

К. А. АБГАРЯН, И. М. РАПОПОРТ

# ДИНАМИКА РАКЕТ

*Допущено  
Министерством высшего и среднего  
специального образования СССР  
в качестве учебного пособия  
для высших технических учебных заведений*



ИЗДАТЕЛЬСТВО  
«МАШИНОСТРОЕНИЕ»

Москва 1969

В книге изложены основы динамики ракет на твердом и жидком топливах. Приведены уравнения невозмущенного и возмущенного движения ракет, как тел переменного состава, методы линеаризации уравнений и расщепления линеаризованных уравнений на отдельные группы. Рассмотрены устойчивость и управляемость ракеты, ее передаточные функции и динамические характеристики как объекта управления.

Подробно рассмотрены вопросы стабилизации ракеты с учетом упругости ее конструкции и подвижности жидкого топлива в баках.

Книга предназначена для студентов вузов и может быть полезна инженерам авиационной и ракетной промышленности. Табл. 2. Иллюстр. 56. Библ. 27 назв.

Рецензент д-р техн. наук проф. К. С. Колесников

Научный редактор  
канд. техн. наук, доц. Л. С. Чернобровкин

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие «Динамика ракет» посвящено сравнительно узкому классу летательных аппаратов — баллистическим ракетами и ракетам-носителям космических аппаратов.

Курс динамики баллистических ракет и ракет-носителей космических аппаратов можно разделить на две части. В первой из них рассматриваются траектории и программы полета ракет<sup>1</sup>, во второй — устойчивость и управляемость ракет. Данное учебное пособие охватывает задачи второй части курса динамики ракет и включает уравнения движения ракеты как деформируемой материальной системы, динамические свойства ракеты как объекта автоматического регулирования, методы исследования эффективности исполнительных органов системы управления и возможные пути стабилизации движения ракеты.

В отличие от имеющейся учебной литературы по динамике летательных аппаратов в «Динамике ракет» при исследовании движения ракет значительное внимание уделено учету упругости ее корпуса и подвижности топлива в баках<sup>2</sup>, а при исследовании устойчивости и управляемости наряду с методами, основанными на замораживании коэффициентов уравнений, излагаются инженерные методы исследования с учетом влияния переменности коэффициентов.

В процессе проектирования современных баллистических и космических ракет на первом этапе ракета рассматривается как недеформируемая материальная система. На этом этапе решается вопрос о рациональной аэродинамической компоновке ракеты, о потребной эффективности исполнительных органов системы управления и рассматривается вопрос о стабилизации движения ракеты как недеформируемого тела.

На следующем этапе приближенно рассчитываются частотные характеристики ракеты как объекта автоматического регулиро-

---

<sup>1</sup> Этой части курса посвящена книга Р. Ф. Аппазова, С. С. Лаврова, В. П. Мишина [1].

<sup>2</sup> При учете подвижности жидкостей и упругости конструкции предполагается малость колебаний жидкостей и малость упругих колебаний, благодаря чему задачи решаются в линейной постановке.

вания с учетом упругости ее конструкции и подвижности жидкого топлива.

В дальнейшем осуществляется расчет частотных характеристик ракеты как объекта регулирования, точный в рамках принятой ее динамической модели. На основе этих частотных характеристик проектируется автомат стабилизации.

При распределении материала по главам авторы старались по возможности придерживаться указанной последовательности выполнения динамических исследований ракеты.

Предполагается, что читатель знаком с основами теории автоматического управления, аэродинамики, а также с разделами высшей математики, изучаемыми в объеме втузов. В соответствии с действующими учебными программами все эти дисциплины предшествуют курсу динамики летательных аппаратов.

Главы I, II и приложение написаны К. А. Абгаряном, главы III и IV — И. М. Рапопортом.

---



## Глава I

---

### УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ РАКЕТЫ

В полете главным образом вследствие работы двигателей часть массы, заключенная внутри корпуса ракеты, с течением времени непрерывно отделяется от ракеты. В связи с этим возникает необходимость определить, какие частицы следует включать в состав ракеты и какие считать уже отделившимися от нее. В этом вопросе имеется некоторая неопределенность: не ясно, в какой именно момент частица, движущаяся в струе газов, вытекающих из камеры сгорания двигателя, «покидает» ракету. Эту неопределенность можно устранить введением *контрольной поверхности*, условно рассматриваемой как граница ракеты. В качестве такой поверхности, которую далее будем называть также *оболочкой* ракеты, удобно принять замкнутую поверхность, образующую наружную поверхность ракеты и выходными сечениями сопел двигателей. В состав ракеты включаются только те частицы, которые в данный момент находятся внутри этой поверхности.

Через некоторую часть контрольной поверхности происходит истечение массы, что приводит к изменению состава заключенных в ней материальных частиц. Поэтому при изучении движения ракету необходимо рассматривать как материальную систему переменного состава.

Классические теоремы динамики систем постоянного состава — теоремы об изменении количества движения и изменении кинетического момента — к системам переменного состава непосредственно не применимы. Однако, используя эти теоремы, можно вывести аналогичные теоремы для систем переменного состава и сформулировать принцип составления уравнений движения для таких систем, и в частности для ракет.

#### § 1. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ ПЕРЕМЕННОГО СОСТАВА

Рассмотрим замкнутую поверхность  $S_0$  (рис. 1.1.), которая ограничивает объем  $V$ , заполненный разнообразными (тверды-

ми, жидкими, газообразными) частицами. С течением времени одни частицы выходят из объема  $V$ , а другие, наоборот, входят в него. Совокупность материальных частиц, заключенных в объеме  $V$ , является системой переменного состава. Обозначим эту систему через  $\Sigma$ .

Пусть поверхность  $S_0$  и материальные частицы перемещаются относительно некоторой системы координат  $OXYZ$ . Поверхность  $S_0$  при этом может и деформироваться. Количество движения и кинетический момент системы  $\Sigma$  относительно точки  $O$  обозначим соответственно через  $\vec{K}$  и  $\vec{L}$ .

Наряду с системой  $\Sigma$  введем в рассмотрение систему постоянного состава  $\Sigma^*$ , состоящую из тех и только тех материальных частиц, которые в некоторый фиксированный момент времени  $t$  заполняли объем  $V$ . Через  $\vec{K}^*$  и  $\vec{L}^*$  обозначим количество движения и кинетический момент системы  $\Sigma^*$  относительно точки  $O$ .

Системы переменного состава  $\Sigma$  и постоянного состава  $\Sigma^*$  в момент времени  $t$  совпадают. Поэтому

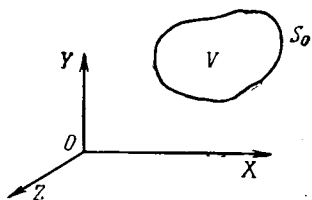


Рис. 1.1.

$$\vec{K}^*(t) = \vec{K}(t), \quad \vec{L}^*(t) = \vec{L}(t). \quad (1.1.1)$$

При  $t_1 \neq t$  системы  $\Sigma$  и  $\Sigma^*$  будут состоять, вообще говоря, из разных частиц. Вследствие этого количество движения и кинетический момент системы  $\Sigma$  будут отличаться от количества движения и кинетического момента системы  $\Sigma^*$ , а именно:

$$\begin{aligned} \vec{K}^*(t_1) &= \vec{K}(t_1) + \vec{k}(t_1), \\ \vec{L}^*(t_1) &= \vec{L}(t_1) + \vec{l}(t_1). \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

Векторы  $\vec{k}(t_1)$  и  $\vec{l}(t_1)$  представляют изменения количества движения и кинетического момента системы  $\Sigma$ , связанные с изменением ее состава за время  $\Delta t = t_1 - t$ .

Вычтем (1.1.1) из (1.1.2) и разделим полученную разность на  $\Delta t$ . Переходя далее к пределу при  $t_1 \rightarrow t$  и учитывая при этом, что

$$\vec{k}(t) = 0, \quad \vec{l}(t) = 0, \quad (1.1.3)$$

получим

$$\frac{d\vec{K}^*}{dt} = \frac{d\vec{K}}{dt} + \frac{d\vec{k}}{dt}, \quad \frac{d\vec{L}^*}{dt} = \frac{d\vec{L}}{dt} + \frac{d\vec{l}}{dt}. \quad (1.1.4)$$

Производные  $\vec{dk}/dt$ ,  $\vec{dl}/dt$  представляют собою секундные расходы количества движения и кинетического момента через поверхность  $S_0$  в момент времени  $t$ .

Соотношения (1.1.4) имеют кинематический характер и справедливы для любой системы координат (инерциальной или неинерциальной).

Допустим теперь, что  $OXYZ$  — инерциальная система координат. К системе  $\Sigma^*$ , как к системе постоянного состава, применимы теоремы классической динамики об изменении количества движения и изменении кинетического момента, которые формулируются так:

1. Производная по времени от количества движения системы равна сумме всех действующих на систему внешних сил.

2. Производная по времени от кинетического момента системы относительно какого-либо неподвижного центра (в данном случае, относительно точки  $O$ ) равна сумме моментов всех внешних сил, действующих на систему относительно того же центра.

На основании этих теорем в фиксированный момент времени  $t$

$$\frac{d\vec{K}^*}{dt} = \vec{F}, \quad \frac{d\vec{L}^*}{dt} = \vec{M}, \quad (1.1.5)$$

где  $\vec{F}$  и  $\vec{M}$  — соответственно главный вектор и главный момент всех внешних сил, действующих в момент времени  $t$  на систему  $\Sigma^*$ , а значит, и на систему  $\Sigma$ .

Из равенств (1.1.4) и (1.1.5) следуют равенства:

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{F} - \frac{d\vec{k}}{dt}, \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} - \frac{d\vec{l}}{dt}. \quad (1.1.6)$$

Соотношения (1.1.6), полученные для данного момента времени  $t$ , остаются справедливыми и для любого другого момента времени  $t'$ , если считать, что  $\vec{F}$  и  $\vec{M}$  — главный вектор и главный момент всех внешних сил, действующих на систему  $\Sigma$ , а  $\vec{dk}/dt$  и  $\vec{dl}/dt$  — секундные расходы количества движения и кинетического момента через поверхность  $S_0$  в рассматриваемый момент времени  $t'$ .

Формулы (1.1.6) представляют математическую запись теорем об изменении количества движения и кинетического момента системы переменного состава.

## § 2. ПЕРЕНОСНОЕ ДВИЖЕНИЕ СИСТЕМЫ ПЕРЕМЕННОГО СОСТАВА

Наряду с основной системой  $OXYZ$  введем еще систему координат  $Axyz$  (рис. 1.2) и представим абсолютное движение материальной частицы с массой  $dm$  как сложное, состоящее из отно-

сительного движения (движения частицы относительно системы координат  $Axyz$ ) и переносного (движения частицы вместе с осями  $Axyz$  относительно инерциальной системы  $OXYZ$ ). Абсолютную, переносную и относительную скорости частицы обозначим через  $\vec{v}$ ,  $\vec{v}_e$ ,  $\vec{v}_r$ , а ускорения—соответственно через  $\vec{w}$ ,  $\vec{w}_e$ ,  $\vec{w}_r$ . Через  $\vec{w}_k$  обозначим кориолисово ускорение частицы. Наконец, производную по времени по отношению к системе  $Axyz$  (относительную производную) обозначим символом  $\delta/dt$ .

Количество движения системы постоянного состава  $\Sigma^*$  в системе  $OXYZ$  можно представить в виде

$$\vec{K}^* = \int_{\Sigma^*} \vec{v} dm. \quad (1.2.1)$$

Символ  $\int_{\Sigma^*}$  обозначает

суммирование по всем частицам системы  $\Sigma^*$ . Дифференцируя (1.2.1) по  $t$ , получим

$$\frac{d\vec{K}^*}{dt} = \int_{\Sigma^*} \vec{w} dm. \quad (1.2.2)$$

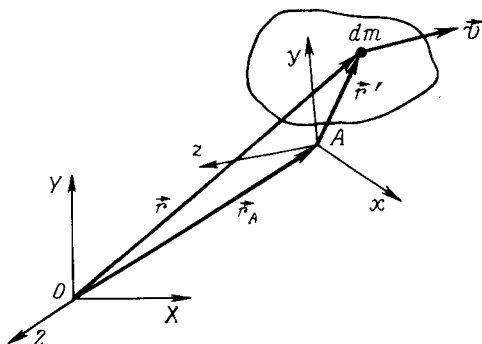


Рис. 1. 2.

По теореме сложения ускорений,

$$\vec{w} = \vec{w}_r + \vec{w}_e + \vec{w}_k.$$

Поэтому

$$\frac{d\vec{K}^*}{dt} = \int_{\Sigma^*} \vec{w}_r dm + \int_{\Sigma^*} \vec{w}_e dm + \int_{\Sigma^*} \vec{w}_k dm. \quad (1.2.3)$$

Отсюда для момента времени  $t$ , когда системы  $\Sigma$  и  $\Sigma^*$  совпадают, используя (1.1.5), получаем

$$\int_{\Sigma} \vec{w}_e dm = \vec{F} - \int_{\Sigma} \vec{w}_r dm + \vec{F}_k, \quad (1.2.4)$$

где  $\vec{F}_k = - \int_{\Sigma} \vec{w}_k dm$  — главный момент кориолисовых сил инерции, действующих в момент времени  $t$  на систему  $\Sigma$ .

Количество движения системы  $\Sigma^*$  в системе координат  $Axyz$  равно:

$$\vec{K}_r^* = \int_{\Sigma^*} \vec{v}_r dm.$$

Отсюда, учитывая, что

$$\vec{w}_r = \frac{\delta \vec{v}_r}{dt},$$

будем иметь

$$\frac{\delta \vec{K}_r^*}{dt} = \int_{\Sigma^*} \vec{w}_r dm,$$

а в момент времени  $t$  —

$$\frac{\delta \vec{K}_r^*}{dt} = \int_{\Sigma} \vec{w}_r dm. \quad (1.2.5)$$

С другой стороны, для этого момента времени справедливо кинематическое соотношение (1.1.6), которое в системе  $Axyz$  запишется так:

$$\frac{\delta \vec{K}_r^*}{dt} = \frac{\delta \vec{K}_r}{dt} + \frac{\delta \vec{k}_r}{dt}. \quad (1.2.6)$$

Здесь  $\vec{K}_r$  — количество движения системы переменного состава  $\Sigma$  в системе  $Axyz$ ;

$\frac{\delta \vec{k}_r}{dt}$  — относительный секундный расход количества движения через поверхность  $S_0$  в момент времени  $t$ .

С учетом (1.2.6) и (1.2.5) из (1.2.4) находим

$$\int_{\Sigma} \vec{w}_e dm = \vec{F} + \left( -\frac{\delta \vec{k}_r}{dt} \right) + \vec{F}_\kappa + \left( -\frac{\delta \vec{K}_r}{dt} \right). \quad (1.2.7)$$

Аналогичный результат можно получить и из теоремы об изменении кинетического момента системы переменного состава.

Кинетический момент системы  $\Sigma^*$  относительно точки  $O$  равен (см. рис. 1.2):

$$\vec{L}^* = \int_{\Sigma^*} \vec{r} \times \vec{v} dm. \quad (1.2.8)$$

Отсюда

$$\frac{d\vec{L}^*}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\Sigma^*} \vec{r} \times \vec{v} dm = \int_{\Sigma^*} \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} dm + \int_{\Sigma^*} \vec{r} \times \vec{w} dm.$$

В правой части последнего равенства первый интеграл равен нулю, так как

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} = \vec{v} \times \vec{v} = 0,$$

и значит,

$$\frac{d\vec{L}^*}{dt} = \int_{\Sigma^*} \vec{r} \times \vec{\omega} dm = \int_{\Sigma^*} \vec{r}' \times \vec{\omega} dm + \int_{\Sigma^*} \vec{r}_A \times \vec{\omega} dm. \quad (1.2.9)$$

Но, учитывая (1.2.2),

$$\int_{\Sigma^*} \vec{r}_A \times \vec{\omega} dm = \vec{r}_A \times \int_{\Sigma^*} \vec{\omega} dm = \vec{r}_A \times \frac{d\vec{K}^*}{dt}.$$

Поэтому

$$\frac{d\vec{L}^*}{dt} = \int_{\Sigma^*} \vec{r}' \times \vec{\omega}_r dm + \int_{\Sigma^*} \vec{r}' \times \vec{\omega}_e dm + \int_{\Sigma^*} \vec{r}' \times \vec{\omega}_k dm + \vec{r}_A \times \frac{d\vec{K}^*}{dt}. \quad (1.2.10)$$

Отсюда в момент времени  $t$ , учитывая (1.1.5), получаем

$$\int_{\Sigma} \vec{r}' \times \vec{\omega}_e dm = \vec{M} - \vec{r}_A \times \vec{F} - \int_{\Sigma} \vec{r}' \times \vec{\omega}_r dm + \vec{M}_{KA}, \quad (1.2.11)$$

где  $\vec{M}_{KA} = - \int_{\Sigma} \vec{r}' \times \vec{\omega}_k dm$  — главный момент корнолисовых сил инерции, действующих в момент времени  $t$  на систему  $\Sigma$ .

Главный момент внешних сил относительно точки  $A$ , действующих в момент времени  $t$  на систему  $\Sigma$  (и на систему  $\Sigma^*$ ), равен:

$$\vec{M}_A = \vec{M} - \vec{r}_A \times \vec{F}.$$

Поэтому (1.2.11) можно представить в виде

$$\int_{\Sigma} \vec{r}' \times \vec{\omega}_e dm = \vec{M}_A - \int_{\Sigma} \vec{r}' \times \vec{\omega}_r dm + \vec{M}_{KA}. \quad (1.2.12)$$

Кинетический момент системы  $\Sigma^*$  относительно точки  $A$  в системе  $Axyz$  равен:

$$\vec{L}_{rA}^* = \int_{\Sigma^*} \vec{r}' \times \vec{v}_r dm,$$

а его относительная производная

$$\begin{aligned} \frac{\delta \vec{L}_{rA}^*}{dt} &= \frac{\delta}{dt} \int_{\Sigma^*} \vec{r}' \times \vec{v}_r dm = \int_{\Sigma^*} \vec{v}_r \times \vec{v}_r dm + \int_{\Sigma^*} \vec{r}' \times \vec{\omega}_r dm = \\ &= \int_{\Sigma^*} \vec{r}' \times \vec{\omega}_r dm. \end{aligned}$$

В фиксированный момент времени  $t$

$$\frac{\delta \vec{L}_{rA}^*}{dt} = \int_{\Sigma} \vec{r}' \times \vec{\omega} dm. \quad (1.2.13)$$

С другой стороны,

$$\frac{\delta \vec{L}_{rA}^*}{dt} = \frac{\delta \vec{L}_{rA}}{dt} + \frac{\delta \vec{L}_{rA}}{dt}, \quad (1.2.14)$$

где  $\vec{L}_{rA}$  — кинетический момент системы переменного состава относительно точки  $A$  в системе  $Axyz$ ;

$\frac{\delta \vec{L}_{rA}}{dt}$  — относительный секундный расход кинетического момента через поверхность  $S_0$ .

Из (1.2.12), (1.2.13) и (1.2.14) получаем

$$\int_{\Sigma} \vec{r}' \times \vec{\omega} dm = \vec{M}_A + \left( -\frac{\delta \vec{L}_{rA}}{dt} \right) + \vec{M}_{\kappa A} + \left( -\frac{\delta \vec{L}_{rA}}{dt} \right). \quad (1.2.15)$$

Равенства (1.2.7) и (1.2.15) описывают переносное движение среды  $\Sigma$  и представляют собой другую запись теорем о количестве движения и кинетическом моменте системы переменного состава.

### § 3. СИСТЕМЫ ПЕРЕМЕННОГО СОСТАВА С ТВЕРДОЙ ОБОЛОЧКОЙ. ПРИНЦИП ЗАТВЕРДЕВАНИЯ

Формулам (1.2.7) и (1.2.15) можно придать другой вид. Рассмотрим для этого некоторое фиктивное твердое тело  $S$ , которое получилось бы, если бы система переменного состава  $\Sigma$  в момент времени  $t$  как бы затвердела, т. е. прекратилось бы движение частиц относительно системы  $Axyz$ . Переносные ускорения частиц системы  $\Sigma$  равны абсолютным ускорениям частиц полученного таким образом фиктивного твердого тела. Поэтому, обозначая через  $\vec{v}^{(S)}$  скорость частицы твердого тела  $S$ , будем иметь

$$\frac{d\vec{v}^{(S)}}{dt} = \vec{\omega}_e.$$

В момент времени  $t$  распределение масс в фиктивном твердом теле и в системе  $\Sigma$  одинаково. Поэтому

$$\int_{\Sigma} \vec{\omega} dm = \int_S \vec{\omega} dm = \int_S \frac{d\vec{v}^{(S)}}{dt} dm = \frac{d}{dt} \int_S \vec{v}^{(S)} dm = \frac{d\vec{K}^{(S)}}{dt},$$

где  $\vec{K}^{(S)}$  — количество движения фиктивного твердого тела. Аналогично

$$\int_S \vec{r}' \times \vec{\omega}_e dm = \int_S \vec{r}' \times \vec{\omega}_e dm = \int_S \vec{r}' \times \frac{d\vec{v}^{(S)}}{dt} dm = \frac{d\vec{L}_A^{(S)}}{dt} - \int_S \frac{d\vec{r}'}{dt} \times \vec{v}^{(S)} dm,$$

где  $\vec{L}_A^{(S)} = \int_S \vec{r}' \times \vec{v}^{(S)} dm$  — кинетический момент фиктивного твердого тела относительно полюса  $A$ .

С учетом полученных соотношений равенства (1.2.7) и (1.2.15) можно заменить равенствами:

$$\frac{d\vec{K}^{(S)}}{dt} = \vec{F} + \left( -\frac{\partial \vec{F}}{\partial t} \right) + \vec{F}_K + \left( -\frac{\partial \vec{K}}{\partial t} \right), \quad (1.3.1)$$

$$\frac{d\vec{L}_A^{(S)}}{dt} = \vec{M}_A + \left( -\frac{\partial \vec{L}_A}{\partial t} \right) + \vec{M}_{KA} + \left( -\frac{\partial \vec{L}_{KA}}{\partial t} \right) + \int_S \frac{d\vec{r}'}{dt} \times \vec{v}^{(S)} dm. \quad (1.3.2)$$

Центр масс твердого тела  $S$  обозначим через  $C$ . Точку  $C$  можно принять за начало  $A$  системы координат  $Axyz$ . В этом случае вместо (1.3.2) будем иметь

$$\frac{d\vec{L}_C^{(S)}}{dt} = \vec{M}_C + \left( -\frac{\partial \vec{L}_C}{\partial t} \right) + \vec{M}_{KC} + \left( -\frac{\partial \vec{L}_{KC}}{\partial t} \right). \quad (1.3.3)$$

Действительно, так как  $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{r}_A$  (см. рис. 1.2) и для частиц фиктивного твердого тела

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}^{(S)},$$

то

$$\begin{aligned} \int_S \frac{d\vec{r}'}{dt} \times \vec{v}^{(S)} dm &= \int_S \vec{v}^{(S)} \times \vec{v}^{(S)} dm - \int_S \frac{d\vec{r}_A}{dt} \times \vec{v}^{(S)} dm = \\ &= -\frac{d\vec{r}_A}{dt} \times \int_S \vec{v}^{(S)} dm = -\frac{d\vec{r}_A}{dt} \times \frac{d\vec{r}_C}{dt} \int_S dm \rightarrow 0 \text{ при } A \rightarrow C. \end{aligned}$$

Меняя момент затвердевания  $t$ , получим различные твердые тела  $S$ , которые отличаются друг от друга величиной и распределением массы в пространстве. Различные тела  $S$  можно рас-



смаатривать как одно фиктивное твердое тело, у которого с течением времени возникают или исчезают материальные частицы, неподвижные относительно системы координат  $Axyz$ .

Рассмотрим теперь систему переменного состава, ограниченную твердой оболочкой  $S_0$ . Систему координат  $Axyz$  неизменно свяжем с твердой оболочкой  $S_0$ . При этом абсолютное движение оболочки  $S_0$  и фиктивного твердого тела  $S$  совпадают. Поэтому уравнения (1.3.1) и (1.3.2) [или (1.3.3)], представляя абсолютное движение фиктивного твердого тела, в то же время представляют движение твердой оболочки  $S_0$ .

Относительные производные в правых частях уравнений (1.3.1), (1.3.2), (1.3.3) в этом случае имеют следующий физический смысл.

Пусть  $d\sigma$  — элемент поверхности  $S_0$ .

Секундный расход массы через этот элемент в момент времени  $t$  равен  $\rho v_{rn} d\sigma$ , где  $\rho$  — плотность среды, а  $v_{rn}$  — нормальная составляющая относительной скорости среды. Секундный расход количества движения через элемент  $d\sigma$  в системе, неизменно связанной с оболочкой, равен  $\vec{v}_r \rho v_{rn} d\sigma$ . Относительный секундный расход количества движения через поверхность  $S_0$  равен:

$$\frac{d\vec{k}_r}{dt} = \iint_{S_0} \rho v_{rn} \vec{v}_r d\sigma, \quad (1.3.4)$$

или

$$\frac{d\vec{k}_r}{dt} = m_{\text{сек}} \vec{u}, \quad (1.3.5)$$

где  $m_{\text{сек}} = \iint_{S_0} \rho v_{rn} d\sigma$  — секундный расход массы через поверхность  $S_0$ ;

$\vec{u}$  — некоторая средняя скорость среды (относительно оболочки).

Вектор  $\vec{v}_r \rho v_{rn} d\sigma$  имеет размерность силы и направлен по относительной скорости частицы. Вектор  $-\vec{v}_r \rho v_{rn} d\sigma$  имеет противоположное направление и является элементарной реактивной силой. В соответствии с этим вектор  $-\delta\vec{k}_r/dt$  представляет собой главный вектор всех реактивных сил, а  $-\delta\vec{l}_c/dt$  — главный момент всех реактивных сил относительно полюса  $C$ .

Далее допустим, что в каждой точке, неподвижной относительно оболочки, плотность среды  $\rho$  и скорость среды  $\vec{v}_r$  с течением времени не меняются. Тогда система переменного состава имеет постоянную массу, постоянное количество движения  $\vec{K}_r$  и

постоянный кинетический момент  $\vec{L}_{rc}$  относительно системы координат  $Sxyz$ . Значит,

$$\frac{d\vec{K}_r}{dt} = 0, \quad \frac{d\vec{L}_{rc}}{dt} = 0.$$

В общем случае, если внутри оболочки меняется плотность среды и скорость частицы относительно оболочки, возникают так называемые *вариационные силы*. Векторы  $-\delta\vec{K}_r/dt$  и  $-\delta\vec{L}_{rc}/dt$  представляют собой главный вектор и главный момент этих вариационных сил.

Из вышеизложенного вытекает следующий принцип.

Принцип затвердевания для системы переменного состава с твердой оболочкой. *Уравнения движения твердой оболочки системы переменного состава  $\Sigma$  в произвольный момент времени  $t$  могут быть записаны в виде уравнений движения твердого тела (постоянного состава), если представить себе, что система переменного состава  $\Sigma$  затвердела в момент времени  $t$  и что к полученному таким образом фиктивному твердому телу приложены: 1) внешние силы, действующие на систему  $\Sigma$ , 2) реактивные силы, 3) силы Кориолиса и 4) вариационные силы.*

#### § 4. ПРИНЦИП ЗАТВЕРДЕВАНИЯ ДЛЯ РАКЕТЫ

Будем считать, что корпус ракеты в полете не деформируется<sup>1</sup>. Тогда принцип затвердевания, сформулированный в предыдущем параграфе, может быть применен и к ракете. Однако для ракеты формулировку этого принципа целесообразно несколько изменить.

Дело в том, что реактивную силу  $-\delta\vec{k}_r/dt$  непосредственно измерять не удастся, поэтому ее обычно объединяют с силами, возникающими вследствие атмосферного давления на корпус ракеты и давления в струе газов в выходном сечении сопла двигателя, а также с вариационными силами. Целесообразность такого объединения можно проследить на следующем примере.

Рассмотрим ракету с твердой оболочкой и работающим двигателем, установленную неподвижно в горизонтальном положении на испытательном стенде.

Так как система координат  $Sxyz$ , связанная с твердой оболочкой, неподвижна, то

$$\vec{K}^{(s)} = 0, \quad \vec{F}_k = 0$$

<sup>1</sup> В действительности в полете под действием внешних сил корпус ракеты деформируется и, значит, деформируется и введенная выше контрольная поверхность (оболочка ракеты). Учет влияния деформации конструкции ракеты на характер ее движения приводится в гл. IV.

и уравнение (1.3.1) в данном случае принимает вид

$$\vec{F} + \left( -\frac{\delta \vec{b}_r}{dt} \right) + \left( -\frac{\delta \vec{K}_r}{dt} \right) = 0. \quad (1.4.1)$$

На ракету действуют следующие внешние силы: 1) силы веса, 2) реакция опор, на которых закреплена ракета, 3) силы атмосферного давления и давления в выходном сечении сопла, приложенные к оболочке ракеты.

Пусть  $\vec{G}$  — вес ракеты, а  $\vec{P}$  — равнодействующая сил, возни-

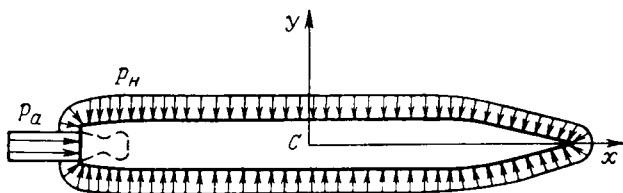


Рис. 1.3.

кающих при работе двигателя. Ракета давит на опоры с силой  $\vec{G} + \vec{P}$ . Реакция опор, приложенная к ракете, равна:

$$\vec{R} = -(\vec{G} + \vec{P}).$$

Равнодействующую сил атмосферного давления и давления в выходном сечении сопла обозначим через  $\vec{F}_*$ . По величине эта равнодействующая (рис. 1.3) равна:

$$F_* = (p_a - p_H) S_a,$$

где  $p_a$  — давление на срезе сопла;

$p_H$  — атмосферное давление;

$S_a$  — площадь выходного сечения сопла.

Таким образом, в рассматриваемом случае главный вектор всех внешних сил равен:

$$\vec{F} = \vec{G} + \vec{R} + \vec{F}_* = -\vec{P} + \vec{F}_*.$$

Подставляя это выражение в (1.4.1), получим

$$\vec{P} = \left( -\frac{\delta \vec{b}_r}{dt} \right) + \vec{F}_* + \left( -\frac{\delta \vec{K}_r}{dt} \right). \quad (1.4.2)$$

Приборы на стенде измеряют силу давления ракеты на опору, так что в результате стендовых испытаний можно определить силу  $P$ , которая, как видно из полученного выражения, является равнодействующей реактивных сил, вариационных сил и внеш-

них сил, вызванных атмосферным давлением и давлением газа в выходном сечении сопла.

Силу  $P$ , определенную равенством (1.4.2), принято называть *силой тяги двигателя*, или просто *тягой двигателя*.

Подразумевая теперь под  $\vec{F}$  и  $\vec{M}_C$  соответственно главный вектор и главный момент всех внешних сил, кроме сил атмосферного давления и давления в выходном сечении сопла, уравнения (1.3.1) и (1.3.3) можно записать так:

$$\frac{d\vec{K}^{(S)}}{dt} = \vec{F} + \vec{P} + \vec{F}_*, \quad (1.4.3)$$

$$\frac{d\vec{L}_C^{(S)}}{dt} = \vec{M}_C + \vec{M}_{PC} + \vec{M}_{*C}. \quad (1.4.4)$$

Здесь  $\vec{M}_{PC} = \left( -\frac{\delta \vec{L}_{rc}}{dt} \right) + \vec{M}_{*C} + \left( -\frac{\delta \vec{L}_{rc}}{dt} \right)$ ; через  $\vec{M}_{*C}$  обозначен

главный момент сил, обусловленных атмосферным давлением на корпус ракеты и давлением газа в выходном сечении сопла двигателя, относительно центра масс  $C$ .

На основании уравнений (1.4.3) и (1.4.4) можно сформулировать следующий принцип составления уравнений движения ракеты.

*Принцип затвердевания для ракеты. Уравнения движения твердой оболочки ракеты в произвольный момент времени  $t$  могут быть записаны в виде уравнений движения твердого тела (постоянного состава), если представить себе, что ракета затвердела в момент времени  $t$  и что к полученному таким образом фиктивному твердому телу приложены: 1) внешние силы, действующие на ракету (кроме силы  $\vec{F}_*$ ), 2) тяга реактивного двигателя, 3) силы Кориолиса.*

## § 5. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЦЕНТРА МАСС РАКЕТЫ

Количество движения фиктивного твердого тела  $S$ , которое получается в результате затвердевания ракеты в момент времени  $t$ , равно:

$$\vec{K}^{(S)} = \int_S \vec{v}^{(S)} dm = m \vec{V}_C^{(S)}, \quad (1.5.1)$$

где  $m$  — масса фиктивного твердого тела, равная массе ракеты в момент времени  $t$ ;

$\vec{V}_C^{(S)}$  — скорость центра инерции фиктивного твердого тела.

Согласно принципу затвердевания в уравнении (1.4.3) произ-

водную от количества движения  $\vec{K}^{(S)}$  по времени следует вычислять, как в случае твердого тела с постоянной массой, так что

$$\frac{d\vec{K}^{(S)}}{dt} = m \frac{d\vec{V}_C^{(S)}}{dt} = m\vec{w}_C^{(S)}, \quad (1.5.2)$$

где  $\vec{w}_C^{(S)}$  — ускорение центра масс твердого тела  $S$ .

Подставляя (1.5.2) в (1.4.3), получим

$$m\vec{w}_C^{(S)} = \vec{F} + \vec{P} + \vec{F}_\kappa. \quad (1.5.3)$$

С расходом топлива центр масс ракеты перемещается относительно корпуса с некоторой скоростью  $\vec{V}_{Cr}$  и ускорением  $\vec{w}_{Cr}$ . Рассматривая движение центра масс вместе с корпусом ракеты как переносное движение, а движение относительно корпуса — как относительное движение, для абсолютных скорости  $\vec{V}_C$  и ускорения  $\vec{w}_C$  центра масс будем иметь следующие выражения:

$$\vec{V}_C = \vec{V}_{Ce} + \vec{V}_{Cr}, \quad \vec{w}_C = \vec{w}_{Ce} + \vec{w}_{Cr} + 2\vec{\omega} \times \vec{V}_{Cr}, \quad (1.5.4)$$

где  $\vec{V}_{Ce}$ ,  $\vec{w}_{Ce}$  — соответственно переносные скорость и ускорение центра масс ракеты;  $\vec{\omega}$  — угловая скорость корпуса ракеты.

В момент времени  $t$  (в момент затвердевания ракеты) центры масс ракеты и тела  $S$  совпадают. Поэтому в этот момент

$$\vec{V}_{Ce} = \vec{V}_C^{(S)}, \quad \vec{w}_{Ce} = \vec{w}_C^{(S)}. \quad (1.5.5)$$

Исключая в уравнении (1.5.3)  $\vec{w}_C^{(S)}$  с помощью равенств (1.5.4) и (1.5.5), будем иметь

$$m\vec{w}_C = \vec{F} + \vec{P} + \vec{F}_\kappa + m\vec{w}_{Cr} + 2m\vec{\omega} \times \vec{V}_{Cr}. \quad (1.5.6)$$

Последнее соотношение представляет собой уравнение движения центра масс ракеты в векторной форме. Слагаемые  $m\vec{w}_{Cr}$  и  $2m\vec{\omega} \times \vec{V}_{Cr}$  обусловлены движением центра масс относительно корпуса и имеют размерность силы.

В дальнейшем для удобства уравнения (1.5.6) будем писать в виде

$$m\vec{w}_C = \sum \vec{F}, \quad (1.5.7)$$

или

$$m \frac{d\vec{V}_C}{dt} = \sum \vec{F}, \quad (1.5.8)$$

обозначая через  $\Sigma \vec{F}$  правую часть равенства (1.5.6) — сумму всех сил, приложенных к ракете.

При практических исследованиях векторные уравнения движения ракеты заменяют эквивалентной системой трех скалярных уравнений, проектируя векторное уравнение на какие-нибудь три взаимно перпендикулярные оси.

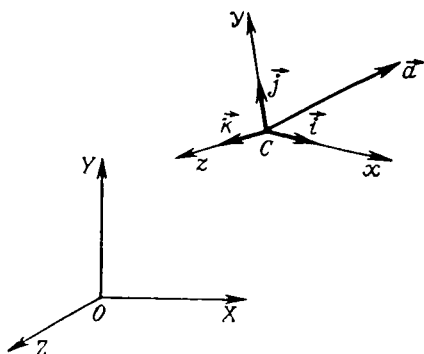


Рис. 1.4.

Спроектируем уравнение (1.5.8) на оси прямоугольной системы координат  $Cxyz$ , начало которой (точка  $C$ ) совпадает с центром масс ракеты.

Если  $d\vec{a}/dt$  есть производная какого-либо вектора  $\vec{a}$  относительно системы  $OXYZ$ ,  $\delta\vec{a}/dt$  — производная этого вектора относительно системы  $Cxyz$  и  $\vec{\omega}$  — угловая скорость вращения системы  $Cxyz$  в системе  $OXYZ$ , то

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{\delta\vec{a}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{a}, \quad (1.5.9)$$

а проекции вектора  $d\vec{a}/dt$  на оси  $Cx$ ,  $Cy$ ,  $Cz$  определяются формулами:

$$\begin{aligned} \left( \frac{d\vec{a}}{dt} \right)_x &= \frac{da_x}{dt} + \omega_y a_z - \omega_z a_y, \\ \left( \frac{d\vec{a}}{dt} \right)_y &= \frac{da_y}{dt} + \omega_z a_x - \omega_x a_z, \\ \left( \frac{d\vec{a}}{dt} \right)_z &= \frac{da_z}{dt} + \omega_x a_y - \omega_y a_x, \end{aligned} \quad (1.5.10)$$

где  $a_x, a_y, a_z$  — проекции вектора  $\vec{a}$ ;

$\omega_x, \omega_y, \omega_z$  — проекции вектора  $\vec{\omega}$  на оси  $Cx, Cy, Cz$  (рис. 1.4).

Действительно, дифференцируя выражение

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k},$$

получим

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{da_x}{dt} \vec{i} + \frac{da_y}{dt} \vec{j} + \frac{da_z}{dt} \vec{k} + a_x \frac{d\vec{i}}{dt} + a_y \frac{d\vec{j}}{dt} + a_z \frac{d\vec{k}}{dt}. \quad (1.5.11)$$

Поскольку  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  — единичные векторы, то их производные определяют скорости концов этих векторов, так что

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{i}, \quad \frac{d\vec{j}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{j}, \quad \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{k}.$$

Учитывая еще, что относительная производная вектора  $\vec{a}$  равна

$$\frac{\delta \vec{a}}{dt} = \frac{da_x}{dt} \vec{i} + \frac{da_y}{dt} \vec{j} + \frac{da_z}{dt} \vec{k},$$

из (1.5.11) непосредственно получаем формулу (1.5.9).

По известному правилу вычисления векторного произведения

$$\vec{\omega} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = (\omega_y a_z - \omega_z a_y) \vec{i} + (\omega_z a_x - \omega_x a_z) \vec{j} + \\ + (\omega_x a_y - \omega_y a_x) \vec{k}.$$

Заменяя в (1.5.9) векторное произведение приведенным выражением и объединяя члены, содержащие один и тот же единичный вектор, получим

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \left( \frac{da_x}{dt} + \omega_y a_z - \omega_z a_y \right) \vec{i} + \left( \frac{da_y}{dt} + \omega_z a_x - \omega_x a_z \right) \vec{j} + \\ + \left( \frac{da_z}{dt} + \omega_x a_y - \omega_y a_x \right) \vec{k}.$$

Отсюда вытекают равенства (1.5.10).

Используя формулу (1.5.10), векторное уравнение (1.5.8) можно заменить следующими тремя скалярными уравнениями:

$$\begin{aligned} m \left( \frac{dV_{Cx}}{dt} + \omega_y V_{Cz} - \omega_z V_{Cy} \right) &= \sum F_x, \\ m \left( \frac{dV_{Cy}}{dt} + \omega_z V_{Cx} - \omega_x V_{Cz} \right) &= \sum F_y, \\ m \left( \frac{dV_{Cz}}{dt} + \omega_x V_{Cy} - \omega_y V_{Cx} \right) &= \sum F_z. \end{aligned} \quad (1.5.12)$$

Здесь  $V_{Cx}, V_{Cy}, V_{Cz}$  — проекции вектора скорости центра масс ракеты на оси  $Cx, Cy, Cz$ ;

$\Sigma F_x, \Sigma F_y, \Sigma F_z$  — проекции всех сил, приложенных к ракете, на оси  $Cx, Cy, Cz$ .

## § 6. УРАВНЕНИЯ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ РАКЕТЫ

Опуская индекс «С» и записывая правую часть в виде  $\Sigma \vec{M}$ , представим уравнение (1.4.4) в виде

$$\frac{d\vec{L}^{(S)}}{dt} = \Sigma \vec{M}. \quad (1.6.1)$$

Спроектируем уравнение (1.6.1) на оси подвижной системы координат.

Пусть  $L_x^{(S)}, L_y^{(S)}, L_z^{(S)}$  — проекции кинетического момента фиктивного твердого тела на оси подвижной системы, а  $\Sigma M_x, \Sigma M_y, \Sigma M_z$  — проекции моментов сил, действующих на ракету, на оси подвижной системы. Тогда, используя формулы (1.5.10), вместо векторного уравнения (1.6.1) получим следующую эквивалентную систему трех скалярных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dL_x^{(S)}}{dt} + \omega_y L_z^{(S)} - \omega_z L_y^{(S)} &= \Sigma M_x, \\ \frac{dL_y^{(S)}}{dt} + \omega_z L_x^{(S)} - \omega_x L_z^{(S)} &= \Sigma M_y, \\ \frac{dL_z^{(S)}}{dt} + \omega_x L_y^{(S)} - \omega_y L_x^{(S)} &= \Sigma M_z. \end{aligned} \quad (1.6.2)$$

Если в качестве осей системы координат выбраны главные оси инерции, то, как известно,

$$L_x^{(S)} = J_x \omega_x, \quad L_y^{(S)} = J_y \omega_y, \quad L_z^{(S)} = J_z \omega_z,$$

где  $J_x, J_y, J_z$  — моменты инерции фиктивного твердого тела («отвердевшей» ракеты) относительно главных осей инерции. При этом уравнения (1.6.2) принимают вид

$$\begin{aligned} J_x \frac{d\omega_x}{dt} + (J_z - J_y) \omega_y \omega_z &= \Sigma M_x, \\ J_y \frac{d\omega_y}{dt} + (J_x - J_z) \omega_z \omega_x &= \Sigma M_y, \\ J_z \frac{d\omega_z}{dt} + (J_y - J_x) \omega_x \omega_y &= \Sigma M_z. \end{aligned} \quad (1.6.3)$$

(Согласно принципу затвердевания производные от кинетического момента и его проекций вычисляются, как для твердого тела с постоянными моментами инерции.)

Заметим, что твердое тело  $S$  и корпус ракеты имеют относительно инерциальной системы одну и ту же угловую скорость вращения  $\omega$ , поскольку движение твердого тела  $S$  совпадает с движением корпуса ракеты.



Уравнения (1.6.3) записаны для произвольного, но фиксированного момента времени  $t$ . В различные моменты времени будем иметь твердые тела  $S$  с различной ориентацией главных осей инерции относительно корпуса ракеты и с различными моментами инерции относительно этих осей. Поэтому уравнения (1.6.3) представляют собой проекции векторного уравнения (1.6.1) на оси координат, различным образом ориентированные относительно корпуса ракеты. Можно было бы учесть вращение главных осей инерции относительно корпуса ракеты и записать скалярные уравнения вращательного движения в одной и той же системе координат. Однако в полете направления главных осей инерции ракеты изменяются незначительно, поэтому в дальнейшем, пользуясь уравнениями (1.6.3), мы просто будем предполагать, что направления главных осей инерции относительно корпуса ракеты остаются неизменными.

## § 7. СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

При исследовании движения ракеты применяются прямоугольные правые системы координат. В дальнейших разделах используются стартовая и связанная системы координат. С другими системами координат, применяемыми на практике, можно познакомиться, например, по книге [10].

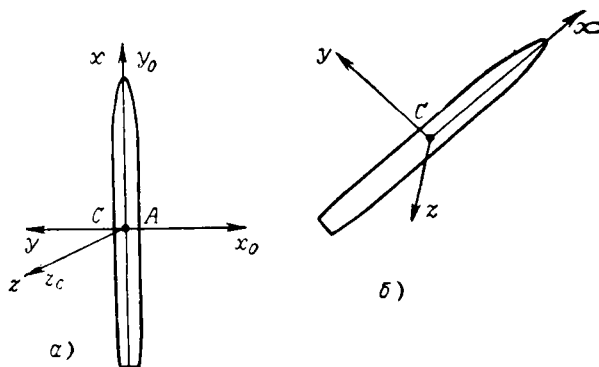


Рис. 1.5.

Стартовая система координат  $Ax_0y_0z_0$  (рис. 1.5, а)

Оси стартовой системы координат неподвижно связаны с землей. Начало координат  $A$  совмещается с точкой старта. Ось  $Ay_0$  направляется вверх по вертикали — прямо противоположно силе тяжести. Две взаимно перпендикулярные оси  $Ax_0$ ,  $Az_0$  располагаются в горизонтальной плоскости так, чтобы система координат была правой. Обычно ось  $Ax_0$  направляется по линии прицеливания.

Стартовая система осей координат в дальнейшем рассматривается как инерциальная система.

Связанная система координат  $Sxyz$  (рис. 1.5, б)

Начало связанной системы координат  $C$  совмещают с центром масс ракеты. Три взаимно перпендикулярные оси системы  $Sx, Sy, Sz$  образуют правую систему. В качестве осей координат связанной системы примем три взаимно перпендикулярные глав-

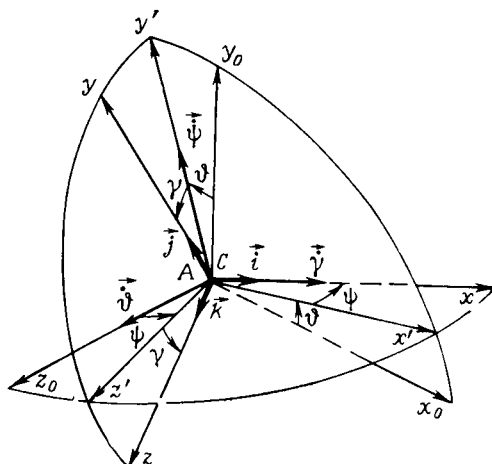


Рис. 1.6.

ные оси инерции ракеты, предполагая, что направления главных осей инерции относительно корпуса ракеты остаются неизменными. Одна из главных осей инерции ракеты обычно совпадает или очень близка к продольной оси ракеты. Будем считать, что продольная ось ракеты является главной осью инерции, и направим ось  $Sx$  по продольной оси ракеты.

На старте ракета устанавливается вертикально и ось  $Sx$  в момент пуска совпадает по направлению с осью  $Ay_0$  стартовой системы. Ось  $Sz$  направим так, чтобы она в момент пуска была параллельна оси  $Az_0$ . Ось  $Sy$  при этом будет направлена по оси  $Ax_0$  в противоположную сторону. Взаимное расположение стартовой и связанной систем координат в момент пуска показано на рис. 1.5, а.

Расположение связанной системы координат по отношению к стартовой системе в произвольный момент времени полета ракеты можно определить шестью координатами: тремя координатами  $x_{0c}, y_{0c}, z_{0c}$  начала связанной системы координат и тремя угловыми координатами.

На рис. 1.6 показаны оси связанной системы  $Sxyz$  и оси стартовой системы  $Ax_0y_0z_0$ , начало  $A$  которых посредством параллельного переноса совмещено с началом  $C$  связанных осей. Три угла

$\theta$ ,  $\psi$ ,  $\gamma$  однозначно определяют направления осей  $Cx$ ,  $Cy$ ,  $Cz$  относительно стартовой системы координат.

Угол  $\theta$  (угол между осью  $Cx_0$  стартовой системы и плоскостью  $Cxz_0$ ) называется *углом тангажа*; угол  $\psi$  (угол между осью  $Cx$  и плоскостью  $Cx_0y_0$ ) называется *углом рыскания*; наконец, угол  $\gamma$  (угол между осью  $Cy$  и линией пересечения плоскостей  $Cyz$  и  $Cx_0y_0$ ) называется *углом крена*. Стрелками указаны положительные направления отсчета этих углов.

Косинусы углов между связанными и стартовыми осями координат численно равны соответствующим проекциям единичных векторов  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$ , направленных по связанным осям, на стартовые оси. Эти проекции легко вычисляются по рис. 1.6; значения проекций единичных векторов  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  сведены в табл. 1.1.

Таблица 1.1

| Единичные векторы | Оси                                                           |                                                               |                         |
|-------------------|---------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------|-------------------------|
|                   | $Ax_0$                                                        | $Ay_0$                                                        | $Az_0$                  |
| $\vec{i}$         | $\cos \theta \cos \psi$                                       | $\sin \theta \cos \psi$                                       | $-\sin \psi$            |
| $\vec{j}$         | $\cos \theta \sin \psi \sin \gamma - \sin \theta \cos \gamma$ | $\sin \theta \sin \psi \sin \gamma + \cos \theta \cos \gamma$ | $\cos \psi \sin \gamma$ |
| $\vec{k}$         | $\cos \theta \sin \psi \cos \gamma + \sin \theta \sin \gamma$ | $\sin \theta \sin \psi \cos \gamma - \cos \theta \sin \gamma$ | $\cos \psi \cos \gamma$ |

## § 8. КИНЕМАТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ

Во время полета ракета, а вместе с ней и оси связанной системы координат непрерывно поворачиваются относительно стартовой системы, что приводит к непрерывному изменению углов тангажа, рыскания и крена. Скорости изменения этих углов равны соответственно  $\dot{\theta}$ ,  $\dot{\psi}$ ,  $\dot{\gamma}$ . Вектор угловой скорости  $\vec{\omega}$  направлен по оси  $Cz_0$  (см. рис. 1.6); при повороте связанных осей вокруг оси  $Cz_0$  углы  $\psi$ ,  $\gamma$  остаются неизменными и изменяется только угол  $\theta$ , причем плоскость, в которой производится отсчет этого угла, перпендикулярна оси вращения  $Cz_0$ . Вектор угловой скорости  $\vec{\omega}$  направлен по промежуточной оси  $Cy'$ ; при повороте связанных осей вокруг оси  $Cy'$  угол  $\theta$ ,  $\gamma$  остаются неизменными и изменяется только угол  $\psi$ , причем плоскость, в которой производится отсчет угла  $\psi$ , перпендикулярна оси вращения  $Cy'$ . Вектор угловой скорости  $\vec{\omega}$  направлен по связанной оси  $Cx$ ; при повороте связанных осей вокруг оси  $Cx$  углы  $\theta$ ,  $\psi$  остаются неизменными и изменяется только угол  $\gamma$ , причем плоскость, в которой производится отсчет этого угла, перпендикулярна оси вращения  $Cx$ . Произвольное угловое перемещение связанной систе-

мы осей координат относительно стартовой системы вокруг оси, проходящей через начало связанных осей, можно представить как результирующее перемещение от вращательных движений вокруг трех осей  $Cz_0$ ,  $Cy'$  и  $Cx$ . Поэтому, если  $\vec{\omega}$  — угловая скорость вращения связанных осей относительно стартовой системы координат, то

$$\vec{\omega} = \vec{\dot{\vartheta}} + \vec{\dot{\psi}} + \vec{\dot{\gamma}}. \quad (1.8.1)$$

Спроектируем векторное равенство (1.8.1) на связанные оси  $Cx$ ,  $Cy$ ,  $Cz$ .

Направляющие косинусы вектора  $\vec{\dot{\vartheta}}$  в связанной системе координат равны  $-\sin \psi$ ,  $\cos \psi \sin \gamma$ ,  $\cos \psi \cos \gamma$ ;

вектора  $\vec{\dot{\psi}}$  —  $0$ ,  $\cos \gamma$ ,  $-\sin \gamma$ ,

вектора  $\vec{\dot{\gamma}}$  —  $1$ ,  $0$ ,  $0$ .

Учитывая это, получим следующую группу кинематических уравнений, устанавливающую связь между проекциями на оси связанной системы угловой скорости вращения ракеты с угловыми параметрами, характеризующими положение и движение ракеты относи-

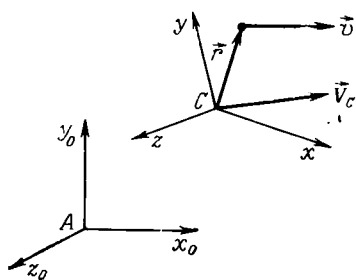


Рис. 1.7.

тельно стартовой системы координат:

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\gamma} - \dot{\vartheta} \sin \psi, \\ \omega_y &= \dot{\psi} \cos \gamma + \dot{\vartheta} \cos \psi \sin \gamma, \\ \omega_z &= -\dot{\psi} \sin \gamma + \dot{\vartheta} \cos \psi \cos \gamma. \end{aligned} \quad (1.8.2)$$

Скорость какой-нибудь частицы ракеты в стартовой системе координат  $\vec{v}$  складывается из переносной скорости  $\vec{v}_e$  (скорости движения частицы вместе со связанными осями) и относительной скорости  $\vec{v}_r$  (скорости движения частицы относительно связанных осей):

$$\vec{v} = \vec{v}_e + \vec{v}_r. \quad (1.8.3)$$

Переносная и относительная скорости соответственно равны:

$$\vec{v}_e = \vec{V}_C + \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad \vec{v}_r = \frac{d\vec{r}}{dt},$$

где  $\vec{r}$  — радиус-вектор рассматриваемой точки (рис. 1.7).

Отсюда

$$\vec{v} = \vec{V}_C + \vec{\omega} \times \vec{r} + \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (1.8.4)$$

Проектируя векторное равенство (1.8.4) на связанные оси, получим вторую группу кинематических уравнений:

$$\begin{aligned} v_x &= V_{Cx} + \omega_y z - \omega_z y + \frac{dx}{dt}, \\ v_y &= V_{Cy} + \omega_z x - \omega_x z + \frac{dy}{dt}, \\ v_z &= V_{Cz} + \omega_x y - \omega_y x + \frac{dz}{dt}, \end{aligned} \quad (1.8.5)$$

где  $x, y, z$  — проекции радиуса-вектора  $\vec{r}$  на оси  $Cx, Cy, Cz$ .

## § 9. СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА РАКЕТУ В ПОЛЕТЕ

В правые части уравнений движения центра масс ракеты входят внешние силы, тяга двигателя, силы Кориолиса, связанные с относительным движением частиц внутри вращающегося корпуса ракеты, и силы, вызванные перемещениями центра масс ракеты относительно корпуса. Под внешними силами подразумеваются силы тяжести и аэродинамические силы.

Имея в виду, что в последующих разделах динамические уравнения, представленные системами (1.5.12) и (1.6.3), будем записывать в проекциях на связанные оси, все силы и моменты этих сил тоже будем проектировать на оси связанной системы координат.

### 9.1. Тяга двигателя

В целях общности допустим, что двигатель ракеты (двигательная установка) представляет собой связку некоторого числа сравнительно небольших двигателей. Эти двигатели, являясь маршевыми двигателями, в то же время могут использоваться и для управления полетом ракеты. Будем считать, что все управляющие органы, связанные с работой двигательной установки, занимают нейтральное положение<sup>1</sup>.

Тягу, создаваемую  $j$ -ым двигателем, обозначим через  $\vec{P}_j$ , а ее проекции на связанные оси — через  $P_{jx}, P_{jy}, P_{jz}$ . Осевые линии двигателей с продольной осью ракеты образуют углы, обычно не превышающие нескольких градусов. Поэтому косинус угла между вектором  $\vec{P}_j$  и осью  $Cx$  связанной системы практически

<sup>1</sup> Силы, возникающие при отклонении органов управления, рассматриваются в п. 9.4.

равняется единице. Через  $\eta_j$  и  $\xi_j$  обозначим соответственно косинусы углов между вектором  $\vec{P}_j$  и осями  $Cy$  и  $Cz$ . Тогда

$$P_{jx} \approx P_j, \quad P_{jy} = \eta_j P_j, \quad P_{jz} = \xi_j P_j. \quad (1.9.1)$$

Полная тяга двигателя ракеты равна:

$$\vec{P} = \sum_j \vec{P}_j. \quad (1.9.2)$$

Проектируя равенство (1.9.2) на связанные оси, получим

$$\begin{aligned} P_x &= \sum_j P_{jx} \approx P, \\ P_y &= \sum_j \eta_j P_j, \\ P_z &= \sum_j \xi_j P_j. \end{aligned} \quad (1.9.3)$$

Радиус-вектор точки пересечения линии действия вектора  $\vec{P}_j$  с плоскостью среза сопла  $j$ -го двигателя обозначим через  $\vec{q}_j$ . Момент тяги двигателя относительно центра масс ракеты равен:

$$\vec{M}_P = \sum_j \vec{q}_j \times \vec{P}_j. \quad (1.9.4)$$

Проектируя векторное равенство (1.9.4) на связанные оси, будем иметь

$$\begin{aligned} M_{Px} &= \sum_j (y_j \xi_j - z_j \eta_j) P_j, \\ M_{Py} &= \sum_j (z_j - x_j \xi_j) P_j, \\ M_{Pz} &= \sum_j (x_j \eta_j - y_j) P_j, \end{aligned} \quad (1.9.5)$$

где  $x_j, y_j, z_j$  — проекции радиуса-вектора  $\vec{q}_j$  на связанные оси.

## 9.2. Сила тяжести

Сила тяжести, или вес ракеты,  $\vec{G}$  выражается известной формулой

$$\vec{G} = m \vec{g}, \quad (1.9.6)$$

где  $m$  — масса ракеты;

$\vec{g}$  — ускорение земного притяжения.

Если  $g_x, g_y, g_z$  — проекции ускорения земного притяжения  $\vec{g}$  на оси  $Cx, Cy, Cz$ , то проекции веса аппарата на те же оси будут равны:

$$G_x = mg_x, G_y = mg_y, G_z = mg_z. \quad (1.9.7)$$

Вектор  $\vec{G}$  проходит через центр масс ракеты, поэтому момент этой силы относительно центра масс равен нулю.

### 9.3. Аэродинамические силы

Аэродинамические силы возникают при движении летательного аппарата в воздушной среде как результат взаимодействия между поверхностью аппарата и средой.

В данном случае предполагается, что внешняя поверхность ракеты симметрична относительно плоскостей  $Cxy$  и  $Cxz$ , а аэродинамические рули, если таковые имеются, занимают нейтральное положение.

Допустим сначала, что ракета движется поступательно, т. е.  $\vec{\omega} = 0$ , и что воздушная среда, в которой совершается полет, неподвижна относительно стартовой системы координат. В этих условиях аэродинамические силы определяются формой и размерами ракеты, параметрами воздуха и скоростью ракеты (корпуса) относительно воздуха. Пренебрегая скоростью центра масс ракеты относительно ее корпуса, будем считать, что скорость корпуса ракеты относительно воздушной среды равна скорости ее центра масс  $\vec{V}_C$ .

Равнодействующую всех аэродинамических сил, приложенных к ракете, будем называть *полной аэродинамической силой* и обозначать через  $\vec{R}_a$ .

Если скорость  $\vec{V}_C$  лежит в плоскости симметрии ракеты, скажем в плоскости  $Cxy$ , то полная аэродинамическая сила будет лежать в той же плоскости. Точкой ее приложения (центром давления) условно можно рассматривать точку пересечения вектора  $\vec{V}_C$  с осью  $Cx$ . При малых углах атаки ввиду предполагаемой симметрии внешней поверхности корпуса центр давления будет совпадать с аэродинамическим фокусом ракеты, который, как известно, определяется как точка продольной оси, обладающая тем свойством, что при закрепленных рулях момент аэродинамических сил относительно оси, проходящей через эту точку перпендикулярно плоскости симметрии (плоскости  $Cxy$ ), не зависит от угла атаки. Таким образом, в данном случае центр давления и фокус совпадают друг с другом и расположены на продольной оси ракеты.

При наличии у ракеты оперения (стабилизаторов и воздушных рулей) вектор скорости  $\vec{V}_C$  может и не лежать в плоскости

симметрии ракеты и тогда, строго говоря, вектор  $\vec{R}_a$  может не лежать в одной плоскости с вектором  $\vec{V}_C$  и продольной осью ракеты. Однако и в этом случае вектор  $R_a$  лишь незначительно уйдет из плоскости, проходящей через вектор  $\vec{V}_C$  и ось  $Cx$ , тем более, что управление баллистическими ракетами обычно строится так, что в плотных слоях атмосферы угол между вектором  $\vec{V}_C$  и плоскостью симметрии ракеты не бывает большим. Учитывая это, мы будем считать, что и в этом случае центр давления ле-

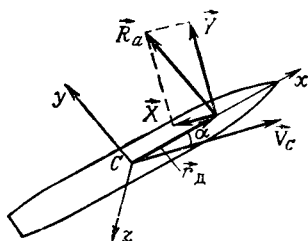


Рис. 1. 8.

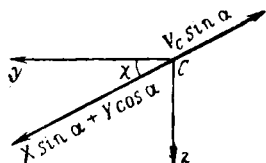


Рис. 1. 9.

жит на продольной оси ракеты и совпадает с аэродинамическим фокусом, а вектор полной аэродинамической силы лежит в плоскости, проходящей через ось  $Cx$  и вектор  $\vec{V}_C$ .

Полную аэродинамическую силу  $\vec{R}_a$  разложим на две составляющие: на силу лобового сопротивления  $\vec{X}$ , направленную по линии действия вектора скорости  $\vec{V}_C$ , и подъемную силу  $\vec{Y}$  (рис. 1. 8). Эти составляющие по модулю можно представить так:

$$X = c_x \rho S \frac{V_C^2}{2}, \quad Y = c_y \rho S \frac{V_C^2}{2},$$

где  $c_x$  — коэффициент лобового сопротивления;

$c_y$  — коэффициент подъемной силы;

$\rho$  — плотность воздуха;

$S$  — площадь миделя корпуса ракеты.

Спроектировав аэродинамическую силу на связанные оси, получим (рис. 1. 8 и 1. 9):

$$R_{ax} = -X \cos \alpha + Y \sin \alpha,$$

$$R_{ay} = (X \sin \alpha + Y \cos \alpha) \cos \chi,$$

$$R_{az} = (X \sin \alpha + Y \cos \alpha) \sin \chi.$$



Здесь  $\alpha$  — угол между вектором скорости  $\vec{V}_C$  и осью  $Cx$ ; будем называть его *углом атаки*;

$\chi$  — угол между проекцией аэродинамической силы  $\vec{R}_a$  на плоскость  $Cyz$  и осью  $Cy$ .

Из очевидных равенств

$$V_{Cy} = -V_C \sin \alpha \cos \chi, \quad V_{Cz} = -V_C \sin \alpha \sin \chi$$

имеем

$$\cos \chi = -\frac{V_{Cy}}{V_C \sin \alpha}, \quad \sin \chi = -\frac{V_{Cz}}{V_C \sin \alpha}.$$

Поэтому

$$R_{ay} = -(X \sin \alpha + Y \cos \alpha) \frac{V_{Cy}}{V_C \sin \alpha},$$

$$R_{az} = -(X \sin \alpha + Y \cos \alpha) \frac{V_{Cz}}{V_C \sin \alpha}.$$

Подставляя значения  $X$  и  $Y$ , получим

$$\begin{aligned} R_{ax} &= -\frac{1}{2} (c_x \cos \alpha - c_y \sin \alpha) \zeta S V_C^2, \\ R_{ay} &= -\frac{1}{2} (c_x \sin \alpha + c_y \cos \alpha) \zeta S \frac{V_{Cy} V_C}{\sin \alpha}, \\ R_{az} &= -\frac{1}{2} (c_x \sin \alpha + c_y \cos \alpha) \zeta S \frac{V_{Cz} V_C}{\sin \alpha}. \end{aligned} \quad (1.9.8)$$

Момент аэродинамических сил относительно центра масс ракеты равен векторному произведению радиуса-вектора центра давления  $\vec{r}_d (x_d, 0, 0)$  на вектор полной аэродинамической силы:

$$\vec{M}_a = \vec{r}_d \times \vec{R}_a,$$

или, так как в рассматриваемом случае центр давления и аэродинамический фокус совпадают,

$$\vec{M}_a = \vec{r}_F \times \vec{R}_a.$$

Здесь  $\vec{r}_F (x_F, 0, 0)$  — радиус-вектор фокуса аппарата.

Проектируя это векторное произведение на оси  $Cx$ ,  $Cy$ ,  $Cz$ , получим

$$M_{ax} = 0;$$

$$M_{ay} = -x_F R_{az} = -\frac{1}{2} x_F (c_x \sin \alpha + c_y \cos \alpha) \zeta S \frac{V_{Cz} V_C}{\sin \alpha};$$

$$M_{az} = x_F R_{ay} = -\frac{1}{2} x_F (c_x \sin \alpha + c_y \cos \alpha) \zeta S \frac{V_{Cy} V_C}{\sin \alpha}. \quad (1.9.9)$$

Допустим теперь, что воздушная среда, в которой совершается полет ракеты, сама движется относительно стартовой системы координат со скоростью  $\vec{V}_в$ . Тогда центр масс ракеты будет двигаться относительно воздуха со скоростью  $\vec{V}_c - \vec{V}_в$  (рис. 1.10). Аэродинамические силы определяются как раз скоростью ракеты относительно воздушной среды. Поэтому при учете движения воздушной среды относительно стартовой системы в формулах (1.9.8) и (1.9.9) скорость  $V_c$  должна быть заменена модулем скорости  $\vec{V}_c - \vec{V}_в$ , а проекции на связанные оси скорости центра

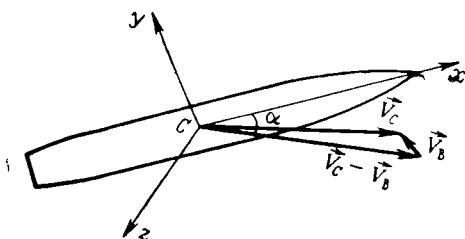


Рис. 1.10.

масс относительно стартовых осей должны быть заменены проекциями скорости центра масс относительно воздуха.

Если ракета движется не только поступательно, но и вращается вокруг центра масс, то возникают дополнительные аэродинамические силы. Проекции равнодействующей этих сил на оси  $Cx$ ,

$Cy$ ,  $Cz$  обозначим  $\Delta R_{ax}$ ,  $\Delta R_{ay}$ ,  $\Delta R_{az}$ , а проекции соответствующего (демпфирующего) момента на те же оси —  $\Delta M_{ax}$ ,  $\Delta M_{ay}$ ,  $\Delta M_{az}$ .

Таким образом, проекции аэродинамических сил и моментов на связанные оси в общем случае могут быть представлены формулами:

$$R_{ax} = \Delta R_{ax} - \frac{1}{2} (c_x \cos \alpha - c_y \sin \alpha) \zeta S |\vec{V}_c - \vec{V}_в|^2;$$

$$R_{ay} = \Delta R_{ay} - \frac{1}{2} (c_x + c_y \operatorname{ctg} \alpha) \zeta S (V_{cy} - V_{vy}) |\vec{V}_c - \vec{V}_в|; \quad (1.9.10)$$

$$R_{az} = \Delta R_{az} - \frac{1}{2} (c_x + c_y \operatorname{ctg} \alpha) \zeta S (V_{cz} - V_{vz}) |\vec{V}_c - \vec{V}_в|;$$

$$M_{ax} = \Delta M_{ax};$$

$$M_{ay} = \Delta M_{ay} + \frac{1}{2} x_F (c_x + c_y \operatorname{ctg} \alpha) \zeta S (V_{cz} - V_{vz}) |\vec{V}_c - \vec{V}_в|; \quad (1.9.11)$$

$$M_{az} = \Delta M_{az} - \frac{1}{2} x_F (c_x + c_y \operatorname{ctg} \alpha) \zeta S (V_{cy} - V_{vy}) |\vec{V}_c - \vec{V}_в|.$$

В этих формулах  $\alpha$  — угол между вектором  $\vec{V}_c - \vec{V}_в$  и осью  $Cx$  (см. рис. 1.10). Для ракет рассматриваемого класса характерно то, что в полете угол  $\alpha$  и угловая скорость вращения  $\omega$  малы. Используя это обстоятельство, можно значительно упростить формулы (1.9.10) и (1.9.11).

При малых  $\alpha$  коэффициент подъемной силы

$$c_y = c_y^\alpha \alpha, \quad (1.9.12)$$

коэффициент лобового сопротивления

$$c_x = c_{x0} + A\alpha^2, \quad (1.9.13)$$

где  $c_y^\alpha$  — производная от коэффициента подъемной силы по углу  $\alpha$  при  $\alpha=0$ ;

$c_{x0}$  — коэффициент лобового сопротивления при  $\alpha=0$ ;

$A$  — величина, не зависящая от угла  $\alpha$  при малых  $\alpha$ .

Далее, при малых  $\omega$  проекции равнодействующей аэродинамических сил, вызванных вращением аппарата, и соответствующего момента на связанные оси пропорциональны проекциям угловой скорости  $\vec{\omega}$  на эти оси, а именно:

$$\Delta R_{ax} = 0, \quad \Delta R_{ay} = R_{ay}^{\omega} \omega_z, \quad \Delta R_{az} = R_{az}^{\omega} \omega_y,$$

$$\Delta M_{ax} = M_{ax}^{\omega} \omega_x, \quad \Delta M_{ay} = M_{ay}^{\omega} \omega_y, \quad \Delta M_{az} = M_{az}^{\omega} \omega_z, \quad (1.9.14)$$

где

$$R_{ay}^{\omega} = \frac{\partial R_{ay}}{\partial \omega_z}, \quad R_{az}^{\omega} = \frac{\partial R_{az}}{\partial \omega_y}, \quad M_{ax}^{\omega} = \frac{\partial M_{ax}}{\partial \omega_x},$$

$$M_{ay}^{\omega} = \frac{\partial M_{ay}}{\partial \omega_y}, \quad M_{az}^{\omega} = \frac{\partial M_{az}}{\partial \omega_z}.$$

Если точка приложения равнодействующей аэродинамических сил, вызванных вращением аппарата, расположена впереди центра масс, то  $R_{ay}^{\omega} < 0$ ,  $R_{az}^{\omega} > 0$ . Если же эта точка расположена позади центра масс, то  $R_{ay}^{\omega} > 0$ ,  $R_{az}^{\omega} < 0$ . Во всех случаях каждая из величин  $M_{ax}^{\omega}$ ,  $M_{ay}^{\omega}$ ,  $M_{az}^{\omega}$  меньше нуля.

Подставим значения  $c_x$ ,  $c_y$ ,  $\Delta R_{ax}$ ,  $\Delta R_{ay}$ ,  $\Delta R_{az}$ ,  $\Delta M_{ax}$ ,  $\Delta M_{ay}$ ,  $\Delta M_{az}$ , определенные формулами (1.9.12) — (1.9.14), в формулы (1.9.10) и (1.9.11) и исключим  $|\vec{V}_C - \vec{V}_B|$  с помощью равенства

$$|\vec{V}_C - \vec{V}_B| = (V_{Cx} - V_{Bx}) \frac{1}{\cos \alpha}. \quad (1.9.15)$$

Тогда, полагая  $\sin \alpha \approx \alpha$ ,  $\cos \alpha \approx 1$  и пренебрегая членами, содержащими  $\alpha$  в степени, выше первой, получим

$$\begin{aligned} R_{ax} &= -\frac{1}{2} c_{x0} \varrho S (V_{Cx} - V_{Bx})^2; \\ R_{ay} &= R_{ay}^{\omega} \omega_z - \frac{1}{2} (c_{x0} + c_y^\alpha) \varrho S (V_{Cx} - V_{Bx})(V_{Cy} - V_{By}); \\ R_{az} &= R_{az}^{\omega} \omega_y - \frac{1}{2} (c_{x0} + c_y^\alpha) \varrho S (V_{Cx} - V_{Bx})(V_{Cz} - V_{Bz}); \end{aligned} \quad (1.9.16)$$

$$M_{ax} = M_{ax_0}^{\omega};$$

$$M_{ay} = M_{ay_0}^{\omega} + \frac{1}{2} x_F (c_{x0} + c_y^2) \varrho S (V_{Cx} - V_{rx}) (V_{Cz} - V_{rz}); \quad (1.9.17)$$

$$M_{az} = M_{az_0}^{\omega} - \frac{1}{2} x_F (c_{x0} + c_y^2) \varrho S (V_{Cx} - V_{rx}) (V_{Cy} - V_{ry}),$$

где  $V_{rx}$ ,  $V_{ry}$ ,  $V_{rz}$  — проекции вектора  $\vec{V}_r$  на связанные оси.

#### 9.4. Управляющие силы

Для обеспечения полета ракеты по заданному закону необходимо иметь возможность нужным образом изменять в полете величину скорости центра масс ракеты и ориентацию ее осей в пространстве. Для этой цели используются различные органы управления. При отклонении органов управления от нейтрального положения возникают необходимые для управления силы и моменты.

По выполняемым функциям органы управления удобно разбить на следующие 4 группы:

1. Органы управления величиной скорости центра масс ракеты.
2. Органы управления вращением ракеты вокруг поперечной оси  $Cz$ .
3. Органы управления вращением ракеты вокруг поперечной оси  $Cy$ .
4. Органы управления вращением ракеты вокруг продольной оси  $Cx$ .

Рассмотрим силы и моменты, которые возникают при отклонении органов управления той или иной группы.

##### Органы управления величиной скорости центра масс ракеты

Изменение величины скорости центра масс ракеты требуемым образом можно реализовать с помощью регулирования тяги двигателя и применения специальных тормозных устройств. Обычно на практике применяется регулирование тяги. В этом случае управляющая сила, направленная по оси  $Cx$ , равна изменению тяги двигателя:

$$\Delta X = p$$

( $p > 0$  при увеличении тяги по сравнению с номинальной тягой и  $p < 0$  в противном случае).

Управляющую силу представим так:

$$\Delta X = c_{x\delta} \delta_x,$$

где  $c_{x\delta}$  — коэффициент, равный в данном случае номинальной тяге двигателя  $P$ ;

$\delta_x = P/P$  — величина, характеризующая относительное изменение тяги.

#### Органы управления вращением ракеты вокруг поперечной оси $Cz$

Управлять вращением ракеты вокруг оси  $Cz$  можно с помощью воздушных рулей, газовых (газоструйных) рулей, вспомогательных (верньерных) двигателей; путем поворота маршевых двигателей, изменения тяги маршевых двигателей; с помощью поворотных сопел двигателей, дефлекторов и т. д.

Несмотря на разнообразие средств, применяемых для управления вращением ракеты вокруг поперечной оси, во всех случаях силы и моменты, возникающие при отклонении органов управления, могут быть записаны одинаково. Рассмотрим для примера некоторые типы органов управления.

Воздушные рули представляют собой сравнительно небольшие несущие поверхности, устанавливаемые либо непосредственно на корпусе ракеты, либо на неподвижных поверхностях, подобных крыльям, — стабилизаторах. При отклонении рулей симметрично плоскости  $Cxy$  (рис. 1.11) возникает аэродинамическая сила, лежащая в плоскости  $Cxy$ . Составляющую аэродинамической силы по оси  $Cy$  можно представить так:

$$\Delta Y = c_y^{\delta} \delta_{\delta} q S_p,$$

где  $\delta_{\delta}$  — угол отклонения руля;

$c_y^{\delta}$  — производная от коэффициента подъемной силы руля в связанной системе координат по углу отклонения руля;

$q = \rho \frac{V_c^2}{2}$  — скоростной напор;

$S_p$  — площадь воздушных рулей.

Другая составляющая при небольших углах отклонения руля и малых углах атаки ракеты пренебрежимо мала, и мы будем в дальнейшем полагать  $\Delta X = 0$ .

Момент аэродинамических сил относительно оси  $Cz$ , возникающий при отклонении воздушных рулей, равен:

$$\Delta M_z = -L_p \Delta Y,$$

где  $L_p$  — расстояние от центра давления рулей до центра масс ракеты.

Итак, при отклонении воздушных рулей симметрично плоскости  $Sxy$  возникают сила и момент, проекции которых на связанные оси могут быть записаны в виде

$$\Delta X = 0, \Delta Y = c_{y\delta} \cdot \delta_\theta, \Delta Z = 0,$$

$$\Delta M_x = \Delta M_y = 0, \Delta M_z = c_{\theta\delta} \cdot \delta_\theta,$$

где

$$c_{y\delta} = c_y^0 q S_p, \quad c_{\theta\delta} = -L_p c_{y\delta}.$$

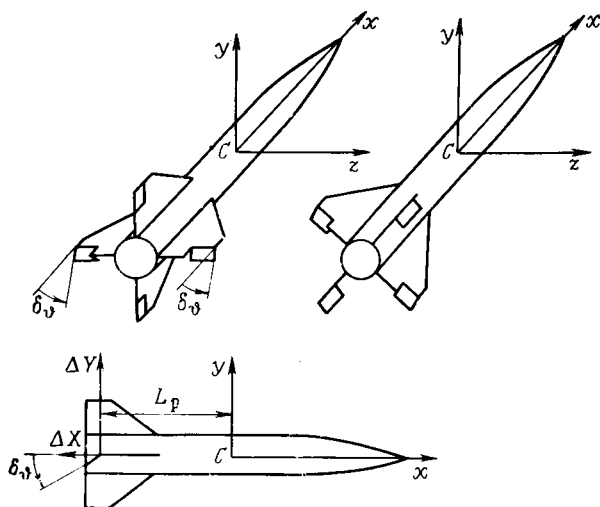


Рис. 1. 11.

Газовые рули во многом подобны воздушным рулям. Существенным отличием является лишь то, что газовые рули устанавливаются в потоке газов из двигателей. Силы и моменты, возникающие при отклонении газовых рулей, можно представить формулами такого же вида, что и для воздушных рулей, с той разницей, что коэффициент  $c_y^0$  должен быть определен для тех условий, в которых находятся газовые рули; под  $q$  следует подразумевать скоростной напор газов в сопле двигателя в районе расположения газовых рулей.

Поворот двигателя вокруг оси, параллельной оси  $Sz$  сопровождается появлением следующих сил и момента:

$$\Delta X = P \cos \delta_\theta - P = -2P \sin^2 \frac{\delta_\theta}{2}, \quad \Delta Y = P \sin \delta_\theta,$$

$$\Delta M_z = -L_p P \sin \delta_\theta.$$

Обычно, углы поворота двигателя малы. Поэтому можно принять

$$\sin \delta_{\theta} \approx \delta_{\theta}, \quad \sin \frac{\delta_{\theta}}{2} \approx \frac{\delta_{\theta}}{2}, \quad \cos \delta_{\theta} \approx 1.$$

Тогда, отбросив величины второго порядка малости, будем иметь

$$\Delta X \approx 0, \quad \Delta Y = c_{y\delta} \delta_{\theta}, \quad \Delta M_z = c_{\theta\delta} \delta_{\theta},$$

где

$$c_{y\delta} = P, \quad c_{\theta\delta} = -LP.$$

Если двигатель ракеты состоит из нескольких камер, то управлять движением вокруг оси  $Cz$  можно с помощью расcогласования тяг. Допустим, что для этой цели используются две камеры двигателя. Если тягу одной из камер увеличит, а другой — уменьшить на  $p$ , то суммарная тяга двигателя не изменится, и в то же время появится момент относительно оси  $Cz$ , равный

$$\Delta M_z = -ap = -aP_i \delta_{\theta},$$

где

$$\delta_{\theta} = \frac{p}{P_i}.$$

Ясно, что и в данном случае мы можем записать

$$\Delta M_z = c_{\theta\delta} \delta_{\theta},$$

имея в виду, что

$$c_{\theta\delta} = -aP_i.$$

Аналогичные выражения имеют место и для других типов органов управления.

Таким образом, при отклонении органов управления вращением ракеты вокруг оси  $Cz$  возникают силы по осям  $Cx$ ,  $Cy$  и момент по оси  $Cz$ , которые в общем случае при одновременном использовании нескольких типов органов управления можно представить в виде

$$\sum_i \Delta X_i \approx 0,$$

$$\sum_i \Delta Y_i = \sum_i c_{y\delta i} \delta_{\theta i}, \quad (1.9-18)$$

$$\sum_i \Delta M_{zi} = \sum_i c_{\theta\delta i} \delta_{\theta i}.$$

Формулы (1.9.18), разумеется, являются приближенными, потому что они получены без учета скорости изменения величин  $\delta_{\theta i}$  и некоторых других факторов, влияющих на силы и моменты, создаваемые органами управления. Однако влияние неучтен-

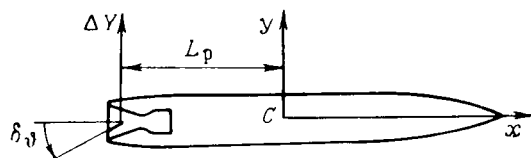


Рис. 1. 12.

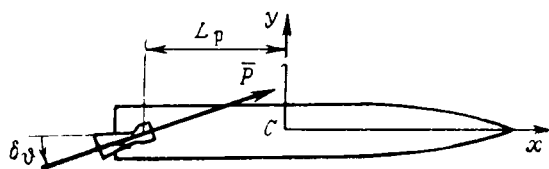


Рис. 1. 13.

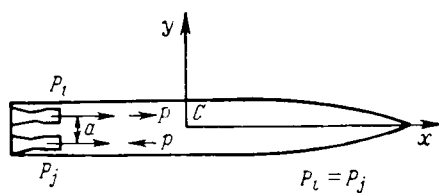


Рис. 1. 14.

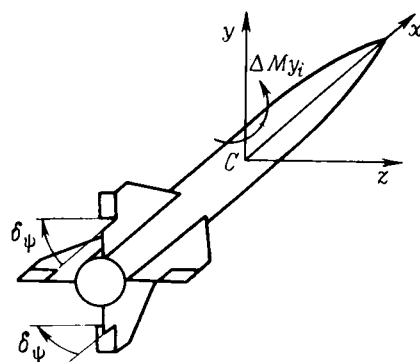


Рис. 1. 15.



ных факторов невелико, и для летательных аппаратов рассматриваемого класса выражения (1.9.18) вполне приемлемы.

Органы управления вращением ракеты вокруг поперечной оси  $Cy$

Для управления вращением вокруг оси  $Cy$  применяются те же органы управления, что и для управления вокруг оси  $Cz$ . В соответствии с этим силы и момент, возникающие при отклонении органов управления, можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned}\sum_i \Delta X_i &\approx 0, \\ \sum_i \Delta Z_i &= \sum_i c_{z\delta i} \delta_{\psi i}, \\ \sum_i \Delta M_{yi} &= \sum_i c_{\psi \delta i} \delta_{\psi i}.\end{aligned}\quad (1.9.19)$$

Коэффициенты  $c_{z\delta i}$ ,  $c_{\psi \delta i}$  аналогичны коэффициентам  $c_{y\delta i}$ ,  $c_{\theta \delta i}$  в формулах (1.9.18), и в каждом конкретном случае их выражения легко могут быть найдены.

В третьем равенстве (1.9.19) в отличие от соответствующего равенства (1.9.18) коэффициенты  $c_{\psi \delta i}$  положительны, потому что в данном случае при положительном  $\delta_{\psi i}$  возникает положительная сила  $\Delta Z_i$  и положительный момент  $\Delta M_{yi}$  (рис. 1.15).

Органы управления вращением ракеты вокруг продольной оси  $Cx$

Управлять вращением вокруг оси  $Cx$  можно с помощью воздушных и газовых рулей, поворотных двигателей или двигателей, установленных под некоторыми углами к продольной оси ракеты, с помощью вспомогательных двигателей и т. д.

При отклонении органов управления возникает момент по оси  $Cx$ , который можно представить в виде

$$\sum_i \Delta M_{xi} = \sum_i c_{x\delta i} \delta_{\gamma i} \quad (c_{x\delta i} < 0), \quad (1.9.20)$$

и сила

$$\sum_i \Delta X_i \approx 0. \quad (1.9.21)$$

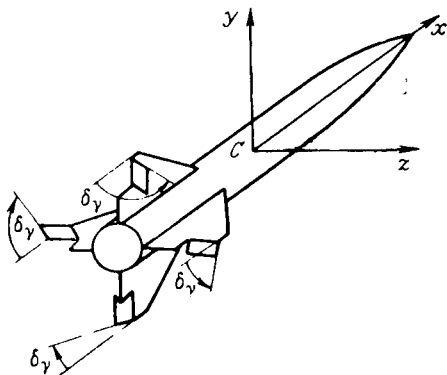


Рис. 1.16.

Например, при отклонении воздушных рулей на угол  $\delta_\gamma$  (рис. 1.16) возникает момент, пропорциональный углу  $\delta_\gamma$ . При положительных  $\delta_\gamma$  возникает отрицательный момент относительно оси  $Sx$ . Поэтому  $c_{\gamma\delta} < 0$ .

Силы, возникающие при отклонении органов управления от нейтрального положения, приводятся к главному вектору  $\vec{F}_{упр}$  (приложенному в центре масс ракеты) и главному моменту  $\vec{M}_{упр}$ . Проекции силы  $\vec{F}_{упр}$  и момента  $\vec{M}_{упр}$  на связанные оси координат обозначим соответственно через  $F_{упр x}$ ,  $F_{упр y}$ ,  $F_{упр z}$ ,  $M_{упр x}$ ,  $M_{упр y}$ ,  $M_{упр z}$ . На основании вышеизложенного

$$\begin{aligned} F_{упр x} &= c_{x\delta} \delta_x, \\ F_{упр y} &= \sum_i \Delta Y_i = \sum_i c_{y\delta i} \delta_{\theta i}, \\ F_{упр z} &= \sum_i \Delta Z_i = \sum_i c_{z\delta i} \delta_{\psi i}, \\ M_{упр x} &= \sum_i \Delta M_{xi} = \sum_i c_{\gamma\delta i} \delta_{\gamma i}, \\ M_{упр y} &= \sum_i \Delta M_{yi} = \sum_i c_{\phi\delta i} \delta_{\phi i}, \\ M_{упр z} &= \sum_i \Delta M_{zi} = \sum_i c_{\theta\delta i} \delta_{\theta i}. \end{aligned} \quad (1.9.22)$$

Если между отклонениями органов управления каждой группы существует пропорциональная зависимость, то, приведя эти отклонения к отклонению какого-нибудь руля из этой группы, можно формулы (1.9.22) представить в более простом виде, а именно:

$$\begin{aligned} F_{упр x} &= c_{x\delta} \delta_x, \\ F_{упр y} &= c_{y\delta} \delta_\theta, \quad F_{упр z} = c_{z\delta} \delta_\psi, \\ M_{упр x} &= c_{\gamma\delta} \delta_\gamma, \quad M_{упр y} = c_{\phi\delta} \delta_\phi, \quad M_{упр z} = c_{\theta\delta} \delta_\theta, \end{aligned} \quad (1.9.23)$$

где

$$\begin{aligned} c_{y\delta} &= \sum_i c_{y\delta i} \frac{\delta_{\theta i}}{\delta_\theta}, \quad c_{z\delta} = \sum_i c_{z\delta i} \frac{\delta_{\psi i}}{\delta_\psi}, \\ c_{\gamma\delta} &= \sum_i c_{\gamma\delta i} \frac{\delta_{\gamma i}}{\delta_\gamma}, \quad c_{\phi\delta} = \sum_i c_{\phi\delta i} \frac{\delta_{\phi i}}{\delta_\phi}, \quad \text{и т. д.} \end{aligned}$$

## 9.5. Силы Кориолиса

При вращении ракеты вокруг центра масс и движении топлива и газов относительно корпуса возникают кориолисовы силы, главный вектор и главный момент которых представляются формулами:

$$\vec{F}_k = - \int_{\Sigma} \vec{\omega}_k dm, \quad \vec{M}_k = - \int_{\Sigma} \vec{r}' \times \vec{\omega}_k dm.$$

Кориолисово ускорение

$$\vec{\omega}_k = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r.$$

Поэтому

$$\vec{F}_k = -2 \int_{\Sigma} \vec{\omega} \times \vec{v}_r dm, \quad \vec{M}_k = -2 \int_{\Sigma} \vec{r}' \times \vec{\omega} \times \vec{v}_r dm. \quad (1.9.24)$$

Проектируя векторы (1.9.24) на связанные оси, получим:

$$F_{kx} = -2\omega_y \int_{\Sigma} v_{rz} dm + 2\omega_z \int_{\Sigma} v_{ry} dm, \\ F_{ky} = -2\omega_z \int_{\Sigma} v_{rx} dm + 2\omega_x \int_{\Sigma} v_{rz} dm, \quad (1.9.25)$$

$$F_{kz} = -2\omega_x \int_{\Sigma} v_{ry} dm + 2\omega_y \int_{\Sigma} v_{rx} dm; \\ M_{kx} = -2\omega_x \int_{\Sigma} y' v_{ry} dm - 2\omega_x \int_{\Sigma} z' v_{rz} dm + \\ + 2\omega_y \int_{\Sigma} y' v_{rx} dm + 2\omega_z \int_{\Sigma} z' v_{rx} dm, \\ M_{ky} = -2\omega_y \int_{\Sigma} z' v_{rz} dm - 2\omega_y \int_{\Sigma} x' v_{rx} dm + \\ + 2\omega_z \int_{\Sigma} z' v_{ry} dm + 2\omega_x \int_{\Sigma} x' v_{ry} dm, \quad (1.9.26) \\ M_{kz} = -2\omega_z \int_{\Sigma} x' v_{rx} dm - 2\omega_z \int_{\Sigma} y' v_{ry} dm + \\ + 2\omega_x \int_{\Sigma} x' v_{rz} dm + 2\omega_y \int_{\Sigma} y' v_{rz} dm.$$

Здесь  $v_{rx}$ ,  $v_{ry}$ ,  $v_{rz}$  и  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  — соответственно проекции относительной скорости  $\vec{v}_r$  и радиуса-вектора  $\vec{r}'$  частицы на связанные оси.

Если считать, что течение газов и жидкостей внутри корпуса ракеты обладает осевой симметрией, то

$$\int_{\Sigma} v_{ry} dm = 0, \int_{\Sigma} v_{rz} dm = 0, \int_{\Sigma} y' v_{rx} dm = 0, \int_{\Sigma} z' v_{rx} dm = 0$$

и тогда

$$F_{\kappa x} = 0, F_{\kappa y} = F_{\kappa y}^{\omega z \omega z}, F_{\kappa z} = F_{\kappa z}^{\omega y \omega y}, \quad (1.9.27)$$

$$M_{\kappa x} = M_{\kappa x}^{\omega x \omega x}, M_{\kappa y} = M_{\kappa y}^{\omega y \omega y}, M_{\kappa z} = M_{\kappa z}^{\omega z \omega z},$$

где

$$F_{\kappa y}^{\omega z} = -2 \int_{\Sigma} v_{rx} dm, F_{\kappa z}^{\omega y} = 2 \int_{\Sigma} v_{rx} dm,$$

$$M_{\kappa x}^{\omega x} = -2 \int_{\Sigma} (y' v_{ry} + z' v_{rz}) dm, M_{\kappa y}^{\omega y} = -2 \int_{\Sigma} (z' v_{rz} + x' v_{rx}) dm,$$

$$M_{\kappa z}^{\omega z} = -2 \int_{\Sigma} (x' v_{rx} + y' v_{ry}) dm.$$

Более подробное изучение вопроса показывает, что  $M_{\kappa x}^{\omega x}$  пренебрежимо мал и можно принять

$$M_{\kappa x}^{\omega x} = 0,$$

а коэффициенты  $M_{\kappa y}^{\omega y}$  и  $M_{\kappa z}^{\omega z}$  в основном определяются значением интеграла

$$\int_{\Sigma} x' v_{rx} dm.$$

Кориолисовы моменты могут быть как раскачивающими, так и демпфирующими. Для частиц, которые движутся к центру масс,  $x' v_{rx} < 0$ , и, значит, при движении этих частиц возникают раскачивающие моменты. Для частиц, движущихся от центра масс,  $x' v_{rx} > 0$ , и, значит, соответствующие моменты направлены против вращения ракеты, т. е. являются демпфирующими. В целом при расположении двигателей позади центра масс демпфирующие моменты превалируют над раскачивающими, и тогда

$$M_{\kappa y}^{\omega y}, M_{\kappa z}^{\omega z} < 0.$$

## 9.6. Силы, обусловленные перемещением центра масс ракеты относительно ее корпуса

Силы, обусловленные перемещением центра масс ракеты относительно ее корпуса, определяются суммой (см. § 5):

$$\vec{F}_r = m \vec{\omega}_{Cr} + 2m \vec{\omega} \times \vec{V}_{Cr}.$$

Первое слагаемое пренебрежимо мало. Отбрасывая это слагаемое, приближенно будем иметь

$$\vec{F}_r = 2m\vec{\omega} \times \vec{V}_{Cr}. \quad (1.9.28)$$

Спроектируем равенство (1.9.28) на оси  $Cx$ ,  $Cy$ ,  $Cz$ , получим:

$$\begin{aligned} F_{rx} &= (2m\vec{\omega} \times \vec{V}_{Cr})_x = 2m(\omega_y V_{Crz} - \omega_z V_{Cry}), \\ F_{ry} &= (2m\vec{\omega} \times \vec{V}_{Cr})_y = 2m(\omega_z V_{Crx} - \omega_x V_{Crz}), \\ F_{rz} &= (2m\vec{\omega} \times \vec{V}_{Cr})_z = 2m(\omega_x V_{Cry} - \omega_y V_{Crx}), \end{aligned} \quad (1.9.29)$$

где  $V_{Crx}$ ,  $V_{Cry}$ ,  $V_{Crz}$  — проекции относительной скорости центра масс на оси  $Cx$ ,  $Cy$ ,  $Cz$ .

Считая, что течение газов и жидкостей в корпусе ракеты осесимметрическое, будем иметь

$$F_{rx} = 0, \quad F_{ry} = 2mV_{Crx}\omega_z, \quad F_{rz} = -2mV_{Crx}\omega_y. \quad (1.9.30)$$

## § 10. ДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ РАКЕТЫ В РАЗВЕРНУТОМ ВИДЕ

Уравнения движения центра масс ракеты и уравнения вращения вокруг центра масс совместно представляют систему динамических уравнений пространственного движения ракеты.

Динамические уравнения ракеты в проекциях на оси связанной системы координат, которые совпадают с главными осями инерции ракеты, вращающимися в пространстве вместе с корпусом с одинаковой угловой скоростью, представляются в следующем виде:

$$\begin{aligned} m \left( \frac{dV_{Cx}}{dt} + \omega_y V_{Cz} - \omega_z V_{Cy} \right) &= G_x + P_x + R_{ax} + F_{kx} + F_{rx} + F_{ynp\ x}, \\ m \left( \frac{dV_{Cy}}{dt} + \omega_z V_{Cx} - \omega_x V_{Cz} \right) &= G_y + P_y + R_{ay} + F_{ky} + F_{ry} + F_{ynp\ y}, \\ m \left( \frac{dV_{Cz}}{dt} + \omega_x V_{Cy} - \omega_y V_{Cx} \right) &= G_z + P_z + R_{az} + F_{kz} + F_{rz} + F_{ynp\ z}, \end{aligned} \quad (1.10.1)$$

$$J_x \frac{d\omega_x}{dt} + (J_z - J_y) \omega_y \omega_z = M_{Px} + M_{ax} + M_{kx} + M_{ynp\ x},$$

$$J_y \frac{d\omega_y}{dt} + (J_x - J_z) \omega_z \omega_x = M_{Py} + M_{ay} + M_{ky} + M_{ynp\ y},$$

$$J_z \frac{d\omega_z}{dt} + (J_y - J_x) \omega_x \omega_y = M_{Pz} + M_{az} + M_{kz} + M_{ynp\ z}.$$

Подставим в правые части уравнений (1.10.1) приближенные выражения сил и моментов, приведенные в § 9. Получим:

$$\begin{aligned}
 m \left( \frac{dV_{Cx}}{dt} + \omega_y V_{Cz} - \omega_z V_{Cy} \right) &= mg_x + P - \\
 &\quad \frac{1}{2} c_{x0} \mathcal{Q} S (V_{Cx} - V_{Bx})^2 + c_{x\delta} \delta_x, \\
 m \left( \frac{dV_{Cy}}{dt} + \omega_z V_{Cx} - \omega_x V_{Cz} \right) &= mg_y + \sum_j \eta_j P_j - \\
 &\quad \frac{1}{2} (c_{x0} + c_y^2) \mathcal{Q} S (V_{Cx} - V_{Bx}) (V_{Cy} - V_{By}) - \\
 &\quad - v_y \omega_z + 2m V_{Crx} \omega_z + c_{y\delta} \delta_\theta,
 \end{aligned} \tag{1.10.2}$$

$$\begin{aligned}
 m \left( \frac{dV_{Cz}}{dt} + \omega_x V_{Cy} - \omega_y V_{Cx} \right) &= mg_z + \sum_l \xi_l P_l - \\
 &\quad \frac{1}{2} (c_{x0} + c_y^2) \mathcal{Q} S (V_{Cx} - V_{Bx}) (V_{Cz} - V_{Bz}) - \\
 &\quad - v_z \omega_y - 2m V_{Crx} \omega_y + c_{z\delta} \delta_\psi,
 \end{aligned}$$

где

$$v_y = -R_{ay}^{\omega_z} - F_{\kappa y}^{\omega_z}, \quad v_z = -R_{az}^{\omega_y} - F_{\kappa z}^{\omega_y}$$

и

$$\begin{aligned}
 J_x \frac{d\omega_x}{dt} + (J_z - J_y) \omega_y \omega_z &= -\mu_x \omega_x + \sum_j (y_j \xi_j - z_j \eta_j) P_j + c_{\gamma\delta} \delta_\gamma, \\
 J_y \frac{d\omega_y}{dt} + (J_x - J_z) \omega_z \omega_x &= -\mu_y \omega_y + \sum_j (z_j - x_j \xi_j) P_j + \\
 &\quad + \frac{1}{2} x_F (c_{x0} + c_y^2) \mathcal{Q} S (V_{Cx} - V_{Bx}) (V_{Cz} - V_{Bz}) + c_{\psi\delta} \delta_\psi, \tag{1.10.3} \\
 J_z \frac{d\omega_z}{dt} + (J_y - J_x) \omega_x \omega_y &= -\mu_z \omega_z + \sum_j (x_j \eta_j - y_j) P_j - \\
 &\quad - \frac{1}{2} x_F (c_{x0} + c_y^2) \mathcal{Q} S (V_{Cx} - V_{Bx}) (V_{Cy} - V_{By}) - c_{\theta\delta} \delta_\theta,
 \end{aligned}$$

где

$$\mu_x = -M_{ax}^{\omega_x} - M_{\kappa x}^{\omega_x}, \quad \mu_y = -M_{ay}^{\omega_y} - M_{\kappa y}^{\omega_y}, \quad \mu_z = -M_{az}^{\omega_z} - M_{\kappa z}^{\omega_z}.$$







$$\frac{d\Delta y_i}{dt} = f'_i(y_1^0 + \Delta y_1, \dots, y_n^0 + \Delta y_n; z_1 + \Delta z_1, \dots, z_m + \Delta z_m) - \\ - f_i(y_1^0, \dots, y_n^0; z_1, \dots, z_m) \quad (i=1, \dots, n).$$

Отсюда, разлагая в правых частях последних равенств функции  $f'_i$  в ряды Тейлора, будем иметь

$$\frac{d\Delta y_i}{dt} = \sum_{j=1}^n p_{ij}(t) \Delta y_j + \sum_{j=1}^m \pi_{ij}(t) \Delta z_j + \Delta f_i(t) + \\ + R_i(t, \Delta y_1, \dots, \Delta y_n; \Delta z_1, \dots, \Delta z_m) \quad (i=1, \dots, n), \quad (1.11.5)$$

где

$$p_{ij} = \left. \frac{\partial f'_i}{\partial y_j} \right|_{\Delta y_1, \dots, \Delta y_n, \Delta z_1, \dots, \Delta z_m = 0},$$

$$\pi_{ij} = \left. \frac{\partial f'_i}{\partial z_j} \right|_{\Delta y_1, \dots, \Delta y_n, \Delta z_1, \dots, \Delta z_m = 0},$$

$$\Delta f_i = f'_i(y_1^0, \dots, y_n^0; z_1, \dots, z_m) - f_i(y_1^0, \dots, y_n^0; z_1, \dots, z_m),$$

а  $R_i$  — совокупность членов, имеющих относительно возмущений  $\Delta y_1, \dots, \Delta y_n, \Delta z_1, \dots, \Delta z_m$  порядок выше первого.

В преобразованных уравнениях возмущенного движения (1.11.5) искомыми функциями являются возмущения  $\Delta y_i$  ( $i=1, \dots, n$ ). Каждому движению данной механической системы соответствует некоторое частное решение уравнений (1.11.5).

В задачах об устойчивости движения обычно рассматриваются решения системы (1.11.5) при малых начальных значениях возмущений. При этом естественно ожидать, что характер решений в основном определяется линейной частью уравнений (1.11.5). И действительно, часто оказывается достаточным рассмотрение линейной системы

$$\frac{d\Delta y_i}{dt} = \sum_{j=1}^n p_{ij}(t) \Delta y_j + \sum_{j=1}^m \pi_{ij}(t) \Delta z_j + \Delta f_i(t) \quad (i=1, \dots, n), \quad (1.11.6)$$

называемой *системой уравнений возмущенного движения первого приближения*. Пренебрежение нелинейными членами значительно упрощает исследование уравнений.

## § 12. ЛИНЕАРИЗАЦИЯ УРАВНЕНИЙ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ

### 12.1. Основные предпосылки

При выводе дифференциальных уравнений возмущенного движения ракеты в качестве невозмущенного движения рассматривают ее программное движение, определяемое в ходе балли-

стического расчета, когда считается, что параметры ракеты и системы управления имеют номинальные значения, а параметры атмосферы соответствуют СА (стандартной атмосфере).

Все те факторы, которые в ходе баллистического расчета не учитываются и вызывают отклонение действительного движения от программного, рассматриваются как возмущения. Возмущения могут быть разбиты на следующие группы.

1. Весовые возмущения. В ходе баллистического расчета считается, что масса ракеты и ее моменты инерции изменяются с течением времени определенным, известным образом. Истинные значения массы ракеты и ее моментов инерции по разным причинам отличаются от расчетных значений этих параметров. Пусть  $m'(t)$ ,  $J'_x(t)$ ,  $J'_y(t)$ ,  $J'_z(t)$  — истинные значения массы и моментов инерции, а  $m(t)$ ,  $J_x(t)$ ,  $J_y(t)$ ,  $J_z(t)$  — программные значения. Тогда возмущения этих величин равны:

$$\Delta m(t) = m'(t) - m(t), \quad \Delta J_x(t) = J'_x(t) - J_x(t),$$

$$\Delta J_y(t) = J'_y(t) - J_y(t), \quad \Delta J_z(t) = J'_z(t) - J_z(t).$$

2. Аэродинамические возмущения. Основным аэродинамическим возмущающим фактором является ветер. Существенное значение имеет также положение аэродинамического фокуса. Расчетное значение координаты фокуса  $x_F(t)$  из-за неточностей в определении положения центра масс и положения фокуса ракеты отличаются от истинного значения  $x'_F(t)$  на

$$\Delta x_F(t) = x'_F(t) - x_F(t).$$

Разброс аэродинамических коэффициентов  $c_x$ ,  $c_y^a$  от изделия к изделию не имеет существенного значения. Однако определяются эти коэффициенты со значительными погрешностями. Возмущения аэродинамических коэффициентов равны:

$$\Delta c_x = c'_x - c_x, \quad \Delta c_y^a = c'^a_y - c_y^a.$$

Истинное значение плотности воздуха отличается от расчетного значения, принимаемого по СА, на

$$\Delta \rho = \rho' - \rho.$$

Отклонения площади мишени  $S$  также приводят к ошибкам в расчетах аэродинамических сил. Однако эти отклонения при изготовлении изделия незначительны, и ими можно пренебречь.

3. Возмущения, связанные с тягой двигателя. При определении программного движения считается, что тяга двигателя направлена по продольной оси ракеты и что центр масс лежит на этой оси. Поэтому составляющие тяги двигателя по поперечным осям  $S_y$ ,  $S_z$ , а также момент относительно центра масс ракеты равны нулю. В действительности из-за особен-

ностей компоновки и различных технологических погрешностей имеют место перекося и эксцентриситет тяги относительно центра масс ракеты. Поэтому составляющие тяги по поперечным осям и момент тяги относительно центра масс, вообще говоря, не равны нулю. Кроме того, истинное значение тяги  $P'_j$  будет отличаться от расчетного  $P_j$  на некоторую величину

$$\Delta P_j(t) = P'_j(t) - P_j(t).$$

4. Возмущения основных параметров движения. К основным параметрам движения отнесем углы тангажа  $\vartheta$ , рыскания  $\psi$ , крена  $\gamma$ , скорость центра масс  $\vec{V}_C$ . Возмущенные значения этих величин, как и выше, будем отмечать штрихом. Возмущения основных параметров равны:

$$\Delta \vartheta(t) = \vartheta'(t) - \vartheta(t), \quad \Delta \psi(t) = \psi'(t) - \psi(t),$$

$$\Delta \gamma(t) = \gamma'(t) - \gamma(t), \quad \Delta \vec{V}_C(t) = \vec{V}'_C(t) - \vec{V}_C(t).$$

Пусть в момент времени  $t$  согласно баллистическому расчету связанная система координат занимает некоторое положение в пространстве. Истинное положение этих осей будет иное (рис. 1. 17).

Проекция вектора  $\Delta \vec{V}_C$  на невозмущенные оси связанной системы обозначим так:

$$(\Delta \vec{V}_C)_x = \Delta V_x, \quad (\Delta \vec{V}_C)_y = \Delta V_y, \quad (\Delta \vec{V}_C)_z = \Delta V_z.$$

5. Возмущения коэффициентов  $v_y, v_z, \mu_x, \mu_y, \mu_z, c_{x\delta}, c_{\vartheta\delta}, c_{\psi\delta}, c_{\gamma\delta}$ . Эти коэффициенты зависят от геометрических параметров ракеты, относительного движения частиц внутри корпуса, параметров движения ракеты. Возмущения перечисленных коэффициентов обозначим через  $\Delta v_y, \Delta v_z, \Delta \mu_x, \dots$ . Эти возмущения определяют погрешностями (возмущениями) соответствующих геометрических, кинематических и других параметров.

При выводе дифференциальных уравнений возмущенного движения ракеты условимся рассматривать как малые:

— возмущения основных параметров движения  $\Delta \vartheta, \Delta \psi, \Delta \gamma, \Delta V_x, \Delta V_y, \Delta V_z$  и их производные по времени;

— возмущения массы  $\Delta m$  и моментов инерции  $\Delta J_x, \Delta J_y, \Delta J_z$ ;

— скорость ветра  $V_b$ , возмущение плотности воздуха  $\Delta \rho$ , а также возмущения аэродинамических коэффициентов  $\Delta c_{x0}, \Delta c_y^a$ ;

— возмущения, связанные с работой двигателя, а именно:  $\Delta P_j$ , проекции тяги двигателя на оси  $Cy$  и  $Cz$  и момент тяги относительно центра масс;

— производные по времени от углов тангажа, рыскания, крена;

- угол атаки  $\alpha$  и его производная по времени;
- отклонения органов управления;
- возмущения коэффициентов  $\Delta v_y, \Delta v_z, \dots, \Delta c_{\gamma\delta}$ .

Из малости  $\alpha$  и  $\frac{d\alpha}{dt}$  следует малость  $V_{Cy}, V_{Cz}, \frac{dV_{Cy}}{dt}, \frac{dV_{Cz}}{dt}$ .

Это легко видеть из равенств

$$V_{Cy} = -V_C \sin \alpha \cos \chi, \quad V_{Cz} = -V_C \sin \alpha \sin \chi,$$

приведенных в § 9.

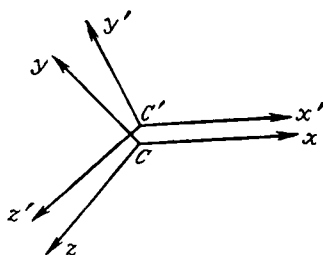


Рис. 1. 17.

Обычно в программном движении углы рыскания и крена равны нулю. Мы также будем считать, что в невозмущенном движении

$$\psi, \gamma = 0. \quad (1.12.1)$$

Наконец, в силу условия (1.12.1), проекция ускорения земного притяжения  $\vec{g}$  на невозмущенную ось  $Cz$  в момент старта равна нулю, а вообще — является малой величиной.

## 12.2. Вспомогательные соотношения

Подготовим некоторые вспомогательные соотношения, определяющие связи между величинами в невозмущенном и возмущенном движениях с точностью до членов второго порядка малости.

Пользуясь равенствами (1.8.2), будем иметь:

$$\begin{aligned} \omega'_{x'} &= \frac{d(\gamma + \Delta\gamma)}{dt} - \frac{d(\vartheta + \Delta\vartheta)}{dt} \sin(\psi + \Delta\psi), \\ \omega'_{y'} &= \frac{d(\psi + \Delta\psi)}{dt} \cos(\gamma + \Delta\gamma) + \frac{d(\vartheta + \Delta\vartheta)}{dt} \cos(\psi + \Delta\psi) \sin(\gamma + \Delta\gamma), \\ \omega'_{z'} &= \frac{d(\vartheta + \Delta\vartheta)}{dt} \cos(\psi + \Delta\psi) \cos(\gamma + \Delta\gamma) - \frac{d(\psi + \Delta\psi)}{dt} \sin(\gamma + \Delta\gamma), \end{aligned}$$

или, учитывая (1.12.1),

$$\begin{aligned}\omega'_{x'} &= \frac{d\Delta\gamma}{dt} - \frac{d(\vartheta + \Delta\vartheta)}{dt} \sin \Delta\psi, \\ \omega'_{y'} &= \frac{d\Delta\psi}{dt} \cos \Delta\gamma + \frac{d(\vartheta + \Delta\vartheta)}{dt} \cos \Delta\psi \sin \Delta\gamma, \\ \omega'_{z'} &= \frac{d(\vartheta + \Delta\vartheta)}{dt} \cos \Delta\psi \cos \Delta\gamma - \frac{d\Delta\psi}{dt} \sin \Delta\gamma.\end{aligned}$$

Отсюда с точностью до величин второго порядка малости

$$\begin{aligned}\omega'_{x'} &= \frac{d\Delta\gamma}{dt}, \\ \omega'_{y'} &= \frac{d\Delta\psi}{dt}, \\ \omega'_{z'} &= \frac{d\vartheta}{dt} + \frac{d\Delta\vartheta}{dt}.\end{aligned}\tag{1.12.2}$$

Дифференцируя равенства (1.12.2), получим:

$$\begin{aligned}\frac{d\omega'_{x'}}{dt} &= \frac{d^2\Delta\gamma}{dt^2}, \\ \frac{d\omega'_{y'}}{dt} &= \frac{d^2\Delta\psi}{dt^2}, \\ \frac{d\omega'_{z'}}{dt} &= \frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \frac{d^2\Delta\vartheta}{dt^2}.\end{aligned}\tag{1.12.3}$$

Из равенств (1.12.2) и (1.12.3) видно, кстати, что проекции угловой скорости на связанные оси и их производные являются малыми величинами.

Между проекциями произвольного вектора  $\vec{a}$  на оси двух разных систем координат имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned}a_{x'} &= a_x \cos(x', x) + a_y \cos(x', y) + a_z \cos(x', z), \\ a_{y'} &= a_x \cos(y', x) + a_y \cos(y', y) + a_z \cos(y', z), \\ a_{z'} &= a_x \cos(z', x) + a_y \cos(z', y) + a_z \cos(z', z).\end{aligned}\tag{1.12.4}$$

Как видим, для перехода от одной системы осей к другой достаточно знать матрицу (таблицу) перехода

$$M = \begin{vmatrix} \cos(x', x) & \cos(x', y) & \cos(x', z) \\ \cos(y', x) & \cos(y', y) & \cos(y', z) \\ \cos(z', x) & \cos(z', y) & \cos(z', z) \end{vmatrix}.$$

Значения косинусов углов между осями можно определить как скалярные произведения единичных векторов, направленных по соответствующим осям.

Пусть  $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$  — единичные направляющие векторы осей  $C'x', C'y', C'z'$ , а  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  — единичные направляющие векторы осей  $Cx, Cy, Cz$ . Тогда

$$M = \begin{vmatrix} \vec{i}' \cdot \vec{i} & \vec{i}' \cdot \vec{j} & \vec{i}' \cdot \vec{k} \\ \vec{j}' \cdot \vec{i} & \vec{j}' \cdot \vec{j} & \vec{j}' \cdot \vec{k} \\ \vec{k}' \cdot \vec{i} & \vec{k}' \cdot \vec{j} & \vec{k}' \cdot \vec{k} \end{vmatrix}.$$

Как известно, скалярное произведение двух векторов равняется сумме произведений их соответствующих составляющих. Например,

$$\vec{i}' \cdot \vec{i} = i'_{x_0} i_{x_0} + i'_{y_0} i_{y_0} + i'_{z_0} i_{z_0}.$$

Составляя скалярные произведения, используя для этого таблицу 1.1, легко вычислить элементы матрицы  $M$ :

$$\begin{aligned} \vec{i}' \cdot \vec{i} &= \cos \Delta\psi \cos(\vartheta + \Delta\vartheta) \cos \vartheta + \cos \Delta\psi \sin(\vartheta + \Delta\vartheta) \sin \vartheta = \\ &= \cos \Delta\psi \cos \Delta\vartheta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{i}' \cdot \vec{j} &= -\cos \Delta\psi \cos(\vartheta + \Delta\vartheta) \sin \vartheta + \cos \Delta\psi \sin(\vartheta + \Delta\vartheta) \cos \vartheta = \\ &= \cos \Delta\psi \sin \Delta\vartheta, \end{aligned}$$

$$\vec{i}' \cdot \vec{k} = -\sin \Delta\psi,$$

$$\begin{aligned} \vec{j}' \cdot \vec{i} &= -\cos \Delta\gamma \sin(\vartheta + \Delta\vartheta) \cos \vartheta + \sin \Delta\gamma \sin \Delta\psi \cos(\vartheta + \Delta\vartheta) \cos \vartheta + \\ &+ \cos \Delta\gamma \cos(\vartheta + \Delta\vartheta) \sin \vartheta + \sin \Delta\gamma \sin \Delta\psi \sin(\vartheta + \Delta\vartheta) \sin \vartheta = \\ &= \sin \Delta\gamma \sin \Delta\psi \cos \Delta\vartheta - \cos \Delta\gamma \sin \Delta\vartheta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{j}' \cdot \vec{j} &= \cos \Delta\gamma \sin(\vartheta + \Delta\vartheta) \sin \vartheta - \sin \Delta\gamma \sin \Delta\psi \cos(\vartheta + \Delta\vartheta) \sin \vartheta + \\ &+ \cos \Delta\gamma \cos(\vartheta + \Delta\vartheta) \cos \vartheta + \sin \Delta\gamma \sin \Delta\psi \sin(\vartheta + \Delta\vartheta) \cos \vartheta = \\ &= \cos \Delta\gamma \cos \Delta\vartheta + \sin \Delta\gamma \sin \Delta\psi \sin \Delta\vartheta, \end{aligned}$$

$$\vec{j}' \cdot \vec{k} = \sin \Delta\gamma \cos \Delta\psi,$$

$$\begin{aligned} \vec{k}' \cdot \vec{i} &= \cos \Delta\gamma \sin \Delta\psi \cos(\vartheta + \Delta\vartheta) \cos \vartheta + \sin \Delta\gamma \sin(\vartheta + \Delta\vartheta) \cos \vartheta - \\ &- \sin \Delta\gamma \cos(\vartheta + \Delta\vartheta) \sin \vartheta + \cos \Delta\gamma \sin \Delta\psi \sin(\vartheta + \Delta\vartheta) \sin \vartheta = \\ &= \sin \Delta\gamma \sin \Delta\vartheta + \cos \Delta\gamma \sin \Delta\psi \cos \Delta\vartheta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{k}' \cdot \vec{j} &= -\cos \Delta\gamma \sin \Delta\psi \cos(\vartheta + \Delta\vartheta) \sin \vartheta - \sin \Delta\gamma \sin(\vartheta + \Delta\vartheta) \sin \vartheta - \\
&\quad - \sin \Delta\gamma \cos(\vartheta + \Delta\vartheta) \cos \vartheta + \cos \Delta\gamma \sin \Delta\psi \sin(\vartheta + \Delta\vartheta) \cos \vartheta = \\
&= -\sin \Delta\gamma \cos \Delta\vartheta + \cos \Delta\gamma \sin \Delta\psi \sin \Delta\vartheta, \\
\vec{k}' \cdot \vec{k} &= \cos \Delta\gamma \cos \Delta\psi.
\end{aligned}$$

Отсюда с точностью до величин второго порядка малости

$$\begin{aligned}
\vec{i}' \cdot \vec{i} &= 1, & \vec{i}' \cdot \vec{j} &= \Delta\vartheta, & \vec{i}' \cdot \vec{k} &= -\Delta\psi, \\
\vec{j}' \cdot \vec{i} &= -\Delta\vartheta, & \vec{j}' \cdot \vec{j} &= 1, & \vec{j}' \cdot \vec{k} &= \Delta\gamma, \\
\vec{k}' \cdot \vec{i} &= \Delta\psi, & \vec{k}' \cdot \vec{j} &= -\Delta\gamma, & \vec{k}' \cdot \vec{k} &= 1.
\end{aligned}$$

Значит, с этой точностью

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \Delta\vartheta & -\Delta\psi \\ -\Delta\vartheta & 1 & \Delta\gamma \\ \Delta\psi & -\Delta\gamma & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.12.5)$$

На основании равенства (1.12.4)), используя выражение (1.12.5), получаем:

$$\begin{aligned}
V'_{Cx'} &= V'_{Cx} + V'_{Cy} \Delta\vartheta - V'_{Cz} \Delta\psi, \\
V'_{Cy'} &= -V'_{Cx} \Delta\vartheta + V'_{Cy} + V'_{Cz} \Delta\gamma, \\
V'_{Cz'} &= V'_{Cx} \Delta\psi - V'_{Cy} \Delta\gamma + V'_{Cz}.
\end{aligned}$$

Учитывая, что

$$V'_{Cx} = V_{Cx} + \Delta V_x, \quad V'_{Cy} = V_{Cy} + \Delta V_y, \quad V'_{Cz} = V_{Cz} + \Delta V_z$$

и удерживая величины порядка малости не выше первого, будем иметь:

$$\begin{aligned}
V'_{Cx'} &= V_{Cx} + \Delta V_x, \\
V'_{Cy'} &= -V_{Cx} \Delta\vartheta + V_{Cy} + \Delta V_y, \\
V'_{Cz'} &= V_{Cx} \Delta\psi + V_{Cz} + \Delta V_z.
\end{aligned} \quad (1.12.6)$$

Из равенств (1.12.6) путем дифференцирования находим:

$$\begin{aligned}
\frac{dV'_{Cx'}}{dt} &= \frac{dV_{Cx}}{dt} + \frac{d\Delta V_x}{dt}, \\
\frac{dV'_{Cy'}}{dt} &= -\frac{dV_{Cx}}{dt} \Delta\vartheta - V_{Cx} \frac{d\Delta\vartheta}{dt} + \frac{dV_{Cy}}{dt} + \frac{d\Delta V_y}{dt}, \\
\frac{dV'_{Cz'}}{dt} &= \frac{dV_{Cx}}{dt} \Delta\psi + V_{Cx} \frac{d\Delta\psi}{dt} + \frac{dV_{Cz}}{dt} + \frac{d\Delta V_z}{dt}.
\end{aligned} \quad (1.12.7)$$

Для проекций ускорения земного притяжения и скорости ветра получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned}g_{x'} &= g_x + g_y \Delta \vartheta - g_z \Delta \psi, \\g_{y'} &= -g_x \Delta \vartheta + g_y + g_z \Delta \gamma, \\g_{z'} &= g_x \Delta \psi - g_y \Delta \gamma + g_z; \\V_{Bx'} &= V_{Bx} + V_{By} \Delta \vartheta - V_{Bz} \Delta \psi, \\V_{By'} &= -V_{Bx} \Delta \vartheta + V_{By} + V_{Bz} \Delta \gamma, \\V_{Bz'} &= V_{Bx} \Delta \psi - V_{By} \Delta \gamma + V_{Bz}.\end{aligned}$$

Отбросив члены второго порядка малости, находим

$$g_{x'} = g_x + g_y \Delta \vartheta, \quad g_{y'} = -g_x \Delta \vartheta + g_y, \quad g_{z'} = g_x \Delta \psi - g_y \Delta \gamma + g_z, \quad (1.12.8)$$

$$V_{Bx'} = V_{Bx}, \quad V_{By'} = V_{By}, \quad V_{Bz'} = V_{Bz}. \quad (1.12.9)$$

### 12.3. Линеаризация уравнений возмущенного движения

Упростим систему уравнений (1.10.2) путем ее линеаризации. Рассматривая эти уравнения как уравнения действительного движения, входящие в них величины отметим штрихами, чтобы отличить их от соответствующих величин в невозмущенном движении. Как указывалось выше, невозмущенным движением ракеты будем считать ее программное движение.

Первое уравнение сил. Имеем

$$\begin{aligned}m' \left( \frac{dV'_{Cx'}}{dt} + \omega'_{y'} V'_{Cz'} - \omega'_{z'} V'_{Cy'} \right) &= m' g_{x'} + \\+ P' - \frac{1}{2} c'_{x0} Q' S (V'_{Cx'} - V_{Bx'})^2 &+ c'_{x\delta} \delta'_x.\end{aligned} \quad (1.12.10)$$

Соответствующее уравнение в программном движении имеет вид

$$m \left( \frac{dV_{Cx}}{dt} - \omega_z V_{Cy} \right) = m g_x + P - \frac{1}{2} c_{x0} Q S V_{Cx}^2 + c_{x\delta} \delta_x. \quad (1.12.11)$$

Можно сразу упростить уравнения (1.12.10) и (1.12.11), отбросив члены второго порядка малости:

$$m' \frac{dV'_{Cx'}}{dt} = m' g_{x'} + P' - \frac{1}{2} c'_{x0} Q' S (V_{Cx'}^2 - 2V'_{Cx'} V_{Bx'}) + c'_{x\delta} \delta'_x, \quad (1.12.12)$$

$$m \frac{dV_{Cx}}{dt} = m g_x + P - \frac{1}{2} c_{x0} Q S V_{Cx}^2 + c_{x\delta} \delta_x. \quad (1.12.13)$$



Используя соотношения, полученные в п. 12.2, запишем (1.12.2) в виде

$$(m + \Delta m) \left( \frac{dV_{Cx}}{dt} + \frac{d\Delta V_x}{dt} \right) = (m + \Delta m)(g_x + g_y \Delta \vartheta) + P + \Delta P - \\ - \frac{1}{2} (c_{x0} + \Delta c_{x0})(\varrho + \Delta \varrho) S (V_{Cx}^2 + 2V_{Cx} \Delta V_x + \Delta V^2 - 2V_{Cx} V_{\text{в.к.}} - \\ - 2\Delta V_x V_{\text{в.к.}}) + (c_{x\delta} + \Delta c_{x\delta})(\delta_x + \Delta \delta_x).$$

Снова отбросим члены второго и более высокого порядка малости. Будем иметь

$$m \frac{dV_{Cx}}{dt} + m \frac{d\Delta V_x}{dt} + \Delta m \frac{dV_{Cx}}{dt} = mg_x + mg_y \Delta \vartheta + \Delta mg_x + P + \Delta P - \\ - \frac{1}{2} c_{x0} \varrho S V_{Cx}^2 - c_{x0} \varrho S V_{Cx} \Delta V_x + c_{x0} \varrho S V_{Cx} V_{\text{в.к.}} - \frac{1}{2} c_{x0} \Delta \varrho S V_{Cx}^2 - \\ - \frac{1}{2} \Delta c_{x0} \varrho S V_{Cx}^2 + c_{x\delta} (\delta_x + \Delta \delta_x).$$

Производную  $dV_{Cx}/dt$  исключим с помощью уравнения (1.12.13). Получим

$$m \frac{d\Delta V_x}{dt} + \frac{\Delta m}{m} \left( P - \frac{1}{2} c_{x0} \varrho S V_{Cx}^2 \right) = mg_y \Delta \vartheta + \Delta P - c_{x0} \varrho S V_{Cx} \Delta V_x + \\ + c_{x0} \varrho S V_{Cx} V_{\text{в.к.}} - \frac{1}{2} c_{x0} S V_{Cx}^2 \Delta \varrho - \frac{1}{2} \varrho S V_{Cx}^2 \Delta c_{x0} + c_{x\delta} \Delta \delta_x,$$

или окончательно

$$m \frac{d\Delta V_x}{dt} + c_{x0} \varrho S V_{Cx} \Delta V_x - mg_y \Delta \vartheta = \Delta F_x + c_{x\delta} \Delta \delta_x, \quad (1.12.14)$$

где

$$\Delta F_x = - \frac{\Delta m}{m} \left( P - \frac{1}{2} c_{x0} \varrho S V_{Cx}^2 \right) + \Delta P + c_{x0} \varrho S V_{Cx} V_{\text{в.к.}} - \\ - \frac{1}{2} c_{x0} S V_{Cx}^2 \Delta \varrho - \frac{1}{2} \varrho S V_{Cx}^2 \Delta c_{x0} - \text{осевая возмущающая сила.}$$

Этим же путем произведем линеаризацию остальных уравнений системы (1.10.2). Не оговаривая особо, при написании тех или иных соотношений в случае надобности будем отбрасывать члены второго и более высокого порядка малости.

Второе уравнение сил в действительном и программном движениях с точностью до членов второго порядка малости соответственно может быть записано так:

$$m' \left( \frac{dV'_{Cy'}}{dt} + \omega'_z V'_{Cx'} \right) = m' g_{y'} + \sum_j \eta_j P'_j - \frac{1}{2} (c'_{x0} +$$

$$+ c_y^{\alpha'} \varrho' S V'_{C_x'} V'_{C_y'} + \frac{1}{2} (c'_{x0} + c_y^{\alpha'}) \varrho' S V'_{C_x'} V_{ny'} - v_y' \omega_z' + c_y^{\alpha'} \delta_y', \quad (1.12.15)$$

$$m \left( \frac{dV_{Cy}}{dt} + V_{Cx} \frac{d\vartheta}{dt} \right) = m g_y - \frac{1}{2} (c_{x0} + c_y^{\alpha}) \varrho S V_{Cx} V_{Cy} - \\ - v_y \frac{d\vartheta}{dt} + c_{y\delta} \delta_y. \quad (1.12.16)$$

Из (1.12.15) имеем

$$(m + \Delta m) \left[ \frac{dV_{Cy}}{dt} + \frac{d\Delta V_y}{dt} - \frac{dV_{Cx}}{dt} \Delta\vartheta - V_{Cx} \frac{d\Delta\vartheta}{dt} + \left( \frac{d\vartheta}{dt} + \frac{d\Delta\vartheta}{dt} \right) \times \right. \\ \times (V_{Cx} + \Delta V_x) \left. \right] = (m + \Delta m) (g_y - g_x \Delta\vartheta) + \sum_j \eta_j P_j + \sum_j \eta_j \Delta P_j - \\ - \frac{1}{2} (c_{x0} + \Delta c_x + c_y^{\alpha} + \Delta c_y^{\alpha}) (\varrho + \Delta\varrho) S (V_{Cx} + \Delta V_x) (V_{Cy} + \Delta V_y - \\ - V_{Cx} \Delta\vartheta) + \frac{1}{2} (c_{x0} + \Delta c_x + c_y^{\alpha} + \Delta c_y^{\alpha}) (\varrho + \Delta\varrho) S (V_{Cx} + \Delta V_x) V_{ny} - \\ - (v_y + \Delta v_y) \left( \frac{d\vartheta}{dt} + \frac{d\Delta\vartheta}{dt} \right) + (c_{y\delta} + \Delta c_{y\delta}) (\delta_y + \Delta\delta_y).$$

Отсюда

$$m \left( \frac{dV_{Cy}}{dt} + \frac{d\Delta V_y}{dt} - \frac{dV_{Cx}}{dt} \Delta\vartheta + V_{Cx} \frac{d\vartheta}{dt} \right) = m (g_y - g_x \Delta\vartheta) + \\ + \Delta m g_y + \sum_j \eta_j P_j - \frac{1}{2} (c_{x0} + c_y^{\alpha}) \varrho S V_{Cx} (V_{Cy} + \Delta V_y - V_{Cx} \Delta\vartheta) + \\ + \frac{1}{2} (c_{x0} + c_y^{\alpha}) \varrho S V_{Cx} V_{ny} - v_y \left( \frac{d\vartheta}{dt} + \frac{d\Delta\vartheta}{dt} \right) + c_{y\delta} (\delta_y + \Delta\delta_y).$$

Производные  $dV_{Cx}/dt$ ,  $dV_{Cy}/dt$  исключим с помощью равенств (1.12.13) и (1.12.16). Тогда

$$m \frac{d\Delta V_y}{dt} + v_y \frac{d\Delta\vartheta}{dt} - \left( P - \frac{1}{2} c_{x0} \varrho S V_{Cx}^2 \right) \Delta\vartheta = \Delta m g_y + \sum_j \eta_j P_j - \\ - \frac{1}{2} (c_{x0} + c_y^{\alpha}) \varrho S V_{Cx} (\Delta V_y - V_{Cx} \Delta\vartheta) + \frac{1}{2} (c_{x0} + c_y^{\alpha}) \varrho S V_{Cx} V_{ny} + \\ + c_{y\delta} \Delta\delta_y,$$

или

$$m \frac{d\Delta V_y}{dt} + v_y \frac{d\Delta\vartheta}{dt} + \frac{1}{2} (c_{x0} + c_y^{\alpha}) \varrho S V_{Cx} \Delta V_y - \\ - \left( P + \frac{1}{2} c_y^{\alpha} \varrho S V_{Cx}^2 \right) \Delta\vartheta = \Delta F_y + c_{y\delta} \Delta\delta_y, \quad (1.12.17)$$

где

$\Delta F_y = \Delta m g_y + \sum_j \eta_j P_j + \frac{1}{2} (c_{x0} + c_y^a) \varrho S V_{Cx} V_{ny}$  — возмущающая сила в направлении оси  $Cy$ .

Третье уравнение сил в действительном и программном движениях с точностью до членов второго порядка малости можно записать так:

$$m' \left( \frac{dV'_{Cz'}}{dt} - \omega'_{y'} V'_{Cx'} \right) = m' g_{z'} + \sum_j \xi_j P'_j - \frac{1}{2} (c'_{x0} + c_y^a) \varrho' S V'_{Cx'} \times \\ \times (V'_{Cz'} - V_{nz'}) - v'_z \omega'_{y'} + c'_{z\delta} \delta'_\psi, \quad (1.12.18)$$

$$m \frac{dV_{Cz}}{dt} = m g_z - \frac{1}{2} (c_{x0} + c_y^a) \varrho S V_{Cx} V_{Cz} + c_{z\delta} \delta_\psi. \quad (1.12.19)$$

Как и ранее, из (1.12.18) получаем

$$(m + \Delta m) \left[ \frac{dV_{Cx}}{dt} \Delta\psi + V_{Cx} \frac{d\Delta\psi}{dt} + \frac{dV_{Cz}}{dt} + \frac{d\Delta V_z}{dt} - \frac{d\Delta\psi}{dt} (V_{Cx} + \right. \\ \left. + \Delta V_x) \right] = (m + \Delta m) (g_x \Delta\psi + g_z - g_y \Delta\gamma) + \sum_j \xi_j (P_j + \Delta P_j) - \\ - \frac{1}{2} (c_{x0} + \Delta c_{x0} + c_y^a + \Delta c_y^a) (\varrho + \Delta\varrho) S (V_{Cx} + \Delta V_x) (V_{Cx} \Delta\psi + V_{Cz} + \\ + \Delta V_z - V_{nz}) - (v_z + \Delta v_z) \frac{d\Delta\psi}{dt} + (c_{z\delta} + \Delta c_{z\delta}) (\delta_\psi + \Delta\delta_\psi),$$

или

$$m \left( \frac{dV_{Cx}}{dt} \Delta\psi + \frac{dV_{Cz}}{dt} + \frac{d\Delta V_z}{dt} \right) = m (g_x \Delta\psi + g_z - g_y \Delta\gamma) + \sum_j \xi_j P_j - \\ - \frac{1}{2} (c_{x0} + c_y^a) \varrho S V_{Cx} (V_{Cx} \Delta\psi + V_{Cz} + \Delta V_z - V_{nz}) - v_z \frac{d\Delta\psi}{dt} + \\ + c_{z\delta} (\delta_\psi + \Delta\delta_\psi).$$

Подставим сюда значения  $dV_{Cx}/dt$ ,  $dV_{Cz}/dt$ . Тогда

$$\left( P - \frac{1}{2} c_{x0} \varrho S V_{Cx}^2 \right) \Delta\psi + m \frac{d\Delta V_z}{dt} = -m g_y \Delta\gamma + \sum_j \xi_j P_j - \\ - \frac{1}{2} (c_{x0} + c_y^a) \varrho S V_{Cx} (V_{Cx} \Delta\psi + \Delta V_z - V_{nz}) - v_z \frac{d\Delta\psi}{dt} + c_{z\delta} \Delta\delta_\psi.$$

Отсюда

$$m \frac{d\Delta V_z}{dt} + v_z \frac{d\Delta\psi}{dt} + \frac{1}{2} (c_{x0} + c_y^a) \varrho S V_{Cx} \Delta V_z + \\ + \left( P + \frac{1}{2} c_y^a \varrho S V_{Cx}^2 \right) \Delta\psi + m g_y \Delta\gamma = \Delta F_z + c_{z\delta} \Delta\delta_\psi, \quad (1.12.20)$$

где

$$\Delta F_z = \frac{1}{2} (c_{x0} + c_y^a) \varrho S V_{Cx} V_{Bz} + \sum_j \xi_j P_j - \text{возмущающая сила в}$$

направлении оси Cz.

Первое уравнение моментов без членов второго порядка малости имеет вид

$$J'_x \frac{d\omega'_{x'}}{dt} = -\mu'_{x'} \omega'_{x'} + \sum_j (y_j \dot{z}_j - z_j \dot{y}_j) P'_j + c_{\gamma\delta} \delta'_\gamma. \quad (1.12.21)$$

Отсюда

$$(J_x + \Delta J_x) \frac{d^2 \Delta \gamma}{dt^2} = -(\mu_x + \Delta \mu_x) \frac{d \Delta \gamma}{dt} + \\ + \sum_j (y_j \dot{z}_j - z_j \dot{y}_j) (P_j + \Delta P_j) + (c_{\gamma\delta} + \Delta c_{\gamma\delta}) (\delta_\gamma + \Delta \delta_\gamma),$$

или, учитывая, что в программном движении  $\delta_\gamma = 0$ ,

$$J_x \frac{d^2 \Delta \gamma}{dt^2} + \mu_x \frac{d \Delta \gamma}{dt} = \Delta M_x + c_{\gamma\delta} \Delta \delta_\gamma, \quad (1.12.22)$$

где

$\Delta M_x = \sum_j (y_j \dot{z}_j - z_j \dot{y}_j) P_j$  — момент возмущающих сил в проек-

ции на ось Cx.

Преобразуя второе уравнение моментов

$$J'_y \frac{d\omega'_{y'}}{dt} = -\mu'_{y'} \omega'_{y'} + \sum_j (z_j - x_j \dot{z}_j) P'_j + \\ + \frac{1}{2} x'_F (c_{x0} + c_y^{a'}) \varrho' S V'_{Cx'} (V'_{Cz'} - V_{Bz'}) + c'_{\psi\delta} \delta'_\psi,$$

получим

$$J_y \frac{d^2 \Delta \psi}{dt^2} + \mu_y \frac{d \Delta \psi}{dt} = \sum_j (z_j - x_j \dot{z}_j) P_j + \\ + \frac{1}{2} x_F (c_{x0} + c_y^a) \varrho S V_{Cx} (V_{Cx} \Delta \psi + V_{Cz} + \Delta V_z - V_{Bz}) + c_{\psi\delta} (\delta_\psi + \Delta \delta_\psi).$$

В программном движении

$$\frac{1}{2} x_F (c_{x0} + c_y^a) \varrho S V_{Cx} V_{Cz} + c_{\psi\delta} \delta_\psi = 0.$$

Поэтому

$$J_y \frac{d^2 \Delta \psi}{dt^2} + \mu_y \frac{d \Delta \psi}{dt} - \frac{1}{2} x_F (c_{x0} + c_y^a) \varrho S V_{Cx} (\Delta V_z + V_{Cx} \Delta \psi) = \\ = \Delta M_y + c_{\psi \delta} \Delta \delta_\psi, \quad (1.12.23)$$

где

$$\Delta M_y = -\frac{1}{2} x_F (c_{x0} + c_y^a) \varrho S V_{Cx} V_{nz} + \sum_j (z_j - x_j \eta_j) P_j$$

— возмущающий момент в проекции на ось  $Cy$ .

Наконец, третье уравнение моментов

$$J_z' \frac{d \omega_{z'}'}{dt} = -\mu_{z'}' + \sum_j (x_j \eta_j - y_j) P_j - \\ - \frac{1}{2} x_F' (c_{x0}' + c_y^{a'}) \varrho' S V_{Cx'} (V_{Cy}' - V_{ny}') + c_{\theta \delta}' \delta_\theta'$$

приводится к виду

$$J_z \left( \frac{d^2 \delta}{dt^2} + \frac{d^2 \Delta \theta}{dt^2} \right) + \mu_z \left( \frac{d \delta}{dt} + \frac{d \Delta \theta}{dt} \right) = \sum_j (x_j \eta_j - y_j) P_j - \frac{1}{2} x_F (c_{x0} + c_y^a) \times \\ \times \varrho S V_{Cx} (-V_{Cx} \Delta \theta + V_{Cy} + \Delta V_y - V_{ny}) + c_{\theta \delta} (\delta_\theta + \Delta \delta_\theta).$$

В программном движении

$$-\frac{1}{2} x_F (c_{x0} + c_y^a) \varrho S V_{Cx} V_{Cy} + c_{\theta \delta} \delta_\theta = 0.$$

Учитывая это, будем иметь

$$J_z \frac{d^2 \Delta \theta}{dt^2} + \mu_z \frac{d \Delta \theta}{dt} + \frac{1}{2} x_F (c_{x0} + c_y^a) \varrho S V_{Cx} (\Delta V_y - V_{Cx} \Delta \theta) = \\ = \Delta M_z + c_{\theta \delta} \Delta \delta_\theta, \quad (1.12.24)$$

где

$$\Delta M_z = -\frac{1}{2} x_F (c_{x0} + c_y^a) \varrho S V_{Cx} V_{ny} + \sum_j (x_j \eta_j - y_j) P_j - J_z \frac{d^2 \delta}{dt^2} -$$

$-\mu_z \frac{d \delta}{dt}$  — возмущающий момент в проекции на ось  $Cz$ .

Таким образом, система линеаризованных уравнений возмущенного движения имеет вид

$$m \frac{d \Delta V_x}{dt} + c_{x0} \varrho S V_{Cx} \Delta V_x - m g_y \Delta \theta = c_{x \delta} \Delta \delta_x + \Delta F_x,$$

$$\begin{aligned}
& m \frac{d\Delta V_y}{dt} + v_y \frac{d\Delta \vartheta}{dt} + \frac{1}{2} (c_{x0} + c_y^2) \varrho S V_{Cx} \Delta V_y - \\
& - \left( P + \frac{1}{2} c_y^2 \varrho S V_{Cx}^2 \right) \Delta \vartheta = c_{y\delta} \Delta \delta_\vartheta + \Delta F_y, \\
& m \frac{d\Delta V_z}{dt} + v_z \frac{d\Delta \psi}{dt} + \frac{1}{2} (c_{x0} + c_y^2) \varrho S V_{Cx} \Delta V_z + \\
& + \left( P + \frac{1}{2} c_y^2 \varrho S V_{Cx}^2 \right) \Delta \psi + m g_y \Delta \gamma = c_{z\delta} \Delta \delta_\psi + \Delta F_z, \\
& J_x \frac{d^2 \Delta \gamma}{dt^2} + \mu_x \frac{d\Delta \gamma}{dt} = c_{\gamma\delta} \Delta \delta_\gamma + \Delta M_x, \\
& J_y \frac{d^2 \Delta \psi}{dt^2} + \mu_y \frac{d\Delta \psi}{dt} - \frac{1}{2} x_F (c_{x0} + c_y^2) \varrho S V_{Cx} \Delta V_z - \\
& - \frac{1}{2} x_F (c_{x0} + c_y^2) \varrho S V_{Cx}^2 \Delta \psi = c_{\psi\delta} \Delta \delta_\psi + \Delta M_y, \\
& J_z \frac{d^2 \Delta \vartheta}{dt^2} + \mu_z \frac{d\Delta \vartheta}{dt} + \frac{1}{2} x_F (c_{x0} + c_y^2) \varrho S V_{Cx} \Delta V_y - \\
& - \frac{1}{2} x_F (c_{x0} + c_y^2) \varrho S V_{Cx}^2 \Delta \vartheta = c_{\vartheta\delta} \Delta \delta_\vartheta + \Delta M_z. \quad (1.12.25)
\end{aligned}$$

В уравнениях (1.12.25) искомыми являются функции  $\Delta V_x$ ,  $\Delta V_y$ ,  $\Delta V_z$ ,  $\Delta \vartheta$ ,  $\Delta \psi$ ,  $\Delta \gamma$ ,  $\Delta \delta_x$ ,  $\Delta \delta_\vartheta$ ,  $\Delta \delta_\psi$ ,  $\Delta \delta_\gamma$ . Коэффициенты при этих функциях и их производных, так называемые *динамические коэффициенты*, определяются конструктивными и геометрическими параметрами ракеты, ее аэродинамическими характеристиками и различными параметрами программного движения, которые находят в ходе баллистического расчета; при анализе системы (1.12.25) параметры невозмущенного (программного) движения рассматриваются как известные функции времени. Функции  $\Delta F_x$ ,  $\Delta F_y$ ,  $\Delta F_z$ ,  $\Delta M_x$ ,  $\Delta M_y$ ,  $\Delta M_z$  зависят, кроме того, от различных возмущений (весовых, аэродинамических и т. д.), зависимость которых от искомым функций  $\Delta V_x$ ,  $\Delta V_y$ , ... очень слабая, поэтому, пренебрегая влиянием искомым функций, возмущающие силы и моменты  $\Delta F_x$ ,  $\Delta F_y$ ,  $\Delta F_z$ ,  $\Delta M_x$ ,  $\Delta M_y$ ,  $\Delta M_z$  рассматривают как функции времени, не зависящие от  $\Delta V_x$ ,  $\Delta V_y$ ,  $\Delta V_z$ ,  $\Delta \vartheta$ ,  $\Delta \psi$ ,  $\Delta \gamma$ ,  $\Delta \delta_x$ ,  $\Delta \delta_\vartheta$ ,  $\Delta \delta_\psi$ ,  $\Delta \delta_\gamma$ .

### § 13. РАСЩЕПЛЕНИЕ ЛИНЕАРИЗОВАННЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ

Легко видеть, что система линеаризованных уравнений возмущенного движения (1.12.25) распадается на две независимые группы уравнений. Одна из них описывает изменение параметров  $\Delta V_x$ ,  $\Delta V_y$ ,  $\Delta \vartheta$ :

$$\begin{aligned}
m \frac{d\Delta V_x}{dt} + c_{xx}\Delta V_x - mg_y\Delta\vartheta &= c_{x\delta}\Delta\delta_x + \Delta F_x, \\
m \frac{d\Delta V_y}{dt} + v_y \frac{d\Delta\vartheta}{dt} + c_{yy}\Delta V_y + c_{y\vartheta}\Delta\vartheta - c_{y\delta}\Delta\delta_y + \Delta F_y, & \quad (1.13.1) \\
J_z \frac{d^2\Delta\vartheta}{dt^2} + \mu_z \frac{d\Delta\vartheta}{dt} + c_{\vartheta y}\Delta V_y + c_{\vartheta\vartheta}\Delta\vartheta &= c_{\vartheta\delta}\Delta\delta_\vartheta + \Delta M_z.
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
c_{xx} &= c_{x0} \mathcal{Q}SV_{Cx}, \quad c_{yy} = \frac{1}{2} (c_{x0} + c_y^a) \mathcal{Q}SV_{Cx}, \\
c_{y\vartheta} &= -\left(P + \frac{1}{2} c_y^a \mathcal{Q}SV_{Cx}^2\right), \quad c_{\vartheta y} = \frac{1}{2} x_F (c_{x0} + c_y^a) \mathcal{Q}SV_{Cx}, \quad (1.13.2) \\
c_{\vartheta\vartheta} &= -\frac{1}{2} x_F (c_{x0} + c_y^a) \mathcal{Q}SV_{Cx}^2.
\end{aligned}$$

Другая группа описывает изменение  $\Delta V_z$ ,  $\Delta\psi$ ,  $\Delta\gamma$ :

$$\begin{aligned}
m \frac{d\Delta V_z}{dt} + v_z \frac{d\Delta\psi}{dt} + c_{zz}\Delta V_z + c_{z\psi}\Delta\psi + mg_y\Delta\gamma &= c_{z\delta\psi}\Delta\delta_\psi + \Delta F_z, \\
J_x \frac{d^2\Delta\gamma}{dt^2} + \mu_x \frac{d\Delta\gamma}{dt} &= c_{\gamma\delta}\Delta\delta_\gamma + \Delta M_x, \quad (1.13.3) \\
J_y \frac{d^2\Delta\psi}{dt^2} + \mu_y \frac{d\Delta\psi}{dt} + c_{\psi z}\Delta V_z + c_{\psi\psi}\Delta\psi &= c_{\psi\delta}\Delta\delta_\psi + \Delta M_y,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
c_{zz} &= \frac{1}{2} (c_{x0} + c_y^a) \mathcal{Q}SV_{Cx}, \quad c_{z\psi} = P + \frac{1}{2} c_y^a \mathcal{Q}SV_{Cx}^2, \\
c_{\psi z} &= -\frac{1}{2} x_F (c_{x0} + c_y^a) \mathcal{Q}SV_{Cx}, \quad c_{\psi\psi} = -\frac{1}{2} x_F (c_{x0} + c_y^a) \mathcal{Q}SV_{Cx}^2 \\
& \quad (1.13.4)
\end{aligned}$$

При изменении параметров  $\Delta V_x$ ,  $\Delta V_y$ ,  $\Delta\vartheta$  параметры  $\Delta V_z$ ,  $\Delta\psi$ ,  $\Delta\gamma$ , как это видно из уравнений (1.13.1) и (1.13.3), не изменяются, и наоборот. Значит, в условиях, когда возмущенное движение ракеты достаточно верно описывается линеаризованными уравнениями, т. е. когда отброшенные члены, содержащие произведения и высшие степени возмущений, не оказывают существенного влияния на характер возмущенного движения, это движение можно рассматривать как суперпозицию двух движений, представленных двумя независимыми системами (1.13.1) и (1.13.3), исследование которых может быть проведено отдельно. Расщепление системы (1.12.25) на независимые подсистемы значительно упрощает решение задач, так как при этом рассмат-

риваются системы, порядок которых значительно меньше, чем порядок исходной системы.

Обычно линеаризованные уравнения возмущенного движения разбивают на более мелкие группы, считая, что каналы управления, определяющие отклонения  $\Delta\delta_x$ ,  $\Delta\delta_y$ ,  $\Delta\delta_\psi$  и  $\Delta\delta_\gamma$ , работают независимо. В системе (1.13.1) второе и третье уравнения могут рассматриваться отдельно от первого уравнения, т. е. из системы (1.13.1) может быть выделена независимая подсистема

$$m \frac{d\Delta V_y}{dt} + v_y \frac{d\Delta\theta}{dt} + c_{yy}\Delta V_y + c_{y\theta}\Delta\theta = c_{y\delta}\Delta\delta_\theta + \Delta F_y, \quad (1.13.5)$$

$$J_z \frac{d^2\Delta\theta}{dt^2} + \mu_z \frac{d\Delta\theta}{dt} + c_{\theta y}\Delta V_y + c_{\theta\theta}\Delta\theta = c_{\theta\delta}\Delta\delta_\theta + \Delta M_z,$$

которая описывает возмущенное движение ракеты по тангажу. Что касается первого уравнения системы (1.13.1), то оно также может рассматриваться самостоятельно, если из системы (1.13.5) уже определена  $\Delta\theta$  как функция времени. Слагаемое  $mg_y\Delta\theta$  в этом случае целесообразно включить в состав возмущающей силы  $\Delta F_x$ . Тогда будем иметь

$$m \frac{d\Delta V_x}{dt} + c_{xx}\Delta V_x = c_{x\delta}\Delta\delta_x + \Delta F_x, \quad (1.13.6)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta F_x = & -\frac{\Delta m}{m} \left( P - \frac{1}{2} c_{x0} q S V_{cx}^2 \right) + \Delta P + c_{x0} q S V_{cx} V_{nx} - \\ & - \frac{1}{2} c_{x0} S V_{cx}^2 \Delta q - \frac{1}{2} q S V_{cx}^2 \Delta c_{x0} + mg_y \Delta\theta. \end{aligned} \quad (1.13.7)$$

Уравнение (1.13.6) описывает продольное возмущенное движение ракеты.

Из системы (1.13.3) может быть выделено и рассмотрено отдельно уравнение

$$J_x \frac{d^2\Delta\gamma}{dt^2} + \mu_x \frac{d\Delta\gamma}{dt} = c_{\gamma\delta}\Delta\delta_\gamma + \Delta M_x, \quad (1.13.8)$$

описывающее возмущенное движение ракеты по крену.

Оставшиеся два уравнения системы (1.13.3) можно также анализировать отдельно от остальных групп уравнений, если отбросить слагаемое  $mg_y\Delta\gamma$ , мало влияющее на характер возмущенного движения ракеты, или же рассматривать здесь  $\Delta\gamma$  как известную функцию времени, определенную из уравнения (1.13.8); в последнем случае удобно слагаемое  $mg_y\Delta\gamma$  включить в состав возмущающей силы. Тогда последняя группа уравнений представит в виде

$$m \frac{d\Delta V_z}{dt} + v_z \frac{d\Delta\psi}{dt} + c_{zz}\Delta V_z + c_{z\psi}\Delta\psi = c_{z\delta}\Delta\delta_\psi + \Delta F_z, \quad (1.13.9)$$

$$J_y \frac{d^2\Delta\psi}{dt^2} + \mu_y \frac{d\Delta\psi}{dt} + c_{\psi z}\Delta V_z + c_{\psi\psi}\Delta\psi = c_{\psi\delta}\Delta\delta_\psi + \Delta M_y.$$



Уравнения (1.13.9) описывают возмущенное движение ракеты по рысканию.

#### § 14. ЗАКОНЫ УПРАВЛЕНИЯ

При исследовании возмущенного движения ракеты как управляемого объекта нужно к уравнениям, описывающим движение ракеты как объекта управления, добавить уравнения, определяющие закон формирования управляющего воздействия на объект.

Входное воздействие на регулятор (автомат стабилизации), называемое далее управляющим сигналом регулятора, формируется обычно как линейная комбинация регулируемых величин и их производных. Пусть регулируемыми величинами являются  $q_1, q_2, \dots, q_n$  — некоторые обобщенные координаты рассматриваемой механической системы (например, углы тангажа, рыскания и т. д.). Тогда управляющий сигнал регулятора

$$v = \sum_{j=1}^n (b_{1j} \dot{q}_j + b_{2j} q_j). \quad (1.14.1)$$

Коэффициенты  $b_{1j}, b_{2j}$  могут быть как постоянными, так и функциями от времени  $t$ .

Иногда в формировании управляющего сигнала участвуют и вторые производные ст обобщенных координат  $\ddot{q}_j$ .

Выходным сигналом регулятора может рассматриваться отклонение  $\Delta\delta$  органа управления (руля).

Между управляющим и выходным сигналами регулятора в реальных системах имеет место обычно нелинейная связь.

Для упрощения анализа часто, идеализируя регулятор и накладывая некоторые ограничения на его работу, рассматривают его как линейную систему.

Связь между управляющим и выходным сигналами линейного регулятора с параметрами, зависящими от времени, представляется в виде (см. [11]).

$$\Delta\delta = \int_{-\infty}^t g(t-t', t') v(t') dt',$$

где  $g(t-t', t')$  — импульсная переходная функция регулятора, которая представляет реакцию предварительно невозбужденной системы на управляющий сигнал в виде дельта-функции.

В частности, если параметры регулятора в рассматриваемом промежутке времени неизменны, то

$$\Delta\delta = \int_{-\infty}^t g(t-t') v(t') dt'.$$

Линейные законы управления могут быть представлены и в форме линейного дифференциального уравнения, например уравнением

$$T_2^2 \frac{d^2 \Delta \delta}{dt^2} + T_1 \frac{d \Delta \delta}{dt} + \Delta \delta = k \Delta \delta + k_1 \frac{d \Delta \delta}{dt}.$$

В символической записи в общем случае эти дифференциальные уравнения можно представить в виде

$$P(D) \Delta \delta = \sum_j Q_j(D) q_j,$$

где  $P(\lambda)$ ,  $Q_j(\lambda)$  — многочлены от  $\lambda$ , коэффициенты которых, вообще говоря, являются функциями от  $t$ ;

$D \equiv \frac{d}{dt}$  — символ дифференцирования.

## § 15. ОБЩИЙ ВИД УРАВНЕНИЙ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ

При выводе уравнений (1.12.25) были отброшены члены, содержащие произведения возмущений или их степени выше первой. Если этого не делать, то после перехода к новым переменным  $\Delta V_x, \dots, \Delta \gamma$  (к возмущениям основных параметров) в правых частях уравнений появятся функции, нелинейные относительно этих переменных и остальных возмущений.

Для удобства представления системы уравнений возмущенного движения в таком виде перейдем к другим обозначениям.

Пусть  $x_{c'}$ ,  $y_{c'}$ ,  $z_{c'}$  — координаты центра инерции ракеты в возмущенном движении в системе координат  $Sxyz$ . Тогда, очевидно,

$$\Delta V_x = \frac{dx_{c'}}{dt}, \quad \Delta V_y = \frac{dy_{c'}}{dt}, \quad \Delta V_z = \frac{dz_{c'}}{dt}.$$

Параметры движения  $x_{c'}$ ,  $y_{c'}$ ,  $z_{c'}$ ,  $\Delta \theta$ ,  $\Delta \psi$ ,  $\Delta \gamma$ , если известно положение связанных осей в невозмущенном движении, определяют положение корпуса ракеты в пространстве и могут рассматриваться как обобщенные координаты ракеты. Уравнения возмущенного движения, написанные относительно этих обобщенных координат, представляются в виде системы нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Обозначая через  $q_j$  обобщенные координаты, через  $\mu_k$  — прочие возмущения и опуская для удобства символ  $\Delta$  при  $\delta$ , уравнения возмущенного движения ракеты можно представить в следующем общем виде:

$$\sum_{j=1}^n \left[ m_{ij}(t) \frac{d^2 q_j}{dt^2} + r_{ij}(t) \frac{dq_j}{dt} + n_{ij}(t) q_j \right] =$$

$$= a_i(t) \delta_i + h_i(t, \mu_k) + f_i \left( t, q_j, \frac{dq_j}{dt}, \mu_k \right) \quad (i=1, \dots, n). \quad (1.15.1)$$

Здесь под  $q_1, q_2, \dots, q_n$  подразумеваются координаты  $x_{C'}, y_{C'}, z_{C'}, \Delta\vartheta, \Delta\psi, \Delta\gamma$  или часть их в зависимости от того, рассматривается ли полная система уравнений или же какая-нибудь отщепленная подсистема (например, подсистема, описывающая возмущенное движение ракеты по тангажу); символами  $m_{ij}, r_{ij}, n_{ij}, a_i$  заменены принятые в § 13 обозначения для коэффициентов уравнений возмущенного движения ( $m, J_x, J_y, J_z, c_{xx}, c_{yy}, c_{zz}, c_{y\vartheta}$  и т. д.); функции  $h_i(t, \mu_k)$  представляют возмущающие силы и моменты; наконец, через  $f_i$  обозначены те нелинейные члены которые в процессе вывода уравнений (1.12.25) были отброшены.

Линеаризованная система уравнений получается из (1.15.1), если отбросить члены, нелинейные относительно  $q_j, dq_j/dt, \mu_k$ :

$$\sum_{j=1}^n \left[ m_{ij}(t) \frac{d^2 q_j}{dt^2} + r_{ij}(t) \frac{dq_j}{dt} + n_{ij}(t) q_j \right] =$$

$$= a_i(t) \delta_i + h_i(t, \mu_k) \quad (i=1, \dots, n). \quad (1.15.2)$$

Возмущения  $\mu_k$  (например,  $\Delta c_{x0}, \Delta q, \Delta c_{y'}^z, \dots$ ) незначительно зависят от возмущений основных параметров, так что этой зависимостью можно пренебречь. Рассматривая возмущения  $\mu_k$  как функции только от времени  $t$ , мы можем уравнения возмущенного движения (1.15.1) представить в виде

$$\sum_{j=1}^n \left[ m_{ij}(t) \frac{d^2 q_j}{dt^2} + r_{ij}(t) \frac{dq_j}{dt} + n_{ij}(t) q_j \right] =$$

$$= a_i(t) \delta_i + h_i(t) + f_i \left( t, q_j, \frac{dq_j}{dt} \right) \quad (i=1, \dots, n). \quad (1.15.3)$$

В соответствии с этим линеаризованная система уравнений возмущенного движения запишется так:

$$\sum_{j=1}^n \left[ m_{ij}(t) \frac{d^2 q_j}{dt^2} + r_{ij}(t) \frac{dq_j}{dt} + n_{ij}(t) q_j \right] = a_i(t) \delta_i + h_i(t) \quad (i=1, \dots, n).$$

$$(1.15.4)$$

Каждая из систем (1.15.3), (1.15.4) совместно с уравнениями системы управления образует замкнутую относительно переменных  $q_j$ ,  $\delta_i$  систему уравнений, описывающую возмущенное движение ракеты как системы автоматического управления.

**Замечание.** Форма записи уравнений возмущенного движения ракеты, принятая в настоящем параграфе, носит общий характер в том смысле, что уравнения возмущенного движения ракеты с учетом подвижности жидкостей в баках и упругости конструкции при некоторых упрощениях тоже могут быть представлены в форме системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений вида (1.15.3), (1.15.4).

---

## **УСТОЙЧИВОСТЬ И УПРАВЛЯЕМОСТЬ РАКЕТЫ**

### **§ 1. ПОНЯТИЯ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ И УПРАВЛЯЕМОСТИ**

При отклонении органов управления или воздействии внешних возмущений ракета, как и любой другой летательный аппарат, совершает некоторое возмущенное движение, характер которого зависит от динамических свойств аппарата — управляемости и устойчивости.

Управляемость летательного аппарата характеризуется его реакцией на отклонение органов управления путем изменения параметров движения (скорости, угла тангажа, угла крена и т. д.). Органы управления ракеты должны обладать достаточной эффективностью для парирования различного рода возмущающих факторов (ветра, перекоса и эксцентриситета тяги двигателя и т. д.).

Выбор параметров и определение эффективности органов управления связаны с интегрированием уравнений движения ракеты. Обычно получение точного аналитического решения этих уравнений не представляется возможным, поэтому широко применяются методы приближенного интегрирования уравнений, электро моделирование и интегрирование уравнений с помощью быстродействующих электронно-вычислительных машин дискретного счета.

Понятие об устойчивости движения является одним из наиболее важных понятий в динамике ракет.

Можно сказать, что ракета, как механическая система, устойчива, если малые воздействия приводят к малым эффектам, и неустойчива, если это имеет место не всегда.

Такое определение устойчивости носит интуитивный характер и, разумеется, непригодно для решения конкретных задач. Оно должно быть заменено математически строгим определением, пригодным для установления количественных критериев устойчивости и неустойчивости движения механической системы. Определение устойчивости, с одной стороны, должно как можно полнее характеризовать устойчивость как объективное качество системы, а с другой стороны — предоставлять возможность по-

строения удобного рабочего аппарата для исследования устойчивости движения конкретных объектов.

В настоящее время в литературе можно встретить большое число разнообразных определений устойчивости. Это можно объяснить тем, что трудно, а может быть, и невозможно сформулировать такое универсальное понятие устойчивости, которое всегда и полностью удовлетворяло бы потребностям жизни и было бы принято всеми как единственно верное. Ниже приводятся некоторые определения устойчивости, завоевавшие популярность и признание при решении различных задач математической физики, механики и техники.

### 1.1. Статическая устойчивость

Некоторое представление об устойчивости движения ракеты можно получить, исследуя движение ракеты с неподвижными органами управления (т. е. при  $\delta \equiv 0$ ) при малых отклонениях параметров движения от их значений в равновесном состоянии, когда сумма моментов всех внешних и реактивных сил, действующих на ракету, равна нулю.

Рассмотрим, например, движение ракеты в плоскости тангажа, считая, что продольная ось ракеты и скорость центра масс лежат в одной вертикальной плоскости. Сумму моментов относительно оси можно представить так:

$$\sum M_z = M_{az} + M_{pz}, \quad (2.1.1)$$

где  $M_{az}$  — момент аэродинамических сил (без аэродинамического момента, создаваемого отклонением воздушных рулей, если таковые имеются);  $M_{pz}$  — момент всех прочих сил (внешних и реактивных), действующих на ракету.

Согласно (1.9.9)

$$\sum M_z = x_F R_{ay} + M_{pz}, \quad (2.1.2)$$

где  $R_{ay}$  — составляющая аэродинамической силы по оси  $Cy$ , определенная формулой (1.9.8). Так как в данном случае

$$V_{Cy} = -V_C \sin \alpha,$$

то

$$R_{ay} = (c_x \sin \alpha + c_y \cos \alpha) S q \frac{V_C^2}{2}. \quad (2.1.3)$$

Рассматривая малые углы атаки, когда можно принять  $\sin \alpha \approx \alpha$ ,  $\cos \alpha \approx 1$  и  $c_y = c_y^\alpha$ , вместо (2.1.3) будем иметь

$$R_{ay} = (c_x + c_y^\alpha) \alpha S q \frac{V_C^2}{2}. \quad (2.1.4)$$

При изменении угла атаки в выражении (2.1.2) изменяется только  $R_{ay}$ . Если момент  $M_{прz}$  не слишком велик, то при некотором значении  $\alpha = \alpha_{бал}$  наступает балансировка летательного аппарата, когда сумма всех моментов, действующих на аппарат, равна нулю, т. е.

$$x_F R_{ay}|_{\alpha=\alpha_{бал}} + M_{прz} = 0. \quad (2.1.5)$$

Вычитая из (2.1.2) равенство (2.1.5), получим

$$\sum M_z = x_F (R_{ay} - R_{ay}|_{\alpha=\alpha_{бал}}), \quad (2.1.6)$$

или, в силу равенства (2.1.4),

$$\sum M_z = x_F (c_x + c_y^{\alpha}) S q \frac{V_C^2}{2} (\alpha - \alpha_{бал}). \quad (2.1.7)$$

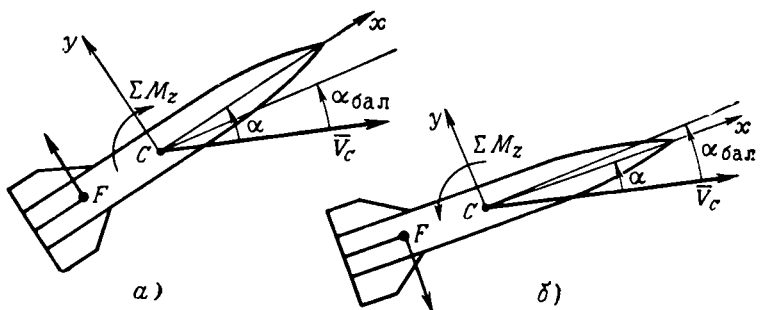


Рис. 2.1

Возможны следующие три случая.

1.  $x_F < 0$  (аэродинамический фокус расположен позади центра масс аппарата).

Если  $\alpha > \alpha_{бал}$ , то в этом случае  $\sum M_z < 0$ , т. е. на ракету действует момент, который направлен в сторону уменьшения разности  $\alpha - \alpha_{бал}$  (рис. 2.1, а).

Если  $\alpha < \alpha_{бал}$ , то  $\sum M_z > 0$  и снова момент, действующий на ракету, стремится приблизить  $\alpha$  к  $\alpha_{бал}$  (рис. 2.1, б).

Таким образом, если  $x_F < 0$ , то при нарушении балансировки летательного аппарата моменты, действующие на аппарат, направлены в сторону уменьшения  $|\alpha - \alpha_{бал}|$ . В этом случае говорят, что летательный аппарат обладает *статической устойчивостью*.

2.  $x_F = 0$  (аэродинамический фокус совпадает с центром масс аппарата).

Как видно из выражения (2.1.7), при любом малом изменении угла атаки никакого момента не возникает. Летательный аппарат находится в состоянии безразличного равновесия.

3.  $x_F > 0$  (аэродинамический фокус расположен вперед центра масс аппарата).

В данном случае знак момента совпадает со знаком разности  $\alpha - \alpha_{\text{бал}}$ . Это означает, что при отклонении в любую сторону от положения равновесия возникает момент, направленный в сторону увеличения  $|\alpha - \alpha_{\text{бал}}|$  (рис. 2.2, а, б). Говорят, что имеет место *статическая неустойчивость*.

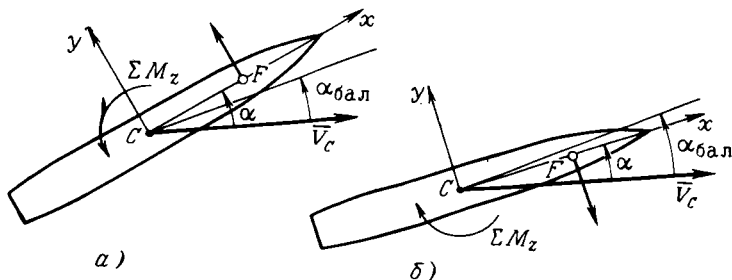


Рис. 2.2.

Понятие статической устойчивости нельзя отождествлять с понятием устойчивости движения. Наличие статической устойчивости лишь свидетельствует о том, что в данный момент времени на летательный аппарат действуют силы, стремящиеся вернуть его в положение равновесия. Но это не исключает и такой возможности, при которой аппарат в своем стремлении к положению равновесия будет колебаться относительно положения равновесия и при этом максимальное отклонение его от равновесного положения будет с течением времени увеличиваться. Далее, статическая устойчивость является характеристикой летательного аппарата с неподвижными органами управления. Управление движением посредством отклонения органов управления кардинально изменяет динамические свойства аппарата. Ракета, пусть даже статически неустойчивая, благодаря системе управления может совершать движение, мало отличающееся от желаемого. И наоборот, если система управления спроектирована неверно, то ракета, даже обладающая статической устойчивостью, будет недопустимо сильно отклоняться от заданной траектории.

Понятие устойчивости движения ракеты, как и любой другой механической системы, должно отражать характер ее реального движения во времени.

## 1.2. Устойчивость по Ляпунову

Пусть дана механическая система, движение которой описывается системой дифференциальных уравнений, приведенной к нормальному виду



$$\frac{dy_i}{dt} = Y_i(t, y_1, \dots, y_n) \quad (i = 1, \dots, n), \quad (2.1.8)$$

где  $y_i$  — некоторые параметры движения (координаты, скорости и т. п.).

Каждое решение системы (2.1.8) представляет некоторое частное движение нашей механической системы. Рассмотрим какое-нибудь частное движение системы, которому отвечает решение  $y_i^0 = f_i(t)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) уравнений (2.1.8). Это частное движение Ляпунов называет невозмущенным в отличие от других, возмущенных движений данной механической системы.

В уравнениях (2.1.8) произведем замену переменных

$$x_i = y_i - f_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (2.1.9)$$

Получим следующую систему дифференциальных уравнений относительно возмущений  $x_i$ :

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (2.1.10)$$

где

$$X_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv Y_i(t, x_1 + f_1, x_2 + f_2, \dots, x_n + f_n) - \\ - Y_i(t, f_1, \dots, f_n).$$

Каждому движению рассматриваемой механической системы соответствует, в силу (2.1.9), частное решение уравнений (2.1.10). В частности, невозмущенному движению системы соответствует тривиальное (нулевое) решение  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$  уравнений (2.1.10).

Ляпунов дает следующее определение устойчивости невозмущенного движения (тривиального решения уравнений (2.1.10)) [12].

Пусть  $L_1, \dots, L_n$  суть произвольно задаваемые положительные числа. Если при всяких  $L_i$ , как бы они малы ни были, могут быть выбираемы положительные числа  $E_1, \dots, E_n$  так, чтобы при всяких вещественных  $x_{i0}$ , удовлетворяющих условиям

$$|x_{i0}| \leq E_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (2.1.11)$$

и при всяком  $t$ , превосходящем  $t_0$ , выполнялись неравенства

$$|x_i| < L_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (2.1.12)$$

то невозмущенное движение по отношению к величинам  $x_i$  устойчиво; в противном случае — неустойчиво.

Определению устойчивости по Ляпунову можно дать следующее геометрическое толкование.

В  $n$ -мерном пространстве величин  $x_1, x_2, \dots, x_n$  задается параллелепипед с центром в начале координат и с гранями, параллельными координатным плоскостям. Величина граней опреде-

ляется числами  $2L_1, \dots, 2L_n$ . Эти числа задаются произвольным образом и могут быть как угодно малыми (но не равными нулю). Если для данного параллелепипеда возможно построить другой параллелепипед с гранями, определенными положительными числами  $2E_1, \dots, 2E_n$ , а именно такими, что начиная с момента времени  $t_0$  функции  $x_i(t)$  остаются внутри первого параллелепипеда, если их начальные значения, т. е.  $x_{i0}$ , находились

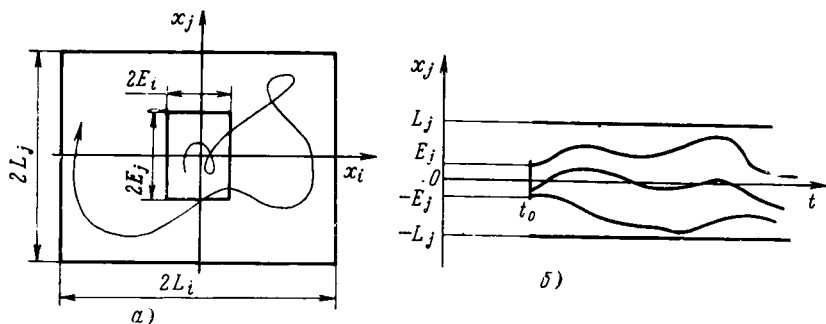


Рис. 2.3.

внутри второго параллелепипеда, то невозмущенное движение по отношению к величинам  $x_i$  устойчиво (на рис. 2.3, а показаны сечения этих параллелепипедов плоскостью двух осей координат  $x_i$  и  $x_j$  и изменение этих координат по времени в случае устойчивого нулевого решения). Другими словами, невозмущенное движение устойчиво, если все возмущения  $x_i$  ( $i=1, \dots, n$ ), значения которых в начальный момент времени  $t_0$  достаточно малы, ни при каких  $t$ , больших  $t_0$ , не выходят за пределы, определенные заданными, сколь угодно малыми числами  $L_i$  (рис. 2.3, б).

Определение устойчивости по Ляпунову не содержит каких-либо конкретных количественных ограничений на величины  $x_i$ . Устойчивость движения по Ляпунову является некоторой характеристикой прочности и неподатливости движения к действиям возмущений. В этом заключается механический смысл понятия устойчивости, который вкладывает в него Ляпунов.

### 1.3. Устойчивость на конечном промежутке времени. Техническая устойчивость

Существенным моментом в определении устойчивости по Ляпунову является ограничение отклонений  $x_i$  на бесконечном интервале времени условием (2.1.12). Если перейти к ограничениям на конечном промежутке, даже сколько угодно большом, всякий смысл в определении Ляпунова теряется, поскольку на любом конечном промежутке времени любое движение, в том числе и не обладающее механической устойчивостью, удовлетворяет условиям (2.1.11) и (2.1.12). Между тем реальные объекты представ-

ляют интерес в течение конечного промежутка времени и поэтому весьма целесообразно введение понятия устойчивости в пределах конечного промежутка времени. Понятие устойчивости движения приобретает смысл и значение для конечного промежутка времени, если ввести зависимость между областями, ограничивающими  $x_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) при  $t=t_0$  и  $t>t_0$ .

Приведем два различных определения устойчивости движения на конечном промежутке времени, предложенных Г. В. Каменковым и Н. Д. Моисеевым.

Г. В. Каменков, сохраняя механический смысл понятия устойчивости, который вкладывает в него Ляпунов, ставит задачи об устойчивости движения на конечном промежутке времени следующим образом [6].

Если дифференциальные уравнения возмущенного движения (2.1.10) таковы, что при достаточно малом положительном числе  $A$  величины  $x_s$ , рассматриваемые как функции времени, удовлетворяют условию

$$\sum_{s=1}^n (a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \dots + a_{sn}x_n)^2 \leq A \quad (2.1.13)$$

на конечном промежутке времени  $[t_0, t_0 + \Delta t]$ , если только начальные значения этих функций  $x_{i0}$  удовлетворяют условию

$$\sum_{s=1}^n (a_{s1}x_{10} + a_{s2}x_{20} + \dots + a_{sn}x_{n0})^2 \leq 0, \quad (2.1.14)$$

причем числа  $a_{s1}, a_{s2}, \dots$  таковы, что

$$\begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots \dots \dots \\ a_{n1}a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то невозмущенное движение будет устойчиво на промежутке времени  $\Delta t$ ; в противном случае — неустойчиво, т. е.  $\Delta t=0$ .

Приведенное определение устойчивости допускает следующую геометрическую интерпретацию.

Пусть в некоторый момент времени  $t=t_0$  система получила некоторые, отличные от нуля, произвольно малые отклонения  $x_{10}, \dots, x_{n0}$  и эти отклонения находились внутри или на поверхности  $n$ -мерного эллипсоида:

$$\sum_{s=1}^n (a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \dots + a_{sn}x_n)^2 = A. \quad (2.1.15)$$

Если затем отклонения  $x_s(t)$  ( $s=1, 2, \dots, n$ ) оставались внутри или на поверхности этого эллипсоида по крайней мере до момен-

та времени  $t=t_1>t_0$ , то движение устойчиво на промежутке  $[t_0, t_1]$ ; в противном случае — неустойчиво.

Число  $A$ , посредством которого вводится ограничение на величины  $x_s$ , не предполагается наперед заданным: для устойчивости системы требуется лишь выполнение неравенств (2.1.13), (2.1.14) при достаточно малом значении  $A$ . Благодаря этому сравнительно легко устанавливаются условия устойчивости и не-

устойчивости системы и оценивается промежуток времени  $\Delta t=t_1-t_0$ , в пределах которого эти условия соблюдаются.

Понятие устойчивости на конечном промежутке времени, предложенное Г. В. Каменковым, носит локальный характер. Обычно требуется исследовать поведение механической системы в пределах определенного заданного промежутка времени. Чтобы иметь возможность судить об устойчивости движения в пределах заданного промежутка вре-

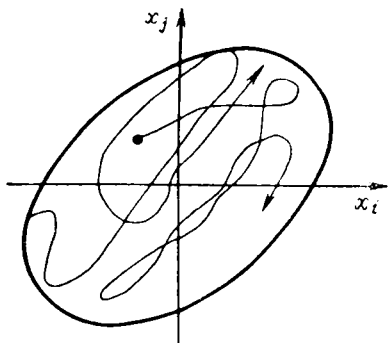


Рис. 2.4.

мени, требуется проведение некоторого числа однотипных исследований при различных «начальных» значениях  $t_0$  из рассматриваемого промежутка.

Рассматривая механические системы, возмущенное движение которых описывается уравнениями

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t, x_1, x_2, \dots, x_n) + p_s(t) \quad (s=1, 2, \dots, n), \quad (2.1.16)$$

где  $p_s(t)$  — возмущающие силы, действующие на систему, Н. Д. Моисеев следующим образом определяет так называемую *техническую устойчивость* тривиального решения уравнений:

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (s=1, 2, \dots, n). \quad (2.1.17)$$

Нулевое решение  $x_1=x_2=\dots=x_n=0$  уравнений (2.1.17) называется обладающим *технической устойчивостью* относительно заданных верхних пределов начальных отклонений  $\bar{x}_{s0}>0$ , заданных верхних пределов возмущающих сил  $\bar{p}_s>0$  и заданных верхних пределов последующих отклонений  $\bar{x}_s>0$  на заданном сегменте значений  $0 \leq t \leq \bar{t}$  в том и только том случае, если всякое решение  $x_s=x_s(t)$  системы уравнений (2.1.16) при всяких начальных значениях  $x_{s0}$ , удовлетворяющих условию  $|x_{s0}| \leq \bar{x}_{s0}$ , и при произвольных возмущающих силах, ограниченных единственным условием  $|p_s(t)| \leq \bar{p}_s$  при  $0 \leq t \leq \bar{t}$ , будет удовлетворять условию.

$$|x_s(t)| \leq \bar{x}_s \quad (s=1, 2, \dots, n)$$

для всех значений  $t$ , не превышающих  $\bar{t}$ .

Здесь, в отличие от определений устойчивости по Ляпунову и Каменкову, предельно допустимые значения возмущений предполагаются конечными и наперед заданными. Вследствие этого «техническая устойчивость» является в большей мере субъективной характеристикой движения механической системы: любое движение, в зависимости от заданных значений предельных отклонений, может оказаться как устойчивым, так и неустойчивым. Определенные неудобства проистекают из необходимости задания предельных отклонений: рациональные значения этих величин обычно неизвестны и трудно определимы.

Тем не менее постановка задачи устойчивости, предложенная Н. Д. Моисеевым, позволяя в каждом конкретном случае наиболее приемлемым образом оценить саму механическую систему, исходя из ее потребительских качеств является очень привлекательным для технических приложений, и в частности для задач динамики ракет.

С методами исследования технической устойчивости механических систем можно ознакомиться по книге [7].

#### 1.4. Локальная устойчивость

Возмущенное движение ракеты описывается системой уравнений, состоящей из уравнений возмущенного движения аппарата как объекта регулирования (1.15.3) или линеаризованных уравнений (1.15.4), и уравнений системы управления. В полете на ракету постоянно действуют различные возмущения (ветровые, весовые и др.). Вследствие этого в уравнениях возмущенного движения фигурируют возмущающие силы. Так, в линеаризованных уравнениях возмущенного движения (1.15.4) эти возмущающие силы представлены функциями  $h_i(t)$ .

Каждому частному решению уравнений возмущенного движения соответствует некоторое возмущенное движение ракеты. Невозмущенному же движению ракеты соответствует тривиальное (нулевое) решение уравнений, которые получаются из уравнений возмущенного движения, если в них отбросить все возмущающие силы. Устойчивость и неустойчивость невозмущенного движения эквивалентны устойчивости и неустойчивости указанного тривиального решения, а устойчивость этого тривиального решения определяется поведением частных решений уравнений возмущенного движения, в которых фигурируют постоянно действующие возмущения.

Таким образом, как и в постановке Н. Д. Моисеева, решение задачи устойчивости невозмущенного движения ракеты связано с исследованием решений системы уравнений при наличии возмущающих сил, в то время как исследуемое движение представ-

ляется частным решением другой системы уравнений, не содержащей возмущающих сил. Исследование устойчивости движения в этих условиях является трудной задачей, и ее рассмотрение выходит за рамки учебной литературы.

В данной книге мы ограничимся упрощенной постановкой задачи, которой, кстати, широко пользуются и на практике.

Предположим, что в течение некоторого конечного промежутка времени на летательный аппарат действовали возмущающие силы и их действие в момент времени  $t_0$ , который будем называть *начальным моментом*, прекращается. Как следствие воздействия возмущающих сил, кинематические параметры движения летательного аппарата при  $t=t_0$  будут отличаться от их значений в невозмущенном движении:  $\vec{V}'(t_0) = \vec{V}(t_0) + \Delta\vec{V}(t_0)$   $\vartheta'(t_0) = \vartheta(t_0) + \Delta\vartheta(t_0)$  и т. д.

Решение задачи устойчивости невозмущенного движения при  $t > t_0$  связывают с характером изменения возмущений  $\Delta\vec{V}(t)$ ,  $\Delta\vartheta(t)$ ,  $\Delta\psi(t)$ , ... Ракета считается устойчивой или неустойчивой при  $t > t_0$  на некотором промежутке  $[t_0, t_1]$  в зависимости от того, как изменяются возмущения кинематических параметров на этом промежутке.

Поскольку изменение возмущений  $\Delta\vec{V}(t)$ ,  $\Delta\vartheta(t)$ ,  $\Delta\psi(t)$ , ... при  $t > t_0$  происходит в условиях, когда возмущающие силы отсутствуют, то возмущения кинематических параметров представляются как соответствующее начальным значениям этим параметров ( $\Delta V(t_0)$ ,  $\Delta\vartheta(t_0)$ ,  $\Delta\psi(t_0)$ , ...) частное решение уравнений возмущенного движения ракеты, в которых все возмущающие силы отброшены. Таким образом, в приведенной постановке предметом исследований становятся более простые уравнения, благодаря чему задача устойчивости существенно облегчается.

Возмущающие силы, приложенные к ракете, в действительности и при  $t > t_0$  продолжают оказывать влияние на возмущения кинематических параметров движения. Но если рассматривать достаточно малые промежутки времени  $[t_0, t_1]$ , то, скорее всего, эффект от действия возмущающих сил в течение этого промежутка по сравнению с эффектом от действия этих сил за длительное время, предшествующее моменту  $t_0$ , будет небольшим.

Устойчивость при указанной схематизации возмущенного движения ракеты будем называть *локальной устойчивостью*.

## 1.5. О методах решения задачи устойчивости

Все способы решения задачи устойчивости движения могут быть разбиты на две категории. К первой категории относятся те способы, которые основаны на определении общего или частного решения уравнений возмущенного движения. Совокупность всех способов первой категории Ляпунов назвал первым методом. При исследовании устойчивости по первому методу центральным

является вопрос об интегрировании уравнений возмущенного движения. Если удастся проинтегрировать эти уравнения в замкнутом виде, то исследование устойчивости далее уже не представляет серьезных трудностей.

Ко второй категории относятся те способы, которые не требуют нахождения частных или общих решений уравнений возмущенного движения. Совокупность всех способов второй категории Ляпунов назвал вторым методом.

При решении задачи устойчивости и по первому и по второму методам обычно прибегают к различным приемам, упрощающим исследование уравнений возмущенного движения. Так, задача значительно упростится, если ограничиться рассмотрением линейаризованных уравнений возмущенного движения — уравнений первого приближения.

Уравнения возмущенного движения ракеты первого приближения представляются в форме линейных уравнений, коэффициенты которых зависят от кинематических параметров невозмущенного движения (скорости, высоты полета и т. п.) и конструктивных параметров аппарата (массы, моментов инерции и т. п.). Так как невозмущенное движение происходит в условиях, когда быстро изменяются скорость и высота полета, масса и моменты инерции, то оно носит явно выраженный неустановившийся характер. Вследствие этого коэффициенты уравнений возмущенного движения являются функциями от времени  $t$ . Исследование систем с переменными коэффициентами, пусть даже линейных, все еще является очень сложной задачей. Поэтому на практике, идя на дальнейшее упрощение задачи, сводят ее к исследованию систем линейных уравнений с постоянными коэффициентами посредством так называемого приема замораживания коэффициентов, получившего в настоящее время широкое распространение.

## § 2. МЕТОД ЗАМОРОЖЕННЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Метод замороженных коэффициентов — это метод исследования уравнений возмущенного движения, основанный на приеме *замораживания* коэффициентов уравнений. Суть приема замораживания коэффициентов заключается в следующем.

Пусть уравнения возмущенного движения представлены в форме

$$\sum_{j=1}^n \left[ m_{ij}(t) \frac{d^2 q_j}{dt^2} + r_{ij}(t) \frac{dq_j}{dt} + n_{ij}(t) q_j \right] = a_i(t) \delta_i + h_i(t) \\ (i=1, 2, \dots, n). \quad (2.2.1)$$

Коэффициенты уравнений  $m_{ij}(t)$ ,  $r_{ij}(t)$ ,  $n_{ij}(t)$ ,  $a_i(t)$ ,  $h_i(t)$  зависят от кинематических параметров невозмущенного движения и параметров летательного аппарата и являются известными

функциями времени. На невозмущенной траектории выбирают некоторое число характерных точек  $t_1, \dots, t_k, \dots, t_m$  так, чтобы по поведению аппарата в окрестностях этих точек можно было бы с достаточной достоверностью судить о его поведении на всей траектории. Для изучения движения ракеты в окрестностях точки  $t_k$  вместо системы уравнений (2.2.1) с переменными коэффициентами рассматривают систему уравнений с постоянными коэффициентами, равными значениям этих коэффициентов в фиксированный момент времени  $t_k$ , т. е. систему

$$\sum_{j=1}^n \left[ m_{ij}(t_k) \frac{d^2 q_j}{dt^2} + r_{ij}(t_k) \frac{dq_j}{dt} + n_{ij}(t_k) q_j \right] = a_i(t_k) \delta_i + h_i(t) \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (2.2.2)$$

Новая система уравнений, как система с постоянными коэффициентами, может быть легко проинтегрирована. О поведении решения исходной системы (2.2.1) судят по решению системы (2.2.2).

Ясно, что решения этих двух систем не будут совпадать, но если коэффициенты уравнений изменяются достаточно медленно, то с некоторой уверенностью можно утверждать, что в малой окрестности точки  $t_k$  решение исходной системы будет мало отличаться от решения системы с замороженными коэффициентами. В качестве меры «медленности» изменения коэффициентов уравнений иногда принимается их изменение за время переходного процесса летательного аппарата как регулируемого объекта. Коэффициенты уравнений считаются медленно меняющимися, если их изменение за время переходного процесса не превышает 10—15% — точности определения динамических коэффициентов.

Надо сказать, что судить о законности применения приема замороженных коэффициентов только по поведению коэффициентов уравнений на некотором отрезке времени можно лишь с известной осторожностью. Этот прием может оказаться допустимым при быстром изменении коэффициентов и, наоборот, недопустимым при более слабом их изменении. Законность применения приема замораживания коэффициентов в каждом конкретном случае нуждается в обосновании. Использование приема замораживания коэффициентов вполне оправдано на начальном этапе создания летательного аппарата для предварительного выбора параметров аппарата и системы управления. Окончательная проверка устойчивости и управляемости летательного аппарата должна производиться на основе более строгих методов с учетом переменности коэффициентов уравнений возмущенного движения.

В практике конструкторских бюро и научно-исследовательских организаций широко применяется прием замораживания



коэффициентов, так как это дает возможность воспользоваться хорошо разработанными инженерными методами исследования линейных стационарных систем автоматического управления.

### § 3. КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ПО МЕТОДУ ЗАМОРОЖЕННЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Допустим, что возмущенное движение описывается следующей системой линейных дифференциальных уравнений:

$$\sum_{j=1}^n \left[ m_{ij}(t) \frac{d^2 q_j}{dt^2} + r_{ij}(t) \frac{dq_j}{dt} + n_{ij}(t) q_j \right] = f_i(t) \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (2.3.1)$$

Такой вид имеют линеаризованные уравнения возмущенного движения ракеты в случае, когда отклонения органов управления заданы как функции времени или когда связь между управляющим и выходным сигналами регулятора также задана линейным дифференциальным уравнением. В последнем случае отклонения органов управления  $\delta$ , рассматриваются, наряду с  $q_j$  как обобщенные координаты данной механической системы.

Невозмущенному движению соответствует тривиальное решение  $q_j=0$ ,  $\frac{dq_j}{dt}=0$  ( $j=1, 2, \dots, n$ ) уравнений

$$\sum_{j=1}^n \left[ m_{ij}(t) \frac{d^2 q_j}{dt^2} + r_{ij}(t) \frac{dq_j}{dt} + n_{ij}(t) q_j \right] = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (2.3.2)$$

Зафиксируем момент времени  $t=t_k$  и исследуем локальную устойчивость тривиального решения системы (2.3.2) при значениях  $t$ , близких к  $t_k$ . Для этого нужно изучить поведение частных решений уравнений возмущенного движения при  $t \geq t_k$  в предположении, что действие возмущающих сил в момент времени  $t_k$  прекращается, т. е. нужно исследовать решения однородной системы (2.3.2).

Следуя методу замороженных коэффициентов, далее вместо уравнений (2.3.2) введем в рассмотрение уравнения с замороженными коэффициентами

$$\sum_{j=1}^n \left[ m_{ij} \frac{d^2 q_j}{dt^2} + r_{ij} \frac{dq_j}{dt} + n_{ij} q_j \right] = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (2.3.3)$$

где

$$m_{ij} = m_{ij}(t_k), \quad r_{ij} = r_{ij}(t_k), \quad n_{ij} = n_{ij}(t_k),$$

и исследуем сначала поведение решений этих уравнений.

Частное решение системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (2.3.3) будем искать в виде

$$q_j = k_j e^{\lambda t} \quad (j = 1, \dots, n), \quad (2.3.4)$$

где  $\lambda$ ,  $k_j$  — постоянные величины, которые определяются следующим образом.

Подставим (2.3.4) в уравнения (2.3.3). После сокращения на  $e^{\lambda t}$  получим

$$\sum_{j=1}^n [m_{ij}\lambda^2 + r_{ij}\lambda + n_{ij}] k_j = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (2.3.5)$$

Система алгебраических уравнений (2.3.5) обладает тривиальным решением  $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$ , которое, как это видно из (2.3.4), определяет тривиальное решение системы уравнений (2.3.3). Система линейных однородных уравнений (2.3.5) имеет и ненулевое решение, если только определитель системы

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} m_{11}\lambda^2 + r_{11}\lambda + n_{11} & \dots & m_{1n}\lambda^2 + r_{1n}\lambda + n_{1n} \\ m_{21}\lambda^2 + r_{21}\lambda + n_{21} & \dots & m_{2n}\lambda^2 + r_{2n}\lambda + n_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ m_{n1}\lambda^2 + r_{n1}\lambda + n_{n1} & \dots & m_{nn}\lambda^2 + r_{nn}\lambda + n_{nn} \end{vmatrix} \quad (2.3.6)$$

равен нулю.

Раскрыв этот определитель, получим многочлен

$$D(\lambda) = a_0 \lambda^{2n} + a_1 \lambda^{2n-1} + \dots + a_{2n-1} \lambda + a_{2n}, \quad (2.3.7)$$

называемый характеристическим многочленом системы. Коэффициент при  $\lambda^{2n}$  равен определителю, составленному из коэффициентов уравнений (2.3.5) при  $\lambda^2$ :

$$a_0 = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nn} \end{vmatrix}.$$

Будем считать, что  $a_0 \neq 0$ , и потому многочлен (2.3.7) является многочленом степени  $2n$  относительно  $\lambda$ .

Из высшей алгебры известно, что многочлен степени  $2n$  с вещественными коэффициентами имеет  $2n$  корней, вещественных или комплексных. Среди этих корней, вообще говоря, могут быть и равные между собой. Для простоты будем предполагать, что все корни характеристического многочлена разные.

Пусть  $\lambda_i$  — один из корней характеристического многочлена. Так как

$$D(\lambda_i) = 0,$$

система (2.3.5) при  $\lambda = \lambda_i$  имеет ненулевое решение

$$k_j = k_{ji} \quad (j = 1, \dots, n). \quad (2.3.8)$$

Это решение с точностью до произвольного постоянного множителя, отличного от нуля, является единственным решением системы (2.3.5), ибо  $\lambda_i$  есть простой корень характеристического многочлена.

Таким образом, корню  $\lambda_i$  соответствует частное решение системы дифференциальных уравнений (2.3.3)

$$q_{ji} = k_{ji} e^{\lambda_i t} \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (2.3.9)$$

или в развернутом виде

$$\begin{aligned} q_{1i} &= k_{1i} e^{\lambda_i t}, \\ q_{2i} &= k_{2i} e^{\lambda_i t}, \\ &\dots \dots \dots \\ q_{ni} &= k_{ni} e^{\lambda_i t}. \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

Вводя в рассмотрение вектор  $q^{(i)}$  с компонентами  $q_{1i}, q_{2i}, \dots, q_{ni}$  и вектор  $k^{(i)}$  с компонентами  $k_{1i}, k_{2i}, \dots, k_{ni}$ , представим частное решение, соответствующее корню  $\lambda_i$ , в следующей компактной форме:

$$q^{(i)} = k^{(i)} e^{\lambda_i t}. \quad (2.3.11)$$

Каждому корню характеристического многочлена отвечает частное решение вида (2.3.11). Рассматриваемая система дифференциальных уравнений является линейной, поэтому справедлив принцип суперпозиции, согласно которому любая линейная комбинация частных решений является также решением этой системы. Общее решение системы уравнений (2.3.3) представляется линейной комбинацией

$$q = \sum_{i=1}^{2n} c_i q^{(i)} = \sum_{i=1}^{2n} c_i k^{(i)} e^{\lambda_i t}, \quad (2.3.12)$$

содержащей  $2n$  произвольных постоянных  $c_1, c_2, \dots, c_{2n}$ . Произвольные постоянные  $c_i$  определяются из начальных условий (по начальным значениям возмущений  $q(t_k)$  и  $\left. \frac{dq}{dt} \right|_{t=t_k}$ ).

Если  $\lambda$  — комплексный корень характеристического многочлена, т. е.  $\lambda_i = \alpha_i + i\beta_i$  ( $\beta_i \neq 0$ ), то компоненты вектора  $k^{(i)}$ , как решение алгебраических уравнений (2.3.5) с комплексными коэф-

фициентами, также будут комплексными числами. Поэтому  $k^{(i)}$  есть вектор вида  $p^{(i)} + iq^{(i)}$ , где  $p^{(i)}$  и  $q^{(i)}$  — векторы с вещественными компонентами. Среди остальных корней непременно имеется корень  $\lambda_k$ , комплексно сопряженный корню  $\lambda_i$ . Соответствующий вектор  $k^{(k)}$  есть вектор, комплексно сопряженный вектору  $k^{(i)}$ , т. е.

$$k^{(k)} = \bar{k}^{(i)} = p^{(i)} - iq^{(i)}.$$

Таким образом, паре комплексно сопряженных корней  $\lambda_i$  и  $\lambda_k = \bar{\lambda}_i$  соответствует частное решение системы (2.3.3)

$$q^{(i,k)} = k^{(i)} e^{\lambda_i t} c_i + \bar{k}^{(i)} e^{\bar{\lambda}_i t} c_k. \quad (2.3.13)$$

Для того чтобы это частное решение было вещественным, необходимо, чтобы  $c_i$  и  $c_k$  были бы комплексно сопряженными числами.

Считая, что  $c_k = \bar{c}_i$  и представляя комплексное число  $c_i$  в виде

$$c_i = c_{i0} e^{i\varphi_i},$$

можно это частное решение записать так:

$$q^{(i,k)} = (p^{(i)} + iq^{(i)}) e^{(\alpha_i + i\beta_i)t} c_{i0} e^{i\varphi_i} + (p^{(i)} - iq^{(i)}) e^{(\alpha_i - i\beta_i)t} c_{i0} e^{-i\varphi_i}.$$

Отсюда, используя соотношение

$$e^{\pm i x} = \cos x \pm i \sin x,$$

получим

$$q^{(i,k)} = 2c_{i0} e^{\alpha_i t} [p^{(i)} \cos(\beta_i t + \varphi_i) - q^{(i)} \sin(\beta_i t + \varphi_i)]. \quad (2.3.14)$$

Значения  $c_{i0}$  и  $\varphi_i$  определяются начальными условиями.

Приведенные соотношения позволяют легко получить условия устойчивости и неустойчивости тривиального решения уравнений с постоянными коэффициентами (2.3.3).

Вычислим модуль вектора  $q^{(i)}$ , представляющего частное решение (2.3.10). Используя (2.3.11), находим

$$|q^{(i)}| = \sqrt{\bar{q}^{(i)} \cdot q^{(i)}} = \sqrt{\bar{k}^{(i)} \cdot k^{(i)} e^{\bar{\lambda}_i t} e^{\lambda_i t}} = |k^{(i)}| e^{\operatorname{Re} \lambda_i t} = |k^{(i)}| e^{\alpha_i t}, \quad (2.3.15)$$

Отсюда видно, что модуль вектора  $q^{(i)}$  при  $t \rightarrow \infty$  неограниченно растет, если  $\alpha_i > 0$ , уменьшается, асимптотически приближаясь к нулю, если  $\alpha_i < 0$ , и остается неизменным, если  $\alpha_i = 0$  (см. рис. 2.5).

Аналогичным образом ведут себя модули компонентов вектора  $q^{(i)}$ . Имеем

$$q_{ji} = k_{ji} e^{(\alpha_i + i\beta_i)t}.$$

Отсюда, так как

$$|e^{i\beta_i t}| = 1,$$

то

$$|q_{ji}| = |k_{ji}| e^{\alpha_i t}, \quad (2.3.16)$$

и, значит, модуль компоненты  $q_{ji}$  вектора  $q^{(i)}$  при  $t \rightarrow \infty$  неограниченно растет, когда  $\alpha_i > 0$ , асимптотически стремится к  $|q^{(i)}|$  нулю, когда  $\alpha_i < 0$ , и остается неизменным, если  $\alpha_i = 0$ .

Положим

$$A_{ji} = k_{ji} e^{\alpha_i t}.$$

Тогда

$$q_{ji} = A_{ji} e^{i\beta_i t}. \quad (2.3.17)$$

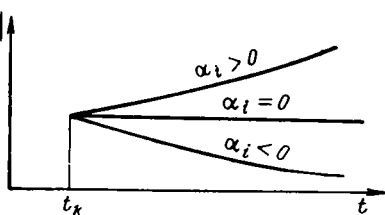


Рис. 2.5.

Множитель  $A_{ji}$  можно рассматривать как комплексную амплитуду с модулем

$$|A_{ji}| = |k_{ji}| e^{\alpha_i t}$$

и аргументом

$$\arg A_{ji} = \arg k_{ji}.$$

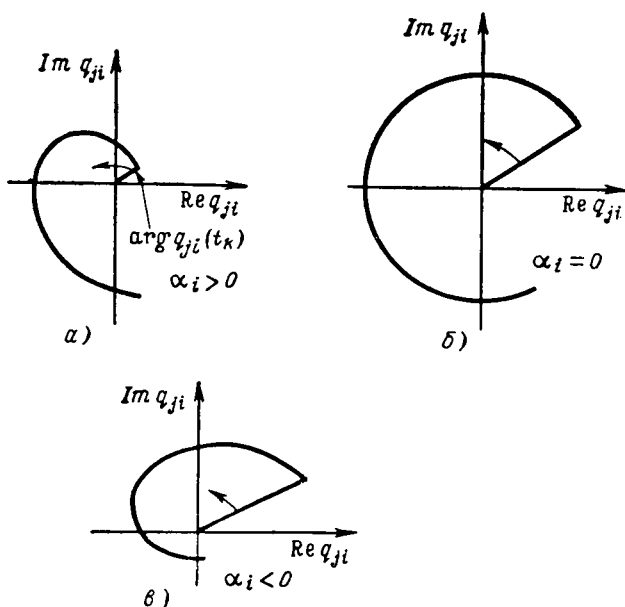


Рис. 2.6.

На рис. 2.6 показано поведение компоненты  $q_{ji}$  на комплексной плоскости в зависимости от знака вещественной части корня  $\lambda_i$ . Приведенные рисунки соответствуют случаю, когда  $\beta_i > 0$ .

Характер изменения вещественной части координаты  $q_{ji}$  (когда  $\beta_i \neq 0$ ) при  $\alpha_i > 0$ ,  $\alpha_i < 0$  и  $\alpha_i = 0$  показан на рис. 2.7.

Если  $\lambda_i$  вещественный корень, то в этом случае  $q_{ji}$  изменяется по экспоненте (рис. 2.8).

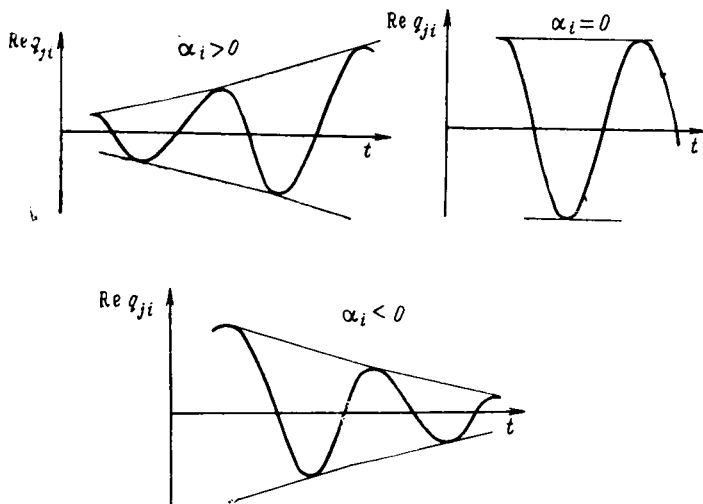


Рис. 2.7.

Дифференцируя (2.3.10), получим

$$\begin{aligned} \frac{dq_{1i}}{dt} &= k_{1i} \lambda_i e^{\lambda_i t}, \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{dq_{ni}}{dt} &= k_{ni} \lambda_i e^{\lambda_i t}. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что поведение  $\frac{dq_{ji}}{dt}$  аналогично поведению  $q_{ji}$ : если  $\operatorname{Re} \lambda_i > 0$ , то  $\left| \frac{dq_{ji}}{dt} \right|$  — возрастающая функция; если  $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ , то  $\left| \frac{dq_{ji}}{dt} \right|$  — убывающая функция, а если  $\operatorname{Re} \lambda_i = 0$ , то  $\left| \frac{dq_{ji}}{dt} \right| = \text{const.}$  Точно так же ведет себя и модуль вектора  $\frac{dq^{(t)}}{dt}$ .

Допустим, что все корни характеристического многочлена имеют отрицательные вещественные части. В этом случае все частные решения  $q^{(i)}$  и их производные по времени при неограниченном возрастании  $t$  стремятся к нулю. Каковы бы ни были постоянные  $c_i$ , общее решение (2.3.12) и его производная по времени также стремятся к нулю при  $t \rightarrow \infty$ . Следовательно, тривиальное решение системы (2.3.3) устойчиво по Ляпунову, и притом при любых начальных возмущениях.

Если исследуемое частное решение не только устойчиво, но и обладает тем свойством, что все возмущения, начальные значения которых достаточно малы, при неограниченном возрастании  $t$  стремятся асимптотически к нулю, то говорят, что данное частное решение устойчиво асимптотически. В рассматриваемом случае, как мы видим, тривиальное решение уравнений (2.3.3) не только устойчиво, но устойчиво асимптотически.

Если имеется хотя бы один корень с положительной вещественной частью, то из любой сколь угодно малой области начальных значений выходит решение, неограниченное при  $t \rightarrow \infty$ .

Действительно, пусть, например,  $\operatorname{Re} \lambda_j > 0$  и

$$|q(t_k)| \leq \delta, \quad (2.3.18)$$

где  $\delta$  — сколь угодно малая положительная величина. Положим

$$c_i = 0 \quad (i \neq j), \quad c_j \neq 0.$$

При этом будем иметь

$$q(t) = k^{(j)} e^{\lambda_j t} c_j. \quad (2.3.19)$$

При  $t = t_k$   $q(t_k) = k^{(j)} e^{\lambda_j t_k} c_j$ .

Ясно, что  $c_j$  всегда может быть выбрана так, чтобы условие (2.3.18) выполнялось. Но, независимо от этого, решение (2.3.19) при  $t \rightarrow \infty$  не ограничено; условия (2.1.11) и (2.1.12) не соблюдаются, и, значит, тривиальное решение уравнений (2.3.3) неустойчиво по Ляпунову.

Наконец, допустим, что, наряду с корнями с отрицательными вещественными частями, имеются корни с нулевыми вещественными частями и нет корней с положительными вещественными частями. В этом случае все решения системы (2.3.3) и их производные по времени при  $t > t_k$  ограничены, но имеются решения, модули которых остаются постоянными. В самом деле, пусть, например,  $\lambda_j = i\beta_j$ . Тогда таким решением является

$$q^{(j)} = k^{(j)} e^{i\beta_j t} c_j. \quad (2.3.20)$$

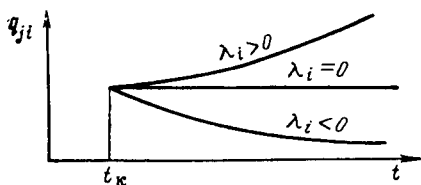


Рис. 2.8.

Решения вида (2.3.20) не нарушают устойчивости тривиального решения уравнения (2.3.3), но устойчивость этого решения уже не является асимптотической.

Таким образом, для того чтобы тривиальное решение системы уравнений с постоянными коэффициентами (2.3.3) было асимптотически устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического многочлена имели отрицательные вещественные части. Если среди корней характеристического многочлена имеется хотя бы один с положительной вещественной частью, то тривиальное решение неустойчиво. Это остается справедливым и в том случае, когда имеются кратные корни.

Если среди корней характеристического многочлена нет корней с положительными вещественными частями, но имеются простые корни с нулевыми вещественными частями, то тривиальное решение устойчиво, но неасимптотически. Устойчивость тривиального решения сохраняется и при наличии кратных корней с нулевыми вещественными частями, если только число групп решений, соответствующих этим корням, равно их кратности.

Таким образом, вопрос об устойчивости тривиального решения уравнений (2.3.3) решается знаками вещественных частей корней характеристического многочлена (2.3.7).

Итак, мы установили условия устойчивости и неустойчивости тривиального решения уравнений (2.3.3) на бесконечном интервале времени. Но нас интересует поведение решений не при  $t \rightarrow \infty$ , а в пределах конечного промежутка времени, начиная с момента  $t_k$ .

Поскольку (2.3.3) является системой дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, то поведение его частных решений на бесконечном интервале времени, за исключением случаев кратных корней характеристического многочлена, вполне определяет их поведение на любом конечном промежутке времени, и наоборот. Действительно, если тривиальное решение уравнений (2.3.3) устойчиво по Ляпунову, то все частные решения этих уравнений вида (2.3.11) являются по модулю невозрастающими функциями при  $t \geq t_k$ . Если же тривиальное решение уравнений (2.3.3) неустойчиво по Ляпунову, то непременно имеется по крайней мере одно частное решение вида (2.3.11), которое при  $t \geq t_k$  на любом сколь угодно малом промежутке времени является возрастающей по модулю функцией. К этим рассуждениям добавим следующее. Можно было бы показать, что если в момент времени  $t_k$  вещественные части всех корней характеристического многочлена отрицательны, то имеет место устойчивость на конечном промежутке времени по Г. В. Каменкову, т. е. начиная с момента времени  $t_k$  имеется конечный промежуток времени, в течение которого все возмущения, заключенные в начальный момент  $t_k$  внутри некоторого эллипсоида, не выходят за пределы этого эллипсоида. Если же имеется хотя бы



один корень с положительной вещественной частью, то исследуемое движение не обладает устойчивостью на конечном промежутке времени в смысле Г. В. Каменкова.

Учитывая сказанное и исключая из рассмотрения случай кратных корней характеристического многочлена, можно сформулированные выше условия устойчивости тривиального решения уравнений (2.3.3) по Ляпунову рассматривать и как условия устойчивости этого решения на конечном промежутке времени с началом в фиксированной точке  $t_k^1$ . Тем самым вопрос об устойчивости тривиального решения уравнений с замороженными коэффициентами (2.3.3) как на бесконечном, так и на конечном промежутке времени решен.

Если бы решения системы (2.3.2) и системы с замороженными коэффициентами (2.3.3) совпадали, то сформулированные условия устойчивости тривиального решения системы (2.3.3) непосредственно можно было бы перенести на тривиальное решение уравнений (2.3.2), которое представляет исследуемое невозмущенное движение. На самом деле системы (2.3.2) и (2.3.3) разные и их решения могут рассматриваться как близкие, если ограничиться малыми окрестностями точки  $t_k$ . Поэтому знаки вещественных частей корней характеристического многочлена могут рассматриваться лишь как приближенные критерии устойчивости невозмущенного движения [тривиального решения уравнений (2.3.2)] в пределах небольшого промежутка времени.

Поскольку возмущенное движение при  $t \geq t_k$  изучалось в предположении, что действие возмущающих сил при  $t = t_k$  прекратилось, то эти критерии являются по существу приближенными критериями локальной устойчивости.

Для исследования уравнений возмущенного движения не обязательно определение корней характеристического многочлена. Достаточно получить характеристический многочлен системы, а затем воспользоваться каким-нибудь критерием, позволяющим по коэффициентам характеристического многочлена судить о его корнях, например, критерием Гурвица.

Для характеристического многочлена

$$D(\lambda) \equiv a_0 \lambda^m + a_1 \lambda^{m-1} + \dots + a_{m-1} \lambda + a_m$$

условие отрицательности вещественных частей всех корней характеристического многочлена сводится к тому, что при  $a_0 > 0$  должны быть больше нуля все  $m$  определителей Гурвица, полу-

---

<sup>1</sup> Заметим, что понятие «асимптотическая устойчивость» имеет смысл лишь для бесконечного интервала времени, поэтому при рассмотрении конечного промежутка времени в формулировках условий устойчивости термин «асимптотическая устойчивость» должен быть заменен термином «устойчивость».

чаемых из определителя, составленного из коэффициентов характеристического многочлена

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & . & . & . & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & a_{m-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & m_{m-2} & a_m \end{vmatrix},$$

а именно:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= a_1 > 0, \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \\ \Delta_3 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0, \\ & . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \Delta_m &= a_m \Delta_{m-1} > 0. \end{aligned} \tag{2.3.21}$$

При анализе возмущенного движения ракет широко применяется критерий Найквиста. Формулировка критерия Найквиста приводится ниже (§ 5), где этот критерий используется для установления предельно допустимых значений частотных характеристик автомата стабилизации из условия устойчивости системы автоматического управления ракеты.

Обоснование критерием Гурвица, Найквиста и другими критериями устойчивости стационарных систем дается в курсах теории автоматического управления.

#### § 4. РАКЕТА КАК ЛИНЕЙНЫЙ ОБЪЕКТ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Возмущенное движение ракеты как замкнутой системы автоматического управления описывается системой уравнений, состоящей из уравнений возмущенного движения ракеты как объекта управления, и уравнений, описывающих работу системы управления. Неизвестными функциями в этой системе уравнений являются возмущения параметров движения  $\Delta V_x$ ,  $\Delta V_y$ ,  $\Delta V_z$ ,  $\Delta \theta$ ,  $\Delta \psi$ ,  $\Delta \gamma$  и отклонения органов управления  $\Delta \delta_x$ ,  $\Delta \delta_\theta$ ,  $\Delta \delta_\psi$ ,  $\Delta \delta_\gamma$ .

Для исследования замкнутой системы автоматического уп-

равления нужно знать динамические свойства отдельных ее звеньев и, в частности, динамические свойства ракеты как объекта управления. Знание динамических свойств аппарата необходимо также при выборе рациональных значений его параметров и параметров системы управления. Для выявления динамических свойств аппарата рассматривают отдельно уравнения возмущенного движения ракеты как объекта управления, полагая в них отклонения органов управления известными функциями времени.

Система «летательный аппарат — регулятор» является, вообще говоря, нелинейной: и аппарат, и регулятор описываются нелинейными уравнениями. В задачах динамики нелинейными членами уравнений возмущенного движения ракеты как объекта управления обычно пренебрегают, ограничиваясь рассмотрением линеаризованных уравнений возмущенного движения (1.13.5), (1.13.6), (1.13.8), (1.13.9). В большинстве случаев линейное приближение оказывается достаточным и по отношению к регулятору. Однако нередко возникает необходимость в исследовании системы с учетом нелинейности регулятора, например при исследовании автоколебаний в системе «летательный аппарат — регулятор».

Линейные системы (1.13.5), (1.13.6), (1.13.8) и (1.13.9) состоят из неоднородных дифференциальных уравнений, правые части которых при заданных значениях отклонений  $\Delta\delta_x$ ,  $\Delta\delta_y$ ,  $\Delta\delta_z$ ,  $\Delta\delta_\psi$ ,  $\Delta\delta_\gamma$  представляют собой некоторые функции времени, не зависящие от неизвестных функций  $\Delta V_x$ ,  $\Delta V_y$ ,  $\Delta V_z$ ,  $\Delta\theta$ ,  $\Delta\psi$ ,  $\Delta\gamma$ .

Общее решение неоднородной линейной системы, как известно, складывается из общего решения однородной системы и частного решения неоднородной системы.

Общее решение однородной системы описывает свободное, или собственное, движение летательного аппарата<sup>1</sup>, а частное решение неоднородной системы — его вынужденное движение. В соответствии с этим возмущенное движение, возникающее при отклонении органов управления или воздействии на аппарат внешних возмущающих сил, складывается из свободного и вынужденного движений.

Динамические свойства ракеты как объекта управления определяются характером возмущенного движения, возникающего при отклонении органов управления или при воздействии возмущающих сил. Обычно исследуются реакции аппарата на ступенчатое отклонение органов управления и отклонение органов управления по гармоническому закону.

Реакция аппарата на ступенчатое отклонение органов управления описывается переходными функциями летательного аппарата, которые являются решениями дифференциальных уравне-

---

<sup>1</sup> Собственное движение соответствует закрепленным органам управления.

ний при нулевых начальных условиях и в предположении, что возмущающие силы отсутствуют, а отклонения органов управления ( $\Delta\delta_x, \Delta\delta_y, \Delta\delta_\psi, \Delta\delta_\gamma$ ) до зафиксированного момента времени  $t_0$  (начального момента) тождественно равны нулю, а при  $t \geq t_0$  имеют постоянные ненулевые значения.

Реакция аппарата на отклонение органов управления по гармоническому закону описывается частотными характеристиками летательного аппарата. Эти характеристики являются составными частями решения дифференциальных уравнений возмущенного движения при отсутствии возмущающих сил и отклонении органов управления по гармоническому закону.

Исследование возмущенного движения аппарата, возникающего при воздействии внешних возмущающих сил, например атмосферных возмущений, часто проводят по следующей схеме.

Предполагают, что в течение некоторого промежутка времени вплоть до момента времени  $t_0$  на аппарат действовала возмущающая сила, вследствие чего кинематические параметры движения летательного аппарата при  $t=t_0$  отличаются от их значений в невозмущенном движении, т. е.  $\Delta V_x(t_0) \neq 0$ ,  $\Delta V_y(t_0) \neq 0$ ,  $\Delta V_z(t_0) \neq 0$  и т. д. Дальнейшее поведение аппарата изучается в предположении, что отклонения органов управления  $\Delta\delta_i$  равны нулю и возмущающие силы отсутствуют. Тем самым задача сводится к изучению собственного движения аппарата, вызванного начальными возмущениями параметров движения (возмущениями при  $t=t_0$ ).

При анализе возмущенного движения ниже используется прием замораживания коэффициентов. Следовательно, этот анализ надо рассматривать как приближенный, ибо фактически изучаются динамические свойства летательного аппарата в искусственных условиях, когда коэффициенты уравнений возмущенного движения, начиная с момента времени  $t_0$ , остаются неизменными. В действительности коэффициенты уравнений являются переменными величинами, а переменность коэффициентов иногда может быть причиной таких динамических эффектов, которые в рамках метода замороженных коэффициентов не могут быть выявлены.

#### 4.1. Характер свободного возмущенного движения по тангажу и рысканию

Свободное возмущенное движение летательного аппарата по тангажу описывается системой уравнений (1.13.5) при нулевых правых частях:

$$\begin{aligned} m \frac{d\Delta V_y}{dt} + v_y \frac{d\Delta\theta}{dt} + c_{yy}\Delta V_y + c_{y\theta}\Delta\theta &= 0, \\ J_z \frac{d^2\Delta\theta}{dt^2} + \mu_z \frac{d\Delta\theta}{dt} + c_{\theta y}\Delta V_y + c_{\theta\theta}\Delta\theta &= 0. \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

Пусть

$$\begin{aligned}\Delta V_y(t_0) &= \Delta V_{y0}, \quad \Delta \vartheta(t_0) = \Delta \vartheta_0, \\ \Delta \dot{\vartheta}(t_0) &= \Delta \dot{\vartheta}_0.\end{aligned}\quad (2.4.2)$$

Требуется построить решение системы (2.4.1) при начальных условиях (2.4.2).

Считая коэффициенты уравнений замороженными, будем искать частное решение системы (2.4.1) в виде

$$\Delta V_y = A e^{\lambda t}, \quad \Delta \vartheta = B e^{\lambda t}. \quad (2.4.3)$$

После подстановки (2.4.3) в (2.4.1) и сокращения на общий множитель  $e^{\lambda t}$  получим систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}(m\lambda + c_{yy})A + (v_y\lambda + c_{y\vartheta})B &= 0, \\ c_{\vartheta y}A + (J_z\lambda^2 + \mu_z\lambda + c_{\vartheta\vartheta})B &= 0.\end{aligned}\quad (2.4.4)$$

Однородная система линейных алгебраических уравнений (2.4.4), кроме тривиального решения  $A=B=0$ , имеет и ненулевые решения, если только определитель системы равен нулю, т. е.

$$\begin{vmatrix} m\lambda + c_{yy} & v_y\lambda + c_{y\vartheta} \\ c_{\vartheta y} & J_z\lambda^2 + \mu_z\lambda + c_{\vartheta\vartheta} \end{vmatrix} = 0. \quad (2.4.5)$$

Раскрыв определитель, представим характеристическое уравнение (2.4.5) в виде

$$D(\lambda) \equiv (m\lambda + c_{yy})(J_z\lambda^2 + \mu_z\lambda + c_{\vartheta\vartheta}) - v_y c_{\vartheta y} \lambda - c_{\vartheta y} c_{y\vartheta} = 0. \quad (2.4.6)$$

Пусть  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  — корни характеристического уравнения. Обычно все три корня получаются различными. При этом каждому корню  $\lambda_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) отвечает частное решение системы (2.4.1):

$$\Delta V_{yi} = A_i e^{\lambda_i t}, \quad \Delta \vartheta_i = B_i e^{\lambda_i t}, \quad (2.4.7)$$

где  $A_i, B_i$  — решение алгебраической системы (2.4.4) при  $\lambda = \lambda_i$ .

Общее решение системы (2.4.1) представляется в виде линейной комбинации частных решений:

$$\begin{aligned}\Delta V_y &= c_1 A_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 A_2 e^{\lambda_2 t} + c_3 A_3 e^{\lambda_3 t}, \\ \Delta \vartheta &= c_1 B_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 B_2 e^{\lambda_2 t} + c_3 B_3 e^{\lambda_3 t}.\end{aligned}\quad (2.4.8)$$

Здесь  $c_1, c_2, c_3$  — произвольные постоянные, которые определяются начальными условиями (2.4.2).

Коэффициенты характеристического уравнения являются вещественными величинами. Поэтому при анализе свободного возмущенного движения могут представиться следующие два случая:

- 1) все три корня вещественные;
- 2) один вещественный корень и два корня комплексные сопряженные.

В первом случае каждое частное решение (2.4.7) имеет аperiodический характер, функции  $\Delta V_{yi}$ ,  $\Delta V_i$  по модулю возрастают со временем, если соответствующий корень положительный, и уменьшаются, если этот корень отрицательный. Свободное движение летательного аппарата складывается из трех аperiodических движений. Если среди корней характеристического многочлена будет хотя бы один положительный корень, то возмущения  $\Delta V_y$ ,  $\Delta \vartheta$  при любых ненулевых начальных условиях, начиная с некоторого момента времени  $t_1$  ( $t_0 \leq t_1 < \infty$ ), будут возрастающими функциями.

Во втором случае паре комплексно сопряженных корней  $\lambda_2 = -\alpha + i\beta$ ,  $\lambda_3 = -\alpha - i\beta$  соответствует частное решение

$$\Delta \vartheta_{2,3} = c_2 B_2 e^{(\alpha + i\beta)t} + c_3 B_3 e^{(\alpha - i\beta)t}. \quad (2.4.9)$$

Аналогичную форму имеет и выражение для  $\Delta V_{y2,3}$  [см. (2.4.8)].

Так как начальные возмущения  $\Delta V_{y0}$  и  $\Delta \vartheta_0$  представляются вещественными числами, то  $c_2 B_2$  и  $c_3 B_3$  будут комплексными сопряженными величинами, т. е. если

$$c_2 B_2 = a - ib,$$

то

$$c_3 B_3 = a + ib.$$

Учитывая это и имея в виду, что  $e^{\pm i\beta t} = \cos \beta t \pm i \sin \beta t$ , будем иметь

$$\begin{aligned} \Delta \vartheta_{2,3} &= (a - ib) e^{(\alpha + i\beta)t} + (a + ib) e^{(\alpha - i\beta)t} = \\ &= e^{\alpha t} [(a - ib) (\cos \beta t + i \sin \beta t) + (a + ib) (\cos \beta t - i \sin \beta t)] = \\ &= 2e^{\alpha t} (a \cos \beta t + b \sin \beta t). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\Delta \vartheta_{3,4} = B e^{\alpha t} \sin(\beta t + \varphi), \quad (2.4.10)$$

где

$$B = 2\sqrt{a^2 + b^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{a}{b}.$$

Как видим, паре комплексно сопряженных корней соответствует колебательное движение с частотой  $\beta$ , фазой  $\varphi$  и переменной амплитудой  $B e^{\alpha t}$ , возрастающей по экспоненте при  $\alpha > 0$  и убывающей при  $\alpha < 0$ .

Корни характеристического уравнения (2.4.6) легко находятся

в случае, когда полет совершается вне атмосферы ( $q=0$ ). При этом  $c_{\theta\theta} = c_{\theta y} = c_{yy} = 0$ , и поэтому

$$D(\lambda) \equiv m\lambda(J_z\lambda^2 + \mu_z\lambda).$$

Отсюда находим:  $\lambda_1=0$ ,  $\lambda_2=0$ ,  $\lambda_3 = -\frac{\mu_z}{J_z}$ .

Корни характеристического уравнения определяются просто и в том случае, когда  $q \neq 0$ , но аэродинамический фокус аппарата совпадает с центром масс ( $x_F=0$ ). При этом  $c_{\theta\theta} = c_{\theta y} = 0$ , и поэтому

$$D(\lambda) \equiv (m\lambda + c_{yy})(J_z\lambda^2 + \mu_z\lambda).$$

В соответствии с этим  $\lambda_1 = -\frac{c_{yy}}{m}$ ,  $\lambda_2=0$ ,  $\lambda_3 = -\frac{\mu_z}{J_z}$ .

В общем случае корни характеристического многочлена могут быть приближенно определены путем разложения многочлена на множители следующим образом.

Введем в рассмотрение числа  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $z_3$  и определим их так, чтобы выполнялось равенство

$$\begin{aligned} & (m\lambda + c_{yy})(J_z\lambda^2 + \mu_z\lambda + c_{\theta\theta}) - v_y c_{\theta y} \lambda - c_{\theta\theta} c_{yy} = \\ & = (m\lambda + c_{yy} + z_1)[J_z\lambda^2 + (\mu_z + z_2)\lambda + c_{\theta\theta} + z_3]. \end{aligned} \quad (2.4.11)$$

Приравнявая в этом равенстве коэффициенты при одинаковых степенях  $\lambda$ , получим систему уравнений

$$J_z z_1 + m z_2 = 0,$$

$$\mu_z z_1 + c_{yy} z_2 + m z_3 + z_1 z_2 = -v_y c_{\theta y},$$

$$c_{\theta\theta} z_1 + c_{yy} z_3 + z_1 z_3 = -c_{\theta y} c_{yy}$$

относительно  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $z_3$ .

Полученную систему нелинейных алгебраических уравнений перепишем так:

$$J_z z_1 + m z_2 = 0,$$

$$\mu_z z_1 + (c_{yy} + z_1) z_2 + m z_3 = -v_y c_{\theta y}, \quad (2.4.12)$$

$$c_{\theta\theta} z_1 + (c_{yy} + z_1) z_3 = -c_{\theta y} c_{yy}.$$

Решая (2.4.12) формально как систему линейных уравнений, коэффициенты которых зависят от параметра  $c_{yy} + z_1$ , будем иметь

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{-m^2 c_{\theta y} c_{yy} + v_y m c_{\theta y} (c_{yy} + z_1)}{J_z (c_{yy} + z_1)^2 + m^2 c_{\theta\theta} - \mu_z m (c_{yy} + z_1)}, \\ z_2 &= -\frac{J_z}{m} z_1, \\ z_3 &= -\frac{1}{m} \left[ \mu_z - \frac{J_z}{m} (c_{yy} + z_1) \right] z_1 - \frac{1}{m} v_y c_{\theta y}. \end{aligned} \quad (2.4.13)$$

Таким образом, задача сводится к определению  $z_1$  из первого уравнения системы (2.4.13). Определение  $z_1$  удобно провести методом последовательных приближений. Положим

$$z_1^{[0]} = -c_{yy}. \quad (2.4.14)$$

Подставляя значение  $z_1$  в первое уравнение (2.4.13), получим уточненное значение  $z_1$ :

$$z_1^{[1]} = -\frac{c_{\theta y} c_{\theta \theta}}{c_{\theta \theta}}. \quad (2.4.15)$$

Учитывая, что  $c_{\theta y} = x_F c_{yy}$ ,  $c_{\theta \theta} = -x_F V_{Cx} c_{yy}$ , а  $c_{\theta \theta} = -\left(P + \frac{1}{2} c_{\theta}^2 S \frac{V_{Cx}^2}{2}\right)$ , будем иметь

$$z_1^{[1]} = \frac{c_{\theta \theta}}{V_{Cx}} = -\left(c_{yy} + \frac{P - X_0}{V_{Cx}}\right), \quad (2.4.16)$$

где  $X_0 = \frac{1}{2} c_{x0} S V_{Cx}^2$  — сила лобового сопротивления при угле атаки  $\alpha = 0$ .

Следующее приближение дает

$$z_1^{[2]} = \frac{-c_{\theta y} c_{\theta \theta} - v_y c_{\theta y} \frac{P - X_0}{m V_{Cx}}}{J_z \left( \frac{P - X_0}{m V_{Cx}} \right)^2 + \mu_z \frac{P - X_0}{m V_{Cx}} + c_{\theta \theta}}. \quad (2.4.17)$$

За исключением тех участков траектории, где произведение  $q x_F V_{Cx}$  близко к нулю, обычно, как показывают численные расчеты,

$$|c_{\theta \theta}| \gg J_z \left( \frac{P - X_0}{m V_{Cx}} \right)^2 + \mu_z \frac{P - X_0}{m V_{Cx}}. \quad (2.4.18)$$

Кроме того,

$$|c_{\theta \theta}| \gg \left| v_y \frac{P - X_0}{m V_{Cx}} \right|.$$

Поэтому при условии (2.4.18)  $z_1^{[2]} \approx z_1^{[1]}$ , так что можно ограничиться приближением (2.4.16).

Наконец, можно пренебречь и величиной  $z_3$  по сравнению с  $c_{\theta \theta}$ . Действительно, если  $x_F = 0$ , то  $c_{\theta y} = 0$  и, значит,  $z_1 = 0$ ,  $z_2 = 0$ ,  $z_3 = 0$  (см. (2.4.13)). Если же  $x_F \neq 0$ , то, как показывают расчеты, обычно  $|c_{\theta \theta}| \gg |z_3|$ .

Итак, характеристический многочлен приближенно можно представить в виде

$$D(\lambda) \cong (m\lambda + c_{yy} + z_1) \left[ J_z \lambda^2 + \left( \mu_z - \frac{J_z}{m} z_1 \right) \lambda + c_{\theta \theta} \right], \quad (2.4.19)$$



где  $z_1$  определяется приближенными формулами (2.4.16) или (2.4.17).

Многочлен (2.4.19) имеет такие корни:

$$\lambda_1 = -\frac{1}{m} (c_{yy} + z_1), \quad (2.4.20)$$

$$\lambda_{2,3} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\mu_z}{J_z} - \frac{z_1}{m} \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{\mu_z}{J_z} - \frac{z_1}{m} \right)^2 - \frac{c_{\theta\theta}}{J_z}}.$$

Если  $\varrho x_F V_{Cx} = 0$ , то  $z_1 = 0$  и  $\lambda_1 = -\frac{c_{yy}}{m} < 0$ . Если же  $\varrho x_F V_{Cx} \neq 0$  и выполняется условие (2.4.18), то

$$c_{yy} + z_1 \approx -\frac{P - X_0}{V_{Cx}} < 0$$

и, значит,  $\lambda_1 \approx \frac{P - X_0}{m V_{Cx}} > 0$ . Во всяком случае, действительный

корень  $\lambda_1$ , как показывают расчеты, мал по абсолютной величине, так что этому корню отвечает медленное аperiodическое движение ракеты.

Два других корня ( $\lambda_2$  и  $\lambda_3$ ) в зависимости от знака  $c_{\theta\theta}$  могут быть как вещественными, так и комплексными сопряженными.

1. Если  $c_{\theta\theta} < 0$  ( $x_F > 0$ , т. е. ракета статически неустойчива), то корни  $\lambda_2$  и  $\lambda_3$  вещественные, причем один из них положительный, а другой отрицательный. Положительному корню отвечает аperiodическое движение, в процессе которого соответствующие составляющие возмущений  $\Delta\theta$ ,  $\Delta V_y$  по модулю возрастают; отрицательному корню отвечает аperiodическое движение, в процессе которого соответствующие составляющие возмущений  $\Delta\theta$ ,  $\Delta V_y$  по модулю уменьшаются.

2. Если  $c_{\theta\theta} > 0$  ( $x_F < 0$ , ракета статически устойчива), то  $\frac{\mu_z}{J_z} - \frac{z_1}{m} > 0$ , так как  $z_1 < 0$ . Поэтому когда

$$\frac{1}{4} \left( \frac{\mu_z}{J_z} - \frac{z_1}{m} \right)^2 - \frac{c_{\theta\theta}}{J_z} \geq 0, \quad (2.4.21)$$

то корни  $\lambda_2$  и  $\lambda_3$  вещественны и отрицательны; соответствующие движения аппарата носят аperiodический затухающий характер.

Пусть теперь

$$\frac{1}{4} \left( \frac{\mu_z}{J_z} - \frac{z_1}{m} \right)^2 - \frac{c_{\theta\theta}}{J_z} < 0. \quad (2.4.22)$$

В этом случае корни  $\lambda_2, \lambda_3$  удобно представить в виде

$$\lambda_{2,3} = \frac{1}{T} (-\xi \pm i \sqrt{1 - \xi^2}), \quad (2.4.23)$$

где

$$T = \sqrt{\frac{J_z}{c_{\theta\theta}}}, \quad (2.4.24)$$

$$\xi = \frac{1}{2\sqrt{J_z c_{\theta\theta}}} \left( \mu_z - \frac{J_z}{m} z_1 \right). \quad (2.4.25)$$

В силу условия (2.4.22)  $1 - \xi^2 > 0$  и, значит,  $\lambda_2, \lambda_3$  — комплексные сопряженные корни. Соответствующее этим корням движение носит колебательный характер. Так как вещественные части корней  $\lambda_2, \lambda_3$  всегда отрицательны, то этот колебательный процесс является затухающим.

Отношение

$$\frac{\xi}{T} = \frac{1}{2} \left( \frac{\mu_z}{J_z} - \frac{z_1}{m} \right) \quad (2.4.26)$$

определяет скорость затухания и называется *коэффициентом демпфирования* (или *затухания*), а  $\xi$  называется *логарифмическим декрементом*.

Угловая частота свободных колебаний определяется мнимой частью корней  $\lambda_{2,3}$ :

$$\omega = \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{T} = \sqrt{\frac{c_{\theta\theta}}{J_z} - \frac{1}{4} \left( \frac{\mu_z}{J_z} - \frac{z_1}{m} \right)^2} \text{ 1/сек.} \quad (2.4.27)$$

На частоту свободных колебаний наибольшее влияние оказывает степень статической устойчивости, мерой которой служит координата аэродинамического фокуса  $x_F$ . Чем больше  $|x_F|$  ( $x_F < 0$ ), тем больше  $c_{\theta\theta}$  и, значит, больше  $\omega$ .

При отсутствии демпфирования  $\left( \frac{\mu_z}{J_z} - \frac{z_1}{m} = 0 \right)$  имеем

$$\omega_c = \sqrt{\frac{c_{\theta\theta}}{J_z}} = \frac{1}{T} \text{ 1/сек.} \quad (2.4.28)$$

Частота свободных колебаний при отсутствии демпфирования  $\omega_c$  называется *частотой собственных колебаний* аппарата. Частота собственных колебаний в гц равна:

$$f = \frac{\omega_c}{2\pi}. \quad (2.4.29)$$

Период собственных колебаний определяется формулой

$$T_c = \frac{2\pi}{\omega_c} = 2\pi T.$$

Свободное возмущенное движение ракеты по рысканию описывается уравнениями:

$$\begin{aligned}
 m \frac{d\Delta V_z}{dt} + v_z \frac{d\Delta\psi}{dt} + c_{zz}\Delta V_z + c_{z\psi}\Delta\psi &= 0, \\
 J_y \frac{d^2\Delta\psi}{dt^2} + v_y \frac{d\Delta\psi}{dt} + c_{\psi z}\Delta V_z + c_{\psi\psi}\Delta\psi &= 0
 \end{aligned}
 \tag{2.4.31}$$

при начальных условиях:

$$\Delta V_z(t_0) = \Delta V_{z0}, \quad \Delta\psi(t_0) = \Delta\psi_0, \quad \dot{\Delta\psi}(t_0) = \dot{\Delta\psi}_0.$$

Система уравнений (2.4.31) с точностью до обозначений не отличается от системы (2.4.1), описывающей свободное возмущенное движение ракеты по тангажу, так что весь предшествующий анализ уравнений (2.4.1) непосредственно может быть перенесен на уравнения (2.4.31).

## 4.2. Передаточные функции аппарата по тангажу и рысканию

Прием замораживания коэффициентов делает возможным использование удобных методов исследования стационарных систем автоматического управления при проектировании и исследовании систем управления ракет. Применение этих методов основано на знании передаточных функций или частотных характеристик ракеты как объекта управления.

Как известно, передаточной функцией линейного звена системы автоматического управления называется отношение изображения Лапласа выходной величины к изображению Лапласа входной величины при нулевых начальных условиях [23]. Для ракеты, как звена системы автоматического управления, входными величинами являются отклонения органов управления, а также возмущающие силы и моменты; выходными величинами являются приращения параметров движения ( $\Delta\phi$ ,  $\Delta\gamma$ ,  $\Delta V_y$  и т. п.).

Передаточные функции можно получить из уравнений возмущенного движения ракеты путем их преобразования по Лапласу при замороженных коэффициентах.

Для преобразования по Лапласу уравнений возмущенного движения ракеты по тангажу при начальных условиях

$$\Delta V_y(t_0) = \Delta\vartheta(t_0) = \Delta\dot{\vartheta}(t_0) = 0 \tag{2.4.32}$$

умножим левые и правые части уравнений (1.13.5) на  $e^{-pt}$  и проинтегрируем их по  $t$  в пределах от  $t_0$  до  $\infty$ . Тогда, обозначая через  $V_y(p)$ ,  $\vartheta(p)$ ,  $\delta_\vartheta(p)$ ,  $F_y(p)$ ,  $M_z(p)$  соответственно изображения по Лапласу функций  $\Delta V_y$ ,  $\Delta\vartheta$ ,  $\Delta\delta_\vartheta$ ,  $\Delta F_y$ ,  $\Delta M_z$ :

$$V_y(p) = \int_0^\infty \Delta V_y e^{-p\tau} d\tau, \quad \vartheta(p) = \int_0^\infty \Delta\vartheta e^{-p\tau} d\tau, \quad \delta_\vartheta(p) = \int_0^\infty \Delta\delta_\vartheta e^{-p\tau} d\tau,$$

$$F_y(p) = \int_0^\infty \Delta F_y e^{-p\tau} d\tau, \quad M_z(p) = \int_0^\infty \Delta M_z e^{-p\tau} d\tau \quad (\tau = t - t_0)$$

и учитывая, что при условии (2.4.32)

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^\infty \Delta \vartheta_y e^{-pt} dt &= e^{-pt_0} \int_0^\infty \Delta \vartheta_y e^{-p\tau} d\tau = e^{-pt_0} \vartheta(p), \\ \int_{t_0}^\infty \frac{d\Delta \vartheta}{dt} e^{-pt} dt &= [\Delta \vartheta e^{-pt}]_{t_0}^\infty + p \int_{t_0}^\infty \Delta \vartheta_y e^{-pt} dt = e^{-pt_0} p \vartheta(p), \\ \int_{t_0}^\infty \frac{d^2 \Delta \vartheta}{dt^2} e^{-pt} dt &= \left[ \frac{d\Delta \vartheta}{dt} e^{-pt} \right]_{t_0}^\infty + p \int_{t_0}^\infty \frac{d\Delta \vartheta}{dt} e^{-pt} dt = e^{-pt_0} p^2 \vartheta(p) \end{aligned}$$

и точно так же

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^\infty \Delta V_y e^{-pt} dt &= e^{-pt_0} V_y(p), \quad \int_{t_0}^\infty \frac{d\Delta V_y}{dt} e^{-pt} dt = e^{-pt_0} p V_y(p), \\ \int_{t_0}^\infty \Delta \delta_\vartheta e^{-pt} dt &= e^{-pt_0} \delta_\vartheta(p), \quad \int_{t_0}^\infty \Delta F_y e^{-pt} dt = e^{-pt_0} F_y(p), \\ \int_{t_0}^\infty \Delta M_z e^{-pt} dt &= e^{-pt_0} M_z(p), \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned} (mp + c_{yy}) V_y(p) + (v_y p + c_{y\vartheta}) \vartheta(p) &= c_{y\delta} \delta_\vartheta(p) + F_y(p), \\ c_{\vartheta y} V_y(p) + (J_z p^2 + \mu_z p + c_{\vartheta\vartheta}) \vartheta(p) &= c_{\vartheta\delta} \delta_\vartheta(p) + M_z(p). \end{aligned} \quad (2.4.33)$$

Разрешая систему алгебраических уравнений (2.4.33) относительно  $\vartheta(p)$  и  $V_y(p)$ , получим

$$\vartheta(p) = \frac{\begin{vmatrix} mp + c_{yy} & c_{y\delta} \delta_\vartheta(p) + F_y(p) \\ c_{\vartheta y} & c_{\vartheta\delta} \delta_\vartheta(p) + M_z(p) \end{vmatrix}}{(mp + c_{yy})(J_z p^2 + \mu_z p + c_{\vartheta\vartheta}) - v_y c_{\vartheta y} p - c_{y\delta} c_{\vartheta y}}, \quad (2.4.34)$$

$$V_y(p) = \frac{\begin{vmatrix} c_{y\delta} \delta_\vartheta(p) + F_y(p) & v_y p + c_{y\vartheta} \\ c_{\vartheta\delta} \delta_\vartheta(p) + M_z(p) & J_z p^2 + \mu_z p + c_{\vartheta\vartheta} \end{vmatrix}}{(mp + c_{yy})(J_z p^2 + \mu_z p + c_{\vartheta\vartheta}) - v_y c_{\vartheta y} p - c_{y\delta} c_{\vartheta y}}. \quad (2.4.35)$$

Раскрыв определители, стоящие в числителях, будем иметь

$$\vartheta(p) = W_\vartheta^\delta(p) \delta_\vartheta(p) + W_\vartheta^F(p) F_y(p) + W_\vartheta^M(p) M_z(p), \quad (2.4.36)$$

$$V_y(p) = W_V^\delta(p) \delta_\vartheta(p) + W_V^F(p) F_y(p) + W_V^M(p) M_z(p). \quad (2.4.37)$$

Здесь  $W_\vartheta^\delta(p)$ ,  $W_V^\delta(p)$ ,  $W_\vartheta^F(p)$ ,  $W_V^F(p)$ ,  $W_\vartheta^M(p)$ ,  $W_V^M(p)$

— передаточные функции ракеты, отвечающие различным парам входных и выходных сигналов.

В развернутом виде, в частности,

$$W_{\delta}^{\delta}(p) = \frac{(mp + c_{yy}) c_{\delta\delta} - c_{\delta y} c_{y\delta}}{(mp + c_{yy}) (J_z p^2 + \mu_z p + c_{\delta\delta}) - \nu_y c_{\delta y} p - c_{\delta\delta} c_{y\delta}}. \quad (2.4.38)$$

В знаменателе передаточных функций стоит характеристический многочлен системы уравнений (1.13.5). Этот многочлен, как было показано выше, можно приближенно представить в виде (2.4.19). Заменяя характеристический многочлен приближенным его выражением, будем иметь

$$W_{\delta}^{\delta}(p) = \frac{(mp + c_{yy}) c_{\delta\delta} - c_{\delta y} c_{y\delta}}{(mp + c_{yy} + z_1) \left[ J_z p^2 + \left( \mu_z - \frac{J_z}{m} z_1 \right) p + c_{\delta\delta} \right]}. \quad (2.4.39)$$

Передаточную функцию (2.4.39) удобно представить так:

$$W_{\delta}^{\delta}(p) = \frac{k(\tau_1 p + 1)}{(\tau_2 p + 1)(T^2 p^2 + 2T\xi p + 1)}. \quad (2.4.40)$$

Здесь

$$k = \frac{c_{yy} c_{\delta\delta} - c_{\delta y} c_{y\delta}}{(c_{yy} + z_1) c_{\delta\delta}} - \text{передаточный коэффициент аппарата;}$$

$\tau_1, \tau_2, T$  — постоянные времени, причем

$$\tau_1 = \frac{m c_{\delta\delta}}{c_{yy} c_{\delta\delta} - c_{\delta y} c_{y\delta}}, \quad \tau_2 = \frac{m}{c_{yy} + z_1},$$

а  $T$  определяется формулой (2.4.24).

Коэффициент  $\xi$  (логарифмический декремент), как и выше, представляется формулой (2.4.25).

Используя передаточную функцию (2.4.40), можно построить переходную функцию, представляющую реакцию аппарата по углу  $\Delta\theta$  на отклонения органов управления.

При ступенчатом отклонении органов управления

$$\delta_{\delta}(p) = \frac{\Delta\delta_{\delta}}{p}.$$

Учитывая это, из (2.4.40) находим

$$\frac{\delta(p)}{\Delta\delta_{\delta}} = \frac{k(\tau_1 p + 1)}{p(\tau_2 p + 1)(T^2 p^2 + 2T\xi p + 1)}. \quad (2.4.41)$$

Отсюда, произведя обратное преобразование Лапласа, можно определить переходную функцию  $\Delta\theta(t)/\Delta\delta_{\delta}$ , которая представляет закон изменения угла  $\Delta\theta$  при ступенчатом отклонении рулей и начальных условиях (2.4.32).

Тем же путем можно построить переходную функцию  $\Delta V_y(t)/\Delta\delta_{\delta}$ , представляющую закон изменения возмущения ско-

рости  $\Delta V_y$  при ступенчатом отклонении рулей и начальных условиях (2.4.32).

Явные выражения переходных функций будут приведены в следующем пункте после некоторых упрощений уравнений возмущенного движения.

Передаточные функции ракеты по рысканию по виду аналогичны передаточным функциям ракеты по тангажу. Так, например,

$$W_{\psi}^{\delta}(p) = \frac{\psi(p)}{\delta_{\psi}(p)} = \frac{k(\tau_1 p + 1)}{(\tau_2 p + 1)(T^2 p^2 + 2T\xi p + 1)},$$

только теперь

$$k = \frac{c_{zz}c_{\psi\delta} - c_{\psi z}c_{z\delta}}{(c_{zz} + z_1)c_{\psi\psi}}, \quad \tau_1 = \frac{mc_{\psi\delta}}{c_{zz}c_{\psi\delta} - c_{\psi z}c_{z\delta}},$$

$$\tau_2 = \frac{m}{c_{zz} + z_1}, \quad T = \sqrt{\frac{J_y}{c_{\psi\psi}}}, \quad \xi = \frac{1}{2\sqrt{J_y c_{\psi\psi}}} \left( \mu_y - \frac{J_y}{m} z_1 \right),$$

а  $z_1$  определяется приближенными формулами

$$z_1^{[1]} = - \left( c_{zz} + \frac{P - X_0}{V_{Cx}} \right)$$

и

$$z_1^{[2]} = - \frac{c_{\psi z}c_{z\psi} + v_z c_{\psi z} \frac{P - X}{mV_{Cx}}}{J_y \left( \frac{P - X_0}{mV_{Cx}} \right)^2 + \mu_y \frac{P - X_0}{mV_{Cx}} + c_{\psi\psi}}.$$

### 4.3. Упрощенные уравнения возмущенного движения и передаточные функции по тангажу и рысканию

Переходный процесс, который начинается при отклонении органов управления, имеет следующую особенность.

В первые секунды после отклонения органов управления вариация скорости  $\Delta V_y$ , которая была равна нулю в начальный момент  $t_0$ , изменяется очень медленно, оставаясь малой по величине. Поэтому на первом этапе возмущенного движения влияние вариации скорости центра масс аппарата на его вращение вокруг центра масс мало. Учитывая это, можно упростить уравнения возмущенного движения (1.13.5), полагая во втором уравнении системы (1.13.5)  $\Delta V_y = 0$  и отбрасывая первое уравнение. Тогда возмущенное движение ракеты на первом этапе приближенно будет представлено дифференциальным уравнением

$$J_z \frac{d^2 \Delta \vartheta}{dt^2} + \mu_z \frac{d \Delta \vartheta}{dt} + c_{\vartheta\vartheta} \Delta \vartheta = c_{\vartheta\delta} \Delta \delta_{\vartheta} + \Delta M_z. \quad (2.4.42)$$

Целесообразность такого упрощения системы (1.13.5) диктуется еще и тем, что поскольку мы пользуемся приемом замораживания коэффициентов, то можем рассчитывать на надежность получаемых выводов применительно лишь к малым отрезкам времени.

При указанном упрощении уравнений передаточные функции  $W_{\vartheta}^{\delta}(p)$  и  $W_{\vartheta}^M$  представляются в виде

$$W_{\vartheta}^{\delta}(p) = \frac{c_{\vartheta\delta}}{J_z p^2 + \mu_z p + c_{\vartheta\delta}}, \quad (2.4.43)$$

$$W_{\vartheta}^M(p) = \frac{1}{J_z p^2 + \mu_z p + c_{\vartheta\delta}}. \quad (2.4.44)$$

Полагая

$$T = \sqrt{\frac{J_z}{c_{\vartheta\delta}}}, \quad \xi = \frac{\mu_z}{2\sqrt{J_z c_{\vartheta\delta}}}, \quad k = \frac{c_{\vartheta\delta}}{c_{\vartheta\delta}}, \quad k_M = \frac{1}{c_{\vartheta\delta}}, \quad (2.4.45)$$

будем иметь

$$W_{\vartheta}^{\delta}(p) = \frac{k}{T^2 p^2 + 2T\xi p + 1}, \quad (2.4.46)$$

$$W_{\vartheta}^M(p) = \frac{k_M}{T^2 p^2 + 2T\xi p + 1}. \quad (2.4.47)$$

После аналогичного упрощения уравнений возмущенного движения по рысканию будем иметь

$$J_y \frac{d^2 \Delta\psi}{dt^2} + \mu_y \frac{d\Delta\psi}{dt} + c_{\psi\psi} \Delta\psi = c_{\psi\delta} \Delta\delta + \Delta M_y. \quad (2.4.48)$$

Отсюда получаем следующие выражения для передаточных функций:

$$W_{\psi}^{\delta}(p) = \frac{c_{\psi\delta}}{J_y p^2 + \mu_y p + c_{\psi\psi}}, \quad (2.4.49)$$

$$W_{\psi}^M(p) = \frac{1}{J_y p^2 + \mu_y p + c_{\psi\psi}}. \quad (2.4.50)$$

Исследуем реакцию аппарата по углу тангажа на ступенчатое отклонение органов управления.

При ступенчатом отклонении органов управления

$$\vartheta(p) = W_{\vartheta}^{\delta}(p) \delta_{\vartheta}(p) = \frac{c_{\vartheta\delta} \Delta^{\delta} \delta}{p(J_z p^2 + \mu_z p + c_{\vartheta\delta})}. \quad (2.4.51)$$

Отсюда, разлагая трехчлен

$$D(p) \equiv J_z p^2 + \mu_z p + c_{\vartheta\delta}$$

на множители, получаем

$$\frac{\vartheta(p)}{\Delta_{\vartheta}} = \frac{c_{\vartheta\vartheta}}{J_z} \frac{1}{p(p-p_1)(p-p_2)}. \quad (2.4.52)$$

Здесь  $p_1, p_2$  — корни трехчлена  $D(p)$ :

$$p_1 = -\frac{1}{2} \frac{\mu_z}{J_z} + \sqrt{\frac{\mu_z^2}{4J_z^2} - \frac{c_{\vartheta\vartheta}}{J_z}}, \quad p_2 = -\frac{1}{2} \frac{\mu_z}{J_z} - \sqrt{\frac{\mu_z^2}{4J_z^2} - \frac{c_{\vartheta\vartheta}}{J_z}}. \quad (2.4.53)$$

Применим к (2.4.52) обратное преобразование Лапласа; получим переходную функцию

$$\frac{\Delta\vartheta(t)}{\Delta_{\vartheta}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{c_{\vartheta\vartheta}}{J_z} \frac{e^{pt}}{p(p-p_1)(p-p_2)} dp. \quad (2.4.54)$$

Здесь  $c$  — произвольное вещественное число, превосходящее вещественные части корней (2.4.53).

Правая часть соотношения (2.4.54) равна сумме вычетов подынтегральной функции. Вычет функции  $f(p)$ , отвечающий полюсу  $p_i^{-1}$  кратности  $\kappa$ , как известно, определяется так:

$$R_i \equiv \text{Выч } f(p) = \frac{1}{(\kappa-1)!} \lim_{p \rightarrow p_i} \frac{d^{\kappa-1} [f(p)(p-p_i)^{\kappa}]}{dp^{\kappa-1}}. \quad (2.4.55)$$

В частности, если  $p_i$  простой полюс функции  $f(p)$ , то

$$R_i \equiv \text{Выч } f(p) = \lim_{p \rightarrow p_i} [f(p)(p-p_i)].$$

Рассмотрим следующие возможные случаи.

Статически неустойчивый летательный аппарат ( $x_F > 0$ ). В этом случае  $c_{\vartheta\vartheta} < 0$ , поэтому  $p_1 > 0$ , а  $p_2 < 0$ . Подынтегральная функция в выражении (2.4.54) имеет три простых полюса:  $p_1, p_2, 0$ . Соответствующие вычеты подынтегральной функции равны:

$$R_1 = \frac{c_{\vartheta\vartheta}}{J_z} \frac{e^{p_1 t}}{p_1(p_1-p_2)}, \quad R_2 = \frac{c_{\vartheta\vartheta}}{J_z} \frac{e^{p_2 t}}{p_2(p_2-p_1)}, \quad R_3 = \frac{c_{\vartheta\vartheta}}{J_z} \frac{1}{p_1 p_2}.$$

<sup>1</sup> Точка  $p_i$  является  $\kappa$ -кратным полюсом функции  $f(p)$ , если она является  $\kappa$ -кратным нулем функции  $\frac{1}{f(p)} \equiv \varphi(p)$ . В свою очередь,  $\kappa$ -кратный нуль функции  $\varphi(p)$  характеризуется соотношениями

$$\varphi(p_i) = 0, \quad \frac{d\varphi(p_i)}{dp} = 0, \dots, \quad \frac{d^{\kappa-1}\varphi(p_i)}{dp^{\kappa-1}} = 0, \quad \frac{d^{\kappa}\varphi(p_i)}{dp^{\kappa}} \neq 0.$$



Так как  $p_1 p_2 = \frac{c_{\theta\theta}}{J_z}$ , то вычет  $R_3$  в точности равняется передаточному коэффициенту  $k$  (см. 2.4.45)).

Учитывая это, получаем

$$\frac{\Delta\theta(t)}{\Delta\theta_0} = \sum_i R_i = \frac{c_{\theta\theta}}{J_z} \frac{e^{p_1 t}}{p_1(p_1 - p_2)} + \frac{c_{\theta\theta}}{J_z} \frac{e^{p_2 t}}{p_2(p_2 - p_1)} + k. \quad (2.4.56)$$

Переходная функция (2.4.56) определяет закон изменения возмущения  $\Delta\theta(t)$  при ступенчатом отклонении органов управления и нулевых начальных значениях возмущений  $\Delta\theta$  и  $\Delta\dot{\theta}$ . Так как  $p_1 > 0$ , а  $p_2 < 0$ , то первая составляющая переходной функции с течением времени возрастает, а вторая составляющая — убывает, приближаясь к нулю.

Статически нейтральный летательный аппарат ( $x_F = 0$ ). В этом случае  $c_{\theta\theta} = 0$ , поэтому  $p_1 = 0$ , а  $p_2 = -\frac{\mu_z}{J_z}$ .

Подынтегральная функция имеет двукратный полюс 0 и простой полюс  $p_2$ . Соответствующие вычеты равны:

$$R_1 = -\frac{c_{\theta\theta}}{J_z} \frac{1 + t p_2}{p_2^2}, \quad R_2 = \frac{c_{\theta\theta}}{J_z} \frac{e^{p_2 t}}{p_2^2}.$$

Значит

$$\frac{\Delta\theta(t)}{\Delta\theta_0} = \frac{c_{\theta\theta}}{J_z} \frac{e^{p_2 t} - 1}{p_2^2} - \frac{c_{\theta\theta}}{J_z} \frac{t}{p_2}. \quad (2.4.57)$$

Как видим, и в этом случае переходная функция имеет составляющую, возрастающую по модулю с течением времени, однако теперь этот рост происходит по линейному закону.

Статически устойчивый летательный аппарат ( $x_F < 0$ ). В этом случае  $c_{\theta\theta} > 0$ , и возможны следующие варианты.

а)  $\frac{\mu_z^2}{J_z^2} > \frac{c_{\theta\theta}}{J_z}$ . При этом корни  $p_1$  и  $p_2$  отрицательны и различны. Переходная функция  $\frac{\Delta\theta(t)}{\Delta\theta_0}$  представляется снова формулой (2.4.56), но теперь и первая, и вторая ее составляющие являются по модулю убывающими функциями; с увеличением  $t$  возмущение  $\Delta\theta(t)$  стремится к установившемуся значению, равному  $k\Delta\theta_0$ ;

б)  $\frac{\mu_z^2}{4J_z^2} = \frac{c_{\theta\theta}}{J_z}$ . Из (2.4.53) имеем  $p_1 = p_2 = -\frac{1}{2} \frac{\mu_z}{J_z}$ . Для переходной функции получаем следующее выражение:

$$\frac{\Delta\theta(t)}{\Delta\theta_0} = \frac{c_{\theta\theta}}{J_z} \left[ \frac{1}{p_2^2} - \frac{1 - t p_2}{p_2^2} e^{p_2 t} \right]. \quad (2.4.58)$$

С ростом  $t$   $\Delta\vartheta(t) \rightarrow \frac{c_{\vartheta\delta} \Delta\delta_{\vartheta}}{J_z p_2^2} = -\frac{4J_z c_{\vartheta\delta}}{\mu_z^2} \Delta\delta_{\vartheta}$ ;

в)  $\frac{\mu_z^2}{4J_z^2} < \frac{c_{\vartheta\delta}}{J_z}$ . В этом случае корни  $p_1, p_2$  — комплексные сопряженные:

$$p_1 = -\frac{1}{2} \frac{\mu_z}{J_z} + i \sqrt{\frac{c_{\vartheta\delta}}{J_z} - \frac{\mu_z^2}{4J_z^2}}, \quad p_2 = -\frac{1}{2} \frac{\mu_z}{J_z} - i \sqrt{\frac{c_{\vartheta\delta}}{J_z} - \frac{\mu_z^2}{4J_z^2}}.$$

В обозначениях (2.4.45) будем иметь

$$p_1 = -\frac{\xi}{T} + i \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}, \quad p_2 = -\frac{\xi}{T} - i \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}. \quad (2.4.59)$$

Так как  $p_1 \neq p_2$ ,  $p_1 \neq 0$ ,  $p_2 \neq 0$  и, значит, полюсы подынтегральной функции простые, то переходная функция определяется формулой (2.4.56) при значениях  $p_1$  и  $p_2$ , определенных формулами (2.4.59).

Подставляя значения  $p_1$  и  $p_2$  в (2.4.56), получим после некоторых преобразований

$$\frac{\Delta\vartheta(t)}{\Delta\delta_{\vartheta}} = k \left[ 1 - e^{-\frac{\xi}{T} t} \left( \cos \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} t + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} t \right) \right]. \quad (2.4.60)$$

Последнее соотношение можно привести к виду

$$\frac{\Delta\vartheta(t)}{\Delta\delta_{\vartheta}} = k \left[ 1 - \frac{e^{-\frac{\xi}{T} t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \cos \left( \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} t - \varphi \right) \right], \quad (2.4.61)$$

где

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}.$$

Из (2.4.61) видно, что переходный процесс является колебательным, причем колебания затухающие, так как  $-\frac{\xi}{T} = -\frac{1}{2} \frac{\mu_z}{J_z} < 0$ . Чем больше коэффициент демпфирования  $\xi/T$ , тем быстрее затухает колебательный процесс. С течением времени возмущение  $\Delta\vartheta(t)$  стремится к установившемуся значению, равному  $k\Delta\delta_{\vartheta}$ . Передаточный коэффициент  $k$  в данном случае можно трактовать как отношение установившегося значения выходной величины  $\Delta\vartheta$  к величине входного сигнала  $\Delta\delta_{\vartheta}$ .

#### 4.4. Передаточные функции аппарата по крену

Преобразуя уравнения возмущенного движения по крену (1.13.8) по Лапласу при нулевых начальных условиях, получим

$$(J_x p^2 + \mu_x p) \gamma(p) = c_{\gamma\delta} \delta_{\gamma}(p) + M_x(p). \quad (2.4.62)$$

где

$$\gamma(p) = \int_0^{\infty} \Delta \gamma e^{-pt} dt, \quad \delta_{\gamma}(p) = \int_0^{\infty} \Delta \delta_{\gamma} e^{-pt} dt, \quad M_x(p) = \int_0^{\infty} \Delta M_x e^{-pt} dt.$$

Отсюда

$$\gamma(p) = \frac{c_{\gamma \delta}}{p(J_x p + \mu_x)} \delta_{\gamma}(p) + \frac{1}{p(J_x p + \mu_x)} M_x(p). \quad (2.4.63)$$

Коэффициенты при  $\delta_{\gamma}(p)$  и  $M_x(p)$  являются передаточными функциями аппарата по крену  $W_{\gamma}^{\delta}$  и  $W_{\gamma}^M$ . Эти передаточные функции можно представить в виде

$$W_{\gamma}^{\delta}(p) = \frac{k}{p(Tp + 1)}, \quad W_{\gamma}^M(p) = \frac{k_M}{p(Tp + 1)}. \quad (2.4.64)$$

Здесь

$$k = \frac{c_{\gamma \delta}}{\mu_x}, \quad k_M = \frac{1}{\mu_x} — \text{передаточные коэффициенты,}$$

$$T = \frac{J_x}{\mu_x} — \text{постоянная времени.}$$

Реакция аппарата на ступенчатое отклонение органов управления по крену описывается переходной функцией  $\Delta \gamma(t)/\Delta \delta_{\gamma}$  которую можно получить, используя передаточную функцию  $W_{\gamma}^{\delta}(p)$ , путем обратного преобразования Лапласа. При ступенчатом отклонении рулей

$$\frac{\gamma(p)}{\Delta \delta_{\gamma}} = \frac{1}{p} W_{\gamma}^{\delta}(p) = \frac{k}{p^2(Tp + 1)}.$$

Отсюда

$$\frac{\Delta \gamma(t)}{\Delta \delta_{\gamma}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{k}{p^2(Tp + 1)} e^{pt} dp \quad (2.4.65)$$

и после вычисления интеграла

$$\frac{\Delta \gamma(t)}{\Delta \delta_{\gamma}} = k \left[ t - T \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) \right]. \quad (2.4.66)$$

Дифференцируя (2.4.66), получим выражение для угловой скорости аппарата по крену как функцию от времени:

$$\frac{\dot{\Delta \gamma}(t)}{\Delta \delta_{\gamma}} = k \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} \right). \quad (2.4.67)$$

С увеличением  $t$  угловая скорость  $\dot{\Delta \gamma}$ , изменяясь аperiodически, стремится к значению этой скорости в установившемся режиме, равному  $k \Delta \delta_{\gamma}$ . От значения постоянной времени  $T$  за-

висит скорость протекания этого аperiodического переходного процесса: чем больше  $T$ , тем медленнее происходит этот процесс, и наоборот.

Передаточный коэффициент  $k$  можно трактовать как отношение установившегося значения выходной величины  $\Delta y$  к величине входного сигнала  $\Delta \delta$ .

#### 4.5. Передаточные функции ракеты в продольном движении

Преобразование по Лапласу уравнения возмущенного продольного движения ракеты (1.13.6) при нулевых начальных условиях приводит к равенству

$$(mp + c_{xx})V_x(p) = c_{x\delta}\delta_x(p) + F_x(p), \quad (2.4.68)$$

где  $V_x(p)$ ,  $\delta_x(p)$ ,  $F_x(p)$  — изображения Лапласа функций  $\Delta V_x$ ,  $\Delta \delta_x$ ,  $\Delta F_x$ .

Из (2.4.68) находим передаточные функции ракеты в продольном движении:

$$W_V^\delta(p) = \frac{c_{x\delta}}{mp + c_{xx}}, \quad W_V^F(p) = \frac{1}{mp + c_{xx}}. \quad (2.4.69)$$

В более удобной записи

$$W_V^\delta(p) = \frac{k}{Tp + 1}, \quad W_V^F(p) = \frac{k_F}{Tp + 1}. \quad (2.4.70)$$

Здесь  $k = \frac{c_{x\delta}}{c_{xx}}$ ,  $k_F = \frac{1}{c_{xx}}$  — передаточные коэффициенты;

$T = \frac{m}{c_{xx}}$  — постоянная времени аппарата.

При ступенчатом отклонении входного сигнала начинается переходный процесс, который описывается переходной функцией

$$\frac{\Delta V_x(t)}{\Delta \delta_x} = k \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} \right). \quad (2.4.71)$$

Как видим, динамические свойства аппарата по отношению к  $\Delta V_x$  совпадают со свойствами аperiodического звена. При увеличении  $t$  выходной сигнал  $\Delta V_x$  стремится по экспоненте к установившемуся значению возмущения  $\Delta V_x$ . От величины постоянной времени  $T$  зависит скорость протекания этого аperiodического процесса: чем больше  $T$ , тем медленнее происходит этот процесс.

Из (2.4.71) видно, что передаточный коэффициент  $k$  можно трактовать как отношение установившегося значения выходной величины  $\Delta V_x$  к значению входной величины  $\Delta \delta_x$ .

Аналогичный физический смысл имеет и передаточный коэффициент  $k_F$ : он равен отношению установившегося значения выходной величины  $\Delta V_x$  к значению входной величины  $\Delta F_x$ .

#### 4.6. Частотные характеристики ракеты

Процессы в системе управления ракет часто трудно описать простыми дифференциальными уравнениями, достаточно удобными для анализа. Поэтому на практике широко применяются методы исследования, использующие частотные характеристики системы. Частотные характеристики элементов системы, уравнения которых неизвестны, могут быть получены экспериментально. Применение частотных методов особенно целесообразно для систем высокого порядка, так как в этом случае решения дифференциальных уравнений и алгебраические критерии устойчивости становятся очень громоздкими.

Для применения частотных методов надо знать частотные характеристики ракеты как объекта управления и частотные характеристики системы управления. Частотные характеристики ракеты как объекта управления могут быть получены из выражений для передаточных функций ракеты путем замены параметра  $p$  на  $i\omega$ . Однако для большей наглядности мы получим частотные характеристики непосредственно из уравнений возмущенного движения. Что касается частотных характеристик системы управления, то их обычно определяют экспериментально.

Частотные характеристики ракеты представляют ее вынужденное движение при отклонении органов управления по гармоническому закону и отсутствии возмущающих сил.

Рассмотрим движение по тангажу. Для построения частотных характеристик в уравнениях (1.13.5) положим

$$\Delta F_y = 0, \quad \Delta M_z = 0, \quad \Delta \delta_\theta = e^{i\omega t} \quad (2.4.72)$$

и, считая, что коэффициенты уравнений заморожены, будем искать неизвестные функции  $\Delta V_y$ ,  $\Delta \vartheta$  в виде

$$\Delta V_y = V_y e^{i\omega t}, \quad \Delta \vartheta = \theta e^{i\omega t}. \quad (2.4.73)$$

После подстановки (2.4.72) и (2.4.73) в уравнения (1.13.5) получим систему алгебраических уравнений

$$(c_{yy} + i\omega m) V_y + (c_{y\vartheta} + i\omega v_y) \theta = c_{y\delta}, \quad (2.4.74)$$

$$c_{\vartheta y} V_y + (c_{\vartheta\vartheta} + i\mu_z \omega - \omega^2 J_z) \theta = c_{\vartheta\delta}.$$

Систему (2.4.74) разрешим относительно  $\theta$ . Получим частотную передаточную функцию

$$\theta = \frac{(c_{yy} c_{\vartheta\delta} - c_{\vartheta y} c_{y\delta}) + i\omega m c_{\vartheta\delta}}{c_{yy} (c_{\vartheta\vartheta} - \omega^2 J_z) - \omega^2 \mu_z m - c_{y\vartheta} c_{\vartheta y} + i[\omega m (c_{\vartheta\vartheta} - \omega^2 J_z) + \mu_z \omega c_{yy} - c_{\vartheta y} \omega v_y]}. \quad (2.4.75)$$

Сравнивая с (2.4.38), можно видеть, что

$$\theta(i\omega) = W_{\theta}^*(p)|_{p=i\omega}.$$

Запишем  $\theta$  в виде

$$\theta = \theta_1(\omega) + i\theta_2(\omega), \quad (2.4.76)$$

где  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  — соответственно вещественная и мнимая составляющие частотной передаточной функции, определяемые формулами:

$$\theta_1 = \frac{c_1(c_{yy}c_{\theta\delta} - c_{\theta y}c_{y\delta}) + c_2\omega m c_{\theta\delta}}{c_1^2 + c_2^2}, \quad (2.4.77)$$

$$\theta_2 = \frac{c_1\omega m c_{\theta\delta} - c_2(c_{yy}c_{\theta\delta} - c_{\theta y}c_{y\delta})}{c_1^2 + c_2^2}.$$

Здесь

$$\begin{aligned} c_1 &= c_{yy}(c_{\theta\theta} - \omega^2 J_z) - \omega^2 \mu_z m - c_{y\theta}c_{\theta y}, \\ c_2 &= \omega m (c_{\theta\theta} - \omega^2 J_z) + \omega \mu_z c_{yy} - \nu_y \omega c_{\theta y}. \end{aligned} \quad (2.4.78)$$

Частотную передаточную функцию можно представить и так:

$$\theta = k(\omega) e^{i\varphi(\omega)} \quad (2.4.79)$$

где

$$k(\omega) = |\theta(i\omega)| = \sqrt{\theta_1^2(\omega) + \theta_2^2(\omega)} \quad (2.4.80)$$

— амплитудная частотная характеристика объекта (коэффициент усиления);

$$\varphi = \arg \theta(i\omega) \quad (2.4.81)$$

— фазовая частотная характеристика объекта (фазовый сдвиг).

В соответствии с этим функция  $\Delta\theta$ , являющаяся выходной величиной для объекта как линейного звена системы автоматического управления (и входной величиной для автомата стабилизации), представляется формулой

$$\Delta\theta = k(\omega) e^{i[\omega t + \varphi(\omega)]} \quad (2.4.82)$$

Как видим, гармонические колебания органов управления вызывают гармонические колебания выходной величины объекта с той же частотой, но с измененными амплитудой и фазой. Эти изменения характеризуются коэффициентом усиления  $k(\omega)$  и фазовым сдвигом  $\varphi(\omega)$ .

Подставив (2.4.77) в (2.4.80), будем иметь

$$k(\omega) = \frac{|c_{\theta\delta}|}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \sqrt{\left(1 - x_F \frac{c_{y\delta}}{c_{\theta\delta}}\right)^2 c_{yy}^2 + \omega^2 m^2}. \quad (2.4.83)$$

Если управление осуществляется путем рассогласования тяг, то  $c_{y\delta} = 0$ , и в этом случае

$$k(\omega) = \frac{|c_{\delta\delta}|}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \sqrt{c_{yy}^2 + \omega^2 m^2}. \quad (2.4.84)$$

При управлении с помощью воздушных или газовых рулей или путем поворота маршевых двигателей  $c_{\delta\delta} = -L_p c_{y\delta}$ . При этом формула (2.4.83) принимает вид

$$k(\omega) = \frac{|c_{\delta\delta}|}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \sqrt{\left(1 + \frac{x_F}{L_p}\right)^2 c_{yy}^2 + \omega^2 m^2}. \quad (2.4.85)$$

Фазовый сдвиг  $\varphi(\omega)$  представляется как разность аргументов числителя и знаменателя частотной передаточной функции. Перейдем к рассмотрению движения ракеты по крену. В уравнение возмущенного движения (1.13.8) положим

$$\Delta M_x = 0, \quad \Delta \delta_\gamma = e^{i\omega t}. \quad (2.4.86)$$

Снова считая коэффициенты уравнения замороженными, будем искать неизвестную функцию  $\Delta \gamma$  в виде

$$\Delta \gamma = \Gamma e^{i\omega t}. \quad (2.4.87)$$

После подстановки (2.4.86) и (2.4.87) в уравнение (1.13.8) получим

$$(-\omega^2 J_x + i\omega \mu_x) \Gamma = c_{\gamma\delta}.$$

Отсюда

$$\Gamma = \frac{c_{\gamma\delta}}{-J_x \omega^2 + i\mu_x \omega}, \quad (2.4.88)$$

или

$$\Gamma = \Gamma_1(\omega) + i\Gamma_2(\omega), \quad (2.4.89)$$

где

$$\Gamma_1(\omega) = \frac{-c_{\gamma\delta} J_x}{J_x^2 \omega^2 + \mu_x^2}, \quad \Gamma_2(\omega) = \frac{-c_{\gamma\delta} \mu_x}{(J_x^2 \omega^2 + \mu_x^2) \omega}. \quad (2.4.90)$$

Здесь  $\Gamma_1(\omega)$ ,  $\Gamma_2(\omega)$  — соответственно вещественная и мнимая составляющие частотной передаточной функции.

Частотную передаточную функцию можно представить и в форме

$$\Gamma = k(\omega) e^{i\varphi(\omega)}, \quad (2.4.91)$$

где

$$k(\omega) = |\Gamma(i\omega)| = \frac{|c_{\gamma\delta}|}{\sqrt{J_x^2 \omega^4 + \mu_x^2 \omega^2}}, \quad (2.4.92)$$

$$\varphi(\omega) = \arg \Gamma(i\omega) = \arg \left( -\frac{c_{\gamma\delta}}{J_x \omega^2} \right) - \arg \left( 1 - i \frac{\mu_x}{J_x \omega} \right).$$

Так как  $c_{\gamma\delta} < 0$ , то

$$\varphi = -\arg \left( 1 - i \frac{\mu_x}{J_x \omega} \right) = -\arg \operatorname{tg} \left( -\frac{\mu_x}{J_x \omega} \right) = \arg \operatorname{tg} \frac{\mu_x}{J_x \omega}. \quad (2.4.93)$$

Функции  $k(\omega)$  и  $\varphi(\omega)$  представляют соответственно амплитудную частотную и фазовую частотную характеристики ракеты как объекта управления.

#### § 5. ТРЕБОВАНИЯ К ЧАСТОТНЫМ ХАРАКТЕРИСТИКАМ АВТОМАТА СТАБИЛИЗАЦИИ ИЗ УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ РАКЕТЫ

Если частотные характеристики ракеты как объекта управления и частотные характеристики автомата стабилизации известны, то можно определить частотные характеристики разомкнутой системы автоматического управления.

Пусть  $k_0(\omega)$  и  $\varphi_0(\omega)$  — соответственно коэффициент усиления и фазовый сдвиг объекта, а  $k_a(\omega)$  и  $\varphi_a(\omega)$  — коэффициент усиления и фазовый сдвиг автомата стабилизации. Тогда, как известно, коэффициент усиления и фазовый сдвиг разомкнутой системы автоматического управления определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} k(\omega) &= k_0(\omega) k_a(\omega), \\ \varphi(\omega) &= \varphi_0(\omega) + \varphi_a(\omega). \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

Если  $\theta_{01}$ ,  $\theta_{02}$  — соответственно вещественная и мнимая составляющие частотной передаточной функции объекта, а  $\theta_{a1}$ ,  $\theta_{a2}$  — вещественная и мнимая составляющие частотной передаточной функции автомата стабилизации, то вещественная и мнимая составляющие частотной передаточной функции разомкнутой системы определяются равенствами:

$$\begin{aligned} \theta_1(\omega) &= \theta_{01}(\omega) \theta_{a1}(\omega) - \theta_{02}(\omega) \theta_{a2}(\omega), \\ \theta_2(\omega) &= \theta_{01}(\omega) \theta_{a2}(\omega) + \theta_{02}(\omega) \theta_{a1}(\omega). \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

По соотношениям (2.5.1) или (2.5.2) можно построить амплитудно-фазовую частотную характеристику (годограф) разомкнутой системы. По виду этого годографа, руководствуясь критерием устойчивости Найквиста, можно судить об устойчивости движения ракеты.

Критерий устойчивости Найквиста формулируется следующим образом.

Пусть  $W_0(p)$  — передаточная функция ракеты как объекта управления, а  $W_a(p)$  — передаточная функция автомата стаби-



лизации. Тогда передаточная функция разомкнутой системы автоматического управления, как известно, равна:

$$W(p) = W_o(p) W_a(p) = \frac{R(p)}{Q(p)}, \quad (2.5.3)$$

где  $R(p)$  и  $Q(p)$  — многочлены от  $p$ ; степень многочлена  $R(p)$  не выше, чем степень многочлена  $Q(p)$ .

Из (2.5.3), кстати, при подстановке  $p = i(\omega)$  получается частотная передаточная функция разомкнутой системы:

$$W(i\omega) \equiv \theta(i\omega) = k(\omega) e^{l\tau(\omega)} = \theta_1(\omega) + i\theta_2(\omega). \quad (2.5.4)$$

**Критерий устойчивости Найквиста.** Пусть знаменатель передаточной функции разомкнутой системы автоматического управления (2.5.3) содержит  $l$  корней в правой полуплоскости комплексной плоскости и  $n-l$  корней — в левой. Тогда при изменении частоты  $\omega$  от  $-\infty$  до  $+\infty$  для устойчивой в замкнутом состоянии системы результирующий поворот конца вектора частотной передаточной функции  $\theta(i\omega)$  разомкнутой системы относительно точки  $(+1, 0)$  против часовой стрелки должен составить угол, равный  $2\pi l$ , т. е. амплитудно-фазовая частотная характеристика должна охватывать точку  $(+1, 0)$  столько раз, сколько корней в правой полуплоскости содержит знаменатель передаточной функции разомкнутой системы.

**Замечание.** Приведенная формулировка критерия устойчивости Найквиста справедлива в предположении, что выходная величина объекта с тем же знаком является и входной величиной или частью входной (управляющей) величины регулятора. В теории автоматического управления обычно при формировании управляющей величины регулятора регулируемый параметр — выходная величина объекта как звена системы автоматического регулирования берется с противоположным знаком. В этом случае характерной точкой, относительно которой рассматривается вращение конца вектора  $\theta(i\omega)$ , становится точка  $(-1, 0)$ .

На начальном этапе проектирования ракеты, когда параметры автомата стабилизации еще не определены, но уже известны частотные характеристики ракеты как объекта управления, с помощью критерия устойчивости Найквиста можно установить необходимые ограничения на частотные характеристики автомата стабилизации из условия устойчивости системы, что позволит уточнить диапазон возможных значений параметров автомата стабилизации и, тем самым, упростит задачу выбора их рациональных значений.

Ниже мы ограничимся рассмотрением движения ракеты по тангажу и крену, имея в виду, что соответствующий анализ по другим каналам управления проводится аналогичным путем.

### 5.1. Требования к частотным характеристикам автомата стабилизации по каналу тангажа

Для простоты и наглядности анализа воспользуемся уравнением (2.4.42), описывающим приближенно возмущенное движение ракеты по тангажу. В этом случае для передаточной функции ракеты как объекта управления имеем следующее выражение:

$$W_o(p) \equiv W_{\theta}^{\delta}(p) = \frac{c_{\theta\delta}}{J_z p^2 + \mu_z p + c_{\theta\theta}}. \quad (2.5.5)$$

Подставляя в (2.5.5)  $i\omega$  вместо  $p$ , получим частотную передаточную функцию объекта

$$W_o(i\omega) \equiv \theta_o(i\omega) = \frac{-c_{\theta\delta}}{J_z \omega^2 - c_{\theta\theta} - i\mu_z \omega}. \quad (2.5.6)$$

Разделяя действительную и мнимую части частотной передаточной функции, будем иметь

$$\theta_o(i\omega) = \theta_{o1}(\omega) + i\theta_{o2}(\omega), \quad (2.5.7)$$

где

$$\begin{aligned} \theta_{o1}(\omega) &= \frac{-c_{\theta\delta}(J_z \omega^2 - c_{\theta\theta})}{(J_z \omega^2 - c_{\theta\theta})^2 + \mu_z^2 \omega^2}, \\ \theta_{o2}(\omega) &= \frac{-c_{\theta\delta} \mu_z \omega}{(J_z \omega^2 - c_{\theta\theta})^2 + \mu_z^2 \omega^2}. \end{aligned} \quad (2.5.8)$$

Формулы (2.5.8) удобно записать так:

$$\begin{aligned} \theta_{o1}(\omega) &= \frac{-\bar{c}_{\theta\delta}(\omega^2 - \bar{c}_{\theta\theta})}{(\omega^2 - \bar{c}_{\theta\theta})^2 + \bar{\mu}_z^2 \omega^2}, \\ \theta_{o2}(\omega) &= \frac{-\bar{c}_{\theta\delta} \bar{\mu}_z \omega}{(\omega^2 - \bar{c}_{\theta\theta})^2 + \bar{\mu}_z^2 \omega^2}. \end{aligned} \quad (2.5.9)$$

Здесь

$$\bar{c}_{\theta\theta} = \frac{c_{\theta\theta}}{J_z}, \quad \bar{\mu}_z = \frac{\mu_z}{J_z}, \quad \bar{c}_{\theta\delta} = \frac{c_{\theta\delta}}{J_z}. \quad (2.5.10)$$

Возможны следующие три случая.

1. Ракета статически устойчива, т. е.  $x_F < 0$ . При этом

$$\bar{c}_{\theta\theta} > 0 \quad (2.5.11)$$

и поэтому знаменатель передаточной функции (2.5.5) не имеет корней в правой полуплоскости.

При изменении  $\omega$  от  $-\infty$  до  $+\infty$  конец вектора частотной передаточной функции  $\theta_o(i\omega)$  описывает, как это следует из ана-

лиза формул (2.5.9) с учетом того, что  $c_{\theta\delta} < 0$ ,  $\mu_z > 0$ , кривую, изображенную на рис. 2.9. Из условия устойчивости Найквиста так как знаменатель передаточной функции не имеет корней в правой полуплоскости, следует, что годограф разомкнутой системы не должен охватывать точку  $(+1, 0)$ <sup>1</sup>. Желательный вид го-

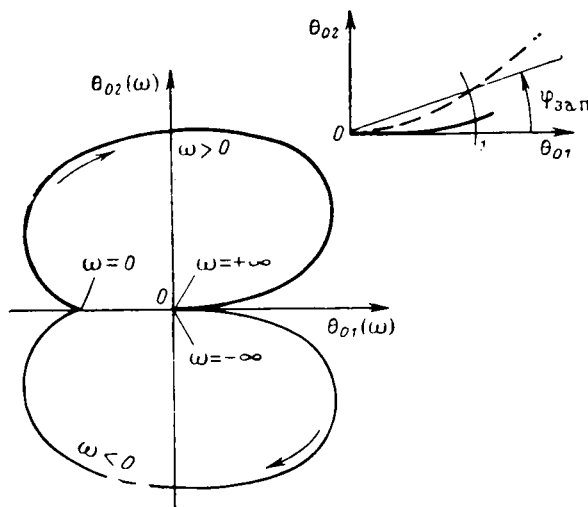


Рис. 2.9.

дографа разомкнутой системы показан на рис. 2.9 пунктирной линией. В этом случае будет иметь место запас устойчивости по фазе, измеряемый величиной угла  $\varphi_{зап}$  между осью абсцисс и лучом, проведенным из начала координат через точку пересечения годографа разомкнутой системы с окружностью единичного радиуса. Для создания такого запаса устойчивости необходимо, чтобы автомат стабилизации на частотах, близких к частоте  $\omega^*$ , на которой коэффициент усиления разомкнутой системы равен единице, имел фазовое опережение. Фазовый сдвиг автомата стабилизации должен удовлетворять условию

$$2k\pi \leq \varphi_a + \varphi_o \leq (2k+1)\pi \quad (k=0, 1, 2, \dots) \quad (2.5.12)$$

2. Ракета статически нейтральна, т. е.  $x_F=0$ . При этом

$$\bar{c}_{\theta\delta} = 0 \quad (2.5.13)$$

и поэтому

$$\theta_{o1}' = \frac{-\bar{c}_{\theta\delta}}{\omega^2 + \mu_z^2}, \quad \theta_{o2}'(\omega) = \frac{-\bar{c}_{\theta\delta}\bar{\mu}_z}{(\omega^2 + \mu_z^2)\omega}. \quad (2.5.14)$$

<sup>1</sup> Здесь и далее предполагается, что знаменатель передаточной функции автомата стабилизации не имеет корней в правой полуплоскости.

Конец вектора  $\theta_o(i\omega)$  описывает кривую, изображенную на рис. 2. 10.

Знаменатель передаточной функции (2.5.5) снова не имеет корней в правой полуплоскости. Поэтому, так же как и в случае  $x_F < 0$ , автомат стабилизации должен иметь фазовое опережение согласно условию (2.5.12).

3. Ракета статически неустойчива, т. е.  $x_F > 0$ . При этом

$$\bar{c}_{\theta\theta} < 0 \quad (2.5.15)$$

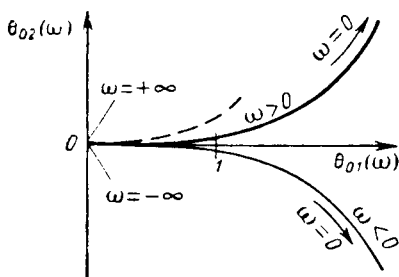


Рис. 2. 10.

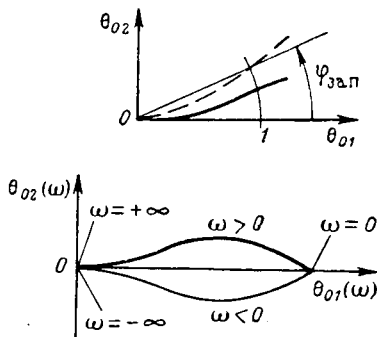


Рис. 2. 11.

и поэтому знаменатель передаточной функции (2.5.5) имеет один корень в правой полуплоскости. В данном случае частотная передаточная функция объекта управления представляется кривой, изображенной на рис. 2. 11. Согласно критерию Найквиста, для устойчивости системы в замкнутом состоянии конец вектора частотной передаточной функции разомкнутой системы при изменении  $\omega$  от  $-\infty$  до  $+\infty$  должен повернуться на угол  $2\pi$ . Из рис. 2. 11 видно, что для обеспечения устойчивости с некоторым запасом по фазе необходимо, чтобы фаза  $\varphi_a$  автомата стабилизации удовлетворяла условию (2.5.12). Но этого в рассматриваемом случае недостаточно. Нужно еще, чтобы годограф разомкнутой системы пересекал ось абсцисс при  $\omega=0$  правее точки  $(+1, 0)$ . Поэтому необходимо выполнение еще одного условия:

$$k_o(0) k_a(0) > 1. \quad (2.5.16)$$

Так как коэффициент усиления объекта

$$k_o(\omega) = \sqrt{\theta_{o1}^2(\omega) + \theta_{o2}^2(\omega)} = \frac{|c_{\theta\delta}|}{\sqrt{(\omega^2 - \bar{c}_{\theta\theta})^2 + \bar{\mu}_z^2 \omega^2}}, \quad (2.5.17)$$

то при  $\omega=0$  имеем

$$k_o(0) = \frac{\bar{c}_{\theta\delta}}{c_{\theta\theta}}. \quad (2.5.18)$$

Учитывая (2.5.18), из (2.5.16) находим нижнюю границу допустимых значений коэффициента усиления автомата стабилизации:

$$k_a(0) \geq \frac{\bar{c}_{\theta\theta}}{c_{\theta\delta}}. \quad (2.5.19)$$

Таким образом, во всех рассматриваемых случаях требуется фазовое опережение автомата стабилизации на частотах, близких к частоте  $\omega^*$ , а если ракета статически неустойчива, то, кроме того, коэффициент усиления автомата стабилизации при  $\omega=0$  должен удовлетворять условию (2.5.19).

Частота  $\omega^*$ , вблизи которой должно выполняться условие (2.5.12), определяется равенством

$$k_o(\omega^*) k_a(\omega^*) = 1. \quad (2.5.20)$$

Эту частоту можно найти так. Подставим в равенство (2.5.20) значение  $k_o(\omega^*)$  согласно (2.5.17). Получим

$$\frac{|c_{\theta\delta}|}{V(\omega^* - \bar{c}_{\theta\theta})^2 + \mu_z^2 \omega^{*2}} k_a(\omega^*) = 1.$$

Ввиду малости  $\bar{\mu}_z$  отсюда следует приближенное равенство

$$\omega^{*2} \approx \bar{c}_{\theta\theta} + |\bar{c}_{\theta\delta}| k_a(\omega^*) \quad (2.5.21)$$

Если известна зависимость коэффициента усиления автомата стабилизации  $k_a$  от частоты  $\omega$ , то из (2.5.21) нетрудно графически или путем последовательных приближений определить искомую частоту  $\omega^*$ .

Так как обычно  $\varphi_o(\omega^*) \approx 0$  (а при  $\mu_z=0$   $\varphi_o(\omega^*)=0$ ), то условие фазового опережения автомата стабилизации можно упростить, записав его так:

$$2k\pi \leq \varphi_a \leq (2k+1)\pi \quad (k=0, 1, 2, \dots). \quad (2.5.22)$$

Наконец, оценим максимально допустимое значение коэффициента усиления автомата стабилизации при больших  $\omega$ .

Пусть  $\omega_o$  — частота, на которой автомат стабилизации не дает сдвига фазы. Примерно при этой частоте годограф разомкнутой системы автоматического управления пересекает ось абсцисс, так как фазовый сдвиг, создаваемый объектом, очень мал. Пренебрегая значением  $\varphi_o(\omega_o)$ , для координаты точки пересечения

годографа разомкнутой системы автоматического управления с осью абсцисс будем иметь следующее выражение:

$$\begin{aligned} \theta_1(\omega_0) &= k(\omega_0) = \theta_{01}(\omega_0) k_a(\omega_0) = \\ &= \frac{-\bar{c}_{\theta\delta}(\omega_0^2 - \bar{c}_{\theta\theta})}{(\omega_0^2 - \bar{c}_{\theta\theta})^2 + \bar{\mu}_x \omega_0^2} k_a(\omega_0). \end{aligned} \quad (2.5.23)$$

Из условия устойчивости системы годограф разомкнутой системы должен пересекать ось абсцисс (на частотах, близких к  $\omega_0$ ) левее точки  $(+1, 0)$  и, значит, коэффициент усиления автомата стабилизации должен удовлетворять неравенству

$$\frac{-\bar{c}_{\theta\delta}(\omega_0^2 - \bar{c}_{\theta\theta})}{(\omega_0^2 - \bar{c}_{\theta\theta})^2 + \bar{\mu}_x \omega_0^2} k_a(\omega_0) < 1. \quad (2.5.24)$$

Отсюда, предполагая, что  $\omega_0^2 > \bar{c}_{\theta\theta}$ , и учитывая, что  $\bar{c}_{\theta\delta} < 0$ , получаем

$$k_a(\omega_0) < \frac{(\omega_0^2 - \bar{c}_{\theta\theta})^2 + \bar{\mu}_x \omega_0^2}{-\bar{c}_{\theta\delta}(\omega_0^2 - \bar{c}_{\theta\theta})}. \quad (2.5.25)$$

Ввиду малости коэффициента  $\bar{\mu}_x$  отношение (2.5.25) можно упростить, отбросив слагаемое  $\bar{\mu}_x \omega_0^2$ . Тогда будем иметь

$$k_a(\omega_0) < \frac{\omega_0^2 - \bar{c}_{\theta\theta}}{-\bar{c}_{\theta\delta}}. \quad (2.5.26)$$

## 5.2. Требования к частотным характеристикам автомата стабилизации по каналу крена

Передаточная функция ракеты как объекта управления для пары входного и выходного сигналов  $\Delta\delta_\gamma - \Delta\gamma$  представляется в виде [см. (2.4.64)]

$$W_o(p) \equiv W_\gamma^\delta(p) = \frac{c_{\gamma\delta}}{J_x} \frac{1}{p \left( p + \frac{\bar{\mu}_x}{J_x} \right)}. \quad (2.5.27)$$

Вещественная и мнимая составляющие частотной передаточной функции представляются формулами (2.4.90), которые можно записать так:

$$\Gamma_{o1} = \frac{-\bar{c}_{\gamma\delta}}{\omega^2 + \frac{\bar{\mu}_x^2}{J_x^2}}, \quad \Gamma_{o2} = \frac{-\bar{c}_{\gamma\delta} \bar{\mu}_x}{(\omega^2 + \frac{\bar{\mu}_x^2}{J_x^2}) \omega}.$$

Здесь

$$\bar{c}_{\gamma\delta} = \frac{c_{\gamma\delta}}{J_x}, \quad \bar{\mu}_x = \frac{\mu_x}{J_x}.$$

При изменении  $\omega$  от  $-\infty$  к  $+\infty$  конец вектора частотной передаточной функции  $\Gamma_o(i\omega)$  описывает кривую, изображенную на рис. 2.12. Так как знаменатель передаточной функции (2.5.27) не имеет корней в правой полуплоскости, то из условия устойчивости Найквиста годограф разомкнутой системы не должен охватывать точку  $(+1, 0)$ , а для этого нужно, чтобы автомат стабилизации на частотах, близких к частоте  $\omega^*$ , при которой коэффициент усиления разомкнутой системы равен единице, имел фазовое опережение; точнее, чтобы на этих частотах выполнялось условие

$$2k\pi \leq \varphi_a + \varphi_o \leq (2k+1)\pi$$

$$(k=0, 1, 2, \dots). \quad (2.5.28)$$

Частоту  $\omega^*$  можно определить следующим образом.

Пусть  $k_o(\omega)$  и  $k_a(\omega)$  — соответственно коэффициенты усиления объекта и автомата стабилизации. Тогда, по условию,

$$k_o(\omega^*) k_a(\omega^*) = 1. \quad (2.5.29)$$

Учитывая, что

$$k_o(\omega) = \sqrt{\Gamma_{o1}^2 + \Gamma_{o2}^2} = \frac{|c_{\gamma\delta}|}{\sqrt{(\omega^2 + \mu_x^2)\omega^2}}, \quad (2.5.30)$$

из (2.5.29) получим

$$|c_{\gamma\delta}| k_a(\omega^*) = \sqrt{(\omega^{*2} + \mu_x^2)\omega^{*2}}.$$

Ввиду малости  $\mu_x$  отсюда следует приближенное равенство

$$\omega^{*2} = |c_{\gamma\delta}| k_a(\omega^*). \quad (2.5.31)$$

Если коэффициент усиления автомата стабилизации как функция от  $\omega$  известен, то из (2.5.31) можно, по крайней мере приближенно, определить значение  $\omega^*$ .

## § 6. ОБЛАСТИ УСТОЙЧИВОСТИ. D-РАЗБИЕНИЕ

При расчете и проектировании системы управления ракеты обычно проводится исследование влияния различных конструктивных параметров ракеты и параметров регулятора на устойчивость системы. С этой целью строятся области устойчивости в плоскости одного параметра или в плоскости двух параметров при фиксированных значениях всех прочих параметров. Плоскость исследуемых параметров подвергается так называемому D-

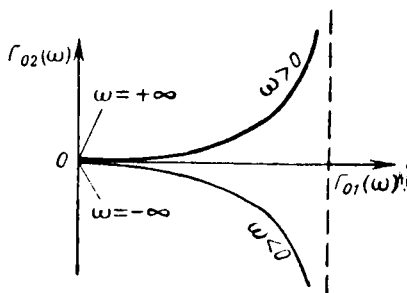


Рис. 2.12.

разбиению путем построения линии, разделяющей области с определенным распределением корней характеристического многочлена замкнутой системы (с одним и тем же числом корней с отрицательными вещественными частями и с положительными вещественными частями). Практический интерес представляет часть кривых  $D$ -разбиения, являющаяся границей области с наибольшим числом корней с отрицательными вещественными частями. Для выделения этой области, которая и может оказаться областью устойчивости, вводится штриховка линий  $D$ -разбиения по правилу, приводимому ниже. Чтобы установить, является ли на самом деле выделенная область областью устойчивости или нет, необходимо для одной (любой) точки этой области проверить устойчивость с помощью какого-нибудь критерия.

Ниже в качестве примера проводится построение области устойчивости в плоскости двух параметров. Рассматривается возмущенное движение ракеты по тангажу. Построение областей устойчивости по рысканию и крену проводится вполне аналогично.

Возмущенное движение ракеты по тангажу описывается дифференциальными уравнениями:

$$\begin{aligned} m(t) \frac{d\Delta V_y}{dt} + v_y(t) \frac{d\Delta\vartheta}{dt} + c_{yy}(t) \Delta V_y + c_{y\vartheta}(t) \Delta\vartheta &= \\ &= c_{y\delta}(t) \Delta\delta + \Delta F_y, \\ J_z(t) \frac{d^2\Delta\vartheta}{dt^2} + \mu_z(t) \frac{d\Delta\vartheta}{dt} + c_{\vartheta\vartheta}(t) \Delta\vartheta + c_{\vartheta y}(t) \Delta V_y &= \\ &= c_{\vartheta\delta}(t) \Delta\delta + \Delta M_z. \end{aligned} \quad (2.6.1)$$

К уравнениям (2.6.1) нужно добавить еще уравнение связи между  $\Delta\delta$  и регулируемыми величинами. Примем следующий закон управления:

$$T_2^2 \frac{d^2\Delta\delta}{dt^2} + T_1 \frac{d\Delta\delta}{dt} + \Delta\delta = k\Delta\vartheta + k_1 \frac{d\Delta\vartheta}{dt}. \quad (2.6.2)$$

Для другого закона управления соответствующие расчетные формулы нетрудно получить, повторяя приводимые далее выкладки.

Следуя методу замороженных коэффициентов, зафиксируем время  $t$  и рассмотрим систему однородных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned} m \frac{d\Delta V_y}{dt} + v_y \frac{d\Delta\vartheta}{dt} + c_{yy} \Delta V_y + c_{y\vartheta} \Delta\vartheta - c_{y\delta} \Delta\delta &= 0, \\ J_z \frac{d^2\Delta\vartheta}{dt^2} + \mu_z \frac{d\Delta\vartheta}{dt} + c_{\vartheta\vartheta} \Delta\vartheta + c_{\vartheta y} \Delta V_y - c_{\vartheta\delta} \Delta\delta &= 0, \\ T_2^2 \frac{d^2\Delta\delta}{dt^2} + T_1 \frac{d\Delta\delta}{dt} + \Delta\delta - k_1 \frac{d\Delta\vartheta}{dt} - k\Delta\vartheta &= 0. \end{aligned} \quad (2.6.3)$$



Построим линии  $D$ -разбиения в плоскости двух параметров  $k$  и  $k_1$ , предполагая, что  $T_1$  и  $T_2^2$  — заданные величины.

Характеристическое уравнение системы (2.6.3) имеет вид

$$D(\lambda) \equiv a_0 T_2^2 \lambda^5 + (a_1 T_2^2 + a_0 T_1) \lambda^4 + (a_0 + a_2 T_2^2 + a_1 T_1) \lambda^3 + \\ + (a_1 + a_3 T_2^2 + a_2 T_1 + b_1 k_1) \lambda^2 + (a_2 + a_3 T_1 + b_1 k + b_2 k_1) \lambda + \\ + (a_3 + b_2 k) = 0, \quad (2.6.4)$$

где

$$\begin{aligned} a_0 &= m J_z, \\ a_1 &= m \mu_z + c_{yy} J_z, \\ a_2 &= m c_{\vartheta\vartheta} + \mu_z c_{yy} - c_{y\vartheta} v_y \\ a_3 &= c_{yy} c_{\vartheta\vartheta} - c_{y\vartheta} c_{\vartheta y}, \\ b_1 &= -m c_{\vartheta\vartheta}, \\ b_2 &= c_{y\vartheta} c_{\vartheta y} - c_{yy} c_{\vartheta\vartheta}. \end{aligned} \quad (2.6.5)$$

Уравнение (2.6.4) можно переписать так:

$$kP(\lambda) + k_1 Q(\lambda) + S(\lambda) = 0, \quad (2.6.6)$$

где

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= b_1 \lambda + b_2, \\ Q(\lambda) &= (b_1 \lambda + b_2) \lambda, \\ S(\lambda) &= a_0 T_2^2 \lambda^5 + (a_1 T_2^2 + a_0 T_1) \lambda^4 + (a_0 + a_2 T_2^2 + a_1 T_1) \lambda^3 + \\ &+ (a_1 + a_3 T_2^2 + a_2 T_1) \lambda^2 + (a_2 + a_3 T_1) \lambda + a_3. \end{aligned}$$

Введем подстановку  $\lambda = i\omega$ . Будем иметь

$$\begin{aligned} P(i\omega) &= P_1(\omega) + iP_2(\omega), \\ Q(i\omega) &= Q_1(\omega) + iQ_2(\omega), \\ S(i\omega) &= S_1(\omega) + iS_2(\omega). \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} P_1(\omega) &= b_2, & P_2(\omega) &= b_1 \omega, \\ Q_1(\omega) &= -b_1 \omega^2, & Q_2(\omega) &= b_2 \omega, \\ S_1(\omega) &= (a_1 T_2^2 + a_0 T_1) \omega^4 - (a_1 + a_3 T_2^2 + a_2 T_1) \omega^2 + a_3, \\ S_2(\omega) &= a_0 T_2^2 \omega^5 - (a_0 + a_2 T_2^2 + a_1 T_1) \omega^3 + (a_2 + a_3 T_1) \omega. \end{aligned}$$

Приравнявая в уравнении (2.6.6) нулю отдельно действительную и мнимую части, получим параметрические уравнения линий  $D$ -разбиения плоскости параметров  $k$  и  $k_1$ :

$$\left. \begin{aligned} kP_1(\omega) + k_1 Q_1(\omega) + S_1(\omega) &= 0, \\ kP_2(\omega) + k_1 Q_2(\omega) + S_2(\omega) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.6.7)$$

Равенства (2.6.7) разрешим относительно  $k$  и  $k_1$ . Тогда

$$k = \frac{\begin{vmatrix} -S_1(\omega) & Q_1(\omega) \\ -S_2(\omega) & Q_2(\omega) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} P_1(\omega) & Q_1(\omega) \\ P_2(\omega) & Q_2(\omega) \end{vmatrix}}, \quad k_1 = \frac{\begin{vmatrix} P_1(\omega) & -S_1(\omega) \\ P_2(\omega) & -S_2(\omega) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} P_1(\omega) & Q_1(\omega) \\ P_2(\omega) & Q_2(\omega) \end{vmatrix}},$$

или, раскрывая определители,

$$k = \frac{1}{b_1^2 \omega^2 + b_2^2} (A_{16} \omega^6 + A_{14} \omega^4 + A_{12} \omega^2 + A_{10}),$$

$$k_1 = \frac{1}{b_1^2 \omega^2 + b_2^2} (A_{24} \omega^4 + A_{22} \omega^2 + A_{20}), \quad (2.6.8)$$

где

$$\begin{aligned} A_{16} &= -a_0 b_1 T_2^2, \\ A_{14} &= b_1 (a_0 + a_2 T_2^2 + a_1 T_1) - b_2 (a_1 T_2^2 + a_0 T_1), \\ A_{12} &= b_2 (a_1 + a_3 T_2^2 + a_2 T_1) - b_1 (a_2 + a_3 T_1), \\ A_{10} &= -a_3 b_2, \\ A_{24} &= b_1 (a_1 T_2^2 + a_0 T_1) - a_0 b_2 T_2^2, \\ A_{22} &= b_2 (a_0 + a_2 T_2^2 + a_1 T_1) - b_1 (a_1 + a_3 T_2^2 + a_2 T_1), \\ A_{20} &= a_3 b_1 - b_2 (a_2 + a_3 T_1). \end{aligned} \quad (2.6.9)$$

Каждому значению  $\omega$  соответствуют определенные значения  $k$  и  $k_1$ , т. е. точка в плоскости  $kk_1$ . Придавая различные значения  $\omega$  (от  $-\infty$  до  $\infty$ ), можно в плоскости  $kk_1$  построить кривую  $D$ -разбиения. При этом следует  $k$  откладывать по оси абсцисс, а  $k_1$  — по оси ординат.

Далее производится штриховка кривой  $D$ -разбиения по следующему правилу. Если при движении по этой кривой в сторону возрастания  $\omega$  (т. е. от  $\omega = -\infty$  до  $\omega = \infty$ ) главный определитель системы (2.6.7) положителен, то кривую штрихуют слева. Если же при этом главный определитель отрицателен, то кривую штрихуют справа. В нашем случае главный определитель равен:

$$\Delta = \begin{vmatrix} P_1(\omega) & Q_1(\omega) \\ P_2(\omega) & Q_2(\omega) \end{vmatrix} = (b_1^2 \omega^2 + b_2^2) \omega.$$

Поэтому при возрастании  $\omega$  от 0 до  $\infty$   $\Delta > 0$ , и, значит, кривую следует штриховать слева.

Поскольку в формулах (2.6.8)  $\omega$  входит в четной степени, то каждая точка кривой соответствует двум значениям  $\omega$ :  $\pm |\omega|$ , т. е. при возрастании  $\omega$  от  $-\infty$  до  $\infty$  наша кривая пробегается дважды: от  $-\infty$  до 0 и от 0 до  $\infty$ . При возрастании  $\omega$  от  $-\infty$  до 0  $\Delta < 0$ , поэтому кривую следует штриховать справа. В ре-

зультате кривая окажется заштрихованной дважды с одной и той же стороны.

При  $\omega=0$

$$\left. \begin{aligned} k(0) &= -\frac{a_3}{b_2}, \\ k_1(0) &= \frac{a_3 b_1 - b_2(a_2 + a_3 T_1)}{b_2^2}. \end{aligned} \right\} \quad (2.6.10)$$

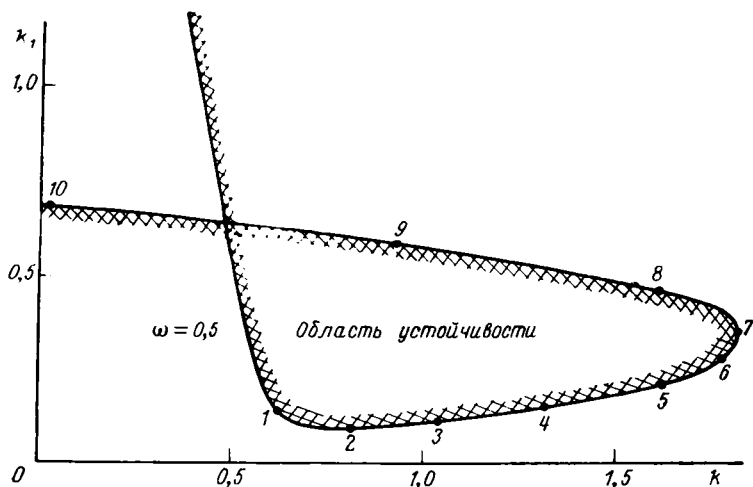


Рис. 2.13.

Точка с координатами  $k(0)$ ,  $k_1(0)$  является особой, так как при  $\omega=0$  обращаются в нуль как главный определитель системы (2.6.7), так и определители:

$$\begin{vmatrix} -S_1(\omega) & Q_1(\omega) \\ -S_2(\omega) & Q_2(\omega) \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} P_1(\omega) & -S_1(\omega) \\ P_2(\omega) & -S_2(\omega) \end{vmatrix}.$$

При  $\omega=0$  система (2.6.7) приводится к одному уравнению

$$k = -\frac{a_3}{b_2}. \quad (2.6.11)$$

Это уравнение прямой, проходящей через особую точку (2.6.10). Прямую следует штриховать так, чтобы вблизи особой точки штриховка прямой и кривой были направлены в одну и ту же сторону. Область, покрытая наибольшим числом штриховок, будет областью устойчивости, если таковая в рассматриваемый момент времени вообще имеется.

На рис. 2.13 приведена линия  $D$ -разбиения и область устойчивости для ракеты с законом управления (2.6.2). Подобное построение областей устойчивости проводят для различных фиксированных значений параметров системы.

рованных моментов времени с интервалом 10—20 сек. Общая часть всех полученных таким путем областей устойчивости представляет собой область тех значений параметров  $k$  и  $k_1$ , при которых устойчивость обеспечивается на всей траектории.

## § 7. УТОЧНЕНИЕ МЕТОДА ЗАМОРОЖЕННЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ. УЧЕТ ПЕРЕМЕННОСТИ КОЭФФИЦИЕНТОВ УРАВНЕНИЙ

В § 3 был сформулирован приближенный критерий локальной устойчивости невозмущенного движения, которому отвечает тривиальное решение уравнений (2.3.2), основанный на приеме «замаскирования» коэффициентов. В данном разделе выводятся критерии локальной устойчивости невозмущенного движения [тривиального решения уравнений (2.3.2)], учитывающие переменность коэффициентов уравнений.

Для удобства дальнейшего изложения систему дифференциальных уравнений (2.3.2) представим в нормальном виде. С этой целью, рассматривая в качестве дополнительных обобщенных координат обобщенные скорости, введем новые переменные

$$x_i = \begin{cases} \frac{dq_i}{dt} (i = 1, 2, \dots, n), \\ q_{i-n} (i = n + 1, \dots, 2n). \end{cases} \quad (2.7.1)$$

В новых переменных система (2.3.2) принимает вид

$$\sum_{j=1}^n m_{ij}(t) \frac{dx_j}{dt} = - \sum_{j=1}^n r_{ij}(t) x_j - \sum_{j=1}^n n_{ij}(t) x_{n+j},$$

$$\frac{dx_{n+i}}{dt} = x_i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (2.7.2)$$

Определитель, составленный из коэффициентов  $m_{ij}$  при старших производных в системе (2.3.2), можно показать, отличен от нуля, поэтому не равен нулю и определитель

$$\begin{vmatrix} m_{11}m_{12} & \dots & m_{1n}0 & \dots & 0 \\ m_{21}m_{22} & \dots & m_{2n}0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{n1}m_{n2} & \dots & m_{nn}0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

составленный из коэффициентов при производных в уравнениях (2.7.2). Значит, система (2.7.2) разрешима относительно производных  $dx_i/dt$ . Решая ее как неоднородную алгебраическую систему относительно производных  $dx_i/dt$ , получим систему дифференциальных уравнений в нормальном виде

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^m u_{ij}(t) x_j \quad (i = 1, 2, \dots, m; m = 2n). \quad (2.7.3)$$

Далее предполагается, что  $u_{ij}(t)$  — любое, нужное число раз дифференцируемые функции.

## 7.1. Асимптотическое интегрирование уравнений

Если коэффициенты уравнений (2.7.3) — постоянные величины, то их решение строится так же, как и решение системы (2.3.3). Так, если

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^m u_{ij} x_j \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (2.7.4)$$

где  $u_{ij} = \text{const}$ , то частное решение ищется в виде

$$x_i = k_i e^{\lambda t} \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (2.7.5)$$

Подстановка (2.7.5) в уравнения (2.7.4) приводит к системе алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^m u_{ij} k_j - k_i \lambda = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (2.7.6)$$

Система алгебраических уравнений (2.7.6) имеет ненулевые решения только при тех значениях  $\lambda$ , при которых определитель системы обращается в нуль. Определитель системы есть многочлен (характеристический многочлен) степени  $m$  относительно  $\lambda$ . Этот многочлен имеет  $m$  корней  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ . Простому корню  $\lambda_\sigma$  соответствует с точностью до произвольного ненулевого множителя единственное ненулевое решение алгебраической системы (2.7.6):  $k_{1\sigma}, k_{2\sigma}, \dots, k_{m\sigma}$ . Корню  $\lambda_\sigma$  и ненулевому решению алгебраических уравнений (2.7.6) при  $\lambda = \lambda_\sigma$  отвечает частное решение дифференциальных уравнений (2.7.4).

$$x_{i\sigma} = k_{i\sigma} e^{\lambda_\sigma t} \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (2.7.7)$$

Если все корни характеристического многочлена простые, то общее решение уравнений (2.7.4) представляется так:

$$x_i = \sum_{\sigma=1}^m c_\sigma k_{i\sigma} e^{\lambda_\sigma t} \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (2.7.8)$$

где  $c_\sigma$  ( $\sigma = 1, 2, \dots, m$ ) — произвольные постоянные.

Задача устойчивости тривиального решения уравнений (2.7.4) определяется в зависимости от знаков вещественных частей корней характеристического многочлена. По методу замороженных коэффициентов знаки вещественных частей корней рассматриваются как критерий устойчивости и в том случае, когда коэффициенты уравнений являются переменными величинами.

Чтобы получить более точные критерии устойчивости тривиального решения уравнений (2.7.3), следуя первому методу Ляпунова, нужно получить решение уравнений (2.7.3), более точное, чем то, которым пользуются в методе замороженных коэффициентов.

Ниже указывается способ построения приближенного решения уравнений (2.7.3) с учетом переменности коэффициентов уравнений. Этот способ основан на идеях асимптотического интегрирования дифференциальных уравнений с использованием понятия «медленное время», введенного в математическую физику Н. М. Крыловым и Н. Н. Боголюбовым [8].

Вместо системы (2.7.3) введем в рассмотрение систему

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^m u_{ij}(\tau) x_j \quad (i=1, 2, \dots, m), \quad (2.7.9)$$

где  $\tau = \epsilon t$  — так называемое «медленное время»;  $\epsilon$  — параметр.

При  $\epsilon=1$  системы (2.7.3) и (2.7.9) совпадают, так что если удастся построить решение уравнений (2.7.9), то, полагая в этом решении  $\epsilon=1$ , получим решение и интересующей нас системы (2.7.3).

Частное решение уравнений (2.7.9) будем искать в виде

$$x_i(t, \epsilon) = \tilde{k}_i(\tau, \epsilon) e^{\int \tilde{\lambda}(\tau, \epsilon) d\tau} \quad (i=1, 2, \dots, m). \quad (2.7.10)$$

Подставляя (2.7.10) в (2.7.9), получим после сокращения на общий множитель  $\exp \int \tilde{\lambda}(\tau, \epsilon) d\tau$

$$\sum_j u_{ij}(\tau) \tilde{k}_j(\tau, \epsilon) - \tilde{k}_i(\tau, \epsilon) \tilde{\lambda}(\tau, \epsilon) = \epsilon \frac{d\tilde{k}_i(\tau, \epsilon)}{d\tau} \quad (i=1, 2, \dots, m). \quad (2.7.11)$$

Функции  $\tilde{k}_j(\tau, \epsilon)$  и  $\tilde{\lambda}(\tau, \epsilon)$  определим так, чтобы равенства (2.7.11) выполнялись тождественно относительно параметра  $\epsilon$ . Будем строить эти функции в форме рядов по степеням  $\epsilon$ :

$$\tilde{k}_i(\tau, \epsilon) = k_i(\tau) + \epsilon k_i^{[1]}(\tau) + \epsilon^2 k_i^{[2]}(\tau) + \dots \quad (i=1, 2, \dots, m),$$

$$\tilde{\lambda}(\tau, \epsilon) = \lambda(\tau) + \epsilon \lambda^{[1]}(\tau) + \epsilon^2 \lambda^{[2]}(\tau) + \dots \quad (2.7.12)$$

Подставим (2.7.12) в (2.7.11):

$$\begin{aligned} \sum_j u_{ij}(k_j + \epsilon k_j^{[1]} + \epsilon^2 k_j^{[2]} + \dots) - (k_i + \epsilon k_i^{[1]} + \dots) (\lambda + \epsilon \lambda^{[1]} + \dots) = \\ = \epsilon \left( \frac{dk_i}{d\tau} + \epsilon \frac{dk_i^{[1]}}{d\tau} + \epsilon^2 \frac{dk_i^{[2]}}{d\tau} + \dots \right) \quad (i=1, 2, \dots, m). \end{aligned} \quad (2.7.13)$$

В равенствах (2.7.13) приравняем члены, содержащие  $\epsilon$  в одинаковых степенях. В результате получим следующие системы равенств:

$$\sum_j u_{ij}(\tau) k_j(\tau) - k_i(\tau) \lambda(\tau) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, m); \quad (2.7.14)$$

$$\sum_j u_{ij}(\tau) k_j^{[1]}(\tau) - k_i^{[1]}(\tau) \lambda(\tau) = k_i(\tau) \lambda^{[1]}(\tau) + \frac{dk_i(\tau)}{d\tau} \quad (i=1, 2, \dots, m); \quad (2.7.15)$$

$$\sum_j u_{ij}(\tau) k_j^{[2]}(\tau) - k_i^{[2]}(\tau) \lambda(\tau) = k_i(\tau) \lambda^{[2]}(\tau) +$$

$$+ k_i^{[1]}(\tau) \lambda^{[1]}(\tau) + \frac{dk_i^{[1]}(\tau)}{d\tau} \quad (i=1, 2, \dots, m); \quad (2.7.15a)$$

.....

которым должны удовлетворять члены рядов (2.7.12).

Прежде чем приступить к решению полученных алгебраических систем, рассмотрим некоторые общие свойства систем линейных алгебраических уравнений.

### 7.1.1. Некоторые сведения из теории систем линейных алгебраических уравнений

Рассмотрим алгебраическую систему линейных неоднородных уравнений

[illegible]

и соответствующую ей однородную систему

[illegible]

Для того, чтобы однородная система (2.7.17) имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы определитель системы

$$\begin{vmatrix} u_{11} - \lambda & u_{12} & \dots & u_{1m} \\ u_{21} & u_{22} - \lambda & \dots & u_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{m1} & u_{m2} & \dots & u_{mm} - \lambda \end{vmatrix} \quad (2.7.18)$$

был равен нулю. Определитель (2.7.18) в раскрытом виде представляет собой многочлен (характеристический многочлен) степени  $m$ , который имеет  $m$  корней:  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  ( $u_{ij}$  — вещественные величины). Будем далее предполагать, что все эти корни различны.

Пусть  $\lambda_\sigma$  — один из корней характеристического многочлена. При  $\lambda = \lambda_\sigma$ , поскольку  $\lambda_\sigma$  — простой корень характеристического многочлена, ранг определителя (2.7.18) равен  $m-1$  и поэтому система (2.7.17) имеет с точностью до произвольного ненулевого множителя единственное ненулевое решение. Это значит, что если

$$k_{1\alpha}, k_{2\alpha}, \dots, k_{m\alpha} \quad (2.7.19)$$

— ненулевое решение системы (2.7.17), то все другие решения этой системы имеют вид

$$ck_{1\sigma}, ck_{2\sigma}, \dots, ck_{m\sigma}.$$

Решение (2.7.19) можно представить вектором  $K_{\sigma}$  с компонентами  $k_{1\sigma}, k_{2\sigma}, \dots, k_{m\sigma}$ . Имеющийся произвол позволяет выбрать решение (2.7.19) таким образом, чтобы выполнялось условие

$$|K_\sigma| = 1. \quad (2.7.20)$$

Напомним, что модуль вектора  $A$  с компонентами  $a_1, \dots, a_m$  определяется как корень квадратный из скалярного произведения вектора  $A$  на себя:

$$|A| = \sqrt{(A, A)},$$

$$(A, B) = \sum_{j=1}^m a_j \bar{b}_j.$$
$$\begin{aligned}(u_{11} - \lambda) u_1 + u_{21} u_2 + \dots + u_{m1} u_m &= 0, \\ u_{12} u_1 + (u_{22} - \lambda) u_2 + \dots + u_{m2} u_m &= 0, \\ . &. . . . . \\ u_{1m} u_1 + u_{2m} u_2 + \dots + (u_{mm} - \lambda) u_m &= 0\end{aligned}\tag{2.7.21}$$
$$\mu_{s1}, \mu_{s2}, \dots, \mu_{sm}. \quad (2.7.22)$$
$$\sum_{j=1}^m \mu_{sj} k_{j\sigma} \begin{cases} \neq 0 & (s = \sigma), \\ = 0 & (s \neq \sigma). \end{cases} \quad (2.7.23)$$
[illegible][illegible]
$$(\lambda_s - \lambda_a) (\mu_{s1} k_{1a} + \mu_{s2} k_{2a} + \dots + \mu_{sm} k_{ma}) = 0. \quad (2.7.26)$$

Ненулевое решение (2.7.22) сопряженной системы (2.7.21) также определяется с точностью до произвольного ненулевого множителя, поэтому его всегда можно выбрать так, чтобы первое равенство (2.7.23) выполнялось следующим образом:

$$\sum_{j=1}^m \mu_{\sigma j} k_{j\sigma} = 1. \quad (2.7.27)$$





Без ущерба для общности допустим, что неравный нулю минор матрицы  $U$  занимает левый верхний угол. У этого минора в матрице  $U_1$  имеются два окаймляющих минора: один из них—это определитель матрицы  $U$ , который равен нулю, а другой — определитель

$$\begin{vmatrix} u_{11} - \lambda_{\sigma} & u_{12} & u_{1m-1} & f_1 \\ u_{21} & u_{22} - \lambda_{\sigma} & u_{2m-1} & f_2 \\ u_{m1} & u_{m2} & u_{mm-1} & f_m \end{vmatrix}. \quad (2.7.29)$$

Определитель (2.7.29) тоже равен нулю. В самом деле, если строки этого определителя умножить соответственно на  $\mu_{s1}, \mu_{s2}, \dots, \mu_{sm}$  и затем их сложить, то, в силу условия (2.7.28), в результате получим нуль, что означает линейную зависимость строк определителя. Отсюда следует, что определитель (2.7.29) равен нулю.

Итак, миноры матрицы  $U_1$ , окаймляющие не равный нулю минор ранга  $m-1$ , равны нулю. Поэтому ранг матрицы  $U_1$  равен  $m-1$ , т. е. равен рангу матрицы  $U$ . Значит, система (2.7.16) при  $\lambda = \lambda_{\sigma}$  разрешима.

### 7.1.2. Рекуррентные соотношения

Вернемся к системам уравнений (2.7.14), (2.7.15) и т. д. Рассмотрим сначала систему (2.7.14). В развернутом виде эта система имеет вид равенств (2.7.17). Каждому корню  $\lambda_{\sigma}$  характеристического многочлена соответствует решение системы  $k_{1\sigma}, k_{2\sigma}, \dots, k_{m\sigma}$ , которое, будем считать, удовлетворяет условию (2.7.20). Так как коэффициенты  $u_{ij}$  есть функции от времени, то корни  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  тоже являются функциями времени  $t$ . Далее будем предполагать, что на рассматриваемом промежутке времени все корни остаются простыми, т. е.

$$|\lambda_{\sigma}(t) - \lambda_s(t)| \geq c > 0 \quad (s \neq \sigma). \quad (2.7.30)$$

При  $\lambda = \lambda_{\sigma}$  и  $k_i = k_{i\sigma}$  равенство (2.7.14) выполняется тождественно, а остальные алгебраические системы (2.7.15), (2.7.15а),... можно записать так:

$$\sum_j u_{ij}(\tau) k_{j\sigma}^{[v]}(\tau) - k_{i\sigma}^{[v]}(\tau) \lambda_{\sigma}(\tau) = k_{i\sigma}^{(\tau)} \lambda_{\sigma}^{[v]}(\tau) + g_i^{[v-1]}(\tau) \quad (i = 1, 2, \dots, m; \quad v = 1, 2, \dots), \quad (2.7.31)$$

Здесь

$$g_i^{[0]} = \frac{dk_{i\sigma}}{d\tau}, \quad (2.7.32)$$

$$g_i^{[1]} = k_{i\sigma}^{[1]} \lambda_{\sigma}^{[1]} + \frac{dk_{i\sigma}^{[1]}}{d\tau}, \dots$$

и т. д.

Допустим, что  $k_{j\sigma}^{[1]}, \lambda_{\sigma}^{[1]}, \dots, k_{j\sigma}^{[v-1]}, \lambda_{\sigma}^{[v-1]}$  уже определены. Тогда  $g_i^{[v-1]}$  является известной функцией, и величины следующего приближения  $k_{j\sigma}^{[v]}, \lambda_{\sigma}^{[v]}$  могут быть определены из  $v$ -й системы (2.7.31) следующим образом.

Пусть

$$\mu_{s1}, \mu_{s2}, \dots, \mu_{sm} \quad (2.7.33)$$

есть решение однородной системы, сопряженной системе (2.7.17), при  $\lambda = \lambda_s$ , т. е. решение системы

$$\sum_j u_{ji} \mu_j - \mu_i \lambda_s = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (2.7.34)$$

Будем предполагать, что все решения вида (2.7.33), соответствующие корням  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  и удовлетворяющие, конечно, равенствам (2.7.23), выбраны из условия (2.7.27).

Условие разрешимости  $v$ -й линейной системы (2.7.31) запишется так:

$$\sum_{i=1}^m \mu_{\sigma i} (k_{i\sigma} \lambda_{\sigma}^{[v]} + g_i^{[v-1]}) = 0.$$

Отсюда, учитывая (2.7.27), находим

$$\lambda_{\sigma}^{[v]} = - \sum_{i=1}^m \mu_{\sigma i} g_i^{[v-1]}. \quad (2.7.35)$$

Для определения  $k_{j\sigma}^{[v]}$  каждое  $i$ -е равенство  $v$ -й системы (2.7.31) умножим на  $\mu_{si}$  и результаты сложим. Получим

$$\sum_i \mu_{si} \left( \sum_j u_{ij} k_{j\sigma}^{[v]} - k_{i\sigma}^{[v]} \lambda_{\sigma} \right) = \sum_i \mu_{si} (k_{i\sigma} \lambda_{\sigma}^{[v]} + g_i^{[v-1]}),$$

или, меняя порядок суммирования,

$$\sum_j k_{j\sigma}^{[v]} \sum_i u_{ij} \mu_{si} - \sum_i \mu_{si} k_{i\sigma}^{[v]} \lambda_{\sigma} = \sum_i \mu_{si} k_{i\sigma} \lambda_{\sigma}^{[v]} + \sum_i \mu_{si} g_i^{[v-1]}.$$

Отсюда, учитывая, что

$$\sum_i u_{ij} \mu_{si} = \lambda_{\sigma} \mu_{sj},$$

[см. (2.7.34)], получаем

$$\sum_i \mu_{si} k_{i\sigma}^{[v]} (\lambda_s - \lambda_{\sigma}) = \sum_i \mu_{si} k_{i\sigma} \lambda_{\sigma}^{[v]} + \sum_i \mu_{si} g_i^{[v-1]}. \quad (2.7.36)$$

При  $s \neq \sigma$   $\sum_i \mu_{si} k_{i\sigma} = 0$ ,  $\lambda_s \neq \lambda_{\sigma}$  и мы имеем из (2.7.36)

$$\sum_{i=1}^m \mu_{si} k_{i\sigma}^{[v]} = \frac{\sum_{i=1}^m \mu_{si} g_i^{[v-1]}}{\lambda_s - \lambda_{\sigma}} \quad (s \neq \sigma).$$

При  $s = \sigma$  правая часть равенства (2.7.36) равна нулю в силу (2.7.35) и  $\lambda_s = \lambda_{\sigma}$ , так что можем принять

$$\sum_{i=1}^m \mu_{\sigma i} k_{i\sigma}^{[v]} = c_{\sigma}^{[v]},$$

где  $c_{\sigma}^{[v]}$  — произвольная, нужное число раз дифференцируемая функция.

Итак, искомые величины  $k_{i\sigma}^{[v]}$  удовлетворяют следующей системе алгебраических уравнений:

$$\sum_{i=1}^m \mu_{si} k_{i\sigma}^{[v]} = \begin{cases} b_{s\sigma}^{[v-1]} & (s \neq \sigma), \\ c_{\sigma}^{[v]} & (s = \sigma), \end{cases} \quad (2.7.37)$$

где

$$b_{s\sigma}^{[v-1]} = \frac{1}{\lambda_s - \lambda_{\sigma}} \sum_{i=1}^m \mu_{si} g_i^{[v-1]}. \quad (2.7.38)$$

Определитель системы (2.7.37) равен:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \dots & \mu_{1m} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \dots & \mu_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_{m1} & \mu_{m2} & \dots & \mu_{mm} \end{vmatrix}.$$

Как видим, строками этого определителя служат ненулевые решения системы (2.7.34) при  $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ . Так как все корни  $\lambda_i$  различны, то все  $m$  ненулевые решения системы (2.7.34) линейно независимы и, значит, определитель  $\Delta$  отличен от нуля. Учитывая это, по правилу Крамера из (2.7.37) находим

$$k_{i\sigma}^{[v]} = \sum_{s \neq \sigma} \frac{\Delta_{si}}{\Delta} b_{s\sigma}^{[v-1]} + \frac{\Delta_{\sigma i}}{\Delta} c_{\sigma}^{[v]} \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Здесь  $\Delta_{si}$  — алгебраическое дополнение элемента  $\mu_{si}$  определителя  $\Delta$ .

Можно показать, что отношение  $\frac{\Delta_{si}}{\Delta} = k_{is}$ . Учитывая это, будем иметь

$$k_{i\sigma}^{[v]} = \sum_{s \neq \sigma} k_{is} b_{s\sigma}^{[v-1]} + k_{i\sigma} c_{\sigma}^{[v]} \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (2.7.39)$$

Произвол, имеющий при определении  $k_{i\sigma}^{[v]}$ , используем следующим образом.

Пусть  $K_{\sigma}$  — вектор с компонентами  $k_{1\sigma}, k_{2\sigma}, \dots, k_{m\sigma}$ ;  $K_{\sigma}^{[v]}$  — вектор с компонентами  $k_{1\sigma}^{[v]}, k_{2\sigma}^{[v]}, \dots, k_{m\sigma}^{[v]}$ ;  $\tilde{K}_{\sigma}$  — вектор с компонентами  $\tilde{k}_{1\sigma}, \tilde{k}_{2\sigma}, \dots, \tilde{k}_{m\sigma}$ . Тогда  $m$  первых рядов (2.7.12) можно записать так:

$$\tilde{K}_{\sigma}(\tau, \varepsilon) = K_{\sigma}(\tau) + \varepsilon K_{\sigma}^{[1]}(\tau) + \varepsilon^2 K_{\sigma}^{[2]}(\tau) + \dots \quad (2.7.40)$$

Члены этого ряда  $K_{\sigma}^{[v]}$  ( $v=1, 2, \dots$ ) в соответствии с (2.7.39) определяются по формуле

$$K_{\sigma}^{[v]} = \sum_{s \neq \sigma} K_s b_{s\sigma}^{[v-1]} + K_{\sigma} c_{\sigma}^{[v]}. \quad (2.7.41)$$

Выбор произвольных функций  $c_{\sigma}^{[v]}$  ( $v=1, 2, \dots$ ) подчиним условию равенства единице модуля вектора  $K_{\sigma}$ . Квадрат модуля вектора  $K_{\sigma}$  равен:

$$|\tilde{K}_{\sigma}|^2 = (\tilde{K}_{\sigma}, \tilde{K}_{\sigma}) = (K_{\sigma}, K_{\sigma}) + \varepsilon [(K_{\sigma}, K_{\sigma}^{[1]}) + (K_{\sigma}^{[1]}, K_{\sigma})] + \\ + \varepsilon^2 [(K_{\sigma}, K_{\sigma}^{[2]}) + (K_{\sigma}^{[1]}, K_{\sigma}^{[1]}) + (K_{\sigma}^{[2]}, K_{\sigma})] + \varepsilon^3 \dots \quad (2.7.42)$$

В силу (2.7.20)

$$(K_{\sigma}, K_{\sigma}) = 1. \quad (2.7.43)$$

Далее, учитывая (2.7.41) и (2.7.43), находим

$$(K_{\sigma}, K_{\sigma}^{[1]}) + (K_{\sigma}^{[1]}, K_{\sigma}) = (K_{\sigma}, \sum_{s \neq \sigma} K_s b_{s\sigma}^{[0]} + K_{\sigma} c_{\sigma}^{[1]}) + \\ + (\sum_{s \neq \sigma} K_s b_{s\sigma}^{[0]} + K_{\sigma} c_{\sigma}^{[1]}, K_{\sigma}) = \sum_{s \neq \sigma} (K_{\sigma}, K_s b_{s\sigma}^{[0]}) + \sum_{s \neq \sigma} (K_s b_{s\sigma}^{[0]}, K_{\sigma}) + 2c_{\sigma}^{[1]}.$$

Отсюда видно, что если принять

$$c_{\sigma}^{[1]} = -\frac{1}{2} \sum_{s \neq \sigma} [(K_{\sigma}, K_s b_{s\sigma}^{[0]}) + (K_s, K_{\sigma} b_{s\sigma}^{[0]})],$$

то слагаемое в (2.7.42), содержащее  $\varepsilon$  в первой степени, обратится в нуль.

Тем же способом можно  $c_{\sigma}^{[2]}$  выбрать так, чтобы в (2.7.42) обратилось в нуль слагаемое, содержащее  $\varepsilon^2$  и т. д. Таким образом, при соответствующем выборе  $c_{\sigma}^{[1]}$ ,  $c_{\sigma}^{[2]}$ ,  $c_{\sigma}^{[3]}$ , ... будем иметь

$$|\tilde{K}_{\sigma}| = 1. \quad (2.7.44)$$

Не оговаривая особо, далее будем предполагать, что выбор функций  $c_{\sigma}^{[v]}$  подчинен условию (2.7.44).

Полученные рекуррентные формулы (2.7.35) и (2.7.39) позволяют последовательно определять члены рядов (2.7.12) [и, следовательно, ряда (2.7.40)], посредством которых частное решение дифференциальных уравнений (2.7.9), соответствующее корню  $\lambda_{\sigma}(\tau)$  характеристического многочлена, представляется в форме (2.7.10). Каждому корню  $\lambda_s(\tau)$  ( $s=1, 2, \dots, m$ ) соответствует частное решение такого вида.

Полагая в (2.7.12)  $\varepsilon=1$ , получим частные решения исходной системы (2.7.3):

$$x_{i\sigma}(t) = \tilde{k}_{i\sigma}(t) e^{\int \tilde{\lambda}_{\sigma}(t) dt} \quad (i=1, \dots, m; \quad \sigma=1, \dots, m), \quad (2.7.45)$$

отвечающие корням  $\lambda_1(t)$ ,  $\lambda_2(t)$ , ...,  $\lambda_m(t)$  характеристического многочлена. Здесь

$$\tilde{k}_{i\sigma}(t) = \tilde{k}_{i\sigma}(\tau, \varepsilon) \big|_{\varepsilon=1}, \quad \tilde{\lambda}_{\sigma}(t) = \tilde{\lambda}_{\sigma}(\tau, \varepsilon) \big|_{\varepsilon=1}.$$

В векторной записи частные решения (2.7.45) имеют вид

$$X_{\sigma}(t) = \tilde{K}_{\sigma}(t) e^{\int \tilde{\lambda}_{\sigma}(t) dt} \quad (\sigma=1, 2, \dots, m), \quad (2.7.46)$$

где  $X_{\sigma}$  — вектор с компонентами  $x_{1\sigma}$ ,  $x_{2\sigma}$ , ...,  $x_{m\sigma}$ .

Построенные частные решения являются формальными решениями системы (2.7.3), так как не доказана сходимость рядов (2.7.12). Для практических целей в этом и нет надобности, ибо трудоемкость расчетов резко возрастает с ростом номера  $v$ , и практически может быть определено лишь некоторое число первых членов рядов (2.7.12).

Удерживая в рядах (2.7.12) конечное число первых членов, будем иметь приближенные решения уравнений (2.7.3). Расчеты показывают, что при рассмотрении уравнений возмущенного движения ракеты достаточно ограничиться лишь первыми двумя членами разложения (2.7.12). Учет последующих членов не вносит в результат существенной поправки.

## 7.2. Критерии устойчивости

Исследуем поведение частных решений в окрестности фиксированного момента времени  $t_0$ .

Модуль частного решения дифференциальных уравнений (2.7.3) равен:

$$|X_\sigma| = \sqrt{(\tilde{X}_\sigma, X_\sigma)} = \sqrt{(\tilde{K}_\sigma, \tilde{K}_\sigma)} e^{2\operatorname{Re} \int \tilde{\lambda}_\sigma(t) dt}$$

или, учитывая (2.7.44),

$$|X_\sigma| = e^{\int \operatorname{Re} \tilde{\lambda}_\sigma(t) dt}. \quad (2.7.47)$$

Дифференцируя (2.7.47), получим

$$\frac{d|X_\sigma|}{dt} = \operatorname{Re} \tilde{\lambda}_\sigma(t) e^{\int \operatorname{Re} \tilde{\lambda}_\sigma(t) dt}. \quad (2.4.48)$$

Пусть  $\operatorname{Re} \tilde{\lambda}_\sigma(t_0) < 0$ . Тогда по непрерывности неравенство  $\tilde{\lambda}_\sigma(t) < 0$  имеет место и в пределах некоторого конечного промежутка времени. Согласно (2.7.48) на этом промежутке модуль частного решения  $X_\sigma$  является убывающей функцией.

Если  $\operatorname{Re} \tilde{\lambda}_\sigma(t_0) > 0$ , то, по крайней мере в достаточно малой окрестности точки  $t_0$ ,  $X_\sigma$  есть возрастающая по модулю функция.

Отсюда вытекают следующие условия устойчивости и неустойчивости невозмущенного движения [тривиального решения уравнений (2.7.3)].

Если все функции  $\tilde{\lambda}_\sigma(t)$  удовлетворяют неравенствам

$$\operatorname{Re} \tilde{\lambda}_\sigma(t_0) < 0 \quad (\sigma = 1, 2, \dots, m), \quad (2.7.49)$$

то невозмущенное движение [тривиальное решение уравнений (2.7.3)] обладает устойчивостью на конечном промежутке времени  $[t_0, t_0 + \Delta t]$ ; если же среди функций  $\tilde{\lambda}_\sigma$  имеется хотя бы одна функция  $\tilde{\lambda}_i(t)$ , такая, что

$$\operatorname{Re} \tilde{\lambda}_i(t_0) > 0,$$

то невозмущенное движение неустойчиво ( $\Delta t = 0$ ).

Подставим значения функций  $\tilde{\lambda}_\sigma$  в (2.7.49). Тогда условие устойчивости запишется так:

$$\operatorname{Re} (\lambda_\sigma + \lambda_\sigma^{[1]} + \lambda_\sigma^{[2]} + \dots) < 0 \quad (\sigma = 1, 2, \dots, m). \quad (2.7.50)$$

Удерживая в левых частях неравенств (2.7.50) только первые члены, получим критерий устойчивости в простейшем виде, совпадающий с критерием устойчивости по методу замороженных коэффициентов:

$$\operatorname{Re} \lambda_\sigma < 0 \quad (\sigma = 1, 2, \dots, m). \quad (2.7.51)$$

Сохраняя два первых члена в разложениях  $\lambda_\sigma$ , получим уточненный критерий устойчивости, учитывающий уже переменность коэффициентов уравнений:

$$\operatorname{Re}(\lambda_\sigma + \lambda_\sigma^{[1]}) < 0 \quad (\sigma = 1, 2, \dots, m).$$

Подставив сюда значения  $\lambda_\sigma^{[1]}$ , будем иметь

$$\operatorname{Re}\left(\lambda_\sigma - \sum_{i=1}^m \mu_{\sigma i} \frac{dk_{i\sigma}}{dt}\right) < 0 \quad (\sigma = 1, 2, \dots, m). \quad (2.7.52)$$

Следующее приближение дает

$$\operatorname{Re}(\lambda_\sigma + \lambda_\sigma^{[1]} + \lambda_\sigma^{[2]}) < 0$$

и т. д.

### 7.3. О применимости приближенных критериев устойчивости

Устойчивость и неустойчивость невозмущенного движения, как было показано выше, определяются в зависимости от знаков функций

$$\operatorname{Re}(\lambda_\sigma + \lambda_\sigma^{[1]} + \dots + \lambda_\sigma^{[l]}) \quad (\sigma = 1, 2, \dots, m). \quad (2.7.53)$$

Трудоемкость расчета членов ряда

$$\lambda_\sigma + \lambda_\sigma^{[1]} + \lambda_\sigma^{[2]} + \dots \quad (2.7.54)$$

с увеличением порядкового номера резко возрастает, поэтому приведенными критериями устойчивости удобно пользоваться при небольших  $l$ . Поскольку эти критерии не являются точными, то в тех случаях, когда среди функций (2.7.53) имеются очень близкие к нулю, приближенные критерии устойчивости становятся сомнительными. Поэтому важно, с одной стороны, правильно определить число  $l$ , а с другой — уметь оценить достоверность приближенных критериев устойчивости при выбранном  $l$ . Строгое решение этих вопросов очень трудно. Можно рекомендовать следующий практический способ выбора  $l$  и оценки достоверности приближенных критериев устойчивости. Будем считать, что число  $l$  выбрано правильно, а соответствующий критерий устойчивости обладает достаточной достоверностью, если в качестве  $l$  выбрано наименьшее целое положительное число или 0, при котором

$$\frac{|\operatorname{Re} \lambda_\sigma^{[l+1]}(t_0)|}{|\operatorname{Re} [\lambda_\sigma(t_0) + \lambda_\sigma^{[1]}(t_0) + \dots + \lambda_\sigma^{[l]}(t_0)]|} \ll 1, \quad (\sigma = 1, 2, \dots, m), \quad (2.7.55)$$

понимая усиленное неравенство в том смысле, что левая часть его по крайней мере на один порядок меньше правой части.

Условием (2.7.55) можно пользоваться, в частности, для определения применимости метода замороженных коэффициентов. Так, при выполнении неравенств

$$\frac{|\operatorname{Re} \lambda_\sigma^{[1]}(t_0)|}{|\operatorname{Re} \lambda_\sigma(t_0)|} \ll 1 \quad (\sigma = 1, 2, \dots, m) \quad (2.7.56)$$

приближенное условие устойчивости будет иметь вид

$$\operatorname{Re} \lambda_\sigma < 0 \quad (\sigma = 1, 2, \dots, m), \quad (2.7.57)$$

что в точности совпадает с условием устойчивости по методу замороженных коэффициентов. Невыполнение условия (2.7.56), хотя бы при одном  $\sigma$ , означает неприменимость метода замороженных коэффициентов.

Критерии устойчивости, установленные выше, справедливы при условии, что все корни характеристического многочлена простые. При наличии равных корней эти критерии неприменимы, так как в этом случае рекуррентные соотношения для  $K_{\sigma}^{[k]}$  и  $\lambda_{\sigma}^{[k]}$  теряют смысл.

В заключение — несколько слов о влиянии переменности коэффициентов уравнений на устойчивость движения системы.

Анализируя соотношения, определяющие  $\lambda_{\sigma}^{[1]}$ ,  $\lambda_{\sigma}^{[2]}$ , ..., можно ожидать, что влияние переменности коэффициентов уравнений возмущенного движения, вообще говоря, будет больше на тех участках траектории, где производные  $dk_{i\sigma}/dt$  велики, т. е. где происходит резкое изменение компонентов решения уравнений (2.7.14). Расчеты конкретных систем подтверждают это пред-

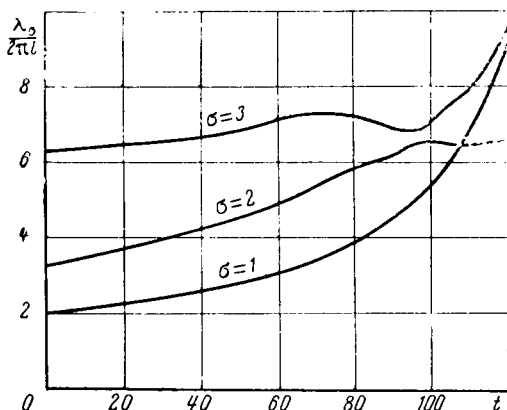


Рис. 2. 14.

положение. Для примера приведем результаты расчетов, связанных с исследованием свободных колебаний механической системы, движение которой описывается системой уравнений вида

$$\sum_j m_{ij}(t) \frac{d^2 q_j}{dt^2} + \sum_j n_{ij}(t) q_j = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (2.7.58)$$

где  $m_{ij} \equiv m_{ji}$ ,  $n_{ij} \equiv n_{ji}$ .

На рис. 2. 14 показано изменение трех ненулевых корней характеристического многочлена дифференциальных уравнений, полученных в результате преобразования уравнений (2.7.58) к нормальному виду. Эти и другие ненулевые корни чисто мнимые и поэтому  $\text{Re} \lambda_{\sigma} = 0$ . Согласно простейшему критерию устойчивости система находится на границе области устойчивости. Этот результат совпадает с выводами, получаемыми по методу замороженных коэффициентов, и выражает тот физический факт, что если коэффициенты уравнений были бы постоянными величинами, то колебания системы происходили бы с постоянными амплитудами. Переменность коэффициентов не только количественно, но и качественно меняет картину. На рис. 2. 15 представлены функции  $\lambda_{\sigma}^{[1]}$ . Расчет последующих поправок  $\lambda_{\sigma}^{[2]}$  показал, что на всем рассматри-



васом диапазоне времени  $\lambda_0^{[2]}$  имеют пренебрежимо малые значения, так что влияние переменности коэффициентов уравнений, по крайней мере в данном примере, практически полностью учитывается функциями  $\lambda_0^{[1]}$ .

Из рис. 2.15 видно, что переменность коэффициентов может оказывать как демпфирующее влияние, так и, наоборот, может быть причиной возбуждения колебаний в системе. В данном случае переменность коэффициентов приводит к демпфированию колебаний второго тона и расщепке колебаний третьего то-

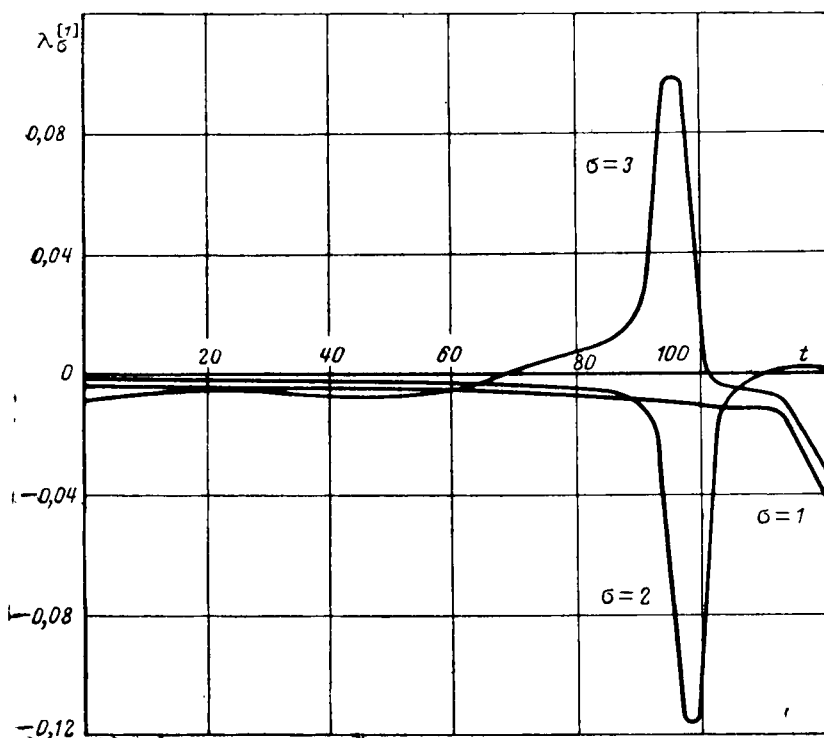


Рис. 2. 15.

на. Наиболее сильно эти эффекты проявляются на участке, где происходит сближение корней  $\lambda_2$  и  $\lambda_3$  друг с другом. Вместе с тем сближение и даже пересечение корней  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  не изменило заметным образом характера протекания кривых  $\text{Re}(\lambda_{\sigma} + \lambda^{[1]})$ . Это значит, что сближение корней характеристического многочлена не обязательно влечет за собой увеличение влияния переменности коэффициентов.

Более подробный анализ показывает, что влияние переменности коэффициентов уравнений возмущенного движения на устойчивость невозмущенного движения велико на тех участках траектории, где происходит резкое изменение компонентов векторов  $K_{\sigma}$ , составленных из решений системы (2.7.14). В свою очередь, резкое изменение компонентов этих векторов можно ожидать там, где происходит сближение корней характеристического многочлена друг с другом. На тех участках траектории, где среди корней характеристического многочлена нет близких корней, влияние переменности коэффициентов на ха-

рактор движения объекта мало, и поэтому может оказаться достаточным исследование устойчивости в рамках метода замороженных коэффициентов, если, конечно, промежуток времени, в пределах которого рассматривается движение системы, не слишком велик: за большой промежуток времени, даже при малом эффекте от переменности коэффициентов, амплитуда колебаний может возрасти до недопустимо больших значений.

## § 8. ЭФФЕКТИВНОСТЬ И ПРЕДЕЛЬНО ДОПУСТИМЫЕ ОТКЛОНЕНИЯ ОРГАНОВ УПРАВЛЕНИЯ

Эффективность и предельно допустимые отклонения являются основными показателями органов управления.

Эффективность органов управления характеризуется отношением управляющего момента, возникающего при единичном отклонении органа управления, к соответствующему моменту инерции летательного аппарата. Так, эффективность органов управления тангажом определяется динамическим коэффициентом  $c_{\vartheta\delta}/J_z$ ; эффективность органов управления рысканием определяется динамическим коэффициентом  $c_{\psi\delta}/J_y$ ; эффективность органов управления креном определяется динамическим коэффициентом  $c_{\gamma\delta}/J_x$ .

Эффективность и предельно допустимые отклонения органов управления определяют максимальные управляющие моменты, которые могут быть созданы органами управления. Максимальные моменты, создаваемые органами управления тангажом, рысканием и креном, отнесенные к соответствующим моментам инерции ракеты, равны:

$$\frac{c_{\vartheta\delta}}{J_z} \delta_{\vartheta \max}, \quad \frac{c_{\psi\delta}}{J_y} \delta_{\psi \max}, \quad \frac{c_{\gamma\delta}}{J_x} \delta_{\gamma \max},$$

где  $\delta_{\vartheta \max}$ ,  $\delta_{\psi \max}$ ,  $\delta_{\gamma \max}$ , — соответственно предельно допустимые отклонения органов управления тангажом, рысканием и креном.

Требования к эффективности и предельным отклонениям органов управления вырабатываются при формировании системы управления ракетой в зависимости от задач, возлагаемых на эти системы, и условий их работы. Требования эти обычно могут быть удовлетворены при различных комбинациях эффективности и предельных отклонений органов управления, и задача конструктора — определить оптимальное соотношение между этими характеристиками. При прочих равных условиях эффективность органов управления прямо пропорциональна площади воздушных и газовых рулей, тяге двигателей, используемых для создания управляющего момента, и т. п. Поэтому естественное стремление конструктора к экономии веса вызывает тенденцию к уменьшению эффективности органов управления. Однако уменьшение размеров и веса органа управления не обязательно приводит к уменьшению веса всей ракеты. Необходимость увеличе-

ния предельно допустимого отклонения органа управления в связи с уменьшением ее эффективности в конечном итоге может привести к увеличению веса всей ракеты, так как при больших отклонениях органов управления происходит уменьшение их эффективности, увеличение аэродинамического сопротивления воздушных рулей и потерь тяги поворотных двигателей, используемых для создания управляющих моментов. Кроме того, увеличение предельных отклонений органов управления может оказаться затруднительным по различным конструктивным соображениям.

Таким образом, задачи по определению потребной эффективности и предельных отклонений органов управления находятся в тесной взаимосвязи и должны решаться совместно для отыскания оптимальных решений.

Решение этих задач удобно провести путем сравнения нескольких вариантов, отличающихся различными значениями предельных отклонений органов управления. Расчет каждого варианта сводится к определению потребной эффективности органов управления при заданных значениях предельных отклонений и условию, что аппарат обладает необходимыми динамическими качествами, например при воздействии на аппарат в полете различных возмущающих факторов возмущения параметров движения в конце активного участка траектории не выходят за определенные пределы. В такой постановке для определения потребной эффективности органов управления необходимо знать, как изменяются параметры возмущенного движения аппарата при наличии ограничений на отклонения органов управления, т. е. при условии, что

$$|\delta'(t)| \leq \delta_{\max}. \quad (2.8.1)$$

Таким образом, выбор основных параметров органов управления (эффективности и предельных отклонений) связан с определением возмущений параметров движения ракеты при условии (2.8.1). Для определения же возмущений параметров движения необходимо проинтегрировать уравнения возмущенного движения совместно с принятым законом управления.

Условие (2.8.1) может быть несколько упрощено. Учитывая, что

$$\delta'(t) = \delta(t) + \Delta\delta(t),$$

где  $\delta(t)$  — отклонение органа управления, потребное для полета по программной траектории, согласно (2.8.1) имеем

$$|\delta(t) + \Delta\delta(t)| \leq \delta_{\max}. \quad (2.8.2)$$

Баллистическая ракета является маломаневренным летательным аппаратом, и потребные отклонения органов управления

при полете по программной траектории малы. Поэтому условие (2.8.2), которое должно удовлетворяться на всех участках управляемого полета, можно заменить приближенным условием

$$|\Delta\delta(t)| \leq \delta_{\max}. \quad (2.8.3)$$

### 8.1. Эффективность органов управления тангажом и рысканием

Возмущенное движение ракеты в плоскостях тангажа и рыскания описывается подобными уравнениями, поэтому исследование эффективности и выбор рациональных параметров органов управления тангажом и рысканием могут быть проведены одинаковыми методами. Учитывая это, ограничимся здесь рассмотрением только движения по рысканию.

Возмущенное движение ракеты по рысканию описывается системой уравнений (1.13.9). Закон управления в достаточно общем случае имеет вид

$$T_2^2 \frac{d^2 \Delta\delta_\psi}{dt^2} + T_1 \frac{d \Delta\delta_\psi}{dt} + \Delta\delta_\psi = k \Delta\psi + k_1 \frac{d \Delta\psi}{dt} - k_{V_z} \Delta V_z - k_z \Delta z. \quad (2.8.4)$$

Таким образом, замкнутая система уравнений возмущенного движения ракеты по рысканию представляется так:

$$\begin{aligned} m \frac{d \Delta V_z}{dt} + \gamma_z \frac{d \Delta\psi}{dt} + c_{zz} \Delta V_z + c_{z\psi} \Delta\psi &= c_{z\delta} \Delta\delta_\psi + \Delta F_z, \\ J_y \frac{d^2 \Delta\psi}{dt^2} + \mu_y \frac{d \Delta\psi}{dt} + c_{\psi z} \Delta V_z + c_{\psi\psi} \Delta\psi &= c_{\psi\delta} \Delta\delta_\psi + \Delta M_y, \\ k_1 \frac{d \Delta\psi}{dt} - k_{V_z} \Delta V_z + k \Delta\psi - k_z \Delta z &= T_2^2 \frac{d^2 \Delta\delta_\psi}{dt^2} + T_1 \frac{d \Delta\delta_\psi}{dt} + \Delta\delta_\psi, \\ \frac{d \Delta z}{dt} &= \Delta V_z. \end{aligned} \quad (2.8.5)$$

Неизвестными функциями являются  $\Delta z(t)$ ,  $\Delta V_z(t)$ ,  $\Delta\psi(t)$  и  $\Delta\delta_\psi(t)$ . Для того чтобы судить об эффективности органов управления ракеты, надо знать, как изменяются эти функции на траектории при заданных начальных значениях и воздействии на ракету всевозможных возмущающих факторов.

Таким образом, задача исследования управляемости ракеты по рысканию приводит к необходимости интегрирования системы уравнений (2.8.5) при заданных начальных условиях:

$$\begin{aligned} \Delta z(t_0) &= \Delta z_0, \quad \left. \frac{d \Delta z}{dt} \right|_{t=t_0} = \Delta V_{z0}, \quad \Delta\psi(t_0) = \Delta\psi_0, \\ \left. \frac{d \Delta\psi}{dt} \right|_{t=t_0} &= \dot{\Delta\psi}_0, \quad \Delta\delta_\psi(t_0) = \Delta\delta_{\psi_0}, \quad \left. \frac{d \Delta\delta_\psi}{dt} \right|_{t=t_0} = \dot{\Delta\delta}_{\psi_0} \end{aligned} \quad (2.8.6)$$

и ограничении

$$|\Delta\delta_\psi(t)| \leq \delta_{\psi \max}. \quad (2.8.7)$$

Ограничение отклонений органов управления вводит в задачу нелинейность. Это затруднение можно преодолеть следующим путем.

Допустим, что  $\Delta\delta_\psi = \Delta\delta_\psi(t)$  есть решение системы (2.8.5) при начальных условиях (2.8.6) без учета условия (2.8.7). Это решение, начиная с начального момента  $t_0$ , остается справедливым и при условии (2.8.7) пока

$$|\Delta\delta_\psi(t)| < \delta_{\psi \max}$$

или

$$|\Delta\delta_\psi(t)| = \delta_{\psi \max},$$

но в последнем случае — если  $|\Delta\delta_\psi(t)|$  — невозрастающая функция.

Пусть в некоторый момент времени  $t_1$  отклонение органа управления достигает предельного значения и при этом  $|\Delta\delta_\psi(t)|$  — возрастающая функция.

Тогда начиная с этого момента возмущенное движение ракеты будет описываться другими уравнениями, а именно: уравнениями

$$\begin{aligned} m \frac{d\Delta V_z}{dt} + v_z \frac{d\Delta\psi}{dt} + c_{zz}\Delta V_z + c_{z\psi}\Delta\psi &= \pm c_{z\delta}\delta_{\psi \max} + \Delta F_z, \\ J_y \frac{d^2\Delta\psi}{dt^2} + \mu_y \frac{d\Delta\psi}{dt} + c_{\psi z}\Delta V_z + c_{\psi\psi}\Delta\psi &= \pm c_{\psi\delta}\delta_{\psi \max} + \Delta M_y, \\ \frac{d\Delta z}{dt} &= \Delta V_z \end{aligned} \quad (2.8.8)$$

при начальных условиях:

$$\begin{aligned} \Delta z(t_1) &= \Delta z_1, \quad \left. \frac{d\Delta z}{dt} \right|_{t=t_1} = \Delta V_{z1}, \\ \Delta\psi(t_1) &= \Delta\psi_1, \quad \left. \frac{d\Delta\psi}{dt} \right|_{t=t_1} = \dot{\Delta\psi}_1, \end{aligned}$$

где  $\Delta z_1$ ,  $\Delta V_{z1}$ ,  $\Delta\psi_1$ ,  $\dot{\Delta\psi}_1$  — значения в момент времени  $t_1$  соответствующих функций, представляющих решение системы (2.8.5) при начальных условиях (2.8.6). Перед коэффициентами  $c_{z\delta}$  и  $c_{\psi\delta}$  следует принять знак «+», если  $\Delta\delta_\psi(t_1) > 0$ , и «—», если  $\Delta\delta_\psi(t_1) < 0$ .

Система (2.8.8) описывает возмущенное движение ракеты вплоть до момента времени  $t_2$ , когда

$$|k\Delta\psi + k_1\dot{\Delta\psi} - k_{V_z}\Delta V_z - k_z\Delta z| = \delta_{\psi \max}, \quad (2.8.9)$$

причем левая часть равенства (2.8.9) в момент  $t_2$  — убывающая функция.

Начиная с момента времени  $t_2$  вновь возмущенное движение описывается системой (2.8.5) и т. д.

Таким образом, искомые величины  $\Delta z(t)$ ,  $\Delta V_z(t)$ ,  $\Delta \psi(t)$  можно получить как решения систем (2.8.5) и (2.8.8), «сшитые» друг с другом в граничных точках  $t_1, t_2, \dots$

Допустим, что из тех или иных соображений заданы предельно допустимые значения возмущений  $\Delta z$ ,  $\Delta V_z$ ,  $\Delta \psi$ ,  $\Delta \dot{\psi}$  (или на всей траектории, или на отдельных участках ее). Тогда, решая системы уравнений возмущенного движения при различных фиксированных значениях параметров органов управления, можно выбрать рациональные значения параметров органов управления при условии, что ограничения, накладываемые на параметры движения, не нарушаются.

Интегрирование уравнений следует производить отдельно, предполагая каждый раз, что на аппарат действуют возмущающие силы и моменты, связанные с одним из возмущающих факторов. Действие всевозможных возмущений можно суммировать по среднеквадратичному закону, если предположить, что эти возмущения независимы и каждое из них подчиняется нормальному закону распределения. Пусть, например,  $x_1, \dots, x_n$  — значения параметра движения  $x$  при воздействии  $n$  независимых возмущений. Тогда выбор параметров органов управления должен быть подчинен условию

$$\sqrt{\sum_i x_i^2} \leq \bar{x},$$

где  $\bar{x}$  — предельно допустимое значение параметра движения  $x$ .

Основными возмущениями, влияющими на выбор эффективности органов управления, являются ветер и возмущения от двигательной установки.

Системы уравнений (2.8.5) и (2.8.8) в общем случае могут быть проинтегрированы численным методом. При некоторых дополнительных упрощениях возможно построение решений этих систем в квадратурах.

Допустим, что начиная с момента времени  $t_0$  на аппарат действуют постоянные возмущающие силы ( $\Delta F_z = \text{const}$ ,  $\Delta M_y = \text{const}$ ) и что возмущенное движение описывается дифференциальными уравнениями, коэффициенты которых также постоянны. В момент времени  $t_0$  начинается переходный процесс, в котором вначале происходит быстрое изменение угловых параметров движения. Если ракета устойчива, то вскоре угловые параметры принимают значения, равные, или, точнее, близкие к их значениям в установившемся режиме. В дальнейшем эти параметры остаются постоянными или же, медленно изменяясь, асимптотически приближаются к установившимся значениям величин, так что их производные близки к нулю. Поэтому возмущенное движение аппарата после окончания этапа быстрого изменения угловых па-

параметров приближенно можно описать уравнениями, которые получаются из исходных уравнений возмущенного движения, если в последних пренебречь производными от угловых величин.

Если возмущающие силы и коэффициенты уравнений изменяются медленно, то после первого этапа возмущенного движения, когда происходит быстрое изменение угловых параметров движения, наступает некоторый квазистатический режим полета, в котором угловые величины изменяются, но медленно, так что и в этом случае производные угловых параметров остаются малыми величинами. Учитывая это, уравнения возмущенного движения можно упростить, отбросив производные угловых параметров движения и производные углов отклонения органов управления.

Что касается первого этапа возмущенного движения, то и здесь уравнения возмущенного движения можно значительно упростить. Если ракета устойчива, то первый этап возмущенного движения заканчивается относительно быстро и за это время динамические коэффициенты уравнений изменяются мало. Поэтому при анализе эффективности органов управления на первом этапе возмущенного движения, которое начинается в результате воздействия возмущающих сил по ступенчатому закону, или кратковременного воздействия возмущений, как, например, при разделении ступеней и т. д., переменностью коэффициентов можно пренебречь. Тогда задача сводится к интегрированию линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, что уже не представляет труда.

На первом этапе возмущенного движения быстрое изменение претерпевают угловые параметры, а скорость  $\Delta V_z$  и координата  $\Delta z$  изменяются незначительно. Поэтому можно уравнения (2.8.5) подвергнуть дальнейшему упрощению, отбросив первое и четвертое уравнения и пренебрегая влиянием возмущений  $\Delta V_z$ ,  $\Delta z$  на вращательное движение ракеты вокруг центра масс.

Итак, в тех случаях, когда рассматриваемое возмущенное движение устойчивой ракеты имеет квазистатический характер, уравнения возмущенного движения можно упростить, отбросив члены, содержащие производные угловых величин; при анализе же процессов на первом этапе возмущенного движения, которое наступает в результате воздействия различных возмущений, можно пользоваться приемом замораживания коэффициентов, а также можно пренебречь влиянием возмущений  $\Delta V_z$ ,  $\Delta z$  на вращательное движение ракеты.

#### **8.1.1. Интегрирование уравнений в случае медленного изменения возмущающего воздействия при отсутствии регулирования движения центра масс ( $k_z = k_{V_z} = 0$ )**

Отбрасывая в уравнениях (2.8.5) производные от угловых величин и учитывая, что в данном случае  $k_z = k_{V_z} = 0$ , получим сле-

дующую систему уравнений, описывающую приближенно возмущенное движение ракеты в квазистатическом режиме:

$$\begin{aligned} m \frac{d\Delta V_z}{dt} + c_{zz}\Delta V_z + c_{z\psi}\Delta\psi &= c_{z\delta}\Delta\delta_\psi + \Delta F_z, \\ c_{\psi z}\Delta V_z + c_{\psi\psi}\Delta\psi &= c_{\psi\delta}\Delta\delta_\psi + \Delta M_y, \\ k\Delta\psi &= \Delta\delta_\psi. \end{aligned} \quad (2.8.10)$$

В случае когда рули занимают предельные положения, имеем

$$\begin{aligned} m \frac{d\Delta V_z}{dt} + c_{zz}\Delta V_z + c_{z\psi}\Delta\psi &= \pm c_{z\delta}\delta_{\psi \max} + \Delta F_z, \\ c_{\psi z}\Delta V_z + c_{\psi\psi}\Delta\psi &= \pm c_{\psi\delta}\delta_{\psi \max} + \Delta M_y. \end{aligned} \quad (2.8.11)$$

Система (2.8.11) действует до того момента времени, когда впервые (после того, как рули стали на упоры) одновременно выполняются соотношения:

$$|k\Delta\psi| = \delta_{\psi \max}, \quad \frac{d^l}{dt^l} |k\Delta\psi| < 0. \quad (2.8.12)$$

Здесь  $l$  обозначает наименьший порядок не равной 0 производной от  $|k\Delta\psi|$ .

Рассмотрим сначала систему (2.8.10).

Предполагая, что  $c_{\psi\psi} - kc_{\psi\delta} \neq 0$ , из второго и третьего уравнений находим

$$\Delta\psi = \frac{1}{c_{\psi\psi} - kc_{\psi\delta}} (\Delta M_y - c_{\psi z}\Delta V_z), \quad (2.8.13)$$

$$\Delta\delta = \frac{k}{c_{\psi\psi} - kc_{\psi\delta}} (\Delta M_y - c_{\psi z}\Delta V_z). \quad (2.8.14)$$

Подставив значения  $\Delta\psi$  и  $\Delta\delta$  в первое уравнение системы (2.8.10), получим

$$\frac{d\Delta V_z}{dt} + P(t)\Delta V_z = Q(t), \quad (2.8.15)$$

где

$$P = \frac{1}{m} \left( c_{zz} + \frac{kc_{\psi z}c_{z\delta} - c_{z\psi}c_{\psi z}}{c_{\psi\psi} - kc_{\psi\delta}} \right), \quad (2.8.16)$$

$$Q = \frac{1}{m} \left( \Delta F_z + \frac{kc_{z\delta} - c_{z\psi}}{c_{\psi\psi} - kc_{\psi\delta}} \right).$$

Общее решение линейного дифференциального уравнения (2.8.15) имеет вид

$$\Delta V_z = e^{-\int_{t_0}^t P dt} \left( c + \int_{t_0}^t Q e^{\int_{t_0}^{t'} P dt'} dt' \right). \quad (2.8.17)$$



Произвольная постоянная  $c$  определяется начальным значением  $\Delta V_z$ . Полагая в (2.8.17)  $t=t_0$ , получим

$$\Delta V_z(t_0) = \Delta V_{z0} = c.$$

Итак,

$$\Delta V_z = e^{-\int_{t_0}^t P dt} \left( \Delta V_{z0} + \int_{t_0}^t Q e^{\int_{t_0}^{t'} P dt'} dt' \right). \quad (2.8.18)$$

Формулы (2.8.13) и (2.8.14) вместе с выражением (2.8.18) представляют решение системы (2.8.10).

Тем же путем можно определить параметры движения  $\Delta V_z$  и  $\Delta \psi$  в случае, когда органы управления занимают предельные положения.

Из второго уравнения системы (2.8.11) имеем

$$\Delta \dot{\psi} = \frac{1}{c_{\psi\psi}} (\Delta M_y \pm c_{\psi\delta} \delta_{\psi \max} - c_{\psi z} \Delta V_z). \quad (2.8.19)$$

Подставляя (2.8.19) в первое уравнение системы (2.8.11), снова получим линейное дифференциальное уравнение вида (2.8.15), только теперь

$$P = \frac{1}{m} \left( c_{zz} - \frac{c_{z\psi} c_{\psi z}}{c_{\psi\psi}} \right),$$

$$Q = \frac{1}{m} \left[ \Delta F_z \pm \left( c_{z\delta} - \frac{c_{z\psi}}{c_{\psi\psi}} \right) \delta_{\psi \max} - \frac{c_{z\psi}}{c_{\psi\psi}} \Delta M_y \right]. \quad (2.8.20)$$

### 8.1.2. Учет регулирования скорости центра масс ( $k_z=0$ , $k_{V_z} \neq 0$ )

Из (2.8.5) в этом случае вытекают приближенные уравнения, описывающие движение ракеты в квазистатическом режиме:

$$m \frac{d\Delta V_z}{dt} + c_{zz} \Delta V_z + c_{z\psi} \Delta \psi = c_{z\delta} \Delta \delta_{\psi} + \Delta F_z,$$

$$c_{\psi z} \Delta V_z + c_{\psi\psi} \Delta \psi = c_{\psi\delta} \Delta \delta_{\psi} + \Delta M_y,$$

$$-k_{V_z} \Delta V_z + k \Delta \psi = \Delta \delta_{\psi}.$$

Эта система также приводится к линейному дифференциальному уравнению первого порядка

$$\frac{d\Delta V_z}{dt} + P \Delta V_z = Q. \quad (2.8.22)$$

Здесь

$$P = \frac{1}{m} \left[ c_{zz} + \frac{k c_{\psi z} c_{z\delta} - k_{V_z} (c_{z\psi} c_{\psi\delta} + c_{\psi\psi} c_{z\delta}) - c_{z\psi} c_{\psi z}}{c_{\psi\psi} - k c_{\psi\delta}} \right],$$

$$Q = \frac{1}{m} \left( \Delta F_z + \frac{k c_{z\delta} - c_{z\psi}}{c_{\psi\psi} - k c_{\psi\delta}} \Delta M_y \right). \quad (2.8.23)$$

Отклонения  $\Delta\psi$  и  $\Delta\delta_\psi$  определяются формулами:

$$\Delta\psi = \frac{1}{c_{\psi\psi} - kc_{\psi\delta}} [\Delta M_y - (c_{\psi z} + k_{V_z} c_{\psi\delta}) \Delta V_z], \quad (2.8.24)$$

$$\Delta\delta = \frac{1}{c_{\psi\psi} - kc_{\psi\delta}} [k\Delta M_y - (kc_{\psi z} + k_{V_z} c_{\psi\psi}) \Delta V_z], \quad (2.8.25)$$

которые следуют из второго и третьего уравнений системы (2.8.21).

### 8.1.3. Учет регулирования скорости и бокового смещения центра масс

Квазистатистический режим возмущенного движения в этом случае описывается уравнениями:

$$\begin{aligned} m \frac{d\Delta V_z}{dt} + c_{zz}\Delta V_z + c_{z\psi}\Delta\psi &= c_{z\delta}\Delta\delta_\psi + \Delta F_z, \\ c_{\psi z}\Delta V_z + c_{\psi\psi}\Delta\psi &= c_{\psi\delta}\Delta\delta_\psi + \Delta M_y, \\ -k_z\Delta z - k_{V_z}\Delta V_z + k\Delta\psi &= \Delta\delta, \\ \frac{d\Delta z}{dt} &= \Delta V_z. \end{aligned} \quad (2.8.26)$$

Из второго и третьего уравнений имеем

$$\Delta\psi = \frac{1}{c_{\psi\psi} - kc_{\psi\delta}} [\Delta M_y - (c_{\psi z} + c_{\psi\delta} k_{V_z}) \Delta V_z - k_z c_{\psi\delta} \Delta z], \quad (2.8.27)$$

$$\Delta\delta = \frac{1}{c_{\psi\psi} - kc_{\psi\delta}} [k\Delta M_y - (kc_{\psi z} + k_{V_z} c_{\psi\psi}) \Delta V_z - k_z c_{\psi\psi} \Delta z]. \quad (2.8.28)$$

Подставив значения  $\Delta\psi$  и  $\Delta\delta$  в первое уравнение системы (2.8.26), получим

$$\frac{d\Delta V_z}{dt} + P(t) \Delta V_z + R(t) \Delta z = Q(t), \quad (2.8.29)$$

где  $P$  и  $Q$  определяются формулами (2.8.23), а

$$R = \frac{k_z c_{\psi\psi} c_{z\delta}}{m (c_{\psi\psi} - kc_{\psi\delta})}. \quad (2.8.30)$$

Учитывая четвертое уравнение системы (2.8.26), будем иметь

$$\frac{d^2\Delta z}{dt^2} + P(t) \frac{d\Delta z}{dt} + R(t) \Delta z = Q(t). \quad (2.8.31)$$

Таким образом, в рассматриваемом случае задача сводится к построению решения уравнения (2.8.31) при начальных условиях

$$\Delta z(t_0) = \Delta z_0, \quad \Delta V_z(t_0) = \Delta V_{z0}. \quad (2.8.32)$$

Это уравнение может быть проинтегрировано численным методом. Определив  $\Delta z$  и затем  $\Delta V_z$ , можно уже вести расчет  $\Delta \psi$  и  $\Delta \delta$  по формулам (2.8.27) и (2.8.28).

#### 8.1.4. Интегрирование уравнений на первом этапе возмущенного движения

Как уже было сказано, при исследовании эффективности органов управления на первом этапе возмущенного движения можно пренебречь переменностью коэффициентов уравнений, а также влиянием возмущений  $\Delta V_z$  и  $\Delta z$  на вращательное движение ракеты. При этом система уравнений (2.8.5) принимает вид

$$\begin{aligned} J_y \frac{d^2 \Delta \psi}{dt^2} + \mu_y \frac{d \Delta \psi}{dt} + c_{\psi \psi} \Delta \psi - c_{\psi \delta} \Delta \delta_\psi &= \Delta M_y, \\ -k_1 \frac{d \Delta \psi}{dt} - k \Delta \psi + T_2^2 \frac{d^2 \Delta \delta_\psi}{dt^2} + T_1 \frac{d \Delta \delta_\psi}{dt} + \Delta \delta_\psi &= 0. \end{aligned} \quad (2.8.33)$$

Здесь  $J_y$ ,  $c_{\psi \psi}$  и  $c_{\psi \delta}$  и все остальные коэффициенты — постоянные величины. Уравнениями (2.8.33) можно пользоваться каждый раз, когда исследуется управляемость при больших начальных возмущениях параметров движения или скачкообразном воздействии внешних возмущений. Для интегрирования уравнений удобно пользоваться преобразованиями Лапласа.

Начальные условия:

$$\Delta \psi(t_0) = \Delta \psi_0, \quad \left. \frac{d \Delta \psi}{dt} \right|_{t=t_0} = \dot{\Delta \psi}_0, \quad \Delta \delta_\psi(t_0) = \Delta \delta_{\psi 0}, \quad \left. \frac{d \Delta \delta_\psi}{dt} \right|_{t=t_0} = \dot{\Delta \delta}_{\psi 0}. \quad (2.8.34)$$

Преобразуя уравнения (2.8.33) по Лапласу, получим

$$\begin{aligned} (J_y p^2 + \mu_y p + c_{\psi \psi}) \psi(p) - c_{\psi \delta} \delta_\psi(p) &= \\ = M_y(p) + (p J_y + \mu_y) \Delta \psi_0 + J_y \dot{\Delta \psi}_0, \\ -(k_1 p + k) \psi(p) + (T_2^2 p^2 + T_1 p + 1) \delta_\psi(p) &= \\ = T_2^2 (p \Delta \delta_{\psi 0} + \dot{\Delta \delta}_{\psi 0}) + T_1 \Delta \delta_{\psi 0} - k_1 \Delta \psi_0, \end{aligned}$$

где  $\psi(p)$ ,  $\delta_\psi(p)$ ,  $M_y(p)$  — соответственно изображения Лапласа функций  $\Delta \psi$ ,  $\Delta \delta_\psi$ ,  $\Delta M_y$ .

Разрешая полученную систему, например относительно  $\delta_\psi(p)$ , будем иметь

$$\begin{aligned} \delta_\psi(p) = \frac{1}{(J_y p^2 + \mu_y p + c_{\psi \psi})(T_2^2 p^2 + T_1 p + 1) - c_{\psi \delta}(k_1 p + k)} \{ [M_y(p) + \\ + (p J_y + \mu_y) \Delta \psi_0 + J_y \dot{\Delta \psi}_0] (k_1 p + k) + (J_y p^2 + \mu_y p + c_{\psi \psi}) [T_2^2 (p \Delta \delta_{\psi 0} + \\ + \dot{\Delta \delta}_{\psi 0}) + T_1 \Delta \delta_{\psi 0} - k_1 \Delta \psi_0] \}. \end{aligned} \quad (2.8.35)$$

Если теперь произвести обратное преобразования Лапласа, то найдем функцию  $\Delta\delta_\psi$ :

$$\Delta\delta_\psi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \delta_\psi(p) e^{pt} dp. \quad (2.8.36)$$

Интеграл (2.8.36) вычисляется при помощи вычетов подынтегральной функции. Построение  $\Delta\delta_\psi(t)$  проводится в следующей последовательности.

1. Для заданного возмущения  $\Delta M_y(t)$  определяется изображение  $M_y(p)$ :

$$M_y(p) = \int_0^\infty \Delta M_y(t) e^{-pt} dt.$$

Для большинства встречающихся на практике типов возмущений соответствующие изображения можно найти в таблицах, которые приводятся в учебниках по теории автоматического управления.

2. Выражение  $\delta_\psi(p)$  представляется как отношение двух полиномов  $M(p)$  и  $N(p)$ :

$$\delta_\psi(p) = \frac{M(p)}{N(p)}.$$

3. Определяются нули полинома  $N(p)$ , т. е. те значения  $p_i$ , при которых  $N(p_i) = 0$ .

4. Определяются вычеты функции  $\delta_\psi(p)$ . Вычет функции, соответствующий простому полюсу  $p_i$  (полюсом функции  $\delta_\psi(p)$  является нуль полинома  $N(p)$ , если  $p_i$  не является также нулем, и функции  $M(p)$ ), в данном случае равен:

$$R_i = \lim_{p \rightarrow p_i} \frac{M(p) e^{pt} (p - p_i)}{N(p)} = \frac{M(p_i)}{\left(\frac{dN}{dp}\right)_{p=p_i}} e^{p_i t}.$$

5. Правая часть выражения (2.8.36) равняется сумме всех вычетов подынтегральной функции. Таким образом,

$$\Delta\delta_\psi(t) = \sum_i \frac{M(p_i)}{\left(\frac{dN}{dp}\right)_{p=p_i}} e^{p_i t}. \quad (2.8.37)$$

Этим же путем можно построить и функцию  $\Delta\psi(t)$ .

Пользуясь выражением (2.8.37), нетрудно определить максимальные значения  $|\Delta\delta_\psi(t)|$ . Для этого приравняем нулю производную  $\frac{d\Delta\delta_\psi}{dt}$ . Получим, обозначая через  $t^*$  значения аргумента, при которых эта производная равна нулю,

$$\sum_i \frac{p_i M(p_i) e^{p_i t^*}}{\left(\frac{dN}{dp}\right)_{p=p_i}} = 0. \quad (2.8.38)$$

Определяя из этого равенства  $t^*$  и подставляя в (2.8.37), будем иметь

$$\Delta\delta_{\psi \max, \min}(t^*) = \sum_i \frac{M(p_i)}{\left(\frac{dN}{dp}\right)_{p=p_i}} e^{p_i t^*}. \quad (2.8.39)$$

Поскольку процесс колебательный, то равенство (2.8.38), вообще говоря, будет выполняться при нескольких значениях аргумента. Однако, зная, что аппарат устойчив, можно ожидать, что наибольшее отклонение руля будет иметь место при наименьшем значении  $t^*$ , но нужно иметь в виду, что не исключены и другие возможности.

Аналогичным образом можно построить функцию  $\Delta\psi$  в условиях, когда рули занимают предельные положения.

В этом случае из (2.8.8) имеем приближенное соотношение

$$J_y \frac{d^2\Delta\psi}{dt^2} + \mu_y \frac{d\Delta\psi}{dt} + c_{\psi\psi} \Delta\psi = \pm c_{\psi\delta} \delta_{\psi \max} + \Delta M_y. \quad (2.8.40)$$

В результате преобразования Лапласа получаем

$$(J_y p^2 + \mu_y p + c_{\psi\psi}) \psi(p) = \pm \frac{c_{\psi\delta} \delta_{\psi \max}}{p} + M_y(p) + (J_y p + \mu_y) \Delta\psi_0 + J_y \dot{\Delta\psi}_0. \quad (2.8.41)$$

Отсюда

$$\psi(p) = \frac{1}{p(J_y p^2 + \mu_y p + c_{\psi\psi})} [\pm c_{\psi\delta} \delta_{\psi \max} + p M_y(p) + (J_y p + \mu_y) \Delta\psi_0 + J_y \dot{\Delta\psi}_0]. \quad (2.8.42)$$

Обратное преобразование Лапласа функции  $\psi(p)$  дает

$$\Delta\psi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \psi(p) e^{pt} dp. \quad (2.8.43)$$

Далее вычисляется правая часть соотношения (2.8.43) по приведенной выше схеме.

## 8.2. Эффективность органов управления по крену

Возмущенное движение ракеты по крену описывается уравнением

$$J_x \frac{d^2 \Delta\gamma}{dt^2} + \mu_x \frac{d\Delta\gamma}{dt} = c_{\gamma\delta} \Delta\delta_{\gamma} + \Delta M_x. \quad (2.8.44)$$

Закон управления примем, например, в виде

$$T_2^2 \frac{d^2 \Delta\delta_{\gamma}}{dt^2} + T_1 \frac{d\Delta\delta_{\gamma}}{dt} + \Delta\delta_{\gamma} = k \Delta\gamma + k_1 \frac{d\Delta\gamma}{dt}. \quad (2.8.45)$$

Квазистатический режим движения ракеты по крену описывается уравнениями, которые получаются из (2.8.44) и (2.8.45), если отбросить производные угловых величин:

$$\begin{aligned} c_{\gamma\delta} \Delta\delta_{\gamma} + \Delta M_x &= 0, \\ \Delta\delta_{\gamma} &= k \Delta\gamma. \end{aligned} \quad (2.8.46)$$

Отсюда

$$\Delta\delta_{\gamma} = -\frac{\Delta M_x}{c_{\gamma\delta}} = -\frac{\Delta M_x / J_x}{c_{\gamma\delta} / J_x}, \quad (2.8.47)$$

т. е. угол отклонения руля прямо пропорционален возмущающему моменту и обратно пропорционален эффективности руля.

Установившееся значение угла крена равно:

$$\Delta\gamma = \frac{\Delta\delta_{\gamma}}{k} = -\frac{\Delta M_x / J_x}{k c_{\gamma\delta} / J_x}. \quad (2.8.48)$$

При исследовании эффективности органов управления по крену в переходных режимах коэффициенты уравнения (2.8.44) можно рассматривать как постоянные. Тогда решения уравнений (2.8.44) и (2.8.45) при начальных условиях

$$\begin{aligned} \Delta\gamma(t_0) &= \Delta\gamma_0, & \Delta\delta_{\gamma}(t_0) &= \Delta\delta_{\gamma 0} \\ \left. \frac{d\Delta\gamma}{dt} \right|_{t=t_0} &= \dot{\Delta\gamma}_0, & \left. \frac{d\Delta\delta_{\gamma}}{dt} \right|_{t=t_0} &= \dot{\Delta\delta}_{\gamma 0} \end{aligned} \quad (2.8.49)$$

можно получить так. Преобразуя эти уравнения по Лапласу, получим

$$\begin{aligned} (J_x p^2 + \mu_x p) \gamma(p) - c_1 \delta(p) &= M_x p + (p J_y + \mu_x) \Delta \gamma_0 + J_y \Delta \dot{\gamma}_0, \\ -(k_1 p + k) \gamma(p) + (T_2^2 p^2 + T_1 p + 1) \delta_1(p) &= \\ &= (T_2^2 p + T_1) \Delta \delta_{10} + T_2^2 \Delta \dot{\delta}_{10} - k_1 \Delta \gamma_0. \end{aligned} \quad (2.8.50)$$

Здесь  $\gamma(p)$ ,  $\delta_1(p)$ ,  $M_x(p)$  — изображения функций  $\Delta \gamma$ ,  $\Delta \delta_1$ ,  $\Delta M_x$  по Лапласу.

Разрешая систему алгебраических уравнений (2.8.50) относительно  $\delta_1(p)$  и  $\gamma(p)$ , можно затем определить искомые функции  $\Delta \delta_1(t)$  и  $\Delta \gamma(t)$  в соответствии с выражениями:

$$\Delta \delta_1(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \delta_1(p) e^{pt} dp, \quad \Delta \gamma(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \gamma(p) e^{pt} dp. \quad (2.8.51)$$


---

### Глава III

## СТАБИЛИЗАЦИЯ ДВИЖЕНИЯ РАКЕТЫ С УЧЕТОМ ПОДВИЖНОСТИ ЖИДКОСТЕЙ В ТОПЛИВНЫХ БАКАХ

### § 1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ О ФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ЖИДКОГО ТОПЛИВА. ПОТЕНЦИАЛ СКОРОСТЕЙ

При выводе дифференциальных уравнений движения ракеты, учитывающих подвижность жидкостей в топливных баках, будем рассматривать жидкие компоненты топлива как *идеальные и несжимаемые жидкости*. Вопрос об учете вязкости жидкостей в уравнениях движения ракеты будет освещен ниже, в § 22. Если движения, совершаемые жидкостями в начальной стартовой системе координат  $x_0, y_0, z_0$ , в какой-либо момент времени будут безвихревыми, то, как известно из курса гидродинамики (см. [8]), они будут оставаться безвихревыми и в дальнейшем в соответствии с предполагаемой нами идеальностью этих жидкостей. Будем считать, что в некоторый исходный момент времени жидкости находятся в состоянии покоя по отношению к начальной стартовой системе координат  $x_0, y_0, z_0$ . В этом случае все последующие движения жидкостей, совершаемые ими в системе координат  $x_0, y_0, z_0$ , будут *безвихревыми*, так как состояние покоя является частным случаем безвихревого движения.

Установив для топливных баков ракеты определенную нумерацию, обозначим через  $\vec{v}_j$  вектор, определяющий скорости, с которыми движутся в начальной стартовой системе координат частицы жидкости, находящейся в баке с номером  $j$ . Так как движения, совершаемые жидкостями в начальной стартовой системе координат, предполагаются безвихревыми, ротор вектора  $\vec{v}_j$  в любой момент времени должен удовлетворять условию

$$\operatorname{rot} \vec{v}_j = 0 \quad (3.1.1)$$

в области, занимаемой жидкостью в баке с номером  $j$ . В соответствии с этим поле скоростей жидкости, определяемое вектором  $\vec{v}_j$ , должно быть *потенциальным*, иными словами вектор  $\vec{v}_j$  дол-



жен выражаться градиентом своего потенциала. Таким образом, должно иметь место равенство

$$\vec{v}_j = \text{grad } \Phi_j, \quad (3.1.2)$$

где  $\Phi_j$  — потенциал скоростей для жидкости, находящейся в баке с номером  $j$ .

Дивергенция вектора  $\vec{v}_j$  в любой момент времени  $t$  должна удовлетворять условию

$$\text{div } \vec{v}_j = 0 \quad (3.1.3)$$

в области, занимаемой жидкостью в  $j$ -ом баке, в соответствии с предполагаемой несжимаемостью жидких компонентов топлива.

Согласно (3.1.2) и (3.1.3) потенциал скоростей  $\Phi_j$  должен удовлетворять уравнению Лапласа

$$\text{div grad } \Phi_j = \nabla^2 \Phi_j = 0 \quad (3.1.4)$$

в области, занимаемой жидкостью в баке с номером  $j$ . В следующем параграфе рассматриваются краевые условия, которые должны выполняться на границе этой области.

## § 2. КРАЕВЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛОВ СКОРОСТЕЙ

Скорость  $\vec{v}_j$ , с которой частица жидкости движется в начальной стартовой системе координат  $x_0, y_0, z_0$ , можно представить в виде суммы переносной скорости, порождаемой движением связанной системы координат  $x, y, z$ , и относительной скорости  $\vec{v}_{j \text{ отн}}$ , с которой данная частица жидкости движется в координатной системе  $x, y, z$ . Пользуясь известной из теоретической механики формулой для переносной скорости, получим соотношение

$$\vec{v}_j = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{v}_{j \text{ отн}}, \quad (3.2.1)$$

где  $\vec{v}_0$  — скорость, с которой движется начало координатной системы  $x, y, z$ ;

$\vec{\omega}$  — угловая скорость вращения связанной системы координат;

$\vec{r}$  — радиус-вектор рассматриваемой частицы жидкости в подвижной координатной системе  $x, y, z$ <sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Будем в дальнейшем считать, что начало подвижной системы координат совпадает с центром масс ракеты в том случае, если жидкости в топливных баках ограничены плоскими свободными поверхностями, нормальными к продольной оси ракеты. В связи с этим в отличие от гл. I начало подвижной системы координат будем обозначать буквой  $O$ . При колебаниях свободных поверхностей жидкостей центр масс  $C$  будет отклоняться от точки  $O$  и скорость  $\vec{v}_0$  будет отличаться от скорости  $\vec{v}_C$ .

Согласно (3.1.2) и (3.2.1) должно иметь место равенство

$$\text{grad } \Phi_j = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{v}_{j \text{ отн}}. \quad (3.2.2)$$

В соответствии с формулой (3.2.2), установив краевые условия для относительной скорости  $\vec{v}_{j \text{ отн}}$ , можно получить из них искомые краевые условия для потенциала скоростей  $\Phi_j$ . Рассмотрим условия, которым должна удовлетворять относительная скорость  $\vec{v}_{j \text{ отн}}$  на смачиваемой поверхности бака и на свободной поверхности жидкости.

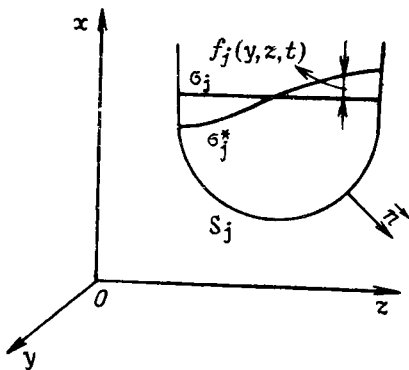


Рис. 3.1.

Обозначим через  $S_j$  внутреннюю поверхность  $j$ -го бака и через  $\sigma_j$  — плоское сечение этого бака, нормальное к оси  $x$  и построенное таким образом, чтобы объем области  $V_j$ , ограниченной поверхностями  $S_j$  и  $\sigma_j$ , был равен объему жидкости, находящейся в баке (рис. 3.1). Если  $x = x_j(t)$  — уравнение плоскости  $\sigma_j$ , то уравнение свободной поверхности жидкости, которую мы будем обозначать в дальнейшем через  $\sigma_j^*$ , можно представить в виде

$$x = x_j(t) + f_j(y, z, t), \quad (3.2.3)$$

где  $f_j(y, z, t)$  — функция, определяющая отклонения точек свободной поверхности жидкости  $\sigma_j^*$  от плоскости  $\sigma_j$ .

Рассмотрим сперва движение частицы жидкости, обтекающей смачиваемую поверхность  $S_j$ . Вектор относительной скорости движения этой частицы  $\vec{v}_{j \text{ отн}}$  будет всегда лежать в плоскости, касательной к поверхности  $S_j$ . Обозначим через  $\vec{n}$  единичный вектор внешней нормали к поверхности  $S_j$  (см. рис. 3.1). В рассматриваемом случае векторы  $\vec{v}_{j \text{ отн}}$  и  $\vec{n}$  должны быть взаимно ортогональными, их скалярное произведение должно быть равно нулю и, таким образом, на смачиваемой поверхности должно выполняться условие

$$\vec{v}_{j \text{ отн}} \cdot \vec{n} = 0 \text{ на } S_j. \quad (3.2.4)$$

Рассмотрим далее относительное движение частицы жидкости, остающейся в процессе этого движения на свободной поверхности  $\sigma_j^*$ . Обозначим через  $A$  точку, в которой находится эта частица жидкости в момент времени  $t$ , и через  $A_1$  — точку, в

которую она перемещается к моменту времени  $t+dt$  (рис. 3.2). Перемещение  $\vec{AA}_1$ , совершаемое частицей жидкости в связанной системе координат за элемент времени  $dt$ , будет равно  $\vec{v}_{j \text{ отн}} dt$ . Точка  $A_1$  будет лежать на свободной поверхности жидкости, соответствующей моменту времени  $t+dt$  и показанной на рис. 3.2 пунктиром. В соответствии с уравнением свободной поверхности (3.2.3) точка этой поверхности с координатами  $y, z$  в момент времени  $t+dt$  будет иметь координату  $x+dx$ , определяемую соотношением

$$x+dx = x_j(t+dt) + f_j(y, z, t+dt). \quad (3.2.5)$$

Согласно (3.2.3) и (3.2.5) будет иметь место равенство

$$dx = \frac{dx_j}{dt} dt + \frac{\partial f_j}{\partial t} dt. \quad (3.2.6)$$

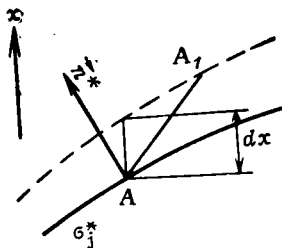


Рис. 3.2.

Как видно из рис. 3.2, проекция перемещения  $\vec{AA}_1$  на направление внешней нормали  $n^*$  к поверхности  $\sigma_j^*$  будет равна  $dx \cos(n^*, x)$ , или согласно (3.2.6)

$$\left( \frac{dx_j}{dt} + \frac{\partial f_j}{\partial t} \right) \cos(n^*, x) dt. \quad (3.2.7a)$$

В то же время эту проекцию можно отыскать, скалярно умножая перемещение  $\vec{AA}_1$  на единичный вектор внешней нормали к поверхности  $\sigma_j^*$ , который мы обозначим через  $\vec{n}^*$ . В этом случае для рассматриваемой проекции получим выражение

$$\vec{v}_{j \text{ отн}} \cdot \vec{n}^* dt. \quad (3.2.7b)$$

Сравнивая выражения (3.2.7a) и (3.2.7b), придем к крайнему условию

$$\vec{v}_{j \text{ отн}} \cdot \vec{n}^* = \left( \frac{dx_j}{dt} + \frac{\partial f_j}{\partial t} \right) \cos(n^*, x) \text{ на } \sigma_j^*. \quad (3.2.8)$$

Согласно (3.2.2), (3.2.4) и (3.2.8) потенциал скоростей  $\Phi_j$  должен удовлетворять крайним условиям

$$\begin{aligned} \text{grad } \Phi_j \cdot \vec{n} &= \vec{v}_0 \cdot \vec{n} + (\vec{\omega} \times \vec{r}) \cdot \vec{n} \text{ на } S_j, \\ \text{grad } \Phi_j \cdot \vec{n}^* &= \vec{v}_0 \cdot \vec{n}^* + (\vec{\omega} \times \vec{r}) \cdot \vec{n}^* + \\ &+ \left( \frac{dx_j}{dt} + \frac{\partial f_j}{\partial t} \right) \cos(n^*, x) \text{ на } \sigma_j^*. \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

Пользуясь равенствами:

$$\begin{aligned}\text{grad } \Phi_j \cdot \vec{n} &= \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} \cos(n, x) + \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} \cos(n, y) + \\ &+ \frac{\partial \Phi_j}{\partial z} \cos(n, z) = \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} \\ \text{grad } \Phi_j \cdot \vec{n}^* &= \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} \cos(n^*, x) + \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} \cos(n^*, y) + \\ &+ \frac{\partial \Phi_j}{\partial z} \cos(n^*, z) = \frac{\partial \Phi_j}{\partial n^*}\end{aligned}\quad (3.2.10)$$

и равенствами:

$$(\vec{\omega} \times \vec{r}) \cdot \vec{n} = (\vec{r} \times \vec{n}) \cdot \vec{\omega}, \quad (\vec{\omega} \times \vec{r}) \cdot \vec{n}^* = (\vec{r} \times \vec{n}^*) \cdot \vec{\omega}, \quad (3.2.11)$$

вытекающими из возможности циклической перестановки множителей в смешанном произведении векторов, можно привести краевые условия (3.2.9) к виду

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi_j}{\partial n} &= \vec{v}_0 \cdot \vec{n} + \vec{\omega} \cdot (\vec{r} \times \vec{n}) \text{ на } S_j, \\ \frac{\partial \Phi_j}{\partial n^*} &= \vec{v}_0 \cdot \vec{n}^* + \vec{\omega} \cdot (\vec{r} \times \vec{n}^*) + \\ &+ \left( \frac{dx_j}{dt} + \frac{\partial f_j}{\partial t} \right) \cos(n^*, x) \text{ на } \sigma_j^*.\end{aligned}\quad (3.2.12)$$

Если на исследуемом участке полета ракеты бак с номером  $j$  не опорожняется, плоскость  $\sigma_j$ , показанная на рис. 3.1, не меняет своего положения в связанной системе координат  $x, y, z$  и функция  $x_j(t)$  сохраняет постоянное значение. В этом случае краевые условия (3.2.12) принимают вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi_j}{\partial n} &= \vec{v}_0 \cdot \vec{n} + \vec{\omega} \cdot (\vec{r} \times \vec{n}) \text{ на } S_j, \\ \frac{\partial \Phi_j}{\partial n^*} &= \vec{v}_0 \cdot \vec{n}^* + \vec{\omega} \cdot (\vec{r} \times \vec{n}^*) + \\ &+ \frac{\partial f_j}{\partial t} \cos(n^*, x) \text{ на } \sigma_j^*.\end{aligned}\quad (3.2.13)$$

Для опорожняющихся баков краевые условия (3.2.12) должны быть дополнены краевым условием, которое должно выполняться во входных сечениях расходных топливных магистралей. В этом случае потенциал скоростей будет складываться из потенциала  $\Phi_j$ , удовлетворяющего краевым условиям (3.2.13), и дополнительного потенциала скоростей, определяющего процесс

слива жидкости из неподвижного бака, в ходе которого свободная поверхность жидкости остается плоской и перпендикулярной к оси  $x$ . Так как слив жидкости практически не отражается на колебаниях, совершаемых жидкостью в топливном баке, мы ограничимся учетом потенциала скоростей  $\Phi_j$ , определяемого краевыми условиями (3.2.13), и в связи с этим во всех дальнейших рассуждениях мы будем отправляться от дифференциального уравнения (3.1.4) с краевыми условиями (3.2.13).

### § 3. МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЖИДКОСТЕЙ В ТОПЛИВНЫХ БАКАХ

Как было уже указано в предисловии, при рассмотрении вопроса о стабилизации движения ракеты с учетом подвижности жидкостей в топливных баках мы ограничимся исследованием малых колебаний жидкостей, в процессе которых свободные поверхности  $\sigma_j^*$  остаются близкими к плоским поверхностям  $\sigma_j$  (см. рис. 3.1). В этом случае краевую задачу для потенциала скоростей  $\Phi_j$ , полученную в предыдущем параграфе, можно упростить, что в дальнейшем существенным образом облегчит исследование устойчивости движения.

Введем в рассмотрение функцию  $\Psi_j$ , связанную с потенциалом скоростей  $\Phi_j$  соотношением

$$\Psi_j = \Phi_j - \vec{v}_0 \cdot \vec{r} = \Phi_j - v_{0x}x - v_{0y}y - v_{0z}z. \quad (3.3.1)$$

Дифференцируя обе части соотношения (3.3.1), получим равенства:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Psi_j &= \nabla^2 \Phi_j, \\ \frac{\partial \Psi_j}{\partial n} &= \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} - v_{0x} \cos(n, x) - v_{0y} \cos(n, y) - v_{0z} \cos(n, z) = \\ &= \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} - \vec{v}_0 \cdot \vec{n} \text{ на } S_j, \\ \frac{\partial \Psi_j}{\partial n^*} &= \frac{\partial \Phi_j}{\partial n^*} - v_{0x} \cos(n^*, x) - v_{0y} \cos(n^*, y) - \\ &- v_{0z} \cos(n^*, z) = \frac{\partial \Phi_j}{\partial n^*} - \vec{v}_0 \cdot \vec{n}^* \text{ на } \sigma_j^*. \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

В соответствии с формулами (3.1.4), (3.2.13) и (3.3.2) функция  $\Psi_j$  должна удовлетворять уравнению Лапласа

$$\nabla^2 \Psi_j = 0 \quad (3.3.3)$$

и краевым условиям:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Psi_j}{\partial n} &= \vec{\omega} \cdot (\vec{r} \times \vec{n}) \text{ на } S_j, \\ \frac{\partial \Psi_j}{\partial n^*} &= \vec{\omega} \cdot (\vec{r} \times \vec{n}^*) + \frac{\partial f_j}{\partial t} \cos(n^*, x) \text{ на } \sigma_j^*.\end{aligned}\quad (3.3.4)$$

Согласно (3.1.2) и (3.3.1) будет иметь место соотношение

$$\vec{v}_j = \vec{v}_0 + \text{grad } \Psi_j. \quad (3.3.5)$$

Из формул (3.2.1) и (3.3.5) вытекает равенство

$$\vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{v}_j \text{ отн} = \text{grad } \Psi_j. \quad (3.3.6)$$

В соответствии с предположением о медленности вращения ракеты и о малости колебаний жидкостей в топливных баках, скорости  $\vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{v}_j \text{ отн}$  будут всегда малыми и, допуская при определении их потенциала  $\Psi_j$  относительно малые погрешности, мы получим погрешности второго порядка малости при отыскании абсолютных скоростей движения частиц жидкости  $\vec{v}_j$ . При малых колебаниях жидкости в баке с номером  $j$  свободная поверхность жидкости  $\sigma_j^*$  будет оставаться близкой к плоскости  $\sigma_j$ . Таким образом, пренебрегая при исследовании движения жидкости малыми величинами второго порядка малости, можно перенести второе из краевых условий (3.3.4) с поверхности  $\sigma_j^*$  на близкую поверхность  $\sigma_j$ , заменяя при этом направление нормали  $n^*$  к поверхности  $\sigma_j^*$  направлением нормали  $n$  к поверхности  $\sigma_j$ . Краевые условия (3.3.4) в этом случае примут вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Psi_j}{\partial n} &= \vec{\omega} \cdot (\vec{r} \times \vec{n}) \text{ на } S_j, \\ \frac{\partial \Psi_j}{\partial n} &= \vec{\omega} \cdot (\vec{r} \times \vec{n}) + \frac{\partial f_j}{\partial t} \text{ на } \sigma_j\end{aligned}\quad (3.3.7)$$

(на поверхности  $\sigma_j \cos(n, x) = 1$ , так как направление внешней нормали  $n$  к плоскости  $\sigma_j$  совпадает с направлением оси  $x$ ).

Вопрос о построении решения уравнения Лапласа (3.3.3), удовлетворяющего краевым условиям (3.3.7), подробно рассматривается нами в следующих параграфах этой главы.

#### § 4. ПОТЕНЦИАЛЫ ЖУКОВСКОГО

Рассмотрим сперва тот случай, когда поверхность жидкости, находящейся в  $j$ -м баке, закрыта крышкой, расположенной в сечении бака  $\sigma_j$ . Как видно из рис. 3.1, в этом случае функция  $f_j(y, z, t)$  в процессе движения будет оставаться тождественно

равной нулю и в соответствии с этим краевые условия (3.3.7) примут вид

$$\frac{\partial \Psi_j}{\partial n} = \vec{\omega} \cdot (\vec{r} \times \vec{n}) \text{ на } S_j \text{ и } \sigma_j. \quad (3.4.1)$$

Введем в рассмотрение векторную функцию  $\vec{\varphi}_j$ , удовлетворяющую уравнению Лапласа

$$\nabla^2 \vec{\varphi}_j = 0 \quad (3.4.2)$$

и краевому условию

$$\frac{\partial \vec{\varphi}_j}{\partial n} = \vec{r} \times \vec{n} \text{ на } S_j \text{ и } \sigma_j. \quad (3.4.3)$$

Согласно (3.4.2) и (3.4.3) функция

$$\Psi_j = \vec{\omega} \cdot \vec{\varphi}_j \quad (3.4.4)$$

будет удовлетворять дифференциальному уравнению (3.3.3) и краевому условию (3.4.1). Таким образом, в рассматриваемом случае задача о движении жидкости, находящейся в баке с номером  $j$ , сводится к решению дифференциального уравнения (3.4.2) с краевым условием (3.4.3).

Задача об отыскании функции  $\varphi$ , удовлетворяющей уравнению Лапласа

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (3.4.5)$$

в области, ограниченной поверхностью  $S$ , и удовлетворяющей краевому условию

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = F \text{ на } S, \quad (3.4.6)$$

где  $F$  — функция, заданная на граничной поверхности  $S$ , носит название задачи Неймана для уравнения Лапласа. Для разрешимости задачи Неймана необходимо и достаточно, чтобы функция  $F$  удовлетворяла условию

$$\int_S F \, ds = 0 \quad (3.4.7)$$

(см. [21]). Таким образом, необходимые и достаточные условия разрешимости дифференциального уравнения (3.4.2) с краевым условием (3.4.3) в векторной форме могут быть выражены равенством

$$\int_{S_j + \sigma_j} \vec{r} \times \vec{n} \, ds = 0. \quad (3.4.8)$$

Покажем, что условие (3.4.8) всегда выполняется. Преобразуя поверхностные интегралы в объемные посредством формул Гаусса-Остроградского, найдем:

$$\begin{aligned} \int_{S_j + \sigma_j} [y \cos(n, z) - z \cos(n, y)] ds &= \int_{V_j} \left( \frac{\partial y}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial y} \right) dv = 0, \\ \int_{S_j + \sigma_j} [z \cos(n, x) - x \cos(n, z)] ds &= \int_{V_j} \left( \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial z} \right) dv = 0, \\ \int_{S_j + \sigma_j} [x \cos(n, y) - y \cos(n, x)] ds &= \int_{V_j} \left( \frac{\partial x}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial x} \right) dv = 0 \end{aligned} \quad (3.4.9)$$

( $V_j$  — область, лежащая внутри замкнутой поверхности  $S_j + \sigma_j$ ).

Скалярные равенства (3.4.9) эквивалентны векторному равенству (3.4.8). Таким образом, краевая задача, образуемая дифференциальным уравнением (3.4.2) с краевым условием (3.4.3), всегда разрешима, что и требовалось доказать.

Согласно (3.3.5) и (3.4.4) скорости движения частиц жидкости в рассматриваемом случае будут определяться формулой

$$\vec{v}_j = \vec{v}_0 + \text{grad}(\vec{\omega} \cdot \vec{\varphi}_j). \quad (3.4.10)$$

Дифференциальное уравнение (3.4.5) с краевым условием (3.4.6) определяет искомую функцию  $\varphi$  с точностью до произвольного постоянного слагаемого. В соответствии с этим уравнение (3.4.2) с краевым условием (3.4.3) определяет векторную функцию  $\vec{\varphi}_j$  с точностью до произвольного постоянного векторного слагаемого. Согласно (3.4.10) вид векторной функции  $\vec{v}_j$ , определяющей поле скоростей, не зависит от выбора этого постоянного слагаемого и оно может быть взято любым.

При  $\omega_x = 1$ ,  $\omega_y = 0$ ,  $\omega_z = 0$  формула (3.4.10) принимает вид

$$\vec{v}_j = \vec{v}_0 + \text{grad} \varphi_{jx}, \quad (3.4.11)$$

случаю  $\omega_x = 0$ ,  $\omega_y = 1$ ,  $\omega_z = 0$  соответствует равенство

$$\vec{v}_j = \vec{v}_0 + \text{grad} \varphi_{jy} \quad (3.4.12)$$

и в случае  $\omega_x = 0$ ,  $\omega_y = 0$ ,  $\omega_z = 1$  скорость  $\vec{v}_j$  будет определяться формулой

$$\vec{v}_j = \vec{v}_0 + \text{grad} \varphi_{jz}. \quad (3.4.13)$$

Таким образом, проекции  $\varphi_{jx}$ ,  $\varphi_{jy}$ ,  $\varphi_{jz}$  вектора  $\vec{\varphi}_j$  представляют собой потенциалы скоростей, возникающих при вращении корпуса ракеты с единичной угловой скоростью соответственно



вокруг осей  $x, y, z$ . Потенциалы скоростей  $\varphi_{jx}, \varphi_{jy}, \varphi_{jz}$  впервые были введены в рассмотрение Н. Е. Жуковским, поэтому функции  $\varphi_{jx}, \varphi_{jy}$  и  $\varphi_{jz}$  будем именовать в дальнейшем *потенциалами Жуковского*.

## § 5. МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЖИДКОСТИ В НЕПОДВИЖНОМ БАКЕ. ПОТЕНЦИАЛ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Рассмотрим теперь малые колебания жидкостей, которые могут иметь место в топливных баках неподвижной ракеты, занимающей вертикальное положение (случай стоянки ракеты на старте). Полагая в (3.3.5) и (3.3.7)  $\vec{v}_0=0, \vec{\omega}=0$ , получим для вектора  $\vec{v}_j$  формулу

$$\vec{v}_j = \text{grad } \Psi_j, \quad (3.5.1)$$

где  $\Psi_j$  — решение уравнения Лапласа (3.3.3), удовлетворяющее краевым условиям:

$$\frac{\partial \Psi_j}{\partial n} = 0 \text{ на } S_j, \quad \frac{\partial \Psi_j}{\partial n} = \frac{\partial f_j}{\partial t} \text{ на } \sigma_j. \quad (3.5.2)$$

Введем в рассмотрение функцию  $\psi_j$ , удовлетворяющую уравнению Лапласа

$$\nabla^2 \psi_j = 0 \quad (3.5.3)$$

и краевым условиям

$$\frac{\partial \psi_j}{\partial n} = 0 \text{ на } S_j, \quad \frac{\partial \psi_j}{\partial n} = f_j \text{ на } \sigma_j. \quad (3.5.4)$$

Согласно (3.5.3) и (3.5.4) функция

$$\Psi_j = \frac{\partial \psi_j}{\partial t} \quad (3.5.5)$$

будет удовлетворять дифференциальному уравнению (3.3.3) и краевым условиям (3.5.2) в соответствии с равенствами:

$$\nabla^2 \frac{\partial \psi_j}{\partial t} = \frac{\partial \nabla^2 \psi_j}{\partial t}, \quad \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\partial \psi_j}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \psi_j}{\partial n} \right), \quad (3.5.6)$$

вытекающими из возможности изменения порядка дифференцирования функции, зависящей от нескольких независимых переменных. Таким образом, в рассматриваемом случае задача о движении жидкости, находящейся в баке с номером  $j$ , может быть сведена к решению дифференциального уравнения (3.5.3) с краевыми условиями (3.5.4). Для разрешимости этой задачи Неймана

необходимо и достаточно, чтобы функция  $f_j$  удовлетворяла условию

$$\int_{\sigma_j} f_j ds = 0. \quad (3.5.7)$$

Как видно из рис. 3.1, при малых колебаниях жидкости в  $j$ -м топливном баке интеграл, фигурирующий в левой части равенства (3.5.7), определяет разность между объемом области, ограниченной поверхностями  $S_j$  и  $\sigma_j^*$ , и объемом области  $V_j$ , ограниченной поверхностями  $S_j$  и  $\sigma_j$ . Сечение бака  $\sigma_j$  было построено выше с таким расчетом, чтобы эти два объема были равны между собой. Таким образом, условие (3.5.7) будет выполняться.

Введем теперь в рассмотрение вектор  $\vec{u}_j(x, y, z, t)$ , определяющий перемещения, которые совершает в  $j$ -ом баке частица жидкости, имеющая в состоянии покоя координаты  $x, y, z$ . Скорость движения частицы жидкости, имеющей в момент времени  $t$  координаты  $x, y, z$ , определяется вектором  $\vec{v}_j(x, y, z, t)$ . Таким образом, скорость движения частицы, имеющей в состоянии покоя координаты  $x, y, z$ , будет определяться вектором  $\vec{v}_j(x + u_{jx}, y + u_{jy}, z + u_{jz}, t)$ , так как в момент времени  $t$  эта частица жидкости будет иметь координаты  $x + u_{jx}, y + u_{jy}, z + u_{jz}$ , где  $u_{jx}, u_{jy}, u_{jz}$  — проекции вектора перемещений  $\vec{u}_j$ . Отсюда вытекает равенство

$$\frac{\partial \vec{u}_j}{\partial t} = \vec{v}_j(x + u_{jx}, y + u_{jy}, z + u_{jz}, t). \quad (3.5.8)$$

При малых колебаниях жидкости, допуская погрешности второго порядка малости, можно заменить равенство (3.5.8) приближенным соотношением

$$\frac{\partial \vec{u}_j}{\partial t} = \vec{v}_j(x, y, z, t), \quad (3.5.9)$$

или согласно (3.5.1) и (3.5.5)

$$\frac{\partial \vec{u}_j}{\partial t} = \text{grad } \frac{\partial \psi_j}{\partial t}. \quad (3.5.10)$$

Меняя порядок дифференцирования функции  $\psi_j$ , получим отсюда равенство

$$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{u}_j - \text{grad } \psi_j) = 0. \quad (3.5.11)$$

Допустим теперь, что в некоторый момент времени  $t = t_0$  частицы жидкости, находящейся в  $j$ -м баке, занимают положения, соответствующие состоянию покоя, т. е.

$$\vec{u}_j = 0 \text{ в } V_j \text{ при } t = t_0, \quad f_j(y, z, t_0) = 0 \quad (3.5.12)$$

(см. рис. 3.1). Согласно (3.5.12) при  $t=t_0$  краевая задача, образуемая дифференциальным уравнением (3.5.3) и краевыми условиями (3.5.4), будет представлять собой однородную задачу Неймана и будет иметь место соотношение

$$\psi_j \equiv c_j \quad \text{при} \quad t=t_0, \quad (3.5.13)$$

где  $c_j$  — некоторая константа. В соответствии с равенством (3.5.11) разность  $\vec{u}_j - \text{grad } \psi_j$  не должна зависеть от времени  $t$ , в то же время согласно (3.5.12) и (3.5.13) при  $t=t_0$  эта разность должна быть тождественно равна нулю. Таким образом, должно иметь место тождественное равенство

$$\vec{u}_j = \text{grad } \psi_j \quad \text{в} \quad V_j. \quad (3.5.14)$$

Как видим, в случае малых колебаний жидкости в неподвижном баке перемещения, совершаемые частицами жидкости, обладают потенциалом  $\psi_j$ , определяемым дифференциальным уравнением (3.5.3) с краевыми условиями (3.5.4). В соответствии с этим решение уравнения Лапласа (3.5.3), удовлетворяющее краевым условиям (3.5.4), будем называть в дальнейшем *потенциалом перемещений*, имея в виду перемещения, вызываемые колебаниями свободной поверхности жидкости в баке с номером  $j$ .

Зная потенциалы Жуковского  $\varphi_{jx}, \varphi_{jy}, \varphi_{jz}$  и потенциал перемещений  $\psi_j$ , можно построить общее выражение для потенциала скоростей  $\Psi_j$ , фигурирующего в формуле (3.3.5) и определяемого дифференциальным уравнением (3.3.3) с краевыми условиями (3.3.7). Согласно (3.4.2), (3.4.3), (3.5.3), (3.5.4) и (3.5.6) функция

$$\Psi_j = \vec{\omega} \cdot \vec{\varphi}_j + \frac{\partial \psi_j}{\partial t} \quad (3.5.15)$$

будет удовлетворять дифференциальному уравнению Лапласа (3.3.3) и краевым условиям (3.3.7). Таким образом, согласно (3.3.5) и (3.5.15) в общем случае скорости, с которыми движутся в стартовой системе координат частицы жидкости, находящейся в  $j$ -м баке, будут определяться соотношением

$$\vec{v}_j = \vec{v}_0 + \text{grad} \left( \vec{\omega} \cdot \vec{\varphi}_j + \frac{\partial \psi_j}{\partial t} \right). \quad (3.5.16)$$

Потенциал перемещений  $\psi_j$  можно отыскать из дифференциального уравнения (3.5.3) с краевыми условиями (3.5.4), зная функцию  $f_j$ , определяющую колебания, которые совершает свободная поверхность жидкости в баке с номером  $j$ . Вопрос об отыскании функций  $f_j$  рассматривается нами в следующем параграфе.

## § 6. КОЛЕБАНИЯ СВОБОДНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ЖИДКОСТЕЙ В ТОПЛИВНЫХ БАКАХ

Давление в области, занимаемой жидкостью в баке с номером  $j$ , которое мы будем обозначать в дальнейшем через  $p_j(x, y, z, t)$ , на свободной поверхности  $\sigma_j^*$  должно совпадать с давлением газа, находящегося над свободной поверхностью, иными словами с давлением наддува. Исходя из условия

$$p_j = p_j^{(0)} \text{ на } \sigma_j^*, \quad (3.6.1)$$

где  $p_j^{(0)}$  — давление наддува в  $j$ -м топливном баке, мы получаем ниже краевую задачу, определяющую колебания свободной поверхности жидкости в баке с номером  $j$  по заданным векторным функциям времени  $\vec{v}_0(t)$  и  $\vec{\omega}(t)$ , характеризующим движение, совершаемое корпусом ракеты в стартовой системе координат  $x_0, y_0, z_0$ .

В соответствии с принципом Даламбера давление  $p_j$  будет удовлетворять уравнению равновесия

$$\text{grad } p_j = \rho_j \vec{Q}_j, \quad (3.6.2)$$

где  $\rho_j$  — плотность жидкости в баке с номером  $j$ ;  $\vec{Q}_j$  — массовая сила, действующая на эту жидкость (см. [8]), если включить в силу  $\vec{Q}_j$  массовую силу инерции. Таким образом, давление  $p_j$  можно определить, положив в (3.6.2)

$$\vec{Q}_j = \vec{g} - \vec{w}_j, \quad (3.6.3)$$

где  $\vec{g}$  — ускорение силы тяжести, действующей на жидкость;

$\vec{w}_j$  — вектор, определяющий ускорения, с которыми движутся в стартовой системе координат  $x_0, y_0, z_0$  частицы жидкости, находящейся в  $j$ -м баке.

Согласно (3.3.5) должно иметь место равенство

$$\vec{w}_j = \vec{w}_0 + \frac{d(\text{grad } \Psi_j)}{dt}, \quad (3.6.4)$$

где  $\vec{w}_0 = \frac{d\vec{v}_0}{dt}$  — ускорение, с которым движется начало связанной системы координат  $x, y, z$ .

Потенциал скоростей  $\Psi_j$  будем предполагать найденным в виде функции времени  $t$  и пространственных координат  $x, y, z$ . Вычисляя ускорение какой-либо частицы жидкости по формуле (3.6.4), необходимо учитывать зависимость от времени координат этой частицы  $x, y, z$ , кроме того, при дифференцировании вектора  $\text{grad } \Psi_j$  следует учитывать вращение координатной системы  $x, y, z$ , добавляя к локальной производной по времени  $t$  от

вектора  $\text{grad } \Psi_j$ ; векторное произведение  $\vec{\omega} \times \text{grad } \Psi_j$ . Обозначая через  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$  единичные векторы, направления которых соответствуют положительным направлениям координатных осей  $x, y, z$ , найдем

$$\begin{aligned} \frac{d(\text{grad } \Psi_j)}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \Psi_j}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \Psi_j}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial \Psi_j}{\partial z} \vec{e}_z \right) = \\ &= \left( \frac{\partial^2 \Psi_j}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 \Psi_j}{\partial x^2} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 \Psi_j}{\partial x \partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial^2 \Psi_j}{\partial x \partial z} \frac{dz}{dt} \right) \vec{e}_x + \\ &+ \left( \frac{\partial^2 \Psi_j}{\partial y \partial t} + \frac{\partial^2 \Psi_j}{\partial x \partial y} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 \Psi_j}{\partial y^2} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial^2 \Psi_j}{\partial y \partial z} \frac{dz}{dt} \right) \vec{e}_y + \\ &+ \left( \frac{\partial^2 \Psi_j}{\partial z \partial t} + \frac{\partial^2 \Psi_j}{\partial x \partial z} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 \Psi_j}{\partial y \partial z} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial^2 \Psi_j}{\partial z^2} \frac{dz}{dt} \right) \vec{e}_z + \\ &+ \vec{\omega} \times \text{grad } \Psi_j = \text{grad} \left( \frac{\partial \Psi_j}{\partial t} + \frac{\partial \Psi_j}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \Psi_j}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \right. \\ &\left. + \frac{\partial \Psi_j}{\partial z} \frac{dz}{dt} \right) + \vec{\omega} \times \text{grad } \Psi_j, \end{aligned}$$

или

$$\frac{d(\text{grad } \Psi_j)}{dt} = \text{grad} \left( \frac{\partial \Psi_j}{\partial t} + \vec{v}_{j \text{ отн}} \cdot \text{grad } \Psi_j \right) + \vec{\omega} \times \text{grad } \Psi_j, \quad (3.6.5)$$

где  $\vec{v}_{j \text{ отн}}$  — скорость, с которой движется рассматриваемая частица жидкости в связанной системе координат  $x, y, z$ . Ввиду предполагаемой нами малости скоростей  $\vec{v}_{j \text{ отн}}$ ,  $\vec{\omega}$  и  $\text{grad } \Psi_j$  формулу (3.6.5) можно заменить приближенной формулой

$$\frac{d(\text{grad } \Psi_j)}{dt} = \text{grad} \frac{\partial \Psi_j}{\partial t}, \quad (3.6.6)$$

пренебрегая малыми величинами второго порядка малости. Согласно (3.6.3), (3.6.4) и (3.6.6) уравнение (3.6.2) можно привести к виду

$$\text{grad } p_j = \rho_j \left( \vec{g} - \vec{w}_0 - \text{grad} \frac{\partial \Psi_j}{\partial t} \right). \quad (3.6.7)$$

В соответствии с равенством

$$\begin{aligned} \vec{w}_0 - \vec{g} &= \text{grad} [(w_{0x} - g_x)x + (w_{0y} - g_y)y + (w_{0z} - g_z)z] = \\ &= \text{grad} [(\vec{w}_0 - \vec{g}) \cdot \vec{r}] \end{aligned} \quad (3.6.8)$$

уравнению (3.6.7) можно придать вид

$$\text{grad} \left\{ p_j + q_j \left[ (\vec{\omega}_0 - \vec{g}) \cdot \vec{r} + \frac{\partial \Psi_j}{\partial t} \right] \right\} = 0. \quad (3.6.9)$$

Согласно (3.6.9) должна иметь место зависимость

$$p_j = -q_j \left[ (\vec{\omega}_0 - \vec{g}) \cdot \vec{r} + \frac{\partial \Psi_j}{\partial t} \right] + c_j(t), \quad (3.6.10)$$

где  $c_j(t)$  — некоторая функция времени  $t$ , которая в дальнейшем будет исключена из рассмотрения.

Пользуясь формулой (3.5.15), найдем

$$\frac{\partial \Psi_j}{\partial t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \cdot \vec{\varphi}_j + \vec{\omega} \cdot \frac{\partial \vec{\varphi}_j}{\partial t} + \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial t^2}. \quad (3.6.11)$$

Если на исследуемом участке полета ракеты бак с номером  $j$  не опорожняется, векторная функция  $\vec{\varphi}_j$ , определяемая уравнением (3.4.2) с краевым условием (3.4.3), от времени  $t$  не зависит и равенство (3.6.11) в этом случае принимает вид

$$\frac{\partial \Psi_j}{\partial t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \cdot \vec{\varphi}_j + \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial t^2}. \quad (3.6.12)$$

В случае опорожнения  $j$ -го бака производная  $\frac{\partial \vec{\varphi}_j}{\partial t}$  практически может быть отнесена к числу малых величин и в соответствии с предполагаемой малостью угловой скорости  $\vec{\omega}$  можно заменить соотношение (3.6.11) приближенным соотношением (3.6.12), допуская погрешности второго порядка малости.

Согласно (3.6.12) формуле (3.6.10) можно придать вид

$$p_j = -q_j \left[ (\vec{\omega}_0 - \vec{g}) \cdot \vec{r} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \cdot \vec{\varphi}_j + \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial t^2} \right] + c_j(t). \quad (3.6.13)$$

В соответствии с уравнением свободной поверхности (3.2.3) условие (3.6.1) можно представить в виде

$$p_j(x_j + f_j, y, z, t) = p_j^{(0)},$$

или

$$\begin{aligned} p_j(x_j, y_j, z, t) + \left( \frac{\partial p_j}{\partial x} \right)_{x=x_j} f_j + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 p_j}{\partial x^2} \right)_{x=x_j} (f_j)^2 + \\ + \dots = p_j^{(0)}. \end{aligned} \quad (3.6.14)$$

При малых колебаниях свободной поверхности условие (3.6.14) можно заменить приближенным условием

$$p_j(x_j, y, z, t) + \left( \frac{\partial p_j}{\partial x} \right)_{x=x_j} f_j = p_j^{(0)}, \quad (3.6.15)$$

допуская погрешности высших порядков малости. Подставляя  $p_j$  из (3.6.13) в (3.6.15), получим равенство

$$\begin{aligned} -\zeta_j \left[ (\omega_{0x} - g_x) x_j + (\omega_{0y} - g_y) y + (\omega_{0z} - g_z) z + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \cdot (\vec{\varphi}_j)_{x=x_j} + \right. \\ \left. + \left( \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial t^2} \right)_{x=x_j} \right] + c_j(t) - \zeta_j \left[ \omega_{0x} - g_x + \right. \\ \left. + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \left( \frac{\partial \vec{\varphi}_j}{\partial x} \right)_{x=x_j} + \left( \frac{\partial^3 \psi_j}{\partial t^2 \partial x} \right)_{x=x_j} \right] f_j = p_j^{(0)}. \end{aligned} \quad (3.6.16)$$

В соответствии с предположением о малости колебаний свободной поверхности и о малости углового ускорения  $\vec{d\omega}/dt$  равенство (3.6.16) можно заменить приближенным равенством

$$\begin{aligned} -\zeta_j [(\omega_{0x} - g_x) x_j + (\omega_{0y} - g_y) y + (\omega_{0z} - g_z) z + \\ + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \cdot (\vec{\varphi}_j)_{x=x_j} + \left( \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial t^2} \right)_{x=x_j}] + c_j(t) - \zeta_j (\omega_{0x} - g_x) f_j = p_j^{(0)}, \end{aligned} \quad (3.6.17)$$

допуская погрешности второго порядка малости.

Введя обозначение

$$C_j(t) = \frac{c_j(t) - p_j^{(0)}}{\zeta_j} - (\omega_{0x} - g_x) x_j, \quad (3.6.18)$$

можно придать соотношению (3.6.17) вид

$$\begin{aligned} (\omega_{0x} - g_x) f_j + (\omega_{0y} - g_y) y + (\omega_{0z} - g_z) z + \\ + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \cdot (\vec{\varphi}_j)_{x=x_j} + \left( \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial t^2} \right)_{x=x_j} = C_j(t), \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} (\omega_{0x} - g_x) f_j + (\omega_{0y} - g_y) y + (\omega_{0z} - g_z) z + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \cdot \vec{\varphi}_j + \\ + \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial t^2} = C_j(t) \text{ на } \sigma_j, \end{aligned} \quad (3.6.19)$$

так как уравнение плоскости  $\sigma_j$  имеет вид  $x = x_j$ .

Подставляя  $f_j$  из (3.6.19) в (3.5.4), получим для потенциала перемещений  $\Psi_j$  краевые условия:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \psi_j}{\partial n} &= 0 \text{ на } S_j, \\ \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial t^2} + (w_{0x} - g_x) \frac{\partial \psi_j}{\partial n} + (w_{0y} - g_y) y + (w_{0z} - g_z) z + \\ &+ \frac{d\vec{\omega}}{dt} \cdot \vec{\varphi}_j = C_j(t) \text{ на } \sigma_j. \end{aligned} \right\} \quad (3.6.20)$$

Согласно (3.5.4), зная потенциал перемещений  $\psi_j$ , можно определить функцию  $f_j(y, z, t)$  по формуле

$$f_j = \left( \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \right)_{x=x_j} \quad (3.6.21)$$

(на плоскости  $\sigma_j$  направление внешней нормали  $n$  совпадает с положительным направлением оси  $x$ ). Таким образом, функцию  $f_j(y, z, t)$ , определяющую колебания свободной поверхности жидкости в баке с номером  $j$ , можно отыскать, решив уравнение Лапласа (3.5.3) с краевыми условиями (3.6.20).

В заключение этого параграфа покажем, что решение задачи о колебаниях свободной поверхности жидкости, находящейся в  $j$ -м баке, не зависит от вида функции  $C_j(t)$ , фигурирующей в краевых условиях (3.6.20). Введем в рассмотрение функцию времени  $\gamma(t)$ , удовлетворяющую дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 \gamma}{dt^2} = C_j(t) - C_j^*(t). \quad (3.6.22)$$

Полагая в уравнении (3.5.3) и в краевых условиях (3.6.20)

$$\psi_j = \psi_j^* + \gamma(t), \quad (3.6.23)$$

получим согласно (3.6.22) дифференциальное уравнение

$$\nabla^2 \psi_j^* = 0 \quad (3.6.24)$$

с краевыми условиями:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \psi_j^*}{\partial n} &= 0 \text{ на } S_j, \\ \frac{\partial^2 \psi_j^*}{\partial t^2} + (w_{0x} - g_x) \frac{\partial \psi_j^*}{\partial n} + (w_{0y} - g_y) y + (w_{0z} - g_z) z + \\ &+ \frac{d\vec{\omega}}{dt} \cdot \vec{\varphi}_j = C_j^*(t) \text{ на } \sigma_j. \end{aligned} \right\} \quad (3.5.25)$$



Таким образом, подстановка (3.6.23) переводит краевую задачу для функции  $\psi_j$ , образуемую дифференциальным уравнением (3.5.3) с краевыми условиями (3.6.20), в аналогичную краевую задачу для функции  $\psi_j^*$ , содержащую вместо функции  $C_j(t)$  другую функцию  $C_j^*(t)$ . При этом согласно (3.6.23) будет иметь место равенство

$$\left(\frac{\partial \psi_j^*}{\partial x}\right)_{x=x_j} = \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial x}\right)_{x=x_j}$$

и в соответствии с формулой (3.6.21), осуществляя переход от функции  $C_j(t)$  к функции  $C_j^*(t)$ , мы получим в итоге одну и ту же функцию  $f_j(y, z, t)$ , определяющую колебания свободной поверхности в баке с номером  $j$ . Выбор функций  $C_j(t)$ ,  $j=1, 2, \dots$  мы осуществим в дальнейшем исходя из удобства проведения необходимых расчетов.

## § 7. КОЛЕБАНИЯ ЦЕНТРА МАСС РАКЕТЫ, УРАВНЕНИЕ СИЛ

Перейдем теперь к исследованию влияния, которое оказывает подвижность жидкостей в топливных баках на движение, совершаемое корпусом ракеты.

По предположению начало подвижной координатной системы  $O$  совпадает с центром масс ракеты  $C$ , если жидкости, находящиеся в топливных баках, ограничиваются плоскими свободными поверхностями, нормальными к оси ракеты. Рассмотренные выше малые колебания свободных поверхностей жидкостей вызывают малые колебания центра масс ракеты относительно начала связанной системы координат  $x, y, z$  и влияют, таким образом, на движение, совершаемое этой координатной системой.

Положение, занимаемое центром масс ракеты в связанной системе координат, будет определяться векторной формулой

$$\vec{r}_C = \frac{1}{m} \left( \int_{V_0} \vec{r} \varrho dv + \sum_{j=1}^N \varrho_j \int_{V_j^*} \vec{r} dv \right), \quad (3.7.1)$$

где  $\vec{r}_C$  — радиус-вектор центра масс;

$m$  — общая масса ракеты;

$N$  — число топливных баков;

$V_0$  — область, занимаемая твердыми элементами конструкции;

$V_j^*$  — область, занимаемая жидкостью в  $j$ -ом баке;

$\vec{r}$  — радиус-вектор элемента объема  $dv$ ;

$\varrho$  — плотность твердых элементов конструкции;

$\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_N$  — плотности жидкостей, находящихся в топливных баках.

Область  $V_j^*$  ограничивается смачиваемой поверхностью бака  $S_j$  и свободной поверхностью жидкости  $\sigma_j^*$ . Если  $F(x, y, z)$  — какая-либо функция пространственных переменных  $x, y, z$ , то, как видно из рис. 3.1, при малых отклонениях свободной поверхности  $\sigma_j^*$  от плоскости  $\sigma_j$  можно положить

$$\int_{V_j^*} F dv = \int_{V_j} F dv + \int_{\sigma_j} F f_j d\sigma, \quad (3.7.2)$$

где  $V_j$  — область, ограниченная поверхностями  $S_j$  и  $\sigma_j^1$ . В соответствии с равенством (3.7.2) формулу (3.7.1) можно преобразовать к виду

$$\vec{r}C = \frac{1}{m} \left( \int_{V_0} \vec{r} \varrho dv + \sum_{j=1}^N \varrho_j \int_{V_j} \vec{r} dv + \sum_{j=1}^N \varrho_j \int_{\sigma_j} \vec{r} f_j d\sigma \right). \quad (3.7.3)$$

При отсутствии отклонений  $f_j$  свободных поверхностей  $\sigma_j^*$  от плоскостей  $\sigma_j$  центр масс ракеты должен совпадать с началом связанной системы координат  $x, y, z$ . Таким образом, согласно (3.7.3) должно иметь место равенство

$$\int_{V_0} \vec{r} \varrho dv + \sum_{j=1}^N \varrho_j \int_{V_j} \vec{r} dv = 0. \quad (3.7.4)$$

Пользуясь зависимостью (3.7.4), можно преобразовать формулу (3.7.3) к виду

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^N \varrho_j \int_{\sigma_j} \vec{r} f_j d\sigma. \quad (3.7.5)$$

Формула (3.7.5) определяет колебания центра масс ракеты, вызываемые колебаниями свободных поверхностей жидкостей в топливных баках.

Как указывалось уже в гл. I, уравнения движения ракеты можно составить, как уравнения движения материальной системы постоянного состава, присоединив к внешним силам, действующим на ракету, реактивные силы. В соответствии с теоремой

---

<sup>1</sup> Формула (3.7.2) точна лишь для топливного бака цилиндрической формы.

о движении центра масс материальной системы должно иметь место равенство

$$m\vec{w}_c = \vec{F} + m\vec{g}, \quad (3.7.6)$$

где  $\vec{w}_c$  — абсолютное ускорение центра масс ракеты, найденное без учета переменности ее состава;

$\vec{F}$  — главный вектор аэродинамических и реактивных сил, действующих на ракету;

$\vec{g}$  — ускорение силы тяжести<sup>1</sup>.

Представляя абсолютное ускорение  $\vec{w}_c$  в виде суммы переносного, относительного и кориолисова ускорений, найдем

$$\vec{w}_c = \vec{w}_0 + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}_c + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_c) + \frac{\delta^2 \vec{r}_c}{dt^2} + 2\vec{\omega} \times \frac{\delta \vec{r}_c}{dt}. \quad (3.7.7)$$

Допуская погрешности высших порядков малости, можно заменить равенство (3.7.7) приближенным равенством

$$\vec{w}_c = \vec{w}_0 + \frac{\delta^2 \vec{r}_c}{dt^2}, \quad (3.7.8)$$

так как вращение ракеты предполагается нами медленным и колебания, совершаемые центром масс ракеты, должны быть малы в соответствии с предполагаемой нами малостью колебаний свободных поверхностей жидкостей.

Согласно (3.7.5) ускорение  $\delta^2 \vec{r}_c / dt^2$ , найденное без учета переменности состава ракеты, будет определяться соотношением

$$\frac{\delta^2 \vec{r}_c}{dt^2} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^N Q_j \int_{\sigma_j} \vec{r} \frac{\partial^2 f_j}{\partial t^2} d\sigma. \quad (3.7.9)$$

В соответствии с формулами (3.7.8) и (3.7.9) уравнению (3.7.6) можно придать вид

$$m(\vec{w}_0 - \vec{g}) + \sum_{j=1}^N Q_j \int_{\sigma_j} \vec{r} \frac{\partial^2 f_j}{\partial t^2} d\sigma = \vec{F}. \quad (3.7.10)$$

Уравнение (3.7.10) представляет собой *уравнение сил*, построенное с учетом подвижности жидкостей, находящихся в топливных баках ракеты.

<sup>1</sup> В гл. I для главного вектора и главного момента сил, действующих на ракету, применялись обозначения  $\Sigma \vec{F}$  и  $\Sigma \vec{M}$ . Знаком  $\Sigma$  подчеркивалось приращение к внешним силам реактивных и кориолисовых сил. В дальнейшем, для сокращения записей, знак  $\Sigma$  будет нами опускаться.

## § 8. МОМЕНТ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ РАКЕТЫ

Переходя к построению *уравнения моментов*, выведем сперва формулу, определяющую момент количества движения ракеты относительно ее центра масс, учитывая при выводе подвижность жидких компонентов топлива.

С учетом подвижности жидкостей, находящихся в топливных баках ракеты, искомый момент количества движения  $\vec{L}_C$  должен быть найден из соотношения

$$\vec{L}_C = \int_{\vec{V}_0} (\vec{r} - \vec{r}_C) \times (\vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}) \varrho dv + \sum_{j=1}^N \varrho_j \int_{\vec{V}_j^*} (\vec{r} - \vec{r}_C) \times \vec{v}_j dv, \quad (3.8.1)$$

где  $\vec{v}_j$  — вектор, определяющий скорости, с которыми движутся в стартовой системе координат частицы жидкости, находящейся в баке с номером  $j$ . Подставляя  $\vec{v}_j$  из (3.3.5) в (3.8.1), получим равенство

$$\vec{L}_C = \int_{\vec{V}_0} (\vec{r} - \vec{r}_C) \times (\vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}) \varrho dv + \sum_{j=1}^N \varrho_j \int_{\vec{V}_j^*} (\vec{r} - \vec{r}_C) \times (\vec{v}_0 + \text{grad } \Psi_j) dv,$$

или

$$\begin{aligned} \vec{L}_C = & \left[ \int_{\vec{V}_0} (\vec{r} - \vec{r}_C) \varrho dv + \sum_{j=1}^N \varrho_j \int_{\vec{V}_j^*} (\vec{r} - \vec{r}_C) dv \right] \times \vec{v}_0 + \\ & + \int_{\vec{V}_0} (\vec{r} - \vec{r}_C) (\vec{\omega} \times \vec{r}) \varrho dv + \sum_{j=1}^N \varrho_j \int_{\vec{V}_j^*} (\vec{r} - \vec{r}_C) \times \text{grad } \Psi_j dv. \end{aligned} \quad (3.8.2)$$

Пользуясь формулой (3.7.1) и равенством

$$m = \int_{\vec{V}_0} \varrho dv + \sum_{j=1}^N \varrho_j \int_{\vec{V}_j^*} dv, \quad (3.8.3)$$

определяющим общую массу ракеты  $m$ , найдем

$$\int_{V_0} (\vec{r} - \vec{r}_C) \varrho dv + \sum_{j=1}^N \varrho_j \int_{V_j^*} (\vec{r} - \vec{r}_C) dv = \int_{V_0} \vec{r} \varrho dv + \\ + \sum_{j=1}^N \varrho_j \int_{V_j^*} \vec{r} dv - \left( \int_{V_0} \varrho dv + \sum_{j=1}^N \varrho_j \int_{V_j^*} dv \right) \vec{r}_C = 0. \quad (3.8.4)$$

Согласно (3.8.4) формуле (3.8.2) можно придать вид

$$\vec{L}_C = \int_{V_0} (\vec{r} - \vec{r}_C) \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \varrho dv + \\ + \sum_{j=1}^N \varrho_j \int_{V_j^*} (\vec{r} - \vec{r}_C) \times \text{grad } \Psi_j dv. \quad (3.8.5)$$

Учитывая малость векторов  $\vec{r}_C$ ,  $\vec{\omega}$  и  $\text{grad } \Psi_j$  и близость областей  $V_j^*$  и  $V_j$ , можно с погрешностями высших порядков мало-сти заменить формулу (3.8.5) приближенной формулой

$$\vec{L}_C = \int_{V_0} \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \varrho dv + \sum_{j=1}^N \varrho_j \int_{V_j} \vec{r} \times \text{grad } \Psi_j dv. \quad (3.8.6)$$

Осуществляя преобразование объемного интеграла в по-верхностный посредством формул Гаусса-Остроградского, най-дем:

$$\int_{V_j} \vec{r} \times \text{grad } \Psi_j dv = \int_{V_j} \left[ \left( y \frac{\partial \Psi_j}{\partial z} - z \frac{\partial \Psi_j}{\partial y} \right) \vec{e}_x + \left( z \frac{\partial \Psi_j}{\partial x} - x \frac{\partial \Psi_j}{\partial z} \right) \vec{e}_y + \right. \\ \left. + \left( x \frac{\partial \Psi_j}{\partial y} - y \frac{\partial \Psi_j}{\partial x} \right) \vec{e}_z \right] dv = \int_{V_j} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [(z \vec{e}_y - y \vec{e}_z) \Psi_j] + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial y} [(x \vec{e}_z - z \vec{e}_x) \Psi_j] + \frac{\partial}{\partial z} [(y \vec{e}_x - x \vec{e}_y) \Psi_j] \right\} dv = \\ = \int_{S_{j+\sigma_j}} \Psi_j [(z \vec{e}_y - y \vec{e}_z) \cos(n, x) + (x \vec{e}_z - z \vec{e}_x) \cos(n, y) + \\ + (y \vec{e}_x - x \vec{e}_y) \cos(n, z)] d\sigma = \int_{S_{j+\sigma_j}} \Psi_j \left\{ [y \cos(n, z) - \right.$$

$$-z \cos(n, y)] \vec{e}_x + [z \cos(n, x) - x \cos(n, z)] \vec{e}_y + \\ + [x \cos(n, y) - y \cos(n, x)] \vec{e}_z \Big\} d\sigma = \int_{s_j + \sigma_j} \Psi_j \vec{r} \times \vec{n} d\sigma,$$

или согласно (3.4.3)

$$\int_{V_j} \vec{r} \times \text{grad } \Psi_j dv = \int_{s_j + \sigma_j} \Psi_j \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial n} j d\sigma. \quad (3.8.7)$$

Функции  $\Psi_j$  и  $\vec{\varphi}_j$  являются решениями уравнений (3.3.3) и (3.4.2), и, таким образом, в соответствии с формулой Грина должно иметь место равенство

$$\int_{s_j + \sigma_j} \Psi_j \frac{\partial \vec{\varphi}_j}{\partial n} d\sigma = \int_{s_j + \sigma_j} \vec{\varphi}_j \frac{\partial \Psi_j}{\partial n} d\sigma. \quad (3.8.8)$$

Согласно (3.3.7) и (3.8.8) формуле (3.8.7) можно придавать вид

$$\int_{V_j} \vec{r} \times \text{grad } \Psi_j dv = \int_{s_j + \sigma_j} \vec{\varphi}_j \vec{\omega} \cdot (\vec{r} \times \vec{n}) d\sigma + \int_{\sigma_j} \vec{\varphi}_j \frac{\partial f_j}{\partial t} d\sigma,$$

или, если воспользоваться зависимостью (3.4.3)

$$\int_{V_j} \vec{r} \times \text{grad } \Psi_j dv = \int_{s_j + \sigma_j} \vec{\varphi}_j \vec{\omega} \cdot \frac{\partial \vec{\varphi}_j}{\partial n} d\sigma + \int_{\sigma_j} \vec{\varphi}_j \frac{\partial f_j}{\partial t} d\sigma. \quad (3.8.9)$$

Подставляя (3.8.9) в (3.8.6), получим для момента количества движения  $\vec{L}_C$  формулу

$$\vec{L}_C = \int_{V_0} \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \varrho dv + \sum_{j=1}^N \varrho_j \int_{s_j + \sigma_j} \vec{\varphi}_j \vec{\omega} \cdot \frac{\partial \vec{\varphi}_j}{\partial n} d\sigma + \\ + \sum_{j=1}^N \varrho_j \int_{\sigma_j} \vec{\varphi}_j \frac{\partial f_j}{\partial t} d\sigma,$$

или

$$\vec{L}_C = \vec{L}_C^{(0)} + \sum_{j=1}^N \varrho_j \int_{\sigma_j} \vec{\varphi}_j \frac{\partial f_j}{\partial t} d\sigma, \quad (3.8.10)$$

где

$$\vec{L}_C^0 = \int_{V_0} \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \varrho dv + \sum_{j=1}^N \varrho_j \int_{S_j + \sigma_j} \vec{\varphi}_j \vec{\omega} \cdot \frac{\partial \vec{\varphi}_j}{\partial n} d\tau. \quad (3.8.11)$$

В формуле (3.8.10) вектор  $\vec{L}_C^0$  определяет момент количества движения ракеты относительно ее центра масс, соответствующий тому случаю, когда в процессе движения свободные поверхности жидкостей не совершают колебаний и остаются плоскими и нормальными к оси ракеты. Второе слагаемое в правой части формулы (3.8.10), определяет дополнительный момент количества движения, порождаемый колебаниями свободных поверхностей жидкостей, находящихся в топливных баках.

### § 9. УЧЕТ ПОДВИЖНОСТИ ЖИДКИХ КОМПОНЕНТОВ ТОПЛИВА ПРИ РАСЧЕТЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ РАБОТЫ

Рассмотрим детальнее момент количества движения  $\vec{L}_C^0$ , определяемый формулой (3.8.11). Осуществляя в векторной формуле (3.8.11) проектирование векторов на оси связанной системы координат  $x, y, z$ , получим формулы:

$$\begin{aligned} L_{Cx}^{(0)} = & \int_{V_0} [y(\omega_x y - \omega_y x) - z(\omega_z x - \omega_x z)] \varrho dv + \\ & + \sum_{j=1}^N \varrho_j \int_{S_j + \sigma_j} \varphi_{jx} \left( \omega_x \frac{\partial \varphi_{jx}}{\partial n} + \omega_y \frac{\partial \varphi_{jy}}{\partial n} + \right. \\ & \left. + \omega_z \frac{\partial \varphi_{jz}}{\partial n} \right) d\tau, \\ L_{Cy}^{(0)} = & \int_{V_0} [z(\omega_y z - \omega_z y) - x(\omega_x y - \omega_y x)] \varrho dv + \\ & + \sum_{j=1}^N \varrho_j \int_{S_j + \sigma_j} \varphi_{jy} \left( \omega_x \frac{\partial \varphi_{jx}}{\partial n} + \omega_y \frac{\partial \varphi_{jy}}{\partial n} + \omega_z \frac{\partial \varphi_{jz}}{\partial n} \right) d\tau, \\ L_{Cz}^{(0)} = & \int_{V_0} [x(\omega_z x - \omega_x z) - y(\omega_y z - \omega_z y)] \varrho dv + \\ & + \sum_{j=1}^N \varrho_j \int_{S_j + \sigma_j} \varphi_{jz} \left( \omega_x \frac{\partial \varphi_{jx}}{\partial n} + \omega_y \frac{\partial \varphi_{jy}}{\partial n} + \omega_z \frac{\partial \varphi_{jz}}{\partial n} \right) d\tau. \end{aligned} \quad (3.9.1)$$

Формулам (3.9.1) можно придать вид

$$\begin{aligned} L_{Cx}^{(0)} &= J_{xx}^{(0)} + J_{xy}^{(0)} + J_{xz}^{(0)}, \\ L_{Cy}^{(0)} &= J_{yx}^{(0)} + J_{yy}^{(0)} + J_{yz}^{(0)}, \\ L_{Cz}^{(0)} &= J_{zx}^{(0)} + J_{zy}^{(0)} + J_{zz}^{(0)}, \end{aligned} \quad (3.9.2)$$

где

$$\begin{aligned} J_{xx} &= \int_{V_0} (y^2 + z^2) \varrho \, dv + \sum_{j=1}^N \varrho_j \int_{S_j + \sigma_j} \varphi_{jx} \frac{\partial \varphi_{jx}}{\partial n} \, d\tau, \\ J_{xy} &= - \int_{V_0} xy \varrho \, dv + \sum_{j=1}^N \varrho_j \int_{S_j + \sigma_j} \varphi_{jx} \frac{\partial \varphi_{jy}}{\partial n} \, d\tau, \\ J_{xz} &= - \int_{V_0} xz \varrho \, dv + \sum_{j=1}^N \varrho_j \int_{S_j + \sigma_j} \varphi_{jx} \frac{\partial \varphi_{jz}}{\partial n} \, d\tau, \\ J_{yx} &= - \int_{V_0} xy \varrho \, dv + \sum_{j=1}^N \varrho_j \int_{S_j + \sigma_j} \varphi_{jy} \frac{\partial \varphi_{jx}}{\partial n} \, d\tau, \\ J_{yy} &= \int_{V_0} (x^2 + z^2) \varrho \, dv + \sum_{j=1}^N \varrho_j \int_{S_j + \sigma_j} \varphi_{jy} \frac{\partial \varphi_{jy}}{\partial n} \, d\tau, \\ J_{yz} &= - \int_{V_0} yz \varrho \, dv + \sum_{j=1}^N \varrho_j \int_{S_j + \sigma_j} \varphi_{jy} \frac{\partial \varphi_{jz}}{\partial n} \, d\tau, \\ J_{zx} &= - \int_{V_0} xz \varrho \, dv + \sum_{j=1}^N \varrho_j \int_{S_j + \sigma_j} \varphi_{jz} \frac{\partial \varphi_{jx}}{\partial n} \, d\tau, \\ J_{zy} &= - \int_{V_0} yz \varrho \, dv + \sum_{j=1}^N \varrho_j \int_{S_j + \sigma_j} \varphi_{jz} \frac{\partial \varphi_{jy}}{\partial n} \, d\tau, \\ J_{zz} &= \int_{V_0} (x^2 + y^2) \varrho \, dv + \sum_{j=1}^N \varrho_j \int_{S_j + \sigma_j} \varphi_{jz} \frac{\partial \varphi_{jz}}{\partial n} \, d\tau. \end{aligned} \quad (3.9.3)$$

Согласно (3.4.2) функции  $\varphi_{jx}$ ,  $\varphi_{jy}$  и  $\varphi_{jz}$  являются решениями уравнения Лапласа, и, таким образом, в соответствии с формулой Грина должны иметь место равенства:



$$\begin{aligned}
\int_{S_j + \sigma_j} \varphi_{jy} \frac{\partial \varphi_{jx}}{\partial n} d\sigma &= \int_{S_j + \sigma_j} \varphi_{jx} \frac{\partial \varphi_{jy}}{\partial n} d\sigma, \\
\int_{S_j + \sigma_j} \varphi_{jz} \frac{\partial \varphi_{jx}}{\partial n} d\sigma &= \int_{S_j + \sigma_j} \varphi_{jx} \frac{\partial \varphi_{jz}}{\partial n} d\sigma, \\
\int_{S_j + \sigma_j} \varphi_{jz} \frac{\partial \varphi_{jy}}{\partial n} d\sigma &= \int_{S_j + \sigma_j} \varphi_{jy} \frac{\partial \varphi_{jz}}{\partial n} d\sigma.
\end{aligned} \tag{3.9.4}$$

Из формул (3.9.3) и (3.9.4) вытекают соотношения:

$$J_{yx} = J_{xy}, \quad J_{zx} = J_{xz}, \quad J_{yz} = J_{zy}. \tag{3.9.5}$$

В соответствии с равенствами (3.9.2) и (3.9.5) момент количества движения  $\vec{L}_C^{(0)}$  равен моменту количества движения твердого тела, у которого моменты инерции относительно осей  $x, y, z$  —  $J_{xx}, J_{yy}, J_{zz}$  и центробежные моменты инерции  $J_{xy}, J_{xz}, J_{yz}$  имеют значения, определяемые формулами (3.9.3).

Пользуясь соотношениями (3.9.2) и (3.9.5), можно придать равенству (3.8.10) вид

$$\begin{aligned}
\vec{L}_C = & (J_{xx}\omega_x + J_{xy}\omega_y + J_{xz}\omega_z) \vec{e}_x + (J_{xy}\omega_x + J_{yy}\omega_y + J_{yz}\omega_z) \vec{e}_y + \\
& + (J_{xz}\omega_x + J_{yz}\omega_y + J_{zz}\omega_z) \vec{e}_z + \sum_{j=1}^N Q_j \int_{\sigma_j} \vec{\varphi}_j \frac{\partial f_j}{\partial t} d\sigma.
\end{aligned} \tag{3.9.6}$$

Согласно (3.9.6) при отсутствии колебаний свободных поверхностей жидкостей, т. е. при  $f_j \equiv 0, j=1, 2, \dots, N$ , момент количества движения ракеты относительно ее центра масс можно определить как момент количества движения твердого тела, вычислив моменты инерции ракеты относительно осей связанной системы координат  $x, y, z$  —  $J_{xx}, J_{yy}, J_{zz}$  и центробежные моменты инерции ракеты  $J_{xy}, J_{xz}, J_{yz}$  по формулам (3.9.3).

## § 10. УРАВНЕНИЕ МОМЕНТОВ. ТЕОРЕМА ЖУКОВСКОГО

В § 7 мы получили уравнение сил (3.7.10). Перейдем теперь к выводу уравнения моментов. В соответствии с теоремой об из-

менении момента количества движения, в любой момент времени должно иметь место равенство

$$\frac{d\vec{L}_C}{dt} = \vec{M}_C. \quad (3.10.1)$$

где  $\frac{d\vec{L}_C}{dt}$  — производная по времени от момента количества движения  $\vec{L}_C$ , вычисленная без учета переменности состава ракеты;

$\vec{M}_C$  — главный момент аэродинамических и реактивных сил, действующих на ракету (главный момент сил тяжести относительно центра масс ракеты всегда будет равен нулю).

Уравнению (3.10.1) можно придать вид

$$\frac{\delta \vec{L}_C}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{L}_C = \vec{M}_C. \quad (3.10.2)$$

Согласно (3.9.6) векторное произведение  $\vec{\omega} \times \vec{L}_C$  является малой величиной второго порядка малости в соответствии с предполагаемой нами малостью колебаний свободных поверхностей жидкостей и малостью угловой скорости  $\vec{\omega}$ . Таким образом, пренебрегая малыми величинами второго порядка малости, можно заменить уравнение (3.10.2) приближенным уравнением

$$\frac{\delta \vec{L}_C}{dt} = \vec{M}_C. \quad (3.10.3)$$

Вычисляя по формуле (3.9.6) локальную производную по времени  $\delta \vec{L}_C/dt$  без учета переменности состава ракеты, получим соотношение

$$\begin{aligned} \frac{\delta \vec{L}_C}{dt} = & \left( J_{xx} \frac{d\omega_x}{dt} + J_{xy} \frac{d\omega_y}{dt} + J_{xz} \frac{d\omega_z}{dt} \right) \vec{e}_x + \\ & + \left( J_{xy} \frac{d\omega_x}{dt} + J_{yy} \frac{d\omega_y}{dt} + J_{yz} \frac{d\omega_z}{dt} \right) \vec{e}_y + \\ & + \left( J_{xz} \frac{d\omega_x}{dt} + J_{yz} \frac{d\omega_y}{dt} + J_{zz} \frac{d\omega_z}{dt} \right) \vec{e}_z + \\ & + \sum_{j=1}^N Q_j \iint_{\sigma_j} \vec{\varphi}_j \frac{\partial^2 f_j}{\partial t^2} d\sigma. \end{aligned} \quad (3.10.4)$$

Обозначим далее через  $\vec{M}$  главный момент аэродинамических и реактивных сил относительно начала связанной системы коор-

динат  $x, y, z$ . Моменты  $\vec{M}$  и  $\vec{M}_C$  будут связаны между собой зависимостью

$$\vec{M}_C = \vec{M} - \vec{r}_C \times \vec{F}, \quad (3.10.5)$$

где  $\vec{r}_C$  — радиус-вектор центра масс ракеты;  $\vec{F}$  — главный вектор аэродинамических и реактивных сил, действующих на ракету.

Согласно (3.7.6) и (3.7.8) формулу (3.10.5) можно преобразовать к виду

$$\vec{M}_C = \vec{M} - m\vec{r}_C \times (\vec{\omega}_C - \vec{g}) = \vec{M} - m\vec{r}_C \times (\vec{\omega}_0 - \vec{g}) - m\vec{r}_C \times \frac{d^2\vec{r}_C}{dt^2}. \quad (3.10.6)$$

Предполагаемая нами малость колебаний свободных поверхностей жидкостей влечет за собой малость колебаний, совершаемых центром масс ракеты в связанной системе координат  $x, y, z$ . Таким образом, пренебрегая малыми величинами второго порядка малости, можно заменить равенство (3.10.6) приближенным равенством

$$\vec{M}_C = \vec{M} - m\vec{r}_C \times (\vec{\omega}_0 - \vec{g}),$$

или согласно (3.7.5)

$$\vec{M}_C = \vec{M} - \sum_{j=1}^N \varrho_j \int_{\sigma_j} \vec{r} f_j d\sigma \times (\vec{\omega}_0 - \vec{g}). \quad (3.10.7)$$

Подставляя (3.10.4) и (3.10.7) в (3.10.3), получим уравнение

$$\begin{aligned} & \left( J_{xx} \frac{d\omega_x}{dt} + J_{xy} \frac{d\omega_y}{dt} + J_{xz} \frac{d\omega_z}{dt} \right) \vec{e}_x + \left( J_{xy} \frac{d\omega_x}{dt} + J_{yy} \frac{d\omega_y}{dt} + \right. \\ & \left. + J_{yz} \frac{d\omega_z}{dt} \right) \vec{e}_y + \left( J_{xz} \frac{d\omega_x}{dt} + J_{yz} \frac{d\omega_y}{dt} + J_{zz} \frac{d\omega_z}{dt} \right) \vec{e}_z + \\ & + \sum_{j=1}^N \varrho_j \iint_{\sigma_j} \vec{\varphi}_j \frac{\partial^2 f_j}{\partial t^2} d\sigma - \sum_{j=1}^N \varrho_j \int_{\sigma_j} \vec{r} f_j d\sigma \times (\vec{\omega}_0 - \vec{g}) = \vec{M}. \end{aligned} \quad (3.10.8)$$

При отсутствии колебаний свободных поверхностей жидкостей, т. е. при  $f_j = 0, j = 1, 2, \dots, N$ , уравнение сил (3.7.10) и уравнение моментов (3.10.8) переходят в уравнения движения твердого тела, от которых мы отправлялись в гл. I и II, с той лишь разницей, что при учете относительных движений, совершаемых жидкостями в топливных баках, моменты инерции ракеты должны рассчитываться не по формулам динамики твердого тела, а по формулам (3.9.3).

В работе [5] Н. Е. Жуковский рассмотрел задачу о движении твердого тела с полостями, полностью заполненными идеальной

жидкостью, и показал, что такая материальная система движется под действием заданной системы сил, как эквивалентное твердое тело той же массы, обладающее моментами инерции, определяемыми формулами (3.9.3) (в этом случае поверхности  $\sigma_j$ ,  $j=1, 2, \dots, N$ , фигурирующие в формулах (3.9.3), отсутствуют). Таким образом, при отсутствии колебаний свободных поверхностей жидкостей уравнения сил и моментов (3.7.10) и (3.10.8) непосредственно вытекают из указанной нами работы Жуковского. Формулы (3.9.3) мы будем называть в дальнейшем *формулами Жуковского*.

## § 11. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ РАКЕТЫ, УЧИТЫВАЮЩИЕ ПОДВИЖНОСТЬ ЖИДКОСТЕЙ В ТОПЛИВНЫХ БАКАХ

Уравнения сил и моментов (3.7.10) и (3.10.8) содержат систему функций  $f_j(y, z, t)$ ,  $j=1, 2, \dots, N$ , характеризующую колебания свободных поверхностей жидкостей в топливных баках. В то же время краевая задача, образуемая дифференциальным уравнением (3.5.3) с краевыми условиями (3.6.20) и определяющая функцию  $f_j(y, z, t)$  в соответствии с формулой (3.6.21), содержит ускорения  $\omega_{0x}$ ,  $\omega_{0y}$ ,  $\omega_{0z}$ ,  $d\omega_x/dt$ ,  $d\omega_y/dt$  и  $d\omega_z/dt$ , характеризующие движение, совершаемое корпусом ракеты. Таким образом, задача о движении корпуса и задача о колебаниях жидкостей в топливных баках могут быть решены только в результате совместного их рассмотрения. Чтобы получить полную систему уравнений, определяющую движение корпуса ракеты и движения, совершаемые жидкостями, находящимися в топливных баках, следует исключить из уравнений сил и моментов (3.7.10) и (3.10.8) функции  $f_j(y, z, t)$  посредством соотношения (3.6.21) и присоединить к полученным зависимостям уравнения (3.5.3) с краевыми условиями (3.6.20). Получим систему уравнений

$$\begin{aligned}
 m(\vec{\omega}_0 - \vec{g}) + \sum_{j=1}^N \varrho_j \int_{\sigma_j} \vec{r} \left( \frac{\partial^3 \psi_j}{\partial x \partial t^2} \right)_{x=x_j} d\sigma = \vec{F}, \\
 \left( J_{xx} \frac{d\omega_x}{dt} + J_{xy} \frac{d\omega_y}{dt} + J_{xz} \frac{d\omega_z}{dt} \right) \vec{e}_x + \left( J_{xy} \frac{d\omega_x}{dt} + J_{yy} \frac{d\omega_y}{dt} + \right. \\
 \left. + J_{yz} \frac{d\omega_z}{dt} \right) \vec{e}_y + \left( J_{xz} \frac{d\omega_x}{dt} + J_{yz} \frac{d\omega_y}{dt} + J_{zz} \frac{d\omega_z}{dt} \right) \vec{e}_z + \\
 + \sum_{j=1}^N \varrho_j \int_{\sigma_j} \vec{\varphi}_j \left( \frac{\partial^3 \psi_j}{\partial x \partial t^2} \right)_{x=x_j} d\sigma + \sum_{j=1}^N \varrho_j \int_{\sigma_j} \vec{r} \left( \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \right)_{x=x_j} d\sigma \times \\
 \times (\vec{\omega}_0 - \vec{g}) = \vec{M}, \\
 \nabla^2 \psi_j = 0, \quad j=1, 2, \dots, N,
 \end{aligned} \tag{3.11.1}$$

$$\frac{\partial \psi_j}{\partial n} = 0 \text{ на } S_j, \quad j=1, 2, \dots, N,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial t^2} + (w_{0x} - g_x) \frac{\partial \psi_j}{\partial n} + (w_{0y} - g_y) y + (w_{0z} - g_z) z + \\ + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \cdot \vec{\varphi}_j = C_j(t) \text{ на } \sigma_j, \quad j=1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (3.11.1)$$

Уравнения (3.11.1) определяют движение, совершаемое корпусом ракеты, и систему функций  $\psi_j(x, y, z, t)$ ,  $j=1, 2, \dots, N$ . Пользуясь формулой (3.6.21), можно отыскать по функциям  $\psi_j$  систему функций  $f_j(y, z, t)$ ,  $j=1, 2, \dots, N$ , определяющую колебания свободных поверхностей жидкостей в топливных баках.

Зная векторные функции времени  $\vec{v}_0(t)$  и  $\vec{\omega}(t)$  и функции  $\psi_j(x, y, z, t)$ ,  $j=1, 2, \dots, N$ , можно построить по формуле (3.5.16) систему векторных функций  $\vec{v}_j(x, y, z, t)$ ,  $j=1, 2, \dots, N$ , определяющую поля скоростей жидкостей, находящихся в топливных баках. Таким образом, уравнения (3.11.1) полностью определяют движения, совершаемые корпусом ракеты и жидкостями, находящимися в ее топливных баках, и эти уравнения можно рассматривать как уравнения движения ракеты, учитывающие подвижность жидкостей в топливных баках.

Для построения уравнений движения (3.11.1) необходимо отыскать предварительно потенциалы Жуковского  $\varphi_{jx}$ ,  $\varphi_{jy}$ ,  $\varphi_{jz}$ ,  $j=1, 2, \dots, N$ , явно входящие в уравнения (3.11.1) и фигурирующие в формулах Жуковского (3.9.3). Вопрос о расчете потенциалов Жуковского рассматривается в следующих параграфах этой главы.

## § 12. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛОВ ЖУКОВСКОГО

При рассмотрении вопроса о расчете потенциалов Жуковского  $\varphi_{jx}$ ,  $\varphi_{jy}$ ,  $\varphi_{jz}$  будем предполагать, что все смачиваемые поверхности  $S_j$ ,  $j=1, 2, \dots, N$ , являются поверхностями вращения. При наличии внутрибаковых устройств, нарушающих это свойство смачиваемой поверхности, расчетное определение потенциалов Жуковского весьма усложняется, исследование динамических эффектов, возникающих при установке таких внутрибаковых устройств, проводится обычно экспериментальными методами.

Потенциалы Жуковского  $\varphi_{jx}$ ,  $\varphi_{jy}$ ,  $\varphi_{jz}$  представляют собой проекции на координатные оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$  вектора  $\vec{\varphi}_j$ , определяемого уравнением (3.4.2) и краевым условием (3.4.3). Обозначим через  $\vec{r}_j$  радиус-вектор центра плоской свободной поверхности жидкости  $\sigma_j$  в связанной системе координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$  (рис. 3.3) и вместо

векторной функции  $\vec{\varphi}_j$  введем в рассмотрение векторную функцию  $\vec{\varphi}_j^{(0)}$ , определяемую соотношением

$$\vec{\varphi}_j^{(0)} = \vec{\varphi}_j - \vec{r}_j \times \vec{r}. \quad (3.12.1)$$

Согласно (3.12.1) будут иметь место равенства:

$$\nabla^2 \vec{\varphi}_j^{(0)} = \nabla^2 \vec{\varphi}_j - \vec{r}_j \times \nabla^2 \vec{r}, \quad \frac{\partial \vec{\varphi}_j^{(0)}}{\partial n} = \frac{\partial \vec{\varphi}_j}{\partial n} - \vec{r}_j \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial n}. \quad (3.12.2)$$

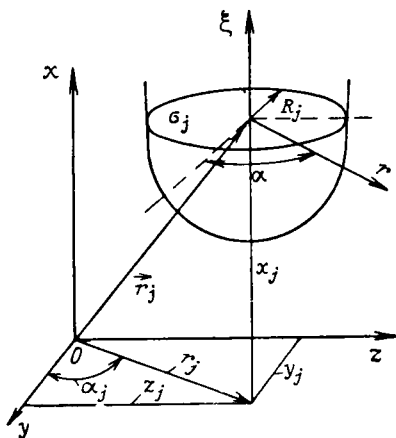


Рис. 3.3.

Пользуясь дифференциальным уравнением (3.4.2), краевым условием (3.4.3) и соотношениями:

$$\nabla^2 \vec{r} = \nabla^2 (x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z) = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{r}}{\partial n} &= \frac{\partial}{\partial n} (x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z) = \cos(n, x)\vec{e}_x + \cos(n, y)\vec{e}_y + \\ &+ \cos(n, z)\vec{e}_z = \vec{n}, \end{aligned} \quad (3.12.3)$$

получим из (3.12.2) дифференциальное уравнение

$$\nabla^2 \vec{\varphi}_j^{(0)} = 0 \quad (3.12.4)$$

и краевое условие

$$\frac{\partial \vec{\varphi}_j^{(0)}}{\partial n} = (\vec{r} - \vec{r}_j) \times \vec{n} \text{ на } S_j \text{ и } \sigma_j. \quad (3.12.5)$$

Построим далее систему цилиндрических координат  $\xi, r, \alpha$ , показанную на рис. 3.3. Связь между прямоугольными координатами

тами  $x, y, z$  и цилиндрическими координатами  $\xi, r, \alpha$  будет определяться формулами:

$$\begin{aligned}x &= x_j + \xi, \\y &= y_j + r \cos \alpha, \\z &= z_j + r \sin \alpha,\end{aligned}\quad (3.12.6)$$

где  $x_j, y_j$  и  $z_j$  — проекции вектора  $\vec{r}_j$  на координатные оси  $x, y, z$  (см. рис. 3.3). Дифференциальное уравнение Лапласа (3.12.4) в цилиндрических координатах  $\xi, r, \alpha$  будет иметь вид

$$\frac{\partial^2 \vec{\varphi}_j^{(0)}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \vec{\varphi}_j^{(0)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{\varphi}_j^{(0)}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \vec{\varphi}_j^{(0)}}{\partial \alpha^2} = 0 \quad (3.12.7)$$

(см. [21]). Согласно (3.12.5) и (3.12.7) проекции вектора  $\vec{\varphi}_j^{(0)}$  на координатные оси  $x, y, z$  —  $\varphi_{jx}^{(0)}, \varphi_{jy}^{(0)}, \varphi_{jz}^{(0)}$  должны удовлетворять дифференциальным уравнениям:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \varphi_{jx}^{(0)}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{jx}^{(0)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_{jx}^{(0)}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi_{jx}^{(0)}}{\partial \alpha^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \varphi_{jy}^{(0)}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{jy}^{(0)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_{jy}^{(0)}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi_{jy}^{(0)}}{\partial \alpha^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \varphi_{jz}^{(0)}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{jz}^{(0)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_{jz}^{(0)}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi_{jz}^{(0)}}{\partial \alpha^2} &= 0\end{aligned}\quad (3.12.8)$$

и краевым условиям:

$$\left. \begin{aligned}\frac{\partial \varphi_{jx}^{(0)}}{\partial n} &= (y - y_j) n_z - (z - z_j) n_y \\ \frac{\partial \varphi_{jy}^{(0)}}{\partial n} &= (z - z_j) n_x - (x - x_j) n_z \\ \frac{\partial \varphi_{jz}^{(0)}}{\partial n} &= (x - x_j) n_y - (y - y_j) n_x\end{aligned} \right\} \text{ на } S_j \text{ и } \sigma_j. \quad (3.12.9)$$

Обозначим далее через  $\chi$  угол между направлением внешней нормали  $\vec{n}$  к поверхностям  $S_j$  и  $\sigma_j$  и направлением отрицательной полуоси  $\xi$  (рис. 3.4). Как видно из рисунка, проекции  $n_x, n_y$  и  $n_z$  единичного вектора внешней нормали  $\vec{n}$  будут определяться формулами:

$$\begin{aligned}n_x &= -\cos \chi, \\ n_y &= \sin \chi \cos \alpha, \\ n_z &= \sin \chi \sin \alpha.\end{aligned}\quad (3.12.10)$$

Согласно (3.12.6) и (3.12.10) краевым условиям (3.12.9) можно придать вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi_{jx}^{(0)}}{\partial n} &= 0 \\ \frac{\partial \varphi_{jy}^{(0)}}{\partial n} &= -(r \cos \chi + \xi \sin \chi) \sin \alpha \\ \frac{\partial \varphi_{jz}^{(0)}}{\partial n} &= (r \cos \chi + \xi \sin \chi) \cos \alpha \end{aligned} \right\} \text{ на } S_j \text{ и } \sigma_j. \quad (3.12.11)$$

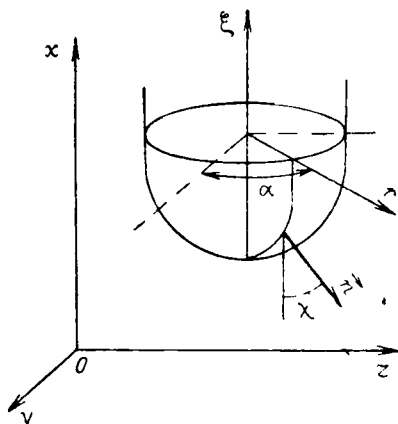


Рис. 3.4.

Первому из дифференциальных уравнений (3.12.8) и первому из краевых условий (3.12.11) мы удовлетворим, положив

$$\varphi_{jx}^{(0)} = 0. \quad (3.12.12)$$

Для определения функций  $\varphi_{jy}^{(0)}$  и  $\varphi_{jz}^{(0)}$  введем в рассмотрение решение двумерного дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 \theta_j}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \theta_j}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta_j}{\partial r} - \frac{\theta_j}{r^2} = 0, \quad (3.12.13)$$

регулярное на оси  $r=0$ , иными словами неограниченно дифференцируемое в точках этой оси, и удовлетворяющее краевому условию

$$\frac{\partial \theta_j}{\partial n} = r \cos \chi + \xi \sin \chi \text{ на } l_j, \quad (3.12.14)$$

где  $l_j$  — образующая замкнутой поверхности вращения  $S_j + \sigma_j$ . Согласно (3.12.13) и (3.12.14) мы удовлетворим второму



и третьему из дифференциальных уравнений (3.12.8) и второму и третьему из краевых условий (3.12.11), положив

$$\varphi_{jy}^{(0)} = -\theta_j \sin \alpha, \quad \varphi_{jz}^{(0)} = \theta_j \cos \alpha \quad (3.12.15)$$

(на внешней нормали  $n$  полярный угол  $\alpha$  сохраняет постоянное значение, и, таким образом,  $\partial \alpha / \partial n = 0$ ).

Осуществляя в равенстве (3.12.1) проектирование векторов на координатные оси  $x, y, z$ , получим формулы:

$$\varphi_{jx} = \varphi_{jx}^{(0)} + y_j z - z_j y, \quad \varphi_{jy} = \varphi_{jy}^{(0)} + z_j x - x_j z, \quad \varphi_{jz} = \varphi_{jz}^{(0)} + x_j y - y_j x,$$

или согласно (3.12.12) и (3.12.15)

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{jx} &= y_j z - z_j y, \\ \varphi_{jy} &= -\theta_j \sin \alpha + z_j x - x_j z, \\ \varphi_{jz} &= \theta_j \cos \alpha + x_j y - y_j x. \end{aligned} \right\} \quad (3.12.16)$$

Таким образом, решив двумерную краевую задачу, образуемую дифференциальным уравнением (3.12.13) и краевым условием (3.12.14), можно отыскать затем потенциалы Жуковского  $\varphi_{jx}$ ,  $\varphi_{jy}$  и  $\varphi_{jz}$  по формулам (3.12.16). Для решения дифференциального уравнения (3.12.13) с краевым условием (3.12.14) известно много расчетных методов; можно воспользоваться, в частности, методом, изложенным в книге [22]. В отдельных случаях функция  $\theta_j$  может быть найдена в виде разложения по тем или иным специальным функциям. Два таких случая подробно рассматриваются нами в следующем параграфе.

## § 13. ПРОСТЕЙШИЕ ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА ПОТЕНЦИАЛОВ ЖУКОВСКОГО

### 13.1. Цилиндрический топливный бак

В этом случае образующая  $l_j$  замкнутой поверхности  $S_j + \sigma_j$  представляет собой ломаную линию, показанную на рис. 3.5. Угол  $\chi$ , фигурирующий в краевом условии (3.12.14), на контуре  $l_j$  принимает значения, определяемые формулами:

$$\left. \begin{aligned} \chi &= 0 & \text{при } \xi = -H, & \quad 0 < r < R, \\ \chi &= \frac{\pi}{2} & \text{при } r = R, & \quad -H < \xi < 0, \\ \chi &= \pi & \text{при } \xi = 0, & \quad 0 < r < R, \end{aligned} \right\} \quad (3.13.1)$$

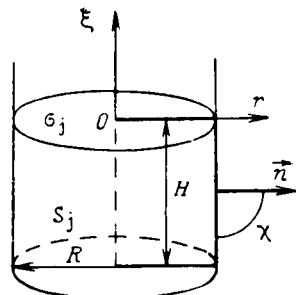


Рис. 3.5.

где  $R$  — радиус бака;  
 $H$  — глубина его заполнения.

Согласно (3.13.1) краевое условие (3.12.14) в данном случае будет иметь вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial \theta_j}{\partial \xi} &= -r \text{ при } \xi = -H, & 0 < r < R, \\ \frac{\partial \theta_j}{\partial r} &= \xi \text{ при } r = R, & -H < \xi < 0, \\ \frac{\partial \theta_j}{\partial \xi} &= -r \text{ при } \xi = 0, & 0 < r < R.\end{aligned}\quad (3.13.2)$$

Полагая в (3.12.13) и (3.13.2)

$$\theta_j = \xi r + \theta_j^*, \quad (3.13.3)$$

получим для функции  $\theta_j^*$  дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 \theta_j^*}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \theta_j^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta_j^*}{\partial r} - \frac{\theta_j^*}{r^2} = 0 \quad (3.13.4)$$

с краевыми условиями:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \theta_j^*}{\partial \xi} &= -2r \text{ при } \xi = -H, & 0 < r < R, \\ \frac{\partial \theta_j^*}{\partial r} &= 0 \text{ при } r = R, & -H < \xi < 0, \\ \frac{\partial \theta_j^*}{\partial \xi} &= -2r \text{ при } \xi = 0, & 0 < r < R.\end{aligned}\quad (3.13.5)$$

Построим сперва частное решение дифференциального уравнения (3.13.4) вида

$$\theta_j^* = f(\xi) g(r), \quad (3.13.6)$$

регулярное на оси  $r=0$  и удовлетворяющее второму из краевых условий (3.13.5). Подставляя (3.13.6) в (3.13.4), получим равенство

$$\begin{aligned}\frac{d^2 f}{d\xi^2} g + f \left( \frac{d^2 g}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dg}{dr} - \frac{g}{r^2} \right) &= 0, \\ \text{или} \quad \frac{\frac{d^2 f}{d\xi^2}}{f} &= - \frac{\frac{d^2 g}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dg}{dr} - \frac{g}{r^2}}{g}.\end{aligned}\quad (3.13.7)$$

Левая часть равенства (3.13.7) не зависит от переменной  $r$ , а правая часть этого равенства не зависит от переменной  $\xi$ . Таким образом, отношения, фигурирующие в равенстве (3.13.7), должны представлять собой некоторую константу. Обозначая эту константу через  $\lambda^2$ , получим для функции  $f(\xi)$  дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 f}{d\xi^2} - \lambda^2 f = 0 \quad (3.13.8)$$

и для функции  $g(r)$  — дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 g}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dg}{dr} + \left( \lambda^2 - \frac{1}{r^2} \right) g = 0. \quad (3.13.9)$$

Полагая в (3.13.9)

$$r = \frac{q}{\lambda}, \quad (3.13.10)$$

получим для функции  $g$  дифференциальное уравнение Бесселя

$$\frac{d^2 g}{dq^2} + \frac{1}{q} \frac{dg}{dq} + \left( 1 - \frac{1}{q^2} \right) g = 0. \quad (3.13.11)$$

Решение дифференциального уравнения (3.13.11), регулярное в точке  $q=0$ , определяется функцией Бесселя первого рода и первого порядка —  $J_1(q)$ . Таким образом, дифференциальное уравнение (3.13.9) согласно (3.13.10) обладает решением

$$g = J_1(\lambda r), \quad (3.13.12)$$

регулярным в точке  $r=0$ .

Общее решение дифференциального уравнения (3.13.8) имеет вид

$$f = Ae^{\lambda \xi} + Be^{-\lambda \xi}, \quad (3.13.13)$$

где  $A$  и  $B$  — произвольные постоянные. Согласно (3.13.6), (3.13.12) и (3.13.13) дифференциальное уравнение (3.13.4) имеет решение

$$\theta_j^* = (Ae^{\lambda \xi} + Be^{-\lambda \xi}) J_1(\lambda r), \quad (3.13.14)$$

регулярное на оси  $r=0$  и содержащее три произвольные константы  $A$ ,  $B$  и  $\lambda$ .

Подставляя (3.13.14) во второе из краевых условий (3.13.5), получим для параметра  $\lambda$  уравнение

$$J_1'(\lambda R) = 0. \quad (3.13.15)$$

Согласно (3.13.15) функция  $\theta_j^*$ , определяемая формулой (3.13.14), будет удовлетворять второму из краевых условий (3.13.5). при

$$\lambda = \frac{v_k}{R} \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (3.13.16)$$

где  $v_1, v_2, \dots$  — последовательность решений трансцендентного уравнения

$$J_1'(v) = 0. \quad (3.13.17)$$

Будем теперь искать решение краевой задачи, образуемой дифференциальным уравнением (3.13.4) и краевыми условиями (3.13.5), в виде ряда

$$\theta_j^* = \sum_{k=1}^{\infty} \left( A_k e^{\frac{v_k \xi}{R}} + B_k e^{-\frac{v_k \xi}{R}} \right) J_1 \left( \frac{v_k r}{R} \right). \quad (3.13.18)$$

Мы показали выше, что каждый из членов ряда (3.13.18) представляет собой решение дифференциального уравнения (3.13.4), регулярное на оси  $r=0$  и удовлетворяющее второму из краевых условий (3.13.5). Таким образом, остается отыскать те значения коэффициентов  $A_k$  и  $B_k$  ( $k=1, 2, \dots$ ), при которых ряд (3.13.18) будет удовлетворять первому и третьему из этих краевых усло-

вий. Подставляя ряд (3.13.18) в эти два краевые условия, получим равенства:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\nu_k}{R} \left( A_k e^{-\frac{\nu_k H}{R}} - B_k e^{\frac{\nu_k H}{R}} \right) J_1 \left( \frac{\nu_k r}{R} \right) &= -2r \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\nu_k}{R} (A_k - B_k) J_1 \left( \frac{\nu_k r}{R} \right) &= -2r \end{aligned} \right\} 0 < r < R. \quad (3.13.19)$$

Для функции Бесселя первого порядка имеют место интегральные соотношения:

$$\begin{aligned} \int_0^R r J_1(\alpha r) J_1(\beta r) dr &= \frac{R [\beta J_1(\alpha R) J_1'(\beta R) - \alpha J_1(\beta R) J_1'(\alpha R)]}{\alpha^2 - \beta^2}, \quad \beta \neq \alpha \\ \int_0^R r J_1^2(\alpha r) dr &= \frac{R^2}{2} \left\{ [J_1'(\alpha R)]^2 + \left( 1 - \frac{1}{\alpha^2 R^2} \right) J_1^2(\alpha R) \right\}, \\ \int_0^R r^2 J_1(\alpha r) dr &= \frac{R^2}{\alpha} \left[ \frac{J_1(\alpha R)}{\alpha R} - J_1'(\alpha R) \right] \end{aligned} \quad (3.13.20)$$

(см. [27]).

Полагая в (3.13.20)  $\alpha = \nu_l/R$ ,  $\beta = \nu_k/R$ , получим равенства:

$$\begin{aligned} \int_0^R r J_1 \left( \frac{\nu_l r}{R} \right) J_1 \left( \frac{\nu_k r}{R} \right) dr &= 0, \quad k \neq l \\ \int_0^R r J_1^2 \left( \frac{\nu_l r}{R} \right) dr &= \frac{R^2}{2} \left( 1 - \frac{1}{\nu_l^2} \right) J_1^2(\nu_l), \\ \int_0^R r^2 J_1 \left( \frac{\nu_l r}{R} \right) dr &= \frac{R^3}{\nu_l^2} J_1(\nu_l), \end{aligned} \quad (3.13.21)$$

так как числа  $\nu_1, \nu_2, \dots$  являются решениями уравнения (3.13.17). Умножив обе части соотношений (3.13.19) на  $r J_1 \left( \frac{\nu_l r}{R} \right)$  и проинтегрировав их по  $r$  в пределах от 0 до  $R$ , получим согласно (3.13.21) уравнения:

$$\begin{aligned} A_l e^{-\frac{\nu_l H}{R}} - B_l e^{\frac{\nu_l H}{R}} &= -\frac{4R^2}{\nu_l (\nu_l^2 - 1) J_1(\nu_l)}, \\ A_l - B_l &= -\frac{4R^2}{\nu_l (\nu_l^2 - 1) J_1(\nu_l)}. \end{aligned} \quad (3.13.22)$$

Из уравнений (3.13.22) найдем

$$A_l = \frac{4R^2 \left(1 - e^{-\frac{v_l H}{R}}\right)}{v_l (v_l^2 - 1) J_1(v_l) \left(e^{\frac{v_l H}{R}} - e^{-\frac{v_l H}{R}}\right)}, \quad (3.13.23)$$

$$B_l = \frac{4R^2 \left(1 - e^{-\frac{v_l H}{R}}\right)}{v_l (v_l^2 - 1) J_1(v_l) \left(e^{\frac{v_l H}{R}} - e^{-\frac{v_l H}{R}}\right)}.$$

Подставляя (3.13.23) в (3.13.18), получим формулу

$$\theta_j^* = 4R^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left[ e^{\frac{v_k \xi}{R}} + e^{-\frac{v_k \xi}{R}} - e^{\frac{v_k (H+\xi)}{R}} - e^{-\frac{v_k (H+\xi)}{R}} \right] J_1\left(\frac{v_k r}{R}\right)}{v_k (v_k^2 - 1) \left( e^{\frac{v_k H}{R}} - e^{-\frac{v_k H}{R}} \right) J_1(v_k)},$$

или

$$\theta_j^* = 4R^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left[ \operatorname{ch} \frac{v_k \xi}{R} - \operatorname{ch} \frac{v_k (H+\xi)}{R} \right] J_1\left(\frac{v_k r}{R}\right)}{v_k (v_k^2 - 1) \operatorname{sh} \frac{v_k H}{R} J_1(v_k)}. \quad (3.13.24)$$

Согласно (3.12.16), (3.13.3) и (3.13.24) в рассматриваемом примере потенциалы Жуковского будут определяться соотношениями:

$$\varphi_{jx} = y_j z - z_j y,$$

$$\varphi_{jy} = - \left\{ \xi r + 4R^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left[ \operatorname{ch} \frac{v_k \xi}{R} - \operatorname{ch} \frac{v_k (H+\xi)}{R} \right] J_1\left(\frac{v_k r}{R}\right)}{v_k (v_k^2 - 1) \operatorname{sh} \frac{v_k H}{R} J_1(v_k)} \right\} \sin \alpha +$$

$$+ z_j x - x_j z, \quad (3.13.25)$$

$$\varphi_{jz} = \left\{ \xi r + 4R^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left[ \operatorname{ch} \frac{v_k \xi}{R} - \operatorname{ch} \frac{v_k (H+\xi)}{R} \right] J_1\left(\frac{v_k r}{R}\right)}{v_k (v_k^2 - 1) \operatorname{sh} \frac{v_k H}{R} J_1(v_k)} \right\} \cos \alpha +$$

$$+ x_j y - y_j x.$$

### 13.2. Наполовину заполненный сферический бак

В этом случае образующая  $l_j$  замкнутой поверхности  $S_j + \sigma_j$  представляет собой контур, показанный на рис. 3.6. Перейдем в дифференциальном уравнении (3.12.13) от прямоугольных координат  $\xi, r$  к полярным координатам  $\varrho, \beta$ , положив

$$\xi = -\varrho \cos \beta, \quad r = \varrho \sin \beta. \quad (3.13.26)$$

В соответствии с формулами перехода:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \theta_j}{\partial \xi} &= -\frac{\partial \theta_j}{\partial q} \cos \beta + \frac{1}{q} \frac{\partial \theta_j}{\partial \beta} \sin \beta, \\ \frac{\partial \theta_j}{\partial r} &= \frac{\partial \theta_j}{\partial q} \sin \beta + \frac{1}{q} \frac{\partial \theta_j}{\partial \beta} \cos \beta, \\ \frac{\partial^2 \theta_j}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \theta_j}{\partial r^2} &= \frac{\partial^2 \theta_j}{\partial q^2} + \frac{1}{q} \frac{\partial \theta_j}{\partial q} + \frac{1}{q^2} \frac{\partial^2 \theta_j}{\partial \beta^2}\end{aligned}\quad (3.13.27)$$

дифференциальное уравнение (3.12.13) примет вид

$$\frac{\partial^2 \theta_j}{\partial q^2} + \frac{2}{q} \frac{\partial \theta_j}{\partial q} + \frac{1}{q^2} \frac{\partial^2 \theta_j}{\partial \beta^2} + \frac{\operatorname{ctg} \beta}{q^2} \frac{\partial \theta_j}{\partial \beta} - \frac{\theta_j}{q^2 \sin^2 \beta} = 0. \quad (3.13.28)$$

Контур  $l_j$  в рассматриваемом случае складывается из дуги окружности  $q=R$  и из отрезка прямой  $\beta=\pi/2$  (рис. 3.6). Угол  $\chi$ , фигурирующий в крайнем условии (3.12.14), на контуре  $l_j$  будет определяться равенствами:

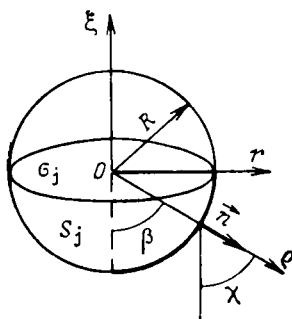


Рис. 3.6.

$$\chi = \beta \quad \text{при} \quad q = R, \quad 0 < \beta < \frac{\pi}{2}, \quad (3.13.29)$$

$$\chi = \pi \quad \text{при} \quad \beta = \frac{\pi}{2}, \quad 0 < q < R.$$

Согласно (3.13.27) производная  $\partial \theta_j / \partial n$  будет определяться на контуре  $l_j$  формулами:

$$\frac{\partial \theta_j}{\partial n} = \frac{\partial \theta_j}{\partial q} \quad \text{при} \quad q = R, \quad 0 < \beta < \frac{\pi}{2}, \quad (3.13.30)$$

$$\frac{\partial \theta_j}{\partial n} = \frac{\partial \theta_j}{\partial \xi} = -\frac{\partial \theta_j}{\partial q} \cos \beta + \frac{1}{q} \frac{\partial \theta_j}{\partial \beta} \sin \beta = \frac{1}{q} \frac{\partial \theta_j}{\partial \beta} \quad \text{при} \quad \beta = \frac{\pi}{2}, \quad 0 < q < R.$$

В соответствии с равенствами (3.13.26), (3.13.29) и (3.13.30) крайнее условие (3.12.14) в рассматриваемом примере будет иметь вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial \theta_j}{\partial q} &= 0 \quad \text{при} \quad q = R, \quad 0 < \beta < \frac{\pi}{2}, \\ \frac{\partial \theta_j}{\partial \beta} &= -q^2 \quad \text{при} \quad \beta = \frac{\pi}{2}, \quad 0 < q < R.\end{aligned}\quad (3.13.31)$$

Полагая в (3.13.28) и (3.13.31)

$$\theta_j = \frac{q^2}{2} \sin 2\beta + \theta_j^*, \quad (3.13.32)$$

получим для функции  $\theta_j^*$  дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 \theta_j^*}{\partial \varrho^2} + \frac{2}{\varrho} \frac{\partial \theta_j^*}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 \theta_j^*}{\partial \beta^2} + \frac{\operatorname{ctg} \beta}{\varrho^2} \frac{\partial \theta_j^*}{\partial \beta} - \frac{\theta_j^*}{\varrho^2 \sin^2 \beta} = 0 \quad (3.13.33)$$

с краевыми условиями:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_j^*}{\partial \varrho} &= -R \sin 2\beta \quad \text{при} \quad \varrho = R, \quad 0 < \beta < \frac{\pi}{2}, \\ \frac{\partial \theta_j^*}{\partial \beta} &= 0 \quad \text{при} \quad \beta = \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \varrho < R. \end{aligned} \quad (3.13.34)$$

Построим сперва частное решение дифференциального уравнения (3.13.33) вида

$$\theta_j^* = f(\varrho) g(\beta), \quad (3.13.35)$$

регулярное на отрезке  $\beta=0, 0 \leq \varrho \leq R$  и удовлетворяющее второму из условий (3.13.34). Подставляя (3.13.35) в (3.13.33), получим равенство

$$\left( \frac{d^2 f}{d\varrho^2} + \frac{2}{\varrho} \frac{df}{d\varrho} \right) g + \frac{f}{\varrho^2} \left( \frac{d^2 g}{d\beta^2} + \operatorname{ctg} \beta \frac{dg}{d\beta} - \frac{g}{\sin^2 \beta} \right) = 0,$$

или

$$\frac{\frac{d^2 f}{d\varrho^2} + \frac{2}{\varrho} \frac{df}{d\varrho}}{\frac{f}{\varrho^2}} = - \frac{\frac{d^2 g}{d\beta^2} + \operatorname{ctg} \beta \frac{dg}{d\beta} - \frac{g}{\sin^2 \beta}}{g}. \quad (3.13.36)$$

Левая часть равенства (3.13.36) не зависит от переменной  $\beta$ , а правая часть этого равенства не зависит от переменной  $\varrho$ . Таким образом, отношения, фигурирующие в равенстве (3.13.36), должны представлять собой некоторую константу. Обозначая эту константу через  $\lambda$ , получим для функции  $f(\varrho)$  дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 f}{d\varrho^2} + \frac{2}{\varrho} \frac{df}{d\varrho} - \lambda \frac{f}{\varrho^2} = 0 \quad (3.13.37)$$

и для функции  $g(\beta)$  — дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 g}{d\beta^2} + \operatorname{ctg} \beta \frac{dg}{d\beta} + \left( \lambda - \frac{1}{\sin^2 \beta} \right) g = 0. \quad (3.13.38)$$

Полагая в (3.13.38)

$$\cos \beta = \eta, \quad (3.13.39)$$

получим для функции  $g$  дифференциальное уравнение Лежандра

$$\frac{d}{d\eta} \left[ (1 - \eta^2) \frac{dg}{d\eta} \right] + \left( \lambda - \frac{1}{1 - \eta^2} \right) g = 0. \quad (3.13.40)$$

Для того чтобы функция  $\theta_j^*$ , определяемая формулой (3.13.35), была регулярной при  $\beta=0$  и удовлетворяла второму из краевых условий

(3.13.34), функция  $g$  согласно (3.13.39) должна быть регулярной при  $\eta=1$  и должна удовлетворять условию

$$\frac{dg}{d\eta} = 0 \quad \text{при} \quad \eta = 0. \quad (3.13.41)$$

Дифференциальное уравнение (3.13.40) имеет решение, удовлетворяющее условию (3.13.41) и регулярное в точке  $\eta=1$ ; при

$$\lambda = 2k(2k-1) \quad (3.13.42)$$

( $k=1, 2, \dots$ ) это решение определяется присоединенной функцией Лежандра первого рода  $P_{2k-1}^{(1)}(\eta)$ . Таким образом, согласно (3.13.39) исходное дифференциальное уравнение (3.13.38) при  $\lambda=2k(2k-1)$  имеет решение

$$g = P_{2k-1}^{(1)}(\cos \beta), \quad (3.13.43)$$

регулярное в точке  $\beta=0$  и удовлетворяющее условию

$$\frac{dg}{d\beta} = 0 \quad \text{при} \quad \beta = \frac{\pi}{2}. \quad (3.13.44)$$

Подставляя (3.13.42) в (3.13.37), получим для функции  $f(q)$  дифференциальное уравнение Эйлера

$$\frac{d^2 f}{dq^2} + \frac{2}{q} \frac{df}{dq} - 2k(2k-1) \frac{f}{q^2} = 0. \quad (3.13.45)$$

Решение дифференциального уравнения (3.13.45), регулярное в точке  $q=0$  имеет вид

$$f = q^{2k-1}. \quad (3.13.46)$$

Согласно (3.13.35), (3.13.43) и (3.13.46) дифференциальное уравнение (3.13.33) имеет бесконечную последовательность частных решений

$$\theta_j^* = q^{2k-1} P_{2k-1}^{(1)}(\cos \beta) \quad (k=1, 2, \dots), \quad (3.13.47)$$

регулярных на отрезке  $\beta=0, 0 \leq q \leq R$  и удовлетворяющих второму из условий (3.13.34).

Будем теперь искать решение краевой задачи, образуемой дифференциальным уравнением (3.13.33) и краевыми условиями (3.13.34), в виде ряда

$$\theta_j^* = \sum_{k=1}^{\infty} c_k q^{2k-1} P_{2k-1}^{(1)}(\cos \beta). \quad (3.13.48)$$

Каждый из членов ряда (3.13.48) удовлетворяет дифференциальному уравнению (3.13.33) и второму из краевых условий (3.13.34). Таким образом остается отыскать те значения коэффициентов  $c_1, c_2, \dots$ , при которых ряд (3.13.48) будет удовлетворять первому из этих краевых условий. Подставляя ряд (3.13.48) в первое из условий (3.13.34), получим равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} (2k-1) c_k R^{2k-3} P_{2k-1}^{(1)}(\cos \beta) = -\sin 2\beta \quad \left(0 < \beta < \frac{\pi}{2}\right),$$

или

$$\sum_{k=1}^{\infty} (2k-1) c_k R^{2k-3} P_{2k-1}^{(1)}(\eta) = -2\eta \sqrt{1-\eta^2} \quad (0 < \eta < 1). \quad (3.13.49)$$



Пользуясь формулой

$$P_2^{(1)}(\eta) = 3\eta \sqrt{1 - \eta^2}, \quad (3.13.50)$$

можно преобразовать равенство (3.13.50) таким образом:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (2k-1) c_k R^{2k-3} P_{2k-1}^{(1)}(\eta) = -\frac{2}{3} P_2^{(1)}(\eta) \quad (0 < \eta < 1). \quad (3.13.51)$$

Для присоединенных функций Лежандра, фигурирующих в (3.13.51), имеют место интегральные соотношения (см. [27]):

$$\begin{aligned} \int_0^1 P_{2k-1}^{(1)}(\eta) P_{2l-1}^{(1)}(\eta) d\eta &= 0 \quad \text{при } k \neq l, \\ \int_0^1 [P_{2l-1}^{(1)}(\eta)]^2 d\eta &= \frac{(2l-1)2l}{4l-1}, \\ \int_0^1 P_2^{(1)}(\eta) P_{2l-1}^{(1)}(\eta) d\eta &= \frac{3(-1)^l l}{(l+1)(2l-3)} \frac{1.3 \dots (2l-1)}{2.4 \dots 2l}. \end{aligned} \quad (3.13.52)$$

Умножив (3.13.51) на  $P_{2l-1}^{(1)}(\eta)$  и проинтегрировав по  $\eta$  в пределах от 0 до 1, получим согласно (3.13.52) равенство

$$\frac{(2l-1)2l}{4l-1} c_l R^{2l-3} = \frac{2(-1)^{l-1} l}{(l+1)(2l-3)} \frac{1.3 \dots (2l-1)}{2.4 \dots 2l},$$

в соответствии с которым коэффициенты  $c_1, c_2 \dots$ , должны иметь значения, определяемые формулой

$$c_l = \frac{(-1)^{l-1} (4l-1)}{(l+1)(2l-3)(2l-1)^2} \frac{1.3 \dots (2l-1)}{2.4 \dots 2l} R^{3-2l}. \quad (3.13.53)$$

Подставляя (3.13.53) в (3.13.48), получим для функции  $\theta_j^*$  разложение

$$\theta_j^* = R^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} (4k-1)}{(k+1)(2k-3)(2k-1)^2} \frac{1.3 \dots (2k-1)}{2.4 \dots 2k} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{2k-1} \bar{P}_{2k-1}^{(1)}(\cos \theta). \quad (3.13.54)$$

Согласно (3.12.16), (3.13.32) и (3.13.54) в данном примере потенциалы Жуковского будут определяться соотношениями:

$$\varphi_{jx} = yjz - zjy,$$

$$\begin{aligned} \varphi_{jy} = & - \left[ \frac{\rho^2}{2} \sin 2\beta + R^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} (4k-1)}{(k+1)(2k-3)(2k-1)^2} \frac{1.3 \dots (2k-1)}{2.4 \dots 2k} \times \right. \\ & \left. \times \left(\frac{\rho}{R}\right)^{2k-1} P_{2k-1}^{(1)}(\cos \beta) \right] \sin \alpha + zjx - xjz, \end{aligned} \quad (3.13.55)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{jz} = & \left[ \frac{\rho^2}{2} \sin 2\beta + R^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} (4k-1)}{(k+1)(2k-3)(2k-1)^2} \frac{1.3 \dots (2k-1)}{2.4 \dots 2k} \times \right. \\ & \left. \times \left(\frac{\rho}{R}\right)^{2k-1} P_{2k-1}^{(1)}(\cos \beta) \right] \cos \alpha + xjy - yjx. \end{aligned}$$

#### § 14. ВЫЧИСЛЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ РАКЕТЫ

Согласно (3.9.3), с учетом подвижности жидких компонентов топлива моменты инерции ракеты выражаются соотношениями:

$$\begin{aligned} J_{xx} &= J_{xx}^{(0)} + \sum_{j=1}^N J_{xx}^{(j)}, J_{yy} = J_{yy}^{(0)} + \sum_{j=1}^N J_{yy}^{(j)}, J_{zz} = J_{zz}^{(0)} + \sum_{j=1}^N J_{zz}^{(j)}, \\ J_{xy} &= J_{xy}^{(0)} + \sum_{j=1}^N J_{xy}^{(j)}, J_{xz} = J_{xz}^{(0)} + \sum_{j=1}^N J_{xz}^{(j)}, J_{yz} = J_{yz}^{(0)} + \\ &+ \sum_{j=1}^N J_{yz}^{(j)}, \end{aligned} \quad (3.14.1)$$

где  $J_{xx}^{(0)}$ ,  $J_{yy}^{(0)}$ ,  $J_{zz}^{(0)}$ ,  $J_{xy}^{(0)}$ ,  $J_{xz}^{(0)}$ ,  $J_{yz}^{(0)}$  — моменты инерции незаправленной ракеты;  $J_{xx}^{(j)}$ ,  $J_{yy}^{(j)}$ ,  $J_{zz}^{(j)}$ ,  $J_{xy}^{(j)}$ ,  $J_{xz}^{(j)}$ ,  $J_{yz}^{(j)}$  ( $1 \leq j \leq N$ ) — моменты инерции жидкой массы, находящейся в баке с номером  $j$ , которые могут быть найдены по формулам:

$$\begin{aligned} J_{xx}^{(j)} &= \varrho_j \int_{S_j + \sigma_j} \varphi_{jx} \frac{\partial \varphi_{jx}}{\partial n} d\sigma, \quad J_{yy}^{(j)} = \varrho_j \int_{S_j + \sigma_j} \varphi_{jy} \frac{\partial \varphi_{jy}}{\partial n} d\sigma, \\ J_{zz}^{(j)} &= \varrho_j \int_{S_j + \sigma_j} \varphi_{jz} \frac{\partial \varphi_{jz}}{\partial n} d\sigma, \quad J_{xy}^{(j)} = \varrho_j \int_{S_j + \sigma_j} \varphi_{jx} \frac{\partial \varphi_{jy}}{\partial n} d\sigma, \\ J_{xz}^{(j)} &= \varrho_j \int_{S_j + \sigma_j} \varphi_{jx} \frac{\partial \varphi_{jz}}{\partial n} d\sigma, \quad J_{yz}^{(j)} = \varrho_j \int_{S_j + \sigma_j} \varphi_{jy} \frac{\partial \varphi_{jz}}{\partial n} d\sigma. \end{aligned} \quad (3.14.2)$$

В соответствии с равенством (3.12.1) векторная функция  $\vec{\varphi}_j$  может быть представлена в виде

$$\vec{\varphi}_j = \vec{\varphi}_j^{(0)} + \vec{\varphi}_j^{(1)}, \quad (3.14.3)$$

где  $\vec{\varphi}_j^{(0)}$  — векторная функция, определяемая дифференциальным уравнением (3.12.4) с краевым условием (3.12.5);

$$\vec{\varphi}_j^{(1)} = \vec{r}_j \times \vec{r} \quad (3.14.4)$$

— векторная функция, удовлетворяющая согласно (3.12.3) дифференциальному уравнению

$$\nabla^2 \vec{\varphi}_j^{(1)} = 0 \quad (3.14.5)$$

с краевым условием

$$\frac{\partial \vec{\varphi}_j^{(1)}}{\partial n} = \vec{r}_j \times \vec{n} \text{ на } S_j \text{ и } \sigma_j. \quad (3.14.6)$$

Пользуясь соотношениями (3.12.12) и (3.14.3), можно преобразовать формулы (3.14.2) таким образом:

$$\begin{aligned}
J_{xx}^{(j)} &= Q_j \int_{S_{j+\sigma_j}} \varphi_{jx}^{(1)} \frac{\partial \varphi_{jx}^{(1)}}{\partial n} d\sigma, \\
J_{xy}^{(j)} &= Q_j \int_{S_{j+\sigma_j}} \varphi_{jx}^{(1)} \frac{\partial (\varphi_{jy}^{(0)} + \varphi_{jy}^{(1)})}{\partial n} d\sigma, \\
J_{xz}^{(j)} &= Q_j \int_{S_{j+\sigma_j}} \varphi_{jx}^{(1)} \frac{\partial (\varphi_{jz}^{(0)} + \varphi_{jz}^{(1)})}{\partial n} d\sigma,
\end{aligned} \tag{3.14.7}$$

$$\begin{aligned}
J_{yy}^{(j)} &= Q_j \int_{S_{j+\sigma_j}} \left[ \varphi_{jy}^{(1)} \frac{\partial (\varphi_{jy}^{(0)} + \varphi_{jy}^{(1)})}{\partial n} + \varphi_{jy}^{(0)} \frac{\partial \varphi_{jy}^{(1)}}{\partial n} \right] d\sigma + \\
&+ Q_j \int_{S_{j+\sigma_j}} \varphi_{jy}^{(0)} \frac{\partial \varphi_{jy}^{(0)}}{\partial n} d\sigma, \\
J_{yz}^{(j)} &= Q_j \int_{S_{j+\sigma_j}} \left[ \varphi_{jy}^{(1)} \frac{\partial (\varphi_{jz}^{(0)} + \varphi_{jz}^{(1)})}{\partial n} + \varphi_{jy}^{(0)} \frac{\partial \varphi_{jz}^{(1)}}{\partial n} \right] d\sigma + \\
&+ Q_j \int_{S_{j+\sigma_j}} \varphi_{jy}^{(0)} \frac{\partial \varphi_{jz}^{(0)}}{\partial n} d\sigma, \\
J_{zz}^{(j)} &= Q_j \int_{S_{j+\sigma_j}} \left[ \varphi_{jz}^{(1)} \frac{\partial (\varphi_{jz}^{(0)} + \varphi_{jz}^{(1)})}{\partial n} + \varphi_{jz}^{(0)} \frac{\partial \varphi_{jz}^{(1)}}{\partial n} \right] d\sigma + \\
&+ Q_j \int_{S_{j+\sigma_j}} \varphi_{jz}^{(0)} \frac{\partial \varphi_{jz}^{(0)}}{\partial n} d\sigma.
\end{aligned} \tag{3.14.8}$$

Согласно (3.12.4) и (3.14.5) функции  $\varphi_{jy}^{(0)}$ ,  $\varphi_{jz}^{(0)}$ ,  $\varphi_{jy}^{(1)}$ ,  $\varphi_{jz}^{(1)}$  удовлетворяют уравнению Лапласа и в соответствии с формулой Грина должны иметь место равенства:

$$\begin{aligned}
\int_{S_{j+\sigma_j}} \varphi_{jy}^{(0)} \frac{\partial \varphi_{jy}^{(1)}}{\partial n} d\sigma &= \int_{S_{j+\sigma_j}} \varphi_{jy}^{(1)} \frac{\partial \varphi_{jy}^{(0)}}{\partial n} d\sigma, \\
\int_{S_{j+\sigma_j}} \varphi_{jy}^{(0)} \frac{\partial \varphi_{jz}^{(1)}}{\partial n} d\sigma &= \int_{S_{j+\sigma_j}} \varphi_{jz}^{(1)} \frac{\partial \varphi_{jy}^{(0)}}{\partial n} d\sigma, \\
\int_{S_{j+\sigma_j}} \varphi_{jz}^{(0)} \frac{\partial \varphi_{jz}^{(1)}}{\partial n} d\sigma &= \int_{S_{j+\sigma_j}} \varphi_{jz}^{(1)} \frac{\partial \varphi_{jz}^{(0)}}{\partial n} d\sigma.
\end{aligned} \tag{3.14.9}$$

Таким образом, формулам (3.14.8) можно придать вид

$$\begin{aligned}
 J_{yy}^{(j)} &= \epsilon_j \int_{S_{j+\sigma_j}} \varphi_{jy}^{(1)} \frac{\partial (2\varphi_{jy}^{(0)} + \varphi_{jy}^{(1)})}{\partial n} d\sigma + \epsilon_j \int_{S_{j+\sigma_j}} \varphi_{jy}^{(0)} \frac{\partial \varphi_{jy}^{(0)}}{\partial n} d\sigma, \\
 J_{yz}^{(j)} &= \epsilon_j \int_{S_{j+\sigma_j}} \varphi_{jy}^{(1)} \frac{\partial (\varphi_{jz}^{(0)} + \varphi_{jz}^{(1)})}{\partial n} d\sigma + \epsilon_j \int_{S_{j+\sigma_j}} \varphi_{jz}^{(1)} \frac{\partial \varphi_{jy}^{(0)}}{\partial n} d\sigma + \\
 &+ \epsilon_j \int_{S_{j+\sigma_j}} \varphi_{jy}^{(0)} \frac{\partial \varphi_{jz}^{(0)}}{\partial n} d\sigma, \\
 J_{zz}^{(j)} &= \epsilon_j \int_{S_{j+\sigma_j}} \varphi_{jz}^{(1)} \frac{\partial (2\varphi_{jz}^{(0)} + \varphi_{jz}^{(1)})}{\partial n} d\sigma + \epsilon_j \int_{S_{j+\sigma_j}} \varphi_{jz}^{(0)} \frac{\partial \varphi_{jz}^{(0)}}{\partial n} d\sigma.
 \end{aligned} \tag{3.14.10}$$

Пользуясь соотношениями (3.12.5), (3.14.4) и (3.14.6), можно преобразовать формулы (3.14.7) и (3.14.10):

$$\begin{aligned}
 J_{xx}^{(j)} &= \epsilon_j \int_{S_{j+\sigma_j}} (y_j z - z_j y) [y_j \cos(n, z) - z_j \cos(n, y)] d\sigma, \\
 J_{xy}^{(j)} &= \epsilon_j \int_{S_{j+\sigma_j}} (y_j z - z_j y) [z \cos(n, x) - x \cos(n, z)] d\sigma, \\
 J_{xz}^{(j)} &= \epsilon_j \int_{S_{j+\sigma_j}} (y_j z - z_j y) [x \cos(n, y) - y \cos(n, x)] d\sigma, \\
 J_{yy}^{(j)} &= \epsilon_j \int_{S_{j+\sigma_j}} (z_j x - x_j z) [(2z - z_j) \cos(n, x) - \\
 &- (2x - x_j) \cos(n, z)] d\sigma + \epsilon_j \int_{S_{j+\sigma_j}} \varphi_{jy}^{(0)} \frac{\partial \varphi_{jy}^{(0)}}{\partial n} d\sigma, \\
 J_{yz}^{(j)} &= \epsilon_j \int_{S_{j+\sigma_j}} [(z_j x - x_j z) [x \cos(n, y) - y \cos(n, x)] + \\
 &+ (x_j y - y_j x) [(z - z_j) \cos(n, x) - \\
 &- (x - x_j) \cos(n, z)] d\sigma + \epsilon_j \int_{S_{j+\sigma_j}} \varphi_{jy}^{(0)} \frac{\partial \varphi_{jz}^{(0)}}{\partial n} d\sigma, \\
 J_{zz}^{(j)} &= \epsilon_j \int_{S_{j+\sigma_j}} (x_j y - y_j x) [(2x - x_j) \cos(n, y) - \\
 &- (2y - y_j) \cos(n, x)] d\sigma + \epsilon_j \int_{S_{j+\sigma_j}} \varphi_{jz}^{(0)} \frac{\partial \varphi_{jz}^{(0)}}{\partial n} d\sigma.
 \end{aligned} \tag{3.14.11}$$

Преобразуя в формулах (3.14.11) поверхностные интегралы в объемные посредством формул Гаусса-Остроградского, получим соотношения:

$$\begin{aligned}
 J_{xx}^{(j)} &= \epsilon_j \int_{V_j} (x_j^2 + z_j^2) dv, \\
 J_{xy}^{(j)} &= -\epsilon_j \int_{V_j} x y_j dv, \\
 J_{xz}^{(j)} &= -\epsilon_j \int_{V_j} x z_j dv, \\
 J_{yy}^{(j)} &= \epsilon_j \int_{V_j} [(2x - x_j) x_j + (2z - z_j) z_j] dv + \\
 &+ \epsilon_j \int_{S_j + \sigma_j} \varphi_{jy}^{(0)} \frac{\partial \varphi_{jy}^{(0)}}{\partial n} d\sigma, \\
 J_{yz}^{(j)} &= -\epsilon_j \int_{V_j} [y z_j + (z - z_j) y_j] dv + \\
 &+ \epsilon_j \int_{S_j + \sigma_j} \varphi_{jy}^{(0)} \frac{\partial \varphi_{jz}^{(0)}}{\partial n} d\sigma, \\
 J_{zz}^{(j)} &= \epsilon_j \int_{V_j} [(2x - x_j) x_j + (2y - y_j) y_j] dv + \\
 &+ \epsilon_j \int_{S_j + \sigma_j} \varphi_{jz}^{(0)} \frac{\partial \varphi_{jz}^{(0)}}{\partial n} d\sigma.
 \end{aligned} \tag{3.14.12}$$

Масса жидкости, находящейся в баке с номером  $j$  —  $m_j$  и координаты центра масс этой жидкости  $x_C^{(j)}$ ,  $y_C^{(j)}$ ,  $z_C^{(j)}$  будут определяться формулами:

$$\begin{aligned}
 m_j &= \epsilon_j \int_{V_j} dv, \quad x_C^{(j)} = \frac{\epsilon_j}{m_j} \int_{V_j} x dv, \quad y_C^{(j)} = \frac{\epsilon_j}{m_j} \int_{V_j} y dv, \\
 z_C^{(j)} &= \frac{\epsilon_j}{m_j} \int_{V_j} z dv.
 \end{aligned} \tag{3.14.13}$$

Центр масс жидкости, находящейся в  $j$ -м баке, должен лежать на оси этого бака в соответствии с предположением об осевой симметрии топливных баков. Таким образом, должны иметь место равенства:

$$y_C^{(j)} = y_j, \quad z_C^{(j)} = z_j. \tag{3.14.14}$$

Согласно (3.14.13) и (3.14.14) формулам (3.14.12) можно придать вид

$$\begin{aligned}
 J_{xx}^{(j)} &= m_j (y_j^2 + z_j^2), \quad J_{xy}^{(j)} = -m_j x_C^{(j)} y_j, \quad J_{xz}^{(j)} = -m_j x_C^{(j)} z_j, \\
 J_{yy}^{(j)} &= m_j [(2x_C^{(j)} - x_j) x_j + z_j^2] + q_j \int_{S_j + \sigma_j} \varphi_{jy}^{(0)} \frac{\partial \varphi_{jy}^{(0)}}{\partial n} d\sigma, \\
 J_{yz}^{(j)} &= -m_j y_j z_j + q_j \int_{S_j + \sigma_j} \varphi_{jy}^{(0)} \frac{\partial \varphi_{jz}^{(0)}}{\partial n} d\sigma, \\
 J_{zz}^{(j)} &= m_j [(2x_C^{(j)} - x_j) x_j + y_j^2] + q_j \int_{S_j + \sigma_j} \varphi_{jz}^{(0)} \frac{\partial \varphi_{jz}^{(0)}}{\partial n} d\sigma.
 \end{aligned} \tag{3.14.15}$$

Интеграл от какой-либо функции  $f$  по осесимметричной поверхности  $S_j + \sigma_j$  может быть найден по формуле

$$\int_{S_j + \sigma_j} f d\sigma = \int_{l_j} \int_0^{2\pi} f r ds da, \tag{3.14.16}$$

где  $l_j$  — образующая поверхности интегрирования  $S_j + \sigma_j$ . Пользуясь формулами (3.12.15) и (3.14.16), найдем

$$\begin{aligned}
 \int_{S_j + \sigma_j} \varphi_{jy}^{(0)} \frac{\partial \varphi_{jy}^{(0)}}{\partial n} d\sigma &= \int_{S_j + \sigma_j} \theta_j \frac{\partial \theta_j}{\partial n} \sin^2 \alpha d\sigma = \int_{l_j} \int_0^{2\pi} \theta_j \frac{\partial \theta_j}{\partial n} \times \\
 &\times r \sin^2 \alpha ds da = \int_0^{2\pi} \sin^2 \alpha da \int_{l_j} \theta_j \frac{\partial \theta_j}{\partial n} r ds = \pi \int_{l_j} \theta_j \frac{\partial \theta_j}{\partial n} r ds, \\
 \int_{S_j + \sigma_j} \varphi_{jy}^{(0)} \frac{\partial \varphi_{jz}^{(0)}}{\partial n} d\sigma &= - \int_{S_j + \sigma_j} \theta_j \frac{\partial \theta_j}{\partial n} \sin \alpha \cdot \cos \alpha d\sigma = \\
 &= - \int_{l_j} \int_0^{2\pi} \theta_j \frac{\partial \theta_j}{\partial n} r \sin \alpha \cos \alpha ds da = - \int_0^{2\pi} \sin \alpha \cos \alpha \times \\
 &\times da \int_{l_j} \theta_j \frac{\partial \theta_j}{\partial n} r ds = 0,
 \end{aligned} \tag{3.14.17}$$

$$\begin{aligned}
\int_{s_j+\sigma_j} \varphi_{jz}^{(0)} \frac{\partial \varphi_{jz}^{(0)}}{\partial n} d\sigma &= \int_{s_j+\sigma_j} \theta_j \frac{\partial \theta_j}{\partial n} \cos^2 \alpha d\sigma = \int_{i_j}^{2\pi} \int_0 \theta_j \frac{\partial \theta_j}{\partial n} \times \\
&\times r \cos^2 \alpha ds da = \int_0^{2\pi} \cos^2 \alpha da \int_{i_j} \theta_j \frac{\partial \theta_j}{\partial n} r ds = \\
&= \pi \int_{i_j} \theta_j \frac{\partial \theta_j}{\partial n} r ds.
\end{aligned} \tag{3.14.17}$$

Подставляя (3.14.17) в (3.14.15), получим для моментов инерции  $J_{xx}^{(j)}$ ,  $J_{yy}^{(j)}$ ,  $J_{zz}^{(j)}$  формулы:

$$\begin{aligned}
J_{xx}^{(j)} &= m_j (y_j^2 + z_j^2), \\
J_{yy}^{(j)} &= m_j [(2x_C^{(j)} - x_j) x_j + z_j^2] + \pi \varrho_j \int_{i_j} \theta_j \frac{\partial \theta_j}{\partial n} r ds, \\
J_{zz}^{(j)} &= m_j [(2x_C^{(j)} - x_j) x_j + y_j^2] + \pi \varrho_j \int_{i_j} \theta_j \frac{\partial \theta_j}{\partial n} r ds
\end{aligned} \tag{3.14.18}$$

и для центробежных моментов инерции  $J_{xy}^{(j)}$ ,  $J_{xz}^{(j)}$ ,  $J_{yz}^{(j)}$  — формулы:

$$J_{xy}^{(j)} = -m_j x_C^{(j)} y_j, \quad J_{xz}^{(j)} = -m_j x_C^{(j)} z_j, \quad J_{yz}^{(j)} = -m_j y_j z_j. \tag{3.14.19}$$

Согласно (3.14.1) и (3.14.19) центробежные моменты инерции ракеты определяются соотношениями:

$$\begin{aligned}
J_{xy} &= J_{xy}^{(0)} - \sum_{j=1}^N m_j x_C^{(j)} y_j, \\
J_{xz} &= J_{xz}^{(0)} - \sum_{j=1}^N m_j x_C^{(j)} z_j, \\
J_{yz} &= J_{yz}^{(0)} - \sum_{j=1}^N m_j y_j z_j.
\end{aligned} \tag{3.14.20}$$

Так же, как и в гл. I, будем предполагать ниже, что плоскости  $y=0$  и  $z=0$  являются плоскостями симметрии ракеты. В этом случае главные оси инерции незаправленной ракеты совпадают с осями  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , иными словами

$$J_{xy}^{(0)} = J_{xz}^{(0)} = J_{yz}^{(0)} = 0. \tag{3.14.21}$$

При  $y_j \neq 0$  массе жидкости  $m_j$  с центром масс в точке  $x = x_C^{(j)}$ ,  $y = y_j$ ,  $z = z_j$  в силу симметрии всегда будет соответствовать та же масса жидкости  $m_j$  с центром масс в точке  $x = x_C^{(j)}$ ,  $y = -y_j$ ,  $z = z_j$ . Аналогично при  $z_j \neq 0$  массе жидкости  $m_j$  с центром масс в точке  $x = x_C^{(j)}$ ,  $y = y_j$ ,  $z = z_j$  в силу симметрии всегда будет соответствовать та же масса жидкости  $m_j$  с центром масс в точке  $x = x_C^{(j)}$ ,  $y = y_j$ ,  $z = -z_j$ . Таким образом, всегда будут иметь место равенства

$$\sum_{j=1}^N m_j x_C^{(j)} y_j = \sum_{j=1}^N m_j x_C^{(j)} z_j = \sum_{j=1}^N m_j y_j z_j = 0. \quad (3.14.22)$$

Согласно (3.14.20), (3.14.21) и (3.14.22) при учете подвижности жидких компонентов топлива равенства

$$J_{xy} = J_{xz} = J_{yz} = 0 \quad (3.14.23)$$

сохраняются и оси связанной системы координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$  остаются главными осями инерции ракеты. Моменты инерции ракеты  $J_{xx}$ ,  $J_{yy}$ ,  $J_{zz}$  сохраняют роль главных моментов инерции  $J_x$ ,  $J_y$ ,  $J_z$ :

$$J_{xx} = J_x, \quad J_{yy} = J_y, \quad J_{zz} = J_z. \quad (3.14.24)$$

Перейдем к рассмотрению моментов инерции  $J_{xx}^{(j)}$ ,  $J_{yy}^{(j)}$ ,  $J_{zz}^{(j)}$ , определяемых формулами (3.14.18). Пользуясь тождеством

$$(2x_C^{(j)} - x_j) x_j = x_C^{(j)^2} - (x_j - x_C^{(j)})^2, \quad (3.14.25)$$

можно придать формулам (3.14.18) вид

$$\begin{aligned} J_{xx}^{(j)} &= m_j (y_j^2 + z_j^2), \\ J_{yy}^{(j)} &= m_j (x_C^{(j)^2} + z_j^2) + J_j, \\ J_{zz}^{(j)} &= m_j (x_C^{(j)^2} + y_j^2) + J_j, \end{aligned} \quad (3.14.26)$$

$$\text{где } J_j = \rho_0 j \int_{l_j} \theta_j \frac{\partial \theta_j}{\partial n} r ds - m_j (x_j - x_C^{(j)})^2. \quad (3.14.27)$$

Разность  $x_j - x_C^{(j)}$  определяет глубину, на которой расположен центр масс жидкости, находящейся в баке с номером  $j$ ; от расположения  $j$ -го бака эта разность не зависит. Функция  $\theta_j$ , определяемая дифференциальным уравнением (3.12.13) с краевым условием (3.12.14), тоже не зависит от расположения этого бака. Таким образом, величина  $J_j$ , фигурирующая в формулах (3.14.26), зависит лишь от конфигурации бака с номером  $j$ , от уровня заполнения этого бака жидкостью и от плотности жидкости, находящейся в баке; от расположения бака величина  $J_j$  не зависит. При  $x_C^{(j)} = 0$ ,  $y_j = 0$ ,  $z_j = 0$ , т. е. в том случае, когда центр тяжести жидкой массы, находящейся в баке с номером  $j$ , совпадает с на-



чалом связанной системы координат  $x, y, z$ , формулы (3.14.26) принимают вид

$$J_{xx}^{(j)}=0, \quad J_{yy}^{(j)}=J_j, \quad J_{zz}^{(j)}=J_j. \quad (3.14.28)$$

Согласно (3.14.28) величина  $J_j$  определяет момент инерции жидкости, находящейся в  $j$ -м баке, относительно поперечной оси, проходящей через центр масс этой жидкости. Момент инерции жидкости относительно продольной оси бака согласно (3.14.28) равен нулю, что соответствует исходным предположениям об осевой симметрии топливных баков и об идеальности жидких компонентов топлива.

По своему физическому смыслу величина  $J_j$  неотрицательна, и, вводя в рассмотрение радиус инерции  $h_j$ , можно положить

$$J_j = m_j h_j^2. \quad (3.14.29)$$

В соответствии с формулами (3.14.27) и (3.14.29) радиус инерции  $h_j$  может быть найден по формуле

$$h_j = \left[ \frac{\pi}{v_j} \int_{l_j} \theta_j \frac{\partial \theta_j}{\partial n} r ds - (x_j - x_C^{(j)})^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.14.30)$$

где  $v_j = \frac{m_j}{\rho_j}$  — объем жидкости, находящейся в  $j$ -м баке.

Согласно (3.14.1), (3.14.24), (3.14.26) и (3.14.29) моменты инерции  $J_x, J_y, J_z$  могут быть вычислены по формулам:

$$\begin{aligned} J_x &= J_{xx}^{(0)} + \sum_{j=1}^N m_j (y_j^2 + z_j^2), \\ J_y &= J_{yy}^{(0)} + \sum_{j=1}^N m_j (x_C^{(j)2} + z_j^2 + h_j^2), \\ J_z &= J_{zz}^{(0)} + \sum_{j=1}^N m_j (x_C^{(j)2} + y_j^2 + h_j^2). \end{aligned} \quad (3.14.31)$$

Заменяя в (3.14.31) моменты инерции незаправленной ракеты  $J_{xx}^{(0)}, J_{yy}^{(0)}, J_{zz}^{(0)}$  их развернутыми выражениями, получим для главных моментов инерции ракеты  $J_x, J_y, J_z$  расчетные формулы:

$$\begin{aligned} J_x &= \int_{V_0} (y^2 + z^2) \rho dv + \sum_{j=1}^N m_j (y_j^2 + z_j^2), \\ J_y &= \int_{V_0} (x^2 + z^2) \rho dv + \sum_{j=1}^N m_j (x_C^{(j)2} + z_j^2 + h_j^2), \\ J_z &= \int_{V_0} (x^2 + y^2) \rho dv + \sum_{j=1}^N m_j (x_C^{(j)2} + y_j^2 + h_j^2). \end{aligned} \quad (3.14.32)$$

Согласно (3.14.30) определение радиуса инерции  $h_j$  сводится к решению краевой задачи, образуемой дифференциальным уравнением (3.12.13) и крайевым условием (3.12.14). Рассчитаем в качестве примера радиус инерции жидкой массы, находящейся в цилиндрическом топливном баке. В данном случае контур  $l_j$  складывается из трех прямолинейных отрезков:  $\xi = -H$ ,  $0 < r < R$ ;  $r = R$ ,  $-H < \xi < 0$ ;  $\xi = 0$ ,  $0 < r < R$  (см. рис. 3.5). Согласно (3.12.14) и (3.13.1) в рассматриваемом случае производная  $\partial \theta_j / \partial n$  будет определяться на контуре  $l_j$  равенствами:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \theta_j}{\partial n} &= r \quad \text{при} \quad \xi = -H, \quad 0 < r < R, \\ \frac{\partial \theta_j}{\partial n} &= \xi \quad \text{при} \quad r = R, \quad -H < \xi < 0, \\ \frac{\partial \theta_j}{\partial n} &= -r \quad \text{при} \quad \xi = 0, \quad 0 < r < R.\end{aligned}\quad (3.14.33)$$

В соответствии с равенствами (3.14.33) контурный интеграл, фигурирующий в формуле (3.14.30), может быть представлен в виде

$$\int_{l_j} \theta_j \frac{\partial \theta_j}{\partial n} r ds = \int_0^R (\theta_j)_{\xi=-H} r^2 dr + \int_{-H}^0 (\theta_j)_{r=R} \xi R d\xi - \int_0^R (\theta_j)_{\xi=0} r^2 dr. \quad (3.14.34)$$

Пользуясь формулами (3.13.3) и (3.13.24), найдем

$$\begin{aligned}(\theta_j)_{\xi=-H} &= -Hr + 4R^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left( \operatorname{ch} \frac{v_k H}{R} - 1 \right) J_1 \left( \frac{v_k r}{R} \right)}{v_k (v_k^2 - 1) \operatorname{sh} \frac{v_k H}{R} J_1(v_k)}, \\ (\theta_j)_{r=R} &= R\xi + 4R^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left[ \operatorname{ch} \frac{v_k \xi}{R} - \operatorname{ch} \frac{v_k (H + \xi)}{R} \right]}{v_k (v_k^2 - 1) \operatorname{sh} \frac{v_k H}{R}}, \\ (\theta_j)_{\xi=0} &= 4R^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left( 1 - \operatorname{ch} \frac{v_k H}{R} \right) J_1 \left( \frac{v_k r}{R} \right)}{v_k (v_k^2 - 1) \operatorname{sh} \frac{v_k H}{R} J_1(v_k)}.\end{aligned}\quad (3.14.35)$$

Подставляя (3.14.35) в (3.14.34), получим разложение

$$\int_{l_j} \theta_j \frac{\partial \theta_j}{\partial n} r ds = -H \int_0^R r^3 dr + 8R^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} \frac{v_k H}{R} - 1}{v_k (v_k^2 - 1) \operatorname{sh} \frac{v_k H}{R} J_1(v_k)} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \int_0^R J_1\left(\frac{v_k r}{R}\right) r^2 dr + R^2 \int_{-H}^0 \xi^2 d\xi + 4R^3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{v_k(v_k^2 - 1) \operatorname{sh} \frac{v_k H}{R}} \times \\ & \times \int_{-H}^0 \left[ \operatorname{ch} \frac{v_k \xi}{R} - \operatorname{ch} \frac{v_k (H + \xi)}{R} \right] \xi d\xi. \end{aligned} \quad (3.14.36)$$

Вычисляя определенные интегралы, фигурирующие в формуле (3.14.36), найдем

$$\begin{aligned} \int_0^R r^3 dr &= \frac{R^4}{4}, \quad \int_0^R J_1\left(\frac{v_k r}{R}\right) r^2 dr = \frac{R^3}{v_k^2} J_1(v_k), \\ \int_{-H}^0 \xi^2 d\xi &= \frac{H^3}{3}, \quad \int_{-H}^0 \left[ \operatorname{ch} \frac{v_k \xi}{R} - \operatorname{ch} \frac{v_k (H + \xi)}{R} \right] \xi d\xi = \\ &= \frac{2R^2}{v_k^2} \left( \operatorname{ch} \frac{v_k H}{R} - 1 \right) - \frac{HR}{v_k} \operatorname{sh} \frac{v_k H}{R} \end{aligned} \quad (3.14.37)$$

[см. (3.13.21)]. Подставляя (3.14.37) в (3.14.36) и применяя тождество

$$\frac{\operatorname{ch} u - 1}{\operatorname{sh} u} = \operatorname{th} \frac{u}{2}, \quad (3.14.38)$$

получим разложение

$$\begin{aligned} \int_{I_j} \theta_j \frac{\partial \theta_j}{\partial n} r ds &= \frac{H^3 R^2}{3} - \frac{H R^4}{4} \left[ 1 + 16 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{v_k^2 (v_k^2 - 1)} \right] + \\ &+ 16 R^5 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{th} \frac{v_k H}{2R}}{v_k^3 (v_k^2 - 1)}. \end{aligned} \quad (3.14.39)$$

Пользуясь таблицами Бесселевых функций, найдем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{v_k^2 (v_k^2 - 1)} = \frac{1}{8} \quad (3.14.40)$$

[напомним, что  $v_1, v_2, \dots$  — последовательность решений уравнения (3.13.17)]. Согласно (3.14.40) формуле (3.14.39) можно придать вид

$$\int_{I_j} \theta_j \frac{\partial \theta_j}{\partial n} r ds = \frac{H^3 R^2}{3} - \frac{3 H R^4}{4} + 16 R^5 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{th} \frac{v_k H}{2R}}{v_k^3 (v_k^2 - 1)}. \quad (3.14.41)$$

В рассматриваемом случае

$$v_j = \pi H R^2, \quad x_j - x_C^{(j)} = \frac{H}{2}. \quad (3.14.42)$$

Подставляя (3.14.41) и (3.14.42) в (3.14.30), получим для радиуса инерции  $h_j$  выражение

$$h_j = \left[ \frac{H^2}{12} - \frac{3R^2}{4} + \frac{16R^3}{H} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{th} \frac{v_k H}{2R}}{v_k^3 (v_k^2 - 1)} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.14.43)$$

Согласно (3.14.40) в пределе, когда отношение  $H/R$  стремится к нулю, равенство (3.14.43) вырождается в предельное равенство

$$h_j = \frac{R}{2} \quad (3.14.44)$$

$\left( \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\operatorname{th} u}{u} = 1 \right)$ . При  $\frac{R}{H} \rightarrow 0$  из (3.14.43) вытекает предельное соотношение

$$h_j = \frac{H}{2\sqrt{3}}. \quad (3.14.45)$$

В рассматриваемом примере радиус инерции «замороженной» жидкой массы определяется формулой

$$h_j = \sqrt{\frac{H^2}{12} + \frac{R^2}{4}}. \quad (3.14.46)$$

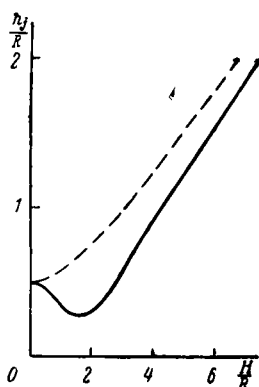


Рис. 3.7.

Согласно (3.14.44), (3.14.45) и (3.14.46) при расчете радиуса инерции жидкой массы, находящейся в цилиндрическом топливном баке, эффект, который дает учет подвижности жидкости, исчезает при  $H/R \rightarrow 0$  и при  $H/R \rightarrow \infty$ . На рис. 3.7 сплошной линией показана зависимость между отношениями  $h_j/R$  и  $H/R$ , найденная по формуле (3.14.43), т. е. с учетом подвижности жидкости. Для сравнения на том же рисунке пунктирной линией показана зависимость между отношениями  $h_j/R$  и  $H/R$ , найденная без учета подвижности жидкости по формуле (3.14.46).

## § 15. КОЛЕБАНИЯ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ В ОСЕСИММЕТРИЧНОМ ТОПЛИВНОМ БАКЕ

Задача о колебаниях свободной поверхности жидкости, находящейся в топливном баке с номером  $j$ , в § 6 была сведена нами к отысканию функции  $\psi_j$ , удовлетворяющей уравнению Лапласа (3.5.3) и краевым условиям (3.6.20). В случае осевой симметрии бака краевую задачу, образуемую дифференциальным уравнением (3.5.3) и краевыми условиями (3.6.20), можно существенно упростить.

Осуществляя переход от прямоугольных координат  $x, y, z$  к цилиндрическим координатам  $\xi, r, \alpha$ , мы получили в § 6 формулы (3.12.16) для потенциалов Жуковского  $\varphi_{jx}, \varphi_{jy}, \varphi_{jz}$ . В соответствии с формулами перехода (3.12.6) соотношениям (3.12.16) можно придать вид

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{jx} &= r(y_j \sin \alpha - z_j \cos \alpha), \\ \varphi_{jy} &= z_j \xi - (x_j r + \theta_j) \sin \alpha, \\ \varphi_{jz} &= -y_j \xi + (x_j r + \theta_j) \cos \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (3.15.1)$$

На поверхности  $\sigma_j$  координата  $\xi$  обращается в нуль (см. рис. 3.3). Таким образом, согласно (3.15.1) должны иметь место равенства:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{jx} &= r(y_j \sin \alpha - z_j \cos \alpha) \\ \varphi_{jy} &= -[x_j r + (\theta_j)_{\xi=0}] \sin \alpha \\ \varphi_{jz} &= [x_j r + (\theta_j)_{\xi=0}] \cos \alpha \end{aligned} \right\} \text{ на } \sigma_j. \quad (3.15.2)$$

Координаты  $y_j, z_j$  центра плоской свободной поверхности можно представить в виде

$$y_j = r_j \cos \alpha_j, \quad z_j = r_j \sin \alpha_j, \quad (3.15.3)$$

где  $r_j$  — расстояние от оси  $j$ -го бака до оси  $x$ ;  $\alpha_j$  — угол между плоскостью  $z=0$  и плоскостью, проходящей через ось этого бака и ось  $x$  (см. рис. 3.3).

В соответствии с равенствами (3.15.3) первую из формул (3.15.2) можно преобразовать так:

$$\varphi_{jx} = r_j r \cdot \sin(\alpha - \alpha_j) \text{ на } \sigma_j. \quad (3.15.4)$$

Функция  $\theta_j$  представляет собой решение дифференциального уравнения (3.12.13), регулярное на оси  $\xi$ . Согласно (3.12.13) при  $r \rightarrow 0$  отношение  $\theta_j/r$  стремится к конечному пределу, определяемому равенством

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\theta_j}{r} = \left( \frac{\partial \theta_j}{\partial r} \right)_{r=0}. \quad (3.15.5)$$

Отсюда, в частности, вытекает конечность в точке  $r=0$  отношения

$$k_j = - \frac{(\theta_j)_{\xi=0}}{r}. \quad (3.15.6)$$

Вводя в рассмотрение функцию  $k_j$ , определяемую соотношением (3.15.6), можно преобразовать вторую и третью из формул (3.15.2):

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{jy} &= -(x_j - k_j) r \sin \alpha \\ \varphi_{jz} &= (x_j - k_j) r \cos \alpha \end{aligned} \right\} \text{ на } \sigma_j. \quad (3.15.7)$$

Согласно (3.12.6), (3.15.4) и (3.15.7) краевым условиям (3.6.20) можно придать вид

$$\frac{\partial \psi_j}{\partial n} = 0 \quad \text{на } S_j,$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial t^2} + (w_{0x} - g_x) \frac{\partial \psi_j}{\partial n} + (w_{0y} - g_y) (y_j + r \cos \alpha) + \\ & + (w_{0z} - g_z) (z_j + r \sin \alpha) + \frac{d\omega_x}{dt} r j r \sin(\alpha - \alpha_j) - \\ & - \frac{d\omega_y}{dt} (x_j - k_j) r \sin \alpha + \frac{d\omega_z}{dt} (x_j - k_j) r \cos \alpha = C_j(t) \quad \text{на } \sigma_j. \end{aligned} \quad (3.15.8)$$

Представив уравнение Лапласа (3.5.3) в цилиндрических координатах  $\xi, r, \alpha$ , получим для функции  $\psi_j$  краевую задачу, образуемую дифференциальным уравнением

$$\frac{\partial^2 \psi_j}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_j}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial \alpha^2} = 0 \quad (3.15.9)$$

и краевыми условиями (3.15.8).

В § 6 мы показали, что решение задачи о колебаниях свободной поверхности жидкости, находящейся в  $j$ -ом баке, не зависит от вида функции  $C_j(t)$ , входящей в краевые условия для потенциала перемещений  $\psi_j$ . Для упрощения краевых условий (3.15.8) положим

$$C_j(t) = y_j(w_{0y} - g_y) + z_j(w_{0z} - g_z). \quad (3.15.10)$$

В этом случае краевые условия (3.15.8) примут вид

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \psi_j}{\partial n} = 0 \quad \text{на } S_j, \\ & \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial t^2} + (w_{0x} - g_x) \frac{\partial \psi_j}{\partial n} + r j \frac{d\omega_x}{dt} r \sin(\alpha - \alpha_j) + \\ & + \left[ w_{0y} - g_y + (x_j - k_j) \frac{d\omega_y}{dt} \right] r \cos \alpha + \\ & + \left[ w_{0z} - g_z - (x_j - k_j) \frac{d\omega_z}{dt} \right] r \sin \alpha = 0 \quad \text{на } \sigma_j. \end{aligned} \quad (3.15.11)$$

Образующая  $l_j$  поверхности вращения  $S_j + \sigma_j$  складывается из образующей смачиваемой поверхности  $S_j$  (эту образующую мы будем обозначать в дальнейшем через  $l_j^*$ ) и из прямолинейного отрезка  $\xi = 0, 0 < r < R_j$ , где  $R_j$  — радиус плоской

свободной поверхности  $\sigma_j$  (см. рис. 3.3). Введем в рассмотрение решение  $\psi_{jx}$  двумерного дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 \psi_{jx}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi_{jx}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_{jx}}{\partial r} - \frac{\psi_{jx}}{r^2} = 0, \quad (3.15.12)$$

регулярное на оси  $r=0$  и удовлетворяющее краевым условиям

$$\frac{\partial \psi_{jx}}{\partial n} = 0 \quad \text{на } l_j^*,$$

$$\frac{\partial^2 \psi_{jx}}{\partial t^2} + (\omega_{0x} - g_x) \frac{\partial \psi_{jx}}{\partial \xi} + r r_j \frac{d\omega_x}{dt} = 0 \quad (3.15.13)$$

$$\text{при } \xi=0, \quad 0 < r < R_j,$$

функцию  $\psi_{jy}$ , регулярную на оси  $\xi$  и удовлетворяющую дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 \psi_{jy}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi_{jy}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_{jy}}{\partial r} - \frac{\psi_{jy}}{r^2} = 0 \quad (3.15.14)$$

и краевым условиям

$$\frac{\partial \psi_{jy}}{\partial n} = 0 \quad \text{на } l_j^*,$$

$$\frac{\partial^2 \psi_{jy}}{\partial t^2} + (\omega_{0x} - g_x) \frac{\partial \psi_{jy}}{\partial \xi} + r \left[ \omega_{0y} - g_y + (x_j - k_j) \frac{d\omega_z}{dt} \right] = 0 \quad (3.15.15)$$

$$\text{при } \xi=0, \quad 0 < r < R_j,$$

и решение  $\psi_{jz}$  дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 \psi_{jz}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi_{jz}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_{jz}}{\partial r} - \frac{\psi_{jz}}{r^2} = 0, \quad (3.15.16)$$

регулярное на оси  $\xi$  и удовлетворяющее краевым условиям

$$\frac{\partial \psi_{jz}}{\partial n} = 0 \quad \text{на } l_j^*,$$

$$\frac{\partial^2 \psi_{jz}}{\partial t^2} + (\omega_{0x} - g_x) \frac{\partial \psi_{jz}}{\partial \xi} + r \left[ \omega_{0z} - g_z - (x_j - k_j) \frac{d\omega_y}{dt} \right] = 0 \quad (3.15.17)$$

$$\text{при } \xi=0, \quad 0 < r < R_j.$$

Согласно (3.15.12), (3.15.13), (3.15.14), (3.15.15), (3.15.16) и (3.15.17) функция

$$\psi_j = \psi_{jx} \sin(\alpha - \alpha_j) + \psi_{jy} \cos \alpha + \psi_{jz} \sin \alpha \quad (3.15.18)$$

будет представлять собой решение уравнения Лапласа (3.15.9), регулярное внутри замкнутой поверхности  $S_j + \sigma_j$  и удовлетворяющее краевым условиям (3.5.11) (на поверхности  $\sigma_j$  направление нормали  $n$  совпадает с направлением положительной полуоси  $\xi$ ).

Таким образом, в случае осевой симметрии  $j$ -го бака трехмерную задачу, образуемую дифференциальным уравнением (3.15.9) и краевыми условиями (3.15.11), можно свести к двумерным краевым задачам для функций  $\psi_{jx}, \psi_{jy}, \psi_{jz}$ .

В соответствии с формулами (3.6.21), (3.12.6) и (3.15.18) функция  $f_j(r, \alpha, t)$ , определяющая колебания свободной поверхности жидкости в  $j$ -м баке, будет иметь вид

$$f_j = \left( \frac{\partial \psi_{jx}}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} \sin(\alpha - \alpha_j) + \left( \frac{\partial \psi_{jy}}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} \cos \alpha + \left( \frac{\partial \psi_{jz}}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} \sin \alpha. \quad (3.15.19)$$

Кажущееся осевое ускорение  $\omega_{0x} - g_x$  фигурирует в краевых условиях (3.15.13), (3.15.15) и (3.15.17) в качестве коэффициента при частной производной по  $\xi$  от искомой функции. Из поперечных кажущихся ускорений  $\omega_{0y} - g_y$ ,  $\omega_{0z} - g_z$  и угловых ускорений  $d\omega_x/dt$ ,  $d\omega_y/dt$ ,  $d\omega_z/dt$  краевые условия (3.15.13) содержат одно лишь ускорение  $d\omega_x/dt$ . В краевые условия (3.15.15) входят ускорения  $\omega_{0y} - g_y$  и  $d\omega_z/dt$ , а в краевые условия (3.15.17) — ускорения  $\omega_{0z} - g_z$  и  $d\omega_y/dt$ . Таким образом, функция  $\psi_{jz}$  определяет колебания свободной поверхности, вызываемые колебаниями корпуса ракеты в плоскости крена, функция  $\psi_{jx}$  определяет колебания свободной поверхности, порождаемые колебаниями корпуса в плоскости тангажа, функция  $\psi_{jy}$  определяет колебания свободной поверхности, вызываемые колебаниями ракеты в плоскости рыскания.

В соответствии с формулой (3.15.19) колебания свободной поверхности жидкости в  $j$ -м баке, вызываемые вращением ракеты вокруг ее продольной оси, характеризуются линией узлов, лежащей в плоскости  $\alpha = \alpha_j$ ; вдоль этой линии функция  $f_j$  всегда остается равной нулю. Как видно из рис. 3.3, плоскость  $\alpha = \alpha_j$  проходит всегда через ось  $x$ . Колебания свободной поверхности жидкости, порождаемые колебаниями корпуса ракеты в плоскости тангажа, согласно (3.15.19) характеризуются линией узлов, лежащей в плоскости  $\alpha = \pi/2$ , т. е. в плоскости  $y = y_j$  (см. рис. 3.3). Колебания свободной поверхности, вызываемые колебаниями ракеты в плоскости рыскания, характеризуются линией узлов, лежащей в плоскости  $z = z_j$ .

Согласно (3.15.6) величину  $k_j$ , фигурирующую в краевых условиях (3.15.15) и (3.15.17), можно отыскать, решив краевую задачу, образуемую дифференциальным уравнением (3.12.13) и краевым условием (3.12.14). Пока бак с номером  $j$  не опорожняется, величина  $k_j$  от времени  $t$  не зависит и представляет со-



бой функцию одной лишь переменной  $r$ . В процессе опорожнения  $j$ -го бака возникает зависимость величины  $k_j$  от времени  $t$ , так как вид функции  $\theta_j$  зависит от уровня заполнения бака.

В качестве примера определим величину  $k_j$  для жидкости, находящейся в цилиндрическом топливном баке. В рассматриваемом случае согласно (3.13.3) и (3.13.24) будет иметь место равенство

$$(\theta_j)_{\xi=0} = -4R^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left( \operatorname{ch} \frac{\nu_k H}{R} - 1 \right) J_1 \left( \frac{\nu_k r}{R} \right)}{\nu_k (\nu_k^2 - 1) \operatorname{sh} \frac{\nu_k H}{R} J_1(\nu_k)}. \quad (3.15.20)$$

Подставляя (3.15.20) в (3.15.6) и пользуясь тождеством (3.14.38), получим для величины  $k_j$  разложение

$$k_j = 4R \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{th} \frac{\nu_k H}{2R} J_1 \left( \frac{\nu_k r}{R} \right) \frac{R}{\nu_k r}}{(\nu_k^2 - 1) J_1(\nu_k)}. \quad (3.15.21)$$

В пределе, когда отношение  $H/R$  стремится к бесконечности, равенство (3.15.21) вырождается в предельное равенство

$$k_j = 4R \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_1 \left( \frac{\nu_k r}{R} \right) \frac{R}{\nu_k r}}{(\nu_k^2 - 1) J_1(\nu_k)}. \quad (3.15.22)$$

При  $H/R \rightarrow 0$  функция  $k_j$  вырождается в тождественный нуль. На рис. 3.8 для различных значений отношения  $H/R$  показана зависимость между отношениями  $k_j/R$  и  $r/R$ , найденная по формуле (3.15.21).

Для сферического бака, наполовину заполненного жидкостью, согласно (3.13.32) и (3.13.54) будет иметь место равенство

$$(\theta_j)_{\xi=0} = R^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} (4k-1)}{(k+1)(2k-3)(2k-1)^2} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2k} \left( \frac{r}{R} \right)^{2k-1} \times \\ \times P_{2k-1}^{(1)}(0) \quad (3.15.23)$$

[в соответствии с формулами перехода (3.13.26)  $\beta = \frac{\pi}{2}$  и  $q=r$  при  $\xi=0$ ]. Подставляя (3.15.23) в (3.15.6) и пользуясь соотношением

$$P_{2k-1}^{(1)}(0) = (-1)^{k-1} 2k \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2k} \quad (3.15.24)$$

(см. [27]), получим для величины  $k_j$  разложение

$$k_j = -R \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k(4k-1)}{(k+1)(2k-3)(2k-1)^2} \times \\ \times \left[ \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2k} \right]^2 \left( \frac{r}{R} \right)^{2k-2},$$

или

$$k_j = R \left\{ \frac{3}{4} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{4k-1}{2k(k+1)(2k-3)} \times \right. \\ \times \left. \left[ \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-3)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2k-2)} \right]^2 \left( \frac{r}{R} \right)^{2k-2} \right\}. \quad (3.15.25)$$

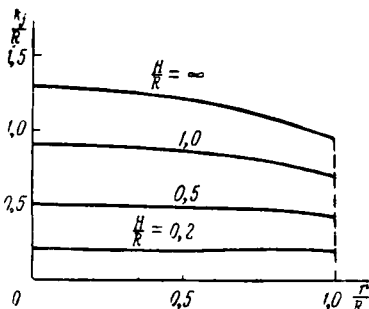


Рис. 3.8.

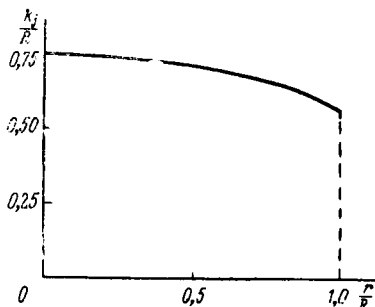


Рис. 3.9.

На рис. 3.9 показана зависимость между отношениями  $k_j/R$  и  $r/R$ , найденная по формуле (3.15.25).

#### § 16. УРАВНЕНИЕ ПРОДОЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ, УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ В ПЛОСКОСТЯХ ТАНГАЖА, РЫСКАНИЯ И КРЕНА

Вернемся теперь к рассмотрению уравнений движения (3.11.1). Осуществляя в первых двух уравнениях (3.11.1) проектирование векторов на координатные оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и пользуясь при этом формулами перехода (3.12.6) и соотношениями (3.14.23) и (3.14.24), получим три уравнения сил:

$$m(w_{0x} - g_x) + \sum_{j=1}^N Q_j \int_{\sigma_j} x_j \left( \frac{\partial^3 \psi_j}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} d\sigma = F_x, \\ m(w_{0y} - g_y) + \sum_{j=1}^N Q_j \int_{\sigma_j} (y_j + r \cos \alpha) \left( \frac{\partial^3 \psi_j}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} d\sigma = F_y, \quad (3.16.1) \\ m(w_{0z} - g_z) + \sum_{j=1}^N Q_j \int_{\sigma_j} (z_j + r \sin \alpha) \left( \frac{\partial^3 \psi_j}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} d\sigma = F_z$$

и три уравнения моментов:

$$\begin{aligned}
 J_x \frac{d\omega_x}{dt} + \sum_{j=1}^N Q_j \int_{\sigma_j} \varphi_{jx} \left( \frac{\partial^3 \psi_j}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} d\sigma + (\omega_{0x} - g_x) \times \\
 \times \sum_{j=1}^N Q_j \int_{\sigma_j} (y_j + r \cos \alpha) \left( \frac{\partial \psi_j}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} d\sigma - (\omega_{0y} - g_y) \times \\
 \times \sum_{j=1}^N Q_j \int_{\sigma_j} (z_j + r \sin \alpha) \left( \frac{\partial \psi_j}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} d\sigma = M_x, \\
 J_y \frac{d\omega_y}{dt} + \sum_{j=1}^N Q_j \int_{\sigma_j} \varphi_{jy} \left( \frac{\partial^3 \psi_j}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} d\sigma + (\omega_{0x} - g_x) \times \\
 \times \sum_{j=1}^N Q_j \int_{\sigma_j} (z_j + r \sin \alpha) \left( \frac{\partial \psi_j}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} d\sigma - (\omega_{0z} - g_z) \times \quad (3.16.2) \\
 \times \sum_{j=1}^N Q_j \int_{\sigma_j} x_j \left( \frac{\partial \psi_j}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} d\sigma = M_y, \\
 J_z \frac{d\omega_z}{dt} + \sum_{j=1}^N Q_j \int_{\sigma_j} \varphi_{jz} \left( \frac{\partial^3 \psi_j}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} d\sigma + (\omega_{0y} - g_y) \times \\
 \times \sum_{j=1}^N Q_j \int_{\sigma_j} x_j \left( \frac{\partial \psi_j}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} d\sigma - (\omega_{0x} - g_x) \times \\
 \times \sum_{j=1}^N Q_j \int_{\sigma_j} (y_j + r \cos \alpha) \left( \frac{\partial \psi_j}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} d\sigma = M_z.
 \end{aligned}$$

В § 15 мы получили равенства (3.15.4) и (3.15.7) для потенциалов Жуковского  $\varphi_{jx}$ ,  $\varphi_{jy}$ ,  $\varphi_{jz}$  и формулу (3.15.18) для потенциала перемещений  $\psi_j$ . Пользуясь этими формулами, преобразуем поверхностные интегралы, фигурирующие в уравнениях (3.16.1) и (3.16.2).

Интеграл от какой-либо функции  $f$  по плоской свободной поверхности жидкости  $\sigma_j$  может быть представлен в виде

$$\int_{\sigma_j} f d\sigma = \int_0^{R_j} \int_0^{2\pi} f r dr da, \quad (3.16.3)$$

где  $R_j$  — радиус свободной поверхности  $\sigma_j$ .

Преобразовав формулу (3.15.18):

$$\psi_j = (\psi_{jy} - \psi_{jx} \sin \alpha_j) \cos \alpha + (\psi_{jz} + \psi_{jx} \cos \alpha_j) \sin \alpha, \quad (3.16.4)$$

найдем

$$\begin{aligned} \int_{\sigma_j} x_j \left( \frac{\partial^3 \psi_j}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} d\sigma &= x_j \int_{\sigma_j} \left\{ \left[ \frac{\partial^3 (\psi_{jy} - \psi_{jx} \sin \alpha_j)}{\partial \xi \partial t^2} \right]_{\xi=0} \cos \alpha + \right. \\ &\quad \left. + \left[ \frac{\partial^3 (\psi_{jz} + \psi_{jx} \cos \alpha_j)}{\partial \xi \partial t^2} \right]_{\xi=0} \sin \alpha \right\} d\sigma = x_j \left\{ \int_0^{2\pi} \cos \alpha da \times \right. \\ &\quad \times \int_0^{R_j} \left[ \frac{\partial^3 (\psi_{jy} - \psi_{jx} \sin \alpha_j)}{\partial \xi \partial t^2} \right]_{\xi=0} r dr + \int_0^{2\pi} \sin \alpha da \times \\ &\quad \times \left. \int_0^{R_j} \left[ \frac{\partial^3 (\psi_{jz} + \psi_{jx} \cos \alpha_j)}{\partial \xi \partial t^2} \right]_{\xi=0} r dr \right\} = 0, \quad (3.16.5) \\ \iint_{\sigma_j} (y_j + r \cos \alpha) \left( \frac{\partial^3 \psi_j}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} d\sigma &= \iint_{\sigma_j} (y_j + r \cos \alpha) \times \\ \times \left\{ \left[ \frac{\partial^3 (\psi_{jy} - \psi_{jx} \sin \alpha_j)}{\partial \xi \partial t^2} \right]_{\xi=0} \cos \alpha + \left[ \frac{\partial^3 (\psi_{jz} + \psi_{jx} \cos \alpha_j)}{\partial \xi \partial t^2} \right]_{\xi=0} \sin \alpha \right\} d\sigma &= \\ = y_j \left\{ \int_0^{2\pi} \cos \alpha da \int_0^{R_j} \left[ \frac{\partial^3 (\psi_{jy} - \psi_{jx} \sin \alpha_j)}{\partial \xi \partial t^2} \right]_{\xi=0} r dr + \int_0^{2\pi} \sin \alpha da \times \right. \\ \times \int_0^{R_j} \left[ \frac{\partial^3 (\psi_{jz} + \psi_{jx} \cos \alpha_j)}{\partial \xi \partial t^2} \right]_{\xi=0} r dr \right\} &+ \int_0^{2\pi} \sin \alpha \cos \alpha da \times \\ \times \int_0^{R_j} \left[ \frac{\partial^3 (\psi_{jz} + \psi_{jx} \cos \alpha_j)}{\partial \xi \partial t^2} \right]_{\xi=0} r^2 dr &+ \int_0^{2\pi} \cos^2 \alpha da \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^{R_j} \left[ \frac{\partial^3(\psi_{jy} - \psi_{jx} \sin \alpha_j)}{\partial \xi \partial t^2} \right]_{\xi=0} r^2 dr = \pi \int_0^{R_j} \left[ \frac{\partial^3(\psi_{jy} - \psi_{jx} \sin \alpha_j)}{\partial \xi \partial t^2} \right]_{\xi=0} r^2 dr = \\
& = \pi \int_0^{R_j} \left( \frac{\partial^3 \psi_{jy}}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} r^2 dr - \pi \sin \alpha_j \int_0^{R_j} \left( \frac{\partial^3 \psi_{jx}}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} r^2 dr, \quad (3.16.6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\sigma_j} (z_j + r \sin \alpha) \left( \frac{\partial^3 \psi_j}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} d\sigma = \int_{\sigma_j} (z_j + r \sin \alpha) \left\{ \left[ \frac{\partial^3(\psi_{jy} - \psi_{jx} \sin \alpha_j)}{\partial \xi \partial t^2} \right]_{\xi=0} \times \right. \\
& \times \cos \alpha + \left[ \frac{\partial^3(\psi_{jz} + \psi_{jx} \cos \alpha_j)}{\partial \xi \partial t^2} \right]_{\xi=0} \sin \alpha \left. \right\} d\sigma = z_j \left\{ \int_0^{2\pi} \cos \alpha \, d\alpha \times \right. \\
& \times \int_0^{R_j} \left[ \frac{\partial^3(\psi_{jy} - \psi_{jx} \sin \alpha_j)}{\partial \xi \partial t^2} \right]_{\xi=0} r \, dr + \int_0^{2\pi} \sin \alpha \, d\alpha \times \\
& \times \int_0^{R_j} \left[ \frac{\partial^3(\psi_{jz} + \psi_{jx} \cos \alpha_j)}{\partial \xi \partial t^2} \right]_{\xi=0} r \, dr \left. \right\} + \int_0^{2\pi} \sin \alpha \cos \alpha \, d\alpha \times \\
& \times \int_0^{R_j} \left[ \frac{\partial^3(\psi_{jy} - \psi_{jx} \sin \alpha_j)}{\partial \xi \partial t^2} \right]_{\xi=0} r^2 dr + \int_0^{2\pi} \sin^2 \alpha \, d\alpha \times \\
& \times \int_0^{R_j} \left[ \frac{\partial^3(\psi_{jz} + \psi_{jx} \cos \alpha_j)}{\partial \xi \partial t^2} \right]_{\xi=0} r^2 dr = \pi \int_0^{R_j} \left[ \frac{\partial^3(\psi_{jz} + \psi_{jx} \cos \alpha_j)}{\partial \xi \partial t^2} \right]_{\xi=0} r^2 dr = \\
& = \pi \int_0^{R_j} \left( \frac{\partial^3 \psi_{jz}}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} r^2 dr + \pi \cos \alpha_j \int_0^{R_j} \left( \frac{\partial^3 \psi_{jx}}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} r^2 dr. \quad (3.16.7)
\end{aligned}$$

Согласно (3.16.5) первому из уравнений (3.16.1) можно придать вид

$$m(\omega_{0x} - g_x) = F_x. \quad (3.16.8)$$

Уравнение продольного движения (3.16.8) ничем не отличается от уравнения, положенного нами в основу исследования продольного движения ракеты в гл. I. Таким образом, колебания жидкостей в топливных баках на продольное движение ракеты не влияют.

Согласно (3.16.6) и (3.16.7) второе и третье из уравнений (3.16.1) могут быть приведены к виду

$$\begin{aligned}
 m(w_{0y} - g_y) + \pi \sum_{j=1}^N \epsilon_j \int_0^{R_j} \left( \frac{\partial^3 \psi_{jy}}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} r^2 dr - \\
 - \pi \sum_{j=1}^N \epsilon_j \sin \alpha_j \int_0^{R_j} \left( \frac{\partial^3 \psi_{jx}}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} r^2 dr = F_y, \\
 m(w_{0z} - g_z) + \pi \sum_{j=1}^N \epsilon_j \int_0^{R_j} \left( \frac{\partial^3 \psi_{jz}}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} r^2 dr + \\
 + \pi \sum_{j=1}^N \epsilon_j \cos \alpha_j \int_0^{R_j} \left( \frac{\partial^3 \psi_{jx}}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} r^2 dr = F_z.
 \end{aligned} \tag{3.16.9}$$

Перейдем к преобразованию уравнений моментов (3.16.2). Пользуясь формулами (3.15.4), (3.15.7), (3.16.3) и (3.16.4), найдем

$$\begin{aligned}
 \int_{\sigma_j} \varphi_{jx} \left( \frac{\partial^3 \psi_j}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} d\sigma &= r_j \int_{\sigma_j} (\sin \alpha \cos \alpha_j - \cos \alpha \sin \alpha_j) \times \\
 \times \left\{ \left[ \frac{\partial^3 (\psi_{jy} - \psi_{jx} \sin \alpha_j)}{\partial \xi \partial t^2} \right]_{\xi=0} \cos \alpha + \left[ \frac{\partial^3 (\psi_{jz} + \psi_{jx} \cos \alpha_j)}{\partial \xi \partial t^2} \right]_{\xi=0} \sin \alpha \right\} r d\sigma = \\
 = r_j \int_0^{2\pi} \sin \alpha \cos \alpha d\alpha \int_0^{R_j} \left\{ \cos \alpha_j \left[ \frac{\partial^3 (\psi_{jy} - \psi_{jx} \sin \alpha_j)}{\partial \xi \partial t^2} \right]_{\xi=0} - \sin \alpha_j \times \right. \\
 \times \left. \left[ \frac{\partial^3 (\psi_{jz} + \psi_{jx} \cos \alpha_j)}{\partial \xi \partial t^2} \right]_{\xi=0} \right\} r^2 dr + \cos \alpha_j \int_0^{2\pi} \sin^2 \alpha d\alpha \times \\
 \times \int_0^{R_j} \left[ \frac{\partial^3 (\psi_{jz} + \psi_{jx} \cos \alpha_j)}{\partial \xi \partial t^2} \right]_{\xi=0} r^2 dr - \sin \alpha_j \int_0^{2\pi} \cos^2 \alpha d\alpha \times \\
 \times \int_0^{R_j} \left[ \frac{\partial^3 (\psi_{jy} - \psi_{jx} \sin \alpha_j)}{\partial \xi \partial t^2} \right]_{\xi=0} r^2 dr \Bigg\} = \pi r_j \left\{ \cos \alpha_j \times \right. \\
 \times \int_0^{R_j} \left[ \frac{\partial^3 (\psi_{jz} + \psi_{jx} \cos \alpha_j)}{\partial \xi \partial t^2} \right]_{\xi=0} r^2 dr - \sin \alpha_j \int_0^{R_j} \left[ \frac{\partial^3 (\psi_{jy} - \psi_{jx} \sin \alpha_j)}{\partial \xi \partial t^2} \right]_{\xi=0} r^2 dr \Bigg\} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \pi r_j \int_0^{R_j} \left( \frac{\partial^3 \psi_{jx}}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} r^2 dr - \pi r_j \sin \alpha_j \int_0^{R_j} \left( \frac{\partial^3 \psi_{jy}}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} r^2 dr + \\
&\quad + \pi r_j \cos \alpha_j \int_0^{R_j} \left( \frac{\partial^3 \psi_{jz}}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} r^2 dr, \quad (3.16.10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_{\sigma_j} \varphi_{jy} \left( \frac{\partial^3 \psi_j}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} d\sigma = - \int_{\sigma_j} (x_j - k_j) \sin \alpha \left\{ \left[ \frac{\partial^3 (\psi_{jy} - \psi_{jx} \sin \alpha_j)}{\partial \xi \partial t^2} \right]_{\xi=0} \cos \alpha + \right. \\
&\quad \left. + \left[ \frac{\partial^3 (\psi_{jz} + \psi_{jx} \cos \alpha_j)}{\partial \xi \partial t^2} \right]_{\xi=0} \sin \alpha \right\} r d\sigma = - \int_0^{2\pi} \sin \alpha \cos \alpha d\alpha \times \\
&\quad \times \int_0^{R_j} \left[ \frac{\partial^3 (\psi_{jy} - \psi_{jx} \sin \alpha_j)}{\partial \xi \partial t^2} \right]_{\xi=0} (x_j - k_j) r^2 dr - \int_0^{2\pi} \sin^2 \alpha d\alpha \times \\
&\quad \times \int_0^{R_j} \left[ \frac{\partial^3 (\psi_{jz} + \psi_{jx} \cos \alpha_j)}{\partial \xi \partial t^2} \right]_{\xi=0} (x_j - k_j) r^2 dr = \\
&= - \pi \int_0^{R_j} \left[ \frac{\partial^3 (\psi_{jz} + \psi_{jx} \cos \alpha_j)}{\partial \xi \partial t^2} \right]_{\xi=0} (x_j - k_j) r^2 dr = \\
&= - \pi \int_0^{R_j} \left( \frac{\partial^3 \psi_{jz}}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} (x_j - k_j) r^2 dr - \pi \cos \alpha_j \int_0^{R_j} \left( \frac{\partial^3 \psi_{jx}}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} (x_j - k_j) r^2 dr, \\
&\quad (3.16.11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_{\sigma_j} \varphi_{jz} \left( \frac{\partial^3 \psi_j}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} d\sigma = \int_{\sigma_j} (x_j - k_j) \cos \alpha \left\{ \left[ \frac{\partial^3 (\psi_{jy} - \psi_{jx} \sin \alpha_j)}{\partial \xi \partial t^2} \right]_{\xi=0} \cos \alpha + \right. \\
&\quad \left. + \left[ \frac{\partial^3 (\psi_{jz} + \psi_{jx} \cos \alpha_j)}{\partial \xi \partial t^2} \right]_{\xi=0} \sin \alpha \right\} r d\sigma = \int_0^{2\pi} \sin \alpha \cos \alpha d\alpha \times \\
&\quad \times \int_0^{R_j} \left[ \frac{\partial^3 (\psi_{jz} + \psi_{jx} \cos \alpha_j)}{\partial \xi \partial t^2} \right]_{\xi=0} (x_j - k_j) r^2 dr + \int_0^{2\pi} \cos^2 \alpha d\alpha \times \\
&\quad \times \int_0^{R_j} \left[ \frac{\partial^3 (\psi_{jy} - \psi_{jx} \sin \alpha_j)}{\partial \xi \partial t^2} \right]_{\xi=0} (x_j - k_j) r^2 dr =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \pi \int_0^{R_j} \left[ \frac{\partial^3(\psi_{jy} - \psi_{jx} \sin \alpha_j)}{\partial \xi \partial t^2} \right]_{\xi=0} (x_j - k_j) r^2 dr = \\
&= \pi \int_0^{R_j} \left( \frac{\partial^3 \psi_{jy}}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} (x_j - k_j) r^2 dr - \pi \sin \alpha_j \int_0^{R_j} \left( \frac{\partial^3 \psi_{jx}}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} (x_j - k_j) r^2 dr.
\end{aligned} \tag{3.16.12}$$

Заменяя в левых частях формул (3.16.5), (3.16.6) и (3.16.7) производную  $\partial^3 \psi_j / \partial \xi \partial t^2$  производной  $\partial \psi_j / \partial \xi$ , получим соотношения:

$$\begin{aligned}
&\int_{\sigma_j} x_j \left( \frac{\partial \psi_j}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} d\sigma = 0, \\
&\int_{\sigma_j} (y_j + r \cos \alpha) \left( \frac{\partial \psi_j}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} d\sigma = \pi \int_0^{R_j} \left( \frac{\partial \psi_{jy}}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} r^2 dr - \\
&\quad - \pi \sin \alpha_j \int_0^{R_j} \left( \frac{\partial \psi_{jx}}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} r^2 dr, \\
&\int_{\sigma} (z_j + r \sin \alpha) \left( \frac{\partial \psi_j}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} d\sigma = \pi \int_0^{R_j} \left( \frac{\partial \psi_{jz}}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} r^2 dr + \\
&\quad + \pi \cos \alpha_j \int_0^{R_j} \left( \frac{\partial \psi_{jx}}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} r^2 dr.
\end{aligned} \tag{3.16.13}$$

Согласно (3.16.10), (3.16.11), (3.16.12) и (3.16.13) уравнениям моментов (3.16.2) можно придать вид

$$\left. \begin{aligned}
&J_x \frac{d\omega_x}{dt} + \pi \sum_{j=1}^N \varrho_j r_j \int_0^{R_j} \left( \frac{\partial^3 \psi_{jx}}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} r^2 dr - \pi \sum_{j=1}^N \varrho_j r_j \sin \alpha_j \times \\
&\times \int_0^{R_j} \left( \frac{\partial^3 \psi_{jy}}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} r^2 dr + \pi \sum_{j=1}^N \varrho_j r_j \cos \alpha_j \int_0^{R_j} \left( \frac{\partial^3 \psi_{jz}}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} r^2 dr + \\
&+ \pi (w_{0z} - g_z) \left[ \sum_{j=1}^N \varrho_j \int_0^{R_j} \left( \frac{\partial \psi_{jy}}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} r^2 dr - \sum_{j=1}^N \varrho_j \sin \alpha_j \times \right.
\end{aligned} \right] \tag{3.16.14}$$



$$\left. \begin{aligned}
& \times \int_0^{R_j} \left( \frac{\partial \psi_{jx}}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} r^2 dr \Big] - \pi (\omega_{0y} - g_y) \left[ \sum_{j=1}^N \varrho_j \int_0^{R_j} \left( \frac{\partial \psi_{jz}}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} r^2 dr + \right. \\
& \quad \left. - \sum_{j=1}^N \varrho_j \cos \alpha_j \int_0^{R_j} \left( \frac{\partial \psi_{jx}}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} r^2 dr \right] = M_x, \\
& J_y \frac{d\omega_y}{dt} - \pi \sum_{j=1}^N \varrho_j \int_0^{R_j} \left( \frac{\partial \psi_{jz}}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} (x_j - k_j) r^2 dr - \\
& \quad - \pi \sum_{j=1}^N \varrho_j \cos \alpha_j \int_0^{R_j} \left( \frac{\partial^2 \psi_{jx}}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} (x_j - k_j) r^2 dr + \\
& \quad + \pi (\omega_{0x} - g_x) \left[ \sum_{j=1}^N \varrho_j \int_0^{R_j} \left( \frac{\partial \psi_{jz}}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} r^2 dr + \sum_{j=1}^N \varrho_j \cos \alpha_j \times \right. \\
& \quad \left. \times \int_0^{R_j} \left( \frac{\partial \psi_{jx}}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} r^2 dr \right] = M_y, \\
& J_z \frac{d\omega_z}{dt} - \pi \sum_{j=1}^N \varrho_j \int_0^{R_j} \left( \frac{\partial^3 \psi_{jy}}{\partial \xi^3 \partial t^2} \right)_{\xi=0} (x_j - k_j) r^2 dr - \\
& \quad - \pi \sum_{j=1}^N \varrho_j \sin \alpha_j \int_0^{R_j} \left( \frac{\partial^3 \psi_{jx}}{\partial \xi^3 \partial t^2} \right)_{\xi=0} (x_j - k_j) r^2 dr - \\
& \quad - \pi (\omega_{0x} - g_x) \left[ \sum_{j=1}^N \varrho_j \int_0^{R_j} \left( \frac{\partial \psi_{jy}}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} r^2 dr - \right. \\
& \quad \left. - \sum_{j=1}^N \varrho_j \sin \alpha_j \int_0^{R_j} \left( \frac{\partial \psi_{jx}}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} r^2 dr \right] = M_z.
\end{aligned} \right\} \quad (3.16.14)$$

При  $\cos \alpha_j \neq 0$  топливному баку с номером  $j$  всегда будет соответствовать в силу симметрии ракеты точно такой же топливный бак с некоторым номером  $k$ , симметрично расположенный по отношению к плоскости  $y=0$  (см. рис. 3.3), и будут иметь место равенства:

$$\begin{aligned}
\psi_{kx} &= \psi_{jx}, \quad \psi_{kz} = \psi_{jz}, \quad \varrho_k = \varrho_j, \quad r_k = r_j, \quad R_k = R_j, \quad x_k = x_j, \\
k_k &= k_j, \quad \cos \alpha_k = -\cos \alpha_j.
\end{aligned} \quad (3.16.15)$$

Отсюда вытекают соотношения:

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^N Q_j \cos \alpha_j \int_0^{R_j} \left( \frac{\partial^3 \psi_{jx}}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} r^2 dr &= 0, \\
 \sum_{j=1}^N Q_j r_j \cos \alpha_j \int_0^{R_j} \left( \frac{\partial^3 \psi_{jz}}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} r^2 dr &= 0, \\
 \sum_{j=1}^N Q_j \cos \alpha_j \int_0^{R_j} \left( \frac{\partial \psi_{jx}}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} r^2 dr &= 0, \\
 \sum_{j=1}^N Q_j \cos \alpha_j \int_0^{R_j} \left( \frac{\partial^3 \psi_{jx}}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} (x_j - k_j) r^2 dr &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.16.16}$$

Аналогично при  $\sin \alpha_j \neq 0$  топливному баку с номером  $j$  всегда будет соответствовать точно такой же топливный бак с некоторым номером  $k$ , симметрично расположенный по отношению к плоскости  $z=0$ , и будут иметь место зависимости:

$$\begin{aligned}
 \psi_{kx} &\equiv \psi_{jx}, \quad \psi_{ky} \equiv \psi_{jy}, \quad Q_k = Q_j, \quad r_k = r_j, \quad R_k = R_j, \quad x_k = x_j, \\
 k_k &= k_j, \quad \sin \alpha_k = -\sin \alpha_j.
 \end{aligned} \tag{3.16.17}$$

Равенства (3.16.17) влекут за собой соотношения:

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^N Q_j \sin \alpha_j \int_0^{R_j} \left( \frac{\partial^3 \psi_{jx}}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} r^2 dr &= 0, \\
 \sum_{j=1}^N Q_j r_j \sin \alpha_j \int_0^{R_j} \left( \frac{\partial^3 \psi_{jy}}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} r^2 dr &= 0, \\
 \sum_{j=1}^N Q_j \sin \alpha_j \int_0^{R_j} \left( \frac{\partial \psi_{jx}}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} r^2 dr &= 0, \\
 \sum_{j=1}^N Q_j \sin \alpha_j \int_0^{R_j} \left( \frac{\partial^3 \psi_{jx}}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} (x_j - k_j) r^2 dr &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.16.18}$$

Согласно (3.16.16) и (3.16.18) уравнения сил (3.16.9) можно преобразовать так:

$$m(\omega_{0y} - g_y) + \pi \sum_{j=1}^N \varrho_j \int_0^{R_j} \left( \frac{\partial^3 \psi_{jy}}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} r^2 dr = F_y, \quad (3.16.19)$$

$$m(\omega_{0z} - g_z) + \pi \sum_{j=1}^N \varrho_j \int_0^{R_j} \left( \frac{\partial^3 \psi_{jz}}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} r^2 dr = F_z,$$

и уравнениям моментов (3.16.14) можно придать вид

$$J_x \frac{d\omega_x}{dt} + \pi \sum_{j=1}^N \varrho_j r_j \int_0^{R_j} \left( \frac{\partial^3 \psi_{jx}}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} r^2 dr + \pi (\omega_{0z} - g_z) \times$$

$$\times \sum_{j=1}^N \varrho_j \int_0^{R_j} \left( \frac{\partial \psi_{jy}}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} r^2 dr - \pi (\omega_{0y} - g_y) \times$$

$$\times \sum_{j=1}^N \varrho_j \int_0^{R_j} \left( \frac{\partial \psi_{jz}}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} r^2 dr = M_x,$$

$$J_y \frac{d\omega_y}{dt} - \pi \sum_{j=1}^N \varrho_j \int_0^{R_j} \left( \frac{\partial^3 \psi_{jz}}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} (x_j - k_j) r^2 dr + \quad (3.16.20)$$

$$+ \pi (\omega_{0x} - g_x) \sum_{j=1}^N \varrho_j \int_0^{R_j} \left( \frac{\partial \psi_{jz}}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} r^2 dr = M_y,$$

$$J_z \frac{d\omega_z}{dt} + \pi \sum_{j=1}^N \varrho_j \int_0^{R_j} \left( \frac{\partial^3 \psi_{jy}}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} (x_j - k_j) r^2 dr -$$

$$- \pi (\omega_{0x} - g_x) \sum_{j=1}^N \varrho_j \int_0^{R_j} \left( \frac{\partial \psi_{jy}}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} r^2 dr = M_z.$$

Объединяя первое из уравнений (3.16.19) с третьим из уравнений (3.16.20) и присоединяя к этой системе уравнений диффе-

ренциальные уравнения (3.15.14) с краевыми условиями (3.15.15) получим уравнения:

$$\begin{aligned}
 m(\omega_{0y} - g_y) + \pi \sum_{j=1}^N Q_j \int_0^{R_j} \left( \frac{\partial^3 \psi_{jy}}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} r^2 dr &= F_y, \\
 J_z \frac{d\omega_z}{dt} + \pi \sum_{j=1}^N Q_j \int_0^{R_j} \left( \frac{\partial^3 \psi_{jy}}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} (x_j - k_j) r^2 dr - \\
 - \pi(\omega_{0x} - g_x) \sum_{j=1}^N Q_j \int_0^{R_j} \left( \frac{\partial \psi_{jy}}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} r^2 dr &= M_z, \\
 \frac{\partial^2 \psi_{jy}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi_{jy}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_{jy}}{\partial r} - \frac{\psi_{jy}}{r^2} &= 0, \quad j = 1, 2, \dots, N, \\
 \frac{\partial \psi_{jy}}{\partial n} &= 0 \quad \text{на } l_j^*, \quad j = 1, 2, \dots, N, \\
 \frac{\partial^2 \psi_{jy}}{\partial t^2} + (\omega_{0x} - g_x) \frac{\partial \psi_{jy}}{\partial \xi} + r \left[ \omega_{0y} - g_y + (x_j - k_j) \frac{d\omega_z}{dt} \right] &= \\
 = 0 \quad \text{при } \xi = 0, \quad 0 < r < R_j, \quad j = 1, 2, \dots, N.
 \end{aligned} \tag{3.16.21}$$

Уравнения (3.16.21) определяют движение, совершаемое корпусом ракеты в плоскости тангажа, и возникающие при этом движении колебания свободных поверхностей жидкостей в топливных баках, которые согласно (3.15.19) характеризуются функциями

$$f_j = \left( \frac{\partial \psi_{jy}}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} \cos \alpha, \quad j = 1, 2, \dots, N. \tag{3.16.22}$$

Таким образом, уравнения (3.16.21) представляют собой уравнения движения ракеты в плоскости тангажа, учитывающие подвижность жидкостей, находящихся в топливных баках ракеты.

Аналогично, объединяя второе из уравнений (3.16.19) со вторым из уравнений (3.16.20) и присоединяя к этой системе уравнений дифференциальные уравнения (3.15.16) с краевыми условиями (3.15.17), получим уравнения движения ракеты в плоскости рыскания:

$$\begin{aligned}
& m(\omega_{0z} - g_z) + \pi \sum_{j=1}^N Q_j \int_0^{R_j} \left( \frac{\partial^3 \psi_{jz}}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} r^2 dr = F_z, \\
& J_y \frac{d\omega_y}{dt} - \pi \sum_{j=1}^N Q_j \int_0^{R_j} \left( \frac{\partial^3 \psi_{jz}}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} (x_j - k_j) r^2 dr + \\
& + \pi (\omega_{0x} - g_x) \sum_{j=1}^N Q_j \int_0^{R_j} \left( \frac{\partial \psi_{jz}}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} r^2 dr = M_y, \\
& \frac{\partial^2 \psi_{jz}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi_{jz}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_{jz}}{\partial r} - \frac{\psi_{jz}}{r^2} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N, \\
& \frac{\partial \psi_{jz}}{\partial n} = 0 \quad \text{на } l_j^*, \quad j = 1, 2, \dots, N, \\
& \frac{\partial^2 \psi_{jz}}{\partial t^2} + (\omega_{0x} - g_x) \frac{\partial \psi_{jz}}{\partial \xi} + r \left[ \omega_{0z} - g_z - (x_j - k_j) \frac{d\omega_y}{dt} \right] = \\
& = 0 \quad \text{при } \xi = 0, \quad 0 < r < R_j, \quad j = 1, 2, \dots, N.
\end{aligned} \tag{3.16.23}$$

Уравнения движения в плоскости рыскания (3.16.23) можно получить из уравнений движения в плоскости тангажа (3.16.21), заменяя величины  $\omega_{0y} - g_y$ ,  $\frac{d\omega_z}{dt}$ ,  $F_y$ ,  $M_z$ ,  $J_z$  и  $\psi_{jy}$  соответственно величинами  $\omega_{0z} - g_z$ ,  $-\frac{d\omega_y}{dt}$ ,  $F_z$ ,  $-M_y$ ,  $J_y$  и  $\psi_{jz}$ . Таким образом, уравнения движения в плоскости тангажа и уравнения движения в плоскости рыскания имеют совершенно одинаковую структуру и так же, как и в гл. I, мы ограничимся в дальнейшем рассмотрением уравнений движения в плоскости тангажа, имея в виду применимость всех полученных результатов к уравнениям движения в плоскости рыскания.

Присоединяя к первому из уравнений моментов (3.16.20) дифференциальные уравнения (3.15.12) с краевыми условиями (3.15.13), получим уравнения:

$$\begin{aligned}
& J_x \frac{d\omega_x}{dx} + \pi \sum_{j=1}^N Q_j r_j \int_0^{R_j} \left( \frac{\partial^3 \psi_{jx}}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} r^2 dr + \\
& + \pi (\omega_{0z} - g_z) \sum_{j=1}^N Q_j \int_0^{R_j} \left( \frac{\partial \psi_{jy}}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} r^2 dr - \\
& - \pi (\omega_{0y} - g_y) \sum_{j=1}^N Q_j \int_0^{R_j} \left( \frac{\partial \psi_{jz}}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} r^2 dr = M_x,
\end{aligned} \tag{3.16.24}$$

$$\frac{\partial^2 \psi_{jx}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi_{jx}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_{jx}}{\partial r} - \frac{\psi_{jx}}{r^2} = 0, \quad j=1, 2, \dots, N,$$

$$-\frac{\partial \psi_{jx}}{\partial n} = 0 \quad \text{на } l_j^*, \quad j=1, 2, \dots, N, \quad (3.16.24)$$

$$\frac{\partial^2 \psi_{jx}}{\partial t^2} + (\omega_{0x} - g_x) \frac{\partial \psi_{jx}}{\partial \xi} + r r_j \frac{d\omega_x}{dt} = 0 \quad \text{при } \xi=0,$$

$$0 < r < R_j, \quad j=1, 2, \dots, N.$$

Уравнения (3.16.24) определяют вращение корпуса ракеты вокруг его продольной оси и возникающие при этом вращении колебания свободных поверхностей жидкостей в топливных баках, которые согласно (3.15.19) характеризуются функциями

$$f_j = \left( \frac{\partial \psi_{jx}}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} \sin(\alpha - \alpha_j), \quad j=1, 2, \dots, N. \quad (3.16.25)$$

Таким образом, уравнения (3.16.24) представляют собой *уравнения движения ракеты в плоскости крена*, учитывающие подвижность жидкостей, находящихся в топливных баках ракеты.

Уравнения (3.16.24) содержат величины  $\omega_{0y} - g_y$ ,  $\omega_{0z} - g_z$ ,  $\psi_{jy}$  и  $\psi_{jz}$ , характеризующие движение, совершаемое ракетой в плоскостях тангажа и рыскания. Слагаемые, содержащие эти величины, определяют влияние, которое оказывают колебания ракеты в плоскостях тангажа и рыскания на вращение ракеты вокруг ее продольной оси. Этот эффект возникает вследствие того, что колебания свободных поверхностей жидкостей, вызываемые колебаниями корпуса ракеты в плоскостях тангажа и рыскания, приводят к колебаниям центра тяжести ракеты относительно ее оси и влияют, таким образом, на осевую составляющую главного момента внешних сил относительно центра тяжести ракеты. Ввиду относительной малости поперечных кажущихся ускорений  $\omega_{0y} - g_y$  и  $\omega_{0z} - g_z$  указанный эффект является практически весьма слабым и им обычно пренебрегают. Опуская в (3.16.24) слагаемые, характеризующие данный эффект, получим уравнения:

$$J_x \frac{d\omega_x}{dt} + \pi \sum_{j=1}^N \rho_j r_j \int_0^{R_j} \left( \frac{\partial^3 \psi_{jx}}{\partial \xi \partial t^2} \right)_{\xi=0} r^2 dr = M_x,$$

$$\frac{\partial^2 \psi_{jx}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi_{jx}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_{jx}}{\partial r} - \frac{\psi_{jx}}{r^2} = 0, \quad j=1, 2, \dots, N,$$

$$-\frac{\partial \psi_{jx}}{\partial n} = 0 \quad \text{на } l_j^*, \quad j=1, 2, \dots, N, \quad (3.16.26)$$

$$\frac{\partial^2 \psi_{jx}}{\partial t^2} + (\omega_{0x} - g_x) \frac{\partial \psi_{jx}}{\partial \xi} + r r_j \frac{d\omega_x}{dt} = 0 \quad \text{при } \xi=0,$$

$$0 < r < R_j, \quad j=1, 2, \dots, N.$$

В уравнениях (3.16.26)  $r_j$  — расстояние от оси  $j$ -го топливного бака до продольной оси ракеты  $x$ . При  $r_1=r_2=\dots=r_N=0$ , т. е. в том случае, когда оси всех топливных баков совмещены с продольной осью ракеты, уравнения (3.16.26) распадаются на уравнение

$$J_x \frac{d\omega_x}{dt} = M_x \quad (3.16.27)$$

и однородные дифференциальные уравнения для функций  $\psi_{jx}$  с однородными краевыми условиями. Согласно (3.14.32) в данном случае

$$J_x = \int_{V_0} (y^2 + z^2) \rho dv \quad (3.16.28)$$

$(y_j^2 + z_j^2 = r_j^2)$ . Таким образом, при  $r_1=r_2=\dots=r_N=0$  наличие жидкостей в топливных баках не влияет на вращение ракеты вокруг ее продольной оси, что согласуется с исходными предположениями об осевой симметрии топливных баков и об идеальности жидких компонентов топлива.

Непосредственное исследование устойчивости движения ракеты на основе уравнений движения, построенных в этом параграфе, весьма затруднительно из-за наличия в этих уравнениях движения дифференциальных уравнений в частных производных. В связи с этим уравнения движения ракеты, учитывающие подвижность жидких компонентов топлива, мы преобразуем ниже в системы обыкновенных дифференциальных уравнений, по отношению к которым применимы обычные методы исследования устойчивости движения. Это преобразование основывается на понятии о собственных колебаниях свободных поверхностей жидкостей, к рассмотрению которых мы переходим в следующем параграфе этой главы.

## § 17. СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СВОБОДНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ЖИДКОСТЕЙ В ТОПЛИВНЫХ БАКАХ

В § 15 мы получили для функций  $\psi_{jx}$ ,  $\psi_{jy}$  и  $\psi_{jz}$  дифференциальные уравнения (3.15.12), (3.15.14) и (3.15.16) с краевыми условиями (3.15.13), (3.15.15) и (3.15.17). Для этих трех краевых задач можно установить единую запись, введя в рассмотрение функцию  $\vartheta_j$ , удовлетворяющую дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 \vartheta_j}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \vartheta_j}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta_j}{\partial r} - \frac{\vartheta_j}{r^2} = 0, \quad (3.17.1)$$

регулярную на оси  $r=0$  и удовлетворяющую краевым условиям

$$\frac{\partial \vartheta_j}{\partial n} = 0 \quad \text{на } l_j^*, \quad (3.17.2)$$

$$\frac{\partial^2 \vartheta_j}{\partial t^2} + (w_{0x} - g_x) \frac{\partial \vartheta_j}{\partial \xi} + G_j(r, t) = 0 \quad \text{при } \xi = 0, \quad 0 < r < R_j,$$

где  $G_j(r, t)$  — некоторая заданная функция. При

$$G_j = r r_j' \frac{d\omega_x}{dt} \quad (3.17.3)$$

решение краевой задачи, образуемой дифференциальным уравнением (3.17.1) и краевыми условиями (3.17.2), будет определять функцию  $\psi_{jx}$ , при

$$G_j = r \left[ w_{0y} - g_y + (x_j - k_j) \frac{d\omega_z}{dt} \right] - \text{функцию } \psi_{jy} \text{ и при} \quad (3.17.4)$$

$$G_j = r \left[ w_{0z} - g_z - (x_j - k_j) \frac{d\omega_y}{dt} \right] - \text{функцию } \psi_{jz}. \quad (3.17.5)$$

Согласно (3.17.3), (3.17.4) и (3.17.5) при отсутствии поперечных кажущихся ускорений  $w_{0y} - g_y$ ,  $w_{0z} - g_z$  и угловых ускорений  $\frac{d\omega_x}{dt}$ ,  $\frac{d\omega_y}{dt}$ ,  $\frac{d\omega_z}{dt}$  во всех трех случаях функция  $G_j(r, t)$  будет тождественно равна нулю и краевые условия (3.17.2) будут вырождаться в однородные краевые условия:

$$\frac{\partial \vartheta_j}{\partial n} = 0 \quad \text{на } l_j^*, \quad (3.17.6)$$

$$\frac{\partial^2 \vartheta_j}{\partial t^2} + (w_{0x} - g_x) \frac{\partial \vartheta_j}{\partial \xi} = 0 \quad \text{при } \xi = 0, \quad 0 < r < R_j.$$

Дифференциальное уравнение (3.17.1) с краевыми условиями (3.17.6) имеет очевидное или, как принято говорить в таких случаях, тривиальное решение  $\vartheta_j \equiv 0$ . Этому тривиальному решению соответствует тождественное равенство нулю функций  $\psi_{jx}$ ,  $\psi_{jy}$  и  $\psi_{jz}$ , а следовательно, и функции  $f_j$ , определяющей в соответствии с формулой (3.15.19) колебания свободной поверхности жидкости в  $j$ -м баке. Таким образом, при отсутствии поперечных кажущихся ускорений и угловых ускорений одним из возможных движений жидкостей, находящихся в топливных баках, является такое их движение, при котором свободные поверхности жидкостей не колеблются, оставаясь в процессе движения плоскими и нормальными к продольной оси ракеты  $x$ . Однако, как видно будет из дальнейшего, наряду с тривиальным решением  $\vartheta_j \equiv 0$  дифференциальное уравнение (3.17.1) с однородными краевыми условиями (3.17.6) имеет бесконечную последовательность линейно



независимых нетривиальных решений, отличных от решения  $\vartheta_j \equiv 0$ . Колебания свободной поверхности жидкости в  $j$ -м баке, соответствующие этим нетривиальным решениям дифференциального уравнения (3.17.1) с краевыми условиями (3.17.6), называют *собственными колебаниями* этой свободной поверхности.

Задача о собственных колебаниях свободной поверхности жидкости может быть решена методом разделения переменных, который в математической физике принято называть методом Фурье. Будем искать нетривиальное решение дифференциального уравнения (3.17.1), регулярное на оси  $r=0$  и удовлетворяющее краевым условиям (3.17.6), в виде произведения двух функций

$$\vartheta_j(\xi, r, t) = \Theta_j(\xi, r) \beta_j(t). \quad (3.17.7)$$

Подставляя (3.17.7) в (3.17.1) и (3.17.6), получим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 \Theta_j}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Theta_j}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Theta_j}{\partial r} - \frac{\Theta_j}{r^2} = 0, \quad (3.17.8)$$

краевое условие

$$\frac{\partial \Theta_j}{\partial n} = 0 \text{ на } l_j^* \quad (3.17.9)$$

и краевое условие

$$\Theta_j \frac{d^2 \beta_j}{dt^2} + (\omega_{0x} - g_x) \frac{\partial \Theta_j}{\partial \xi} \beta_j = 0 \text{ при } \xi=0, \quad 0 < r < R_j. \quad (3.17.10)$$

Условие (3.17.10) можно преобразовать так:

$$\left[ \frac{\frac{\partial \Theta_j}{\partial \xi}}{\Theta_j} \right]_{\xi=0} = - \frac{\frac{d^2 \beta_j}{dt^2}}{(\omega_{0x} - g_x) \beta_j}. \quad (3.17.11)$$

Левая часть равенства (3.17.11) не зависит от переменной  $t$ , а правая часть этого равенства не зависит от переменной  $r$ . Таким образом, отношения, фигурирующие в равенстве (3.17.11), должны представлять собой некоторую константу. Обозначая константу через  $\lambda_j$ , получим для функции  $\Theta_j$  краевое условие

$$\frac{\partial \Theta_j}{\partial \xi} = \lambda_j \Theta_j \text{ при } \xi=0, \quad 0 < r < R_j \quad (3.17.12)$$

и для функции  $\beta_j$  дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 \beta_j}{dt^2} + \lambda_j (\omega_{0x} - g_x) \beta_j = 0. \quad (3.17.13)$$

Таким образом, задача о собственных колебаниях свободной поверхности жидкости, находящейся в  $j$ -м топливном баке, сводится к отысканию тех значений числового параметра  $\lambda_j$ , при

которых дифференциальное уравнение (3.17.8) имеет нетривиальные решения, регулярные на оси  $\xi$  и удовлетворяющие краевым условиям (3.17.9) и (3.17.12). Эти значения параметра  $\lambda_j$  называют *собственными значениями* краевой задачи, образуемой дифференциальным уравнением (3.17.8) и краевыми условиями (3.17.9) и (3.17.12); нетривиальные решения этой краевой задачи называют ее *собственными функциями*. Основные свойства собственных функций и собственных значений дифференциального уравнения (3.17.8) с краевыми условиями (3.17.9) и (3.17.12) находятся нами в следующем параграфе.

### § 18. ФОРМЫ И ЧАСТОТЫ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Чтобы исследовать собственные функции и собственные значения краевой задачи, образуемой дифференциальным уравнением (3.17.8) и краевыми условиями (3.17.9) и (3.17.12), введем в рассмотрение функцию  $U_j(\xi, r, \alpha)$ , определяемую равенством

$$U_j = \Theta_j \cos \alpha. \quad (3.18.1)$$

Согласно (3.17.8), (3.17.9) и (3.17.12) функция  $U_j$  должна удовлетворять уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 U_j}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U_j}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_j}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U_j}{\partial \alpha^2} = 0 \quad (3.18.2)$$

и краевым условиям:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_j}{\partial n} &= 0 \text{ на } S_j, \\ \frac{\partial U_j}{\partial n} &= \lambda_j U_j \text{ на } \sigma_j \end{aligned} \quad (3.18.3)$$

(напомним, что контур  $l_j^*$  является образующей смачиваемой поверхности вращения  $S_j$ , а прямолинейный отрезок  $\xi=0$ ,  $0 < r < R_j$  — образующей плоской свободной поверхности  $\sigma_j$ ).

Докажем сперва, что дифференциальное уравнение (3.17.8) может иметь нетривиальные решения, удовлетворяющие краевым условиям (3.17.9) и (3.17.12), только при вещественных и притом положительных значениях параметра  $\lambda_j$ . Допустим, что некоторое комплексное значение параметра  $\lambda_j$  является собственным значением краевой задачи, образуемой дифференциальным уравнением (3.17.8) и краевыми условиями (3.17.9) и (3.17.12). Соответствующая собственная функция  $\Theta_j$  будет комплексной, функция  $U_j$ , найденная по формуле (3.18.1), тоже будет комплексной. Согласно (3.18.3) будет иметь место равенство

$$\int_{S_j + \sigma_j} \frac{\partial U_j}{\partial n} \bar{U}_j d\sigma = \lambda_j \int_{\sigma_j} U_j \bar{U}_j d\sigma = \lambda_j \int_{\sigma_j} |U_j|^2 d\sigma. \quad (3.18.4)$$

Преобразуя поверхностный интеграл в объемный посредством формул Гаусса-Остроградского, найдем

$$\begin{aligned} \int_{s_j+\sigma_j} \frac{\partial U_j}{\partial n} \bar{U}_j d\sigma &= \int_{s_j+\sigma_j} \bar{U}_j \left[ \frac{\partial U_j}{\partial x} \cos(n, x) + \frac{\partial U_j}{\partial y} \cos(n, y) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial U_j}{\partial z} \cos(n, z) \right] d\sigma = \int_{V_j} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \bar{U}_j \frac{\partial U_j}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \bar{U}_j \frac{\partial U_j}{\partial y} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial z} \left( \bar{U}_j \frac{\partial U_j}{\partial z} \right) \right] dv = \int_{V_j} \left( \bar{U}_j \nabla^2 U_j + \frac{\partial U_j}{\partial x} \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x} + \frac{\partial U_j}{\partial y} \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial y} + \frac{\partial U_j}{\partial z} \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial z} \right) dv = \\ &= \int_{V_j} \left( \left| \frac{\partial U_j}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial U_j}{\partial y} \right|^2 + \left| \frac{\partial U_j}{\partial z} \right|^2 \right) dv, \end{aligned} \quad (3.18.5)$$

так как согласно (3.18.2)  $\nabla^2 U_j = 0$ .

Функция  $\Theta_j$  является нетривиальным решением дифференциального уравнения (3.17.8) и, таким образом, в соответствии с формулой (3.18.1) функция  $U_j$  не может сохранять постоянное значение в области  $V_j$ . Отсюда вытекает неравенство

$$\left| \frac{\partial U_j}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial U_j}{\partial y} \right|^2 + \left| \frac{\partial U_j}{\partial z} \right|^2 \not\equiv 0 \text{ в } V_j \quad (3.18.6)$$

и неравенство

$$U_j \not\equiv 0 \text{ на } \sigma_j \quad (3.18.7)$$

(при  $U_j \equiv 0$  на  $\sigma_j$  краевая задача, образуемая дифференциальным уравнением Лапласа (3.18.2) и краевыми условиями (3.18.3), вырождается в однородную задачу Неймана, общее решение которой имеет вид  $U_j = \text{const}$ ). Согласно (3.18.4) и (3.18.5) должно иметь место равенство

$$\lambda_j = \frac{\int_{V_j} \left( \left| \frac{\partial U_j}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial U_j}{\partial y} \right|^2 + \left| \frac{\partial U_j}{\partial z} \right|^2 \right) dv}{\int_{\sigma_j} |U_j|^2 d\sigma}. \quad (3.18.8)$$

В соответствии с неравенствами (3.18.6) и (3.18.7) интегралы, фигурирующие в формуле (3.18.8), вещественны и положительны. Таким образом, предположив, что краевая задача, образуемая дифференциальным уравнением (3.17.8) и краевыми условиями (3.17.9) и (3.17.12), имеет комплексное собственное значение, мы пришли к противоречию, тем самым доказав вещественность собственных значений данной краевой задачи. Попутно, установив равенство (3.18.8), мы доказали также положительность этих собственных значений.

Учитывая положительность собственных значений  $\lambda_j$  и положительность осевого кажущегося ускорения  $\omega_{0x} - g_x$ , можно придать дифференциальному уравнению (3.17.13) вид

$$\frac{d^2 \beta_j}{dt^2} + \omega_j^2 \beta_j = 0, \quad (3.18.9)$$

где

$$\omega_j = \sqrt{\lambda_j (\omega_{0x} - g_x)}. \quad (3.18.10)$$

Решая задачу о собственных колебаниях свободной поверхности жидкости методом Фурье, мы установили возможность возникновения собственных колебаний, в процессе которых функции  $\psi_{jx}$ ,  $\psi_{jy}$  и  $\psi_{jz}$  принимают значения, определяемые формулой (3.17.7). Рассмотрим в качестве примера собственные колебания свободной поверхности жидкости в плоскости тангажа. Полагая в соответствии с формулой (3.17.7)

$$\psi_{jy} = \Theta_j(\xi, r) \beta_j(t), \quad (3.18.11)$$

исследуем функцию  $f_j(r, \alpha, t)$ , определяющую отклонения точек свободной поверхности жидкости от плоскости  $\sigma_j$ . Согласно (3.16.22) и (3.18.11) в рассматриваемом случае будет иметь место равенство

$$f_j = \beta_j(t) F_j(r) \cos \alpha, \quad (3.18.12)$$

где

$$F_j(r) = \left( \frac{\partial \Theta_j}{\partial \xi} \right)_{\xi=0}. \quad (3.18.13)$$

В соответствии с равенством (3.18.12) в сечении свободной поверхности произвольной плоскостью, проходящей через ось бака, отклонения точек свободной поверхности от плоскости  $\sigma_j$ , определяемые функцией  $f_j$ , в любой момент времени  $t$  пропорциональны значениям, принимаемым функцией  $F_j(r)$ . Коэффициент пропорциональности зависит от положения секущей плоскости и от значений, принимаемых временным множителем  $\beta_j(t)$ . Согласно (3.18.12) наибольшие отклонения точек свободной поверхности от плоскости  $\sigma_j$  возникают в полуплоскостях  $\alpha=0$  и  $\alpha=\pi$ , в полуплоскостях  $\alpha=\pm \frac{\pi}{2}$  перемещения  $f_j$  отсутствуют, через эти полуплоскости проходит линия узлов. Временной множитель  $\beta_j(t)$  определяется дифференциальным уравнением (3.18.9), величина  $\omega_j$ , входящая в это уравнение, характеризует частоту рассматриваемых нами колебаний свободной поверхности. Таким образом, функция  $F_j(r)$  определяет форму собственных колебаний свободной поверхности, величина  $\omega_j$  определяет частоту колебаний.

Согласно (3.18.10) частота собственных колебаний пропорциональна корню квадратному из кажущегося осевого ускорения

$\omega_{0x} - g_x$ , иными словами пропорциональна корню квадратному из осевой перегрузки. Изменения, претерпеваемые осевой перегрузкой в процессе полета ракеты, влекут за собой изменения частоты собственных колебаний  $\omega_j$ . Пока  $j$ -й топливный бак не опорожняется, числовой множитель  $\lambda_j$  и функция  $F_j(r)$  не претерпевают изменений. В процессе опорожнения  $j$ -го бака меняется контур  $l_j^*$ , фигурирующий в краевом условии (3.17.9), и радиус  $R_j$  плоской свободной поверхности  $\sigma_j$ , входящий в краевое условие (3.17.12). В связи с этим возникает зависимость от времени  $t$  собственного значения  $\lambda_j$  и собственной функции  $\Theta_j$  краевой задачи, образуемой дифференциальным уравнением (3.17.8) и краевыми условиями (3.17.9) и (3.17.12). Согласно (3.18.13) зависимость от времени функции  $\Theta_j$  влечет за собой зависимость от времени функции  $F_j$ , определяющей форму собственных колебаний свободной поверхности жидкости.

В случае зависимости от времени  $t$  функции  $\Theta_j$  решение (3.17.7) дифференциального уравнения (3.17.1) с краевыми условиями (3.17.6) становится уже приближенным, так как при подстановке функции  $\Theta_j$  из (3.17.7) во второе из краевых условий (3.17.6) следует дифференцировать по времени не только функцию  $\beta_j$ , но и функцию  $\Theta_j$ . Однако проводившиеся в этом вопросе теоретические и экспериментальные исследования свидетельствуют о несущественности возникающих в данном случае погрешностей.

Формы собственных колебаний свободных поверхностей жидкостей обладают интегральным свойством, которое принято называть *свойством ортогональности*. Чтобы установить это свойство, рассмотрим две собственные функции  $\Theta_j$  и  $\Theta_j^*$ , соответствующие двум различным собственным значениям  $\lambda_j$  и  $\lambda_j^*$  краевой задачи, образуемой дифференциальным уравнением (3.17.8) и краевыми условиями (3.17.9) и (3.17.12). Наряду с функцией (3.18.1), удовлетворяющей дифференциальному уравнению (3.18.2) и краевым условиям (3.18.3), будем рассматривать функцию

$$U_j^* = \Theta_j^* \cos \alpha, \quad (3.18.14)$$

удовлетворяющую уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 U_j^*}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U_j^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_j^*}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U_j^*}{\partial \alpha^2} = 0 \quad (3.18.15)$$

и краевым условиям:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_j^*}{\partial n} &= 0 \text{ на } S_j, \\ \frac{\partial U_j^*}{\partial n} &= \lambda_j^* U_j^* \text{ на } \sigma_j. \end{aligned} \quad (3.18.16)$$

В соответствии с формулой Грина будет иметь место равенство

$$\int_{s_j+\sigma_j} U_j \frac{\partial U_j^*}{\partial n} d\sigma = \int_{s_j+\sigma_j} U_j^* \frac{\partial U_j}{\partial n} d\sigma. \quad (3.18.17)$$

Пользуясь краевыми условиями (3.18.3) и (3.18.16), можно привести равенство (3.18.17) к виду

$$\begin{aligned} \lambda_j^* \int_{\sigma_j} U_j U_j^* d\sigma &= \lambda_j \int_{\sigma_j} U_j U_j^* d\sigma, \\ \text{или} \quad (\lambda_j^* - \lambda_j) \int_{\sigma_j} U_j U_j^* d\sigma &= 0. \end{aligned} \quad (3.18.18)$$

Отсюда вытекает зависимость

$$\int_{\sigma_j} U_j U_j^* d\sigma = 0, \quad (3.18.19)$$

так как по условию  $\lambda_j^* \neq \lambda_j$ .

Согласно (3.16.3), (3.18.1) и (3.18.14) равенство (3.18.19) можно привести к виду

$$\int_0^{R_j} \int_0^{2\pi} (\Theta_j \Theta_j^*)_{\xi=0} r \cos^2 \alpha dr d\alpha = 0,$$

или

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \alpha d\alpha \int_0^{R_j} (\Theta_j \Theta_j^*)_{\xi=0} r dr = 0. \quad (3.18.20)$$

Соотношению (3.18.20) можно придать вид

$$\int_0^{R_j} (\Theta_j \Theta_j^*)_{\xi=0} r dr = 0, \quad (3.18.21)$$

так как

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \alpha d\alpha = \pi \neq 0.$$

В соответствии с краевым условием (3.17.12) должны иметь место равенства:

$$(\Theta_j)_{\xi=0} = \frac{1}{\lambda_j} \left( \frac{\partial \Theta_j}{\partial \xi} \right)_{\xi=0}, \quad (\Theta_j^*)_{\xi=0} = \frac{1}{\lambda_j^*} \left( \frac{\partial \Theta_j^*}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} \quad (3.18.22)$$

при  $0 < r < R_j$ .

Подставляя (3.18.22) в (3.18.21), получим зависимость

$$\int_0^{R_j} \left( \frac{\partial \theta_j}{\partial \xi} \frac{\partial \theta_j^*}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} r dr = 0,$$

или согласно (3.18.13)

$$\int_0^{R_j} F_j(r) F_j^*(r) r dr = 0, \quad (3.18.23)$$

где

$$F_j^*(r) = \left( \frac{\partial \theta_j^*}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} \quad (3.18.24)$$

— функция, определяющая форму собственных колебаний, соответствующую собственному значению  $\lambda_j^*$  краевой задачи, образуемой дифференциальным уравнением (3.17.8) и краевыми условиями (3.17.9) и (3.17.12).

Таким образом, любые две формы собственных колебаний свободной поверхности, соответствующие различным собственным значениям  $\lambda_j$  и  $\lambda_j^*$ , связаны между собой интегральной зависимостью (3.18.23), выражающей так называемое свойство ортогональности форм собственных колебаний.

Мы показали в этом параграфе, что формы и частоты собственных колебаний свободной поверхности жидкости, находящейся в  $j$ -м баке, можно определить, отыскав собственные значения и собственные функции краевой задачи, образуемой дифференциальным уравнением (3.17.8) и краевыми условиями (3.17.9) и (3.17.12). В качестве простейшего примера мы указываем в следующем параграфе решение этой краевой задачи для случая цилиндрической конфигурации топливного бака.

### § 19. СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ТОПЛИВНОМ БАКЕ

В рассматриваемом случае контур  $l_j^*$  складывается из двух прямолинейных отрезков  $\xi = -H$ ,  $0 < r < R$  и  $r = R$ ,  $-H < \xi < 0$  (см. рис. 3.5). Таким образом, краевые условия (3.17.9) и (3.17.12) в данном случае будут иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_j}{\partial \xi} &= 0 \quad \text{при} \quad \xi = -H, \quad 0 < r < R, \\ \frac{\partial \theta_j}{\partial r} &= 0 \quad \text{при} \quad r = R, \quad -H < \xi < 0, \\ \frac{\partial \theta_j}{\partial \xi} &= \lambda_j \theta_j \quad \text{при} \quad \xi = 0, \quad 0 < r < R \end{aligned} \quad (3.19.1)$$

(радиус  $R_j$  плоской свободной поверхности  $\sigma_j$  в рассматриваемом примере равен всегда радиусу цилиндрического бака  $R$ ). В § 13 мы показали, что дифференциальное уравнение (3.13.4) имеет частное решение (3.13.14), регулярное на оси  $\xi$  и содержащее три произвольные константы  $A$ ,  $B$  и  $\lambda$ . В соответствии с этим будем искать решение дифференциального уравнения (3.17.8), регулярное на оси  $\xi$  и удовлетворяющее краевым условиям (3.19.1) в виде

$$\Theta_j = (Ae^{\lambda\xi} + Be^{-\lambda\xi}) J_1(\lambda r). \quad (3.19.2)$$

Для того чтобы функция  $\Theta_j$ , определяемая формулой (3.19.2), удовлетворяла первому и третьему из краевых условий (3.19.1), константы  $A$  и  $B$  должны удовлетворять уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} Ae^{-\lambda H} - Be^{\lambda H} &= 0, \\ (\lambda - \lambda_j) A - (\lambda + \lambda_j) B &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.19.3)$$

Приравняв нулю определитель однородной системы уравнений (3.19.3), получим уравнение

$$(\lambda + \lambda_j) e^{-\lambda H} - (\lambda - \lambda_j) e^{\lambda H} = 0, \quad (3.19.4)$$

которому должен удовлетворять параметр  $\lambda_j$  для того, чтобы уравнения (3.19.3) имели нетривиальное решение. Определяя  $\lambda_j$  из уравнения (3.19.4), найдем

$$\lambda_j = \lambda \frac{e^{\lambda H} - e^{-\lambda H}}{e^{\lambda H} + e^{-\lambda H}} = \lambda \operatorname{th} \lambda H. \quad (3.19.5)$$

Подставляя (3.19.2) во второе из краевых условий (3.19.1), получим уравнение

$$J_1'(\lambda R) = 0. \quad (3.19.6)$$

Решая уравнение (3.19.6), получим для константы  $\lambda$  бесконечную последовательность значений

$$\lambda = \frac{\nu_k}{R}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3.19.7)$$

где  $\nu_1, \nu_2, \dots$  — последовательность решений трансцендентного уравнения

$$J_1'(\nu) = 0. \quad (3.19.8)$$

Подставляя (3.19.7) в (3.19.5), найдем бесконечную последовательность собственных значений рассматриваемой краевой задачи

$$\lambda_j = \frac{\nu_k}{R} \operatorname{th} \frac{\nu_k H}{R}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.19.9)$$

Уравнениям (3.19.3) мы удовлетворим, положив

$$A = \frac{C}{2} e^{\lambda H}, \quad B = \frac{C}{2} e^{-\lambda H}, \quad (3.19.10)$$

где  $C$  — произвольная константа. Подставляя (3.19.10) в (3.19.2), получим для функции  $\Theta_j$  выражение

$$\Theta_j = C \operatorname{ch} \lambda (H + \xi) J_1(\lambda r). \quad (3.19.11)$$



Согласно (3.19.7) и (3.19.11) собственные функции рассматриваемой краевой задачи должны иметь вид

$$\theta_j = C_k \operatorname{ch} \frac{\nu_k (H + \xi)}{R} J_1 \left( \frac{\nu_k r}{R} \right), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3.19.12)$$

где  $C_1, C_2, \dots$  — произвольные константы.

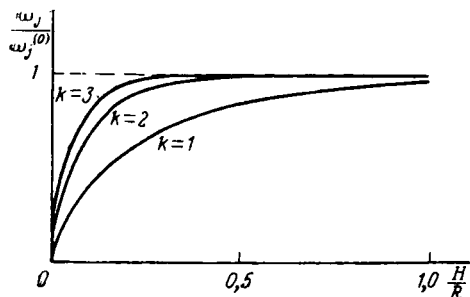


Рис. 3.10.

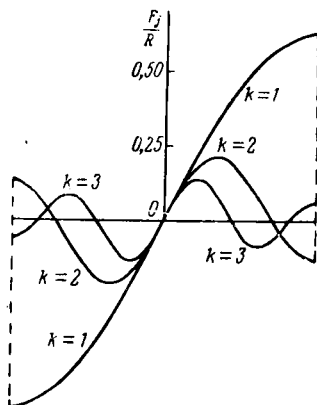


Рис. 3.11.

Подставляя (3.19.9) в (3.18.10) и (3.19.12) в (3.18.13), получим для частот собственных колебаний свободной поверхности значения

$$\omega_j = \sqrt{\frac{\nu_k}{R} \operatorname{th} \frac{\nu_k H}{R} (w_{0x} - g_x)}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3.19.13)$$

и для форм собственных колебаний выражения

$$F_j(r) = C_k \frac{\nu_k}{R} \operatorname{sh} \frac{\nu_k H}{R} J_1 \left( \frac{\nu_k r}{R} \right), \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.19.14)$$

Придавая постоянным  $C_1, C_2, \dots$  значения, определяемые соотношением

$$C_k = \frac{R}{\nu_k \operatorname{sh} \frac{\nu_k H}{R}}, \quad (3.19.15)$$

получим для форм собственных колебаний свободной поверхности выражения

$$F_j(r) = J_1 \left( \frac{\nu_k r}{R} \right), \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.19.16)$$

Согласно (3.19.13) при  $H/R \rightarrow \infty$  собственные частоты  $\omega_j$  стремятся к конечным пределам  $\omega_j^{(0)}$ , определяемым формулой

$$\omega_j^{(0)} = \sqrt{\frac{\nu_k}{R} (w_{0x} - g_x)}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.19.17)$$

На рис. 3.10 показана зависимость между отношениями  $\omega_j/\omega_j^{(0)}$  и  $H/R$  для первых трех частот собственных колебаний ( $k=1, 2, 3$ ).

В соответствии с формулой (3.19.16) в рассматриваемом случае формы собственных колебаний от глубины заполнения топливного бака не зависят. На рис. 3.11 показан вид сечения свободной поверхности жидкости плоскостью, проходящей через ось бака, для первых трех тонов колебаний ( $k=1, 2, 3$ ).

## § 20. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СВОБОДНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ЖИДКОСТЕЙ В ТОПЛИВНЫХ БАКАХ

Перейдем теперь к рассмотрению вынужденных колебаний свободных поверхностей жидкостей, т. е. тех колебаний, которые вызываются поперечными кажущимися ускорениями  $\omega_{0y}-g_y$ ,  $\omega_{0z}-g_z$  и угловыми ускорениями  $d\omega_x/dt$ ,  $d\omega_y/dt$ ,  $d\omega_z/dt$ , возникающими в процессе полета ракеты. Функции  $\psi_{jx}$ ,  $\psi_{jy}$  и  $\psi_{jz}$ , характеризующие эти колебания, определяются дифференциальным уравнением (3.17.1) с краевыми условиями (3.17.2), в которых  $G_j(r, t)$  — функция, возможный вид которой указан в формулах (3.17.3), (3.17.4) и (3.17.5). Краевую задачу, образуемую дифференциальным уравнением (3.17.1) и краевыми условиями (3.17.2), можно решить, построив для функции  $G_j(r, t)$  разложение в ряд по формам собственных колебаний жидкости  $F_j^k(r)$ . Пусть  $\omega_j^{(1)}$ ,  $\omega_j^{(2)}$ , ... — частоты собственных колебаний жидкости, находящейся в  $j$ -м топливном баке, и  $F_j^{(1)}(r)$ ,  $F_j^{(2)}(r)$ , ... — функции, определяющие соответствующие формы собственных колебаний (собственные частоты будем считать перенумерованными в порядке их возрастания). В соответствии со свойствами ортогональности форм собственных колебаний, которое было установлено выше в § 18, будут иметь место равенства

$$\int_0^{R_j} F_j^{(k)}(r) F_j^{(l)}(r) r dr = 0 \text{ при } l \neq k. \quad (3.20.1)$$

Коэффициенты разложения функции  $G_j(r, t)$  в ряд по формам собственных колебаний  $F_j(r)$  будут зависеть от времени  $t$ . Таким образом, искомое разложение будет иметь вид

$$G_j(r, t) = \sum_{l=1}^{\infty} c_j^{(l)}(t) F_j^{(l)}(r). \quad (3.20.2)$$

Для отыскания коэффициентов ряда (3.20.2) выполним в обеих частях равенства (3.20.2) умножение на  $F_j^{(k)}(r)r$  и интегрирование по  $r$  в пределах от нуля до  $R_j$ . Согласно (3.20.1) получим соотношение

$$\int_0^{R_j} G_j(r, t) F_j^{(k)}(r) r dr = c_j^{(k)}(t) \int_0^{R_j} [F_j^{(k)}(r)]^2 r dr. \quad (3.20.3)$$

В соответствии с равенством (3.20.3) разложению (3.20.2) можно придать вид

$$G_j(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\int_0^{R_j} G_j(r, t) F_j^{(k)}(r) r dr F_j^{(k)}(r)}{\int_0^{R_j} [F_j^{(k)}(r)]^2 r dr}. \quad (3.20.4)$$

Будем теперь искать решение дифференциального уравнения (3.17.1) с краевыми условиями (3.17.2) в виде ряда

$$\vartheta_j = \sum_{k=1}^{\infty} \vartheta_j^{(k)}(t) \Theta_j^{(k)}(\xi, r), \quad (3.20.5)$$

где  $\Theta_j^{(1)}(\xi, r)$ ,  $\Theta_j^{(2)}(\xi, r)$ , ... — собственные функции краевой задачи, образуемой дифференциальным уравнением (3.17.8) и краевыми условиями (3.17.9) и (3.17.12), т. е. функции, удовлетворяющие дифференциальным уравнениям

$$\frac{\partial^2 \Theta_j^{(k)}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Theta_j^{(k)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Theta_j^{(k)}}{\partial r} - \frac{\Theta_j^{(k)}}{r^2} = 0, \quad k=1, 2, \dots \quad (3.20.6)$$

и краевым условиям

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Theta_j^{(k)}}{\partial n} &= 0 \quad \text{на } l_j^* \\ -\frac{\partial \Theta_j^{(k)}}{\partial \xi} &= \lambda_j^{(k)} \Theta_j^{(k)} \quad \text{при } \xi=0, \quad 0 < r < R_j \end{aligned} \right\} \quad k=1, 2, \dots, \quad (3.20.7)$$

в которых  $\lambda_j^{(1)}$ ,  $\lambda_j^{(2)}$  — собственные значения данной краевой задачи. Согласно (3.20.6) и (3.20.7) ряд (3.20.5) будет удовлетворять дифференциальному уравнению (3.17.1) и первому из краевых условий (3.17.2), второе из краевых условий (3.20.7) будет выполняться, если будет иметь место тождественное равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{d^2 \vartheta_j^{(k)}}{dt^2} (\Theta_j^{(k)})_{\xi=0} + (\omega_{0x} - g_x) \vartheta_j^{(k)} \left( \frac{\partial \Theta_j^{(k)}}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} \right] + G_j(r, t) = 0 \quad \text{при } 0 < r < R_j. \quad (3.20.8)$$

В соответствии с формулами (3.18.13) и (3.20.7) соотношению (3.20.8) можно придать вид

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{\lambda_j^{(k)}} \frac{d^2 \vartheta_j^{(k)}}{dt^2} + (\omega_{0x} - g_x) \vartheta_j^{(k)} \right] F_j^{(k)}(r) + G_j(r, t) = 0$$

при  $0 < r < R_j$ , (3.20.9)

где  $F_j^{(1)}(r)$ ,  $F_j^{(2)}(r)$  — функции, определяющие формы собственных колебаний свободной поверхности жидкости, находящейся в  $j$ -м баке. Заменяя в (3.20.9) функцию  $G_j(r, t)$  ее разложением (3.20.4), получим равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\lambda_j^{(k)}} \frac{d^2 \beta_j^{(k)}}{dt^2} + (\omega_{0x} - g_x) \beta_j^{(k)} + \frac{\int_0^{R_j} G_j(r, t) F_j^{(k)}(r) r dr}{\int_0^{R_j} [F_j^{(k)}(r)]^2 r dr} \right\} F_j^{(k)}(r) =$$

$$= 0 \quad \text{при} \quad 0 < r < R_j, \quad (3.20.10)$$

которое будет иметь место, если функции  $\beta_j^{(k)}(t)$ ,  $k=1, 2, \dots$  будут удовлетворять дифференциальным уравнениям

$$\frac{d^2 \beta_j^{(k)}}{dt^2} + \lambda_j^{(k)} (\omega_{0x} - g_x) \beta_j^{(k)} + \lambda_j^{(k)} \frac{\int_0^{R_j} G_j(r, t) F_j^{(k)}(r) r dr}{\int_0^{R_j} [F_j^{(k)}(r)]^2 r dr} = 0, \quad k=1, 2, \dots$$

$$(3.20.11)$$

Согласно (3.18.10) уравнениям (3.20.11) можно придать вид

$$\frac{d^2 \beta_j^{(k)}}{dt^2} + \omega_j^{(k)2} \beta_j^{(k)} + \lambda_j^{(k)} \frac{\int_0^{R_j} G_j(r, t) F_j^{(k)}(r) r dr}{\int_0^{R_j} [F_j^{(k)}(r)]^2 r dr} = 0, \quad k=1, 2, \dots$$

$$(3.20.12)$$

Основываясь на разложении функции  $G_j(r, t)$  в бесконечный ряд (3.20.4), мы получили для решения дифференциального уравнения (3.17.1) с краевыми условиями (3.17.2) бесконечный ряд (3.20.5), в котором  $\beta_j^{(1)}(t)$ ,  $\beta_j^{(2)}(t)$ ,  $\dots$  — функции, определяемые дифференциальными уравнениями (3.20.12). Практически заданную функцию  $G_j(r, t)$  всегда можно с достаточной точностью представить конечной суммой ряда (3.20.4). В этом случае решение дифференциального уравнения (3.17.1) с краевыми условиями (3.17.2) будет определяться суммой соответствующего числа членов ряда (3.20.5).

Построим сперва функцию  $\psi_{jx}$ , фигурирующую в уравнениях движения в плоскости крена (3.16.24). В рассматриваемом случае функция  $G_j(r, t)$  определяется формулой (3.17.3). Согласно (3.17.3) в данном случае будет иметь место равенство

$$\int_0^{R_j} G_j(r, t) F_j^{(k)}(r) r dr = r_j \frac{d\omega_x}{dt} \int_0^{R_j} F_j^{(k)}(r) r^2 dr \quad (3.20.13)$$

и разложение (3.20.4) будет иметь вид

$$G_j(r, t) = r_j \frac{d\omega_j}{dt} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\int_0^{R_j} F_j^{(k)}(r) r^2 dr}{\int_0^{R_j} [F_j^{(k)}(r)]^2 r dr} F_j^{(k)}(r). \quad (3.20.14)$$

Как видно из рис. 3.11, для первого тона собственных колебаний свободной поверхности жидкости, находящейся в цилиндрическом топливном баке, сечение свободной поверхности плоскостью, проходящей через ось бака, мало отличается от прямолинейного, иными словами

$$F_j^{(1)}(r) \approx C_j r. \quad (3.20.15)$$

Согласно (3.12.6) и (3.18.12) функция  $f_j$ , определяющая отклонения свободной поверхности жидкости от плоскости  $\sigma_j$  приближенно может быть выражена в этом случае соотношением

$$f_j = C_j z_j(t) r \cos \alpha = C_j z_j(t) (y - y_j). \quad (3.20.16)$$

В соответствии с равенством (3.20.16) первый тон колебаний свободной поверхности жидкости в цилиндрическом топливном баке характерен тем, что в процессе колебаний свободная поверхность сохраняет конфигурацию, близкую к плоской. Многочисленные расчеты, а также экспериментальные исследования показали, что первый тон собственных колебаний свободной поверхности обладает этой особенностью независимо от конфигурации топливного бака. Пользуясь приближенной зависимостью (3.20.15), найдем

$$\int_0^{R_j} F_j^{(k)}(r) r^2 dr \approx \frac{1}{C_j} \int_0^{R_j} F_j^{(k)}(r) F_j^{(1)}(r) r dr. \quad (3.20.17)$$

Согласно (3.20.1)

$$\int_0^{R_j} F_j^{(k)}(r) F_j^{(1)}(r) r dr = 0 \quad \text{при } k \geq 2. \quad (3.20.18)$$

В соответствии с равенствами (3.20.17) и (3.20.18) в разложении, фигурирующем в правой части соотношения (3.20.14), практически можно ограничиться первым членом. В этом случае

согласно (3.20.5), (3.20.12) и (3.20.13) искомая функция  $\psi_{jx}$  будет выражаться произведением

$$\psi_{jx} = \beta_j^{(1)}(t) \Theta_j^{(1)}(\xi, r), \quad (3.20.19)$$

где  $\beta_j^{(1)}(t)$  — функция, определяемая дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2 \beta_j^{(1)}}{dt^2} + \omega_j^{(1)2} \beta_j^{(1)} + \lambda_j^{(1)} r_j \frac{d\omega_x}{dt} \frac{\int_0^{R_j} F_j^{(1)}(r) r^2 dr}{\int_0^{R_j} [F_j^{(1)}(r)]^2 r dr} = 0. \quad (3.20.20)$$

Перейдем теперь к построению функции  $\psi_{jy}$ , фигурирующей в уравнениях движения в плоскости тангажа (3.16.21). В данном случае функция  $G_j(r, t)$  определяется формулой (3.17.4). Согласно (3.17.4) в рассматриваемом случае будет иметь место равенство

$$\int_0^{R_j} G_j(r, t) F_j^{(k)}(r) r dr = \left( \omega_{0y} - g_y + x_j \frac{d\omega_z}{dt} \right) \int_0^{R_j} F_j^{(k)}(r) r^2 dr - \frac{d\omega_z}{dt} \int_0^{R_j} F_j^{(k)}(r) k_j r^2 dr \quad (3.20.21)$$

и разложение (3.20.4) будет иметь вид

$$G_j(r, t) = \left( \omega_{0y} - g_y + x_j \frac{d\omega_z}{dt} \right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\int_0^{R_j} F_j^{(k)}(r) r^2 dr}{\int_0^{R_j} [F_j^{(k)}(r)]^2 r dr} F_j^{(k)}(r) - \frac{d\omega_z}{dt} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\int_0^{R_j} F_j^{(k)}(r) k_j r^2 dr}{\int_0^{R_j} [F_j^{(k)}(r)]^2 r dr} F_j^{(k)}(r). \quad (3.20.22)$$

Мы показали выше, что в первом из рядов, фигурирующих в правой части соотношения (3.20.22), практически можно ограничиться первым членом этого ряда. Рассмотрим второе из разложений, входящих в формулу (3.20.22). Вернемся к примеру цилиндрического топливного бака. На рис. 3.12 показана для этого случая зависимость отношения  $F_j^{(1)}/k_j$  от переменной  $r$ , рассчитанная по формулам (3.15.21) и (3.19.16) при различных значениях отношения  $H/R$ . В рассматриваемом примере отношение

$F_j^{(1)}/k_j$  представляет собой функцию переменной  $r$ , близкую к линейной, иными словами

$$\frac{F_j^{(1)}(r)}{k_j(r)} \approx C_j^* r. \quad (3.20.23)$$

Расчеты, проводившиеся для баков весьма разнообразных конфигураций, свидетельствуют о том, что приближенное равенство (3.20.23) соблюдается независимо от формы топливного бака. Пользуясь приближенной зависимостью (3.20.23), найдем

$$\int_0^{R_j} F_j^{(k)}(r) k_j r^2 dr \approx \frac{1}{C_j^*} \int_0^{R_j} F_j^{(k)}(r) F_j^{(1)}(r) r dr. \quad (3.20.24)$$

В соответствии с равенствами (3.20.18) и (3.20.24) во втором из рядов, фигурирующих в правой части соотношения (3.20.22), так же, как и в первом из этих рядов, практически можно ограничиться первым членом разложения. В этом случае согласно (3.20.5), (3.20.12) и (3.20.21) искомая функция  $\psi_{jy}$  будет выражаться произведением

$$\psi_{jy} = \beta_j^{(1)}(t) \Theta_j^{(1)}(\xi, r), \quad (3.20.25)$$

где  $\beta_j^{(1)}(t)$  — функция, определяемая дифференциальным уравнением

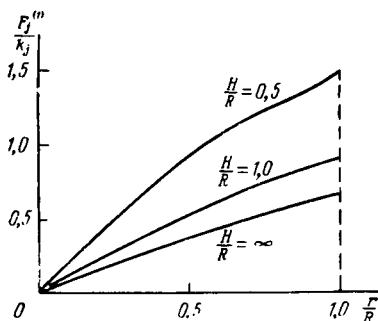


Рис. 3.12.

$$\frac{d^2 \beta_j^{(1)}}{dt^2} + \omega_j^{(1)2} \beta_j^{(1)} + \lambda_j^{(1)} \left[ \omega_{0y} - g_y + (x_j - \delta_j) \frac{d\omega_z}{dt} \right] \frac{\int_0^{R_j} F_j^{(1)}(r) r^2 dr}{\int_0^{R_j} [F_j^{(1)}(r)]^2 r dr} = 0, \quad (3.20.26)$$

в котором

$$\delta_j = \frac{\int_0^{R_j} F_j^{(1)}(r) k_j r^2 dr}{\int_0^{R_j} F_j^{(1)}(r) r^2 dr}. \quad (3.20.27)$$

Введя различные обозначения для временных функций, фигурирующих в формулах для  $\psi_{jx}$  и  $\psi_{jy}$ , и опустив верхние индексы

в соотношениях (3.20.19), (3.20.20), (3.20.25), (3.20.26), придадим для удобства последующих выкладок формулам, определяющим функции  $\psi_{jx}$  и  $\psi_{jy}$ , вид

$$\left. \begin{aligned} \psi_{jy} &= \beta_j(t) \Theta_j(\xi, r), \\ \psi_{jx} &= \alpha_j(t) \Theta_j(\xi, r), \end{aligned} \right\} \quad (3.20.28)$$

где  $\beta_j(t)$  и  $\alpha_j(t)$  — функции, определяемые дифференциальными уравнениями

$$\frac{d^2 \beta_j}{dt^2} + \omega_j^2 \beta_j + \lambda_j \left[ \omega_{0y} - g_y + (x_j - \delta_j) \frac{d\omega_z}{dt} \right] \frac{\int_0^{R_j} F_j r^2 dr}{\int_0^{R_j} F_j^2 r dr} = 0, \quad (3.20.29)$$

$$\frac{d^2 \alpha_j}{dt^2} + \omega_j^2 \alpha_j + \lambda_j r_j \frac{d\omega_x}{dt} \frac{\int_0^{R_j} F_j r^2 dr}{\int_0^{R_j} F_j^2 r^2 dr} = 0,$$

$\delta_j$  — величина, определяемая соотношением

$$\delta_j = \frac{\int_0^{R_j} F_j k_j r^2 dr}{\int_0^{R_j} F_j r^2 dr}. \quad (3.20.30)$$

Пользуясь в дальнейшем формулами (3.20.28), (3.20.29) и (3.20.30), будем иметь в виду, что в этих формулах  $\lambda_j$  и  $\Theta_j$  — первое собственное значение и первая собственная функция краевой задачи, образуемой дифференциальным уравнением (3.17.8) и краевыми условиями (3.17.9) и (3.17.12), и соответственно  $\omega_j$  и  $F_j$  — первая частота и первая форма собственных колебаний свободной поверхности жидкости в  $j$ -м баке.

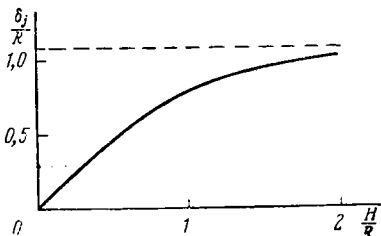


Рис. 3.13.

Пока топливный бак с номером  $j$  не опорожняется, величина  $\delta_j$ , определяемая формулой (3.20.30), остается неизменной; в процессе опорожнения  $j$ -го бака возникает зависимость величины  $\delta_j$  от времени  $t$ . На рис. 3.13 показана зависимость между отношениями  $\delta_j/R$  и  $H/R$ , рассчитанная для цилиндрического топливного бака по формулам (3.15.21), (3.19.16) и (3.20.30).



## § 21. РАСЧЕТ ФОРМ И ЧАСТОТ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ СВОБОДНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ МЕТОДОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

В предыдущем параграфе мы свели отыскание функций  $\psi_{jy}$ ,  $\psi_{jx}$ , фигурирующих в уравнениях движения ракеты в плоскостях тангажа и крена, к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений (3.20.29). Построение этих дифференциальных уравнений требует расчета первой формы и первой частоты собственных колебаний свободной поверхности жидкости, находящейся в  $j$ -м топливном баке, иными словами расчета первого собственного значения и первой собственной функции краевой задачи, образуемой дифференциальным уравнением (3.17.8) и краевыми условиями (3.17.9) и (3.17.12) [формы и частоты собственных колебаний определяются соотношениями (3.18.10) и (3.18.13)]. В этом параграфе мы приводим процесс последовательных приближений, позволяющий относительно просто рассчитывать первое собственное значение и первую собственную функцию этой краевой задачи для топливного бака произвольной осесимметричной конфигурации.

Зная собственную функцию краевой задачи  $\Theta_j$ , можно определить соответствующее собственное значение  $\lambda_j$ , воспользовавшись краевым условием (3.17.12). Согласно (3.17.12) должно иметь место равенство

$$\int_0^{R_j} \left( \frac{\partial \Theta_j}{\partial \xi} \Theta_j \right)_{\xi=0} r dr = \lambda_j \int_0^{R_j} (\Theta_j)_{\xi=0}^2 r dr, \quad (3.21.1)$$

в соответствии с которым собственное значение  $\lambda_j$  может быть найдено по формуле

$$\lambda_j = \frac{\int_0^{R_j} \left( \frac{\partial \Theta_j}{\partial \xi} \Theta_j \right)_{\xi=0} r dr}{\int_0^{R_j} (\Theta_j)_{\xi=0}^2 r dr}. \quad (3.21.2)$$

В соответствии с дифференциальным уравнением (3.17.8) и краевыми условиями (3.17.9) и (3.17.12) будем определять  $k+1$ -е приближение для собственной функции  $\Theta_{j, k+1}$  по  $k$ -му приближению  $\Theta_{jk}$ , решая дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 \Theta_{j, k+1}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Theta_{j, k+1}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Theta_{j, k+1}}{\partial r} - \frac{\Theta_{j, k+1}}{r^2} = 0 \quad (3.21.3)$$

с краевыми условиями:

$$\frac{\partial \theta_{j, k+1}}{\partial n} = 0 \quad \text{на} \quad l_j^*,$$

$$\frac{\partial \theta_{j, k+1}}{\partial \xi} = \lambda_{jk} \theta_{jk} \quad \text{при} \quad \xi=0, \quad 0 < r < R_j. \quad (3.21.4)$$

$k$ -ое приближение  $\lambda_{jk}$  для искомого собственного значения  $\lambda_j$ , фигурирующее в краевых условиях (3.21.4), согласно (3.21.2) будем вычислять по формуле

$$\lambda_{jk} = \frac{\int_0^{R_j} \left( \frac{\partial \theta_{jk}}{\partial \xi} \theta_{jk} \right)_{\xi=0} r dr}{\int_0^R (\theta_{jk})_{\xi=0}^2 r dr}. \quad (3.21.5)$$

Для построения исходного приближения  $\theta_{j1}$  можно воспользоваться приближенной зависимостью (3.20.15). Согласно (3.18.13) и (3.20.15) для первой собственной функции  $\theta_j$  должно иметь место приближенное соотношение

$$\left( \frac{\partial \theta_j}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} \approx C_j r. \quad (3.21.6)$$

Так как собственные функции определяются с точностью до произвольных постоянных множителей, для первого приближения  $\theta_{j1}$  можно установить зависимость

$$\left( \frac{\partial \theta_{j1}}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} = r. \quad (3.21.7)$$

Согласно (3.17.8), (3.17.9) и (3.21.7) первое приближение  $\theta_{j1}$  можно отыскать из дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 \theta_{j1}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \theta_{j1}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta_{j1}}{\partial r} - \frac{\theta_{j1}}{r^2} = 0 \quad (3.21.8)$$

с краевыми условиями:

$$\frac{\partial \theta_{j1}}{\partial n} = 0 \quad \text{на} \quad l_j^*,$$

$$\frac{\partial \theta_{j1}}{\partial \xi} = r \quad \text{при} \quad \xi=0, \quad 0 < r < R_j. \quad (3.21.9)$$

В соответствии с формулами (3.18.10) и (3.18.13)  $k$ -е приближение  $\omega_{jk}$  для частоты собственных колебаний  $\omega_j$  будет определяться соотношением

$$\omega_{jk} = \sqrt{\lambda_{jk} (\omega_{0x} - g_x)} \quad (3.21.10)$$

и  $k$ -е приближение  $F_{jk}(r)$  для функции  $F_j(r)$ , определяющей форму собственных колебаний свободной поверхности, — соотношением

$$F_{jk}(r) = \left( \frac{\partial^k \Theta_{jk}}{\partial \xi^k} \right)_{\xi=0}. \quad (3.21.11)$$

Согласно (3.21.4) и (3.21.9) формулу (3.21.11) можно заменить формулами

$$F_{j1}(r) = r, \quad F_{jk}(r) = \lambda_{j,k-1} (\Theta_{j,k-1})_{\xi=0} \quad \text{при } k \geq 2. \quad (3.21.12)$$

Расчет каждого из последовательных приближений  $\Theta_{jk}$  сводится к решению дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 \Theta_j}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Theta_j}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Theta_j}{\partial r} - \frac{\Theta_j}{r^2} = 0 \quad (3.21.13)$$

с краевыми условиями:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Theta_j}{\partial n} &= 0 \quad \text{на } l_j^*, \\ \frac{\partial \Theta_j}{\partial \xi} &= F_j(r) \quad \text{при } \xi = 0, \quad 0 < r < R_j, \end{aligned} \quad (3.21.14)$$

где  $F_j(r)$  — заданная функция. Такого рода краевая задача подробно рассмотрена в [22]. В этой книге показано, что данная краевая задача всегда разрешима и имеет единственное решение, указан один из возможных расчетных методов для решения этой краевой задачи.

Чтобы проиллюстрировать изложенный в этом параграфе метод последовательных приближений, рассмотрим два примера.

### 21.1. Цилиндрический топливный бак

В рассматриваемом случае контур  $l_j^*$  складывается из двух прямолинейных отрезков  $\xi = -H$ ,  $0 < r < R$  и  $r = R$ ,  $-H < \xi < 0$  и в соответствии с этим краевые условия (3.21.9) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Theta_{j1}}{\partial \xi} &= 0 \quad \text{при } \xi = -H, \quad 0 < r < R, \\ \frac{\partial \Theta_{j1}}{\partial r} &= 0 \quad \text{при } r = R, \quad -H < \xi < 0, \\ \frac{\partial \Theta_{j1}}{\partial \xi} &= r \quad \text{при } \xi = 0, \quad 0 < r < R. \end{aligned} \quad (3.21.15)$$

В § 13 мы показали, что решение дифференциального уравнения (3.13.4), удовлетворяющее второму из краевых условий (3.13.5), может быть представлено в виде ряда (3.13.18). Таким образом, положив

$$\Theta_{j1} = \sum_{k=1}^{\infty} \left( A_k e^{\frac{\nu_k \xi}{R}} + B_k e^{-\frac{\nu_k \xi}{R}} \right) J_1 \left( \frac{\nu_k r}{R} \right), \quad (3.21.16)$$

мы удовлетворим дифференциальному уравнению (3.21.8) и второму из краевых условий (3.21.15). Для того чтобы ряд (3.21.16) удовлетворял первому и третьему из краевых условий (3.21.15), должны иметь место равенства:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \nu_k \left( A_k e^{-\frac{\nu_k H}{R}} - B_k e^{\frac{\nu_k H}{R}} \right) J_1 \left( \frac{\nu_k r}{R} \right) = 0, \quad 0 < r < R \quad (3.21.17)$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\nu_k}{R} (A_k - B_k) J_1 \left( \frac{\nu_k r}{R} \right) = r, \quad 0 < r < R. \quad (3.21.18)$$

Умножив обе части соотношения (3.21.18) на  $r J_1 \left( \frac{\nu_l r}{R} \right)$  и проинтегрировав их по  $r$  в пределах от 0 до  $R$ , получим согласно (3.13.21) уравнение

$$A_l - B_l = \frac{2R^2}{\nu_l (\nu_l^2 - 1) J_1(\nu_l)}. \quad (3.21.19)$$

Зависимость (3.21.17) будет иметь место, если при любом целом положительном  $l$  коэффициенты  $A_l$  и  $B_l$  будут удовлетворять уравнению

$$A_l e^{-\frac{\nu_l H}{R}} - B_l e^{\frac{\nu_l H}{R}} = 0. \quad (3.21.20)$$

Решая систему уравнений (3.21.19) и (3.21.20), получим для коэффициентов  $A_l$  и  $B_l$  выражения:

$$\begin{aligned} A_l &= \frac{2R^2}{\nu_l (\nu_l^2 - 1) J_1(\nu_l) \left( 1 - e^{-\frac{2\nu_l H}{R}} \right)}, \\ B_l &= \frac{2R^2 e^{-\frac{2\nu_l H}{R}}}{\nu_l (\nu_l^2 - 1) J_1(\nu_l) \left( 1 - e^{-\frac{2\nu_l H}{R}} \right)}. \end{aligned} \quad (3.21.21)$$

Согласно (3.21.16) и (3.21.21) в рассматриваемом случае функция  $\Theta_{j1}$  может быть представлена рядом

$$\Theta_{j1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2R^2 \left[ e^{\frac{\nu_k (H+\xi)}{R}} + e^{-\frac{\nu_k (H+\xi)}{R}} \right] J_1 \left( \frac{\nu_k r}{R} \right)}{\nu_k (\nu_k^2 - 1) J_1(\nu_k) \left( e^{\frac{\nu_k H}{R}} - e^{-\frac{\nu_k H}{R}} \right)},$$

или

$$\theta_{j1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2R^2 \operatorname{ch} \frac{\nu_k(H+\xi)}{R} J_1\left(\frac{\nu_k r}{R}\right)}{\nu_k(\nu_k^2 - 1) J_1(\nu_k) \operatorname{sh} \frac{\nu_k H}{R}}. \quad (3.21.22)$$

Пользуясь разложением (3.21.22) и третьим из краевых условий (3.21.15), получим зависимость

$$\int_0^R \left( \frac{\partial \theta_{j1}}{\partial \xi} \theta_{j1} \right)_{\xi=0} r dr = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2R^2 \operatorname{cth} \frac{\nu_k H}{R}}{\nu_k(\nu_k^2 - 1) J_1(\nu_k)} \int_0^R J_1\left(\frac{\nu_k r}{R}\right) r^2 dr,$$

или согласно (3.13.21)

$$\int_0^R \left( \frac{\partial \theta_{j1}}{\partial \xi} \theta_{j1} \right)_{\xi=0} r dr = 2R^5 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{cth} \frac{\nu_k H}{R}}{\nu_k^3(\nu_k^2 - 1)}. \quad (3.21.23)$$

В соответствии с формулами (3.13.21) и (3.21.22) в данном случае

$$\begin{aligned} \int_0^R (\theta_{j1})_{\xi=0}^2 r dr &= 4R^4 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\operatorname{cth} \frac{\nu_k H}{R} \operatorname{cth} \frac{\nu_l H}{R}}{\nu_k(\nu_k^2 - 1) \nu_l(\nu_l^2 - 1) J_1(\nu_k) J_1(\nu_l)} \times \\ &\times \int_0^R J_1\left(\frac{\nu_k r}{R}\right) J_1\left(\frac{\nu_l r}{R}\right) r dr = 4R^4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{cth}^2 \frac{\nu_k H}{R}}{\nu_k^2(\nu_k^2 - 1)^2 J_1^2(\nu_k)} \times \\ &\times \int_0^R J_1^2\left(\frac{\nu_k r}{R}\right) r dr = 2R^6 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{cth}^2 \frac{\nu_k H}{R}}{\nu_k^4(\nu_k^2 - 1)}. \end{aligned} \quad (3.21.24)$$

Согласно (3.21.5), (3.21.23) и (3.21.24) в рассматриваемом случае первое приближение  $\lambda_{j1}$  для искомого собственного значения  $\lambda_j$  может быть найдено по формуле

$$\lambda_{j1} = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{cth} \frac{\nu_k H}{R}}{\nu_k^3(\nu_k^2 - 1)}}{R \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{cth}^2 \frac{\nu_k H}{R}}{\nu_k^4(\nu_k^2 - 1)}}. \quad (3.21.25)$$

В соответствии с формулами (3.21.12) и (3.21.22) функция  $F_{j2}(r)$ , приближенно определяющая искомую форму собственных колебаний, в данном случае будет определяться рядом

$$F_{j2}(r) = 2\lambda_{j1} R^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{cth} \frac{\nu_k H}{R}}{\nu_k (\nu_k^2 - 1)} \frac{J_1 \left( \frac{\nu_k r}{R} \right)}{J_1(\nu_k)}, \quad (3.21.26)$$

приближение  $\omega_{j1}$  для искомой частоты собственных колебаний согласно (3.21.10) будет определяться соотношением

$$\omega_{j1} = \sqrt{\lambda_{j1} (\omega_{0x} - g_x)}. \quad (3.21.27)$$

В § 19 мы получили точное решение задачи о собственных колебаниях свободной поверхности жидкости в цилиндрическом топливном баке, в соответствии с этим точным решением функция  $F_j(r)$ , характеризующая форму собственных колебаний, и частота  $\omega_j$  для первого тона собственных колебаний свободной поверхности определяются формулами [см. (3.19.13) и (3.19.14)]:

$$F_j(r) = C J_1 \left( \frac{\nu_1 r}{R} \right), \quad \omega_j = \sqrt{\frac{\nu_1}{R} \operatorname{th} \frac{\nu_1 H}{R} (\omega_{0x} - g_x)}, \quad (3.21.28)$$

где  $C$  — произвольный множитель, не зависящий от переменной  $r$ .

В приведенной ниже таблице для нескольких значений отношения  $H/R$  указаны рассчитанные по формулам (3.21.25), (3.21.26) и (3.21.27) частные значения функции  $F_{j2}(r)$ , приближенно определяющей форму собственных колебаний, и приближенные значения  $\omega_{j1}$  для частоты собственных колебаний свободной поверхности жидкости  $\omega_j$ . Для сравнения в той же таблице указаны рассчитанные по формулам (3.21.28) частные значения функции  $F_j(r)$ , точно определяющей форму собственных колебаний, и точные значения частоты собственных колебаний  $\omega_j$  (множитель  $C$  определяется таким образом, чтобы совпадали средние значения функций  $F_j(r)$  и  $F_{j2}(r)$  в интервале  $0 < r < R$ ).

| $r/R$ | $H/R=0,2$             |                    | $H/R=0,5$             |                    | $H/R=1,0$             |                    | $H/R=\infty$          |                    |
|-------|-----------------------|--------------------|-----------------------|--------------------|-----------------------|--------------------|-----------------------|--------------------|
|       | $\frac{F_{j2}(r)}{R}$ | $\frac{F_j(r)}{R}$ | $\frac{F_{j2}(r)}{R}$ | $\frac{F_j(r)}{R}$ | $\frac{F_{j2}(r)}{R}$ | $\frac{F_j(r)}{R}$ | $\frac{F_{j2}(r)}{R}$ | $\frac{F_j(r)}{R}$ |
| 0     | 0                     | 0                  | 0                     | 0                  | 0                     | 0                  | 0                     | 0                  |
| 0,1   | 0,127                 | 0,132              | 0,123                 | 0,130              | 0,121                 | 0,129              | 0,120                 | 0,129              |
| 0,2   | 0,250                 | 0,258              | 0,242                 | 0,255              | 0,237                 | 0,254              | 0,236                 | 0,254              |
| 0,3   | 0,369                 | 0,379              | 0,357                 | 0,375              | 0,350                 | 0,374              | 0,349                 | 0,374              |
| 0,4   | 0,480                 | 0,490              | 0,466                 | 0,484              | 0,460                 | 0,483              | 0,458                 | 0,483              |
| 0,5   | 0,582                 | 0,589              | 0,569                 | 0,583              | 0,563                 | 0,581              | 0,561                 | 0,581              |
| 0,6   | 0,670                 | 0,674              | 0,660                 | 0,666              | 0,655                 | 0,664              | 0,654                 | 0,664              |
| 0,7   | 0,742                 | 0,741              | 0,736                 | 0,734              | 0,735                 | 0,731              | 0,735                 | 0,730              |
| 0,8   | 0,801                 | 0,790              | 0,800                 | 0,783              | 0,803                 | 0,780              | 0,804                 | 0,779              |
| 0,9   | 0,839                 | 0,819              | 0,846                 | 0,812              | 0,852                 | 0,809              | 0,853                 | 0,808              |
| 1,0   | 0,855                 | 0,831              | 0,867                 | 0,823              | 0,878                 | 0,820              | 0,880                 | 0,819              |

| $H/R=0,2$                                        |                                               | $H/R=0,5$                                        |                                               |
|--------------------------------------------------|-----------------------------------------------|--------------------------------------------------|-----------------------------------------------|
| $\frac{\omega_{j1} \sqrt{R}}{\sqrt{w_{0x}-g_x}}$ | $\frac{\omega_j \sqrt{R}}{\sqrt{w_{0x}-g_x}}$ | $\frac{\omega_{j1} \sqrt{R}}{\sqrt{w_{0x}-g_x}}$ | $\frac{\omega_j \sqrt{R}}{\sqrt{w_{0x}-g_x}}$ |
| 0,807                                            | 0,806                                         | 1,157                                            | 1,156                                         |

**Продолжение**

| $H/R=1,0$                                        |                                               | $H/R=\infty$                                     |                                               |
|--------------------------------------------------|-----------------------------------------------|--------------------------------------------------|-----------------------------------------------|
| $\frac{\omega_{j1} \sqrt{R}}{\sqrt{w_{0x}-g_x}}$ | $\frac{\omega_j \sqrt{R}}{\sqrt{w_{0x}-g_x}}$ | $\frac{\omega_{j1} \sqrt{R}}{\sqrt{w_{0x}-g_x}}$ | $\frac{\omega_j \sqrt{R}}{\sqrt{w_{0x}-g_x}}$ |
| 1,323                                            | 1,321                                         | 1,359                                            | 1,357                                         |

Из приведенной таблицы видно, что для достижения точности, приемлемой при инженерных расчетах, в рассматриваемом случае достаточно вычислить первые приближения для собственного значения  $\lambda_j$  и собственной функции  $\Theta_j$ .

## 21.2. Сферический топливный бак, наполовину заполненный жидкостью

При рассмотрении этого примера перейдем от прямоугольных координат  $\xi, \eta$  к полярным координатам  $\varrho, \beta$  в соответствии с формулами перехода (3.13.26). В § 13 мы показали, что дифференциальное уравнение (3.12.13) в этом случае принимает вид (3.13.28), для дифференцирования функции по нормали  $n$  к контуру  $l_j$  мы получили формулы (3.13.30). Таким образом, переходя к полярным координатам в формулах (3.21.8) и (3.21.9), мы получим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 \Theta_{j1}}{\partial \varrho^2} + \frac{2}{\varrho} \frac{\partial \Theta_{j1}}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 \Theta_{j1}}{\partial \beta^2} + \frac{\operatorname{ctg} \beta}{\varrho^2} \frac{\partial \Theta_{j1}}{\partial \beta} - \frac{\Theta_{j1}}{\varrho^2 \sin^2 \beta} = 0 \quad (3.21.29)$$

с краевыми условиями

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Theta_{j1}}{\partial \varrho} &= 0 \quad \text{при} \quad \varrho = R, \quad 0 < \beta < \frac{\pi}{2}, \\ \frac{\partial \Theta_{j1}}{\partial \beta} &= \varrho^2 \quad \text{при} \quad \beta = \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \varrho < R. \end{aligned} \quad (3.21.30)$$

В § 13 мы получили для дифференциального уравнения (3.13.28) с краевыми условиями (3.13.31) решение, определяемое формулами (3.13.32) и

(3.13.54). В соответствии с этими формулами решение дифференциального уравнения (3.21.29) с краевыми условиями (3.21.30) должно иметь вид

$$\begin{aligned} \theta_{j1} = & -\frac{q^2}{2} \sin 2\beta + R^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (4k-1)}{(k+1)(2k-3)(2k-1)^2} \times \\ & \times \frac{1.3 \dots (2k-1)}{2.4 \dots 2k} \times \left(\frac{q}{R}\right)^{2k-1} P_{2k-1}^{(1)}(\cos \xi). \end{aligned} \quad (3.21.31)$$

Согласно (3.21.31) будет иметь место равенство

$$\begin{aligned} (\theta_{j1})_{\xi=0} = & R^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (4k-1)}{(k+1)(2k-3)(2k-1)^2} \times \\ & \times \frac{1.3 \dots (2k-1)}{2.4 \dots 2k} \left(\frac{r}{R}\right)^{2k-1} P_{2k-1}^{(1)}(0) \end{aligned} \quad (3.21.32)$$

(в соответствии с формулами перехода (3.13.26)  $q=r$ ,  $\beta=\frac{\pi}{2}$  при  $\xi=0$ ).

Пользуясь формулой

$$P_{2k-1}^{(1)}(0) = (-1)^{k-1} 2k \frac{1.3 \dots (2k-1)}{2.4 \dots 2k} \quad (3.21.33)$$

(см. [27]), можно преобразовать равенство (3.21.32) к виду

$$\begin{aligned} (\theta_{j1})_{\xi=0} = & -R^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k(4k-1)}{(k+1)(2k-3)(2k-1)^2} \times \\ & \times \left[ \frac{1.3 \dots (2k-1)}{2.4 \dots 2k} \right]^2 \left(\frac{r}{R}\right)^{2k-1}. \end{aligned} \quad (3.21.34)$$

Пользуясь разложением (3.21.34) и вторым из краевых условий (3.21.9), получим зависимости:

$$\begin{aligned} \int_0^R \left( \frac{\partial \theta_{j1}}{\partial \xi} \theta_{j1} \right)_{\xi=0} r dr = & -R^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k(4k-1)}{(k+1)(2k-3)(2k-1)^2} \times \\ & \times \left[ \frac{1.3 \dots (2k-1)}{2.4 \dots 2k} \right]^2 \int_0^R \left(\frac{r}{R}\right)^{2k-1} r^2 dr = \\ = & -R^5 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(4k-1)}{(k+1)^2(2k-3)(2k-1)^2} \left[ \frac{1.3 \dots (2k-1)}{2.4 \dots 2k} \right]^2. \end{aligned} \quad (3.21.35)$$



$$\left. \begin{aligned}
& \int_0^R (\Theta_{j1})_{\xi=0}^2 r dr = \\
& = R^4 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{4k(4k-1)l(4l-1)}{(k+1)(2k-3)(2k-1)^2(l+1)(2l-3)(2l-1)^2} \times \\
& \times \left[ \frac{1.3 \dots (2k-1)}{2.4 \dots 2k} \right]^2 \left[ \frac{1.3 \dots (2l-1)}{2.4 \dots 2l} \right]^2 \int_0^R \left( \frac{r}{R} \right)^{2k+2l-2} r dr = \\
& = R^6 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{2k(4k-1)l(4l-1)}{(k+1)(2k-3)(2k-1)^2(l+1)(2l-3)(2l-1)^2(k+l)} \times \\
& \times \left[ \frac{1.3 \dots (2k-1)}{2.4 \dots 2k} \right]^2 \left[ \frac{1.3 \dots (2l-1)}{2.4 \dots 2l} \right]^2.
\end{aligned} \right\} (3.21.35)$$

Осуществляя суммирование числовых рядов, фигурирующих в формулах (3.21.35), найдем

$$\int_0^R \left( \frac{\partial \Theta_{j1}}{\partial \xi} \Theta_{j1} \right)_{\xi=0} r dr = 0,1592R^5, \quad \int_0^R (\Theta_{j1})_{\xi=0}^2 r dr = 0,1007R^6. \quad (3.21.36)$$

Согласно (3.21.5) и (3.21.36) в рассматриваемом случае

$$\lambda_{j1} = \frac{1,581}{R}. \quad (3.21.37)$$

В соответствии с формулами (3.21.12), (3.21.34) и (3.21.37) функция  $F_{j2}(r)$ , приближенно определяющая искомую форму собственных колебаний, в данном случае будет определяться рядом

$$\begin{aligned}
F_{j2}(r) = & -1,581R \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k(4k-1)}{(k+1)(2k-3)(2k-1)^2} \times \\
& \times \left[ \frac{1.3 \dots (2k-1)}{2.4 \dots 2k} \right]^2 \left( \frac{r}{R} \right)^{2k-1},
\end{aligned} \quad (3.21.38)$$

приближение  $\omega_{j1}$  для искомой частоты собственных колебаний  $\omega_j$  согласно (3.21.10) будет определяться соотношением

$$\omega_{j1} = 1,257 \sqrt{\frac{w_{0x} - g_x}{R}}. \quad (3.21.39)$$

Расчет дальнейших последовательных приближений в рассматриваемом примере приводит к функции  $F_j(r)$ , график которой показан сплошной линией на рис. 3. 14, и к формуле

$$\omega_j = 1,253 \sqrt{\frac{w_{0x} - g_x}{R}} \quad (3.21.40)$$

для частоты собственных колебаний свободной поверхности жидкости. Пунктирной линией на рис. 3.14 показан график функции  $F_{j2}(r)$ , построенный в соответствии с формулой (3.21.38). Как видно, и в данном примере для до-

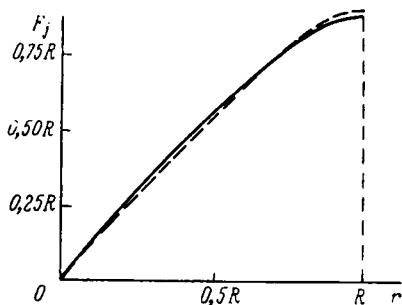


Рис. 3.14.

стижения точности, приемлемой при инженерных расчетах, достаточно определить первые приближения для собственного значения  $\lambda_j$  и собственной функции  $\Theta_j$ .

## § 22. УЧЕТ РАССЕЯНИЯ ЭНЕРГИИ В УРАВНЕНИИ КОЛЕБАНИЙ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ

Исследуя в § 18 собственные колебания свободной поверхности жидкости, мы получили для функции времени  $\beta_j(t)$  дифференциальное уравнение (3.18.9). Если осевая перегрузка сохраняет постоянное значение и уровень жидкости в топливном баке не меняется, частота собственных колебаний  $\omega_j$  согласно (3.18.10) остается постоянной и общее решение дифференциального уравнения (3.18.9) в этом случае может быть представлено в виде

$$\beta_j = C \cos(\omega_j t + \varphi), \quad (3.22.1)$$

где  $C$  и  $\varphi$  — произвольные постоянные.

Согласно (3.22.1) в рассматриваемом случае свободная поверхность жидкости будет совершать гармонические колебания, что находится в соответствии с исходным предположением об идеальности жидкости, на основе которого проводились выше все рассуждения. В реальных условиях, из-за внутреннего трения и трения жидкости о смачиваемую поверхность бака, собственные колебания свободной поверхности жидкости всегда будут затухающими. Многочисленные экспериментальные исследования показывают, что рассеяние энергии колебаний можно учесть, заменяя дифференциальное уравнение (3.18.9) дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2 \beta_j}{dt^2} + \varepsilon_j \frac{d \beta_j}{dt} + \omega_j^2 \beta_j = 0, \quad (3.22.2)$$

где  $\varepsilon_j$  — положительный коэффициент, определяющий быстроту затухания собственных колебаний свободной поверхности жидкости.

Определение коэффициента демпфирования  $\epsilon_j$  расчетным путем является весьма сложной задачей, и, как правило, для его нахождения используют экспериментальные методы. Вопрос об экспериментальном определении коэффициента демпфирования подробно рассмотрен в книге [14].

Коэффициент демпфирования зависит от амплитуды колебаний свободной поверхности жидкости, по мере возрастания амплитуды колебаний коэффициент демпфирования растет. В вопросе о стабилизации колебаний свободных поверхностей жидкостей это обстоятельство играет важную роль. Для бака с гладкими стенками зависимость коэффициента демпфирования от амплитуды колебаний проявляется слабо, однако при наличии специальных демпфирующих внутрибаковых устройств эта зависимость становится весьма существенной.

В процессе экспериментального определения коэффициента демпфирования попутно устанавливается экспериментальное значение частоты собственных колебаний жидкости.

### § 23. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ В СИСТЕМЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Определение функций  $\psi_{jx}(\xi, r, t)$  и  $\psi_{jy}(\xi, r, t)$  было сведено нами в § 20 к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений (3.20.29). Отыскав из этих уравнений функции  $\alpha_j(t)$  и  $\beta_j(t)$ , можно определить далее функции  $\psi_{jx}(\xi, r, t)$  и  $\psi_{jy}(\xi, r, t)$  по формулам (3.20.28). Пользуясь формулами (3.20.28), мы преобразовываем ниже уравнения движения ракеты в плоскостях тангажа и крена, построенные в § 16, в системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Согласно (3.20.28) первым двум из уравнений (3.16.21) можно придать вид

$$\begin{aligned}
 m(\omega_{0y} - g_y) + \pi \sum_{j=1}^N Q_j \frac{d^2 \beta_j}{dt^2} \int_0^{R_j} \left( \frac{\partial \Theta_j}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} r^2 dr &= F_y, \\
 J_z \frac{d\omega_z}{dt} + \pi \sum_{j=1}^N Q_j \frac{d^2 \beta_j}{dt^2} \int_0^{R_j} \left( \frac{\partial \Theta_j}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} (x_j - k_j) r^2 dr - \\
 - \pi(\omega_{0x} - g_x) \sum_{j=1}^N Q_j \beta_j \int_0^{R_j} \left( \frac{\partial \Theta_j}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} r^2 dr &= M_z
 \end{aligned} \tag{3.23.1}$$

(в процессе опорожнения бака с номером  $j$  возникает зависимость собственной функции  $\Theta_j$  от времени, однако при дифференцировании функций  $\psi_{jx}$  и  $\psi_{jy}$  этой зависимостью можно пренебречь, так как скорость изменения функции  $\Theta_j$  в этом случае

очень мала по сравнению со скоростью изменения функций  $\alpha_j$  и  $\beta_j$ .

Введя обозначения:

$$a_{jy} = \pi Q_j \int_0^{R_j} \left( \frac{\partial \Theta_j}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} r^2 dr, \quad (3.23.2)$$

$$a_{j\delta} = \pi Q_j \int_0^{R_j} \left( \frac{\partial \Theta_j}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} (x_j - k_j) r^2 dr,$$

можно привести уравнения (3.23.1) к виду

$$m(\omega_{0y} - g_y) + \sum_{j=1}^N a_{jy} \frac{d^2 \beta_j}{dt^2} = F_y, \quad (3.23.3)$$

$$J_z \frac{d\omega_z}{dt} + \sum_{j=1}^N a_{j\delta} \frac{d^2 \beta_j}{dt^2} - (\omega_{0x} - g_x) \sum_{j=1}^N a_{jy} \beta_j = M_z.$$

Согласно (3.18.13) формулам (3.23.2) можно придать вид

$$a_{jy} = \pi Q_j \int_0^{R_j} F_j(r) r^2 dr,$$

$$a_{j\delta} = \pi Q_j \int_0^{R_j} F_j(r) (x_j - k_j) r^2 dr = a_{jy} \left( x_j - \frac{\int_0^{R_j} F_j(r) k_j r^2 dr}{\int_0^{R_j} F_j(r) r^2 dr} \right),$$

или, если воспользоваться обозначением (3.20.30),

$$a_{jy} = \pi Q_j \int_0^{R_j} F_j(r) r^2 dr, \quad a_{j\delta} = (x_j - \delta_j) a_{jy}. \quad (3.23.4)$$

С учетом демпфирования первое из уравнений (3.20.29) принимает вид

$$\frac{d^2 \beta_j}{dt^2} + \varepsilon_j \frac{d \beta_j}{dt} + \omega_j^2 \beta_j + \lambda_j \left[ \omega_{0y} - g_y + (x_j - \delta_j) \frac{d\omega_z}{dt} \right] \frac{\int_0^{R_j} F_j r^2 dr}{\int_0^{R_j} F_j^2 r dr} = 0,$$

или

$$\frac{\pi Q_j}{\lambda_j} \int_0^{R_j} F_j^2 r dr \left( \frac{d^2 \beta_j}{dt^2} + \varepsilon_j \frac{d \beta_j}{dt} + \omega_j^2 \beta_j \right) + \pi Q_j \int_0^{R_j} F_j r^2 dr \times$$

$$\times \left[ \omega_{0y} - g_y + (x_j - \delta_j) \frac{d\omega_z}{dt} \right] = 0. \quad (3.23.5)$$

Введя обозначение

$$\mu_j = \frac{\pi Q_j}{\lambda_j} \int_0^{R_j} F_j^2 r dr \quad (3.23.6)$$

и пользуясь обозначениями (3.23.4), можно привести уравнение (3.23.5) к виду

$$\mu_j \left( \frac{d^2 \beta_j}{dt^2} + \varepsilon_j \frac{d \beta_j}{dt} + \omega_j^2 \beta_j \right) + a_{jy} (\omega_{0y} - g_y) + a_{j\vartheta} \frac{d \omega_z}{dt} = 0. \quad (3.23.7)$$

Согласно (3.23.3) и (3.23.7) уравнения движения ракеты в плоскости тангажа могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} m(\omega_{0y} - g_y) + \sum_{j=1}^N a_{jy} \frac{d^2 \beta_j}{dt^2} &= F_y, \\ J_z \frac{d \omega_z}{dt} + \sum_{j=1}^N a_{j\vartheta} \frac{d^2 \beta_j}{dt^2} - (\omega_{0x} - g_x) \sum_{j=1}^N a_{jy} \beta_j &= M_z, \\ \mu_j \left( \frac{d^2 \beta_j}{dt^2} + \varepsilon_j \frac{d \beta_j}{dt} + \omega_j^2 \beta_j \right) + a_{jy} (\omega_{0y} - g_y) + \\ + a_{j\vartheta} \frac{d \omega_z}{dt} &= 0, \quad j = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (3.23.8)$$

Система дифференциальных уравнений (3.23.8) определяет движение, совершаемое корпусом ракеты в плоскости тангажа, и функции времени  $\beta_1(t)$ ,  $\beta_2(t)$ , ...,  $\beta_N(t)$ , характеризующие колебания свободных поверхностей жидкостей в топливных баках.

Функции  $F_1(r)$ ,  $F_2(r)$ , ...,  $F_N(r)$ , фигурирующие в формулах (3.23.4) и (3.23.6), в процессе расчета форм собственных колебаний жидкостей определяются с точностью до произвольных множителей, не зависящих от переменной  $r$ . Чтобы придать однозначность коэффициентам дифференциальных уравнений (3.23.8), установим для функций  $F_j(r)$ ,  $j=1, 2, \dots, N$ , дополнительное условие

$$\frac{dF_j}{dr} = 1 \text{ при } r=0, \quad (3.23.9)$$

при наличии которого система функций  $F_1(r)$ ,  $F_2(r)$ , ...,  $F_N(r)$  будет определяться уже однозначно. Согласно (3.18.12) в этом случае функции  $f_j(r, \alpha, t)$ , определяющие отклонения точек свободных поверхностей жидкостей от плоскостей  $\sigma_j$ , будут всегда удовлетворять условию

$$\left( \frac{\partial f_j}{\partial r} \right)_{r=0} = \beta_j(t) \cos \alpha. \quad (3.23.10)$$

В частности в полуплоскости  $\alpha=0$ , нормальной к линии узлов, будет иметь место равенство

$$\beta_j(t) = \left( \frac{\partial f_j}{\partial r} \right)_{r=0}. \quad (3.23.11)$$

При малых колебаниях свободной поверхности жидкости в  $j$ -м баке правая часть равенства (3.23.11) представляет собой угол между плоскостью, касательной к свободной поверхности  $\sigma_j^*$

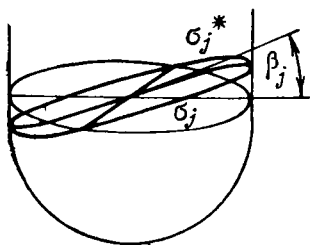


Рис. 3. 15.

в точке  $r=0$ , и плоскостью  $\sigma_j$ . Таким образом, при выполнении условия (3.23.9) функция  $\beta_j(t)$  будет определять угол поворота свободной поверхности жидкости в  $j$ -м баке вокруг ее линии узлов в сечении свободной поверхности, нормальном к этой линии (рис. 3. 15).

Перейдем к преобразованию уравнений движения ракеты в плоскости крена. Согласно (3.20.28) первому из уравнений (3.16.24) можно придать вид

$$J_x \frac{d\omega_x}{dt} + \pi \sum_{j=1}^N \rho_j r_j \frac{d^2 \alpha_j}{dt^2} \int_0^{R_j} \left( \frac{\partial \theta_j}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} r^2 dr = M_x,$$

или

$$J_x \frac{d\omega_x}{dt} + \sum_{j=1}^N a_{j1} \frac{d^2 \alpha_j}{dt^2} = M_x, \quad (3.23.12)$$

где

$$a_{j1} = \pi \rho_j r_j \int_0^{R_j} \left( \frac{\partial \theta_j}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} r^2 dr. \quad (3.23.13)$$

В соответствии с формулами (3.23.2) и (3.23.13) коэффициенты  $a_{j1}$  и  $a_{jy}$  связаны между собой зависимостью

$$a_{j1} = r_j a_{jy}. \quad (3.23.14)$$

С учетом демпфирования второе из уравнений (3.20.29) принимает вид

$$\frac{d^2 \alpha_j}{dt^2} + \epsilon_j \frac{d \alpha_j}{dt} + \omega_j^2 \alpha_j + \lambda_j r_j \frac{d \omega_x}{dt} \frac{\int_0^{R_j} F_j r^2 dr}{\int_0^{R_j} F_j^2 r dr} = 0,$$

или

$$\frac{\pi \rho_j}{\lambda_j} \int_0^{R_j} F_j^2 r dr \left( \frac{d^2 a_j}{dt^2} + \varepsilon_j \frac{da_j}{dt} + \omega_j^2 a_j \right) + \pi \rho_j r_j \frac{d\omega_x}{dt} \int_0^{R_j} F_j r^2 dr = 0. \quad (3.23.15)$$

Согласно (3.23.4) и (3.23.14) должно иметь место равенство

$$a_{j1} = \pi \rho_j r_j \int_0^{R_j} F_j(r) r^2 dr. \quad (3.23.16)$$

В соответствии с формулами (3.23.6) и (3.23.16) уравнению (3.23.15) можно придать вид

$$\mu_j \left( \frac{d^2 a_j}{dt^2} + \varepsilon_j \frac{da_j}{dt} + \omega_j^2 a_j \right) + a_{j1} \frac{d\omega_x}{dt} = 0. \quad (3.23.17)$$

Согласно (3.23.12) и (3.23.17) уравнения движения ракеты в плоскости крена могут быть представлены в виде

$$J_x \frac{d\omega_x}{dt} + \sum_{j=1}^N a_{j1} \frac{d^2 a_j}{dt^2} = M_x, \quad (3.23.18)$$

$$\mu_j \left( \frac{d^2 a_j}{dt^2} + \varepsilon_j \frac{da_j}{dt} + \omega_j^2 a_j \right) + a_{j1} \frac{d\omega_x}{dt} = 0,$$

$$j = 1, 2, \dots, N.$$

Система дифференциальных уравнений (3.23.18) определяет вращение корпуса ракеты вокруг его продольной оси и функции времени  $a_1(t)$ ,  $a_2(t)$ , ...,  $a_N(t)$ , характеризующие колебания свободных поверхностей жидкостей, вызываемые этим вращением. При выполнении условия (3.23.9) функция  $a_j(t)$  определяет угол поворота свободной поверхности жидкости в  $j$ -м баке вокруг ее линии узлов в сечении свободной поверхности, нормальном к этой линии.

#### § 24. УРАВНЕНИЯ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ, УЧИТЫВАЮЩИЕ ПОДВИЖНОСТЬ ЖИДКИХ КОМПОНЕНТОВ ТОПЛИВА

Перейдем теперь к построению дифференциальных уравнений возмущенного движения ракеты, учитывающих подвижность жидких компонентов топлива. Рассмотрим сперва движение ракеты в плоскости тангажа.

Пусть  $\beta_1(t)$ ,  $\beta_2(t)$ , ...,  $\beta_N(t)$  — функции, характеризующие колебания свободных поверхностей жидкостей, совершаемые ими при невозмущенном движении ракеты в плоскости тангажа, и  $\beta'_1(t)$ ,  $\beta'_2(t)$ , ...,  $\beta'_N(t)$  — функции, характеризующие колебания свободных поверхностей, возникающие при возмущенном движе-

нии ракеты. Согласно (3.23.8) функции  $\beta_1(t), \beta_2(t), \dots, \beta_N(t)$  должны удовлетворять дифференциальным уравнениям

$$\mu_j \left( \frac{d^2 \beta_j}{dt^2} + \varepsilon_j \frac{d \beta_j}{dt} + \omega_j^2 \beta_j \right) + a_{jy} (\omega_{0y} - g_y) + a_{jz} \frac{d \omega_z}{dt} = 0, \\ j = 1, 2, \dots, N, \quad (3.24.1)$$

и функции  $\beta'_j(t), \beta''_j(t), \dots, \beta'_N(t)$  — уравнениям

$$\mu_j \left( \frac{d^2 \beta'_j}{dt^2} + \varepsilon_j \frac{d \beta'_j}{dt} + \omega_j^2 \beta'_j \right) + a_{jy} (\omega'_{0y} - g_{y'}) + a_{jz} \frac{d \omega'_z}{dt} = 0, \\ j = 1, 2, \dots, N, \quad (3.24.2)$$

где  $\omega'_{0y} - g_{y'}$  — кажущееся поперечное ускорение в плоскости тангажа, возникающее в процессе возмущенного движения ракеты;  $\omega'_z$  — угловая скорость вращения ракеты вокруг оси  $z$ , соответствующая возмущенному движению [ввиду предполагаемой нами малости колебаний свободных поверхностей жидкостей, в уравнениях (3.24.2) можно пренебречь малыми изменениями коэффициентов этих дифференциальных уравнений, которые могут возникать при переходе от невозмущенного к возмущенному движению ракеты]. В соответствии с уравнениями (3.24.1) и (3.24.2) разности

$$\Delta \beta_j = \beta'_j - \beta_j, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (3.24.3)$$

должны удовлетворять дифференциальным уравнениям

$$\mu_j \left( \frac{d^2 \Delta \beta_j}{dt^2} + \varepsilon_j \frac{d \Delta \beta_j}{dt} + \omega_j^2 \Delta \beta_j \right) + a_{jy} (\omega'_{0y} - g_{y'} - \omega_{0y} + g_y) + \\ + a_{jz} \frac{d (\omega'_z - \omega_z)}{dt} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (3.24.4)$$

Пользуясь матрицей перехода (1.12.5), найдем:

$$\omega'_{0y} - g_{y'} = \omega'_{0y} - g_y - (\omega_{0x} - g_x) \Delta \vartheta = \omega_{0y} - g_y - \\ - (\omega_{0x} - g_x) \Delta \vartheta + \frac{dV_y}{dt}, \quad (3.24.5) \\ \omega'_z = \frac{d\vartheta'}{dt} = \frac{d\vartheta}{dt} + \frac{d\Delta\vartheta}{dt} = \omega_z + \frac{d\Delta\vartheta}{dt}$$

(с погрешностью второго порядка малости  $\vec{\vartheta}'_0 \cong \vec{V}'_c = \vec{V}_c + \Delta \vec{V}_c$ ). Согласно (3.24.5) дифференциальным уравнениям (3.24.4) можно придать вид

$$\mu_j \left( \frac{d^2 \Delta \beta_j}{dt^2} + \varepsilon_j \frac{d \Delta \beta_j}{dt} + \omega_j^2 \Delta \beta_j \right) + a_{jy} \frac{dV_y}{dt} + a_{jz} \frac{d^2 \Delta \vartheta}{dt^2} - \\ - a_{jy} (\omega_{0x} - g_x) \Delta \vartheta = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (3.24.6)$$



Первые два из уравнений (3.23.8) можно представить в виде

$$\begin{aligned} m(\omega_{0y} - g_y) &= F_y + F_{жy}, \\ J_z \frac{d\omega_z}{dt} &= M_z + M_{жz}, \end{aligned} \quad (3.24.7)$$

где

$$\begin{aligned} F_{жy} &= - \sum_{j=1}^N a_{jy} \frac{d^2 \beta_j}{dt^2} \quad \text{и} \quad M_{жz} = - \sum_{j=1}^N a_{j\vartheta} \frac{d^2 \beta_j}{dt^2} + \\ &+ (\omega_{0x} - g_x) \sum_{j=1}^N a_{jy} \beta_j \end{aligned} \quad (3.24.8)$$

— соответственно сила и момент, возникающие вследствие подвижности жидкостей.

В гл. I, не учитывая в уравнениях (3.24.7) силу  $F_{жy}$  и момент  $M_{жz}$ , мы получили уравнения возмущенного движения:

$$\begin{aligned} m \frac{d\Delta V_y}{dt} + v_y \frac{d\Delta \vartheta}{dt} + c_{yy} \Delta V_y + c_{y\vartheta} \Delta \vartheta &= c_{y\delta} \Delta \delta_{\vartheta} + \Delta F_y, \\ J_z \frac{d^2 \Delta \vartheta}{dt^2} + \mu_z \frac{d\Delta \vartheta}{dt} + c_{\vartheta y} \Delta V_y + c_{\vartheta\vartheta} \Delta \vartheta &= c_{\vartheta\delta} \Delta \delta_{\vartheta} + \Delta M_z. \end{aligned} \quad (3.24.9)$$

С учетом силы  $F_{жy}$  и момента  $M_{жz}$  уравнения (3.24.9) примут вид

$$\begin{aligned} m \frac{d\Delta V_y}{dt} + v_y \frac{d\Delta \vartheta}{dt} + c_{yy} \Delta V_y + c_{y\vartheta} \Delta \vartheta &= c_{y\delta} \Delta \delta_{\vartheta} + \Delta F_y + \Delta F_{жy}, \\ J_z \frac{d^2 \Delta \vartheta}{dt^2} + \mu_z \frac{d\Delta \vartheta}{dt} + c_{\vartheta y} \Delta V_y + c_{\vartheta\vartheta} \Delta \vartheta &= c_{\vartheta\delta} \Delta \delta_{\vartheta} + \Delta M_z + \Delta M_{жz}, \end{aligned} \quad (3.24.10)$$

где  $\Delta F_{жy}$  и  $\Delta M_{жz}$  — изменения силы  $F_{жy}$  и момента  $M_{жz}$ , возникающие при переходе от невозмущенного движения ракеты к возмущенному ее движению.

Согласно (3.24.8) будут иметь место равенства:

$$\begin{aligned} \Delta F_{жy} &= - \sum_{j=1}^N a_{jy} \frac{d^2 \Delta \beta_j}{dt^2}, \\ \Delta M_{жz} &= - \sum_{j=1}^N a_{j\vartheta} \frac{d^2 \Delta \beta_j}{dt^2} + (\omega_{0x} - g_x) \sum_{j=1}^N a_{jy} \Delta \beta_j \end{aligned} \quad (3.24.11)$$

[ввиду предполагаемой малости колебаний свободных поверхностей жидкостей, можно пренебречь малыми изменениями коэффициентов дифференциальных выражений (3.24.8), которые могут возникать при переходе от невозмущенного к возмущенному движению ракеты].

Подставляя (3.24.11) в (3.24.10) и присоединяя к полученным уравнениям дифференциальные уравнения (3.24.6), получим систему уравнений

$$\begin{aligned}
 m \frac{d\Delta V_y}{dt} + v_y \frac{d\Delta\vartheta}{dt} + c_{yy}\Delta V_y + c_{y\vartheta}\Delta\vartheta + \sum_{j=1}^N a_{jy} \frac{d^2\Delta\beta_j}{dt^2} = \\
 = c_{y\delta}\Delta\delta_\vartheta + \Delta F_y, \\
 J_z \frac{d^2\Delta\vartheta}{dt^2} + \mu_z \frac{d\Delta\vartheta}{dt} + c_{\vartheta y}\Delta V_y + c_{\vartheta\vartheta}\Delta\vartheta + \sum_{j=1}^N a_{j\vartheta} \frac{d^2\Delta\beta_j}{dt^2} - \\
 - (\omega_{0x} - g_x) \sum_{j=1}^N a_{jy}\Delta\beta_j = c_{\vartheta\delta}\Delta\delta_\vartheta + \Delta M_z, \\
 \mu_j \left( \frac{d^2\Delta\beta_j}{dt^2} + \varepsilon_j \frac{d\Delta\beta_j}{dt} + \omega_j^2 \Delta\beta_j \right) + a_{jy} \frac{d\Delta V_y}{dt} + a_{j\vartheta} \frac{d^2\Delta\vartheta}{dt^2} - \\
 - a_{jy}(\omega_{0x} - g_x)\Delta\vartheta = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N.
 \end{aligned} \tag{3.24.12}$$

Уравнения (3.24.12) представляют собой дифференциальные уравнения возмущенного движения ракеты в плоскости тангажа, учитывающие подвижность жидких компонентов топлива.

Перейдем к рассмотрению вращения ракеты вокруг ее продольной оси. Согласно (3.23.18) возмущения  $\Delta\alpha_j$ , возникающие при переходе от невозмущенного к возмущенному движению ракеты, должны удовлетворять дифференциальным уравнениям:

$$\mu_j \left( \frac{d^2\Delta\alpha_j}{dt^2} + \varepsilon_j \frac{d\Delta\alpha_j}{dt} + \omega_j^2 \Delta\alpha_j \right) + a_{j\gamma} \frac{d\Delta\omega_x}{dt} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

или

$$\mu_j \left( \frac{d^2\Delta\alpha_j}{dt^2} + \varepsilon_j \frac{d\Delta\alpha_j}{dt} + \omega_j^2 \Delta\alpha_j \right) + a_{j\gamma} \frac{d^2\Delta\gamma}{dt^2} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N, \tag{3.24.13}$$

так как  $\omega_x = \frac{d\gamma}{dt}$ .

Первому из уравнений (3.23.18) можно придать вид

$$J_x \frac{d\omega_x}{dt} = M_x + M_{\text{ж}x}, \tag{3.24.14}$$

где

$$M_{\text{ж}x} = - \sum_{j=1}^N a_{j\gamma} \frac{d^2\alpha_j}{dt^2}. \tag{3.24.15}$$

В гл. I, не учитывая в уравнении (3.24.14) момент  $M_{ж\ x}$ , мы получили уравнение возмущенного движения

$$J_x \frac{d^2 \Delta \gamma}{dt^2} + \mu_x \frac{d \Delta \gamma}{dt} = c_{\gamma \delta} \Delta \delta_{\gamma} + \Delta M_x. \quad (3.24.16)$$

С учетом момента  $M_{ж\ x}$  уравнение (3.24.16) примет вид

$$J_x \frac{d^2 \Delta \gamma}{dt^2} + \mu_x \frac{d \Delta \gamma}{dt} = c_{\gamma \delta} \Delta \delta_{\gamma} + \Delta M_x + \Delta M_{ж\ x}, \quad (3.24.17)$$

где

$$\Delta M_{ж\ x} = - \sum_{j=1}^N a_{j\gamma} \frac{d^2 \Delta a_j}{dt^2} \quad (3.24.18)$$

согласно (3.24.15). Подставляя (3.24.18) в (3.24.17) и присоединяя к полученному уравнению дифференциальные уравнения (3.24.13), получим систему уравнений

$$\begin{aligned} J_x \frac{d^2 \Delta \gamma}{dt^2} + \mu_x \frac{d \Delta \gamma}{dt} + \sum_{j=1}^N a_{j\gamma} \frac{d^2 \Delta a_j}{dt^2} &= c_{\gamma \delta} \Delta \delta_{\gamma} + \Delta M_x, \\ \mu_j \left( \frac{d^2 \Delta a_j}{dt^2} + \varepsilon_j \frac{d \Delta a_j}{dt} + \omega_j^2 \Delta a_j \right) + a_{j\gamma} \frac{d^2 \Delta \gamma}{dt^2} &= 0, \\ j &= 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (3.24.19)$$

Уравнения (3.24.19) представляют собой дифференциальные уравнения возмущенного движения ракеты в плоскости крена, учитывающие подвижность жидких компонентов топлива.

## § 25. РАСЧЕТ КОЭФФИЦИЕНТОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ

Вопрос о расчете коэффициентов  $c_{yy}$ ,  $c_{y\delta}$ ,  $c_{y\delta}$ ,  $c_{\theta y}$ ,  $c_{\theta\delta}$ ,  $c_{\gamma\delta}$ ,  $v_y$ ,  $\mu_x$ ,  $\mu_z$ , фигурирующих в уравнениях возмущенного движения (3.24.12) и (3.24.19), был рассмотрен нами в гл. I. Ниже мы приводим сводку расчетных формул для вычисления остальных коэффициентов этих дифференциальных уравнений —  $a_{jy}$ ,  $a_{j\theta}$ ,  $a_{j\gamma}$ ,  $\mu_j$ ,  $\omega_j$ ,  $J_x$ ,  $J_z$  (расчет моментов инерции  $J_x$  и  $J_z$  в гл. I рассматривался без учета подвижности жидких компонентов топлива).

Основой необходимых расчетов является решение дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial^2 \theta_j}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \theta_j}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta_j}{\partial r} - \frac{\theta_j}{r^2} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (3.25.1)$$

с краевыми условиями

$$\frac{\partial \theta_j}{\partial n} = r \cos \chi + \xi \sin \chi \quad \text{на } l_j, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (3.25.2)$$

и отыскание первых собственных значений и первых собственных функций краевых задач, образуемых дифференциальными уравнениями

$$\frac{\partial^2 \theta_j}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \theta_j}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta_j}{\partial r} - \frac{\theta_j}{r^2} = 0, \quad j=1, 2, \dots, N \quad (3.25.3)$$

и краевыми условиями:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \theta_j}{\partial n} &= 0 \text{ на } l_j^* \\ \frac{\partial \theta_j}{\partial n} &= \lambda_j \theta_j \text{ при } \xi=0, \quad 0 < r < R_j \end{aligned} \right\} j=1, 2, \dots, N \quad (3.25.4)$$

(см. § 12 и 17). Применяя для расчета собственных значений  $\lambda_j$  и собственных функций  $\theta_j$  метод последовательных приближений, изложенный в § 21, можно свести все указанные выше вычисления к решению дифференциальных уравнений (3.25.1) с краевыми условиями вида

$$\frac{\partial \theta_j}{\partial n} = f_j(s) \text{ на } l_j, \quad j=1, 2, \dots, N, \quad (3.25.5)$$

где  $f_j(s)$  — заданные функции длины дуги  $s$  контура  $l_j$ .

Зная функции  $\theta_j$  и  $\Theta_j$ ,  $j=1, 2, \dots, N$ , и числа  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ , можно рассчитать коэффициенты дифференциальных уравнений возмущенного движения  $a_{jy}, \mu_j, \omega_j, J_x, J_z$  по формулам:

$$\begin{aligned} a_{jy} &= \pi Q_j \int_0^{R_j} F_j(r) r^2 dr, \\ \mu_j &= \frac{\pi Q_j}{\lambda_j} \int_0^{R_j} F_j^2(r) r dr, \\ \omega_j &= \sqrt{\lambda_j (\omega_{0x} - g_x)}, \end{aligned} \quad (3.25.6)$$

$$\begin{aligned} J_x &= \int_{V_0} (y^2 + z^2) Q dv + \sum_{j=1}^N m_j (y_j^2 + z_j^2), \\ J_z &= \int_{V_0} (x^2 + y^2) Q dv + \sum_{j=1}^N m_j (x_c^{(j)^2} + y_j^2 + h_j^2), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} F_j(r) &= \left( \frac{\partial \theta_j}{\partial \xi} \right)_{\xi=0}, \\ h_j &= \left[ \frac{\pi}{v_j} \int_{l_j} \theta_j \frac{\partial \theta_j}{\partial n} r ds - (x_j - x_c^{(j)})^2 \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (3.25.7)$$

(см. § 14, 18 и 23).

Зная коэффициенты  $a_{jy}$ ,  $j=1, 2, \dots, N$ , можно рассчитать коэффициенты  $a_{j\theta}$  и  $a_{j\gamma}$ ,  $j=1, 2, \dots, N$  по формулам:

$$a_{j\theta} = (x_j - \delta_j) a_{jy}, \quad a_{j\gamma} = r_j a_{jy}, \quad (3.25.8)$$

где

$$\delta_j = \frac{\int_0^{R_j} F_j k_j r^2 dr}{\int_0^{R_j} F_j r^2 dr}, \quad k_j = -\frac{(\theta_j)_{\xi=0}}{r} \quad (3.25.9)$$

(см. § 15, 20 и 23).

Во всех рассуждениях, проводившихся в этой главе, мы предполагали для простоты, что ось топливного бака пересекает всегда жидкую массу, находящуюся в этом баке. Если бак с номером  $j$  имеет форму тора, во втором из краевых условий (3.25.4) интервал  $0 < r < R_j$  должен быть заменен интервалом  $R_j^{(0)} < r < R_j$ , где  $R_j^{(0)}$  — внутренний радиус плоской фигуры  $\sigma_j$ , имеющей в данном случае форму кольца. При этом отпадает требование регулярности решений дифференциальных уравнений (3.25.1) и (3.25.3) на оси топливного бака  $r=0$ . В формулах (3.25.6) и (3.25.9) для  $a_{jy}$ ,  $\mu_j$  и  $\delta_j$  интервал интегрирования  $(0, R_j)$  в рассматриваемом случае следует заменить интервалом  $(R_j^{(0)}, R_j)$ .

До тех пор, пока бак с номером  $j$  не опорожняется, коэффициенты  $a_{jy}$ ,  $a_{j\theta}$ ,  $a_{j\gamma}$  и  $\mu_j$  сохраняют постоянные значения. В процессе опорожнения  $j$ -го бака возникает зависимость этих коэффициентов от времени  $t$ .

Как было указано выше, в § 22, в процессе экспериментального определения коэффициентов демпфирования  $\epsilon_j$  достигается попутно экспериментальное определение частот собственных колебаний свободных поверхностей жидкостей  $\omega_j$ . Зная частоты  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$ , можно приближенно рассчитать остальные коэффициенты дифференциальных уравнений возмущенного движения, не прибегая к решению дифференциальных уравнений (3.25.1) и (3.25.3) с краевыми условиями (3.25.2) и (3.25.4). Согласно (3.20.15) для первого тона собственных колебаний свободной поверхности можно приближенно положить

$$F_j(r) = C_j r. \quad (3.25.10)$$

Для того, чтобы выполнялось условие (3.23.9), константа  $C_j$  должна быть равна единице. Полагая в формулах (3.25.6) для коэффициентов  $a_{jy}$  и  $\mu_j$

$$F_j(r) = r, \quad (3.25.11)$$

получим приближенные соотношения:

$$a_{jy} = \pi \varrho_j \int_0^{R_j} r^3 dr = \frac{\pi}{4} \varrho_j R_j^4, \quad (3.25.12)$$

$$\mu_j = \frac{\pi \varrho_j}{\lambda_j} \int_0^{R_j} r^3 dr = \frac{\pi \varrho_j}{4 \lambda_j} R_j^4.$$

Согласно (3.25.6) должно иметь место равенство

$$\lambda_j = \frac{\omega_j^2}{w_{0x} - g_x}. \quad (3.25.13)$$

Пользуясь зависимостью (3.25.13), можно привести формулы (3.25.12) к виду

$$a_{jy} = \frac{\pi \varrho_j R_j^4}{4}, \quad \mu_j = \frac{\pi \varrho_j R_j^4}{4 \omega_j^2} (w_{0x} - g_x). \quad (3.25.14)$$

Расчет момента инерции  $J_x$  без учета подвижности жидких компонентов топлива приводит к завышенным результатам. Таким образом,

$$J_z < \int_{V_0} (x^2 + y^2) \varrho dv + \sum_{j=1}^N \varrho_j \int_{V_j} (x^2 + y^2) dv. \quad (3.25.15)$$

С другой стороны, согласно (3.25.6)

$$J_z > \int_{V_0} (x^2 + y^2) \varrho dv + \sum_{j=1}^N m_j (x_c^{(j)^2} + y_j^2). \quad (3.25.15a)$$

В соответствии с неравенствами (3.25.15) и (3.25.15a) приближенная формула

$$J_z = \int_{V_0} (x^2 + y^2) \varrho dv + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \left[ \varrho_j \int_{V_j} (x^2 + y^2) dv + m_j (x_c^{(j)^2} + y_j^2) \right] \quad (3.25.16)$$

дает погрешность по абсолютной величине, не превышающую суммы

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \left[ \varrho_j \int_{V_j} (x^2 + y^2) dv - m_j (x_c^{(j)^2} + y_j^2) \right]. \quad (3.25.17)$$

Сумма (3.25.17) составляет обычно лишь несколько процентов от приближенного значения момента инерции  $J_z$ , определяе-

мого формулой (3.25.16). Заменяя в (3.25.6) точную формулу для момента инерции  $J_z$  приближенной формулой (3.25.16), получим расчетные формулы для моментов инерции:

$$J_x = \int_{V_0} (y^2 + z^2) \epsilon dv + \sum_{j=1}^N m_j (y_j^2 + z_j^2), \quad (3.25.18)$$

$$J_z = \int_{V_0} (x^2 + y^2) \epsilon dv + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \left[ \epsilon_j \int_{V_j} (x^2 + y^2) dv + m_j (x_j^2 + y_j^2) \right].$$

При существенном удалении свободной поверхности жидкости в  $j$ -м баке от плоскости  $x=0$ , проходящей через начало связанной системы координат, величина  $\delta_j$  обычно мала по сравнению с абсолютной величиной координаты  $x_j$ . Если же свободная поверхность жидкости в  $j$ -м баке близка к плоскости  $x=0$ , коэффициент  $a_{j\phi}$  ввиду своей малости не играет существенной роли при исследовании устойчивости движения ракеты. Пренебрегая в (3.25.8) величиной  $\delta_j$ , получим расчетные формулы:

$$a_{j\phi} = x_j a_{jy}, \quad a_{j\gamma} = r_j a_{jy}. \quad (3.25.19)$$

Таким образом, получив экспериментальные значения коэффициентов демпфирования  $\epsilon_j$  и частот собственных колебаний  $\omega_j$ , можно осуществить ориентировочное исследование устойчивости движения ракеты, пользуясь при вычислении остальных коэффициентов дифференциальных уравнений возмущенного движения простыми расчетными формулами (3.25.14), (3.25.18) и (3.25.19).

## § 26. ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ РАКЕТЫ КАК ОБЪЕКТА АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

В гл. II при исследовании устойчивости движения ракеты мы описывали связь между входным сигналом автомата стабилизации и выходным его сигналом простейшими линейными дифференциальными уравнениями. При учете подвижности жидких компонентов топлива в процессе исследования устойчивости движения ракеты приходится рассматривать колебания ее корпуса в существенно большем диапазоне частот; для такого широкого диапазона частот описание «закона управления» дифференциальными уравнениями становится уже весьма сложным. В связи с

этим для исследования устойчивости движения ракеты с учетом подвижности жидких компонентов топлива используются обычно частотные методы теории автоматического регулирования.

В этом параграфе мы рассматриваем вопрос о расчете этих частотных характеристик, в последующих двух параграфах нами указываются возможные пути обеспечения устойчивости движения ракеты с учетом подвижности жидких компонентов топлива.

Так же, как и в гл. II, при исследовании устойчивости движения ракеты будем «замораживать» коэффициенты дифференциальных уравнений возмущенного движения, считая, что в рассматриваемом интервале времени эти коэффициенты сохраняют значения, соответствующие некоторому фиксированному начальному моменту времени  $t = \tau$ .

Рассмотрим сперва движение ракеты в плоскости тангажа. Для построения искомых частотных характеристик положим в уравнениях возмущенного движения (3.24.12)

$$\Delta F_y = 0, \quad \Delta M_z = 0, \quad \Delta \delta_\theta = e^{i\omega t} \quad (3.26.1)$$

и, считая коэффициенты этих дифференциальных уравнений постоянными, будем искать неизвестные функции  $\Delta V_y$ ,  $\Delta \theta$ ,  $\Delta \beta_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$ , в виде

$$\Delta V_y = V e^{i\omega t}, \quad \Delta \theta = \theta e^{i\omega t}, \quad \Delta \beta_j = B_j e^{i\omega t}, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (3.26.2)$$

Подставляя (3.26.1) и (3.26.2) в (3.24.12), получим для множителей  $V$ ,  $\theta$  и  $B_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$  систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} (c_{yy} + i\omega m)\dot{V} + (c_{y\theta} + i v_{y\theta})\theta - \omega^2 \sum_{j=1}^N a_{jy} B_j &= c_{y\delta}, \\ c_{\theta y} V + (c_{\theta\theta} + i \mu_z \omega - \omega^2 J_z)\theta - \sum_{j=1}^N [(\omega_{0x} - g_x) a_{jy} + \\ &+ \omega^2 a_{j\theta}] B_j = c_{\theta\delta}, \\ \mu_j (\omega_j^2 - \omega^2 + i \varepsilon_j \omega) B_j + i a_{jy} \omega V - [(\omega_{0x} - g_x) a_{jy} + \\ &+ \omega^2 a_{j\theta}] \theta = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (3.26.3)$$

Согласно (3.26.3) должны иметь место равенства

$$B_j = \frac{-i a_{jy} \omega V + [(\omega_{0x} - g_x) a_{jy} + \omega^2 a_{j\theta}] \theta}{\mu_j (\omega_j^2 - \omega^2 + i \varepsilon_j \omega)}, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (3.26.4)$$



Подставляя (3.26.4) в первые два из уравнений (3.26.3), получим для неизвестных  $V$  и  $\Theta$  систему двух алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} & \left[ c_{yy} + i\omega m + \sum_{j=1}^N \frac{ia_{jy}^2 \omega^3}{\mu_j (\omega_j^2 - \omega^2 + i\varepsilon_{j\omega})} \right] V + \{ c_{y\delta} + i\nu_y \omega - \\ & - \sum_{j=1}^N \frac{[(w_{0x} - g_x) a_{jy} + \omega^2 a_{j\delta}] \omega^2 a_{jy}}{\mu_j (\omega_j^2 - \omega^2 + i\varepsilon_{j\omega})} \} \Theta = c_{y\delta}, \\ & \{ c_{\delta y} + \sum_{j=1}^N \frac{[(w_{0x} - g_x) a_{jy} + \omega^2 a_{j\delta}] i a_{jy} \omega}{\mu_j (\omega_j^2 - \omega^2 + i\varepsilon_{j\omega})} \} V + \{ c_{\delta\delta} + i\mu_z \omega - \\ & - \omega^2 J_z - \sum_{j=1}^N \frac{[(w_{0x} - g_x) a_{jy} + \omega^2 a_{j\delta}]^2}{\mu_j (\omega_j^2 - \omega^2 + i\varepsilon_{j\omega})} \} \Theta = c_{\delta\delta}. \end{aligned} \quad (3.26.5)$$

Введя обозначения:

$$\begin{aligned} & c_{yy} + i\omega m + \sum_{j=1}^N \frac{ia_{jy}^2 \omega^3}{\mu_j (\omega_j^2 - \omega^2 + i\varepsilon_{j\omega})} = a_{11}(\omega) + ib_{11}(\omega), \\ & c_{y\delta} + i\nu_y \omega - \sum_{j=1}^N \frac{[(w_{0x} - g_x) a_{jy} + \omega^2 a_{j\delta}] \omega^2 a_{jy}}{\mu_j (\omega_j^2 - \omega^2 + i\varepsilon_{j\omega})} = a_{12}(\omega) + ib_{12}(\omega), \\ & c_{\delta y} + \sum_{j=1}^N \frac{[(w_{0x} - g_x) a_{jy} + \omega^2 a_{j\delta}] i a_{jy} \omega}{\mu_j (\omega_j^2 - \omega^2 + i\varepsilon_{j\omega})} = a_{21}(\omega) + ib_{21}(\omega), \\ & c_{\delta\delta} + i\mu_z \omega - \omega^2 J_z - \sum_{j=1}^N \frac{[(w_{0x} - g_x) a_{jy} + \omega^2 a_{j\delta}]^2}{\mu_j (\omega_j^2 - \omega^2 + i\varepsilon_{j\omega})} = \\ & = a_{22}(\omega) + ib_{22}(\omega), \end{aligned} \quad (3.26.6)$$

можно привести уравнения (3.26.5) к виду

$$\begin{aligned} & (a_{11} + ib_{11})V + (a_{12} + ib_{12})\Theta = c_{y\delta}, \\ & (a_{21} + ib_{21})V + (a_{22} + ib_{22})\Theta = c_{\delta\delta}. \end{aligned} \quad (3.26.7)$$

Отделяя действительные и мнимые части в левых частях соотношений (3.26.6), получим для функций  $a_{jk}(\omega)$  и  $b_{jk}(\omega)$ ,  $j = 1, 2$ ,  $k = 1, 2$ , расчетные формулы:

$$\begin{aligned}
a_{11}(\omega) &= c_{yy} + \sum_{j=1}^N \frac{\varepsilon_j \omega^4 a_{jy}^2}{\mu_j [(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + \varepsilon_j^2 \omega^2]}, \\
b_{11}(\omega) &= \omega m + \sum_{j=1}^N \frac{(\omega_j^2 - \omega^2) \omega^3 a_{jy}^2}{\mu_j [(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + \varepsilon_j^2 \omega^2]}, \\
a_{12}(\omega) &= c_{y\theta} - \sum_{j=1}^N \frac{(\omega_j^2 - \omega^2) \omega^2 a_{jy} [(w_{0x} - g_x) a_{jy} + \omega^2 a_{j\theta}]}{\mu_j [(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + \varepsilon_j^2 \omega^2]}, \\
b_{12}(\omega) &= v_y \omega + \sum_{j=1}^N \frac{\varepsilon_j \omega^3 a_{jy} [(w_{0x} - g_x) a_{jy} + \omega^2 a_{j\theta}]}{\mu_j [(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + \varepsilon_j^2 \omega^2]}, \\
a_{21}(\omega) &= c_{\theta y} + \sum_{j=1}^N \frac{\varepsilon_j \omega^2 a_{jy} [(w_{0x} - g_x) a_{jy} + \omega^2 a_{j\theta}]}{\mu_j [(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + \varepsilon_j^2 \omega^2]}, \\
b_{21}(\omega) &= \sum_{j=1}^N \frac{(\omega_j^2 - \omega^2) \omega a_{jy} [(w_{0x} - g_x) a_{jy} + \omega^2 a_{j\theta}]}{\mu_j [(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + \varepsilon_j^2 \omega^2]}, \\
a_{22}(\omega) &= c_{\theta\theta} - \omega^2 J_z - \sum_{j=1}^N \frac{(\omega_j^2 - \omega^2) [(w_{0x} - g_x) a_{jy} + \omega^2 a_{j\theta}]^2}{\mu_j [(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + \varepsilon_j^2 \omega^2]}, \\
b_{22}(\omega) &= \mu_z \omega + \sum_{j=1}^N \frac{\varepsilon_j \omega [(w_{0x} - g_x) a_{jy} + \omega^2 a_{j\theta}]^2}{\mu_j [(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + \varepsilon_j^2 \omega^2]}.
\end{aligned} \tag{3.26.8}$$

Определяя  $\theta$  из уравнений (3.26.7), найдем

$$\begin{aligned}
\theta &= \frac{c_{\theta\delta} (a_{11} + i b_{11}) - c_{y\delta} (a_{21} + i b_{21})}{(a_{11} + i b_{11}) (a_{22} + i b_{22}) - (a_{12} + i b_{22}) (a_{21} + i b_{21})} = \\
&= \frac{c_{\theta\delta} a_{11} - c_{y\delta} a_{21} + i (c_{\theta\delta} b_{11} - c_{y\delta} b_{21})}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} - b_{11} b_{22} + b_{12} b_{21} + i (a_{11} b_{22} - a_{12} b_{21} + b_{11} a_{22} - b_{12} a_{21})}, \\
\text{или}
\end{aligned}$$

$$\theta = \theta_1(\omega) + i \theta_2(\omega), \tag{3.26.9}$$

где  $\theta_1(\omega)$  и  $\theta_2(\omega)$  — функции частоты  $\omega$ , определяемые формулами:

$$\begin{aligned}
\theta_1 &= \frac{c_1 (c_{\theta\delta} a_{11} - c_{y\delta} a_{21}) + c_2 (c_{\theta\delta} b_{11} - c_{y\delta} b_{21})}{c_1^2 + c_2^2}, \\
\theta_2 &= \frac{c_1 (c_{\theta\delta} b_{11} - c_{y\delta} b_{21}) - c_2 (c_{\theta\delta} a_{11} - c_{y\delta} a_{21})}{c_1^2 + c_2^2},
\end{aligned} \tag{3.26.10}$$

$$c_1 = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} - b_{11} b_{22} + b_{12} b_{21},$$

$$c_2 = a_{11} b_{22} - a_{12} b_{21} + b_{11} a_{22} - b_{12} a_{21}.$$

Соотношение (3.26.9) можно привести к виду

$$\theta = k_0'(\omega) e^{i\varphi_0(\omega)}, \quad (3.26.11)$$

где

$$k_0'(\omega) = \sqrt{\theta_1^2(\omega) + \theta_2^2(\omega)}, \quad \varphi_0'(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{\theta_2(\omega)}{\theta_1(\omega)}. \quad (3.26.12)$$

Согласно (3.26.2) и (3.26.11) в рассматриваемом случае возмущение  $\Delta\theta$ , являющееся входным сигналом для автомата стабилизации, будет определяться зависимостью

$$\Delta\theta = k_0'(\omega) e^{i[\omega t + \varphi_0(\omega)]}. \quad (3.26.13)$$

Таким образом, при отсутствии возмущающих сил и моментов гармонические колебания исполнительных органов системы управления вызывают гармонические колебания входного сигнала автомата стабилизации, характеризуемые *коэффициентом усиления*  $k_0(\omega)$  и *фазовым сдвигом*  $\varphi_0(\omega)$ . Функции  $k_0(\omega)$  и  $\varphi_0(\omega)$ , для которых мы установили расчетные формулы (3.26.8), (3.26.10) и (3.26.12), определяют *амплитудно-частотную* и *фазово-частотную характеристику* ракеты как объекта автоматического регулирования для случая колебаний ракеты в плоскости тангажа.

Перейдем к рассмотрению вращения ракеты вокруг ее продольной оси. Посложив в уравнениях возмущенного движения (3.24.19)

$$\Delta M_x = 0, \quad \Delta \delta_\gamma = e^{i\omega t} \quad (3.26.14)$$

и считая коэффициенты этих дифференциальных уравнений «замороженными» в некоторый момент времени  $t = \tau$ , будем искать неизвестные функции  $\Delta\gamma$  и  $\Delta\alpha_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$  в виде

$$\Delta\gamma = \Gamma e^{i\omega t}, \quad \Delta\alpha_j = A_j e^{i\omega t}, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (3.26.15)$$

Подставляя (3.26.14) и (3.26.15) в (3.24.19), получим для множителей  $\Gamma$  и  $A_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$  систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} (i\omega \mu_x - \omega^2 J_x) \Gamma - \omega^2 \sum_{j=1}^N a_{j\gamma} A_j &= c_\gamma \delta, \\ \mu_j (\omega_j^2 - \omega^2 + i\varepsilon_j \omega) A_j - \omega^2 a_{j\gamma} \Gamma &= 0, \\ j &= 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (3.26.16)$$

Исключая из уравнений (3.26.16) неизвестные  $A_j$ ,  $j=1, 2, \dots, N$ , получим уравнение

$$-\left[\omega^2 J_x - i\omega \mu_x + \sum_{j=1}^N \frac{a_{j\Gamma}^2 \omega^4}{\mu_j (\omega_j^2 - \omega^2 + i\varepsilon_j \omega)}\right] \Gamma = c_{\Gamma\delta},$$

или

$$[C_1(\omega) + iC_2(\omega)] \Gamma = c_{\Gamma\delta}, \quad (3.26.17)$$

где

$$C_1(\omega) = -\omega^2 J_x - \sum_{j=1}^N \frac{(\omega_j^2 - \omega^2) \omega^4 a_{j\Gamma}^2}{\mu_j [(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + \varepsilon_j^2 \omega^2]},$$

$$C_2(\omega) = \omega \mu_x \sum_{j=1}^N \frac{\varepsilon_j \omega^5 a_{j\Gamma}^2}{\mu_j [(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + \varepsilon_j^2 \omega^2]}.$$
(3.26.18)

Согласно (3.26.17) будет иметь место равенство

$$\Gamma = \frac{c_{\Gamma\delta}}{C_1 + iC_2},$$

или

$$\Gamma = \Gamma_1(\omega) + i\Gamma_2(\omega), \quad (3.26.19)$$

где

$$\Gamma_1(\omega) = \frac{c_{\Gamma\delta} C_1(\omega)}{C_1^2(\omega) + C_2^2(\omega)}, \quad \Gamma_2(\omega) = -\frac{c_{\Gamma\delta} C_2(\omega)}{C_1^2(\omega) + C_2^2(\omega)}. \quad (3.26.20)$$

Придав формуле (3.26.19) вид

$$\Gamma = k_o(\omega) e^{i\varphi_o(\omega)}, \quad (3.26.21)$$

где

$$k_o(\omega) = \sqrt{\Gamma_1^2(\omega) + \Gamma_2^2(\omega)}, \quad \varphi_o(\omega) = \arctg \frac{\Gamma_2(\omega)}{\Gamma_1(\omega)}, \quad (3.26.22)$$

получим согласно (3.26.15) и (3.6.21) зависимость

$$\Delta y = k_o(\omega) e^{t[(\omega t + \varphi_o(\omega))]}.$$
(3.26.23)

В соответствии с равенством (3.6.23), функции  $k_o(\omega)$  и  $\varphi_o(\omega)$ , для которых мы получили расчетные формулы (3.26.18), (3.26.20) и (3.6.22), определяют амплитудно-частотную и фазово-частотную характеристику ракеты как объекта автоматического регулирования для случая вращения ракеты вокруг ее продольной оси.

Определив для какого-либо из каналов управления частотные характеристики ракеты как объекта регулирования и задавшись частотными характеристиками автомата стабилизации, можно построить годограф разомкнутой системы автоматического регу-

лирования и, пользуясь частотным критерием устойчивости, сделать вывод об устойчивости либо неустойчивости движения ракеты при заданных частотных характеристиках автомата стабилизации. Если коэффициент усиления и фазовый сдвиг автомата стабилизации определяются функциями  $k_a(\omega)$  и  $\varphi_a(\omega)$ , то коэффициент усиления  $k$  и фазовый сдвиг  $\varphi$  разомкнутой системы автоматического регулирования будут определяться зависимостями:

$$\left. \begin{aligned} k &= k_o(\omega) k_a(\omega), \\ \varphi &= \varphi_o(\omega) + \varphi_a(\omega). \end{aligned} \right\} \quad (3.26.24)$$

Соотношения (3.26.24) определяют уравнение годографа в полярных координатах  $k$  и  $\varphi$ . В прямоугольных координатах  $X$  и  $Y$  уравнение годографа будет иметь вид

$$\left. \begin{aligned} X &= k_o(\omega) k_a(\omega) \cos [\varphi_o(\omega) + \varphi_a(\omega)], \\ Y &= k_o(\omega) k_a(\omega) \sin [\varphi_o(\omega) + \varphi_a(\omega)]. \end{aligned} \right\} \quad (3.26.25)$$

Построив годограф разомкнутой системы в соответствии с расчетной схемой, изложенной в этом параграфе, можно сделать вывод о локальной устойчивости, либо неустойчивости движения ракеты в момент времени  $t = \tau$ , воспользовавшись критерием Найквиста.

## **§ 27. ФАЗОВАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ КОЛЕБАНИЙ КОРПУСА РАКЕТЫ И СВОБОДНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ЖИДКОСТЕЙ В ТОПЛИВНЫХ БАКАХ**

При рассмотрении вопроса об отыскании частотных характеристик автомата стабилизации, обеспечивающих устойчивость движения ракеты, будем исходить из приближенного расчета частотных характеристик ракеты, как объекта автоматического регулирования, основываясь на следующих упрощениях уравнений (3.26.3) и (3.26.16).

1. Гармонические колебания исполнительных органов системы управления с частотой  $\omega$  возбуждают колебания свободной поверхности жидкости в топливном баке с номером  $k$  практически лишь при значениях частоты  $\omega$ , весьма близких к частоте собственных колебаний этой свободной поверхности  $\omega_k$ . Если среди остальных частот собственных колебаний  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{k-1}, \omega_{k+1}, \dots, \omega_N$  отсутствуют частоты, близкие к частоте  $\omega_k$ , то при расчете частотных характеристик ракеты как регулируемого объекта для частот  $\omega$ , близких к частоте  $\omega_k$ , практически можно не учитывать колебания свободных поверхностей жидкостей в топливных баках с номерами  $1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, N$ . В этом случае в суммах, фигурирующих в уравнениях (3.26.3), сохраняются лишь слагаемые, содержащие неизвестную величину  $B_k$ , и в сумме, фигурирующей в уравнениях (3.26.16), сохранится лишь одно слагаемое, содержащее неизвестную величину  $A_k$ .

2. При определении неизвестных  $V$  и  $\theta$  из первых двух уравнений системы (3.26.3) для частот  $\omega$ , близких к частотам собственных колебаний свободных поверхностей жидкостей, основную роль среди слагаемых, содержащих эти неизвестные, играют слагаемые  $i\omega mV$  и  $\omega^2 J_z \theta$ . В связи с этим при приближенном расчете частотных характеристик ракеты как регулируемого объекта для частот  $\omega$ , близких к частотам собственных колебаний жидкостей в топливных баках, в уравнениях (3.26.3) и (3.26.16) можно пренебречь слагаемыми, содержащими в качестве множителей коэффициенты  $c_{yy}$ ,  $c_{y\delta}$ ,  $c_{\delta y}$ ,  $c_{\delta\delta}$ ,  $v_y$ ,  $\mu_z$  и  $\mu_x$ .

Таким образом, приближенный расчет частотных характеристик ракеты как объекта автоматического регулирования для частот  $\omega$ , близких к частоте  $\omega_k$ , можно осуществить, заменяя систему уравнений (3.26.3) уравнениями:

$$\begin{aligned} i\omega mV - \omega^2 a_{ky} B_k &= c_{y\delta}, \\ -\omega^2 J_z \theta - [(\omega_{0x} - g_x) a_{ky} + \omega^2 a_{k\delta}] B_k &= c_{\delta\delta}, \\ \mu_k (\omega_k^2 - \omega^2 + i\varepsilon_k \omega) B_k + i a_{ky} \omega V - \\ - [(\omega_{0x} - g_x) a_{ky} + \omega^2 a_{k\delta}] \theta &= 0 \end{aligned} \quad (3.27.1)$$

и систему уравнений (3.26.16) — уравнениями:

$$\begin{aligned} -\omega^2 J_x \Gamma - \omega^2 a_{k\gamma} A_k &= c_{\gamma\delta}, \\ \mu_k (\omega_k^2 - \omega^2 + i\varepsilon_k \omega) A_k - \omega^2 a_{k\gamma} \Gamma &= 0. \end{aligned} \quad (3.27.2)$$

Рассмотрим сперва вопрос о стабилизации движения ракеты в плоскости тангажа. Исключая из уравнений (3.27.1) неизвестные  $V$  и  $\theta$ , получим уравнение

$$\begin{aligned} \mu_k (\omega_k^2 - \omega^2 + i\varepsilon_k \omega) B_k + \frac{a_{ky}}{m} (c_{y\delta} + \omega^2 a_{ky} B_k) + \\ + \frac{1}{\omega^2 J_z} [(\omega_{0x} - g_x) a_{ky} + \omega^2 a_{k\delta}] \{c_{\delta\delta} + \\ + [(\omega_{0x} - g_x) a_{ky} + \omega^2 a_{k\delta}] B_k\} = 0, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \{ (ma_{k\delta}^2 + J_z a_{ky}^2 - \mu_k m J_z) \omega^4 + [\mu_k m J_z \omega_k^2 + 2m(\omega_{0x} - \\ - g_x) a_{ky} a_{k\delta}] \omega^2 + m(\omega_{0x} - g_x)^2 a_{ky}^2 + i\mu_k m J_z \varepsilon_k \omega^3 \} B_k = \\ = -(ma_{k\delta} c_{\delta\delta} + J_z a_{ky} c_{y\delta}) \omega^2 - m(\omega_{0x} - g_x) a_{ky} c_{\delta\delta}. \end{aligned} \quad (3.27.3)$$

Биквадратное уравнение

$$\begin{aligned} (ma_{k\delta}^2 + J_z a_{ky}^2 - \mu_k m J_z) \omega^4 + [\mu_k m J_z \omega_k^2 + \\ + 2m(\omega_{0x} - g_x) a_{ky} a_{k\delta}] \omega^2 + m(\omega_{0x} - g_x)^2 a_{ky}^2 = 0 \end{aligned} \quad (3.27.4)$$

имеет всегда положительное вещественное решение  $\omega_k^*$ , близкое к частоте  $\omega_k$ . Для его приближенного отыскания положим в (3.27.4)

$$\omega = \omega_k + \eta. \quad (3.27.5)$$

Пренебрегая при этом высшими степенями малой величины  $\eta$ , получим уравнение

$$\begin{aligned} & \left\{ 4 (ma_{k0}^2 + J_z a_{ky}^2 - \mu_k m J_z) \omega_k^3 + 2 [\mu_k m J_z \omega_k^2 + \right. \\ & \left. + 2m(\omega_{0x} - g_x) a_{ky} a_{k0}] \omega_k \right\} \eta + (ma_{k0}^2 + J_z a_{ky}^2) \omega_k^4 + \\ & + 2m(\omega_{0x} - g_x) a_{ky} a_{k0} \omega_k^2 + m(\omega_{0x} - g_x)^2 a_{ky}^2 = 0. \end{aligned} \quad (3.27.6)$$

Согласно (3.18.10) и (3.23.4) уравнение (3.27.6) может быть приведено к виду

$$\begin{aligned} & \left\{ -2\mu_k m J_z + a_{ky}^2 \left[ 4m(x_k - \delta_k)^2 + 4J_z + \frac{4m(x_k - \delta_k)}{\lambda_k} \right] \right\} \eta + \\ & + \omega_k a_{ky}^2 \left[ J_z + m(x_k - \delta_k)^2 + \frac{2m(x_k - \delta_k)}{\lambda_k} + \frac{m}{\lambda_k^2} \right] = 0, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & \left\{ 1 - \frac{2a_{ky}^2}{\mu_k m} \left[ 1 + \frac{m(x_k - \delta_k)}{\lambda_k J_z} + \frac{m(x_k - \delta_k)^2}{J_z} \right] \right\} \eta = \\ & = \frac{\omega_k a_{ky}^2}{2\mu_k m} \left[ 1 + \frac{m}{J_z} \left( x_k - \delta_k + \frac{1}{\lambda_k} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.27.7)$$

Отношение  $\frac{a_{ky}^2}{\mu_k m}$  всегда мало по сравнению с единицей и в соответствии с равенством (3.27.7) можно приближенно положить

$$\eta = \frac{\omega_k a_{ky}^2}{2\mu_k m} \left( 1 + \frac{m x_k^{*2}}{J_z} \right), \quad (3.27.8)$$

где

$$x_k^* = x_k - \delta_k + \frac{1}{\lambda_k}. \quad (3.27.9)$$

Согласно (3.27.5) и (3.27.8) решение  $\omega_k^*$  биквадратного уравнения (3.27.4) может быть приближенно вычислено по формуле

$$\omega_k^* = \omega_k \left[ 1 + \frac{a_{ky}^2}{2\mu_k m} \left( 1 + \frac{m x_k^{*2}}{J_z} \right) \right]. \quad (3.27.10)$$

При значениях частоты  $\omega$ , близких к частоте  $\omega_k^*$ , величину  $B_k$  можно приближенно определить из уравнения (3.27.3), полагая в уравнении (3.27.3)

$$\omega = \omega_k^* + \delta \quad (3.27.11)$$

и пренебрегая в левой части этого уравнения малыми величинами порядка малости  $\delta^2$  и  $\epsilon_k \delta$  и в правой части уравнения — малыми величинами порядка малости  $\delta$ . Уравнение (3.27.3) в этом случае примет вид

$$\begin{aligned} & \left\{ \left\{ 4(ma_{k\delta}^2 + J_z a_{ky}^2 - \mu_k m J_z) \omega_k^{*2} + 2[\mu_k m J_z \omega_k^{*2} + \right. \right. \\ & \left. \left. + 2m(\omega_{0x} - g_x) a_{ky} a_{k\delta}] \omega_k^* \right\} \delta + i \mu_k m J_z \epsilon_k \omega_k^{*2} \right\} B_k = \\ & = -(ma_{k\delta} c_{y\delta} + J_z a_{ky} c_{y\delta}) \omega_k^{*2} - m(\omega_{0x} - g_x) a_{ky} c_{y\delta} \quad (3.27.12) \end{aligned}$$

[напомним, что  $\omega_k^*$  — решение уравнения (3.27.4)]. Пренебрегая в левой части уравнения (3.27.12) малыми величинами порядка малости  $\delta \eta$  и  $\epsilon_k \eta$  ( $\eta = \omega_k^* - \omega_k$ ) и в правой части этого уравнения — малыми величинами порядка малости  $\eta$ , можно заменить в уравнении (3.27.12) частоту  $\omega_k^*$  частотой  $\omega_k$ . Согласно (3.18.10) и (3.23.4) в этом случае уравнению (3.27.12) можно будет придать вид

$$\begin{aligned} \omega_k \mu_k m J_z \left\{ 2 \left\{ 1 - \frac{2a_{ky}^2}{\mu_k m} \left[ 1 + \frac{m(x_k - \delta_k)}{\lambda_k J_z} + \frac{m(x_k - \delta_k)^2}{J_z} \right] \right\} \delta - i \epsilon_k \right\} B_k = \\ = a_{ky} \left[ J_z c_{y\delta} + m \left( x_k - \delta_k + \frac{1}{\lambda_k} \right) c_{y\delta} \right]. \quad (3.27.13) \end{aligned}$$

Так как отношение  $\frac{a_{ky}^2}{\mu_k m}$  мало по сравнению с единицей, уравнение (3.27.13) можно заменить приближенным уравнением

$$(2\delta - i \epsilon_k) B_k = \frac{a_{ky}}{\omega_k \mu_k m J_z} \left[ J_z c_{y\delta} + m \left( x_k - \delta_k + \frac{1}{\lambda_k} \right) c_{y\delta} \right],$$

или согласно (3.27.9)

$$(2\delta - i \epsilon_k) B_k = \frac{a_{ky} (J_z c_{y\delta} + m x_k^* c_{y\delta})}{\omega_k \mu_k m J_z}. \quad (3.27.14)$$

В соответствии со вторым из уравнений (3.27.1) функция  $\theta(\omega)$  может быть найдена по формуле

$$\theta = - \frac{(\omega_{0x} - g_x) a_{ky} + \omega^2 a_{k\delta}}{\omega^2 J_z} B_k + c_{y\delta}. \quad (3.27.15)$$



Подставляя  $B_k$  из (3.27.14) в (3.27.15), получим соотношение

$$\theta = - \frac{1}{\omega^2 \omega_k \mu_k m J_z^2 (2\delta - i\varepsilon_k)} \{ [(\omega_{0x} - g_x) a_{ky} + \omega^2 a_{k\delta}] \times \\ \times a_{ky} (J_z c_{y\delta} + m x_k^* c_{\delta\delta}) + \omega_k \mu_k m J_z c_{\delta\delta} (2\delta - i\varepsilon_k) \}. \quad (3.27.16)$$

Учитывая предполагаемую нами близость частоты  $\omega$  к частоте  $\omega_k$  и малость величин  $\delta$  и  $\varepsilon_k$ , можно заменить равенство (3.27.16) приближенным равенством

$$\theta = - \frac{[(\omega_{0x} - g_x) a_{ky} + \omega_k^2 a_{k\delta}] a_{ky} (J_z c_{y\delta} + m x_k^* c_{\delta\delta})}{\omega_k^3 \mu_k m J_z^2 (2\delta - i\varepsilon_k)}. \quad (3.27.17)$$

В соответствии с формулами (3.18.10) и (3.23.4) соотношению (3.27.17) можно придать вид

$$\theta = - \frac{\left(x_k - \delta_k + \frac{1}{\lambda_k}\right) a_{ky}^2 (J_z c_{y\delta} + m x_k^* c_{\delta\delta})}{\omega_k \mu_k m J_z^2 (2\delta - i\varepsilon_k)},$$

или, если воспользоваться обозначением (3.27.9),

$$\theta = - \frac{x_k^* (J_z c_{y\delta} + m x_k^* c_{\delta\delta}) a_{ky}^2}{\omega_k \mu_k m J_z^2 (2\delta - i\varepsilon_k)}. \quad (3.27.18)$$

Согласно (3.26.11) и (3.27.18) будут иметь место равенства:

$$k_o(\omega) \cos \varphi_o(\omega) = \operatorname{Re} \theta = - \frac{2x_k^* (J_z c_{y\delta} + m x_k^* c_{\delta\delta}) a_{ky}^2 \delta}{\omega_k \mu_k m J_z^2 (4\delta^2 + \varepsilon_k^2)}, \\ k_o(\omega) \sin \varphi_o(\omega) = \operatorname{Im} \theta = - \frac{x_k^* (J_z c_{y\delta} + m x_k^* c_{\delta\delta}) a_{ky}^2 \varepsilon_k}{\omega_k \mu_k m J_z^2 (4\delta^2 + \varepsilon_k^2)}. \quad (3.27.19)$$

В соответствии с формулами (3.26.25) и (3.27.19) в рассматриваемом случае уравнение годографа разомкнутой системы автоматического регулирования будет иметь вид

$$X = - \frac{x_k^* (J_z c_{y\delta} + m x_k^* c_{\delta\delta}) a_{ky}^2}{\omega_k \mu_k m J_z^2 (4\delta^2 + \varepsilon_k^2)} k_a(\omega) \times \\ \times [2\delta \cos \varphi_a(\omega) - \varepsilon_k \sin \varphi_a(\omega)], \\ Y = - \frac{x_k^* (J_z c_{y\delta} + m x_k^* c_{\delta\delta}) a_{ky}^2}{\omega_k \mu_k m J_z^2 (4\delta^2 + \varepsilon_k^2)} k_a(\omega) \times \\ \times [2\delta \sin \varphi_a(\omega) + \varepsilon_k \cos \varphi_a(\omega)]. \quad (3.27.20)$$

Учитывая предполагаемую нами близость частоты  $\omega$  к частоте  $\omega_k$ , можно заменить равенства (3.27.20) приближенными равенствами:

$$X = - \frac{x_k^* (J_z c_{y\delta} + m x_k^* c_{\theta\delta}) a_{ky}^2}{\omega_k \mu_k m J_z^2 (4\delta^2 + \varepsilon_k^2)} k_a(\omega_k) [2\delta \cos \varphi_a(\omega_k) - \varepsilon_k \sin \varphi_a(\omega_k)],$$

$$Y = - \frac{x_k^* (J_z c_{y\delta} + m x_k^* c_{\theta\delta}) a_{ky}^2}{\omega_k \mu_k m J_z^2 (4\delta^2 + \varepsilon_k^2)} k_a(\omega_k) [2\delta \sin \varphi_a(\omega_k) + \varepsilon_k \cos \varphi_a(\omega_k)],$$

или

$$X = \frac{2c_k \varepsilon_k [2\delta \cos \varphi_a(\omega_k) - \varepsilon_k \sin \varphi_a(\omega_k)]}{4\delta^2 + \varepsilon_k^2},$$

$$Y = \frac{2c_k \varepsilon_k [2\delta \sin \varphi_a(\omega_k) + \varepsilon_k \cos \varphi_a(\omega_k)]}{4\delta^2 + \varepsilon_k^2}, \quad (3.27.21)$$

где

$$c_k = - \frac{k_a(\omega_k) x_k^* (J_z c_{y\delta} + m x_k^* c_{\theta\delta}) a_{ky}^2}{2\varepsilon_k \omega_k \mu_k m J_z^2}. \quad (3.27.22)$$

Согласно (3.27.21) должны иметь место равенства:

$$X \cos \varphi_a(\omega_k) + Y \sin \varphi_a(\omega_k) = \frac{4c_k \varepsilon_k \delta}{4\delta^2 + \varepsilon_k^2},$$

$$X \sin \varphi_a(\omega_k) - Y \cos \varphi_a(\omega_k) = - \frac{2c_k \varepsilon_k^2}{4\delta^2 + \varepsilon_k^2}, \quad (3.27.23)$$

в соответствии с которыми параметр  $\delta$  может быть выражен через координаты годографа  $X, Y$  соотношением

$$\delta = - \frac{\varepsilon_k [X \cos \varphi_a(\omega_k) + Y \sin \varphi_a(\omega_k)]}{2[X \sin \varphi_a(\omega_k) - Y \cos \varphi_a(\omega_k)]}. \quad (3.27.24)$$

Подставляя (3.27.24) во второе из равенств (3.27.23), можно привести уравнение годографа к виду

$$-2c_k = [X \sin \varphi_a(\omega_k) - Y \cos \varphi_a(\omega_k)] \times$$

$$\times \left\{ 1 + \frac{[X \cos \varphi_a(\omega_k) + Y \sin \varphi_a(\omega_k)]^2}{[X \sin \varphi_a(\omega_k) - Y \cos \varphi_a(\omega_k)]^2} \right\} =$$

$$= \frac{X^2 + Y^2}{X \sin \varphi_a(\omega_k) - Y \cos \varphi_a(\omega_k)},$$

или

$$X^2 + Y^2 + 2c_k [X \sin \varphi_a(\omega_k) - Y \cos \varphi_a(\omega_k)] = 0. \quad (3.27.25)$$

Уравнение (3.27.25) представляет собой уравнение окружности. Приведение этого уравнения к каноническому виду

$$[X + c_k \sin \varphi_a(\omega_k)]^2 + [Y - c_k \cos \varphi_a(\omega_k)]^2 = c_k^2 \quad (3.27.26)$$

показывает, что координаты центра данной окружности  $X_0$ ,  $Y_0$  соответственно равны:

$$X_0 = -c_k \sin \varphi_a(\omega_k), \quad Y_0 = c_k \cos \varphi_a(\omega_k), \quad (3.27.27)$$

радиус окружности равен  $|c_k|$ , окружность проходит через начало координат.

При  $X_0 < 0$  годограф разомкнутой системы при значениях частоты  $\omega$ , близких к частоте  $\omega_k$ , будет иметь вид, показанный на рис. 3.16 сплошной линией для случая  $Y_0 > 0$  и пунктирной линией — для случая  $Y_0 < 0$ . В обоих случаях независимо от радиуса окружности на частотах  $\omega$ , близких к частоте  $\omega_k$ , годограф разомкнутой системы не может охватывать точку  $X=1$ ,  $Y=0$ . Согласно (3.27.27) при внесенных нами упрощениях условия

$$c_k \sin \varphi_a(\omega_k) > 0 \quad (3.27.28)$$

являются достаточными условиями устойчивости колебаний корпуса ракеты и свободных поверхностей жидкостей в топливных баках<sup>1</sup>. Условие (3.27.28) называют условием *фазовой стабилизации*, так как выполнение его обеспечивается созданием в автомате стабилизации фазового опережения на частоте  $\omega = \omega_k$  при  $c_k > 0$  либо фазового запаздывания на этой частоте при  $c_k < 0$ ; значение, принимаемое на частоте  $\omega = \omega_k$  коэффициентом усиления автомата стабилизации, в данном случае роли не играет. В соответствии с формулой (3.27.22) условию фазовой стабилизации (3.27.28) можно придать вид

$$x_k^* (J_z c_{\psi\delta} + m x_k^* c_{\vartheta\delta}) \sin \varphi_a(\omega_k) < 0. \quad (3.27.29)$$

Если система управления не создает управляющей силы и ее исполнительные органы формируют только управляющий момент (управление рассогласованием тяг), условие (3.27.29) принимает вид

$$\sin \varphi_a(\omega_k) > 0, \quad (3.27.30)$$

так как в этом случае  $c_{\psi\delta} = 0$ ,  $c_{\vartheta\delta} < 0$ . Таким образом, в рассматриваемом случае фазовую стабилизацию колебаний можно обеспечить, реализуя в автомате стабилизации фазовое опережение в диапазоне частот, охватывающем все частоты собственных колебаний свободных поверхностей жидкостей  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$ .

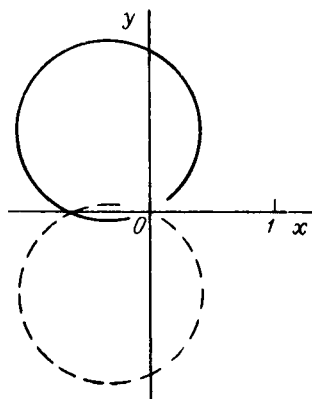


Рис. 3.16.

<sup>1</sup> После упрощений, сделанных в начале этого параграфа, передаточная функция не может иметь полюсов в правой полуплоскости.

Если исполнительные органы системы управления создают управляющую силу, то

$$c_{y\delta} = -lc_{y\delta}, \quad (3.27.31)$$

где  $l$  — расстояние от линии действия управляющей силы до плоскости  $x=0$ . В этом случае условие (3.27.29) принимает вид

$$x_k^* \left( 1 - \frac{mx_k^* l}{J_z} \right) \sin \varphi_a(\omega_k) < 0 \quad (3.27.32)$$

(коэффициент  $c_{y\delta}$  всегда положителен). Согласно (3.27.32) для фазовой стабилизации колебаний требуется фазовое опережение на частоте  $\omega_k$  при

$$x_k^* < 0 \text{ и } x_k^* > \frac{J_z}{ml} \quad (3.27.33)$$

и фазовое запаздывание — при

$$0 < x_k^* < \frac{J_z}{ml}. \quad (3.27.34)$$

Координата  $x_k^*$  обычно мало отличается от координаты  $x_k$ . Таким образом, реализуя в автомате стабилизации фазовое опережение в диапазоне частот, охватывающем частоты собственных колебаний свободных поверхностей жидкостей  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$ , мы осуществим фазовую стабилизацию колебаний для топливных баков, у которых свободные поверхности жидкостей лежат ниже центра масс ракеты. Для остальных топливных баков условия фазовой стабилизации, как правило, будут при этом нарушаться. Реализация в автомате стабилизации фазового опережения для одних топливных баков и фазового запаздывания для других баков практически невозможна, так как частоты собственных колебаний  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$  лежат обычно в небольшом частотном диапазоне и, кроме того, меняются в процессе полета ракеты. В связи с этим в автомате стабилизации для всего диапазона частот собственных колебаний свободных поверхностей жидкостей реализуют обычно фазовое опережение и в верхних топливных баках, для которых на первой ступени полета условие фазовой стабилизации нарушается, устанавливают перфорированные крышки, практически исключающие возможность колебаний свободных поверхностей жидкостей в этих баках до тех пор, пока эти баки не начинают опорожняться. К тому времени, когда топливо в этих баках начинает расходоваться, поверхности жидкостей в них, как правило, оказываются уже ниже центра масс ракеты и устойчивость движения не нарушается. Места для установки крышек выбираются с учетом минимального допустимого уровня заправки баков.

Указанным выше путем удастся обычно добиться стабилизации колебаний для большей части активного полета ракеты, од-

нако на конечных участках активного движения условия устойчивости сплошь и рядом нарушаются. Этот случай рассматривается нами в следующем параграфе данной главы.

Перейдем к рассмотрению вращения ракеты вокруг ее продольной оси. Исключая из уравнений (3.27.2) неизвестную величину  $\Gamma$ , получим уравнение

$$[J_{x^1\mu_k}(\omega_k^2 - \omega^2 + i\varepsilon_k\omega) + \omega^2 a_{k\gamma}^2] A_k + a_{k\gamma} c_{\gamma\delta} = 0. \quad (3.27.35)$$

Полагая в (3.27.35)

$$\omega_k^2 = \left(1 - \frac{a_{k\gamma}^2}{J_{x^1\mu_k}}\right) \omega_k^{*2}, \quad (3.27.36)$$

можно преобразовать это уравнение:

$$\left[\left(1 - \frac{a_{k\gamma}^2}{J_{x^1\mu_k}}\right)(\omega_k^{*2} - \omega^2) + i\varepsilon_k\omega\right] A_k = -\frac{a_{k\gamma} c_{\gamma\delta}}{J_{x^1\mu_k}}. \quad (3.27.37)$$

При значениях частоты  $\omega$ , близких к частоте  $\omega_k^*$ , где

$$\omega_k^* = \frac{\omega_k}{\sqrt{1 - \frac{a_{k\gamma}^2}{J_{x^1\mu_k}}}} \quad (3.27.38)$$

в соответствии с равенством (3.27.36), величину  $A_k$  можно приближенно определить из уравнения (3.27.37), полагая в этом уравнении

$$\omega = \omega_k^* + \delta \quad (3.27.39)$$

и пренебрегая в левой части уравнения малыми величинами порядка малости  $\delta^2$  и  $\varepsilon_k \delta$ . Уравнение (3.27.37) в этом случае примет вид

$$\left[2\left(1 - \frac{a_{k\gamma}^2}{J_{x^1\mu_k}}\right)\delta - i\varepsilon_k\right] A_k = \frac{a_{k\gamma} c_{\gamma\delta}}{\omega_k^* J_{x^1\mu_k}}. \quad (3.27.40)$$

Отношение  $\frac{a_{k\gamma}^2}{J_{x^1\mu_k}}$  всегда мало по сравнению с единицей, и согласно (3.27.38) частота  $\omega_k^*$  всегда будет близка к частоте  $\omega_k$ . В соответствии с этим уравнение (3.27.40) можно заменить приближенным уравнением

$$(2\delta - i\varepsilon_k) A_k = -\frac{a_{k\gamma} c_{\gamma\delta}}{\omega_k J_{x^1\mu_k}}. \quad (3.27.41)$$

Подставляя  $A_k$  из (3.27.41) в первое из уравнений (3.27.2), получим для величины  $\Gamma$  выражение

$$\Gamma = -\frac{\omega^2 a_{k\gamma}^2 + \omega_k J_{x^1\mu_k} (2\delta - i\varepsilon_k)}{\omega^2 \omega_k J_{x^1\mu_k}^2 (2\delta - i\varepsilon_k)} c_{\gamma\delta}. \quad (3.27.42)$$

Учитывая малость  $\delta$  и  $\varepsilon_k$ , можно заменить формулу (3.27.42) приближенной формулой

$$\Gamma = - \frac{a_{k\gamma}^2 c_{\gamma\delta}}{\omega_k J_x^2 \mu_k (2\delta - i\varepsilon_k)}. \quad (3.27.43)$$

Согласно (3.26.21) и (3.27.43) будут иметь место равенства:

$$\begin{aligned} k_o(\omega) \cos \varphi_o(\omega) &= \operatorname{Re} \Gamma = - \frac{2a_{k\gamma}^2 c_{\gamma\delta}}{\omega_k J_x^2 \mu_k (4\delta^2 + \varepsilon_k^2)}, \\ k_o(\omega) \sin \varphi_o(\omega) &= \operatorname{Im} \Gamma = - \frac{a_{k\gamma}^2 c_{\gamma\delta} \varepsilon_k}{\omega_k J_x^2 \mu_k (4\delta^2 + \varepsilon_k^2)}. \end{aligned} \quad (3.27.44)$$

В соответствии с формулами (3.26.25) и (3.27.44) в рассматриваемом случае уравнение годографа разомкнутой системы автоматического регулирования будет иметь вид

$$\begin{aligned} X &= - \frac{a_{k\gamma}^2 c_{\gamma\delta}}{\omega_k J_x^2 \mu_k (4\delta^2 + \varepsilon_k^2)} k_a(\omega) [2\delta \cos \varphi_a(\omega) - \varepsilon_k \sin \varphi_a(\omega)], \\ Y &= - \frac{a_{k\gamma}^2 c_{\gamma\delta}}{\omega_k J_x^2 \mu_k (4\delta^2 + \varepsilon_k^2)} k_a(\omega) [2\delta \sin \varphi_a(\omega) + \varepsilon_k \cos \varphi_a(\omega)]. \end{aligned} \quad (3.27.45)$$

Учитывая предполагаемую нами близость частоты  $\omega$  к частоте  $\omega_k$ , можно заменить равенства (3.27.45) приближенными равенствами:

$$\begin{aligned} X &= - \frac{a_{k\gamma}^2 c_{\gamma\delta}}{\omega_k J_x^2 \mu_k (4\delta^2 + \varepsilon_k^2)} k_a(\omega_k) [2\delta \cos \varphi_a(\omega_k) - \\ &\quad - \varepsilon_k \sin \varphi_a(\omega_k)], \\ Y &= - \frac{a_{k\gamma}^2 c_{\gamma\delta}}{\omega_k J_x^2 \mu_k (4\delta^2 + \varepsilon_k^2)} k_a(\omega_k) [2\delta \sin \varphi_a(\omega_k) + \\ &\quad + \varepsilon_k \cos \varphi_a(\omega_k)]. \end{aligned} \quad (3.27.46)$$

Полагая в данном случае

$$c_k = - \frac{k_a(\omega_k) a_{k\gamma}^2 c_{\gamma\delta}}{2\varepsilon_k \omega_k \mu_k J_x^2}, \quad (3.27.47)$$

можно привести уравнение годографа разомкнутой системы (3.27.46) к виду (3.27.26), установленному нами ранее при рассмотрении движения ракеты в плоскости тангажа. В рассматриваемом случае всегда будет иметь место неравенство

$$c_k > 0, \quad (3.27.48)$$

так как коэффициент  $c_{\gamma\delta}$  всегда отрицателен. В соответствии с неравенством (3.27.48) условия фазовой стабилизации (3.27.28) для случая вращения ракеты вокруг ее продольной оси будут иметь вид

$$\sin \varphi_a(\omega_k) > 0, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (3.27.49)$$

Таким образом, в рассматриваемом случае фазовую стабилизацию колебаний можно обеспечить, реализовав в автомате стабилизации фазовое опережение в диапазоне частот, охватывающем все частоты собственных колебаний свободных поверхностей жидкостей  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$ .

В заключение этого параграфа отметим, что указанные в нем критерии устойчивости основываются на упрощениях расчетной схемы, сделанных в начале параграфа, и в отдельных случаях могут оказываться неверными. Строгое заключение об устойчивости движения может быть сделано лишь на основе точного построения годографа.

## § 28. АВТОКОЛЕБАНИЯ РАКЕТЫ В ПЛОСКОСТИ ТАНГАЖА

Рассмотрим теперь тот случай, когда для топливного бака с номером  $k$  условие фазовой стабилизации колебаний в плоскости тангажа (3.27.28) не может быть обеспечено.

Согласно (3.27.27) при  $c_k \sin \varphi_a(\omega_k) < 0$  координата  $X_0$  центра окружности, приближенно определяющей вид годографа разомкнутой системы для частот  $\omega$ , близких к частоте  $\omega_k$ , будет положительной. В данном случае эта окружность будет иметь вид, показанный на рис. 3.17 сплошной линией для случая  $Y_0 > 0$  и пунктирной линией — для случая  $Y_0 < 0$ . В соответствии с уравнением рассматриваемой окружности (3.27.26) точки ее пересечения с прямой  $Y=0$  будут определяться квадратным уравнением

$$[X + c_k \sin \varphi_a(\omega_k)]^2 + c_k^2 \cos^2 \varphi_a(\omega_k) = c_k^2,$$

или

$$X[X + 2c_k \sin \varphi_a(\omega_k)] = 0. \quad (3.28.1)$$

Таким образом, окружность будет пересекать ось  $X$  в точках с координатами

$$X=0 \text{ и } X = -2c_k \sin \varphi_a(\omega_k)$$

и условие устойчивости колебаний  $k$ -го топливного бака будет иметь вид

$$-2c_k \sin \varphi_a(\omega_k) < 1. \quad (3.28.2)$$

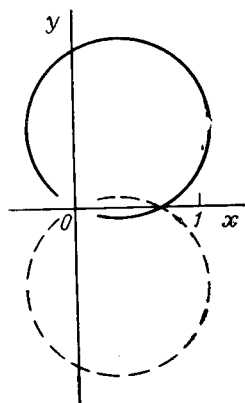


Рис. 3.17.

В соответствии с формулой (3.27.22) условию (3.28.2) можно придать вид

$$\frac{k_a(\omega_k) \sin \varphi_a(\omega_k) x_k^* (J_z c_{y\delta} + m x_k^* c_{\theta\delta}) a_{ky}^2}{\varepsilon_k \omega_k \mu_k m J_z^2} < 1,$$

или

$$\varepsilon_k > \varepsilon_k^{(0)}, \quad (3.28.3)$$

где

$$\varepsilon_k^{(0)} = \frac{k_a(\omega_k) \sin \varphi_a(\omega_k) x_k^* (J_z c_{y\delta} + m x_k^* c_{\theta\delta}) a_{ky}^2}{\omega_k \mu_k m J_z^2}. \quad (3.28.4)$$

Величина  $\varepsilon_k^{(0)}$  определяет то минимальное значение коэффициента демпфирования  $\varepsilon_k$ , при котором колебания остаются еще устойчивыми. В частности, при  $\varepsilon_k = \varepsilon_k^{(0)}$  годограф разомкнутой системы автоматического регулирования на некоторой частоте  $\omega_k^{(0)}$ , близкой к частоте  $\omega_k$ , проходит через точку  $X=1$ ,  $Y=0$ , и в данном случае колебания приобретают гармонический характер.

Как было уже отмечено выше, в § 22, коэффициент демпфирования зависит от амплитуды колебаний свободной поверхности жидкости в топливном баке и возрастает при возрастании амплитуды этих колебаний. Предел, к которому стремится коэффициент демпфирования  $\varepsilon_k$ , когда амплитуда колебаний свободной поверхности жидкости в  $k$ -м баке стремится к нулю, как правило, оказывается недостаточным для выполнения условия устойчивости (3.28.3). В этом случае равенство  $\varepsilon_k = \varepsilon_k^{(0)}$  выполняется лишь при некотором конкретном значении амплитуды колебаний свободной поверхности жидкости в  $k$ -м топливном баке, которое можно рассчитать, располагая для этого бака экспериментальными данными о зависимости коэффициента демпфирования от амплитуды колебаний свободной поверхности. Значение амплитуды колебаний свободной поверхности жидкости в  $k$ -м топливном баке, при котором коэффициент демпфирования  $\varepsilon_k$  принимает значение  $\varepsilon_k^{(0)}$ , определяемое формулой (3.28.4), будем обозначать ниже через  $\beta_k^{(0)}$ <sup>1</sup>. В рассматриваемом случае одним из возможных движений ракеты будет такое ее движение в плоскости тангажа, при котором свободная поверхность жидкости в  $k$ -м топливном баке совершает гармонические колебания с амплитудой  $\beta_k^{(0)}$ . При значениях амплитуды колебаний свободной поверхности жидкости в  $k$ -м топливном баке, не достигающих критического значения  $\beta_k^{(0)}$ , будет иметь место неравенство  $\varepsilon_k < \varepsilon_k^{(0)}$ , колебания будут неустойчивыми и их амплитуда будет возрастать.

<sup>1</sup> При расчете амплитуды  $\beta_k^{(0)}$  следует учитывать зависимость частотных характеристик автомата стабилизации, фигурирующих в формуле (3.28.4), от амплитуды входного сигнала автомата стабилизации. Учет нелинейности автомата стабилизации подробнее рассматривается в конце параграфа.



При значениях амплитуды колебаний свободной поверхности, превышающих  $\beta_k^{(0)}$ , будет иметь место неравенство  $\epsilon_k > \epsilon_k^{(0)}$  и колебания будут затухающими. Таким образом, указанное выше движение ракеты в плоскости тангажа, при котором свободная поверхность жидкости в  $k$ -м топливном баке совершает гармонические колебания с амплитудой  $\beta_k^{(0)}$ , является *устойчивым автоколебательным движением*, которое неизбежно будет возникать в рассмотренных нами условиях.

В § 26 мы показали, что при  $\Delta\delta = \epsilon^{i\omega t}$ ,  $\Delta F_y = 0$ ,  $\Delta M_z = 0$  дифференциальные уравнения возмущенного движения (3.24.12) имеют решение, определяемое формулами (3.26.2). В соответствии с этим при

$$\Delta\delta = \delta_0 e^{i\omega t}, \quad \Delta F_y = 0, \quad \Delta M_z = 0 \quad (3.28.5)$$

дифференциальные уравнения возмущенного движения будут иметь решения

$$\Delta V_y = \delta_0 V e^{i\omega t}, \quad \Delta\theta = \delta_0 \theta e^{i\omega t}, \quad \Delta\beta_j = \delta_0 B_j e^{i\omega t}, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (3.28.6)$$

так как эти дифференциальные уравнения линейны. Таким образом, колебания исполнительных органов системы управления, обладающие амплитудой  $\delta_0$ , вызывают колебания свободной поверхности жидкости в  $k$ -м топливном баке, имеющие амплитуду  $\delta_0 |B_k|$ . Согласно (3.27.11) и (3.27.14) должно иметь место равенство

$$\sqrt{4(\omega - \omega_k^*)^2 + \epsilon_k^2} |B_k| = \frac{a_{ky} |J_z c_{y\delta} + m x_k^* c_{\theta\delta}|}{\omega_k \mu_k m J_z}. \quad (3.28.7)$$

В соответствии с этим равенством амплитуда колебаний свободной поверхности жидкости в  $k$ -ом топливном баке будет определяться выражением

$$\frac{a_{ky} |J_z c_{y\delta} + m x_k^* c_{\theta\delta}| \delta_0}{\omega_k \mu_k m J_z \sqrt{4(\omega - \omega_k^*)^2 + \epsilon_k^2}}, \quad (3.28.8)$$

где  $\omega$  — частота колебаний исполнительных органов системы управления;  $\delta_0$  амплитуда этих колебаний. Полагая в этом выражении  $\omega = \omega_k^{(0)}$ , где  $\omega_k^{(0)}$  — частота исследуемых нами автоколебаний, и приравнявая полученный результат амплитуде автоколебаний свободной поверхности жидкости в  $k$ -м топливном баке  $\beta_k^{(0)}$ , получим для амплитуды автоколебаний исполнительных органов системы управления формулу

$$\delta_0 = \frac{\omega_k \mu_k m J_z \sqrt{4(\omega_k^{(0)} - \omega_k^*)^2 + \epsilon_k^{(0)2}}}{a_{ky} |J_z c_{y\delta} + m x_k^* c_{\theta\delta}|} \beta_k^{(0)}, \quad (3.28.9)$$

где  $\epsilon_k^{(0)}$  — значение коэффициента демпфирования  $\epsilon_k$ , соответствующее рассматриваемому нами автоколебательному режиму колебаний.

Точка годографа разомкнутой системы, соответствующая частоте автоколебаний  $\omega_k^{(0)}$ , имеет координаты  $X=1$ ,  $Y=0$ . В соответствии с формулой (3.27.11) и второй из формул (3.27.21) должно иметь место равенство

$$2(\omega_k^{(0)} - \omega_k^*) \sin \varphi_a(\omega_k) + \varepsilon_k^{(0)} \cos \varphi_a(\omega_k) = 0. \quad (3.28.10)$$

Согласно (3.28.10) формулу (3.28.9) можно преобразовать так:

$$\delta_0 = \frac{\omega_k \mu_k m J z \varepsilon_k^{(0)}}{a_{ky} |J_z c_{y\delta} + m x_k^* c_{\vartheta z}| |\sin \varphi_a(\omega_k)|} \beta_k^{(0)}. \quad (3.28.11)$$

В рассматриваемом нами случае величина, фигурирующая в правой части равенства (3.28.4), положительна и формуле (3.28.4) можно придать вид

$$\varepsilon_k^{(0)} = \frac{k_a(\omega_k) |\sin \varphi_a(\omega_k)| |x_k^*| |J_z c_{y\delta} + m x_k^* c_{\vartheta \delta}| a_{ky}^2}{\omega_k \mu_k m J_z^2}. \quad (3.28.12)$$

Подставляя (3.28.12) в (3.28.11), получим для амплитуды автоколебаний исполнительных органов системы управления формулу

$$\delta_0 = \frac{k_a(\omega_k) |x_k^*| a_{ky}}{J_z} \beta_k^{(0)}. \quad (3.28.13)$$

В автоколебательном режиме амплитуда колебаний входного сигнала автомата стабилизации  $\vartheta_0$  будет связана с амплитудой колебаний исполнительных органов системы управления  $\delta_0$  соотношением

$$\delta_0 = k_a(\omega_k^{(0)}) \vartheta_0. \quad (3.28.14)$$

Учитывая близость частоты автоколебаний  $\omega_k^{(0)}$  к частоте  $\omega_k$ , можно заменить равенство (3.28.14) приближенным равенством

$$\delta_0 = k_a(\omega_k) \vartheta_0. \quad (3.28.15)$$

Согласно (3.28.13) и (3.28.15) амплитуду автоколебаний входного сигнала автомата стабилизации можно определить по формуле

$$\vartheta_0 = \frac{|x_k^*| a_{ky}}{J_z} \beta_k^{(0)}. \quad (3.28.16)$$

Посредством формул (3.28.4) и (3.28.16) можно определить амплитуду автоколебаний свободной поверхности жидкости в  $k$ -ом топливном баке  $\beta_k^{(0)}$  и амплитуду автоколебаний входного сигнала автомата стабилизации  $\vartheta_0$ , располагая экспериментальными данными о зависимости коэффициента демпфирования от амплитуды колебаний свободной поверхности в  $k$ -ом баке.

Большие амплитуды автоколебаний свободных поверхностей жидкостей в топливных баках являются недопустимыми, так как они вызывают быстрое падение давления наддува<sup>1</sup>. Большие амплитуды автоколебаний входного сигнала автомата стабилизации также являются недопустимыми, так как из-за этих колебаний помехи на входе автомата стабилизации могут превысить допустимый их уровень. Снижение амплитуд автоколебаний до допустимого их уровня достигается подбором достаточно эффективных внутрибаковых устройств, повышающих коэффициенты демпфирования. Повышение коэффициента демпфирования может быть достигнуто, в частности, путем установки в топливном баке продольных перфорированных ребер. Поперечное сечение бака, снабженного такими продольными демпфирующими ребрами, показано на рис. 3.18. Число демпфирующих ребер и их профиль подбираются таким образом, чтобы требуемый коэффициент демпфирования достигался в данном баке при допустимой амплитуде колебаний свободной поверхности жидкости.

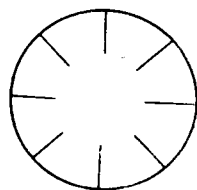


Рис. 3.18.

При наличии продольных ребер, показанных на рис. 3.18, смачиваемая поверхность бака перестает быть поверхностью вращения, что предполагалось нами в большей части этой главы. В этом случае момент инерции жидкости, находящейся в топливном баке, относительно оси этого бака становится отличным от нуля, так как в этом случае в процессе вращения бака вокруг его продольной оси жидкость вовлекается во вращение захватывающими ее ребрами. Кроме того, при наличии ребер колебания бака вокруг его продольной оси вызывают колебания свободной поверхности находящейся в нем жидкости, которые не учитывались нами при рассмотрении устойчивости движения ракеты в плоскости крена. Расчетное исследование указанных выше эффектов связано с большими вычислительными трудностями; для учета этих эффектов в вопросе о стабилизации вращения ракеты вокруг ее продольной оси применяются обычно экспериментальные методы. Описание этих экспериментальных методов содержится в книге [14].

Как отмечалось выше, коэффициент усиления автомата стабилизации  $k_a(\omega_k)$  и фазовый сдвиг  $\varphi_a(\omega_k)$  зависят от амплитуды колебаний входного сигнала  $\vartheta_0$ . При расчете амплитуд автоколебаний эту зависимость учитывают следующим образом. В первом приближении при определении требуемого демпфирования  $\varepsilon_k^{(0)}$  подставляют в формулу (3.28.4) предельные значения, к которым стремятся величины  $k_a(\omega_k)$  и  $\varphi_a(\omega_k)$  при  $\vartheta_0 \rightarrow 0$ . Отыскав да-

<sup>1</sup> Влияние колебаний свободной поверхности жидкости в топливном баке на давление наддува подробно рассматривается обычно в курсе проектирования ракет.

лее амплитуду колебаний свободной поверхности жидкости  $\beta_k^{(0)}$  определяют по формуле (3.28.16) первое приближение для амплитуды колебаний входного сигнала автомата стабилизации  $\theta_0$ . В следующем приближении для определения потребного демпфирования  $\varepsilon_k^{(0)}$  подставляют в формулу (3.28.4) значения коэффициента усиления  $k_a(\omega_k)$  и фазового сдвига  $\varphi_a(\omega_k)$ , соответствующие первому приближению для амплитуды колебаний входного сигнала автомата стабилизации  $\theta_0$ , рассчитывают далее второе приближение для амплитуды колебаний свободной поверхности жидкости  $\beta_k^{(0)}$  и для амплитуды колебаний входного сигнала автомата стабилизации  $\theta_0$  и т. д. Этот процесс последовательных приближений оказывается обычно хорошо сходящимся и быстро приводит к цели.

Методы исследования, изложенные в этой главе, применяются для предварительного выбора частотных характеристик автоматов стабилизации и для разработки внутрибаковых устройств, необходимых для стабилизации колебаний жидких компонентов топлива. Дальнейшую проверку устойчивости движения и окончательный выбор частотных характеристик автоматов стабилизации осуществляют обычно методом электро моделирования с реальной аппаратурой системы управления.

---

## Глава IV

### **СТАБИЛИЗАЦИЯ ДВИЖЕНИЯ РАКЕТЫ С УЧЕТОМ УПРУГОСТИ ЕЕ КОНСТРУКЦИИ**

#### **§ 1. ПРОСТЕЙШАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОБ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЯХ КОРПУСА РАКЕТЫ**

При исследовании упругих колебаний ракеты, возникающих в процессе ее полета, мы ограничимся рассмотрением изгибных колебаний корпуса ракеты в плоскости тангажа. В вопросе о стабилизации изгибных колебаний ракеты все расчетные схемы для плоскости рыскания практически ничем не отличаются от соответствующих расчетных схем для плоскости тангажа. Заменяя в расчетных схемах, построенных для плоскости тангажа, уравнение изгиба уравнением кручения, можно получить расчетные схемы для решения вопроса о стабилизации крутильных колебаний ракеты.

Расчет деформаций различных элементов конструкции ракеты, возникающих под действием заданных нагрузок, представляет собой весьма сложную задачу строительной механики и в связи с этим при составлении уравнений движения ракеты, учитывающих упругость ее конструкции, исходят всегда из замены реальной конструкции ракеты некоторой упрощенной ее механической моделью. Вопрос о стабилизации изгибных колебаний корпуса ракеты мы рассмотрим, отправляясь от простейших исходных предположений, которые нами формулируются в этом параграфе.

При выводе уравнений движения ракеты в плоскости тангажа, учитывающих упругость ее конструкции, будем исходить ниже из следующих допущений.

1. Будем предполагать, что корпус ракеты деформируется, как полый упругий стержень, и при расчете его изгибных деформаций будем исходить из соответствующих уравнений сопротивления материалов.

2. Будем пренебрегать взаимным влиянием деформаций сжатия (растяжения), сдвига, изгиба и кручения и в соответствии с этим при рассмотрении изгибных колебаний ракеты будем пользоваться уравнениями чистого изгиба.

3. Будем предполагать, что частицы ракеты, лежащие в начальный момент времени в каком-либо ее плоском поперечном

сечении, в процессе движения ракеты не меняют своего взаимного расположения. Применительно к корпусу ракеты это предположение совпадает с гипотезой плоских сечений, лежащей в основе сопротивления материалов. Для жидких компонентов топлива данное предположение исключает возможность волнообразования на свободных поверхностях жидкостей. Это предположение исключает также возможность учета реальных деформаций элементов конструкции, крепящихся к несущему корпусу, и деформаций узлов крепления.

4. Будем предполагать, что крайние поперечные сечения ракеты свободны от нагрузок. В соответствии с этим при рассмотрении изгиба ракеты будем считать, что перерезывающая сила и изгибающий момент в концах ракеты обращаются в нуль.

В предыдущих главах мы предполагали, что оси связанной системы координат  $x, y, z$  совпадают с главными центральными осями инерции в том случае, когда свободные поверхности жидкостей имеют форму плоскостей, нормальных к продольной оси ракеты. В дальнейшем, учитывая при выводе уравнений движения ракеты упругость ее конструкции, мы по-прежнему будем предполагать, что оси подвижной системы координат  $x, y, z$  всегда совпадают с главными центральными осями инерции ракеты.

Изгиб корпуса ракеты в плоскости тангажа оказывает влияние на аэродинамические и реактивные силы, действующие на ракету. В каждом поперечном сечении корпуса ракеты будем рассматривать так называемый «местный» угол атаки, складывающийся из угла  $\alpha$ , образуемого положительным награвлением оси  $x$  и направлением вектора скорости центра масс ракеты, и из угла поворота данного сечения, возникающего в процессе изгиба корпуса. Поперечную погонную аэродинамическую нагрузку будем считать пропорциональной этому местному углу атаки<sup>1</sup>. Влияние изгиба корпуса на вектор суммарной силы тяги двигателей  $\vec{P}$  будет заключаться в повороте этого вектора, вследствие которого в подвижной системе координат  $x, y, z$  у вектора  $\vec{P}$  будет возникать поперечная составляющая. Эту поперечную силу мы будем рассматривать, как сосредоточенную силу, приложенную к корпусу ракеты в месте крепления к нему двигательной установки. Кроме того, изгиб корпуса ракеты будет вызывать смещение линии действия продольной составляющей вектора  $\vec{P}$ , вследствие которого будет возникать дополнительный момент реактивных сил относительно оси  $z$ . Влиянием изгиба корпуса ракеты на управляющие силы будем пренебрегать.

---

<sup>1</sup> Такого рода учет влияния изгиба корпуса ракеты на аэродинамические силы является весьма приближенным, однако им пользуются в динамических расчетах, так как колебания аэродинамических сил, вызываемые изгибными колебаниями корпуса, оказывают незначительное воздействие на движение ракеты.

В следующем параграфе, основываясь на сформулированных выше исходных предпосылках, мы выводим дифференциальное уравнение изгибных колебаний корпуса ракеты в плоскости тангажа, пользуясь которым мы исследуем далее устойчивость движения ракеты в этой плоскости с учетом упругости ракетной конструкции.

## § 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ

В соответствии с предположениями, сформулированными в предыдущем параграфе, дифференциальное уравнение изгибных колебаний корпуса ракеты в плоскости тангажа можно получить, построив уравнение колебаний упругого полого стержня, претерпевающего в процессе колебаний чистый изгиб в плоскости  $z=0$ . Исходя из принципа Даламбера уравнение колебаний упругого стержня можно вывести из уравнений его упругого равновесия, добавив к внешним силам, действующим на стержень, силы инерции. В случае чистого изгиба в плоскости  $z=0$  уравнения равновесия упругого стержня имеют вид (см. [25])

$$\frac{dQ}{dx} = q_y, \quad \frac{dM}{dx} = Q - m_z, \quad B_y \frac{d^2 v}{dx^2} = M, \quad (4.2.1)$$

где  $q_y$  — поперечная погонная сила, действующая на стержень;  
 $Q$  — перерезывающая сила, возникающая в упругом стержне;  
 $m_z$  — погонный момент внешних сил, действующих на стержень;

$M$  — изгибающий момент;

$v$  — прогиб стержня;

$B_y$  — изгибная жесткость.

Чтобы получить из уравнений равновесия (4.2.1) уравнения изгибных колебаний стержня, надо добавить к поперечной погонной силе  $q_y$  поперечную погонную силу  $q_{yi}$ , создаваемую силами инерции, и к погонному моменту  $m_z$  — погонный момент сил инерции  $m_{zi}$ . Кроме того, в уравнениях (4.2.1) символы обыкновенного дифференцирования следует заменить символами частного дифференцирования, так как в процессе колебаний неизвестные функции  $v$ ,  $M$  и  $Q$  будут зависеть от двух независимых переменных — координаты сечения  $x$  и времени  $t$ . Получим в результате систему уравнений

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = q_y + q_{yi}, \quad \frac{\partial M}{\partial x} = Q - m_z - m_{zi}, \quad B_y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = M. \quad (4.2.2)$$

Чтобы определить погонную силу  $q_{yi}$  и погонный момент  $m_{zi}$ , рассчитаем силы инерции, возникающие в процессе движения, совершаемого корпусом ракеты в стартовой системе координат  $x_0 y_0 z_0$ . В качестве координатных осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$  нами были вы-

браны в § 1 оси, совмещенные с главными центральными осями инерции ракеты. В этом случае относительное движение частиц ракеты в подвижной координатной системе  $x, y, z$  может возникнуть только в результате деформаций ракеты, так как поступательное ее перемещение в системе координат  $x, y, z$  меняет положение, занимаемое центром масс ракеты в этой координатной системе, а поворот ракеты относительно подвижных координатных осей нарушает равенство нулю центробежных моментов инерции  $J_{xy}, J_{xz}, J_{yz}$ . В связи с предполагаемой нами малостью упругих колебаний относительные скорости частиц ракеты  $\vec{v}_{\text{отн}}$  можно считать малыми. Вращение ракеты предполагается нами медленным и, таким образом, при определении абсолютных ускорений частиц ракеты  $\vec{w}$  можно пренебречь переносным ускорением  $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$  и кориолисовым ускорением  $2(\vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{отн}})$  ( $\vec{\omega}$  — угловая скорость вращения подвижной системы координат  $x, y, z$ ,  $\vec{r}$  — радиус-вектор частицы ракеты в этой координатной системе). Для абсолютных ускорений частиц ракеты  $\vec{w}$  получим приближенную формулу

$$\vec{w} = \vec{w}_0 + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{w}_{\text{отн}}, \quad (4.2.3)$$

где  $\vec{w}_0$  — абсолютное ускорение начала подвижной системы координат  $x, y, z$ ;

$\vec{w}_{\text{отн}}$  — относительные ускорения частиц ракеты.

Согласно (4.2.3) в случае плоского движения ракеты, т. е. при  $\omega_x \equiv \omega_y \equiv \omega_z \equiv 0$ , будут иметь место равенства:

$$\begin{aligned} w_x &= w_{0x} - y \frac{d\omega_z}{dt} + w_{\text{отн} x}, \\ w_y &= w_{0y} + x \frac{d\omega_z}{dt} + w_{\text{отн} y}. \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

Определим теперь относительные ускорения  $w_{\text{отн} x}$  и  $w_{\text{отн} y}$ , возникающие в процессе изгибных колебаний ракеты в плоскости тангажа. Рассмотрим относительное движение частиц ракеты, лежащих в плоском ее поперечном сечении, имеющем координату  $x$  при недеформированном состоянии корпуса. В соответствии с предположениями, сделанными в § 1, в процессе изгибных колебаний эти частицы не будут менять своего взаимного расположения и, таким образом, частица, имеющая координаты  $x, y$  при недеформированном состоянии корпуса ракеты, в процессе изги-



ба будет принимать положения, определяемые координатами  $x', y'$ , где в соответствии с рис. 4. 1

$$x' = x + u - y \sin \varphi, \quad y' = y + v - y(1 - \cos \varphi), \quad (4.2.5)$$

Здесь  $u, v$  — поступательные перемещения сечения в направлении осей  $x$  и  $y$ ;  $\varphi$  — угол поворота сечения вокруг его оси, парал-

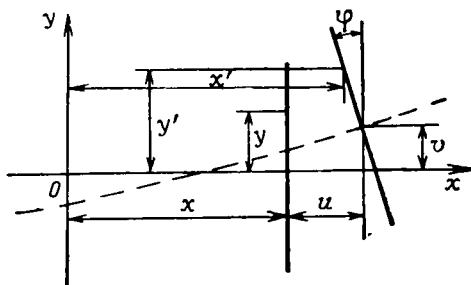


Рис. 4. 1.

лельной оси  $z$ . Угол  $\varphi$  будет связан с прогибом корпуса  $v$  соотношением

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (4.2.6)$$

В соответствии с предположением о малости упругих колебаний ракеты, пренебрегая малыми величинами высших порядков малости, можно положить

$$\sin \varphi = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \cos \varphi = 1. \quad (4.2.7)$$

Согласно (4.2.7) соотношения (4.2.5) можно заменить приближенными соотношениями:

$$x' = x + u - y \frac{\partial v}{\partial x}, \quad y' = y + v. \quad (4.2.8)$$

Пользуясь формулами (4.2.8), найдем

$$\begin{aligned} w_{\text{отн } x} &= \frac{\partial^2 x'}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - y \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial t^2}, \\ w_{\text{отн } y} &= \frac{\partial^2 y'}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

Подставляя (4.2.9) в (4.2.4), получим для абсолютных ускорений  $w_x, w_y$  формулы:

$$\begin{aligned} w_x &= w_{0x} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - y \left( \frac{d\omega_z}{dt} + \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial t^2} \right), \\ w_y &= w_{0y} + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + x \frac{d\omega_z}{dt}. \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

Построим теперь два плоских поперечных сечения ракеты  $S$  и  $S'$ , имеющие координаты  $x$  и  $x+dx$  при недеформированном состоянии корпуса (рис. 4.2). На элементарный цилиндр (на рисунке заштрихован) с площадью основания  $ds$  и высотой  $dx$  бу-

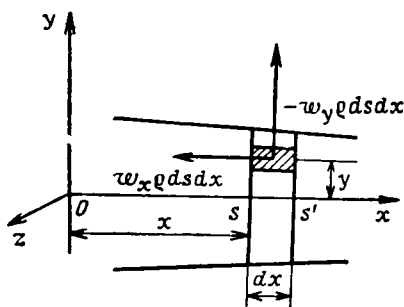


Рис. 4.2.

дет действовать сила инерции, проекция которой на ось  $x$  равна  $w_x \rho ds dx$ , проекция этой силы на ось  $y$  равна  $w_y \rho ds dx$  ( $\rho$  — плотность рассматриваемого элементарного цилиндра). Таким образом, поперечная нагрузка  $q_{yu} dx$  и моментная нагрузка  $m_{zu} dx$ , создаваемые силами инерции, которые действуют на частицы ракеты, заключенные между сечениями  $S$  и  $S'$ , будут определяться соотношениями:

$$q_{yu} dx = - \int_S w_y \rho ds dx, \quad m_{zu} dx = \int_S w_x y \rho ds dx. \quad (4.2.11)$$

Согласно (4.2.11) погонная сила  $q_{yu}$  и погонный момент  $m_{zu}$  могут быть найдены по формулам:

$$q_{yu} = - \int_S w_y \rho ds, \quad m_{zu} = \int_S w_x y \rho ds. \quad (4.2.12)$$

Подставляя (4.2.10) в (4.2.12), получим соотношения:

$$\begin{aligned} q_{yu} &= - \left( w_{0y} + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + x \frac{d\omega_z}{dt} \right) \int_S \rho ds, \\ m_{zu} &= \left( w_{0x} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) \int_S y \rho ds - \left( \frac{d\omega_z}{dt} + \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial t^2} \right) \int_S y^2 \rho ds. \end{aligned} \quad (4.2.13)$$

Мы предполагаем везде, что плоскости  $y=0$  и  $z=0$  являются плоскостями симметрии ракеты. Таким образом, должно иметь место равенство

$$\int_S y \rho ds = 0, \quad (4.2.14)$$

в соответствии с которым формулам (4.2.13) можно придать вид

$$\begin{aligned} q_{yu} &= -\mu \left( w_{0y} + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + x \frac{d\omega_z}{dt} \right), \\ m_{zu} &= -j_z \left( \frac{d\omega_z}{dt} + \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial t^2} \right), \end{aligned} \quad (4.2.15)$$

где

$$\mu = \int_S \rho ds, \quad j_z = \int_S y^2 \rho ds. \quad (4.2.16)$$

Подставляя (4.2.15) в (4.2.2), получим уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x} &= q_y - \mu \left( w_{0y} + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + x \frac{d\omega_z}{dt} \right), \\ \frac{\partial M}{\partial x} &= Q - m_z + j_z \left( \frac{d\omega_z}{dt} + \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial t^2} \right), \\ B_y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= M. \end{aligned} \quad (4.2.17)$$

Пользуясь вторым и третьим уравнениями из (4.2.17), найдем

$$Q = \frac{\partial}{\partial x} \left( B_y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + m_z - j_z \left( \frac{d\omega_z}{dt} + \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial t^2} \right). \quad (4.2.18)$$

Подставляя перерезывающую силу  $Q$  из (4.2.18) в первое уравнение системы (4.2.17), получим для функции  $v(x, t)$  дифференциальное уравнение в частных производных

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( B_y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( j_z \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial t^2} \right) + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= q_y - \\ - \frac{\partial m_z}{\partial x} - \mu w_{0y} - \left( \mu x - \frac{d j_z}{dx} \right) \frac{d\omega_z}{dt}. \end{aligned} \quad (4.2.19)$$

В соответствии с предположениями, сформулированными в § 1, должны иметь место равенства

$$M = Q = 0 \text{ при } x = a \text{ и } x = b, \quad (4.2.20)$$

где  $a$  и  $b$  — абсциссы крайних поперечных сечений ракеты. Согласно (4.2.17), (4.2.18) и (4.2.20) решение дифференциального уравнения (4.2.19)  $v(x, t)$  должно удовлетворять краевым условиям:

$$\left. \begin{aligned} B_y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( B_y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - j_z \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial t^2} &= -m_z + j_z \frac{d\omega_z}{dt} \end{aligned} \right\} \text{ при } x = a \text{ и при } x = b. \quad (4.2.21)$$

Таким образом, при заданных нагрузках  $q_y$  и  $m_z$  и при заданном движении подвижной системы координат  $x, y, z$  определение прогиба корпуса  $v(x, t)$  сводится к решению дифференциального уравнения изгибных колебаний (4.2.19) с краевыми условиями (4.2.21). Вопрос о движении, совершаемом подвижной координатной системой  $x, y, z$ , рассматривается нами в следующем параграфе этой главы.

### § 3. УРАВНЕНИЕ СИЛ И УРАВНЕНИЕ МОМЕНТОВ

Уравнения движения, совершаемого подвижной системой координат  $x, y, z$  в начальной стартовой координатной системе  $x_0, y_0, z_0$ , можно построить, воспользовавшись теоремой о движении центра масс материальной системы и теоремой об изменении момента количества движения, так как оси координат  $x, y, z$  совмещены нами с главными центральными осями инерции ракеты. Если к внешним силам, действующим на ракету, присоединить реактивные силы и обозначить через  $\vec{Q}$  главный вектор полученной системы сил и через  $\vec{M}$  — главный момент этих сил относительно начала подвижной системы координат  $x, y, z$ , будут иметь место равенства:

$$m\omega_{0y} = Q_y, \quad J_z \frac{d\omega_z}{dt} = M_z, \quad (4.3.1)$$

где  $J_z$  — момент инерции ракеты относительно оси  $z$  (напомним, что вращение ракеты предполагается нами медленным). В § 2 при рассмотрении изгиба корпуса ракеты в плоскости тангажа мы обозначили через  $q_y$  погонную поперечную силу, действующую на ракету, и через  $m_z$  — погонный момент внешних сил. Таким образом, внешние силы, действующие в плоскости тангажа на участок ракеты, заключенный между ее поперечными сечениями, имеющими абсциссы  $x$  и  $x+dx$ , будут приводиться к силе  $q_y dx$  и моменту  $m_z dx$ . Момент этой системы сил относительно оси  $z$  будет равен  $(q_y x + m_z) dx$ . В соответствии с этим проекцию главного вектора внешних сил  $Q_y$  и проекцию главного момента  $M_z$  можно определить по формулам:

$$Q_y = \int_a^b q_y dx, \quad M_z = \int_a^b (q_y x + m_z) dx. \quad (4.3.2)$$

Согласно (4.3.2) уравнениям (4.3.1) можно придать вид

$$m\omega_{0y} = \int_a^b q_y dx, \quad (4.3.3)$$

$$J_z \frac{d\omega_z}{dt} = \int_a^b (q_y x + m_z) dx.$$

Уравнения сил и моментов (4.3.3) совместно с дифференциальным уравнением изгибных колебаний (4.2.19) и краевыми условиями (4.2.21) определяют движение подвижной координатной системы в плоскости тангажа и изгибные колебания корпуса, возникающие в этой плоскости в процессе движения ракеты.

Покажем теперь, что функция  $v(x, t)$ , найденная из дифференциального уравнения (4.2.19) с краевыми условиями (4.2.21), всегда будет удовлетворять интегральным условиям:

$$\int_a^b v \mu dx = 0, \quad \int_a^b \left( x v \mu + \frac{\partial v}{\partial x} j_z \right) dx = 0 \quad (4.3.4)$$

в соответствии с уравнениями (4.3.3), определяющими ускорения  $\omega_{0y}$  и  $\frac{d\omega_z}{dt}$ . Интегральные соотношения (4.3.4) играют важную роль при исследовании изгибных колебаний корпуса ракеты.

Интегрируя обе части равенства (4.2.19) по переменной  $x$  в пределах от  $a$  до  $b$ , получим соотношение

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( B_y \frac{\partial v}{\partial x^2} \right) - j_z \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial t^2} \right]_{x=a}^{x=b} + \int_a^b \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \mu dx = \\ & = \int_a^b q_y dx - \omega_{0y} \int_a^b \mu dx + \left( -m_z + j_z \frac{d\omega_z}{dt} \right)_{x=a}^{x=b} - \frac{d\omega_z}{dt} \int_a^b x \mu dx, \end{aligned}$$

или согласно (4.2.21)

$$\int_a^b \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \mu dx = \int_a^b q_y dx - \omega_{0y} \int_a^b \mu dx - \frac{d\omega_z}{dt} \int_a^b x \mu dx. \quad (4.3.5)$$

Умножив обе части уравнения (4.2.19) на  $x$  и проинтегрировав по  $x$  в пределах от  $a$  до  $b$ , получим равенство

$$\begin{aligned} & \int_a^b x \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( B_y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - j_z \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial t^2} \right] dx + \int_a^b x \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \mu dx = \\ & = \int_a^b x q_y dx - \omega_{0y} \int_a^b x \mu dx - \frac{d\omega_z}{dt} \int_a^b x^2 \mu dx - \\ & - \int_a^b x \frac{\partial}{\partial x} \left( m_z - j_z \frac{d\omega_z}{dt} \right) dx. \end{aligned}$$

Принтегрировав это соотношение по частям, можно преобразовать его следующим образом:

$$\begin{aligned} & - \int_a^b \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( B_y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - j_z \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial t^2} \right] dx + \left\{ x \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( B_y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - j_z \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial t^2} \right] \right\}_{x=a}^{x=b} + \int_a^b x \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \mu dx = \int_a^b x q_y dx - w_{0y} \int_a^b x \mu dx - \\ & - \frac{d\omega_z}{dt} \int_a^b x^2 \mu dx + \int_a^b \left( m_z - j_z \frac{d\omega_z}{dt} \right) dx + \left[ x \left( -m_z + j_z \frac{d\omega_z}{dt} \right) \right]_{x=a}^{x=b}, \end{aligned}$$

или согласно (4.2.21)

$$\begin{aligned} & - \int_a^b \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( B_y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - j_z \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial t^2} \right] dx + \int_a^b x \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \mu dx = \\ & = \int_a^b x q_y dx - w_{0y} \int_a^b x \mu dx - \frac{d\omega_z}{dt} \int_a^b x^2 \mu dx + \int_a^b \left( m_z - j_z \frac{d\omega_z}{dt} \right) dx. \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

В соответствии с первым из краевых условий (4.2.21) должно иметь место равенство

$$\int_a^b \frac{\partial}{\partial x} \left( B_y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) dx = \left( B_y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)_{x=a}^{x=b} = 0 \quad (4.3.7)$$

и, таким образом, соотношению (4.3.6) можно придать вид

$$\begin{aligned} & \int_a^b \left( x \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \mu + j_z \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial t^2} \right) dx = \int_a^b (x q_y + m_z) dx - \\ & - w_{0y} \int_a^b x \mu dx - \frac{d\omega_z}{dt} \int_a^b (x^2 \mu + j_z) dx. \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

Пользуясь уравнениями (4.3.3), можно преобразовать равенства (4.3.5) и (4.3.8):

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \mu dx &= w_{0y} \left( m - \int_a^b \mu dx \right) - \frac{d\omega_z}{dt} \int_a^b x \mu dx, \\ \int_a^b \left( x \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \mu + j_z \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial t^2} \right) dx &= -w_{0y} \int_a^b x \mu dx + \\ &+ \frac{d\omega_z}{dt} \left[ J_z - \int_a^b (x^2 \mu + j_z) dx \right]. \end{aligned} \quad (4.3.9)$$

Полная масса ракеты  $m$ , координата ее центра масс  $x_c$  и момент инерции  $J_z$  могут быть выражены интегралами:

$$m = \int_V \varrho d\tau, \quad x_c = \frac{1}{m} \int_V x \varrho d\tau, \quad J_z = \int_V (x^2 + y^2) \varrho d\tau, \quad (4.3.10)$$

где  $V$  — область, занимаемая ракетой при недеформированном состоянии ее корпуса (деформации корпуса на координату центра масс  $x_c$  не влияют вследствие сделанного нами выбора подвижной координатной системы  $x, y, z$ ; влиянием деформаций корпуса на момент инерции  $J_z$  мы будем везде пренебрегать, так как в уравнения (4.3.3) этот момент инерции входит с малым множителем  $\frac{d\omega_z}{dt}$ ). Интегрирование какой-либо функции по области  $V$  можно осуществить, проинтегрировав сперва эту функцию по поперечному сечению области  $S$  и выполнив затем интегрирование полученного результата по переменной  $x$  в пределах от  $a$  до  $b$ . Таким образом, формулам (4.3.10) можно придать вид

$$\begin{aligned} m &= \int_a^b \int_S \varrho ds dx, \\ x_c &= \frac{1}{m} \int_a^b x \int_S \varrho ds dx, \quad J_z = \int_a^b \left( x^2 \int_S \varrho ds + \int_S y^2 \varrho ds \right) dx, \end{aligned}$$

или согласно (4.2.16)

$$m = \int_a^b \mu dx, \quad x_c = \frac{1}{m} \int_a^b x \mu dx, \quad J_z = \int_a^b (x^2 \mu + j_z) dx. \quad (4.3.11)$$

В соответствии с равенствами (4.3.11) соотношения (4.3.9) могут быть приведены к виду

$$\int_a^b \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \mu dx = 0, \quad \int_a^b \left( x \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \mu + j_z \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial t^2} \right) dx = 0 \quad (4.3.12)$$

( $x_C \equiv 0$ , так как начало координатной системы  $x, y, z$  совмещено нами с центром масс ракеты). Согласно (4.3.12) должны иметь место равенства:

$$\frac{d^2}{dt^2} \left( \int_a^b v \mu dx \right) = 0, \quad \frac{d^2}{dt^2} \left[ \int_a^b \left( x v \mu + j_z \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx \right] = 0 \quad (4.3.13)$$

[при выполнении дифференцирования по времени в левых частях соотношений (4.3.13) медленным изменением вида функций  $\mu$  и  $j_z$ , возникающим в процессе полета ракеты, можно пренебречь, так как эти функции фигурируют в (4.3.13) с малыми множителями  $v$  и  $\frac{\partial v}{\partial x}$ ].

Предположим, что перед начальным моментом времени полета ракеты  $t = t_0$  прогибы ее корпуса  $v(x, t)$  отсутствуют. В этом случае будут иметь место соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \int_a^b v \mu dx &= 0, & \int_a^b \left( x v \mu + j_z \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left( \int_a^b v \mu dx \right) &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left[ \int_a^b \left( x v \mu + j_z \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx \right] &= 0. \end{aligned} \right\} \text{ при } t = t_0 \quad (4.3.14)$$

Дважды интегрируя левые и правые части равенств (4.3.13) по времени  $t$  в пределах от  $t_0$  до  $t$ , получим согласно (4.3.14) интегральные соотношения (4.3.4).

#### § 4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ РАКЕТЫ В ПЛОСКОСТИ ТАНГАЖА, УЧИТЫВАЮЩИЕ УПРУГОСТЬ КОРПУСА РАКЕТЫ

Построим теперь развернутые выражения для погонной поперечной силы  $q_y$  и погонного момента  $m_z$ , которые входят в уравнения сил и моментов (4.3.3) и в уравнения изгибных колебаний (4.2.19). Последовательно рассмотрим погонные силы и погонные моменты, порождаемые силой тяжести, аэродинамическими силами, реактивными силами и управляющими силами и моментами.



1. Сила тяжести. В соответствии с первой из формул (4.2.16) функция  $\mu(x)$  представляет собой массу ракеты, приходящуюся на единицу ее длины в поперечном сечении  $S$ , имеющем абсциссу  $x$ . В связи с этим функцию  $\mu(x)$  принято называть погонной массой ракеты. Вектор погонной силы  $\vec{q}$ , порождаемый силой тяжести, будет равен  $\mu\vec{g}$ , где  $\vec{g}$  — вектор ускорения силы тяжести. Проектируя вектор  $\vec{q}$  на ось  $y$ , получим зависимость

$$q_y = \mu g_y. \quad (4.4.1)$$

Центр масс любого поперечного сечения ракеты будет лежать на ее продольной оси, так как ракета предполагается нами симметричной относительно плоскостей  $y=0$  и  $z=0$ . Таким образом, погонных моментов сила тяжести порождать не может и в данном случае будет иметь место равенство

$$m_z = 0. \quad (4.4.2)$$

2. Аэродинамические силы. В данном случае поперечную погонную силу будем считать пропорциональной местному углу атаки в соответствии с исходными предпосылками, сформулированными в § 1. Обозначая коэффициент пропорциональности через  $c(x, t)$ , получим равенство

$$q_y = c\alpha^*, \quad (4.4.3)$$

где  $\alpha^*$  — местный угол атаки. Как видно из рис. 4.1, угол  $\varphi$ , на который поворачивается поперечное сечение ракеты в процессе изгиба, при малых изгибных колебаниях можно считать равным производной  $\partial v / \partial x$ . В этом случае местный угол атаки  $\alpha^*$  будет определяться равенством

$$\alpha^* = \alpha + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (4.4.4)$$

где  $\alpha$  — угол атаки, соответствующий недеформированному состоянию корпуса ракеты, т. е. угол между направлением вектора скорости центра масс ракеты и положительным направлением оси  $x$ . Подставляя (4.4.4) в (4.4.3), получим соотношение

$$q_y = c \left( \alpha + \frac{\partial v}{\partial x} \right). \quad (4.4.5)$$

В рассматриваемом случае можно положить

$$m_z = 0, \quad (4.4.6)$$

так как при исследовании устойчивости движения погонными аэродинамическими моментами практически можно пренебрегать.

3. Реактивные силы. Погонную поперечную силу  $q_y$ , соответствующую действию на упругий стержень сосредоточенной силы  $Q_y$ , приложенной в сечении стержня с абсциссой  $x = \xi$ , в сопротивлении материалов рассматривают, как предел, к которому стремится при  $\varepsilon \rightarrow 0$  погонная поперечная сила  $q_y^*(x)$ , определяемая равенствами:

$$\begin{aligned} q_y^*(x) &= \frac{Q_y}{\varepsilon} \quad \text{при } \xi - \frac{\varepsilon}{2} < x < \xi + \frac{\varepsilon}{2}, \\ q_y^*(x) &= 0 \quad \text{при } a < x < \xi - \frac{\varepsilon}{2} \text{ и при } \xi + \frac{\varepsilon}{2} < x < b. \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

График функции  $q_y^*(x)$  показан на рис. 4.3. Формулам (4.4.7) можно придать вид

$$q_y^*(x) = Q_y f(x, \xi), \quad (4.4.8)$$

где  $f(x, \xi)$  — функция, определяемая в интервале  $a < x < b$  соотношениями:

$$\begin{aligned} f(x, \xi) &= \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{при } \xi - \frac{\varepsilon}{2} < x < \xi + \frac{\varepsilon}{2}, \\ f(x, \xi) &= 0 \quad \text{при } a < x < \xi - \frac{\varepsilon}{2} \text{ и при } \xi + \frac{\varepsilon}{2} < x < b. \end{aligned} \quad (4.4.9)$$

Предел, к которому стремится функция  $f(x, \xi)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , называют дельта-функцией и обозначают через  $\delta(x, \xi)$ . Таким образом, согласно (4.4.8), в рассматриваемом случае поперечная погонная сила  $q_y(x)$  может быть выражена соотношением

$$q_y(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} q_y^*(x) = Q_y \delta(x, \xi). \quad (4.4.10)$$

В соответствии с формулами (4.4.9) при любом сколь угодно малом  $\varepsilon$  соблюдается равенство

$$\int_a^b f(x, \xi) dx = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\xi - \frac{\varepsilon}{2}}^{\xi + \frac{\varepsilon}{2}} dx = 1. \quad (4.4.11)$$

Согласно (4.4.9) и (4.4.11) дельта-функция  $\delta(x, \xi)$  обладает свойствами

$$\delta(x, \xi) = 0 \quad \text{при } x \neq \xi, \quad \int_a^b \delta(x, \xi) dx = 1. \quad (4.4.12)$$

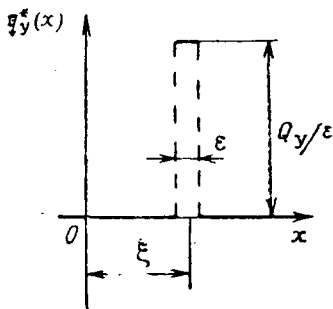


Рис. 4.3.

В случае действия на упругий стержень сосредоточенного момента  $M_z$ , приложенного в сечении стержня, с абсциссой  $x = \xi$  соответствующий погонный момент  $m_z(x)$  может быть выражен равенством

$$m_z(x) = M_z \delta(x, \xi), \quad (4.4.13)$$

аналогичным равенству (4.4.10).

Обозначим теперь через  $x_T$  абсциссу сечения ракеты, в котором к несущему корпусу крепится двигательная установка. Суммарная сила тяги  $\vec{P}$  будет иметь линию действия, показанную на

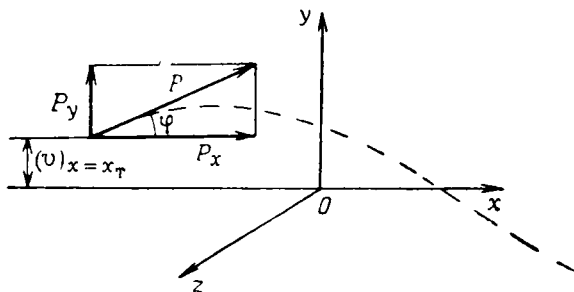


Рис. 4. 4.

рис. 4. 4. Проекции вектора  $\vec{P}$  на координатные оси  $x$  и  $y$  будут определяться равенствами:

$$P_x = P \cos \varphi, \quad P_y = P \sin \varphi, \quad (4.4.14)$$

где  $\varphi$  — угол между направлением вектора  $\vec{P}$  и положительным направлением оси  $x$ . В соответствии с приближенными равенствами (4.2.7), установленными для угла  $\varphi$  в § 2, формулам (4.4.14) можно придать вид

$$P_x = P, \quad P_y = P \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{x=x_T}. \quad (4.4.15)$$

Как видно из рис. 4. 4, реактивные силы, действующие на корпус ракеты в его сечении, имеющем абсциссу  $x = x_T$ , будут приводиться к поперечной сосредоточенной силе  $Q_y$  и к сосредоточенному моменту  $M_z$ , которые согласно (4.4.15) могут быть найдены по формулам:

$$Q_y = P_y = P \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{x=x_T}, \quad M_z = -P_x(v)_{x=x_T} = -P(v)_{x=x_T}. \quad (4.4.16)$$

В соответствии с равенствами (4.4.10) и (4.4.13) для погонной поперечной силы  $q_y$  и погонного момента  $m_z$  в рассматриваемом случае будут иметь место соотношения:

$$\left. \begin{aligned} q_y &= P \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{x=x_T} \delta(x, x_T), \\ m_z &= -P(v)_{x=x_T} \delta(x, x_T). \end{aligned} \right\} \quad (4.4.17)$$

При этом необходимо сделать следующее замечание. В процессе вывода формул (4.4.17) мы в качестве точки приведения реактивных сил пользовались точкой  $x=x_T$  недеформированной оси ракеты в соответствии с тем смыслом, который вкладывается обычно в погонную силу  $q_y$  и погонный момент  $m_z$  в исходных уравнениях равновесия (4.2.1). Учет влияния, которое оказывают на изгибные колебания корпуса ракеты изменения линии действия суммарной силы тяги  $\vec{P}$  посредством формул (4.4.17), является весьма приближенным. Однако в задаче об устойчивости изгибных колебаний данный эффект играет сравнительно несущественную роль и в связи с этим приближенный учет его посредством формул (4.4.17) практически является вполне достаточным.

4. Управляющие силы и моменты. Обозначим через  $x_y$  абсциссу поперечного сечения ракеты, в котором на ее корпус действуют управляющая сила, или управляющий момент. Если для движения ракеты в плоскости тангажа система управления создает управляющую силу  $F_{y \text{ упр}}$ , соответствующая погонная поперечная сила  $q_y$  согласно (4.4.10) может быть выражена

$$q_y = F_{y \text{ упр}} \delta(x, x_y). \quad (4.4.18)$$

Если система управления формирует сосредоточенный управляющий момент  $M_{z \text{ упр}}$  (случай управления рассогласованием тяг), соответствующий погонный момент  $m_z$  согласно (4.4.13) может быть представлен соотношением

$$m_z = M_{z \text{ упр}} \delta(x, x_y). \quad (4.4.19)$$

Для того чтобы в дальнейшем не расчленять всякий раз указанные выше два случая управления движением ракеты в плоскости тангажа, будем предполагать ниже, что система управления порождает одновременно погонную поперечную силу  $q_y$  и погонный момент  $m_z$ , выражаемые равенствами:

$$q_y = F_{y \text{ упр}} \delta(x, x_y), \quad m_z = M_{z \text{ упр}}^{(0)} \delta(x, x_y), \quad (4.4.20)$$

условившись считать, что  $M_{z \text{ упр}}^{(0)} = 0$  в том случае, когда система управления формирует управляющую силу, и полагая  $F_{y \text{ упр}} = 0$ ,  $M_{z \text{ упр}}^{(0)} = M_{z \text{ упр}}$  для того случая, когда исполнительные органы

системы управления создают сосредоточенный управляющий момент.

Объединяя погонные поперечные силы, определяемые формулами (4.4.1), (4.4.5), (4.4.17) и (4.4.20), получим для полной поперечной погонной силы  $q_y$  выражение

$$q_y = \mu g_y + c \left( a + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + P \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{x=x_T} \delta(x, x_T) + F_{y \text{ унр}} \delta(x, x_y). \quad (4.4.21)$$

Согласно (4.4.2), (4.4.6), (4.4.17) и (4.4.20) полный погонный момент  $m_z$  в общем случае может быть выражен соотношением

$$m_z = -P(v)_{x=x_T} \delta(x, x_T) + M_{z \text{ унр}}^{(0)} \delta(x, x_y). \quad (4.4.22)$$

Подставляя (4.4.21) и (4.4.22) в уравнения сил и моментов (4.3.3), получим уравнения:

$$\begin{aligned} m \omega_{0y} = & g_y \int_a^b \mu dx + \int_a^b \left( a + \frac{\partial v}{\partial x} \right) c dx + P \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{x=x_T} \int_a^b \delta(x, x_T) dx + \\ & + F_{y \text{ унр}} \int_a^b \delta(x, x_y) dx, \\ J_z \frac{d\omega_z}{dt} = & g_y \int_a^b \mu x dx + \int_a^b \left( a + \frac{\partial v}{\partial x} \right) c x dx + P \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{x=x_T} \times \\ & \times \int_a^b \delta(x, x_T) x dx - P(v)_{x=x_T} \int_a^b \delta(x, x_T) dx + F_{y \text{ унр}} \int_a^b \delta(x, x_y) x dx + \\ & + M_{z \text{ унр}}^{(0)} \int_a^b \delta(x, x_y) dx, \end{aligned}$$

или согласно (4.3.11) и (4.4.12)

$$\begin{aligned} m(\omega_{0y} - g_y) = & \int_a^b \left( a + \frac{\partial v}{\partial x} \right) c dx + P \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{x=x_T} + F_{y \text{ унр}}, \\ J_z \frac{d\omega_z}{dt} = & \int_a^b \left( a + \frac{\partial v}{\partial x} \right) c x dx + P \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{x=x_T} \int_a^b \delta(x, x_T) \times \\ & \times x dx - P(v)_{x=x_T} + F_{y \text{ унр}} \int_a^b \delta(x, x_y) x dx + M_{z \text{ унр}}^{(0)} \end{aligned} \quad (4.4.23)$$

(напомним, что координата центра тяжести ракеты  $x_c$  всегда остается равной нулю).

В соответствии с формулами (4.4.12) для любой функции  $f(x)$ , заданной в интервале  $a \leq x \leq b$ , при любом сколь угодно малом положительном  $\varepsilon$  должно соблюдаться равенство

$$\begin{aligned} \int_a^b \delta(x, \xi) f(x) dx &= f(\xi) \int_a^b \delta(x, \xi) dx + \int_a^b \delta(x, \xi) [f(x) - f(\xi)] dx = \\ &= f(\xi) + \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} \delta(x, \xi) [f(x) - f(\xi)] dx. \end{aligned} \quad (4.4.24)$$

Если функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $x = \xi$ , при любом сколь угодно малом  $\eta$  можно отыскать такое достаточно малое  $\varepsilon$ , чтобы имело место неравенство

$$|f(x) - f(\xi)| < \eta \quad \text{при} \quad \xi - \varepsilon \leq x \leq \xi + \varepsilon. \quad (4.4.25)$$

В этом случае получим оценку

$$\left| \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} \delta(x, \xi) [f(x) - f(\xi)] dx \right| < \eta \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} \delta(x, \xi) dx = \eta. \quad (4.4.26)$$

Неравенство (4.4.26) может иметь место при любом сколь угодно малом  $\eta$  лишь в том случае, если

$$\int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} \delta(x, \xi) [f(x) - f(\xi)] dx = 0. \quad (4.4.27)$$

Из соотношений (4.4.24) и (4.4.27) вытекает равенство

$$\int_a^b \delta(x, \xi) f(x) dx = f(\xi), \quad (4.4.28)$$

справедливое для любой функции  $f(x)$ , непрерывной в точке  $x = \xi$ .

Согласно (4.4.28) уравнениям (4.4.23) можно придать вид

$$\begin{aligned} m(\omega_{0y} - g_y) &= \int_a^b \left( \alpha + \frac{\partial v}{\partial x} \right) c dx + P \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{x=x_t} + F_{y \text{ упр}}, \\ J_z \frac{d\omega_z}{dt} &= \int_a^b \left( \alpha + \frac{\partial v}{\partial x} \right) c x dx + P \left( x \frac{\partial v}{\partial x} - v \right)_{x=x_t} + \\ &+ x_y F_{y \text{ упр}} + M_{z \text{ упр}}^{(0)}. \end{aligned} \quad (4.4.29)$$

Введя обозначения

$$F_y = \alpha \int_a^b c dx + F_{y \text{ упр}}, \quad M_z = \alpha \int_a^b c x dx + x_y F_{y \text{ упр}} + M_{z \text{ упр}}^{(0)}, \quad (4.4.30)$$

можно привести уравнения (4.4.29) к виду

$$m(\omega_{0y} - g_y) = F_y + \int_a^b \frac{\partial v}{\partial x} c dx + P \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{x=x_T}, \quad (4.4.31)$$

$$J_z \frac{d\omega_z}{dt} = M_z + \int_a^b \frac{\partial v}{\partial x} c x dx + P \left( x \frac{\partial v}{\partial x} - v \right)_{x=x_T}.$$

Уравнения (4.4.31) представляют собой уравнения сил и моментов, учитывающие упругость корпуса ракеты. В этих уравнениях согласно (4.4.30) сила  $F_y$  представляет собой проекцию на ось  $y$  главного вектора аэродинамических и управляющих сил, действующих на ракету при отсутствии изгибных колебаний ее корпуса, момент  $M_z$  представляет собой проекцию на ось  $z$  главного момента этих сил.

Непосредственная подстановка погонной силы  $q_y$  и погонного момента  $m_z$ , определяемых формулами (4.4.21) и (4.4.22), в уравнение изгибных колебаний (4.2.19) приводит к необходимости дифференцирования дельта-функции. Чтобы избежать этой операции, заменим уравнение (4.2.19) системой двух дифференциальных уравнений в частных производных для прогиба  $v(x, t)$  и перерезывающей силы  $Q(x, t)$ , которая определяется формулой (4.2.18). Получим систему двух уравнений

$$\left. \begin{aligned} \mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial Q}{\partial x} &= q_y - \mu \omega_{0y} - \mu x \frac{d\omega_z}{dt}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( B_y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - j_z \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial t^2} - Q &= -m_z + j_z \frac{d\omega_z}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (4.4.32)$$

В соответствии с формулой (4.2.18) краевые условия (4.2.21) приведем к виду

$$B_y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \quad Q = 0 \quad \text{при } x=a \text{ и при } x=b. \quad (4.4.33)$$

Подставляя  $q_y$  и  $m_z$  из (4.4.21) и (4.4.22) в (4.4.32), получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial Q}{\partial x} &= -\mu(\omega_{0y} - g_y) - \mu x \frac{d\omega_z}{dt} + c \left( a + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \\ &+ P \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{x=x_T} \delta(x, x_T) + F_{y \text{ упр}} \delta(x, x_y), \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( B_y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - j_z \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial t^2} - Q &= j_z \frac{d\omega_z}{dt} + P(v)_{x=x_T} \times \\ &\times \delta(x, x_T) - M_{z \text{ упр}}^{(0)} \delta(x, x_y). \end{aligned} \quad (4.4.34)$$

Объединяя уравнения сил и моментов (4.4.31), дифференциальные уравнения в частных производных (4.4.34) и краевые условия (4.4.33), получим уравнения:

$$\left. \begin{aligned} m(w_{0y} - g_y) &= F_y + \int_a^b \frac{\partial v}{\partial x} c dx + P \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{x=x_r}, \\ J_z \frac{d\omega_z}{dt} &= M_z + \int_a^b \frac{\partial v}{\partial x} c x dx + P \left( x \frac{\partial v}{\partial x} - v \right)_{x=x_r}, \\ \mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial Q}{\partial x} &= -\mu(w_{0y} - g_y) - \mu x \frac{d\omega_z}{dt} + \\ &+ c \left( \alpha + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + P \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{x=x_r} \delta(x, x_r) + F_{y \text{ упр}} \delta(x, x_y), \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( B_y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - j_z \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t^2} - Q &= j_z \frac{d\omega_z}{dt} + \\ &+ P(v)_{x=x_r} \delta(x, x_r) - M_{z \text{ упр}}^{(0)} \delta(x, x_y), \\ B_y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= 0, \quad Q = 0 \text{ при } x = a \text{ и при } x = b. \end{aligned} \right\} \quad (4.4.35)$$

Уравнения (4.4.35) представляют собой уравнения движения ракеты в плоскости тангажа, учитывающие упругость корпуса ракеты. Эти уравнения определяют движение, совершаемое в плоскости тангажа подвижной системой координат  $x, y, z$ , и функции  $v(x, t)$ ,  $Q(x, t)$ , характеризующие изгибные колебания корпуса ракеты в плоскости тангажа.

В систему уравнений (4.4.35) входят дифференциальные уравнения в частных производных. Как мы покажем ниже, уравнения движения ракеты в плоскости тангажа, приведенные в этом параграфе, можно преобразовать в бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Это преобразование основывается на исследовании так называемых собственных изгибных колебаний корпуса ракеты, к рассмотрению которых мы переходим в следующем параграфе.

## § 5. ИЗГИБНЫЕ СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ КОРПУСА РАКЕТЫ В ПЛОСКОСТИ ТАНГАЖА

Изгибные колебания корпуса ракеты в плоскости тангажа, происходящие при отсутствии погонных поперечных сил  $q_y$  и погонных моментов  $m_z$ , называют *собственными колебаниями корпуса* в плоскости тангажа. Согласно (4.3.3) в рассматриваемом случае ускорения  $w_{0y}$  и  $\frac{d\omega_z}{dt}$  отсутствуют и, таким образом, диф-



Дифференциальное уравнение изгибных колебаний (4.2.19) в данном случае принимает вид

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( B_y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( j_z \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial t^2} \right) + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0. \quad (4.5.1)$$

Краевые условия (4.2.21) переходят при этом в краевые условия:

$$\left. \begin{aligned} B_y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( B_y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - j_z \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial t^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{при } x = a \text{ и} \\ &\text{при } x = b. \end{aligned} \quad (4.5.2)$$

При рассмотрении дифференциального уравнения (4.5.1) с краевыми условиями (4.5.2) будем предполагать ниже, что функции  $\mu$  и  $j_z$  зависят от одной лишь переменной  $x$ , пренебрегая медленным изменением вида этих функций, возникающим в рассматриваемом интервале времени за счет опорожнения топливных баков.

Однородное дифференциальное уравнение (4.5.1) с однородными краевыми условиями (4.5.2) обладает очевидным решением  $v(x, t) \equiv 0$ , которое принято называть тривиальным решением этой краевой задачи. Нетривиальные решения дифференциального уравнения (4.5.1), удовлетворяющие краевым условиям (4.5.2), будем искать в виде произведения двух функций

$$v(x, t) = V(x)g(t), \quad (4.5.3)$$

применяя в рассматриваемом случае метод, называемый методом Фурье, или методом разделения переменных. Подставляя (4.5.3) в (4.5.1), получим равенство

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( B_y \frac{d^2 V}{dx^2} \right) g + \left[ - \frac{d}{dx} \left( j_z \frac{dV}{dx} \right) + \mu V \right] \frac{d^2 g}{dt^2} = 0,$$

которое может быть приведено к виду

$$\frac{\frac{d^2}{dx^2} \left( B_y \frac{d^2 V}{dx^2} \right)}{- \frac{d}{dx} \left( j_z \frac{dV}{dx} \right) + \mu V} = - \frac{\frac{d^2 g}{dt^2}}{g}. \quad (4.5.4)$$

Левая часть равенства (4.5.4) не зависит от переменной  $t$ , правая часть этого равенства не зависит от переменной  $x$ . Таким образом, отношения, фигурирующие в левой и в правой частях равенства (4.5.4), должны представлять собой некоторую константу, которую мы обозначим через  $\lambda$ . В соответствии с этим

функция  $V(x)$  должна удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( B_y \frac{d^2 V}{dx^2} \right) + \lambda \left[ \frac{d}{dx} \left( j_z \frac{dV}{dx} \right) - \mu V \right] = 0, \quad (4.5.5)$$

а функция  $g(t)$  — дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 g}{dt^2} + \lambda g = 0. \quad (4.5.6)$$

Согласно (4.5.2) и (4.5.3) должны выполняться краевые условия:

$$\left. \begin{aligned} B_y \frac{d^2 V}{dx^2} g &= 0 \\ \frac{d}{dx} \left( B_y \frac{d^2 V}{dx^2} \right) g - j_z \frac{dV}{dx} \frac{d^2 g}{dt^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{при } x=a \text{ и} \\ \text{при } x=b, \end{array}$$

которым можно придать вид

$$\left. \begin{aligned} B_y \frac{d^2 V}{dx^2} g &= 0 \\ \left[ \frac{d}{dx} \left( B_y \frac{d^2 V}{dx^2} \right) + \lambda j_z \frac{dV}{dx} \right] g &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{при } x=a \text{ и} \\ \text{при } x=b \end{array} \quad (4.5.7)$$

в соответствии с дифференциальным уравнением (4.5.6). Для того чтобы условия (4.5.7) выполнялись в любой момент времени  $t$ , функция  $V(x)$  должна удовлетворять краевым условиям:

$$\left. \begin{aligned} B_y \frac{d^2 V}{dx^2} &= 0 \\ \frac{d}{dx} \left( B_y \frac{d^2 V}{dx^2} \right) + \lambda j_z \frac{dV}{dx} &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{при } x=a \text{ и} \\ \text{при } x=b. \end{array} \quad (4.5.8)$$

Дифференциальное уравнение (4.5.5) с краевыми условиями (4.5.8) при любом значении числового параметра  $\lambda$  имеет тривиальное решение  $V(x) \equiv 0$ . Те значения параметра  $\lambda$ , при которых краевая задача, образуемая дифференциальным уравнением (4.5.5) и краевыми условиями (4.5.8), имеет нетривиальные решения, называют *собственными значениями* этой краевой задачи. Нетривиальные решения дифференциального уравнения (4.5.5) с краевыми условиями (4.5.8), соответствующие собственным значениям данной краевой задачи, называют ее *собственными функциями*. Покажем, что собственные значения краевой задачи, образуемой дифференциальным уравнением (4.5.5) и краевыми условиями (4.5.8), вещественны и неотрицательны.

Рассмотрим две собственные функции рассматриваемой краевой задачи  $V(x)$  и  $V^*(x)$ , соответствующие собственным значениям  $\lambda$  и  $\lambda^*$ . Функция  $V(x)$  будет удовлетворять дифференциаль-

ному уравнению (4.5.5) и краевым условиям (4.5.8), функция  $V^*(x)$  — дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( B_y \frac{d^2 V^*}{dx^2} \right) + \lambda^* \left[ \frac{d}{dx} \left( j_z \frac{dV^*}{dx} \right) - \mu V^* \right] = 0 \quad (4.5.9)$$

и краевым условиям:

$$\left. \begin{aligned} B_y \frac{d^2 V^*}{dx^2} &= 0 \\ \frac{d}{dx} \left( B_y \frac{d^2 V^*}{dx^2} \right) + \lambda^* j_z \frac{dV^*}{dx} &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{при } x=a \text{ и} \\ &\text{при } x=b. \end{aligned} \quad (4.5.10)$$

Согласно (4.5.5) должно иметь место равенство

$$\int_a^b V^* \frac{d}{dx} \left[ \frac{d}{dx} \left( B_y \frac{d^2 V}{dx^2} \right) + \lambda j_z \frac{dV}{dx} \right] dx - \lambda \int_a^b \mu V V^* dx = 0. \quad (4.5.11)$$

Выполняя в (4.5.11) интегрирование по частям, получим соотношение

$$\begin{aligned} - \int_a^b \frac{dV^*}{dx} \left[ \frac{d}{dx} \left( B_y \frac{d^2 V}{dx^2} \right) + \lambda j_z \frac{dV}{dx} \right] dx + \left\{ V^* \left[ \frac{d}{dx} \left( B_y \frac{d^2 V}{dx^2} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \lambda j_z \frac{dV}{dx} \right] \right\}_{x=a}^{x=b} - \lambda \int_a^b \mu V V^* dx = 0, \end{aligned}$$

или согласно (4.5.8)

$$- \int_a^b \frac{dV^*}{dx} \frac{d}{dx} \left( B_y \frac{d^2 V}{dx^2} \right) dx - \lambda \int_a^b \left( j_z \frac{dV}{dx} \frac{dV^*}{dx} + \mu V V^* \right) dx = 0. \quad (4.5.12)$$

Равенство (4.5.12) путем интегрирования по частям можно привести к виду

$$\begin{aligned} \int_a^b B_y \frac{d^2 V}{dx^2} \frac{d^2 V^*}{dx^2} dx - \left( B_y \frac{dV^*}{dx} \frac{d^2 V}{dx^2} \right)_{x=a}^{x=b} - \\ - \lambda \int_a^b \left( j_z \frac{dV}{dx} \frac{dV^*}{dx} + \mu V V^* \right) dx = 0, \end{aligned}$$

или в соответствии с краевыми условиями (4.5.8)

$$\int_a^b B_y \frac{d^2 V}{dx^2} \frac{d^2 V^*}{dx^2} dx = \lambda \int_a^b \left( j_z \frac{dV}{dx} \frac{dV^*}{dx} + \mu V V^* \right) dx. \quad (4.5.13)$$

Аналогично, умножив обе части уравнения (4.5.9) на  $V$  и проинтегрировав их по переменной  $x$  в пределах от  $a$  до  $b$ , получим равенство, которому путем интегрирования по частям можно будет придать вид

$$\int_a^b B_y \frac{d^2 V}{dx^2} \frac{d^2 V^*}{dx^2} dx = \lambda^* \int_a^b \left( j_z \frac{dV}{dx} \frac{dV^*}{dx} + \mu V V^* \right) dx. \quad (4.5.14)$$

Если при некотором комплексном значении параметра  $\lambda$  дифференциальное уравнение (4.5.5) имеет нетривиальное решение  $V(x)$ , удовлетворяющее краевым условиям (4.5.8), то при  $\lambda^* = \bar{\lambda}$  краевая задача, образуемая дифференциальным уравнением (4.5.9) и краевыми условиями (4.5.10), будет иметь нетривиальное решение  $V^*(x) = \bar{V}(x)$ . В рассматриваемом случае равенство (4.5.13) примет вид

$$\int_a^b B_y \frac{d^2 V}{dx^2} \frac{d^2 \bar{V}}{dx^2} dx = \lambda \int_a^b \left( j_z \frac{dV}{dx} \frac{d\bar{V}}{dx} + \mu V \bar{V} \right) dx,$$

или

$$\int_a^b B_y \left| \frac{d^2 V}{dx^2} \right|^2 dx = \lambda \int_a^b \left( j_z \left| \frac{dV}{dx} \right|^2 + \mu |V|^2 \right) dx. \quad (4.5.15)$$

В соответствии с формулами (4.2.16) всегда должны соблюдаться неравенства:

$$\mu > 0, \quad j_z > 0. \quad (4.5.16)$$

Согласно (4.5.16) равенство

$$\int_a^b \left( j_z \left| \frac{dV}{dx} \right|^2 + \mu |V|^2 \right) dx = 0$$

может иметь место лишь для функции  $V(x)$ , тождественно равной нулю в интервале  $a \leq x \leq b$ . По предположению функция  $V(x)$  представляет собой нетривиальное решение дифференциального уравнения (4.5.5), и, таким образом, интеграл, фигурирующий в правой части соотношения (4.5.15), не может быть равен нулю. Из (4.5.15) вытекает равенство

$$\lambda = \frac{\int_a^b B_y \left| \frac{d^2 V}{dx^2} \right|^2 dx}{\int_a^b \left( j_z \left| \frac{dV}{dx} \right|^2 + \mu |V|^2 \right) dx}, \quad (4.5.17)$$

в соответствии с которым собственное значение  $\lambda$  должно быть вещественным. Предположив, что краевая задача, образуемая дифференциальным уравнением (4.5.5) и краевыми условиями (4.5.8), имеет комплексное собственное значение, мы пришли к противоречию. Таким образом, нами доказана вещественность собственных значений рассматриваемой краевой задачи; из равенства (4.5.17) вытекает также неотрицательность этих собственных значений, так как знаменатель дроби, фигурирующей в правой части соотношения (4.5.17), положителен, числитель этой дроби неотрицателен.

Из формул (4.5.13) и (4.5.14) вытекает равенство

$$(\lambda - \lambda^*) \int_a^b \left( j_z \frac{dV}{dx} \frac{dV^*}{dx} + \mu V V^* \right) dx = 0, \quad (4.5.18)$$

в соответствии с которым собственные функции рассматриваемой краевой задачи  $V(x)$  и  $V^*(x)$ , соответствующие различным ее собственным значениям  $\lambda$  и  $\lambda^*$ , всегда должны удовлетворять условию

$$\int_a^b \left( j_z \frac{dV}{dx} \frac{dV^*}{dx} + \mu V V^* \right) dx = 0. \quad (4.5.19)$$

Свойство собственных функций, выражаемое интегральным соотношением (4.5.19), принято называть свойством их ортогональности.

При  $\lambda = 0$  дифференциальное уравнение (4.5.5) вырождается в уравнение

$$\frac{d^2}{dx} \left( B_y \frac{d^2 V}{dx^2} \right) = 0, \quad (4.5.20)$$

краевые условия (4.5.8) при  $\lambda = 0$  принимают вид

$$B_y \frac{d^2 V}{dx^2} = 0, \quad \frac{d}{dx} \left( B_y \frac{d^2 V}{dx^2} \right) = 0 \quad \text{при } x = a \text{ и при } x = b. \quad (4.5.21)$$

Согласно (4.5.20) должно иметь место равенство

$$B_y \frac{d^2 V}{dx^2} = C_1 + C_2 x, \quad (4.5.22)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные постоянные. В соответствии с краевыми условиями (4.5.21) обе постоянные  $C_1$  и  $C_2$  должны быть равны нулю. Полагая в (4.5.22)  $C_1 = C_2 = 0$ , получим дифференциальное уравнение, имеющее два линейно независимых решения:

$$V = 1 \text{ и } V = x. \quad (4.5.23)$$

Оба эти решения удовлетворяют краевым условиям (4.5.21), и, таким образом, краевая задача, образуемая дифференциальным уравнением (4.5.5) и краевыми условиями (4.5.8), имеет собственное значение  $\lambda$ , равное нулю. Этому собственному значению соответствуют две собственные функции краевой задачи, определяемые формулами (4.5.23). Все остальные собственные значения рассматриваемой краевой задачи должны быть положительными. Эти положительные собственные значения будем обозначать через  $\lambda_j$ ,  $j=1, 2, \dots$ , условились нумеровать их в порядке возрастания, соответствующие им собственные функции — через  $v_j(x)$ ,  $j=1, 2, \dots$

Согласно (4.5.3) первой из собственных функций (4.5.23) соответствуют одинаковые перемещения поперечных сечений корпуса, второй из этих собственных функций — перемещения, пропорциональные абсциссе поперечного сечения  $x$ . В первом случае функция  $v(x, t)$  определяет поступательные перемещения корпуса ракеты в плоскости тангажа, второму случаю соответствует вращение корпуса вокруг оси  $z$ . Оба эти движения не сопровождаются деформациями корпуса и, таким образом, собственное значение рассматриваемой нами краевой задачи, равное нулю, изгибных собственных колебаний корпуса ракеты не определяет.

Положительному собственному значению краевой задачи  $\lambda_j$  согласно (4.5.3) и (4.5.6) будет соответствовать функция  $v(x, t)$ , определяемая формулой

$$v(x, t) = V_j(x) g_j(t), \quad (4.5.24)$$

где  $g_j(t)$  — решение дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 g_j}{dt^2} + \lambda_j g_j = 0. \quad (4.5.25)$$

Полагая  $\omega_j = \sqrt{\lambda_j}$ , (4.5.26)

можно привести уравнение (4.5.25) к виду

$$\frac{d^2 g_j}{dt^2} + \omega_j^2 g_j = 0. \quad (4.5.27)$$

Общее решение дифференциального уравнения (4.5.27) может быть представлено в виде

$$g_j(t) = C_j \cos(\omega_j t + \varphi_j), \quad (4.5.28)$$

где  $C_j$  и  $\varphi_j$  — произвольные постоянные.

Подставляя (4.5.28) в (4.5.24), получим для прогиба корпуса ракеты  $v(x, t)$  выражение

$$v(x, t) = C_j V_j(x) \cos(\omega_j t + \varphi_j). \quad (4.5.29)$$

Согласно (4.5.29) в рассматриваемом случае в любой момент времени  $t$  перемещения поперечных сечений корпуса пропорцио-

нальны соответствующим значениям функции  $V_j(x)$ . Таким образом, функции  $V_j(x)$ ,  $j=1, 2, \dots$  определяют формы изгибных собственных колебаний корпуса ракеты, числа  $\omega_j$ ,  $j=1, 2, \dots$  в соответствии с формулой (4.5.29) определяют частоты этих собственных колебаний. Дифференциальное уравнение (4.5.27) принято называть дифференциальным уравнением собственных колебаний.

Мы показали выше, что дифференциальное уравнение (4.5.5) с краевыми условиями (4.5.8) имеет две собственные функции  $V=1$  и  $V=x$ , соответствующие собственному значению  $\lambda=0$ , и последовательность собственных функций  $V_j(x)$ ,  $j=1, 2, \dots$ , соответствующих положительным собственным значениям  $\lambda_j=\omega_j^2$ ,  $j=1, 2, \dots$ . Полагая в (4.5.19)  $V=V_j$ ,  $V^*=1$ , получим для функций  $V_j(x)$ ,  $j=1, 2, \dots$  интегральные соотношения:

$$\int_a^b V_j \mu dx = 0, \quad j=1, 2, \dots \quad (4.5.30)$$

При  $V=V_j$ ,  $V^*=x$  из равенства (4.5.19) будут вытекать интегральные зависимости:

$$\int_a^b \left( x V_j \mu + j_z \frac{dV_j}{dx} \right) dx = 0, \quad j=1, 2, \dots \quad (4.5.31)$$

При  $\omega_j \neq \omega_k$ , полагая в (4.5.19)  $V=V_j$ ,  $V^*=V_k$ , получим для форм собственных колебаний условия ортогональности

$$\int_a^b \left( j_z \frac{dV_j}{dx} \frac{dV_k}{dx} + \mu V_j V_k \right) dx = 0 \quad \text{при } \omega_j \neq \omega_k. \quad (4.5.32)$$

При выводе дифференциального уравнения изгибных колебаний корпуса ракеты мы не учитывали рассеяния энергии, неизбежно сопровождающего всякий реальный колебательный процесс. В соответствии с этим полученное нами дифференциальное уравнение собственных колебаний (4.5.27) предопределяет гармонический характер рассматриваемых нами собственных колебаний корпуса ракеты. Для того чтобы учесть затухание собственных колебаний, надо заменить уравнение (4.5.27) дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2 g_j}{dt^2} + \epsilon_j \frac{d g_j}{dt} + \omega_j^2 g_j = 0. \quad (4.5.33)$$

Неоднократно проводившиеся натурные динамические испытания различных ракет, а также динамические испытания конструктивно подобных ракетных моделей (см. [14]), свидетельствуют о том, что для упругих колебаний корпуса ракеты логариф-

мический декремент собственных колебаний практически не зависит от номера их тона, обозначенного в уравнении (4.5.33) через  $j$ . Логарифмический декремент собственных колебаний пропорционален отношению коэффициента демпфирования  $\varepsilon_j$  к частоте колебаний  $\omega_j$ . Таким образом, для уравнения (4.5.33) можно приближенно положить

$$\frac{\varepsilon_j}{\omega_j} = \eta, \quad (4.5.34)$$

где  $\eta$  — безразмерный коэффициент, независящий от номера тона  $j$ . Коэффициент  $\eta$  обычно лежит в пределах от 0,01 до 0,02. Согласно (4.5.34) дифференциальному уравнению (4.5.33) можно придать вид

$$\frac{d^2 g_j}{dt^2} + \eta \omega_j \frac{dg_j}{dt} + \omega_j^2 g_j = 0. \quad (4.5.35)$$

В заключение этого параграфа отметим, что дифференциальное уравнение (4.5.5) с краевыми условиями (4.5.8) определяет функции  $V_j(x)$ ,  $j=1, 2, \dots$  с точностью до произвольных постоянных множителей. Для устранения этой неопределенности функции  $V_j(x)$ ,  $j=1, 2, \dots$  подчиняют всегда некоторому дополнительному условию. В качестве такого дополнительного условия пользуются обычно начальным условием

$$V_j(x) = 1 \text{ при } x = a. \quad (4.5.36)$$

## § 6. РАСЧЕТ ФОРМ И ЧАСТОТ ИЗГИБНЫХ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ МЕТОДОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Для расчета форм и частот изгибных собственных колебаний можно воспользоваться излагаемым в этом параграфе методом последовательных приближений.

Пусть  $V_j^{(k-1)}(x)$  —  $(k-1)$ -е приближение для  $j$ -й формы собственных колебаний  $V_j(x)$ . Относительно функции  $V_j^{(k-1)}(x)$  будем предполагать, что она удовлетворяет условиям:

$$\left. \begin{aligned} \int_a^b V_j^{(k-1)} \mu dx &= 0, \\ \int_a^b \left( x V_j^{(k-1)} \mu + j_z \frac{dV_j^{(k-1)}}{dx} \right) dx &= 0, \\ V_j^{(k-1)} &= 1 \text{ при } x = a, \end{aligned} \right\} \quad (4.6.1)$$

в соответствии с интегральными соотношениями (4.5.30) и (4.5.31), и начальному условию (4.5.36), которого мы будем при-



держиваться везде в дальнейшем изложении. Следующее приближение  $V_j^{(k)}(x)$  для функции  $V_j(x)$  условимся определять из дифференциального уравнения

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( B_y \frac{d^2 V_j^{(k)}}{dx^2} \right) + \lambda_j^{(k)} \left[ \frac{d}{dx} \left( j_z \frac{dV_j^{(k-1)}}{dx} \right) - \mu V_j^{(k-1)} \right] = 0 \quad (4.6.2)$$

с краевыми условиями:

$$\left. \begin{aligned} B_y \frac{d^2 V_j^{(k)}}{dx^2} &= 0 \\ \frac{d}{dx} \left( B_y \frac{d^2 V_j^{(k)}}{dx^2} \right) + \lambda_j^{(k)} j_z \frac{dV_j^{(k-1)}}{dx} &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{при } x=a \text{ и} \\ &\text{при } x=b \end{aligned} \quad (4.6.3)$$

[см. (4.5.5) и (4.5.8)], потребовав при этом, чтобы искомая функция  $V_j^{(k)}(x)$  удовлетворяла условиям:

$$\begin{aligned} \int_a^b V_j^{(k)} \mu dx &= 0, \\ \int_a^b \left( x V_j^{(k)} \mu + j_z \frac{dV_j^{(k)}}{dx} \right) dx &= 0, \\ V_j^{(k)} &= 1 \text{ при } x=a \end{aligned} \quad (4.6.4)$$

[см. (4.6.1)]. Как видно будет из дальнейшего, дифференциальное уравнение (4.6.2) с краевыми условиями (4.6.3) и дополнительными условиями (4.6.4) однозначно определяет функцию  $V_j^{(k)}(x)$  и числовой параметр  $\lambda_j^{(k)}$ , фигурирующий в дифференциальном уравнении (4.6.2) и в краевых условиях (4.6.3).

Согласно (4.6.2) и (4.6.3) должно иметь место равенство

$$\frac{d}{dx} \left( B_y \frac{d^2 V_j^{(k)}}{dx^2} \right) + \lambda_j^{(k)} j_z \frac{dV_j^{(k-1)}}{dx} = \lambda_j^{(k)} \int_a^x V_j^{(k-1)} \mu dx. \quad (4.6.5)$$

В соответствии с первым из соотношений (4.6.1) краевое условие

$$\frac{d}{dx} \left( B_y \frac{d^2 V_j^{(k)}}{dx^2} \right) + \lambda_j^{(k)} j_z \frac{dV_j^{(k-1)}}{dx} = 0 \quad \text{при } x=a \text{ и при } x=b$$

будет выполняться.

Дифференциальное уравнение (4.6.5) можно привести к виду

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( B_y \frac{d^2 V_j^{(k)}}{dx^2} \right) - \lambda_j^{(k)} \int_a^x V_j^{(k-1)} \mu dx - \lambda_j^{(k)} x V_j^{(k-1)} \mu = \\ = - \lambda_j^{(k)} x V_j^{(k-1)} \mu - \lambda_j^{(k)} j_z \frac{dV_j^{(k-1)}}{dx}, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( B_y \frac{d^2 V_j^{(k)}}{dx^2} - \lambda_j^{(k)} x \int_a^x V_j^{(k-1)} \mu dx \right) = \\ = - \lambda_j^{(k)} \left( x V_j^{(k-1)} \mu + j_z \frac{dV_j^{(k-1)}}{dx} \right). \quad (4.6.6) \end{aligned}$$

Согласно (4.6.6) и (4.6.3) должно иметь место равенство

$$B_y \frac{d^2 V_j^{(k)}}{dx^2} = \lambda_j^{(k)} x \int_a^x V_j^{(k-1)} \mu dx - \lambda_j^{(k)} \int_a^x \left( x V_j^{(k-1)} \mu + j_z \frac{dV_j^{(k-1)}}{dx} \right) dx. \quad (4.6.7)$$

Краевое условие

$$B_y \frac{d^2 V_j^{(k)}}{dx^2} = 0 \text{ при } x=a \text{ и при } x=b$$

будет выполняться в соответствии с зависимостями (4.6.1).

Уравнение (4.6.7) можно привести к виду

$$\frac{d^2 V_j^{(k)}}{dx^2} = \lambda_j^{(k)} \frac{M_j^{(k)}(x)}{B_y(x)}, \quad (4.6.8)$$

где

$$M_j^{(k)}(x) = x \int_a^x V_j^{(k-1)} \mu dx - \int_a^x \left( x V_j^{(k-1)} \mu + j_z \frac{dV_j^{(k-1)}}{dx} \right) dx. \quad (4.6.9)$$

Полагая в (4.6.8)

$$V_j^{(k)}(x) = \lambda_j^{(k)} F_j^{(k)}(x), \quad (4.6.10)$$

получим для функции  $F_j^{(k)}(x)$  дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 F_j^{(k)}}{dx^2} = \frac{M_j^{(k)}(x)}{B_y(x)}. \quad (4.6.11)$$

Согласно (4.6.4) и (4.6.10) функция  $F_j^{(k)}(x)$  должна удовлетворять условиям:

$$\int_a^b F_j^{(k)} \mu dx = 0, \quad \int_a^b \left( x F_j^{(k)} \mu + j_z \frac{dF_j^{(k)}}{dx} \right) dx = 0. \quad (4.6.12)$$

Дифференциальное уравнение (4.6.11) имеет частное решение  $F_j^{(k)} = f_j^{(k)}(x)$ , где

$$f_j^{(k)}(x) = x \int_a^x \frac{M_j^{(k)}}{B_y} dx - \int_a^x \frac{M_j^{(k)}}{B_y} x dx, \quad (4.6.13)$$

в чем можно убедиться, дважды дифференцируя по  $x$  обе части равенства (4.6.13). Таким образом, общее решение дифференциального уравнения (4.6.11) может быть представлено в виде

$$F_j^{(k)}(x) = f_j^{(k)}(x) + C_1 + C_2 x, \quad (4.6.14)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные постоянные.

Подставляя (4.6.14) в (4.6.12), получим для постоянных  $C_1$  и  $C_2$  систему уравнений

$$\begin{aligned} C_1 \int_a^b \mu dx + C_2 \int_a^b \mu x dx &= - \int_a^b f_j^{(k)} \mu dx, \\ C_1 \int_a^b \mu x dx + C_2 \int_a^b (\mu x^2 + j_z) dx &= - \int_a^b \left( x f_j^{(k)} \mu + j_z \frac{d f_j^{(k)}}{dx} \right) dx, \end{aligned}$$

или согласно (4.3.11)

$$\begin{aligned} m C_1 &= - \int_a^b f_j^{(k)} \mu dx, \\ J_z C_2 &= - \int_a^b \left( x f_j^{(k)} \mu + j_z \frac{d f_j^{(k)}}{dx} \right) dx \end{aligned} \quad (4.6.15)$$

(напомним, что координата центра масс ракеты  $x_c$  всегда равна нулю).

Подставляя  $C_1$  и  $C_2$  из (4.6.15) в (4.6.14), получим для функции  $F_j^{(k)}(x)$  выражение

$$\begin{aligned} F_j^{(k)}(x) &= f_j^{(k)}(x) - \frac{1}{m J_z} \left[ J_z \int_a^b f_j^{(k)} \mu dx + \right. \\ &\quad \left. + m x \int_a^b \left( x f_j^{(k)} \mu + j_z \frac{d f_j^{(k)}}{dx} \right) dx \right]. \end{aligned} \quad (4.6.16)$$

Согласно (4.6.4) и (4.6.10) должно иметь место равенство

$$\lambda_j^{(k)} F_j^{(k)}(a) = 1. \quad (4.6.11)$$

Из формул (4.6.13) и (4.6.16) найдем

$$F_j^{(k)}(a) = -\frac{1}{m'z} \int_a^b \left[ f_j^{(k)} \mu (J_z + max) + maj_z \frac{df_j^{(k)}}{dx} \right] dx. \quad (4.6.12)$$

В соответствии с равенствами (4.6.17) и (4.6.18) числовой множитель  $\lambda_j^{(k)}$  должен иметь значение, определяемое формулой

$$\lambda_j^{(k)} = -\frac{m'z}{\int_a^b \left[ f_j^{(k)} \mu (J_z + max) + maj_z \frac{df_j^{(k)}}{dx} \right] dx}. \quad (4.6.13)$$

Подставляя (4.6.16) и (4.6.19) в (4.6.10), получим для искомой функции  $V_j^{(k)}(x)$  выражение

$$V_j^{(k)}(x) = \frac{J_z \int_a^b f_j^{(k)} \mu dx + mx \int_a^b \left( x f_j^{(k)} \mu + j_z \frac{df_j^{(k)}}{dx} \right) dx - m J_z f_j^{(k)}(x)}{\int_a^b \left[ f_j^{(k)} \mu (J_z + max) + maj_z \frac{df_j^{(k)}}{dx} \right] dx} \quad (4.6.14)$$

Таким образом, зная  $(k-1)$ -е приближение  $V_j^{(k-1)}(x)$  для функции  $V_j(x)$ , можно рассчитать следующее приближение  $V_j^{(k)}(x)$  по формулам (4.6.9), (4.6.13) и (4.6.20). Для определения первой формы собственных колебаний в качестве исходного приближения  $V_1^{(0)}(x)$  может быть взята произвольная функция удовлетворяющая согласно (4.6.1) условиям:

$$\begin{aligned} \int_a^b V_1^{(0)} \mu dx &= 0, \\ \int_a^b \left( x V_1^{(0)} \mu + j_z \frac{dV_1^{(0)}}{dx} \right) dx &= 0, \\ V_1^{(0)} &= 1 \text{ при } x=a. \end{aligned} \quad (4.6.15)$$

Можно положить, например,

$$V_1^{(0)}(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2, \quad (4.6.16)$$

определив коэффициенты  $C_0$ ,  $C_1$  и  $C_2$  из условий (4.6.21). Последовательность функций  $V_1^{(k)}(x)$ ,  $k=1, 2, \dots$  всегда будет сходиться к функции  $V_1(x)$ , определяющей первую форму собственных колебаний, а числовая последовательность  $\lambda_1^{(k)}$ ,  $k=1, 2, \dots$ , построенная в соответствии с формулой (4.6.19), всегда будет иметь предел  $\lambda_1$ , определяющий согласно (4.5.26) квадрат первой частоты собственных колебаний корпуса ракеты. Для нахождения второй формы собственных колебаний в качестве исходного приближения  $V_2^{(0)}(x)$  должна быть взята функция, удовлетворяющая согласно (4.6.1) условиям:

$$\begin{aligned} \int_a^b V_2^{(0)} \mu dx &= 0, \\ \int_a^b \left( x V_2^{(0)} \mu + j_z \frac{dV_2^{(0)}}{dx} \right) dx &= 0, \\ V_2^{(0)} &= 1 \text{ при } x=a \end{aligned} \quad (4.6.23)$$

и, кроме того, условию

$$\int_a^b \left( j_z \frac{dV_1}{dx} \frac{dV_2^{(0)}}{dx} + \mu V_1 V_2^{(0)} \right) dx = 0 \quad (4.6.24)$$

в соответствии со свойствами ортогональности (4.5.32). Зная функцию  $V_1(x)$ , можно построить исходное приближение для функции  $V_2(x)$ , положив

$$V_2^{(0)}(x) = C_1 V_1^{(0)}(x) + C_2 V_1(x). \quad (4.6.25)$$

Согласно (4.5.30), (4.5.31), (4.5.36) и (4.6.21) первые два условия из (4.6.23) будут выполняться при любых значениях коэффициентов  $C_1$  и  $C_2$ , третье условие будет выполняться, если константы  $C_1$  и  $C_2$  будут удовлетворять уравнению

$$C_1 + C_2 = 1. \quad (4.6.26)$$

Подставив (4.6.25) в (4.6.24), получим для коэффициентов  $C_1$  и  $C_2$  уравнение

$$\begin{aligned} C_1 \int_a^b \left( j_z \frac{dV_1}{dx} \frac{dV_1^{(0)}}{dx} + \mu V_1 V_1^{(0)} \right) dx + \\ + C_2 \int_a^b \left[ j_z \left( \frac{dV_1}{dx} \right)^2 + \mu V_1^2 \right] dx = 0. \end{aligned} \quad (4.6.27)$$

Определив константы  $C_1$  и  $C_2$  из уравнений (4.6.26) и (4.6.27), найдем по формуле (4.6.25) функцию  $V_2^{(0)}(x)$ , удовлетворяющую всем необходимым условиям. Последовательность функций

$\lambda_2^{(k)}(x)$ ,  $k=1, 2, \dots$  будет сходиться к функции  $V_2(x)$ , определяющей вторую форму собственных колебаний, а числовая последовательность  $\lambda_2^{(k)}$ ,  $k=1, 2, \dots$  будет иметь предел  $\lambda_2$ , определяющий вторую частоту собственных колебаний. В качестве исходного приближения  $V_3^{(0)}(x)$  для функции  $V_3(x)$  может быть взята функция

$$V_3^{(0)}(x) = C_1 V_2^{(0)}(x) + C_2 V_2(x), \quad (4.6.28)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — константы, определяемые уравнениями:

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= 1, \\ C_1 \int_a^b \left( j_z \frac{dV_2}{dx} \frac{dV_2^{(0)}}{dx} + \mu V_2 V_2^{(0)} \right) dx + \\ &+ C_2 \int_a^b \left[ j_z \left( \frac{dV_2}{dx} \right)^2 + \mu V_2^2 \right] dx = 0 \end{aligned} \quad (4.6.29)$$

и т. д.

Отметим два особых случая, которые могут представиться в процессе проведения указанных выше расчетов.

Если точка  $x=a$  окажется узловой для  $j$ -й формы собственных колебаний, условие (4.5.36) при этом значении индекса  $j$  станет невыполнимым. Тогда определенный интеграл, играющий роль знаменателя в формулах (4.6.19) и (4.6.20), при  $k \rightarrow \infty$  будет стремиться к нулю и процесс последовательных приближений станет расходящимся. В рассматриваемом случае условие (4.5.36) следует заменить каким-либо другим дополнительным условием для функции  $V_j(x)$ .

Если функция  $V_1^{(0)}(x)$  случайно окажется ортогональной к функции  $V_j(x)$ , т. е. если при некотором  $j$  возникнет равенство

$$\int_a^b \left( j_z \frac{dV_j}{dx} \frac{dV_1^{(0)}}{dx} + \mu V_j V_1^{(0)} \right) dx = 0, \quad (4.6.30)$$

$j$ -я форма собственных колебаний в процессе указанных выше вычислений окажется пропущенной. В связи с этим при расчете форм и частот собственных колебаний рассмотренным нами методом последовательных приближений полезно проводить вычисления дважды, отправляясь от двух различных исходных приближений  $V_1^{(0)}(x)$ .

## § 7. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ РАКЕТЫ В ПЛОСКОСТИ ТАНГАЖА В БЕСКОНЕЧНУЮ СИСТЕМУ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Зная формы и частоты изгибных собственных колебаний корпуса ракеты, можно преобразовать уравнения (4.4.35), содержащие дифференциальные уравнения в частных производных, в бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений.

Мы показали выше, что краевая задача, образуемая дифференциальным уравнением (4.5.5) и краевыми условиями (4.5.8), обладает двумя собственными функциями  $1$  и  $x$ , соответствующими собственному значению  $\lambda=0$ , и последовательностью собственных функций  $V_j(x)$ ,  $j=1, 2, \dots$ , соответствующих положительным собственным значениям данной краевой задачи. Последовательность собственных функций

$$1, x, V_1(x), V_2(x), \dots \quad (4.7.1)$$

обладает так называемым свойством полноты, которое выражается в том, что любая функция  $f(x)$ , непрерывная в интервале  $a \leq x \leq b$ , может быть разложена в ряд по собственным функциям (4.7.1)

$$f(x) = C_1 + C_2 x + \sum_{k=1}^{\infty} g_k V_k(x), \quad (4.7.2)$$

сходящийся в любой точке интервала  $a < x < b$  к соответствующему частному значению функции  $f(x)$ .

Вследствие опорожнения топливных баков функции  $\mu$  и  $j_z$ , фигурирующие в дифференциальном уравнении (4.5.5) и в краевых условиях (4.5.8), меняют свой вид в процессе полета ракеты. В соответствии с этим различным моментам времени  $t$  будут соответствовать различные формы изгибных собственных колебаний корпуса ракеты, иными словами собственные функции  $V$ , краевой задачи, образуемой дифференциальным уравнением (4.5.5) и краевыми условиями (4.5.8), будут зависеть от времени  $t$ . В любой момент времени  $t$  последовательность функций

$$1, x, V_1(x, t), V_2(x, t), \dots \quad (4.7.3)$$

будет обладать свойством полноты, и, таким образом, в каждый момент времени  $t$  прогиб корпуса ракеты  $v(x, t)$  может быть представлен рядом

$$v(x, t) = C_1(t) + C_2(t)x + \sum_{k=1}^{\infty} g_k(t)V_k(x, t), \quad (4.7.4)$$

сходящимся в любой точке интервала  $a < x < b$  к соответствующему значению прогиба  $v$ .

Определим сперва коэффициенты разложения (4.7.4)  $C_1(t)$ ,  $C_2(t)$ . В § 3 мы показали, что функция  $v(x, t)$ , найденная из дифференциального уравнения (4.2.19) с краевыми условиями (4.2.21), всегда будет удовлетворять интегральным условиям (4.3.4). Подставляя (4.7.4) в (4.3.4), получим равенства:

$$C_1 \int_a^b \mu dx + C_2 \int_a^b \mu x dx + \sum_{k=1}^{\infty} g_k \int_a^b V_k \mu dx = 0,$$

$$C_1 \int_a^b \mu x dx + C_2 \int_a^b (\mu x^2 + j_z) dx + \sum_{k=1}^{\infty} g_k \int_a^b \left( x \mu V_k + \frac{\partial V_k}{\partial x} j_z \right) dx = 0$$

или согласно (4.3.11), (4.5.30) и (4.5.31)

$$mC_1 = 0, \quad J_z C_2 = 0 \quad (4.7.5)$$

( $x_c \equiv 0$ ). Таким образом, в разложении (4.7.4) коэффициенты  $C_1(t)$  и  $C_2(t)$  всегда будут тождественно равны нулю и в соответствии с этим прогиб корпуса ракеты  $v(x, t)$  будем искать в виде ряда

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(t) V_k(x, t). \quad (4.7.6)$$

Подставляя ряд (4.7.6) в первые два из уравнений (4.4.35) получим уравнения:

$$m(\omega_{0y} - g_y) = F_y + \sum_{k=1}^{\infty} g_k \left[ \int_a^b \frac{\partial V_k}{\partial x} c dx + P \left( \frac{\partial V_k}{\partial x} \right)_{x=x_T} \right],$$

$$J_z \frac{d\omega_z}{dt} = M_z + \sum_{k=1}^{\infty} g_k \left[ \int_a^b \frac{\partial v_k}{\partial x} c x dx + P \left( x \frac{\partial v_k}{\partial x} - V_k \right)_{x=x_T} \right],$$

или

$$m(\omega_{0y} - g_y) + \sum_{k=1}^{\infty} c_{yk} g_k = F_y,$$

$$J_z \frac{d\omega_z}{dt} + \sum_{k=1}^{\infty} c_{zk} g_k = M_z, \quad (4.7.7)$$

где

$$c_{yk} = - \int_a^b \frac{\partial V_k}{\partial x} c dx - P \left( \frac{\partial V_k}{\partial x} \right)_{x=x_T},$$

$$c_{zk} = - \int_a^b \frac{\partial V_k}{\partial x} c x dx + P \left( V_k - x \frac{\partial V_k}{\partial x} \right)_{x=x_T}. \quad (4.7.8)$$



Подставим теперь ряд (4.7.6) в дифференциальные уравнения в частных производных, содержащиеся в уравнениях движения (4.4.35). В процессе движения ракеты формы изгибных собственных колебаний ее корпуса меняются медленно и в связи с этим при вычислениях частных производных по времени  $t$  от прогиба  $v(x, t)$  практически можно пренебрегать зависимостью от времени  $t$  функций  $V_k(x, t)$ ,  $k=1, 2, \dots$ . В этом случае, подставляя ряд (4.7.6) в дифференциальные уравнения в частных производных, указанные в (4.4.35), получим соотношения:

$$\begin{aligned} & \mu \sum_{k=1}^{\infty} V_k \frac{d^2 g_k}{dt^2} + \frac{\partial Q}{\partial x} = -\mu (\omega_{0y} - g_y) - \mu x \frac{d\omega_z}{dt} + c(\alpha + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial V_k}{\partial x} g_k) + P \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\partial V_k}{\partial x} \right)_{x=x_T} g_k \delta(x, x_T) + F_{y_{\text{ynp}}} \delta(x, x_y), \\ & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left( B_y \frac{\partial^2 v_k}{\partial x^2} \right) g_k - j_z \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial v_k}{\partial x} \frac{d^2 g_k}{dt^2} - Q = j_z \frac{d\omega_z}{dt} + \\ & + P \sum_{k=1}^{\infty} (V_k)_{x=x_T} g_k \delta(x, x_T) - M_{z_{\text{ynp}}}^{(0)} \delta(x, x_y). \end{aligned} \quad (4.7.9)$$

Выполняя в обеих частях первого уравнения из (4.7.9) умножение на  $V_j(x, t)$  и интегрирование по переменной  $x$  в пределах от  $a$  до  $b$ , получим равенство

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b V_j V_k \mu dx \frac{d^2 g_k}{dt^2} + \int_a^b V_j \frac{\partial Q}{\partial x} dx = - \int_a^b V_j \mu dx (\omega_{0y} - g_y) - \\ & - \int_a^b x V_j \mu dx \frac{d\omega_z}{dt} + \alpha \int_a^b V_j c dx + \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b V_j \frac{\partial V_k}{\partial x} c dx g_k + \\ & + P \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\partial V_k}{\partial x} \right)_{x=x_T} g_k \int_a^b V_j \delta(x, x_T) dx + F_{y_{\text{ynp}}} \int_a^b V_j \delta(x, x_y) dx. \end{aligned} \quad (4.7.10)$$

Умножив обе части второго уравнения из (4.7.9) на  $-\partial V_j / \partial x$  и проинтегрировав их переменной  $x$  в пределах от  $a$  до  $b$ , получим соотношение

$$- \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b \frac{\partial V_j}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left( B_y \frac{\partial^2 v_k}{\partial x^2} \right) dx g_k + \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b \frac{\partial V_j}{\partial x} \frac{\partial V_k}{\partial x} j_z dx \frac{d^2 g_k}{dt^2} +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_a^b Q \frac{\partial V_j}{\partial x} dx = - \int_a^b \frac{\partial V_j}{\partial x} j_z dx \frac{d\omega_z}{dt} - P \sum_{k=1}^{\infty} (V_k)_{x=x_T} \times \\
& \times \int_a^b \frac{\partial V_j}{\partial x} \delta(x, x_T) dx g_k + M_{z \text{ ynp}}^{(0)} \int_a^b \frac{\partial V_j}{\partial x} \delta(x, x_y) dx. \quad (4.7.1)
\end{aligned}$$

Согласно (4.7.10) и (4.7.11) должно иметь место равенство

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b \left( V_j V_{k\mu} + \frac{\partial V_j}{\partial x} \frac{\partial V_k}{\partial x} j_z \right) dx \frac{d^2 g_k}{dt^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b \frac{\partial V_j}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left( B_y \times \right. \\
& \times \left. \frac{\partial^2 V_k}{\partial x^2} \right) dx g_k + \int_a^b \left( V_j \frac{\partial Q}{\partial x} + Q \frac{\partial V_j}{\partial x} \right) dx = - \int_a^b V_{j\mu} dx (\omega_{0y} - \\
& - g_y) - \int_a^b \left( x V_{j\mu} + \frac{\partial V_j}{\partial x} j_z \right) dx \frac{d\omega_z}{dt} + a \int_a^b V_j c dx + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \int_a^b V_j \frac{\partial V_k}{\partial x} c dx + P \left[ \left( \frac{\partial V_k}{\partial x} \right)_{x=x_T} \int_a^b V_j \delta(x, x_T) dx - \right. \right. \\
& - \left. (V_k)_{x=x_T} \int_a^b \frac{\partial V_j}{\partial x} \delta(x, x_T) dx \right] \} g_k + F_{y \text{ ynp}} \int_a^b V_j \delta(x, x_y) dx + \\
& + M_{z \text{ ynp}}^{(0)} \int_a^b \frac{\partial V_j}{\partial x} \delta(x, x_y) dx. \quad (4.7.12)
\end{aligned}$$

Согласно (4.5.5) и (4.5.8) функция  $V_k(x, t)$  должна удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( B_y \frac{\partial^2 V_k}{\partial x^2} \right) + \lambda_k \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( j_z \frac{\partial V_k}{\partial x} \right) - \mu V_k \right] = 0 \quad (4.7.13)$$

и краевым условиям:

$$\left. \begin{aligned} B_y \frac{\partial^2 V_k}{\partial x^2} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( B_y \frac{\partial^2 V_k}{\partial x^2} \right) + \lambda_k j_z \frac{\partial V_k}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{при } x=a \text{ и} \\ &\text{при } x=b. \end{aligned} \quad (4.7.14)$$

Выполняя в (4.7.13) интегрирование по переменной  $x$  в пределах от  $a$  до  $x$  и принимая во внимание при этом краевые условия (4.7.14), получим равенство

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( B_y \frac{\partial^2 V_k}{\partial x^2} \right) + \lambda_k j_z \frac{\partial V_k}{\partial x} - \lambda_k \int_a^x V_k \mu dx = 0. \quad (4.7.15)$$

В соответствии с равенством (4.7.15) должно иметь место соотношение

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{\partial V_j}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left( B_y \frac{\partial^2 V_k}{\partial x^2} \right) dx = -\lambda_k \int_a^b \frac{\partial V_j}{\partial x} \frac{\partial V_k}{\partial x} j_z dx + \\ + \lambda_k \int_a^b \frac{\partial V_j}{\partial x} \int_a^x V_k \mu dx dx. \end{aligned} \quad (4.7.16)$$

Интегрируя обе части тождества

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( V_j \int_a^x V_k \mu dx \right) = \frac{\partial V_j}{\partial x} \int_a^x V_k \mu dx + V_j V_k \mu$$

по переменной  $x$  в пределах от  $a$  до  $b$ , получим равенство

$$(V_j)_{x=b} \int_a^b V_k \mu dx = \int_a^b \frac{\partial V_j}{\partial x} \int_a^x V_k \mu dx dx + \int_a^b V_j V_k \mu dx. \quad (4.7.17)$$

Согласно (4.5.30) и (4.7.17) должно иметь место соотношение

$$\int_a^b \frac{\partial V_j}{\partial x} \int_a^x V_k \mu dx dx = - \int_a^b V_j V_k \mu dx, \quad (4.7.18)$$

в соответствии с которым формула (4.7.16) может быть приведена к виду

$$\int_a^b \frac{\partial V_j}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left( B_y \frac{\partial^2 V_k}{\partial x^2} \right) dx = -\lambda_k \int_a^b \left( V_j V_k \mu + \frac{\partial V_j}{\partial x} \frac{\partial V_k}{\partial x} j_z \right) dx. \quad (4.7.19)$$

Пользуясь краевым условием, указанным для функции  $Q$  в уравнениях движения (4.4.35), найдем

$$\int_a^b \left( V_j \frac{\partial Q}{\partial x} + Q \frac{\partial V_j}{\partial x} \right) dx = \int_a^b \frac{\partial (V_j Q)}{\partial x} dx = V_j Q \Big|_{x=a}^{x=b} = 0. \quad (4.7.20)$$

Согласно (4.7.19) и (4.7.20) уравнению (4.7.12) можно придать вид

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b \left( V_j V_k^{\mu} + \frac{\partial V_j}{\partial x} \frac{\partial V_k}{\partial x} j_z \right) dx \left( \frac{d^2 g_k}{dt^2} + \lambda_k g_k \right) = - \int_a^b V_j dx \times \\ \times (\omega_{0y} - g_y) - \int_a^b \left( x V_j^{\mu} + \frac{\partial V_j}{\partial x} j_z \right) dx \frac{d\omega_z}{dt} + a \int_a^b V_j c dx + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \int_a^b V_j \frac{\partial V_k}{\partial x} c dx + P \left[ \left( \frac{\partial V_k}{\partial x} \right)_{x=x_T} \int_a^b V_j \delta(x, x_T) dx - \right. \right. \\ \left. \left. - (V_k)_{x=x_T} \int_a^b \frac{\partial V_j}{\partial x} \delta(x, x_T) dx \right] \right\} g_k + F_{y \text{ ynp}} \int_a^b V_j \delta(x, x_y) dx + \\ + M_{z \text{ ynp}}^{(0)} \int_a^b \frac{\partial V_j}{\partial x} \delta(x, x_y) dx, \end{aligned}$$

или в соответствии с равенствами (4.5.30), (4.5.31) и (4.5.32)

$$\begin{aligned} \int_a^b \left[ V_j^2 + \left( \frac{\partial V_j}{\partial x} \right)^2 j_z \right] dx \left( \frac{d^2 g_j}{dt^2} + \lambda_j g_j \right) = a \int_a^b V_j c dx + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \int_a^b V_j \frac{\partial V_k}{\partial x} c dx + P \left[ \left( \frac{\partial V_k}{\partial x} \right)_{x=x_T} \int_a^b V_j \delta(x, x_T) dx - \right. \right. \\ \left. \left. - (V_k)_{x=x_T} \int_a^b \frac{\partial V_j}{\partial x} \delta(x, x_T) dt \right] \right\} g_k + F_{y \text{ ynp}} \int_a^b V_j \delta(x, x_y) dx + \\ + M_{z \text{ ynp}}^{(0)} \int_a^b \frac{\partial V_j}{\partial x} \delta(x, x_y) dx. \quad (4.7.21) \end{aligned}$$

Пользуясь формулой (4.4.28) и равенством (4.5.26), можно привести уравнение (4.7.21) к виду

$$\begin{aligned} \int_a^b \left[ V_j^2 + \left( \frac{\partial V_j}{\partial x} \right)^2 j_z \right] dx \left( \frac{d^2 g_j}{dt^2} + \omega_j^2 g_j \right) = a \int_a^b V_j c dx + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \int_a^b V_j \frac{\partial V_k}{\partial x} c dx + P \left( V_j \frac{\partial V_k}{\partial x} - V_k \frac{\partial V_j}{\partial x} \right)_{x=x_T} \right] g_k + \\ + (V_j)_{x=x_y} F_{y \text{ ynp}} + \left( \frac{\partial V_j}{\partial x} \right)_{x=x_y} M_{z \text{ ynp}}^{(0)}, \end{aligned}$$

или

$$m_j \left( \frac{d^2 g_j}{dt^2} + \omega_j^2 g_j \right) = \alpha \int_a^b V_j c dx - \sum_{k=1}^{\infty} c_{jk} g_k + (V_j)_{x=x_y} F_{y \text{ унр}} + \left( \frac{\partial V_j}{\partial x} \right)_{x=x_y} M_{z \text{ унр}}^{(0)}, \quad (4.7.22)$$

где

$$m_j = \int_a^b \left[ V_j^2 + \left( \frac{\partial V_j}{\partial x} \right)^2 j_z \right] dx, \quad (4.7.23)$$

$$c_{jk} = P \left( V_k \frac{\partial V_j}{\partial x} - V_j \frac{\partial V_k}{\partial x} \right)_{x=x_T} - \int_a^b V_j \frac{\partial V_k}{\partial x} c dx.$$

Уравнение (4.7.22) можно трактовать, как дифференциальное уравнение вынужденных колебаний корпуса ракеты, вызываемых аэродинамическими силами, управляющими силами и нагрузками, возникающими вследствие влияния изгиба корпуса на аэродинамические и реактивные силы, действующие на ракету. Если не учитывать влияние изгиба корпуса ракеты на линию действия суммарной силы тяги двигателей, дифференциальное уравнение вынужденных колебаний (4.7.22) при отсутствии аэродинамических и управляющих сил будет вырождаться в дифференциальное уравнение собственных колебаний (4.5.27).

Уравнение вынужденных колебаний (4.7.22) получено нами без учета рассеяния энергии, возникающего в процессе колебаний. В § 5 мы указали, что рассеяние энергии, сопровождающее собственные колебания корпуса ракеты, можно учесть, заменяя уравнение собственных колебаний (4.5.27) дифференциальным уравнением (4.5.35). В соответствии с этим рассеяние энергии можно учесть в уравнении вынужденных колебаний (4.7.22), заменяя это уравнение дифференциальным уравнением

$$m_j \left( \frac{d^2 g_j}{dt^2} + \eta \omega_j \frac{dg_j}{dt} + \omega_j^2 g_j \right) = \alpha \int_a^b V_j c dx - \sum_{k=1}^{\infty} c_{jk} g_k + (V_j)_{x=x_y} F_{y \text{ унр}} + \left( \frac{\partial V_j}{\partial x} \right)_{x=x_y} M_{z \text{ унр}}^{(0)}. \quad (4.7.24)$$

Объединяя уравнения вынужденных колебаний корпуса ракеты, соответствующие различным тонам этих колебаний, и при-

соединяя к этой бесконечной системе дифференциальных уравнений уравнения сил и моментов (4.7.7), получим уравнения

$$\begin{aligned}
 m(\omega_{0y} - g_y) + \sum_{k=1}^{\infty} c_{yk} g_k &= F_y, \\
 J_z \frac{d\omega_z}{dt} + \sum_{k=1}^{\infty} c_{zk} g_k &= M_z, \\
 m_j \left( \frac{d^2 g_j}{dt^2} + \omega_j \frac{dg_j}{dt} + \omega_j^2 g_j \right) + \sum_{k=1}^{\infty} c_{jk} g_k &= \alpha \int_a^b V_j c dx + \\
 + (V_j)_{x=x_y} F_{yy} + \left( \frac{\partial V_j}{\partial x} \right)_{x=x_y} M_{z \text{ упр}}^{(0)}, \quad j=1, 2, \dots
 \end{aligned} \tag{4.7.25}$$

Бесконечная система обыкновенных дифференциальных уравнений (4.7.25) определяет движение, совершаемое подвижной координатной системой  $x, y, z$ , и бесконечную последовательность функций  $g_1(t), g_2(t), \dots$ . Прогиб корпуса ракеты  $v(x, t)$ , возникающий в процессе изгибных колебаний в плоскости тангажа, можно определить по функциям  $g_j(t), j=1, 2, \dots$ , суммируя ряд (4.7.6).

## § 8. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ В ПЛОСКОСТИ ТАНГАЖА, УЧИТЫВАЮЩИЕ УПРУГОСТЬ КОРПУСА РАКЕТЫ

Переходя к построению дифференциальных уравнений возмущенного движения, обозначим через  $g_1, g_2, \dots$  функции времени, определяющие изгибные колебания корпуса ракеты, соответствующие невозмущенному движению, и через  $g'_1, g'_2, \dots$  обозначим функции времени, определяющие изгибные колебания корпуса, возникающие в процессе возмущенного движения ракеты. В гл. I, исходя из уравнений сил и моментов:

$$\begin{aligned}
 m(\omega_{0y} - g_y) &= F_y, \\
 J_z \frac{d\omega_z}{dt} &= M_z,
 \end{aligned} \tag{4.8.1}$$

мы получили уравнения возмущенного движения ракеты в плоскости тангажа:

$$\begin{aligned}
 m \frac{d\Delta V_y}{dt} + v_y \frac{d\Delta \delta}{dt} + c_{yy} \Delta V_y + c_{y\delta} \Delta \delta &= c_{y\delta} \Delta \delta_0 + \Delta F_y, \\
 J_z \frac{d^2 \Delta v}{dt^2} + v_z \frac{d\Delta \delta}{dt} + c_{zy} \Delta V_y + c_{z\delta} \Delta \delta &= c_{z\delta} \Delta \delta_0 + \Delta M_z.
 \end{aligned} \tag{4.8.2}$$

Таким образом, первым двум уравнениям системы (4.7.25) будут соответствовать уравнения возмущенного движения:

$$\begin{aligned}
 m \frac{d\Delta V_y}{dt} + v_y \frac{d\Delta \vartheta}{dt} + c_{yy}\Delta V_y + c_{y\vartheta}\Delta \vartheta + \sum_{k=1}^{\infty} c_{yk}\Delta g_k = \\
 = c_{y\vartheta}\Delta \delta_{\vartheta} + \Delta F_y, \\
 J_z \frac{d^2\Delta \vartheta}{dt^2} + \mu_z \frac{d\Delta \vartheta}{dt} + c_{\vartheta y}\Delta V_y + c_{\vartheta\vartheta}\Delta \vartheta + \\
 + \sum_{k=1}^{\infty} c_{\vartheta k}\Delta g_k = c_{\vartheta\delta}\Delta \delta_{\vartheta} + M_z,
 \end{aligned}
 \tag{4.8.3}$$

$$\Delta g_k = g'_k - g_k \tag{4.8.4}$$

(малыми изменениями, которые могут претерпевать коэффициенты  $c_{yk}$  и  $c_{\vartheta k}$  при переходе от невозмущенного движения к возмущенному, можно пренебречь, так как эти коэффициенты в уравнениях (4.7.25) умножаются на функции  $g_k$ , являющиеся малыми в соответствии с предполагаемой нами малостью изгибных колебаний корпуса ракеты).

Согласно (4.7.25) функции  $g'_j$ ,  $j=1, 2, \dots$  будут определяться уравнениями:

$$\begin{aligned}
 m_j \left( \frac{d^2 g'_j}{dt^2} + \eta_{0j} \frac{dg'_j}{dt} + \omega_j^2 g'_j \right) + \sum_{k=1}^{\infty} c_{jk} g'_k = \alpha' \int_a^b c'_j dx + \\
 + (V'_j)_{x=x_y} F'_{y'_{\text{упр}}} + \left( \frac{\partial V'_j}{\partial x} \right)_{x=x_y} M_{z'_{\text{упр}}}^{(0)'}, \quad j=1, 2, \dots,
 \end{aligned}
 \tag{4.8.5}$$

где  $\alpha'$ ,  $c'$ ,  $V'_j$ ,  $F'_{y'_{\text{упр}}}$  и  $M_{z'_{\text{упр}}}^{(0)'}$  — функции, определяющие угол атаки  $\alpha$ , коэффициент  $c$ , форму изгибных колебаний  $V_j$ , управляющую силу  $F_{y_{\text{упр}}}$  и управляющий момент  $M_{z'_{\text{упр}}}^{(0)'}$  для случая возмущенного движения ракеты (ввиду предполагаемой нами малости функций  $g_j$ ,  $\frac{dg_j}{dt}$  и  $\frac{d^2 g_j}{dt^2}$ ,  $j=1, 2, \dots$  малыми изменениями, которым могут подвергаться коэффициенты при этих функциях в случае перехода от невозмущенного движения к возмущенному, можно пренебречь). Полагая в (4.8.5)

$$\begin{aligned}
 g'_j = g_j + \Delta g_j, \quad j=1, 2, \dots, \alpha' = \alpha + \Delta \alpha, c' = c + \Delta c_1, \\
 V'_j = V_j + \Delta V_j, \quad j=1, 2, \dots
 \end{aligned}
 \tag{4.8.6}$$

и пренебрегая произведениями малых величин  $\Delta\alpha$ ,  $\Delta V_j$ ,  $\frac{\partial \Delta V_j}{\partial x}$ ,  $j=1, 2, \dots$ ,  $\Delta c$ ,  $F'_{y' \text{ ynp}} - F_{y \text{ ynp}}$  и  $M_{z \text{ ynp}}^{(0)'} - M_{z \text{ ynp}}^{(0)}$ , получим уравнения

$$m_j \left( \frac{d^2 g_j}{dt^2} + \eta_{0j} \frac{dg_j}{dt} + \omega_j^2 g_j \right) + \sum_{k=1}^{\infty} c_{jk} g_k + m_j \left( \frac{d^2 \Delta g_j}{dt^2} + \eta_{0j} \frac{d\Delta g_j}{dt} + \omega_j^2 \Delta g_j \right) + \sum_{k=1}^{\infty} c_{jk} \Delta g_k = (\alpha + \Delta\alpha) \int_a^b V_j c dx + \alpha \int_a^b \Delta V_j c dx + \alpha \int_a^b V_j \Delta c dx + (V_j)_{x=x_y} F'_{y' \text{ ynp}} + (\Delta V_j)_{x=x_y} F_{y \text{ ynp}} + \left( \frac{\partial V_j}{\partial x} \right)_{x=x_y} M_{z \text{ ynp}}^{(0)'} + \left( \frac{\partial \Delta V_j}{\partial x} \right)_{x=x_y} M_{z \text{ ynp}}^{(0)}, \quad j=1, 2, \dots \quad (4.8.7)$$

Согласно (4.7.25) уравнениям (4.8.7) можно придать вид

$$m_j \left( \frac{d^2 \Delta g_j}{dt^2} + \eta_{0j} \frac{d\Delta g_j}{dt} + \omega_j^2 \Delta g_j \right) + \sum_{k=1}^{\infty} c_{jk} \Delta g_k = \Delta\alpha \int_a^b V_j c dx + (V_j)_{x=x_y} F'_{y' \text{ ynp}} + \left( \frac{\partial V_j}{\partial x} \right)_{x=x_y} M_{z \text{ ynp}}^{(0)'} + \alpha \int_a^b \Delta V_j c dx + \alpha \int_a^b V_j \Delta c dx + [(\Delta V_j)_{x=x_y} - (V_j)_{x=x_y}] F_{y \text{ ynp}} + \left[ \left( \frac{\partial \Delta V_j}{\partial x} \right)_{x=x_y} - \left( \frac{\partial V_j}{\partial x} \right)_{x=x_y} \right] M_{z \text{ ynp}}^{(0)}, \quad j=1, 2, \dots \quad (4.8.8)$$

Пользуясь матрицей перехода (1.12.5) и приближенными равенствами  $\alpha = -\frac{v_{0y}}{v_{0x}}$ ,  $\alpha' = -\frac{v'_{0y}}{v_{0x}}$ ,  $v'_{0y} - v_{0y} \cong \Delta V_y$ , найдем:

$$\Delta\alpha = \alpha' - \alpha = -\frac{v'_{0y} - v_{0y}}{v_{0x}} = -\frac{v'_{0y} - v_{0x} \Delta\theta - v_{0y}}{v_{0x}} = \Delta\theta - \frac{\Delta V_y}{v_{0x}}. \quad (4.8.9)$$

В соответствии с равенством (4.8.9) уравнения (4.8.8) можно привести к виду

$$m_j \left( \frac{d^2 \Delta g_j}{dt^2} + \eta_{0j} \frac{d\Delta g_j}{dt} + \omega_j^2 \Delta g_j \right) + \sum_{k=1}^{\infty} c_{jk} \Delta g_k + c_{j0} \Delta V_y + c_{j0} \Delta\theta = (V_j)_{x=x_y} F'_{y' \text{ ynp}} + \left( \frac{\partial V_j}{\partial x} \right)_{x=x_y} M_{z \text{ ynp}}^{(0)'} + \Delta F_j, \quad j=1, 2, \dots \quad (4.8.10)$$



где

$$c_{jy} = \frac{1}{v_{0x}} \int_a^b V_j c dx, \quad c_{j\emptyset} = - \int_a^b V_j c dx, \quad (4.8.11)$$

$$\Delta F_j = \alpha \int_a^b \Delta V_j c dx + \alpha \int_a^b V_j \Delta c dx + [(\Delta V_j)_{x=x_y} - (V_j)_{x=x_y}] F_{y \text{ упр}} + \left[ \left( \frac{\partial \Delta V_j}{\partial x} \right)_{x=x_y} - \left( \frac{\partial V_j}{\partial x} \right)_{x=x_y} \right] M_{z \text{ упр}}^{(0)}. \quad (4.8.12)$$

В том случае, когда исполнительные органы системы управления формируют управляющую силу,

$$F'_{y \text{ упр}} = c_{y\emptyset} \Delta \delta_{\emptyset}, \quad M_{z \text{ упр}}^{(0)'} = 0. \quad (4.8.13)$$

Если исполнительные органы создают сосредоточенный управляющий момент, то

$$F'_{y \text{ упр}} = 0, \quad M_{z \text{ упр}}^{(0)'} = M'_{z \text{ упр}} = c_{\emptyset\delta} \Delta \delta_{\emptyset}. \quad (4.8.14)$$

Таким образом, уравнениям (4.8.10) можно придать вид

$$m_j \left( -\frac{d^2 \Delta g_j}{dt^2} + \eta_{\omega j} \frac{d \Delta g_j}{dt} + \omega_j^2 \Delta g_j \right) + \sum_{k=1}^{\infty} c_{jk} \Delta g_k + c_{jy} \Delta V_y + c_{j\emptyset} \Delta \emptyset = c_{j\emptyset} \Delta \delta_{\emptyset} + \Delta F_j, \quad j=1, 2, \dots, \quad (4.8.15)$$

где

$$c_{j\emptyset} = c_{y\emptyset} (V_j)_{x=x_y} \quad (4.8.16)$$

в том случае, когда исполнительные органы системы управления создают управляющую силу, и

$$c_{j\emptyset} = c_{\emptyset\emptyset} \left( \frac{\partial V_j}{\partial x} \right)_{x=x_y} \quad (4.8.17)$$

в том случае, когда исполнительные органы системы управления создают сосредоточенный управляющий момент, т. е. в случае управления рассогласованием тяг.

Объединяя уравнения (4.8.3) и (4.8.15), получим бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
 m \frac{d\Delta V_y}{dt} + v_y \frac{d\Delta\vartheta}{dt} + c_{yy}\Delta V_y + c_{y\vartheta}\Delta\vartheta + \sum_{k=1}^{\infty} c_{yk}\Delta g_k = \\
 = c_{y\vartheta}\Delta\delta_{\vartheta} + \Delta F_y, \\
 J_z \frac{d^2\Delta\vartheta}{dt^2} + v_z \frac{d\Delta\vartheta}{dt} + c_{\vartheta y}\Delta V_y + c_{\vartheta\vartheta}\Delta\vartheta + \\
 + \sum_{k=1}^{\infty} c_{\vartheta k}\Delta g_k = c_{\vartheta\delta}\Delta\delta_{\vartheta} + \Delta M_z, \\
 m_j \left( \frac{d^2\Delta g_j}{dt^2} + r_{\omega j} \frac{d\Delta g_j}{dt} + \omega_j^2 \Delta g_j \right) + c_{jy}\Delta V_y + c_{j\vartheta}\Delta\vartheta + \\
 + \sum_{k=1}^{\infty} c_{jk}\Delta g_k = c_{j\delta}\Delta\delta_{\vartheta} + \Delta F_j, \quad j=1, 2, \dots
 \end{aligned} \tag{4.8.18}$$

Дифференциальные уравнения возмущенного движения (4.8.18) определяют возмущения  $\Delta V_y$ ,  $\Delta\vartheta$  и  $\Delta g_j$ ,  $j=1, 2, \dots$  по заданной функции  $\Delta\delta_{\vartheta}(t)$ , описывающей работу исполнительных органов системы управления, и по заданным функциям  $\Delta F_y(t)$ ,  $\Delta M_z(t)$  и  $\Delta F_j(t)$ ,  $j=1, 2, \dots$ , определяющим возмущающую силу, возмущающий момент и последовательность так называемых приведенных возмущающих сил.

Зная формы изгибных собственных колебаний корпуса ракеты, можно определить так называемые приведенные массы  $m_j$ ,  $j=1, 2, \dots$  и коэффициенты дифференциальных уравнений возмущенного движения

$$c_{yj}, c_{\vartheta j}, c_{jy}, c_{j\vartheta}, j=1, 2, \dots \text{ и } c_{jk}, j=1, 2, \dots, k=1, 2, \dots$$

по формулам (4.7.8), (4.7.23) и (4.8.11). В том случае, когда исполнительные органы системы управления формируют управляющую силу, для расчета коэффициентов  $c_{j\delta}$ ,  $j=1, 2, \dots$  следует пользоваться формулой (4.8.16), в случае управления рассогласованием тяг коэффициенты  $c_{j\delta}$ ,  $j=1, 2, \dots$  следует рассчитывать по формуле (4.8.17).

#### § 9. РАСЧЕТ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК РАКЕТЫ, КАК ОБЪЕКТА АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ МЕТОДОМ СУММИРОВАНИЯ РЯДОВ

При исследовании устойчивости движения ракеты с учетом упругости ее корпуса применяются обычно те же частотные методы, что и в вопросе о стабилизации колебаний жидких компонентов топлива.

Переходя к рассмотрению частотных характеристик ракеты, учитывающих упругость ее корпуса, определим сперва влияние, которое оказывают изгибные колебания ракеты на входной сигнал автомата стабилизации. Вследствие изгибных колебаний корпуса гиросприбор, предназначенный для измерения возмущения угла тангажа  $\Delta\theta$ , в действительности регистрирует угол  $\Delta\theta^*$ , складывающийся из возмущения  $\Delta\theta$ , соответствующего недеформированному состоянию корпуса ракеты, и дополнительного угла поворота гиросприбора, возникающего при изгибе корпуса.

Как видно из рис. 4.1, при малых изгибных колебаниях этот дополнительный угол поворота можно считать равным частной производной  $\partial v / \partial x$ , вычисленной для поперечного сечения ракеты, в котором расположен гиросприбор. Обозначая абсциссу этого сечения через  $x_r$ , получим для входного сигнала автомата стабилизации  $\Delta\theta^*$  выражение

$$\Delta\theta^* = \Delta\theta + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{x=x_r}. \quad (4.9.1)$$

При рассмотрении возмущенного движения ракеты в разложении (4.7.6) функции  $g_1(t)$ ,  $g_2(t)$ , ... надо заменить функциями  $g'_1(t)$ ,  $g'_2(t)$ , ..., соответствующими случаю возмущенного движения. Полагая в (4.9.1)

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} g'_k(t) V_k(x, t), \quad (4.9.2)$$

получим для входного сигнала автомата стабилизации  $\Delta\theta^*$  разложение

$$\Delta\theta^* = \Delta\theta + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\partial V_k}{\partial x} \right)_{x=x_r} g'_k,$$

или согласно (4.8.4)

$$\Delta\theta^* = \Delta\theta + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\partial V_k}{\partial x} \right)_{x=x_r} \Delta g_k + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\partial V_k}{\partial x} \right)_{x=x_r} g_k \quad (4.9.3)$$

(ввиду предполагаемой нами малости функций  $g'_k$ ,  $k=1, 2, \dots$  в разложении (4.9.2) можно пренебречь малыми изменениями функций  $V_k$ ,  $k=1, 2, \dots$ , которые могут возникать при переходе от невозмущенного движения ракеты к возмущенному).

В соответствии с формулой (4.9.3) входной сигнал автомата стабилизации, порождаемый возмущениями  $\Delta\vartheta$ ,  $\Delta g_1$ ,  $\Delta g_2$ , ..., может быть представлен в виде ряда

$$\Delta\vartheta^* = \Delta\vartheta + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\partial V_k}{\partial x} \right)_{x=x_r} \Delta g_k \quad (4.9.4)$$

(в формуле (4.9.3) ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\partial V_k}{\partial x} \right)_{x=x_r} g_k$$

определяет входной сигнал автомата стабилизации, порождаемый изгибом конструкции ракеты при невозмущенном ее движении).

При исследовании устойчивости движения ракеты в окрестности момента времени  $t=\tau$  будем по-прежнему пользоваться методом замороженных коэффициентов, заменяя переменные коэффициенты дифференциальных уравнений возмущенного движения (4.8.18) их частными значениями, соответствующими моменту времени  $t=\tau$ . В формуле (4.9.4) переменные коэффициенты  $\left( \frac{\partial V_k}{\partial x} \right)_{x=x_r}$ ,  $k=1, 2, \dots$  тоже заменим их значениями, рассчитанными для момента времени  $t=\tau$ . Для определения частотных характеристик ракеты как объекта автоматического регулирования надо положить в уравнениях возмущенного движения (4.8.18)

$$\Delta F_y = 0, \Delta M_z = 0, \Delta F_j = 0, j=1, 2, \dots, \Delta\vartheta = e^{i\omega t}, \quad (4.9.5)$$

отыскать из полученных уравнений возмущения  $\Delta V_y$ ,  $\Delta\vartheta$ ,  $\Delta g_1$ ,  $\Delta g_2, \dots$  и определить затем по формуле (4.9.4) входной сигнал автомата стабилизации  $\Delta\vartheta^*$ , соответствующий случаю (4.9.5). Подставляя (4.9.5) в (4.8.18) и отыскивая решение полученных уравнений в виде

$$\Delta V_y = V_y e^{i\omega t}, \Delta\vartheta = \vartheta e^{i\omega t}, \Delta g_j = G_j e^{i\omega t}, j=1, 2, \dots, \quad (4.9.6)$$

получим для коэффициентов  $V_y$ ,  $\vartheta$  и  $G_j$ ,  $j=1, 2, \dots$  бесконечную систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} (c_{yy} + i\omega m) V_y + (i\omega v_y + c_{y\vartheta}) \vartheta + \theta \sum_{k=1}^{\infty} c_{yk} G_k &= c_{y\vartheta} \vartheta, \\ c_{\vartheta y} V_y + (c_{\vartheta\vartheta} + i\omega \mu_z - \omega^2 J_z) \vartheta + \sum_{k=1}^{\infty} c_{\vartheta k} G_k &= c_{\vartheta\vartheta} \vartheta, \\ m_j (\omega_j^2 + i\eta \omega \omega_j - \omega^2) G_j + c_{jy} V_y + c_{j\vartheta} \vartheta + \sum_{k=1}^{\infty} c_{jk} G_k &= \\ &= c_{j\vartheta} \vartheta, j=1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4.9.7)$$

Согласно (4.9.4) и (4.9.6) в рассматриваемом случае будет иметь место равенство

$$\Delta \vartheta^* = \theta^*(\omega) e^{i\omega t}, \quad (4.9.8)$$

где

$$\theta^*(\omega) = \theta(\omega) + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\partial V_k}{\partial x} \right)_{x=x_T} G_k(\omega). \quad (4.9.9)$$

Обозначая через  $\theta_1^*(\omega)$  и  $\theta_2^*(\omega)$  действительную и мнимую части комплекснозначной функции  $\theta^*(\omega)$  и полагая

$$\theta_1^*(\omega) = k_0(\omega) \cos \varphi_0(\omega), \quad \theta_2^*(\omega) = k_0(\omega) \sin \varphi_0(\omega), \quad (4.9.10)$$

можно привести равенство (4.9.8) к виду

$$\Delta \vartheta^* = k_0(\omega) e^{i[\omega t + \varphi_0(\omega)]}. \quad (4.9.11)$$

Функции  $k_0(\omega)$  и  $\varphi_0(\omega)$  определяют соответственно амплитудно-частотную и фазово-частотную характеристики ракеты как объекта автоматического регулирования. Согласно (4.9.10) функции  $k_0(\omega)$  и  $\varphi_0(\omega)$  могут быть найдены по формулам:

$$k_0(\omega) = \sqrt{[\theta_1^*(\omega)]^2 + [\theta_2^*(\omega)]^2}, \quad \varphi_0(\omega) = \arctg \frac{\theta_2^*(\omega)}{\theta_1^*(\omega)}. \quad (4.9.12)$$

Таким образом, расчет частотных характеристик ракеты как регулируемого объекта сводится к определению функций  $\vartheta(\omega)$  и  $G_j(\omega)$ ,  $j=1, 2, \dots$  из бесконечной системы алгебраических уравнений (4.9.7) и к суммированию ряда (4.9.9). Решение бесконечной системы уравнений (4.9.7) можно отыскать излагаемым ниже методом последовательных приближений, обладающим быстрой сходимостью.

Введя обозначения:

$$\begin{aligned} c_{y\delta}^* &= c_{y\delta} - \sum_{k=1}^{\infty} c_{yk} G_k, \\ c_{\vartheta\delta}^* &= c_{\vartheta\delta} - \sum_{k=1}^{\infty} c_{\vartheta k} G_k, \end{aligned} \quad (4.9.13)$$

$$c_{j\delta}^* = c_{j\delta} - c_{jy} V_y - c_{j\vartheta} \theta - \sum_{k=1}^{\infty} c_{jk} G_k, \quad j=1, 2, \dots,$$

можно привести уравнения (4.9.7) к виду

$$\begin{aligned} (c_{yy} + i\omega m) V_y + (c_{y\delta} + i\omega n_y) \theta &= c_{y\delta}^*, \\ c_{\vartheta y} V_y + (c_{\vartheta\delta} + i\omega \mu_z - \omega^2 J_z) \theta &= c_{\vartheta\delta}^*, \\ m_j (\omega_j^2 + i\eta_{\omega\omega j} - \omega^2) G_j &= c_{j\delta}^*, \quad j=1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4.9.14)$$

Согласно (4.9.14) должны иметь место равенства:

$$\begin{aligned} V_y &= \frac{-(c_{y\vartheta} + i\omega v_y) c_{\vartheta\delta}^* + (c_{\vartheta\vartheta} + i\omega\mu_z - \omega^2 J_z) c_{y\delta}^*}{(c_{yy} + i\omega m) (c_{\vartheta\vartheta} + i\omega\mu_z - \omega^2 J_z) - c_{\vartheta y} (c_{y\vartheta} + i\omega v_y)}, \\ \theta &= \frac{(c_{yy} + i\omega m) c_{\vartheta\delta}^* - c_{\vartheta y} c_{y\delta}^*}{(c_{yy} + i\omega m) (c_{\vartheta\vartheta} + i\omega\mu_z - \omega^2 J_z) - c_{\vartheta y} (c_{y\vartheta} + i\omega v_y)}, \\ G_j &= \frac{c_{j\delta}^*}{m_j (\omega_j^2 + i\eta\omega_j - \omega^2)}, \quad j=1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4.9.15)$$

Подставляя (4.9.15) в (4.9.13), получим уравнения:

$$\begin{aligned} c_{y\delta}^* &= c_{y\delta} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{yk} c_{k\delta}^*}{m_k (\omega_k^2 + i\eta\omega_k - \omega^2)}, \\ c_{\vartheta\delta}^* &= c_{\vartheta\delta} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{\vartheta k} c_{k\delta}^*}{m_k (\omega_k^2 + i\eta\omega_k - \omega^2)}, \\ c_{j\delta}^* &= c_{j\delta} - \frac{[c_{j\vartheta} (c_{yy} + i\omega m) - c_{j\mu} (c_{y\vartheta} + i\omega v_y)] c_{\vartheta\delta}^*}{(c_{yy} + i\omega m) (c_{\vartheta\vartheta} + i\omega\mu_z - \omega^2 J_z) - c_{\vartheta y} (c_{y\vartheta} + i\omega v_y)} - \\ &\quad - \frac{[c_{j\vartheta} (c_{\vartheta\vartheta} + i\omega\mu_z - \omega^2 J_z) - c_{j\vartheta} c_{\vartheta y}] c_{y\delta}^*}{(c_{yy} + i\omega m) (c_{\vartheta\vartheta} + i\omega\mu_z - \omega^2 J_z) - c_{\vartheta y} (c_{y\vartheta} + i\omega v_y)} - \\ &\quad - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{jk} c_{k\delta}^*}{m_k (\omega_k^2 + i\eta\omega_k - \omega^2)}, \quad j=1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4.9.16)$$

Формулу (4.9.9) согласно (4.9.15) можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} \theta^*(\omega) &= \frac{(c_{yy} + i\omega m) c_{\vartheta\delta}^* - c_{\vartheta y} c_{y\delta}^*}{(c_{yy} + i\omega m) (c_{\vartheta\vartheta} + i\omega\mu_z - \omega^2 J_z) - c_{\vartheta y} (c_{y\vartheta} + i\omega v_y)} + \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{k\delta}^* \left( \frac{\partial V_k}{\partial x} \right)_{x=x_r}}{m_k (\omega_k^2 + i\eta\omega_k - \omega^2)}. \end{aligned} \quad (4.9.17)$$

Коэффициенты  $c_{y\delta}^*$ ,  $c_{\vartheta\delta}^*$ ,  $c_{j\delta}^*$ ,  $j=1, 2, \dots$ , определяемые бесконечной системой алгебраических уравнений (4.9.16), обычно мало отличаются от коэффициентов  $c_{y\delta}$ ,  $c_{\vartheta\delta}$ ,  $c_{j\delta}$ ,  $j=1, 2, \dots$ . Полагая в первом приближении

$$c_{y\delta}^* = c_{y\delta}, \quad c_{\vartheta\delta}^* = c_{\vartheta\delta}, \quad c_{j\delta}^* = c_{j\delta}, \quad j=1, 2, \dots \quad (4.9.18)$$

и подставляя (4.9.18) в правые части уравнений (4.9.16), получим для коэффициентов  $c_{y\delta}^*$ ,  $c_{\theta\delta}^*$ ,  $c_{j\delta}^*$ ,  $j=1, 2, \dots$  ряды, определяющие уточненные значения указанных коэффициентов. Эти уточненные значения коэффициентов будем рассматривать как вторые их приближения. Рассчитав для заданного значения частоты  $\omega$  вторые приближения для коэффициентов  $c_{y\delta}^*$ ,  $c_{\theta\delta}^*$ ,  $c_{j\delta}^*$ ,  $j=1, 2, \dots$  и подставив их в правые части уравнений (4.9.16), получим для искомых коэффициентов новые ряды, суммирование которых при исходном значении частоты  $\omega$  даст третье приближение для этих коэффициентов, и т. д. Определив указанным методом последовательных приближений коэффициенты  $c_{y\delta}^*$ ,  $c_{\theta\delta}^*$ ,  $c_{j\delta}^*$ ,  $j=1, 2, \dots$ , можно построить согласно (4.9.17) разложение, определяющее для принятого в расчете значения частоты  $\omega$  соответствующее частное значение функции  $\eta^*(\omega)$ . Отделив у этого частного значения функции  $\eta^*$  действительную часть  $\eta_1^*$  и мнимую часть  $\eta_2^*$ , можно определить далее по формулам (4.9.12) коэффициент усиления  $k_0$  и фазовый сдвиг  $\phi_0$  для исходного значения частоты  $\omega$ . Осуществляя указанный расчет для ряда последовательных значений частоты, можно построить, таким образом, искомые частотные характеристики ракеты как объекта автоматического регулирования.

Описанный в этом параграфе метод расчета частотных характеристик требует суммирования числовых рядов, фигурирующих в уравнениях (4.9.16) и в формуле (4.9.17). В следующем параграфе мы указываем другой метод расчета частотных характеристик ракеты, не требующий определения форм и частот изгибных собственных колебаний ракеты и суммирования числовых рядов.

## § 10. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК РАКЕТЫ КАК РЕГУЛИРУЕМОГО ОБЪЕКТА ИЗ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Переходя к изложению второго метода расчета частотных характеристик ракеты как регулируемого объекта заметим предварительно, что в выражениях  $\omega_j^2 + i\eta\omega\omega_j - \omega^2$ ,  $j=1, 2, \dots$ , фигурирующих в уравнениях (4.9.7), каждое из слагаемых  $i\eta\omega\omega_j$  в виду малости коэффициента  $\eta$  играет роль лишь при значениях частоты  $\omega$ , близких к соответствующей частоте  $\omega_j$ . В связи с этим практически без ущерба для точности определения искомых частотных характеристик можно заменить в уравнениях (4.9.7) выражения

$$\omega_j^2 + i\eta\omega\omega_j - \omega^2, \quad j=1, 2, \dots \quad (4.10.1)$$

выражениями

$$\omega_j^2 + i\eta\omega_j^2 - \omega^2, \quad j=1, 2, \dots$$

или

$$\omega_j^{*2} - \omega^2, \quad j=1, 2, \dots, \quad (4.10.2)$$

где

$$\omega_j^{*2} = (1 + i\eta) \omega_j^2, \quad j = 1, 2, \dots \quad (4.10.3)$$

Уравнения (4.9.7) перейдут при этом в уравнения

$$(c_{yy} + i\omega m) V_y + (c_{y\theta} + i\omega v_y) \theta + \sum_{k=1}^{\infty} c_{yk} G_k = c_{i\delta},$$

$$c_{\theta y} V_y + (c_{\theta\theta} + i\omega \mu_z - \omega^2 J_z) \theta + \sum_{k=1}^{\infty} c_{\theta k} G_k = c_{\theta\delta}, \quad (4.10.4)$$

$$m_j(\omega_j^{*2} - \omega^2) G_j + c_{jy} V_y + c_{j\theta} \theta + \sum_{k=1}^{\infty} c_{jk} G_k = c_{j\delta}, \quad j = 1, 2, \dots$$

Как мы ниже показываем, частотные характеристики, определяемые уравнениями (4.10.4) и формулами (4.9.9) и (4.9.12), можно построить, не прибегая к решению бесконечной системы алгебраических уравнений (4.9.16) и к суммированию ряда, фигурирующего в формуле (4.9.9).

При отсутствии демпфирования, т. е. при  $\eta = 0$ , фиктивные комплексные частоты  $\omega_j^*$ , входящие в уравнения (4.10.4), согласно (4.10.3) переходят в реальные вещественные частоты изгибных собственных колебаний корпуса ракеты  $\omega_j$ . Метод расчета частотных характеристик, излагаемый в этом параграфе, мы разберем сперва для частного случая  $\eta = 0$ , после этого мы укажем прием, позволяющий учесть при определении искомых частотных характеристик демпфирование, характеризуемое заданным значением коэффициента  $\eta$ .

Дифференциальные уравнения возмущенного движения (4.8.18) мы получили, преобразовав уравнения движения ракеты в плоскости тангажа (4.4.35) в бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений, образуемую уравнениями (4.7.7) и (4.7.22), и учтя затем демпфирование путем перехода от уравнений (4.7.22) к уравнениям (4.7.24). Без учета демпфирования дифференциальные уравнения возмущенного движения ракеты в плоскости тангажа можно получить, непосредственно осуществляя переход от невозмущенного движения к возмущенному в исходных уравнениях движения (4.4.35).

Обозначим через  $v'(x, t)$  прогиб корпуса ракеты, соответствующий возмущенному ее движению, и через  $\Delta v(x, t)$  — разность между прогибом  $v'(x, t)$  и прогибом  $v(x, t)$ , соответствующим невозмущенному движению,

$$\Delta v = v' - v. \quad (4.10.5)$$



Согласно (4.4.35) при учете упругости корпуса ракеты уравнения сил и моментов (4.8.2), построенные в гл. I на основе уравнений движения (4.8.1), перейдут в уравнения:

$$\begin{aligned}
 & m \frac{d\Delta V_y}{dt} + c_{yy}\Delta V_y + v_y \frac{d\Delta\theta}{dt} + c_{y\theta}\Delta\theta - \\
 & - \int_a^b \frac{\partial \Delta v}{\partial x} c dx - P \left( \frac{\partial \Delta v}{\partial x} \right)_{x=x_T} = c_{y\theta}\Delta\delta_\theta + \Delta F_y, \\
 & J_z \frac{d^2\Delta\theta}{dt^2} + \mu_z \frac{d\Delta\theta}{dt} + c_{\theta y}\Delta V_y + c_{\theta\theta}\Delta\theta - \\
 & - \int_a^b \frac{\partial \Delta v}{\partial x} c x dx - P \left( x \frac{\partial \Delta v}{\partial x} - \Delta v \right)_{x=x_T} = c_{\theta\theta}\Delta\delta_\theta + \Delta M_z.
 \end{aligned} \tag{4.10.6}$$

При переходе от невозмущенного движения ракеты к возмущенному краевая задача для функций  $v$  и  $Q$ , указанная в (4.4.35), перейдет в краевую задачу, образуемую дифференциальными уравнениями:

$$\begin{aligned}
 & \mu \frac{\partial^2 v'}{\partial t^2} + \frac{\partial Q'}{\partial x} = -\mu' (w'_{0y'} - g_{y'}) - \mu' x \frac{d\omega'_z}{dt} + c'\alpha' + \\
 & + c \frac{\partial v'}{\partial x} + P \left( \frac{\partial v'}{\partial x} \right)_{x=x_T} \delta(x, x_T) + F'_{y' \text{упр}} \delta(x, x_y), \\
 & \frac{\partial}{\partial x} \left( B_y \frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} \right) - j_z \frac{\partial^3 v'}{\partial x \partial t^2} - Q' = j'_z \frac{d\omega'_z}{dt} + P(v')_{x=x_T} \times \\
 & \times \delta(x, x_T) - M^{(0)'}_{z \text{упр}} \delta(x, x_y)
 \end{aligned} \tag{4.10.7}$$

и краевыми условиями:

$$B_y \frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} = 0, Q' = 0 \text{ при } x=a \text{ и при } x=b. \tag{4.10.8}$$

Штрихами у знака функций мы обозначили принадлежность этих функций возмущенному движению ракеты. Для коэффициентов при функции  $v'$  и при ее частных производных мы сохранили везде их значения, соответствующие невозмущенному движению, в соответствии с предположением о малости изгибных колебаний ракеты.

Полагая в (4.10.7) и (4.10.8)

$$v' = v + \Delta v, Q' = Q + \Delta Q, \mu' = \mu + \Delta\mu, c' = c + \Delta c, \alpha' = \alpha + \Delta\alpha,$$

пользуясь формулами (3.24.5) и (4.8.9) и пренебрегая малыми величинами высших порядков малости, получим зависимости:

$$\begin{aligned}
 & \mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial Q}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 \Delta v}{\partial t^2} + \frac{\partial \Delta Q}{\partial x} = -\mu (w_{0y} - g_y) - \mu x \frac{d\omega_z}{dt} + \\
 & + c \left( \alpha + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + P \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{x=x_T} \delta(x, x_T) - \mu \left[ \frac{dV_y}{dt} - (w_{0x} - g_x) \Delta \vartheta \right] - \\
 & - \mu x \frac{d^2 \Delta \vartheta}{dt^2} + c \left( \Delta \vartheta - \frac{\Delta V_y}{v_{0x}} \right) + c \frac{\partial \Delta v}{\partial x} + P \left( \frac{\partial \Delta v}{\partial x} \right)_{x=x_T} \times \\
 & \times \delta(x, x_T) - \Delta \mu (w_{0y} - g_y) - \Delta \mu x \frac{d\omega_z}{dt} + \Delta c \alpha + F'_{y' \text{ ynp}} \delta(x, x_y), \\
 & \frac{\partial}{\partial x} \left( B_y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - j_z \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial t^2} - Q + \frac{\partial}{\partial x} \left( B_y \frac{\partial^2 \Delta v}{\partial x^2} \right) - j_z \frac{\partial^3 \Delta v}{\partial x \partial t^2} - \\
 & - \Delta Q = j_z \frac{d\omega_z}{dt} + P(v)_{x=x_T} \delta(x, x_T) + j_z \frac{d^2 \Delta \vartheta}{dt^2} + P(\Delta v)_{x=x_T} \times \\
 & \times \delta(x, x_T) + \Delta j_z \frac{d\omega_z}{dt} - M_{z \text{ ynp}}^{(0)'} \delta(x, x_y), \\
 & B_y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + B_y \frac{\partial^2 \Delta v}{\partial x^2} = 0, \quad Q + \Delta Q = 0 \text{ при } x=a \text{ и при } x=b,
 \end{aligned}$$

или согласно (4.4.35)

$$\begin{aligned}
 & \mu \frac{\partial^2 \Delta v}{\partial t^2} + \frac{\partial \Delta Q}{\partial x} = -\mu \left[ \frac{dV_y}{dt} + x \frac{d^2 \Delta \vartheta}{dt^2} - (w_{0x} - g_x) \Delta \vartheta \right] + \\
 & + c \left( \frac{\partial \Delta v}{\partial x} + \Delta \vartheta - \frac{\Delta V_y}{v_{0x}} \right) + P \left( \frac{\partial \Delta v}{\partial x} \right)_{x=x_T} \delta(x, x_T) + \\
 & + F'_{y' \text{ ynp}} \delta(x, x_y) + \Delta q_y, \\
 & \frac{\partial}{\partial x} \left( B_y \frac{\partial^2 \Delta v}{\partial x^2} \right) - j_z \frac{\partial^3 \Delta v}{\partial x \partial t^2} - \Delta Q = j_z \frac{d^2 \Delta \vartheta}{dt^2} + \\
 & + P(\Delta v)_{x=x_T} \delta(x, x_T) - M_{z \text{ ynp}}^{(0)'} \delta(x, x_y) - \Delta m_z, \\
 & B_y \frac{\partial^2 \Delta v}{\partial x^2} = 0, \quad \Delta Q = 0 \text{ при } x=a \text{ и при } x=b,
 \end{aligned} \tag{4.10.9}$$

где

$$\begin{aligned}
 \Delta q_y &= -\Delta \mu \left( w_{0y} - g_y + x \frac{d\omega_z}{dt} \right) + \Delta c \alpha - \\
 & - F_{y \text{ ynp}} \delta(x, x_y) \\
 \Delta m_z &= -\Delta j_z \frac{d\omega_z}{dt} - M_{z \text{ ynp}}^{(0)'} \delta(x, x_y).
 \end{aligned} \tag{4.10.10}$$

Объединяя уравнения (4.10.6) и (4.10.9), получим уравнения возмущенного движения:

$$\begin{aligned}
 & m \frac{d\Delta V_y}{dt} + c_{yy}\Delta V_y + v_y \frac{d\Delta\vartheta}{dt} + c_{y\vartheta}\Delta\vartheta - \int_a^b \frac{\partial\Delta v}{\partial x} c dx - \\
 & - P\left(\frac{\partial\Delta v}{\partial x}\right)_{x=x_T} = c_{y\vartheta}\Delta\delta\vartheta + \Delta F_y, \\
 & J_z \frac{d^2\Delta\vartheta}{dt^2} + \mu_z \frac{d\Delta\vartheta}{dt} + c_{\vartheta y}\Delta V_y + c_{\vartheta\vartheta}\Delta\vartheta - \int_a^b \frac{\partial\Delta v}{\partial x} c x dx - \\
 & - P\left(x \frac{\partial\Delta v}{\partial x} - \Delta v\right)_{x=x_T} = c_{\vartheta\vartheta}\Delta\delta\vartheta + \Delta M_z, \\
 & \mu \frac{\partial^2\Delta v}{\partial t^2} + \frac{\partial\Delta Q}{\partial x} + \mu \left[ \frac{d\Delta V_y}{dt} + x \frac{d^2\Delta\vartheta}{dt^2} - (w_{0x} - g_x) \Delta\vartheta \right] - \\
 & - c \left( \frac{\partial\Delta v}{\partial x} + \Delta\vartheta - \frac{\Delta V_y}{v_{0x}} \right) - P\left(\frac{\partial\Delta v}{\partial x}\right)_{x=x_T} \delta(x, x_T) = \\
 & = F'_{y' \text{ упр}} \delta(x, x_y) + \Delta q_y, \\
 & \frac{\partial}{\partial x} \left( B_y \frac{\partial^2\Delta v}{\partial x^2} \right) - j_z \frac{\partial^3\Delta v}{\partial x \partial t^2} - \Delta Q - j_z \frac{d^2\Delta\vartheta}{dt^2} - P(\Delta v)_{x=x_T} \times \\
 & \times \delta(x, x_T) = -M_{z \text{ упр}}^{(0)'} \delta(x, x_y) - \Delta m_z, \\
 & B_y \frac{\partial^2\Delta v}{\partial x^2} = 0, \Delta Q = 0 \text{ при } x=a \text{ и при } x=b,
 \end{aligned} \tag{4.10.11}$$

определяющие возмущения  $\Delta\vartheta(t)$ ,  $\Delta V_y(t)$  и  $\Delta v(x, t)$  по заданным управляющим воздействиям и возмущающим силам и моментам.

Согласно (4.9.1) возмущения  $\Delta V_y(t)$ ,  $\Delta v(x, t)$  будут порождать входной сигнал автомата стабилизации, определяемый формулой

$$\Delta\vartheta^* = \Delta\vartheta + \left(\frac{\partial\Delta v}{\partial x}\right)_{x=x_T}. \tag{4.10.12}$$

Таким образом, заменив зависящие от времени коэффициенты уравнений (4.10.11) их значениями, соответствующими моменту времени  $t=\tau$ , можно рассчитать для этого момента времени искомые частотные характеристики ракеты, положив в (4.10.11)

$$\Delta F_y = 0, \Delta M_z = 0, \Delta q_y = 0, \Delta m_z = 0, \Delta\delta\vartheta = e^{i\omega t}, \tag{4.10.13}$$

определив из полученных уравнений возмущения  $\Delta\vartheta$  и  $\Delta v$  и подставив их в (4.10.12).

В соответствии с формулами (4.8.13) и (4.8.14) функции  $\Delta\delta\vartheta$ , указанной в соотношениях (4.10.13), будут соответствовать равенства:

$$F'_{y' \text{ упр}} = c_{y\vartheta} e^{i\omega t}, M_{z \text{ упр}}^{(0)'} = 0 \tag{4.10.14}$$

в том случае, если исполнительные органы системы управления формируют управляющую силу, и равенства:

$$F'_{y' \text{ упр}} = 0, \quad M_{z \text{ упр}}^{(0)'} = c_{\theta\delta} e^{i\omega t} \quad (4.10.15)$$

в том случае, если исполнительные органы создают сосредоточенный управляющий момент. Объединяя эти два случая, положим в уравнениях (4.10.11)

$$F'_{y' \text{ упр}} = c_{y\delta} e^{i\omega t}, \quad M_{z \text{ упр}}^{(0)'} = c_{\theta\delta}^{(0)} e^{i\omega t}, \quad (4.10.16)$$

условившись, что в первом случае

$$c_{\theta\delta}^{(0)} = 0, \quad (4.10.17)$$

а во втором случае

$$c_{y\delta} = 0, \quad c_{\theta\delta}^{(0)} = c_{\theta\delta}. \quad (4.10.18)$$

Решение уравнений (4.10.11) будем искать в виде

$$\Delta v(x, t) = V(x) e^{i\omega t}, \quad \Delta Q(x, t) = Q(x) e^{i\omega t}, \quad (4.10.19)$$

$$\Delta \theta(t) = \theta e^{i\omega t}, \quad \Delta V_y = V_y e^{i\omega t}.$$

Подставляя (4.10.13), (4.10.16) и (4.10.19) в (4.10.11), получим для функций  $V(x)$ ,  $Q(x)$  и для констант  $\theta$  и  $V_y$  уравнения:

$$\begin{aligned} & (c_{yy} + i\omega m) V_y + (c_{y\theta} + i\omega v_y) \theta - \int_a^b \frac{dV}{dx} c dx - \\ & - P \left( \frac{dV}{dx} \right)_{x=x_T} = c_{y\delta}, \\ & c_{\theta y} V_y + (c_{\theta\theta} + i\omega \mu_z - \omega^2 J_z) \theta - \int_a^b \frac{dV}{dx} c x dx - \\ & - P \left( x \frac{dV}{dx} - V \right)_{x=x_T} = c_{\theta\delta}, \\ & -\omega^2 \mu V + \frac{dQ}{dx} + \mu [i\omega V_y - (\omega_{0x} - g_x + \omega^2 x) \theta] - \\ & - c \left( \frac{dV}{dx} + \theta - \frac{V_y}{v_{0x}} \right) - P \left( \frac{dV}{dx} \right)_{x=x_T} \delta(x, x_T) = c_{y\delta} \delta(x, x_y), \\ & \frac{d}{dx} \left( B_y \frac{d^2 V}{dx^2} \right) + \omega^2 j_z \frac{dV}{dx} - Q + \omega^2 j_z \theta - \\ & - P(V)_{x=x_T} \delta(x, x_T) = -c_{\theta\delta}^{(0)} \delta(x, x_y), \\ & B_y \frac{d^2 V}{dx^2} = 0, \quad Q = 0 \quad \text{при } x=a \text{ и при } x=b. \end{aligned} \quad (4.10.20)$$

Согласно (4.10.12) и (4.10.19) в рассматриваемом случае входной сигнал автомата стабилизации будет определяться равенством

$$\Delta \vartheta^* = \vartheta^* e^{i\omega t}, \quad (4.10.21)$$

где

$$\vartheta^* = \vartheta + \left( \frac{dV}{dx} \right)_{x=x_r}. \quad (4.10.22)$$

Таким образом, без учета демпфирования, свойственного изгибным колебаниям корпуса ракеты, т. е. при  $\eta=0$ , функцию  $\vartheta^*(\omega)$ , определяющую искомые частотные характеристики ракеты, можно построить по формуле (4.10.22), отыскав функцию  $V(x)$  и константу  $\vartheta$  из уравнений (4.10.20).

Покажем теперь, что наличие демпфирования, определяемого заданным значением коэффициента  $\eta$ , можно учесть, заменив в уравнениях (4.10.20) реальную изгибную жесткость корпуса ракеты  $B_y(x)$  фиктивной комплексной жесткости  $B_y^*(x)$ , определяемой соотношением

$$B_y^*(x) = (1 + i\eta) B_y(x). \quad (4.10.23)$$

Для этого нам достаточно доказать, что функция  $\vartheta^*(\omega)$ , найденная из соотношений (4.10.20) и (4.10.22), при замене жесткости  $B_y$  фиктивной жесткостью  $B_y^*$  становится тождественной функции  $\vartheta^*(\omega)$ , найденной из бесконечной системы алгебраических уравнений (4.10.4) путем суммирования ряда (4.9.9).

Мы показали выше, что функция  $v(x, t)$ , найденная из исходных уравнений движения (4.4.35), всегда может быть представлена рядом (4.7.6). В соответствии с этим функция  $V(x)$ , найденная из уравнений (4.10.20), может быть представлена в виде ряда

$$V(x) = \sum_{k=1}^{\infty} G_k V_k(x, \tau) \quad (4.10.24)$$

[уравнения (4.10.20) получены из уравнений возмущенного движения (4.10.11) после замены зависящих от времени коэффициентов системы (4.10.11) их значениями, соответствующими моменту времени  $t=\tau$ ].

Подставляя ряд (4.10.24) в первые два уравнения из (4.10.20), получим согласно (4.7.8) уравнения:

$$(c_{yy} + i\omega m) V_y + (c_{y\vartheta} + i\omega v_y) \vartheta + \sum_{k=1}^{\infty} c_{yk} G_k = c_{y\delta}, \quad (4.10.25)$$

$$c_{\vartheta y} V_y + (c_{\vartheta \vartheta} + i\omega \mu_z - \omega^2 J_z) \theta + \sum_{k=1}^{\infty} c_{\vartheta k} G_k = c_{\vartheta \delta},$$

где под  $c_{yk}$  и  $c_{\vartheta k}$ ,  $k=1, 2, \dots$  следует понимать значения этих коэффициентов, соответствующие моменту времени  $t=\tau$ .

Подставляя ряд (4.10.24) в дифференциальные уравнения, указанные в (4.10.20), и заменяя жесткость  $B_y$  жесткостью  $B_y^*$ , получим соотношения:

$$\begin{aligned} & -\omega^2 \mu \sum_{k=1}^{\infty} G_k V_k + \frac{dQ}{dx} + \mu [i\omega V_y - (\omega_{0x} - g_x + \omega^2 x) \theta] - \\ & - c \left( \sum_{k=1}^{\infty} G_k \frac{\partial V_k}{\partial x} + \theta - \frac{V_y}{v_{0x}} \right) - \\ & - P \sum_{k=1}^{\infty} G_k \left( \frac{\partial V_k}{\partial x} \right)_{x=x_\tau} \delta(x, x_\tau) = c_{y\delta} \delta(x, x_y), \quad (4.10.26) \\ & \sum_{k=1}^{\infty} G_k \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( B_y^* \frac{\partial^2 V_k}{\partial x^2} \right) + \omega^2 j_z \frac{\partial V_k}{\partial x} \right] - Q + \omega^2 j_z \theta - \\ & - P \sum_{k=1}^{\infty} G_k (V_k)_{x=x_\tau} \delta(x, x_\tau) = -c_{\vartheta \delta}^{(0)} \delta(x, x_y), \end{aligned}$$

в которых для всех функций, зависящих от времени  $t$ , имеются в виду их значения, соответствующие моменту времени  $t=\tau$ .

Умножив обе части первого уравнения из (4.10.26) на  $V_j$  и проинтегрировав их по  $x$  в пределах от  $a$  до  $b$ , получим соотношение

$$\begin{aligned} & -\omega^2 \sum_{k=1}^{\infty} G_k \int_a^b V_j V_k \mu dx + \int_a^b V_j \frac{dQ}{dx} dx + [i\omega V_y - \\ & - (\omega_{0x} - g_x) \theta] \int_a^b V_j \mu dx - \omega^2 \theta \int_a^b V_j \mu x dx - \sum_{k=1}^{\infty} G_k \int_a^b V_j \frac{\partial V_k}{\partial x} c dx - \\ & - \left( \theta - \frac{V_y}{v_0} \right) \int_a^b V_j c dx - P \sum_{k=1}^{\infty} G_k \left( \frac{\partial V_k}{\partial x} \right)_{x=x_\tau} \int_a^b V_j \delta(x, x_\tau) dx = \\ & = c_{y\delta} \int_a^b V_j \delta(x, x_y) dx. \quad (4.10.27) \end{aligned}$$

Умножив обе части второго уравнения из (4.10.26) на  $-\frac{\partial V_j}{\partial x}$  и проинтегрировав их по  $x$  в пределах от  $a$  до  $b$ , получим соотношение

$$\begin{aligned} & - \sum_{k=1}^{\infty} G_k \int_a^b \frac{\partial V_j}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left( B_y^* \frac{\partial^2 V_k}{\partial x^2} \right) dx - \omega^2 \sum_{k=1}^{\infty} G_k \int_a^b \frac{\partial V_j}{\partial x} \frac{\partial V_k}{\partial x} j_z dx + \\ & + \int_a^b Q \frac{\partial V_j}{\partial x} dx - \omega^2 \theta \int_a^b \frac{\partial V_j}{\partial x} j_z dx + P \sum_{k=1}^{\infty} G_k (V_k)_{x=x_\tau} \int_a^b \frac{\partial V_j}{\partial x} \delta(x, x_\tau) dx = \\ & = c_{\theta\theta}^{(0)} \int_a^b \frac{\partial V_j}{\partial x} \delta(x, x_y) dx. \end{aligned} \quad (4.10.28)$$

В соответствии с формулами (4.10.23), (4.10.27) и (4.10.28) должно иметь место равенство

$$\begin{aligned} & - \omega^2 \sum_{k=1}^{\infty} G_k \int_a^b \left( V_j V_k \mu + \frac{\partial V_j}{\partial x} \frac{\partial V_k}{\partial x} j_z \right) dx - \\ & - (1 + i\eta) \sum_{k=1}^{\infty} G_k \int_a^b \frac{\partial V_j}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left( B_y \frac{\partial^2 V_k}{\partial x^2} \right) dx + \int_a^b \left( V_j \frac{dQ}{dx} + Q \frac{\partial V_j}{\partial x} \right) dx + \\ & + [i\omega V_y - (\omega_{0x} - g_x) \theta] \int_a^b V_j \mu dx - \omega^2 \theta \int_a^b \left( V_j \mu x + \frac{\partial V_j}{\partial x} j_z \right) dx - \\ & - \left( \theta - \frac{V_y}{v_{0x}} \right) \int_a^b V_j c dx - \sum_{k=1}^{\infty} G_k \left\{ \int_a^b V_j \frac{\partial V_k}{\partial x} c dx + \right. \\ & + P \left[ \left( \frac{\partial V_k}{\partial x} \right)_{x=x_\tau} \int_a^b V_j \delta(x, x_\tau) dx - \right. \\ & \left. \left. - (V_k)_{x=x_\tau} \int_a^b \frac{\partial V_j}{\partial x} \delta(x, x_\tau) dx \right] \right\} = c_{y\theta} \int_a^b V_j \delta(x, x_y) dx + \\ & + c_{\theta\theta}^{(0)} \int_a^b \frac{\partial V_j}{\partial x} \delta(x, x_y) dx, \end{aligned}$$

или согласно (4.4.28), (4.5.30), (4.5.31) и (4.7.19)

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{\infty} G_k [(1+i\eta)\lambda_k - \omega^2] \int_0^b \left( V_j V_{kz} + \frac{\partial V_j}{\partial x} \frac{\partial V_k}{\partial x} j_z \right) dx + \\
& + \int_a^b \left( V_j \frac{dQ}{dx} + Q \frac{dV_j}{dx} \right) dx - \left( \theta - \frac{V_y}{v_{0x}} \right) \int_a^b V_j c dx - \\
& - \sum_{k=1}^{\infty} G_k \left[ \int_a^b V_j \frac{\partial V_k}{\partial x} c dx + P \left( V_j \frac{\partial V_k}{\partial x} - V_k \frac{\partial V_j}{\partial x} \right)_{x=x_T} \right] = \\
& = c_{y\theta} (V_j)_{x=x_y} + c_{\theta\theta}^{(0)} \left( \frac{\partial V_j}{\partial x} \right)_{x=x_y}. \quad (4.10.29)
\end{aligned}$$

Пользуясь соотношениями (4.5.26) и (4.5.32) и обозначениями (4.7.23) и (4.8.11), можем привести равенство (4.10.29) к виду

$$\begin{aligned}
& [(1+i\eta)\omega_j^2 - \omega^2] m_j G_j + \int_a^b \left( V_j \frac{dQ}{dx} + Q \frac{\partial V_j}{\partial x} \right) dx + c_{jy} V_y + \\
& + c_{j\theta} \theta + \sum_{k=1}^{\infty} c_{jk} G_k = c_{y\theta} (V_j)_{x=x_y} + c_{\theta\theta}^{(0)} \left( \frac{\partial V_j}{\partial x} \right)_{x=x_y}. \quad (4.10.30)
\end{aligned}$$

В соответствии с краевыми условиями, указанными для функции  $Q$  в формулах (4.10.20), должно иметь место равенство

$$\int_a^b \left( V_j \frac{dQ}{dx} + Q \frac{\partial V_j}{\partial x} \right) dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} (Q V_j) dx = Q V_j \Big|_{x=a}^{x=b} = 0. \quad (4.10.31)$$

Согласно (4.8.16) и (4.10.17) в том случае, когда исполнительные органы системы управления создают управляющую силу,

$$c_{y\theta} (V_j)_{x=x_y} + c_{\theta\theta}^{(0)} \left( \frac{\partial V_j}{\partial x} \right)_{x=x_T} = c_{j\theta}. \quad (4.10.32)$$

Равенство (4.10.32) будет иметь место и в том случае, когда исполнительные органы системы управления создают сосредоточенный управляющий момент, так как в этом случае будут иметь место зависимости (4.8.17) и (4.10.18). Согласно (4.10.3), (4.10.30), (4.10.31) и (4.10.32) коэффициенты ряда (4.10.24) должны удовлетворять уравнениям

$$m_j (\omega_j^{*2} - \omega^2) G_j + c_{jy} V_y + c_{j\theta} \theta + \sum_{k=1}^{\infty} c_{jk} G_k = c_{j\theta}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (4.10.33)$$



Бесконечная система алгебраических уравнений, образуемая уравнениями (4.10.25) и (4.10.33), совпадает с бесконечной системой уравнений (4.10.4). Подставляя ряд (4.10.24) в формулу (4.10.22), получим для функции  $\theta^*(\omega)$  разложение (4.9.9). Таким образом, заменяя в (4.10.20) жесткость  $B_y$  жесткостью  $B_y^*$ , решая уравнения (4.10.20) и определяя далее функцию  $\theta^*(\omega)$  по формуле (4.10.22), мы получим тот же результат, что и в случае построения этой функции путем решения бесконечной системы уравнений (4.10.4) и суммирования ряда (4.9.9), что и требовалось доказать.

Для определения функции  $V(x)$  и константы  $\theta$  из уравнений (4.10.20) можно воспользоваться следующей расчетной схемой. Дифференциальным уравнениям, указанным в (4.10.20), после замены жесткости  $B_y$  жесткостью  $B_y^*$ , можно придать вид

$$\begin{aligned} c \frac{dV}{dx} + \omega^2 \mu V - \frac{dQ}{dx} = f_0(x) + V_y f_1(x) + \theta f_2(x) + \\ + (V)_{x=x_T} f_3(x) + \left( \frac{dV}{dx} \right)_{x=x_T} f_4(x), \\ \frac{d}{dx} \left( B_y^* \frac{d^2 V}{dx^2} \right) + \omega^2 j_z \frac{dV}{dx} - Q = g_0(x) + V_y g_1(x) + \\ + \theta g_2(x) + (V)_{x=x_T} g_3(x) + \left( \frac{dV}{dx} \right)_{x=x_T} g_4(x), \end{aligned} \quad (4.10.34)$$

где

$$\begin{aligned} f_0 = -c_{y\delta} \delta(x, x_y), \quad f_1 = i\omega \mu + \frac{c}{v_{0x}}, \\ f_2 = -(\omega_{0x} - g_x + \omega^2 x) \mu - c, \\ f_3 = 0, \quad f_4 = -P \delta(x, x_T), \\ g_0 = -c_{y\delta}^{(0)} \delta(x, x_y), \quad g_1 = 0, \quad g_2 = -\omega^2 j_z, \\ g_3 = P \delta(x, x_T), \quad g_4 = 0. \end{aligned} \quad (4.10.35)$$

Краевые условия для функций  $V$  и  $Q$ , указанные в (4.10.20), при замене жесткости  $B_y$  жесткостью  $B_y^*$  принимают вид

$$B_y^* \frac{d^2 V}{dx^2} = 0, \quad Q = 0 \quad \text{при } x=a \text{ и при } x=b. \quad (4.10.36)$$

Введем в рассмотрение функции  $V_j(x)$  и  $Q_j(x)$ ,  $j=0, 1, \dots, 4$ , удовлетворяющие дифференциальным уравнениям:

$$\begin{aligned} c \frac{dV_j}{dx} + \omega^2 \mu V_j - \frac{dQ_j}{dx} = f_j(x) \\ \frac{d}{dx} \left( B_y^* \frac{d^2 V_j}{dx^2} \right) + \omega^2 j_z \frac{dV_j}{dx} - Q_j = g_j(x) \end{aligned} \quad j=0, 1, \dots, 4 \quad (4.10.37)$$

и краевым условиям:

$$B_b^* \frac{d^2 V_j}{dx^2} = 0, \quad Q_j = 0, \quad j = 0, 1, \dots, 4, \quad \text{при } x = a \text{ и при } x = b. \quad (4.10.38)$$

Согласно (4.10.37) и (4.10.38) функции:

$$\begin{aligned} V(x) &= V_0(x) + V_y V_1(x) + \theta V_2(x) + \\ &\quad + (V)_{x=x_T} V_3(x) + \left( \frac{dV}{dx} \right)_{x=x_T} V_4(x), \\ Q(x) &= Q_0(x) + V_y Q_1(x) + \theta Q_2(x) + \\ &\quad + (V)_{x=x_T} Q_3(x) + \left( \frac{dV}{dx} \right)_{x=x_T} Q_4(x) \end{aligned} \quad (4.10.39)$$

будут образовывать решение системы дифференциальных уравнений (4.10.34), удовлетворяющее краевым условиям (4.10.36). Подставляя функцию  $V(x)$  из (4.10.39) в первые два уравнения системы (4.10.20), получим уравнения:

$$\left. \begin{aligned} &\left[ c_{yy} + i\omega m - \int_a^b \frac{dV_1}{dx} c dx - P \left( \frac{dV_1}{dx} \right)_{x=x_T} \right] V_y + \\ &\quad + \left[ c_{yb} + i\omega y - \int_a^b \frac{dV_2}{dx} c dx - P \left( \frac{dV_2}{dx} \right)_{x=x_T} \right] \theta - \\ &\quad - \left[ \int_a^b \frac{dV_3}{dx} c dx + P \left( \frac{dV_3}{dx} \right)_{x=x_T} \right] (V)_{x=x_T} - \\ &\quad - \left[ \int_a^b \frac{dV_4}{dx} c dx + P \left( \frac{dV_4}{dx} \right)_{x=x_T} \right] \left( \frac{dV}{dx} \right)_{x=x_T} = c_{yb} + \\ &\quad + \int_a^b \frac{dV_0}{dx} c dx + P \left( \frac{dV_0}{dx} \right)_{x=x_T}, \\ &\left[ c_{\theta y} - \int_a^b \frac{dV_1}{dx} c x dx - P \left( x \frac{dV_1}{dx} - V_1 \right)_{x=x_T} \right] V_y + \\ &\quad + \left[ c_{\theta \theta} + i\omega \mu_z - \omega^2 J_z - \int_a^b \frac{dV_2}{dx} c x dx - \right. \end{aligned} \right] \quad (4.10.40)$$

$$\left. \begin{aligned} & -P \left( x \frac{dV_2}{dx} - V_2 \right)_{x=x_T} \Big] \theta - \left[ \int_a^b \frac{dV_3}{dx} cx dx + \right. \\ & + P \left( x \frac{dV_3}{dx} - V_3 \right)_{x=x_T} \Big] (V)_{x=x_T} - \left[ \int_a^b \frac{dV_4}{dx} cx dx + \right. \\ & + P \left( x \frac{dV_4}{dx} - V_4 \right)_{x=x_T} \Big] \left( \frac{dV}{dx} \right)_{x=x_T} = \\ & = c\theta + \int_a^b \frac{dV_0}{dx} cx dx + P \left( x \frac{dV_0}{dx} - V_0 \right)_{x=x_T} . \end{aligned} \right\} \quad (4.10.40)$$

Согласно (4.10.39) должны иметь место равенства:

$$\begin{aligned} & (V_1)_{x=x_T} V_y + (V_2)_{x=x_T} \theta + [(V_3)_{x=x_T} - 1] (V)_{x=x_T} + \\ & + (V_4)_{x=x_T} \left( \frac{dV}{dx} \right)_{x=x_T} = -(V_0)_{x=x_T} , \\ & \left( \frac{dV_1}{dx} \right)_{x=x_T} V_y + \left( \frac{dV_2}{dx} \right)_{x=x_T} \theta + \left( \frac{dV_3}{dx} \right)_{x=x_T} (V)_{x=x_T} + \\ & + \left[ \left( \frac{dV_4}{dx} \right)_{x=x_T} - 1 \right] \left( \frac{dV}{dx} \right)_{x=x_T} = - \left( \frac{dV_0}{dx} \right)_{x=x_T} . \end{aligned} \quad (4.10.41)$$

Уравнения (4.10.40) и (4.10.41) образуют систему четырех линейных алгебраических уравнений для четырех неизвестных констант  $V_y$ ,  $\theta$ ,  $(V)_{x=x_T}$  и  $\left( \frac{dV}{dx} \right)_{x=x_T}$ .

Таким образом, расчет искомых частотных характеристик сводится к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} & c \frac{dV}{dx} + \omega^2 \mu V - \frac{dQ}{dx} = f(x), \\ & \frac{d}{dx} \left( B_y^* \frac{d^2 V}{dx^2} \right) + \omega^2 j_z \frac{dV}{dx} - Q = g(x) \end{aligned} \quad (4.10.42)$$

с краевыми условиями:

$$B_y^* \frac{d^2 V}{dx^2} = 0, \quad Q = 0 \quad \text{при } x=a \text{ и при } x=b. \quad (4.10.43)$$

При заданном значении частоты  $\omega$ , последовательно полагая в (4.10.42)  $f(x) = f_j(x)$ ,  $g(x) = g_j(x)$ ,  $j=0, 1, \dots, 4$ , найдем функции  $V_j(x)$  и  $Q_j(x)$ ,  $j=0, 1, \dots, 4$ , удовлетворяющие уравнениям

(4.10.37) и краевым условиям (4.10.38). Определив далее константы  $V_y$ ,  $\theta$ ,  $(V)_{x=x_T}$  и  $\left(\frac{dV}{dx}\right)_{x=x_T}$  из уравнений (4.10.40) и (4.10.41) и подставив их значения в первую из формул (4.10.39), найдем функцию  $V(x)$ . Отыскав затем действительную часть  $\theta_1^*$  и мнимую часть  $\theta_2^*$  комплексного числа  $\theta^*$ , определяемого соотношением (4.10.22), можно вычислить далее по формулам (4.9.12) коэффициент усиления  $k_0$  и фазовый сдвиг  $\varphi_0$  для исходного расчетного значения частоты  $\omega$ . Осуществляя указанный расчет для ряда последовательных значений частоты  $\omega$ , можно построить, таким образом, амплитудно-частотную и фазово-частотную характеристики ракеты как объекта автоматического регулирования.

Решение неоднородной системы дифференциальных уравнений (4.10.42), удовлетворяющее краевым условиям (4.10.43), можно отыскивать, построив четыре линейно-независимых частных решения однородной системы дифференциальных уравнений

$$c \frac{dV}{dx} + \omega^2 \mu V - \frac{dQ}{dx} = 0, \quad (4.10.44)$$

$$\frac{d}{dx} \left( B_y^* \frac{d^2 V}{dx^2} \right) + \omega^2 j_z \frac{dV}{dx} - Q = 0.$$

Пользуясь методом вариации произвольных постоянных, можно построить по этим частным решениям системы (4.10.44) общее решение системы дифференциальных уравнений (4.10.42); произвольные постоянные будут определяться краевыми условиями (4.10.43).

Метод расчета частотных характеристик ракеты как регулируемого объекта, изложенный в этом параграфе, является менее трудоемким, чем метод, указанный в § 9, и обеспечивает более высокую точность расчетов. К методу, описанному в § 9, придется прибегать при решении вопроса о том или ином «укорочении» бесконечной системы дифференциальных уравнений возмущенного движения (4.8.18) для исследования устойчивости движения путем электро моделирования с реальной аппаратурой системы управления. Укорочение уравнений возмущенного движения (4.8.18) можно считать допустимым, если частотные характеристики, найденные из соответствующим образом укороченных уравнений (4.9.7) и из соответствующей частной суммы ряда (4.9.9), для исследуемого диапазона частот дают погрешности, которые в вопросе об устойчивости движения можно считать допустимыми.

## § 11. СТАБИЛИЗАЦИЯ ДВИЖЕНИЯ РАКЕТЫ С УЧЕТОМ УПРУГОСТИ ЕЕ КОНСТРУКЦИИ

При рассмотрении вопроса о стабилизации изгибных колебаний корпуса ракеты будем исходить из приближенного построе-

ния частотных характеристик ракеты, как регулируемого объекта, для частот  $\omega$ , близких к частотам изгибных собственных колебаний корпуса  $\omega_k$ ,  $k=1, 2, \dots$ . При частотах  $\omega$ , близких к частоте  $\omega_j$ , в разложении (4.9.9) основную роль играет слагаемое  $\left(\frac{\partial V_j}{\partial x}\right)_{x=x_r} G_j(\omega)$ , остальными членами этого ряда в рассматриваемом случае практически можно пренебречь. В связи с этим для частот  $\omega$ , близких к частоте  $\omega_j$ , приближенно можно положить

$$\theta^*(\omega) = \left(\frac{\partial V_j}{\partial x}\right)_{x=x_r} G_j(\omega). \quad (4.11.1)$$

Как указывалось уже в § 9, коэффициенты  $c_{j\delta}^*$ ,  $j=1, 2, \dots$ , фигурирующие в формулах (4.9.15), близки к соответствующим коэффициентам  $c_{j\delta}$ ,  $j=1, 2, \dots$  и приближенно можно положить  $c_{j\delta}^* = c_{j\delta}$ . В этом случае согласно (4.9.15) будет иметь место равенство

$$G_j(\omega) = \frac{c_{j\delta}}{m_j(\omega_j^2 + i\eta\omega\omega_j - \omega^2)}. \quad (4.11.2)$$

Подставляя (4.11.2) в (4.11.1), получим для функции  $\theta^*(\omega)$  приближенную формулу

$$\theta^*(\omega) = \frac{c_{j\delta} \left(\frac{\partial V_j}{\partial x}\right)_{x=x_r}}{m_j(\omega_j^2 + i\eta\omega\omega_j - \omega^2)}. \quad (4.11.3)$$

Отделяя в (4.11.3) действительные и мнимые части комплексных выражений, получим соотношения:

$$\begin{aligned} \theta_1^*(\omega) &= \frac{c_{j\delta} \left(\frac{\partial V_j}{\partial x}\right)_{x=x_r} (\omega_j^2 - \omega^2)}{m_j[(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + \eta^2\omega^2\omega_j^2]}, \\ \theta_2^*(\omega) &= -\frac{c_{j\delta} \left(\frac{\partial V_j}{\partial x}\right)_{x=x_r} \eta\omega\omega_j}{m_j[(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + \eta^2\omega^2\omega_j^2]}, \end{aligned} \quad (4.11.4)$$

где в соответствии с принятыми ранее обозначениями  $\theta_1^*(\omega)$  — действительная и  $\theta_2^*(\omega)$  — мнимая части комплекснозначной функции  $\theta^*(\omega)$ . Согласно (4.9.10) и (4.11.4) в рассматриваемом случае будут иметь место равенства:

$$\begin{aligned} k_o(\omega) \cos \varphi_o(\omega) &= \frac{c_{j\delta} \left(\frac{\partial V_j}{\partial x}\right)_{x=x_r} (\omega_j^2 - \omega^2)}{m_j[(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + \eta^2\omega^2\omega_j^2]}, \\ k_o(\omega) \sin \varphi_o(\omega) &= -\frac{c_{j\delta} \left(\frac{\partial V_j}{\partial x}\right)_{x=x_r} \eta\omega\omega_j}{m_j[(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + \eta^2\omega^2\omega_j^2]}. \end{aligned} \quad (4.11.5)$$

В соответствии с формулами (3.26.25) и (4.11.5) уравнение годографа разомкнутой системы автоматического регулирования в данном случае будет иметь вид

$$\begin{aligned} X &= \frac{c_{j\delta} \left( \frac{\partial V_j}{\partial x} \right)_{x=x_r} k_a(\omega) [(\omega_j^2 - \omega^2) \cos \varphi_a(\omega) + \eta \omega \omega_j \sin \varphi_a(\omega)]}{m_j [(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + \eta^2 \omega^2 \omega_j^2]}, \\ Y &= \frac{c_{j\delta} \left( \frac{\partial V_j}{\partial x} \right)_{x=x_r} k_a(\omega) [(\omega_j^2 - \omega^2) \sin \varphi_a(\omega) - \eta \omega \omega_j \cos \varphi_a(\omega)]}{m_j [(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + \eta^2 \omega^2 \omega_j^2]}, \end{aligned} \quad (4.11.6)$$

где  $k_a(\omega)$  и  $\varphi_a(\omega)$  — функции, определяющие амплитудно-частотную и фазово-частотную характеристики автомата стабилизации.

Полагая в (4.11.6)

$$\omega = \omega_j + \delta \quad (4.11.7)$$

и пренебрегая в числителях полученных дробей величинами второго порядка малости и в их знаменателях величинами третьего порядка малости по сравнению с малостью величин  $\delta$  и  $\eta$ , получим для частот  $\omega$ , близких к частоте  $\omega_j$ , приближенное уравнение годографа

$$\begin{aligned} X &= - \frac{c_{j\delta} \left( \frac{\partial V_j}{\partial x} \right)_{x=x_r} k_a(\omega_j) [2\delta \cos \varphi_a(\omega_j) - \eta \omega_j \sin \varphi_a(\omega_j)]}{m_j \omega_j (4\delta^2 + \eta^2 \omega_j^2)}, \\ Y &= - \frac{c_{j\delta} \left( \frac{\partial V_j}{\partial x} \right)_{x=x_r} k_a(\omega_j) [2\delta \sin \varphi_a(\omega_j) + \eta \omega_j \cos \varphi_a(\omega_j)]}{m_j \omega_j (4\delta^2 + \eta^2 \omega_j^2)}. \end{aligned} \quad (4.11.8)$$

Согласно (4.11.8) должны иметь место равенства:

$$\begin{aligned} X^2 + Y^2 &= \frac{\hat{c}_{j\delta}^2 \left( \frac{\partial V_j}{\partial x} \right)_{x=x_r}^2 k_a^2(\omega_j)}{m_j^2 \omega_j^2 (4\delta^2 + \eta^2 \omega_j^2)}, \\ X \sin \varphi_a(\omega_j) - Y \cos \varphi_a(\omega_j) &= \frac{\eta c_{j\delta} \left( \frac{\partial V_j}{\partial x} \right)_{x=x_r} k_a(\omega_j)}{m_j (4\delta^2 + \eta^2 \omega_j^2)}, \end{aligned} \quad (4.11.9)$$

в соответствии с которыми уравнение годографа может быть представлено в виде

$$X^2 + Y^2 = \frac{c_{j\delta} \left( \frac{\partial V_j}{\partial x} \right)_{x=x_r} k_a(\omega_j) [X \sin \varphi_a(\omega_j) - Y \cos \varphi_a(\omega_j)]}{\eta m_j \omega_j^2}. \quad (4.11.10)$$

Введя обозначения

$$X_0 = \frac{c_{j\beta} \left( \frac{\partial V_j}{\partial x} \right)_{x=x_r} k_a(\omega_j) \sin \varphi_a(\omega_j)}{2\eta m_j \omega_j^2},$$

$$Y_0 = - \frac{c_{j\beta} \left( \frac{\partial V_j}{\partial x} \right)_{x=x_r} k_a(\omega_j) \cos \varphi_a(\omega_j)}{2\eta m_j \omega_j^2},$$
(4.11.11)

можно привести уравнение (4.11.10) к виду

$$X^2 + Y^2 = 2(XX_0 + YY_0),$$

или

$$(X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2 = R^2, \quad (4.11.12)$$

где

$$R = \sqrt{X_0^2 + Y_0^2} = \frac{k_a(\omega_j) \left| c_{j\beta} \left( \frac{\partial V_j}{\partial x} \right)_{x=x_r} \right|}{2\eta m_j \omega_j^2}. \quad (4.11.13)$$

Уравнение (4.11.12) представляет собой уравнение окружности радиуса  $R$  с центром в точке с координатами  $X = X_0$ ,  $Y = Y_0$ . Эта окружность проходит через начало координат, так как  $X_0^2 + Y_0^2 = R^2$ . Согласно (4.11.11) при

$$c_{j\beta} \left( \frac{\partial V_j}{\partial x} \right)_{x=x_r} \sin \varphi_a(\omega_j) \leq 0 \quad (4.11.14)$$

центр этой окружности не выходит за пределы левой полуплоскости и в данном случае на частотах, близких к частоте  $\omega_j$ , годограф разомкнутой системы автоматического регулирования имеет вид, показанный на рис. 4.5 сплошной линией для случая  $Y_0 > 0$  и пунктирной линией для случая  $Y_0 < 0$ . В рассматриваемом случае окружность, определяемая уравнением (4.11.12), не может охватывать точку  $X = 1$ ,  $Y = 0$ , каким бы большим ни был ее радиус  $R$ . Таким образом, условия (4.11.4) являются достаточными условиями устойчивости изгибных колебаний корпуса ракеты<sup>1</sup>. Неравенство (4.11.14) не содержит коэффициента усиления автомата стабилизации, и в связи с этим его принято называть условием фазовой стабилизации  $j$ -го тона изгибных колебаний.

Согласно (4.11.11) при

$$c_{j\beta} \left( \frac{\partial V_j}{\partial x} \right)_{x=x_r} \sin \varphi_a(\omega_j) > 0 \quad (4.11.15)$$

центр окружности, определяемой уравнением (4.11.12), лежит в правой полуплоскости и в данном случае на частотах, близких к

<sup>1</sup> При сделанных нами упрощениях передаточная функция не имеет полюсов в правой полуплоскости.

частоте  $\omega_j$ , годограф разомкнутой системы автоматического регулирования имеет вид, показанный на рис. 4.6 сплошной линией для случая  $Y_0 > 0$  и пунктирной линией для случая  $Y_0 < 0$ . Согласно (4.11.12) точка пересечения годографом положительной полуоси  $x$  имеет координату  $x$ , равную  $2X_0$ . Для того чтобы на частотах, близких к частоте  $\omega_j$ , годограф не охватывал точку

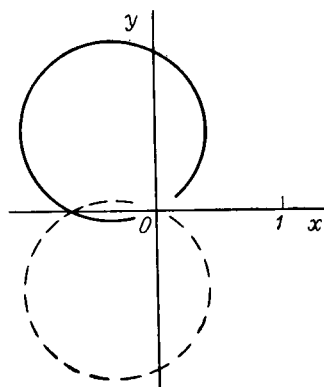


Рис. 4.5.

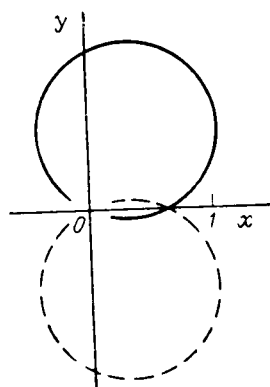


Рис. 4.6.

$X=1$ ,  $Y=0$ , должно выполняться неравенство  $2X_0 \leq 1$ . Согласно (4.11.11) этому неравенству можно придать вид

$$k_a(\omega_j) \leq \frac{\eta m_j \omega_j^2}{c_{j\delta} \left( \frac{\partial V_j}{\partial x} \right)_{x=x_r} \sin \varphi_a(\omega_j)}. \quad (4.11.16)$$

Условие (4.11.16) в рассматриваемом случае является необходимым условием устойчивости для  $j$ -го тона изгибных колебаний корпуса ракеты; это условие называют обычно условием амплитудной стабилизации.

Таким образом, для  $j$ -го тона изгибных колебаний корпуса ракеты устойчивость может быть обеспечена либо выполнением условия фазовой стабилизации (4.11.14), либо выполнением условия амплитудной стабилизации (4.11.16). Коэффициенты  $m_j$  и  $c_{j\delta}$ , производные  $\left( \frac{\partial V_j}{\partial x} \right)_{x=x_r}$  и частоты изгибных собственных колебаний корпуса  $\omega_j$ , фигурирующие в условиях устойчивости (4.11.14) и (4.11.16), в процессе полета ракеты претерпевают существенные изменения. В связи с этим для всех активных участков полета ракеты фазовую стабилизацию обычно удастся реализовать лишь для первого тона изгибных колебаний. Обеспечение амплитудной стабилизации изгибных колебаний тоже оказывается часто трудно выполнимым. В таких случаях на ракете приходится устанавливать дополнительные чувствительные элементы систе-



мы управления, в качестве которых применяются обычно датчики угловых скоростей. Удачно комбинируя сигналы этих датчиков с основным входным сигналом автомата стабилизации, можно существенно образом облегчить стабилизацию изгибных колебаний корпуса ракеты.

После предварительного выбора частотных характеристик автомата стабилизации устойчивость изгибных колебаний корпуса ракеты контролируется расчетным путем посредством точного построения годографа разомкнутой системы автоматического регулирования и экспериментальным путем посредством электромоделирования с макетом реальной аппаратуры системы управления.

---

## Приложения

### КАНОНИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ

На практике обычно устойчивость и управляемость ракеты окончательно проверяется на моделирующих установках—электронных вычислительных машинах непрерывного действия в комбинации с реальной аппаратурой системы управления. На таких установках воспроизводится поведение ракеты при заданных начальных условиях. Для полной гарантии требуются однотипные исследования при различных комбинациях начальных условий, минимально необходимое число которых резко возрастает с ростом порядка системы уравнений возмущенного движения ракеты и обычно столь велико, что рассмотрение всех вариантов подчас не представляется возможным. Кроме того, с ростом порядка системы уравнений при использовании машин непрерывного действия заметно возрастают погрешности в результатах и сложность отладки.

Эти затруднения в значительной мере могут быть сняты, если, используя быстродействующие машины дискретного счета, предварительно произвести «диагонализацию» исходной системы уравнений возмущенного движения ракеты как объекта управления. Настоящее приложение посвящено изложению алгоритмов подобного преобразования уравнений. В § 2 приводится алгоритм преобразования уравнений к виду, удобному для моделирования, при «замороженных» коэффициентах уравнений, а в последующих параграфах указывается способ такого преобразования с учетом переменности коэффициентов уравнений; даны также соответствующие преобразования выражения управляющего сигнала автомата стабилизации.

Изложение ведется на удобном и экономном языке теории матриц. Необходимые сведения из теории матриц приводятся в § 1.

В общем случае рассматриваются линеаризованные уравнения возмущенного движения ракеты

$$\sum_{j=1}^n \left[ m_{ij}(t) \frac{d^2 q_j}{dt^2} + r_{ij}(t) \frac{dq_j}{dt} + n_{ij}(t) q_j \right] = \\ = a_i(t) \delta + h_i(t) \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (A)$$

В матричной записи эти уравнения имеют вид

$$m(t) \frac{d^2 q}{dt^2} + r(t) \frac{dq}{dt} + n(t) q = a(t) \delta + h(t), \quad (A')$$

где

$$m = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nn} \end{bmatrix}, \quad r = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} \end{bmatrix};$$

$$n = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & \dots & n_{1n} \\ n_{21} & n_{22} & \dots & n_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ n_{n1} & n_{n2} & \dots & n_{nn} \end{bmatrix},$$

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ q_n \end{bmatrix}, \quad a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix}, \quad h = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \dots \\ h_n \end{bmatrix}.$$

Управляющий сигнал автомата стабилизации рассматривается в виде

$$v = b_1 \frac{dq}{dt} + b_2 q, \quad (B)$$

где  $b_1$  и  $b_2$  — строчные матрицы.

## § 1. ЭЛЕМЕНТЫ МАТРИЧНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

### 1.1. Основные определения и обозначения

Пусть дано некоторое числовое поле  $K$ , т. е. совокупность чисел, в пределах которой всегда выполнимы и однозначны четыре операции: сложение, вычитание, умножение и деление на число, отличное от нуля, например, поле комплексных чисел.

*Матрицей* называется прямоугольная таблица чисел из поля  $K$ , состоящая из  $m$  строк и  $n$  столбцов:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Если  $m=n$ , то матрица называется *квадратной*, а число  $m$ , равное  $n$ , — ее *порядком*. В общем случае матрица называется *прямоугольной* типа  $m \times n$ . Числа, из которых составлена матрица,

называются ее *элементами*. Сокращенно матрицу обозначают так:

$$(a_{ik}) \quad (i=1, \dots, m; k=1, \dots, n),$$

или же одной буквой (заглавной или строчной); например, матрица  $A$ , имея в виду, что  $A = (a_{ik})$ .

Прямоугольная матрица, состоящая из одного столбца

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix},$$

называется *столбцевой* матрицей. Прямоугольная матрица, состоящая из одной строки  $(x_1 \dots x_n)$ , называется *строчной* матрицей. Столбцевые и строчные матрицы иногда называют *векторами*.

Матрица называется *нулевой*, если все ее элементы равны нулю.

Матрицы  $A = (a_{ij})$  и  $B = (b_{ij})$  равны друг другу, если они одного и того же типа  $m \times n$  и, кроме того,

$$a_{ij} = b_{ij} \quad (i=1, \dots, m; j=1, \dots, n).$$

## 1.2. Сложение и умножение прямоугольных матриц

1. Операция *сложение матриц* применима только к матрицам одного и того же типа. Суммой двух прямоугольных матриц  $A = (a_{ij})$  и  $B = (b_{ij})$  типа  $m \times n$  называется матрица  $C = (c_{ij})$  типа  $m \times n$ , элементы которой равны суммам соответствующих элементов матриц  $A$  и  $B$ , т. е.

$$C = A + B,$$

если

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (i=1, \dots, m; j=1, \dots, n).$$

Операция сложение матриц обладает переместительным и сочетательным свойствами:

$$1) \quad A + B = B + A,$$

$$2) \quad (A + B) + C = A + (B + C).$$

2. *Произведением матрицы  $A = (a_{ij})$  на число  $\alpha$  из  $K$*  называется матрица  $C = (c_{ij})$ , элементы которой получаются из соответствующих элементов матрицы  $A$  умножением на число  $\alpha$ , т. е.

$$C = \alpha A,$$

если

$$c_{ij} = \alpha a_{ij} \quad (i=1, \dots, m; j=1, \dots, n).$$

Операция умножение матрицы на число обладает следующими свойствами:

- 1)  $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$ ,
- 2)  $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ ,
- 3)  $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$ .

Здесь  $A$  и  $B$  — прямоугольные матрицы одного и того же типа,  $\alpha, \beta$  — числа из поля  $K$ .

3. Разность  $A-B$  двух прямоугольных матриц одного и того же типа определяется равенством

$$A-B = A + (-1)B.$$

4. Произведением двух матриц  $A$  и  $B$  типа соответственно  $m \times n$  и  $m' \times n'$  и таких, что  $n = m'$ , называется матрица  $C$ , у которой элемент  $c_{ij}$ , стоящий на пересечении  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца, равен «произведению»  $i$ -й строки первой матрицы  $A$  на  $j$ -ый столбец второй матрицы  $B$ , т. е.

$$C = AB,$$

где

$$A = (a_{ik}) \quad (i=1, \dots, m; \quad k=1, \dots, n),$$

$$B = (b_{kh}) \quad (i=1, \dots, m'; \quad k=1, \dots, n'),$$

причем  $n = m'$ , если

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \quad (i=1, \dots, m; \quad j=1, \dots, n').$$

Матрица  $C$  имеет столько строк, сколько строк в матрице  $A$ , и столько столбцов, сколько столбцов в матрице  $B$ , т. е.  $C$  есть матрица типа  $m \times n'$ .

Операция умножение двух матриц, введенная выше, неприменима, если число столбцов первой матрицы не равно числу строк второй матрицы. Для квадратных матриц одного и того же порядка умножение всегда выполнимо.

Умножение матриц обладает сочетательным и распределительным свойствами:

- 1)  $(AB)C = A(BC)$ ;
- 2)  $(A+B)C = AC + BC$ ,
- 3)  $A(B+C) = AB + AC$ .

Переместительным свойством умножение матриц не обладает. Если  $AB=BA$ , то матрицы  $A$  и  $B$  называются перестановочными или коммутирующими между собой.

### 1.3. Блочные матрицы

Прямоугольную матрицу  $A = (a_{ik})$  типа  $m \times n$  при помощи горизонтальных и вертикальных линий можно рассечь на прямоугольные блоки:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1t} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{s1} & \dots & A_{st} \end{bmatrix} \quad (s \leq m; \quad t \leq n).$$

Здесь  $A_{ij}$  — прямоугольные матрицы или числа. В частности матрицу можно рассечь только горизонтальными линиями или только вертикальными линиями. При этом будем иметь соответственно

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_s \end{bmatrix} \quad \text{или} \quad A = (A_1 \dots A_t).$$

Сокращенно *блочную* матрицу можно обозначить так:

$$A = (A_{\alpha\beta}) \quad (\alpha = 1, \dots, s; \quad \beta = 1, \dots, t).$$

Операции *сложение* и *умножение* над блочными матрицами формально производятся по тем же правилам, что и в случае, когда вместо блоков стоят числовые элементы.

Две прямоугольные матрицы одинаковых размеров и с одинаковым разбиением на блоки складываются так:

$$A + B = (A_{\alpha\beta} + B_{\alpha\beta}) \quad (\alpha = 1, \dots, s; \quad \beta = 1, \dots, t).$$

Для возможности умножения двух блочных матриц друг на друга нужно, чтобы при разбиении на блоки все горизонтальные размеры блоков в первом сомножителе совпадали с соответствующими вертикальными размерами во втором. Пусть

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1t} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{s1} & \dots & A_{st} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & \dots & B_{1u} \\ \dots & \dots & \dots \\ B_{t1} & \dots & B_{tu} \end{bmatrix}$$

и число столбцов блока  $A_{\alpha\delta}$  равно числу строк блока  $B_{\delta\beta}$  ( $\alpha = 1, \dots, s; \quad \beta = 1, \dots, u; \quad \delta = 1, \dots, t$ ). Тогда

$$AB = C = (C_{\alpha\beta}),$$

где

$$C_{\alpha\beta} = \sum_{\delta=1}^t A_{\alpha\delta} B_{\delta\beta} \quad (\alpha = 1, \dots, s; \quad \beta = 1, \dots, u).$$



Для того чтобы система линейных однородных уравнений (1.2) имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы определитель этой системы был равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (1.3)$$

Уравнение (1.3) представляет собой алгебраическое уравнение  $n$ -й степени относительно  $\lambda$  и называется *характеристическим уравнением* матрицы  $A$ .

Пусть в уравнениях (1.2)  $\lambda$  есть корень характеристического уравнения (1.3). Тогда система (1.2) имеет ненулевое решение

$$x_1, \dots, x_n, \text{ т. е. числу } \lambda \text{ отвечает собственный вектор } \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Собственный вектор определяется с точностью до произвольного множителя, не равного нулю.

Собственные векторы матрицы  $A$ , отвечающие попарно различным собственным числам, всегда линейно независимы.

2. Матрица  $A$  порядка  $n$  называется матрицей *простой структуры*, если она имеет ровно  $n$  линейно независимых собственных векторов.

Матрица  $A$  порядка  $n$  имеет простую структуру, если его характеристическое уравнение имеет  $n$  различных корней. Это условие является достаточным, но не необходимым. Существуют матрицы простой структуры, характеристические уравнения которых имеют кратные корни. Можно показать, что симметрическая матрица имеет простую структуру. Простую структуру имеет также матрица  $u = m^{-1}n$ , где  $m$  и  $n$  — симметрические матрицы.

## 1.6. Разложение матрицы простой структуры на составляющие и приведение ее к диагональному виду

1. Пусть  $A$  — матрица простой структуры порядка  $n$ , а  $K_1, \dots, K_n$  — ее собственные векторы, так что

$$AK_j = \lambda_j K_j \quad (j=1, \dots, n). \quad (1.4)$$

Квадратная матрица  $K = (K_1 \dots K_n)$ , составленная из  $n$  линейно независимых собственных векторов матрицы  $A$ , является невырожденной матрицей и потому имеет обратную матрицу  $K^{-1}$ , которую для удобства будем обозначать через  $M$  ( $K^{-1} = M$ ).



Итак, имеем

$$MK=KM=E_n. \quad (1.5)$$

Строки матрицы  $M$  обозначим через  $M_1, \dots, M_n$ :

$$M = \begin{bmatrix} \overline{M_1} \\ \vdots \\ \overline{M_n} \end{bmatrix}.$$

Между строками матрицы  $M$  и столбцами матрицы  $K$  имеют место следующие соотношения:

$$M_s K_\sigma = \begin{cases} 1 & (s=\sigma) \\ 0 & (s \neq \sigma). \end{cases} \quad (1.6)$$

На основании (1.4) и (1.5)

$$\begin{aligned} A = AE_n &= AKM = A(K_1 \dots K_n)M = (\lambda_1 K_1 \dots \lambda_n K_n) \begin{bmatrix} \overline{M_1} \\ \vdots \\ \overline{M_n} \end{bmatrix} = \\ &= \lambda_1 K_1 M_1 + \dots + \lambda_n K_n M_n. \end{aligned}$$

Матрицы

$$A_j = \lambda_j K_j M_j \quad (j=1, \dots, n)$$

называются *составляющими* матрицы  $A$ . Эти составляющие взаимно ортогональны, т. е.

$$A_i \cdot A_j = 0 \quad (i \neq j),$$

что следует из свойства (1.6).

2. Через  $\Lambda$  обозначим диагональную матрицу

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

у которой диагональными элементами служат собственные числа матрицы  $A$ . Используя (1.4), получим

$$AK = K\Lambda, \quad (1.7)$$

а после умножения равенства (1.7) справа на  $K^{-1}$  будем иметь

$$A = K\Lambda K^{-1}. \quad (1.8)$$

Две матрицы  $B$  и  $C$  называются *подобными*, если существует невырожденная матрица  $T$ , такая, что

$$B = TCT^{-1}.$$

Таким образом, матрица  $A$ , имеющая простую структуру, подобна диагональной матрице.

### 1.7. Дифференцирование матриц

1. Матрица, элементы которой являются функциями от какого-нибудь параметра, называется *функциональной*:

$$A(t) = (a_{ij}(t)) \quad (i=1, \dots, m; j=1, \dots, n).$$

2. Производная матрицы  $A(t)$  по параметру  $t$  называется матрица, элементами которой служат производные от соответствующих элементов матрицы  $A(t)$ , т. е.

$$\frac{dA}{dt} = \left( \frac{da_{ij}}{dt} \right).$$

Производная матрицы обладает следующими свойствами:

1) если  $C$  — постоянная матрица, то

$$\frac{d[CA(t)]}{dt} = C \frac{dA(t)}{dt}, \quad \frac{d[A(t)C]}{dt} = \frac{dA(t)}{dt} C.$$

и вообще

$$\frac{d[CA(t)]}{dt} \neq \frac{d[A(t)C]}{dt};$$

$$2) \quad \frac{d[A(t) + B(t)]}{dt} = \frac{dA(t)}{dt} + \frac{dB(t)}{dt};$$

$$3) \quad \frac{d[A(t)B(t)]}{dt} = \frac{dA(t)}{dt} B(t) + A(t) \frac{dB(t)}{dt}.$$

### § 2. ПРИВЕДЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ РАКЕТЫ К ВИДУ, УДОБНОМУ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ, ПРИ ЗАМОРОЖЕННЫХ КОЭФФИЦИЕНТАХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим уравнения возмущенного движения ракеты как объекта управления при замороженных коэффициентах

$$m \frac{d^2 q}{dt^2} + r \frac{dq}{dt} + nq = a\delta + h(t). \quad (2.1)$$

Здесь  $m, r, n, a$  — матрицы с постоянными элементами.

Для простоты отбросим члены, пропорциональные обобщенным скоростям, которые определяют демпфирование в системе и обычно малы. В этом случае будем иметь

$$m \frac{d^2 q}{dt^2} + nq = a\delta + h. \quad (2.2)$$

Далее, будем предполагать, что матрица  $u = m^{-1}n$  имеет простую структуру.

Пусть,  $v_1, \dots, v_n$  — собственные числа матрицы  $u$ . Этим собственным числам отвечают соответственно  $n$  линейно независимых собственных векторов  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Поэтому квадратная матрица

$$x = (x_1 \dots x_n)$$

является невырожденной матрицей и, значит, имеет обратную матрицу

$$x^{-1} = \mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix}.$$

Строки матрицы  $\mu$  и столбцы матрицы  $x$  связаны между собой соотношениями

$$\mu_s x_\sigma = \begin{cases} 1 & (s = \sigma) \\ 0 & (s \neq \sigma). \end{cases} \quad (2.3)$$

Напомним, что элементами столбцовой матрицы  $q$  служат обобщенные координаты  $q_1, \dots, q_n$ . Введем в рассмотрение новые координаты  $z_1, \dots, z_n$ , связанные с обобщенными координатами соотношениями

$$q = \sum_{\sigma=1}^n x_\sigma z_\sigma = xz \left( z = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \right). \quad (2.4)$$

Подставим (2.4) в (2.2), предварительно умножив обе части равенства (2.2) на  $m^{-1}$ . Получим

$$x \frac{d^2 z}{dt^2} + uxz = m^{-1}a\delta + m^{-1}h. \quad (2.5)$$

Здесь

$$\begin{aligned} ux &= u(x_1 \dots x_n) = (ux_1 \dots ux_n) = \\ &= (v_1 x_1 \dots v_n x_n) = (x_1 \dots x_n) \begin{bmatrix} v_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & v_n \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

или

$$ux = xv, \quad (2.6)$$

где

$$v = \begin{bmatrix} v_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & v_n \end{bmatrix}.$$

Учитывая (2.6), из (2.5), после умножения обеих частей этого равенства слева на  $\mu$ , получим

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + vz = \mu m^{-1}(a\delta + h). \quad (2.7)$$

Последнее соотношение в развернутом виде запишется так

$$\begin{bmatrix} \frac{d^2 z_1}{dt^2} \\ \vdots \\ \frac{d^2 z_n}{dt^2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & v_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix} m^{-1}(a\delta + h),$$

или

$$\begin{bmatrix} \frac{d^2 z_1}{dt^2} + v_1 z_1 \\ \vdots \\ \frac{d^2 z_n}{dt^2} + v_n z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 m^{-1}(a\delta + h) \\ \vdots \\ \mu_n m^{-1}(a\delta + h) \end{bmatrix}.$$

Отсюда видно, что матричное уравнение (2.7) эквивалентно  $n$  уравнениям

$$\frac{d^2 z_\sigma}{dt^2} + v_\sigma z_\sigma = \mu_\sigma m^{-1}(a\delta + h) \quad (\sigma = 1, \dots, n). \quad (2.8)$$

Левые части этих уравнений содержат только по одной координате, и связь между уравнениями остается лишь через их пра

вые части, содержащие общую функцию  $\delta(t)$ . В таком виде значительно проще реализовать электро моделирование уравнений.

При  $h \equiv \delta \equiv 0$  система уравнений (A) описывает свободное движение ракеты. В этом случае преобразованная система (2.8) распадается на  $n$  независимых уравнений

$$\frac{d^2 z_\sigma}{dt^2} + \nu_\sigma z_\sigma = 0 \quad (\sigma = 1, \dots, n), \quad (2.9)$$

каждое из которых определяет изменение соответствующей координаты  $z_\sigma$ . В случае когда  $m$  и  $n$  — симметрические матрицы, собственные числа  $\nu_\sigma$  матрицы  $u = m^{-1}n$ , можно показать, — вещественные числа. При этом, если  $\nu_\sigma > 0$ , то координата  $z_\sigma$  совершает гармонические колебания с частотой  $\sqrt{\nu_\sigma}$ ; при  $\nu_\sigma = 0$  координата  $z_\sigma$  изменяется по линейному закону. Наконец, при  $\nu_\sigma < 0$   $z_\sigma$  представляется в виде линейной комбинации функции  $\exp \sqrt{\nu_\sigma} t$  и  $\exp(-\sqrt{\nu_\sigma} t)$ . Каждая из обобщенных координат  $q_\sigma$  есть линейная комбинация координат  $z_\sigma$ . Координаты  $z_\sigma$  называются нормальными координатами системы, а  $\sqrt{\nu_\sigma}$  (при  $\nu_\sigma > 0$ ) — собственной или нормальной частотой. В связи с этим часто операцию приведения уравнений (2.2) к виду (2.8) называют приведением уравнений возмущенного движения к нормальным координатам.

Управляющий сигнал регулятора также нужно выразить через координаты  $z_\sigma$  ( $\sigma = 1, \dots, n$ ). С этой целью подставим выражение (2.4) в равенство (B). Тогда

$$v(t) = b_1 \sum_{\sigma=1}^n x_\sigma \frac{dz_\sigma}{dt} + b_2 \sum_{\sigma=1}^n x_\sigma z_\sigma, \quad (2.10)$$

или в другой записи

$$v(t) = b_1 x \frac{dz}{dt} + b_2 x z. \quad (2.11)$$

### § 3. ПРИВЕДЕНИЕ УРАВНЕНИЙ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

Систему уравнений

$$m(t) \frac{d^2 q}{dt^2} + r(t) \frac{dq}{dt} + n(t) q = 0, \quad (3.1)$$

описывающую свободные колебания ракеты, преобразуем так, чтобы получить систему из независимых друг от друга линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Наша цель — перейти от обобщенных координат  $q_1, \dots, q_n$  к новым координатам

там  $z_1, \dots, z_n$ , относительно которых уравнения свободных колебаний имеют вид

$$\frac{d^2 z_\sigma}{dt^2} + \tilde{a}_{1\sigma} \frac{dz_\sigma}{dt} + \tilde{a}_{2\sigma} z_\sigma = 0 \quad (\sigma=1, \dots, n). \quad (3.2)$$

Связь между старыми и новыми координатами будем искать в форме

$$q = \sum_{\sigma=1}^n \left( \tilde{x}_{1\sigma} \frac{dz_\sigma}{dt} + \tilde{x}_{2\sigma} z_\sigma \right), \quad (3.3)$$

где  $\tilde{x}_{1\sigma}, \tilde{x}_{2\sigma}$  — некоторые столбцевые матрицы.

Введя так называемое «медленное время»  $\tau = \varepsilon t$ , рассмотрим систему

$$m(\tau) \frac{d^2 q}{d\tau^2} + \varepsilon r(\tau) \frac{dq}{d\tau} + n(\tau) q = 0 \quad (\tau = \varepsilon t), \quad (3.4)$$

которая при  $\varepsilon = 1$  переходит в систему (3.1).

К виду (3.2) приведем сначала систему (3.4), рассматривая  $\tilde{x}_{i\sigma}, \tilde{a}_{i\sigma}$  ( $i=1, 2$ ) как функции от медленного времени  $\tau$  и параметра  $\varepsilon$ .

Дифференцируя (3.3) по  $t$  и исключая каждый раз с помощью равенств (3.2)  $\frac{d^2 z_\sigma}{dt^2}$ , будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= \sum_{\sigma=1}^n \left[ \left( \varepsilon \frac{d\tilde{x}_{1\sigma}}{d\tau} - \tilde{x}_{1\sigma} \tilde{a}_{1\sigma} + \tilde{x}_{2\sigma} \right) \frac{dz_\sigma}{dt} + \left( \varepsilon \frac{d\tilde{x}_{2\sigma}}{d\tau} - \tilde{x}_{1\sigma} \tilde{a}_{2\sigma} \right) z_\sigma \right], \\ \frac{d^2 q}{dt^2} &= \sum_{\sigma=1}^n \left\{ \left[ \varepsilon^2 \frac{d^2 \tilde{x}_{1\sigma}}{d\tau^2} + \varepsilon \left( 2 \frac{d\tilde{x}_{2\sigma}}{d\tau} - 2 \frac{d\tilde{x}_{1\sigma}}{d\tau} \tilde{a}_{1\sigma} - \tilde{x}_{1\sigma} \frac{d\tilde{a}_{1\sigma}}{d\tau} \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \tilde{x}_{1\sigma} \tilde{a}_{1\sigma}^2 - \tilde{x}_{2\sigma} \tilde{a}_{1\sigma} - \tilde{x}_{1\sigma} \tilde{a}_{2\sigma} \right] \frac{dz_\sigma}{dt} + \left[ \varepsilon^2 \frac{d^2 \tilde{x}_{2\sigma}}{d\tau^2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \varepsilon \left( -2 \frac{d\tilde{x}_{1\sigma}}{d\tau} \tilde{a}_{2\sigma} - \tilde{x}_{1\sigma} \frac{d\tilde{a}_{2\sigma}}{d\tau} \right) + \tilde{x}_{1\sigma} \tilde{a}_{1\sigma} \tilde{a}_{2\sigma} - \tilde{x}_{2\sigma} \tilde{a}_{2\sigma} \right] z_\sigma \right\}. \end{aligned}$$

Поставим значения  $q, \frac{dq}{dt}$  и  $\frac{d^2 q}{d\tau^2}$  в (3.4):

$$\begin{aligned} m \sum_{\sigma=1}^n \left\{ \left[ \varepsilon^2 \frac{d^2 \tilde{x}_{1\sigma}}{d\tau^2} + \varepsilon \left( 2 \frac{d\tilde{x}_{2\sigma}}{d\tau} - 2 \frac{d\tilde{x}_{1\sigma}}{d\tau} \tilde{a}_{1\sigma} - \tilde{x}_{1\sigma} \frac{d\tilde{a}_{1\sigma}}{d\tau} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \tilde{x}_{1\sigma} \tilde{a}_{1\sigma}^2 - \tilde{x}_{2\sigma} \tilde{a}_{1\sigma} - \tilde{x}_{1\sigma} \tilde{a}_{2\sigma} \right] \frac{dz_\sigma}{dt} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[ \varepsilon^2 \frac{d^2 \tilde{x}_{2\sigma}}{d\tau^2} + \varepsilon \left( -2 \frac{d\tilde{x}_{1\sigma}}{d\tau} \tilde{a}_{2\sigma} - \tilde{x}_{1\sigma} \frac{d\tilde{a}_{2\sigma}}{d\tau} \right) + \right. \\
& \left. + \tilde{x}_{1\sigma} \tilde{a}_{1\sigma} \tilde{a}_{2\sigma} - \tilde{x}_{2\sigma} \tilde{a}_{2\sigma} \right] z_{\sigma} \Big\} + \varepsilon r \sum_{\sigma=1}^n \left[ \left( \varepsilon \frac{d\tilde{x}_{1\sigma}}{d\tau} - \tilde{x}_{1\sigma} \tilde{a}_{1\sigma} + \tilde{x}_{2\sigma} \right) \frac{dz_{\sigma}}{dt} + \right. \\
& \left. + \left( \varepsilon \frac{d\tilde{x}_{2\sigma}}{d\tau} - \tilde{x}_{1\sigma} \tilde{a}_{2\sigma} \right) z_{\sigma} \right] + n \sum_{\sigma=1}^n \left( \tilde{x}_{1\sigma} \frac{dz_{\sigma}}{dt} + \tilde{x}_{2\sigma} z_{\sigma} \right) = 0. \quad (3.5)
\end{aligned}$$

В полученном равенстве приравняем коэффициенты при  $z_{\sigma}$  и  $\frac{dz_{\sigma}}{dt}$ .

Будем иметь

$$\begin{aligned}
& m \left[ \tilde{x}_{1\sigma} \tilde{a}_{1\sigma}^2 - \tilde{x}_{2\sigma} \tilde{a}_{1\sigma} - \tilde{x}_{1\sigma} \tilde{a}_{2\sigma} + \varepsilon \left( 2 \frac{d\tilde{x}_{2\sigma}}{d\tau} - 2 \frac{d\tilde{x}_{1\sigma}}{d\tau} \tilde{a}_{1\sigma} - \tilde{x}_{1\sigma} \frac{d\tilde{a}_{1\sigma}}{d\tau} \right) + \right. \\
& \left. + \varepsilon^2 \frac{d^2 \tilde{x}_{1\sigma}}{d\tau^2} \right] + \varepsilon r \left( \tilde{x}_{2\sigma} - \tilde{x}_{1\sigma} \tilde{a}_{1\sigma} + \varepsilon \frac{d\tilde{x}_{1\sigma}}{d\tau} \right) + n \tilde{x}_{1\sigma} = 0 \quad (\sigma = 1, \dots, n), \quad (3.6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& m \left[ \tilde{x}_{1\sigma} \tilde{a}_{1\sigma} \tilde{a}_{2\sigma} - \tilde{x}_{2\sigma} \tilde{a}_{2\sigma} + \varepsilon \left( -2 \frac{d\tilde{x}_{1\sigma}}{d\tau} \tilde{a}_{2\sigma} - \tilde{x}_{1\sigma} \frac{d\tilde{a}_{2\sigma}}{d\tau} \right) + \varepsilon^2 \frac{d^2 \tilde{x}_{2\sigma}}{d\tau^2} \right] + \\
& + \varepsilon r \left( -\tilde{x}_{1\sigma} \tilde{a}_{2\sigma} + \varepsilon \frac{d\tilde{x}_{2\sigma}}{d\tau} \right) + n \tilde{x}_{2\sigma} = 0 \quad (\sigma = 1, \dots, n). \quad (3.7)
\end{aligned}$$

Столбцовые матрицы  $\tilde{x}_{l\sigma}$  и скалярные функции  $\tilde{a}_{l\sigma}$ , которые должны обращать в тождества равенства (3.6) и (3.7), будем строить в форме рядов:

$$\tilde{x}_{l\sigma}(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k x_{l\sigma}^{[k]}(\tau), \quad \tilde{a}_{l\sigma}(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k a_{l\sigma}^{[k]}(\tau). \quad (3.8)$$

Подставим (3.8) в равенства (3.6), (3.7) и приравняем коэффициенты при  $\varepsilon^0$ . Получим

$$\left. \begin{aligned}
u x_{1\sigma}^{[0]} &= x_{1\sigma}^{[0]} a_{2\sigma}^{[0]} + x_{2\sigma}^{[0]} a_{1\sigma}^{[0]} - x_{1\sigma}^{[0]} a_{1\sigma}^{[0]2}, \\
u x_{2\sigma}^{[0]} &= x_{2\sigma}^{[0]} a_{2\sigma}^{[0]} - x_{1\sigma}^{[0]} a_{1\sigma}^{[0]} a_{2\sigma}^{[0]}.
\end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

Положим

$$a_{1\sigma}^{[0]} \equiv 0, \quad x_{1\sigma}^{[0]} \equiv 0. \quad (3.10)$$

Тогда левая и правая части первого равенства (3.9) обращаются в нуль, а второе равенство принимает вид

$$u x_{2\sigma}^{[0]} = x_{2\sigma}^{[0]} a_{2\sigma}^{[0]}.$$

Последнее соотношение будет выполняться, если  $\alpha_{2\sigma}^{[0]}$  является каким-нибудь собственным числом матрицы  $u$ , например  $v_\sigma$ , а  $x_{2\sigma}^{[0]}$  — соответствующим собственным вектором этой матрицы. Итак,

$$\alpha_{2\sigma}^{[0]} \equiv v_\sigma, \quad x_{2\sigma}^{[0]} \equiv x_\sigma. \quad (3.11)$$

Далее, в равенствах (3.6) и (3.7) приравняем коэффициенты при  $\varepsilon^k$  ( $k=1, 2, \dots$ ). Получим, принимая во внимание (3.10) и (3.11),

$$ux_{1\sigma}^{[1]} = x_{1\sigma}^{[1]}v_\sigma + x_\sigma\alpha_{1\sigma}^{[1]} - m_0^{-1}rx_\sigma - 2\frac{dx_\sigma}{d\tau},$$

$$ux_{2\sigma}^{[1]} = x_{2\sigma}^{[1]}v_\sigma + x_\sigma\alpha_{2\sigma}^{[1]},$$

$$ux_{1\sigma}^{[2]} = x_{1\sigma}^{[2]}v_\sigma + x_\sigma\alpha_{1\sigma}^{[2]} - m_0^{-1}rx_{2\sigma}^{[1]} + x_{2\sigma}^{[1]}\alpha_{1\sigma}^{[1]} + x_{1\sigma}^{[1]}\alpha_{2\sigma}^{[1]} - 2\frac{dx_{2\sigma}^{[1]}}{d\tau},$$

$$ux_{2\sigma}^{[2]} = x_{2\sigma}^{[2]}v_\sigma + x_\sigma\alpha_{2\sigma}^{[2]} + m_0^{-1}r\left(x_{1\sigma}^{[1]}v_\sigma - \frac{dx_\sigma}{d\tau}\right) - x_{1\sigma}^{[1]}\alpha_{1\sigma}^{[1]}v_\sigma + x_{2\sigma}^{[1]}\alpha_{2\sigma}^{[1]} + 2\frac{dx_{1\sigma}^{[1]}}{d\tau}v_\sigma + x_{1\sigma}^{[1]}\frac{dv_\sigma}{d\tau} - \frac{d^2x_\sigma}{d\tau^2},$$

и вообще

$$ux_{1\sigma}^{[k]} = x_{1\sigma}^{[k]}v_\sigma + x_\sigma\alpha_{1\sigma}^{[k]} + d_{1\sigma}^{[k-1]} \quad (k=1, 2, \dots), \quad (3.12)$$

$$ux_{2\sigma}^{[k]} = x_{2\sigma}^{[k]}v_\sigma + x_\sigma\alpha_{2\sigma}^{[k]} + d_{2\sigma}^{[k-1]} \quad (k=1, 2, \dots). \quad (3.13)$$

Здесь

$$d_{1\sigma}^{[0]} = -m_0^{-1}rx_\sigma - 2\frac{dx_\sigma}{d\tau},$$

$$d_{2\sigma}^{[0]} = 0,$$

$$d_{1\sigma}^{[1]} = -m_0^{-1}rx_{2\sigma}^{[1]} + x_{2\sigma}^{[1]}\alpha_{1\sigma}^{[1]} + x_{1\sigma}^{[1]}\alpha_{2\sigma}^{[1]} - 2\frac{dx_{2\sigma}^{[1]}}{d\tau}, \quad (3.14)$$

$$d_{2\sigma}^{[1]} = m_0^{-1}r\left(x_{1\sigma}^{[1]}v_\sigma - \frac{dx_\sigma}{d\tau}\right) - x_{1\sigma}^{[1]}\alpha_{1\sigma}^{[1]}v_\sigma + x_{2\sigma}^{[1]}\alpha_{2\sigma}^{[1]} + 2\frac{dx_{1\sigma}^{[1]}}{d\tau}v_\sigma + x_{1\sigma}^{[1]}\frac{dv_\sigma}{d\tau} - \frac{d^2x_\sigma}{d\tau^2}$$

и т. д.



Предположим, что  $x_{l\sigma}^{[r]}$ ,  $\alpha_{l\sigma}^{[r]}$  ( $i=1, 2$ ;  $r=0, 1, 2, \dots, k-1$ ) уже найдены. Тогда равенства

$$\mu x_{l\sigma}^{[k]} = x_{l\sigma}^{[k]} v_{\sigma} + x_{\sigma} \alpha_{l\sigma}^{[k]} + d_{l\sigma}^{[k-1]} \quad (i=1, 2), \quad (3.15)$$

где  $d_{l\sigma}^{[k-1]}$  — уже известные столбцевые матрицы, вполне определяют величины следующего приближения. Покажем это.

Равенство (3.15) умножим слева на матрицу  $\mu$ . Получим, принимая во внимание (2.6),

$$\mu \mu x_{l\sigma}^{[k]} = \mu x_{l\sigma}^{[k]} v_{\sigma} + \mu x_{\sigma} \alpha_{l\sigma}^{[k]} + \mu d_{l\sigma}^{[k-1]} \quad (i=1, 2). \quad (3.16)$$

Введем в рассмотрение столбцевую матрицу

$$q_{l\sigma}^{[k]} = \begin{bmatrix} q_{l1\sigma}^{[k]} \\ \vdots \\ q_{ln\sigma}^{[k]} \end{bmatrix},$$

определенную равенством

$$q_{l\sigma}^{[k]} = \mu x_{l\sigma}^{[k]}. \quad (3.17)$$

Тогда

$$\mu \mu x_{l\sigma}^{[k]} = \begin{bmatrix} v_1 & \dots & 0 \\ v_2 & & \\ \vdots & & \\ 0 & & v_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{l1\sigma}^{[k]} \\ q_{l2\sigma}^{[k]} \\ \vdots \\ q_{ln\sigma}^{[k]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 q_{l1\sigma}^{[k]} \\ v_2 q_{l2\sigma}^{[k]} \\ \vdots \\ v_n q_{ln\sigma}^{[k]} \end{bmatrix},$$

а

$$\mu x_{l\sigma}^{[k]} v_{\sigma} + \mu x_{\sigma} \alpha_{l\sigma}^{[k]} + \mu d_{l\sigma}^{[k-1]} = \begin{bmatrix} v_{\sigma} q_{l1\sigma}^{[k]} \\ v_{\sigma} q_{l2\sigma}^{[k]} \\ \vdots \\ v_{\sigma} q_{ln\sigma}^{[k]} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu_1 x_{\sigma} \\ \mu_2 x_{\sigma} \\ \vdots \\ \mu_n x_{\sigma} \end{bmatrix} \alpha_{l\sigma}^{[k]} +$$

$$+ \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix} d_{l\sigma}^{[k-1]} = \begin{bmatrix} v_{\sigma} q_{l1\sigma}^{[k]} + \mu_1 x_{\sigma} \alpha_{l\sigma}^{[k]} + \mu_1 d_{l\sigma}^{[k-1]} \\ v_{\sigma} q_{l2\sigma}^{[k]} + \mu_2 x_{\sigma} \alpha_{l\sigma}^{[k]} + \mu_2 d_{l\sigma}^{[k-1]} \\ \vdots \\ v_{\sigma} q_{ln\sigma}^{[k]} + \mu_n x_{\sigma} \alpha_{l\sigma}^{[k]} + \mu_n d_{l\sigma}^{[k-1]} \end{bmatrix}.$$

Из последнего соотношения видно, что матричное равенство (3.16) эквивалентно  $n$  алгебраическим (не матричным) равенствам

$$\nu_s q_{l's\sigma}^{[k]} = \nu_\sigma q_{l's\sigma}^{[k]} + \mu_s x_\sigma \alpha_{l's\sigma}^{[k]} + \mu_s d_{l's\sigma}^{[k-1]} \quad (s=1, 2, \dots, n). \quad (3.18)$$

В силу (2.3) при  $s=\sigma$  из (3.18) имеем

$$(\nu_\sigma - \nu_\sigma) q_{l'\sigma\sigma}^{[k]} = \alpha_{l'\sigma\sigma}^{[k]} + \mu_\sigma d_{l'\sigma\sigma}^{[k-1]} = 0. \quad (3.19)$$

Отсюда находим

$$\alpha_{l'\sigma\sigma}^{[k]} = -\mu_\sigma d_{l'\sigma\sigma}^{[k-1]}. \quad (3.20)$$

При  $s \neq \sigma$   $\mu_s x_\sigma = 0$ , а  $\nu_s \neq \nu_\sigma$ . Поэтому  $s$ -е равенство (3.18) разрешимо относительно  $q_{l's\sigma}^{[k]}$ :

$$q_{l's\sigma}^{[k]} = \frac{\mu_s d_{l's\sigma}^{[k-1]}}{\lambda_s - \lambda_\sigma} \quad (s \neq \sigma). \quad (3.21)$$

Неопределенной осталась лишь скалярная функция  $q_{l'\sigma\sigma}^{[k]}$ . Как видно из (3.19), в качестве  $q_{l'\sigma\sigma}^{[1]}$  можно принять произвольную, достаточное число раз дифференцируемую функцию.

Теперь легко определить  $\kappa_{l'\sigma\sigma}^{[k]}$ . Для этого обе части равенства (3.17) нужно умножить слева на  $\kappa$ . Тогда

$$\kappa_{l'\sigma\sigma}^{[k]} = \kappa q_{l'\sigma\sigma}^{[k]} = (x_1 \dots x_n) \begin{bmatrix} q_{l'1\sigma}^{[k]} \\ \vdots \\ q_{l'n\sigma}^{[k]} \end{bmatrix} = \sum_{s=1}^n x_s q_{l's\sigma}^{[k]},$$

или, учитывая (3.21),

$$\kappa_{l'\sigma\sigma}^{[k]} = P_\sigma d_{l'\sigma\sigma}^{[k-1]} + x_\sigma q_{l'\sigma\sigma}^{[k]}, \quad (3.22)$$

где

$$P_\sigma = \sum_{s \neq \sigma} \frac{x_s \mu_s}{\nu_s - \nu_\sigma}; \quad (3.23)$$

$q_{l'\sigma\sigma}^{[k]}$  — произвольная, достаточное число раз дифференцируемая функция от  $\tau$ .

При  $k=1$

$$\begin{aligned} \kappa_{l'\sigma\sigma}^{[1]} &= -P_\sigma \left( m_0^{-1} r x_\sigma + 2 \frac{dx_\sigma}{d\tau} \right) + x_\sigma q_{l'\sigma\sigma}^{[1]}, \\ \alpha_{l'\sigma\sigma}^{[1]} &= \mu_\sigma \left( m_0^{-1} r x_\sigma + 2 \frac{dx_\sigma}{d\tau} \right). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Так как  $d_{2\sigma}^{[0]}=0$ , то

$$\alpha_{2\sigma}^{[1]}=0. \quad (3.25)$$

Полагая  $q_{2\sigma\sigma}^{[1]}=0$ , будем иметь также и

$$\kappa_{2\sigma}^{[1]}=0. \quad (3.26)$$

Учитывая последние соотношения, получаем [см. (3.14)]

$$\begin{aligned} d_{1\sigma}^{[1]} &= 0, \\ d_{2\sigma}^{[1]} &= m_0^{-1} r \left( \kappa_{1\sigma}^{[1]} v_\sigma - \frac{d\kappa_\sigma}{d\tau} \right) - \kappa_{1\sigma}^{[1]} \alpha_{1\sigma}^{[1]} v_\sigma + 2 \frac{d\kappa_{1\sigma}^{[1]}}{d\tau} v_\sigma + \\ &+ \kappa_{1\sigma}^{[1]} \frac{dv_\sigma}{d\tau} - \frac{d^2 \kappa_\sigma}{d\tau^2}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

В соответствии с этим, величины следующего приближения определяются так:

$$\kappa_{1\sigma}^{[2]}=0, \quad \alpha_{1\sigma}^{[2]}=0, \quad (3.28)$$

$$\kappa_{2\sigma}^{[2]} = P_\sigma d_{2\sigma}^{[1]} + \kappa_\sigma q_{2\sigma\sigma}^{[2]}, \quad \alpha_{2\sigma}^{[2]} = -\mu_\sigma d_{2\sigma}^{[1]}. \quad (3.29)$$

Здесь произвольная функция  $q_{1\sigma\sigma}^{[2]}$  принята равной нулю.

Этим путем последовательно могут быть определены все члены рядов (3.8). Удерживая в этих рядах конечное число первых членов, получим приближенно преобразованную систему уравнений. Так, если ограничиться только первыми членами рядов, то будем иметь

$$\frac{d^2 z_\sigma}{dt^2} + v_\sigma z_\sigma = 0 \quad (\sigma=1, \dots, n). \quad (3.30)$$

Удерживая по два первых члена, получим

$$\frac{d^2 z_\sigma}{dt^2} + \varepsilon \alpha_{1\sigma}^{[1]} \frac{dz_\sigma}{dt} + v_\sigma z_\sigma = 0 \quad (\sigma=1, \dots, n). \quad (3.31)$$

Следующее приближение дает

$$\frac{d^2 z_\sigma}{dt^2} + \varepsilon \alpha_{1\sigma}^{[1]} \frac{dz_\sigma}{dt} + (v_\sigma + \varepsilon^2 \alpha_{2\sigma}^{[2]}) z_\sigma = 0 \quad (\sigma=1, \dots, n) \quad (3.32)$$

и т. д.

Для применения этих результатов к исходной системе (3.1) нужно во всех соотношениях положить  $\varepsilon=1$ .

#### § 4. ПРИВЕДЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ РАКЕТЫ К ВИДУ, УДОБНОМУ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Для приведения уравнений ( $A'$ ) к виду, удобному для моделирования, введем в рассмотрение систему

$$m(\tau) \frac{d^2 q}{d\tau^2} + \varepsilon r(\tau) \frac{dq}{d\tau} + n(\tau) q = \varepsilon a(\tau) \delta + h(t) \quad (\tau = \varepsilon t), \quad (4.1)$$

совпадающую с ( $A'$ ) при  $\varepsilon = 1$ .

В целях удобства выкладок запишем систему (4.1) в виде

$$m(\tau) \frac{d^2 q}{d\tau^2} + \varepsilon r(\tau) \frac{dq}{d\tau} + n(\tau) q = h(t) + \varepsilon h_1(t, \tau) \quad (\tau = \varepsilon t), \quad (4.2)$$

$$\text{где} \quad h_1(t, \tau) = a(\tau) \delta(t). \quad (4.3)$$

В системе (4.2) выполним подстановку

$$q = \sum_{\sigma=1}^n \left( \tilde{x}_{\sigma}(\tau, \varepsilon) \frac{dz_{\sigma}}{d\tau} + \tilde{x}_{2\sigma}(\tau, \varepsilon) z_{\sigma} \right), \quad (4.4)$$

предполагая, что скалярные функции  $z_{\sigma}$  удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d^2 z_{\sigma}}{d\tau^2} + \tilde{\alpha}_{1\sigma}(\tau, \varepsilon) \frac{dz_{\sigma}}{d\tau} + \tilde{\alpha}_{2\sigma}(\tau, \varepsilon) z_{\sigma} = \psi_{0\sigma}(t, \tau, \varepsilon) + \varepsilon \psi_{1\sigma}(t, \tau, \varepsilon) \quad (\sigma = 1, \dots, n). \quad (4.5)$$

Имеем

$$\begin{aligned} \frac{dq}{d\tau} = & \sum_{\sigma=1}^n \left[ \left( \varepsilon \frac{d\tilde{x}_{1\sigma}}{d\tau} - \tilde{x}_{1\sigma} \tilde{\alpha}_{1\sigma} + \tilde{x}_{2\sigma} \right) \frac{dz_{\sigma}}{d\tau} + \left( -\tilde{x}_{1\sigma} \tilde{\alpha}_{2\sigma} + \varepsilon \frac{d\tilde{x}_{2\sigma}}{d\tau} \right) z_{\sigma} \right] + \\ & + \sum_{\sigma=1}^n \tilde{x}_{1\sigma} (\psi_{0\sigma} + \varepsilon \psi_{1\sigma}), \\ \frac{d^2 q}{d\tau^2} = & \sum_{\sigma=1}^n \left\{ \left[ \varepsilon^2 \frac{d^2 \tilde{x}_{1\sigma}}{d\tau^2} + \varepsilon \left( 2 \frac{d\tilde{x}_{2\sigma}}{d\tau} - 2 \frac{d\tilde{x}_{1\sigma}}{d\tau} \tilde{\alpha}_{1\sigma} - \tilde{x}_{1\sigma} \frac{d\tilde{\alpha}_{1\sigma}}{d\tau} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \tilde{x}_{1\sigma} \tilde{\alpha}_{1\sigma}^2 - \tilde{x}_{2\sigma} \tilde{\alpha}_{1\sigma} - \tilde{x}_{1\sigma} \tilde{\alpha}_{2\sigma} \right] \frac{dz_{\sigma}}{d\tau} + \right. \\ & \left. + \left[ \varepsilon^2 \frac{d^2 \tilde{x}_{2\sigma}}{d\tau^2} + \varepsilon \left( -2 \frac{d\tilde{x}_{1\sigma}}{d\tau} \tilde{\alpha}_{2\sigma} - \tilde{x}_{1\sigma} \frac{d\tilde{\alpha}_{2\sigma}}{d\tau} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \tilde{x}_{1\sigma} \tilde{\alpha}_{1\sigma} \tilde{\alpha}_{2\sigma} - \tilde{x}_{2\sigma} \tilde{\alpha}_{2\sigma} \right] z_{\sigma} \right\} + \end{aligned}$$

$$+ \sum_{\sigma=1}^n \left[ \left( 2\varepsilon \frac{d\tilde{x}_{1\sigma}}{d\tau} - \tilde{x}_{1\sigma}\tilde{a}_{1\sigma} + \tilde{x}_{2\sigma} \right) (\psi_{0\sigma} + \varepsilon\psi_{1\sigma}) + \right. \\ \left. + \tilde{x}_{1\sigma} \left( \frac{\partial\psi_{0\sigma}}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial\psi_{0\sigma}}{\partial\tau} + \varepsilon \frac{\partial\psi_{1\sigma}}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial\psi_{1\sigma}}{\partial\tau} \right) \right].$$

Подставив полученные выражения в (4.2) и приравняв коэффициенты при  $z_\sigma$ ,  $dz_\sigma/dt$  и свободные члены, получим снова равенства (3.6), (3.7), которые, как мы видели, обращаются в тождества, если члены рядов (3.8) определены формулами (3.20) и (3.22), и равенства

$$m \sum_{\sigma=1}^n \left[ \left( 2\varepsilon \frac{d\tilde{x}_{1\sigma}}{d\tau} - \tilde{x}_{1\sigma}\tilde{a}_{1\sigma} + \tilde{x}_{2\sigma} \right) \psi_{0\sigma} + \tilde{x}_{1\sigma} \left( \frac{\partial\psi_{0\sigma}}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial\psi_{0\sigma}}{\partial\tau} \right) \right] + \\ + \varepsilon r \sum_{\sigma=1}^n \tilde{x}_{1\sigma}\psi_{0\sigma} = h, \quad (4.6)$$

$$m \sum_{\sigma=1}^n \left[ \left( 2\varepsilon \frac{d\tilde{x}_{1\sigma}}{d\tau} - \tilde{x}_{1\sigma}\tilde{a}_{1\sigma} + \tilde{x}_{2\sigma} \right) \psi_{1\sigma} + \tilde{x}_{1\sigma} \left( \frac{\partial\psi_{1\sigma}}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial\psi_{1\sigma}}{\partial\tau} \right) \right] + \\ + \varepsilon r \sum_{\sigma=1}^n \tilde{x}_{1\sigma}\psi_{1\sigma} = h_1. \quad (4.7)$$

Таким образом, задача сводится к построению функций  $\psi_{0\sigma}$  и  $\psi_{1\sigma}$  ( $\sigma=1, \dots, n$ ), удовлетворяющих соотношениям (4.6) и (4.7). Эти функции будем строить в виде рядов

$$\psi_{0\sigma}(t, \tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \psi_{0\sigma}^{[k]}(t, \tau), \quad \psi_{1\sigma}(t, \tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \psi_{1\sigma}^{[k]}(t, \tau). \quad (4.8)$$

Соотношения (4.6) и (4.7) с точностью до обозначений совпадают друг с другом, поэтому достаточно показать, как, например, из (4.6) определить  $\psi_{0\sigma}$  в зависимости от  $h$ .

Введем квадратные матрицы

$$\tilde{x}_i = (\tilde{x}_{i1} \dots \tilde{x}_{in}) \quad (i=1, 2), \quad \tilde{a}_1 = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \tilde{a}_{1n} \end{bmatrix}$$

и столбцевые матрицы

$$\psi_j = \begin{bmatrix} \psi_{j1} \\ \vdots \\ \psi_{jn} \end{bmatrix} \quad (j=0, 1).$$

Посредством этих матриц равенство (4.6) можно записать так:

$$m \left[ \left( 2\varepsilon \frac{d\tilde{x}_1}{d\tau} - \tilde{x}_1 \tilde{\alpha}_1 + \tilde{x}_2 \right) \psi_0 + \tilde{x}_1 \left( \frac{\partial \psi_0}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial \psi_0}{\partial \tau} \right) \right] + \\ + \varepsilon r \tilde{x}_1 \psi_0 = h. \quad (4.9)$$

В соответствии с (3.8) и (4.8) имеем

$$\begin{aligned} \tilde{x}_i(\tau, \varepsilon) &= \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k x_i^{[k]}(\tau), \\ \tilde{\alpha}_1(\tau, \varepsilon) &= \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \alpha_1^{[k]}(\tau), \\ \psi_j(t, \tau, \varepsilon) &= \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \psi_j^{[k]}(t, \tau) \quad (j=0, 1), \end{aligned} \quad (4.10)$$

где

$$\begin{aligned} x_i^{[k]} &= (x_{i1}^{[k]} \dots x_{in}^{[k]}) \quad (i=1, 2), \\ \alpha_1^{[k]} &= \begin{bmatrix} \alpha_{11}^{[k]} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_{1n}^{[k]} \end{bmatrix}, \quad \psi_j^{[k]} = \begin{bmatrix} \psi_{j1}^{[k]} \\ \vdots \\ \psi_{jn}^{[k]} \end{bmatrix} \quad (j=0, 1). \end{aligned}$$

Подставим ряды (4.10) в матричное уравнение (4.9). Получим, учитывая, что  $x_i^{[0]}=0$ ,  $\alpha_1^{[0]}=0$ ,

$$\begin{aligned} m \left[ \left( 2\varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \frac{dx_1^{[k]}}{d\tau} - \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k x_1^{[k]} \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \alpha_1^{[k]} + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k x_2^{[k]} \right) \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \psi_0^{[k]} + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k x_1^{[k]} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \frac{\partial \psi_0^{[k]}}{\partial t} + \varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \frac{\partial \psi_0^{[k]}}{\partial \tau} \right) \right] + \\ + \varepsilon r \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k x_1^{[k]} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \psi_0^{[k]} = h. \quad (4.11) \end{aligned}$$

В равенстве (4.11) приравняем члены, не содержащие  $\varepsilon$  в виде множителя. Получим, имея в виду, что  $\kappa_2^{[0]} \equiv \kappa$  [см. (3.11)],

$$m\kappa\phi_0^{[0]} = h. \quad (4.12)$$

Отсюда

$$\phi_0^{[0]} = \kappa^{-1} m^{-1} h = \mu m^{-1} h. \quad (4.13)$$

В соответствии с этим

$$\psi_0^{[0]} = \mu_0 m^{-1} h. \quad (4.14)$$

Приравняем теперь в равенстве (4.11) коэффициенты при  $\varepsilon$  в первой степени. Будем иметь

$$m\kappa\phi_0^{[1]} = -m \left( \kappa_2^{[1]} \phi_0^{[0]} + \kappa_1^{[1]} \frac{\partial \phi_0^{[0]}}{\partial t} \right). \quad (4.15)$$

Отсюда

$$\phi_0^{[1]} = -\mu \left( \kappa_2^{[1]} \phi_0^{[0]} + \kappa_1^{[1]} \frac{\partial \phi_0^{[0]}}{\partial t} \right). \quad (4.16)$$

Подставляя сюда значение  $\phi_0^{[0]}$  и учитывая, что

$$\frac{\partial \phi_0^{[0]}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} [\mu(\tau) m^{-1}(\tau) h(t)] = \mu m^{-1} \frac{dh}{dt},$$

а  $\kappa_2^{[1]} = 0$  [см. (3.26)], получим

$$\phi_0^{[1]} = -\mu \kappa_1^{[1]} \mu m^{-1} \frac{dh}{dt} \quad (4.17)$$

и соответственно

$$\phi_{1\sigma}^{[1]} = -\mu_\sigma \kappa_1^{[1]} \mu m^{-1} \frac{dh}{dt}. \quad (4.18)$$

Этим путем последовательно могут быть определены все члены разложения  $\psi_{0\sigma}(t, \tau, \varepsilon)$ .

Члены разложения функции  $\psi_{1\sigma}(t, \tau, \varepsilon)$  выражаются теми же формулами, что и члены разложения функции  $\psi_{0\sigma}(t, \tau, \varepsilon)$ , только в последних вместо  $h$  нужно подставить функцию (4.3). Таким образом,

$$\psi_{1\sigma}^{[0]} = \mu_\sigma m^{-1} a \delta, \quad (4.19)$$

$$\psi_{1\sigma}^{[1]} = -\mu_\sigma \kappa_1^{[1]} \mu m^{-1} a \frac{a\delta}{dt} \quad (4.20)$$

и т. д.

Итак, систему уравнений (4.1) можно привести к виду (4.5). Коэффициенты уравнений преобразованной системы представляются в форме рядов по степеням  $\varepsilon$ . Удерживая в коэффициен-

тах члены, содержащие  $\varepsilon$  в степени не выше первой, будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{d^2 z_\sigma}{dt^2} + \varepsilon \alpha_{1\sigma}^{[1]} \frac{dz_\sigma}{dt} + v_\sigma z_\sigma = \varepsilon \mu_\sigma m^{-1} a \delta + \\ + \mu_\sigma (m^{-1} h - \varepsilon x_1^{[1]} \mu m^{-1} \frac{dh}{dt}) \quad (\sigma = 1, \dots, n). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Можно уточнить преобразованную систему, удерживая в коэффициентах уравнений члены, содержащие и  $\varepsilon^2$ . Однако расчеты показывают, что при этом значения коэффициентов изменяются незначительно, и потому вполне можно ограничиться рассмотрением системы (4.21).

Чтобы полученные результаты применить к исходной системе (A'), нужно во всех соотношениях положить  $\varepsilon = 1$ . Полагая  $\varepsilon = 1$  в (4.21), будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{d^2 z_\sigma}{dt^2} + \alpha_{1\sigma}^{[1]} \frac{dz_\sigma}{dt} + v_\sigma z_\sigma = \mu_\sigma m^{-1} a \delta + \\ + \mu_\sigma \left( m^{-1} h - x_1^{[1]} \mu m^{-1} \frac{dh}{dt} \right) \quad (\sigma = 1, \dots, n). \end{aligned} \quad (4.22)$$

## § 5. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ УПРАВЛЯЮЩЕГО СИГНАЛА АВТОМАТА СТАБИЛИЗАЦИИ

В выражении управляющего сигнала автомата стабилизации (Б) перейдем к новым переменным  $z_1, \dots, z_n$  посредством подстановки (4.4):

$$\begin{aligned} v = b_1 \frac{dq}{dt} + b_2 q = b_1 \left\{ \sum_{\sigma=1}^n \left[ \left( \varepsilon \frac{d\tilde{x}_{1\sigma}}{d\tau} - \tilde{x}_{1\sigma} \tilde{\alpha}_{1\sigma} + \tilde{x}_{2\sigma} \right) \frac{dz_\sigma}{dt} + \right. \right. \\ \left. \left. + \left( \varepsilon \frac{d\tilde{x}_{2\sigma}}{d\tau} - \tilde{x}_{1\sigma} \tilde{\alpha}_{2\sigma} \right) z_\sigma \right] + \varepsilon \sum_{\sigma=1}^n \tilde{x}_{1\sigma} \tilde{\psi}_\sigma \right\} + b_2 \sum_{\sigma=1}^n \left( \tilde{x}_{1\sigma} \frac{dz_\sigma}{dt} + \tilde{x}_{2\sigma} z_\sigma \right). \end{aligned}$$

Обозначим

$$\begin{aligned} \tilde{v}_{1\sigma} = b_1 \left( \varepsilon \frac{d\tilde{x}_{1\sigma}}{d\tau} - \tilde{x}_{1\sigma} \tilde{\alpha}_{1\sigma} + \tilde{x}_{2\sigma} \right) + b_2 \tilde{x}_{1\sigma}, \\ \tilde{v}_{2\sigma} = b_1 \left( \varepsilon \frac{d\tilde{x}_{2\sigma}}{d\tau} - \tilde{x}_{1\sigma} \tilde{\alpha}_{2\sigma} \right) + b_2 \tilde{x}_{2\sigma}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Тогда

$$v = \sum_{\sigma=1}^n \left( \tilde{v}_{1\sigma} \frac{dz_\sigma}{dt} + \tilde{v}_{2\sigma} z_\sigma + \varepsilon \tilde{x}_{1\sigma} \tilde{\psi}_\sigma \right). \quad (5.2)$$



Подставим ряды (3.8) в (5.1):

$$\begin{aligned}\tilde{v}_{1\sigma} &= b_1 \left( \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \frac{dx_{1\sigma}^{[k]}}{d\tau} - \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k x_{1\sigma}^{[k]} \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \alpha_{1\sigma}^{[k]} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k x_{2\sigma}^{[k]} + b_2 \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k x_{1\sigma}^{[k]} \right) \\ \tilde{v}_{2\sigma} &= b_1 \left( \varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \frac{dx_{2\sigma}^{[k]}}{d\tau} - \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k x_{1\sigma}^{[k]} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \alpha_{2\sigma}^{[k]} \right) + b_2 \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k x_{2\sigma}^{[k]}\end{aligned}$$

Объединяя в правых частях последних равенств члены, содержащие  $\varepsilon$  в одинаковых степенях, представим функции  $\tilde{v}_{1\sigma}$  и  $\tilde{v}_{2\sigma}$  в виде

$$\tilde{v}_{i\sigma} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_{i\sigma}^{[k]} \quad (i=1, 2). \quad (5.3)$$

Здесь

$$\begin{aligned}v_{1\sigma}^{[0]} &= b_1 x_{\sigma}, & v_{2\sigma}^{[0]} &= b_2 x_{\sigma}, \\ v_{1\sigma}^{[1]} &= b_2 x_{1\sigma}^{[1]}, & v_{2\sigma}^{[1]} &= b_1 \left( \frac{dx_{\sigma}}{d\tau} - x_{1\sigma}^{[1]} v_{\sigma} \right)\end{aligned} \quad (5.4)$$

и т. д. В формулах (5.4) учтены равенства (3.11) и (3.26).

На основании полученных соотношений имеем

$$\begin{aligned}v &= \sum_{\sigma=1}^n \left\{ \left[ b_1 x_{\sigma} + \varepsilon b_2 x_{1\sigma}^{[1]} + \varepsilon^2 \dots \right] \frac{dz_{\sigma}}{dt} + \right. \\ &\quad \left. + \left[ b_2 x_{\sigma} + \varepsilon b_1 \left( \frac{dx_{\sigma}}{d\tau} - x_{1\sigma}^{[1]} v_{\sigma} \right) + \varepsilon^2 \dots \right] z_{\sigma} + \varepsilon^2 \dots \right\}. \quad (5.5)\end{aligned}$$

Отсюда, удерживая лишь члены, содержащие  $\varepsilon$  в степени не выше первой, получим приближенно

$$\begin{aligned}v &= \sum_{\sigma=1}^n \left\{ \left[ b_1 x_{\sigma} + \varepsilon b_2 x_{1\sigma}^{[1]} \right] \frac{dz_{\sigma}}{dt} + \right. \\ &\quad \left. + \left[ b_2 x_{\sigma} + \varepsilon b_1 \left( \frac{dx_{\sigma}}{dt} - x_{1\sigma}^{[1]} v_{\sigma} \right) \right] z_{\sigma} \right\}. \quad (5.6)\end{aligned}$$

Соотношение (5.6) при  $\varepsilon=1$  представляет приближенное выражение управляющего сигнала автомата стабилизации через новые координаты  $z_1, \dots, z_n$ , которое должно рассматриваться вместе с преобразованными уравнениями возмущенного движения ракеты как объекта управления.

## Литература

1. Аппазов Р. Ф., Лавров С. С., Мишин В. П., Баллистика управляемых ракет дальнего действия, изд-во «Наука» 1966.
2. Аржаников Н. С., Мальцев В. Н., Аэродинамика, Оборонгиз, 1956.
3. Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, изд-во «Наука», 1966.
4. Гантмахер Ф. Р., Левин Л. М., Теория полета неуправляемых ракет, Физматгиз, 1959.
5. Жуковский Н. Е., О движении твердого тела, имеющего полости, заполненные однородной каплевой жидкостью. Избр. соч., т. I, Гостехиздат, 1959.
6. Каменков Г. В., Об устойчивости движения на конечном интервале времени, ПММ, вып. 5, т. 17, 1953.
7. Карачаров К. А., Пилютик А. Г., Введение в техническую теорию устойчивости движения, Физматгиз, 1962.
8. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В., Теоретическая гидромеханика, Физматгиз, 1963.
9. Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н., Введение в нелинейную механику, изд. АН УССР, Киев, 1937.
10. Курош А. Г., Курс высшей алгебры, изд-во «Наука», 1965.
11. Лебедев А. А., Чернобровкин Л. С., Динамика полета беспилотных летательных аппаратов, Оборонгиз, 1962.
12. Ляпунов А. М., Общая задача об устойчивости движения, Гостехтеоретиздат, 1950.
13. Механика в СССР за тридцать лет, изд. АН СССР, 1950.
14. Микишев Г. Н., Рабинович Б. И., Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью, изд-во «Машиностроение», 1968.
15. Моисеев Н. Н., Задача о движении твердого тела, содержащего жидкие массы, имеющие свободную поверхность, Математический сборник № 32 (74), вып. 1, изд. АН СССР, 1953.
16. Моисеев Н. Н., Исследования о движении твердого тела, содержащего жидкие массы, имеющие свободную поверхность, Вестник АН СССР, § 5, 1956.
17. Нариманов Г. С., О движении твердого тела, полость которого частично заполнена жидкостью, ПММ, вып. 1, т. 20, 1956.
18. Остославский И. В., Стражева И. В., Динамика полета, изд-во «Машиностроение», 1965.
19. Охочимский Д. Е., К теории движения тела с полостями, частично заполненными жидкостью, ПММ, вып. 1, т. 20, 1956.
20. Рабинович Б. И., Об уравнениях возмущенного движения твердого тела с цилиндрической полостью, частично заполненной жидкостью, ПММ, вып. 1, т. 20, 1956.

21. Соболев С. Л., Уравнения математической физики, изд-во «Наука», 1966.
22. Рапопорт И. М., Колебания упругой оболочки, частично заполненной жидкостью, изд-во «Машиностроение», 1967.
23. Солодов А. В., Линейные системы автоматического управления с переменными параметрами, ГИ Ф-м лит., Москва, 1962.
24. Солодовников В. В. и др., Теория автоматического регулирования, изд-во «Машиностроение», 1967.
25. Сретенский Л. Н., Колебания жидкости в подвижном сосуде, Изв. АН СССР, ОИИ, 1957, № 10.
26. Феодосьев В. И., Сопротивление материалов, изд-во «Наука», 1964.
27. Янке Е., Эмде Ф., Таблицы функций с формулами и кривыми, Физматгиз, 1959.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

|                                                                                            | Стр.      |
|--------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| Предисловие . . . . .                                                                      | 3         |
| <b>Глава I. Уравнения движения ракеты . . . . .</b>                                        | <b>5</b>  |
| § 1. Основные теоремы динамики системы переменного состава . .                             | 5         |
| § 2. Переносное движение системы переменного состава . . . . .                             | 7         |
| § 3. Система переменного состава с твердой оболочкой. Принцип затвердевания . . . . .      | 11        |
| § 4. Принцип затвердевания для ракеты . . . . .                                            | 14        |
| § 5. Уравнения движения центра масс ракеты . . . . .                                       | 16        |
| § 6. Уравнения вращательного движения ракеты . . . . .                                     | 20        |
| § 7. Системы координат . . . . .                                                           | 21        |
| § 8. Кинематические соотношения . . . . .                                                  | 23        |
| § 9. Силы, действующие на ракету в полете . . . . .                                        | 25        |
| 9.1. Тяга двигателя . . . . .                                                              | 25        |
| 9.2. Сила тяжести . . . . .                                                                | 26        |
| 9.3. Аэродинамические силы . . . . .                                                       | 27        |
| 9.4. Управляющие силы . . . . .                                                            | 32        |
| 9.5. Силы Кориолиса . . . . .                                                              | 39        |
| 9.6. Силы, обусловленные перемещением центра масс ракеты относительно ее корпуса . . . . . | 40        |
| § 10. Динамические уравнения ракеты в развернутом виде . . . . .                           | 41        |
| § 11. Небозмущенное и возмущенное движение . . . . .                                       | 43        |
| § 12. Линеаризация уравнений возмущенного движения . . . . .                               | 45        |
| 12.1. Основные предпосылки . . . . .                                                       | 45        |
| 12.2. Вспомогательные соотношения . . . . .                                                | 48        |
| 12.3. Линеаризация уравнений возмущенного движения . . . . .                               | 52        |
| § 13. Расщепление линеаризованных уравнений возмущенного движения . . . . .                | 58        |
| § 14. Законы управления . . . . .                                                          | 61        |
| § 15. Общий вид уравнений возмущенного движения . . . . .                                  | 62        |
| <b>Глава II. Устойчивости и управляемость ракеты . . . . .</b>                             | <b>65</b> |
| § 1. Понятия об устойчивости и управляемости . . . . .                                     | 65        |
| 1.1. Статическая устойчивость . . . . .                                                    | 66        |
| 1.2. Устойчивость по Ляпунову . . . . .                                                    | 68        |
| 1.3. Устойчивость на конечном промежутке времени. Техническая устойчивость . . . . .       | 70        |
| 1.4. Локальная устойчивость . . . . .                                                      | 73        |
| 1.5. О методах решения задачи устойчивости . . . . .                                       | 74        |
| § 2. Метод замороженных коэффициентов . . . . .                                            | 75        |
| § 3. Критерии устойчивости движения по методу замороженных коэффициентов . . . . .         | 77        |
| § 4. Ракета как линейный объект автоматического управления . . .                           | 86        |

|                                                                                                                                               |            |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 4.1. Характер свободного возмущенного движения по тангажу и рысканию . . . . .                                                                | 88         |
| 4.2. Передаточные функции аппарата по тангажу и рысканию . . . . .                                                                            | 95         |
| 4.3. Упрощенные уравнения возмущенного движения и передаточные функции по тангажу и рысканию . . . . .                                        | 98         |
| 4.4. Передаточные функции аппарата по крену . . . . .                                                                                         | 102        |
| 4.5. Передаточные функции ракеты в продольном движении . . . . .                                                                              | 104        |
| 4.6. Частотные характеристики ракеты . . . . .                                                                                                | 105        |
| § 5. Требования к частотным характеристикам автомата стабилизации из условия устойчивости системы автоматического управления ракеты . . . . . | 103        |
| 5.1. Требования к частотным характеристикам автомата стабилизации по каналу тангажа . . . . .                                                 | 110        |
| 5.2. Требования к частотным характеристикам автомата стабилизации по каналу крена . . . . .                                                   | 114        |
| § 6. Области устойчивости. $D$ -разбиение . . . . .                                                                                           | 115        |
| § 7. Уточнение метода замороженных коэффициентов. Учет переменности коэффициентов уравнений . . . . .                                         | 120        |
| 7.1. Асимптотическое интегрирование уравнений . . . . .                                                                                       | 121        |
| 7.2. Критерии устойчивости . . . . .                                                                                                          | 130        |
| 7.3. О применимости приближенных критериев устойчивости . . . . .                                                                             | 131        |
| § 8. Эффективность и предельно допустимые отклонения органов управления . . . . .                                                             | 134        |
| 8.1. Эффективность органов управления тангажом и рысканием . . . . .                                                                          | 136        |
| 8.2. Эффективность органов управления по крену . . . . .                                                                                      | 146        |
| <b>Глава III. Стабилизация движения ракеты с учетом подвижности жидкостей в топливных баках . . . . .</b>                                     | <b>148</b> |
| § 1. Основные положения о физических свойствах жидкого топлива. Потенциал скоростей . . . . .                                                 | 148        |
| § 2. Краевые условия для потенциала скоростей . . . . .                                                                                       | 149        |
| § 3. Малые колебания жидкостей в топливных баках . . . . .                                                                                    | 153        |
| § 4. Потенциалы Жуковского . . . . .                                                                                                          | 154        |
| § 5. Малые колебания жидкости в неподвижном баке. Потенциал перемещений . . . . .                                                             | 157        |
| § 6. Колебания свободных поверхностей жидкостей в топливных баках . . . . .                                                                   | 160        |
| § 7. Колебания центра масс ракеты, уравнение сил . . . . .                                                                                    | 165        |
| § 8. Момент количества движения ракеты . . . . .                                                                                              | 168        |
| § 9. Учет подвижности жидких компонентов топлива при расчете моментов инерции работы . . . . .                                                | 171        |
| § 10. Уравнение моментов. Теорема Жуковского . . . . .                                                                                        | 173        |
| § 11. Уравнения движения ракеты, учитывающие подвижность жидкостей в топливных баках . . . . .                                                | 176        |
| § 12. Вычисление потенциалов Жуковского . . . . .                                                                                             | 177        |
| § 13. Простейшие примеры расчета потенциалов Жуковского . . . . .                                                                             | 181        |
| 13.1. Цилиндрический топливный бак . . . . .                                                                                                  | 181        |
| 13.2. Наполовину заполненный сферический бак . . . . .                                                                                        | 185        |
| § 14. Вычисление моментов инерции ракеты . . . . .                                                                                            | 190        |
| § 15. Колебания свободной поверхности жидкости в осесимметричном топливном баке . . . . .                                                     | 200        |
| § 16. Уравнение продольного движения, уравнения движения в плоскостях тангажа, рыскания и крена . . . . .                                     | 206        |
| § 17. Собственные колебания свободных поверхностей жидкостей в топливных баках . . . . .                                                      | 219        |
| § 18. Формы и частоты собственных колебаний свободной поверхности . . . . .                                                                   | 222        |
| § 19. Собственные колебания свободной поверхности жидкости в цилиндрическом топливном баке . . . . .                                          | 227        |

|                                                                                                                                               | <i>Стр.</i> |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------|
| § 20. Вынужденные колебания свободных поверхностей жидкостей в топливных баках . . . . .                                                      | 230         |
| § 21. Расчет форм и частот собственных колебаний свободных поверхностей методом последовательных приближений . . . . .                        | 237         |
| 21.1. Цилиндрический топливный бак . . . . .                                                                                                  | 239         |
| 21.2. Сферический топливный бак, наполовину заполненный жидкостью . . . . .                                                                   | 243         |
| § 22. Учет рассеяния энергии в уравнении колебаний свободной поверхности жидкости . . . . .                                                   | 246         |
| § 23. Преобразование уравнений движения в системы обыкновенных дифференциальных уравнений . . . . .                                           | 247         |
| § 24. Уравнения возмущенного движения, учитывающие подвижность жидких компонентов топлива . . . . .                                           | 251         |
| § 25. Расчет коэффициентов дифференциальных уравнений возмущенного движения . . . . .                                                         | 255         |
| § 26. Частотные характеристики ракеты как объекта автоматического регулирования . . . . .                                                     | 259         |
| § 27. Фазовая стабилизация колебаний корпуса ракеты и свободных поверхностей жидкостей в топливных баках . . . . .                            | 265         |
| § 28. Автоколебания ракеты в плоскости тангажа . . . . .                                                                                      | 275         |
| <b>Глава IV. Стабилизация движения ракеты с учетом упругости ее конструкции . . . . .</b>                                                     | <b>281</b>  |
| § 1. Простейшая постановка задачи об изгибных колебаниях корпуса ракеты . . . . .                                                             | 281         |
| § 2. Дифференциальное уравнение изгибных колебаний . . . . .                                                                                  | 283         |
| § 3. Уравнение сил и уравнение моментов . . . . .                                                                                             | 288         |
| § 4. Дифференциальные уравнения движения ракеты в плоскости тангажа, учитывающие упругость корпуса ракеты . . . . .                           | 292         |
| § 5. Изгибные собственные колебания корпуса ракеты в плоскости тангажа . . . . .                                                              | 300         |
| § 6. Расчет форм и частот изгибных собственных колебаний методом последовательных приближений . . . . .                                       | 308         |
| § 7. Преобразование уравнений движения ракеты в плоскости тангажа в бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений . . . . .     | 315         |
| § 8. Дифференциальные уравнения возмущенного движения в плоскости тангажа, учитывающие упругость корпуса ракеты . . . . .                     | 322         |
| § 9. Расчет частотных характеристик ракеты как объекта автоматического регулирования методов суммирования рядов . . . . .                     | 326         |
| § 10. Определение частотных характеристик ракеты как регулируемого объекта из обыкновенного дифференциального уравнения . . . . .             | 331         |
| § 11. Стабилизация движения ракеты с учетом упругости ее конструкции . . . . .                                                                | 344         |
| <b>Приложения. Канонические преобразования уравнений возмущенного движения . . . . .</b>                                                      | <b>350</b>  |
| § 1. Элементы матричного исчисления . . . . .                                                                                                 | 351         |
| § 2. Приведение уравнений возмущенного движения ракеты к виду, удобному для моделирования, при замороженных коэффициентах уравнений . . . . . | 358         |
| § 3. Приведение уравнений свободных колебаний к каноническому виду . . . . .                                                                  | 361         |
| § 4. Приведение уравнений возмущенного движения ракеты к виду, удобному для моделирования . . . . .                                           | 368         |
| § 5. Преобразование управляющего сигнала автомата стабилизации . . . . .                                                                      | 372         |
| <b>Литература . . . . .</b>                                                                                                                   | <b>374</b>  |

*Карлен Арамович Абгарян, Илья Маркович Рапопорт*

## **ДИНАМИКА РАКЕТ**

Редактор *Е. В. Сербиновская*

Художник *Л. А. Витте*

Техн. редактор *В. И. Бугаева*

Корректор *А. И. Карамышкина*

---

Т-15731      Сдано в набор 19/VI 1969 г.      Подписано в печать 9/XI 1969 г.  
Формат 60×90/16.    Печ. л. 23,75    Уч.-изд. л. 22,10    Бум. л. 11,88    Бумага № 1  
Тираж 8000 экз.      Цена 96 коп.      Тем. план. 1969 г. № 1      Зак. 2011

---

Издательство «Машиностроение», Москва, К-51, Петровка, 24

Московская типография № 8 Главполиграфпрома

Комитета по печати при Совете Министров СССР,

Хохловский пер., 7. Зак. 4265

