1	Matrix and action on them.	4
2	Determinants and their properties	2
3	System of Linear equations and their methods of solutions.	4
4	Vectors and arithmetic operations on them.	2
5	Scalar product of vectors, their properties and application. Vector product, their properties and applications.Mixt products of vectors, their properties and applications	4
6	Analytical geometry in the plane and its basic problems.	2

7	Equations in line on plane. Basic problems of line on plane	4
8	Second order lines. Circles and ellipses. Hyperbola and parabola. Conical cuts.	4
9	Analytical geometry in the field.Equations of plane. Basic Problems of plane.	4
10	Line Equations onfield. Basic problems of Line on field. Mixed problems.	4
11	Functions and related concepts.	2
12	Limit of a Function and its properties	2
13	Continuous Functions and Their Properties	4
14	Derivative of a Functionand calculation rules of it.	2
15	Rules of Differentiation of a Function.High order derivatives and differentials.	2
16	Investigation of the Function Using one order derivative.	2
17	Investigation of the Function Using two order derivative.	2
18	Complately Investigation of the Function	2
19	Indefinityes and L’Hôpital’s Rules	2
For the 1st season:		**54**
20	Primitive function and indefinite integral.Integral table.	2
21	Methods for calculating Indefinite integral.	2
22	Rational fractions and their integration	2
23	Integration of irrational expressions. Euler changes.	2
24	Integration of some expressions involving trigonometric functions.	2
25	Defination of definite integral and its simplest properties. Properties of a precise integral.	2

26	Methods for calculating definite integral	2
27	Improper integrals	2
28	Geometric and mechanical applications of definiteintegral.	2
29	Elements of approximate computation of definite integral	2
30	Two variable functions, its limit and continuity.	2
31	Partial Differentiation of function of SeveralVariables Total Differential.	2
32	Derivative of a complex function. Complete derivative. Derived in direction and gradient.	2
33	High order direvatives and differentials.	2
34	Local extremes of functions of two variables.	2
35	Double-integral integral and its basic properties. Methods ofcalculation of double-integral	2
36	Geometric and mechanical applications of dooble integral. Geometric and mechanical applications of integral integral	2
37	Multiple integral, its basic properties and calculation methods.	2
38	Geometrical and mechanical applications of the multiple integral.	2
39	Curl integral and its properties.	2
40	Numeric Series and their approximation.	2
41	Sufficient conditions for approaching a positive number of series.	2
42	Sign - variable numericl series	2
43	Functional series.	2
44	Power series.	2
45	Taylor and McLauren series.	2
46	Fure series	2
For the 2nd season:		**54**
47	Complex numbers and arithmetic operations on them.	2
48	Function of a complex argument and its derivative. The Cauchy-Riemann conditions. Integral of Complex Variable Functions. Formula of Cauchy.	2
49	Differential Equations. Differential Equations and Their Solutions	2
50	Some Differential Equations of first order and Their Solutions	2
51	High order differential equations	2
52	A homogeneous linear Differential equations of second order with constant coefficients	2
53	Nonhomogeneous linear Differential equations of second order with constant	2

	coefficients	
54	Laplace Transforms and its properties.	2
55	Restore the initial function of the Laplace Transforms. Solving differential equations with the help Laplace Transforms	2
56	Mathematical physics equations and their types. Equation of oscillations of a string.	2
57	The distribution of heat in the restricted sterile. Correct issues.	2
58	Theory of Probability. Events and action on them. Probability, its classical, geometrical, statistical definitions and main properties	2
59	Theorems of adding and multiplication of probabilities.	2
60	Full probability and Bayesian theorem.	2
61	Bernoulli's theorem. Mower-Laplace theorems.	2
62	Discrete accidental variables, their distribution laws and basic numericalcharacteristics.	2
63	Distribution function. Density function. Maincontinuous distributions and their numerical characteristics	2
64	Elements of Mathematical statistics.	2
For 3rd season:		**36**
	On the full:	**144**

THE FORM AND CONTENT OF ORGANIZATION OF THE INDEPENDENT EDUCATION

Independent student training on "Mathematics" is a part of the process of studying this discipline and is provided with methodological and informational resources.Students listen to the lectures of professors and lecturers in the classroom, solves the examples and problems. Outside audiences, the students prepares for the lessons, interprets the literature, solves the problems and examples as homework. He also prepares and publishes additional literature for a range of topics, and tries to solve themes. Independent learning outcomes are evaluated on a rating system. Homework, supplementary textbooks and literature, independent learning of new knowledge, identifying ways to find and find the necessary information, data acquisition and scientific research, using internet networks, making scientific articles or lectures independently, using scientific sources or lectures, deepen their knowledge, develop their independent thinking and creative abilities. Therefore, independent teaching can not be effective without independent training. Evaluation and evaluation of homework, is carried out by the instructor, who conducts lectures, and conducts assessment in each lesson. The Independent Business Complex on Mathematics covers all the topics of the subject and is shaped in the following themes:

THE FORM AND CONTENT OF THE INDEPENDENT EDUCATION OF STUDENTS

№	Themes of independente trainings	Tasks given	Duration of execution	Size (in hours)
1	Introduction	Oungtlini from refarences. Performing individual tasks	1 st week	2
2	Linear algebra	Oungtlini from refarences. Performing individual tasks	2^{nd}-3^{rd} weeks	10
3	Vector algebra	Oungtlini from refarences. Performing individual tasks.Solution of tasks	4^{th}-5 th weeks	10
4	Analytical geometry in plane	Oungtlini from refarences. Performing individual tasks.Solution of tasks	6 th-7 th weeks	18
5	Analytical geometry in field	Oungtlini from refarences. Performing individual tasks.Solution of tasks	8 th-9 th weeks	12
6	Introductionto mathematical analysis	Oungtlini from refarences. Performing individual tasks.Solution of tasks	10 th-13 th weeks	12
7	Differentialcalculation of function of one variables	Oungtlini from refarences. Performing individual tasks.Solution of tasks	14 th - 18 th weeks	18
Total for 1 st season:				**72**
8	Integralcalculation of function of one variables	Oungtlini from refarences. Performing individual tasks.Solution of tasks	1^{st}-4 thweeks	24
9	Functions of Several Variables	Oungtlini from refarences. Performing individual tasks.Solution of tasks	5^{th}-9 thweeks	14
10	Linear and Curvilinear Integrals	Oungtlini from refarences. Performing individual tasks.Solution of tasks	10^{th}-13 thweeks	14
11	Theory series	Oungtlini from refarences. Performing individual tasks.Solution of tasks	14^{th}-18 thweeks	20
Total for 2^{nd}season:				**72**
12	Complex numbers,function of complex variables.	Oungtlini from refarences. Performing individual tasks.Solution of tasks	1^{st}-4 thweeks	**8**
13	Differentia Equations	Oungtlini from refarences. Performing individual tasks.Solution of tasks	5^{th}-9 thweeks	**12**
14	Operational Accounts	Oungtlini from refarences. Performing individual tasks.Solution of tasks	10^{th}-13 thweeks	6
15	Mathematical Physics	Oungtlini from refarences. Performing individual tasks.Solution of tasks	14^{th}-18 thweeks	6
16	Probability theory and mathematical statistics.	Oungtlini from refarences. Performing individual tasks.Solution of tasks	31-36-ҳафталар	16

For 3 rd season:				48	
Total:				**192**	

INFORMATION METHODOLOGICAL PROVISION OF PROGRAM

The teaching of this subject includes the use of modern teaching methods, pedagogical and information and communication technologies: - the basics of the theory of the algebraic theory, matrix and problem solving equations, using presentations and electronic didactic technologies using modern computer technologies;

- practical exercises on solving the problems of line operators and their actions and analytical geometry in hyphenation spaces are used for intelligent attack, group thinking, "work home" and other pedagogical technologies;

- The use of one and more variable functions, small group competitions, and group thinking pedagogical technologies in practical exercises on differential and integral calculus.

A criterion for evaluating students' knowledge in mathematics

The information about the rating scale, , the type, the number and the maximum number of points assigned to each control, as well as the qualifying points for the current and interim controls for the subject of "Mathematics" are announced to the students during the first academic year.

The following types of supervision are carried out to ensure that the level of knowledge and competence of students on science complies with the state education standards:

• Current control (CC) is the method of identifying and evaluating students' knowledge and practical knowledge on science subjects. The current control may be carried out in practical exercises in the context of the nature of the subject, such as flood, test, interview, supervision, collective survey, homework assignments and so on;

• Interval control (IC) - the method of identifying and evaluating theoretical knowledge and practical skills of the student after the semester (semester) of the curriculum (including a few subjects). Orthodox supervision is carried out twice in one semester and the form (written, oral, test, etc.) is determined by the amount of hours allocated to the subject of teaching;

• Final control (FC) - the method of assessing the degree of transfer of theoretical knowledge and practical skills on a particular subject at the end of the semester. Final control, is mainly, carried out in the form of "Written Works", based on basic concepts and phrases.

The procedure of conducting a hearing is routinely investigated by the head of the department and in the event of violation of the procedure, the results of the case can be abrogated. In these cases, IC will be reverted.

Under the order of the head of the higher education institution, the commission, established under the supervision of the internal control and monitoring department, regularly processes the process of conducting the PRC and, in case of its violation, the results can be canceled. In such cases, the memory will be reset.

The level of students 'knowledge transfer on the basis, of a rating system of students' knowledge, skills and abilities is expressed in points.

Students will be evaluated on a 100-point scale during the semester-long course on Mathematics.

These 100 points are apportioned by the following types of estimates: CC-30 points, IC-40 and FC-30.

Ball	Score	The level of students' knowledge
86-100	Excellently	Excellent judgment and decision-making. Get creative thinking. Independent interpretation. Practical use of the knowledge gained. Explaining the essence. To know, to tell. Distinguishing between ideas.
71-85	Good	Independent interpretation. Practical use of the knowledge gained. Explaining the essence. To know, to tell. Distinguishing between ideas.
55-70	**Satisfactory**	Explanation of Conceptual Characteristics. Knowing, introducing, comprehending.
0-54	**Unsatisfactory**	Not to be Missing Without. Do not know.

The qualifying grade for the competition is 55 points. Reciprocal recruitment scores are not recorded in the Notebook.Independent students' work on subject matter is assessed in the current (CC), interim (IC) and final control (FC), as well as performing relevant assignments and scoring points.

The student's rating on subject is detected as follows:

55% of the total scores allocated to the current and interim control of the subject are the qualifying score and the student, who scores less than this percentage, is not included in the final control.

The student, who scored 55 points or higher on current types of CC and IC is considered to have fulfilled the thesis and is not in the final control (FC) on this subject.The total score scored by the student during the semester is equal to that of the scores, assigned to each of the control types.

The types of IC and FC are based on the rating tables set by the dean of the calendar according to thematic plan. The semester is carried out within the last 2 weeks of the semester.

CC and IC are given a period of time until the next control, and current control (CC) over the current control, to the final control (FC), for which the student, who scored less points than the qualifying score and who failed to participate in the valid reasoned control.

If the student scores at CC and IC for the semester are less than 55% of the total number of these types of controls, or if the semester's final scores are less than 55 points, then he / she is considered to be academic debtor.

If the student is dissatisfied with the results of the examination, he / she can apply to the dean of the faculty within one day from the date of publication of the results of control on the subject. In this case an adjudication commission is formed on the proposal of the dean of the faculty at least at least three (3) members by order of the rector.

The Appeals Commission makes a statement of the students' conclusions.

Assessment is carried out in accordance with the established terms and conditions.

The student's rating on subject is detected as follows:

55% of the total scores allocated to the current and interim control of the subject are the qualifying score and the student who scores less than this percentage is not included in the final control.

The student, who scored 55 points or higher on current types of CC and IC, is considered to have fulfilled the thesis and is not in the final control (FC) on this subject.

The total score scored by the student during the semester is equal to that of the scores assigned to each of the control types.

The types of IC and FC are based on the rating tables set by the dean of the calendar according to thematic plan. The semester is carried out within the last 2 weeks of the semester.

CC and IC are given a period of time until the next control, and current control over the current control, to the final control, for which the student who scored less points than the qualifying score and who failed to participate in the valid reasoned control.

If the student scores at CC and IC for the semester are less than 55% of the total number of these types of controls, or if the semester's final scores are less than 55 points, then he / she is considered to be academic debtor.

If the student is dissatisfied with the results of the examination, he / she can apply to the dean of the faculty within one day from the date of publication of the results of control on the subject. In this case an adjudication commission is formed on the proposal of the dean of the faculty at least at least three (3) members by order of the rector.

The Appeals Commission makes a statement of the students' conclusions.

Assessment and timely execution of the assessment, are made by the dean of the faculty, the head of the department, the educational-methodical management and internal control and monitoring department.

Standard criteria for student scores from Interval control (IC)

№	Indicators	Interval control points		
		Max.	**1-IC**	**2-IC**
1	Level of attendance.Activity in lecture classes, completeness and completeness of the concept books.	**10**	**0-5**	**0-5**
2	Timely and qualitative performance of students and independent learning assignments.	**10**	**0-5**	**0-5**
3	Oral questionnaires, colloquium and other types of control	**10**	**0-5**	**0-5**
Total IC points:		**30**	**0-15**	**0-15**

Typical criteria for students scoring from Current control (CC)

№	Indicators	Current control points		
		Max.	**1-CC**	**2-CC**
1	**The level of attendance and learning outcomes.** **Activity in lessons, fullness of the concepts**	**15**	**0-7**	**0-8**
2	**Timely and qualitative performance of independent teaching assignments.**	**15**	**0-8**	**0-7**
3	**Answers to written questions or test questions**	**10**	**0-5**	**0-5**
Total FC Points:		**40**	**0-18**	**0-17**

If final control is set to "Written Works," the final control will be based on a 30-point written study.

If final control is based on centralized testing, then the final control (FC) is executed in two parts, ie the final control is based on the following table

№	Indicators	**Points**	
		Max.	Change interval
1	Final written work supervision	**6**	**0-6**
2	Final test on Science	**24**	**0-24**
Totalpoints		30	0-30

EVALUATION CRITERION FOR "WRITTEN WORKS" IN FINAL CONTROL (FC).

When final control (FC) is performed in the form of "Written Works," the test will be executed in multiplication. Each variant consists of 2 theoretical questions and 3 practical assignments. Theoretical questions, are based on the basic words and phrases on science, covering all subjects of science.

Answers to each theoretical question are evaluated at 0-6 points. Practical assignments are evaluated at 0-6 points. The student can score a maximum of 30 points.For each of the questions, included in the option for the generalization test on the written test, the points for the answers are put together and the final score is the final score of the student's final control.

RECOMMENDED LIST OF REFERENCES:

Main References:

1. Klaus Weltner, Wolfgang J. Weber, Jean Grosjean, Peter Schuster. Mathematics for Physicists and Engineers. Germany. Springer. 2009, 598 p.
2. Wolfgang Ertel. Advanced Mathematics for Engineers. Regensburg, 2012. 227p.
3. Sean Mauch. Introduction to Methods of Applied Mathematics or Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers. USA, 2004. 2321 p.
4. Gerd Baumann. Mathematics for Engineers II. Calculus and Linear Algebra. Germany 2010. 325p.
5. 14. Claudio Canuto & Anita Tabacco. Mathematical Analysis II Second Edition. Springer International Publishing Switzerland 2015. 347p.

AdditionalReferences:

1. Danko P.E. i dr. Высшая математика в упражнениях и задачах. Frequency I, II. Uchebnoe posobie. M .,2007.
2. Latipov X. and others. Analytical geometry and linear algebra. T. Uzbekiston, 1995. - 198 p.
3. Tojiev Sh. Solving Problems in Higher Mathematics. T.: "Uzbekistan", 2002. - 380 pages.
4. Rakhimov D.G. The model of accelerated lectures based on pedagogical technologies in the subject "High Mathematics". Tashkent. OUMKDTRM, 2012.-116 pages.
5. John Bird. Higher Engineering Mathematics. Fifth Edition. An imprint of Elsevier Linacre House, Jordan Hill, Oxford OX2 8DP 30 Corporate Drive, Suite 400, Burlington, MA01803, USA, 2006y. 745p.
6. Carl M. Bender, Steven A. Orszag. Advanced mathematical methods for scientists and engineers.
7. David B.Surowski. Advanced High-School Mathematics. Shanghai, China 2011y. 435p.
8. John K. Hunter. APPLIED MATHEMATICS. Methods and Models. California 2009y. 178p.
9. Juraev TJ, Hudoyberganov R.X., Vorisov A.K., Mansurov X. Fundamentals of Higher Mathematics. Textbook. Tashkent., 1999, 290 pages.
10. Rasulov NP, Safarov I.I., Muhitdinov R.T. Higher Mathematics. Textbook, Tashkent, 2012, 513 p.
11. Soatov Yo.U. High mathematics. I, II section. "Teacher". 1994.

The sites ofInternet and Ziyonet:

1. http://ziyonet.uz

2. http://txt.uz

3. http: //www.exponenta ru / soft / Mathemat. / Mathemat.asp.

4. http://www.albest.ru/catalog/a5/a101275.html

5. http://student.km.ru/. http://mathc.chat. ru.

6. http: // www. i math kiev.ua.

7. http://techlibrary.ru/

“МАТЕМАТИКА” ФАНИ БУЙИЧА МАЪРУЗА МАШҒУЛОТЛАРИНИНГ КАЛЕНДАР ТЕМАТИК РЕЖАСИ.

№	Мавзулар номи	Соат
1	Матрицалар ва улар устида амаллар.	2
2	Матрицалар ва улар устида амаллар.	2
3	Аниқловчилар ва уларнинг хоссалари.	2
4	Чизиқли тенгламалар системаси ва уни ечиш усуллари.	2
5	Чизиқли тенгламалар системаси ва уни ечиш усуллари.	2
6	Векторлар ва улар устида арифметик амаллар. Векторларнинг координаталари ва улар устида амаллар	2
7	Векторларнинг скаляр кўпайтмаси, унинг хоссалари ва татбиқлари.	2
8	Векториал кўпайтма, хоссалари ва татбиқлари. Векторларнинг аралаш кўпайтмаси, унинг хоссалари ва татбиқлари	2
9	Текисликда аналитик геометрия ва унинг асосий масалалари.	2
10	Текисликдаги туғри чизиқ тенгламалари	2
11	Текисликдаги туғри чизиқларга доир асосий масалалар	2
12	Иккинчи тартибли чизиқлар. Айлана ва эллипс.	2
13	Гипербола ва парабола. Коник кесимлар.	2
14	Фазода аналитик геометрия. Текислик тенгламалари .	2
15	Текисликка доир асосий масалалар.	2
16	Фазодаги туғри чизиқ тенгламалари.	2
17	Фазодаги тўғри чизиққа доир асосий масалалар. Аралаш масалалар	2

18	Функция ва у билан боғлиқ булган тушунчалар.	2
19	Функция лимити ва унинг хоссалари.	2
20	Ажойиб лимитлар.	2
21	Узлуксиз функциялар ва уларнинг хоссалари	2
22	Функция ҳосиласи ва уни ҳисоблаш қоидалари.	2
23	Функцияни дифференциаллаш қоидалари. Юқори тартибли ҳосила ва дифференциаллар.	2
24	Функцияни I тартибли ҳосила ёрдамида текшириш	2
25	Функцияни II тартибли ҳосила ёрдамида текшириш.	2
26	Функцияни тулиқ текшириш.	2
27	Аниқмасликлар ва Лопитал қоидалари.	2
Жами 1- мавсум бўйича		**54**
28	Бошланғич функция ва аниқмас интеграл. Интеграллар жадвали.	2
29	Аниқмас интегрални ҳисоблаш усуллари.	2
30	Рационал касрлар ва уларни интеграллаш.	2
31	Иррационал ифодаларни интеграллаш. Эйлер алмаштирмалари.	2
32	Тригонометрик функциялар қатнашган баьзи ифодаларни интеграллаш.	2
33	Аниқ интеграл таьрифи ва унинг энг содда хоссалари. Аниқ интегралнинг хоссалари.	2
34	Аниқ интегрални ҳисоблаш усуллари.	2
35	Хосмас интеграллар	2
36	Аниқ интегралнинг геометрик ва механик татбиқлари.	2
37	Аниқ интегрални тақрибий ҳисоблаш формулалари.	2
38	Икки ўзгарувчили функция, унинг лимити ва узлуксизлиги.	2
39	Икки ўзгарувчили функциянинг хусусий ҳосилалари. Тўла дифференциал.	2

40	Мураккаб функциянинг ҳосиласи. Тўла ҳосила. Йўналиш бўйича ҳосила ва градиент.	2
41	Юқори тартибли ҳосила ва дифференциаллар	2
42	Икки ўзгарувчили функциянинг локал экстремумлари.	2
43	Икки каррали интеграл ва унинг асосий хоссалари. Икки каррали интегрални ҳисоблаш усуллари	2
44	Икки каррали интегралнинг геометрик ва механик татбиқлари.	2
45	Уч каррали интеграл , унинг асосий хоссалари ва ҳисоблаш усуллари.	2
46	Еч каррали интегралнинг геометрик ва механик татбиқлари.	2
47	Егри чизиқли интеграл ва унинг хоссалари.	2
48	Сонли қаторлар ва уларнинг яқинлашиши.	2
49	Мусбат ҳадли сонли қаторлар яқинлашишининг етарли шартлари.	2
50	Ўзгарувчан ишорали сонли қаторлар.	2
51	Функционал қаторлар.	2
52	Даражали қаторлар.	2
53	Тейлор ва Макларен қаторлари.	2
54	Фурье қаторлари	2
	2-мавсум бўйича	**54**
55	Комплекс сонлар ва улар устида арифметик амаллар.	2
56	Комплекс аргументли функция ва унинг ҳосиласи. Коши–Риман шартлари. Комплекс ўзгарувчили функцияларни интеграли. Коши формуласи.	2
57	Дифференциал тенгламаларга келувчи масалалар. Дифференциал тенгламалар ва уларнинг ечимлари	2
58	Баьзи I тартибли дифференциал тенгламалар ва уларни ечиш	2
59	Юқори тартибли дифференциал тенгламалар.	2
60	II тартибли чизиқли ўзгармас коеффициентли бир жинсли дифференциал тенгламалар.	2
61	II тартибли чизиқли ўзгармас коеффициентли биржинслимас дифференциал тенгламалар.	2
62	Оригинал ва тасвир. Тасвирларни жадвал ва Лаплас алмаштирмасининг хоссалари ёрдамида топиш.	2
63	Тасвирларга кўра бошланғич функцияни топиш. Операцион ҳисоб ёрдамида дифференциал тенгламаларни ечиш.	2
64	Математик физика тенгламалари ва уларнинг турлари.Тор тебраниш тенгламаси.	2
65	Иссиқликнинг чегараланган стерженда тарқалиши. Коррект масалалар.	2
66	Еҳтимолликлар назарияси. Ҳодисалар ва улар устида амаллар. Эҳтимоллик,	2

	унинг классик, геометрик, статистик таьрифлари ва асосий хоссалари.	
67	Еҳтимолликларни қўшиш ва кўпайтириш теоремалари.	2
68	Тўла эҳтимол ва Байес теоремаси.	2
69	Бернулли теоремаси. Муавр Лаплас теоремалари.	2
70	Дискрет тасодифий миқдорлар, уларнинг тақсимот қонуни ва асосий сонли характеристикалари	2
71	Тақсимот ва зичлик функциялари. Асосий узлуксиз тақсимотлар ва уларнинг сонли характеристикалари	2
72	Математик статистика элементлари.	2
	3-мавсум бўйича	**36**
	Жами	**144**

O’ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O′RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

BUXORO MUHANDISLIK-TEXNOLOGIYA INSITUTI

«OLIY MATEMATIKA» kafedrasi

«Oliy matematika» fanidan

MA'RUZALAR TO′PLAMI

BUXORO–2016

Ushbu ma'ruzalar matnlari "Oliy matematika" kafedrasining 2016 yil 25 avgust kungi yig′ilishida (majlis bayoni №1) va institut o′quv-uslubiy kengashining 2016 yil kungi majlisida (majlis bayoni №) muhokama etildi va chop etishga tavsiya qilindi.

M U A L L I F:

TESHAYEV M.X. Bux MTI "Oliy matematika" kafedrasi dotsenti, f.-m.f.n., dotsent

T A Q R I Z CH I L A R :

JUMAYEV J. BuxDU "Informatika va AT " kafedra dotsenti, f.-m.f.n., dotsent

YO'LDOSHEV Sh.. Bux MTI "Informatika " kafedrasi mudiri, f.-m.f.n., dotsent

M U H A R R I R:

ISMATOV H.B. Bux MTI "Oliy matematika" kafedrasi dotsenti, t.f.n., dotsent

Ushbu to'plamda " Oliy matematika" fanining ishchi o′quv dasturidagi chiziqli algebra, vektorlar algebrasi, analitik geometriya, matematik analizga kirish, differensial hisob bo'limlari bo′yicha 30 ta ma'ruzalar matni, adabiyotlar ro′yxati keltirilgan.

M U N D A R I J A

Kirish

Mamlakatimizda qabo'l qilingan va amalga oshirilayotgan “Kadrlar tayyorlash milliy dasturi” bo'yicha ta'lim islohotining II bosqichidagi eng asosiy vazifa - tayyorlanayotgan mutaxassislarning sifatini oshirishdan iboratdir.

Yuqori malakali, raqobatbardosh, zamonaviy kadrlar tayyorlashda ularga beriladigan matematik bilimlar katta ahamiyatga ega. Shu sababli informatika va informatsion texnologiyalar yo'nalishlari bo'yicha ta'lim oluvchi bakalavrlarning o′quv rejalarida «Oliy matematika» fanini o'qitish ko'zda tutilgan. Talabalar uchun bu fanni o'qitishda ushbu maqsadlar qo'yiladi:

1. Kasbiy faoliyat uchun etarli hajmda matematik bilimlar va usullar haqida tushunchalar va ko'nikmalar hosil qilish.
2. Abstrakt va mantiqiy fikrlash qobiliyatlarini hosil qilish va rivojlantirish.
3. Matematika va uning iqtisodiy tadbiqlari bo'yicha adabiyotlarni mustaqil o'rganish orqali bilimlar doirasini kengaytira olish.
4. Informatika va informatsion texnologiyalar ixtisosligi bo'yicha umumkasbiy va maxsus fanlarni o'zlashtirish uchun kerakli matematik poydevorni hosil qilish.
5. Kasb faoliyati jarayonida paydo bo'ladigan amaliy masalalarning matematik modellarini ishlab chiqish va uni tahlil etib, tegishli xulosalar chiqarish.

«Oliy matematika» fani quyidagi asosiy bo'limlardan iborat:

1. Chiziqli algebra
2. Vektorial algebra.
3. Analitik geometriya.
4. Differentsial hisob.
5. Integral hisob.
6. Ko'p o'zgaruvchili funktsiyalar.
7. Oddiy differentsial tenglamalar.
8. Sonli va darajali qatorlar.
9. Kompleks sonlar va kompleks o'zgaruvchili funksiya.
10. Operatsion hisob elementlari.
11. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika.

Ushbu ma'ruzalar to'plamida «Oliy matematika» fanining chiziqli algebra, vektorial algebra, analitik geometriya, differentsial hisob bo'limlari bo'yicha fanning ishchi o'quv dasturida ko'zda tutilgan mavzular yoritilgan.

MATEMATIKANING ASOSIY RIVOJLANISH BOSQICHLARI. HOZIRGI ZAMON MATEMATIKASINING TARKIBI, AHAMIYATI VA TADBIQLARI .

M a ' r u z a   r e j a s i :

1. Matematika fanining predmeti.
2. Matematika fanini abstraktligi.
3. Matematikaning shakllanish davri.
4. Elementar matematika davri.
5. Urta Osiyoda elementar matematika tarakkiyoti.
6. Oliy matematika davri.
7. Xozirgi zamon matematikasi.
8. O′zbekiston matematika maktabi.
9. Matematikaning amaliyotdagi ahamiyati va qo′llanilishi.

Adabiyotlar:

[9]bob. 4-24 bet, 114-123 bet, [14]bob. 5-8 bet.

Eng avvalo “Matematika” fani nimani o’rgatadi? degan savolni qo’yamiz. Bu juda murakkab savol bo’lib, o’nga ta'lim darajasi turli bo’lgan odamlar turli javoblar beradilar. Masalan, boshlang’ich sinf o’quvchilari matematika-narsalarni sanash qoidalarini o’rgatadi deb javob beradilar va bu javobni noto’g’ri deb bo’lmaydi. Chunki bu matematikaning muhim qismi bo’lmish arifmetikani mohiyatini tashkil etadi va u dastlabki tarixiy davrlarda matematikani to’lik o’z ichiga olgan. O’rta sinf o’quvchilari bu javobga matematikani chiziqlar, figuralar, jismlarni, ya'ni geometrik ob'ektlarni ham o’rganadi deb qo’shimcha qiladilar. Yuqori sinf o’quvchilari esa bu savolga matematika funktsiyalarni o’rganishini ham ilova qiladilar. Talabalar oliy o’quv yurtlarida matematikaning differentsial tenglamalar, ehtimolliklar nazariyasi va matematik statistika kabi yangidan-yangi bo’limlarini o’rganadilar va shu sababli ularning javoblari o’quvchilar javobiga nisbatan kengroq va to’laroq bo’ladi.

Ammo barcha bu javoblar bir tomonlama xarakterga ega bo’lib, matematikaning u yoki bu yunalishlarini ifodalaydi. Bu savolga umumiy holda javob berish uchun juda ko’p matematiklar, faylasuflar harakat qilganlar. Hozircha bu savolga eng qoniqarli javob XX asrning buyuk matematigi ***A.N.Kolmogorov*** (1903-1987) tomonidan keltirilgan va quyidagicha ifodalanadi.

T A' R I F : Matematika haqiqiy olamning miqdoriy munosabatlari va fazoviy formalari haqidagi fandir.

Matematika so’zi grek tilidan olingan bo’lib, miqdorlar haqidagi fan degan ma'noni bildiradi.

Matematika boshqa tabiiy fanlardan shu bilan farq qiladiki, u real olamni, atrofimizdagi ob'ekt va jarayonlarni abstraktlashtirilgan holda o’rganadi va shu sababli uning natijalari umumiy xarakterga ega.

Masalan, biologiya tirik hayotni o'rganuvchi fan bo'lib, unda qo′llaniladigan usullar xususiy xarakterga va bu usullarni fizikaga yoki tilshunoslikga tadbiq etib bo'lmaydi. Xuddi shunday gaplarni fizika, ximiya, geologiya va boshqa fanlar tug'risida aytish mumkin.

Ammo arifmetikaning qonun – qoidalarini biologiya ob'ektlariga ham, fizik-ximik tadqiqotlarga ham, iqtisodiy masalalarni echishda ham, qishloq xo'jaligida ham bir xil muvaffaqiyat bilan qo'llash mumkin. Shu sababdan ham XIX asrning buyuk matematigi ***Gauss*** «Arifmetika - matematikaning podshohidir, matematika esa barcha fanlarning podshohidir.» -deb bejiz aytmagan.

Albatta, matematika bunday ulkan bahoga erishishi uchun uzoq taraqqiyot yo'lini bosib o'tishga to'g'ri kelgan. ***A.N.Kolmogorov*** o'zining 1954 yilda qobusnoma uchun yozilgan va “Matematika “ deb atalgan maqolasida bu taraqqiyotni ushbu to'rt davrga ajratadi.

I. Matematikaning shakllanish davri.
II. Elementar matematika davri.
III. O'zgaruvchi miqdorlar matematikasi davri. Bu davrni shartli ravishda “Oliy matematika “davri deb ham aytish mumkin.
IV. Hozirgi zamon matematikasi davri.

Shuni ta'kidlab utish kerakki, har bir keyingi davrda elementar matematikani rivojlanishi to'xtab qolgan emas.

I. Matematikaning shakllanish davri eramizdan oldingi VI-V asrgacha davom etdi. Bu davrda insoniyat turli predmetlarni sanashni o'rgandi. Sanoq sistemalari oldin og'zaki holda ishlatilgan. Yozma sanoq sistemalarini kashf etilishi bilan natural sonlar ustida turli arifmetik amallar bajarish qonun-qoidalari topila boshlandi. Yullarni uzunligini o'lchash, daromadlarni va etishtirilgan hosilni taqsimlash kabi masalalar natijasida kasr sonlar tushunchasi va ular ustida arifmetik amallar bajarish qoidalari ishlab chiqildi.

Natijada, eng qadimiy matematik fan- arifmetikaga asos solindi. Maydonlarni o'lchash, jismlar hajmlarini hisoblash, turli ish qurollarini yaratishga extiyoj paydo bo'lishi bilan geometriyaning kurtaklari shakllana boshlandi. Shunisi qiziqqi, bu jarayonlar turli xalqlarda bir-biriga bog'likmas ravishda, parallel ko'rinishda amalga oshdi.

Ayniqsa bu jarayonlar Misr va Vavilon davlatlarida yaqqol namoyon bo'ldi.

II. Elementar matematika davri eramizdan oldingi V asrdan boshlab XVII asr boshlarigacha davom etdi. Oldingi davrdagi matematik bilimlar tarqoq,xususiy ko'rinishdagi natijalardan, qonun-qoidalardan iborat edi. Ularni birlashtirish, umumiy ko'rinishga keltirish qadimgi Gretsiyadan boshlandi va matematika fanini ilmiy poydevoriga asos solindi.

Evklidning “***Negizlar***” asarida elementar geometriya fani aksiomatik ravishda ifodalandi va bu asar 2 ming yil davomida boshqa matematik fanlarni asosini yaratishga misol, namuna sifatida xizmat qilib keldi. Qadimgi Gretsiyada matematikaning (asosan geometriyani) rivojlanishiga ***Pifagor, Aristotel, Arximed, Geron, Diofant, Ptolomey*** kabi mutafakkirlar katta hissa qo'shdilar.Turli gidrotexnik ko'rilishlar (masalan, Arximed vinti), harbiy mashinalar, Arximedni tosh otuvchi qurilmalari, oynalar sistemasida kemalarni yondirib yuborish, dengizda suzish uchun kerakli bilimlar, geodeziya va kartografiya, astronomik kuzatishlar bilan bog'lik masalalar matematikani rivojlanishiga katta turtki bo'ldi.

Kurilayotgan davrning IX-XV asrlari davomida matematikaning rivojlanishiga O'rta Osiyo olimlarining hissasi katta bo'ldi. Bu vaktda arablar juda ko'p yerlarni bosib olib, arab xalifaligiga birlashtirdilar. Bu yerlarda olimlar yagona arab tilidan foydalana boshladilar va bu ular orasidagi aloqalarni mustahkamlanishiga olib keldi. Bundan tashqari o'sha davrda katta ilmiy tadqiqodlar davlat tomonidan moliyalashtirila boshlandi. Bu omillar bu yerda ilmni rivojlanishiga, katta kutubxonalar tashkil etilishiga, rasadxonalar qurilishiga olib keldi.

IX asrda yashab ijod etgan xorazmlik olim ***Muhammad ibn Muso al Xorazmiy*** birinchi bo'lib o'zining "*Aljabr*" asarida algebra faniga asos soldi. Yevropalik olimlar bu kitob orqali kvadrat tenglamalarni echish usuli bilan tanishdilar. X asrda Beruniy $x^3+1=3x$ ko'rinishdagi kub tenglamani taqribiy yechish usulini topdi. XI-XII asrda yashagan ***Umar Xayyom*** kub tenglamalarni umumiy holda tekshirdi, ularni sinflarga ajratdi va echilish shartlarini topdi. XIII asrda ijod etgan ozarbayjon matematigi ***Nasriddin Tusiy*** sferik trigonometriyani asos solinishiga yakun yasadi va ***Evklidning*** "*Negizlar*" kitobini arab tiliga tarjima qildi. XV asrda buyuk astronom va matematik ***Mirzo Ulugbek*** (1394-1449) "*Ziji Kuragoniy*"asarida 1018 ta yulduzning koordinatalarini nihoyatda katta aniqlik bilan hisoblab berdi. Bu ishda rasadxonada eng zamonaviy aniq asboblardan foydalanilgani bilan bir qatorda yirik matematiklar ham ishlaganini ko'rsatib utish kerak. Ulardan eng mashhuri ***G'iyosiddin Jamshid ibn Masud ali Qushchi*** bo'lib hisoblanadi. U o'nli kasrlar ustida arifmetik amallar bajarish qonun–qoidalarini batafsil bayon qilib berdi (o'ngacha O'rta Osiyoda asosan oltmishlik sanoq sistemasi qo'llanilgan). Yevropada bu natijalarga atigi XVI asrda erishildi. Ali Qushchi Nyuton binomi formulasini natural sonlar uchun og'zaki ko'rinishda ifodaladi, "***Aylana haqidagi risola" asarida*** (sonini 17 xona aniqliqda hisobladi, astronomik hisoblashlar uchun kerak bo'lgan sinuslar jadvalini tuzish uchun tenglamalarni iteratsion usulda sonli yechish yo'lini ko'rsatdi.

Hindistonning matematikaga qo'shgan eng katta hissasi-unli sanok sistemasi uchun raqamlar va nolni kashf etilishidir. Bu raqamlar yevropaliklarga arab matematiklari asarlari orqali ma'lum bo'lgani uchun hozirgi paytda notug'ri ravishda «arab raqamlari» deb ataladi.

Elementar matematikaning rivojlanishiga Xitoy olimlarining ham katta ulushi bor.

XII-XV asrlar davomida Garbiy Yevropa matematiklari asosan qadimgi Gretsiya va Sharq matematiklarining ishlarini o'rganish bilan shug'ullanib kelganlar, matematik bilimlarni ommalashtirish maqsadida turli asarlar yozganlar, matematik simvollarni kashf etganlar. Ammo XVI asrdan boshlab bu yerlik olimlar tomonidan yirik kashfiyotlar qilina boshlandi va yuksalish davri boshlandi. Masalan, polyak olimi ***Kopernik*** ning astronomik kashfiyoti, italiyalik olim ***Galileyning*** mexanika bo'yicha qator kashfiyotlari matematikani rivojlanishiga turtki bo'ldi.

Italiyalik matematiklar ***Tartaliya, Ferrari, Kardano*** uchinchi va to'rtinchi tartibli algebraik tenglamalarni echish usullarini topdilar (oldin bu tenglamalar taqribiy yechilar edi.) Frantsuz matematigi ***Viet*** n- darajali tenglama ildizlari bilan uning koeffitsientlari orasidagi munosobatlarni topdi.

III. Oliy matematika davri XVII asrdan boshlandi. Elementar matematikada kattaliklar va geometrik ob'ektlar ko'zgalmas, o'zgarmas miqdorlar kabi qaralar edi. Matematikada endi harakatlanuvchi va o'zgaruvchi mikdorlarni qurishga to'g'ri kela boshladi. Masalan, ***Boyl-Mariot*** (1662) gaz hajmi bilan uning bosimi o'rtasida o'zaro bog'lanish mavjud ekanligini, ***Guk*** (1660) esa qattik jismning deformatsiyalanishi ε va kuchlanishi σ orasida $\sigma=\alpha\varepsilon$ ko'rinishdagi chiziqli bog'lanish mavjud ekanligini aniqladilar. Bu qonunlarda ikki o'zgaruvchi miqdor orasidagi o'zaro bog'lanishni o'rganishga to'g'ri keldi va bunday bog'lanishlar funktsiya tushunchasiga olib keldi. Elementar matematikada (arifmetikada) son qanday asosiy ahamiyatga ega bo'lsa, oliy matematikada funktsiya shunday asosiy ahamiyatga egadir. Funktsiyalarni o'rganish matematik tahlil degan fanga olib keldi. Bu fanda limit, hosila, integral kabi tushunchalar kiritildi. Nemis matematigi ***Leybnits*** 1682-1686 yillarda va ingliz matematigi, mexanigi ***Nyuton*** 1665-1666 yillarda differentsial va integral hisobni kashf etdilar.

Bu davrda matematikani rivojlanishiga ***Dekart, Fure, Paskal, Ferma, Gyuygents, Bernulli, Eyler, Lagranj, Dalamber, Koshi*** kabi buyuk olimlar katta hissa qo'shdilar. Bu davrda matematik tahlilni rivojlantirish bilan bir qatorda analitik geometriya, differentsial tenglamalar, ehtimollar nazariyasi kabi yangi fanlarga asos solindi.

IV. Hozirgi zamon matematikasi davri XIX asr boshidan hisoblanadi. Oldingi davrlarda matematikaning rivojlanishi amaliy masalalarni echish natijasida amalga oshgan bo'lsa, endi matematika o'z ichki qonuniyatlari bo'yicha ham rivojlana boshladi. Bu rivojlanish oldin topilgan tushunchalarni, natijalarni umumlashtirish, ularni mantiqiy jihatdan tugallanganligiga erishish, oldingi natijalarni hozirgi zamon yutuqlari asosida qayta ko'rib chiqish, tahlil etish kabi yunalishlarda amalga oshadi. Masalan, x^2-1=0 kvadrat tenglama x=±1 ildizga ega ekanligi malum, ammo o'nga juda o'xshash x^2 +1=0 tenglama haqiqiy sonlar ichida ildizga ega emas. Shu sababli haqiqiy sonlardan kengroq, umumiyroq bo'lgan kompleks sonlar tushunchasini kiritishga to'g'ri keldi. XIX asrda kompleks sonlar va ularning funktsiyalarini o'rganish natijasida «Kompleks taxlil» fani paydo bo'ldi. Bu nazariyaning amaliyotga tadbiqlari keyinchalik topildi.

Algebraik tenglamalarni echish masalalari bilan shug'ullanish natijasida ***Abel, Galua*** (1830) tomonidan guruhlar nazariyasi yaratildi. XX asrdagina guruhlar nazariyasi kristallarni o'rganishda, kvant fizikasida o'z tadbig'ini topdi.

XIX asrda matematika fanining juda ko'p sohalarga qullanilishi, tarkibini juda kengayishi natijasida uning poydevorini ilmiy nuqtai-nazardan qayta ko'rib chiqish yoki yaratish masalalari muhim ahamiyatga ega bo'ldi. Matematik fanlarning asosiy poydevori sifatida to'plamlar nazariyasi va matematik mantiq olindi. XX asrda juda kup matematik fanlar poydevori to'plamlar nazariyasi asosida yaratildi. XIX-XX asrda yangi matematik fanlarga ham asos solindi va rivojlantirildi. Masalan, to'plamlar nazariyasi, matematik mantiq, haqiqiy o'zgaruvchili funktsiyalar nazariyasi, funktsional tahllil, topologiya, matematik fizika masalalari.

O'zbekistonda matematika fanining rivojlanishiga to'xtalib o'taylik. O'zbekistonda matematika fani bo'yicha yutuqlar Toshkentda 1920 yilda universitet tashkil etilishi bilan bog'lik. O'zbekistonga kelgan rus olimlari ichida ***V.I.Romanovskiy*** ham bor edi. U matematik statistika bo'yicha ko'zga ko'ringan olim edi va u o'zbek matematika maktabini yaratishga katta hissa qo'shdi. O'zbek matematiklaridan birichi bo'lib akademik ***Kori-Niyoziyni*** ko'rsatish mumkin. U matematika bo'yicha katta ilmiy ishlar qilmagan bo'lsada, matematikani targib kilish, o'zbek tilida darsliklar yozish bilan O'zbekistonda matematikani rivojlanishiga katta hissa ko'shdi. Dunyoga tanilgan matematiklarimizdan akademik T.A.Sarimsokov (1915-1995), akademik S.X. Sirojiddinov(1920-1988), M.S. Saloxitdinov funktsional tahlil, matematik statistika, matematik fizika tenglamalari bo'yicha juda katta kashfiyotlar qilib, o'zbek matematika maktabini jahonga tanittirdilar.

Matematikaning amaliy tadbirlari bo'yicha ba'zi bir misollarni keltiramiz.

1.1845 yilda fransuz matematigi ***Levere Uran*** planetasi trayektoriyasi tenglamasini tekshirib, bizga noma'lum osmon jismi borligini, uning trayektoriyasini va massasini nazariy yo'l bilan, ya'ni "qalam uchida" xisoblab topdi. U ko'rsatgan koordinatalar bo'yicha 1846 yil 23 sentyabr kuni nemis astronomi ***Galle*** teleskopda Neptun planetasini kashf etdi. Xuddi shunday ravishda 9-planeta 1915 yilda qilingan matematik xisoblar asosida 1930 yili kashf etildi.

2. Neytron, kvark kabi elementlar zarrachalarining mavjudligi va ularning xossalari tajribalar asosida emas,xisoblashlar asosida kashf etildi.

3.Samolyotlarning uchish uzoqligi kattalasha borishi bilan ularni avtomatik boshkarish masalasi paydo bo'ldi. Bu masalani ***L.S. Pontryagin*** (Rossiya) va ***Belman*** (AQSh) kabi matematiklar hal qilib, optimal boshkarish nazariyasi degan yangi fanga asos soldilar.

4.Telefon aloqasini rivojlanishi bilan aloqa bo'limlarida abonentlarni navbatda qancha kutib turish vaqtlari kabi masalalar natijasida amerikalik olim ***Erlang*** "Ommaviy xizmat ko'rsatish nazariyasi" nomli yangi matematik fanga asos soldi.

5.Kosmosni o'zlashtirish muammolarini yechishda matematika roli benihoyat kattadir. Akademik ***Keldo`sh*** (Rossiya) raxbarlik qilgan "Amaliy matematika" ilmiy-tekshirish institutida bu masalalarni yechish usullari ishlab chiqildi va ular EXM lar yordamida amalga oshirildi.

6.Iqtisodiyotda xalk xo'jaligini boshkarish uchun amerikalik iqisodchi-olim ***Leontev*** tomonidan tarmoklararo muvozanatning matematik modellari ishlab chiqildi va uning tenglamalari yechilib, ishlab chiqrishni oqilona boshkarishga erishildi.

7.Akademik ***Kantorovich*** (Rossiya) materiallardan andoza olishning kamchiqim yo'llarini axtarish bilan shug'ullandi va natijada chiziqli dasturlash nomli yangi matematik fanga asos soldi. Bu fan natijalari asosida xalk xo'jaligida juda katta iqtisodiy foydaga erishildi va shu sababli Kantorovich iqtisodiyot bo'yicha *Nobel* mukofotiga sazovor bo'ldi.

Bunday misollarni yana ko'plab keltirish mumkin va ular matematikaning qanchalik darajada ahamiyatli ekanligini ifodalaydi.

O'z-o'zini nazorat etish savollari.

1. Matematika fani predmeti akademik A.N. Kolmogorov tomonidan qanday ta'riflangan?
2. Matematika boshqa tabiiy fanlardan qanday xususiyati bilan ajralib turadi?
3. Matematikaning rivojlanish davri A.N. Kolmogorov tomonidan necha davrga ajratilgan?
4. Matematikaning shakllanish davri qanday xususiyatlarga ega?
5. Elementar matematika davri qaysi asrlarga to'g'ri keladi?
6. Elementar matematika davri qanday xususiyatlarga ega?
7. O'rta Osiyolik olimlarning elementar matematika rivojlanishiga qo'shgan xissalarini ko'rsatib o'ting.
8. Oliy matematika davri qaysi asrlarga to'g'ri keladi?
9. Oliy matematika davrining asosiy xususiyatlari nimalardan iborat?
10. Hozirgi zamon matematikasining asosiy xususiyati nimadan iborat?
11. O'zbek matematiklaridan kimlarni bilasiz va ularning xizmatlari nimadan iborat?
12. Matematikaning amaliy masalalarni echishga tadbiqlaridan qaysi birini bilasiz?

1-MA’RUZA

MATRITSALAR VA ULAR USTIDA AMALLAR.

Tayanch iboralar: matritsa, matritsa tartibi, matritsa elementi, to′rtburchakli matritsa, kvadrat matritsa, ustun matritsa, satr matritsa, matritsalar tengligi, diagonal elementlar, diagonal matritsa, birlik matritsa, nol matritsa, matritsani songa ko′paytmasi, matritsalar yig′indisi, ayirmasi, matritsalar ko′paytmasi.

M a ' r u z a   r e j a s i :

1. Matritsa, uning tartibi va elementlari.
2. Matritsalarning turlari.
3. Matritsalar tengligi.
4. Birlik va nol matritsa.
5. Matritsani songa ko′paytirish.
6. Matritsalarning algebraik yig′indisi.
7. Matritsalarni qo′shish amalining xossalari.
8. Matritsalar ko′paytmasi.
9. Matritsalar ko′paytmasi amalining xossalari.
10. Matritsaning iqtisodiy tadbigiga misol.

Adabiyotlar:

[1] I bob, §22-23, [3] IV bob, §1 , [8] V bob, §60-61, [14]. 9-16.

T A ' R I F 1 : m ta satr va n ta ustundan iborat to′gri to′rtburchak shaklidagi m·n ta sondan tuzilgan jadval mxn tartibli matritsa deb ataladi.

Matritsalar A,B,C kabi bosh lotin harflar bilan, ularni tashkil etuvchi sonlar esa a_{ij}, $в_{ij}$, c_{ij} kabi belgilanadi. Bu sonlar shu matritsaning elementlari deb ataladi. Bu erda i - element joylashgan satrni, j esa ustunning tartib rakamini bildiradi.

Masalan, $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1.2 \\ 0 & 7.5 & -1 \end{pmatrix}$ matritsa 2x3 tartibli matritsa bo′lib, unda $a_{11}=1$, $a_{13}=1.2$, $a_{22}=7.5$. Agarda A matritsaning tartibini ko′rsatishga extiyoj bo′lsa, u A_{mxn} ko′rinishda yoziladi.

T A ' R I F 2 : A_{mxn} matritsada m=n bo′lsa, u kvadrat, $m \neq n$ bo′lsa to′gri to′tburchakli matritsa deyiladi.

Bunda, agar m = 1 bo′lsa, satr matritsaga va n = 1 bo′lsa, ustun matritsaga ega bo′lamiz. m=1 va n =1 bo′lganda matritsa bitta sonni ifodalaydi. Demak, matritsa ma'lum bir ma'noda son tushunchasini umumlashtiradi.

T A ' R I F 3 : A va B matritsalar teng deyiladi (A=B deb yoziladi), agarda ular bir xil tartibli va ularning mos elementlari o′zaro teng bo′lsa, ya'ni $a_{ij}=в_{ij}$ shart bajarilsa.

Masalan,

$A = \begin{pmatrix} a+a & a-a \\ a:a & a\cdot a \end{pmatrix}$ ~~a+a , a-a~~ $B = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 1 & a^2 \end{pmatrix}$

~~2a 0~~

~~A = a:a a·a , B = 1 a²~~

bo′lsa, A=B deb yozish mumkin.

$A=\{a_{ij}\}$ matritsada a_{ii} ko′rinishdagi elementlar diagonal elementlar deyiladi.

T A ' R I F 4 : Barcha diagonal elementlari birga teng (a_{ii}=1), kolgan barcha elementlari esa nolga teng (a_{ij} =0, $i \neq j$) bo′lgan kvadrat matritsa birlik matritsa deyiladi va E kabi belgilanadi.

Masalan, $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ~~0 1~~ , $E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ~~0 1 0~~

~~0 1~~

birlik matritsalardir.

~~T~~***T A ' R I F 5*** : Barcha elementlari nolga teng (a_{ij} =0) bo′lgan matritsa nol matritsa deyiladi va 0 kabi belgilanadi.

Masalan,

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, ~~0 0 0 0 0 0 (0 0)~~ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, (0 0 0

0)

nol matritsalar bo′ladi.

T A ' R I F 6 : Bir xil mxn tartibli A va B matritsalar yigindisi yoki ayirmasi deb shunday mxn tartibli S matritsaga aytiladiki, uning elementlari $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$ kabi aniqlanadi va C=A+B deb yoziladi.

Masalan,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 0 & 7 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

matritsalar uchun

$$A + B = \begin{pmatrix} 5+1 & 3+0 & -1+1 \\ 0+2 & 7+(-3) & 2+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 5-1 & 3-0 & -1-1 \\ 0-2 & 7-(-3) & 2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ -2 & 10 & -2 \end{pmatrix}$$

Matritsalar yig′indisi uchun A+B=B+A (kommutativlik),
A+(B+C) = (A+B)+C (assotsiativlik) qonunlari o′rinli bo′ladi.

Bundan tashqari A–A=0 , A±0=A , A+A =2A tengliklar ham o′rinli bo′ladi.

T A ' R I F 7: Ixtiyoriy mxn tartibli $A=\{a_{i\,j}\}$ matritsaning λ songa ko′paytmasi deb $\{\lambda\, a_{i\,j}\}$ matritsaga aytiladi va u λ A kabi belgilanadi.
Masalan,

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

matritsa uchun

$$6A=\begin{pmatrix} 6\cdot 5 & 6\cdot 4 & 6\cdot(-1) \\ 6\cdot 0 & 6\cdot 2 & 6\cdot 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 30 & 24 & -6 \\ 0 & 12 & 42 \end{pmatrix}$$

~~6 A =~~

Matritsalarni qo′shish va songa ko′paytirish amallari uchun quyidagi tengliklar o′rinli bo′ladi:

$$\lambda\,(A\pm B)=\lambda A\pm\lambda B\,,\quad(\lambda\pm\mu)\,A=\lambda\,A\pm\mu\,A,$$
$$0\cdot A=O\;,\quad \lambda\cdot O=O$$

T A ' R I F 8 : $A_{m\times p}$ va $B_{q\times n}$ matritsalar uchun p=q shart bajarilganda ularning ko′paytmasi (AB) deb shunday C_{mxn} matritsaga aytiladiki, uning c_{ij} elementlari $(i=\overline{1,m}\,;\ j=\overline{1,n})$ ushbu

$$c_{i\,j}=\sum_{\kappa=1}^{p} a_{i\,\kappa}\, b_{\kappa\, j}$$

tenglik bilan aniqlanadi.
Shunday qilib, c_{ij} element A matritsaning i–satr elementlarini V matritsaning j- ustun mos elementlariga ko′paytirib, ularni qo′shib chiqishdan hosil qilinadi, ya'ni "satrni usto'nga ko′paytirish" qoidasi bilan topiladi.
Masalan,

$$A_{3x2}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix},\qquad B_{2x2}=\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

matritsalar uchun m=3, p=q=2, n=2 bo'lgani uchun ularni ko′paytirish mumkin va $AB=C_{3x2}$ matritsa quyidagicha bo′ladi:

$$C_{3x2}=\begin{pmatrix} 3\cdot 6+1\cdot 1 & 3\cdot(-4)+1\cdot 2 \\ 0\cdot 6+(-2)\cdot 1 & 0\cdot(-4)+(-2)\cdot 2 \\ 4\cdot 6+5\cdot 1 & 4\cdot(-4)+5\cdot 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 19 & -10 \\ -2 & -4 \\ 29 & -6 \end{pmatrix}$$

Matritsalar ko′paytmasi uchun AB≠VA, ya'ni kommutativlik qonuni o′rinli bo′lmaydi. Ammo A(BC)=(AB)C (assotsiativlik), A(B+C)=AB+AC, (A+B)C=AC+BC distributivlik qonunlari bajariladi.
Bundan tashqari AE=EA= A, A·0=0·A=0, (λ A)B=A (λ B) tengliklar ham o′rinli bo′ladi.

Ma’ruza nixoyasida matritsalarning iqtisodiy ma'nosi va tadbiklarini ifodalovchi misollarni keltiramiz.

1-misol. **Aloxida iqtisodiy tarmoklar oʻrtasida ishlab chiqarish resurslari taksimoti jadvali quyidagicha berilgan boʼlsin.(Umumiy xajmga nisbatan foiz hisobida, rakamlar shartli)**

Resurslar	**Iqtisodiy tarmoklar**		
	Sanoat	**Kishlok xo′jalik**	**Boshqa tarmoklar**
1.Yoqilg’и	**45**	**30**	**25**
2. Elektr energiyasi	**53**	**27**	**20**
3. Mehnat resurslari	**38**	**21**	**41**
4. Suv resurslari	**40**	**48**	**12**

Bu jadvalni matritsa yordamida quyidagi qulay ko0′rinishda ifodalash mumkin:

$$A_{4\times3}=\begin{pmatrix}45 & 30 & 25\\ 53 & 27 & 20\\ 38 & 21 & 41\\ 40 & 48 & 12\end{pmatrix}$$

Bu yozuvda A matritsa xar bir elementi aniq ma'noga ega. Masalan, a_{11}=45 sanoat tarmoqlari yokilgining 45 % ni, a_{21}=53 esa elektr energiyasining 53 % ini iste'mol qilishini ko′rsatadi, a_{22}=27 qishlok xo′jaligi elektr energiyasining 27 % ini sarflashini, a_{33}=41 esa mehnat resurslarining 41 % boshqa tarmoqlarda band ekanligini ifodalaydi va hokazo.

2-Misol. **Korxona p_1,p_2 va p_3 kabi belgilangan 3 xil mahsulot ishlab chiqarishi ma'lum bo′lsin. Bu maxsulotlarni ishlab chikarish uchun 2 xil xomashyo s_1 va s_2 ishlatilsin. Agar a_{ij} (i=1,2,3; j=1,2) orqali i- turdagi maxsulot birligini ishlab chiqarish uchun j- tur xomashyodan qancha xarajat etilganini belgilasak,unda maxsulotlar birligini ishlab chiqarish uchun xomashyolar xarajati me'yorini $A_{3x2}=(a_{ij})$ matritsa orkali qulay ko′rinishda ifodalash mumkin. Masalan,**

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 5 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}.$$

Agar ishlab chiqarish rejasi C=(100 80 130) satr matritsa va xomashyo birligining bahosi $B=\begin{pmatrix}30\\50\end{pmatrix}$ ustun matritsalar ko′rinishida berilgan bo′lsa, u holda maxsulot ishlab chiqarish rejasiga mos keladigan xomashyo xarajatlarining mikdorini bevosita quyidagicha aniqlash mumkin:

1- tur xomashyo xarajati S_1= 2·100+5·80+1·130=730 birlik,

2- tur xomashyo xarajati S_2= 3·100+2·80+4·130=980 birlik.

Matritsalarni ko′paytirish amali orqali S=(S_1 S_2) xomashyo xarajati satr matritsasi esa quyidagicha topiladi:

$$S = C\cdot A = (100\ \ 80\ \ 130)\times\begin{pmatrix}2 & 3\\5 & 2\\1 & 4\end{pmatrix}$$ **=(730 980).**

Umumiy xomashyo xarajati bahosi Q=S·B=730·30+980·50=70900 pul biriligin tashkil etadi. Bu iqtisodiy masalaning echimini matritsalar ustida amallar orkali qisqacha quyidagicha ifodalash mumkin:

Q=S·B=(C·A)·B=C·(A·B)=70900 .

O′z-o′zini nazorat etish savollari:

1. Matritsa deb nimaga aytiladi?
2. Matritsaning tartibi qanday aniklanadi?
3. Matritsalar qanday turlarga ajratiladi?
4. Qanday elementlar diagonal elementlar deyiladi?
5. Birlik matritsa qanday ta’riflanadi?
6. Qachon matritsa nol matritsa deyiladi?
7. Qaysi shartda matritsalarni qo′shish yoki ayirish mumkin?
8. Matritsalar yig′indisi yoki ayirmasi qanday topiladi?
9. Matritsalar yig′indisi amali qanday xossalarga ega?
10. Matritsani songa ko′paytirish qanday aniqlanadi?
11. Qaysi shartda matritsalarni ko′paytirish mumkin?
12. Ko′paytma matritsa tartibi qanday topiladi?
13. Matritsalar ko′paytmasi qanday aniqlanadi?
14. Matritsalarni ko′paytirish amali qanday xossalarga ega?
15. Matritsaning iqtisodiy tadbigiga misol keltiring?

2-MA'RUZA

ANIQLOVCHILAR VA ULARNING XOSSALARI.

Tayanch iboralar: aniqlovchi ta'rifi, ikkinchi tartibli aniqlovchi, uchinchi tartibli aniqlovchi, aniqlovchi xossalari, algebraik to′ldiruvchi, aniqlovchilarni satr yoki ustun bo′yicha yoyish (Laplas teoremasi), yuqori tartibli aniqlovchilar.

Ma'ruza rejasi:

1. Aniqlovchi hakida tushuncha.
2. II tartibli aniqlovchi va uni hisoblash formulasi.
3. III tartibli aniqlovchi va uni hisoblash formulasi.
4. Aniqlovchining xossalari.
5. Aniqlovchining nolga teng bo′lish shartlari.
6. Aniqlovchi elementining algebraik to′ldiruvchisi.
7. Laplas teoremasi.
8. Yuqori tartibli aniqlovchilarni hisoblash.

Adabiyotlar:

[1] I bob, §9-10 [3] I bob, §1 [8] V bob, §65-69,
[14]. 16-26.

TA'RIF: **n–tartibli kvadrat matritsa elementlaridan ma'lum bir qoida asosida hosil qilinadigan sonli ifoda n – tartibli aniqlovchi deb ataladi.**

Masalan, ikkinchi tartibli aniqlovchi deb, ikkinchi tartibli kvadrat matritsadan quyidagicha hosil qilingan va belgilangan sonli ifodaga aytiladi:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21} \qquad (1)$$

Masalan,

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 3\cdot 6 - 4\cdot 5 = 18 - 20 = -2, \qquad \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -2 & 10 \end{vmatrix} = 5\cdot 10 - 4\cdot(-2) = 50 + 8 = 58$$

Uchinchi tartibli aniqlovchi esa quyidagi sonli ifoda kabi yordamida aniqlanadi:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13} -$$

$$- a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} - a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33} - a_{23}\cdot a_{32}\cdot a_{11} \qquad (2)$$

Uchinchi tartibli aniqlovchini hisoblashga misol keltiramiz:

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & 6 & -2\\ 1 & 5 & 4\\ 3 & -1 & 0\end{vmatrix}=2\cdot5\cdot0+6\cdot4\cdot3+1\cdot(-1)\cdot(-2)-$$

$$-(-2)\cdot5\cdot3-6\cdot1\cdot0-4\cdot(-1)\cdot(2)=112$$

Aniqlovchilar va matritsalar orasida quyidagi o′xshashlik va farqlar mavjud:

1)Matritsa sonlar jadvali bo′lsa, aniqlovchi esa sonli ifoda bo′lib, uning qiymati sondan iboratdir;

2) Matritsa yoysimon chiziqlar bilan belgilansa, aniqlovchi to′g′ri chiziqlar bilan belgilanadi;

3) Ular ichidagi sonlar elementlar deyiladi;

4) Ular satrlar va ustunlardan iborat;

5) Aniqlovchilarda ustun va satrlar soni teng bo′lishi kerak, ammo matritsalarda esa bunday bo′lishi shart emas.

Endi ixtiyoriy tartibli aniqlovchilarning xossalari bilan tanishamiz. Aniqlik va soddalik uchun bu xossalarni uchinchi tartibli aniqlovchilar uchun ifodalaymiz. Bu xossalarni o′rinli ekanligini (2) formula yordamida tekshirib ko′rish mumkin va buni talabalarga mustaqil ish sifatida havola qilamiz.

1. Agar aniqlovchining barcha satrlari mos ustunlar bilan almashtirilsa, u holda aniqlovchinig qiymati o′zgarmaydi.

Masalan, $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{21} & a_{31}\\ a_{12} & a_{22} & a_{32}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{vmatrix}$

Bu xossadan aniqlovchining satr va ustunlari teng moxiyatli ekanligi kelib chiqadi.

2. Aniqlovchining ikkita ixtiyoriy satrlari (ustunlari) o′rni o′zaro almashsa, aniqlovchining faqat ishorasi teskarisiga o′zgaradi.

Masalan,

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

3. Agar aniqovchining ikkita satr (ustun) elementlari bir xil bo′lsa, u hlda uning qiymati nolga teng.

I s b o t : Buning uchun bir xil elementli satrlarni (ustunlarni) o′rinlarini almashtiramiz. Natijada aniqlovchi ko′rinishi o′zgarmay qoladi. Bundan, oldingi xossaga asosan, $\Delta=-\Delta$ tenglik hosil bo′ladi va undan $\Delta=0$ ekanligi kelib chiqadi.

4. Satrning ustunning) umumiy ko′paytuvchisini aniqlovchi belgisidan tashqariga chiqarib, ko′paytma shaklida yozish mumkin.

Masalan, $\begin{vmatrix} ka_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

5. Agar aniqlovchining biror satri (ustuni) nollardan iborat bo′lsa, u holda aniqlovchining qiymati nolga teng bo′ladi.

6. Agar aniqlovchining ixtiyoriy ikkita satr (ustun) elementlari o′zaro proportsional bo′lsa, u holda uning qiymati nolga teng,

Masalan, aniqlovchining I va II satrlari proportsional bo′lsa,

$$\begin{vmatrix} k\,a_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\cdot 0 = 0$$

7. Agar aniqlovchining biror satri (ustuni) ikki had yig′indisidan iborat bo′lsa, u holda bu aniqlovchi ikkita mos aniqlovchilar yig′indisiga yoyiladi

Masalan,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$

Umumiy holda n – tartibli (n∊N) aniqlovchi quyidagicha yoziladi:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \ldots & a_{1j} \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \ldots & a_{2j} \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \ldots & a_{ij} \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \ldots & a_{nj} \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta$$

Yuqori tartibli aniqlovchilarni umumiy holda hisoblash formulalari juda murakkab ko′rinishda bo′ladi. Shu sababli uning elementining algebraik to′ldiruvchisi tushunchasi kiritiladi

TA'RIF: a_{ij} $(i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n})$ elementning algebraik to′ldiruvchisi deb aniqlovchining i-satri va j- ustunini tashlab yuborishdan hosil bo′lgan (n-1)

tartibli aniqlovchi qiymatini $(-1)^{i+j}$ ga ko′paytmasiga aytiladi va Aij kabi belgilanadi.
Masalan,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

aniqlovchining quyidagi to′qqizta algebraik to′ldiruvchilari mavjud :

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix},$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

Xuddi shunday, n - tartibli aniqlovchining algebraik to′ldiruvchilarin^2 ta (n– 1)-tartibli aniqlovchilardan iborat bo′ladi.

Yuqori tartibli aniqlovchilarni hisoblash algebraik to′ldiruvchilar yordamida quyidagi teorema orqali osonrok bajariladi.

TEOREMA(Laplas): Uchinchi tartibli aniqlovchining qiymati uning istalgan satr (ustun) elementlarini ularning mos algebraik to′ldiruvchilariga ko′paytmalarining yig′indisidan iborat bo′ladi, ya'ni

$$\left.\begin{array}{l} \Delta = a_{11} \bullet A_{11} + a_{12} \bullet A_{12} + a_{13} \bullet A_{13} \\ \Delta = a_{21} \bullet A_{21} + a_{22} \bullet A_{22} + a_{23} \bullet A_{23} \\ \Delta = a_{31} \bullet A_{31} + a_{32} \bullet A_{32} + a_{33} \bullet A_{33} \end{array}\right\} \qquad (3)$$

yoki

$$\left.\begin{array}{l} \Delta = a_{11} \bullet A_{11} + a_{21} \bullet A_{21} + a_{31} \bullet A_{31} \\ \Delta = a_{12} \bullet A_{12} + a_{22} \bullet A_{22} + a_{32} \bullet A_{32} \\ \Delta = a_{13} \bullet A_{13} + a_{23} \bullet A_{23} + a_{33} \bullet A_{33} \end{array}\right\} \qquad (4)$$

Bu tengliklarning o′rinli ekanligini to′gridan-to′gri hisoblashlar yordamida ko′rsatish mumkin. (3) yoki (4) aniqlovchini satrlar yoki ustunlar bo′yicha yoyilmasi deyiladi. **Izox:** Ixtiyoriy n-tartibli aniqlovchilar uchun ham keltirilgan teoremani induktsiya usulida isbotlash mumkin.

Yuqori tartibli aniqlovchi qiymatini topishda hisoblashlarni kamaytirish maqsadida uning nollari koproqbo’lgan satr yoki ustun bo′icha yoyish maqadga muvofiqir.

M i s o l: To′rtinchi tartibli aniqlovchini ikkinchi satr bo′yicha yoyib, qiymatini Laplas teoremasi orqali hisoblaymiz.

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{2+3}\, 3 \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \bullet 66 - 18 = 198 - 18 = 180$$

Izox: Aniqlovchining biror satr (ustun) elementlarini boshqa satr (ustun) mos elementlarining algebraik to′ldiruvchilariga ko′paytirib, ko′paytmalarni qo′shib chiqsaq, yig′indida doimo 0 hosil bo′ladi.

Masalan,

$$a_{11} \bullet A_{21} + a_{12} \bullet A_{22} + a_{13} \bullet A_{23} = 0,$$
$$a_{12} \bullet A_{11} + a_{22} \bullet A_{21} + a_{32} \bullet A_{31} = 0.$$

O′z-O′zini nazorat etish savollari:

1. II tartibli aniqlovchi qanday hisoblanadi?
2. III tartibli aniqlovchi qaysi usullarda hisoblanadi?
3. Aniqlovchi va matritsa o′rtasida qanday o′xshashlik va farqlar bo′ladi?
4. Aniqlovchida satr va ustunlar qanday moxiyatli?
5. Aniqlovchida satrlar yoki ustunlar O′rni almashtirilsa nima bo′ladi?
6. Qaysi shartlarda aniqlovchini hisoblamasdan uning qiymati nol bo′lishini aytish mumkin?
7. Aniqlovchi elementining algebraik to′ldiruvchisi deb nimaga aytiladi?
8. Aniqlovchilar uchun Laplas teoremasi qanday ifodalanadi?
9. Yuqori tartibli aniqlovchilar qanday hisoblanadi?

3-MA'RUZA .

CHIZIQLI TENGLAMALAR SISTEMASI.

Tayanch iboralar:chiziqli tenglamalar sistemasi, sistemaning koeffitsientlari, sistemaning ozod hadlari, sistemaning echimlari, birgalikda bo′lgan tenglamalar sistemasi, birgalikda bo′lmagan sistema, aniq va aniqmas sistemalar, sistema matritsasi, sistemaning kengaytirilgan matritsasi, matritsaning rangi, Kroneker-Kapelli teoremasi, sistemaning bazis echimlari, sistemaning erkli echimlari, bir jinsli tenglamalar sistemasi, bir jinsli tenglamalar sistemasining fundamental echimlari.

M a ' r u z a   r e j a s i :

1. Chiziqli tenglamalar sistemasi.
2. Sistemaning echimlari va ular bo′yicha turlari.
3. Matritsaning rangi.
4. Kroneker-Kapelli teoremasi.
5.Sistemaning bazis va erkli echimlari.
6.Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi.
7.Bir jinsli sistemaning trivial va notrivial echimlari.
8.Bir jinsli sistemaning fundamental echimlari.

Adabiyotlar:

[1]. §20, §26, §27; [14]. 38-39, 29-35, 48-56 betlar.

Ko′pgina amaliy masalalar, shu jumladan iqtisodiy masalalar, chiziqli tenglamalar sistemasi tushuchasiga olib keladi.

TA'RIF 1: n noma'lumli m ta chiziqli tenglamalar sistemasi deb quyidagi ko′rinishdagi sistemaga aytiladi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1j}x_j+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2j}x_j+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \\ a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{ij}x_j+\ldots+a_{in}x_n=b_i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mj}x_j+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \qquad (1)$$

Bu erda a_{ij} va $в_i$ (i=1,2,…,m, j=1,2,…n) –berilgan va ixtiyoriy o′zgarmas sonlar bo′lib, a_{ij} sonlari (1) sistemaning ***koeffitsientlari***, $в_i$ esa ***ozod xadlari*** deyiladi.

Yig′indi belgisi yordamida (1) sistemani qisqacha quyidagicha yozish mumkin:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = в_i \quad , \text{ i=1,2,…, m.} \qquad (2)$$

Agarda (1) yoki (2) chiziqli tenglamalar sistemasining a_{ij} koeffitsientlaridan tuzilgan to′rtburchakli matritsani A, x_j noma'lumlar va $в_i$ ozod xadlardan hosil qilingan ustun matritsalarni mos ravishda X va B kabi belgilasak, unda matritsalarni ko′paytirish amalidan foydalanib bu sistemani ixcham va qulay bo′lgan AX=B ko′inishda yozish mumkin.

T A ' R I F 2 : (1) yoki (2) sistemaning ***echimi*** deb shunday $x_1=k_1$, $x_2=k_2$, …, $x_n=k_n$

n ta sonlarga aytiladiki, ular tenglamalar sistemasiga quyilganda har bir tenglama qanoatlantiriladi, ya'ni ayniyatga aylanadigan sonlarga aytiladiki, ular tenglamalar sistemasiga qo′yilganda har bir tenglama qanoatlantiriladi, ya'ni ayniyatga aylanadi.

Masalan,

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -6 \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 32 \end{cases}$$

n=3 noma'lumli m=2 ta tenglamalar sistemasining echimi $x_1=1$, $x_2=-2$ va $x_3=5$ ekanligini bevosita tekshirish orqali ko′rsatish mumkin.

T A ' R I F 3 : Agar chiziqli tenglamalar sistemasi hech bo′lmaganda bitta echimga ega bo′lsa, u holda bu sistema ***birgalikda*** deyiladi; agar echimga ega bo’lmasa sistema ***birgalikda emas*** deyiladi. Birgalikdagi tenglamalar sistemasi yagona echimga ega bo′lsa,u ***aniq*** deyiladi. Birgalikdagi tenglamalar sistemasi ko′p echimga ega bo′lsa, u ***noanik*** tenglamalar sistemasi deyiladi.

Masalan, yuqorida ko′rilgan sistema birgalikda bo′lgan noaniq sistemadir, chunki u $x_1=c$, $x_2=(8-14c)/3$ va $x_3=(34-19c)/3$ ko′rinishdagi cheksiz ko′p echimga ega. Bunda s ixtiyoriy son bo′lib, c=1 bo′lganda yuqorida ko′rib o′tilgan $x_1=1$, $x_2=-2$ va $x_3=5$ echimlar hosil bo′ladi.

Ushbu

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 2 \\ 3x_1 + 5x_2 = 3 \end{cases} \quad \text{ва} \quad \begin{cases} 5x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 1 \\ 10x_1 - 8x_2 + 4x_3 = 4 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasining birinchisi birgalikda va aniq (yagona $x_1=1$ va $x_2=0$ echimga ega), ikkinchisi esa birgalikda emas (uning birinchi tenglamasi o′rinli bo′lganda ikkinchi tenglamasining o′ng tomoni 4 emas,balkim 2 bo′lishi kerak).

Berilgan (1) tenglamalar sistemasini birgalikda yoki birgalikda emasligini umumiy holda aniklash uchun uning koeffitsientlaridan tuzilgan ushbu mxn tartibli A matritsani kiritamiz:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (3)$$

Bu matritsaga ozod xadlar ustunini birlashtirib, ushbu mx(n+1) tartibli

$$A_1 = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & в_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & в_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & в_4 \end{array}\right) \qquad (4)$$

kengaytirilgan A_1 matritsani hosil qilamiz.

Endi quyidagi tushunchalarni kiritamiz.

T A ' R I F 4 : mxn tartibli S matritsaning ixtiyoriy k ta satr va ustunlarini qoldirish orqali hosil qilingan k- tartibli (k≤min(m,n)) kvadrat matritsaning aniqlovchisi C matritsaning ***k- tartibli minori*** deyiladi.

T A ' R I F 5 : C matritsaning noldan farqli minorlarining eng katta tartibi shu matritsaning ***rangi*** deyiladi va rangC yoki r(C) kabi belgilanadi.

Masalan, 3x4 tartibli

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

matritsaning rangi r(C)=2 bo′lishini tekshirib ko′rish mumkin.

KRONEKER-KAPELLI TEOREMASI: Agar (1) sistema matritsasi A va uning kengaytirilgan matritsasi A_1 larning rangi uzaro teng, ya'ni $r(A)=r(A_1)$ bo′lsa va faqat shu holda (1) chiziqli tenglamalar sistemasi birgalikda bo′ladi.

Bu teoremani isbotsiz qabul etamiz.

Birgalikda bo′lgan chiziqli tenglamalar sistemasi uchun quyidagi tasdiqlar o′rinli bo′lishini ko′rsatish mumkin:

1. Agar birgalikdagi sistema matritsasining rangi r(A) tenglamalar sistemasiga kiruvchi noma'lumlar soni n ga teng, ya'ni r(A)=n bo′lsa, u holda (1) sistema yagona echimga ega bo′ladi.

2. Agar birgalikdagi sistema matritsasining rangi r(A) noma'lumlar soni n dan kichik (r(A)<n) bo′lsa, u holda (1) sistema noaniq bo′lib, cheksiz ko′p echimga ega.

(1) sistemada r(A)= r<n bo′lsin. Agar $x_1,x_2,\dots,x_r$ noma'lumlar oldidagi koeffitsientlardan tuzilgan matritsaning aniqlovchisi noldan farqi bo′lsa, u holda $x_1,x_2,\dots,x_r$ noma'lumlar ***asosiy yoki bazis o'zgaruvchilar*** deyiladi. Qolgan n-r ta noma'lum esa esa ***asosiy bo'lmagan yoki erkli o'zgaruvchilar*** deb ataladi.(1) sistemaning barcha n-r ta asosiy bo′lmagan o′zgaruvchilari nolga teng bo′lgan echimi ***bazis echim*** deyiladi.

M i s o l : Ushbu sistemani tekshiring va echimini toping:

$$\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3+3x_4=-6 \\ 2x_1-x_2+x_3-x_4=5 \\ 3x_1+x_2-x_3+2x_4=-1 \end{cases}$$

E ch i sh : Asosiy va kengaytirilgan matritsalarlarni tuzamiz:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_1=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

Bu yerda $r(A)=r(A_1)=r=2$ ekanligini tekshirib ko′rish mumkin. Sistema matritsasining rangi noma'lumlar sonidan kichik, ya'ni r=2<4 bo′lgani uchun bu sistema cheksiz ko′p echimga egadir. Bu sistemaning x_1 va x_2 o′zgaruvchilar oldidagi koeffitsientlardan tuzilgan aniqlovchi noldan farkli va shu sababli ularni asosiy o’zgaruvchilar deb olish mumkin. Bundan tashkari sistema matritsasining rangi r=2 bo’lgani uchun uning bir tenglamasini,masalan uchinchisini,tashlab yuborish mumkin.Asosiy o’zgaruvchilarni xosil kilingan tenglamalar sistemasining chap tomonida koldirib, kolgan x_3 va x_4 asosiy bo’lmagan o’zgaruvchilarni tenglamalarning o’ng tomoniga utkazamiz:

$$\begin{cases} x_1+2x_2=-6+2x_3-3x_4 \\ 2x_1-x_2=5-x_3+x_4. \end{cases}$$

Bu sistemani maktabdan tanish bo’lgan qo’shish usulida echib,

$$x_1=(4-x_4)/5, \qquad x_2=(5x_3-7x_4-17)/5.$$

ekanligini topamiz.Asosiy bo’lmagan x_3 va x_4 o’zgaruvchilarga ixtiyoriy $x_3=c_1$ va $x_4=c_2$ qiymatlar berib, sistemaning cheksiz kup echimlari quyidagi ko’rinishda bo’lishini topamiz:

$$x_1=\frac{4}{5}-\frac{1}{5}c_2, \quad x_2=-\frac{17}{5}+c_1-\frac{7}{5}c_2, \quad x_3=c_1, \quad x_4=c_2.$$

T A ' R I F 6 : Agar (1) sistemaning o'ng tomonidagi barcha ozod xadlar 0 ga teng bo'lsa, u holda bu sistema chiziqli ***bir jinsli*** tenglamalar sistemasi deyiladi.

Demak, n noma'lumli m ta bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=0 \end{cases} \qquad (5)$$

Chiziqli bir jinsli tenglamalar sistemasi xamma vakt birgalikdadir, chunki u xech bo'lmaganda $x_1=0, x_2=0, \ldots, x_n=0$ echimga ega. Bu (5) sistemaning ***trivial echimi*** deyiladi. Agar (5) sistemada mqn va uning aniqlovchisi $\Delta_A\neq0$ bo'lsa, u holda bu sistema fakat trivial echimga ega bo'ladi.Agar (5) sistemaning echimi ichida kamida bitta noldan farkli son mavjud bo'lsa,u ***notrivial echim*** deb ataladi. Notrivial echimlar $m<n$ bo'lganda yoki $m=n$ bo'lib, sistemaning aniqlovchisi $\Delta_A=0$ bo'lganda mavjud bo'lishi mumkin. Boshkacha aytganda chiziqli bir jinsli tenglamalar sistema noldan farkli echimga ega bo'lishi uchun uning koeffitsientlaridan tuzilgan A matritsaning rangi o'zgaruvchilar sonidan kam , ya'ni $r(A)<n$ bo'lishi kerak.

Bir jinsli (5) sistemaning $x_1=\kappa_1, x_2=\kappa_2,\ldots, x_n=\kappa_n$ echimini $e_1=(\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3,\ldots,\kappa_n)$ satr matritsa ko'rinishda belgilaymiz. Chiziqli birjinsli tenglamalar sistemasining echimlari quyidagi xossalarga ega:

1. Agar $e_1=(\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3,\ldots,\kappa_n)$ (5) sistemasining echimi bo'lsa, u holda ixtiyoriy λ soni uchun $\lambda e_1=(\lambda\kappa_1, \lambda\kappa_2, \lambda\kappa_3,\ldots, \lambda\kappa_n)$ xam shu sistemasining echimi bo'ladi.
2. Agar $e_1=(\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3,\ldots,\kappa_n)$ va $e_2=(l_1, l_2, l_3,\ldots, l_n)$ (5) sistemasining echimlari bo'lsa, u holda ularning chiziqli kombinatsiyasi

$$c_1e_1+c_2e_2=(c_1\kappa_1+c_2l_1, c_1\kappa_2+c_2l_2,\ldots, c_1\kappa_n+c_2l_n)$$

xam (5) sistemaing echimi bo'ladi.

T A ' R I F 6 : (5) sistemaning kandaydir $e_1, e_2, \ldots, e_\kappa$ echimlari chiziqli boglikmas deyiladi, agarda $c_1e_1+c_2e_2+\ldots+c_\kappa e_\kappa=0$ tenglik fakat va fakat $c_1=c_2=\ldots=c_\kappa=0$ bo'lganda bajarilsa.

Chiziqli bir jinsli tenglamalar sistemasi echimlarining xar kanday chiziqli kombinatsiyasi yana shu sistemaning echimi bo'lishligi yukoridagi xossalardan kelib chikadi. Shuning uchun shunday chiziqli boglik bo'lmagan echimlarni topish kerakki, ular orkali sistemaning barcha kolgan echimlari chiziqli ifodalansin.

T A ' R I F 7 : Chiziqli boglik bo'lmagan $e_1, e_2, \ldots, e_к$ echimlar sistemasi ***fundamental echimlar*** sistemasi deyiladi, agar (5) sistemaning xar kanday echimini shu $e_1, e_2, \ldots, e_к$ echimlarning chiziqli kombinatsiyasi ko'rinishida ifodalab bo'lsa.

TEOREMA: Agar chiziqli birjinsli tenglamalar sistemasi noma'lumlari oldidagi koeffitsientlardan tuzilgan A matritsaning rangi r noma'lumlar soni n dan kichik bo'lsa, u holda (5) sistemaning xar kanday fundamental echimlar sistemasi n-r ta echimdan iborat bo'ladi va (5) sistemaning umumiy echimi

$$c_1 e_1 + c_2 e_2 + \ldots + c_к e_к$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu erda $e_1, e_2, \ldots, e_к$ –ixtiyoriy fundamental echimlar sistemasi, $c_1, c_2, \ldots, c_к$ –ixtiyoriy sonlar va к=n-r.

n noma'lumli m та (1) chiziqli tenglamalar sistemasining umumiy echimi o'nga mos bo'lgan bir jinsli (5) chiziqli tenglamalar sistemasining umumiy echimi bilan (1) sistemaning kandaydir xususiy echimlari yigindisiga tengligini kursatish mumkin.

Uz-uzini nazorat etish savollari.

1. Chiziqli tenglamalar sistemasi kanday ko'rinishda bo'ladi?
2. Sistemaning koeffitsientlari, noma'lumlari va ozod xadlari deb nimaga aytiladi?
3. Sistemaning echimlari kanday ta'riflanadi?
4. Kachon sistema birgalikda va kachon birgalikda emas deyiladi?
5. Kachon sistema anik va kachon anikmas deyiladi?
6. Matritsaning rangi kanday aniklanadi?
7. Kroniker-Kapelli teoremasi nimani aniklaydi?
8. Kaysi shartda chiziqli tenglamalar sistemasi yagona echimga ega?
9. Kaysi shartda chiziqli sistema cheksiz kup echimga ega?
10. Sistemaning bazis o'zgaruvchilari deb nimaga aytiladi?
11. Sistemaning erkli o'zgaruvchilari deb nimaga aytiladi?
12. Kanday echim bazis echim deb ataladi?
13. Kachon chiziqli sistema bir jinsli deyiladi?
14. Trivial va notrivial echimlar kanday ta'riflanadi?
15. Kaysi shartda bir jinsli sistema notrivial echimga ega ?
16. Bir jinsli sistema echimlari kanday xossalarga ega?
17. Fundamental echimlar sistemasi kanday ta'riflanadi?
18. Fundamental echimlar soni kanday topiladi?

4- MA'RUZA .

CHIZIQLI TENGLAMALAR SISTEMASINI ECHISHNING KRAMER VA GAUSS USULLARI

Tayanch iboralar: chiziqli tenglamalar sistemasi, koeffitsient, ozod xad, asosiy aniqlovchi, yordamchi aniqlovchi, Kramer formulasi, Gauss usuli.

Ma'ruza rejasi:

1. Chiziqli tenglamalar sistemasi.
2. Chiziqli tenglamalar sistemasining echimlari.
3. Sistemaning asosiy va yordamchi aniqlovchilari.
4. Kramer formulalari.
5. Sistemaning yagona, cheksiz kup yoki echimga ega bo'lmaslik shartlari.
6. Gauss usulining tugri yuli.
7. Gauss usulining teskari yuli.
8. Kramer va Gauss usullarining kulayliklari xamda kamchiliklari.
9. Chiziqli tenglamalar sistemasini iktisodiy masalalarni echishga tadbig'iga doir misollar.

Adabiyotlar:

[1] I bob, §20-21 [3] I bob, §2 [8] IV bob, §51-57, V bob, §70

[14]. 40-47, 55-56 betlar.

Bu ma'ruzada oldin kurib utilgan chiziqli tenglamalar sistemasining xususiy, ya'ni noma'lumlar va tenglamalar soni teng (n=m) bo'lgan holda echimini topish masalasi bilan shugullanamiz.

Dastlab, maktab matematika kursidan ma'lum bo'lgan, ikki noma'lumli chiziqli tenglamalar sistemasini (n=m=2) kuramiz:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=в_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=в_2 \end{cases} \qquad (1)$$

Bu erda a_{ij} cistemaning koeffitsentlari, vi sistemaning ozod xadlari, xj sistemaning noma'lumlari va (1) sistemadagi tenglamalarni ayniyatga aylantiruvchi $x_j=\alpha_j$ sonlari sistemaning echimlari deb atalishini eslatib utamiz.. Bunda sistema echimi yagona, cheksiz kup yoki mavjud bo'lmasligi mumkinligi bizga ma'lum.

(1) sistema uchun Δ asosiy va ikkita Δ_1, Δ_2 yordamchi aniqlovchilarni quyidagicha kiritamiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}; \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} в_1 & a_{12} \\ в_2 & a_{22} \end{vmatrix}; \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & в_1 \\ a_{21} & в_2 \end{vmatrix}$$

Δ asosiy aniqlovchi sistemaning koeffitsentlaridan xosil kilinib, yordamchi aniqlovchilar esa uning ustunlarini ozod xadlar bilan almashtirishdan xosil kilinadi.

(1) sistema tenglamalarini dastlab mos ravishda a_{22} va $-a_{12}$ larga kupaytirib, so'ngra kushamiz:

$(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})\,x_1+(a_{12}\,a_{22}-a_{22}a_{12})x_2=в_1a_{22}-в_2\,a_{12}$

Bu tenglikni kiritilgan aniqlovchilar orkali quyidagicha yozish mumkin:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} x_1 = \begin{vmatrix} в_1 & a_{11} \\ в_2 & a_{22} \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta x_1 = \Delta_1 \qquad (2)$$

Shuningdek (1) sistema tenglamalarini mos ravishda $(-a_{21})$ va a_{11} larga kupaytirib kushsak, u holda

$(a_{11}a_{21}-a_{21}a_{11})x_1+(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=в_2a_{11}-в_1a_{21}$

Yukoridagidek

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & в_1 \\ a_{22} & в_2 \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta x_2 = \Delta_2 \qquad (3)$$

Agar noma'lumlarga nisbatan (2) va (3) chiziqli tenglamalarni echsak,

$$x_1 = \Delta_1/\Delta \text{ va } x_2 = \Delta_2/\Delta \qquad (4)$$

formulalarga ega bo'lamiz. Ular (1) sistema echimi uchun ***Kramer formulalari*** deb yuritiladi.

Endi uch noma'lumli 3 ta tenglamalar sistemasini karaylik:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=в_1 \\ a_{21}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=в_1 \\ a_{31}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=в_1 \end{cases} \qquad (5)$$

Bu sistemaning echimi uchun xam Kramer formulalarini chikarish kiyin emas.

Quyidagi asosiy aniqlovchini kiritamiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Bunda i ustunni в$_1$, в$_2$, в$_3$ ozod xadlar ustuni bilan almashtirib Δ_i, i=1,2,3 yordamchi aniqlovchilarni xosil kilamiz.

a_{ij} elementning algebraik tuldiruvchisini A_{ij} kabi belgilaylik.

(5) sistema tenglamalarini mos ravishda Δ aniqlovchidagi birinchi ustun elementlarining algebraik tuldiruvchilariga (A_{11},A_{21},A_{31}) kupaytirib kushib chikaylik.

$$(a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31})x_1+(a_{12}A_{11}+a_{22}A_{21}+a_{32}A_{31})x_2+(a_{13}A_{11}+a_{23}A_{21}+$$
$$+a_{33}A_{31})x_3= в_1A_{11}+в_2A_{21}+в_3A_{31};$$

Oxirgi munosobatni aniqlovchilar tiliga utkazsak va Laplas formulasidan foydalansak, $\Delta x_1+0x_2+0x_3=\Delta_1$ ёки $\Delta x_1=\Delta_1$ tenglamani olamiz.

Shuningdek 2-ustun yoki 3-ustun elementlari algebraik tuldiruvchilarini mos ravishda (5) sistema tenglamalariga kupaytirib kushib chiksak, $\Delta x_2 =\Delta_2$ va $\Delta x_3 =\Delta_3$ tenglamalarni olamiz.

Bu tenglamalardan (5) sistema uchun

$$x_1=\Delta_1/\Delta , \qquad x_2=\Delta_2 /\Delta , \qquad x_3=\Delta_3/\Delta$$

Kramer formulalarini xosil kilamiz.

M i s o l : Sistema Kramer usulida echilsin:

$$\begin{cases} x_1+2x_2 + 3x_3=1 \\ 2x_1+3x_2 + x_3=0 \\ 2x_1+x_2 - 2x_3= 0 \end{cases}$$

E ch i sh : Asosiy va yordamchi aniqlovchilarni xisoblaymiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} =18, \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} =-5,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} =-1, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} =7.$$

Kramer formulalariga asosan

$x_1 = \Delta_1/\Delta = -5/18$, $\quad x_2 = \Delta_2/\Delta = -1/18$, $\quad x_3 = \Delta_3/\Delta = 7/18$.

IZOX: (1) yoki (5) sistema yagona echimga ega bo'lishi uchun $\Delta\neq0$ bo'lishi kerak. Agarda $\Delta=0$ va $\Delta_1=\Delta_2=\Delta_3=0$ bo'lsa sistema cheksiz kup echimga ega bo'ladi. Agarda $\Delta=0$ va $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ yordamchi aniqlovchilardan kamida bittasi noldan farkli bo'lsa , sistema echimga ega bo'lmaydi.

Endi sistemani Gauss usulida echishni kurib chikamiz. Bu usul moxiyatini (5) sistemani echish orkali kursatamiz. (5) sistemani Gauss usulida echish uchun uning ikkinchi tenglamasidan x_1 noma'lumni, uchinchi tenglamasidan esa x_1 va x_2 noma'lumlarni yukotib, quyidagi uchburchak ko'rinishdagi sistemaga kelamiz:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2 + a_{13}x_3= в_1 \\ c_{22}x_2+ c_{23} x_3= d_2 \\ c_{33}x_3=d_3 \end{cases}$$

Bu Gauss usulining tugri yuli deb ataladi.

Uchburchakli sistemaning oxirgi tenglamasidan boshlab, birin-ketin x_3, x_2 va x_1 noma'lumni ketma–ket topamiz. Bu Gauss usulining teskari yuli deb ataladi.

M i s o l :

$$\begin{cases} 2x_1-3x_2+4x_3=20 \\ 3x_1+4x_2-2x_3 = -11 \\ 4x_1+2x_2+3x_3=9 \end{cases}$$

E ch i sh : Ikkinchi va uchinchi tenglamalardan x_1 noma'lumni yukotamiz:

$$\begin{cases} 2x_1-3x_2+4x_3= 20 \\ -17x_2+16x_3 = 82 \\ 8x_2- 5x_3 = -31 \end{cases}$$

Endi uchinchi tenglamadan x_2 noma'lumni yukotamiz:

$$\begin{cases} 2x_1- 3x_2+ 4x_3=20 \\ -17x_2+16x_3 = 82 \\ 43x_3= 129 \end{cases}$$

Uchinchi tenglamadan $x_3= 3$, so'ngra ikkinchi tenglamadan $x_2 =-2$ va nixoyat birinchi tenglamadan $x_1 =1$ ekanligini topamiz.

Umumiy, $n=m\geq 4$ bo'lgan holda xam Kramer formulalari va Gauss usuli yukorida kurib utilgan singari bo'ladi.

Kramer va Gauss usullarining kulayliklari va kamchiliklarini kursatamiz.

1) Kramer formulalari ixtiyoriy chiziqli sistema uchun bir xil ko'rinishga ega.
2) Kramer formulalarida echimlarning ixtiyoriy biri topilishi mumkin.
3) Kramer formulasi ikki va uch noma'lumli sistema uchun kulay.
4) Turt va undan ortik noma'lumli sistema uchun Kramer formulalaridan foydalanish murakkab.

5) Gauss usuli aniqlovchilarni xisoblashni talab etmasdan, fakat koeffitsientlar va ozod xadlar ustida arifmetik amallar bajarish orkali amalga oshiriladi.
6) Gauss usulini kompyuterda amalga oshirish oson.
7) Gauss usulida juda kup arifmetik amallar bajarish talab etiladi.
8) Gauss usulida noma'lumlardan fakat birini topib bo’lmaydi.

Chiziqli tenglamalar sistemasi iktisodiy masalalarni echishda juda keng mikyosda kullaniladi. Kupgina iktisodiy masalalarni chiziqli tenglamalar sistemasi yordamida echish jarayonida xatto yangi chiziqli dasturlash fani vujudga keldi.

Quyidagi masalalarga murojaat etaylik.

1-masala. Oyok kiyim fabrikasi 3 xil maxsulot, ya'ni etik, tufli va botinka ishlab chikarishga ixtisoslashtirilgan bo’lsin. Shu maxsulotlarni ishlab chikarish uchun 3 xil S_1, S_2 va S_3 xomashyo ishlatilsin. Xar bir juft oyok kiyimiga sarf bo’ladigan xomashyo xarajati me'yori va xomashyolarning bir kunlik sarflanadigan mikdori quyidagi jadvalda berilgan bo’lsin:

Xoma shyo turi	Bir juft oyok kiyimi iG`ch.ga sarf bo’ladigan xomashyo			Xom ashyoning bir kunlik sarf miqdori. (shartli raqamlar)
	Etik	Tufli	Botinka	
S_1	5	3	4	2700
S_2	2	1	1	800
S_3	3	2	2	1600

Bu ma'lumotlar asosida xar bir oyok kiyimining bir kunlik ishlab chikarilish mikdori topilsin.

<u>Echish:</u> Masalani echish uchun etik, tufli va botinkaning bir kunlik ishlab chikarilish mikdorlarini mos ravishda x_1,x_2 va x_3 deb belgilaymiz.Unda,masala shartlariga asosan quyidagi chiziqli tenglamalar sistemasini xosil kilamiz:

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 2700 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 800 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1600 \end{cases}$$

Bu tenglamalar sistemasini yukorida kurib utilgan usullardan biri yordamida echib, x_1=200, x_2=300 va x_3=200 ekanligini topamiz. Demak, fabrika bir kunda 200 juft etik, 300 juft tufli va 200 juft botinka ishlab chikarar ekan.

2-masala. 1- chi va 2-avtoxujaliklarga 2 ta zavoddan avtomobillar junatiladi. 1-avtoxujalikning extiyoji 200 avtomobil, 2- avtoxujalikning extiyoji esa 300 avtomobilni tashkil etsin. 1-zavod 350 ta, 2- zavod esa 150 ta avtomobil ishlab chikargan. Zavodlardan xar bir avtoxujalikka etkazib beriladigan bitta avtomobilga kilinadigan sarf-xarajat quyidagi jadvalda berilgan:

Zavod	Bir avtomobilni etkazib berishga bo'ladigan xarajat	
	1- avtoxujalik	2- avtoxujalik
1-zavod	15 $	20 $
2-zavod	8 $	25 $

Avtomobillarni etkazib berishga ajratilgan sarf-xarajat mikdori 7950 pul birligini tashkil etsa, zavodlardan avtomobillarni xujaliklarga etkazib berishning rejasi topilsin.

Echish: Bu masalani echish uchun i-zavoddan j-avtoxujalikka etkazib beriladigan avtomobillar mikdorini x_{ij} (i,j=1,2) deb belgilasak, masala shartiga kura quyidagi sistema xosil bo'ladi:

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12} \qquad\qquad\qquad =350 \\ \qquad\qquad x_{21}+x_{22}=150 \\ x_{11}+x_{12} \qquad\qquad\qquad =200 \\ 15x_{11}+20x_{12}+8x_{21}+25x_{22}=7950. \end{cases}$$

Bu 4 noma'lumli 4 ta chiziqli tenglamalar sistemasi bo'lib, uni biror usulda echish natijasidax_{11}=50, x_{12}=300, x_{21}=150, x_{22}=0 javobni xosil kilamiz. Bu echim anik iktisodiy mazmo'nga egadir, ya'ni 2-zavodda ishlab chikarilgan barcha 150 avtomobilni 2-chi avtoxujalikka, 1-zavodda ishlab chikarilgan 350 ta avtomobillarning 300 tasini 1- avtoxujalikka va kolgan 50 tasini esa 2-avtoxujalikka yuborilsa, tashish xarajatlari kursatilgan mikdorda bo'ladi.

<u>Uz-uzini nazorat etish savollari:</u>

1. Chiziqli tenglamalar sistemasi kanday ko'rinishd bo'ladi?
2. Sistemaning koeffitsientlari va ozod xadlari deb nimaga aytiladi?
3. Sistemaning echimi kanday ta'riflanadi?
4. Sistemaning asosiy aniqlovchisi deb nimaga aytiladi?
5. Sistemaning yordamchi aniqlovchilari kanday xosil kilinadi?
6. Sistema echimi uchun Kramer formulalari kanday ko'rinishda bo'ladi?
7. Kaysi shartlarda sistema yagona yoki cheksiz kup echimga ega bo'ladi?
8. Sistema kaysi shartda echimga ega bo'lmaydi?
9. Gauss usulining moxiyati nimadan iborat?
10. Kramer usuli kanday afzalliklarga va kamchiliklarga ega?

11. Gauss usuli kanday afzallik va kamchiliklarga ega?
12. Chiziqli tenglamalar sistemasining iktisodiy masalalarni echishga doir misollar keltiring.

5 – MA'RUZA

TESKARI MATRITSA. TENGLAMALAR SISTEMASINI MATRITSALAR USULIDA ECHISH

Tayanch iboralar: teskari matritsa, teskari matritsa xossasi, matritsalar usuli, Leontevning tarmoklararo muvozanat modeli.

M a ' r u z a r e j a s i :

1. Teskari matritsa ta'rifi.
2. Teskari matritsani mavjudlik va yagonalik sharti.
3. Teskari matritsani topish algoritmi.
4. Chiziqli tenglamalar sistemasini matritsalar usulida echish.
5. Matritsalar usulining afzalliklari va kamchiliklari.
6. Leontevning tarmoklararo muvozanat modeli.

Adabiyotlar:

[1] I bob, §24-25 [3] IV bob, §2-4, [14]. 26-29, 40-41, 56-60 betlar.

T A ' R I F: Berilgan A kvadrat matritsaga teskari matritsa deb shunday bir (uni kelajakda A^{-1} kabi belgilaymiz) kvadrat matritsaga aytiladiki, agarda $A^{-1}A= AA^{-1}= E$ (E-birlik matritsa) shart bajarilsa.

Agarda

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \Delta = \det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

bo'lsa,

$$A^{-1} = 1/\Delta \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

matritsa A ga teskari matritsa bo'lishini Laplas teoremasi yordamida kursatish mumkin. Bunda A_{ij} lar A matritsaning a_{ij} elementining algebraik tuldiruvchilaridir (i=1,2,3; j=1,2,3).

M i s o l: Teskari matritsa topilsin:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \Delta= \det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 43$$

Dastlab A matritsa elementlarining algebraik tuldiruvchilarini topamiz:

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 3 & -2 \end{vmatrix}$$

$A_{11}= 2 \quad 3 = 12 + 4 = 16,$ $\qquad$ $A_{12}= - \quad 4 \quad 3 = -9 - 8 = -17,$

$$A_{13}= \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 16 = -10, \qquad A_{21}= - \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -(-9 – 8) =17,$$

$$A_{22}= \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 16 = -10, \qquad A_{23}= - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -(4 + 12) =-16,$$

$$A_{31}= \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 6 - 16 = -10, \qquad A_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -(-4 – 12) = 16,$$

$$A_{33}= \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 9 = 17.$$

Natijada teskari matritsa ko’rinishi quyidagicha bo’ladi:

$$A^{-1} = 1/43 \begin{pmatrix} 16 & 17 & -10 \\ -17 & -10 & 16 \\ -10 & -16 & 17 \end{pmatrix}$$

Tekshirish utkazamiz. Darxakikat,

$$A^{-1}A = 1/43 \begin{pmatrix} 16 & 17 & -10 \\ -17 & -10 & 16 \\ -10 & -16 & 17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} =1/43 \begin{pmatrix} 43 & 0 & 0 \\ 0 & 43 & 0 \\ 0 & 0 & 43 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =E.$$

Bu tenglikdan teskari matritsa tugri topilganligiga ishonch xosil kilamiz.

Endi uch noma'lumli uchta chiziqli tenglamalar sistemasini echishning matritsalar usuli bilan tanishamiz.

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}\, x_2 + a_{13}\, x_3 = в_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}\, x_2 + a_{23}\, x_3 = в_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}\, x_2 + a_{33}\, x_3 = в_3 \end{array} \right\} \qquad (1)$$

sistema berilgan bo’lsin. Quyidagi yordamchi matritsalarni kiritamiz:

$$A= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ & & \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} в_1 \\ в_2 \\ \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \end{pmatrix}$$

$a_{31}\ a_{32}\ a_{33}$ $\qquad$ $в_3$ $\qquad$ x_3

Matritsalarni kupaytirish ta'rifiga asosan (1) sistemani AX=Y ko'rinishida yoza olamiz. Oxirgi matritsali tenglamani xar ikkala tomonini chapdan A^{-1} ga kupaytiramiz va X echimlar matritsasini xosil kilamiz:

$$A^{-1}AX = A^{-1}\ B \ => X = A^{-1}B.$$

M i s o l : Tenglamalar sistemasi matritsa usulida echilsin:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 20 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -11 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9 \end{cases}$$

E ch i sh : Karalayotgan sistema uchun yukorida topilgan formulalarga asosan, quyidagi tengliklarni yoza olamiz :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1}B = 1/43 \begin{pmatrix} 16 & 17 & -10 \\ -17 & -10 & 16 \\ 10 & -16 & 17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ -11 \\ 9 \end{pmatrix} =$$

$$= 1/43 \begin{pmatrix} 43 \\ -86 \\ 129 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Demak, sistemaning echimi $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 3$ bo'ladi.

Xulosa kilib shuni aytish kerakki, teskari matritsa tushunchasi ixtiyoriy n- tartibli kvadrat matritsa uchun xam yukoridagidek aniklanadi. Matritsa usuli xar kanday sondagi tenglamalar sistemasi uchun ($\Delta \neq 0$) xam kullanilishi mumkin va tenglamalar sistemasi, uning echimlari matritsa ko'rinishida ixcham ifodalanadi. Bu usulning kamchiligi shundan iboratki, teskari matritsani topish murakkab va juda kup xisoblashlarni talab etadi.

Ma'ruzaning nixoyasida tenglamalar sistemasini matritsa usulida echishning iktisodiyotdagi tadbigiga misol sifatida Leontevning tarmoklararo muvozanat modelini kurib chikamiz.

Xalk xujaligi n ta tarmokdan iborat deб, x_i orkali bir yilda i- tarmokning (i=1,2,…,n) ishlab chikargan yalpi maxsuloti xajmini, x_{ij} (i,j=1,2,…,n) orkali i- tarmokda ishlab chikarilgan yalpi maxsulotning j- tarmokda iste'mol kilinish mikdorini va y_i orkali i-tarmokda ishlab chikarilgan yalpi maxsulotning noishlab chikarishga sarflanadigan mikdorini belgilaymiz.

Bu ma'lumotlar asosida tarmoklararo muvozanat (balans) modelini tuzish talab etiladi.

Ixtiyoriy i-tarmokda ishlab chikarilgan yalpi maxsulot mikdori x_i shu tarmok maxsulotlarini n ta tarmokda sarflangan x_{ij} mikdorlari va shu tarmokning noishlab chikarishga sarflagan maxsulot mikdori y_i yigindisiga teng bo'ladi, ya'ni

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i \quad \text{(i=1,2,…,n)} \qquad (2)$$

(2) tenglamalar balans munosabatlari deyiladi. Bu tenglamalar pul qiymatlarda yoki natural mikdorlarda tuzilishi mumkin.

Endi tugri xarajatlar koeffitsienti deb ataluvchi va a_{ij} kabi belgilanib,$a_{ij}=x_{ij}/x_j$ (i,j=1,2,3,….,n) formula bilan aniklanuvchi kattalikni kiritamiz. Bu koeffitsient j- tarmokning bir birlik maxsulotini ishlab chikarish uchun sarflanadigan i-tarmok maxsuloti mikdorini ifodalaydi va uni uzgarmas deb karash mumkin. Bu xolda $x_{ij}= a_{ij}\cdot x_j$ bo'ladi va bu tenglikni (2) sistemaga kuysak,

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + y_i \quad \text{(i=1,2,…,n)} \qquad (3)$$

tenglamalar sistemasi xosil bo'ladi. Bu sistema tarmoklararo balans modeli deyiladi va u 1936 yilda amerikalik iktisodchi olim, Nobel mukofoti sovrindori V.Leontev tomonidan yaratilgan. Agar

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

(bu erda $a_{ij} \geq 0$, $x_i \geq 0$, $y_i \geq 0$) belgilashlardan foydalansak, u holda (3) sistema matritsalar orkali X=AX+Y ko'rinishda ifodalanishi mumkin. A va Y ma'lum bo'lsa,bu tenglamadan X ni topish mumkin. Buning uchun uni

$$X-AX=Y \Rightarrow (E-A)X=Y \qquad (4)$$

shaklda yozamiz. Bundan, agar $(E-A) \neq 0$ bo'lsa $X=(E-A)^{-1} \cdot Y$ ni topamiz. $S=(E-A)^{-1}$ matritsa tulik sarf-xarajat matritsasi deyiladi. (3) sistema yoki (4) tenglama tarmoklararo muvozanatning Leontev modeli deyiladi.

Uz-uzini nazorat etish savollari:

1. Teskari matritsa kanday ta'riflanadi?
2. Teskari matritsaning mavjudlik va yagonalik sharti nimadan iborat?
3. Teskari matritsa kanday topiladi?
4. Chiziqli tenglamalar sistemasi matritsa ko'rinishda kanday yoziladi?
5. Sistema matritsa usulida kanday echiladi?
6. Matritsalar usulining kanday kulayliklari va kamchiliklari bor?
7. Tarmoklararo muvozanatning Leontev modeli kanday ko'rinishda bo'ladi?

6-MA'RUZA.

VEKTORLAR VA ULAR USTIDA AMALLAR.

Tayanch iboralar: skalyarlar, vektorlar, vektor moduli, vektorning geometrik talkini, nol vektor, kollinear vektorlar, vektorlar tengligi, vektorlar yigindisi, vektorlar ayirmasi, vektorlarni songa kupaytmasi, ort vektorlar, vektorning yoyilmasi, vektorning koordinatalari.

Ma'ruza rejasi:

1. Skalyar va vektor kattaliklar.
2. Vektorning geometrik ma'nosi.
3. Vektorlarning kollinearligi va tengligi.
4. Vektorlar ustida arifmetik amallar va ularning xossalari.
5. Ort vektorlar va vektorning ortlar buyicha yoyilmasi.
6. Vektorning koordinatalari.
7. Koordinatalari bilan berilgan vektorlar ustida amallar.

Adabiyotlar:

[1] I bob, §1-7 [3] III bob, §1-2, [14]. 63-66 betlar.

Xayotda uchraydigan barcha kattaliklar matematikada ikki turga, ya'ni skalyar va vektor kattaliklarga ajratiladi.

T A ' R I F1: Fakat sonli qiymatlari bilan aniklanadigan kattaliklar **skalyarlar** deb ataladi.

Masalan, massa, xajm, uzunlik, modda zichligi, guruxdagi talabalar soni skalyarlar bo'ladi. Skalyarlar $a, в, c$ kabi belgilanadi.

T A ' R I F 2: Sonli qiymati va yunalishi bilan aniklanadigan kattaliklar **vektorlar** deyiladi.

Masalan, kuch, tezlik, bosim, xarakat, okim vektor kattaliklar bo'ladi. Vektorlar $\vec{a}, \vec{в}, \vec{c}$ kabi belgilanadi.

T A ' R I F3: $\vec{a}$ vektorning sonli qiymati uning **moduli** yoki **uzunligi** deb ataladi va $|\vec{a}|$ kabi belgilanadi.

Geometrik nuktai-nazardan vektorlar yunaltirilgan kesmalar singari karaladi. Yunaltirilgan kesmaning boshi A va oxiri B nuktada bo'lsa, tegishli vektor $\overrightarrow{AB}$ kabi belgilanadi. Bunda A nukta vektorning boshi, V nukta esa vektorning uchi, kesma uzunligi vektor uzunligi deyiladi, ya'ni $|AB| = |\overrightarrow{AB}|$.

T A ' R I F 4: Boshi va uchi bitta nuktadan iborat bo'lgan vektor **nol vektor** deyiladi.

Nol vektor $\vec{0}$ kabi belgilanib, uning moduli $|\vec{0}|=0$ bo'ladi. Bu vektor yunalishi tugrisida suz yuritib bo'lmaydi.

T A ' R I F 5: Bir tugri chizikda yoki parallel tugri chiziklarda joylashgan vektorlar **kollinear** vektorlar deb ataladi.

Masalan, ABCD parallelogramm bo'lsa, $\overrightarrow{AD}$ va $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}$ va $\overrightarrow{CD}$ vektorlar kollinear, $\overrightarrow{AD}$ va $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ va $\overrightarrow{AB}$ vektorlar esa kolllinear bo'lmaydi.

I z o x. Nol vektor $\vec{0}$ xar kanday $\vec{a}$ vektorga kollinear deb xisoblanadi.

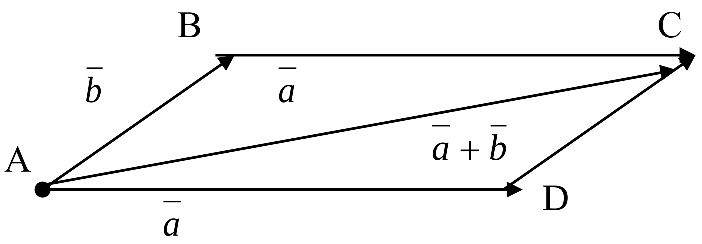
T A ' R I F 6: Ikkita $\vec{a}$, $\vec{в}$ vektorlar teng deyiladi va $\vec{a}=\vec{в}$ kabi belgilanadi, agarda quyidagi uchta shart bajarilsa:

1. $\vec{a}$ va $\vec{в}$ vektorlar kollinear;
2. $\vec{a}$ va $\vec{в}$ vektorlar bir xil uzunlikka ega, ya'ni $|\vec{a}|=|\vec{в}|$;

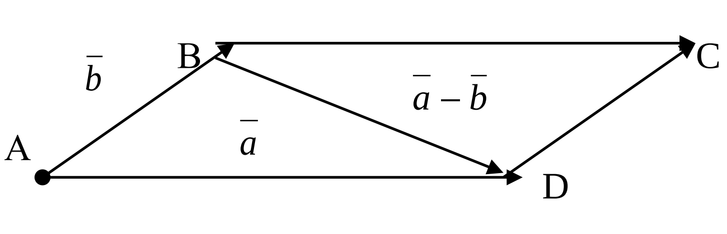
$\vec{a}$ va $\vec{в}$ bir xil yunalishga ega.

Masalan, ABCD parallelogrammda $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}$ = $\overrightarrow{DC}$ bo'ladi. Bu erdan vektorlarni parallel kuchirish mumkinligi kelib chikadi.

Endi ikkita $\vec{a}$ va $\vec{в}$ vektorlarni qo'shish va ayirish amalini kiritamiz. Buning uchun parallel kuchirish orkali ularning boshlarini bitta A nuktaga keltiramiz. Unda bu vektorlarni $\vec{a}=\overrightarrow{AD}$, $\vec{в}=\overrightarrow{AB}$ kabi belgilab, ABCD parallelogrammni hosil qilamiz.



Bu holda $\vec{a}$ va $\vec{в}$ vektorlarning yig′indisi deb parallelogrammning A uchidan chiquvchi diagonalidan hosil qilingan $\overrightarrow{AC}$ vektorga aytiladi va $\vec{a}+\vec{в}$ kabi belgilanadi. Bu vektorlarning $\vec{a}-\vec{в}$ ayirmasi parallelogrammning B uchidan chiquvchi diagonalidan hosil qilingan $\overrightarrow{BD}$ vektorga aytiladi.



Vektorlarni qo′shish amali quyidagi xossalarga ega:

1. $\vec{a}+\vec{в}=\vec{в}+\vec{a}$ **2.** $(\vec{a}+\vec{в})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{в}+\vec{c})$ **3.** $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$

T A ' R I F7: $\vec{a}$ vektorni λ songa (skalyarga) ko′paytmasi deb, $\lambda\vec{a}$ kabi belgilanadigan va quyidagi shartlar bilan aniqlanadigan vektorga aytiladi:

1. $\left|\lambda\vec{a}\right| = |\lambda| \cdot \left|\vec{a}\right|$, ya'ni vektorning uzunligi. $|\lambda|$ marta o′zgaradi;
2. $\lambda\vec{a}$ va $\vec{a}$ vektorlar kollinear;
3. $\lambda>0$ bo′lsa $\lambda\vec{a}$ va $\vec{a}$ bir xil yo′nalgan,
   $\lambda<0$ bo′lsa $\lambda\vec{a}$ va $\vec{a}$ qarama-qarshi yo′nalgan.

Masalan, ABCD trapetsiya bo′lib, uning asoslari AD=8 va BC=4 bo′lsa, unda $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{BC}$ va $\overrightarrow{AD}=-2\overrightarrow{CB}$ tengliklar o′rinli bo′ladi.

I z o x. $\lambda=0$ bo′lsa, har qanday $\vec{a}$ vektor uchun $0\cdot\vec{a}=\vec{0}$ bo′ladi.

Vektorning songa ko′paytirish amali quyidagi xossalarga ega:

1. $\lambda(\beta\vec{a})=\beta(\lambda\vec{a})$ 2. $(\lambda\pm\beta)\vec{a}=\lambda\vec{a}\pm\beta\vec{a}$ 3. $\lambda(\vec{a}\pm\vec{в})=\lambda\vec{a}\pm\lambda\vec{в}$

Bu erda α va β ixtiyoriy sonlar, $\vec{a}$ va $\vec{в}$ ixtiyoriy vektorlardir.

T A ' R I F8: (-1) $\vec{a}$ vektor $\vec{a}$ vektorga qarama-qarshi vektor deyiladi va -$\vec{a}$ kabi belgilanadi. Bunda doimo $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$ bo′ladi.

Endi bir tekislikda joylashgan vektorlarning koordinatalari tushunchasini kiritamiz. Buning uchun bu tekislikda XOY koordinatalar sistemasini olamiz.OX(OY) koordinata o′qida joylashgan, musbat yo′nalishda yo′nalgan va uzunligi birga teng bo′lgan $\vec{i}(\vec{j})$ vektorni kiritamiz.

Kiritilgan $\vec{i}$ va $\vec{j}$ vektorlar **ort vektorlar** yoki kiskacha **ortlar** deb ataladi. Endi berilgan $\vec{a}$ vektorni yo′naltirilgan kesma sifatida qarab, uning OX va OY o′qdagi proektsiyalarini qaraymiz. Bu proektsiyalar ham yo′naltirilgan kesma bo′lib, ular $\vec{a}$ vektorning OX va OY o′qdagi proektsiyalari deb ataladi va $\overrightarrow{a_x}$, $\overrightarrow{a_y}$ kabi belgilanadi. Unda, vektorlarni qo'shish ta'rifidan foydalanib, $\vec{a}=\overrightarrow{a_x}+\overrightarrow{a_y}$ tenglikni yozish mumkin.

Endi $\vec{a}$ vektor proektsiyalarining uzunligini $\left|\overrightarrow{a_x}\right|=|x|$, $\left|\overrightarrow{a_y}\right|=|y|$ kabi belgilaymiz. $\overrightarrow{a_x}$ va i ort $\left(\overrightarrow{a_y}\text{ va } \vec{j} \text{ орт}\right)$ kollinear vektorlar bo'ladi, chunki ular OX(OY) koordinata o′qida joylashgan. Unda $\left|\vec{i}\right|=\left|\vec{j}\right|=1$ bo′lgani uchun, vektorlarni songa ko′paytmasi ta'rifiga asosan, $\overrightarrow{a_x}=x\vec{i}$ va $\overrightarrow{a_y}=y\vec{j}$ deb yozish mumkin. Bu erda $\overrightarrow{a_x}$ va $\vec{i}$ ort bir xil yo′nalgan bo′lsa, $x=\left|\overrightarrow{a_x}\right|$ deb, qarama-qarshi yo′nalgan bo′lsa, $x=-\left|\overrightarrow{a_x}\right|$ deb olinadi. Xuddi shunday tarzda u qiymati $\pm\left|\overrightarrow{a_y}\right|$ kabi olinadi.

Bu holda tekislikdagi ixtiyoriy $\vec{a}$ vektorini $\vec{i}$ va $\vec{j}$ ortlar orqali

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} \qquad (1)$$

ko′rinishda yozish mumkin.

T A ' R I F 9: (1) tenglik $\vec{a}$ vektorning ortlar bo′yicha yoyilmasi, x va y sonlari esa uning koordinatalari deb ataladi va $\vec{a}$(x,y) kabi ifodalanadi.

Masalan, $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}$ vektorning koordinatalari x=2, y= -3 bo′ladi.

Nol vektor uchun $\vec{0} = 0\cdot\vec{i} + 0\cdot\vec{j}$ bo′lgani uchun uning koordinatalari x=0, y=0 bo′ladi.

Har qanday $\vec{a}$ vektor uzining x va y koordinatalari bilan (1) tenglik orqali to′lik aniqlanadi. Koordinatalari bilan berilgan vektorlarning tengligi, kollinearligi va ular ustidagi qo′shish, ayirish, songa ko′paytirish amallarining natijalari oson aniqlanadi.

TEOREMA 1: $\vec{a}(x_1,y_1)$ va $\vec{в}(x_2,y_2)$ vektorlar teng bo′lishi uchun ularning mos koordinatalari teng, ya'ni $x_1=x_2$, $y_1=y_2$ bo′lishi zarur va etarli.

TEOREMA2: $\vec{a}(x_1,y_1)$ va $\vec{в}(x_2,y_2)$ vektorlar kollinear bo′lishi uchun ularning mos koordinatalari proportsional, ya'ni

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = k \;\Rightarrow\; x_1 = kx_2,\, y_1 = ky_2$$

bo′lishi zarur va etarli.

Masalan, $\vec{a}$ (3,-2) va $\vec{в}$(9,-6) kollinear vektorlar, chunki 9/3=(-6/-2)=3.

TEOREMA3: $\vec{a}(x_1,y_1)$ va $\vec{в}(x_2,y_2)$ vektorlar yig′indisi yoki ayirmasining koordinatalari mos koordinatalarning yig′indisi yoki ayirmasiga teng bo′ladi, ya'ni

$$\vec{a}(x_1,y_1) \pm \vec{в}(x_2,y_2) = \vec{c}(x_1 \pm x_2,\, y_1 \pm y_2)$$

Masalan, $\vec{a}$ (4,-2) va $\vec{в}$(5,9) bo′lsa, $\vec{a}+\vec{в}$=(4+5,-2+9)=(9,7), $\vec{a}-\vec{в}$=(4-5,-2-9)=(-1,-11) koordinatali vektorlardan iborat bo′ladi.

TEOREMA4: $\vec{a}$(x,y) vektorning λ songa ko′paytmasining koordinatalari uning har bir koordinatasini λ songa ko′paytirishdan hosil bo′ladi, ya'ni $\lambda\cdot\vec{a}(x,y)=\vec{c}(\lambda x,\lambda y)$

Masalan, $\vec{a}$(4,-7) bo′lsa, $3\vec{a}$=(3·4,3·(-7))=(12,-21) koordinatali vektor bo′ladi.

Bu teoremalarning isboti talabalarga mustaqil ish sifatida beriladi.

Fazodagi vektorlarning koordinatalari tushunchasini kiritish uchun OX, OY va OZ o′qlari bo′yicha $\vec{i}, \vec{j}$ va $\vec{k}$ ort vektorlarni kiritamiz. Unda yuqorida ko′rsatilgan singari, fazodagi ixtiyoriy $\vec{a}$ vektorni

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\cdot\vec{k}$$

ko′rinishda yozish mumkin bo′ladi. Bu tenglik $\vec{a}$ vektorning ortlar bo′yicha yoyilmasi deb atalib, undagi x, y va z sonlari uning koordinatalari deyiladi va

$\vec{a}(x,y,z)$ kabi yoziladi. Fazodagi vektorlar uchun ham yuqorida ko′rilgan teoremalardagi tasdiqlar o′rinli bo′ladi.

O′z-o′zini nazorat etish savollari.

1. Qanday kattaliklar skalyarlar deyiladi?
2. Skalyar miqdorlarga misollar keltiring.
3. Qanday kattaliklar vektorlar deb ataladi?
4. Vektorlarga misollar keltiring.
5. Vektorlarning geometrik ma'nosi nimadan iborat?
6. Vektorning moduli deb nimaga aytiladi?
7. Qanday vektor nol vektor deyiladi?
8. Qanday vektorlar kollinear deyiladi?
9. Qachon vektorlar teng deb hisoblanadi?
10. Vektorlar yig′indisi qanday aniqlanadi?
11. Vektorlar yig′indisi qanday xossalarga ega?
12. Vektorni songa ko′paytmasi qanday aniqlanadi?
13. Vektorni songa ko′paytmasi qanday xossalarga ega?
14. Ort vektorlar deb qanday vektorlar tushuniladi7
15. Vektorning ortlar bo′yicha yoyilmasi qanday aniqlanadi?
16. Vektorning koordinatalari qanday topiladi?
17. Koordinatalari bilan berilgan vektorlarning tenglik va kollinearlik sharti nimadan iborat?
18. Koordinatalari bilan berilgan vektorlar ustida arifmetik amallar qanday bajariladi?

7-MA'RUZA

VEKTORLARNING SKALYaR KUPAYTMASI, UNING XOSSALARI VA TADBIKLARI.

Tayanch iboralar: skalyar ko′paytma, skalyar ko′paytmaning mexanik ma'nosi, skalyar ko′paytma xossalari, vektorlarning ortogonalligi, skalyar ko′paytmaning koordinatalardagi ifodasi, ikki vektor orasidagi burchak.

M a ' r u z a   r e j a s i:

1. Skalyar ko′paytma ta'rifi.
2. Skalyar ko′paytmaning mexanik ma'nosi.
3. Skalyar ko′paytma xossalari.
4. Vektorlarning ortogonalligi.
5. Skalyar ko′paytmaning koordinatalardagi ifodasi.
6. Skalyar ko′paytmaning tadbiklari.
7. Skalyar ko′paytmaning iqtisodiy ma'nosiga misol.

Adabiyotlar.

[1] I bob, §8 [3] III bob, §3-4 [14]. 66-68 betlar.

T A ' R I F: $\vec{a}$ va $\vec{в}$ vektorlarning **skalyar ko′paytmasi** deb $\vec{a}\cdot\vec{в}$ yoki $(\vec{a},\vec{в})$ kabi belgilanadigan va

$$\vec{a}\cdot\vec{в} = |\vec{a}|\cdot|\vec{в}|\cdot\cos\varphi \qquad (1)$$

formula bilan aniqlanadigan songa aytiladi. Bu erda φ orkali $\vec{a}$ va $\vec{в}$ vektorlar orasida burchak belgilangan.

Bu erda $\vec{a}$ va $\vec{в}$ vektorlarning (1) formula orqali ko′paytirilganda son, ya'ni skalyar kattalik hosil bo′ladi va shu sababli $\vec{a}\cdot\vec{в}$ vektorlarning skalyar ko′paytmasi deyiladi.

Skalyar ko′paytmaning mexanik ma'nosini ko′ramiz. $\vec{F}$ kuch moddiy nuqtaga ta'sir etib, uni to′gri chiziq bo′ylab $\vec{S}$ vektor bo′yicha xarakatlantirgan bo′lsin. Agarda kuch va harakat yo′nalishlari orasidagi burchak φ bo′lsa, bajarilgan A ish miqdori

$$A = |\vec{F}|\cdot|\vec{S}|\cdot\cos\varphi$$

formula bilan aniqlanishi bizga fizika kursidan ma'lum. Ammo bu formulani (1) ga asosan A=$\vec{F}\cdot\vec{S}$ deb yozish mumkin. Demak, $\vec{F}$ kuch va $\vec{S}$ harakat vektorlarining skalyar ko′paytmasi bajarilgan ishni ifodalaydi.

Skalyar ko′paytmaning ta'rifidan uning quyidagi xossalari kelib chiqadi:

1. $\vec{a}\cdot\vec{в}=\vec{в}\cdot\vec{a}$ 2. $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$ 3. $\lambda\vec{a}\cdot\vec{в}=\vec{a}\cdot\lambda\vec{в}$

4. $(\vec{a}\pm\vec{в})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}\pm\vec{в}\cdot\vec{c}$

T A ' R I F: $\vec{a}$ va $\vec{в}$ vektorlar orasidagi burchak $\varphi=90^0$ bo′lsa, ular ortogonal vektorlar deyiladi va $\vec{a}\perp\vec{в}$ kabi belgilanadi.

Masalan, oldingi ma'ruzada kurib utilgan ort vektorlar ortogonaldirlar, ya'ni $\vec{i}\perp\vec{j}$, $\vec{i}\perp\vec{k}$ va $\vec{j}\perp\vec{k}$.

TEOREMA. Noldan farqli $\vec{a}$ va $\vec{в}$ vektorlar ortogonal bo′lishi uchun ularning skalyar ko′paytmasi $\vec{a}\cdot\vec{в}=0$ bo′lishi zarur va etarli.

I s b o t. Zaruriyligi. $\vec{a}\perp\vec{в}$ bo′lsin. Unda ular orasidagi burchak $\varphi=90^0$ bo′ladi va skalyar ko′paytma ta'rifiga asosan

$$\vec{a}\cdot\vec{в}=|\vec{a}|\cdot|\vec{в}|\cdot\cos\varphi=|\vec{a}|\cdot|\vec{в}|\cdot\cos 90^0=|\vec{a}|\cdot|\vec{в}|\cdot 0=0$$

Etarliligi. $|\vec{a}|\neq 0$, $|\vec{в}|\neq 0$ bo′lib, $\vec{a}\cdot\vec{в}=0$ bo′lsin. Unda skalyar ko′paytma ta'rifidan

$$\vec{a}\cdot\vec{в}=|\vec{a}|\cdot|\vec{в}|\cdot\cos\varphi=0\Rightarrow\cos\varphi=0\Rightarrow\varphi=90^0\Rightarrow\vec{a}\perp\vec{в}$$

ekanligi kelib chiqadi.

Endi tekislikda yotuvchi va koordinatalari bilan berilgan $\vec{a}(x_1,y_1)$, $\vec{в}(x_2,y_2)$ vektorlarning skalyar ko′paytmasini topamiz. Buning uchun $\vec{i}\cdot\vec{i}=|\vec{i}|^2=1$, $\vec{j}\cdot\vec{j}=1$ va $\vec{i}\cdot\vec{j}=0$ va $\vec{j}\cdot\vec{i}=0$ ekanligidan va skalyar ko′paytmaning 3) va 4) xossalaridan foydalanamiz.

$$\vec{a}\cdot\vec{в}=(x_1\vec{i}+y_1\vec{j})(x_2\vec{i}+y_2\vec{j})=x_1x_2\vec{i}\,\vec{i}+x_1y_2\vec{i}\,\vec{j}+y_1x_2\vec{j}\,\vec{i}+y_1y_2\vec{j}\,\vec{j}=$$
$$=x_1x_2\cdot 1+x_1y_2\cdot 0+y_1x_2\cdot 0+y_1y_2\cdot 1=x_1x_2+y_1y_2$$

Demak

$$\vec{a}(x_1,y_1)\cdot\vec{в}(x_2,y_2)=x_1y_2+y_1y_2, \qquad (2)$$

ya'ni vektorlarning skalyar ko′paytmasi ularning mos koordinatalari ko′paytmalarining yig′indisiga teng bo′ladi.

Masalan, $\vec{a}(3,6)$ va $\vec{в}(5,-2)$ bo′lsa, $\vec{a}\cdot\vec{в}=3\cdot 5+6\cdot(-2)=15-12=3$ natijani olamiz.

Xuddi shunday tarzda fazodagi $\vec{a}(x_1,y_1,z_1)$ va $\vec{в}(x_2,y_2,z_2)$ vektorlarning skalyar ko′paytmasi uchun

$$\vec{a}(x_1,y_1,z_1)\cdot\vec{в}(x_2,y_2,z_2)=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2 \qquad (3)$$

formula o′rinli bo′lishini ko′rsatish mumkin.

Endi skalyar ko′paytma tadbiklari sifatida quyidagi masalalarni ko′ramiz.

1-masala. $\vec{a}(x,y,z)$ vektorning modulini toping.

Echish. Skalyar ko′paytmaning 2) xossasiga va (3) formulaga asosan

$$|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}=\sqrt{x\cdot x+y\cdot y+z\cdot z}=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \qquad (4)$$

Masalan, $\vec{a}(3,4,12)$ vektorning moduli

$$|\vec{a}|=\sqrt{3^2+4^2+12^2}=\sqrt{9+16+144}=\sqrt{169}=13$$

2-masala. $\vec{a}(x_1,y_1,z_1)$ va $\vec{в}(x_2,y_2,z_2)$ vektorlar orasidagi φ burchakni toping.

Echish. Skalyar ko′paytma ta'rifi (1), (3) va (4) formulalarga asosan

$$cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{в}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{в}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} \qquad (5)$$

Masalan, $\vec{a}$(1,0,1) va $\vec{e}$(0,1,1) vektorlar orasidagi φ burchak uchun

$$cos\,\varphi = \frac{1\cdot 0 + 0\cdot 1 + 1\cdot 1}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}\sqrt{1^2+0^2+1^2}} = \frac{1}{2}$$

natijani olamiz va undan $\varphi=60^0$ ekanligini topamiz.

3-masala. $\vec{a}(x_1,y_1,z_1)$ va $\vec{e}(x_2,y_2,z_2)$ vektorlarning ortogonallik shartini toping.

Echish. $\vec{a}\perp\vec{e}$ bo′lgani uchun ular orasidagi burchak $\varphi=90^0$ bo′ladi va shu sababli $\cos\varphi=0$. Unda (5) formuladan

$$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2 = 0 \qquad (6)$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu ikki vektorning ortogonallik shartidir.

Masalan, $\vec{a}$(3,-2,1) va $\vec{e}$(5,7,-1) vektorlar ortogonaldir, chunki

$$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2 = 3\cdot 5+(-2)\cdot 7+1\cdot(-1) = 15-14-1=0$$

4-masala. Fazodagi $A(x_1,y_1, z_1)$ va $B(x_2, y_2, z_2)$ nuqtalar orasidagi d masofani toping.

Echish. Bu nuqtalarni kesma bilan tutashtirib, $\overrightarrow{AB}$ vektorni xosil kilamiz. Ma'lumki, bu vektorning koordinatalari uning uchi bilan boshi koordinatalari ayirmasiga teng bo′ladi, ya'ni $\overrightarrow{AB}$ $(x_1–x_2,y_1–y_2,z_1–z_2)$. Unda (4) formulaga asosan,

$$d = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \qquad (7)$$

tenglikka ega bo′lamiz.

Masalan, A(5,-3,1) va B(8,1,13) nuqtalar orasidagi masofa

$$d = \sqrt{(8-5)^2+(1-(-3))^2+(13-1)^2} = \sqrt{9+16+144} = \sqrt{169} = 13$$

bo′ladi.

Tekislikdagi vektorlar uchun 1-4 masalalarning echimlarini topishni talabaga mustaqil ish sifatida havola etamiz.

Skalyar ko′paytmaning iqtisodiy ma'nosini ko′rsatish uchun uch xil mahsulotlarning narx va miqdorlarini ifodalovchi ushbu $\vec{p}(p_1,p_2,p_3)$ va $\vec{q}(q_1,q_2,q_3)$ vektorlarni kiritamiz. Unda ularning skalyar ko′paytmasi $\vec{p}\cdot\vec{q} = p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3$ uchala maxsulot qiymatini ifodalaydi.

O′z-o′zini nazorat etish savollari.

1. Vektorlarning skalyar ko′paytmasi qanday aniqlanadi?
2. Vektorlar skalyar ko′paytmasining mexanik ma'nosi nimadan iborat?
3. Skalyar ko′paytma qanday xossalarga ega?
4. Qanday vektorlar ortogonal vektorlar deyiladi?
5. Vektorlarning ortogonalligini zaruriy va etarli sharti nimadan iborat?
6. Skalyar ko′paytma vektorlarning koordinatalari orqali qanday ifodalanadi?
7. Ikki vektor orasidagi burchak qanday topiladi?
8. Ikki vektorning ortogonallik sharti koordinatalarda qanday ifodalanadi?
9. Ikki nuqta orasidagi masofa qanday topiladi?

10. Skalyar ko′paytmani iqtisodiy ma'nosiga misol keltiring.

8-MA'RUZA

VEKTORIAL KO′PAYTMA, UNING XOSSALARI VA TADBIQLARI

Tayanch iboralar: vektorial ko′paytma, vektorial ko′paytma xossalari, vektorial ko′paytmani hisoblash, kollinear vektorlar.

Ma'ruza rejasi:

1. Vektorial ko′paytma ta'rifi.
2. Vektorial ko′paytmaning mexanik ma'nosi.
3. Vektorial ko′paytmaning xossalari.
4. Ortlarning vektorial ko′paytmasi.
5. Koordinatalari bilan berilgan vektorlarning vektorial ko′paytmasi.
6. Vektorial ko′paytma yordamida echiladigan masalalar.
7. Vektorlarning kollinearlik sharti.

Adabiyotlar:

[1] I bob, §11 [3] III bob, §5-6

TA'RIF: $\vec{a}$ vektorning $\vec{в}$ vektorga **vektorial kupaytmasi** deb, quyidagi uchta shartni qanoatlantiruvchi yangi $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{в}$ vektorga aytiladi:

1. $\vec{c}$ ning uzunligi $\vec{a}$ va $\vec{в}$ vektorlarga qurilgan paralelleogramm yuziga teng bo′lib, quyidagicha ifodalanadi:
$\left|\vec{a} \times \vec{в}\right| = |\vec{a}| \cdot |\vec{в}|$ sin φ, bu erda $\varphi = \vec{a} \wedge \vec{в}$, ya'ni vektorlar orasidagi burchakni ifodalaydi.

2. $\vec{c}$ vektor $\vec{a}$ va $\vec{в}$ vektorlar tekisligiga perpendikulyar, ya'ni

$$\vec{a} \times \vec{в} \perp \vec{a}, \qquad \vec{a} \times \vec{в} \perp \vec{в}.$$

3. $\vec{c}$ vektor shunday yo′nalganki, uning uchidan qaraganda $\vec{a}$ vektordan $\vec{в}$ vektorga eng kiska burilish soat strelkasi xarakatiga teskari bo′ladi.

Agarda **F** radius vektori ***r*** bo’lgan moddiy A nuktaga ta'sir etuvchi kuch bo’lsa, u holda **F**×***r*** vektorial ko′paytma **F** kuchni A nuqtaga nisbatan momentini ifodalaydi.

Vektorial kupaytma xossalari.

1.Vektorial ko′paytmada ko′paytuvchilarning o′rni almashsa, ko′paytmaning faqat ishorasi o′zgaradi, ya'ni $\vec{a}$ x $\vec{в} = -(\vec{в}\times\vec{a})$

2. Vektorial ko′paytmada o′zgarmas (ko′paytuvchini tashqariga chiqarish mumkin, ya'ni

$$\vec{a}\times(\lambda\vec{в}) = (\lambda\vec{a})\times\vec{в} = \lambda(\vec{a}\times\vec{в})$$

3. Vektorial ko′paytma uchun taqsimot qonuni o′rinli, ya'ni

$$\vec{a}\times(\vec{в}+\vec{m}) = \vec{a}\times\vec{в} + \vec{a}\times\vec{m}$$

TEOREMA. Ikkita nolmas $\vec{a}$ va $\vec{в}$ vektorlar kollinear bo′lishlari uchun ularning vektorial ko′paytmasi nolga teng bo′lishi zarur va etarli, ya'ni $\vec{a} \mid\mid \vec{в} \Leftrightarrow \vec{a}$ x $\vec{в}$ =0

Isboti: $\vec{a} \mid\mid \vec{в}$ bo′lsin. U holda φ=0 yoki φ=π va sin φ=0. Demak.

$\left|\vec{a}\text{ x }\vec{в}\right| = |\vec{a}|\cdot|\vec{в}|$ sin φ= $|\vec{a}|\cdot|\vec{в}|\cdot 0=0$. Uzunligi nolga teng bo′lgan vektorning uzi ham nol vektor bo′ladi, ya'ni $\vec{a}$ x $\vec{в}$ =0.

Endi, aksincha $\vec{a}\, x\, \vec{в}$ =0 bo′lsin. U holda $|\vec{a}|\cdot|\vec{в}|$sinφ=$|\vec{a}\, x\, \vec{в}|$=0 bo′ladi. Bunda $|\vec{a}|\neq 0$, $|\vec{в}|\neq 0$ bo′lgani uchun faqat sin φ=0, ya'ni φ=0 yoki φ=π ekanligi kelib chiqadi. Bu esa $\vec{a} \mid\mid \vec{в}$ ekanligini bildiradi.

Natija: Ixtiyoriy $\vec{a}$ vektor uchun $\vec{a}$ x $\vec{a} = \vec{o}$ bo′ladi.

Misol: ($\vec{a}$ -2$\vec{в}$)x(2$\vec{a}$ + $\vec{в}$) ko′paytmani soddalashtiring.

Echish: ($\vec{a}$ -2$\vec{в}$)x(2$\vec{a}$ + $\vec{в}$)=2$\vec{a}$ x $\vec{a}$ + $\vec{a}$ x $\vec{в}$ -2$\vec{в}$ x2$\vec{a}$ -2$\vec{в}$ x $\vec{в}$ =5$\vec{a}$ x $\vec{в}$

Vektorial ko′paytmani koordinatalarda xisoblash.

Avval koordinata o′qlaridagi $\vec{i}$, $\vec{j}$ va $\vec{k}$ ortlarning vektorial ko′paytmasini hisoblaymiz. Vektorial ko′paytmaning ta'rifiga asosan

$$\vec{i}\text{ x }\vec{i} = 0, \quad \vec{j}\text{ x }\vec{j} = 0, \quad \vec{k}\text{ x }\vec{k} = 0$$

Endi **i** x **j** vektorni hisoblaymiz. Ort vektorlar ta'rifiga asosan

$|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1, \quad \vec{i}\perp\vec{j}, \quad |\vec{i}\, x\, \vec{j}| = |\vec{i}|\cdot|\vec{j}|\sin\frac{\pi}{2} = 1$

Bu erdan va vektorial kupaytmaning ta'rifidan **i** x **j** vektor OZ uki buylab yunalgan va uning uzunligi 1 ga teng. Demak, **i** x **j** = **k** ekan. Xuddi sho'nga o′xshash **j** x **k =i, k**x**i =j.** Vektorial ko′paytmaning 1 – xossasiga binoan

$$\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k},\quad \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i},\ \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}$$

$\vec{a}$ va $\vec{в}$ vektorlar uzining koordinatalari bilan berilgan bo′lsin, ya'ni

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k};\qquad \vec{в}=в_x\vec{i}+в_y\vec{j}+в_z\vec{k};$$

Bu holda $\vec{a}$ va $\vec{в}$ vektorlarning vektorial ko′paytmasini topamiz. Vektorial ko′paytma xossalari va ortlarning vektorial ko′paytmasiga asosan

$$\vec{a}\times\vec{в}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\times(в_x\vec{i}+в_y\vec{j}+в_z\vec{k})=a_xв_x(\vec{i}\times\vec{i})+a_xв_y(\vec{i}\times\vec{j})+$$

$$+a_xв_z(\vec{i}\times\vec{k})+a_yв_x(\vec{j}\times\vec{i})+a_yв_y(\vec{j}\times\vec{j})+a_yв_z(\vec{j}\times\vec{k})+a_zв_x(\vec{k}\times\vec{i})+a_zв_y(\vec{k}\times\vec{j})+$$

$$+a_zв_z(\vec{k}\times\vec{k})=0+a_xв_y\vec{k}-a_xв_z\vec{j}-a_yв_x\vec{k}+0+a_yв_z\vec{i}+a_zв_x\vec{j}+a_zв_y\vec{i}+0=$$

$$=(a_yв_z-a_zв_y)\vec{i}+(a_zв_x-a_xв_z)\vec{j}+(a_xв_y-a_yв_x)\vec{k}=c_x\vec{i}+c_y\vec{j}+c_z\vec{k}.$$

Bunda c_x, c_y, c_z koordinatalar orqali mos qavslardagi ifodalar belgilandi. Bu koordinatlarni mos ravishda aniqlovchilar yordamida xam ko′rsatsa bo′ladi:

$$\vec{a}\times\vec{в}=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ в_y & в_z\end{vmatrix}\vec{i}+\begin{vmatrix}a_z & a_x\\ в_z & в_x\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ в_x & в_y\end{vmatrix}\vec{к}$$

yoki

$$\vec{a}\times\vec{в}=\begin{vmatrix}i & j & k\\ a_x & a_y & a_z\\ в_x & в_y & в_z\end{vmatrix}$$

Misol. $\vec{a}(2;3;-1)$ va $\vec{в}(3;-1;-4)$ vektorlarning vektorial ko′paytmasini toping.

Echish:

$$\vec{a}\times\vec{в}=\begin{vmatrix}i & j & k\\ 2 & 3 & -1\\ 3 & -1 & -4\end{vmatrix}=-13\vec{i}+5\vec{j}-11\vec{k}$$

Endi vektorial ko′paytmaning ba'zi bir tadbiqlarini ko′ramiz.

1-masala. $\vec{a}(a_x,\ a_y,\ a_z)$ va $\vec{в}(в_x,\ в_y,\ в_z)$ vektorlarga yasalgan paralelogrammning yuzini toping.

E ch i sh: Vektorial ko′paytmaning ta'rifiga asosan paralellogramm yuzi quyidagicha topiladi:

$$S=|\vec{a}\times\vec{в}|=|\vec{c}|=\sqrt{c_x^2+c_y^2+c_z^2}=\sqrt{\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ в_y & в_z \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} a_z & a_x \\ в_z & в_x \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} a_y & a_y \\ в_x & в_y \end{vmatrix}^2}$$

Misol. $\vec{a}$ (2; 3; -1) va $\vec{в}$ (3; -1; -4) vektorlarga yasalgan parallelogramm yuzasini toping.

E ch i sh : Oldin ko′rsatilganga asosan

$$\vec{a}\times\vec{в}=-13\vec{i}+5\vec{j}-11\vec{k}$$

bo′lgani uchun, izlangan S yuza

$$S=\sqrt{(-13)^2+5^2+(-11)^2}=\sqrt{169+25+121}=\sqrt{315}=3\sqrt{35}$$

Natija. $\vec{a}$ va $\vec{в}$ vektorlardan yasalgan uchburchakning yuzi

$$S_\Delta=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{в}|$$

formula bilan topiladi.

2-masala. $\vec{a}$ (a_x, a_y, a_z) va $\vec{в}$ $(в_x, в_y, в_z)$ vektorlarning kollinearlik shartini toping.

E ch i sh: Oldin ko′rilgan teoremada $\vec{a}$ va $\vec{в}$ vektorlar kollinear bo′lishi uchun ularning vektorial ko′paytmasi $\vec{a}\times\vec{в}=0$ bo′lishi kerak ekanligi ko′rsatilgan edi. Bu tenglikni koordinatalarda ifodalaymiz:

$$\vec{a}\times\vec{в}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ в_x & в_y & в_z \end{vmatrix}=0.$$

Bu aniqlovchining birinchi satri vektorlardan, ikkinchi va uchinchi satrlari esa skalyarlardan iborat bo′lgani uchun, yuqoridagi tenglik faqat

$$\frac{a_x}{в_x}=\frac{a_y}{в_y}=\frac{a_z}{в_z}$$

bo′lganda o′rinli bo′ladi. Bu tenglik vektorlarning kollinearlik shartini ifodalaydi.

M i s o l. $\vec{a}$ (m,3,2) va $\vec{в}$ (4,6, n) vektorlar m va n parametrlarning qanday qiymatlarida kollinear bo′lishini toping.

E ch i sh. Kollinearlik shartiga asosan

$$\frac{m}{4}=\frac{3}{6}=\frac{2}{n}\Rightarrow m=2, n=4.$$

O′z-o′zini nazorat etish savollari:

1. Vektorial ko′paytma qanday ta'riflanadi?
2. Vektorial ko′paytmaning mexanik ma'nosi nimadan iborat?
3. Vektorial ko′paytma qanday xossalarga ega?
4. Ortlarning vektorial ko′paytmasi qanday topiladi?
5. Vektorial ko′paytma koordinatalarda qanday ifodalanadi?
6. Ikkita vektorlardan hosil qilingan parallelogramm va uchburchak yuzalari qanday topiladi?
7. Vektorlarning kollinearlik sharti nimadan iborat?

9 -MA'RUZA

VEKTORLARNING ARALASH KOʼPAYTMASI, UNING XOSSALARI VA TADBIQLARI.

Tayanch iboralar: aralash koʼpaytma, uning geometrik ma'nosi, komplanar vektorlar, aralash koʼpaytma xossalari, aralash koʼpaytmani koordinatalar orqali ifodalash, aralash koʼpaytma tadbiqlari.

M a ' r u z a   r e j a s i :

1. Vektorlarning aralash koʼpaytmasi.
2. Aralash koʼpaytmaning geometrik ma'nosi.
3. Aralash koʼpaytmaning xossalari.
4. Koordinatalari bilan berilgan vektorlarning aralash koʼpaytmasini hisoblash.
5. Aralash koʼpaytma yordamida echiladigan masalalar.
6. Vektorlarning komplanarlik sharti.

Adabiyotlar:

[1] I bob, §12 [3] III bob, §7

Uchta ***a, в, c*** vektorlarni uzaro kupaytirish masalasini kuraylik. Agar ***a*** **v**a ***в*** vektorlarni skalyar koʼpaytirib, natijani **c** vektorga koʼpaytirsak, u holda **c** vektorga kollinear vektor hosil boʼladi. Agarda birinchi ikkita vektorni vektorial koʼpaytirib, soʼngra hosil boʼlgan natijani uchinchi **c** vektorga yana vektorial koʼpaytirsak, natijada yana bir yangi vektor hosil qilamiz. Bundan tashkari uchta vektorni quyidagi usulda ham koʼpaytirish mumkin.

T A ' R I F 1: ***a, в, c*** vektorlarning aralash kupaytmasi deb ***a*** x ***в*** vektorial koʼpaytmani **c** vektorga skalyar koʼpaytmasi kabi aniqlanadigan songa aytiladi va ***a в c*** kabi belgilanadi.

Shunday qilib ta'rifga asosan aralash (vektor – skalyar) koʼpaytma

$$a\,в\,c = (a \times в)\cdot c$$

koʼrinishda boʼladi.

T A ' R I F 2: Vektorlar komplanar deyiladi, agarda ular bitta tekislikda yoki parallel tekisliklarda joylashgan boʼlsa.

Aralash koʼpaytmaning geometrik ma'nosini koʼrib oʼtaylik. Buning uchun komplanar boʼlmagan ***a,в, c*** vektorlarni karaylik. Ma'lumki, ***a*** x ***в*** uzunligi koʼpaytuvchi vektorlardan tuzilgan parallelogrammning yuzasiga teng va parallelogramm tekisligiga perpendikulyar yoʼnalgan vektordan iborat bo’ladi.

Agar ***a*** x ***в*** vektorga ***c*** vektorni proektsiyalasak, u holda shu proektsiya parallelogramm tekisligiga perpendikulyar bo′lib, uning moduli ***a***, ***в***, ***c*** vektorlarga kurilgan parallelopiped balandligi H qiymatini ifodalaydi. Unda bu parallelopiped xajmi uchun

$$V=S_{acoc}\cdot H=|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{в})\boldsymbol{c}|$$

formulaga ega bo′lamiz. Shunday qilib, aralash ko′paytma parallelepiped xajmini ifodalar ekan.

Endi aralash ko′paytmaning xossalarini ko′rib o′tamiz:

Aralash ko′paytmada vektorial va skalyar ko′paytma amallari o′rnini almashtirish mumkin, ya'ni

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{в})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{в}\times\boldsymbol{c})\ .$$

Shu sababli aralash ko′paytmada amallarni ko′rsatmasdan, qisqacha ***авс*** kabi yozish mumkin.

1. Aralash ko′paytmada ko′paytuvchilar o′rnini soat miliga teskari yo′nalish bo′yicha doiraviy ravishda almashtirilsa, uning qiymati o′zgarmasdan qoladi, ya'ni

$$\boldsymbol{a\,в\,c}=\boldsymbol{c\,a\,в}=\boldsymbol{в\,c\,a}=\boldsymbol{a\,в\,c}.$$

Bo'nga aralash ko′paytmaning aylanma xossasi deb yuritishadi.

2. Aralash ko′paytmada yonma – yon turgan vektorlarni o′rni almashtirilsa, uning ishorasi teskarisiga o′zgaradi, ya'ni

$$\boldsymbol{a\,в\,c}=-\boldsymbol{в\,a\,c}=-\boldsymbol{c\,в\,a}=-\boldsymbol{a\,c\,в}$$

Skalyar hamda vektorial ko′paytmalarning qanday sharoitda nolga teng bo′lishini taxlil qilgan edik. Bu savolni endi aralash ko′paytma uchun ko′rib chiqaylik. Quyidagi xollar bo′lishi mumkin:

ko′paytuvchi vektorlardan kamida bittasi nol vektor;

ko′paytuvchi vektorlardan kamida ikkitasi kollinear;

ko′paytuvchi vektorlar komplanar.

Birinchi holda aralash ko′paytmaning nol bo′lishi o′z – o′zidan kelib chiqadi. Ikkinchi holda, ya'ni ikkita vektor kollinear bo′lsa, unda ularning vektorial ko′paytmasi nol va shu sababli aralash ko′paytma ham nolga teng bo′ladi. Uchinchi holda ***a*** x ***в*** va ***c*** vektorlar perpendikulyar bo′ladi va shu tufayli ularning skalyar ko′paytmasidan hosil bo′lgan aralash ko′paytma nol bo′ladi.

Natijada quyidagi tasdiqni olamiz:

TEOREMA. Noldan farqli uchta vektorning komplanar bo′lishi uchun ularning aralash ko′paytmasi nolga teng bo′lishi zarur va etarlidir.

Koordinatalari bilan berilgan $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\boldsymbol{в}=(в_x,в_y,в_z)$, $\boldsymbol{c}=(c_x,c_y,c_z)$ vektorlarning aralash ko′paytmasini hisoblash formulasini keltirib chiqaramiz. Vektorial ko′paytmani hisoblash formulasiga asosan

$$\mathbf{a} \times \mathbf{в} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ в_x & в_y & в_z \end{vmatrix} = (a_y\, в_z - a_z\, в_y)\,\mathbf{i} + (a_z\, в_x - a_x в_z)\,\mathbf{j} +$$

$$+ (a_x в_y - a_y в_x)\mathbf{k} = A\mathbf{i}+B\mathbf{j}+C\mathbf{k}\,.$$

Skalyar ko′paytmani hisoblash formulasi va yuqoridagi tenglikka hamda aniqlovchining satr bo′yicha yoyilmasiga asosan

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{в})\mathbf{c} = Ac_x + Bc_y + Cc_z = \begin{vmatrix} c_z & c_x & c_y \\ a_x & a_y & a_z \\ в_z & в_x & в_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ в_x & в_y & в_z \\ c_z & c_x & c_y \end{vmatrix}$$

Demak, aralash ko′paytma ko′paytuvchi vektorlarning koordinatalaridan tuzilgan III tartibli aniqlovchi kabi hisoblanadi.

Masalan, $\boldsymbol{a}=(3,1,-2)$, $\boldsymbol{в}=(4,\ 0,\ 1)$, $\boldsymbol{c}=(0,2,-1)$ vektorlarning aralash ko′paytmasini topamiz:

$$\boldsymbol{a\ в\ c} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -16 - 6 + 4 = -18.$$

Aralash ko′paytmaning koordinatalardagi ko′rinishidan foydalanib, uchta vektorlarning komplanarlik shartini topamiz:

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ в_x & в_y & в_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0$$

Aralash ko′paytmadan foydalanib, quyidagi masalalarni echamiz :

M a s a l a 1 : ***a*, *в*, *c*** vektorlardan tuzilgan uchburchakli piramida xajmini toping.

E ch i sh : Berilgan ***a***, ***в*** va ***c*** vektorlardan tuzilgan piramidaning asosidagi ***a***, ***в*** vektorlar hosil qilgan uchburchak yuzasini S, balandligi $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{в}| = h$ va xajmini V deb olsak, $V= Sh/3$ tenglik o′rinli bo′ladi. Shu vektorlardan tuzilgan parallelopiped asosi yuzasi 2S, balandligi esa h bo′ladi. Bu parallelopiped xajmini V_0 deb olsak, $V_0=2Sh =|\boldsymbol{a\ в\ c}|$ bo′ladi.

Bu holda piramida xajmi

$$V = V_0/6 = |\,\mathbf{a\ в\ c}\,|/\ 6 = \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ в_x & в_y & в_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

formula bilan hisoblanadi.

M a s a la 2 : Fazodagi to′rtta $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ va $M_4(x_4, y_4, z_4)$ nuqtalarni bir tekislikda yotish shartini toping.

<u>E ch i sh:</u> M_1 , M_2 , M_3 va M_4 nuqtalar bir tekislikda yotishi uchun

$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 – x_1 , y_2 – y_1, z_2 - z_1)$, $\overrightarrow{M_1M_3} = (x_3 – x_1 , y_3 – y_1, z_3 - z_1)$, $\overrightarrow{M_1M_4} = (x_4 – x_1 , y_4 – y_1, z_4 - z_1)$ vektorlarni komplanar bo′lishi zarur va etarli, ya'ni

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

shart kelib chikadi.

<u>O′z-o′zini nazorat etish savollari:</u>

1. Vektorlarning aralash ko′paytmasi qanday ta'riflanadi?
2. Aralash ko′paytmaning geometrik ma'nosi nimadan iborat?
3. Aralash ko′paytma natijasida qanaqa kattalik hosil bo′ladi?
4. Aralash ko′paytma qanday xossalarga ega?
5. Aralash ko′paytma koordinatalar orqali qanday topiladi?
6. Uchta vektordan hosil qilingan parallelopiped va piramida xajmi qaysi formula bilan topiladi?
7. Uchta vektorning komplanarlik sharti nimadan iborat?
8. To′rtta nuqta kaysi shartda bir tekislikda yotadi?

<u>10-MA'RUZA</u>

KO′P O′LCHOVLI VEKTOR VA VEKTOR FAZOLAR.

Tayanch iboralar: **n o′lchovli vektor, n o′lchovli vektorlarning tengligi, vektorlar yig′indisi, vektorlarni songa ko′paytmasi, vektor fazo, chiziqli bog′liklik vektorlar, erkli vektorlar,vektor fazo o′lchovi, bazis, vektorni bazisdagi yoyilmasi, vektorning koordinatalari.**

<u>M a ' r u z a   r e j a s i :</u>

1. Ko′p o′lchovli vektorlar va ular ustida chiziqli amallar;
2. Chiziqli amallarning xossalari;
3. Vektor fazolar ;
4. Chiziqli bog′lik va erkli vektorlar;
5. Vektor fazolarning o′lchovi va bazisi;
6. Vektorlarni bazis bo′yicha yoyilmasi va uning yagonaligi.

<u>Adabiyotlar:</u>

[14]. 68-76 betlar.

Oljingi ma'ruzalarda tekislik va fazoda vektor tushunchasini kiritib, bu vektorlar to′plamida vektorlarni qo′shish, ayirish, songa ko′paytirish, ularni o′zaro skalyar, vektorial va aralash ko′paytirish amallarini kiritgan edik.

Endi vektor tushunchasini umumlashtirib, vektor fazoga ta'rif beramiz.

<u>TA'RIF 1:</u> n ta tartiblashgan haqiqiy sonlardan tashkil topgan $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ ko′rinishdagi ifodaga *n-o′lchovli vektor* deyiladi.Bu yerda x_i $(i=1,2,\ldots,n)$ soni x vektorning i-komponentasi deb ataladi.

n–o′lchovli vektor tushunchasi iqtisodiyotda keng qo′llaniladi. Masalan, turli maxsulotlardan tashkil etilgan to′plamni $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, ularning baholarini esa $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ vektorlar ko′rinishida ifodalash mumkin.

<u>TA'RIF 2:</u> Ikkita bir xil *n*-o′lchovli $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ va $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ vektorlar teng deyiladi va x=y kabi belgilanadi, agarda ularning mos koordinatalari teng, ya'ni $x_1=y_1$, $x_2=y_2,\ldots$, $x_n=y_n$ bo′lsa.

Endi ko′p o′lchovli vektorlar ustida amallar kiritamiz.

<u>TA'RIF 3:</u> Ikkita bir xil n o′lchovli $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ va $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ vektorlarning yigindisi deb shunday yangi $x+y= z=(z_1,z_2,\ldots,z_n)$ vektorga aytiladiki, uning koordinatalari x va *y* vektorlarning mos koordinatalarini qo′shishdan hosil bo′ladi, ya'ni $z_i=x_i+y_i$, $i=1,2,\ldots,n$.

<u>TA'RIF 4:</u> $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ vektorni λ *xakikiy songa kupaytmasi* deb shunday yangi $\lambda x= z=(z_1,z_2,\ldots,z_n)$ vektorga aytiladiki, unda $z_i=\lambda x_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$ bo′ladi.

Kiritilgan bu ikki amal yordamida x va y vektorlarning ayirmasini $x-y= x+(-1)y$ kabi kiritish mumkin.

Masalan, $x=(3,-2,5,7,-4)$ va $y=(0,7,9,-1,2)$ besh o′lchovli vektorlar berilgan bo′lsa, unda

$x+y=(3,-2,5,7,-4)+(0,7,9,-1,2)=(3+0,-2+7,5+9,7+(-1),-4+2)=(3,5,14,6,-2)$

$5x=5(3,-2,5,7,-4)=(5\cdot 3, 5\cdot(-2), 5\cdot 5, 5\cdot 7, 5\cdot(-4))=(15,-10,25,35,-20)$,

$x-y=(3,-2,5,7,-4)-(0,7,9,-1,2)=(3-0,-2-7,5-9,7-(-1),-4-2)=(3,-9,-4,8,-6)$.

Ixtiyoriy vektorlar ustidagi bu chiziqli amallar quyidagi xossalarni qanoatlantiradi:

1. $x+y=y+x$- yig′indining kommutativlik xossasi;
2. $x+(y+z)=(x+y)+z$- yig′indining assotsiativlik xossasi;
3. $\alpha\cdot(\beta x)=(\alpha\cdot\beta)x$ -sonli ko′paytuvchiga nisbatan assotsiativlik xossasi.
4. $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$- vektorlar yig′indisining distributivlik xossasi.
5. $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$- sonli yig′indini ko′paytuvchiga nisbatan distributivlik xossasi.
6. $0=(0,0,0,\ldots,0)$ nol vektor va ixtiyoriy x vektor uchun $x+0=x$ tenglik o′rinli bo′ladi.
7. Ixtiyoriy x vektorga $(-1)x=-x$ qarama-qarshi vektor deyiladi va ular uchun $x+(-x)=0$ tenglik o′rinlidir.
8. Ixtiyoriy x vektor uchun$1\cdot x=x$ tenglik o′rinli bo′ladi.

<u>TA'RIF 5:</u> Agar haqiqiy koordinatali vektorlar to′plamida vektorlarni qo′shish va songa ko′paytirish amallari aniqlangan bo′lib, ular yuqorida keltirilgan 8 ta xossalarni (aksiomalarni) qanoatlantirsa, u holda bu to′plam vektor fazo deb aytiladi.

Yuqorida kurilgan x,y,z lar nafaqat vektorlar, balki ixtiyoriy ob'ektlar (elementlar) bo′lishi mumkin. Unda bu elementlar va kiritilgan amallardan tuzilgan to′plam chiziqli fazo deyiladi. Masalan, x va y lar darajasi n dan oshmagan ko′phadlar bo′lsa, u holda yuqoridagi 8 xossa qanoatlantiriladi, ya'ni darajasi n dan oshmagan barcha algebraik ko′phadlar to′plami chiziqli fazo hosil etadi.

Vektor (chiziqli) fazoning ta'rifidan shu xulosa kelib chiqadiki, bu fazoda yagona 0 (nol) vektor va har bir x ga qarama-qarshi yagona $-x$ vektorlar mavjud bo′lib, ular uchun $0\cdot x=0$, $(-1)x=-x$ tengliklar urinlidir.

<u>TA'RIF 6:</u> Biror R vektor fazoning a vektori shu fazoning $a_1, a_2,\ldots,a_m$ vektorlarining chiziqli kombinatsiyasidan iborat deyiladi, agarda qandaydir $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m$ haqiqiy sonlarda ushbu tenglik o′rinli bo′lsa:

$$a=\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\ldots+\lambda_m a_m\,. \qquad (1)$$

<u>TA'RIF 7:</u> R vektor fazoning $a_1, a_2,\ldots,a_m$ vektorlari *chiziqli bog′liq deyiladi*, agarda bir vaqtda barchasi nolga teng bo′lmagan $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m$ haqiqiy sonlar mavjud bo′lib,

$$\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\ldots+\lambda_m a_m=0 \qquad (2)$$

tenglik o′rinli bo′lsa. Aks holda $a_1, a_2,\ldots,a_m$ vektorlar *chiziqli bogliqmas (erkli)* deyiladi.

Ta'rifdan kelib chiqadiki, berilgan $a_1, a_2,\ldots,a_m$ vektorlar chiziqli bog′liqmas bo′lsa, u holda (2) tenglik faqat $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_m=0$ bo′lganda o′rinli bo′ladi.

Agar a_1, a_2,…,a_m vektorlar chiziqli bog′lik bo′lsa, u holda ularning har bittasi qolganlarining chiziqli kombinatsiyasi ko′rinishida ifodalanadi va aksincha, a_1, a_2,…,a_m vektorlardan birortasi qolganlari orqali chiziqli ifodalansa, u holda ular chiziqli bog′lik bo′ladi.

Masalan, a_1 =(1,0,0,0), a_2 =(0,1,0,0), a_3 =(0,0,1,0), a_4 =(0,0,0,1) vektorlar chiziqli bog′liqmas (erkli); c_1=(3,0,0,0), c_2=(0,0,1,0), c_3=(6,0,-7,0) vektorlar esa chiziqli bogliq ($2c_1-7c_2+c_3=0$) bo′ladi.

TA'RIF 8: R vektor (chiziqli) fazo n o′lchovli deyiladi, agar unda n ta chiziqli bog′liqmas vektorlar mavjud bo′lib, ixtiyoriy (n+1) ta vektor chiziqli bog′lik bo′lsa.

Bu erda n soni R fazoning o′lchovi deb atalib, n=dim(R) kabi belgilanadi va u R fazodagi chiziqli bogliqmas vektorlarning maksimal soniga teng bo′ladi.

TA'RIF 9: n o′lchovli R fazoning ixtiyoriy n ta chiziqli bog′liqmas vektorlari to′plami uning bazisi deyiladi.

Masalan, 4 o′lchovli fazoda yuqorida ko′rib o′tilgan

$$a_1=(1,0,0,0),\ a_2=(0,1,0,0),\ a_3=(0,0,1,0),\ a_4=(0,0,0,1)$$

vektorlar bazisni tashkil etadi.

TEOREMA: R chiziqli fazoning xar bir x vektorini shu R fazoning bazis vektorlarining chiziqli kombinatsiyasi orqali yagona usulda ifodalash mumkin.

Isbot: Faraz qilaylik e_1, e_2, …, e_n vektorlar n o′lchovli R fazoning ixtiyoriy bir bazisi bo′lsin. Unda, ixtiyoriy (n+1)ta vektorlar chiziqli bog′lik ekanligidan, e_1, e_2, …, e_n va x vektorlar birgalikda chiziqli bog′lik bo′lishi kelib chiqadi. Bu holda bir vaqtning o′zida barchasi nolga teng bo′lmagan (n+1)ta shunday $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$, λ sonlar mavjudki,

$$\lambda_1 e_1+\lambda_2 e_2+\ldots+\lambda_m e_m+\lambda \bar{x}=0\ . \qquad (3)$$

Bu erda $\lambda\neq 0$ bo′ladi, chunki agar $\lambda=0$ bo′lsa, u holda yuqoridagi tenglikdan $e_1,e_2,\ldots,e_n$ vektorlar chiziqli bog′lik ekanligi, ya'ni ular bazis tashkil etmasligi kelib chiqadi. Demak $\lambda\neq 0$ bo′lib, (3) dan

$$x=-\frac{\lambda_1}{\lambda}e_1-\frac{\lambda_2}{\lambda}e_2-\cdots-\frac{\lambda_n}{\lambda}e_n\ ,$$

$$x=x_1e_1+x_2e_2+\ldots+x_ne_n\ ,\ x_i=\lambda_i/\lambda\ , \qquad (4)$$

tenglikka ega bo′lamiz. Bu erdan x vektor e_1, e_2, …, e_n bazis orqali chiziqli ifodalanishi va bunday ifodalanish yagona ekanligi kelib chiqadi.Teorema isbot bo′ldi.

(4) ifoda x vektorni e_1, e_2, …, e_n bazisdagi yoyilmasi va unlagi $x_1,x_2,\ldots,x_n$ koeffitsientlar x vektorning shu bazisga nisbatan koordinatlari deb ataladi. Demak, xar qanday vektor biror bazisdagi koordinatalari orkali bir qiymatli aniqlanadi. Xar qanday bazisda 0 vektorning koordinatalari nollardan va ixtiyoriy $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ vektorga qarama-qarshi vektorning koordinatalari $-x_1$, $-x_2$, …, $-x_n$ sonlardan iborat bo′ladi.

Masalan, 4 o′lchovli vektor fazoda e_1(1,1,0,0), e_2(0,1,1,0), e_3(0,0,1,1), e_4(0,1,0,1) vektorlar bazis tashkil etishini va bu bazisda x=(2,0,-3,1) vektorning koordinatalari $x_1=2$, $x_2=-3$, $x_3=0$, $x_4=1$ bo′lishini talabalar mustaqil ish sifatida tekshirib ko′rishlari mumkin.

TEOREMA: Agar $e_1, e_2, \ldots, e_n$ vektorlar sistemasi R fazoning chiziqli bog′liqmas vektorlari bo′lib, R fazoning ixtiyoriy a vektori ular orqali chiziqli ifodalansa, u holda R fazo n o′lchovli va $e_1, e_2, \ldots, e_n$ vektorlar uning bazisi bo′ladi.

Isbot:Teoremani isbot etish uchun R fazodagi ixtiyoriy m (m>n) ta $a_1, a_2, \ldots, a_m$ vektorlarni olaylik. Teorema shartiga asosan olingan har bir vektor $e_1, e_2, \ldots, e_n$ vektorlar orqali chiziqli ifodalanadi:

$$\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{a}_1=a_{11}\,\mathbf{e}_1+a_{12}\,\mathbf{e}_2+\ldots+a_{1n}\,\mathbf{e}_n \\ \boldsymbol{a}_2=a_{21}\,\mathbf{e}_1+a_{22}\,\mathbf{e}_2+\ldots+a_{2n}\,\mathbf{e}_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \boldsymbol{a}_m=a_{m1}\,\mathbf{e}_1+a_{m2}\,\mathbf{e}_2+\ldots+a_{mn}\,\mathbf{e}_n \end{array}\right. \qquad (6)$$

Hosil qilingan (6) sistemaning $A=(a_{ij})$ $(i=1,2,\ldots,m;\ j=1,2,\ldots n)$ matritsasini qaraylik. Bu matritsani rangi $r(A)\le\min(m;n)=n$ bo′ladi.Bundan A matritsaning n tadan ko′p bo′lmagan chiziqli erkli satrlari mavjud ekanligi kelib chiqadi.Unda, m>n bo′lganligi uchun, A matritsaning m ta satri chiziqli bog′liqdir va shu sababli $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ vektorlar ham chiziqli bog′lik bo′ladi. Bundan R fazoning n o′lchovli va $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ uning bazisi ekanligi kelib chiqadi.

O′z-o′zini nazorat etish savollari:

1. **Qo′p o′lchovli vektor qanday aniqlanadi?**
2. **Qachon ikki vektor teng deb ataladi?**
3. **Vektorlar yig′indisi qanday aniqlanadi?**
4. **Vektorni songa ko′paytmasi qanday kiritiladi?**
5. **Vektorlar uchun chiziqli amallar qanday xossalarga ega?**
6. **Vektor fazo deb nimaga aytiladi?**
7. **Qachon vektorlar chiziqli bog′lik deyiladi?**
8. **Qachon vektorlar chiziqli bog′likmas, ya'ni erkli deyiladi?**
9. **Vektor fazoning o′lchovi qanday aniqlanadi?**
10. **Vektor fazoning bazisi deb nimaga aytiladi?**

11-MA'RUZA

CHIZIQLI OPERATORLAR, ULARNING XOS VEKTORLARI VA XOS QIYMATLARI.

Tayanch iboralar: **operator, chiziqli operator, tasvir, aks tasvir, operatorning matritsasi, operatorlar yig′indisi, operatorni songa ko′paytmasi, operatorlarning ko′paytmasi, nol operator, birlik operator, xususiy vektor, xususiy son, operatorning xarakteristik ko′phadi, operatorning xarakteristik tenglamasi, halkaro savdo modeli.**

M a ' r u z a   r e j a s i :

1. Operator va uning chiziqlilik sharti;
2. Operatorning matritsasi va uning rangi;
3. Operatorlar ustida amallar;
4. Nol va birlik operatorlar;
5. Xususiy vektorlar va sonlar;
6. Xalkaro savdoning chiziqli modeli.

Adabiyotlar:

[1] I bob, §28-31 [14]. 78-86 betlar.

Chiziqli algebraning fundamental tushunchalaridan biri chiziqli operator tushunchasi bo′lib hisoblanadi.

n o′lchovli R^n va m o′lchovli R^m ikkita vektor (chiziqli) fazoni qaraylik.

TA'RIF 1: Agar R^n fazoning har bir $\mathbf{x}$ vektoriga R^m fazoning yagona $\mathbf{y}$ vektori biror qonun yoki qoida asosida mos qo′yilgan bo′lsa, u holda R^n fazoni R^m fazoga akslantiruvchi $A(\mathbf{x})$ ***operator*** berilgan deyiladi.

TA'RIF 2: Berilgan $A(\mathbf{x})$ operator ***chiziqli*** deyiladi, agar ixtiyoriy $\mathbf{x_1},\mathbf{x_2},\mathbf{x}\in R^n$ vektorlar va ixtiyoriy λ son uchun quyidagi munosabatlar o′rinli bo′lsa:

1. $A(\mathbf{x_1}+\mathbf{x_2})=A(\mathbf{x_1})+A(\mathbf{x_2})$-operatorning additivlik xossasi;
2. $A(\lambda\mathbf{x})=\lambda A(\mathbf{x})$-operatorning birjinslilik xossasi.

TA'RIF 3: $\mathbf{y}=A(\mathbf{x})$ operatorda $\mathbf{y}$ vektor $\mathbf{x}$ vektorning ***tasviri***, $\mathbf{x}$ vektor esa $\mathbf{y}$ vektorning ***aks tasviri*** deyiladi.

Agar R^n va R^m fazolar ustma-ust tushsa, ya'ni m=n bo′lsa, u holda A operator R^n fazoni o′zini-o′ziga akslantiradi va kelgusida biz mana shunday operatorlarni o′rganamiz.

R^n fazoda biror $e_1, e_2,\ldots, e_n$ **bazis vektorlarni tanlab, ixtiyoriy** $x\in \mathbf{R^n}$ **vektorni bu bazis orqali** $x=x_1 e_1 + x_2 e_2 +\ldots+ x_n e_n$ **ko′rinishda ifodalanishi va A operatorning chiziqlilik xossalarini hisobga olib,**

$$A(\mathbf{x})=x_1A(\mathbf{e_1})+x_2A(\mathbf{e_2})+\ldots+x_nA(\mathbf{e_n}) \qquad (1)$$

tenglikka ega bo′lamiz. Bu tenglikdagi har bir A($\mathbf{e}_i$) (i=1,2,…,n) vektor yana R^n fazoning vektori bo′lganligi uchun uni $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2,\dots, \mathbf{e}_n$ bazis orqali yoyish mumkin. Faraz qilaylik

$$A(\mathbf{e}_i)=a_{1i}\,\mathbf{e}_1+a_{2i}\,\mathbf{e}_2+\dots+a_{ni}\,\mathbf{e}_n, \quad i=1,2,\dots,n \qquad (2)$$

bo′lsin.Unda, (1) va(2) tengliklarga asosan,

$$A(\mathbf{x})=x_1(a_{11}\,\mathbf{e}_1+a_{21}\,\mathbf{e}_2+\dots+a_{n1}\,\mathbf{e}_n)+x_2(a_{12}\,\mathbf{e}_1+a_{22}\,\mathbf{e}_2+\dots+a_{n2}\mathbf{e}_n)+\dots$$
$$+x_n(a_{1n}\,\mathbf{e}_1++a_{2n}\,\mathbf{e}_2+\dots+a_{nn}\,\mathbf{e}_n) = (a_{11}\,x_1+a_{12}\,x_2+\dots+a_{1n}\,x_n)\,\mathbf{e}_1+$$
$$+(a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n)\,\mathbf{e}_2+\dots+ +(a_{n1}\,x_1+a_{n2}\,x_2+\dots+a_{nn}x_n)\,\mathbf{e}_n\,. \quad (3)$$

Ikkinchi tomondan $\mathbf{y}$=A($\mathbf{x}$) vektor ham xuddi shu $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2,\dots, \mathbf{e}_n$ bazisda o′z koordinatalariga ega bo′lib, uni

$$\mathbf{y}=A(\mathbf{x})=y_1\,\mathbf{e}_1+y_2\,\mathbf{e}_2+\dots+y_n\,\mathbf{e}_n \qquad (4)$$

ko′rinishda yozish mumkin. Har qanday vektorni bazis orqali yagona usulda ifodalanishini hisobga olib, (3) va (4) tengliklardan ushbu tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} y_1= a_{11}\,x_1+a_{12}\,x_2+\dots+a_{1n}\,x_n \\ y_2= a_{21}\,x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n= a_{n1}\,x_1+a_{n2}\,x_2+\dots+a_{nn}x_n \end{cases} \qquad (5)$$

<u>TA'RIF4:</u> (5) sistemaning a_{ij} koeffitsientlaridan tuzilgan $A=(a_{ij})$ (i,j=1,2,…,n) matritsa chiziqli A operatorning $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2,\dots, \mathbf{e}_n$ bazisdagi ***matritsasi***, A matritsaning rangi r esa A operatorning ***rangi*** deyiladi.

Shunday qilib, har bir chiziqli A operatorga berilgan bazisda biror A matritsa to′g′ri keladi va aksincha, har qanday n- tartibli A matritsaga n- o′lchovli fazoning biror chiziqli A operatori to′gri keladi.

Berilgan A chiziqli operatorda **x** vektor bilan uning tasviri $\mathbf{y}$=A($\mathbf{x}$) o′rtasidagi bog′lanish matritsalar orqali $Y=A\cdot X$ ko′rinishda ifodalanadi. Bu erda A- chiziqli operator matritsasi bo′lib, $X=(x_1,x_2,\dots,x_n)'$ va $Y=(y_1,y_2,\dots,y_n)'$ ustun matritsalar **x** va **y** vektorlarning koordinatalaridan hosil qilinadi.

<u>Masala:</u> R^3 fazoda A chiziqli operator biror $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ bazisda

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & 6 \\ 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

matritsa orqali berilgan bo′lsin. $\mathbf{x}=4\mathbf{e}_1-3\,\mathbf{e}_2+\,\mathbf{e}_3$ vektorning $\mathbf{y}$=A($\mathbf{x}$) tasviri topilsin.

<u>Echish:</u> $Y=A\cdot X$ tenglik va matritsalarni ko′paytirishga asosan

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & 6 \\ 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 \\ -13 \\ -18 \end{pmatrix}.$$

Demak, $\mathbf{y}=10\,\mathbf{e}_1 - 13\,\mathbf{e}_2 - 18\,\mathbf{e}_3$.

Endi chiziqli operatorlar ustida amallar kiritamiz.

<u>TA'RIF 5:</u> A va B chiziqli operatorlarning ***yigindisi*** deb A+B kabi belgilanadigan va (A+B)**x**=A**x**+B**x** tenglik bilan aniqlanadigan yangi bir operatorga aytiladi.

TA'RIF 6: A chiziqli operatorni ***λ songa ko′paytmasi*** deb λA kabi belgilanadigan va $(\lambda A)(\mathbf{x})=\lambda(A(\mathbf{x}))$ tenglik bilan aniqlanadigan operatorga aytiladi.
TA'RIF 7: A va B operatorlarning ***ko′paytmasi*** deb $A\cdot B$ kabi belgilanadigan va $(A\cdot B)(\mathbf{x})=A(B(\mathbf{x}))$ tenglik bilan aniqlanadigan operatorga aytiladi.

Shuni ta'kidlab utish lozimki, kiritilgan A+B, λA, $A\cdot B$ operatorlar xam additivlik va birjinslilik xossalariga bo′ysunadi va shu sababli ular ham chiziqli operatorlar bo′ladi.

TA'RIF 8: ***Nol operator*** deb 0 kabi belgilanadigan va R^n fazoning barcha vektorlarini 0 vektorga o′tkazadigan, ya'ni $O(\mathbf{x})=\mathbf{0}$ tenglikni qanoatlantiradigan operatorga aytiladi.
TA'RIF 9: ***Birlik operator*** deb E kabi belgilanadigan hamda R^n fazoning barcha vektorlarini o′zini-o′ziga o′tkazadigan, ya'ni $E(\mathbf{x})=\mathbf{x}$ tenglikni qanoatlantiradigan operatorga aytiladi.
TA'RIF 10 : Biror $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$ vektor A chiziqli operatorning ***xos vektori*** deyiladi, agarda biror λ sonida

$$A(x)=\lambda x \qquad (6)$$

shart bajarilsa. Bu holda λ soni A operatorning x xos vektorga mos keladigan *xos qiymati* deyiladi.

Bu ta'rifdan kelib chiqadiki, chiziqli A operator o′zining x xos vektorini o’nga kolleniar vektorga akslantiradi, ya'ni λ songa ko′paytiradi. (6) tenglikni matritsalar yordamida quyidagicha yozish mumkin:

$$A\cdot X=\lambda X \qquad (7)$$

yoki

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=\lambda x_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=\lambda x_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=\lambda x_n \end{cases}$$

Bundan

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+(a_{22}-\lambda)x_2+\ldots+a_{2n}x_n=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+(a_{nn}-\lambda)x_n=0 \end{cases} \qquad (8)$$

birjinsli chiziqli tenglamalar sistemasiga ega bo′lamiz. Bu sistema hamma vaqt $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ (0,0,…,0) nol echimga ega va u noldan farqli echimga ega bo′lishi uchun sistemaning aniqlovchisi

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0 \qquad (9)$$

shartni qanoatlantirishi zarur va etarlidir. Bu tenglikning chap tomoni λ ga nisbatan n - darajali ko′pxad bo′lib, bu ko′pxad A operatorning yoki A matritsaning

xarakteristik ko'pxadi, (9) tenglama esa ularning ***xarakteristik tenglamasi*** deyiladi.

Misol: $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$ matritsa bilan berilgan A chiziqli operatorning xos qiymatlari va xos vektorlari topilsin.

Echish: Dastlab operatorning xarakteristik tenglamasini yozamiz:

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 9 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ ёки } \lambda^2-2\lambda-35=0.$$

Bu tenglamani echib, A chiziqli operatorning $\lambda_1=-5$, $\lambda_2=7$ xos qiymatlarini topamiz. Bu xos qiymatlarga mos keluvchi xos vektorlar

$$(A-\lambda_1 E)x^{(1)}=0 \quad \text{ва} \quad (A-\lambda_2 E)x^{(2)}=0$$

tenglamalardan topiladi, ya'ni,

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix} = 0 \text{ va } \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 9 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow x^{(1)}=\begin{pmatrix} c \\ -1{,}5c \end{pmatrix},\ x^{(2)}=\begin{pmatrix} \frac{2}{3}c_1 \\ c_1 \end{pmatrix}.$$

Bu erda c va c_1 ixtiyoriy hakikiy sonlardir.

Ko'rib o'tilgan tushunchalarni iqtisodiyotga tadbig'i sifatida halkaro savdoning chiziqli modelini ko'rib o'tamiz. Milliy daromadlari $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bo'lgan n ta $S_1, S_2, \ldots, S_n$ mamlakatlarni qaraymiz. Bu erda S_j (j=1,2,…,n) mamlakat milliy daromadining S_i (i=1,2,…,n) mamlakat mahsulotlarini sotib olishga sarflanadigan qismi ulushini a_{ij} kabi belgilaymiz. Har bir mamlakatning milliy daromadi o'zida ishlab chiqarilgan mahsulotlarni sotib olishga va boshqa mamlakat mahsulotlarini import etishga to'lik sarflanadi deb hisoblaymiz. Bu shart matematik ko'rinishda

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1, \quad j=1,2,\ldots,n \qquad (10)$$

kabi ifodalanadi. Unda $A=(a_{ij})$, i,j=1,2,….,n, matritsa ***savdoning tarkibiy matritsasi*** deb ataladi va, (10) tengliklarga asosan, uning xar bir ustunidagi elementlar yig'indisi birga teng bo'ladi.

Mamlakatlar orasidagi savdo muvozanatlashgan bo'lishi uchun har bir S_i mamlakatning ichki va tashki savdodan olgan foydasi uning milliy daromadiga teng bo'lishi, ya'ni

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots\ldots a_{in}x_n = x_i, \quad i=1,2,\ldots,n \qquad (11)$$

tengliklar bajarilishi kerak. Agar $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ mamlakatlar milliy daromadlari vektori bo'lsa, unda (11) tengliklarni matritsa ko'rinishida AX=X kabi yozish mumkin.Bu erda X ustun matritsa **x** vektorning koordinatalaridan tuzilgan bo'lib, u A matritsaning $\lambda=1$ xos soniga mos keluvchi xos vektori kabi topiladi.

Masala: Uchta mamlakat orasidagi savdoning tarkibiy matritsasi

$$A=\begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

ko′rinishda ekanligi ma'lum bo′lsa, bu davlatlarning muvozanatlashgan savdoda milliy daromadlarini toping.

Echish: AX=X tenglamani (A-E)X=0 ko′rinishda yozib, ushbu

$$\begin{pmatrix} -2/3 & 1/4 & 1/2 \\ 1/3 & -1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

birjinsli uch noma'lumli chiziqli tenglamalar sistemasiga kelamiz. Uni Gauss usulida echib, x_1=(3/2)c, x_2=2c, x_1=c ekanligini topamiz. Demak, bu uch davlatning milliy daromadlari vektori **x=**(3c/2,2c,c) bo′lganda, ya'ni ularning nisbati 3/2:2:1 yoki 3:4:2 bo′lganda ular orasidagi o′zaro savdo muvozanatlashgan bo′ladi.

O′z-o′zini nazorat etish savollari:

1. Operator deb nimaga aytiladi?
2. Qachon operator chiziqli deyiladi?
3. Operatorning matritsasi qanday aniqlanadi?
4. Operatorlarning yig′indisi qanday aniqlanadi?
5. Operatorni songa ko′paytmasi qanday aniqlanadi?
6. Operatorlarning ko′paytmasi qanday aniqlanadi?
7. Nol operator deb nimaga aytiladi?
8. Birlik operator deb nimaga aytiladi?
9. Operatorning xususiy vektori va soni qanday aniqlanadi?
10. Operatorning xarakteristik tenglamasi qanday aniqlanadi?
11. Xalkaro savdo modeli qanday tuziladi?

12-MA'RUZA

TEKISLIKDA ANALITIK GEOMETRIYA.
TO′GRI CHIZIK TENGLAMALARI.

Tayanch iboralar: geometrik ob'ekt tenglamasi, analitik geometriya predmeti, ikkita asosiy masala, ikki nuqta orasidagi masofa, aylana tenglamasi, kesmani berilgan nisbatda bo′lish, o′rta nuqta koordinatalari, to′g′ri chiziqning normal tenglamasi, nuqtadan to′g′ri chiziqqacha bo′lgan masofa.

Ma'ruza rejasi:

1. Geometrik ob'ekt tenglamasi.
2. Analitik geometriya predmeti va asosiy ikkita masalasi.
3. Ikki nuqta orasidagi masofa va aylana tenglamasi.
4. Kesmani berilgan nisbatda bo′lish.
5. To′g′ri chiziqning normal tenglamasi.
6. Nuqtadan to′g′ri chiziqqacha masofa.

Adabiyotlar:

[1] I bob, §13-17 [3] II bob, §1-4, V bob §1 [14].95-104 betlar.

Tekislikda XOY Dekart koordinatalar sistemasi kiritilgan bo′lsin. Bu holda tekislikdagi har bir M nuqta uning koordinatalari deb ataladigan (x,y) sonlar juftligi bilan to′lik aniqlanadi va M (x,y) kabi yoziladi. Tekislikdagi turli geometrik ob'ektlarni nuqtalar to′plami kabi qarash mumkin.

T A ' R I F 1 : **Tekislikdagi geometrik ob'ektlarni ularning M(x,y) nuqtalarining koordinatalari orqali ifodalovchi tengliklar shu** *ob'ektning tenglamasi* **deb ataladi.**

Tenglama odatda F(x,y) = 0 ko′rinishda yoziladi. Agarda $M_0(x_0,y_0)$ nuqta uchun $F(x_0,y_0) = 0$ shart bajarilsa, M_0 shu tenglama bilan aniqlangan geometrik ob'ektga tegishli bo′ladi. Aks holda M_0 nuqta bu ob'ektga tegishli bo′lmaydi. Shunday qilib, geometrik ob'ekt o′zining F(x,y) = 0 tenglamasi bilan to′lik aniqlanadi.

T A ' R I F2 : **Geometrik ob'ektlarni ularning tenglamalari orqali o′rganuvchi matematik fan analitik geometriya deb ataladi.**

Analitik geometriya asoschisi bo′lib frantsuz matematigi va faylasufi Rene Dekart hisoblanadi.

Analitik geometriyada asosan ikkita masala qaraladi:

1. **Berilgan geometrik ob'ektning tenglamasini topish.**
2. **Geometrik ob'ektning tenglamasi bo′yicha uning xossalarini o′rganib, ob'ektni aniqlash.**

Bu masalalarni echishda vektorlar algebrasidan keng foydalaniladi. Misol tariqasida analitik geometriyaning quyidagi masalalarini ko′ramiz.

M a s a la 1 : **Tekislikdagi $M_1(x_1,y_1)$ va $M_2(x_2,y_2)$ nuqtalar orasidagi d masofani toping.**

E ch i sh: **Berilgan nuqtalar bo′yicha** $M_1M_2 = \{x_2-x_1,\ y_2-y_1\}$ **vektorni hosil qilamiz. Berilgan nuqtalar orasidagi masofa shu vektorning uzunligiga teng, ya'ni**

$$d=|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \qquad (1)$$

formulaga ega bo′lamiz.

Masalan, $M_1(3,1)$ va $M_2(-2,6)$ nuqtalar orasidagi masofa (1) ga ko′ra

$$d=\sqrt{(-2-3)^2+(6-1)^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}\,.$$

Ikki nuqta orasidagi masofa formulasidan foydalanib, markazi M(*a,в*) nuqtada joylashgan R radiusli aylana tenglamasini topamiz. N(*x,y*) shu aylanada joylashgan ixtiyoriy nuqta bo′lsin. Aylana ta'rifiga asosan u |MN|=R tenglamani qanoatlanliruvchi nuqtalar to′plamining geometrik o′rnidan iborat. Natijada, (1) formulaga ko′ra

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-в)^2}=R \Rightarrow (x-a)^2+(y-в)^2=R^2 \qquad (2)$$

Bu aylana tenglamasini ifodalaydi. Aylananing (2) ko′rinishdagi tenglamasiga uning kanonik (eng informativ, eng qulay) tenglamasi deyiladi.

Masalan, markazi M(2,3) va radiusi R=5 bo′lgan aylana

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 25$$

tenglamaga ega bo′ladi. Bu erdan N(5,7) nuqta shu aylanaga tegishli ekanligi kelib chiqadi, chunki

$$(5-2)^2 + (7-3)^2 = 25.$$

K(2,6) nuqta aylanada yotmaydi, chunki uning tenglamasini qanoatlantirmaydi:

$$(2-2)^2 + (6-3)^2 = 9 \neq 25.$$

M a s a l a 2. **Uchlari $M_1(x_1,y_1)$ va $M_2(x_2,y_2)$ nuqtalarda joylashgan M_1M_2 kesmani berilgan $\lambda>0$ nisbatda bo′luvchi $M_0(x_0,y_0)$ nuqta koordinatalarini toping.**

E ch i sh: $M_1M_0=\{x_0-x_1,y_0-y_1\}$ **va** $M_0M_2=\{x_2-x_0,y_2-y_0\}$ **vektorlarni qaraymiz. Ular bir to′g′ri chiziqda yotgani uchun kollinear va masala shartiga ko′ra** $|M_1M_0| = \lambda\,|M_0M_2|$. **Aytganlarga asosan** $M_1M_0 = \lambda\, M_0M_2$ **deb yozish mumkin. Bu tenglikni vektorlarning koordinatalari orqali ifodalaymiz (koordinatalar ko′rinishidagi ikki vektor teng bo′lishi uchun ularning mos koordinatalari teng bo′lishi kerak):**

$$x_0 - x_1 = \lambda\,(x_2 - x_0)\,,\ y_0 - y_1 = \lambda\,(y_2 - y_0).$$

Bu tengliklardan izlangan x_0 va y_0 koordinatalarni topamiz:

$$x_0=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y_0=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} \qquad (3)$$

Xususiy, λ = 1, holda M_1M_2 kesmaning o′rta nuqtasi koordinatalarini topamiz:

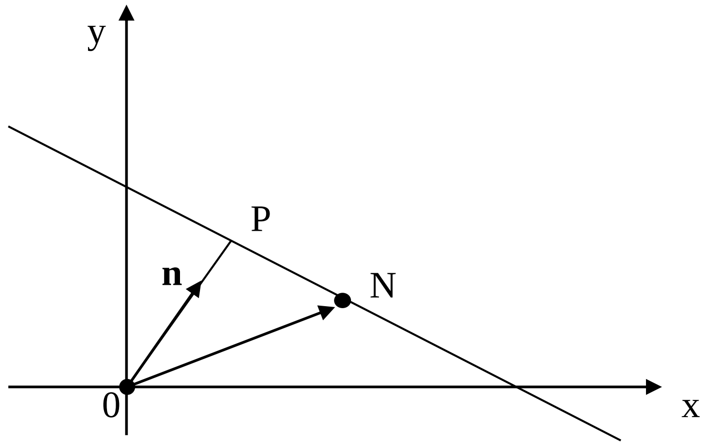
$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad , \qquad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2} \qquad \textbf{(4)}$$

Masalan, $M_1(3,-5)$ va $M_2(1\ ,1)$ nuqtalarni tutashtiruvchi kesmaning o′rta nuqtasi

$$x_0 = \frac{3+1}{2} = 2 \quad , \qquad y_0 = \frac{-5+1}{2} = -2$$

koordinatalar bilan aniqlanadi.

Endi tekislikda biror *l* **to′gri chiziq berilgan bo′lsin va uning tenglamasini topish talab etilsin. Buning uchun bu to′g′ri chiziqqa perpendikulyar bo′lgan** n **birlik vektor va koordinata boshidan bu to′g′ri chiziqqacha bo′lgan masofa |0P| = p ma'lum deb olamiz. Agarda** n **vektor OX koordinata o′qi bilan α burchak tashkil etgan bo′lsa,** n **= {cos α, sinα}** **deb yozish mumkin. N(*x*,*y*) berilgan to′g′ri chiziqdagi ixtiyoriy bir nuqta,** ON **=** **{x,y}** **va** n **vektorlar orasidagi burchak φ bo′lsin($\angle$PON=φ). Hosil bo′lgan** n ·ON **skalyar ko′paytmani ikki usulda hisoblaymiz.**



n ·ON = **x cosα + y sin α** ;

n ·ON =| n| ·|ON| **cosφ = 1**·|ON|·|**OP**|/|ON| = |**OP**| **= p.**

Demak, berilgan to′g′ri chiziqdagi barcha N(*x*,*y*) nuqtalar uchun

$$\mathbf{x\cos\alpha + y\sin\alpha = p \Rightarrow x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0} \qquad \textbf{(5)}$$

tenglik o′rinlidir.Bu tekislikdagi to′g′ri chiziqning *normal tenglamasi* **deyiladi. Agarda K(x_0,y_0) berilgan** *l* **to′g′ri chiziqda yotmagan nuqta bo′lsa, undan bu to′gri chiziqqacha bo′lgan d masofa**

$$\mathbf{d = |x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - p|} \qquad \textbf{(6)}$$

formula bilan aniqlanishini isbotlash mumkin.

O′z-o′zini nazorat etish savollari:

1. Geometrik ob'ekt tenglamasi deb nimaga aytiladi?

2. Analitik geometriya predmeti nimadan iborat?
3. Analitik geometriyaning ikki asosiy masalasini koʻrsating.
4. Ikki nuqta orasidagi masofa qanday topiladi?
5. Aylana tenglamasi qanday koʻrinishda boʻladi?
6. Kesmani berilgan nisbatda boʻluvchi nuqta koordinatalari qanday topiladi?
7. Kesmaning oʻrta nuqtasi koordinatalari formulasini yozing.
8. Toʻgʻri chiziqning normal tenglamasini yozing.
9. Nuqtadan toʻgʻri chiziqqacha masofa qanday topiladi?

13–MA'RUZA

TO′GRI CHIZIKNING TURLI TENGLAMALARI.

Tayanch iboralar:umumiy tenglama, kesmalardagi tenglama, burchak koeffitsientli tenglama, yo′naltiruvchi vektor, kanonik tenglama, berilgan nuqtadan o′tuvchi to′gri chiziqlar dastasi tenglamasi, ikki nuqtadan o′tuvchi to′g′ri chiziq tenglamasi.

Ma'ruza rejasi:

1. Berilgan nuqtadan utuvchi va berilgan vektorga perpendikulyar to′g′ri chiziq tenglamasi.
2. To′g′ri chiziqning umumiy tenglamasi va uning taxlili.
3. To′g′ri chiziqlarning kesishish nuqtasi.
4. Yo′naltiruvchi vektor va to′g′ri chiziqning kanonik tenglamasi.
5. Berilgan nuqtadan berilgan yo′nalish bo′yicha o′tuvchi to′gri chiziq tenglamasi.
6. To′g′ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasi.
7. To′g′ri chiziqlar dastasi tenglamasi.
8. Berilgan ikki nuqtadan o′tuvchi to′g′ri chiziq tenglamasi.
9. To′g′ri chiziqning kesmalardagi tenglamasi.

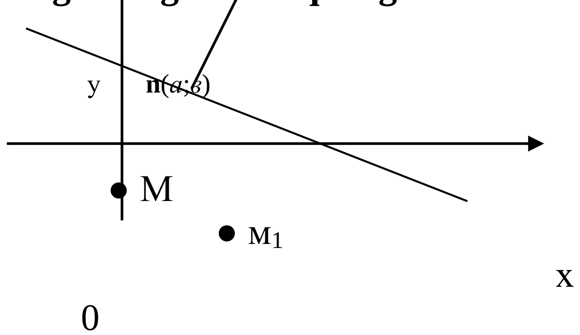
Adabiyotlar:

[1] I bob, §17-18 [3] V bob, § 2,7 [14]. 96-101 betlar.

Oldingi, ma'ruzada to′g′ri chizikning normal tenglamasi ko′rsatilgan edi.

Endi to′g′ri chiziqlarning boshqa ko′rinishdagi tenglamalari bilan tanishib chiqamiz.

1.Berilgan $M_1(x_1,y_1)$ nuqtadan o′tuvchi va berilgan n(*a,в*) vektorga perpendikulyar bo′lgan to′g′ri chiziq tenglamasi.



Izlanayotgan ℓ to′g′ri chiziqning ∀ M(x:y) nuqtasini olamiz va **M_1M** vektorni hosil qilamiz. Unda **M_1M**=($x-x_1$,$y-y_1$) bo′lib, masala shartida **n** vektorga perpendikulyar bo′ladi. Vektorlarning ortogonallik shartiga ko′ra

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{M_1M}=0\Rightarrow a(x-x_1)+b(y-y_1)=0 \qquad (1)$$

tenglamani olamiz. Shunday qilib M(x:y) nuqta ℓ da yotsa, u holda **M_1M** va **n**

vektorlar perpendikulyar. Aks holda esa **$M_1M\cdot n\neq0$** bo′ladi, ya'ni M(x;y) nuqta (1)

tenglamani qanoatlantirmaydi.

M i s o l: M(2:-5) nuqtadan o′tuvchi va **n**=2i-3j vektorga perpendikulyar bo′lgan to′g′ri chiziq tenglamasini toping.

E ch i sh: (1) tenglamaga asosan 2(x-2)-3(y+5)=0 ⇒ 2x-3y-19=0

2.To′g′ri chiziqning umumiy tenglamasi.

Oldingi punktda to′g′ri chiziqning tenglamasi ikki noma'lumli chiziqli tenglama bo′lishi kelib chiqqan edi (analitik geometriyaning birinchi asosiy masalasi).

Endi bo′lsa ∀ ikki noma'lumli chiziqli tenglama

$$Ax+By+C=0 \qquad (2)$$

tekislikda to′g′ri chiziqni ifodalashini ko′rsatamiz (analitik geometriyaning 2-asosiy masalasi). Berilgan tenglamani shaklini quyidagicha almashtiramiz:

$$Ax+By+C= Ax+B(y+C/B)=0\Rightarrow A(x-0)+B(y-(-C/B))$$

Bu esa, oldingi punktdagi (1) ga asosan, **n**(A,B) vektorga perpendikulyar va M(0; -C/B) nuqtadan o′tuvchi to′g′ri chiziq tenglamasidir. Ko′rinib turibdiki (2) tenglamada A va B koeffitsientlar bir vaqtda 0 ga teng bo′lmasligi kerak.

(2) to′g′ri chiziqning ***umumiy tenglamasi*** deyiladi. Unda **n(**A,B**)** vektor shu to′g′ri chiziqqa perpendikulyar bo′lib, uning ***normal vektori*** deyiladi.

AgarC=0 bo′lsa, Ax+By=0 tenglama hosil bo′ladi. Bu tenglamani O(0:0) nuqta koordinatalari qanoatlantirganligi uchun, u koordinatalar boshidan o′tuvchi to′g′ri chiziqlar tenglamasini ifodalaydi.

Xususan y=0 (A=0, C=0, B≠0) OX o′qining, x=0 (A≠0, C=0, B=0) esa OY o′qining tenglamasidir.

3.To′g′ri chiziqlarning kesishish nuqtasi.

Ikkita to′g′ri chiziq umumiy tenglamalari $a_1x+b_1y+c_1=0$ va $a_2x+b_2y+c_2=0$ bilan berilgan bo′lsin. To′g′ri chiziqlarning M(x_0,y_0) kesishish nuqtasi har ikkala to′g′ri chiziqqa tegishli bo′lgani uchun uning koordinatalari quyidagi tenglamalar sistemasini qanoatlantiradi:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1x+b_1y=-c_1 \\ a_2x+b_2y=-c_2 \end{cases}$$

M i s o l 1: 2x+y –1=0 va x+2y+1=0 to′g′ri chiziqlarning $M_0(x_0;y_0)$kesishish nuqtasini toping.

Echish. $\begin{cases} 2x+y=1 \\ x+2y=-1 \end{cases} \Rightarrow 3x=3 \Rightarrow x=1 \Rightarrow y=-1 \Rightarrow M_0(1;-1).$

4. To′g′ri chiziqning kesmalardagi tenglamasi.

Koordinata boshidan o′tmaydigan to′g′ri chiziq OX va OY o′qlaridan uzunligi $|a|$ va $|b|$ bo′lgan kesmalar ajratgan bo′lsin. Bu to′g′ri chiziq tenglamasini topish uchun M(a,0) va N(0,b) nuqtalar unda yotishidan foydalanamiz. Bu nuqtalar koordinatalarini Ax+By+C=0 umumiy tenglamaga qo′yib, A=-C/a, B=-C/b ekanligini topamiz. Bu erdan

Ax+By+C=0 ⇒ (-C/a)x+(-C/b)y+C=0 ⇒ -C(x/a+y/b-1)=0 ⇒ x/a+y/b=1

Demak, izlangan to′g′ri chiziq tenglamasi

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

bo′ladi. Bu to′gri chiziqning ***kesmalardagi tenglamasi*** deyiladi.

M i s o l2:: 2x+3y-6=0 to′g′ri chiziqni yasang.

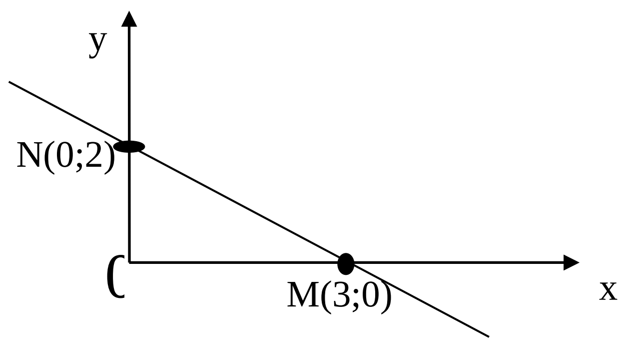
E ch i sh: Uni OX o′qi bilan kesishish nuqtasi M ni topamiz. Buning uchun quyidagi sistemani echish kifoya:

$$\begin{cases} 2x+3y-6=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \text{M(3;0)}$$

Demak berilgan to′gri chiziqning OX o′qi bilan kesishish nuqtasi topildi. Endi uning o′qi bilan kesishgan nuqtasi N ni topamiz:

$$\begin{cases} 2x+3y-6=0 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow \text{N(0;2)}$$

M va N nuqtalarni yasab va ularni tutashtirib, berilgan to′g′ri chiziqni hosil qilamiz.



Bu erdan berilgan to′g′ri chiziqning kesmalardagi tenglamasi x/3+y/2=1 ekanligini ko′ramiz.

Demak, umumiy tenglamadan kesmalardagi tenglamaga o′tish uchun uni qarama-qarshi ishora bilan olingan ozod hadga bo′lish kerak.

5. To′g′ri chiziqning yo′naltiruvchi vektori.

To′g′ri chiziqning kanonik tenglamasi.

Tekislikdagi l to′g′ri chiziqning biror $M_1(x_1,y_1)$ nuqtasi berilgan hamda $\vec{S} = m\cdot\vec{i} + n\cdot\vec{j}$ vektor shu to′g′ri chiziqqa parallel bo′lsin. U holda berilgan M_1 nuqta va $\vec{S}$ vektor to′g′ri chiziqning holatini to′la belgilaydi. Shu sababli $\vec{S}$ to′g′ri chiziqning ***yo′naltiruvchi vektori***, M_1 esa uning ***boshlangich nuqtasi*** deyiladi. Berilgan to′g′ri chiziqda yotuvchi ixtiyoriy M(x,y) nuqtani olamiz va $\overrightarrow{M_1M}=(x-x_1, y-y_1)$ vektorni hosil qilamiz. Shartga asosan bu va $\vec{S}$ vektorlar kollinear, ya'ni ularning mos koordinatalari proportsionaldir:

$$\frac{y-y_1}{m} = \frac{x-x_1}{n} \qquad (3)$$

Hosil bo′lgan (3) tenglama berilgan to′g′ri chiziqning ***kanonik tenglamasi*** deyiladi.

IZOX: Agar to′g′ri chiziq OX o′qiga parallel, ya'ni to′g′ri chiziq $\vec{i}$ vektorga parallel bo′lsa, u holda m=0 bo′ladi va uning kanonik tenglamasi

$$\frac{y-y_1}{0} = \frac{x-x_1}{n} \Rightarrow 0(x-x_1) = n(y-y_1) \Rightarrow y = y_1 .$$

Shunday qilib OX o′qiga parallel to′g′ri chizikning tenglamasi $y=y_1$ bo′ladi. Aksincha to′g′ri chiziq OY o′qiga parallel bo′lsa, uning kanonik tenglamasi $x = x_1$ bo′ladi.

6. Berilgan nuqtadan berilgan yo′nalish bo′yicha o′tuvchi to′g′ri chiziq tenglamasi. To′g′ri chiziqlar dastasi.

Aytaylik l to′g′ri chiziq va OX o′qi orasidagi burchak α bo′lsin. Agar to′gri chiziq OX o′qiga parallel yoki u bilan ustma ust tushsa, unda $\alpha=0$ bo′ladi. Agarda $\alpha\neq 90^0$ bo′lsa, u holda to′g′ri chiziqning xolatini α burchak va l ga tegishli bo′lib, koordinatalari bilan berilgan $M_1(x_1:y_1)$ nuqta to′la aniqlanishini ko′rsatamiz. Yo′naltiruvchi vektor sifatida l ga parallel bo′lgan, ya'ni OX o′qi bilan α burchak tashkil qiluvchi $\vec{e}$ birlik vektorni qaraymiz. Ma'lumki ixtiyoriy birlik vektor uzining yo′naltiruvchi kosinuslari bilan aniqlanadi, ya'ni $\vec{e}=\cos\alpha\,\vec{i}+\cos\beta\,\vec{j}$. Bunda $\cos\beta=\sin\alpha$ bo′lgani uchun

$$\vec{e}=\cos\alpha\,\vec{i}+\sin\alpha\,\vec{j}.$$

To′g′ri chiziqning (3) kanonik tenglamasiga $m=\cos\alpha$ va $n=\sin\alpha$ deb, quyidagi natijani olamiz:

$$\frac{y-y_1}{\sin\alpha} = \frac{x-x_1}{\cos\alpha} \Rightarrow tg\alpha\ (x-x_1) = y-y_1$$

Agar bunda $k=tg\alpha$ deb olsak, u holda

$$y-y_1=k\,(x-x_1) \qquad (4)$$

tenglamaga ega bo′lamiz. Bu berilgan nuqtadan berilgan yo′nalish bo′yicha o′tuvchi to′g′ri chiziq tenglamasi bo′lib, unda k – to′g′ri chiziqning ***burchak koeffitsienti*** deyiladи.

M i s o l: M(1;2) nuqtadan o′tib, OX o′qi bilan $\pi/3$ burchak tashkil qiluvchi to′g′ri chiziq tenglamasini tuzing.

E ch i sh: Izlanayotgan to′g′ri chiziqning burchak koeffitsientini topamiz:

$$k = tg\alpha = tg\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}.$$

Natijada to′g′ri chiziqning tenglamasi (4) ga asosan quyidagicha bo′ladi:

$$y-y_1=k(x-x_1)\Rightarrow y-2=\sqrt{3}(x-1) \Rightarrow \sqrt{3}\,x-y-1-2\sqrt{3}=0.$$

Tekislikning biror M_0 nuqtasi orqali o′tuvchi to′gri chiziqlar to′plami ***to′gri chiziqlar dastasi***, umumiy nuqta M_0 esa ***dastaning markazi*** deyiladi.

7. To′g′ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasi.

To′g′ri chiziq OX o′qi bilan α burchak tashkil qilib, OY o′qini B(0,*b*) nuqtada kesib o′tsin. Shu to′gri chiziq tenglamasini topamiz. Buning uchun to′g′ri chiziqlar dastasining tenglamasiga $x_1=0$, $y_1=b$ qo′yib,

$$y-b=k(x-0) \Rightarrow y=kx+b \qquad (5)$$

tenglamani olamiz. Bu to′gri chiziqning ***burchak koeffitsientli tenglamasi*** deyiladi. Xususan agar $b=0$ bo′lsa, $y=kx$ koordinatalar boshidan o′tuvchi to′g′ri chiziqlar dastasining tenglamasini ifodalaydi. Agarda $k=0$ bo′lsa, u holda OX o′qiga parallel to′g′ri chizikning $y=b$ tenglamasiga ega bo′lamiz.

8. Berilgan ikki nuqta orqali o′tuvchi to′g′ri chiziq tenglamasi.

Tekislikda $M_1(x_1, y_1)$ va $M_2(x_2, y_2)$ nuqtalar berilgan bo′lsin. Shu nuqtalardan o′tuvchi to′g′ri chiziq tenglamasini topish uchun $M_1(x_1, y_1)$ nuqtani boshlangich, $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ vektorni esa yo′naltiruvchi deb olish mumkin. Shu sababli izlangan to′g′ri chiziqning kanonik tenglamasi

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

ko′rinishda bo′ladi.

Masalan, $M_1(2,1)$ va $M_2(-3,0)$ nuqtalardan o′tuvchi to′g′ri chiziq tenglamasi quyidagicha bo′ladi:

$$\frac{x-2}{-3-2} = \frac{y-1}{0-1} \Rightarrow -x+2=-5y+5 \Rightarrow x-5y+3=0.$$

O′z-o′zini nazorat etish savollari:

1. Berilgan nuqtadan o′tuvchi va berilgan vektorga perpendikulyar to′g′ri chiziq tenglamasini yozing.
2. To′g′ri chiziqning umumiy tenglamasi qanday ko′rinishda bo′ladi?
3. To′g′ri chiziqning umumiy tenglamasini taxlil eting.
4. Ikki to′g′ri chiziqning kesishish nuqtasi qanday topiladi?
5. To′g′ri chiziqning yo′naltiruvchi vektori deb nimaga aytiladi?
6. To′g′ri chiziqning kanonik tenglamasi qanday ko′rinishda bo′ladi?
7. To′g′ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasini yozing.
8. Burchak koeffitsientli tenglamadagi parametrlar qanday geometrik ma'noga ega?
9. Berilgan nuqtadan o′tuvchi to′gri chiziqlar dastasining tenglamasi qanday ko′rinishda bo′ladi?
10. Berilgan ikki nuqtadan o′tuvchi to′g′ri chiziq tenglamasini yozing.
11. To′g′ri chiziqning kesmalaradagi tenglamasini yozing va undagi parametrlarning geometrik ma'nosini ko′rsating.

14-MA'RUZA

TO′GRI CHIZIKLARGA DOIR AYRIM MASALALAR.

Tayanch iboralar: ikki to′g′ri chiziq orasidagi burchak, to′g′ri chiziqlarning parallelik sharti, perpendikulyarlik sharti, nuqtadan to′g′ri chiziqqacha masofa.

Ma'ruza rejasi:

1. Ikki to′g′ri chiziq orasidagi burchak.
2. To′g′ri chiziqlarning perpendikulyarlik va parallellik sharti.
3. Nuqtadan to′g′ri chiziqqacha bo′lgan masofa.

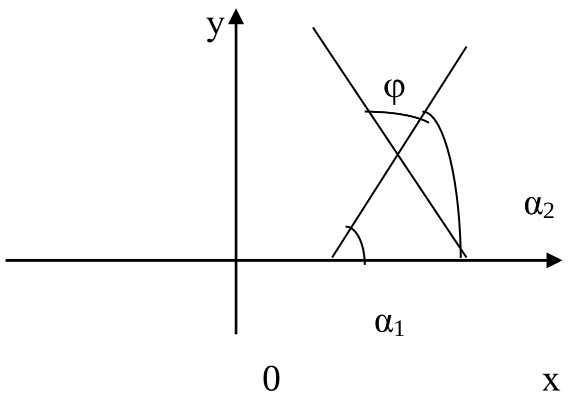
Adabiyotlar:

[1] I bob, §19 [3] V bob, §3,5,6 [14]. 101-104 betlar.

Ikki to′g′ri chiziq orasidagi burchak.

Tekislikning biror M nuqtasida kesishuvchi ikkita to′g′ri chiziq orasidagi burchakni topish bilan shug′ullanamiz. Bu to′g′ri chiziqlar o′zlarining burchak koeffitsentli tenglamalari bilan berilgan bo′lsin, ya'ni

$$y_1=k_1x+в_1 \quad \text{ва} \quad y_2=k_2x+в_2$$



Bu to′g′ri chiziqlar orasidagi burchakni φ bilan va ularning OX o′qi bilan hosil qilgan burchaklarini mos ravishda α_1 va α_2 bilan belgilaymiz. Chizmaga asosan izlanayotgan burchak tangensini topamiz:

$$tg\varphi=tg(\alpha_2-\alpha_1)=\frac{tg\alpha_2-tg\alpha_1}{1+tg\alpha_2\cdot tg\alpha_1}$$

Bunda $tg\alpha_1 = k_1$ va $tg\alpha_2 = k_2$ ekanligini hisobga olsak va $\varphi \neq 90^0$ shartni qanoatlantirsa, u holda to′g′ri chiziqlar orasidagi burchakni

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 \cdot k_1} \qquad (1)$$

formula orqali aniqlashimiz mumkin.

Agar to′g′ri chiziqlar $A_1x+B_1y+C_1=0$ va $A_2x+B_2y+C_2=0$ umumiy tenglamalari bilan berilgan bo′lsa, ularning $\mathbf{n_1}(A_1,B_1)$ va $\mathbf{n_2}(A_2,B_2)$ normal vektorlariga murojaat qilamiz. Unda izlangan φ burchak normal vektorlar orasidagi burchak bilan teng bo'ladi va vektorlar orasidagi burchak formulasiga asosan

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

formula bilan topiladi.

To′g′ri chiziqlarning parallellik va perpendikulyarlik shartlari.

Agar ikkita to′g′ri chiziq || yoki ustma-ust tushsa, y holda

$$\alpha_1 = \alpha_2 \Rightarrow tg\,\alpha_1 = tg\,\alpha_2 \Rightarrow k_1 = k_2.$$

Aksincha, agar $k_1 = k_2$ bo′lsa, u holda $tg\,\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0$. Shunday qilib, ikki to′g′ri chiziqning || bo′lishining zaruriy va etarli sharti $k_1 = k_2$ bo′ladi.

Agar to′g′ri chiziqlar ⊥ bo′lsalar, u holda (1) formula ma'nosiz bo′ladi. Aytaylik $0<\varphi<90^0$ bo′lsin. Bunda $\cos\varphi\neq0$, $\sin\varphi\neq0$ bo′lgani uchun φ burchakni kotangensini (1) ga asosan quyidagicha yozish mumkin:

$$ctg\varphi=1/tg\varphi =(1+ tg\,\alpha_1\, tg\,\alpha_2)/ (tg\,\alpha_2 - tg\,\alpha_1) = (1 + k_1\, k_2) / (k_2 - k_1)$$

Bu formulada $\varphi = \pi/2$ desak, $ctg\,\varphi=0 \Rightarrow k_1\ \ k_2 = -1$ natijani olamiz. Aksincha bu tenglik bajarilsa, u holda $ctg\varphi =0 \Rightarrow \varphi=\pi/2$ ekanligini ko′rish qiyin emas.

Demak, ikkita to′g′ri chiziqning perpendikulyarligining zaruriy va etarli sharti $k_1\, k_2= -1$ bo′ladi.

1-m i s o l: $6x+2y-1=0$ va $x-3y+2 =0$ to′gri chiziqlarning perpendikulyarligini ko′rsating.

E ch i sh: $2y_1 =-6x+1$ $\qquad$ $3y_2 = x+2$

$y_1 =-3x + ½$ $\qquad$ $y_2 = x/3 +2/3$

$k_1 = -3$ $\qquad$ $k_2 = 1/3$

Natijada $k_1\, k_2 = -1$ ekanligini ko′ramiz, ya'ni $\varphi = 90^\circ$ va bu to′g′ri chiziqlar o′zaro perpendikulyar ekan.

2-m i s o l : M(-3:-1) nuqta orqali o′tuvchi va $2x+y-3=0$ to′g′ri chiziqqa perpendikulyar bo′lgan to′g′ri chiziq tenglamasi topilsin.

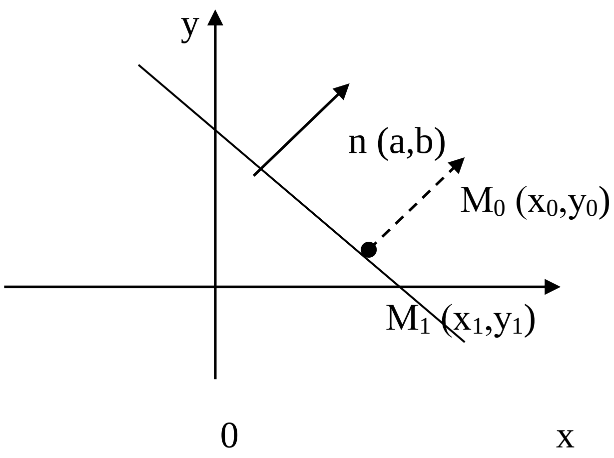
E ch i sh : Berilgan to′g′ri chiziqning burchak koeffitsienti k_1=-1/2 ga teng. Demak, o’nga perpendikulyar bo′lgan to′g′ri chiziqning burchak koeffitsienti k_2=-1/k_1=2 va uning tenglamasi y=2x+b ko′rinishga ega. M(-3,-1) nuqta izlanayotgan to′g′ri chiziqda yotgani uchun uning koordinatalari bu tenglamani qanoatlantiradi:

$$-1= 2\cdot (-3)+b \Rightarrow b=5.$$

Natijada izlangan to′g′ri chiziq tenglamasi y=2x +5 ekanligini topamiz.

Nuqtadan to′g′ri chiziqqacha bo′lgan masofa.

Aytaylik M_0 $(x_0;y_0)$ nuqta va undan o′tmaydigan biror to′g′ri chiziq uzining umumiy tenglamasi $ax+вy+c=0$ bilan berilgan bo′lsin. Berilgan nuqta va shu to′g′ri chiziq orasidagi masofani topish masalasini qo′yamiz.



Berilgan to′g′ri chiziqqa perpendikulyar bo′lgan $\vec{n}=(a;b)$ va $\mathbf{M_1M_0}=(x_0-x_1;\ y_0-y_1)$ vektorlar parallel bo′ladi. Bunda $\bar{n}$ to′g′ri chiziqning normal vektori, M_1 esa to′g′ri chiziqqa M_0 nuqtada o′tkazilgan perpendikulyar asosini ifodalaydi. Chizmaga asosan va skalyar ko′paytmaning har ikkala ko′rinishiga binoan

$$\bar{n}\cdot\mathbf{M_1M_0}=|\bar{n}|\,|\mathbf{M_1M_0}|\cos 0=a(x_0-x_1)+b(y_0-y_1),$$

$$\sqrt{a^2+в^2}\cdot d=a(x_0-x_1)+b(y_0-y_1) \qquad (2)$$

Bunda d=| $\mathbf{M_1M_0}$ | izlanayotgan masofani ifodalaydi.

$M_1(x_1;y_1)$ nuqta berilgan to′g′ri chiziqda yotganligi uchun uning koordinatalari to′g′ri chiziq tenglamasini qanoatlantiradi, ya'ni

$$a\,x_1+в\,y_1+c=0 \Rightarrow a\,x_1+в\,y_1=-c.$$

Bo’larni hisobga olib, (2) ni quyidagicha yozish mumkin:

$$a\,x_0+в\,y_0-(a\,x_1+в\,y_1)=(\pm d)\sqrt{a^2+в^2},$$

$$a\,x_0+в\,y_0+c=(\pm d)\sqrt{a^2+в^2},$$

$$d=\pm\frac{ax_0+by_0+c}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}\quad. \qquad (3)$$

3-m i s o l : 2x-3y+1=0 to′g′ri chiziq va M(2;1) nuqtalar orasidagi masofani toping.

E ch i sh: Berilganlarni (3) formulaga qo′yib, berilgan nuqta va to′g′ri chiziq orasidagi masofani topamiz:

$$d = |2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 + 1| / \sqrt{4+9} = 2 / \sqrt{13}$$

Izox: Oldingi ma'ruzada normal tenglamasi bilan berilgan to′g′ri chiziq bilan $M_0(x_0,y_0)$ orasidagi masofa

$$d = |x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha - p|$$

formula bilan ham topilishi ko′rsatilgan edi.

O′z-o′zini nazorat etish savollari:

1. Ikki to′g′ri chiziq orasidagi burchak qanday topiladi?
2. To′g′ri chiziqlarning perpendikulyarlik sharti nimadan iborat?
3. To′g′ri chiziqlarning parallellik shartini yozing.
4. Nuqtadan to′gri chiziqqacha bo’lgan masofa qanday topiladi?

15-MA'RUZA

IKKINCHI TARTIBLI CHIZIQLAR.
AYLANA VA ELLIPS.

Tayanch iboralar: ikkinchi darajali tenglama, ikkinchi tartibli chiziqlar, aylana umumiy tenglamasi, ellips ta'rifi, ellipsning kanonik tenglamasi, fokus, ekstsentrisitet, fokal radius, direktrisa.

Ma'ruza rejasi:

1. Ikkinchi darajali tenglama va ikkinchi tartibli chiziqlar.
2. Aylananing umumiy tenglamasi.
3. Ellips va uning kanonik tenglamasi.
4. Ellips tenglamasining taxlili va ellips grafigi.
5. Ellipsning ekstsentrisiteti.
6. Ellips direktrisalari va fokal radiuslari.

Adabiyotlar:

[1] I bob, §13, §35-36 [3] VII bob, §1-3 [14]. 104-108 betlar.

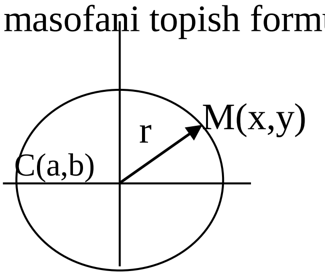
Ushbu II darajali tenglama

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \qquad (1)$$

tekislikdagi ikkinchi tartibli chiziqning umumiy tenglamasi deyiladi. Bu erda A, B, C lardan kamida bittasi nolga teng emas. (1) tenglama koeffitsientlarining qiymatlariga qarab turli ikkinchi tartibli chiziqlarni tasvirlashi mumkin. Biz quyida shu egri chiziqlarni tenglamalari bilan tanishamiz.

Aylananing umumiy tenglamasi.

Radiusi r ga teng va markazi S($a;b$) nuqtada yotgan aylana tenglamasini keltirib chiqaramiz. M(x,y) shu aylanadagi ixtiyoriy bir nuqta bo′lsin. Ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasiga asosan



$$|MC| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \Rightarrow$$

$$(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2 \qquad (2)$$

Bu markazi C(a;b) nuqtada bo′lib, radiusi r ga teng bo′lgan aylananing tenglamasidir. Agara=b=0 bo′lsa $x^2+y^2= r^2$. Bu markazi koordinatalar boshida yotgan aylananing tenglamasidir.

(2) tenglamadagi qavslarni ochsak,

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0,$$

ya'ni (1) ko′rinishdagi tenglamani olamiz. Oxirgi tenglamaga

$$D=-2a; \qquad E=-2b; \qquad F=a^2+b^2-r^2$$

belgilashlarni quyib, ushbu

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0 \qquad (3)$$

aylananing umumiy ko′rinishdagi tenglamasi deb ataluvchi tenglamani olamiz.

Shunday qilib, ikkinchi tartibli (1) umumiy tenglama aylananing tenglamasi bo′lishi uchun x^2 va y^2 oldidagi koeffitsientlar teng va xy ko′paytma oldidagi koeffitsientning nolga teng bo′lishi zarur va etarlidir.

Masalan, $x^2+y^2-2x+3y+2=0$ tenglamani quramiz. Bu tenglamada x va y qatnashgan hadlarni alohida – alohida guruhlab va to′la kvadrat ajratib, quyidagi aylana tenglamasini hosil qilish mumkin:

$$x^2-2x+1-1+y^2+3y+9/4-9/4+2=(x-1)^2+(y+3/2)^2-5/4=0$$

$$(x-1)^2+(y+3/2)^2=5/4$$

Bu markaziC(1,-3/2) nuqtada joylashgan va radiusi $r=\sqrt{5}/2$ bo′lgan aylana tenglamasidir.

ELLIPS VA UNING KANONIK TENGLAMASI

TA'RIF: Ellips deb, har bir nuqtasidan berilgan ikki nuqtagacha (fokuslargacha) masofalarning yig′indisi o′zgarmas 2*a* soniga teng bo′lgan tekislik nuqtalarining geometrik o′rniga aytiladi.

Bu 2*a* o′zgarmas son fokuslar orasidagi 2c masofadan katta deb olinadi.

Biz F_1 va F_2 fokuslarni koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik qilib olamiz. Unda fokuslar $F_2(-c;0)$ va $F_1(c;0)$ koordinatalarga ega bo′ladi.Agar $M(x;y)$ ellipsda yotgan ixtiyoriy nuqta bo′lsa, unda ellips ta'rifiga asosan F_1M+F_2M yigindi uzgarmas son bo′lishi kerak, ya'ni

$$F_1M+F_2M=2a\,. \qquad (4)$$

Ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasiga asosan

$$F_1M=\sqrt{(x-c)^2+y^2}\,, \qquad F_2M=\sqrt{(x+c)^2+y^2}\,.$$

Bu natijalarni (4)-tenglikka qo′yib, uni soddalashtiramiz:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

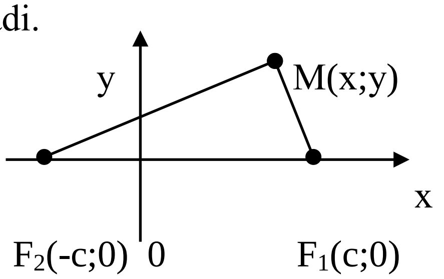
$$x^2+2xc+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + x^2-2xc+c^2+y^2$$

$$4a^2-4xc=4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\,; \qquad a^2-xc=a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$a^2(x^2-2xc+c^2+y^2)=a^4-2a^2xc+x^2c^2$$

$$a^2x^2+a^2c^2+a^2y^2= a^4+x^2c^2 \qquad (a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2) \qquad (5)$$

F_1MF_2 uchburchakdan $MF_1+MF_2>F_1F_2$, bundan esa $2a>2c$, $a>c$ bo′lishi kerakligi kelib chiqadi.



Natijada $a^2 – c^2>0$ bo′ladi va uni $a^2 – c^2 = b^2$ deb belgilab olish mumkin. Bu holda (5) tenglik $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ ko′rinishga keladi. Bu tenglamani a^2b^2 ga bo′lib, ushbu tenglamaga kelamiz:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (6)$$

Hosil bo′lgan tenglama ellipsning ***kanonik tenglamasi*** deyiladi.

Ellipsning shakli

Elippsning kanonik tenglamasiga asosan (x; y) nuqta ellipsda yotsa, u holda (-x; y), (-x; -y), (x; -y) nuqtalar ham unda yotadi. Shuning uchun ham koordinata o′qlari ellips uchun simmetriya o′qlari bo′lib hisoblanadi.

Ellipsning koordinata o′qlari bilan kesishgan nuqtalari ellipsning uchlari deyiladi. Ularni topish uchun (6) ga mos ravishda x=0 va y=0 qiymatlarni qo′yib, hosil bo′lgan tenglamalarni echamiz:

$$x=0 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow y^2=b^2 \Rightarrow y=\pm b,$$

$$y=0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}=1 \Rightarrow x^2=a^2 \Rightarrow x=\pm a.$$

Natijada ellipsning quyidagi to′rtta uchlari hosil bo′ladi:

$$A_1(a;0), \qquad A_2(-a;0), \qquad B_1(0;b), \qquad B_2(0;-b)$$

$A_1A_2=2a$ – ellipsning katta o′qi, $B_1B_2=2b$ - kichik o′qi, a va b esa uning yarim o′qlari deyiladi.

Kanonik tenglamadan

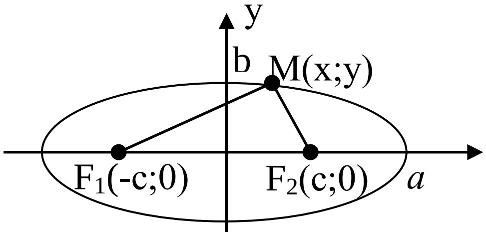
$$\frac{x^2}{a^2} \le 1 \Rightarrow x^2 \le a^2 \Rightarrow |x| \le a, \qquad \frac{y^2}{в^2} \le 1 \Rightarrow y^2 \le в^2 \Rightarrow |y| \le в,$$

natijalarni olamiz. Demak ellips chegaralangan egri chizik bo′ladi

Koordinata o′qlari ellips uchun simmetriya chiziqlari ekanligidan uning shaklini faqat birinchi chorakda aniqlash kifoya. Unda $x \ge 0$, $y \ge 0$ bo′lgani uchun (6) tenglamadan

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

funktsiyani hosil qilamiz. Bu funktsiya uchun $x \in [0;a]$ bo′lib, x oshib borganda, y o′zgaruvchi b dan boshlab nolgacha kamayib boradi va ellipsning birinchi chorakdagi qismini hosil qiladi. Bu qismni simmetriya asosida davom ettirib, ellips shakli quyidagicha bo′lishini topamiz:



~~Fkghkjgh jgjддддF~~ ~~x~~ a x
x

Ellipsning ekstsentrisiteti.

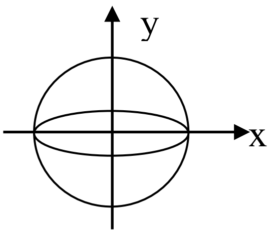
TA'RIF: Ellipsning fokuslari orasidagi 2c masofani uning katta o′qi uzunligi 2*a* ga nisbati ellipsning ***ekstsentrisiteti*** deb ataladi va ε kabi belgilanadi.

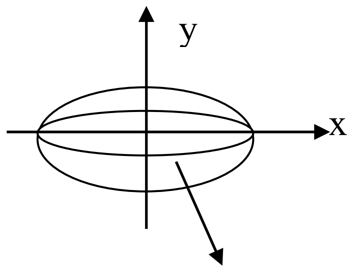
Ta'rifga asosan $\varepsilon=2c/2a=c/a$ va $c\in(0;a)$ bo′lgani uchun $0<\varepsilon<1$ qo′sh tengsizlik o′rinli bo′ladi. Kanonik tenglama bo′yicha ε quyidagicha topiladi:

$$c=\sqrt{a^2-b^2}\Rightarrow\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$$

Bu erda ε =0 bo′lsa, *a*=b bo′ladi va ellips aylanaga o′tadi. Demak aylana ellipsning xususiy xoli bo′ladi.

ε birga yaqinlashgan sari ellips OX o′qiga yaqinlashadi, ya'ni *b* nolga yaqin bo′ladi.





ε = 0

ε - birga yaqinlashganda

Ellips nuqtasining fokal radiuslari.

Ellipsning ixtiyoriy M(*x*,*y*) nuqtasidan F_1 va F_2 fokuslarigacha bo′lgan r_1 va r_2 masofalar shu nuqtaning ***fokal radiuslari*** deyiladi. Ellips ta'rifiga asosan $r_1+r_2=2a$ bo′ladi. Ikki nuqta orasidagi masofa formulasiga asosan

$$r_1=MF_1=\sqrt{(x-c)^2+y^2},\quad r_2=MF_2=\sqrt{(x+c)^2+y^2}.$$

Bu fokal radiuslarni kvadratga kutarib ayirsak, u holda

$$r_2^2-r_1^2=4cx \text{ va } r_1+r_2=2a$$

tenglamalar sistemasi hosil bo′ladi va uni echib fokal radiuslar uchun quyidagi formulalarni olamiz:

$$r_1=a-\varepsilon x \quad r_2=a+\varepsilon x$$

Ellipsning direktrisalari.

Ellipsning katta o′qiga perpendikulyar va kichik o′qiga parallel bo′lgan x=±ℓ (ℓ>0) to′gri chiziqlarni qaraymiz. Ellipsning ixtiyoriy M(*x*;*y*) nuqtasidan shu nuqtaga yaqin x=±ℓ (ℓ>0) perpendikulyar to′gri chiziqqacha (d_1) hamda yaqin fokusigacha bo′lgan r_1 masofalar nisbatini olamiz:

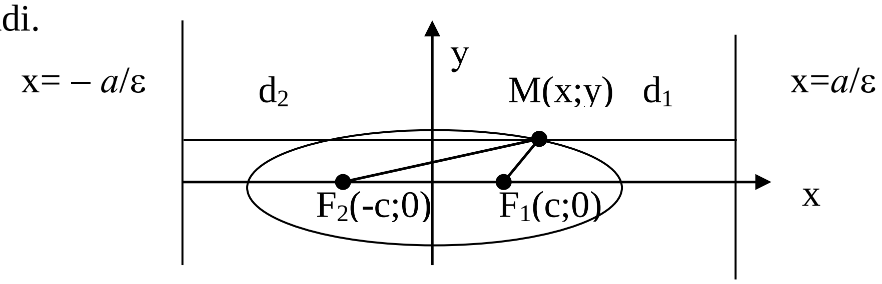
$$\frac{r_1}{d_1}=\frac{a-\varepsilon x}{\ell - x}=\varepsilon\frac{\frac{a}{\varepsilon}-x}{\ell - x}$$

Agar ℓ sifatida ℓ=*a*/ε olinsa, u holda yuqoridagi nisbat o′zgarmas bo′lib, doimo ε ga teng bo′ladi. M(x;y) nuqtadan x= -ℓ to′gri chizigigacha bo′lgan masofani d_2 orqali belgilasak, u holda yuqoridagidek mulohazalar yuritib, $r_2/d_2 = \varepsilon$ tenglikni hosil qilamiz.

Ellips markazining chap va o′ng tomonida bir xil masofada joylashgan x=±*a*/ε to′g′ri chiziqlariga ellipsning ***direktrisalari*** deyiladi.

Aylanada direktrisa bo′lmaydi, chunki unda ε=0.

Shunday qilib ellipsning ixtiyoriy nuqtasidan fokusigacha va mos direktrisasigacha bo′lgan masofalar nisbati o′zgarmas son bo′lib, doimo ε ga teng bo′ladi.



Misol: $x^2+4y^2=4$ ellipsning barcha xarakteristikalarini toping.

Echish: Dastlab ellipsning kanonik tenglamasini hosil qilamiz:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1,\Rightarrow a^2=4;\ b^2=1\Rightarrow c^2=a^2-b^2=3.$$

Unda fokuslar $F_1(-\sqrt{3},0)$ va $F_2(\sqrt{3},0)$, yarim o′qlar *a*=2 va *b*=1 bo′ladi. Bo'lardan ekstsentrisitet va direktrisalarni topamiz:

$$\varepsilon=\frac{c}{\mathrm{a}}=\frac{\sqrt{3}}{2};\qquad \mathrm{x}=\pm\frac{\mathrm{a}}{\varepsilon}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\pm\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Fokal radiuslar $r_1=2-\frac{\sqrt{3}}{2}x,\ r_2=2+\frac{\sqrt{3}}{2}x$ formulalar bilan topiladi.

<u>O′z-o′zini nazorat etish savollari:</u>

1. Ikkinchi darajali tenglamaning umumiy ko′rinishi qanday bo′ladi?
2. Aylananing umumiy tenglamasini yozing va u bo′yicha aylana markazi hamda radiusi qanday topilishini ko′rsating.
3. Ellips qanday ta'riflanadi?
4. Ellipsning kanonik tenglamasini yozing va undagi parametrlar ma'nosini ko′rsating.
5. Ellipsning ekstsentrisiteti qanday aniqlanadi va u nimani ifodalaydi?
6. Ellipsning fokal radiuslari deb nimaga aytiladi va ular qanday topiladi?
7. Ellips direktrisalari deb nimaga aytiladi?

16-MA'RUZA

GIPERBOLA VA PARABOLA.

Tayanch iboralar: giperbola ta'rifi, giperbolaning kanonik tenglamasi, fokus, o′q, asimptota, ekstsentrisitet, direktrisa, fokal radius, parabola ta'rifi, kanonik tenglamasi, parabola fokusi va uning xossasi, parabola ekstsentrisiteti.

Ma'ruza rejasi:

1. Giperbola va uning kanonik tenglamasi.
2. Giperbola grafigi va asimptotalari.
3. Giperbola ekstsentrisiteti, direktrisalari va fokal radiuslari.
4. Parabola va uning kanonik tenglamasi.
5. Parabola grafigi va ekstsentrisiteti.

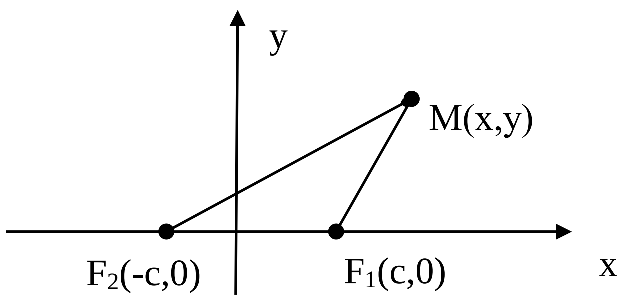
Adabiyotlar:

[1] I bob, §35-36 [3] VII bob, §4-5 [14]. 109-119 betlar.

TA'RIF: Giperbola deb, fokuslar deb ataluvchi ikki nuqtagacha masofalarining ayirmasi o′zgarmas $2a$ songa teng bo′lgan tekislikdagi nuqtalarning geometrik o′rniga aytiladi.

Bu o′zgarmas $2a$ soni fokuslar orasidagi 2c masofadan kichik bo′lishi kerak.

Fokuslarni koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik qilib olamiz. Unda ularni $F_1(c,0)$ va $F_2(-c,0)$ deb ifodalash mumkin. $M(x,y)$ giperboladagi ixtiyoriy bir nuqta bo′lsin.



Ta'rifdan foydalanib giperbola tenglamasini chiqaramiz. Ta'rifga asosan $|F_2M| - |F_1M| = 2a$ bo′ladi. Bu erda

$$|F_2M| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\ ,\quad |MF_1| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

va bu masofalarni yuqoridagi tenglikka qo′yib, soddalashtiramiz:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$x^2+2cx+c^2+y^2=4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2-2cx+c^2+y^2 \Rightarrow a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = cx-a^2$$

$$a^2(x-c)^2 + a^2 y^2 = c^2x^2 - 2cx\, a^2 + a^4$$

$$a^2x^2 - 2cx\, a^2 + a^2 c^2 + a^2 y^2 = c^2x^2 - 2cx\, a^2 + a^4$$

$$(a^2-c^2)x^2 + a^2 y^2 = a^4 - a^2 c^2 \Rightarrow (c^2-a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2-a^2).$$

F_1MF_2 uchburchakdan $|F_2M| - |F_1M| < |F_1F_2| \Rightarrow 2a < 2c \Rightarrow a < c$ bo′lgani uchun $b^2 = c^2 - a^2$ deb belgilash mumkin va oxirgi tenglikni o’nga bo′lib, ushbu tenglamani hosil qilamiz:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{в^2} = 1 \qquad (1)$$

Bu tenglamaga giperbolaning ***kanonik tenglamasi*** deyiladi.

Ellipsdagidek bu erda ham $r_2 = |F_2M|$ va $r_1 = |F_1M|$ giperbolaning ***fokal radiuslari*** deyiladi.

Giperbolaning koordinata o′qlari bilan kesishgan nuqtalarini topamiz:

$$y=0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} = 1 \Rightarrow x^2 = a^2 \Rightarrow \quad x = \pm a$$

Agar x=0 desak, u holda $y^2 = -в^2 \Rightarrow y \in \varnothing$ bo′lib, giperbolani OY o′qki bilan kesishmasligiga ishonch hosil qilamiz. Shunday qilib, giperbolani OX o′qidagi kesishish nuqtalari $A_2(a;0)$ va $A_1(-a;0)$ bo′lib, ular giperbolaning ***uchlari*** deyiladi. Giperbola uchlari orasidagi $2a$ masofani giperbolaning ***haqiqiy o′qki*** va $B_2(0;\, b)$, $B_1(0;\, -b)$ nuqtalar orasidagi $2b$ masofani esa giperbolaning ***mavxum o′qi*** deb ataladi. Mos ravishda a va b sonlariga giperbolaning yarim haqiqiy va yarim mavxum o′qlari deyiladi. O′qklarning o′rta nuqtasi giperbolaning ***markazi*** deyiladi.

Giperbolaning shakli.

Agar (x,y) giperbolada yotgan nuqta bo′lsa, u holda, $(\pm x, \pm y)$ nuqtalar hjam giperbolaga tegishli bo′ladi, ya'ni giperbola koordinata o′qlariga nisbatan simmetrikdir.

Giperbolaning kanonik tenglamasidan

$$\frac{x^2}{a^2} \geq 1 \Rightarrow x^2 \geq a^2 \Rightarrow \quad |x| \geq a.$$

Agar yuqoridagidek, faqat birinchi chorak bilan kifoyalansak, u holda

$$y = \frac{в}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

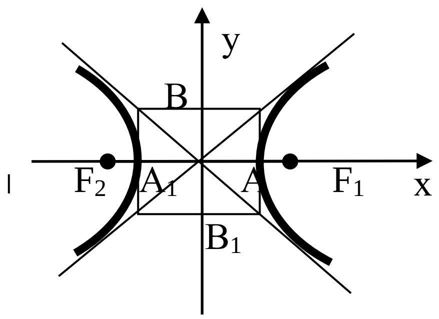
funktsiyada x o′zgaruvchi a dan ∞ gacha o′zgarib borganda, y o′zgaruvchi $в$ dan ∞ gacha o′sadi, ya'ni giperbola chegaralanmagan egri chiziqdir. I chorakdagi giperbola grafigini simmetriya bo′yicha davom ettirib, giperbola ikkita bo′lakdan iborat egri chiziq bo′lishini ko′ramiz. Bu bo’laklar giperbolaning ***shoxlari*** deb ataladi.

Giperbolaning asimptotalari.

TA'RIF: Berilgan egri chiziq asimptotaga ega deyiladi, agarda shunday *l* to′g′ri chiziq mavjud bo′lsaki, egri chiziq bu to′g′ri chiziqqa cheksiz yaqinlashib borsa.

Giperbolaning $A_1A=2a$ va $BB_1=2b$ o′qlaridan yasalgan to′g′ri to′rtburchak diaganallari yotgan to′g′ri chiziqlar giperbolaning asimptotalari bo′lishini ko′rsatish mumkin.

Giperbolaning grafigi va asimptotalari quyidagi chizmada kursatilgan:



Asimptotalarning tenglamalari quyidagi ko′rinishga ega:

$$y = \pm \frac{b}{a} x \qquad (2)$$

Agarda $a=b$ bo′lsa, giperbola teng yonli deyiladi. Unda $y=\pm x$ asimptotalarni koordinatalari sifatida olsak, giperbola tenglamasi bizga maktabdan tanish bo′lgan $x \cdot y=k \Rightarrow y=k/x$ ko′rinishga keladi.

M i s o l. $a=3$ va $b=2$ ga teng bo′lsa, giperbola va uning asimptotalari tenglamasi yozilsin.

E ch i sh. Giperbolaning (1) kanonik tenglamasi va (2) asimptotalar tenglamasiga asosan ushbu natijalarni olamiz:

$$\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1, \qquad y = \pm \frac{2}{3} x$$

Giperbolaning ekstsentrisiteti.

TA'RIF: Giperbolani fokuslari orasidagi 2c masofani uning haqiqiy o′qi uzunligi $2a$ ga nisbati giperbolaning ***ekstsentrisiteti*** deyiladi va ε kabi belgilanadi.

Ta'rifga va kanonik tenglamaga asosan

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = \sqrt{1+(\frac{b}{a})^2} > 1. \qquad (3)$$

Agar a parametr b ga nisbatan kichik bo′lsa, giperbolaning shoxlari OX o′qiga qarab siqiq bo′ladi, b qancha a ga yaqin bo′lsa uning shoxlari shuncha yoyik bo′ladi.

Giperbolaning M nuqtasidan F_1 va F_2 fokuslarigacha bo′lgan masofalar shu nuqtaning ***fokal radiuslari*** deyiladi.

Ellipsning fokal radiuslarini topish yulidan foydalanib, giperbolaning fokal radiuslarini topamiz:

$r_1 = -a+\varepsilon x$, $r_2 = a+\varepsilon x$ (o′ng shox uchun), $r_1 = a - \varepsilon x$, $r_2 = -a-\varepsilon x$ (chap shox uchun)

Mи с о л : $x^2 / 16 - y^2 / 9 = 1$ giperbolaning abtsissasi 8 ga teng, ordinatasi musbat bo′lgan nuqtasining fokal radiuslari hisoblansin.

E ch i sh: Masala sharti va (3) formulaga asosan

$x=8$, $y>0$, $a=4$, $b=3$, $c=\sqrt{16+9}=5$, $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{5}{4}$

va (4) formulaga asosan o’ng shox fokal radiuslari

$r_1=-a+\varepsilon x=-4+{}^5/_4\cdot 8=6$, $\qquad r_2=a+\varepsilon x=4+{}^5/_4\cdot 8=14$

Giperbolaning direktrisalari.

TA'RIF: Giperbolaning ***direktrisalari*** deb uning markazidan $\pm a/\varepsilon$ masofada o′tib, fokal o′qiga perpendikulyar bo′lgan to′g′ri chiziqlarga aytiladi.

Ta'rifga asosan direktrisa tenglamalari $x=\pm a/\varepsilon$ bo′ladi.

Ektsentrisitet $\varepsilon>1$ bo′lgani uchun $a/\varepsilon<a$. Demak direktrisa O markaz bilan A_1 va A uchlar orasidan o′tadi.

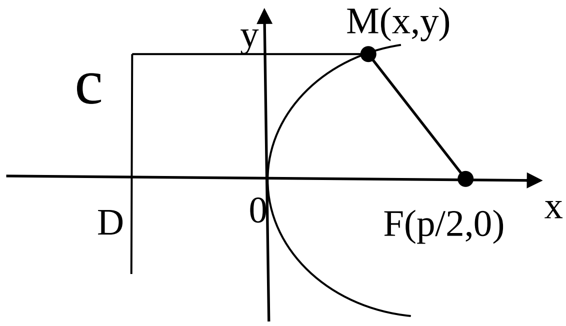
TEOREMA: Giperbolaning ixtiyoriy nuqtasidan fokusigacha masofaning mos direktrisagacha masofasining nisbati o′zgarmas bo′lib, (ektsentrisitetga teng bo′ladi, ya'ni $r/d=\varepsilon$.

Teoremani isbotini o′quvchiga havola qilamiz.

TA'RIF: Parabola deb, har bir nuqtasidan berilgan nuqtagacha (fokusigacha) va berilgan to′g′ri chiziqqacha (direktrisagacha) masofalari o′zaro teng bo′lgan tekislik nuqtalarining geometrik o′rniga aytiladi.

Bunda direktrisa fokusdan o′tmasligi kerak.

Parabola tenglamasini topish uchun F fokus va *l* direktrisa orasidagi masofani FD=p, koordinata boshini ular oʼrtasida deb olamiz. Unda fokus F(p/2,0), direktrisa tenglamasi x=-p/2 boʼladi. Parabolaga tegishli ixtiyoriy M(*x*,*y*) nuqtani olamiz.



Ta'rifga koʼra CM=MF va

$$MF=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2},CM=\left|x+\frac{p}{2}\right|$$

boʼlgani uchun quyidagi tenglikni hosil qilamiz:

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right|\Rightarrow x^2-xp+\frac{p^2}{4}+y^2=x^2+xp+\frac{p^2}{4}\Rightarrow y^2=2px \quad (5)$$

Hosil boʼlgan (5) tenglama parabolaning ***kanonik tenglamasi*** deyiladi. Bu parabola OX oʼqiga nisbatan simmetrik boʼladi va r parabolaning parametri deyiladi.

Parabolaning ixtiyoriy M nuqtasidan direktirisagacha boʼlgan masofa CM=d, fokusigacha boʼlgan masofa FM=r deb belgilasak, ta'rifga asosan r=d va parabolaning ekstsentrisiteti ε=r⁄d =1 boʼladi. Parabola uchun direktirisa tenglamasi x=-p/2, boʼladi.

M i s o l: OX oʼqi parabolaning simmetriya oʼqi, uning uchi koordinatalar boshida yotadi. Parabola uchidan fokusigacha boʼlgan masofa 4 birlikka teng. Parabola tenglamasini tuzing.

Echish: Masala shartiga va (5) formulaga asosan

$OF=4 \Rightarrow p/2=4 \Rightarrow p=8 \Rightarrow y^2=2px \Rightarrow y^2=2\cdot 8x=16x.$

Oʼz-oʼzini nazorat etish savollari:

1. Giperbola qanday ta'riflanadi?

2. Giperbolaning kanonik tenglamasi qanday ko′rinishda bo′ladi?
3. Giperbola kanonik tenglamasidagi parametrlar nimani ifodalaydi?
4. Giperbola asimptotalari qanday tenglama bilan ifodalanadi?
5. Giperbola ekstsentrisiteti deb nimaga aytiladi va u qanday qiymatlar qabo’l qila oladi?
6. Giperbolaning fokal radiuslari deb nimaga aytiladi va ular qanday topiladi?
7. Giperbola direktrisalari qanday xossaga ega?
8. Parabola qanday ta'riflanadi?
9. Parabolaning kanonik tenglamasi qanday ko′rinishda bo′ladi?
10. Parabolaning ekstsentrisiteti nimaga teng?
11. Parabola kanonik tenglamasidan uning fokusi va direktrisasi qanday topiladi?

17-MA'RUZA.

FAZODA TEKISLIK TENGLAMALARI.

Tayanch iboralar: tekislikning vektor tenglamasi, normal tenglamasi, umumiy tenglamasi, tekislikning normal vektori, tekislikning kesmalardagi tenglamasi.

M a ' r u z a   r e j a s i :

1. Tekislik va uning vektor tenglamasi.
2. Tekislikning normal tenglamasi.
3. Tekislikning umumiy tenglamasi.
4. Tekislikning normal vektori va uni topish.
5. Tekislik umumiy tenglamasini taxlil etish.
6. Tekislikning kesmalardagi tenglamasi.

Adabiyotlar:

[1] I bob, §14-15   [3] VI bob, §1-2   [14]. 119-120 betlar.

Fazodagi xar bir M nuqta uchta x,y,z koordinatalar bilan aniqlanadi. Shu sababli fazodagi geometrik ob'ekt tenglamasi uch o′zgaruvchili, ya'ni F(x,y,z) = 0 ko′rinishda bo′ladi.

Fazoda eng asosiy geometrik obe'ktlardan biri bo′lib tekislik hisoblanadi. Uning tenglamasi quyidagi teorema bilan aniqlanadi.

TEOREMA: 1)Agarda fazoda tekislik berilgan bo′lsa, uning tenglamasi uch o′zgaruvchili chiziqli tenglamadan iborat bo′ladi.

2) Fazoda uch noma'lumli chiziqli tenglama berilgan bo′lsa, bu tenglama biror tekislikni aniqlaydi.

ISBOT: 1) Faraz qilaylik fazoda qandaydir tekislik berilgan bo′lsin. Uni uch o′zgaruvchili bitta chiziqli tenglama ifodalashini ko′rsatamiz.

Dekart koordinatalar sistemasida berilgan tekislikni ixtiyoriy bir nuqtasini M(x;y;z), uning radius-vektorini **r** kabi belgilaymiz. Tekislikdagi boshqa bir $T(x_0;y_0;z_0)$ nuqtadan koordinatalar boshigacha bo′lgan masofani **r** orkali belgilaymiz, ya'ni OT=p. OT perpendikulyar ustida tekislikka yo′nalgan $\mathbf{n}^0$ birlik vektorni olamiz. M(x;y;z) nuqta tekislikning istalgan nuqtasi bo′lsa ham **OM**=**r** radius–vektorning birlik $\mathbf{n}^0$ vektorga proektsiyasi o′zgarmas bo′lib, **r** masofaga teng. Bundan

$$np_{\vec{n}^0}\overrightarrow{OM} = p \quad \text{ва} \quad np_{\vec{n}^0}\overrightarrow{OM} = \vec{r}\vec{n}^0 \Rightarrow \vec{r}\vec{n}^0 - p = 0 \qquad (1)$$

natijani olamiz. Hosil qilingan (1) tenglama tekislikning ***vektor tenglamasi*** deyiladi. Agarda

$$\mathbf{r}=(x;y;z), \quad \mathbf{n^0}=(\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$$

deb olsak, skalyar ko′paytmaning koordinatalaridagi ifodasidan

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0 \qquad (2)$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu tekislikning ***normal tenglamasi*** deyiladi. Undan har qanday tekislikka chiziqli uch noma'lumli tenglama mos kelishini ko′ramiz.

2) Aytaylik bizga

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (3)$$

uch noma'lumli chiziqli tenglama berilgan bo′lsin. Agar M(x;y;z) (3) tenglama aniqlaydigan sirtning ixtiyoriy nuqtasi bo′lsa, uning radius–vektori **r**=(x;y;z) va yordamchi ***n*=**(A;B;C) o′zgarmas vektorni kiritaylik. Bo’lardan foydalanib (3) tenglamani skalyar ko′paytma yordamida quyidagicha ifodalaymiz:

$$\mathbf{nr}+D=0 \qquad (4)$$

(3) tenglamani |**n**| ga bo′lamiz. Natijada quyidagi xollar kuzatiladi:

I. Agar D<0 bo′lsa, u holda $\mathbf{n^0r}+D/|\mathbf{n}|=0$ va $p= -D/|\mathbf{n}|$ desak, $\mathbf{rn^0}-p=0$ vektor tenglamani olamiz. Bu tenglamani qanoatlantiruvchi barcha M(x;y;z) nuqtalarning geometrik o′rni, (1) ga asosan, tekislikdan iborat bo′ladi.

II. Agar D>0 bo′lsa, (4) ni -|**n**| ga bo′lamiz va yana p = D/|**n**| десак, $\mathbf{r}\,(-\mathbf{n^0})-p=0$ vektor tenglamani olamiz.

III. Agar D=0 bo′lsa, u holda (4) ni |**n**| yoki-|**n**| ga bo′lib, $\mathbf{rn^0}=0$ vektor tenglamani hosil qilamiz.

Demak, (3) tenglamadan (1) tenglama kelib chiqadi va bundan o’nga fazoda tekislik mos kelishi isbotlanadi.

(3) ko′rinishdagi tenglamaga tekislikning ***umumiy tenglamasi*** deyiladi.

Aytaylik M(x;y;z) tekislikning ixtiyoriy va $M_1(x_1;y_1;z_1)$ esa uning ma'lum bir nuqtasi bo′lsin. U holda bu nuqtalar tekislik umumiy tenglamasini qanoatlantiradi, ya'ni

$$Ax+By+Cz+D=0$$

$$Ax_1+By_1+Cz_1+D=0.$$

Ularni birinchisidan ikkinchisini ayirsak,

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0. \qquad (5)$$

Bu berilgan M_1 nuqtadan o′tuvchi ***tekisliklar dastasining tenglamasi*** bo′ladi. (5) tenglama **n**=(A;B;C) va $\mathbf{M_1M}$=(x-x_1; y-y_1; z-z_1) vektorlarning ortogonallik shartini ifodalaydi.

Tekislikka perpendikulyar bo′lgan ixtiyoriy noldan farqli vektor shu tekislikning ***normali*** deb ataladi.

$\mathbf{M_1M}$ vektor tekislikda yotganligi sababli, **n** vektor ham shu tekislikning normallaridan biridir. Demak (3) yoki (5) tenglamadagi o′zgaruvchilarning oldidagi A, B, C koeffitsientlar orqali hosil qilingan **n(A,B,C)** tekislikning normallaridan biri ekan.

Shunday qilib normal tenglama (3) tenglamaning xususiy xoli bo′ladi. Tekislikning umumiy tenglamasidan normal tenglamasiga o′tish uchun (3) ni

$$M = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

soniga ko′paytirish kerak (M va D ning ishoralari qarama – qarshi bo′lishi kerak). Natijada ushbu tenglamaga kelamiz:

$$MAx+MBy+MCz+MD=0$$

Bunda M ***normallashtiruvchi ko′paytuvchi*** deyiladi.

$$MA=\cos\alpha, \quad MB=\cos\beta, \quad MC=\cos\gamma, \quad MD=-p$$

ekanligini hisobga olsak, normal tenglamani topish uchun quyidagilarga ega bo′lamiz:

$$\cos\alpha = \pm\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \qquad \cos\beta = \pm\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$\cos\gamma = \pm\frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \qquad p = \mp\frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Misol: Tekislikning 2x-y+2z-5=0 umumiy tenglamasini normal tenglama ko′rinishga keltiring.

Echish: Normallashtiruvchi ko′paytuvchini topamiz va uni berilgan tenglamaga ko′paytiramiz:

$$M=\frac{1}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z - \frac{5}{3} = 0$$

Tekislikning umumiy tenglamasini tekshirish.

Tekislikning umumiy tenglamasi

$$Ax+By+Cz+D=0$$

berilgan bo′lsin. Ma'lumki bunda A,B,C koeffitsientlarning kamida bittasi noldan farqli bo′lishi kerak, ya'ni tekislikning normali **n**=A***i***+B***j***+C***k*** nol vektor bo′lmasligi kerak.

Quyida umumiy tenglama unda qatnashayotgan koeffitsientlarning turli qiymatlarida qanday tekisliklarni ifodalanishini ko′rib o′tamiz.

1. $D=0 \Rightarrow Ax+By+Cz=0$ - tekislik koordinatalar boshidan o′tadi.

2. $A=0 \Rightarrow By+Cz+D=0$ - tekislik OX o′qiga parallel bo′ladi.

3. $B=0 \Rightarrow Ax+Cz+D=0$ - tekislik OY o′qiga parallel bo′ladi.

4. $C=0 \Rightarrow Ax+By+D=0$ - tekislik OZ o′qiga parallel bo′ladi.

5. $A=0$, $D=0 \Rightarrow By+Cz=0$ - tekislik OX o′qidan o′tadi.

6. $B=0$, $D=0 \Rightarrow Ax+Cz=0$ - tekislik OY o′qidan o′tadi.

7. $C=0$, $D=0 \Rightarrow Ax+By=0$ - tekislik OZ o′qidan o′tadi.

8. $A=0$, $B=0 \Rightarrow Cz+D=0 \Rightarrow Z=-D/C$ - tekislik XOY tekisligiga parallel bo′ladi.

9. $A=0$, $C=0 \Rightarrow By+D=0 \Rightarrow y=-D/B$ - tekislikXOZ tekisligiga parallel bo′ladi.

10. $B=0$, $C=0 \Rightarrow Ax+D=0 \Rightarrow x=-D/A$ - tekislik UOZ tekisligiga parallel bo′ladi.

11. $A=0$, $B=0$, $D=0 \Rightarrow Cz=0$ - XOY tekisligi hosil bo′ladi.

12. $A=0$, $C=0$, $D=0 \Rightarrow By=0$ - XOZ tekisligi hosil bo′ladi.

13. $B=0$, $C=0$, $D=0 \Rightarrow Ax=0$ - YOZ tekisligi hosil bo′ladi.

Tekislikning kesmalarga nisbatan tenglamasi.

Fazoda koordinatalar boshidan o′tmaydigan va koordinata o′qlarini mos ravishda *a, в* va *c* nuqtalarda kesib o′tuvchi tekislik tenglamasini tuzamiz. Buning uchun tekislikning umumiy

$$Ax+By+Cz+D=0$$

tenglamasidan foydalanamiz. Bu erda A,B,C,D koeffitsientlarni quyidagi mulohazalardan topamiz. Tekislik (a;0;0), (0;$в$,0) va (0;0; c) nuqtalardan o′tganligi uchun, ularning koordinatalari umumiy tenglamani qanoatlantiradi, ya'ni

$$\begin{matrix} Aa+D=0 & & A=-D/a & & a=-D/A \\ Bв+D=0 & \Rightarrow & B=-D/в & \Rightarrow & в=-D/B \\ Cc+D=0 & & C=-D/c & & c=-D/C\ . \end{matrix}$$

Koeffitsientlarning topilgan qiymatlarini tenglamaga qo′ysak, u holda

$$-D\frac{x}{a}-D\frac{y}{в}-D\cdot\frac{z}{c}+D=0$$

va hosil bo′lgan bu tenglamani (-D) ga bo′lsak hamda ixchamlasak, u holda

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{в}+\frac{z}{c}=1 \qquad (1)$$

(1) tekislikning ***kesmalarga nisbatan tenglamasi*** deyiladi.

M i s o l: 3x-4y+z-5 =0 tekislik tenglamasini kesmalarga nisbatan ko′rinishga keltiring.

E ch i sh : Yuqoridagidek mulohaza yuritib *a, в, c* larni topish mumkin:

$$a=-\frac{D}{A}=\frac{5}{3};b=-\frac{D}{B}=-\frac{5}{4};c=-\frac{D}{C}=+\frac{5}{1}=5$$

Demak tekislikning kesmalarga nisbatan tenglamasi

$$\frac{x}{5/3}+\frac{y}{-5/4}+\frac{z}{5}=1$$

ekanligi kelib chiqadi.

O′z-o′zini nazorat etish savollari:

1. Tekislikning vektor tenglamasi qanday ko′rinishda bo′ladi?
2. Tekislikning normal tenglamasini yozing va undagi parametrlar ma'nosini ko′rsating.
3. Tekislikning umumiy tenglamasi qanday ko′rinishda bo′ladi?
4. Tekislikning normal vektori deb nimaga aytiladi?
5. Tekislik umumiy tenglamasidan uning normal vektori qanday topiladi?
6. Tekislikning umumiy tenglamasidan normal tenglamasiga qanday o′tiladi?
7. Tekislikning umumiy tenglamasida ba'zi parametrlar nol bo′lganda hosil bo′ladigan tekisliklarni aniqlang.
8. Tekislikning kesmalardagi tenglamasi qanday ko′rinishda bo′ladi?

9. Tekislikning kesmalardagi tenglamasidagi parametrlar qanday ma'noga ega bo′ladi?

18 – M A ' R U Z A

TEKISLIK TENGLAMALARIGA DOIR MASALALAR.

Tayanch iboralar: berilgan nuqtadan o′tuvchi tekisliklar tenglamasi, uchta nuqtadan o′tuvchi tekislik tenglamasi, tekisliklar orasidagi burchak, tekisliklarni perpendikulyarlik va parallellik sharti, nuqtadan tekislikkacha masofa.

M a ' r u z a   r e j a s i :

1. Berilgan nuqtadan o′tuvchi tekisliklar tenglamasi.
2. Berilgan uchta nuqtadan o′tuvchi tekislik tenglamasi.
3. Ikki tekislik orasidagi burchak.
4. Tekisliklarning perpendikulyarlik va parallellik sharti.
5. Uchta tekislikning kesishish nuqtasi.
6. Nuktadan tekislikkacha bo′lgan masofa.

Adabiyotlar:

[1] I bob, §16-19   [3] VI bob, §3-4   [14]. 119-120 betlar.

1. Berilgan nuqtadan o′tuvchi tekisliklar tenglamasi.

Aytaylik tekislik berilgan M_1 (x_1; y_1 ; z_1) nuqtadan utsin va uning tenglamasi ko′rinishini topish talab etilsin. Izlanayotgan tekislikning umumiy tenglamasini qaraymiz:

$$Ax+By+Cz+D=0$$

M_1 nuqta tekislikda yotgani uchun bu tenglamani qanoatlantirishi kerak:

$$Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$$

Hosil bo′lgan bu tenglikni yuqoridagi tenglamadan ayirib, izlangan

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0\ ,$$

ya'ni berilgan M_1 nuqtadan o′tuvchi tekisliklar tenglamasini hosil qilamiz. Undagi koeffitsientlarga turli qiymatlar berib, M_1 nuqtadan o′tuvchi tekisliklar dastasini olamiz.

2. Berilgan uchta nuqtadan o′tuvchi tekislik tenglamasi.

Fazoda uchta nuqta $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, $M_3(x_3,y_3,z_3)$ berilgan bo′lib, ulardan o′tuvchi tekislik tenglamasini topish talab qilingan bo′lsin. Bu nuqtalarga mos keluvchi radius-vektorlarni mos ravishda

$$\vec{r}_1\{x_1;y_1;z_1\},\vec{r}_2\{x_2;y_2;z_2\},\vec{r}_3\{x_3;y_3;z_3\}$$

kabi belgilaymiz.

Agar tekislikning ixtiyoriy M(x,u,z) o’zgaruvchi nuktasiga mos keluvchi radius-vektorni $\vec{r} = \{x; y; z\}$ desak, u holda $\bar{r} - \bar{r}_1, \bar{r}_2 - \bar{r}_1, \bar{r}_3 - \bar{r}_1$ uchta vektor qaralayotgan bitta tekislikda yotadi. Vektorlarning komplanarlik shartiga asosan ularning aralash ko′paytmasi nolga teng bo′ladi:

$$[(\bar{r} - \bar{r}_1) \times (\bar{r}_2 - \bar{r}_1)](\bar{r}_3 - \bar{r}_1) = 0$$

Bu berilgan uchta nuqtadan o′tuvchi tekislikning vektor ko′rinishli tenglamasi bo′ladi. Bu aralash ko′paytmani vektorlarning koordinatalari orqali ifodalab,

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

ya'ni berilgan uchta nuqtadan o′tuvchi tekislikning koordinatalar ko′rinishidagi tenglamasini hosil qilamiz.

Berilgan uchta nuqtadan o′tuvchi tekislik tenglamasini boshqacha, vektorlardan foydalanmasdan ham chiqarish mumkin.

Darxaqiqat, berilgan nuqtalarning biridan, masalan, $M_1(x_1;y_1;z_1)$ nuqtadan o′tgan tekislik tenglamasini yozamiz:

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1) = 0 \qquad (1)$$

Shartga ko′ra bu tenglamani ikkinchi $M_2(x_2;y_2;z_2)$ va uchinchi $M_3(x_3;y_3;z_3)$ nuqtalar ham qanoatlantirishi kerak, ya'ni

$$A(x_2-x_1)+B(y_2-y_1)+C(z_2-z_1) = 0$$
$$A(x_3-x_1)+B(y_3-y_1)+C(z_3-z_1) = 0.$$

Agar oxirgi tenglamalarni C ga bo′lsak va hosil bo′lgan

$$\begin{cases} A(x_2-x_1)/C+B(y_2-y_1)/C+(z_2-z_1) = 0 \\ A(x_3-x_1)/C+B(y_3-y_1)/C+(z_3-z_1) = 0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasidan A/C va B/C nisbatlarini topib, (1) tenglamaga qo′ysak, u holda uch nuqtadan o′tuvchi tekislik tenglamasi hosil bo′ladi.

M i s o l : Berilgan (1;2;3), (-1;0;0) va (3;0;1) nuqtalardan o′tuvchi tekislik tenglamasi tuzilsin.

E ch i sh : Birinchi usulga ko′ra

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$-4(x-1)+6(y-2) -4(z-3) -4(z-3)+4(y-2)+6(x-1)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(x-1)+10(y-2)-8(z-3)=0 \Rightarrow (x-1)+5(y-2)-4(z-3)=0.$$

Bu erda o′xshash hadlarni ixchamlab, izlanayotgan tekislikning tenglamasini hosil qilamiz:

$$x + 5y - 4z + 1 = 0$$

4. Tekisliklar orasidagi burchak. Tekisliklarning parallellik va perpendikulyarlik shartlari.

Ikkita tekislik oʹzlarining

$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,\ \ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

umumiy tenglamalari bilan berilgan boʹlsin. Ular orasidagi ikki yokli α burchakni topish masalasini tekisliklarning mos $\overline{n}_1\{A_1,B_1,C_1\}$ va $\overline{n}_2\{A_2,B_2,C_2\}$ normallari orasidagi burchakni topish masalasiga keltirish mumkin. Fazodagi ikki vektor orasidagi burchak formulasiga asosan

$$\cos\alpha = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \qquad (2)$$

Agar yukorida keltirilgan tekisliklar perpendikulyar boʹlsa, u holda $\overline{n}_1$ va $\overline{n}_2$ vektorlar ham ortogonal boʹladi. Natijada

$$\overline{n}_1\,\overline{n}_2 = 0 \Rightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0 \qquad (3)$$

Bu tekisliklarning perpendikulyarlik shartini ifodalaydi.

Xuddi shunday ravishda tekisliklarning parallellik sharti ularning normallarini kolleniarlik shartidan kelib chiqadi, ya'ni

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \qquad (4)$$

<u>1–masala:</u> Berilgan tekislikka parallel va berilgan nuqtadan oʹtuvchi tekislik tenglamasi tuzilsin.

<u>Echish:</u> Berilgan nuqta $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ va berilgan tekislik tenglamasi

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

boʹlsin. U holda M_1 nuqtadan oʹtuvchi ixtiyoriy tekislik tenglamasi

$$A(x-x_1) + B(y-y_1) + C(z-z_1) = 0$$

koʹrinishga ega boʹladi. Undagi koeffitsientlarni tekisliklarning paralellik shartidan, ya'ni (4) nisbatlar tengligidan topiladi.

Masalan, $A=A_1$, $B=B_1$, $C=C_1$ deb olsak, nisbatlar birga teng boʹladi va izlanayotgan tekislik tenglamasini hosil qilamiz:

$$A_1(x-x_1) + B_1(y-y_1) + C_1(z-z_1) = 0 \qquad (5).$$

<u>2-masala:</u> Berilgan $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ va $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ nuqtalardan oʹtuvchi va tenglamasi $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ boʹlgan tekislikka perpendikulyar tekislik tenglamasi tuzilsin.

<u>E ch i sh :</u> M_1 nuqtadan oʹtuvchi tekislik tenglamasini yozamiz:

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1) = 0 \Rightarrow \frac{A}{C}(x - x_1) + \frac{B}{C}(y - y_1) + (z - z_1) = 0$$

Bu tenglamani M_2 nuqta ham qanoatlantirishi hamda tekisliklarning perpendikulyarlik shartidan ushbu sistemani hosil qilamiz:

$$\begin{cases} A(x_2-x_1)+B(y_2-y_1)+C(z_2-z_1)=0 \\ A_1A+B_1B+C_1C=0 \end{cases}$$

Bu sistema tenglamalarini C ga boʹlib, hosil boʹlgan

$$\frac{A}{C}(x-x_1)+\frac{B}{C}(y-y_1)+(z-z_1)=0$$

$$\frac{A}{C}A_1+\frac{B}{C}B_1+C_1=0$$

sistemadan A/C va B/S nisbatlarni topamiz. Topilgan nisbatlarning qiymatlarini yuqoridagi tenglamaga qo′yib, izlanayotgan tekislik tenglamasini hosil qilamiz.

3-masala: Berilgan uchta tekislikning kesishish nuqtasini toping.

Echish: Tekisliklarning kesishish nuqtasi ularning uchalasiga ham tegishli bo′lgani uchun, uning x,y,z koordinatalarini topish uchun berilgan tekisliklarning umumiy tenglamalarini sistema qilib echamiz:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \end{cases} \qquad (6)$$

4-masala: Berilgan $M_1(x_1; y_1; z_1;)$ nuqtadan umumiy tenglamasi

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

bilan berilgan tekislikkacha bo′lgan d masofani toping.

Echish: Izlangan masofa tekislikning normal tenglamasi orqali quyidagi formula bilan hisoblanishini ko′rsatish mumkin:

$$d=\pm(x_1\cos\alpha+y_1\cos\beta+z_1\cos\gamma-p). \qquad (7)$$

Bundagi $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ yunaltiruvchi kosinuslarni va r parametrni topish uchun berilgan umumiy tenglamani normallashtiruvchi ko′paytuvchiga ko′paytirib, ushbu formulani hosil qilamiz:

$$d=\frac{|A_1x_1+B_1y_1+C_1z_1+D|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}. \qquad (8)$$

M i s o l: N(1;2;3) nuqtadan 2x-2y+z-3=0 tenglama bilan ifodalanuvchi tekislikkacha bo′lgan masofani toping.

Echish: (8) formulaga asosan izlangan masofani topamiz:

$$d=\frac{|2\cdot1+(-2)\cdot2+1\cdot3+(-3)|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{2}{3}.$$

O′z-o′zini nazorat etish savollari:

1. Berilgan nuqtadan o′tuvchi tekisliklar tenglamasini yozing.
2. Berilgan uchta nuqtadan o′tuvchi tekislik tenglamasi qanday topiladi?
3. Ikki tekislik orasidagi burchak qanday topiladi?
4. Ikki tekislikning perpendikulyarlik sharti nimadan iborat?
5. Ikki tekislikning parallellik sharti nimadan iborat?
6. Uchta tekislikning kesishish nuqtasi qanday topiladi?
7. Nuqtadan tekislikkacha bo′lgan masofa qanday topiladi?

19-MA'RUZA

FAZODAGI TO′GRI ChIZIK TENGLAMALARI.

Tayanch iboralar: yo′naltiruvchi vektor, boshlang′ich nuqta, to′g′ri chiziqning vektor tenglamasi, kanonik tenglamasi, parametrik tenglamasi, umumiy tenglamasi.

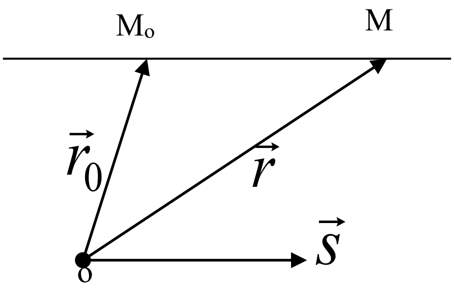
M a ' r u z a   r e j a s i :

1. Fazodagi to′g′ri chiziqning yo′naltiruvchi vektori va boshlang′ich nuqtasi.
2. Fazodagi to′g′ri chiziqning vektor tenglamasi.
3. Fazodagi to′g′ri chiziqning parametrik va kanonik tenglamasi.
4. Fazodagi to′g′ri chiziqning umumiy tenglamasi.

Adabiyotlar:

[1] I bob, §17-18   [3] VI bob, §5   [14]. 120-121 betlar.

Fazodagi to′g′ri chiziqqa parallel bo′lgan har qanday s vektorga shu to′g′ri chiziqning *yo′naltiruvchi vektori* deyiladi. Aytaylik $M_0(x_0;y_0;z_0)$ to′g′ri chiziqning ma'lum bir nuqtasi, M(x;y;z) esa to′g′ri chiziqning ixtiyoriy nuqtasi bo′lsin. M_0 shu to′g′ri chiziqning *boshlang′ich nuqtasi* deyiladi. Bu nuqtalarning radius-vektorlari $\bar{r}_0(x_0, y_0, z_0)$, $\bar{r}(x, y, z)$ va M_0M $(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$ vektorni olamiz. Unda, quyidagi chizmaga asosan, $\bar{r} = \bar{r}_0 + \overline{M_0M}$ tenglikka ishonch hosil qilish mumkin:



Agar s(m,n,p) shu to′g′ri chiziqning yo′naltiruvchi vektori bo′lsa, u holda M_0M va s(m;n;p) vektorlar kollinear, ya'ni $M_0M = t\cdot s$, bunda t – o′zgarmas son. Natijada ushbu tenglamani hosil qilamiz:

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + t\,s \qquad (1)$$

Bu fazodagi to′g′ri chiziqning <u>*vektor ko'rinishidagi tenglamasi*</u> deyiladi. Agar (1) vektor tenglamani koordinatalarda ifodalasak, u holda

$$(x;\ y;\ z) = (x_0;\ y_0;\ z_0) + t\,(m;\ n;\ p) \Rightarrow (x;\ y;\ z) = (x_0+tm;\ y_0+tn;\ z_0+tp) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=x_0+tm\,,\quad y=y_0+tn\,,\quad z=z_0+tp \qquad (2)$$

Hosil bo′lgan tenglamalarda t parametr o′zgarishi bilan x; y; z o′zgaruvchilar to′g′ri chiziqning turli nuqtalarini ifodalaydi, ya'ni (2) to′g′ri chiziqni to′lik aniqlaydi. Shu sababli (2) to′gri chiziqning *parametrik tenglamasi* deyiladi. Agarda (2) dan t ni topsak, u holda

$$t = \frac{x-x_0}{m}, t = \frac{y-y_0}{n}, t = \frac{z-z_0}{p} \Rightarrow \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p} \qquad (3)$$

Bu to′gri chiziqning *kanonik tenglamasi* deyiladi. Unda maxrajdagi m,n,p conlari yo′naltiruvchi vektor koordinatalari, suratdagi x_0,y_0,z_0 sonlari esa boshlang′ich nuqtaning koordinatalari bo′lishini ta'kidlab o′tamiz.

Bu tenglamani s va M_0M vektorlarning kollinearlik shartidan ham bevosita olishimiz mumkin edi.

To′g′ri chiziqning ushbu kanonik tenglamasi berilgan bo′lsin:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}\ .$$

Bunda $p \neq 0$ deb olamiz. Bu tenglamani ikkiga ajratib,

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{z-z_0}{p}, \qquad \frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

tenglamalar sistemasini hosil qilamiz va bu sistema ham to′g′ri chiziqni ifodalaydi. Ammo ularning har biri tekislik tenglamasidir. Birinchi tenglama OY o′qiga parallel, ikkinchi tenglama esa OX o′qiga parallel tekislikni ifodalaydi. Bu tekisliklarning kesishmasida (3) kanonik tenglamasi bilan berilgan to′g′ri chiziq hosil bo′lmoqda.

Umuman olganda, fazoda to′g′ri chiziqning nuqtalari ikkita tekislik tenglamalaridan tuzilgan quyidagi sistemaning echimlaridan iborat bo′ladi:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\ . \end{cases}$$

Bu tenglamalar sistemasi fazodagi to′g′ri chiziqning umumiy tenglamasi deyiladi. Bu to′g′ri chiziqning yo′naltiruvchi vektori s tekisliklarning

$$n_1=(A_1;\ B_1;\ C_1), \qquad n_2=(A_2;\ B_2;\ C_2)$$

normallariga perpendikulyar bo′ladi. Shuning uchun ham to′g′ri chiziqqa parallel n_1xn_2 vektorni uning yo′naltiruvchi vektori sifatida olish mumkin.

<u>*1-misol:*</u> Fazodagi to′g′ri chiziqning umumiy tenglamasini kanonik ko′rinishga keltiring.

$$2x-3y+z-5=0$$

$$3x+y-2z-4=0$$

<u>*Echish:*</u> Izlanayotgan to′g′ri chiziqda yotuvchi biror M_0 nuqtaning koordinatalarini aniqlaymiz. Tenglamalar sistemasida noma'lumlar 3 ta, lekin tenglamalar soni esa ikkita. Shuning uchun bitta noma'lumni erkin qilib olamiz. Masalan, z=1 deb olamiz. Natijada berilgan sistema

$$\begin{cases} 2x-3y=4 \\ 3x+y=6 \end{cases}$$

ko′rinishni oladi. Bu sistemadan x=2, y=0 ekanligini topamiz. Demak, $M_0(2;0;1)$ nuqta to′g′ri chiziqda yotadi. Yo′naltiruvchi vektor esa tekisliklarning n_1 va n_2 normallari vektorial ko′paytmasi kabi topiladi:

$$\vec{n}_1 x \vec{n}_2=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}=-7i+7j+11k.$$

Demak, yo′naltiruvchi vektor s(-7;7;11).Unda to′g′ri chiziqning kanonik tenglamasi quyidagicha bo′ladi:

$$\frac{x-2}{-7}=\frac{y-0}{7}=\frac{z-1}{11}$$

2-misol. To′g′ri chiziqning umumiy tenglamasini parametrik va kanonik ko′rinishga keltiring:

$$\begin{cases} 2x+y-z+1=0 \\ 3x-y+2z-3=0 \end{cases}$$

Echish: Tenglamalarni xar birini x va y ga nisbatan echamiz:

$$\begin{cases} 2x+y=z-1 \\ 3x-y=3-2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x=2-z \\ 5y=7z-9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{5}z+\frac{2}{5} \\ y=\frac{7}{5}z-\frac{9}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=\frac{x-2/5}{-1/5} \\ z=\frac{y+9/5}{7/5} \end{cases}$$

Natijada to′g′ri chiziqning ushbu kanonik tenglamasiga kelamiz:

$$\frac{x-2/5}{-1/5}=\frac{y+9/5}{7/5}=\frac{z}{1}$$

Bu erdan parametrik tenglamalarni olish qiyin emas. Darxaqiqat, xar bir nisbatni t ga tenglashtirsak, u holda

$$x=\frac{-t}{5}+\frac{2}{5}; \quad y=\frac{7}{5}t-\frac{9}{5}; \quad z=t$$

izlangan parametrik tenglama bo′ladi.

O′z – o′zini nazorat etish savollari:

1. Fazodagi to′g′ri chiziqning yo′naltiruvchi vektori deb nimaga aytiladi?
2. Fazodagi to′g′ri chiziqning boshlang′ich nuqtasi deb nimaga aytiladi?
3. Fazodagi to′g′ri chiziqning vektor tenglamasini yozing.
4. Fazodagi to′g′ri chiziqning parametrik tenglamasi qanday ko′rinishda bo′ladi?
5. Fazodagi to′g′ri chiziqning kanonik tenglamasini yozing va undagi parametrlarning ma'nosini ko′rsating.
6. Fazodagi to′g′ri chiziqning umumiy tenglamasi qanday ko′rinishda bo′ladi?
7. To′g′ri chiziqning umumiy tenglamasidan kanonik va parametrik tenglamasiga qanday o′tiladi?

20-MA'RUZA

FAZODAGI TUGRI CHIZIKLARGA DOIR MASALALAR.

Tayanch iboralar: fazodagi ikki to′g′ri chiziq orasidagi burchak, to′g′ri chiziqlarning parallellik va perpendikulyarlik sharti, berilgan nuqtadan o′tuvchi to′g′ri chiziqlar tenglamasi, berilgan ikki nuqtadan o′tuvchi to′g′ri chiziq tenglamasi, to′g′ri chiziq va tekislik orasidagi burchak, to′g′ri chiziq va tekislikning parallellik va perpendikulyarlik sharti, ikki to′g′ri chiziqni bir tekislikda yotish sharti.

Ma'ruza rejasi:

1. Fazodagi ikki to′gri chiziq orasidagi burchak.
2. To′g′ri chiziqlarning perpendikulyarlik va parallellik shartlari.
3. Berilgan nuqtadan o′tuvchi to′g′ri chiziqlar tenglamasi.
4. Berilgan ikki nuqtadan o′tuvchi to′g′ri chiziq tenglamasi.
5. To′g′ri chiziq va tekislik orasidagi burchak.
6. To′g′ri chiziq va tekislikning perpendikulyarlik va parallellik shartlari.
7. Berilgan nuqtadan o′tuvchi va berilgan tekislikka parallel to′g′ri chiziqlar dastasi tenglamasi.
8. Ikki to′g′ri chiziqning bir tekislikda yotish sharti.

Adabiyotlar:

[1] I bob, §19 [14]. 121-122 betlar.

1. Ikki to′g′ri chiziq orasidagi burchak.

Fazoda ikkita to′g′ri chiziq o′zlarining kanonik tenglamalari bilan berilgan bo′lsin:

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1} \text{ ва } \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$$

Ular orasidagi α burchakni topish masalasini ko′ramiz. Bu masalani ularning yo′naltiruvchi vektorlari orasidagi burchakni topish masalasiga keltirish mumkin. Yo′naltiruvchi $\vec{s}_1=\{m_1;n_1;p_1\},\vec{s}_2=\{m_2;n_2;p_2\}$ vektorlar orasidagi burchak quyidagi formula yordamida topiladi:

$$\cos\alpha=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}} \qquad (1)$$

Misol: Kanonik tenglamalari bilan berilgan quyidagi to′g′ri chiziqlar orasidagi burchak topilsin:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-4}=\frac{z+3}{1}, \qquad \frac{x}{2}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z}{-1}$$

E ch i sh : (1) formulaga asosan

$$\cos\alpha=\frac{1\cdot 2+(-4)(-2)+1\cdot(-1)}{\sqrt{1+16+1}\sqrt{4+4+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Bundan $\alpha = 45^0$ ekanligini ko′ramiz.

2. To′g′ri chiziqlarning parallellik va perpendikulyarlik shartlari.

Agar to′g′ri chiziqlar perpendikulyar bo′lsa, u holda (1) formulada $\cos\alpha=0$ bo′ladi. Bundan esa ikki to′g′ri chizikning perpendikulyarlik sharti kelib chiqadi:

$$m_1m_2 + n_1 n_2 + p_1p_2 = 0$$

Agar to′g′ri chiziqlar parallel bo′lsa, u holda ularning yo′naltiruvchi vektorlari ham o′zaro parallel bo′ladi va bundan ikki to′gri chiziqning parallellik sharti kelib chiqadi:

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}.$$

3.Berilgan nuqtadan o′tuvchi va berilgan to′gri chiziqqa parallel bo′lgan to′gri chiziq tenglamasi.

Aytaylik fazoda M(a;$в$;c) nuqta va kanonik tenglamasi

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$$

bo′lgan to′g′ri chiziq berilgan bo′lsin. Berilgan M nuqtadan o′tuvchi to′g′ri chiziq tenglamasini

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-в}{n}=\frac{z-c}{p}$$

kabi ifodalash mumkin. To′g′ri chiziqlarning parallellik shartiga asosan

$$\frac{m}{m_1}=\frac{n}{n_1}=\frac{p}{p_1}$$

munosabat o′rinli bo′ladi. Bundan, $m=m_1$, $n=n_1$ ва $p=p_1$ deb olish mumkinligini ko′ramiz. Demak izlanayotgan to′g′ri chiziq tenglamasi

$$\frac{x-a}{m_1}=\frac{y-в}{n_1}=\frac{z-c}{p_1}$$

ko′rinishda bo′ladi.

4. Berilgan ikki nuqtadan o′tuvchi to′g′ri chiziq tenglamasi.

Aytaylik fazoning ikkita nuqtasi o′zining koordinatalari bilan berilgan bo′lsin. Ular $M_1(x_1;y_1;z_1)$ va $M_2(x_2;y_2;z_2)$ bo′lsin. Shu nuqalardan o′tuvchi to′g′ri chiziq tenglamasini topamiz.

Izlanayotgan to′g′ri chiziqning kanonik tenglamasini tuzish uchun unda yotuvchi biror nuqtaning koordinatalarini va yo′naltiruvchi vektorini bilish kifoya. Shunday nuqta sifatida berilgan nuqtalardan istalganini, aytaylik M_1 ni olamiz. Yo′naltiruvchi vektor sifatida esa unda yotuvchi $\mathbf{M_1M_2}(x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1)$ vektorni tanlaymiz. Natijada berilgan ikki nuqtadan o′tuvchi to′g′ri chiziq tenglamasini hosil qilamiz:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

5. To′g′ri chiziq va tekislik orasidagi burchak.

Aytaylik, to′g′ri chiziq va tekislik mos ravishda o′zlarining kanonik va umumiy tenglamalari bilan berilgan bo′lsin:

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-в}{n}=\frac{z-c}{p},\quad Ax+By+Cz+D=0.$$

Ma'lumki tekislik va uni kesuvchi to′g′ri chiziq orasidagi burchakni aniqlash uchun shu tug′ri chiziqni tekislikka proektsiyalab, hosil bo′lgan chiziqli burchak topiladi. Uni α orqali belgilaylik. Shu burchakning sinusini to′g′ri chiziqning **s**(m,n,p) yo′naltiruvchi vektori va tekislikning **n**(A,B,C) normal vektori orqali topamiz:

$$\sin\alpha=\cos(90^0-\alpha)=\frac{|Am+Bn+Cp\ |}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$$

6. To′g′ri chiziq va tekislikning parallellik va perpendikulyarlik shartlari

Aytaylik quyidagi

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-в}{n}=\frac{z-c}{p},\quad Ax+By+Cz+D=0$$

tenglamalari bilan berilgan to′g′ri chiziq va tekislik o′zaro parallel bo′lsinlar. U holda to′g′ri chiziqning yo′naltiruvchi vektori **s**(m,n,p) va tekislik normalin **n**(A,B,C) o′zaro perpendikulyar bo′ladilar. Bundan to′g′ri chiziq va tekislikning parallellik sharti quyidagicha ekanligi kelib chiqadi:

$$Am + Bn + Cp = 0$$

Bu tenglikni sin α=0 shartdan ham keltirib chiqarish mumkin edi.

Endi berilgan to′g′ri chiziq va tekislikning perpendikulyarlik shartini keltirib chiqaraylik. To′g′ri chiziqning yo′naltiruvchi vektori va tekislik normali kollinear vektorlar ekanligidan, ikki vektorning kollinearlik shartiga asosan

$$\frac{m}{A}=\frac{n}{B}=\frac{p}{C} \quad \text{yoki} \quad \frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$$

bo′ladi. Bu to′g′ri chiziq va tekislikning perpendikulyarlik shartini ifodalaydi.

7. Berilgan nuqtadan o′tuvchi va berilgan tekislikka parallel bo′lgan to′g′ri chiziqlar dastasining tenglamasi.

Berilgan M(a;в;c) nuqtadan o′tuvchi to′g′ri chiziqlarning kanonik tenglamasini yozamiz:

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-в}{n}=\frac{z-c}{p}$$

Bu to′g′ri chiziqqa parallel bo′lgan tekislik tenglamasi Ax+By+Cz+D=0 bo′lsin. To′g′ri chiziq va tekislikning parallellik shartidan Am+Bn+Cp=0 munosabatni olamiz. Nisbatlarning tengligidan esa m=x-a, n=y–в, p=z–c deb olishimiz mumkin. U holda izlanayotgan to′g′ri chiziqlar dastasining quyidagi tenglamasini hosil qilamiz:

$$A(x-a)+B(y-в)+C(z-c)=0.$$

8.Ikki to′g′ri chiziqning bir tekislikka yotish sharti.

Ikkita to′g′ri chiziq uzlarining kanonik tenglamalari bilan berilgan bo′lsin:

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}, \qquad \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$$

Ularning yo′naltiruvchi vektorlarini mos ravishda $\mathbf{s_1}(m_1;n_1;p_1)$ va $\mathbf{s_2}(m_2;n_2;p_2)$ kabi belgilaymiz. To′g′ri chiziqlarning $M_1(x_1,y_1,z_1)$ va $M_2(x_2,y_2,z_2)$ boshlang′ich nuqtalarining radius-vektorlarini $\mathbf{r_1}(x_1;y_1;z_1)$ va $\mathbf{r_2}(x_2;y_2;z_2)$ kabi belgilaymiz.

Unda bu nuqtalarning biridan ikkinchisiga yo′nalgan **M_1M_2** vektor **r_2 - r_1** bo′ladi. Vektorlarni ayirish qoidasiga asosan **r_2 -r_1**=(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1) tenglikni yoza olamiz. Geometrik mulohazalarga asosan berilgan ikkita to′g′ri chiziqning bitta tekislikda yotishi uchun **s_1, s_2** va **r_2 - r_1** vektorlarning komplanar bo′lishi zarur va etarlidir. Bundan aralash ko′paytma (**r_2 - r_1**) **s_1 s_2** =0 yoki

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Bu ikki to′g′ri chiziqning bir tekislikda yotish shartini ifodalaydi.

O′z-o′zini nazorat etish savollari:

1. Fazodagi ikki to′g′ri chiziq orasidagi burchak qanday topiladi?
2. Ikki to′g′ri chiziqning perpendikulyarlik (parallellik) sharti nimadan iborat?
3. Berilgan ikki nuqtadan o′tuvchi to′g′ri chiziq tenglamasi qanday ko′rinishda bo′ladi?
4. To′g′ri chiziq va tekislik orasidagi burchak qanday topiladi?
5. To′g′ri chiziq va tekislikning perpendikulyarlik (parallellik) sharti nimadan iborat?
6. Berilgan nuqtadan o′tuvchi va berilgan tekislikka parallel to′g′ri chiziqlar tenglamasini yozing.
7. Qaysi shartda ikki to′g′ri chiziq bir tekislikda yotadi?

21 - MA’RUZA . FUNKTSIYA VA U BILAN BOGLIQ BO′LGAN TUSHUNChALAR.

Tayanch iboralar: o′zgarmas miqdor, o′zgaruvchi miqdor, funktsiya, aniqlanish sohasi, o′zgarish sohasi, funktsiya grafigi, funktsiyaning berilish usullari, o′suvchi va kamayuvchi funktsiya, juft va toq funktsiya, davriy funktsiya, murakkab funktsiya, teskari funktsiya, asosiy elementar funktsiyalar, elementar funktsiyalar.

M a ' r u z a   r e j a s i :

1. O′zgarmas va o′zgaruvchi mikdorlar.
2. Funktsiya ta'rifi.
3. Funktsiyaning aniqlanish va o′zgarish sohasi.
4. Funktsiya grafigi.
5. Funktsiyani berilish usullari.
6. Funktsiya turlari.
7. Murakkab va teskari funktsiya.
8. Asosiy elementar va elementar funktsiyalar.

Adabiyotlar:

[1] II bob, §1-2   [2] I bob, §6-8

Atrofimizdagi turli jarayonlarni matematik usullarda tadqiqot qilayotganimizda o′zgarmas va o′zgaruvchi miqdorlarga duch kelamiz.

T A ' R I F: Faqat bitta sonli qiymat qabul qiladigan kattaliklar o′zgarmas miqdorlar deyiladi.

Masalan, yorug’lik tezligi **c**, erkin tushish tezlanishi **g**, aylana uzunligini uning diametriga nisbati π, izotermik jarayonlarda harorat $\mathbf{t^0}$ o′zgarmas miqdorlardir.

T A ' R I F : Turli sonli qiymatlar qabul qila oladigan kattaliklar o′zgaruvchi miqdorlar deyiladi.

Masalan, tekis xarakatda vaqt **t** va bosib o′tilgan masofa **s** o′zgaruvchi miqdorlardir.

Biror jarayonni organayotganimizda bir nechta o′garuvchi miqdorlar o′tasidagi o′zaro bog’lanishlarga duch kelamiz.

Masalan, tekis harakatda tezlikni **v**, vaqtni **t** va bosib o′tilgan yo′lni **s** desak, u holda bu o′zgaruvchilar o′zaro **s=v·t** ko′rinishda bog’lanadi. Bunday bog’lanishlarni juda ko′p keltirish mumkin va shu sababli ularni atroflicha o′rganish maqsadida funktsiya tushunchasi kiritiladi.

T A ' R I F : Agarda x o′zgaruvchini har bir mumkin bo′lgan son qiymatiga y o′zgaruvchining yagona bir son qiymati mos qo’yilgan bo′lsa, y o′zgaruvchi x o′zgaruvchining funktsiyasi deyiladi.

Biror y o′zgaruvchi x o′zgaruvchining funktsiyasi ekanligi $y=f(x)$ kabi belgilanadi (f harfi o′rniga F, h, g, φ kabi boshqa xarflarni qam qo′llash mumkin).

Bu erda x erkli o′zgaruvchi yoki argument, y esa erksiz o′zgaruvchi yoki funktsiya deb ataladi.

T A ' R I F : $y=f(x)$ funktsiyada x argumentning y funktsiya ma'noga ega bo′ladigan barcha son qiymatlari to′plami shu funktsiyaning aniqlanish sohasi deyiladi va **D{f}** kabi belgilanadi. Funktsiya qabul qiladigan barcha qiymatlar to′plami esa shu funktsiyaning o′zgarish sohasi deyiladi va **E{f}** kabi belgilanadi.

Masalan, $f(x)=\sin\sqrt{x}$ funktsiya uchun $D\{f\}=[0,\infty)$, $E\{f\}=[-1,1]$ bo′ladi.

T A' R I F : XOY tekislikdagi $(x, f(x))$, $x\in D\{f\}$, koordinatali nuqtalarning geometrik o′rni $y=f(x)$ funktsiyaning grafigi deyiladi.

Masalan, $y=x^2$ funktsiya grafigi paraboladan, $y=\cos x$ funktsiya grafigi sinusoidadan, $y=2x+5$ funktsiya grafigi esa to′g'ri chiziqdan iboratdir.

Funktsiyalar analitik ko′rinishda, ya'ni formulalar orqali, jadval yoki grafik korinishda berilishi mumkin. Masalan, aylana radiusi x va uning yuzasi y orasidagi bog'lanish funktsiyasi $y=\pi x^2$ formula orqali analitik ko′rinishda, Bradisning matematik jadvallar kitobchasida funktsiyalar jadval ko′rinishida, yurak ishlashini ifodalovchi funktsiya kardiogramma orqali grafik ko′rinishda ifodalanadi.

T A' R I F : $y=f(x)$ funktsiya biror $D\subset D\{f\}$ sohada o′suvchi (kamayuvchi) deyiladi, agarda $\forall x_1, x_2\in D$ uchun $x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$ $(f(x_1)>f(x_2))$ shart bajarilsa.

Masalan, $y=x^2$ funktsiya $-\infty;0)$ sohada kamayuvchi, $(0,\infty)$ sohada esa o′suvchi bo′ladi.

T A' R I F : $y=f(x)$ funktsiya nol nuqtaga nisbatan simmetrik bo′lgan D{f} aniqlanish sohasida juft (tok) deyiladi, agarda $\forall x\in D\{f\}$ uchun $(-x\in D\{f\})$ $f(-x)=f(x)$ $(f(-x)=-f(x))$ shart bajarilsa.

Masalan, $f(x)=x^2$ –juft funktsiya, $f(x)=x^3$ esa toq funktsiya bo′ladi. Lekin, $f(x)=x^2-3x+1$, $f(x)=2x-3$ funktsiyalar na juft va na toqdir.

T A' R I F : $y=f(x)$ funktsiya davriy deb ataladi, agarda shunday $T>0$ son mavjud bo'lsaki, $\forall x\in D\{f\}$ uchun $f(x+T)=f(x)$ shart bajarilsa. Bu shartni qanoatlantiruvchi eng kichik T soni shu funktsiyaning davri deyiladi.

Masalan, $y=\sin x$ davri $T=2\pi$, $y=\{x\}$ (x ning kasr qismi) davri $T=1$ bo′lgan davriy funktsiyalardir. $y=x^2$ funktsiya esa davriy emas.

T A' R I F : $y=f(x)$, $y=\varphi(x)$ funktsiyalar berilgan bo′lib, $x\in D\{\varphi\}$ bo′lganda $E\{\varphi\}\subset D\{f\}$ shart bajarilsin. Bu holda, $F(x)=f(\varphi(x))$ funktsiya ma'noga ega bo′ladi va u murakkab funktsiya deb ataladi. Bu erda φ ichki, f esa tashqi funktsiya deyiladi.

Masalan, $y=\sin x^2$ funktsiya uchun $\varphi(x)=x^2$ ichki, $f(\varphi)=\sin\varphi$ esa tashqi funktsiya bo′ladi. $y=\sin^2 x$ murakkab funktsiyada esa $\varphi(x)=\sin x$ ichki, $f(\varphi)=\varphi^2$ tashqi funktsiya bo′ladi.

T A' R I F : $y=f(x)$ funktsiyadan x argumentni y funktsiya orqali ifodalashdan hosil bo′lgan $x=\varphi(y)$ ko′rinishdagi φ funktsiya f funktsiyaga teskari funktsiya deb ataladi va f^{-1} kabi belgilanadi.

Odatda argument x, funktsiya esa y orqali belgilanganligi uchun, teskari funktsiya $y=\varphi(x)$ yoki $y=f^{-1}(x)$ ko′rinishda yoziladi. Teskari funktsiyani $f(y)=x$ tenglama echimi kabi topishimiz mumkin.

Masalan, $f(x)=3x-1$ bo′lsa, $3y-1=x$ tenglamadan bu funktsiya uchun teskari funktsiya $f^{-1}(x)=(x+1)/3$ ekanligini aniqlaymiz.

Shuni ta'kidlab o′tish kerakki, bunda $D\{f\}=E\{f^{-1}\}$, $E\{f^{-1}\}=D\{f\}$ munosabatlar o′rinli bo′ladi.

Maktab matematikasidan bizga ma'lum bo′lgan quyidagi funktsiyalarni eslatib o′tamiz:

1. Darajali funktsiya $y=x^{\alpha}$, $\alpha \in R$. Masalan, $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$, $y= 1/x$.
2. Ko′rsatkichli funktsiya. $y=a^x$ ($a>0, a\neq 1$). Masalan, $y=3^x$, $y=(1/10)^x$
3. Logarifmik funktsiya $y=\log_a x$, ($a>0, a\neq 1$). Masalan, $y=\log_2 x$, $y=\lg x$, $y=\ln x$.
4. Trigonometrik funktsiyalar $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\mathrm{tg}x$, $y=\mathrm{ctg}x$.
5. Teskari trigonometrik funktsiyalar $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\mathrm{arctg}x$, $y=\mathrm{arcctg}x$.

Bu funktsiyalar asosiy elementar funktsiyalar deb ataladi.

Chekli sondagi asosiy elementar funktsiyalar ustida arifmetik amallar va murakkab funktsiya hosil qilish orqali tuzilgan funktsiyalar elementar funktsiyalar deyiladi. Masalan , $2\ln\sin x+x^2/5$ elementar funktsiya bo′ladi.

$y=\{x\}$, $y=[x]$ (x ning butun qismi), $y=|x|$ kabi funktsiyalar elementar bo′lmagan funktsiyalarga misol bo′ladi.

O′z-o′zini nazorat etish savollari:

1. Qanday miqdorlar o′zgarmas deyiladi? Misollar keltiring.
2. Qanday miqdorlar o′zgaruvchi deyiladi? Misollar keltiring.
3. Funktsiya qanday ta'riflanadi?
4. Funktsiyaning aniqlanish sohasi deb nimaga aytiladi?
5. Funktsiyaning o′zgarish (qiymatlar) sohasi qanday ta'riflanadi?
6. Funktsiya grafigi deb nimaga aytiladi?
7. Funktsiya qanday usullarda berilishi mumkin?
8. Qaysi shartda funktsiya o′suvchi (kamayuvchi) deyiladi?
9. Qaysi shartda funktsiya juft (toq) deb ataladi?
10. Davriy funktsiya deb qanday funktsiyaga aytiladi?
11. Murakkab funktsiya qanday ta'riflanadi?
12. Teskari funktsiya qanday aniqlanadi?
13. Qaysi funktsiyalar asosiy elementar funktsiyalar deyiladi?
14. Elementar funktsiyalar deb qanday funktsiyalarga aytiladi?

22-MA'RUZA

FUNKTSIYA LIMITI VA UNING XOSSALARI.

Tayanch iboralar: funktsiyaning chekli limiti, funksiyaning cheksiz limiti, limitning yagonaligi, chap va o’ng limit, limitning mavjudlik sharti, cheksiz kichik miqdor, cheksiz kichik miqdorlarning xossalari, algebraik yig’indining limiti, ko′paytmaning limiti, bo′linmaning limiti, ajoyib limitlar.

M a ' r u z a   r e j a s i :

1. Funktsiya limiti.
2. Chap va o’ng limitlar.
3. Limitning mavjudlik sharti.
4. Limitning yagonaligi.
5. Cheksiz kichik miqdorlar va ularning xossalari.
6. Limit mavjudligining zaruriy va etarli sharti.
7. Limitlarning asosiy xossalari.
8. Ajoyib limitlar.

Adabiyotlar:

[1] II bob, §5-10 [2] II bob, §1-7

Oliy matematikaning muhim tushunchalaridan biri limit bo′lib, uning yordamida egri chiziqqa urinma, egri chiziq yoyi uzunligi, funktsiya uzluksizligi va hosilasi, aniq integral kabi juda ko′p tushunchalar kiritiladi.

T A ' R I F : Agarda oldindan berilgan ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son uchun unga bog’liq shunday $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ son topilsaki, $0<|x-a|<\delta$ shartni qanoatlantiruvchi har qanday $x\in D\{f\}$ uchun $|f(x)-A|<\varepsilon$ tengsizlik o′rinli bo′lsa, A soni $y=f(x)$ funktsiyaning $x\to a$ bo′lgandagi limiti deb ataladi va bu tasdiq

$$\lim_{x\to a} f(x)=A$$

ko′rinishda yoziladi.

Misol sifatida, $\lim\limits_{x\to 3} x^2=9$ ekanligini ko′rsatamiz. Bu erda $x\to 3$ bo′lgani uchun $2<x<4$, ya'ni $|x+3|<7$ deb olishimiz mumkin. Bu holda ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun

$$|f(x)-A|=|x^2-9|=|x+3||x-3|<7|x-3|<\varepsilon$$

tengsizlik o′rinli bo′lishi uchun $|x-3|<\varepsilon/7$, ya'ni $\delta(\varepsilon)=\varepsilon/7$ deb olish mumkin. Demak, limit ta'rifiga asosan, $\lim\limits_{x\to 3} x^2=9$ tenglik o′rinli bo′ladi.

T A' R I F : y=f(x) funktsiya $x\to a$ bo′lganda cheksiz (+∞yoki -∞) limitga ega deyiladi, agarda har qanday katta N>0 son uchun shunday δ=δ(N)>0 con mavjud bo′lsaki, $0<|x-a|<\delta$ shartni qanoatlantiruvchi har qanday $x\in D\{f\}$ uchun $|f(x)|>N$ tengsizlik o′rinli bo′lsa.

Ta'rifdagi tasdiq $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$ ko′rinishda yoziladi.

Masalan, $\lim\limits_{x\to 2} (x^3-8)^{-2}=\infty$ ekanligini ko′rsatish mumkin.

T A' R I F : A soni y=f(x) funktsiyaning $x\to\pm\infty$ bo′lgandagi limiti deyiladi, agarda har qanday kichik ε>0 con uchun shunday katta M=M(ε)>0 son mavjud bo′lsaki, $|x|>M$ shartni qanoatlantiruvchi barcha $x\in D\{f\}$ uchun $|f(x)-A|<\varepsilon$ tengsizlik o′rinli bo′lsa.

Bu tasdiq $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=A$ ko′rinishda yoziladi.

Masalan, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{x}=1$ ekanligini ko′rsatamiz. Ixtiyoriy kichik ε>0 uchun $|f(x)-A|=|\frac{x+1}{x}-1|=|1/x|<\varepsilon$ tengsizlik bajarilishi uchun, $|x|>\varepsilon^{-1}$, ya'ni $M(\varepsilon)=\varepsilon^{-1}$ deb olishimiz mumkin. Bu erdan, ta'rifga asosan, yuqoridagi tenglik o′rinli ekanligi kelib chiqadi.

T A ' R I F : y=f(x) funktsiyaning $x\to\pm\infty$ bo′lgandagi limiti cheksiz deyiladi, agarda har qanday katta N>0 coni uchun shunday M=M(N) son mavjud bo′lsaki, $|x|>M$ shartni qanoatlantiruvchi barcha $x\in D\{f\}$ uchun $|f(x)|>N$ tengsizlik o′rinli bo′lsa.

Ta'rifdagi tasdik $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ ko′rinishda yoziladi.

Masalan, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^3=\pm\infty$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^2=+\infty$ ekanligini ta'rif bo′yicha isbotlash

mumkin. Ba'zi hollarda funktsiyaning chap va o’ng limiti tushunchalari kerak

bo′ladi.

T A ' R I F : y=f(x) funktsiyaning argumenti x qandaydir a soniga faqat chap ($x<a$) yoki o′ng ($x>a$) tomondan yaqinlashib borganda funktsiya limiti biror A_1 yoki A_2 sonidan iborat bo′lsa, y funktsiyaning a nuqtadagi chap yoki o’ng limiti deb ataladi va $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=A_1$ yoki $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=A_2$ ko′rinishda yoziladi.

Masalan , sgn$x$=$\begin{cases} 1, x>0 \\ 0, x=0 \\ -1, x<0 \end{cases}$ funktsiya uchun

$$A_1=\lim_{x\to 0-0} \text{sgn}x=-1,\ A_2=\lim_{x\to 0+0} \text{sgn}x=1.$$

Agarda biror a nuqtada y=f(x) funktsiya A limitga ega, ya'ni $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ bo′lsa, u holda $A_1=A_2=A$ tenglik o′rinli bo′lishi chap va o'ng limit ta'rifidan kelib chiqadi. Aksincha, agar chap va o'ng limitlar teng bo′lsa, u holda limitning ta'rifidan funktsiya limiti mavjudligi kelib chiqadi.

Shuni ta'kidlab o′tish kerakki, funktsiya limiti har doim ham mavjud bo′lavermaydi. Masalan, y=sgn$x$ funktsiya $x\to 0$ bo′lganda limitga ega emas, chunki bu holda $A_1=-1$ va $A_2=1$ bo′lib, $A_1\neq A_2$. Ammo bu funktsiya $x\to a$, $a\neq 0$, bo′lganda 1 yoki –1 limitga egadir.

TEOREMA: Agar $x\to a$ bo′lganda funktsiya limiti mavjud bo′lsa, u holda bu limit yagona bo′ladi.

I s b o t: Teskarisini faraz qilaylik, ya'ni funktsiya $x\to a$ bo′lganda ikkita A va B limitlarga ega bo′lsin. Limit ta'rifiga ko′ra, har qanday kichik $\varepsilon>0$ son uchun shunday $\delta_1=\delta_1(\varepsilon)>0$ va $\delta_2=\delta_2(\varepsilon)>0$ sonlar topiladiki, $0<|x-a|<\delta_1$ va $0<|x-a|<\delta_2$ shartlarda $|f(x)-A|<\varepsilon/2$ va $|f(x)-B|<\varepsilon/2$ tengsizliklar bajariladi. Agar $\delta=\min(\delta_1, \delta_2)$ deb olsak $0<|x-a|<\delta$ bo′lganda

$$| A-B|=|A - f(x)+ f(x)+B|\leq |f(x)-A|+ |f(x)-B|<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$$

tengsizlik o′rinli bo′ladi. Bu erda ε ixtiyoriy kichik son bo′lganidan va A, B sonlar x ga bog'lik emasligidan $|A-B|=0$, ya'ni A=B ekanligi kelib chiqadi. Demak funktsiya limiti mavjud bo′lsa, u faqat yagona bo′ladi.

Limitlarga doir turli tasdiklarni isbotlashda cheksiz kichik miqdor va ularning xossalari muhim ahamiyatga ega.

<u>T A ' R I F :</u> $\alpha(x)$ funktsiya $x\to a$ ($|a|<\infty$ yoki $a=\pm\infty$) bo′lganda cheksiz kichik miqdor deb ataladi, agarda $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$ shart bajarilsa.

TEOREMA : Agar $x\to a$ bo′lganda $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ cheksiz kichik miqdorlar bo′lib, f(x) biror M soni bilan chegaralangan, ya'ni $|f(x)|\leq M$ bo′lsa, u holda $\alpha(x)\pm\beta(x)$; $\alpha(x)\,\beta(x)$; $f(x)\,\alpha(x)$; $C\alpha(x)$ (C= const) funktsiyalar ham cheksiz kichik miqdorlar bo′ladi.

<u>I s b o t :</u> $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ cheksiz kichik miqdorlar, ya'ni $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$,

$\lim\limits_{x\to a}\beta(x)=0$ bo′lgani uchun limit ta'rifiga asosan ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son uchun shunday $\delta>0$ topiladiki, $0<|x-a|<\delta$ shartlarda $|\alpha(x)|<\varepsilon/2$, $|\beta(x)|<\varepsilon/2$ tengsizliklar bir paytda o′rinli bo′ladi. Natijada $0<|x-a|<\delta$ bo′lganda

$$|\alpha(x)\pm\beta(x)|\leq |\alpha(x)|+|\beta(x)| <\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon,$$

$$|\alpha(x)\,\beta(x)|= |\alpha(x)|\,|\beta(x)| <\varepsilon/2\ \varepsilon/2=\varepsilon^2/2,$$

$$|f(x)\,\alpha(x)| = |f(x)|\,|\alpha(x)| < |M|\,\varepsilon/2, \qquad |c\,\alpha(x)| = |c|\,|\alpha(x)| < |c|\,\varepsilon/2$$

tengsizliklar o′rinli bo′ladi. Bulardan va limit ta'rifiga asosan

$$\lim_{x\to a}(\alpha(x)\pm\beta(x))=0, \quad \lim_{x\to a}\alpha(x)\ \beta(x)=0$$

$$\lim_{x\to a} f(x)\,\alpha(x)=0, \quad \lim_{x\to a} c\,\alpha(x)=0$$

natijalarni olamiz. Teorema isbotlandi.

NATIJA: Chekli sondagi cheksiz kichik miqdorlarning algebraik yig'indisi, ko′paytmasi yana cheksiz kichik miqdordan iborat bo′ladi.

Bu natijani oldingi teoremani bir necha marta qo′llab isbotlash mumkin.

LEMMA: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ tenglik o′rinli bo′lishi uchun f(*x*) funktsiya $f(x)=A+\alpha(x)$ ko′rinishda bo′lishi zarur va etarli. Bunda $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$, ya'ni $\alpha(x)$ cheksiz kichik miqdordir.

Lemma isboti limit va cheksiz kichik miqdor ta'rifidan kelib chiqadi.

ASOSIY TEOREMA: Agar $x\to a$ bo′lganda f(*x*) va g(*x*) funktsiyalar chekli limitlarga ega bo′lsalar, unda

$$\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x)\pm \lim_{x\to a} g(x) \quad (1)$$

$$\lim_{x\to a} cf(x) = c\lim_{x\to a} f(x) \quad (2)$$

$$\lim_{x\to a} f(x)\,g(x) = \lim_{x\to a} f(x)\ \lim_{x\to a} g(x) \quad (3)$$

tengliklar o′rinli bo′ladi. Agar $\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$ bo′lsa,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} \quad (4)$$

tenglik o′rinlidir.

<u>I s b o t.</u> $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=B$ bo′lsin. Bu holda, lemmaga asosan, $f(x)=A+\alpha(x)$, $g(x)=B+\beta(x)$ deb yoza olamiz. Bu erda $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ funktsiyalar $x\to a$ bo′lganda cheksiz kichik miqdorlardir. Bu tengliklardan foydalanib

$$f(x)\pm g(x) = (A+\alpha(x)) \pm (B+\beta(x)) = (A\pm B)+(\alpha(x)\pm\beta(x))$$

natijani olamiz. Cheksiz kichik miqdorlar xossasiga asosan bu erda $\gamma(x)=\alpha(x)\pm\beta(x)$ funktsiya $x\to a$ bo′lganda cheksiz kichik miqdor bo′ladi. Bu holda yuqoridagi tenglikdan va lemmaga asosan

$$\lim_{x\to a}(f(x)\pm g(x)) = A\pm B = \lim_{x\to a} f(x)\pm\lim_{x\to a} g(x)$$

tenglik o′rinli ekanligiga ishonch hosil qilamiz.

Teoremadagi qolgan tengliklar ham shu tarzda isbotlanadi.

Yuqorida ko′rsatilganidek, funktsiya har doim ham limitga ega bo′lavermaydi. Shu sababli funktsiya limitini hisoblashdan oldin uning mavjudligini tekshirib ko′rishga to′g’ri keladi. Shu maqsadda quyidagi teoremalarni isbotsiz keltiramiz:

TEOREMA 1: Agar $\varphi(x) \le f(x) \le \psi(x)$ tengsizliklar ixtiyoriy x uchun o′rinli bo′lib, $x \to a$ bo′lganda $\varphi(x)$ va $\psi(x)$ funktsiyalarining limitlari mavjud va $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to a} \psi(x) = A$ bo′lsa, u holda $x \to a$ bo′lganda $f(x)$ funktsiya uchun ham limit mavjud bo′lib, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ munosabat o′rinli bo′ladi.

TEOREMA 2: Agarda $f(x)$ funktsiya o′suvchi (kamayuvchi) bo′lib, yuqoridan (quyidan) biror M(m) soni bilan chegaralangan bo′lsa, u holda bu funktsiya $x \to a$ bo′lganda limitga ega va bu limit uchun $\lim\limits_{x \to a} f(x) \le M$ ($\lim\limits_{x \to a} f(x) \ge m$) munosabatlar o′rinli bo′ladi.

Turli funktsiyalarning limitini hisoblashda quyidagi tengliklardan foydalanish mumkin:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e = 2.7182818284\ldots\ldots$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + ax)}{x} = a$$

$$\lim_{x \to 0} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} = e^a, \quad \lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \quad \lim_{x \to 0} \frac{(1 + x)^{\alpha} - 1}{x} = \alpha$$

Bular matematikada ajoyib limitlar deb ataladi va ularning isboti kelgusi ma'ruzalarda beriladi.

<u>O′z-o′zini nazorat etish savollari:</u>

1. Funktsiyaning chekli limiti qanday ta'riflanadi?
2. Funktsiyaning cheksiz limiti qanday ta'riflanadi?
3. Funktsiyaning chap (o’ng) limitlari deb nimaga aytiladi?
4. Qanday shartda funktsiyaning limiti mavjud bo′ladi?
5. Limiti mavjud bo′lmagan funktsiyaga misol keltiring.
6. Cheksiz kichik miqdor deb nimaga aytiladi?
7. Cheksiz kichik miqdorlar qanday xossalarga ega?
8. Funktsiya limiti mavjudligining zaruriy va etarli sharti nimadan iborat?
9. Limitlarning asosiy xossalari nimalardan iborat?
10. Ajoyib limitlarni yoza olasizmi?

<u>23 - MA'RUZA</u>

UZLUKSIZ FUNKTSIYALAR VA ULARNING XOSSALARI.

Tayanch iboralar: funktsiyaning nuqtadagi uzluksizligi, argument orttirmasi, funktsiya orttirmasi, funktsiyani oraliqda uzluksizligi, asosiy elementar funktsiyalarning uzluksizligi, funktsiyani nuqtada chap va o’ng tomondan uzluksizligi, funktsiyaning uzilish nuqtalari, I va II tur uzilish nuqtalari, uzilish nuqtasida funktsiyani sakrashi, kesmada uzluksiz funktsiyalar va ularning xossalari.

<u>M a ' r u z a   r e j a s i :</u>

1. Funktsiyaning nuqtadagi uzluksizligi ta'rifi.
2. Argument va funktsiya orttirmasi.
3. Funktsiyalar uzluksizligini orttirmalar orqali ifodalanishi.
4. Asosiy elementar funktsiyalarning uzluksizligi.
5. Uzluksiz funktsiyalarning asosiy xossalari.
6. Elementar funktsiyalarning uzluksizligi.
7. Funktsiyaning nuqtada chap va o’ng tomondan uzluksizligi.
8. Funktsiyaning oraliq va kesmada uzluksizligi.
9. Funktsiyaning uzilish nuqtalari va ularning turlari.
10. Kesmada uzluksiz funktsiyaning xossalari.

<u>Adabiyotlar:</u>

[1] II bob, §13-16   [2] II bob, §9-10

y=f(x) funktsiya x_0 nuqtada va uning biror atrofida aniqlangan bo′lsin.
<u>T A' R I F :</u> y= f(x) funktsiya x_0 nuqtada uzluksiz deyiladi, agarda u bu nuqtada aniqlangan va quyidagi shart bajarilsa:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)= f(x_0) \qquad (1)$$

$\lim_{x\to x_0} x=x_0$ ekanligini hisobga olib, (1) uzluksizlik shartini

$$\lim_{x\to x_0} f(x)= f(\lim_{x\to x_0} x)$$

kabi yozish mumkin.

Demak, f(x) funktsiya x_0 nuqtada uzluksiz bo′lishi uchun funktsiya olish va limit olish amallarini o′rnini almashtirish mumkin bo′lishi kerak ekan.

Amaliy masalalarda funktsiya uzluksizligini orttirma tushunchasi orqali tekshirish qulay.

Agar x nuqta x_0 nuqta atrofidan olingan bo′lsa, x-x_0 ayirma argument orttirmasi deyiladi va Δx kabi belgilanadi. Bu holda f(x)-f(x_0) ayirma funktsiya orttirmasi deyiladi va Δf yoki Δy kabi belgilanadi.

Demak, Δx argumentning o′zgarishini, Δf esa funktsiya o′zgarishini ifodalaydi. Agarda $x\to x_0$ bo′lsa, u holda $\Delta x\to 0$ bo′ladi. $x=x_0+\Delta x$ ekanligidan foydalanib, (1) uzluksizlik shartini

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x)=f(x_0) \qquad (2)$$

ko′rinishida yozish mumkin. Bu shartni $\Delta f=f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ ekanligidan foydalanib,

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta f=0 \qquad (3)$$

ko′rinishda yozish mumkin. Demak f(x) funktsiya uzluksiz bo′lishi uchun argumentning “kichik” Δx o′zgarishiga funktsiyaning ham “kichik” Δf o′zgarishi mos kelishi kerak.

Misol sifatida $y=x^2$ funktsiyaning har qanday x_0 nuqtada uzluksiz ekanligini (3) shart yordamida ko′rsatamiz:

$$\Delta y=\Delta f=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2=$$
$$=x_0^2+2x_0\cdot\Delta x+(\Delta x^2)-x_0^2=(2x_0+\Delta x)\Delta x\Rightarrow\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f=0$$

ASOSIY TEOREMA: Barcha asosiy elementar funktsiyalar aniqlanish

sohasidagi har bir x_0 nuqtada uzluksizdir.

Bu teoremani isbotsiz qabul qilamiz.

TEOREMA: Agarda f(x) va g(x) funktsiyalar x_0 nuqtada uzluksiz bo′lsa, u holda f(x)±g(x), f(x) g(x) funktsiyalar ham bu nuqtada uzluksiz bo′ladi. Agarda qo′shimcha ravishda g(x_0)≠0 shart bajarilsa, f(x)/g(x) nisbat xam x_0 nuqtada uzluksizdir. Agarda U_0=g(x_0) nuqtada f(x) funktsiya uzluksiz bo′lsa, f(g(x))=F(x) murakkab funktsiya ham x_0 nuqtada uzluksiz bo′ladi.

<u>Isbot:</u> Teoremaning isboti limitlar xossalaridan va uzluksizlikning (1) shartidan kelib chiqadi.

Masalan, h(x)=f(x)±g(x) funktsiyaning x_0 nuqtada uzluksizligini ko′rsatamiz. Teorema shartiga asosan

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0), \qquad \lim_{x\to x_0} g(x)=g(x_0)$$

bo′lgani uchun

$$\lim_{x\to x_0} h(x)=\lim_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim_{x\to x_0} f(x)\pm\lim_{x\to x_0} g(x)=f(x_0)\pm g(x_0)=h(x_0).$$

Ta'rifga asosan h(x) funktsiya x_0 nuqtada uzluksiz bo′ladi. Teoremaning qolgan

qismini isboti talabalarga mustaqil ish sifatida tavsiya etiladi.

Asosiy teorema va bu teoremadan quyidagi natija kelib chiqadi.

Natija: Barcha elementar funktsiyalar aniqlanish sohasidagi har bir x_0 nuqtada uzluksiz bo′ladi.

T A ' R I F: y= f(x) funktsiya biror chekli yoki cheksiz (a,$в$) intervalning har bir nuqtasida uzluksiz bo′lsa, u shu intervalda uzluksiz deyiladi.

Masalan, $y=(1-x^2)^{-1/2}$ funktsiya (-1,1) intervalda uzluksizdir.

T A ' R I F : y=f(x) funktsiya a nuqtada aniqlangan bo′lib,

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=f(a+0)=f(a) \ \left(\lim_{x\to a-0} f(x)=f(a-0)=f(a)\right)$$

shartni qanoatlantirsa, u holda f(x) funktsiya a nuqtada o′ngdan(chapdan) uzluksiz deyiladi.

Masalan,
$$y=\begin{cases} 1, x\ge 0 \\ -1, x<0 \end{cases} \qquad (4)$$

funktsiya x=0 nuqtada o′ngdan uzluksiz, chunki

$$\lim_{x\to 1+0} f(x)= \lim_{x\to 1+0} 1=1=f(0).$$

Ammo

$$\lim_{x\to 1-0} f(x)= \lim_{x\to 1-0} (-1)=-1\neq f(0),$$

ya'ni x=0 nuqtada funktsiya chapdan uzluksiz emas.

Agarda y=f(x) funktsiya x=a nuqtada uzluksiz bo′lsa, u holda bu funktsiya shu nuqtada ham chapdan, ham o′ngdan uzluksiz bo′ladi.

Aksincha, x=a nuqtada funktsiya chapdan va o′ngdan uzluksiz bo′lsa, bu nuqtada funktsiya uzluksizdir.

Shunday qilib, f(x) funktsiyaning a nuqtada uzluksiz bo′lishi uchun

$$\lim_{x\to a+0} f(x)= \lim_{x\to a-0} f(x)= f(a) \qquad (5)$$

shart zarur va etarlidir.

T A ' R I F: y=f(x) funktsiya uchun biror a nuqtada (5) tenglik bajarilmasa, u shu nuqtada uzlukli, a esa uning uzilish nuqtasi deyiladi.

Masalan, (4) funktsiya uchun x=0, $y=(1-x^2)^{-2}$ funktsiya uchun esa $x=\pm1$ uning uzilish nuqtasi bo′ladi.

Agarda a nuqta y=f(x) funktsiyaning uzilish nuqtasi bo′lib, bu nuqtada funktsiyaning chap va o′ng limitlari chekli sonlardan iborat bo′lsa, x=a funktsiyaning I tur uzilish nuqtasi deyiladi. Masalan, (4) funktsiya uchun x=0 I tur uzilish nuqtasi bo′ladi. Bu holda Δ=f(a+0)-f(a-0) funktsiyaning a nuqtadagi sakrashi deb ataladi.

Agarda y=f(x) funktsiyaning a uzilish nuqtasida uning chap va o′ng limitlaridan kamida bittasi cheksiz yoki mavjud bo′lmasa x=a II tur uzilish nuqtasi deyiladi.

Masalan,

$$y=\begin{cases} x^2, x\ge 0 \\ x^{-2}, x<0 \end{cases}$$

funktsiya x=0 nuqtada II tur uzilishga ega, chunki f(0+0)=0, f(0-0)=∞ bo′lmoqda.

Xuddi shunday, f(x)=(x-2)$^{-1}$ funktsiya uchun x=2 II tur uzilish nuqtasi bo′ladi, chunki f(2-0)= $-\infty$, f(2+0)= ∞.

T A' R I F: y=f(x) funktsiya [a,b] kesmada uzluksiz deyiladi, agarda u (a,b)

intervalda uzluksiz, $x=a$ ($x=b$) chegaraviy nuqtada o′ngdan (chapdan) uzluksiz

bo′lsa.

Masalan, y=sin$x$ funktsiya har qanday [a,b] kesmada uzluksizdir.

Agarda funktsiya [a,b] kesmada uzluksiz bo′lsa, uning grafigining shu kesmaga mos keluvchi qismi yaxlit (uzluksiz) chiziqdan iborat bo′ladi. Agarda f(x) funktsiya x_0 nuqtada uzilishga ega bo′lsa, uning grafigi ham shu nuqtada uziladigan chiziqdan iborat bo′ladi. Uzluksizlikning bu geometrik talqini uzluksiz funktsiyalarning quyidagi xossalari va ularning isbotini tasavvur etishga imkon beradi.

1–xossa : Agarda f(x) funktsiya [a,b] kesmada uzluksiz bo′lsa, bu kesmada kamida bitta shunday x_1 (x_2) nuqta mavjudki, har qanday $x\in[a,b]$ uchun f(x_1)≥f(x) (f(x_2)≤f(x)) munosabat bajariladi.

Bu xossadagi f(x_1) yoki f(x_2) berilgan f(x) funktsiyaning [a,b] kesmadagi eng katta yoki eng kichik qiymati deb ataladi va

$$\max_{x\in[a,b]} f(x), \qquad \min_{x\in[a,b]} f(x)$$

kabi belgilandi. Haqiqatdan ham, funktsiya grafigining eng baland yoki eng past joylashgan nuqta yoki nuqtalaridan birining abstsissasi x_1 yoki x_2 deb olsak, xossada aytilgan tasdiq kelib chiqadi.

Masalan, f(x)=x^2, $x\in$[2,4] funktsiya uchun x_1=2, x_2=4 bo′ladi, chunki bu kesmada 4≤x^2≤16, ya'ni f(2)≤f(x)≤f(4) munosabat o′rinli.

2-xossa: Agar f(x) funktsiya [a,b] kesmada uzluksiz va uning chegaralarida turli ishorali qiymatlarni qabul qilsa, ya'ni f(a) f(b)<0 shart bajarilsa, u holda kamida bitta shunday c$\in$(a,b) nuqta mavjudki, unda f(c)=0 tenglik bajariladi.

Bu xossaning geometrik ma'nosi shundan iboratki, ko′rsatilgan shartlarda funktsiya grafigi [a,b] kesmada uzluksiz chiziqdan iborat bo′lib, uning bir uchi OX koordinata o′qidan pastda, ikkinchi uchi esa undan yuqorida bo′ladi. Shu sababli funktsiya grafigi OX o′qini kamida bitta $x=c$ nuqtada kesib o′tadi va shu nuqtada f(c)=0 bo′ladi.

Bu xossa yordamida f(x)=0 ko′rinishdagi tenglamaning ildizlari yotgan oraliklarni topish mumkin. Masalan, x–cos$x$=0 tenglama (0,π) oralikda ildizga ega, chunki f(x)=x–cos$x$ funktsiya [0,π] kesmada uzluksiz va f(0)=–1<0, f(π)=π+1>0. Demak qandaydir $x_0\in$(0,π) nuqtada f(x_0)=0 bo′ladi va x_0 berilgan tenglama ildizini ifodalaydi.

3- xossa: Agarda f(x) funktsiya [a,b] kesmada uzluksiz va f(a)=A, f(b)=B, A≠B bo′lsa, har qanday $\mu \in$(A,B) son uchun kamida bitta shunday c$\in$(a,b) nuqta topiladiki, unda f(c)= μ tenglik o′rinli bo′ladi.

Bu xossani geometrik nuqtai nazardan quyidagicha talqin etish mumkin. OY koordinata o′qida joylashgan va A<μ<B shartni qanoatlantiradigan μ nuqtadan OX o′qiga parallel to′g’ri chiziq o′tkazsak, bu to′g’ri chiziq y= f(x), $x\in$[a,b], funktsiya grafigini hech bo′lmaganda bitta M nuqtada kesib o′tadi. Shu nuqtaning absissasi x=c uchun f(c)= μ tenglik bajariladi.

Masalan, f(x)=x^3, $x\in$[1,3], funktsiya uchun A=1, B=27 va har qanday $\mu\in$(1,27) uchun c=$\sqrt[3]{\mu}$ deb olsak, f(c)=c^3=$(\sqrt[3]{\mu})^3$=μ tenglik bajariladi. Bu xossadan ushbu natijani chiqarish mumkin:

Natija: Agarda f(x) funktsiya [a,b] kesmada uzluksiz va bu erda uning eng katta va eng kichik qiymatlari M va m bo′lsa, u holda funktsiya qiymatlari [m,M] kesmani to′liq to′ldiradi.

O′z – o′zini nazorat etish savollari:

1. Qachon funktsiya nuqtada uzluksiz deyiladi?
2. Argument va funktsiya orttirmalari qanday aniqlanadi?
3. Orttirmalar tilida funktsiya uzluksizligi qanday ifodalanadi?
4. Asosiy elementar funktsiyalar uzluksizmi?
5. Uzluksiz funktsiyalarning asosiy xossalari nimadan iborat?
6. Elementar funktsiyalar uzluksizligi hakida nima deyish mumkin?
7. Qachon funktsiya nuqtada chap (o’ng) tomondan uzluksiz deyiladi?
8. Funktsiyaning nuktada uzluksiz bo′lishining zaruriy va etarli sharti nimadan iborat?
9. Funktsiyaning uzilish nuqtalari qanday aniqlanadi?
10. Uzilish nuqtalari qanday turlarga ajratiladi?
11. Qachon funktsiya oraliqda (kesmada) uzluksiz deyiladi?
12. Kesmada uzluksiz funktsiya qanday xossalarga ega?

<u>24 - MA'RUZA</u>

FUNKTSIYA HOSILASI VA UNING GEOMETRIK, MEXANIK MA'NOSI.

Tayanch iboralar: hosila ta'rifi, hosilaning geometrik ma'nosi, hosilaning mexanik ma'nosi, differentsiallanuvchi funktsiya, differentsiallanuvchi funktsiyaning uzluksizligi.

<u>M a ' r u z a   r e j a s i :</u>

1. Funktsiya hosilasi.
2. Hosilaning geometrik ma'nosi.
3. Hosilaning mexanik ma'nosi.
4. Differentsiallanuvchi funktsiyaning uzluksizligi.

<u>Adabiyotlar:</u>

[1] II bob, §1-2   [2] III bob, §1-4

y=f(x) funktsiya (a,b) oraliqda aniqlangan bo′lib, x va $x+\Delta x$ shu oraliqdagi nuqtalar bo′lsin. Bu holda argumentning Δx orttirmasiga funktsiyaning $\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)$ orttirmasi mos keladi.

<u>T A' R I F :</u> y=f(x) funktsiya Δf orttirmasining Δx argument orttirmasiga nisbati $\Delta x\to 0$ bo′lganda chekli limitga ega bo′lsa, bu limit qiymati funktsiyaning x nuqtadagi hosilasi deb ataladi va $f'(x)$ yoki $y'(x)$ kabi belgilanadi.

Ta'rifga asosan

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \qquad (1)$$

Misol sifatida f(x)=x^2 funktsiya hosilasini ta'rifga asosan topamiz:

$$\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)=(x+\Delta x)^2-x^2=2x\Delta x+(\Delta x)^2,$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x$$

Demak, $(x^2)'=2x$ bo′lar ekan.

y=f(x) funktsiya hosilasining geometrik ma'nosini aniqlash uchun bu funktsiyaning grafigida abtsissasi x va $x+\Delta x$, ordinatalari esa f(x) va f($x+\Delta x$) bo′lgan M va N nuqtalarni olamiz. Bu nuqtalardan o′tuvchi MN kesuvchining OX o′qining musbat yo′nalishi bilan hosil qilgan burchagini β kabi belgilaymiz. Bu holda tegishli chizmani chizib, $\mathrm{tg}\beta=\frac{\Delta f}{\Delta x}$ natijani olish mumkin. Endi $\Delta x\to 0$ bo′lsin. Bu holda N nuqta M nuqtaga yaqinlashib boradi, MN kesuvchi esa funktsiya grafigining M nuqtasiga o′tkazilgan urinmaga yaqinlashib boradi. Bu urinmaning OX o′qi musbat yo′nalishi bilan hosil qilgan burchagini α deb belgilasak, yuqoririda aytilganlarga ko′ra $\Delta x\to 0$ bo′lganda $\beta\to\alpha$ yoki tg $\beta\to$tgα munosobat o′rinli bo′ladi. Demak,

$$tg\alpha=\lim_{\Delta x\to 0} tg\beta=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=f'(x).$$

Shunday qilib, f′(x) hosila qiymati funktsiya grafigining M(x,f(x)) nuqtadagi urinmasining k=tgα burchak koeffitsientiga teng bo′lar ekan.

Hosilaning mexanik ma'nosini ko′rsatish uchun x argumentni vaqt momenti, y=f(x) funktsiyani esa to′g’ri chiziq bo′ylab harakatlanayotgan moddiy nuqtaning x vaqt momentigacha bosib o′tgan masofasi deb qaraymiz. Bu holda Δf orttirma Δx vaqt ichida moddiy nuqtaning bosib o′tgan yo′lini, Δf/Δx nisbat esa uning v (o′rtacha) tezligini ifodalaydi. $\Delta x\to 0$ bo′lganda v (o′rtacha) tezlik moddiy nuqtaning x vaqt momentidagi v (oniy) tezligiga yaqinlashib boradi, ya'ni

$$v(\text{оний})=\lim_{\Delta x\to 0} v(\text{уртача})=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=f'(x).$$

Demak, $f'(x)$ hosila f(x) funktsiyaning o′zgarish tezligini ifodalaydi.

Agar y=f(x) funktsiya x nuqtada chekli f(x) hosilaga ega bo′lsa, u shu nuqtada differentsiallanuvchi deyiladi. Funktsiyaning differentsiallanuvchanligi va uzluksizligi orasidagi bog’lanish quyidagi teorema orqali ifodalanadi.

TEOREMA: Agarda y=f(x) funktsiya x nuqtada differentsiallanuvchi bo′lsa, u shu nuqtada uzluksiz bo′ladi.

I s b o t : Funktsiya uzluksizligi ta'rifiga asosan

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f=0 \qquad (2)$$

munosabatni ko′rsatish kifoya. Hosila ta'rifini ifodalovchi (1) tenglik va limitni mavjudligi haqidagi oldin ko′rib o′tilgan lemmaga asosan

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=f'(x)+\alpha(\Delta x)$$

tenglikni yozish mumkin. Bu erda $\Delta x\to 0$ bo′lganda $\alpha(\Delta x)$ cheksiz kichik miqdor bo′ladi. Bu holda, limit hisoblash qoidalariga asosan,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f=\lim_{\Delta x\to 0}(f'(x)\Delta x+\alpha(\Delta x))=f'(x)\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x+\lim_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)=0.$$

Demak, (2) munosabat o′rinli va shu sababli f(x) funktsiya x nuqtada uzluksiz bo′ladi.

I Z O H : Teoremadagi tasdiqning teskarisi umuman olganda o′rinli emas.

Masalan, f(x)=$|x|$ funktsiya x=0 nuqtada uzluksiz, ammo bu nuqtada differentsiallanuvchi emas. Xaqiqatan ham, x=0 nuqtaga Δx orttirma berganimizda Δf=f(0+Δx)-f(0)=Δx tengik o′rinli bo′ladi. Bu erdan

$$\lim_{\Delta x\to +0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1,\qquad \lim_{\Delta x\to -0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1.$$

Demak, $\Delta x\to 0$ bo′lganda Δf/Δx nisbat limitga ega emas, ya'ni f′(0) hosila mavjud emas.

T A′ R I F : y=f(x) funktsiya (a,b) oraliqning har bir nuqtasida differentsiallanuvchi bo′lsa, u shu oraliqda differentsiallanuvchi deb ataladi.

Masalan, $y=x^2$ funktsiya har qanday oraliqda differentsiallanuvchi. $y=|x|$ funktsiya esa x=0 nuqtani o′z ichiga olmaydigan oraliqlarda (masalan, (-1,0), (0,1), (2,4) oraliqlarda) differentsiallanuvchi, x=0 nuqtani o′z ichiga oluvchi oraliqlarda (masalan, (-1,1), (-5,3) oraliqlarda) differentsiallanuvchi bo′lmaydi

O′z-o′zini nazorat etish savollari:

1. Funktsiyaning nuqtadagi hosilasi qanday ta'riflanadi?
2. Hosilaning geometrik ma'nosi nimadan iborat?
3. Hosilaning mexanik ma'nosi nimadan iborat?
4. Differentsiallanuvchi funktsiyaning uzluksizligi haqida nima deyish mumkin?
5. Uzluksiz funktsiyaning differentsiallanuvchanligi to′g’risida nima deyish mumkin?
6. Qachon funktsiya oraliqda differentsiallanuvchi deyiladi?

25 - MA'RUZA

FUNKTSIYANI DIFFERENTSIALLASH QOIDALARI. HOSILALAR JADVALI.

Tayanch iboralar: hosilani topish algoritmi, algebraik yig'indi hosilasi, ko′paytma hosilasi, bo′linma hosilasi, murakkab funktsiya hosilasi, teskari funktsiya hosilasi, asosiy elementar funktsiyalarning hosilalari, hosilalar jadvali.

Ma'ruza rejasi:

1. Funktsiya hosilasini ta'rif bo′yicha hisoblash algoritmi.
2. Funktsiyalar algebraik yig'indisining hosilasi.
3. Funktsiyalar ko′paytmasining hosilasi.
4. Funktsiyalar bo′linmasining hosilasi.
5. Murakkab funktsiyaning hosilasi.
6. Teskari funktsiya hosilasi.
7. Hosilalar jadvali.

Adabiyotlar:

[1] III bob, §3-9 [2] III bob, §5-15

Umumiy holda y=f(x) funktsiyaning hosilasini topish, ya'ni uni differentsiallash,

quyidagi algoritm bo′yicha amalga oshiriladi:

1) x argumentga $\Delta x\neq 0$ orttirma berib, $x+\Delta x$ nuqtani topamiz;
2) funktsiya orttirmasini $\Delta f= f(x+\Delta x)-f(x)$ tenglik bo′yicha xisoblaymiz;
3) $\Delta f/\Delta x$ nisbatni topamiz va uning $\Delta x\to 0$ bo′lgandagi limitini hisoblaymiz. Bu limit mavjud bo′lsa, uning qiymati $f'(x)$ hosilani aniqlaydi.

Misol sifatida f(x)=sin$x$ funktsiya hosilasini yuqoridagi algoritm bo′yicha

topamiz:

1) x va $x+\Delta x$ nuqtalarda funktsiyani hisoblaymiz;
2) trigonometrik formuladan foydalanib, funktsiya orttirmasini quyidagicha yozamiz:

$$\Delta f=\sin(x+\Delta x)-\sin x= 2\sin(\Delta x/2)\cos(x+\Delta x/2)$$

3) $\Delta f/\Delta x$ nisbatni tuzamiz va uning limitini hisoblaymiz:

$$\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta f/\Delta x)= \lim_{\Delta x\to 0} 2\sin(\Delta x/2)\cos(x+\Delta x/2)/\Delta x=$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \sin(\Delta x/2)/(\Delta x/2)\cdot \lim_{\Delta x\to 0} \cos(x+\Delta x/2)=1\cdot\cos x=\cos x.$$

Bu erda ko′paytmaning limiti, $\lim_{x\to 0} \sin x/x=1$ ajoyib limitdan va $y=\cos x$ funktsiya uzluksizligidan foydalanildi.

Demak, $(\sin x)'=\cos x$ bo′ladi. Xuddi shunday usulda $(\cos x)'=-\sin x$ ekanligi aniqlanadi. Bundan tashqari

$$(a^x)'= a^x\ln a \text{ , } (\log_a x)'= \frac{1}{x}\log_a e$$

ekanligini isbotlash mumkin.

Ammo, har qanday funktsiya hosilasini bu algoritm bo’yicha hisoblash oson emas va muhimi shart ham emas. Umumiy holda funktsiya hosilasini hisoblashni quyidagi differentsiallash qoidalari bo′yicha amalga oshirish mumkin.

1- qoida: O′zgarmas C soning hosilasi nolga teng, ya'ni $(C)'=0$.
<u>I s b o t :</u> O′zgarmas C sonni x argumentning har qanday qiymatida bir xil qiymat qabul qiluvchi $f(x)=C$ funktsiya deb qarash mumkin. Bu holda,

$$\Delta f= f(x+\Delta x)-f(x)=C-C=0, \qquad \Delta f/\Delta x=0,$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0} 0=0.$$

2-qoida: *u=u(x), v=v(x)* funktsiyalar *x* nuqtada differentsiallanuvchi bo′lsa, bu nuqtada $u \pm v$, $u \cdot v$ va $v(x) \neq 0$ shartda *u/v* funktsiyalar ham differentsiallanuvchi bo′lib, ularni hisoblash uchun

$$(u \pm v)' = u' \pm v' \;, \quad (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \,, \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

formulalar o′rinli bo′ladi.

<u>I s b o t :</u> Funktsiya orttirmasi ta'rifidan foydalanib, har qanday Δx argument orttirmasida $\Delta(u \pm v) = \Delta u \pm \Delta v$ ekanligini ko′rsatish mumkin. Bu holda limit xossasi va hosila ta'rifiga asosan

$$(u + v)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(u + v)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u \pm \Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u' + v'.$$

Xuddi shunday,

$$\Delta(u \cdot v) = u \cdot \Delta v + \Delta u \cdot v + \Delta u \cdot \Delta v, \qquad \Delta\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u\Delta v - u\Delta v}{v(v + \Delta v)}$$

munosobatlardan foydalanib, 2-qoidadagi qolgan formulalarni ham isbotlash mumkin.

<u>Natija 1:</u> Funktsiyaga ixtiyoriy *C* o′zgarmas sonni qo′shsak, uning hosilasi o′zgarmaydi.

Xaqiqatdan ham $(f(x)+C)' = f'(x) + C' = f'(x) + 0 = f'(x)$.

<u>Natija 2 :</u> O′zgarmas C ko′paytuvchini hosila belgisidan tashqariga chiqarish mumkin.

Xaqiqatdan ham, ko′paytmaning hosilasi formulasi va 1-qoidaga asosan

$$(C\cdot f(x))'=C'\cdot f'(x)+C\cdot f'(x)=0\cdot f(x)+C\cdot f'(x)=C\cdot f'(x)$$

Natija 3 : $(\mathrm{tg}x)' = 1/\cos^2 x$, $(\mathrm{ctg}x)' = -1/\sin^2 x$.

Xaqiqatan ham, bo′linmaning hosilasi formulasiga ko′ra

$$(tgx)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cdot\cos x-\sin x\cdot(\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos x\cdot\cos x-\sin x\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}\,.$$

Xuddi shunday ravishda $(\mathrm{ctg}x)'$ hosila topiladi.

3-qoida: *y=f(u)* murakkab funktsiyada *f(u)* va *u(x)* funktsiyalar argumentlari bo′yicha differentsiallanuvchi bo′lsin. Bu holda $y=f(u)$ murakkab funktsiya x bo′yicha differentsiallanuvchi bo′lib, uning hosilasi

$$f'_x = f'(u)\cdot u'(x)$$

formula bilan topiladi.

I s b o t : *u(x)* funktsiya differentsiallanuvchi bo′lganligidan uning uzluksizligi kelib chiqadi va shu sababli $\Delta x\to 0$ bo′lganda $\Delta u\to 0$ bo′ladi. Hosila ta'rifiga asosan

$$f'_x = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta u}\frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = f'(u)\cdot u'(x)\,.$$

Masalan, $(\sin x^2)' = (u=x^2) = (\sin u)'_x = \cos u\cdot u' = 2x\cos x^2$.

Bu qoidaning tadbiqi sifatida $y=x^{\alpha}$ darajali funktsiyaning y' hosilasini topamiz.

Bu holda

$$\ln y = \ln x^{\alpha} = \alpha \ln x \Rightarrow (\ln y)'_x = (\alpha \ln x)' \Rightarrow$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{\alpha}{x} \Rightarrow y' = \frac{\alpha}{x} y = \frac{\alpha}{x} x^{\alpha} = \alpha \cdot x^{\alpha-1}.$$

4-qoida:. $y = f(x)$ differentsiallanuvchi va $f'(x) \neq 0$ bo′lsa, $x=f^{-1}(y)$ teskari funktsiya ham differentsiallanuvchi bo′ladi va uning hosilasi $x'_y = \frac{1}{y'_x}$ formula bo′yicha topiladi.

<u>I s b o t :</u> $x=f^{-1}(y)$ teskari funktsiyaning argument orttirmasi $\Delta y \neq 0$ bo′lgandagi orttirmasi Δx bo′lsin. Berilgan f(x) funktsiya differentsiallanuvchi bo′lgani uchun uzluksizdir va shu sababli unga teskari $f^{-1}(y)$ funktsiya ham uzluksiz bo′ladi. Demak, $\Delta y \to 0$ bo′lganda $\Delta x \to 0$ bo′ladi. Bu holda, hosila ta'rifiga asosan,

$$x_y' = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^{-1} = \frac{1}{y'_x}.$$

Misol sifatida y=$a$rcsin$x$ funktsiya hosilasini topamiz. Bu erda D{f}=[-1;1], E{f}=[-π/2, π/2] bo′lgani uchun, $x=\sin y$ teskari funktsiyaning hosilasi

$x'_y = \cos y \neq 0$, $y \in (-\pi/2\ \pi/2)$, shartni qanoatlantiradi. Bu holda

(arcsin$x$)′= $y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y}$

Ammo $y \in (-\pi/2\ \pi/2)$ bo′lganda $\cos y > 0$ va

$$\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}\ , \ x\in(-1,1)$$

tenglik o′rinli. Bu natijani oldingi tenglikka qo′yib,

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

formulani hosil qilamiz. Xuddi shunday usulda

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\mathrm{arctg}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad (\mathrm{arcctg}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

formulalarni hosil qilish mumkin.

Shunday qilib, barcha asosiy elementar funktsiyalar aniqlanish sohasida differentsiallanuvchi va ularning hosilalari quyidagi formulalar bilan hisoblanadi:

1) $(x^{\alpha})' = \alpha\cdot x^{\alpha-1}$, α- ixtiyoriy haqiqiy son;

2) $(a^x)' = a^x\cdot\ln a$, $(e^x)' = e^x$; 3) $(\log_a x) = \frac{1}{x}\log_a e$, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

4) $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(\mathrm{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ $(\mathrm{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

5) $(\arcsin x)' = -(\arccos x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\mathrm{arctg}\, x)' = -(\mathrm{arcctg}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$

Bu hosilalar jadvalidan va ko′rib o′tilgan

I. $(C)' = 0$ II. $(u \pm v)' = u' \pm v'$, III. $(u\cdot v)' = u'\cdot v + u\cdot v'$,

IV. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ V. $[f(u)]' = f'_u \cdot u'_x$ VI. $x'_y = \frac{1}{y'_x}$

hosila olish qoidalaridan foydalanib, har qanday elementar funktsiyaning hosilasini hisoblash mumkin.

Masalan, $(e^x \cdot \sin 2x)' = (e^x)' \sin 2x + e^x (\sin 2x)' = e^x \cdot \sin 2x + e^x \cdot \cos 2x \cdot (2x)' =$

$= (\sin 2x + 2 \cdot \cos 2x)\, e^x$,

$$(\ln \sin x)' = \frac{1}{\sin x} \cdot (\sin x)' = \frac{cosx}{\sin x} = ctgx .$$

O′z-o′zini nazorat etish savollari:

1. Ta'rif bo′yicha funktsiya hosilasini topish algoritmi qanday qadamlardan iborat?
2. O′zgarmas sonning hosilasi nimaga teng?
3. Funktsiyalar algebraik yig'indisini hosilasi qanday hisoblanadi?
4. Funktsiyalar ko′paytmasining hosilasi qanday topiladi?
5. Funktsiyalar nisbatining hosilasi qanday hisoblanadi?
6. Hosila olishda o′zgarmas ko′paytuvchini nima qilish mumkin?
7. Murakkab funktsiyaning hosilasi qanday topiladi?
8. Teskari funktsiyaning hosilasi qanday topiladi?
9. Asosiy elementar funktsiyalarning hosilalarini yozing.

26-MA'RUZA

KESMADA DIFFERENTSIALLANUVCHI FUNKTSIYALAR HAQIDAGI TEOREMALAR.

Tayanch iboralar: Roll teoremasi, Lagranj teoremasi, Koshi teoremasi.

M a ' r u z a r e j a s i :

1. Kesmada differentsiallanuvchi funktsiyalar.
2. Roll teoremasi.
3. Lagranj teoremasi.
4. Koshi teoremasi.

Adabiyotlar:

[1] III bob, §19 [2] IV bob, §1-3

Biz quyida differentsial hisobning asosiy teoremalaridan bo′lib hisoblanadigan teoremalarni keltiramiz.

1-TEOREMA (Roll teoremasi): f(x) funktsiya [a, b] kesmada uzluksiz va uning ichki nuqtalarida differentsiallanuvchi bo′lib, chegaralarida teng qiymatlar qabul qilsin, ya'ni f(a)=f(b) bo′lsin. U holda shu kesma ichida kamida bitta shunday "c" nuqta topiladiki, unda funktsiya hosilasi nolga teng, ya'ni f'(c)=0 bo′ladi.

I s b o t : Kesmada uzluksiz funktsiya shu kesmada o′zining eng kichik (m) va eng katta (M) qiymatlariga erishishi bizga ma'lum.

Agar m=M bo′lsa, u holda albatta f(x)=const bo′ladi va teorema tasdig'i kesmaning har bir nuqtasida bajariladi.

Aytaylik m<M bo′lsin. Kesma chegaralarida funktsiya qiymatlari o′zaro teng bo′lgani uchun funktsiyaning eng katta va eng kichik qiymatlari kesmaning faqat ichki nuqtalarida erishiladi.

Agar biror $a<c<b$ nuqtada f(c) = M bo′lsa, u holda $\Delta f(c)=f(c+\Delta x)-f(c) < 0$ bo′ladi. Bu erdan quyidagi natijalar kelib chiqadi:

$$\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} \le 0, \text{ agar } \Delta x>0 \text{ bo′lsa,}$$

$$\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} \ge 0, \text{ agar } \Delta x< 0 \text{ bo′lsa.}$$

Kesmaning ichki nuqtalarida funktsiyaning differentsiallanuvchanligidan foydalanib, yuqoridagi munosabatlarda limitga o′tsak, u holda quyidagi xulosalarga kelamiz:

$$f'(c)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} \le 0 \quad \text{va} \quad f'(c)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} \ge 0$$

Ammo f'(c)≥0 va f'(c)≤0 tengsizliklar faqat f'(c)=0 bo′lgandagina birgalikda bo′ladi.

f(c)=m hol ham xuddi shunday ko′riladi. Teorema isbot qilindi.

Shunday qilib, differentsiallanuvchi funktsiyaning teng qiymatlari orasida funktsiya hosilasining hech bo′lmaganda bitta noli mavjud bo′lar ekan.

Roll teoremasi quyidagi geometrik talqinga ega: uzluksiz funktsiya (a, b) oraliqdagi har bir nuqtada yagona o′rinmaga ega bo′lsa va kesmaning chegaralarida bir xil qiymatlar qabul qilsa, u holda shu urinmalar orasida kamida bittasi OX o′qiga parallel bo′ladi.

2-TEOREMA (Lagranj teoremasi): f(x) funktsiya [a,b] kesmada uzluksiz va kesmaning ichki nuqtalarida hosilaga ega bo′lsa, u holda (a,b) oraliqda kamida bitta shunday "c" nuqta topiladiki, unda

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \quad \text{yoki} \quad f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$

tenglik o′rinli bo′ladi.

Isbot: Teorema shartini qanoatlantiruvchi f(x) funktsiya orqali ushbu yordamchi funktsiyani kiritamiz:

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Bu funktsiyaning (a,b) oraliqdagi hosilasini topamiz:

$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Kiritilgan φ(x) funktsiya $\varphi(a)$=0 va φ(b)=0 shartlarni qanoatlantiradi. Unda Roll teoremasiga asosan kamida bitta shunday c nuqta topiladiki, c∈(a,b) va φ′(c)=0 bo′ladi. Bundan

$$\varphi'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

natija kelib chiqadi. Teorema isbot bo′ldi.

Lagranj teoremasining geometrik ma'nosi shundan iboratki, f(x) funktsiya grafigining A(a, f(a)) va B(b, f(b)) nuqtalarini tutashtiruvchi AB vatarga parallel va qandaydir C(c, f(c)) nuqtadan o′tuvchi urinma mavjud.

3-*TEOREMA* (Koshi teoremasi): f(x) va g(x) funktsiyalar [a,b] kesmada uzluksiz va uning ichki nuqtalarida differentsiallanuvchi bo′lsin. Agar $\forall x \in (a,b)$ uchun g′(x)≠0 bo′lsa, u holda kamida bitta shunday c∈(a,b) nuqta topiladiki, unda ushbu tenglik o′rinli bo′ladi:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Isbot: Teorema shartiga ko′ra $\forall x \in (a,b)$ uchun g′(x)≠0 ekanligidan g(b)≠g(a) kelib chiqadi. Xaqiqatan ham, agar g(b)=g(a) bo′lsa, unda Roll teoremasiga asosan, kamida bitta "c" nuqtada g′(c)=0 bo′lar edi. Bu esa teorema shartiga zid. Shu sababli quyidagi yordamchi funktsiyani kiritish mumkin:

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}[g(x) - g(a)].$$

Bu funktsiya [a,b] kesmada aniqlangan va uzluksiz bo′lib,

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x)$$

hosilaga ega. Kiritilgan yordamchi F(x) funktsiya F(a)=F(b)=0 shartni qanoatlantirishini tekshirib ko′rishimiz mumkin. Demak, F(x) funktsiya [a,b] kesmada Roll teoremasining hamma shartlarini qanoatlantiradi. Shuning uchun [a,b] kesma ichida kamida bitta shunday c nuqta (a<c<b) topiladiki, unda F′(c)=0 bo′ladi, ya'ni

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) = 0.$$

Bundan esa teorema tasdig'i to′gri ekanligi kelib chiqadi, ya'ni

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Izoh: Koshi teoremasidan xususiy g(x)=x holda Lagranj teoremasi kelib chiqadi.

Ko′rib o′tilgan bu uchta teoremaning ahamiyati funktsiyani to′la tekshirish va aniqmasliklarni ochishda ko′rinadi.

<u>O′z-o′zini nazorat etish savollari:</u>

1. Roll teoremasini shartlari va tasdig’i nimadan iborat?
2. Roll teoremasining geometrik ma'nosini ko′rsating.
3. Lagranj teoremasini ifodalang.
4. Lagranj teoremasining geometrik ma'nosi nimadan iborat?
5. Koshi teoremasi qanday ifodalanadi?
6. Qaysi holda Koshi teoremasidan Lagranj teoremasi kelib chiqadi?

<u>27- MA'RUZA</u>

FUNKTSIYA DIFFERENTSIALI.
YUQORI TARTIBLI HOSILA VA DIFFERENTSIALLAR.

Tayanch iboralar: funktsiya differentsiali, differentsial mavjudligini zaruriy va etarli sharti, algebraik yig’indi differentsiali, ko′paytma differentsiali, bo′linma differentsiali, differentsialning invariantligi, yuqori tartibli hosilalar, yuqori tartibli differentsiallar, parametrik funktsiya hosilasi.

<u>M a ' r u z a   r e j a s i :</u>

1. Funktsiya differentsiali.
2. Differentsialning taqribiy hisobdagi tatbig’i.
3. Differentsialning geometrik ma'nosi.
4. Differentsiallash qoidalari.
5. Yuqori tartibli hosilalar.
6. Yuqori tartibli differentsiallar.
7. Parametrik funktsiya hosilasi.

<u>Adabiyotlar:</u>

[1] III bob, §12-15, § 17-18 [2] III bob, §22-23

Berilgan y=f(x) funktsiyada x argument orttirmasi Δx bo′lganda funktsiya orttirmasi $\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$ kabi aniqlanishini eslatib o′tamiz.

TA'RIF: Agarda $\Delta x \to 0$ bo′lganda funktsiya orttirmasini

$$\Delta f = A\cdot\Delta x + \alpha(\Delta x)\,\Delta x \qquad (1)$$

ko′rinishda ifodalab bo′lsa, unda $A\cdot\Delta x$ ifoda shu funktsiyaning ***differentsiali*** deyiladi va df kabi belgilanadi. Bunda A Δx ga bog'liq emas, $\alpha(\Delta x)$ esa cheksiz kichik miqdordir.

Demak, funktsiya differentsiali uning orttirmasini Δx ga nisbatan chiziqli qismini ifodalaydi.

Ta'rif bo′yicha, ya'ni (1) tenglik orqali funktsiya differentsialini topish ancha murakkab masaladir. Shu sababli uni osonroq usulda topish masalasi paydo bo′ladi. Bu masala quyidagi teoremada o′z echimini topadi.

TEOREMA: Agar y=f(x) funktsiya biror (a,b) oraliqda differentsiallanuvchi, ya'ni $f'(x)$ hosilaga ega bo′lsa, uning differentsiali

$$df = f'(x)\cdot\Delta x \qquad (2)$$

formula bilan topilishi mumkin.

Isbot: Hosila ta'rifi va limitning mavjudligi haqidagi lemmaga (28-ma'ruzaga qarang) asosan quyidagi tengliklarni yozish mumkin:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x) \Rightarrow \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x) \Rightarrow \Delta f = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$$

Oxirgi tenglikni (1) bilan solishtirib va differentsial ta'rifidan foydalanib, (2) formulaga ega bo′lamiz. Teorema isbot bo′ldi.

Endi f(x)=x xususiy holni ko′ramiz. Bu holda df =dx bo′ladi va (2) formulaga asosan $dx=(x)'\cdot\Delta x=\Delta x$. Demak x erkli o′zgaruvchi (argument) uchun $\Delta x = dx$, ya'ni orttirma va differentsial tushunchalari bir narsani ifodalaydi. Shu sababli differentsialni hisoblashning (2) formulasini

$$df = f'(x)dx \qquad (3)$$

ko′rinishda yozish mumkin. Demak, funktsiya differentsialini topish uchun uning hosilasini dx ga ko′paytirish kifoya. Masalan, $dx^2 = (x^2)'dx = 2x\,dx$,

$d\sin x = (\sin x)'dx = \cos x\,dx$ bo′ladi.

(3) formuladan hosilani $f'(x) = \dfrac{df}{dx}$ kabi belgilash ma'nosi kelib chiqadi.

(1) tenglik va differentsial ta'rifidan

$$\Delta f = df + \alpha(\Delta x)\Delta x \qquad (4)$$

tenglikni yozish mumkin. Bu tenglikdan argument orttirmasi Δx kichik bo′lganda funktsiya orttirmasi Δf va differentsiali df qiymatlari bir-biriga yaqin bo′lishini, ya'ni Δf $\approx$df bo′lishini ko′ramiz.

1-Misol. f(x)=x^2 funktsiyaning x=40 va Δx=0,01 bo′lgandagi orttirmasi va differentsiali topilsin.

Echish. df=2xdx=2·40·0,01=0,8

$$\Delta f=(x+\Delta x)^2-x^2=2x\Delta x+(\Delta x)^2=2\cdot 40\cdot 0{,}01+0{,}0001=0{,}8+0{,}0001=0{,}8001.$$

Bu natijalardan ko’rinib turibdiki, Δf va df qiymatlari anchalik yaqin ekan. Shu sababli (4) formuladan ushbu taqribiy hisoblash formulasini keltirib chiqarish mumkin:

$$f(x+\Delta x) \approx f(x)+ f'(x)\Delta x \qquad (5)$$

(5) formula taqribiy hisoblashlarda keng foydalaniladi.

2-misol. sin31° hisoblansin.

Echish. f(x)=sin$x$ funktsiyani kiritamiz. Unda f ′(x)=cos$x$. va x=30°, Δx=1° desak, u holda (5) formuladan quyidagi natijani olamiz:

$$\sin 31^0= \sin(30°+1°)\approx\sin 30°+\cos 30°\cdot 1°=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{1}{2}+\frac{1{,}73}{2}\cdot\frac{3{,}14}{180}=0{,}52.$$

Bunda 1°=π/180 ekanligidan foydalandik. Demak, sin31°$\approx$0,52.

3-misol. $\sqrt{25{,}002}$ ifoda hisoblansin.

Echish. f(x)=$\sqrt{x}$ funktsiyani kiritsak va x=25, Δx=0,002 desak, u holda (5) taqribiy formuladan, f'(x)=1/2$\sqrt{x}$ ekanligini hisobga olib,

$$\sqrt{25{,}002}\approx\sqrt{25}+\frac{1}{2\sqrt{25}}\cdot 0{,}002=5+\frac{0{,}002}{10}=5{,}0002$$

taqribiy qiymatni olamiz.

Shunday qilib differentsialni hisoblash funktsiya hosilasini argument differentsialiga ko′paytirish bilan yaqinlanadi. Shuning uchun ham hosila hisoblash qoidalari osongina differentsial hisoblash uchun ko′chiriladi:

1. dC=0, C=const 2. dCf(x) = Cdf(x) 3. d[$f(x)$±g(x)]= d$f(x)$±dg(x)

4. d$f(x)g$ (x)= $f(x)dg$(x)+g(x) $df(x)$ 5. $d\left[\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right]=\frac{\varphi(x)df(x)-f(x)d\varphi(x)}{[\varphi(x)]^2}$

Endi y=f(u), u=u(x), murakkab funktsiyaning differentsialini hisoblash masalasini ko′ramiz. Bunda tashqi f(u) va ichki u(x) funktsiyalar differentsiallanuvchi deb qaraladi. Differentsialni hisoblashning (3) formulasi va murakkab funktsiyani hisoblash qoidasiga asosan ushbu tenglikni yozish mumkin:

$$df(u)=(f(u))'dx= f'(u)\cdot u'dx= f'(u)\cdot du \qquad (6)$$

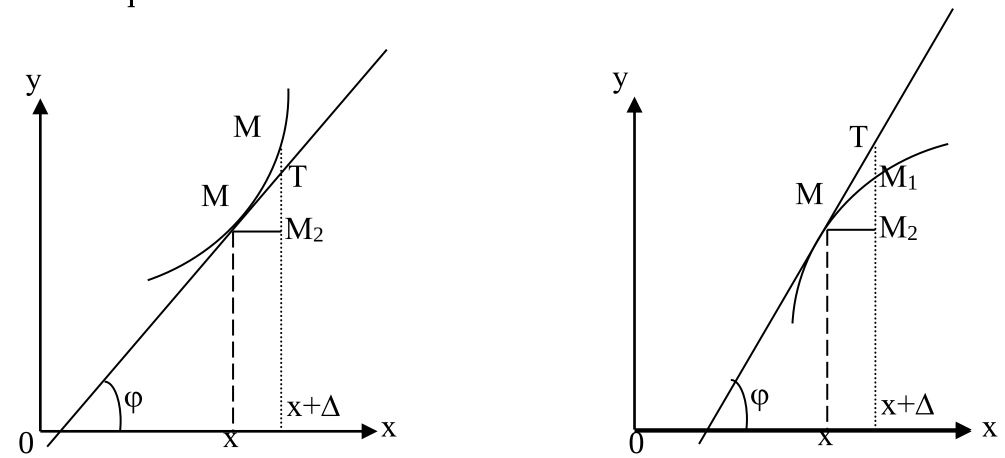
Bu erdan, (3) va (6) formulalarni taqqoslab, oddiy va murakkab funktsiya differentsiali bir xil usulda hisoblanishini ko′ramiz. Bu ***differentsialning***

invariantlik xossasi deyiladi. Demak, y=f(x) funktsiyada x o′rniga biror u=u(x) funktsiya qo′yib, f(u) murakkab funktsiya hosil qilinsa, uning differentsiali ko′rinishi o′zgarmay qoladi.

Masalan, $y=\cos\sqrt{x}$ funktsiya uchun $dy=-\sin\sqrt{x}\,\frac{1}{2\sqrt{x}}dx=-\sin\sqrt{x}\,d(\sqrt{x})$.

Endi differentsialning geometrik ma'nosini ko′ramiz.

Aytaylik y=f(x) funktsiyamiz quyidagi ikkita ko′rinishda bo′lsin va uning M(x;f(x)) nuqtasiga o′tkazilgan urinma OX o′qining musbat yo′nalishi bilan φ burchak hosil qilsin.



Agar x argumentga Δx orttirma bersak, u holda funktsiya Δf orttirma oladi. Chizmada $M_1(x+\Delta x;\ f(x+\Delta x))$, $M_2(x+\Delta x;\ f(x))$ nuqtalarni qaraymiz.

Grafikning M(x,f(x)) nuqtasiga o′tkazilgan urinmaning ixtiyoriy bir T nuqtasini olamiz. Ma'lumki, $\Delta f=M_1M_2$, $\Delta x=MM_2$ bo′ladi.

Endi MTM_2 to′g’ri burchakli uchburchakdan va hosilaning geometrik ma'nosidan ushbu tenglikni olamiz:

$$\mathrm{tg}\varphi=\frac{M_2T}{MM_2}\Rightarrow M_2T=\mathrm{tg}\varphi\cdot MM_2=f'(x)\Delta x$$

Bu erdan va differentsial ta'rifidan $M_2T=df$ tenglikni olamiz. Demak, y=f(x) funktsiyaning differentsiali x argument Δx ga o′zgarganda funktsiya grafigining M(x;f(x)) nuqtasiga o′tkazilgan urinmaning hosil qilgan orttirmasiga teng.

Endi funktsiyaning yuqori tartibli hosilasi va differentsiali tushunchalarini kiritamiz.

Ma'lumki, y=f(x) funktsiyaning birinchi tartibli hosilasi $f'(x)$, umuman olganda, x o′zgaruvchining yangi funktsiyasi bo′ladi. Shu sababli $f'(x)$ funktsiyaning hosilasi to′grisida so′z yuritish mumkin.

T A ' R I F: Agar $f'(x)$ differentsiallanuvchi funktsiya bo′lsa, uning hosilasi y=f(x) ***funktsiyaning II tartibli hosilasi*** deyiladi va $f''(x)$ yoki $f^{(2)}(x)$ kabi belgilanadi.

Demak, II tartibli hosila $f''(x)=(f'(x))'$ kabi aniqlanadi va hisoblanadi. Masalan, $f(x)=x^4$ funktsiya uchun $f'(x)=4x^3$, $f''(x)=(4x^3)'=12x^2$.

Birinchi tartibli hosila $f'(x)$ tezlikni ifodalasa, ikkinchi tartibli hosila $f''(x)$ tezlanishni ifodalaydi.

Hosila tartibi tushunchasi kiritilgach $f'(x)$ hosila I tartibli, $f(x)$ funktsiyaning o′zi esa 0 – tartibli hosila, ya'ni $f(x)= f^{(0)}(x)$ deb qaraladi.

Xuddi shunday tarzda uchinchi tartibli $f'''(x)$, to′rtinchi tartibli $f^{(IV)}(x)$ va hokazo n- tartibli hosilalar tushunchasi kiritiladi. Umuman olganda n–tartibli hosila quyidagi rekkurent formula orqali topiladi:

$$f^{(n)}(x)= (f^{(n-1)}(x))', \quad n=1,2,3,\ldots \qquad (7)$$

Masalan, $f(x)=x^3$ uchun $f^{(1)}(x)=3x^2$, $f^{(2)}(x)=6x$, $f^{(3)}(x)=6$ va $n\geq 4$ bo′lganda $f^{(n)}(x)=0$ bo′ladi. Ba'zi funktsiyalar uchun yuqori tartibli hosilalar ifodasini birdaniga yozish mumkin. Masalan, $f(x)=a^x$ bo′lsa, $f^{(n)}(x)=a^x(\ln a)^n$,
$f(x)=\sin x$ bo′lsa, $f^{(n)}(x)=\sin(x+\pi n/2)$ bo′ladi.

$df= f'(x)dx$ ifodada birinchi ko′paytuvchi x argumentning funktsiyasi, ikkinchi ko′paytuvchi $dx = \Delta x$ esa x ga bog'lik bo′lmagan o′zgarmas son bo′ladi. Demak df differentsial ham x o′zgaruvchining funktsiyasi ekan. Undan (3) formula bo′yicha differentsial olamiz va natijada hosil bo′lgan ifodani ***ikkinchi tartibli differentsial*** deb ataymiz va d^2f kabi belgilaymiz:

$$\mathbf{d^2f=d(df)=d(f'(x)dx)=dx\, d(f'(x))=dx\, f''(x)dx= f''(x)(dx)^2= f''(x)dx^2.}$$

Xuddi shunday tarzda n – tartibli differentsial

$$d^nf=d(d^{n-1}f)= f^{(n)}(x)(dx)^n = f^{(n)}(x)dx^n$$

kabi aniqlanadi va hisoblanadi. Masalan, $f(x)=2x^3$ uchun $df=6x^2\,dx$, $d^2f=12x dx^2$. Yuqori tartibli differentsillardan foydalanib, yuqori tartibli hosilalarni

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}, \quad f''(x)=\frac{d^2y}{dx^2}, \ \ldots, \ f^{(n)}(x)=\frac{d^nf}{dx^n}$$

kabi yozish mumkin.

T A ' R I F: **Agar *x* va *y* o′zgaruvchilar orasidagi bog'lanish uchinchi bir t o′zgaruvchi (parametr) orqali *x*=φ(t) va y=ψ (t), α≤ t ≤ β, funktsiyalar ko′rinishda berilgan bo′lsa, *x* va *y* orasidagi *y*=f(*x*) funktsiya** <u>parametrik</u> **ko′rinishda berilgan deyiladi.**

Masalan, $x=t^2$, $y=t^6$ parametrik ko′rinishda berilgan funktsiya $y=f(x)=x^3$ funktsiyani ifodalaydi.

Parametrik ko′rinishda berilgan funktsiyani har doim ham dastlab *y*=f(*x*) ko′rinishda yozib, so′ngra uning hosilasini hisoblab bo′lmaydi. Shu sababli parametrik ko′rinishda berilgan funktsiyaning hosilasini topish masalasini ko′ramiz. Aytaylik *y*=f(*x*) funktsiya *x*=φ(t) va *y*=ψ(t) parametrik ko′rinishda berilgan bo′lsin. Agar φ va ψ funktsiyalar keraklicha differentsiallanuvchi bo′lsalar, u holda quyidagi formulalar o′rinli bo′ladi:

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},$$

$$y''(x)=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d(dy/dt)}{dx}=\frac{d(dy/dx)/d(t)}{dx/d(t)}=\frac{d(\psi'(t)/\varphi'(t))}{\varphi'(t)}=$$
$$=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{(\varphi'(t))^3}.$$

Bu tengliklar parametrik ko′rinishda berilgan funktsiya hosilasini topishni ifodalaydi.

4- M i s o l: y=f(x) funktsiya x=2cost va y=3sint funktsiyalar orqali parametrik ko′rinishda berilgan bo′lsin. $y'(x)$ va $y''(x)$ hosilalar topilsin.

E ch i sh: Yuqoridagi formulalarga asosan

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{3\cos t}{-2\sin t}=-\frac{3}{2}ctgt;\quad y''=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{3}{2}\frac{1}{\sin^2 t}\frac{1}{(-2\sin t)^3}=-\frac{3}{16}\frac{1}{\sin^5 t}.$$

O′z-o′zini nazorat etish savollari:

1. Funktsiya differentsiali qanday ta'riflanadi?
2. Funktsiya differentsiali hosila orqali qanday topiladi?
3. Funktsiya orttirmasi va differentsiali orasida qanday bog’lanish mavjud?
4. Differentsialning geometrik ma'nosini ko′rsating.
5. Differentsiallash qoidalari nimalardan iborat?
6. Differentsialning invariantlik xossasi nimadan iborat?
7. Yuqori tartibli hosilalar qanday aniqlanadi?
8. Yuqori tartibli differentsiallar qanday ifodalanadi?
9. Parametrik ko′rinishda berilgan funktsiyaning hosilasi qanday topiladi?

28-MA'RUZA

FUNKTSIYANI HOSILA YORDAMIDA TEKSHIRISH.

Tayanch iboralar: funktsiya monotonligining zaruriy va etarli sharti, funktsiya ekstremumlari, ekstremumning zaruriy sharti, kritik nuqta, ekstremumning etarli sharti, ekstremumni II tartibli hosila orqali tekshirish.

M a ' r u z a r e j a s i :

1. Funktsiyaning monotonlik oraliqlari.
2. Differentsiallanuvchi funktsiyaning monotonlik oraliqlarini topish.
3. Funktsiya ekstremumlari.
4. Ekstremumning zaruriy sharti.
5. Kritik nuqtalar.
6. Ekstremumning zaruriy shartini I tartibli hosila orqali ifodalash.
7. Ekstremumning zaruriy shartini II tartibli hosila orqadi ifodalash.

Adabiyotlar:

[1] IV bob, §1-6 [2] V bob, §1-6

y=f(x) funktsiya differentsiallanuvchi bo′lsa, uning juda ko′p xususiyatlarini $f'(x)$ hosila yordamida aniqlash mumkin. Shu sababli hosila funktsiyani tekshirish uchun asosiy va kuchli qurol bo′lib hisoblanadi.

I. Funktsiyaning monotonlik oraliqlari.

T A ' R I F 1: Agarda y=f(x) funktsiya (a,b) oraliqda aniklangan va bu oraliqdagi ixtiyoriy $x_1<x_2$ nuqtalarda $f(x_1)<f(x_2)$ ($f(x_1)>f(x_2)$) shartni qanoatlantirsa, u shu oraliqda ***o′suvchi (kamayuvchi***) deb ataladi.

Masalan, $y=x^2$ fuktsiya (-∞ ,0) oraliqda kamayuvchi, (0,∞) oraliqda esa o′suvchi bo′ladi.

Funktsiyaning o′sish va kamayish oraliqlari birgalikda uning ***monotonlik oraliqlari*** deyiladi. Bu oraliqlarni hosila orqali qanday topish mumkinligi ushbu teoremadan kelib chiqadi.

TEOREMA 1: ***a***) Agarda differentsiallanuvchi f(x) funktsiya biror oraliqda o′suvchi (kamayuvchi) bo′lsa, uning hosilasi bu oraliqda $f'(x)\geq 0$ ($f'(x)\leq 0$) shartni qanoatlantiradi.

в) Agarda biror oraliqda funktsiyaning hosilasi $f'(x)>0$, ($f'(x)<0$) shartni qanoatlantirsa, u holda shu oraliqda funktsiya o′suvchi (kamayuvchi) bo′ladi.

Izoh: Teoremaning **a)** va **в)** qismlari funktsiya monotonligining zaruriy va etarli shartlarini ifodalaydi.

Isbot: **a)** y=f(x) funktsiya (a,b) oraliqda o′suvchi va x, $x+\Delta x$ nuqtalar shu oraliqqa tegishli bo′lsin.Agarda $\Delta x>0$ bo′lsa,

$$x+\Delta x>x \Rightarrow f(x+\Delta x) > f(x) \Rightarrow \Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) >0 \Rightarrow \Delta f/\Delta x>0$$

munosobatlar o′rinli bo′ladi. Xuddi shunday $\Delta x<0$ bo′lganda ham $\Delta f/\Delta x>0$ bo′ladi. Bu erdan, hosila ta'rifi va limit xossasiga asosan,

$$f'(x)= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} \geq 0$$

ekanligi kelib chiqadi.

Xuddi shunday usulda kamayuvchi y=f(x) funktsiya uchun $f'(x)\leq 0$ ekanligi isbotlanadi.

в) Funktsiyaning hosilasi (a,b) oraliqdagi har bir x nuqtada $f'(x)>0$ shartni qanoatlantirsin. Bu holda, chekli orttirmalar haqidagi Logranj teoremasiga asosan, bu oraliqdagi har qanday $x_1<x_2$ nuqtalar uchun

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2-x_1)\, f'(\xi)\,,\ x_1 < \xi < x_2$$

tenglik bajariladi.Bu tenglikda $x_2-x_1>0$ va $f'(\xi)>0$ bo'lgani uchun undan $f(x_2)-f(x_1)>0 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$ ekanligi, ya'ni funktsiya o′suvchi ekanligi kelib chiqadi.

Xuddi shunday usulda $f'(x)<0$ bo′lsa, funktsiya kamayuvchi ekanligi isbotlanadi.

Demak, berilgan y=f(x) funktsiyaning o′sish (kamayish) oraliqlarini topish uchun $f'(x)$>0 ($f'(x)$< 0) tengsizlikni echish kerak.

Masalan, f(x)=x+1/x funktsiya uchun $f'(x)=1-1/x^2>0$ tengsizlikning echimi (-∞ ,-1) ∪ (1, ∞) sohadan iborat va bu sohada berilgan funktsiya o′suvchi bo′ladi. x=0 nuqtada funktsiya aniqlanmaganligini hisobga olib, u (-1, 0)∪ (0,1) sohada kamayuvchi ekanligini ko′ramiz.

II. Funktsiya ekstremumlari.

T A ' R I F 2: y= f(x) funktsiya biror x_0 nuqta va uning atrofidagi ixtiyoriy x nuqtalar uchun aniqlangan bo′lib, $f(x_0)\geq f(x)$ ($f(x_0)\leq f(x)$) shartni qanoatlantirsa, u shu x_0 nuqtada ***maksimumga (minimumga)*** erishadi deb ataladi.

Masalan, f(x)=sin$x$ funktsiya x=π/2 nuqtada sin(π/2)=1 maksimumga, x=3π/2 nuqtada esa sin(3π/2)=-1 minimumga erishadi.

Funktsiyaning maksimum va minimum qiymatlari birgalikda uning ***ekstremumlari*** deyiladi.

TEOREMA 2. (Ekstremumning zaruriy sharti): Agarda differentsiallanuvchi y=f(x) funktsiya x_0 nuqtada ekstremumga ega bo′lsa, u holda uning hosilasi bu nuqtada $f'(x_0)$ =0 shartni qanoatlantiradi.

Isbot: Aniqlik uchun funktsiya x_0 nuqtada maksimumga ega bo′lsin. Bu holda $|\Delta x|$ etarli kichik bo′lsa, $f(x_0+\Delta x) \leq f(x_0) \Rightarrow \Delta f=f(x_0+\Delta x)- f(x_0) \leq 0$ tengsizlik bajariladi. Bundan Δx >0 (Δx <0) bo′lganda, $\Delta f/\Delta x \le 0$ ($\Delta f/\Delta x \ge 0$) ekanligi kelib chiqadi . Shu sababli bir tomondan

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \le 0\,,$$

ikkinchi tomondan esa

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \ge 0\,.$$

Teorema shartiga $f'(x_0)$ ko′ra hosila mavjud bo′lgani uchun, bu ikkala tengsizlikdan $f'(x_0)$=0 ekanligi kelib chiqadi.

Funktsiya x_0 da minimumga ega bo′lgan hol ham xuddi shunday qaraladi.

Masalan, f(x)=sin$x$ funktsiya x=π/2 nuqtada maksimumga ega va bu nuqtada uning hosilasi f ′(π/2)=cos (π/2)=0 tenglikni qanoatlantiradi.

f(x) =$|x|$ funktsiya x=0 nuqtada minimumga ega, ammo uning hosilasi bu nuqtada mavjud emas.

Xulosa : Uzluksiz funktsiya ekstremumga hosilasi nolga teng yoki mavjud bo′lmagan nuqtalardagina ega bo′lishi mumkin.

T A ' R I F 3: Funktsiya hosilasi nolga teng yoki mavjud bo′lmagan nuqtalar shu funktsiyaning ***kritik yoki statsionar nuqtalari*** deyiladi.

Demak, funktsiya x_0 nuqtada ekstremumga ega bo′lsa, x_0 nuqta uning kritik nuqtasi bo′ladi. Ammo bu tasdiqning teskarisi har doim ham o′rinli bo′lmaydi, ya'ni ekstremumning yuqorida ko′rsatilgan zaruriy sharti doimo ham etarli emas.

Masalan, $y=x^3$ funktsiya uchun $x=0$ kritik nuqta bo′ladi, lekin bu nuqtada funktsiya ekstremumga ega emas.

TEOREMA 3. (Ekstremumning etarli sharti.): Agarda x_0 kritik nuqtani chapdan o′ngga qarab bosib o′tishda $f'(x)$ hosila o′z ishorasini o′zgartirsa (ya'ni x_0 kritik nuqtaning biror atrofidagi har qanday $x_1<x_0$, $x_2>x_0$ nuqtalar uchun $f'(x_1)\cdot f'(x_2)<0$ shart bajarilsa), u holda x_0 kritik nuqtada f(x) funktsiya ekstremumga erishadi. Jumladan, $f'(x_1)>0$, $f'(x_2)<0$ ($f'(x_1)<0$, $f'(x_2)>0$) bo′lsa, x_0 kritik nuqtada funktsiya o′zining maksimumiga (minimumiga) erishadi.

Isbot: Dastlab $f'(x)<0$ $(x<x_0)$ va $f'(x)>0$ $(x > x_0)$ holni ko′ramiz. Bu holda, 1-teoremaga asosan, x_0 nuqtaning chap atrofida funktsiya kamayuvchi, o′ng atrofida esa o′suvchi bo′ladi. Demak, x_0 nuqtada funktsiya minimumga erishadi. Xuddi shunday tarzda $f'(x)>0$ $(x<x_0)$ va $f'(x)<0$ $(x>x_0)$ shartlarda funktsiya x_0 nuqtada maksimumga ega bo′lishi isbotlanadi.

Masalan, $f(x)=x^2+1$ funktsiya hosilasi $f'(x)=2x$ bo′lib, $x_0=0$ kritik nuqta bo′ladi. Bu funktsiya hosilasi $x<0$ bo′lganda manfiy va $x>0$ bo′lganda musbat qiymat qabul qiladi. Demak, funktsiya $x_0=0$ kritik nuqtada minimumga ega va uning minimum qiymati f(0)=1 bo′ladi.

Izoh: Agarda funktsiya hosilasi x_0 kritik nuqtadan o′tishda ishorasini o′zgartirmasa, bu nuqtada funktsiya ekstremumga ega bo′lmaydi.

Haqiqatan ham, $x<x_0$ yoki $x>x_0$ bo′lganda $f'(x)>0$ ($f'(x)<0$) bo′lsin. Bu holda x_0 nuqtaning chap atrofida ham, o′ng atrofida ham f(x) funktsiya o′suvchi (kamayuvchi) bo′ladi va shu sababli x_0 nuqtada ekstremumga ega bo′lmaydi.

Masalan, $f(x)=x^3$ funktsiyaning hosilasi $f'(x)=3x^2$ kritik $x=0$ nuqta atrofida faqat musbat qiymatlarni qabul qiladi va shu sababli bu nuqtada funktsiya ekstremumga ega emas.

Agarda funktsiya o′zining x_0 kritik nuqtasida ikki marta differentsiallanuvchi bo′lsa, uning ekstremumini quyidagi teorema orqali aniqlash qulayroqdir.

TEOREMA 4: Agarda x_0 kritik nuqtada $f'(x_0)=0$ va $f''(x_0)\neq 0$ bo′lsa, x_0 nuqtada f(x) funktsiya ekstremumga ega. Jumladan, $f''(x_0)<0$ bo′lsa, f(x_0) funktsiyaning maksimumi, $f''(x_0)>0$ bo′lsa, f(x_0) funktsiyaning minimumi bo′ladi.

Bu teoremani isbotsiz qabul qilamiz.

Masalan, $f(x)=x^4-4x$ funktsiya uchun $f'(x)=4x^3-4=4(x^3-1)=0$ tenglamadan $x_0=1$ kritik nuqta ekanligini aniqlaymiz. Funktsiyaning II tartibli hosilasi $f''(x)=12x^2$ bu kritik nuqtada $f''(1)=12>0$ qiymatni qabul qiladi. Demak, berilgan funktsiya $x_0=1$ kritik nuqtada minimumga ega va bu minimum $f(1)=1-4=-3$ bo′ladi.

Izoh: Agarda x_0 kritik nuqtada ikkinchi tartibli hosila $f''(x_0)=0$ bo′lsa, unda funktsiyaning x_0 nuqtada ekstremumga ega bo′lishi yoki bo′lmasligi, birinchi tartibli hosila orqali, 3-teorema yordamida aniqlanadi.

O′z-o′zini nazorat etish savollari:

1. Funktsiyaning o′sish (kamayish) oraliqlari deb nimaga aytiladi?
2. Funktsiyaning monotonlik oraliqlari qanday aniqlanadi?
3. Differentsiallanuvchi funktsiyalarning monotonlik oraliqlari qanday topiladi?
4. Funktsiyaning maksimumi (minimumi) deb nimaga aytiladi?
5. Funktsiyaning ekstremumlari qanday ta'riflanadi?
6. Ekstremumning zaruriy sharti nimadan iborat?
7. Ekstremumning zaruriy sharti etarli bo′ladimi? Misol keltiring.
8. Kritik nuqta deb nimaga aytiladi?
9. Ekstremumning etarli sharti I tartibli hosila orqali qanday ifodalanadi?
10. Ekstremumning etarli sharti II tartibli hosila orqali qanday ifodalanadi?

29-MA'RUZA

FUNKTSIYANI HOSILA YORDAMIDA TEKSHIRISH (DAVOMI).

Tayanch iboralar: funktsiya grafigining qavariqligi va botiqligi, qavariqlik va botiqlikning zaruriy va etarli sharti, burilish nuqtasi va uni topish, funktsiya asimptotalari, funktsiyani to′liq tekshirish. bosqichlari

Ma'ruza rejasi:

1. Funktsiyaning botiqlik va qavariqlik sohalari.
2. Funktsiyaning botiqlik va qavariqlik sohalarini topish.
3. Funktsiyaning burilish nuqtalari va ularni topish.
4. Funktsiya asimptotalari va ularni topish.
5. Funktsiyani to′liq tekshirish.

Adabiyotlar:

[1] IV bob, §7-9 [2] V bob, §9-11

Oldingi ma'ruzada hosila yordamida funktsiyani monotonlik oraliqlari va ekstremumlarini topish masalasini ko′rgan edik. Bu tushunchalar quyidagi geometrik ma'noga ega. Funktsiyaning o′sish sohasida uning argumenti *x* chapdan o′ngga qarab o′zgarganda, funktsiya grafigi pastdan yuqoriga qarab o′sib boradi. Kamayish sohasida esa aksincha, ya'ni funktsiya grafigi yuqoridan pastga qarab kamayib boradi. Funktsiyaning ekstremumlari uning grafigida yuqori yoki pastki uchlarni ifodalaydi.

Bu ma'ruzada funktsiyani hosila yordamida o′rganishni davom ettiramiz.

III. Funktsiya grafigining qavariqlik va botiqlik sohalari.

T A ' R I F 4: y= f(x) funktsiya grafigi (a,b) oraliqda ***qavariq (botiq)*** deyiladi, agarda u o′zining har qanday M (x, f(x)), nuqtasiga o′tkazilgan urinmasidan pastda (yuqorida) joylashgan bo′lsa.

Masalan, y=sin$x$ funktsiyaning grafigi $(0,\pi)$ oraliqda qavariq, $(\pi,2\pi)$ oraliqda esa botiq bo′ladi.

TEOREMA 5: Agarda f(x) funktsiya (a,b) oraliqning har bir nuqtasida ikki marta differentsiallanuvchi va ixtiyoriy $x\in(a,b)$ nuqtada $f''(x)>0$ ($f''(x)<0$) shart bajarilsa, funktsiya grafigi bu oraliqda botiq (qavariq) bo′ladi.

Bu teoremaning isbotini adabiyotlar ro′yxatida ko′rsatilgan darsliklardan ko′rish mumkin.

Misol: $f(x)=x^3$ funktsiya uchun $f''(x)=6x>0$ tengsizlik echimi $(0,\infty)$ sohadan iborat bo′ladi va bu sohada uning grafigi botiq bo′ladi.Xuddi shunday $f''(x)=6x<0$ tengsizlik echimi bo′lmish $(-\infty;0)$ sohada funktsiya grafigi qavariq bo′ladi.

T A ' R I F 5: Funktsiya grafigi biror $M(x_0, f(x_0))$ nuqtadan o′tayotganda botiqligini qavariqlikka yoki aksincha qavariqligini botiqlikka o′zgartirsa, bu nuqta uning ***burilish (egar) nuqtasi*** deyiladi.

Masalan, ko′rib o′tilgan $f(x)=x^3$ funktsiya uchun koordinatalar boshi O(0,0) burilish nuqtasi bo′ladi.

TEOREMA 6: Agarda biror x_0 nuqtada ikkinchi tartibli hosila $f''(x_0)=0$ bo′lib, bu nuqtadan o′tishda $f''(x)$ o′z ishorasini o′zgartirsa, $M(x_0, f(x_0))$ nuqta funktsiya grafigining burilish nuqtasi bo′ladi.

Isbot: $f''(x)<0$, $x<x_0$ va $f''(x)>0$, $x>x_0$ holni ko′ramiz. Oldingi teoremaga asosan, x_0 nuqtaning chap tomonida funktsiya grafigi qavariq, o′ng tomonida esa botiq bo′ladi. Demak, $M(x_0, f(x_0))$ nuqta atrofida funktsiya grafigi botiqlikni qavariqlikka o′zgartiradi, ya'ni bu nuqta grafikning burilish nuqtasi bo′ladi.

Misol sifatida $f(x)=x^3-3x^2$ funktsiya grafigining burilish nuqtasini topamiz. Bu erda $f''(x)=6x-6=0$ tenglamadan $x_0=1$ natijani olamiz.Bu erda $x<1$ bo′lganda f

$''(x)<0$ (grafik qavariq) va $x>1$ bo′lganda f $''(x)>0$ (grafik botiq) bo′lgani uchun M(1,-2) funktsiya grafigining burilish nuqtasi bo′ladi.

IV. Funktsiya grafiginig asimptotalari.

TA' R I F 6 : $y= kx+b$ tenglama bilan berilgan to′g'ri chiziq f(x) funktsiya grafigining ***og'ma asimptotasi*** deyiladi, agarda

$$\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-kx-b\right]=0$$

shart bajarilsa.

T A' R I F 7: $x=a$ tenglamali vertikal to′g'ri chiziq y= f(x) funktsiya grafigining vertikal asimptotasi deyiladi, agarda x argument a nuqtaga yaqinlashib borganda, funktsiyaning chap va o′ng

$$\lim_{x\to a-0} f(x) \quad , \quad \lim_{x\to a+0} f(x)$$

limitlaridan kamida bittasi cheksiz bo′lsa.

Odatda vertikal asimptotalar funktsiyaning aniqlanish sohasi bo′yicha uning uzilish nuqtalari orqali topiladi. Masalan, f(x) =1/(x^3-1) funktsiya grafigi uchun x=1 to′gri chiziq vertikal asimptota bo′ladi.

Funktsiyaning og'ma asimptotalarining mavjudligi va ularning tenglamasi quyidagi teorema bo′yicha aniqlanadi.

TEOREMA 7: *y*=f(*x*) funktsiya grafigi og’ma asimptotaga ega bo′lishi uchun

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=k, \qquad \lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]=b$$

limitlar mavjud hamda chekli bo′lishi zarur va etarlidir. Bu holda og’ma asimptota *y*= *kx*+*b* tenglama bilan topiladi.

<u>Isbot:</u> Zaruriylik sharti. Berilgan shartlarni zaruriyligini ko′rsatamiz. *y*= *kx*+*b* to′g’ri chiziq og’ma asimptota bo′lsin.Unda 6-ta'rif va limit xossalariga asosan quyidagilarni yozish mumkin:

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx-b]=\lim_{x\to\infty}x[\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}]=0\Rightarrow$$
$$\lim_{x\to\infty}[\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}]=0\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}-k-\lim_{x\to\infty}\frac{b}{x}=0$$

Bu erdan, eng so′nggi limit qiymati nol bo′lgani uchun,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=k$$

ekanligi kelib chiqadi. Og’ma asimptota ta'rifidan yana bir marta foydalanib,

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]=b$$

natijani olamiz.

Etarlilik sharti. Teorema shartidagi ikkinchi limitga asosan

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx-b]=0$$

tenglikni yoza olamiz. Bu erdan, 6-ta'rifga asosan, $y=kx+b$ to′g’ri chiziq funktsiyaning grafigi uchun og’ma asimptota bo′lishi kelib chiqadi.

Masalan, $f(x)=(2x^2+3x-5)/x$ funktsiya uchun

$$k=\lim_{x\to\infty} f(x)/x = 2, \quad b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-2x]=3$$

ekanligini topamiz. Demak, bu funktsiyaning grafigi uchun $y=2x-3$ to′g’ri chiziq og’ma asimptota bo′ladi.

Yuqorida olingan natijalar bo′yicha $y=f(x)$ funktsiya xususiyatlarini quyidagi tartibda to′lik tadqiqot qilish mumkin:

1. Funktsiyaning D{f} aniqlanish sohasini topamiz;
2. Funktsiyani juft yoki toqlikka tekshiramiz;
3. Funktsiyani davriylikka tekshiramiz, davriy bo′lsa, uning davrini aniqlaymiz;
4. Funktsiyaning uzilish nuqtalarini topamiz va ularning turini aniqlaymiz;
5. $f(x)=0$ tenglamadan funktsiya nollarini topamiz va ular orqali funktsiya o′z ishorasini saqlaydigan oraliqlarni va OX o′qi bilan kesishish nuqtalarini aniqlaymiz;
6. $f'(x)>0$ va $f'(x)<0$ tengsizliklarni echib, funktsiyaning o′sish va kamayish, ya'ni monotonlik sohalarini aniqlaymiz;

7. $f''(x)=0$ yoki $f''(x)=\pm\infty$ shartlardan kritik nuqtalarni topamiz va bu nuqtalarda funktsiyani I yoki II tartibli hosila yordamida ekstremumga tekshiramiz.
8. $f''(x)>0$ va $f''(x)<0$ tengsizliklarni echib, funktsiya grafigining botiqlik va qavariklik sohalarini topamiz;
9. $f''(x)=0$ yoki $f''(x)=\pm\infty$ shartlarni qanoatlantiruvchi nuqtalarni topib, ularning orasidan funktsiya grafigining burilish nuqtalarini aniqlaymiz;
10. Funktsiya grafigining asimptotalarini, agarda ular mavjud bo′lsa, topamiz.
11. **1-10** qadamlarda olingan natijalar asosida funktsiya grafigini chizamiz.

O′z-o′zini nazorat etish savollari:

1. Funktsiyaning botiqlik (qavariqlik) sohalari qanday ta'riflanadi?
2. Differentsiallanuvchi funktsiyaning botiqlik (qavariqlik) sohalari qanday topiladi?
3. Funktsiyaning burilish nuqtasi nima?
4. Differentsiallanuvchi funktsiyaning burilish nuqtalari qanday topiladi?
5. Funktsiya grafigining og’ma asimptotalari qanday ta'riflanadi?
6. Funktsiya grafigining vertikal asimptotalari qanday ta'riflanadi?
7. Vertikal asimptotalar qanday topiladi?
8. Og’ma asimptotalar mavjudliganing zaruriy va etarli sharti nimadan iborat?
9. Funktsiyani to′liq tekshirish bosqichlarini ko′rsating.

30 - MA'RUZA

ANIQMASLIKLAR VA ULARNI LOPITAL QOIDALARI YORDAMIDA OCHISH.

Tayanch iboralar: 0/0, ∞/∞ ko′rinishdagi aniqmasliklar, aniqmasliklarni ochish, Lopitalning birinchi qoidasi, Lopitalning ikkinchi qoidasi, Lopital qoidalarning tadbiqlari, $0\cdot\infty$, 1^{∞}, 0^{0}, ∞^{0}, $\infty - \infty$ ko′rinishdagi aniqmasliklar va ularni ochish.

M a ' r u z a   r e j a s i :

1. 0/0 , ∞/∞ ko′rinishdagi aniqmasliklar va ularni ochish.
2. Lopitalning I qoidasi.
3. Lopitalning II qoidasi.
4. Lopital qoidalari yordamida ajoyib limitlarni isbotlash.
5. Boshqa ko′rinishdagi aniqmasliklar va ularni ochish.

Adabiyotlar:

[1] III bob, §20   [2] IV bob, §4-5

T A ' R I F 1: Agar f (x) va g (x) funktsiyalar $x\to a$ da cheksiz kichik miqdorlar bo′lsa, ya'ni

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

munosabatlar o′rinli bo′lsa, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ funktsiya $x\to a$ da $\dfrac{0}{0}$ ***ko′rinishdagi aniqmaslik*** deyiladi.

Masalan, $\dfrac{\sin x}{x}$ funktsiya $x\to 0$ da, $\dfrac{x^2-1}{x^3-1}$ funktsiya $x\to 1$ da, $\dfrac{\ln(1+\frac{1}{x})}{e^{\frac{1}{x}}-1}$ funktsiya esa $x\to\infty$ da $\dfrac{0}{0}$ ko′rinishdagi aniqmasliklardan iborat.

T A ' R I F 2: Agar f (x) va g (x) funktsiyalar $x\to a$ da cheksiz katta miqdorlar bo′lsa, ya'ni

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty, \qquad \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$$

munosabatlar o′rinli bo′lsa, $\frac{f(x)}{g(x)}$ funktsiya $x\to a$ da $\frac{\infty}{\infty}$ ***ko′rinishdagi aniqmaslik*** deyiladi.

Masalan, $\frac{\ln|\sin x|}{\ln|x|}$ funktsiya $x\to 0$ da, $\frac{(x+1)^2}{x^2+1}$ funktsiya $x\to\infty$ da $\frac{\infty}{\infty}$ ko′rinishdagi aniqmaslikdir.

T A ' R I F 3 : $\frac{0}{0}$ yoki $\frac{\infty}{\infty}$ ko′rinishdagi $\frac{f(x)}{g(x)}$ aniqmaslikning $x\to a$ dagi limitini topish shu ***aniqmaslikni ochish*** deb ataladi.

Shuni ta'kidlab o′tish kerakki, aniqmaslikni ochish, ya'ni $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ limitni hisoblash uchun bo′linmaning limiti formulasidan foydalanib bo′lmaydi, chunki yoki $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ (maxraj nolga teng) yoki surat va maxraj limitlari chekli emas.

Limitlar mavzusi bo′yicha misollar echganimizda aniqmasliklarni ochish masalasi bilan shug'ullangan edik. Ammo unda har bir aniqmaslikni ochish uchun ko′paytuvchilarga ajratish, qo′shmasiga ko′paytirish, eng katta darajasiga bo′lish, ajoyib limitlarga keltirish kabi sun'iy usullardan foydalanilgan edi. Shunday qilib, har bir aniqmaslikni ochish uchun o′ziga xos xususiy usuldan foydalangan edik. Endi aniqmasliklarni ochishning umumiy qoidasini ko′rib chiqamiz. Bu qoidani frantsuz matematigi Fransua Lopital (1661-1704y.) o′zining 1696 yilda bosmadan chiqqan «Cheksiz kichik miqdorlar tahlili» degan kitobida birinchi marta keltirgan va shuning uchun u Lopital qoidasi nomi bilan tarixga kirgan. Aslida bu qoidani Lopitalning ustozi va do′sti, shveytsariyalik matematik Iogann Bernulli (1667-1748) topgan. I. Bernulli Parijga kelgan paytida boy oiladan chiqqan va matematika bilan qiziquvchi Lopital bilan tanishadi. Lopitalning iltimosiga ko′ra u o′sha paytlarda Leybnits va Nyuton tomonidan yangi yaratilgan differentsial xisob bo′yicha Lopitalga ma'ruzalar o′qiydi. Lopitalning xizmati shundan iboratki, u bu ma'ruzalar asosida differentsial xisob bo′yicha yuqorida ko′rsatilgan birinchi darslikni yozdi.

T E O R E M A 1 : f (x) va g (x) funktsiyalar a nuqta atrofida aniqlangan va differentsillanuvchi bo′lib, $g'(x)\neq 0$ va

$$\lim_{x\to a} f(x)=0\ , \qquad \lim_{x\to a} g(x)=0 \qquad (1)$$

tengliklar bajarilsin. Bu holda, agarda $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ mavjud bo′lsa, $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ ham mavjud bo′ladi va ushbu tenglik o′rinli bo′ladi:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad (2).$$

Isbot: Avval $a<\infty$ holni ko′ramiz. Teorema shartiga ko′ra a nuqta atrofida f (x) va g (x) funktsiyalar differentsiallanuvchi bo′lgani uchun, ular bu erda uzluksiz bo′ladilar va shuning uchun ham, (1) shartga ko′ra,

$$f(a)=\lim_{x\to a} f(x)=0, \qquad g(a)=\lim_{x\to a} g(x)=0 \qquad (3)$$

tengliklar o′rinli bo′ladi. a nuqta atrofidagi ixtiyoriy (a,x) oraliqni qaraymiz. Teorema shartlariga asosan bu oraliqda f(x) va g(x) funktsiyalar uzluksiz, differentsiallanuvchi va $g'(x)\neq 0$, ya'ni ular Koshi teoremasi shartlariga bo′ysunadi. Shuning uchun, Koshi teoremasiga asosan, shunday $c\in(a, x)$ nuqta mavjudki,

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)} \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad (4)$$

Bu erda (3) tengliklardan xam foydalanildi. (4) tenglikda $x\to a$ da limit olamiz va bunda $c\to a$ bo′lishidan, chunki $c\in(a, x)$, foydalanib, ushbu natijalarni olamiz:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)}=\lim_{c\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad (5)$$

Limitning qiymati undagi o′zgaruvchi miqdorni qanday belgilanishiga bogliq emas va shuning uchun (5) tenglikni quyidagicha yozish mumkin:

$$\lim_{c\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad (6)$$

(5) va (6) tengliklardan isbotlanishi kerak bo′lgan

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad (7)$$

natijani olamiz.

Endi $a=\infty$ holni ko′ramiz, ya'ni $x\to\infty$. Bu holda $z=\frac{1}{x}$ yangi o′zgaruvchini kiritsak, unda $x\to\infty$ bo′lganda $z\to 0$ bo′ladi. Bu erda $x=\frac{1}{z}$ bo′lgani uchun va (7) tenglikka asosan

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{z\to 0}\frac{f(\frac{1}{z})}{g(\frac{1}{z})}=\lim_{z\to 0}\frac{\left[f(\frac{1}{z})\right]'}{\left[g(\frac{1}{z})\right]'}=\lim_{z\to 0}\frac{f'(\frac{1}{z})(\frac{1}{z})'}{g'(\frac{1}{z})(\frac{1}{z})'}=\lim_{z\to 0}\frac{f'(\frac{1}{z})}{g'(\frac{1}{z})}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

natijani olamiz.Teorema to′liq isbot bo′ldi.

T E O R E M A 2 : f(x) va g(x) funktsiyalar 1–teorema shartlarini qanoatlantirsin, ammo

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty, \qquad \lim_{x\to a} g(x)=\infty \qquad\qquad (8)$$

munosabat o′rinli bo′lsin. Bu holda ham (2) tenglik o′z kuchini saqlab qoladi.

Bu teorema isbotini darsliklardan ko′rib chiqish mumkin.

Ko′rib o′tilgan teoremalardagi (2) tenglik bilan ifodalanadigan tasdiqlar mos ravishda ***Lopitalning I va II qoidalari*** deb ataladi.

Shunday qilib $\frac{0}{0}$ yoki $\frac{\infty}{\infty}$ ko′rinishdagi $\frac{f(x)}{g(x)}$ aniqmaslikni Lopital qoidasi yordamida ochish uchun f(x) surat va g (x) maxrajdan alohida-alohida hosila olib, $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ hosilalar nisbatining limitini topish kerak.

Lopital qoidasining tadbiqlari sifatida oldin ko′rib o′tilgan va matematikada ajoyib limitlar deb ataluvchi bir nechta limitni hisoblaymiz.

1. f(x)=sin$x$, g(x)=x funktsiyalar $x\to 0$ da cheksiz kichik miqdorlar bo′ladi va shuning uchun $\frac{\sin x}{x}$ ifoda $x\to 0$ da $\frac{0}{0}$ ko′rinishdagi aniqmaslik bo′ladi . Lopitalning I qoidasiga asosan

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=1.$$

Bu natija 1 ajoyib limitni ifodalaydi.

2. f (x) =ln(1+x), g(x)=x funktsiyalar uchun f(0) =ln1=0, g(0)=0. Demak, $x\to 0$ bo′lganda $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\ln(1+x)}{x}$ ifoda $\frac{0}{0}$ ko′rinishdagi aniqmaslikdan iborat.

Bu aniqmaslikni ochish uchun Lopitalning I qoidasiga murojaat qilamiz:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{[\ln(1+x)]'}{x'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}\cdot(1+x)'}{1}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x}=\frac{1}{1+0}=1.$$

Bu limit matematikada III ajoyib limit deb ataladi.

Xuddi shunday ravishda

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e=\frac{1}{\ln a}$$

ekanligini ko′rsatish mumkin.

3. f(x) =e^x −1, g (x)=x differentsiallanuvchi funktsiyalar uchun f(0)=0, g(0)=0 bo′ladi. Unda

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=(\frac{0}{0})=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)'}{x'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1}=\frac{e^0}{1}=1.$$

Bu natija IV ajoyib limit deyiladi.

Talabalarga mustaqil ish sifatida

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$$

ekanligini ko′rsatish tavsiya etiladi.

4. f(x)=(1+x)$^\alpha$ −1 (α -$\forall$ haqiqiy son) va g (x)=x funktsiyalar x=0 nuqta atrofida differentsiallanuvchi va f(0)=0, g(0)=0. Bu holda

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=(\frac{0}{0})=\lim_{x\to 0}\frac{\left[(1+x)^\alpha-1\right]'}{x'}=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(1+x)^{\alpha-1}}{1}=\alpha\cdot(1+0)^{\alpha-1}=\alpha\,.$$

Bu natija V ajoyib limit deyiladi.

Izohlar: **1.** Agarda (2) formulada $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ ifoda $x\to a$ bo′lganda yana 0/0 yoki ∞/∞ ko′rinishdagi aniqmaslikdan iborat bo′lib, $f'(x)$ va g′(x) hosilalar 1-teorema yoki 2-teorema shartlarini qanoatlantirsin. Bu holda $\lim\limits_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}$ mavjud bo′lsa, quyidagi tenglik o′rinli bo′ladi:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)} \qquad (9)$$

Shunday qilib, aniqmaslikni ochish uchun Lopital qoidasini bir necha marta ketma-ket qo′llash mumkin. Buning uchun har gal teorema shartlarini tekshirib ko′rish kerak.

Misol sifatida quyidagi limitni hisoblaymiz:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)^2}{x^2+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left[(x+1)^2\right]'}{\left(x^2+1\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{2(x+1)}{2x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)'}{x'}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+0}{1}=1.$$

2. $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ mavjud bo′lsa, unda $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ mavjud. Ammo teskari tasdiq doimo ham o′rinli bo′lavermaydi, ya'ni $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ mavjud bo′lib, $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ mavjud bo’lmasligi mumkin.

M i s o l : $f(x)=x+\sin x$, $g(x)=x$, $x\to\infty$. Bu holda

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{\sin x}{x})=$$

$$=\lim_{x\to\infty}1+\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=1+0=1$$

Ammo

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+\sin x)'}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}(1+\cos x)=1+\lim_{x\to\infty}cosx$$

bo′lgani uchun bu limit mavjud emas.

Shartli ravishda $\frac{0}{0}$ yoki $\frac{\infty}{\infty}$ kabi belgilangan aniqmasliklardan tashqari shartli ravishda $\infty\cdot 0$, 0^0, ∞^0, 1^∞, $\infty-\infty$ kabi belgilanadigan aniqmasliklar ham mavjud.

T A ' R I F 4 : Agarda $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$ bo′lsa, $f(x)\cdot g(x)$ ifoda $x\to a$ bo′lganda ***$0\cdot\infty$ ko′rinishdagi aniqmaslik*** deyiladi.

Bu aniqmaslikni ochish uchun uni $f(x)\cdot g(x)=\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ ko′rinishda yozib, $\frac{0}{0}$ aniqmaslikka yoki $f(x)\cdot g(x)=\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$ ko′rinishda yozib, $\frac{\infty}{\infty}$ aniqmaslikka keltiriladi va so′ngra Lopital qoidasi qo′llaniladi.

M i s o l:

$$\lim_{x\to 0} x\ln x = (0\cdot\infty) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x} = -\lim_{x\to 0} x = 0.$$

T A ' R I F 5 : Agarda $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1, \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$ bo′lsa, $[f(x)]^{g(x)}$ ifoda $x\to a$ bo′lganda ***1^∞ ko′rinishdagi aniqmaslik*** deyiladi.

Bu aniqmaslikni ochish uchun $y=[f(x)]^{g(x)}$ deb belgilaymiz. Bu tenglikni ikkala tomonidan logarifm olamiz:

$$\ln y=\ln[f(x)]^{g(x)}=g(x)\ln f(x)=[\ln f(x)]g(x),$$

$$\lim_{x\to a} f(x)=1 \Rightarrow \lim_{x\to a}\ln f(x)=\ln[\lim_{x\to a} f(x)]=\ln 1=0 .$$

Demak, $[\ln f(x)]g(x)$ ifoda $0\cdot\infty$ ko′rinishidagi aniqmaslik va uni Lopital qoidasi yordamida ochish mumkin. Faraz qilamiz

$$\lim_{x\to a}\ln y = \lim_{x\to a}\{[\ln f(x)]g(x)\} = b$$

bo′lsin.Bu erdan kelib chiqadiki,

$$\lim_{x\to a}\ln y=\ln[\lim_{x\to a} y]=b \Rightarrow \lim_{x\to a} y=e^b \Rightarrow \lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}=e^b.$$

Misol sifatida $f(x) = 1+\frac{1}{x}$, $g(x)=x$, $x\to\infty$ deb olib,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^X = e,$$

ya'ni ikkinchi ajoyib limitni isbotlaymiz.

$$y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^X \Rightarrow \ln y=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^X = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=(\infty\cdot 0)=\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}=\left(\frac{0}{0}\right),$$

$$\lim_{x\to\infty}\ln y = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)}\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1.$$

Shunday qilib, bizning misolda *b*=1 chiqdi. Demak

$$\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{X} = e^{1} = e.$$

O′z-o′zini nazorat etish savollari:

1. 0/0 ko′rinishdagi aniqmaslik ta'rifini bering.
2. ∞/∞ ko′rinishdagi aniqmaslik qanday ta'riflanadi?
3. Aniqmasliklarni ochish deb nimaga aytiladi?
4. Lopitalning I qoidasi nimadan iborat?
5. Lopitalning II qoidasi nimadan iborat?
6. Lopital qoidasi yordamida I ajoyib limit qanday isbotlanadi?
7. Lopital qoidasiga teskari tasdiq o′rinlimi?
8. 0/0 va ∞/∞ aniqmaslikdan tashqari yana qanday aniqmasliklarni bilasiz?
9. II ajoyib limit Lopital qoidasi yordamida qanday isbotlanadi?

ADABIYOTLAR.

1. **СОАТОВ Ё.У.** «Олий математика», I жилд, Тошкент, Укитувчи, 1992 й.
2. **ПИСКУНОВ Н.С.** «Дифференциал ва интеграл хисоб», 1-том, Тошкент, Укитувчи, 1972 й.
3. **МАДРАХИМОВ Х.С., ГАНИЕВ А.Г., МУМИНОВ Н.С.** «Аналитик геометрия ва чизикли алгебра», Тошкент, Укитувчи, 1988 й.

4. **САРИМСОКОВ Т.А.** «Хакикий узгарувчининг функциялари назарияси» Тошкент, Укитувчи, 1968 й.

5. **Т. ЁКУБОВ** «Математик логика элементлари», Тошкент, Укитувчи, 1983й.

6. **РАЖАБОВ Ф., НУРМЕТОВ А.** «Аналитик геометрия ва чизикли алгебра», Тошкент, Укитувчи, 1990 й.

7. **ШНЕЙДЕР В.Е., СЛУЦКИЙ А.И., ШУМОВ А.С.** «Олий математика киска курси», I том, Тошкент, Укитувчи, 1983 й.

8. **НАЗАРОВ Р.Н., ТОШПУЛАТОВ Б.Т., ДУСУМБЕТОВ А.Д.** «Алгебра ва сонлар назарияси», I кисм, Тошкент, Укитувчи, 1993 й.

9. **НАЗАРОВ Х., ОСТОНОВ К.** «Математика тарихи», Тошкент, Укитувчи, 1996 й.

10. **ИБРОХИМОВ Р**., «Математикадан масалалар туплами», Тошкент, Укитувчи, 1990 й.

11. **АЗЛАРОВ Т., МАНСУРОВ Х.** «Математик анализ», I кисм, Тошкент, Укитувчи, 1994 й.

12. **ТУЛАГАНОВ Т., НОРМАТОВ А.** «Математикадан практикум», Тошкент, Укитувчи, 1983 й.

13. **ТОЖИЕВ Ш.** «Олий математикадан масалалар туплами», Тошкент, Укитувчи, 2003 й.

Амалий машғулотлар мавзулари, асосий матн, топшириқлар. вариантлари, масала ва мисоллар, кўрсатмалар.

1-mavzu.Matritsalar va determinantlar.“Oliy matematika” predmeti asosiy mazmuni va vazifalari. Model va modellashtirish haqidaayrim tushunchalar. Matritsalar va ularning asosiy ko`rinishlari. Matritsalar ustida chiziqli amallar. Transponirlangan matritsa va uning xossalari. Kvadratik matritsaning determinanti. Ikkinchi, uchinchi va yuqori tartibli determinantlar. Minorlar vaalgebraik to`ldiruvchilar. Determinantlarning xossalari. Laplas teoremasi. Determinantning nolga teng bo`lishining yetarli sharti.Yuqori tartibli determinantlarni hisoblash. Matritsa rangi. Matritsa rangini hisoblash. Xosmas matritsa. Teskari matritsa va uning mavjudligi haqidagi teorema. Teskari matritsani qurish usullari. Matritsalar algebrasining iqtisodiyotda qo`llanishi.

1-misol: Quyidagi matritsalar ko`paytmasini toping.

$$A_{3\times 2}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \quad B_{2\times 2}=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Yechim.

$$C_{3\times 2}=A_{3\times 2}\cdot B_{2\times 2}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\cdot(-2)+0\cdot 4 & 2\cdot 3+0\cdot(-1) \\ -1\cdot(-2)+(-2)\cdot 4 & -1\cdot 3-2\cdot(-1) \\ 3\cdot(-2)-5\cdot 4 & 3\cdot 3-5\cdot(-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -6 & -1 \\ -26 & 14 \end{pmatrix}$$

2-misol.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \quad C=BA=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 8 & 14 & 5 \end{pmatrix}$$

Birlik matritsaning xossalari:

а) $A_{n\times n}E_n=E_nA_{n\times n}=A_{n\times n}$; б) $A_{m\times n}E_n=A_{m\times n}$; в) $E_nA_{n\times m}=A_{n\times m}$.

Aniqlovchilar

3- misol. Ushbu aniqlovchi (eki determinant)ni hisoblang:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 4 & -2 & 3 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Yechish. Yuqoridagi formulaga ko`ra quyidagini topamiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 4 & -2 & 3 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 5 & 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$3\left\{3\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}\right\} + 2\left\{2\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}\right\} =$$

$$= 3[3(-2) - 2 + 4 \cdot 4] + 2[2(-2) - 3(-15) + 4(-20)] = 24 - 78 = -54$$

4-misol. Ushbu matritsaning rangini hisoblaymiz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -7 & -4 \\ -5 & -15 & -10 & 35 & 20 \\ 0 & 1 & 21 & 67 & 3 \\ 1 & 4 & 23 & 60 & -1 \end{pmatrix}$$

Avval 2 – satrni 5 ga qisqartirib (ya'ni $\frac{1}{5}$ ga ko'paytirib), so'ngra hosil bo'lgan 2 – satrni 1 ga qo'shamiz:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -2 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 21 & 67 & 3 \\ 1 & 4 & 23 & 60 & -1 \end{pmatrix}$$

Endi, 2 - satrga 4 ga qo`shamiz, 3 ni esa 4 dan ayiramiz (ya`ni - 1 ga ko`paytirib qo`shamiz):

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -2 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 21 & 67 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bu so`ngi matritsada hamma 4 - va 3 - tartibli minorlar nolga teng.
Lekin, 2 - tartibli minorlardan, masalan,

$$\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

minor nolga teng emas. Demak, A matritsaning ham rangi 2 ga teng, ya`ni $r(A) = 2$.

5-misol.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

matritsaga teskari matritsani tuzing.

Yechish: Bu matritsaning determinanti $|A| = -1 \neq 0$ bo`lganligi uchun A matritsa xos emas matritsadir va demak, unga teskari matritsa mavjuddir.
Algebraik to`ldiruvchilarni hisoblaymiz:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}-1 & 2\\ -1 & 3\end{vmatrix}=-1;\quad A_{12}=\begin{vmatrix}-2 & 2\\ 3 & 3\end{vmatrix}=0;\quad A_{13}=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & -1\end{vmatrix}=1;$$

$$A_{21}=\begin{vmatrix}2 & -3\\ -1 & 3\end{vmatrix}=-3;\quad A_{22}=\begin{vmatrix}-2 & -3\\ 3 & 3\end{vmatrix}=3;\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}-2 & 2\\ 3 & -1\end{vmatrix}=4;$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{vmatrix}=1;\quad A_{32}=\begin{vmatrix}-2 & -3\\ 2 & 2\end{vmatrix}=-2;\quad A_{33}=\begin{vmatrix}-2 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-2;$$

Biriktirilgan matritsa C ni tuzamiz:

$$C=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ -3 & 3 & 4\\ 1 & -2 & -2\end{pmatrix};\quad C^T=\begin{pmatrix}-1 & -3 & 1\\ 0 & 3 & -2\\ 1 & 4 & -2\end{pmatrix}$$

Teskari matritsa quyidagicha bo`ladi:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\ 0 & -3 & 2\\ -1 & -4 & 2\end{pmatrix}$$

Tekshirish:

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & 2 & -3\\ 2 & -1 & 2\\ 3 & -1 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\ 0 & -3 & 2\\ -1 & -4 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E$$

1.Berilgan A va B matritsalar uchun C maritsani toping.

1.1. $A=\begin{pmatrix}-4 & 5 & 1\\ 2 & -3 & 8\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-7 & 4\\ 10 & -5\\ 3 & 16\end{pmatrix},\ C=B-2A^T$

1.2. $A=\begin{pmatrix}4 & 1 & 3\\ 0 & -1 & 2\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix},\ C=(3A)^T-B$

1.3. $A=\begin{pmatrix}5 & -2\\ 4 & 3\\ 0 & 2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-4 & -1 & 5\\ 2 & 3 & -5\end{pmatrix},\ C=A+B^T$

1.4. $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 5\\ -1 & 2 & -4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ 4 & 3 & 2\end{pmatrix},\ C=2A+3B$

1.5. $A=\begin{pmatrix}3 & 0\\ -3 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4 & 1\\ -3 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix},\ C=A^T-B^T$

1.6. $A=\begin{pmatrix}2 & -4\\ 3 & 7\\ 6 & -1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4 & 0 & 1\\ 6 & 1 & -3\end{pmatrix},\ C=2A-B^T$

1.7. $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ -2 & -1 & 4\\ 7 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & -1 & 3\\ 2 & -1 & 4\\ 4 & 6 & 2\end{pmatrix}$, $C=(2B)^T+A$

2. A **va** B **matritsani ko`paytmasini hisoblang.**

2.1. $A=(1\ -1\ \ 2\ \ 3)$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\\ 5 & -1\\ 1 & -3\end{pmatrix}$

2.2. $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ 5 & 7 & 1\\ 1 & 4 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & -1 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 5 & 4\end{pmatrix}$

2.3. $A=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 2 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & -1\\ -1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$

2.4. $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

2.5. $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 5 & 1 & 1\end{pmatrix}$

2.6. $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & -1\\ -1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 2 & -1\end{pmatrix}$

2.7. $A=\begin{pmatrix}5-131\\ 20-14\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 0\\ -2 & 1 & 1\\ 3 & 0 & -2\\ 4 & 1 & 2\end{pmatrix}$

2.8. $A=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$, $B=(3\ \ 2\ \ 1)$

2.9. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & -2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 5 & 3\\ 6 & 8 & 2\\ 1 & 2 & -1\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}$

2.10. $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 5 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

2.11. $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1 & 2\\ 4 & 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 1\\ 1 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$

2.12. $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$

2.13. $A=(5\ \ 1\ \ 0\ -3)$, $B\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & -4\\ 3 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

2.14. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

2.15. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -2 & 3 & 1\\ 4 & 2 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & -1 & 3\\ -2 & -1 & 5 & -2\end{pmatrix}$

2.16. $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -3 & 5\\ 3 & -5\\ -1 & 1\end{pmatrix}$

3.Quyidagi ikkinchi tartibli aniqlovchilarni hisoblang:

3.1. $\begin{vmatrix} -3 & -5 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$ 3.2. $\begin{vmatrix} 0,(3) & -0,(42) \\ 99 & 3 \end{vmatrix}$ 3.3. $\begin{vmatrix} 3 & -6 \\ -5 & 7 \end{vmatrix}$

3.4. $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & -3 \\ \frac{1}{3} & \sqrt{2} \end{vmatrix}$ 3.5. $\begin{vmatrix} \sqrt{a} & -1 \\ a & 1+\sqrt{2} \end{vmatrix}$ 3.6. $\begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix}$

3.7. $\begin{vmatrix} a^{\frac{3}{4}} & a^{\frac{1}{2}} \\ -a^{\frac{1}{2}} & a^{\frac{1}{4}} \end{vmatrix}$ 3.8. $\begin{vmatrix} 2\sin^2\alpha & \cos^2\alpha \\ 2\sin^2\beta & \cos^2\beta \end{vmatrix}$ 3.9 . $\begin{vmatrix} \sqrt[4]{5} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt[4]{125} \end{vmatrix}$ 3.10. $\begin{vmatrix} \cos\frac{x}{2} & \sin\frac{x}{2} \\ \sin\frac{x}{2} & \cos\frac{x}{2} \end{vmatrix}$

4. Quyidagi uchunchi tartibli aniqlovchilarni hisoblang:

4.1. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$ 4.2. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & 2 \\ 2 & 3 & -7 \end{vmatrix}$ 4.3 . $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 9 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ 4.4. $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 6 \end{vmatrix}$ 4.5. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$

5. Tenglamani yeching:

5.1 $\begin{vmatrix} x^2-4 & -1 \\ x-2 & x+2 \end{vmatrix} = 0$ 5.2 $\begin{vmatrix} 4\sin x & 1 \\ 1 & \cos x \end{vmatrix} = 0$ 5.3 $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \\ 1 & 6 & x+5 \end{vmatrix} = 0$

5.4 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3-x & 3 \\ 1 & 2 & 5+x \end{vmatrix} = 0$ 5.5 $\begin{vmatrix} \cos^2\varphi - \sin^2\varphi & 2\cos\varphi\sin\varphi \\ 2\sin\varphi\cos\varphi & \cos^2\varphi - \sin^2\varphi \end{vmatrix} = 0$

Uygа vazifa

5.6 $\begin{vmatrix} 3-x & 2 \\ 2 & 4-x \end{vmatrix} = 0$ 5.7 $\begin{vmatrix} 5-x & 2 \\ 2 & 8-x \end{vmatrix} = 0$ 5.8 $\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

5.9 $\begin{vmatrix} x^2 & 3 & 2 \\ x & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$ 5.10 $\begin{vmatrix} 3-x & -1 & 1 \\ -1 & 5-x & -1 \\ 1 & -1 & 3-x \end{vmatrix} = 0$

6. Tengsizlikni hisoblang:

6.1 $\begin{vmatrix} x-1 & 3 \\ 2x-3 & -2 \end{vmatrix} < 0$ 6.2 $\begin{vmatrix} 2x-3 & 4x \\ -5 & 3 \end{vmatrix} > 0$

6.3 $\begin{vmatrix} x & 3x-4 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} < 0$ 6.4 $\begin{vmatrix} 3-x & 4 \\ 2 & 4-x \end{vmatrix} < 0$ 6.5 $\begin{vmatrix} x^2+7 & 2 \\ 3x & 1 \end{vmatrix} > -1$

7. Aniqlovchilarni hisoblang:

7.1. $\begin{vmatrix} -1 & 6 & 5 & 1 \\ -2 & 8 & 6 & 2 \\ 2 & 16 & 7 & 3 \\ -3 & 9 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ 7.2. $\begin{vmatrix} 5 & 62 & -79 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 6 & 183 & 201 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$

7.3. $\begin{vmatrix} -5 & 6 & 10 & 6 \\ -9 & 8 & 8 & 5 \\ -8 & 5 & 9 & 5 \\ -11 & 7 & 7 & 4 \end{vmatrix}$ 7.4. $\begin{vmatrix} 9 & 7 & 9 & 7 \\ 8 & 6 & 8 & 6 \\ -9 & -7 & 9 & 7 \\ -8 & -6 & 8 & 6 \end{vmatrix}$ 7.5. $\begin{vmatrix} 6 & 8 & -9 & -12 \\ 4 & 6 & -6 & -9 \\ -3 & -4 & 6 & 8 \\ -2 & -3 & 4 & 6 \end{vmatrix}$

8.1. $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 8.2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ 8.3. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

8.4. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 8.5. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

11.2. a va b ning qanday qiymatlarida matritsa rangi uchga teng bo’ladi?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 8 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -5 & -1 \\ 6 & 7 & -4 & 3 & -1 \\ 3 & a & -9 & 21 & b \end{pmatrix}$$

11.3. a ning qanday qiymatiga (yoki qiymatlariga) matritsani rangi uchga teng bo’ladi?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & -2 & 1 & -4 \\ -2 & 2 & 3 & 1 & a \end{pmatrix}$$

11.4. a ning qanday qiymatiga (yoki qiymatlarida) matritsani rangi uchga teng bo’ladi?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 3 & -1 \\ 4 & -3 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & a & a \end{pmatrix}$$

12. A matritsani rangini toping:

12.1 $A=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ 12.2 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 12.3 $A=\begin{pmatrix} \lambda & 5\lambda & -\lambda \\ 2\lambda & \lambda & 10\lambda \\ -\lambda & -2\lambda & -3\lambda \end{pmatrix}$

12.4 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ 12.5 $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 2 & -6 & -5 \\ 1 & -4 & -2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$

2-mavzu. Chiziqli tenglamalari sistemasi. Chiziqli tenglamalar sistemasi va uning yechimi haqida tushuncha. Birgalikdagi sistemalarni Kramer formulalari va teskari matritsa yordamida yechish. Chiziqli tenglamalar sistemasining umumiy yechimi. Umumiy ko`rinishdagi chiziqli tenglamalar sistemasini Gauss usulida yechish. Gauss usulining Gauss–Jordan modifikatsiyasi. Kroneker – Kapelli teoremasi. Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi va uning notrivial yechimlarining mavjudlik shartlari. Bir jinsli va bir jinsli bo`lmagan sistemalar yechimlari orasidagi bog`lanish. Matritsali tenglamalar.

Quyidagi 2 noma’lumli ikkita tenglamadan tashkil topgan sistemani Kramer va matrisalar usulida yeching.

“A” Guruh

2.1 $\begin{cases} x+y=4 \\ x-y=2 \end{cases}$ **2.2** $\begin{cases} 2x+5y=15 \\ x-2y=3 \end{cases}$ **2.3** $\begin{cases} 3x+5y=21 \\ 2x-y=1 \end{cases}$

2.4 $\begin{cases} \frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y=1 \\ 3x-5y=-3 \end{cases}$ **2.5** $\begin{cases} 2x-3y=-1 \\ y=0{,}75x \end{cases}$ **2.6** $\begin{cases} \frac{1}{4}x-y=-5 \\ \frac{1}{2}x-\frac{1}{7}y=3 \end{cases}$

2.7. $\begin{cases} 4x-3y=-4 \\ 4y-10x=3 \end{cases}$ **2.8** $\begin{cases} 3x-2y=1/2 \\ 4y-x=2/3 \end{cases}$ **2.9** $\begin{cases} 11x-5y=37 \\ 4y-x=25 \end{cases}$

2.10 $\begin{cases} 3y-x=-17 \\ 5x+3y=-5 \end{cases}$ **2.11** $\begin{cases} 2x_1+3x_2+1=0 \\ 5x_1+4x_2-1=0 \end{cases}$ **2.12** $\begin{cases} 2x_1-3x_2-5=0 \\ 4x_1-5x_2-7=0 \end{cases}$

$$2.13\ \begin{cases}4x-6y+7=0\\ x+3y-5=0\end{cases}\qquad 2.14\ \begin{cases}2x_1-3x_2=2\\ -3x_1-4x_2=1\end{cases}\qquad 2.15\ \begin{cases}3x+2y=1/6\\ 9x+6y=1/2\end{cases}$$

"B" Guruh

$$2.16\ \begin{cases}ax+by=a^2+b^2\\ bx+ay=a^2+b^2\end{cases}\qquad 2.17\ \begin{cases}x\cos a-y\sin a=\cos 2a\\ x\sin a+y\cos a=\sin 2a\end{cases}$$

$$2.18\ \begin{cases}(a+b)x-(a-b)y=4ab\\ (a-b)x+(a+b)y=2(a^2-b^2)\end{cases}\qquad 2.19\ \begin{cases}2x+5y=15\\ 3x+8y=-3\end{cases}$$

"*a*" ning qanday qiymatida tenglamalar sistemasi yechimga ega bo'lmaydi.

$$2.20.\ \begin{cases}x+ay=1\\ x-3ay=2a+3\end{cases}\qquad 2.21\ \begin{cases}-4x+ay=1+a\\ (6+a)x+2y=3+a\end{cases}$$

$$2.22\ \begin{cases}16x+ay=4\\ ax+9y-3=0\end{cases}\qquad 2.23\ \begin{cases}x+ay=1\\ ax+y=2a\end{cases}$$

$$2.24\ \begin{cases}(a+1)x-3y-4=0\\ 2x-ay-3=0\end{cases}$$

"*a*" ning qanday qiymatida sistema cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi.

$$2.25\ \begin{cases}(a+1)x+8y=4a\\ ax+(a+3)y=3a-1\end{cases}\qquad 2.26\ \begin{cases}x+ay=1\\ ax-3ay=2a+3\end{cases}$$

$$2.27\ \begin{cases}3x+ay=3\\ ax+3y=3\end{cases}\qquad 2.28\ \begin{cases}ax+(a+1)y=6\\ 7ax-2y-8=6(a+4)\end{cases}$$

$$2.29\ \begin{cases}(a+1)x-y=a+2\\ x+(a-1)y=2\end{cases}\qquad 2.30\ \begin{cases}2x+y-5z=3\\ 3x-5y+2z=1\\ 5x-6y+3z=6\end{cases}$$

$$2.31\ \begin{cases}4x+3y+2z+3=0\\ 7x+9y-9z+8=0\\ 2x-5y+6z+3=0\end{cases}\qquad 2.32\ \begin{cases}5x+2y-3z+3=0\\ 8x-3y+2z+7=0\\ 2x+3y-5z-4=0\end{cases}$$

$$2.33\ \begin{cases}7x+2y-8z-1=0\\ 5x-3y+12z-14=0\\ x+2y-9z+5=0\end{cases}\qquad 2.34\ \begin{cases}x+2x_3=4\\ 3x_1+2x_2+4x_3=19\\ 2x_1+5x_2+x_3=-5\end{cases}$$

"C" Guruh

Quyidagi uch noma'lumli uchta tenglamadan tashkil topgan sistemani Kramer, Gauss va matrisa usulida yeching.

2.35 ***a)*** $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=3 \\ 2x_1-x_2+x_3=2 \\ -3x_1+2x_2+x_3=0 \end{cases}$ ***в)*** $\begin{cases} 3x_1+x_2+x_3-4=0 \\ x_1+2x_2-x_3-4=0 \\ 2x_1+x_2+2x_3-16=0 \end{cases}$

2.36 ***a)*** $\begin{cases} x_1+x_2+4x_3=1 \\ 2x_1+x_2+6x_3=2 \\ 3x_1+3x_2+13x_3=2 \end{cases}$ ***в)*** $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=7 \\ 2x_1-x_2+x_3=2 \\ 3x_1+5x_2+2x_3=-7 \end{cases}$

2.37 ***a)*** $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3+3x_4=20 \\ 5x_1-x_2+2x_3-x_4=17 \\ -3x_1+2x_2-x_3+2x_4=1 \\ x_1-x_2+4x_3-2x_4=-4 \end{cases}$ ***в)*** $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-13=0 \\ 3x_1+2x_2+2x_3-16=0 \\ 4x_1-2x_2+5x_3-5=0 \end{cases}$

2.38 $\begin{cases} x_1-2x_2+4x_3=6 \\ 2x_1-x_2+3x_3=11 \\ 4x_1+x_2-5x_3=9 \end{cases}$ **2.39** $\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3=2 \\ 2x_1+x_2-4x_3=9 \\ 6x_1-5x_2+2x_3=17 \end{cases}$

2.40 $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=9 \\ 2x_1-x_2+3x_3=13 \\ 3x_1+2x_2-5x_3=-1 \end{cases}$ **2.41** $\begin{cases} 2x_1+x_2-3x_3=-1 \\ x_1-3x_2+2x_3=10 \\ 3x_1-4x_2-x_3=5 \end{cases}$

2.42 $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=6 \\ 3x_1-x_2+2x_3=5 \\ 4x_1+2x_2-5x_3=9 \end{cases}$ **2.43** $\begin{cases} 6x_1+2x_2-x_3=2 \\ 4x_1-x_2+3x_3=-3 \\ 3x_1+2x_2-2x_3=3 \end{cases}$

2.44. $\begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3=13 \\ x_1+x_2+x_3=6 \\ 3x_1+x_2+x_3=8 \end{cases}$ **2.45.** $\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3=7 \\ x_1+2x_2+x_3=8 \\ x_1+x_2+2x_3=9 \end{cases}$ **2.46.** $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=3 \\ 3x_1+x_2+2x_3=7 \\ 2x_1+3x_2+x_3=3 \end{cases}$

Chiziqli tenglamalar sistemasini yeching

2.47.*a)* $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3-2x_4=1 \\ -2x_1-3x_2+x_3+3x_4=3 \\ 5x_1+9x_2-10x_3-9x_4=0 \end{cases}$ ***в)*** $\begin{cases} -2x_1+3x_2-2x_3=2 \\ 3x_1-2x_2+x_3=2 \\ -5x_1+10x_2-7x_3=1 \end{cases}$

2.48 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 7 \\ -4x_1 + 2x_2 = -2 \\ 6x_1 - 3x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$ **2.49** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 7x_2 - 3x_3 = 3 \end{cases}$

2.50 $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 12x_4 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4 \\ x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 = 2 \end{cases}$ **2.51** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 3 \\ -3x_1 - 2x_2 + 12x_3 - 7x_4 = -5 \\ x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2 \end{cases}$

"B" Guruh

2.52 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 6x_3 = 0 \end{cases}$ **2.53** $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

2.54 $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$ **2.55** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

2.56 $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ 7x_1 - 9x_2 - 11x_3 = 0 \end{cases}$ **2.57** $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$

2.58 $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 6x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$ **2.59** $\begin{cases} 4x_1 - 6x_2 + 5x_3 = 0 \\ 6x_1 - 9x_2 + 10x_3 = 0 \end{cases}$

2.60 $\begin{cases} x_1 + x_2 - 7x_3 = 0 \\ x_1 - 6x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ **2.61** $\begin{cases} x_1 - 6x_2 + x_3 = 0 \\ 5x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

2.62 $\begin{cases} x_1 + x_2 - 7x_3 = 0 \\ 5x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ **2.63** $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$

2.64 $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$ **2.65** $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$ **2.66** $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 7x_3 = 0 \end{cases}$

JAVOBLAR

2.1.(3;1) **2.2**. (5;1) **2.3**.(2;3) **2.4** (4;3) **2.5**.(4;3) **2.6**.(8;7) **2.7**.(1/2; 2) **2.8.** (1/3; 1/4) **2.9**. (7;8) **2.10**. (2;-5)

2.11. (1;-1) **2.12**. (-2; -3) **2.13** $\left(\frac{1}{2};1\frac{1}{2}\right)$ **2.14** (5; -4) **2.15**. **.** Sistema cheksiz ko’p yechimga ega, ya’ni *x* ixtiyoriy bo’lib qoladi $y=(3/2)x+1/1$
2.16 $(a+b;a-b)$
2.17. $(\cos\alpha;\ \sin\alpha)$ **2.18**. $(a+b;a-b)$ **2.19.** (125; -47) **2.20**. 0
2.21 . -4
2.22. -12 **2.23** -1;1 **2.24**. 2; -3 **2.25.** 1 **2.26**. -3 **2.27**. 3 **2.28**. 3
2.29. 0
2.30. (3;2;1) **2.31.** (-2;1;1) **2.32**. (0;3;1) **2.33.** (1;-3;0) **2.34**. (1;-2;3)
2.35a).

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&-1&1\\-3&2&1\end{vmatrix}\begin{matrix}(-2)&(3)\\ & \\ & \end{matrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&-3&-1\\0&5&4\end{vmatrix}=-7$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}3&1&1\\2&-1&1\\0&2&1\end{vmatrix}=-7,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}1&3&1\\2&2&1\\-3&0&1\end{vmatrix}=-7,\quad \Delta_3=\begin{vmatrix}1&1&3\\2&-1&2\\-3&2&0\end{vmatrix}=-7,$$

Kramer formulasidan $x_1=\frac{-7}{-7}=1,\ x_2=\frac{-7}{-7}=1,\ x_3=\frac{-7}{-7}=1$ v) (1;4;2)

2.36.a) Yechish. Bu yerda

$$A=\begin{pmatrix}1&1&4\\2&1&6\\3&3&13\end{pmatrix};\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$$

Tenglamalar sistemasini matritsalar yordamidagi ifodasi quyidagicha bo’ladi $AX=B$.
Asosiy A matritsani aniqlovchisi

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}5&1&-2\\8&-1&-2\\-3&0&1\end{pmatrix}.$$

Demak,

$$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}5&1&-2\\8&-1&-2\\-3&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}.$$

Javob: (3;2;-1 **v)** (2;3;1) .

2.37. ***a*).** Sistemani kengaytirilgan matritsasini yozamiz. Birinchi qadamda $a_{11}\neq 0$, yoki hisoblash oson bo’lishi uchun $a_{11}=1$ olib kelish kerak. Shuning uchun birinchi va to’rtinchi qatorlar o’rinlarini almashtiramiz.

$$\begin{pmatrix}2&1&-1&3&2&0\\5&-1&2&-1&1&7\\-3&2&-1&2&1\\1&-1&4&-2&-4\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1&-1&4&-2&-4\\5&-1&2&-1&1&7\\-3&2&-1&2&1\\2&1&-1&3&2&0\end{pmatrix}\begin{matrix}-5\\3\\-2\end{matrix}$$

1 - qadam. Birinchi ustun ostidagi elementlar noldan iborat bo`lishi uchun birinchi qator elementlarini - 5; 3 va -2 - sonlarga mos to`rtinchi qatorlarga ikkinchi, uchinchi va ikkinchi qadam uchun yanги matritsani $a_{22}\neq 0$ deb, uni qulay ko`rinishga olib kelamiz, ya`ni $a_{22}=1$ (yoki $a_{22}=-1$). Buning uchun ikkinchi va uchinchi qatorni quyidagi ko`rinishga tasavur qilamiz.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & 4 & -18 & 9 & 37 \\ 0 & -1 & 11 & -4 & -11 \\ 0 & 3 & -9 & 7 & 28 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 11 & -4 & -11 \\ 0 & 4 & -18 & 9 & 37 \\ 0 & 3 & -9 & 7 & 28 \end{array}\right)$$

4 3

2- qadam. Ikkinchi qator elementlarini 4 va 3 ga mos ravishda ko`paytirib uchinchi va to`rtinchi qatorlarga qo`shamiz, u holda ikkinchi ustundagi $a_{22}$ element ostida nollar paydo bo`ladi.

3 - qadam. Olingan matritsada $a_{33}=26\neq 0$ ekanligidan uchinchi qator elementlari $\frac{-24}{26}=\frac{-12}{13}$ ko`paytiramiz va to`rtinchi qatorni ko`shamiz. U holda kengaytirilgan matritsa quyidagi ko`rinishdagi matritsaga keladi.

$$(-12/13)\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 11 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & 26 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 24 & -5 & -5 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 11 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & 26 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{19}{13} & \frac{19}{13} \end{array}\right)$$

Bu matritsaga mos keluvchi sistema quyidagi ko'rinishda bo'ladi

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = -4 \\ -x_2 + 11x_3 - 4x_4 = -11 \\ 26x_3 - 7x_4 = -7 \\ \frac{19}{13}x_4 = \frac{19}{13} \end{cases}$$

Oxirgi tenglamadan $x_4=1$, uchinchi tenglamadan

$$x_3=\frac{-7+7x_4}{26}=\frac{-7+7\cdot 1}{26}=0;$$

Ikkinchi tenglamadan $x_2=11+11x_3-4x_4=11+0-4=7$

Birinchi tenglamadan $x_1=-4+x_2-4x_3+2x_4=-4+7-0+2=5$.

Jавоб: (5;7;0;1) v)(2;4;1)

2.38. (4;3;2) **2.39**. (5;3;1) **2.40**. (3;5;4) **2.41**. (6;2;5) **2.42**. (2;3;1)
2.43. (-1;6;2) **2.44**. (1;2;3) **2.45**. (1;2;3) **2.46**. (2;-1;1) **2.47.** *a*) Kengaytirilgan matritsaga elementar almashtirishlar bajaramiz

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & 3 \\ 5 & 9 & 1 & 9 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 5 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Matritsaning rangi $r(A)=2$ x_1 va x_2 o`zgaruvchilar oldidagi koeffitsientlardan tuzilgan aniqlovchi (bazis minor) noldan farqli $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\neq 0$. Bu o`zgaruvchilarni asosiy qilib olamiz. Asosiy bo`lmagan o`zgaruvchilarni x_3, x_4 barrobarni o`ng tomoniga o`tkazamiz

$$\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3+2x_4= [illegible] \\ x_2-5x_3+x_4= [illegible] \end{cases}$$

Bu yerda

$$[illegible]$$

Asosiy bo`lmagan o`zgaruvchilar $x_3=C_1,\ x_4=C_2$ cheksiz ko`p yechimlarni olamiz

$$[illegible].$$

в) $[illegible]$

2.48. $[illegible]$

2.49. $[illegible]$

2.50. $[illegible]$

2.51. $[illegible]$

2.52. **a)** Koeffitsientlardan tuzilgan matritsani tuzamiz

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{vmatrix},$$

Uning minorlari quyidagicha bo`ladi

$$D_1=\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -6 \end{vmatrix}= [illegible]$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix}= [illegible]$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}= [illegible].$$

Yuqorida keltirilgan (3.14) formuladan

$$[illegible]$$

bu yerda $-\infty<t<\infty$.

2.53 $[illegible]$ **2.54** $[illegible]$

2.55 $[illegible]$ **2.56** $[illegible]$

2.57 $[illegible]$ **2.58** ($x_1=-2t$; $x_2=-6t$; $x_3=7t$)

2.59 *($x_1=3t$; $x_2=-2t$; $x_3=0$)* **2.60** *($x_1=41t$ $x_2=8t$; $x_3=7t$)*

2.61 *($x_1=6t$ $x_2=7t$ $x_3=29t$)* **2.62** *($x_1=4t$ $x_2=17t$ $x_3=3t$)*

2.63 *($x_1=2t$ $x_2=-3t$ $x_3=5t$)* **2.64** *($x_1=2t$ $x_2=-3t$ $x_3=5t$)*

2.65 *($x_1=2t$ $x_2=-3t$ $x_3=5t$)* **2.66** *($x_1=4t$ $x_2=3t$ $x_3=t$)*

2.67 Bu yerda noma'lumlar soni 3-ga sistemaning A matrtsasini tuzamiz.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -7 \\ 1 & -6 & 1 \\ 5 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

va uning ustida elementar almashtirishlar bajaramiz.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -7 \\ 1 & -6 & 1 \\ 5 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -7 & 8 \\ 0 & -6 & 34 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -7 \\ 0 & -7 & 8 \\ 0 & 0 & 210 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Demak, $r=3$ $(r=n)$. Sistema yagona trival yechimga ega (0;0;0).

2.68 $\left(x=\frac{2}{5}t;\ y=\frac{3}{5}t;\ z=t\right)$ **2.69** $\left(x_1=-\frac{3}{2}t;\ x_2=\frac{14}{12}t;\ x_3=\frac{34}{13}t;\ x_4=t\right)$

2.70 $(x_1=0;\ x_2=0;\ x_3=t)$ **2.71** $(x_1=t;\ x_2=2t;\ x_3=2t)$

2.72 $(x=t;\ y=t;\ z=t)$ **2.73** (x_1=-15t; x_2=2t; x_3=-5t; x_4=17t)

2.74 (x_1=0; x_2=0; x_3=t; x_4=t) **2.75** (x_1=-5t; x_2=-3t; x_3=4t; x_4=6t)

2.76 (x_1=--4t; x_2=t; x_3=-4t; x_4=t) **2.77** (x_1=-6t; x_2=-9t; x_3=-29t; x_4=t)

2.78(x_1=-t; x_2=2t; x_3=-0; x_4=t) **2.79** (x_1=-t; x_2=2t; x_3=3t; x_4=4t)

3-mavzu. Vektorlar sistemasi. n – o`lchovli haqiqiy arifmetik fazo nuqtalari vaarifmetik vektorlari. $R^n$ fazoda vektorlar koordinatalari. Arifmetik vektorlar ustida chiziqli amallar. Skalyar ko`paytma. Vektor uzunligi. Vektorlar orasidagi burchak. Nuqtalar orasidagi masofa. Vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi. Chiziqli tenglamalar sistemasini vektor ko`rinishda yozish. Vektorni vektorlar sistemasi bo`yicha yoyish. Chiziqli erkli va chiziqli bog`liq vektorlar sistemalari. Vektorlar sistemasining bazisi va rangi. Bazis o`zgarganda vektor koordinatalarining o`zgarishi. Vektorlar sistemasining rangi bilan matritsa rangi orasidagi bog`liqlik. Ortogonal vaortonormallangan vektorlar sistemalari va ularni qurish. Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasining fundamental yechimlari tizimi. Chiziqli tenglamalar sistemasining vektor shakldagi umumiy yechimi.

**4-mavzu. Chiziqli algebra usullarining ba'zi iqtisodiy modellarining tahlilida qo`llanilishi.** Chiziqli algebraelementlarining ba'zi chiziqli iqtisodiy modellarning tahlilida qo`llanilishi. Tarmoqlararo balansning matematik modeli. Balans taxlili modeli. Mahsulot tannarxini aniqlash modeli. Savdo modeli.

5-mavzu. Analitik geometriya elementlari. Analitik geometriya predmeti va vazifasi. Tekislikdagi analitik geometriya. Kesmani berilgan nisbatda bo`lish. Tekislikda chiziq tenglamasi. Tekislikda to`g`ri chiziqning burchak koeffitsiyentli, kesmalarga nisbatan, umumiy, normal tenglamalari. Berilgan bitta nuqtadan o`tuvchi, berilgan ikkita nuqtadan o`tuvchi to`g`ri chiziq tenglamalari. To`g`ri chiziqlar orasidagi burchak. $R^2$ da to`g`ri chiziqlarning kesishish nuqtasi. To`g`ri chiziqlarning o`zaro parallellik va perpendikulyarlik shartlari. Berilgan nuqtadan berilgan to`g`ri chiziqqacha bo`lgan masofa. Ikkinchi tartibli egri chiziqlar. Aylana, ellips, giperbola va parabola tenglamalari. Ikkinchi tartibli egri chiziqlarning umumiy tenglamalarini kvadratik forma tushunchalaridan foydalanib tekshirish va tenglamasini kanonik ko`rinishga keltirish. Iqtisodda ba'zi ikkinchi tartibli egri chiziqlarning qo`llanilishi.

Fazoda tekislik va to`g`ri chiziq tenglamalari. Tekisliklar orasidagi burchak. To`g`ri chiziqlar orasidagi burchak. Nuqtadan tekislikkacha bo`lgan masofa. Tekisliklarning, to`g`ri chiziqlarning, tekislik va to`g`ri chiziqlarning o`zarojoylashuvi. Parallellik va perpendikulyarlik shartlari. Fazoda ikkinchi tartibli sirtlar. Analitik geometriyaelementlarining iqtisodiy masalalarning optimal yechimini topishda qo`llanilishi.

6-mavzu. Chiziqli va evklid fazolari.Chiziqli operatorlar. Chiziqli fazo va uning o`lchovi. Chiziqli fazoda bazis va koordinatalar. Chiziqli fazoning qism osti fazolari. Evklid fazosi. Bazislarni almashtirish. Chiziqli operator. Chiziqli operator matritsasi. Bazisni almashtirishda chiziqli operator matritsasining o`zgarishi. Chiziqli operatorlar ustidaamallar. Chiziqli operatorning xos qiymati vaxos vektorlari. Xos vektorlarning xossalari. Chiziqli operator matritsasini diagonal ko`rinishga keltirish. Musbat vektor va musbat matritsa.

7-mavzu. Kvadratik formalar. Kvadratik forma haqida tushuncha. Uning matritsasi va rangi. Kvadratik formani kanonik ko`rinishga keltirish. Musbat aniqlangan kvadratik formalar. Kvadratik forma tushunchalarining iqtisodiy modellarning tahlilida qo`llanilishi. Xalqaro savdo modeli. Rejalashtirish modeli.

8-mavzu. Matematik analizga kirish. n – o`lchovli haqiqiy fazoda nuqta atrofi. $R^n$ fazoda chegaralangan to`plam. To`plamning ichki va chegaraviy nuqtalari. To`plamning quyuqlanish nuqtasi. Yopiq va ochiq to`plamlar. Ixcham (chegaralangan va yopiq) to`plam. Qavariq nuqtalar to`plami. Nuqtalarning qavariq chiziqli kombinatsiyasi. Qavariq to`plamning chetki nuqtalari. R^n fazoda nuqtalar ketma–ketligi. Sonli ketma–ketlik. Nuqtalar ketma–ketligining limiti. Sonli ketma–ketlik limiti. Cheksiz kichik, cheksiz katta sonli ketma–ketliklar va ularning xossalari. Monoton sonli ketma–ketliklar. Sonli ketma–ketlik yaqinlashishining yetarli sharti. Yaqinlashuvchi ketma–ketliklar ustida arifmetik amallar. *e* soni. Iqtisodda e sonidan foydalanishga misollar.

Funksiya ta’rifi. Funksiyaning berilish usullari. Uning aniqlanish sohasi va qiymatlari to`plami. Bir o`zgaruvchili funksiya umumiy xossalari. Funksiya grafigi va uni almashtirishlar. Teskari funksiya. Elementar funksiyalar, ularning klassifikatsiyasi, xossalari va grafigi. Chegaralangan funksiya. Murakkab funksiyalar (superpozitsiyalar). Oshkormas funksiyalar. Parametrga bog`liq funksiyalar. Qavariq va botiq funksiyalar haqida tushuncha. Funksiya limiti. Aniqmasliklarni ochish. Ajoyib limitlar. Limitlar haqidaasosiy teoremalar. Funksiyaning cheksizlikdagi limiti. Bir tomonlama limitlar. Ekvivalent cheksiz kichik funksiyalar. Funksiyalarni taqqoslash. Funksiya uzluksizligi. Uzluksiz funksiyalarning asosiy xossalari. Bir tomonlama uzluksizlik. Funksiyaning uzilish nuqtalari va ularning turlari. Ajoyib limitlarning iqtisodiyotda qo`llanilishi. Iqtisodiyotda uchraydigan funksiyalar.

Ko`p o`zgaruvchili funksiya limiti. Ko`p o`zgaruvchili funksiyaning nuqtadagi limiti. *To`plamdagi limiti*.

9-mavzu. Differensial hisob. Funksiya hosilasi. Funksiya differensiallanuvchanligining zaruriy va yetarli shartlari. Funksiya differensiali va uning taqribiy hisoblashlardagi tatbiqlari. Hosila va differensialning geometrik va fizik ma’nolari. Bir tomonlama va cheksiz hosilalar. Hosila haqidaasosiy teoremalar. Elementar funksiyalarning hosilalari. Murakkab funksiya hosilasi va differensiali. Yuqori tartibli hosilalar va differensiallar. Teskari funksiya hosilalari. Differensiallanuvchi funksiyalar uchun o`rta qiymat haqidagi teoremalar. Chekli orttirmalar formulasi. Chekli orttirmalarning umumlashgan formulasi (Koshi formulasi). Teylor - Makloren formulalari va ularning qo`llanilishi. Aniqmasliklarni ochish. Lopital qoidasi. Funksiya monotonligining yetarli shartlari. Funksiyaning ekstremum nuqtalari. Funksiyaekstremumining zaruriy va yetarli shartlari. Funksiyaning global ekstremumlari. Funksiya grafigining qavariqlik yo`nalishi intervallari, egilish nuqtalari. Asimptotalar. Funksiyani hosila yordamida tekshirish va grafigi eskizini chizish. Amaliy iqtisodiyotda differensial hisobning qo`llanilishi. Ko`p o`zgaruvchili funksiya haqida tushuncha.

Ko`p o`zgaruvchili funksiyalarning lokal ekstremumlari. Statsionar nuqta. Ekstremumning zaruriy shartlari. Ikki o`zgaruvchili funksiyaekstremumining yetarli sharti. Global ekstremum nazariyasining iqtisodiyotdagi tatbiqlari.

10-mavzu. Integrallar hisob. Boshlang`ich funksiya vaaniqmas integral. Aniqmas integral xossalari. Elementar funksiyalarning aniqmas integrallari jadvali. Integrallashning asosiy usullari.

Aniq integral va uning xossalari. Nyuton – Leybnits formulasi. Aniq integralni hisoblash usullari. Aniq integralni taqribiy hisoblashda to`rtburchaklar, trapetsiyalar va Simpson formulalari.

Xosmas integrallar va ularning turlari. Aniq integralning geometrik va iqtisodiy tatbiqlari.

11-mavzu. Differensial tenglamalar. Oddiy differensial tenglamalar haqidaasosiy tushunchalar. Umumiy yechim va umumiy integral. Birinchi tartibli differensial tenglamalar. Koshi masalasi. Birinchi tartibli differensial tenglamalarni yechishning asosiy usullari. Birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar. O`zgarmas koeffitsiyentli ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar. Yuqori tartibli differensial tenglamalarni tartibini pasaytirish usullari.

12-mavzu.Sonli va funksional qatorlar. Sonli qatorlar. Yaqinlashuvchi sonli qatorlar va ularning xossalari. Qator yaqinlashuvining zaruriy sharti. Musbat hadli sonli qatorlar. Qator yaqinlashuvining yetarli shartlari. Ishorasi almashinuvchi sonli qatorlar. Leybnits, Abel va Dirixli alimatlari. Ishorasi o`zgaruvchan qatorlar va ularning absolyut yoki shartli yaqinlashishi.

Funksional qatorlar. Yaqinlashish sohasi. Veyershtrass, Abel va Dirixlining tekis yaqinlashish alimatlari. Darajali qatorlar. Darajali qatorning yaqinlashish radiusi va sohasi. Darajali qatorlarni differensiallash va integrallash. Funksiyalarni darajali qatorga yoyish. Teylor va Makloren qatorlari.

Tarqatma materillar.

Variant №1

1.Aniqlovchilarni hisoblang:

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}$$

2. Teskari matritsani toping:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

3.Quyidagi matritsalarni rangini toping:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Matritsali tenglamalarni yeching:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Variant №2

1.Aniqlovchilarni hisoblang:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 9 & -8 & 5 & 10 \\ 5 & -8 & 5 & 8 \\ 6 & -5 & 4 & 7 \end{vmatrix}$$

2. Teskari matritsani toping:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3.Quyidagi matritsalarni rangini toping:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

4. Matritsali tenglamalarni yeching:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Variant №3

1. Aniqlovchilarni hisoblang:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

2. Teskari matritsani toping:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Quyidagi matritsalarni rangini toping:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Matritsali tenglamalarni yeching:

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & -10 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}$$

Variant №4

1. Aniqlovchilarni hisoblang:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ -5 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

2. Teskari matritsani toping:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Quyidagi matritsalarni rangini toping:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Matritsali tenglamalarni yeching:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 11 & 16 \end{pmatrix}$$

Variant №5

1.Aniqlovchilarni hisoblang:

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 & 2 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 3 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

2. Teskari matritsani toping:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -8 & -5 \\ -4 & 7 & -1 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

3.Quyidagi matritsalarni rangini toping:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Matritsali tenglamalarni yeching:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Variant №6

1.Aniqlovchilarni hisoblang:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

2. Teskari matritsani toping:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

3.Quyidagi matritsalarni rangini toping:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Matritsali tenglamalarni yeching:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Variant №7

1.Aniqlovchilarni hisoblang:

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

2. Teskari matritsani toping:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

3.Quyidagi matritsalarni rangini toping:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Matritsali tenglamalarni yeching: $X \cdot \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

Variant №8

1.Aniqlovchilarni hisoblang:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \\ -1 & 1 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

2. Teskari matritsani toping:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

3.Quyidagi matritsalarni rangini toping:

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ -2 & 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

4. Matritsali tenglamalarni yeching:

$$X\cdot\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & -12 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 18 & 6 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$$

Variant №9

1.Aniqlovchilarni hisoblang:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

2. Teskari matritsani toping:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 7 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

3. Quyidagi matritsalarni rangini toping:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 8 & 13 & 16 \\ 1 & 0 & -7 & -14 & -17 \end{pmatrix}$$

4. Matritsali tenglamalarni yeching:

$$X\cdot\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -8 \end{pmatrix}$$

Variant №10

1.Aniqlovchilarni hisoblang:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 & -3 \\ 4 & 6 & -6 & -9 \\ -3 & -4 & 6 & 8 \\ -5 & -7 & 10 & 14 \end{vmatrix}$$

2. Teskari matritsani toping:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

3.Quyidagi matritsalarni rangini toping:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

4. Matritsali tenglamalarni yeching:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Variant №11

1.Aniqlovchilarni hisoblang:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

2. Teskari matritsani toping:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

3.Quyidagi matritsalarni rangini toping:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & -5 & -6 \end{pmatrix}$$

4. Matritsali tenglamalarni yeching: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$

Variant№ 12

1.Aniqlovchilarni hisoblang:

$$\begin{vmatrix} 6 & 6 & 10 & -5 \\ 5 & 8 & 8 & -9 \\ 5 & 5 & 9 & -8 \\ 4 & 7 & 7 & -11 \end{vmatrix}$$

2. Teskari matritsani toping:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -6 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

3.Quyidagi matritsalarni rangini toping:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Matritsali tenglamalarni yeching:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & 9 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Variant№ 13

1.Aniqlovchilarni hisoblang:

$$\begin{vmatrix} 1 & 22 & 12 & 4 \\ -1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 16 & 7 & 3 \\ -3 & 9 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

2. Teskari matritsani toping:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.Quyidagi matritsalarni rangini toping:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

4. Matritsali tenglamalarni yeching:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & 8 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Variant №14

1.Aniqlovchilarni hisoblang:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 & -1 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}$$

2. Teskari matritsani toping:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -3 \\ -8 & 7 & 5 \\ -5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

3.Quyidagi matritsalarni rangini toping:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

4. Matritsali tenglamalarni yeching:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 9 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Variant №15

1.Aniqlovchilarni hisoblang:

$$\begin{vmatrix} 5 & -9 & 2 & 7 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 2 & -5 & 1 & 2 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

2. Teskari matritsani toping:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

3.Quyidagi matritsalarni rangini toping:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & -3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & 4 & -34 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Matritsali tenglamalarni yeching: $X \cdot \begin{pmatrix} 0{,}2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1{,}4 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Variant №16

1.Aniqlovchilarni hisoblang:

$$\begin{vmatrix} 9 & 7 & 9 & 7 \\ 4 & 3 & 4 & 3 \\ 9 & 7 & -9 & -7 \\ -8 & -6 & 8 & 6 \end{vmatrix}$$

2. Teskari matritsani toping:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3.Quyidagi matritsalarni rangini toping:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & -7 & 5 \end{pmatrix}$$

4. Matritsali tenglamalarni yeching:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 2{,}5 & -1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}8 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Variant №17

1.Aniqlovchilarni hisoblang:

$$\begin{vmatrix} 0 & -2 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 7 & 6 & 3 & 7 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

2. Teskari matritsani toping:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 7 & 9 & 5 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

3.Quyidagi matritsalarni rangini toping:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

4. Matritsali tenglamalarni yeching:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$$

Variant №18

1.Aniqlovchilarni hisoblang:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

2. Teskari matritsani toping:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

3.Quyidagi matritsalarni rangini toping:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & 1 & -4 \\ 1 & 9 & 8 & -2 \\ 1 & -12 & -7 & -2 \end{pmatrix}$$

4. Matritsali tenglamalarni yeching:

$$\begin{pmatrix} 0{,}2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Variant №19

1.Aniqlovchilarni hisoblang:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

2. Teskari matritsani toping:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

3.Quyidagi matritsalarni rangini toping:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ 1 & 5 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -7 & 4 & 1 & -7 \\ 0 & 11 & -5 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

4. Matritsali tenglamalarni yeching:

$$\begin{pmatrix} 10 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Variant №20

1.Aniqlovchilarni hisoblang:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 7 & 8 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

2. Teskari matritsani toping:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ -4 & -3 & -5 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

3.Quyidagi matritsalarni rangini toping:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

4. Matritsali tenglamalarni yeching:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -28 & -6 \end{pmatrix}$$

Variant №21

1.Aniqlovchilarni hisoblang:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

2. Teskari matritsani toping:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

3.Quyidagi matritsalarni rangini toping:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -11 & -1 & 19 \\ 1 & 12 & 2 & -16 \end{pmatrix}$$

4. Matritsali tenglamalarni yeching:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 0{,}6 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -2{,}8 & -6 \end{pmatrix}$$

Variant №22

1.Aniqlovchilarni hisoblang:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 5 \end{vmatrix}$$

2. Teskari matritsani toping:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

3.Quyidagi matritsalarni rangini toping:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 6 & 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

4. Matritsali tenglamalarni yeching:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1{,}6 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1{,}8 & -6 \end{pmatrix}$$

Variant №23

1.Aniqlovchilarni hisoblang:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

2. Teskari matritsani toping:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

3.Quyidagi matritsalarni rangini toping:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -10 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

4. Matritsali tenglamalarni yeching:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -8 & -6 \end{pmatrix}$$

Variant №24

1.Aniqlovchilarni hisoblang:

$$\begin{vmatrix} 10 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 10 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 10 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 10 \end{vmatrix}$$

2. Teskari matritsani toping:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.Quyidagi matritsalarni rangini toping:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 6 & 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

4. Matritsali tenglamalarni yeching: $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

Variant №25

1.Aniqlovchilarni hisoblang:

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix}$$

2. Teskari matritsani toping:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

3.Quyidagi matritsalarni rangini toping:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -5 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

4. Matritsali tenglamalarni yeching:

$$\begin{pmatrix} -3{,}5 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Variant №26

1.Aniqlovchilarni hisoblang:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

2. Teskari matritsani toping:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -7 & 3 \end{pmatrix}$$

3.Quyidagi matritsalarni rangini toping:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 6 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 13 & 16 \\ 1 & -3 & 9 & 11 \end{pmatrix}$$

4. Matritsali tenglamalarni yeching:

$$\begin{pmatrix} -3{,}2 & 2 \\ 2{,}1 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & -1{,}9 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Variant №27

1.Aniqlovchilarni hisoblang:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

2. Teskari matritsani toping:

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 3\\ 2 & 3 & 5\\ 3 & 5 & 7\end{pmatrix}$$

3.Quyidagi matritsalarni rangini toping:

$$\begin{pmatrix}2 & 5 & -1 & 4 & 3\\ -3 & 1 & 2 & 0 & 1\\ 4 & 1 & 6 & -1 & -1\\ -2 & 3 & 0 & 4 & -9\end{pmatrix}$$

4. Matritsali tenglamalarni yeching:

$$X\cdot\begin{pmatrix}3 & 2\\ -3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15 & 7\\ 6 & 4\end{pmatrix}$$

Variant №28

1.Aniqlovchilarni hisoblang:

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 0\\ 5 & 7 & 1 & 2\\ 3 & -1 & 1 & 8\\ -3 & 10 & -3 & 6\end{vmatrix}$$

2. Teskari matritsani toping:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 5 & 2 & 4\\ 7 & 3 & 4\end{pmatrix}$$

3.Quyidagi matritsalarni rangini toping:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 4 & -1\\ 2 & 1 & 11 & 2\\ 11 & 4 & 56 & 5\\ 2 & -1 & 5 & -6\end{pmatrix}$$

4. Matritsali tenglamalarni yeching:

$$X\cdot\begin{pmatrix}3{,}5 & 2\\ -3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1{,}5 & 7\\ 6 & 4\end{pmatrix}$$

Variant №29

1.Aniqlovchilarni hisoblang:

$$\begin{vmatrix}3 & 5 & 7 & 2\\ 7 & 6 & 3 & 7\\ 5 & 4 & 3 & 5\\ -5 & -6 & -5 & -4\end{vmatrix}$$

2. Teskari matritsani toping:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 4\\ 1 & 3 & 9\end{pmatrix}$$

3.Quyidagi matritsalarni rangini toping:

$$\begin{pmatrix}-3 & 2 & 0 & 1 & 4\\ -1 & 5 & 2 & 3 & 5\\ 6 & -12 & 3 & -7 & -8\\ -3 & 7 & 9 & 4 & 15\end{pmatrix}$$

4. Matritsali tenglamalarni yeching:

$$X\cdot\begin{pmatrix}1{,}2 & 2\\ -3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1{,}5 & 5\\ 6 & 2\end{pmatrix}$$

Variant №30

1.Aniqlovchilarni hisoblang:

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 3 & 0 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 0 & 1\end{vmatrix}$$

2. Teskari matritsani toping:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 4 & 3 & -2\\ -5 & -4 & -1\end{pmatrix}$$

3.Quyidagi matritsalarni rangini toping:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 3 & 1\\ 1 & 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

4. Matritsali tenglamalarni yeching:

$$X\cdot\begin{pmatrix}3 & 12\\ -13 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15 & 17\\ 6 & 14\end{pmatrix}$$

I BOSQICH BAKALAVRLARI UCHUN KUZGI O‘QUV MAVSUMI MUSTAQIL ISH TOPSHIRIQLARI

I topshiriq.

Ushbu chiziqli tenglamalar sistemasini Kramer, Gauss hamda matritsalar usulida yeching:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Izoh: Sistemadagi a_{ij} koeffitsient va b_i ozod hadlardan iborat parametrlar variant bo‘yicha jadvaldan olinadi.

Variant №	Sistema tenglamalarining parametrlari											
	a_{11}	a_{12}	a_{13}	b_1	a_{21}	a_{22}	a_{23}	b_2	a_{31}	a_{32}	a_{33}	b_3
1	1	−3	3	−2	2	1	−3	1	1	−1	4	3
2	2	1	6	2	3	−1	−3	10	−2	4	−1	3
3	−2	3	2	0	4	−4	−4	4	1	6	1	13
4	5	−3	2	−3	−5	2	6	2	0	−1	−4	−1
5	1	1	1	0	1	0	2	−2	0	2	3	−1
6	3	−2	3	4	0	2	1	−4	2	−4	0	2
7	0	2	−1	3	1	3	0	9	5	−2	1	12
8	1	1	2	−3	2	1	1	−4	1	2	3	−7
9	2	−5	7	−1	1	1	−1	1	−3	2	−3	0
10	1	1	−1	1	1	−1	1	5	1	1	1	9
11	3	2	−1	5	0	2	−2	6	−3	7	−3	2
12	10	3	4	7	2	3	−4	−1	7	−5	−4	−9
13	3	2	−3	5	0	1	−1	−1	4	−2	8	4
14	8	1	−4	1	3	−3	1	−4	4	9	−1	1
15	9	−3	7	−7	−8	−2	1	1	1	−1	1	−3
16	8	6	−1	−6	6	1	−2	0	2	4	2	−2
17	1	−6	−6	4	2	−1	2	5	1	3	6	1
18	1	−2	3	−1	2	1	−2	2	4	3	−3	10
19	5	3	4	−1	4	4	1	9	4	2	3	−1
20	1	0	−1	3	5	−1	7	−10	4	9	5	3
21	2	−3	6	−7	3	4	−1	−6	1	−5	2	10
22	1	4	−2	8	1	−5	2	−3	5	6	1	−1
23	2	−2	1	−6	4	3	−1	1	1	−4	2	−9
24	1	3	1	−2	1	4	2	−4	1	−5	−3	10
25	3	0	5	−1	0	2	1	−1	1	−3	1	2

26	3	2	1	9	2	3	1	5	2	1	3	11
27	4	−3	2	12	2	5	−3	−3	5	6	−2	0
28	1	1	−3	6	2	−1	1	−1	3	1	2	3
29	7	2	4	1	1	−3	−2	6	1	−4	−1	6
30	2	−3	−2	3	3	−2	1	1	3	−4	−1	5

II topshiriq

Fazoda uchlari $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ va $D(x_4, y_4, z_4)$ nuqtalarda joylashgan piramida berilgan. Bu piramida bo'yicha quyidagilarni bajaring:

1. $\overrightarrow{AB}$ vektor koordinatalarini toping va undan foydalanib AB qirra uzunligini hisoblang;

2. $\overrightarrow{AB}$ va $\overrightarrow{AD}$ vektorlardan foydalanib AB va AD qirralar orasidagi φ burchak kosinusini toping;

3. $\overrightarrow{AB}$ va $\overrightarrow{AD}$ vektorlardan foydalanib piramidaning ABD tomoni yuzasini toping ;

4. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ va $\overrightarrow{AD}$ vektorlar yordamida $ABCD$ piramidaning hajmini aniqlang;

5. AD qirra yotgan toʻgʻri chiziqning kanonik va parametrik tenglamalarini yozing;

6. ABC yoq yotgan tekislikning umumiy, kesmalardagi va normal tenglamalarni yozing;

7. Piramidaning ABC va ABD yoqlari orasigi ikki yoqli α burchak kosinusini toping;

8. Piramidaning D uchidan tushirilgan DH balandligi yotuvchi L to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasini aniqlang;

9. Piramidaning D uchidan tushirilgan DH balandligining uzunligini toping.

Izoh: $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ va $D(x_4, y_4, z_4)$ nuqtalarning koordinatalari variantga asosan jadvaldan olinadi.

Variant №	x_1	y_1	z_1	x_2	y_2	z_2	x_3	y_3	z_3	x_4	y_4	z_4
1	2	4	8	–3	5	1	6	–4	3	5	8	–1
2	–1	–3	–7	2	–4	0	–5	3	–2	–4	–7	2
3	3	5	9	0	6	–2	7	1	4	6	9	0
4	0	–2	7	–3	–3	5	–4	4	–1	–3	–6	3
5	–4	6	–3	7	7	–1	8	0	5	7	–3	1
6	1	–2	3	–4	5	–6	7	–8	9	–3	6	–5
7	2	–3	4	–5	6	–7	8	–9	3	–4	7	1
8	3	–4	–5	6	7	–8	9	–3	7	–4	–1	–2
9	4	5	–6	–7	8	–9	3	–5	7	1	2	–3

10	–5	6	7	–8	9	–2	–1	3	–4	–2	3	4
11	–6	7	–8	–9	0	3	2	1	–3	–3	–4	–5
12	7	–8	9	0	–1	2	1	–2	3	4	5	6
13	8	–9	1	–1	2	–3	–4	–5	–6	–7	0	4
14	9	–1	1	–2	1	–2	3	4	5	6	7	8
15	0	–1	2	1	–2	–3	–4	5	–6	7	–8	–9
16	1	–2	–1	–2	3	4	5	6	7	–5	0	8
17	2	1	2	3	–4	–5	–6	7	8	–9	0	–3
18	–3	4	–5	1	–8	7	–4	–2	1	2	–1	0
19	2	–5	3	–2	7	–8	3	–1	2	–3	1	5
20	–4	3	–5	0	–9	6	5	–3	0	1	–3	2
21	2	−3	6	17	3	4	−1	3	1	−5	2	10
22	1	4	−2	8	1	−5	−3	1	−4	6	1	4
23	2	−2	1	−6	4	3	−1	3	1	−4	2	−9
24	1	3	1	−2	1	4	2	−36	1	−5	−3	10
25	3	0	5	−1	0	2	1	−1	1	−3	1	2
26	3	2	1	5	2	3	1	1	2	1	3	11
27	4	−3	2	9	2	5	−3	4	5	6	−2	18
28	1	1	−3	6	2	−1	1	5	3	1	2	7
29	7	2	4	1	1	−3	−2	2	1	−4	−1	8
30	2	−3	−2	4	3	−2	1	11	3	−4	−1	7

III topshiriq

III.1-masala

Berilgan a), b), c) va d) hollardagi $y=f(x)$ funksiyalarning hosilalarini toping.

№	a) b)	$y = f(x)$	c) d)	$y = f(x)$
1	a)	$y=\dfrac{x-1}{x+1}$	c)	$y=\operatorname{arctg}(1+\ln x);$
	b)	$y=(x+1)\ln(x+1);$	d)	$x=\ln t\,,\; y=t^2$
2	a)	$y=\dfrac{x-2x^2}{1-\sin x};$	c)	$y=\arcsin(1-\ln x);$
	b)	$y=(x^2+1)\sin x;$	d)	$x=\sin t\,,\; y=t^2-t$
3	a)	$y=\dfrac{10^x+x^{10}}{\sin x}$	c)	$y=\arccos\sqrt{1-\ln x};$
	b)	$y=(x^2+1)\operatorname{arcctg} x$	d)	$x=\cos t\,,\; y=t+t^2$

4	a)	$y=\dfrac{\mathrm{tg}x+\sin x}{x^2}$	c)	$y=e^{1-\cos 5x}$
	b)	$y=(1-x^2)\arcsin x;$	d)	$x=2t+1,\ y=\cos t^2$
5	a)	$y=\dfrac{\cos x+\sin x}{1+x}$	c)	$y=\arcsin(1-x^3)$
	b)	$y=x^2\ln(1+x^2);$	d)	$x=\ln(t^2+1),\ y=t^3$
6	a)	$y=\dfrac{\ln x}{1+x^2}$	c)	$y=\ln(1-\sqrt{x-1});$
	b)	$y=x\mathrm{tg}(1+x^2);$	d)	$x=e^{2t},\ y=t^2$
7	a)	$y=\dfrac{x}{x^2-1};$	c)	$y=\mathrm{arctg}\sqrt{1+x^2};$
	b)	$y=(x+\sin x)(x-\cos x);$	d)	$x=t^2,\ y=t^3+t^2+1$
8	a)	$y=\dfrac{1+\sin x}{1-\cos x};$	c)	$y=\sqrt{1-\sin(x^2+1)};$
	b)	$y=(x-\mathrm{tg}x)(x-\mathrm{ctg}x)$	d)	$x=t^2+t,\ y=t^3+1$
9	a)	$y=\dfrac{1-\mathrm{tg}x}{1+\mathrm{ctg}x}$	c)	$y=\sin(e^x+\cos x)$
	b)	$y=(x-1)\mathrm{arctg}\sqrt{x-2}$	d)	$x=t^2-4t,\ y=t^3+t$
10	a)	$y=\dfrac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}};$	c)	$y=\ln(x+\ln x)$
	b)	$y=(x-1)\arcsin\sqrt{2-x};$	d)	$x=t^2-4t,\ y=(t+1)^3$
11	a)	$y=\dfrac{x-1}{5x-2}$	c)	$\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-1\right)$
	b)	$y=\ln x\cdot\sin\sqrt{\ln x}$	d)	$x=(t-2)^2,\ y=t^3+t$
12	a)	$y=\dfrac{2x+3}{3x+7}$	c)	$y=5\mathrm{arctg}\,e^{\sqrt{5x}}$
	b)	$y=\left(x^2-3x+3\right)\left(x^2+2x-1\right)$	d)	$x=\sin(t-4),\ y=\cos(t+3)$
13	a)	$y=\dfrac{5x^2}{x-3}$	c)	$(\dfrac{2}{\sqrt{x}}-\sqrt{3})(4\sqrt[3]{x}+\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{3x})$
	b)	$y=\ln\left(e^{5x}+1\right)$	d)	$x=\sin(2t-1),\ y=\cos 2(2t-1)$
14	a)	$y=\dfrac{x^2+2x}{3-4x}$	c)	$y=\mathrm{tg}(2^x+x+1)$
	b)	$y=\left(1-x^2\right)\left(1-2x^3\right)$	d)	$x=2^t,\ y=t^2$
15	a)	$y=\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$	c)	$y=\sin 3^x\cdot\cos^2 3^x$

	b)	$y=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$	d)	$x=\sin(2t+1)$, $y=\cos 2(2t+1)$
16	a)	$y=\frac{x^2}{x+1}$	c)	$y=(x-1)(x-2)(x-3)$
	b)	$y=2\ln\operatorname{tg}(x/8)$	d)	$x=(2t-1)^2$, $y=\ln(2t+1)$
17	a)	$y=\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}$	c)	$y=\frac{1}{2}\cdot(\operatorname{tg}2x+\ln\cos^2 2x)$
	b)	$y=(\sqrt[3]{x}+1)(x-1)$	d)	$x=\ln(2t-1)$, $y=\ln(2t+1)$
18	a)	$y=\frac{\sqrt{x^3}-x}{x+\sqrt[3]{x^2}}$	c)	$y=\operatorname{ctg}^2\operatorname{ctg}x$
	b)	$y=(x^2-4)(x^2-9)$	d)	$x=\operatorname{tg}(2t-1)$, $y=(2t+1)^2$
19	a)	$y=\frac{x^2+7x+5}{x^2-3x}$	c)	$y=\arcsin\sqrt{1-e^x}$
	b)	$y=(1+\sqrt{2x})(1+\sqrt{3x})$	d)	$x=(2t-1)^2$, $y=(2t+1)^3$
20	a)	$y=\frac{-x^2+2x+3}{x^3-2}$	c)	$y=\ln\frac{1-\sin 3x}{1+\sin 3x}$
	b)	$y=(x^2+x-1)(x^3+1)$	d)	$x=10^{2t-1}$, $y=\lg(2t-1)$
21	a)	$y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$;	c)	$y=\operatorname{tg}(1+\ln x)$
	b)	$y=(x+2)^2\ln(x+2)$;	d)	$y=(x^2-1)\operatorname{tg}x$;
22	a)	$y=\frac{2x-x^2}{1-\cos x}$;	c)	$y=\arccos(1+\ln x)$
	b)	$y=(x^2-1)\operatorname{tg}x$;	d)	$x=10^{\sin t}$, $y=t^2-2t$
23	a)	$y=\frac{1+e^{3x}}{\ln x}$	c)	$y=\cos\sqrt{1-\ln x}$
	b)	$y=(x^2-1)\operatorname{arcctg}x$	d)	$x=\arccos t$, $y=\arcsin t$
24	a)	$y=\frac{x+\ln x}{x^3}$	c)	$y=e^{\sin x}+e^{-\cos x}$
	b)	$y=(1+x^2)\operatorname{arctg}x$	d)	$x=(2t-3)^2$, $y=\sin t^2$
25	a)	$y=\frac{\sin x}{1+\cos x}$	c)	$y=\arccos(1+x^2)$
	b)	$y=e^x\ln(1+x^2)$	d)	$x=(t^2+1)^3$, $y=t^3$
26	a)	$y=\frac{x-1}{1+x^2}$	c)	$y=\ln(1+\sqrt{x+1})$
	b)	$y=x^3\sin(1+x^2)$	d)	$x=e^{-4t}$, $y=t^2+2t$

27	a)	$y=\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$	c)	$y=\ln(x-\ln x)$
	b)	$y=(x-1)\arccos\sqrt{2-x}$	d)	$x=t^2+2t,\ y=(t+2)^3$
28	a)	$y=\dfrac{2x-1}{4x+3}$	c)	$y=\ln x\cdot\cos\sqrt{\ln x}$
	b)	$y=\left(\sqrt{x-1}\right)\left(1-\sqrt{x}\right)$	d)	$x=(t+2)^3,\ y=t^3+3t$
29	a)	$y=\dfrac{2x^2+1}{3x^2+5}$	c)	$y=\mathrm{ctg}(2^x-x^2+3)$
	b)	$y=\left(x^2+5x-3\right)\left(x^2-4x+5\right)$	d)	$x=\ln(t^2-4),\ y=\lg(t+2)$
30	a)	$y=\dfrac{5x^2+3}{x^2-1}$	c)	$y=\ln\left(e^{5x}+1\right)$
	b)	$y=\left(1-x^2\right)\left(1-2x^3\right)$	d)	$x=\sin(2t+1),\ y=\cos 2(2t+1)$

III.2-masala

$y=f(x)$ tenglama bilan berilgan egri chiziqning absissasi $x=x_0$ bo'lgan nuqtasiga o'tkazilgan urinma va normal tenglamalarini yozing.

№	$y=f(x)$	x_0	№	$y=f(x)$	x_0
1	$y=x^2+2x$	2	16	$y=3tg2x+1$	π/2
2	$y=80x-x^2$	−1	17	$y=1-4x+e^{3x}$	0
3	$y=1+2\cos x$	π/2	18	$y=6tg5x$	π/20
4	$y=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3$	1	19	$y=4\sin 6x$	π/18
5	$y=\frac{1}{3}x^3+4x+3$	4	20	$y=\frac{x^2}{3}-\frac{x^2}{2}-7x+9$	1
6	$y=x+\sin 2x$	π/4	21	$y=x^2-3x+1$	−1
7	$y=xe^x$	0	22	$y=8x^3-x^2+1$	3
8	$y=13+tgx$	π/3	23	$y=1-2\cos x$	−π/2
9	$y=1-x^2$	1	24	$y=4tg3x$	π/9
10	$y=1+3x+e^{2x}$	0	25	$y=x^3-3x+5$	−2
11	$y=x^3-5x^2+7x-2$	−1	26	$y=x-\cos 2x$	π/4
12	$y=x^2-6x+2$	2	27	$y=e^x\cos x$	0

13	$y=\frac{x^2}{4}-x+5$	4	28	$y=\mathrm{ctg}x+\mathrm{tg}x$	π/4
14	$y=\frac{x^4}{4}-27x+60$	–2	29	$y=\sin(1-x^2)$	−1
15	$y=-\frac{x^2}{2}+7x-\frac{15}{2}$	3	30	$y=1-5x+e^{3x}$	0

III.3-masala

Moddiy nuqta s=s(t) tenglama bo'yicha harakatlanmoqda. Bu moddiy nuqtaning berilgan t=t_0 vaqtdagi $v(t_0)$ tezligini va $a(t_0)$ tezlanishini aniqlang.

№	$s=s(t)$	t_0	№	$s=s(t)$	t_0
1	$s=e^{\sin 2t}$	π/2	16	$s=2^{\ln t}$	E
2	$s=te^t$	0	17	$s=e^t\cos t$	0
3	$s=\ln(t^2-9)$	5	18	$s=\ln^2(t-1)$	2
4	$s=t^2\ln t$	1	19	$s=\frac{\ln t}{t}$	E
5	$s=\frac{t^2}{t+2}$	4	20	$s=\frac{1}{1-e^t}$	ln2
6	$s=\frac{4t}{4-t^2}$	$\sqrt{2}$	21	$s=\ln(t^2+1)$	0
7	$s=\frac{t^2+1}{t^2-1}$	3	22	$s=\frac{4t}{4+\sin t}$	π/2
8	$s=\frac{t^2}{t-2}$	5	23	$s=t\sqrt{5+t}$	4
9	$s=\ln(4-t^2)$	1	24	$s=\sqrt{t^2-t}$	2
10	$s=\frac{t^2+1}{t-1}$	0	25	$s=\frac{t^2}{t-1}$	3
11	$s=e^{2\cos t}$	π/2	26	$s=\sqrt{t}e^t$	1
12	$s=t\sin t$	π/4	27	$s=t^3\ln t$	1
13	$s=\ln(t^2-1)$	3	28	$s=\frac{t}{t^2+1}$	2
14	$s=(2+t^2)\ln t$	e	29	$s=\ln^2(t+1)$	0
15	$s=e^t\ln(t+1)$	0	30	$s=\frac{t^2}{t+4}$	0

III.4-masala

Berilgan $y = f(x)$ funksiyani ekstremumga tekshiring va uning monotonlik oraliqlarini toping.

№	$y = f(x)$	№	$y = f(x)$	№	$y = f(x)$
1	$y = e^{2x - x^2}$	11	$y = 2^{1/x}$	21	$y = e^{2x + x^2}$
2	$y = xe^{x^2}$	12	$y = x \cdot e^{-x}$	22	$y = xe^{x}$
3	$y = \ln(x^2 - 1)$	13	$y = e^{x} - x$	23	$y = \ln(x^2 - 9)$
4	$y = (2 + x^2)e^{-x^2}$	14	$y = \dfrac{\ln x}{x}$	24	$y = x^2 + 2\ln x$
5	$y = x^2 - 2\ln x$	15	$y = \ln(x^2 - 1)$	25	$y = \dfrac{x^2}{x + 2}$
6	$y = \dfrac{x^2}{x - 1}$	16	$y = \dfrac{1}{1 - e^{x}}$	26	$y = \dfrac{4x}{4 - x^2}$
7	$y = \dfrac{4x}{4 + x^2}$	17	$y = x - \ln x$	27	$y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$
8	$y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$	18	$y = x\sqrt{x + 5}$	28	$y = \dfrac{x^2}{x - 2}$
9	$y = \ln(9 - x^2)$	19	$y = \sqrt{x^2 - x}$	29	$y = \ln(4 - x^2)$
10	$y = \dfrac{x^2}{x + 4}$	20	$y = \sqrt{x - x^2}$	30	$y = \dfrac{x^2 + 1}{x - 1}$

I BOSQICH BAKALAVRLARI UCHUN KUZGI O‘QUV MAVSUMI MUSTAQIL ISH TOPSHIRIQLARIDAGI MASALALARNING NAMUNAVIY YECHIMLARI.

I topshiriq

Berilgan uch noma’lumli chiziqli tenglamalar sistemasini Kramer, Gauss va matritsalar usullarida yeching:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$$

Yechish: Berilgan sistemani Kramer usulida yechish uchun dastlab uning asosiy Δ va yordamchi Δ_1, Δ_2, Δ_3 aniqlovchilarini hisoblaymiz. Asosiy Δ aniqlovchi sistemaning koeffitsientlaridan tuziladi:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot(-3)\cdot 3 + (-1)\cdot 1\cdot 5 + 1\cdot 2\cdot 2 - 2\cdot 1\cdot(-3) - 2\cdot 1\cdot(-1) - 5\cdot 1\cdot 3 =$$

$$= -9 - 5 + 4 + 6 + 2 - 15 = -17,$$

Yordamchi Δ_1, Δ_2, Δ_3 aniqlovchilar asosiy Δ aniqlovchining mos ravishda birinchi, ikkinchi, uchinchi ustunlarini ozod hadlar bilan almashtirishdan hosil qilinadi:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -3 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 + 3 + 2 + 3 - 0 + 9 = 17,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 5 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -9 + 5 + 0 - (-6) - 2 - 0 = 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -3 + 0 - 6 - 0 - 3 - 5 = -17.$$

Bu aniqlovchilar yordamida berilgan chiziqli tenglamalar sistemasining ildizlarini Kramer formulalari orqali quyidagicha topamiz:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{17}{-17} = -1 \ , \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{0}{-17} = 0 \ , \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-17}{-17} = 1.$$

Demak, berilgan sistemaning ildizlari $x_1 = -1$, $x_2=0$, $x_3=1$ boʻladi.

Yechim toʻgʻriligini tekshirish uchun bu ildizlar qiymatlarini berilgan sistemaga qoʻyamiz:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -1 + 0 + 1 \equiv 0 \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 5\cdot(-1) - 3\cdot 0 + 2\cdot 1 \equiv -3. \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2\cdot(-1) - 0 + 3\cdot 1 \equiv 1 \end{cases}$$

Bu yerdan koʻrinadiki $x_1 = -1$, $x_2=0$, $x_3=1$ boʻlganda berilgan sistemaning uchala tenglamasi ham ayniyat boʻldi. Demak, sistema toʻgʻri yechilgan va $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=1$ berilgan sistema ildizlari boʻladi.

Bu sistemani Gauss usulida yechish uchun dastlab uni «toʻrtburchakli» shakldan «uchburchakli» shaklga keltiramiz. Buning uchun dastlab sistemaning ikkinchi va uchinchi tenglamalaridan x_1 noma’lumni yoʻqotamiz. Bunga erishish uchun sistemaning birinchi tenglamasini 5ga (yoki 2ga) koʻpaytirib, uning ikkinchi (yoki uchinchi) tenglamasidan ayiramiz. Natijada quyidagi sistemaga kelamiz:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -8x_2 - 3x_3 = -3 \\ \quad -3x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Endi bu sistemaning uchinchi tenglamasidan x_2 noma’lumni yoʻqotamiz. Buning uchun oxirgi sistemaning ikkinchi tenglamasini 3 ga, uchinchi tenglamasini esa 8 ga koʻpaytirib, hosil boʻlgan uchinchi tenglamadan ikkinchi tenglamani ayiramiz. Natijada ushbu «uchburchak» shaklidagi sistemaga kelamiz:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -8x_2 - 3x_3 = -3. \\ \quad -17x_3 = -17 \end{cases}$$

Oxirgi uchburchakli sistemaning uchinchi tenglamasidan x_3 noma’lumni topamiz:

$$-17x_3 = -17 \Rightarrow x_3 = \frac{-17}{-17} = 1.$$

x_3=1 natijani uchburchakli sistemaning ikkinchi tenglamasiga qoʻyib, x_2 noma’lumni topamiz:

$$-8x_2 - 3\cdot 1 = -3 \Rightarrow -8x_2 - 3 = -3 \Rightarrow -8x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0.$$

Topilgan x_3=1 va x_2=0 natijalarni uchburchakli sistemaning birinchi tenglamasiga qoʻyib, x_1 noma’lum qiymatini topamiz:

$$x_1 + 0 + 1 = 0 \Rightarrow x_1 + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -1.$$

Demak, berilgan sistemaning ildizlari x_1= –1, x_2=0, x_3=1 boʻladi va Kramer usulida topilgan natijalar bilan ustma–ust tushadi.

Endi bu sistemani matritsalar usulida yechamiz. Buning uchun berilgan sistema boʻyicha quyidagi matritsalarni kiritamiz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Bu holda berilgan chiziqli tenglamalar sistemasi $AX= B$ koʻrinishga keladi va uning ildizlaridan iborat X matritsa $X=A^{-1}\cdot B$ formula bilan topiladi. Bu yerda A^{-1} yuqoridagi A matritsaga teskari matritsa boʻlib, u

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

formula orqali topiladi. Shu sababli dastlab Δ=detA aniqlovchini va A_{ij} algebraik toʻldiruvchilarni hisoblaymiz. Kramer usuli koʻrilayotganda

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -17$$

ekanligi topilgan edi. Algebraik toʻldiruvchi ta’rifiga asosan

$$A_{11}=\begin{vmatrix}-3 & 2\\ -1 & 3\end{vmatrix}=-7\ ,\quad A_{12}=-\begin{vmatrix}5 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix}=-11\ ,\quad A_{13}=\begin{vmatrix}5 & -3\\ 2 & -1\end{vmatrix}=1$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 3\end{vmatrix}=-4\ ,\quad A_{22}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix}=1\ ,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=3$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ -3 & 2\end{vmatrix}=5\ ,\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 1\\ 5 & 2\end{vmatrix}=3\ ,\quad A_{33}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 5 & -3\end{vmatrix}=-8$$

ekanligini topamiz.

Demak,

$$A^{-1}=\frac{1}{-17}\begin{pmatrix}-7 & -4 & 5\\ -11 & 1 & 3\\ 1 & 3 & -8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{7}{17} & \frac{4}{17} & -\frac{5}{17}\\ \frac{11}{17} & -\frac{1}{17} & -\frac{3}{17}\\ -\frac{1}{17} & -\frac{3}{17} & \frac{8}{17}\end{pmatrix}$$

va matritsalarni koʻpaytirish ta’rifiga asosan

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=A^{-1}B=\begin{pmatrix}\frac{7}{17} & \frac{4}{17} & -\frac{5}{17}\\ \frac{11}{17} & -\frac{1}{17} & -\frac{3}{17}\\ -\frac{1}{17} & -\frac{3}{17} & \frac{8}{17}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\ -3\\ 1\end{pmatrix}=\frac{1}{17}\begin{pmatrix}-17\\ 0\\ 17\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}.$$

Bu yerdan yana bir marta berilgan sistemaning yechimi $x_1=-1$, $x_2=0$ va $x_3=1$ ekanligini koʻramiz.

<u>II topshiriq</u>

Fazoda uchlari $A(8,6,4)$, $B(10,5,5)$, $C(5,6,8)$ va $D(9,10,7)$ nuqtalarda joylashgan piramida berilgan. Bu piramida bo’yicha quyidagilarni bajaring:

1. $\overrightarrow{AB}$ vektor koordinatalarini toping va undan foydalanib AB qirra uzunligini hisoblang;

2. $\overrightarrow{AB}$ va $\overrightarrow{AD}$ vektorlardan foydalanib AB va AD qirralar orasidagi φ burchak kosinusini toping;

3. $\overrightarrow{AB}$ va $\overrightarrow{AD}$ vektorlardan foydalanib piramidaning ABD tomoni yuzasini toping ;

4. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ va $\overrightarrow{AD}$ vektorlar yordamida $ABCD$ piramidaning hajmini aniqlang;

5. AD qirra yotgan toʻgʻri chiziqning kanonik va parametrik tenglamalarini yozing;

6. ABC yoq yotgan tekislikning umumiy, kesmalardagi va normal tenglamalarni yozing;

7. Piramidaning ABC va ABD yoqlari orasigi ikki yoqli α burchak kosinusini toping;

8. Piramidaning D uchidan tushirilgan DH balandligi yotuvchi L to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasini aniqlang;
9. Piramidaning D uchidan tushirilgan DH balandligining uzunligini toping.

Yechish: **1.** $\overrightarrow{AB}=(x, y, z)$ vektorning x, y va z koordinatalari uning B(10,5,5) uchi va A(8,6,4) boshi mos koordinatalarining ayirmasiga teng , ya'ni

$$\overrightarrow{AB}=(x, y, z)=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)=(10-8, 5-6, 5-4)=(2, -1, 1) .$$

AB qirraning |AB| uzunligi topilgan $\overrightarrow{AB}$ vektor moduliga teng bo'ladi va $|\overrightarrow{AB}|$ modul formulasiga asosan

$$|AB| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{6} .$$

2. Dastlab yuqoridagi singari A(8,6,4) va D(9,10,7) nuqtalar bo'yicha $\overrightarrow{AD}$ vektor koordinatalarini topamiz:

$$\overrightarrow{AD}=(9-8, 10-6, 7-4)=(1, 4, 3) .$$

AB va AD qirralar orasidagi φ burchak kosinusini $\overrightarrow{AB}=(2, -1, 1)$ va $\overrightarrow{AD}=(1, 4, 3)$ vektorlar orasidagi burchak formulasi, vektorlar skalyar ko'paytmasi va modullarini koordinatalar orqali ifodasidan foydalanib topamiz:

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AD}|} = \frac{2\cdot 1 + (-1)\cdot 4 + 1\cdot 3}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}\cdot\sqrt{1^2 + 4^2 + 3^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{26}} = \frac{1}{\sqrt{156}} .$$

3. Piramidaning ABD yog'ining S yuzasini topish uchun $\overrightarrow{AB}=(2, -1, 1)$ va $\overrightarrow{AD}=(1, 4, 3)$ vektorlarning vektorial ko'paytmasidan foydalanamiz. Vektorial ko'paytmaning koordinatalardagi ifodasi va III tartibli aniqlovchini hisoblash formulasiga asosan

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -3i + 8k + j + k - 4i - 6j = -7i - 5j + 9k = (-7, -5, 9).$$

Bu yerdan, vektorial ko'paytma modulining geometrik ma'nosiga asosan,

$$S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{(-7)^2 + (-5)^2 + 9^2} = \frac{\sqrt{155}}{2}\text{kv.birlik}$$

javobga ega bo'lamiz.

4. Dastlab A(8,6,4) va C(5,6,8) nuqtalar bo'yicha $\overrightarrow{AC}$ vektor koordinatalarini topamiz:

$$\overrightarrow{AC}=(5-8, 6-6, 8-4)=(-3, 0, 4) .$$

$ABCD$ piramidaning V hajmini

$$\overrightarrow{AB}=(2, -1, 1),\ \overrightarrow{AC}=(-3, 0, 4) ,\ \overrightarrow{AD}=(1, 4, 3)$$

vektorlarning aralash ko’paytmasi yordamida topamiz. Aralash ko’paytmaning koordinatalar orqali ifodasi formulasidan foydalanib

$$V=\pm\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix}2 & -1 & 1\\ -3 & 0 & 4\\ 1 & 4 & 3\end{vmatrix}=$$

$$=\pm\frac{1}{6}(0+(-4)+(-12)-0-32-9)=\pm\frac{1}{6}\cdot(-57)=\frac{57}{6}=9\frac{1}{2}\ \text{kub birlik}$$

natijani olamiz.

5. *AD* qirra yotgan toʻgʻri chiziqning kanonik tenglamasini ikkita A(8,6,4) va D(9,10,7) nuqtalardan oʻtuvchi toʻgʻri chiziq tenglamasi formulasidan foydalanib topamiz:

$$AD:\quad \frac{x-8}{9-8}=\frac{y-6}{10-6}=\frac{z-4}{7-4}\Rightarrow\frac{x-8}{1}=\frac{y-6}{4}=\frac{z-4}{3}.$$

Endi AD qirraning kanonik tenglamasidagi kasrlarni t parametrga tenglashtirib, uning parametrik tenglamasini hosil qilamiz :

$$\frac{x-8}{1}=\frac{y-6}{4}=\frac{z-4}{3}=t\Rightarrow x-8=t,\quad y-6=4t,\quad z-4=3t\Rightarrow$$

$$x=t+8,\quad y=4t+6,\quad z=3t+4.$$

6. *ABC* yoq yotgan tekislikning $Ax+By+Cz+D=0$ koʻrinishdagi umumiy tenglamasini uchta $A(8,6,4)$, $B(10,5,5)$ va $C(5,6,8)$ nuqtalardan oʻtuvchi tekislik tenglamasining ifodasi yordamida topamiz:

$$\begin{vmatrix}x-8 & y-6 & z-4\\ 10-8 & 5-6 & 5-4\\ 5-8 & 6-6 & 8-4\end{vmatrix}=0\Rightarrow\begin{vmatrix}x-8 & y-6 & z-4\\ 2 & -1 & 1\\ -3 & 0 & 4\end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow -4(x-8)-3(y-6)-3(z-4)-8(y-6)=0\Rightarrow$$

$$-4x+32-3y+18-3z+12-8y+48=0$$

$$-4x-11y-3z+110=0\Rightarrow 4x+11y+3z-110=0$$

Endi *ABC* yoqning kesmalarga nisbatan $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ tenglamasini topish uchun uning umumiy tenglamasini $-D=110$ ga boʻlamiz:

$$\frac{4x}{110}+\frac{11y}{110}+\frac{3z}{110}-\frac{110}{110}=0\Rightarrow\frac{x}{5/2}+\frac{y}{10}+\frac{z}{110/3}=1.$$

Bu yerdan izlangan kesmalardagi tenglamada $a=5/2$, $b=10$ va $c=110/3$ ekanligini koʻramiz.

ABC yoqning normal $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$ tenglamasini topish uchun normallashtiruvchi M koʻpaytuvchini topib, *ABC* yoqning umumiy tenglamasining ikkala tomonini M ga koʻpaytiramiz. Umumiy tenglamada ozod had $D=-110<0$ boʻlgani uchun

$$M=\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{1}{\sqrt{4^2+11^2+3^2}}=\frac{1}{\sqrt{16+121+9}}=\frac{1}{\sqrt{146}}\quad\Rightarrow$$

$$\frac{4}{\sqrt{146}}x+\frac{11}{\sqrt{146}}y+\frac{3}{\sqrt{146}}z-\frac{110}{\sqrt{146}}=0.$$

Demak, $\cos\alpha=4/\sqrt{146}$, $\cos\beta=11/\sqrt{146}$, $\cos\gamma=3/\sqrt{146}$ va $p=110/\sqrt{146}$.

7. Dastlab *ABD* yoq yotgan tekislikning umumiy tenglamasini topamiz:

$$\begin{vmatrix} x-8 & y-6 & z-4 \\ 10-8 & 5-6 & 5-4 \\ 9-8 & 10-6 & 7-4 \end{vmatrix}=0\Rightarrow\begin{vmatrix} x-8 & y-6 & z-4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow -3(x-8)+(y-6)+8(z-4)+(z-4)-6(y-6)+4(x-8)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-5y+9z-14=0.$$

Umumiy tenglamalari $4x+11y+3z-110=0$ va $x-5y+9z-14=0$ bo'lgan *ABC* va *ABD* tekisliklar orasidagi burchak formulasiga asosan cosα qiymatini topamiz:

$$\cos\alpha=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}=$$

$$=\frac{4\cdot1+11\cdot(-5)+3\cdot9}{\sqrt{4^2+11^2+3^2}\cdot\sqrt{1^2+(-5)^2+9^2}}=-\frac{24}{\sqrt{146}\cdot\sqrt{107}}=-\frac{24}{\sqrt{15622}}.$$

8. Piramidaning D(9,10,7) uchidan tushirilgan *DH* balandlik yotgan *L* to'g'ri chiziq tenglamasini topish uchun dastlab bu nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqlar dastasi tenglamasidan foydalanamiz:

$$L:\quad \frac{x-9}{m}=\frac{y-10}{n}=\frac{z-7}{p}.$$

Bu to'g'ri chiziq *ABC* yoq yotgan va $4x+11y+3z-110=0$ umumiy tenglama bilan aniqlangan tekislikka perpendikulyar joylshgan. Shu sababli, fazodagi to'g'ri chiziq va tekislikning perpendikulyarlik shartiga asosan, $m=4$, $n=11$ va $p=3$ deb olish mumkin. Demak, *DH* balandlik yotgan *L* to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasi quyidagicha bo'ladi:

$$L:\quad \frac{x-9}{4}=\frac{y-10}{11}=\frac{z-7}{3}.$$

9. Piramidaning D(9,10,7) uchidan tushirilgan *DH* balandlikning *h* uzunligini bu nuqtadan umumiy tenglamasi $4x+11y+3z-110=0$ boʻlgan *ABC* yoq yotgan tekislikkacha boʻlgan *d* masofa formulasidan foydalanib topamiz:

$$h=d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|4\cdot9+11\cdot10+3\cdot7-110|}{\sqrt{4^2+11^2+3^2}}=$$

$$=\frac{|36+110+21-110|}{\sqrt{146}}=\frac{57}{\sqrt{146}}.$$

III topshiriq

III.1-masala

Quyidagi berilgan funksiyalarning hosilalarini toping:

$$a)\ y=\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}},\qquad \text{b)}\ y=(3x^2+5x-4)\sin x,$$

$$\text{c)}\ y=\ln(3tgx+e^x)\qquad \text{d)}\ x=t(\cos t-\sin t),\ y=t(\cos t+\sin t).$$

Yechish: *a*) Bo'linmaning hosilasi

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$

formulasida $u=x,\quad v=\sqrt{a^2-x^2}$ deb olib va hosilalar jadvalidan foydalanib, ushbu natijani olamiz:

$$y'=\left(\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)'=\frac{x'\sqrt{a^2-x^2}-x\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)'}{(\sqrt{a^2-x^2})^2}=\frac{\sqrt{a^2-x^2}-\frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}}(a^2-x^2)'}{a^2-x^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{a^2-x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}}{a^2-x^2}=\frac{(\sqrt{a^2-x^2})^2+x^2}{\sqrt{\left(a^2-x^2\right)^3}}=\frac{a^2-x^2+x^2}{\sqrt{\left(a^2-x^2\right)^3}}=\frac{a^2}{\sqrt{\left(a^2-x^2\right)^3}}\ .$$

b) Ko'paytmaning hosilasi $(uv)'=u'v+uv'$ formulasida

$$u=3x^2+5x-4,\quad v=\sin x$$

deb olib va hosilalar jadvalidan foydalanib, ushbu javobga kelamiz:

$$y'=\left((3x^2+5x-4)\sin x\right)'=(3x^2+5x-4)'\sin x+(3x^2+5x-4)(\sin x)'=$$
$$=(6x+5)\sin x+(3x^2+5x-4)\cos x.$$

c) Murakkab funksiyaning hosilasi $\left[f(u)\right]'=f'(u)\cdot u'$ formulasida $f(u)=\ln u,\quad u=3tgx+e^x$ deb olib va hosilalar jadvaliga asosan

$$y'=[\ln(3tgx+e^x)]'=(u=3tgx+e^x)=(\ln u)'=\frac{1}{u}u'=$$

$$=\frac{1}{3tgx+e^x}(3tgx+e^x)'=\frac{1}{3tgx+e^x}(3\cdot\frac{1}{\cos^2 x}+e^x)=\frac{3+e^x\cos^2 x}{(3tgx+e^x)\cos^2 x}$$

natijaga erishamiz.

d) Parametrik $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ ko'rinishda berilgan funksiyaning hosilasini topish

$$y'=\frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}$$

formulasida $x=\varphi(t)=t(\cos t-\sin t)$, $y=\psi(t)=t(\cos t+\sin t)$ deb, izlanayotgan y' hosilaning parametrik ko'rinishdagi ifodasini topamiz:

$$y'=\frac{[t(\cos t-\sin t)]'}{[t(\cos t+\sin t)]'}=\frac{t'(\cos t-\sin t)+t(\cos t-\sin t)'}{t'(\cos t+\sin t)+t(\cos t+\sin t)'}=$$

$$=\frac{(\cos t-\sin t)+t(-\sin t-\cos t)}{(\cos t+\sin t)+t(-\sin t+\cos t)}=\frac{\cos t-\sin t-t(\sin t+\cos t)}{\cos t+\sin t-t(\sin t-\cos t)}\;.$$

III.2-masala

Ushbu $y=\sqrt[3]{x^2}-2x-2$ funksiya grafigiga absissasi $x_0=1$ bo'lgan nuqtada o'tkazilgan urinma va normal tenglamasini tuzing.

Yechish: Ma'lumki, differentsiallanuvchi $y=f(x)$ funksiya grafigining $(x_0, y_0)=(x_0, f(x_0))$ nuqtasiga o'tkazilgan urinma tenglamasi

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0),$$

normal tenglamasi esa

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$$

formulalar bilan topiladi. Bizning masalada $f(x)=\sqrt[3]{x^2}-2x-2$, $x_0=1$ va

$$y_0=f(x_0)=f(1)=\sqrt[3]{1^2}-2\cdot1-2=1-4=-3,$$

$$y'(x)=f'(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}-2\Rightarrow f'(x_0)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x_0}}-2=\frac{2}{3\sqrt[3]{1}}-2=\frac{2}{3}-2=-\frac{4}{3}$$

bo'ladi. Bu yerdan urinma tenglamasi

$$y+3=-\frac{4}{3}(x-1) \Rightarrow 3y+9=-4x+4 \Rightarrow 4x+3y+5=0,$$

normal tenglamasi esa

$$y+3=\frac{3}{4}(x-1) \Rightarrow 4y+12=3x-3 \Rightarrow 3x-4y-15=0$$

ko'rinishda ekanligi kelib chiqadi.

III.3-masala

Moddiy nuqta $s=t\sin^2 t$ tenglama bo'yicha harakatlanmoqda. Bu moddiy nuqtaning berilgan $t=\pi/4$ vaqtdagi $v(\pi/4)$ tezligini va $a(\pi/4)$ tezlanishini aniqlang.

Yechish: Harakat tenglamasi $s=s(t)$ bo'lgan moddiy nuqtaning $t=t_0$ vaqtdagi tezligi $v(t_0)=s'(t_0)$ va tezlanishi $a(t_0)=s''(t_0)$ hosilalar orqali topiladi. Shu sababli dastlab I tartibli $s'(t)$ va II tartibli $s''(t)$ hosilalarni hisoblaymiz:

$$s'(t)=(t\sin^2 t)'=t'\sin^2 t+t(\sin^2 t)'=\sin^2 t+t\cdot 2\sin t\cos t=\sin^2 t+t\sin 2t\,,$$

$$s''(t)=[s'(t)]'=[\sin^2 t+t\sin 2t]'=\sin 2t+\sin 2t+2t\cos 2t=2(\sin 2t+t\cos 2t)\text{B}$$

u yerdan, yuqoridagi formulalarga asosan,

$$v(\frac{\pi}{4})=s'(\frac{\pi}{4})=\sin^2\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{2}=(\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{\pi}{4}\cdot 1=\frac{2+\pi}{4}\,,$$

$$a(\frac{\pi}{4})=s''(\frac{\pi}{4})=2(\sin\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{2})=2(1+\frac{\pi}{4}\cdot 0)=2\ .$$

III.4-masala

Berilgan $f(x)=x^3+4{,}5x^2-12x+1$ funksiyani ekstremumga tekshiring va uning monotonlik oraliqlarini toping.

Yechish: Berilgan $f(x)=x^3+4{,}5x^2-12x+1$ funksiyani ekstremumga tekshirish uchun dastlab $f'(x)=0$ tenglamadan uning kritik nuqtalarini topamiz:

$$f'(x)=(x^3+4{,}5x^2-12x+1)'=3x^2+9x-12=0 \Rightarrow 3x^2+9x-12=0 \Rightarrow x^2+3x-4=0,$$

$$x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{2}=\frac{-3\pm 5}{2} \Rightarrow x_1=-4,\ x_2=1.$$

Dastlab funksiyaning $x_1=-4$ kritik nuqtadagi xarakterini aniqlaymiz. Bunda $x<-4$ holda $f'(x)>0$ va $x>-4$ holda $f'(x)<0$ bo'ladi. Demak, $x_1=-4$ kritik nuqtada funksiya lokal maksimumga ega bo'ladi va

$$f_{max}=f(-4)=(-4)^3+4.5\cdot(-4)^2-12\cdot(-4)+1=57.$$

Endi funksiyaning $x_2=1$ kritik nuqtadagi xarakterini aniqlaymiz. Bunda $x<1$ holda $f'(x)<0$ va $x>1$ holda $f'(x)>0$ bo'ladi. Demak, $x_2=1$ kritik nuqtada funksiya lokal minimumga ega bo'ladi va

$$f_{min}=f(1)=1^3+4.5\cdot 1^2-12\cdot 1+1=-5.5\ .$$

Funksiyaning monotonlk oraliqlari, ya'ni o'sish va kamayish sohalari, $f'(x)>0$ va $f'(x)<0$ tengsizliklarning yechimlari kabi topiladi. Bunda

$$f'(x)>0 \Rightarrow 3x^2+9x-12>0 \Rightarrow x<-4,\ x>1$$

bo'lgani uchun funksiyaning o'sish sohasi $(-\infty,-4)\cup(1,\infty)$ ekanligi kelib chiqadi.

Xuddi shunday tarzda

$$f'(x)<0 \Rightarrow 3x^2+9x-12<0 \Rightarrow -4<x<1$$

bo'lgani uchun funksiyaning kamayish sohasi $(-4,1)$ oraliqdan iborat ekanligi kelib chiqadi.

ILOVA. HOSILALAR JADVALI

	I. DARAJALI FUNKSIYALAR		
1	$(x^n)' = nx^{n-1}, \quad n \in (-\infty, \infty)$	2	$(u^n)' = nu^{n-1}u', \ u = u(x)$
3	$(C)' = 0, C - const. \quad (x)' = 1 \qquad (x^2)' = 2x \qquad (x^3)' = 3x^2$	4	$(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2} \qquad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
	II. KO'RSATGICHLI FUNKSIYALAR		
5	$(a^x)' = a^x \ln a, a > 0, a \neq 1$	6	$(a^u)' = a^u u' \ln a, u = u(x)$
7	$(e^x)' = e^x \qquad (10^x)' = 10^x \ln 10$	8	$(e^u)' = e^u \cdot u', \quad u = u(x)$
	III. LOGARIFMIK FUNKSIYALAR		
9	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} = \frac{\log_a e}{x}, a > 0, a \neq 1$	10	$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} = \frac{u' \log_a e}{u}, u = u(x)$
11	$(\ln x)' = \frac{1}{x} \qquad (\lg x)' = \frac{1}{x \ln 10} = \frac{\lg e}{x}$	12	$(\ln u)' = \frac{1}{u} u', \quad u = u(x)$
	IV. TRIGONOMETRIK FUNKSIYALAR		
13	$(\sin x)' = \cos x \qquad (tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	14	$(\sin u)' = \cos u \cdot u' \qquad (tgu)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
15	$(\cos x)' = -\sin x \qquad (ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	16	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u' \qquad (ctgu)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$
17	$(\sec x)' = (\frac{1}{\cos x})' = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \sec x \cdot tgx$	18	$(\operatorname{cos ec}x)' = (\frac{1}{\sin x})' = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} = -\operatorname{cos ec}x \cdot ctgx$
	V. TESKARI TRIGONOMETRIK FUNKSIYALAR		
19	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	20	$(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}, (\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
21	$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad (arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$	22	$(arctgu)' = \frac{u'}{1+u^2} \qquad (arcctgu)' = -\frac{u'}{1+u^2}$
	VI. GIPERBOLIK FUNKSIYALAR		
23	$(shx)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = chx$	24	$(chx)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = shx$
25	$(thx)' == \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = cthx$	26	$(cthx)' == \left(\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = thx$
	VII. DIFFERENSIALLASH QOIDARLARI		
27	$(C \cdot u)' = C \cdot u' \qquad (u \pm v)' = u' \pm v'$	28	$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$
29	$(\frac{u}{v})' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$	30	$[f(u)]' = f'(u) \cdot u', \quad u = u(x)$
31	$(u \cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}, \quad C_n^k = \frac{k!}{n!(n-k)!}$	32	$(u^v)' = u^v v' \ln u + v u^{v-1} u'$

GLOSSARIY

Aksioma - biror matematik nazariya yaratishda boshlang'ich fakt (asos) deb qaraladigan va isbotsiz qabul qilinadigan jumla. Matematik nazariyani asoslashning mantiqiy poydevori hisoblangan aksoimalar sistemasi hamma vaqt ham tugallangan va takomillashgan bo'lmaydi, balki aksiomalarning o'zi kabi o'zgarib va takomillashib turadi. Grek.aξίωμa-hurmatga sazovor bo'lgan shubhasiz jumla; hurmat, ehtirom, obro'.

Algebra - (aljabr) matematik fan bo'lib, unda gruppa, xalqa, struktura va shu ob'yektlar o'rganiladi. Algebraning alohida shoxobchasi algebradir. Qisqaroq ma'noda algebra tenglamalaryechish haqidagi ta'limt deb qaraladi. Ancha keng ma'noda algebra deganda ixtiyoriy tabiatli to'plamning elementlari ustida sonlarni qo'shish va ko'paytirish kabi odatdagi amallarni umumlashtiruvchi va amallarni o'rganuvchi fan tushuniladi.

Algoritm – biror operatsiyalar (amallar) sistemasini ma'lum tartibda bajarish haqida aniq qoida bo'lib, ma'lum sinfga oid masalalarni yechishga imkon beradi.

Tahlil –noma'lumdan ma'lumga, izlanayotgan berilganga o'tish yo'li bilan fikr yuritish yoki isbotlash metodi (usuli).

Matematik analiz – funksiya va limitga o'tish tushunchalariga asoslangan bir qator matematik fanlarning umumiy nomi matematik analizga odatda differensial va integral hisoblari, qatorlar nazariyasi, differensial tenglamalar nazariyasi, analitik funksiyalar nazariyasi, variatsion hisob, integral tenglamalar nazariyasi, funksional analiz kiritiladi.

Analitik geometriya – matematikaning bo'limi bo'lib, unda obrazlar koordinatalar ususlida asoslanib algebra vositalari bilan tekshiriladi.

Arab raqamlari – quyidagi o'nta matematik ishoraning nomi: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9. O'nli sanoq sistemasida istalgan kichik va istagancha katta bo'lgan har qanday sonni arab raqamlari bilan yozish mumkin.

Arifmetika – (hisob) sonlar va ular ustida bajariladigan amallar haqidagi fan. Arifmetikada birinchi navbatda natural va kasr sonlar o'rganiladi. Arifmetika inson bilimining eng qadimgi tarmoqlaridan biridir. Arifmetika o'quv predmeti sifatida maktabda I-VI sinflarda o'qitiladi va tasviriy ta'riflarga asosan quriladi. Pedagogika institutlari fizika-matematika fakultetlarining uchta nazariy kursida: ratsional sonlar arifmetikasi, sonlar nazariyasi va arifmetika asoslarida arifmetika ancha chuqur o'rganiladi.

Arifmetik son – dastlabki tushunchaga ko'ra, har qanday manfiy bo'lmagan son. Birmuncha keng ma'noda har qanday son arifmetika son deb qaraladi.

Oliy matematika – oliy o'quv yurtlarida o'qitiladigan matematik fanlar turkumi bo'lib, unga analitik geometriya, differensial vaintegral hisoblari, differensial tenglamalr, differensial geometriya va boshqalar kiradi. Lekin bu termin ancha shartli termindir. Elementar matematika asosan o'zgarmas miqdorlar tekshirilgani va matematik masalalarni tekshirishda xususiy metodlar qo'llanilgani holda oliy matematikada o'zgaruvchi miqdorlar tekshiriladi va tekshirishning umumiy metodlari qo'llaniladi. Bular orasida keskin farq yo'q, ular bir-biridan faqat mamlakatimizda ta'lim berish sistemasining tuzilishi va maktabda matematika o'qitish metodikasiga bog'liq ravishda shunday ajratilgan.

Geometriya – dastlab geometriya shakllar haqidagi, ularning turli qismlarining o'zaro joylanishi va o'lchamlari haqida, shakllarning almashtirilishihaqidagi fan..

Gradus – tekis burchaklarining o'lchov birligi, ya'ni u to'g'ri burchakning $\frac{1}{90}$ qismiga teng bo'lgan tekis burchak. Grek.gradus-qadam, bosqich.

Differensial hisob – matematikaning bo’limi bo’lib, funksiyalarni hosila va differensiallar yordami bilan tekshiradi. Differensial hisobning asosiy tushunchalari hosila va differensial bo’lib, bular o’z navbatida ketma-ketlik yaki funksiyaning limiti va cheksiz kichik miqdorlar tushuchalari bilan bog’langan. Funksiya hosilasini bilish funksiyaning qayerda o’sishi yoki kamayishi, qayerda maksimumga, munimumga va burilish nuqtasiga ega ekanligi haqida mulohaza yuritishga imkon beradi. Bu tushunchalar ko’p o’zgaruvchili funksiyalarni o’rganishda ham tatbiq etiladi. Egri chiziqlarga urinma o’tkazish haqidagi masalalarni yechish munosabati bilan XVII asr matematikalaridan Dekart, Ferma va boshqalar differensial hisob yaratish sohasida birinchi qadam qo’ygan edilar. Differensial hisobning uzil-kesil yaratilishi I.Nyuton va G.Leybnisning ilmiy ishlari bilan bog’liqdir.

Differensial tenglamalar – noma’lum funksiyalar ularning har qanday tartibli hosilalari va erkli o’zgaruvchilarni o’z ishiga olgan tenglamadir.

Differensiallash – differensial yoki hosila, xususiy hosila, to’la differensiallarning hisoblash. Differensiallash differensial hisobning asosiy amali bo’lib, bunda differensiallash qoidalari va differensiallash formulalari keltirilib chuqariladi.

Isbot – biror tasdiq (mulohaza, fikr, teorema) ning haqiqan yoki noto’g’ri ekanligini aniqlashga imkon beradigan fikr yuritish. Teoremani isbot qilishda biz tushunchalarga berilgan ta’riflardan foydalanib, aksiomalarga yoki oldin isbot etilgan teoremalarga tayanamiz. Isbotlash usulida qarab ular quyidagilarga bo’linadi: analitik; sintetik; induktiv; deduktiv usullari, teskaridan isbotlash yoki bema’nilikka (ziddiyatlikka) keltirish yo’li bilan isbotlahs usullari.

Kommutatiblik qonuni – binary operatsiyasi bo’ysunishi mumkin bo’lgan qonun. Agar binary operatsiyasini ko’paytirish deb tushunilsa, u holda kommutatiblik qonuni bunday ko’rinishda bo’ladi: $ab = bc$. Kommutatiblik qonuni ko’pincha o’rin almashtirish qonuni deb kommutatiblik qonuniga bo’ysunuvchi operatsiyalarga misol qilib sonlari qo’shish va ko’paytirish, to’plamlarning kesishmasi hamda to’plamlar birlashmasini ko’rsatish mumkin.

Kibernetika – mashina, tirik organism va ularning birikmalari kabi tashkil qilingan sistemalarda boshqarish va aloqa prostesslarining umumiy qonuniyatlari birikmalarida informasiya idrok etish, yetkazish, saqlash, foydalanish va qayta ishlash haqidagi fan sifatida ham ta’riflasa bo’ladi.

Koordinatalar – ma’lum tartibda olingan va nuqtaning chiziqdagi, tekislikdagi sirtdagi yoki fazodagi vaziyatini xarakterlaydigan sonlar. Biror ob’yektni tekshirish xarakteri va maqsadiga qarab har xil koordinata sistemalari tanlanadi, bular yordamida fazoning har bir nuqtasiga aniq sonlar to’plami – nuqta koordinatalari mos keltiriladi.

Kontangens – trigonometrik funksiyalardan biri bo’lib, $ctgx$ (x-argument) orqali belgilanadi. Lotincha co (complementum – to’ldirish so’zining qisqartirilgani) va tangens so’zlaridan yasalgan.

Koeffisient – algebraik ifodaagi koeffisient – bu ifodadagi ko’paytuvchidir. Undosh harf bilan boshlanuvchi latincha so’z bilan birikkanda “co” ga aylanadigan “cum” va efficiens (qaratqich kelishigi - efficientis) – tayyorlovchi, biror narsaga sabab bo’luvchi so’zlaridan yasalgan (kofunksiya, kologarifm bilan solishtiring); so’zma-so’ziga; koeffisient-ko’maklashuvchi.

Chiziqli algebra - algebraning bo’limi bo’lib, unda chekli o’lchovli chiziqli fazolardagi chiziqli almashtirishlar o’rganiladi. Chiziqli algebra chiziqli tenglamalar sistemasini, ya’ni o’zgaruvchiga (noma’lumga) nisbatan birinchi darajali bo’lgan tenglamalarni yechish munosabati bilan paydo bo’lgan. Chiziqli algebraning yaxshi rivojlangan bo’limlari matrisalar nazariyasi, formalar (xususan, kvadrat formalar) nazariyasi, invariantlar nazariyasidir.

Logarifm – N sonining a asosga ko'ra logarifm deb shunday n soniga aytiladiki, a asosni $(a > 0, \quad a \neq 1)$ n – darajaga ko'targanda N soni hosil bo'ladi. Kompleks o'zgaruvchili funksiyalar nazariyada kompleks sonlarining logarifm (natural logarifm) lari qaraladi. Ta'rifiga ko'ra, z kompleks sonning logarifm (Ln z bilan belgilanadi) quyidagiga teng:

$$Lnz = \ln|z| + iArgz .$$

Logarim XV-XVI asrlarda astronomiya va dengizda suzishning barq urib rivojlanganda kishilik jamiyatining hisoblashga bo'lgan ehtiyojiga javob sifatida paydo bo'ladi.

Matematik logika – matematik isbotlarni o'rganadigan fan. Matematik logikaning tekshirish ob'yektlari firk (mulohazalar) bo'lib, ular ustida ham algebradagi sonlar ustida bajariladigan amallarga o'xshash amallar bajariladi. Matematik logika ba'zan matematika deb ham ataladi. Matematik logika electron hisob mashinalari nazariyasida qo'llanadi.

Matematik statistika – eksperiment natijalarini ishlab chiqishning umumiy usullari haqidagi fan. Fizika, ximiya, biologiya, meditsina va boshqa fanlarda ekspermentlar natijasiga faqatgina eksperimentator boshqaradigan faktorlargina emas, balki juda ko'p boshqa tasodifiy faktorlar ham ta'sir etadi. Demak, ekspremen natijasi odatda tasodifiy miqdor bo'ladi. Olimning vazifasi tasodifiy tebranishlarga suyanib turib bunga sabab bo'lgan qonun ta'sirini ko'ra bilishdan iborat. Bunda qo'llaniladigan usullar har xil fanlar uchun umumiy bo'lishi mumkin. Xuddi ana shu usullar matematik statistikada o'rganiladi.

Natural logarifm – asosi $e = \lim\limits_{n \to \infty}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = 2{,}71828...$ transcendent son bo'lgan logarifm (lnN bilan belgilanadi). Natural logarifm Neper nomi bilan bog'lanadi, biroq logarifm jadvallarini Neper, Brigg, Byurgi va boshqa matematiklar bir-birlaridan mustaqil ravishda deyarli bir vaqtda tuzdilar.

Teskari trigonometrik funksiyalar - $\sin x, \quad \cos x, \quad tgx, \quad ctgx, \quad \sec x, \quad \operatorname{cosec} x$ trigonometrik funksiyalarga teskari bo'lgan funksiyalardir. Teskari trigonometrik funksiya ko'pgina ratsional kasrlar va kvadratik irratsionalliklarni integrallashda hosil bo'ladi. Teskari trigonometrik funksiya arkfunksiyalar, ba'zan esa arkukslar deb ham ataladi. Teskari trigonometrik funksiya trigonometrik funksiyalar bo'la olmaydi, shuning uchun ularni trigonometrik funksiyalarga teskari bo'lgan funksiyalar yoki akrfunksiyalar deb atash to'g'ri bo'lar edi. Lotincha arcus – yoy (burchak).

Potensirlash – logarifmlashga teskari amal potensiallash – berilgan logarifmga qarab sonning o'zini toping. Potensillash tushunchasi logarifmik tenglamalarni yechishga qo'llaniladi. Nemischa potenzieren, Potenz – daraja so'zidan olingan.

Tadbiqiy matematika – bu termin matematikani fan va texnikaning boshqa sohalariga (fizika, ximiya, astronomiya, iqtisod, geodeziya, harbiy ish va injenerlik ishlari va boshqalari) tatbiq etish to'g'risida gapirilganda qo'llaniladi. Tatbiqiy matematika bilan tatbiqiy bo'lmagan matematika orasida aniq chegara yo'q.

Radikal – (yoki ildiz) biror a sondan n – darajali ildiz chiqarish amalini ifodalovchi $\sqrt[n]{}$ matematik ishora, bu bunday yoziladi; $\sqrt[n]{a}$. Lotincha radix – ildiz.

Radius – aylananing har qanday nuqtasini markazi bilan tutashtiruvchi kesma. Bu kesmaning uzunligi ham radius deb ataladi. Aylananing radiusi aylana bilan chegaralangan doiraning (sharning) radius deb ham ataladi. Lotincha radius – g'ildirakning kegayi, nur.

Signum ot x – x ning signumi – haqiqiy x sonning funksiyasi bo'lib, xmusbat bo'lganda funksiya 1 ga teng, x nol bo'lganda nolga teng, x manfiy bo'lganda – 1 ga teng. Bu funksiya $signx$ yoki $\operatorname{sgn} x$ simvol bilan belgilanadi. Lotincha singnum – ishora.

Sofizm – ataylik chiqarilgan noto'g'ri xulosa, biror jumlaning noto'g'ri isboti. Bunda isbotdagi xato isbotning biror bosqichida ancha ustalik bilan bilintirmay yuboriladi.

Steradian – fazoviy burchakning o'lchov birligi. Bir steradian uchi O(R) sfera markazida bo'lgan va shu sfera sirtida yuzi R^2 gat eng bo'lgan figura ajratuvchi fazoviy burchakdir. Butun sferada 4π steradian burchak bo'ladi. Grekcha στερεοζ – fazoviy, radian lotincha radius – nur, kegay so'zlaridan olingan.

Tangens – trigonometrik funksiyalardan biri. Lotincha tangens – urinma (tango - urinaman).

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС

ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

Рўйхатга олинди
№ БД-2
2012 йил «14» 03

Ўзбекистон Республикаси
Олий ва ўрта махсус таълим
Вазирининг 2012 йил "14"
"03" даги "107"-сонли
буйруғи билан тасдиқланган

Ходиев

Олий математика

фанининг

Но математик таълим йўналишлари учун

ТОШКЕНТ- 2012

Фаннинг ўқув дастури Олий ва ўрта махсус, касб-ҳунар таълими ўқув-методик бирлашмалари фаолиятини мувофиқлаштирувчи кенгашнинг 2012 йил 6 мартдаги 1-сон мажлис баѐни билан маъқулланган.

Фаннинг ўқув дастури Ўзбекистон Миллий Университетида ишлаб чиқилди.

Тузувчилар: Курганов К.А. - Ўзбекистон Миллий Университети механика-математика факультети “Алгебра ва функционал анализ” кафедраси доценти, физика-математика фанлари номзоди.
Жабборов Н. - Ўзбекистон Миллий Университети механика-математика факультети “Математик анализ”кафедраси доценти, физика-математика фанлари номзоди.
Тақризчилар: Шарипов О. – ЎзР ФА Математика ва информацион технологиялар институти етакчи илмий ходими, физика-математика фанлари доктори
Расулов С. - Тошкент Давлат техника университети “Олий математика” кафедраси доценти, физика-математика фанлари номзоди.
Фаннинг ўқув дастури Ўзбекистон Миллий Университети Илмий- методик кенгашида тавсия қилинган. 25 10 2011 й. №2-сон мажлис баѐни

Кириш
Олий математика фани математиканинг аналитик геометрия, олий ва чизиқли алгебра, математик анализ, дифференциал тенгламалар, эҳтимоллар назарияси бўлимларини ўз ичига олади. Унда биринчи ва иккинчи тартибли чизиқлар, иккинчи тартибли сиртлар, детерминант ва матрицалар, чизиқли тенгламалар системасини ечиш, комплекс сонлар ва юқори тартибли тенгламалар,чизиқли алмаштиришлар, дифференциал ва интеграл ҳисоб, биринчи ва юқори тартибли дифференциал тенгламалар, ҳодисалар эҳтимоли, эҳтимолнинг тақсимот ва зичлик функциялари, тасодифий миқдорларнинг характеристикалари ўрганилади.
Бакалавр йўналишларининг хусусиятига, дарс соатлари ҳажмига, йўналиш учун зарур мавзуларга кўра ишчи дастурлар тузилади.
Олий математика фани деярли барча фанлар билан боғлиқ, кўп фанлар учун асос бўлганлиги учун улардан олдин ўтилади.
Фан бўйича билим, малака ва кўникмага қўйиладиган талаблар:
Талабалар
-математика усуллари оламни идрок этишда асосий эканлиги;
-математика тушунчалари умумийлиги ҳакида;
-математик моделлаштириш ҳақида ***тасаввурга эга бўлиши;***
-аналитик геометрия,олий ва чизиқли алгебра,математик анализ, дифференциал тенгламалар хакидаги назария, эхтимоллар назарияси тушунчалари,формулаларини;
-математик белгилар ва техникадаги оддий тизимлар ѐрдамида жараѐнларни математик моделлаштириш;
-муайян жараѐн учун эҳтимолий моделлар қуриш, қурилган модел доирасида хисоблар олиб бориш;
-функционал ва хисоблаш топшириғини ечиш моделини ***билиши ва улардан фойдалана олиши*****;**
-объектлар микдорий ва сифат муносабатларини ифодалаш учун математик символлардан фойдаланиш;
-эксперимент маълумотларини ишлаб чиқишнинг асосий усул ва йўриқларидан фойдаланиш;
-олинган натижаларнинг фойдаланиш чегарасини баҳолаб ва улар иерархик тузилишини хисобга олиб моделларни тадқиқ этиш;
-иккинчи тартибли чизиқ ва сиртлартенгламаларини содда шаклга келтириш ва параметрларидан фойдаланиш
-алгебрик тенгламаларни аналитик ва рақамли ечиш;
-тенгламалар системаларини аналитик ва рақамли ечиш;
-бир ва кўп ўзгарувчили функциялар учун дифференциаллаш , интеграллаш ;
-ихтиѐрий тартибли дифференциал тенгламаларни аналитик ва рақамли ечишни тадқиқ этиш;
-ҳодисалар эҳтимолини ҳисоблаш, тасодифий миқдорлар тақсимот ва зичлик функцияларини топиш,сонли характеристикаларини ҳисоблаш **кўникмаларига эга бўлиши керак**.

Фанни ўқитишда замонавий ахборот ва педагогик технологиялар

Талабаларга олий математика фанидан баъзи мавзулар бўйича дарслар электрон воситалар ѐрдамида ташкил қилинади. Талабаларнинг олий математика фанини ўзлаштиришлари учун ўқитишнинг илғор ва замонавий усулларидан фойдаланиш, янги информацион-педагогик технологияларни тадбиқ этиш муҳим аҳамиятга эга. Фанни ўзлаштиришда дарслик, ўқув ва услубий қўлланмалар, маъруза матнлари, тарқатма материаллар, виртуал стендлардан фойдаланилади. Маъруза, амалий ва лаборатория дарсларида мос равишдаги илғор педагогик технологиялардан фойдаланилади.

Асосий қисм (маърузалар)

Ҳақиқий сонлар. Ҳақиқий сонлар тўплами Ҳақиқий соннинг абсолют қиймати.

Тенгламалар ва тенгсизликлар. Чизиқли ва квадрат тенгламалар. Матрицалар, матрица устида амаллар. Тескари матрица. Чизиқли системани матрицавий усулда ечиш.

Детерминантлар ва уларнинг хоссалари. Детерминантларни ҳисоблаш. Чизиқли тенгламалар системаси. Крамер усули. Чизиқли ва квадрат тенгсизликлар. Текисликда Декарт ва қутб координаталари системаси. Векторлар. Вектор тушунчаси ва векторлар устида амаллар. Векторларнинг скаляр кўпайтмаси ва векторларнинг координаталари.

Комплекс сонлар. Комплекс сон тушунчаси. Комплекс сонлар устида амаллар. Комплекс сонни геометрик тасвирлаш. Комплекс соннинг тригонометрик шакли (кўриниши). Комплекс соннинг модули ва аргументи. Юқори даражали тенгламалар. Кўпҳадлар ва алгебранинг асосий теоремаси. Юқори даражали тенгламаларни ечиш.

Текисликда тўғри чизиқ ва унинг турли тенгламалари. Тўғри чизиқнинг умумий тенгламаси. Текисликда иккинчи тартибли эгри чизиқлар. Айлана, эллипс, гипербола, парабола. Иккинчи тартибли эгри чизиқларнинг умумий тенгламаси.

Функция тушунчаси. Функциянинг аниқланиш ва ўзгариш соҳалари. Функция графиги. Чегараланган ва монотон функциялар. Жуфт, тоқ ва даврий функциялар. Мураккаб ва тескари функция. Содда функциялар ва уларнинг графиклари. Бутун рационал функция. Каср рационал функция. Тригонометрик функциялар. Тескари тригонометрик функциялар.

Натурал аргументли функция (сонлар кетма-кетлиги) ва унинг лимити. Сонлар кетма-кетлиги тушунчаси. Сонлар кетма-кетлигининг лимити.Кетма-кетликлар устида амаллар. Чексиз кичик миқдорлар ҳақида леммалар. Яқинлашувчи кетма-кетликлар ва уларнинг хоссалари.Кетма-кетлик лимитининг мавжудлиги. Муҳим лимит (e - сони) ва кетма-кетлик лимитини ҳисоблаш. Функция лимити. Чексиз кичик ва чексиз катта функциялар. Чекли лимитга эга бўлган функцияларнинг хоссалари. Функция лимитининг мавжудлиги. Мухим лимитлар ва функция лимитини ҳисоблаш.

Функциянинг узлуксизлиги. Узлуксиз функцияларнинг хоссалари. Функциянинг узилиши ва узилишнинг турлари. Сегментда узлуксиз бўлган функциялар ҳақида теоремалар.
Функциянинг ҳосиласи. Ҳосиланинг геометрик ва механик маънолари. Ҳосила ҳисоблаш қоидалари. Тескари функциянинг ҳосиласи. Функциянинг дифференциали. Йиғинди, кўпайтма ва нисбатнинг дифференциали. Мураккаб функциянинг дифференциали. Тақрибий формулалар. Юқори тартибли ҳосила ва дифференциаллар. Содда қоидалар. Лейбниц формуласи. Дифференциалланувчи функцияларнинг хоссалари. Тейлор формуласи. Баъзи функциялар учун Тейлор (Маклорен) формулалар. Тақрибий формулалар.Ҳосилалар ѐрдамида функцияларнинг ўсувчи, камаювчи ҳамда экстремумларини аниқлаш. Функция экстремумга эришишининг зарурий ва етарли шартлари. Функциянинг сегментдаги энг катта ва энг кичик қийматлари. Функция графигининг қавариқлиги, ботиқлиги, эгилиш нуқтаси ва асимптотаси. Параметрик усулда берилган функциялар. ,ab
Аниқмас интеграл. Интегралнинг содда хоссалари ва интеграллаш усуллари. Рационал функцияларни интеграллаш. Тўғри касрларни содда касрлар йиғиндиси орқали ифодалаш (тўғри касрларни содда касрларга ѐйиш). Баъзи иррационал функцияларни ҳамда тригонометрик функцияларни интеграллаш.
Аниқ интеграл тушунчаси. Интегралнинг мавжудлиги. Аниқ интегралнинг хоссалари. Аниқ интегрални ҳисоблаш. Аниқ интегрални тақрибий ҳисоблаш. Аниқ интегралнинг баъзи-бир татбиқлари.Текис шаклнинг юзини ҳисоблаш. Ёй узунлигини ҳисоблаш.Айланма сиртнинг юзини ҳисоблаш. Статик моментлар ва оғирлик марказларини ҳисоблаш.
Хосмас интеграллар. Чегаралари чексиз (чексиз оралиқ бўйича) интеграллар. Яқинлашувчи хосмас интегралларнинг хоссалари.Хосмас интегралнинг яқинлашувчилиги. Яқинлашиш аломати.Хосмас интегралнинг абсолют яқинлашувчилиги. Хосмас интегралларни ҳисоблаш. Чегараланмаган функциянинг хосмас интеграллари.
Сонли қаторлар. Қатор тушунчаси. Қаторнинг яқинлашувчилиги ва узоқлашувчилиги.Яқинлашувчи қаторларнинг содда хоссалари.Мусбат ҳадли қаторлар ва уларнинг яқинлашувчилиги. Солиштириш теоремалари. Мусбат ҳадли қаторларда яқинлашиш аломатлари.Ихтиѐрий ҳадли қаторлар. Қаторнинг абсолют яқинлашувчилиги, Лейбниц теоремаси.Функционал қаторлар ва уларнинг текис яқинлашувчанлиги.
Текис яқинлашувчи функционал қаторларнинг хоссалари.Даражали қаторлар, уларнинг яқинлашиш радиуси ва яқинлашиш интервали. Даражали қаторнинг хоссалари. Функцииялари даражали қаторларга ѐйиш. Тейлор қатори. Баъзи содда функцияларнинг Маклорен қатори. Даражали қаторларнинг тақрибий ҳисоблашларга татбиқлари.Фурье қаторлари ҳақида дастлабки маълумотлар.

Фазода координаталар системаси.Фазода икки нуқта орасидаги масофа. Кесмани берилган нисбатда бўлиш. Фазодаги нуқтанинг цилиндрик ҳам сферик координаталари.

Фазода текислик ва унинг турли тенгламалари. Фазода тўғри чизиқ.Фазодаги текислик ҳамда тўғри чизиқларга оид муҳим маълумотлар.Иккинчи тартибли сиртлар.
Фазода векторлар. Асосий тушунчалар. Векторлар ҳисобининг асосий формуласи. Векторларнинг скаляр кўпайтмаси. Икки векторлар орасидаги бурчак. Икки векторларнинг перпендикулярлик ҳамда параллеллик шартлари. Векторларнинг вектор кўпайтмаси. Векторларнинг баъзи-бир татбиқлари.Векторлар анализининг элементлари. Ўзгарувчи вектор ва вектор-функция тушунчалари. Годограф. Вектор-функциянинг лимити, узлуксизлиги. Вектор-функциянинг ҳосиласи. Вектор-функция ва унинг ҳосилаларининг баъзи татбиқлари.
фазода тўпламлар. Икки ўзгарувчили функция ва унинг графиги.Икки ўзгарувчили функциянинг лимити ва узлуксизлиги.Икки ўзгарувчили функциянинг ҳосила ва дифференциаллари.Юқори тартибли ҳосила ва дифференциаллар. Йўналиш бўйича ҳосила. Градиент. Функциянинг Тейлор формуласи. Икки ўзгарувчили функциянинг экстремумлари.Икки каррали интеграл тушунчаси. Тўғри тўртбурчак бўйича икки каррали интегралнинг хоссалари ва уни ҳисоблаш. Эгри чизиқли трапеция бўйича икки каррали интеграллар. Содда тўпламларга ажраладиган тўплам бўйича икки каррали интеграллар. Икки каррали интегралнинг умумий тушунчаси. Икки каррали интеграллар қутб координаталарда. Икки каррали интегралларнинг баъзи татбиқлари.(Текис шаклнинг юзи, фазода жисмнинг ҳажми, сиртнинг юзи,текисликдаги шаклнинг (пластинканинг) масаси, текисликдаги шаклнинг (пластинканинг) оғирлик маркази, текисликдаги шаклнинг (пластинканинг) статик моментлари). 2 R
Уч ўзгарувчили функция тушунчаси. Функциянинг лимити ва узлуксизлиги. Функциянинг хусусий ҳосилалари ва дифференциаллари.Уч ўзгарувчили функциянинг интеграли. (Уч каррали интеграл).Уч каррали интегралларнинг баъзи татбиқлари.
Дифференциал тенглама ва унинг ечими тушунчалари. Биринчи тартибли оддий дифференциал тенгламалар. Ўзгарувчилари ажраладиган дифференциал тенгламалар. Чизиқли дифференциал тенгламалар. Тўлиқ дифференциал тенглама. Иккинчи тартибли оддий дифференциал тенгламалар. Иккинчи тартибли чизиқли дифференциал тенгламалар. Иккинчи тартибли чизиқли ўзгармас коэффициентли дифференциал тенгламалар. Иккинчи тартибли чизиқли ўзгармас коэффициентли дифференциал тенглама ва унинг ечимининг умумий кўриниши. Характеристик тенгламанинг илдизига кўра бир жинссиз дифференциал тенгламанинг ечимини топиш. Бир жинсли дифференциал тенгламанинг умумий ечимлари.
Эгри чизиқли интеграллар. Биринчи тур эгри чизиқли интеграл тушунчаси ва уни ҳисоблаш. Биринчи тур эгри чизиқли интегралларнинг баъзи татбиқлари. Иккинчи тур эгри чизиқли интеграл тушунчаси. Иккинчи тур эгри чизиқли интегралларни ҳисоблаш ва татбиқлари.

Сирт интеграллари. Биринчи тур сирт интеграли тушунчаси. Биринчи тур сирт интегралларини ҳисоблаш. Биринчи тур сирт интегралларининг баъзи татбиқлари. Иккинчи тур сирт интеграли тушунчаси. Иккинчи тур сирт интегралларини ҳисоблаш.
Майдон назариясининг элементлари. Скаляр ва вектор майдон тушунчалари. Скаляр майдоннинг сатх сирти ва градиенти. Вектор майдоннинг вектор чизиғи ва оқими.
Вектор майдоннинг дивергенцияси ва ротари. Остроградский-Гаусс формуласи. Вектор майдоннинг дивергенцияси. Вектор майдоннинг циркуляцияси ва ротори. Стокс формуласи.
Математик физиканинг баъзи бир тенгламалари. Хусусий ҳосилали дифференциал тенглама тушунчаси. Торнинг тебраниши тенгламаси.Тор тебраниши тенгламасини Фурье усули ѐрдамида ечиш.Иссиқликнинг тарқалиш тенгламаси. Иссиқлик тарқалиш тенгламасини Фурье усули ѐрдамида ечиш.
Эҳтимоллар назариясининг асослари.Ҳодисалар ва уларнинг эҳтимоллари. Эҳтимоллар назариясининг асосий тушунчалари. Тасодифий ҳодиса. Ҳодисалар устида амаллар. Ҳодиса эҳтимоли.Тасодифий ҳодиса эҳтимоли. Эҳтимолларни қўшиш ва кўпайтириш теоремалар. Тўла эҳтимол формуласи. Байес формуласи. Муавр-Лапласнинг локал ва интеграл теоремалари. Тасодифий миқдорлар.Дискрет тасодифий миқдор эҳтимолининг тақсимот қонуни ва тақсимот функцияси. Дискрет тасодифий миқдорнинг математик кутилиши ва унинг хоссалари. Дискрет тасодифий миқдорнинг дисперсияси ва унинг хоссалари. Дискрет тасодифий миқдорнинг асосий тақсимот қонунлари.Узлуксиз тасодифий микдорлар ва уларнинг тақсимот функциялари. Эҳтимоллар назариясининг лимит теоремаси.
Амалий машгулотларни ташкил этиш бўйича кўрсатмалар.
Амалий машғулотларни ўтказишдан мақсад маъруза материаллари бўйича талабалар билим ва кўникмаларини чуқурлаштириш ва кенгайтиришдан иборатдир. Шу мақсадда, ишчи дастурга киритиладиган барча мавзуларга доир масалалар етарли миқдорда ечилиши кўзда тутилади.
1. Текисликда аналитик геометриянинг содда масалалари: икки нуқта орасидаги масофа; кесмани берилган нисбатда бўлиш; учбурчакнинг юзини хисоблаш.

2. Тўғри чизиқнинг турли хил тенгламалари ва уларга доир масалалар.

3. Координаталарни алмаштириш: қутб координаталари, параллел кўчириш ва ўқларни буриш.

4. Иккинчи тартибли чизиқлар: айлана, эллипс, гипербола, парабола ва уларнинг каноник тенгламалари.

5. Иккинчи тартибли чизиқлар классификацияси. Иккинчи тартибли чизиқларни каноник кўринишга келтириш. Планеталар ва космик кемалар харакати. Кеплер қонунлари.

6. Детерминантлар ва уларнинг хоссалари. Крамер қоидаси ва Гаусс усули.

7. Матрицалар, матрица устида амаллар. Тескари матрица. Чизиқли системани матрицавий усулда ечиш.
8. Юқори тартибли детерминантларни ҳисоблаш.
9. Комплекс сонлар ва уларнинг формалари. Муавр формулалари.
10. Алгебранинг асосий теоремаси. Кубик ва тўртинчи даражали тенгламаларни ечиш: Кардано формуласи ва Феррари усули.
11. Юқори даражали тенгламаларнинг рационал илдизлари. Горнер схемаси. Рационал касрларни оддий касрларга ѐйиш.
12. Фазода декарт координаталар системаси. Икки нуқта орасидаги масофа; кесмани берилган нисбатда бўлиш. Векторлар ва векторлар устида амаллар.
13. Векторларнинг скаляр, вектор ва аралаш кқпайтмалари, уларнинг геометрик маънолари.
14. Фазода текисликнинг умумий, кесмалар бўйича ва нормал тенгламалари. Учта нуқтадан ўтувчи текислик тенгламаси. Икки текислик орасидаги бурчак.
15. Фазода тўғри чизиқ тенгламалари. Икки тўғри чизиқ орасидаги, тўғри чизиқ ва текислик орасидаги бурчак. Нуқтадан тўғри чизиққача бўлган масофа. Айқаш тўғри чизиқлар орасидаги масофа.
16. Иккинчи тартибли сиртлар: эллипсоид, параболиодлар, гиперболоидлар. Сиртлар ва уларнинг классификацияси. Фазода цилиндрик ва сферик координаталар системаси.
17. Чизиқли фазо тушунчаси.Чизиқли боғлиқлик, ўлчам ва базис тушунчалари.Базисдан бошқа базисга ўтиш матрицаси.
18. Чизиқли алмаштириш матрицаси.Хос сон ва хос илдиз.Характеристик кўпҳад
19. Евклид ва унитар фазолар, улардаги чизиқли алмаштиришлар.
20. Тўпламлар ва улар устида амаллар. Рационал сонлар тўпламининг санооқлилиги ва ҳақиқий сонлар тўпламининг саноқсизлиги.
21. Элементар функциялар, уларнинг аниқланиш ва ўзгариш сохалари. Элементар функциялар турлари ва кетма-кетликлар.
22. Кетма-кетлик ва функция лимити.
23. Узлуксизлик, узилиш турлари. Ажойиб лимитлар.
24. Функци хосиласи. Геометрик ва физик маънолари. Хосила хисоблаш қоидалари. Хосилалар жадвали. Юқори тартибли хосила.
25. Дифференциал. Дифференциаллаш жадвали ва хисоблаш қоидалари. Дифференциал хисобнинг асосий теоремалари.
26. Тейлор ва Маклорен формулалари. Лопитал қоидалари.
27. Функцияларни текшириш: ўсиш ва камайиш, экстремумлар, ботиқлик ва қавариқлик, асимптоталар.
28. Экстремумга доир масалалар. Тенгламани тақрибий ечиш.

29. Аниқмас интеграл. Аниқмас интеграл жадвали. Ўзгарувчиларни алмаштириш ва бевосита интеграллаш.
30. Кўп учрайдиган интеграллар. Бўлаклаб интеграллаш.
31. Рационал касрларни интеграллаш. Алгебраик иррационалликларни интеграллаш.
32. Эйлер алмаштиришлари. Биномиал дифференциал интеграли. Тригонометрик функцияларни интеграллаш.
33. Аниқ интеграл, хоссалари. Эгри чизиқли трапеция юзи. Ньютон-Лейбниц формуласи.
34. Хосмас интеграллар. Ёй узунлиги, жисм хажми, сирт юзаси, оғирлик маркази координаталари ва моментларни хисоблаш.
35. Қаторлар. Сонли қаторларнинг яқинлашиш аломатлари. Солиштириш, Даламбер, Коши, Кошининг интеграл аломатлари.
36. Лейбниц қатори. Шартли ва абсолют яқинлашиш. Фунционал кетма-кетликлар ва қаторлар. Функционал қаторларнинг текис яқинлашиши; Вейерштрасс аломати. Ҳадма-ҳад дифференциаллаш ва интеграллаш.
37. Даражали қаторлар. Даражали қаторларнинг яқинлашиш радиуси. Абель теоремаси.
38. Икки ўзгарувчили функциялар, аниқланиш ва ўзгариш соҳалари. Хусусий хосилалар ва тқла дифференциал. Мураккаб функциянинг хосиласи. Икки ўзгарувчили функция экстремумлари.
39. Икки ва уч каррали интеграллар, тадбиқлари.
40. Эгри чизиқли интеграллар, тадбиқлари. Грин формуласи.
41. Сирт интеграллари, тадбиқлари. Стокс ва Остроградский формулалари.
42. Биринчи тартибли дифференциал тенгламалар. Ўзгарувчилари ажраладиган ва унга келтириладиган дифференциал тенгламалар.
43. Бир жинсли ва унга келтириладиган дифференциал тенгламалар.
44. Чизиқли ва унга келтириладиган Бернулли ва Риккати тенгламалари.
45. Тқла дифференциал тенгламалар. Интегралловчи кўпайтувчи
46. Лагранж ва Клеро тенгламалари.
47. Тартиби пасаядиган юқори тартибли дифференциал тенгламалар.
48. Ўзгармас коэффициентли, чизиқли, бир жинсли дифференциал тенгламалар.
49. Ўзгармас коэффициентли, чизиқли, бир жинсли бқлмаган дифференциал тенгламалар.
50. Ходиса эҳтимоли. Эҳтимолнинг турли таърифлари.
51. Шартли эҳтимоллик. Тўла эҳтимоллик.
52. Бернулли схемаси. Катта сонлар қонуни.
53. Тасодифий миқдорлар. Тасодифий миқдорлар тақсимот ва зичлик функциялари.
54. Тасодифий миқдорларнинг сонли характеристикалари: Математик кутилма ва дисперсия.

Илова: Талабалар амалий машғулотларнинг камида 40-45 тасини бажариш керак.

Мустақил ишни ташкил этишнинг шакли ва мазмуни

Мустақил ишнинг мақсади олинган назарий билимларни мустаҳкамлаш, белгиланган мавзулар асосида қўшимча билим олишдан иборат. Бунда ушбу ишларни бажарадилар:

-Амалий машғулотларга тайергарлик;

-Назарий тайергарлик кўриш;

-Уй вазифаларни бажариш;

-Ўтилган материаллар мавзуларини қайтариш;

-Мустақил иш учун мўлжалланган назарий билим мавзуларини ўзлаштириш.

Бунда талабалар маърузаларда олган билимларини амалий машғулотларни бажаришлари билан мустаҳкамлаши ҳамда статистиканинг баъзи мавзуларини тушуниши ҳамда уларга оид масалаларни ечишлари керак. Мустақил иш мавзуларини ўзлаштириш таълим жараенида узлуксиз назорат қилиб борилади ва езма ҳисобот сифатида топширилади.

Мустақил иш мавзулари.

1. Тўпламлар назрияси элементлари.
2. Матрицалар ва детерминантларнинг татбиқий масалаларда қўлланилиши.
3. Векторлар ва уларнинг татбиқлари
4. Параметрга боғлиқ функциялар.
5. Функция ҳосиласи ва уларниг татбиқлари.
6. Ҳосила ѐрдамида функцияни тўлиқ текшириш.
7. Аниқ интеграл ва уларниг татбиқлари .
8. Қаторлар.Кўп ўзгарувчили функциялар.
9. Каррали ,эгри чизиқли ва сирт интеграллари уларнинг татбиқлари.
10. Биринчи тартибли дифференциал тенгламалар ва уларниг татбиқлари.
11. Юқори тартибли дифференциал тенгламалар.
12. Математик статистика ва уларниг татбиқий масалалари.

Изоҳ: Мустақил таълим соатлари ҳажимлариданкелиб чиққан ҳолда ишчи дастурда мазкур мавзулар ичидан мустақил таълим мавзулари шакиллантрилади.

Дастурнинг информацион-методик таъминоти.

Фанни ўқитиш жараѐнида ўргатувчи дастурлардан,шунингдек Maple, MathCad, Mathlab ва бошқа дастурлар тўпламларидан фойдаланилади. Замонавий педагогик ва информацион технологиялар методлари қўлланилади.

Фойдаланилган асосий дарсликлар ва ўқув қўлланмалар рўйхати:

Асосий адабиётлар

1. Жўраев Т.Ж. ва бошқалар. Олий математика асослари.1,2-кисм. Тошкент, 1995й.

2. N.M.Jabborov, E.O.Aliqulov, Q.S.Axmedova "Oliy matematika"»Қарши» 2010 й.

3. Xudoyberganov G.,Varisov A.K.,Mansurov X.T.,Shoimqulov B.A. Matematik analizdan ma,ruzalar. 1,2 q.«Ворис» 2010 y.

4. Минорский В.П. Олий математикадан масалалар тўплами. 1988 й.

5. Соатов Ё.У. Олий математика, Тошкент, 1993.

Қўшимча адабиётлар

6. B.A.Shoimqulov, T.T.Tuychiyev,D.X.Djumabaev Matematik analizdan mustaqil ishlar. «O'zbekiston faylasuflari milliy jamiyati» 2008

7. Абдушкуров А.А. Эхтимоллар назарияси ва математик статистика. ЎзМУ 2010й. 169 б.

8. И.И. Баврин, В.Л.Матросов Общий курс высшей математики М. «ПРосвещение» 1995

9. В.Г.Скатецкий, Д.в.Свиридов, В.и.Яшкин Математические методы в химии «ТетраСистемс» 2006

10. А.Садуллаев, Г. Худойберганов, Х.Мансуров, А.Ворисов, Р.Ғуломов «Математик анализдан мисол ва масалалар тқплами» Т. «Ўзбекистон» 1992

11. Л.И.Лурье Основы высшей математики «Москва» 2003

12. Г.Самнер. «Математика для географов». М. «Прогресс» 1981

13. Ю.И.Гильдербанд. «Лекции по высшей математике для биологов». Новосибирск. 1974.

14. А.И.Кареев, З.М.Аксютина, Т.И.Савельев. Курс высшей математики для экономических вузов. М. «Высшая школа» I,II, 1982, 1983

15. Жабборов Н. «Олий математика», Т. УзМУ 2005.

16. Курганов К.А. Варианты домашних и контрольных работ по высшей математике. УзМУ, 2005.

17. Курганов К.А., Мирахмедов Т.Ж., Нурумова А. Номатематикавий йўналишлар талабалари учун олий математикадан қўлланма. УзМУ, Тошкент, 2008.

18. А.С.Солодовников и др. Математика в экономике «Финансы и статистика» 2001

19. К.Н.Лунгу и др. Сборник задач по высшей математике 1, 2 ч. М. «Айрис пресс» 2007

Электрон адабиётлар

http://www.mcce.ru, http://lib.mexmat.ru
http:// www.a-geometry.narod.ru

http://allmath.ru/highermath/mathanalis/
http//www.el.tfi.us/pdf/enmcoq22.uzk.pdf/

Интернет манбаълари

www.lib.homelinux.orgfmath

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

Рўйхатга олинди
№ 0062
“25” 08 2016 йил

“ТАСДИҚЛАЙМАН”
Ўқув ишлари бўйича проректор
“___” ________ 2016 йил

“МАТЕМАТИКА”

ФАНИНИНГ ИШЧИ ЎҚУВ ДАСТУРИ

Билим соҳаси: 300 000 – Ишлаб чиқариш техник соха

Таълим соҳаси: 310 000 – Муҳандислик иши

Таълим йуналишлари:

5310700 - Электр техникаси, электр механикаси ва электр технологиялари;
5111000 - Касб таълими (5310700-Электр техникаси, электр механикаси ва технологиялари);
5312100 - Энергоаудит ва саноат корхоналарининг энергетик текшируви (тармоқлар бўйича);
5321700 - Технологик жараёнларни бошқаришда ахборот коммуникация тизимлари;
5111000 - Касб таълими (Машинасозлик технологияси, машинасозлик чиқаришини жиҳозлаш ва автоматлаштириш);
5321500 - Технологиялар ва жиҳозлар (Умуммашинасозлик буюмларини ишлаб чиқариш);
5321500 - Технологиялар ва жиҳозлар (сервис(енгил саноат));
5321500 - Технологиялар ва жиҳозлар (Енгил саноат жиҳозларини таъмирлаш ва техник хизмат кўрсатиш);
5321600 - Енгил саноат технологиялари ва жиҳозлари;
5111000 - Касб таълими (5321600 – Енгил саноат технологиялари ва жиҳозлари);
5321400 - Нефт-газкимё саноати технологияси
5111000 - Касб таълими (5321400- Нефт-газкимё саноати технологияси);
5320400 - Кимёвий технология (Тармоқлар бўйича);
5111000 - Касб таълими(5320400-Кимёвий технология);
5111000 - Касб таълими (Информатика ва ахборот технологиялари);

Бухоро - 2016

Фаннинг ишчи ўқув дастури, ишчи ўқув режа ва ўқув дастурига мувофиқ ишлаб чиқилди.

Тузувчилар:

Юнусов Ғ.Ғ. - Бух МТИ, “Олий математика” кафедраси мудири, т.ф.н.

Тешаев М.Х. - Бух МТИ, “Олий математика” кафедраси доценти, ф.-м.ф.н.

Тақризчилар:

Дурдиев Д.К - БухДУ,“Математик физика ва анализ”кафедраси профессори, ф.-м.ф.д.

Маматова Н. - БухДУ,“ Математик физика ва анализ” кафедраси доценти, ф.-м.ф.н.

Фаннинг ишчи ўқув дастури “Математика” кафедрасининг 2016 йил 22 августдаги 1-сон йиғилишида мухокамадан ўтган ва факультет кенгашида муҳокама қилиш учун тавсия этилган.

Кафедра мудири: т.ф.н. Юнусов Ғ.Ғ.

Фаннинг ишчи ўқув дастури “Муҳандислик техника” факултет кенгашида муҳокама этилган ва фойдаланишга тавсия қилинган (2016 йил «23» август «1» – сонли баённома).

Факултет кенгаши раиси: доц. Муродов Ш.М.

Келишилди:
Ўқув- услубий бошкарма бошлиғи доц.Ходжиев Ш.М.

2. http://txt.uz
3. http://www.exponenta ru/soft/Mathemat./ Mathemat.asp.
4. http://www.albest.ru/catalog/a5/a101275.htlm
5. http://student.km.ru/. http://mathc.chat. ru.
6. http://www. i math. kiev.ua.
7. http://techlibrary.ru/

КИРИШ

Олий таълимнинг Давлат таълим стандартига кўра Муҳандислик - технология ва иқтисод таълим соҳаларида ўқитиладиган "Математика" фани дастури бакалавр йўналишларида таълим оладиган талабаларни малакавий билимга эга бўлиши учун зарурбўладиган: чизикли алгебра, аналитик геометрия элементлари, математик анализ, оддий дифференциал тенгламалар назарияси, қаторлар, операцион ҳисоб, комплекс сонлар ва комплекс ўзгарувчили функциялар назарияси, математик физика тенгламалари, эҳтимоллар назарияси ва математик статистикадан бошлангич тушунчаларини ўз ичига олган бўлимларидан ташкил топган.

Фаннинг мақсад ва вазифалари

"Математика" фани табиий математик фанлар мажмуасига тааллуқли бўлиб, талабалар уни I, II, III ва IV семестрларда ўрганишади.

"Математика" фанининг бош муҳим вазифаси, талабаларга "Физика", "Назарий механика", "Материаллар қаршилиги" ва шунга ўхшаш қатор табиий фанларни муваффақиятли ўзлаштириши учун зарур бўладиган таянч билимларни беради.

Фан бўйича талабаларнинг тасаввур, билим, кўникма ва малакаларига қўйиладиган талаблар

Талабалар матаматика фанини ўрганиш жараёнида қуйидагиларни бажара олиши лозим:

- матрицалар устида амалларни ҳисоблай олиши, детерминантнинг қийматини унинг таърифи ва хоссаларига кура (жумладан Лаплас теоремасидан фойдаланиб) ҳисоблашлари, матрица ранги ва тескари матрицаларни турли усуллар билан топа олиши;
- чизиқли алгебраик тенгламалар системасини тадқиқ этиши ва уларни турли усуллар билан ечимларини топиши;
- тўгри чизиқ ва текисликнинг турли тенгламаларини билиши, улар орасидаги бурчакларни ҳисоблай олиши, уларнинг параллеллик ва перпендикулярлик шартларини билиши, нуқтадан тўғри чизиқ ва текисликкача масофани ҳисоблай олиши;
- иккинчи тартибли эгри чизикларни, уларнинг тенгламалари бўйича таҳлил этиши ва тасаввурга эга бўлиш;
- дифференциаллаш ва интеграллаш формулаларини чалкаштирмасдан тўғри ишлата билиши;
- элементар ҳисоблашда яхши тажрибага эга бўлишни, қийинчиликсиз берилган функция учун Тейлор формуласини ёзиши;
- интегралларни ҳисоблашда, қаторни яқинлашишга текширишда зарур усулларни қўллашда кўникмаларда эга бўлиш;
- дифференциал ва интеграл ҳисобнинг тадбиқларини билиши;
- энг содда дифференциал тенгламаларни, кўп ўзгарувчили функциялар, уларнинг дифференциал ва интеграл ҳисобини билиши;
- эҳтимоллар назарияси ва математик статистика масалаларни ечиш*малакаларига эга бўлиши керак.*

Фаннингўқув режадаги бошқа фанлар билан ўзаро боғлиқлиги ва услубий жиҳатдан узвийлиги

"Математика" фани математик ва табиий-илмий фан ҳисобланиб, 1, 2 ва 3-семестрларда ўқитилади. Мазкур фан ўқув режасидаги "Физика", "Назарий механика",

"Материаллар қаршилиги", "Машина ва механизмлар назарияси" каби фанлар билан узвий боғлиқдир.

Фаннинг илм-фан ва ишлаб чиқаришдаги ўрни

Ишлаб чиқариш жараёни бевосита математик усуллар, статистик таҳлиллар ва ҳисоблаш ишлари асосида олиб боришини ҳисобга оладиган бўлсак ушбу фаннинг ишлаб чиқаришдаги ўрни беқиёдир.

Ишлаб чиқаришда муҳандислик-технолог бевосита у ёки бу математик амалларни қўллай олган ҳолда лойиҳалаш жараёнини оптималлаштиради.

Фанни ўқитишда замонавий ахборот ва педагогик технологиялар

Талабаларнинг "Математика" фанини ўзлаштиришлари учун ўқитишнинг илғор ва замонавий усулларидан фойдаланиш, янги информацион-педагогик технологияларни тадбиқ қилиш муҳим аҳамиятга эга. Фанни ўзлаштиришда дарслик, ўқув ва услубий қўлланмалар, маъруза матнлари, тарқатма материаллар, электрон материаллар, виртуал стендлар ва макетлардан фойдаланилади. Маъруза ва амалий дарсларда мос равишда илғор педагогик технологиялар қўлланилади.

"Математика" фани машғулотларининг бўлимлар ва соатлар бўйича тақсимланиши:

5310700 - Электр техникаси, электр механикаси ва электр технологиялари;
5111000 - Касб таълими (Электр техникаси, электр механикаси ва электр технологиялари);
5312100 - Энергоаудит ва саноат корхоналарининг энергетик текшируви (тармоқлар бўйича);
5321700 - Технологик жараёнларни бошқаришда ахборот коммуникация тизимлари;

№	Мавзулар номи	Жами соат	Маъруза	Амалий машғулот	Мустақил таълим
1	Кириш	6	2	2	2
2	Чизиқли алгебра	22	8	8	6
3	Векторлар алгебраси	18	6	6	6
4	Текисликда аналитик геометрия	28	10	10	8
5	Фазода аналитик геометрия	22	8	8	6
6	Математик анализга кириш	24	8	8	8
7	Бир ўзгарувчили функциянинг дифференциал ҳисоби	34	12	12	10
	Жами: 2- мавсум бўйича	**154**	**54**	**54**	**46**

5111000 - Касб таълими (Машинасозлик технологияси, машинасозлик ишлаб чикаришини жиҳозлаш ва автоматлаштириш);

	Мавзулар номи	Жами соат	Маъруза	Амалий Машғулот	Мустақил таълим
1	Кириш	6	2	2	2
2	Чизиқли алгебра	14	4	4	6
3	Векторлар алгебраси	20	6	6	8
4	Текисликда аналитик геометрия	20	6	6	8
5	Фазода аналитик геометрия	14	4	4	6
6	Математик анализга кириш	20	6	6	8

мавзуларини уз ичига камраб олган.

Ҳар бир назарий саволга ёзилган жавоблар буйича узлаштириш курсаткичи 0-6 балл оралигида баҳоланади. Амалий топшириқ эса 0-6 балл оралигида баҳоланади. Талаба максимал 30 балл туплаши мумкин.

Ёзма синов буйича умумий узлаштириш курсаткичини аниклаш учун вариантда берилган саволларнинг хар бири учун ёзилган жавобларга куйилган узлаштириш баллари кушилади ва йиғинди талабанинг якуний назорат буйича узлаштириш бали хисобланади.

Тавсия этилган адабиётлар руйхати

Асосий адабиётлар

1. Klaus Weltner, Wolfgang J.Weber, Jean Grosjean, Peter Schuster. **Mathematics for Physicists and Engineers.** Germany. Springer. 2009 y., 598 p.
2. Жураев Т.Ж., Худойберганов Р.Х., Ворисов А.К., Мансуров Х. **Олий математика асослари.** Дарслик. Т. Ўзбекистон, 1999, 290 бет.
3. Расулов Н.П., Сафаров И.И., Муҳитдинов Р.Т. **Олий математика.** Дарслик, Тошкент, 2012, 513 бет.
4. Соатов Ё.У. **Олий математика курси. I, II кисм.** «Ўкитувчи». 1994.

Қўшимча адабиётлар

1. **Данко П.Е.** и др. Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть I, II. Учебное пособие. М.: «Высшая школа», 2007.
2. **Латипов Х.** ва бошкалар. Аналитик геометрия ва чизикли алгебра. Т.: Узбекистон, 1995. - 198 бет.
3. **Тожиев Ш.** Олий математикадан масалалар ечиш. Т.:«Узбекистон», 2002.-380 бет.
4. **М.И.Пулатова** Практические занятия по высшей математике. Т.: ФАН, 2010, 272стр.
5. **М.И.Пулатова** Высшая математика. Часть 1. Т.: ФАН, 2011, 224стр.
6. **Рахимов Д.Г.** "Олий математика" фанида педагогик технологияларга асосланган жадаллаштирилган маърузалар модели. Тошкент. ОУМКДТРМ, 2012.-116 бет.
7. **John Bird.** Higher Engineering Mathematics. Fifth Edition. An imprint of Elsevier Linacre House, Jordan Hill, Oxford OX2 8DP 30 Corporate Drive, Suite 400, Burlington, MA01803, USA, 2006y. 745p.
8. **Carl M.Bender, Steven A.Orszag.** Advanced mathematical methods for scientists and engineers.
9. **David B.Surowski.** Advanced High-School Mathematics. Shanghai, China 2011y 435p.
10. **John K. Hunter.** LECTURE NOTES ON APPLIED MATHEMATICS Methods and Models. California 2009y. 178p.
11. **Wolfgang Ertel.** Advanced Mathematics for Engineers. Ravensburg 2012y. 227p.
12. **Sean Mauch.** Introduction to Methods of Applied Mathematics or Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers. USA 2004y. 2321 p.
13. **Gerd Baumann.** Mathematics for Engineers II. Calculus and Linear Algebra. Germany 2010y. 325p.
14. **Claudio Canuto & Anita Tabacco.** Mathematical Analysis II Second Edition. Springer International Publishing Switzerland 2015. 563 p.

Интернет ва Ziyonet сайтлари

1. http://ziyonet.uz

академик карздор деб хисобланади.

Талаба назорат натижаларидан норози булса, фан буйича назорат тури натижалари эълон килинган вактдан бошлаб бир кун мобайнида факультет деканига ариза билан мурожаат этиши мумкин. Бундай холда факультет деканининг тақдимномасига кура ректор буйруги билан 3 (уч) аъзодан кам булмаган таркибда апелляция комиссияси ташкил этилади.

Апелляция комиссияси талабаларнинг аризаларини куриб чикиб, шу куннинг узида хулосасини билдиради.

Бахолашнинг урнатилган талаблар асосида белгиланган муддатларда утказилиши хамда расмийлаштирилиши факультет декани, кафедра мудури, укув-услубий бошкарма хамда ички назорат ва мониторинг булими томонидан назорат килинади.

Талабалар ОН дан туплайдиган балларнинг намунавий мезонлари

№	Кўрсаткичлар	Оралиқ назорат баллари		
		Макс.	1-ОН	2-ОН
1	Дарсларга қатнашганлик даражаси. Маъруза дарсларидаги фаоллиги, конспект дафтарларининг юритилиши ва тўлиқлиги.	10	0-5	0-5
2	Талабаларнинг мустақил таълим топшириқларини ўз вақтида ва сифатли бажариши ва ўзлаштириши.	10	0-5	0-5
3	Оғзаки савол-жавоблар, коллоквиум ва бошқа назорат турлари натижалари	10	0-5	0-5
	Жами ОН баллари	30	0-15	0-15

Талабалар ЖН дан туплайдиган балларнинг намунавий мезонлари

№	Кўрсаткичлар	Жорий назорат баллари		
		Макс.	1-ЖН	2-ЖН
1	Дарсларга қатнашганлик ва ўзлаштириши даражаси. Амалий машғулотлардаги фаоллиги, амалий машғулот дафтарларининг юритилиши ва ҳолати	15	0-7	0-8
2	Мустакил таълим топшириқларининг ўз вақтида ва сифатли бажарилиши. Мавзулар бўйича уй вазифаларининг бажарилиши ва ўзлаштириши даражаси.	15	0-8	0-7
3	Ёзма назорат иши ёки тест саволларига берилган жавоблар	10	0-5	0-5
	Жами ЖН баллари	40	0-18	0-17

Якуний назорат "Ёзма иш" шаклида белгиланган бўлса, у ҳолда якуний назорат 30 баллик "Ёзма иш" вариантлари асосида ўтказилади.

Агар якуний назорат марказлашган тест асосида ташкил этилган бўлса, у ҳолда ЯН икки қисмда олиб борилади, яъни якуний назорат қуйидаги жадвал асосида амалга оширилади

№	Кўрсаткичлар	ЯН баллари	
		Макс.	Ўзгариш оралиғи
1	Фан буйича якуний ёзма иш назорати	6	0-6
2	Фан буйича якуний тест назорати	24	0-24
	Жами ЯН баллари	30	0-30

Якуний назоратда "Ёзма иш"ларни баҳолаш мезони

Якуний назорат "Ёзма иш" шаклида амалга оширилганда, синов куп вариантли усулда утказилади. Ҳар бир вариант 2 та назарий савол ва 3 та амалий топшириқдан иборат. Назарий саволлар фан буйича таянч суз ва иборалар асосида тузилган булиб, фаннинг барча

7	Бир ўзгарувчили функциянинг дифференциал ҳисоби	20	6	6	8
8	Бир ўзгарувчили функциянинг интеграл ҳисоби.	46	14	14	18
9	Кўп ўзгарувчили функциялар	20	6	6	8
	Жами: 2- мавсум бўйича	**180**	**54**	**54**	**72**

5321500 – Технологиялар ва жиҳозлар (Умуммашинасозлик буюмларини ишлаб чиқариш);

№	Мавзулар номи	Жами соат	Маъруза	Амалий Машғулот	Мустақил таълим
1	Кириш	8	2	2	4
2	Чизиқли алгебра	16	4	4	8
3	Векторлар алгебраси	22	6	6	10
4	Текисликда аналитик геометрия	22	6	6	10
5	Фазода аналитик геометрия	16	4	4	8
6	Математик анализга кириш	22	6	6	10
7	Бир ўзгарувчили функциянинг дифференциал ҳисоби	22	6	6	10
8	Бир ўзгарувчили функциянинг интеграл ҳисоби.	48	14	14	20
9	Кўп ўзгарувчили функциялар	22	6	6	10
	Жами: 2- мавсум бўйича	**198**	**54**	**54**	**90**

5321500 - Технологиялар ва жиҳозлар (сервис(енгил саноат));
5321500 - Технологиялар ва жиҳозлар (Енгил саноат жиҳозларини таъмирлаш ва техник хизмат кўрсатиш);

№	Мавзулар номи	Жами соат	Маъруза	Амалий Машғулот	Мустақил таълим
1	Кириш	2			2
2	Чизиқли алгебра	12	4	4	4
3	Векторлар алгебраси	12	4	4	4
4	Текисликда аналитик геометрия	8	2	2	4
5	Фазода аналитик геометрия	6	2	2	2
6	Математик анализга кириш	8	2	2	4
7	Бир ўзгарувчили функциянинг дифференциал ҳисоби	14	4	4	6
	1-мавсум бўйича	**66**	**18**	**18**	**30**
8	Бир ўзгарувчили	44	14	14	16

	функциянинг интеграл ҳисоби.				
9	Кўп ўзгарувчили функциялар	30	8	8	14
10	Каррали ва эгри чизиқли интеграллар	28	6	6	16
11	Қаторлар назарияси	30	8	8	14
12	Комплекс сонлар ва комплекс ўзгарувчили функциялар.	26	6	6	14
13	Дифференциал тенгламалар	32	8	8	16
2-мавсум бўйича		**198**	**54**	**54**	**90**

5321600 – Енгил саноат технологиялари ва жиҳозлари

№	Мавзулар номи	Жами соат	Маъруза	Амалий Машғулот	Мустақил таълим
1	Кириш	2			2
2	Чизиқли алгебра	12	4	4	4
3	Векторлар алгебраси	12	4	4	4
4	Текисликда аналитик геометрия	8	2	2	4
5	Фазода аналитик геометрия	6	2	2	2
6	Математик анализга кириш	8	2	2	4
7	Бир ўзгарувчили функциянинг дифференциал ҳисоби	14	4	4	6
1-мавсум бўйича		**66**	**18**	**18**	**30**
8	Бир ўзгарувчили функциянинг интеграл ҳисоби.	44	14	14	16
9	Кўп ўзгарувчили функциялар	26	8	8	10
10	Каррали ва эгри чизиқли интеграллар	24	6	6	12
11	Қаторлар назарияси	30	8	8	12
12	Комплекс сонлар ва комплекс ўзгарувчили функциялар.	24	6	6	12
13	Дифференциал тенгламалар	30	8	8	14
2-мавсум бўйича		**184**	**54**	**54**	**76**

5111000 - Касбий таълим (5321600 – Енгил саноат технологиялари ва жиҳозлари);

№	Мавзулар номи	Жами соат	Маъруза	Амалий Машғулот	Мустақил таълим
1	Кириш	2			2

- якуний назорат (ЯН) - семестр якунида муайян фан буйича назарий билим ва амалий куникмаларни талабалар томонидан узлаштириш даражасини бахолаш усули. Якуний назорат асосан таянч тушунча ва ибораларга асосланган “Ёзма иш” шаклида утказилади.

ОН утказиш жараёни кафедра мудири томонидан тузилган комиссия иштирокида мунтазам равишда урганиб борилади ва уни утказиш тартиблари бузилган холларда, ОН натижалари бекор килиниши мумкин. Бундай холларда ОН кайта утказилади.

Олий таълим муассасаси рахбарининг буйруги билан ички назорат ва мониторинг булими рахбарлигида тузилган комиссия иштирокида ЯН ни утказиш жараёни мунтазам равишда урганиб борилади ва уни утказиш тартиблари бузилган холларда, ЯН натижалари бекор килиниши мумкин. Бундай холларда ЯН кайта утказилади.

Талабанинг билим савияси, куникма ва малакаларини назорат килишнинг рейтинг тизими асосида талабанинг фан буйича узлаштириш даражаси баллар оркали ифодаланади. «Математика» фани буйича талабаларнинг семестр давомидаги узлаштириш курсаткичи 100 баллик тизимда бахоланади.

Ушбу 100 балл бахолаш турлари буйича куйидагича таксимланади: Я.Н.-30 балл, колган 70 балл эса Ж.Н.-40 балл ва О.Н.-30 балл килиб таксимланади.

Балл	Бахо	Талабаларнинг билим даражаси
86-100	Аъло	Хулоса ва карор кабул килиш. Ижодий фикрлай олиш. Мустакил мушохада юрита олиш. Олган билимларини амалда куллай олиш. Мохиятини тушунтириш. Билиш, айтиб бериш. Тасаввурга эга булиш.
71-85	Яхши	Мустакил мушохада килиш. Олган билимларини амалда куллай олиш. Мохиятини тушунтириш. Билиш, айтиб бериш. Тасаввурга эга булиш.
55-70	Коникарли	Мохиятини тушунтириш. Билиш, айтиб бериш Тасаввурга эга булиш.
0-54	Коникарсиз	Аник тасаввурга эга булмаслик. Билмаслик.

Фан буйича саралаш бали 55 баллни ташкил этади. Талабанинг саралаш балидан паст булган узлаштириши рейтинг дафтарчасида кайд этилмайди.

Талабаларнинг ўкув фани буйича мустакил иши жорий, оралик ва якуний назоратлар жараёнида тегишли топширикларни бажариши ва унга ажратилган баллар дан келиб чиққан холда бахоланади.

Талабанинг фан буйича рейтинги куйидагича аникданади:

Фан буйича жорий ва оралик назоратларга ажратилган умумий баллнинг 55 фоизи саралаш балл хисобланиб, ушбу фоиздан кам балл туплаган талаба якуний назоратга киритилмайди.

Жорий ЖН ва оралик ОН турлари буйича 55 бал ва ундан юкори бални туплаган талаба фанни узлаштирган деб хисобланади ва ушбу фан буйича якуний назоратга кирмаслигига йул куйипади.

Талабанинг семестр давомида фан буйича туплаган умумий бали хар бир назорат туридан белгиланган коидаларга мувофик туплаган баллари йигиндисига тенг.

ОН ва ЯН турлари календар тематик режага мувофик деканат томонидан тузилган рейтинг назорат жадваллари асосида утказилади. ЯН семестрнинг охирги 2 хафтаси мобайнида утказилади.

ЖН ва ОН назоратларда саралаш балидан кам балл туплаган ва узрли сабабларга кура назоратларда катнаша олмаган талабага кайта топшириш учун, навбатдаги шу назорат туригача, сунгги жорий ва оралик назоратлар учун эса якуний назоратгача булган муддат берилади.

Талабанинг семестрда ЖН ва ОН турлари буйича туплаган баллари ушбу назорат турлари умумий балининг 55 фоизидан кам булса ёки семестр якуний жорий, оралик ва якуний назорат турлари буйича туплаган баллари йигиндиси 55 баллдан кам булса, у

2	Чизиқли алгебра	18
3	Векторлар алгебраси	16
4	Текисликда аналитик геометрия	16
5	Фазода аналитик геометрия	12
6	Математик анализга кириш	26
7	Бир ўзгарувчили функциянинг дифференциал ҳисоби	10
2-мавсум бўйича		74

5111000-Касб таълими (Информатика ва ахборот технологиялари)

Т/п	Мустақил таълим мавзулари	Соат
1	Кириш	2
2	Чизиқли алгебра	10
3	Векторлар алгебраси	8
4	Текисликда аналитик геометрия	12
5	Фазода аналитик геометрия	10
6	Математик анализга кириш	10
7	Бир ўзгарувчили функциянинг дифференциал ҳисоби	14
8	Бир ўзгарувчили функциянинг интеграл ҳисоби	22
Жами 2- мавсум бўйича		**88**

Дастурнинг информацион услубий таъминоти

Мазкур фанни укитиш жараёнида таълимнинг замонавий методлари, педагогик ва ахборот-коммуникация технологияларини куллаш назарда тутилган: -чизикли алгебра назарияси асослари, матрицалар ва чизикли тенгламалар системасини ечишга багишланган мавзулар замонавий компютер технологиялари ёрдамида презентация ва электрон-дидактик технологияларидан фойдаланилган холда утказилади;

- чизикли фазода чизикли операторлар ва улар устида амаллар хамда аналитик геометрия масалаларини ечишга багишланган амалий машгулотларда аклий хужум, гурухли фикрлаш, "иш уйини" ва бошка педагогик технологиялардан фойдаланилади;
- бир ва куп узгарувчи функциялар, уларнинг дифференциал ва интеграл хисобларига багишланган амалий машгулотларида кичик гурухлар мусобакалари, гурухли фикрлаш педагогик технологияларини куллаш назарда тутилади.

"Математика" фанидан талабалар билимини рейтинг тизими асосида баҳолаш мезони

"Математика" фани буйича рейтинг жадваллари, назорат тури, шакли, сони хамда хар бир назоратга ажратилган максимал балл, шунингдек жорий ва оралик назоратларининг саралаш баллари хакидаги маълумотлар фан буйича биринчи машгулотда талабаларга эълон килинади.

Фан буйича талабаларнинг билим савияси ва узлаштириш даражасининг Давлат таълим стандартларига мувофиклигини таъминлаш учун куйидаги назорат турлари утказилади:

- жорий назорат (ЖН) - талабанинг фан мавзулари буйича билим ва амалий куникма даражасини аниклаш ва бахолаш усули. Жорий назорат фаннинг хусусиятидан келиб чиккан холда амалий машгулотларда огзаки суров, тест утказиш, сухбат, назорат иши, коллеквиум, уй вазифаларини текшириш ва шу каби бошка шаклларда утказилиши мумкин;
- оралик назорат (ОН) - семестр давомида укув дастурининг тегишли (фанларнинг бир неча мавзуларини уз ичига олган) булими тугаллангандан кейин талабанинг назарий билим ва амалий куникма даражасини аниклаш ва бахолаш усули. Оралик назорат бир семестрда икки марта утказилади ва шакли (ёзма, огзаки, тест ва хоказо) укув фанига ажратилган умумий соатлар хажмидан келиб чиккан ҳолда белгиланади;

2	Чизиқли алгебра	14	4	4	6
3	Векторлар алгебраси	14	4	4	6
4	Текисликда аналитик геометрия	14	4	4	6
5	Фазода аналитик геометрия	14	4	4	6
6	Математик анализга кириш	14	4	4	6
7	Бир ўзгарувчили функциянинг дифференциал ҳисоби	18	6	6	6
8	Бир ўзгарувчили функциянинг интеграл ҳисоби.	32	10	10	12
1-мавсум бўйича		**122**	**36**	**36**	**50**
9	Кўп ўзгарувчили функциялар	20	6	6	8
10	Каррали ва эгри чизиқли интеграллар	20	6	6	8
11	Қаторлар назарияси	28	8	8	12
12	Комплекс сонлар ва комплекс ўзгарувчили функциялар	20	6	6	8
13	Дифференциал тенгламалар	26	8	8	10
14	Операцион ҳисоб	14	4	4	6
15	Математик физика тенгламалари.	14	4	4	6
16	Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика	38	12	12	14
2-мавсум бўйича		**180**	**54**	**54**	**72**
	Жами	**302**	**90**	**90**	**122**

5321400 – Нефт-газ кимё саноати технологияси

№	Мавзулар номи	Жами соат	Маъруза	Амалий Машғулот	Мустақил таълим
1	Кириш	4	2		2
2	Чизиқли алгебра	32	6	12	14
3	Векторлар алгебраси	30	6	12	12
4	Текисликда аналитик геометрия	24	4	8	12
5	Фазода аналитик геометрия	22	4	8	10
6	Математик анализга кириш	40	8	16	16
7	Бир ўзгарувчили функциянинг дифференциал ҳисоби	30	6	16	8
2-мавсум бўйича		**182**	**36**	**72**	**74**

5111000 –Касб таълими (5321400- Нефт-газкимё саноати технологияси)

№	Мавзулар номи	Жами соат	Маъруза	Амалий Машғулот	Мустақил таълим
1	Кириш	2			2
2	Чизиқли алгебра	10	4	2	4
3	Векторлар алгебраси	10	4	2	4
4	Текисликда аналитик геометрия	10	4	2	4
5	Фазода аналитик геометрия	6	2	2	2

6	Математик анализга кириш	10	4	2	4
7	Бир ўзгарувчили функциянинг дифференциал ҳисоби	12	6	2	4
8	Бир ўзгарувчили функциянинг интеграл ҳисоби.	16	8	4	4
9	Кўп ўзгарувчили функциялар	8	4	2	2
2-мавсум бўйича		**84**	**36**	**18**	**30**

5320400 - Кимёвий технология (Тармоқлар бўйича);

№	Мавзулар номи	Жами соат	Маъруза	Амалий Машғулот	Мустақил таълим
1	Кириш	2			2
2	Чизиқли алгебра	24	8	8	8
3	Векторлар алгебраси	14	4	4	6
4	Текисликда аналитик геометрия	20	6	6	8
1-мавсум бўйича		**60**	**18**	**18**	**24**
5	Фазода аналитик геометрия	22	8	8	6
6	Математик анализга кириш	18	6	6	6
7	Бир ўзгарувчили функциянинг дифференциал ҳисоби	14	4	4	6
8	Бир ўзгарувчили функциянинг интеграл ҳисоби	24	8	8	8
9	Кўп ўзгарувчили функциялар	28	8	8	12
10	Қаторлар назарияси	24	8	8	8
11	Каррали ва эгри чизиқли интеграллар	24	8	8	8
12	Комплекс сонлар ва комплекс ўзгарувчили функциялар.	26	8	8	10
13	Дифференциал тенгламалар	28	10	10	8
14	Операцион ҳисоб	18	6	6	6
15	Математик физика тенгламалари.	18	6	6	6
16	Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика	30	10	10	10
2-мавсум бўйича		**300**	**90**	**90**	**120**
	Жами	**360**	**108**	**108**	**144**

5111000 – Касб таълими(5320400- кимёвий технология)

№	Мавзулар номи	Жами соат	Маъруза	Амалий Машғулот	Мустақил таълим
1	Кириш	2			2
2	Чизиқли алгебра	10	8	8	4
3	Векторлар алгебраси	10	4	4	4
4	Текисликда аналитик геометрия	6	6	6	6
1-мавсум бўйича		**50**	**18**	**18**	**14**
5	Фазода аналитик геометрия	22	8	8	6
6	Математик анализга кириш	18	6	6	6

8

6	Математик анализга кириш	6
7	Бир ўзгарувчили функциянинг дифференциал ҳисоби	6
8	Бир ўзгарувчили функциянинг интеграл ҳисоби.	12
1-мавсум бўйича		**50**
9	Кўп ўзгарувчили функциялар	8
10	Каррали ва эгри чизиқли интеграллар	8
11	Қаторлар назарияси	12
12	Комплекс сонлар ва комплекс ўзгарувчили функциялар	8
13	Дифференциал тенгламалар	10
14	Операцион ҳисоб	6
15	Математик физика тенгламалари.	6
16	Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика	14
2-мавсум бўйича		**72**

5111000 –Касб таълими (5321400- Нефт-газ Киме саноати технологияси)

Т/п	Мустақил таълим мавзулари	Соат
1	Кириш	2
2	Чизиқли алгебра	4
3	Векторлар алгебраси	4
4	Текисликда аналитик геометрия	4
5	Фазода аналитик геометрия	2
6	Математик анализга кириш	4
7	Бир ўзгарувчили функциянинг дифференциал ҳисоби	4
8	Бир ўзгарувчили функциянинг интеграл ҳисоби.	4
9	Кўп ўзгарувчили функциялар	2
	2-мавсум бўйича	**30**

5320400 -Кимёвий технология (Тармоқлар бўйича);
5111000 – Касб таълими(5320400- кимёвий технология)

Т/п	Мустақил таълим мавзулари	Соат
1	Кириш	2
2	Чизиқли алгебра	6
3	Векторлар алгебраси	8
4	Текисликда аналитик геометрия	8
1-мавсум бўйича		
5	Фазода аналитик геометрия	4
6	Математик анализга кириш	4
7	Бир ўзгарувчили функциянинг дифференциал ҳисоби	4
8	Бир ўзгарувчили функциянинг интеграл ҳисоби	8
9	Кўп ўзгарувчили функциялар	8
10	Қаторлар назарияси	8
11	Каррали ва эгри чизиқли интеграллар	8
12	Комплекс сонлар ва комплекс ўзгарувчили функциялар.	8
13	Дифференциал тенгламалар	8
14	Операцион ҳисоб	8
15	Математик физика тенгламалари.	10
16	Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика	14
2-мавсум бўйича		

5321400 – Нефт-газ кимё саноати технологияси

Т/п	Мустақил таълим мавзулари	Соат
1	Кириш	4

45

2	Чизиқли алгебра	6
3	Векторлар алгебраси	6
4	Текисликда аналитик геометрия	8
5	Фазода аналитик геометрия	6
6	Математик анализга кириш	8
7	Бир ўзгарувчили функциянинг дифференциал ҳисоби	10
Жами 2- мавсум бўйича		46

5111000 - Касб таълими (Машинасозлик технологияси, машинасозлик ишлаб чикаришини жиҳозлаш ва автоматлаштириш)

Т/п	Мустақил таълим мавзулари	Соат
1	Кириш	2
2	Чизиқли алгебра	6
3	Векторлар алгебраси	8
4	Текисликда аналитик геометрия	8
5	Фазода аналитик геометрия	6
6	Математик анализга кириш	8
7	Бир ўзгарувчили функциянинг дифференциал ҳисоби	8
8	Бир ўзгарувчили функциянинг интеграл ҳисоби.	18
9	Кўп ўзгарувчили функциялар	8
2- мавсум бўйича		**72**

5321500 – Технологиялар ва жиҳозлар (сервис(енгил саноат));
53221500 – Технологиялар ва жиҳозлар (Енгил саноат жиҳозларини таъмирлаш ва техник хизмат кўрсатиш);
5321600 – Енгил саноат технологиялари ва жиҳозлари

Т/п	Мустақил таълим мавзулари	Соат
1	Кириш	2
2	Чизиқли алгебра	12
3	Векторлар алгебраси	12
4	Текисликда аналитик геометрия	8
5	Фазода аналитик геометрия	6
6	Математик анализга кириш	8
7	Бир ўзгарувчили функциянинг дифференциал ҳисоби	14
1-мавсум бўйича		**30**
8	Бир ўзгарувчили функциянинг интеграл ҳисоби.	44
9	Кўп ўзгарувчили функциялар	26
10	Каррали ва эгри чизиқли интеграллар	24
11	Қаторлар назарияси	28
12	Комплекс сонлар ва комплекс ўзгарувчили функциялар.	24
13	Дифференциал тенгламалар	30
2-мавсум бўйича		**76**

5111000 - Касбий таълим (5321600 – Енгил саноат технологиялари ва жиҳозлари);

Т/п	Мустақил таълим мавзулари	Соат
1	Кириш	2
2	Чизиқли алгебра	6
3	Векторлар алгебраси	6
4	Текисликда аналитик геометрия	6
5	Фазода аналитик геометрия	6

7	Бир ўзгарувчили функциянинг дифференциал ҳисоби	14	4	4	6
8	Бир ўзгарувчили функциянинг интеграл ҳисоби	22	8	8	6
9	Кўп ўзгарувчили функциялар	22	8	8	6
10	Қаторлар назарияси	22	8	8	6
11	Каррали ва эгри чизиқли интеграллар	22	8	8	6
12	Комплекс сонлар ва комплекс ўзгарувчили функциялар.	22	8	8	6
13	Дифференциал тенгламалар	26	10	10	6
14	Операцион ҳисоб	16	6	6	4
15	Математик физика тенгламалари.	18	6	6	6
16	Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика	26	10	10	6
2-мавсум бўйича		**250**	**90**	**90**	**70**
	Жами	**300**	**108**	**108**	**84**

5111000-Касб таълими (Информатика ва ахборот технологиялари)

№	Мавзулар номи	Жами соат	Маъруза	Амалий машғулот	Мустақил таълим
1	Кириш	6	2	2	2
2	Чизиқли алгебра	26	8	8	10
3	Векторлар алгебраси	20	6	6	8
4	Текисликда аналитик геометрия	32	10	10	12
5	Фазода аналитик геометрия	26	8	8	10
6	Математик анализга кириш	26	8	8	10
7	Бир ўзгарувчили функциянинг дифференциал ҳисоби	38	12	12	14
8	Бир ўзгарувчили функциянинг интеграл ҳисоби	58	18	18	22
2- мавсум бўйича		**232**	**72**	**72**	**88**

“Математика” фанидан машғулотларнинг мавзулар ва соатлар бўйича тақсимланиши:

5310700 - Электр техникаси, электр механикаси ва электр технологиялари;
5111000 - Касб таълими (Электр техникаси, электр механикаси ва электр технологиялари);
5312100 - Энергоаудит ва саноат корхоналарининг энергетик текшируви (тармоқлар бўйича);
5321700 - Технологик жараёнларни бошқаришда ахборот коммуникация тизимлари;

№	Мавзулар номи	Жами соат	Маъруза	Амалий Машғулот	Мустақил таълим
1	Матрицалар ва улар устида амаллар.	8	4	2	2
2	Аниқловчилар ва уларнинг хоссалари.	6	2	2	2
3	Чизиқли тенгламалар системаси ва уни ечиш усуллари.	12	4	4	4
4	Векторлар ва улар устида арифметик амаллар.	6	2	2	2

	Векторларнинг координаталари ва улар устида амаллар				
5	Векторларнинг скаляр кўпайтмаси, унинг хоссалари ва татбиқлари. Векториал кўпайтма, хоссалари ва татбиқлари. Векторларнинг аралаш кўпайтмаси, унинг хоссалари ва татбиқлари	10	4	2	4
6	Текисликда аналитик геометрия ва унинг асосий масалалари.	6	2	2	2
7	Текисликдаги тўғри чизиқ тенгламалари. Текисликдаги тўғри чизиқларга доир асосий масалалар	10	4	4	2
8	Иккинчи тартибли чизиқлар. Айлана ва эллипс. Гипербола ва парабола. Коник кесимлар.	12	4	4	4
9	Фазода аналитик геометрия. Текислик тенгламалари . Текисликка доир асосий масалалар.	12	4	4	4
10	Фазодаги тўғри чизиқ тенгламалари.Фазодаги тўғри чизиққа доир асосий масалалар. Аралаш масалалар	12	4	4	4
11	Функция ва у билан боғлиқ булган тушунчалар.	6	2	2	2
12	Функция лимити ва унинг хоссалари.	6	2	2	2
13	Ажойиб лимитлар. Узлуксиз функциялар ва уларнинг хоссалари	8	4	2	2
14	Функция ҳосиласи ва уни ҳисоблаш қоидалари.	6	2	2	2
15	Функцияни дифференциаллаш қоидалари. Юқори тартибли ҳосила ва дифференциаллар.	6	2	2	2
16	Функцияни I тартибли ҳосила ёрдамида текшириш	6	2	2	2
17	Функцияни II тартибли ҳосила ёрдамида текшириш.	6	2	2	2
18	Функцияни тулиқ текшириш.	6	2	2	2
19	Аниқмасликлар ва Лопитал қоидалари.	6	2	2	2
Жами 2- мавсум бўйича		**154**	**54**	**54**	**46**

5111000 - Касб таълими (Машинасозлик технологияси, машинасозлик ишлаб чикаришини жиҳозлаш ва автоматлаштириш);

№	Мавзулар номи	Жами соат	Маъ-руза	Ама-лий Маш-ғулот	Муста-қил таълим
1	Кириш	6	2	2	2
2	Матрицалар ва улар устида амаллар.	6	2	2	2
3	Аниқловчилар ва уларнинг хоссалари.	8	2	2	4
4	Чизиқли тенгламалар системаси ва уни ечиш усуллари.	8	2	2	4
5	Векторлар ва улар устида арифметик амаллар. Векторларнинг координаталари ва улар устида амаллар	6	2	2	2
6	Векторларнинг скаляр кўпайтмаси, унинг хоссалари ва татбиқлари. Векториал кўпайтма, хоссалари ва татбиқлари. Векторларнинг аралаш кўпайтмаси, унинг хоссалари ва татбиқлари	6	2	2	2
7	Текисликда аналитик геометрия ва унинг асосий	6	2	2	2

30	II тартибли чизиқли ўзгармас коеффициентли бир жинсли дифференциал тенгламалар.	2
31	II тартибли чизиқли ўзгармас коеффициентли биржинслимас дифференциал тенгламалар.	2
32	II тартибли чизиқли ўзгармас коеффициентли биржинслимас дифференциал тенгламалар.	2
33	Тасвирларни жадвал ва Лаплас алмаштирмасининг хоссалари ёрдамида топпиш.	2
34	Тасвирларга кўра бошланғич функцияни топиш.	2
35	Операцион ҳисоб ёрдамида дифференциал тенгламаларни ечиш.	2
36	Тор тебраниш тенгламасини Даламбер усулида ечиш.	2
37	Иссиқликнинг чегараланган стерженда тарқалиши. Коррект масалалар.	2
38	Еҳтимоллар назарияси. Ҳодисалар ва улар устида амаллар.	2
39	Эҳтимоллик, унинг классик, геометрик, статистик таърифлари ва асосий хоссалари	2
40	Еҳтимолликларни қўшиш ва кўпайтириш теоремалари.	2
41	Дискрет тасодифий миқдорлар, уларнинг тақсимот қонуни ва асосий сонли характеристикалари	2
42	Асосий дискрет тақсимотлар ва уларнинг сонли характеристикалари	2
43	Тақсимот ва зичлик функциялари. Асосий узлуксиз тақсимотлар ва уларнинг сонли характеристикалари	2
44	Математик статистика элементлари.	4
2-мавсум бўйича		**90**
	Жами	**108**

Мустакил таълим ташкил этишнинг шакли ва мазмуни

"Математика" буйича талабанинг мустакил таълими шу фанни урганиш жараёнининг таркибий кисми булиб, услубий ва ахборот ресурслари билан тула таъминланган.

Талабалар аудитория машгулотларида профессор-укитувчиларнинг маърузасини тинглайдилар, мисол ва масалалар ечадилар. Аудиториядан ташкарида талаба дарсларга тайёрланади, адабиётларни конспект килади, уй вазифа сифатида берилган мисол ва масалаларни ечади. Бундан ташкари айрим мавзуларни кенгрок урганиш максадида кушимча адабиётларни укиб рефератлар тайёрлайди хамда мавзу буйича тестлар ечади. Мустакил таълим натижалари рейтинг тизими асосида бахоланади. Уйга вазифаларни бажариш, кушимча дарслик ва адабиётлардан янги билимларни мустакил урганиш, керакли маълумотларни излаш ва уларни топиш йулларини аниклаш, интернет тармокдаридан фойдаланиб маълумотлар туплаш ва илмий изланишлар олиб бориш, илмий тугарак доирасида ёки мустакил равишда илмий манбалардан фойдаланиб илмий макола ва маърузалар тайёрлаш кабилар талабаларнинг дарсда олган билимларини чукурлаштиради, уларнинг мустакил фикрлаш ва ижодий кобилиятини ривожлантиради. Шунинг учун хам мустакил таълимсиз укув фаолияти самарали булиши мумкин эмас. Уй вазифаларини текшириш ва бахолаш амалий машгулот олиб борувчи укитувчи томонидан, конспектларни ва мавзуни узлаштириш даражасини текшириш ва бахолаш эса маъруза дарсларини олиб борувчи укитувчи томонидан хар дарсда амалга оширилади. "Математика" фанидан мустакил иш мажмуаси фаннинг барча мавзуларини камраб олган ва куйидаги 12 та катта мавзу куринишида шакллантирилга

Талабалар мустакил таълимининг мазмуни ва ҳажми

5310700 – Электр техникаси, электр механикаси ва электр технологиялари,
5111000-Касб таълими (Электр техникаси, электр механикаси ва электр технологиялари),
5312100–Энергоаудит ва саноат корхоналарининг энергетик текшируви(тармоқлар бўйича),
5321700 – Технологик жараёнларни бошқаришда ахборот коммуникация тизимлари,

Т/р	Мустақил таълим мавзулари	Соат
1	Кириш	2

5320400 – Кимёвий технология (Тармоқлар бўйича);
5111000 – Касб таълими(5320400- кимёвий технология)

№	Мавзулар номи	соат
1	Матрицалар ва улар устида амаллар. Аниқловчилар ва уларнинг хоссалари.	4
2	Чизиқли тенгламалар системаси ва уни ечиш усуллари.	4
3	Векторлар ва улар устида арифметик амаллар. Векторларнинг координаталари ва улар устида амаллар	2
4	Векторларнинг скаляр кўпайтмаси, унинг хоссалари ва татбиқлари. Векториал кўпайтма, хоссалари ва татбиқлари. Векторларнинг аралаш кўпайтмаси, унинг хоссалари ва татбиқлари	2
5	Текисликда аналитик геометрия ва унинг асосий масалалари. Текисликдаги тўғри чизиқ тенгламалари. Текисликдаги тўғри чизиқларга доир асосий масалалар. Иккинчи тартибли чизиқлар. Айлана ва эллипс. Гипербола ва парабола.	6
1-мавсум бўйича		18
1	Фазода аналитик геометрия. Текислик тенгламалари . Текисликка доир асосий масалалар.Фазодаги тўғри чизиқ тенгламалари.Фазодаги тўғри чизиққа доир асосий масалалар. Аралаш масалалар	2
2	Функция ва у билан боғлиқ бўлган тушунчалар. Функция лимити ва унинг хоссалари. Ажойиб лимитлар. Узлуксиз функциялар ва уларнинг хоссалари	2
3	Функция ҳосиласи ва уни ҳисоблаш қоидалари. Функцияни дифференциаллаш қоидалари. Юқори тартибли ҳосила ва дифференциаллар.	2
4	Функцияни ҳосила ёрдамида текшириш. Функцияни тўлиқ текшириш. Аниқмасликлар ва Лопитал қоидалари.	2
5	Бошланғич функция ва аниқмас интеграл. Интеграллар жадвали. Аниқмас интегрални ҳисоблаш усуллари.	2
6	Квадрат учҳад қатнашган интеграллар. энг содда рационал касрлар ва уларни интеграллаш.	2
7	Рационал касрлар ва уларни интеграллаш.	2
8	Иррационал ифодаларни интеграллаш. эйлер алмаштирмалари.	2
9	Тригонометрик функциялар қатнашган баъзи ифодаларни интеграллаш.	2
10	Аниқ интеграл таърифи ва унинг энг содда хоссалари. Аниқ интегралнинг хоссалари.	2
11	Аниқ интегрални ҳисоблаш усуллари.	2
12	Хосмас интеграллар.	2
13	Аниқ интегралнинг геометрик ва механик татбиқлари.	2
14	Аниқ интегрални тақрибий ҳисоблаш формулалари.	2
15	Икки ўзгарувчили функция, унинг лимити ва узлуксизлиги. Мураккаб функциянинг ҳосиласи. Тўла ҳосила.	2
16	Икки ўзгарувчили функциянинг хусусий ҳосилалари. Тўла дифференциал.	2
17	Мураккаб функциянинг ҳосиласи. Тўла ҳосила. Йўналиш бўйичаҳосила ва градиент.	2
18	Юқори тартибли ҳосила ва дифференциаллар	2
19	Икки ўзгарувчили функциянинг локал экстремумлари.	2
20	Икки ўзгарувчили функциянинг шартли ва глобал экстремумлари.	2
21	Икки каррали интеграл ва унинг асосий хоссалари. Икки каррали интегрални ҳисоблаш усуллари	2
22	Икки каррали интегралнинг геометрик ва механик татбиқлари.	2
23	Уч каррали интеграл , унинг асосий хоссалари ва ҳисоблаш усуллари.	2
24	Егри чизиқли интеграл ва унинг хоссалари.	2
25	Комплекс сонлар ва улар устида арифметик амаллар.	2
26	Комплекс аргументли функция ва унинг ҳосиласи. Коши–Риман шартлари. Комплекс ўзгарувчили функцияларни интеграли. Коши формуласи.	2
27	Дифференциал тенгламаларга келувчи масалалар. Дифференциал тенгламалар ва уларнинг ечимлари	2
28	Баъзи I тартибли дифференциал тенгламалар ва уларни ечиш	2
29	II тартибли дифференциал тенгламалар	2

	масалалари.				
8	Текисликдаги тўғри чизиқ тенгламалари. Текисликдаги тўғри чизиқларга доир асосий масалалар	6	2	2	2
9	Иккинчи тартибли чизиқлар. Айлана ва эллипс. Гипербола ва парабола. Коник кесимлар.	8	2	2	4
10	Фазода аналитик геометрия. Текислик тенгламалари . Текисликка доир асосий масалалар.	6	2	2	2
11	Фазодаги тўғри чизиқ тенгламалари.Фазодаги тўғри чизиққа доир асосий масалалар. Аралаш масалалар	6	2	2	2
12	Функция ва у билан боғлиқ бўлган тушунчалар.	6	2	2	2
13	Функция лимити ва унинг хоссалари.	6	2	2	2
14	Ажойиб лимитлар. Узлуксиз функциялар ва уларнинг хоссалари	8	2	2	4
15	Функция ҳосиласи ва уни ҳисоблаш қоидалари.	6	2	2	2
16	Функцияни дифференциаллаш қоидалари. Юқори тартибли ҳосила ва дифференциаллар.	6	2	2	2
17	Функцияни тўлиқ текшириш.	6	2	2	2
18	Аниқмасликлар ва Лопитал қоидалари.	6	2	2	2
19	Бошланғич функция ва аниқмас интеграл. Интеграллар жадвали. Аниқмас интегрални ҳисоблаш усуллари.	6	2	2	2
20	Рационал касрлар ва уларни интеграллаш.	6	2	2	2
21	Иррационал ифодаларни интеграллаш. Эйлер алмаштирмалари.	8	2	2	4
22	Тригонометрик функциялар қатнашган баъзи ифодаларни интеграллаш.	8	2	2	4
23	Аниқ интеграл таърифи ва унинг энг содда хоссалари. Аниқ интегралнинг хоссалари. Аниқ интегрални ҳисоблаш усуллари.	8	2	2	4
24	Аниқ интегралнинг геометрик ва механик татбиқлари. Аниқ интегрални тақрибий ҳисоблаш формулалари.	8	2	2	4
25	Икки ўзгарувчили функция, унинг лимити ва узлуксизлиги. Икки ўзгарувчили функциянинг хусусий ҳосилалари. Тўла дифференциал.	8	2	2	4
26	Мураккаб функциянинг ҳосиласи. Тўла ҳосила. Йўналиш бўйича ҳосила ва градиент. ЮқорI тартибли ҳосила ва дифференциаллар	6	2	2	2
27	Икки ўзгарувчили функциянинг локал экстремумлари.	6	2	2	2
2- мавсум бўйича		**180**	**54**	**54**	**72**

5321500 – Технологиялар ва жиҳозлар (Умуммашинасозлик буюмларини ишлаб чиқариш);

№	Мавзулар номи	Жами соат	Маъруза	Амалий Машғулот	Мустақил таълим
1	Кириш	6	2	2	2
2	Матрицалар ва улар устида амаллар.	6	2	2	2
3	Аниқловчилар ва уларнинг хоссалари.	8	2	2	4
4	Чизиқли тенгламалар системаси ва уни ечиш	8	2	2	4

	усуллари.				
5	Векторлар ва улар устида арифметик амаллар. Векторларнинг координаталари ва улар устида амаллар	6	2	2	2
6	Векторларнинг скаляр кўпайтмаси, унинг хоссалари ва татбиқлари. Векториал кўпайтма, хоссалари ва татбиқлари. Векторларнинг аралаш кўпайтмаси, унинг хоссалари ва татбиқлари	6	2	2	2
7	Текисликда аналитик геометрия ва унинг асосий масалалари.	6	2	2	2
8	Текисликдаги тўғри чизиқ тенгламалари. Текисликдаги тўғри чизиқларга доир асосий масалалар	6	2	2	2
9	Иккинчи тартибли чизиқлар. Айлана ва эллипс. Гипербола ва парабола. Коник кесимлар.	8	2	2	4
10	Фазода аналитик геометрия. Текислик тенгламалари . Текисликка доир асосий масалалар.	6	2	2	2
11	Фазодаги тўғри чизиқ тенгламалари.Фазодаги тўғри чизиққа доир асосий масалалар. Аралаш масалалар	6	2	2	2
12	Функция ва у билан боғлиқ бўлган тушунчалар.	8	2	2	4
13	Функция лимити ва унинг хоссалари.	8	2	2	4
14	Ажойиб лимитлар. Узлуксиз функциялар ва уларнинг хоссалари	8	2	2	4
15	Функция ҳосиласи ва уни ҳисоблаш қоидалари.	8	2	2	4
16	Функцияни дифференциаллаш қоидалари. Юқори тартибли ҳосила ва дифференциаллар.	8	2	2	4
17	Функцияни тўлиқ текшириш.	8	2	2	4
18	Аниқмасликлар ва Лопитал қоидалари.	6	2	2	2
19	Бошлангич функция ва аниқмас интеграл. Интеграллар жадвали. Аниқмас интегрални ҳисоблаш усуллари.	8	2	2	4
20	Рационал касрлар ва уларни интеграллаш.	8	2	2	4
21	Иррационал ифодаларни интеграллаш. Эйлер алмаштирмалари.	8	2	2	4
22	Тригонометрик функциялар қатнашган баъзи ифодаларни интеграллаш.	8	2	2	4
23	Аниқ интеграл таърифи ва унинг энг содда хоссалари. Аниқ интегралнинг хоссалари. Аниқ интегрални ҳисоблаш усуллари.	8	2	2	4
24	Аниқ интегралнинг геометрик ва механик татбиқлари. Аниқ интегрални тақрибий ҳисоблаш формулалари.	8	2	2	4
25	Икки ўзгарувчили функция, унинг лимити ва узлуксизлиги. Икки ўзгарувчили функциянинг хусусий ҳосилалари. Тўла дифференциал.	8	2	2	4
26	Мураккаб функциянинг ҳосиласи. Тўла ҳосила. Йўналиш бўйича ҳосила ва градиент. ЮқорI тартибли ҳосила ва дифференциаллар	8	2	2	4
27	Икки ўзгарувчили функциянинг локал экстремумлари.	8	2	2	4
2- мавсум бўйича		**198**	**54**	**54**	**90**

5321500 - Технологиялар ва жиҳозлар (сервис(енгил саноат));

17	Фазодаги тўғри чизиққа доир асосий масалалар. Аралаш масалалар	2
18	Функция ва у билан боғлиқ бўлган тушунчалар.	2
19	Сонли кетма-кетлик ва унинг лимити	2
20	Функция лимити ва унинг хоссалари. Ажойиб лимитлар.	2
21	Узлуксиз функциялар ва уларнинг хоссалари.	2
22	Функция ҳосиласи ва уни ҳисоблаш қоидалари.	2
23	Функцияни дифференциаллаш қоидалари.	2
24	Юқори тартибли ҳосила ва дифференциаллар.	2
25	Функцияни I тартибли ҳосила ёрдамида текшириш	2
26	Функцияни II тартибли ҳосила ёрдамида текшириш. Функцияни тўлиқ текшириш	2
27	Аниқмасликлар ва Лопитал қоидалари.	2
28	Бошлангич функция ва аниқмас интеграл. Интеграллар жадвали. Аниқмас интегрални ҳисоблаш усуллари.	2
29	Квадрат учҳад қатнашган интеграллар. энг содда рационал касрлар ва уларни интеграллаш.	2
30	Рационал касрлар ва уларни интеграллаш.	2
31	Иррационал ифодаларни интеграллаш. эйлер алмаштирмалари.	2
32	Тригонометрик функциялар қатнашган баъзи ифодаларни интеграллаш.	2
33	Аниқ интеграл таърифи ва унинг энг содда хоссалари. Аниқ интегралнинг хоссалари. Аниқ интегрални ҳисоблаш усуллари.	2
34	Хосмас интеграллар	2
35	Аниқ интегралнинг геометрик ва механик татбиқлари.	2
36	Аниқ интегрални тақрибий ҳисоблаш .	2
	Жами 2- мавсум бўйича	**72**

5111000 –Касб таълими (5321400- Нефт-газ Киме саноати технологияси)

Т/р	Амалий машғулотлар	Соат
1	Матрицалар ва улар устида амаллар. Аниқловчилар ва уларнинг хоссалари. Чизиқли тенгламалар системаси ва уни ечиш усуллари.	2
2	Векторлар ва улар устида арифметик амаллар. Векторларнинг координаталари ва улар устида амаллар. Векторларнинг скаляр кўпайтмаси, унинг хоссалари ва татбиқлари. Векториал кўпайтма, хоссалари ва татбиқлари. Векторларнинг аралаш кўпайтмаси, унинг хоссалари ва татбиқлари	2
3	Текисликда аналитик геометрия ва унинг асосий масалалари. Текисликдаги тўғри чизиқ тенгламалари. Текисликдаги тўғри чизиқларга доир асосий масалалар. Иккинчи тартибли чизиқлар. Айлана ва эллипс. Гипербола ва парабола. Коник кесимлар. II тартибли тенгламалар.	2
4	Фазода аналитик геометрия. Текислик тенгламалари . Текисликка доир асосий масалалар. Фазодаги тўғри чизиқ тенгламалари.Фазодаги тўғри чизиққа доир асосий масалалар. Аралаш масалалар	2
5	Функция ва у билан боғлиқ бўлган тушунчалар. Функция лимити ва унинг хоссалари. Ажойиб лимитлар. Узлуксиз функциялар ва уларнинг хоссалари.	2
6	Функция ҳосиласи ва уни ҳисоблаш қоидалари. Функцияни дифференциаллаш қоидалари. Юқори тартибли ҳосила ва дифференциаллар. Функцияни ҳосила ёрдамида текшириш. Аниқмасликлар ва Лопитал қоидалари.	2
7	Бошлангич функция ва аниқмас интеграл. Интеграллар жадвали. Аниқмас интегрални ҳисоблаш усуллари. Рационал касрлар ва уларни интеграллаш. Иррационал ифодаларни интеграллаш. эйлер алмаштирмалари. Тригонометрик функциялар қатнашган баъзи ифодаларни интеграллаш.	2
8	Аниқ интеграл таърифи ва унинг энг содда хоссалари. Аниқ интегралнинг хоссалари. Хосмас интеграллар. Аниқ интегралнинг геометрик ва механик татбиқлари.	2
9	Икки ўзгарувчили функция, унинг лимити ва узлуксизлиги. Икки ўзгарувчили функциянинг хусусий ҳосилалари. Тўла дифференциал. Икки ўзгарувчили функциянинг локал экстремумлари.	2
	2-мавсум бўйича	**18**

4	Икки каррали интеграл ва унинг асосий хоссалари. Икки каррали интегрални ҳисоблаш усуллари. Икки каррали интегралнинг геометрик ва механик татбиқлари.	2
5	Уч каррали интеграл , унинг асосий хоссалари ва ҳисоблаш усуллари.	
6	Егри чизиқли интеграл ва унинг хоссалари.	2
7	Сонли қаторлар ва уларнинг яқинлашиши.	2
8	Сонли қаторлар яқинлашишининг етарли шартлари.	2
9	Функционал қаторлар. Даражали қаторлар.	2
10	Тейлор ва Макларен қаторлари.	2
11	Комплекс сонлар ва улар устида арифметик амаллар.	2
12	Комплекс аргументли функция ва унинг ҳосиласи. Коши–Риман шартлари. Комплекс ўзгарувчили функцияларни интеграли. Коши формуласи.	2 2
13	Дифференциал тенгламаларга келувчи масалалар. Дифференциал тенгламалар ва уларнинг ечимлари	2
14	Баьзи I тартибли дифференциал тенгламалар ва уларни ечиш	
15	II тартибли дифференциал тенгламалар	2
16	II тартибли чизиқли ўзгармас коеффициентли бир жинсли дифференциал тенгламалар. II тартибли чизиқли ўзгармас коеффициентли биржинслимас дифференциал тенгламалар.	2 2
17	Тасвирларни жадвал ва Лаплас алмаштирмасининг хоссалари ёрдамида топпиш.	
18	Тасвирларга кўра бошланғич функцияни топиш.	2
19	Операцион ҳисоб ёрдамида дифференциал тенгламаларни ечиш.	2
20	Тор тебраниш тенгламасини Даламбер усулида ечиш.	2
21	Иссиқликнинг чегараланган стерженда тарқалиши. Коррект масалалар.	2
22	Еҳтимоллар назарияси. Ҳодисалар ва улар устида амаллар. Эҳтимоллик, унинг классик, геометрик, статистик таьрифлари ва асосий хоссалари	2 2
23	Еҳтимолликларни қўшиш ва кўпайтириш теоремалари.	
24	Дискрет тасодифий миқдорлар, уларнинг тақсимот қонуни ва асосий сонли характеристикалари	2 2
25	Асосий дискрет тақсимотлар ва уларнинг сонли характеристикалари	
26	Тақсимот ва зичлик функциялари. Асосий узлуксиз тақсимотлар ва уларнинг сонли характеристикалари	2 2
27	Математик статистика элементлари.	
		2
	Жами	54

5111000-Касб таълими (Информатика ва ахборот технологиялари)

Т/р	Амалий машғулотлар	
1	Кириш	Соат
2	Матрицалар ва улар устида амаллар.	2
3	Аниқловчилар ва уларнинг хоссалари.	2
4	Чизиқли тенгламалар системаси ва уни ечиш усуллари.	2
5	Чизиқли тенгламалар системаси ва уни ечиш усуллари(даваоми).	2
6	Векторлар ва улар устида арифметик амаллар. Векторларнинг координаталари ва улар устида амаллар	2 2
7	Векторларнинг скаляр кўпайтмаси, унинг хоссалари ва татбиқлари.	
8	Векториал кўпайтма, хоссалари ва татбиқлари. Векторларнинг аралаш кўпайтмаси, унинг хоссалари ва татбиқлари	2 2
9	Текисликда аналитик геометрия ва унинг асосий масалалари. Текисликдаги тўғри чизиқ тенгламалари	2
10	Текисликдаги тўғри чизиқларга доир асосий масалалар.	
11	Иккинчи тартибли чизиқлар. Айлана ва эллипс.	2
12	Гипербола ва парабола.	2
13	Коник кесимлар. II тартибли тенгламалар.	2
14	Фазода аналитик геометрия. Текислик тенгламалари .	2
15	Текисликка доир асосий масалалар.	2
16	Фазодаги тўғри чизиқ тенгламалари.	2
		2

5321500 - Технологиялар ва жиҳозлар (Енгил саноат жиҳозларини таъмирлаш ва техник хизмат кўрсатиш);

№	Мавзулар номи	Жами соат	Маъ-руза	Ама-лий Маш-ғулот	Муста-қил таълим
1	Кириш	2			2
2	Матрицалар ва улар устида амаллар. Аниқловчилар ва уларнинг хоссалари.	6	2	2	2
3	Чизиқли тенгламалар системаси ва уни ечиш усуллари.	8	2	2	4
4	Векторлар ва улар устида арифметик амаллар. Векторларнинг координаталари ва улар устида амаллар	6	2	2	2
5	Векторларнинг скаляр кўпайтмаси, унинг хоссалари ва татбиқлари. Векториал кўпайтма, хоссалари ва татбиқлари. Векторларнинг аралаш кўпайтмаси, унинг хоссалари ва татбиқлари	6	2	2	2
6	Текисликда аналитик геометрия ва унинг асосий масалалари. Текисликдаги тўғри чизиқ тенгламалари. Текисликдаги тўғри чизиқларга доир асосий масалалар. ИккинчI тартибли чизиқлар. Айлана ва эллипс. Гипербола ва парабола.	6	2	2	2
7	Фазода аналитик геометрия. Текислик тенгламалари . Текисликка доир асосий масалалар.Фазодаги тўғри чизиқ тенгламалари.Фазодаги тўғри чизиққа доир асосий масалалар. Аралаш масалалар	8	2	2	4
8	Функция ва у билан боғлиқ бўлган тушунчалар. Функция лимити ва унинг хоссалари. Ажойиб лимитлар. Узлуксиз функциялар ва уларнинг хоссалари	6	2	2	2
9	Функция ҳосиласи ва уни ҳисоблаш қоидалари. Функцияни дифференциаллаш қоидалари. ЮқорI тартибли ҳосила ва дифференциаллар.	6	2	2	2
19	Функцияни ҳосила ёрдамида текшириш	6	2	2	2
20	Функцияни ҳосила ёрдамида текшириш.	8	2	2	4
21	Функцияни тўлиқ текшириш. Аниқмасликлар ва Лопитал қоидалари.	6	2	2	2
1-мавсум бўйича		**66**	**18**	**18**	**30**
1	Бошланғич функция ва аниқмас интеграл. Интеграллар жадвали. Аниқмас интегрални ҳисоблаш усуллари.	6	2	2	2
2	Квадрат учҳад қатнашган интеграллар. энг содда рационал касрлар ва уларни интеграллаш.	6	2	2	2
3	Рационал касрлар ва уларни интеграллаш.	6	2	2	2
4	Иррационал ифодаларни интеграллаш. эйлер алмаштирмалари.	8	2	2	4
5	Тригонометрик функциялар қатнашган баьзи ифодаларни интеграллаш.	6	2	2	2
6	Аниқ интеграл таьрифи ва унинг энг содда хоссалари. Аниқ интегралнинг хоссалари.	8	2	2	4
7	Аниқ интегрални ҳисоблаш усуллари.	8	2	2	4

8	Хосмас интеграллар.	6	2	2	2
9	Аниқ интегралнинг геометрик ва механик татбиқлари.	8	2	2	4
10	Аниқ интегрални тақрибий ҳисоблаш формулалари.	8	2	2	4
11	Икки ўзгарувчили функция, унинг лимити ва узлуксизлиги. Мураккаб функциянинг ҳосиласи. Тўла ҳосила.	8	2	2	4
12	Икки ўзгарувчили функциянинг хусусий ҳосилалари. Тўла дифференциал.	6	2	2	2
13	Мураккаб функциянинг ҳосиласи. Тўла ҳосила. Йўналиш бўйичаҳосила ва градиент.	8	2	2	4
14	Юқори тартибли ҳосила ва дифференциаллар	8	2	2	4
15	Икки ўзгарувчили функциянинг локал экстремумлари.	8	2	2	4
16	Икки ўзгарувчили функциянинг шартли ва глобал экстремумлари.	8	2	2	4
17	Икки каррали интеграл ва унинг асосий хоссалари. Икки каррали интегрални ҳисоблаш усуллари	6	2	2	2
18	Икки каррали интегралнинг геометрик ва механик татбиқлари.	8	2	2	4
19	Уч каррали интеграл , унинг асосий хоссалари ва ҳисоблаш усуллари.	8	2	2	4
20	Егри чизиқли интеграл ва унинг хоссалари.	6	2	2	2
21	Комплекс сонлар ва улар устида арифметик амаллар.	8	2	2	4
22	Комплекс аргументли функция ва унинг ҳосиласи. Коши–Риман шартлари. Комплекс ўзгарувчили функцияларни интеграли. Коши формуласи.	8	2	2	4
23	Дифференциал тенгламаларга келувчи масалалар. Дифференциал тенгламалар ва уларнинг ечимлари	6	2	2	2
24	Баъзи I тартибли дифференциал тенгламалар ва уларни ечиш	8	2	2	4
25	II тартибли дифференциал тенгламалар	8	2	2	4
26	II тартибли чизиқли ўзгармас коэффициентли бир жинсли дифференциал тенгламалар.	8	2	2	4
27	II тартибли чизиқли ўзгармас коэффициентли биржинслимас дифференциал тенгламалар.	8	2	2	4
2-мавсум бўйича		**198**	**54**	**54**	**90**

5321600 - Енгил саноат технологиялари ва жиҳозлари;

№	Мавзулар номи	Жами соат	Маъ-руза	Ама-лий Маш-ғулот	Муста-қил таълим
1	Кириш	2			2
2	Матрицалар ва улар устида амаллар. Аниқловчилар ва уларнинг хоссалари.	6	2	2	2
3	Чизиқли тенгламалар системаси ва уни ечиш усуллари.	8	2	2	4
4	Векторлар ва улар устида арифметик амаллар. Векторларнинг координаталари ва улар устида амаллар	6	2	2	2
5	Векторларнинг скаляр кўпайтмаси, унинг хоссалари ва	6	2	2	2

16	Икки ўзгарувчили функциянинг шартли ва глобал экстремумлари.	2
17	Икки каррали интеграл ва унинг асосий хоссалари. Икки каррали интегрални ҳисоблаш усуллари	2
18	Икки каррали интегралнинг геометрик ва механик татбиқлари.	2
19	Уч каррали интеграл , унинг асосий хоссалари ва ҳисоблаш усуллари.	2
20	Егри чизиқли интеграл ва унинг хоссалари.	2
21	Комплекс сонлар ва улар устида арифметик амаллар.	2
22	Комплекс аргументли функция ва унинг ҳосиласи. Коши–Риман шартлари. Комплекс ўзгарувчили функцияларни интеграли. Коши формуласи.	2
23	Дифференциал тенгламаларга келувчи масалалар. Дифференциал тенгламалар ва уларнинг ечимлари	2
24	Баъзи I тартибли дифференциал тенгламалар ва уларни ечиш	2
25	II тартибли дифференциал тенгламалар	2
26	II тартибли чизиқли ўзгармас коэффициентли бир жинсли дифференциал тенгламалар.	2
27	II тартибли чизиқли ўзгармас коэффициентли биржинслимас дифференциал тенгламалар.	2
	2-мавсум бўйича	**54**

5111000 - Касбий таълим (5321600 – Енгил саноат технологиялари ва жиҳозлари);

Т/р	Амалий машғулотлар	Соат
1	Матрицалар ва улар устида амаллар. Аниқловчилар ва уларнинг хоссалари.	2
2	Чизиқли тенгламалар системаси ва уни ечиш усуллари.	2
3	Векторлар ва улар устида арифметик амаллар. Векторларнинг координаталари ва улар устида амаллар	2
4	Векторларнинг скаляр кўпайтмаси, унинг хоссалари ва татбиқлари. Векториал кўпайтма, хоссалари ва татбиқлари. Векторларнинг аралаш кўпайтмаси, унинг хоссалари ва татбиқлари	2
5	Текисликда аналитик геометрия ва унинг асосий масалалари. Текисликдаги тўғри чизиқ тенгламалари. Текисликдаги тўғри чизиқларга доир асосий масалалар	2
6	Иккинчи тартибли чизиқлар. Айлана ва эллипс. Гипербола ва парабола. Коник кесимлар.	2
7	Фазода аналитик геометрия. Текислик тенгламалари . Текисликка доир асосий масалалар.	2
8	Фазодаги тўғри чизиқ тенгламалари.Фазодаги тўғри чизиққа доир асосий масалалар. Аралаш масалалар	2
9	Функция ва у билан боғлиқ бўлган тушунчалар. Функция лимити ва унинг хоссалари.	2
10	Ажойиб лимитлар. Узлуксиз функциялар ва уларнинг хоссалари	2
11	Функция ҳосиласи ва уни ҳисоблаш қоидалари. Функцияни дифференциаллаш қоидалари. Юқори тартибли ҳосила ва дифференциаллар.	2
12	Функцияни ҳосила ёрдамида текшириш	2
13	Аниқмасликлар ва Лопитал қоидалари.	2
14	Бошланғич функция ва аниқмас интеграл. Интеграллар жадвали. Аниқмас интегрални ҳисоблаш усуллари.	2
15	Рационал касрлар ва уларни интеграллаш.	2
16	Иррационал ифодаларни интеграллаш. Эйлер алмаштирмалари. Тригонометрик функциялар қатнашган баъзи ифодаларни интеграллаш.	2
17	Аниқ интеграл таърифи ва унинг энг содда хоссалари. Аниқ интегралнинг хоссалари. Аниқ интегрални ҳисоблаш усуллари. Хосмас интеграллар.	2
18	Аниқ интегралнинг геометрик ва механик татбиқлари.	2
	1-мавсум бўйича	**36**
1	Икки ўзгарувчили функция, унинг лимити ва узлуксизлиги. Икки ўзгарувчили функциянинг хусусий ҳосилалари. Тўла дифференциал.	2
2	Мураккаб функциянинг ҳосиласи. Тўла ҳосила. Йўналиш бўйича ҳосила ва градиент. Юқори тартибли ҳосила ва дифференциаллар	2
3	Икки ўзгарувчили функциянинг локал экстремумлари. Икки ўзгарувчили функциянинг шартли ва глобал экстремумлари.	2

22	Тригонометрик функциялар қатнашган баьзи ифодаларни интеграллаш.	2
23	Аниқ интеграл таьрифи ва унинг энг содда хоссалари. Аниқ интегралнинг хоссалари. Аниқ интегрални ҳисоблаш усуллари.	2
24	Аниқ интегралнинг геометрик ва механик татбиқлари. Аниқ интегрални тақрибий ҳисоблаш формулалари.	2
25	Икки ўзгарувчили функция, унинг лимити ва узлуксизлиги. Икки ўзгарувчили функциянинг хусусий ҳосилалари. Тўла дифференциал.	2
26	Мураккаб функциянинг ҳосиласи. Тўла ҳосила. Йўналиш бўйича ҳосила ва градиент. ЮқорI тартибли ҳосила ва дифференциаллар	2
27	Икки ўзгарувчили функциянинг локал экстремумлари.	2
	2- мавсум бўйича	**54**

5321500 – Технологиялар ва жиҳозлар (сервис(енгил саноат)); 53221500 – Технологиялар ва жиҳозлар (Енгил саноат жиҳозларини таьмирлаш ва техник хизмат кўрсатиш);
5321600 – Енгил саноат технологиялари ва жиҳозлари

Т/р	Амалий машғулотлар	Соат
1	Матрицалар ва улар устида амаллар. Аниқловчилар ва уларнинг хоссалари.	2
2	Чизиқли тенгламалар системаси ва уни ечиш усуллари.	2
3	Векторлар ва улар устида арифметик амаллар. Векторларнинг координаталари ва улар устида амаллар. Векторларнинг скаляр кўпайтмаси, унинг хоссалари ва татбиқлари. Векториал кўпайтма, хоссалари ва татбиқлари. Векторларнинг аралаш кўпайтмаси, унинг хоссалари ва татбиқлари	2
4	Текисликда аналитик геометрия ва унинг асосий масалалари. Текисликдаги тўғри чизиқ тенгламалари. Текисликдаги тўғри чизиқларга доир асосий масалалар. ИккинчI тартибли чизиқлар. Айлана ва эллипс. Гипербола ва парабола.	2
5	Фазода аналитик геометрия. Текислик тенгламалари . Текисликка доир асосий масалалар.Фазодаги тўғри чизиқ тенгламалари.Фазодаги тўғри чизиққа доир асосий масалалар. Аралаш масалалар	2
6	Функция ва у билан боғлиқ бўлган тушунчалар. Функция лимити ва унинг хоссалари. Ажойиб лимитлар. Узлуксиз функциялар ва уларнинг хоссалари	2
7	Функция ҳосиласи ва уни ҳисоблаш қоидалари. Функцияни дифференциаллаш қоидалари. ЮқорI тартибли ҳосила ва дифференциаллар.	2
8	Функцияни ҳосила ёрдамида текшириш. Функцияни ҳосила ёрдамида текшириш.	2
9	Функцияни тўлиқ текшириш. Аниқмасликлар ва Лопитал қоидалари.	2
1-мавсум бўйича		**18**
1	Бошланғич функция ва аниқмас интеграл. Интеграллар жадвали. Аниқмас интегрални ҳисоблаш усуллари.	2
2	Квадрат учҳад қатнашган интеграллар. энг содда рационал касрлар ва уларни интеграллаш.	2
3	Рационал касрлар ва уларни интеграллаш.	2
4	Иррационал ифодаларни интеграллаш. эйлер алмаштирмалари.	2
5	Тригонометрик функциялар қатнашган баьзи ифодаларни интеграллаш.	2
6	Аниқ интеграл таьрифи ва унинг энг содда хоссалари. Аниқ интегралнинг хоссалари.	2
7	Аниқ интегрални ҳисоблаш усуллари.	2
8	Хосмас интеграллар.	2
9	Аниқ интегралнинг геометрик ва механик татбиқлари.	2
10	Аниқ интегрални тақрибий ҳисоблаш формулалари.	2
11	Икки ўзгарувчили функция, унинг лимити ва узлуксизлиги. Мураккаб функциянинг ҳосиласи. Тўла ҳосила.	2
12	Икки ўзгарувчили функциянинг хусусий ҳосилалари. Тўла дифференциал.	2
13	Мураккаб функциянинг ҳосиласи. Тўла ҳосила. Йўналиш бўйича ҳосила ва градиент.	2
14	Юқори тартибли ҳосила ва дифференциаллар	2
15	Икки ўзгарувчили функциянинг локал экстремумлари.	2

	татбиқлари. Векториал кўпайтма, хоссалари ва татбиқлари. Векторларнинг аралаш кўпайтмаси, унинг хоссалари ва татбиқлари				
6	Текисликда аналитик геометрия ва унинг асосий масалалари. Текисликдаги тўғри чизиқ тенгламалари. Текисликдаги тўғри чизиқларга доир асосий масалалар. ИккинчI тартибли чизиқлар. Айлана ва эллипс. Гипербола ва парабола.	6	2	2	2
7	Фазода аналитик геометрия. Текислик тенгламалари . Текисликка доир асосий масалалар.Фазодаги тўғри чизиқ тенгламалари.Фазодаги тўғри чизиққа доир асосий масалалар. Аралаш масалалар	8	2	2	4
8	Функция ва у билан боғлиқ бўлган тушунчалар. Функция лимити ва унинг хоссалари. Ажойиб лимитлар. Узлуксиз функциялар ва уларнинг хоссалари	6	2	2	2
9	Функция ҳосиласи ва уни ҳисоблаш қоидалари. Функцияни дифференциаллаш қоидалари. ЮқорI тартибли ҳосила ва дифференциаллар.	6	2	2	2
19	Функцияни ҳосила ёрдамида текшириш	6	2	2	2
20	Функцияни ҳосила ёрдамида текшириш.	8	2	2	4
21	Функцияни тўлиқ текшириш. Аниқмасликлар ва Лопитал қоидалари.	6	2	2	2
1-мавсум бўйича		**66**	**18**	**18**	**30**
1	Бошланғич функция ва аниқмас интеграл. Интеграллар жадвали. Аниқмас интегрални ҳисоблаш усуллари.	6	2	2	2
2	Квадрат учҳад қатнашган интеграллар. энг содда рационал касрлар ва уларни интеграллаш.	6	2	2	2
3	Рационал касрлар ва уларни интеграллаш.	6	2	2	2
4	Иррационал ифодаларни интеграллаш. эйлер алмаштирмалари.	6	2	2	2
5	Тригонометрик функциялар қатнашган баьзи ифодаларни интеграллаш.	6	2	2	2
6	Аниқ интеграл таьрифи ва унинг энг содда хоссалари. Аниқ интегралнинг хоссалари.	8	2	2	4
7	Аниқ интегрални ҳисоблаш усуллари.	6	2	2	2
8	Хосмас интеграллар.	6	2	2	2
9	Аниқ интегралнинг геометрик ва механик татбиқлари.	6	2	2	2
10	Аниқ интегрални тақрибий ҳисоблаш формулалари.	6	2	2	2
11	Икки ўзгарувчили функция, унинг лимити ва узлуксизлиги. Мураккаб функциянинг ҳосиласи. Тўла ҳосила.	6	2	2	2
12	Икки ўзгарувчили функциянинг хусусий ҳосилалари. Тўла дифференциал.	6	2	2	2
13	Мураккаб функциянинг ҳосиласи. Тўла ҳосила. Йўналиш бўйичаҳосила ва градиент.	8	2	2	4
14	Юқори тартибли ҳосила ва дифференциаллар	8	2	2	4
15	Икки ўзгарувчили функциянинг локал экстремумлари.	8	2	2	4
16	Икки ўзгарувчили функциянинг шартли ва глобал экстремумлари.	6	2	2	2

17	Икки каррали интеграл ва унинг асосий хоссалари. Икки каррали интегрални ҳисоблаш усуллари	6	2	2	2
18	Икки каррали интегралнинг геометрик ва механик татбиқлари.	8	2	2	4
19	Уч каррали интеграл , унинг асосий хоссалари ва ҳисоблаш усуллари.	8	2	2	4
20	Егри чизиқли интеграл ва унинг хоссалари.	6	2	2	2
21	Комплекс сонлар ва улар устида арифметик амаллар.	6	2	2	2
22	Комплекс аргументли функция ва унинг ҳосиласи. Коши–Риман шартлари. Комплекс ўзгарувчили функцияларни интеграли. Коши формуласи.	8	2	2	4
23	Дифференциал тенгламаларга келувчи масалалар. Дифференциал тенгламалар ва уларнинг ечимлари	6	2	2	2
24	Баъзи I тартибли дифференциал тенгламалар ва уларни ечиш	8	2	2	4
25	II тартибли дифференциал тенгламалар	8	2	2	4
26	II тартибли чизиқли ўзгармас коэффициентли бир жинсли дифференциал тенгламалар.	8	2	2	4
27	II тартибли чизиқли ўзгармас коэффициентли биржинслимас дифференциал тенгламалар.	8	2	2	4
2-мавсум бўйича		**184**	**54**	**54**	**76**

5111000 - Касбий таълим (5321600 – Енгил саноат технологиялари ва жиҳозлари);

№	Мавзулар номи	Жами соат	Маъ-руза	Ама-лий Маш-ғулот	Муста-қил таълим
1	Кириш	2			2
2	Матрицалар ва улар устида амаллар. Аниқловчилар ва уларнинг хоссалари.	6	2	2	2
3	Чизиқли тенгламалар системаси ва уни ечиш усуллари.	8	2	2	4
4	Векторлар ва улар устида арифметик амаллар. Векторларнинг координаталари ва улар устида амаллар	6	2	2	2
5	Векторларнинг скаляр кўпайтмаси, унинг хоссалари ва татбиқлари. Векториал кўпайтма, хоссалари ва татбиқлари. Векторларнинг аралаш кўпайтмаси, унинг хоссалари ва татбиқлари	6	2	2	2
6	Текисликда аналитик геометрия ва унинг асосий масалалари. Текисликдаги тўғри чизиқ тенгламалари. Текисликдаги тўғри чизиқларга доир асосий масалалар	6	2	2	2
7	Иккинчи тартибли чизиқлар. Айлана ва эллипс. Гипербола ва парабола. Коник кесимлар.	8	2	2	4
8	Фазода аналитик геометрия. Текислик тенгламалари . Текисликка доир асосий масалалар.	6	2	2	2
9	Фазодаги тўғри чизиқ тенгламалари.Фазодаги тўғри чизиққа доир асосий масалалар. Аралаш масалалар	6	2	2	2
10	Функция ва у билан боғлиқ бўлган тушунчалар.	6	2	2	2

16

3	Чизиқли тенгламалар системаси ва уни ечиш усуллари.	4
4	Векторлар ва улар устида арифметик амаллар. Векторларнинг координаталари ва улар устида амаллар	2
5	Векторларнинг скаляр кўпайтмаси, унинг хоссалари ва татбиқлари. Векториал кўпайтма, хоссалари ва татбиқлари. Векторларнинг аралаш кўпайтмаси, унинг хоссалари ва татбиқлари	4
6	Текисликда аналитик геометрия ва унинг асосий масалалари.	2
7	Текисликдаги туғри чизиқ тенгламалари. Текисликдаги туғри чизиқларга доир асосий масалалар	4
8	Иккинчи тартибли чизиқлар. Айлана ва эллипс. Гипербола ва парабола. Коник кесимлар.	4
9	Фазода аналитик геометрия. Текислик тенгламалари . Текисликка доир асосий масалалар.	4
10	Фазодаги туғри чизиқ тенгламалари.Фазодаги тўғри чизиққа доир асосий масалалар. Аралаш масалалар	4
11	Функция ва у билан боғлиқ булган тушунчалар.	2
12	Функция лимити ва унинг хоссалари.	2
13	Ажойиб лимитлар. Узлуксиз функциялар ва уларнинг хоссалари	4
14	Функция ҳосиласи ва уни ҳисоблаш қоидалари.	2
15	Функцияни дифференциаллаш қоидалари. Юқори тартибли ҳосила ва дифференциаллар.	2
16	Функцияни I тартибли ҳосила ёрдамида текшириш	2
17	Функцияни II тартибли ҳосила ёрдамида текшириш.	2
18	Функцияни тулиқ текшириш.	2
19	Аниқмасликлар ва Лопитал қоидалари.	2
Жами 2- мавсум бўйича		**54**

5111000 - Касб таълими (Машинасозлик технологияси, машинасозлик ишлаб чикаришини жиҳозлаш ва автоматлаштириш)

Т/р	Амалий машғулотлар	Соат
1	Кириш.	2
2	Матрицалар ва улар устида амаллар.	2
3	Аниқловчилар ва уларнинг хоссалари.	2
4	Чизиқли тенгламалар системаси ва уни ечиш усуллари.	2
5	Векторлар ва улар устида арифметик амаллар. Векторларнинг координаталари ва улар устида амаллар	2
6	Векторларнинг скаляр кўпайтмаси, унинг хоссалари ва татбиқлари. Векториал кўпайтма, хоссалари ва татбиқлари. Векторларнинг аралаш кўпайтмаси, унинг хоссалари ва татбиқлари	2
7	Текисликда аналитик геометрия ва унинг асосий масалалари.	2
8	Текисликдаги тўғри чизиқ тенгламалари. Текисликдаги тўғри чизиқларга доир асосий масалалар	2
9	Иккинчи тартибли чизиқлар. Айлана ва эллипс. Гипербола ва парабола. Коник кесимлар.	2
10	Фазода аналитик геометрия. Текислик тенгламалари . Текисликка доир асосий масалалар.	2
11	Фазодаги тўғри чизиқ тенгламалари.Фазодаги тўғри чизиққа доир асосий масалалар. Аралаш масалалар	2
12	Функция ва у билан боғлиқ бўлган тушунчалар.	2
13	Функция лимити ва унинг хоссалари.	2
14	Ажойиб лимитлар. Узлуксиз функциялар ва уларнинг хоссалари	2
15	Функция ҳосиласи ва уни ҳисоблаш қоидалари.	2
16	Функцияни дифференциаллаш қоидалари. Юқори тартибли ҳосила ва дифференциаллар.	2
17	Функцияни тўлиқ текшириш.	2
18	Аниқмасликлар ва Лопитал қоидалари.	2
19	Бошланғич функция ва аниқмас интеграл. Интеграллар жадвали. Аниқмас интегрални ҳисоблаш усуллари.	2
20	Рационал касрлар ва уларни интеграллаш.	2
21	Иррационал ифодаларни интеграллаш. Эйлер алмаштирмалари.	2

37

Чизикли тенгламалар системаси. Чизикли тенгламалар системаси. Крамер теоремаси. к Чизикли тенгламалар системасини ечиш усуллари. Чизикли тенгламалар системасини умумий назарияси. Кронекер-Капелли теоремаси.
Кулланиладиган таълим технологиялари: диалогик ёндошув, муаммоли таълим, шахсга йуналтирилган таълим.

Адабиётлар: А4; К5; К7; К11; К12;К14.

R" - арифмет векторлар фазоси. Арифметик вектор фазо. н- улчовли вектор фазо хакида асосий тушунчалар. Векторлар системаси. Рн фазода векторлар координатаси. Бир жинсли тенгламалар системасининг фундаментал ечимлари. Чизикли тенгламалар системаси умум. ечимининг вектор шакли. Чизикли алгебра назариясининг иктисодий масалаларни тахлилига татбики.
Кулланиладиган таълим технологиялари: диалогик ёндошув, муаммоли таълим, ацлий уужум, кейс-стади, пинборд, парадокслар.

Адабиётлар: А4; К5; К7; К11; К12;К14.

Аналитик геометрия элементлари. Текисликда тугри чизик. Текисликда иккинчи тартибли эгри чизиклар. Фазода текислик тенгламалари. Фазода тугри чизик тенгламалари
Кулланиладиган таълим технологиялари: диалогик ёндошув, муаммоли таълим, кейс-стади, пинборд, парадокслар.

Адабиётлар: А4; К5; К7; К11; К12;К14.

Чизикли фазолар. Эвклид фазолар. Чизикли операторлар. Чизикли операторнинг хос векторлари. Квадратик формалар.
Кулланиладиган таълим технологиялари: диалогик ёндошув, муаммоли таълим, кейс-стади, пинборд, ацлий уужум, парадокслар.

Адабиётлар: А4; К5; К7; К11; К12;К14.

Бир узгарувчили функциялар. Куп узгарувчили функциялар. Р^н фазода нукталарнинг узаро жойланиши. Р^н фазода нукталар кетма-кетлиги лимити. Бир ва куп узгарувчили функциялар. Бир ва куп узгарувчили функция лимити. Бир ва куп узгарувчили функция узлуксизлиги. Бир узгарувчили функция хосиласи ва дифферренцияли. Дифференциаллаш коидалари. Юкори тартибли хосила ва дифференциаллар. Дифференциалланувчи функциялар хакида асосий теоремалар. Тейлор формуласи. Лопитал коидаси. Функцияни хосила ёрдамида тула текшириш.. Аник интеграл. Нютон - Лейбниц формуласи. Аник интегралнинг геометрик ва иктисодий татбиклари. Х,осмас интеграллар.
Кулланиладиган таълим технологиялари: диалогик ёндошув, муаммоли таълим, ацлий уужум, кейс-стади, пинборд, парадокслар.

Адабиётлар: А4; К5; К7; К11; К12;К14.

Дифференциал тенгламалар. Диффрениал тенгламалар хакида асосий тушунчалар. Биринчи тартибли дифференциал тенгламалар. Иккинчи тартибли чизикли дифферренциал тенгламалар. Дифферренциал тенгламалар системаси.
Кулланиладиган таълим технологиялари: диалогик ёндошув, муаммоли таълим, ацлий уужум, кейс-стади, пинборд, парадокслар.

Адабиётлар: А4; К5; К7; К11; К12;К14.

“Математика” фани буйича амалий машғулотининг календар тематик режаси.

5310700 – Электр техникаси, электр механикаси ва электр технологиялари,
5111000-Касб таълими (Электр техникаси, электр механикаси ва электр технологиялари),
5312100 – Энергоаудит ва саноат корхоналарининг энергетик текшируви(тармоқлар бўйича)
5321700 – Технологик жараёнларни бошқаришда ахборот коммуникация тизимлари,

Т/р	Амалий машғулотлар	Соат
1	Матрицалар ва улар устида амаллар.	2
2	Аниқловчилар ва уларнинг хоссалари.	2

	Функция лимити ва унинг хоссалари.				
11	Ажойиб лимитлар. Узлуксиз функциялар ва уларнинг хоссалари	8	2	2	4
12	Функция ҳосиласи ва уни ҳисоблаш қоидалари. Функцияни дифференциаллаш қоидалари. Юқори тартибли ҳосила ва дифференциаллар.	6	2	2	2
13	Функцияни ҳосила ёрдамида текшириш	8	2	2	4
14	Аниқмасликлар ва Лопитал қоидалари.	6	2	2	2
15	Бошланғич функция ва аниқмас интеграл. Интеграллар жадвали. Аниқмас интегрални ҳисоблаш усуллари.	6	2	2	2
16	Рационал касрлар ва уларни интеграллаш.	6	2	2	2
17	Иррационал ифодаларни интеграллаш. Эйлер алмаштирмалари. Тригонометрик функциялар қатнашган баъзи ифодаларни интеграллаш.	8	2	2	4
18	Аниқ интеграл таърифи ва унинг энг содда хоссалари. Аниқ интегралнинг хоссалари. Аниқ интегрални ҳисоблаш усуллари. Хосмас интеграллар.	8	2	2	4
19	Аниқ интегралнинг геометрик ва механик татбиқлари.	8	2	2	4
1-мавсум бўйича		**122**	**36**	**36**	**50**
20	Икки ўзгарувчили функция, унинг лимити ва узлуксизлиги. Икки ўзгарувчили функциянинг хусусий ҳосилалари. Тўла дифференциал.	6	2	2	2
21	Мураккаб функциянинг ҳосиласи. Тўла ҳосила. Йўналиш бўйича ҳосила ва градиент. Юқори тартибли ҳосила ва дифференциаллар	8	2	2	4
22	Икки ўзгарувчили функциянинг локал экстремумлари. Икки ўзгарувчили функциянинг шартли ва глобал экстремумлари.	8	2	2	4
23	Икки каррали интеграл ва унинг асосий хоссалари. Икки каррали интегрални ҳисоблаш усуллари. Икки каррали интегралнинг геометрик ва механик татбиқлари.	8	2	2	4
24	Уч каррали интеграл , унинг асосий хоссалари ва ҳисоблаш усуллари.	6	2	2	2
25	Егри чизиқли интеграл ва унинг хоссалари.	8	2	2	4
26	Сонли қаторлар ва уларнинг яқинлашиши.	6	2	2	2
27	Сонли қаторлар яқинлашишининг етарли шартлари.	6	2	2	2
28	Функционал қаторлар. Даражали қаторлар.	6	2	2	2
29	Тейлор ва Макларен қаторлари.	6	2	2	2
30	Комплекс сонлар ва улар устида арифметик амаллар.	6	2	2	2
31	Комплекс аргументли функция ва унинг ҳосиласи. Коши–Риман шартлари. Комплекс ўзгарувчили функцияларнинг интеграли. Коши формуласи.	6	2	2	2
32	Дифференциал тенгламаларга келувчи масалалар. Дифференциал тенгламалар ва уларнинг ечимлари	6	2	2	2
33	Баъзи I тартибли дифференциал тенгламалар ва уларни ечиш	6	2	2	2
34	II тартибли дифференциал тенгламалар	8	2	2	4
35	II тартибли чизиқли ўзгармас коэффициентли бир	8	2	2	4

	жинсли дифференциал тенгламалар. II тартибли чизиқли ўзгармас коэффициентли биржинслимас дифференциал тенгламалар.				
36	Тасвирларни жадвал ва Лаплас алмаштирмасининг хоссалари ёрдамида топпиш.	8	2	2	4
37	Тасвирларга кўра бошланғич функцияни топиш.	8	2	2	4
38	Операцион ҳисоб ёрдамида дифференциал тенгламаларни ечиш.	8	2	2	4
39	Тор тебраниш тенгламасини Даламбер усулида ечиш.	8	2	2	4
40	Иссиқликнинг чегараланган стерженда тарқалиши. Коррект масалалар.	4	2	2	
41	Eҳтимоллар назарияси. Ҳодисалар ва улар устида амаллар. Эҳтимоллик, унинг классик, геометрик, статистик таърифлари ва асосий хоссалари	6	2	2	2
42	Eҳтимолликларни қўшиш ва кўпайтириш теоремалари.	6	2	2	2
43	Дискрет тасодифий миқдорлар, уларнинг тақсимот қонуни ва асосий сонли характеристикалари	6	2	2	2
44	Асосий дискрет тақсимотлар ва уларнинг сонли характеристикалари	6	2	2	2
45	Тақсимот ва зичлик функциялари. Асосий узлуксиз тақсимотлар ва уларнинг сонли характеристикалари	6	2	2	2
46	Математик статистика элементлари.	6	2	2	2
2-мавсум бўйича		180	54	54	72
	Жами	302	90	90	122

5111000-Касб таълими (Информатика ва ахборот технологиялари)

№	Мавзулар номи	Жами соат	Маъруза	Амалий Машғулот	Мустақил таълим
1	Кириш	6	2	2	2
2	Матрицалар ва улар устида амаллар.	6	2	2	2
3	Аниқловчилар ва уларнинг хоссалари.	8	2	2	4
4	Чизиқли тенгламалар системаси ва уни ечиш усуллари.	8	2	2	4
5	Чизиқли тенгламалар системаси ва уни ечиш усуллари(даваоми).	8	2	2	4
6	Векторлар ва улар устида арифметик амаллар. Векторларнинг координаталари ва улар устида амаллар	8	2	2	4
7	Векторларнинг скаляр кўпайтмаси, унинг хоссалари ва татбиқлари.	8	2	2	4
8	Векториал кўпайтма, хоссалари ва татбиқлари. Векторларнинг аралаш кўпайтмаси, унинг хоссалари ва татбиқлари	6	2	2	2
9	Текисликда аналитик геометрия ва унинг асосий масалалари. Текисликдаги тўғри чизиқ тенгламалари	8	2	2	4

6	Квадрат учҳад қатнашган интеграллар. энг содда рационал касрлар ва уларни интеграллаш.	2
7	Рационал касрлар ва уларни интеграллаш.	2
8	Иррационал ифодаларни интеграллаш. эйлер алмаштирмалари.	2
9	Тригонометрик функциялар қатнашган бaъзи ифодаларни интеграллаш.	2
10	Аниқ интеграл таърифи ва унинг энг содда хоссалари. Аниқ интегралнинг хоссалари.	2
11	Аниқ интегрални ҳисоблаш усуллари.	2
12	Хосмас интеграллар.	2
13	Аниқ интегралнинг геометрик ва механик татбиқлари.	2
14	Аниқ интегрални тақрибий ҳисоблаш формулалари.	2
15	Икки ўзгарувчили функция, унинг лимити ва узлуксизлиги. Мураккаб функциянинг ҳосиласи. Тўла ҳосила.	2
16	Икки ўзгарувчили функциянинг хусусий ҳосилалари. Тўла дифференциал.	2
17	Мураккаб функциянинг ҳосиласи. Тўла ҳосила. Йўналиш бўйичаҳосила ва градиент.	2
18	Юқори тартибли ҳосила ва дифференциаллар	2
19	Икки ўзгарувчили функциянинг локал экстремумлари.	2
20	Икки ўзгарувчили функциянинг шартли ва глобал экстремумлари.	2
21	Икки каррали интеграл ва унинг асосий хоссалари. Икки каррали интегрални ҳисоблаш усуллари	2
22	Икки каррали интегралнинг геометрик ва механик татбиқлари.	2
23	Уч каррали интеграл , унинг асосий хоссалари ва ҳисоблаш усуллари.	2
24	Егри чизиқли интеграл ва унинг хоссалари.	2
25	Комплекс сонлар ва улар устида арифметик амаллар.	2
26	Комплекс аргументли функция ва унинг ҳосиласи. Коши–Риман шартлари. Комплекс ўзгарувчили функцияларни интеграли. Коши формуласи.	2
27	Дифференциал тенгламаларга келувчи масалалар. Дифференциал тенгламалар ва уларнинг ечимлари	2
28	Баъзи I тартибли дифференциал тенгламалар ва уларни ечиш	2
29	II тартибли дифференциал тенгламалар	2
30	II тартибли чизиқли ўзгармас коэффициентли бир жинсли дифференциал тенгламалар.	2
31	II тартибли чизиқли ўзгармас коэффициентли биржинслимас дифференциал тенгламалар.	2
32	II тартибли чизиқли ўзгармас коэффициентли биржинслимас дифференциал тенгламалар.	2
33	Тасвирларни жадвал ва Лаплас алмаштирмасининг хоссалари ёрдамида топпиш.	2
34	Тасвирларга кўра бошланғич функцияни топиш.	2
35	Операцион ҳисоб ёрдамида дифференциал тенгламаларни ечиш.	2
36	Тор тебраниш тенгламасини Даламбер усулида ечиш.	2
37	Иссиқликнинг чегараланган стерженда тарқалиши. Коррект масалалар.	2
38	Eҳтимоллар назарияси. Ҳодисалар ва улар устида амаллар.	2
39	Эҳтимоллик, унинг классик, геометрик, статистик таърифлари ва асосий хоссалари	2
40	Eҳтимолликларни қўшиш ва кўпайтириш теоремалари.	2
41	Дискрет тасодифий миқдорлар, уларнинг тақсимот қонуни ва асосий сонли характеристикалари	2
42	Асосий дискрет тақсимотлар ва уларнинг сонли характеристикалари	2
43	Тақсимот ва зичлик функциялари. Асосий узлуксиз тақсимотлар ва уларнинг сонли характеристикалари	2
44	Математик статистика элементлари.	4
2-мавсум бўйича		90
	Жами	108

Амалий машғулотларнинг тавсия этиладиган мавзулари

Матрица ва детерминантлар. Матрицалар ва улар устида амаллар. Детерминант. Детерминантларни хисоблаш. Детерминант хоссалари. Матрица ранги. Тескари матрица. Кулланиладиган таълим технологиялари: диалогик ёндошув, муаммоли таълим.
Адабиётлар: А4; К5; К7; К11; К12;К14.

5	Векторларнинг скаляр кўпайтмаси, унинг хоссалари ва татбиқлари. Векториал кўпайтма, хоссалари ва татбиқлари. Векторларнинг аралаш кўпайтмаси, унинг хоссалари ва татбиқлари	2
6	Текисликда аналитик геометрия ва унинг асосий масалалари. Текисликдаги тўғри чизиқ тенгламалари. Текисликдаги тўғри чизиқларга доир асосий масалалар.	2
7	Иккинчи тартибли чизиқлар. Айлана ва эллипс. Гипербола ва парабола. Коник кесимлар. II тартибли тенгламалар.	2
8	Фазода аналитик геометрия. Текислик тенгламалари . Текисликка доир асосий масалалар. Фазодаги тўғри чизиқ тенгламалари.Фазодаги тўғри чизиққа доир асосий масалалар. Аралаш масалалар	2
9	Функция ва у билан боғлиқ бўлган тушунчалар.	2
10	Функция лимити ва унинг хоссалари. Ажойиб лимитлар. Узлуксиз функциялар ва уларнинг хоссалари.	2
11	Функция ҳосиласи ва уни ҳисоблаш қоидалари. Функцияни дифференциаллаш қоидалари. Юқори тартибли ҳосила ва дифференциаллар.	2
12	Функцияни ҳосила ёрдамида текшириш	2
13	Аниқмасликлар ва Лопитал қоидалари.	2
14	Бошланғич функция ва аниқмас интеграл. Интеграллар жадвали. Аниқмас интегрални ҳисоблаш усуллари.	2
15	Рационал касрлар ва уларни интеграллаш. Иррационал ифодаларни интеграллаш. эйлер алмаштирмалари. Тригонометрик функциялар қатнашган баъзи ифодаларни интеграллаш.	2
16	Аниқ интеграл таърифи ва унинг энг содда хоссалари. Аниқ интегралнинг хоссалари. Хосмас интеграллар.	2
17	Аниқ интегралнинг геометрик ва механик татбиқлари.	2
18	Икки ўзгарувчили функция, унинг лимити ва узлуксизлиги. Икки ўзгарувчили функциянинг хусусий ҳосилалари. Тўла дифференциал.	2
19	Юқори тартибли ҳосила ва дифференциаллар	2
20	Икки ўзгарувчили функциянинг локал экстремумлари.	2
	2-мавсум бўйича	**36**

5320400 – Кимёвий технология (Тармоқлар бўйича);
5111000 – Касб таълими(5320400- кимёвий технология)

№	Мавзулар номи	Соат
1	Матрицалар ва улар устида амаллар. Аниқловчилар ва уларнинг хоссалари.	4
2	Чизиқли тенгламалар системаси ва уни ечиш усуллари.	4
3	Векторлар ва улар устида арифметик амаллар. Векторларнинг координаталари ва улар устида амаллар	2
4	Векторларнинг скаляр кўпайтмаси, унинг хоссалари ва татбиқлари. Векториал кўпайтма, хоссалари ва татбиқлари. Векторларнинг аралаш кўпайтмаси, унинг хоссалари ва татбиқлари	2
5	Текисликда аналитик геометрия ва унинг асосий масалалари. Текисликдаги тўғри чизиқ тенгламалари. Текисликдаги тўғри чизиқларга доир асосий масалалар. Иккинчи тартибли чизиқлар. Айлана ва эллипс. Гипербола ва парабола.	6
1-мавсум бўйича		18
1	Фазода аналитик геометрия. Текислик тенгламалари . Текисликка доир асосий масалалар.Фазодаги тўғри чизиқ тенгламалари.Фазодаги тўғри чизиққа доир асосий масалалар. Аралаш масалалар	2
2	Функция ва у билан боғлиқ бўлган тушунчалар. Функция лимити ва унинг хоссалари. Ажойиб лимитлар. Узлуксиз функциялар ва уларнинг хоссалари	2
3	Функция ҳосиласи ва уни ҳисоблаш қоидалари. Функцияни дифференциаллаш қоидалари. Юқори тартибли ҳосила ва дифференциаллар.	2
4	Функцияни ҳосила ёрдамида текшириш. Функцияни тўлиқ текшириш. Аниқмасликлар ва Лопитал қоидалари.	2
5	Бошланғич функция ва аниқмас интеграл. Интеграллар жадвали. Аниқмас интегрални ҳисоблаш усуллари.	2

10	Текисликдаги тўғри чизиқларга доир асосий масалалар.	6	2	2	2
11	Иккинчи тартибли чизиқлар. Айлана ва эллипс.	6	2	2	2
12	Гипербола ва парабола.	6	2	2	2
13	Коник кесимлар. II тартибли тенгламалар.	6	2	2	2
14	Фазода аналитик геометрия. Текислик тенгламалари	6	2	2	2
15	Текисликка доир асосий масалалар.	6	2	2	2
16	Фазодаги тўғри чизиқ тенгламалари.	6	2	2	2
17	Фазодаги тўғри чизиққа доир асосий масалалар. Аралаш масалалар	6	2	2	2
18	Функция ва у билан боғлиқ бўлган тушунчалар.	6	2	2	2
19	Сонли кетма-кетлик ва унинг лимити	8	2	2	4
20	Функция лимити ва унинг хоссалари. Ажойиб лимитлар.	6	2	2	2
21	Узлуксиз функциялар ва уларнинг хоссалари.	6	2	2	2
22	Функция ҳосиласи ва уни ҳисоблаш қоидалари.	6	2	2	2
23	Функцияни дифференциаллаш қоидалари.	6	2	2	2
24	Юқори тартибли ҳосила ва дифференциаллар.	6	2	2	2
25	Функцияни I тартибли ҳосила ёрдамида текшириш	6	2	2	2
26	Функцияни II тартибли ҳосила ёрдамида текшириш. Функцияни тўлиқ текшириш.	6	2	2	2
27	Аниқмасликлар ва Лопитал қоидалари.	6	2	2	2
28	Бошланғич функция ва аниқмас интеграл. Интеграллар жадвали. Аниқмас интегрални ҳисоблаш усуллари.	6	2	2	2
29	Квадрат учҳад қатнашган интеграллар. энг содда рационал касрлар ва уларни интеграллаш.	6	2	2	2
30	Рационал касрлар ва уларни интеграллаш.	6	2	2	2
31	Иррационал ифодаларни интеграллаш. эйлер алмаштирмалари.	6	2	2	2
32	Тригонометрик функциялар қатнашган баъзи ифодаларни интеграллаш.	6	2	2	2
33	Аниқ интеграл таърифи ва унинг энг содда хоссалари. Аниқ интегралнинг хоссалари. Аниқ интегрални ҳисоблаш усуллари.	6	2	2	2
34	Хосмас интеграллар	6	2	2	2
35	Аниқ интегралнинг геометрик ва механик татбиқлари.	6	2	2	2
36	Аниқ интегрални тақрибий ҳисоблаш .	6	2	2	2
Жами 2- мавсум бўйича		**232**	**72**	**72**	**88**

5321700 – Нефт-газкимё саноати технологияси;

№	Мавзулар номи	Жами соат	Маъ-руза	Ама-лий Маш-ғулот	Муста-қил таълим
1	Кириш	4	2		2
2	Матрицалар ва улар устида амаллар.	8	2	4	2
3	Аниқловчилар ва уларнинг хоссалари.	12	2	4	6

4	Чизиқли тенгламалар системаси ва уни ечиш усуллари.	12	2	4	6
5	Векторлар ва улар устида арифметик амаллар. Векторларнинг координаталари ва улар устида амаллар	14	2	6	6
6	Векторларнинг скаляр кўпайтмаси, унинг хоссалари ва татбиқлари.	8	2	2	4
7	Векториал кўпайтма, хоссалари ва татбиқлари. Векторларнинг аралаш кўпайтмаси, унинг хоссалари ва татбиқлари	8	2	4	2
8	Текисликда аналитик геометрия ва унинг асосий масалалари. Текисликдаги тўғри чизиқ тенгламалари. Текисликдаги тўғри чизиқларга доир асосий масалалар	12	2	4	6
9	Иккинчи тартибли чизиқлар. Айлана ва эллипс. Гипербола ва парабола. Коник кесимлар.	12	2	4	6
10	Фазода аналитик геометрия. Текислик тенгламалари . Текисликка доир асосий масалалар.	10	2	4	4
11	Фазодаги тўғри чизиқ тенгламалари.Фазодаги тўғри чизиққа доир асосий масалалар. Аралаш масалалар	12	2	4	6
12	Функция ва у билан боғлиқ бўлган тушунчалар.	10	2	4	4
13	Функция лимити ва унинг хоссалари.	10	2	4	4
14	Ажойиб лимитлар. Узлуксиз функциялар ва уларнинг хоссалари	10	2	4	4
15	Функция ҳосиласи ва уни ҳисоблаш қоидалари.	10	2	4	4
16	Функцияни дифференциаллаш қоидалари. Юқори тартибли ҳосила ва дифференциаллар.	10	2	6	2
17	Функцияни тўлиқ текшириш.	10	2	6	2
18	Аниқмасликлар ва Лопитал қоидалари.	10	2	4	4
2- мавсум бўйича		**182**	**36**	**72**	**74**

5111000 –Касб таълими (5321400- Нефт-газкимё саноати технологияси)

№	**Мавзулар номи**	**Жами соат**	**Маъруза**	**Амалий Машғулот**	**Мустақил таълим**
1	Кириш				2
2	Матрицалар ва улар устида амаллар. Аниқловчилар ва уларнинг хоссалари.	5	2	1	2
3	Чизиқли тенгламалар системаси ва уни ечиш усуллари.	5	2	1	2
4	Векторлар ва улар устида арифметик амаллар. Векторларнинг координаталари ва улар устида амаллар	5	2	1	2
5	Векторларнинг скаляр кўпайтмаси, унинг хоссалари ва татбиқлари. Векториал кўпайтма, хоссалари ва татбиқлари. Векторларнинг аралаш кўпайтмаси, унинг хоссалари ва татбиқлари	5	2	1	2
6	Текисликда аналитик геометрия ва унинг асосий масалалари. Текисликдаги тўғри чизиқ	3	2	1	

5111000-Касб таълими (Информатика ва ахборот технологиялари)

Т/п	Мавзулар номи	Соат
1	Кириш	2
2	Матрицалар ва улар устида амаллар.	2
3	Аниқловчилар ва уларнинг хоссалари.	2
4	Чизиқли тенгламалар системаси ва уни ечиш усуллари.	2
5	Чизиқли тенгламалар системаси ва уни ечиш усуллари(даваоми).	2
6	Векторлар ва улар устида арифметик амаллар. Векторларнинг координаталари ва улар устида амаллар	2.
7	Векторларнинг скаляр кўпайтмаси, унинг хоссалари ва татбиқлари.	2
8	Векториал кўпайтма, хоссалари ва татбиқлари. Векторларнинг аралаш кўпайтмаси, унинг хоссалари ва татбиқлари	2
9	Текисликда аналитик геометрия ва унинг асосий масалалари. Текисликдаги тўғри чизиқ тенгламалари	2
10	Текисликдаги тўғри чизиқларга доир асосий масалалар.	2
11	Иккинчи тартибли чизиқлар. Айлана ва эллипс.	2
12	Гипербола ва парабола.	2
13	Коник кесимлар. II тартибли тенгламалар.	2
14	Фазода аналитик геометрия. Текислик тенгламалари .	2
15	Текисликка доир асосий масалалар.	2
16	Фазодаги тўғри чизиқ тенгламалари.	2
17	Фазодаги тўғри чизиққа доир асосий масалалар. Аралаш масалалар	2
18	Функция ва у билан боғлиқ бўлган тушунчалар.	2
19	Сонли кетма-кетлик ва унинг лимити	2
20	Функция лимити ва унинг хоссалари. Ажойиб лимитлар.	2
21	Узлуксиз функциялар ва уларнинг хоссалари.	2
22	Функция ҳосиласи ва уни ҳисоблаш қоидалари.	2
23	Функцияни дифференциаллаш қоидалари.	2
24	Юқори тартибли ҳосила ва дифференциаллар.	2
25	Функцияни I тартибли ҳосила ёрдамида текшириш	2
26	Функцияни II тартибли ҳосила ёрдамида текшириш. Функцияни тўлиқ текшириш.	2
27	Аниқмасликлар ва Лопитал қоидалари.	2
28	Бошланғич функция ва аниқмас интеграл. Интеграллар жадвали. Аниқмас интегрални ҳисоблаш усуллари.	2
29	Квадрат учҳад қатнашган интеграллар. энг содда рационал касрлар ва уларни интеграллаш.	2
30	Рационал касрлар ва уларни интеграллаш.	2
31	Иррационал ифодаларни интеграллаш. эйлер алмаштирмалари.	2
32	Тригонометрик функциялар қатнашган баъзи ифодаларни интеграллаш.	2
33	Аниқ интеграл таърифи ва унинг энг содда хоссалари. Аниқ интегралнинг хоссалари. Аниқ интегрални ҳисоблаш усуллари.	2
34	Хосмас интеграллар	2
35	Аниқ интегралнинг геометрик ва механик татбиқлари.	2
36	Аниқ интегрални тақрибий ҳисоблаш .	2
Жами 2- мавсум бўйича		**72**

5111000 –Касб таълими (5321400- Нефт-газ Киме саноати технологияси)

Т/п	Мавзулар номи	Соат
1	Кириш	2
2	Матрицалар ва улар устида амаллар. Аниқловчилар ва уларнинг хоссалари.	
3	Чизиқли тенгламалар системаси ва уни ечиш усуллари.	2
4	Векторлар ва улар устида арифметик амаллар. Векторларнинг координаталари ва улар устида амаллар	2

12	Функция ҳосиласи ва уни ҳисоблаш қоидалари. Функцияни дифференциаллаш қоидалари. Юқори тартибли ҳосила ва дифференциаллар.	2
13	Функцияни ҳосила ёрдамида текшириш	2
14	Аниқмасликлар ва Лопитал қоидалари.	2
15	Бошланғич функция ва аниқмас интеграл. Интеграллар жадвали. Аниқмас интегрални ҳисоблаш усуллари.	2
16	Рационал касрлар ва уларни интеграллаш.	2
17	Иррационал ифодаларни интеграллаш. Эйлер алмаштирмалари. Тригонометрик функциялар қатнашган баьзи ифодаларни интеграллаш.	2
18	Аниқ интеграл таьрифи ва унинг энг содда хоссалари. Аниқ интегралнинг хоссалари. Аниқ интегрални ҳисоблаш усуллари. Хосмас интеграллар.	2
19	Аниқ интегралнинг геометрик ва механик татбиқлари.	2
	1-мавсум бўйича	**36**
20	Икки ўзгарувчили функция, унинг лимити ва узлуксизлиги. Икки ўзгарувчили функциянинг хусусий ҳосилалари. Тўла дифференциал.	2
21	Мураккаб функциянинг ҳосиласи. Тўла ҳосила. Йўналиш бўйича ҳосила ва градиент. Юқори тартибли ҳосила ва дифференциаллар	2
22	Икки ўзгарувчили функциянинг локал экстремумлари. Икки ўзгарувчили функциянинг шартли ва глобал экстремумлари.	2
23	Икки каррали интеграл ва унинг асосий хоссалари. Икки каррали интегрални ҳисоблаш усуллари. Икки каррали интегралнинг геометрик ва механик татбиқлари.	2
24	Уч каррали интеграл , унинг асосий хоссалари ва ҳисоблаш усуллари.	2
25	Егри чизиқли интеграл ва унинг хоссалари.	2
26	Сонли қаторлар ва уларнинг яқинлашиши.	2
27	Сонли қаторлар яқинлашишининг етарли шартлари.	2
28	Функционал қаторлар. Даражали қаторлар.	2
29	Тейлор ва Макларен қаторлари.	2
30	Комплекс сонлар ва улар устида арифметик амаллар.	2
31	Комплекс аргументли функция ва унинг ҳосиласи. Коши–Риман шартлари. Комплекс ўзгарувчили функцияларни интеграли. Коши формуласи.	2
32	Дифференциал тенгламаларга келувчи масалалар. Дифференциал тенгламалар ва уларнинг ечимлари	2
33	Баьзи I тартибли дифференциал тенгламалар ва уларни ечиш	2
34	II тартибли дифференциал тенгламалар	2
35	II тартибли чизиқли ўзгармас коеффициентли бир жинсли дифференциал тенгламалар. II тартибли чизиқли ўзгармас коеффициентли биржинслимас дифференциал тенгламалар.	2
36	Тасвирларни жадвал ва Лаплас алмаштирмасининг хоссалари ёрдамида топпиш.	2
37	Тасвирларга кўра бошланғич функцияни топиш.	2
38	Операцион ҳисоб ёрдамида дифференциал тенгламаларни ечиш.	2
39	Тор тебраниш тенгламасини Даламбер усулида ечиш.	2
40	Иссиқликнинг чегараланган стерженда тарқалиши. Коррект масалалар.	2
41	Еҳтимоллар назарияси. Ҳодисалар ва улар устида амаллар. Эҳтимоллик, унинг классик, геометрик, статистик таьрифлари ва асосий хоссалари	2
42	Еҳтимолликларни қўшиш ва кўпайтириш теоремалари.	2
43	Дискрет тасодифий миқдорлар, уларнинг тақсимот қонуни ва асосий сонли характеристикалари	2
44	Асосий дискрет тақсимотлар ва уларнинг сонли характеристикалари	2
45	Тақсимот ва зичлик функциялари. Асосий узлуксиз тақсимотлар ва уларнинг сонли характеристикалари	2
46	Математик статистика элементлари.	2
	Жами	**54**

	тенгламалари. Текисликдаги тўғри чизиқларга доир асосий масалалар.				
8	Иккинчи тартибли чизиқлар. Айлана ва эллипс. Гипербола ва парабола. Коник кесимлар. II тартибли тенгламалар.	5	2	1	2
9	Фазода аналитик геометрия. Текислик тенгламалари. Текисликка доир асосий масалалар. Фазодаги тўғри чизиқ тенгламалари.Фазодаги тўғри чизиққа доир асосий масалалар. Аралаш масалалар	5	2	1	2
16	Функция ва у билан боғлиқ бўлган тушунчалар.	5	2	1	2
17	Функция лимити ва унинг хоссалари. Ажойиб лимитлар. Узлуксиз функциялар ва уларнинг хоссалари.	3	2	1	
18	Функция ҳосиласи ва уни ҳисоблаш қоидалари. Функцияни дифференциаллаш қоидалари. Юқори тартибли ҳосила ва дифференциаллар.	5	2	1	2
20	Функцияни ҳосила ёрдамида текшириш	5	2	1	2
22	Аниқмасликлар ва Лопитал қоидалари.	5	2	1	2
23	Бошланғич функция ва аниқмас интеграл. Интеграллар жадвали. Аниқмас интегрални ҳисоблаш усуллари.	5	2	1	2
25	Рационал касрлар ва уларни интеграллаш. Иррационал ифодаларни интеграллаш. эйлер алмаштирмалари. Тригонометрик функциялар қатнашган баьзи ифодаларни интеграллаш.	5	2	1	2
26	Аниқ интеграл таьрифи ва унинг энг содда хоссалари. Аниқ интегралнинг хоссалари. Хосмас интеграллар.	5	2	1	2
27	Аниқ интегралнинг геометрик ва механик татбиқлари.	5	2	1	2
28	Икки ўзгарувчили функция, унинг лимити ва узлуксизлиги. Икки ўзгарувчили функциянинг хусусий ҳосилалари. Тўла дифференциал.	4	2	2	
29	Юқори тартибли ҳосила ва дифференциаллар	5	2	1	2
30	Икки ўзгарувчили функциянинг локал экстремумлари.	6	2	2	2
2-мавсум бўйича		**84**	**36**	**18**	**30**

5320400 – Кимёвий технология (Тармоқлар бўйича);

№	Мавзулар номи	Жами соат	Маьруза	Амалий Машғулот	Мустақил таьлим
1	Кириш	2			2
2	Матрицалар ва улар устида амаллар. Аниқловчилар ва уларнинг хоссалари.	6	2	2	2
3	Чизиқли тенгламалар системаси ва уни ечиш усуллари.	6	2	2	2
4	Векторлар ва улар устида арифметик амаллар. Векторларнинг координаталари ва улар устида амаллар	6	2	2	2
5	Векторларнинг скаляр кўпайтмаси, унинг хоссалари ва	6	2	2	2

	татбиқлари. Векториал кўпайтма, хоссалари ва татбиқлари. Векторларнинг аралаш кўпайтмаси, унинг хоссалари ва татбиқлари				
6	Текисликда аналитик геометрия ва унинг асосий масалалари. Текисликдаги тўғри чизиқ тенгламалари. Текисликдаги тўғри чизиқларга доир асосий масалалар. ИккинчI тартибли чизиқлар. Айлана ва эллипс. Гипербола ва парабола.	8	2	2	4
7	Фазода аналитик геометрия. Текислик тенгламалари . Текисликка доир асосий масалалар.Фазодаги тўғри чизиқ тенгламалари.Фазодаги тўғри чизиққа доир асосий масалалар. Аралаш масалалар	6	2	2	2
8	Функция ва у билан боғлиқ бўлган тушунчалар. Функция лимити ва унинг хоссалари. Ажойиб лимитлар. Узлуксиз функциялар ва уларнинг хоссалари	8	2	2	4
9	Функция ҳосиласи ва уни ҳисоблаш қоидалари. Функцияни дифференциаллаш қоидалари. Юқори тартибли ҳосила ва дифференциаллар.	6	2	2	2
10	Функцияни ҳосила ёрдамида текшириш. Функцияни тўлиқ текшириш. Аниқмасликлар ва Лопитал қоидалари.	6	2	2	2
1-мавсум бўйича		**60**	**18**	**18**	**24**
1	Бошланғич функция ва аниқмас интеграл. Интеграллар жадвали. Аниқмас интегрални ҳисоблаш усуллари.	6	2	2	2
2	Квадрат учҳад қатнашган интеграллар. энг содда рационал касрлар ва уларни интеграллаш.	6	2	2	2
3	Рационал касрлар ва уларни интеграллаш.	6	2	2	2
4	Иррационал ифодаларни интеграллаш. эйлер алмаштирмалари.	6	2	2	2
5	Тригонометрик функциялар қатнашган баъзи ифодаларни интеграллаш.	6	2	2	2
6	Аниқ интеграл таърифи ва унинг энг содда хоссалари. Аниқ интегралнинг хоссалари.	8	2	2	4
7	Аниқ интегрални ҳисоблаш усуллари.	6	2	2	2
8	Хосмас интеграллар.	6	2	2	2
9	Аниқ интегралнинг геометрик ва механик татбиқлари.	6	2	2	2
10	Аниқ интегрални тақрибий ҳисоблаш формулалари.	6	2	2	2
11	Икки ўзгарувчили функция, унинг лимити ва узлуксизлиги. Мураккаб функциянинг ҳосиласи. Тўла ҳосила.	6	2	2	2
12	Икки ўзгарувчили функциянинг хусусий ҳосилалари. Тўла дифференциал.	6	2	2	2
13	Мураккаб функциянинг ҳосиласи. Тўла ҳосила. Йўналиш бўйичаҳосила ва градиент.	8	2	2	4
14	Юқори тартибли ҳосила ва дифференциаллар	8	2	2	4
15	Икки ўзгарувчили функциянинг локал экстремумлари.	8	2	2	4
16	Икки ўзгарувчили функциянинг шартли ва глобал экстремумлари.	6	2	2	2
17	Икки каррали интеграл ва унинг асосий хоссалари. Икки каррали интегрални ҳисоблаш усуллари	8	2	2	4

22

1	Бошланғич функция ва аниқмас интеграл. Интеграллар жадвали. Аниқмас интегрални ҳисоблаш усуллари.	2
2	Квадрат учҳад қатнашган интеграллар. энг содда рационал касрлар ва уларни интеграллаш.	2
3	Рационал касрлар ва уларни интеграллаш.	2
4	Иррационал ифодаларни интеграллаш. эйлер алмаштирмалари.	2
5	Тригонометрик функциялар қатнашган баъзи ифодаларни интеграллаш.	2
6	Аниқ интеграл таърифи ва унинг энг содда хоссалари. Аниқ интегралнинг хоссалари.	2
7	Аниқ интегрални ҳисоблаш усуллари.	2
8	Хосмас интеграллар.	2
9	Аниқ интегралнинг геометрик ва механик татбиқлари.	2
10	Аниқ интегрални тақрибий ҳисоблаш формулалари.	2
11	Икки ўзгарувчили функция, унинг лимити ва узлуксизлиги. Мураккаб функциянинг ҳосиласи. Тўла ҳосила.	2
12	Икки ўзгарувчили функциянинг хусусий ҳосилалари. Тўла дифференциал.	2
13	Мураккаб функциянинг ҳосиласи. Тўла ҳосила. Йўналиш бўйича ҳосила ва градиент.	2
14	Юқори тартибли ҳосила ва дифференциаллар	2
15	Икки ўзгарувчили функциянинг локал экстремумлари.	2
16	Икки ўзгарувчили функциянинг шартли ва глобал экстремумлари.	2
17	Икки каррали интеграл ва унинг асосий хоссалари. Икки каррали интегрални ҳисоблаш усуллари	2
18	Икки каррали интегралнинг геометрик ва механик татбиқлари.	2
19	Уч каррали интеграл , унинг асосий хоссалари ва ҳисоблаш усуллари.	2
20	Егри чизиқли интеграл ва унинг хоссалари.	2
21	Комплекс сонлар ва улар устида арифметик амаллар.	2
22	Комплекс аргументли функция ва унинг ҳосиласи. Коши–Риман шартлари. Комплекс ўзгарувчили функцияларни интеграли. Коши формуласи.	2
23	Дифференциал тенгламаларга келувчи масалалар. Дифференциал тенгламалар ва уларнинг ечимлари	2
24	Баъзи I тартибли дифференциал тенгламалар ва уларни ечиш	2
25	II тартибли дифференциал тенгламалар	2
26	II тартибли чизиқли ўзгармас коеффициентли бир жинсли дифференциал тенгламалар.	2
27	II тартибли чизиқли ўзгармас коеффициентли биржинслимас дифференциал тенгламалар.	2
2-мавсум бўйича		**54**

5111000 - Касбий таълим (5321600 – Енгил саноат технологиялари ва жиҳозлари);

Т/п	Мавзулар номи	Соат
1	Кириш	2
2	Матрицалар ва улар устида амаллар. Аниқловчилар ва уларнинг хоссалари.	2
3	Чизиқли тенгламалар системаси ва уни ечиш усуллари.	2
4	Векторлар ва улар устида арифметик амаллар. Векторларнинг координаталари ва улар устида амаллар	2
5	Векторларнинг скаляр кўпайтмаси, унинг хоссалари ва татбиқлари. Векториал кўпайтма, хоссалари ва татбиқлари. Векторларнинг аралаш кўпайтмаси, унинг хоссалари ва татбиқлари	2
6	Текисликда аналитик геометрия ва унинг асосий масалалари. Текисликдаги тўғри чизиқ тенгламалари. Текисликдаги тўғри чизиқларга доир асосий масалалар	2
7	Иккинчи тартибли чизиқлар. Айлана ва эллипс. Гипербола ва парабола. Коник кесимлар.	2
8	Фазода аналитик геометрия. Текислик тенгламалари . Текисликка доир асосий масалалар.	2
9	Фазодаги тўғри чизиқ тенгламалари.Фазодаги тўғри чизиққа доир асосий масалалар. Аралаш масалалар	2
10	Функция ва у билан боғлиқ бўлган тушунчалар. Функция лимити ва унинг хоссалари.	2
11	Ажойиб лимитлар. Узлуксиз функциялар ва уларнинг хоссалари	2

31

9	Иккинчи тартибли чизиқлар. Айлана ва эллипс. Гипербола ва парабола. Коник кесимлар.	2
10	Фазода аналитик геометрия. Текислик тенгламалари . Текисликка доир асосий масалалар.	2
11	Фазодаги тўғри чизиқ тенгламалари.Фазодаги тўғри чизиққа доир асосий масалалар. Аралаш масалалар	2
12	Функция ва у билан боғлиқ бўлган тушунчалар.	2
13	Функция лимити ва унинг хоссалари.	2
14	Ажойиб лимитлар. Узлуксиз функциялар ва уларнинг хоссалари	2
15	Функция ҳосиласи ва уни ҳисоблаш қоидалари.	2
16	Функцияни дифференциаллаш қоидалари. Юқори тартибли ҳосила ва дифференциаллар.	2
17	Функцияни тўлиқ текшириш.	2
18	Аниқмасликлар ва Лопитал қоидалари.	2
19	Бошланғич функция ва аниқмас интеграл. Интеграллар жадвали. Аниқмас интегрални ҳисоблаш усуллари.	2
20	Рационал касрлар ва уларни интеграллаш.	2
21	Иррационал ифодаларни интеграллаш. Эйлер алмаштирмалари.	2
22	Тригонометрик функциялар қатнашган баъзи ифодаларни интеграллаш.	2
23	Аниқ интеграл таърифи ва унинг энг содда хоссалари. Аниқ интегралнинг хоссалари. Аниқ интегрални ҳисоблаш усуллари.	2
24	Аниқ интегралнинг геометрик ва механик татбиқлари.Аниқ интегрални тақрибий ҳисоблаш формулалари.	2
25	Икки ўзгарувчили функция, унинг лимити ва узлуксизлиги. Икки ўзгарувчили функциянинг хусусий ҳосилалари. Тўла дифференциал.	2
26	Мураккаб функциянинг ҳосиласи. Тўла ҳосила. Йўналиш бўйича ҳосила ва градиент. ЮқорI тартибли ҳосила ва дифференциаллар	2
27	Икки ўзгарувчили функциянинг локал экстремумлари.	2
	2- мавсум бўйича	**54**

5321500 – Технологиялар ва жиҳозлар (сервис(енгил саноат));
53221500 – Технологиялар ва жиҳозлар (Енгил саноат жиҳозларини таъмирлаш ва техник хизмат кўрсатиш);
5321600 – Енгил саноат технологиялари ва жиҳозлари

Т/п	Мавзулар номи	соат
1	Кириш	
2	Матрицалар ва улар устида амаллар. Аниқловчилар ва уларнинг хоссалари.	2
3	Чизиқли тенгламалар системаси ва уни ечиш усуллари.	2
4	Векторлар ва улар устида арифметик амаллар. Векторларнинг координаталари ва улар устида амаллар	2
5	Векторларнинг скаляр кўпайтмаси, унинг хоссалари ва татбиқлари. Векториал кўпайтма, хоссалари ва татбиқлари. Векторларнинг аралаш кўпайтмаси, унинг хоссалари ва татбиқлари	2
6	Текисликда аналитик геометрия ва унинг асосий масалалари. Текисликдаги тўғри чизиқ тенгламалари. Текисликдаги тўғри чизиқларга доир асосий масалалар. ИккинчI тартибли чизиқлар. Айлана ва эллипс. Гипербола ва парабола.	2
7	Фазода аналитик геометрия. Текислик тенгламалари . Текисликка доир асосий масалалар.Фазодаги тўғри чизиқ тенгламалари.Фазодаги тўғри чизиққа доир асосий масалалар. Аралаш масалалар	2
8	Функция ва у билан боғлиқ бўлган тушунчалар. Функция лимити ва унинг хоссалари. Ажойиб лимитлар. Узлуксиз функциялар ва уларнинг хоссалари	2
9	Функция ҳосиласи ва уни ҳисоблаш қоидалари. Функцияни дифференциаллаш қоидалари. ЮқорI тартибли ҳосила ва дифференциаллар.	2
19	Функцияни ҳосила ёрдамида текшириш	2
20	Функцияни ҳосила ёрдамида текшириш.	2
21	Функцияни тўлиқ текшириш. Аниқмасликлар ва Лопитал қоидалари.	2
	1-мавсум бўйича	**18**

18	Икки каррали интегралнинг геометрик ва механик татбиқлари.	8	2	2	4
19	Уч каррали интеграл , унинг асосий хоссалари ва ҳисоблаш усуллари.	8	2	2	4
20	Егри чизиқли интеграл ва унинг хоссалари.	6	2	2	2
21	Комплекс сонлар ва улар устида арифметик амаллар.	6	2	2	4
22	Комплекс аргументли функция ва унинг ҳосиласи. Коши–Риман шартлари. Комплекс ўзгарувчили функцияларни интеграли. Коши формуласи.	12	4	4	4
23	Дифференциал тенгламаларга келувчи масалалар. Дифференциал тенгламалар ва уларнинг ечимлари	8	2	2	4
24	Баъзи I тартибли дифференциал тенгламалар ва уларни ечиш	8	2	2	4
25	II тартибли дифференциал тенгламалар	8	2	2	4
26	II тартибли чизиқли ўзгармас коэффициентли бир жинсли дифференциал тенгламалар.	8	2	2	4
27	II тартибли чизиқли ўзгармас коэффициентли биржинслимас дифференциал тенгламалар.	8	2	2	4
28	II тартибли чизиқли ўзгармас коэффициентли биржинслимас дифференциал тенгламалар.	8	2	2	4
29	Тасвирларни жадвал ва Лаплас алмаштирмасининг хоссалари ёрдамида топпиш.	8	2	2	4
30	Тасвирларга кўра бошланғич функцияни топиш.	8	2	2	4
31	Операцион ҳисоб ёрдамида дифференциал тенгламаларни ечиш.	8	4	4	4
32	Тор тебраниш тенгламасини Даламбер усулида ечиш.	8	2	2	2
33	Иссиқликнинг чегараланган стерженда тарқалиши. Коррект масалалар.	10	4	4	2
34	Еҳтимоллар назарияси. Ҳодисалар ва улар устида амаллар.	6	2	2	2
35	Эҳтимоллик, унинг классик, геометрик, статистик таърифлари ва асосий хоссалари	6	2	2	2
36	Еҳтимолликларни қўшиш ва кўпайтириш теоремалари.	6	2	2	2
37	Дискрет тасодифий миқдорлар, уларнинг тақсимот қонуни ва асосий сонли характеристикалари	8	2	2	4
38	Асосий дискрет тақсимотлар ва уларнинг сонли характеристикалари	8	2	2	4
39	Тақсимот ва зичлик функциялари. Асосий узлуксиз тақсимотлар ва уларнинг сонли характеристикалари	10	4	4	2
40	Математик статистика элементлари.	10	4	4	2
2-мавсум бўйича		**300**	**90**	**90**	**120**
	Жами	**360**	**108**	**108**	**144**

5111000 – **Касб таълими(5320400- кимёвий технология)**

№	Мавзулар номи	Жами соат	Маъ-руза	Ама-лий Маш-ғулот	Муста-қил таълим
1	Кириш	2			2

2	Матрицалар ва улар устида амаллар. Аниқловчилар ва уларнинг хоссалари.	6	2	2	2
3	Чизиқли тенгламалар системаси ва уни ечиш усуллари.	6	2	2	2
4	Векторлар ва улар устида арифметик амаллар. Векторларнинг координаталари ва улар устида амаллар	6	2	2	2
5	Векторларнинг скаляр кўпайтмаси, унинг хоссалари ва татбиқлари. Векториал кўпайтма, хоссалари ва татбиқлари. Векторларнинг аралаш кўпайтмаси, унинг хоссалари ва татбиқлари	5	2	2	1
6	Текисликда аналитик геометрия ва унинг асосий масалалари. Текисликдаги тўғри чизиқ тенгламалари. Текисликдаги тўғри чизиқларга доир асосий масалалар. ИккинчI тартибли чизиқлар. Айлана ва эллипс. Гипербола ва парабола.	5	2	2	1
7	Фазода аналитик геометрия. Текислик тенгламалари . Текисликка доир асосий масалалар.Фазодаги тўғри чизиқ тенгламалари.Фазодаги тўғри чизиққа доир асосий масалалар. Аралаш масалалар	5	2	2	1
8	Функция ва у билан боғлиқ бўлган тушунчалар. Функция лимити ва унинг хоссалари. Ажойиб лимитлар. Узлуксиз функциялар ва уларнинг хоссалари	5	2	2	1
9	Функция ҳосиласи ва уни ҳисоблаш қоидалари. Функцияни дифференциаллаш қоидалари. Юқори тартибли ҳосила ва дифференциаллар.	5	2	2	1
10	Функцияни ҳосила ёрдамида текшириш. Функцияни тўлиқ текшириш. Аниқмасликлар ва Лопитал қоидалари.	5	2	2	1
1-мавсум бўйича		50	18	18	14
1	Бошланғич функция ва аниқмас интеграл. Интеграллар жадвали. Аниқмас интегрални ҳисоблаш усуллари.	6	2	2	2
2	Квадрат учҳад қатнашган интеграллар. энг содда рационал касрлар ва уларни интеграллаш.	6	2	2	2
3	Рационал касрлар ва уларни интеграллаш.	6	2	2	2
4	Иррационал ифодаларни интеграллаш. эйлер алмаштирмалари.	6	2	2	2
5	Тригонометрик функциялар қатнашган баъзи ифодаларни интеграллаш.	6	2	2	2
6	Аниқ интеграл таърифи ва унинг энг содда хоссалари. Аниқ интегралнинг хоссалари.	8	2	2	2
7	Аниқ интегрални ҳисоблаш усуллари.	6	2	2	2
8	Хосмас интеграллар.	6	2	2	2
9	Аниқ интегралнинг геометрик ва механик татбиқлари.	5	2	2	1
10	Аниқ интегрални тақрибий ҳисоблаш формулалари.	6	2	2	2
11	Икки ўзгарувчили функция, унинг лимити ва узлуксизлиги. Мураккаб функциянинг ҳосиласи. Тўла ҳосила.	6	2	2	2
12	Икки ўзгарувчили функциянинг хусусий ҳосилалари. Тўла дифференциал.	6	2	2	2
13	Мураккаб функциянинг ҳосиласи. Тўла ҳосила. Йўналиш бўйичаҳосила ва градиент.	5	2	2	1
14	Юқори тартибли ҳосила ва дифференциаллар	6	2	2	2

“Математика” фани буйича маъруза машгулотининг календар тематик режаси.

5310700 – Электр техникаси, электр механикаси ва электр технологиялари,
5111000-Касб таълими (Электр техникаси, электр механикаси ва электр технологиялари),
5312100 – Энергоаудит ва саноат корхоналарининг энергетик текшируви(тармоқлар бўйича),
5321700 – Технологик жараёнларни бошқаришда ахборот коммуникация тизимлари

Т/п	Маъруза мавзулари номи	Соат
1	Матрицалар ва улар устида амаллар.	2
2	Аниқловчилар ва уларнинг хоссалари.	2
3	Чизиқли тенгламалар системаси ва уни ечиш усуллари.	4
4	Векторлар ва улар устида арифметик амаллар. Векторларнинг координаталари ва улар устида амаллар	2
5	Векторларнинг скаляр кўпайтмаси, унинг хоссалари ва татбиқлари. Векториал кўпайтма, хоссалари ва татбиқлари. Векторларнинг аралаш кўпайтмаси, унинг хоссалари ва татбиқлари	4
6	Текисликда аналитик геометрия ва унинг асосий масалалари.	2
7	Текисликдаги туғри чизиқ тенгламалари. Текисликдаги туғри чизиқларга доир асосий масалалар	4
8	Иккинчи тартибли чизиқлар. Айлана ва эллипс. Гипербола ва парабола. Коник кесимлар.	4
9	Фазода аналитик геометрия. Текислик тенгламалари . Текисликка доир асосий масалалар.	4
10	Фазодаги туғри чизиқ тенгламалари.Фазодаги тўғри чизиққа доир асосий масалалар. Аралаш масалалар	4
11	Функция ва у билан боғлиқ булган тушунчалар.	2
12	Функция лимити ва унинг хоссалари.	2
13	Ажойиб лимитлар. Узлуксиз функциялар ва уларнинг хоссалари	4
14	Функция ҳосиласи ва уни ҳисоблаш қоидалари.	2
15	Функцияни дифференциаллаш қоидалари. Юқори тартибли ҳосила ва дифференциаллар.	2
16	Функцияни I тартибли ҳосила ёрдамида текшириш	2
17	Функцияни II тартибли ҳосила ёрдамида текшириш.	2
18	Функцияни тулиқ текшириш.	2
19	Аниқмасликлар ва Лопитал қоидалари.	2
	Жами 2- мавсум бўйича	**54**

5111000 - Касб таълими (Машинасозлик технологияси, машинасозлик ишлаб чикаришини жиҳозлаш ва автоматлаштириш)

Т/п	Маъруза мавзулари номи	Соат
1	Кириш.	2
2	Матрицалар ва улар устида амаллар.	2
3	Аниқловчилар ва уларнинг хоссалари.	2
4	Чизиқли тенгламалар системаси ва уни ечиш усуллари.	2
5	Векторлар ва улар устида арифметик амаллар. Векторларнинг координаталари ва улар устида амаллар	2
6	Векторларнинг скаляр кўпайтмаси, унинг хоссалари ва татбиқлари. Векториал кўпайтма, хоссалари ва татбиқлари. Векторларнинг аралаш кўпайтмаси, унинг хоссалари ва татбиқлари	2
7	Текисликда аналитик геометрия ва унинг асосий масалалари.	2
8	Текисликдаги тўғри чизиқ тенгламалари. Текисликдаги тўғри чизиқларга доир асосий масалалар	2

шартлари. Функция дифференциали ва унинг такрибий хисоблашлардаги татбиклари. Хрсиланинг геометрик ва иктисодий маънолари. Ҳосила хакида асосий теоремалар. Элементар функсияларнинг хосилалари. Мураккаб функция хосиласи ва дифференциали. Юкори тартибли хосила ва дифференциаллар. Тескари функция хосиласи. Дифференциалланувчи функциялар учун асосий теоремалар (Ферма, Ролл ва Лагранж). Тейлор - Маклорен формулалари ва уларнинг татбики. Аникмасликларни очиш. Лопитал коидаси. Функция монотонлигининг етарли шартлари. Функциянинг экстремумлари. Функция экстремумининг зарурий ва етарли шартлари. Функциянинг глобал экстремумлари. Функциянинг каварилиги, унинг эгилиш нукталари. Функцияни хосила ёрдамида тула текшириш ва графигини ясаш.

Куп узгарувчили функция хакида тушунча. Куп узгарувчили функция лимити ва узлуксизлиги. Куп узгарувчили функциянинг хусусий хосилалари. Функциянинг нуктада дифференциаллануви. Функциянинг тула дифференциали ва унинг такрибий хисоблашларда кулланилиши. Функция градиенти ва унинг асосий хоссалари. Юкори тартибли хусусий хосилалар. Куп узгарувчили функцияларнинг локал экстремумлари. Стационар нукта. Экстремумнинг зарурий шарти. Икки узгарувчили функция экстремумининг етарли шарти. Глобал экстремум назариясининг иктисодиётдаги татбиклари.

Бошлангич функция ва аникмас интеграл. Аникмас интеграл хоссалари. Элементар функцияларнинг аникмас интеграллари жадвали. Интеграллашнинг асосий усуллари. Аник интеграл ва унинг хоссалари. Нютон-Лейбниц формуласи. Аник интегрални хисоблаш усуллари. Аник интегралнинг геометрик татбиклари. Аник интегрални тугри туртбурчак, трапеция, парабола усулларида такрибий хисоблаш. Хосмас интеграллар ва уларнинг турлари. Аник интегралнинг геометрик ва механик татбиклари.

Кулланиладиган таълим технологиялари: *диалогик ёндошув, муаммоли таълим. Маъруза, намойиш этиш, савол-жавоб, "Бумеранг", "Кластер", "Блиц-суров", "Фикрлаш харитаси" "Ажурали арра", "Веер", Чархпалак, Б.Б.Б жадвали, кичик гурууларда ишлаш методлари.*

Адабиётлар: А1;А2; А3; А4; К6; К7 К8; К9; К10; К14 ДО.

Дифференциал тенгламалар. Оддий дифференциал тенгламалар хакида асосий тушунчалар. Умумий ечим ва умумий интеграл. Биринчи тартибли дифференциал тенгламалар. Коши масаласи. Биринчи тартибли дифференциал тенгламаларни ечишнинг асосий усуллари. Биринчи тартибли чизикли дифференциал тенгламалар. Узгармас коэффициентли иккинчи тартибли чизикли дифференциал тенгламалар. Биринчи тартибли дифференциал тенгламалар системаси. Дифференциал тенгламаларнинг татбиклари.

Кулланиладиган таълим технологиялари: *диалогик ёндошув, муаммоли таълим. Маъруза, намойиш этиш, блиц-суров, "балиц скелети", гурууларда ишлаш методи.*

Адабиётлар: А1;А2; А3; А4; К6; К7 К8; К9; К10; К14

Қаторлар. Сонли каторлар хакида асосий тушунчалар. Якинлашувчи сонли каторлар ва уларнинг хоссалари. Катор якинлашувининг зарурий шарти. Мусбат хадли сонли каторлар. Қатор яқинлашувининг етарли шартлари. Қатор яқинлашувининг Даламбер ва Коши аломатлари. Кошининг интеграл аломати. Ишораси алмашинувчи сонли каторлар. Лейбниц теоремаси. Абсолют ёки шартли якинлашишлар. Функционал каторлар. Якинлашиш сохаси. Даражали каторлар. Даражали каторнинг якинлашиш радиуси ва сохаси. Даражали каторларни дифференциаллаш ва интеграллаш. Функцияларни даражали каторга ёйиш. Тейлор ва Маклорен каторлари.

Кулланиладиган таълим технологиялари: диалогик ёндошув, муаммоли таълим. Маъруза, намойиш этиш, "Веер " методи, кичик гурууларда ишлаш, "Блиц-суров" методлари.

Адабиётлар: А1;А2; А3; А4; К6; К7 К8 К9; К10; К14 ;К15.

15	Икки ўзгарувчили функциянинг локал экстремумлари.	6	2	2	2
16	Икки ўзгарувчили функциянинг шартли ва глобал экстремумлари.	6	2	2	2
17	Икки каррали интеграл ва унинг асосий хоссалари. Икки каррали интегрални ҳисоблаш усуллари	6	2	2	2
18	Икки каррали интегралнинг геометрик ва механик татбиқлари.	5	2	2	1
19	Уч каррали интеграл , унинг асосий хоссалари ва ҳисоблаш усуллари.	6	2	2	2
20	Егри чизиқли интеграл ва унинг хоссалари.	6	2	2	2
21	Комплекс сонлар ва улар устида арифметик амаллар.	6	2	2	2
22	Комплекс аргументли функция ва унинг ҳосиласи. Коши–Риман шартлари. Комплекс ўзгарувчили функцияларни интеграли. Коши формуласи.	5	4	4	1
23	Дифференциал тенгламаларга келувчи масалалар. Дифференциал тенгламалар ва уларнинг ечимлари	6	2	2	2
24	Баъзи I тартибли дифференциал тенгламалар ва уларни ечиш	5	2	2	1
25	II тартибли дифференциал тенгламалар	6	2	2	2
26	II тартибли чизиқли ўзгармас коеффициентли бир жинсли дифференциал тенгламалар.	6	2	2	2
27	II тартибли чизиқли ўзгармас коеффициентли биржинслимас дифференциал тенгламалар.	6	2	2	2
28	II тартибли чизиқли ўзгармас коеффициентли биржинслимас дифференциал тенгламалар.	5	2	2	1
29	Тасвирларни жадвал ва Лаплас алмаштирмасининг хоссалари ёрдамида топпиш.	6	2	2	2
30	Тасвирларга кўра бошланғич функцияни топиш.	6	2	2	2
31	Операцион ҳисоб ёрдамида дифференциал тенгламаларни ечиш.	5	4	4	1
32	Тор тебраниш тенгламасини Даламбер усулида ечиш.	6	2	2	2
33	Иссиқликнинг чегараланган стерженда тарқалиши. Коррект масалалар.	10	4	4	2
34	Еҳтимоллар назарияси. Ҳодисалар ва улар устида амаллар.	5	2	2	1
35	Эҳтимоллик, унинг классиқ, геометрик, статистик таьрифлари ва асосий хоссалари	6	2	2	2
36	Еҳтимолликларни қўшиш ва кўпайтириш теоремалари.	6	2	2	2
37	Дискрет тасодифий миқдорлар, уларнинг тақсимот қонуни ва асосий сонли характеристикалари	5	2	2	1
38	Асосий дискрет тақсимотлар ва уларнинг сонли характеристикалари	6	2	2	2
39	Тақсимот ва зичлик функциялари. Асосий узлуксиз тақсимотлар ва уларнинг сонли характеристикалари	10	4	4	2
40	Математик статистика элементлари.	9	4	4	1
2-мавсум бўйича		250	90	90	70
	Жами	300	108	108	84

Асосий кисм: Фаннинг услубий жиҳатдан узвий кетма-кетлиги

Асосий кисмда (маъруза) фанни мавзулари мантикий кетма-кетликда келтирилади. Х,ар бир мавзунинг мохияти асосий тушунчалар ва тезислар оркали очиб берилади. Бунда мавзу буйича талабаларга ДТС асосида етказилиши зарур булган билим ва куникмалар тула камраб олиниши керак.

Асосий кисм сифатига куйиладиган талаб мавзуларнинг долзарблиги, уларнинг иш берувчилар талаблари ва ишлаб чикариш эхтиёжларига мослиги, мамлакатимизда булаётган ижтимоий-сиёсий ва демократик узгаришлар, иктисодиётни эркинлаштириш, иктисодий-хукукий ва бошка сохалардаги ислохатларнинг устувор масалаларини камраб олиши хамда фан ва технологияларнинг сунгти ютуклари эътиборга олиниши тавсия этилади.

Маъруза машгулотлари

“Математика” фани предмети ва вазифалари. Математика - амалий масалаларни ечишнинг кудратли воситаси, фанларнинг универсал тили, дунёкараш ва маданиятнинг таркибий кисми. Модел ва жараёнларни моделлаштириш хакида айрим содда тушунчалар.

Кулланиладиган таълим технологиялари: *диалогик ёндошув, муаммоли таълим. Бинго, блиц, ажурали арра, нилуфар гули, меню, алгоритм, мунозара, уз-узини назорат.*

Адабиётлар: А1;А2; А3; А4; К6; К7 К8 К9; К10; К14.

Матрица ва детерминантлар. Матрицалар ва улар устида чизикли амаллар. Транспонирланган матрица ва унинг хоссалари. Квадратик матрицанинг детерминанти. Юкори тартибли детерминантлар. Минорлар ва алгебраик тулдирувчилар. Детерминантларнинг хоссалари. Юкори тартибли детерминантларни хисоблаш. Матрица ранги. Матрица рангини хисоблаш. Хосмас матрица. Тескари матрица ва унинг мавжудлиги хакидаги теорема. Тескари матрицани куриш усуллари. Матрицалар алгебрасини иктисодиётдаги баъзи татбиклари.

Кулланиладиган таълим технологиялари: *диалогик ёндошув, муаммоли таълим. Бинго, блиц, ажурали арра, нилуфар гули, меню, алгоритм, мунозара, уз-узини назорат.*

Адабиётлар: А1;А2; А3; А4; К6; К7 К8 К9; К10; К14.

Чизикли тенгламалар системаси. Чизикли тенгламалар системаси ва унинг ечими хакидаги асосий тушунчалар. Чизикли тенгламалар системасини ечишнинг Гаусс, Гаусс-Жордан, Крамер ва матрицалар методлари. Чизикли тенгламалар системасининг умумий назарияси. Кронекер - Капелли теоремаси. Чизикли тенгламалар системасининг базис ечимлари. Бир жинсли чизикли тенгламалар системаси ва унинг нотривиал ечимларининг мавжудлик шарти. Бир жинсли чизикли тенгламалар системасининг фундаментал ечимлари туплами. Чизикли тенгламалар системасининг умумий ечимининг вектор шакли.

Кулланиладиган таълим технологиялари: *диалогик ёндошув, муаммоли таълим. Погона, цадамба-цадам методи, Венн диаграммаси, Т-схемаси, уз- узини назорат.*

Адабиётлар: А1;А2; А3; А4; К6; К7 К8; К9; К10; К14 .

R^n арифметик векторлар фазоси. R^n арифметик вектор фазо. Арифметик векторлар устида чизикли амаллар. Скаляр купайтма. Вектор узунлиги. Векторлар орасидаги бурчак. Векторларнинг чизикли комбинацияси. Чизикли тенгламалар системасини вектор куринишда ёзиш. Векторни векторлар системаси буйича ёйиш. Векторларнинг чизикли богликлиги хакидаги теоремалар. Векторлар системасининг базиси ва ранги. Ортогонал ва ортонормалланган векторлар системаси ва уларни куриш.

Кулланиладиган таълим технологиялари: диалогик ёндошув, муаммоли таълим. Блиц-суров, зиг-заг усули, мунозара, БББ, Инсерт, уз-узини назорат.

Адабиётлар: А1;А2; А3; А4; К6; К7 К8 К9; К10; К14 .

Чизикли алгебра назариясининг иктисодий масалаларни тахлил килишдаги татбики. Чизикли алгебра элементларининг баъзи чизикли иктисодий моделларнинг тахлилида кулланилиши. Иктисодиётдаги тармоклараро баланснинг математик модели (Леонтев

модели). Халкаро савдо модели.

Кулланиладиган таълим технологиялари: диалогик ёндошув, муаммоли таълим. Интегратив, мунозара, уз-узини назорат.

Адабиётлар: А1;А2; А3; А4; К6; К7 К8 К9; К10; К14

Аналитик геометрия элементлари. Текисликда аналитик геометрия. Текисликда чизик тенгламаси. Текисликда тугри чизикнинг бурчак коэффициентли, кесмалар буйича, умумий ва нормал тенгламалари. Берилган нуктадан утувчи ва иккита нуктадан утувчи тугри чизик тенгламалари. Икки тугри чизик орасидаги бурчак. Тугри чизикларнинг параллеллик ва перпендикулярлик шартлари. Берилган нуктадан тугри чизиккача булган масофа. Текисликда иккинчи тартибли эгри чизиклар. Айлана ва эллипс. Г ипербола ва парабола.

Фазода текислик ва тугри чизик тенгламалари. Икки текислик орасидаги бурчак. Нуктадан текисликкача булган масофа. Текисликларнинг, тугри чизикларнинг, текислик ва тугри чизикларнинг .узаро жойлашуви. Параллеллик ва перпендикулярлик шартлари. Аналитик геометрия элементларини иктисодий масалаларни оптимал ечишда кулланилиши.

Кулланиладиган таълим технологиялари: диалогик ёндошув, муаммоли таълим. Б/Б/Б жадвали, мунозара, Венн диаграммаси, Т-схема, уз-узини назорат

Адабиётлар: А1;А2; А3; А4; К6; К7 К8; К9; К10; К14

Чизикли фазолар. Эвклид фазолар. Чизикли операторлар Чизикли фазо ва унинг улчови. Чизикли фазода базис ва координаталар. Чизикли фазонинг кисм ости фазолари. Эвклид фазоси. Базисларни алмаштириш. Чизикли оператор. Чизикли оператор матрицаси. Чизикли операторлар устида амаллар. Чизикли операторнинг хос векторлари ва хос киймати. Хос векторларнинг хоссалари. Чизикли оператор матрицасини диагонал шаклга келтириш. Мусбат вектор ва мусбат матрица.

Кулланиладиган таълим технологиялари: диалогик ёндошув, муаммоли таълим. Ажурали арра, бумеранг, 3х3усули, мунозара, уз-узини назорат.

***Адабиётлар**: А1;А2; А3; А4;К6;*

Квадратик формалар. Квадратик форма хакида тушунча. Унинг матрицаси ва ранги. Квадратик формани каноник куринишга келтириш. Мусбат аникланган квадратик формалар. Квадратик форма тушунчаларининг иктисодий моделларнинг тахлилида кулланилиши. Режалаштириш модели.

Кулланиладиган таълим технологиялари: диалогик ёндошув, муаммоли таълим. Блите, 4 х 4 усули, мунозара, уз-узини назорат.

Адабиётлар: А1;А2; А3; А4;К6; К? К8; К9; КЮ; К14 .

Бир узгарувчили функциялар. Куп узгарувчили функциялар. n -
улчовли фазонинг нукта атрофи. R^n фазода чегараланган туплам. Тупламнинг ички ва чегаравий нукталари. Тупламнинг куюкланиш нуктаси. Очик ва ёпик тупламлар. Компакт-ихчам (чегараланган ва ёпик) туплам. R^n фазода нукталар кетма-кетлиги. Сонли кетма-кетлик. n - улчовли нукталар кетма- кетлигининг лимити. Сонли кетма-кетлик лимити. Чексиз кичик, чексиз катта сонли кетма-кетликлар ва уларнинг хоссалари. Монотон сонли кетма- кетликлар.

Адабиётлар: А1;А2; А3; А4; К6; К7 К8 К9; К10; К14.

Бир ва куп узгарувчили функция. Функция таърифи. Функциянинг берилиш усуллари, аникланиш сохаси ва кийматлари туплами. Бир узгарувчили функция умумий хоссалари. Функция графиги ва уни алмаштиришлар. Тескари функция. Элементар функцияларнинг таснифи, хоссалари ва графиги. Чегараланган функциялар. Каварик ва ботик функциялар хакида тушунча. Функция лимити. Ажойиб лимитлар. Лимитлар хакида асосий теоремалар. Функциянинг чексизликдаги лимити. Бир томонлама лимитлар. Эквивалент чексиз кичик функциялар. Функцияларни таккослаш. Функциянинг узлуксизлиги. Нуктада ва кесмада узлуксиз функцияларнинг хоссалари. Функциянинг бир томонлама узлуксизлиги. Функциянинг узилиш нукталари ва уларнинг турлари. Иктисодиётда учрайдиган функциялар. Ажойиб лимитларнинг иктисодиётда кулланилиши.

Бир узгарувчили функция хосиласи. Функция дифференциалининг зарурий ва етарли

Тестлар

1. Матрицаларни купайтириш хоссалари каерда хато курсатилган?
A) AB=BA B) AE=A C) A(BC)=(AB)C D) $AA^{-1}=E$.

2. A={a_{ij}} матрицани транспонирлаш амали каерда нотугри курсатилган?
A) Матриханинг сатрлари устунлар килиб ёзилади
B) Матрицанинг a_{ij} элементи j-сатр ва i-устунга ёзилади.
C) Матрицанинг устунлари сатрлар килиб ёзилади.
D) Матрицанинг a_{ij} элементи i-сатр ва j-устунга ёзилади.

3. $A=\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ матрицага тескари A^{-1} матрица каерда тугри курсатилган?
A) $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ B) $-\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$ D) $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

4. A квадрат матрицанинг аникловчиси нима?
A) A матрица элементлари буйича маълум бир коида асосида хосил килинган матрица.
B) A матрица элементлари буйича маълум бир коида асосида хисобланадиган сон.
C) A матрица барча элементларини узаро кушиш натижасида хосил килинган сон.
D) A матрица барча элементларини узаро купайтириш оркали хисобланадиган сон.

5. $\Delta_1=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$, $\Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ аникловчилар хисоблансин ва max{Δ_1, Δ_2} топилсин.
A) –18 B) 18 C) 2 D) –2 .

6. Икки номаълумли чизикли тенгламалар системасининг умумий куриниши каерда тугри курсатилган?
A) $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 = b_1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$ B) $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{22}x_2 = b_1 \\ a_{12}x_1 + a_{21}x_2 = b_2 \end{cases}$
C) $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$ D) $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_1 = b_1 \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$.

7. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -2 \\ 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -1 \\ 3x_1 - 4x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$ чизикли тенгламалар системаси ечилиб, (x_1+ x_2) x_3 хисоблансин.

A) –4 B) 0 C) 6 D) –20 .

8. Вектор таърифи каерда тугри ва тулик келтирилган ?
A) $|A|$ кесмага вектор дейилади.
B) Факат сонли киймати билан аникланадиган катталикка вектор дейилади.

C) Факат йуналиши билан аникланадиган катталикка вектор дейилади.
D) Хам сонли киймати, хам йуналиши билан аникланадиган катталикка вектор дейилади.

9. $\bar{a}=\{2;-1;5\}$ ва $\bar{c}=3\bar{a}-4\bar{в}=\{-10;-11;27\}$ булса, $\bar{в}$ вектор координталарини топинг.
A) {3;– 4;0} B) {2;– 3;1} C) {4;2; –3} D) {5;0; –2}

10. $|\bar{a}|=4, |\bar{в}|=5$ ва $\bar{a}\perp\bar{в}$ булса , $(2\bar{a}+\bar{в}, \bar{a}-3\bar{в})$ скаляр купайтмани хисобланг.
A) –7 B) 17 C) – 43 D) 31.

11. A(3;-2;4) , B(3;4;-1) ва C(5;0;2) нукталар берилган. $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$ векториал купайтмани топинг.
A) {-2;-10;-12} B) {3;2;-5} C) {4;-3;-12} D) {6;9;15}

12. Текисликдаги Ax+By+C=0 тугри чизик кайси шартда OX координата укига параллел булади ?
A) B = 0 B) A = 0 C) C–B = 0 D) C+A = 0

13. $M_1(-1,3)$, $M_2(-5,-10)$, $M_3(1,8)$, $M_4(3,-7)$ нукталардан кайсилари
$3x-y+5=0$ тугри чизикда ётади ?
A) M_1 , M_2 B) M_2 , M_3 C) M_3, M_4 D) M_1 , M_4

14. Куйидаги тенгламалардан кайси бири $M(x_0,y_0)$ нуктадан утувчи тугри чизиклар дастасини ифодаламайди ?
A) $y-y_0=k(x-x_0)$ B) $y-kx=y_0-kx_0$
C) $A(x_0+x)+B(y_0+y)=0$ D) $A(x_0-x)+B(y_0-y)=0$

15. Маркази $M(a,в)$ нуктада жойлашган R радиусли айлана тенгламаси каерда хато курсатилган ?
A) $(x-a)^2+(y-в)^2=R^2$ B) $(x+a)^2+(y+в)^2=R^2$
C) $(a-x)^2+(в-y)^2=R^2$ D) $\sqrt{(x-a)^2+(y-в)^2}=R$

16. $4x^2+9y^2=36$ эллипс ва $4x^2-9y^2=36$ гипербола кесишиш нукталари орасидаги масофани топинг.
A) $4\sqrt{2}$ B) 4 C) 8 D) 6

17. Текислик умумий тенгламасини топинг.
A) $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-\rho=0$ B) $\frac{x}{a}+\frac{y}{в}+\frac{z}{c}=1$
C) Ax+By+Cz+D=0 D) $z=kx+qy+h$

20. Куйидаги тенгламалардан кайси бири координаталар бошидан утувчи текисликни ифодалайди?
A) Ax+By+D=0; B) Ax+By + Cz=0;
C) By+Cz+D=0; D) Ax+By+Cz+D=0;

21. M(4,-3,5) нуктадан утувчи ва координата укларидан бир хил кесма ажратувчи текислик умумий тенгламаси Ax+By+Cx+D = 0 булса, A+B+C+D ифода кийматини хисоблаб топинг.

A) -3 B) 0 C) –6 D) 5

22. Фазодаги тугри чизикнинг каноник тенгламасини курсатинг :

A) $x = x_0 + mt$, $y = y_0 + nt$, $z = z_0 + pt$

B) $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$ C) $m(x - x_0) + n(y - y_0) + p(z - z_0) = 0$

D) $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$

23. D нинг кандай кийматида

$$\begin{cases} 5x + 2y - 3z - 1 = 0 \\ 2x - y + z + D = 0 \end{cases}$$

тугри чизик OX укини кесиб утади ?

A) 1/2 B) 1/3 C) –2/5 D) –1/4

24. x+By–10z+7=0 текислик B нинг кандай кийматида

$$\frac{x+5}{4} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+1}{2}$$

тугри чизикка параллел булади ?

A) 4 B) $-2\dfrac{3}{4}$ C) -7 D) $5\dfrac{1}{3}$

25. Каноник тенгламаси $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+1}{5} = \dfrac{z}{-3}$ булган тугри чизикнинг параметрик тенгламасини топинг.

A) x=2–3t, y=5+t, z=–3; B) x=2+3t, y=5–t, z=–3 ;

C) x=3+2t, y=–1+5t, z= –3t ; D) x=3–2t, y= –1–5t, z= 3t ;

26. I ajoyib limitni ko‘rsating.

A) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e\cdot$ B) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1\cdot$ C) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a\cdot$

D) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+ax)}{x} = a.$ E) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^a - 1}{x} = a.$

27. II ajoyib limitni ko‘rsating.

A) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e.$ B) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1.$ C) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a.$

D) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+ax)}{x} = a.$ E) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^a - 1}{x} = a.$

28. Quyidagi limitlardan qaysi biri notog’ri hisoblangan?

A) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1.$ B) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x} = 1.$ C) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x^2} = 1.$

D) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^2}{x^2} = 1.$ E) Barcha limitlar to’g’ri hisoblangan.

29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}$ limitni hisoblang.

A) 1. B) 0. C) ∞. D) 5. E) 1/5.

30. $y=f(x)$ funksiyaning Δx argument orttirmasiga mos keladigan Δf funksiya orttirmasi qayerda to‘g‘ri ifodalangan ?

A) $\Delta f=f(x)-f(\Delta x)$. B) $\Delta f=f(x+\Delta x)-f(\Delta x)$. C) $\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)$.

D) $\Delta f=f(x+\Delta x)-f((x-\Delta x)$. E) $\Delta f=f(x)\Delta x$.

1. A=$\{a_{ij}\}$ ва B=$\{в_{ij}\}$ матрицалар учун A–B=C=$\{c_{ij}\}$ матрица аникланган булса, унда $c_{ij}=\ldots$

A) $a_{ij}-в_{ij}$ B) $a_{ii}-в_{jj}$ C) $a_{ij}-в_{ji}$ D) $a_{ji}-в_{ij}$.

2. Кайси шартда A квадрат матрицага тескари A^{-1} матрица мавжуд булмайди?

A) detA>0 B) detA=0 C) detA<0 D) detA≠0.

3. $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$ ва $B=\begin{pmatrix}5\\ 3\end{pmatrix}$ матрицалар буйича AB матрицани топинг.

A) $\begin{pmatrix}15 & 5\\ 6 & 0\end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix}21\\ 5\end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix}18\\ 10\end{pmatrix}$ D) $\begin{pmatrix}15 & 3\\ 10 & 0\end{pmatrix}$.

4. $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$ III тартибли аникловчини хисоблаш фаормуласи каерда тугри курсатилган?

A) $a_{11}a_{12}a_{13}+a_{21}a_{22}a_{23}+a_{31}a_{32}a_{33}-a_{11}a_{21}a_{31}-a_{12}a_{22}a_{32}-a_{13}a_{23}a_{13}$

B) $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{12}a_{33}+a_{32}a_{23}a_{11}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{23}a_{31}-a_{21}a_{32}a_{13}$

C) $a_{11}a_{21}a_{31}+a_{12}a_{22}a_{32}+a_{13}a_{23}a_{33}-a_{12}a_{11}a_{13}-a_{21}a_{22}a_{23}-a_{31}a_{32}a_{33}$

D) $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{32}a_{23}a_{11}-a_{21}a_{12}a_{33}$.

5. $\begin{vmatrix}1 & 0 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -1 & 1\end{vmatrix}$ IV тартибли аникловчи кийматини топинг.

A) 4 B) 1 C) 0 D) -1 .

6. Чизикли тенгламалар системасини Крамер усулида ечишда …

A) номаълумларни бирин- кетин йукотишдан фойдаланилади.
B) тескари матрицани топишдан фойдаланилади.
C) аникловчиларни хисоблашдан фойдаланилади.
D) номаълумларга кетма- кет якинлашишдан фойдаланилади.

7. $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 = -2 \\ 2x_1 - 4x_2 - 7x_3 = 6 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$ чизикли тенгламалар системаси ечилиб, $\left(\dfrac{x_1 x_3}{x_2}\right)^2 + 3$ хисоблансин.

A) 6 B) 1,5 C) 3 D) 2,8 .

8. Вектор узаро карама-карши дейилади , агар улар …..
A) узунликлари карама-карши булса.
B) йуналишлари карама-карши булса.
C) коллинеар ва бир хил узунликка эга булса.
D) бир хил узунлик ва карама-карши йуналишга эга булса.

9. $\overline{a} = \{2;-1;5\}$ ва $\overline{в}$ ={4,2,-3} векторлар буйича $\overline{c} = 3\overline{a} - 4\overline{в}$ вектор топилсин.
A) {–8;10,25} B) {–10;-11,27} C) {21,5,-3} D){7,-6,9}

12. $\overline{a} = \{m,2,5\}$ $\overline{в} = \{m,3,m\}$ ва $\vec{a} \perp \vec{в}$ булса, m параметр кийматлари купайтмаси топилсин.

A) 6 B) -2 C) 15 D) аниклаб булмайди.

13. A(3,0,-2) , B(4,3,0) ва C(1,-1,2) нукталар берилган $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ скаляр купайтмани хисобланг

A) 3 B) –2 C) –5 D) 4

14. Векториал купайтма ёрдамида учлари A(3,0,2) , B(1,-1,0) ва C(0,2,-1) нукталарда жойлашган учбурчак юзасини хисобланг.

A) $3\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{2}$ C) $3.5\sqrt{2}$ D)$2.5\sqrt{2}$

15. Тугри чизикнинг $y = kx + в$ тенглмасида k маъноси каерда тугри ифодаланган ?
A) Тугри чизикнинг OX укидан ажратган кесмаси.
B) Тугри чизикнинг OY укидан ажратган кесмаси.
C) Тугри чизикнинг OX билан хосил килган бурчак тангенси.
D) Тугри чизикнинг OY уки билан хосил килган бурчак тангенси.

16. $4x$-$2y$+11=0 тугри чизикнинг бурчак коэффициентли тенгламасини топинг.
A) $2y=4x+11$ B) $x = \dfrac{1}{2}y - \dfrac{11}{4}$ C) $y=2x+5.5$ D) $4x=2y-11$

17. Текисликдаги тугри чизикларга доир куйидаги тасдиклардан кайси бири тугри ?
A) $M(x_0, y_0)$ нуктадан утувчи тугри чизиклар дастаси $y+y_0=k(x+x_0)$ тенглама билан аникланади.
B) $A_1x+B_1y+C_1=0$ ва $A_2x+B_2y+C_2=0$ тугри чизиклар $A_1B_2-A_2B_1=0$ шартда параллел булади.
C) $y=k_1x+в_1$ ва $y=k_2x+в_2$ тугри чизиклар $k_1=-k_2$ шартда узаро перпендикуляр булади.
D) $M(x_0, y_0)$ нуктадан $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$ тугри чизиккача булган масофа d = $x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - p$ формула билан топилади.

18. Гиперболанинг каноник тенгламаси каерда тугри ёзилган ?

A) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{в^2}=1$ B) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{в^2}=-1$ C) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{в^2}=-1$ D) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{в^2}=1$

19. $4x^2+9y^2 = 36$ эллипснинг уклари узунликларининг йигиндисини топинг.

A) 13 B) 5 C) 13/36 D) 10

20. Текисликнинг нормал тенгламасини курсатинг.

A) $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - \rho = 0$ B) $\frac{x}{a}+\frac{y}{в}+\frac{z}{c}=1$

C) Ax+By+Cz+D=0 D) $z = kx+qy+h$

21. Бири OX, иккинчиси эса OZ координата укларидан утувчи текисликлар M(1,-2,4) умумий нуктага эга булсалар, улар орасидаги φ бурчак косинуси топилсин.

A) -0,2 B) 0,2 C) 0,4 D) –0,4.

22. Ax+By+Cz+D=0 тенглама B=D=0 булганда кандай текисликни ифодалайди?

A. Текислик координаталар бошидан утади;

B. Текислик OX укига параллел;

C. Текислик OX уки оркали утади;

D. Текислик OУ укидан ўтади.

23. Фазодаги тугри чизикнинг умумий тенгламасини курсатинг:

A) $x = x_0 + mt$, $y = y_0 + nt$, $z = z_0 + pt$

B) $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ C) $m(x-x_0)+n(y-y_0)+p(z-z_0)=0$

D) $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$

24. $M_1(4, -2, 5)$ ва $M_2(3, 4, 0)$ нукталардан утувчи тугри чизик тенгламаси каерда хато ёзилган?

A) $\frac{x-4}{1}=\frac{y+2}{-6}=\frac{z-5}{5}$ B) $x=t-3$, $y=6t+4$, $z=5t+5$

C) $\frac{x-3}{1}=\frac{y-4}{-6}=\frac{z}{5}$ D) $x=4-t$, $y=6t-2$, $z=5-5t$

25. M(4, 1, 3) нуктадан утувчи ва

$$\frac{x-1}{5}=\frac{y+3}{3}=\frac{z+21}{2}$$

тугри чизикка перпендикуляр булган текислик тенгламасини топинг.

A) $5x + 2y + 3z - 31 = 0$, B) $3x + 2y + 5z - 29 = 0$,

C) $5x + 3y + 2z - 29 = 0$, D) $2x + 5y + 3z - 22 = 0$.

26. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+4x-5}{x^2+x-2}$ limitni hisoblang.

A) 1. B) 4. C) 5/2. D) 2. E) mavjud emas.

27. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2}{3x+1}\right)^{3x+1}$ limitni hisoblang.

A) 1. B) ∞ C) e. D) mavjud emas. E) 0.

28. $\lim_{x\to 0}(1+2x)^{3/x}$ limitni hisoblang.

A) 1. B) e^2. C) e. D) e^6. E) 0.

29. y=1 o'zgarmas funksiyaning Δy orttirmasi qayerda to'g'ri ko'rsatilgan ?

A) Δx. B) $-\Delta x$. C) 1. D) -1. E) 0 .

30. y=f(x) funksiya hosilasining ta'rifi qayerda to'g'ri ko'rsatilgan ?

A) $f'(x)=\lim_{\Delta x\to\infty}\frac{\Delta f}{\Delta x}$. B) $f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta f}$. C) $f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}$.

D) $f'(x)=\lim_{\Delta x\to\infty}\frac{\Delta x}{\Delta f}$. E) $f'(x)=\lim_{\Delta f\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta f}$.

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРИНИНГ БУЙРУҒИ

Олий таълим муассасаларида талабалар ўзлаштиришини баҳолаш тизими тўғрисида низомни тасдиқлаш тўғрисида

Ўзбекистон Республикасининг «Таълим тўғрисида»ги (Ўзбекистон Республикаси Олий Мажлисининг Ахборотномаси, 1997 й., 9-сон, 225-модда) ва «Кадрлар тайёрлаш миллий дастури тўғрисида»ги (Ўзбекистон Республикаси Олий Мажлисининг Ахборотномаси, 1997 й., 11-12-сон, 295-модда) қонунларига ҳамда Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2004 йил 20 июлдаги 341-сон «Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлиги фаолиятини такомиллаштириш тўғрисида»ги қарорига (Ўзбекистон Республикаси қонун ҳужжатлари тўплами, 2004 й., 29-сон, 332-модда) мувофиқ, шунингдек олий таълим муассасалари талабаларининг билим савияси, кўникма ва малакаларини назорат қилиш ҳамда баҳолаш жараёнларини такомиллаштириш мақсадида буюраман:

1. Олий таълим муассасаларида талабалар ўзлаштиришини баҳолаш тизими тўғрисида низом 1-иловага мувофиқ тасдиқлансин.

2. Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирининг “Олий таълим муассасаларида талабалар билимини назорат қилиш ва баҳолашнинг рейтинг тизими тўғрисидаги Низомни тасдиқлаш ҳақида” буйруғи (Ўзбекистон Республикаси қонун ҳужжатлари тўплами, 2009 й., 28-сон, 330-модда; 2010 й., 34-сон, 297-модда; 2013 й., 50-сон, 659-модда; 2014 й., 52(I)-сон, 646-модда) билан тасдиқланган “Олий таълим муассасаларида талабалар билимини назорат қилиш ва баҳолашнинг рейтинг тизими тўғрисидаги Низом”га 2-иловага мувофиқ қўшимча ва ўзгартириш киритилсин.

3. Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирининг “Олий таълим муассасаларида талабалар билимини назорат қилиш ва баҳолашнинг рейтинг тизими тўғрисидаги Низомни тасдиқлаш ҳақида” буйруғи 2017/2018 ўқув йилидан бошлаб ўқишга қабул қилинган талабаларга нисбатан татбиқ этилмасин.

4. Мазкур буйруқ расмий эълон қилинган кундан эътиборан кучга киради.

Вазир **И. Маджидов**

Тошкент ш.,
2017 йил ___________,
____-сон

Олий ва ўрта махсус таълим вазирининг
2017 йил ____________даги _______-сон
буйруғига 1-илова

Олий таълим муассасаларида талабалар ўзлаштиришини баҳолаш тизими тўғрисида низом

Умумий қоидалар

1. Мазкур Низом Ўзбекистон Республикасининг “Таълим тўғрисида”ги ва “Кадрлар тайёрлаш миллий дастури тўғрисида”ги қонунларига ҳамда Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2001 йил 16 августдаги 343-сон “Олий таълимнинг давлат таълим стандартларини тасдиқлаш тўғрисида”ги қарорига мувофиқ олий таълим муассасаларида талабалар билимини баҳолаш тизимини тартибга солади ва 2017/2018 ва ундан кейинги ўқув йилларида ўқишга қабул қилинган талабаларга қўлланилади.

Қонун ҳужжатларига мувофиқ ўқув жараёни ўқитишнинг модул тизимига асосланган олий таълим муассасаларига мазкур Низом татбиқ этилмайди.

Олий таълим муассасаси ўқув жараёнининг ўзига хос хусусиятларини ҳисобга олган ҳолда ўзининг талабалар билимини баҳолаш бўйича Низомини ишлаб чиқиши ва Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлиги билан келишилган ҳолда жорий қилиши мумкин.

2. Низомнинг мақсади талабаларнинг фанларни ўзлаштиришини холис (объектив) ва аниқ баҳоланишини таъминлашдан иборат.

3. Низомнинг асосий вазифалари:

талабалар ўзлаштиришини баҳолаш тизимини соддалаштириш;

талабалар ўзлаштиришини баҳолаш тизимини халқаро тажрибаларга уйғунлаштириш;

фанларни ўзлаштириши бўйича талабалар рейтингини аниқлаш ва семестр (ўқув йили) якунлари бўйича эълон қилиш орқали уларнинг илм-фанга бўлган қизиқишини кучайтириш;

профессор-ўқитувчиларнинг фан бўйича талабалар ўзлаштиришини баҳолаш шаклларини белгилашдаги ваколатини кенгайтириш ва масъулиятини ошириш.

4. Талабалар билими, кўникма ва малакаларини баҳолашнинг асосий тамойиллари:

Давлат таълим стандартларига асосланганлик, аниқлик, ҳаққонийлик, ишончлилик, билимларни баҳолашда шаффофликни таъминлаш;

баҳолаш тартиби, мезонлари ва муддатларини олдиндан эълон килиш;

талабалар билимини холис ва адолатли баҳолаш ҳамда унинг натижаларини ўз вақтида маълум қилиш;

талабаларда мустақил ишлаш кўникмаларини ривожлантириш.

Баҳолаш турлари ва шакллари

5. Ҳар бир ишчи фан дастури машғулот ва баҳолаш турлари, уларнинг шакллари, мезонлари ва намунавий саволлари кўрсатилган ҳолда кафедра мудири тавсияси билан олий таълим муассасаси (факультет)нинг ўқув-услубий кенгашида муҳокама этилади ва олий таълим муассасаси ўқув ишлари бўйича проректори (ўқув ишлари бўйича директор ўринбосари) томонидан тасдиқланади.

6. Фан бўйича баҳолаш турлари, шакллари, сони ҳамда мезонлари ҳақидаги маълумотлар талабаларга профессор-ўқитувчилар томонидан дастлабки машғулотларда эълон қилинади.

7. Талабаларнинг фан бўйича ўзлаштириши жорий, оралиқ ва якуний баҳолаш турлари орқали аниқланади.

Фан хусусиятидан келиб чиқиб, олий таълим муассасаси (факультет)нинг ўқув-услубий кенгаши қарори билан ушбу фан жорий (оралиқ) баҳолаш ўтказилмаслиги мумкин.

8. Жорий баҳолаш (ЖБ)- семестр давомида доимий равишда талабанинг фан мавзулари бўйича билим ва амалий кўникма даражасини аниқлаш тури ҳисобланади.

ЖБ талаба томонидан фан мавзуси мазмунини ўзлаштирганлик даражасини аниқлашга, шунингдек ўқув материалини конструктив равишда шарҳлаш ва таҳлил қилиш, муаммоли вазиятларни ҳал этиш (кейс-стади), жамоада ишлаш, илмий презентациялар тайёрлаш ва ҳ.к.ни баҳолашга қаратилади.

ЖБ фаннинг хусусиятидан келиб чиққан ҳолда семинар, амалий ва лаборатория машғулотларида, одатда, қуйидаги шаклларда ўтказилади: оғзаки сўров (мантиқий муаммоли саволларни қўллаган ҳолда), тақдимот (фаннинг тегишли мавзуси бўйича кичик гуруҳлар доирасида), муаммоли вазиятларни ҳал этиш (кейс-стади), жамоада ишлаш ("ақлий ҳужум" интерфаол услубини қўллаган ҳолда), тест ўтказиш, назорат иши, коллоквиум ва бошқа кафедра томонидан белгиланган бошқа усулларда ўтказилиши мумкин.

Ҳар бир лаборатория иши ва мустақил таълим топшириқлари ЖБ лардан бири сифатида қабул қилинади.

ЖБ асосан ўқув машғулотлари давомида амалга оширилади.

Талабанинг ЖБдан олган ижобий баҳолари асосида унга оралиқ баҳолаш (якуний баҳолаш)ни топширишга рухсат берилади.

9. Оралиқ баҳолаш (ОБ) - семестр давомида ишчи фан дастурининг тегишли (фаннинг бир неча мавзуларини ўз ичига олган) бўлими тугагандан кейин талабанинг билим ва амалий кўникма даражасини аниқлаш тури ҳисобланади.

ОБ талаба томонидан ишчи фан дастурининг тегишли бўлимлари мазмунини ўзлаштириш даражаси, талабанинг адабиётлар билан ишлаш амалий кўникмалари, муаммоли вазиятларни ҳал этиш (кейс-стади), таҳлил, мантиқий фикрлаш, ўз фикрларини изчил ва аниқ баён қилиш қобилиятини аниқлашга қаратилади.

ОБ сони (бир семестрда 2 тадан ошмаслиги лозим) ва шакли (ёзма иш, оғзаки, тест, коллоквиум, ҳисоб-графика иши, назорат иши, курс иши, курс лойиҳаси, ижодий топшириқ ва ҳоказо) фан хусусияти ва унга ажратилган умумий соатлар ҳажмидан келиб чиққан ҳолда кафедра томонидан белгиланади.

ОБни ўтказиш жадвали ишчи фан дастури асосида деканат томонидан белгиланган жадвал асосида ўказилади. Талаба ОБни белгиланган муддатларда топшириши шарт.

Модуль тизимида ўқитилмаётган ва ҳажми (умумий аудитория соати) семестр давомида ҳафтасига тўлиқ 2 академик соатдан (тиббиёт олий таълим муассасаларида 4 академик соатдан) кам бўлган фанлардан ОБ ўтказилмайди.

10. Якуний баҳолаш (ЯБ) - семестр якунида (тиббиёт олий таълим муассасаларида фан якунида) талабанинг муайян фан бўйича назарий билим ва амалий кўникмаларнинг талаба томонидан ўзлаштириш даражасини аниқлаш тури ҳисобланади.

ЯБ талаба томонидан ишчи фан дастурининг семестрга (тиббиёт олий таълим муассасаларида фан якунига) мўлжалланган бўлимлари мазмунини ўзлаштириш даражаси, унинг мантиқий фикрлаши, амалий кўникмалари, муаммоли вазиятларни ҳал этиш (кейс-стади), тизимли ва танқидий таҳлил қила олиши, ўз фикрларини изчил ва аниқ баён қилиш қобилиятини аниқлашга қаратилади.

ЯБ асосан таянч тушунча ва ибораларга асосланган ёзма иш, оғзаки сўров, тест, ижодий иш ва бошқа кафедра томонидан белгиланган шаклларда ўтказилади.

ЯБни ўтказиш жадвали ўқув жараёни графигига мувофиқ факультет декани ёки ўқув бўлими томонидан тайёрланиб, баҳолаш бошланишидан олдин олий таълим муассасаси ўқув ишлари бўйича проректори томонидан тасдиқланади. Талаба ЯБни белгиланган муддатларда топшириши шарт.

11. Талабалар ўзлаштиришини баҳолаш ёзма иш шаклида ўтказилганда:

ёзма ишнинг мазмуни ва мантиқий баён этилганлиги;

савол ва топшириқларнинг ечимига янгича услубда ёндошилганлиги;

ёзма ишни хато ва нуқсонсиз бажарилганлиги эътиборга олинади.

Ёзма ишларни текшириш жараёни деканат (ўқув-услубий бўлим) томонидан тузилган комиссиянинг идентификация рақамлари бериш орқали амалга оширилади.

Ёзма иш талаба томонидан мустақил равишда ёзилади. Муаллифликни ўзлаштириш (плагиат)га йўл қўйилмайди. Ёзма иш матнидаги ўзганинг муаллифлик ишидан олинган ҳар қандай матнда муаллиф, ишнинг номи ва ишнинг бошқа реквизитларини кўрсатган ҳолда ҳаволалар келтирилиши шарт. Ёзма ишни текширишда плагиат ҳолатлари аниқланиши, шунингдек икки ёки ундан ортиқ ёзма ишнинг мустақил ёзилганлигига шубҳа уйғотадиган даражада ўхшаш бўлиши ушбу барча ёзма ишларга ноль балл қўйиш ёки уларга қўйилган балларни бекор қилишга асос бўлади.

Баҳолашлар бўйича ўтказилган ёзма ишлар кафедрада 6 ой сақланади ва ушбу муддат ўтганидан сўнг ўрнатилган тартибда йўқ қилинади.

12. Ҳар бир баҳолаш турини ўтказиш шакли бўйича тартиб кафедра йиғилиш баёни билан тасдиқланади ва талабаларга етказилади.

Тиббиёт олий таълим муассасалари учун ОБ ва ЯБ клиник фанлар бўйича - OSCE (объектив тизимлаштирилган клиник синов) ёки назарий фанлар бўйича - OSE (объектив тизимлаштирилган имтиҳон), ёзма, оғзаки, тест ёки уларнинг комбинацияланган шаклларида ўтказилади.

13. ОБ жараёнлари факультет декан ва кафедра мудири томонидан тузилган комиссия иштирокида даврий равишда ўрганиб борилади ва уни ўтказиш тартиблари бузилган ҳолларда, комиссия хулосаси асосида ОБ натижалар бекор қилинади ҳамда ОБ қайта ўтказилади.

14. Олий таълим муассасаси раҳбарининг буйруғи билан таълим сифатини назорат қилиш бўлими ёки ўқув-услубий бошқарма (бўлим, бўлинма) бошлиғи раҳбарлигида тузилган комиссия иштирокида ЯБ ни ўтказиш жараёни даврий равишда ўрганиб борилади ва уни ўтказиш тартиблари бузилган ҳолларда, комиссия хулосаси асосида ЯБ натижалар бекор қилинади ҳамда ЯБ қайта ўтказилади.

Баҳолаш тартиби ва мезонлари

15. Талабаларнинг ҳар бир семестрда фанларни ўзлаштириши ҳар бир баҳолаш турлари бўйича 4 баллик тизимда (5(аъло), 4(яхши), 3(қониқарли) ва 2(қониқарсиз)) баҳоланади. 5, 4 ва 3 баҳолар ижобий баҳо ҳисобланади. Баҳолашда рақам ва матн бир хил талқин этилади.

Малакавий амалиёт, курс иши (лойиҳаси), фан (фанлараро) давлат аттестацияси, битирув малакавий иши, шунингдек магистратурада илмий-тадқиқот ва илмий-педагогик ишлар ҳамда магистрлик диссертацияси бўйича талабалар ўзлаштириши ҳам 4 баллик тизимда баҳоланади.

16. Талабанинг фан бўйича ўзлаштиришини баҳолаш (ЖБ, ОБ, ЯБ)да қуйидаги намунавий мезонлар тавсия этилади:

5 (аъло) баҳо:

хулоса ва қарор қабул қилиш;

ижодий фикрлай олиш;

мустақил мушоҳада юрита олиш;

олган билимларини амалда қўллай олиш;

моҳиятини тушуниш;

билиш, ифодалаш, айтиб бериш;

тасаввурга эга бўлиш.

4 (яхши) баҳо:
мустақил мушоҳада юрита олиш;
олган билимларини амалда қўллай олиш;
моҳиятини тушуниш;
билиш, ифодалаш, айтиб бериш;
тасаввурга эга бўлиш.
3 (қониқарли) баҳо:
моҳиятини тушуниш;
билиш, ифодалаш, айтиб бериш;
тасаввурга эга бўлиш.
2 (қониқарсиз) баҳо:
дастурни ўзлаштирмаганлик;
фаннинг моҳиятини билмаслик;
аниқ тасаввурга эга бўлмаслик;
мустақил фикрлай олмаслик.

17. Намунавий мезонлар асосида кафедра томонидан ҳар бир фаннинг ўзига хос хусусиятларини инобатга олган ҳолда баҳолаш мезонлари ишлаб чиқилади.

18. Баҳолаш турлари бўйича тузилган саволлар (топшириқлар) мазмуни (оддийдан мураккабгача) баҳолаш мезонларига мувофиқ талабанинг ўзлаштиришини холис (объектив) ва аниқ баҳолаш имкониятини бериши керак.

Саволлар (топшириқлар)ни талаб даражасида тузилиши бўйича масъулият фан ўқитувчилари ҳамда кафедра мудирига юклатилади.

Саволлар (топшириқлар) таркибига ишчи фан дастурида кўрсатилган барча материаллар, хусусан назарий материаллар билан бирга мустақил иш, лаборатория ва ҳисоб-графика ишлари, амалий ва семинар машғулотлари ва бошқа материаллар ҳам киритилади.

Баҳолашларни ўтказиш муддати

19. Баҳолашларни тасдиқланган жадваллар асосида фан бўйича ўқув машғулотларини олиб борган профессор-ўқитувчилар ўтказади (тиббиёт олий таълим муассасаларида ЖБ фан бўйича ўқув машғулотларини олиб борган профессор-ўқитувчи, ОБ ва ЯБлар кафедрада ташкил этилган комиссия томонидан ўтказилади).

Комиссия хулосаси асосида ОБ (ЯБ) натижалари бекор қилинган тақдирда, мазкур комиссия кўрсатмаси билан баҳолашни ўтказиш бошқа профессор-ўқитувчиларга юклатилиши мумкин.

20. Ҳисоб-графика иши, назорат иши, курс иши, курс лойиҳаси ва ижодий топшириқлар ҳимояси ҳамда амалиётлар бўйича ҳисобот 4 баллик тизимда ушбу фандан ўтказиладиган ЯБга қадар бўлган муддатда топширилиши шарт.

21. Узрли сабабларга (талабанинг касал бўлиши, яқин қариндошлари оиласида фавқулодда ҳолатлар, яшаш жойи билан боғлиқ муаммоли вазиятлар, республика ва халқаро миқёсдаги тадбирларда иштирок этиш) кўра баҳолашларда иштирок этмаган талабага, асословчи ҳужжатлар тақдим этилган тақдирда, факультет декани фармойиши билан баҳолашларни муддатлари кўрсатилган шахсий график асосида топширишга рухсат берилади.

22. Фан бўйича ОБ баҳолашлардан қониқарсиз баҳоланган талаба ЯБгача бўлган муддатда улардан ижобий баҳолар олмаса, бу талаба ЯБга киритилмайди ва у талаба академик қарздор ҳисобланади.

23. ЯБдан қониқарсиз баҳоланган талаба академик қарздор ҳисобланади.

24. Кузги семестр натижалари бўйича академик қарздор талабаларга навбатдаги семестр якунигача, баҳорги семестр натижалари бўйича академик қарздор битирувчи курсдан бошқа курс талабаларига янги ўқув йили бошидан қайта топширишга қўшимча бир ой муддат берилади. Баҳорги семестр натижалари бўйича битирувчи курс

талабаларига ўзлаштирмаган фанларини (академик қарздорликни) қайта топшириш учун якуний давлат аттестациясигача бўлган муддат берилади.

Академик қарздорликни қайта топширишлар сони 2 мартадан ошмаслиги керак. Иккинчи қайта топшириш факультет декани тасдиқлаган комиссия томонидан қабул қилинади.

Қўшимча муддатларда ҳам академик қарздорликни бартараф этмаган талаба факультет декани тавсиясига кўра белгиланган тартибда ректорнинг буйруғи билан курсдан қолдирилади.

25. Талаба баҳолаш натижаларидан норози бўлса, фан бўйича баҳолаш тури натижалари эълон қилинган вақтдан бошлаб 24 соат мобайнида факультет деканига ариза билан мурожаат этиши мумкин. Бундай ҳолда факультет декани тақдимномасига мувофиқ ректор буйруғи билан 3 (уч) аъзодан кам бўлмаган таркибда апелляция комиссияси ташкил этилади.

Апелляция комиссияси талабаларнинг аризаларини кўриб чиқиб, 2 кунгача бўлган муддатда ўз хулосасини билдиради.

Апелляция комиссияси ўз хулосасида баҳолаш жараёни мазкур Низом асосида ўтказилганлиги ёки Низом талаблари бузилганлиги ёхуд баҳолаш тўғрилиги (нотўғрилиги) тўғрисида хулоса беради.

Апелляция комиссияси хулосасига кўра Низом талаблари бузилган ёки баҳолаш нотўғри бўлган деб топилган тақдирда, мазкур комиссия қарори билан баҳолаш қайта ўтказилади.

26. Курсда қолдирилган талаба фан(лар)ни ўзлаштирмаган семестр бошидан тўлов-контракт асосида ўқишини давом эттиради ва мазкур семестр бўйича ўқув режада белгиланган барча фанларни қайта ўзлаштириши ҳамда баҳоланиши шарт.

Баҳолаш натижаларини қайд қилиш ва таҳлил этиш тартиби

27. Профессор-ўқитувчилар Талабалар ўзлаштиришини ҳисобга олиш электрон тизими (Электрон тизим)га ҳамда кафедрада сақланадиган қайдномага талабанинг ЖБ, ОБ, ЯБ бўйича 4 баллик тизимдаги баҳосини шу куннинг ўзида (баҳолаш ёзма иш шаклида ўтказилган бўлса, уч кун муддат ичида) қайд этиб боради.

28. Талаба ОБ ёки ЯБ дан 3, 4 ёки 5 баҳо олган тақдирда, яъни ижобий баҳоланганда уни қайта топширишга йўл қўйилмайди.

Агар талаба ОБ ёки ЯБни топшириш вақтида келмаган бўлса, у холда қайднома (Электрон тизим)нинг ушбу талабага мос келувчи қатордаги мос катакда “келмади” деб ёзилади.

29. Талабанинг ОБ ва ЯБ натижалари асосидаги фан бўйича баҳоси Электрон тизим орқали ҳисобланади.

Бунда талабанинг семестр давомида топшириши белгиланган ОБ ва ЯБ ларнинг ҳар бири бўйича олинган ижобий (3, 4, 5) баҳоларнинг ўртача арифметик миқдори яхлитланиб бутун сонларда (масалан, $(5+4+5)/3=4{,}6 \approx 5$ ёки $(5+4+4)/3=4{,}3 \approx 4$ деб олинади) талабалар ўзлаштириши электрон шаклдаги Рейтинг қайдномасига қайд этилади.

Яхлитлаш арифметика қоидасига мувофиқ соннинг ўнли каср қисми 0,4 ва ундан кичик бўлса, 0 (ноль) сифатида; 0,5 ва ундан катта бўлса, 1 (бир) сифатида соннинг бутун қисмига қўшилади.

30. Факультет деканатида семестр якунида ҳар бир фан бўйича Электрон тизим ёрдамида Рейтинг қайдномаси чоп этилади. Рейтинг қайдномаси уч қисмдан иборат бўлиб:

биринчи қисмида ўқув йили, семестр, таълим йўналиши (мутахассислик), курс, гуруҳ, фан номи, машғулот тури ва уни ўтказган профессор-ўқитувчи Ф.И.Ш., семестрда фанга ажратилган ўқув соати келтирилади;

иккинчи қисмида талабалар Ф.И.Ш., рейтинг дафтарлари рақами, ОБлар ва ЯБдан олган баҳолари, рейтинг бали ва фан бўйича баҳоси акс эттирилади.

ОБ ёки/ва ЯБдан қониқарсиз баҳоланган ёки баҳолашларда иштирок этмаган талабага мос катакларда унинг рейтинг бали ва фан бўйича баҳоси “0” (ноль) деб белгиланади;

учинчи қисмида 2, 3, 4, 5 баҳо олганлар сони, баҳолашларда иштирок этмаган талабалар сони алоҳида-алоҳида кўрсатилади ҳамда баҳолашларни ўтказган профессор-ўқитувчилар, кафедра мудири ва факультет декани Ф.И.Ш. ҳамда уларнинг имзолари ҳақидаги маълумотлар қайд этилади.

31. Рейтинг қайдномаси фан бўйича ўқув машғулотларини олиб борган (баҳолашларни ўтказган) профессор-ўқитувчилар, кафедра мудири ва факультет декани томонидан имзолангандан сўнг, деканатда сақланади ва талабанинг стипендияси миқдорини аниқлашга асос ҳисобланади.

Рейтинг қайдномаси расмийлаштирилган кун талабаларнинг рейтинг дафтарлари тўлдирилади.

32. Рейтинг қайдномасидаги 2 (қониқарсиз) баҳо талабанинг рейтинг дафтарига қайд этилмайди.

33. Олий таълим муассасасининг ўқув ишлари бўйича проректори ва факультет декани Электрон тизим юритилиши ва шаффофлигини таъминлаш ҳамда ўзгартирилмаслиги учун масъул ҳисобланади.

34. Талабанинг фан бўйича бир семестрдаги (тиббиёт олий таълим муассасаларида якунланган фан бўйича) рейтинги қуйидагича аниқланади:

$$\mathbf{R_t = \frac{V \times O^I}{5}},$$

бу ерда:

V — семестрда фанга ажратилган умумий ўқув юкламаси (соатларда);

O^I — фан бўйича ўзлаштириш даражаси (яхлитланмаган якуний баҳо).

Талабаларнинг ўқиш сифатини қиёсий таҳлил қилиш мақсадида ҳар бир фандан олинган рейтингларни қўшиш асосида талабалар рейтинги аниқланади.

35. Олий таълим муассасаси деканати Электрон тизим орқали семестр охирида ўқитиш натижалари бўйича қуйидаги академик рейтингларни ҳисоблайди:

алоҳида фанларни ўзлаштириш натижалари бўйича талабаларнинг гурух, курс ва факультет миқёсидаги рейтинги;

семестрдаги барча фанларни ўзлаштириш натижалари бўйича талабаларнинг гуруҳ, курс ва факультет миқёсидаги рейтинги;

бир неча семестр давомида ўтилган фанларни ўзлаштириш натижалари бўйича талабаларнинг гуруҳ, курс ва факультет миқёсидаги рейтинги.

36. Ўқув йили якуни бўйича энг юқори рейтинг кўрсаткичига эга бўлган талабалар “Факультет (курс)нинг энг яхши талабалари рўйхати”га киритилади ҳамда факультет декани тавсияси асосида олий таълим муассасаси ректори буйруғи билан рағбатлантиришларга, хусусан талабани танловларга иштирок этиши учун номзодини кўрсатишга асос бўлади.

Кўрсаткичлари юқори бўлган талабалар ҳақидаги маълумот олий таълим муассасаси (факультети) эълонлар тахтаси ва сайтларида ёритилади.

37. Таълим йўналиши бўйича ўқув режасига киритилган (ҳар бир семестр якунидаги фанлар бўйича (тиббиёт олий таълим муассасаларида якунланган фан бўйича) ўзлаштириш кўрсаткичларини ҳисобга олган ҳолда) фанларнинг 1/4 қисми (25%)ни камида 4(яхши) баҳога ва қолган 3/4 қисми (75%)ни ҳамда давлат аттестацияси ва битирув малакавий ишлари ҳимоясини 5(аъло) баҳоларга топширган талабаларга имтиёзли диплом берилади.

Талабага имтиёзли диплом белгилашда ҳамда стипендия миқдорини белгилашда унинг ҳар бир семестр якунидаги фанлар бўйича деканатларда сақланаётган рейтинг қайдномаларидаги ўзлаштириш кўрсаткичи ҳисобга олинади.

38. Баҳолаш натижалари кафедра йиғилишлари, факультет ва олий таълим муассасаси Кенгашларида мунтазам равишда муҳокама этиб борилади ва тегишли қарорлар қабул қилинади.

39. Ўзбекистон Республикаси олий таълим муассасаларида талабалар ўзлаштиришини баҳолаш тизимини 100 баллик тизим ва илғор хорижий давлатлар олий таълим тизимида қўлланиладиган баҳолаш тизимига уйғунлаштириш мазкур Низом иловасида келтирилган жадвалларга мувофиқ амалга оширилади.

Якуний қоидалар

40. Ушбу Низомда белгиланган масалалар бўйича келиб чиққан низолар қонун ҳужжатлари асосида ҳал қилинади.

41. Ушбу Низом Ўзбекистон Республикаси Соғлиқни сақлаш вазирлиги, Қишлоқ ва сув хўжалиги вазирлиги, Халқ таълими вазирлиги, Ташқи ишлар вазирлиги, Ахборот технологиялари ва коммуникацияларини ривожлантириш вазирлиги, Маданият вазирлиги, Давлат жисмоний тарбия ва спорт қўмитаси, Давлат солиқ қўмитаси, Автомобиль йўллари давлат қўмитаси, Давлат архитектура ва қурилиш қўмитаси, Ўзбекистон Бадиий академияси, “Ўзбекистон темир йўллари” АЖ ва Навоий кон-металлургия комбинати Давлат корхонаси билан келишилган.

Олий таълим муассасаларида талабалар
ўзлаштиришини баҳолаш тизими тўғрисида
низомга илова

1-жадвал

Ўртача баҳони 4-баллик шкаладан 100 баллик шкалага ўтказиш жадвали

4-баллик шкала	**100-баллик шкала**	**4-баллик шкала**	**100-баллик шкала**	**4-баллик шкала**	**100-баллик шкала**
5,00-4,96	100	4,30-4,26	86	3,60-3,56	72
4,95-4,91	99	4,25-4,21	85	3,55-3,51	71
4,90-4,86	98	4,20-4,16	84	3,50-3,46	70
4,85-4,81	97	4,15-4,11	83	3,45-3,41	69
4,80-4,76	96	4,10-4,06	82	3,40-3,36	68
4,75-4,71	95	4,05-4,01	81	3,35-3,31	67
4,70-4,66	94	4,00-3,96	80	3,30-3,26	66
4,65-4,61	93	3,95-3,91	79	3,25-3,21	65
4,60-4,56	92	3,90-3,86	78	3,20-3,16	64
4,55-4,51	91	3,85-3,81	77	3,15-3,11	63
4,50-4,46	90	3,80-3,76	76	3,10-3,06	62
4,45-4,41	89	3,75-3,71	75	3,05-3,01	61
4,40-4,36	88	3,70-3,66	74	3,00	60
4,35-4,31	87	3,65-3,61	73	**3,0 дан кам**	**60 дан кам**

2-жадвал

Олий таълимда талабалар ўзлаштиришини баҳолаш тизимларини қиёсий таққослаш жадвали

Таклиф этилаётган Ўзбекистон тизими	**Россия тизими (МДУ)***	**Европа кредит трансфер тизими (ECTS - European Credit Transfer System)**	**Америка тизими (A- F)**	**Британ тизим (%)**
«5»	«5»	«A»	«A+»	70-100
			«A»	
			«A-»	65-69
«4»	«4»	«B»	«B+»	60-64
		«C»	«B»	50-59
			«B-»	
«3»	«3»	«D»	«C+»	45-49
		«E»	«C»	40-44
			«C-»	
			«D+»	
			«D»	
			«D-»	
«2»	«2»	«FX»	«F»	0-39
		«F»		