

КОСМИЧЕСКАЯ ГЕОДЕЗИЯ

*Допущено
Министерством высшего и среднего
специального образования СССР
в качестве учебника
для студентов геодезических
специальностей вузов*



МОСКВА "НЕДРА" 1986

Космическая геодезия: Учебник для вузов/В. Н. Баранов, Е. Г. Бойко, И. И. Краснорылов и др.— М.: Недра, 1986.— 407 с., ил.

Рассмотрены задачи космической геодезии, связь ее с другими дисциплинами. Приведены системы координат и способы их преобразования, современные системы измерения времени. Описаны методы и аппаратура для наблюдений искусственных спутников Земли (ИСЗ). Изложены вопросы теории невозмущенного движения ИСЗ с целью ее дальнейшего использования в динамических задачах космической геодезии, различные возмущающие факторы и их влияние на движение ИСЗ. Даны описания геометрических задач и их классификации. Подробно освещены синхронный метод и автономное определение координат пунктов.

Для студентов геодезических специальностей.

Табл. 23, ил. 88, список лит.— 22 назв.

Авторы: *В. Н. Баранов, Е. Г. Бойко, И. И. Краснорылов, М. М. Машимов, Ю. В. Плахов, М. С. Урмасв, С. Н. Яшкин.*

Рецензенты: *С. Н. Николаев*, доц., канд. техн. наук (Военно-инженерная академия им. В. В. Куйбышева), *Ю. В. Сурнин*, доц., канд. техн. наук (Новосибирский институт инженеров геодезии, аэрофотосъемки и картографии).

Предлагаемый вниманию читателя учебник написан на основе курсов лекций по космической геодезии, читаемых авторами в течение многих лет студентам геодезических специальностей. С момента издания учебного пособия по космической геодезии (И. И. Краснорылов, Ю. В. Плахов «Основы космической геодезии», 1976 г.) прошло достаточно много времени, и это учебное пособие в известной степени устарело. Кроме того, ограниченный объем пособия не позволил достаточно полно изложить основные проблемы космической геодезии.

Начиная с 60-х годов и до настоящего времени издан также целый ряд монографий как советских, так и зарубежных авторов, посвященных космической геодезии в целом и отдельным ее вопросам. Однако монографии и по стилю изложения, и по содержанию служат научно-исследовательским целям и предназначаются в первую очередь для научных работников. Поэтому использовать монографии для обучения студентов по меньшей мере затруднительно.

Примерно с середины 70-х годов в космической геодезии главное внимание стало уделяться так называемым динамическим методам, дающим общие решения возникающих задач по сравнению с частными геометрическими методами, хотя последние не менее важны: они определили в свое время весь ход развития космической геодезии. К настоящему времени качественно изменились методы наблюдений в космической геодезии; вопросы теории также заметно усовершенствованы.

Перечисленные обстоятельства, а также то, что космическая геодезия для студентов геодезических специальностей является обязательным предметом (она входит в учебные планы более 15 лет), вызвали необходимость написать данный учебник. Было бы довольно трудно представить себе современного геодезиста, не знакомого с космической геодезией и с кругом решаемых ею задач.

Авторы выражают признательность коллективу кафедры астрономии и космической геодезии Московского ордена Ленина института инженеров геодезии, аэрофотосъемки и картографии за содействие в работе над учебником.

Введение и раздел 1 написаны проф., д-ром техн. наук М. С. Урмасвым, раздел 2 — доц., канд. техн. наук В. Н. Барановым, раздел 3 и § 78, 79 — доц., д-ром техн. наук С. Н. Яшкиным, раздел 4 и § 73—77 — проф., д-ром техн. наук Ю. В. Плаховым, раздел 5 — проф., д-ром техн. наук Е. Г. Бойко, § 80—96 — проф., д-ром техн. наук М. М. Машимовым, раздел 7 — доц., канд. техн. наук И. И. Краснорыловым.

ВВЕДЕНИЕ

Космической геодезией называется раздел геодезической науки, в котором изучаются вопросы использования наблюдений искусственных и естественных спутников Земли и планет для решения научных и научно-технических задач геодезии. При этом в космической геодезии используются как результаты наблюдений спутников с поверхности планеты, так и результаты наблюдений, выполненных непосредственно на спутниках.

Космическая геодезия является самым новым и наиболее быстро развивающимся разделом геодезии. Она использует весь арсенал измерительных средств, предоставляемых современной физикой и техникой, а обработка результатов измерений, ввиду огромного количества информации, поступающей от современных измерительных средств, возможна сейчас только с использованием мощных электронно-вычислительных машин, обладающих быстродействием порядка миллиона и более операций в секунду и большим объемом внешней и оперативной памяти.

4 октября 1957 г., когда первый советский искусственный спутник Земли (ИСЗ) открыл космическую эру в истории человечества, можно считать и датой возникновения космической геодезии, так как уже первые фотографии советских ИСЗ на фоне звездного неба использовались для решения геодезических задач.

Задачи космической геодезии совпадают с задачами геодезии в целом, но космическая геодезия дает возможность получать решения в более сжатые сроки и с большей точностью, чем традиционные методы. Кроме того, существует ряд задач, решение которых вообще невозможно без использования искусственных спутников или требует столько времени и средств, что делает их практически невыполнимыми.

Первой и основной задачей космической геодезии является определение фундаментальных постоянных, характеризующих форму, размеры и суточное вращение Земли, Луны и планет, а также изменений этих фундаментальных постоянных во времени.

Второй, тесно связанной с первой, является задача создания геоцентрических и планетоцентрических систем координат, решение которой сводится к построению сетей опорных точек в единой для Земли (или планеты) системе координат, имеющей начало в центре масс, а направление осей определенным образом фиксированными для различных эпох.

Решение этих двух задач невозможно, если неизвестно

внешнее гравитационное поле исследуемой планеты. Определение параметров, характеризующих гравитационное поле, основано на исследовании эволюции элементов орбит искусственных спутников во времени. По результатам измерений с высокой точностью определяют элементы орбит на эпохи, разделенные небольшими промежутками времени, и представляют их функциями параметров гравитационного поля планеты, отражающего закономерности распределения масс в ее теле.

Космическая геодезия решает ряд прикладных задач, имеющих важное народнохозяйственное значение. К числу этих задач относится прежде всего координатно-временная привязка результатов космических съемок Земли и планет, выполняемых в интересах исследования природных ресурсов и космического картографирования.

Весьма важны также результаты, полученные методами космической геодезии для решения задач геофизики и, прежде всего, задач геодинамики. Повышение точности измерений в космической геодезии и совершенствование методов математической обработки позволят в будущем получить количественные данные об эволюции фигуры и гравитационного поля Земли во времени и тем самым установить характер и особенности движения материков, закономерности протекания тектонических процессов, получить данные для прогноза поиска полезных ископаемых и эффективного предсказания сейсмических процессов, в том числе сильных землетрясений.

Следует отметить, что уверенное количественное определение характеристик геодинамических явлений требует значительного повышения точности измерений, поскольку геодинамические вариации имеют порядок 10^{-8} — 10^{-9} в год, т. е. необходимо регистрировать линейные смещения с точностью 0,6—6 см, угловые—с точностью до 0,002—0,0002", а изменения силы тяжести—с точностью до 10^{-9} м/с² (10 мкгал). Однако уже сейчас необходимо учитывать некоторые короткопериодические геодинамические процессы, к числу которых относятся движения полюсов, приливные деформации и неравномерности суточного вращения Земли.

Если рассматривать методы космической геодезии в последовательности развития, то первым следует считать геометрический метод. Он основан на синхронном фотографировании ИСЗ на фоне звездного неба минимум с двух пунктов поверхности Земли. Такая организация наблюдений позволяет определить направление вектора, соединяющего эти пункты. Множество таких векторов образует векторную пространственную сеть—космическую триангуляцию. Уравнивание и обработка ее дают возможность определять координаты новых пунктов в системе координат опорных.

При этом, конечно, необходимо каким-то образом определить масштаб этой сети, поскольку по результатам фотографических наблюдений определяются лишь направления. Масштаб

можно определить, измерив, например, в синхронный момент расстояние от фотографической камеры до ИСЗ при помощи лазерного дальномера. Можно также получить расстояние (длину хорды) между пунктами путем обычных геодезических измерений, однако при больших длинах сторон космической триангуляции это является трудной технической задачей.

Разработка геометрического метода дала новый качественный скачок в развитии геодезии. В силу больших высот наблюдаемых ИСЗ оказалось возможным создание сетей космической триангуляции со сторонами порядка 1500—2000 км, что, в свою очередь, позволило связать материки и острова Земли единой геодезической сетью, т. е. установить глобальную геодезическую связь.

Достоинством геометрического метода космической геодезии является возможность исключить из рассмотрения теорию движения ИСЗ и вместе с ней трудноучитываемые факторы, например, возмущения орбит, вызванные аномальным гравитационным полем планеты, сопротивлением атмосферы, притяжением спутника Луной и Солнцем и др.

Таким образом, в геометрических методах спутник является очень высокой визирной целью, перемещающейся со значительной скоростью (до нескольких градусов в секунду). В результате определяются лишь относительные положения новых пунктов, т. е. на практике в системе исходных координат, при этом вопрос о привязке космической триангуляции к центру масс Земли остается открытым.

Поэтому наиболее общим методом космической геодезии следует считать динамический метод, который, в противоположность геометрическому, основан на изучении эволюции орбиты ИСЗ во времени. Для реализации динамического метода необходимо располагать адекватной моделью движения ИСЗ. Математическая модель движения ИСЗ в инерциальной системе прямоугольных координат записывается в виде системы трех нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. В их правых частях содержатся члены, учитывающие ускорения от всех сил, действующих на ИСЗ в полете. Таким образом, точность результатов, получаемых динамическим методом, в значительной степени зависит от точности учета возмущающих ускорений, вызываемых всеми силами, действующими на ИСЗ. К ним относятся: сила тяжести, сопротивление атмосферы, притяжение ИСЗ Луной, Солнцем и планетами, давление солнечного излучения, а также ряд других сил, учитываемых сравнительно редко. В самой общей постановке динамического метода предполагается совместное определение координат наземных пунктов, элементов орбит ИСЗ, а также уточнение параметров моделей возмущающих сил. При этом получается своего рода замкнутый круг: для того чтобы точно проинтегрировать дифференциальные уравнения движения, необходимо заранее знать параметры моделей возмущающих

сил, в то же время эти параметры необходимо уточнить в результате применения динамического метода. Выход из положения заключается в применении метода последовательных приближений, в процессе которого закрепляются определенные группы параметров и уточняются другие параметры, которые затем также закрепляются, и на их основании уточняются ранее закрепленные параметры и т. д. Этот процесс неизбежно сходится к истинным значениям уточняемых параметров, поскольку непрерывно возрастают точность и состав орбитальных измерений.

Динамический метод космической геодезии позволяет получить положения пунктов в единой для всей планеты системе координат с началом в центре масс Земли и определить внешнее гравитационное поле Земли в этой же системе координат. Таким образом, именно совершенствование и развитие динамического метода позволит в будущем успешно решить главные задачи геодезии и геодинамики.

Однако динамический метод космической геодезии намного сложнее геометрического, поскольку он связан с трудными задачами создания адекватных моделей движения ИСЗ, моделей измерений и моделей сил, действующих на ИСЗ в его орбитальном движении.

Реализация динамического метода требует наличия совершенных алгоритмов и гигантских комплексов программ для самых современных ЭВМ, на разработку которых необходимы большие затраты труда целых коллективов квалифицированных математиков и программистов.

По мере уточнения моделей сил, действующих на ИСЗ в полете, все большее значение приобретает орбитальный метод, который является частным случаем динамического, если предположить, что модели сил, действующих на ИСЗ, построены с необходимой точностью и не уточняются в процессе решения.

В орбитальном методе на основании измерений, выполненных на наземных пунктах или непосредственно со спутника, совместно определяются координаты пунктов и элементы орбит. Наконец, часто полагают, что элементы орбиты на моменты измерений также известны. В этом случае неизвестными являются только координаты пунктов, которые и определяются путем обратных пространственных засечек.

Эта процедура получила название упрощенного орбитального метода и применяется при решении навигационных задач.

Остановимся коротко на основных этапах развития космической геодезии.

Задолго до появления искусственных спутников Земли геодезисты и астрономы пытались использовать в геодезических целях естественные небесные объекты, имеющие значительный суточный параллакс. Конечно, единственно возможным для практического использования объектом являлась Луна,

суточный параллакс которой составляет $61,5'$. Однако даже при наличии совершенной теории геоцентрического движения Луны ошибка в определении положения пункта на поверхности Земли по наблюдениям Луны составляет 1 км, если измерить направление на центр Луны с ошибкой $0,2''$. Понятно, что достижение таких точностей измерения направления на центр Луны является исключительно сложной научно-технической задачей. Были разработаны специальные методы определения топоцентрических направлений на Луну путем ее непосредственного фотографирования на фоне звездного неба. При этом возникли большие трудности получения на одном негативе качественных изображений звезд и Луны, так как Луна намного ярче звезд и обладает большой скоростью движения относительно звезд. Были созданы специальные камеры, конструкция которых позволила осуществить компенсацию движения Луны и ослабление ее яркости. Лучшим результатом определения направления на центр видимого диска Луны является результат Марковица, который в период Международного геофизического года получил это направление с ошибкой порядка $0,15''$. Тем не менее, достигнутая точность не могла удовлетворить требования геодезистов. Создание лунных камер являлось важным шагом на пути совершенствования фотографических методов наблюдения близких небесных объектов. Элементы их конструкций потом были использованы для создания специальных спутниковых камер, а сами лунные камеры находят применение при определении эфемеридного времени. Относительно использования Луны в геодезических целях академик А. А. Михайлов писал в 1957 г., буквально накануне запуска в СССР первого искусственного спутника Земли, что удаленность Луны от Земли и вызванная этим малость суточного параллакса Луны делают геодезическое использование Луны трудным, если не сказать неблагоприятным делом. Может быть, в будущем Луну заменит искусственный спутник, движущийся ближе к Земле, наблюдение которого позволит решать геодезические задачи точнее.

В 1945 г. финский ученый Вьяйсяля предложил метод определения направления между двумя пунктами, основанный на одновременном фотографировании с этих пунктов световых вспышек на фоне звездного неба. Вспышка выполняется при помощи взрывных снарядов, выбрасываемых с самолетов или поднимаемых маленькими баллонами. Вьяйсяля подсчитал, что источник света в 6000 кд будет виден под углом $2,5^\circ$ на расстоянии в 200 км как звезда 6-й величины. Первые эксперименты были проведены в 1946 г. в обсерватории г. Турку и показали, что направления определяются с высокой точностью.

В сущности метод, предложенный Вьяйсяля, уже явился основой для развития геометрических методов космической геодезии, однако в то время он не нашел широкого применения,

так как высоты вспышек не позволяли существенно увеличить стороны триангуляции по сравнению с обычными методами.

Запуск в Советском Союзе 4 октября 1957 г. первого искусственного спутника Земли сделал возможным широкое использование ранее появившихся принципов и идей для решения задач геодезии.

Первые опыты синхронных фотографических наблюдений ИСЗ для целей геодезии были выполнены в СССР в мае 1961 г. Наблюдения выполнялись на четырех станциях — в Пулково, Харькове, Ташкенте, Николаеве. Объектом наблюдений был американский спутник «Эхо-1». За пять проходов ИСЗ было получено 34 синхронных негатива. По результатам обработки этих негативов координаты станций наблюдений были определены с ошибками порядка 70 м. С 1961 по 1966 г. выполнялось значительное число экспериментов по совершенствованию методик наблюдений и обработки их результатов.

В начале 1966 г. по инициативе ученых Смитсоновской обсерватории (США) был организован международный совместный сеанс наблюдений американского спутника типа Геос, в котором принимали участие СССР, США, Англия, Голландия, Франция, Швеция и ФРГ.

В результате этой работы положение всех станций, участвующих в наблюдениях, были определены в системе «Стандартная Земля II» с ошибками не более 20 м.

В СССР и социалистических странах в рамках сотрудничества по выполнению программ космических исследований ведутся работы по проекту «Большая хорда». По результатам фотографических и лазерных наблюдений ИСЗ будут проложены два векторно-триангуляционных хода «Арктика — Антарктика» и «Восток — Запад» (от Японии до Боливии).

После 1969 г. работы по космической геодезии стали развиваться очень быстро, поскольку стали очевидны возможности быстрого и эффективного решения многих задач геодезии в исключительно короткие сроки и с высокой точностью.

Сама специфика задачи требует при этом организации усилий ученых различных стран. С 1970 г. ученые 14 стран выполняли работы по международной программе ISAGEX (Международный эксперимент спутниковой геодезии), в этой программе приняли участие советские станции в Ужгороде, Риге и Звенигороде. Программа ISAGEX состояла из двух частей: наблюдения с целью решения динамических задач спутниковой геодезии и синхронные наблюдения для определения взаимного положения станций. Одновременно велись наблюдения на 53 станциях, расположенных в различных частях земного шара; из них 11 станций имели лазерные спутниковые дальнометры, 17 — советские камеры АФУ-75, 16 — американские камеры Бейкер-Нанн и 2 станции имели камеры SBG (ГДР).

В результате выполнения программы ISAGEX было получено 14 орбитальных дуг, равномерно покрытых наблюдени-

ями, содержащих, помимо фотографических, более 200 000 лазерных измерений.

Эти данные позволили значительно уточнить параметры гравитационного поля Земли и единую геоцентрическую систему координат.

В настоящее время в различных странах, организациях и ведомствах ведутся разработки аппаратуры для наблюдений ИСЗ, совершенствуются методы математической обработки результатов наблюдений.

Разработан ряд совершенных автоматических фотокамер для наблюдений ИСЗ на фоне звездного неба, разработаны и внедрены спутниковые лазерные дальномеры, получили широкое распространение системы слежения за ИСЗ, основанные на эффекте Доплера. Все это делает космическую геодезию передовой областью геодезической науки, быстрое развитие которой позволит в недалеком будущем разрешить многие важные проблемы геодезии и геодинамики.

Раздел 1.

СИСТЕМЫ КООРДИНАТ И СИСТЕМЫ ВРЕМЕНИ В КОСМИЧЕСКОЙ ГЕОДЕЗИИ

Глава 1.

СИСТЕМЫ КООРДИНАТ В КОСМИЧЕСКОЙ ГЕОДЕЗИИ

§ 1. ИНЕРЦИАЛЬНАЯ СИСТЕМА ОТСЧЕТА

Системой отсчета в физике и астрономии называется геометрическая система координат, дополненная часами, находящимися в каждой точке геометрически твердой среды. При этом геометрически твердой средой называется бесконечное множество точек, расстояния между которыми фиксированы. В классической механике предполагается, что время течет независимо от положения часов, т. е. часы синхронизированы и, следовательно, время течет одинаково во всех системах отсчета. Таким образом, в классической механике пространство предполагается евклидовым, а время представляется евклидовой прямой. Среди вводимых таким образом систем отсчета можно выделить системы, которые благодаря учету ряда специальных динамических свойств отличаются от остальных.

Система отсчета, по отношению к которой свободная материальная точка движется равномерно и прямолинейно, называется инерциальной или галилеевой.

Факт существования инерциальных систем невозможно проверить экспериментально, поскольку в реальных условиях нельзя выделить часть материи, изолировать ее от остального мира, так чтобы движение этой части материи не подвергалось воздействию иных материальных объектов.

Чтобы установить в каждом конкретном случае, может ли система отсчета быть принята за инерциальную, проверяют, сохраняется ли скорость материального объекта, который приближенно считают свободной материальной точкой. Степень этого приближения определяет степень идеализации задачи [1].

В астрономии при изучении движения небесных тел за инерциальную систему отсчета часто принимают декартову систему координат, начало которой находится в центре масс какой-нибудь «неподвижной» звезды, а оси направлены на другие «неподвижные» звезды или галактики. Понятие «неподвижная» звезда условно, в действительности звезды движутся с большими скоростями относительно других материальных

реализуется при помощи фундаментального каталога FK-4 ярких звезд, созданного на основании высокоточных меридианных наблюдений.

Каталог FK-4 был опубликован в 1963 г. Он содержит прямые восхождения α и склонения δ 1535 ярких звезд, а также собственные движения звезд μ_α и μ_δ .

Прямым восхождением светила α называется двугранный угол между небесным меридианом, проходящим через точку весеннего равноденствия Υ , и небесным меридианом светила. Прямое восхождение измеряется в плоскости экватора от точки Υ против движения часовой стрелки и выражается в часовой мере. Оно изменяется от 0 до 24^h .

Склонением δ называется угол между направлением на светило из центра масс Земли и проекцией этого направления на плоскость экватора. Склонение отсчитывается к северу и югу от плоскости экватора вдоль небесного меридиана. Соответственно имеются северные (от 0 до 90°) и южные (от 0 до -90°) склонения.

В каталоге FK-4 координаты звезд отнесены к равноденствию и эпохе 1950,0 и 1975,0 гг.

Как правило, в космических исследованиях в качестве стандартной эпохи принимается $T_0 = 1950,0$. Она соответствует началу Бесселева тропического года, или $22^h 05^m 42^s$ 31 декабря 1949 г., этой эпохе соответствует юлианская дата $JD = 2\,433\,282,4234$. Для удобства вычислений иногда используют так называемые модифицированные юлианские дни (MJD), которым соответствует дата 1858, ноябрь, 17,0 или $JD = 2\,400\,000,5$, поэтому

$$MJD = JD - 2\,400\,000,5. \quad (1.1)$$

Напомним, что Бесселев (фиктивный) год имеет продолжительность среднего тропического года, т. е. 365,2422 средних солнечных суток, и начинается в тот момент, когда средняя долгота Солнца $L_\odot$, уменьшенная на коэффициент годичной аберрации, т. е. на $20,495''$, будет равна $280^\circ 00' 00''$.

Все вычисления в космической геодезии выполняются в прямоугольной системе координат. Введем единичный вектор $\mathbf{r}_{T_0}^0$ направления на светило в системе координат фундаментального каталога:

$$\mathbf{r}_{T_0}^0 = \frac{\mathbf{r}_{T_0}^0}{|\mathbf{r}_{T_0}^0|} = \begin{bmatrix} l_0 \\ m_0 \\ n_0 \end{bmatrix}_{T_0} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_0 \cos \delta_0 \\ \sin \alpha_0 \cos \delta_0 \\ \sin \delta_0 \end{bmatrix}_{T_0}, \quad (1.2)$$

где α_0 и δ_0 — координаты светила, отнесенные к равноденствию эпохи каталога, но исправленные поправками за собственное движение светила за промежуток $T - T_0$, где T — момент наблюдений. Располагая математическими моделями прецессии

и нутации, можно воспроизвести систему отсчета для любой эпохи T , на основании соотношения

$$\mathbf{r}_T^0 = \mathbf{Q} \mathbf{r}_{T_0}^0, \quad (1.3)$$

где $\mathbf{Q}$ — ортогональная матрица, учитывающая совместное действие прецессии и нутации за промежуток $T - T_0$. Матрицу $\mathbf{Q}$ можно рассматривать как оператор, действуя которым на вектор $\mathbf{r}_{T_0}^0$, осуществляют переход от прямоугольной системы координат эпохи каталога T_0 к системе координат эпохи наблюдений T .

Элементами этой матрицы q_{ik} ($i=1, 2, 3$; $k=1, 2, 3$) являются направляющие косинусы углов между осями системы координат на эпоху T и эпоху T_0

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix}. \quad (1.4)$$

Девять направляющих косинусов связаны шестью уравнениями:

$$\begin{aligned} q_{11}^2 + q_{12}^2 + q_{13}^2 &= 1, \\ q_{21}^2 + q_{22}^2 + q_{23}^2 &= 1, \\ q_{31}^2 + q_{32}^2 + q_{33}^2 &= 1, \\ q_{11}q_{21} + q_{12}q_{22} + q_{13}q_{23} &= 0, \\ q_{21}q_{31} + q_{22}q_{32} + q_{23}q_{33} &= 0, \\ q_{11}q_{31} + q_{12}q_{32} + q_{13}q_{33} &= 0, \end{aligned} \quad (1.5)$$

поэтому независимых из них только три, и, следовательно, каждый из девяти элементов может быть представлен в виде нелинейных функций трех независимых углов Эйлера:

$$q_{ik} = q_{ik}(\psi, \varphi, \theta). \quad (1.6)$$

Определитель матрицы $\mathbf{Q}$ равен единице при условии, что обе системы координат правые.

Кроме того, для ортогональных матриц справедливо соотношение

$$\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T, \quad (1.7)$$

т. е. для того, чтобы получить обратную матрицу $\mathbf{Q}^{-1}$, достаточно транспонировать матрицу $\mathbf{Q}$, поэтому

$$\mathbf{Q} \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q} \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{E}, \quad (1.8)$$

где $\mathbf{E}$ — единичная матрица. Обратный переход от системы координат эпохи наблюдений T к системе эпохи каталога сводится к транспонированию матрицы $\mathbf{Q}$

$$\mathbf{r}_T^0 = \mathbf{Q}^T \mathbf{r}_T^0. \quad (1.9)$$

Матрицу Q представим в виде произведения двух ортогональных матриц

$$Q = NP. \quad (1.10)$$

Матрица P учитывает действие прецессии за промежутки $T - T_0$. Действуя ею как оператором на вектор $\mathbf{r}_{T_0}^0$, осуществляют переход от среднего равноденствия эпохи каталога T_0 к среднему равноденствию эпохи наблюдений T , т. е. в результате такого ортогонального преобразования ось Ox направляется в среднюю точку весеннего равноденствия $\Upsilon_{T_{\text{ср}}}$ эпохи наблюдений T , а ось Oz в средний полюс. Матрица N учитывает действие нутации. Действуя ею на вектор $P\mathbf{r}_{T_0}^0$, осуществляют переход от средней точки весеннего равноденствия эпохи наблюдений $\Upsilon_{T_{\text{ср}}}$ к истинной точке весеннего равноденствия $\Upsilon_{T_{\text{ист}}}$ эпохи наблюдений. В результате совместного действия матриц P и N ось Ox системы координат на эпоху T направляется в истинную точку весеннего равноденствия этой эпохи, а ось Oz — в ее истинный полюс. Заметим, что в отличие от прецессии, носящей вековой характер, нутация носит периодический характер, при этом максимальное значение нутационных эффектов не превосходит 10^{-4} .

Переход от средних координат α_0 и δ_0 стандартной эпохи T_0 к истинным координатам α_t и δ_t на эпоху t наблюдений выполняется в следующей последовательности.

1. Если редуцированию подлежит направление на звезду, то каталожные значения координат звезды α_0 и δ_0 исправляют поправками за собственное движение звезды на интервале $t - T_0$:

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_0 + \Delta\alpha = \alpha_0 + \mu_\alpha(t - T_0), \\ \delta &= \delta_0 + \Delta\delta = \delta_0 + \mu_\delta(t - T_0). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Для близполюсных звезд, а также звезд, имеющих значительное собственное движение, иногда учитывают члены второго порядка: $\frac{d\mu_\alpha}{dt} \cdot \frac{(t - T_0)^2}{2}$ и $\frac{d\mu_\delta}{dt} \cdot \frac{(t - T_0)^2}{2}$, причем производные вычисляют по формулам:

$$\begin{aligned} \frac{d\mu_\alpha}{dt} &= -\frac{2\mu_\alpha\mu_\delta \operatorname{tg} \delta}{\rho}, \\ \frac{d\mu_\delta}{dt} &= -\frac{\mu_\alpha^2 \sin 2\delta}{2\rho}, \end{aligned} \quad (1.12)$$

где $\rho = 206\,264, 8062''$.

2. Вычисляют компоненты единичного вектора $\mathbf{r}^0$ направления на звезду, исправленные поправками за собственное движение,

$$\mathbf{r}^0 = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \delta \\ \sin \alpha \cos \delta \\ \sin \delta \end{pmatrix}. \quad (1.13)$$

3. Вычисляют эйлеровы углы матрицы прецессии $\mathbf{P}$ $\psi = \zeta_0$, $\varphi = z$, $\theta = \theta$, называемые прецессионными параметрами Ньюкома — Андуайе (см. рис. 1):

$$\zeta_0 = MY_0 = A_0X_0,$$

$$z = Y_1M = A_1X_1,$$

$$\theta = P_0P_1,$$

при этом величина $X_0M = 90^\circ - \zeta_0$ равна прямому восхождению точки M экватора эпохи t на экваторе Q_0 эпохи T_0 , отсчитываемому от точки весеннего равноденствия Υ_0 , величина $X_1M = 90^\circ + Z$ есть прямое восхождение точки M , отсчитываемое от точки весеннего равноденствия эпохи t Υ_t , а угол θ — угол между плоскостями экваторов для эпох T_0 и t_1 .

Теперь элементы матрицы прецессии можно выразить как функции параметров Ньюкома — Андуайе:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}, \quad (1.14)$$

где элементы p_{ih} имеют вид:

$$\begin{aligned} p_{11} &= -\sin \zeta_0 \sin z + \cos \zeta_0 \cos z \cos \theta, \\ p_{12} &= -\cos \zeta_0 \sin z - \sin \zeta_0 \cos z \cos \theta, \\ p_{13} &= -\cos z \sin \theta, \\ p_{21} &= \sin \zeta_0 \cos z + \cos \zeta_0 \sin z \cos \theta, \\ p_{22} &= \cos \zeta_0 \cos z - \sin \zeta_0 \sin z \cos \theta, \\ p_{23} &= -\sin z \sin \theta, \\ p_{31} &= \cos \zeta_0 \sin \theta, \\ p_{32} &= -\sin \zeta_0 \sin \theta, \\ p_{33} &= \cos \theta. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Прецессионные параметры ζ_0 , z и θ впервые были введены Ньюкомом (1895 г.), впоследствии они были уточнены Андуайе в соответствии с новыми значениями астрономических постоянных, принятыми в Системе астрономических постоянных Международного астрономического союза (МАС) в 1976 г.

Для стандартной эпохи $T_0=1950,0$ уточненные в соответствии с Системой постоянных 1976 г. разложения ζ_0 , z и θ имеют вид:

$$\begin{aligned}\zeta_0 &= 2304,952''T + 0,3022''T^2 + 0,0180''T^3, \\ z &= 2304,952''T + 1,0951''T^2 + 0,0183''T^3, \\ \theta &= 2004,257''T - 0,4268''T^2 - 0,0418''T^3,\end{aligned}\tag{1.16}$$

где $T = t - T_0$ и выражается в юлианских столетиях:

$$T = \frac{\text{JD}(t) - \text{JD}(1950,0)}{36\,524,22},\tag{1.17}$$

причем стандартной эпохе $T_0=1950,0$ будет соответствовать юлианская дата $\text{JD}(1950,0) = 2\,433\,282,4234$.

В соответствии с резолюцией № 2 XVI Генеральной ассамблеи МАС 1976 г. новой стандартной эпохой, обозначаемой J 2000,0 следует считать дату 2000 январь 1,5, совпадающую с юлианской датой $\text{JD} = 2\,451\,545,0$.

Для новой стандартной эпохи точные разложения ζ_0 , z и θ имеют вид:

$$\begin{aligned}\zeta_0 &= (2306,2181'' + 1,39656''T - 0,000139''T^2)\tau + \\ &+ (0,30188'' - 0,000345''T)\tau^2 + 0,017998''\tau^3;\end{aligned}\tag{1.18}$$

$$\begin{aligned}z &= (2306,2181'' + 1,39656''T - 0,000139''T^2)\tau + \\ &+ (1,09468'' + 0,000066''T)\tau^2 + 0,018203''\tau^3;\end{aligned}\tag{1.19}$$

$$\begin{aligned}\theta &= (2004,3109'' - 0,85330''T - 0,000217''T^2)\tau + \\ &+ (-0,42665'' - 0,000217''T)\tau^2 - 0,041833''\tau^3,\end{aligned}\tag{1.20}$$

где

$$T = [\text{JD}(E_F) - \text{JD}(E_0)]/36\,525;\tag{1.21}$$

$$\tau = [\text{JD}(t) - \text{JD}(E_F)]/36\,525.\tag{1.22}$$

В формулах (1.21) и (1.22) $\text{JD}(E_0)$ — юлианская дата для стандартной эпохи J 2000,0; $\text{JD}(E_F)$ — юлианская дата некоторой произвольной фиксированной эпохи; $\text{JD}(t)$ — юлианская дата эпохи наблюдений t .

Аргументом во всех приведенных формулах для вычисления прецессионных параметров является юлианская дата JD. За начало отсчета юлианских дней принято 1 января 4713 г. до н. э.; при этом юлианский день отсчитывают от среднего гринвичского полудня до полудня следующего дня, поэтому полдень делит юлианский день пополам. В табл. 1 содержатся необходимые данные для перехода от календарной даты к юлианским дням.

Пример. Сколько юлианских дней пройдет к моменту всемирного времени 1985, январь, 1, 6^h 48^m?

Решение. Так как юлианские дни измеряются от полудня до полудня, то полночь, начало 1 января, настанет через 12 ч после 31 декабря. Из табл. 1 для 31 декабря 1985 (январь 0) выбираем

JD (полдень) = 2 446 066,0.

К этому числу добавляем 12 ч, т. е. 0,5 суток, тогда

JD (полночь) = 2 446 066,5.

Переводим $6^h 48^m$ в доли суток:

$$\Delta = 6/24 + 48/60 \times 24 = 0,283\ 333$$

и, прибавляя к ранее полученному результату, получаем

$$JD = 2\ 446\ 066,783\ 333.$$

На любую гринвичскую дату можно вычислить JD по следующему алгоритму.

1. Обозначим:

y — номер года,
 m — номер месяца,
 d — число суток.

$$y = 1985,
m = 1,
d = 1,283\ 333.$$

2. Если $m = 1$ или 2, положить:

$$y' = y - 1,
m' = m + 12.$$

$$y' = 1984,
m' = 13.$$

Если $m > 2$, положить:

$$y' = y,
m' = m.$$

—

3. Вычислить:

A (целую часть от $y'/100$),

$$A = [1984/100] = 19,$$

$B = 2 - A + \text{целая часть от } A/4$.

$$B = 2 - 19 + [19/4] = -13.$$

4. Вычислить C (целую часть от $365,25 y'$).

$$C = [365,25 \cdot 1984] = 724\ 656.$$

5. Вычислить D (целую часть от $30,6001 (m' + 1)$).

$$D = [30,6001 \cdot 14] = 428.$$

6. Найти $JD = 1\ 720\ 994,5 + B + C + D + d$.

$$JD = 2\ 446\ 066,783\ 333.$$

Таким образом, обоими методами получен один и тот же результат. Приведенный алгоритм удобен для составления программы вычисления JD на ЭВМ.

Для вычисления матрицы нутации N представим смещение истинного полюса эпохи t относительно его среднего значения в виде составляющей нутации по долготе $\Delta\psi_s$, которая изменяет положение точки весеннего равноденствия Υ_t и составляющую в наклоне $\Delta\epsilon_s$.

Теория вращения несферической Земли в поле тяготения Солнца и Луны позволяет разложить компоненты нутации в ряды по косинусам и синусам фундаментальных аргументов теорий движения Луны и Солнца.

Матрица нутации, элементы которой выражены через составляющие нутации $\Delta\psi_s$ и $\Delta\epsilon_s$, обычно представляется с учетом членов первого порядка в виде:

$$N = \begin{bmatrix} 1 & -\Delta\psi_s \cos \epsilon & -\Delta\psi_s \sin \epsilon \\ \Delta\psi_s \cos \epsilon & 1 & -\Delta\epsilon_s \\ \Delta\psi_s \sin \epsilon & \Delta\epsilon_s & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.23)$$

где ϵ — наклон эклиптики к плоскости экватора в эпоху наблюдений t . Поскольку нутация всегда меньше 10^{-4} , то пренебре-

Т а б л и ц а 1. Число юлианских дней от гринвичского полудня 1 января 4713 г. для периода с 1984 по 1995 г.

Год	Январь	Февраль	Март	Апрель	Май	Июнь
1984	244 5700	5731	5760	5791	5821	5852
1985	6066	6097	6125	6156	6186	6217
1986	6431	6462	6490	6521	6551	6582
1987	6796	6827	6855	6886	6916	6947
1988	7161	7192	7221	7252	7282	7313
1989	7527	7558	7586	7617	7647	7678
1990	7892	7923	7951	7982	8012	8043
1991	8257	8288	8316	8347	8377	8408
1992	8622	8653	8682	8713	8743	8774
1993	8988	9019	9047	9078	9108	9139
1994	9353	9384	9412	9443	9473	9504
1995	9718	9749	9777	9808	9838	9869
1996	245 0083					

Пр о д о л ж е н и е т а б л . 1

Год	Июль	Август	Сентябрь	Октябрь	Ноябрь	Декабрь
1984	5882	5913	5944	5974	6005	6035
1985	6247	6278	6309	6339	6370	6400
1986	6612	6647	6674	6704	6735	6765
1987	6977	7008	7039	7069	7100	7130
1988	7343	7374	7405	7435	7466	7496
1989	7708	7739	7770	7800	7831	7861
1990	8073	8104	8135	8165	8196	8226
1991	8438	8460	8500	8530	8561	8591
1992	8804	8835	8866	8896	8927	8957
1993	9169	9200	9231	9261	9292	9322
1994	9534	9565	9596	9626	9657	9687
1995	9899	9930	9961	9991	0022	0052
1996						

жение членами второго порядка приведет к ошибкам не более 10^{-8} или 0,002".

Для нутации по долготе на основании теории Вуларда можно написать следующее выражение:

$$\begin{aligned}
 \Delta\psi_s = \Delta\psi + d\psi = & [-(17,2327'' + 0,01737''T') \sin \Omega + \\
 & + (0,2088'' + 0,00002''T') \sin 2\Omega - (1,2729'' + 0,00013''T') \sin 2L + \\
 & + (0,1261'' - 0,00031''T') \sin (L - \pi) + 0,0214'' \sin (L + \pi) - \\
 & - 0,0497'' \sin (3L - \pi) + 0,0124'' \sin (2L - \Omega)] - \\
 & - 0,2037'' \sin 2\zeta + 0,0675'' \sin g_1 - 0,0342'' \sin (2\zeta - \Omega) - \\
 & - 0,0261'' \sin (2\zeta + g_1) + 0,0114'' \sin (2\zeta - g_1) - \\
 & - 0,0149'' \sin (2L + g_1 - 2\zeta).
 \end{aligned}$$

Формула (1.24) содержит долгопериодические $\Delta\psi$ и короткопериодические $d\psi$ члены, обеспечивающие точность вычислений с ошибкой менее 0,01" до 2100 года. Аргументы Ω , L , π , ζ , g_1 , входящие в выражение (1.24), вычисляются по формулам Брауна и Ньюкома:

тропическая долгота восходящего узла Луны Ω

$$\Omega = 259,18328^\circ - 1934,14201^\circ T' + 0,00208^\circ (T')^2 + 0,000002^\circ (T')^3; \quad (1.25)$$

средняя тропическая долгота Солнца L

$$L = 279,69668^\circ + 36000,76892^\circ T' + 0,00030^\circ (T')^2; \quad (1.26)$$

тропическая долгота перигея Солнца π

$$\pi = 281,22083^\circ + 1,71902^\circ T' + 0,00045^\circ (T')^2 + 0,000003^\circ (T')^3; \quad (1.27)$$

средняя тропическая долгота Луны ζ

$$\zeta = 270,43416^\circ + 481267,883147^\circ T' + 0,00198^\circ (T')^2 + 0,000002^\circ (T')^3; \quad (1.28)$$

средняя аномалия Луны g_1

$$g_1 = 296^\circ 06' 16,59'' + 477198^\circ 50' 56,79'' T' + 33,09'' (T')^2 + 0,0518'' (T')^3. \quad (1.29)$$

Наклон эклиптики к плоскости экватора ϵ , входящий в элементы матрицы нутации, вычисляется по формуле

$$\epsilon = 23,45229444^\circ - 0,13012500^\circ \cdot 10^{-1} T' - 0,16388889^\circ \cdot 10^{-5} (T')^2. \quad (1.30)$$

Совершенно аналогично определяется составляющая нутации по наклонению:

$$\begin{aligned} \Delta\epsilon_s = \Delta\epsilon + d\epsilon = & [(9,2100'' + 0,00091'' T') \cos \Omega - \\ & - (0,0904'' - 0,00004'' T') \cos 2\Omega + (0,5522'' - 0,00029'' T') \cos 2L + \\ & + (0,0216'' - 0,00006'' T') \cos (3L - \pi)] + (0,0884'' - \\ & - 0,00005'' T') \cos 2\zeta + 0,0183'' \cos (2\zeta - \Omega) + (0,0113'' - \\ & - 0,00001'' T') \cos (2\zeta + g_1). \end{aligned} \quad (1.31)$$

Во всех формулах для учета нутации аргумент T' вычисляется по формуле

$$T' = \frac{\text{JD}(t) - 2415020,0}{36525}, \quad (1.32)$$

где 2 415 020,0 — юлианская дата, соответствующая календарной дате 1900 январь 0,5 всемирного времени.

В формулах (1.24) и (1.31) для вычисления $\Delta\psi$ и $\Delta\epsilon$ члены, заключенные в квадратные скобки, являются долгопериодическими с периодом от 180 до 6800 сут, все остальные члены учитывают короткопериодическую часть нутации с периодом от 10 до 28 сут.

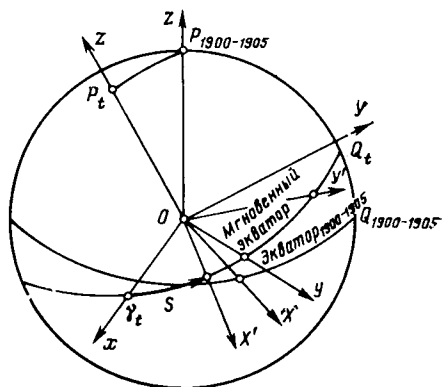


Рис. 2. Инерциальная $Oxyz$ и Гринвичская $OXYZ$ системы координат

§ 2. ГЕОЦЕНТРИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ, ВРАЩАЮЩИЕСЯ ВМЕСТЕ С ЗЕМЛЕЙ

Гринвичская система координат

Гринвичская система координат $X Y Z$ определяется следующим образом. Ее начало лежит в центре масс Земли; ось Z направлена к среднему северному полюсу Земли 1900 — 1905 гг., определенному Международной службой движения полюсов (МСДП); ось X параллельна геоцентрическому меридиану Гринвича и лежит в плоскости среднего экватора Земли 1900 — 1905 гг., т. е. в плоскости, перпендикулярной к средней оси вращения и проходящей через центр масс Земли (рис. 2).

Переход от истинной инерциальной системы координат на эпоху наблюдений к Гринвичской осуществляется в два этапа. На первом этапе истинная система координат на эпоху t поворачивается вокруг оси Z на угол, численно равный истинному звездному времени S в Гринвиче:

$$R_t^{0'} = S R_t^0, \quad (2.1)$$

где S — матрица вращения на угол, равный истинному звездному времени в Гринвиче на эпоху t . Она имеет вид:

$$S = \begin{bmatrix} \cos S & \sin S & 0 \\ -\sin S & \cos S & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_t. \quad (2.2)$$

Истинное звездное время в Гринвиче можно определить по формуле

$$S = S_{\text{ср}} + N_{\alpha},$$

где $S_{\text{ср}}$ — среднее звездное время в Гринвиче; N_{α} — нутация по прямому восхождению.

На втором этапе необходимо направить ось Z в средний полюс эпохи 1900—1905 гг. Для выполнения этого преобразова-

ния необходимо располагать координатами мгновенного полюса на эпоху наблюдений t относительно среднего полюса эпохи 1900—1905 гг.

Вычисление координат истинного полюса выполняют по наблюдениям пяти широтных станций МСДП (в Карлсфорте, Гейтерсбурге, Юкайе, Мидзусаве, Китабе), расположенных на одной параллели $\varphi = 39^{\circ}08'$, такое расположение станций исключает влияние ошибок звездных положений.

Движение истинного полюса изучается в системе прямоугольных координат $O\bar{X}\bar{Y}$, начало которой O совпадает со средним положением полюса 1900—1905 гг., ось $O\bar{X}$ направлена по касательной к меридиану Гринвича, ось $O\bar{Y}$ — по касательной к меридиану, отстоящему от Гринвича на 90° к западу. МСДП определяет положение среднего полюса в этой системе (координаты x, y в угл. с) по наблюдениям, выполненным в течение шести лет. Это положение называют средним положением полюса за данный шестилетний период.

Наблюдения показывают, что средние полюсы имеют вековую тенденцию смещения в направлении меридиана с долготой $\lambda = 285^{\circ}$ со скоростью $0,003—0,006''$ в год.

Среднее положение полюса 1900—1905 г. определено номинальными значениями широт пяти широтных обсерваторий МСДП, принятыми в качестве абсолютных постоянных, это среднее положение полюса называется Международным условным началом (МУН). В табл. 2 приводятся координаты среднего полюса за шестилетие относительно Международного условного начала.

Определим элементы матрицы P , осуществляющей переход от мгновенного гринвичского геоцентрического вектора R_t^0 к вектору R_G^0 на эпоху 1900 — 1905 гг.:

$$R_G^0 = PR_t^0. \quad (2.4)$$

Очевидно, что матрица P получится как результат двух вращений:

$$P = q(-x_P) p(-y_P),$$

Т а б л и ц а 2. Координаты среднего полюса

Средняя эпоха	x_0	y_0	Средняя эпоха	x_0	y_0
1903	0,000	0,000	1938	0,031	0,139
1909	—0,007	0,043	1952	0,074	0,142
1915	0,001	0,076	1957	0,071	0,178
1927	0,039	0,080	1962	0,060	0,218
1932	0,027	0,130			

где

$$q(-x_p) = \begin{bmatrix} \cos x_p & 0 & \sin x_p \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin x_p & 0 & \cos x_p \end{bmatrix}; \quad (2.5)$$

$$p(-y_p) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos y_p & -\sin y_p \\ 0 & \sin y_p & \cos y_p \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

Поскольку x и y меньше $0,3''$, можно заменить синусы значениями самих углов в радианах, а косинусы принять равными единице. Тогда

$$q(-x_p) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_p \\ 0 & 1 & 0 \\ -x_p & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (2.7)$$

$$p(-y_p) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -y_p \\ 0 & y_p & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Перемножая матрицы (2.7) и (2.8), получим

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_p \\ 0 & 1 & -y_p \\ -x_p & y_p & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

Переход от системы координат фундаментального каталога к Гринвичской системе координат

Основным преобразованием координат в космической геодезии является переход от системы координат фундаментального каталога к Гринвичской системе координат. Пусть единичный геоцентрический вектор $\mathbf{r}_{T_0}^0$ задан средними координатами α_0 и δ_0 на эпоху фундаментального каталога T_0 . Требуется определить направление этого вектора $\mathbf{R}_G^0$ в Гринвичской системе координат.

Если объект — звезда, то координаты α_0 и δ_0 исправляют за составляющие собственного движения μ_α и μ_δ за промежуток $t - T_0$, где t — эпоха наблюдений. По исправленным за собственное движение координатам вычисляют компоненты вектора $\mathbf{r}_{T_0}^0$:

$$\mathbf{r}_{T_0}^0 = \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \delta \\ \sin \alpha \cos \delta \\ \sin \delta \end{bmatrix}.$$

Затем вычисляют элементы матрицы прецессии $\mathbf{P}$ и умножают ее на вектор $\mathbf{r}_{T_0}^0$, получают направление на объект, отнесенное к средним равноденствию и экватору эпохи наблюдений t :

$$\mathbf{r}_{t_{cp}}^0 = \mathbf{P}\mathbf{r}_{T_0}^0. \quad (2.10)$$

Вычисляют элементы матрицы нутации $\mathbf{N}$. Действуя этой матрицей на вектор $\mathbf{r}_{t_{cp}}^0$, получают направление на объект, отнесенное к истинным экватору и равноденствию эпохи t :

$$\mathbf{r}_{t_{ист}}^0 = \mathbf{N}\mathbf{r}_{t_{cp}}^0. \quad (2.11)$$

Вычисляют элементы матрицы $\mathbf{S}$ поворота вокруг мгновенной оси Z на угол, численно равный истинному звездному времени в Гринвиче на эпоху наблюдений t . Действуя этой матрицей на вектор $\mathbf{r}_{t_{ист}}^0$, переходят к мгновенным гринвичскому экватору и меридиану на эпоху t :

$$\mathbf{R}_t^0 = \mathbf{S}\mathbf{r}_{t_{ист}}^0. \quad (2.12)$$

Вычисляют элементы матрицы $\mathbf{P}$ учета движения полюса. Действуя этой матрицей на вектор $\mathbf{R}_t^0$, переходят к средним гринвичскому экватору и полюсу на эпоху 1900 — 1905 гг.:

$$\mathbf{R}_G^0 = \mathbf{P}\mathbf{R}_t^0. \quad (2.13)$$

Объединяя операции (2.12), (2.13) в одну, получают алгоритм перехода от инерциальной системы координат фундаментального каталога к Гринвичской системе координат:

$$\mathbf{R}_G^0 = \mathbf{P}\mathbf{S}\mathbf{N}\mathbf{P}\mathbf{r}_{T_0}^0. \quad (2.14)$$

Преобразование координат и составляющих скорости при переходе от инерциальной системы координат к Гринвичской и наоборот

При решении динамических задач космической геодезии возникает необходимость преобразования координат и составляющих скорости спутника из инерциальной системы координат в Гринвичскую и наоборот. Для решения этой задачи введем вектор $\mathbf{q}$, составленный из координат ИСЗ x, y, z и составляющих скорости $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$; $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$; $\dot{z} = \frac{dz}{dt}$ в инерциальной системе координат:

$$\mathbf{q}^T = [x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}], \quad (2.15)$$

где $\mathbf{t}$ — символ, обозначающий операцию транспонирования.

Тогда преобразование координат и составляющих скорости ИСЗ из инерциальной системы координат в Гринвичскую

можно представить в виде соотношения:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{G}\mathbf{q}, \quad (2.16)$$

где $\mathbf{Q}^T = (X, Y, Z, \dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z})$ — вектор координат и составляющих скорости в Гринвичской системе координат, а $\mathbf{G}$ — матрица преобразования размера 6×6 , элементы которой требуется определить.

Обратный переход от координат и составляющих скорости в Гринвичской системе к их значениям в инерциальной системе координат выполняется на основании соотношения

$$\mathbf{q} = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{Q}, \quad (2.17)$$

где $\mathbf{G}^{-1}$ — обратная матрица.

Вращение Гринвичской системы координат происходит против часовой стрелки вокруг положительного направления оси Z с угловой скоростью

$$\omega_{\oplus} = \frac{dS}{dt} = 0,729211508 \cdot 10^{-4} \text{ рад/с},$$

которую мы будем считать практически постоянной.

Если звездное время в Гринвиче S уже приведено к среднему полюсу 1900 — 1905 гг., то связь гринвичских и инерциальных координат устанавливается матрицей вращения на угол, численно равный S :

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos S & \sin S & 0 \\ -\sin S & \cos S & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{S} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad (2.18)$$

где $\mathbf{S}$ — матрица вращения.

Дифференцируя матрицу связи $\mathbf{S}$, получим

$$\dot{\mathbf{S}} = \frac{d\mathbf{S}}{dt} \begin{bmatrix} -\sin S & \cos S & 0 \\ -\cos S & -\sin S & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

Теперь для составляющих скорости в Гринвичской системе координат будем иметь:

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} = \mathbf{S} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} + \dot{\mathbf{S}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad (2.20)$$

или

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos S & \sin S & 0 \\ -\sin S & \cos S & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} +$$

$$+ \omega_{\oplus} \begin{bmatrix} -\sin S & \cos S & 0 \\ -\cos S & -\sin S & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

С учетом выражений (2.18) — (2.20) получим матрицу $\mathbf{G}$ в следующем виде:

$$\mathbf{G} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \cos S & \sin S & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin S & \cos S & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\omega_{\oplus} \sin S & +\omega_{\oplus} \cos S & 0 & \cos S & \sin S & 0 \\ -\omega_{\oplus} \cos S & -\omega_{\oplus} \sin S & 0 & -\sin S & \cos S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]. \quad (2.22)$$

Для получения обратной матрицы $\mathbf{G}^{-1}$ достаточно транспонировать каждую из подматриц матрицы $\mathbf{G}$:

$$\mathbf{G}^{-1} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \cos S & -\sin S & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin S & \cos S & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\omega_{\oplus} \sin S & -\omega_{\oplus} \cos S & 0 & \cos S & -\sin S & 0 \\ \omega_{\oplus} \cos S & -\omega_{\oplus} \sin S & 0 & \sin S & \cos S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]. \quad (2.23)$$

Геодезические системы координат

Геодезические системы координат, которые используются при обработке астрономо-геодезических сетей, определяются параметрами $\tilde{a}$ и e (большая полуось и эксцентриситет) принятого референц-эллипсоида, а также исходными геодезическими данными — геодезическими координатами исходного пункта. Ориентировка осей геодезических систем задается астрономическими наблюдениями, поэтому можно положить, что оси геодезической системы координат практически параллельны осям Гринвичской системы координат, однако, в зависимости от порядка учета движения полюсов и установления начала счета долгот, различные референсные геодезические системы могут иметь взаимный перекося на небольшие углы, порядка угловой секунды и менее.

Началом прямоугольной геодезической системы координат $OX_r Y_r Z_r$ является центр принятого эллипсоида, который расположен вблизи центра масс Земли, ось OZ_r совпадает с осью вращения и положительна к северному полюсу, ось OX_r лежит в плоскости экватора и направлена в точку пересечения экватора с геодезическим меридианом Гринвича, ось OY_r дополняет систему до тройки правой ориентации и положительна к востоку.

Положения точек в пространстве также часто задаются эллипсоидальными геодезическими координатами B, L, H .

Для некоторой точки j пространства геодезическая широта B есть угол между нормалью к эллипсоиду в точке j и плоскостью экватора, геодезической долготой L является двугранный угол между плоскостью начального (Гринвичского) меридиана и меридиана точки j' . Высота точки над эллипсоидом отсчитывается вдоль нормали от поверхности эллипсоида.

Прямоугольные геодезические координаты связаны с эллипсоидальными координатами B, L, H соотношениями:

$$\begin{aligned} X_r &= (N + H) \cos B \cos L, \\ Y_r &= (N + H) \cos B \sin L, \\ Z_r &= (N + H - N\tilde{e}^2) \sin B, \end{aligned} \quad (2.24)$$

где $N = j'j''$ — радиус кривизны первого вертикала, т. е. длина внутренней нормали к поверхности эллипсоида (нормаль пересекается с осью вращения OZ_r на расстоянии $Oj'' = N\tilde{e}^2 \sin B$ от центра эллипсоида O); $\tilde{e}$ — эксцентриситет меридианного эллипса. Нормаль N является функцией широты и определяется по формуле

$$\begin{aligned} N &= \frac{\tilde{a}}{\sqrt{1 - \tilde{e}^2 \sin^2 B}} = \tilde{a} \left(1 + \frac{\tilde{a}^2}{2} \sin^2 B + \frac{3}{8} \tilde{e}^4 \sin^4 B + \right. \\ &\quad \left. + \frac{5}{16} \tilde{e}^6 \sin^6 B \dots \right), \end{aligned} \quad (2.25)$$

где $\tilde{a}$ — большая полуось эллипсоида вращения.

В общем случае обратный переход от прямоугольных координат X_r, Y_r, Z_r к эллипсоидальным B, L, H выполняется методом последовательных приближений, поскольку геодезическая широта B не может быть связана замкнутыми выражениями с прямоугольными координатами X_r, Y_r, Z_r .

Существует много вариантов решения этой задачи. Из них наиболее удачным является следующий алгоритм, не требующий приближений:

вычисляется радиус параллели R по формуле

$$R = \sqrt{X_r^2 + Y_r^2}; \quad (2.26)$$

вводится вспомогательная функция по формуле

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{Z_r}{R} \frac{1}{\sqrt{1 - \tilde{e}^2}}; \quad (2.27)$$

вычисляется геодезическая широта B по формуле

$$\operatorname{tg} B = \frac{Z_r + \frac{\tilde{a}^2 \tilde{e}^2}{\sqrt{1 - \tilde{e}^2}} \sin^3 \theta}{R - \tilde{a} \tilde{e}^2 \cos^3 \theta}. \quad (2.28)$$

Наибольшая погрешность определения широты по указанному алгоритму имеет место при $H = 2\tilde{a}$ и даже в этом случае не превосходит $0,002''$.

Геодезическую долготу L и высоту H вычисляют по формулам

$$\operatorname{tg} L = Y_r / X_r, \quad (2.29)$$

$$H = \frac{X_r}{\cos B \cos L} - N = \frac{Y_r}{\cos B \sin L} = \frac{Z_r}{\sin B} - N (1 - \tilde{e}^2). \quad (2.30)$$

Для перехода от геодезической системы координат к Гринвичской следует воспользоваться общей формулой преобразования координат

$$\mathbf{R}_G = \mathbf{R}_r + \delta \mathbf{R}_r + \mathbf{P}_a \delta \mathbf{R}_0, \quad (2.31)$$

где $\mathbf{R}_G = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$ — вектор положения в Гринвичской системе

координат; $\mathbf{R}_r = \begin{bmatrix} X_r \\ Y_r \\ Z_r \end{bmatrix}$ — вектор положения в геодезической

системе координат; $\delta \mathbf{R}_r = \begin{bmatrix} \delta X_r \\ \delta Y_r \\ \delta Z_r \end{bmatrix}$ — вектор сдвига начала

геодезической системы координат относительно начала Гринвичской системы; $\delta \mathbf{R}_0 = \begin{bmatrix} dA \\ d\xi \\ d\eta \end{bmatrix}$ — единичный вектор погрешности ориентировки геодезической системы координат; $\mathbf{P}_a =$

$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ матрица перехода к Гринвичской системе координат.

Компонентами вектора $\delta \mathbf{R}_0$ являются составляющие ошибки ориентировки геодезической системы координат в азимуте dA , наклоне $d\xi$ в плоскости меридиана и наклоне в плоскости первого вертикала $d\eta$ (в рад).

Элементы матрицы Π получают по формулам:

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= \sin B_0 \Delta Y - \cos B_0 \sin L_0 \Delta Z, \\
 a_{12} &= \cos L_0 \Delta Z, \\
 a_{13} &= -\cos B_0 \Delta Y - \sin B_0 \sin L_0 \Delta Z, \\
 a_{21} &= -\sin B_0 \Delta X + \cos B_0 \cos L_0 \Delta Z, \\
 a_{22} &= \sin L_0 \Delta Z, \\
 a_{23} &= \cos B_0 \Delta x + \sin B_0 \cos L_0 \Delta Z, \\
 a_{31} &= \cos B_0 \sin L_0 \Delta x - \cos B_0 \cos L_0 \Delta Y, \\
 a_{32} &= \cos L_0 \Delta X + \sin L_0 \Delta Y, \\
 a_{33} &= \sin B_0 \sin L_0 \Delta X - \sin B_0 \cos L_0 \Delta Y,
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

где $\Delta X = X_r - X_0$; $\Delta Y = Y_r - Y_0$; $\Delta Z = Z_r - Z_0$, а X_0 , Y_0 и Z_0 — координаты начала геодезической системы.

Как уже было сказано выше, ошибки астрономической ориентации осей геодезических систем координат невелики и не превышают ошибок современных астрономических измерений. В большинстве случаев величины dA , $d\xi$ и $d\eta$ неизвестны. Поэтому часто полагают, что оси геодезической системы параллельны осям Гринвичской системы координат, т. е. что $dA = d\xi = d\eta = 0$ и имеется только сдвиг. В этом случае переход к Гринвичской системе выполняется по формуле

$$\mathbf{R}_G = \mathbf{R}_r + \delta \mathbf{R}_r. \tag{2.33}$$

§ 3. ТОПОЦЕНТРИЧЕСКИЕ И ОРБИТАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

Топоцентрические системы координат

В топоцентрических системах координат начало совпадает с точкой физической поверхности Земли, которой чаще всего бывает пункт наблюдений ИСЗ, а оси параллельны соответствующим осям заданной геоцентрической системы. По результатам измерений на пунктах наблюдения можно получить значения топоцентрических координат ИСЗ. Так из фотографических наблюдений в результате обработки спутниковых негативов определяют топоцентрическое прямое восхождение α' и склонение δ' ИСЗ, из лазерных наблюдений получают топоцентрическое расстояние ρ .

Начало i топоцентрической инерциальной системы координат $ix'y'z'$ (рис. 3) находится в точке физической поверхности Земли, а оси параллельны осям инерциальной геоцентрической системы координат.

Плоскость $ix'y'$, параллельная плоскости экватора, называется топоцентрическим экватором; топоцентрическим прямым

восхождением является угол α' , отсчитанный от положительного направления оси ix' до проекции ij' топоцентрического расстояния ρ на плоскость топоцентрического экватора; топоцентрическим склонением δ' является угол между топоцентрическим расстоянием ρ и его проекцией ij' на плоскость топоцентрического экватора.

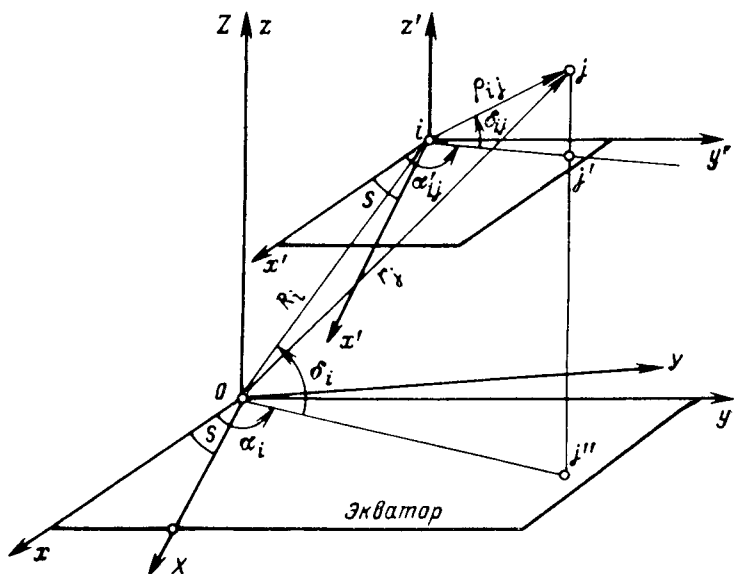


Рис. 3. Топоцентрические координаты

Для некоторого момента t на рис. 3 изображены геоцентрический вектор ИСЗ $\mathbf{r}$, топоцентрический вектор ИСЗ ρ и геоцентрический вектор $\mathbf{R}$ пункта наблюдений.

Из векторного треугольника oij получаем

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \rho. \quad (3.1)$$

Это соотношение является основным при решении многих задач космической геодезии. Из него следует, что для определения геоцентрических координат пункта наблюдений ИСЗ необходимо для одного и того же физического момента определить геоцентрические и топоцентрические координаты ИСЗ. При этом геоцентрические координаты ИСЗ получаются на основании теории движения относительно центра масс Земли, а топоцентрические — по результатам наблюдений на пунктах.

Записывая уравнение (3.1) в координатной форме, получим

$$\begin{aligned} x &= r \cos \alpha \cos \delta - \rho \cos \alpha' \cos \delta', \\ y &= r \sin \alpha \cos \delta - \rho \sin \alpha' \cos \delta', \\ z &= r \sin \delta - \rho \sin \delta'. \end{aligned} \quad (3.2)$$

В настоящее время существуют измерительные системы, которые позволяют получить для данного момента все три компоненты α' , δ' , ρ топоцентрического вектора ρ . Если известна орбита ИСЗ, то для этого же момента можно вычислить компоненты геоцентрического вектора ИСЗ r , α , δ и определить по формулам (3.2) координаты пункта наблюдений.

Если известны геоцентрические координаты пункта наблюдений и измерен ряд топоцентрических координат ρ_1 , α'_1 , δ'_1 ; ρ_2 , α'_2 , δ'_2 ..., то можно определить орбиту ИСЗ.

На рис. 3 iX' и OX — направления абсцисс Гринвичской топоцентрической и геоцентрической систем координат. Поэтому уравнения (3.2) для Гринвичской системы координат будут следующими:

$$\begin{aligned} X &= r \cos(\alpha - S) \cos \delta - \rho \cos(\alpha' - S) \cos \delta', \\ Y &= r \sin(\alpha - S) \cos \delta - \rho \sin(\alpha' - S) \cos \delta', \\ Z &= r \sin \delta - \rho \sin \delta'. \end{aligned} \quad (3.3)$$

При использовании теодолитов и других угломерных приборов, вертикальную ось которых устанавливают по уровню, определяют угловые координаты — астрономический азимут A_a и зенитное расстояние z_a , отсчитываемые относительно отвесной линии, т. е. направления нормали к геоиду в точке установки инструмента. Астрономическим азимутом A_a называется угол, отсчитанный в плоскости астрономического топоцентрического экватора Q' от северного конца астрономического меридиана по часовой стрелке до проекции ij топоцентрического направления на плоскость топоцентрического астрономического экватора, а астрономическим зенитным расстоянием z_a — углом между отвесной линией и топоцентрическим вектором ρ .

Из курса высшей геодезии известно, что переход от астрономического азимута A_a и астрономического зенитного расстояния z_a к геодезическому азимуту A_r и геодезическому зенитному расстоянию z_r можно выполнить по формулам

$$A_r = A_a - (\lambda - L) \sin \varphi + \frac{\eta \cos A_a - \xi \sin A_a}{\operatorname{tg} z}, \quad (3.4)$$

$$z_r = z_a + \xi \cos A_a + \eta \sin A_a,$$

где φ и λ — астрономические широта и долгота пункта, а ξ и η — составляющие уклонения отвеса в меридиане и первом вертикале относительно поверхности принятого эллипсоида. После вычисления по формулам (3.4) получим азимут и зенитное расстояние, отнесенные уже к направлению нормали N к поверхности принятого эллипсоида.

Часто вводится еще одна система топоцентрических координат $ixuvw$, связанная с направлением нормали N к поверхности

эллипсоида, которая называется горизонтной (рис. 4). Начало этой системы i находится в точке физической поверхности Земли, ось u направлена по касательной к северному концу геодезического меридиана, ось w — по нормали к эллипсоиду, а ось v лежит в плоскости геодезического горизонта и дополняет связку uvw до правой.

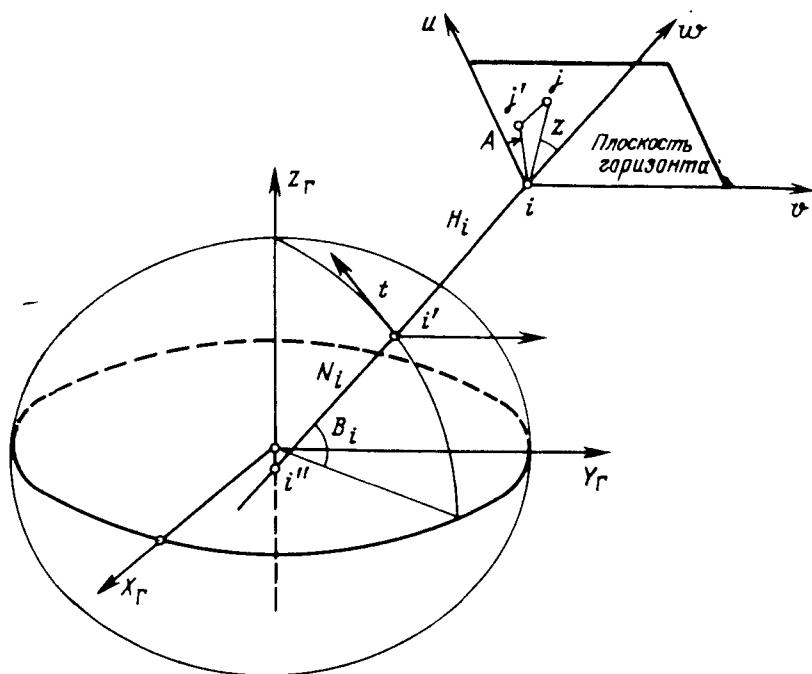


Рис. 4. Горизонтные геодезические координаты

Координаты u, v, w связаны с азимутом A_r и зенитным расстоянием z_r (рис. 5) формулами:

$$\begin{aligned} u &= \rho \sin z_r \cos A_r, \\ v &= \rho \sin z_r \sin A_r, \\ w &= \rho \cos z_r. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Если отнести индекс j к координатам ИСЗ, а индекс i — к координатам пункта, то горизонтные координаты ИСЗ будут связаны с геодезическими координатами следующим выражением:

$$\begin{bmatrix} u_j \\ v_j \\ w_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin B_i \cos L_i & -\sin B_i \sin L_i & \cos B_i \\ -\sin L_i & \cos L_i & 0 \\ \cos B_i \cos L_i & \cos B_i \sin L_i & \sin B_i \end{bmatrix} \times$$

экватора называется восходящим узлом орбиты (когда движение ИСЗ происходит против часовой стрелки, если смотреть из полюса орбиты P_i), точка Ω' называется нисходящим узлом. Дуга большого круга $\Upsilon \Omega$ обозначается через Ω и называется долготой восходящего узла. Угол, под которым плоскость орбиты пересекает плоскость Oxy , называется наклоном орбиты и обозначается через i . Долгота восходящего узла и наклон орбиты являются элементами, определяющими ориентацию орбиты в пространстве.

Дуга большого круга $\Omega\P$, отсчитываемая в плоскости орбиты от восходящего узла до перигея орбиты Π , т. е. точки орбиты, ближайшей к центру масс Земли, называется аргументом перигея и обозначается через ω . Три угловых элемента орбиты Ω , i и ω являются эйлеровыми углами при преобразованиях координат.

Большая полуось a и эксцентриситет e орбитального эллипса определяют форму и размер орбиты. Шестым элементом орбиты является время прохождения ИСЗ через перигей t_n . Положение ИСЗ в плоскости орбиты задается полярными координатами — радиусом-вектором r и углом между линией узлов и радиусом-вектором. Этот угол обозначается через u и называется аргументом широты.

Система неподвижных орбитальных координат вводится следующим образом (см. рис. 6). Начало совпадает с центром масс Земли O ; ось ξ направлена в восходящий узел Ω ; ось ζ направлена в полюс орбиты P_i ; ось η лежит в плоскости орбиты и дополняет систему $O\xi\eta\zeta$ до правой.

Связь неподвижных орбитальных координат с инерциальными координатами устанавливается формулой

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A_{\Omega i} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix}, \quad (3.8)$$

где матрица $A_{\Omega i}$ преобразования

$$A_{\Omega i} = \begin{bmatrix} \cos \Omega & -\sin \Omega & 0 \\ \sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

имеет следующие элементы:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos \Omega; & a_{12} &= -\sin \Omega \cos i; & a_{13} &= \sin \Omega \sin i; \\ a_{21} &= \sin \Omega; & a_{22} &= \cos \Omega \cos i; & a_{23} &= -\cos \Omega \sin i; \\ a_{31} &= 0; & a_{32} &= \sin i; & a_{33} &= \cos i. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Систему вращающихся орбитальных координат составляют: ось ζ , направленная в полюс орбиты P_i , ось ξ , направленная по геоцентрическому радиусу-вектору, ось η , дополняющая систему до правой.

Неподвижные орбитальные координаты $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$ связаны с подвижными ξ , η , ζ координатами соотношением

$$\begin{bmatrix} \bar{\xi} \\ \bar{\eta} \\ \bar{\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos u & -\sin u & 0 \\ \sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix}, \quad (3.11)$$

а с инерциальными геоцентрическими координатами — соотношением

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Omega & -\sin \Omega & 0 \\ \sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{bmatrix} \times \\ \begin{bmatrix} \cos u & -\sin u & 0 \\ \sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = A_{\Omega i u} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

Перемножая матрицы вращения, в правой части получим элементы матрицы $A_{\Omega i u}$:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i, \\ a_{12} &= -\sin u \cos \Omega - \cos u \sin \Omega \cos i, \\ a_{13} &= \sin \Omega \sin i, \\ a_{21} &= \cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i, \\ a_{22} &= -\sin u \sin \Omega + \cos u \cos \Omega \cos i, \\ a_{32} &= -\cos \Omega \sin i, \\ a_{31} &= \sin u \sin i, \\ a_{32} &= \cos u \sin i, \\ a_{33} &= \cos i. \end{aligned} \quad (3.13)$$

На основании формул (3.12) и (3.13) получим выражения для инерциальных геоцентрических координат ИСЗ как функций элементов орбиты и полярных координат в плоскости орбиты.

Так как $\xi=r$, $\eta=0$, $\zeta=0$, то формулы для инерциальных геоцентрических координат ИСЗ будут иметь вид:

$$\begin{aligned}x &= r(\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i), \\y &= r(\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i), \\z &= r \sin u \sin i.\end{aligned}\tag{3.14}$$

Глава 2.

СИСТЕМЫ ВРЕМЕНИ В КОСМИЧЕСКОЙ ГЕОДЕЗИИ

§ 4. СИСТЕМЫ ЗВЕЗДНОГО И ВСЕМИРНОГО ВРЕМЕНИ

Местное звездное время s , т. е. время на меридиане наблюдений, определяется и измеряется часовым углом точки весеннего равноденствия

$$s = t_{\gamma},\tag{4.1}$$

а промежуток времени между двумя последовательными одноименными кульминациями точки весеннего равноденствия называется звездными сутками.

В зависимости от выбора точки весеннего равноденствия звездное время может быть истинным, квазиистинным и средним.

Для отсчета истинного звездного времени используют истинную точку весеннего равноденствия $\Upsilon_{\text{ист}}$, которая участвует в прецессионном и нутационном движениях.

При отсчете квазиистинного звездного времени не учитывается короткопериодическая часть нутации.

При отсчете среднего звездного времени исключается полностью нутационное движение и учитывается только прецессия.

Местное звездное время на меридиане Гринвича называется гринвичским звездным временем S , оно связано с местным звездным временем соотношением

$$s = S - l,\tag{4.2}$$

в котором долгота l места наблюдений считается положительной к западу от Гринвича и отрицательной к востоку.

Среднее звездное время $S_{\text{сред}}$ отличается от истинного звездного времени на величину полной нутации по прямому восхождению N_{α} :

$$S_{\text{ист}} = S_{\text{сред}} + N_{\alpha} = S_{\text{сред}} + \Delta\psi_s \cos \varepsilon.\tag{4.3}$$

Местное звездное время s можно определить, измерив прямое восхождение звезды в момент ее верхней кульминации, т. е.

$$s = \alpha.\tag{4.4}$$

Вследствие прецессии средние звездные сутки короче периода полного оборота Земли вокруг своей оси на $0,0084^s$. Истинные звездные сутки также отличаются от периода оборота Земли на переменную величину, которая зависит от нутации земной оси вращения.

Поскольку истинное звездное время неравномерно, то оно непригодно для измерения промежутков времени, его применяют только для определения моментов времени, т. е. эпох.

Аналогично звездному времени вводится истинное солнечное время v , которое измеряется часовым углом $t_{\odot}$ центра видимого диска Солнца, при этом часовой угол отсчитывается от мгновенного меридиана места наблюдения. Промежуток времени между двумя последовательными одноименными кульминациями центра видимого диска Солнца на одном и том же меридиане называется истинными солнечными сутками. Истинное солнечное время не образует равномерной шкалы, так как изменения часового угла истинного Солнца зависят от эллиптичности орбиты Земли и угла между эклиптической и экватором.

На основании теории движения Земли вокруг Солнца вместо истинного Солнца вводится фиктивная точка — среднее экваториальное Солнце, переход к которому требует введения еще одной фиктивной точки — среднего эклиптического Солнца. Среднее эклиптическое Солнце равномерно движется по эклиптике со средней угловой скоростью истинного Солнца и при этом одновременно с истинным Солнцем проходит через перигей и апогей. Среднее экваториальное Солнце движется равномерно в плоскости экватора и одновременно со средним эклиптическим Солнцем проходит через истинную точку весеннего равноденствия. Среднее солнечное время m измеряется часовым углом среднего экваториального Солнца, а связь между истинным солнечным временем v и средним солнечным временем m устанавливается посредством уравнения времени E :

$$v - m = E, \quad (4.5)$$

причем уравнение времени E можно представить формулой

$$E = 460^s \sin g - 592^s \sin 2(\Gamma + g), \quad (4.6)$$

где g — средняя аномалия истинного Солнца, а Γ — средняя долгота перигея геоцентрической солнечной орбиты.

Уравнение времени в смысле «истинное солнечное время минус среднее», увеличенное на 12^h , публикуется на 0^h каждого суток в разделе «Солнце» Астрономического ежегодника СССР.

Местное среднее время Гринвичского меридиана называется всемирным временем и обозначается через M . Соответствующая система времени называется всемирным временем и обозначается через UT (*Universal Time*).

Из обработки астрономических наблюдений суточных движений звезд непосредственно получается всемирное время UT0, которое тоже не образует равномерной шкалы вследствие трудно предсказуемых изменений положения оси вращения Земли в теле Земли, которые проявляются в движении земных полюсов.

Введение поправки $\Delta\lambda$ за смещение мгновенного полюса относительно среднего полюса дает переход к более равномерной шкале UT1:

$$UT1 = UT0 + \Delta\lambda. \quad (4.7)$$

Однако шкала UT1 также не является равномерной, поскольку имеют место сезонные вариации угловой скорости суточного вращения Земли, которые обусловлены метеорологическими факторами и повторяются более или менее регулярно из года в год.

Если учесть поправку ΔT_c за сезонные неравномерности вращения Земли, то получим систему времени UT2, называемую квазиравномерной:

$$UT2 = UT0 + \Delta\lambda + \Delta T_c. \quad (4.8)$$

Поправку ΔT_c можно представить в виде тригонометрического ряда.

$$\Delta T_c = a \sin 2\pi t + b \cos 2\pi t + c \sin 4\pi t + d \cos 4\pi t + \dots, \quad (4.9)$$

коэффициенты $a, b, c, d \dots$ которого определяют эмпирически, на основе разностей времени UT0 и атомного времени.

Бюро времени BИH (*Bureau International de l'Heure*) публикует значения $\Delta T_c = UT2 - UT1$ с пятисуточным интервалом на год вперед в первом выпуске «*Bulletin Horaire*».

Тем не менее, шкала UT2 не является идеально равномерной, поскольку не учитывает других эффектов, влияющих на изменение угловой скорости Земли, — векового замедления вращения Земли, вызываемого приливными трениями, а также флуктуациями угловой скорости, вызванными солнечной активностью.

Для любой из шкал UT0, UT1 или UT2 связь между гринвичским звездным временем и всемирным временем M устанавливается формулой

$$S = S_0 + M + 0,002\,737\,909\,3M, \quad (4.10)$$

где S_0 — истинное звездное гринвичское время в среднюю гринвичскую полночь: (в 0^h всемирного времени), которое определяется из выражения

$$S_0 = 6^h 38^m 45,836^s + 236,555\,360\,49^s d + 0,0929^s T^2 + N_\alpha, \quad (4.11)$$

где d — число суток и их долей, прошедших от фундаментальной эпохи 1900, январь $0,12^h = \text{JD}2415020,0$ до гринвичской полуночи рассматриваемой даты t_0 [$\text{JD}(t_0) - 0,5^d$], а T — проме-

жуток d , выраженный в юлианских столетиях по 36 525 сут, N_α — полная нутация по прямому восхождению, которая вычисляется по формуле

$$N_\alpha = \Delta\psi_S \cos \varepsilon.$$

§ 5. ЭФЕМЕРИДНОЕ ВРЕМЯ

Системы звездного и всемирного времени связаны с суточным вращением Земли и движением Земли по орбите вокруг Солнца. Но в силу неравномерности этих движений обе рассмотренные шкалы времени не являются равномерными. Это приводит к необходимости введения другой временной шкалы, определяемой динамикой орбитальных движений тел Солнечной системы и представляющей собой шкалу независимой переменной, фигурирующей в дифференциальных уравнениях гравитационных теорий движения небесных тел. Наиболее удобным для этих целей небесным телом является Луна вследствие ее быстрого геоцентрического движения. Но на движение Луны оказывают влияние и приливные ускорения, которые не поддаются точному количественному учету. Поэтому в основу эфемеридного времени ЕТ проще положить геоцентрическое движение Солнца.

В качестве параметра, который задает шкалу эфемеридного времени ЕТ, положена средняя тропическая долгота Солнца L , определяемая по Ньюкому выражением

$$L = 279^\circ 41' 48,04'' + 129\,602\,768,13''T + 1,089''T^2, \quad (5.1)$$

где T измеряется в юлианских столетиях по 36 525 эфемеридных суток от фундаментальной эпохи 1900, январь 0,12^h эфемеридного времени.

В качестве эталонной единицы измерения эфемеридного времени выбрана продолжительность тропического года D в фундаментальную эпоху 1900, январь 0,12^h эфемеридного времени. Эта эпоха и является нуль-пунктом шкалы эфемеридного времени и соответствует такому физическому моменту времени, когда средняя долгота Солнца, отсчитанная от средней точки весеннего равноденствия даты, была равна $279^\circ 41' 48,04''$.

Длительность тропического года D в фундаментальную эпоху составляет 365,24219879 эфемеридных суток и определяется коэффициентом при T в формуле (5.1), поэтому тропический год в фундаментальную эпоху содержит 31 556 925,9747 эфемеридных секунд.

Принятое Международным комитетом мер и весов определение эфемеридной секунды гласило, что одна эфемеридная секунда составляет $1/31\,556\,925,9747$ тропического года эпохи 1900 январь 0,12^h ЕТ.

Как видим, в этом определении удалось обойти трудность, связанную с неравномерностью шкалы УТ, поскольку в сделанном выше определении эфемеридная секунда связана с оп-

ределенным моментом времени. Неудобством шкалы эфемеридного времени является то, что она определяется после проведения астрономических определений. Внутренняя точность шкалы эфемеридного времени не ниже 10^{-8} .

Теоретически эфемеридное время в любой момент всемирного времени можно найти, непосредственно сравнивая положения Солнца, Луны и планет, полученные путем наблюдений в системе всемирного времени UT, с положениями этих же тел, вычисленными на основании интегрирования дифференциальных уравнений движения и отнесенных к эфемеридному времени ET. Таким образом, можно получить поправку ΔT за эфемеридное время:

$$\Delta T = ET - UT. \quad (5.2)$$

На практике поправка ΔT определяется из наблюдений Луны, которая движется по геоцентрической орбите в 13,4 раза быстрее Солнца. При этом используются классический метод определения положения Луны, основанный на покрытиях звезд краем лунного диска, и способ фотографирования Луны на фоне звезд.

Из обработки таких наблюдений определяется поправка ΔT :

$$\Delta T = 24,349^s + 72,318^s T + 29,950^s T^2 + 1,821\,44B, \quad (5.3)$$

где B — флуктуация долготы Луны, т. е. разность между наблюдаемым и вычисленным на основании теории движения значениями долготы Луны (в угл. с).

Основным условием при определении эфемеридного времени является совершенство используемой теории движения Луны. Решением Международного астрономического союза установлен номенклатурный индекс j для используемой эфемериды Луны.

Если $j=0$, то в основу вычисления эфемериды Луны положена теория Брауна, из которой исключен эмпирический член, но введена поправка за вековое ускорение среднего движения Луны. Этой теории соответствует эфемеридное время ET0.

Введение в теорию движения Луны некоторых исправлений и переход на систему астрономических постоянных МАС 1964 г. приводит к теории движения Луны с индексом $j=1$, которой соответствует время ET1.

С 1972 г. введена новая теория движения Луны, в которой даны более точные выражения для возмущений в движении Луны, вызванных Солнцем. Этой теории соответствуют индекс $j=2$ и время ET2.

С 1986 г. в АЕ в качестве основного аргумента эфемерид используется земное динамическое время TDT, которое совпадает по физическому содержанию с ET и связано с IAT соотношением: $TDT = IAT + 32,184^s$.

§ 6. АТОМНОЕ ВРЕМЯ

Шкала атомного времени АТ реализуется путем использования высокостабильных атомных и молекулярных эталонов частоты в сочетании с высокоточными кварцевыми часами. Атомное время обладает большой равномерностью на длительных промежутках времени. Каждая шкала атомного времени определяется конкретным атомным или молекулярным эталоном, при помощи которого регулируется ход кварцевых часов.

Единицей измерения в системе АТ является атомная секунда, которая определена резолюцией XIII конференции Международного комитета мер и весов как промежуток времени, в течение которого совершается 9 192 631 770 колебаний, соответствующих частоте излучения, поглощаемого атомами цезия $\text{Cs}_{5^{133}}$ при резонансном переходе между энергетическими уровнями сверхтонкой структуры основного состояния $^2\text{S}_{1/2}$, которые характеризуются квантовыми магнитными числами $F=4$, $m_F=0$ и $F=3$, $m_F=0$, при отсутствии возмущений от внешних магнитных полей.

Все шкалы атомного времени имеют различные нуль-пункты, при этом разности нуль-пунктов не являются постоянными. Цезиевые эталоны частоты обеспечивают относительную точность хранения времени порядка 10^{-10} — 10^{-11} в течение нескольких лет, еще большую точность порядка $1 \cdot 10^{-13}$ обеспечивает водородный генератор.

Решением XIV Общей конференции по мерам и весам (Париж, 1971 г.) принято следующее определение шкалы Международного атомного времени IAT (*International Atomic Time*).

Международное атомное время является временной опорной координатой, устанавливаемой Международным бюро времени на основе показаний атомных часов, функционирующих в различных учреждениях, в соответствии с определением секунды как единицы времени в Международной системе единиц SI.

Поскольку шкалы АТ и УТ не согласуются между собой из-за неравномерности УТ, введена промежуточная шкала всемирного согласованного времени UTC (*Universal Coordinated Time*). Шкала UTC связана с атомным временем IAT таким образом, чтобы всемирное согласованное время UTC с максимальной точностью представляло время УТ.

По решению Международного консультативного комитета по радиосвязи CCIR, начиная с эпохи 1972, январь 1,0, в системе согласованного времени UTC в качестве единицы принята секунда SI, т. е. секунда атомного времени IAT. При этом разность показаний часов в системах UTC и UT1 не должна превышать 700 мс.

В настоящее время радиостанции передают поправки к радиосигналам времени в форме разности UT1 — UTC, иначе говоря, система UTC должна быть близкой к UT1.

Если разность UT1 — UTC по модулю больше 0,7 с, то

в системе UTC делается скачок в 1^s , т. е. пропускается или вводится лишняя секунда в серии секундных сигналов в зависимости от знака разности $UT1 - UTC$.

Связь систем времени IAT и UTC определяется выражением

$$IAT - UTC = A + B(JD - T_0), \quad (6.1)$$

где A и B — числовые коэффициенты, T_0 — некоторая начальная эпоха.

Решением CCIR введение скачка или пропуска в 1^s при подаче сигналов точного времени осуществляется в последнюю секунду 31 декабря или 30 июня, а в случае необходимости в обе даты. Положительная секунда начинается в $23^h59^m60^s$ UTC и оканчивается в $0^h0^m0^s$ UTC первых суток следующего месяца. В случае отрицательной секунды после момента $23^h59^m58^s$ через одну секунду следует момент $0^h0^m0^s$ первых суток следующего месяца.

Общее соотношение между шкалами эфемеридного и атомного времени представляется в виде полинома

$$AT = ET + a + bt + ct^2, \quad (6.2)$$

где t отсчитывается от начальной эпохи $t=0$, когда

$$AT = ET + a. \quad (6.3)$$

Коэффициент a в формуле (6.2) задает нуль-пункт шкалы атомного времени AT на шкале эфемеридного времени ET. Атомная секунда соответствует эфемеридной секунде с точностью до $2 \cdot 10^{-9}$.

Связь атомного времени IAT с системой эфемеридного времени ET устанавливается с использованием всемирного времени UT1:

$$\Delta T(A) = IAT + 32,18^s - UT1. \quad (6.4)$$

Разности всемирного времени и всемирного координированного времени, а также атомного времени, измеряемых в системах Государственной службы времени и частоты СССР (ГСВИ СССР), публикуются в специальном бюллетене «Всемирное время». Бюллетени серии «Е» содержат данные о всемирном времени UT1, в них даются разности $UT1(SU) - UTC(SU)$ и $UT1(SU) - AT(SU)$, где SU обозначает шкалу, формируемую ГСВИ СССР. Эти разности даются для моментов передач радиосигналов. В этом же бюллетене публикуются значения координат x_P и y_P земного полюса в системе Международного условного начала.

Кроме того, приводятся значения разностей одноименных времен, для шкал, формируемых в СССР (SU), и шкал в системе Международного бюро времени (BIH), а также шкалы, формируемой службой времени обсерватории Зи-Ка-Вэй (БПЖ), расположенной в Шанхае (КНР).

Системы $UT1(SU)$ и $UT1(BIH)$ практически совпадают, их разность в среднем не превосходит 1 мс.

Раздел 2.

АППАРАТУРА И МЕТОДЫ НАБЛЮДЕНИЙ ИСЗ

Глава 3.

МЕТОДЫ НАБЛЮДЕНИЙ ИСЗ

§ 7. ОСОБЕННОСТИ НАБЛЮДЕНИЙ ИСЗ

При наблюдениях ИСЗ фиксируются, регистрируются или измеряются некоторые величины, используемые в дальнейшем для определения положения или скорости движения ИСЗ в момент измерения. Процесс измерения или регистрации выполняется с помощью специальных технических средств и заключается в определении опытным путем параметров сигналов, поступающих на станцию наблюдений от ИСЗ.

В зависимости от приемов наблюдений, измерительных средств, совокупности физических явлений, лежащих в основе измерений, выделяют различные методы наблюдений ИСЗ.

Характеристики ИСЗ как объекта наблюдений имеют особенности, требующие разработки соответствующих методов и аппаратуры для наблюдений. Спутники, наблюдаемые для решения геодезических задач, называют активными, если на ИСЗ имеется бортовая аппаратура, излучающая или ретранслирующая сигналы, посылаемые наземным передатчиком. Если спутник выполняет роль пассивного отражателя сигнала, например излучения Солнца или лазерного луча, то такие ИСЗ называют пассивными.

Очевидно, что возможное время наблюдения ИСЗ определяется различными условиями в зависимости от длин волн, используемых при наблюдениях, и того, каким является спутник: активным или пассивным.

Скорость движения ИСЗ относительно звезд может достигать 1—1,5°/с, поэтому в случае фотографических наблюдений требуется высокая точность регистрации моментов экспонирования, соответствующая высокой точности углового разрешения современной аппаратуры.

При большой скорости движения ИСЗ условия получения фотографического изображения ИСЗ и звезд различаются, а положения изображений ИСЗ и звезд на негативе могут соответствовать различным моментам фотографирования. В результате возникают обстоятельства, при которых влияние отдельных факторов, вызывающих изменение положений объектов на негативе, проявляется по-разному для звезд и ИСЗ. Например, турбулентные явления в атмосфере при определенных условиях наблюдений могут смещать положение ИСЗ относительно

звезд. Это требует тщательно продуманной организации наблюдений, позволяющей свести к минимуму неблагоприятные явления, вызванные характером движения ИСЗ.

Особенно сильно влияние турбулентности атмосферы на положение ИСЗ может сказаться при использовании лазерных импульсов для подсветки с Земли пассивных ИСЗ. Исследования показали, что влияние турбулентности атмосферы в среднем равно 0,4—0,5".

Разнообразие орбит, видимых скоростей и яркостей ИСЗ, а также характер решаемых задач привели к тому, что в настоящее время существует несколько десятков различных типов фотографических камер. Подробнее особенности фотографических наблюдений будут рассмотрены ниже.

Особенностью лазерной локации ИСЗ является необходимость оборудования лазерных установок следящими устройствами для наведения и удерживания в ходе измерений узкого лазерного луча в направлении станция наблюдения — ИСЗ. Необходимо учесть, что эта задача должна быть решена как для ночных, так и для дневных наблюдений. Последние вполне возможны, поскольку спектральная яркость лазерного излучения значительно превышает аналогичную яркость фоновых источников света, а существующие средства наблюдений позволяют выделить лазерный сигнал в дневное время.

Технические трудности реализации метода лазерной локации ИСЗ заключаются в необходимости генерации мощных и очень коротких импульсов излучения лазера, приеме слабых отраженных от ИСЗ сигналов и в измерении с высокой точностью времени прохождения импульса излучения до ИСЗ и обратно.

Радиотехнические средства наблюдений требуют оснащения как наземных станций, так и ИСЗ специальной радиоэлектронной аппаратурой. Практическое воплощение принципов радиотехнических измерений расстояний, разностей расстояний или радиальных скоростей ИСЗ привело к созданию специальных спутниковых систем, например, таких как «Транзит». Такие системы в целом состоят из станций слежения, размещенных в различных точках земного шара, серии ИСЗ, оборудованных специальной аппаратурой, станций ввода информации, службы времени и единого вычислительного центра. Систематические наблюдения, выполняемые доплеровскими системами, обеспечивают решение фундаментальных задач геодезии.

§ 8. КЛАССИФИКАЦИЯ МЕТОДОВ НАБЛЮДЕНИЙ ИСЗ И ИХ КРАТКАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА

Методы наблюдений ИСЗ делят на оптические и радиотехнические в соответствии с диапазоном длин волн электромагнитных колебаний, используемых в процессе наблюдений.

К оптическим методам наблюдений относятся фотографические, лазерные, телевизионные, фотоэлектрические, наблюдения с кинотеодолитами, а также наблюдения аппаратурой, в которой используется комбинация перечисленных средств, например, фотоэлектрических и телевизионных.

Оптические методы наблюдений используются при наличии непосредственной видимости в направлении пункт-спутник. Оптические методы (исключая лазерные дальномерные наблюдения) можно применять лишь в ночное время при определенных условиях взаимного положения ИСЗ, Земли и Солнца.

К радиотехническим методам относятся радиодальномерные, доплеровские и радиоинтерференционные наблюдения ИСЗ.

Фотографический метод впервые обеспечил требуемую точность решения геодезических задач. Благодаря этому, а также небольшим затратам, связанным с эксплуатацией и производством аппаратуры, фотографический метод с успехом применяется для решения задач космической геодезии. К недостаткам следует отнести трудность автоматизации процесса обработки материалов фотографических наблюдений.

Лазерные наблюдения характеризуются высокой точностью измерения расстояний при сравнительной простоте оборудования. Лазерная техника уже в настоящее время дает возможность измерять расстояния в тысячи километров с ошибкой менее метра. Лазерные установки позволяют выполнять наблюдения в дневное время.

Телевизионная техника сравнительно недавно стала применяться для наблюдений космических объектов. Ее основные достоинства заключаются в высокой проникающей способности и возможности полной автоматизации процесса наблюдений и получения координат. Точность результатов наблюдений может достигать 1—2".

Фотоэлектрические наблюдения обычно используются в комбинации с другими средствами оптических наблюдений ИСЗ. Например, камерами с фотоэлектрической регистрацией можно получать временные отметки на следе изображения ИСЗ без подвижного прерывателя, что повышает точность результатов. Фотоэлектрические наблюдения в сочетании с другими позволяют существенно улучшать технические характеристики системы в целом.

Кинотеодолиты предназначены для измерения и фотографической регистрации координат объектов с целью определения траектории объекта на больших дугах. Широкого распространения в практике космической геодезии кинотеодолиты не получили вследствие сложности процесса обработки результатов и получения координат.

Наибольшее применение при решении геодезических задач нашли доплеровские и фазовые дальномерные методы наблюдения ИСЗ. В настоящее время совершенствование доплеров-

ских методов привело к созданию спутниковых систем, успешно решающих геодезические и специальные задачи.

Точность решения геодезических задач с применением радиотехнических систем в настоящее время не уступает точности, достигаемой при фотографических наблюдениях.

Радиоинтерференционные методы наблюдений успешно развиваются в последнее время и позволяют, за счет существенного повышения точности результатов измерений, решать качественно новые задачи.

Глава 4.

ФОТОГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД НАБЛЮДЕНИЯ

§ 9. ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ФОТОГРАФИЧЕСКОГО МЕТОДА ПРИ НАБЛЮДЕНИЯХ ИСЗ

При создании фотографических камер для наблюдений ИСЗ необходимо иметь в виду его быстрое движение относительно звезд, в среднем 1 %/с. Если яркость спутника велика и его изображение на фотоматериале оставляет хорошо видимый след, то относительное положение спутника среди звезд получают кодированием его следа. Для фотографирования слабых спутников применяется способ слежения камеры за ИСЗ. Очевидно, что светосила оптической системы камеры имеет очень важное значение при наблюдении как ярких, так и слабых спутников. Наиболее мощными современными спутниковыми камерами можно фотографировать спутники до 7-й звездной величины без отслеживания. Слежение за ИСЗ позволяет получить выигрыш в яркости ИСЗ до 4—5 звездных величин.

Таким образом, выявляются основные требования к оптике фотографических камер. По возможности должно быть увеличено входное отверстие объектива для доступа большего количества световой энергии к фотоматериалу. Увеличение разрешения снимка требует роста фокусного расстояния оптической системы, формирующей изображение. Камера, очевидно, сможет поставлять доброкачественный материал, если будет гарантирована достаточная жесткость конструкции, обеспечивающей неизменное взаимное расположение объектива и фотоматериала. Очевидно, что основные требования к выбору параметров фотографических камер являются противоречивыми, поскольку увеличение входного отверстия вызывает рост аберраций и снижает точность результатов, а возрастание фокусного расстояния уменьшает жесткость конструкции.

Значимость аберраций различна в зависимости от их величины и характера воздействия на изображение объекта. Так, например, дисторсия совершенно не снижает резкости изображения точечных объектов, но ее влияние для централизованной

оптической системы, выражающееся в нарушении подобия между предметом и его изображением, растет пропорционально кубу угла наклона пучка лучей к оптической оси ω .

Следующими по значимости aberrациями являются астигматизм и кривизна поля, они снижают резкость изображения, но при малых полях зрения проявляются слабо, так как действуют пропорционально ω^2 .

Значительно сильнее проявляется действие комы и хроматизма увеличения, растущих пропорционально ω , а потому сказывающихся даже при ограниченных полях. Кома нарушает осевую симметрию преломленного пучка, и изображение точечного объекта получается в виде несимметричного пятна. В результате хроматизма увеличения изображение точки вытягивается в радиальном направлении и окрашивается.

Сферическая aberrация и хроматизм положения не позволяют наблюдать резкое изображение точечного объекта даже на оси. Их влияние не зависит от поля, но возрастает с увеличением относительного отверстия объектива. Геометрическая природа этих aberrаций одинакова. Сферическая aberrация вызвана несовпадением фокусов для разных зон объектива, при хроматизме положения лучи разных длин волн собираются в разных фокусах.

При расчете линзовой оптики стремятся получить наибольшее относительное отверстие и добиваются максимального уменьшения комы и хроматизма объектива. Кроме того, для улучшения астрометрических качеств негатива добиваются уменьшения дисторсии объектива.

Зеркальная оптика имеет в ряде случаев преимущества по сравнению с линзовой, так как дает возможность при больших входных отверстиях избежать некоторых aberrаций, снижающих качество изображения. Ее использование наиболее целесообразно при фотографировании слабых спутников 9—12 звездной величины.

В астрономических зеркальных телескопах (рефлекторах) свет от наблюдаемых объектов падает на вогнутое главное зеркало, образующее действительное изображение объекта в фокальной плоскости. Для получения резкого (стигматического) изображения на оптической оси телескопа главное зеркало должно быть параболическим. Однако параболическое зеркало обладает свойством строить внеосевые изображения, сильно искаженные комой, что делает очень малым пригодное для работы поле зрения. Одно из существенных преимуществ зеркального телескопа — полное отсутствие хроматической aberrации, кроме того, зеркало можно сделать больше линзы, так как оптические неоднородности в толще стекла для зеркала не имеют значения.

Таким образом, преимущества зеркальной оптики могут быть реализованы в полной мере при увеличении полезного поля зрения зеркальной оптической системы.

Значительное увеличение поля можно получить с помощью зеркальной системы, предложенной в 1930 г. Шмидтом и успешно применяемой в настоящее время.

Шмидт применяет главное зеркало A (рис. 7) сферической формы, а его сферическую абберацию исправляет пластиной B , у которой одна из плоскостей деформирована. В результате в фокусе F получается стигматическое и практически ахроматическое изображение.

Пластина расположена на расстоянии $\Delta = R$ от зеркала A , где R — радиус кривизны зеркала A . Такая оптическая система кроме исправления сферической абберации исправляет кому и астигматизм, при этом введенный пластинкой B остаточный хроматизм будет мал даже при значительных относительных отверстиях системы. Неустраненной абберацией в этой системе оказывается кривизна поля, т. е. геометрическое место точек резких изображений представляет собой сферу PFP' с центром кривизны в точке O . На этой поверхности располагают светочувствительный слой фотопленки. Возможно включение в оптическую систему Шмидта так называемой полеспрямляющей линзы, устанавливаемой непосредственно перед фотоматериалом. При этом становится возможным выполнять фотографирование на плоские стеклянные фотопластинки.

В настоящее время построены более сложные оптические системы, использующие принцип камеры Шмидта. Например, камера Шмидта—Кассегрена имеет меньшую длину, чем камера Шмидта, и плоское поле изображения (рис. 8).

Суперкамера Бекера—Шмидта состоит из сферического зеркала, двух менисков C и корректирующей пластины B (рис. 9). Главное ее достоинство — большая светосила.

Как известно, при определении топоцентрического направления на ИСЗ снимок должен содержать изображения звезд и спутника в момент, фиксированный с высокой точностью. Речь, естественно, может идти лишь о так называемых измеримых изображениях, т. е. об изображениях звезд и ИСЗ, характер которых позволяет получить точные координаты звезд и ИСЗ.

Существуют специальные высокоточные затворные системы, позволяющие получить кодированные следы спутника или звезд, содержащие измеримые изображения объектов в фиксированные моменты.

Для получения изображения требуемого качества затвор должен обеспечивать заданные значения выдержек и их постоянство для всего поля изображения, не искажать снимок и не ухудшать на нем светораспределение. В конструкции затвора должна быть предусмотрена возможность дистанционного управления его работой.

Важным параметром является оптический коэффициент полезного действия затвора, т. е. отношение количества световой энергии, прошедшей через реальный затвор в данную точку светочувствительного слоя, к количеству

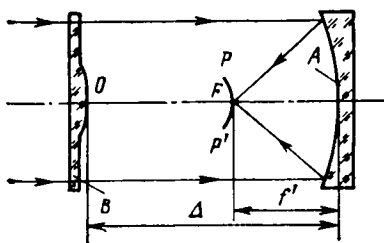


Рис. 7. Зеркальная система Шмидта

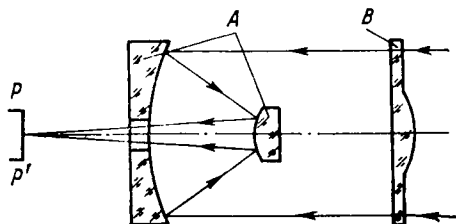
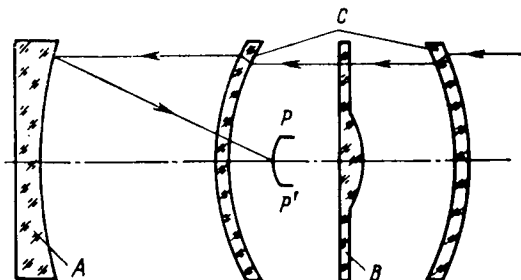


Рис. 8. Зеркальная система Шмидта — Кассегрена

Рис. 9. Оптическая система суперкамеры Бекера — Шмидта



световой энергии, которое пропустил бы в данную точку за это время идеальный затвор (рис. 10):

$$\eta_{\text{опт}} = \frac{\int_{t_{\Phi}} F_i dt}{F_{\text{п}} \int_{t_{\Phi}} dt},$$

где F_i — величина светового потока, прошедшего через затвор в текущий момент; $F_{\text{п}}$ — величина светового потока при полностью открытом затворе; $t_{\Phi} = t_0 + t_{\text{п}} + t_3$ — фактическая выдержка; t_0 , $t_{\text{п}}$, t_3 — длительность, соответственно, фазы открытия, фазы полного открытия и фазы закрытия затвора.

Работу затвора характеризуют также эффективной выдержкой, как временным интервалом $t_{\text{эф}}$, в течение которого идеальный затвор пропустил бы на данную точку светочувствительного слоя то же количество световой энергии, что и реальный затвор за время t_{Φ} . Идеальный затвор открывает и закрывает полезного действия затвора необходимо уменьшить t_0 и t_3 .

Очевидно, что для увеличения оптического коэффициента полезного действия затвора необходимо уменьшать t_0 и t_3 .

Анализ динамики работы затворов позволяет сделать вывод о непостоянстве скоростей движения рабочих элементов затвора для различных выдержек почти на всех фазах работы затвора. Это приводит к изменению значений $\eta_{\text{опт}}$ для разных выдержек и их непостоянству по полю изображения. Важно также иметь значения $t_0 = t_3$, так как в противном случае сред-

нее из моментов подачи импульсов при открывании и закрывании затвора не соответствует серединам вытянутых изображений спутника. Следует отметить, что влияние неравенства времени открывания и закрывания затвора значительно снижается при увеличении $\eta_{\text{опт}}$.

Широкое распространение получили обтюраторные затворы непрерывного действия, которые используются почти во всех современных камерах при наблюдении ИСЗ. С помощью этих затворов либо задается серия кратковременных экспозиций, либо прерывается след спутника в продолжение длительной экспозиции.

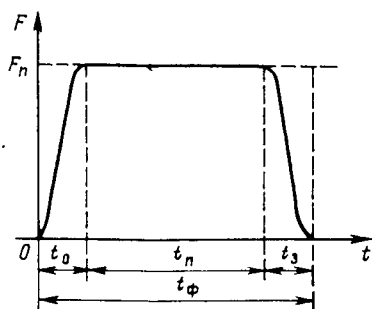


Рис. 10. Величина светового потока, прошедшего через затвор, на основных фазах работы затвора

Конструкция обтюраторного затвора может быть различной. Иногда его выполняют в виде системы дисков с вырезами и располагают либо перед объективом, либо в междудлинновом пространстве объектива. Во многих камерах они перекрывают световой поток непосредственно перед фотоматериалом, т. е. вблизи фокальной плоскости, и представляют собой подвижный

экран, перекрывающий поле зрения. Как показывает практика фотографических наблюдений ИСЗ, обтюраторные затворы позволяют получать наилучшее качество изображений ИСЗ при высокой точности регистрации моментов наблюдений.

Монтировки фотокамер для наблюдения ИСЗ могут быть двухосными, трехосными и четырехосными. Возможно азимутальное или экваториальное их исполнение.

Азимутальная двухосная монтировка камеры имеет горизонтальную и вертикальную оси для наведения камеры в требуемую точку небесной сферы. В процессе экспонирования звезд и ИСЗ камера неподвижна.

В экваториальном варианте двухосная установка позволяет отслеживать суточное вращение небесной сферы, что необходимо для получения на снимке изображений слабых звезд.

Трехосная монтировка позволяет ориентировать камеру для сопровождения спутника в процессе наблюдения. При этом одна из осей монтировки фотокамеры с помощью двух других устанавливается в полюс видимой траектории спутника, считаемой большим кругом. Таким образом, вращением камеры вокруг этой оси можно отслеживать движение спутника, получая его точечное изображение на астронегативе. В экваториальном варианте трехосной монтировки можно отслеживать суточное движение звезд.

В четырехосной монтировке фотокамер имеется четвертая ось, перпендикулярная к третьей и к оптической оси камеры,

вращение вокруг которой позволяет повысить точность слежения за спутником, движущимся в общем случае на небесной сфере по малому кругу.

В зависимости от использования в том или ином режиме наблюдений спутниковые камеры делятся на камеры с неподвижной при фотографировании визирной осью — несledящие и отслеживающие движение ИСЗ — следящие (табл. 3). Неследящие камеры имеют либо азимутальную, либо экваториальную монтировку. Они должны иметь большое поле зрения для «захвата» наблюдаемого объекта. Камеры такого типа могут быть включены в измерительный комплекс, т. е. выполнять фотографирование во взаимосвязи с другими аналогичными камерами. Следящие камеры имеют трехосную или четырехосную монтировку.

Осевые системы этих монтировок снабжаются специальными синхронно следящими приводами и выполнены с высокой точностью, обеспечивающей требуемое положение визирной оси в пространстве. Следящие камеры позволяют фотографировать более слабые спутники. Кроме того, они, как правило, позволяют получить большее количество снимков за одно прохождение ИСЗ.

Следящие камеры для фотографических наблюдений можно поделить на два типа:

камеры, в которых отслеживание ИСЗ осуществляется перемещением кассетной части либо с помощью оптических компенсаторов сдвига изображения;

камеры, осуществляющие слежение вращением вокруг одной или двух осей опорно-поворотного устройства.

При наблюдении ярких спутников кодирование следа спутника позволяет определить координаты ИСЗ непосредственно в экваториальной системе, так как камера неизменно ориентирована по отношению к звездам.

В случае неподвижной камеры ориентировка ее в звездной системе координат непрерывно изменяется, что при экспонировании звезд и спутника в разные моменты вызывает необходимость учета этого обстоятельства. При этом моменты фотографирования звезд можно регистрировать с ошибкой 3—5 мс.

Наблюдения слабых спутников выполняют отслеживанием, а изображения опорных звезд получают кодированием их следов. При отсутствии ярких опорных звезд используется попеременное слежение за спутником и звездами.

Точность определения направления на спутник при кодировании его следа (яркий спутник) по одному снимку может достигать 1—2". При наблюдении в режиме слежения точность, как правило, ниже и составляет 2—4".

Наблюдение спутников требует привязки моментов фотографирования к единой шкале времени. Моменты кодирования следа спутника или звезд регистрируют с помощью хронографа или осциллографа. Синхронизацию кварцевых часов станции

Т а б л и ц а 3. Фотографические камеры для наблюдений ИСЗ

Камера, страна-разработчик	Тип монтировки	Точность определения угловых координат, угл. с	Фокус, мм	Относительное отверстие	Поле зрения камеры, угл. градус	Фото-материал, формат, мм	Предельная яркость фототрафаретных объектов, звездная величина	Точность привязки к системе единого времени, с
<i>Неследящие камеры</i>								
Камера Хьюита, Реликобритания	Двухосная азимутальная	1	610	1 : 1,1	10×10	Фотопластинка 260×149×6	9	0,0001
ВС-4, Швеция	Двухосная азимутальная	2	115 210 305 450	1 : 3,5	76×76 47×47 33×33 24×24	Фотопластинка 215×190×6	7 8 9	0,001
ВМК, ФРГ	Двухосная экваториальная (камера может отслеживать звезды)	1,5—2,0	300 450	1 : 4,5 1 : 2	13,6×13,6	Фотопластинка 230×230, 180×180	5	0,001
JGN, Франция	Двухосная азимутальная	2—4	750 305	1 : 2,5 1 : 4,2	35×35	Фотопластинка 190×190×1,5	3	0,001
МОТ, США	Двухосная экваториальная (камера может отслеживать звезды)	2	1015	1 : 5,9	11×11	Фотопластинка 203×254	8	0,002
<i>Следящие камеры</i>								
ВАУ, СССР	Экваториальная трехосная	2—5	700	1 : 1,8	5×30	Пленка 70×120	11	0,0001
АФУ-75, СССР	Комбинированная четырехосная с экваториальной платформой	2	736	1 : 3,5	10×14	Пленка 140×29	10	0,001
СВГ, ГДР	Четырехосная азимутальная	1—2	760	1 : 1,8	5,3×8,7	Фотопластинка 90×120	12	0,001
Бейкер—Нанн, США	Трехосная азимутальная	2—6	500	1 : 1	5×30	Пленка 56×290	12	0,0001
Антарес, Франция	Четырехосная экваториальная	2	900	1 : 3	11×11	Фотопластинка	9	0,0001

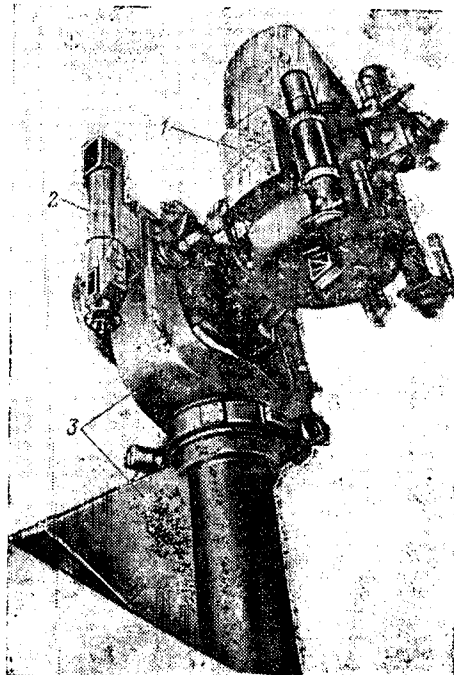
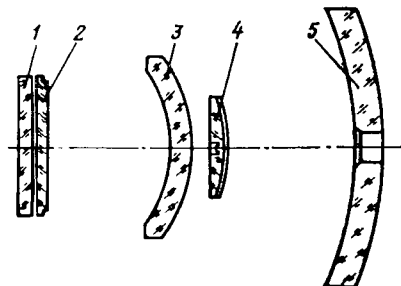


Рис. 11. Высокоточная астрономическая установка ВАУ:

1 — фотографическая камера ВАУ;
2 — труба гйда; 3 — опорно-поворотное устройство

Рис. 12. Оптическая система объектива ВАУ:

1, 2, 3 — ахроматический мениск;
4 — плата, на которую натягивается пленка;
5 — главное зеркало



наблюдения производят по сигналам точного времени. Точность момента в единой шкале времени не ниже 0,0005—0,0010 с.

§ 10. АППАРАТУРА ДЛЯ ФОТОГРАФИЧЕСКИХ НАБЛЮДЕНИЙ

Высокоточная астрономическая установка ВАУ

Камера предназначена для высокоточных фотографических наблюдений ИСЗ и далеких искусственных космических объектов (рис. 11).

В ней используется практически бездисторсионный светосильный зеркально-линзовый объектив «Астродар» с фокусным расстоянием 700 мм и радиусом кривизны поля изображения, равным фокусу (рис. 12).

Характеристика объектива

Действующее отверстие (диаметр апертурной диафрагмы)	500 мм
Эффективное входное отверстие	390 мм
Относительное отверстие	1 : 1,4
Эффективное относительное отверстие	1 : 1,8
Диаметр основного зеркала	1070 мм
Диаметр кружка рассеивания изображения точечного объекта в поле зрения	0,03 мм
Поле зрения камеры прямоугольное (в линейной мере 60×360 мм)	5×30°

Конструкция фотокамеры и ее кинематическая схема обеспечивают натяжение фотопленки на фокальной поверхности с минимальным допусаемым усилием в пределах линейного участка деформации фотопленки. Фотографирование производится на пленку шириной 70 мм.

Камера ВАУ имеет два затвора — створчатый и obturatorный. Створчатый затвор (время срабатывания 0,02 с) обеспечивает заданную выдержку при фотографировании и дает возможность определить разрыв следа звезды, соответствующий фиксированному моменту. Obturatorный затвор позволяет получить изображение прерывистого следа объекта или звезд. Оптическая проекционная система фотокамеры производит экспонирование на снимке момента фотографирования.

Obturator имеет два диапазона частот вращения от 0,15 до 1,5 с⁻¹ и от 1,5 до 15,0 с⁻¹. Перемотка фотопленки в кассете осуществляется после закрытия затвора. Емкость кассеты 120 м (около 240 кадров). Скорость отслеживания объектов делится на четыре диапазона и лежит в пределах 0—6000 "/с.

Для текущего визуального контроля слежения, а также фиксирования момента появления спутника ВАУ снабжена тремя визирами. В зависимости от ориентации камеры наблюдатель может пользоваться любым из них. Каждый из визиров имеет диаметр входного отверстия объектива 200 мм, фокусное расстояние объектива 1700 мм, сменное увеличение равно 25, 50 и 100× с полем зрения 2°40', 1°24' и 52' соответственно. Проницающая сила визиров не менее 12-й звездной величины. Для автоматической коррекции движения ВАУ по часовой оси камера снабжена фотоэлектрическим гидирующим устройством.

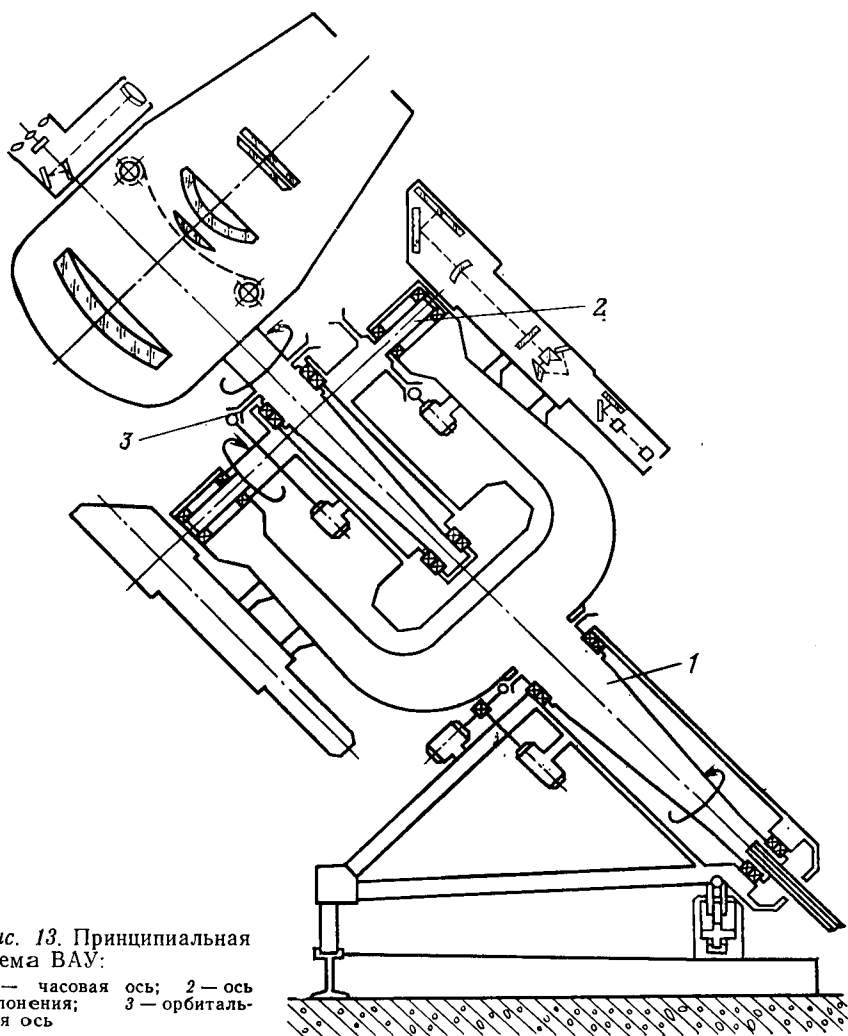
Опорно-поворотное устройство ВАУ обеспечивает необходимую ориентацию камеры в пространстве и скорость слежения в процессе наблюдения (рис. 13). Монтровка камеры трехосная, параллактическая, позволяющая отслеживать движения спутника из любой точки в любом направлении. При этом оси параллактической монтровки ориентируются следующим образом:

первая ось — часовая — направляется в полюс мира, вторая — ось отклонения — ориентирует третью ось (орбитальную) в полюс орбиты ИСЗ.

В процессе фотографических наблюдений камера вращается вокруг часовой оси со скоростью суточного вращения небесной сферы, а вокруг орбитальной оси со скоростью движения спутника. В зависимости от режима работы камеры установка может отрабатывать либо два движения (часовое и орбитальное), либо одно (часовое).

Для установки и перемещения визирной оси камеры по каждой из трех осей, заданная требуемой скорости движения оси камеры, обеспечения срабатывания затворов по определен-

ной программе имеется центральный пульт управления, расположенный в отдельном помещении, примыкающем к наблюдательной площадке, из которого имеется хороший обзор всей установки ВАУ. С центрального пульта можно ориентировать



оси опорно-поворотного устройства камеры и вводить программу наблюдений, автоматически обрабатываемую ВАУ.

Программное устройство обеспечивает фотографирование 12 точек траектории за одно прохождение наблюдаемого объекта.

Оно состоит из 12 блоков, причем каждый блок задает угол положения, скорость отслеживания и момент съемки. Положение полюса орбиты для каждой из 12 точек фотографирования может быть выбрано различным. В каждой точке фотографирования программное устройство управляет движением камеры и скоростью обтюраторного затвора.

ВАУ снабжена службой времени, включающей: два кварцевых генератора частоты, дублирующих друг друга и обеспечивающих относительную стабильность сигналов не хуже 10^{-8} за 48 ч работы; аппаратуру формирования и хранения местной шкалы времени; аппаратуру для создания стабильной частоты 50 Гц, служащей для питания привода часовой оси, и радиоприемного устройства для привязки местной шкалы к сигналам единого времени. Точность привязки шкалы к системе единого времени не грубее $0,3 \cdot 10^{-3}$ с. Блок электронной шкалы времени формирует импульсы подсветки шкалы и отметки времени.

В момент совпадения оси ламели обтюраторного затвора с оптической осью камеры происходит вспышка импульсной лампы, освещающей циферблат механических часов камеры. Одновременно с фотографированием показаний этих часов на краю кадра происходит запуск развертки электронно-лучевой трубки (ЭЛТ), при этом изображения меток на экране ЭЛТ наряду с изображением механических часов позволяют фиксировать момент до $1,0 \cdot 10^{-4}$ с.

В зависимости от скорости и яркости наблюдаемого объекта применяется один из четырех режимов работы. Первый режим используется для получения фотографий слабых спутников, имеющих скорость движения относительно звезд от 1 до $10''/с$.

В начале цикла камера наводится в нужную точку небесной сферы и разгоняется до скорости движения наблюдаемого объекта. При этом отслеживание спутника орбитальным движением сопровождается отслеживанием звезд по часовой оси. В момент открытия створчатого затвора начинается экспозиция спутника и звезд. Наблюдаемый спутник изображается точкой, а звезды — в виде прерывистого следа вследствие работы обтюраторного затвора. Слабые звезды при этом могут не изобразиться на кадре. В изображении ярких звезд имеется пять разрывов. Регистрация времени происходит в момент среднего разрыва следа звезды, находящейся на оси кадра.

После закрытия створчатого затвора камера останавливается по орбитальной оси, створчатый затвор вновь открывается и на том же кадре экспонируются теперь уже точечные изображения звезд. Так получают изображения не только ярких, но и слабых звезд. Спутник благодаря его малой яркости может совсем не изобразиться.

Процесс наблюдений может происходить как при участии, так и без участия наблюдателя, т. е. без дополнительной коррекции направления и скорости движения камеры.

Второй режим работы камеры предусматривает наблюдение ярких спутников, которые можно не отслеживать камерой в процессе фотографирования. В этом режиме установка вращается только по часовой оси. Изображения звезд получаются в виде точек, а спутник изображается в виде прерывистой линии. Обтюраторному затвору придается скорость, пропорциональная скорости видимого движения спутника, для того, чтобы на следе спутника были хорошо видны разрывы. Время регистрируется в момент, близкий к центральному разрыву в следе спутника.

Третий режим используется для получения фотографий спутников малой яркости, имеющих скорость до $10'$ /с (медленные спутники). Опорно-поворотное устройство камеры обрабатывает часовое и орбитальное движение. Объект на кадре получается в виде точки, а изображение звезд — в виде линий с разрывами. Дополнительного впечатывания звездного поля при этом не требуется, поскольку вблизи изображения спутника на кадре получается достаточное количество изображений слабых опорных звезд.

Применение четвертого режима целесообразно при отслеживании объектов малой яркости, имеющих малую видимую скорость относительно звезд (например, космические зонды). Для получения изображения объекта требуется длительная выдержка, поэтому объект отслеживается орбитальным движением, а звезды — часовым ведением. Обтюраторный затвор не вращается (фиксируется в положении «Открыт»), и регистрация моментов срабатывания створного затвора осуществляется цифropечатающим хронографом на ленте. При этом изображения звезд на кадре получаются в виде коротких штрихов, а объект изображается в виде точек. В этом режиме работы выдержка затвора задается оператором и регистрируются только показания электромеханических часов.

На каждом кадре впечатываются показания регистрационных приборов, включающие номер кадра, номер объекта, дату съемки, показания электромеханических часов (до 0,01 с), показания электронных часов (до 0,0001 с), метка положения ламели обтюратора в момент впечатывания показаний часов.

Результаты исследований камеры и опыт работы на ней позволяют считать ее полностью удовлетворяющей требованиям высокоточного определения топоцентрических координат объектов. ВАУ благодаря возможностям монтажа, большому диаметру рабочего отверстия объектива, его широкоугольности и бездисторсионности обеспечивает также точность определения координат слабых спутников. Методом накопления световой энергии с помощью ВАУ можно фотографировать объекты слабее 12-й звездной величины. Точность определения координат с помощью ВАУ составляет $1,0\text{--}1,5''$ при точности регистрации времени 0,0001 с.

Возможности ВАУ позволяют использовать ее для решения широкого круга задач космической геодезии и астрономии, а также задач, возникающих при изучении и освоении космического пространства.

Астрономическая фотографическая установка АФУ-75

Установка АФУ-75 (рис. 14) предназначена для фотографирования ИСЗ с последующим определением их координат и моментов фотографирования по снимкам. АФУ-75 широко используется в СССР для наблюдений ИСЗ и позволяет фотографировать ИСЗ с импульсными лампами-вспышками на борту, яркие ИСЗ (1—3 звездной величины) в отраженном свете, слабые спутники (3—8 звездной величины) в отраженном свете.

Фотографирование ярких пассивных спутников производится методом прерывания следа спутника (рис. 15) и отслеживанием суточного вращения небесной сферы. Слабые пассивные спутники фотографируются попеременным отслеживанием спутника и звезд.

Фотографическая камера АФУ-75 1 состоит из объектива с междулинзовым центральным затвором, корпуса и кассетной части. Объектив «Уран-16» с фокусным расстоянием 735 мм и светосилой 1:3,5. Разрешающая способность объектива в центре поля зрения 30 лин/мм при удалении на 5° от центра — 20 лин/мм, объектив ахроматизирован. Поле зрения составляет $10 \times 14^\circ$, длинная сторона ориентируется вдоль следа спутника. Фотографирование производится на пленку шириной 190 мм. Объем кассеты — 29 м пленки (110 негативов). Перемотка пленки автоматическая. Кассетная часть включает подвижный стол для прижима пленки, механизм перемещения стола для компенсации скорости перемещения изображения ИСЗ, механизм перемотки пленки, обтюрационный затвор для прерывания следа изображения объекта с системой регистрации времени и фотохронограф для регистрации момента съемки на пленке. Центральный затвор служит для задания общей длительности экспозиции и перекрывает свет на время перемотки пленки. Камера АФУ-75 позволяет фотографировать спутники до 9—10 звездной величины в пределах 120° видимой дуги орбиты.

АФУ-75 имеет азимутальную четырехосную монтировку 2, позволяющую отслеживать спутник по дуге малого круга. Орбитальная ось направляется в полюс орбиты ИСЗ с помощью вертикальной и горизонтальной осей. Если видимая на небесной сфере орбита является большим кругом (станция наблюдения находится в плоскости действительной орбиты), то, установив оптическую ось камеры перпендикулярно к орбитальной оси, можно удерживать изображение спутника в поле зрения

камеры поворотом ее только вокруг орбитальной оси. Если станция не лежит в плоскости орбиты ИСЗ, то удерживать спутник в поле зрения камеры можно, изменяя угол между орбитальной и оптической осями. Для этого в монтажке камеры предусмотрена четвертая ось вращения. Угол поворота по этой оси называется углом широты видимой орбиты.

Вся камера устанавливается на экваториальной платформе, позволяющей отслеживать суточное вращение небесной сферы в течение 2—3 мин и таким образом обеспечивающей возможность получения точечных изображений звезд на снимке.

Для контроля наведения фотокамеры на спутник с учетом скорости видимого движения ИСЗ относительно камеры имеется телескоп-гид 3 ($D=120$ мм, увеличение сменное 8 и $20\times$, поле зрения соответственно 6 и $2,5\%$).

Телескоп-гид и фотографическая камера установки могут независимо вращаться на орбитальной оси, для чего установка снабжена специальным приводом. В процессе наблюдения телескоп-гид непрерывно поворачивается вокруг орбитальной оси со скоростью движения ИСЗ. Камера при фотографировании неподвижна, ее поворот происходит в промежутках между фотографированием и согласуется с вращением телескопа-гида. При наблюдении слабых спутников требуемое точное соответствие направления и скорости сопровождения ИСЗ телескопом-гидом достигается визуально применением коррекции.

В фокальной плоскости камеры установлен механизм компенсации сдвига изображения спутника, обеспечивающий сдвиг фотографической пленки с необходимой скоростью. При этом пленка зажимается между выравнивающим стеклом и прижимной плитой и перемещается вдоль прямолинейных направляющих приводом, работающим от синхронного двигателя. Этот двигатель и синхронный двигатель привода телескопа-гида питаются от общего генератора переменной частоты. Таким образом, достигается соответствие скорости перемещения фотоматериала (пленки) и скорости вращения телескопа-гида. Полное согласование скорости гида со скоростью пленки по большому и малому кругам в пределах снимка осуществляется приводом гида.

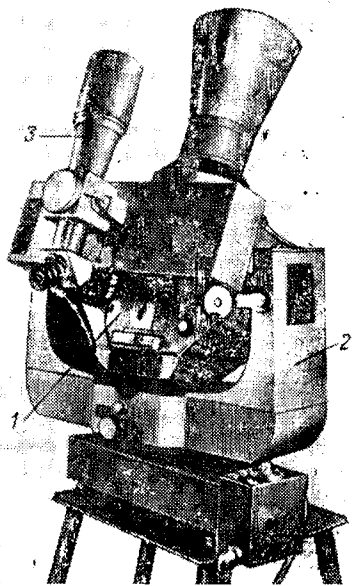


Рис. 14. Камера АФУ-75

Полное перемещение пленки вдоль направляющих составляет 36 мм. Этот интервал может быть разбит на 12 отрезков по 3 мм, 6 по 6 мм, 3 по 12 мм и 2 по 18 мм. После прохождения каждого отрезка механизм компенсации останавливается для экспозиции звезд. Главной задачей наблюдателя является точное согласование направления и скорости движения

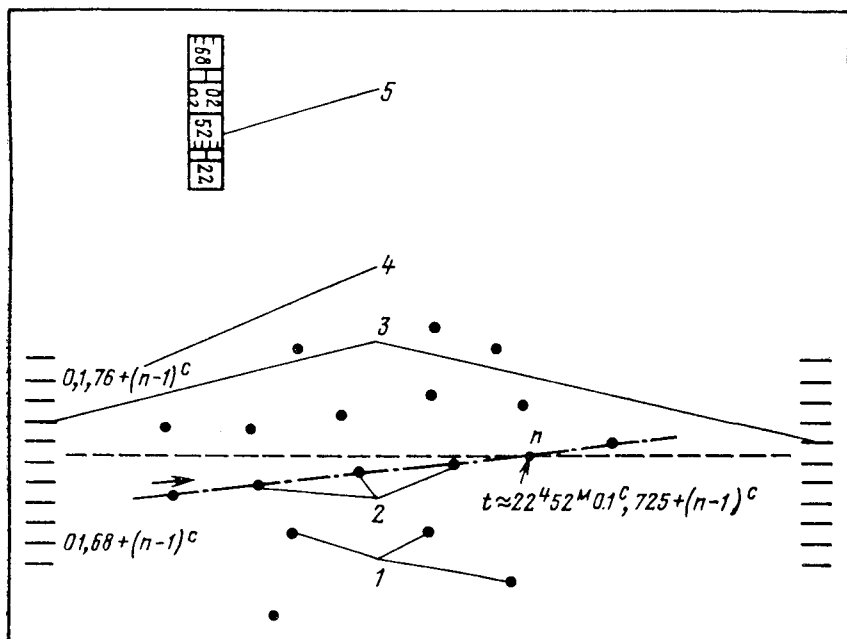


Рис. 15. Снимок, сделанный камерой АФУ-75:

1 — звезды; 2 — след спутника; 3 — метки времени; 4 — момент впечатывания метки времени; 5 — показание фотохронографа

контрольного телескопа-гида с направлением и видимой скоростью спутника. Для обеспечения такого согласования камера имеет систему управления, которой может пользоваться наблюдатель, не отрывая глаз от телескопа-гида. Процесс фотографирования можно начинать, только если изображение спутника расположено неподвижно на кресте нитей поля зрения подвижного гида.

Камера АФУ имеет автономную службу времени: кварцевые часы, осциллограф и радиоприемник. Кварцевые часы служат для хранения точного времени в перерывах между сеансами приема радиосигналов, а также для обеспечения работающей установки стабильной частотой. Осциллограф используется для сравнения показаний кварцевых часов с радиосигналами точного времени.

Блок управления установки необходим для согласования действий различных узлов и для переключения режимов работы камеры. Его основными узлами являются: генератор с программированной частотой для изменения скорости вращения телескопа-гида и перемещения подвижного стола касcеты; привод телескопа-гида с вариатором для согласования скорости вращения телескопа-гида с перемещением стола; контрольная система, определяющая углы поворота и упреждения камеры, интервалы поворота; механизм поворота камеры; пульт управления с переключателями режимов работы. Установка имеет пять режимов работы.

Режим «П». Он используется при съемке на неподвижную пленку спутников, имеющих лампу-вспышку на борту. Во время экспозиции происходит отслеживание суточного вращения небесной сферы. Затвор камеры открывается наблюдателем с помощью тумблера.

Режим «А». Он отличается от режима «П» только автоматической перемоткой пленки.

Режим «Я». Его применяют при фотографировании ярких спутников с применением obtюраторного затвора для прерывания следа спутника и с отслеживанием суточного вращения небесной сферы.

Для определения момента прерывания следа спутника на пленку автоматически впечатываются метки времени и показания фотохронографа.

Экспонирование спутника и опорных звезд происходит от 1,5 до 25,5 с каждой минуты, чем достигается синхронность наблюдений ИСЗ с различных пунктов.

Наведение фотокамеры в нужный участок неба осуществляется автоматически с помощью телескопа-гида. Затвор открывается автоматически с помощью фотохронографа. Пленка перематывается после каждого отснятого снимка.

Режим «СС». Предназначается для съемки пассивных спутников малой яркости с компенсацией скорости перемещения изображения в фокальной плоскости.

Затвор открывается в 1,5 с каждой минуты. После открытия затвора происходит экспонирование звезд, прижимной стол с пленкой неподвижен, суточное движение звезд компенсируется движением экваториальной платформы. Затем прижимной стол начинает двигаться со скоростью перемещения изображения спутника.

Затем стол с пленкой останавливается для экспонирования звезд. Такое чередование экспонирования звезд и спутника происходит несколько раз. Продолжительность экспонирования звезд может быть установлена равной 0,5; 1,0; 3,0; 10,0 с. Длина пути одного перемещения стола с пленкой может быть равной 3, 6, 12, 18 и 36 мм. При перемещении стола через каждые 1,5 мм на пленке регистрируется показание фотохронографа.

Скорость компенсации непрерывно контролируется телескопом-гидом и может меняться в пределах 0,05—1,5°/с. После каждого снимка автоматически происходит перемотка пленки, и фотокамера ориентируется с упреждением по отношению к телескопу-гиду на участок неба, через который должен проходить спутник.

Режим «С». Тот же, что и режим «СС», однако начало съемки определяется наблюдателем нажатием тумблера «съемка» после появления изображения спутника в поле зрения камеры.

Комплект установки снабжен всеми необходимыми для работы приборами. Общий вес ее 350 кг, размеры 1,5×2 м. Потребляемая мощность 2 кВт.

Точность определения положения спутника зависит от подготовки наблюдателя и составляет 1,5—2,0" при точности регистрации времени 0,001 с.

Камера ФАС

Камера ФАС предназначена для фотографирования активных спутников. В связи с более узкой специализацией ее конструкция сравнительно проста. Камера установлена на экваториальной платформе, которая работает по принципу, аналогичному принципу действия платформы камеры АФУ-75, но отличается от последней повышенной стабильностью. Монтровка камеры ФАС на экваториальной платформе двухосная высотно-азимутальная.

Объектив камеры (рис. 16) зеркально-линзовый системы Шмидта. Главное зеркало сферическое. Поверхности мениска и зеркала имеют общий центр кривизны. Передняя линза плоско-выпуклая. Диаметр входного отверстия 250 мм. Фокусное расстояние 480 мм, относительное отверстие 1:1,9. Фокальная поверхность плоская благодаря действию полеспрямляющей линзы.

Оптическая система обеспечивает хорошее качество изображений благодаря отсутствию всех первичных аберраций кроме дисторсии. Область ахроматизации 400—700 мкм.

Фотографирование производится в главном фокусе на пленке или пластинках размером 6,5×9 см. Размер поля снимка $7\times 10^\circ$.

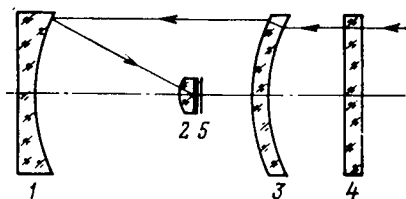
Предусмотрена возможность применения двух режимов фотографирования.

В первом режиме включают экваториальную платформу, и изображение звезд на снимке получается в виде точек. Небольшое дискретное перемещение камеры по высоте и дополнительная экспозиция звезд на том же кадре позволяет сдвигать изображения звезд и облегчают поиск изображений вспышек.

Во втором режиме фотографирование звезд и спутника происходит при неподвижной экваториальной платформе. Изображения звезд получаются в виде черточек. Начало и конец экспозиции необходимо фиксировать во времени, для чего затвор камеры снабжается специальными контактами, замыкающими цепь печатающего хронографа. Во втором режиме наблюдений приборы службы времени необходимы.

Рис. 16. Оптическая схема камеры ФАС:

1 — главное зеркало; 2 — полеспрямляющая линза; 3 — мениск; 4 — плоско-выпуклая линза; 5 — фокальная поверхность



Результаты работы с камерой ФАС выявили ее высокую точность: ошибка в координатах $1,5\text{--}3,0''$ и ошибка регистрации времени $0,001$ с. Камеры ФАС используются на многих станциях наблюдения ИСЗ в СССР.

Камера SBG (ГДР)

Камера разработана Народным предприятием «Карл Цейсс» (ГДР) для наблюдения слабых ИСЗ.

Объектив камеры (рис. 17) системы Шмидта с диаметром входного отверстия 425 мм и фокусным расстоянием 760 мм. Имеется полеспрямляющая линза диаметром 150 мм. Камера снабжена телескопом-гидом с диаметром объектива 150 мм, увеличением $21,3\times$ и полем зрения 3° . Фотографирование спутников выполняется на пластинку размером 9×12 см.

Монтировка камеры четырехосная азимутальная. Две первые оси служат для направления оси отслеживания в полюс орбиты ИСЗ. Четвертая ось позволяет отклонять оптическую ось камеры от перпендикуляра к третьей оси для отслеживания ИСЗ по малому кругу. Скорость слежения спутника задается перфолентой, выдаваемой специальной ЭВМ, и меняется для каждого прохождения ИСЗ. Наблюдатель корректирует скорость отслеживания по наблюдениям спутника в поле зрения гида. При хорошем отслеживании возможно фотографировать спутники до 12 звездной величины.

Система регистрации моментов наблюдения позволяет работать без быстродействующего затвора. На одной пластинке получают несколько изображений спутника и звезд. В ходе отслеживания изображение спутника получается на пластинке в виде точки, а изображение звезды в виде штриха. В некоторый момент кассета с пластинкой начинает движение, компенсирующее движение камеры за спутником, при этом изображение звезд получается в виде коротких штрихов вследствие

движения небесной сферы. Моменты начала и конца экспозиции звезд (моменты начала движения и остановки пластинки) или, что все равно, моменты окончания экспозиции спутника и начала экспозиции следующего его изображения регистрируются

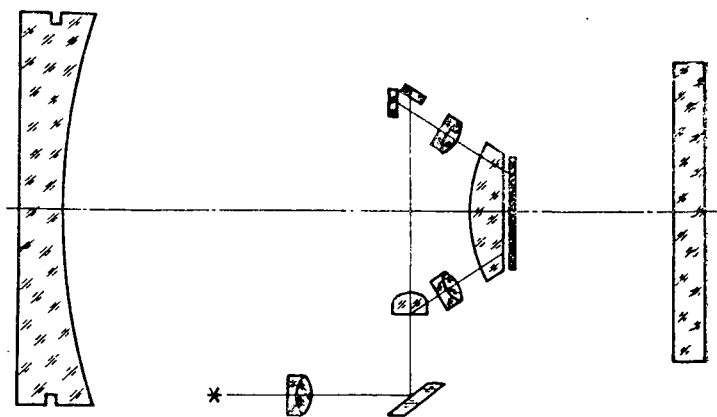


Рис. 17. Оптическая схема камеры SBG

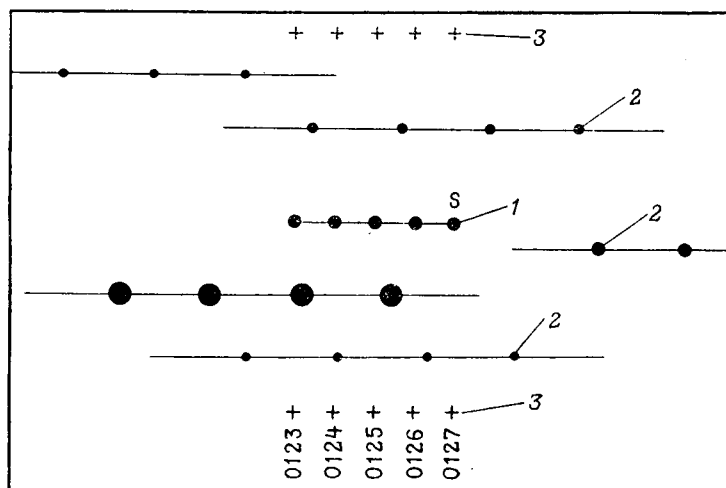


Рис. 18. Снимок, сделанный камерой SBG:

1 — изображение спутника; 2 — изображения ярких звезд; 3 — метки для определения оптического центра и номера съемки

датчиком ускорения кассеты. На рис. 18 показан снимок ИСЗ, полученный камерой SBG.

В настоящее время такие камеры с успехом работают в СССР и других социалистических странах.

Камера Бейкера — Нанна (США)

Камера создана в 1957 г. для фотографических наблюдений ИСЗ (рис. 19). Оптика камеры — зеркально-линзовая системы Шмидта, диаметр входного отверстия 51 см, светосила равна единице. Поле снимка $30 \times 5^\circ$, масштаб на пленке $1'' : 2,46 \text{ мкм}$.

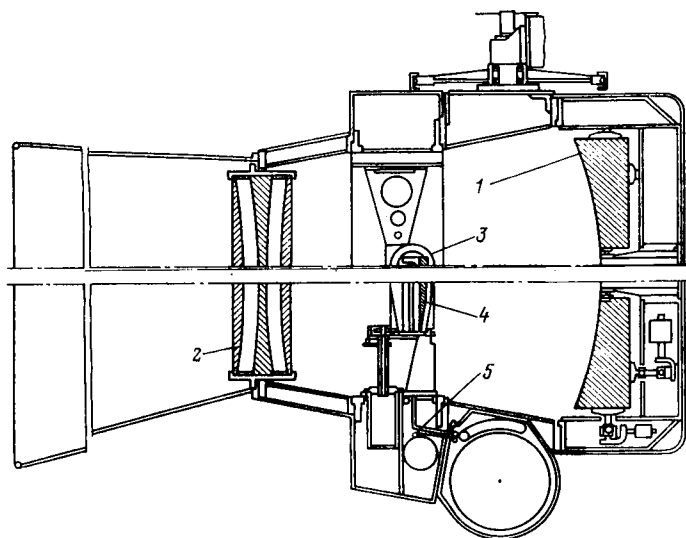


Рис. 19. Оптическая схема камеры Бейкера — Нанна:

1 — главное зеркало; 2 — трехэлементная коррекционная система; 3 — затворы; 4 — фокальная поверхность; 5 — система транспортировки пленки

Перед фокальной плоскостью установлен обтюратор, прерывающий следы спутника или звезд. Дополнительный затвор регулирует начало экспозиции. Для регистрации времени используются часы, обеспечивающие точность 0,0001 с.

Камера имеет трехосную монтировку, позволяющую отслеживать спутник по дуге большого круга со скоростью от 0 до $2^\circ/\text{с}$. Фотографирование спутников производится в двух режимах. При фотографировании ярких спутников камера отслеживает звезды, которые на снимке фиксируются в виде точек. При наблюдении слабых спутников происходит отслеживание спутника, и его изображение получается в виде точки.

Точность определения координат спутника характеризуется ошибкой около $3''$, ошибка моментов наблюдений не грубее 0,001 с.

Камера Бейкера — Нанна была первой высокоточной следящей камерой. Результаты, полученные по наблюдениям с этой камерой, успешно использовались для целей космической геодезии.

Камера Хьюита (Великобритания)

Камера была разработана в начале шестидесятых годов специально для наблюдения ИСЗ.

Оптическая система камеры — система Шмидта с диаметром зеркала 800 мм и диаметром коррекционной пластинки 630 мм.

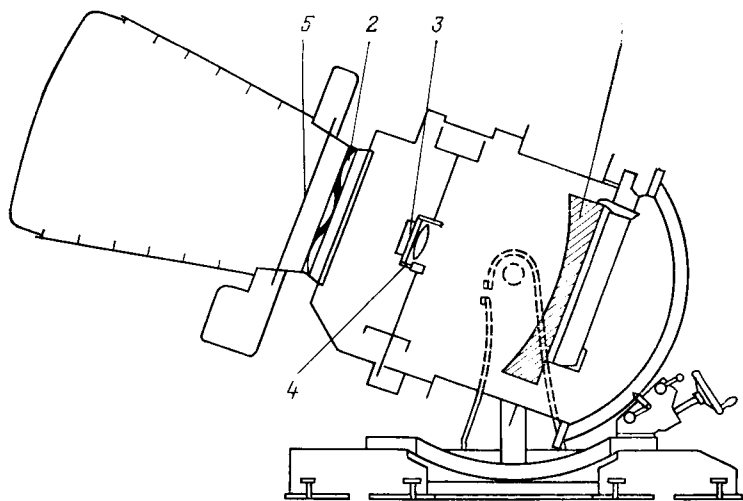


Рис. 20. Оптическая схема камеры Хьюита:

1 — зеркало; 2 — коррекционная пластинка Шмидта; 3 — фотографическая пластинка; 4 — obturator; 5 — ирисовый затвор

Светосила камеры равна единице, поле зрения $10 \times 10^\circ$. В фокальной плоскости установлена полеспрямляющая линза. Хроматическая aberrация исправлена. Фотографирование производится на пластинки размером 200×150 мм (рис. 20).

Для прерывания следа спутника около полеспрямляющей линзы установлен obturator, положение которого впечатывается на фотопластинку с помощью фототранзистора и импульсной лампы. Впечатывание происходит один раз за период вращения obturatorа. Регистрация момента прерывания следа спутника производится с точностью 0,0001 с. Используются кварцевые часы. Камера позволяет фотографировать звезды до 14-й и спутники до 7,5 звездной величины (скорость движения ИСЗ $1^\circ/\text{с}$).

Фотографирование звезд выполняется до и после прохождения изображения ИСЗ через поле зрения камеры. Экспонирование звезд осуществляется вспомогательным ирисовым затвором, расположенным перед входным отверстием камеры.

Точность определения положения звезд $0,9''$, следа спутника $1,1''$.

Камера Хьюита участвовала в работе по программе Смит-сонской астрофизической обсерватории, по программе созда-

ния западноевропейской триангуляционной сети. В настоящее время камера используется в международных работах по космической триангуляции.

§ 11. ИЗМЕРЕНИЯ КООРДИНАТ НА СНИМКЕ. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

После фотолабораторной обработки экспонированного фотоматериала фотоснимок участка звездного неба измеряют. При этом точность окончательного результата в большой степени зависит от выполненных операций в ходе лабораторной обработки снимков.

Нарушения нормального процесса обработки фотоматериала вызывает искажения в положении изображений на снимке.

Наибольшее влияние на точность результатов оказывает деформация фотоматериалов. Деформация сильно возрастает при применении процессов фотолабораторной обработки, сопровождающихся значительной механической нагрузкой на материал (натяжения, перегибы, многократная перемотка ленты и др.).

Деформация фотоматериала может быть учтена при математической обработке результатов наблюдений, если она вызывает изменение масштаба снимка в целом (равномерная деформация), либо в определенном направлении (аффинная деформация).

Деформация, меняющаяся по полю и не подчиняющаяся аналитической зависимости, приводит к искажениям случайного характера, называется случайной или нерегулярной.

Наименьшим образом нерегулярная деформация проявляется на фотопластинках. Так, например, при правильно организованном фотолабораторном процессе среднее квадратическое смещение изображений, обусловленное нерегулярной деформацией, может быть в пределах 0,5—2,5 мкм. Как правило, к краю пластинки деформации возрастают.

Фотоматериалы на пленочной основе имеют значительно большие нерегулярные деформации; в среднем они составляют 6 мкм. При сокращении обработанных участков снимка, используемых при измерениях, до величины менее 4 см², возможно уменьшение нерегулярных деформаций примерно в два раза.

Для измерения астронегативов используются различные приборы. В зависимости от конструкции прибора можно выполнять наблюдения либо одной, либо двух координат одновременно. Более удобны и перспективны координатно-измерительные приборы, позволяющие одновременно измерять координаты изображения объекта сразу по двум осям. С развитием техники в практику фотографических наблюдений начинают входить автоматические измерительные машины. Наиболее широко

в СССР применяется полуавтоматическая измерительная машина «Аскорекорд».

При полуавтоматическом процессе измерения отсчеты по мерным шкалам и их запись производятся автоматически, роль наблюдателя сводится к наведению измерительной марки на изображение объекта.

В случае полностью автоматических измерений весь процесс измерения, включая поиск измеряемого объекта, автоматизирован. Точность измерения координат на «Аскорекорде» составляет 1,5—2,0 мкм и обусловлена в основном ошибками наведения.

Поскольку изображения объектов, как правило, не имеют правильной геометрической формы, наведение визирной марки на изображение сопровождается систематической личной ошибкой, вызванной субъективной оценкой наблюдателем положения центра изображения. Эти систематические ошибки могут достигать значительных величин. Применение автоматизированных измерительных приборов исключает личные ошибки, но оно возможно только при хорошем качестве снимков.

Для получения направлений на ИСЗ в топоцентрической системе координат необходимо измерить координаты звезд и ИСЗ на снимке и затем перейти от них к экваториальным топоцентрическим координатам ИСЗ на момент наблюдения. При этом экваториальные координаты опорных звезд должны быть известны. Таким образом, возникает необходимость в определении математической зависимости между измеренными на снимке координатами изображения фотографируемого объекта и соответствующими топоцентрическими экваториальными координатами.

Изображение фотографируемого участка небесной сферы на негативе является центральной проекцией в плоскости снимка из второй главной точки объектива. Из геометрической оптики известно, что каждое направление из второй главной точки объектива на изображение параллельно направлению из первой главной точки объектива на объект. На рис. 21 O — вторая главная точка объектива; O_1 — оптический центр снимка, определенный как основание перпендикуляра, опущенного из второй главной точки объектива на плоскость снимка; O_2 — точка на небесной сфере с координатами $\alpha=A$, $\delta=D$, проектируемая в оптический центр.

При решении задачи введем: 1) систему экваториальных координат фотографируемых объектов; 2) систему прямоугольных координат ξ , η в плоскости снимка (система идеальных или стандартных координат), причем ось η является проекцией круга склонения точки $O_2(AD)$, а ось ξ перпендикулярна к η в точке O_1 ; положительное направление осей соответствует возрастанию склонения и прямого восхождения; 3) систему прямоугольных измеренных координат x , y в плоскости снимка, задаваемую измерительным прибором.

Последняя система координат, называемая рабочей, устанавливается, как правило, близкой к идеальной системе. Отличие координат звезд и ИСЗ, измеренных на снимке, от идеальных обусловлено многими причинами. Главные из них: несовпадение начала отсчета в координатно-измерительной машине с оптическим центром снимка; несовпадение направления осей x, y с направлением осей ξ, η ; нарушение принципа центрального проектирования существующими aberrациями оптической системы; наличие нерегулярной деформации фотоэмульсионного слоя; различие масштаба идеальной системы координат от масштаба по осям x и y . Эти причины приводят к сложным зависимостям между идеальными и измеренными координатами, имеющими нелинейный характер. Найдем соотношения, позволяющие вычислять по координатам α и δ координаты ξ и η и наоборот, а также определим связь между координатами x, y и ξ, η .

Рассмотрим проекцию произвольной звезды σ на плоскость снимка σ' (см. рис. 21).

Идеальные координаты точки σ' можно получить с помощью следующих выражений:

$$\xi = f \operatorname{tg} l \sin p; \quad \eta = f \operatorname{tg} l \cos p, \quad (11.1)$$

где $l = O_2\sigma$ — угол между направлениями на звезду σ и точку O_2 ; p — позиционный угол светила относительно $O_2(A, D)$; f — фокусное расстояние объектива.

Напишем основную группу астрономических формул для треугольника $PO_2\sigma$:

$$\begin{aligned} \cos l &= \sin \delta \sin D + \cos \delta \cos D \cos (\alpha - A), \\ \sin l \sin p &= \cos \delta \sin (\alpha - A), \\ \sin l \cos p &= \sin \delta \cos D - \cos \delta \sin D \cos (\alpha - A). \end{aligned} \quad (11.2)$$

Разделим вторую и третью формулы (11.2) на первую и подставим значения $\operatorname{tg} l \sin p$ и $\operatorname{tg} l \cos p$ из (11.1), в результате найдем

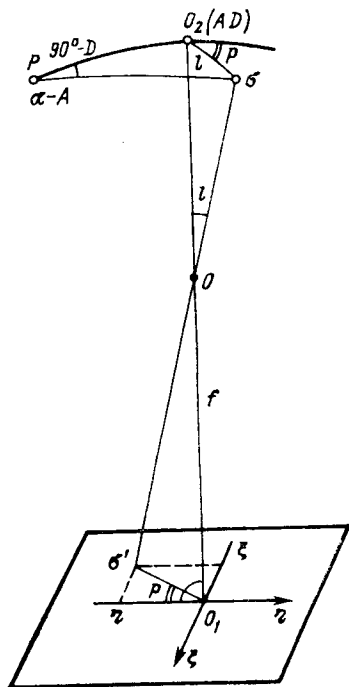


Рис. 21. Схема изображения участка небесной сферы в плоскости снимка

$$\xi = f \frac{\operatorname{ctg} \delta \sin (\alpha - A)}{\operatorname{ctg} \delta \cos (\alpha - A) \cos D + \sin D}, \quad (11.3)$$

$$\eta = f \frac{\cos D - \operatorname{ctg} \delta \cos (\alpha - A) \sin D}{\operatorname{ctg} \delta \cos (\alpha - A) \cos D + \sin D}.$$

Обратная связь, определяющая переход от идеальных координат к сферическим, задается выражениями:

$$\alpha = \operatorname{arctg} \left(\frac{\xi}{f \cos D - \eta \sin D} \right) + A; \quad (11.4)$$

$$\delta = \operatorname{arctg} \left[\left(\frac{\eta \cos D + f \sin D}{f \cos D - \eta \sin D} \right) \cos (\alpha - A) \right].$$

Связь между идеальной и измеренной системами координат значительно сложнее, что очевидно из перечня причин, вызывающих различие координат точек в этих системах. При математической обработке можно только частично учесть причины, вызывающие различие x , y и ξ , η , т. е. измеренных и идеальных координат звезд и ИСЗ.

Наиболее удобной формой связи этих координат в случае ограниченного поля снимка является выражение идеальных координат в виде ряда по степеням x и y :

$$\xi = a_0 + a_1 x + a_2 x y + a_3 y + a_4 x^2 + a_5 y^2 + \dots, \quad (11.5)$$

$$\eta = b_0 + b_1 x + b_2 x y + b_3 y + b_4 x^2 + b_5 y^2 + \dots$$

Эти формулы выражают поворот и сдвиг системы x , y относительно идеальных ξ , η , разномасштабности по осям x , y , а также частично искажения взаимного расстояния между направлениями на звезды. Степень полиномов (11.5) определяется особо в зависимости от характера искажений, требуемой точности, количества измеряемых направлений на звезды и условий фотографических наблюдений.

Таким образом, установление зависимости между x , y и ξ , η сводится к определению коэффициентов рядов (11.5). Эти коэффициенты называются постоянными снимка или пластинки.

На практике обычно используют разложения, включающие полиномы не выше третьей степени. Следовательно, каждая опорная звезда, рабочие координаты которой измерены и идеальные координаты вычислены, дает два уравнения, в которых неизвестными являются коэффициенты a_i , b_i . Для надежного определения коэффициентов необходимо иметь достаточное число звезд (обычно не менее 10—12). Коэффициенты определяются по способу наименьших квадратов из решения системы нормальных уравнений.

После определения коэффициентов a_i, b_i по формулам (11.5) находят идеальные (стандартные) координаты ИСЗ. Пользуясь далее формулами (11.4), находят экваториальные координаты ИСЗ. По остаточным уклонениям v_ξ и v_η вычисляют ошибки единицы веса, веса неизвестных и средние квадратические погрешности координат ИСЗ.

Для снижения влияния ошибок, искажающих положение фотографируемых объектов, желательно фотографирование выполнять так, чтобы изображение ИСЗ располагалось вблизи оптического центра обрабатываемого снимка. Желательно также, чтобы опорные звезды в количестве 10—12 располагались по полю равномерно, окружая изображение ИСЗ.

Формулы (11.3), (11.4), связывающие идеальные и экваториальные координаты, являются точными. При определении связи между идеальными и измеренными координатами первоначально необходимо выбрать степень полинома, описывающего соотношения между идеальными и измеренными координатами. При обработке наблюдений, когда опорные звезды и ИСЗ находятся вблизи оптического центра, достаточно ограничиться линейными членами разложения:

$$\xi = a_0 + a_1x + a_2y; \quad \eta = b_0 + b_1x + b_2y. \quad (11.6)$$

Этот способ обработки называется линейным способом Тернера. При использовании членов с высшими степенями он называется обобщенным способом Тернера [10].

Возможны и другие варианты определения связи между идеальными и измеренными координатами. Например, существует способ определения координат ИСЗ по измерениям координат трех опорных звезд и ИСЗ, причем опорные звезды подбираются так, чтобы объект (ИСЗ) находился примерно в центре тяжести треугольника, образованного звездами [11].

В этом способе вычисляются коэффициенты $D_i (i=1, 2, 3)$, по измеренным координатам звезд и объекта $(x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3, x_0y_0)$. Пользуясь этими коэффициентами и имея идеальные координаты опорных звезд ξ_i, η_i , можно вычислить идеальные координаты ИСЗ по формулам:

$$\xi_0 = \frac{D_1\xi_1 + D_2\xi_2 + D_3\xi_3}{D};$$

$$\eta_0 = \frac{D_1\eta_1 + D_2\eta_2 + D_3\eta_3}{D};$$

$$D_1 = (x_2 - x_0)(y_3 - y_0) - (y_2 - y_0)(x_3 - x_0);$$

$$D_2 = (x_3 - x_0)(y_1 - y_0) - (y_3 - y_0)(x_1 - x_0);$$

(11.7)

$$D_3 = (x_1 - x_0)(y_2 - y_0) - (y_1 - y_0)(x_2 - x_0);$$

$$D = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1).$$

Описанный вариант является частным случаем более общего метода, применяющегося в фотографической астрометрии и основанного на измерениях координат более чем трех звезд [11].

Если в измеренных координатах отсутствуют нелинейные искажения, то связь между идеальными и измеренными координатами выражается дробно-линейной зависимостью:

$$\xi = \frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}}{a_{31}x + a_{32}y + 1}; \quad \eta = \frac{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}}{a_{31}x + a_{32}y + 1}. \quad (11.8)$$

Уравнения погрешностей в этом случае имеют вид:

$$v_{\xi} = a_{11}x + a_{12}y + a_{13} - a_{31}x\xi - a_{32}y\xi - \xi,$$

$$v_{\eta} = a_{21}x + a_{22}y + a_{23} - a_{31}x\eta - a_{32}y\eta - \eta.$$

Здесь неизвестными являются коэффициенты a_{ik} ($i=1, 2, 3$; $k=1, 2, 3$). На использовании этих зависимостей основан способ Дейча [19].

Рассмотренные методы математической обработки учитывают искажения, связанные с построением изображения на реальном снимке с использованием принципа классической фотографической астрометрии [20]. При этом используются ограниченные угловые поля изображения (менее 5°) с соответствующим ограничением длины следа спутника. Такой метод решения задачи носит название астрометрического. Определяемые коэффициенты при этом не имеют реального геометрического смысла и определяются по методу наименьших квадратов для лучшей компенсации всех имеющихся систематических искажений. Преимуществом такого метода является надежность получаемых результатов при ограниченном числе опорных звезд, не превышающем тридцати.

Существует и другой, так называемый фотограмметрический метод решения задачи, основанный на использовании широкого поля изображения ($20-30^\circ$) и обеспечивающий достаточную жесткость геометрических построений. Принцип базируется на совместном определении элементов внешнего и внутреннего ориентирования спутниковой камеры и параметров, учитывающих деформацию связки проектирующих лучей. В этом случае связь между идеальными и измеренными координатами выражается аналитическими зависимостями, параметры которых имеют геометрический смысл. Таким образом, в фотограмметрических методах определяются элементы внешнего ориентирования: A, D — координаты оптического центра, κ — угол между осями η и x (разворот снимка) и элементы внутреннего ориентирования: положение оптического центра снимка в системе измеренных координат, фокусное расстояние камеры, коэффициенты дисторсии и коэффициенты, учитывающие различие масштабов измеренных и идеальных координат.

нат. Это требует наблюдений порядка 100 опорных звезд на снимке.

Системы уравнений связи хорошо обусловлены, благодаря большому количеству избыточных измерений. Неизвестные элементы внешнего и внутреннего ориентирования вплоть до коэффициентов шестого порядка определяются вполне надежно.

§ 12. ВЫЧИСЛЕНИЕ ТОПОЦЕНТРИЧЕСКОГО НАПРАВЛЕНИЯ НА ИСЗ

После получения фотоматериала в готовом для использования виде выбирают на снимке опорные звезды. Для этого необходимо установить соответствие изображений звезд на снимке действительным звездам, координаты которых даются в каталоге. Определение такого соответствия называется отождествлением звезд. Оно осуществляется либо визуально с помощью звездных атласов, либо на ЭВМ с применением специальных алгоритмов сравнения координат звезд, записанных в память ЭВМ, и прямоугольных координат изображений звезд, полученных из измерений.

После отождествления опорных звезд на координатно-измерительной машине измеряют координаты их изображений и координаты точек следа спутника.

Для получения направления на ИСЗ с высокой точностью необходимо на снимке иметь изображения достаточного количества звезд, координаты которых известны. К сожалению, фундаментальные звездные каталоги, характеризующиеся высокой точностью, включают явно недостаточное число звезд для решения поставленной задачи. Например, каталог FK-4 — наиболее точный в настоящее время содержит 1535 звезд. В практике фотографических наблюдений пользуются каталогами, содержащими значительно большее число звезд, однако их координаты уступают по точности координатам фундаментальных каталогов.

В 1966 г. Смитсоновская астрофизическая обсерватория (SAO) выпустила звездный каталог для фотографических спутниковых наблюдений, содержащий 258 997 звезд обоих полушарий. Координаты звезд этого каталога даны в системе FK-4 на эпоху 1950 г. Средняя систематическая ошибка каталога SAO составляет 0,5", для отдельных зон систематическая ошибка может достигать 2,5". Для сравнения можно отметить, что систематическая ошибка каталога FK-4 оценивается в 0,1". Главным достоинством каталога SAO является большое число звезд (не менее четырех звезд на каждый квадратный градус).

Прежде чем пользоваться экваториальными координатами звезд для вычисления идеальных координат, необходимо их привести в соответствие измеренным плоским координатам на снимке. Для получения координат, соответствующих их взаимному положению на небесной сфере в момент наблюдений,

необходимо в экваториальных координатах звезд, приведенных на момент наблюдений, учесть рефракцию и годичную аберрацию. Поправку за рефракцию в зенитные расстояния звезд Δz вычисляют по формулам, известным из сферической астрономии, учитывая второй член разложения. Составляющие рефракции по прямому восхождению и склонению имеют вид:

$$\Delta \alpha = \Delta z \sec \delta \sin q,$$

$$\Delta \delta = \Delta z \cos q,$$

где q — параллактический угол светила.

Для исключения влияния рефракции в направление на ИСЗ поправку следует вводить со знаком, противоположным знаку поправки, введенной в координаты звезд. Необходимо отметить, что рефракция иначе действует на положение спутника, который в отличие от звезд находится на конечном и сравнительно небольшом расстоянии. По этой причине рефракционная поправка в зенитное расстояние ИСЗ состоит из двух частей: поправки за астрономическую рефракцию R_a и поправки за рефракционный параллакс ΔR .

Действие рефракции на зенитное расстояние ИСЗ показано на рис. 22. Здесь O — точка стояния наблюдателя, Os'' — направление на ИСЗ и звезду, искаженное влиянием рефракции; Os' — направление на ту же звезду, свободное от влияния рефракции; Os — направление на спутник, тогда поправка в зенитное расстояние спутника будет

$$R_s = R_a - \Delta R.$$

Можно отметить, что рефракционный параллакс ΔR зависит от изменения показателя преломления воздуха с высотой. Действительно, зависимость n от высоты ведет к изменению вида рефракционной кривой и, следовательно, к изменению l и ΔR .

Если принять закон изменения показателя преломления с высотой в виде $n-1 = k l^a H$, где $k = n_0 - 1$; n_0 — показатель преломления в точке наблюдения; a — эмпирически определяемый коэффициент; H — высота ИСЗ, то формула для вычисления рефракционного параллакса имеет следующий вид [20]:

$$\Delta R = 435,0'' \operatorname{tg} \zeta \sec \zeta C_P C_t, \quad (12.1)$$

где $C_P = 1 + 0,0013125 (P - 760)$; $C_t = 1 - 0,0037t$ — поправочные коэффициенты, учитывающие отклонение действительного состояния атмосферы в точке наблюдения (давления P и температуры t) от нормального ($P_0 = 760$ мм рт. ст. $t = 0^\circ \text{C}$).

При учете аберрации необходимо отметить следующее. Поскольку ИСЗ движется совместно с Землей, направления на ИСЗ не искажаются годичной аберрацией, следовательно, координаты ИСЗ, вычисленные с видимыми координатами звезд, есть истинные координаты, искаженные влиянием рефракции.

Движение ИСЗ относительно наблюдателя учитывается введением поправки либо в момент наблюдений, либо в координаты. Направление, соответствующее положению изображения ИСЗ на снимке, отнесено к моменту фотографирования минус τ , где τ — время прохождения световой волны от спутника до станции (абберационное время). Таким образом, для получения направления, соответствующего положениям спутника и станции в один момент, следует в полученное на снимке направление ввести поправку, равную смещению спутника по координатам α и δ за абберационное время τ :

$$\begin{aligned}\Delta\alpha &= \dot{\alpha}\tau; \\ \Delta\delta &= \dot{\delta}\tau.\end{aligned}\quad (12.2)$$

Скорости спутника по α и δ легко получить по фотографическому снимку, на котором имеется хотя бы два изображения спутника. Расстояние до ИСЗ для вычисления τ в момент фотографирования должно быть известно.

Более удобно вместо введения поправок (12.2) просто отнести направление ИСЗ к моменту $T - \tau$.

При наблюдении активных спутников момент вспышки принимается за момент наблюдения. При наблюдении пассивных ИСЗ с регистрацией времени на станциях вычисление координат производится не на синхронный момент T_e , а на момент $T_e + \tau = T_e$, а полученное направление относят к синхронному моменту.

При обработке результатов фотографических наблюдений для каждого снимка определяется одно направление, соответствующее заранее принятому моменту. Для определения этого направления используют все измеренные положения ИСЗ на снимке. Для получения прямоугольных координат в требуемый момент T_e обычно применяют аппроксимацию измеренных координат полиномами третьей степени:

$$\begin{aligned}x_i &= a_0 + a_1 T_i + a_2 T_i^2 + a_3 T_i^3, \\ y_i &= b_0 + b_1 T_i + b_2 T_i^2 + b_3 T_i^3.\end{aligned}\quad (12.3)$$

Из решения системы (12.3) находят коэффициенты a_j и b_j ($j=0, 1, 2, 3$) и, подставив в (12.3) вместо T момент T_e , определяют координаты x_e, y_e .

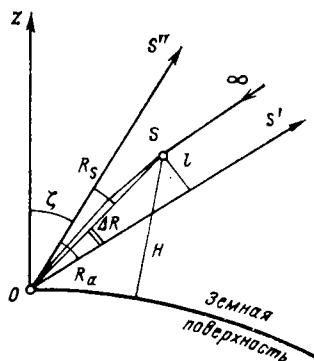


Рис. 22. Влияние рефракции на зенитное расстояние ИСЗ

ТЕЛЕВИЗИОННЫЙ МЕТОД НАБЛЮДЕНИЯ

§ 13. ВОЗМОЖНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ТЕЛЕВИЗИОННОЙ
ТЕХНИКИ ДЛЯ НАБЛЮДЕНИЯ ИСЗ
И КОСМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

Телевизионная техника применяется в астрономии сравнительно недавно, но благодаря своим возможностям получила большое распространение. К числу достоинств астрономических телевизионных систем следует отнести их высокую чувствительность, определяемую в первую очередь квантовым выходом фотокатода передающей трубки, который значительно превышает квантовый выход фотографической эмульсии. При этом большие возможности автоматизации процесса наблюдения открываются с использованием методов непосредственной обработки информации, содержащейся в видеосигнале, с помощью современной вычислительной техники. Телевизионный метод позволяет ввести автоматику как в процесс наблюдений, так и в обработку полученных данных. Высокая эффективность использования светового потока требует существенно более коротких экспозиций, чем при фотографическом методе. Следует особо подчеркнуть, что на современном уровне развития науки и техники фиксировать перепад яркости в деталях оптического изображения в единицы процента позволяют лишь человеческий глаз, телевидение и электронная фотография.

Комплекс телевизионного устройства включает: передающую аппаратуру, с помощью которой оптическое изображение преобразуется в электрические сигналы, канал связи и приемную аппаратуру, задачей которой является преобразование электрических сигналов в оптическое изображение.

В передающей телевизионной трубке (например, суперортиконе) оптическое изображение преобразуется в электрический сигнал, называемый видеосигналом, который характеризует процесс поэлементного преобразования оптического изображения в электрические сигналы (рис. 23). Иными словами, оптическое двухмерное изображение преобразуется во временную последовательность электрических импульсов.

Наиболее широко используемый вид развертки оптического изображения — развертка по линиям равной длины, в совокупности образующим прямоугольник или квадрат. Линии называются строками, а их совокупность — телевизионным рядом строк.

Телевизионным кадром называется однократная развертка всех элементов оптического двухмерного изображения. Длительность развертки одного кадра t_k связана с кадровой частотой соотношением $f_k = 1/t_k$; строчная частота есть величина, обратная длительности разложения изображения по строке t_c , т. е. $f_c = 1/t_c$.

Развертка спроектированного на фотокатод передающей трубки изображения управляется развертывающим устройством с синхрогенератором.

Видеоусилитель передающей части усиливает видеосигнал до величины, необходимой для передачи по каналу связи. Видеоусилитель в приемной части фильтрует от помех видеосиг-

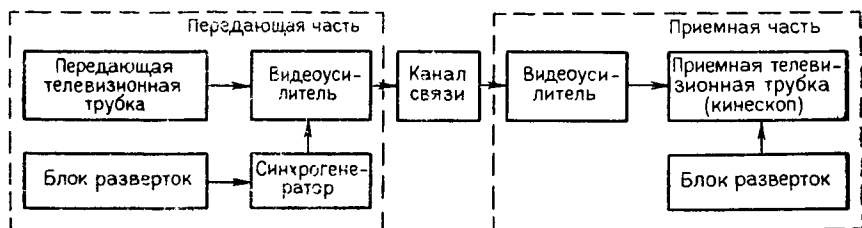


Рис. 23. Блок-схема телевизионной системы

нал и усиливает его. В приемной телевизионной трубке (кинескопе) сигнал с помощью развертывающего устройства преобразуется в оптическое изображение на экране. Астрономические телевизионные системы, как правило, замкнутые, т. е. передача видеосигнала в эфир отсутствует и осуществляется по кабелю. При этом развертывающее устройство для передающей и приемной частей аппаратуры может быть одно.

В соответствии с программой наблюдений видеосигнал можно закодировать по амплитуде и времени с последующей обработкой на ЭВМ. Накопление полученной информации в ЭВМ может длиться очень долго, что позволяет повысить точность регистрации положения слабых космических объектов.

В качестве недостатка телевизионного метода наблюдений следует отметить ограниченные размеры фотокатодов, вследствие чего телевизионный метод неприменим, когда требуется получать информацию с большого участка неба с хорошим угловым разрешением. Высокое угловое разрешение в небольшом поле можно достигнуть только соответствующим увеличением фокусного расстояния телескопа. К недостаткам телевизионной аппаратуры необходимо отнести наличие дисторсионных искажений. В некоторых передающих трубках дисторсионные ошибки могут составлять единицы и десятки процентов, особенно на краю кадра. Однако эти ошибки можно сравнительно легко учесть.

Методика наблюдения ИСЗ различается для низких и высоких ИСЗ. К первой группе относят ИСЗ, которые находятся на высотах до 1500 км. Эти спутники имеют большую угловую скорость, их звездная величина лежит в пределах 0—9^m. Далекие ИСЗ и космические объекты, расстояние до которых превышает 1500 км, имеют небольшую угловую скорость, их видимые величины лежат в пределах 10—14^m.

При наблюдении низких ИСЗ применение телевизионной аппаратуры позволяет существенно (на 4—5^m) повысить проникающую способность оптической телевизионной системы по сравнению с фотографической и, следовательно, проводить наблюдения ИСЗ с более простой оптикой. Для поиска и обнаружения спутника используют объективы с фокусным расстоянием 150—500 мм. Передающая телевизионная камера устанавливается на параллактической или азимутальной монтировке. Поиск и обнаружение объекта производятся визуально или автоматически при обработке сигнала на ЭВМ. Для регистрации времени наблюдения в состав аппаратуры вводится дополнительное импульсное устройство, синхронизированное кадровыми синхроимпульсами, управляющими работой печатающего хронографа. Получение измеримых изображений ИСЗ достигается применением затвора. Учет дисторсионных искажений осуществляется с помощью калибровочной сетки. При необходимости получения координат ИСЗ с высокой точностью используют две параллельные системы на одной монтировке. Широкоугольная камера служит для опознавания объекта, а определение координат осуществляется камерой с большим фокусным расстоянием. Возможно объединение системы камер в единую «веерную» сборку, где соседние участки контролируются отдельными камерами.

Особенностью наблюдений далеких ИСЗ является применение телескопов с большой проникающей способностью. Размеры поля зрения ограничиваются входным фотокатодом и составляют десятки минут. Визуальный контроль дает возможность увеличивать проникающую способность уменьшением видимой скорости перемещения ИСЗ по экрану движением телескопа.

§ 14. АППАРАТУРА, МЕТОДИКА НАБЛЮДЕНИЙ И ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ

Применение телевизионного метода наблюдений позволяет создать полностью автоматизированную наблюдательную систему для определения координат ИСЗ. Поскольку телевизионная система является высокоскоростным датчиком информации, которую несет видеосигнал, требуется согласование скорости поступления информации со скоростью ее ввода в ЭВМ. Как правило, при автоматической обработке приходится опускать часть поступающей информации.

Наиболее важной является информация о положении объекта в растре и об изменении положения во времени. Координаты объекта преобразуются во временные интервалы на основе интервалов, задаваемых строчными и кадровыми синхроимпульсами.

Блок ввода информации, служащий для согласования работы телевизионной системы и ЭВМ, включает кодирующее

устройство и устройство для ввода дополнительных данных (момента наблюдений, координат области неба и т. д.). Алгоритмом обработки координатной информации предусмотрено: вычисление координат звезд по положению их изображения в растре, фиксация положения растра на небесной сфере, а также анализ информации для выявления положений объектов наблюдения и отбраковки шумовых выбросов.

Известно, что при телевизионной передаче по каналу связи необходимо кроме сигналов изображения передавать синхронизирующие импульсы для синхронизации генераторов развертки приемной трубки. Синхроимпульсы служат основой телевизионного растра, и следовательно, их нужно использовать при построении координат внутри кадра. Для этого удобно воспользоваться прямоугольной системой координат с началом в верхнем левом углу растра (рис. 24).

Длительность каждой строчки в растре t_c и число строк постоянны. Целесообразно координатам x и y поставить в соответствие временные интервалы t_x и t_y , получаемые с помощью следующих выражений:

$$t_x = \int_0^x \frac{dx}{v_x(t)},$$

$$t_y = (k-1)t_c + t_x, \quad (14.1)$$

где $v_x(t)$ — скорость считывающего луча, являющаяся функцией времени, вследствие нелинейности развертки передающей трубки вдоль строки; k — номер строки, на которой находится изображение объекта.

В устройствах кодирования видеосигнала временные интервалы, соответствующие x и y , преобразуются в двоичный код. Строчный синхроимпульс поступает на вход счетчика координаты y и меняет его состояние на единицу после начала каждой строки. Появление импульса от объекта в видеосигнале открывает схему совпадений (схема И), после чего содержимое счетчика поступает в ЭВМ. В начале кадра кадровый синхроимпульс приводит счетчик в исходное состояние. На вход счетчика координаты x подается текущая координата считывающего луча путем заполнения временных интервалов по каждой строке счетными импульсами стабильной частоты. В момент появления в видеосигнале импульса от объекта, поступающего на схему совпадения (И), текущая координата счетчика передается в ЭВМ. Необходимо отметить, что начало временного аналога координат соответствует положению на временной оси задних фронтов строчных и кадровых гасящих импульсов (рис. 25). Схемы ввода в ЭВМ данных для определения координат x , y (рис. 26, 27) содержат счетчики, содержимое которых поступает на ЭВМ через схему совпадений.

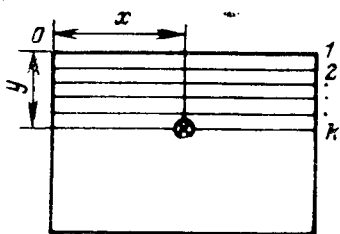


Рис. 24. Система координат телевизионного кадра

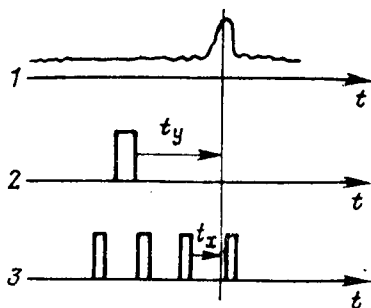


Рис. 25. Схематическое изображение видеосигнала, строчного и кадрового синхроимпульсов:

1 — видеосигнал; 2 — кадровый синхроимпульс; 3 — строчный синхроимпульс

Как отмечалось выше, наличие шумовых выбросов сигнала на строке следует учитывать при составлении логических схем и алгоритмов обработки информации.

В общих чертах телевизионная измерительная система функционирует следующим образом. Телевизионное изображение, преобразованное в цифровую форму, вводится в ЭВМ синхронно с телевизионной разверткой. ЭВМ по мере накопления информации с заданного числа кадров выполняет ее обработку вплоть до получения координат астрономических объектов. Возможно также использование ЭВМ для управления всей системой, т. е. управления приводом телескопа, контроля режимов работы узлов аппаратуры и др.

При кодировании и вводе информации в ЭВМ быстродействие ЭВМ должно соответствовать скорости развертки телевизионного раstra. При этом для каждого объекта на строке

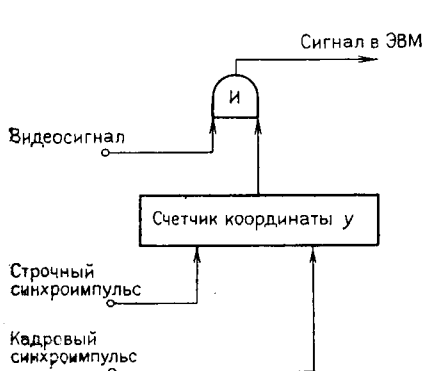


Рис. 26. Схема ввода данных для определения координаты y

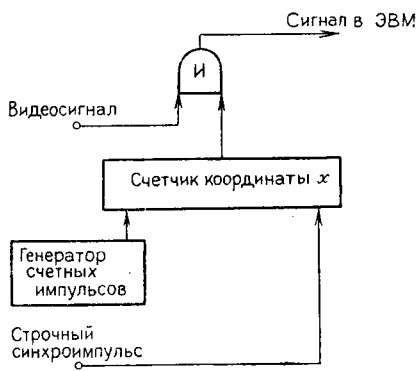


Рис. 27. Схема ввода данных для определения координаты x

требуется отдельный счетчик, что ограничивает возможное число приходящихся на одну строку разложения объектов наблюдения. Работа счетчиков управляется специальным электронным коммутатором. Координаты середины сигнала от объекта на видеонимпульсе получаются с помощью счетчика, управляемого передним и задним фронтами полезного сигнала, в результате чего показания счетчика соответствуют удвоенному расстоянию от центра сигнала до начала строки.

Геометрические искажения изображений, возникающие в оптике телевизионной аппаратуры, могут привести к большим ошибкам в координатах. Исключение этих искажений осуществляется калибровочными измерениями с применением эталонных решеток. Заранее калиброванная 100-точечная решетка проецируется на фотокатод телевизионной трубки. Координаты узлов решетки заранее закладываются в память машины. Измеренные координаты их изображений на экране определяются на ЭВМ, что позволяет рассчитать коэффициенты аппроксимирующих полиномов и оценить точность результатов. Необходимо отметить в этой связи, что благодаря малому полю зрения телевизионной системы (обычно 30—10') в кадре бывает недостаточное количество опорных звезд, что делает невозможным применение способа Тернера в его традиционном виде.

При аппроксимации искажений полиномами в обработке участвуют: x_p , y_p — координаты изображений узлов решетки, измеренные телевизионной системой и искаженные ошибками измерений и геометрическими ошибками системы; ξ' , η' — измеренные прямоугольные координаты; ξ , η — идеальные прямоугольные координаты, вычисляемые по измеренным для данной телевизионной системы.

Обычно координаты нормируются так, что их значения лежат в пределах [0, 1]. Редуцирование координат x_{ij} , y_{ij} в ξ_{ij} , η_{ij} выполняется с помощью полиномов до 3, 5, 7 степеней, содержащих соответственно 10, 21, 36 неизвестных коэффициентов k , подлежащих определению. Например, для $k=21$ имеем:

$$\begin{aligned}\xi_{ij} &= a_0 + a_1 x_{ij} + a_2 y_{ij} + \dots + a_{19} x_{ij}^4 y_{ij}^4 + a_{20} y_{ij}^5, \\ \eta_{ij} &= b_0 + b_1 x_{ij} + b_2 y_{ij} + \dots + b_{19} x_{ij}^4 y_{ij}^4 + b_{20} y_{ij}^5, \\ i &= 1, \dots, 10; \quad j = 1, \dots, 10.\end{aligned}\quad (14.2)$$

После нахождения коэффициентов a и b эти зависимости можно использовать для редукции дисторсионных искажений любых измерений x , y в пределах массивов x_p , y_p . Ошибки определяются по невязкам уравнений (14.2):

$$\begin{aligned}\sigma_{\xi} &= \sqrt{\frac{[v_{ij}^2(\xi)]}{100 - k}}; & \sigma_{\eta} &= \sqrt{\frac{[v_{ij}^2(\eta)]}{100 - k}}; \\ \sigma &= \sqrt{\frac{\sigma_{\xi}^2 + \sigma_{\eta}^2}{2}}.\end{aligned}$$

В качестве примера результатов уравнительных вычислений ниже приведены ошибки, которые характеризуют результаты калибровочных измерений телевизионной системы с телескопом АЗТ-8 (диаметр главного зеркала 0,7 м, фокусное расстояние 11,0 м, поле зрения $10 \times 10'$):

k	σ_{ξ}	σ_{η}	σ
3	7,61"	5,62"	6,69"
10	0,92	2,19	1,66
21	0,65	0,62	0,63
36	0,56	0,42	0,50

Измерение координат квазистационарных ИСЗ на этом телескопе в режиме часового ведения характеризуется точностью $\sigma_x = 2,0''$ (измерения вдоль строки); $\sigma_y = 1,2''$ (измерения поперек строки).

При обработке телевизионной информации алгоритмы процесса обнаружения и измерения координат строятся по принципу распознавания образов в соответствии с классификацией совокупностей возможных положений небесных тел. Каждый класс описывается на языке словаря отдельных признаков. Критерии оценки меры близости с заданным классом связаны с нахождением отношения правдоподобия

$$\Lambda = P(YIS)/P(YIO),$$

где $P(YIS)$ — вероятность получения данной реализации (результата измерения) при условии, что полезный сигнал в ней присутствует; $P(YIO)$ — вероятность получения данной реализации при отсутствии полезного сигнала.

Алгоритмы выделения полезной информации могут синтезироваться как для одного кадра (однокадровая фильтрация), так и сразу по нескольким кадрам (многокадровая фильтрация).

Координаты изображения объекта от строки к строке и от кадра к кадру считаются совпадающими, если разность между ними не превосходит наперед заданного значения. Синтез алгоритма селекции (распознавания) подвижных объектов основан на использовании характеристик смещения положения центра изображения подвижного объекта относительно неподвижных объектов, получившихся на соседних кадрах.

Отождествление звезд выполняется также автоматически с применением корреляционных критериев распознавания образов. Допустим, что положения звезд в каталоге описываются функцией:

$$\Phi(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^m \delta(\xi - \xi_i) \delta(\eta - \eta_i), \quad (14.3)$$

$$\text{где } \delta(x) = 0 \quad (x \neq 0); \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\xi) d\xi = 1;$$

$\delta(x)$ — дельта-функция, позволяющая формально представлять преобразование $f(\xi) \rightarrow f(x)$ как интегральное преобразование:

$$\int_V f(\xi) \delta(x, \xi) d\xi = f(x);$$

ξ_i, η_i — тангенциальные координаты звезды в каталоге; m — количество звезд в каталоге.

Положение звезд в телевизионном кадре опишем формулой

$$F(x, y) = \sum_{j=1}^n f_{ex}(x - x_j) f_{ey}(y - y_j),$$

где x, y — текущие координаты точек кадра, приведенные к одному масштабу с ξ, η ; x_j, y_j, n — координаты и число звезд в кадре;

$$f_{ex}(x - x_j) = \frac{1}{2} [\text{sign}(x - x_j + \varepsilon_x) - \text{sign}(x - x_j - \varepsilon_x)];$$

$$f_{ey}(y - y_j) = \frac{1}{2} [\text{sign}(y - y_j + \varepsilon_y) - \text{sign}(y - y_j - \varepsilon_y)];$$

$\varepsilon_x, \varepsilon_y$ — максимальные ошибки в координатах x, y , вызванные ошибками масштабов, непараллельностью осей и ошибками измерения центров объектов по осям x, y .

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \text{ — единичная функция.}$$

Взаимная корреляционная функция для $\Phi(\xi, \eta)$ и $F(x, y)$ имеет вид

$$\begin{aligned} B(\tau_x, \tau_y) &= \iint_S \Phi(\xi, \eta) F(\xi + \tau_x, \eta + \tau_y) d\xi d\eta = \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f_{ex}(\xi_i + \tau_x - x_j) \cdot f_{ey}(\eta_i + \tau_y + y_j); \end{aligned} \quad (14.4)$$

$$\tau_x = x - \xi_i; \quad \tau_y = y - \eta_i;$$

τ_x, τ_y — смещение осей координат кадра относительно осей каталога; S — область интегрирования, совпадающая с выбранным участком кадра.

Алгоритм отождествления предусматривает нахождение двух значений τ_x, τ_y , соответствующих максимуму функции взаимной корреляции (14.4).

Расчет экваториальных координат объекта по его измеренным координатам и координатам отождествленных звезд выполняется известными в астрономии способами. Перед расчетом необходимо компенсировать дисторсионные искажения.

§ 15. КОМБИНИРОВАННЫЕ СИСТЕМЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КООРДИНАТ

Как уже отмечалось, развитие телевизионной техники позволило определять координаты наблюдаемых объектов в реальном масштабе времени. Это стало возможным путем применения средств автоматизации в наблюдательной технике, позволяющих полнее реализовать возможности телевизионного метода. Искращения телевизионного раstra и его малый размер затрудняют наблюдения. Поэтому часто используют телевизионный метод в комбинации с другими методами наблюдений.

При наблюдении дальних космических объектов применение телевизионной техники вызвано ее высокой проникающей способностью. В качестве примера можно отметить, что фотографирование объектов 13—16-й звездной величины возможно на 50-сантиметровом телескопе с часовыми экспозициями. Высокочувствительная телевизионная система позволяет наблюдать такой объект визуально на экране. Очевидно, что при движении такого объекта на фоне звезд его фотографические наблюдения затруднены. Непосредственное применение телевизионной системы для измерения координат невозможно, так как в поле зрения телевизионного кадра ввиду его малых размеров ($10 \times 10'$) редко попадают опорные яркие звезды.

Для исключения этого недостатка использовалась следующая методика измерений. На телевизионном телескопе устанавливалась фотокамера с большим полем зрения, оптические оси камеры и телескопа устанавливались параллельно и их взаимное положение контролировалось. Привязка положения наблюдаемого объекта в поле зрения телевизионного телескопа к опорным звездам на астронегативе фотокамеры выполняется с помощью специальной марки, изображение которой проецируется на телевизионный экран и астронегатив. По измерениям астронегатива можно определить экваториальные координаты изображения марки; измеряя взаимное положение марки и наблюдаемого объекта на телевизионном экране, получают координаты космического объекта. Определение постоянных, характеризующих взаимное расположение осей камеры, телескопа и системы, передающей изображение марки, производится по калибровочным наблюдениям звезд. Опытные наблюдения показали, что на 50-сантиметровом телескопе можно наблюдать объекты до 18-й звездной величины с ошибкой определения координат $1\text{--}2''$ [19]. На рис. 28 изображена схема подобной установки для наблюдения дальних космических объектов.

Очевидно, что данная методика наблюдений не предполагает оперативного определения координат космических объектов. Путем установки на телевизионном телескопе автоматического фотоэлектрического следящего устройства (АФСУ) устраняется этот недостаток рассмотренной системы (рис. 29). Угломерный комплекс, позволяющий решить задачу оперативного определе-

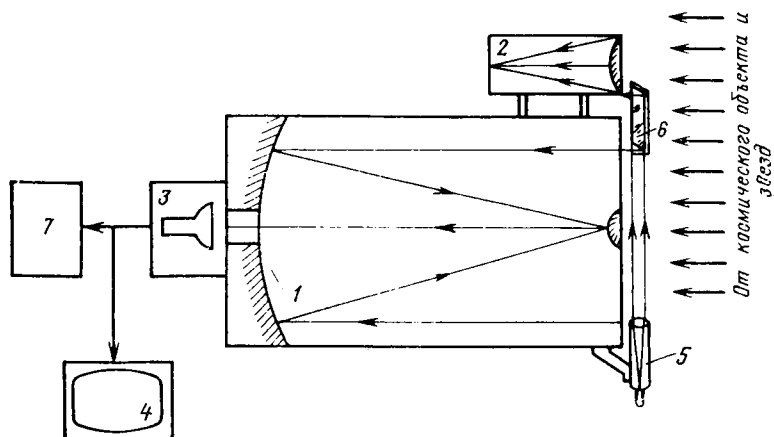


Рис. 28. Схема установки для наблюдения дальних космических объектов:

1 — телескоп; 2 — фотокамера; 3 — телевизионная система; 4 — телевизионный экран; 5 — коллиматор; 6 — призма; 7 — блок обработки

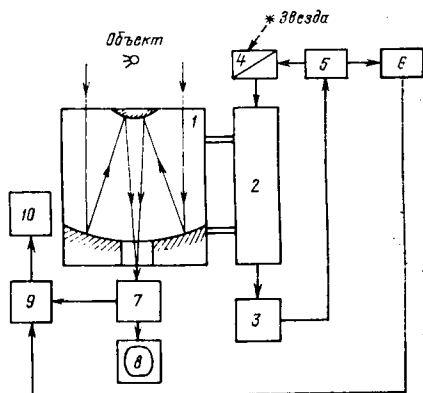


Рис. 29. Схема установки для оперативного определения координат дальних космических объектов:

1 — телескоп; 2 — труба-гид; 3 — АФСУ; 4 — оптическое сканирующее устройство (ОСУ); 5 — механизм управления ОСУ; 6 — датчики положения; 7 — система регистрации объекта; 8 — телевизионный экран; 9 — система обработки информации; 10 — устройство выдачи результатов

ния координат, имеет поле зрения $3 \times 3^\circ$, ограниченное допустимой величиной используемого оптического устройства сканирования в АФСУ. В таком поле зрения всегда имеются звезды до 6-й звездной величины. Методика измерений заключается в регистрации космического объекта и опорной звезды отдельно телевизионной камерой и системой АФСУ. При этом угол между ними ($\Delta\alpha$ и $\Delta\delta$) измеряется автоматически с помощью датчиков, установленных на оптическом устройстве сканирования АФСУ. Погрешности, возникающие вследствие несоосности телескопа и АФСУ систематически определяются по наблюдениям звезд. Точность однократного измерения разностей экваториальных координат звезда — наблюдаемый объект составляет 2—3".

Известны и другие методы оперативного определения координат объектов, например, с применением фотоэлектрических методов регистрации звезд и гидрирования объекта. В заключение необходимо отметить, что опыт применения описанных систем в основном ограничен наблюдением медленных объектов.

ПРИМЕНЕНИЕ ЛАЗЕРНОЙ ТЕХНИКИ ДЛЯ НАБЛЮДЕНИЙ ИСЗ

§ 16. ОСОБЕННОСТИ И ВОЗМОЖНОСТИ ЛАЗЕРНО-ДАЛЬНОМЕРНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Лазерные наблюдения ИСЗ позволяют получать высокоточные расстояния пункт наблюдения — ИСЗ. Разработка и создание лазерных дальномеров и сопутствующей им аппаратуры были связаны с решением ряда физических и инженерных проблем. Например, генерирование мощных лазерных импульсов (сотни мегаватт) короткой длительности (несколько наносекунд) с малой расходимостью пучка, создание системы регистрации времени прохождения импульсом удвоенного расстояния пункт наблюдения — ИСЗ с точностью 1—2 нс и системы высокоточной привязки момента наблюдения к шкале единого времени.

В настоящее время созданы лазерные дальномеры, позволяющие измерять расстояния в тысячи километров с ошибкой от нескольких сантиметров до одного метра.

Большие трудности возникли при регистрации слабых отраженных от ИСЗ сигналов и их фильтрации от помех.

В лазерных дальномерах, применяемых в космической геодезии, используется импульсный принцип измерения расстояния. Лазерный передатчик посылает в направлении ИСЗ световой импульс, который, отразившись от специальных отражателей, установленных на борту ИСЗ, возвращается обратно и фиксируется приемником на станции. Измерение временного интервала между посылкой и приемом сигнала τ позволяет вычислить расстояние до ИСЗ в средний момент между посылкой и приемом сигнала:

$$\rho = \frac{1}{2} c \tau, \quad (16.1)$$

где c — скорость света.

На спутнике устанавливаются уголкового отражатели, представляющие собой трехгранные пирамиды, образованные сечением куба по диагональной плоскости. Отражатели изготавливают из сплошного куска кварца, специального стекла или полированными из трех плоских зеркал. Отражательные грани могут быть зеркальными или работать на принципе полного внутреннего отражения. Основное свойство уголкового отражателя заключается в отражении падающего излучения в направлении, противоположном направлению падающих лучей.

Максимальная измеряемая дальность R может быть получена по формуле

$$R = \left(\frac{16}{\pi^2} \cdot \frac{W_t}{W_r} \cdot \frac{\rho_r \alpha_r \alpha_s A_s T^2}{\omega_t^2 \omega_s^2} \right)^{1/4}, \quad (16.2)$$

где W_t — энергия излучения передатчика дальномера; W_r — минимальная энергия, регистрируемая приемником; A_r — площадь апертуры приемного устройства; ρ_r — коэффициент передачи световой энергии в оптике приемного устройства; α_s — коэффициент отражения отражателей на борту ИСЗ; A_s — площадь зоны отражения; T — коэффициент передачи энергии в земной атмосфере; ω_t — угловая апертура луча лазерного дальномера; ω_s — угловая апертура отраженного луча.

Для повышения эффективности регистрации слабых отраженных сигналов используются следующие средства: интерференционные фильтры, настроенные на частоту излучения передатчика и применяемые при наблюдениях в дневное время; фотоумножители, имеющие малые собственные шумы и позволяющие выполнять детектирование сигнала на уровне одного электрона; временные электронные затворы, открывающиеся на короткое время предполагаемого прихода отраженного сигнала (момент прихода сигнала рассчитывается по эфемеридным данным).

Точность определения расстояния лазерными дальномерами определяется: ошибками приема ослабленного и искаженного в атмосфере сигнала, которые зависят от энергии длительности импульса (с увеличением длительности и уменьшением энергии ошибки растут); разрешающей способностью и стабильностью счетчика, применяемого для измерения временного интервала τ ; нестабильностью запаздывания сигнала в аппаратуре; ошибками учета влияния атмосферы на измеряемую дальность, которая изменяет скорость прохождения световой волны и искривляет путь следования лазерного импульса;

ошибками привязки результатов измерений дальности к шкале единого времени; неопределенностью положения угловых отражателей относительно центра масс спутника и др.

В спутниковых лазерных дальномерх часто применяются оптические квантовые генераторы на рубиновых кристаллах, обеспечивающие генерацию мощных импульсов с длиной волны измерения $\lambda = 0,6943$ мкм. Длительность импульсов находится в пределах от десятков до единиц наносекунд, энергия импульса составляет несколько джоулей.

В последнее время имеются дальномеры с оптическими генераторами на неодимовом стекле. Такие лазеры позволяют получать более короткие импульсы, что повышает эффективность системы и устраняет проблему оптической прочности элементов за счет снижения энергии сигнала в импульсе.

Лазерный передатчик и приемник, оптические оси которых согласованы, наводятся на ИСЗ. Наведение на ИСЗ или непрерывное слежение может выполняться автоматически или наблюдателем. Очевидно, что точность наведения на ИСЗ имеет прин-

ципиальное значение, поскольку позволяет уменьшить угол расходимости лазерного луча и соответственно увеличить дальность действия и точность работы дальномера.

В момент посылки в направлении ИСЗ импульса «Старт» сигнал включает счетчик временного интервала τ и обеспечивает привязку момента посылки к системе единого времени. Оптическая система приемника излучения подает на фотоумножитель сигнал, отраженный от установленных на борту ИСЗ отражателей. Электрический сигнал с выхода фотоумножителя после усиления и формирования подается на электронный счетчик временного интервала τ и останавливает его.

Для снижения вероятности остановки электронного счетчика случайными шумовыми импульсами вход электронного счетчика открывается только на малый временной интервал, соответствующий времени прихода отраженного сигнала.

Разрешающая способность счетчиков составляет 1—10 нс, что соответствует разрешению по дальности 0,15—1,5 м. Частота генерации импульсов передатчиками лежит в пределах 1—30 Гц. При тщательном учете инструментальных постоянных, определяемых из регулярной калибровки дальномеров, уровень инструментальных ошибок не превосходит 20 см. В перспективе имеется возможность снизить их уровень до 5 см. Поправка за влияние атмосферы имеет ошибку 0,10—0,15 м, что вызывается отклонением принятой модели атмосферы от действительной.

§ 17. ЛАЗЕРНЫЕ УСТАНОВКИ ДЛЯ НАБЛЮДЕНИЙ ИСЗ

В рамках сотрудничества ученых социалистических стран по программе «Интеркосмос» (рис. 30) был создан передвижной лазерный спутниковый дальномер.

Диаметр главного зеркала приемника системы Кассегрен — Мэнджинг 320 мм, диаметр объектива телескопа-гида 120 мм. Лазерный генератор на рубине с $\lambda = 0,6943$ мкм. Энергия на выходе 1,5 Дж, мощность импульса на выходе 100 МВт. Длительность импульса 10—2 нс, частота повторения 1 Гц. Привязка к системе единого времени с точностью 2 мс. Расходимость лазерного пучка на выходе может меняться от 3 мрад до 0,5 мрад. Часть передаваемого импульса детектируется и открывает «ворота времени» 3 счетчика 5 для измерения временного интервала τ .

Приемник состоит из телескопа 1 интерференционного фильтра с полосой пропускания $2 \cdot 10^{-9}$ м и фотоумножителя 2. Сигнал с выхода фотоумножителя проходит через «ворота времени» 3 и останавливает счетчик 5. Показания счетчика и хронографа 7 записываются печатающим устройством 8. Разрешение электронного счетчика 2 нс. Точность привязки времени электронного хронографа 100 мкс, стабильность хода 10^{-9} , регистрация моментов автоматическая.

Установка наведения четырехосная, работающая в полуавтоматическом режиме с ручной коррекцией в 3-й и 4-й осях. Конструкция прибора рассчитана на экспедиционные условия и позволяет перевозить дальномер на большие расстояния, сохраняя его в рабочем состоянии.

Лазерный дальномер «Интеркосмос» характеризуется средней квадратической ошибкой наблюдения по внутренней сходимости

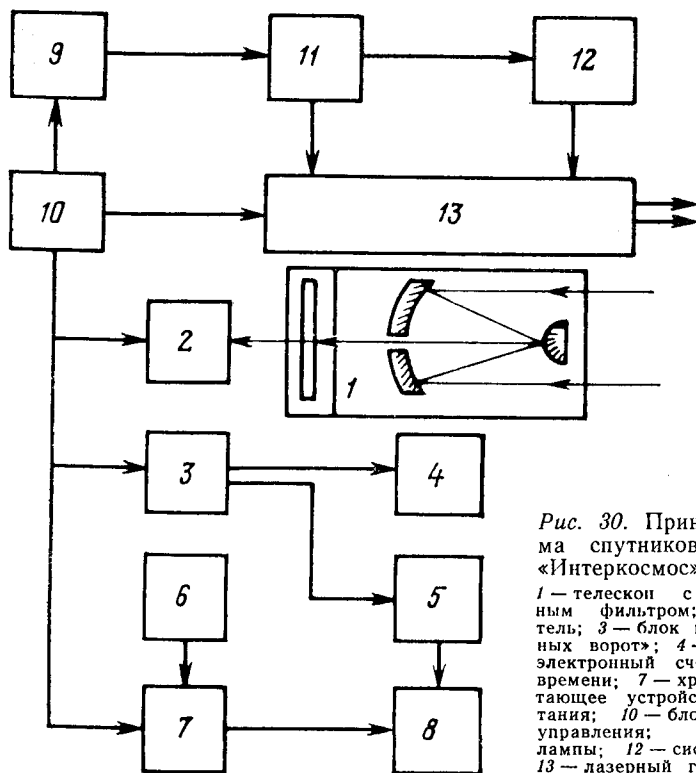


Рис. 30. Принципиальная схема спутникового дальномера «Интеркосмос»:

1 — телескоп с интерференционным фильтром; 2 — фотоумножитель; 3 — блок настроек «временных ворот»; 4 — осциллоскоп; 5 — электронный счетчик; 6 — служба времени; 7 — хронограф; 8 — печатающее устройство; 9 — блок питания; 10 — блок дистанционного управления; 11 — газоразрядные лампы; 12 — система охлаждения; 13 — лазерный генератор

мости 1,5 м. При фотографическом анализе принятого сигнала точность может быть повышена. Реальная точность наблюдений лежит в пределах 0,6—2,0 м. Радиус действия дальномера 3000 км.

В Потсдаме передатчик на рубине (энергия 1—2 Дж, длительность импульса 15—25 нс) установлен на камере SBG так, что камера совместно с передатчиком попеременно используется как лазерный дальномер и как фотографическая камера. В ЧССР разработан лазерный дальномер с радиусом действия 10 000 км и точностью измерения расстояния 0,5 м. Он имеет приемное зеркало диаметром 630 мм, счетчик с разрешением 1 нс, фильтр с шириной полосы пропускания 10^{-10} м, лазерный

передатчик на рубине, длительность импульса 15 нс, расходимость пучка на выходе передатчика 0,5 мрад.

Лазерные дальномеры в настоящее время получили широкое распространение во всем мире. Основные характеристики лазерных локационных установок приведены в табл. 4.

В Годдардовском космическом центре США создана лазерно-локационная обсерватория, задачей которой является исследование проблем лазерной локации космических объектов и совершенствование аппаратуры и методов лазерной локации ИСЗ и Луны. На станции используется один телескоп для гидирования ИСЗ, приема и передачи сигнала, применяются фотоумножители с большим квантовым выходом и повышенным временным разрешением, используются методы приема сверхслабых сигналов. В настоящее время достигнута точность 15 см с лазером на гранате с энергией импульса на два-три порядка меньше обычного уровня.

Т а б л и ц а 4. Лазерные установки для наблюдений ИСЗ

Страна	Назначение	Энергия импульса, Дж	Длительность импульса, нс	Расходимость пучка, 10 ⁻³ рад	Тип монтировки
Австралия ВНР	Луна ИСЗ	3 1—2	3—7 10—15	3 3	Полярная Четырех- осная
ГДР	»	1—2	15—25	1	То же
Нидерланды	»	1—2	4	3	Азимуталь- ная
Греция	»	0,75	7	7	»
Италия	»	1,0	5	3	»
Боливия	»	1	15	3	Четырех- осная
СССР	»	1	15	3	»
СССР, ФИАН	Луна	2,5	10	2	Полярная
США, Кос- мический центр, Годдард	ИСЗ	0,75	5	4	Азимуталь- ная
США, НАСА	Луна	0,75	5	4	То же
США, Гавайский университет	ИСЗ	0,75	5	4	»
ФРГ	Луна	0,25— 0,35	0,75	1,5	»
Финляндия	ИСЗ	0,25	0,2	3	»
Япония	»	1	20	3	Полярная
	»	0,4	2,5	5	Азимуталь- ная

Для решения задач высшей геодезии и геодинамики перспективным является использование результатов лазерной локации Луны. Впервые лазерная локация Луны осуществлена в 1963 г. учеными Физического института АН СССР и Крымской астрофизической обсерватории. Аппаратура для лазерной локации устанавливалась на телескопе с диаметром зеркала 2,6 м. Рубиновый лазер излучал энергию в импульсе 3 Дж длительностью 20 нс. Частота повторения импульсов $\frac{1}{3}$ Гц. Расходимость пучка на выходе телескопа 5", полоса пропускания интерференционного фильтра $1 \cdot 10^{-9}$ м. Относительная стабильность стандарта частоты $5 \cdot 10^{-11}$. Точность измерения расстояния 1,2 м. На Крымской астрофизической обсерватории ведутся регулярные лазерно-локационные измерения расстояний до отражателей, установленных на Луноходе-I и Луноходе-II, лоцируются также американские отражатели Аполлон-11, Аполлон-14, Аполлон-15. Большие перспективы имеет синхронное измерение рас-

Точность наведения, угл. с	Диаметр приемного телескопа, м	Наведение	Служба времени		Усреднение по измерениям
			метод	точность, мс	
— 2	1,5 0,32	— Визуальное, полуавтоматическое То же —	Через ИСЗ —	1 2	— 50—100
— 20	0,32 0,5	Визуальное, ТВ-система Визуальное То же	Лоран-С ТВ-канал Лоран-С	4 1 10	50—100 15—30 30—50
90 15	0,36 0,5	Визуальное, ТВ-система Визуальное То же	Лоран-С, ТВ-канал Лоран-3	1 2	20 100
— —	0,32 2,6	» »	ТВ-канал Лоран-С ТВ-канал	2 2	100 60
5	3,2	»	ТВ-каналы	5	5,30
5 5	3,2 3,2	» »	Лоран-С ТВ-канал	5 5	5,30 5,30
3	0,8	—	Лоран-С	1	7
5 20 —	0,61 0,63 0,5	ЭВМ — —	То же » »	1 2 5	5 100 15

стояний до лунных отражателей с двух станций на земной поверхности.

Высокая точность измерений позволяет обнаружить составляющие взаимного движения Земля — Луна, не учитываемые современными существующими теориями.

К задачам геодинамики, решение которых облегчается применением локационных наблюдений Луны, можно отнести изучение приливов, кручений и сдвигов в земной коре, вариаций скорости движения земной оси, неравномерностей движения полюсов и др. Лазерная локация дает материал для исследования фигуры, собственного вращения и орбитального движения Луны. Первичная обработка выполненных наблюдений к настоящему времени уже позволила уточнить некоторые константы системы Земля — Луна.

Установки для лазерной локации Луны созданы также во Франции, США, Австралии и Японии. В настоящее время в США проектируются передвижные установки для локации Луны.

Лазерные дальномеры расширяют временные рамки наблюдения ИСЗ. В настоящее время разработаны программы использования лазерных дальномеров для наблюдения спутников в дневное время.

Французский институт аэрокосмических исследований разработал и экспериментально исследовал метод определения положения ИСЗ с одной станции, основанный на определении расстояния лазерным дальномером, а направления — фотографированием спутника в лучах мощного импульсного лазера. В комплекс аппаратуры, служащей для определения расстояния и направления, входит фотографическая камера. Ось камеры направляется в зону предполагаемого прохождения ИСЗ. Два рубиновых лазера используются для измерения расстояния и подсветки ИСЗ. Лазер дальномера генерирует импульсы длительностью 28 нс с энергией в импульсе 1 Дж. Частота импульсов 1 Гц. Расходимость излучения 1 мрад. Лазер подсветки излучает серию коротких импульсов длительностью 650 мкс с энергией в импульсе 30 Дж. Расходимость излучения 0,7 мрад.

Для слежения за ИСЗ служит телескоп (поле зрения 3° , увеличение $23\times$, входной зрачок 125 мм). Телескоп дальномера построен по типу системы Кассегрена с входным зрачком 600 мм. Временная синхронизация осуществляется цезиевым задающим генератором.

Анализ результатов испытаний системы показал следующее. Получены измерения дальностей до 3200 км. Точность определения расстояния равна 1,2 м. Угловая точность измерения направления составляет $1,0''$ [11].

§ 18. РАДИОДАЛЬНОМЕРНЫЕ НАБЛЮДЕНИЯ ИСЗ

При измерении расстояний до ИСЗ возможно применение как временных, так и фазовых методов наблюдения.

Временные методы реализуются в импульсных системах измерения дальностей. В основе их лежит измерение времени прохождения импульсным радиосигналом удвоенного расстояния ИСЗ — станция наблюдения при работе системы в ретрансляционном и пассивном режимах. В беззапросном режиме на борту ИСЗ работает независимый генератор и измеряется время прохождения радиосигнала от ИСЗ до наземной станции. В этом случае на наземной станции должна иметься информация о моменте излучения импульса передатчиком ИСЗ.

Фазовый метод измерений также используется в дальномерных и разностнодальномерных системах. Измеряемой величиной в этом случае является либо фазовый сдвиг, приобретенный сигналом на пути ИСЗ — пункт наблюдения, либо относительная фазовая задержка двух сигналов, прошедших расстояния различной длины.

Рассмотрим реализацию фазового метода на примере геодезической системы SECOR (последовательное сопоставление дальностей). Система SECOR разработана для Инженерного корпуса армии США. Это запросная радиодальномерная система. Наземные станции системы SECOR излучают радиочастоты, модулированные по фазе. Приемопередатчик на ИСЗ ретранслирует эти сигналы, изменяя несущую частоту. На наземной станции измеряется разность фаз на частоте модуляции излучаемого и принятого ретранслированного сигналов. По измеренной разности фаз вычисляется расстояние.

Система имеет четыре наземные станции и спутник с приемопередатчиком. Три станции располагаются в пунктах, координаты которых известны, четвертая — в определяемом пункте. Расстояния между ними могут достигать 4000 км. Работа системы SECOR полностью автоматизирована. При появлении ИСЗ в зоне радиовидимости системы его приемопередатчик включается по сигналу одной из станций. Расстояние от каждой станции до ИСЗ измеряется последовательно с применением четырех модулирующих частот на несущей частоте 420,9 МГц, сигналы ретранслируются на несущих частотах 450 и 225 МГц. Работа на нескольких модулирующих частотах позволяет разрешать неоднозначность в расстоянии. Применение двух различных несущих частот необходимо для исключения влияния ионосферной рефракции.

Разность фаз и метки времени записываются на магнитной ленте. Последовательные измерения на четырех наземных станциях позволяют выполнять все наблюдения на одной несущей

частоте, что упрощает бортовую аппаратуру ИСЗ и ведет к исключению взаимных помех радиопередатчиков.

Время измерений разностей фаз до четырех станций составляет около 50 мс. Наблюдения на станциях выполняются непрерывно в течение всего времени нахождения ИСЗ в зоне радиовидимости. Поскольку циклы измерений повторяются с высокой частотой, всегда имеется возможность вычислить синхронные данные на выбранный момент.

Результаты наблюдений, фиксированные на магнитной ленте, обрабатываются на ЭВМ в вычислительном центре. В зависимости от расположения станций наблюдения возможны различные методы определения координат четвертой станции. Эти методы основываются как на чисто геометрических построениях, так и на привлечении теории движения ИСЗ. Система SECOR позволяет определять координаты с точностью 5—10 м.

§ 19. ДОПЛЕРОВСКИЕ СИСТЕМЫ НАБЛЮДЕНИЯ ИСЗ

Среди радиотехнических методов наблюдений ИСЗ наиболее широко в настоящее время распространен метод, основанный на использовании эффекта Доплера. Он проявляется в том, что принимаемая частота радиосигнала изменяется при движении источника сигнала относительно приемника (наблюдателя). Это изменение частот (сдвиг) называется доплеровской частотой.

Физическая сущность эффекта Доплера объясняется тем, что при движении источника излучения к приемному устройству частота радиосигнала, принимаемая приемным устройством, больше частоты излучения источника вследствие набега фазы синусоидального сигнала, обусловленного перемещением источника.

Таким образом, при сближении источника и приемника принятая частота будет больше, а при удалении источника от приемника — меньше излучаемой частоты.

Точное соотношение между частотой передатчика на борту ИСЗ ω_n и принимаемой частотой ω_p имеет вид

$$\omega_p = \frac{\omega_n \sqrt{1 - \left(\frac{v_r}{c}\right)^2}}{1 + \frac{v_r}{c}}, \quad (19.1)$$

где $v_r = \dot{r}$ — радиальная скорость перемещения передатчика; c — скорость света; ω_n — частота излучения неподвижного бортового передатчика.

Обычно пользуются приближенной формулой для вычисления доплеровской частоты:

$$\Delta\omega_d = \omega_p - \omega_n = -\omega_n \frac{v_r}{c}.$$

Поскольку v_r — проекция полной скорости движения ИСЗ v на топоцентрический радиус-вектор ИСЗ, то при постоянных ω_n и v изменение $\Delta\omega_d$ определяется изменением косинуса угла между радиусом-вектором и вектором скорости ИСЗ. Если угол равен 90° , то доплеровская частота $\Delta\omega_d=0$, такое положение ИСЗ называется траверзным. График изменения доплеровской частоты в функции времени называется доплеровской кривой (рис. 31).

При технической реализации доплеровских методов измерения сводятся не к определению частоты ω_n , поступающей на вход приемного устройства, а к определению разностей частот $\omega_n - \omega_{оп}$, где $\omega_{оп}$ — частота опорного генератора, устанавливаемого на станции наблюдения.

Возможны три варианта построения доплеровских систем наблюдения ИСЗ.

Пассивный способ основан на использовании сигнала, излучаемого передатчиком наземной станции и отраженного от поверхности спутника. Достоинства данного способа: простота технической реализации и низкая стоимость ИСЗ. Недостатком является малая мощность полезного (принимаемого наземным приемником) сигнала и необходимость борьбы с взаимными помехами, возникающими при одновременных облучениях ИСЗ несколькими наземными станциями.

Запросные или ретрансляционные доплеровские системы включают, как и в первом случае, один наземный генератор стабильной частоты. На борту ИСЗ устанавливают приемоответчик, который ретранслирует принятые сигналы наземного генератора. Принятые на Земле ретранслированные сигналы используются для определения радиальной скорости.

Беззапросные системы построены по принципу сравнения частот двух высокостабильных генераторов — бортового и наземного. Разность частот принимаемого сигнала и наземного опорного генератора зависит от разности частот двух генераторов и доплеровской частоты.

В настоящее время беззапросные системы являются основными. В беззапросных системах предъявляются повышенные требования к стабильности генераторов, поскольку их нестабильность вызывает дополнительную ошибку измерения доплеровской частоты.

Практическое значение имеют два способа измерений в беззапросном варианте реализации доплеровского метода наблюдений: дифференциальный и интегральный.

В дифференциальном способе (рис. 32), измеряют разность частот в течение всего времени нахождения ИСЗ в зоне радиовидимости пункта наблюдения.

Антенна радиоприемного устройства наземной станции принимает сигналы с частотой ω_n . В смесителе частота ω_n смешивается с частотой опорного генератора, при этом на выходе смесителя выделяется сигнал с частотой биений

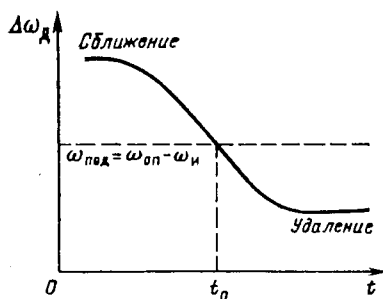
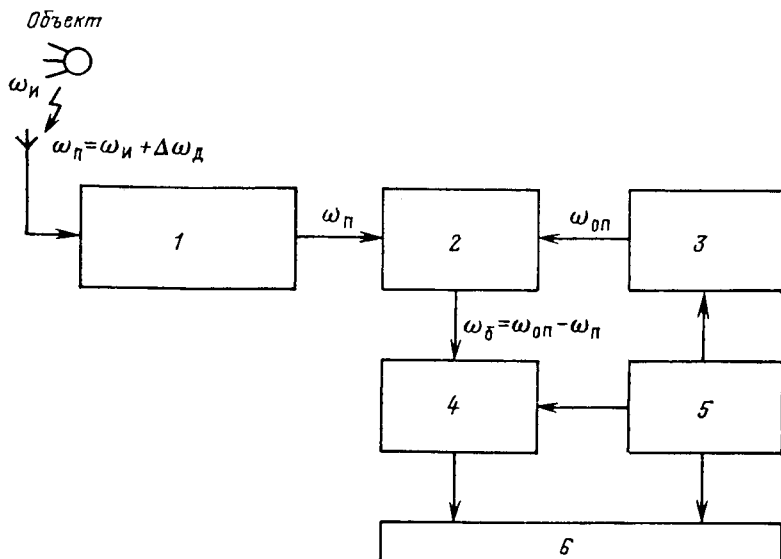


Рис. 31. График изменения доплеровской частоты в функции времени

Рис. 32. Блок-схема установки для доплеровских наблюдений дифференциальным методом:

1 — радиоприемное устройство; 2 — смеситель; 3 — опорный генератор; 4 — измеритель частоты; 5 — часы; 6 — ЭВМ и регистратор



$$\omega_6 = -\omega_п + \omega_{оп} = -\omega_и - \Delta\omega_d + \omega_{оп} = (-\omega_и + \omega_{оп}) - \Delta\omega_d.$$

Частота $(\omega_{оп} - \omega_и)$ называется частотой подставки, она принимается подбором $\omega_{оп}$, заведомо большей доплеровской частоты $\Delta\omega_d$, для того, чтобы измеряемая ω_6 всегда была положительной. Очевидно, что в момент траверза на входе смесителя появляется частота подставки.

В измерителе частоты определяется число периодов n сигнала ω_6 за некоторый временной интервал ΔT :

$$\omega_6 = \frac{2\pi n}{\Delta T}.$$

Если временной интервал ΔT невелик (0,5—3,0 с), то изменение ω_6 внутри него можно считать линейным, а полученное значение ω_6 относится к середине этого интервала.

Для привязки результатов к системе единого времени на станциях имеются кварцевые или атомные часы. Результаты измерений подаются на ЭВМ и в блок регистрации, где производится их запись на бумажную или магнитную ленту.

В интегральном способе наблюдений, который реализуется по той же схеме, что и дифференциальный (см. рис. 32), с той разницей, что измеритель частоты заменяют интегратором, выполняющим за некоторый временной интервал подсчет числа циклов частоты биений ω_6 . Это позволяет определять разность расстояний станции наблюдений — ИСЗ за принятый временной интервал.

Например, в интегральном приемнике доплеровской системы Transit в качестве интегратора установлен счетчик периодов частоты ω_6 . Спутник системы Transit передает двухминутные метки времени, первая принятая метка выводит счетчик из нулевого положения, после чего осуществляется счет периодов сигнала ω_6 . Любая последующая метка приводит к регистрации данных, зафиксированных счетчиком, при этом показания счетчика не обнуляются.

Разность показаний счетчика в моменты приема соседних двухминутных меток есть интеграл частоты:

$$\begin{aligned} N_{t_i, t_{i+1}} &= N_{t_{i+1}} - N_{t_i} = \frac{1}{2\pi} \int_{t_i + \Delta t_i}^{t_{i+1} + \Delta t_{i+1}} (\omega_{оп} - \omega_n - \Delta\omega_d) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{t_i + \Delta t_i}^{t_{i+1} + \Delta t_{i+1}} \omega_{оп} dt - \frac{1}{2\pi} \int_{t_i + \Delta t_i}^{t_{i+1} + \Delta t_{i+1}} (\omega_n + \Delta\omega_d) dt, \end{aligned} \quad (19.2)$$

где Δt — время прохождения радиосигнала от ИСЗ до станции наблюдения.

В силу равенства количества циклов, принятых станцией за время $(t_{i+1} + \Delta t_{i+1}) - (t_i - \Delta t_i)$ и излученных передатчиком ИСЗ за время $t_{i+1} - t_i$, напомним:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{t_i + \Delta t_i}^{t_{i+1} + \Delta t_{i+1}} (\omega_n + \Delta\omega_d) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \omega_n dt. \quad (19.3)$$

После подстановки (19.3) в (19.2) и интегрирования, учитывая, что $\Delta t_i = \rho_i/c$, найдем:

$$N_{t_i, t_{i+1}} = \frac{\omega_{оп}}{2\pi c} (\rho_{i+1} - \rho_i) + (\omega_{оп} - \omega_n) \Delta T / 2\pi, \quad (19.4)$$

где $\omega_{оп} - \omega_n$ — частота подставки; $\Delta T = t_{i+1} - t_i$ — интервал между соседними метками; ρ_i — расстояние спутник — станция в момент t_i .

Частота подставки включается в число определяемых параметров. Ее можно считать постоянной за время одного прохождения ИСЗ.

Результаты доплеровских наблюдений ИСЗ отягощены ошибками приборного характера и влиянием атмосферы на прохождение радиоволн.

Приборные ошибки складываются из ошибок нестабильности частоты бортового и наземного генераторов, ошибок дискретности счета числа периодов в счетчике при измерении частоты, ошибок, вносимых шумами и помехами от внешних источников и измерительной аппаратуры. Методикой наблюдений и обработки результатов достигается значительное уменьшение влияния приборных ошибок. Так, например, ошибка за кратковременную нестабильность частоты может быть исключена, если разность частот наземного и бортового генераторов считать неизвестным параметром, подлежащим определению. Ошибка дискретности в измеряемой $\Delta\omega_d$ проявляется меньше, если увеличивать интервал, в котором производится счет числа периодов колебаний, однако значительное увеличение этого интервала недопустимо, поскольку изменение доплеровской частоты происходит по нелинейному закону. Необходимо отметить, что измерения интегральными доплеровскими приемниками практически свободны от ошибок дискретности и осреднения частоты. Недостатком интегральных систем является уменьшение числа измеренных интегралов частоты, вызываемое случайными перерывами в приеме сигнала спутникового передатчика.

Влиянием релятивистского эффекта, вызывающего уменьшение частоты движущегося генератора, в существующих доплеровских системах можно пренебречь.

Действие атмосферы проявляется в изменении скорости распространения радиоволн в процессе прохождения их через ионосферу и тропосферу, а также в искривлении их траектории. Наибольшей является ошибка, вызванная влиянием ионосферы. Влияние ионосферы, как показали исследования [12], можно существенно снизить, если выполнять наблюдения на двух когерентных частотах. В основе этого метода, называемого методом двухчастотной коррекции, лежит частотная зависимость искажения ионосферой частоты принимаемого сигнала. В ИСЗ серии Transit используются две несущие частоты—150 и 400 МГц. Наземная станция принимает частоты

$$\omega^{400} = \omega_n^{400} + \Delta\omega_d^{400} + \frac{\alpha(t)}{\omega_n^{400}}; \quad (19.5)$$

$$\omega^{150} = \omega_n^{150} + \Delta\omega_d^{150} + \frac{\alpha(t)}{\omega_n^{150}}.$$

Здесь ω_n^{150} , ω_n^{400} — круговая частота излучаемых спутником радиосигналов; $\Delta\omega_d^{150}$, $\Delta\omega_d^{400}$ — доплеровские сдвиги частот; $\alpha(t)$ — параметр, характеризующий состояние ионосферы в момент наблюдения.

Учитывая, что частоты излучения находятся в отношении $3/8$, напомним соотношение:

$$\omega^{150} = \frac{3}{8} (\omega_n^{400} + \Delta \omega_d^{400}) + \frac{\alpha(t)}{\frac{3}{8} \omega_n^{400}}.$$

Нетрудно видеть, что в разности $\omega^{400} - \frac{3}{8}\omega^{150}$ влияние ионосферной рефракции исключается:

$$\begin{aligned} \omega^{400} - \frac{3}{8} \omega^{150} &= \omega_n^{400} + \Delta \omega_d^{400} + \frac{\alpha(t)}{\omega_n^{400}} - \frac{9}{64} (\omega_n^{400} - \Delta \omega_d^{400}) - \\ &- \frac{\alpha(t)}{\omega_n^{400}} = \frac{55}{64} \omega_n^{400} + \frac{55}{64} \Delta \omega_d^{400}. \end{aligned} \quad (19.6)$$

Полученная частота, свободная от ионосферной составляющей, используется в дальнейшем для формирования частоты биений ω_b . Практически полное исключение влияния ионосферной рефракции достигается при передаче спутником трех когерентных частот.

Влияние тропосферной рефракции на частоту принимаемых сигналов максимально при наблюдениях ИСЗ вблизи горизонта и равно нулю, когда спутник в зените доплеровской станции наблюдения. В этой связи наблюдения ИСЗ выполняют на зенитных расстояниях не более 75° . Для исключения влияния тропосферной рефракции в рабочей зоне зенитных расстояний вычисляют поправку в измеренное значение частоты, пользуясь параметрами стандартной модели атмосферы. При этом для исправления измеренного числа периодов доплеровского сигнала пользуются формулой

$$\delta N = 2,8 \cdot 10^{-3} \frac{\omega_n}{2\pi c} \left[\frac{1}{\cos z_2} - \frac{1}{\cos z_1} \right], \quad (19.7)$$

где z_1 и z_2 — зенитные расстояния ИСЗ в моменты начала и конца мерного интервала.

В качестве примера практического воплощения доплеровского метода рассмотрим спутниковую навигационную систему Transit, разработанную в США. Она включает космический комплекс, состоящий из нескольких ИСЗ, которые параллельно решают ряд научно-технических задач, и наземной службы. По результатам наблюдений на станциях слежения вычисляются элементы орбит ИСЗ с учетом возмущений на каждую четную минуту в единой временной шкале UTC.

Результаты вычислений, совместно с другой необходимой информацией для организации наблюдений, передаются на станции ввода информации. В спутниковой навигационной системе имеются две станции ввода информации. Дважды в сутки при прохождении спутника в зоне радиовидимости станции ввода информации производят ввод информации в запоминающее устройство ИСЗ, который длится несколько секунд. Прежде заложенная информация стирается. Для контроля правильности ввода информации имеется специальное устройство. Парал-

тельно с вводом орбитальных данных в бортовую память ИСЗ корректируется бортовая шкала времени. Четыре наземные станции слежения расположены на территории США. Их данные используются для прогнозирования орбит, решения динамических задач космической геодезии и изучения геопотенциала.

В настоящее время в составе системы Transit имеется пять навигационных ИСЗ. Спутники выведены на почти круговые орбиты с большими полуосями порядка 7450 км, период обращения ИСЗ равен 106,8 мин, наклон орбиты около 90° .

Передатчик ИСЗ излучает в течение двухминутных циклов сигналы на двух когерентных частотах: 149,988 и 399,968 МГц. Стабильность излучаемых частот не хуже 10^{-11} за время прохождения ИСЗ зоны радиовидимости наблюдателя. Информация, хранящаяся в бортовой памяти ИСЗ, для передачи потребителям представляется в двоичном ходе и излучается в эфир. Для повышения надежности передаваемой информации эфемеридные параметры ИСЗ передаются не только на текущий двухминутный интервал, но и на три предыдущих и четыре последующих.

В настоящее время разработано большое число типов приемоиндикаторной аппаратуры, предназначенной как для использования в геодезических работах на суше, так и для морской геодезии и морской навигации. По количеству принимаемых от ИСЗ частот приемоиндикаторную аппаратуру можно разделить на двухканальную и одноканальную. Двухканальные комплекты приемоиндикаторной аппаратуры применяются для решения геодезических задач, поисково-разведочных, гидрографических и т. д. Одноканальные комплекты оборудованы приемником, работающим на частоте 399,968 МГц, и предназначены для решения навигационных задач.

Наиболее типичным комплектом аппаратуры для решения геодезических задач является доплеровский приемник Geoseiver (США). Аппаратура Geoseiver не требует специальной квалификации обслуживающего персонала, связь с объектом полностью автоматизирована, доплеровский сдвиг частоты заносится в память специального устройства. Geoseiver спроектирован для создания космической геодезической сети сгущения на территории США.

Точность определения координат пунктов характеризуется совместным влиянием рассмотренных источников погрешностей, а также ошибками синхронизации шкал времени. Средняя квадратическая погрешность определения координат пункта составляет 5—6 м. Погрешность определения радиальной скорости равна 1—3 см/с.

§ 20. РАДИОИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫЕ МЕТОДЫ НАБЛЮДЕНИЙ

Системы, реализующие радиоинтерференционные методы наблюдений ИСЗ, построены на использовании интерференции радиосигналов, излучаемых передатчиком ИСЗ и принимаемых ан-

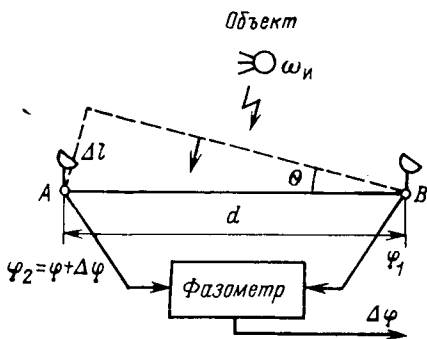


Рис. 33. Геометрическая интерпретация соотношений измеряемой разности фаз $\Delta\varphi$ и угла θ

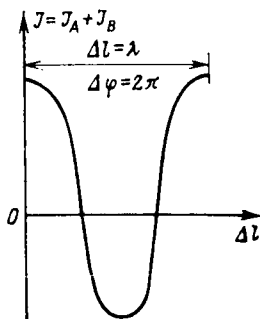


Рис. 34. Графическое представление зависимости сигнала на выходе интерферометра от разности хода волнового фронта от ИСЗ до двух антенн

теннами наземных станций (рис. 33). Очевидно, в случае приема излучения передатчика ИСЗ двумя антеннами разность фаз колебаний будет определяться разностью расстояний в момент приема от пунктов наблюдения до ИСЗ. Поскольку расстояния до ИСЗ значительно превышают удаление между приемными антеннами, сдвиг фаз, определяющий интенсивность сигнала, образованного в виде суммы принятых сигналов каждой антенной в отдельности, можно записать в виде (рис. 34)

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{2\pi d}{\lambda} \sin \theta = kd \sin \theta, \quad (20.1)$$

где k — волновое число, т. е. скорость изменения фазы сигнала в направлении вектора скорости распространения волны; d — расстояние между приемными антеннами (базис интерферометра); θ — угол между направлением на ИСЗ и плоскостью, нормальной к базису интерферометра (угол между поверхностью фронта волны и направлением базиса d).

Как известно, $k = 2\pi/\lambda = \omega/c$, где λ — длина волны; ω — угловая частота сигнала; c — скорость света.

Таким образом, на основании уравнения (20.1) можно сделать вывод, что измерение разности фаз $\varphi_2 - \varphi_1$ позволит вычислить угол θ , характеризующий направление на ИСЗ в системе координат базиса интерферометра, т. е.

$$\theta = \arcsin \frac{(\varphi_2 - \varphi_1)_{\text{изм}}}{kd}. \quad (20.2)$$

Здесь необходимо заметить, что формула (20.2) верна лишь в случае, если $\Delta l = \Delta\varphi/k$ не превосходит длину волны радиопередатчика. Поскольку фазометр может измерять лишь разность

фаз сигналов, соответствующих отлнчню Δl от некоторого целого числа волн, укладываемых по длине Δl , необходимо иметь информацию о количестве длин волн, укладываемых в Δl , т. е. если $\delta l = \Delta l - n\lambda$, то требуется знать n . При этом полная разность фаз двух сигналов равна

$$\Delta\Phi = (\varphi_2 - \varphi_1)_{\text{изм}} + 2\pi n. \quad (20.3)$$

Число n можно определить, либо используя эфемеридные данные о положении ИСЗ в момент наблюдения, либо пользуясь наблюдениями на другом интерферометре с меньшей базой и соответственно меньшим разрешением.

Поскольку разность фаз может быть измерена однозначно в пределах от 0 до $\pm 180^\circ$, зона однозначного определения угла θ (ширина одного лепестка диаграммы направленности радиоинтерферометра) определится подстановкой в (20.2) разности фаз, равной 2π :

$$\Delta\theta_{\text{max}} = \arcsin(\lambda/d). \quad (20.4)$$

Очевидно, что зона однозначного определения $\Delta\theta_{\text{max}}$ уменьшается с увеличением d и уменьшением λ . Эти же соотношения сохраняются между ошибкой определения угла θ и величинами d и λ , что следует из дифференцирования выражения (20.2):

$$\delta\theta = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\lambda}{d} \cdot \frac{\delta(\varphi_2 - \varphi_1)}{\cos\theta}, \quad (20.5)$$

где $\delta(\varphi_2 - \varphi_1)$ — погрешность измерения разности фаз. Анализируя выражение (20.5), следует отметить также, что точность определения θ зависит от ориентации базиса относительно радиуса-вектора ИСЗ. Наиболее точные результаты будут получены при малых углах θ . Для получения направления радиуса-вектора ИСЗ, очевидно, надо иметь две угловые координаты, которые можно определить, используя два базиса, ориентированных под прямым углом друг к другу.

Очевидно, что направления, вычисленные по измерениям разности фаз, относятся к системе координат радиоинтерферометра. Определение ориентировки базисов интерферометра и постоянных аппаратуры выполняется на основе дополнительных калибровочных данных.

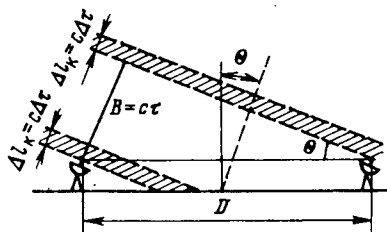
Рассмотренный метод определения направлений на ИСЗ обладает всеми положительными свойствами радиотехнических способов наблюдений, однако он имеет низкую точность и требует больших затрат.

Сущность изложенного радиоинтерференционного метода, построенного по классической схеме, позволяет глубже понять возможности радиоинтерферометрии со сверхдлинными базами.

Как было показано ранее, угловое разрешение интерферометра определяется отношением λ/d . При увеличении базы погрешности, определяющие точность работы интерферометра,

обусловлены нарушением фазовых соотношений сигналов в линиях передачи сигналов от точки наблюдения до фазометра (см. рис. 33). Нестабильность электрической длины пути носит случайный характер и разрушает интерференционную картину. Тем не менее, применение несколько иного подхода при постановке наблюдений и обработке информации, позволяет значительно повысить точность, используя для наблюдений большие базы,

Рис. 35. Принципиальная схема радиоинтерферометра со сверхдлинной базой



сравнимые с диаметром Земли. Такие интерферометры называют радиоинтерферометрами со сверхдлинными базами, глобально-базовыми интерферометрами или радиоинтерферометрами с независимыми гетеродинами, независимым приемом и т. д.

В 1965 г. был предложен радиоинтерферометр, база которого может быть как угодно большой [5]. Для этого приемные пункты непосредственно не связывались между собой, однако на каждом пункте велся прием сигналов общего радиоисточника с записью их на магнитную ленту. На эту же ленту записывались временные метки часов, синхронизированных с высокой точностью. После наблюдений магнитные ленты перевозятся на пункт обработки и обрабатываются на ЭВМ. Такая схема наблюдений позволяет устранить передачу сигнала по линии связи и создать произвольно большую базу наблюдений.

Использование этого принципа стало возможно благодаря записи широкополосных сигналов на магнитную ленту, совершенствованию методов хранения времени и частоты, наличию быстродействующей электронно-вычислительной техники.

К вышеизложенному необходимо добавить следующее. Полученные из наблюдений радиоисточника сигналы позволяют находить амплитуду, разность фаз, период радиоинтерференционного сигнала и временную задержку τ . Амплитуда не несет информации о положении наблюдаемого источника, остальные параметры можно использовать для координатных измерений. Разность фазы используется для определения положения источника в классических радиоинтерферометрах, но не может быть использована в интерферометрах со сверхдлинными базами вследствие недостаточной фазовой стабильности стандартов частоты. Период радиоинтерференционного сигнала слабо зависит

от направления на источник. Наиболее целесообразно использовать временную задержку τ .

При наблюдениях на радиоинтерферометрах со сверхдлинными базами используются излучения точечных радиисточников. Если рассматривать радиоизлучение как функцию времени, то оно когерентно само себе только на интервале $\Delta\tau = 1/\Delta f$, где Δf — ширина полосы частот принимаемого излучения. В направлении распространения когерентность характеризуется отрезком $\Delta l_k = c\Delta\tau$, где c — скорость света.

На рис. 35 приведена схема радиоинтерферометра с базой D . Заштрихованные участки характеризуют области, внутри которых сохраняется когерентность излучения радиисточника. Очевидно, что сигналы, принятые на концах базы, могут быть некогерентными.

Для обеспечения когерентности сигналов необходимо запись одного из приемников сместить на величину $\tau = B/c$. Это достигается смещением магнитных лент при обработке. Очевидно, что τ непосредственно зависит от направления на радиисточник. При этом чем шире полоса сигнала, тем меньше интервал когерентности $\Delta\tau$ и тем точнее можно измерить временную задержку, а значит, и направление на источник.

Оценка возможностей радиоинтерферометрии с большой базой характеризуется погрешностями в определении координат радиисточников $m_\alpha = 0,01 \div 0,001''$, $m_\delta = 0,001''$.

При построении спутниковых геодезических сетей целесообразно включать в качестве хорды базу радиоинтерферометра, с помощью которого регистрируется радиоизлучение внегалактических объектов. Такие наблюдения позволяют уточнить компоненты векторов хорд, что повышает точность построения геодезических сетей.

Раздел 3.

НЕВОЗМУЩЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ ИСЗ

Глава 8.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ НЕВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ, ИХ ИНТЕГРИРОВАНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЯ

§ 21. ВЫВОД ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ

Движение ИСЗ в околоземном пространстве определяется следующими факторами: притяжением Земли, Луны, Солнца и других планет Солнечной системы, атмосферным торможением, световым давлением, действием магнитного поля Земли и др. Из перечисленных факторов притяжение Земли является главным, определяющим, а все остальные имеют второстепенный характер. Поэтому при рассмотрении задачи о движении ИСЗ в первом приближении действием вышеуказанных второстепенных факторов пренебрегают.

Введем еще одно упрощение: будем полагать, что Земля имеет строго сферическую форму и равномерное распределение плотности вещества. В этом случае поле притяжения Земли совпадает с полем притяжения материальной точки M , масса которой равна массе Земли.

В такой постановке движение ИСЗ строго подчиняется законам Кеплера, и его принято называть невозмущенным или кеплеровым.

Зададим систему координат следующим образом: начало — в центре масс Земли M , ось Mz — вдоль средней оси вращения Земли, ось Mx — в направлении точки весеннего равноденствия, ось Mu дополняет систему до правой, плоскость xMu лежит в плоскости среднего экватора (рис. 36, 37).

Вывод дифференциальных уравнений невозмущенного движения упрощается, если принять во внимание, что масса спутника m в сравнении с массой Земли M пренебрежимо мала. В этом случае можно не учитывать ускорение Земли, вызываемое притяжением спутника.

Вывод с использованием законов ньютоновской механики. На основании второго закона Ньютона имеем

$$\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}, \quad (21.1)$$

где $\ddot{\mathbf{r}}$ — ускорение ИСЗ; модуль силы F в соответствии с законом всемирного тяготения будет

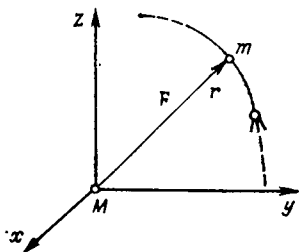


Рис. 36. Взаимное расположение Земля — спутник в инерциальной системе

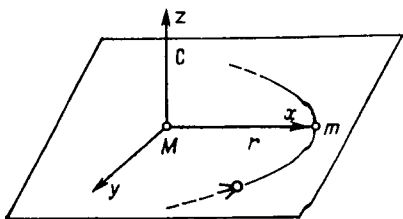


Рис. 37. Вектор интеграла площадей в невозмущенном движении

$$|\mathbf{F}| = f \frac{mM}{r^2}, \quad (21.2)$$

причем f — постоянная тяготения, а r — расстояние от спутника m до Земли M .

Выразим силу тяготения в векторной форме:

$$\mathbf{F} = -f \frac{mM}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (21.3)$$

Приравнявая правые части (21.1) и (21.3), получим дифференциальное уравнение невозмущенного движения в векторной форме:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r}, \quad (21.4)$$

где $\mu = fM$.

Дифференциальные уравнения в проекции на оси координат имеют вид

$$\ddot{x} = -\mu \frac{x}{r^3}, \quad \ddot{y} = -\mu \frac{y}{r^3}, \quad \ddot{z} = -\mu \frac{z}{r^3}. \quad (21.5)$$

Вывод на основании принципов лагранжевой механики. Напомним некоторые положения лагранжевой механики. Пусть q — обобщенные координаты, которые однозначно задают положение механической системы в пространстве. Тогда величины $\dot{q} = \frac{dq}{dt}$ называют обобщенными скоростями.

Разность кинетической и потенциальной энергий принято называть функцией Лагранжа или лагранжианом системы, т. е. при $U < 0$

$$L = T + U, \quad (21.6)$$

где T — кинетическая, а U — потенциальная энергии системы.

Производную $\frac{\partial L}{\partial q} = F$ называют обобщенной силой, а производную $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ обобщенным импульсом.

Интеграл

$$s = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \quad (21.7)$$

принято называть действием. Если движение системы осуществляется под условием $s = \min$, то говорят, что для данной системы выполняется принцип наименьшего действия — принцип Гамильтона.

Из вариационного исчисления известно, что в этом случае первая вариация функционала (21.7) должна равняться нулю, т. е.

$$\delta s = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt = 0, \quad (21.8)$$

где δq , $\delta \dot{q}$ — вариация координат и скоростей. Интегрируя второй член (21.8) по частям, получаем общую форму уравнения движения — уравнение Лагранжа II рода:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0. \quad (21.9)$$

Рассмотрим теперь кинетическую систему Земля — спутник при сделанных выше предположениях: $x = q_1$, $y = q_2$, $z = q_3$, а $\dot{x} = \dot{q}_1$, $\dot{y} = \dot{q}_2$ и $\dot{z} = \dot{q}_3$. Кинетическая энергия ИСЗ равна

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2), \quad (21.10)$$

а потенциальная —

$$U = \frac{\mu m}{r}. \quad (21.11)$$

Составив лагранжиан $L = T + U$ и подставив его в (21.9), находим

$$\frac{d}{dt} (m\dot{x}) = \mu m \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial x} = -\mu m \frac{x}{r^3}.$$

Аналогично получаем и два других уравнения. Окончательно имеем

$$\ddot{x} = -\mu \frac{x}{r^3}; \quad \ddot{y} = -\mu \frac{y}{r^3}; \quad \ddot{z} = -\mu \frac{z}{r^3}. \quad (21.12)$$

§ 22. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

Интегрирование системы трех уравнений второго порядка дает следующее общее решение:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \dot{x}(t, c_1 c_2 c_3), \\ \dot{y} &= \dot{y}(t, c_1, c_2 c_3), \\ \dot{z} &= \dot{z}(t, c_1 c_2 c_3), \\ x &= x(t, c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_6), \\ y &= y(t, c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_6), \\ z &= z(t, c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_6),\end{aligned}\tag{22.1}$$

где t — время, а $c_1, c_2, \dots, c_6$ — произвольные постоянные, которые определяются начальными условиями движения, т. е. $\dot{x}_0, y_0, \dot{z}_0, x_0, y_0, z_0$ на момент t_0 .

Интегрирование уравнений (21.4) или (21.5) производят методом разделения переменных, выполняя при этом некоторые алгебраические преобразования.

Интегралы площадей. Умножим векторно уравнение (21.4) на $\mathbf{r}$:

$$\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = - \frac{\mu}{r^3} (\mathbf{r} \times \mathbf{r}) = 0.\tag{22.2}$$

Это уравнение тождественно следующему:

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = 0.\tag{22.3}$$

Таким образом, проинтегрировав (22.3), получим

$$\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{c},\tag{22.4}$$

где $\mathbf{c}$ — постоянная интегрирования. Это и есть искомый интеграл площадей в векторной форме. Запишем это векторное произведение в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{pmatrix} = \mathbf{i}c_1 + \mathbf{j}c_2 + \mathbf{k}c_3,$$

где c_1, c_2 и c_3 — компоненты вектора $\mathbf{c}$, а $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ — единичные векторы — орты соответствующих осей координат.

Раскрывая определитель матрицы и приравнявая выражения при одинаковых ортах, получим три интеграла площадей в координатной форме:

$$y\dot{z} - z\dot{y} = c_1, \quad z\dot{x} - x\dot{z} = c_2, \quad x\dot{y} - y\dot{x} = c_3.\tag{22.5}$$

Из свойства векторного произведения вытекает, что модуль $\mathbf{s}$ равен площади параллелограмма со сторонами $|\mathbf{r}|$ и $|\dot{\mathbf{r}}|$, откуда следует название интеграла.

Интеграл энергии. Умножим дифференциальные уравнения невозмущенного движения (21.4), записанные в векторной форме, скалярно на $2\dot{\mathbf{r}}$, получим

$$2\ddot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} = -\frac{2\mu}{r^3} \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}. \quad (22.6)$$

Левая часть этого уравнения тождественна следующим выражениям:

$$\frac{d}{dt}(V^2) = \frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}) = 2\ddot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}. \quad (22.7)$$

Вследствие того, что

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = r^2,$$

продифференцировав, имеем тождество

$$\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r} = \dot{r} \cdot r.$$

Подставляя полученные выражения в (22.6), будем иметь

$$\frac{d}{dt}(V^2) = -\frac{2\mu}{r^2} \dot{r}. \quad (22.8)$$

Правая часть (22.8) тождественна следующему выражению: $2\mu \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right)$, что легко проверяется дифференцированием. Подставив это выражение в правую часть (22.8) и проинтегрировав, имеем

$$V^2 = \frac{2\mu}{r} + h, \quad (22.9)$$

где h — постоянная интегрирования.

Величина V^2 пропорциональна кинетической энергии системы, а $2\mu/r$ характеризует потенциальную энергию. Таким образом, $V^2 - 2\mu/r = h$ характеризует постоянство алгебраической суммы кинетической и потенциальной энергий для данной системы.

Интегралы Лапласа. Умножим векторно дифференциальные уравнения невозмущенного движения (21.4) на вектор интеграла по площадям $\mathbf{s}$:

$$\ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{s} = -\frac{\mu}{r^3} (\mathbf{r} \times \mathbf{s}).$$

В правой части заменим вектор $\mathbf{s}$ его выражением на основании (22.4):

$$\ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{s} + \frac{\mu}{r^3} [\mathbf{r} \times (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{r})] = 0.$$

Выполним замену векторного произведения скалярным на основании свойств произведений векторов:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}).$$

В результате получим

$$\frac{\mu}{r^3} [\dot{\mathbf{r}} \cdot (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}})] + \ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{c} = 0.$$

Заменим $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = r^2$, $\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = r \cdot \dot{r}$ и сократим на r :

$$\frac{\mu}{r^2} (\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r} - \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}) + \ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{c} = 0.$$

Полученное выражение тождественно следующему:

$$\mu \frac{d}{dt} \left(-\frac{\mathbf{r}}{r} + \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{c} \right) = 0, \quad (22.10)$$

что легко проверяется дифференцированием его по t , при этом следует иметь в виду, что вектор $\mathbf{c}$ от t не зависит.

Интегрируя (22.10), получим интеграл Лапласа в векторной форме:

$$-\mu \frac{\mathbf{r}}{r} + \mathbf{r} \times \mathbf{c} = \mathbf{f}, \quad (22.11)$$

где $\mathbf{f}$ — постоянная интегрирования.

Выражение (22.10) можно записать иначе:

$$-\frac{\mu}{r} (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) + \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = f_1\mathbf{i} + f_2\mathbf{j} + f_3\mathbf{k}.$$

Раскрывая определитель и приравнявая выражения при равных ортах, получим

$$\begin{aligned} -\frac{\mu}{r} x + c_3 y - c_2 z &= f_1, \\ -\frac{\mu}{r} y + c_1 z - c_3 x &= f_2, \\ -\frac{\mu}{r} z + c_2 x - c_1 y &= f_3. \end{aligned} \quad (22.12)$$

Таким образом, выражение (22.11) в векторной форме, а (22.12) — в координатной дает три интеграла, которые называют интегралами Лапласа.

Итак, мы нашли семь первых интегралов уравнений невозмущенного движения — три интеграла площадей, три интеграла Лапласа и интеграл энергии.

Однако они не могут составить общее решение, так как, во-первых, не содержат явно времени; во-вторых, не являются

независимыми. На зависимость интегралов Лапласа от интегралов площадей указывает то обстоятельство, что при выводе интегралов Лапласа использовались интегралы площадей.

Докажем зависимость интегралов площадей и Лапласа, умножив скалярно (22.4) на (22.11):

$$-\frac{\mu}{r}(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{r} + \mathbf{c} \cdot (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{c}) = \mathbf{f} \cdot \mathbf{c}. \quad (22.13)$$

Из свойства смешанного произведения

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} \times \mathbf{b} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}$$

следует

$$(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{r} = (\mathbf{r} \times \mathbf{r}) \cdot \dot{\mathbf{r}} \equiv 0,$$

$$(\mathbf{r} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{c} = -(\mathbf{c} \times \mathbf{c}) \cdot \dot{\mathbf{r}} \equiv 0.$$

Таким образом,

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{c} = 0, \quad (22.14)$$

что говорит об ортогональности этих двух векторов. Приведем еще одно соотношение, связывающее все семь постоянных интегрирования:

$$f^2 = \mu^2 + hc^2, \quad (22.15)$$

которое можно получить, если умножить вектор интеграла Лапласа скалярно на этот же вектор и произвести некоторые преобразования.

§ 23. ИССЛЕДОВАНИЕ НЕВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ. ЗАКОНЫ КЕПЛЕРА

Умножим интеграл площадей (22.4), заданный в векторной форме, на $\mathbf{r}$:

$$\mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{r} \cdot \mathbf{c}.$$

Используя свойство смешанного произведения, можно показать, что

$$\mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = -\dot{\mathbf{r}} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{r}) \equiv 0.$$

Тогда получим выражение

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{c} = 0, \quad (23.1)$$

которое представляет собой уравнение плоскости. В координатной форме оно имеет вид

$$c_1x + c_2y + c_3z = 0. \quad (23.2)$$

Таким образом, невозмущенное движение осуществляется в плоскости, ортогональной вектору $\mathbf{c}$, как это следует из (23.1).

Умножим теперь скалярно на $\mathbf{r}$ вектор Лапласа (22.11), получим

$$-\mu\mathbf{r} + c^2 = f_1x + f_2y + f_3z. \quad (23.3)$$

Это уравнение описывает поверхность, на которой находится спутник m во время движения. Но уравнение (23.3) описывает поверхность второго порядка. Чтобы убедиться в этом, необходимо в левой части (23.3) $\mathbf{r}$ выразить в координатной форме и избавиться от радикала.

Рассмотрим плоскость, задаваемую вектором $\mathbf{f}$, а именно

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{r} = d, \quad (23.4)$$

где d — некоторая постоянная. Решив совместно уравнение поверхности (23.3) и плоскости (23.4), получим

$$\mu\mathbf{r} = c^2 - d,$$

что приводит к уравнению окружности

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad (23.5)$$

с радиусом $R = (c^2 - d)/\mu$. Следовательно, (23.3) есть поверхность вращения вокруг оси, задаваемой вектором $\mathbf{f}$, один из фокусов которой совпадает с началом координат. Это может быть эллипсоид, параболоид или гиперболоид вращения, а в вырожденном случае — цилиндр или конус. Очевидно, что решение системы

$$c_1x + c_2y + c_3z = 0,$$

$$-\mu\mathbf{r} - c^2 + f_1x + f_2y + f_3z = 0 \quad (23.6)$$

геометрически представляет собой сечение поверхности вращения плоскостью. В результате получается плоская кривая второго порядка.

Первый закон Кеплера. Невозмущенная орбита спутника есть плоская кривая второго порядка (окружность, эллипс, парабола, гипербола), в одном из фокусов которой находится притягивающее тело M .

Прямая, соединяющая фокусы, совпадает с направлением вектора Лапласа, а вектор площадей перпендикулярен к плоскости орбиты (рис. 38).

Прямая, соединяющая фокусы, в астрономии получила название линии аписид по той причине, что она соединяет наиболее удаленную от притягивающего тела точку A — а по центр (для Земли — апогей) и ближайшую к притягивающему телу точку P — перигей (или для Земли — перигей).

Введем орбитальную систему $\xi M \eta \zeta$, жестко связанную с плоскостью орбиты и с ее основными точками (рис. 39).

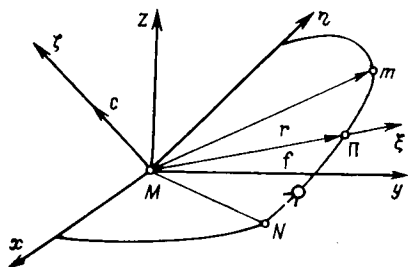
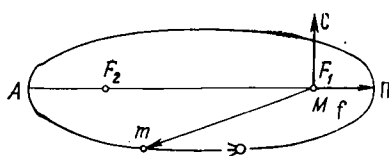


Рис. 38. Орбита ИСЗ со взаимным расположением векторов r , c и f

Рис. 39. Связь систем координат $\xi M \eta \zeta$ и $x M y z$

Связь между системами $x M y z$ и $\xi M \eta \zeta$ можно представить в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\xi x) & \cos(\xi y) & \cos(\xi z) \\ \cos(\eta x) & \cos(\eta y) & \cos(\eta z) \\ \cos(\zeta x) & \cos(\zeta y) & \cos(\zeta z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \quad (23.7)$$

Так как оси $M\xi$ и $M\zeta$ направлены вдоль векторов f и c , то направляющие косинусы, выраженные через модули и компоненты этих векторов, получаются по формулам

$$\begin{aligned} \cos(\xi x) &= f_1/f; & \cos(\xi y) &= f_2/f; & \cos(\xi z) &= f_3/f; \\ \cos(\zeta x) &= c_1/c; & \cos(\zeta y) &= c_2/c; & \cos(\zeta z) &= c_3/c. \end{aligned} \quad (23.8)$$

Направляющие косинусы для третьей оси $M\eta$ можно найти следующим образом. Образует векторное произведение $f \times c$, которое дает третий вектор, совпадающий с осью $M\eta$:

$$f \times c = \begin{bmatrix} i & j & k \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}.$$

Если нормировать этот вектор, то направляющие косинусы единичного вектора будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \cos(\eta x) &= \frac{f_2 c_3 - f_3 c_2}{fc}; & \cos(\eta y) &= \frac{f_3 c_1 - f_1 c_3}{fc}; \\ \cos(\eta z) &= \frac{f_1 c_2 - f_2 c_1}{fc}. \end{aligned} \quad (23.9)$$

Обратная зависимость получается на основании (23.7) простой заменой систем и транспонированием матрицы направляющих косинусов.

Запишем интегралы площадей в орбитальной системе координат:

$$\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}' & \mathbf{j}' & \mathbf{k}' \\ \xi & \eta & 0 \\ \dot{\xi} & \dot{\eta} & 0 \end{bmatrix} = [\mathbf{i}' \cdot 0 + \mathbf{j}' \cdot 0 + \mathbf{k}' \cdot c],$$

где $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$, $\mathbf{k}'$ — орты соответствующих осей орбитальной системы координат. Раскрывая определитель и приравнявая выражения при одинаковых ортах, получаем

$$\xi \dot{\eta} - \dot{\xi} \eta = c. \quad (23.10)$$

Введем посредством радиуса-вектора r и угла v полярную систему координат и выразим интеграл площадей (23.10) в полярной системе координат. Имеем

$$\begin{aligned} \xi &= r \cos v, & \dot{\xi} &= \dot{r} \cos v - r \sin v \cdot \dot{v}, \\ \eta &= r \sin v, & \dot{\eta} &= \dot{r} \sin v + r \cos v \cdot \dot{v}. \end{aligned} \quad (23.11)$$

Подставив (23.11) в (23.10), получим интеграл площадей в полярной системе координат:

$$r^2 \cdot \dot{v} = c. \quad (23.12)$$

Введем понятие секториальной скорости. Пусть положение ИСЗ за некоторый небольшой промежуток времени Δt изменилось на угол Δv (рис. 40). Тогда площадь, описанная радиусом-вектором ИСЗ, будет

$$\Delta s \approx \frac{r^2}{2} \Delta v.$$

Переходя к бесконечно малому промежутку времени dt , мы имеем

$$\dot{s} = \frac{1}{2} r^2 \dot{v}. \quad (23.13)$$

Производная от площади по t получила название секториальной скорости. Сравнивая (23.12) и (23.13), получают

$$\dot{s} = c/2, \quad (23.14)$$

что выражает второй закон Кеплера — в невозмущенном движении секториальная скорость спутника постоянна.

Уравнение орбиты в полярных координатах. Запишем уравнение орбиты (23.6) в орбитальной системе координат:

$$\begin{aligned} \xi &= 0, \\ \mu r - c^2 + f \xi &= 0. \end{aligned} \quad (23.15)$$

Перейдем к полярной системе координат. Подставив $\xi = r \cos v$ в (23.15), получим следующее выражение:

$$r = \frac{c^2/\mu}{1 + (f/\mu) \cos v}.$$

Обозначив

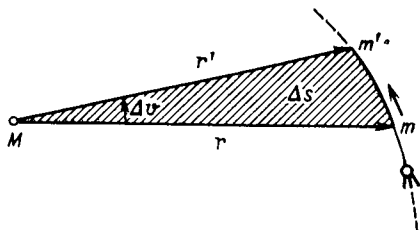
$$c^2/\mu = p; \quad f/\mu = e, \quad (23.16)$$

окончательно имеем известное из аналитической геометрии уравнение кривой второго порядка в полярных координатах

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v}, \quad (23.17)$$

где p — параметр кривой; e — эксцентриситет.

Рис. 40. Геометрическая интерпретация второго закона Кеплера



Параметр орбиты p можно выразить через большую полуось:

$$p = a(1 - e^2). \quad (23.18)$$

Из аналитической геометрии известно, что при $e=0$ кривая является окружностью, при $0 < e < 1$ — эллипсом, при $e=1$ — параболой, при $e > 1$ — гиперболой.

Рассмотрим, какие значения при этом принимают постоянные интегрирования f , c и h . Для этого воспользуемся соотношением (22.15), которое с учетом (23.16) можно привести к виду

$$e^2 - 1 = h(c/\mu)^2, \quad (23.19)$$

а интеграл энергии (22.9) представим следующим образом:

$$h = V^2 - 2\mu/r. \quad (23.20)$$

В эллиптическом движении $0 < e < 1$, и на основании (23.19) $h < 0$. А из интеграла энергии (23.20) следует

$$V^2 < 2\mu/r.$$

Это означает, что кинетическая энергия движущегося спутника меньше его потенциальной энергии. В частном случае, когда $e=0$, из (23.19) имеем

$$h = -\mu/p. \quad (23.21)$$

При круговом движении $r_0 = p$. Учитывая это и подставляя (23.21) в интеграл энергии, получим

$$V_k^2 = \mu/r_0. \quad (23.22)$$

Если радиус сферической Земли принять равным 6370 км, а $\mu = 3,986 \cdot 10^5 \text{ км}^3/\text{с}^2$, то $V_k = 7,91 \text{ км/с}$.

В параболическом движении $e=1$, поэтому $h=0$ и, следовательно,

$$V_n^2 = 2\mu/r. \quad (23.23)$$

В параболическом движении кинетическая и потенциальная энергии спутника равны. Для Земли это произойдет при скорости спутника $V_n = 11,2 \text{ км/с}$.

В теории движения ИСЗ и в астродинамике принято круговую скорость спутника называть первой космической скоростью, а параболическую — второй космической скоростью.

В гиперболическом движении $e>1$ и $h>0$ и, следовательно,

$$V^2 > 2\mu/r. \quad (23.24)$$

Здесь определяющую роль играет кинетическая энергия спутника, она преобладает над потенциальной энергией.

Глава 9.

ЭЛЕМЕНТЫ ОРБИТЫ, ИХ СВЯЗЬ С ПОСТОЯННЫМИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ, КООРДИНАТАМИ И КОМПОНЕНТАМИ СКОРОСТИ ИСЗ

§ 24. ЭЛЕМЕНТЫ ОРБИТЫ И ИХ СВЯЗЬ С ПОСТОЯННЫМИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Положение орбиты в пространстве определяется во введенной ранее орбитальной системе координат. Как это следует из (23.7), положение орбиты задается девятью направляющими косинусами, которые, в свою очередь, на основании (23.8) и (23.9) выражаются через постоянные интегрирования s и f .

Из математики известно, что ортогональная матрица направляющих косинусов может быть выражена тремя углами Эйлера, которые являются линейно независимыми. Их принято называть углами прецессии, нутации и чистого вращения. В небесной механике эти углы имеют другие названия: долгота восходящего узла, наклон орбиты, аргумент перигента соответственно.

Рассмотрим системы координат $xMyz$, $\xi M\eta\zeta$ и орбиту спутника спроектированными на небесную сферу произвольного радиуса (рис. 41).

Линия пересечения плоскостей xMy и $\xi M\eta$ называется линией узлов NN' . Причем, если движение спутника осуществля-

ется, как показано на рисунке, то точка N — это восходящий узел, а N' — нисходящий узел орбиты. Угол xMN имеет название долготы восходящего узла и обозначается буквой Ω . Угол ζMz обозначается буквой i и имеет название наклон орбиты. Он же представлен и сферическим углом PNy . Угол PMN называют аргументом перигентра и обозначают буквой ω .

Выразим теперь направляющие косинусы через углы Ω , ω и i . Применяя к сферическим треугольникам $xN\zeta$, $yN\zeta$ и $zN\zeta$ теорему косинусов, получаем

$$\begin{aligned} c_1 &= \sqrt{\mu p} \sin i \sin \Omega; & c_2 &= \sqrt{\mu p} \sin i \cos \Omega; \\ c_3 &= \sqrt{\mu p} \cos i. \end{aligned} \quad (24.1)$$

Из треугольников $xN\xi$, $yN\xi$ и $zN\xi$ следует:

$$\begin{aligned} f_1 &= \mu e (\cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega \cos i); \\ f_2 &= \mu e (\cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos \Omega \cos i); \\ f_3 &= \mu e \sin \omega \sin i, \end{aligned} \quad (24.2)$$

а из треугольников $xN\eta$, $yN\eta$ и $zN\eta$ (на рисунке не показаны)

$$\begin{aligned} c_2 f_3 - c_3 f_2 &= \mu^{3/2} e \sqrt{p} (-\sin \omega \cos \Omega - \cos \omega \sin \Omega \cos i); \\ c_3 f_1 - c_1 f_3 &= \mu^{3/2} e \sqrt{p} (-\sin \omega \sin \Omega + \cos \omega \cos \Omega \cos i); \\ c_2 f_1 - c_1 f_2 &= \mu^{3/2} e \sqrt{p} \cos \omega \sin i. \end{aligned} \quad (24.3)$$

В формулах (24.1) — (24.3) c и f заменены на основании (23.16).

Формулы (24.1) — (24.3) позволяют, с одной стороны, представить связь между орбитальной системой координат $\xi M \eta \zeta$ и системой $xMyz$ тремя углами Ω , ω и i , а с другой стороны, выразить постоянные интегрирования c_1 , c_2 , c_3 , f_1 , f_2 , f_3 через постоянные величины a , e , Ω , i , ω , которые принято называть элементами кеплеровой орбиты. Таких произвольных постоянных должно быть шесть. В качестве шестой постоянной вводят обычно момент прохождения ИСЗ через перигентр τ .

Элементы орбиты можно разделить на три группы, характеризующие:

- 1) положение орбиты в пространстве и ориентировку линии апсид — Ω , i , ω ;
- 2) размер и форму орбиты — a , e ;
- 3) прохождение спутником перигентра τ .

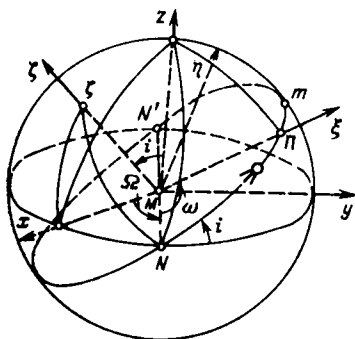


Рис. 41. Элементы орбиты ИСЗ и их связь с постоянными интегрирования

Элементы первой группы относятся к геометрическим и, как это следует из (24.1) — (24.3), связаны с направляющими косинусами векторов $\mathbf{c}$ и $\mathbf{f}$. Элементы второй группы являются скалярными величинами и, согласно (23.16), связаны с модулями векторов $\mathbf{c}$ и $\mathbf{f}$. Элемент третьей группы τ связан с динамикой движения ИСЗ по орбите, и его иногда называют динамическим элементом.

Помимо основных шести элементов Ω , ω , i , a , e и τ применяют и другие. Так, вместо большой полуоси можно использовать параметр орбиты p , среднее движение ИСЗ n , период обращения ИСЗ T . Вместо аргумента перицентра ω можно использовать долготу перицентра:

$$\pi = \Omega + \omega,$$

вместо τ часто используют угол v в начальный момент t_0 , который называют истинной аномалией в начальный момент v_0 . Можно также употреблять значение средней аномалии M в начальный момент t_0 , которая определяется соотношением

$$M_0 = n(t_0 - \tau).$$

§ 25. ДИНАМИЧЕСКИЙ ИНТЕГРАЛ. ТРЕТИЙ ЗАКОН КЕПЛЕРА

Общее решение системы дифференциальных уравнений невозмущенного движения мы не можем составить, так как полученные интегралы не содержат времени в явном виде. Перейдем к выводу последнего интеграла, который даст нам в явном виде зависимость положения ИСЗ на орбите от времени t .

Подставим уравнение орбиты (23.17) в выражение интеграла площадей (23.12) и, интегрируя, найдем

$$\int_0^v \frac{dv}{(1 + e \cos v)^2} = \frac{\sqrt{\mu}}{p^{3/2}} (t - \tau_0). \quad (25.1)$$

Вычисление интеграла в левой части (25.1) зависит от того, какое значение принимает эксцентриситет орбиты e .

Эллиптическое движение ($0 < e < 1$). Для вычисления интеграла в этом случае введем новую переменную на основании тангенса половинного угла по формуле

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}. \quad (25.2)$$

Дифференцируя соотношение (25.2), находим

$$\sec^2 \frac{v}{2} dv = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \sec^2 \frac{E}{2} dE. \quad (25.3)$$

С учетом того, что

$$\sec^2 \frac{v}{2} = 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{v}{2} = 1 + \frac{1+e}{1-e} \operatorname{tg}^2 \frac{E}{2}, \quad (25.4)$$

из (25.3) найдем

$$dv = \frac{\sqrt{1-e^2} dE}{1-e \cos E}. \quad (25.5)$$

Используя формулу косинуса половинного угла, получаем

$$1 + e \cos v = \frac{1-e^2}{1-e \cos E}. \quad (25.6)$$

Подставим (25.5) и (25.6) в формулу (25.1) и заменим p по формуле (23.18):

$$\int_0^E (1-e \cos E) dE = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}} (t-\tau),$$

откуда

$$E - e \sin E = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}} (t-\tau). \quad (25.7)$$

Введем среднее движение и среднюю аномалию по формулам

$$n = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}}; \quad (25.8)$$

$$M = n(t-\tau). \quad (25.9)$$

Уравнение (25.7) с учетом (25.8) и (25.9) принимает окончательный вид:

$$E - e \sin E = M. \quad (25.10)$$

В небесной механике это уравнение получило название уравнение Кеплера. Оно связывает вспомогательную переменную E , среднюю аномалию M , момент прохождения спутника через перигентр τ и время t . Три перечисленных элемента M , E , τ и связанная с E посредством (24.5) истинная аномалия v относятся к группе динамических элементов. Построим окружность радиусом, равным большой полуоси эллипса орбиты a (рис. 42). Тогда угол $\angle PF_1m$ есть истинная аномалия v . Опустим перпендикуляр из точки m на OP и продолжим его вверх до пересечения с окружностью в точке m' . Угол $\angle P Om'$ есть эксцентрическая аномалия E .

Из рисунка следует

$$r^2 = F_1 K^2 + m K^2; \quad m K = m' K \sqrt{1-e^2};$$

$$m' K = a \sin E; \quad F_1 K = a \cos E - ae,$$

откуда

$$r = a(1 - e \cos E).$$

Приравняем это выражение к правой части уравнения орбиты (23.17) и выполним некоторые преобразования, в результате приходим к соотношению

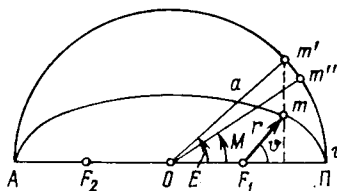


Рис. 42. Связь динамических элементов ИСЗ в эллиптическом движении

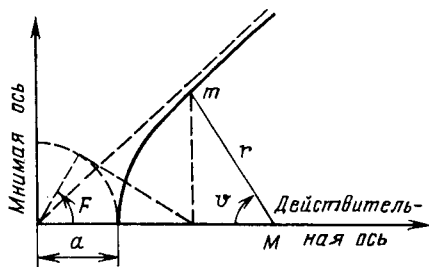


Рис. 43. Элементы движения ИСЗ по гиперболе

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2},$$

которое совпадает с выражением (25.2), так что действительно угол $m'OP = E$.

Согласно формуле (25.9) M возрастает прямо пропорционально времени и определяет положение некоторого фиктивного спутника m'' , который движется равномерно по окружности радиуса a с периодом, равным реальному. Реальный спутник движется по эллипсу и в соответствии со вторым законом Кеплера имеет максимальную скорость в перигеентре и минимальную в апоцентре. Отметим важное обстоятельство, вытекающее из формул (25.1) и (25.10): в перигеентре и апоцентре углы M , E и v совпадают и они равны соответственно 0 и 180° .

Обратимся теперь к уравнению Кеплера. Положим, что спутник имеет период обращения T . Тогда, как это следует из (25.9) и (25.10), при полном обороте ИСЗ получим $360^\circ = nT$, откуда

$$n = 360^\circ/T. \quad (25.11)$$

Следовательно, n есть средняя угловая скорость движущейся точки. В небесной механике ее и называют средним движением.

Подставляя в формулу (25.11) вместо n выражение (25.8), после несложных преобразований получим

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{(360^\circ)^2}{\mu} = \text{const}, \quad (25.12)$$

что отражает третий закон Кеплера: в эллиптическом невозмущенном движении отношение квадрата периода обращения ИСЗ к кубу его большой полуоси есть величина постоянная.

Параболическое движение ($e=1$). В этом случае, заменив в выражении (25.1) e на 1, приходим к табличному интегралу, который имеет вид

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} - \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{v}{2} = n(t - \tau). \quad (25.13)$$

Уравнение (25.13) подстановкой $\operatorname{tg}(v/2) = x$ приводится к полиному третьей степени вида

$$\frac{1}{3} x^3 - x = n(\tau - t), \quad (25.14)$$

который имеет всего один вещественный корень в интервале $[-\infty, +\infty]$.

Гиперболическое движение ($e>1$). При помощи подстановки

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \operatorname{tg} \frac{F}{2}.$$

проинтегрируем (25.1) и получим уравнение, аналогичное уравнению Кеплера, в котором роль эксцентрической аномалии играет угол F (рис. 43):

$$e \operatorname{tg} F - \ln \operatorname{tg} \left(\frac{F}{2} + 45^\circ \right) = \sqrt{\mu} (t - \tau) / |a|^{3/2}. \quad (25.15)$$

В связи с тем, что, как это следует из соотношения $a = -p/(1-e^2)$, большая полуось гиперболы есть величина отрицательная, то в формуле (25.15) a берут по абсолютной величине.

§ 26. ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ НЕВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ

При интегрировании, исследовании и установлении связи между элементами орбиты и постоянными интегрирования были получены первые интегралы дифференциальных уравнений невозмущенного движения ИСЗ. Используя полученные формулы этих интегралов, составляют общее решение дифференциальных уравнений невозмущенного движения.

Общее решение удобно иметь в виде координат и компонентов скорости ИСЗ, как это определено формулами (22.1). Обозначим направляющие косинусы радиус-вектора спутника $\mathbf{r}$ через α_x , α_y и α_z и направляющие косинусы прямой, перпендикулярной к радиусу-вектору $\mathbf{r}$ и лежащей в плоскости орбиты, — через α'_x , α'_y и α'_z . Тогда можно записать:

$$x = r\alpha_x; \quad y = r\alpha_y; \quad z = r\alpha_z. \quad (26.1)$$

Используя величину

$$u = \omega + v, \quad (26.2)$$

которую называют аргументом широты, и основную теорему сферической тригонометрии, на основании рис. 44 получим явные выражения для направляющих косинусов:

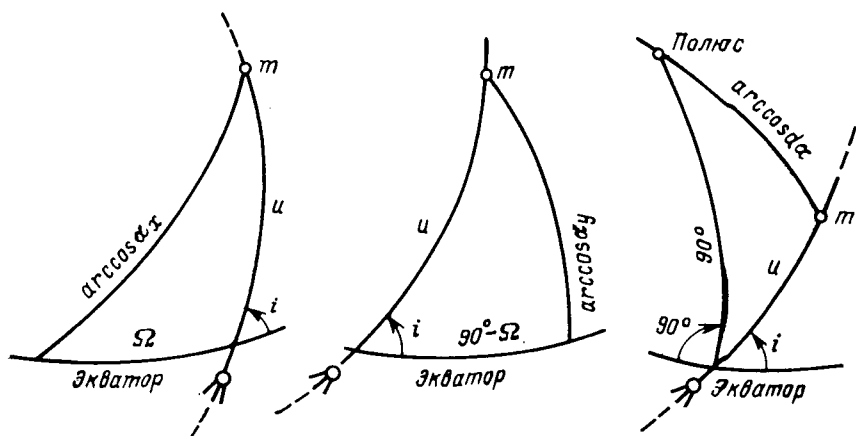


Рис. 44. Связь элементов орбиты с направляющими косинусами радиуса-вектора ИСЗ

$$\begin{aligned} \alpha_x &= \cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i; \\ \alpha_y &= \cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i; \\ \alpha_z &= \sin u \sin i. \end{aligned} \quad (26.3)$$

Явные выражения для α'_x , α'_y и α'_z находят из дифференцирования (26.3) по u , а именно:

$$\begin{aligned} \alpha'_x &= \frac{d\alpha_x}{du} = -\sin u \cos \Omega - \cos u \sin \Omega \cos i; \\ \alpha'_y &= \frac{d\alpha_y}{du} = -\sin u \sin \Omega + \cos u \cos \Omega \cos i; \\ \alpha'_z &= \frac{d\alpha_z}{du} = \cos u \sin i. \end{aligned} \quad (26.4)$$

Таким образом, с учетом выражений (23.17), (26.1) и (26.3) имеем

$$\begin{aligned} x &= \frac{p}{1 + e \cos v} (\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i); \\ y &= \frac{p}{1 + e \cos v} (\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i); \\ z &= \frac{p}{1 + e \cos v} \sin u \sin i; \end{aligned} \quad (26.5)$$

Дифференцируя (26.5) по t и заменяя $\dot{r}$ из дифференцирования по t уравнения орбиты, а $\dot{v}$ — из интеграла площадей, получаем выражение для компонентов скорости:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sqrt{\frac{\mu}{p}} [\alpha_x e \sin v + \alpha'_x (1 + e \cos v)]; \\ \dot{y} &= \sqrt{\frac{\mu}{p}} [\alpha_y e \sin v + \alpha'_y (1 + e \cos v)]; \\ \dot{z} &= \sqrt{\frac{\mu}{p}} [\alpha_z e \sin v + \alpha'_z (1 + e \cos v)].\end{aligned}\quad (26.6)$$

Алгоритм вычисления координат спутника и компонентов скорости, если заданы элементы орбиты ИСЗ на некоторый момент времени t , заключается в следующем.

1. Вычисление средней аномалии M по формуле

$$M = n(t - \tau). \quad (26.7)$$

2. Решение каким-либо способом (например способом итераций) уравнения Кеплера

$$E - e \sin E = M \quad (26.8)$$

и нахождение эксцентрической аномалии E .

3. Определение радиуса-вектора r по формуле

$$r = a(1 - e \cos E), \quad (26.9)$$

а также значения истинной аномалии по формуле

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}. \quad (26.10)$$

4. Определение координат и компонентов скорости по формулам (26.5) и (26.6).

Глава 10.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ОРБИТЫ ИЗ НАБЛЮДЕНИЙ

§ 27. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ОРБИТЫ ИСЗ ИЗ НАБЛЮДЕНИЙ

Задача вычисления координат спутника и компонентов скорости на некоторый момент времени t по заданным элементам орбиты Ω , ω , a , e , i , τ в небесной механике решается в большинстве случаев как часть общей задачи вычисления эфемериды ИСЗ, под которой понимают таблицу значений видимых координат небесного тела на заданные моменты времени. В этом случае, кроме элементов орбиты Ω , ω , i , a , e , τ и

момента времени t , обычно задают еще и геодезические координаты пункта земной поверхности X, Y, Z . Для данного пункта на момент времени t вычисляют топоцентрические экваториальные координаты α' и δ' и топоцентрический радиус-вектор ИСЗ r' . Вычисление координат и компонентов скорости ИСЗ выполняют по формулам (26.5)—(26.10). Затем находят топоцентрические прямоугольные координаты спутника:

$$x' = x - X; \quad y' = y - Y; \quad z' = z - Z; \quad (27.1)$$

топоцентрические экваториальные координаты и топоцентрический радиус-вектор ИСЗ:

$$r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}; \quad (27.2)$$

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{y'}{x'}; \quad \operatorname{tg} \delta' = \frac{z'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}.$$

Приступим теперь к рассмотрению обратной задачи — вычислению элементов предварительной орбиты из наблюдений.

При наблюдениях ИСЗ могут быть измерены следующие величины: топоцентрические направления на спутник α', δ' ; топоцентрические расстояния до спутника r' , одновременно направления и расстояния, т. е. r', α', δ' , скорости и ускорения ИСЗ в заданном направлении.

Следует иметь в виду, что так как формулы невозмущенного и возмущенного движения инварианты, то определения элементов невозмущенной и возмущенной орбит будут отличаться только учетом возмущений в последней.

Определение орбиты обычно разбивают на два этапа: 1) из совокупности всех наблюдений ИСЗ выбирают минимально необходимое число измерений и определяют так называемую предварительную орбиту; 2) уточняют элементы предварительной орбиты, используя всю совокупность наблюдений.

Рассмотрим подробно первый этап — определение предварительной орбиты. Пусть α'_k, δ'_k ($k=1, 0, 2$) наблюдательные топоцентрические экваториальные координаты ИСЗ на моменты t_k . Наблюдения выполнены с пунктов земной поверхности с известными геоцентрическими координатами в инерциальной системе $X_k Y_k Z_k$ ($k=0, 1, 2$). Полагают, что все координаты отнесены к некоторой единой стандартной эпохе инерциальной системы, а наблюдения исправлены за спутниковую рефракцию и аберрацию.

Вычисления обычно производят в следующем порядке. Определяют топоцентрические расстояния ИСЗ r'_k ($k=1, 0, 2$) из следующих формул. На основании (23.2) в невозмущенном движении должно выполняться равенство

$$x_k c_1 + y_k c_2 + z_k c_3 = 0. \quad (27.3)$$

Необходимым условием существования решения этой линейной однородной алгебраической системы является равенство

нулю определителя системы. Разложим определитель системы по элементам первого, второго и третьего столбцов:

$$\begin{aligned}x_1(yz_2 - y_2z) &= 0; \\y_1(zx_2 - xz_2) &= 0; \\z_1(xy_2 - yx_2) &= 0.\end{aligned}\tag{27.4}$$

Отметим, что выражение в круглых скобках можно записать:

$$\begin{aligned}yz_2 - y_2z &= 2[rr_2] \cos J_{yz}, \\zx_2 - xz_2 &= 2[rr_2] \cos J_{xz}, \\xy_2 - yx_2 &= 2[rr_2] \cos J_{yx},\end{aligned}\tag{27.5}$$

где $[rr_2]$ — площадь треугольника, составленного из геоцентрических радиусов-векторов r_2 и r ; J_{xz} , J_{yz} и J_{yx} — углы между треугольниками и соответствующими осями, а выражения, стоящие в левых частях, есть проекции этих треугольников на соответствующие плоскости. В формулах (27.4) и (27.5) x_k , y_k , z_k — геоцентрические координаты k -го положения спутника, а r_k — соответствующие геоцентрические радиусы-векторы ИСЗ.

Подставляя (27.5) в (27.4), получим

$$\begin{aligned}x_1[rr_2] + x_2[r_1r] &= x[r_1r_2]; \\y_1[rr_2] + y_2[r_1r] &= y[r_1r_2]; \\z_1[rr_2] + z_2[r_1r] &= z[r_1r_2].\end{aligned}\tag{27.6}$$

Отношение площадей треугольников (рис. 45) в дальнейшем заменяют отношением площадей эллиптических секторов, при этом интервалы времени выбирают такими, чтобы площади треугольников как можно меньше отличались от площадей соответствующих эллиптических секторов.

Используя второй закон Кеплера и введя обозначения, имеем

$$\begin{aligned}A &= \frac{[rr_2]}{[r_1r_2]} \approx \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1} = A_1; \\B &= \frac{[rr_1]}{[r_1r_2]} \approx \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} = A_2.\end{aligned}\tag{27.7}$$

Обозначим направляющие косинусы каждого из моментов:

$$m'_k = \cos \delta'_k \cos \alpha'_k; \quad n'_k = \cos \delta'_k \sin \alpha'_k; \quad p'_k = \sin \delta'_k.\tag{27.8}$$

Запишем связь между топоцентрическими и геоцентрическими координатами

$$x_k = r'_k m'_k + X_k; \quad y_k = r'_k n'_k + Y_k; \quad z_k = r'_k p'_k + Z_k.\tag{27.9}$$

Принимая во внимание (27.7) — (27.9), систему (27.6) можно представить в виде

$$\begin{aligned} m_1' A_1 r_1' + m_2' A_2 r_2' &= m_0' r_0' - X_0 + A_1 X_1 + A_2 X_2; \\ n_1' A_1 r_1' + n_2' A_2 r_2' &= n_0' r_0' - Y_0 + A_1 Y_1 + A_2 Y_2; \\ p_1' A_1 r_1' + p_2' A_2 r_2' &= p_0' r_0' - Z_0 + A_1 Z_1 + A_2 Z_2. \end{aligned} \quad (27.10)$$

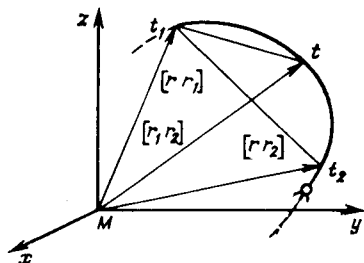


Рис. 45. Схема определения орбиты ИСЗ с использованием площадей треугольников и эллиптических секторов

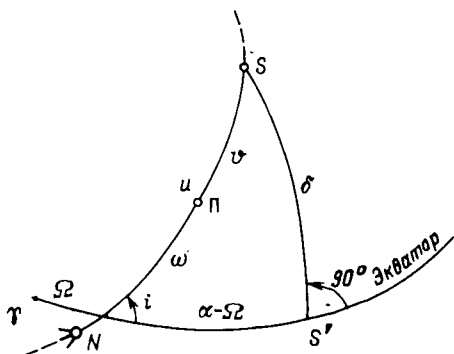


Рис. 46. Связь элементов орбиты ИСЗ с прямым восхождением и склонением

Из (27.10) исключают r_0' и находят в первом приближении r_1' и r_2' для моментов t_1 и t_2 . Для дальнейших вычислений выбирают такие два уравнения, у которых определитель левых частей максимален.

Далее по формулам (27.1) вычисляют в первом приближении геоцентрические координаты x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2 и приближенные сферические экваториальные координаты ИСЗ:

$$\operatorname{tg} \alpha_k = \frac{y_k}{x_k}; \quad \operatorname{tg} \delta_k = \frac{z_k}{\sqrt{x_k^2 + y_k^2}}; \quad (27.11)$$

$$r_k = \sqrt{x_k^2 + y_k^2 + z_k^2},$$

где $k=1, 2$.

Из решения прямоугольного сферического треугольника NSS' (рис. 46) находят

$$\operatorname{tg} (\alpha_1 - \Omega) = \frac{\operatorname{tg} \delta_1 \sin (\alpha_2 - \alpha_1)}{\operatorname{tg} \delta_2 - \operatorname{tg} \delta_1 \cos (\alpha_2 - \alpha_1)}; \quad (27.12)$$

$$\operatorname{tg} i = \operatorname{tg} \delta_1 \operatorname{cosec} (\alpha_2 - \Omega) = \frac{\operatorname{tg} \delta_2 - \operatorname{tg} \delta_1 \cos (\alpha_2 - \alpha_1)}{\cos (\alpha_1 - \Omega) \sin (\alpha_2 - \alpha_1)}. \quad (27.13)$$

Кроме того, имеем

$$\cos u_k = \cos \delta_k \cos (\alpha_k - \Omega). \quad (27.14)$$

Вычисляют в первом приближении фокальный параметр p . Гауссом введено понятие отношения η площади эллиптического сектора к площади соответствующего треугольника. В нашем случае

$$\eta = \frac{\sqrt{\mu p} (t_2 - t_1)}{r_1 r_2 \sin (u_2 - u_1)}. \quad (27.15)$$

Если разность $t_2 - t_1$ достаточно мала, то можно принять $\eta = 1$. В противном случае необходимо η вычислить независимо из решения специальной системы уравнений Гаусса:

$$\begin{aligned} \eta^3 - \eta^2 &= mE(x); \\ x &= m\eta^{-2} - l, \end{aligned} \quad (27.16)$$

где

$$x = \sin^2 \frac{E_2 - E_1}{4}; \quad E(x) = \frac{(E_2 - E_1) - \sin(E_2 - E_1)}{\sin^3 \frac{E_2 - E_1}{2}};$$

$$m = \frac{\mu (t_2 - t_1)}{8 (r_1 r_2)^{3/2} \cos \frac{u_2 - u_1}{2}}; \quad l = \frac{1}{2} \left(\frac{r_1 - r_2}{2 \sqrt{r_1 r_2} \cos \frac{u_2 - u_1}{2}} - 1 \right).$$

Систему (27.16) решают методом последовательных приближений. В первом приближении достаточно использовать приближенную формулу:

$$\eta = 1 + \frac{4}{3} m \left[1 - 1,1 \left(\frac{4}{3} m \right) - 1,2l \right]. \quad (27.17)$$

Определив η , на основании (27.15) находят фокальный параметр

$$p = \eta^2 \frac{[r_1 r_2 \sin (u_2 - u_1)]^2}{\mu (t_2 - t_1)^2}. \quad (27.18)$$

После этого приступают к вычислению второго приближения. Находят два остальных отношения площадей эллиптических секторов к площадям треугольников. Зная эти отношения, вместо приближенных значений A_1, A_2 (27.7) находят уточненные значения отношений площадей треугольников A и B , которые подставляют в систему (27.10), и проводят все вычисления во втором приближении, начиная с (27.10) и кончая (27.18). Аналогично можно выполнить третье и последующие приближения. На практике обычно достаточно двух-трех приближений.

На основании уравнения орбиты (23.16) находим истинные аномалии

$$\operatorname{tg} v_1 = \frac{\frac{p-r_1}{r_1} \cos(u_2-u_1) - \frac{p-r_2}{r_2}}{\frac{p-r_1}{r_1} \sin(u_2-u_1)}; \quad (27.19)$$

$$v_2 = v_1 + (u_2 - u_1),$$

эксцентриситет орбиты

$$e = \frac{p-r_1}{r_1 \cos v_1} = \frac{p-r_2}{r_2 \cos v_2} \quad (27.20)$$

и аргумент перигентра

$$\omega = u_1 - v_1 = u_2 - v_2.$$

Используя формулы

$$a = p/(1-e^2); \quad n = \sqrt{\mu}/a^{3/2}, \quad (27.21)$$

вычисляют большую полуось a и среднее движение n .

На основании формулы

$$\operatorname{tg} \frac{E_k}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{v_k}{2} \quad (27.22)$$

вычисляют эксцентрическую аномалию E . А при помощи уравнения Кеплера

$$\tau = t_1 - \frac{1}{n} (E_1 - e \sin E_1) = t_2 - \frac{1}{n} (E_2 - e \sin E_2) \quad (27.23)$$

определяют момент прохождения ИСЗ через перигентр.

Найденные элементы относят к моменту $t_0 = (t_1 + t_2)/2$ и вычисляют начальное значение средней аномалии M_0 на эпоху t_0

$$M_0 = n(t_0 - \tau). \quad (27.24)$$

Если при наблюдениях ИСЗ измеряют и топоцентрические расстояния, так что на моменты t_1 и t_2 известны все компоненты топоцентрических векторов r_1 , r_2 , то все вычисления начинают с формулы (27.11), что значительно сокращает объем вычислений предварительной орбиты.

§ 28. ПОНЯТИЕ О МЕТОДЕ УТОЧНЕНИЯ ОРБИТ ИСЗ

Метод уточнения орбит ИСЗ применяется не только для того, чтобы уточнить элементы предварительной орбиты, но также и для того, чтобы определять возможно более точные значения элементов возмущенной орбиты на различные моменты времени. В настоящее время для уточнения первоначальной орбиты наиболее распространенным является дифференциальный метод исправления элементов орбиты. Он особенно эффективен

при использовании современной вычислительной техники, так как позволяет привлекать совокупность больших массивов наблюдений ИСЗ.

Пусть имеются n топоцентрических экваториальных наблюдений ИСЗ на заданные моменты: $\alpha_k', \delta_k', t_k$ ($k=1, 2, \dots, n$). Кроме того, известны элементы предварительной орбиты $\mathcal{E}_i$ ($i=1, \dots, 6$), на момент времени t_0 ($t_1 < t_0 < t_n$). Пусть также на основании элементов предварительной орбиты по формулам вычислена эфемерида (26.5) — (27.2) и для каждого из моментов t_k найдены топоцентрические экваториальные координаты ИСЗ $\alpha_k^{(B)}, \delta_k^{(B)}$.

Предположим, что по формулам теории возмущенного движения для всех интервалов времени $t_k - t_0$ вычислены величины возмущений каждой координаты $\delta\alpha_k', \delta\delta_k'$, тогда

$$\begin{aligned}\alpha_k^{(0)'} &= \alpha_k' - \delta\alpha_k'; \\ \delta_k^{(0)'} &= \delta_k' - \delta\delta_k'.\end{aligned}\quad (28.1)$$

В этом случае разность наблюдаемых и вычисленных координат ИСЗ является только функцией искомых поправок к элементам предварительной орбиты. Представляя эту разницу в виде ряда и ограничиваясь линейными членами, получим $2n$ уравнений погрешностей:

$$\begin{aligned}\alpha^{(0)'} - \alpha_k^{(B)'} &= \Delta\alpha_k' = \sum_{s=1}^6 \frac{\partial\alpha_k'}{\partial\mathcal{E}_s} \Delta\mathcal{E}_s; \\ \delta_k^{(0)'} - \delta_k^{(B)'} &= \Delta\delta_k' = \sum_{s=1}^6 \frac{\partial\delta_k'}{\partial\mathcal{E}_s} \Delta\mathcal{E}_s,\end{aligned}\quad (28.2)$$

где $\mathcal{E}$ — любой из шести элементов орбиты, а $\Delta\mathcal{E}$ — искомые поправки к элементам орбиты. Производные по элементам, являющиеся коэффициентами в (28.2), могут быть вычислены следующим образом:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\alpha'}{\partial\mathcal{E}_s} &= \frac{\partial\alpha'}{\partial x'} \frac{\partial x}{\partial\mathcal{E}_s} + \frac{\partial\alpha'}{\partial y'} \frac{\partial y}{\partial\mathcal{E}_s}; \\ \frac{\partial\delta'}{\partial\mathcal{E}_s} &= \frac{\partial\delta'}{\partial x'} \frac{\partial x}{\partial\mathcal{E}_s} + \frac{\partial\delta'}{\partial y'} \frac{\partial y}{\partial\mathcal{E}_s} + \frac{\partial\delta'}{\partial z'} \frac{\partial z}{\partial\mathcal{E}_s}.\end{aligned}\quad (28.3)$$

Следует иметь в виду, что в силу (27.1) получаем

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{\partial y'}{\partial y} = \frac{\partial z'}{\partial z} = 1.\quad (28.4)$$

Формулы для вычисления производных от топоцентрических экваториальных координат по топоцентрическим прямоугольным могут быть получены дифференцированием соотношений (27.2), для получения производных от геоцентрических координат по

элементам орбиты необходимо выполнить дифференцирование выражений (26.5).

Можно учитывать возмущения позже, в процессе решения уравнений (28.2), не вычисляя (28.1). Тогда свободными членами в этих уравнениях будут величины $\alpha'_k - \alpha_k^{(B)'}$, $\delta'_k - \delta_k^{(B)'}$, а формулы для коэффициентов (28.3) следует домножить на производные $\frac{\partial \mathcal{E}_s}{\partial \mathcal{E}_{os}}$, где $\mathcal{E}_s$ — возмущенные элементы, а $\mathcal{E}_{os}$ — невозмущенные. Эти производные получили название изохронных и их находят дифференцированием формул, учитывающих возмущения. Если уточнение орбиты выполняется в процессе реализации орбитального метода космической геодезии, то стараются учитывать весь набор факторов, влияющих на движение ИСЗ.

Уравнения (28.2) решают по методу наименьших квадратов и находят поправки $\Delta \mathcal{E}_s$ к элементам предварительной орбиты. Элементы окончательной орбиты представляют в виде $\mathcal{E}_s = \mathcal{E}_{os} + \Delta \mathcal{E}_s$, где $s = 1, 2, \dots, 6$.

Глава 11

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ ИСЗ

§ 29. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Предположим, что кроме центральной силы на спутник действует некоторая дополнительная сила произвольного характера. В этом случае движение спутника отличается от движения по законам Кеплера. Такое движение называется возмущенным, а орбита, по которой движется спутник, — возмущенной орбитой. Разности между одноименными параметрами, например элементами возмущенной и невозмущенной (кеплеровой) орбиты в один и тот же момент времени, называются возмущениями.

Дифференциальные уравнения возмущенного движения отличаются от уравнений невозмущенного движения тем, что в правых частях вместо нулей стоят проекции ускорений, вызываемых возмущающей силой:

$$\begin{aligned}\ddot{x} + \mu \frac{x}{r^3} &= w_x; \\ \ddot{y} + \mu \frac{y}{r^3} &= w_y; \\ \ddot{z} + \mu \frac{z}{r^3} &= w_z,\end{aligned}\tag{29.1}$$

где w_x , w_y , w_z — возмущающие ускорения. Такая форма уравнений возмущенного движения следует из того, что ускорения — величины векторные, и их проекции должны складываться. Уравнения возмущенного движения ни в конечной форме, ни в квадратурах обычно не интегрируются, за исключением немногих частных случаев, в природе почти не встречающихся. Поэтому для интегрирования уравнений (29.1) приходится применять различные приближенные методы.

Предположим, что уравнения (29.1) с той или иной степенью точности проинтегрированы каким-либо приближенным методом. Это означает, что получены выражения, позволяющие вычислить возмущенные значения составляющих скорости спутника $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ и возмущенные значения его геоцентрических координат x , y , z . Если через x_n , y_n , z_n , $\dot{x}_n$, $\dot{y}_n$, $\dot{z}_n$ обозначить невоз-

мущенные значения скоростей и координат, то для текущего момента времени можно написать:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \dot{x}_n + \delta\dot{x}; & \dot{y} &= \dot{y}_n + \delta\dot{y}; & \dot{z} &= \dot{z}_n + \delta\dot{z}; \\ x &= x_n + \delta x; & y &= y_n + \delta y; & z &= z_n + \delta z.\end{aligned}\quad (29.2)$$

Здесь $\delta\dot{x}$, $\delta\dot{y}$, $\delta\dot{z}$, δx , δy , δz — возмущения составляющих скорости и координат, представляющие собой очень сложные функции времени и постоянных интегрирования. В отличие от невозмущенного движения элементы кеплеровой орбиты постоянными интегрирования здесь являться не могут, так как под действием возмущений они сами непрерывно меняются с течением времени. Обозначив через $\mathcal{E}$ любой из элементов орбиты, по аналогии с (29.2) можно написать:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + \delta\mathcal{E}. \quad (29.3)$$

Здесь $\mathcal{E}_0$ — невозмущенное (начальное) значение элемента орбиты в принятый начальный момент времени t_0 ; $\mathcal{E}$ — возмущенное значение элемента в текущий момент t ; $\delta\mathcal{E}$ — величина возмущения элемента за промежуток времени $t - t_0$.

Возмущения элементов орбиты $\delta\mathcal{E}$ — функции, меняющиеся с течением времени гораздо медленнее, нежели возмущенные координаты и составляющие скорости. Поэтому в ряде случаев удобнее пользоваться возмущенными элементами орбиты. Для этого дифференциальные уравнения (29.1) методом вариации произвольных постоянных преобразуются к шести дифференциальным уравнениям первого порядка:

$$\dot{\mathcal{E}}_j = f_j(t, \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_6), \quad j = 1, 2, \dots, 6, \quad (29.4)$$

определяющим изменения элементов орбиты под действием возмущающих сил. Интегрирование уравнений (29.4) каким-либо приближенным методом позволяет найти с той или иной степенью точности возмущенные элементы орбиты (29.3).

Таким образом, основной задачей теории возмущенного движения ИСЗ является возможно более точное определение величин возмущений $\delta\dot{x}$, $\delta\dot{y}$, $\delta\dot{z}$; δx , δy , δz или $\delta\mathcal{E}_j$, $j = 1, 2, \dots, 6$ из интегрирования дифференциальных уравнений движения (29.1) или (29.4) существующими приближенными методами.

Основные факторы, определяющие возмущения в движении спутников:

- возмущающая часть внешнего гравитационного поля Земли (геопотенциал);

- возмущающее действие Луны и Солнца;

- световое давление;

- возмущающее действие, вызванное деформациями уровня поверхности геопотенциала, возникающими из-за приливного влияния Луны и Солнца;

эффект переизлучения Землей солнечной радиации; возмущающее действие, возникающее вследствие прецессионно-нутационного поворота сфероидальной Земли в инерциальной системе координат;

атмосферное торможение — для спутников, движущихся в верхних слоях атмосферы (на высотах до 2000 км).

Кроме указанных факторов на движение спутников действуют следующие: гравитационное влияние неравномерностей в распределении плотностей внутри атмосферы; электромагнитные возмущения, возникающие при пересечении спутником, несущим электростатический заряд, соответствующий электродвижущей силе не менее 100 В, силовых линий магнитного поля Земли. Эти два фактора малы и изучены пока недостаточно, поэтому их обычно не учитывают. Следует также упомянуть возмущающее действие, которое оказывают на движение ИСЗ эффекты общей теории относительности. В первую очередь эти эффекты приводят к дополнительному смещению перицентра орбиты. Это смещение крайне мало — несколько секунд дуги в год. При современной точности наблюдений и уровне разработки теории движения спутников эта величина выявлена быть не может и ее не учитывают.

Перечисленные возмущающие факторы определяют аналитическую форму возмущающих ускорений ω_x , ω_y , ω_z , входящих в уравнения (29.1) или (29.4).

Последовательность операций для определения величин возмущений в движении ИСЗ заключается в следующем:

выбор системы переменных для описания возмущенного движения и выбор формы дифференциальных уравнений возмущенного движения;

представление правых частей уравнений возмущенного движения в явном виде с учетом всех возмущающих факторов через избранные переменные;

выбор метода интегрирования и выполнение операций интегрирования — вычисление величин возмущений в избранных переменных.

Методы приближенного интегрирования делятся на два основных класса: аналитические и численные. Первые позволяют получить приближенные аналитические формулы, описывающие возмущенное движение ИСЗ, вторые — числовые значения возмущений в движении спутника на заданные моменты времени.

§ 30. АНАЛИТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ

Сначала напомним основные понятия аналитической механики. Обобщенные координаты q_j , $j=1, 2, \dots, n$ — независимые величины, однозначно определяющие положение механической системы в пространстве. Для материальной точки в пря-

моугольной системе координат $x y z$, в частности, можно положить:

$$q_1 = x; \quad q_2 = y; \quad q_3 = z. \quad (30.1)$$

Обобщенные скорости $\dot{q}$ — производные вида

$$\dot{q} \equiv \frac{dq}{dt}, \quad (30.2)$$

где t — независимая переменная, в частности время.

Функция Лагранжа L или лагранжиан механической системы — разность ее кинетической T и потенциальной U энергий. В астрономии имеют дело с потенциалом притяжения, которому приписывают знак минус. Поэтому указанную разность записывают в виде

$$L = T - (-U) = T + U. \quad (30.3)$$

Производную от лагранжиана по обобщенной скорости

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \quad (30.4)$$

называют обобщенным импульсом.

Производная

$$F = \frac{\partial L}{\partial q} \quad (30.5)$$

называется обобщенной силой.

Интеграл вида

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \quad (30.6)$$

называется действием.

Всякая механическая система с заданным лагранжианом L перемещается в пространстве из точки с координатами q_1 (момент t_1) в точку с координатами q_2 (момент t_2) так, что действие S принимает экстремальное значение. Это так называемый принцип Гамильтона, представляющий собой основной принцип динамики.

Принцип Гамильтона позволяет получить наиболее общие дифференциальные уравнения движения, описывающие поведение любых механических систем с заданным лагранжианом.

Эти уравнения называются уравнениями Лагранжа II рода. Они представляют собой следствие, вытекающее из условий реализации экстремума интеграла (30.6). С математической точки зрения выражение (30.6) представляет собой функционал — величину, определяемую выбором функции, в данном случае — выбором лагранжиана.

Как известно из вариационного исчисления, необходимым условием для достижения функционалом экстремума при фиксированных границах t_1 и t_2 является равенство нулю его первой вариации

$$\delta S = 0, \quad (30.7)$$

определяемой следующим образом. Пусть δq , $\delta \dot{q}$ — приращения координат и скоростей внутри интервала $t_1 < t < t_2$, причем на концах интервала

$$\begin{aligned} \delta q_1(t_1) &= 0; & \delta q_2(t_2) &= 0; \\ \delta \dot{q}_1(t_1) &= 0; & \delta \dot{q}_2(t_2) &= 0. \end{aligned} \quad (30.8)$$

Первая вариация равна

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt. \quad (30.9)$$

Линеаризуя подынтегральное выражение в первом интеграле (30.9), с учетом условия (30.7) получим

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt = 0. \quad (30.10)$$

Интегрируя второй член в (30.10) по частям с учетом (30.8), получим искомые уравнения Лагранжа II рода:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0. \quad (30.11)$$

Для упрощения записи мы использовали одномерное пространство, характеризуемое одной координатой q . Вывод не изменится, если пользоваться пространством n измерений $q_1, q_2, \dots, q_n$. Тогда, записывая уравнение вида (30.11) для каждой из координат, получим систему уравнений Лагранжа II рода:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0; \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (30.12)$$

описывающих движение в n -мерном пространстве.

Получим уравнения движения материальной точки (спутника), движущейся под действием гравитационного поля с потенциалом U . За обобщенные координаты примем прямоугольные геоцентрические координаты x, y, z , массу точки обозначим через m . Тогда кинетическая энергия ИСЗ будет равна

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2), \quad (30.13)$$

а лагранжиан примет вид

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + U(x, y, z). \quad (30.14)$$

Подставляя (30.14) в уравнения (30.12), с учетом условий (30.1) получим следующие уравнения движения:

$$m\ddot{x} = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad m\ddot{y} = \frac{\partial U}{\partial y}; \quad m\ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial z}. \quad (30.15)$$

Это общие уравнения движения материальной точки в поле с потенциалом U . Пусть на механическую систему кроме некоторого потенциала U , входящего в лагранжиан, действует также и непотенциальная сила F (не являющаяся градиентом некоторой скалярной функции). Примером такой силы может служить какая-нибудь диссипативная сила, в частности, сила атмосферного торможения, действующая на спутник. Тогда уравнения Лагранжа II рода примут вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = F_{q_j}, \quad (30.16)$$

а уравнения движения спутника (30.15) — вид

$$m\ddot{x} = \frac{\partial U}{\partial x} + F_x; \quad m\ddot{y} = \frac{\partial U}{\partial y} + F_y; \quad m\ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial z} + F_z, \quad (30.17)$$

где F_{q_j} или F_x, F_y, F_z — проекции непотенциальной силы на оси q или x, y, z .

Уравнения Лагранжа II рода в форме (30.12) или (30.16) являются основой так называемой лагранжевой механики — теории движения механических систем, представляющей собой результат интегрирования этих уравнений.

Нетрудно, в частности, заметить, что уравнения Лагранжа II рода обобщают второй закон Ньютона на случай произвольных механических систем. Из уравнений (30.12) или (30.16) на основании определений (30.4) и (30.5) следует, что обобщенная сила равна производной по времени от обобщенного импульса, в частности, массе, умноженной на обобщенное ускорение.

Техника составления дифференциальных уравнений движения ИСЗ на основе уравнений Лагранжа II рода заключается в следующем. Выбирают систему переменных и принимают их за обобщенные координаты. Составляют в этих переменных выражения для кинетической энергии ИСЗ, потенциальной энергии системы Земля—спутник, а также, если это необходимо, — выражения для непотенциальных сил. Составляют выражение для лагранжиана и подставляют лагранжиан и непотенциальные силы в уравнения (30.16). Пример применения этой техники был приведен при составлении уравнений движения (30.15).

§ 31. КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА

Функцией Гамильтона H или гамильтонианом механической системы называется ее полная энергия — сумма кинетической и потенциальной энергий. Потенциалу притяжения в данном случае приписывается знак минус. Поэтому гамильтониан H записывают так:

$$H = T - U. \quad (31.1)$$

Уравнения Лагранжа II рода (30.12) (без непотенциальных сил), каждое из которых — второго порядка, путем замены обобщенных скоростей $\dot{q}$ обобщенными импульсами p могут быть преобразованы в $2n$ уравнений первого порядка, имеющих более простую симметричную форму, нежели уравнения (30.12).

Лагранжиан L в данном случае преобразуется в гамильтониан H . Запишем пока это преобразование так:

$$\{q, \dot{q}\} \rightarrow \{q, p\}. \quad (31.2)$$

Оно основано на так называемом преобразовании Лежандра, которое заключается в следующем. Пусть дана некоторая функция

$$y = f(x) \quad (31.3)$$

с положительной второй производной. Такие функции называются выпуклыми. Преобразованием Лежандра для функции (31.3) называется новая функция $\varphi(z)$ вида

$$\varphi(z) = \Phi(z, x(z)) = z \cdot x - f(x) \quad (31.4)$$

и притом такая, что каждое значение φ соответствует значениям $x = x(z)$, для которых $\varphi(z) = z \cdot x - f(x)$ имеет максимум по x . Из условия экстремума функции $\varphi(z)$ следует, что

$$z = \frac{\partial f}{\partial x}. \quad (31.5)$$

Геометрически это означает, что если даны прямые

$$y = z \cdot x \quad (31.6)$$

с непрерывно меняющимся угловым коэффициентом z , то в (31.4) имеются в виду лишь такие значения x , для которых разности ординат y между (31.3) и (31.6) максимальны. Новая переменная z называется сопряженной со старой переменной x .

Пусть теперь под x понимаются обобщенные скорости $\dot{q}$, под z — обобщенные импульсы p , а под исходной функцией $f(x)$ — лагранжиан $L = L(q, \dot{q})$, не содержащий времени t в явном виде (это наиболее характерный случай). Обобщенные координаты q рассматривают как параметры и никаким преобразованиям их не подвергают.

Тогда, выполняя над лагранжианом преобразование Лежандра вида (31.4), находим, что преобразование переменных (31.2) дает следующий результат:

$$p\dot{q} - L(q, \dot{q}) = H(p, q). \quad (31.7)$$

Так как выражения для полных дифференциалов от левой и правой частей (31.7) должны совпадать:

$$\begin{aligned} dH &= \frac{\partial H}{\partial p} dp + \frac{\partial H}{\partial q} dq; \\ d(p\dot{q} - L) &= \dot{q}dp - \frac{\partial L}{\partial q} dq, \end{aligned} \quad (31.8)$$

то на основании определения обобщенного импульса (30.4) запишем

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}; \quad \frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial L}{\partial q}. \quad (31.9)$$

Из уравнений Лагранжа II рода следует, что

$$\dot{p} = \frac{\partial L}{\partial q}. \quad (31.10)$$

Тогда вместо (31.9) окончательно получим

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}; \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}. \quad (31.11)$$

Это и есть канонические, или гамильтоновы, уравнения движения, соответствующие уравнениям Лагранжа II рода (30.11).

Установим, что функция H есть полная энергия системы. Найдем для этого полную производную по времени t от лагранжиана, заменив на основании уравнений (30.11) производную $\frac{\partial L}{\partial q}$ на $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right)$:

$$\frac{dL}{dt} = \dot{q} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \ddot{q} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} \right); \quad (31.12)$$

Отсюда следует, что:

$$\frac{d}{dt} \left(\dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L \right) = 0. \quad (31.13)$$

Интегрируя это выражение, найдем

$$\dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L = \text{const}. \quad (31.14)$$

Сравнивая (31.14) и (31.7), на основании закона сохранения энергии для консервативной системы заключаем, что функция $H(p, q)$ есть полная энергия этой системы — гамильтониан.

Как и в предыдущем параграфе, мы пока использовали одномерное пространство. В пространстве n измерений преобразование Лежандра (31.7) будет иметь вид

$$\sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j - L(q_1, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) = H(p_1, \dots, p_n; q_1, \dots, q_n). \quad (31.15)$$

Повторение перечисленных выкладок дает систему $2n$ канонических уравнений Гамильтона, аналогичных (31.11):

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}; \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}; \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (31.16)$$

Уравнения для импульсов — уравнения, сопряженные с уравнениями для координат.

Составление дифференциальных уравнений движения ИСЗ на основе канонических уравнений Гамильтона (31.16) аналогично применению уравнений Лагранжа II рода; выбираем систему обобщенных координат q , составляем лагранжиан L , находим обобщенные импульсы $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$, составляем гамильтониан $H = H(p, q)$ и, наконец, подставляем q, p и H в уравнения вида (31.16).

В частности, если $q_1 = x, q_2 = y, q_3 = z$ — геоцентрические прямоугольные координаты спутника с массой m , движущегося в потенциальном поле U , то применение перечисленных операций дает следующий результат: уравнения для $\dot{q}_j$ приводят к тождествам $\dot{x} = \dot{x}, \dot{y} = \dot{y}, \dot{z} = \dot{z}$, уравнения $\dot{p}_j$ для импульсов превращаются в уравнения движения вида (30.15).

Подчеркнем, что канонические уравнения движения могут быть составлены лишь при отсутствии непотенциальных сил.

Предположим, что канонические уравнения ИСЗ вида (31.16) каким-либо способом проинтегрированы. Тогда получим формулы, позволяющие предвычислить положения и составляющие скорости спутника в пространстве, характеризуемом $2n$ независимыми величинами: n обобщенными координатами $q_1, \dots, q_n$ и n обобщенными импульсами $p_1, \dots, p_n$. Такое пространство координат и импульсов называется фазовым пространством.

Канонические уравнения Гамильтона являются основой так называемой гамильтоновой механики — теории движения механических систем в фазовом пространстве.

§ 32. УРАВНЕНИЯ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ ИСЗ В КООРДИНАТАХ

В качестве исходных примем уравнения (30.15) и (30.17). Рассмотрим уравнения (30.15). Пусть в этих уравнениях U — потенциал, описывающий внешнее гравитационное поле Земли;

x, y, z — геоцентрические прямоугольные координаты ИСЗ в инерциальной системе. Запишем потенциал U следующим образом:

$$U = \frac{fmM_{\oplus}}{r} + \delta U, \quad (32.1)$$

где f — гравитационная постоянная; $M_{\oplus}$ — масса Земли; r — геоцентрический радиус-вектор спутника с массой m ; первый член — потенциал материальной точки (или однородного шара) с массой $M_{\oplus}$ на точку m ; второй член δU примем за возмущающий потенциал. Обозначим:

$$\delta U = mR. \quad (32.2)$$

Так как

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (32.3)$$

то, подставляя (32.1) в уравнения (30.15) с учетом обозначения (32.2) и формулы (32.3), получим уравнения возмущенного движения в следующей форме:

$$\ddot{x} + \mu \frac{x}{r^3} = \frac{\partial R}{\partial x}; \quad \ddot{y} + \mu \frac{y}{r^3} = \frac{\partial R}{\partial y}; \quad \ddot{z} + \mu \frac{z}{r^3} = \frac{\partial R}{\partial z}, \quad (32.4)$$

где $\mu = fM_{\oplus}$ — геоцентрическая гравитационная постоянная.

Дифференциальные уравнения (32.4) описывают возмущенное движение ИСЗ под действием потенциальных сил. Величина R , входящая в правые части уравнений, называется возмущающей или пертурбационной функцией. Таким образом, величины возмущающих ускорений w_x, w_y, w_z — уравнения (29.1) — при движении под действием лишь потенциального поля (в частности гравитационного) равны частным производным от возмущающей функции по координатам.

Если к потенциальным силам добавляется действие непотенциальных сил, то исходят из уравнений вида (30.17). Тогда уравнения возмущенного движения записывают так:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \mu \frac{x}{r^3} &= \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{1}{m} F_x; & \ddot{y} + \mu \frac{y}{r^3} &= \frac{\partial R}{\partial y} + \frac{1}{m} F_y; \\ \ddot{z} + \mu \frac{z}{r^3} &= \frac{\partial R}{\partial z} + \frac{1}{m} F_z, \end{aligned} \quad (32.5)$$

где $\frac{1}{m} F_x, \frac{1}{m} F_y, \frac{1}{m} F_z$ — проекции возмущающих ускорений на координатные оси x, y, z , вызванных суммой всех непотенциальных сил F .

Уравнения возмущенного движения в координатной форме обычно удобно использовать, когда их решение ищется методами численного интегрирования. В этом случае часто составляют уравнения, определяющие возмущения координат. Основа

методики составления таких уравнений заключается в следующем. Обозначим невозмущенные значения координат через x_n , y_n , z_n ; невозмущенный радиус-вектор — через r_n . Правые части уравнений (32.5) обозначим, как в уравнениях (29.1):

$$w_x = w_x(x, y, z, t); \quad w_y = w_y(x, y, z, t); \quad w_z = w_z(x, y, z, t). \quad (32.6)$$

Под возмущениями координат понимаются разности:

$$\delta x = x - x_n; \quad \delta y = y - y_n; \quad \delta z = z - z_n. \quad (32.7)$$

Тогда разности возмущенных и невозмущенных ускорений равны

$$\frac{d^2(\delta x)}{dt^2} = \ddot{x} - \ddot{x}_n; \quad \frac{d^2(\delta y)}{dt^2} = \ddot{y} - \ddot{y}_n; \quad \frac{d^2(\delta z)}{dt^2} = \ddot{z} - \ddot{z}_n. \quad (32.8)$$

Подставляя в (32.8) правые части уравнений возмущенного и невозмущенного движений, получим

$$\begin{aligned} \frac{d^2(\delta x)}{dt^2} &= - \left[\frac{x_n + \delta x}{(r_n + \delta r)^3} - \frac{x_n}{r_n^3} \right] + w_x(x_n + \delta x, y_n + \delta y, z_n + \\ &+ \delta z, t); \\ \frac{d^2(\delta y)}{dt^2} &= - \left[\frac{y_n + \delta y}{(r_n + \delta r)^3} - \frac{y_n}{r_n^3} \right] + w_y(x_n + \delta x, y_n + \\ &+ \delta y, z_n + \delta z, t); \\ \frac{d^2(\delta z)}{dt^2} &= - \left[\frac{z_n + \delta z}{(r_n + \delta r)^3} - \frac{z_n}{r_n^3} \right] + w_z(x_n + \delta x, y_n + \\ &+ \delta y, z_n + \delta z, t). \end{aligned} \quad (32.9)$$

Здесь под δr понимаются возмущения радиуса-вектора, определяемые как

$$\begin{aligned} \delta r &= \sqrt{(x_n + \delta x)^2 + (y_n + \delta y)^2 + (z_n + \delta z)^2} - \\ &- \sqrt{x_n^2 + y_n^2 + z_n^2}. \end{aligned} \quad (32.10)$$

Затем уравнения (32.9) вместе с выражением (32.10) могут преобразовываться различными способами, в основе которых лежат разложения правых частей (32.9) по степеням малых возмущений δx , δy , δz .

В ряде случаев бывает удобно интегрировать уравнения движения не в прямоугольных, а в каких-нибудь других координатах: сферических, цилиндрических и др. Общее правило преобразования уравнений (32.5) к новым координатам q_1 , q_2 , q_3 заключается в следующем. Пусть

$$q_j = q_j(x, y, z, t), \quad j = 1, 2, 3 \quad (32.11)$$

$$\text{и } x_j = x_j(q_1, q_2, q_3, t); \quad j = 1, 2, 3; \quad x_2 \equiv y, \quad x_3 \equiv z \quad (32.12)$$

— взаимно однозначные прямые и обратные преобразования старых и новых координат. Эти преобразования должны быть также непрерывно дифференцируемы. Время t в эти преобразования может явно и не входить.

Последовательное дифференцирование указанных преобразований по времени t дает выражения

$$\dot{q}_j = \frac{\partial q_j}{\partial t} + \frac{\partial q_j}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial q_j}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial q_j}{\partial z} \dot{z}, \quad (32.13)$$

$$\dot{x}_j = \frac{\partial x_j}{\partial t} + \frac{\partial x_j}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial x_j}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial x_j}{\partial q_3} \dot{q}_3;$$

$$\begin{aligned} \ddot{q}_j = & \frac{\partial^2 q_j}{\partial t^2} + \ddot{x} \frac{\partial q_j}{\partial x} + \ddot{y} \frac{\partial q_j}{\partial y} + \ddot{z} \frac{\partial q_j}{\partial z} + \\ & + \dot{x}^2 \frac{\partial^2 q_j}{\partial x^2} + \dot{y}^2 \frac{\partial^2 q_j}{\partial y^2} + \dot{z}^2 \frac{\partial^2 q_j}{\partial z^2} + \\ & + 2 \left(\frac{\partial^2 q_j}{\partial x \partial y} \dot{x} \dot{y} + \frac{\partial^2 q_j}{\partial x \partial z} \dot{x} \dot{z} + \frac{\partial^2 q_j}{\partial y \partial z} \dot{y} \dot{z} \right). \end{aligned} \quad (32.14)$$

В формулу (32.14) вместо $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$ подставляем правые части уравнений (32.5). Затем вместо x , y , z в ту же формулу подставляем их значения в соответствии со второй формулой (32.13). Производные $\frac{\partial R}{\partial x_j}$ заменяем на производные по новым переменным:

$$\frac{\partial R}{\partial x_j} = \frac{\partial R}{\partial q_1} \frac{\partial q_1}{\partial x_j} + \frac{\partial R}{\partial q_2} \frac{\partial q_2}{\partial x_j} + \frac{\partial R}{\partial q_3} \frac{\partial q_3}{\partial x_j}. \quad (32.15)$$

Выражения для производных вида $\frac{\partial q}{\partial x}$, ..., $\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}$, ..., $\frac{\partial x}{\partial q}$, ... находим, дифференцируя формулы (32.11) и (32.12). Наконец, все координаты x , y , z , входящие в (32.14), после перечисленных преобразований заменяем их выражениями по формулам (32.12). В результате получим уравнения возмущенного движения в новых координатах:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_j = & f_j \left(q_1, q_2, q_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \frac{\partial R}{\partial q_1}, \frac{\partial R}{\partial q_2}, \frac{\partial R}{\partial q_3}, \right. \\ & \left. \frac{1}{n} F_x, \frac{1}{n} F_y, \frac{1}{n} F_z \right); \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (32.16)$$

В зависимости от конкретного вида формул (32.11) и (32.12) в целях упрощения последовательность указанных преобразований может быть различной. В качестве упражнения читателю полезно самостоятельно получить уравнения возмущенного дви-

жения ИСЗ в сферических координатах: r — геоцентрический радиус-вектор, α — геоцентрическое прямое восхождение, δ — геоцентрическое склонение. Формулы связи (32.11) в данном случае имеют вид

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}; \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad (32.17)$$

$$x = r \cos \delta \cos \alpha; \quad y = r \cos \delta \sin \alpha; \quad z = r \sin \delta. \quad (32.18)$$

В гл. 14 показано, что все перечисленные в § 29 возмущающие факторы, за исключением атмосферного торможения, являются потенциальными. Поэтому под общей возмущающей функцией R , входящей в уравнения возмущенного движения, следует понимать следующую сумму:

$$R = R_{\oplus} + R_{\zeta} + R_{\odot} + R_{\text{пр}} + R_{\text{с}} + R_{\text{пс}} + R_{\text{пр, нут}}, \quad (32.19)$$

где нижние индексы дают указания на возмущения от $\oplus$ — геопотенциала, ζ — Луны, $\odot$ — Солнца, с — светового давления, пр — приливного действия, пс — переизлучения, пр, нут — прецессии и нутации.

§ 33. УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА ДЛЯ ОСКУЛИРУЮЩИХ ЭЛЕМЕНТОВ ОРБИТЫ

Сначала введем понятие оскулирующей орбиты. Впервые это понятие применил Лагранж. Предположим, что в процессе движения материальной точки по возмущенной орбите в какой-то момент времени t_1 возмущения перестали действовать. Тогда после этого момента материальная точка будет двигаться по некоторой кеплеровой орбите с элементами $\mathcal{E}_1$ (рис. 47). В момент t_1 эта кеплерова орбита будет иметь общую точку с возмущенной орбитой. Таких точек на возмущенной орбите можно выбрать сколь угодно много и как угодно близко друг к другу, всякий раз полагая, что возмущения исчезают. Тогда получится бесчисленное множество кеплеровых орбит с разными элементами, каждая из которых имеет общую точку с возмущенной орбитой.

Таким образом, возмущенную орбиту можно представить кеплеровой орбитой с переменными элементами, во всякий момент времени имеющей с возмущенной орбитой одну общую точку. Такая кеплерова орбита называется оскулирующей, общая точка двух орбит — точкой оскуляции, соответствующий этой точке момент — эпохой оскуляции.

Так как возмущенная орбита — непрерывная кривая, то существуют непрерывные производные

$$\lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1}{t_2 - t_1} = \frac{d\mathcal{E}}{dt} \quad (33.1)$$

от элементов орбиты по времени. Отсюда следует существова-

ние дифференциальных уравнений вида (29.4), определяющих возмущения элементов орбиты. Если на любой заданный момент времени из интегрирования уравнений типа (29.4) известны элементы оскулирующей орбиты, то положение материальной точки для данного момента может быть вычислено по формулам кеплерова движения. Подчеркнем, что в отличие от теории невозмущенного движения в упомянутые формулы всякий раз нужно подставлять новые возмущенные значения элементов (оскулирующие элементы), соответствующие текущему моменту времени.

Обозначим через $\mathbf{r}$ вектор с компонентами x, y, z и запишем уравнения возмущенного движения (32.3) так:

$$\ddot{\mathbf{r}} + \mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} = -\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{r}}. \quad (33.2)$$

В каждый момент времени положение точки на оскулирующем эллипсе определяется формулами кеплерова движения:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t, \mathfrak{A}); \quad \mathbf{r}' = \mathbf{r}'(t, \mathfrak{A}), \quad (33.3)$$

Рис. 47. Возмущенная и оскулирующая орбиты

где вектор элементов орбиты $\mathfrak{A}$ (компоненты $\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_6$) также является функцией времени t . Понижим порядок уравнений (33.2):

$$\mathbf{r}' = \dot{\mathbf{r}}; \quad \mathbf{r}' + \mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} = -\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{r}}. \quad (33.4)$$

Дифференцируя (33.3) по t , получим

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathfrak{A}} \frac{d\mathfrak{A}}{dt}; \quad \dot{\mathbf{r}}' = \frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial \mathfrak{A}} \frac{d\mathfrak{A}}{dt}. \quad (33.5)$$

Подставив теперь (33.5) в (33.4) и учитывая, что в любой фиксированный момент времени верны уравнения

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} - \mathbf{r}' = 0; \quad \frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial t} + \mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0, \quad (33.6)$$

найдем

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathfrak{A}} \cdot \frac{d\mathfrak{A}}{dt} = 0; \quad \frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial \mathfrak{A}} \cdot \frac{d\mathfrak{A}}{dt} = -\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{r}}. \quad (33.7)$$

Каждое из уравнений (33.7) имеет три составляющие — по x , по y и по z . В скалярной форме эти уравнения, например по x , записываются так:

$$\sum_{j=1}^6 \frac{\partial x}{\partial \vartheta_j} \frac{d\vartheta_j}{dt} = 0; \quad \sum_{j=1}^6 \frac{\partial x'}{\partial \vartheta_j} \frac{d\vartheta_j}{dt} = \frac{\partial R}{\partial x}. \quad (33.8)$$

Чтобы получить остальные уравнения, здесь x надо заменить соответственно на y и на z .

Таким образом, уравнения (33.7) можно рассматривать как систему шести линейных алгебраических уравнений с шестью неизвестными $\frac{d\vartheta_j}{dt}$, $j = 1, 2, \dots, 6$. Коэффициенты этой системы $\frac{\partial r}{\partial \vartheta}$ и $\frac{\partial r'}{\partial \vartheta}$ вычисляются путем дифференцирования по элементам орбиты формул невозмущенного движения. Производные от возмущающей функции нужно также выразить через производные по элементам орбиты:

$$\frac{\partial R}{\partial r} = \frac{\partial R}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \vartheta}. \quad (33.9)$$

После вычисления коэффициентов $\frac{\partial r}{\partial \vartheta}$ и $\frac{\partial r'}{\partial \vartheta}$ и решения уравнений (33.7) относительно производных $\frac{d\vartheta_j}{dt}$ искомые дифференциальные уравнения для оскулирующих элементов орбиты можно записать в следующей компактной форме:

$$\begin{pmatrix} \dot{a} \\ \dot{e} \\ \dot{i} \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} R'_M \\ R'_\Omega \\ R'_\omega \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \dot{M}_0 \\ \dot{\Omega} \\ \dot{\omega} \end{pmatrix} = -L^T \begin{pmatrix} R'_a \\ R'_e \\ R'_i \end{pmatrix}, \quad (33.10)$$

где матрица L имеет вид

$$L = \begin{pmatrix} 2 \sqrt{\frac{a}{\mu}} & 0 & 0 \\ \frac{1-e^2}{e \sqrt{\mu a}} & 0 & -\frac{\sqrt{1-e^2}}{e \sqrt{\mu a}} \\ 0 & -\frac{\operatorname{cosec} i}{\sqrt{\mu a} \sqrt{1-e^2}} & \frac{\operatorname{ctg} i}{\sqrt{\mu a} \sqrt{1-e^2}} \end{pmatrix}. \quad (33.11)$$

Индекс «т» означает транспонирование. Кроме того,

$$R'_{\varepsilon} \equiv \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}; \quad (33.12)$$

$$\dot{M} = n + \dot{M}_0, \quad (33.13)$$

где n — среднее движение.

Уравнения (33.10) — уравнения Лагранжа для оскулирующих элементов орбиты. Эти уравнения пригодны для описания возмущенного движения только в потенциальных полях. Матрицу (33.11) называют матрицей Лагранжа.

Из формулы (33.13) следует, что после того, как из интегрирования уравнений Лагранжа найдены возмущенные значения элементов орбиты, текущее возмущенное значение средней аномалии следует вычислять по формуле

$$M = M_0 + \int_{t_0}^t n dt. \quad (33.14)$$

Для описания возмущенного эллиптического движения вместо элементов ω и M_0 часто применяют элементы π и ε , определяемые формулами

$$\pi = \omega + \Omega; \quad \varepsilon = \pi + M_0. \quad (33.15)$$

Переход к соответствующим уравнениям Лагранжа осуществляется путем однократного дифференцирования по t формул (33.15) в соответствии с правилами, описанными в § 32. Аналогичным образом могут быть получены уравнения для фокального параметра $p = a(1 - e^2)$, среднего движения n и любых других комбинаций исходных кеплеровых элементов.

§ 34. УРАВНЕНИЯ НЬЮТОНА ДЛЯ ОСКУЛИРУЮЩИХ ЭЛЕМЕНТОВ ОРБИТЫ

Уравнения Ньютона в отличие от уравнений Лагранжа пригодны для описания возмущенного движения, происходящего под действием возмущающих сил любой природы. Поэтому они являются более общими, нежели уравнения Лагранжа. Раньше уравнения Ньютона часто называли уравнениями Эйлера, уравнениями Гаусса; позднее выяснилось [6], что приоритет здесь принадлежит именно Ньютону — эти уравнения в неявном виде содержатся в его фундаментальном труде «Математические начала натуральной философии».

Правые части уравнений Ньютона зависят от составляющих возмущающего ускорения. Эти составляющие обычно располагают по следующим направлениям (рис. 48): вдоль радиуса-

вектора орбиты, вдоль трансверсали, т. е. по перпендикуляру к радиусу-вектору в плоскости оскулирующей орбиты в направлении движения, и вдоль бинормали — перпендикулярно к двум предыдущим направлениям. Обозначения и названия перечисленных составляющих: S — радиальная составляющая, T — трансверсальная составляющая, W — бинормальная составляющая.

Связь этих составляющих с составляющими w_x , w_y , w_z вдоль направлений, параллельных геоцентрическим осям x , y , z , заключается в преобразовании поворота:

$$\begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S \\ T \\ W \end{pmatrix}. \quad (34.1)$$

Здесь α , β , γ — направляющие косинусы радиуса-вектора относительно геоцентрических осей x , y , z ; α' , β' , γ' и α'' , β'' , γ'' — направляющие косинусы трансверсали и соответственно бинормали относительно тех же осей. Все эти величины определяются формулами теории невозмущенного движения:

$$\alpha = \frac{x}{r} = \cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i;$$

$$\beta = \frac{y}{r} = \cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i; \quad (34.2)$$

$$\gamma = \frac{z}{r} = \sin u \sin i.$$

$$\alpha' = \frac{\partial \alpha}{\partial u}; \quad \beta' = \frac{\partial \beta}{\partial u}; \quad \gamma' = \frac{\partial \gamma}{\partial u}; \quad (34.3)$$

$$\alpha'' = \frac{1}{\sin i} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial i}; \quad \beta'' = \frac{1}{\sin i} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial i};$$

$$\gamma'' = \frac{1}{\sin i} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial i}. \quad (34.4)$$

Методика получения уравнений Ньютона аналогична описанной в предыдущем параграфе. В уравнениях (33.2), (33.3) (33.7) частные производные $\frac{\partial R}{\partial x}$, $\frac{\partial R}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial z}$ нужно заменить

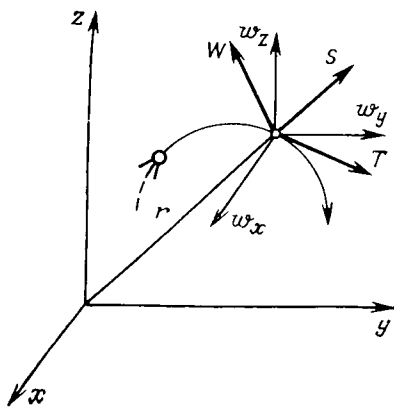


Рис. 48. Взаимное расположение составляющих возмущающего ускорения

на составляющие возмущающего ускорения, соответственно, w_x , w_y , w_z , которые затем выразить через составляющие S , T , W по формулам (34.1). Решение видоизмененной указанным образом линейной алгебраической системы (33.7) относительно производных $\frac{d\Theta_j}{dt}$ дает следующие дифференциальные уравнения:

$$\begin{pmatrix} \dot{a} \\ \dot{e} \\ \dot{i} \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \mathbf{N}_1 \begin{pmatrix} S \\ T \\ W \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} \dot{M}_0 \\ \dot{\Omega} \\ \dot{\omega} \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \mathbf{N}_2 \begin{pmatrix} S \\ T \\ W \end{pmatrix}, \quad (34.5)$$

где

$$\mathbf{N}_1 = \begin{pmatrix} \frac{2ea^2 \sin v}{p} & \frac{2a^2}{r} & 0 \\ \sin v & \left[\cos v + (\cos v + e) \frac{r}{p} \right] & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r}{p} \cos(v + \omega) \end{pmatrix}, \quad (34.6)$$

$$\mathbf{N}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \left(\cos v + 2e \frac{r}{p} \right) - \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin v & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r}{p} \frac{\sin(v + \omega)}{\sin i} \\ -\frac{\cos v}{e} & \frac{\sin v}{e} \left(1 + \frac{r}{p} \right) & -\frac{r}{p} \sin(v + \omega) \operatorname{ctg} i \end{pmatrix}. \quad (34.7)$$

Уравнения (34.5) — уравнения Ньютона для оскулирующих элементов орбиты. Так же, как и в уравнениях Лагранжа, элементы ω и M_0 при описании возмущенного эллиптического движения часто заменяют на элементы π и ϵ по формулам (33.15).

§ 35. ОСОБЕННОСТИ УРАВНЕНИЙ ЛАГРАНЖА И НЬЮТОНА

Сначала укажем принятую в теории возмущенного движения терминологию: элементы a , e , i называются позиционными, элементы M_0 (или M), Ω , ω (а также π , ϵ) — угловыми.

В уравнениях как Лагранжа, так и Ньютона содержатся делители e и $\sin i$, приводящие к появлению особенностей при $e \rightarrow 0$ и $i \rightarrow 0^\circ$. Правые части уравнений в этих случаях могут стать существенно большими, что приведет к заметным неудобствам при вычислениях.

Делитель e содержится в уравнениях $\dot{e}$, $\dot{\omega}$, $\dot{M}_0$ (уравнения Лагранжа), $\dot{\omega}$, $\dot{M}_0$ (уравнения Ньютона); делитель $\sin i$ — в уравнениях Лагранжа $\dot{\Omega}$, $\dot{i}$, в уравнении Ньютона $\dot{\Omega}$. Для исключения делителей из перечисленных уравнений нужно перейти к уравнениям для новых элементов орбиты. Эта процедура аналогична описанной в § 32.

Для исключения делителя e сначала необходимо заменить элемент M_0 на элемент ε ; соответствующее уравнение находится по правилу

$$\dot{\varepsilon} = \dot{M}_0 + \dot{\omega} + \dot{\Omega}. \quad (35.1)$$

Затем сопряженные позиционный и угловой элементы e и ω или e и π заменяют на величины, линейно связанные с компонентами вектора Лапласа (рис. 49), по формулам

$$k = e \sin \omega; \quad q = e \cos \omega, \quad (35.2)$$

или

$$k' = e \sin \pi; \quad q' = e \cos \pi. \quad (35.3)$$

Дифференцирование этих соотношений по t дает уравнения

$$\begin{aligned} \dot{k} &= \frac{k}{\sqrt{k^2 + q^2}} \dot{e} + q \dot{\omega}; \\ \dot{q} &= \frac{q}{\sqrt{k^2 + q^2}} \dot{e} - k \dot{\omega}, \end{aligned} \quad (35.4)$$

или

$$\begin{aligned} \dot{k}' &= \frac{k'}{\sqrt{k'^2 + q'^2}} \dot{e} + q' \dot{\pi}; \\ \dot{q}' &= \frac{q'}{\sqrt{k'^2 + q'^2}} \dot{e} - k' \dot{\pi}. \end{aligned} \quad (35.5)$$

Вместо $\dot{e}$, $\dot{\omega}$ или $\dot{\pi}$ в правые части (35.4) или (35.5) подставляются правые части соответствующих уравнений Лагранжа или Ньютона, причем «старые» элементы выражаются через «новые» по формулам (35.2), (35.3). Производные $\frac{\partial R}{\partial e}$ и $\frac{\partial R}{\partial \omega}$, или $\frac{\partial R}{\partial \pi}$ выражаются следующим образом:

В курсах теории дифференциальных уравнений доказывается, что решение такой системы в некоторой окрестности начальных условий существует, если правые части системы в этой окрестности являются ограниченными функциями. Кроме того, решение оказывается единственным, если в той же окрестности частные производные от правых частей по искомым переменным — также ограниченные функции.

Во всех случаях достаточно рассматривать дифференциальные уравнения первого порядка, так как путем замены переменных всегда может быть выполнена операция понижения порядка.

Через x_j , $j = 1, 2, \dots, n$ обозначим любую из искоемых переменных, будь то координаты, составляющие скорости или элементы орбиты.

Будем рассматривать решение задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, записанной в скалярной форме так:

$$\dot{x}_j = \sigma f_j(x_1, x_2, \dots, x_n, t); \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (36.1)$$

$t_0, x_{1_0}, \dots, x_{n_0}$ — начальные условия; требуется найти x_j для $t \neq t_0$. Здесь через σ обозначен некоторый малый параметр, так как уравнения возмущенного движения обычно содержат один или несколько таких параметров. Если t в правые части (36.1) явно не входит, то такая система называется динамическо́й.

Опишем некоторые основные аналитические алгоритмы приближенного интегрирования, применяемые в небесной механике.

Метод последовательных приближений (метод Пикара). Запишем формальное решение (36.1) так:

$$x_j = x_{j_0} + \sigma \int_{t_0}^t f_j(x_1, \dots, x_n, t) dt. \quad (36.2)$$

Первое приближение находится по формуле

$$x_j^{(1)} = x_{j_0} + \sigma \int_{t_0}^t f_j(x_{1_0}, \dots, x_{n_0}, t) dt; \quad (36.3)$$

второе приближение

$$x_j^{(2)} = x_{j_0} + \sigma \int_{t_0}^t f_j(x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}, t) dt; \quad (36.4)$$

k -е приближение

$$x_j^{(k)} = x_{j_0} + \sigma \int_{t_0}^t f_j(x_1^{(k-1)}, \dots, x_n^{(k-1)}, t) dt. \quad (36.5)$$

В каждом приближении подынтегральные функции — известные функции времени, так что интегралы, по крайней мере формально, могут быть вычислены.

Метод Пикара является наиболее общим. В курсах теории дифференциальных уравнений доказывается, что описанный процесс при условиях существования и единственности решения равномерно сходится к точному решению системы (36.1). Однако в небесной механике этот метод удобен лишь для нахождения первого приближения.

Метод малого параметра. Этот метод, разработанный А. Пуанкаре и А. М. Ляпуновым, облегчает нахождение второго и в ряде случаев последующих приближений. Решение системы (36.1) здесь ищется в виде ряда

$$x_j = x_{j0} + \sigma \delta x_{j1} + \sigma^2 \delta x_{j2} + \dots + \sigma^k \delta x_{jk} + \dots, \quad (36.6)$$

который сходится для достаточно малых значений параметра σ , если правые части системы (36.1) удовлетворяют условиям существования и единственности решения и, кроме того, могут быть разложены в ряд по степеням σ , сходящийся внутри области существования решения.

Функции в (36.6) δx_{j1} , δx_{j2} , $\dots$, δx_{jk} называются возмущениями первого порядка, второго порядка и т. д. Способ определения этих функций заключается в следующем. Дифференцируем (36.6) k раз (последовательно, полагая сначала $k=1$, затем $k=2$ и т. д.) и приравниваем после этого все σ нулю. Подставляем результат в интегральное уравнение (36.2). Член, пропорциональный σ^k , и даст формулу для определения δx_{jk} . Нетрудно заметить, что возмущения первого порядка с точностью до множителя σ совпадают с первым приближением по Пикару:

$$\delta x_{j1} = \int_{t_0}^t f_j(x_{10}, \dots, x_{n0}, t) dt. \quad (36.7)$$

Возмущения же второго порядка отличаются от второго приближения по Пикару. Они определяются формулой

$$\delta x_{j2} = \int_{t_0}^t \sum_{s=1}^n \delta x_{s1} \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_s} \right)_{t=t_0, (\sigma=0)} dt. \quad (36.8)$$

Эту же формулу можно получить и так. Возьмем первое приближение в виде

$$x_j^{(1)} = x_{j0} + \sigma \delta x_{j1}; \quad (36.9)$$

подставим его в формулу второго приближения (36.4) и разложим подынтегральное выражение в ряд по степеням величины $\sigma \delta x_{j1}$. Коэффициент при σ^2 даст формулу (36.8). Аналогично могут быть получены формулы для возмущений третьего, четвертого и последующих порядков. При этом исходное приближение типа (36.9) должно включать соответственно возму-

жения второго порядка, третьего и так далее; разложения же соответственно следует вести по степеням величин $\sigma\delta x_{j_1} + \sigma^2\delta x_{j_2}$; $\sigma\delta x_{j_1} + \sigma^2\delta x_{j_2} + \sigma^3\delta x_{j_3}$ и т. д.

Мы видели, что на спутник действует не менее семи возмущающих факторов. Поэтому уравнения возмущенного движения ИСЗ должны иметь форму

$$\dot{x}_j = \sum_{m=1}^N \sigma_m f_{j_m}(x_1, \dots, x_n, t); \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (n=6), \quad (36.10)$$

где $N > 7$, так как только одно разложение геопотенциала содержит столько возмущающих параметров, сколько членов в этом разложении удерживается.

Рассмотрим методику решения уравнений (36.10) на примере уравнений с двумя малыми возмущающими параметрами:

$$\dot{x}_j = \sigma_1 f_{j_1}(x_1, \dots, x_n, t) + \sigma_2 f_{j_2}(x_1, \dots, x_n, t). \quad (36.11)$$

Решение (36.11) следует искать в виде

$$\begin{aligned} x_j = & x_{j_0} + \sigma_1 \delta x_{j_1}^{(10)} + \sigma_2 \delta x_{j_2}^{(01)} + \sigma_1^2 \delta x_{j_2}^{(20)} + \\ & + \sigma_2^2 \delta x_{j_2}^{(02)} + \sigma_1 \sigma_2 \delta x_j^{(11)} + \sigma_1^3 \delta x_{j_1}^{(30)} + \\ & + \sigma_2^3 \delta x_2^{(03)} + \sigma_1^2 \sigma_2 \delta x_j^{(21)} + \sigma_1 \sigma_2^2 \delta x_j^{(12)} + \dots \end{aligned} \quad (36.12)$$

Возмущения, зависящие от произведений возмущающих параметров $\sigma_1 \sigma_2$, $\sigma_1^2 \sigma_2$, $\sigma_1 \sigma_2^2$... называются перекрестными членами второго порядка $\sigma_1 \sigma_2$, третьего порядка $\sigma_1^2 \sigma_2$, $\sigma_2 \sigma_1^2$ и т. д.

Способ получения формул для вычисления функций $\delta x_{j_m}^{(k,s)}$ в (36.12) здесь тот же, что и в случае решения уравнений с одним параметром. В частности, возмущения первого порядка определяются формулами, аналогичными (36.7):

$$\begin{aligned} \delta x_j^{(10)} &= \int_{t_0}^t f_{j_1}(x_{1_0}, \dots, x_{n_0}, t) dt; \\ \delta x_j^{(01)} &= \int_{t_0}^t f_{j_2}(x_{1_0}, \dots, x_{n_0}, t) dt; \end{aligned} \quad (36.13)$$

возмущения второго порядка

$$\begin{aligned} \delta x_j^{(20)} &= \int_{t_0}^t \sum_{s=1}^n \delta x_s^{(10)} \left(\frac{\partial f_{j_1}}{\partial x_s} \right)_{t=t_0} dt; \\ \delta x_j^{(02)} &= \int_{t_0}^t \sum_{s=1}^n \delta x_s^{(01)} \left(\frac{\partial f_{j_2}}{\partial x_s} \right)_{t=t_0} dt; \end{aligned} \quad (36.14)$$

перекрестные члены второго порядка

$$\delta x_j^{(11)} = \sum_{s=1}^n \int_{t_0}^t \left[\delta x_s^{(01)} \left(\frac{\partial f_{j1}}{\partial x_s} \right)_{t=t_0} + \delta x_s^{(10)} \left(\frac{\partial f_{j2}}{\partial x_s} \right)_{t=t_0} \right] dt. \quad (36.15)$$

Вследствие малости возмущающих факторов основную часть возмущений обычно описывают возмущения первого порядка. При вычислениях высокой точности нужно учитывать и возмущения второго порядка. В частности, возмущения, вызываемые в движении ИСЗ полярным сжатием Земли, всегда должны учитываться с точностью до второго порядка включительно. Иногда приходится учитывать и наиболее крупные члены третьего порядка. Следует заметить, что при увеличении порядка возмущений громоздкость выкладок и формул существенно увеличивается. В последнее десятилетие разрабатываются методы машинного вывода подобных формул.

О применении методов осреднения. Основная идея методов осреднения состоит в том, чтобы упростить процесс нахождения решения заданной системы дифференциальных уравнений, заменив мелкие периодические члены их некоторыми средними значениями, и, если это окажется возможным, разделить переменные, сведя интегрирование к вычислению отдельных интегралов, каждый из которых зависит от одной переменной, т. е. к квадратурам. Сделать это можно лишь приближенно. Подробная теория методов осреднения содержится в [5]. Мы опишем наиболее простой и вместе с тем наиболее часто употребляемый прием применения этих методов.

Если дана аналитическая функция $f(y_1, \dots, y_n)$ от n периодических переменных $y_1, \dots, y_n$ с периодами соответственно $T_1, \dots, T_n$, то выражение

$$F = \frac{1}{T_1 \dots T_n} \int_0^{T_1} \dots \int_0^{T_n} f(y_1, \dots, y_n) dy_1 \dots dy_n \quad (36.16)$$

определяет среднее значение F функции f . В этом случае говорят, что выполнено осреднение функции f по переменным $y_1, \dots, y_n$.

В астрономических задачах осреднение обычно производится по так называемым быстрым переменным, периоды которых не превышают периода обращения небесного тела. Остальные переменные называются медленными. Так, любая из аномалий M , E , v , аргумент широты u , прямоугольные координаты x , y , z , составляющие скорости $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ — быстрые переменные; элементы орбиты или их функции — медленные переменные.

Обозначим через x любую из медленных переменных, через y — любую из быстрых переменных и рассмотрим наиболее часто встречающийся пример.

Пусть дана система дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sum_k A_k(x) \sin(a_k y + \alpha_k); \\ \dot{y} &= B_0(x) + \sum_k B_k(x) \cos(b_k y + \beta_k),\end{aligned}\quad (36.17)$$

где $a_k, \alpha_k, b_k, \beta_k$ — любые вещественные числа. Правые части (36.17) могут зависеть либо не зависеть от малого параметра. Осредняя с помощью формулы (36.16) правые части уравнений (36.17) по переменным $a_k y$ и $b_k y$, полагая все периоды равными 2π , получим осредненную систему

$$\dot{\bar{x}} = 0; \quad \dot{\bar{y}} = B_0(\bar{x}). \quad (36.18)$$

Пусть t_0, x_0, y_0 — начальные условия. Переменные в (36.18) разделяются и точное решение осредненной системы имеет вид

$$\bar{x} \equiv x_0; \quad \bar{y} = y_0 + qt; \quad (q = B_0(x_0); \quad t = 0). \quad (36.19)$$

Подставим (36.19) в (36.17) и проинтегрируем результат в первом приближении:

$$\begin{aligned}x^{(1)} &= x_0 - \sum_k \frac{A_k(x_0)}{a_k q} \cos[a_k qt + (a_k y_0 + \alpha_k)] + C_x; \\ y^{(1)} &= y_0 + qt + \sum_k \frac{B_k(x_0)}{b_k q} \sin[b_k qt + (b_k y_0 + \beta_k)] + C_y,\end{aligned}\quad (36.20)$$

где C_x, C_y — постоянные интегрирования, определяемые по начальным условиям. Дальнейшее уточнение (36.20) может быть выполнено, например, методом приближений или методом малого параметра.

Описанный прием применяют при аналитическом интегрировании уравнений для оскулирующих элементов орбиты ИСЗ.

§ 37. ИНТЕГРИРОВАНИЕ КАНОНИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

Канонические уравнения движения могут быть приближенно проинтегрированы любым из описанных способов. Однако для таких уравнений существует и специальный способ интегрирования, называемый методом Гамильтона — Якоби. Этот метод основан на теореме о канонических преобразованиях, заключающейся в следующем.

Пусть дана каноническая система

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}; \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}; \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (37.1)$$

Для упрощения записи индексы k ниже опустим. Пусть также осуществлен переход к новым переменным Q, P по некоторым формулам:

$$\begin{aligned} q &\rightarrow Q = Q(t, q, \dots, p, \dots); \\ p &\rightarrow P = P(t, q, \dots, p, \dots); \end{aligned} \quad (37.2)$$

Система (37.1) в новых переменных будет иметь каноническую форму:

$$\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P}; \quad \dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q}, \quad (37.3)$$

если связь (37.2) такова, что выражение

$$\Sigma p dq - \Sigma P dQ = d'W \quad (37.4)$$

есть полный дифференциал по q и Q (но не по времени) от некоторой функции W , причем новый гамильтониан K равен

$$K = H + \frac{\partial W}{\partial t}. \quad (37.5)$$

Пусть решение системы (37.1) есть

$$\begin{aligned} q &= q(t, \gamma_1, \dots), \\ p &= p(t, \gamma_1, \dots), \end{aligned} \quad (37.6)$$

где $\gamma_1, \dots$ — постоянные интегрирования. Тогда система

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum p \frac{\partial q}{\partial \gamma} - \frac{\partial}{\partial \gamma} \sum p \frac{\partial q}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial \gamma} \quad (37.7)$$

эквивалентна системе (37.1). Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \sum p \frac{\partial q}{\partial \gamma} - \frac{\partial}{\partial \gamma} \sum p \frac{\partial q}{\partial t} &= \sum \frac{\partial p}{\partial t} \frac{\partial q}{\partial \gamma} - \\ &- \sum \frac{\partial p}{\partial \gamma} \frac{\partial q}{\partial t} = -\sum \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \gamma} - \sum \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \gamma} = -\frac{\partial H}{\partial \gamma}, \end{aligned} \quad (37.8)$$

что и требовалось установить. Это вспомогательное утверждение называется л е м м о й П у а н к а р е. Так как

$$W = W(t, Q, \dots, P, \dots) = W(t, \gamma, \dots) \quad (37.9)$$

и

$$dW = d'W + \frac{\partial W}{\partial t} dt, \quad (37.10)$$

то

$$\sum p \frac{\partial q}{\partial t} - \sum P \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{dW}{dt} - \frac{\partial W}{\partial t} \quad (37.11)$$

и

$$\sum p \frac{\partial q}{\partial \gamma} - \sum P \frac{\partial Q}{\partial \gamma} = -\frac{\partial W}{\partial \gamma}. \quad (37.12)$$

Дифференцируя (37.11) по γ , а (37.12) по t и выполняя почленное вычитание, на основании леммы Пуанкаре и выражения для K получим

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial}{\partial t} \sum P \frac{\partial Q}{\partial \gamma} - \frac{\partial}{\partial \gamma} \sum P \frac{\partial Q}{\partial t} = \\ & = -\frac{\partial H}{\partial \gamma} - \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right) = -\frac{\partial K}{\partial \gamma}, \end{aligned} \quad (37.13)$$

что и требовалось доказать.

Новые канонические переменные можно ввести и по формулам вида

$$Q = q + \frac{\partial S}{\partial p}; \quad P = p - \frac{\partial S}{\partial q}, \quad (37.14)$$

где

$$S = S(P, q) \quad (37.15)$$

— произвольная функция, называемая производящей функцией канонических преобразований. Это другой вариант указанной выше теоремы.

Пусть теперь требуется проинтегрировать систему (37.1). Предположим, что мы выполнили каноническое преобразование так, что новый гамильтониан обратился в нуль:

$$K = 0. \quad (37.16)$$

Тогда преобразованная система (37.3) сразу же проинтегрируется:

$$Q = \alpha; \quad P = -\beta, \quad (37.17)$$

где α, β — постоянные интегрирования. Из условия (37.16) следует уравнение для определения функции W :

$$K = H + \frac{\partial W}{\partial t} = 0. \quad (37.18)$$

Так как на основании (37.4) $p = \frac{\partial W}{\partial q}$, то уравнение для определения W принимает вид

$$\frac{\partial W}{\partial t} + H\left(t, q_1, q_2, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \frac{\partial W}{\partial q_2}, \dots\right) = 0. \quad (37.19)$$

Это нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка с частными производными называется уравнением Гамильтона — Якоби. Проинтегрировав это уравнение

каким-либо способом и найдя тем самым функцию W , общее решение системы (37.1) на основании (37.4) и (37.17) найдем по формулам (теорема Якоби):

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_k} = \beta_k; \quad \frac{\partial W}{\partial q_k} = p_k. \quad (37.20)$$

В этом и заключается метод Гамильтона — Якоби. Основная проблема реализации данного метода — интегрирование уравнения (37.19).

Если гамильтониан H явно от времени не зависит, то можно положить

$$W = -\alpha_1 t + W_1. \quad (37.21)$$

Тогда уравнение Гамильтона — Якоби примет вид

$$H\left(q_1, q_2, \dots, \frac{\partial W_1}{\partial q_1}, \frac{\partial W_1}{\partial q_2}, \dots\right) = \alpha_1. \quad (37.22)$$

Это закон сохранения энергии; $\alpha_1 = h$ — постоянная энергии. Общее решение канонической системы тогда запишется так:

$$\frac{\partial W_1}{\partial \alpha_1} = t + \beta_1; \quad \frac{\partial W_1}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \dots; \quad \frac{\partial W_1}{\partial q_k} = p_k, \dots \quad (37.23)$$

Здесь первый интеграл — кинематический, задающий закон движения по орбите; интегралы, зависящие от α и β , — геометрические, определяющие форму орбиты; формулы для импульсов позволяют определить составляющие скорости, это — динамические интегралы.

Уравнение Гамильтона — Якоби в подавляющем большинстве случаев ни в конечном виде, ни в квадратурах проинтегрировать нельзя. В астрономических задачах это можно сделать лишь при решении задач двух тел (в сферических координатах) и двух неподвижных центров (в сфероидальных координатах). Кроме того, уравнение Гамильтона — Якоби всегда интегрируется, если гамильтониан зависит только от импульсов. Это позволяет для реализации метода Гамильтона — Якоби применить метод вариации произвольных постоянных следующим образом.

Пусть гамильтониан H системы (37.1) поделен на две части F и R :

$$H = F - R. \quad (37.24)$$

Отбросив возмущающую функцию R , систему вида

$$\dot{q} = \frac{\partial F}{\partial p}; \quad \dot{p} = -\frac{\partial F}{\partial q}, \quad (37.25)$$

проинтегрируем методом Гамильтона — Якоби в конечном виде или в квадратурах и найдем ее общее решение:

$$q = q(t, \alpha, \beta); \quad p = p(t, \alpha, \beta), \quad (37.26)$$

где α и β — постоянные интегрирования. Для учета влияния отброшенной функции R примем эти постоянные за новые канонические переменные. Проверим их каноничность; имеем

$$\begin{aligned} pdq - \alpha d\beta &= pdq + \beta d\alpha - d(\alpha\beta) = \frac{\partial W}{\partial q} dq + \\ &+ \frac{\partial W}{\partial \alpha} d\alpha - d(\alpha\beta) = d(W - \alpha\beta). \end{aligned} \quad (37.27)$$

Таким образом, новые переменные α и β действительно являются каноническими; новый гамильтониан примет вид

$$K = F - R + \frac{\partial W}{\partial t} = -R, \quad (37.28)$$

так как по предположению решение (37.26) получено под условием

$$F + \frac{\partial W}{\partial t} = 0. \quad (37.29)$$

Канонические уравнения для α и β будут такими:

$$\dot{\alpha} = \frac{\partial R}{\partial \beta}; \quad \dot{\beta} = -\frac{\partial R}{\partial \alpha}. \quad (37.30)$$

Решив (37.30), подставляем значения α и β в (37.26) и получаем решение исходной системы (37.1). Конечно, нельзя рассчитывать, что уравнения (37.30) легко проинтегрируются. Здесь опять-таки придется гамильтониан R делить на две части аналогично только что описанному, затем нужно проделать указанные процедуры; при этом очередной новый гамильтониан нужно будет опять поделить на две части и так далее. В результате получится бесконечная последовательность канонических преобразований, которую следует обрывать лишь по достижении заданной точности.

§ 38. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ

Описанные в предыдущих параграфах методы приближенного аналитического интегрирования позволяют получить формулы, описывающие возмущенное движение. Методы численного интегрирования, в отличие от аналитических, позволяют получать значения возмущенных координат небесного тела или самих возмущений.

Сущность численного интегрирования любых обыкновенных дифференциальных уравнений заключается в следующем. Пусть дано дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (38.1)$$

с начальными условиями t_0, x_0 . Требуется найти числовые значения x в моменты $t_1, t_2, \dots, t_j \dots$. Разность

$$t_j - t_{j-1} = h_j; \quad j = 1, 2, 3 \dots \quad (38.2)$$

называется шагом интегрирования, который может быть как постоянным, так и переменным — задаваться заранее или выбираться машиной автоматически по отдельной программе в целях достижения наибольшей точности вычислений.

Предположим, что шаг h постоянен и задан заранее. Разложим на интервале $\{t_{j-1}, t_j\}$ правую часть (38.1) в ряд по степеням h и проинтегрируем. В результате получим

$$x_j = x_{j-1} + \sum_{k=1}^n a_k^{(j-1)} h^k, \quad (38.3)$$

где

$$a_k^{(j-1)} = \frac{1}{(k+1)!} \left(\frac{d^k f}{dt^k} \right)_{t=t_{j-1}}. \quad (38.4)$$

При этом порядок первого отброшенного члена в (38.3) должен быть согласован с заданной точностью вычислений так, чтобы модуль остаточного члена был меньше заданного малого положительного числа. Часто этого достигают выбором величины шага при фиксированном n . Далее вычисляют коэффициенты $a_k^{(0)}$ (при $j=1$) со значениями t_0, x_0 и находят x_1 для момента t_1 . Затем t_1, x_1 принимают за новые начальные условия, вычисляют с этими значениями $a_k^{(1)}$ (при $j=2$) и находят x_2 для момента t_2 и так далее. Чаше всего коэффициенты $a_k^{(j-1)}$ вычислять, пользуясь точным выражением (38.4), невыгодно из-за чрезмерной сложности аналитических формул для высших производных. Поэтому коэффициенты $a_k^{(j-1)}$ обычно вычисляют, пользуясь тем или иным приближенным способом. Таких способов довольно много. В настоящее время известно большое количество методов численного интегрирования, все они отличаются друг от друга либо способом приближенного вычисления коэффициентов, либо способом приближенного вычисления всего выражения (38.3).

Существующие методы численного интегрирования можно разделить на две основные группы: многошаговые и одношаговые. В многошаговых методах, чтобы начать процесс интегрирования, кроме t_0, x_0 нужно заранее знать еще несколько значений t_1, x_1, t_2, x_2 . В одношаговых методах достаточно знать одни начальные условия t_0, x_0 .

Так как методы численного интегрирования достаточно полно и подробно описаны в учебниках вычислительной математики и аналогичных руководствах, мы ограничимся лишь сведениями справочного характера, упомянув несколько наиболее употребительных методов.

Основные многошаговые методы. Эти методы являются так называемыми конечно-разностными. Пусть для некоторой функции $f(t)$ известны ее числовые значения для значений аргумента t_j , $j=0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Эти значения аргумента называются узлами таблицы значений функции. Пусть также шаг таблицы $h=t_{j+1}-t_j$ постоянен. Можно ввести следующие конечные разности. Первые разности:

$$\dots; \Delta^1 f_{-1/2} = f_0 - f_{-1}; \Delta^1 f_{1/2} = f_1 - f_0; \Delta^1 f_{3/2} = f_2 - f_1; \dots \quad (38.5)$$

Вторые разности:

$$\dots; \Delta^2 f_{-1} = \Delta^1 f_{-1/2} - \Delta^1 f_{-3/2}; \Delta^2 f_0 = \Delta^1 f_{1/2} - \Delta^1 f_{-1/2}; \Delta^2 f_1 = \Delta^1 f_{3/2} - \Delta^1 f_{1/2}; \dots \quad (38.6)$$

Аналогично строятся третьи, четвертые и остальные разности. Эти понятия позволяют вычислять приближенные значения функции для значений t , не совпадающих с узлами таблицы, по известным из курсов вычислительной математики интерполяционным или экстраполяционным формулам. Так как каждая из таких формул — степенной полином относительно h с коэффициентами, выражающимися через конечные разности, то дифференцирование выбранной формулы по h нужное число раз даст приближенные выражения для первой, второй и других производных функции f . Наиболее часто в астрономических задачах применяют следующие методы интегрирования.

Экстраполяционный метод Адамса—Башфорта для уравнения

$$\dot{x} = f(x, t). \quad (38.7)$$

Обозначение:

$$\varphi(x, t) = hf(x, t). \quad (38.8)$$

Формула интегрирования ($j=0, 1, 2, 3, \dots$):

$$x_{j+1} = x_j + \varphi_j + \frac{1}{2} \Delta^1 \varphi_{j-1/2} + \frac{5}{12} \Delta^2 \varphi_{j-1} + \frac{3}{8} \Delta^3 \varphi_{j-3/2} + \\ + \frac{251}{720} \Delta^4 \varphi_{j-2} + \frac{95}{288} \Delta^5 \varphi_{j-5/2} + \dots \quad (38.9)$$

Часто ограничиваются разностями четвертого порядка.

Метод Штермера (аналог предыдущего метода) для уравнения

$$\ddot{x} = f(x, t). \quad (38.10)$$

Обозначение:

$$\varphi(x, t) = h^2 f(x, t). \quad (38.11)$$

Формула интегрирования ($j=0, 1, 2, 3, \dots$):

$$\begin{aligned} x_{j+1} = & 2x_j - x_{j-1} + \varphi_j + \frac{1}{12} \Delta^2 \varphi_{j-1} + \frac{1}{12} \Delta^3 \varphi_{j-1/2} + \\ & + \frac{19}{240} \Delta^4 \varphi_{j-2} + \frac{863}{12096} \Delta^5 \varphi_{j-1/2} + \frac{275}{4032} \Delta^6 \varphi_{j-3} + \dots \end{aligned} \quad (38.12)$$

Здесь также часто ограничиваются разностями четвертого порядка. Чтобы начать процесс интегрирования, т. е. вычислить x_1 при использовании разностей n -го порядка, нужно знать $n+1$ значений x в соответствующие моменты t : $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$ для $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n, t_{n+1}$. Эти значения обычно находят путем интегрирования данного уравнения каким-либо другим методом, в частности, одним из одношаговых методов.

Основные одношаговые методы. Исходными здесь являются так называемые РК-методы (методы типа Рунге—Кутты). В этих методах коэффициенты $a_k^{(j-1)}$ выражаются через правые части (38.1) путем введения некоторых числовых коэффициентов. Условие определения коэффициентов: разложение решения (38.1) должно точно совпадать до заданного порядка производных с (38.3).

Приведем классические формулы РК-метода 4-го порядка для системы уравнений вида

$$\dot{x}_j = f_j(x_1, \dots, x_n, t); \quad j=1, \dots, n \quad (38.13)$$

с начальными условиями x_{j0}, t_0 . Обозначение:

$$\varphi_j = hf_j. \quad (38.14)$$

Решение на первом шаге имеет вид:

$$\begin{aligned} x_{j1} = & x_{j0} + \frac{1}{4} \left\{ \varphi_j(x_{10}, \dots, x_{n0}, t) + 3\varphi_j \left[x_{10} + \frac{2}{3} \varphi_1((x_{10} + \right. \right. \\ & + \frac{1}{3} \varphi_1(x_{10}, \dots, x_{n0}, t_0), \dots, x_{n0} + \\ & + \frac{1}{3} \varphi_n(x_{10}, \dots, x_{n0}, t_0), t_0 + \frac{1}{3} h_1)) \Big], \dots, x_{n0} + \\ & + \frac{2}{3} \varphi_n \left((x_{10} + \frac{1}{3} \varphi_1(x_{10}, \dots, x_{n0}, t_0), \dots, x_{n0} + \right. \\ & + \frac{1}{3} \varphi_n(x_{10}, \dots, x_{n0}, t_0), t_0 + \frac{1}{3} h_1)) \Big], t_0 + \frac{2}{3} h_1 \Big] \Big\}. \end{aligned} \quad (38.15)$$

Недостатком этого метода является громоздкость вычислений и недостаточная для астрономических целей точность формул 4-го порядка. Более точные формулы 6-го или 8-го порядка

применяются редко из-за еще большей громоздкости, хотя для ЭВМ последующих поколений это, возможно, будет и мало существенно.

В последние 10—15 лет появилось несколько модификаций классического РК-метода, из которых наиболее удачной является модификация, разработанная Эверхартом [13]. В этом методе коэффициенты a_k^{i-1} определяются и уточняются с использованием метода приближений в процессе самого интегрирования. Достаточно подробное изложение этого метода можно найти в [13, 16].

Процесс численного интегрирования любым методом сопровождается накоплением ошибок, имеющих две составляющие: ошибки округления и ошибки самого метода (влияние остаточного члена, приближенное вычисление коэффициентов). Ошибки округления практически исключаются путем вычисления на ЭВМ с двойной точностью. Иногда к ошибкам интегрирования необоснованно причисляют совокупность ошибок исходных данных, т. е. начальных условий. Но это совсем другое влияние, исключение или определение которого является сущностью задачи уточнения орбит или в более общей постановке — орбитального метода космической геодезии. Поэтому основное значение имеют ошибки самого метода интегрирования. Изучение их влияния — сложная задача, связанная с выполнением численных экспериментов. К настоящему времени установлено, что методические ошибки численного интегрирования уравнений первого порядка накапливаются пропорционально корню квадратному из числа шагов, для уравнений второго порядка — пропорционально числу шагов в степени три вторых.

Для контроля величины накопившейся ошибки чаще всего сравнивают результаты интегрирования при заданном шаге с результатами интегрирования с половинным шагом.

При численном интегрировании уравнений движения ИСЗ в зависимости от метода и заданной точности вычислений шаг интегрирования обычно колеблется в пределах примерно от 0,1 до 2—3^m.

Глава 13.

РАЗЛОЖЕНИЯ ГЕОЦЕНТРИЧЕСКИХ КООРДИНАТ ИСЗ И ИХ ФУНКЦИЙ В РЯДЫ

§ 39. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Назначение разложений геоцентрических координат спутника и функций этих координат в ряды заключается в необходимости представления с помощью таких рядов правых частей уравнений возмущенного движения ИСЗ также в виде некоторых рядов, степенных или тригонометрических, облегчающих выпол-

нение операций приближенного аналитического интегрирования данных уравнений.

Разложения обычно ведутся либо по степеням эксцентриситета орбиты, либо в виде тригонометрических рядов относительно средней аномалии.

Пусть q — любая из координат (или функция координат) эллиптического движения. Разложение q по степеням эксцентриситета выполняется в виде ряда Маклорена:

$$q = q_{e=0} + \sum_{k=1}^{\infty} e^k \frac{1}{k!} \left(\frac{dq}{de} \right)_{e=0}; \quad (39.1)$$

разложение q в тригонометрический ряд — в виде ряда Фурье:

$$q = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos kM + B_k \sin kM), \quad (39.2)$$

где

$$A_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} q \cos kM dM; \quad B_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} q \sin kM dM; \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (39.3)$$

Если q — функция четная, то все $B_{k>1} = 0$, если же q — функция нечетная, то все $A_{k>0} = 0$.

Например, пусть $q = E$ — эксцентрическая аномалия. Выполним ее разложение до e^2 включительно. За исходное выражение берем уравнение Кеплера:

$$E = M + e \sin E. \quad (39.4)$$

На основании (39.1) и (39.4) находим: $E_{e=0} = M$;

$$\begin{aligned} \left(\frac{dE}{de} \right)_{e=0} &= \left(\frac{\sin E}{1 - e \cos E} \right)_{e=0} = \sin M; \\ \left(\frac{d^2 E}{de^2} \right)_{e=0} &= \left\{ 2 \cos E \frac{dE}{de} - e \left[\sin E \left(\frac{dE}{de} \right)^2 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \cos E \frac{d^2 E}{de^2} \right] \right\}_{e=0} = \sin 2M, \end{aligned} \quad (39.5)$$

тогда

$$E = M + e \sin M + \frac{1}{2} e^2 \sin 2M + 0(e^3). \quad (39.6)$$

Аналогичным способом можно получить разложения следующих основных величин:

$$\frac{a}{r} = 1 + e \cos M + e^2 \cos 2M + 0(e^3);$$

$$\frac{r}{a} = 1 - \frac{1}{2} e^2 + e \cos M + \frac{1}{2} e^2 \cos 2M + 0(e^3); \quad (39.7)$$

$$v = M + 2e \sin M + \frac{5}{4} e^2 \sin 2M + 0(e^3).$$

Для получения первых двух разложений следует использовать формулу

$$r = a(1 - e \cos E); \quad (39.8)$$

для получения разложения истинной аномалии v — формулу

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2} \quad (39.9)$$

вместе с уравнением Кеплера. Разложение истинной аномалии называется уравнением центра.

Современная точность наблюдений такова, что в теории необходимо сохранять члены разложений порядка e^7 — e^8 и даже выше. Степенные разложения в данном случае оказываются не слишком удобными, так как коэффициенты при e^k — тригонометрические многочлены. Более удобными являются тригонометрические ряды, коэффициенты которых — функции эксцентриситета, вычисляемые по некоторым общим формулам.

§ 40. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ

Эти разложения находят на основе (39.2) и (39.3). Общие формулы для коэффициентов A_k , B_k выражают через бесселевы функции первого рода от эксцентриситета орбиты.

Напомним сначала основные соотношения для бесселевых функций первого рода. Обозначение: $J_n(x)$ — бесселева функция 1-го рода n -го порядка. Эти функции могут быть определены как коэффициенты разложения производящей функции $F(z)$ по степеням комплексной переменной z следующего вида:

$$F(z) = \exp \frac{x}{2}(z - z^{-1}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x) z^n. \quad (40.1)$$

После перемножения разложений двух экспоненциальных функций, входящих в (40.1), может быть получена общая формула для $J_n(x)$ в виде ряда

$$J_n(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{n!} \left[1 - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{1 \cdot (n+1)} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{1 \cdot 2 (n+1)(n+2)} - \dots \right], \quad (40.2)$$

сходящегося при $|x| < \infty$. Так как замена z на z^{-1} функцию $F(z)$ не меняет, то

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x). \quad (40.3)$$

Дифференцируя (40.1) по z и соответственно по x и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях z слева и справа, можно получить следующие рекуррентные формулы:

$$nJ_n(x) = \frac{x}{2} [J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)]; \quad (40.4)$$

$$\frac{dJ_n(x)}{dx} \equiv J'_n(x) = \frac{1}{2} [J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)]. \quad (40.5)$$

Таким образом, с помощью ряда (40.2) достаточно вычислить лишь функции $J_0(x)$ и $J_1(x)$; остальные функции вычисляются по рекуррентной формуле (40.4); производные же $J'_n(x)$ выражаются через сами функции $J_n(x)$.

Положив в (40.1)

$$z = \exp \sqrt{-1} \varphi, \quad (40.6)$$

умножая обе части (40.1) на $\exp[-\sqrt{-1} n\varphi]$ и интегрируя (40.1) по φ в пределах от 0 до 2π , получим интегральное представление бесселевых функций:

$$\pi J_n(x) = \int_0^\pi \cos(n\varphi - x \sin \varphi) d\varphi. \quad (40.7)$$

Получим теперь некоторые общие разложения. Найдем сначала разложение $\cos mE$. Так как эта функция четная, то

$$\cos mE = \frac{1}{2} A_{m0} + \sum_{k=1}^{\infty} A_{mk} \cos kM, \quad (40.8)$$

где

$$A_{mk} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos mE \cos kM dM. \quad (40.9)$$

Вычисляя этот интеграл по частям, находим

$$\begin{aligned} A_{mk} &= \frac{m}{k\pi} \int_0^\pi \cos[(k-m)E - ke \sin E] dE - \\ &- \frac{m}{k\pi} \int_0^\pi \cos[(k+m)E - ke \sin E] dE. \end{aligned} \quad (40.10)$$

Сравнивая (40.10) и (40.7), заключаем, что

$$A_{mk} = \frac{m}{k} [J_{k-m}(ke) - J_{k+m}(ke)], \quad (40.11)$$

причем

$$A_{m0} = \begin{cases} 0 & \text{при } m > 1 \\ -e & \text{при } m = 1. \end{cases} \quad (40.12)$$

Поступая таким же способом, можно получить разложение $\sin mE$ (нечетная функция):

$$\sin mE = m \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} [J_{k+m}(ke) + J_{k-m}(ke)] \sin kM, \quad (40.13)$$

причем при $m=1$ на основании (39.4) будем иметь

$$\sin E = \frac{2}{e} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} J_k(ke) \sin kM. \quad (40.14)$$

Указанных разложений достаточно, чтобы почти автоматически получить общие разложения остальных основных функций.

Примеры.

1. Для получения разложения E ряд (40.14) подставляют в уравнение Кеплера (39.4).

2. Для получения разложения r/a ряд (40.8) при $m=1$ подставляют в выражение (39.8). Чтобы найти разложение обратной величины a/r , достаточно продифференцировать разложение E по средней аномалии M , так как

$$\frac{dE}{dM} = \frac{1}{1 - e \cos E} = \frac{a}{r}. \quad (40.15)$$

3. Полученные разложения радиуса-вектора позволяют найти ряды для $\cos v$ и $\sin v$. Из интеграла орбиты

$$\cos v = \frac{1}{e} \left[(1 - e^2) \frac{a}{r} - 1 \right] \quad (40.16)$$

получают производную

$$\frac{d}{dM} \left(\frac{r}{a} \right) = e \sin E \frac{dE}{dM} = \frac{e \sin E}{1 - e \cos E} = \frac{e}{\sqrt{1 - e^2}} \sin v, \quad (40.17)$$

откуда

$$\sin v = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{e} \frac{d}{dM} \left(\frac{r}{a} \right). \quad (40.18)$$

Гораздо чаще используются разложения более общих функций, включающих в себя перечисленные. Коэффициентами таких разложений являются функции эксцентриситета, называемые коэффициентами Ганзена.

§ 41. РАЗЛОЖЕНИЯ ПО КОЭФФИЦИЕНТАМ ГАНЗЕНА

Функциями общего вида являются функции

$$\left(\frac{r}{a} \right)^n \cos mv \quad \text{и} \quad \left(\frac{r}{a} \right)^n \sin mv, \quad (41.1)$$

где n и m — любые целые числа, положительные и отрицатель-

ные, включая нуль. Первая функция четная, вторая — нечетная. Разложения этих функций записываются в виде

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n \cos mv = C_0^{nm}(e) + \sum_{k=1}^{\infty} C_k^{nm}(e) \cos kM; \quad (41.2)$$

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n \sin mv = \sum_{k=1}^{\infty} S_k^{nm}(e) \sin kM.$$

Чаще вместо двух разложений (41.2) рассматривают одно в комплексной форме:

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n \exp \sqrt{-1} mv = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k^{nm}(e) \exp \sqrt{-1} kM. \quad (41.3)$$

Сравнение (41.2) и (41.3) дает

$$\begin{aligned} C_k^{nm}(e) &= X_{+k}^{nm}(e) + X_{-k}^{nm}(e), \\ S_k^{nm}(e) &= X_{+k}^{nm}(e) - X_{-k}^{nm}(e). \end{aligned} \quad (41.4)$$

Кроме того, по определению имеем

$$X_{+k}^{n+m} = X_{-k}^{n-m}. \quad (41.5)$$

Коэффициенты разложений (41.2) и (41.3) называются коэффициентами Ганзена. Чаще применяют коэффициенты Ганзена $X_k^{n,m}(e)$. Вычисление коэффициентов Ганзена — одна из наиболее трудоемких операций в теории возмущений. Введем обозначения средней и эксцентрической аномалий в комплексной форме:

$$z = \exp \sqrt{-1} M; \quad y = \exp \sqrt{-1} E. \quad (41.6)$$

Формула для вычисления коэффициентов Ганзена наиболее просто выводится с помощью так называемого 1-го правила Коши. Это правило заключается в следующем. Пусть дана некоторая функция $f(M)$ средней аномалии и требуется найти коэффициенты P_k ее тригонометрического разложения в комплексной форме:

$$f(M) = \sum_{-\infty}^{+\infty} P_k z^k. \quad (41.7)$$

Тогда искомые коэффициенты P_k равны коэффициентам при y^k в разложении функции

$$F_k = f \left[1 - \frac{e}{2} (y + y^{-1}) \right] \exp \left[\frac{ke}{2} (y - y^{-1}) \right] \quad (41.8)$$

по степеням y . Это правило выводится так. Формулы (39.3) в комплексной форме объединяются в одну:

$$2\pi P_k = \int_0^{2\pi} f(M) z^{-k} dM. \quad (41.9)$$

Далее с помощью (41.6) записываем в комплексной форме уравнение Кеплера

$$z = \exp \left[-\frac{e}{2} (y - y^{-1}) \right] \quad (41.10)$$

и производную

$$\frac{dM}{dE} = 1 - \frac{e}{2} (y + y^{-1}). \quad (41.11)$$

Заменяя в (41.9) с помощью (41.10) и (41.11) независимую переменную с M на E , получаем

$$2\pi P_k = \int_0^{2\pi} F_k y^{-k} dE, \quad (41.12)$$

где F_k определяется формулой (41.8). Отсюда и следует указанное правило Коши. Суть его использования в том, чтобы избежать вычисления интегралов (39.3) или (41.9) и свести выкладки к чисто алгебраическим операциям.

Положим в (41.8)

$$f = \left(\frac{r}{a} \right)^n x^m; \quad (41.13)$$

где

$$x = \exp \sqrt{-1} v. \quad (41.14)$$

С учетом формул (40.16), (40.17), (41.10) и (41.11) подстановка (41.13) в (41.8) после преобразований даст

$$\begin{aligned} F_k &= (1 + \beta^2)^{-n-1} y^m (1 - \beta y)^{n-m+1} (1 - \beta y^{-1})^{n+m+1} \times \\ &\times \exp \left[\frac{ke}{2} (y - y^{-1}) \right], \end{aligned} \quad (41.15)$$

где

$$\beta = \frac{1}{1 + \sqrt{1 - e^2}}. \quad (41.16)$$

Таким образом, разложение функции F_k в данном случае сводится к перемножению двух биномиальных разложений и двух экспоненциальных. Выполнение этих действий после введения подобных членов и расположения всех членов по возрастающим степеням β позволяет получить общую формулу для коэффициентов Ганзена как коэффициент при y^k :

$$\begin{aligned} X_k^{n,m}(e) &= \beta^{(m-k)} (1 + \beta^2)^{-n-1} \sum_{s=0}^{\infty} P_{s+\max(0, k-m)}^{(n)}(m, v) \times \\ &\times P_{s+\max(0, m-k)}^{(n)}(-m, -v) \cdot \beta^{2s}, \end{aligned} \quad (41.17)$$

где

$$\nu = \frac{k}{1 + \beta^2}, \quad (41.18)$$

а коэффициенты при β^{2s} — многочлены вида

$$P_s^{(n)}(m, \nu) = \sum_{r=0}^q \frac{(-n+m-1)_r}{r!} \frac{\nu^{s-r}}{(s-r)!}; \quad (41.19)$$

$$q = \begin{cases} \min(s, n-m+1), & \text{при } n-m+1 \geq 0 \\ s, & \text{при } n-m+1 < 0; \end{cases} \quad (41.20)$$

$$\begin{aligned} (-n+m-1)_r &= (-n+m-1)(-n+m)(-n+m+1) \dots \\ &\dots (-n+m-1+(r-1)) \end{aligned} \quad (41.21)$$

— обобщенный факториал. При нижнем нулевом индексе некоторые коэффициенты Ганзена обращаются в ноль:

$$X_0^{n,m} = 0, \quad \text{при } n = -2, -3, \dots, -|m|-1. \quad (41.22)$$

Как следует из формулы (41.17) коэффициенты Ганзена имеют порядок относительно эксцентриситета

$$|X_k^{n,m}| \sim e^{|m-k|}. \quad (41.23)$$

Эту оценку можно использовать для предварительного определения необходимого числа коэффициентов Ганзена при заданной точности вычислений относительно эксцентриситета орбиты.

Существуют таблицы коэффициентов Ганзена. Подробное описание этих таблиц содержится в книге М. Ф. Субботина «Введение в теоретическую астрономию» (М., Наука, 1968).

§ 42. СХОДИМОСТЬ РАЗЛОЖЕНИЙ

Как следует из формул невозмущенного движения, любая из рассмотренных функций координат эллиптического движения может быть представлена через неотрицательную степень $\sin E$ или $\cos E$, т. е. выражена через некоторую последовательность целых функций. С другой стороны, поскольку

$$\sin E = E - \frac{E^3}{3!} + \dots, \quad \cos E = 1 - \frac{E^2}{2!} + \frac{E^4}{4!} - \dots, \quad (42.1)$$

где E может быть представлена в виде ряда по степеням эксцентриситета, либо в виде тригонометрического ряда, коэффициенты которого — ряды по степеням эксцентриситета, то на основании общих теорем о сложении и перемножении абсолютно сходящихся рядов можно утверждать, что радиус схо-

димости разложения эксцентрической аномалии является общим радиусом сходимости всех разложений.

Как известно из теории функций комплексного переменного, радиусом сходимости разложения аналитической функции является расстояние на плоскости независимой переменной от начала координат до ближайшей особой точки, в которой функция и ее первая производная имеют разрыв (полюс функции).

Так как производная $\frac{dE}{de}$ имеет вид

$$\frac{dE}{de} = \frac{\sin E}{1 - \cos E}, \quad (42.2)$$

то все полюсы функции E на комплексной плоскости e должны удовлетворять уравнению

$$1 - e \cos E = 0, \quad (42.3)$$

которое следует решать совместно с уравнением Кеплера

$$E = M + e \sin E \quad (42.4)$$

с учетом комплексных значений величин. Тогда модуль наименьшего из корней системы (42.3) — (42.4)

$$|e_1| = \min f(M) \quad (42.5)$$

будет искомым радиусом сходимости.

Обозначим через E_1 значение эксцентрической аномалии, соответствующее e_1 . Тогда из (42.3) следует

$$\frac{de_1}{dM} = - \frac{1}{\sin E_1}, \quad (42.6)$$

а из (42.3)

$$e_1 = \frac{1}{\cos E_1}. \quad (42.7)$$

Обозначив комплексное значение E

$$E = E_R + \sqrt{-1} E_I, \quad (42.8)$$

найдем с учетом (42.6) и (42.7) производную от квадрата функции $f(M)$:

$$\frac{df^2}{dM} = - \frac{4 \sin 2E_R}{\sin^2 2E_R + \operatorname{sh}^2 2E_I}. \quad (42.9)$$

Из (42.3) следует, что модули максимумов и минимумов функции f^2 равны, а из (42.9) по изменению знаков производной можно заключить, что $\max f^2$ имеют место при $E_R = k\pi$, $k=0, 1, 2, 3, \dots$, $\min f^2$ — при $E_R = k\pi + \pi/2$. Поэтому для $\min f^2$ будем иметь

$$E_1 = \frac{\pi}{2} + \sqrt{-1} E_{1I}. \quad (42.10)$$

Исключая из (42.3) и (42.4) эксцентриситет и подставляя результат в (42.10), для вещественных значений средней аномалии найдем

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} M_1 &= \pi/2; \\ E_{1_I} \operatorname{sh} E_{1_I} - \operatorname{ch} E_{1_I} &= 0. \end{aligned} \quad (42.11)$$

Приближенное значение корня второго уравнения равно:

$$E_{1_I} = 1,1996786 \dots \quad (42.12)$$

Наконец, из (42.7) найдем значение (42.5) с учетом (42.10) и (42.11):

$$|e_1| = \min f = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\operatorname{sh} E_{1_I}} = 0,6627 \dots \quad (42.13)$$

Таким образом, рассматриваемые ряды абсолютно сходятся при любых вещественных значениях средней аномалии M в интервале изменения эксцентриситета

$$0 \leq e < 0,6627 \dots \quad (42.14)$$

Правый предел в (42.14) называется пределом Лапласа. В интервале

$$0,6627 \dots < e < 1 \quad (42.15)$$

ряды могут оказаться расходящимися.

Практическое значение данного результата заключается в следующем. Так как в интервале (42.14) ряды абсолютно сходятся, то над ними можно выполнять алгебраические действия (кроме деления) и в результате снова получать сходящиеся ряды. Кроме того, существование области сходимости (42.14) указывает на то, что для каждого из разложений в этой области может быть построено сходящееся усиливающее (мажорирующее) разложение. Поэтому в области (42.14) вместе с абсолютной сходимостью реализуется равномерная сходимость. А тогда в области (42.14) каждое из разложений можно почленно дифференцировать и интегрировать, получая в результате снова сходящиеся ряды. Поэтому для всех значений эксцентриситета от нуля до предела Лапласа разложения координат эллиптического движения и их функций могут быть использованы для представления правых частей уравнений возмущенного движения в виде сходящихся рядов с целью приближенного аналитического интегрирования этих уравнений. В интервале эксцентриситетов (42.15) этого делать нельзя.

**ВОЗМУЩАЮЩИЕ ФУНКЦИИ И ВОЗМУЩАЮЩИЕ
УСКОРЕНИЯ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА ИСЗ****§ 43. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ**

Как было указано в § 32, на спутник действует целый ряд возмущающих факторов, имеющих потенциальный характер и в силу этого обладающих возмущающей (пертурбационной) функцией R . К ним относятся: возмущающая часть геопотенциала, притяжение Луны и Солнца, приливное действие Луны и Солнца, световое давление, переизлучение Землей солнечной радиации, прецессионно-нутацонный поворот Земли в инерциальном пространстве. Сюда можно добавить гравитационное действие атмосферы. Влияние перечисленных возмущающих факторов на движение ИСЗ наиболее просто может быть изучено путем интегрирования уравнений Лагранжа для оскулирующих элементов орбиты, либо на основе интегрирования канонических уравнений возмущенного движения. Это, конечно, не исключает использования более общих уравнений Ньютона или уравнений Лагранжа II рода вида (30.12).

На спутники, двигающиеся в верхних слоях атмосферы, действует также и диссипативная возмущающая сила, приводящая к уменьшению общей энергии системы Земля—спутник,—сила атмосферного торможения. Возмущающее действие этой силы на движение ИСЗ может быть изучено лишь на основе интегрирования общих уравнений возмущенного движения — уравнений Ньютона (34.5) либо уравнений вида (32.5).

Интегрирование уравнений может выполняться любым из методов, указанных в гл. 12,—аналитическим или численным. В связи с этим укажем соотношение между областями применения методов интегрирования обоих типов в космической геодезии.

Основным фактором, определяющим движение ИСЗ, является геопотенциал, возмущающая часть которого задает общую эволюцию орбиты спутника. Эволюция орбиты под действием остальных факторов накладывается на эволюцию под действием геопотенциала, причем количественно действие этих факторов примерно в 1000 раз меньше возмущающего действия геопотенциала. Формулы для возмущений, которые получаются в результате аналитического интегрирования уравнений возмущенного движения, обычно играют роль уравнений поправок для определения и уточнения числовых параметров, характеризующих возмущающую часть геопотенциала. Поэтому при решении задач космической геодезии аналитическое интегрирование в первую очередь необходимо для изучения геопотенциала по возмущениям орбит ИСЗ. Для получения аналитических формул для возмущений необходимо

выразить возмущающую часть геопотенциала через элементы орбиты ИСЗ. Такая операция называется разложением возмущающей функции.

Остальные, негеопотенциальные, факторы целесообразнее учитывать путем численного интегрирования. Поэтому существенной необходимости в разложениях возмущающих функций этих факторов при решении задач космической геодезии не возникает. Тем не менее эти разложения могут быть выполнены по тем же правилам, что и разложение возмущающей функции геопотенциала.

§ 44. ВОЗМУЩАЮЩАЯ ФУНКЦИЯ ГЕОПОТЕНЦИАЛА

Запишем гравитационный потенциал Земли — геопотенциал — на внешнюю точку (спутник) в виде

$$U = \frac{\mu}{r} + R_{\oplus}, \quad (44.1)$$

где $\mu = fM_{\oplus}$ — геоцентрическая гравитационная постоянная (f — постоянная тяготения, $M_{\oplus}$ — масса Земли); r — геоцентрический радиус-вектор внешней точки (спутника); $R_{\oplus}$ — возмущающая функция (возмущающая часть) геопотенциала. Первый член в (44.1) определяет невозмущенное движение ИСЗ, второй — возмущения в движении ИСЗ.

Исходное выражение для $R_{\oplus}$ обычно задается в форме известного из теории фигуры Земли разложения по сферическим функциям:

$$R_{\oplus} = \frac{\mu}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=0}^n \left(\frac{a_e}{r} \right)^2 (C_{nk} \cos k\lambda + S_{nk} \sin k\lambda) P_{nk}(\sin \varphi). \quad (44.2)$$

Здесь: φ, λ — геоцентрические широта и долгота внешней точки; a_e — средний экваториальный радиус Земли; C_{nk}, S_{nk} — безразмерные параметры, характеризующие внешнее гравитационное поле Земли; $P_{nk}(\sin \varphi)$ — функции Лежандра. Эти функции делятся на два типа:

$k=0$; $P_{n0}(\sin \varphi)$ — полиномы Лежандра,

$$P_{10} = \sin \varphi; \quad P_{20} = \frac{3}{2} \sin^2 \varphi - \frac{1}{2};$$

$$P_{n+10}(\sin \varphi) = \frac{2n+1}{n+1} \sin \varphi P_{n0}(\sin \varphi) - \frac{n}{n+1} P_{n-10}(\sin \varphi);$$

$$-\cos^2 \varphi \frac{dP_{n0}(\sin \varphi)}{d(\sin \varphi)} = n [\sin \varphi P_{n0}(\sin \varphi) - P_{n-10}(\sin \varphi)]; \quad (44.3)$$

$0 < k \leq n$, $P_{nk}(\sin \varphi)$ — присоединенные функции Лежандра:

$$P_{nk}(\sin \varphi) = (-1)^k \cos^2 \varphi \frac{d^n P_{n0}(\sin \varphi)}{d(\sin \varphi)^n}. \quad (44.4)$$

Если выразить угловое расстояние ψ между двумя точками со сферическими координатами $\varphi_1, \lambda_1, \varphi_2, \lambda_2$ по теореме косинусов

$$\cos \psi = \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos (\lambda_2 - \lambda_1), \quad (44.5)$$

то для $P_{n0}(\cos \psi)$ справедлива теорема сложения сферических функций

$$P_{n0}(\cos \psi) = P_{n0}(\sin \varphi_1) P_{n0}(\sin \varphi_2) + 2 \sum_{k=1}^n \frac{(n-k)!}{(n+k)!} \times \\ \times P_{nk}(\sin \varphi_1) P_{nk}(\sin \varphi_2) \cos k(\lambda_2 - \lambda_1). \quad (44.6)$$

Разложение (44.2) можно интерпретировать как разложение потенциала в ряд Фурье относительно долготы λ .

При $k=0$ разложение (44.2) характеризует отличие потенциала сфероида от потенциала однородной сферы (или материальной точки). Это так называемая зональная часть геопотенциала:

$$R_{\oplus \Phi} = - \frac{\mu}{r} \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{a}{r} \right)^n P_{n0}(\sin \varphi), \quad (44.7)$$

где $-J_{n0} = C_{n0}$. Каждый член ряда (44.7) называется зональной гармоникой, а коэффициенты J_n — коэффициентами зональных гармоник. Наиболее крупный — первый член ($n=2$):

$$R_{J_2} = - \mu J_2 \frac{a_e^2}{r^3} P_{20}(\sin \varphi) \quad (44.8)$$

— вторая зональная гармоника. Ее коэффициент J_2 характеризует полярное сжатие Земли α_e и связан с ним формулой, известной из теории фигуры Земли,

$$\alpha_e = \frac{1}{2} \left[3J_2 + \frac{\omega_{\oplus}^2 a_e^3}{\mu} (1 - \alpha_e) \right] \left[1 + \frac{3}{4} J_2 + \frac{3}{8} \frac{\omega_{\oplus}^2 a_e^3}{\mu} (1 - \alpha_e) \right], \quad (44.9)$$

где $\omega_{\oplus}$ — средняя угловая скорость вращения Земли. Порядок коэффициента $J_2 \sim 10^{-3}$; остальные коэффициенты $J_{n>2}$ имеют порядок по крайней мере J_2^2 : 10^{-6} , 10^{-7} и т. п. Четные коэффициенты J_n характеризуют потенциал сфероида, симметричного относительно плоскости экватора, нечетные — несимметрию сфероида относительно плоскости экватора.

При $0 < k \leq n$ разложение (44.2) характеризует отличие потенциала реальной Земли от потенциала сфероида. Это — долготная часть геопотенциала, содержащая тессеральные (клеточные) гармоники $k \neq n$ и секториальные гармоники $k = n$. Как известно, полином Лежандра $P_{n0}(\sin \varphi)$ — полином n -й степени и в соответствии с основной теоремой алгебры имеет ровно n корней. Поэтому такой полином, заданный

на сфере, делит сферу n параллелями, на которых он обращается в нуль, на $n+1$ широтных зон, причем в двух соседних зонах полином имеет разные знаки. Аналогично, присоединенная функция $P_{nn}(\sin \varphi)$ делит сферу меридианами, на которых она обращается в нуль, на π/n меридиональных секторов. Наконец, присоединенная функция $P_{nk}(\sin \varphi)$ обращается в нуль на $n-k$ параллелях и $2k$ меридианах. В результате сфера делится на клетки, образованные указанными меридианами и параллелями. Распределение знаков «+» и «—» функции P_{nk} по клеткам шахматное.

Физический смысл представления возмущающего потенциала в виде ряда (44.2) заключается в том, что реальный возмущающий потенциал равномерно аппроксимируется потенциалом, который создается совокупностью различных дополнительных масс, распределенных по указанным зонам, секторам и клеткам.

Часто в разложении (44.2) коэффициенты C_{nk} , S_{nk} заменяют на нормированные коэффициенты $\bar{C}_{nk}$, $\bar{S}_{nk}$, а функции Лежандра $P_{nk}(\sin \varphi)$ — на нормированные функции Лежандра $\bar{P}_{nk}(\sin \varphi)$:

$$\begin{pmatrix} \bar{C}_{nk} \\ \bar{S}_{nk} \end{pmatrix} = \frac{1}{v_{nk}} \begin{pmatrix} C_{nk} \\ S_{nk} \end{pmatrix}; \quad \bar{P}_{nk}(\sin \varphi) = v_{nk} P_{nk}(\sin \varphi); \quad (44.10)$$

где

$$v_{nk} = \sqrt{\frac{2(n-k)!(2n+1)}{(n+k)!}}. \quad (44.11)$$

Это делается для удобства числового представления коэффициентов; для теории это не имеет значения.

§ 45. РАЗЛОЖЕНИЕ ВОЗМУЩАЮЩЕЙ ФУНКЦИИ ГЕОПОТЕНЦИАЛА

Запишем (44.2) в виде

$$R_{\oplus} = \mu \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=0}^n R_{nk} \quad (45.1)$$

и разложим R_{nk} в тригонометрический ряд:

$$R_{nk} = \sum_{nk} Q_{nk}(a, e, i) \cos(\alpha_{nk}t + \beta_{nk}\omega + \gamma_{nk}\Omega + \delta_{nk}M_0 + \varepsilon_{nk}), \quad (45.2)$$

где α_{nk} , β_{nk} , γ_{nk} , δ_{nk} , ε_{nk} — произвольные вещественные числа (они могут быть и целыми). Такие ряды называют рядами Пуассона.

Прежде всего аргумент широты u в формулах связи между прямоугольными геоцентрическими координатами и элементами орбиты заменим на истинную долготу в орбите ω по формуле

$$\omega = \Omega + u \quad (45.3)$$

и запишем эти формулы в комплексной форме:

$$\begin{aligned} \frac{x}{r} + \sqrt{-1} \frac{y}{r} &= \exp \sqrt{-1} \omega + 2 \sin^2 \frac{i}{2} \sin (\omega - \Omega) \times \\ &\times \exp \sqrt{-1} (\Omega - 90^\circ) = \cos \varphi \exp \sqrt{-1} (\lambda + S); \\ \frac{z}{r} &= \sin i \sin (\omega - \Omega) = \sin \varphi, \end{aligned} \quad (45.4)$$

где $\lambda + S = \alpha$ — геоцентрическое прямое восхождение; S — угол, численно равный среднему гринвичскому звездному времени в текущий момент:

$$S = \omega_\oplus (t - t_0) + S^{(0)}; \quad (45.5)$$

t_0 — начальный момент; $S^{(0)}$ — начальная фаза — значение S в момент, соответствующий $u = 0$.

Далее используем следующие соотношения [9], [13]:

1) представление целой степени косинуса тригонометрическим полиномом:

$$\cos^n \beta = \frac{1}{2^n} \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} \exp \sqrt{-1} (n - 2s) \beta; \quad (45.6)$$

$$\binom{n}{s} = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-s+1)}{s!} \quad (45.7)$$

— биномиальные коэффициенты. Аналогичная формула для $\sin^n \beta$ получается заменой в (45.6) β на $90^\circ - \beta$;

2) связь функции Лежандра с ультрасферическими полиномами — полиномами Гегенбауэра — $C_{n-k}(\sin \varphi)$, определяемыми как коэффициенты разложения производящей функции:

$$(1 + \alpha^2 - 2\alpha \sin \varphi)^{-\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n C_n^\nu(\sin \varphi); \quad |\alpha| < 1, \quad (45.8)$$

где ν — любое вещественное неотрицательное число,

$$P_{nk}(\sin \varphi) = 2^k \left(\frac{1}{2}\right)_k \cos^k \varphi C_{n-k}^{k+1/2}(\sin \varphi); \quad (45.9)$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)_k = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1\right) \left(\frac{1}{2} + 2\right) \dots \left(\frac{1}{2} + k - 1\right). \quad (45.10)$$

— обобщенный факториал;

3) явное выражение ультрасферических полиномов

$$C_n^\nu(\sin \varphi) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{m=0}^{E(n/2)} \frac{(-1)^m 2^{n-2m} \Gamma(\nu + n - m)}{m! (n - 2m)!} \sin^{n-2m} \varphi, \quad (45.11)$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция; здесь будут встречаться ее выражения, когда $x = n > 0$ (n — целое) и $x = n + 1/2$.

Тогда

$$\Gamma(n) = (n-1)!; \quad \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi} (2n-1)!}{2^{2n-1} n!}; \quad (45.12)$$

$E(n/2)$ означает, что суммирование ведется до наибольшего целого, содержащегося в $n/2$.

Для получения искомого разложения выполняют следующие операции. Выражают через элементы орбиты величину $\cos^k \varphi \exp \sqrt{-1} k \lambda$, возводя первую формулу (45.4) в k -ю степень по формуле бинома. Находят выражение для $\exp \sqrt{-1} k \lambda P_{nk}(\sin \varphi)$, для чего последовательно применяют формулы (45.9), (45.11), формулу для $\cos^k \varphi \exp \sqrt{-1} k \lambda$ и выражают целую степень $\sin(\omega - \Omega)$ при помощи (45.6). Используя разложение по коэффициентам Ганзена [формула (41.3)], получают выражение для a_e^n / r^{n+1} , представив предварительно в предыдущем выражении истинную долготу в орбите через истинную аномалию $\omega = \Omega + \omega + v$. Разделив затем в полученном выражении действительную и мнимую части, окончательно получают:

$$R_{nk} = \frac{a_e^n}{a^{n+1}} \frac{2^k \left(\frac{1}{2}\right)_k}{\Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right)} \sum_{m=0}^k \sum_{s=0}^{E\left(\frac{n-k}{2}\right)} A_{ms}^{nk}(i) \times \\ \times \sum_{q=0}^{n-k-2s} \binom{n-k-2s}{q} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} H_{msqj}^{nk}(e, \Theta_y), \quad (45.13)$$

где Θ_y — вектор угловых элементов;

$$A_{ms}^{ni}(i) = \binom{k}{m} \frac{(-1)^s \Gamma\left(n - s + \frac{1}{2}\right)}{s! (n - k - 2s)!} \sin^{n-k-2s} i \sin^{2k} \frac{i}{2} \times \\ \times \operatorname{ctg}^{2m} \frac{i}{2}; \quad (45.14)$$

$$H_{msqj}^{nk}(e, \Theta_y) = X_I^{-n-1-n+2(m+s+q)}(e) (C_{nk} \cos \vartheta_{nk} + S_{nk} \sin \vartheta_{nk}); \quad (45.15)$$

$$\vartheta_{nk} = \frac{(j\tilde{n} - k\omega_{\oplus})}{\tilde{n}} M - [n - 2(m + s + q)] \omega + k(\Omega - S^{(0)}) + \\ + k \frac{\omega_{\oplus}}{\tilde{n}} M_0 + [n - k - 2(s + q)] 90^\circ, \quad (45.16)$$

где $\tilde{n}$ — среднее движение. Средняя аномалия по формуле $M = M_0 + \tilde{n}(t - t_0)$ выражается через время t . Для получения разложения только от зональной части геопотенциала в формулах (45.13) — (45.16) следует положить: $k = m = 0$; $S_{nk} \equiv 0$; $C_{n0} = -J_n$.

§ 46. НЕКОТОРЫЕ ДРУГИЕ ФОРМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГЕОПОТЕНЦИАЛА, ПРИМЕНЯЕМЫЕ В КОСМИЧЕСКОЙ ГЕОДЕЗИИ

Попытки упростить процесс предвычисления возмущенного движения ИСЗ привели к необходимости поиска других форм представления геопотенциала.

Потенциал задачи двух неподвижных центров. На оси z геоцентрической инерциальной системы координат, xyz (рис. 50) расположены две материальные точки с массами m_N (северная точка) и m_S (южная точка). Пусть массы точек комплексно сопряжены:

$$m_N = \frac{M_\oplus}{2} (1 + \sqrt{-1} \sigma); \quad m_S = \frac{M_\oplus}{2} (1 - \sqrt{-1} \sigma), \quad (46.1)$$

где $M_\oplus$ — масса Земли; расстояния точек s_N и s_S от начала координат пусть также комплексно сопряжены:

$$s_N = c(\sigma + \sqrt{-1}); \quad s_S = c(\sigma - \sqrt{-1}), \quad (46.2)$$

где c и σ — некоторые вещественные константы.

Потенциал V , создаваемый этими массами во внешней точке (ИСЗ), по определению равен

$$V = \frac{f m_N}{r_N} + \frac{f m_S}{r_S} = \frac{\mu}{2} \left(\frac{1 + \sigma \sqrt{-1}}{r_N} + \frac{1 - \sigma \sqrt{-1}}{r_S} \right). \quad (46.3)$$

Разложив r_N^{-1} и r_S^{-1} в ряды по полиномам Лежандра, абсолютно сходящиеся при $r^{-1}c\sqrt{1+\sigma^2} < 1$, получим

$$V = \frac{\mu}{r} \left[1 - \sum_{k=2}^{\infty} J_k^1 \left(\frac{a_e}{r} \right)^k P_k(\sin \delta) \right], \quad (46.4)$$

где коэффициенты равны

$$J_k^1 = -\frac{1}{2} \left(\frac{c}{a_e} \right)^k [(1 + \sigma \sqrt{-1})(\sigma + \sqrt{-1})^k + (1 - \sigma \sqrt{-1})(\sigma - \sqrt{-1})^k]. \quad (46.5)$$

Эти коэффициенты вещественные, так как при натуральных k величины $(\sigma + \sqrt{-1})^k$ и $(\sigma - \sqrt{-1})^k$ комплексно сопряжены. Поэтому потенциал V , создаваемый двумя центрами (точками) m_N и m_S , также вещественный. Поставив условие

$$J_2^1 = J_2; \quad J_3^1 = J_3, \quad (46.6)$$

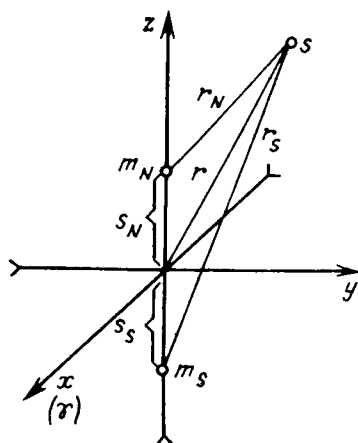


Рис. 50. Расположение двух неподвижных центров с массами m_N и m_S

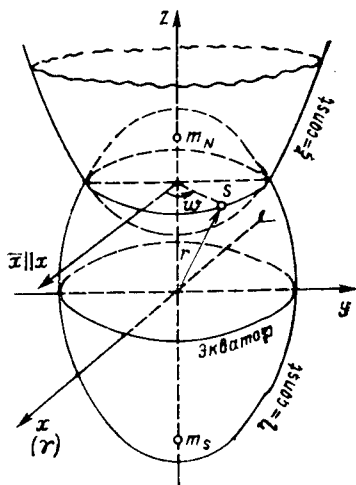


Рис. 51. Система сферондальных координат

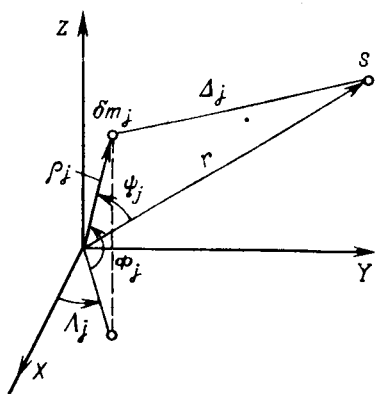


Рис. 52. Взаимное положение спутника и текущей точечной массы (система координат гринвичская)

константы σ и c можно определить через известные значения a_e , J_2 , J_3 :

$$c = a_e \sqrt{J_2 - [J_3(2J_2)^{-1}]^2}; \quad \sigma = J_3(2J_2)^{-1} \{ J_2 - [J_3(2J_2)^{-1}]^2 \}^{-\frac{1}{2}}. \quad (46.7)$$

При таком определении всех параметров потенциал (46.3) есть потенциал некоторого сфероиды, сплюснутого у полюсов, у которого первые три члена совпадают с классическим разложением зональной части геопотенциала, причем если

$$U = \frac{\mu}{r} + R_{\oplus} = V + R_{\oplus}^1, \quad (46.8)$$

то разность между двумя возмущающими функциями имеет порядок $\leq J_2^2: |R_\oplus - R_\oplus^1| \leq 10^{-6}$.

Смысл введения потенциала V двух центров заключается в следующем. Отбросим пока возмущающую функцию $R_\oplus^1$ и будем иметь в виду движение ИСЗ в поле V . Исходные уравнения пусть заданы в геоцентрических координатах x, y, z ; форма уравнений — гамильтонова. Перейдем от системы xyz к системе сфероидальных координат $\xi\eta\omega$. Последние представляют собой следующее (рис. 51): положение ИСЗ определяется линией пересечения софокусных эллипсоидов $\eta = \text{const}$ и гиперболоидов $\xi = \text{const}$ (фокусами служат неподвижные центры с массами m_N и m_S) и углом положения ω , отсчитываемым от направления на точку весеннего равноденствия. Между xyz и $\xi\eta\omega$ существует взаимно однозначное непрерывно дифференцируемое соответствие [6], [7]:

$$x + \sqrt{-1} y = \sqrt{(\xi^2 + c^2)(1 - \eta^2)} \exp \sqrt{-1} \omega; \quad z = c\sigma + \xi\eta; \quad (46.9)$$

$$\xi = \frac{c}{2} (r_N + r_S); \quad \eta = \frac{1}{2\sqrt{-1}} (r_S - r_N); \quad \text{tg } \omega = \frac{y}{x}, \quad (46.10)$$

позволяющее проинтегрировать уравнения движения в сфероидальных координатах, а затем перейти к исходным прямоугольным. Канонические уравнения движения ИСЗ в сфероидальных координатах ξ, η, ω интегрируются методом Гамильтона — Якоби в квадратурах. Такое решение задает промежуточную орбиту ИСЗ, более близкую к истинной возмущенной орбите, нежели невозмущенная кеплерова, определяемая потенциалом μ/r . Учет влияния возмущающей функции $R_\oplus^1$ и всех остальных возмущений потенциального характера выполняется методом вариации произвольных постоянных. Это, однако, приводит к уравнениям для возмущений параметров промежуточной орбиты задачи двух неподвижных центров, которые ничуть не проще классических уравнений Лагранжа для кеплеровых элементов.

Точечное представление геопотенциала. В целях экономии машинного времени при вычислении правых частей уравнений возмущенного движения ИСЗ в процессе их численного интегрирования в последние годы уделяется внимание [13, 16] аппроксимации возмущающего геопотенциала суммарным потенциалом ряда материальных точек. Вторую зональную гармонику аппроксимировать нецелесообразно (точек будет слишком много).

Если U_T — рассматриваемая аппроксимация, то

$$U_T = \frac{\mu}{r} - \mu J_2 \frac{a_e^2}{r^3} P_{20}(\sin \delta) + \sum_{j=1}^N \frac{\delta \mu_j}{\Delta_j}, \quad (46.11)$$

причем

$$|U - U_T| < \varepsilon, \quad (46.12)$$

где ε — малое заданное положительное число; $\delta\mu_j = f\delta m$, δm_j — значение j -й массы; N — число масс; Δ_j — взаимное расстояние j -я масса — ИСЗ (рис. 52); ρ_j , Φ_j , Λ_j — сферические координаты j -й массы (радиус-вектор, широта и долгота). Из рис. 52

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta_j} &= \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\rho_j}{r}\right)^2 - 2\left(\frac{\rho_j}{r}\right)\cos\psi_j}} = \\ &= \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho_j}{r}\right)^n P_n(\cos\psi_j). \end{aligned} \quad (46.13)$$

Так как по теореме косинусов

$$\cos\psi_j = \sin\delta \sin\Phi_j + \cos\delta \cos\Phi_j \cos(\lambda - \Lambda_j), \quad (46.14)$$

то, выразив полиномы Лежандра по теореме сложения (44.6), подставив (46.13) в (46.11) и сравнив результат с обычным разложением геопотенциала по сферическим функциям (44.2) с учетом (44.10), (44.11), можно получить выражения для нормированных коэффициентов $\bar{C}_{nh}$, $\bar{S}_{nh}$ через параметры точечных масс:

$$\begin{pmatrix} \bar{C}_{nh} \\ \bar{S}_{nh} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^N \frac{\delta\mu_j}{\mu} \left(\frac{\rho_j}{a_e}\right)^n \frac{\bar{P}_{nh}(\sin\Phi_j)}{2n+1} \begin{pmatrix} \cos k\Lambda_j \\ \sin k\Lambda_j \end{pmatrix}. \quad (46.15)$$

Обратного однозначного соотношения не существует. Поэтому задача аппроксимации геопотенциала точечными массами в принципе неоднозначная и может выполняться разнообразными способами.

Если «точечную» часть в (46.11) обозначить через

$$R_T = \sum_{j=1}^N \frac{\delta u_j}{\Delta_j}, \quad (46.16)$$

расстояние Δ_j

$$\Delta_j^2 = (x - x_j)^2 + (y - y_j)^2 + (z - z_j)^2, \quad (46.17)$$

где

$$\begin{aligned} x_j &= \rho_j \cos\Phi_j \cos(\Lambda_j + S); & y_j &= \rho_j \cos\Phi_j \sin(\Lambda_j + S); \\ z &= \rho_j \sin\Phi_j; \end{aligned} \quad (46.18)$$

S — гринвичское звездное время, то составляющие возмущающего ускорения от R_T в уравнениях движения вычисляются просто:

$$\begin{aligned}\frac{\partial R_T}{\partial x} &= - \sum_{j=1}^N \delta \mu_j \frac{x}{\Delta_j^3}; & \frac{\partial R_T}{\partial y} &= - \sum_{j=1}^N \delta \mu_j \frac{y}{\Delta_j^3}; \\ \frac{\partial R_T}{\partial z} &= - \sum_{j=1}^N \delta \mu_j \frac{z}{\Delta_j^3}.\end{aligned}\quad (46.19)$$

Это и определяет экономию машинного времени при численном интегрировании уравнений движения ИСЗ. Для аналитического интегрирования точечное представление неудобно, так как приводит к более сложному разложению возмущающей функции геопотенциала, нежели разложение (45.13).

В дальнейшем будем исходить из разложения геопотенциала по сферическим функциям.

§ 47. НЕГЕОПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ВОЗМУЩАЮЩИЕ ФУНКЦИИ

Возмущающие функции Луны и Солнца. Землю, спутник, Луну и Солнце примем за материальные точки. Ввиду малости массы спутника можно считать, что он не оказывает гравитационного действия на другие небесные тела. Такую материальную точку называют пассивно гравитирующей или нулевой массой. Можно отдельно рассматривать две системы трех материальных точек: Земля — спутник — Луна, Земля — спутник — Солнце. Тогда, принимая ИСЗ за нулевую массу, мы будем иметь дело с двумя совершенно одинаковыми задачами, каждая из которых в небесной механике называется ограниченной задачей трех тел (материальных точек).

Возмущающая функция в такой задаче определяет возмущения нулевой массы (ИСЗ) и имеет вид (рис. 53)

$$R_1 = \mu_1 \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{r}{r_1^2} \cos \psi \right), \quad (47.1)$$

причем $\mu_1 = f m_1$, где m_1 — масса возмущающего тела (Луны или Солнца); Δ — взаимное расстояние. Для спутникового движения всегда соблюдается условие

$$r/r_1 < 1, \quad (47.2)$$

которое позволяет преобразовать исходное выражение R_1 следующим образом. Из треугольника $M_\oplus m m_1$ имеем:

$$\Delta = \sqrt{r_1^2 + r^2 - 2r_1 r \cos \psi}. \quad (47.3)$$

Тогда при условии (47.2) величина Δ^{-1} разлагается в сходящийся ряд по полиномам Лежандра:

$$\Delta^{-1} = r_1^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r_1} \right)^n P_n(\cos \psi). \quad (47.4)$$

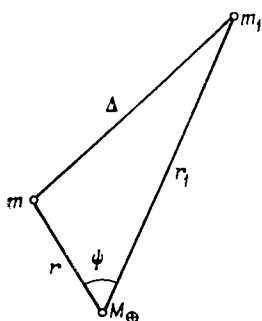


Рис. 53. Система трех материальных точек

Подставив (47.4) в (47.1), получим

$$R_1 = \mu_1 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{r^n}{r_1^{n+1}} P_n(\cos \psi). \quad (47.5)$$

Здесь первый член при $n=0$ отброшен, так как он не зависит от координат ИСЗ и обращается в нуль при дифференцировании по координатам спутника; второй член при $n=1$ взаимно уничтожается со вторым членом в (47.1).

Пусть α , δ и α_1 , δ_1 — геоцентрические прямые восхождения и склонения ИСЗ и возмущающего тела. По теореме конусов

$$\cos \psi = \sin \delta \sin \delta_1 + \cos \delta \cos \delta_1 \cos (\alpha_2 - \alpha_1). \quad (47.6)$$

Представив $P_n(\cos \psi)$ с учетом (47.6) по теореме сложения сферических функций (44.6) и подставив результат в (47.5), получим

$$R_1 = \mu_1 \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{r^n}{a_1^{n+1}} (C_{nk}^1(t) \cos k\alpha + S_{nk}^1(t) \sin k\alpha) P_{nk}(\sin \delta), \quad (47.7)$$

где $C_{nk}^1(t)$ и $S_{nk}^1(t)$ — медленно меняющиеся функции координат возмущающего тела:

$$\begin{pmatrix} C_{nk}^1(t) \\ S_{nk}^1(t) \end{pmatrix} = (2 - \delta_{k,0}) \frac{(n-k)!}{(n+k)!} \left(\frac{a_1}{r_1} \right)^{n+1} \times \\ \times P_{nk}(\sin \delta_1) \begin{pmatrix} \cos k\alpha_1 \\ \sin k\alpha_1 \end{pmatrix}; \quad (47.8) \\ \delta_{k,0} = \begin{cases} 1, & k=0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases} \text{ — символ Кронекера.}$$

Ускорения, вызываемые этими функциями, меняются медленнее ускорений ИСЗ от геопотенциала более чем в 300 раз для Луны и более чем в 4000 раз — для Солнца. Поэтому их удобно вычислять отдельно.

При вычислениях в разложении (47.7) достаточно учитывать от 2 до 5 членов для Луны и от 1 до 3 членов — для Солнца.

Возмущающая функция лунно-солнечного прилива. Приливные возмущения в движении ИСЗ — вторичное возмущающее действие Луны и Солнца. Оно заключается в том, что приливная деформация уровенной поверхности геопотенциала вследствие притяжения Луны и Солнца приводит к изменению значения геопотенциала в любой фиксированной внешней точке. Это изменение геопотенциала можно рассматривать как дополнительный возмущающий потенциал, действующий на ИСЗ. В теории приливов этот потенциал представляется в виде разложения по сферическим функциям. В теории движения ИСЗ пока достаточно учитывать первый член этого разложения:

$$R_{\text{пр}} = k_2 \frac{a_e^2}{r^3} \left[\mu_{\odot} \left(\frac{a_e}{r_{\odot}} \right)^3 P_{20} (\cos \psi_{\odot} + \Delta \psi_{\odot}) + \mu_{\odot} \left(\frac{a_e}{r_{\odot}} \right)^3 P_{20} (\cos \psi_{\odot} + \Delta \psi_{\odot}) \right]. \quad (47.9)$$

Здесь $k_2 \approx 0,3$ — так называемое второе число Лява, характеризующее деформацию уровенной поверхности по высоте; углы $\psi_{\odot}$, $\psi_{\odot}$ имеют тот же смысл, что и угол ψ (см. рис. 53); $\Delta \psi_{\odot}$ и $\Delta \psi_{\odot}$ — запаздывания приливного «горба» относительно подлунной и подсолнечной точек. В силу того, что полином P_{20} имеет два корня, каждому приливному «горбу» соответствует противоположный приливной «горб». При численном интегрировании уравнений движения ИСЗ запаздывание приливного горба можно принимать равным 5° . Возникающая при этом ошибка около $2''$ на точность учета возмущений не повлияет.

Возмущающая функция светового давления. Теория электромагнитного излучения дает следующую формулу для силы светового давления:

$$F_c = \frac{\bar{S} S_{\odot} (1+k)}{c} \cos^2 \alpha \left(\frac{r_{\odot}}{\Delta} \right)^2, \quad (47.10)$$

где величины $r_{\odot}$ и Δ указаны на рис. 53; $\bar{S}$ — площадь поперечного сечения ИСЗ в направлении Δ , т. е. на Солнце; $S_{\odot}$ — среднее значение солнечной постоянной (для границы атмосферы); c — скорость света; k — коэффициент отражения ($k=0$ для абсолютно черного тела, для спутника — $0 < k < 1$); α — угол падения солнечных лучей на поверхность спутника, для сферического ИСЗ в среднем $\alpha=0$.

Если обозначить

$$\sigma_c = \frac{\bar{S}}{m} \frac{S_{\odot} (1+k)}{c} \cos^2 \alpha \chi_c, \quad (47.11)$$

где m — масса спутника, а χ_c — релейная функция, принимающая значения

$$\chi_c = \begin{cases} 1 & \text{—вне земной тени,} \\ 0 & \text{—внутри тени,} \end{cases} \quad (47.12)$$

то на основании второго закона Ньютона возмущающее ускорение равно

$$w_c = \sigma_c \left(\frac{r_\odot}{\Delta} \right)^2. \quad (47.13)$$

Так как световое давление действует вдоль взаимного расстояния в сторону от Солнца, то составляющие возмущающего ускорения вдоль геоцентрических осей xyz равны

$$\begin{aligned} X_c &= -w_c \frac{x_\odot - x}{\Delta}; & Y_c &= -w_c \frac{y_\odot - y}{\Delta}; \\ Z_c &= -w_c \frac{z_\odot - z}{\Delta}, \end{aligned} \quad (47.14)$$

где вторые сомножители — направляющие косинусы Δ относительно осей xyz . Так как

$$\begin{aligned} \Delta^2 &= (x_\odot - x)^2 + (y_\odot - y)^2 + (z_\odot - z)^2; \\ r_\odot^2 &= x_\odot^2 + y_\odot^2 + z_\odot^2, \end{aligned} \quad (47.15)$$

то с учетом (47.13) находим, что

$$X_c = \frac{\partial R_c}{\partial x}; \quad Y_c = \frac{\partial R_c}{\partial y}; \quad Z_c = \frac{\partial R_c}{\partial z}, \quad (47.16)$$

где

$$R_c = -\sigma_c r_\odot^2 \frac{1}{\Delta} \quad (47.17)$$

— возмущающая функция, характеризующая световое давление.

Разлагая Δ^{-1} по формуле (47.4) и ввиду малости эффекта сохраняя в разложении один член, окончательно получим

$$R_c = \frac{\mu_c}{a_\odot} \left(\frac{r}{a_\odot} \right) \cos \psi_\odot; \quad \mu_c = -\sigma_c a_\odot^2. \quad (47.18)$$

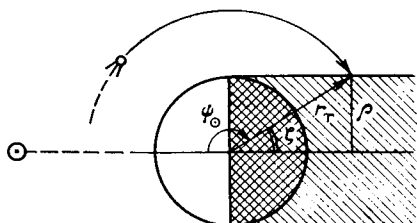
Существование функции R_c отражает физический смысл действия светового давления: источник излучения — Солнце — создает поле, обладающее градиентом вдоль гелиоцентрических направлений; в отличие от тяготения здесь мы имеем дело с отталкиванием.

При численном интегрировании уравнений движения ИСЗ определение значений релейной функции удобно выполнять по отдельной подпрограмме, основанной на следующих соображе-

ниях. Пусть $180^\circ \pm \zeta$ (рис. 54) — угол между направлениями на Солнце и на спутник в момент пересечения спутником границы тени (тень вблизи от Земли считают цилиндрической). Из рисунка находим

$$\zeta = \arccos \left(+ \sqrt{1 - \left(\frac{\rho}{r_T} \right)^2} \right), \quad (47.19)$$

Рис. 54. Условие входа ИСЗ в тень



где ρ — средний радиус Земли; r_T — геоцентрический радиус-вектор ИСЗ в момент пересечения границы тени. Угол ψ_0 вычисляется по формуле (47.6). На основании рисунка заключаем:

$$180^\circ - \psi_0 < \zeta \text{ — ИСЗ вне тени } \chi_c = 1, \quad (47.20)$$

$$180^\circ - \psi_0 \geq \zeta \text{ — ИСЗ внутри тени } \chi_c = 0.$$

Возмущающая функция переизлучения Землей солнечной радиации. Здесь следует различать действие коротковолновой (в оптическом диапазоне) и длинноволновой (инфракрасной или тепловой) радиации. В тепловом диапазоне эта сила действует все время, пока спутник находится на орбите, в оптическом диапазоне — лишь когда на спутник попадает излучение с освещенной Солнцем части земной поверхности. По величине действия переизлучения примерно в три раза меньше прямого светового давления — оно зависит от альбедо (коэффициента отражения) Земли, равного примерно одной трети.

Так как физический смысл действия переизлучения тот же, что и у прямого светового давления, то на основании формулы (47.11) возмущающий параметр σ_n можно записать так:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{n0} \\ \sigma_{nT} \end{pmatrix} = \frac{\bar{S}}{m} \frac{S_\odot}{c} (1 + k) \cos^2 \alpha \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_T \end{pmatrix}, \quad (47.21)$$

где γ_0 — значение альбедо в оптическом диапазоне; γ_T — в тепловом. В среднем действие переизлучения в обоих диапазонах оказывается одинаковым, поэтому два разных альбедо часто можно заменить на их среднее значение $\gamma = 0,36$.

Общее действие переизлучения можно определить возмущающей функцией вида

$$R_n = \frac{\mu_n}{r} + \frac{\delta \mu_n}{r}, \quad (47.22)$$

где первый член — радиальная часть, ослабляющая действие центральной части геопотенциала. Второй член может быть разложен в ряд по сферическим функциям, как и геопотенциал. При вычислении (47.22) нужно также учитывать, что на спутник попадает лишь излучение от зоны прямой видимости, а не от всей поверхности Земли. Поэтому в R_n нужно ввести так называемый коэффициент экранирования $\bar{\kappa}$, который в первом приближении можно принять равным отношению площади зоны прямой видимости к площади всей сферы радиуса a_e :

$$\bar{\kappa} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a_e}{r} \right). \quad (47.23)$$

Дадим без вывода формулы для составляющих выражения R_n (47.22):

$$\mu_n = -(\sigma_{n0} \cos \bar{\psi}_\odot + \sigma_{nT}) a_e^2 \bar{\kappa}, \quad (47.24)$$

где $\bar{\psi}_\odot$ — среднее значение угла (см. рис. 54) для заданной орбитальной дуги от ее пересечения с эклиптикой до терминатора;

$$\frac{\delta \mu_n}{r} = -\mu_n \bar{\kappa} \sum_{s=1}^N \left(-J_{2s}^n \right) \frac{a_e^{2s}}{r^{2s+1}} P_{2s0}(\sin \delta). \quad (47.25)$$

Значения безразмерных коэффициентов J_{2s}^n имеют порядок 10^{-9} , т. е. порядок третьей степени сжатия Земли. Пока достаточно уверенно определяются коэффициенты: $J_2^n = -0,207 \cdot 10^{-9}$, $J_6^n = +0,135 \cdot 10^{-9}$, $J_{12}^n = +0,149 \cdot 10^{-9}$ [13].

Прецессионно-нутационная возмущающая функция. Физическая сущность возмущений от прецессии и нутации в том, что вследствие пространственного поворота земного сфероида в инерциальной геоцентрической системе координат геопотенциал на любую внешнюю фиксированную точку в указанной системе меняется. Это изменение можно отождествить с дополнительным возмущающим потенциалом. Один из путей учета этого явления — интегрирование уравнений движения ИСЗ в системе координат, вращающейся из-за прецессии и нутации. Однако, несмотря на малость эффекта, это приводит к заметному усложнению уравнений движения. Удобнее поступать так. Обозначим: x, y, z — координаты ИСЗ в инерциальной (невращающейся) системе координат; x_b, y_b, z_b — координаты ИСЗ в системе, вращающейся из-за прецессии и нутации. Пусть

$$x_b = x + \Delta x_b; \quad y_b = y + \Delta y_b; \quad z_b = z + \Delta z_b, \quad (47.26)$$

где прецессионно-нутационные поправки $\Delta x_b, \Delta y_b, \Delta z_b$ вычисляются методами, описанными в разделе 1. Геопотенциал на внеш-

Ную точку в данном случае следует записать так:

$$U(x_B, y_B, z_B) = U(x, y, z) + \delta R_{pr, nut} = \\ = \frac{\mu}{r} + R_{\oplus}(x, y, z) + \delta R_{pr, nut}, \quad (47.27)$$

где $\delta R_{pr, nut}$ — изменение геопотенциала из-за прецессии и нутации. Это изменение — искомая возмущающая функция. Она может быть вычислена путем разложения потенциала по степеням $\Delta x_B, \Delta y_B, \Delta z_B$ с учетом того, что геоцентрический радиус-вектор r при повороте системы координат не меняется:

$$\delta R_{pr, nut} = \Delta x_B \frac{\partial R_{\oplus}}{\partial x} + \Delta y_B \frac{\partial R_{\oplus}}{\partial y} + \Delta z_B \frac{\partial R_{\oplus}}{\partial z}. \quad (47.28)$$

Вследствие малости эффекта в (47.28) достаточно использовать лишь вторую зональную гармонику:

$$R_{\oplus J_2} + \delta R_{pr, nut} = -\mu J_2 \frac{a_e^2}{r^3} P_{20}(\sin(\delta + p_{\delta} + nut_{\delta})) = \\ = R_{\oplus J_2} - 3\mu J_2 (p_{\delta} + nut_{\delta}) \frac{a_e^2}{r^3} \sin \delta \cos \delta, \quad (47.29)$$

где p_{δ} — прецессия по склонению; t_{δ} — нутация по склонению.

Если в (47.29) учитывать даже только прецессию, то, как известно из курса сферической астрономии,

$$p_{\delta} \approx 20,04'' \cos \alpha \cdot t. \quad (47.30)$$

Выразив t в сутках, а коэффициент в (47.30) — в радианах в сутки, возмущающую функцию запишем в виде

$$\delta R_{pr} = -3\mu J_2 \left(2,6548 \cdot 10^{-7} \frac{1}{d} \right) \frac{xz}{r^3} t^d. \quad (47.31)$$

Отсюда следует, что возмущающий параметр (имеющий размерность) $J_2 \left(2,6548 \cdot 10^{-7} \frac{1}{d} \right)$ имеет в данном случае порядок 10^{-10} . Это и позволяет в (47.28) ограничиться второй зональной гармоникой.

§ 48. СОСТАВЛЯЮЩИЕ ВОЗМУЩАЮЩЕГО УСКОРЕНИЯ, ВЫЗВАННОГО АТМОСФЕРНЫМ ТОРМОЖЕНИЕМ

Вектор силы атмосферного торможения, действующего на спутник, задается аэродинамической формулой

$$F_A = -\frac{1}{2} C_D \bar{S}_A \rho V' V', \quad (48.1)$$

где C_D — аэродинамический коэффициент, равный примерно 2,2, если размеры спутника меньше 50 м (средняя статистическая длина свободного пробега молекул воздуха на высотах полета

ИСЗ); $\bar{S}_A$ — площадь поперечного сечения ИСЗ, перпендикулярного к вектору скорости V' спутника относительно атмосферы; ρ — плотность воздуха на высоте полета. Если ввести возмущающий параметр σ_A по формуле

$$\sigma_A = \frac{1}{2} C_D \frac{\bar{S}_A}{m}, \quad (48.2)$$

где m — масса спутника, то на основании второго закона Ньютона вектор возмущающего ускорения будет

$$w_A = -\sigma_A \rho V' V'. \quad (48.3)$$

Рассмотрим проекции вектора w_A на оси геоцентрической инерциальной системы координат $x y z$ (рис. 55). В первом приближении обычно принимается, что угловая скорость вращения атмосферы равна угловой скорости вращения Земли. Вектор скорости вращения атмосферы V_A направлен по касательной к параллели в текущей точке. Длина этого вектора

$$V_A = r \omega_{\oplus} \cos \delta. \quad (48.4)$$

Векторы V и V_A складываются по правилу параллелограмма. Тогда, если β_A — угол между векторами V и V_A , то для длины вектора V' получим формулу

$$V'^2 = V^2 + V_A^2 + 2VV_A \cos \beta_A. \quad (48.5)$$

Проекции V' на оси геоцентрической системы можно записать так:

$$V'_x = \dot{x} + V_{Ax}; \quad V'_y = \dot{y} + V_{Ay}; \quad V'_z = \dot{z} + V_{Az}, \quad (48.6)$$

причем проекция $V_{Az} = 0$, так как вектор V_A лежит в плоскости, параллельной плоскости экватора. Проекции V_{Ax} и V_{Ay} равны

$$\begin{aligned} V_{Ax} &= r \omega_{\oplus} \cos \delta \cos(\alpha + 90^\circ) = -y \omega_{\oplus}; \\ V_{Ay} &= r \omega_{\oplus} \cos \delta \sin(\alpha + 90^\circ) = x \omega_{\oplus}. \end{aligned} \quad (48.7)$$

Тогда на основании формул (48.3), (48.6) и (48.7) составляющие возмущающего ускорения от атмосферного торможения вдоль геоцентрических осей можно записать так:

$$\begin{pmatrix} w_{Ax} \\ w_{Ay} \\ w_{Az} \end{pmatrix} = -\sigma_A \rho V' \begin{pmatrix} \dot{x} - y \omega_{\oplus} \\ \dot{y} + x \omega_{\oplus} \\ \dot{z} \end{pmatrix}, \quad (48.8)$$

где V' вычисляется по формуле (48.5), в которой V^2 определяется интегралом энергии, а $\cos \beta_A$ — суммой произведений направляющих косинусов векторов V и V_A :

$$\begin{aligned} \cos \beta_A &= \frac{\dot{x}}{V} \cos(\alpha + 90^\circ) + \frac{\dot{y}}{V} \sin(\alpha + 90^\circ) + \frac{\dot{z}}{V} \cdot 0 = \\ &= V^{-1} (-\dot{x} \sin \alpha + \dot{y} \cos \alpha). \end{aligned} \quad (48.9)$$

лютная температура; $\bar{m}$ — средняя статистическая масса частицы — молекулы воздуха; $\bar{g}$ — среднее ускорение силы тяжести на данной высоте.

Полное значение плотности ρ можно представить так:

$$\rho = \rho_1 + \Delta\rho_{\phi} + \Delta\rho_{1,2d} + \Delta\rho_d + \Delta\rho_{1,2g} + \Delta\rho_g + \Delta\rho_{11g} + \Delta\rho_{\odot\oplus} + \Delta\rho_{\text{хим}}. \quad (48.14)$$

Поправки $\Delta\rho$ здесь имеют следующий смысл (перечислим в том порядке, в каком записаны слагаемые в формуле): поправка за эллиптичность атмосферных слоев, полусуточные вариации плотности, суточные, полугодовые, годовые, 11-летние вариации плотности; поправка, вызванная вариациями солнечной активности и влиянием магнитных бурь; поправка за изменение химического состава атмосферы. Современные модели атмосферы учитывают в основном все перечисленные виды поправок. Значения плотности в них даются как в виде таблиц, так и в виде формул. Основными аргументами в этих моделях для учета перечисленных поправок являются: высота точки над поверхностью Земли, широта точки, местное солнечное время, склонение Солнца, экзосферическая температура, индексы, характеризующие поток солнечного излучения на волне 10,7 см, геомагнитный индекс. Одной из наиболее широко применяемых сейчас моделей атмосферы такого типа является модель CIRA-72 (химический состав воздуха не учитывается) [13, 16]. Существует несколько более новых моделей, разработка которых была направлена на уточнение предыдущей модели.

За верхнюю границу атмосферы можно условно считать высоту около 2000 км над поверхностью Земли. Общий характер изменения плотности и шкалы высот указан на рис. 56. Неучет поправок в формуле (48.14) может привести к ошибке в значении плотности до двух порядков. Наиболее существенны значения возмущающих ускорений в диапазоне высот от 150 до 1000 км. Ниже 150 км сила торможения существенно увеличивается и качественно меняется — появляются нелинейные эффекты вследствие возникновения ударной волны перед спутником. В результате время существования ИСЗ оказывается очень малым. Поэтому движение ИСЗ на высотах, меньших 150 км, за редкими исключениями обычно не рассматривается. Точность же имеющихся моделей атмосферы пока не позволяет в диапазоне от 150 до 1000 км учитывать атмосферное торможение с точностью, соответствующей наивысшей современной точности наблюдений спутников. Поэтому для решения динамических задач космической геодезии предпочтительнее заатмосферные спутники либо спутники не ниже 1000 км с очень малым отношением поверхности к массе, приводящим к малым значениям возмущающего параметра, — так называемые тяжелые спутники. Более низкие спутники целесообразнее использовать для решения геометрических задач космической геодезии, когда ИСЗ не-

пользуется как высокая визирная цель, одновременно видимая с нескольких пунктов, и высокоточного учета возмущений не требуется.

§ 49. МАЛЫЕ ВОЗМУЩАЮЩИЕ ФАКТОРЫ

Существует ряд факторов, влияние которых находится на пределе или за пределами современной точности наблюдений. Рассмотрим некоторые из них.

Возмущающая часть гравитационного потенциала атмосферы имеет порядок 10^{-9} — 10^{-10} . Нестационарность атмосферы приводит к малоизученным вариациям указанных величин. На большинство высоких геодезических спутников этот фактор практически не влияет. Гравитационный же параметр атмосферы $\mu_A \sim 0,9 \cdot 10^{-6}$ м, определяющий центральную часть гравитационного потенциала атмосферы, обычно включается в геоцентрическую гравитационную постоянную.

Электромагнитные возмущающие ускорения возникают, когда заряженный ИСЗ пересекает силовые линии магнитного поля Земли. Вектор возникающей в данном случае возмущающей силы — обобщенной силы Лоренца — определяется выражением

$$\mathbf{F}_Л = \rho_s [(\mathbf{V} \times \mathbf{B}) + \mathbf{E}_s] + \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \sigma_s (\mathbf{E}_s \times \mathbf{B}), \quad (49.1)$$

где ρ_s — плотность электростатического заряда на поверхности спутника; $\mathbf{B}$ — вектор магнитной индукции; $\mathbf{E}_s$ — вектор напряженности электростатического поля в магнитосфере Земли; $\mathbf{j}$ — плотность индуцированного тока в контуре ИСЗ — магнитосфера; σ_s — электропроводность среды; $\mathbf{V}$ — вектор орбитальной скорости. Расчеты показывают, что сила $\mathbf{F}_Л$ может вызвать заметные возмущения, если спутник несет заряд, соответствующий потенциалу относительно нейтральной плазмы по крайней мере около сотни вольт. Наблюдения показывают, что в большинстве случаев этот потенциал, по-видимому, гораздо меньше. Однако иногда — во время геомагнитных суббурь, когда при замещении в магнитосфере холодной плазмы горячей поверхность ИСЗ бомбардируется частицами высоких энергий и жесткими ультрафиолетовыми квантами, — спутник на короткое время может получить потенциал до $2 \cdot 10^4$ В. Это может привести к дополнительному смещению спутника вдоль орбиты со скоростью 0,2 м/сут. Однако сразу по окончании суббури спутник быстро теряет этот потенциал и происходит своего рода короткое замыкание на магнитосферу. Эти возмущения целесообразно выявлять из наблюдений.

Эффекты общей теории относительности приводят к смещению перицентра орбиты спутника не более чем на $15''$ в год. Из наблюдений такие величины не выявляются, а потому и не учитываются.

ВОЗМУЩЕНИЯ В ДВИЖЕНИИ ИСЗ

§ 50. КЛАССИФИКАЦИЯ ТИПОВ ВОЗМУЩЕНИЙ,
ВЫЗЫВАЕМЫХ ПОТЕНЦИАЛЬНЫМИ ФАКТОРАМИ

Для изучения потенциальных возмущающих факторов, действующих на ИСЗ, достаточно использовать уравнения Лагранжа (33.10). Обозначим

$$\mathfrak{A}_n = \begin{pmatrix} a \\ e \\ i \end{pmatrix}; \quad \mathfrak{A}_y = \begin{pmatrix} M \\ \Omega \\ \omega \end{pmatrix} \quad (50.1)$$

— векторы позиционных $\mathfrak{A}_n$ и угловых $\mathfrak{A}_y$ элементов орбиты. Матрицу Лагранжа обозначим так:

$$L = L(\mathfrak{A}_n). \quad (50.2)$$

В этих обозначениях решение уравнений Лагранжа в первом приближении (см. § 36) можно записать следующим образом:

$$\mathfrak{A}_n - \mathfrak{A}_{n_0} = \delta \mathfrak{A}_n = L(\mathfrak{A}_{n_0}) \int_{t_0}^t \left(\frac{\partial R}{\partial \mathfrak{A}_y} \right)_{\mathfrak{A}_{y_0} \mathfrak{A}_{n_0}} dt; \quad (50.3)$$

$$\mathfrak{A}_y - \mathfrak{A}_{y_0} = \delta \mathfrak{A}_y = -L^T(\mathfrak{A}_{n_0}) \int_{t_0}^t \left(\frac{\partial R}{\partial \mathfrak{A}_n} \right)_{\mathfrak{A}_{y_0} \mathfrak{A}_{n_0}} dt,$$

где $\mathfrak{A}_{n_0}$, $\mathfrak{A}_{y_0}$ — начальные значения векторов элементов орбиты; $\delta \mathfrak{A}_n$, $\delta \mathfrak{A}_y$ — возмущения векторов элементов орбиты в первом приближении.

Так как потенциальные возмущающие факторы обладают качественно одинаковыми физическими свойствами, то возмущающая функция любого из них разлагается в тригонометрический ряд Пуассона относительно угловых элементов орбиты с коэффициентами, зависящими от позиционных элементов, как и возмущающий геопотенциал (45.2). Исходя из (45.2), запишем разложение произвольной возмущающей функции:

$$R = A_0(aei) + \sum_k A_k(aei) \cos(\alpha_k t + \beta_k \omega + \gamma_k \Omega + \delta_k M_0 + \varepsilon_k); \quad (50.4)$$

где k — целые числа; α_k , β_k , γ_k , δ_k , ε_k — произвольные вещественные числа (они могут быть и целыми). Производные от R обозначим:

$$\frac{\partial R}{\partial \mathfrak{A}_y} = - \sum_k (\beta, \gamma, \delta) A_k(aei) \sin(\alpha_k t + \beta_k \omega + \gamma_k \Omega + \delta_k M_0 + \varepsilon_k); \quad (50.5)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \Theta_n} = A'_{0\Theta}(aei) + \sum_k A'_{k\Theta}(aei) \cos(\alpha_k t + \beta_k \omega + \gamma_k \Omega + \delta_k M_0 + \varepsilon_k),$$

где β, γ, δ — любой из коэффициентов $\beta_k, \gamma_k, \delta_k$; A' — производные коэффициентов разложения R . Полагая в первом приближении элементы орбиты равными их постоянным начальным значениям, на основании формул (50.3) получим выражения для возмущений позиционных и угловых элементов:

$$\delta \Theta_n = L(aei) \sum_k \frac{(\beta, \gamma, \delta) A_k(aei)}{\alpha_k} \cos(\alpha_k t + \beta_k \omega + \gamma_k \Omega + \delta_k M_0 + \varepsilon_k) + C_n, \quad (50.6)$$

$$\delta \Theta_y = -L^T(aei) A'_{0\Theta}(aei) t - L^T(aei) \sum_k \frac{A'_{k\Theta}(aei)}{\alpha_k} \sin(\alpha_k t + \beta_k \omega + \gamma_k \Omega + \delta_k M_0 + \varepsilon_k) + C_y,$$

где C_n, C_y — векторы постоянных интегрирования.

Из формул (50.6) следует, что возмущения элементов орбиты в первом приближении содержат члены, пропорциональные времени t , — так называемые вековые возмущения, и члены, периодические относительно времени t , — периодические возмущения. Периодические возмущения делятся на три типа в зависимости от величины делителя α_k : 1) $\alpha_k \geq 1$ — короткопериодические возмущения, период которых не превышает периода оборота спутника; 2) $\alpha_k < 1$ — долгопериодические возмущения, период которых больше периода оборота ИСЗ; 3) $\alpha_k \rightarrow 0$ — резонансные возмущения — возмущения с существенно большими амплитудами и периодами, являющиеся предельным случаем долгопериодических возмущений.

Отметим, что при движении в потенциальных полях вековые возмущения содержатся лишь в угловых элементах орбиты. Выпишем уравнение Лагранжа для большой полуоси орбиты:

$$\dot{a} = \frac{2}{\tilde{n}a} \frac{\partial R}{\partial M}, \quad (50.7)$$

или

$$\dot{a} = \frac{2}{\tilde{n}^2 a} \frac{\partial R}{\partial t}, \quad (50.8)$$

где $\tilde{n}$ — среднее движение.

Подставим в (50.8) разложение (50.4) и проинтегрируем в первом приближении, получим

$$\delta a = \frac{2}{\tilde{n}^2 a} \left[A_0 + \sum_k A_k \cos(\alpha_k t + \beta_k \omega + \gamma_k \Omega + \delta_k M_0 + \varepsilon_k) - R_0 \right]; \quad (50.9)$$

где R_0 — значение возмущающей функции в начальный момент. В (50.9) нет ни членов, пропорциональных t , ни членов, содержащих делитель α_k . Отсюда следует, что при движении в потенциальных полях в большой полуоси орбиты в первом приближении содержатся лишь короткопериодические возмущения. Это обобщенная формулировка теоремы Лапласа об отсутствии вековых возмущений первого порядка в большой полуоси. Во втором приближении в большой полуоси также нет вековых возмущений. Это было доказано Пуассоном.

Интегрирование уравнений Лагранжа во втором, третьем и последующих приближениях приведет, очевидно, к появлению дополнительных вековых и периодических возмущений, уточняющих возмущения первого порядка. Кроме того, прямое применение метода Пикара или метода малого параметра приведет, начиная со второго приближения, к появлению членов, зависящих от $t \sin t$, $t \cos t$ и т. п. Такие возмущения называются смешанными.

Так как возмущающие параметры — величины малые, то возмущения 1-го порядка (1-го приближения) обычно описывают более 90 % полных возмущений. Поэтому в космической геодезии в большинстве случаев достаточно пользоваться аналитическими выражениями для возмущений именно 1-го порядка. Как уже отмечалось, все остаточные возмущения и возмущения, не связанные с геопотенциалом, целесообразнее учитывать путем численного интегрирования.

§ 51. ВОЗМУЩЕНИЯ В ДВИЖЕНИИ ИСЗ ОТ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ФАКТОРОВ

Приняты обозначения: $\mathcal{E}$ — любой из элементов орбиты,

$\delta\bar{\mathcal{E}} = \bar{\mathcal{E}}t$ — вековые, $\delta\tilde{\mathcal{E}}$ — долгопериодические, $\delta\tilde{\mathcal{E}} +$ — резонансные, $\delta\check{\mathcal{E}}$ — короткопериодические возмущения этого элемента.

(51.1)

Здесь $\dot{\mathcal{E}}$ — скорость векового изменения элемента, определяемая коэффициентом при t во второй формуле (50.6).

Возмущения, вызываемые геопотенциалом

Вековые возмущения. Для получения формул, определяющих вековые возмущения, нужно сначала осреднить возмущающую функцию по быстрой переменной M в соответствии с правилами, описанными в § 36, положив $k=m=j=0$; $n=2(s+q)$. Тогда все периодические члены обратятся в нуль, и осредненная возмущающая функция примет вид

$$\bar{R}_{\oplus} = -\mu \sum_{g=1}^{\infty} J_{2g} \frac{a_e^{2g}}{a^{2g+1}} \sum_{s=0}^g \frac{[2(2g-s)-1]!}{2^{2(2g-s)-1} (2g-s)!} \times$$

$$\times \sin^{2g-2s} i \left(\frac{2g-2s}{g-s} \right) X_0^{-2g-1,0}(e). \quad (51.2)$$

Отсюда следует, что вековые возмущения в угловых элементах вызываются четными зональными гармониками геопотенциала. Это объясняется тем, что осреднение приводит к отбрасыванию периодических членов. Таким образом, выражение (51.2) — это свободный член $A_0(aei)$ ряда Пуассона (50.4). Но свободные члены в разложении $R_\oplus$ (45.2) дают лишь функции Лежандра $P_{nk}(\sin \varphi)$, начинающиеся с $\sin \varphi$ в нулевой степени. Такими функциями являются лишь четные полиномы Лежандра.

Основную эволюцию орбиты определяют вековые возмущения, вызываемые второй зональной гармоникой геопотенциала. Полагая в (51.2) $g=1$, подставляя результат во вторую формулу (50.6), с учетом явного выражения для матрицы Лагранжа и формулы (33.14) после интегрирования по t с постоянными начальными значениями элементов орбиты получим:

$$\begin{aligned} \delta \bar{\Omega}_{J_2} &= \dot{\bar{\Omega}}_{J_2}(t-t_0) = -\frac{3}{2} J_2 \left(\frac{a_e}{p} \right)^2 \cos i \tilde{n}(t-t_0); \\ \delta \bar{\omega}_{J_2} &= \dot{\bar{\omega}}_{J_2}(t-t_0) = \frac{3}{4} J_2 \left(\frac{a_e}{p} \right)^2 (5 \cos^2 i - 1) \tilde{n}(t-t_0); \\ \delta \bar{M}_{J_2} &= \dot{\bar{M}}_{J_2}(t-t_0) = \left\{ \frac{3}{4} J_2 \left(\frac{a_e}{p} \right)^2 \frac{(3 \cos^2 i - 1)}{\sqrt{1-e^2}} \tilde{n} + \right. \\ &+ \frac{3}{\sqrt{\mu a}} \left[R_{0J_2} + \mu J_2 \frac{a_e^2}{a^3} \sum_{s=0}^1 \frac{(3-2s)!(2-2s)!}{2^{3-2s}(2-s)![(1-s)!]^2} X_0^{-3,0}(e) \right] \Bigg\} \times \\ &\times (t-t_0), \end{aligned} \quad (51.3)$$

где $\tilde{n}$ — среднее движение, а коэффициент Ганзена равен

$$X_0^{-3,0}(e) = (1-e^2)^{-3/2}; \quad (51.4)$$

R_0 — начальное значение R_{J_2} . Здесь приводится возмущение не начального $\delta \bar{M}_0$ (это — первый член в третьей формуле (51.3), а текущего $\delta \bar{M}$ значения средней аномалии, так как на практике именно с этим значением приходится иметь дело.

Эволюция орбиты, определяемая формулами (51.3):

линия узлов движется в сторону, противоположную орбитальному движению, причем $\delta \Omega_{J_2} = 0^\circ$ при $i = 90^\circ$; $\delta \Omega_{J_2} \rightarrow \max$ при $i \rightarrow 0$;

$\delta \omega_{J_2} = 0$ при $5 \cos^2 i - 1 = 0$, т. е. при $i_k \approx 63,4^\circ$; тем самым линия апсид имеет прямое движение при $0 \leq i < 63,4^\circ$ и обратное — при $63,4 < i \leq 90^\circ$. При высоте ИСЗ над поверхностью Земли около 1000 км, наклоне орбиты $i \sim 65^\circ$ и эксцентриситете $e \sim 0,01$

скорости движения линии узлов и линии апсид следующие:

$$\dot{\bar{\Omega}}_{J_2} \sim -2,7^\circ/\text{сут}, \quad \dot{\bar{\omega}}_{J_2} \sim -0,5^\circ/\text{сут}.$$

Суммарные вековые возмущения можно записать так:

$$\delta\vartheta_y = \sum_{g=1}^{\infty} \delta\vartheta_{J_{2g}} = \left[\sum_{g=1}^{\infty} \dot{\bar{\vartheta}}_{J_{2g}} \right] (t - t_0). \quad (51.5)$$

Из формул (45.2) и (45.1) следует, что структура каждого из членов ряда (51.5) та же, что и формул (51.3). Поэтому можно записать:

$$\dot{\bar{\vartheta}}_y = \alpha_2 J_2 + \alpha_4 J_4 + \alpha_6 J_6 + \dots, \quad (51.6)$$

где α_{2g} — функции a, e, i . Явный вид коэффициентов $\alpha_4, \alpha_6 \dots$ может быть получен по только что описанному правилу.

Долгопериодические возмущения от зональной части геопотенциала. Долгопериодическая часть возмущающей функции от зональной части геопотенциала получается, если в общем разложении $R_\oplus$ положить $k=m=0$; $j=0$, $n \neq 2(s+q) \neq 0$ осреднить по M и подставить в результат вместо ω его возмущенное значение с учетом главного векового члена

$$\bar{\omega} = \omega_0 + \dot{\bar{\omega}}_{J_2} (t - t_0) \quad (51.7)$$

по второй формуле (51.3). Тогда

$$\tilde{R}_\oplus = -\mu \sum_{n=2}^{\infty} J_n \frac{a_e^n}{a^{n+1}} \sum_{s=0}^{E(n/2)} A_{0s}^{n0}(i) \sum_{q=0}^{n-2s} \binom{n-2s}{q} \bar{H}_{0sq0}^{n0}, \quad (51.8)$$

где

$$A_{0s}^{n0}(i) = [2(n-s)-1]! \{2^{2(n-s)-1} (n-s)!\}^{-1} \sin^{n-2s} i; \quad (51.9)$$

$$\bar{H}_{0sq0}^{n0} = X_0^{-n-1, -n+2(s+q)}(e) \cos \{[n-2(s+q)](90^\circ - \bar{\omega})\}. \quad (51.10)$$

Подстановка $\tilde{R}_\oplus$ в (50.3) после интегрирования и введения упрощающих обозначений дает формулы для долгопериодических возмущений во всех элементах орбиты, кроме большой полуоси. Приведем первые члены этих формул для элементов e, i, Ω, ω . Формулу для текущей средней аномалии опустим ввиду ее большой громоздкости; она имеет ту же структуру. Кроме того, для изучения геопотенциала применяются именно перечисленные элементы, а среднюю аномалию выгоднее использовать для изучения атмосферного торможения и свойств верхней атмосферы.

$$\begin{pmatrix} e \delta \tilde{e} \\ \delta \tilde{i} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\mu a} \dot{\bar{\omega}}_{J_2}} \begin{pmatrix} -\sqrt{1-e^2} \\ \text{ctg } i \\ \sqrt{1-e^2} \end{pmatrix} [\tilde{R}_1 \sin \bar{\omega} + \tilde{R}_3 \sin 3\bar{\omega} + \dots]$$

$$\dots - \tilde{R}_2 \cos 2\bar{\omega} + \tilde{R}_4 \cos 4\bar{\omega} - \dots],$$

$$\begin{aligned} \left(e^{i\delta\tilde{\Omega}} \right) = \frac{1}{\sqrt{\mu a} \dot{\bar{\omega}}_{J_2}} \left(\frac{\operatorname{cosec} i}{\sqrt{1-e^2}} \right) \left[-\frac{\tilde{R}'_{1i}}{\tilde{R}'_{1e}} \cos \bar{\omega} - \right. \\ \left. - \frac{1}{3} \frac{\tilde{R}'_{3i}}{\tilde{R}'_{3e}} \cos 3\bar{\omega} - \dots - \frac{1}{2} \frac{\tilde{R}'_{2i}}{\tilde{R}'_{2e}} \sin 2\bar{\omega} + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \frac{\tilde{R}'_{4i}}{\tilde{R}'_{4e}} \sin 4\bar{\omega} - \dots \right], \end{aligned} \quad (51.11)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{R}_1 = \{ \tilde{J}_3 [a_{30}(b_{301} + b_{302}) + a_{31}(b_{310} + b_{311})] + \tilde{J}_5 [a_{50}(b_{502} + b_{503}) + \\ + a_{51}(b_{511} + b_{512}) + a_{52}(b_{520} + b_{521})] + \dots \}; \\ \tilde{R}_3 = \{ \tilde{J}_3 [a_{30}(b_{300} + b_{303})] + \tilde{J}_5 [a_{50}(b_{501} + b_{504}) + \\ + a_{51}(b_{510} + b_{513})] + \dots \}; \\ \dots (\tilde{R}_{>5} \text{ начинается с } \tilde{J}_5 \text{ и т. д.}) \end{aligned} \quad (51.12)$$

$$\begin{aligned} \tilde{R}_2 = \{ \tilde{J}_2 [a_{20}(b_{200} + b_{202})] + \tilde{J}_4 [a_{40}(b_{401} + b_{403}) + \\ + a_{41}(b_{410} + b_{412})] + \dots \}; \end{aligned} \quad (51.13)$$

$$\begin{aligned} \tilde{R}_4 = \{ \tilde{J}_4 [a_{40}(b_{400} + b_{404})] + \tilde{J}_6 [a_{60}(b_{601} + b_{605}) + a_{61}(b_{610} + \\ + b_{614})] + \dots \}; \end{aligned}$$

$$\tilde{J}_n = -\mu J_n \frac{a_e^n}{a^{n+1}}; \quad (51.14)$$

$$a_{ns} = A_{os}^{no}(i); \quad b_{nsq} = \binom{n-2s}{q} X_0^{-n-1, -n+2(s+q)}(e); \quad (51.15)$$

$\tilde{R}'_{ni}$ и $\tilde{R}'_{ne}$ — производные от $\tilde{R}_n$ по наклону i и эксцентриситету e . Четные функции $\tilde{R}_{2g}$ иногда могут быть отброшены, так как их величины малы по сравнению с нечетными, а некоторые обращаются в нуль. Ограничимся этим указанием, так как доказательство его весьма громоздко — оно связано с некоторыми специальными свойствами коэффициентов Ганзена, что выходит за рамки данного учебника.

Для нас главным в этих формулах является следующее. Долгопериодические возмущения в угловых элементах могут быть записаны так:

$$\delta\tilde{\Omega}_y = F_{\Delta y_1} \cos \bar{\omega} + F_{\Delta y_2} \cos 3\bar{\omega} + \dots + \Phi_{\Delta y_2} \sin 2\bar{\omega} \dots, \quad (51.16)$$

а в позиционных —

$$\delta\tilde{\Theta}_n = F_{\Theta_{n_1}} \sin \bar{\omega} + F_{\Theta_{n_3}} \sin 3\bar{\omega} + \dots + \Phi_{\Theta_{n_2}} \cos 2\bar{\omega} + \dots, \quad (51.17)$$

где F и Φ — амплитуды возмущений, которые, в свою очередь, можно записать следующим образом (индексы Θ_y и Θ_n опустим):

$$\begin{aligned} F_1 &= \beta_3^{(1)} J_3 + \beta_5^{(1)} J_5 + \dots; & F_3 &= \beta_3^{(3)} J_3 + \beta_5^{(3)} J_5 + \dots; \\ F_5 &= \beta_5^{(5)} J_5 + \dots; & & \\ \Phi_{2g} &= \beta_{2g}^{(2g)} J_{2g} + \beta_{2g+2}^{(2g)} J_{2g+2} + \dots; & g &= 1, 2, 3, \dots, \end{aligned} \quad (51.18)$$

где коэффициенты β — известные функции элементов a, e, i . Поэтому амплитуды F и Φ — известные функции a, e, i , которыми пользуются для составления уравнений поправок при изучении геопотенциала по возмущениям орбит ИСЗ (см. раздел 6).

Формулы (51.11) содержат делитель $\bar{\omega}_{J_2}$, появляющийся при вычислении интегралов от $\cos\{[n-2(s+q)](90^\circ - \omega_0 - \dot{\omega}t)\}$. Этот делитель обращается в нуль при наклоне орбиты $i=63,43494^\circ \dots$, и вблизи этого значения наклона долгопериодические возмущения имеют особенно большие амплитуды и периоды. Поэтому наклон $i=63,43494^\circ \dots$ называется критическим. Не следует думать, что возмущения в этом случае станут бесконечно велики. Формулы (51.11) содержат возмущения лишь первого порядка. Если к ним присоединить возмущения во всех остальных приближениях, то совокупность делителей в возмущениях высших порядков может ослабить или вообще погасить возникающий резонанс. Заметим, что математически в применении к ИСЗ данный вопрос пока исследован недостаточно. Кроме того, наличие делителя $\bar{\omega}_{J_2}$ показывает, что независимо от наклона орбиты долгопериодические возмущения имеют порядок $J_{n>2}/J_2 \sim 10^{-3}$, т. е. амплитуды этих возмущений того же порядка, что и скорости вековых движений угловых элементов под действием второй зональной гармоники.

Можно заключить, что наиболее крупными возмущениями являются вековые возмущения от четных зональных гармоник, так как они растут с течением времени, и долгопериодические возмущения от нечетных зональных гармоник. Поэтому перечисленные возмущения оказываются удобными для определения коэффициентов указанных гармоник геопотенциала.

Долгопериодические и резонансные возмущения от долго-ных гармоник геопотенциала. Долготная часть геопотенциала вековых возмущений не вызывает, так как вещественный множитель $j - k \frac{\omega_{\oplus}}{\tilde{n}}$ перед быстрой переменной M в разложении

$R_{\oplus}$ (§ 45) при $k \neq 0$, вообще говоря, число иррациональное. Фи-

зически это означает, что действие любой долгой гармоник на одну и ту же внешнюю точку вследствие вращения Земли оказывается периодическим.

В соответствии с правилами осреднения (§ 36) подставим в разложение $R_{\oplus}$ (§ 45) вместо угловых элементов их возмущенные значения с учетом вековых членов:

$$\begin{aligned}\bar{\Omega} &= \dot{\bar{\Omega}}_0 + \dot{\bar{\Omega}}_{J_2}(t-t_0); & \bar{\omega} &= \bar{\omega}_0 + \dot{\bar{\omega}}_{J_2}(t-t_0); \\ \bar{M} &= M_0 + \tilde{n}(t-t_0) + \dot{\bar{M}}_{J_2}(t-t_0).\end{aligned}\quad (51.19)$$

Выделим в $R_{\oplus}$ члены, пропорциональные $t-t_0$, записав долготную часть $R_{\oplus}$ так:

$$R_{\oplus k} = \sum_{nk} R_{nk}(a, e, i) \frac{C_{nk} \cos}{S_{nk} \sin} [A_{nk}(t-t_0) + B_{nk}], \quad (51.20)$$

где R_{nk} — коэффициенты разложения $R_{\oplus}$ при $k \neq 0$, а коэффициенты A_{nk} и B_{nk} имеют вид

$$\begin{aligned}A_{nk} &= \left(j - k \frac{\omega_{\oplus}}{\tilde{n}} \right) (\tilde{n} + \dot{\bar{M}}_{J_2}) + k \dot{\bar{\Omega}}_{J_2} + k \frac{\omega_{\oplus}}{\tilde{n}} \dot{\bar{M}}_{0J_2} - \\ &- [n - 2(m + s + q)] \dot{\bar{\omega}}_{J_2};\end{aligned}\quad (51.21)$$

$$\begin{aligned}B_{nk} &= k(\Omega_0 - S^{(0)}) + jM_0 - [n - 2(m + 1 + q)]\omega_0 + \\ &+ [n - k - 2(s + q)]90^\circ.\end{aligned}$$

Здесь $\dot{\bar{M}}_{0J_2}$ — первый член в третьей формуле (51.3). Подстановка (51.20) в формулы (50.3) после интегрирования по t для любого позиционного элемента Θ_n (кроме большой полуоси) и углового Θ_y дает:

$$\begin{aligned}\delta\Theta_n \quad L_{\Theta} &= \sum_{nk} \frac{R_{nk}}{A_{nk}} \times \\ \delta\Theta_y \quad (-L_{\Theta}^T) &\sum_{nk} \frac{R'_{nk}}{A_{nk}} \times \\ &\times \left\{ \begin{array}{cc} -\sin[A_{nk}(t-t_0) + B'_{nk}] & \cos[A_{nk}(t-t_0) + B'_{nk}] \\ \cos[A_{nk}(t-t_0) + B_{nk}] & \sin[A_{nk}(t-t_0) + B_{nk}] \end{array} \right\};\end{aligned}\quad (51.22)$$

$$R'_{nk} = \frac{\partial R_{nk}}{\partial \Theta_n}; \quad B'_{nk} = \frac{\partial B_{nk}}{\partial \Theta_y},$$

где под L_{Θ} понимаются соответствующие элементы матрицы Лагранжа. Подстановка в (51.22) явных значений всех коэффици-

циентов даст конкретные формулы для возмущений 1-го порядка в элементах орбиты от долготной части геопотенциала.

Долгопериодические возмущения мы будем иметь при $|A_{nk}| < 1$. Для космической геодезии наибольший интерес представляют резонансные возмущения, возникающие при

$$A_{nk} = 0. \quad (51.23)$$

Эти возмущения используются в космической геодезии для определения и уточнения коэффициентов долготных гармоник геопотенциала. Для определения условий резонанса отбросим в формуле для A_{nk} члены порядка $J_2 \sim 10^{-3}$. Тогда из (51.23) следует:

$$j/k = \omega_{\oplus} / \tilde{n}. \quad (51.24)$$

Это означает, что для возникновения резонансных возмущений угловая скорость вращения Земли и среднее движение спутника должны относиться как взаимно простые числа (представлять собой несократимую дробь). По формуле (51.24) можно установить величину большой полуоси орбиты, чтобы заданная долготная гармоника вызывала резонансные возмущения. Нужно, однако, иметь в виду, что строгое выполнение условия (51.23) вряд ли возможно хотя бы из-за действия других возмущений, которые это условие будут нарушать. Тем не менее, если специально выбирать значения больших полуосей орбит для заданных гармоник по условию (51.24), то по крайней мере первое время после вывода ИСЗ на орбиту мы будем иметь возмущения, весьма близкие к резонансным. При выборе резонансных значений больших полуосей в формуле (51.24) целесообразно заранее положить $j > 1$, чтобы амплитуды возмущений были наибольшими из возможных. При $j > 1$, если эксцентриситет орбиты мал, амплитуды возмущений могут оказаться малыми, так как они пропорциональны эксцентриситету в некоторой положительной степени. Если же орбита сильно вытянута, то ограничение $j = 1$ можно снять. Заменяя в (51.24) среднее движение его выражением $\tilde{n} = \frac{\sqrt{\mu}}{a \sqrt{a}}$ и положив $j = 1$; $\mu = 398\,600,5 \text{ км}^3/\text{с}^2$; $\omega_{\oplus} = 7,292115 \times 10^{-5}$, получим формулу для определения резонансных значений большой полуоси:

$$a^* = 42164,174 k^{-2/3} \text{ км}. \quad (51.25)$$

Эта формула пригодна лишь для значений второго индекса долготных гармоник $2 \leq k \leq 16$. Поэтому для реализации резонансов от гармоник с $k \geq 17$ целесообразно использовать орбиты с большими эксцентриситетами, чтобы в формуле (51.24) имело смысл задавать значения $j = 2, 3, 4, \dots$. В качестве примера приведем величины a^* для некоторых значений второго индекса:

k	2	6	10	14	16
a^* , км	26 561,8	12 769,6	9084,0	7258,7	6640,4
Период орбиты, ч	11,9673	3,9891	2,3934	1,7096	1,4959

Геодезических спутников с резонансными значениями больших полуосей пока специально не запускалось, за исключением 12-часовых и 24-часовых спутников связи. До настоящего времени коэффициенты долготных гармоник геопотенциала определялись и уточнялись по долгопериодическим возмущениям, близким к резонансным, возникающим в произвольных орбитах ИСЗ. Любой произвольной спутниковой орбите всегда соответствует некоторая долготная гармоника геопотенциала, вызывающая долгопериодические возмущения с амплитудами и периодами, намного большими (в среднем примерно в 300 раз), чем амплитуды и периоды других долгопериодических возмущений. Это означает, что делитель A_{nk} для данной гармоники заметно меньше делителей, соответствующих другим гармоникам. Такие возмущения можно назвать псевдорезонансными или почти резонансными. При значениях периодов обращения ИСЗ от 1,5 до 2 ч резонансные возмущения вызывают гармоники со значениями второго индекса $12 < k < 15$; для периодов от 3 до 4 ч — $6 < k < 9$; для 12-часового спутника — $2 < k < 3$.

Короткопериодические возмущения. Эти возмущения вызываются всеми гармониками геопотенциала во всех элементах орбиты ИСЗ. Короткопериодические возмущения — периодические функции средней аномалии и могут быть выражены по общим формулам (50.6); делитель $|\alpha_k| > 1$ в этих формулах больше единицы. Периоды возмущений меньше периода обращения ИСЗ (точнее, не превышают периода оборота), амплитуды не превышают амплитуд (коэффициентов) исходных выражений для производных возмущающей функции по элементам орбиты. Поэтому влияние короткопериодических возмущений на орбиту по величине обычно меньше влияния вековых и долгопериодических возмущений. По этой причине короткопериодические возмущения при обработке наблюдений ИСЗ лишь учитываются, для изучения же геопотенциала их не применяют.

Возмущения от других потенциальных факторов

По величине возмущения от других потенциальных факторов примерно в 1000 раз меньше возмущений, вызываемых второй зональной гармоникой. Они имеют порядок по крайней мере квадрата второй зональной гармоники. Характер действия этих факторов аналогичен действию геопотенциала: вековые возмущения содержат долготу узла, аргумент перигея и средняя аномалия; долгопериодические возмущения — все элементы орбиты, кроме большой полуоси; короткопериодические возмущения содержат все элементы орбиты. Аналитические выражения для возмущений от любого из факторов могут быть получены по формулам (50.6), в которые перед вычислением интегралов нужно подставить разложение возмущающей функции, характеризующей данный фактор. Вековые возмущения не возникают в двух случаях: при действии лунно-солнечного прилива и при

действии прямого светового давления, если спутник периодически заходит в земную тень. Здесь по своей физической природе действие указанных факторов является чисто периодическим. При решении задач космической геодезии применять аналитические формулы для учета возмущений от негеопотенциальных факторов чаще всего нецелесообразно из-за громоздкости этих формул. Это удобнее делать путем численного интегрирования. Основные аналитические формулы в явном виде от ряда негеопотенциальных факторов содержатся, например, в справочнике [15].

§ 52. ЭВОЛЮЦИЯ ОРБИТЫ ИСЗ ПОД ДЕЙСТВИЕМ АТМОСФЕРНОГО ТОРМОЖЕНИЯ

Атмосферное торможение — диссипативный возмущающий фактор, приводящий к уменьшению общей энергии системы Земля — спутник. Для геодезических целей целесообразно использовать либо внеатмосферные спутники, либо тяжелые спутники с высотами не ниже 1000 км, чтобы атмосферное торможение либо отсутствовало совсем, либо было весьма мало и его можно было бы относительно легко учесть. В последнем случае атмосферное торможение целесообразно учитывать путем численного интегрирования, включив в правые части дифференциальных уравнений возмущенного движения составляющие возмущающего ускорения вида (48.8). Однако главную часть атмосферных возмущений иногда удобно учесть по аналитическим формулам. Под главной частью атмосферных возмущений будем понимать возмущения, определяемые возмущающими ускорениями (48.10), без учета вращения атмосферы и без учета факторов, меняющих плотность воздуха.

В качестве исходных уравнений движения следует применить уравнения Ньютона (34.5). Обращаясь к этим уравнениям, прежде всего заметим, что так как в рассматриваемом приближении $e=0$, то долгота узла и наклон орбиты содержать атмосферных возмущений не будут. Если исходить из физической сущности явления — уменьшения общей энергии системы Земля — спутник, то можно утверждать, что атмосферное торможение в первую очередь приведет к уменьшению размеров орбиты. Тем самым большая полуось будет иметь отрицательное вековое возмущение, а это, в свою очередь, приведет к отрицательному вековому возмущению эксцентриситета — орбита будет не только уменьшаться в размерах, но и округляться. Вековое возмущение в большой полуоси приведет также к вековому возмущению среднего движения, а отсюда — к вековому возмущению средней аномалии. Рассмотрим эти возмущения.

Если выразить в (48.12) радиус-вектор по формуле $r=a(1-e \cos E)$, то высота h над уровнем перигея примет вид

$$h = ae(1 - \cos E). \quad (52.1)$$

Если также обозначить

$$\xi = \frac{ae}{H}, \quad (52.2)$$

то экспонента, входящая в формулу плотности (48.11), может быть разложена в ряд Фурье относительно эксцентрической аномалии:

$$\begin{aligned} \exp\left(-\frac{h}{H}\right) &= \exp(-\xi) \exp(\xi \cos E) = \\ &= I_0(\xi) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} I_n(\xi) \cos nE, \end{aligned} \quad (52.3)$$

коэффициенты которого $I_{n \geq 0}(\xi)$ — так называемые бесселевы функции чисто мнимого аргумента. Действительные значения функций I_0 и I_1 могут быть вычислены с помощью ряда

$$I_n(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{\xi}{2}\right)^{n+2k} [k!(n+k)!]^{-1}, \quad (52.4)$$

а последующие значения $I_2, I_3, \dots$ — по рекуррентной формуле

$$I_{n+1} = I_{n-1} - \frac{2n}{\xi} I_n. \quad (52.5)$$

Далее подставляют (52.3) в формулу для трансверсальной составляющей

$$T = -\sigma_A \rho_0 \exp\left(-\frac{h}{H}\right) V^2. \quad (52.6)$$

V^2 в первом приближении представляют через интеграл энергии кейлерова движения, разлагают его в ряд Фурье относительно эксцентрической аномалии и перемножают ряды для V^2 и $\exp(-h/H)$. Затем подставляют T в уравнения Ньютона для a и e , в которых $S=0, W=0$:

$$\dot{a} = 2 \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{a^2}{r} T; \quad \dot{e} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} (\cos v + \cos E) T; \quad (52.7)$$

разлагают $1/r$ и $(\cos v + \cos E)$ в тригонометрические ряды по E , перемножают эти ряды с рядом для T и выполняют осреднение по E . После интегрирования осредненных уравнений для a и e получают формулы для вековых возмущений:

$$\delta \bar{a}_A = \dot{\bar{a}}_A (t - t_0); \quad \delta \bar{e}_A = \dot{\bar{e}}_A (t - t_0), \quad (52.8)$$

где

$$\dot{a} = -\frac{1}{2} \sigma_A a^2 \tilde{n}_{\rho_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi\xi}} \left(1 + 2e + \frac{3}{2} e^2 + \right. \\ \left. + \frac{1-6e}{8\xi} + \frac{9}{128\xi^2} \right); \quad (52.9)$$

$$\dot{e}_A = \frac{I_1(\xi)}{I_0(\xi) + e I_1(\xi)} \cdot \frac{\dot{a}_A}{a}.$$

Возмущение среднего движения:

$$\delta \bar{n}_A = \dot{\bar{n}}_A(t-t_0) = -\frac{2}{3} \tilde{n} \frac{\dot{a}_A}{a} (t-t_0). \quad (52.10)$$

При вычислении вековых возмущений во втором приближении методом малого параметра (возмущения 2-го порядка) в долготе узла и аргументе перицентра появляются перекрестные вековые члены (§ 36), возникающие вследствие совместного действия второй зональной гармоники геопотенциала и атмосферного торможения. Эти члены имеют вид

$$\delta \bar{\Omega}_A = -\frac{3}{2} J_2 \left(\frac{a_e}{p} \right)^2 \frac{(7-8e)}{6} \cos i \delta \bar{n}_A(t-t_0); \quad (52.11)$$

$$\delta \bar{\omega}_A = \frac{3}{4} J_2 \left(\frac{a_e}{p} \right)^2 \frac{7-8e}{6} (4-5 \sin^2 i) \delta \bar{n}_A(t-t_0).$$

По величине эти возмущения примерно в тысячу раз меньше возмущений (52.8)–(52.10).

Наибольшие вековые возмущения содержит текущее значение средней аномалии. Так как

$$\delta M = \delta M_0 + \int_{t_0}^t \delta n dt, \quad (52.12)$$

то

$$\delta \bar{M}_A = \frac{1}{2} \dot{\bar{n}}_A(t-t_0)^2 + \delta \bar{M}_{0A}, \quad (52.13)$$

где при малых эксцентриситетах на основании уравнений Ньютона можно положить $\delta \bar{M}_{0A} = -\sqrt{1-e^2} \delta \bar{\omega}_A + \dots$

Из сказанного, в частности, следует, что при решении динамических задач космической геодезии с использованием внутриатмосферных ИСЗ во все уравнения поправок следует вводить члены вида $\Delta \ddot{e}_A(t-t_0)$, $\Delta \ddot{\Omega}_A(t-t_0)^2$, $\Delta \ddot{\omega}_A(t-t_0)^2$, $\Delta \ddot{M}_A(t-t_0)^2$, где $\Delta \ddot{e}_A$, $\Delta \ddot{\Omega}_A$, $\Delta \ddot{\omega}_A$, $\Delta \ddot{M}_A$ дополнительные неизвестные, характеризующие недостаточный учет атмосферного торможения.

Раздел 5.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ КОСМИЧЕСКОЙ ГЕОДЕЗИИ И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

Глава 16

СХЕМЫ ПОСТРОЕНИЯ СПУТНИКОВОЙ ТРИАНГУЛЯЦИИ И ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 53. ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ИСЗ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КООРДИНАТ НАЗЕМНЫХ ПУНКТОВ

Методы определения координат

К геометрическим задачам космической геодезии относят задачи определения положения точек земной поверхности или околоземного пространства в некоторой системе координат при заданной модели гравитационного поля Земли.

В настоящее время существуют и вполне отчетливо разделяются два направления применения ИСЗ для решения геодезических задач. Первое направление основано на использовании законов движения спутников и включает группу способов для совместного определения геофизических параметров Земли и координат наземных пунктов. Его часто называют динамическим методом космической геодезии.

Построение пространственных геодезических сетей с помощью синхронных наблюдений ИСЗ, при которых точное знание законов их движения не обязательно, составляет содержание второго направления, за которым утвердилось название геометрического метода космической геодезии.

Связь положения ИСЗ с некоторым наземным пунктом описывается выражением, которое легко установить из рис. 57:

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \rho_i, \quad (53.1)$$

где ρ_i — измеренный топоцентрический вектор; $\mathbf{r}$ — радиус-вектор ИСЗ; $\mathbf{R}_i$ — радиус-вектор наземного пункта. Выражение (53.1) показывает, что если известны векторы $\mathbf{r}$ и ρ , то по ним можно найти вектор $\mathbf{R}$, т. е. положение наземного пункта. Наоборот, располагая координатами наземного пункта и измеренным вектором, нетрудно найти положение ИСЗ. Поэтому выражение (53.1) часто называют основным уравнением космической геодезии. Несмотря на внешнюю простоту, его практическая реализация далеко не тривиальна и возможна в двух основных вариантах: 1) положение ИСЗ наблюдается синхронно с двух наземных пунктов или более; 2) данное положение ИСЗ наблюдается только с одного наземного пункта.

Для первого случая будем иметь:

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{r} - \rho_1; \quad \mathbf{R}_2 = \mathbf{r} - \rho_2,$$

или

$$\Delta \mathbf{R} = \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2 = \rho_2 - \rho_1, \quad (53.2)$$

где $\Delta \mathbf{R}$ — так называемый хордовый вектор, соединяющий два наземных пункта. Нетрудно представить сеть из хордовых векторов, распространенную на всю поверхность Земли или значительную ее часть.

При этом реализуется в чистом виде геометрический метод ее изучения. По своей природе этот метод является относительным, поскольку с его помощью устанавливается лишь взаимное положение наземных пунктов. Система координат в данном случае задается произвольно назначением конкретного радиуса-вектора $\mathbf{R}_0$ некоторому наземному пункту, принятому за начальный. Ясно, что положение любого другого пункта в этой же системе координат может быть получено с помощью хордовых векторов из очевидного выражения

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{R}_0 + \Sigma \Delta \mathbf{R}_i.$$

Если начальный пункт отнесен к определенному референц-эллипсоиду, то и вся система хордовых векторов будет связана с ним.

Необходимо указать, что поскольку радиус-вектор спутника не входит в выражение (53.2), то метод синхронных наблюдений не нуждается в точных сведениях об орбите и динамике полета ИСЗ.

Полезно также отметить, что в литературе геодезические сети, построенные по синхронным наблюдениям космических объектов, получили название космической триангуляции. В том случае, если объектами визирования служат только ИСЗ, то используется термин спутниковая триангуляция.

Положение существенно изменяется, если наблюдения ИСЗ были несинхронны или выполнены только с одного наземного пункта. В этом случае для реализации уравнения (53.1) необходимо располагать радиусом-вектором спутника $\mathbf{r}$, который обычно определяют с использованием теории движения ИСЗ.

Для каждого измеренного в некоторый момент топоцентрического вектора можно составить уравнение поправок

$$\rho_0 + d\rho = \rho_{\text{изм}} + v$$

или, с учетом (53.1),

$$d\mathbf{r} - d\mathbf{R} + [(\mathbf{r}_0 - \mathbf{R}_0) - \rho_{\text{изм}}] = v. \quad (53.3)$$

В этом уравнении вектор $d\mathbf{R}$ будет постоянным (вектор поправки к радиусу-вектору наземного пункта), вектор $d\mathbf{r}$, вследствие движения ИСЗ по орбите, каждый раз новым. Следовательно, задача совместного определения векторов $d\mathbf{R}$ и $d\mathbf{r}$ из системы уравнений вида (53.3) не имеет решения. Поэтому в качестве необходимых неизвестных принимают не координаты вектора $\mathbf{r}$, а параметры орбиты. Из теории движения известно, что вектор $\mathbf{r}$ можно определить, если заданы элементы орбиты и момент времени t . Обозначим обобщенно параметры орбиты через $q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6$, тогда радиус-вектор $\mathbf{r}$ можно представить некоторой функцией

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_i), \quad i = 1, 2, \dots, 6 \quad (53.4)$$

и

$$d\mathbf{r} = \sum_1^6 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} dq_i. \quad (53.5)$$

С учетом (53.5) выражение (53.3) запишется в виде

$$\sum_1^6 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} dq_i - d\mathbf{R} + \mathbf{l} = \mathbf{v}. \quad (53.6)$$

В последнее выражение входит девять неизвестных: шесть поправок к элементам орбиты и три поправки в координаты наземного пункта. Таким образом, казалось бы достаточно выполнить девять или более наблюдений на спутник, чтобы получить систему уравнений, решение которой даст значения искомых параметров. Однако такая постановка задачи оказывается упрощенной. Дело в том, что ньютоновская сила, действующая на спутник, является главной, но не единственной. Кроме нее на спутник воздействуют сжатие Земли, аномалии гравитационного поля, лунно-солнечное притяжение и т. д. Следовательно, все элементы орбиты будут функциями возмущающих сил и, в конечном счете, функциями времени сложного вида. Выражая поправки в элементы орбиты dq_i , входящие в (53.6), через параметры, создающие возмущения, получим систему уравнений динамического метода космической геодезии, из решения которой определяются совместно и система параметров, и координаты наземных пунктов.

Однако если модели гравитационного поля Земли и других действующих сил известны или заданы, то дело сведется к определению элементов орбиты (более точно — к определению начальных условий мерных дуг) и координат наземных пунктов. Этот частный случай динамического метода, при котором геофизические параметры считаются известными и выступают как исходные данные, получил название орбитального метода построения спутниковых геодезических сетей. В такой постановке описанный метод является разновидностью геометриче-

ского. Сравнивая его со спутниковой триангуляцией, полезно отметить, что последняя характеризуется высокой точностью относительного положения наземных пунктов в некоторой референц-системе координат. Напротив, в орбитальном методе относительные положения пунктов определяются с несколько меньшей точностью, но зато в геоцентрической системе координат, в которой задан земной потенциал. Для решения геометрических задач геодезии находят применение оба эти метода и их целесообразные комбинации.

Принципиальные схемы построения спутниковой триангуляции

Спутниковой триангуляцией называют пространственную геодезическую сеть, элементы которой получены по измеренным синхронно с разных наземных станций сферическим координатам направлений на ИСЗ. Для задания масштаба и повышения точности спутниковой триангуляции в разных ее частях должны быть выполнены линейные измерения (т. е. определены расстояния, разности расстояний или радиальные скорости).

Отличительной особенностью спутниковой триангуляции является то обстоятельство, что исходные и определяемые наземные пункты не имеют непосредственной связи между собой. Связь между ними осуществляется через некоторые фиксированные положения ИСЗ на орбите. Очевидно, что для определения положения неизвестного наземного пункта необходимо установить несколько таких связей. В соответствии с этим различают схемы построения спутниковой триангуляции с синхронизацией на двух пунктах и схемы с синхронизацией на трех и более наземных пунктах.

При спутниковой триангуляции с синхронизацией на трех пунктах по наблюдениям с исходных пунктов A , B (рис. 58) сначала определяются координаты ИСЗ из решения прямых пространственных засечек. Далее положения ИСЗ s_1 и s_2 рассматриваются как исходные пункты, используя которые, определяют положение пункта P обратной засечкой. Поэтому изложенный способ называют способом засечек.

Вариант построения спутниковой триангуляции, в котором синхронные группы состоят только из двух направлений, в организационном отношении является самым простым. Здесь возможны следующие случаи:

1) для каждой пары пунктов, включающей в себя один исходный и один определяемый, наблюдается два положения ИСЗ (рис. 59). Наименьшее число исходных пунктов, позволяющее определить точку с неизвестным положением, равно двум;

2) для каждой пары пунктов наблюдается только одно положение ИСЗ (рис. 60); минимальное число исходных пунктов равно трем.

В первом случае направления As_1 и Ps_1 , измеренные синхронно, зафиксируют в пространстве плоскость Q_1 , которую на-

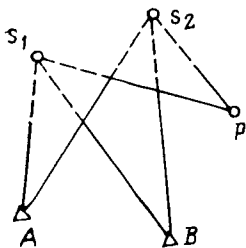


Рис. 58. Метод засечки

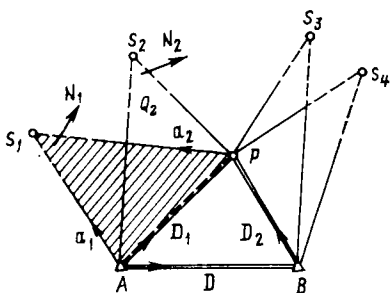


Рис. 59. Способ хорд

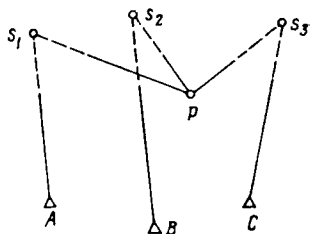


Рис. 60. Способ плоскостей

зывают плоскостью синхронизации. Направления, измеренные на спутник s_2 , позволяют получить в пространстве плоскость Q_2 . В свою очередь, пересечение двух плоскостей определит линию (хорду) AP , которая лежит в теле Земли и соединяет исходный пункт A с определяемым P . Из наблюдений ИСЗ на пунктах B и P будет получена вторая хорда BP . Положение пункта P может быть определено засечкой из хорд AP и BP . В соответствии с этим данный способ построения спутниковой триангуляции называют способом хорд.

В фигуре спутниковой триангуляции (см. рис. 60) с исходного и определяемого пунктов наблюдается только одно положение ИСЗ. Эти наблюдения дают возможность составить уравнение плоскости. Наблюдения на двух других исходных пунктах, выполненные синхронно с измерениями на определяемом пункте, позволяют составить еще два уравнения плоскостей. Положение пункта в пространстве определяется как точка пересечения трех плоскостей. Этот способ получил название способ плоскостей.

Возможны и другие схемы построения спутниковой триангуляции, но все они, как это нетрудно показать, будут некоторыми комбинациями из описанных выше.

Связи измеренных величин и координат определяемых пунктов. Для построения спутниковой триангуляции в качестве измеренных принимают величины, полученные из наблюдений ИСЗ с наземных пунктов, а также некоторые их функции.

Непосредственно измеренными величинами являются:

топоцентрические склонения δ_{ks} ИСЗ;

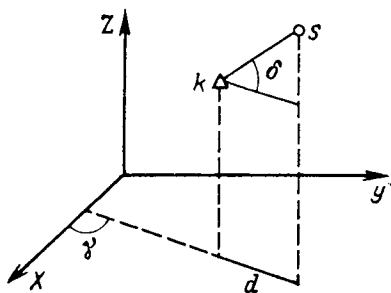


Рис. 61. Измеряемые величины в спутниковой триангуляции

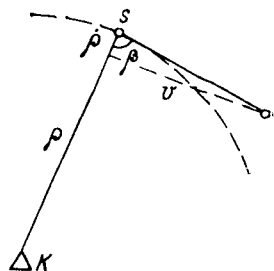


Рис. 62. Радиальная скорость

топоцентрические прямые восхождения ИСЗ в звездной α_{hs} или общеземной системе координат $\gamma_{ks} = \alpha_{ks} - S$, где S — звездное гринвичское время, k — наземный пункт (рис. 61);

топоцентрические расстояния ρ_{ks} ;

разности расстояний от пункта k до двух положений ИСЗ — s_1 и s_2 или от спутника s до двух наземных пунктов k_1 и k_2 ;

радиальные составляющие скорости ИСЗ, т. е. проекции модуля вектора скорости на направление ks (рис. 62);

высота ИСЗ над уровнем моря H_s . Эти величины не связывают положения ИСЗ с какими-либо конкретными пунктами, но позволяют уточнять орбиты.

Связь угловых измеренных величин γ и δ с координатами пунктов и ИСЗ легко установить из рис. 61:

$$\gamma_{ks} = \arctg \frac{y_s - Y_k}{x_s - X_k}; \quad (53.7)$$

$$\delta_{ks} = \arctg \frac{z_s - Z_k}{\sqrt{(x_s - X_k)^2 + (y_s - Y_k)^2}}. \quad (53.8)$$

Для линейных измерений ρ и $\Delta\rho$ имеем соотношения

$$\rho_{ks} = \sqrt{(x_s - X_k)^2 + (y_s - Y_k)^2 + (z_s - Z_k)^2}; \quad (53.9)$$

$$\Delta\rho_{ks} = \rho_{ks_1} - \rho_{ks_2}. \quad (53.10)$$

Для вывода уравнения связи радиальной скорости с координатами пункта k , координатами и составляющими скорости спутника s обратимся к рис. 62, из которого видно, что модули радиальной составляющей и полной скорости связаны соотношением

$$\dot{\rho} = v \cos \beta.$$

Учитывая далее, что

$$\cos \beta = \frac{\rho \dot{v}}{\dot{\rho} v};$$

$$\rho = (x_s - X_k) \mathbf{i} + (y_s - Y_k) \mathbf{j} + (z_s - Z_k) \mathbf{k};$$

$$\mathbf{v} = \dot{x} \mathbf{i} + \dot{y} \mathbf{j} + \dot{z} \mathbf{k},$$

где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — орты координатных осей общеземной системы, получим

$$\dot{\rho} = \frac{1}{\rho} [(x_s - X_k) \dot{x} + (y_s - Y_k) \dot{y} + (z_s - Z_k) \dot{z}]. \quad (53.11)$$

Угловые измерения в спутниковой геодезической сети γ и δ обладают той особенностью, что они независимо получены в единой системе координат. Поэтому именно этими измерениями устанавливается ориентирование сети. Масштаб спутниковой сети задается линейными (лазерными — ρ и радиотехническими — ρ , $\Delta\rho$, $\dot{\rho}$) измерениями.

Кроме непосредственно измеренных величин для построения спутниковых сетей, как это вытекает из анализа принципиальных схем, могут быть использованы их некоторые функции: плоскости синхронизации и компоненты хордовых векторов.

§ 54. УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОСТИ СИНХРОНИЗАЦИИ И ХОРДЫ

Уравнение плоскости синхронизации. В общем случае уравнение плоскости имеет вид

$$Ax + By + Cz + D = 0. \quad (54.1)$$

Плоскость синхронизации, как известно, задается двумя направлениями на спутник, измеренными с двух наземных пунктов. Пусть первое направление характеризуется единичным вектором (см. рис. 59)

$$\mathbf{a}_1 = l_1 \mathbf{i} + m_1 \mathbf{j} + n_1 \mathbf{k}, \quad (54.2)$$

второе — единичным вектором

$$\mathbf{a}_2 = l_2 \mathbf{i} + m_2 \mathbf{j} + n_2 \mathbf{k}, \quad (54.3)$$

где l , m , n — направляющие косинусы направлений на ИСЗ, которые связаны с измеренными сферическими координатами известными соотношениями:

$$\begin{aligned} l &= \cos \gamma \cos \delta, \\ m &= \sin \gamma \cos \delta, \\ n &= \sin \delta. \end{aligned} \quad (54.4)$$

Коэффициенты уравнения (54.1) можно трактовать как координаты нормального вектора плоскости

$$\mathbf{N} = A \mathbf{i} + B \mathbf{j} + C \mathbf{k}. \quad (54.5)$$

С другой стороны, нормальный вектор представим в виде векторного произведения

$$\mathbf{N} = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2, \quad (54.6)$$

или в координатной форме

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{bmatrix} \mathbf{i} + \\ + \begin{bmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{bmatrix} \mathbf{j} + \begin{bmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{bmatrix} \mathbf{k}. \quad (54.7)$$

Сравнивая выражения (54.5) и (54.7), получим формулы для вычисления коэффициентов уравнения плоскости синхронизации

$$\begin{aligned} A &= m_1 n_2 - m_2 n_1, \\ B &= n_1 l_2 - n_2 l_1, \\ C &= l_1 m_2 - l_2 m_1. \end{aligned} \quad (54.8)$$

Иногда возникает необходимость выразить коэффициенты A , B , C через сферические координаты γ и δ . Для этого подставим в формулы (54.8) выражения для направляющих косинусов (54.4).

После несложных преобразований будем иметь

$$\begin{aligned} A &= \operatorname{tg} \delta_2 \sin \gamma_1 - \operatorname{tg} \delta_1 \sin \gamma_2, \\ B &= \operatorname{tg} \delta_1 \cos \gamma_2 - \operatorname{tg} \delta_2 \cos \gamma_1, \\ C &= \sin(\gamma_2 - \gamma_1). \end{aligned} \quad (54.9)$$

Уравнение хорды. Уравнение прямой, проходящей через точку A , имеет вид

$$\frac{x - X_A}{l} = \frac{y - Y_A}{m} = \frac{z - Z_A}{n}.$$

Следовательно, задача составления уравнения хорды сводится к отысканию ее направляющих косинусов, которые обозначим через L , M , N . Вектор D (см. рис. 59), совпадающий с линией пересечения двух плоскостей синхронизации, определяется как векторное произведение нормальных векторов этих плоскостей:

$$\mathbf{D} = \mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{bmatrix}. \quad (54.10)$$

Повторяя все выкладки предыдущего подпараграфа, получим следующие выражения для направляющих коэффициентов хорды:

$$\begin{aligned} L &= B_1 C_2 - B_2 C_1, \\ M &= C_1 A_2 - C_2 A_1, \\ N &= A_1 B_2 - A_2 B_1. \end{aligned} \quad (54.11)$$

Направляющие косинусы хорды можно выразить через ее сферические координаты Λ и Φ , которые имеют тот же смысл, что и величины γ и δ для направления на спутник. В соответствии с выражениями (54.4) будем иметь:

$$\begin{aligned} L &= \cos \Lambda \cos \Phi, \\ M &= \sin \Lambda \cos \Phi, \\ N &= \sin \Phi. \end{aligned} \quad (54.12)$$

Для обратного перехода легко получить

$$\begin{aligned} \Lambda &= \operatorname{arctg} \frac{M}{L}, \\ \Phi &= \operatorname{arctg} \frac{N}{\sqrt{L^2 + M^2}}. \end{aligned} \quad (54.13)$$

Величины Λ и Φ обычно рассматриваются как измеренные при обработке спутниковых сетей, построенных методом хорд. Но, как это видно из приведенных выше формул, в действительности они являются функциями непосредственно измеренных величин.

§ 55. ФОРМУЛЫ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КООРДИНАТ ВЕРШИН НЕКОТОРЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФИГУР СПУТНИКОВОЙ ТРИАНГУЛЯЦИИ

Элементарной фигурой называется такое геодезическое построение, в котором для определения координат его вершин выполнены, в основном, только необходимые измерения. Следует отметить, что определяемыми пунктами в элементарной фигуре могут являться как положения ИСЗ, так и наземные пункты.

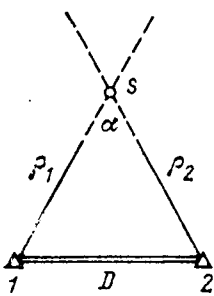
Полярная засечка. Пусть в один и тот же момент были измерены топоцентрические координаты γ и δ и расстояние до некоторого исходного пункта k . Координаты спутника можно получить по вполне очевидным формулам:

$$\begin{aligned} x &= X_k + \rho l = X_k + \rho \cos \gamma \cos \delta, \\ y &= Y_k + \rho m = Y_k + \rho \sin \gamma \cos \delta, \\ z &= Z_k + \rho n = Z_k + \rho \sin \delta. \end{aligned} \quad (55.1)$$

Пространственная угловая засечка. Пространственная засечка по измеренным γ и δ является простейшим элементом

в схеме построения спутниковой триангуляции методом засечек, она же используется для вычисления координат наземного пункта в методе хорд.

Пусть на пунктах 1 и 2 с известными координатами измерены направления на спутник (рис. 63). Выражения для координат точки s имеют вид



$$\begin{aligned}x &= X_1 + \rho_1 l_1 = X_2 + \rho_2 l_2, \\y &= Y_1 + \rho_1 m_1 = Y_2 + \rho_2 m_2, \\z &= Z_1 + \rho_1 n_1 = Z_2 + \rho_2 n_2.\end{aligned}\quad (55.2)$$

Рис. 63. Угловая пространственная засечка

Система (55.2) имеет некоторые особенности. Для ее решения необходимо знать расстояния от исходных пунктов до спутника ρ_1 и ρ_2 . Запись системы (55.2) верна только в том случае, если прямые $1s$ и $2s$ в пространстве пересекаются. В общем случае, вследствие ошибок измерений, эти прямые скрещивающиеся, поэтому система (55.2) примет вид

$$\begin{aligned}x' &= X_1 + \rho_1 l_1, & x'' &= X_2 + \rho_2 l_2, \\y' &= Y_1 + \rho_1 m_1, & y'' &= Y_2 + \rho_2 m_2, \\z' &= Z_1 + \rho_1 n_1, & z'' &= Z_2 + \rho_2 n_2,\end{aligned}\quad (55.3)$$

где x' , y' , z' и x'' , y'' , z'' — координаты точек встречи прямых $1s$ и $2s$.

В системе (55.3) по-прежнему неизвестны расстояния ρ_1 и ρ_2 . Для их определения можно использовать то обстоятельство, что расстояние между точками встречи

$$d^2 = (x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + (z'' - z')^2 \quad (55.4)$$

является кратчайшим. Условие минимума запишется в виде системы уравнений

$$\frac{\partial d^2}{\partial \rho_1} = 0; \quad \frac{\partial d^2}{\partial \rho_2} = 0. \quad (55.5)$$

Для решения системы (55.5) необходимо величину d^2 представить в функции расстояний ρ_1 и ρ_2 . Найдем разности координат точек встречи из формул (55.3) и подставим в (55.4):

$$\begin{aligned}d^2 &= [(X_2 - X_1) + \rho_2 l_2 - \rho_1 l_1]^2 + [(Y_2 - Y_1) + \rho_2 m_2 - \rho_1 m_1]^2 + \\&+ [(Z_2 - Z_1) + \rho_2 n_2 - \rho_1 n_1]^2.\end{aligned}\quad (55.6)$$

С учетом (55.6) для (55.5) получим

$$\frac{\partial d^2}{\partial \rho_1} = \rho_1 - \rho_2 \cos \alpha - F_1 = 0, \quad (55.7)$$

$$\frac{\partial d^2}{\partial \rho_2} = \rho_2 - \rho_1 \cos \alpha + F_2 = 0,$$

где α — угол засечки при спутнике;

$$F_1 = (X_2 - X_1) l_1 + (Y_2 - Y_1) m_1 + (Z_2 - Z_1) n_1,$$

$$F_2 = (X_2 - X_1) l_2 + (Y_2 - Y_1) m_2 + (Z_2 - Z_1) n_2.$$

Из решения системы (55.7) найдем искомые расстояния:

$$\rho_1 = \frac{F_1 - F_2 \cos \alpha}{\sin^2 \alpha}; \quad \rho_2 = \frac{F_1 \cos \alpha - F_2}{\sin^2 \alpha}, \quad (55.8)$$

подставив которые в формулы (55.3), получим координаты точек встречи, а затем и координаты вершины пространственной засечки. Если направления на спутник измерены равномерно, то

$$x = \frac{x'' + x'}{2}; \quad y = \frac{y'' + y'}{2}; \quad z = \frac{z'' + z'}{2}.$$

Для вычисления координат вершины угловой засечки в пространстве можно использовать другой способ. Если спроектировать измеренные на спутник направления на плоскость экватора, то координаты x и y вычисляются по известным формулам Гаусса:

$$x = \frac{Y_2 - Y_1 + X_1 \operatorname{tg} \gamma_1 - X_2 \operatorname{tg} \gamma_2}{\operatorname{tg} \gamma_1 - \operatorname{tg} \gamma_2},$$

$$y = \frac{X_2 - X_1 + Y_1 \operatorname{ctg} \gamma_1 - Y_2 \operatorname{ctg} \gamma_2}{\operatorname{ctg} \gamma_1 - \operatorname{ctg} \gamma_2}.$$

Третья координата z найдется из выражений

$$z' = Z_1 + \sqrt{(x - X_1)^2 + (y - Y_1)^2} \operatorname{tg} \delta_1,$$

$$z'' = Z_2 + \sqrt{(x - X_2)^2 + (y - Y_2)^2} \operatorname{tg} \delta_2.$$

Окончательное значение z будет:

$$z = (z'' + z')/2.$$

Пространственная линейная засечка. Для определения координат спутника с помощью линейной засечки необходимо измерить три дальности с трех исходных пунктов. Существует много вариантов решения этой задачи. Наиболее простым является решение системы нелинейных уравнений вида

$$\sqrt{(x - X_i)^2 + (y - Y_i)^2 + (z - Z_i)^2} = \rho_{is} \quad i = 1, 2, 3 \quad (55.9)$$

итерационным методом Ньютона — Рафсона.

Определение координат наземного пункта по измеренным сферическим координатам и разностям расстояний (расстояниям). Пусть на исходном пункте A и определяемом P (рис. 64)

были измерены сферические координаты направлений на два положения ИСЗ и разности расстояний $\Delta\rho_1 = \rho_2 - \rho_1$, $\Delta\rho_2 = \rho_4 - \rho_3$. По этим данным требуется определить координаты пункта P .

Прежде всего отметим, что в данной фигуре девять неизвестных и десять измеренных величин. Следовательно одно измерение является избыточным, что позволит определить координаты пункта P с контролем.

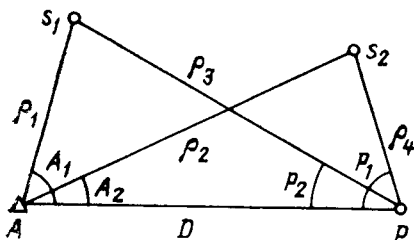


Рис. 64. Комбинированная засечка

Для вычисления координат ИСЗ используем формулы полярной засечки с пункта A

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R}_A + \rho_1 \mathbf{a}_1, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{R}_A + \rho_2 \mathbf{a}_2 \quad (55.10)$$

и пункта P

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R}_P + \rho_3 \mathbf{a}_3, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{R}_P + \rho_4 \mathbf{a}_4, \quad (55.11)$$

где $\mathbf{r}_i$ — радиус-вектор спутника s_i ; $\mathbf{R}_i$ — радиус-вектор наземного пункта; ρ — расстояние от наземного пункта до спутника; $\mathbf{a}_i$ — единичный вектор направления на спутник.

Вычтем из уравнений (55.11) соответствующие уравнения (55.10):

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{R} &= \mathbf{R}_P - \mathbf{R}_A = \rho_1 \mathbf{a}_1 - \rho_3 \mathbf{a}_3, \\ \Delta \mathbf{R} &= \mathbf{R}_P - \mathbf{R}_A = \rho_2 \mathbf{a}_2 - \rho_4 \mathbf{a}_4. \end{aligned} \quad (55.12)$$

Учитывая далее, что $\rho_1 = \rho_2 - \Delta\rho_1$, $\rho_3 = \rho_4 - \Delta\rho_2$, можно записать:

$$\rho_1 (\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2) - \rho_3 (\mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_4) - \Delta\rho_1 \mathbf{a}_2 + \Delta\rho_2 \mathbf{a}_4 = 0. \quad (55.13)$$

Проектируя векторное равенство (55.13) на оси координат, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} (l_1 - l_2) \rho_1 - (l_3 - l_4) \rho_3 - l_2 \Delta\rho_1 + l_4 \Delta\rho_2 &= 0, \\ (m_1 - m_2) \rho_1 - (m_3 - m_4) \rho_3 - m_2 \Delta\rho_1 + m_4 \Delta\rho_2 &= 0, \\ (n_1 - n_2) \rho_1 - (n_3 - n_4) \rho_3 - n_2 \Delta\rho_1 + n_4 \Delta\rho_2 &= 0. \end{aligned} \quad (55.14)$$

Таким образом, получены три уравнения с двумя неизвестными ρ_1 и ρ_3 . Одно из уравнений является избыточным и может быть использовано как контрольное.

Получив из решения системы (55.14) ρ_1 и ρ_3 , координаты пункта P находят по формулам, образованным из уравнений (55.12):

$$\begin{aligned} X_P &= X_A + \rho_1 l_1 - \rho_3 l_3, \\ Y_P &= Y_A + \rho_1 m_1 - \rho_3 m_3, \\ Z_P &= Z_A + \rho_1 n_1 - \rho_3 n_3. \end{aligned} \quad (55.15)$$

В случае если измерена только одна разность расстояний, например $\Delta\rho_1$, решение задачи целесообразно разделить на две части: вначале определить направление хорды, затем ее длину. Направляющие косинусы хорды находят, последовательно применяя формулы (54.9), (54.11). Для вывода формулы, связывающей длину хорды D с результатами фотографических и доплеровских измерений, обратимся к рис. 64. Из него следует:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= D \frac{\sin P_1}{\sin S_1}, \\ \rho_2 &= \rho_1 + \Delta\rho = D \frac{\sin P_2}{\sin S_2}, \end{aligned}$$

откуда легко получить

$$D = \Delta\rho \left(\frac{\sin P_2}{\sin S_2} - \frac{\sin P_1}{\sin S_1} \right)^{-1}.$$

Значения углов определяют по известной формуле (β_{ij} — любой из углов)

$$\beta_{ij} = \arccos(l_i l_j + m_i m_j + n_i n_j).$$

Координаты пункта P находят из выражений

$$\begin{aligned} X_P &= X_A + DL, \\ Y_P &= Y_A + DM, \\ Z_P &= Z_A + DN. \end{aligned}$$

Если вместо разностей измерены расстояния, то вычисления существенно упрощаются и сводятся к последовательному применению формул полярных и угловых засечек.

Рассмотренные выше схемы геодезических построений не исчерпывают всех возможных вариантов элементарных фигур спутниковых сетей. Особенность этих фигур заключается в том, что для их построения используются в основном только необходимые измерения. В сплошных сетях число измерений, как правило, превосходит число необходимых неизвестных и возникает задача уравнивания спутниковых геодезических сетей.

УРАВНИВАНИЕ СПУТНИКОВЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ

§ 56. ВИДЫ УСЛОВИЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ В СПУТНИКОВОЙ ТРИАНГУЛЯЦИИ

В качестве измеренных величин в геометрическом методе могут использоваться топоцентрические радиусы векторы ρ , хордовые векторы ΔR , нормальные векторы плоскостей синхронизации и их отдельные компоненты.

При обработке ρ и их компонент γ , δ , ρ , а также разностей расстояний и радиальных скоростей мы будем иметь дело с непосредственно измеренными величинами, поэтому уравнивание сведется к уравниванию по методу наименьших квадратов. В тех случаях, когда в качестве измеренных используются компоненты хордовых (Δ , Φ , D) и нормальных векторов (A , B , C) плоскостей синхронизации, строгое уравнивание должно вестись под условием $V^T Q^{-1} V$, выражающим обобщенный принцип наименьших квадратов, где Q — корреляционная матрица функций результатов измерений. Эта особенность должна обязательно учитываться при разработке конкретных способов уравнивания спутниковых геодезических сетей. Как известно, при уравнивании геодезических сетей коррелятным способом исходной является система условных уравнений, при уравнивании параметрическим способом — система уравнений поправок. Конкретный вид этих уравнений и особенности их составления излагаются ниже.

При уравнивании спутниковой триангуляции необходимо считаться с рядом особенностей, которые присущи данному виду геодезических сетей. Напомним, что направления на пунктах спутниковой триангуляции определяются в единой (звездной или общеземной) системе координат независимо друг от друга. Поэтому в такой сети принципиально не могут возникнуть условия подобные условиям сумм, разностей, или дирекционных углов. Иными словами, в спутниковой триангуляции не возникает ни одно из тех условий, которые в обычной геодезической сети объединяются под общим названием угловых условий.

Базисные, полюсные и координатные условия в спутниковой триангуляции сохраняются полностью, но поскольку плоские связующие углы здесь заменяются углами между прямыми в пространстве, которые, в свою очередь, являются функциями сферических координат, то вычисление коэффициентов этих уравнений существенно усложняется. Кроме них в пространственных геодезических сетях появляются специфические геометрические условия, которые не имеют каких-либо аналогов в плоских сетях.

Условие компланарности трех векторов (условие плоскости). Плоскость в пространстве однозначно можно провести через

три точки, через две точки параллельно некоторой прямой и, наконец, через одну точку параллельно двум данным прямым. Добавление одного элемента (точки или прямой) к перечисленным ведет к возникновению одного условного уравнения.

В наиболее общем виде условие компланарности трех топосцентрических векторов, соединяющих три точки 1, 2, 3), записывается в следующем виде:

$$\Delta \mathbf{R}_{12} \Delta \mathbf{R}_{13} \Delta \mathbf{R}_{23} = 0 \quad (56.1)$$

или

$$\begin{aligned} & [(\mathbf{R}_1^0 + d\mathbf{R}_1) - (\mathbf{R}_2^0 + d\mathbf{R}_2)][(\mathbf{R}_1^0 + d\mathbf{R}_1) - (\mathbf{R}_3^0 + d\mathbf{R}_3)] \times \\ & \times [(\mathbf{R}_2^0 + d\mathbf{R}_2) - (\mathbf{R}_3^0 + d\mathbf{R}_3)] = 0, \end{aligned} \quad (56.2)$$

где $\mathbf{R}_i^0$ — предварительные значения радиусов-векторов; $d\mathbf{R}_i$ — поправки к ним, определяемые из уравнения. Если начала и концы векторов $\Delta \mathbf{R}_{ij}$ не закреплены в пространстве ($d\mathbf{R}_i = 0$), то после нормирования (56.2) получим

$$F = \mathbf{a}_{12} \mathbf{a}_{13} \mathbf{a}_{23} = 0, \quad (56.3)$$

где

$$\mathbf{a}_{ij} = \frac{\mathbf{R}_i^0 - \mathbf{R}_j^0}{|\mathbf{R}_i^0 - \mathbf{R}_j^0|}.$$

Уравнение (56.3) целесообразно называть условием компланарности трех свободных векторов. В координатной форме оно имеет вид

$$F = \begin{vmatrix} l_{12} & m_{12} & n_{12} \\ l_{13} & m_{13} & n_{13} \\ l_{23} & m_{23} & n_{23} \end{vmatrix} = 0, \quad (56.4)$$

где l, m, n — направляющие косинусы вектора $\Delta \mathbf{R}$. Раскладывая определитель по элементам первой строки и учитывая (54.8), получим

$$F = l_{12}A + m_{12}B + n_{12}C = 0, \quad (56.5)$$

где A, B, C — коэффициенты уравнения плоскости, которая параллельна векторам $\Delta \mathbf{R}_{13}$ и $\Delta \mathbf{R}_{23}$.

В случае если векторы $\Delta \mathbf{R}$ соединяют наземные пункты, то (56.5) выражает условие компланарности хорд D, D_1, D_2 (см. рис. 59)

$$F = LA + MB + NC = 0, \quad (56.6)$$

где L, M, N — направляющие косинусы хорды D ; A, B, C — коэффициенты уравнения плоскости, образованной хордами D_1

и D_2 , которые вычисляются по формулам, аналогичным выражениям (54.9), т. е.

$$\begin{aligned} A &= \operatorname{tg} \Phi_2 \sin \Lambda_1 - \operatorname{tg} \Phi_1 \sin \Lambda_2, \\ B &= \operatorname{tg} \Phi_1 \cos \Lambda_2 - \operatorname{tg} \Phi_2 \cos \Lambda_1, \\ C &= \sin (\Lambda_2 - \Lambda_1). \end{aligned} \quad (56.7)$$

Если один вектор ΔR соединяет наземные пункты, два других соединяют наземные пункты со спутником, то уравнение для этого случая имеет тот же вид, что и (56.6), но коэффициенты A, B, C вычисляют по формулам (54.9).

Для уравнивания спутниковой триангуляции условные уравнения необходимо привести к линейному виду относительно измеренных (или выбранных в качестве измеренных) величин. Выведем вначале условное уравнение поправок компланарности хорд. Приводя выражение (56.6) к линейному виду относительно поправок к величинам Λ_i и Φ_i , будем иметь

$$\sum \frac{\partial F}{\partial \Lambda_i} v_{\Lambda_i} + \sum \frac{\partial F}{\partial \Phi_i} v_{\Phi_i} + W = 0, \quad (56.8)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \Lambda_i} &= \frac{\partial L}{\partial \Lambda_i} A + \frac{\partial A}{\partial \Lambda_i} L + \frac{\partial M}{\partial \Lambda_i} B + \frac{\partial B}{\partial \Lambda_i} M + \\ &+ \frac{\partial N}{\partial \Lambda_i} C + \frac{\partial C}{\partial \Lambda_i} N, \\ \frac{\partial F}{\partial \Phi_i} &= \frac{\partial L}{\partial \Phi_i} A + \frac{\partial A}{\partial \Phi_i} L + \frac{\partial M}{\partial \Phi_i} B + \frac{\partial B}{\partial \Phi_i} M + \\ &+ \frac{\partial N}{\partial \Phi_i} C + \frac{\partial C}{\partial \Phi_i} N. \end{aligned} \quad (56.9)$$

Из выражений (54.12), после несложных преобразований, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \Lambda} &= -M, & \frac{\partial L}{\partial \Phi} &= -\frac{LN}{\cos \Phi}, \\ \frac{\partial M}{\partial \Lambda} &= L, & \frac{\partial M}{\partial \Phi} &= -\frac{MN}{\cos \Phi}, \\ \frac{\partial N}{\partial \Lambda} &= 0, & \frac{\partial N}{\partial \Phi} &= \frac{1 - N^2}{\cos \Phi}. \end{aligned} \quad (56.10)$$

Далее, дифференцируя выражения (56.7), будем иметь

$$\frac{\partial A}{\partial \Lambda_1} = \operatorname{tg} \Phi_2 \cos \Lambda_1, \quad \frac{\partial A}{\partial \Lambda_2} = -\operatorname{tg} \Phi_1 \cos \Lambda_2,$$

$$\frac{\partial B}{\partial \Lambda_1} = \operatorname{tg} \Phi_2 \sin \Lambda_1, \quad \frac{\partial B}{\partial \Lambda_2} = -\operatorname{tg} \Phi_1 \sin \Lambda_2, \quad (56.11)$$

$$\frac{\partial C}{\partial \Lambda_1} = -\cos (\Lambda_2 - \Lambda_1), \quad \frac{\partial C}{\partial \Lambda_2} = \cos (\Lambda_2 - \Lambda_1),$$

$$\frac{\partial A}{\partial \Phi_1} = -\frac{\sin \Lambda_2}{\cos^2 \Phi_1}, \quad \frac{\partial A}{\partial \Phi_2} = \frac{\sin \Lambda_1}{\cos^2 \Phi_2},$$

$$\frac{\partial B}{\partial \Phi_1} = \frac{\cos \Lambda_2}{\cos^2 \Phi_1}, \quad \frac{\partial B}{\partial \Phi_2} = \frac{\cos \Lambda_1}{\cos^2 \Phi_2}, \quad (56.12)$$

$$\frac{\partial C}{\partial \Phi_1} = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial \Phi_2} = 0.$$

Подставляя (56.10) — (56.12) в (56.9), получим

$$\frac{\partial F}{\partial \Lambda} = a = -MA + LB, \quad (56.13)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \Phi} = b = \frac{C}{\cos \Phi},$$

$$\frac{\partial F}{\partial \Lambda_1} = a_1 = \operatorname{tg} \Phi_2 (L \cos \Lambda_1 + M \sin \Lambda_1) - N \cos (\Lambda_2 - \Lambda_1),$$

$$\frac{\partial F}{\partial \Phi_1} = b_1 = \sec^2 \Phi_1 (-L \sin \Lambda_2 + M \cos \Lambda_2), \quad (56.14)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \Lambda_2} = a_2 = -\operatorname{tg} \Phi_1 (L \cos \Lambda_2 + M \sin \Lambda_2) + N \cos (\Lambda_2 - \Lambda_1),$$

$$\frac{\partial F}{\partial \Phi_2} = b_2 = \sec^2 \Phi_2 (L \sin \Lambda_1 - M \cos \Lambda_1).$$

Окончательно для условного уравнения поправок компланарности трех хорд будем иметь

$$\Sigma a_i v_{\Lambda_i} + \Sigma b_i v_{\Phi_i} + W = 0. \quad (56.15)$$

Условие плоскости с дополнительными неизвестными. Рассмотрим теперь вариант, когда плоскость включает в себя хорду и два направления на спутник. В этом случае в уравнении (56.15) останутся без изменения члены с поправками v_Λ и v_Φ . Поправки v_{Λ_1} , v_{Φ_1} , v_{Λ_2} , v_{Φ_2} необходимо заменить поправками к измеренным топоцентрическим координатам направлений на ИСЗ, а коэффициенты при них вычислять по формулам (56.14), но с заменой в них символов Λ и Φ на γ и δ . В результате получим следующее уравнение:

$$(-MA + LB) v_\Lambda + \frac{C}{\cos \Phi} v_\Phi + \sum_1^2 a_i v_{\gamma_i} + \sum_1^2 b_i v_{\delta_i} + W = 0. \quad (56.16)$$

Несмотря на формальное сходство уравнений (56.15) и (56.16), между ними имеется существенное различие: если в уравнении (56.15) сферические координаты всех трех хорд выступают в качестве измеренных величин, то в выражении (56.16) непосредственно измеренными величинами являются сферические координаты направлений на ИСЗ γ и δ . Следовательно, величины ν_A и ν_Φ в уравнении (56.16) будут дополнительными неизвестными. В связи с этим данное уравнение следует называть условным уравнением компланарности трех свободных векторов с дополнительными неизвестными.

Свободный член уравнения (56.16) вычисляется по формуле

$$W = LA + MB + NC, \quad (56.17)$$

т. е. он равен скалярному произведению вектора хорды $\mathbf{D}$ (L, M, N) и нормального вектора плоскости синхронизации $\mathbf{N}$ (A, B, C):

$$W = \mathbf{D} \cdot \mathbf{N}. \quad (56.18)$$

В формулах (56.17) и (56.18) все величины вычисляются по измеренным значениям сферических координат направлений на ИСЗ.

Если в процессе уравнивания спутниковой триангуляции появится необходимость определить поправки $d\mathbf{R}$ для концов хорды — наземных пунктов 1 и 2, то уравнение (56.3) примет вид (для упрощения записи принято $a_{12}=a$, $a_{13}=a_1$, $a_{23}=a_2$

$$F = [(\mathbf{R}_1^0 + d\mathbf{R}_1) - (\mathbf{R}_2^0 + d\mathbf{R}_2)] a_1 a_2 = 0, \quad (56.19)$$

или

$$F = (\mathbf{R}_1^0 - \mathbf{R}_2^0) a_1 a_2 + d\mathbf{R}_1 a_1 a_2 - d\mathbf{R}_2 a_1 a_2 = 0. \quad (56.20)$$

Уравнение (56.20) можно назвать условием компланарности трех связанных векторов. Представляя это уравнение в координатной форме, получим

$$F = \begin{bmatrix} \Delta X_{12}^0 & \Delta Y_{12}^0 & \Delta Z_{12}^0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} dX_1 & dY_1 & dZ_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} dX_2 & dY_2 & dZ_2 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{bmatrix} = 0. \quad (56.21)$$

Геометрическое условие того, что хорда и направления на ИСЗ лежат в одной плоскости, выражает лишь первый член этого уравнения. Приведем его к линейному виду относительно

поправок к измеренным сферическим координатам направлений на ИСЗ. Легко заметить, что выражение

$$\begin{bmatrix} \Delta X_{12}^0 & \Delta Y_{12}^0 & \Delta Z_{12}^0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{bmatrix} = \Delta X_{12}^0 A + \Delta Y_{12}^0 B + \Delta Z_{12}^0 C$$

отличается от (56.6) только постоянным множителем D , где D — длина хорды, соединяющей наземные пункты 1 и 2.

Следовательно, для нахождения частных производных можно использовать выражение (56.14), заменив в них символы Λ и Φ на γ и δ , а направляющие косинусы хорды L , M , N — на соответствующие разности координат концов хорды ΔX , ΔY , ΔZ . В результате получим следующие выражения для частных производных:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \gamma_1} &= a_1 = \operatorname{tg} \delta_2 (\Delta X \cos \gamma_1 + \Delta Y \sin \gamma_1) - \Delta Z \cos (\gamma_2 - \gamma_1), \\ \frac{\partial F}{\partial \delta_1} &= b_1 = \sec^2 \delta_1 (-\Delta X \sin \gamma_2 + \Delta Y \cos \gamma_2), \\ \frac{\partial F}{\partial \gamma_2} &= a_2 = -\operatorname{tg} \delta_1 (\Delta X \cos \gamma_2 + \Delta Y \sin \gamma_2) + \Delta Z \cos (\gamma_2 - \gamma_1), \\ \frac{\partial F}{\partial \delta_2} &= b_2 = \sec^2 \delta_2 (\Delta X \sin \gamma_1 - \Delta Y \cos \gamma_1). \end{aligned} \quad (56.22)$$

Теперь уравнение (56.21) после приведения его к линейному виду примет форму

$$\begin{aligned} \sum_1^2 a_i v_{\gamma_i} + \sum_1^2 b_i v_{\delta_i} + A (dX_1 - dX_2) + \\ + B (dY_1 - dY_2) + C (dZ_1 - dZ_2) + W_1 = 0. \end{aligned} \quad (56.23)$$

Выражение (56.23) представляет собой условное уравнение плоскости синхронизации с дополнительными неизвестными — поправками в координаты определяемых наземных пунктов. Из него легко получить как частные случаи условные уравнения плоскости, проходящей через один исходный пункт ($d\mathbf{R}_1 = 0$) и два исходных пункта ($d\mathbf{R}_1 = d\mathbf{R}_2 = 0$).

Свободный член уравнения (56.23) находится по формуле

$$W_1 = \Delta \mathbf{R} \cdot \mathbf{N}, \quad (56.24)$$

или в координатной форме

$$W_1 = \Delta X \cdot A + \Delta Y \cdot B + \Delta Z \cdot C. \quad (56.25)$$

Для уяснения геометрического смысла свободных членов уравнений (56.16) и (56.23) умножим выражения (56.17) и

(56.25) на нормирующие множители λ_1 и λ_2 . В результате получим хорошо известные выражения для угла между прямой и плоскостью и для кратчайшего расстояния между скрещивающимися прямыми:

$$\begin{aligned}\sin \varphi &= \lambda_1 \lambda_2 W, \\ d &= \lambda_2 W_1,\end{aligned}\tag{56.26}$$

где φ — угол между прямой и плоскостью синхронизации; d — кратчайшее расстояние между синхронными направлениями на спутник;

$$\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Таким образом, свободный член условного уравнения плоскости выражает (в угловой или линейной мере) погрешность построения данной плоскости синхронизации.

Условие пучка плоскостей. Прямая, соединяющая два наземных пункта (хорда), однозначно определяется как результат пересечения двух плоскостей синхронизации. Каждая новая плоскость, присоединенная к двум первым, будет избыточной, и следовательно, приведет к возникновению одного условного уравнения.

Пусть три плоскости заданы своими нормальными векторами $N_i (A_i, B_i, C_i)$. Составим смешанное произведение этих векторов

$$V = N_1 N_2 N_3.\tag{56.27}$$

Смешанное произведение численно равно объему параллелепипеда, построенного на векторах N_1 , N_2 и N_3 . Однако если плоскости принадлежат одному пучку, то параллелепипед вырождается и, следовательно, $V=0$. Переходя к координатной форме смешанного произведения, получим условное уравнение пересечения трех плоскостей по одной линии

$$V = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = LA_1 + MB_1 + NC_1 = 0,\tag{56.28}$$

где L, M, N — направляющие косинусы хорды, полученной из пересечения второй и третьей плоскостей.

Сравнение выражений (56.28) и (56.6) показывает, что условие пучка плоскостей является частным случаем условия компланарности трех свободных векторов. Поскольку предварительные сферические координаты хорды обычно известны, то с точки зрения последующей математической обработки целесообразно условное уравнение пучка плоскостей (56.28) заменить тремя условными уравнениями плоскостей вида (56.16)

с дополнительными неизвестными — поправками в сферические координаты хорды.

Условие связи плоскостей. Пересечение трех плоскостей в пространстве однозначно определяет точку; каждая дополнительная плоскость, полученная по измеренным топоцентрическим направлениям на ИСЗ, ведет к возникновению одного уравнения.

Известно, что четыре плоскости проходят через одну точку только тогда, когда определитель четвертого порядка, составленный из коэффициентов и свободных членов уравнений плоскостей, равен нулю, т. е.

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{bmatrix} = 0. \quad (56.29)$$

Очевидно, что условное уравнение (56.29) можно (и практически целесообразно) заменить четырьмя условными уравнениями плоскости вида (56.23) с дополнительными неизвестными — поправками в прямоугольные координаты центра связи.

Базисное условие. Условное уравнение базиса возникает, если в сети спутниковой триангуляции содержится две исходные (или измеренные) стороны или более, причем между этими сторонами существует непосредственная связь через цепочку пространственных треугольников. В более общей формулировке это условие возникает, когда в сети определено две величины или более, задающие масштаб (длины хорд, расстояния до ИСЗ, разности расстояний и т. д.).

Рассмотрим составление уравнения базиса для фигуры, изображенной на рис. 65. Решая пространственные треугольники, легко получить выражение, совершенно аналогичное условному уравнению базиса для плоских фигур:

$$\pi = \frac{D_1 \sin \beta_2 \sin \beta_4}{D_2 \sin \beta_3 \sin \beta_5} - 1 = 0, \quad (56.30)$$

в котором углы β_i — углы, образованные топоцентрическими направлениями. Приведем (56.30) к линейному виду

$$\sum \frac{\partial \pi}{\partial \gamma_i} v_{\gamma_i} + \sum \frac{\partial \pi}{\partial \delta_i} v_{\delta_i} + W = 0, \quad (56.31)$$

где W определяется по формуле (56.30) и по значениям углов, вычисленным по измеренным сферическим координатам γ и δ , если фигура составлена из направлений на ИСЗ, и по сферическим координатам хорд Λ и Φ , если фигура составлена

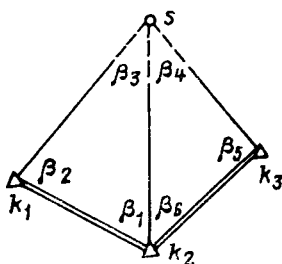


Рис. 65. Базисное условие

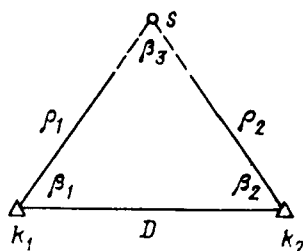


Рис. 66. Синхронный треугольник

из хорд. Частные производные из (56.31) можно представить следующим образом

$$\frac{\partial \pi}{\partial \gamma} = \frac{\partial \pi}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial l} \cdot \frac{\partial l}{\partial \gamma} + \frac{\partial \pi}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial m} \cdot \frac{\partial m}{\partial \gamma} + \frac{\partial \pi}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial n} \cdot \frac{\partial n}{\partial \gamma}, \quad (56.32)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial \delta} = \frac{\partial \pi}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial l} \cdot \frac{\partial l}{\partial \delta} + \frac{\partial \pi}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial m} \cdot \frac{\partial m}{\partial \delta} + \frac{\partial \pi}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial n} \cdot \frac{\partial n}{\partial \delta}.$$

Выполнив дифференцирование в соответствии с (56.32), получим условное уравнение базиса в линейном виде

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{\operatorname{ctg} \beta_k}{\sin \beta_k} \left(C_k v_{\gamma_i} + \frac{n_i - n_j \cos \beta_k}{\cos \delta_{ij}} v_{\delta_i} \right) + W = 0, \quad (56.33)$$

где k — номер уравнения плоскости, проходящей через направления I и J .

В том случае, когда стороны нельзя рассматривать как исходные, в условное уравнение (56.33) войдут члены с поправками в измеренные расстояния.

Базисные условия в синхронном треугольнике. Совместное использование лазерных дальномеров, радиотехнической аппаратуры и фотокамер при построении спутниковых сетей дает возможность определить не только направление сторон, но и их длины. В этом случае базисные условия могут возникать и в отдельных синхронных треугольниках (рис. 66) при условии, что предварительные значения сферических координат и длины хорды, соединяющей наземные пункты, известны. Вид базисных условий будет зависеть от состава измерений, выполненных на станциях слежения. При одном расстоянии и двух направлениях на ИСЗ условное уравнение запишется следующим образом:

$$\pi = \frac{\rho_1 \sin \beta_3}{D \sin \beta_2} - 1 = 0; \quad (56.34)$$

при двух расстояниях и двух направлениях

$$\pi = D^2 - \rho_1^2 - \rho_2^2 + 2\rho_1\rho_2 \cos \beta_3 = 0; \quad (56.35)$$

при двух направлениях и разности расстояний от наземных пунктов до спутника

$$\pi = \frac{D}{\Delta\rho} \cdot \frac{\sin \beta_2 - \sin \beta_1}{\sin \beta_3} - 1 = 0. \quad (56.36)$$

После приведения уравнений (56.34), (56.35) к линейному виду все они принимают стандартную форму:

$$\begin{aligned} \sum \frac{\partial \pi}{\partial \gamma_i} v_{\gamma_i} + \sum \frac{\partial \pi}{\partial \delta_i} v_{\delta_i} + \frac{\partial \pi}{\partial \rho_1} v_{\rho_1} + \\ + \frac{\partial \pi}{\partial \rho_2} v_{\rho_2} + \frac{\partial \pi}{\partial \Delta} v_{\Delta} + \frac{\partial \pi}{\partial \Phi} v_{\Phi} + \frac{\partial \pi}{\partial D} v_D + W = 0. \end{aligned} \quad (56.37)$$

Различаться будут лишь выражения для частных производных, конкретный вид которых можно найти в монографии [10]. Выражение (56.37) показывает, что базисные условные уравнения, возникающие в синхронном треугольнике, по необходимости будут условными уравнениями с дополнительными неизвестными — поправками в сферические координаты и длину хорды.

Полюсное условие. Полюсное условие возникает в сетях спутниковой триангуляции в том случае, если в них имеются замкнутые цепи треугольников, которые начинаются и заканчиваются на одной и той же стороне. Пространственные полюсные условные уравнения составляются совершенно аналогично тому, как это делается в геодезических сетях на плоскости. Вид условного уравнения полюса формально в точности совпадает с выражениями (56.30) и (56.33), полученными для условного уравнения базиса.

Координатные условия. Они возникают в том случае, если в сети спутниковой триангуляции имеются изолированные исходные пункты или их системы. Для разностей исходных координат должны соблюдаться равенства, которые являются условными уравнениями для координат:

$$\begin{aligned} \varphi_X &= \sum l_i \rho_i - \Delta X, \\ \varphi_Y &= \sum m_i \rho_i - \Delta Y, \\ \varphi_Z &= \sum n_i \rho_i - \Delta Z. \end{aligned} \quad (56.38)$$

В дальнейшем будем оперировать с условным уравнением только для абсцисс, поскольку другие уравнения будут совершенно аналогичны. Приводя функцию φ_X к линейному виду, получим

$$\sum \frac{\partial \varphi_X}{\partial \gamma_i} v_{\gamma_i} + \sum \frac{\partial \varphi_X}{\partial \delta_i} v_{\delta_i} + W_X = 0, \quad (56.39)$$

где

$$\frac{\partial \varphi_X}{\partial \gamma} = \frac{\partial l}{\partial \gamma} \rho + \frac{\partial \rho}{\partial \gamma} l, \quad (56.40)$$

$$\frac{\partial \varphi_X}{\partial \delta} = \frac{\partial l}{\partial \delta} \rho + \frac{\partial \rho}{\partial \delta} l.$$

Определив частные производные, входящие в (56.39), будем иметь

$$\frac{\partial \varphi_X}{\partial \gamma_i} = -\Delta Y_i + (-1)^{k+1} \Delta X_i \frac{\operatorname{ctg} \beta_k}{\sin \beta_k} C_k, \quad (56.41)$$

$$\frac{\partial \varphi_X}{\partial \delta_i} = -\Delta Z_i \cos \gamma_i + (-1)^{k+1} \Delta X_i \times$$

$$\times \frac{\operatorname{ctg} \beta_k}{\sin \beta_k \cos \delta_i} (n_j - n_i \cos \beta_k),$$

где символы i, j, k имеют тот же смысл, что и в выражении (56.33).

Выбор условий в спутниковой триангуляции. Большинство условных уравнений, возникающих в обычных геодезических сетях, обладает свойством эквивалентности или взаимозаменяемости, которое позволяет из нескольких соотношений, связывающих ту или иную группу измеренных величин, выбрать наиболее простое по своему виду. Условные уравнения, возникающие в сети спутниковой триангуляции, также обладают свойством эквивалентности.

Условное уравнение связки плоскостей является наиболее универсальным. С одной стороны, плоскости синхронизации обязательно пройдут через исходные пункты (именно с таким требованием вычисляются свободные члены уравнений этих плоскостей). С другой стороны, после уравнивания плоскости синхронизации образуют собственную связку с центром в определяемом пункте (спутнике).

Таким образом, при удовлетворении условий связок плоскостей в данной сети автоматически должны удовлетворяться координатные, базисные и полюсные условия. Иными словами, условие связки плоскостей эквивалентно любому другому условию, за исключением условия базиса для непосредственно измеренных сторон.

Однако условное уравнение связки плоскостей можно составить только в том случае, если каждая из плоскостей данной связки проходит через пункт с известными координатами (иначе будет невозможно вычислить свободные члены уравнений плоскостей). В сплошной сети спутниковой триангуляции плоскости синхронизации, как правило, будут проходить через определяе-

мые пункты. Поэтому в общем случае условное уравнение связки плоскостей целесообразно заменить эквивалентной ему системой условных уравнений плоскостей с дополнительными неизвестными, как это показано выше. Таких уравнений будет столько, сколько плоскостей синхронизации содержится в данной сети.

По-инному обстоит дело с оценкой точности. Величины свободных членов условных уравнений с дополнительными неизвестными зависят как от ошибок измерений, так и от выбора предварительных значений неизвестных. Ясно, что свободные члены этих уравнений нельзя использовать для оценки точности результатов измерений по невязкам геометрических условий.

Для оценки точности необходимо использовать условные уравнения без дополнительных неизвестных. При этом нужно иметь в виду следующее. Такие условия, как базисные и координатные, характеризуют точность исходных данных (и даже различий систем координат, если исходные пункты относятся к разным системам) и точность собственно измерений. Поэтому предварительную оценку точности по невязкам условных уравнений целесообразно выполнять по условным уравнениям плоскостей и полюсным уравнениям.

В заключение отметим, что введение дополнительных неизвестных эффективно только при уравнивании сферических координат направлений на ИСЗ. В том случае, если уравниваются сферические координаты хорд, введение дополнительных неизвестных бесполезно, так как уравнение плоскости, проходящей через три точки, удовлетворяется при любых значениях координат этих точек. Поэтому при уравнивании спутниковой триангуляции, образованной хордами, необходимо использовать условные уравнения плоскостей для трех свободных векторов, а также полюсные, базисные и координатные условные уравнения.

§ 57. УРАВНЕНИЯ ПОПРАВОК В СПУТНИКОВОЙ ТРИАНГУЛЯЦИИ

В качестве необходимых неизвестных при уравнивании спутниковой триангуляции целесообразно выбрать координаты наземных пунктов и наблюдаемых положений ИСЗ (в некоторых случаях к ним добавятся составляющие скорости). К непосредственно измеренным величинам относятся сферические координаты направлений на ИСЗ, наклонные дальности, разности расстояний и радиальные скорости. Кроме того, в качестве измеренных величин могут быть приняты некоторые их функции: сферические координаты хорд и плоскости синхронизации.

Уравнение поправок для γ . Функциональная связь угла γ с геоцентрическими координатами устанавливается выражением (53.7). Приведя его к линейному виду относительно

поправок к координатам наземного пункта k и спутника s , получим

$$\frac{1}{\rho \cos \delta} (\sin \gamma dX_k - \cos \gamma dY_k - \sin \gamma dx_s + \\ + \cos \gamma dy_s) + l_\gamma = v_\gamma \quad \text{с весом } P_\gamma. \quad (57.1)$$

Веса измеренных величин устанавливаются в соответствии с общим правилом метода наименьших квадратов. Учитывая, что в результате астрометрической обработки снимков ИСЗ соблюдается равенство $m_\delta = m_\gamma \cos \delta$, веса уравнений поправок для величин δ и γ будут

$$P_\delta = \frac{\mu^2}{m_\delta^2}; \quad P_\gamma = \frac{\mu^2}{m_\delta^2} \cos^2 \delta;$$

если наблюдения выполнялись однотипными установками, то их можно считать равноточными, тогда, полагая $P_\delta = 1$, получим $m_\delta = \mu$; $P_\gamma = \cos^2 \delta$.

Коэффициенты уравнения поправок (57.1) являются функциями сферических координат γ и δ . В некоторых случаях их целесообразно выразить через направляющие косинусы. Учитывая соотношения (54.4), найдем

$$\sin \gamma = \frac{m}{\sqrt{l^2 + m^2}}, \quad \sin \delta = n, \quad (57.2)$$

$$\cos \gamma = \frac{l}{\sqrt{l^2 + m^2}}, \quad \cos \delta = \sqrt{1 - n^2}.$$

Подставим (57.2) в уравнение (57.1) и приведем его к весу $P = 1$ умножением на $\cos \delta$, тогда получим

$$\frac{1}{\rho \sqrt{l^2 + m^2}} (ml dX_k - ldY_k - m dx_s + \\ + l dy_s) + l_\gamma \cos \delta = v_\gamma \cos \delta. \quad (57.3)$$

Уравнение поправок для склонения δ . Угол в функции прямоугольных координат описывается выражением (53.8). Приводя его к линейному виду, получим

$$\frac{1}{\rho} (\cos \gamma \sin \delta dX_k + \sin \gamma \sin \delta dY_k - \cos \delta dZ_k - \cos \gamma \sin \delta dx_s - \\ - \sin \gamma \sin \delta dy_s + \cos \delta dz_s) + l_\delta = v_\delta \quad \text{с весом } P_\delta = 1. \quad (57.4)$$

Если коэффициенты из (57.4) выразить через направляющие косинусы, то уравнение (57.4) примет вид

$$\frac{1}{\rho \sqrt{l^2 + m^2}} (\ln dX_k + mndY_k) - \frac{\sqrt{1-n^2}}{\rho} dZ_k - \\ - \frac{1}{\rho \sqrt{l^2 + m^2}} (\ln dx_s + mndy_s) + \frac{\sqrt{1-n^2}}{\rho} dz_s + l_\delta = v_\delta. \quad (57.5)$$

Уравнение поправок для расстояния. Приводя (53.9) к линейному виду, получим

$$l(dx_s - dX_k) + m(dy_s - dY_k) + n(dz_s - dZ_k) + l_\rho = v_\rho$$

$$\text{с весом } P_\rho = \frac{\mu^2}{m_\rho^2}. \quad (57.6)$$

Уравнение поправок для разности расстояний. Использование доплеровских систем позволяет определить разность расстояний до двух положений ИСЗ s_1 и s_2 относительно наземного пункта k . Из выражения (53.10) вытекает, что уравнение поправок для разности расстояний можно получить как разность уравнений поправок вида (57.6) для двух расстояний ρ_{ks} и ρ_{ks_2} . В результате получим

$$(l_{ks_1} - l_{ks_2}) dX_k - (m_{ks_1} - m_{ks_2}) dY_k - (n_{ks_1} - n_{ks_2}) dZ_k + \\ + l_{ks_1} dx_{s_1} + m_{ks_1} dy_{s_1} + n_{ks_1} dz_{s_1} - l_{ks_2} dx_{s_2} - m_{ks_2} dy_{s_2} - n_{ks_2} dz_{s_2} + \\ + l_{\Delta\rho} = v_{\Delta\rho} \quad \text{с весом } P_{\Delta\rho}. \quad (57.7)$$

Уравнение поправок для радиальной скорости. С помощью доплеровской аппаратуры могут быть измерены радиальные составляющие скорости полета ИСЗ относительно наземного пункта k . Функциональная связь радиальной скорости с необходимыми параметрами задается выражением (53.11). После приведения его к линейному виду получим

$$\left(\frac{\dot{x}}{\rho} - \frac{\Delta X}{\rho^2} \dot{\rho} \right) (dx_s - dX_k) + \left(\frac{\dot{y}}{\rho} - \frac{\Delta Y}{\rho^2} \dot{\rho} \right) (dy_s - dY_k) + \\ + \left(\frac{\dot{z}}{\rho} - \frac{\Delta Z}{\rho^2} \dot{\rho} \right) (dz_s - dZ_k) + \frac{\Delta X}{\rho} d\dot{x} + \\ + \frac{\Delta Y}{\rho} d\dot{y} + \frac{\Delta Z}{\rho} d\dot{z} + l_\rho = v_\rho \quad \text{с весом } P_\rho. \quad (57.8)$$

Уравнение (57.8) показывает, что в отличие от других измеренных величин радиальная скорость выражается через девять параметров: две тройки координат (наземного пункта и спутника) и три составляющих скорости полета ИСЗ.

В заключение напомним, что во всех уравнениях поправок величина свободного члена вычисляется по известной общей

формуле $l = T_0 - T$, где T — измеренная величина; $T_0 = T(X_0, Y_0, Z_0, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$ — ее предварительное значение, точно соответствующее предварительным координатам и составляющим скорости ИСЗ.

Уравнение поправок для плоскости синхронизации. Запишем условное уравнение плоскости синхронизации с дополнительными неизвестными (56.23) в виде

$$F = A(dX_1 - dX_2) + B(dY_1 - dY_2) + C(dZ_1 - dZ_2) + W = \\ = -(\Sigma a_i v_{\gamma_i} + \Sigma b_i v_{\delta_i}). \quad (57.9)$$

Выражение (57.9) имеет типичный вид уравнения поправок для некоторой функции результатов измерений. Своеобразие этого уравнения состоит в том, что величина F фактически не измеряется и представляет собой геометрический образ (плоскость), построенный на основе непосредственных измерений. Тем не менее выражение (57.9) может рассматриваться в качестве уравнения поправок как формально, так и по существу, поскольку его правая часть выражает погрешность построения данной плоскости. Для совокупности уравнений (57.9) в матричной записи будем иметь

$$A_n X - W = -aV \text{ с весом } P_W. \quad (57.10)$$

В соответствии с теоремой об уравнивании функций результатов измерений [4] весовая матрица для системы (57.10) вычисляется по формуле

$$P_W = (aqa^T)^{-1}. \quad (57.11)$$

Если наблюдения велись с синхронизацией на двух пунктах (практически наиболее частый случай), то направления, участвующие в построении данной плоскости, будут независимы от других, и матрица (57.11) превращается в диагональную. Каждый ее элемент находим из выражения

$$P_{W_i} = \frac{c}{\Sigma a_i^2 q_{\gamma_i} + \Sigma b_i^2 q_{\delta_i}}, \quad (57.12)$$

где a_i и b_i вычисляются по формулам (56.22); q_i — обратные веса измеренных γ и δ ; c — произвольный нормирующий множитель.

Уравнения поправок для сферических координат хорды. Уравнения поправок для углов Λ и Φ , характеризующих направление хорды, составляются совершенно аналогично уравнениям поправок для γ и δ . Однако эти уравнения не являются независимыми, поскольку углы Λ и Φ вычисляются по одним и тем же измеренным величинам. Поэтому при строгом уравни-

вании сферических координат хорд спутниковой триангуляции необходимо для каждой хорды ввести весовую матрицу

$$\mathbf{P}_D = \mathbf{Q}_D^{-1} = \begin{bmatrix} q_\Lambda & q_{\Lambda\Phi} \\ q_{\Phi\Lambda} & q_\Phi \end{bmatrix}, \quad (57.13)$$

элементы которой вычисляются в процессе предварительного уравнивания хорд за условие пучка плоскостей. Для этого представим условное уравнение компланарности вектора хорды и двух векторов направлений на ИСЗ (56.16) в виде уравнения поправок для некоторой функции

$$(-AM + BL)v_\Lambda + C \sec \Phi v_\Phi + W = -(\Sigma a_i v_{\gamma_i} + \Sigma b_i v_{\delta_i}). \quad (57.14)$$

В уравнении (57.14) величины v_Λ и v_Φ выступают в качестве необходимых неизвестных. Для пучка плоскостей, проходящих через ту же хорду, получим систему уравнений поправок

$$\mathbf{A}_D \begin{bmatrix} v_\Lambda \\ v_\Phi \end{bmatrix} + \mathbf{W} = \mathbf{A}_D \mathbf{D} + \mathbf{W} = -\mathbf{aV} \text{ с весом } \mathbf{P}_W. \quad (57.15)$$

Нормальная система, соответствующая (57.15), имеет вид

$$\mathbf{A}_D^T \mathbf{P}_W \mathbf{A}_D \mathbf{D} + \mathbf{A}_D^T \mathbf{P}_W \mathbf{W} = 0. \quad (57.16)$$

Отсюда

$$\mathbf{D} = -(\mathbf{A}_D^T \mathbf{P}_W \mathbf{A}_D)^{-1} \mathbf{A}_D^T \mathbf{P}_W \mathbf{W} = -\mathbf{Q}_D \mathbf{A}_D^T \mathbf{P}_W \mathbf{W}, \quad (57.17)$$

а весовая матрица уравнений поправок для величин Λ и Φ , в соответствии с обобщенным принципом наименьших квадратов, будет

$$\mathbf{P}_D = \mathbf{Q}_D^{-1} = \mathbf{A}_D^T \mathbf{P}_W \mathbf{A}_D, \quad (57.18)$$

т. е. она равна матрице нормальных уравнений, получаемой при уравнивании хорды за условие пучка плоскостей.

§ 58. УРАВНИВАНИЕ СПУТНИКОВОЙ ТРИАНГУЛЯЦИИ ПАРАМЕТРИЧЕСКИМ СПОСОБОМ

Уравнивание сферических координат направлений на ИСЗ. Этот способ реализует без каких-либо изменений идею хорошо известного метода поправок координат, поэтому ограничимся общим описанием порядка уравнивания.

Вычисляют предварительные координаты наземных пунктов и положений ИСЗ, используя формулы § 55, и составляют уравнения поправок для величин γ и δ . Система уравнений поправок запишется в виде

$$\mathbf{AX} + \mathbf{L} = \mathbf{V} \text{ с весом } \mathbf{P}. \quad (58.1)$$

Затем составляют и решают нормальные уравнения

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{X} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{L} = 0. \quad (58.2)$$

Оценку точности выполняют по общим правилам метода наименьших квадратов.

Число нормальных уравнений системы (58.2) составит $3(k+s)$, где k — число наземных пунктов, s — число наблюдений ИСЗ. Поскольку последних существенно больше, а конечным интересующим нас результатом являются координаты наземных пунктов, то систему (58.2) целесообразно решать групповым способом [14]. Разделим неизвестные, входящие в систему (58.2) на две группы. К первой отнесем координаты положений ИСЗ (вектор $\mathbf{X}_s$), ко второй — координаты наземных пунктов (вектор $\mathbf{X}_k$). Тогда система (58.2) запишется

$$\mathbf{A} \mathbf{X}_s + \mathbf{B} \mathbf{X}_k + \mathbf{L} = \mathbf{V}, \quad (58.3)$$

где $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — частные матрицы коэффициентов уравнений поправкам.

Уравнение (58.3) можно переписать в виде

$$[\mathbf{A} \ \mathbf{B}] \begin{bmatrix} \mathbf{X}_s \\ \mathbf{X}_k \end{bmatrix} + \mathbf{L} = \mathbf{V}. \quad (58.4)$$

Нормальная система

$$[\mathbf{A} \mathbf{B}]^T [\mathbf{A} \ \mathbf{B}] \begin{bmatrix} \mathbf{X}_s \\ \mathbf{X}_k \end{bmatrix} + [\mathbf{A} \mathbf{B}]^T \mathbf{L} = 0$$

после выполнения матричных операций может быть представлена в виде двух систем уравнений с двумя неизвестными векторами:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{X}_s + \mathbf{A}^T \mathbf{B} \mathbf{X}_k + \mathbf{A}^T \mathbf{L} = 0, \quad (58.5)$$

$$\mathbf{B}^T \mathbf{A} \mathbf{X}_s + \mathbf{B}^T \mathbf{B} \mathbf{X}_k + \mathbf{B}^T \mathbf{L} = 0.$$

Найдем вектор $\mathbf{X}_s$ из первого уравнения

$$\mathbf{X}_s = -(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{A}^T \mathbf{B}) \mathbf{X}_k - (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{L}$$

и подставим его во второе уравнение. После приведения подобных членов получим

$$\mathbf{B}^T [\mathbf{E} - \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T] \mathbf{B} \mathbf{X}_k + \mathbf{B}^T [\mathbf{E} - \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T] \mathbf{L} = 0. \quad (58.6)$$

Если обозначить $\mathbf{P}_A = \mathbf{E} - \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T$, то выражение (58.6) примет вид системы нормальных уравнений с одним неизвестным вектором

$$\mathbf{B}^T \mathbf{P}_A \mathbf{B} \mathbf{X}_k + \mathbf{B}^T \mathbf{P}_A \mathbf{L} = 0. \quad (58.7)$$

Система (58.7) имеет существенно меньший порядок по сравнению с (58.2) и может быть решена любым известным способом.

Уравнивание плоскостей синхронизации. Выше было установлено, что плоскость, образованную парой синхронных на-

правлений, можно рассматривать как геометрический элемент, определенный с погрешностью d . Такая точка зрения дает возможность оперировать с уравнениями плоскостей в форме (57.9) как с уравнениями поправок и, следовательно, применять для уравнивания алгоритм параметрического способа. Ниже приводятся порядок и особенности вычислений.

Вычисляют коэффициенты уравнений плоскостей синхронизации по формулам (54.9) и находят предварительные координаты наземных пунктов. Затем определяют веса уравнений поправок плоскостей синхронизации по формуле (57.12). Вычисляют свободные члены уравнений поправок

$$W = A(X_2^0 - X_1^0) + B(Y_2^0 - Y_1^0) + C(Z_2^0 - Z_1^0). \quad (58.8)$$

По уравнениям поправок вида (57.9) составляют и решают нормальные уравнения. Выполняют оценку точности. Формула для вычисления ошибки единицы веса имеет вид

$$\mu = \sqrt{\frac{[P_W v_W^2]}{M - 3k}}, \quad (58.9)$$

где M — число плоскостей синхронизации; k — число наземных определяемых пунктов; P_W — веса плоскостей синхронизации; v_W — правые части уравнений поправок (57.9). Размерность μ совпадает с размерностью свободного члена уравнения поправок для плоскости синхронизации.

Уравнивание сферических координат направлений хорд. Уравнивание выполняется в два этапа. На первом этапе хорды уравниваются за условие пучка плоскостей.

Вычисляют предварительные сферические координаты направлений хорд Λ' и Φ' , последовательно применяя формулы (54.9), (54.11) и (54.13). Затем находят веса плоскостей синхронизации, участвующих в построении данной хорды, по формуле (57.12). Составляют и решают нормальные уравнения относительно неизвестных v_Λ и v_Φ в соответствии с выражениями (57.16) и (57.17). Находят уравненные на первом этапе сферические координаты хорд

$$\Lambda'' = \Lambda' + v_\Lambda, \quad \Phi'' = \Phi' + v_\Phi.$$

На этом первый этап заканчивается.

Вычисления второго этапа ведут в следующем порядке. Вычисляют предварительные координаты наземных пунктов X^0 , Y^0 , Z^0 . Определяют значения углов Λ^0 и Φ^0 , соответствующие предварительным координатам наземных пунктов:

$$\Lambda_{ki}^0 = \arctg \frac{Y_i^0 - Y_k^0}{X_i^0 - X_k^0},$$

$$\Phi_{ki}^0 = \arctg \frac{Z_i^0 - Z_k^0}{\sqrt{(X_i^0 - X_k^0)^2 + (Y_i^0 - Y_k^0)^2}}.$$

Составляют систему уравнений поправок $AX_k + L = V$, используя для этого выражения (57.1) и (57.4) и заменяя в них символы γ , δ на Λ , Φ . Системе в соответствии с (57.18) приписывается весовая матрица, полученная на первом этапе: $P_D = A_D^T P_W A_D$. Свободные члены уравнений поправок вычисляют по формулам

$$l_\Lambda = \Lambda^0 - \Lambda'', \quad l_\Phi = \Phi^0 - \Phi''.$$

Составляют и решают нормальные уравнения

$$A^T P_D A X_k + A^T P_D L = 0.$$

Выполняют оценку точности. Ошибка единицы веса вычисляется по формуле

$$\mu^2 = \frac{V^T P_D V}{2L - 3k},$$

где L — число хорд в сети; k — число наземных пунктов; V — вектор поправок v_Λ и v_Φ , полученный после второго этапа уравнивания.

Уравнивание комбинированных сетей. В тех случаях, когда в космических сетях кроме сферических координат γ и δ измерены расстояния до положений ИСЗ или разности расстояний, возникает задача совместной обработки разнородных величин. Приведем некоторые возможные варианты решения этой задачи.

Достаточно просто осуществить уравнивание измеренных расстояний или их разностей со сферическими координатами направлений на ИСЗ. Для этого к исходным системам уравнений поправок (57.1) и (57.4) необходимо присоединить системы уравнений поправок (57.6) и (57.7). Дальнейший порядок вычислительных операций не отличается от изложенного выше.

Уравнивание непосредственно измеренных наклонных дальностей возможно и совместно с плоскостями синхронизации и сферическими координатами хорд. В этом случае к уравнениям поправок для измеренных расстояний (57.6) необходимо присоединить уравнения поправок для плоскостей (57.9) или уравнения поправок для величин Λ и Φ с их весовыми матрицами. Некоторые особенности и различия между двумя группами уравнений поправок дают возможность для составления и решения нормальных уравнений применить известный прием Пранис-Праневича. Уравнения поправок для измеренных расстояний будут содержать поправки координат как наземных пунктов, так и положений ИСЗ. По уравнениям этой группы может быть составлена частная система нормальных уравнений, из

которой затем исключаются поправки координат положений ИСЗ. Таким образом, первая частная система будет заменена преобразованной системой нормальных уравнений, в которую войдут поправки координат только наземных пунктов. Вторая группа уравнений поправок (для плоскостей или сферических координат хорд) содержит поправки координат только наземных пунктов. По этим уравнениям составляется вторая частная система нормальных уравнений, коэффициенты которой суммируются с преобразованными коэффициентами первой частной системы. В результате получают так называемую связующую систему нормальных уравнений. Решение этой системы выполняется обычными приемами. Совместное уравнивание измеренных расстояний с плоскостями или хордами может вестись и в рамках общей схемы параметрического способа.

Кроме наклонных дальностей до положений ИСЗ в пространственных сетях могут быть измерены стороны между наземными пунктами. В этом случае к уравнениям поправок для плоскостей или сферических координат хорд необходимо присоединить уравнения поправок для измеренных наземных базисов. Вид этих уравнений формально полностью совпадает с выражениями (57.6). Веса измеренных наземных базисов должны быть установлены из специальных исследований.

В том случае, когда некоторые наземные базисы рассматриваются как исходные, т. е. поправки к ним не отыскиваются, можно использовать прием, согласно которому исходный базис рассматривается как измеренный. Для него составляется уравнение поправок с весом настолько большим, что поправка величины базиса, находимая из совместного уравнивания, практически близка к нулю.

Краткое изложение вопросов совместной обработки угловых и линейных величин показывает, что никаких затруднений принципиального характера при общем уравнивании измеренных расстояний, их разностей, сферических координат направлений на ИСЗ или их функций не встретится. Наиболее актуальным вопросом в этой области, несомненно, является проблема правильного установления весов измеренных величин.

§ 59. УРАВНИВАНИЕ СПУТНИКОВОЙ ТРИАНГУЛЯЦИИ КОРРЕЛАТНЫМ СПОСОБОМ

Уравнивание сферических координат направлений на ИСЗ по способу условий с дополнительными неизвестными. Реализация коррелятного способа в его каноническом виде при уравнивании сферических координат γ и δ сопряжена со значительными трудностями. Прежде всего это относится к составлению наиболее общего условного уравнения связки плоскостей. Введение дополнительных неизвестных — поправок к координатам наземных пунктов — упрощает составление условных уравнений, число которых равно $R = r + 3k$, где r — число

независимых условий, возникающих в данной сети; k — число определяемых наземных пунктов.

Ниже приводится порядок уравнивания спутниковой триангуляции по способу условий с дополнительными неизвестными: вычисляют коэффициенты уравнений плоскостей синхронизации по формулам (54.9);

находят предварительные координаты наземных пунктов; вычисляют коэффициенты и свободные члены условных уравнений вида (56.23) по формулам (56.22) и (56.25);

составляют и решают нормальные уравнения коррелят с дополнительными неизвестными

$$aqa^T K + AX + W = 0,$$

$$A^T K = 0,$$

из решения которых находят поправки к координатам наземных пунктов.

Оценка точности элементов уравненной сети выполняется по общим правилам метода наименьших квадратов.

Уравнивание сферических координат направлений хорд. Если каждая хорда получается на основе отдельной группы независимых синхронных наблюдений (случай, наиболее часто встречающийся на практике), то условные уравнения целесообразно разбить на две группы.

В первую группу входят условные уравнения пучков плоскостей, их число составляет $r_1 = M - 2L$, где M — число плоскостей синхронизации; L — число хорд, образованных этими плоскостями.

Остальные условные уравнения образуют вторую группу, их число составляет $r_2 = 2L - 3k$.

Уравнивание хорд за условие пучка плоскостей эквивалентно определению неизвестных v_Δ и v_Φ параметрическим способом. Поэтому первый этап уравнивания ничем не отличается от порядка, изложенного в предыдущем параграфе.

На втором этапе составляются полюсные и базисные условные уравнения плоскости для трех свободных векторов, причем в качестве измеренных величин принимают сферические координаты хорд Δ и Φ , уравненные на первом этапе. Подсчет числа условий каждого вида выполняется по тем же правилам, что и для плоских сетей. Добавим, что полюсные и базисные условия в спутниковой сети, образованной хордами, воспринимаются «на глаз» как аналогичные условия в плоской сети, а условия компланарности трех свободных векторов — как условия треугольников с измеренными углами.

Вычисления на втором этапе ведутся в следующем порядке.

Вычисляют коэффициенты и свободные члены условных уравнений по формулам, полученным в § 56, и составляют систему условных уравнений

$$aV + W = 0,$$

где V — вектор поправок к величинам Λ и Φ , уравненным на первом этапе.

Составляют и решают нормальные уравнения коррелат

$$aQa^TK + W = 0,$$

где Q_D и $P_D^{-1} = (A_D^T P_W A_D)$ — обратная весовая матрица, полученная на первом этапе уравнивания.

Находят поправки к сферическим координатам Λ и Φ

$$V = Q_D a^T K.$$

По уравненным величинам Λ и Φ определяют координаты наземных пунктов.

Выполняют оценку точности. Ошибка единицы веса находится по формуле

$$\mu^2 = \frac{V^T Q_D^{-1} V}{2L - 3k} = - \frac{K^T W}{2L - 3k}.$$

Уравнивание комбинированных сетей по способу условий с дополнительными неизвестными. При совместных измерениях угловых и линейных величин возникает задача уравнивания разнородной информации, относящейся к отдельному синхронному треугольнику или группе таких треугольников (см. рис. 66). Количество и вид условных уравнений в синхронном треугольнике зависит от того, какие его элементы измерены. Возможны четыре варианта сочетания измерений: 2 направления на ИСЗ, 1 направление и 2 расстояния, 2 направления и 1 расстояние, 2 направления и 2 расстояния. Возникающие при этом условные уравнения представлены в табл. 5.

Углы синхронного треугольника определяются выражениями

$$\cos \beta_1 = Ll_1 + Mm_1 + Nn_1,$$

$$\cos \beta_2 = -Ll_2 - Mm_2 - Nn_2,$$

$$\cos \beta_3 = l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2.$$

Т а б л и ц а 5. Условные уравнения в синхронном треугольнике

Состав измерений	Условные уравнения	Число условий
$\gamma_1, \delta_1; \gamma_2, \delta_2$	$\pi_1 = AL + BM + CN = 0$	1
$\gamma_1, \delta_1; \rho_1, \rho_2$	$\pi_2 = \rho_1^2 - \rho_2^2 - D^2 + 2D\rho_1 \cos \beta_1 = 0$	1
$\gamma_1, \delta_1; \rho_1; \gamma_2, \delta_2$	$\pi_3 = \rho_1 \sin \beta_3 - D \sin \beta_1 = 0$	2
$\gamma_1, \delta_1, \rho_1; \gamma_2, \delta_2, \rho_2$	$\pi_4 = DL + \rho_2 l_2 - \rho_1 l_1 = 0$	3
	$\pi_5 = DM + \rho_2 m_2 - \rho_1 m_1 = 0$	
	$\pi_6 = DN + \rho_2 n_2 - \rho_1 n_1 = 0$	

Линеаризация условных уравнений приводит к системе (56.37), которую в матричной форме запишем следующим образом

$$\pi = [AB] \begin{bmatrix} V \\ dD \end{bmatrix} + W = 0,$$

где V — вектор поправок к непосредственно измеренным величинам; dD — вектор дополнительных неизвестных — поправок в сферические координаты хорды и ее длину.

Выражения для коэффициентов в матрицах A и B приводятся в работе [11]. Далее используется процедура способа условий с дополнительными неизвестными. Некоторые особенности определения хорд из синхронных треугольников позволяют ее несколько упростить. Нормальная система для отдельного синхронного треугольника имеет вид

$$\begin{bmatrix} AQA^T & B \\ & B^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K \\ dD \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W \\ 0 \end{bmatrix} = 0,$$

где K — вектор коррелат, так как коррелаты в данной системе независимы от коррелат в других системах, они могут быть исключены. В результате получим частную систему нормальных уравнений дополнительных неизвестных

$$B^T (AQA^T)^{-1} B dD + B^T (AQA^T)^{-1} W = 0$$

или, введя обозначение

$$P_D = (AQA^T)^{-1},$$

получим

$$B^T P_D B dD + B^T P_D W = 0.$$

Суммирование матриц коэффициентов и векторов свободных членов частных систем нормальных уравнений, составленных для всех синхронных треугольников, опирающихся на данную хорду, дает общую систему нормальных уравнений поправок к компонентам хордового вектора, из решения которой они и определяются.

§ 60. ПОНЯТИЕ ОБ УРАВНИВАНИИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ, ПОСТРОЕННЫХ ОРБИТАЛЬНЫМ МЕТОДОМ

Основы орбитального метода. Геометрический метод позволяет получить на земной поверхности положение системы связанных между собой точек. Такая сеть выступает как единое целое; утрата (например, неудачные наблюдения) хотя бы одной из них ставит под угрозу определение остальных. Орбитальный метод в этом отношении более автономен. Спутниковая сеть, полученная орбитальным методом, представляет собой совокупность точек, определенных в общеземной системе координат

почти независимо друг от друга. Связь между ними (довольно слабая) осуществляется через общие параметры, характеризующие земной потенциал и другие эффекты. Если бы положение спутника было известно точно, то после выполнения нескольких измерений определение координат наземного пункта свелось бы к решению пространственной (угловой, линейной или комбинированной) засечки.

Действительно, пусть движение спутника происходит в центральном поле сил. В этом случае элементы орбиты $a, e, i, \Omega, \omega, t_\pi$ (или M_0) постоянны и координаты положений ИСЗ на заданные моменты времени можно вычислить по формулам

$$\begin{aligned}x' &= r(\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i), \\y' &= r(\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i), \\z' &= r \sin u \sin i,\end{aligned}\tag{60.1}$$

где r — модуль радиуса-вектора спутника; u — угловое расстояние ИСЗ от восходящего узла орбиты.

Полученные таким образом координаты относятся к мгновенной звездной системе координат. Учитывая, что координаты геодезических пунктов необходимо получить в системе, жестко связанной с вращающейся Землей (т. е. в общеземной системе или в системе, отнесенной к некоторому референц-эллипсоиду), координаты ИСЗ также нужно преобразовать к данной системе. Это преобразование задается выражением

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = R_1 R_2 \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix},\tag{60.2}$$

где R_1 и R_2 — матрицы, с помощью которых учитывается суточное вращение Земли и перемещение земных полюсов.

В развернутом виде выражение (60.2) запишется следующим образом

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos S & \sin S & x_p \\ -\sin S & \cos S & y_p \\ x_p \cos S - y_p \sin S & -x_p \sin S + y_p \cos S & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix},\tag{60.3}$$

где S — гринвичское звездное время; x_p, y_p — координаты мгновенного полюса. Координаты положений ИСЗ, полученные по формуле (60.3), относятся к общеземной системе и могут быть использованы как исходные при определении координат наземных пунктов.

В качестве измеренных величин в орбитальном методе могут быть использованы те же величины, что и в геометриче-

ском, т. е. топоцентрические координаты γ и δ , расстояния до ИСЗ ρ , разность расстояний $\Delta\rho$ и радиальные скорости $\dot{\rho}$. Кроме того, обязательно должен быть известен момент времени наблюдений t . Запишем в общем виде уравнения поправок

$$\mathbf{A}\mathbf{X}_s + \mathbf{B}\mathbf{X}_k + \mathbf{L} = \mathbf{V}, \quad (60.4)$$

где $\mathbf{X}_s$ — вектор поправок координат ИСЗ; $\mathbf{X}_k$ — вектор поправок координат наземных пунктов. Например, для измеренного расстояния согласно (57.6) будем иметь

$$[lmn] \begin{bmatrix} dx_s \\ dy_s \\ dz_s \end{bmatrix} - [lmn] \begin{bmatrix} dX_k \\ dY_k \\ dZ_k \end{bmatrix} + l_\rho = V_\rho. \quad (60.5)$$

Конкретный вид выражения (60.4) в сильной степени зависит от используемой модели движения ИСЗ. В том случае, если движение спутника происходит в центральном поле сил, то элементы орбиты являются постоянными, а координаты положений ИСЗ, полученные по формулам (60.1), рассматриваются как точные. Поэтому, естественно, поправки к ним в процессе уравнивания не отыскиваются. В этом случае система уравнений поправок (60.4) принимает особенно простой вид:

$$\mathbf{B}\mathbf{X}_k + \mathbf{L} = \mathbf{V},$$

а система нормальных уравнений

$$\mathbf{B}^T \mathbf{B} \mathbf{X}_k + \mathbf{B}^T \mathbf{L} = 0$$

содержит всего три неизвестных — поправки в координаты данного наземного пункта. Однако воздействие на спутник разнообразных сил значительно усложняет задачу.

Под влиянием возмущений кеплеровский эллипс непрерывно изменяется, все элементы орбиты становятся функциями времени

$$q_i = q_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, 6, \quad (60.6)$$

где q_i — любой элемент орбиты.

Изменение параметров орбиты dq_i приводит к изменению координат ИСЗ, например, для абсциссы можно записать

$$dx = \frac{\partial x}{\partial a} da + \frac{\partial x}{\partial e} de + \frac{\partial x}{\partial i} di + \frac{\partial x}{\partial \Omega} d\Omega + \frac{\partial x}{\partial \omega} d\omega + \frac{\partial x}{\partial U} dM_0; \quad (60.7)$$

точно в такой же форме получим дифференциалы dy и dz . Подставив их в выражение (60.4), получим

$$\mathbf{A}\mathbf{G}_1 dq + \mathbf{B}\mathbf{X}_k + \mathbf{L} = \mathbf{V}, \quad (60.8)$$

или

$$\mathbf{A} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(a, e, i, \Omega, \omega, M_0)} dq + \mathbf{B}\mathbf{X}_k + \mathbf{L} = \mathbf{V}. \quad (60.9)$$

Для конкретного уравнения поправок (60.5) будем иметь

$$[dmn] \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial e} & \frac{\partial x}{\partial i} & \frac{\partial x}{\partial \Omega} & \frac{\partial x}{\partial \omega} & \frac{\partial x}{\partial M_0} \\ \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial e} & \frac{\partial y}{\partial i} & \frac{\partial y}{\partial \Omega} & \frac{\partial y}{\partial \omega} & \frac{\partial y}{\partial M_0} \\ \frac{\partial z}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial e} & \frac{\partial z}{\partial i} & \frac{\partial z}{\partial \Omega} & \frac{\partial z}{\partial \omega} & \frac{\partial z}{\partial M_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} da \\ de \\ di \\ d\Omega \\ d\omega \\ dM_0 \end{bmatrix} - [lmn] \begin{bmatrix} dX_k \\ dY_k \\ dZ_k \end{bmatrix} + l_p = v_p. \quad (60.10)$$

В уравнения (60.9), (60.10) входят девять неизвестных — три поправки в координаты наземного пункта и шесть поправок в элементы орбиты. Однако эти уравнения в той форме, в которой они получены, еще не могут быть использованы в процессе математической обработки, так как поправки в оскулирующие элементы орбиты dq_i , входящие в уравнения (60.8) — (60.10), отнесены к разным моментам времени и в силу (60.6) имеют различные значения, а следовательно, число неизвестных в этом случае всегда больше числа измерений. Для того чтобы избежать неопределенности, отыскивают поправки к элементам орбиты q_0 , отнесенные к некоторому начальному моменту времени и t_0 . В этом случае выражение (60.9) примет вид

$$\mathbf{A}\mathbf{G}_1\mathbf{G}_2dq + \mathbf{B}\mathbf{X}_k + \mathbf{L} = \mathbf{V}, \quad (60.11)$$

или

$$\mathbf{A} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(a, e, i, \Omega, \omega, M_0)} \frac{\partial(a, e, i, \Omega, \omega, M_0)}{\partial(a_0, e_0, i_0, \Omega_0, \omega_0, M_{00})} \times \begin{bmatrix} da_0 \\ de_0 \\ di_0 \\ d\Omega_0 \\ d\omega_0 \\ dM_{00} \end{bmatrix} + \mathbf{B} \begin{bmatrix} dX_k \\ dY_k \\ dZ_k \end{bmatrix} + \mathbf{L} = \mathbf{V}. \quad (60.12)$$

Частные производные координат по текущим параметрам орбиты [матрица $\mathbf{G}_1$, в выражениях (60.8), (60.11), (60.12)]

можно найти, продифференцировав (60.1). После некоторых преобразований получим:

$$\frac{dx}{\partial a} = \frac{x}{a};$$

$$\frac{\partial y}{\partial a} = \frac{y}{a};$$

$$\frac{\partial z}{\partial a} = \frac{z}{a};$$

$$\frac{\partial x}{\partial e} = \frac{x}{r} \left(\frac{ae \sin^2 E}{1 - e \cos E} - a \cos E \right) + \frac{\partial x}{\partial \omega} \left(\frac{\sin v}{1 - e \cos E} + \frac{\sin v}{1 - e^2} \right);$$

$$\frac{\partial y}{\partial e} = \frac{y}{r} \left(\frac{ae \sin^2 E}{1 - e \cos E} - a \cos E \right) + \frac{\partial y}{\partial \omega} \left(\frac{\sin v}{1 - e \cos E} + \frac{\sin v}{1 - e^2} \right);$$

$$\frac{\partial z}{\partial e} = \frac{z}{r} \left(\frac{ae \sin^2 E}{1 - e \cos E} - a \cos E \right) + \frac{\partial z}{\partial \omega} \left(\frac{\sin v}{1 - e \cos E} + \frac{\sin v}{1 - e^2} \right);$$

$$\frac{\partial x}{\partial i} = z \sin \Omega;$$

$$\frac{\partial y}{\partial i} = -z \cos \Omega;$$

$$\frac{\partial z}{\partial i} = r \cos i \sin u;$$

$$\frac{\partial x}{\partial \Omega} = -y;$$

$$\frac{\partial y}{\partial \Omega} = x;$$

$$\frac{\partial z}{\partial \Omega} = 0;$$

$$\frac{\partial x}{\partial \omega} = r (-\sin u \cos \Omega - \cos u \sin \Omega \cos i);$$

$$\frac{\partial y}{\partial \omega} = r (-\sin u \sin \Omega + \cos u \cos \Omega \cos i);$$

$$\frac{\partial z}{\partial \omega} = r \cos u \sin i;$$

$$\frac{\partial x}{\partial M} = \frac{x}{r} \cdot \frac{ae \sin E}{1 - e \cos E} + \frac{\partial x}{\partial \omega} \cdot \frac{\sin v}{\sin E (1 - e \cos E)};$$

$$\frac{\partial y}{\partial M} = \frac{y}{r} \cdot \frac{ae \sin E}{1 - e \cos E} + \frac{\partial y}{\partial \omega} \cdot \frac{\sin v}{\sin E (1 - e \cos E)};$$

$$\frac{\partial z}{\partial M} = \frac{z}{r} \cdot \frac{ae \sin E}{1 - e \cos E} + \frac{\partial z}{\partial \omega} \cdot \frac{\sin v}{\sin E (1 - e \cos E)};$$

где E и v — эксцентрическая и истинная аномалии.

Элементы матрицы G_2 из (60.11) и (60.12) представляют собой частные производные текущих параметров q по начальным параметрам орбиты q_0 (иногда их называют изохронными производными). Элементы матрицы G_2 можно получить численными или аналитическими методами.

Среди численных методов наиболее простым, но не экономичным (о более эффективных методах см. [22]) является так называемый разностный метод, существо которого заключается в следующем. Пусть q_i — элемент орбиты, вычисленный на момент времени t с использованием начальных параметров орбиты $a_0, e_0, i_0, \Omega_0, \omega_0, M_0$, т. е. $q_i = f_i(a_0, e_0, i_0, \Omega_0, \omega_0, M_0)$. Придадим теперь какому-либо элементу q_0 , например a_0 , приращение Δa . Тогда частную производную $\partial q_i / \partial a$ можно найти по следующей приближенной формуле:

$$\frac{\partial q_i}{\partial a_0} \approx \frac{f_i(a_0 + \Delta a, e_0, i_0, \Omega_0, \omega_0, M_0) - f_i(a_0, e_0, i_0, \Omega_0, \omega_0, M_0)}{\Delta a}.$$

Таким же образом можно вычислить шесть частных производных, образующих i -й столбец матрицы G_2 из (60.11) и (60.12). Ясно, что для полного определения этой матрицы необходимо вычислить кроме исходной еще шесть варьированных орбит, что составляет большую вычислительную задачу.

Аналитические методы определения изохронных производных основаны на использовании уравнений Лагранжа, которые устанавливают связь между возмущающей (пертурбационной) функцией, элементами орбиты и временем. Конкретный вид производных текущих параметров по начальным зависит от принятой модели возмущающих сил и формы задания элементов орбиты (прямоугольная, кеплеровская и т. д.). Например, в работе [10] для определения производных учитывается только сжатие Земли, т. е. земной потенциал записывается в виде

$$V = \frac{fM}{r} \left[1 - \frac{1}{2} C_{20} \left(\frac{a_e}{r} \right)^2 (1 - 3 \sin^2 \varphi) \right], \quad (60.13)$$

где C_{20} — второй зональный коэффициент в разложении потенциала; a_e — большая полуось земного эллипсоида; φ — геоцентрическая широта. Тогда матрица изохронных производных будет иметь вид

$$G_2 = \frac{\partial(a, e, i, \Omega, \omega, M)}{\partial(a_0, e_0, i_0, \Omega_0, M_0)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial(a, e, i)}{\partial(a_0, e, i_0)} & \frac{\partial(a, e, i)}{\partial(\omega_0, \Omega_0, M_0)} \\ \frac{\partial(\omega, \Omega, M)}{\partial(a_0, e_0, i_0)} & \frac{\partial(\omega, \Omega, M)}{\partial(\omega_0, \Omega_0, M_0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ K & E \end{bmatrix}, \quad (60.14)$$

где E — единичная матрица; 0 — нулевая матрица;

$$K = \frac{\partial(\omega, \Omega, M)}{\partial(a_0, e_0, i_0)} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{(3-7\gamma)n}{2a_0} & -\frac{3n \cos E_0}{1-e_0 \cos E_0} \gamma & \frac{6n \operatorname{ctg} i \sin \varphi_0}{1-3 \sin^2 \varphi_0} \varphi \\ -\frac{7\dot{\omega}}{2a_0} & \frac{4e_0 \dot{\omega}}{1-e_0^2} & 5\dot{\Omega} \sin i \\ \frac{7\dot{\Omega}}{2a_0} & \frac{4e_0 \dot{\Omega}}{1-e_0^2} & -\dot{\Omega} \operatorname{tg} i \end{bmatrix}. \quad (60.15)$$

В последнем выражении n — среднее движение спутника; E_0 — эксцентрическая аномалия; символы $\dot{\omega}$, $\dot{\Omega}$ — обозначают производные этих же величин по времени, а величина γ находится из выражения

$$\gamma = \frac{3}{2} C_{20} \left(\frac{a_0}{r_0} \right)^3 \left(\frac{a_0}{r_0} \right)^2 (1 - 3 \sin^2 \varphi_0). \quad (60.16)$$

Формулы (60.12) — (60.16) решают задачу совместного определения координат наземного пункта и дифференциального уточнения орбит для принятой (весьма приближенной) модели возмущающих сил. Учет и совместное определение других членов: гармоник разложения земного потенциала более высокого порядка, параметров, отражающих эффекты лунно-солнечного притяжения, сопротивления атмосферы, светового давления и т. д. — приведет к тому, что система уравнений (60.12) дополнится новыми неизвестными. В этом случае мы приходим к основному уравнению динамического метода спутниковой геодезии.

В заключение приведем последовательность обработки измерений в орбитальном методе.

1. Если начальные условия q_0 неизвестны или известны очень приближенно, то прежде всего из массива измерений T_{ij} , $t_j - t_0$ выбирают ряд необходимых измерений, по которым определяют предварительную работу q_0 .

2. На все моменты времени t_j ($j = 1, 2, \dots, n$), для которых произведены измерения T_{ij} , выполняют точное интегрирование уравнений движения с возможно более полным учетом возмущений. В результате получают приближенные (предварительные), но точно соответствующие принятым начальным условиям координаты (x_0, y_0, z_0) и составляющие вектора скорости $(\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$ спутника на моменты измерений t_j .

3. По предварительным координатам определяемых пунктов и координатам спутников, полученным из интегрирования, вы-

числяют предварительные, точно соответствующие приближенным координатам $(X_0, Y_0, Z_0)_i$ и $(x_0, y_0, z_0)_j$ расчетные значения измеренных величин T_{ij}^0 .

4. Вычисляют свободные члены $l_{ij} = T_{ij}^0 - T_{ij}^{\text{изм}}$ уравнений поправок (60.12) и выполняют отбраковку грубых измерений в соответствии с общими правилами метода наименьших квадратов.

5. Для всех измерений T_{ij} , принятых в обработку, вычисляют матрицы производных: от измеренных величин T_{ij} по координатам и скорости ИСЗ

$$\mathbf{A} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial (x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})};$$

от измеренных величин по координатам определяемых пунктов

$$\mathbf{B} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial (X, Y, Z)};$$

от текущих координат и составляющих скорости по элементам орбиты

$$\mathbf{G}_1 = \frac{\partial (x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})}{\partial (a, e, i, \Omega, \omega, M)};$$

от текущих элементов орбиты q_i по их начальным значениям q_0

$$\mathbf{G}_2 = \frac{\partial (a, e, i, \Omega, \omega, M)}{\partial (a_0, e_0, i_0, \Omega_0, \omega_0, M_0)}.$$

6. Для каждого измерения T_{ij} составляют уравнения поправок вида (60.12)

$$\mathbf{A}\mathbf{G}_1\mathbf{G}_2 dq_0 + \mathbf{B}\mathbf{X}_k + l_{ij} = v_{ij}.$$

7. Составляют, решают нормальные уравнения и выполняют оценку точности в соответствии с общими правилами метода наименьших квадратов.

Метод коротких дуг. При сгущении сети пункты опорной высокоточной спутниковой сети принимаются за исходные, т. е. поправки к их координатам не отыскиваются. Как правило, сгущение выполняется в некотором ограниченном районе. Поэтому длины мерных дуг ограничиваются участками видимости в этих районах. Таким образом, длины дуг будут короткими. Практически действительный путь спутника распадается на многие короткие дуги, и каждую такую дугу можно рассматривать как независимую орбиту. В соответствии с этим сам метод получил название метода коротких дуг.

Он обеспечивает высокоточное определение взаимного положения пунктов. Однако в отличие от орбитального созданная с его помощью сеть относится не к общеземной системе координат

нат, а к системе, заданной исходными пунктами. С этой же точки зрения метод коротких дуг близок к геометрическому. Однако структура уравнений связи между координатами отдельных положений ИСЗ и координатами определяемых пунктов приближает его к орбитальному методу.

Принципиально метод коротких дуг можно реализовать, используя формулы орбитального метода, исключив только в уравнениях поправок коэффициенты при координатах исходных пунктов. Существует большое число модификаций метода, например, если в уравнениях (60.12) положить $G_2 = E$, где E — единичная матрица. Объясняется это тем, что на коротких дугах существенно уменьшается действие всех возмущающих сил, поэтому уравнения движения можно представить в упрощенном виде.

Разновидность метода коротких дуг применяется, в частности, в американской навигационной системе Transit для оперативного определения координат точек. При этом с исходных пунктов определяется орбита спутника, т. е. составляются и решаются уравнения для измерения одной дуги, а уточняемыми неизвестными являются только параметры орбиты. По уточненным значениям начальных условий выполняется прогноз положения и скорости ИСЗ. По измерениям с определяемых пунктов, принимая прогнозируемую орбиту за опорную, определяют координаты последних.

§ 61. СРАВНИТЕЛЬНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА МЕТОДОВ ПОСТРОЕНИЯ СПУТНИКОВОЙ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ СЕТИ

Независимо от того, орбитальным или геометрическим методом построены геодезические сети, целью их создания является получение координат наземных пунктов. Поэтому основными неизвестными при любом методе построения сети будут векторы положения пунктов этой сети.

Промежуточными неизвестными, нужными лишь для определения с их помощью основных неизвестных, являются: в орбитальном методе — векторы начальных условий движения ИСЗ q_0 в момент времени t_0 , а в геометрическом — вектор отдельных положений ИСЗ x_s .

Как в первом, так и во втором методе используются одни и те же виды непосредственных измерений, поэтому с точки зрения применения аппарата метода наименьших квадратов нет принципиальных различий в обработке сетей, полученных двумя этими методами.

Разница заключается лишь в том, как исключаются промежуточные неизвестные: вектор начальных условий q_0 и вектор поправок координат положений ИСЗ x_s в орбитальном и геометрическом методах соответственно. Различными оказываются и системы координат, в которых получаются координаты пунктов. В результате построения сети орбитальным методом она оказы-

вается в системе координат, отнесенной к центру масс Земли, а ось аппликат системы строго совпадает с осью вращения Земли. Следовательно, только этот метод позволяет решить одну из основных задач высшей геодезии в полной мере, тогда как сеть, построенная геометрическим методом, остается в системе исходных пунктов референц-эллипсоида.

Сравнивая орбитальный метод с геометрическим, следует отметить, что точность полученных орбитальным методом результатов зависит от ошибок геофизических параметров, принимаемых в качестве исходных данных при вычислении правых частей дифференциальных уравнений движения ИСЗ. Она оказывается меньшей, чем точность взаимного положения пунктов спутниковой триангуляции, не зависящей от того, с какой точностью известны параметры, выражающие законы движения ИСЗ. Поэтому в тех случаях, когда необходимо сохранить заданную систему координат, определяемую исходными пунктами, должен быть использован геометрический метод построения сети или метод коротких дуг.

Необходимо также отметить, что хотя для построения сетей геометрическим и орбитальным методами состав измерений одинаков, требования к распределению измерений во времени разные, и для каждого из методов в этом вопросе имеются свои преимущества и свои недостатки.

Для применения орбитального метода необходимым является точное знание момента наблюдений для вычисления наблюдаемого положения ИСЗ интегрированием уравнений движения от начальной точки на данный момент. Очевидной является пригодность для орбитального метода как синхронных, так и несинхронных наблюдений ИСЗ, попадающих на мерные дуги. Поэтому орбитальный метод включает существенно больше измерений.

Однако не все синхронные наблюдения могут быть использованы в орбитальном методе, так как синхронизация наблюдений может осуществляться, например, вспышками оптического маяка на спутнике. При этом время вспышки нужно знать лишь для приведения наблюдений в земную систему координат (для определения угла поворота $\gamma = \alpha - S$), т. е. менее точно, чем для применения орбитального метода. Кроме того, для орбитального метода малоприспособны и наблюдения легких спутников — баллонов, для которых возмущения орбит от влияния атмосферы и светового давления трудно поддаются учету.

Вместе с тем, в геометрическом методе могут быть использованы и такие наблюдения, которые непригодны для орбитального. В первую очередь это относится к синхронным наблюдениям легких спутников — баллонов. Кроме того, для геометрического метода могут быть использованы отдельные группы синхронных наблюдений тяжелых ИСЗ, которые из-за малого количества наблюдений не обеспечивают построения мерной дуги.

Отметим и различный характер количественного распределения измерений, связанных с промежуточными неизвестными орбитального и геометрического методов. Если для надежного определения начальных условий q_0 практически всегда можно определить такой начальный момент времени и такой интервал его, определяющий протяженность дуги, чтобы она была обеспечена достаточным числом избыточных измерений, то отдельные положения ИСЗ будут обеспечены только измерениями, оказавшимися синхронными в данный момент и совокупность которых может не содержать избыточных. Поэтому для геометрического метода процесс отбора измерений имеет особое значение и требует определенного искусства. Он сводится к отбору тех положений ИСЗ и наземных пунктов, из которых можно составить элементарные фигуры, подлежащие включению в общую спутниковую геодезическую сеть.

Особенности методов построения спутниковой сети позволяют говорить о некоторых преимуществах орбитального метода. Он не ставит ограничений для расстояний между пунктами, в то время как в спутниковой триангуляции расстояния между пунктами ограничиваются общей зоной видимости ИСЗ хотя бы для двух пунктов. Пункты сети при орбитальном методе могут, с одной стороны, располагаться локально, по одному на взаиморасстояниях, как угодно превышающих предельные расстояния между пунктами в спутниковой триангуляции; с другой стороны, отдельные пункты орбитального метода могут располагаться так близко друг к другу, как не могут размещаться пункты спутниковой триангуляции из-за геометрических ограничений для фигур сети.

Орбитальным методом можно осуществить связь между рядом локальных сетей спутниковой триангуляции, а также астрономо-геодезических сетей, построенных в различных референциальных системах.

При построении спутниковой геодезической сети закономерно использование как геометрического, так и орбитального методов, а в общем случае — их целесообразных комбинаций.

Глава 18.

ТОЧНОСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПУНКТОВ В ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФИГУРАХ И СЕТЯХ СПУТНИКОВОЙ ТРИАНГУЛЯЦИИ

§ 62. ЗАДАЧИ И МЕТОДЫ АПРИОРНОЙ ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ

Априорные исследования закономерностей распределения ошибок положения пунктов в геодезических сетях и отдельных фигурах являются теоретическим фундаментом для решения целой группы вопросов геодезии. К ним относятся разработка прин-

ципиальной схемы построения геодезических сетей, составление и сравнение предварительных проектов, выяснение выгоднейшей формы геодезических построений, разработка технических требований к минимальным и максимальным величинам элементов геодезических сетей и др.

Для априорной оценки точности положения пунктов спутниковой сети целесообразно получить достаточно простые и наглядные выражения, даже если для этого потребовалось определенное упрощение строгих формул за счет некоторого снижения точности получаемых результатов.

Из обзора различных способов построения спутниковой триангуляции, описанных в гл. 16, видно, что проблема оценки точности ее типовых фигур в значительной степени осложняется тем обстоятельством, что положение пунктов определяется с помощью некоторых вспомогательных геометрических элементов (плоскость, хорда), представляющих собой функции измеренных величин. Поэтому изучение вопросов априорной оценки точности естественно начинать с установления связей между ошибками непосредственно измеренных величин и ошибками определения вспомогательных геометрических элементов.

К выражениям для ошибок положения пунктов и ИСЗ в отдельных фигурах целесообразно предъявить требования, чтобы они были инвариантны относительно преобразования систем координат и содержали лишь параметры, характеризующие геометрию этих фигур.

Для рядов спутниковой триангуляции желательно отражение зависимости ошибки положения пункта от продвига фигуры и зависимости возрастания ошибки от увеличения длины ряда.

Выражения для ошибок положения пунктов сплошной сети спутниковой триангуляции должны показывать зависимость ошибок от удаления от исходных пунктов, средних расстояний между пунктами и геометрической формы сети.

Во всех случаях основным критерием точности считают ошибки уравненных координат и ошибку положения определяемого пункта.

Как известно, в общем случае средняя квадратическая ошибка функции уравненных координат

$$F = F(X_1, X_2, \dots, X_k) \quad (62.1)$$

описывается выражением

$$M_E^2 = \mu^2 \mathbf{F}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{F} = \mu^2 \mathbf{F}^T \mathbf{Q} \mathbf{F}, \quad (62.2)$$

где μ — ошибка единицы веса; $\mathbf{F}^T$ — вектор частных производных функции (62.1):

$$\mathbf{F}^T = \left[\frac{\partial F}{\partial X_1}, \frac{\partial F}{\partial X_2}, \dots, \frac{\partial F}{\partial X_k} \right];$$

$\mathbf{A}$ — матрица коэффициентов уравнений поправок; $\mathbf{P}$ — матрица весов измеренных величин; $\mathbf{Q} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1}$ — матрица весовых

коэффициентов (обратная матрица системы нормальных уравнений).

При оценке ошибок уравненных координат функция (62.1) принимает простейший вид $F = X_i$. В этом случае согласно (62.2) получим

$$m_{x_i}^2 = \mu^2 q_{x_i}, \quad (62.3)$$

где q_{x_i} — диагональный элемент обратной матрицы, соответствующий неизвестному X_i .

Более полной характеристикой точности является ошибка положения пункта. Положение точки в некоторой системе координат задается ее радиусом-вектором:

$$\mathbf{R} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}.$$

Неточное определение координат приведет к смещению радиуса-вектора на величину

$$d\mathbf{R} = dX\mathbf{i} + dY\mathbf{j} + dZ\mathbf{k}.$$

Под ошибкой положения будем понимать среднее квадратическое значение длины (модуля) вектора смещения

$$M_R = \sqrt{m_X^2 + m_Y^2 + m_Z^2}, \quad (62.4)$$

где m_X , m_Y , m_Z — средние квадратические ошибки уравненных координат. С учетом (62.3) получим следующее выражение для ошибки положения некоторого пункта:

$$M_R = \mu \sqrt{q_X + q_Y + q_Z}. \quad (62.5)$$

При более детальных и тонких исследованиях общая ошибка положения раскладывается на составляющие — полуоси так называемого эллипсоида ошибок. Их величина и положение в пространстве определяются с помощью тензора ошибок $M_{R_i}^2 = \mu^2 \mathbf{Q}_{R_i}$, где $\mathbf{Q}_{R_i}$ — диагональная подматрица общей обратной весовой матрицы $\mathbf{Q}$, соответствующая вектору неизвестных поправок координат i -го пункта. Подробное изложение этого вопроса можно найти в работе [10].

Известную простоту и наглядность выводам априорных оценок придает геометрическая интерпретация ошибок элементов спутниковой триангуляции. Действительно, каждой измеренной величине можно сопоставить некоторую поверхность, которая описывается определенным уравнением $T = T(X, Y, Z)$. Для измеренного расстояния — это сфера, для разности расстояний — двухполостный гиперболоид, для склонения — конус и т. д. Ошибки измерений приводят к смещению поверхностей. Это можно трактовать как перемещение касательных плоскостей к данным поверхностям.

Для определения величины смещения касательной плоскости используем понятие градиента. Градиент функции есть век-

тор, имеющий направление нормали к поверхности T и длину, равную производной функции T по нормали т. е.

$$|\operatorname{grad} T| = g = \frac{dT}{dn}. \quad (62.6)$$

Поверхность T , как было принято выше, соответствует некоторой измеренной величине, тогда dT будет ошибкой измерений этой величины, а dn — линейным смещением касательной плоскости. Из выражения (62.6); получим

$$dn = \frac{dT}{g}, \quad (62.7)$$

где g — модуль градиента поверхности положения (в дальнейшем в целях краткости мы будем называть его просто градиентом), который вычисляется по известной формуле

$$g = \sqrt{\left(\frac{\partial T}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial Y}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial Z}\right)^2}. \quad (62.8)$$

Легко заметить, что частные производные в (62.8) равны коэффициентам уравнений поправок измеренных величин.

Для средних квадратических ошибок выражение (62.7) примет вид

$$m_n = m_T/g. \quad (62.9)$$

В некоторых случаях целесообразно привлекать другие геометрические представления, например рассматривать смещение точки или линии как некоторый случайный вектор в трехмерном пространстве.

В дальнейшем будем применять методы априорной оценки точности, которые наиболее эффективно приводят к решению данной конкретной задачи.

§ 63. ОШИБКИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОТДЕЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ СПУТНИКОВОЙ ТРИАНГУЛЯЦИИ

Ошибка направления. Точность определения направления на ИСЗ будем характеризовать модулем вектора смещения $|aa|$, который располагается в плоскости, перпендикулярной к данному направлению и проходящей через спутник, или угловой величиной

$$\varphi = \frac{|da|}{|a|} = \frac{|da|}{\rho}, \quad (63.1)$$

которую в дальнейшем будем называть ошибкой направления (ρ — расстояние от пункта наблюдений k до спутника s).

Для средней квадратической ошибки направления m_n будем иметь

$$m_n = \frac{m_{da}}{\rho}, \quad (63.2)$$

где m_{da} — среднее квадратическое значение модуля вектора смещения. Для установления связи между ошибками сферических координат γ и δ и ошибкой направления продифференцируем выражения для направляющих косинусов направления ks :

$$l = \frac{x_s - X_k}{\rho} = \cos \gamma \cos \delta,$$

$$m = \frac{y_s - Y_k}{\rho} = \sin \gamma \cos \delta,$$

$$n = \frac{z_s - Z_k}{\rho} = \sin \delta$$

по переменным x_s, y_s, z_s, γ и δ . Переходя далее к средним квадратическим ошибкам и учитывая формулы (62.4) и (63.2), получим

$$m_n^2 = \frac{m_{da}^2}{\rho^2} = m_\delta^2 + m_\gamma^2 \cos^2 \delta. \quad (63.3)$$

Если принять, что $m_\delta^2 = m_\gamma^2 \cos^2 \delta = \mu^2$, то

$$m_n^2 = 2\mu^2. \quad (63.4)$$

Ошибка положения плоскости синхронизации. Ее характеризуют смещением нормального вектора. Однако представляет интерес не столько общее изменение положения плоскости, происшедшее вследствие ошибок измерений топоцентрических направлений, сколько отклонение данной плоскости от определяемого пункта. Линейная величина d этого смещения в соответствии с формулой (62.7) равна

$$d = v_n / g_n, \quad (63.5)$$

где v_n — правая часть уравнения поправок (57.9) (ошибка «измерения» плоскости),

$$v_n = -(\sum a_i v_{\gamma_i} + \sum b_i v_{\delta_i}), \quad (63.6)$$

a_i, b_i вычисляются по формулам (56.22); g_n — градиент плоскости, для которого согласно (62.8) и (57.9) получим $g_n = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, т. е. он равен модулю нормального вектора плоскости. Смещение плоскости инвариантно по отношению к координатным преобразованиям, поэтому введем систему ко-

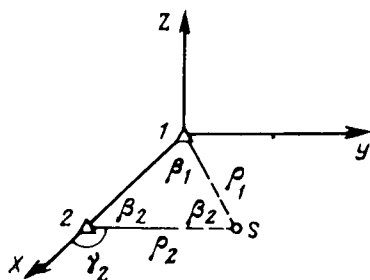


Рис. 67. Ошибка положения плоскости синхронизации

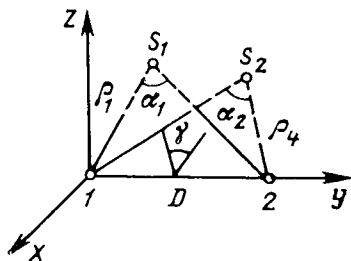


Рис. 68. Ошибка направления хорды

дина т так, чтобы плоскость синхронизации была совмещена с плоскостью XO_1Y (рис. 67). В этой системе

$$\delta_1 = \delta_2 = 0; \quad \gamma_1 = \beta_1; \quad \gamma_2 = 180^\circ - \beta_2; \quad \Delta X = D; \quad \Delta Y = \Delta Z = 0.$$

Кроме того, определим модуль нормального вектора как модуль векторного произведения ортов направлений $1s$ и $2s$, тогда $g_n = \sin \beta_3$. Теперь выражения (56.22) и (63.5) принимают вид

$$\begin{aligned} a_1 &= a_2 = 0, \\ b_1 &= D \sin \gamma_2 = D \sin \beta_2, \\ b_2 &= D \sin \gamma_1 = D \sin \beta_1, \\ d &= \frac{D}{\sin \beta_3} (\sin \beta_2 d\delta_1 + \sin \beta_1 d\delta_2). \end{aligned} \quad (63.7)$$

Переходя к средним квадратическим ошибкам и полагая $m_{\delta_1} = m_{\delta_2} = \mu$, после очевидных замен получим

$$m_{\tau_d}^2 = \mu^2 (\rho_1^2 + \rho_2^2). \quad (63.8)$$

Ошибка направления хорды. Пусть линия 12 определяется пересечением двух плоскостей синхронизации $12s_1$ и $12s_2$ (рис. 68). Выберем систему координат так, чтобы ось Y совпала с направлением хорды 12 , а плоскость ZY делила пополам двугранный угол γ , образованный плоскостями синхронизации.

В такой системе сферические координаты хорды и ее направляющие косинусы будут иметь следующие значения: $\Lambda = 90^\circ$, $\Phi = 0^\circ$, $L = 0$, $M = 1$, $N = 0$. С учетом этих значений уравнение поправок для плоскости (57.14) примет вид

$$-A_i v_\Lambda + C_i v_\Phi + W_i = -v_{pi}. \quad (63.9)$$

Коэффициенты A_i и C_i есть направляющие косинусы нормальных векторов плоскостей $12s_1$ и $12s_2$. В выбранной системе

координат будем иметь $A_1 = \cos(\gamma/2)$, $C_1 = \sin(\gamma/2)$, $A_2 = -\sin(\gamma/2)$, $C_2 = \cos(\gamma/2)$. Подставляя эти значения в выражение (63.9), придем к следующей системе уравнений поправок:

$$\begin{bmatrix} -\cos \frac{\gamma}{2} & \sin \frac{\gamma}{2} \\ -\cos \frac{\gamma}{2} & -\sin \frac{\gamma}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{\Lambda} \\ v_{\Phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{\kappa_1} \\ v_{\kappa_2} \end{bmatrix}. \quad (63.10)$$

Веса уравнений (63.10) можно найти по формуле (57.12), но проще для этих целей использовать выражение (63.8), из которого следует, что

$$P'_n = \frac{1}{\rho_1^2 + \rho_2^2}.$$

Для удобства вычислений нормируем величину P'_n , умножив обе части последнего равенства на квадрат длины хорды:

$$P_n = D^2 P'_n = \frac{D^2}{\rho_1^2 + \rho_2^2}. \quad (63.11)$$

Если положить равными расстояния до ИСЗ и учесть, что $D^2 = 4\rho^2 \sin^2(\alpha/2)$ (α — угол засечки при ИСЗ), то получим

$$P_n = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}. \quad (63.12)$$

Матрица нормальных уравнений с учетом (63.10) и (63.12) примет вид

$$A^T P A = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \begin{bmatrix} 2 \cos^2 \frac{\gamma}{2} & 0 \\ 0 & 2 \sin^2 \frac{\gamma}{2} \end{bmatrix}.$$

Обратная матрица имеет вид

$$\begin{aligned} Q &= (A^T P A)^{-1} = \begin{bmatrix} q_{\Lambda} & q_{\Lambda\Phi} \\ q_{\Phi\Lambda} & q_{\Phi} \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \begin{bmatrix} \sec^2 \frac{\gamma}{2} & 0 \\ 0 & \operatorname{cosec}^2 \frac{\gamma}{2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Отсюда согласно формуле (62.3) получим выражения для ошибок сферических координат хорды

$$m_{\Lambda} = \mu \sqrt{q_{\Lambda}} = \frac{\mu}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\gamma}{2}}, \quad (63.13)$$

$$m_{\Phi} = \mu \sqrt{q_{\Phi}} = \frac{\mu}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\gamma}{2}}, \quad (63.14)$$

и в соответствии с (62.5) — ошибку направления хорды

$$m_K = \mu \sqrt{q_{\Lambda} + q_{\Phi}} = \frac{\mu}{\sin \frac{\alpha}{2} \sin \gamma}. \quad (63.15)$$

Если выразить $\sin(\alpha/2)$ через длину хорды D и среднее расстояние до спутников ρ , то выражение (63.15) примет вид

$$rn_K = \frac{\mu}{\sin \gamma} \cdot \frac{2\rho}{D}. \quad (63.16)$$

§ 64. ОШИБКА ПОЛОЖЕНИЯ ВЕРШИНЫ УГЛОВОЙ ПРО СТРАНСТВЕННОЙ ЗАСЕЧКИ

Пусть на исходных пунктах 1 и 2 были измерены сферические координаты γ и δ . Поскольку ошибки положения инвариантны относительно координатных преобразований, то без нарушения общности положим, что наземные пункты и спутник располагаются в координатной плоскости ZY (рис. 69), а направление Is совпадает с осью Z . Для этого случая сферические координаты γ и δ направлений на ИСЗ имеют значения: $\gamma_1 = 90^\circ$, $\delta_1 = 90^\circ$, $\gamma_2 = 270^\circ$, $\delta_2 = 90^\circ - \alpha$, где α — угол засечки при спутнике. Тогда матрица коэффициентов уравнений поправок (57.1) и (57.4), приведенных к весу $p=1$, примет вид

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\rho_1} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\rho_1} & 0 \\ \frac{1}{\rho_2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\cos \alpha}{\rho_2} & \frac{\sin \alpha}{\rho_2} \end{bmatrix}.$$

Составив матрицу нормальных уравнений $A^T A$ и обратив ее, получим

$$Q = (A^T A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\rho_1^2 \rho_2^2}{\rho_1^2 + \rho_2^2} & 0 & 0 \\ 0 & \rho_1^2 & -\rho_1^2 \operatorname{ctg} \alpha \\ 0 & -\rho_1^2 \operatorname{ctg} \alpha & \frac{\rho_2^2 + \rho_1^2 \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} \end{bmatrix}. \quad (64.1)$$

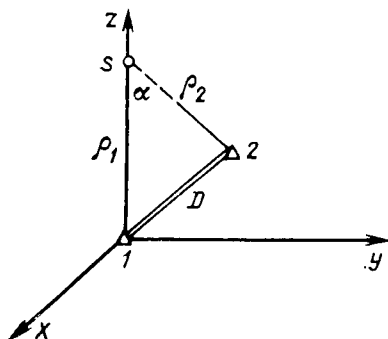


Рис. 69. Ошибка положения вершины угловой засечки в пространстве

В соответствии с (62.5) формула для оценки точности угловой пространственной засечки примет вид

$$\begin{aligned} M_s^2 &= \mu^2 (q_x + q_y + q_z) = \\ &= \mu^2 \frac{\rho_1^2 + \rho_2^2}{\sin^2 \alpha} \times \\ &\times \left[1 + \frac{\rho_1^2 \rho_2^2}{(\rho_1^2 + \rho_2^2)^2} \sin^2 \alpha \right]. \end{aligned} \quad (64.2)$$

Формулу (64.2) можно заменить приближенным равенством, которое при равных расстояниях до спутника переходит в строгое:

$$M_s^2 = \mu^2 \frac{\rho_1^2 + \rho_2^2}{\sin^2 \alpha} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \alpha \right). \quad (64.3)$$

§ 65. ОШИБКИ ПОЛОЖЕНИЯ ВЕРШИНЫ ЗАСЕЧКИ ПЛОСКОСТЕЙ

Координаты точки пересечения трех плоскостей определяют из решения системы уравнений

$$A_i x + B_i y + C_i z = D_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (65.1)$$

Будем полагать, что в этих уравнениях коэффициенты нормированы, т. е. подчинены условию $A^2 + B^2 + C^2 = 1$. В матричном виде система (65.1) запишется следующим образом

$$AX = D, \quad (65.2)$$

отсюда

$$X = A^{-1}D. \quad (65.3)$$

Матрицу ошибок координат вектора X в соответствии с выражением (62.2) найдем по формуле

$$M_X^2 = A^{-1} M_D^2 (A^T)^{-1}, \quad (65.4)$$

где M_d^2 — матрица ошибок плоскостей, аппроксимирующих поверхности положения в точке касания.

Матрица коэффициентов уравнений системы (65.2) имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{bmatrix}. \quad (65.5)$$

Обращая матрицу A , получим

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} - \begin{vmatrix} B_2 & C_2 \\ B_3 & C_3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_3 & C_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} A_2 & C_2 \\ A_3 & C_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_3 & C_3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}, \quad (65.6)$$

где $|A|$ — определитель матрицы (65.5).

Используя выражение (54.11), нетрудно показать, что алгебраические дополнения, входящие в (65.6), являются направляющими коэффициентами L_{ij} , M_{ij} , N_{ij} прямых, образованных пересечением соответствующих плоскостей. Например, величины

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} B_2 & C_2 \\ B_3 & C_3 \end{vmatrix} &= L_{23}; & - \begin{vmatrix} A_2 & C_2 \\ A_3 & C_3 \end{vmatrix} &= M_{23}; \\ \begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix} &= N_{23} \end{aligned} \quad (65.7)$$

относятся к прямой, образованной пересечением второй и третьей плоскостей. Поэтому матрицу A^{-1} можно записать в виде

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} L_{23} & L_{13} & L_{12} \\ M_{23} & M_{13} & M_{12} \\ N_{23} & N_{13} & N_{12} \end{bmatrix}. \quad (65.8)$$

В выражениях (65.6) и (65.8) остается неизвестной величина $|A|$. Разложим определитель матрицы (65.5) по элементам первой строки, тогда с учетом (65.7) будем иметь

$$|A| = A_1 L_{23} + B_1 M_{23} + C_1 N_{23} = \frac{1}{\lambda_{23}} \sin \varphi_1, \quad (65.9)$$

где φ_1 — угол между первой плоскостью и прямой, образованной пересечением двух других плоскостей; λ_{23} — нормирующий множитель $(\lambda_{23} = 1/\sqrt{L_{23}^2 + M_{23}^2 + N_{23}^2})$.

Если определитель разложить по элементам второй и третьей строк, то аналогично найдем

$$|A| = \frac{1}{\lambda_{13}} \sin \varphi_2 = \frac{1}{\lambda_{12}} \sin \varphi_3. \quad (65.10)$$

Выполнив теперь умножение матриц в (65.4) с учетом (65.8), (65.9) и (65.10), получим следующее выражение для матрицы ошибок засечки плоскостей:

$$M^2_X = \begin{bmatrix} L_{12}^2 m_{d_1}^2 + L_{13}^2 m_{d_2}^2 + L_{23}^2 m_{d_3}^2 & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & M_{12}^2 m_{d_1}^2 + M_{13}^2 m_{d_2}^2 + M_{23}^2 m_{d_3}^2 & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & N_{12}^2 m_{d_1}^2 + N_{13}^2 m_{d_2}^2 + N_{23}^2 m_{d_3}^2 \end{bmatrix}. \quad (65.11)$$

Выражения для недиагональных элементов не раскрыты, поскольку в дальнейшем они не используются. Отсюда, учитывая (62.5), получим формулу для ошибки положения вершины засечки плоскостей

$$M_s^2 = \frac{m_{d_1}^2}{\sin^2 \varphi_1} + \frac{m_{d_2}^2}{\sin^2 \varphi_2} + \frac{m_{d_3}^2}{\sin^2 \varphi_3}. \quad (65.12)$$

Если линейные смещения плоскостей m_{d_i} выразить через ошибки измерений в соответствии с формулой (62.9), то выражение (65.12) принимает вид

$$M_s^2 = \frac{m_{T_1}^2}{g_1^2 \sin^2 \varphi_1} + \frac{m_{T_2}^2}{g_2^2 \sin^2 \varphi_2} + \frac{m_{T_3}^2}{g_3^2 \sin^2 \varphi_3}, \quad (65.13)$$

где m_T — ошибка измеренной величины T ; g — градиент функции T .

Последнее выражение является весьма общим и может быть использовано для оценки точности нескольких видов засечек в пространстве.

§ 66. ОШИБКИ ПОЛОЖЕНИЯ ВЕРШИН ЛИНЕЙНЫХ, РАЗНОСТНО-ДАЛЬНОМЕРНЫХ И КОМБИНИРОВАННЫХ ЗАСЕЧЕК

Линейная засечка. Для определения положения спутника линейной засечкой необходимо измерить расстояния до него не менее чем с трех исходных пунктов. Функциональная связь измеренного расстояния с координатами описывается выражением (53.9). Градиент функции (53.9) будет

$$g_\rho = \sqrt{\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)^2} = \sqrt{l^2 + m^2 + n^2} = 1.$$

Отсюда, с учетом (65.13), получим

$$M^2 = \frac{m_{\rho_1}^2}{\sin^2 \varphi_1} + \frac{m_{\rho_2}^2}{\sin^2 \varphi_2} + \frac{m_{\rho_3}^2}{\sin^2 \varphi_3}, \quad (66.1)$$

где m_{ρ} — ошибка измерения расстояния; φ — угол между прямой, вдоль которой измерено расстояние, и плоскостью, содержащей две другие прямые. Из формулы (66.1) видно, что M имеет минимальное значение, когда $\varphi_i = 90^\circ$ и при условии, что исходные пункты не лежат на одной прямой. Если положить, что измерения равноточны и $\varphi_i = \varphi$, то выражение (66.1) примет вид

$$M = \sqrt{3} \frac{m_{\rho}}{\sin \varphi}. \quad (66.2)$$

Линейно-угловая засечка. Пусть с некоторого наземного пункта k_1 были измерены сферические координаты γ, δ спутника, с другого k_2 — расстояние до этого же положения ИСЗ. Связь измеренных величин с координатами выражается функциями (53.7), (53.8) и (53.9). Найдем градиенты этих функций

$$\begin{aligned} g_{\gamma} &= \sqrt{\left(\frac{\partial \gamma}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial z}\right)^2} = \frac{1}{\rho_1 \cos \delta}, \\ g_{\delta} &= \sqrt{\left(\frac{\partial \gamma}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \delta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \delta}{\partial z}\right)^2} = \frac{1}{\rho_1}, \\ g_{\rho} &= 1. \end{aligned} \quad (66.3)$$

Обозначим углы между прямыми, образованными пересечением двух касательных плоскостей с третьей плоскостью, через $\varphi_{\gamma}, \varphi_{\delta}$ и φ_{ρ} , где индекс указывает вид поверхности, к которой проведена третья касательная плоскость. Если выразить углы φ через угол засечки α при спутнике, то получим $\varphi_{\gamma} = 90^\circ$; $\varphi_{\delta} = 90^\circ - \alpha$; $\varphi_{\rho} = 90^\circ - \alpha$. С учетом этих значений и (66.3) выражение (65.13) примет вид

$$M^2 = m_{\gamma}^2 \cos^2 \delta \rho_1^2 + \frac{m_{\delta}^2 \rho_1^2 + m_{\rho}^2 \rho_2^2}{\cos^2 \alpha}. \quad (66.4)$$

Полагая, что ошибки измерений подчинены условию $m_{\gamma} \cos \delta = m_{\delta} = \frac{m_{\rho}}{\rho} = \mu$, получим более простую формулу:

$$M^2 = \mu^2 \left(\rho_1^2 + \frac{\rho_1^2 + \rho_2^2}{\cos^2 \alpha} \right). \quad (66.5)$$

Из формулы (66.5) следует, что положение спутника определяется с наибольшей точностью, когда угловые и линейные

измерения выполняются на одном пункте (полярная засечка). В этом случае выражение (66.5) принимает вид

$$M^2 = 3\mu^2 \rho^2.$$

Разностно-дальномерная засечка. Для определения положения спутника разностно-дальномерной засечкой должны быть измерены три разности расстояний с четырех исходных пунктов. Связь измеренной величины с координатами задается выражением (53.10). Найдем градиент функции (53.10)

$$g_{\Delta\rho} = \sqrt{(l_1 - l_2)^2 + (m_1 - m_2)^2 + (n_1 - n_2)^2}, \quad (66.6)$$

где l, m, n — направляющие косинусы прямых, соединяющих наземные пункты со спутником.

Выполнив все необходимые операции для (66.6), будем иметь

$$g_{\Delta\rho} = \sqrt{2[1 - (l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2)]} = \sqrt{2(1 - \cos \alpha)} = 2 \sin \frac{\alpha}{2}, \quad (66.7)$$

где α — угол засечки при спутнике. Подставив (66.7) в (65.13), получим следующую оценку для ошибки положения вершины пространственной разностно-дальномерной засечки:

$$M^2 = \sum_1^3 \frac{m_{\Delta\rho_i}^2}{4 \sin^2 \frac{\alpha_i}{2} \sin^2 \varphi_i}. \quad (66.8)$$

Аналогично по данной методике можно оценить ошибку положения вершин и других видов засечек.

§ 67. ОШИБКИ ПОЛОЖЕНИЯ КОНЕЧНЫХ ПУНКТОВ РЯДА КОСМИЧЕСКОЙ ТРИАНГУЛЯЦИИ

Пусть $1, 2, \dots, 2k+1, 2k+2$ (рис. 70) — свободный ряд космической триангуляции, состоящий из равносторонних треугольников, стороны которых являются хордами. Будем полагать, что сферические координаты хорд определены равномерно и не коррелированы между собой, т. е. $m_\Phi = m_\Delta \cos \Phi = \mu$. Примем, что длина исходной стороны 12 равна D и ряд содержит $2k$ треугольников. В каждом треугольнике ряда возникает условие компланарности трех свободных векторов. Если ввести систему координат, как это показано на рис. 70 (ось Z направлена на читателя), то направляющие косинусы нормальных векторов плоскостей, в которых располагаются хорды, будут иметь значения: $A=B=0, C=\cos \Phi=1$. Кроме того, в этой системе координат $\Phi_i=0, N_i=\sin \Phi_i=0$. С учетом этих значений коэффи-

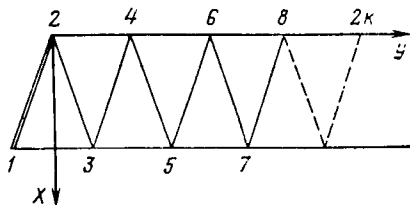
циенты условного уравнения компланарности трех хорд (56.14) запишутся $a_i=0$, $b_i=1$, а само уравнение примет вид

$$v_{\Phi_{ki}} + v_{\Phi_{kl}} + v_{\Phi_{ij}} + W = 0. \quad (67.1)$$

Ошибки координат конечного пункта ряда будем вычислять по формуле

$$M_F = \mu \sqrt{1/P_F}, \quad (67.2)$$

Рис. 70. Ошибки конечных пунктов ряда спутниковой триангуляции



где $1/P_F$ — обратный вес функции уравненных величин,

$$\frac{1}{P_F} = [ff] - \frac{[af]^2}{[aa]} - \frac{[bf-1]^2}{[bb-1]} - \frac{[cf-2]^2}{[cc-2]} - \dots \quad (67.3)$$

Для вычисления координат пункта $2k+2$ служат следующие выражения:

$$X = D \sum_1^k L_{2i+2},$$

$$Y = D \sum_1^k M_{2i+2},$$

$$Z = D \sum_1^k N_{2i+2},$$

где L , M , N — направляющие косинусы хорд $2-4$, $4-6$, ..., $2k-2k+2$. Дифференцируя последние выражения по переменным Λ и Φ и учитывая, что в данной системе координат

$$\begin{aligned} L_{2i+2} &= 0, & dL &= \sin \Lambda d\Lambda = d\Lambda, \\ M_{2i+2} &= 1, & dM &= \cos \Lambda d\Lambda = 0, \\ N_{2i+2} &= 0, & dN &= \cos \Phi d\Phi = d\Phi, \end{aligned} \quad (67.4)$$

получим следующие выражения для весовых функций:

$$\begin{aligned} F_1 &= dX = D(d\Lambda_{24} + d\Lambda_{46} + \dots), \\ F_2 &= dY = dD_{24} + dD_{46} + \dots, \\ F_3 &= dZ = D(d\Phi_{24} + d\Phi_{46} + \dots). \end{aligned} \quad (67.5)$$

По аналогии с обычными триангуляционными рядами можно сказать, что функция F_1 характеризует поперечный сдвиг ряда, F_2 — продольный и F_3 — вертикальный.

Бесовую функцию F_2 нужно выразить через измеренные величины. В соответствии с рис. 70 можно написать

$$D_{24} = D \frac{\sin 213 \sin 234}{\sin 132 \sin 243},$$

$$D_{46} = D \frac{\sin 213 \sin 423 \sin 435 \sin 456}{\sin 132 \sin 243 \sin 453 \sin 465}. \quad (67.6)$$

Дифференцируя (67.6) по переменной Λ и учитывая, что $\varphi_{ikj} = \Lambda_{kj} - \Lambda_{ki} = 60^\circ$; $\operatorname{ctg} 60^\circ = 1/\sqrt{3}$, получим

$$dD_{24} = \frac{D}{\sqrt{3}} (-d\Lambda_{12} + 2d\Lambda_{13} - 2d\Lambda_{24} + d\Lambda_{34}), \quad (67.7)$$

$$dD_{46} = \frac{D}{\sqrt{3}} (-d\Lambda_{12} + 2d\Lambda_{13} - 2d\Lambda_{35} - 2d\Lambda_{45} + 2d\Lambda_{56} - d\Lambda_{46}).$$

Таким же образом можно получить выражения для дифференциалов других сторон D_{ij} . Подставив выражения (67.7) в функцию F_2 , будем иметь

$$F_2 = \frac{D}{\sqrt{3}} [-kd\Lambda_{12} + 2kd\Lambda_{13} - 2kd\Lambda_{24} + d\Lambda_{43} + 2(k-1)d\Lambda_{35} -$$

$$- 2(k-1)d\Lambda_{54} - 2(k-1)d\Lambda_{56} - d\Lambda_{64} + \dots]. \quad (67.8)$$

Для определения обратных весов функции F_1, F_2, F_3 выпишем матрицу коэффициентов условных уравнений (67.1). Учитывая, что $v_{\Phi_{ki}} = -v_{\Phi_{ik}}$ для ряда, изображенного на рис. 70, будем иметь

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрица коэффициентов нормальных уравнений запишется следующим образом:

$$AA^T = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 3 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 \end{bmatrix}.$$

Отсюда получим

$$[aa] = 3; \quad [bb-1] = 3 - \frac{1}{3}; \quad [cc-2] = 3 - \frac{1}{3-1/3}.$$

Таким образом, знаменатели в формуле (67.3) в данном случае описываются цепной дробью, для которой последовательность подходящих дробей имеет вид

$$\left[3; \frac{8}{3}; \frac{21}{8}; \frac{55}{21}; \frac{144}{55}; -\frac{377}{144} \dots \right] \cong [3; 2,67; 2,63; 2,63; 2,62; 2,62 \dots].$$

Поскольку весовые функции F_1 и F_2 не зависят от поправок v_Φ , то $[af] = [bf-1] = [cf-2] = 0$. Отсюда

$$\frac{1}{P_{F_1}} = [f_1 f_1] = kD^2, \quad (67.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{P_{F_2}} &= [f_2 f_2] = \frac{D^2}{3} [9k^2 + 12[(k-1)^2 + (k-2)^2 + \dots \\ &\dots + 1] + k] = D^2 \frac{4k^3 + 3k^2 + 3k}{3}. \end{aligned} \quad (67.10)$$

Для весовой функции F_3 будем иметь

$$\begin{aligned} [af_3] &= 0; & [bf_3-1] &= D; \\ [cf_3-2] &= 0; & [df_3-3] &= D. \end{aligned}$$

С учетом значений подходящих дробей получим

$$\frac{1}{P_{E_3}} = kD^2 - 0,38 \sum_1^k D^2 = 0,62kD^2. \quad (67.11)$$

Подставляя выражения (67.9)–(67.11) в (67.2), получим формулы для ошибок координат конечного пункта ряда космической триангуляции:

$$M_X = \mu D \sqrt{k}; \quad (67.12)$$

$$M_Y = \mu D \sqrt{k} \sqrt{\frac{4}{3} k^2 + k + 1}; \quad (67.13)$$

$$M_Z = 0,8 \mu D \sqrt{k}. \quad (67.14)$$

Выражение (67.13) показывает, что продольный сдвиг ряда спутниковой триангуляции M_y в большой степени зависит от числа фигур и подчиняется тем же закономерностям, что и продольный сдвиг в ряде обычной триангуляции. Характер накопления поперечных смещений M_x существенно иной, нежели

в обычном ряде, для сравнения приведем формулу поперечного сдвига ряда обычной триангуляции:

$$m_x = \mu D \sqrt{\frac{1}{3} k^3 + \frac{1}{2} k^2 + \frac{1}{6} k} . \quad (67.15)$$

Рассматривая (67.12) и (67.15), приходим к заключению, что поперечный сдвиг ряда спутниковой триангуляции гораздо в меньшей степени зависит от числа фигур по сравнению с рядом обычной триангуляции.

Вертикальный сдвиг M_z получился несколько меньше поперечного, но это справедливо только для выбранной системы координат, поскольку в ней после уравнивания хорд за условие компланарности трех свободных векторов поправки получают только величины Φ .

Напомним, что формулы этого параграфа предполагают свободный ряд, т. е. ряд с одним исходным базисом. Если в ряде измерить один или несколько промежуточных базисов, то это будет эквивалентно уменьшению числа k в формуле (67.13). Кроме того, уравнивание ряда спутниковой триангуляции за возникшие базисные условия еще более снизит величину продольного сдвига ряда.

§ 68. ФОРМУЛЫ ПРИБЛИЖЕННОЙ ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ ПОЛОЖЕНИЯ ПУНКТОВ В СПЛОШНЫХ СЕТЯХ СПУТНИКОВОЙ ТРИАНГУЛЯЦИИ

Наиболее полная оценка точности элементов геодезических сетей выполняется с помощью весовых коэффициентов, т. е. с использованием обратной матрицы нормальных уравнений. Получение априорных оценок по элементам обратной матрицы и их анализ в общем виде — задача сложная. Однако, учитывая, что априорная оценка носит приближенный характер, естественно предъявить пониженные требования к точности определения элементов обратной матрицы. Основные тенденции накопления ошибок могут быть вскрыты по приближенным выражениям для весовых коэффициентов.

Приближенные значения диагональных элементов обратной матрицы можно получить методом, известным в литературе под названием метода возмущений [10]:

$$q_{ii} \cong \frac{1}{b_{ii}} \left(1 + \sum \frac{b_{ij}^2}{b_{ii} b_{jj}} \right), \quad (68.1)$$

где b_{ij} — элемент исходной матрицы нормальных уравнений.

Если расстояния до спутников примерно равны $\rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho$, то по уравнениям (57.3), (57.5) и (57.6) легко получить для сети с измеренными γ , δ и ρ матрицу

$$B_{\gamma, \delta, \rho} = \frac{1}{\rho^2} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & \dots & -1 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & \dots & -1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}. \quad (68.2)$$

Диагональные элементы матрицы (68.2) равны числу направлений, сходящихся на данном пункте (положений ИСЗ). В каждой строке матрицы будет столько единиц, сколько на данном пункте имеется связей с окружающими его положениями ИСЗ. Остальные элементы равны нулю.

Если космическая геодезическая сеть строится только по измеренным углам γ и δ , то матрица нормальных уравнений будет

$$\mathbf{B}_{\gamma, \delta} = \frac{1}{\rho^2} \times \begin{bmatrix} (N_i - \Sigma l_i^2) & -\Sigma l_i m_i & -\Sigma l_i n_i & (-1 + l_i^2) & \dots \\ -\Sigma m_i l_i & (N_i - \Sigma m_i^2) & -\Sigma m_i n_i & m_i l_i & \dots \\ -\Sigma n_i l_i & -\Sigma n_i m_i & (N_i - \Sigma n_i^2) & n_i l_i & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}, \quad (68.3)$$

где l_i, m_i, n_i — направляющие косинусы направлений на ИСЗ; N_i — число направлений, сходящихся на данном пункте или спутнике.

Для сети с измеренными расстояниями до ИСЗ матрица нормальных уравнений имеет вид

$$\mathbf{B}_\rho = \frac{1}{\rho^2} \times \begin{bmatrix} \Sigma l_i^2 & -\Sigma l_i m_i & -\Sigma l_i n_i & l_i^2 & \dots \\ -\Sigma m_i l_i & \Sigma m_i^2 & -\Sigma m_i n_i & m_i l_i & \dots \\ -\Sigma n_i l_i & -\Sigma n_i m_i & \Sigma n_i^2 & n_i l_i & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}. \quad (68.4)$$

Располагая конкретными выражениями элементов матриц нормальных уравнений, возникающих в космических сетях с разным составом измерений, можно получить формулы для приближенного вычисления весовых коэффициентов в соответствии с выражением (68.1).

Для сетей с измеренными γ , δ , ρ формула (68.1) принимает вид

$$q_{ii} = q_{x_i} = q_{y_i} = q_{z_i} = \frac{\rho^2}{N_i} \left(1 + \sum_1^{N_i} \frac{1}{N_i N_j} \right), \quad (68.5)$$

где N_i — число направлений, измеренных на данном пункте; N_j — число направлений на соседних пунктах, имеющих связи с пунктом J . Если оперировать со средним числом направлений в сети ($N_i = N_j$), то будем иметь

$$q_{ii} = \frac{\rho^2}{N} \left(1 + \frac{1}{N} \right). \quad (68.6)$$

Рассмотрим теперь сеть, в которой были измерены только угловые величины — сферические координаты γ и δ . Подстановка конкретных значений коэффициентов нормальных уравнений в формулу (68.1) после незначительных упрощений приводит к выражениям:

$$\begin{aligned} q_{x_i} &= \frac{\rho^2}{N_i - \Sigma l_i^2} \left[1 + \frac{N_i - \Sigma l_i^4}{(N_i - \Sigma l_i^2)(N_j - \Sigma q^2)} \right], \\ q_{y_i} &= \frac{\rho^2}{N_i - \Sigma m_i^2} \left[1 + \frac{N_i - \Sigma m_i^4}{(N_i - \Sigma m_i^2)(N_j - \Sigma q^2)} \right], \\ q_{z_i} &= \frac{\rho^2}{N_i - \Sigma n_i^2} \left[1 + \frac{N_i - \Sigma n_i^4}{(N_i - \Sigma n_i^2)(N_j - \Sigma q^2)} \right], \end{aligned} \quad (68.7)$$

в которых Σq^2 — среднее значение суммы квадратов направляющих косинусов измеренных направлений относительно какой-либо координатной оси.

В сети, в которой измерены расстояния до ИСЗ, формулы для приближенных значений весовых коэффициентов имеют вид:

$$\begin{aligned} q_{x_i} &= \frac{\rho^2}{\Sigma l_i^2} \left[1 + \frac{2\Sigma l_i^2 - \Sigma l_i^4}{\Sigma l_i^2 \Sigma q^2} \right], \\ q_{y_i} &= \frac{\rho^2}{\Sigma m_i^2} \left[1 + \frac{2\Sigma m_i^2 - \Sigma m_i^4}{\Sigma m_i^2 \Sigma q^2} \right], \\ q_{z_i} &= \frac{\rho^2}{\Sigma n_i^2} \left[1 + \frac{2\Sigma n_i^2 - \Sigma n_i^4}{\Sigma n_i^2 \Sigma q^2} \right]. \end{aligned} \quad (68.8)$$

СВЕДЕНИЯ О ПРОЕКТИРОВАНИИ СПУТНИКОВОЙ ТРИАНГУЛЯЦИИ

§ 69. ОСНОВЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ СПУТНИКОВОЙ ТРИАНГУЛЯЦИИ

Проектирование геодезических сетей заключается в определении местоположения пунктов на земной поверхности при условии соблюдения общих требований, справедливых для любых сетей.

Главными из них являются:

плотность пунктов, которая должна соответствовать назначению сети и целям ее дальнейшего использования;

взаимное расположение пунктов (форма сети) должно быть таким, чтобы обеспечить определение элементов сети с необходимой точностью;

построение сети должно выполняться с минимальными трудовыми и материальными затратами.

Геодезические сети, построенные с помощью наблюдений ИСЗ, — сети спутниковой триангуляции — обладают рядом особенностей. Прежде всего в сплошные сети спутниковой триангуляции входят как наземные пункты, так и фиксированные положения ИСЗ на орбите, т. е. точки пространства, наблюдавшиеся с нескольких наземных пунктов синхронно. Число измеренных величин, принадлежащих наземным пунктам, как правило, отличается от числа измеренных величин, составляющих ту или иную синхронную группу, т. е. принадлежащих данному положению ИСЗ. Число последних ограничено тем количеством наземных пунктов, с которых возможно наблюдать данное положение спутника. Число же измерений, сходящихся на каком-либо наземном пункте, теоретически не ограничено.

Проектирование спутниковой триангуляции не сводится только к выбору мест расположения наземных пунктов. Не менее важно обеспечить оптимальное расположение наземных пунктов и наблюдаемых положений ИСЗ относительно друг друга. Это значит, что проектирование спутниковой триангуляции включает в себя выбор параметров орбиты ИСЗ.

Другая особенность спутниковой триангуляции заключается в отсутствии непосредственных связей между наземными пунктами. Связи между ними осуществляются через положения спутника. Причем вследствие значительной удаленности соседних наземных станций условия наблюдений ИСЗ могут резко отличаться. Возможны случаи, когда оптимальная по своим точностным характеристикам фигура спутниковой триангуляции физически не может быть реализована из-за нарушений условий видимости ИСЗ. Понятие «видимость между пунктами» в спутниковой триангуляции существенно сложнее, нежели в обычных

геодезических сетях. При наблюдениях на всех пунктах необходимо соблюдать следующие условия:

- угловая высота спутника над горизонтом не может быть ниже определенного предела;

- между пунктами наблюдений и ИСЗ должна существовать прямая (геометрическая) видимость;

- взаимное расположение Солнца и Земли, спутника и наземного пункта должно обеспечивать наблюдение спутника на фоне звезд (для фотографических наблюдений).

Таким образом, проектирование спутниковой триангуляции обязательно включает расчеты оптимальных условий наблюдения и их сопоставление с реальными условиями наблюдения на пунктах.

Научной основой составления проектов спутниковой триангуляции являются изученные закономерности действия ошибок в такой сети и ее отдельных фигурах.

Характер распределения и поведения ошибок обуславливает самые общие требования, которые должны выполняться при построении сетей и фигур спутниковой триангуляции. Это относится к составу измерений и их точности, геометрической характеристике сети, распределению и точности исходных пунктов.

Конкретное проектирование всегда связано с выбором оптимального варианта построения сети при некоторых ограничивающих условиях. Ими могут быть: физико-географические условия, заданная величина некоторых элементов сети, необходимость использовать уже запущенные ИСЗ и др.

Как правило, при проектировании всегда подразумевается выполнение наблюдений определенной аппаратурой, обеспечивающей заданную точность наблюдений. Кроме того, использование данной аппаратуры накладывает конкретные ограничения на угловую высоту наблюдаемого ИСЗ над горизонтом пункта наблюдения.

Задача проектирования спутниковой триангуляции может решаться в широких или узких рамках. Наиболее общим случаем является создание проекта на основе задания общей цели. При этом приходится определять оптимальные с точки зрения получения необходимой точности данные: взаимное расположение и удаление пунктов наблюдения, количество ИСЗ и параметры их орбит (главным образом, высоту, наклонение и время запусков), зоны наблюдения ИСЗ с каждого из пунктов.

Если положение пунктов задано проектом, то определяют оптимальные параметры орбиты ИСЗ и зоны его наблюдения. Если задана орбита ИСЗ, выбирают оптимальные расстояния между пунктами, их расположение, а затем — зоны наблюдения. Когда задают положение пунктов и орбиту ИСЗ, проектирование сводится к установлению границ оптимальных зон наблюдений ИСЗ и их числа. В результате проектирования получают в числовом или графическом виде документы, в которых

указаны места расположения наземных станций, параметры орбит ИСЗ, подсчитаны априорные ошибки элементов сети, указаны области подспутниковых точек, на которых выполняют наблюдения ИСЗ. Кроме того, выполняют расчеты условий наблюдений ИСЗ на каждом пункте и составляют приближенный долгосрочный прогноз наблюдений ИСЗ, который необходим для организации и планирования синхронных наблюдений на группе наземных станций, входящих в данную сеть.

Первая часть данных составляет собственно проект. Вторая часть включает расчет эфемерид ИСЗ для наблюдений с конкретных наземных пунктов.

§ 70. ОПТИМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ ОТДЕЛЬНЫХ ФИГУР СПУТНИКОВОЙ ТРИАНГУЛЯЦИИ

Для определения положения уединенных пунктов и для построения рядов и сетей спутниковой триангуляции используются сочетания отдельных фигур. Взаимосвязь различных геометрических параметров и их влияние на точность результата наиболее просто и наглядны в элементарных фигурах.

Установление оптимальных геометрических параметров элементарных фигур спутниковой триангуляции является основным вопросом, решение которого способствует правильному проектированию сетей космической триангуляции.

Для построения элементарных фигур, содержащих измеренные направления с пунктов наблюдения на положения ИСЗ, желательно, чтобы эти направления измерялись по кратчайшим линиям, т. е. оптимальными для фотографических наблюдений являются низкие ИСЗ, причем предпочтительно наблюдение тех из них, трассы которых проходят через пункт наблюдения. Для всех видов засечек направлений и плоскостей оптимальной является величина угла засечки, близкая к 90° , а для линейно-угловой засечки — равная нулю.

Эти общие требования, непосредственно следующие из приведенных формул, в принципе подтверждаются детальным анализом каждой из формул.

Однако большинство выражений для ошибок элементарных фигур является функциями нескольких геометрических параметров, и не всегда сразу по виду формулы можно судить об оптимальной величине всех геометрических параметров.

Оптимальные величины геометрических параметров можно найти, если выразить формулы априорной оценки точности через независимые геометрические параметры v_i и решить систему уравнений $\partial M / \partial v_i = 0$. Решение данной системы позволит получить оптимальные значения параметров, минимизирующих величину ошибки положения определяемого пункта. Однако в большинстве случаев выражения для ошибок оказываются весьма громоздкими, а решение систем делом сложным. Это удается сделать лишь для отдельных фигур. В остальных же случаях

оптимальные значения геометрических параметров, входящих в формулы априорной оценки точности элементов и фигур спутниковой триангуляции, можно определить численными методами.

Определение направления хорды. Формула для ошибки направления хорды позволяет сделать несколько заключений. Во-первых, ошибка минимальна при равенстве расстояний от пунктов до положений ИСЗ, т. е. положения ИСЗ должны располагаться в плоскости, перпендикулярной к хорде, проходящей через ее середину, симметрично относительно центра хорды. Во-вторых, из формулы следует, что оптимальным является угол засечки при ИСЗ, равный 180° , т. е. практически невозможный случай наблюдения положения ИСЗ, находящегося на самой хорде.

В действительности же сочетание этих условий говорит о целесообразности наблюдений ИСЗ на минимальных углах возвышения их над горизонтом пункта наблюдения, допустимых в целях ослабления влияния рефракции.

Представляет интерес вопрос о влиянии числа плоскостей синхронизации на точность определения сферических координат хорды Λ и Φ . Пусть хорда (см. рис. 68) определяется из пересечения n плоскостей, которые образуют симметричный веер. Углы между плоскостями равны $\gamma, 2\gamma, \dots, k\gamma = n\gamma/2$, угол между крайними плоскостями составляет $\Psi = k\gamma = n\gamma/2$. В этом случае матрица коэффициентов уравнений поправок в соответствии с (63.10) имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} -\cos i \frac{\gamma}{2} & \sin i \frac{\gamma}{2} \\ -\cos i \frac{\gamma}{2} & -\sin i \frac{\gamma}{2} \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (70.1)$$

Полагая расстояния до ИСЗ равными и учитывая (63.12), получим следующее выражение для матрицы весов:

$$P = 2 \begin{bmatrix} \sin^2 \frac{\alpha}{2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \sin^2 \frac{\alpha}{2} \end{bmatrix}. \quad (70.2)$$

Матрица нормальных уравнений будет

$$A^T P A = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \begin{bmatrix} \sum \cos^2 i \frac{\gamma}{2} & 0 \\ 0 & \sum \sin^2 i \frac{\gamma}{2} \end{bmatrix}. \quad (70.3)$$

Обратная к ней матрица имеет вид

$$Q = (A^T P A)^{-1} = \frac{1}{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sum \cos^2 i \frac{\gamma}{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sum \sin^2 i \frac{\gamma}{2}} \end{bmatrix}. \quad (70.4)$$

Отсюда в соответствии с формулой (62.5) получим выражения для ошибок сферических координат хорды Λ и Φ :

$$m_{\Lambda}^2 = \mu^2 q_{\Lambda} = \frac{\mu^2}{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sum \cos^2 i \frac{\gamma}{2}}; \quad (70.5)$$

$$m_{\Phi}^2 = \mu^2 q_{\Phi} = \frac{\mu^2}{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sum \sin^2 i \frac{\gamma}{2}}. \quad (70.6)$$

Учитывая, что

$$\sum_1^{r_1} \sin^2 i \frac{\gamma}{2} = 2 \sum_1^k \sin^2 i \frac{\gamma}{2} = k - d, \quad (70.7)$$

$$\sum_1^{r_1} \cos^2 i \frac{\gamma}{2} = 2 \sum_1^k \cos^2 i \frac{\gamma}{2} = k + d,$$

где

$$d = \frac{\cos(k+1) \frac{\gamma}{2} \sin k \frac{\gamma}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}}, \quad (70.8)$$

выражения (70.5) и (70.6) можно записать в виде

$$m_{\Lambda}^2 = \frac{\mu^2}{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} (k + d)}, \quad (70.9)$$

$$m_{\Phi}^2 = \frac{\mu^2}{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} (k - d)}.$$

Ошибку направления хорды находят по формуле

$$m_K = \sqrt{m_A^2 + m_\Phi^2} = \frac{\mu}{\sin \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{k}{k^2 - d^2}}, \quad (70.10)$$

или

$$m_K = \frac{\mu}{\sin \frac{\alpha}{2} \sin \psi} \sqrt{\frac{k \sin^2 \psi}{k^2 - d^2}} = m_K^0 \sqrt{\frac{k \sin^2 \psi}{k^2 - d^2}}, \quad (70.11)$$

где m_K^0 — ошибка направления хорды, определенной из пересечения только двух крайних плоскостей. Следовательно, величина

$$F = \sqrt{\frac{k \sin^2 \psi}{k^2 - d^2}} \quad (70.12)$$

выражает влияние числа плоскостей синхронизации на точность определения хорды (табл. 6).

Таблица 6. Ошибки положения в зависимости от угла засечки и числа плоскостей синхронизации

ψ, угл. градус	k			
	1	3	10	15
30	1	0,80	0,50	0,42
60	1	0,74	0,46	0,40
90	1	0,65	0,40	0,32
120	1	0,50	0,30	0,24
150	1	0,28	0,16	0,13

В табл. 6 за единицу принята ошибка направления хорды, определенной из пересечения только двух крайних плоскостей при заданном значении угла Ψ.

Данные табл. 6 позволили предложить взамен выражения (70.11) следующую эмпирическую формулу:

$$m_K = \frac{m_K^0}{\sqrt{k}} \tau, \quad (70.13)$$

в которой m_K^0 означает то же, что и в формуле (70.11); k — число углов между плоскостями синхронизации, участвующими в построении данной хорды; τ — некоторый коэффициент, зависящий от угла Ψ:

ψ, угл. градус	30	60	90	120	150
τ	1,60	1,45	1,25	0,95	0,50

Формула (70.13) удобна для определения числа плоскостей синхронизации, необходимого для достижения заданной точности. Например, при достаточном количестве пересекающихся плоскостей можно достичь точности определения углов Λ и Φ в космической сети около $1''$. Для этих условий ошибка направления хорды согласно формуле (63.4) составит $m_k = 1,4''$. Подсчитаем, какое количество плоскостей синхронизации необходимо получить для достижения такой точности. Учитывая, что числа k и n связаны соотношением $n = 2k$, из формулы (70.13) найдем

$$k = \frac{n}{2} = \frac{(m_K^0)^2}{m_K^2} \tau^2. \quad (70.14)$$

При $\mu = 1''$, $\alpha = 30^\circ$, $\Psi = 60^\circ$, в соответствии с (63.15) $m_K^0 = 4,5''$, $\tau = 1,45$. Подставляя эти конкретные значения в формулу (70.14), получим $n = 42$.

Однако, учитывая, что при выводе формул для ошибки направления хорды модель фигуры космической триангуляции была в значительной мере идеализирована (расстояния до спутников считались равными, плоскости синхронизации располагались равномерно), оценку, получаемую по формуле (70.14), следует рассматривать как минимальную.

Засечки различного вида. В § 65 было показано, что в смысле оценки точности все виды линейных, разностно-дальномерных и комбинированных засечек могут быть сведены к засечке плоскостей. В общем случае согласно формуле (65.13) весовая функция имеет вид

$$F = \sum_1^3 \frac{1}{g_i^2 \sin^2 \varphi_i}, \quad (70.15)$$

где φ_i — угол между линией пересечения двух плоскостей, касательных к данным поверхностям положения, с третьей плоскостью; g_i — модуль градиента функции, описывающей данное измерение. Из формулы (70.15) видно, что при всех условиях выгодно иметь величину угла φ , близкую к 90° . Однако в тех случаях, когда g также является функцией угла засечки при спутнике, одной характеристики φ оказывается недостаточно. Например, если для линейной засечки оптимальные условия $\varphi = 90^\circ$, $\alpha = 90^\circ$ по сути являются эквивалентными, то для линейно-угловой засечки $\alpha_{\text{opt}} = 0$ или $\alpha_{\text{opt}} = 180^\circ$. Для всех видов разностно-дальномерных комбинированных засечек $\alpha_{\text{opt}} = 180^\circ$.

В заключение дадим сравнительную характеристику различных методов определения координат ИСЗ с помощью засечек (табл. 7). Любую из оценок, полученных в § 66, можно представить в виде

$$M_s = \mu \rho \sqrt{\frac{1}{P_s}} = \mu \rho \sqrt{q_s},$$

где P_s — вес определения данного положения спутника; ρ — среднее расстояние до него.

Т а б л и ц а 7. Обратные веса засечек

α , угл. градус	Засечки				
	угловая	линейная	разностно- дальномерная	комбинированная	
				γ, δ, ρ	$\gamma, \delta, \Delta\rho$
15	5,5	7,8	51,5	1,8	29,0
30	2,8	4,0	12,7	1,9	8,5
60	1,7	2,6	3,5	3,0	3,0
90	1,4	1,7	1,8	—	2,0
120	1,6	2,6	1,2	3,0	1,7
150	2,8	4,0	0,9	1,9	1,5

Данные таблицы' показывают, что для угловой и линейной засечки лучшие результаты получаются при углах засечек, близких к 90° .

При использовании разностей расстояний или их комбинаций с угловыми величинами следует стремиться к максимальному значению угла α . Линейно-угловая засечка выгодна для углов $0-60^\circ$ и $120-180^\circ$. Лучший результат получается при $\alpha=0^\circ$, т. е. при совмещении линейных и угловых измерений на одном пункте.

§ 71. ОПТИМАЛЬНЫЕ СОЧЕТАНИЯ ИЗМЕРЕНИЙ В СПЛОШНЫХ СЕТЯХ СПУТНИКОВОЙ ТРИАНГУЛЯЦИИ

Влияние геометрической формы фигур спутниковой триангуляции наиболее существенно в сетях, в которых измерены или только угловые, или только линейные величины. Оценивают влияние геометрической формы сети по величине ошибки положения

$$M_i = \mu \sqrt{q_{x_i} + q_{y_i} + q_{z_i}}, \quad (71.1)$$

где q_{x_i} , q_{y_i} , q_{z_i} вычисляются по формулам (68.6) — (68.8).

Для дальнейшего анализа полагают, что все направления, измеренные с данного пункта, равномерно распределены относительно координатных осей. Тогда $\Sigma l^2 = \Sigma m^2 = \Sigma n^2 = \Sigma q^2$ и, следовательно, учитывая, что $\Sigma l^2 + \Sigma m^2 + \Sigma n^2 = N$, получим $\Sigma q^2 = N/3$. С учетом этого предположения формулы (68.7) примут вид

$$q_{x_i} = q_{y_i} = q_{z_i} = \frac{3}{2} \frac{\rho^2}{N} \left(1 + \frac{2}{N} \right). \quad (71.2)$$

Сравнивая (71.2) с (68.6), можно сделать вывод, что если направления в сети с измеренными сферическими координатами распределены равномерно относительно координатных осей, то точность определения пунктов в такой сети понижается примерно в $\sqrt{1,5}$ раза по сравнению с сетью, в которой измерены все три элемента, т. е. γ , δ и ρ .

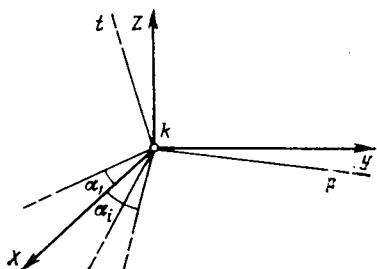


Рис. 71. Ошибки положения в спутниковой триангуляции

Пусть теперь какой-либо пункт в сети определен таким образом, что все направления, измеренные с данного пункта, оказались близки друг к другу. Введем систему координат так, чтобы направления оказались близко расположенными к оси X, а начало координат совпало с определяемым пунктом k (рис. 71). Обозначим углы, составленные направлениями $1, 2, \dots, i$ с осью X, через $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i$. Тогда будем иметь

$$1 - l_1^2 = \sin^2 \alpha_1, \\ 1 - l_2^2 = \sin^2 \alpha_2, \quad (71.3)$$

$$1 - l_i^2 = \sin^2 \alpha_i; \\ N_i - \Sigma l_i^2 = \Sigma \sin^2 \alpha_i; \quad (71.4)$$

полагая $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_i$, получим

$$N_i - \Sigma l_i^2 = N_i \sin^2 \alpha. \quad (71.5)$$

Углы, составленные этими же направлениями $1, 2 \dots i$ с осями Y и Z, ввиду малости углов α_i можно принять равными 90° . В этом случае $m_i = n_i = 0$ и, следовательно,

$$N_i - \Sigma m_i^2 \cong N_i - \Sigma n_i^2 \cong N_i. \quad (71.6)$$

С учетом этих предположений формулы (68.7) можно записать в виде

$$q_{xi} = \frac{\rho}{N_i \sin^2 \alpha} \left[1 + \frac{3N(1-l^4)}{2N^2 \sin^2 \alpha} \right],$$

но $l^4 = (1 - \sin^2 \alpha)^2 = 1 - 2\sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha$, поэтому

$$q_{xi} = \frac{\rho^2}{N \sin^2 \alpha} \left(1 + \frac{3}{N} - \frac{3}{2N} \sin^2 \alpha \right), \quad (71.7)$$

$$q_{yi} = q_{zi} = \frac{\rho^2}{N} \left(1 + \frac{3}{2N} \right). \quad (71.8)$$

В дальнейшем не будем учитывать в числителе члены, содержащие синус малого угла во второй и большей степени (а также в знаменателе, если синус будет входить как слагаемое). Формула для ошибки положения пункта k , полученная по весовым коэффициентам (71.7) и (71.8), будет иметь вид

$$M^2 = \mu^2 (q_x + q_y + q_z) = \mu^2 \frac{\rho^2}{N \sin^2 \alpha} \left(1 + \frac{3}{N} \right). \quad (71.9)$$

Рассмотрим теперь случай, когда хотя бы одно направление, например kp (см. рис. 71), составляет с каждым из остальных угол, близкий к 90° . Полагая $\alpha_{kp} = 90^\circ$, получим следующие выражения для весовых коэффициентов:

$$q_x = \frac{\rho^2}{1 + (N-1) \sin^2 \alpha} \left[1 + \frac{3}{2N} \cdot \frac{1}{1 + (N-1) \sin^2 \alpha} \right]; \quad (71.10)$$

$$q_y = \frac{\rho^2}{N-1} \left(1 + \frac{3}{2N} \right); \quad (71.11)$$

$$q_z = \frac{\rho^2}{N} \left(1 + \frac{3}{2N} \right). \quad (71.12)$$

Предположим далее, что два направления (на рис. 71 — направления kp и kt) составляют с остальными «хорошие» углы. Это будет означать, что $\alpha_{kp} = \alpha_{kt} = 90^\circ$, тогда формулы для весовых коэффициентов примут вид

$$q_x = \frac{\rho^2}{2 + (N-2) \sin^2 \alpha} \left[1 + \frac{3}{2N} \cdot \frac{1}{2 + (N-2) \sin^2 \alpha} \right], \quad (71.13)$$

$$q_y = q_z = \frac{\rho^2}{N-1} \left(1 + \frac{3}{2N} \right). \quad (71.14)$$

Расчеты (табл. 8) позволяют сделать заключение, что если хотя бы два направления образуют с остальными «хорошие» углы, то потери точности практически не произойдет. В сплошных сетях невозможен случай, когда все углы, составленные направлениями, измеренными с данного пункта, малы, а именно в этом случае точность понижается. Таким образом, если из пяти-шести направлений данного пункта два-три образуют малые углы между собой, точность определения такого пункта не снижается*.

Влияние формы сети сказывается более сильно в сетях с измеренными расстояниями до ИСЗ. В этом случае необходимо

* Следует иметь в виду, что малые углы при пунктах есть следствие неравномерного распределения их на земной поверхности, а это является нежелательным.

Т а б л и ц а 8. Ошибки положения пунктов в сплошной сети в зависимости от ее геометрической формы

α , угл. градус	Число направлений, образующих малые углы при данном пункте			Равномерное распределение направлений
	$N=6$	$N=1$	$N=2$	
<i>В сетях с измеренными направлениями</i>				
15	2,04	1,24	1,08	1,00
10	2,90	1,26	1,10	1,00
<i>В сетях с измеренными расстояниями</i>				
15	3,12	2,53	1,80	1,65
10	4,70	3,10	1,95	1,65

иметь как минимум три стороны, пересекающиеся под «хорошими» углами.

Результаты, полученные в данном параграфе, совместно с результатами § 68 позволяют сделать еще несколько заключений относительно оптимальных геометрических характеристик сети космической триангуляции.

Если в сети измерялись все три элемента γ , δ и ρ , то формула для вычисления ошибки положения пункта k согласно (68.6) будет иметь вид

$$M = \mu\rho \sqrt{\frac{3}{N} \left(1 + \frac{1}{N}\right)}. \quad (71.15)$$

Из выражения (71.15) видно, что ошибка положения в таких сетях пропорциональна расстоянию между пунктами, обратно пропорциональна корню квадратному из числа направлений, измеренных на данном пункте, и не зависит от углов засечек.

Если в сети измерялись только угловые величины γ и δ , то в соответствии с формулами (68.7) выражение для ошибки положения пункта k запишется следующим образом

$$M_i = \mu\rho \sqrt{\left(\frac{1}{N_i - \Sigma l_i^2} + \frac{1}{N_i - \Sigma m_i^2} + \frac{1}{N_i - \Sigma n_i^2}\right) \left[1 + \frac{N_i - \Sigma q_i^4}{(N_i - \Sigma q_i^2)^2}\right]}. \quad (71.16)$$

Формулу (71.16) можно упростить, если положить, что все направления, измеренные с данного пункта, распределены равномерно относительно координатных осей. Тогда в соответствии с (71.2) будем иметь

$$M = \mu\rho \sqrt{\frac{9}{2N} \left(1 + \frac{2}{N}\right)}. \quad (71.17)$$

Выражение (71.17) показывает, что в сетях с измеренными сферическими координатами γ и δ определенное влияние на точность получения пунктов начинает оказывать и форма сети.

Особенно заметно это влияние, как это вытекает из выражения (71.9), в фигурах с малыми углами засечек и при небольшом числе измеренных направлений.

Отсюда следует, что при организации синхронных наблюдений необходимо стремиться получить «хорошие» углы засечек при спутниках. Расчет точности в этом случае нужно вести по формулам гл. 18.

Аналогично обстоит дело с определением положения хорд. При малом числе плоскостей синхронизации необходимо следить, чтобы они пересекались под «хорошими» углами.

С другой стороны, величина углов засечки почти не влияет на точность определения наземных пунктов, ибо, как было выяснено, если число направлений пять и более, и хотя бы два направления пересекаются с остальными под «хорошими» углами, все пункты сети будут получены примерно с одинаковой точностью. Следовательно, при выборе мест расположения наземных станций можно руководствоваться, главным образом, организационными, экономическими и другими соображениями.

§ 72. СООБРАЖЕНИЯ ПО ПРОЕКТИРОВАНИЮ СПУТНИКОВОЙ ТРИАНГУЛЯЦИИ

Основные характеристики проекта спутниковой триангуляции можно разделить на две группы. Первую группу составляют показатели точности:

- ошибки непосредственных измерений m_γ , m_δ , m_ρ , $m_{\Delta\rho}$;
- ошибки элементов спутниковой сети, например, такие как ошибки направлений хорд m_K или ошибки наземных базисов;
- ошибки положения наземных пунктов M .

Вторая группа содержит геометрические характеристики проекта:

- среднее расстояние между пунктами или их плотность;
- высоту ИСЗ;
- максимальные зенитные расстояния для наблюдений ИСЗ;
- форму и размеры зон синхронной видимости ИСЗ с пунктов;
- расположение и число плоскостей синхронизации для определения хорд;
- углы между направлениями на ИСЗ, хордами и плоскостями;
- расположение базисов и исходных пунктов.

Содержание работ по составлению проекта зависит от того, какие из его характеристик известны до начала проектирования. Наиболее типичными представляются две задачи:

априорный расчет точности положения пунктов в сети по некоторому составленному проекту;

выбор оптимальных характеристик для составления проекта при заданной точности положения пунктов.

В первом случае предполагаются известными все геометрические показатели проекта и ошибка направления на ИСЗ m_n , величина которой обусловлена достигнутым уровнем средств и методов астрометрической обработки фотоснимков ИСЗ. Расчеты здесь сводятся к последовательному применению формул оценки точности положения пунктов, полученных выше. Для более строгой оценки проекта можно также использовать численное обращение матриц нормальных уравнений на ЭВМ.

Более сложной является вторая, по существу, обратная задача — расчет оптимальных характеристик проекта в соответствии с заданной точностью. Рассмотрим два наиболее интересных в практическом отношении варианта этой задачи.

В первом предполагаются известными плотность и необходимая точность определения пунктов M , которые обусловлены назначением данной сети. Известна также средняя квадратическая ошибка определения экваториальных координат ИСЗ μ . Поскольку плотность всегда можно выразить через среднюю длину u сторон между наземными пунктами D , то для определенности в дальнейшем будем полагать известными величины D , M и μ .

По этим данным нужно найти необходимую точность определения хорд, число плоскостей синхронизации, максимальные расстояния до ИСЗ и величину большей полуоси орбиты (в первом приближении — радиус круговой орбиты).

Во втором варианте исходными данными служат μ , M и H — высота ИСЗ, т. е. рассматривается довольно частая ситуация со спутником, находящимся на орбите.

Здесь дело сводится к определению такой средней длины хорды и такого числа плоскостей синхронизации, которые обеспечивают заданную точность M .

Учитывая эквивалентность различных методов построения спутниковой триангуляции, составление проекта удобно вести для метода хорд, для которого формула (71.17) имеет вид

$$M = m_K D \sqrt{\frac{9}{2N} \left(1 + \frac{2}{N}\right)}.$$

Отсюда найдем необходимую точность направления хорды m_K . Комбинируя далее формулы (63.16) и (70.13), получим ряд значений для числа плоскостей синхронизации n и расстояний (высот) до ИСЗ при фиксированном D . При заданной высоте спутника варьируются число n и средняя длина хорды D . Все полученные значения составляют некоторую оптимальную область решений, из которой с учетом других факторов и выбирается основной вариант.

Следует помнить, что основные характеристики проекта, найденные описанными выше способами, будут получены при некоторых геометрических ограничениях, которые в ходе конкретного проектирования и реализации проекта неизбежно изменяются в ту или другую сторону. Таким образом, выбранные характеристики носят предварительный характер.

После того как средняя длина хорд (и, следовательно, средняя плотность наземных пунктов) будет установлена и на карту нанесены конкретные места расположения пунктов, а также границы зон видимости используемых ИСЗ, расчеты по оценке точности элементов и пунктов сети повторяются, но теперь уже в них используются конкретные геометрические показатели данного проекта. На заключительной стадии составления проекта для строгой его оценки необходимо использовать численное обращение матриц уравнений связи исходных и определяемых величин.

Раздел 6.

ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ КОСМИЧЕСКОЙ ГЕОДЕЗИИ И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

Глава 20.

ОБЩИЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ КОСМИЧЕСКОЙ ГЕОДЕЗИИ

§ 73. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ

Динамические задачи космической геодезии — это задачи, решение которых основано на интегрировании уравнений динамики, т. е. дифференциальных уравнений возмущенного движения ИСЗ. Аналогично геометрические задачи, описанные в разделе 5, — задачи, решение которых основано на реализации геометрических соотношений.

В общие динамические задачи космической геодезии входит определение координат пунктов в общеземной системе координат, связанной с центром масс Земли, и определение и уточнение параметров внешнего геопотенциала в той же системе координат по возмущенному движению ИСЗ. Методы решения этих задач в зависимости от различного состава измерений основаны на преобразованиях векторного соотношения между геоцентрическим вектором ИСЗ, получаемым путем интегрирования уравнений возмущенного движения спутника, топоцентрическим вектором ИСЗ $\mathbf{r}'$, получаемым из наблюдений, и геоцентрическим вектором положения пункта ρ_n :

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \rho_n. \quad (73.1)$$

Современная аппаратура позволяет измерять следующие составляющие топоцентрического вектора ИСЗ: топоцентрическое прямое восхождение α' и склонение δ' , топоцентрическое расстояние r' и радиальную скорость $\dot{r}'$.

Как принято в динамике, обозначим любую из этих величин через q (включая радиальную скорость $\dot{r}'$). Пусть тогда $\mathbf{q}$ — вектор, составляющие которого — соответствующий набор величин q . Обозначим также: ρ — вектор, составляющие которого — геоцентрические координаты наблюдательных пунктов; σ — вектор параметров геопотенциала; ρ_0, σ_0 — заданные (приближенные) значения этих векторов, подлежащие уточнению.

Пусть на ряд моментов времени из наблюдений получены значения $q_{\text{набл}}$, образующие вектор $\mathbf{q}_{\text{набл}}$. Предположим также, что при известных σ_0 и параметрах других негеопотенциальных возмущающих факторов проинтегрированы уравнения воз-

мушенного движения ИСЗ с точностью, соответствующей точности наблюдений, и с помощью ρ_0 вычислены на каждый из моментов наблюдений значения $q_{\text{выч}}$, образующие вектор $q_{\text{выч}}$. Тогда разность $q_{\text{набл}} - q_{\text{выч}}$ есть функция поправок в вектор начальных элементов орбиты $d\mathfrak{A}_0$, в вектор координат пунктов $d\rho = \rho - \rho_0$ и в вектор параметров геопотенциала $d\sigma = \sigma - \sigma_0$. Можно написать:

$$\begin{aligned} q_{\text{набл}} &= q(\mathfrak{A}_0 + d\mathfrak{A}_0, \rho_0 + d\rho, \sigma_0 + d\sigma, t); \\ q_{\text{выч}} &= q(\mathfrak{A}_0, \rho_0, \sigma_0, t). \end{aligned} \quad (73.2)$$

Линеаризация $q_{\text{набл}}$ дает:

$$q_{\text{набл}} - q_{\text{выч}} = \frac{\partial q}{\partial \mathfrak{A}_0} d\mathfrak{A}_0 + \frac{\partial q}{\partial \rho_0} d\rho + \frac{\partial q}{\partial \sigma_0} d\sigma + 0(d\mathfrak{A}^2, d\rho^2, d\sigma^2). \quad (73.3)$$

Если обозначить $l = q_{\text{выч}} - q_{\text{набл}}$, v — вектор поправок, то выражение (73.3) можно записать в форме вектора уравнений поправок:

$$\frac{\partial q}{\partial \mathfrak{A}_0} d\mathfrak{A}_0 + \frac{\partial q}{\partial \rho_0} d\rho + \frac{\partial q}{\partial \sigma_0} d\sigma + l = v, \quad (73.4)$$

минимизация которых по методу наименьших квадратов позволяет получить искомые поправки $d\mathfrak{A}_0$, $d\rho$, $d\sigma$ и тем самым уточнить начальные элементы орбиты, координаты пунктов и параметры геопотенциала. Существенно, что уточненные положения пунктов в данном случае получаются в одной и той же системе координат, начало которой находится в центре масс Земли — общеземной гринвичской системе. Это — следствие того, что уравнения (73.4) основаны на уравнениях движения ИСЗ относительно центра масс Земли. Уравнения вида (73.4) составляют основу общего динамического метода космической геодезии.

На практике часто приходится иметь дело с обработкой наблюдений, выполненных в интервале времени, в котором влиянием погрешностей в принятых значениях параметров геопотенциала можно пренебречь. Обычно этот интервал меньше одного периода оборота ИСЗ. Положив тогда $d\sigma = 0$, вектор уравнений поправок перепишем так:

$$\frac{\partial q}{\partial \mathfrak{A}_0} d\mathfrak{A}_0 + \frac{\partial q}{\partial \rho_0} d\rho + l = v. \quad (73.5)$$

Уравнения вида (73.5) составляют основу орбитального метода космической геодезии, позволяющего уточнять начальные элементы орбиты и координаты пунктов.

Предположим, что орбитальным методом обработаны результаты наблюдений на нескольких интервалах времени и в итоге получены уточненные векторы начальных элементов орбит $\mathfrak{A}_{01}, \mathfrak{A}_{02}, \dots$, отнесенные к моментам времени $t_1, t_2, \dots$

Тогда разность $\Delta_{02} - \Delta_{01} = \delta \Delta_{2,1}$ можно интерпретировать как возмущение вектора элементов орбиты за интервал времени $t_2 - t_1$. Такие возмущения, очевидно, являются в первую очередь функциями параметров геопотенциала. Эта идея положена в основу определения и уточнения параметров геопотенциала по возмущениям орбит ИСЗ. Наиболее рациональная последовательность применения перечисленных методов следующая: 1) орбитальный метод; 2) определение геопотенциала по возмущениям орбит; 3) окончательная обработка всего массива измерений общим динамическим методом. Тем не менее каждый из методов может рассматриваться как самостоятельный.

В настоящее время применяются также два специальных частных случая общего динамического метода космической геодезии. В первом случае измеряется относительная скорость двух спутников (доплеровским методом вдоль расстояния между спутниками). При этом не возникает проблема введения атмосферных поправок, поэтому точность измерения взаимных скоростей гораздо выше, нежели измерение доплеровских скоростей с поверхности Земли. А так как измеренная разность взаимных скоростей двух спутников в силу интеграла энергии есть функция геопотенциала, то подобные системы спутник — спутник позволяют выполнить дальнейшее уточнение геопотенциала.

Во втором случае топоцентрическое расстояние измеряется спутниковым высотомером по нормали к водной поверхности. Тогда, если из интегрирования уравнений движения ИСЗ в заданной системе координат возмущенная орбита определена, то, приняв водную поверхность (после введения, конечно, всех аппаратных и геофизических поправок) за уровенную поверхность геоида, вдоль подспутниковой трассы может быть определен профиль геоида.

Обязательное условие решения любой динамической задачи — выполнение всех вычислений в одной и той же системе координат, связанной с фиксированной на один и тот же момент времени точкой весеннего равноденствия.

§ 74. ВЫЧИСЛЕНИЕ СВОБОДНЫХ ЧЛЕНОВ УРАВНЕНИЙ ПОПРАВОК В ОРБИТАЛЬНОМ И ОБЩЕМ ДИНАМИЧЕСКОМ МЕТОДАХ

Пусть для ряда моментов времени

$$t_0, t_1, t_2, \dots, t_j, \dots, t_n \quad (74.1)$$

из наблюдений получены значения q (для удобства здесь q — скаляр):

$$q_{t_0}, q_{t_1}, q_{t_2}, \dots, q_{t_j}, \dots, q_{t_n}, \quad (74.2)$$

в которых аппаратные поправки и поправки за внешние условия будем считать введенными и каждое из которых отнесено

к положению точки весеннего равноденствия Υ_{t_j} , соответствующему текущему моменту наблюдений t_j . Будем считать, что моменты t_j даны либо в системе Международного атомного времени IAT, либо в системе Всемирного согласованного времени UTC. Напомним, что q — любая из измеряемых величин, характеризующих топоцентрические положения или скорость ИСЗ.

Выберем момент T_0 , к которому отнесем фиксированную точку весеннего равноденствия Υ_0 , определяющую положение инерциальной геоцентрической системы координат (T_0 — фундаментальная эпоха). Для удобства изложения положим:

$$T_0 = t_0. \quad (74.3)$$

Вообще это необязательно, можно, например, положить $T_0 = 1900, 0$ январь, 12^h ET, или $2000, 0$ январь 12^h , ET, или $1950, 0$ январь, 12^h ET в зависимости от удобства обработки конкретных наблюдений.

Заданными величинами будем считать также следующие:

для пунктов наблюдений — их геодезические широты B , долготы L и высоты H над принятым эллипсоидом с большой полуосью a_e и эксцентриситетом меридианного эллипса $\bar{e}$;

геоцентрическая гравитационная постоянная μ , параметры геопотенциала C_{nk} , S_{nk} и параметры негеопотенциальных возмущающих факторов;

прецессионно-нутацонные параметры и координаты мгновенного полюса на интервале наблюдений.

Опишем поэтапно последовательность вычислений.

Первый этап. По формулам (2.24) преобразуем геодезические координаты пунктов B , L , H в гринвичские координаты X_n , Y_n , Z_n . Затем, преобразовав моменты t_j из системы UTC в систему UT1, находим истинное гринвичское звездное время S_j относительно точки весны Υ_0 для каждого из моментов t_j по формуле (2.3). Далее вычисляем координаты пунктов в геоцентрической инерциальной системе, отнесенной к Υ_0 :

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos S & -\sin S \\ \sin S & \cos S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix}; \quad z_n \equiv Z_n \quad (74.4)$$

и составляющие скоростей пунктов:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_n \\ \dot{y}_n \end{pmatrix} = -\omega_{\oplus} \begin{pmatrix} \sin S & \cos S \\ -\cos S & \sin S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix}; \quad \dot{z}_n = 0; \quad (74.5)$$

$\omega_{\oplus}$ — угловая скорость вращения Земли.

Второй этап. По формулам учета влияния прецессии, нутации и движения полюсов (§§ 1, 2) редуцируем наблюдаемые топоцентрические величины $q_j \equiv q_j \Upsilon_j$ к точке весны Υ_0 :

$$q_j \equiv q_1 \Upsilon_j \rightarrow q_j \Upsilon_0. \quad (74.6)$$

Редуцированные значения $q_{i\gamma_0}$ обозначим

$$p_{i\gamma_0} \equiv q_{i\text{набл.}} \quad (74.7)$$

Третий этап. Методами, описанными в § 27, используя $q_{\text{набл}}$ ($\alpha'_{\text{набл}}$, $\delta'_{\text{набл}}$ или $\alpha'_{\text{набл}}$, $\delta'_{\text{набл}}$, $r'_{\text{набл}}$), вычисляют элементы предварительной орбиты. Целесообразно также выполнить предварительное уточнение элементов орбиты, отнеся их к моменту $t_0 = T_0$. Обозначим теперь эти элементы через $\mathcal{E}_{0k}$, $k = 1, 2, \dots, 6$. Выполняем преобразование [формулы (26.5), (26.6)]:

$$\mathcal{E}_{0k=1, 2, \dots, 6} \rightarrow x_0, y_0, z_0; \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0. \quad (74.8)$$

Четвертый этап. С начальными условиями

$$t_0 = T_0; \quad \mathbf{r}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}; \quad \dot{\mathbf{r}}_0 = \begin{pmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \\ \dot{z}_0 \end{pmatrix} \quad (74.9)$$

численно интегрируем уравнения возмущенного движения ИСЗ

$$\ddot{\mathbf{r}} + \mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} = -\frac{\partial R}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{w}_A \quad (74.10)$$

с учетом всех заданных возмущающих факторов. В целях гарантирования высокой методической точности численного интегрирования целесообразно применить неявный одношаговый метод Эверхарта. Если интервал $[t_0, t_n]$ достаточно мал, то может быть использован какой-либо более простой метод, например, Адамса. Вопрос о выборе метода численного интегрирования должен решаться, исходя из конкретного набора измерений, их точности, целей дальнейшего использования конечных результатов. В результате интегрирования уравнений (74.10) вычисляются значения координат и скоростей $x_j, y_j, z_j; \dot{x}_j, \dot{y}_j, \dot{z}_j$ на моменты наблюдений t_j .

Пятый этап. Используя полученные из интегрирования координаты и скорости ИСЗ, а также координаты пунктов и составляющие их скорости, находим вычисленные значения топосцентрических координат и скоростей спутника для каждого из моментов и каждого пункта:

$$\begin{aligned} x' &= x - x_n; & y' &= y - y_n; & z' &= z - z_n; \\ \dot{x}' &= \dot{x} - \dot{x}_n; & \dot{y}' &= \dot{y} - \dot{y}_n; & \dot{z}' &= \dot{z}. \end{aligned} \quad (74.11)$$

Затем находим «вычисленные» значения $q_{\text{выч}}$:

$$\begin{aligned} \alpha' &= \arctg(y'/x'); & \delta' &= \arctg(z'/\sqrt{x'^2 + y'^2}); \\ r' &= \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}; & \dot{r}' &= \frac{x'}{r'} \dot{x}' + \frac{y'}{r'} \dot{y}' + \frac{z'}{r'} \dot{z}'. \end{aligned} \quad (74.12)$$

Наконец, находим свободные члены уравнений поправок (73.4) или (73.5)

$$l = q_{\text{выч}} - q_{\text{набл.}} \quad (74.13)$$

§ 75. ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ УРАВНЕНИЙ ПОПРАВК В ОРБИТАЛЬНОМ И ОБЩЕМ ДИНАМИЧЕСКОМ МЕТОДАХ

Шестой этап. Вычисление коэффициентов при поправках в начальные элементы орбиты. Член $\frac{\partial q}{\partial \Theta_0} d\Theta_0$ в уравнениях (73.4) и (73.5) в скалярной форме может быть записан так:

$$\sum_{k=1}^6 \frac{\partial q_j}{\partial \Theta_k} \frac{\partial \Theta_k}{\partial \Theta_0} d\Theta_0. \quad (75.1)$$

Коэффициенты $\frac{\partial q_j}{\partial \Theta_k}$ могут быть вычислены по правилу (индексы опустим):

$$\frac{\partial q}{\partial \Theta} = \frac{\partial q}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \Theta} + \frac{\partial q}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \Theta} + \frac{\partial q}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \Theta}. \quad (75.2)$$

Первые сомножители в (75.2) определяют путем дифференцирования первых трех формул (74.12).

Вторые сомножители вследствие параллельности осей геоцентрической и топоцентрической систем равны единице:

$$\frac{\partial (x', y', z')}{\partial (x, y, z)} = 1. \quad (75.3)$$

Если $q = r'$, то на основании (74.11) и (74.12) с учетом (75.3) производная (75.2) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial r'}{\partial \Theta} &= \frac{\partial r'}{\partial x'} \frac{\partial x}{\partial \Theta} + \frac{\partial r'}{\partial y'} \frac{\partial y}{\partial \Theta} + \frac{\partial r'}{\partial z'} \frac{\partial z}{\partial \Theta} + \\ &+ \frac{\partial r'}{\partial \dot{x}'} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \Theta} + \frac{\partial r'}{\partial \dot{y}'} \frac{\partial \dot{y}}{\partial \Theta} + \frac{\partial r'}{\partial \dot{z}'} \frac{\partial \dot{z}}{\partial \Theta}, \end{aligned} \quad (75.4)$$

где первые сомножители находят путем дифференцирования четвертой формулы из (74.12).

Третьи сомножители вида $\frac{\partial x}{\partial \Theta}$, ..., $\frac{\partial \dot{x}}{\partial \Theta}$, ... вычисляют путем дифференцирования формул (26.5) и (26.6), связывающих координаты и составляющие скорости с элементами орбиты.

Существенно, что при вычислении значений $\frac{\partial q}{\partial \Theta}$ во все ука-

занные соотношения подставляются возмущенные значения координат ИСЗ или элементов орбиты.

Коэффициенты $\frac{\partial \bar{\partial}_k}{\partial \bar{\partial}_{0k}}$ называются изохронными производными — производными от текущих (возмущенных) элементов орбиты по начальным (невозмущенным) элементам. В данном случае чаще всего достаточно учитывать вековые возмущения от второй зональной гармоники геопотенциала и атмосферы, если спутник движется в верхних слоях атмосферы. Тогда

$$\begin{aligned}\bar{\Omega} &= \Omega_0 + \dot{\bar{\Omega}}_{J_2} t; & \bar{\omega} &= \omega_0 + \dot{\bar{\omega}}_{J_2} t; & M_0 &= M_{00} + \\ &+ (\dot{\bar{M}}_{0J_2} + \dot{\bar{M}}_{0A}) t + \frac{1}{2} \ddot{\bar{n}}_A t^2; \\ \bar{a} &= a_0 + \dot{\bar{a}}_A t; & \bar{e} &= e_0 + \dot{\bar{e}}_A t,\end{aligned}\quad (75.5)$$

где скорости вековых движений $\dot{\bar{\Omega}}_{J_2}$, $\dot{\bar{\omega}}_{J_2}$, $\dot{\bar{M}}_{0J_2}$ определяются формулами (51.3), а скорости $\dot{\bar{M}}_{0A}$, $\dot{\bar{a}}_A$, $\dot{\bar{l}}_A$ — формулами (52.8), (52.12). Так как скорости вековых движений элементов зависят только от позиционных элементов орбиты, то мы будем иметь следующие изохронные производные:

$$\begin{aligned}\frac{\partial a}{\partial a_0} &= 1 + \frac{\partial \dot{\bar{a}}_A}{\partial a} t; & \frac{\partial a}{\partial e_0} &= \frac{\partial \dot{\bar{a}}_A}{\partial e} t; \\ \frac{\partial e}{\partial a_0} &= \frac{\partial \dot{\bar{e}}_A}{\partial a_0} t; & \frac{\partial e}{\partial l_0} &= 1 + \frac{\partial \dot{\bar{e}}_A}{\partial e} t; \\ \frac{\partial \Omega}{\partial a_0} &= \frac{\partial \dot{\bar{\Omega}}_{J_2}}{\partial a_0} t; & \frac{\partial \Omega}{\partial e_0} &= \frac{\partial \dot{\bar{\Omega}}_{J_2}}{\partial e_0} t; & \frac{\partial \Omega}{\partial i_0} &= \frac{\partial \dot{\bar{\Omega}}_{J_2}}{\partial i_0} t; & \frac{\partial \Omega}{\partial \Omega_0} &= 1; \\ & & & & & & (75.6)\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial a_0} = \frac{\partial \dot{\bar{\omega}}_{J_2}}{\partial a_0} t; \quad \frac{\partial \omega}{\partial e_0} = \frac{\partial \dot{\bar{\omega}}_{J_2}}{\partial e_0} t; \quad \frac{\partial \omega}{\partial i_0} = \frac{\partial \dot{\bar{\omega}}_{J_2}}{\partial i_0} t; \quad \frac{\partial \omega}{\partial \omega_0} = 1;$$

$$\frac{\partial M_0}{\partial a_0} = \frac{\partial \left(\dot{\bar{M}}_{0J_2} + \dot{\bar{M}}_{0A} + \frac{1}{2} \dot{\bar{n}}_A t \right)}{\partial a_0} t; \quad \frac{\partial M_0}{\partial e_0} =$$

$$= \frac{\partial \left(\dot{\bar{M}}_{0J_2} + \dot{\bar{M}}_{0A} + \frac{1}{2} \dot{\bar{n}}_A t \right)}{\partial e_0} t;$$

$$\frac{\partial M_0}{\partial i_0} = \frac{\partial \left(\dot{\bar{M}}_{0J_2} + \dot{\bar{M}}_{0A} + \frac{1}{2} \dot{\bar{n}}_A t \right)}{\partial i_0} t; \quad \frac{\partial M_0}{\partial M_{00}} = 1.$$

Производные в правых частях вычисляются путем дифференцирования формул для вековых возмущений (51.3), (52.8), (52.12). Остальные производные здесь равны нулю. Заметим, что в тех случаях, когда уточняются не начальные элементы орбиты, а начальные условия движения, изохронные производные заметно усложняются. Поэтому выгоднее уточнять элементы орбиты.

Седьмой этап. Вычисление коэффициентов при поправках в координаты пунктов. Член $\frac{\partial q}{\partial \rho} d\rho$ в уравнениях (73.4) и (73.5) запишем в скалярном виде:

$$\frac{\partial q}{\partial X_{\Pi}} dX_{\Pi} + \frac{\partial q}{\partial Y_{\Pi}} dY_{\Pi} + \frac{\partial q}{\partial Z_{\Pi}} dZ_{\Pi}. \quad (75.7)$$

Обозначив для краткости через (ρ) любую из гринвичских координат X_{Π} , Y_{Π} , Z_{Π} , любой из коэффициентов при поправках запишем так:

$$\frac{\partial q}{\partial (\rho)} = \frac{\partial q}{\partial x'} \cdot \frac{\partial x'}{\partial x_{\Pi}} \cdot \frac{\partial x_{\Pi}}{\partial (\rho)} + \frac{\partial q}{\partial y'} \cdot \frac{\partial y'}{\partial y_{\Pi}} \cdot \frac{\partial y_{\Pi}}{\partial (\rho)} + \frac{\partial q}{\partial z'} \cdot \frac{\partial z'}{\partial z_{\Pi}} \cdot \frac{\partial z_{\Pi}}{\partial (\rho)}, \quad (75.8)$$

причем на основании (74.4)

$$\frac{\partial z_{\Pi}}{\partial Z_{\Pi}} = 1; \quad \frac{\partial z_{\Pi}}{\partial X_{\Pi}} = \frac{\partial z_{\Pi}}{\partial Y_{\Pi}} = \frac{\partial x_{\Pi}}{\partial Z_{\Pi}} = \frac{\partial y_{\Pi}}{\partial Z_{\Pi}} = 0. \quad (75.9)$$

Остальные производные $\frac{\partial x_{\Pi}}{\partial X_{\Pi}}$, $\frac{\partial x_{\Pi}}{\partial Y_{\Pi}}$, $\frac{\partial y_{\Pi}}{\partial X_{\Pi}}$, $\frac{\partial y_{\Pi}}{\partial Y_{\Pi}}$ вычисляются путем дифференцирования преобразований (74.4). Вторые сомножители равны единице:

$$\frac{\partial (x', y', z')}{\partial (x_{\Pi}, y_{\Pi}, z_{\Pi})} = 1. \quad (75.10)$$

Первые сомножители вида $\frac{\partial q}{\partial x'}$, $\frac{\partial q}{\partial y'}$, $\frac{\partial q}{\partial z'}$ вычисляются так же, как и в шестом этапе. Кроме того, если $q = \dot{r}$, то к (75.8) следует добавить члены вида

$$\frac{\partial \dot{r}'}{\partial \dot{x}'} \frac{\partial \dot{x}'}{\partial \dot{x}_{\Pi}} \frac{\partial \dot{x}_{\Pi}}{\partial (\rho)} + \frac{\partial \dot{r}'}{\partial \dot{y}'} \frac{\partial \dot{y}'}{\partial \dot{y}_{\Pi}} \frac{\partial \dot{y}_{\Pi}}{\partial (\rho)}, \quad (75.11)$$

где под (ρ) понимаются только X_{Π} , Y_{Π} ; вторые сомножители равны -1 ; первые сомножители ищутся из дифференцирования четвертой формулы (74.12).

Восьмой этап. Этот этап относится только к общему динамическому методу и заключается в вычислении коэффициен-

тов при поправках в параметры геопотенциала. Пусть скаляр σ_{nk} — любой из параметров геопотенциала C_{nk} , S_{nk} . Тогда член в (73.4) вида $\frac{\partial q}{\partial \sigma} d\sigma$ в скалярной форме в соответствии с разложением геопотенциала мы должны записать так:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{\partial q}{\partial \sigma_{nk}} d\sigma_{nk}, \quad (75.12)$$

причем бесконечный верхний предел суммирования по n заменяется некоторым конечным числом N . В соответствии с современными знаниями о геопотенциале максимальное значение N больше 30. Коэффициенты в (75.12) при $d\sigma_{nk}$ можно представить как производные неявной функции:

$$\frac{\partial q}{\partial \sigma_{nk}} = \sum_{s=1}^6 \frac{\partial q}{\partial \vartheta_s} \frac{\partial \vartheta_s}{\partial \sigma_{nk}}. \quad (75.13)$$

Так как возмущенные значения элементов орбиты в соответствии с методом малого параметра можно представить в виде

$$\vartheta_s = \vartheta_{s0} + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=0}^n \sigma_{nk} \delta \vartheta_{nk}^{(1)} + \dots + (\text{члены высших порядков}), \quad (75.14)$$

то

$$\frac{\partial \vartheta_s}{\partial \sigma_{nk}} = \delta \vartheta_{\sigma_{nk}}^{(1)}, \quad (75.15)$$

где $\delta \vartheta_{\sigma_{nk}}^{(1)}$ — возмущения первого порядка от параметра σ_{nk} , определяемые по формулам вида (36.7). Вычисление производных $\frac{\partial q}{\partial \vartheta_s}$ было объяснено выше. Таким образом

$$\sum_{n=2}^N \sum_{k=0}^n \frac{\partial q}{\partial \sigma_{nk}} d\sigma_{nk} = \sum_{n=2}^N \sum_{k=0}^n \sum_{s=1}^6 \frac{\partial q}{\partial \vartheta_s} \delta \vartheta_{\sigma_{nk}}^{(1)} d\sigma_{nk}. \quad (75.16)$$

§ 76. О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ ПОПРАВК ОБЩЕГО ДИНАМИЧЕСКОГО И ОРБИТАЛЬНОГО МЕТОДОВ

Суммируя все результаты, запишем уравнения поправок общего динамического метода космической геодезии в следующей форме:

$$\sum_{s=1}^6 \frac{\partial q_j}{\partial \Theta_s} \frac{\partial \Theta_s}{\partial \Theta_{0s}} d\Theta_{0s} + \frac{\partial q_j}{\partial X_n} dX_n + \frac{\partial q_j}{\partial Y_n} dY_n +$$

$$+ \frac{\partial q_j}{\partial Z_n} dZ_n + \sum_{n=2}^N \sum_{k=0}^n \sum_{s=1}^6 \frac{\partial q_j}{\partial \Theta_s} [\delta \Theta_{cnk}^{(1)} dC_{nk} +$$

$$+ \delta \Theta_{snk}^{(1)} dS_{nk}] + (q_{j \text{ выч}} - q_{j \text{ набл}}) = v_j. \quad (76.1)$$

Уравнение (76.1) записано для j -й измеряемой величины q_j в случае наблюдения одного спутника с одного пункта. Неизвестными являются шесть поправок в элементы орбиты $d\Theta_{0s}$, три поправки в гринвичские координаты пункта dX_n , dY_n , dZ_n и $(N+1)(N+2)/2 - 3$ поправок в параметры геопотенциала. Всего $(N+1)(N+2)/2 + 6$ неизвестных. Очевидно, что если число измеренных величин q_j превышает число неизвестных, то уравнения (76.1) могут быть решены по методу наименьших квадратов под условием $[vv] = \min$ или $[pvv] = \min$, где p — веса измеренных величин.

Если наблюдения одного и того же спутника выполнялись с m пунктов, то уравнения вида (76.1) следует дополнить такими же уравнениями для каждого из пунктов. Число неизвестных в этом случае станет равным $(N+1)(N+2)/2 + 3(m+1)$. Если же с каждого из m пунктов наблюдалось l спутников, то, составляя уравнения вида (76.1) для каждого пункта и каждого спутника, мы будем иметь дело с $(N+1)(N+2)/2 + 3(m+2l-1)$ неизвестными. Пусть, например, наблюдалось пять спутников с десяти пунктов; положим, что $N=30$. Тогда нужно определить 517 неизвестных. Как показывает практика, при столь большом числе неизвестных число уравнений поправок должно быть не менее чем в два раза больше, так как небольшая переопределенность системы уравнений вида (76.1) обычно не позволяет получить достаточно уверенных результатов. Однако даже при существенно большей переопределенности в решении столь громоздких систем уравнений могут возникать значительные корреляции между различными неизвестными. При разном составе измерений, распределений измерений во времени, распределении пунктов на земной поверхности упомянутые зависимости могут оказаться самыми разнообразными. Отметим, что этот вопрос к настоящему времени полного решения не имеет из-за чрезвычайной громоздкости задачи.

Дело значительно упрощается, если от общего динамического метода перейти к орбитальному методу космической геодезии. Как уже отмечалось, интервал времени, на котором выполняются наблюдения, в большинстве случаев должен быть меньше одного периода оборота ИСЗ так, чтобы $(N+1)(N+2)/2 - 3$ неизвестных поправок в параметры геопотенциала в уравнениях

(76.1) можно было отбросить. Тогда уравнения будут содержать только $3(m+2l)$ неизвестных. Если взять предыдущий пример, то вместо 517 неизвестных мы будем иметь дело лишь с 30 неизвестными и решение уравнений (76.1) заметно упрощается. Тем не менее проблема выявления зависимостей между неизвестными остается и в данном случае. Ее решают в процессе практической реализации орбитального метода на конкретном наблюдательном материале.

§ 77. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ГЕОПОТЕНЦИАЛА ПО ВОЗМУЩЕНИЯМ ОРБИТ СПУТНИКОВ

Пусть дана некоторая последовательность орбитальных дуг ИСЗ, каждая из которых меньше одного витка настолько, что любыми ошибками в значениях возмущающих параметров можно пренебречь. Предположим, что по данным наблюдений каждой орбитальной дуги реализован орбитальный метод: уточнены начальные элементы орбиты и координаты пунктов, с которых выполнялись наблюдения. При этом каждая система уточненных элементов отнесена к некоторому моменту — эпохе оскуляции, содержащемуся внутри интервала времени, соответствующего данной орбитальной дуге. Каждую эпоху оскуляции считаем отнесенной к одной и той же точке весны. Последовательность уточненных систем элементов расположим в следующем виде:

Номер орбитальной дуги	...	0	1	2		j		q
Момент оскуляции	...	t_0	t_1	t_2		t_j		t_q
Вектор уточненных элементов	...	$\mathfrak{Z}_0$	$\mathfrak{Z}_1$	$\mathfrak{Z}_2$		$\mathfrak{Z}_j$		$\mathfrak{Z}_q$

Предполагают, что $t_0 < t_1 < t_2 < \dots$. Любую разность $\mathfrak{Z}_k - \mathfrak{Z}_m$ можно рассматривать как возмущение вектора элементов орбиты за интервал времени $t_k - t_m$. Будем считать, что разность любых двух соседних моментов оскуляции всегда больше любого из интервалов времени, соответствующего той или иной орбитальной дуге. Тогда на всяком промежутке времени между двумя любыми эпохами оскуляции при предвычислении возмущенных элементов орбиты пренебрегать ошибками в значениях возмущающих параметров нельзя. Это позволяет на основании сравнения наблюденных и вычисленных элементов орбиты уточнить значения возмущающих параметров. Основой для составления уравнений поправок в данном случае являются аналитические формулы для возмущений элементов орбиты ИСЗ. Дальнейшие вычислительные операции заключаются в следующем.

Приняв эпоху оскуляции t_0 за начальный момент, а $\mathfrak{Z}_0$ — за начальный вектор элементов орбиты, интегрируют дифференциальные уравнения для оскулирующих элементов орбиты с учетом всех заданных параметров геопотенциала и всех остальных заданных возмущающих параметров:

$$\mathfrak{Z}_j = \mathfrak{Z}_0 + \int_{t_0}^{t_j} \dot{\mathfrak{Z}} dt, \quad j = 1, 2, \dots, q. \quad (77.1)$$

Через $\dot{\mathcal{E}}$ мы обозначили вектор правых частей уравнений Лагранжа или Ньютона (§ 33, 34). Здесь опять-таки целесообразно использовать один из современных численных методов, в частности метод Эверхарта, в целях обеспечения наивысшей методической точности интегрирования.

Для удобства записи теперь будем использовать скаляр $\mathcal{E}$ для обозначения любого из элементов орбиты. Любой элемент, полученный после интегрирования (77.1), будем считать «вычисленным» — $\mathcal{E}_{\text{выч}}$, а любой уточненный элемент — «наблюдаемым» — $\mathcal{E}_{\text{набл.}}$.

Для каждой эпохи оскуляции t_j составляют разности «вычисленное минус наблюдаемое»

$$l_j \mathcal{E} = \mathcal{E}_{j \text{ выч}} - \mathcal{E}_{j \text{ набл.}} \quad (77.2)$$

которые рассматривают как свободные члены уравнений поправок.

Установим вид уравнений поправок, используя указанные в § 51 обозначения для вековых $\delta\bar{\mathcal{E}}$, долгопериодических $\delta\tilde{\mathcal{E}}$ и короткопериодических $\delta\check{\mathcal{E}}$ возмущений. Для каждой эпохи оскуляции можно написать:

$$\mathcal{E}_j = \mathcal{E}_0 + \delta\bar{\mathcal{E}}_{j\oplus} + \delta\tilde{\mathcal{E}}_{j\oplus} + \delta\check{\mathcal{E}}_{j\oplus} + \delta\mathcal{E}_j, \quad (77.3)$$

где знаком $\oplus$ обозначены возмущения, вызванные геопотенциалом; $\delta\mathcal{E}_j$ — суммарное возмущение, вызванное остальными возмущающими факторами. На основании (77.3) напомним:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{j \text{ набл.}} - \mathcal{E}_{j \text{ выч.}} &= (\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_0) + (\delta\bar{\mathcal{E}}_{j\oplus \text{ набл.}} - \delta\bar{\mathcal{E}}_{j\oplus \text{ выч.}}) + \\ &+ (\delta\tilde{\mathcal{E}}_{j\oplus \text{ набл.}} - \delta\tilde{\mathcal{E}}_{j\oplus \text{ выч.}}) + [(\delta\check{\mathcal{E}}_{j\oplus} + \delta\mathcal{E}_j)_{\text{набл.}} - (\delta\check{\mathcal{E}}_{j\oplus} + \delta\mathcal{E}_j)_{\text{выч.}}]. \end{aligned} \quad (77.4)$$

Так как влияние вековых и долгопериодических возмущений значительно больше влияния короткопериодических и негеопотенциальных возмущений, то последний член в квадратных скобках в (77.4) в первом приближении можно отбросить. Первый член $(\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_0)$, который формально обращается в ноль, следует заменить на поправку $\Delta\mathcal{E}_0$ элемента в начальную эпоху оскуляции t_0 . Разности наблюдаемых и вычисленных вековых и долгопериодических возмущений зависят от поправок в параметры геопотенциала. Обозначим, как в § 51

$$\delta\bar{\mathcal{E}} = \dot{\mathcal{E}}(t - t_0); \quad \delta\tilde{\mathcal{E}} = \sum_m F_m \frac{\cos}{\sin} m\omega, \quad (77.5)$$

где $\dot{\mathcal{E}}$ — скорость векового движения элемента; F_m — амплитуды его долгопериодических возмущений. Тогда (77.4) можно пере-

писать так:

$$\dot{\vartheta}_{\text{набл}} - \dot{\vartheta}_{\text{выч}} = \Delta\dot{\vartheta}_0 + \Delta\ddot{\vartheta}(t-t_0) + \sum_m \Delta F_m \frac{\cos}{\sin} m\omega, \quad (77.6)$$

где $\Delta\dot{\vartheta}_0$ — поправка начального значения элемента; $\Delta\ddot{\vartheta}$ и ΔF_m — поправки в скорость векового движения и в амплитуды долгопериодических возмущений, вызванные поправками в параметры геопотенциала. На основании формул (51.6) и (51.18) можно написать

$$\Delta\ddot{\vartheta} = \alpha_2 \Delta J_2 + \alpha_4 \Delta J_4 + \alpha_6 \Delta J_6 + \dots, \quad (77.7)$$

$$\Delta F_m = \beta_3^{(m)} \Delta J_3 + \beta_5^{(m)} \Delta J_5 + \dots,$$

где ΔJ — поправки в зональные коэффициенты геопотенциала; коэффициенты α, β определяются теорией возмущений и являются известными функциями позиционных элементов орбиты.

Поскольку все возмущения действуют совместно, в уравнения вида (77.6) мы обязаны включить члены, зависящие от поправок в амплитуды предельных долгопериодических возмущений — резонансных или псевдорезонансных. На основании формул (51.22) обозначим эти члены так:

$$\Delta\delta\tilde{\vartheta}_{\oplus}^* = \sum_{nk} (\bar{\gamma}_{nk}^* \Delta C_{nk} + \bar{\gamma}_{nk}^{**} \Delta S_{nk}); \quad (77.8)$$

$$\text{где } \bar{\gamma}_{nk}^* = \begin{aligned} & -L_{\vartheta} \frac{R_{nk}}{A_{nk}} \sin[A_{nk}(t-t_0) + B'_{nk}] \\ & (-L_{\vartheta}^T) \frac{R'_{nk}}{A_{nk}} \cos[A_{nk}(t-t_0) + B_{nk}] \end{aligned}; \quad (77.9)$$

$$\bar{\gamma}_{nk}^{**} = \begin{aligned} & L_{\vartheta} \frac{R_{nk}}{A_{nk}} \cos[A_{nk}(t-t_0) + B'_{nk}] \\ & (-L_{\vartheta}^T) \frac{R'_{nk}}{A_{nk}} \sin[A_{nk}(t-t_0) + B_{nk}] \end{aligned}.$$

Знак «*», как и в § 51, означает, что принимаются во внимание лишь члены с делителями $A_{nk} < 1$, $A_{nk} \rightarrow 0$. При этом делители A_{nk} определяются формулой вида (51.21). Величины ΔC_{nk} и ΔS_{nk} — поправки к коэффициентам долгопериодических гармоник геопотенциала, вызывающих резонансные возмущения (включая долгопериодические) в орбите данного ИСЗ.

Уравнения поправок для произвольного элемента орбиты одного и того же спутника имеют вид

$$\Delta\dot{\vartheta}_0 + \Delta\ddot{\vartheta}(t-t_0) + \sum_m \Delta F_m \frac{\cos}{\sin} m\omega + \Delta\delta\tilde{\vartheta}_{\oplus}^* + l_{\vartheta} = v. \quad (77.10)$$

Неизвестными здесь являются: $\Delta\mathcal{E}_0$ — поправка элемента орбиты для начальной эпохи оскуляции; $\dot{\Delta\mathcal{E}}$ — поправка к скорости векового движения элемента; ΔF_m — поправки к амплитудам долгопериодических возмущений, вызванных нечетными зональными гармониками; поправки к амплитудам долгопериодических и резонансных возмущений, входящих в $\Delta\delta\mathcal{E}^*_{\oplus}$, вызванных коэффициентами долготных гармоник геопотенциала.

Предположим, что задана переопределенная система уравнений поправок вида (77.10), которая решена под условием $[vv] = \min$ или $[pvv] = \min$ известными методами математической обработки наблюдений. Считая тем самым, что перечисленные неизвестные найдены, по формулам вида (77.7) — (77.9) можно найти соотношения для определения поправок в четные и нечетные зональные и в некоторые долготные коэффициенты. Однако если использовать лишь один спутник, то по возмущениям его орбиты можно уточнить весьма ограниченное число коэффициентов геопотенциала. Это объясняется тем, что коэффициенты в перечисленных выше формулах при поправках в параметры геопотенциала — функции медленно меняющихся элементов орбиты; в результате получим уравнения с почти не меняющимися коэффициентами. Это, в частности, означает, что каждой конкретной орбите ИСЗ соответствует своя, наилучшим образом подходящая, система параметров геопотенциала. Поэтому для уверенного определения достаточно большого числа поправок в параметры геопотенциала уравнения вида (77.10) должны быть составлены по орбитальным данным многих спутников с разными элементами орбиты.

Для заатмосферных спутников с высотами по крайней мере больше 2000 км формула (77.1) означает интегрирование уравнений Лагранжа, для внутриатмосферных спутников — уравнений Ньютона. В последнем случае в уравнения поправок (77.10) следует включить члены, содержащие неизвестные поправки за остаточное влияние атмосферного торможения, которые необходимо искать совместно с поправками в параметры геопотенциала.

Под элементами $\mathcal{E}$ в уравнениях поправок (77.10) понимаются только элементы Ω , ω , i , e . Большая полуось a не используется, так как она содержит только короткопериодические возмущения. Среднюю аномалию обычно не используют, так как этот элемент удобен для изучения верхней атмосферы, когда геопотенциал на заданном уровне точности уже известен.

Тогда из решения уравнений (77.10) определяются: $\Delta\Omega_0$, $\Delta\omega_0$, Δi_0 , Δe_0 — поправки к начальным значениям указанных четырех элементов; $\dot{\Delta\Omega}$, $\dot{\Delta\omega}$ — поправки к вековым движениям узла и перигентра; $\Delta F_{m\mathcal{E}}$ — поправки к амплитудам долгопериодических возмущений в Ω , ω , i , e и поправки к амплитудам долгопериодических и резонансных возмущений в тех же элементах от долготной части геопотенциала.

Пусть по орбитальным данным одного ИСЗ найдены только величины $\Delta\dot{\bar{\Omega}}$, $\Delta\dot{\bar{\omega}}$ и наибольшие значения ΔF_{Ω} , ΔF_{ω} , ΔF_i , ΔF_e . Тогда формулы (77.7) дадут две системы уравнений вида

$$\begin{pmatrix} \Delta\dot{\bar{\Omega}} \\ \Delta\dot{\bar{\omega}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{\Omega_2} & \alpha_{\Omega_4} \\ \alpha_{\omega_2} & \alpha_{\omega_4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta J_2 \\ \Delta J_4 \end{pmatrix} + \dots$$

$$\begin{pmatrix} \Delta F_{\Omega} \\ \Delta F_{\omega} \\ \Delta F_i \\ \Delta F_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_{\Omega_3} & \beta_{\Omega_5} & \beta_{\Omega_7} & \beta_{\Omega_9} \\ \beta_{\omega_3} & \beta_{\omega_5} & \beta_{\omega_7} & \beta_{\omega_9} \\ \beta_{i_3} & \beta_{i_5} & \beta_{i_7} & \beta_{i_9} \\ \beta_{e_3} & \beta_{e_5} & \beta_{e_7} & \beta_{e_9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta J_3 \\ \Delta J_5 \\ \Delta J_7 \\ \Delta J_9 \end{pmatrix} + \dots, \quad (77.11)$$

позволяющие уточнить лишь параметры J_2 , J_4 и J_3 , J_5 , J_7 , J_9 . На результаты определения этих параметров окажут влияние неопределяемые отброшенные члены, обозначенные в (77.11) многоточием. Орбитальные данные l спутников с разными элементами орбиты дадут нам l пар уравнений вида (77.11), что позволит определить $2l$ четных и $4l$ нечетных зональных коэффициентов. Аналогичным образом каждый из спутников позволит определить на основе формул (77.8), (77.9) соответствующую ему подходящую пару почти резонансных коэффициентов C_{nh} , S_{nh} .

Следует учитывать, что на спутниковых высотах геопотенциал оказывается сглаженным. Как показывает более чем 25-летний опыт изучения геопотенциала по возмущениям орбит спутников, он достаточно уверенно определяется примерно до 14—16-й гармоники. Следующие гармоники целесообразно определять совместно по спутниковым и наземным данным с привлечением спутниковой альтиметрии и с использованием систем спутник — спутник. Однако гармоники низких порядков по спутниковым данным определяются и уточняются с наибольшей возможной точностью.

Возникает вопрос, каков должен быть интервал времени, содержащий орбитальные данные, чтобы современные значения параметров геопотенциала могли быть уточнены? Это значит, что за данный интервал времени в предвычисляемых элементах орбиты должна накопиться значительная погрешность из-за неточного знания геопотенциала, что, в свою очередь, приводит к определению с достаточной надежностью свободных членов уравнений (77.10), а отсюда к уверенному определению искоемых неизвестных. Следует иметь в виду, что математически строго однозначного ответа на этот вопрос пока дать нельзя. Тем не менее, исходя из опыта, можно оценить нижнюю границу такого интервала времени. Современные модели геопотенциала

получены с использованием орбитальных дуг, распределенных на промежутках времени в среднем в несколько месяцев. Исходя из сказанного, следует считать, что искомый интервал времени должен превышать наибольший из интервалов, использованных при построении модели геопотенциала, которую мы собираемся уточнять. В противном случае нельзя будет гарантировать достаточно надежного определения разностей «наблюдаемое минус вычисленное».

§ 78. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ О СУЩНОСТИ РЕЗОНАНСНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Используя выражение (51.20), возмущения в элементах орбиты можно представить в виде

$$\delta\Theta_{\oplus\lambda} = \sum_{nk} \frac{R_{nk}}{A_{nk}} \{C_{nk} \sin [A_{nk}(t-t_0) + B_{nk}] - S_{nk} \cos [A_{nk}(t-t_0) + B_{nk}]\}, \quad (78.1)$$

где $\delta\Theta_{\oplus\lambda}$ — произвольное возмущение от долготной части геопотенциала; R_{nk}/A_{nk} — амплитуда возмущений; A_{nk} — частота колебательного движения; B_{nk} — фаза, являющаяся произвольной постоянной; C_{nk} и S_{nk} — параметры гравитационного поля Земли.

Частота A_{nk} входит в знаменатель амплитуды и в случае, если $A_{nk} \rightarrow 0$, амплитуда R_{nk}/A_{nk} и период колебаний $2\pi/A_{nk}$ будут стремиться к бесконечности. Это и определяет математическую сущность резонанса.

Знаменатель A_{nk} имеет следующий вид:

$$A_{nk} = \left(j - k \frac{\omega_{\oplus}}{\tilde{n}}\right) (\tilde{n} + \dot{M}_{C_{20}}) + k \frac{\omega_{\oplus}}{\tilde{n}} \dot{M}_0 C_{20} + k \dot{\Omega}_{C_{20}} - [n - 2(m + s + q)] \dot{\omega}_{C_{20}}, \quad (78.2)$$

где n, k, m, s, q, j — целочисленные индексы суммирования; $\omega_{\oplus}$ — угловая скорость Земли; $\tilde{n}$ — среднее движение спутника; $\dot{M}_{C_{20}}, \dot{M}_0 C_{20}, \dot{\Omega}_{C_{20}}$ и $\dot{\omega}_{C_{20}}$ — вековые изменения соответствующих элементов, обусловленные второй зональной гармоникой.

В соответствии с принятой классификацией различают три типа резонансов:

I — резонанс между средним движением ИСЗ $\tilde{n}$ и угловой скоростью вращения Земли $\omega_{\oplus}$:

$$A_{nk}^{(I)} = j(\tilde{n} + \dot{M}_{C_{20}} + \dot{\Omega}_{C_{20}} + \dot{\omega}_{C_{20}}) - k\omega_{\oplus} \left(1 + \frac{\dot{M}_{C_{20}} - \dot{M}_0 C_{20}}{\tilde{n}}\right) \approx 0. \quad (78.3)$$

Отметим, $\dot{M}_{C_{20}}$, $\dot{\Omega}_{C_{20}}$, $\dot{\omega}_{C_{20}}$ по отношению к $\tilde{n}$ имеют порядок 10^{-3} .

II — резонанс, при котором в угловой скорости вращения Земли учитывают движения линии узлов. А именно

$$A_{nk}^{(II)} = j(\tilde{n} + \dot{M}_{C_{20}} + \dot{\omega}_{C_{20}}) - k \left[\omega_{\oplus} \left(1 + \frac{M_{C_{20}} - M_0 C_{20}}{\tilde{n}} \right) - \dot{\Omega}_{C_{20}} \right] \approx 0. \quad (78.4)$$

Этот резонанс принято называть резонансом «*i*-типа» в связи с тем, что величина регрессии линии узлов непосредственно зависит от наклона орбиты *i*. Отметим, что для экваториальных спутников резонанс «*i*-типа» не отличается от резонанса I типа.

III — при этом резонансе в угловой скорости Земли учитывают как движение линии узлов, так и линии апсид:

$$A_{nk}^{(III)} = j(\tilde{n} + \dot{M}_{C_{20}}) - k \left[\omega_{\oplus} \left(1 + \frac{\dot{M}_{C_{20}} - \dot{M}_0 C_{20}}{\tilde{n}} \right) - \dot{\Omega}_{C_{20}} - \dot{\omega}_{C_{20}} \right] \approx 0. \quad (78.5)$$

Резонанс этого типа принято называть резонансом «*e*-типа». Выражения (78.3)—(78.5) с точностью до 10^{-3} сводятся к общему выражению

$$A_{nk} \approx j\tilde{n} - k\omega_{\oplus} \approx 0. \quad (78.6)$$

С этим упрощенным знаменателем мы и рассмотрим более подробно структуру возмущений (78.1).

Пусть в (78.6) $j=0$, тогда для близких ИСЗ члены с таким знаменателем дают возмущения, на порядок превосходящие по амплитуде короткопериодические возмущения, и общий период таких возмущений составляет около суток. Максимальные амплитуды и периоды дают низкие гармоники со вторым индексом $k=1, 2$. С увеличением порядка гармоники для низких ИСЗ и с увеличением высоты спутника над поверхностью Земли возмущения рассматриваемого типа по величине амплитуды и по периоду приближаются к короткопериодическим. Большая полуось орбиты рассматриваемого типа возмущений не имеет. Возмущения этого типа чаще всего классифицируют как долгопериодические, иногда их называют резонансными возмущениями I типа.

Пусть в любом из (78.3)—(78.6) $j \neq 0$. В этом случае наряду с короткопериодическими возмущениями от всей совокупности гармоники у некоторых спутников от вполне определенных гармоник со вторым индексом k появляются резонансные возмущения, когда A_{nk} становится малой величиной, т. е. на основании (78.6) это происходит, когда

$$k/j \approx \tilde{n}/\omega_{\oplus}. \quad (78.7)$$

Более строгие условия можно записать с использованием выражений (78.3)—(78.5). Такие условия возникают тогда, когда среднее движение ИСЗ и средняя угловая скорость вращения Земли соизмеримы. Назовем основной резонансной последовательностью отношения средних движений ИСЗ $\tilde{n}$ и средней угловой скорости Земли $\omega_{\oplus}$ в правой части (78.7) равными

$$15, 14, 13, \dots, 2, 1. \quad (78.8)$$

Эта последовательность соответствует спутникам с вполне определенными периодами, равными соответственно $2\pi/15\omega_{\oplus}$; $2\pi/14\omega_{\oplus}$; ...; $2\pi/\omega_{\oplus}$. Основная последовательность дает второй индекс гармоник k . В самом деле, равенство (78.7) выполняется при фиксированном $j=1$, если второй индекс гармоник $k=15, 14, \dots$. Если же мы будем перебирать индекс $j=2, 3, \dots$, то второй индекс гармоник должен удваиваться, утраиваться и т. д.

Равенство (78.7) не изменится, если мы его умножим на любое целое число l , а именно

$$k/lj \approx \tilde{n}/\omega_{\oplus}. \quad (78.9)$$

В правой части (78.9) отношение $\tilde{n}/\omega_{\oplus}$ можно рассматривать как соизмеримость среднего движения ИСЗ $\tilde{n}$ с l оборотами Земли. В этом случае индекс j умножается на число оборотов l , а индекс k при этом остается фиксированным.

Последовательность (78.8) соответствует вполне определенным большим полуосям орбит, которые и определяют среднее движение ИСЗ $\tilde{n}$.

При определении резонансных возмущений можно строго доказать, что множеству орбит, заданных большой полуосью a , вблизи основной резонансной последовательности соответствует определенная последовательность малых чисел

$$\varepsilon_{15}, \varepsilon_{14}, \dots, \varepsilon_2, \varepsilon_1 \quad (78.10)$$

такая, что если

$$|A_{nk}| < \varepsilon_m, \quad (78.11)$$

то задача по определению возмущений с применением классических аналитических методов становится некорректной по отношению к переменной a , т. е. небольшим изменениям Δa соответствуют большие возмущения во всех элементах орбиты.

Слабым (shallow) резонансом называют такой, при котором выполняется неравенство

$$|A_{nk}| > \varepsilon_m. \quad (78.12)$$

Острым (deep) резонансом называют такой, при котором

$$|A_{nk}| \leq \varepsilon_m. \quad (78.13)$$

В дальнейшем, при изложении проблем определения коэффициентов долгопных гармоник по резонансным возмущениям, будем иметь в виду только слабый резонанс. При определении резонансных амплитуд и периодов в этом случае пригодны выражения (78.1), полученные на основании классической теории.

Для определения амплитуд и периодов резонансных гармоник при остром резонансе необходимо создавать специальные резонансные теории, т. е. выражения (78.1) в этом случае непригодны. Ввиду отсутствия общности в резонансных теориях и слабой изученности явления острого резонанса определения коэффициентов долгопных гармоник с использованием явления острого резонанса здесь рассматриваться не будут.

Рассмотрим физический смысл резонансных явлений. Пусть имеются две физические системы L_n и L_m с набором частот ω_n и ω_m . Они связаны между собой некоторой функцией f , которая может из одной системы в другую передавать частоту, а следовательно, и энергию. Система L_m резонирует с системой L_n , если вынужденные колебания системы L_n при помощи функции f возбуждают колебания с такими же частотами (или кратными им) в системе L_m . При этом с помощью функции f происходит передача энергии из системы L_n в систему L_m .

Пусть L_m — орбита с движущимся по ней спутником, L_n — аномалии гравитационного поля Земли, f — гравитационные силы. Предположим, что Земля не имеет вращательного движения вокруг оси, т. е. $\omega_\oplus = 0$. Кроме того, предположим, что линии узлов и апсид не перемещаются, т. е. $\dot{\Omega}_{C20} = \dot{\omega}_{C20} = 0$. На основании (78.6) в этом случае при $j=0$ знаменатель $A_{nh} = 0$, т. е. члены этого типа дают возмущения с бесконечно большими амплитудами и периодами. Физически это означает, что след орбиты ИСЗ на поверхности Земли представляет собой замкнутую линию. Следовательно, аномалии гравитационного поля Земли действуют на орбиту ИСЗ строго периодически, возбуждая в ее элементах возмущения с периодом, кратным периоду замыкания следа орбиты ИСЗ.

В действительности, в связи с тем, что Земля вращается и линии узлов и апсид перемещаются, следы спутников на поверхности Земли имеют вид спиральных разомкнутых траекторий. Но в некоторых случаях он может замыкаться. Это происходит тогда, когда среднее движение ИСЗ $\tilde{n}$ и средняя угловая скорость Земли близки к соизмеримости, а точнее, когда выполняется одно из условий (78.3) — (78.5).

Так, например, след спутника с периодом обращения $T = 2^h$ через каждые 12 оборотов будет строго замыкаться. Тогда ясно,

что через каждые 12 оборотов спутник занимает одно и то же положение относительно Земли. В этом случае на фоне хаотически действующих возмущающих ускорений от гравитационного поля Земли выделяются строго периодические возмущающие ускорения, вызванные периодичностью повторений одного и того же положения системы Земля — спутник. Эти периодически повторяющиеся возмущающие ускорения и вызывают в элементах орбиты резонансные возмущения с периодом, кратным периоду замыкания следа орбиты спутника.

Слаборезонансные ИСЗ, как показывают наблюдения, имеют периоды резонансных возмущений в несколько суток и амплитуды, достигающие сотен метров.

§ 79. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ДОЛГОТНЫХ ГАРМОНИК ГЕОПОТЕНЦИАЛА ПО РЕЗОНАНСНЫМ ВОЗМУЩЕНИЯМ

Первые успешные попытки определения коэффициентов долготных гармоник геопотенциала по резонансным возмущениям были предприняты еще в середине 60-х годов. За последние двадцать лет существенно повысилась точность наблюдений ИСЗ, накоплен значительный опыт использования спутниковых данных при изучении тонкой структуры гравитационного поля Земли, в определении коэффициентов долготных гармоник геопотенциала по резонансным возмущениям. Такие определения стали систематическими, и они позволили получить коэффициенты довольно высоких гармоник потенциала Земли.

Однако использование резонансных возмущений при изучении гравитационного поля Земли в широких масштабах наталкивается на ряд существенных трудностей как теоретического, так и практического характера. Преодоление этих трудностей — дело ближайшего будущего. Поэтому здесь излагаются только твердо устоявшиеся приемы и положения методики использования резонансных явлений при определении коэффициентов геопотенциала.

Как это следует из § 78, в резонансе с элементами данной орбиты находятся все гармоники, имеющие второй индекс k , реализующий одно из соотношений (78.3) — (78.5). Поэтому при определениях коэффициентов гармоник используют такие ИСЗ, у которых на фоне всей совокупности резонирующих гармоник явно выделяются одна-две резонансные гармоники. Это легко обнаруживается из предварительного теоретического анализа резонансных возмущений конкретного ИСЗ. В противном случае проблема разделения влияния гармоник (проблема сепарации) остается такой же сложной, как и при использовании короткопериодических возмущений.

Коэффициенты гармоник, полученные по резонансным возмущениям, характеризуют реальную структуру гравитационного поля Земли только в случае, если резонансные определения про-

изводятся на основании орбит с различными наклонами i , разными значениями эксцентриситета e и большой полуоси a .

В противном случае значения коэффициентов представляют собой некоторые согласующие коэффициенты, позволяющие для этой же орбиты предвычислять положение ИСЗ.

Любая орбита ИСЗ, на первый взгляд далекая от соизмеримости, на практике почти всегда имеет ряд резонансных возмущений от гармоник, соответствующих ближайшим соизмеримостям. Поэтому практически для любого спутника необходим предварительный анализ наличия в элементах его орбиты слабого резонанса, если наблюдения такого спутника производят с высокой точностью.

Таким образом, выполнив предварительный анализ резонансных возмущений и установив порядок гармоник, вступающих в резонанс для данного ИСЗ, по формулам (78.1) с учетом выражений для знаменателей (78.2) вычисляют значения резонансных возмущений. Зная начальные элементы ИСЗ, из наблюдений вычисляют коэффициенты R_{nh} , зависящие от a , i , e , знаменатель A_{nh} и фазу B_{nh} . Используя (78.1), составляют уравнение погрешностей в виде (76.1), где неизвестными являются коэффициенты гармоник dC_{nh} и dS_{nh} , $\delta\Theta$ — поправки в начальные значения элементов орбиты S -го спутника, δX_p , δY_p и δZ_p — поправки в гринвичские координаты станций P , из которых производят наблюдения. На практике определения по резонансным возмущениям не выделяют из общей задачи уточнения коэффициентов геопотенциала по всей совокупности возмущений, а решают задачу совместно. Такой вариант учета резонансных возмущений называют основным. Возможны и другие варианты. В одном из них при определении коэффициентов зональных гармоник в уравнения вида (76.1) включают в качестве дополнительных неизвестных амплитуды резонансных возмущений. Резонансные возмущения учитывают при вычислении свободных членов, принимая некоторые приближенные значения искоемых коэффициентов гармоник.

В другом варианте в уравнениях вида (76.1) отбрасывают все нерезонансные члены и в первом приближении из решения упрощенной системы, где присутствуют только резонансные возмущения, определяют значения коэффициентов только резонансных гармоник. А далее во втором приближении решают систему (76.1) с применением основного варианта.

На практике при определении коэффициентов гармоник геопотенциала применялись все перечисленные варианты. Какому из них следует в настоящее время отдать предпочтение, сказать трудно, так как пока не существуют критерии для независимого сравнения различных вариантов.

СПУТНИКОВОЕ НИВЕЛИРОВАНИЕ

§ 80. СУЩНОСТЬ СПУТНИКОВОГО НИВЕЛИРОВАНИЯ

Радиовысотомер, установленный на борту ИСЗ, измеряет разность высот двух поверхностей: средней уровенной поверхности морей и океанов и уровенной поверхности ИСЗ. Радиовысотомер с помощью параболической антенны передает вертикально вниз высокочастотные импульсы электромагнитных волн сантиметрового диапазона, продолжительностью 100 нс. Сферический фронт волны, распространяемый от радиовысотомера, достигает поверхности океана по кратчайшему расстоянию и в течение почти 100 нс подспутниковая точка поверхности океана покрыта освещенной площадкой. Отраженный сигнал в идеальных условиях прохождения тем же кратчайшим путем вернется в приемник радиовысотомера. Специальное устройство детектирует и осредняет большое число сигналов. Пик сигнала нормируется до постоянного значения, и за момент приема отраженного сигнала принимается момент, когда его мощность впервые оказывается больше нормированного ее значения. Решающая цепь выводит время прямого и обратного прохождения сигналов по кратчайшему расстоянию.

Геометрию спутникового нивелирования поясним с помощью рис. 72, в котором приняты следующие обозначения: r , φ — геоцентрические радиус и широта спутникового радиовысотомера Q ; r_0 , φ_0 — геоцентрические радиус и широта подспутниковой точки Q_0 на геоиде; B — геодезическая широта спутникового радиовысотомера; ξ — составляющая уклонения отвеса; отрезок $Q_0Q = h$ — высота спутникового радиовысотомера над геоидом; отрезок $Q_eQ_0 = \xi$ — высота геоида над отсчетным эллипсоидом.

Сумма углов ν и ν_0 для фиксированной высоты равна разности геодезической B и геоцентрической φ широт точки Q_0 . На широте $B = 45^\circ$ при $h = 1000(1500)$ км эти малые углы имеют следующие значения: $\nu = 10,92'$ ($9,34'$); $\nu_0 = 1,52'$ ($2,20'$).

Пользуясь рис. 72, запишем векторное уравнение спутникового нивелирования:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{h}. \quad (80.1)$$

Из этого векторного уравнения следует: если известен геоцентрический радиус-вектор $\mathbf{r}$ спутникового радиовысотомера и измерен вектор $\mathbf{h}$, то определяется геоцентрический радиус-вектор $\mathbf{r}_0$ геоида; если задан геоид и измерен вектор $\mathbf{h}$, то определяется геоцентрический радиус-вектор $\mathbf{r}$ спутникового радиовысотомера.

Особый практический интерес представляет вариант, когда известны геоцентрические радиусы-векторы геоида $\mathbf{r}_0$ и радиовысотомера $\mathbf{r}$. В этом частном случае можно будет предвычислить вектор $\mathbf{h}$ и сравнить с измеренным его значением $\mathbf{h}'$. Имея

статистику генеральной совокупности разностей вычисленных и измеренных значений высот радиовысотомера над океаном, можно решать разнообразные геодезические и геофизические задачи: эталонирование радиовысотомера, исследование метеоусловий над океаном, определение амплитуды волн океана, оценка точности прогноза орбиты ИСЗ и др.

В спутниковом нивелировании измеряется высота ИСЗ над геоидом — вектор h . Главными источниками ошибок измерения h являются: радиовысотомер, прохождение импульсов и геометрия океана.

Систематические приборные поправки радиовысотомера могут быть определены метрологически на эталонных полигонах океана. Случайная часть приборной погрешности высотомера может быть снижена до 0,5 м.

Ошибка определения прохождения импульса из-за неучета тропосферной рефракции фронта радиоволны может достигать 5 м. Большую часть этих ошибок можно исключить, определяя температуру, давление и влажность над океаном вблизи района нивелирования. При тщательно отработанной методике учета метеофакторов ошибку определения прохождения импульса можно снизить до 0,08 м.

Для ослабления влияния топографии поверхности океана используют статистику высот волн на различных акваториях океана по временам года. Выявлено, что при эффективной высоте волн $l=12$ м высота ИСЗ от среднего уровня океана уменьшается на 1,8 м. Статистика показывает, что эффективная высота волн $l=8$ м зимой в Северной Атлантике наблюдается один раз в неделю. Летом волны высотой $l=2$ м наблюдаются 40 % времени, а с высотой $l=6$ м — 1 % времени. Таким образом, наиболее точные определения геоида могут быть выполнены по летним наблюдениям.

За сутки можно отнивелировать два профиля геоида, а за год океан можно покрыть нивелировкой 20 раз. Поэтому планирование и выполнение глобального спутникового нивелирования, периодическая калибровка спутниковых радиовысотомеров относятся к классу крупных научно-технических и производственных задач, решаемых в государственном масштабе.

В заключение отметим, что в зарубежной и отчасти в советской литературе спутниковое нивелирование, которое представляет идеальный способ прямого нивелирования высот геоида, называют спутниковой альтиметрией.

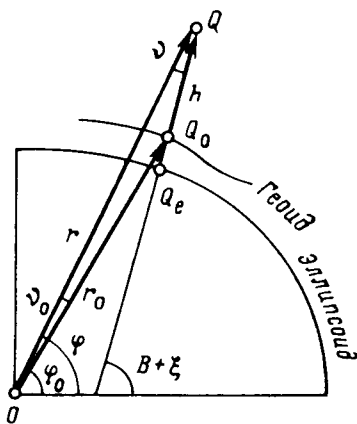


Рис. 72. Геометрия спутникового нивелирования

§ 81. УРАВНЕНИЯ СПУТНИКОВОГО НИВЕЛИРОВАНИЯ

Рассмотрим уравнения, связывающие геоид, измеренную высоту ИСЗ над геоидом и его геоцентрическое положение.

Из рис. 72, применяя известную формулу, имеем

$$h^2 = r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \nu_0. \quad (81.1)$$

Как было выявлено ранее, угол ν_0 мал по величине, а для высот ИСЗ он составляет около $2'$. Погрешность его оценки в $0,001''$ приводит в вычислении косинуса угла к ошибке $0,3 \cdot 10^{-11}$.

Для удобства в последующих операциях формулу (81.1) представим в виде следующего уравнения:

$$\Phi = \frac{1}{2} (r^2 + r_0^2 - h^2) - rr_0 \cos \nu_0 = 0. \quad (81.2)$$

Вычислим частные производные функции Φ (81.2) по r и r_0 :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = r - r_0 \cos \nu_0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial r_0} = r_0 - r \cos \nu_0. \quad (81.3)$$

Пользуясь рис. 72 и формулами (81.3), находим

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = h \cos \nu; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial r_0} = -h \cos (\nu + \nu_0). \quad (81.4)$$

Частная производная функции Φ (81.2) по h равна

$$\frac{\partial \Phi}{\partial h} = -h. \quad (81.5)$$

Пусть измерена величина

$$h = h' + \Delta h + v, \quad (81.6)$$

где h' — результат измерения; Δh и v — поправки за систематическую и случайную ошибки измерения.

Известное значение геоцентрического расстояния r^0 спутника необходимо уточнить поправкой

$$\Delta r = dx_0 \cos \varphi \cos \lambda + dy_0 \cos \varphi \sin \lambda + dz_0 \sin \varphi \quad (81.7)$$

за несовпадение начала системы координат с центром масс Земли и поправкой

$$dr = \frac{\partial r}{\partial V} dV$$

за погрешность определения гравитационного поля Земли. Таким образом геоцентрический радиус спутникового радиовысотомера будет

$$r = r^0 + dx_0 \cos \varphi \cos \lambda + dy_0 \cos \varphi \sin \lambda + dz_0 \sin \varphi + \frac{\partial r}{\partial V} dV. \quad (81.9)$$

Геоцентрический радиус геоида представим суммой предвычисленного его значения r_0^0 и поправкой dr_0 , т. е.

$$r_0 = r_0^0 + dr_0, \quad (81.10)$$

где второй член $dr_0 = \frac{\partial r_0}{\partial V} dV$ представляет поправку за погрешность определения гравитационного поля Земли.

Полагая поправки Δh , v , dV , Δr , dr , dr_0 малыми по величине и учитывая формулы (81.4) — (81.10), функцию (81.2) запишем в линейной форме:

$$v = -\Delta h + (dx_0 \cos \varphi \cos \lambda + dy_0 \cos \varphi \sin \lambda + dz_0 \sin \varphi) \cos v_0 + \left[\frac{\partial r}{\partial V} \cos v_0 - \frac{\partial r_0}{\partial V} \cos (v + v_0) \right] dV + l, \quad (81.11)$$

где свободный член

$$l = h^0 - h'; \quad (81.12)$$

$$h^0 = (r^{0^2} + r^{0^2} - 2r^0 r_0^0 \cos v_0)^{1/2}. \quad (81.13)$$

Высота h^0 вычисляется по счислимым значениям геоцентрических расстояний спутникового радиовысотомера и подспутниковой точки геоида. При этом счислимые значения геоцентрических радиусов r^0 и r_0^0 соответствуют известному значению параметра V^0 гравитационного поля Земли.

§ 82. ВКЛАД СПУТНИКОВОГО НИВЕЛИРОВАНИЯ В РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ГЕОДЕЗИИ

Спутниковое нивелирование решает задачу нивелирования геоида и изучения топографии Мирового океана. Имея аномалию высот, представительную по всему земному шару, можно надежно решить задачу о внешнем гравитационном поле Земли и определить рельеф дна Мирового океана в единой системе отсчета высот. Повторные нивелировки дают обширную статистику изменения геоида во времени и данные для установления на каждую эпоху планетарной системы геодезических координат и для определения модели внешнего гравитационного поля Земли, ей соответствующей и адекватной геогравитационному полю. Геодезия впервые получает возможность оперативно выполнять нивелирование высот уровенной поверхности в планетарном масштабе и периодически уточнять параметры внешнего геогравитационного поля. В этом заключается основной вклад спутникового нивелирования в решение фундаментальных задач геодезии.

В уравнении спутникового нивелирования (81.2) искомыми параметрами являются координаты центра масс Земли или,

иначе говоря, составляющие радиуса-вектора Δr точки отсчета координат относительно центра масс Земли. Равномерно располагая районы нивелирования по всей планете, можно оценить вектор Δr с точностью порядка 0,1 м и затем следить за вековым движением центра масс Земли в ее теле.

Если известны вариации силы тяжести на гравиметрических пунктах, равномерно размещенных на поверхности Земли, то положение центра инерции Земли можно определить с точностью 0,03 м.

Зная параметры геоида, можно решить задачу определения параметров уровенного эллипсоида, наилучшим образом аппроксимирующего его в планетарном масштабе.

Указанная группа задач отчасти относится к планетарным задачам геодинамики.

Прецизионное спутниковое нивелирование позволяет изучить уровенные поверхности для отдельных районов и их временные изменения, необходимые для решения задач региональной геодинамики. При этом в сочетании с данными наземных и морских гравиметрических съемок местный геоид можно изучить детально по площадкам 1 км² с оценкой высот в пределах нескольких сантиметров, фильтруя морские волны атмосферного и приливного происхождения.

Из основного уравнения спутникового нивелирования (80.1) следует, что, сравнивая высоту ИСЗ, прогнозируемую по его элементам орбиты, и измеренное значение высоты ИСЗ, получаем обширный статистический материал для оценки и повышения точности прогноза движения ИСЗ и для эталонирования их орбит над акваториями Мирового океана, где практически отсутствуют наземные станции слежения за космическими объектами. Решение этой задачи особенно важно для навигационных и других ИСЗ специального назначения (космические съемки, исследование и охрана природы, тематическое картирование и другие задачи).

С помощью спутникового нивелирования решают задачу оперативного определения быстрых изменений кривизны и высот геоида, проявляющихся перед или в момент моретрясений (землетрясений), вулканических извержений и тайфунов или других метеоизменений регионального масштаба.

С привлечением материалов спутникового нивелирования можно надежно определить вековые изменения динамической фигуры Земли.

Решение указанных выше задач актуально как для планетарной геодезии, так и для геологии, геофизики, океанологии и других наук о Земле.

В заключение отметим, что формулы (81.9) (81.13) связывают те параметры, в определении которых большую информативность имеют данные спутникового нивелирования. По этому принципу в уравнениях спутникового нивелирования отсутствует поправка геоцентрического радиуса ИСЗ за погрешность уста-

новления начальных условий движения ИСЗ, которая может быть определена из обработки угловых, лазерных и доплеровских наблюдений ИСЗ с наземных обсерваторий совместно с данными спутникового нивелирования.

Глава 22.

СВЕТОЛОКАЦИЯ ЛУНЫ И РАДИОИНТЕРФЕРОМЕТРИЧЕСКИЕ НАБЛЮДЕНИЯ КОСМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

§ 83. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О СВЕТОЛОКАЦИИ ЛУНЫ

Светолокация космических объектов стала возможной после открытия оптических квантовых генераторов (ОКГ) благодаря работам, выполненным в Физическом институте АН СССР под руководством лауреатов Ленинской и Нобелевской премий академиков Н. Г. Басова и А. М. Прохорова. Под руководством Ю. Л. Кокурина в том же институте проводились работы по лазерной светолокации Луны. В Крымской астрофизической обсерватории АН СССР в 1963 г. впервые было получено отражение лазерного импульса от поверхности Луны, а в 1964 г. измерено расстояние до Луны с точностью около 200 м.

Лазерный пучок, проходя толщу земной атмосферы, расходится на 5—7" и образует на Луне пятно радиусом около 6 км. Рельеф этой освещенной площадки и сферичность Луны, обуславливая размытие отраженного лазерного сигнала во времени, ограничивают точность измерения расстояния до Луны. Повышение точности измерения расстояния можно достигнуть, локализуя точку наведения телескопа с помощью угловых отражателей. К настоящему времени на Луне установлены 5 угловых отражателей, доставленных туда советскими и американскими летательными аппаратами (табл. 9).

Луна, обращенная к Земле всегда одной и той же стороной, является удобным космическим объектом для лазерных наблюдений благодаря медленному изменению экваториальных коор-

Т а б л и ц а 9. Селенографические координаты лунных отражателей

Отражатель, дата доставки на Луну	Селенографические координаты	
	широта	долгота
«Луноход-1», 17.11.1970	—34°47'	+38°24'
«Луноход-2», 16.01.1973	+30 24	+26 07
«Аполлон-11», 21.07.1969	+23 27	+0 41
«Аполлон-14», 5.02.1971	—17 25	—3 36
«Аполлон-15», 31.07.1971	+3 40	+26 05

динат точек ее поверхности. С помощью лазерного телескопа, непрерывно отслеживая отражатель, удастся интегрировать сигналы целой серии импульсов, в пределах которой с высокой точностью учитываются изменения расстояния от телескопа до лунного отражателя. Скорость изменения расстояния телескоп — лунный отражатель составляет 100 м/с. Если временная привязка измерений выполняется с точностью 0,1 мс, то ошибка привязки составит 0,01 м. Однако когда решается задача совместной обработки наблюдений, накопленных на протяжении нескольких лет, стабильность часов, задающих шкалу времени, должна быть не хуже 10^{-13} . Такую стабильность могут обеспечивать атомные стандарты частоты.

Регулярные наблюдения лунных отражателей ведут Крымская астрофизическая обсерватория АН СССР, Макдональдская обсерватория в США и австралийская обсерватория Оррорал вблизи г. Канберра.

В настоящее время точность одного измерения расстояния до Луны составляет несколько дециметров. В перспективе ожидается, что, применяя лазеры с очень узким пучком и продолжительностью импульса 0,1 нс, можно измерять расстояния до Луны с точностью 0,03 м.

§ 84. УРАВНЕНИЯ СИСТЕМЫ ЗЕМЛЯ — ЛУНА

Для изучения принципа использования измеренных расстояний от наземной обсерватории до лунного отражателя обратимся к рис. 73 и 74, представляющим геометрию системы Земля — Луна. На этих рисунках приняты следующие обозначения: Q — обсерватория, лоцирующая лунный отражатель S^* на момент гринвичского звездного времени S ; O и ζ — центры масс Земли и Луны; P и P_ζ — северные полюсы Земли и Луны; Υ и G_e — точки весеннего равноденствия и отсчета геоцентрической долготы; R , φ , λ — геоцентрические радиус, широта и долгота обсерватории; $r(r_\zeta)$, $\alpha(\alpha_\zeta)$, $\delta(\delta_\zeta)$ — геоцентрические радиус, прямое восхождение и склонение лунного отражателя (центра масс Луны); R_0 , b_0 , l_0 — селеноцентрические радиус, широта и долгота лунного отражателя; D и Z — расстояния обсерватории от оси вращения и экватора Земли; δ_0 и ξ_0 — расстояния отражателя от оси вращения и экватора Луны; b , l — селеноцентрические широта и долгота Земли или либрация Луны по широте и долготе; ρ — топоцентрическое расстояние от обсерватории до лунного отражателя.

На основании рис. 73 и принятых обозначений имеем

$$\rho^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos \psi. \quad (84.1)$$

Для косинуса угла между векторами

$$\mathbf{R} = D \cos(S + \lambda) \mathbf{i} + D \sin(S + \lambda) \mathbf{j} + Z \mathbf{k},$$

$$\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k},$$

где x, y, z — геоцентрические координаты отражателя, запишем формулу

$$\cos \psi = [Dx \cos (S + \lambda) + Dy \sin (S + \lambda) + Zz].$$

Подставив значение $\cos \psi$ в формулу (84.1), получим

$$\rho = \sqrt{R^2 + r^2 - 2(Dx \cos s + Dy \sin s + Zz)}, \quad (84.2)$$

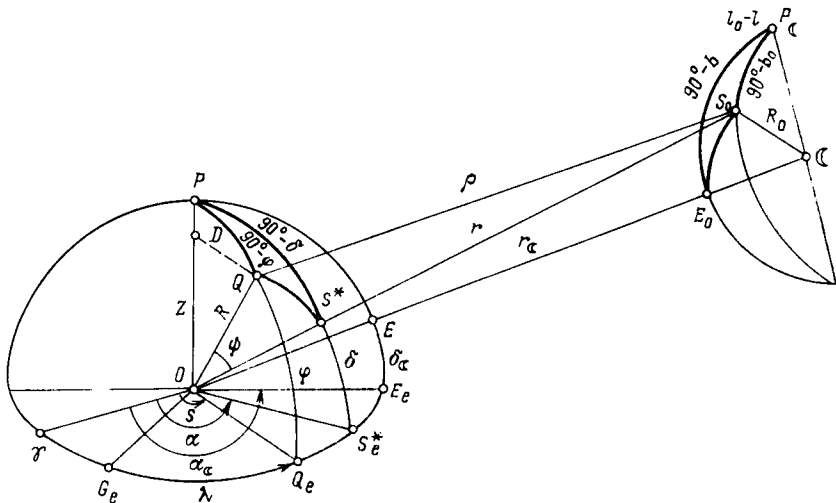


Рис. 73. Система Земля — Луна

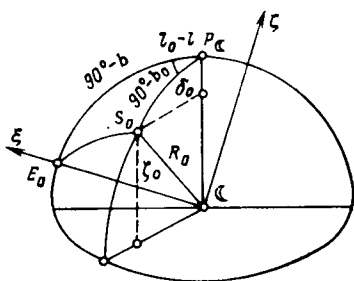


Рис. 74. Селеноцентрические координаты

где $R^2 = D^2 + Z^2$, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, $s = S + \lambda$.

Теперь геоцентрические координаты x, y, z лунного отражателя представим через параметры системы Земля—Луна и селеноцентрические координаты отражателя.

Селеноцентрические прямолинейные ξ, η, ζ и цилиндрические δ_0, ζ_0, l_0 координаты отражателя связаны следующим образом:

$$\begin{aligned}\xi &= \xi_0 \sin b + \delta_0 \cos b \cos(l_0 - l), \\ \eta &= \delta_0 \sin(l_0 - l), \\ \zeta &= \xi_0 \cos b - \delta_0 \sin b \cos(l_0 - l).\end{aligned}\tag{84.3}$$

Исключив в формуле (84.3) $\delta_0 = R_0 \cos b_0$, $\zeta_0 = R_0 \sin b_0$, получим

$$\begin{aligned}\xi &= R_0 [\sin b_0 \sin b + \cos b_0 \cos b \cos (l_0 - l)], \\ \eta &= R_0 \cos b_0 \sin (l_0 - l), \\ \zeta &= R_0 [\sin b_0 \cos b - \cos b_0 \sin b \cos (l_0 - l)].\end{aligned}\quad (84.4)$$

Если перенесем начало координат в центр масс Луны (x_{ζ} , y_{ζ} , z_{ζ}) и повернем оси координат на угол δ_{ζ} вокруг оси η и на угол α_{ζ} вокруг оси, параллельной оси z , то получим

$$\begin{bmatrix} x - x_{\zeta} \\ y - y_{\zeta} \\ z - z_{\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \delta_{\zeta} \cos \alpha_{\zeta} & -\sin \alpha_{\zeta} & \sin \delta_{\zeta} \cos \alpha_{\zeta} \\ \cos \delta_{\zeta} \sin \alpha_{\zeta} & \cos \alpha_{\zeta} & \sin \delta_{\zeta} \sin \alpha_{\zeta} \\ -\sin \delta_{\zeta} & 0 & \cos \delta_{\zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix}, \quad (84.5)$$

где

$$\begin{aligned}x_{\zeta} &= r_{\zeta} \cos \delta_{\zeta} \cos \alpha_{\zeta}, \\ y_{\zeta} &= r_{\zeta} \cos \delta_{\zeta} \sin \alpha_{\zeta}, \\ z_{\zeta} &= r_{\zeta} \sin \delta_{\zeta}.\end{aligned}$$

Таким образом, геоцентрические координаты x , y , z лунного отражателя в формуле (84.2) с помощью полученных соотношений (84.4) и (84.5) представлены через параметры r_{ζ} , α_{ζ} , δ_{ζ} , b , l системы Земля—Луна и селеноцентрические координаты R_0 , b_0 , l_0 лунного отражателя.

§ 85. ПРИНЦИПЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ СВЕТОЛОКАЦИИ ЛУНЫ

Обозначим правую часть формулы (84.2) через $\bar{\rho}$ (s , D , Z , r_{ζ} , α_{ζ} , δ_{ζ} , b , l , R_0 , b_0 , l_0) как функцию времени $s = S + \lambda$, геоцентрических координат D , Z обсерватории, параметров r_{ζ} , α_{ζ} , δ_{ζ} , b , l системы Земля—Луна, селеноцентрических координат R_0 , b_0 , l_0 лунного отражателя и запишем ее в виде нелинейной функции

$$\Phi = \bar{\rho} - \rho = 0. \quad (85.1)$$

Разложим эту функцию в ряд Тейлора. Пользуясь тем, что аргументы ее известны или могут быть вычислены с малыми ошибками, ограничимся линейными разложениями и запишем формулу (85.1) в виде уравнения поправок

$$\begin{aligned}v &= -\Delta \rho + \frac{\partial \Phi}{\partial s} \Delta s + \frac{\partial \Phi}{\partial D} \Delta D + \frac{\partial \Phi}{\partial Z} \Delta Z + \frac{\partial \Phi}{\partial r_{\zeta}} \Delta r_{\zeta} + \\ &+ \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_{\zeta}} \Delta \alpha_{\zeta} + \frac{\partial \Phi}{\partial \delta_{\zeta}} \Delta \delta_{\zeta} + \frac{\partial \Phi}{\partial b} \Delta b + \frac{\partial \Phi}{\partial l} \Delta l + \\ &+ \frac{\partial \Phi}{\partial R_0} \Delta R_0 + \frac{\partial \Phi}{\partial b_0} \Delta b_0 + \frac{\partial \Phi}{\partial l_0} \Delta l_0 + \bar{\rho}^0 - \rho',\end{aligned}\quad (85.2)$$

где ρ' , $\Delta\rho$, v — результаты измерения топоцентрического расстояния и поправки за систематическую и случайную ошибки его измерения; $\bar{\rho}^0$ — вычисленное значение топоцентрического расстояния по счислимым значениям аргументов s^0 , D^0 , Z^0 , r_{ζ}^0 , α_{ζ}^0 , δ_{ζ}^0 , b_0^0 , l_0^0 , R_0^0 , b^0 , l^0 ; Δs , ΔD , ΔZ , Δr_{ζ} , $\Delta\alpha_{\zeta}$, $\Delta\delta_{\zeta}$, Δb , Δl , ΔR_0 , Δb_0 , Δl_0 — поправки соответствующих аргументов. Заметим, что поправка времени Δs складывается из поправки гринвичского времени и поправки долготы обсерватории. Как видно из формулы (85.2), поправка долготы обсерватории не разделяется, и поэтому можно определить разность долгот двух обсерваторий, синхронно или квазисинхронно лоцирующих лунный отражатель.

Составляя уравнение поправок (85.2) для каждого измерения топоцентрического расстояния ρ_i ($i=1, 2, \dots, n$), получим неопределенную и несовместную систему n линейных уравнений, которую можно решить методом наименьших квадратов, и найдем поправки к результатам измерений и счислимым значениям аргументов. При этом, конечно, поправку за систематическую ошибку будем полагать пренебрегаемо малой величиной или постоянной для большой группы измерений.

В общей постановке можно совместно искать все параметры. Однако полезно их определить групповыми приближениями. На первом этапе, полагая известными геоцентрические координаты обсерватории, по наблюдениям отражателей, определенным образом размещенных на Луне, уточняются геоцентрические координаты и либрация Луны, а также селеноцентрические координаты отражателей. На втором этапе уточняют геоцентрические координаты обсерваторий, используя дифференциальные и периодические изменения координат отражателей и сведя к минимуму влияние ошибок их определения.

В формуле (84.2), заменив прямоугольные координаты отражателя через его сферические координаты

$$x = r \cos \delta \cos \alpha,$$

$$y = r \cos \delta \sin \alpha,$$

$$z = r \sin \delta,$$

после несложных преобразований получим

$$\rho = \sqrt{r^2 + D^2 + Z^2 - 2r[Z \sin \delta + D \cos \delta \cos(\alpha - s)]}. \quad (85.3)$$

На малых интервалах времени в приращениях расстояния можно выделить периодическую составляющую

$$\Delta \rho_{\omega} = - \frac{r}{\rho} D \cos \delta \sin(\alpha - s) \Delta s, \quad (85.4)$$

обусловленную суточным вращением Земли, амплитуда и фаза которой соответствуют радиусу суточной параллели и долготе обсерватории.

Требования к точности определения геоцентрического радиуса отражателя невелики, поскольку

$$(m_D)_r = \frac{D}{r} m_r. \quad (85.5)$$

Ошибку прямого восхождения можно считать постоянной, и, наблюдая отражатель симметрично относительно меридиана, ее влияние можно свести до минимума. Момент звездного времени, когда изменение в расстоянии ρ , обусловленное суточным вращением Земли, равно нулю, соответствует кульминации отражателя.

Ошибку склонения также можно считать постоянной. Влияние ее на вывод радиуса суточной параллели обсерватории будет носить систематический характер с периодом, равным периоду обращения Луны, и оно может быть исключено методически по месячному ряду наблюдений.

Выяснено, что ошибка определения радиуса суточной параллели обсерватории приблизительно равна удвоенной ошибке измерения топоцентрического расстояния отражателя. Ожидается, что точность измерения топоцентрического расстояния составит 0,05 м. В этом случае точность определения радиуса суточной параллели обсерватории будет около 0,1 м.

При вычислении разности долгот $\Delta\lambda$ обсерватории по наблюдениям кульминации отражателей ошибки систематического характера исключаются, и поэтому разность долгот обсерваторий можно определить с точностью 0,07 м.

Синхронно лоцируя Луну с двух обсерваторий, можно определить разность их расстояний от экватора ($\Delta Z = Z_2 - Z_1$) с такой же точностью, с какой установлены радиусы их суточных параллелей.

§ 86. ДЛИННОБАЗИСНАЯ РАДИОИНТЕРФЕРОМЕТРИЯ

Принцип использования радиоинтерферометрических наблюдений далеких радиисточников (квazarов) заключается в следующем. Сигналы от квазара σ (рис. 75) на антенны радиотелескопов Q_1 и Q_2 , разнесенных на большое расстояние, поступают не одновременно, а с некоторым относительным временным запаздыванием τ , обусловленным разностью расстояний от базисных пунктов Q_1 и Q_2 длиннобазисной радиоинтерферометрии (ДБРИ) до квазара. Причем эта разность будет меняться со временем от изменения угла ϕ между базой ДБРИ и направлением на квазар, вызванного суточным вращением Земли. Наблюдения квазара синхронизируются либо с помощью перевозимых часов, либо по сигналам Службы единого времени, шкала которой задается с помощью стандарта частоты. Обычно в каждом пункте базы, составляющей несколько тысяч километров, имеются свои стандарты частоты, обеспечивающие эталониро-

вание местных атомных часов. С помощью гетеродинов высокочастотное излучение, принимаемое от квазара, понижается до видеочастоты, усиливается и записывается на магнитофонную ленту вместе с определенными отметками времени местных атомных часов. Эти магнитофонные записи транспортируются в пункт обработки, где они сопоставляются и совместно обрабатываются.

Пусть $a = c\tau$ — разность расстояний от базисных пунктов Q_1 и Q_2 до квазара σ , c — скорость распространения электромагнитных волн, τ — относительное временное запаздывание радиосигнала, поступающего от квазара на пункты Q_1 и Q_2 .

Углы δ и θ — склонение и гринвичский часовой угол квазара.

Используем векторы:

$$\mathbf{a} = a(\cos \delta \cos \theta \mathbf{i} + \cos \delta \sin \theta \mathbf{j} + \sin \delta \mathbf{k}),$$

$$\mathbf{b} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k},$$

где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — единичные орты ортогональной топоцентрической экваториальной системы координат Q_1XYZ .

Очевидно, топоцентрические координаты $X = X_2 - X_1$, $Y = Y_2 - Y_1$, $Z = Z_2 - Z_1$ представляют разность геоцентрических экваториальных координат обсерваторий Q_1 и Q_2 .

Скалярное произведение этих векторов

$$\mathbf{a}\mathbf{b} = a(X \cos \delta \cos \theta + Y \cos \delta \sin \theta + Z \sin \delta) = ab \cos \varphi = a^2.$$

Отсюда уравнение связи измеренной величины τ , топоцентрических экваториальных координат XYZ обсерватории Q_2 , склонения δ и гринвичского часового угла θ квазара σ имеет вид

$$c\tau = X \cos \delta \cos \theta + Y \cos \delta \sin \theta + Z \sin \delta. \quad (86.1)$$

Часовой угол квазара θ вычисляют как разность прямого восхождения α и гринвичского звездного времени S момента наблюдения квазара.

Производная $c\tau$ по времени

$$c\dot{\tau} = (-X \cos \delta \sin \theta + Y \cos \delta \cos \theta) \omega_\Phi, \quad (86.2)$$

обусловленная суточным вращением Земли с угловой скоростью ω_Φ , представляет второе уравнение базы.

Поскольку экваториальные координаты квазара α , δ постоянны, а шкала атомных часов в высшей степени равномерна, то, изучая в течение одних или нескольких суток отклонения функ-

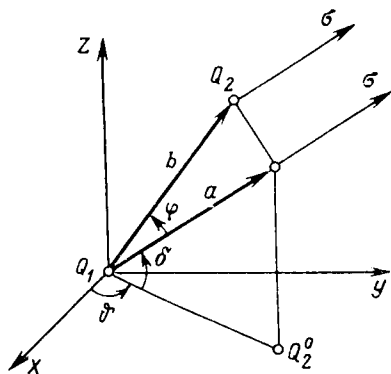


Рис. 75. Геометрия длиннобазисной радиоинтерферометрии

ции σ (86.2) от периодической функции, можно определить неравномерность вращения Земли.

Измеряемую величину τ представим суммой трех величин: τ' — результат измерения, $\Delta\tau$ — поправка за несинхронность часов и ошибку представления модели ионосферы и атмосферы на концах базы, v — поправка за случайную ошибку измерения временного запаздывания.

Влияние погрешности модели атмосферы и ионосферы можно ослабить путем наблюдения квазаров на различных диапазонах частот, а также зондированием атмосферы в районах обсерваторий Q_1 и Q_2 . Выяснено, что эффект ионосферы и атмосферы на оценку σ можно учесть с точностью порядка 0,1 м.

Наблюдения для учета влияния являются весьма важной и ответственной задачей при геодезическом использовании ДБРИ. В значительной степени точность учета атмосферы отдельно над каждой обсерваторией будет решающим фактором в улучшении предельных возможностей решения геодезических задач с помощью ДБРИ.

Формулу (86.1) представим в виде уравнения поправок

$$v = -\Delta\tau + \frac{\cos \delta \cos \vartheta}{c} (\delta X_2 - \delta X_1) + \frac{\cos \delta \sin \vartheta}{c} (\delta Y_2 - \delta Y_1) + \\ + \frac{\sin \delta}{c} (\delta Z_2 - \delta Z_1) + l. \quad (86.3)$$

Свободный член вычисляют по формуле

$$l = \frac{1}{c} [(X_2^0 - X_1^0) \cos \delta \cos \vartheta + (Y_2^0 - Y_1^0) \cos \delta \sin \vartheta + \\ + (Z_2^0 - Z_1^0) \sin \delta] - \tau'.$$

В этой формуле через δX , δY , δZ обозначены поправки к предварительным значениям геоцентрических экваториальных координат X^0 , Y^0 , Z^0 обсерваторий.

Постоянные наблюдения из нескольких обсерваторий за квазарами дают большую систему уравнений (86.1) — (86.3), решая которые можно определить искомые параметры.

С помощью формулы (86.1) можно решить задачу определения экваториальных координат квазаров. Ожидается, что при длинах баз РИ в несколько тысяч километров и использовании стандарта частоты стабильности порядка 10^{-13} можно составить каталог прямых восхождений и склонений квазаров, внутреннее согласие которых будет лежать в пределах тысячных долей угловых секунд. Такой каталог, к которому можно будет привязать звездные каталоги, может служить основой для построения высокоточной системы геодезических координат. Конечно, для облегчения понимания сущности длиннобазисной радиоинтерферометрии мы пользовались простейшей моделью явления. В дей-

ствительности принимаемый в момент t обсерваторией Q_1 фронт волны радиоизлучения от квазара достигнет обсерваторию Q_2 в момент t_1 , когда база Q_1Q_2 займет другое положение $Q_1'Q_2'$ в пространстве из-за суточного вращения и орбитального движения Земли. Что касается координат системы XYZ , то она за сеансы наблюдения тоже изменит свое положение из-за прецессии и нутации в пространстве и колебания оси вращения Земли в ее теле. Таким образом, возникает задача редукции измерений с учетом указанных выше геодинамических факторов. Так, например, поправка за суточное вращение может составить около 30, а за орбитальное движение — около 2000 нс.

В уравнении (86.3) поправки обсерватории можно представить в топоцентрической горизонтной системе [13], [14]

$$v = -\Delta\tau - \frac{1}{c} (b_{31}^1 \delta X_1^1 + b_{32}^1 \delta Y_1^1 + b_{33}^1 \delta H_1) + \\ + \frac{1}{c} (b_{31}^2 \delta X_2' + b_{32}^2 \delta Y_2' + b_{33}^2 \delta H_2) + l, \quad (86.4)$$

где

$$b_{31}^i = \sin \delta \cos B_i - \cos \delta \sin B_i \cos (L_i - \vartheta), \\ b_{32}^i = -\cos \delta \sin (L_i - \vartheta), \\ b_{33}^i = \sin \delta \sin B_i + \cos \delta \cos B_i \cos (L_i - \vartheta), \quad (i = 1, 2). \quad (86.5)$$

Поправки в топоцентрической горизонтной системе могут быть заменены поправками широт и долгот обсерваторий по формулам

$$\delta X_i' = (M_i + H_i) \delta B_i, \\ \delta Y_i' = (N_i + H_i) \cos B_i \delta L_i, \quad (86.6)$$

где M_i , N_i — радиусы кривизны сечения меридиана и первого вертикала земного эллипсоида.

Формулы (86.4) и (86.5) полезны как для уравнительных вычислений, так и для оптимизации наблюдений квазаров под условием равенства составляющих ошибок положения обсерваторий по осям топоцентрических горизонтных координат.

§ 87. ОСОБЫЕ СЛУЧАИ РАДИОИНТЕРФЕРОМЕТРИЧЕСКИХ НАБЛЮДЕНИЙ КОСМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

Радиоинтерферометрия ИСЗ. Если радиоисточник поместить в спутник, то, во-первых, уменьшается длина базы Q_1Q_2 ; во-вторых, из-за близости к Земле радиомаяка σ направления $Q_1\sigma$ и $Q_2\sigma$ будут не параллельны между собой; в-третьих, спутниковый радиомаяк, обращающийся вокруг Земли, обладает переменным собственным движением. Поэтому в отличие от квазарной радиоинтерферометрии в спутниковой радиоинтерферометрии тре-

буется выполнить сложные редуccionные вычисления и необходимо знать теорию движения ИСЗ.

Если на короткой дуге накоплен большой объем измерительной информации, то можно достаточно полно исключить влияние ошибок элементов орбиты ИСЗ на оценку параметров базы наблюдения.

Имея несколько баз радиоинтерферометрии, пространственные положения которых известны, можно эталонировать орбиту ИСЗ, несущего на себе радиомаяк. В то же время радиомаяк с известными элементами орбиты можно использовать как транслятор для определения пространственных положений новых баз спутниковой радиоинтерферометрии. Таким образом, можно построить сеть хорд, пространственные положения которых будут определены в единой системе отсчета.

Квазарная радиоинтерферометрия с базой Земля—спутник. В этом случае радиоинтерферометрические наблюдения доставляют условные уравнения, дополняющие уравнения движения спутника в поле тяготения Земли.

Особый интерес представляет случай, когда одна обсерватория является наземной, а другая — лунной. При этом возможно уточнение параметров системы Земля—Луна в инерциальной системе отсчета, закрепляемой каталогами координат квазаров. Этот проект позволяет решить задачу определения положения центра масс системы Земля—Луна относительно центра масс Земли на каждый момент и ориентировку хорды, соединяющей эти два центра, в инерциальной системе отсчета.

Глава 23.

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ГЕОДИНАМИКИ

§ 88. ГЕОДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ В ГЕОДЕЗИИ

Задачи геодинамики. Гео динамика — научная дисциплина о динамических процессах, происходящих в системе «планета Земля», и о силовых полях, обуславливающих эти процессы. Основная теоретическая задача геодинамики состоит в том, чтобы, зная силовые поля, определить характер динамических процессов, происходящих под их воздействием, в теле, литосфере и атмосфере Земли. Гео динамика, изучая динамику Земли, отчасти решает задачу определения характера силовых полей и изменений их во времени.

Исходным материалом для изучения динамики Земли служат данные о фигуре (физической, гравитационной и динамической), внутреннем строении, литосфере, гидросфере и атмосфере Земли, солнечно-земные и лунно-земные связи, гео гравитационное, гео магнитное, геотермическое и другие геофизические силовые поля, суточное вращение и годовое движение Земли.

Для решения гео динамических задач требуется единая си-

стема отсчета — система геодезических координат и отсчета времени.

Геодинамика как самостоятельная научная дисциплина развивается на стыке астрометрии, геодезии, геологии, геофизики, океанологии и других наук о Земле.

В настоящее время совершенно ясно, что твердая, водная и воздушная оболочки Земли и Космос должны рассматриваться как единая динамическая система Земля—Космос, непрерывно изменяющаяся во времени. Наиболее стабильная часть этой системы — твердая оболочка Земли — тоже заметно меняет во времени свою форму, в особенности на дне Мирового океана.

Динамическая система Земля — Космос.

Все планеты имеют фигуры, близкие по форме к шару. Характеристики планет приведены в табл. 10. Между орбитами Марса и Юпитера открыто около двух тысяч малых планет, имеющих неправильные формы, размеры которых колеблются от нескольких сотен до 1 км и меньше.

Т а б л и ц а 10. Планетные характеристики

Планета	Радиус экватора, км	Масса, 10^{27} г	Средний радиус орбиты, 10^7 км	Период обращения, сутки
	Полярное сжатие	Средняя плотность, г/см ³	Эксцентриситет орбиты	
Меркурий	2432	33,126	57,91	87,869
	0,0000	5,52	0,20562	
Венера	6052	486,844	108,21	224,7000
	0,0000	5,22	0,00680	
Земля	6378	597,333	149,60	365,257
	0,0034	5,52	0,01673	
Марс	3408	64,184	227,94	686,980
	0,0052	3,97	0,09336	
Юпитер	70850	18 982,36	778,34	4 332,587
	0,0607	1,30	0,04842	
Сатурн	60 000	56 855,66	1427,2	10 759,21
	0,1092	0,68	0,05572	
Уран	25 400	8723,11	2869,3	30 685
	0,028	1,32	0,04718	
Нептун	24 300	10 291,68	4498,5	60 188
	0,020	1,84	0,00857	
Плутон	3000	66,0	5900	90 700
	Не известно	5,5	0,24864	

Земля среди больших планет Солнечной системы — пятая по размеру и массе, третья по расстоянию от Солнца планета. Среди планет земной группы, в которую входят Меркурий, Венера, Земля и Марс, она является самой крупной. Масса Земли составляет 1/447 массы больших планет и 1/332 958 массы Солнца.

Естественный спутник Земли — Луна имеет массу, равную 1/81,3022 массы Земли. Отношение массы Луны к массе Земли наибольшее среди всех планет и их спутников в Солнечной системе, поэтому систему Земля—Луна в космической геодезии часто приходится рассматривать как двойную планету.

Земля обращается вокруг Солнца по эллиптической орбите со средней скоростью 29,765 км/с. Орбитальная скорость Земли колеблется от 29,27 км/с — в афелии на расстоянии 152 083 000 км от Солнца до 30,27 км/с — в перигелии на расстоянии 147 117 000 км от Солнца.

Притяжения Луны, Солнца и планет вызывают длительные периодические изменения эксцентриситета орбиты и наклона плоскости экватора Земли. В современную эпоху угол между плоскостью экватора и эклипстикой составляет 23°26,5'.

Площадь Земли равна 510 млн. км², объем 1083 млрд. км³. Из общей площади земной поверхности на долю океанов приходится 361 млн. км² (70,8 %), а суша занимает всего 149 млн. км² (29,2 %). Размеры материков и океанов приведены в табл. 11, 12. Наибольший размах рельефа земной поверхности составляет 19,9 км. Средняя высота материков равна 840 м. На суше преобладают высоты менее 1000 м (75 % площади).

Облик Земли в главных чертах определяет Мировой океан. Воды океана покрывают слоем толщиной около 4000 м ³/₄ поверхности твердой оболочки Земли.

Тихий океан, покрывая 35 % поверхности Земли в северном и южном полушариях, образует меридиональную асимметрию фигуры Земли.

Планетарный рельеф дна Мирового океана характеризуется котлованами его ложа, глобальной системой срединных океанических хребтов, разломами и глубоководными желобами. Площадь ложа Мирового океана равна 283,7 млн. км², а его средняя глубина около 4000 м.

Система срединных океанических хребтов и поднятий делит ложе каждого океана на две (Тихий, Атлантический, Северный Ледовитый) или три (Индийский) чаши. Кроме того, крупные поднятия, вулканические хребты, островные дуги и цепи подводных гор делят ложе океанов на ряд более или менее изолированных котловин. В пределах Мирового океана насчитывается более 50 таких котловин.

Срединные океанические хребты представляют единую цепь линейных поднятий дна океана общей протяженностью свыше 60 тыс. км и являются наиболее значительными горными сооружениями не только океанического дна, но и планеты в целом.

Их относительная высота на некоторых участках достигает 3—4 км, ширина 1000—2000 км.

В целом можно заключить, что рельеф планеты в основном определяется планетарным рельефом Мирового океана. Динамику фигуры Земли в планетарном масштабе в основном определяют процессы, обуславливающие изменения рельефа Мирового океана.

Т а б л и ц а 11. Размеры материков

Материки	Площадь, млн. км ²	Высота. м	
		наибольшая	наименьшая
Евразия	54,00	8848	—392
Африка	30,13	5895	—150
Северная Америка	24,23	6193	—85
Южная Америка	17,76	6960	—40
Австралия и Океания	8,97	5029	—12
Антарктида	13,98	5140	0

Т а б л и ц а 12. Размеры океанов

Океаны	Площадь, млн. км ²	Глубина. м		
		преобладающая	наибольшая	средняя
Тихий	179,68	3500—6000	11 022	3950
Атлантический	92,54	3400—5300	8 428	3750
Индийский	74,90	2000—4500	7 450	3870
Северный Ледовитый	13,92	1000—4000	5 449	1330
Мировой	361,04	3000—6000	11 022	3720

В общем очертании Земли отметим ее экваториальную асимметрию. Так, две трети всей суши Земли находится в северном полушарии и лишь треть ее расположена в южном. Большая часть островных дуг, океанических хребтов и глубоководных впадин расположена к северу от экватора. На южном полюсе Земли расположен самый высокий континент планеты — Антарктида, тогда как на ее северном полюсе простирается Северный Ледовитый океан. При этом площадь Антарктиды равна площади Северного Ледовитого океана.

Фигура и внешнее гравитационное поле Земли. Физическая фигура Земли ограничена поверхностью материков, морей и океанов. В настоящее время объектом изучения является и физическая фигура твердой оболочки Земли — поверхность суши, дна морей и Мирового океана. Физическая фигура Земли имеет сложную форму. Поэтому фигуру Земли, тем более ее твердую

оболочку, в деталях можно описать, только разделив ее поверхность на отдельные элементарные площади. В первом приближении рельеф поверхности Земли в планетарном масштабе можно представить, применяя аппарат сферических функций. Более точно рельеф твердой Земли можно описать в цифровой форме, присваивая i -й площадке значение ее высоты H_i над отсчетной поверхностью. В общем случае i -ю площадку можно маркировать пространственными координатами X_i, Y_i, Z_i . Размеры каждой элементарной площадки зависят от характера рельефа и точности представления фигуры Земли. Если мы представляем поверхность Земли равновеликими площадками в один гектар, то придется иметь дело с 51 млрд. элементарных площадок.

Для решения теоретических и прикладных геодинамических задач, а также для изучения фигуры Земли применим фигуры сравнения — эллипсоид вращения, трехосный эллипсоид и геоид. Когда возникает необходимость изучения Земли как планеты, то фигура сравнения, наряду с геометрическими характеристиками, должна обладать гравитационными параметрами (массой, угловой скоростью вращения, потенциалом притяжения, потенциалом силы тяжести и т. п.), равными или близкими по величине соответствующим параметрам Земли.

Фигуру сравнения (геоид, двухосный или трехосный эллипсоид), обладающую гравитационными параметрами Земли и задающую уровенную поверхность, назовем гравитационной фигурой Земли.

Планетарные динамические свойства Земли, зависящие от распределения масс в ее теле, можно изучать наглядно, введя образ трехосного эллипсоида инерции. Квадраты полуосей a_0, b_0, c_0 этого эллипсоида — величины, обратные значениям главных центральных моментов инерции Земли A_0, B_0, C_0 относительно этих же осей. Для определенности примем $A_0 < B_0 < C_0$.

Трехосный эллипсоид, представляющий главные центральные моменты инерции Земли, назовем динамической фигурой Земли.

Использование искусственных спутников Земли и других космических объектов, астрономо-геодезических и гравиметрических материалов существенно продвинуло вперед решение проблемы о фигуре Земли и ее внешнем гравитационном поле. В последние 10 лет основные параметры фигуры и внешнего гравитационного потенциала Земли определены так надежно, что теперь речь идет об оценке их изменений во времени и о строгом согласовании всех фундаментальных постоянных Земли.

XVII Генеральная Ассамблея Международного союза геодезии и геофизики (МСГГ), которая состоялась в декабре 1979 г. в Канберре, рекомендует: размеры двухосного эллипсоида $a = 6378\,137$ м, $\alpha = 1:298,257$; скорость света в вакууме $c = 299\,792\,458 \pm 1,2$ м/с; угловая скорость вращения Земли $\omega \oplus = 0,7292115 \cdot 10^{-4}$ рад/с.

Последние определения геоцентрической гравитационной постоянной fM ($\text{км}^3 \cdot \text{с}^{-2}$), включая атмосферу, приведены ниже:

По наблюдениям космических аппаратов:

Маринер 9	398 600,55 ± 0,2
Маринер 10	45 ± 0,2
Викинг 1	50 ± 0,1
Викинг 2	65 ± 0,2
Вояжер 1	57 ± 0,1
Вояжер 2	52 ± 0,1

По лазерной локации Луны

То же	49 ± 0,1
»	46 ± 0,03
»	51 ± 0,03
»	46 ± 0,03

По наблюдениям «спутник — спутник»

ATS-6—GEOS-3	35 ± 0,15
Уравненное значение	398 600,48 ± 0,03

XVII Генеральная Ассамблея МСГГ рекомендует значение $fM = 398\,600,50 \text{ км}^3 \cdot \text{с}^{-2}$ и для атмосферы $fM_A = 0,35 \pm \pm 0,03 \text{ км}^3 \cdot \text{с}^{-2}$. Таким образом, отношение массы атмосферы к массе Земли составляет $fM_A/fM = 0,878072 \cdot 10^{-6}$.

В 1970 г. М. Бурша вывел параметры трехосного эллипсоида:

Средний экваториальный радиус a_e	6 378 139 м
Среднее полярное сжатие α_p	1 : 298,257
Максимальное полярное сжатие $\alpha_p^{\max}$	1 : 297,787
Экваториальное сжатие α_e	1 : 90 000
Долгота наибольшего меридиана λ_0	14,8° з. д.

Современные гравитационные модели Земли дают надежную оценку параметров динамической фигуры Земли [13]:

$$A_0 = 8,01602055298 \cdot 10^{44} \text{ г} \cdot \text{см}^2;$$

$$B_0 = 8,01619595712 \cdot 10^{44} \text{ г} \cdot \text{см}^2;$$

$$C_0 = 8,04242790440 \cdot 10^{44} \text{ г} \cdot \text{см}^2;$$

$$\alpha_p = 0,0016376320;$$

$$\alpha_e = 0,0000109407;$$

$$\lambda_0 = 14,9^\circ \text{ з. д.}$$

Точность и представительность моделей внешнего гравитационного поля в последние годы резко возросли благодаря массовым спутниковым наблюдениям и в первую очередь применению спутникового нивелирования.

В разложении гравитационного потенциала

$$V = \frac{fM}{r} \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a_e}{r} \right)^n (I_{nm} \cos m\lambda + K_{nm} \sin m\lambda) P_{nm} \sin \varphi \right],$$

где r , φ , λ — геоцентрические координаты; fM и a_e — геоцентрическая гравитационная постоянная и экваториальный радиус Земли; $P_{nm}(\sin \varphi)$ — сферическая функция степени n и порядка m ; I_{nm} , K_{nm} — гармонические коэффициенты, надежно определены гармоники до 25-й степени.

Гармонические коэффициенты наиболее представительной геогравитационной модели GEM-10 и изолинии высот геоида над земным эллипсоидом ($a_e = 6\,378\,139 \text{ м}$, $\alpha = 1:298,257$) при-

ведены в обозрении [14]. Высоты геоида в планетарном масштабе не коррелированы с рельефом, а отражают неоднородности масс на больших глубинах земных недр. Большая часть Азии и Антарктиды характеризуется отрицательными высотами, тогда как Атлантический океан имеет положительные высоты.

Динамика Земли. Современная наука разделяет литосферу Земли, включая земную кору и субстрат, на шесть крупных плит: Евразийскую, Американскую, Африканскую, Тихоокеанскую, Индийскую и Антарктическую. Взаимные подвижки литосферных плит вызывают землетрясения, четко оконтуривающие их границы. Изучая траекторию движения землетрясений (моретрясений), внутри каждой крупной плиты можно выделить ряд крупных микроплит. Границам плит в океанах соответствуют рифтовые зоны срединных океанических хребтов, на континентах — системы континентальных рифтов, например, в Восточной Африке. На рис. 76 показано взаимное расположение плит: 1 — Евразийская, 2 — Североамериканская, 3 — Африканская, 4 — Тихоокеанская, 5 — Индийская, 6 — Антарктическая, 7 — Южноамериканская.

Изучение срединных океанических хребтов показало, что рифтовые долины разорваны отдельные участки трансформными разломами, направленными перпендикулярно к рифтовым долинам (рис. 77). Как правило, этим участкам разломов сопутствуют моретрясения, приводящие к сдвиговым деформациям. Обычно смещения по трансформным разломам не превышают несколько десятков километров, но в некоторых районах встречаются значительные смещения. Так, например, в районе действующего трансформного разлома Сан-Андреас в Калифорнии, протянувшегося по западному побережью Северной Америки почти на 1000 км, смещение составляет 500 км. На дне Тихого океана вдоль некоторых разломов, сейчас не действующих, смещения осей рифтовых долин превышают 1000 км. В рифтовых долинах происходят слабые моретрясения, приводящие к разрывам литосферы.

Мощность земной коры под океаном меняется от 7—10 км, под гребнями срединных океанических хребтов до 80—90 км под наиболее древними участками дна океана [13]. Мощность континентальной литосферы, видимо, изменяется под молодыми платформами от 150—200 км, под древними щитами до 250—400 км.

Планетарные движения литосферных плит происходят за счет их потенциальной энергии и наличия аномальной мантии под срединно-океаническими хребтами и на активных окраинах континентов. Литосферные плиты дрейфуют относительно очагов аномальной мантии. Появление новых очагов восходящего потока легкого материала изменяет напряжение в литосфере и направления горизонтальных перемещений литосферных плит.

Дрейф плит обусловлен их взаимодействием с нагретой аномальной мантией и стремлением земной массы восстановить равновесие при минимальной величине потенциальной энергии.

Кора и аномальная мантия в области поднятий стремятся растечься в сторону, чтобы уменьшить потенциальную энергию. Срединные океанические хребты могут постоянно расширяться, если к ним из глубины периодически поступает аномальная мантия. Литосферные плиты симметрично удаляются от рифтовой долины, где поднимается аномальная мантия. При этом вязкость

Рис. 76. Границы литосферных плит

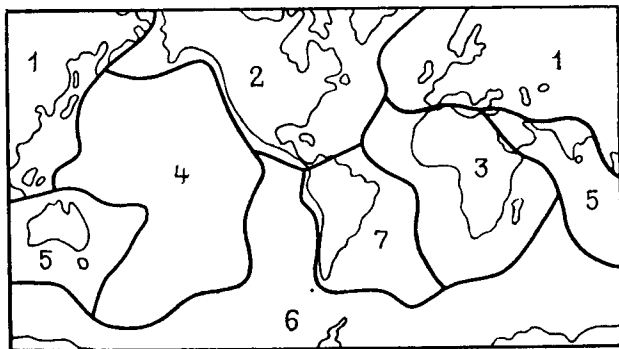
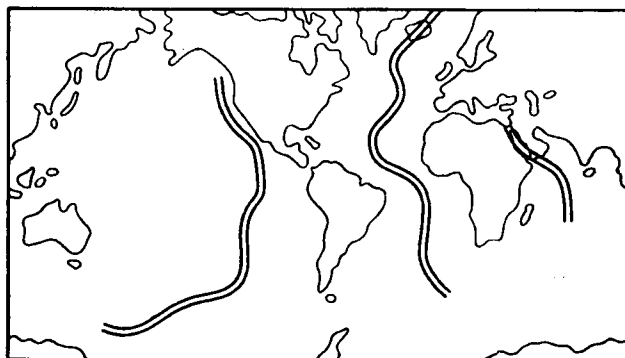


Рис. 77. Границы срединных океанических хребтов



астеносферы настолько мала, что не оказывает сильного противодействия скользящим по ней литосферным плитам.

Надежную оценку взаимного движения плит дают повторные геодезические измерения в зонах разломов на границах плит. Скорость смещения Американской плиты относительно Тихоокеанской близка к 4 см/год. Она установлена геодезическими измерениями вдоль системы разломов, главный из которых Сан-Андреас. На Гармском полигоне в Таджикистане выявлен надвиг Памира на Тянь-Шань со скоростью 1,7 см/год. В пределах Альпийско-Гималайского горного пояса скорость сжатия увеличивается с запада на восток: в районе Гибралтара от 1,5 до 2 см/год, а в районе Гималаев до 5,6—6 см/год. Из обработки астрометрических данных получается, что скорость раздвижения Североамериканской и Евразийской плит близка к 10 см/год, а сближение Японии с Евразией идет со скоростью 1 см/год.

Имеются данные, что озеро Байкал разрастается в ширину со скоростью 1 см/год.

Повторное нивелирование и уровневые наблюдения на различных геодинических полигонах дают надежную оценку современным вертикальным движениям земной коры. В СССР эти работы проводятся главным образом в сейсмической зоне вблизи Алма-Аты, Ашхабада, Душанбе, Ташкента и Фрунзе. Зарегистрированы максимальные вертикальные движения земной коры 10 см/год в районе Алма-Аты. Повторным нивелированием на Алма-Атинском геодиническом полигоне обнаружены поднятия 2—5 см/год тектонического блока в зоне Предгорного разлома. На Центральном-Тургайском плато вертикальные движения составляют 1,2—1,6 см/год. В центральной части Кызылкумов выявлены участки, имеющие вертикальные движения 1,6—2,0 см/год и более. В Речицком районе Белоруссии поднятие земной поверхности составляет 0,6—0,8 см/год.

Скорость перемещения Тихоокеанской плиты вдоль Курило-Камчатского желоба изменяется от 7,5 см/год на севере до 8,5 см/год на юге. Побережья арктических морей в азиатской части СССР испытывают колебательные вертикальные движения амплитудой 10—12 см с периодом около 20 лет.

Ежегодно на Земле происходит 10—15 девятибалльных, 100—500 восьмибалльных и 300—500 семибалльных землетрясений. Разрушительные землетрясения сопровождаются горизонтальными и вертикальными движениями земной коры. 16 июня 1819 г. расположенный к востоку от дельты р. Инда бассейн р. Синдры площадью 1,2 тыс. км² внезапно опустился. Одновременно по северному краю опустившегося района образовалась двенадцатиметровая плотина длиной 45 км и шириной 7 км. В 1906 г. по разлому Сан-Андреас произошло внезапное смещение на участке протяженностью 450 км. Смещение вдоль трассы разлома было горизонтальным. Восточный участок разлома переместился к северу относительно западного участка в некоторых местах на 7 км. Чилийское землетрясение 1907 г. сопровождалось поднятием почти на 1 м чилийского побережья на участке протяженностью 300 км. В эпицентральной зоне Ашхабадского землетрясения 5 октября 1948 г. горизонтальные смещения достигли 2 м.

Современные исследования показали, что техногенные процессы вызывают своеобразные движения земной коры. Для изучения вертикальных движений на Апшеронском полуострове в 1910—1912 гг. была создана нивелирная сеть. В настоящее время на Апшероне длина линий нивелирования I и II классов превышает 500 км. Многолетние наблюдения Апшеронских нефтепромыслов показали, что наибольшие скорости опускания земной поверхности достигают 3—5 см/год. За 1912—1972 гг. общее опускание земной поверхности составило 2,4 м. Земная поверхность оседает при откачке грунтовых и артезианских вод. Отдельные районы Токио за последние 50 лет осели на 4 м, Ме-

хико за последние 90 лет — до 8,5 м. В разных частях Калифорнии откачка подземных вод в течение 25—30 лет привела к оседанию земной поверхности на 2,7—4,5 м. На р. Колорадо в США под водохранилищем с объемом воды около 35 млрд. м³ прогибание земной коры достигло 20 см. Значительное движение земной поверхности отмечается в районах добычи твердых полезных ископаемых.

Современный прогресс в мировом производстве приводит к глобальным изменениям облика Земли. Техногенные изменения будут значительными в ближайшие десятилетия в связи с реализацией проектов использования недр Земли, континентального и регионального водораспределения, освоения морских шельфов и Мирового океана. При этом техногенные процессы изменяют направления и интенсивность естественных движений земной коры.

Динамика Земли проявляется в движениях земного полюса и неравномерностях ее вращения. Изменение положения оси вращения Земли в пространстве очень велико. Это изменение имеет вековую составляющую — прецессию, открытую Гиппархом во II в. до н. э.

И. Ньютон в своих «Математических принципах натуральной философии» (1687 г.) дал динамическое объяснение явлению прецессии и оценил составляющую прецессии, обусловленную лунно-солнечным притяжением эллипсоидальной Земли. Полагая полярное сжатие Земли равным $1/230$, И. Ньютон получил лунно-солнечную прецессию, равную $68''$ в год. Как позднее замечал И. С. Лаплас, для полярного сжатия на величину $1/300$ формулы Ньютона дают прецессию, равную $53,6''$, что в пределах точности расчетов совпадает с ее действительной величиной $50,3''$.

В 1727 г. Дж. Бадлей, наблюдая звезду γ созвездия Дракона, заметил дополнительные к абберационным изменения ее координат. Подобные же изменения координат он обнаружил и у других звезд. Дж. Бадлей в 1748 г. правильно объяснил это явление как следствие нутационного движения земной оси с периодом 18,6 года, который точно совпадает с периодом движения лунных узлов. В свою очередь, нутация земной оси обусловлена периодическим изменением взаимного положения лунной и земной орбит. Ж. Даламбер в 1749 г. разработал динамическую теорию нутации. Открытие явления нутации стимулировало развитие динамики твердого тела. В 1765 г. Л. Эйлер разработал теорию движения абсолютно твердого тела около неподвижной точки. Допуская отсутствие действия внешних сил, он показал, что мгновенная ось должна описывать конус около главной оси инерции, относительно которой Земля имеет максимальный момент инерции. Если принять за эллипсоид инерции эллипсоид вращения, то уравнения твердого тела будут иметь вид

$$A\ddot{\alpha}_x + (C - A)\omega_y\omega_z = 0,$$

$$A\dot{\omega}_y - (C - A)\omega_x\omega_z = 0,$$

$$C\dot{\omega}_z = 0.$$

Из третьего уравнения вытекает, что угловая скорость относительно полярной оси инерции постоянна, т. е. $\omega_z = \omega_0$. Введя обозначение $H_0 = (C - A)/A$, запишем первые две строки исходной системы в виде

$$\dot{\omega}_x + H_0\omega_0\omega_y = 0,$$

$$\dot{\omega}_y - H_0\omega_0\omega_x = 0.$$

Решая эти два уравнения, определяем интегралы

$$\omega_x = c_1 \cos(H_0\omega_0 t + c_2),$$

$$\omega_y = c_1 \sin(H_0\omega_0 t + c_2).$$

Поделив члены уравнений на ω_0 , получим координаты мгновенного полюса относительно полярной оси инерции в момент t

$$x = \omega_0^{-1} c_1 \cos(H_0\omega_0 t + c_2),$$

$$y = \omega_0^{-1} c_1 \sin(H_0\omega_0 t + c_2).$$

Из последних уравнений видно, что мгновенный полюс Земли движется по окружности около полюса инерции и описывает полярную окружность за период $T = H_0^{-1}$. Этот период, равный 305 звездным суткам, получил название период Эйлера.

Для экспериментального подтверждения теории Эйлера астроном Х. И. Петерс в 1842—1843 гг. выполнил наблюдения широт и определил угол между осью вращения и полярной осью инерции Земли, оцененный им в $0,08''$. Из наблюдений Х. И. Петерса и своих астроном М. О. Нюрен вычислил средние значения широты Пулкова для разных эпох: $\varphi_{1843} = 59^\circ 46' 18,727''$, $\varphi_{1866} = 59^\circ 46' 18,654''$, $\varphi_{1872-1875} = 59^\circ 46' 18,501''$.

Реальность движения полюсов была доказана также наблюдениями в Берлине, начатыми в 1884 г. Незначительные расхождения в значениях широт были получены для Гринвича, Вашингтона, Парижа, Рима и Неаполя. Анализируя эти результаты, астрономы заметили вековое изменение и периодические колебания широты с периодом, близким к годовому.

Международная геодезическая ассоциация организовала специальные наблюдения в ряде обсерваторий. Эти наблюдения подтвердили реальность движения полюсов в недрах Земли и показали, что это движение отличается от движения, предсказанного эйлеровой теорией вращения абсолютно твердого тела вокруг центра масс. В 1892 г. С. Чандлер, обработав длинные ряды наблюдений широт, получил эмпирическую формулу

$$\varphi - \varphi_0 = r_1 \cos[(t - T)\vartheta] - r_2 \cos(L_\odot - L_2).$$

Первый член в правой части формулы Чандлера имеет период 430,7 сут (по современным данным — примерно 428 сут), а второй член — годовой период; $L_\odot$ — долгота Солнца; L_2 —

долгота Солнца на эпоху T_2 , когда второй член достигает отрицательного минимума. С. Чандлер установил, что амплитуда r_1 постоянна, а амплитуда r_2 изменяется с течением времени. Четырнадцатимесячный период движения полюса, открытый С. Чандлером, получил название период Чандлера. Возникла необходимость пересмотра исходного допущения об абсолютной твердости Земли. Вместе с тем у ученых оказался хороший критерий для оценки правомерности других гипотез о механических свойствах Земли: теоретическое значение периода движения полюсов должно равняться 14 мес. С. Ньюком в 1895 г., рассмотрев влияние упругих деформаций Земли на ее вращение, доказал, что эти деформации действительно увеличивают период движения полюсов, и объяснил четырнадцатимесячный период эффектом упругости Земли.

В 1893 г. вышла в свет монография С. К. Костинского «Об изменении астрономических широт», в которой обсуждались все работы, освещающие проблему изменения широт, изданные к этому времени. С. К. Костинский ввел понятие среднего полюса, фиксируемого средними значениями широт всех обсерваторий. Он показал возможность определения полюса на любую эпоху относительно среднего полюса по наблюдениям двух станций, расположенных на одной широте и удаленных друг от друга на 90° по долготе.

Наблюдения широт на различных обсерваториях показали, что движение полюсов относится к тем планетарным явлениям, ход которых не удается предсказать с точностью, необходимой для теории и практики. Поэтому для детального изучения движения полюсов были организованы специальные широтные станции, ведущие наблюдения широты с осени 1889 г.

В 1895 г. на II Международной геодезической конференции в Берлине было высказано пожелание об организации Международной службы широт (МСШ) для систематического изучения движения полюсов.

Подразумевалось организовать несколько обсерваторий на одной параллели, равномерно распределенных по долготе и ведущих наблюдения звезд по одинаковой программе. При этом должна соблюдаться однотипность приборов, павильонов, столбов и др. Такими наблюдениями можно исключить многие систематические ошибки и получить материал для изучения не только периодических, но и вековых движений полюсов. Однако эта идея не была реализована, и возможности изучения векового движения полюсов оказались ограниченными.

В 1899 г. в северном полушарии было организовано шесть широтных станций на широте $39^\circ 8'$: Карлофорте (Италия) — $8,3^\circ$ в. д.; Чарджоу (Россия*) — $63,5^\circ$ в. д.; Мидзусава

* Станция существовала до 25 мая 1919 г.; на ней определено около 35 000 широт. С 14 ноября 1930 г. в системе МСШ действует Китабская обсерватория СССР, расположенная на широте $39,8^\circ$ вблизи г. Чарджоу.

(Япония) — $141,2^{\circ}$ в. д.; Гейтерсберг (США) — $77,2^{\circ}$ з. д.; Юкайя (США) — $124,4^{\circ}$ з. д.; Цинциннати (США) — $84,4^{\circ}$ з. д.

С 1961 г. Международная служба широты называется Международной службой движения полюсов (МСДП). Она объединяет работу пяти широтных станций: Карлофорте, Китаб, Мидзусава, Гейтерсберг и Юкайя. Для выводов параметров движения полюсов, кроме наблюдений международных широтных станций, используются наблюдения 70 других обсерваторий. Главная астрономическая обсерватория АН УССР по результатам всех систематических наблюдений широт издала «Каталог координат полюса Земли с 1890,0 по 1969,0».

Вопрос о вековом движении полюсов еще в конце XIX в. обсуждался астрономами, обратившими внимание на систематическое уменьшение с течением времени широты в Пулковке, Гринвиче, Париже, Милане, Риме, Неаполе и увеличение широт некоторых американских обсерваторий.

Значительные исследования выполнил А. Я. Орлов, внося определенную ясность в понятие о «среднем полюсе». Основные положения А. Я. Орлова об учении движения полюсов сводятся к следующему:

мгновенный полюс есть пересечение мгновенной оси вращения Земли с ее поверхностью. Все наблюдения дают широту относительно этого мгновенного полюса;

измеренная широта подвержена вековым и периодическим изменениям. Средней широтой в данный момент называется широта, которая была бы в этот момент, если бы не было ее периодических изменений. Таким образом, средним полюсом эпохи называется такое положение полюса, каким оно было бы для этой эпохи, если бы не было в его движении периодической составляющей. Средним положениям полюсов в заданный момент соответствуют и средние широты в этот момент всех точек земной поверхности;

вычислять координаты полюса нужно по отклонениям мгновенной широты от средней на одну и ту же эпоху. Если предположить, что средний полюс неподвижен, то вычисленные таким образом координаты полюсов относятся всегда к одному и тому же среднему полюсу;

наблюдения широты на станциях МСШ поставлены так, что они не дают надежного материала для суждения о вековом движении полюсов. Для этого нужна специальная организация наблюдений. Если в будущем будет обнаружено и надежно определено вековое движение полюсов, то все вычисления широт можно легко привести к одной эпохе.

Для изучения векового движения полюсов А. Я. Орлов обработал наблюдения широт за 51 год на станциях МСШ Мидзусава, Карлофорте и Юкайя. Из всех наблюдений (Мидзусава — 79 590, Карлофорте — 94 200, Юкайя — 84 882) были вычислены средние широты. После поисков и испытаний разных вариантов обработки А. Я. Орлов нашел простое решение задачи, приве-

шее к выводу о вековом движении полюсов Земли: $\sigma = 0,004''$ в год вдоль меридиана 69° з. д.

Исследования векового движения, исключительно актуальные для современной теории и практики, продолжаются. А. А. Михайлов в 1971 г., обработав многолетние наблюдения широт, оценил вековое движение полюсов $0,102$ м в год вдоль меридиана 72° з. д. Л. Д. Костина и В. И. Сахаров в 1974 г. из обработки обширных широтных наблюдений определили вековое движение полюсов $0,1$ м в год вдоль меридиана 69° з. д. Ж. С. Ержанов в 1974 г. теоретически показал возможность векового движения земного полюса и получил формулу для вычисления его величины и направления.

Новые возможности в изучении движения полюсов открывают наблюдения с ИСЗ и других космических объектов. Во всех уравнениях движений ИСЗ участвует матрица полюса. Координаты полюса как систематическую составляющую можно отыскивать из лазерных, доплеровских и фотографических наблюдений ИСЗ. Наиболее оперативную и объемную информацию дают доплеровские наблюдения ИСЗ.

Задаваясь геоцентрическими координатами обсерваторий слежения на определенную эпоху и накапливая наблюдения лазерных отражателей Луны, космических летательных аппаратов и радиointерферометрии, можно фиксировать положение мгновенной оси вращения Земли на любую эпоху. Разместив эти обсерватории определенным образом в Северном и Южном полушариях и организовав на них наблюдения по международной программе, можно задачу о полюсе решить наилучшим образом. Значительным будет вклад ИСЗ и других космических объектов в изучение движения полюсов. Совместное определение широт и долгот на станциях Международной службы движения полюсов, наблюдения с ИСЗ и других космических объектов позволяют решить задачу о полюсе Земли настолько полно, что полученные при этом данные удовлетворяют самым высоким требованиям фундаментальной астрометрии, геодезии, геофизики и прогнозирования ряда планетарных процессов.

Земля вращается неравномерно, вызывая изменение продолжительности суток. И хотя колебания продолжительности суток очень малы, изучение их имеет большое научное и практическое значение. Наблюдаются три вида изменения скорости вращения Земли: вековое замедление, периодические сезонные колебания и нерегулярные скачкообразные изменения. Вековое замедление вращения Земли обусловлено действием приливных сил притяжения Луны и Солнца. В настоящее время считают, что продолжительность суток увеличивалась за последние 2000 лет в среднем на $0,0023$ с в столетие. Астрометрические данные за 250 лет показывают, что скорость векового замедления составляет $0,0014$ с в столетие, которая не согласуется с величиной $0,0023$ с, вычисленной по всем наблюдательным данным за последние 2000 лет. По подсчетам Н. Н. Парийского, кроме

приливного замедления, имеет место увеличение скорости вращения на 0,001 с в столетие из-за изменения момента инерции Земли.

Периодические годовые и полугодовые колебания скорости вращения Земли объясняются периодическими изменениями момента инерции Земли из-за сезонной динамики атмосферы и планетарного распределения осадков. По современным данным, продолжительность суток в течение года меняется на 0,001 с. Вращение Земли быстрее всего в июле—августе, медленнее в март. Обычно периодические колебания суток представляют в виде суммы годового и полугодового составляющих

$$\Delta T = a \sin(t + \mu_1) + b \sin(2t + \mu_2),$$

параметры которых a , b , μ_1 , μ_2 вычисляют из длительного ряда наблюдений. Амплитуды примерно равны: $a=0,0005$ с; $b=0,0003$ с.

Через неравномерные промежутки времени, почти кратные одиннадцати годам, происходят случайные изменения скорости вращения Земли. Абсолютная величина относительного изменения угловой скорости достигла в 1898 г. $3,9 \cdot 10^{-6}$, а в 1920 г. — $4,5 \cdot 10^{-8}$. Характер и природа случайных колебаний скорости вращения Земли мало изучены. Можно дать только механическое объяснение флуктуациям скорости вращения Земли, по амплитуде превышающей ее столетние приливные изменения. Столь большие и быстро протекающие колебания можно объяснить взаимодействием мантии и ядра и возникновением импульсных моментов, равных примерно $2 \cdot 10^{-7}$ общего момента движения Земли.

Гравитационная дифференциация вещества и вековое замедление вращения Земли могут приводить к постепенному уменьшению ее объема и полярного сжатия. С другой стороны, уменьшение гравитационной постоянной должно вызвать расширение Земли и других планет. Если вековое изменение объема и полярного сжатия имеет место, то они будут открыты с помощью фундаментальных геодезических определений длин и пространственных положений хорд, охватывающих всю планету, и тогда появятся новые возможности в развитии теории эволюции Земли и других планет.

В геодинатике на передний план выдвигается задача изучения динамической фигуры Земли методами геодезии. Фундаментальные определения параметров динамической фигуры Земли на каждую эпоху могут дать необходимые данные для изучения векового изменения земной фигуры. Так, например, вековое уменьшение объема и полярного сжатия Земли проявится в уменьшении главных моментов инерции Земли во времени. По этой же причине будет постепенно уменьшаться абсолютная разность моментов инерции относительно полярной и экваториальной осей Земли.

§ 89. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ДИНАМИЧЕСКОЙ ФИГУРЫ ЗЕМЛИ

Тензор и эллипсоид инерции Земли. Планетарные динамические свойства Земли, зависящие от распределения масс в ее теле, можно изучать наглядно, введя образ трехосного эллипсоида инерции. Как известно, момент инерции твердого тела относительно некоторой оси зависит от распределения масс относительно этой оси. При изменении системы координат изменяются значения моментов инерции тела, в частности, и значения вторых моментов инерции A, B, C, D, E, F , характеризующих систему и распределение масс в пространстве.

Симметричную матрицу

$$I = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}. \quad (89.1)$$

представляющую полный спектр вторых моментов инерции Земли, назовем тензором инерции Земли; это важнейшая характеристика Земли в системе отсчета, относительно которой он определен. Тензор инерции Земли будем определять на эпоху, на которую установлена система координат и принят закон распределения масс в теле Земли. В действительности, достаточно изменить ориентацию системы координат или закон распределения масс в теле Земли, тогда соответственно изменяются все ее моменты инерции, включая вторые моменты A, B, C, D, E, F , составляющие тензор инерции Земли.

Для Земли гармонические коэффициенты геопотенциала определяются в геоцентрической системе координат $OXYZ$, установленной на среднюю эпоху 1900—1905 гг. Поэтому тензор инерции Земли будет определен относительно этой системы. Однако распределение масс в теле Земли мы можем принять на уровне наших знаний, допустим, на начало 1980 г. Тогда тензор инерции Земли будет определен на эпоху 1980 г. относительно системы координат $OXYZ$.

Известно, что момент инерции относительно произвольной оси ξ

$$I_{\xi} = l^2 A + m^2 B + n^2 C - 2(mnD + lnE + lmF), \quad (89.2)$$

l, m, n — направляющие косинусы оси ξ . Отложим от начала координат $OXYZ$ вдоль оси ξ отрезок $ON_{\xi} = I_{\xi}^{-1/2}$, при этом x, y, z — координаты точки N_{ξ} . Направляющие косинусы оси ξ в системе $OXYZ$ будут:

$$l = x \sqrt{I_{\xi}}; \quad m = y \sqrt{I_{\xi}}; \quad n = z \sqrt{I_{\xi}}. \quad (89.3)$$

Исключая в формуле (89.2) направляющие косинусы (89.3), получим уравнение

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 2Fxy - 2Exz - 2Dyz = 1, \quad (89.4)$$

отображающее геометрическое место точек N_ξ для всевозможных осей ξ .

Момент инерции для тела конечной массы имеет величину, конечную и отличную от нуля. Следовательно, уравнение (89.4) есть уравнение эллипсоида конечных размеров. Таким образом, тензор инерции второго ранга (89.1) однозначно определяет трехосный эллипсоид. Геометрический образ тензора инерции второго ранга называется эллипсоидом инерции твердого тела. В частном случае тензор инерции второго ранга (89.1), составляющими которого служат вторые моменты инерции Земли в геоцентрической системе отсчета, есть тензор инерции Земли, и он же определяет эллипсоид инерции Земли.

Главные оси, главные моменты и тензор инерции Земли. Любой эллипсоид имеет главные оси. В частном случае трехмерный эллипсоид имеет главные оси u , v , w , относительно которых его уравнение

$$u^2/a^2 + v^2/b^2 + w^2/c^2 = 1. \quad (89.5)$$

Если квадраты полуосей эллипсоида $a^2 = I_u^{-1}$, $b^2 = I_v^{-1}$, $c^2 = I_w^{-1}$, то его уравнение в главных осях

$$I_u u^2 + I_v v^2 + I_w w^2 = 1. \quad (89.6)$$

Сравним это уравнение с выражением (89.4). Центробежные моменты D , E , F относительно главных осей равны нулю.

Систему осей, относительно которых центробежные моменты равны нулю, назовем главными осями инерции, а моменты инерции относительно этих осей — главными моментами инерции и инерции тела. В геодезической задаче главные оси проходят через центр инерции Земли. Поэтому их назовем главными центральными осями инерции Земли. Моменты инерции относительно этих осей назовем главными центральными моментами инерции и обозначим их через A_0 , B_0 , C_0 .

В общей постановке для n -мерного эллипсоида поиск его главных осей сводится к проблеме определения корней векового уравнения. В нашей элементарной задаче, раскрыв определитель

$$|I - E\lambda| = \begin{vmatrix} A - \lambda & -F & -E \\ -F & B - \lambda & -D \\ -E & -D & C - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (89.7)$$

получим вековое уравнение

$$\lambda^3 - (A + B + C)\lambda^2 + (AB + AC + BC - F^2 - E^2 - D^2)\lambda - (ABC - 2DEF - AD^2 - BE^2 - CF^2) = 0, \quad (89.8)$$

морнями которого и являются главные центральные моменты инерции A_0, B_0, C_0 .

Вековое уравнение (89.8) для Земли настолько чувствительно к ошибкам округления, что приходится оставлять до 20 значащих цифр и более, чтобы получить его корректное решение. Вековое уравнение (89.8) планетарных тел настолько плохо обусловлено, что от вычислителя требуется искусство при составлении его и в процессе решения относительно главных осей инерции A_0, B_0, C_0 . При вычислениях искомым параметров A_0, B_0, C_0 процесс последовательных приближений неизбежен.

Тензор инерции второго ранга в главных осях есть диагональная матрица, составленная из главных моментов инерции. Этот тензор обозначим через $I_0 = (A_0, B_0, C_0)$. Главный тензор инерции I_0 не зависит от принятой системы координат и является фундаментальным параметром планетарного тела. Он зависит только от распределения масс внутри тела. Определение главного тензора инерции, одного из фундаментальных параметров планетарного тела, является особой задачей планетарной геодезии.

Динамическая фигура планетарного тела. Параметры динамической фигуры Земли по современным данным. За динамическую фигуру планетарного тела примем трехосный эллипсоид инерции с полуосями $a_0 = 1/\sqrt{A_0}$, $b_0 = 1/\sqrt{B_0}$, $c_0 = 1/\sqrt{C_0}$. Полурное и экваториальное сжатие динамической фигуры планетарного тела определим соответственно:

$$\alpha_p = 1 - 2c_0/(a_0 + b_0); \quad \alpha_e = 1 - b_0/a_0. \quad (89.9)$$

Большая полуось a_0 динамической фигуры совпадает с осью u , относительно которой главный момент инерции тела A_0 минимален; малая полуось c_0 совпадает с полярной осью w , относительно которой главный момент инерции C_0 максимален.

Таким образом, если известны моменты инерции планетарного тела относительно принятой системы координат $OXYZ$, то можно определить его динамическую фигуру в образе трехосного эллипсоида инерции и ориентацию ее главных осей. По вариациям главных моментов инерции и изменению ориентировки осей эллипсоида инерции во времени можно судить о планетарных изменениях фигуры и перемещениях масс внутри планетарного тела.

Как мы уже обсудили ранее, если задан исходный тензор инерции (89.1) в планетоцентрической системе координат, то главный тензор инерции I_0 , определяющий динамическую фигуру планетарного тела, есть решение векового уравнения (89.8).

Теперь мы рассмотрим ориентировку главных осей динамической фигуры планетарного тела. Положим, что ее главные оси u, v, w ориентированы относительно планетоцентрической системы эйлеровыми углами φ, ψ, ν (рис. 78). Положим, что $OXYZ \rightarrow Oxyz$ и $Ouvw \rightarrow O\xi\eta\zeta$. Хотя в нашем случае обе системы

отсчета вращаются относительно мгновенной оси вращения планетарного тела, однако углы Эйлера этих систем остаются стабильными во времени. Поэтому мы будем исходить из геометрических предпосылок.

Моменты инерции A, B, C, D, E, F выражаются через вторые гармонические коэффициенты I_{2i}, K_{2i} ($i=0, 1, 2$) геогравитационного поля таким образом [13], [14], что

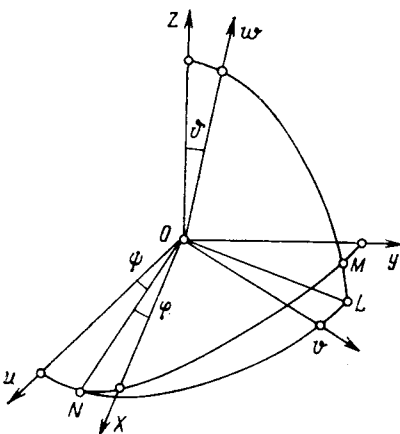
$$\begin{aligned} C-A &= (I_2 - 2I_{22})a_e^2 M; \\ C-B &= (I_2 + 2I_{22})a_e^2 M; \quad (89.10) \\ D &= -K_{21}a_e^2 M; \quad E = -I_{21}a_e^2 M; \\ F &= -2K_{22}a_e^2 M; \\ A-B &= 4I_{22}a_e^2 M, \end{aligned}$$

где M, a_e — масса и экваториальный радиус Земли.

Введя динамическое сжатие H как функцию моментов инерции

$$H = 1 - (A + B)/2C, \quad (89.11)$$

Рис. 78. Главные оси инерции Земли



получим явные выражения для моментов инерции:

$$\begin{aligned} C &= a_e^2 M I_2 / H; \quad B = C(1 - H - 2I_{22}/I_2); \\ A &= C(1 - H + 2I_{22}/I_2). \end{aligned} \quad (89.12)$$

Таким образом, если из спутниковых и наземных астрономо-геодезических данных известны коэффициенты второй гармоники геогравитационного потенциала, а из астрометрических определений — динамическое сжатие Земли H , то можно вычислить вторые моменты инерции Земли и главный тензор инерции $I_0 = \{A_0, B_0, C_0\}$. При этом особую задачу представляет решение кубического уравнения (89.8), которое чувствительно к ошибкам округления. Это решение должно выполняться самым тщательным образом, чтобы надежно оценить главный тензор инерции I_0 .

Задачу определения эйлеровых углов φ, ψ, θ отделим от задачи поиска главного тензора I_0 .

Запишем формулу [13]

$$\begin{aligned} u &= X \cos \lambda_0 - Y \sin \lambda_0 + Z(\xi \sin \lambda_0 - \eta \cos \lambda_0), \\ v &= X \sin \lambda_0 + Y \cos \lambda_0 - Z(\xi \cos \lambda_0 + \eta \sin \lambda_0), \\ w &= X\eta + Y\xi + Z, \end{aligned} \quad (89.13)$$

где $\xi = \sin \theta \cos \varphi, \eta = \sin \theta \sin \varphi$.

Для главных осей инерции центробежные моменты равны нулю, т. е. соблюдаются условия

$$\int_M uv dm = 0, \quad \int_M uw dm = 0, \quad \int_M vw dm = 0. \quad (89.14)$$

Ввиду малости угла ϑ и центральных моментов инерций, полагая $D \sin \vartheta = 0$, $E \sin \vartheta = 0$, $F \sin \vartheta = 0$, преобразуем формулы (89.13) под условием (89.14):

$$\begin{aligned} \sin 2\lambda_0 \int_M (X^2 - Y^2) dm + 2 \cos 2\lambda_0 \int_M XY dm &= 0, \\ \xi \int_M (Y^2 - Z^2) dm + \int_M YZ dm &= 0, \\ \eta \int_M (X^2 - Z^2) dm + \int_M XZ dm &= 0. \end{aligned} \quad (89.15)$$

С учетом соотношений (89.10) из гравитационных (89.15) получим формулы для вычисления эйлеровых углов:

$$\tan 2\lambda_0 = -K_{22}/I_{22}; \quad (89.16)$$

$$\xi = K_{21}/(I_2 + 2I_{22}); \quad \eta = I_{21}/(I_2 - 2I_{22}); \quad (89.17)$$

$$\begin{aligned} \tan \varphi &= I_{21}(I_2 + 2I_{22})/K_{21}(I_2 - 2I_{22}); \\ \lambda &= \lambda_0 - \varphi, \end{aligned} \quad (89.18)$$

выраженные через вторые гармонические коэффициенты разложения гравитационного потенциала планетарного тела. Формулу для долготы λ_0 , аналогичную формуле (89.16), получил М. Бурша [13].

Задаваясь тензором инерции Земли в фиксированной в теле Земли системе отсчета на определенную эпоху, можно вычислить главный тензор инерции Земли и ориентацию главных осей ее динамической фигуры. Наблюдая за этими фундаментальными параметрами, можно судить о планетарных изменениях фигуры Земли и геофизических процессах в ее теле.

Периодические планетарные изменения динамической фигуры Земли обусловлены деформациями от сил притяжения в системе Солнце — Земля — Луна. Эти изменения с необходимой точностью могут быть предвычислены и учтены в геодезических и астрометрических расчетах. До сих пор планетарные изменения, связанные с перемещением масс в теле, на поверхности и в воздушной оболочке Земли, геодезически не изучены. Эта задача примыкает к геодинамическим проблемам планетарной геодезии.

Теория определения параметров динамической фигуры Земли нами рассмотрена применительно к абсолютно твердому телу. В действительности, перемещение масс в ее теле должно приводить к изменению тензора инерции и, следовательно, к изменению значений главных центральных моментов A_0 , B_0 , C_0 инер-

ции Земли и ориентации ее главных центральных осей инерции u , v , w в теле Земли.

Конечно, имеет значение для планетарной геодезии оценка взаимного положения инерциальных, средних и мгновенных полюсов Земли. Под инерциальным полюсом мы понимаем пересечение с телом Земли ее главной центральной оси инерции w , относительно которой Земля обладает максимальным главным центральным моментом инерции.

Устанавливая параметры уровенного эллипсоида, наилучшим образом аппроксимирующего планетарный геоид и во многих задачах теории и практики приложения геодезических данных представляющего фигуру Земли, необходимо ось вращения уровенного эллипсоида точно совмещать с главной центральной осью инерции Земли w , а ее центр — с центром инерции Земли.

Достигаемые точности и требования к исходным геодезическим параметрам таковы, что приходится изучать эллипсоид инерции Земли и его ориентировку относительно уровенного эллипсоида Земли. Если центры двух эллипсоидов не совмещены, то прибавляются еще параметры Δu , Δv , Δw взаимного положения центров двух эллипсоидов. В общем случае для любой заданной точки в теле Земли можно построить эллипсоид инерции.

За динамическую фигуру Земли принимают центральный эллипсоид инерции Земли, оси которого совмещены с главными центральными осями инерции, а центр его совпадает с центром инерции Земли.

Известно, что динамическое сжатие геоида H отличается от гравитационного сжатия α уровенного эллипсоида, так как динамическая и гравитационная фигуры Земли отличаются друг от друга.

Существует фундаментальная проблема, касающаяся вращения Земли вокруг мгновенной оси, при изучении которой нужно использовать различие обеих фигур в полном спектре. Близость инерциальных и средних полюсов упрощает изучение их движения. По существу, в этом случае движение полюсов отождествляют с движением мгновенного полюса относительно полюса инерции Земли. Уточнение коэффициентов первого и второго порядков незональных гармоник притяжения Земли приблизит нас к решению задачи.

Если оси земной системы координат совпадают с главными центральными осями инерции Земли, то из выведенных формул следует, что все незональные коэффициенты первого и второго порядков, кроме I_{22} , должны отсутствовать, т. е. должно соблюдаться условие $I_{21} = K_{21} = K_{22} = 0$. Во всех моделях Земли указанные коэффициенты незональных гармоник первого и второго порядков отличаются от нуля. Следовательно, оси земной системы координат не совпадают с главными центральными осями инерции, а средний полюс не совпадает с полюсом инерции.

Однако коэффициенты I_{21} и K_{21} настолько малы, что по существу центробежные моменты D и E каждый по модулю в 10^8 раз меньше, чем главные моменты. Это признак близости средних и инерциальных полюсов, т. е. θ — малый угол. Следовательно, во многих случаях практики можно мириться с несовпадением полярных осей динамического и гравитационного эллипсоидов. Из-за малости угла θ долготу λ_0 главной центральной оси инерции, относительно которой Земля обладает наименьшим главным центральным моментом инерции, можно вычислять как сумму двух эйлеровых углов φ и ψ .

Параметры динамической фигуры и тензор инерции Земли. Приложение теории динамики Земли проиллюстрируем на примере вычисления параметров динамической фигуры Земли, используя формулы (89.12), (89.16) — (89.18) и модели внешнего гравитационного поля Земли GEM-6, -9, -10 определенные по спутниковым и наземным гравитационным данным (табл. 13).

В табл. 13 A_0 , B_0 , C_0 — главные моменты инерции Земли; θ , φ и ψ — эйлеровы углы, которые составляют главные оси u , v и w инерции Земли с осями $OXYZ$ земной системы геодезических координат; λ_0 — долгота плоскости меридиана оси u , относительно которой Земля обладает наименьшим главным моментом инерции A_0 ; λ_w — долгота полюса инерции Земли относительно начального меридиана и среднего полюса; a_e и a_p — экваториальное и полярное сжатия эллипсоида инерции Земли.

Вычисления показывают, что основные параметры динамической фигуры Земли достаточно надежно определяются по моделям ее внешнего гравитационного поля. Расхождения абсолютных значений главных моментов инерций в моделях GEM-6, -9, -10 получаются из-за отличия масштабов, принятых в этих моделях ($a_e = 6\,378\,155$ м — GEM-6; $a_e = 6\,378\,140$ м — GEM-9, -10). При равном масштабе относительные ошибки определения главных моментов инерций для моделей составляют: GEM-6 и GEM-9 — 1 : 1 000 000; GEM-9 и GEM-10 — 1 : 4 000 000.

Обнаружено систематическое изменение основных параметров, которое, видимо, объясняется планетарной эволюцией Земли. Во всяком случае геодезические определения параметров динамической фигуры Земли имеют достаточно надежную оценку и позволяют следить за временными вариациями этих параметров.

На эпоху 1975 г. за тензор инерции Земли можно принять тензор ранга 1 (89.1), элементами которого являются вторые моменты инерции Земли $A = 0,329729778$, $D = -0,418 \times 10^{-8}$, $B = 0,329736063$, $E = -0,043 \times 10^{-8}$, $C = 0,330815546$, $F = -90,270 \times 10^{-8}$, масштабированные на $a_e^2 M$. За главные моменты инерции Земли на эту эпоху можно принять их средние значения, определяемые по моделям GEM-9 и GEM-10, т. е. $A_0 = 0,329729296$, $B_0 = 0,329736544$, $C_0 = 0,330815547$.

Повышение точности математических моделей Земли неизбежно требует стандартизации параметров динамической

Т а б л и ц а 13. Параметры динамической фигуры Земли
 $M = 5,973327588 \cdot 10^{27}$ г; $H = 3272,6 \cdot 10^{-6}$

Параметры	GEM-6	GEM-9	GEM-10
$I_2 \cdot 10^6$	1082,6283	1082,62708	1082,62684
$I_{22} \cdot 10^6$	-1,5654	-1,57114	-1,57117
$K_{22} \cdot 10^6$	0,8961	0,90231	0,90310
$I_{21} \cdot 10^6$	0,0012	0,00027	-0,00134
$K_{21} \cdot 10^6$	0,0041	0,00524	+0,00314
a , м	6 378 155	6 378 140	6 378 140
$A_0/a_e^2 M$	0,329729721	0,329729334	0,329729258
$B_0/a_e^2 M$	0,329736936	0,329736581	0,329736507
$C_0/a_e^2 M$	0,330815957	0,330815585	0,330815509
α_e	0,0000109407	0,0000109894	0,0000109919
α_p	0,0016376320	0,0016362821	0,0016362821
λ_0	-14°53,7'	-14°56,1'	-14°56,7'
ξ	0,783	1,001	0,600
η	0,228	0,051	-0,255
θ	0,82	1,100	0,64
φ	16°14,1'	2°56,0'	-22°59,4'
ψ	-31°07,8'	-17°52,1'	8°02,7'
λ_w	-73°45,9'	-87°04,0'	-112°59,4'
$A_0 \cdot 10^{-44}$, г·см ²	8,012435863	8,012388772	8,012386925
$B_0 \cdot 10^{-44}$, г·см ²	8,012611188	8,012564873	8,012563075
$C_0 \cdot 10^{-44}$, г·см ²	8,038831410	8,038784559	8,038782712
$B_0 - A_0$	0,00333217	0,00334695	0,00334695
$2C_0 - (A_0 + B_0)$			

фигуры и тензора инерции Земли, устанавливаемых на определенную эпоху. Вывод таких фундаментальных параметров Земли на каждую эпоху и определение их изменений во времени становится одной из главных задач геодезии.

Как видно из данных таблиц, эллипсоид инерции Земли имеет меньшее сжатие, чем ее гравитационный эллипсоид.

Вычисленные параметры динамической фигуры Земли, хотя и нуждаются в уточнении ориентации ее осей из-за ошибок определения гармонических коэффициентов I_{21} и K_{21} , но их можно использовать для интерпретации данных астрономии, геодезии, геофизики и других наук. Они будут полезны в изучении движения полюсов Земли, теории прецессии и нутации. Заметим, что модель с параметрами $K_{21} \approx 3I_{21} > 0$ дает наилучшее согласо-

вание наземных и спутниковых определений. Существенно улучшая оценку параметров I_2 , I_{21} , K_{21} , I_{22} , K_{22} и их вариаций во времени, можно надежно определять ориентацию главных осей инерции и фиксировать эффект перемещения масс в теле Земли на каждую эпоху.

Следует обратить внимание на задачу, связанную с определением фундаментальных параметров Земли — главного тензора инерции и эйлеровых углов главных осей динамической фигуры Земли. Как следует из наших выводов, эти параметры нужно устанавливать на эпоху, на которую определены вторые гармонические коэффициенты геогравитационного потенциала. При этом они должны быть согласованы с масштабом, в смысле H и $a_e^2 M$, принятым в смежных науках о Земле и космическом пространстве. Только в этом случае указанные параметры можно использовать в общем комплексе с другими постоянными Земли, других планет и тел космического пространства и изучать изменения указанных параметров во времени.

§ 90. ИЗУЧЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ПОЛЮСОВ ЗЕМЛИ

Из-за колебания Земли относительно своей оси вращения полюсы Земли движутся по ее поверхности, описывая сложную спиралевидную кривую относительно некоторого среднего положения P_0 . Как показывают исследования [13], радиус суточного вращения мгновенного полюса Земли относительно фиксированной точки составляет 0,05 м, а 14-месячное движение полюса относительно полюса инерции имеет радиус около 15 м. В свою очередь, полюс инерции имеет суточное вращение с радиусом около 15 м вокруг мгновенного полюса Земли.

Вековые изменения строения Земли вызывают соответствующее изменение ее динамической фигуры и как следствие приводят к вековому движению полюса инерции Земли. Вековое движение полюса инерции проявляется как вековое движение полюса вращения Земли.

Кроме того, имеются факторы метеорологического и сезонного характера, обуславливающие изменения динамической фигуры Земли и проявляющиеся как непериодические движения полюса вращения Земли.

Перемещение полюса вращения Земли также связано с движением литосферных плит, землетрясений и моретрясений, других геодинамических процессов.

В целом движение полюсов вращения Земли отражает эффект всего комплекса внутренних и внешних геодинамических процессов, который теоретически не может быть определен так строго и полно, чтобы удовлетворить требованиям современной геодезической практики. Основным способом оперативного определения параметров движения полюса вращения Земли является наблюдение за изменениями координат наблюдательных пунктов ИСЗ во времени.

Рассмотрим вывод формул преобразования прямоугольных геоцентрических координат с одной эпохи на другую с учетом движения полюсов Земли. На рис. 79 изображены системы декартовых геоцентрических координат X_0, Y_0, Z_0 на эпоху T_0 и X, Y, Z на эпоху наблюдения T . Оси координат соответственно направлены: OX_0 — в точку X_0 пересечения линии среднего экватора E_0E_0' и гринвичского меридиана P_0G ; OZ_0 — в точку северного полюса P_0 эпохи T_0 ; OY_0 лежит в плоскости среднего экватора, дополняя правую декартову систему координат; OX — в точку X пересечения линий мгновенного экватора EE' и гринвичского меридиана PG эпохи T ; OZ — в точку мгновенного полюса P эпохи T ; OY лежит в плоскости мгновенного экватора, дополняя правую декартову систему координат. На рис. 79 геоцентрическая широта Гринвича обозначена буквой Φ .

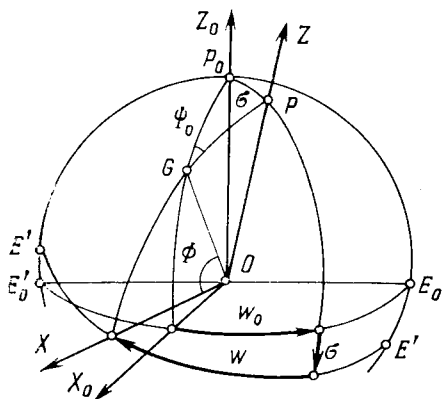


Рис. 79. Схема учета движения полюсов Земли

Пусть положение мгновенного полюса задано сферическим расстоянием σ и азимутом w_0 (см. рис. 79). Для перехода от координат эпохи T_0 к координатам эпохи T необходимо выполнить три вращения: на угол w_0 вокруг оси OZ_0 ; на угол σ вокруг новой оси ординат; на угол w вокруг оси OZ . При этом получим следующие матрицы вращения координат:

$$P_1 = \begin{bmatrix} \cos w_0 & \sin w_0 & 0 \\ -\sin w_0 & \cos w_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} \cos \sigma & 0 & -\sin \sigma \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \sigma & 0 & \cos \sigma \end{bmatrix};$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} \cos w & -\sin w & 0 \\ \sin w & \cos w & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Сферическое расстояние σ настолько мало, что можно принять $\cos \sigma = 1$, $\sin \sigma = \sigma$, $\cos(w - w_0) = 1$, $\sin(w - w_0) = w - w_0$.

Тогда, умножая вышеприведенные матрицы, получим результирующую матрицу

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -(\omega - \omega_0) & -\sigma \cos \omega_0 \\ (\omega - \omega_0) & 1 & -\sigma \sin \omega_0 \\ \sigma \cos \omega_0 & \sigma \sin \omega_0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (90.1)$$

Пользуясь рис. 79, напишем

$$\sin \psi_0 = \frac{\sin \omega_0 \sin \sigma}{\cos \Phi} = \frac{\sin (\omega - \omega_0)}{\sin \Phi}.$$

Отсюда

$$\omega - \omega_0 = \sigma \sin \omega_0 \operatorname{tg} \Phi. \quad (90.2)$$

Введем обозначения:

$$x_p = \sigma \cos \omega_0, \quad y_p = -\sigma \sin \omega_0, \quad (90.3)$$

где x_p , y_p — координаты полюса, публикуемые в бюллетенях МСДП.

С учетом формул (90.1) — (90.3) имеем

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & y_p \operatorname{tg} \Phi & -x_p \\ -y_p \operatorname{tg} \Phi & 1 & y_p \\ x_p & -y_p & 1 \end{bmatrix}. \quad (90.4)$$

По определению матрицы $\mathbf{P}$ как оператора преобразования координат от эпохи T_0 на эпоху T

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix}. \quad (90.5)$$

Откуда разность координат разных эпох с учетом (90.4)

$$\begin{aligned} X - X_0 &= Y_0 \operatorname{tg} \Phi y_p - Z_0 x_p, \\ Y - Y_0 &= -X_0 \operatorname{tg} \Phi y_p + Z_0 y_p, \\ Z - Z_0 &= X_0 x_p - Y_0 y_p. \end{aligned} \quad (90.6)$$

В частном случае, если начальные меридианы фиксируются одной и той же точкой на экваторе начальной эпохи, т. е. $\Phi = 0$, то получим более простую формулу:

$$\begin{aligned} X - X_0 &= -Z_0 x_p, \\ Y - Y_0 &= Z_0 y_p, \\ Z - Z_0 &= X_0 x_p - Y_0 y_p. \end{aligned} \quad (90.7)$$

Если из спутниковых наблюдений определяются геоцентрические координаты наблюдательных станций на эпохи T_0 и T , то по формуле (90.6) или (90.7) можно вычислить координаты полюса эпохи T относительно полюса Земли эпохи T_0 .

Формулы (90.6) и (90.7) позволяют вычислить изменения геоцентрических координат из-за движения земных полюсов.

Спутниковые наблюдения позволяют организовать службу оперативного определения и учета движения полюсов Земли.

Если введем обозначение $\xi_0 = \sigma \cos \omega_0$, $\eta_0 = \sigma \sin \omega_0$, $\nu_0 = \omega - \omega_0$, то формула (90.4) получается как частная от общей формулы преобразования координат [13], [14]:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & -\nu_0 & -\xi_0 \\ \nu_0 & 1 & -\eta_0 \\ \xi_0 & \eta_0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (90.8)$$

При этом малый угол $\nu_0 = \eta_0 \operatorname{tg} \Phi$ представляет долготный разворот одной системы координат относительно другой. Если начальные меридианы эпох проходят через одну и ту же точку на экваторе начальной эпохи, то долготный разворот будет равен нулю.

§ 91. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЫСОТ ГЕОИДА И ИЗУЧЕНИЕ ТОПОГРАФИИ МОРЕЙ И МИРОВОГО ОКЕАНА

Уравнение планетарного геоида и высота геоида над уровнем эллипсоидом. Самая обширная и полная информация о профилях геоида получается при спутниковом нивелировании, при этом нивелирование можно выполнить многократно и в короткие сроки. Спутниковое нивелирование в сочетании с наземными и спутниковыми астрономо-геодезическими и гравиметрическими данными позволяет определить высоты геоида над уровнем эллипсоидом с точностью порядка 0,05 м.

Рассмотрим строгий вывод уравнения планетарного геоида. Положим, известны стоксовы постоянные I_{nm} , K_{nm} , параметры fM , a_e , ω , геоцентрические координаты r_i , φ_i , λ_i пространственных точек Q_i ($i=1, 2, \dots, n$) и их высота h_i над уровнем моря. Требуется определить потенциал W_0 на поверхности геоида, уравнение геоида и его высоту над уровнем эллипсоидом. Потенциал силы тяжести на поверхности геоида определяется по формуле

$$W_0 = \frac{fM}{r_g} \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a_e}{r_g} \right)^n (I_{nm} \cos m\lambda + K_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi) + \frac{1}{2} q \left(\frac{r_g}{a_e} \right)^3 \cos^2 \varphi \right],$$

$$q = a_e^3 \omega^2 / fM. \quad (91.1)$$

Геоцентрический радиус проекции точки Q на геоид по радиусу-вектору находят из выражения

$$r_g = r - h \sec(r, h). \quad (91.2)$$

Для каждой точки вычисляют геоцентрический радиус r_{gi} и значение потенциала W_{0i} ($i=1, 2, \dots, n$), определяют средневековое значение W_0 . Затем вычисляют масштабный множитель

$$R_g = fM/W_0 \quad (91.3)$$

и радиус-вектор любой произвольной точки геоида по формуле

$$r_g = R_g \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a_e}{r_g} \right)^n (I_{nm} \cos m\lambda + \right. \\ \left. + K_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi) + \frac{1}{2} q \left(\frac{r_g}{a_e} \right)^3 \cos^2 \varphi \right]. \quad (91.4)$$

Таким образом, геоид представляется семейством точек с геоцентрическими координатами r_g , φ , λ . При этом геоцентрический радиус каждой точки геоида вычисляется по формуле (91.4) по исходным параметрам fM , a_e , ω , I_{nm} , K_{nm} .

В правой части этой формулы стоит определяемая величина r_g . Исключим r_g , подставляя $r_g = r_0 + \zeta$, где

$$r_0 = a_e (1 + e'^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}} - \quad (91.5)$$

— геоцентрический радиус точки на поверхности уровня эллипсоида; ζ — высота геоида, по величине не превышающая 100—120 м.

Оценим главные члены в разложении (91.4):

$$\delta r = \frac{1}{2} R_g \left[q \left(\frac{r_g}{a_e} \right)^3 \cos^2 \varphi - \left(\frac{a_e}{r_g} \right)^2 (3 \sin^2 \varphi - 1) I_2 \right],$$

подставив $r_g = r_0 + \zeta$. Остальные члены разложения (91.4) настолько малы по отношению ко второму члену, что для них можно принять $r_g = r_0$.

Заметим, что $R_g \approx a_e \approx r_0$,

$$\left(\frac{a_e}{r_g} \right)^2 = \left(\frac{a_e}{r_0 + \zeta} \right)^2 \approx \left(\frac{a_e}{r_0} \right)^2 - 2 \frac{\zeta}{r_0},$$

$$\left(\frac{r_g}{a_e} \right)^3 = \left(\frac{r_0 + \zeta}{a_e} \right)^3 \approx \left(\frac{r_0}{a_e} \right)^3 + 3 \frac{\zeta}{r_0}.$$

Тогда главный член будет:

$$\delta r = \frac{1}{2} R_g \left[q \left(\frac{r_0}{a_e} \right)^3 \cos^2 \varphi - \left(\frac{a_e}{r_0} \right)^2 (3 \sin^2 \varphi - 1) I_2 + \right. \\ \left. + \frac{3}{2} \zeta q \cos^2 \varphi + (3 \sin^2 \varphi - 1) \zeta I_2 = \right.$$

$$= \frac{1}{2} R_g \left[q \left(\frac{r_0}{a_e} \right)^3 \cos^2 \varphi - \left(\frac{a_e}{r_0} \right)^2 (3 \sin^2 \varphi - 1) I_2 \right] + (r_g^0 - r_0) \left[\frac{3}{2} q \cos^2 \varphi + (3 \sin^2 \varphi - 1) I_2 \right].$$

Обозначим

$$r_g^0 = R_g \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a_e}{r_0} \right)^n (I_{nm} \cos m\lambda + K_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi) + \frac{1}{2} q \left(\frac{r_0}{a_e} \right)^3 \cos^2 \varphi \right]; \quad (91.6)$$

$$v = \frac{3}{2} q \cos^2 \varphi + I_2 (3 \sin^2 \varphi - 1). \quad (91.7)$$

Подставим значение δr в формулу (91.4), получим

$$r_g = R_g \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a_e}{r_0} \right)^n (I_{nm} \cos m\lambda + K_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi) + \frac{1}{2} q \left(\frac{r_0}{a_e} \right)^3 \cos^2 \varphi \right] + (r_g^0 - r_0) v. \quad (91.8)$$

Положим $I_2 = 0,00108$, $q = 0,00346$, $r_g^0 - r_0 = 100$ м, тогда поправочный член $(r_g^0 - r_0) v$ равен 0,4 м. Ясно, что когда требуется высокая точность оценки высот геоида, поправочный член необходимо учитывать.

Высоту геоида вычисляют по формуле $\zeta = (r_g - r_0) \cos(r_0, n)$. Поскольку $|r_g - r_0| \approx 100$ м, $|1 - \cos(r_0, n)| \approx 0,000005$, то можно принять

$$\zeta = r_g - r_0. \quad (91.9)$$

Значения геоцентрических радиусов геоида и урванного эллипсоида вычисляют по формулам (91.8) и (91.5). Рассмотренным способом можно наиболее просто и строго вычислять геоцентрический радиус r_g и высоту ζ геоида над урванным эллипсоидом.

Если требуется предельно достижимая точность вычисления геоцентрического радиуса r_g геоида, то рекомендуется использовать уравнение геоида (91.4), представленное непосредственно через r_g , как итерационную формулу или в правую часть уравнения (91.4) подставлять числимое значение (91.6), известное с точностью 0,4 м, т. е.

$$r_g = R_g \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a_e}{r_g^0} \right)^n (I_{nm} \cos m\lambda + K_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi) + \frac{1}{2} q \left(\frac{r_g^0}{a_e} \right)^3 \cos^2 \varphi \right] + (r_g^0 - r_0) v.$$

$$+ K_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi) + \frac{1}{2} q \left(\frac{r_g^0}{a_e} \right)^3 \cos^2 \varphi \Big]. \quad (91.10)$$

Выведенные формулы позволяют вычислять геоцентрический радиус r_g геоида с точностью, удовлетворяющей самым высоким требованиям практики. Однако точность определения геоцентрического радиуса геоида ограничена точностью определения гармонических коэффициентов I_{nm} , K_{nm} и сходимостью разложения (91.4).

В перспективе указанная задача более строго может быть решена, если представить геогравитационный потенциал через потенциалы планетарных точечных масс, расположенных на эллипсоидальных поверхностях и на различных глубинах. При этом для детального изучения отдельных регионов и акваторий океанов систему планетарных точечных масс можно будет дополнить эллипсоидальными слоями различной плотности в этих изучаемых областях [13].

Изучение топографии поверхностей морей и Мирового океана. Разность геоцентрических радиусов соответствующих точек поверхности геоида r_g и водной поверхности r представляет рельеф поверхности моря или океана, т. е.

$$h_0 = r - r_g.$$

Спутниковое нивелирование в сочетании с другими спутниковыми геодезическими данными позволяет оперативно определять геоцентрические радиусы точек водной поверхности в любом районе. Сравнивая геоцентрические радиусы соответствующих точек водной поверхности и геоида, можно вычислить рельеф поверхности морей и океанов. Если при этом будут отфильтрованы постоянные волны, амплитуда которых превышает точность измерения высот, то можно внести необходимые коррективы в высоты геоида в этом районе. Конечно, рельеф поверхности морей и Мирового океана целесообразно изучать таким образом, чтобы можно было бы надежно оценить волнения водной поверхности, обусловленные метеорологическими факторами, в особенности в аномальных районах, где необходимо изучать природу геодинамических процессов, происходящих в земных недрах.

Если это необходимо, то можно описать рельеф поверхности морей и океанов в период приливов, отливов, моретрясений, тайфунов и других волнений водной поверхности.

Детально сравнивая топографию водной поверхности и дна морей и океанов, можно надежно вычислять тесноту их корреляции и вскрывать причинно-следственные связи для познания строения литосферы и мантии Земли.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОСНОВНЫХ ПАРАМЕТРОВ ЗЕМЛИ

§ 92. ПАРАМЕТРЫ НОРМАЛЬНОЙ ЗЕМЛИ
И СОГЛАСУЮЩИЕ ФОРМУЛЫ

За Нормальную Землю принимают двухосный эллипсоид, масса, центр инерции, ось и угловая скорость вращения которого совпадают с соответствующими параметрами реальной Земли, а по форме и размеру наилучшим образом аппроксимируют геоид в планетарном масштабе. Приняв за основные параметры экваториальный радиус геоида a_e , планетоцентрическую гравитационную постоянную fM , коэффициент нулевого порядка I_2 второй зональной гармоники гравитационного потенциала и угловую скорость $\omega_\oplus$ вращения Земли, все другие параметры Нормальной Земли можно вычислить по согласующим формулам. По существу Нормальная Земля представляется двухосным эллипсоидом, все элементы которого строго согласуются с основными параметрами fM , a_e , I_2 , $\omega_\oplus$, называемыми фундаментальными геодезическими параметрами Земли.

Фундаментальные геодезические параметры как фундаментальные параметры Земли совместно с астрометрическими и геофизическими параметрами используются всеми науками о Земле. При этом для некоторых геодезических, астрометрических и геофизических параметров также имеются согласующие формулы [13].

В этой главе нас будут интересовать согласующие формулы параметров Нормальной Земли. Вывод их выходит за рамки курса, и поэтому они приводятся здесь в окончательном виде*:

$$\begin{aligned} \alpha = & \frac{3}{2} I_2 + \frac{1}{2} q + \frac{9}{8} I_2^2 - \frac{11}{56} q^2 - \frac{3}{14} I_2 q + \\ & + \frac{9}{98} I_2^2 q + \frac{27}{16} I_2^3 + \frac{9}{98} q^3 + \frac{93}{784} I_2 q^2; \end{aligned} \quad (92.1)$$

$$\begin{aligned} \alpha^2 = & \frac{9}{4} I_2 + \frac{1}{4} q^2 + \frac{3}{2} I_2 q + \frac{27}{8} I_2^2 + \\ & + \frac{27}{56} I_2^2 q - \frac{45}{56} I_2 q^2 - \frac{11}{56} q^3; \end{aligned} \quad (92.2)$$

$$\alpha^3 = \frac{27}{8} I_2^3 + \frac{1}{8} q^3 + \frac{27}{8} I_2^2 q + \frac{9}{8} I_2 q^2; \quad (92.3)$$

$$\begin{aligned} I_4 = & \frac{4}{7} \alpha q - \frac{4}{5} \alpha^2 + \frac{4}{5} \alpha^3 - \frac{50}{49} \alpha^2 q = \\ = & -\frac{9}{5} I_2^2 + \frac{3}{35} q^2 - \frac{12}{35} I_2 q - \frac{27}{245} q^3 + \end{aligned}$$

* Подробный вывод согласующих формул приведен в [13].

$$+\frac{162}{245}I_2^2q-\frac{27}{245}I_2q^2; \quad (92.4)$$

$$I_6=\frac{8}{7}\alpha^3-\frac{20}{21}\alpha^2q=\frac{27}{7}I_2^3+ \\ +\frac{12}{7}I_2^2q-\frac{1}{7}I_2q^2-\frac{2}{21}q^3; \quad (92.5)$$

$$W_0=\frac{fM}{a_e}\left(1+\frac{1}{3}\alpha+\frac{1}{3}q+\frac{2}{15}\alpha^2+\frac{2}{35}\alpha^3\right)= \\ =\frac{fM}{a_e}\left(1+\frac{1}{2}q+\frac{1}{2}I_2+\frac{27}{40}I_2^2-\frac{9}{280}q^2+ \right. \\ \left. +\frac{9}{70}I_2q+\frac{135}{112}I_2^3+\frac{141}{490}I_2^2q+\frac{17}{1470}q^3-\frac{13}{3930}I_2q^2\right); \quad (92.6)$$

$$\gamma_e=\frac{fM}{a_e^2}\left(1-\frac{3}{2}q+\alpha+\alpha^2-\frac{3}{7}\alpha q+\alpha^3- \right. \\ \left. -\frac{125}{294}\alpha^2q\right)=\frac{fM}{a_e^2}\left(1+\frac{3}{2}I_2-q+ \right. \\ \left. +\frac{27}{8}I_2^2-\frac{9}{56}q^2+\frac{9}{14}I_2q+\frac{135}{16}I_2^3- \right. \\ \left. -\frac{1}{588}q^3+\frac{123}{49}I_2^2q-\frac{83}{784}I_2q^2\right); \quad (92.7)$$

$$\gamma_p=\frac{fM}{a_e^2}\left[1+\left(1-\frac{\alpha}{7}-\frac{\alpha^2}{147}\right)q\right]; \quad (92.8)$$

$$fM=a_e^2\gamma_e\left(1-\frac{3}{2}I_2+q-\frac{9}{8}I_2^2+\frac{65}{56}q^2- \right. \\ \left. -\frac{51}{14}I_2q-\frac{27}{16}I_2^3+\frac{389}{294}q^3-\frac{57}{98}I_2^2q- \right. \\ \left. -\frac{4831}{784}I_2q^2\right)=a_e^2\gamma_e\left(1-\alpha+\frac{3}{2}q-\frac{18}{7}\alpha q+ \right. \\ \left. +\frac{9}{4}q^2+\frac{27}{8}q^3-\frac{153}{28}\alpha q^2+\frac{157}{147}\alpha^2q\right); \quad (92.9)$$

$$\gamma_0=\gamma_e(1+\beta_2\sin^2B+\beta_4\sin^4B+\beta_6\sin^6B+\dots)= \\ =\gamma_e(1+\beta_2'\sin^2\varphi+\beta_4'\sin^4\varphi+\beta_6'\sin^6\varphi+\dots); \quad (92.10)$$

$$\beta_2=\frac{5}{2}q-\alpha+\frac{15}{14}q^2-\frac{87}{14}\alpha q+\frac{1}{2}\alpha^2+ \\ +\frac{45}{8}q^3-12\alpha q^2+\frac{241}{4}\alpha^2q;$$

$$\beta_4 = \frac{5}{2} \alpha q - \frac{1}{2} \alpha^2 + \frac{1}{2} \alpha^3 - \frac{209}{28} \alpha^2 q + \frac{15}{4} \alpha q^2;$$

$$\beta_6 = \frac{15}{4} \alpha^2 q - \frac{1}{2} \alpha^3; \quad (92.11)$$

$$\beta'_2 = \frac{5}{2} q - \alpha + \frac{53}{14} \alpha q - \frac{7}{2} \alpha^2 + \frac{15}{4} q^2 -$$

$$- 8\alpha^3 + \frac{45}{8} q^3 + 3\alpha q^2 + \frac{248}{49} \alpha^2 q;$$

$$\beta'_4 = -\frac{15}{2} \alpha q + \frac{7}{2} \alpha^2 + \frac{41}{2} \alpha^3 - \frac{45}{4} \alpha q^2 - \frac{773}{28} \alpha^2 q;$$

$$\beta'_6 = \frac{95}{4} \alpha^2 q - \frac{25}{2} \alpha^3.$$

$$\beta = \frac{\gamma_p - \gamma_e}{\gamma_e} = \frac{5}{2} q - \alpha + \frac{15}{4} q^2 - \frac{26}{7} \alpha q +$$

$$+ \frac{45}{8} q^3 - \frac{33}{4} \alpha q^2 + \frac{59}{49} \alpha^2 q; \quad (92.12)$$

$$q = \frac{a_e^3 \omega^2}{fM}; \quad (92.13)$$

$$R_0 = \frac{fM}{W_0} = a_e \left(1 + \frac{1}{3} \alpha + \frac{1}{3} q + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{15} \alpha^2 + \frac{2}{35} \alpha^3 \right). \quad (92.14)$$

В формулах (92.1)–(92.14) приняты следующие обозначения: I_2, I_4, I_6 — коэффициенты гармоник гравитационного потенциала Нормальной Земли; $fM, a_e, \omega_\oplus$ — геоцентрическая гравитационная постоянная, экваториальный радиус и угловая скорость вращения Земли;

W_0, γ_e, γ_p — потенциал, ускорения силы тяжести на экваторе и на полюсе уровенного двухосного эллипсоида, принятого за Нормальную Землю;

β_{2i}, β'_{2i} ($i = 1, 2, 3$) — коэффициенты разложения для ускорения силы тяжести на поверхности уровенного эллипсоида по четным степеням синуса геодезической B и геоцентрической φ широты;

R_0 — линейный масштабный коэффициент, используемый при вычислениях параметров планетарного геоида.

По этим же согласующим формулам можно вычислить нормальные параметры любого планетарного тела (Луны и планет Солнечной системы), если зафиксированы фундаментальные параметры fM, a_e, I_2, ω .

Параметры Нормальной Земли и Нормальной Луны, вычисленные по согласующим формулам (92.1) — (92.14), представлены в табл. 14.

Т а б л и ц а 14. Параметры Нормальной Земли и Нормальной Луны

Параметры	Земля G1	Земля G2	Луна S1
a_e , м	6 378 140	6 378 137	1 738 000
fM , км ³ /с ²	398 600,5*	398 600,5*	4902,709
fM_a , км ³ /с ²	0,35	0,35	0
$I_2 \cdot 10^6$	1082,63	1082,63	210,00
ω , рад/с	$0,7292115 \cdot 10^{-4}$	$0,7292115 \cdot 10^{-4}$	$0,26616955 \cdot 10^{-5}$
$I_4 \cdot 10^9$	—2370,971	—2370,972	—79,92
$I_6 \cdot 10^9$	6,017	6,017	0,04
$\alpha \cdot 10^6$	3352,814639	3352,812199	318,842436
α^{-1}	298,25687	298,25709	3136,3454
$q \cdot 10^6$	3461,399315	3461,394431	7,586322
γ_e , 10^{-3}	978 030,8904	978 031,8153	162 356,6661
см · с ⁻²			
γ_p , 10^{-3}	983 216,8565	983 217,7767	162 307,9776
см · с ⁻²			
W_0 , м ² /с ²	62 636 776,6362	62 636 805,9451	2 821 198,2130
R_0 , м	6 363 675,965	6 363 672,987	1 737 810,885
$\beta_2 \cdot 10^6$	5 279,057297	5 279,047546	—299,840614
$\beta_4 \cdot 10^6$	23,271937	23,271884	—0,044773
$\beta_6 \cdot 10^6$	0,127071	0,127070	—0,000013
$\beta \cdot 10^6$	5302,456305	5302,446500	—299,885400
α^2	$0,1124136600 \cdot 10^{-4}$	$0,1124134964 \cdot 10^{-4}$	$0,101660 \cdot 10^{-6}$
αq	$0,1160543029 \cdot 10^{-4}$	$0,1160540547 \cdot 10^{-4}$	$0,2419 \cdot 10^{-8}$
q^2	$0,119828521 \cdot 10^{-4}$	$0,1198125140 \cdot 10^{-4}$	$0,58 \cdot 10^{-10}$
α^3	$0,376902 \cdot 10^{-7}$	$0,376901 \cdot 10^{-7}$	$0,32 \cdot 10^{-10}$
$\alpha^2 q$	$0,389109 \cdot 10^{-7}$	$0,389107 \cdot 10^{-7}$	$1 \cdot 10^{-12}$
αq^2	$0,401710 \cdot 10^{-7}$	$0,401709 \cdot 10^{-7}$	$1 \cdot 10^{-12}$
q^3	$0,414720 \cdot 10^{-7}$	$0,414718 \cdot 10^{-7}$	$1 \cdot 10^{-12}$

* Включая атмосферу.

При вычислениях относительная масса атмосферы Земли принята равной $\mu_a = 0,898356 \cdot 10^{-6}$, а относительная масса Луны — $\mu = 0,012299794$.

В табл. 14 приведены малые величины второго и третьего порядков полярного сжатия Земли и Луны, которые будут полезны для оценки согласия параметров Нормальной планеты, выводимых указанными выше формулами.

Модели G1, G2 и S1, аппроксимирующие гравитационные фигуры Земли и Луны, современным определениям, видимо, соответствуют наилучшим образом, и их можно рекомендовать планетодезическим, планетофизическим и другим наукам, занимающимся изучением планет и их естественных спутников.

§ 93. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЕОЦЕНТРИЧЕСКОЙ ГРАВИТАЦИОННОЙ ПОСТОЯННОЙ

Геоцентрическая гравитационная постоянная fM и скорость света в вакууме c относятся к фундаментальным постоянным, определяющим масштаб околоземного пространства. В настоящее время скорость света в вакууме настолько точно определена, что ее значение $c = (299\,792\,458 \pm 1,2)$ м/с стандартизовано международными соглашениями на долгие годы.

Гравитационную постоянную fM можно надежно определить из обработки траекторных измерений КА, направляемых к другим планетам, на пассивном участке траекторий на значительном удалении от Земли, где удается достаточно точно учесть все гравитационные и негравитационные эффекты и теорию движения КА свести к задаче двух тел.

В этом случае интеграл энергии

$$\bar{V}^2 = f(M+m) \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \quad (93.1)$$

будет исходным уравнением. При этом отношение массы КА к массе Земли можно принять равным нулю. Рассмотрим способ определения геоцентрической гравитационной постоянной при принятом значении скорости света. Пусть известны скорость движения $\bar{V}$ и геоцентрическое расстояние r космического аппарата. Тогда, пользуясь интегралом энергии, пишем систему уравнений

$$\Phi_i = fM - r_i h - \frac{1}{2} r_i \bar{V}_i^2 = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (93.2)$$

где $h = \frac{fM}{2a}$. Систему (93.2) представим в линейной форме

$$\Phi_i = \Phi_i^0 + \delta fM - r_i^0 \delta h - \left(h^0 + \frac{1}{2} \bar{V}_i^{0^2} \right) \delta r_i - r_i^0 \bar{V}_i^0 \delta \bar{V}_i = 0, \quad (93.3)$$

$$\text{где } W_i = \Phi_i^0 = fM^0 - r_i^0 h^0 - \frac{1}{2} r_i^0 \bar{V}_i^{0^2};$$

δfM и δh — поправки к численным значениям fM^0 и h^0 ; δr_i и $\delta \bar{V}_i$ — поправки к измеренным значениям r_i^0 и $\bar{V}_i^0$.

Полагая известными веса измеренных величин p_i^r и p_i^v , уравнение (93.3) можно заменить эквивалентным уравнением [14]

$$v_i = \delta fM - r_i^0 \delta h + W_i \quad (93.4)$$

с весом

$$p_i = \left[\sum_{i=1}^n \left(h_i^0 + \frac{1}{2} \bar{V}_i^{0^2} \right)^2 / p_i^r + (r_i^0 \bar{V}_i^0)^2 / p_i^v \right]^{-1}, \quad (93.5)$$

$$\text{где } v_i = \left(h^0 + \frac{1}{2} \bar{V}_i^{0^2} \right) \delta r_i + r_i^0 \bar{V}_i^{0^2} \delta \bar{V}_i.$$

Решая систему (93.4) методом наименьших квадратов, получим нормальные уравнения

$$\begin{aligned} [p] \delta fM - [pr^0] \delta h + [pW] &= 0, \\ -[pr^0] \delta fM + [pr^0] \delta h + [pr^0 W] &= 0 \end{aligned} \quad (93.6)$$

относительно искоемых параметров δfM и δh , записанные в символах Гаусса. Из решения уравнений (93.6) определяем искомые параметры с полной их оценкой. Отметим важные для практики частные случаи приложения теории.

Для параболической орбиты ($a = \infty$) решение (93.6) всегда имеется и поправка в геоцентрическую гравитационную постоянную

$$\begin{aligned} \delta fM &= - \frac{[pW]}{[p]}; \quad p_i = \left[\sum_{i=1}^n \bar{V}_i^{0^4} / 4p_i^r + (r_i^0 \bar{V}_i^{0^2})^2 p_i^v \right]^{-1}; \\ W_i &= fM^0 - \frac{1}{2} r_i^0 \bar{V}_i^{0^2}. \end{aligned} \quad (93.7)$$

Для гиперболической и вытянутой эллиптической орбит надежное решение возможно при больших разбросах r_i по величине.

Для круговой орбиты ($r_i = a$) коэффициент корреляции $K(fM, h)$ равен единице и решение возможно в форме (93.1)

При этом

$$\delta fM = - \frac{[W]}{n}; \quad W_i = fM^0 - r_i^0 \bar{V}_i^{0^2}. \quad (93.8)$$

Для квазикруговой орбиты коэффициент корреляции в первом приближении $K(fM, h) = 1 - e^2$ и близок к единице. Поэтому при уточнении fM с начальными условиями и координатами станций наблюдений могут возникнуть непреодолимые трудности, связанные с плохой обусловленностью нормальных уравнений.

В случае квазикруговой орбиты можно использовать зависимость fM , среднего движения n и большой полуоси a орбиты небесного объекта. Так, например, по лазерной светолокации Луны можно определить fM , используя известное соотношение

$$fM = \frac{n_{\odot}^2 (1 + v_{\odot})^3}{1 + \mu} a_{\odot}^3, \quad (93.9)$$

вытекающее из третьего закона Кеплера. В этой формуле $n_{\odot}$ — среднее движение Луны; μ — отношение массы Луны к массе Земли; $a_{\odot}$ — большая полуось вариационной орбиты Луны; $v_{\odot}$ — параметр, учитывающий возмущения от Солнца.

По лазерной светолокации Луны, выполненной обсерваторией Макдональд (США), значение $fM = (398\,600,48 \pm 0,1) \text{ км}^3/\text{с}^2$

определено, исходя из заданного геоцентрического положения обсерватории. Это значение точно совпадает с уравненным значением fM , полученным из обработки 11 определений fM последних лет.

Геоцентрическую гравитационную постоянную fM можно определить по наблюдениям ИСЗ, обращающихся на квазикруговых орбитах, используя формулу, подобную формуле (93.9) лунной светолокации. Однако при этом из-за близости ИСЗ к Земле необходимо более точно учитывать возмущающее влияние геогравиационного потенциала на движение ИСЗ, в первую очередь на среднее движение n и большую полуось a орбиты ИСЗ. Для априорной оценки примем

$$a = \frac{fM}{V},$$

$$n^2 = \frac{fM}{a^3} = \left(\frac{V}{fM} \right)^2 V. \quad (93.10)$$

где V — геогравитационный потенциал. Из этих формул следуют следующие оценки:

$$\frac{m_a}{a} = \frac{m_V}{V}; \quad \frac{m_n}{n} = \frac{3}{2} \frac{m_V}{V}; \quad \frac{m_{fM}}{fM} = 3\sqrt{2} \frac{m_V}{V}. \quad (93.11)$$

Если, например, $m_V/V = 10^{-6}$, то $m_{fM} \approx 1,6 \text{ км}^3/\text{с}^2$ ($fM = 398\,600 \text{ км}^3/\text{с}^2$).

Таким образом, точность определения fM по наблюдениям на квазикруговых орбитах будет сравнима с точностью определения fM по наблюдениям КА и лазерной локации Луны [14] в том случае, если относительная ошибка определения геогравиационного потенциала будет в пределах $0,3 \cdot 10^{-7}$.

§ 94. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВТОРОГО ГАРМОНИЧЕСКОГО КОЭФФИЦИЕНТА ГЕОГРАВИТАЦИОННОГО ПОТЕНЦИАЛА ПО ВОЗМУЩЕНИЯМ ЭЛЕМЕНТОВ ОРБИТЫ ИСЗ

Запишем дифференциальное уравнение Лагранжа

$$\dot{\Omega} = \frac{1}{\sqrt{pfM} \sin i} \cdot \frac{\partial R}{\partial i},$$

$$\dot{\omega} = -\frac{1}{\sqrt{pfM} \operatorname{tg} i} \cdot \frac{\partial R}{\partial i} + \frac{e}{e^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{pfM}} \cdot \frac{\partial R}{\partial e} \quad (94.1)$$

для долготы Ω узла и углового расстояния ω перигея орбиты ИСЗ, претерпевающих вековые и долгопериодические возмуще-

ния от второй зональной гармонике геогравитационного потенциала (главной пертурбационной функции):

$$R = -\frac{fM}{r} \left(\frac{a_e}{r} \right)^2 \left(\frac{3}{2} \frac{z^2}{r^2} - \frac{1}{2} \right) I_2, \quad (94.2)$$

где $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Для вывода частных производных, содержащихся в дифференциальных уравнениях (94.1), используем следующие формулы:

$$\begin{aligned} x &= r (\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i), \\ y &= r (\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i), \end{aligned} \quad (94.3)$$

$$\begin{aligned} z &= r \sin u \sin i, \\ r &= a (1 - e \cos E). \end{aligned} \quad (94.4)$$

$$\frac{\partial R}{\partial i} = \frac{\partial R}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial i} + \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial i},$$

$$\frac{\partial R}{\partial e} = \frac{\partial R}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial e} + \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial e},$$

$$\frac{\partial r}{\partial i} = 0; \quad \frac{\partial r}{\partial e} = -a \cos E; \quad \frac{\partial z}{\partial i} = r \sin u \cos i,$$

$$\frac{\partial z}{\partial e} = \frac{\partial z}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial e} = \frac{z}{r} \frac{\partial r}{\partial e}.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial r} &= \frac{3}{2} \frac{1}{r} \frac{fM}{r} \left(\frac{a_e}{r} \right)^2 \left(5 \frac{z^2}{r^2} - 1 \right) I_2, \\ \frac{\partial R}{\partial z} &= -3 \frac{1}{r} \frac{fM}{r} \left(\frac{a_e}{r} \right)^2 \frac{z}{r} I_2. \end{aligned} \quad (94.5)$$

Применяя формулы (94.5), находим искомые частные производные пертурбационной функции R (94.2) по наклонению i и эксцентриситету e орбиты:

$$\frac{\partial R}{\partial i} = -3 \frac{fM}{r} \left(\frac{a_e}{r} \right)^2 I_2 (1 - \cos^2 u) \sin i \cos i, \quad (94.6)$$

$$\frac{\partial R}{\partial e} = \frac{3}{2} \frac{\cos E}{1 - e \cos E} \frac{fM}{r} \left(\frac{a_e}{r} \right)^2 I_2 (1 - 3 \sin^2 u \sin^2 i).$$

Затем подставляем в уравнения (94.1) найденные значения частных производных (94.6) и получаем уравнения

$$\dot{\Omega} = -\frac{3}{r} \sqrt{\frac{fM}{p}} \left(\frac{a_e}{r} \right)^2 I_2 (1 - \cos^2 u) \cos i, \quad (94.7)$$

$$\dot{\omega} = \frac{3}{r} \sqrt{\frac{fM}{p}} \left(\frac{a_e}{r} \right)^2 I_2 [(1 - \cos^2 u) \cos^2 i + \\ + \frac{e}{2e'^2} \frac{\cos E}{1 - e \cos E} (1 - 3 \sin^2 u \sin^2 i)],$$

правые части которых представлены через элементы орбиты и фундаментальные постоянные Земли fM , a_e и I_2 .

Рассматривая уравнения (94.7), заключаем, что вторая гармоника (94.2) обуславливает вековые и периодические возмущения долготы Ω узла и углового расстояния ω перигея орбиты ИСЗ.

Имея наблюдательный материал и фиксируя значения фундаментальных параметров Земли fM и a_e , решаем систему уравнений (94.7) относительно искомого параметра I_2 . Длительный ряд наблюдений большого числа ИСЗ с различными элементами орбит дает оценку второго гармонического коэффициента I_2 геогравитационного потенциала с такой точностью, что представляется возможным определение его изменений во времени.

Если известны второй гармонический коэффициент I_2 и параметр $q = \omega_{\oplus}^2 a_e^3 / fM$, то по формуле (92.1) можно вычислить точно полярное сжатие земного эллипсоида.

§ 95. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ЗЕМНОГО ЭЛЛИПСОИДА ВРАЩЕНИЯ

Пусть для точек $Q_i (i=1, 2, \dots, n)$ земной поверхности и околоземного пространства с известными геоцентрическими координатами X_i , Y_i , Z_i заданы нормальные высоты H_i^{γ} . При этом если за точку Q принять наземный пункт, то предполагается, что его нормальная высота определена методами наземной геодезии. Если же за точку Q принят ИСЗ, то предполагается, что его нормальная высота определена спутниковым нивелированием.

Искомые поправки к предварительным значениям большой полуоси a^0 и полярного сжатия α^0 земного эллипсоида вращения обозначим соответственно через δa и $\delta \alpha$. Геоцентрическую высоту точки Q_i над общим земным эллипсоидом вращения с параметрами $a = a^0 + \delta a$, $\alpha = \alpha^0 + \delta \alpha$ можно представить таким образом, что

$$H_i = H_i^0 - \frac{a^0}{N_i^0} \delta a + N_i^0 \sin^2 B_i^0 \delta \alpha, \quad (95.1)$$

где H_i^0 — геодезическая высота; N_i^0 — радиус кривизны нормального сечения; B_i^0 — широта точки Q_i относительно земного эллипсоида с параметрами a^0 и α^0 . Теперь геодезическую высоту H представим как сумму нормальной высоты H_i^{γ} и высоты геоида ζ над общим земным эллипсоидом, т. е.

$$H_i = H_i^{\gamma} + \zeta_i. \quad (95.2)$$

Используя приведенные выше формулы (95.1) и (95.2), для высоты геоида ζ_i каждой точки Q_i получим формулу

$$\zeta_i = -\frac{a^0}{N_i^0} \delta a + N_i^0 \sin^2 B_i^0 \delta \alpha + H_i^0 - H_i^\gamma.$$

Заметим, что свободный член в этой формуле представляет собой высоту геоида $\zeta_i^0 = H_i^0 - H_i^\gamma$ над земным эллипсоидом с параметрами a^0 и α^0 . Поэтому запишем ее в виде

$$\zeta_i = -\frac{a^0}{N_i^0} \delta a + N_i^0 \sin^2 B_i^0 \delta \alpha + \zeta_i^0. \quad (95.3)$$

Так как каждая точка Q_i доставляет одно уравнение (95.3), то получим систему n уравнений. Решая их под условием $[p\zeta^2] = \min$, получим искомые величины ζ_i , δa , $\delta \alpha$ с полной оценкой. При этом если совокупность точек Q_i ($i=1, 2, \dots, n$) равномерно размещена на поверхности планеты, то будет выполнена наилучшая оценка искомых величин. В настоящее время наибольший вклад в решение этой задачи вносит спутниковое нивелирование, представляющее геоид на каждую эпоху в планетарном масштабе.

Сжатие земного эллипсоида практически выгодно определять как производную постоянную, используя формулы, приведенные в § 92.

Следовательно, в уравнении (95.3) можно исключить поправку $\delta \alpha$, полагая известным полярное сжатие α земного эллипсоида. Тогда для обработки примем уравнение

$$\zeta_i = -A_{0i} \delta a + \zeta_i^0, \quad (95.4)$$

где ζ_i^0 — высота геоида над земным эллипсоидом с параметрами a^0 и α ; $A_{0i} = a^0/N_i^0$.

Искомая поправка большой полуоси будет

$$\delta a = \frac{[pA_0\zeta^0]}{[pA_0^2]}. \quad (95.5)$$

Если геоид аппроксимируется земным эллипсоидом таким образом, чтобы сумма высот геоида была бы равна нулю, то с учетом весов уравнений (95.4) поправка большой полуоси такого земного эллипсоида

$$\delta a = \frac{[p\zeta^0]}{[pA_0]}. \quad (95.6)$$

Затем по уточненному значению большой полуоси земного эллипсоида по соответствующим формулам (§ 92) вычисляют согласованные значения полярного сжатия α и урванного потенциала W_0 земного эллипсоида.

Зафиксировав фундаментальные параметры Земли на эпоху, можно приступить к новой обработке данных наземной геоде-

зии и спутниковых наблюдений с целью вывода параметров планетарной геоцентрической системы геодезических координат и внешнего гравитационного поля Земли [13].

Имея уточненные значения параметров внешнего гравитационного поля Земли, можно вычислить геоцентрический радиус r_{gi} геоида для каждой элементарной площадки с координатами φ_i, λ_i , (§ 91) и высоту геоида по формулам:

$$\xi_i^0 = r_{gi} - r_{oi}; \quad (95.7)$$

$$r_{oi} = a^0 A_i; \quad A_i = (1 + e'^2 \sin^2 \varphi_i)^{-\frac{1}{2}}.$$

Решая (95.7) под условием $[p\xi^2] = \min$, находим уточненное значение большой полуоси земного эллипсоида

$$a = \frac{[pAr_g]}{[pA^2]} \quad (95.8)$$

или

$$a = \frac{[pr_g]}{[pA]}, \quad (95.9)$$

если отыскивается эллипсоид под условием $[p\xi] = 0$.

Затем по соответствующим формулам можно вычислить новые согласованные значения полярного сжатия α и уровня потенциала W_0 земного эллипсоида вращения. Таким образом, определение параметров земного эллипсоида основано на использовании данных наземной геодезии и спутниковых наблюдений с учетом формул, согласующих параметры земного эллипсоида с фундаментальными параметрами. Так как большая полуось земного эллипсоида представляется как среднее значение экваториального радиуса геоида a_e и входит в список фундаментальных постоянных Земли, то процесс последовательных приближений в определении параметров земного эллипсоида неизбежен.

Если гравиметрические определения дают независимую оценку ускорения силы тяжести γ_e на экваторе, то при выводе большой полуоси можно использовать формулу (92.9). Например, можно применить формулу [14]

$$fM = 1,00183636a_e^2\gamma_e \quad (95.10)$$

с учетом массы земной атмосферы для согласования независимых определений трех постоянных или вывода значения одной постоянной по известным значениям двух других постоянных.

§ 96. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ТРЕХОСНОГО ЗЕМНОГО ЭЛЛИПСОИДА

Принципиальные положения. Определение параметров трехосного земного эллипсоида, наилучшим образом аппроксимирующего планетарные волны геоида, основано на изучении пара-

метров динамической фигуры Земли и планетарного геоида. Большая ось трехосного эллипсоида является одной из главных осей инерции, относительно которой экваториальный момент инерции A_0 Земли имеет наименьшее значение. Относительно малой экваториальной оси эллипсоида Земля обладает наибольшим экваториальным моментом инерции B_0 . Очевидно, полярная ось земного эллипсоида совпадает с осью вращения Земли, относительно которой Земля обладает наибольшим моментом инерции C_0 .

Меридиан большой оси экватора трехосного эллипсоида, совпадающий с меридианом главной оси инерции Земли u_0 , может быть определен по формуле (89.16) и для современной эпохи его долгота $= 14,9^\circ$ з. д. Таким образом, можно однозначно ориентировать экваториальный эллипс и полярную ось трехосного эллипсоида.

Фигуру и форму трехосного эллипсоида (экваториальные и полярный радиусы, полярное и экваториальное сжатия) можно определить, изучая соответствующие параметры планетарного геоида. При этом, очевидно, параметры трехосного эллипсоида, аппроксимирующего планетарные волны геоида, должны совпадать с соответствующими параметрами планетарного геоида. Отсюда ясно, что второй этап в определении параметров трехосного земного эллипсоида заключается в вычислении соответствующих параметров планетарного геоида.

Параметры планетарного геоида. Для полярного радиуса геоида, подставляя в формулу (91.10) $\varphi = \pm 90^\circ$, имеем следующую формулу:

$$\bar{r}_p = R_0 \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} (1 + e'^2)^n I_{2n} \mp \sum_{n=2}^{\infty} (1 + e'^2)^{\frac{2n-1}{2}} I_{2n-1} \right]. \quad (96.1)$$

Верхний (нижний) знак соответствует северному (южному) полюсу геоида.

Среднее значение полярного радиуса геоида

$$r_p = R_0 \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} (1 + e'^2)^n I_{2n} \right]. \quad (96.2)$$

Полярная асимметрия геоида

$$\bar{r}_{\text{сев}} - \bar{r}_{\text{южн}} = -2R_0 \sum_{n=2}^{\infty} (1 + e'^2)^{\frac{2n-1}{2}} I_{2n-1}. \quad (96.3)$$

На современную эпоху полярная асимметрия геоида составляет 42,7 м.

Экваториальные радиусы геоида вычисляют, подставляя в формулу (95.1) $\varphi = 0^\circ$. При этом $P_{nm}(\sin \varphi) = 0$ для всех значений индексов $(n + m)$ — нечетное.

Тогда экваториальный радиус геоида

$$r_e = R_0 \left[1 + \frac{1}{2} q - \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n (I_{nm} \cos m\lambda + K_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi) \right], \quad (96.4)$$

только когда $(n+m)$ — четное.

Для вычисления экстремальных значений экваториальных радиусов достаточно в формулу (96.4) подставить $\lambda = \lambda_0$ ($\lambda = 90^\circ + \lambda_0$) и получить значение максимального (минимального) экваториального радиуса геоида.

Параметры трехосного эллипсоида.

Как известно, планетоцентрический радиус трехосного эллипсоида можно представить в виде разложения по сферическим гармоникам. При этом в разложении отсутствуют все нечетные гармоники, а четные гармоники представлены только четными порядками [13]. Поэтому полярный радиус трехосного эллипсоида b равен среднему значению полярного радиуса r_p геоида, т. е.

$$b = R_0 \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} (1 + e'^2)^n I_{2n} \right]. \quad (96.5)$$

Экваториальные радиусы трехосного эллипсоида вычислим, используя четные гармоники разложения (96.4). Заметив, что $\cos 2m(90^\circ + \lambda_0) = (-1)^m \cos 2m\lambda_0$, $\sin 2m(90^\circ + \lambda_0) = (-1)^m \sin 2m\lambda_0$, формулу (96.4) для трехосного эллипсоида запишем в таком виде:

$$\begin{aligned} a_{\max} &= R_0 \left[1 + \frac{1}{2} q + \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_{2m} \right], \\ a_{\min} &= R_0 \left[1 + \frac{1}{2} q + \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \varepsilon_{2m} \right], \\ \varepsilon_{2m} &= - \sum_{n=1}^{\infty} (I_{2n \cdot 2m} \cos 2m\lambda_0 + K_{2n \cdot 2m} \sin 2m\lambda_0) P_{2n \cdot 2m}(\sin \varphi). \end{aligned} \quad (96.6)$$

Разность максимального и минимального значений экваториальных радиусов эллипсоида составляет

$$a_{\max} - a_{\min} = 2R_0 \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_{4m-2}. \quad (96.7)$$

Экваториальное сжатие эллипсоида

$$\alpha_e = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_{4m-2} / \left(1 + \frac{1}{2} q + \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_{2m} \right). \quad (96.8)$$

Полярное сжатие эллипсоида

$$\begin{aligned} \alpha_p^{\max} &= (a_{\max} - b) / a_{\max}, \\ \alpha_p^{\min} &= (a_{\min} - b) / a_{\min}. \end{aligned} \quad (96.9)$$

Для примера приведем значения ε_{2m} , вычисленные с учетом гармоник до 10-й степени*:

$$\varepsilon_0 = -\frac{1}{2} I_2 + \frac{3}{8} I_4 - \frac{5}{16} I_6 + \frac{35}{128} I_8 - \frac{63}{256} I_{10};$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 = & \left(3I_{2.2} - \frac{15}{2} I_{4.2} + \frac{105}{8} I_{6.2} - \frac{315}{16} I_{8.2} + \right. \\ & \left. + \frac{3465}{128} I_{10.2} \right) \cos 2\lambda_0 + \left(3K_{2.2} - \frac{15}{2} K_{4.2} + \right. \\ & \left. + \frac{105}{8} K_{6.2} - \frac{315}{16} K_{8.2} + \frac{3465}{128} K_{10.2} \right) \sin 2\lambda_0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_4 = & \left(105I_{4.4} - \frac{945}{2} I_{6.4} + \frac{10\,395}{8} I_{8.4} - \right. \\ & \left. - \frac{3465 \cdot 13}{16} I_{10.4} \right) \cos 4\lambda_0 + \left(105K_{4.4} - \frac{945}{2} K_{6.4} + \right. \\ & \left. + \frac{10\,395}{8} K_{8.4} - \frac{3465 \cdot 13}{16} K_{10.4} \right) \sin 4\lambda_0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_6 = & \left(10\,395I_{6.6} - \frac{135\,135}{2} I_{8.6} + \frac{51\,975 \cdot 39}{8} I_{10.6} \right) \times \\ & \times \cos 6\lambda_0 + \left(10\,395K_{6.6} - \frac{135\,135}{2} K_{8.6} + \right. \\ & \left. + \frac{51\,975 \cdot 39}{8} K_{10.6} \right) \sin 6\lambda_0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_8 = & \left(2\,027\,025I_{8.8} - \frac{155\,925 \cdot 221}{2} I_{10.8} \right) \cos 8\lambda_0 + \\ & + \left(2\,027\,025K_{8.8} - \frac{155\,925 \cdot 221}{2} K_{10.8} \right) \sin 8\lambda_0; \end{aligned}$$

$$\varepsilon_{10} = 654\,729\,075 (I_{10.10} \cos 10\lambda_0 + K_{10.10} \sin 10\lambda_0). \quad (96.10)$$

В заключение приведем параметры трехосного эллипсоида, вычисленные по модели ГЕМ-6 с учетом гармоник до 10-й степени включительно с исходными данными: $q = 3461,413750 \times 10^{-6}$; $e'^2 = 6739,4998 \cdot 10^{-6}$; $R_0 = 6363690,95$ м; $\lambda_0 = 15^\circ$ з. д.

Параметры трехосного эллипсоида

Полярный радиус b	6 356 764,90 м
Экваториальный радиус $a_{\min}$	6 378 097,00 м
$a_{\max}$	6 378 185,74 м
$a_{\text{ср}}$	6 378 141,37 м
Полярное сжатие $\alpha_p^{\max}$	1 : 297,756
$\alpha_p^{\min}$	1 : 298,990
α_p	1 : 298,373
Экваториальное сжатие α_e	1 : 71 875

* Значения сферических функций $P_{nm}(\sin \varphi)$ приведены в [13].

Раздел 7.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ, ПОЛУЧЕННЫЕ В КОСМИЧЕСКОЙ ГЕОДЕЗИИ, И ПЕРСПЕКТИВЫ ЕЕ РАЗВИТИЯ

Глава 25.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ, ПОЛУЧЕННЫЕ ИЗ НАБЛЮДЕНИЙ ИСЗ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ГЕОДЕЗИИ И ТЕОРИИ ФИГУРЫ ЗЕМЛИ

§ 97. МЕЖДУНАРОДНЫЕ И НАЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОГРАММЫ ГЕОДЕЗИЧЕСКОГО ПРИМЕНЕНИЯ ИСЗ

Сразу же после запуска в СССР 4 октября 1957 г. первого советского искусственного спутника возникла необходимость в организации и проведении его наблюдений для определения координат, прогнозирования движения. Одновременно стали разрабатываться основы использования наблюдений спутников для решения геодезических задач. Возникла и стала развиваться спутниковая геодезия как раздел космической геодезии. На первых порах теории движения ИСЗ не отличались совершенством, не была достаточно высокой точность наблюдений, поэтому основные усилия при получении геодезических выводов были направлены на разработку и реализацию геометрических методов космической геодезии и прежде всего синхронных и квазисинхронных фотографических наблюдений.

Следует отметить, что внедрению в практику синхронных наблюдений ИСЗ предшествовал период (1958—1960 гг.), когда применялись в основном визуальные наблюдения сначала с помощью простейших астрономических телескопов (астрономическая трубка АТ-1 в СССР), а в дальнейшем с использованием теодолитов (АУ-2"/10", Вильд Т-3, Аскания, ТРР, ДКМ-3, ДКМ-3А) и кинотеодолитов (Аскания). К 1 октября 1957 г. Астрономический совет АН СССР организовал и подготовил к работе 66 станций на территории Советского Союза, оснащенных астрономическими телескопами, которые использовались для наблюдений первых советских спутников. Аналогичная сеть станций была создана в США, а затем и в некоторых других странах. Общее число станций, ведущих регулярные визуальные наблюдения в разных странах, превысило 300. Однако упомянутые наблюдательные средства не обеспечивали точность результатов, необходимую для решения геодезических задач. Так, например, использование астрономической трубки АТ-1 и

аналогичных телескопов в США позволяло определять координаты спутника с ошибкой $0,2-0,3^\circ$ и обеспечивало точность временной привязки $0,1-0,3^s$. Применение теодолитов и кино-теодолитов позволяло определять положение спутника, как правило, с ошибкой $10-20''$ (есть кинотеодолиты, с помощью которых направление на спутник определяют с ошибкой $2''$), а время наблюдений — с ошибкой $0,01-0,02^s$.

В Советском Союзе синхронные фотографические наблюдения спутника Echo-1 были осуществлены впервые в мае 1961 г. на пунктах Пулково, Николаев, Харьков и Ташкент.

В синхронных наблюдениях спутника Echo-1 в мае — июне 1963 г. принимали участие станции Астрономического совета АН СССР, расположенные на территории всей страны, а также станции ГДР, ПНР, СРР, ЧССР. Поскольку наблюдения выполнялись камерами типа НАФА 3с/25 и носили пробный характер, ошибка в определении взаимного положения пунктов составила $60-70$ м. Вместе с тем, наблюдения показали возможности метода космической триангуляции, позволили усовершенствовать методику работ при синхронных наблюдениях, ускорили работы по созданию новых более совершенных фотографических камер. Стало ясно, что особую ценность спутниковые методы будут представлять при изучении гравитационного поля и формы Земли в целом как планеты, что потребует применения динамических методов, базирующихся на знании с высокой степенью точности теории движения ИСЗ. Стремление получить важные геодезические выводы, исследовать тонкие геодинамические эффекты обусловило совершенствование аппаратуры и методов наблюдений, повышение точности измерительной информации. Стала ясна целесообразность создания спутников, пригодных для решения геодезических и геодинамических задач. Изучение Земли как планеты в целом методами космической геодезии потребовало объединения усилий ученых разных стран.

Особенно плодотворным при проведении космических исследований является сотрудничество социалистических стран, осуществляющееся с 1968 г. в рамках программы «Интеркосмос» при участии НРБ, ВНР, ГДР, Республики Куба, МНР, ПНР, СРР, СССР и ЧССР. Программа предусматривает, в частности, выполнение исследований по космической геодезии. В составе рабочей группы «Космическая физика» действует секция № 6 «Использование оптических наблюдений спутников для целей геодезии и геофизики». Координатором работ этой секции является Астрономический совет АН СССР. Секция ведет работы по трем основным направлениям: спутниковая геодезия и геодинамика, исследования верхней атмосферы, совершенствование и создание новой аппаратуры для оптических наблюдений ИСЗ. В результате были созданы высокоточные фотографические камеры для наблюдений спутников: АФУ-75 (СССР), SBG (ГДР), ВАУ (СССР) и лазерный светодаальномер (ЛСД) «Интеркос-

мос». В создании первого ЛСД «Интеркосмос» в 1972 г. принимали участие ученые ВНР, ГДР, ПНР, СССР и ЧССР.

В настоящее время в системе Астрономического совета работает 25 станций, предназначенных для наблюдений спутников и размещенных в Европе, Азии, Африке и Антарктиде. В их числе: Байя и Пенц (ВНР), Боровец (ПНР), Бухарест (СРР), Далан-Дзадагад и Улан-Батор (МНР), Звенигород, Симеиз, Рига, Ужгород, Южно-Сахалинск (СССР), Ондражейов (ЧССР), Плана (НРБ), Потсдам (ГДР), Пхеньян (КНДР), Сантьяго-де-Куба (Куба) и др. На 20 станциях наблюдения ведутся камерами АФУ-75. В Звенигороде и Душанбе установлены камеры ВАУ. Ряд станций оснащен лазерными дальномерами «Интеркосмос».

Астрономический совет АН СССР систематически организует и проводит синхронные и квазисинхронные наблюдения спутников с целью создания космических геодезических построений. Точность этих построений повышается по мере внедрения совершенной техники наблюдений. Так, например, направления 17 хорд, соединяющих пункты наблюдений расположенные в Европе, были получены из фотографических наблюдений вспышек спутника GEOS-2, проведенных в 1968—1971 гг., со средними квадратическими ошибками $m_{\Phi_{\text{средн}}} = 2,05''$ ($m_{\Phi_{\text{min}}} = 0,35''$, $m_{\Phi_{\text{max}}} = 5,89''$) и $m_{\Delta \cos \Phi_{\text{средн}}} = 1,20''$ ($m_{\Delta \cos \Phi_{\text{min}}} = 0,35$, $m_{\Delta \cos \Phi_{\text{max}}} = 2,64''$) [11]. Приведенные результаты получены с применением «круга одновременности». Число синхронных пар наблюдений составляло для отдельных хорд от 11 до 95.

Обработка тем же методом [11] результатов одновременных фотографических и лазерных наблюдений спутника GEOS-2, выполненных на европейских станциях в 1963 г., позволила получить направления и длины хорд Сан-Фернандо — Ница (1400 км) и Сан-Фернандо — От-Прованс (1306 км). В случае первой хорды для выводов использовались 10 пар синхронных фотографических наблюдений и 9 измерений расстояний со станции Сан-Фернандо. Результаты характеризуются средними квадратическими ошибками $m_{\Delta \cos \Phi} = 1,1''$; $m_{\Phi} = 1,2''$; $m_D = 6,1$ м. Для определения хорды Сан-Фернандо — От-Прованс имелось 14 пар синхронных фотографических наблюдений и дважды измерялось расстояние со станции Сан-Фернандо. Результаты характеризуются средними квадратическими ошибками $m_{\Delta \cos \Phi} = 0,639''$; $m_{\Phi} = 0,325''$; $m_D = 3,0$ м.

С 1971 г. ведутся работы по проложению векторных ходов «Арктика — Антарктика» и «Восток — Запад». Инициаторами этой международной программы, называемой «Большая хорда», являются советские ученые И. Д. Жонголович, А. Г. Масевич и другие, координацию осуществляет Астрономический совет АН СССР. Как видно из названия, векторный ход «Арктика — Антарктика» проходит в меридиональном направлении. Другой

векторный ход «Восток — Запад» прокладывается вдоль экватора от Латинской Америки через Африку на Дальний Восток. Станции, участвующие в работе по программе «Большая хорда», оснащены фотографическими камерами и лазерными дальномерами. Отдельные хорды ходов имеют протяженность 2,5—3 тыс. км. Результирующая хорда имеет длину порядка диаметра Земли. Ожидается, что точность ее определения составит $1 \cdot 10^{-6}$.

В 1971 г. проводился Международный эксперимент по спутниковой геодезии ISAGEX, в котором участвовали также станции Астрономического совета АН СССР. В ходе эксперимента наблюдения велись на 53 станциях, расположенных на территории разных государств по всему земному шару. На 17 станциях были установлены фотографические камеры АФУ-75, на 16 — камеры Бейкера-Нанна, на 2 — камеры SBG; 11 станций были оснащены лазерными дальномерами. С целью решения динамических задач космической геодезии и определения взаимного положения пунктов велись отдельные и синхронные наблюдения спутников GEOS-1, GEOS-2, Explorer-22 (BEB), Explorer-27 (BEC), Diademe-1 (DIA), Diademe-2 (DIC), Peole, несущих лазерные отражатели, и двух пассивных ИСЗ — Midas-4 и PAGEOS.

Результаты, полученные в рамках программы ISAGEX, использовались для вывода параметров гравитационного поля Земли (модель SE-III), определения резонансных гармоник геопотенциала, изучения вращения Земли и приливных явлений.

Руководителем программы являлся Национальный центр космических исследований (Франция). В числе 5 подцентров, осуществлявших руководство работой групп станций, был Астрономический совет АН СССР.

В 1975 г. Астросоветом АН СССР была создана экспериментальная станция в Симеизе, на которой выполняются комплексные работы по использованию наблюдений ИСЗ для решения геодинамических задач. С помощью астролябии Данжона OPL-23 на станции выполняются систематические определения времени и широты. Начато также наблюдение 20 радиоисточников, отождествленных с оптическими объектами. Наблюдения спутников осуществляются с 1977 г. лазерным дальномером «Интеркосмос» (GEOS-1, GEOS-3) и лазерным дальномером второго поколения, установленным на фотографической камере SBG (Lageos, Starlette). На станции проводились также доплеровские наблюдения спутников с использованием доплеровского приемника CMA-722B.

Среди национальных программ зарубежных стран можно отметить Национальную геодезическую спутниковую программу США (NGSP), работы по которой начались с 1964 г. при координации NASA. Основные задачи NGSP заключались в создании единой Мировой геодезической системы координат из 86

пунктов (ошибка в положении не более 10 м), осуществлении связи между различными геодезическими системами, определении параметров гравитационного поля Земли, по крайней мере до 15-го порядка, исследовании вариаций гравитационного поля протяженностью порядка 1000 км. По этой программе были запущены геодезические спутники Explorer-22 (BEB), Explorer-27 (BEC), GEOS-1, -2, -3 и PAGEOS. Наличие на борту GEOS-3 спутникового радиовысотомера позволило решать не только геодезические, но и океанографические задачи.

Известны национальные французские программы «Diapason», «Diademe» и RCP-133. Частично эти программы перекрываются. Самой обширной из них является объявленная в 1967 г. программа RCP-133 (Recherche cooperative sur programme). Цель этой программы — установление геодезической связи Европы с Африкой, а в дальнейшем через Африку Европы с Америкой.

§ 98. РЕЗУЛЬТАТЫ, ПОЛУЧЕННЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

Как уже отмечалось в предыдущем параграфе, работы по созданию спутниковых геометрических построений проводились с 1961 г. в СССР и других социалистических странах. На основе наблюдений ИСЗ Echo-1 и Echo-2 в 1963 г. со станций в Звенигороде, Николаеве, Риге, Ужгороде, Бухаресте, Познани, Праге была построена экспериментальная сеть космической триангуляции, протяженность которой составила более 10 тыс. км.

Практические результаты в решении геометрических задач космической геодезии были получены на основе синхронных и квазисинхронных наблюдений камерами Бейкера — Нанна со станций, расположенных в США, Перу и на о-ве Кюрасао. Из наблюдений с мая по ноябрь 1962 г. американскими специалистами были определены направления линий, соединяющих соседние станции, с ошибкой порядка 1".

Примерно в это же время во Франции из наблюдений спутника Echo-1 была установлена геодезическая связь между четырьмя пунктами, удаленными друг от друга на несколько сотен километров. Полученные результаты характеризовались ошибкой 50 м на расстоянии в 2000 км.

В результате наблюдений в 1963—1964 гг. спутника Echo-1 была создана геодезическая сеть на востоке США, на Бермудских островах и острове Антигуа. При проведении этих работ использовались фотографические камеры BC-4.

В дальнейшем в соответствии с программой NGSP (США) из наблюдений камерами BC-4 спутника-баллона PAGEOS была построена Мировая сеть космической триангуляции, состоящая из 45 пунктов (рис. 80) с расстояниями между пунктами 2—5 тыс. км. Сеть образована 174 сторонами, в ней измерено 7 космических базисов. Два из этих 7 базисов измерены

в Европе: Тромсё — Хохенпайсенберг — Катания. Первый базис протяженностью 2458 км определен с ошибкой $3 \cdot 10^{-7}$, второй базис протяженностью 1195 км — $1 \cdot 10^{-6}$. В среднем по сети средняя квадратическая ошибка определения положения пункта составила 4,5 м. Ошибки направлений на звезды и спутник в среднем составили соответственно 1,57 и 1,61". Сравнение

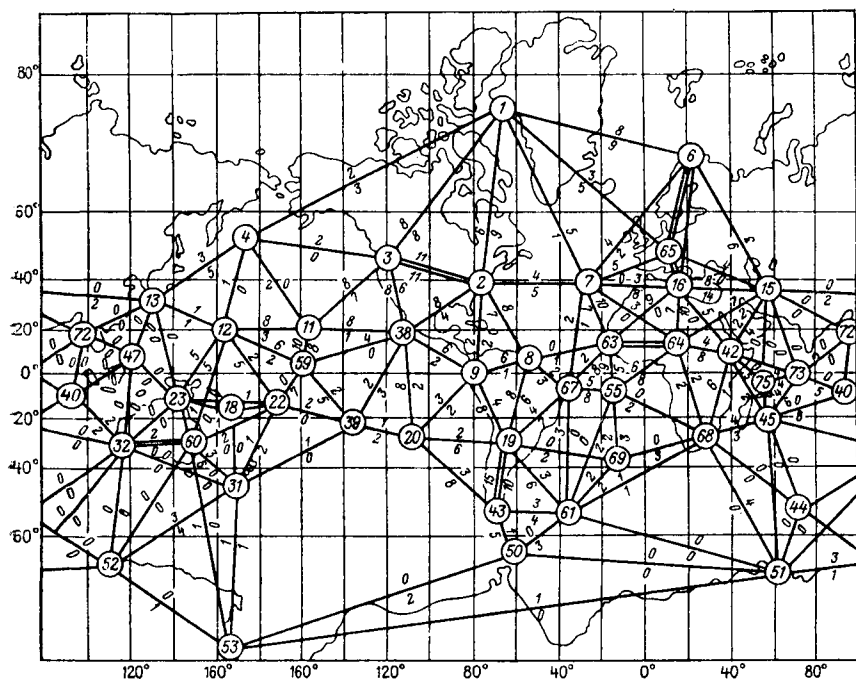


Рис. 80. Космическая геодезическая сеть, созданная на основе наблюдений ИСЗ PAGEOS

координат 30 пунктов упомянутой сети с результатами, полученными в США динамическим методом по доплеровским наблюдениям спутников навигационной системы Transit, дало среднее квадратическое расхождение 4,4 м.

С 1966 г. спутник PAGEOS регулярно наблюдали на станциях ряда западноевропейских стран с целью реализации отдельных региональных программ.

Станции с камерами АФУ-75, размещенные в СССР и на некоторых пунктах в Африке, и станции Великобритании, Греции, США, Франции в 1968—1969 гг. участвовали в совместных наблюдениях ИСЗ PAGEOS в связи с реализацией международной программы по обеспечению геодезической связи Европа — Африка. В рамках программы Европа — Африка наблюдались также и другие геодезические спутники, причем на станциях Верхний Прованс (Франция), Сан-Фернандо (Испа-

ния) и Дионисос (Греция) использовались лазерные дальномеры.

Радиодальномерная система SECOR (США) успешно применялась для наблюдений ИСЗ такого же наименования при создании геометрической экваториальной сети CEN. Ранее эта система использовалась для установления геодезической связи между пунктами в Японии и США через острова в северной части Тихого океана, включая Гавайские острова. Точность системы SECOR характеризуется ошибкой определения положения пункта порядка 5—10 м.

Спутниковым геометрическим методом была осуществлена в 1966 г. по наблюдениям ИСЗ GEOS-1 связь между станциями, образующими сеть Смитсоновской астрофизической обсерватории (SAO), и пунктами в Европе, в Центральной и Северной Америке. Средние квадратические ошибки координат пунктов составили 7—12 м.

Как отмечалось в предыдущих разделах, широкое распространение при решении геодезических и геодинамических задач получили доплеровские наблюдения искусственных спутников. Одним из возможных методов использования доплеровской аппаратуры является метод синхронных наблюдений, при котором положение неизвестной станции определяют при одновременных наблюдениях как минимум с пяти станций. Координаты четырех станций должны быть известны. Параметры орбиты знать не требуется. Метод синхронных доплеровских наблюдений применяется крайне редко. Тем не менее, в мае 1975 г. пять станций в Западной Европе в соответствии с программой EDOC (European Doppler Observation Campaign) осуществляли синхронные доплеровские наблюдения.

В основном для определения координат пунктов из доплеровских наблюдений применяют орбитальный метод и метод транслокации. Оба этих метода основываются на знании элементов орбит спутников. В орбитальном методе, помимо координат пунктов, в качестве неизвестных вводят параметр частоты Δf_0 и тропосферную рефракцию. Таким образом, с точки зрения получаемых результатов в этих случаях можно считать, что решение имеет геометрический характер.

Доплеровские наблюдения для создания спутниковых геодезических построений, для целей навигации, для обеспечения координатной привязки геологоразведочных работ широко применяются во многих странах мира. Например, в Канаде доплеровским методом выполнялось создание опорной геодезической сети из 40 пунктов и заполняющей сети из 80 пунктов.

Соответствующие наблюдения в 70-х годах проводились в США. Наиболее крупной работой является создание на территории США сети из 140 доплеровских станций с расстояниями между ними 150—300 км.

Согласно опубликованным в [16] данным, в случае использования бортовых эфемерид из 25—30 прохождений ИСЗ мо-

жно определить положение пункта наблюдений орбитальным методом со средней квадратической ошибкой порядка 3,5 м. Знание точных эфемерид уменьшает ошибку до 1 м. В методе транслокации взаимное положение пунктов получают со средней квадратической ошибкой порядка 1 м независимо от используемых эфемерид. Сравнение результатов, полученных методом транслокации на 7 базисах, определенных из синхронных фотографических наблюдений камерой ВС-4 (геометрическим методом), показало, что относительная ошибка, вычисленная по соответствующим разностям, составляет $1,1 \cdot 10^{-6}$. Ошибка определения положения методом транслокации не зависит от расстояния между пунктами наблюдений D , по крайней мере для $D \leq 1000$ км. Доплеровские приемники на кораблях обеспечивают точность определения местоположения судна в несколько десятков метров.*.

§ 99. РЕЗУЛЬТАТЫ, ПОЛУЧЕННЫЕ ДИНАМИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

С начала 70-х годов основное внимание специалистов по космической геодезии и смежных областей науки обращено к динамическому методу. О больших возможностях этого метода было известно и раньше, однако для их реализации требовалось повышение точности наблюдений спутников и совершенствование теории их орбитального движения. Повышенные требования предъявляются при решении динамических задач к электронной вычислительной технике. Совершенствование доплеровской и лазерной аппаратуры обеспечивает повышение точности наблюдений. Большие возможности открывают новые методы космической геодезии: спутниковая альтиметрия, спутниковая градиентометрия, наблюдения по линии «спутник — спутник», лазерная локация Луны и радиointерферометрия со сверхдлинной базой (РСДБ). Значительный прогресс достигнут в теории движения ИСЗ и в области электронной вычислительной техники. Все это обусловило успешное решение динамических задач космической геодезии.

Следует отметить, что сразу после запуска первых искусственных спутников Земли ученые разных стран начали проводить эксперименты по определению параметров геопотенциала. В первую очередь удалось уточнить значение полярного сжатия Земли из определений зонального коэффициента J_2 .

В дальнейшем была подтверждена эллиптическая форма экватора и обнаружена асимметрия северного и южного полушарий («грушевидность» Земли).

Наибольший интерес представляют полученные отдельными исследователями и научными коллективами параметры грави-

* Чуров Е. П., Суворов Е. Ф. Космические средства судовождения.— М.: Транспорт, 1979.

тационного потенциала Земли (модели ГПЗ). Из моделей ГПЗ, полученных зарубежными учеными, известностью пользуются модели Земли SE-I, SE-II, SE-III, SE-IV («Стандартная Земля»), полученные в Астрофизической обсерватории Смитсоновского института в США. В Центре космических полетов им. Годдарда NASA (США) была получена серия моделей GEM. Объединенной группой исследователей Франции и ФРГ получены модели с шифром GRIM. В большинстве случаев при выводе этих моделей, наряду с уточнением незональных гармонических коэффициентов C_{nm} и S_{nm} , определялись поправки к координатам пунктов наблюдений. Некоторые модели ГПЗ являются чисто спутниковыми, другие помимо спутниковой информации основываются на результатах наземных гравиметрических определений. Комбинированные модели являются более представительными.

Как правило, зональные гармонические коэффициенты определялись отдельно от незональных. Для их получения использовались вековые и долгопериодические возмущения соответствующих элементов, полученные на основе длительных рядов наблюдений, по продолжительности близких к периоду полного оборота линии апсид. Вагнер, например, определил зональные гармонические коэффициенты до $n=21$. Исследования показали, что их нормированные значения до $n \leq 16$ получены с ошибками $\Delta \leq 0,03 \cdot 10^{-6}$.

В рамках модели SE-III, используя дополнительные (по сравнению с SE-II) наблюдения спутников Dial, Peole и лазерные наблюдения по программе ISAGEX, Козаи вывел зональные гармонические коэффициенты до $n=23$ и несколько коэффициентов более высоких степеней.

Если Кинг-Хили и Кук [16] для вывода нечетных зональных гармонических коэффициентов до $n=17$ использовали наблюдения 2 спутников с широким диапазоном наклонов — от 3 до 90°, то группа французских исследователей использовала также наблюдения ИСЗ с малым наклоном орбит. Они определили до $n=21$ все значения зональных гармонических коэффициентов. Средние квадратические ошибки нормированных зональных гармонических коэффициентов при этом получились равными $4,5 \cdot 10^{-9}$.

В моделях GEM-5, -6 определены зональные гармонические коэффициенты до $n=22$, а в моделях GEM-7, -8, -9, -10 — до $n=29$. Средние квадратические ошибки нормированных зональных гармонических коэффициентов составили для модели GEM-6 $5 \cdot 10^{-9}$, а для модели GEM-9 от $1 \cdot 10^{-9}$ (при $n=2, 3, 4$) до $9 \cdot 10^{-9}$ (при $n=28$) (табл. 15).

Наиболее точно значения зональных гармонических коэффициентов получены в моделях GEM-7, -8, -9, -10. Они определены непосредственно из уравнений поправок для измеряемых величин совместно с незональными гармоническими коэффициентами с использованием недельных орбитальных дуг.

Т а б л и ц а 15. Зональные гармонические коэффициенты (нормированные)
 $\bar{C}_n \cdot 10^9$

n	Вагнер, 1972	SE-III, 1973	GEM-6, 1973	GEM-7, 1975	GEM-8, 1975	GEM-9, 1977	GEM-10, 1977
2	—484 169	—484 170	—484 166	—484 165	—484 165	—484 166	—484 165
3	+ 960	+ 960	+ 961	+ 959	+ 959	+ 958	+ 958
4	+ 533	+ 539	+ 536	+ 540	+ 540	+ 541	+ 541
5	+ 69	+ 68	+ 66	+ 68	+ 68	+ 68	+ 69
6	— 147	— 153	— 145	— 151	— 151	— 151	— 151
7	+ 94	+ 91	+ 96	+ 94	+ 93	+ 93	+ 93
8	+ 49	+ 50	+ 43	+ 50	+ 50	+ 51	+ 50
9	+ 19	+ 35	+ 26	+ 26	+ 26	+ 27	+ 28
10	+ 49	+ 52	+ 61	+ 54	+ 54	+ 53	+ 53
11	— 29	— 65	— 53	— 45	— 44	— 49	— 49
12	+ 42	+ 38	+ 31	+ 36	+ 38	+ 38	+ 39
13	+ 19	+ 65	+ 47	+ 39	+ 36	+ 44	+ 44
14	— 31	— 20	— 21	— 22	— 25	— 21	— 23
15	+ 13	— 19	— 5	+ 8	+ 10	+ 1	+ 1
16	— 1	— 6	— 8	— 5	— 3	— 8	— 7
17	+ 34	+ 37	+ 19	+ 12	+ 11	+ 16	+ 17
18	+ 14	+ 17	+ 9	+ 8	+ 8	+ 11	+ 10
19	— 8	— 16	+ 4	+ 2	+ 2	+ 1	— 0
20	+ 13	+ 19	+ 14	+ 19	+ 18	+ 26	+ 24
21	— 2	+ 13	+ 10	+ 1	+ 2	— 1	— 0
22		— 14	— 14	— 2	+ 1	— 4	— 2
23		— 21		— 23	— 24	— 18	— 19
24				— 1	— 3	— 2	— 6
25				— 3	— 3	— 0	— 0
26				+ 9	+ 8	+ 4	+ 6
27				+ 4	+ 4	+ 10	+ 11
28				— 9	— 5	— 21	— 21
29				+ 2	+ 3	— 9	— 10

Зональные гармонические коэффициенты низкой степени, полученные разными авторами, практически одинаковы. Особенно точно определена величина коэффициента $\bar{C}_{20}$ (J_2).

В 70-х годах в рамках программы NGSP проводились определения параметров гравитационного поля Земли, которые привели к получению спутниковых моделей Земли GEM-1, -3, -5, -7 и -9, содержащих как зональные, так и незональные гармонические коэффициенты. Одновременно с параметрами гравитационного поля при этом определялись поправки к геоцентрическим координатам пунктов наблюдения.

Рассмотрим некоторые характеристики моделей GEM-5, -7, -9, которые широко использовались в разного рода исследованиях. Для получения этих моделей использовались результаты фотографических, радиотехнических и лазерных наблюдений. Объем лазерных и радиотехнических (в основном доплеровских) наблюдений непрерывно увеличивался от модели к модели. Для вывода модели GEM-5 использовалось 10 000 лазерных наблюдений, для вывода GEM-7 — 76 000, а для вывода

GEM-9 — 213 000. Увеличение объема лазерных наблюдений связано с использованием ИСЗ Lageos, Starlette и GEOS-3. Объем радиотехнических наблюдений составил соответственно 274 тыс., 332 тыс. и 477 тыс. Результаты в каждой модели были получены с использованием наблюдений 27—30 ИСЗ, число станций наблюдения достигало 100 и более. В модели GEM-5 был определен 241 гармонический коэффициент, в модели GEM-7 — 400 и в модели GEM-9 — 566.

Спутниковые модели Земли были получены в США для обеспечения расчета точных эфемерид навигационных спутников (модели NWL-10, NWL-10E, NWL-1G NSWC-10E-1). Спутниковую модель GRIM-1 на основе наблюдений 11 ИСЗ с 35 пунктов получили в 1976 г. специалисты Франции и ФРГ (программы RCP-133, Diademe, ISAGEX).

Поскольку результаты, полученные из фотографических, доплеровских и даже лазерных наблюдений не могут обеспечить точность, необходимую для изучения тонкой структуры гравитационного поля, особый интерес представляют модели Земли, для вывода которых наряду со спутниковыми использовались гравиметрические данные. К комбинированным моделям относятся GEM-2, -4, -6, -8, -10, SE-III, серия моделей SE-IV, GRIM—2. При получении комбинированных выводов наряду с данными, используемыми для получения спутниковых моделей, была введена гравиметрическая информация в виде аномалий силы тяжести в свободном воздухе для трапеций $5 \times 5^\circ$, что соответствует площадкам $550 \times 550 \text{ км}^2$ вблизи экватора. Число таких трапеций составило 1654. Эти данные получали в результате обработки первичной гравиметрической информации в виде аномалий силы тяжести в свободном воздухе для трапеций размером $1 \times 1^\circ$.

В модели геопотенциала SAO SE-III определено 417 гармонических коэффициентов (зональные до 23-й степени, незональные до 18-й степени, отдельные резонансные коэффициенты). В модели «Стандартная Земля III» определены также геоцентрические координаты 104 пунктов наблюдений.

В модели SE-IV.3 получено 298 незональных гармонических коэффициентов геопотенциала. Уточнение зональных гармоник не производилось. Незональные гармонические коэффициенты определены полностью до 24-й степени и отдельные коэффициенты до 27-й степени. Получены также поправки к геоцентрическим координатам 114 пунктов наблюдений со средней квадратической ошибкой 3—5 м.

В модели GEM-10 получено 592 гармонических коэффициента (зональные до 29-й степени, незональные до 22-й степени и 58 резонансных коэффициентов более высоких степеней). В этой модели были уточнены геоцентрические координаты 146 пунктов наблюдений (табл. 16).

В модели GRIM-2 результаты наземных гравиметрических измерений использовались в виде значений аномалий силы

Таблица 16. Незональные гармонические коэффициенты
(нормированные) $\bar{C}_{n,m} \cdot 10^9$ и $\bar{S}_{n,m} \cdot 10^9$

n	m	$\bar{C}_{n,m} \cdot 10^9$		$\bar{S}_{n,m} \cdot 10^9$	
		GEM-9	GEM-10	GEM-9	GEM-10
2	1	0	+ 1	— 4	— 2
2	2	+ 2434	+ 2434	— 1398	— 1399
3	1	+ 2028	+ 2029	+ 252	+ 252
3	2	+ 892	+ 893	— 622	— 623
3	3	+ 703	+ 700	+ 1411	+ 1412
4	1	— 533	— 535	— 465	— 469
4	2	+ 353	+ 352	+ 663	+ 664
4	3	+ 989	+ 988	— 203	— 202
4	4	— 197	— 195	+ 299	+ 299
5	1	— 49	— 51	— 92	— 94
5	2	+ 650	+ 651	+ 325	— 328
5	3	— 470	— 467	— 208	— 203
5	4	— 291	— 288	+ 50	+ 50
5	5	+ 161	+ 156	— 662	— 660
6	1	— 75	— 73	+ 16	+ 23
6	2	+ 48	+ 49	— 349	— 351
6	3	+ 59	+ 57	+ 1	+ 3
6	4	— 105	— 101	— 461	— 462
6	5	— 256	— 258	— 539	— 537
6	6	+ 2	+ 3	— 242	— 242
7	1	+ 267	+ 270	+ 96	+ 102
7	2	+ 328	+ 324	+ 105	+ 108
7	3	+ 240	+ 231	— 218	— 216
7	4	— 286	— 285	— 127	— 130
7	5	+ 17	+ 15	+ 44	+ 43
7	6	— 363	— 362	+ 132	+ 131
7	7	— 9	— 7	+ 27	+ 17
8	1	+ 25	+ 21	+ 63	+ 55
8	2	+ 73	+ 71	+ 51	+ 55
8	3	— 10	— 11	— 88	— 86
8	4	— 246	— 244	— 75	+ 75
8	5	— 13	— 16	+ 82	+ 82
8	6	— 75	— 75	+ 326	+ 320
8	7	+ 68	+ 66	+ 77	+ 77
8	8	— 121	— 123	+ 127	+ 129
9	1	+ 161	+ 158	+ 17	+ 8
9	2	+ 24	+ 27	— 25	— 36
9	3	— 174	— 162	— 97	— 91
9	4	— 11	— 10	+ 11	+ 14
9	5	+ 5	— 7	— 64	— 56
9	6	+ 37	+ 40	+ 218	+ 217
9	7	— 105	— 103	— 74	— 75
9	8	+ 194	+ 199	— 16	— 12
9	9	— 58	— 55	+ 92	+ 91
10	1	+ 82	+ 88	— 136	— 130
10	2	— 84	— 85	— 4	— 13
10	3	— 21	— 19	— 169	— 161
10	4	— 101	— 97	— 69	— 77
10	5	— 62	— 65	— 36	— 32
10	6	— 39	— 39	— 86	— 85

Продолжение табл. 16

n	m	$\bar{c}_{n,m} \cdot 10^9$		$\bar{s}_{n,m} \cdot 10^9$	
		GEM-9	GEM-10	GEM-9	GEM-10
10	7	0	+ 4	+ 16	+ 18
10	8	+ 40	+ 43	— 72	— 69
10	9	+ 124	+ 124	— 51	— 49
10	10	+ 106	+ 101	— 20	— 22
11	1	0	+ 5	— 14	— 2
11	2	+ 40	+ 31	— 100	— 91
11	3	— 29	— 51	— 136	— 129
11	4	— 45	— 48	— 61	— 74
11	5	+ 45	+ 47	+ 79	+ 71
11	6	+ 3	— 4	+ 38	+ 31
11	7	+ 11	+ 14	— 82	— 85
11	8	+ 8	+ 11	+ 23	+ 25
11	9	— 29	— 33	+ 34	+ 38
11	10	— 67	— 65	— 3	— 1
11	11	+ 41	+ 49	— 79	— 70

тяжести в свободном воздухе для трапеций размером $1 \times 1^\circ$. Эта модель включает 949 гармонических коэффициентов геопотенциала (зональные до 23-й степени, незональные до 30-й степени).

Обработка более 300 тыс. лазерных наблюдений ИСЗ Lageos за 2,5 года в сочетании с данными, использованными в свое время для получения GEM-9, привели к выводу новой, более точной модели GEM-L2*. В рамках этой модели были определены гармонические коэффициенты до $n=20$, а также геоцентрические координаты 20 станций слежения за ИСЗ со средней квадратической ошибкой 6 см.

При определении параметров некоторых из перечисленных выше моделей на отдельных этапах обработки применялся метод коллокации.

Точность определения незональных гармонических коэффициентов в модели GEM-9 характеризуется средними квадратическими ошибками $3 \cdot 10^{-9}$ ($n, m=2$); $6 \cdot 10^{-9}$ ($n, m=4$); $8 \cdot 10^{-9}$ ($n, m=6$) и далее $10 \div 20 \cdot 10^{-9}$, в модели GEM-10 эти ошибки на 10—20 % меньше. Резонансные гармонические коэффициенты определены с большей точностью.

Результаты, полученные динамическим методом, могут быть представлены в виде карты высот геоида, которая используется при разных геофизических исследованиях.

Важным показателем качества этих данных является ошибка, с которой при использовании в той или иной модели вычисляются высоты геоида (табл. 17).

* Lerch F. J., Klosko S. M., Patel G. B. A refined gravity model from Lageos (GEM-L2).— "Geophys. Res. Lett.", 1982, 9, No 11, p. 1263—1266.

Имеющиеся в настоящее время результаты, полученные динамическими методами, позволяют сделать некоторые общие выводы, касающиеся соотношения спутниковых и гравиметрических определений, при изучении ГПЗ, представительности моделей. Кратко они сводятся к следующему [9].

Начиная с $n=14$ гравиметрические определения незональных коэффициентов, исключая резонансные, точнее спутниковых.

Т а б л и ц а 17. Точность вычисления высот геоида

Модель	Средняя квадратическая ошибка высоты геоида, м
SE-IV.3	3
GEM-6	$2-10^*$
GEM-8	4
GEM-9	1,9
GEM-10	1,5

* 2 м на континентах, 2–5 м в северных районах Тихого и Атлантического океанов, 5–10 м в районах, где отсутствует достаточное количество спутниковой информации.

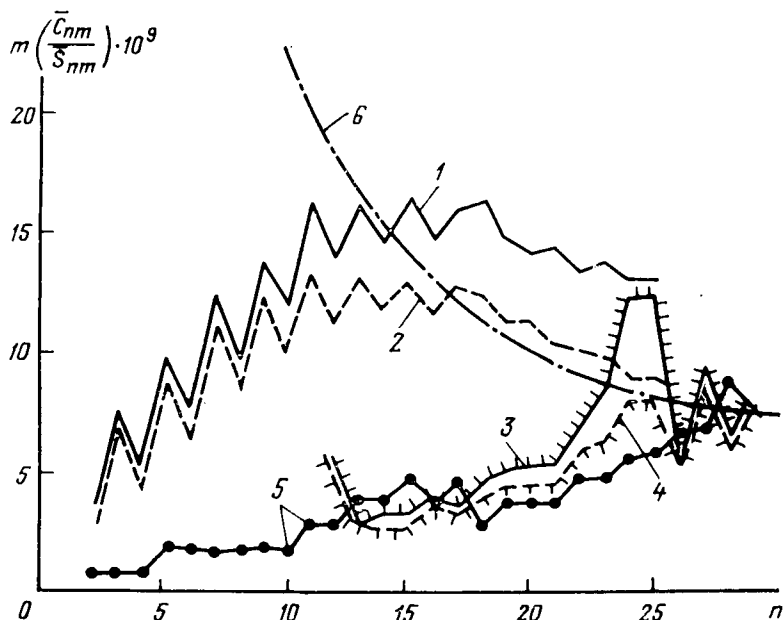


Рис. 81. Средние квадратические ошибки нормированных гармонических коэффициентов геопотенциала для моделей GEM-9 и GEM-10:

1 — незональные нерезонансные коэффициенты (GEM-9); 2 — незональные нерезонансные коэффициенты (GEM-10); 3 — незональные резонансные коэффициенты (GEM-9); 4 — незональные резонансные коэффициенты (GEM-10); 5 — зональные коэффициенты; 6 — результат, полученный по гравиметрическим данным

Зональные и резонансные коэффициенты в моделях GEM-9, -10, по крайней мере для $n \leq 25$, получены с большей точностью, чем на основе гравиметрических данных.

Для прогнозирования движения ИСЗ наиболее эффективными являются чисто спутниковые модели. Например, использование модели GEM-7 для прогноза движения ИСЗ дало результаты в 1,4 раза точнее, чем модели GEM-8. Комбинированные модели более представительны для характеристики ГПЗ у поверхности Земли.

Коэффициенты гравитационного поля, особенно с большими значениями индексов n , в различных моделях играют роль параметров согласования и отличаются от истинных значений $C_{n,m}$ и $S_{n,m}$. По этой причине в разных моделях они существенно отличаются друг от друга по величине, за исключением резонансных коэффициентов.

Наглядное представление о точности определения гармонических коэффициентов спутниковым, комбинированным и гравиметрическим методами дает рис. 81 [9, с. 55—63].

§ 100. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОРИЕНТИРОВАНИЯ СИСТЕМ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ КООРДИНАТ ОТНОСИТЕЛЬНО ГЕОЦЕНТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Наблюдения спутников позволили определить элементы ориентирования разных геодезических систем относительно геоцентрической системы координат. Строго говоря, упомянутые элементы характеризуют положение геодезической системы относительно координатной системы соответствующей модели Земли.

В [15] приведены результаты определения разными авторами в 70-е годы положения центров эллипсоидов (ΔX , ΔY , ΔZ) основных систем геодезических координат относительно систем координат моделей Земли SE-III, GRIM-2, WN-14 и др. Для каждой геодезической системы приведены выводы 5—6 авторов, т. е. использовано 5—6 моделей Земли. Мы вычислили средние значения координат ΔX , ΔY и ΔZ для каждой геодезической системы (табл. 18).

В табл. 18 приведены также средние квадратические ошибки величин $\Delta X_{\text{ср}}$, $\Delta Y_{\text{ср}}$, $\Delta Z_{\text{ср}}$, вычисленные по уклонениям от сред-

Т а б л и ц а 18. Координаты центров референц-эллипсоидов (в м)

Геодезическая система	$X_{\text{ср}}$	$m_{\Delta X}$	$Y_{\text{ср}}$	$m_{\Delta Y}$	$Z_{\text{ср}}$	$m_{\Delta Z}$
Североамериканская	—21,3	0,91	+157,8	1,40	+176,0	0,93
Европейская	—82,7	1,34	—111,0	6,88	—126,2	2,63
Австралийская	—122,6	0,40	—42,8	1,93	+137,4	4,58
Токийская	—142,6	1,72	+514,2	3,32	+675,2	1,11
Южноамериканская	—78,5	4,11	+2,3	2,06	—42,6	2,95

него отдельных значений ΔX , ΔY и ΔZ . В большинстве случаев эти ошибки не превышают 3 м, что свидетельствует о правомерности примененного приема. При этом надо еще иметь в виду, что при достигнутом к тому времени уровне точности наблюдений вряд ли можно было получить положение центра модели Земли относительно центра масс с ошибкой менее 5—10 м.

Приведем также элементы ориентирования четырех геодезических систем, полученные при выводе модели Земли GEM-6 [15]. В этом случае, кроме координат центров референц-эллипсоидов, были получены угловые элементы ориентирования ψ , θ и γ и масштабный коэффициент m . Средние квадратические ошибки элементов ориентирования получены по внутренней сходимости (табл. 19).

Т а б л и ц а 19. Элементы ориентирования геодезических систем координат, полученные при выводе GEM-6

Элементы ориентирования	Система координат			
	Северо-американская	Австралийская	Южно-американская	Европейская
ΔX , м	—24	—135	—63	—83
$m_{\Delta X}$	2	4	4	5
ΔY , м	+151	—39	0	—116
$m_{\Delta Y}$	2	4	4	5
ΔZ , м	+187	+133	—32	—120
$m_{\Delta Z}$	2	4	4	6
ψ , угл.с	—0,2	—1,0	+0,6	+0,6
m_{ψ}	0,5	0,7	0,3	0,6
θ , угл.с	—0,1	—1,2	—0,2	+0,4
m_{θ}	0,3	0,6	0,3	1,0
γ , угл.с	—0,8	+0,4	0,0	—0,6
m_{γ}	0,3	0,5	0,4	0,4
m , 10^{-6}	+1,7	+2,4	—1,3	—0,3
m_m	1,2	2,2	1,2	1,6

В работе [9, с. 200—204] выполнена оценка смещений систем координат, реализованных методами спутниковой геодезии, относительно центра масс Земли (табл. 20).

Т а б л и ц а 20. Геоцентрические координаты начал различных спутниковых систем

Система (сеть станций)	Число станций	ΔX , м	ΔY , м	ΔZ , м	$\Delta L \cdot 10^4$
SE-III	103	$2,3 \pm 1,1$	$-2,0 \pm 0,9$	$12,2 \pm 1,0$	—0,38
SE-IV.3	97	$5,5 \pm 0,3$	$-3,7 \pm 0,5$	$7,9 \pm 0,9$	+0,07
GRIM-2	30	$3,7 \pm 1,5$	$-9,2 \pm 1,4$	$-8,6 \pm 0,8$	—0,16
WN-14	65	$22,4 \pm 0,7$	$1,6 \pm 0,5$	$-3,8 \pm 0,5$	—0,05

Коэффициент ΔL отражает ошибки параметров W_0 , GM и масштаба принятой спутниковой системы координат.

§ 101. ОПЫТЫ ПО БАЛЛОННОЙ ТРИАНГУЛЯЦИИ

Исследования показывают, что на основе наблюдений спутников, целесообразно создавать континентальные геодезические сети со сторонами порядка 1000—2000 км. Дальнейшее уменьшение расстояний между пунктами, как правило, делает спутниковые геодезические построения мало эффективными. С другой стороны, невозможно напрямую осуществить связь между континентальными геодезическими сетями и традиционными наземными геодезическими построениями (триангуляция, полигонометрия). В качестве промежуточного построения со сторонами 100—300 км целесообразно использовать метод баллонной (звездной) триангуляции. Этот метод представляется также эффективным в случае необходимости быстрого развития опорной геодезической сети на какой-либо территории.

Успешные работы по использованию метода баллонной триангуляции проводились в Финляндии, СССР, ГДР, ЧССР, ВНР. В 1974—1977 гг. в соответствии с планами сотрудничества социалистических стран по программе «Интеркосмос» проводился эксперимент по баллонной триангуляции в МНР. В его осуществлении вместе с монгольскими специалистами приняли участие специалисты из ГДР и СССР. Целью программы «Баллонная геодезия», осуществляемой в МНР, является создание высокоточной геодезической сети в стране.

На практике методом баллонной триангуляции определены направления хорд, длина которых составляет 150—250 км, с ошибкой 0,5—1,5". Для обеспечения такой точности надо было выполнить порядка 20 синхронных наблюдений. В качестве конкретного примера можно привести выполненные в Финляндии в 1969—1971 гг. определения хорд, образующих треугольник со сторонами 158, 229 и 149 км. После уравнивания ошибка направления составила 0,3", а невязка в треугольнике 0,7" [11]. Приведенные данные свидетельствуют о том, что метод баллонной (звездной) триангуляции даст высокую точность и при определении координат пунктов.

В ЧССР проводились исследования по сочетанию в баллонной триангуляции фотографических наблюдений с лазерными, для чего на самолете помимо лампы-вспышки устанавливались также отражатели [11].

§ 102. НАБЛЮДЕНИЯ ГЕОСТАЦИОНАРНЫХ ИСЗ

С 1975 г. в СССР стали проводиться фотографические наблюдения геостационарных ИСЗ с целью разработки научно обоснованной методики наблюдений и оценки реально достижимой точности. Интерес к проблеме возник в связи с необходимостью осуществления геодезической связи на расстояния, превышающие 5—6 тыс. км. Как показал опыт работ по программе «Большая хорда», использование для геодезических

связей на такие расстояния даже достаточно высоких спутников (PAGEOS, Midas-4 и Midas-7) связано с существенными трудностями из-за крайне непродолжительных периодов синхронной видимости и существенного различия погодных условий в пунктах, разнесенных на 5—6 тыс. км и более. Несмотря на малую яркость геостационарных ИСЗ ($14-15^m$), как показали экспериментальные наблюдения в Звенигороде и Симеизе, с помощью камер АФУ-75, ВАУ и SBG можно обеспечить определение положений этих спутников со средней квадратической ошибкой порядка $1''$. При такой точности наблюдений, как показывают расчеты, можно определить направление протяженной хорды с ошибкой в несколько секунд дуги. Для этого надо наблюдать спутник на высоте $h \geq 20^\circ$, определять положение каждой синхронной плоскости из 25 наблюдений. Наклон хорды к экватору должен быть достаточно большим. Результаты показали [11], что фотографические наблюдения геостационарных спутников можно использовать для глобального (со сторонами до 100°) геодезического построения вдоль земного экватора.

Если удастся обеспечить повышение яркости геостационарных ИСЗ, то их можно будет с успехом использовать для высокоточных азимутальных определений.

Глава 26.

РЕЗУЛЬТАТЫ, ПОЛУЧЕННЫЕ ПО НАБЛЮДЕНИЯМ ИСЗ И ДРУГИХ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ В ГЕОФИЗИКЕ И АСТРОНОМИИ

§ 103. СВЕДЕНИЯ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПОСТОЯННЫХ

Одним из важнейших результатов, получаемых методами космической геодезии, является уточнение фундаментальных геодезических постоянных. Речь идет об экваториальном радиусе Земли a_e , геоцентрической гравитационной постоянной (гравитационном параметре) fM и зональном гармоническом коэффициенте второй степени J_2 . Эти параметры входят также в систему астрономических постоянных.

Впервые система фундаментальных астрономических постоянных, созданная трудами Ньюкома, была введена в 1896 г. Ею пользовались почти 70 лет. В 1964 г. XII Генеральная ассамблея МАС приняла новую систему астрономических постоянных. Бурное развитие космических исследований требовало дальнейшего уточнения системы астрономических постоянных. Одновременно космические исследования предоставляли обширный наблюдательный материал, необходимый для теоретических и практических разработок в этой области.

В 1976 г. XVI Генеральная ассамблея МАС приняла новую систему астрономических постоянных, которая представляет собой дальнейшее уточнение по сравнению с системой 1964 г.

Что касается фундаментальных геодезических постоянных, то рекомендации по этому вопросу принимались Генеральными ассамблеями МАГ. В 1967 г. на XIV Генеральной ассамблее МАГ в Люцерне в полном соответствии с Системой астрономических постоянных МАС (1964 г.) была принята Геодезическая референц-система 1967 г. В соответствии с решениями XVI Генеральной ассамблеи МАГ, проходившей в Гренобле в 1975 г., были подготовлены рекомендации о значениях параметров c , fM , a_e и J_2 , которые вошли в дальнейшем в Систему астрономических постоянных МАС (1976 г.).

Уже в 1979 г. XVII Генеральная ассамблея, состоявшаяся в Канберре, рекомендовала дальнейшее уточнение фундаментальных геодезических постоянных. Одновременно рассматривался вопрос о введении Геодезической референц-системы 1980 г.

В обзоре [15] приведены результаты определения экваториального радиуса Земли с использованием как геометрического, так и динамического методов при разном составе измерений, включая фотографические, доплеровские, лазерные наблюдения, метод спутниковой альтиметрии, а также наземные гравиметрические измерения. Все 17 значений a_e получены при допущении, что $fM = 398\,600,5 \text{ км}^3 \cdot \text{с}^{-2}$. Максимальное значение a_e из этих 17 выводов равно 6 378 142 м, минимальное — 6 378 129 м. Среднее значение величины a_e из приведенных в упомянутом обзоре данных составило 6 378 136,7 м. Средняя квадратическая ошибка этого значения, видимо, находится на уровне 1—1,5 м. Напомним, что в системе постоянных МАС (1976 г.) $a_e = 6\,378\,140 \text{ м}$, а XVII Генеральной ассамблеей МАГ, проходившей в 1979 г. в Канберре, рекомендовано значение $a_e = 6\,378\,137 \pm 2 \text{ м}$. Специалисты считают, что наиболее надежными являются результаты, полученные на основе спутниковой альтиметрии, при которой измерения производятся с большой частотой.

Следует отметить, что значение $a_e = 6\,378\,137 \text{ м}$ меньше, чем значения экваториального радиуса Земли, полученные в различных геодезических системах. Причина этого кроется в том, что параметры референц-эллипсоидов получали на основе использования только наземных данных, как правило, для ограниченной территории.

Весьма ценные результаты были получены в космической геодезии по уточнению геоцентрической гравитационной постоянной (гравитационного параметра) $fM(GM)$. Для этой цели использовались лазерные наблюдения ИСЗ BE-C, GEOS-3, Lageos, Starlette, а также радиотехнические наблюдения далеких космических аппаратов типа «Венера», «Mariner», «Viking», «Voyager». Кроме того, для выводов fM использовались

результаты лазерной локации Луны, РСДБ, слежение по линии «спутник — спутник» (ATS-6 — GEOS-3). Если до 1975 г. надежные выводы $\dot{M}$ получали из наблюдений далеких космических объектов, то во второй половине 70-х годов положение изменилось. Не менее точные результаты получаются на основе анализа возмущений в движении ИСЗ. Это стало возможным в связи с повышением точности наблюдений и совершенствованием теории движения.

XVII Генеральной ассамблеей МАГ рекомендовано $\dot{M} = -398\,600,5 \pm 0,05 \text{ км}^3 \cdot \text{с}^{-2}$. Такое же значение МАГ рекомендовал в 1975 г., что и было принято МАС в 1976 г. Однако точность величины геоцентрической гравитационной постоянной характеризовалась тогда средней квадратической ошибкой $0,3 \text{ км}^3 \cdot \text{с}^{-2}$.

Как отмечалось выше, динамический коэффициент формы Земли J_2 определен с высокой степенью надежности. XVII Генеральная ассамблея МАГ рекомендовала принять его значение в Геодезической референц-системе 1980 г. равным $1082,63 \cdot 10^{-6} \pm 0,005 \cdot 10^{-6}$. В модели GEM-10 $J_2 = 1082,627 \cdot 10^{-6} \pm \pm 0,002 \cdot 10^{-6}$. В Геодезической референц-системе 1980 г. рекомендуются в качестве фундаментальных геодезических постоянных также значения зональных гармоник $J_3 = -2,54 \cdot 10^{-6}$; $J_4 = -1,62 \cdot 10^{-6}$; $J_5 = -0,23 \cdot 10^{-6}$; $J_6 = 0,55 \cdot 10^{-6}$. Точность этих величин характеризуется средней квадратической ошибкой $0,01 \cdot 10^{-6}$.

По результатам обработки длительного ряда (2,5 года) лазерных наблюдений ИСЗ Lageos получено значение $\bar{C}_{20} = -484,16499$ со средней квадратической ошибкой $0,0005 \cdot 10^{-6}$.

§ 104. ДАННЫЕ О ВРАЩЕНИИ ЗЕМЛИ

Для решения многих фундаментальных и прикладных задач в навигации, геодезии, геофизике, астрометрии и других науках необходимо с высокой степенью точности знать параметры вращения Земли: данные о положении полюсов Земли и скорости ее вращения вокруг оси. Классические методы определения параметров Земли к настоящему времени исчерпали резервы повышения точности. В связи с этим все большее внимание уделяется применению для решения данной задачи новых методов, которые основываются на доплеровских и лазерных наблюдениях ИСЗ, лазерной локации Луны и радиоинтерферометрии со сверхдлинной базой.

В 1979 г. Международный астрономический союз и Международный геодезический и геофизический союз одобрили международный проект MERIT (Monitoring of Earth Rotation and Intercomparison of the Techniques of observation and analysis). Целью проекта является разработка новых методов изучения вращения Земли, выработка рекомендаций по созданию новой международной службы вращения Земли, сравнение новых

методов с классическими, выполненными с наивысшей достижимой точностью, а также проведение ряда геофизических исследований.

В августе — октябре 1980 г. в рамках проекта MERIT проводилась первая наблюдательная кампания с использованием как традиционных, так и новых средств измерений. В период с 1 сентября 1983 по 31 октября 1984 г. была проведена основная наблюдательная кампания.

В первой наблюдательной кампании принимали участие 22 страны, в том числе и СССР. Классические определения времени выполнялись по результатам наблюдений 62 инструментами, широты — 56 инструментами. В числе применявшихся для реализации классических методов инструментов были 20 зенит-телескопов, 19 астролябий, 28 пассажных инструментов, 14 фотографических зенитных труб, 2 циркумзенитала и 2 визуальные зенитные трубы. Наивысшая точность определения времени была достигнута фотоэлектрическими пассажными инструментами (среднее квадратическое отклонение среднегрупповых поправок часов от их среднемесячных значений составило $0,009^s$). Широта точнее всего определялась в Пулковке ЗТФ-135 (аналогичная ошибка составила $0,07''$).

В табл. 21 приведены средние квадратические ошибки определения среднемесячных параметров вращения Земли классическими методами по разному составу измерений*. Из нее видно, что в 1980 г. координаты полюса x и y выводились с примерно одинаковой точностью как по наблюдениям широты, так и по определениям времени. Средние квадратические ошибки пятисуточных значений координат полюса и всемирного вре-

Т а б л и ц а 21. Средние квадратические ошибки определения координат полюса x , y и времени UT1

Год	x , угл. с.	y , угл. с.	UT1, с
<i>По определениям времени</i>			
1979	0,015	0,018	0,0010
1980	0,012	0,015	0,0008
<i>По определениям широты</i>			
1979	0,013	0,011	—
1980	0,012	0,010	—
<i>По определениям времени и широты</i>			
1979	0,010	0,009	0,0010
1980	0,008	0,008	0 0008

* Яцкив Я. С. Международный проект MERIT.—Препринт ИТФ — 81—124 Р — Киев: АН УССР, 1981, с. 44.

мени составляли в 1980 г. соответственно 0,01—0,02" и 0,0009—0,0016^s.

Определения координат полюса на основе доплеровских наблюдений ИСЗ систематически ведутся с 1970 г., когда была создана Дальгреневская служба движения полюса (DPMS). В связи с совершенствованием доплеровской аппаратуры и методики измерений повышалась точность определения этим методом координат полюса (по внутренней сходимости от $m_x = 0,75$ м и $m_y = 0,59$ м в 1969 г. до $m_x = m_y = 0,20$ м в 1974 г.).

Во время первой наблюдательной кампании проекта MERIT в разных программах доплеровских наблюдений проводились работы на 20 станциях. В программе MEDOC средняя квадратическая ошибка определения координат полюса составила 0,04", в программе DMA, соответственно, 0,008—0,01". Средние квадратические отклонения координат полюса, вычисленных по доплеровским наблюдениям ИСЗ с использованием разных моделей гравитационного поля, от координат полюса, полученных на основе астрономических измерений приведены в табл. 22.

Т а б л и ц а 22. Средние квадратические отклонения координат полюса, вычисленных по доплеровским наблюдениям, от результатов, полученных Международной службой времени

Программы	Модель гравитационного поля	Среднее квадратическое отклонение, м	
		<i>x</i>	<i>y</i>
DMA	NWL 10E-1	0,38	0,44
MEDOC	GEM-10	1,06	1,53
MEDOC	NWL10E-1	0,37	0,83

Данные, приведенные в табл. 22, свидетельствуют о том, что ошибки используемой модели гравитационного поля Земли могут привести к значительным ошибкам в координатах полюса *x* и *y*.

При определении UT-1 доплеровские наблюдения не могут конкурировать с традиционными методами.

Впервые возможность использования лазерных наблюдений ИСЗ для вывода координат полюса была установлена в результате работ, проведенных в 1970 г. на станции Годдардского центра (NASA) в Гринбелте (США). В этом эксперименте выполнялась лазерная локация ИСЗ Explorer-27. В 1978 г. лазерные наблюдения спутника Lageos позволили определить координаты полюса на пятисуточном интервале со средней квадратической ошибкой 0,01—0,03". В августе—октябре 1980 г. в соответствии с проектом MERIT выполнялись лазерные наблюдения ИСЗ Lageos, GEOS-3 и Starlette со станций «Интеркосмос» и др. Средние квадратические ошибки определения координат полюса составили для пятисуточных интервалов от

0,002 до 0,01", а определения продолжительности суток 0,2—0,3 мс. Приведенные ошибки получены по внутренней сходимости. Реальная же точность определения координат полюса составляет $m_x = m_y = 0,008 \div 0,01''$.

Как сообщается в упомянутой выше статье* были обработаны систематические лазерные наблюдения ИСЗ Lageos, выполнявшиеся в течение 2,5 лет в соответствии с международной программой, выдвинутой COSPAR в 1976 г. Высокая точность лазерных наблюдений в сочетании с тщательным учетом возмущений позволили для пятисуточных интервалов получить координаты полюса со средней квадратической ошибкой 10 см.

По проекту MERIT осуществлялись также лазерная локация Луны и наблюдения с использованием фазостабильной радиоинтерферометрии.

В настоящее время обоснована возможность использования наблюдений ИСЗ для определения параметров векового движения полюса. Однако для уверенного решения этой задачи необходимо уточнение значений C_{21} , S_{21} .

§ 105. ГЕОФИЗИЧЕСКИЕ ВЫВОДЫ, ПОЛУЧЕННЫЕ ПО НАБЛЮДЕНИЯМ ИСЗ И ДРУГИХ КА

Результаты, полученные в космической геодезии динамическими методами, являются основой для геофизических выводов, имеющих важное значение для изучения внутреннего строения Земли, проливающих свет на ее развитие как планеты.

Среди работ в этой области, помимо изучения параметров гравитационного поля Земли и параметров вращения Земли, о чем шла речь выше, следует отметить: исследование плотностных неоднородностей Земли, определение положения источников аномалий силы тяжести в теле Земли, изучение зависимости между различными физическими полями (например, гравитационным полем и рельефом, гравитационным полем и тепловым), исследование упругих свойств нашей планеты, получение информации о континентальном дрейфе. Сюда надо еще добавить исследования физики атмосферы и океана, использование спутников с целью получения информации для прогноза землетрясений.

Не менее важное значение имеет использование искусственных спутников Луны и планет, а также других КА для получения выводов относительно физических и геометрических характеристик этих небесных тел.

Основой для получения геофизических выводов служили в первую очередь полученные по наблюдениям спутников характеристики гравитационного поля. Удобной формой представления исходной информации при этом являлись карты изоаномал, высот и ондуляций геоида (рис. 82—86).

* См. сноску на с. 376.

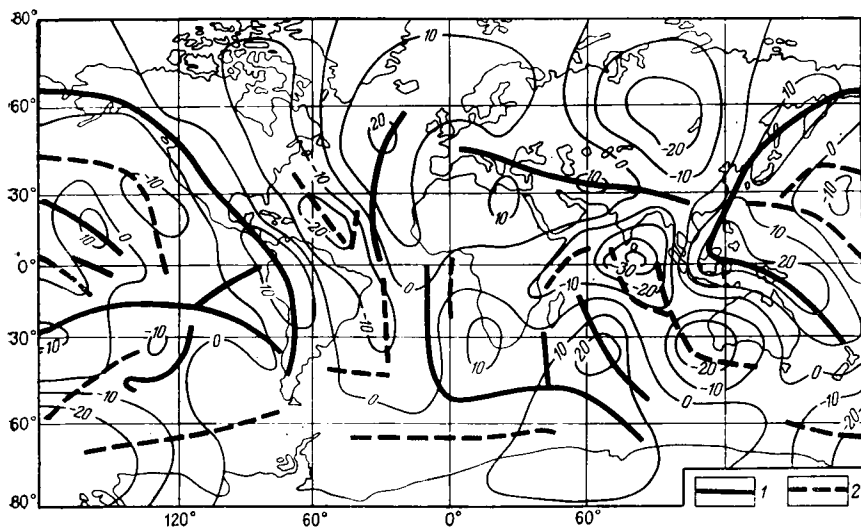


Рис. 82. Карта аномалий силы тяжести, полученных по спутниковым данным (использованы гармоники до $n=8$)

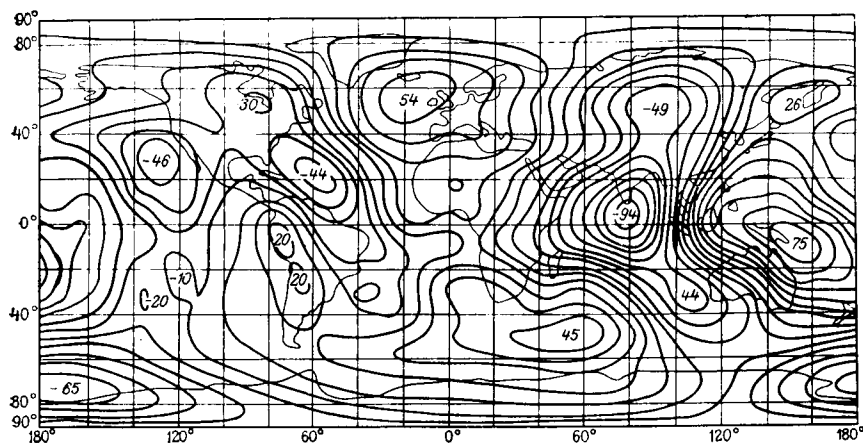


Рис. 83. Карта высот геоида

На рис. 82 сплошные линии (1) соответствуют районам кайнозойской вулканической и тектонической активности, а пунктирные линии (2) — океаническим котловинам. Можно видеть, что для первых районов (сплошные линии) характерны положительные аномалии, а для океанических котловин — отрицательные. К такому выводу специалисты пришли на основе использования параметров Стандратной Земли SAO 1966 г.*

* Пеллинен Л. П. Исследование гравитационных полей и формы Земли, других планет и Луны по наблюдениям космических аппаратов. Итоги науки. Исследование космического пространства. М., 1972, с. 180.

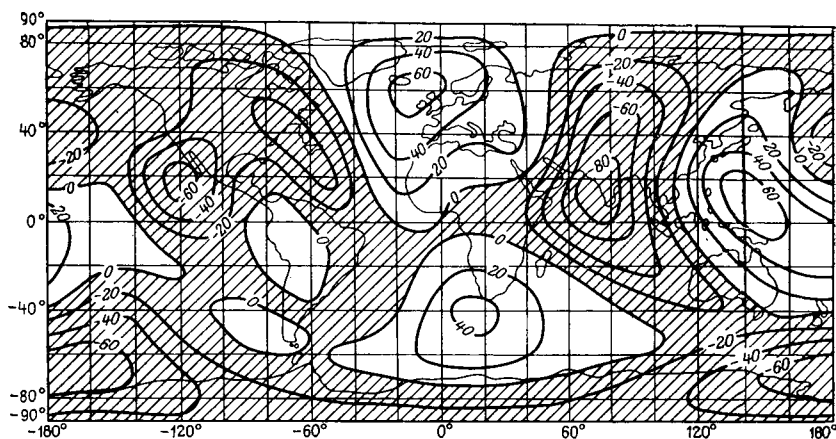


Рис. 84. Ондюляции геоида, полученные из фотографических наблюдений ИСЗ

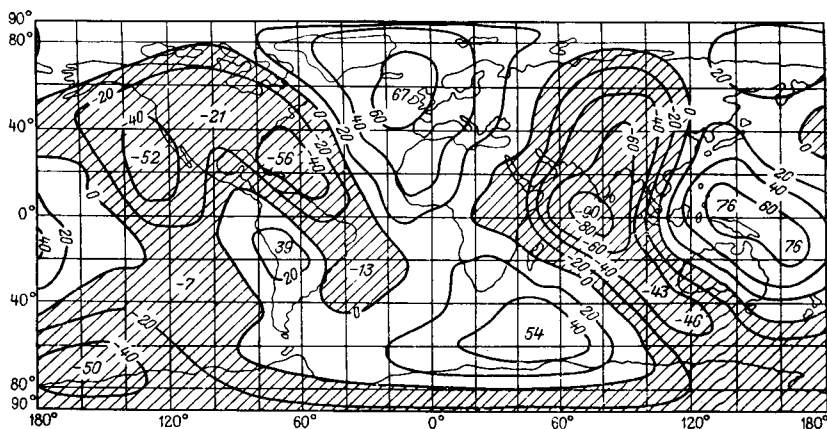


Рис. 85. Ондюляции геоида, полученные из доплеровских наблюдений ИСЗ

Детальное районирование аномального гравитационного поля Земли осуществлено Каула. Он предложил подразделить аномальное гравитационное поле на 11 основных типов. В классификации Каула положительным аномалиям соответствуют материковые области кайнозойского горообразования, области кайнозойских базальтовых излияний в океанах, островные дуги и глубоководные желоба. Отрицательные аномалии характерны для областей современного горообразования, областей четвертичного оледенения, океанических котловин и континентальных впадин. В областях докайнозойского горообразования, докайнозойских базальтовых излияний в океанах, крупных океанических поднятий имеют место аномалии силы тяжести, близкие к нулю.

Детальное районирование глобального аномального гравитационного поля на основе значений аномалий силы тяжести, отнесенных к центрам трапеций размером $1 \times 1^\circ$, выполнили Ю. М. Нейман и С. В. Лебедев*. Согласно их исследованиям, аномальное гравитационное поле подразделяется на 12 типов регионов. Каждый регион стационарен по дисперсии. По по-

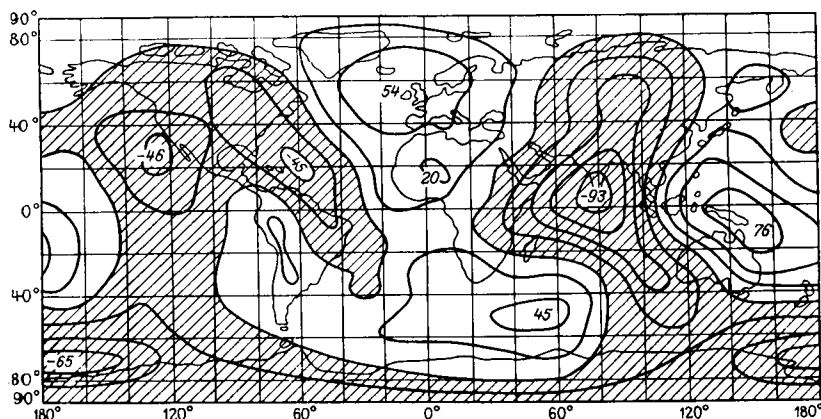


Рис. 86. Ондюляции геоида, полученные на основе совместного использования фотографических наблюдений ИСЗ и гравиметрических данных

верхности Земли регионы расположены в относительном беспорядке.

При использовании для статистической интерпретации аномального поля средних значений аномалий силы тяжести [9, с. 78—85] выявлены шесть регионов ГПЗ, стационарных по дисперсии. Исследования показали, что аномальное гравитационное поле (при разбиении $5 \times 5^\circ$) является нестационарным и анизотропным. Для большей части земной поверхности (84 %) значение поля дисперсий не превышает $4 \cdot 10^{-8} \text{ м}^2 \text{ с}^{-4}$ (400 мгл^2). В южном полушарии распределение земной поверхности по площади между разными регионами более равномерное, чем в северном. Поле дисперсий аномалий силы тяжести более контрастно на материках, чем в океанах.

Причина особенностей структуры аномального гравитационного поля кроется в наличии плотностных неоднородностей в теле Земли. Исследования с использованием гармонических коэффициентов модели SE-III вопроса о положении плотностных неоднородностей в теле Земли [9] показывают, что глубина 1000 км является предельной для залегания плотностных неод-

* Лебедев С. В., Нейман Ю. М. Методика определения корреляционной функции аномального гравитационного поля Земли для локальных участков. «Геодезия» — Новосибирск, 1977, т. 1/41, с. 87—91.

нородностей, к которым еще чувствительны гармонические коэффициенты геопотенциала третьего порядка. Гармоники геопотенциала второго порядка обусловлены, по-видимому, наличием плотностных неоднородностей в нижней мантии на глубинах порядка 2000 км. Гармоники более высоких порядков ($n > 4$) обусловлены коротковолновыми аномалиями плотности, находящимися в верхних слоях мантии (выше 1000 км) и в литосфере.

Если сопоставить карты ондуляций геоида, приведенные на рис. 84, 85, 86, с гипсометрической картой, то это еще раз подтвердит вывод об отсутствии корреляции между крупномасштабными вариациями гравитационного поля и рельефом. Вместе с тем можно считать установленным, что гармоники геопотенциала высокого порядка коррелируют с разложением высот рельефа по сферическим функциям. Это позволило Каула установить предельную величину нормированных коэффициентов геопотенциала

$$\bar{C}_{n,m}(\bar{S}_{n,m}) \leq \frac{0,07 \cdot 10^{-6}}{n^{0,5}}.$$

Он также установил, что по крайней мере до $n=15$ нормированные коэффициенты близко следуют эмпирическому закону

$$\frac{1}{2n+1} \sum_m (\bar{C}_{nm}^2 + \bar{S}_{nm}^2) \approx \frac{10^{-10}}{n^4}.$$

Оказалось, что фактические аномалии гравитационного поля не соответствуют таковым для состояния изостатической компенсации. Это в первую очередь выражается в отличии фактического сжатия Земли (1:298,25) от сжатия, соответствующего гидростатической Земле (1:299,6). По мнению Каула, 15 млн. лет тому назад гидростатическая Земля имела бы сжатие, соответствующее 1:298,255.

Анализ спутниковых наблюдений позволил заключить, что в мантии существуют конвективные течения со скоростью ~ 1 см/год.

Важное значение для изучения Земли как планеты имеют определения числа Лява k_2 , характеризующего ее упругие свойства. Это число по Ньютону получилось равным $0,34 \pm 0,03$, по Козаи $0,29 \pm 0,03$. Расхождения значений k_2 обусловлены приливными явлениями в океанах. Учет этого обстоятельства уменьшает разброс величин k_2 .

Повышение точности наблюдений привело к активизации работ, направленных на решение геодинамических задач. С 1977 г. COSPAR осуществляет международную программу по лазерным наблюдениям спутников LAGEOS и Starlette для решения задач геодинамики и геодезии. На основе лазерных наблюдений ИСЗ LAGEOS удалось найти угол фазовой за-

держки земных приливов $2,018^\circ$ при значениях чисел Лява и Шиды $h_2=0,60$, $l_2=0,75$, $k_2=0,29$. По пятнадцатисуточным орбитальным дугам определены длины баз между 8 станциями слежения. Среднее квадратическое расхождение длин баз, полученных из разных определений, составляет от 1,8 до 4,1 см. Наблюдения такой точности с успехом можно использовать для определения годичного перемещения литосферных плит.

Глава 27.

НОВЫЕ СРЕДСТВА КОСМИЧЕСКОЙ ГЕОДЕЗИИ И ПЕРСПЕКТИВЫ ЕЕ РАЗВИТИЯ

§ 106. РОЛЬ НОВЫХ СРЕДСТВ В РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ГЕОДЕЗИИ, ГЕОДИНАМИКИ, АСТРОМЕТРИИ

В 70-х годах интенсивно велись и продолжают вестись сейчас работы в области применения новых средств и методов для решения задач геодезии, геодинамики и астрометрии. К новым методам относят спутниковую альтиметрию, градиентометрию, измерения по линиям спутник — спутник, лазерную локацию Луны и радиоинтерферометрию со сверхдлинной базой.

В качестве примера успешного использования результатов спутниковой альтиметрии для уточнения параметров гравитационного поля Земли, изучения фигуры геоида, динамики океана, топографии поверхности морей и океанов, движения льдов можно привести выводы, полученные на основе наблюдений ИСЗ GEOS-3 и Seasat.

За период с 1975 до 1978 г. со спутника GEOS-3 были измерены высоты ИСЗ над всеми акваториями между 65° с. ш. и 65° ю. ш. Осреднение высот для изучения фигуры геоида проводилось с интервалом 30—80 км. В основном на таком же расстоянии находились друг от друга подспутниковые трассы.

Всего по данным спутниковой альтиметрии с GEOS-3 вычислили средние значения высот геоида и аномалий силы тяжести в свободном воздухе для 27465 трапеций размером $1^\circ \times 1^\circ$ и 957 трапеций размером 550×550 км².

Средние аномалии для трапеций 550×550 км² получились в три раза точнее, чем полученные гравиметрическим способом.

Объединив результаты спутниковой альтиметрии и гравиметрические данные для трапеций $1^\circ \times 1^\circ$. Рапп Р. [15] получил 52917 средних значений аномалий силы тяжести (охвачено 85 % земной поверхности). По этим данным он выполнил разложение силы тяжести в ряд сферических функций до $n=180$.

Результаты спутниковой альтиметрии стали использоваться, таким образом, при выводе комбинированных моделей гравита-

ционного поля Земли. К таким моделям относятся, например, GEM-10B и GEM-10C. В первой из этих моделей получены все гармонические коэффициенты геопотенциала до $n=36$. В GEM-10C были получены коэффициенты геопотенциала до $n=180$. Полученная при этом карта высот геоида Мирового океана имеет высоту сечения 2 м. Средняя квадратическая ошибка высот геоида составляет 0,5—2,0 м.

Важное значение имеет вывод о том, что существует соответствие между формой поверхности морского дна и топографией геоида. Это было установлено в результате сравнения альтиметрических высот геоида с данными батиметрии [15, с. 53].

С помощью радиовысотомера, установленного на борту GEOS-3, измерялась скорость приводного ветра, оценивались высоты и длины волн в океане. Как показали результаты спутниковой альтиметрии, скорость приводного ветра в интервале 1—21 м/с определяется со средней квадратической ошибкой 2,6 м/с.

Было обращено внимание на зависимость топографии поверхности океана и областей температурных аномалий, которые регистрировались спутником Nimbus-6.

Исследования показали, что спутниковая альтиметрия может использоваться для изучения рельефа суши, высоты ледовых поверхностей и уровней внутренних водоемов.

За рубежом исследуются теоретические аспекты проблемы и проводятся экспериментальные наблюдения по линиям спутник—спутник. Их целью является получение аномалий силы тяжести с высоким разрешением, эквивалентным определению гармонических коэффициентов от $n=50$ до $n=150$.

Экспериментальные работы проводились, в частности, с использованием наблюдений по линиям стационарный ИСЗ ATS-6 и спутник Nimbus-6; ATS-6 и GEOS-3, ATS-6 и «Аполлон» — «Союз».

Исследования показывают, что для определения высот геоида с ошибкой 1 м необходимо измерять относительную скорость двух спутников, движущихся на высоте 200—300 км и на таком же расстоянии друг от друга, с ошибкой 0,01 мм/с.

Если вывести на низкую орбиту пару небольших спутников, так чтобы расстояние спутников друг от друга составляло 100—200 км, то их относительное перемещение позволит изучать тонкую структуру гравитационного поля, соответствующую разложению потенциала до степени $n \approx a_e/d$, где a_e — экваториальный радиус Земли; d — расстояние между ИСЗ [15, с. 65].

Большие перспективы в изучении тонкой структуры гравитационного поля Земли сулит также метод спутниковой градиентометрии (для $n > 40$), поскольку градиенты силы тяжести изменяются под действием аномалий силы тяжести гораздо больше, чем гармонические коэффициенты геопотенциала. Для реализации метода надо обеспечить высокую точность измере-

ния вторых производных геопотенциала, так чтобы средняя квадратическая ошибка не превышала 0,01 Е. Как показали модельные расчеты [15, с. 71] для спутника с высотой орбиты 300 км, измерения градиента силы тяжести с ошибкой 0,01—0,03 Е дают возможность определить для трапеций $2 \times 2^\circ$ аномалии силы тяжести со средними квадратическими ошибками $1,5 \cdot 10^{-6}$ — $1,0 \cdot 10^{-5}$ мс⁻² (0,15—1,0 мгал) и высоты геоида со средними квадратическими ошибками 0,9—1,3 м.

Выдающиеся работы академиков Н. Г. Басова и А. М. Прохорова в области квантовой электроники обусловили рождение и развитие нового метода космической геодезии — лазерной локации Луны. Работы в этой области проводятся в СССР и США с 1962 г. В 1965 г. в Крымской астрофизической обсерватории с помощью телескопа диаметром 2,6 м впервые удалось получить отраженный лазерный импульс от поверхности Луны, что позволило измерять расстояние до Луны с ошибкой ~ 100 м.

Как отмечалось выше, лазерная локация Луны позволяет успешно решать широкий круг задач геодезии, астрометрии, небесной механики и геодинамики. На основе лазерной локации Луны можно определять с высокой степенью точности геоцентрические координаты наземных пунктов и селеноцентрические координаты отражателей на Луне, изучать движение земных полюсов и неравномерности вращения Земли, уточнять параметры физической либрации Луны и теорию ее орбитального движения и т. д.

Однако решение таких задач стало возможным только после доставки и установки на поверхности Луны лазерных уголкового отражателей. В настоящее время на Луне имеется 5 лазерных уголкового отражателей. Два из них доставлены вместе с советскими самоходными аппаратами «Луноход-1» и «Луноход-2», остальные три — американскими астронавтами на космических кораблях «Аполлон-11, 14 и 15». Схема расположения лазерных уголкового отражателей на поверхности Луны изображена на рис. 87.

Исследования показывают, что расположение на видимой стороне Луны ~ 11 отражателей позволит оптимально решать (при необходимой точности лазерных дальномеров) любые из перечисленных выше задач.

В настоящее время расстояния до отражателей, установленных на Луне, измеряются со средней квадратической ошибкой от 3 м до 8—15 см. Точность единичного измерения после учета поправок за атмосферные влияния и аппаратных, как правило, не превышает 30 см. Несколько измерений образуют так называемую «нормальную точку», при этом обеспечивается точность получения расстояний 8—10 см.

Приведем примеры практического использования лазерной локации Луны. В 1973—1974 гг. было определено расстояние между Крымской астрофизической обсерваторией и обсерваторией Макдональда (США). Оно получилось равным 9 453 356 м

[15, с. 77]. Длина этой хорды, полученная ранее, составляла 9453 373 м. На обсерватории Макдональда была достигнута точность определения скорости вращения Земли при использовании лишь суточных сеансов наблюдений, характеризующаяся относительной ошибкой $0,6 \cdot 10^{-8}$. Получены более точные эфемериды Луны: сначала выполнено уточнение LE-16, а затем

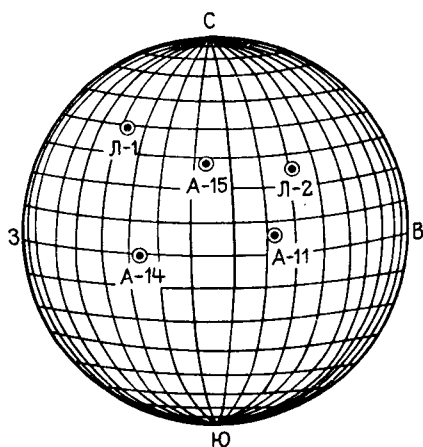


Рис. 87. Схема расположения угловых отражателей на Луне

созданы эфемериды LURE-1 и UTIE-10. Новые эфемериды позволяют определить разности $D_0 - D_c$ с ошибкой 3—10 м. (D_0 — измеренное расстояние до Луны, D_c — предвычисленное). В дальнейшем эта разность была уменьшена до 70 см. Кроме СССР и США лазерные дальномеры для локации Луны установлены на обсерваториях Франции, Японии, Австралии. Ряд обсерваторий участвовал в первой наблюдательной кампании проекта MERIT.

Потенциальные возможности метода лазерной локации Луны чрезвычайно высоки. Уже при измерении топоцентрических

расстояний до Луны со средней квадратической ошибкой 0,5 м можно определить геоцентрические координаты наземных пунктов со средней квадратической ошибкой 0,2 м. Селеноцентрические координаты отражателей можно получить со средней квадратической ошибкой 5 м, постоянную физической либрации Луны f с относительной ошибкой $1 \cdot 10^{-4}$, координаты полюса Земли со средней квадратической ошибкой 0,5 м [15]. Точность получаемых результатов зависит не только от точности лазерного дальномера и учета поправок, но также от продолжительности сеанса наблюдений. Для разных параметров в зависимости от их физической сущности оптимальная продолжительность будет разной. Использование лазерных дальномеров третьего поколения позволит определять координаты полюса за сутки со средней квадратической ошибкой 0,2 м. Предельная достижимая точность, видимо, будет характеризоваться средней квадратической ошибкой $m_x = m_y = 2 \div 3$ см. Таким образом, лазерная локация Луны может оказаться весьма эффективным средством для изучения тектоники плит.

В отличие от лазерной локации Луны метод радиоинтерферометрии со сверхдлинной базой является всепогодным, может применяться в любое время суток, не предъявляет к выбору места для антенн специальных требований с точки зрения климатических условий. Идея метода РСДБ была разработана со-

ветскими учеными Л. И. Матвеевко, Н. С. Кардашевым и Г. Б. Шоломницким и опубликована в 1965 г. [5].

Потенциальные возможности метода РСДБ чрезвычайно высоки. Они характеризуются данными, приведенными в табл. 23*.

Т а б л и ц а 23. Точностные возможности метода РСДБ

Параметр	Возможная точность определения за 3—5-летний цикл наблюдений, угл. с	Параметр	Возможная точность определения за сутки
α	0,01	Длина	15 см
δ	0,01—0,001	ф, λ	0,005"
Разность	0,001—0,0001	Положение полюса	15 см
Прецессия	0,001	Продолжительность суток	0,01—0,05 мс
Нутация	0,006	Синхронизация шкал времени	1 нс
Изменение угла наклона эклиптики к экватору	0,001		

Достигнутые на сегодня результаты выглядят гораздо скромнее. Точность определения абсолютных положений радиоисточников характеризуется средними квадратическими ошибками 0,07—0,3". Относительные определения характеризуются меньшими средними квадратическими ошибками m_α и m_δ : 0,02—0,08".

Для осуществления ряда научных экспериментов в конце 60-х — первой половине 70-х годов было создано несколько интерферометров с межконтинентальными базами (рис. 88). Длина базы Хайстэк — Грин Бэнк (845 км) была определена со средней квадратической ошибкой, меньшей 1 м. Длина хорды Хайстэк — Голдстоун (3900 км) была определена в 1972—1973 гг. со средней квадратической ошибкой 0,16 м. На концах баз иса в этом случае находились антенны диаметром 37 и 64 м соответственно. Отличие вероятнейшего значения длины этой хорды от результата, полученного по наземным геодезическим данным, составило 1,6 м.

В качестве примера использования РСДБ для вывода параметров вращения Земли (ПВЗ) приведем результаты работы четырех обсерваторий (три в США и одна в Швеции) в рамках проекта MERIT в сентябре — октябре 1980 г. Из наблюдений 14 радиоисточников в течение 14 дней координаты полюса получили со средними квадратическими ошибками $m_x = 0,0013''$,

* Троицкий В. С., Алексеев В. А., Никонов В. Н. Новые возможности решения задач астрометрии, геодинамики и геодезии методами радиоинтерферометрии со сверхдлинной базой. — «Успехи физических наук» — 1975, № 2.

$m_y = 0,0016''$, а разность UT1—UTC с ошибкой 0,07 мс (все ошибки получены по внутренней сходимости). При высокой формальной точности было, однако, обнаружено, что имеет место систематическое различие полученных с помощью РСДБ данных с результатами ВИН. Линейный тренд в разностях РСДБ—ВИН составил для x 0,035'', для y 0,020''; для UT1

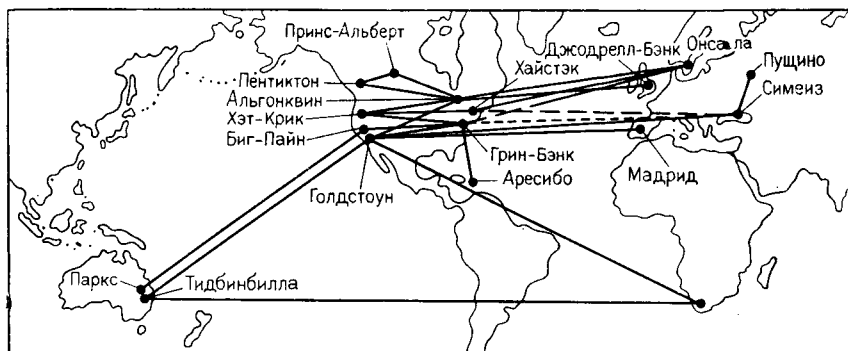


Рис. 88. Схема размещения радиотелескопов для проведения экспериментов по РСДБ

0,002^s. По внутренней сходимости была также выполнена оценка точности определения длин 10 базисов. Средняя квадратическая ошибка m_D получилась равной 2—3 см для $D < 6000$ км и $m_D = 5—7$ см для D от 6000 до 8000 км.

Следует особо подчеркнуть, что большой вклад в разработку теоретических основ применения метода РСДБ для решения задач геодезии, астрометрии и геодинамики внес И. Д. Жонголович. Им, в частности, было выдвинуто предложение о создании международной интерферометрической службы из 10—12 радиотелескопов с расстояниями между ними 6—8 тыс. км. Радиотелескопы следовало разместить по 2 на каждой из активных тектонических плит. Систематические наблюдения на пунктах такой сети, наряду с изучением континентального дрейфа и определением ПВЗ, позволили бы построить инерциальную систему координат радиоисточников (ИСКРИ) и решить ряд других задач астрометрии и геодезии.

Специалистами в разных странах разработан ряд проектов глобальных радиоинтерферометрических систем, предназначенных для решения фундаментальных и прикладных задач. В Советском Союзе это проект «Полигам» [5].

Помимо РСДБ широко применяются радиоинтерферометры со связанными элементами. Длина базы в этом случае составляет от нескольких километров до нескольких десятков километров. Такими интерферометрами определены в большинстве случаев координаты радиоисточников. С использованием фазо-

стабильной радиоинтерферометрии получены также геодезические и геодинамические выводы.

Как следует из зарубежных материалов, целесообразно при реализации радиоинтерференционного метода использовать искусственные радиисточники (радиомаяк на ИСЗ). Таким образом наблюдался с использованием трехэлементного интерферометра (Массачусетс — Грин-Бэнк — Овенс Вэлли) радиомаяк на стационарном спутнике. Положение последнего было определено со средней квадратической ошибкой порядка 5 см.

Метод радиоинтерферометрии применялся также для обеспечения навигации лунного вездехода «Аполлон-16».

§ 107. ПЕРСПЕКТИВЫ РАЗВИТИЯ КОСМИЧЕСКОЙ ГЕОДЕЗИИ

Перспективы развития космической геодезии в первую очередь связаны с дальнейшим повышением точности наблюдений. Особенно это относится к доплеровским и лазерным наблюдениям. Лазерные наблюдения в случае измерения топоцентрических дальностей до спутника со средней квадратической ошибкой 3—5 см позволяют не только с высокой степенью точности определять координаты пунктов, но и дают материал для изучения тонких геодинамических эффектов. Совместно с данными лазерной локации Луны и РСДБ лазерная дальнометрия ИСЗ явится мощным средством для определения параметров вращения Земли, изучения дрейфа литосферных плит, исследования приливных явлений, получения данных, позволяющих решать другие геофизические задачи. Доплеровские наблюдения, хотя и не отличаются такой высокой точностью, обладают несомненными достоинствами. Они реализуются портативной аппаратурой, обеспечивают получение за одно прохождение большого количества измерительной информации, легко поддаются автоматизации. Они обеспечивают решение как геодезических, так и геодинамических задач.

Фотографические наблюдения достигли, как показывает опыт, предела точности, но продолжают сохранять важное значение при определении ориентировки космических геодезических построений.

Во всех случаях дальнейшее повышение точности наблюдений связано с совершенствованием аппаратуры, разработкой методов учета влияния внешней среды, созданием надежных способов калибровки аппаратуры.

Важное значение имеет дальнейшее развитие теоретических основ и применение на практике новых методов космической геодезии: спутниковой альтиметрии, спутниковой градиентометрии, измерений по линии спутник — спутник, лазерной локации Луны и РСДБ.

С начала 70-х годов наиболее существенные в научном и практическом отношении выводы получают на основе динами-

ческих методов космической геодезии. Применение методов, перечисленных выше, открывает новые перспективы. На основе спутниковой альтиметрии, спутниковой градиентометрии, измерений по линии спутник — спутник можно будет уточнить сведения о тонкой структуре гравитационного поля. Спутниковая альтиметрия при измерении расстояний от ИСЗ до водной поверхности со средней квадратической ошибкой 10 см явится мощным средством решения задач океанологии, позволит детально изучить топографию поверхности океана, океанические течения и вихри, приливно-отливные явления, ветровые волны, уклоны водной поверхности вблизи берегов.

Наряду с дальнейшим развитием измерительной техники и повышением точности наблюдений, важное значение имеет совершенствование теоретических основ методов спутниковой геодезии и, в первую очередь, теорий движения ИСЗ. Должно быть обеспечено соответствие теории движения спутника и точности результатов наблюдений. Как подчеркивается в работе [18], должны развиваться как аналитические теории движения ИСЗ, так и численные методы.

Необходимо продолжение исследований по сопоставлению различных способов представления гравитационного поля Земли (с помощью сферических функций, выборочных функций, мультипольного представления, системы точечных масс, эллипсоидальных гармоник и т. д.) с точки зрения легкости построения теории движения спутников, точности, наблюдаемости, универсальности, затрат машинного времени и т. д. Подобные исследования особенно важны, если учесть, что методы космической геодезии в связи с их общностью пригодны не только для изучения Земли, но и для геодезических исследований Луны и планет Солнечной системы.

Назовем еще некоторые важные направления дальнейшего развития космической геодезии и задачи, которые необходимо при этом решать:

- дальнейшее совершенствование способов определений координат пунктов как геометрическим, так и динамическим методами;

- уточнение элементов ориентирования координатных систем референц-эллипсоидов относительно центра масс Земли и осей геоцентрической системы координат;

- совершенствование метода баллонной триангуляции как средства для соединения глобальных космических геодезических построений с наземными рядами и сетями триангуляции и полигонометрии, построенными в пределах отдельных ограниченных территорий;

- уточнение параметров геопотенциала с использованием разнообразных космических средств и методов и с привлечением наземных гравиметрических и геодезических данных;

- изучение вариаций параметров геопотенциала во времени;

— выявление зависимостей между различными физическими полями Земли, например, гравитационным полем и рельефом, гравитационным полем и тепловым полем;

— определение пространственного распределения в недрах Земли плотностных неоднородностей, следствием которых являются аномалии гравитационного поля;

— изучение упругих свойств Земли, приливных явлений в океанах и в твердой оболочке;

— исследования по вопросу организации мониторинга геодинимических явлений. В первую очередь это относится к определению параметров вращения Земли с использованием лазерной локации ИСЗ и Луны, РСДБ и других методов, целесообразность применения которых подтвердит проведение международного проекта MERIT. Одновременно следует развивать работы по применению методов космической геодезии для изучения дрейфа континентов и механизма землетрясений;

— более широкое привлечение спутниковой информации для изучения внутреннего строения Луны и планет Солнечной системы;

— дальнейшее уточнение фундаментальных постоянных геодезии и астрономии;

— построение с использованием спутниковых данных моделей атмосферы, необходимых, в частности, для редуцирования наблюдений и учета возмущающего действия на движение ИСЗ;

— обеспечение орбитальных расчетов ресурсных спутников и координатно-временной привязки результатов космических съемок;

— установление оптимального соотношения между объемом спутниковых наблюдений и наблюдениями, которые выполняются традиционными наземными методами. Это относится как к геометрическим построениям, так и к динамическим методам;

— совершенствование инструментов и методов для экспедиционных наблюдений ИСЗ с целью определения как относительных, так и абсолютных координат пунктов;

— исследования по вопросам уравнивания космических геодезических построений;

— обеспечение оперативной обработки больших массивов информации, получаемых, например, в процессе реализации спутниковой альтиметрии;

— разработка методов проектирования космических геодезических построений и исследований в области космической геодезии. Оптимизация разрабатываемых проектов.

Как видно из приведенного перечня проблем, наиболее ценные результаты следует ожидать на стыках таких научных дисциплин, как геодезия, геодинамика, геофизика, физика атмосферы, океанология, геоморфология, геология. Это обстоя-

тельство является мощным стимулом для эффективного развития космической геодезии.

К этому надо еще добавить, что такие методы, как лазерная локация Луны и РСДБ, позволяют успешно решать ряд важных задач фундаментальной астрометрии, небесной механики и астрофизики.

Таким образом, существует широкий класс научных и практических задач космической геодезии, которые имеют важное значение для прогресса науки и развития народного хозяйства и которые ждут энергичных, целеустремленных исследователей. В руках этих исследователей будущее геодезической науки, создающей, наряду с другими отраслями знаний, реалистическую картину окружающего нас мира, приближающей к раскрытию многих тайн природы.

1. Абаликин В. К. Основы эфемеридной астрономии.— М.: Наука, 1979.
2. Аксенов Е. П. Теория движения искусственных спутников Земли.— М.: Наука, 1977.
3. Бакулин П. И., Блинов Н. С. Служба точного времени.— 2-е изд.— М.: Наука, 1979.
4. Большаков В. Д., Гайдаев П. А. Теория математической обработки геодезических измерений.— М.: Недра, 1977.
5. Губанов В. С., Фinkelштейн А. М., Фридман П. А. Введение в радиоастронометрию.— М.: Наука, 1983.
6. Гребеников Е. А., Рябов Ю. А. Новые качественные методы в небесной механике.— М.: Наука, 1971.
7. Дубошин Г. Н. Небесная механика. Методы теории движения искусственных небесных тел.— М.: Наука, 1983.
8. Изучение Земли как планеты методами астрономии, геодезии и геофизики: Труды I Орловской конференции.— Киев: Наукова думка, 1982.
9. Использование искусственных спутников Земли для построения геодезических сетей/Е. Г. Бойко, Б. М. Кленицкий, И. М. Ландис и др.— М.: Недра, 1977.
10. Использование оптических наблюдений искусственных спутников Земли для геодезии.— София: Болгарская Академия наук, 1979.
11. Краснорылов И. И., Плахов Ю. В. Основы космической геодезии.— М.: Недра, 1976.
12. Машимов М. М. Планетарные теории геодезии.— М.: Недра, 1982.
13. Машимов М. М. Уравнивание геодезических сетей.— М.: Недра, 1979.
14. Медведев П. П. Исследование гравитационного поля и фигуры Земли новыми методами космической геодезии. Итоги науки и техники, серия «Геодезия и аэросъемка».— М.: 1980.
15. Медведев П. П. Методы и результаты спутниковой геодезии.— Итоги науки и техники, серия «Геодезия и аэросъемка».— М.: 1980.
16. Пеллинен Л. П. Высшая геодезия.— М.: Недра, 1978.
17. Плахов Ю. В. Применение теории возмущений в космической геодезии.— М.: Недра, 1983.
18. Подобед В. В., Нестеров В. В. Общая астрометрия.— М.: Наука, 1982.
19. Справочник геодезиста/Под ред. В. Д. Большакова и Г. П. Левчука.— 3-е изд. М.: Недра, 1985.
20. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике/Под ред. Г. Н. Дубошина.— 2-е изд.— М.: Наука, 1976.
21. Урмаев М. С. Орбитальные методы космической геодезии.— М.: Недра, 1981.

- Альтиметрия** спутниковая 307, 371, 391, 392
Аналитические методы интегрирования 150
Аномалия высоты
 — силы тяжести 386, 391, 392
 — истинная 118, 247
 — средняя 118, 119
 — эксцентрическая 119, 247
Аргумент перигенция 34, 116, 117
 — широты 34, 122
Апоцентр 112
Атмосферное торможение 189, 204
Базис космический 368
Бесселевы функции 165
Вес измеренной величины 232
 — плоскости синхронизации 234
 — сферических координат хорды 235
Возмущения вековые 195
 — долгопериодические 195
 — короткопериодические 195
 — резонансные 195
Восходящий узел 34, 117
Гармонические коэффициенты геопотенциала
 — — зональные 175, 372, 377
 — — нормированные 176, 373, 375
 — — резонансные 202, 374, 376
 — — секторные 175
 — — тессеральные 175
Геодинамика 320, 321, 334
Геоид планетарный 346, 361
Геоцентрические ИСЗ 380, 381
Геоцентрическая гравитационная постоянная 174, 381, 354—356
Геопотенциал 174, 398
Градиент функции 255
 — силы тяжести 392, 393
Градиентометрия спутниковая 371, 391
Динамика Земли 326
Движение полюсов 22, 385, 393, 343, 346, 330—333
Долгота восходящего узла 34, 116
Законы Кеплера 112, 114, 120, 121
Засечка направлений 211, 215
 — плоскостей 211
 — хорд 211
Затвор створчатый 48, 53
 — обтураторный 50
 — междудлинзовый
Интеграл Лапласа 109
 — площадей 108
 — энергии 109
Координатно-измерительные приборы 67, 68
Лазерная локация Луны 356, 371, 383, 391
Линия апсид 112
 — узлов 33, 116
Метод геометрический 5, 207, 364, 368, 370, 399
 — динамический 7, 207, 365, 371, 376, 398
 — коротких дуг 249
 — орбитальный 7, 209, 242, 370, 371
Модели гравитационного поля Земли 372, 377, 385
Момент инерции Земли 336, 324
Мониторинг фотокамер азимутальной 50
 — — двухосная 50
 — — трехосная 50
 — — четырехосная 50
 — — экваториальная 50
Наблюдения ИСЗ доплеровские 94, 213, 367, 373, 382, 385
 — — лазерные 86, 213, 366, 373, 382, 385
 — — радиоинтерференционные 100
 — — радиотехнические 93, 213, 370
 — — фотографические 46, 213, 365, 373, 381, 397
Наклон орбиты 34, 116, 117
Нивелирование спутниковое 306, 307, 308, 309, 310, 349, 358, 346
Нисходящий узел 34, 117
Нормальная Земля 350, 353, 352
Нутация земной оси 14
Ось фотокамеры часовая 50
 — — склонений 50
Ошибки направлений на ИСЗ 255
 — хорды 257
 — плоскости синхронизации 256
 — положения вершин засечек 262
 — конечного пункта ряда спутниковой триангуляции 264
Параметры астрометрические 350
 — вращения Земли 383, 396
 — геодезические 350
 — геофизические 350
 — нормальной Земли 350, 353

— нормальной Луны 353
— фундаментальные 350, 358, 359, 360
Перицентр 112
Плоскость синхронизации 211
Полиномы Гегенбауэра 177
Потенциал двух неподвижных центров 179
Предел Лапласа 172
Прецессия земной оси 14, 188
Радиус геоцентрический 23, 312, 347
— геоида 348, 349, 360, 361
— полярный 361
— топоцентрический 30, 207
— экваториальный 361
Радиовысотометр 392, 307
Радиодальномерная система беззапросная 93
— — запросная 93, 95
Радиоинтерферометрия со сверхдлинной базой (РСДБ) 103, 371, 394, 397
Референц-эллипсоид 26, 208, 378
Рефракция тропосферная 370
Сжатие Земли полярное 175, 361, 359
— — экваториальное 361, 362
Система координат геодезическая 26
— — геоцентрическая 12, 21, 210, 333, 314
— — горизонтная 32
— — гринвичская 21, 23
— — звездная 212
— — общеземная 212
— — орбитальная 33—35
— — топоцентрическая 29, 32
Секторная скорость 114
Способ Тернера 71
Тензор инерции 341, 337, 335, 339, 343, 342
Теорема Лапласа 196
Транслокация 217, 241, 371
Тренд 396

Триангуляция балонная 380
— звездная 380
— космическая 208, 365
— спутниковая 208
Уравнения возмущенного движения 131
— Лагранжа 143, 145
— Ньютона 146, 148
— плоскости синхронизации 213, 234
Условные уравнения базисные 227
— — координатные 229
— — полюсные 229
— — пучка плоскостей 226
— — связи плоскостей 227
— — трех векторов 221
Фигура Земли
— — гравитационная 353, 324
— — динамическая 324, 341, 337, 335, 339, 342, 343, 334, 325, 361
— — физическая 323
Физическая либрация Луны 393, 394
Центр инерции Земли
— масс Земли 12, 312
Частота бисний 95
— доплеровская 94
— подставки 96
Числа Лява 185, 390
— Шида 391
Элементы ориентирования 379
Эллипсоид
— вращения 358
— инерции 335, 336, 329, 337, 341, 337
— двухосный 350
— трехосный 360, 362, 363, 361, 324
— уровненный 347, 352
Эфемериды
— бортовые 370
Юлианская дата 13
— — модифицированная 13

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Введение	4

РАЗДЕЛ 1.

СИСТЕМЫ КООРДИНАТ И СИСТЕМЫ ВРЕМЕНИ В КОСМИЧЕСКОЙ ГЕОДЕЗИИ

Глава 1. Системы координат в космической геодезии	11
§ 1. Инерциальная система отсчета	11
§ 2. Геоцентрические системы координат, вращающиеся вместе с Землей	21
§ 3. Топоцентрические и орбитальные системы координат	29
Глава 2. Системы времени в космической геодезии	36
§ 4. Системы звездного и всемирного времени	36
§ 5. Эфемеридное время	39
§ 6. Атомное время	41

РАЗДЕЛ 2.

АППАРАТУРА И МЕТОДЫ НАБЛЮДЕНИЙ ИСЗ

Глава 3. Методы наблюдений ИСЗ	43
§ 7. Особенности наблюдений ИСЗ	43
§ 8. Классификация методов наблюдений ИСЗ и их краткая характеристика	44
Глава 4. Фотографический метод наблюдения	46
§ 9. Особенности применения фотографического метода при наблюдениях ИСЗ	46
§ 10. Аппаратура для фотографических наблюдений	53
§ 11. Измерения координат на снимке. Математическая обработка результатов измерений	67
§ 12. Вычисление топоцентрического направления на ИСЗ	73
Глава 5. Телевизионный метод наблюдения	76
§ 13. Возможности применения телевизионной техники для наблюдения ИСЗ и космических объектов	76
§ 14. Аппаратура, методика наблюдений и обработки результатов	78
§ 15. Комбинированные системы определения координат	84
Глава 6. Применение лазерной техники для наблюдений ИСЗ	86
§ 16. Особенности и возможности лазерно-дальномерных измерений	86
§ 17. Лазерные установки для наблюдений ИСЗ	88
Глава 7. Радиотехнические методы наблюдений	93
§ 18. Радиодальномерные наблюдения ИСЗ	93
§ 19. Доплеровские системы наблюдений ИСЗ	94
§ 20. Радиоинтерференционные методы наблюдений	100

РАЗДЕЛ 3.

НЕВОЗМУЩЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ ИСЗ

Глава 8. Дифференциальные уравнения невозмущенного движения, их интегрирование и исследования	105
§ 21. Вывод дифференциальных уравнений невозмущенного движения	105
§ 22. Интегрирование дифференциальных уравнений движения	108
§ 23. Исследование невозмущенного движения. Законы Кеплера	111
Глава 9. Элементы орбиты, их связь с постоянными интегрирования, координатами и компонентами скорости ИСЗ	116

§ 24. Элементы орбиты и их связь с постоянными интегрирования	116
§ 25. Динамический интеграл. Третий закон Кеплера	118
§ 26. Основные формулы невозмущенного движения	121
Глава 10. Определение элементов орбиты из наблюдений	123
§ 27. Определение предварительных элементов орбиты ИСЗ из наблюдений	123
§ 28. Понятие о методе уточнения орбит ИСЗ	128

РАЗДЕЛ 4.

ВОЗМУЩЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ ИСЗ 131

Глава 11. Дифференциальные уравнения возмущенного движения ИСЗ	131
§ 29. Постановка задачи	131
§ 30. Аналитические основы теории возмущенного движения	133
§ 31. Канонические уравнения Гамильтона	137
§ 32. Уравнения возмущенного движения ИСЗ в координатах	139
§ 33. Уравнения Лагранжа для оскулирующих элементов орбиты	143
§ 34. Уравнения Ньютона для оскулирующих элементов орбиты	146
§ 35. Особенности уравнений Лагранжа и Ньютона	148
Глава 12. Методы приближенного интегрирования дифференциальных уравнений возмущенного движения ИСЗ	150
§ 36. Основные методы приближенного аналитического интегрирования уравнений движения ИСЗ	150
§ 37. Интегрирование канонических уравнений движения	155
§ 38. Основные методы численного интегрирования уравнений возмущенного движения	159
Глава 13. Разложения геоцентрических координат ИСЗ и их функций в ряды	163
§ 39. Постановка задачи	163
§ 40. Тригонометрические разложения	165
§ 41. Разложения по коэффициентам Ганзена	167
§ 42. Сходимость разложений	170
Глава 14. Возмущающие функции и возмущающие ускорения, действующие на ИСЗ	173
§ 43. Постановка задачи	173
§ 44. Возмущающая функция геопотенциала	174
§ 45. Разложение возмущающей функции геопотенциала	176
§ 46. Некоторые другие формы представления геопотенциала, применяемые в космической геодезии	179
§ 47. Негеопотенциальные возмущающие функции	183
§ 48. Составляющие возмущающего ускорения, вызванного атмосферным торможением	189
§ 49. Малые возмущающие факторы	193
Глава 15. Возмущения в движении ИСЗ	194
§ 50. Классификация типов возмущений, вызываемых потенциальными факторами	194
§ 51. Возмущения в движении ИСЗ от потенциальных факторов	196
§ 52. Эволюция орбиты ИСЗ под действием атмосферного торможения	204

РАЗДЕЛ 5.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ КОСМИЧЕСКОЙ ГЕОДЕЗИИ И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ 207

Глава 16. Схемы построения спутниковой триангуляции и основные уравнения	207
§ 53. Общие принципы использования ИСЗ для определения координат наземных пунктов	207
§ 54. Уравнение плоскости синхронизации и хорды	213

§ 55. Формулы для определения координат вершин некоторых элементарных фигур спутниковой триангуляции	215
Глава 17. Уравнивание спутниковых геодезических сетей	220
§ 56. Виды условий, возникающих в спутниковой триангуляции	220
§ 57. Уравнения поправок в спутниковой триангуляции	231
§ 58. Уравнивание спутниковой триангуляции параметрическим способом	235
§ 59. Уравнивание спутниковой триангуляции коррелятным способом	239
§ 60. Понятие об уравнивании геодезических сетей, построенных орбитальным методом	242
§ 61. Сравнительная характеристика методов построения спутниковой геодезической сети	250
Глава 18. Точность определения пунктов в элементарных фигурах и сетях спутниковой триангуляции	252
§ 62. Задачи и методы априорной оценки точности	252
§ 63. Ошибки определения отдельных элементов спутниковой триангуляции	255
§ 64. Ошибка положения вершины угловой пространственной засечки	259
§ 65. Ошибки положения вершины засечки плоскостей	260
§ 66. Ошибки положения вершин линейных, разностно-дальномерных и комбинированных засечек	262
§ 67. Ошибки положения конечных пунктов ряда космической триангуляции	264
§ 68. Формы приближенной оценки точности положения пунктов в сплошных сетях спутниковой триангуляции	268
Глава 19. Сведения о проектировании спутниковой триангуляции	271
§ 69. Основы проектирования спутниковой триангуляции	271
§ 70. Оптимальные формы отдельных фигур спутниковой триангуляции	273
§ 71. Оптимальные сочетания измерений в сплошных сетях спутниковой триангуляции	278
§ 72. Соображения по проектированию спутниковой триангуляции	282

РАЗДЕЛ 6.

ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ КОСМИЧЕСКОЙ ГЕОДЕЗИИ И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

Глава 20. Общие динамические задачи космической геодезии	285
§ 73. Постановка задач	285
§ 74. Вычисление свободных членов уравнений поправок в орбитальном и общем динамическом методах	287
§ 75. Вычисление коэффициентов уравнений поправок в орбитальном и общем динамическом методах	290
§ 76. О решении уравнений поправок общего динамического и орбитального методов	293
§ 77. Определение параметров геопотенциала по возмущениям орбит спутников	295
§ 78. Дополнительные сведения о сущности резонансных возмущений	300
§ 79. Дополнительные сведения об определении коэффициентов долготных гармоник геопотенциала по резонансным возмущениям	304
Глава 21. Спутниковое нивелирование	306
§ 80. Сущность спутникового нивелирования	306
§ 81. Уравнения спутникового нивелирования	308
§ 82. Вклад спутникового нивелирования в решение задач геодезии	309
Глава 22. Светолокация Луны и радиointерферометрические наблюдения космических объектов	311
§ 83. Общие сведения о светолокации Луны	311
§ 84. Уравнения системы Земля—Луна	312
§ 85. Принципы решения уравнений светолокации Луны	314
§ 86. Длиннобазисная радиointерферометрия	316

§ 87. Особые случаи радионтерферометрических наблюдений космических объектов	319
Глава 23. Методы решения задач геодинамики	320
§ 88. Геодинамические задачи в геодезии	320
§ 89. Определение параметров динамической фигуры Земли	335
§ 90. Изучение движения полюсов Земли	343
§ 91. Определение высот геоида и изучение топографии морей и Мирового океана	346
Глава 24. Определение основных параметров Земли	350
§ 92. Параметры Нормальной Земли и согласующие формулы	350
§ 93. Определение геоцентрической гравитационной постоянной	354
§ 94. Определение второго гармонического коэффициента геогравитационного потенциала по возмущениям элементов орбиты ИСЗ	356
§ 95. Определение параметров земного эллипсоида вращения	358
§ 96. Определение параметров трехосного земного эллипсоида	360

РАЗДЕЛ 7.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ, ПОЛУЧЕННЫЕ В КОСМИЧЕСКОЙ ГЕОДЕЗИИ, И ПЕРСПЕКТИВЫ ЕЕ РАЗВИТИЯ . 364

Глава 25. Основные результаты, полученные из наблюдений ИСЗ при решении задач геодезии и теории фигуры Земли	364
§ 97. Международные и национальные программы геодезического применения ИСЗ	364
§ 98. Результаты, полученные геометрическим методом	368
§ 99. Результаты, полученные динамическим методом	371
§ 100. Определение ориентирования систем геодезических координат относительно геоцентрической системы	378
§ 101. Опыты по баллонной триангуляции	380
§ 102. Наблюдения геостационарных ИСЗ	380
Глава 26. Результаты, полученные по наблюдениям ИСЗ и других космических аппаратов в геофизике и астрономии	381
§ 103. Сведения об определении фундаментальных геодезических постоянных	381
§ 104. Данные о вращении Земли	383
§ 105. Геофизические выводы, полученные по наблюдениям ИСЗ и других КА	386
Глава 27. Новые средства космической геодезии и перспективы ее развития 391	391
§ 106. Роль новых средств в решении задач геодезии, геодинамики, астрономии	391
§ 107. Перспективы развития космической геодезии	397
Список литературы	401
Предметный указатель	402

Владимир Николаевич Баранов
Евгений Григорьевич Бойко
Игорь Ильич Краснорылов
Мухамбет Машимович Машимов
Юрий Васильевич Плахов
Михаил Сергеевич Урмаев
Станислав Николаевич Яшкин

КОСМИЧЕСКАЯ ГЕОДЕЗИЯ

Редактор издательства *Т. Б. Шибанова*
Технический редактор *Е. В. Воробьева*
Корректор *А. П. Стальнова*

ИБ 5885

Сдано в набор 25.10.85. Подписано в печать 07.04.86. Т-08077. Формат 60×90¹/₁₆. Бумага типографская № 1. Гарнитура Литературная. Печать высокая. Усл.-печ. л. 25,5. Усл. кр.-отт. 25,5. Уч.-изд. л. 25,58. Тираж 4300 экз. Заказ 2580/242-15. Цена 1 р. 20 к.

Ордена «Знак Почета» издательство «Недра», 103633,
Москва, Третьяковский проезд, 1/19

Ленинградская типография № 4 ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгения Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 191126, Ленинград, Социалистическая ул., 14.