

Н. Н. ЛАПШЕВ

ГИДРАВЛИКА

УЧЕБНИК

*Рекомендовано
Учебно-методическим объединением
по образованию в области строительства
в качестве учебника для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по направлению подготовки «Строительство»*

3-е издание, стереотипное



Москва
Издательский центр «Академия»
2010

УДК 625.06/.07(075.8)
ББК 30.123я73
Л248

Рецензенты:

зав. кафедрой «Гидравлика» Санкт-Петербургского государственного политехнического университета, д-р техн. наук, проф. *А.Д. Гиргидов*;
зав. кафедрой «Гидравлика» Московского государственного строительного университета, д-р техн. наук, проф. *В.С. Боровков*

Лапшев Н. Н.

Л248 Гидравлика : учебник для студ. высш. учеб. заведений / Н. Н. Лапшев. — 3-е изд., стер. — М. : Издательский центр «Академия», 2010. — 272 с.

ISBN 978-5-7695-6714-8

Изложены основы гидростатики и теоретической гидродинамики; подробно даны понятия о гидравлических сопротивлениях; рассмотрены вопросы равномерного и неравномерного движения жидкости в трубах, каналах, истечения через отверстия и насадки, расчет водосливов и сооружений, а также движение грунтовых вод. Изложены вопросы, связанные с равновесием и движением газов, основы теории подобия и моделирования гидравлических явлений.

Для студентов высших учебных заведений. Может быть полезен инженерам, занимающимся решением задач, связанных с равновесием и движением жидкостей и газов, а также студентам средних профессиональных учебных заведений.

УДК 625.06/.07(075.8)
ББК 30.123я73

*Оригинал-макет данного издания является собственностью
Издательского центра «Академия», и его воспроизведение любым способом
без согласия правообладателя запрещается*

© Лапшев Н. Н., 2007

© Образовательно-издательский центр «Академия», 2007

ISBN 978-5-7695-6714-8

© Оформление. Издательский центр «Академия», 2007

ВВЕДЕНИЕ

Определение гидравлики и ее краткая история. Гидравлика — прикладная наука, изучающая законы равновесия и движения жидкостей и дающая на основе теории и опыта способы применения этих законов к разрешению различных задач инженерной практики. Гидравлика может быть подразделена на две части: гидростатику, в которой изучаются законы равновесия жидкости, и гидродинамику, в которой изучаются законы движения жидкости. Название «гидравлика» происходит от сочетания двух греческих слов *hydor* (хюдор) — вода и *aulos* (аулос) — труба, что означает течение воды по трубам.

Содержание современной гидравлики несравненно шире: она изучает также движение жидкостей не только в трубах, но и в открытых руслах, сооружениях и движение грунтовых вод.

Изучением равновесия и движения жидкостей занимается и другая наука — теоретическая гидромеханика, носящая строго математический характер и дающая общие и точные решения. Гидравлика как прикладная наука разрешает вопросы, необходимые и важные для инженерной практики, и поэтому она рассматривает различные вопросы более упрощенно, проводя оценку главных элементов гидравлических явлений, и часто прибегает к использованию результатов опытов.

Гидравлика, рассматривая законы равновесия и движения жидкостей, опирается на такие науки, как математика, физика, теоретическая механика, сопротивление материалов. В свою очередь, знания, полученные при изучении курса гидравлики, служат базой для гидравлических расчетов при решении вопросов водоснабжения, отопления, вентиляции, водоотведения, инженерной мелиорации, фильтрации, гидротехнических сооружений и др.

В истории развитая человека вода играла огромную роль и использовалась как для питьевого водоснабжения, так и для орошения полей, приведения в движение простейших механизмов и т. п.

Еще за 4000 лет до н. э. в Египте и за 1000 лет до н. э. в Китае и Сирии умели строить плотины и мельницы на реках, оросительные системы на полях, а также корабли для плавания по морям. Древние оросительные системы находят в Средней Азии и Закавказье. В Риме сохранились остатки древнего водопровода, постро-

енного за шесть веков до н. э., свидетельствующие о высокой для того времени технике.

Первым сочинением по гидравлике следует считать трактат греческого ученого Архимеда «О плавающих телах», написанный им за 250 лет до н. э. Им же была разработана конструкция механизма для подъема воды, названная «архимедовым винтом». После этого гидравлика почти 17 столетий не пополнялась новыми законами и открытиями. Новые работы по гидравлике стали появляться в Италии в XIV—XV вв. В конце XV в. итальянский ученый Леонардо да Винчи (1452—1519) занимался изучением истечения жидкостей из отверстий и законов движения воды в реках и каналах. Однако его записи были опубликованы лишь 400 лет спустя, поэтому его труды по гидравлике оказались неиспользованными.

Из дальнейших работ по гидравлике следует отметить работы голландского ученого С. Стевина, опубликовавшего в 1585 г. книгу «Начала гидростатики». В 1612 г. итальянский ученый Г. Галилей опубликовал трактат «О телах, находящихся в воде, и о тех, которые в них движутся», в котором резко критиковал метафизические теории греческого философа Аристотеля об «абсолютно тяжелых» и «абсолютно легких» телах и подчеркивал правильность данного Архимедом закона плавания тел.

Ученик Г. Галилея Э. Торричелли, занимавшийся вопросом движения жидкости, вывел в 1643 г. формулу скорости истечения невязкой (идеальной) жидкости из отверстия. Французский ученый Б. Паскаль в 1650 г. дал свой закон о передаче жидкостью внешнего давления, который явился основой для расчета гидравлических прессов, подъемников и т. п. Английский ученый И. Ньютон в 1686 г. создал свою гипотезу о законе внутреннего трения в жидкостях и впервые ввел понятие о вязкости в жидкостях.

Многие практические законы гидравлики задолго до опубликования этих законов за границей уже были известны русским людям, умевшим весьма искусно строить на реках наплавные мосты, водяные мельницы, плотины и водопроводы.

Большое значение в те времена имело питьевое водоснабжение, особенно во время осады городов и крепостей. Так, во время осады Москвы татарами в 1382 г. Кремль был достаточно обеспечен водой с помощью тайного колодца под Тайницкой башней, соединенного каменным подземным ходом с руслом Москвы-реки.

В начале XVIII в. по инициативе Петра I в России развернулось гидротехническое строительство и началось бурное развитие морского и речного транспорта. Русский мастер М. И. Сердюков построил Вышневолоцкую водную систему каналов и шлюзов, соединившую Балтийское море с Каспийским (через Волхов, Мсту, Цну, Тверцу и Волгу). В 1708 г. было напечатано первое в России пособие по регулированию рек для судоходства.

В XVIII в. в Петербургской Академии наук учеными (М. В. Ломоносовым, Д. Бернулли и Л. Эйлером) были разработаны теоретические основы гидравлики, позволившие выделить ее в самостоятельную науку.

Знаменитый русский ученый М. В. Ломоносов написал и опубликовал в 1760 г. диссертацию «Рассуждение о твердости и жидкости тела», в которой он изложил положенный в основу гидравлики закон сохранения массы и энергии.

Член Петербургской Академии наук Д. Бернулли опубликовал в 1738 г. капитальный труд по вопросу движения жидкостей, положив начало гидродинамике. В этой работе Бернулли обосновал свою знаменитую теорему о запасе энергии движущейся частицы жидкости, которая является основной теоремой современной гидравлики.

Член Петербургской Академии наук Л. Эйлер в 1755 г. на основе открытия Ломоносова вывел основные дифференциальные уравнения равновесия и движения невязкой жидкости, положив начало теоретической гидромеханике, изучающей законы движения жидкостей методом математического анализа.

В 1791 г. была издана написанная Калмыковым оригинальная русская книга «Карманная книжка для вычисления количества воды, протекающей через трубы, отверстия или по жолубам, а также силы, с какою они (воды) ударяют, стремясь с данной скоростью, с приложением правил для вычисления трений, производимых в машинах».

Наряду с теоретическими работами по гидромеханике и гидравлике стал использоваться экспериментальный, т. е. опытный, способ изучения ряда ее законов, давший обоснование и развитие практической гидравлики. В развитии практической гидравлики сыграли важную роль работы французских ученых XVIII—XIX вв. А. Шези, А. Базена, А. Дарси и др.

В 1836 г. инженером путей сообщения П. П. Мельниковым был составлен и напечатан первый в России учебник по гидравлике «Основания практической гидравлики или о движении воды в различных случаях и действие ее ударом и сопротивлением».

В 1880 г. знаменитый русский ученый Д. И. Менделеев в своем сочинении «О сопротивлении жидкостей и о воздухоплавании» указывал на существование в природе двух режимов движения жидкости с различными законами ее сопротивления. Эта же мысль была развита и доказана в 1883 г. русским физиком Н. П. Петровым (1836—1920), впервые установившим, что при смазке силы трения, определяемые вязким сопротивлением при ламинарном движении, пропорциональны первой степени скорости. Н. П. Петрову принадлежат также доказательство гипотезы Ньютона о силе внутреннего трения в жидкостях и разработка гидродинамической теории смазки.

Несколькими годами позже английский ученый О. Рейнольдс провел свои опыты, наглядно подтверждавшие гипотезу Менделеева о существовании ламинарного и турбулентного движения жидкости. Профессор Казанского университета И. С. Громека в 1881 г. опубликовал ряд крупных работ по теории винтового движения жидкостей. Крупнейший вклад в развитие гидравлики и гидромеханики сделал русский ученый Н. Е. Жуковский. В 1898 г. он опубликовал исследование по теории гидравлического удара, получившее мировую известность. Кроме того, Жуковский дал математический метод решения задачи о фильтрации грунтовых вод, создал теорию движения взвешенных наносов в водных потоках. В начале XX в. русская инженерная гидравлика, бесспорно, заняла ведущее место в мировой науке благодаря ряду значительных работ русского ученого Б. А. Бахметева по гидравлике сооружений и открытых русел.

Следует отметить работы зарубежных исследователей: Ф. Форгеймера в области гидравлических сопротивлений и теории фильтрации, Г. Вебера в области гидродинамического подобия, Л. Прандтля в области гидравлических сопротивлений и изучении процесса турбулентности.

В 1910—1915 гг. были опубликованы работы о формировании речных русел и структуре речного потока русских инженеров В. М. Лохтина и Н. С. Лелявского, которые справедливо могут считаться основоположниками речной гидравлики.

В 1914 г. В. И. Чарномский опубликовал предложенный им метод приближенного интегрирования уравнения неравномерного движения жидкости в непрямоугольном русле.

В 1914 г. русский ученый А. Я. Милович опубликовал работу «О нерабочем изгибе потока»; в дальнейшем он написал ряд интересных работ по очертанию спиральной камеры турбин, теории деления потоков и т. д.

Большой вклад в развитие гидравлики внес русский ученый Н. Н. Павловский, предложивший точные формулы для учета сопротивлений при равномерном движении в открытых потоках, давший много оригинальных предложений по построению кривых свободной поверхности при неравномерном движении, а также разработавший на основе работы Н. Е. Жуковского теорию фильтрации грунтовых вод. Н. Н. Павловский издал первый в нашей стране «Гидравлический справочник» и ряд монографий по основам гидравлики.

Русские ученые сделали крупнейший вклад в развитие гидравлики как науки.

В Советском Союзе были построены: Волховская ГЭС, Днепродзержинская ГЭС, Беломорско-Балтийский канал, канал имени Москвы, Ферганский канал, много других ГЭС и гидросооружений, необходимых для энергетики, орошения, водного транспорта и водоснабжения.

После Великой Отечественной войны было построено много промышленных комбинатов, новых городов и рабочих поселков, и обеспечено их промышленное и питьевое водоснабжение. Это дало мощный толчок к развитию экспериментальной и теоретической гидравлики, гидравлики трубопроводов и сооружений как научной базы для правильного решения задач водоснабжения, канализации, отопления, вентиляции и инженерной гидравлики при проектировании и строительстве зданий, сооружений, водозаборов и различных гидросооружений.

Развернулась и выросла обширная сеть научно-исследовательских институтов с гидравлическими и гидротехническими лабораториями, успешно работающих над разрешением многих задач гидравлики и гидротехники.

Среди работ в области расчетов движения жидкости в открытых руслах наибольший интерес представляют работы таких ученых, как И. И. Агроскина, И. И. Леви, В. М. Макковеева, Р. Р. Чугаева. В области гидравлики трубопроводов широко известны работы А. Д. Альтшуля, Г. А. Мурина, Н. Ф. Федорова, Ф. А. Шевелева и др.

В настоящее время курс современной гидравлики опирается на теоретическую гидромеханику и поставленные на научных основах моделирования экспериментальные исследования, что дает результаты, необходимые современному специалисту для практической деятельности.

Основные физические свойства жидкостей. Жидкие тела отличаются от твердых весьма малой силой сцепления между отдельными частицами и их легкоподвижностью, благодаря чему жидкость легко принимает форму сосуда, в который она налита. Это свойство жидких тел называется текучестью. Жидкие тела бывают двух видов: капельные и газообразные жидкости (пары и газы). Обычно капельные жидкости называются несжимаемыми, а упругие — сжимаемыми.

В гидравлике рассматриваются главным образом капельные жидкости, изучением газообразных жидкостей или просто газов занимается аэродинамика. Однако многие свойства и механические законы одинаковы для капельных и газообразных жидкостей.

Наиболее часто применяемой в гидравлике характеристикой жидких тел является плотность жидкости, или масса единицы объема, которую принято обозначать буквой ρ . Среднее значение плотности определяется по формуле

$$\rho = \frac{M}{W}. \quad (B.1)$$

Плотность есть величина именованная; ее размерность — масса, деленная на объем, обычно килограмм на метр кубический ($\text{кг}/\text{м}^3$).

Так, например, для дистиллированной воды при 4°C $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$. В мутных речных потоках плотность воды может достигать 1200 кг/м^3 . Для морской воды $\rho = 1020 \dots 1030 \text{ кг/м}^3$.

Сжимаемость. Капельные жидкости оказывают весьма сильное сопротивление сжимающим усилиям и допускают очень большое давление (до 3000 атм и более). Если на некоторый объем жидкости W_1 , налитой в сосуд, произвести с помощью поршня давление p , то под влиянием этого давления объем жидкости уменьшится и станет равным W_2 . Относительное изменение объема жидкости при изменении давления dp называется коэффициентом объемного сжатия

$$\beta_v = \frac{dW}{dpW} \frac{1}{W}. \quad (\text{B.2})$$

При изменении давления в пределах от 100 до 50000 кПа коэффициент объемного сжатия воды практически постоянен и может быть принят $\beta_v = 5 \cdot 10^{-6} \text{ см}^2/\text{Н} = 5 \cdot 10^{-7} \text{ 1/кПа}$.

При решении большинства гидравлических задач, за исключением явления гидравлического удара, сжимаемостью капельных жидкостей пренебрегают и считают жидкость практически несжимаемой.

Температурное расширение. Жидкие тела, как и все прочие, при изменении температуры изменяют свой объем и плотность. Вода наибольшей плотностью обладает при температуре 4°C . Коэффициент температурного расширения воды β_T зависит от изменения температуры dT и определяется зависимостью

$$\beta_T = \frac{dW}{dTW} \frac{1}{W}. \quad (\text{B.3})$$

При атмосферном давлении и изменении температуры от 0 до 10°C этот коэффициент имеет значения $\beta_T = 0,000014 \text{ К}^{-1}$, а при $10 \dots 20^{\circ}\text{C}$ $\beta_T = 0,00015 \text{ К}^{-1}$. Это очень малая величина, и поэтому при решении практических задач в области водоснабжения, канализации и гидротехнических сооружений изменением объема жидкости с изменением температуры пренебрегают.

По сравнению с капельными жидкостями для газов характерна большая сжимаемость. Состояние газа изменяется при механическом или тепловом воздействии на него, а также при переходе одного вида энергии в другой. Уравнение состояния Менделеева — Клайперона для идеального (совершенного) газа устанавливает зависимость между абсолютным давлением p , плотностью ρ и абсолютной (термодинамической) температурой T в виде

$$p = \rho gRT, \quad (\text{B.4})$$

где R — универсальная газовая постоянная, имеющая свое значение для каждого газа. Для воздуха $R = 287,14 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}$.

При анализе изменений состояния газа различают основные термодинамические процессы: изотермический — при постоянной температуре системы; изобарный — при постоянном давлении в системе; изохорный — при постоянной объеме системы; адиабатный — система не обменивается теплотой с окружающей средой; политропный — система, состояние которой определяет зависимость

$$p/\rho^n = \text{const}, \quad (\text{B.5})$$

где n — показатель политропы, значения которого изменяются от $n = 1$ (изотермический процесс) до $n = 1,41$ (адиабатный процесс).

Вязкость жидкости. При движении реальной жидкости по трубам и в открытых руслах в жидкости между ее отдельными слоями возникают внутренние силы трения, или силы вязкости, величина которых зависит от рода жидкости и распределения скоростей между ее отдельными слоями.

Свойство жидкости оказывать сопротивление перемещению ее частиц и развигать при движении внутренние касательные напряжения называется вязкостью жидкости.

Гипотеза И.Ньютона, высказанная им в 1723 г., о существовании внутреннего трения в жидкости была дана в общей форме. В последующем эта гипотеза была доказана и подтверждена опытами Н. П. Петрова, положившего начало гидродинамической теории смазки подшипников и давшего формулу для выражения силы внутреннего трения в жидкости. Н. П. Петров установил, что сила внутреннего трения $T_{\text{тр}}$ не зависит от давления в жидкости, пропорциональна поверхности соприкосновения трущихся слоев S , относительной скорости трущихся слоев du/du и зависит от рода жидкости, характеризуемого динамической вязкостью μ .

Установленный Н. П. Петровым закон внутреннего трения выражается равенством

$$T_{\text{тр}} = \pm \mu S \frac{du}{dy}, \quad (\text{B.6})$$

где $T_{\text{тр}}$ — сила внутреннего трения; μ — динамическая вязкость жидкости; S — площадь трущихся слоев; du/du — градиент скорости, характеризующий относительное изменение скорости между отдельными слоями потока.

Если представить себе поток жидкости состоящим из отдельных бесконечно тонких слоев толщиной dy каждый (рис. В.1) и допустить, что скорость частиц жидкости изменяется от слоя к слою, то величина градиента скорости du/du представляет тангенсом угла наклона касательной к эпюре скоростей в данной точке.



Рис. В.1

Отнесенная к единице площади сила трения (т.е. касательное напряжение) согласно формуле (В.6)

$$\tau = \pm \mu \frac{du}{dy}. \quad (\text{В.7})$$

Из выражения (В.7) нетрудно видеть, что динамическая вязкость численно равна единичной силе трения τ при градиенте скорости равном единице. Знак \pm в формулах (В.6) и (В.7) говорит о том, что два соседних слоя жидкости взаимодействуют друг с другом: один слой, движущийся с большей скоростью, ускоряет другой — знак плюс, а этот другой тормозит первый — знак минус.

Найдем размерность динамической вязкости. Так как размерность касательного напряжения τ есть отношение силы к площади, а размерность градиента скорости $\left[\frac{du}{dy} \right] = \frac{1}{\text{с}}$ (единица на секунду), то размерности динамической вязкости получается

$$[\mu] = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \cdot \text{с} = \text{Па} \cdot \text{с}.$$

Для характеристики вязкости применяют также отношение динамической вязкости к плотности, называемое кинематической вязкостью $\nu = \mu/\rho$. Кинематическая вязкость имеет размерность $[\nu] = \text{м}^2/\text{с}$.

Вязкость жидкостей уменьшается с повышением температуры. Для воды зависимость кинематической вязкости от температуры t в градусах Цельсия выражается формулой

$$\nu = \frac{177,5 \cdot 10^{-8}}{1 + 0,0337t + 0,000221t^2}. \quad (\text{В.8})$$

Величины динамической и кинематической вязкостей для различных жидкостей 20°C приведены в табл. В.1.

Для опытного определения вязкости жидкостей существуют приборы, называемые вискозиметрами.

Понятие идеальной жидкости. В гидравлике применяется иногда понятие идеальной жидкости, фактически не существующей в природе. Такая жидкость характеризуется полным отсутствием сопротивления растягивающим и сдвигающим силам и не изменяет своего объема при изменении давления и температуры.

Понятие идеальной жидкости введено в гидравлику для облегчения вывода некоторых теоретических положений, которые помогают уяснить законы движения реальной жидкости. Полученные для невязкой жидкости закономерности в дальнейшем кор-

Таблица В.1

Наименование жидкости	μ , 10^{-5} , Па·с	ν , 10^{-8} , м ² /с
Вода пресная	101	101
Анилин	447	430
Бензол	65	74
Глицерин безводный	51200	41000
Масло касторовое	97200	100200
Ртуть	155,0	11,4
Сероуглерод	37,0	29,4
Спирт этиловый безводный	119	154
Хлористый натрий (раствор с 26 % NaCl)	184	153
Эфир этиловый	26,0	36,3

ректируются путем введения опытных поправок, учитывающих свойства вязких жидкостей.

Кроме обычных (ньютоновских) жидкостей, для которых характерно уравнение (В.7), существуют еще аномальные (неньютоновские) жидкости. К ним относятся смазочные масла, нефтепродукты, строительные растворы и др. Для таких жидкостей закон внутреннего трения выражается в виде

$$\tau = \tau_0 \pm \mu \frac{du}{dy}, \quad (\text{В.9})$$

где τ_0 — касательные напряжения в покоящейся жидкости, после преодоления которых жидкость приходит в движение.

Силы, действующие на жидкость. В состоянии покоя или движения на жидкость действуют различные силы. По своей природе эти силы можно подразделить на две группы: силы объемные и силы поверхностные. Силы массовые (или объемные) действуют на все частицы данного объема жидкости; к таким силам относятся сила тяжести, сила инерции, центробежные силы и т. п. Поверхностные силы приложены к той или иной поверхности, ограничивающей рассматриваемый объем жидкости или проведенной внутри этого объема; к таким силам относятся нормальные и касательные силы, т.е. силы гидродинамического давления, силы трения, силы упругости.

Массовые силы пропорциональны массе жидкости, а для однородных жидкостей — пропорциональны объему, в связи с чем

их часто называют объемными. Общая закономерность для таких сил выражается следующим соотношением:

$$F_m = \rho a W, \quad (\text{B.10})$$

где ρ — плотность жидкости, кг/м³; a — ускорение, м/с²; W — объем жидкости, м³.

Поверхностные силы пропорциональны площади той поверхности жидкости, на которую они действуют. В общем виде такую закономерность можно выразить формулой

$$F_p = p\omega, \quad (\text{B.11})$$

где p — единичная сила или напряжение, Н/м²; ω — площадь действия силы, м².

Несколько особо стоит сила поверхностного натяжения. На поверхности жидкости или на поверхности раздела между двумя жидкостями наблюдается нечто вроде упругой пленки, т.е. жидкость ведет себя так, словно ее удерживает упругая эластичная оболочка, причем эффект такой оболочки более заметен при малых размерах (например, капля жидкости). По-видимому, сцепление между молекулами поверхности жидкости вызывает поверхностное натяжение на границе жидкости с газом или другой несмешивающейся жидкостью. Поверхностное натяжение измеряется силой, приходящейся на единицу длины (периметра), а общая сила поверхностного натяжения вычисляется по формуле

$$F_n = \sigma l, \quad (\text{B.12})$$

где σ — единичная сила или коэффициент поверхностного натяжения, Н/м; l — длина или периметр действия силы, м.

По отношению к какому-либо выделенному объему все силы, действующие на него, можно подразделить на две группы: силы внешние, действующие на данный объем со стороны окружающей его среды, и силы внутренние, это всегда поверхностные силы взаимодействия частиц жидкости.

ГЛАВА 1

ГИДРОСТАТИКА

1.1. Гидростатическое давление и его свойства

Гидростатика — раздел гидравлики, в котором рассматриваются равновесие жидкости, силовое воздействие покоящейся жидкости на плоские и криволинейные поверхности и равновесие тел в жидкости. В гидростатике изучается равновесие покоящейся жидкости как сплошной среды, т.е. физические свойства остаются постоянными для любого малого объема жидкости.

Рассмотрим некоторый произвольный объем W покоящейся жидкости (рис. 1.1). Проведем через него произвольную поверхность, которая разделит объем на две части с поверхностью раздела S . Если отбросить одну из частей (на рис. 1.1 верхнюю), то ее действие необходимо заменить силой F .

Сила, действующая на рассматриваемую поверхность S , называется суммарной силой гидростатического давления. Разделив силу на площадь, получим среднее гидростатическое давление

$$p_{\text{ср}} = \frac{F}{S}, \quad (1.1)$$

а когда площадь стремится к нулю, имеем гидростатическое давление в точке

$$p = \lim_{S \rightarrow 0} \left(\frac{F}{S} \right). \quad (1.2)$$

Единицей измерения гидростатического давления в системе СИ является Па (паскаль). Эта единица представляет собой давление силой в 1 Н на площадь в 1 м². Эта величина давления очень мала, поэтому применяются дольные единицы: килопаскаль (кПа), мегапаскаль (МПа).

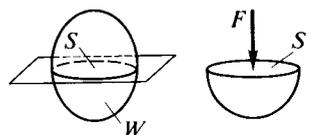


Рис. 1.1

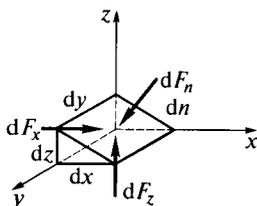


Рис. 1.2

Гидростатическое давление обладает двумя свойствами.

1. Гидростатическое давление направлено по внутренней нормали к площадке, на которую оно действует, и создает только сжимающее напряжение. Действительно, в жидкости практически не возникает растягивающих напряжений, а в покоящейся жидкости нет и касательных напряжений. Давление не

может действовать на площадку под углом, отличающимся от 90° , так как в этом случае его можно было бы разложить на нормальную и касательную составляющие. Однако, как отмечалось ранее, касательные напряжения могут возникать только при движении жидкости, поэтому давление может быть только нормальным к площадке и создавать только сжимающие напряжения.

2. Давление в точке жидкости не зависит от ориентации площадки и будет одинаковым по всем направлениям. Для доказательства этого свойства выделим в покоящейся жидкости элементарный объем в виде трехгранной призмы (рис. 1.2). При этом оси координат направлены по ребрам призмы, ее стороны имеют размеры dx , dy , dz , dn , а наклонная грань расположена под произвольным углом α . При отбрасывании окружающей жидкости на данную призму будут действовать элементарные силы, которые можно подразделить: на силы гидростатического давления на боковые грани dF_x , dF_z , dF_n , силы гидростатического давления на торцевые грани $+dF_y$, $-dF_y$ и массовую силу, проекции

которой на координатные оси составляют $dG_x = \bar{X}\rho \frac{1}{2} dx dy dz$, $dG_y = \bar{Y}\rho \frac{1}{2} dx dy dz$, $dG_z = \bar{Z}\rho \frac{1}{2} dx dy dz$, где \bar{X} , \bar{Y} , \bar{Z} — проекция усечений массовой силы.

Проецируя действующие силы на координатные оси, имеем

$$dF_x - dF_n \sin \alpha + \frac{1}{2} \rho \bar{X} dx dy dz = 0;$$

$$dF_z - dF_n \cos \alpha + \frac{1}{2} \rho \bar{Z} dx dy dz = 0,$$

а заменяя элементарные силы через давление, умноженное на соответственную площадь, получим:

$$p_x dy dz - p_n dy dn \sin \alpha + \frac{1}{2} \rho \bar{X} dx dy dz = 0;$$

$$p_z dx dy - p_n dx dy \cos \alpha + \frac{1}{2} \rho \bar{Z} dx dy dz = 0.$$

Теперь, учитывая, что $dn \sin \alpha = dz$ и $dn \cos \alpha = dy$, а величины объемов при их уменьшении стремятся к нулю, получим

$$p_x = p_z = p_n. \quad (1.3)$$

Таким образом, давление в точке не зависит от ориентации площадки при произвольном угле α .

1.2. Дифференциальные уравнения равновесия жидкости

Выделим в покоящейся жидкости элементарный объем в виде параллелепипеда с ребрами dx , dy , dz (рис. 1.3). Отбросим окружающую жидкость, заменив ее влияние соответствующими силами гидростатического давления (на рис. 1.3 показаны только величины давлений по оси x). Полагаем, что вдоль оси x слева на грань $dydz$ действует гидростатическое давление p , а справа на такую же грань с противоположной стороны действует гидростатическое

давление $p + \frac{\partial p}{\partial x} dx$. Соответственно силы давления составляют на

левую грань $p dydz$, на правую грань $\left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dydz$. По другим

осям координат действуют аналогичные давления. Помимо сил давления на рассматриваемый параллелепипед действует массовая сила (например, сила тяжести, центробежная сила и др.), проекция которой на координатную ось x будет $dG_x = \bar{X} \rho dx dy dz$. Суммируя проекции этих сил на рассматриваемую ось, получим

$$p dy dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dy dz + \bar{X} \rho dx dy dz = 0,$$

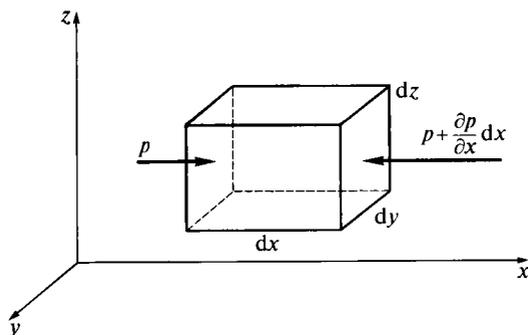


Рис. 1.3

а после раскрытия скобок, сокращений и упрощений, при которых $dx dy dz \neq 0$, имеем

$$\bar{X} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dx = 0.$$

Аналогичным образом можно получить уравнения в проекции на оси y и z , и в итоге имеем систему дифференциальных уравнений равновесия жидкости:

$$\begin{aligned} \bar{X} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dx &= 0; \\ \bar{Y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} dy &= 0; \\ \bar{Z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} dz &= 0. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Система дифференциальных уравнений равновесия жидкости (1.4) была получена в 1755 г. Л. Эйлером и носит его имя.

Для установления закономерности изменения давления при изменении координат следует рассмотреть систему уравнений Эйлера; умножим первое уравнений системы (1.4) на dx , второе на dy , третье на dz и сложим их:

$$\bar{X}dx + \bar{Y}dy + \bar{Z}dz - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) = 0.$$

Выражение в скобках представляет собой полный дифференциал давления dp и, решая это уравнение относительно dp , получим

$$dp = \rho(\bar{X}dx + \bar{Y}dy + \bar{Z}dz). \tag{1.5}$$

Уравнение (1.5) называется *основным дифференциальным уравнением гидростатики*. Выражение в скобках правой части этого уравнения может быть представлено в виде полного дифференциала некоторой потенциальной функции Π , частные производные которой равны:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = \bar{X}; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial y} = \bar{Y}; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial z} = \bar{Z},$$

такая функция называется силовой функцией или функцией потенциала сил, а силы, удовлетворяющие данному условию, называются силами, имеющими потенциал. Отсюда капельная жидкость может находиться в равновесии лишь под действием сил,

имеющих потенциал. Тогда $dp = \rho d\Pi$. В общем виде это уравнение интегрируется так: $p = \rho\Pi + C$.

В частных случаях в зависимости от конкретных значений проекций ускорений массовых сил \bar{X} , \bar{Y} , \bar{Z} определяются соответствующие значения потенциальной функции Π , постоянной интегрирования C и давления p .

Из выражения (1.5) можно получить уравнение для поверхности равного давления (поверхности уровня), под которой понимают поверхность, во всех точках которой давление одинаково. Поверхность, отделяющая жидкость от газовой среды, называется свободной поверхностью жидкости. При $\rho = \text{const}$, $p = \text{const}$, $dp = 0$ получим

$$\bar{X}dx + \bar{Y}dy + \bar{Z}dz = 0. \quad (1.6)$$

Уравнение (1.6) представляет собой дифференциальное уравнение поверхности равного давления в жидкости и устанавливает связь между координатами этой поверхности и действующими на жидкость внешними объемными силами.

1.3. Равновесие жидкости под действием силы тяжести

Рассмотрим покоящуюся жидкость, на которую из массовых сил действует только сила тяжести. Для любой точки такой жидкости справедливо $\bar{X} = 0$, $\bar{Y} = 0$, $\bar{Z} = -g$ (так как ось Z направлена вверх, а ускорение свободного падения — вниз).

В этом случае дифференциальное уравнение гидростатики (1.5) принимает вид

$$dp = -\rho g dz, \quad (1.7)$$

а уравнение поверхности равного давления (1.6) имеет вид

$$-\rho g dz = 0,$$

откуда $z = \text{const}$, т. е. при равновесии жидкости под действием силы тяжести все точки поверхности равного давления имеют одинаковые вертикальные отметки, а значит, эта поверхность будет горизонтальной плоскостью. Частным случаем поверхности равного давления является свободная поверхность жидкости. Свободная поверхность горизонтальна лишь для ограниченного объема жидкости.

Интегрируя выражение (1.7), получим

$$p = C - \rho g z \quad \text{или} \quad z + \frac{p}{\rho g} = \text{const}. \quad (1.8)$$

Уравнение (1.8) называется *основным уравнением гидростатики*. Величина $z + p/\rho g$ называется гидростатическим напором, она складывается из геодезического напора z и напора $p/\rho g$, смысл которого будет дан далее.

Обозначая через p_0 давление на поверхности жидкости и помещая здесь же начало координат, получим, что при $z=0$, для этой поверхности $\text{const} = p_0/\rho g$, откуда

$$p = p_0 - \rho g z,$$

теперь, обозначая величину $-z = h$, где h — глубина погружения точки, имеем

$$p = p_0 + \rho g h. \quad (1.9)$$

Формула (1.9) позволяет определить давление в любой точке жидкости в зависимости от глубины погружения и давления на поверхности. Это уравнение показывает также, что величина давления на поверхности жидкости p_0 передается в любую точку внутри жидкости без изменения. Если изменить давление на поверхности, то ровно на такую же величину изменится давление во всех точках жидкости. Таким образом, уравнение (1.9) выражает закон Паскаля: внешнее давление на жидкость в замкнутом сосуде передается внутри жидкости во все точки без изменений.

Рассмотрим сосуд с жидкостью, к которому на одинаковом расстоянии от плоскости сравнения присоединены две прозрачные трубки (рис. 1.4). При этом у одной трубки верх закрыт, и воздух откачан, следовательно, давление здесь равно нулю, другая трубка открыта сверху, на поверхности жидкости будет атмосферное давление.

Определим давления, измеряемые рассматриваемыми трубками в точках их присоединения. Под действием абсолютного давления в сосуде жидкость в трубках поднимается на разные высоты, $h_{\text{пр}}$ и $h_{\text{п}}$. Тогда, используя формулу (1.9) для жидкости в закрытой трубке, можно записать

$$h_{\text{пр}} = \frac{p}{\rho g}. \quad (1.10)$$

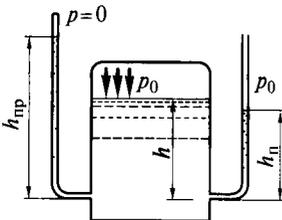


Рис. 1.4

Полученная высота $h_{\text{пр}}$ называется высотой давления, или приведенной высотой, она измеряет абсолютное давление в точке присоединения, выражая его высотой столба жидкости. Отсюда пошла единица измерения давления в виде: м вод. ст. (метры водяного столба), мм рт. ст. (миллиметры ртутного столба) и др.

Для жидкости в открытой трубке имеем

$$p = p_a + \rho g h_{\text{п}}, \quad (1.11)$$

или, решая относительно $h_{\text{п}}$, получим

$$h_{\text{п}} = \frac{p - p_a}{\rho g}. \quad (1.12)$$

Полученная величина называется пьезометрической высотой, она измеряет избыточное (превышающее атмосферное) давление, выражая его также высотой столба жидкости.

Рассмотренные жидкостные приборы основаны на гидростатическом принципе действия, заключающемся в том, что измеряемое давление уравнивается давлением столба жидкости определенной плотности, т.е. давление у основания столба жидкости заданной высоты равно измеряемому давлению. Прибор, измеряющий абсолютное давление в точке присоединения, называется жидкостным манометром, а открытая сверху трубка называется пьезометром. Этот прибор измеряет избыточное давление. В большинстве случаев представляет интерес измерение избыточного или манометрического давления, поскольку на стенки сосудов и на другие инженерные конструкции с одной стороны оказывает давление жидкость, а с другой — атмосферное давление. При этом результирующее давление в любой точке стенки будет состоять из абсолютного давления за вычетом атмосферного.

Если в сосуде абсолютное давление на поверхности жидкости будет равно атмосферному, т.е. избыточное давление будет равно нулю, то уровень воды в пьезометре установится на той же высоте, что и в сосуде, и пьезометрическая высота в точке присоединения будет равна глубине погружения данной точки.

Если давление в сосуде меньше атмосферного, то говорят, что в нем вакуум. Величина вакуума может изменяться в пределах от 0 до p_a . Если к сосуду с вакуумом присоединить вертикальную прозрачную трубку и опустить ее в сосуд с жидкостью (рис. 1.5), то жидкость в трубке поднимется на величину $h_{\text{в}}$, называемую вакуумметрической высотой.

Величину $h_{\text{в}}$ можно определить, используя уравнение (1.9) для точки, где давление равно атмосферному $p_a = p_0 + \rho g h_{\text{в}}$, откуда

$$h_{\text{в}} = \frac{p_a - p_0}{\rho g}. \quad (1.13)$$

Прибор, показанный на рис. 1.5, называется жидкостным вакуумметром. Теоретически величина вакуума не превышает 10 м вод. ст., однако практически при перекачке воды величина вакуума не достигает 7 м вод. ст.

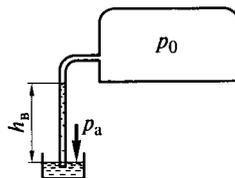


Рис. 1.5

1.4. Относительный покой

Относительным покоем называют случай, когда жидкость движется, но относительно движущейся с ней системы координат она может рассматриваться неподвижной. Рассмотрим поверхности равного давления и законы изменения давления в частных случаях относительного покоя.

Случай 1. Сосуд с жидкостью движется в горизонтальном направлении равноускоренно с ускорением a (рис. 1.6). Жидкость в этом случае находится под действием силы тяжести и силы инерции, величина которой характеризуется ускорением a и направлена в сторону, противоположную движению. При этом $\bar{X} = -a$; $\bar{Y} = 0$; $\bar{Z} = -g$, подставляя эти значения в уравнение (1.5), имеем

$$dp = \rho(-adx - gdz) \text{ или } p = \rho(-ax - gz) + C.$$

Зная давление p_0 в начале координат, определим постоянную $C = p_0$ и получим закон изменения давления в рассматриваемом случае

$$p = p_0 + \rho(-ax - gz). \quad (1.14)$$

Поверхность равного давления нетрудно получить из уравнения (1.14), полагая $p = \text{const}$ $ax + gz = C_1$. Это есть уравнение плоскости, наклоненной к горизонту под углом α , который можно определить из соотношения $\text{tg} \alpha = -a/g$.

Случай 2. Сосуд с жидкостью равномерно вращается вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω . В этом случае на частицы жидкости кроме силы тяжести будут действовать центробежные силы (рис. 1.7), а ускорения в проекциях на коор-

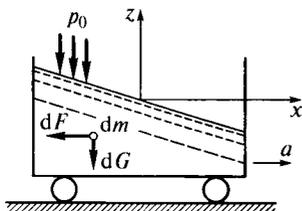


Рис. 1.6

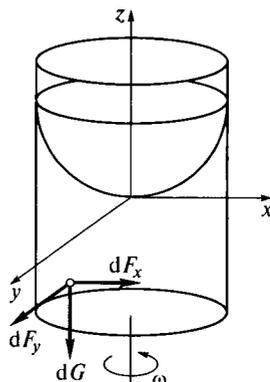


Рис. 1.7

динатные оси будут равны $\bar{X} = \omega^2 x$; $\bar{Y} = \omega^2 y$; $\bar{Z} = -g$. Подставляя эти значения в уравнение (1.5), получим

$$dp = \rho(\omega^2 x dx + \omega^2 y dy - g dz),$$

откуда после интегрирования имеем

$$p = \frac{\rho\omega^2}{2}(x^2 + y^2) - \rho g z + C.$$

Полагая, что начало координат расположено на поверхности жидкости ($x=0$, $y=0$, $z=0$) и давление здесь $p = p_0$, получим $C = p_0$, заменяя $(x^2 + y^2) = r^2$, имеем выражение

$$p = p_0 + \frac{\rho\omega^2 r^2}{2} - \rho g z, \quad (1.15)$$

представляющее закон изменения давления во вращающемся сосуде. Получить уравнение поверхностей равного давления из соотношения (1.15) можно, положив значение $p = p_1$, тогда

$$\frac{\rho\omega^2 r^2}{2} - \rho g z = p_1 - p_0.$$

Таким образом, поверхности равного давления представляют собой параболоиды вращения.

1.5. Сила давления на плоские поверхности

При расчете строительных конструкций и сооружений необходимо знать не только давление жидкости в отдельных точках, но и общую силу давления на сооружение или его часть. Обычно при технических расчетах учитывают силу давления только от избыточного гидростатического давления на рассматриваемую площадь. Возьмем плоскую поверхность произвольной формы, представляющую собой часть наклонной под углом α к горизонту плоскости (рис. 1.8). На рисунке наклонная плоскость показана также повернутой на 90° и совмещенной с плоскостью чертежа.

Жидкость давит на поверхность площадью S во всех точках, но давление это неравномерное: в верхних точках давление меньше, а в нижних — больше. Поэтому для определения общей силы давления на плоскую поверхность вначале необходимо определить силу давления dF на бесконечно малую площадку с площадью dS , расположенную на произвольной глубине погружения h ,

$$dF = p dS = (p_0 + \rho g h) dS, \quad (1.16)$$

где p_0 — избыточное давление на поверхности жидкости.

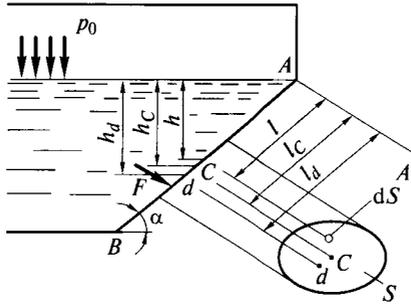


Рис. 1.8

Чтобы получить силу гидростатического давления на всю площадь, необходимо это выражение проинтегрировать по всей площади

$$F = \int_S (p_0 + \rho gh) dS.$$

Заменим $h = l \sin \alpha$ и представим силу в виде двух интегралов:

$$F = p_0 \int_S dS + \rho g \sin \alpha \int_S l dS.$$

Величина $\int_S l dS$ представляет собой статический момент площади S , который, как известно из теоретической механики, может быть заменен произведением расстояния до центра тяжести фигуры на площадь $l_c S$, где l_c — расстояние от поверхности жидкости до центра тяжести рассматриваемой площади.

Теперь можно получить

$$F = (p_0 + \rho gh_c) S. \quad (1.17)$$

Выражение в скобках представляет собой гидростатическое давление в центре тяжести рассматриваемой площади, следовательно, сила давления на плоскую поверхность равна давлению в центре тяжести этой поверхности, умноженному на ее площадь.

Для инженерных расчетов важно знать не только величину силы давления, но и точку ее приложения. Данная точка называется центром давления. Направление силы давления на плоскую поверхность согласно первому свойству гидростатического давления нормально к плоскости.

Величину l_d определяют на основе известной из теоретической механики теоремы о равенстве момента равнодействующей относительно некоторой оси сумме моментов составляющих относительно той же оси, т.е. $Fl_d = \int_S l dF$.

Раскрывая значения F по (1.17) и dF по (1.16) и решая относительно l_d , получим

$$l_d = \frac{\int l(p_0 + \rho gh) dS}{(p_0 + \rho gh_c) S} = \frac{p_0 \int l dS + \rho g \sin \alpha \int l^2 dS}{(p_0 + \rho gh_c) S}.$$

Значения интегралов $\int l dF$ и $\int l^2 dF$ находятся: первый, как и ранее, статический момент рассматриваемой площади, определяемый $l_C S$, а второй представляет момент инерции той же площади относительно оси $A-A' - I_0$. Заменяв I_0 по известной зависимости через $I_0 = I_C + l_C^2 S$, получим

$$l_d = \frac{p_0 l_C S + \rho g \sin \alpha (I_C + l_C^2 S)}{(p_0 + \rho gh_c) S} = \frac{l_C (p_0 + \rho gh_c) S}{(p_0 + \rho gh_c) S} + \frac{\rho g \sin \alpha I_C}{(p_0 + \rho g l_C \sin \alpha) S},$$

окончательно имеем

$$l_d = l_C + \frac{\rho g \sin \alpha I_C}{(p_0 + \rho g l_C \sin \alpha) S}. \quad (1.18)$$

Формула (1.18) дает нам расстояние вдоль по стенке от поверхности воды до центра давления. Анализ данной формулы показывает, что центр давления расположен ниже центра тяжести и только для горизонтальной поверхности $\sin \alpha = 0$ и $l_d = l_C$.

Для открытых сосудов (резервуаров) $p_0 = 0$, и формула (1.18) имеет вид

$$l_d = l_C + \frac{I_C}{l_C S},$$

а для вертикальной стенки

$$h_d = h_C + \frac{I_C}{h_C S}.$$

1.6. Эпюра давления. Графоаналитический способ определения силы давления и точки ее приложения

Графическое изображение распределения гидростатического давления по стенке или по длине какого-либо контура называется

эпюрой гидростатического давления. При построении эпюры давления в каждой точке стенки вычисляется давление по формуле (1.9) и откладывается по нормали к стенке.

Пусть имеется стенка, наклоненная под углом α к горизонту в открытом сосуде, наполненном водой до уровня h . Поскольку уравнение (1.9) представляет собой уравнение прямой линии, то для его построения достаточно определить давление в двух точках. Для точки, расположенной на поверхности воды и у дна, рассматривая избыточное давление, имеем:

$$p_1 = 0, \quad p_2 = \rho gh.$$

Отложив эти значения давлений в точках нормально к стенке, в сторону жидкости, получим эпюру давления в форме треугольника (рис. 1.9, а). Если на поверхности воды имеет место избыточное давление p_0 , то на эту величину возрастет давление в каждой точке жидкости (рис. 1.9, б). Эпюра давления на часть стенки высотой a будет выглядеть, как показано на рис. 1.9, в. Построение эпюры давления на криволинейную поверхность требует вычисления давления во многих точках этой поверхности, а значения давления откладываются по нормали к соответствующим точкам, в итоге имеем эпюру, показанную на рис. 1.9, г.

При наличии жидкости с двух сторон стенки находятся давления с каждой из сторон, затем они складываются, это позволяет

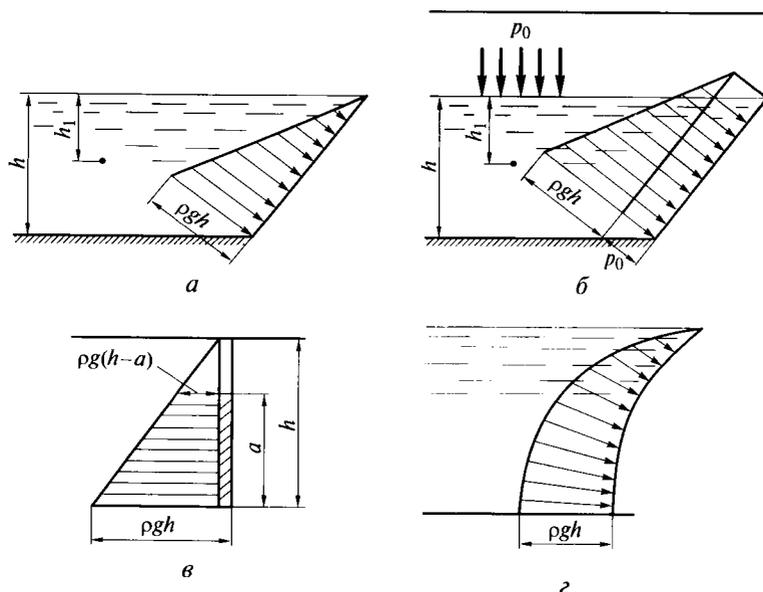


Рис. 1.9

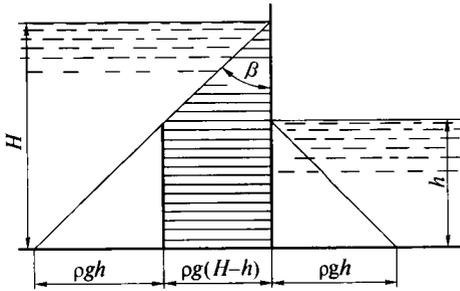


Рис. 1.10

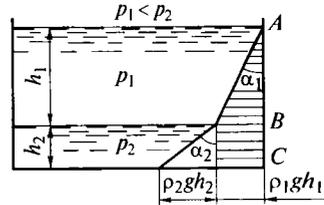


Рис. 1.11

получить эпюру трапецеидальной формы (рис. 1.10). Довольно часто на стенку действуют две жидкости с разными плотностями, в этом случае эпюра давления состоит из нескольких частей: каждая часть аналогичная эпюре давления на стенку и представляет собой треугольник, следующая часть имеет трапецеидальную форму, при этом угол наклона прямой к стенке зависит от плотности жидкости (рис. 1.11), и т.д.

Эпюра давления используется для графоаналитического способа нахождения силы давления и точки ее приложения. Поясним это на примере, для чего найдем силу давления на стенку, расположенную под углом α к горизонту с глубиной воды h . Используя формулу (1.17), найдем: $p_0 = 0$, $h_C = h/2$, $S = bh/\sin\alpha$, тогда сила давления

$$F = \rho g \frac{bh^2}{2\sin\alpha}, \quad (1.19)$$

а точка ее приложения при $l_C = bh^3/(12\sin^3\alpha)$

$$l_d = l_C + \frac{l_C}{l_C S} = \frac{h}{2\sin\alpha} + \frac{bh^3 2\sin^2\alpha}{12bh^2 \sin^3\alpha} = \frac{2}{3} \frac{h}{\sin\alpha}. \quad (1.20)$$

Площадь эпюры определяется как площадь прямоугольного треугольника с размерами катетов $h/\sin\alpha$ и ρgh , в итоге получаем

$$S_{\text{эн}} = \frac{\rho gh^2}{2\sin\alpha}. \quad (1.21)$$

Сопоставляя формулы для эпюры давления (1.21) и для силы давления (1.19), видим, что сила давления может быть определена как произведение эпюры давления на ширину стенки:

$$F = bS_{\text{эн}}. \quad (1.22)$$

Для треугольника центр тяжести расположен на расстоянии $1/3$ высоты катета или $2/3$ от вершины, следовательно, вектор силы давления проходит через центр тяжести эпюры давления.

1.7. Давление жидкости на криволинейные поверхности

При определении силы давления жидкости на криволинейные поверхности заранее не известны точка приложения этой силы и ее направление, так как в каждой точке направление давления нормально к поверхности в этой точке. В этом отличие настоящей задачи от задачи по определению силы давления на плоскую поверхность, когда направление равнодействующей заранее известно. Поэтому при определении силы давления на криволинейную поверхность предварительно определяют три ее составляющие, параллельные координатным осям F_x , F_y , F_z . Если мы имеем цилиндрическую поверхность, то у нее будет только две составляющие. Направив их горизонтально F_r и вертикально F_b , имеем

$$F = \sqrt{F_r^2 + F_b^2},$$

а направление этой силы определяется углом, тангенс которого запишем

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_b}{F_r}.$$

Рассмотрим цилиндрическую поверхность, удерживающую жидкость (рис. 1.12). Выделим в ней горизонтальную полоску площадью dS , расположенную на глубине h от поверхности воды. Сила давления жидкости на эту полоску dF будет направлена нормально к ней и может быть разложена на две составляющие: горизонтальную dF_r и вертикальную dF_b . Обозначая угол наклона силы dF к горизонту через α , найдем составляющие $dF_r = dF \cos \alpha$ и $dF_b = dF \sin \alpha$. Теперь, зная глубину расположения полоски, найдем элементарную силу давления $dF = \rho g h dS$, а ее составляющие будут $dF_r = \rho g h dS \cos \alpha$ и $dF_b = \rho g h dS \sin \alpha$.

Для определения горизонтальной составляющей силы dF_r необходимо заменить $dS \cos \alpha$ на dS_b , где dS_b — проекция полоски dS на вертикальную плоскость. Теперь имеем

$$F_r = \rho g \int_S h dS_b,$$

но $\int_S h dS_b$ — это статический момент всей вертикальной проекции стенки, поэтому

$$F_r = \rho g \int_S h dS_b = \rho g h_C S_b. \quad (1.23)$$

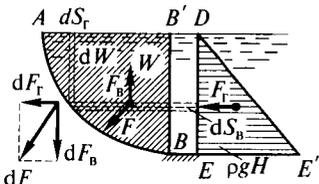


Рис. 1.12

Таким образом, мы получили, что горизонтальная составляющая силы давления на криволинейную поверхность равна силе давления на плоскую поверхность, являющуюся вертикальной проекцией рассматриваемой криволинейной поверхности. Величина горизонтальной составляющей может быть также выражена площадью эпюры гидростатического давления на вертикальную проекцию стенки.

Для вертикальной составляющей величина $dS \sin \alpha$ представляет собой проекцию элементарной площадки на горизонтальную плоскость dS_r , а произведение hdS_r является элементарным объемом dW , заштрихованным на рис. 1.12. Отсюда вертикальная составляющая силы давления

$$F_b = \rho g \int_S hdS_r = \rho g \int_W dW = \rho g W, \quad (1.24)$$

где W — объем, полученный в результате суммирования элементарных объемов dW по всей криволинейной поверхности.

Объем W называют телом давления, и определяется он, как объем ограниченный криволинейной поверхностью, ее проекцией на поверхность жидкости (продолжение поверхности жидкости) и вертикальными плоскостями, соединяющими границы криволинейной поверхности с соответствующими точками ее проекции. Следовательно, вертикальная составляющая силы гидростатического давления на криволинейную поверхность численно равна силе тяжести жидкости в объеме тела давления.

Для практических расчетов важно иметь навыки в построении объема тела давления. На рис. 1.13 приводятся некоторые характерные случаи. Так, тела давления на рис. 1.13, *a* и *б* одинаковы по величине, но на первом из них вертикальная составляющая направлена вверх, и сам объем тела давления не заполнен жидкостью, он отмечен знаком минус. Это означает, что хотя сила равна силе тяжести жидкости в выделенном объеме, но направлена в противоположную сторону. На втором рисунке объем тела давления заполнен жидкостью, отмечен он знаком плюс, т.е. и здесь сила равна силе тяжести жидкости в выделенном объеме и направлена в ту же сторону.

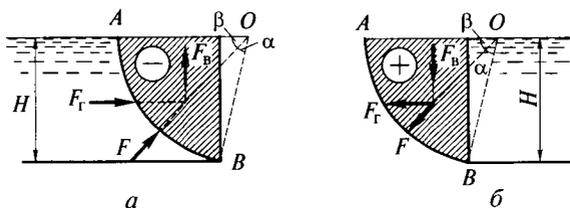


Рис. 1.13

Полная сила давления определяется соотношением

$$F = \sqrt{F_r^2 + F_b^2}, \quad (1.25)$$

а угол наклона равнодействующей к горизонту

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{F_b}{F_r}. \quad (1.26)$$

Если образующая цилиндрической поверхности описывает окружность, то равнодействующая F пройдет через центр окружности.

1.8. Плавание тел. Закон Архимеда.

Остойчивость погруженных и плавающих тел

Рассмотрим силы давления жидкости на погруженное в нее тело произвольной формы (рис. 1.14). Горизонтальные и вертикальные силы, действующие на тело, в общем случае определяются как силы, действующие на криволинейные поверхности.

Горизонтальные составляющие силы F_{r1} и F_{r2} определим как силы, действующие на вертикальные проекции криволинейных поверхностей ABC и ADC . Так как площади этих проекций равны между собой, а их центры тяжести погружены на одинаковую глубину, то $F_{r1} = F_{r2}$. Если бы это равенство не соблюдалось, то тело вышло бы из состояния покоя и начало бы двигаться.

Вертикальные силы давления на криволинейные поверхности BAD и BCD определяются по величине как силы тяжести тел давления, опирающихся на эти поверхности. Эти силы давят на тело сверху и снизу и будут иметь противоположные знаки. Результирующая сила

$$F = \rho g(W_{BCDEF} - W_{BADEF}) = \rho g W_{ABCD} \quad (1.27)$$

дает нам так называемую Архимедову силу.

Таким образом, на погруженное в жидкость тело действует вертикально направленная вверх сила, равная силе тяжести жидкости, вытесненной погруженным объемом тела. Это положение называется законом Архимеда.

На законе Архимеда основана теория плавания тел. Всякое тело, погруженное в жидкость, находится под действием двух сил: силы тяжести и равнодействующей сил давления. Последняя сила называется еще подъемной силой, поскольку она направлена всегда вверх. Теперь можно рассмотреть три следующие случая:

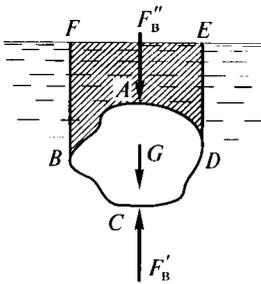


Рис. 1.14

если сила тяжести тела больше архимедовой силы $G > F$, то тело погружается (тонет), так как указанные силы дают равнодействующую, направленную вниз;

когда силы равны $G = F$, тело находится в жидкости в состоянии безразличного равновесия, т.е. будет находиться в покое на той глубине, на которую оно погружено;

если сила тяжести тела меньше архимедовой силы $G < F$, то эти силы дают равнодействующую, направленную вверх, и тело всплывает. Когда часть тела начнет подниматься над поверхностью воды, объем вытесненной телом воды будет уменьшаться от W до W_1 и, следовательно, будет уменьшаться сила F . Всплытие прекратится, когда сила F_1 станет равной весу тела G .

Погруженное в жидкость тело, судно или понтон при качке могут наклоняться на один или другой бок. Способность его восстанавливать начальное положение называется остойчивостью.

Рассмотрим остойчивость погруженных тел. На такое тело действуют две силы: сила тяжести и архимедова, которые приложены соответственно в центре тяжести и центре давления. Возможны следующие варианты (рис. 1.15):

центр тяжести расположен выше центра давления (рис. 1.15, а), в этом случае при наклоне тела (рис. 1.15, б) возникает пара сил, которая не восстанавливает равновесие, а значит, тело не остойчиво;

центр тяжести совпадает с центром давления (рис. 1.15, в), это тело также не остойчиво, поскольку нет сил, возвращающих тело в исходное положение при его наклоне;

центр тяжести расположен ниже центра давления (рис. 1.15, г), при наклоне такого тела возникает пара сил (рис. 1.15, д), восстанавливающих равновесие и, следовательно, тело остойчиво.

Рассмотрим теперь остойчивость плавающих тел, но прежде всего дадим некоторые определения из теории плавания тел. Вес жидкости в объеме погруженной в нее части тела называется водоизмещением, а центр тяжести этого объема d — центром водоизмещения. Понятие водоизмещения особо важно для судов, понтонов и других плавающих средств. Линия пересечения свободной поверхности жидкости с боковой поверхностью судна называется

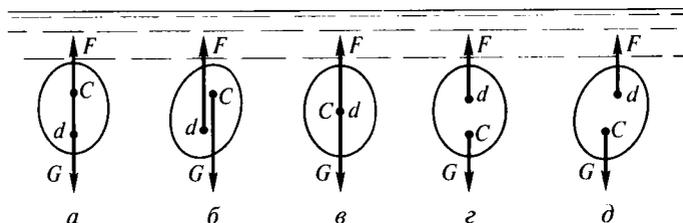


Рис. 1.15

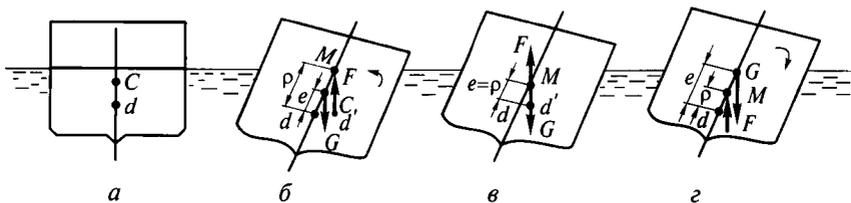


Рис. 1.16

ватерлинией, а плоскость внутри судна, ограниченная ватерлинией, называется плоскостью плавания. Вертикальная ось $O-O$, проходящая через центр водоизмещения, называется вертикальной осью плавания, а расстояние e между центрами тяжести C и водоизмещения d — эксцентриситетом.

Рассмотрим условия остойчивости плавающего судна (рис. 1.16). При его крене центр его тяжести, как правило, не изменяет своего положения, а центр водоизмещения d перемещается в положение d' . Это происходит вследствие того, что изменяется вытесненный судном объем жидкости, поскольку при наклоне часть объема судна выйдет из воды, а равная часть — войдет.

Линия действия выталкивающей силы F , проходящей через точку d' , пересекает ось плавания в точке M , называемой метацентром. Расстояние от метацентра до центра водоизмещения d называется метацентрическим радиусом ρ .

Выталкивающая сила F и сила тяжести G образуют пару сил, действующих на судно. Именно взаимное положение центра тяжести и метацентра определяют остойчивость судна. При положении метацентра ниже центра тяжести эта пара сил стремится опрокинуть судно. При расположении метацентра выше центра тяжести судно стремится восстановить первоначальное положение. В первом случае положение судна является нестойчивым, а во втором — остойчивым. Нетрудно убедиться, что при остойчивом положении метацентрический радиус ρ больше эксцентриситета e , а при нестойчивом $e > \rho$. Расстояние между этими величинами называется метацентрической высотой

$$h_m = \rho - e. \quad (1.28)$$

Из теории остойчивости известно, что метацентрический радиус может быть с достаточной степенью точности определен по формуле

$$\rho = \frac{I}{W}, \quad (1.29)$$

где I — момент инерции плоскости плавания относительно продольной оси плавания.

1.9. Равновесие газов в поле силы тяжести

Используя дифференциальное уравнение равновесия (1.5) жидкостей $dp = \rho(\bar{X}dx + \bar{Y}dy + \bar{Z}dz)$ и полагая в нем для случая равновесия в поле сил тяжести $\bar{X} = 0$; $\bar{Y} = 0$; $\bar{Z} = -g$, приводим его к виду

$$dp = -\rho g dz \quad \text{или} \quad \frac{dp}{\rho g} + dz = 0, \quad (1.30)$$

идентичному полученному ранее для несжимаемых жидкостей; однако для несжимаемых жидкостей $\rho = \text{const}$, а в случае газа величина ρ переменная.

Изменение состояния газа может происходить различным образом:

по изотермическому закону $p/\rho = \text{const}$;

политропическому закону $p/\rho^n = \text{const}$.

Возможны также случаи, когда в рамках решения той или иной конкретной задачи плотность ρ изменяется практически весьма незначительно и, следовательно, можно полагать ее значение постоянным $\rho = \text{const}$.

В связи с этим рассмотрим три случая:

случай так называемой однородной атмосферы, когда $\rho = \text{const}$;

случай так называемой изотермической атмосферы, когда $p/\rho = gRT = \text{const}$;

случай политропической атмосферы, когда $\frac{p}{\rho^n} = \frac{p_0}{\rho_0^n} = \text{const}$

(адиабатный процесс является частным случаем процесса политропического).

В случае $\rho = \text{const}$ интегрирование (1.30) приводит к результату

$$\frac{p}{\rho g} + z = \text{const} = C,$$

идентичному со случаем несжимаемой жидкости.

Аналогично тому, как в случае несжимаемой жидкости, распределение давления по высоте дается формулой

$$p = p_0 + \rho g (z_0 - z), \quad (1.31)$$

где p_0 — известное давление в точке с координатой z_0 .

Для изотермического состояния газа

$$\frac{p}{\rho} = gRT \quad \text{и} \quad \rho = \frac{p}{gRT},$$

тогда интегрирование (1.30) приводит к результату

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho g} + \int_{z_0}^z dz = RT \int_{p_0}^p \frac{dp}{p} + (z - z_0) = RT \ln \frac{p_0}{p} + z - z_0 = 0$$

или

$$z - z_0 = RT \ln \frac{p_0}{p}. \quad (1.32)$$

Это уравнение определяет распределение давления по высоте при равновесии газа в изотермических условиях. Определим исходя из него высоту изотермической атмосферы. В этом случае p_0 и z_0 — давление и отметка на уровне моря. В наивысшей точке $p=0$. Подставляя это значение в (1.32), найдем

$$H = z - z_0 = RT \ln \frac{p_0}{p}.$$

Поскольку при $p \rightarrow 0$ $\ln \frac{p_0}{p} \rightarrow \infty$, следовательно, высота H изотермической атмосферы стремится к бесконечности.

Для политропического состояния газа $\frac{p}{\rho^n} = \frac{p_0}{\rho_0^n} = \text{const}$,

откуда

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{1}{n}}.$$

В таком случае, подставляя значение плотности в (1.30), получим

$$\begin{aligned} \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho g} + \int_{z_0}^z dz &= \frac{1}{g} \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{1}{n}}} + \int_{z_0}^z dz = \frac{p_0^{\frac{1}{n}}}{\rho_0 g} \int_{p_0}^p p^{-\frac{1}{n}} dp + \int_{z_0}^z dz = \\ &= \frac{n}{n-1} \frac{p_0^{\frac{1}{n}}}{\rho_0 g} \left(p^{1-\frac{1}{n}} - p_0^{1-\frac{1}{n}} \right) + (z - z_0) = 0. \end{aligned}$$

Упростим полученное выражение, раскрыв скобки, заменяя

$$\frac{p_0^{\frac{1}{n}}}{\rho_0 g} p_0^{\frac{n-1}{n}} = \frac{p_0}{\rho g} \quad \text{и} \quad \frac{p_0^{\frac{1}{n}}}{\rho_0 g} p^{\frac{n-1}{n}} = \frac{p^{\frac{1}{n}}}{\rho g} p^{\frac{n-1}{n}} = \frac{p}{\rho g}$$

и производя соответствующие подстановки, имеем

$$\frac{n}{n-1} \frac{p}{\rho g} + z = \frac{n}{n-1} \frac{p_0}{\rho_0 g} + z_0 \quad (1.33)$$

или, используя выражение (В.4), получим

$$\frac{n}{n-1} RT + z = \frac{n}{n-1} RT_0 + z_0. \quad (1.34)$$

Первое уравнение (1.33) определяет закон распределения давления, а второе (1.34) — закон распределения температуры.

Найдем высоту политропической атмосферы. Давление на уровне моря можно принять равным $p_0 = 98\,000$ Па, пусть показатель политропы $n = 1,4$ и плотность воздуха $\rho = 1,2$ кг/м³.

Из уравнения (1.33) можно получить

$$z - z_0 = H = \frac{n}{n-1} \frac{p_0}{\rho_0 g} = \frac{1,4}{0,4} \frac{98\,000}{1,2 \cdot 9,81} = 29\,100 \text{ м.}$$

Таким образом, при политропическом состоянии высота атмосферы ограничена; в рассмотренных условиях она равна примерно 29 км. Обозначая в уравнении (1.34) разность $z - z_0$ через h и разрешая это уравнение относительно T , получим

$$T = T_0 - \frac{n-1}{nR} h \text{ или } t = t_0 - \frac{n-1}{nR} h.$$

При $t_0 = 0$, $n = 1,4$ и $R = 29,27$ имеем $t \approx -0,01h$.

На высоте, например, 5 км температура воздуха оказывается равной $t \approx -0,01 \cdot 5\,000 = -50$ °С.

Таким образом, анализ показывает, что температура воздуха убывает по направлению снизу вверх по линейному закону, уменьшаясь приблизительно на 1 °С через каждые 100 м по высоте.

ОСНОВЫ КИНЕМАТИКИ И ДИНАМИКИ ЖИДКОСТИ

2.1. Характеристика движения жидкости

В гидродинамике жидкость считается сплошной (непрерывной) средой, сплошь заполняющей пространство без образования пустот. Такая среда называется континуумом. Все свойства жидкости (плотность, вязкость и др.), если не являются постоянными, то меняются в пространстве непрерывно, т. е. при бесконечно малом перемещении в пространстве получаются и бесконечно малые изменения свойств жидкости. Изучение законов движения жидкости в гидравлике начинается на основе гидромеханики невязкой (идеальной) жидкости, т. е. без учета сил трения, а затем в полученные зависимости вводятся уточнения, основанные на экспериментальных данных.

Кинематика жидкости изучает связи между геометрическими характеристиками движения и временем; это выражается в таких элементах как скорость, ускорение жидкой частицы и др. Динамика жидкости — гидродинамика — изучает законы движения жидкости как результат действия сил.

Движение жидкости характеризуется следующими гидромеханическими элементами: скорость движения частиц и гидродинамическое давление. Так как все реальные жидкости имеют вязкость, то в них не может быть взаимного смещения (разрыва) прилегающих друг к другу частиц, и поэтому скорости частиц изменяются и во времени, и в пространстве непрерывно, т. е. являются в общем случае непрерывными функциями координат пространства и времени.

Таким образом, чтобы полностью охарактеризовать механическую картину движения жидкости, надо знать гидромеханические элементы во всех точках пространства, занятого движущейся жидкостью, а также ее механические свойства. Существует два метода описания движения жидкости: метод Лагранжа и метод Эйлера.

Метод Лагранжа. В этом методе как бы прослеживается движение отдельных частиц. Пусть в начальный момент времени t_0 положение частицы жидкости определяется ее начальными координатами a , b и c . С течением времени координаты движущейся ча-

стицы будут меняться и к некоторому моменту времени t они станут x , y и z .

Для каждого момента времени координаты жидкой частицы будут заданы значениями начальных координат a , b и c и моментом времени t . Кроме того, плотность жидкости ρ должна быть также задана как функция координат a , b , c и момента времени t , т. е. кинематическая картина движения будет описана, если будут известны функции:

$$\begin{aligned}x &= f_1(a, b, c, t); \\y &= f_2(a, b, c, t); \\z &= f_3(a, b, c, t); \\p &= f_4(a, b, c, t).\end{aligned}\tag{2.1}$$

Переменные x , y и z называются переменными Лагранжа. Проекции скорости частицы на координатные оси определяются уравнениями:

$$u_x = \frac{dx}{dt}; \quad u_y = \frac{dy}{dt}; \quad u_z = \frac{dz}{dt},$$

а проекции ускорения соответственно

$$w_x = \frac{du_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}; \quad w_y = \frac{du_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}; \quad w_z = \frac{du_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Уравнения характеризуют «историю» движения частицы жидкости во времени.

Метод Эйлера. В этом методе обычно движение жидкости характеризуют построением поля скоростей (картины течения в различных точках пространства в каждый данный момент времени t).

Кинематическая картина движения жидкости будет описана, если скорости и давления во всех точках жидкости определены в виде функций:

$$\begin{aligned}u_x &= f_1(x, y, z, t); \\u_y &= f_2(x, y, z, t); \\u_z &= f_3(x, y, z, t); \\p &= f_4(x, y, z, t).\end{aligned}\tag{2.2}$$

Здесь u_x , u_y и u_z — три взаимно перпендикулярные составляющие полной скорости. Функции u_x , u_y и u_z называют переменными Эйлера. Они позволяют определить скорость в любой точке пространства в любой момент времени.

При этом движение определенной частицы жидкости в пространстве уравнения не учитывают.

Метод Лагранжа не получил в гидродинамике широкого распространения, так как он дает решение лишь для простейших случаев течения. Обычно изучение движения жидкости основано на методе Эйлера. Именно зависимости (2.2) позволяют построить полную картину течения жидкости в любой момент времени и, следовательно, изучить характер движения жидкости.

2.2. Основные понятия гидродинамики и виды движения жидкости

В общем случае для потока жидкости скорость движения частицы жидкости и давление являются функциями координат пространства и времени:

$$u = f_1(x, y, z, t); \quad p = f_2(x, y, z, t), \quad (2.3)$$

такое движение называется неустановившимся.

Примерами неустановившегося движения жидкости являются истечение жидкости из отверстия при переменном напоре (по мере уменьшения напора величина скорости истечения и давление в выходном сечении струи уменьшается), движение воды в реке при быстром изменении уровня (в паводок) и др.

Если скорость движения частиц жидкости и давление во всех точках потока с течением времени остаются неизменными, то такое движение называется установившимся движением.

При установившемся движении скорость u и давление p во всех точках с течением времени не меняются, что можно выразить следующими условиями:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial t} = 0.$$

Примерами установившегося движения может служить движение воды в канале или реке при постоянном уровне и истечение жидкости из отверстия или крана при постоянном напоре.

Если все частицы жидкости движутся по прямолинейным взаимно параллельным траекториям с равными скоростями, то такое движение, характеризуемое изменением только одной координаты, называется одномерным.

Когда все частицы движутся по траекториям, параллельным некоторой неподвижной плоскости, причем все характеристики движения (скорости, давления и пр.) не зависят от расстояния до этой плоскости, то такое движение называется плоским или двухмерным.

И, наконец, когда частицы жидкости движутся по траекториям, являющимся пространственными кривыми, что является наиболее общим случаем, то такое движение называется пространственным или трехмерным.

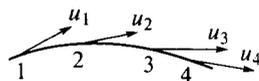


Рис. 2.1

Линия тока. Если через ряд точек потока жидкости провести кривую таким образом, что вектор скорости частицы жидкости в каждой точке будет касательным к этой кривой (рис. 2.1), то такая линия, характеризующая направление движения ряда последовательно расположенных частиц жидкости в данный момент времени, называется линией тока.

При установившемся движении линия тока и траектория частицы жидкости совпадают. При неустановившемся движении линии тока не будут совпадать с траекториями частиц жидкости, так как направление и величина скоростей отдельных частиц жидкости с течением времени будут меняться и частицы жидкости, находившиеся в какой-то момент времени на одной линии тока, в следующий момент окажутся на разных.

Рассмотрим движение частицы жидкости (рис. 2.2): за момент времени dt частица при скорости u пройдет некоторый путь dl , проекции которого на координатные оси будут dx , dy , dz , а составляющие скорости:

$$u_x = \frac{dx}{dt}; \quad u_y = \frac{dy}{dt}; \quad u_z = \frac{dz}{dt},$$

откуда получим

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = \frac{dz}{u_z}. \quad (2.4)$$

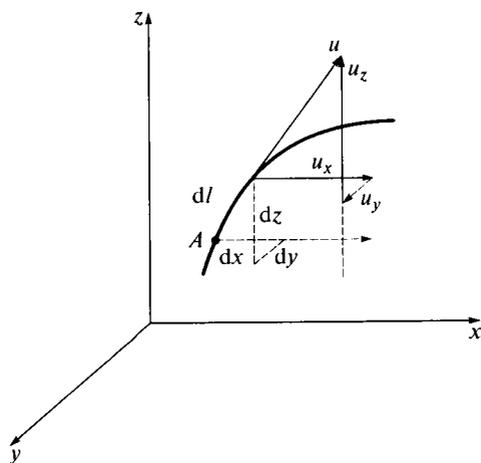


Рис. 2.2

Это уравнение называется уравнением линии тока.

Элементарная струйка. Если в движущейся жидкости выделить в плоскости, перпендикулярной течению, элементарную бесконечно малую площадку $d\omega$ (рис. 2.3) и через все точки, находящиеся на ее контуре, провести линии тока для данного момента времени, то получившаяся поверхность называется трубкой тока, а находящаяся в ней жидкость образует элементарную струйку. Последняя обладает следующими свойствами:

форма элементарной струйки при установившемся движении остается неизменной во времени, так как в этом случае линии тока с течением времени не меняют своей формы;

вхождения в элементарную струйку внешних линий тока и выхода из нее содержащихся в ней линий тока не происходит, так как боковая поверхность элементарной струйки образована линиями тока, к которым скорости направлены по касательной;

скорости во всех точках поперечного сечения элементарной струйки можно считать одинаковыми вследствие незначительности поперечного сечения элементарной струйки.

Рассмотрим элементарную струйку потока с поперечным сечением $d\omega$ (см. рис. 2.3) и постоянной скоростью движения частиц u по сечению струйки.

Через промежуток времени t частицы жидкости из поперечного сечения $1-1$ переместятся в сечение $1'-1'$ на расстояние s ; при этом через сечение $1-1$ пройдет элементарный объем жидкости $dW = sd\omega$. Разделив обе части равенства на промежуток вре-

мени t , получим $\frac{dW}{t} = \frac{s}{t} d\omega$, где $\frac{dW}{t}$ — элементарный объем,

прошедший через сечение $1-1$ за единицу времени, т.е. элементарный расход струйки dQ ; s/t — путь, пройденный за единицу времени, т.е. скорость движения жидкости u . Таким образом, $dQ = u d\omega$, расход струйки равен произведению площади ее поперечного сечения на скорость в этом сечении.

Поток. Совокупность элементарных струек, протекающих через площадку достаточно больших (конечных) размеров, называется потоком жидкости.

Потоки по своему характеру могут быть разделены на три категории:

безнапорные потоки, ограниченные снизу и с боков твердыми стенками русла и имеющие свободную поверхность, на которую действует, как правило, атмосферное давление (примером является движение жидкости в канале, реке, лотке; движение в них происходит под действием силы тяжести);

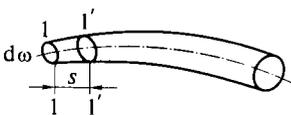


Рис. 2.3

напорные потоки, ограниченные со всех сторон жесткими стенками, не имеющие свободной поверхности, движение которых происходит под влиянием давления, создаваемого водонапорным резервуаром или насосом (примером является движение жидкости в заполненном трубопроводе);

струи, потоки, ограниченные с боков жидкой или газовой средой, движение которых происходит по инерции под влиянием начальной скорости, созданной давлением или силой тяжести; в отличие от предыдущих потоков струи в газовой среде имеют со всех сторон свободную поверхность (примером является струя, вытекающая из отверстия или брандспойта, дым из трубы и др.).

Живым сечением потока называется поверхность, проведенная нормально к линиям тока. Площадь живого сечения обозначается буквой ω .

Смоченным периметром потока (обозначаемым греческой буквой χ) называется длина части периметра живого сечения потока, на которой жидкость соприкасается с твердыми стенками.

Гидравлическим радиусом (обозначаемым буквой R) называется отношение площади живого сечения потока ω к смоченному периметру χ , т. е.

$$R = \frac{\omega}{\chi}. \quad (2.5)$$

Расходом жидкости называется количество жидкости, протекающее через данное живое сечение потока в единицу времени. Расход жидкости обозначается буквой Q и измеряется обычно в метрах кубических в секунду ($\text{м}^3/\text{с}$) или литрах в секунду ($\text{л}/\text{с}$). Так как поток жидкости состоит из бесконечно большого числа элементарных струек с расходом dQ , то общий расход потока представится суммой расходов элементарных струек

$$Q = \int_{\omega} dQ = \int_{\omega} u d\omega. \quad (2.6)$$

Для многих практических расчетов важно знать расход и не обязательно знать местную скорость u в каждой точке жидкости. Кроме того, точный закон распределения скоростей по сечению не всегда известен, и вычисление интеграла ввиду неопределенности функции $u = f(x, y, z)$ затруднительно. В этом случае вводится понятие средней скорости потока v . Под средней скоростью понимают некоторую одинаковую во всех точках потока скорость, при которой расход потока будет таким же, что и при фактических местных расходах. Поэтому расход в живом сечении потока представляют как произведение площади живого сечения потока ω на величину средней для всего живого сечения скорости v , т. е.

$$Q = \omega v. \quad (2.7)$$

Откуда величина средней скорости будет

$$v = \frac{Q}{\omega} = \frac{\int u d\omega}{\omega}. \quad (2.8)$$

В дальнейшем, когда будет идти речь о скорости движения потока, мы под этой величиной будем подразумевать именно среднюю скорость и обозначать ее v .

Равномерное и неравномерное движение. Если представить себе какой-либо поток, находящийся в установившемся движении (реку, канал), то его мысленно можно разбить на множество элементарных струек. Те точки различных живых сечений, в которых проходит ось одной и той же элементарной струйки, будем называть соответственными точками.

Равномерным движением потока называется такое установившееся движение, при котором живые сечения потока и средние скорости в них одинаковы по всей его длине и при этом скорости потока в соответственных точках всех живых сечений также одинаковы.

Примером равномерного движения могут служить движение потока в канале с постоянной формой живого сечения и постоянной глубиной или движение жидкости в цилиндрической трубе.

Если по длине потока изменяется его живое сечение (хотя бы по форме) или при постоянном сечении изменяется распределение скоростей в разных живых сечениях, то движение называется неравномерным.

Типичным примером неравномерного движения потока является движение воды в реке на участке перед плотиной: по длине потока живое сечение и глубины увеличиваются, а скорости убывают. Неравномерным будет также движение воды в реке на ее сужении или расширении или переходе от глубокого участка (плеса) к мелкому (перекату), или наоборот.

Плавноизменяющееся движение. При движении жидкости в естественных руслах обычно живое сечение непрерывно изменяется вдоль потока как по форме, так и по площади, и движение жидкости является установившимся неравномерным. Для облегчения изучения такого движения в гидравлике введено понятие «плавноизменяющееся движение», которое характеризуется следующими свойствами:

кривизна линий тока в потоке считается весьма незначительной;

угол расхождения между отдельными линиями тока очень мал;

живые сечения потока являются плоскими сечениями, нормальными к оси потока.

Если внутри плавно изменяющегося потока выделить частицу жидкости и спроектировать все действующие на нее силы на пло-

скость живого сечения, то вследствие того, что скорости и ускорения почти перпендикулярны живому сечению, силы инерции в уравнение равновесия не войдут; поэтому уравнение равновесия и закон распределения давления в плоскости живого сечения ничем не будут отличаться от закона распределения давления в жидкости, находящейся в покое. Отсюда следует четвертое важное свойство плавно изменяющегося движения:

при плавноизменяющемся движении давление по живому сечению распределяется по гидростатическому закону, т.е. по закону прямой линии.

2.3. Дифференциальные уравнения движения жидкости (уравнения Эйлера)

При рассмотрении движения жидкостей мы встречаемся с целым рядом новых переменных, которых не было при рассмотрении жидкости в равновесии.

Основной переменной является время t , и в зависимости от нее могут изменяться все остальные величины, характеризующие движение.

В общем случае на жидкость действуют силы массовые F_m , силы поверхностные F_p , силы инерции F_i и силы трения $F_{тр}$. Изучение законов движения жидкости начнем на основе гидромеханики невязкой (идеальной) жидкости, т.е. без учета сил трения, а затем в зависимости введем уточнения, полученные на основе экспериментальных данных.

Обозначая проекции на оси координат ускорений объемных сил через \bar{X} , \bar{Y} , \bar{Z} , проекции на оси координат скорости точки через u_x , u_y и u_z , гидродинамическое давление в точке p и плотность ρ , мы имеем восемь величин, характеризующих движение каждой частицы жидкого тела.

Задача гидродинамики — установить зависимости этих величин от координат времени t и пространства x , y и z .

Выведем основные дифференциальные уравнения, устанавливающие эту зависимость. Выделим в движущейся жидкости элементарно малый объем в форме параллелепипеда.

Воспользуемся полученными в подразд. 1.2 уравнениями равновесия, в которых на основании принципа Д'Аламбера к действующим на элементарный параллелепипед силам присоединим также силы инерции.

Сумма проекций всех сил на ось x , включая силу инерции

$$m \frac{du_x}{dt} = \rho dx dy dz \frac{du_x}{dt}, \text{ отнесенная к единице массы жидкости, т.е.}$$

после сокращения на $\rho dx dy dz$, дает нам уравнение

$$\bar{X} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dx - \frac{du_x}{dt} = 0. \quad (2.9)$$

Составляя аналогичные уравнения относительно осей y и z , мы получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} \bar{X} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dx - \frac{du_x}{dt} &= 0; \\ \bar{Y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} dy - \frac{du_y}{dt} &= 0; \\ \bar{Z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} dz - \frac{du_z}{dt} &= 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Так как $u_x = f(x, y, z, t)$ есть функция четырех переменных, то ее полный дифференциал

$$du_x = \frac{\partial u_x}{\partial t} dt + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy + \frac{\partial u_x}{\partial z} dz.$$

Разделив все члены этого полного дифференциала на dt , получим

$$\frac{du_x}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial t} \frac{dt}{dt} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \frac{dz}{dt},$$

аналогично можно представить $\frac{du_y}{dt}$ и $\frac{du_z}{dt}$.

Как известно, производные от координаты движущейся точки по времени представляют собой соответствующие проекции ее скорости, а подставляя их в уравнения и перенеся члены, содержащие скорости, в правую часть, мы получим эти уравнения в следующем виде:

$$\begin{aligned} \bar{X} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dx &= \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z}; \\ \bar{Y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} dy &= \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z}; \\ \bar{Z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} dz &= \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Полученные уравнения, выведенные Эйлером в 1755 г., являются общими дифференциальными уравнениями движения жид-

кого тела. Они дают зависимость между обычно известными ускорениями объемных сил \bar{X} , \bar{Y} , \bar{Z} , плотностью жидкости ρ , неизвестными величинами проекций скорости на оси координат u_x , u_y и u_z и гидродинамическим давлением p . Гидродинамическое давление в отличие от гидростатического является функцией не только координат пространства, но и времени по зависимости (2.3).

Ускорения, представленные в правой части системы (2.11), можно разделить на локальные ускорения, определяемые первым членом, и конвективные ускорения, представленные последующими тремя членами. При установившемся движении локальные ускорения равны нулю, а конвективные ускорения существуют.

Плотность ρ для капельной жидкости, как и в гидростатике, принимается постоянной и не зависящей от координат и времени $\rho = \text{const}$.

Таким образом, уравнения движения Эйлера содержат четыре неизвестных переменных величины u_x , u_y , u_z и p , а так как уравнений только три, то для определенности решения необходимо иметь еще одно уравнение, каковым и является уравнение неразрывности потока.

2.4. Уравнение неразрывности несжимаемой жидкости

Сплошным (неразрывным) потоком капельной жидкости называется поток, в котором внутри жидкости отсутствуют как пустоты (разрывы сплошности течения), так и переуплотнения, не возможные для несжимаемой жидкости.

Представим себе в пространстве неподвижный элементарный параллелепипед (рис. 2.4) с ребрами dx , dy и dz , через который протекает сплошной поток жидкости. Так как весь объем рассматриваемого параллелепипеда заполнен протекающей жидкостью

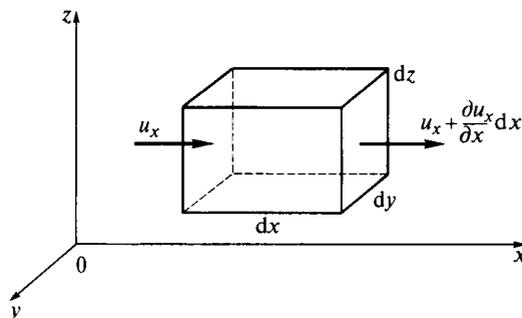


Рис. 2.4

постоянной плотности $\rho = \text{const}$, то с течением времени масса жидкости в объеме параллелепипеда не изменяется.

Пусть жидкость входит в параллелепипед по оси x и ее скорость равна u_x , на противоположной грани, отстоящей от входной на расстоянии dx , скорость будет соответственно равна $u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx$.

Тогда количество жидкости, входящей за время dt , будет равно $dydz u_x dt$, а масса ее будет $\rho dydz u_x dt$. Количество выходящей через противоположную грань жидкости

$$dydz \left(u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx \right) dt,$$

а масса ее

$$\rho dydz \left(u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx \right) dt.$$

Изменение массы жидкости в объеме параллелепипеда от перемещения частиц параллельно оси x :

$$dm_x = \rho dydz u_x dt - \rho dydz \left(u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx \right) dt = -\rho dx dy dz \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right) dt.$$

Аналогично изменения массы жидкости в объеме параллелепипеда от движения параллельно осям y и z имеют вид

$$dm_y = -\rho dx dy dz \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} \right) dt$$

и

$$dm_z = -\rho dx dy dz \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right) dt.$$

Сложив полученные изменения массы жидкости, определим общее изменение массы dm , которое из условия сплошности потока (невозможности образования разрывов в нем) должно быть равно нулю:

$$dm = -\rho dx dy dz \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) dt = 0.$$

Разделив это уравнение на $-\rho dx dy dz dt$, мы получим уравнение неразрывности потока в виде

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0. \quad (2.12)$$

Это уравнение, называемое *дифференциальным уравнением неразрывности движения несжимаемой жидкости*, является четвертым дифференциальным уравнением в системе (2.11), связывающей u_x , u_y , u_z и p .

Интегрирование системы уравнений (2.11) и (2.12) даже для частных случаев встречает непреодолимые математические трудности, и поэтому общего решения их пока нет.

Для газов к системе уравнений (2.1) кроме уравнения неразрывности еще необходимо добавить уравнение состояния газа. Уравнение неразрывности здесь приводит к изменению количества массы за счет изменения плотности среды во времени, которое можно записать

$$dm = \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz dt.$$

Соответственно изменение количества массы в параллелепипеде определяется в направлении оси x :

$$dm_x = \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} dx dy dz dt,$$

а аналогичные выражения для осей y и z :

$$dm_y = \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} dx dy dz dt;$$

$$dm_z = \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} dx dy dz dt.$$

Сумма величин dm , dm_x , dm_y и dm_z в условиях неразрывности должна быть равна нулю, а при сокращении на $dx dy dz dt$ получим дифференциальное уравнение неразрывности для сжимаемой жидкости

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} = 0. \quad (2.13)$$

Данное уравнение характеризует связь между проекциями скоростей и изменяющейся плотностью при движении сжимаемой среды.

В гидравлике применяется также уравнение неразрывности потока, которое можно получить на основании простых логических рассуждений — «от противного» (в предположении изменения массы потока); это уравнение имеет более простую математическую форму.

Пусть имеется поток с установившимся движением, ограниченный непроницаемыми стенками (рис. 2.5).

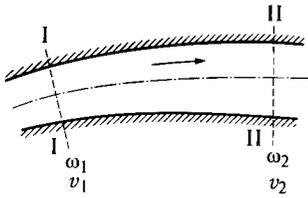


Рис. 2.5

Проведем перпендикулярно движению потока два поперечных сечения I—I и II—II, площади которых обозначим через ω_1 и ω_2 , а средние скорости в них — через v_1 и v_2 . Тогда расходы, проходящие соответственно через каждое сечение

$$Q_1 = \omega_1 v_1; \quad Q_2 = \omega_2 v_2.$$

Если предположить, что $Q_1 > Q_2$, тогда через некоторый промежуток времени в объеме, заключенном между рассматриваемыми сечениями вследствие избытка количества притекающей жидкости Q_1 над вытекающей Q_2 должно происходить накопление жидкости, что ввиду жесткости стенок русла и несжимаемости жидкости невозможно; следовательно, это предположение является нереальным.

Предположим, что $Q_1 < Q_2$, тогда через некоторый промежуток времени в объеме, заключенном между рассматриваемыми сечениями, вследствие избытка количества вытекающей жидкости над притекающей должны образоваться пустые промежутки — разрывы в сплошном потоке, так как нигде между сечениями I и II добавочного поступления жидкости в поток не происходит.

Но если разрывов сплошности потока не образуется, то и это второе предположение тоже является нереальным.

Остается третье предположение, что $Q_1 = Q_2$; это предположение и осуществляется, когда поток течет без разрывов сплошности с постоянным расходом.

В особых случаях сплошность движения может нарушаться. Это происходит, например, когда давление в жидкости оказывается меньше давления ее паров и она начинает вскипать. В таких случаях уравнение неразрывности теряет силу.

Так как сечения I и II взяты произвольно по длине сплошного потока, то в общем виде по длине потока должно соблюдаться равенство

$$Q_1 = Q_2 = Q_n = \text{const}. \quad (2.14)$$

Ввиду того, что $Q_1 = \omega_1 v_1$ и $Q_2 = \omega_2 v_2$, из (2.14) следует

$$\omega_1 v_1 = \omega_2 v_2,$$

откуда получаем важное следствие о соотношении средних скоростей потока в различных сечениях

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}, \quad (2.15)$$

т. е. скорости потока обратно пропорциональны площадям живых сечений.

2.5. Вихревое и потенциальное движение

Выделим в движущемся потоке жидкости элементарный параллелепипед $abdcc'a'b'd'$ (рис. 2.6). Обозначим составляющие скорости движения частицы жидкости в точке a через u_x , u_y и u_z ; тогда скорости в точках b и c выразятся соответственно через $u_y + \frac{\partial u_y}{\partial x} dx$ и $u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy$.

Точки b и c , имея в направлении осей y и x скорости, отличные от составляющих скорости точки a , через промежуток времени dt примут новое положение b_1 и c_1 (рис. 2.7).

Прямой угол bac вследствие этого превратится в острый угол b_1ac_1 , и таким образом произойдет вращение точек b и c вокруг точки a с угловыми скоростями:

$$\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} dx \right) : dx = \frac{\partial u_y}{\partial x} \quad \text{и} \quad \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} dy \right) : dy = \frac{\partial u_x}{\partial y};$$

первую угловую скорость, как создающую вращение по ходу часовой стрелки, будем считать положительной, а вторую, создающую вращение против хода часовой стрелки, — отрицательной.

Так как точки b и c являются крайними точками параллелепипеда, угловая скорость ω_z вращения всего параллелепипеда в целом около оси aa' (параллельной оси z) будет равна полусумме найденных угловых скоростей, т. е.

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right). \quad (2.16)$$

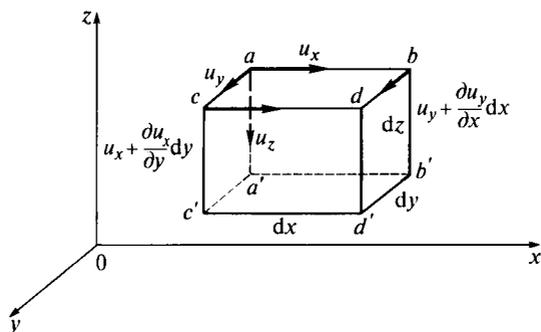


Рис. 2.6

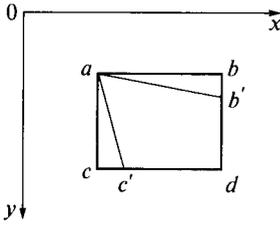


Рис. 2.7

Аналогично для вращения вокруг осей, параллельных осям x и y , соответственно получим:

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right); \quad (2.17)$$

$$\omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right). \quad (2.18)$$

Если отложить угловые скорости ω_x , ω_y и ω_z в точке a в виде векторов, называемых компонентами вихря по осям координат, то диагональ параллелепипеда, построенного на компонентах вихря, даст величину и направление полной угловой скорости вихревого вращения ω , величина которой может быть определена по формуле

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}. \quad (2.19)$$

Если движение жидкости происходит без вращения частиц, то оно называется безвихревым, при этом $\omega = 0$, т.е.

$$\begin{aligned} \omega_x &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) = 0; \\ \omega_y &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = 0; \\ \omega_z &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Такое равенство частных производных возможно только при условии существования некоторой функции $\Phi(x, y, z)$, называемой функцией потенциала скоростей, которая удовлетворяет следующим равенствам:

$$u_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}; \quad u_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}; \quad u_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}. \quad (2.21)$$

Поэтому безвихревое движение, происходящее при наличии потенциала скоростей, называется потенциальным.

Для потенциального движения капельных несжимаемых жидкостей (т.е. при $\rho = \text{const}$) уравнение неразрывности потока (2.12) после замены производных через функцию потенциала скорости может быть представлено в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0. \quad (2.22)$$

Это уравнение называется уравнением Лапласа. Функция потенциала скоростей всегда удовлетворяет уравнению Лапласа.

2.6. Уравнения Эйлера в функции компонентов вихря

Профессором Казанского университета И. С. Громека в 1881 г. уравнения Эйлера были преобразованы и приведены к форме, отражающей наличие и отсутствие вихря.

Взяв первое из уравнений Эйлера

$$\bar{X} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dx = \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z},$$

Громека исключил из его обеих частей член $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right)$, а так как

$$\frac{u^2}{2} = \frac{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}{2}, \text{ то } \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

и потому

$$\bar{X} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dx - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) - u_y \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right).$$

Заключенные в скобках разности согласно (2.20) представляют собой удвоенные значения компонентов вихря ω_y и ω_z в данной точке жидкости. Поэтому первое уравнение Эйлера приобретает вид

$$\bar{X} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dx - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = \frac{\partial u_x}{\partial t} + 2(u_z \omega_y - u_y \omega_z).$$

Аналогично преобразуются второе и третье уравнения Эйлера:

$$\bar{Y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} dy - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u^2}{2} \right) = \frac{\partial u_y}{\partial t} + 2(u_x \omega_z - u_z \omega_x);$$

$$\bar{Z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} dz - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{u^2}{2} \right) = \frac{\partial u_z}{\partial t} + 2(u_y \omega_x - u_x \omega_y).$$

Имея в виду, что $\bar{X} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}$, $\bar{Y} = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}$, $\bar{Z} = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}$, где $\Pi = F(x, y, z)$ есть силовая функция, перепишем уравнения в следующем виде:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x} \left(\Pi + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right) &= \frac{\partial u_x}{\partial t} + 2(u_z \omega_y - u_y \omega_z); \\ -\frac{\partial}{\partial x} \left(\Pi + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right) &= \frac{\partial u_y}{\partial t} + 2(u_x \omega_z - u_z \omega_x); \\ -\frac{\partial}{\partial x} \left(\Pi + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right) &= \frac{\partial u_z}{\partial t} + 2(u_y \omega_x - u_x \omega_y). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Для невихревого потенциального движения члены в круглых скобках правой части уравнений (2.23) отпадают. Для установившегося потенциального движения $\frac{\partial u_x}{\partial t} = \frac{\partial u_y}{\partial t} = \frac{\partial u_z}{\partial t} = 0$ и уравнения (2.23) превращаются в более простые:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(\Pi + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right) = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\Pi + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right) = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\Pi + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right) = 0.$$

2.7. Уравнение Бернулли для установившегося движения идеальной жидкости

При установившемся движении $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ или $\frac{\partial u_x}{\partial t} = \frac{\partial u_y}{\partial t} = \frac{\partial u_z}{\partial t} = 0$.

Уравнения (2.23) при этом упрощаются и принимают вид:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x} \left(\Pi + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right) &= 2(u_z \omega_y - u_y \omega_z); \\ -\frac{\partial}{\partial x} \left(\Pi + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right) &= 2(u_x \omega_z - u_z \omega_x); \\ -\frac{\partial}{\partial x} \left(\Pi + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right) &= 2(u_y \omega_x - u_x \omega_y). \end{aligned}$$

Если умножить каждое из уравнений системы соответственно первое на dx , второе на dy и третье на dz и сложить, то получим

$$-d\left(\Pi + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2}\right) = 2[(u_z\omega_y - u_y\omega_z)dx + (u_x\omega_z - u_z\omega_x)dy + (u_y\omega_x - u_x\omega_y)dz].$$

Правую часть уравнения можно переписать в виде определителя

$$-d\left(\Pi + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2}\right) = 2 \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix}.$$

Когда определитель в правой части уравнения обращается в нуль, то

$$-d\left(\Pi + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2}\right) = 0 \quad \text{и} \quad \Pi + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} = \text{const.} \quad (2.24)$$

Последнее уравнение является важнейшим в гидравлике, и было выведено в 1738 г. академиком Петербургской Академии наук Д. Бернулли.

Рассмотрим, в каких же случаях правая часть уравнения превращается в нуль. Из математики известно, что определитель равен нулю, если какая-либо строка или столбец его представлены нулями или если какая-либо пара строк состоит из пропорциональных членов.

Таким образом, уравнение Бернулли будет действительно при выполнении одного из следующих условий:

$$1. \quad \omega_x = 0, \quad \omega_y = 0, \quad \omega_z = 0;$$

$$2. \quad \frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = \frac{dz}{u_z};$$

$$3. \quad \frac{dx}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y} = \frac{dz}{\omega_z};$$

$$4. \quad \frac{\omega_x}{u_x} = \frac{\omega_y}{u_y} = \frac{\omega_z}{u_z}.$$

Первое условие характеризует невихревой потенциальный поток, для которого в целом применимо уравнение Бернулли. Второе условие выражает собой уравнение линии тока. Поэтому уравнение Бернулли будет применимо и для вихревого движения, но

только для каждой отдельной линии тока. Третье условие выражает собой уравнение вихревой линии, для каждой из которых может быть также применено уравнение Бернулли. Четвертое условие характеризуется отношением

$$\frac{\omega_x}{u_x} = \frac{\omega_y}{u_y} = \frac{\omega_z}{u_z},$$

или $\omega_x = au_x$; $\omega_y = au_y$; $\omega_z = au_z$.

Подставив полученные значения компонентов вихря в уравнение вихревой линии

$$\frac{dx}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y} = \frac{dz}{\omega_z},$$

получим

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = \frac{dz}{u_z},$$

т.е. уравнение вихревой линии примет вид, совпадающий с уравнением линии тока.

Таким образом, четвертое условие выражает собой такое движение жидкости, при котором ее частицы движутся по линии тока и одновременно вращаются вокруг линии тока как оси вращения. Такое движение называется винтовым. Вектор скорости и вектор угловой скорости в винтовом движении совпадают по направлению. Уравнение Бернулли применимо к винтовому потоку в целом.

Рассмотрев область применения уравнения Бернулли, приведем его к более простому для практического применения виду.

Для преобладающего большинства случаев из объемных сил действует только сила тяжести. В этом случае $\bar{X} = 0$; $\bar{Y} = 0$; $\bar{Z} = -g$, и $-d\Pi = \bar{X}dx + \bar{Y}dy + \bar{Z}dz = -gdz$, т.е. $\Pi = gz + C$.

Уравнение Бернулли для идеальной жидкости, находящейся под действием только силы тяжести, будет иметь вид

$$gz + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} = \text{const}$$

или после деления на g

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} = \text{const}.$$

Если взять две частицы жидкости, находящиеся на одной линии тока или на одной вихревой линии, а также в любых точках потенциального или винтового потока, то для них

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g}.$$

2.8. Вывод уравнения Бернулли из закона живых сил

Рассмотрим элементарную струйку идеальной жидкости, выделенную в потоке, находящемся в состоянии установившегося движения (рис. 2.8).

Двумя нормальными сечениями 1—1 и 1'—1' выделим элементарный объем $dW = d\omega_1 ds_1$, где $d\omega_1$ — площадь живого сечения струйки; ds_1 — расстояние между сечениями 1—1 и 1'—1'.

Через промежуток времени dt объем dW переместится и займет положение между сечениями 2—2'. На рассматриваемый объем жидкости действуют сила тяжести и силы гидродинамического давления. Силы трения в идеальной жидкости отсутствуют. Обозначим гидродинамическое давление в сечениях 1—1, 1'—1', 1''—1'' и 2—2 соответственно через p_1, p_1', p_1'', p_2 , а высоту центра тяжести сечений 1—1 и 2—2 над условной горизонтальной плоскостью сравнения — через z_1 и z_2 .

Применим к объему dW закон живых сил, согласно которому приращение живой силы движущейся системы материальных частиц за некоторый промежуток времени равно сумме работ всех сил, действовавших на систему в течение того же времени.

Закон этот символически может быть записан следующим образом:

$$\Delta_t \left(\frac{mu^2}{2} \right) = \sum_t F_s,$$

где $\frac{mu^2}{2}$ — живая сила движущейся системы; $\sum F_s$ — сумма работ всех сил F на пути s .

Приращение живой силы. Масса нашего элементарного объема

$$m = \rho dW = \rho d\omega_1 ds_1.$$

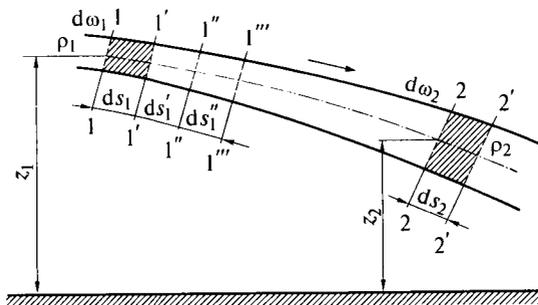


Рис. 2.8

Поскольку исходя из уравнения неразрывности потока $dW = d\omega_1 ds_1 = d\omega_2 ds_2$, то приращение живой силы выделенного объема

$$\Delta \left(\frac{mu^2}{2} \right) = \frac{mu_2^2}{2} - \frac{mu_1^2}{2} = \rho dW \left(\frac{u_2^2}{2} - \frac{u_1^2}{2} \right).$$

Работа силы тяжести. Вес объема dW равен $dG = \rho g dW$, а работа силы тяжести при перемещении его из положения 1 в положение 2 будет равна $dG(z_1 - z_2) = \rho g dW(z_1 - z_2)$.

Работа сил гидродинамического давления. Представим себе, что наш элементарный объем dW перемещается из положения 1 в положение 2 путем отдельных последовательных перемещений $1 - 1'$, $1' - 1''$ и т.д. При перемещении объема из положения 1 в $1'$ на расстояние ds работа сил гидродинамического давления по пути перемещения будет для левой грани объема $d\omega_1$ равна $p_1 d\omega_1 ds_1$, а для правой грани $d\omega_1'$ равна $-p_1' d\omega_1' ds_1'$; знак минус здесь взят потому, что сила давления на правую грань объема направлена против перемещения.

Сумма работы сил гидродинамического давления при этом перемещении имеет вид

$$p_1 d\omega_1 ds_1 - p_1' d\omega_1' ds_1'.$$

При дальнейшем перемещении объема dW из положения $1'$ в положение $1''$ на левую грань $d\omega_1'$ будет действовать давление p_1' , направленное слева направо, а на правую грань $d\omega_1''$ — давление p_1'' направленное справа налево. Работа сил гидродинамического давления при этом перемещении имеет вид

$$p_1' d\omega_1' ds_1' - p_1'' d\omega_1'' ds_1''.$$

Подобным образом выразится работа сил p_1'' , p_1''' при следующих перемещениях.

Работа силы p_2 при последнем перемещении имеет вид

$$-p_2 d\omega_2 ds_2.$$

Нетрудно видеть, что второй член каждой выписанной ранее строчки равен первому члену каждой последующей строчки, но противоположен по знаку, поэтому при сложении эти члены сократятся. Таким образом, суммирование работы сил гидродинамического давления при перемещении элементарного объема dW из положения 1 в положение 2 запишем в виде

$$p_1 d\omega_1 ds_1 - p_2 d\omega_2 ds_2 = dW (p_1 - p_2).$$

Приравняв приращение живой силы сумме работ всех сил, получим

$$\rho dW \left(\frac{u_2^2}{2} - \frac{u_1^2}{2} \right) = \rho g dW (z_1 - z_2) + dW (p_1 - p_2).$$

Сократив все члены уравнения на $\rho g dW$ и отнеся, таким образом, все к единице силы тяжести жидкости, получим

$$\frac{u_2^2}{2g} - \frac{u_1^2}{2g} = z_1 - z_2 + \frac{p_1 - p_2}{\rho g}, \quad (2.25)$$

откуда

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g}. \quad (2.26)$$

Так как вместо второго сечения по длине элементарной струйки можно взять любое иное, то очевидно, что для любого сечения по длине элементарной струйки идеальной жидкости

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} = \text{const}. \quad (2.27)$$

Уравнение Бернулли можно осветить с трех точек зрения: механической, физической и геометрической.

Механический смысл уравнения Бернулли согласно (2.26) заключается в выражении закона живых сил для единицы силы тяжести жидкости. Из уравнения (2.26) видно, что приращение живой силы для единицы силы тяжести жидкости равно работе силы тяжести при перемещении единицы силы тяжести жидкости с высоты z_1 до z_2 и работе сил гидродинамического давления.

Физический смысл уравнения Бернулли можно понять из выражения (2.26), которое представляет собой частный случай (для жидкого тела) общего закона сохранения энергии, открытого великим русским ученым М. В. Ломоносовым, с которым Бернулли вместе работал в Петербургской Академии наук.

В уравнение (2.26) входят три вида энергии: $\frac{p}{\rho g}$ — удельная энергия гидродинамического давления; z — удельная энергия положения жидкой частицы, находящейся на высоте z над условной плоскостью сравнения; $\frac{u^2}{2g}$ — удельная кинетическая энергия жидкости.

Сумма удельной энергии гидродинамического давления $\frac{p}{\rho g}$, удельной энергии положения z и удельной кинетической энергии $\frac{u^2}{2g}$ для идеальной жидкости есть величина постоянная по длине элементарной струйки.

Первые два члена выражения (2.27) $\frac{p}{\rho g}$ и z представляют собой запас удельной потенциальной энергии, третий член есть удельная энергия, присущая только движущейся жидкости, т.е. кинетическая энергия.

Все члены уравнения Бернулли имеют линейную размерность. В самом деле: z как высота есть линейная величина. В гидростатике мы имели $\frac{p}{\rho g} = h$, где h — глубина погружения точки под свободной поверхностью, измеряемая в единицах длины. Кинетическая энергия $\frac{u^2}{2g}$ тоже имеет размерность длины.

Гидравлический смысл уравнения Бернулли лучше всего уясняется при рассмотрении реальной жидкости.

2.9. Уравнение Бернулли для элементарной струйки реальной жидкости

При выводе уравнения Бернулли для идеальной жидкости из закона живых сил мы не учитывали работу сил трения, которая не может быть опущена при рассмотрении движения реальных жидкостей, так как в этом случае часть энергии потока будет затрачена на преодоление сопротивления трения.

Выражение закона живых сил для единицы веса жидкости (2.25) элементарной струйки с учетом работы силы трения, которую для единицы веса жидкости мы обозначим через h_c , имеет вид

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g} + h_c. \quad (2.28)$$

Это и есть уравнение Бернулли для элементарной струйки реальной жидкости. Оно отличается от уравнения (2.26) для идеальной жидкости наличием добавочного члена h_c , который представляет собой потерю энергии на преодоление сил трения, отнесенную к единице силы тяжести жидкости. Так как энергия, отнесенная к единице силы тяжести жидкости, имеет линейную размерность, то и h_c также имеет линейную размерность.

Гидравлический смысл уравнения Бернулли может быть уяснен из следующего примера. Возьмем какой-нибудь сосуд, наполненный водой, и присоединим к нему трубу AB переменного сечения (рис. 2.9). В этой трубе будет происходить движение жидкости с изменяющейся по длине трубы скоростью. Предположим, что в пределах каждого поперечного сечения трубы скорости одинаковы.

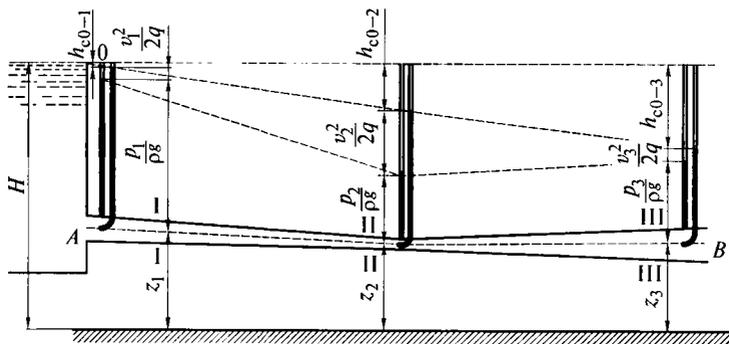


Рис. 2.9

Проведем по длине трубы три поперечных сечения I—I, II—II и III—III и обозначим соответственно давления и скорости в этих сечениях через p_1 и v_1 , p_2 и v_2 и p_3 и v_3 , а координаты центра тяжести проведенных в трубе сечений — через z_1 , z_2 и z_3 .

Установим в каждом сечении (рис. 2.10) по две вертикальные трубки: пьезометрическую — для измерения давления, гидрометрическую — с изогнутым концом, направленным навстречу течению. Гидрометрическая трубка (трубка Пито) служит для измерения полного напора, т.е. $z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g}$.

Если в поток ввести пьезометрическую трубку, то жидкость поднимается в ней на высоту $\frac{p}{\rho g}$; в гидрометрической трубке столбик жидкости вследствие перехода кинетической энергии частиц жидкости в потенциальную будет стоять выше на величину $\frac{u^2}{2g}$.

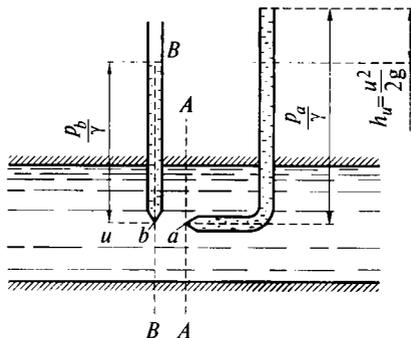


Рис. 2.10

Таким образом, разность показаний гидрометрической трубки и пьезометрической трубки измеряет величину $\frac{u^2}{2g}$, называемую скоростным напором.

В сечении I—I трубы *AB* горизонт в пьезометрической трубке будет стоять ниже, чем в гидрометрической трубке, на величину скоростного напора, затрачиваемого на создание скорости в сечении I—I, т. е. на величину $\frac{u^2}{2g}$. Но и в первой гидрометрической

трубке горизонт не достигнет уровня воды в баке, так как часть напора h_{c0-2} будет затрачена на преодоление сопротивления при входе в трубу *AB* (см. рис. 2.9).

В сечении II—II разность показаний гидрометрической и пьезометрической трубок будет больше, чем в сечении I—I, так как скорость u_2 больше скорости u_1 . Разность показаний гидрометрических трубок в сечениях I—I и II—II дает потерю удельной энергии между сечениями I—I и II—II h_{c0-2} , а от начала трубы *AB* — h_{c0-2} .

В сечении III—III вследствие увеличения площади сечения скорость будет меньше, и поэтому $\frac{u_3^2}{2g} < \frac{u_2^2}{2g}$; разность показаний гидрометрических трубок для сечений II—II и III—III дает потерю напора на трение на участке II—III, а от начала трубы h_{c0-3} .

Соединив уровни в пьезометрических трубках, получим линию пьезометрического напора, или просто пьезометрическую линию, показывающую картину распределения пьезометрического напора $z + \frac{p}{\rho g}$ по длине потока. Пьезометрическая линия может

опускаться (при увеличении скорости) либо подниматься (при уменьшении скорости вдоль потока). Линия, соединяющая уровни в гидрометрических трубках, носит название линии энергии или напорной линии. Вертикальные отрезки, заключенные между линией энергии и пьезометрической линией, дают величину скоростного напора $\frac{u^2}{2g}$, а отрезки, заключенные между линией горизонта воды в баке и линией энергии, показывают потерю напора на преодоление сопротивлений.

Линия энергии по длине потока всегда опускается, так как часть энергии жидкости непрерывно убывает вдоль трубы. Как видно из чертежа (см. рис. 2.9), для любой пары сечений можно составить равенство суммы четырех высот:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} + h_{c0-1} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g} + h_{c0-2} = H = \text{const.}$$

Это равенство четырех высот для любой пары сечений является геометрической интерпретацией уравнения Бернулли и поясняет его гидравлический смысл. Здесь наглядно видны потери энергии и переход потенциальной энергии в кинетическую, и обратно.

Для каждого участка трубы наклон пьезометрической линии к горизонту i_n называется пьезометрическим уклоном:

$$i_n = \frac{\left(z_2 + \frac{p_2}{\rho g} \right) - \left(z_1 + \frac{p_1}{\rho g} \right)}{l}$$

Падение линии энергии на единицу длины потока называется гидравлическим уклоном I и выражается формулой

$$I = \frac{\left(z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g} \right) - \left(z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} \right)}{l},$$

где l — расстояние между сечениями I—I и II—II.

При равномерном движении $u_1 = u_2 = \text{const}$ и $i_n = I$, т.е. пьезометрический уклон равен гидравлическому уклону.

При неравномерном падении напора пользуются понятием гидравлического уклона в данной точке потока

$$I = \frac{dh_c}{dl} = \frac{d \left(z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} \right)}{dl}.$$

2.10. Уравнение Бернулли для потока

Рассмотрим поток конечных размеров с плавно изменяющимся движением. Выделим в нем элементарную струйку с площадью поперечного сечения $d\omega$. Энергия, заключенная в единице веса выделенной элементарной струйки, или так называемая удельная энергия элементарной струйки, имеет вид

$$e = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g}.$$

Энергия жидкости, протекающей через живое сечение элементарной струйки, за единицу времени:

$$dE = e \rho g dQ = \left(z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} \right) \rho g u d\omega,$$

а энергия жидкости, протекающей за единицу времени через все живое сечение потока:

$$E = \int_{\omega} \left(z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} \right) \rho g u d\omega.$$

Величину средней удельной энергии потока в данном сечении получим, разделив предыдущее равенство на $\rho g Q$, т. е. на вес жидкости, протекающей за единицу времени:

$$e_{\text{ср}} = \frac{E}{\rho g Q} = \frac{1}{\rho g Q} \int_{\omega} \left(z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} \right) \rho g u d\omega.$$

При плавноизменяющемся движении сумма $z + \frac{p}{\rho g}$ в данном живом сечении есть величина постоянная и может быть вынесена за знак интеграла:

$$e_{\text{ср}} = \frac{1}{Q} \left(\left(z + \frac{p}{\rho g} \right) \int_{\omega} u d\omega + \frac{1}{2g} \int_{\omega} u^3 d\omega \right).$$

Так как $\int_{\omega} u d\omega = Q$, то первое слагаемое в выражении получается равным $z + \frac{p}{\rho g}$, а второе после умножения числителя и знаменателя на v^2 имеет вид

$$\frac{v^2}{2g} \frac{\int_{\omega} u^3 d\omega}{v^3 \omega} = \frac{\alpha v^2}{2g},$$

где

$$\alpha = \frac{\int_{\omega} u^3 d\omega}{v^3 \omega}. \quad (2.29)$$

Рассмотрим последнее выражение отдельно, умножив его числитель и знаменатель на $\rho/2$:

$$\alpha = \frac{\int_{\omega} u^3 d\omega}{v^3 \omega} = \frac{\frac{\rho}{2} \int_{\omega} u^3 d\omega}{\frac{\rho}{2} v^3 \omega} = \frac{\int_{\omega} \rho u d\omega \frac{u^2}{2}}{\rho v \omega \frac{v^2}{2}} = \frac{\int_{\omega} \frac{u^2 dm}{2}}{\frac{mv^2}{2}}.$$

Здесь величина $\rho u d\omega = dm$ — масса, протекающая по одной элементарной струйке за единицу времени, а $\int_{\omega} \frac{u^2 dm}{2}$ — сумма живых

сил элементарных струек по всему живому сечению, т. е. фактическая живая сила массы жидкости, протекающая за единицу времени во всем потоке; $\rho\omega = m$ — масса, протекающая за единицу времени через все живое сечение потока, а $\frac{mv^2}{2}$ — живая сила этой же секундной массы жидкости, подсчитанная по средней скорости потока.

В результате уравнение Бернулли для потока, или величина средней удельной энергии потока в целом, в данном сечении запишется в виде

$$e_{cp} = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{\alpha v^2}{2g}.$$

Коэффициент α называется коэффициентом кинетической энергии потока. Этот коэффициент характеризует влияние неравномерности распределения скоростей по сечению на удельную кинетическую энергию потока, вычисленную по средней скорости; он зависит от геометрической формы эпюры скоростей в живом сечении потока.

Теперь можно написать уравнение Бернулли для потока невязкой жидкости в виде

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{\alpha v^2}{2g} = \text{const}, \quad (2.30)$$

а для потока вязкой жидкости

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{\alpha v^2}{2g} + h_c = \text{const}, \quad (2.31)$$

2.11. Уравнение Бернулли для реальных газов

Уравнение (2.24) в дифференциальной форме, когда из массовых сил действует только сила тяжести, имеет вид

$$dz + \frac{dp}{\rho g} + d\left(\frac{v^2}{2g}\right) = 0. \quad (2.32)$$

Для реальных газов необходимо учитывать потери энергии на сопротивления, в связи с чем для элементарной струйки

$$dz + \frac{dp}{\rho g} + d\left(\frac{v^2}{2g}\right) + dh_c = 0, \quad (2.33)$$

где v — скорость элементарной струйки.

Интегрируя это уравнение вдоль элементарной струйки по длине от сечения I—I до сечения II—II, получим

$$z_2 - z_1 + \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\rho g} + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} + h_{c1-2} = 0,$$

где через h_{c1-2} обозначены, как обычно, потери напора по длине струйки.

Найти величину интеграла $\int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\rho g}$ можно, если плотность является функцией давления p .

Вид этой функции зависит от характера термодинамического процесса, происходящего в том или другом случае движении газа. Так, например, истечение газа из отверстия в резервуаре можно (без существенной погрешности) считать происходящим без обмена тепла между выходящим газом и внешней средой, т.е. считать движение адиабатическим; движение газа по трубам с большой разностью давления в известных условиях можно рассматривать как изотермическое.

Общим случаем является политропический процесс. Из уравнения политропы $\frac{p}{\rho^n} = \frac{p_0}{\rho_0^n} = \text{const}$ находим зависимость плотности газа от давления, оно имеет вид $\rho = \rho_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{1}{n}}$. Теперь можно найти значение интеграла

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho g} = \frac{p_0^{\frac{1}{n}}}{\rho_0 g} \int_{p_0}^p p^{-\frac{1}{n}} dp = \frac{n}{n-1} \frac{p_0^{\frac{1}{n}}}{\rho_0 g} \left(p^{1-\frac{1}{n}} - p_0^{1-\frac{1}{n}} \right).$$

Но второе слагаемое в скобках

$$\frac{p_0^{\frac{1}{n}}}{\rho_0 g} \left(p_0^{1-\frac{1}{n}} \right) = \frac{p_0}{\rho_0 g},$$

а первое слагаемое

$$\frac{p_0^{\frac{1}{n}}}{\rho_0 g} \left(p^{1-\frac{1}{n}} \right) = \frac{p}{\rho g}.$$

В этом легко убедиться, заметив, что $\frac{p_0^{\frac{1}{n}}}{\rho_0} = \frac{p^{\frac{1}{n}}}{\rho}$ в соответствии с уравнением политропы. Таким образом, искомая величина интеграла

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho g} = \frac{n}{n-1} \left(\frac{p}{\rho g} - \frac{p_0}{\rho_0 g} \right).$$

Делая подстановку в уравнение Бернулли, получим это уравнение в виде

$$z_2 - z_1 + \frac{n}{n-1} \left(\frac{p_2}{\rho_2 g} - \frac{p_1}{\rho_1 g} \right) + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} + h_{c1-2} = 0$$

или

$$z_1 + \frac{n}{n-1} \frac{p_1}{\rho_1 g} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{n}{n-1} \frac{p_2}{\rho_2 g} + \frac{v_2^2}{2g} + h_{c1-2}. \quad (2.34)$$

Зная, что $p_1 = \rho_1 g R T_1$, а $p_2 = \rho_2 g R T_2$, можно придать этому уравнению вид

$$z_1 + \frac{n}{n-1} R T_1 + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{n}{n-1} R T_2 + \frac{v_2^2}{2g} + h_{c1-2}. \quad (2.35)$$

Во многих случаях приходится встречаться с движением газа с большими скоростями (в ракетной технике, в газовых турбинах и т.д.). Физический процесс таких течений очень сложен, и изучение закономерностей его обычно является предметом особой дисциплины, называемой газовой динамикой. Здесь рассмотрим лишь одну характерную особенность течения газа с большой скоростью в трубах переменного сечения, заключающуюся в том, что скорость газа с увеличением площади сечения трубопровода не всегда убывает (это имеет место при движении несжимаемой жидкости), а может и возрастать (если скорость газа превышает скорость звука).

Как известно, при движении несжимаемой жидкости по трубе переменного диаметра d , а следовательно, и переменной площади поперечного сечения ω средняя скорость в соответствии с уравнением сплошности увеличивается с уменьшением d (т.е. с уменьшением ω) и, наоборот, уменьшается с увеличением d .

При движении газа такое соотношение может и не сохраниться.

Пусть имеем случай установившегося движения невязкой газобразной жидкости.

Условие постоянства массового расхода вдоль трубопровода (уравнение неразрывности) имеет вид

$$Q_p = \rho \omega v = \text{const.}$$

Дифференцируя это уравнение, получим

$$dQ_p = \omega v d\rho + \rho v d\omega + \rho \omega dv = 0.$$

Разделив это дифференциальное уравнение на $\rho\omega$, получим

$$\frac{dp}{\rho} + \frac{d\omega}{\omega} + \frac{dv}{v} = 0,$$

откуда следует

$$\frac{d\omega}{\omega} = -\frac{dp}{\rho} - \frac{dv}{v} = \frac{dv}{v} \left(-\frac{dp}{\rho} \frac{v}{dv} - 1 \right). \quad (2.36)$$

Определим теперь, чему равно dv , пользуясь уравнением Бернулли. Для невязкой газообразной жидкости уравнение Бернулли имеет вид

$$gdz + \frac{dp}{\rho} + d\frac{v^2}{2} = 0.$$

Пусть для конкретности и простоты труба горизонтальна: тогда $z = \text{const}$ и $dz = 0$. Уравнение Бернулли можно записать в виде

$$\frac{dp}{\rho} + vdv = 0,$$

откуда

$$dv = -\frac{dp}{\rho}.$$

Делая подстановку в (2.36), найдем

$$\frac{d\omega}{\omega} = \frac{dv}{v} \left[-\frac{dp}{\rho} \frac{v}{\left(-\frac{dp}{\rho v}\right)} - 1 \right] = \frac{dv}{v} \left[\frac{v^2}{\frac{dp}{d\rho}} - 1 \right]. \quad (2.37)$$

Как известно, скорость звука c (скорость распространения упругих деформаций) определяется формулой

$$c = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}},$$

следовательно, $\frac{dp}{d\rho} = c^2$. Имея это в виду, вместо (2.37) запишем

$$\frac{d\omega}{\omega} = \frac{dv}{v} \left(\frac{v^2}{c^2} - 1 \right).$$

Отношение скорости движения газа v к скорости звука c называется числом Маха (или числом Маевского) и обозначается буквой M ; таким образом, $M = \frac{v}{c}$.

Введя это обозначение, получим

$$\frac{d\omega}{\omega} = \frac{dv}{v} (M^2 - 1).$$

Из этого уравнения можно сделать следующие выводы:

если $v < c$, т.е. если скорость газа меньше скорости звука (такая скорость называется дозвуковой), то число Маха $M < 1$ и $(M^2 - 1) < 0$, т.е. выражение в скобках $(M^2 - 1)$ будет отрицательным, тогда при $d\omega > 0$ $dv < 0$. Другими словами, при увеличении площади сечения ω скорость движения газа v уменьшается (как и для несжимаемой жидкости);

если $v > c$ и $M > 1$ и, следовательно, $(M^2 - 1) > 0$, т.е. при скоростях больше скорости звука (при сверхзвуковой скорости) будем иметь при $d\omega > 0$ $dv > 0$. Следовательно, при увеличении площади сечения (при расширении трубы) скорость движения газа будет возрастать.

ГЛАВА 3

ГИДРАВЛИЧЕСКИЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ

3.1. Виды сопротивлений

Как было показано в гл. 2, уравнение Бернулли для потока реальной жидкости имеет вид

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_c,$$

где h_c — потери напора на преодоление гидравлических сопротивлений.

Причиной гидравлических сопротивлений являются трение и деформация жидкости в потоке, механизм которых довольно сложен, поэтому в настоящее время получить теоретические зависимости можно лишь в ограниченных случаях.

Обычно при изучении гидравлических сопротивлений обращаются к специальным экспериментальным исследованиям, в которых в соответствующих сечениях определяют величины z , $\frac{p}{\rho g}$, $\frac{v^2}{2g}$, входящие в уравнение Бернулли, а затем устанавливают потерю напора для данного сопротивления. В опытах исследуется влияние на сопротивления основных геометрических и динамических параметров потока (формы сечения потока, характера шероховатости, скорости протекания жидкости, вязкости и других параметров).

Потери учитываются отдельно для прямых участков труб и каналов и отдельно для местных сопротивлений. В случае прямолинейных участков потери проявляются равномерно по длине потока и называются потерями по длине h_l , или линейными потерями напора.

Местными сопротивлениями в трубах принято называть устройства, в которых происходит резкая деформация потока, выражающаяся в изменении скорости или направления движения. К таким сопротивлениям относятся фасонные части, арматура, приборы и оборудование, установленные на трубопроводах. Такие сопротивления называют местными, а потери напора называют

местными потерями напора h_m , или потерями напора на местные сопротивления.

Обычно в потоке возникают оба вида потерь напора: местные и линейные. При расчете их значения суммируются:

$$h_c = h_l + \sum h_m, \quad (3.1)$$

где h_l — суммарная потеря напора по длине; h_m — потеря напора на каждом местном сопротивлении.

В некоторых случаях различные виды сопротивлений влияют друг на друга и, следовательно, на величины потерь напора, что следует учитывать в гидравлических расчетах.

Рассмотрим вначале потери напора по длине и их связь с основными параметрами потоков.

3.2. Основное уравнение равномерного движения

Выведем основную зависимость для равномерного движения потока реальной жидкости в трубах и открытых руслах.

Для этого в трубе или открытом канале с движущейся жидкостью выделим ее объем, ограниченный двумя поперечными сечениями 1—1 и 2—2, находящимися на расстоянии l друг от друга (рис. 3.1). При равномерном движении все площади поперечного сечения одинаковы, следовательно, $\omega_1 = \omega_2 = \omega = \text{const}$.

Координаты центров тяжести сечений 1—1 и 2—2 относительно горизонтальной плоскости сравнения обозначим через z_1 и z_2 ; давления в центрах тяжести рассматриваемых сечений обозначим через p_1 и p_2 ; для напорного движения в трубе давление можно характеризовать показаниями пьезометрических трубок $\frac{p_1}{\rho g}$ и $\frac{p_2}{\rho g}$.

Напряжение силы трения, возникающее между потоком и стенками русла, обозначим через τ .

Теперь, если рассмотреть объем, выделенный между сечениями 1—1 и 2—2, то на него будут действовать следующие силы: сила тяжести G , приложенная в его центре тяжести объема, силы гидродинамического давления F_1 и F_2 , нормальные к сечениям 1—1 и 2—2 и направленные в разные стороны, и сила трения T , возникающая на поверхности соприкосновения потока со стенками; эта сила направлена в сторону, противоположную движению. Так как движение потока равномерное (без ускорения), то силы инерции в выделенном нами объеме отсутствуют.

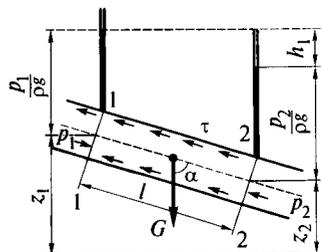


Рис. 3.1

Приравниваем к нулю сумму проекций всех сил на направленные движения:

$$F_1 - F_2 + G \cos \alpha - T = 0, \quad (3.2)$$

где α — угол между направлением движения потока и направлением силы тяжести.

Так как движение потока плавноизменяющееся, то давление в сечениях подчиняется закону гидростатики, а поскольку p_1 и p_2 — давления в центрах тяжести рассматриваемых сечений, то силы давления можно определить:

$$F_1 = p_1 \omega; \quad F_2 = p_2 \omega.$$

Сила тяжести рассматриваемого объема между сечениями 1—1 и 2—2 в проекции на направление движения определяется величиной

$$G = \rho g \omega l \cos \alpha,$$

где l — расстояние между рассматриваемыми сечениями.

Сила трения, возникающая на поверхности соприкосновения потока со стенками: $T = \tau \chi l$, где χ — смоченный периметр сечения потока.

Косинус угла наклона силы тяжести по направлению к движению потока можно выразить через отметки сечений и длину участка

$$\cos \alpha = \frac{z_1 - z_2}{l}.$$

Подставляя полученные значения сил в уравнение (3.2), получим

$$p_1 \omega - p_2 \omega + \rho g \omega l \frac{z_1 - z_2}{l} - \tau \chi l = 0$$

или после сокращения всех членов на $\rho g \omega$

$$\frac{p_1}{\rho g} - \frac{p_2}{\rho g} + z_1 - z_2 = \frac{\tau}{\rho g} \frac{\chi}{\omega} l. \quad (3.3)$$

Если теперь для рассматриваемых сечений применить уравнение Бернулли, то, поскольку скорости движения в сечениях одинаковы, а на рассматриваемом участке будут только линейные потери напора, можно записать

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + h_l. \quad (3.4)$$

Сопоставляя уравнения (3.3) и (3.4), получим

$$h_l = \frac{\tau}{\rho g} \frac{\chi}{\omega} l.$$

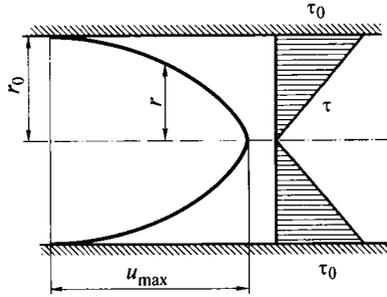


Рис. 3.2

Решая это уравнение относительно τ и заменяя $\frac{h_l}{l} = I$; $\frac{\omega}{\chi} = R$, имеем

$$\tau = \rho g R I. \quad (3.5)$$

Полученное уравнение называют *основным уравнением равномерного движения*. Оно показывает, что касательные напряжения в потоке пропорциональны гидравлическому радиусу и гидравлическому уклону.

Рассмотрим цилиндрическую напорную трубу радиусом r_0 и определим величину касательных напряжений для произвольной точки, находящейся на расстоянии r от центра (рис. 3.2). Здесь площадь сечения $\omega = \pi r^2$, смоченный периметр $\chi = 2\pi r$, а гидравлический радиус $R = r/2$, тогда

$$\tau = \rho g \frac{r}{2} I. \quad (3.6)$$

Для точки, расположенной у стенки, эти параметры будут: $\omega_0 = \pi r_0^2$; $\chi_0 = 2\pi r_0$; $R_0 = r_0/2$, и касательное напряжение

$$\tau_0 = \rho g \frac{r_0}{2} I. \quad (3.7)$$

Сопоставляя уравнения (3.6) и (3.7), получим

$$\tau = \tau_0 \frac{r}{r_0}.$$

Это выражение показывает, что касательные напряжения τ продольного внутреннего трения распределяются в трубе по линейному закону, наибольшее значение τ_0 касательные напряжения имеют у стенки трубопровода, а на оси они равны нулю.

3.3. Два режима движения жидкости

Уже со второй половины XIX в. было известно, что жидкость может течь по трубе двояким образом. В некоторых случаях поток

как бы состоит из отдельных несмешивающихся слоев, в других же случаях течение происходит с перемешиванием. Закон сопротивления движению жидкости зависит от режима движения. Знаменитый русский ученый Д. И. Менделеев в своем сочинении «О сопротивлении жидкостей и о воздухоплавании» в 1880 г. указывал на существование в природе двух режимов движения жидкости с различными законами ее сопротивления. Эта мысль была развита и доказана в 1883 г. русским ученым Н. П. Петровым, впервые установившим, что при смазке силы трения, определяемые вязким сопротивлением, пропорциональны первой степени скорости.

Наиболее полные исследования режимов движения жидкости в трубах произвел английский ученый О. Рейнольдс в 1881—1883 гг. Опыты Рейнольдса состояли в следующем. В прозрачный трубопровод, по которому двигался поток жидкости из напорного бака, по трубке (рис. 3.3) вводилась краска. При этом было установлено, что струйка краски либо двигалась в форме нити (рис. 3.4, а), не смешиваясь с окружающей жидкостью, либо размывалась и перемешивалась с жидкостью (рис. 3.4, б). Первый режим движения жидкости, характеризующийся параллельноструйным течением, называют ламинарным, а второй режим, когда жидкость течет, перемешиваясь с окружающей жидкостью, — турбулентным. При прочих равных условиях турбулентный режим получается при сравнительно больших скоростях, а ламинарный — при малых.

Если постепенно увеличивать скорость движения в трубе, то при некоторой достаточно большой скорости, называемой верхней критической скоростью, ламинарный режим нарушается и происходит резкий переход к турбулентному режиму. В отдельных опытах с той же жидкостью в той же трубе скорость, при которой происходил такой переход, может значительно изменяться. Если же при турбулентном режиме уменьшать скорость, то происходит обратный переход от турбулентного режима к ламинарному; скорость, соответствующая переходу к ламинарному режиму, — нижняя критическая скорость — всегда меньше верхней и имеет определенное значение. В дальнейшем под критической скоростью бу-

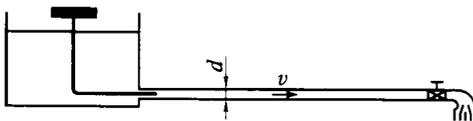


Рис. 3.3

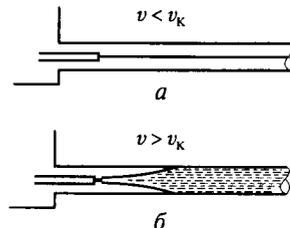


Рис. 3.4

дем понимать нижнюю критическую скорость. Как показывают опыты, критическая скорость тем больше, чем тоньше труба и чем больше вязкость жидкости.

Теория динамического подобия и опыты с различными жидкостями при различных диаметрах труб и при различных скоростях показывают, что переход от турбулентного режима к ламинарному происходит при определенном значении безразмерного отношения

$$\text{Re} = \frac{vL}{\nu}, \quad (3.8)$$

где v — средняя скорость течения потока; L — характерный размер сечения потока; ν — кинематическая вязкость.

Это отношение называют числом Рейнольдса. Оно является критерием режима движения. Условие перехода от одного режима движения к другому определяется критическим числом Рейнольдса $\text{Re}_{\text{кр}}$. Само критическое число Рейнольдса зависит от способа определения характерного размера сечения. Для цилиндрических трубопроводов значение $L = d$, для каналов и труб не круглой формы $L = R$, теперь критическое число Рейнольдса для труб будет $\text{Re}_{\text{кр}} = \frac{v_{\text{кр}}d}{\nu} = 2320$, для каналов $\text{Re}_{\text{кр}} = \frac{v_{\text{кр}}R}{\nu} = 580$.

Движение жидкости в потоке при числе Рейнольдса $\text{Re} < \text{Re}_{\text{кр}}$ происходит при ламинарном режиме. Если же число Рейнольдса будет $\text{Re} > \text{Re}_{\text{кр}}$, течение жидкости обычно происходит при турбулентном режиме. В лабораторных условиях можно получить ламинарный режим и при значительно больших числах Re . Для этого нужно иметь очень плавный вход в трубу, отсутствие сотрясений и первоначальных возмущений в питающем баке и очень плавно увеличивать скорость.

Рейнольдс установил также, что при ламинарном режиме потери на трение на единицу длины трубы пропорциональны скорости в первой степени $I = av$, а при турбулентном $I = bv^n$, где $n = 1,75 \dots 2,0$. Если результаты опытов по учету потери напора h_f изобразить на графике, на одной оси которого откладывать $\lg v$, а на другой $\lg I$, то полученный при этом логарифмический график будет иметь вид ломаной линии (рис. 3.5). Для ламинарного режима $\lg I = \lg a + \lg v$, причем угол $\beta_1 = 45^\circ$, так как $\text{tg} \beta_1 = n = 1$. При турбулентном режиме $\lg I = \lg b + n \lg v$, здесь $\text{tg} \beta_2 = n = 1,75 \dots 2,0$.

Теория динамического подобия (см. гл. 9) доказывает, что если явление происходит под действием сил вязкости, то

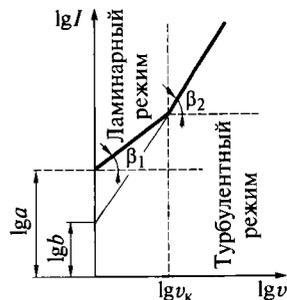


Рис. 3.5

в двух механических системах это явление будет происходить динамически подобно, если числа Рейнольдса, составленные из соответствующих элементов, будут в этих системах равны. Переход от турбулентного режима к ламинарному как раз и происходит в результате действия сил вязкого трения, которые препятствуют пульсации и перемешиванию, стремясь как бы связать частицы жидкости друг с другом.

3.4. Дифференциальные уравнения при движении жидкости с сопротивлениями

Существующие два режима движения: ламинарный и турбулентный — определяют различные законы сопротивления. В случае ламинарного течения опыты показывают, что линии тока на значительном расстоянии сохраняют взаимное расположение и подкрашенные частицы постепенно рассеиваются вследствие молекулярной диффузии. Для несжимаемой жидкости в большинстве случаев вязкость можно считать постоянной, что позволяет дифференциальные уравнения движения жидкости записать в виде:

$$\begin{aligned} \bar{X} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) &= \frac{du_x}{dt}; \\ \bar{Y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) &= \frac{du_y}{dt}; \\ \bar{Z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) &= \frac{du_z}{dt}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Система уравнений называется уравнениями Навье—Стокса, они пригодны для описания движения вязких несжимаемых жидкостей. Данная система уравнений может быть истолкована также как форма второго закона механики для вязкой несжимаемой жидкости. Действительно, правые части этих уравнений представляют собой отнесенные к единице массы произведения массы на ускорения, а левые — сумму отнесенных к единице массы сил: массовая сила, определяемая ускорениями \bar{X} , \bar{Y} , \bar{Z} , сила давления $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$; $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$; $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}$ и сила внутреннего трения:

$$\begin{aligned} &\nu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right); \\ &\nu \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right); \end{aligned}$$

$$v \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right).$$

Если в уравнении (3.9) раскрыть полные ускорения $\frac{du_x}{dt}$; $\frac{du_y}{dt}$; $\frac{du_z}{dt}$, выделив в них локальную и конвективную части, то можно получить развернутую форму уравнений Навье — Стокса:

$$\begin{aligned} \bar{X} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + v \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) &= \\ &= \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z}; \\ \bar{Y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + v \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) &= \\ &= \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z}; \\ \bar{Z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + v \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) &= \\ &= \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Вместе с уравнением неразрывности (2.12) уравнения (3.10) образуют замкнутую систему для определения функций u_x , u_y , u_z и p . Эти уравнения оказываются достаточно удобными для решения ряда вопросов динамики вязкой жидкости, т. е. гидродинамическая задача сводится к математической задаче получения решений системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Математическая теория таких систем разработана пока недостаточно и для них нет общей формулировки и доказательств теорем существования и единственности. Однако для частных видов систем, описывающих определенные классы течений, такие теоремы сформулированы и доказаны.

Механизм турбулентного движения значительно сложнее ламинарного. В турбулентном потоке вследствие постоянного перемещения частиц жидкости в направлении, перпендикулярном основному течению, происходит непрерывный процесс перемешивания. Поэтому скорость течения в отдельных точках турбулентного потока изменяется во времени как по величине, так и по направле-

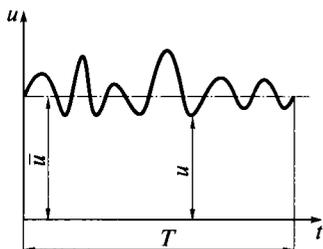


Рис. 3.6

Это явление носит название пульсации скоростей. Скорость в данный момент времени в данной точке турбулентного потока называется местной мгновенной скоростью u . Чтобы установить значение скорости в данной точке, необходимо вначале определить период времени T , за который производится осреднение, а затем найти осредненную скорость в точке:

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_0^T u dt.$$

Осредненная скорость равна высоте прямоугольника с основанием T , равновеликого криволинейной фигуре, ограниченной сверху графиком скорости, снизу — осью времени, а с боков — вертикальными отрезками в точках 0 и T . Разность между фактической мгновенной скоростью u и осредненной скоростью \bar{u} в данной точке $u' = u - \bar{u}$ называется пульсационным добавком, или скоростью пульсации. Величина последней изменяется по времени от максимального отрицательного значения до максимального положительного, переходя через нуль.

Следует различать понятие осредненной скорости \bar{u} в данной точке потока и средней по всему живому сечению скорости потока $v = Q/\omega$.

Процесс непрерывного перемешивания в турбулентном потоке, естественно, вызывает появление дополнительного трения между отдельными частицами, которое оказывается в несколько десятков раз больше, чем трение при ламинарном режиме движения жидкости.

Экспериментальные исследования показывают, что при турбулентном режиме большая часть потока в трубе занята «турбулентным ядром» (рис. 3.7), а у стенок трубы образуется очень тонкий, так называемый «пограничный», или вязкий, подслой. Такая схема структуры тур-



Рис. 3.7

булентного потока, конечно, является приближенной и не раскрывает всей сложности турбулентного перемешивания, но все же до известной степени дает объяснение наблюдающимся в потоке явлениям.

В весьма тонком кольцевом слое у стенки трубы динамическая вязкость значительно больше турбулентной вязкости. В этом слое (см. рис. 3.7), имеющем толщину $\delta_{л}$, скорость быстро нарастает от $u = 0$ до $u = u_{\text{погр}}$. Толщина вязкого подслоя выражается формулой

$$\delta_{л} = N \frac{\nu}{u_*},$$

где N — постоянная величина (по опытам Никурадзе $N = 10,47$); ν — кинематический коэффициент вязкости; u_* — динамическая скорость, $u_* = \sqrt{gRI}$.

При турбулентном движении использовать уравнения Навье — Стокса практически невозможно. Входящие в них мгновенные скорости и давление при турбулентном режиме движения являются пульсирующими величинами. Поэтому для турбулентного движения жидкости следует поставить задачу отыскания усредненных во времени скоростей и давлений.

Фактическое значение компоненты, например скорости, определяется с помощью операции осреднения:

$$u = \bar{u} + u'.$$

Для получения уравнений Рейнольдса используем известные правила осреднения. Так, осреднение суммы переменных величин записывается как осредненные значения каждой величины:

$$\overline{u_x + u_y} = \bar{u}_x + \bar{u}_y.$$

Осреднение постоянной величины ($c = \text{const}$): $\bar{c} = c$.

Осреднение произведения постоянной величины на переменную:

$$\overline{cu_x} = c\bar{u}_x.$$

Осреднение производной:

$$\overline{\frac{\partial u_x}{\partial x}} = \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x}.$$

Покажем необходимые преобразования на примере первого уравнения системы Навье — Стокса. Прежде всего выполним преобразование конвективных членов первого уравнения системы (3.10):

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} (u_x u_x) + \frac{\partial}{\partial y} (u_y u_x) + \frac{\partial}{\partial z} (u_z u_x).$$

Теперь первое уравнение системы Навье—Стокса можно записать в виде

$$\begin{aligned} \bar{X} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) = \\ = \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u_x u_x) + \frac{\partial}{\partial y} (u_y u_x) + \frac{\partial}{\partial z} (u_z u_x). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Результат осреднения каждого из членов полученного уравнения может быть получен на основе указанных ранее правил, поэтому имеем

$$\begin{aligned} \bar{X} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_z}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial t} + \bar{u}_x \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \\ + \bar{u}_y \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} + \bar{u}_z \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} (\overline{u'_x u'_x}) + \frac{\partial}{\partial y} (\overline{u'_y u'_x}) + \frac{\partial}{\partial z} (\overline{u'_z u'_x}). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Аналогично записываются и два других уравнения. Система уравнений Рейнольдса отличается от системы уравнений Навье—Стокса тем, что в нее входят осредненные скорости вместо мгновенных и девять новых членов, определяемых пульсационными компонентами скоростей. Если последние три члена уравнения умножить и разделить на плотность и перенести их в левую часть, то получим

$$\begin{aligned} \bar{X} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_z}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (\rho \overline{u'_x u'_x}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} (\rho \overline{u'_y u'_x}) + \\ + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} (\rho \overline{u'_z u'_x}) = \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial t} + \bar{u}_x \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \bar{u}_y \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} + \bar{u}_z \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial z}. \end{aligned}$$

Наряду с членами, выражающими действие вязкостных напряжений, уравнение Рейнольдса содержит члены, выражающие действие напряжений, присущих турбулентному потоку. Эти напряжения, определяемые пульсациями скоростей, называют турбулентными. Сравнивая турбулентный и ламинарный потоки, видим, что турбулентные напряжения дают эффект, выражающийся в значительном увеличении сопротивлений и изменении профиля скорости.

3.5. Свойства ламинарного режима

Ламинарное течение в прямой круглой трубе можно исследовать теоретически.

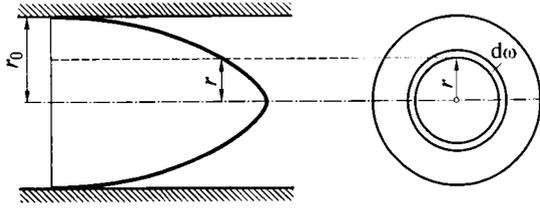


Рис. 3.8

Пусть имеется ламинарный поток с равномерным движением в трубе круглого сечения с радиусом r_0 (рис. 3.8). Применим к нему выведенное ранее основное уравнение равномерного движения и определим закон распределения скоростей по ширине трубы и величину потери напора на трение по длине. Согласно формуле (3.6) касательное напряжение в любой точке потока в круглой трубе будет $\tau = \rho g \frac{r}{2} I$, с другой стороны, касательные напряжения в жидкости при ламинарном движении зависят от сил трения, определенных по формуле (B.9):

$$\tau = -\mu \frac{du}{dn} = -\mu \frac{du}{dr}.$$

Здесь градиент скорости по нормали к движению определен через радиус трубы, а знак минус принят потому, что мы рассматриваем сопротивление движению потока. Приравняв правые части двух

последних равенств и решив относительно $\frac{du}{dr}$, имеем

$$\frac{du}{dr} = -\frac{\rho g I r}{2\mu}. \quad (3.13)$$

Разделив переменные в этом дифференциальном уравнении, получим

$$du = -\frac{\rho g I}{2\mu} r dr,$$

а скорость найдем как интеграл

$$\int_0^u du = -\frac{\rho g I}{2\mu} \int_{r_0}^r r dr,$$

решая который найдем скорость в точке трубы на расстоянии r от оси

$$u = -\frac{\rho g I}{4\mu} (r^2 - r_0^2),$$

или

$$u = \frac{\rho g I}{4\mu} (r_0^2 - r^2). \quad (3.14)$$

Закон распределения скоростей по сечению трубы при ламинарном режиме представляет собой параболу, имеющую максимум на оси потока. Формула (3.14) называется формулой Стокса.

Скорость имеет максимальное значение в центре трубы, при $r = 0$:

$$u_{\max} = \frac{\rho g I}{4\mu} r_0^2,$$

теперь можно выразить скорость в любой точке через максимальную скорость и положение точки в сечении потока:

$$u = u_{\max} \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right).$$

Для получения величин расхода и средней скорости по сечению трубы v напишем величину элементарного расхода dQ для концентрического кольцевого слоя, находящегося на расстоянии r от оси трубы (см. рис. 3.8):

$$dQ = u d\omega = \frac{\rho g I}{4\mu} (r_0^2 - r^2) 2\pi r dr,$$

откуда

$$Q = \frac{\rho g I}{4\mu} 2\pi \int_0^{r_0} (r_0^2 - r^2) r dr = \frac{\rho g I}{4\mu} 2\pi \left(\frac{r_0^4}{2} - \frac{r_0^4}{4} \right) = \frac{\pi \rho g I}{8\mu} r_0^4.$$

Теперь можно установить среднюю скорость

$$v = \frac{Q}{\omega} = \frac{Q}{\pi r_0^2} = \frac{\rho g I r_0^2}{8\mu}. \quad (3.15)$$

Сравнивая полученное значение средней скорости с максимальной нетрудно установить, что $v = u_{\max}/2$, т. е. средняя скорость равна половине максимальной.

Для определения потери напора по длине следует развернуть значение гидравлического уклона $I = h_l/l$ и решить уравнение (3.15) относительно h_l :

$$h_l = \frac{8\mu l v}{\rho g r_0^2},$$

заменяя $r_0 = d/2$, $\mu/\rho = \nu$, получим

$$h_l = \frac{32\nu l v}{g d^2}. \quad (3.16)$$

Формула носит название формулы Пуазейля по имени французского врача, который исследовал гидравлическое сопротивление волосных трубок в связи с изучением кровообращения. Формула Пуазейля показывает, что потеря напора при ламинарном режиме пропорциональна первой степени средней скорости, зависит от рода жидкости, определяемой кинематической вязкостью ν , обратно пропорциональна площади сечения трубы и не зависит от шероховатости стенок трубы.

На основании многочисленных опытов, проведенных на парижском водопроводе, французский инженер А. Дарси установил, что потери напора в трубах пропорциональны скоростному напору, т.е. $h_l \sim v^2/2g$. Поэтому формулу (3.16), умножив и разделив на $2v$, можно преобразовать:

$$h_l = \frac{32\nu}{gd^2} v \frac{2v}{2v} = \frac{64\nu}{vd} \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} = \frac{64}{\text{Re}} \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}.$$

Обозначая $\lambda = \frac{64}{\text{Re}}$, где λ — коэффициент гидравлического трения, потерю напора при ламинарном режиме можно определить по общей формуле

$$h_l = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}. \quad (3.17)$$

Если представить логарифмический график, по оси ординат которого отложены коэффициенты трения λ , а по оси абсцисс — величины числа Рейнольдса Re , то эта зависимость для ламинарного потока (при $\text{Re} < 2320$) выразится в виде прямой линии.

Установим значение коэффициента кинетической энергии α при ламинарном режиме в круглой трубе. В подразд. 2.10 мы получили

$$\alpha = \frac{\int u^3 d\omega}{v^3 \omega}.$$

Подставляя сюда полученные ранее значения истинной скорости в точках (формула (3.14)) и средней скорости (формула (3.15)), после интегрирования и сокращения получим $\alpha = 2$.

3.6. Особенности турбулентного движения жидкости в трубах и каналах

Введение понятия осредненной скорости позволяет применять к турбулентному потоку основные понятия и уравнения движения жидкости без учета пульсационных компонентов. Но фак-



Рис. 3.9

тически пульсации существуют, и они влияют на значения касательных напряжений в турбулентном потоке и на соответствующие потери напора, входящие в уравнение Бернулли.

В 1930-х годах были сделаны попытки теоретического исследования закономерностей турбулентного потока в целях получения теоретически обоснованных формул для коэффициента трения λ . В этом отношении заслуживают внимания теоретические работы Прандтля и Кармана.

Рассмотрим два соседних слоя a и b движущейся жидкости с площадью соприкосновения S (рис. 3.9) и относительной скоростью движения u'_x . Кроме относительной разности скоростей в осевом направлении имеется еще поперечное движение частиц жидкости от слоя b к слою a со средней скоростью u'_y . При этом величина $u'_y S$ будет объемом, а $\rho u'_y S$ — массой жидкости, переходящей от слоя к слою в единицу времени. При имеющемся обмене количеством движения между слоями a и b появится касательная сила $T = \rho S u'_x u'_y$, действующая на слой a в направлении, обратном его движению, т. е. тормозящая его. Касательное напряжение при этом примем

$$\tau = \rho u'_x u'_y.$$

По теории Прандтля величины пульсационных компонентов

$$u'_x = k_1 l_1 \left(\frac{du}{dy} \right) \text{ и } u'_y = k_2 l_1 \left(\frac{du}{dy} \right),$$

где k_1, k_2 — коэффициенты пропорциональности; l_1 — расстояние между слоями; $\frac{du}{dy}$ — градиент скорости.

Тогда

$$\tau = \rho k_1 k_2 l_1^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2 = \rho l^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2, \quad (3.18)$$

где величина $l^2 = k_1 k_2 l_1^2$ названа Прандтлем «длиной пути перемешивания» и принята пропорциональной расстоянию y от стенки трубы, т. е. $l = \alpha y$, где α — коэффициент, оказавшийся постоянным для разных жидкостей и названный Карманом «универсальной постоянной». По Карману $\alpha = 0,36 \dots 0,435$, по Прандтлю $\alpha = 0,435$.

Уравнение (3.18) выражает турбулентное касательное напряжение в общем виде. Суммарное напряжение трения в турбулентном потоке имеет вид

$$\tau = \mu \left(\frac{du}{dy} \right) + \rho l^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2. \quad (3.19)$$

При турбулентном режиме второй член в правой части много больше первого. Уравнение (3.18) можно представить и в виде закона трения, данного Петровым:

$$\tau' = \varepsilon \left(\frac{du}{dy} \right),$$

где ε — коэффициент турбулентной, или виртуальной, вязкости жидкости, $\varepsilon = \rho l^2 \left(\frac{du}{dy} \right)$.

Подставляя в формулу (3.18) данное Прандтлем выражение $l = \alpha y$, мы получаем соотношение

$$\frac{du}{dy} = \frac{1}{\alpha y} \sqrt{\frac{\tau}{\rho}},$$

откуда, интегрируя, получаем

$$u = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} (\ln y + C) = \frac{u_*}{\alpha} (\ln y + C).$$

Здесь через u_* обозначено отношение $\sqrt{\frac{\tau}{\rho}} = v \sqrt{\frac{\lambda}{8}}$, которое имеет размерность скорости и называется динамической скоростью, или скоростью касательного напряжения у стенки. Максимальную скорость мы получаем на оси трубы, где $y = r$:

$$u_{\max} = \frac{u_*}{\alpha} (\ln r + C).$$

Вычитая из этого равенства предыдущее, получаем

$$\frac{u_{\max} - u}{u_*} = \frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{r}{y} \right).$$

Карман и Прандтль на основании опытов Никурадзе считали α универсальной постоянной; однако, как показали опыты ВНИИ Водгео, проведенные Ф. А. Шевелевым, α не является универсальной постоянной, а является переменным параметром, зависящим от диаметра трубы. По Ф. А. Шевелеву

$$\alpha = \frac{0,337}{d^{0,08}},$$

поэтому

$$\frac{u_{\max} - u}{u_*} = 2,97 d^{0,08} \ln \frac{r}{y}. \quad (3.20)$$

Уточненная Ф. А. Шевелевым логарифмическая формула (3.20) не дает вполне правильного распределения скоростей по всему сечению. Например, на оси трубы градиент скорости $\frac{du}{dy}$ должен быть равен нулю, формула (3.20) этого не дает. Однако в средней зоне на некотором расстоянии от оси трубы и от стенок эта формула дает приблизительно верную форму эпюры осредненных скоростей, совпадающую с данными опытов.

Кроме логарифмической формулы для характеристики распределения скоростей в трубах пользуются и так называемой степенной формулой, имеющей вид

$$u = u_{\max} \left(\frac{y}{r} \right)^k, \quad (3.21)$$

где u — скорость на расстоянии y от стенки трубы; u_{\max} — скорость на оси; k — показатель степени, изменяющийся от 0,25 для шероховатых труб до 0,10 для гладких труб.

Формула (3.21) дает на оси трубы излом в эпюре распределения скоростей и не дает прямой связи между распределением скоростей и коэффициентом гидравлического трения λ и поэтому весьма неудобна для определения коэффициента λ .

3.7. Потери напора на трение в трубах при турбулентном режиме

Точного вывода величины коэффициента гидравлического трения по длине для турбулентного потока не имеется. Так как в инженерной практике значительно чаще приходится иметь дело с турбулентным режимом, при котором потери напора пропорциональны приблизительно квадрату скорости, то можно предположить, что касательные напряжения при турбулентном течении потока определяются следующей формулой:

$$\tau = A\rho v^2, \quad (3.22)$$

где A — безразмерный коэффициент.

С другой стороны, касательные напряжения на стенках определяются из уравнения равномерного движения (3.5)

$$\tau = \rho g R I. \quad (3.23)$$

Приравняв значения τ по формулам (3.22) и (3.23), сокращая на ρ и решая относительно скорости v , получим

$$v = \sqrt{\frac{g}{A}} \sqrt{R I} = C \sqrt{R I}. \quad (3.24)$$

Эта формула называется формулой Шези по имени французского ученого, который предложил ее для открытых русел в 1775 г. В этой формуле C называется *скоростным множителем*, или *коэффициентом Шези*.

Следует твердо помнить, что скоростной множитель C имеет размерность квадратного корня из ускорения — $[C] = L^{0,5}/T$. Это ясно из формулы (3.24), так как A — величина безразмерная.

Используя соотношение $Q = \omega v$, можно переписать формулу Шези для расхода

$$Q = \omega C \sqrt{RI}. \quad (3.25)$$

Для труб и каналов в условиях равномерного движения жидкости $\omega = \text{const}$ и $R = \text{const}$, поэтому формулы (3.24) и (3.25) используются в виде:

$$v = W \sqrt{I}; \quad (3.26)$$

$$Q = K \sqrt{I}, \quad (3.27)$$

где W — скоростная характеристика, $W = C\sqrt{R}$; K — расходная характеристика, $K = \omega C\sqrt{R}$.

Полученные характеристики имеют четкий физический смысл: W — это средняя скорость движения потока при гидравлическом уклоне, равном единице; K — это расход потока при гидравлическом уклоне, равном единице.

При изучении движения жидкости в трубопроводах французские инженеры Дарси и Базен установили, что потери напора зависят от состояния стенок и пропорциональны величине скоростного напора $\frac{v^2}{2g}$. В этом случае, заменяя в формуле гидравлический радиус $R = d/4$ и гидравлический уклон $I = h_l/l$ и решая относительно потери напора по длине h_l , получим

$$h_l = \frac{4}{C^2} \frac{l}{d} v^2 = \frac{8g}{C^2} \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}. \quad (3.28)$$

Из формулы (3.28) видно, что два коэффициента: коэффициент Шези C и коэффициент гидравлического трения λ — взаимно связаны, зная один из них, нетрудно найти другой:

$$\lambda = \frac{8g}{C^2} \quad \text{или} \quad C = \sqrt{\frac{8g}{\lambda}}. \quad (3.29)$$

До середины XVIII в. считали, что величины λ (или C) должны быть постоянными числами. Но практика показывала, что это неверно, и требовала более углубленной проработки вопроса. Изучению зависимости коэффициента гидравлического трения λ в

трубах от определяющих параметров было посвящено много экспериментальных работ. Наиболее значительные из них это исследования Никурадзе (1933 г.), А. П. Зегжды (1933 г.), Н. Ф. Федорова (1952 г.), Ф. А. Шевелева (1953 г.), А. Д. Альтшуля (1970 г.).

Никурадзе, проводя свои опыты, создавал шероховатость, наклеивая зерна песка определенной величины на стенку трубы, принимая за абсолютную шероховатость диаметры зерен песка.

Данные своих опытов Никурадзе изобразил на графике, где по оси абсцисс откладывались логарифмы величин $Re = \frac{vd}{\nu}$ (чисел Рейнольдса), а по оси ординат — логарифмы 100λ при различных значениях относительной гладкости r/Δ от 15 до 507.

Такой график позволяет наметить те основные зоны, которые характеризуют движение жидкости по трубам той или иной шероховатости с различными средними скоростями движения (рис. 3.10).

При $Re < 2300$ на графике наблюдается первая область — ламинарного режима (I). Она характеризуется уравнением $\lambda = 64/Re$, здесь экспериментальные точки, найденные при различных значениях $\frac{r}{\Delta}$, ложатся на одну прямую линию (см. рис. 3.10).

При $3,3 < \lg Re < 3,6$ наблюдается область, характеризуемая скачкообразным переходом ламинарного режима в турбулентный. Эта область не имеет практического значения и не характеризуется какой-либо формулой.

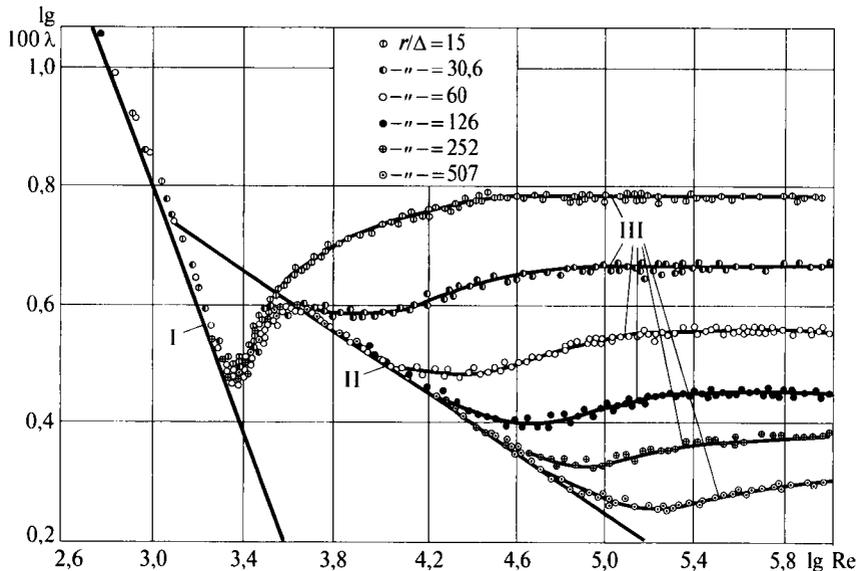


Рис. 3.10

Вторая область — область труб с гладкими стенками. Эта область изображается кривыми, зависящими только от числа Рейнольдса. Тип формулы для λ в этой зоне имеет вид

$$\lambda = \frac{a}{\text{Re}^n} \quad \text{или} \quad \lambda = \frac{1}{(m \lg a \text{Re})^2}.$$

Понятие о гладкости — до известной степени понятие условное. Так, при малых числах Рейнольдса труба может считаться гладкой, а при больших числах Рейнольдса эта же труба может вести себя как шероховатая. Это видно на графике (см. рис. 3.10), где кривая III для гладких труб переходит в прямую, параллельную оси абсцисс, т.е. величина λ становится не зависимой от чисел Рейнольдса.

Трубы называются гидравлически гладкими, когда толщина ламинарной пленки у стенки δ_l больше абсолютной шероховатости Δ . В этом случае шероховатость скрыта под ламинарной пленкой и не влияет на движение. С увеличением числа Re ламинарная пленка становится тоньше, и, когда шероховатость полностью «обнажается», т.е. начинает омываться турбулентным ядром потока, труба становится гидравлически шероховатой.

Третья область называется переходной от области гладких стенок к области совершенно шероховатых стенок (III). Она характеризуется формулами вида

$$\lambda = f\left(\text{Re}, \frac{r}{\Delta}\right),$$

где Δ — абсолютная шероховатость.

Четвертая область — область вполне шероховатых труб; она характеризуется формулами вида

$$\lambda = f\left(\frac{r}{\Delta}\right)$$

и на рис. 3.10 изображается линиями, параллельными оси абсцисс. Эту область называют квадратичной, или автомодельной, областью.

В реальных трубопроводах фактическая высота выступов шероховатости неодинакова, поэтому вводится понятие эквивалентной шероховатости Δ_e , т.е. такой равномерной шероховатости, которая дает при расчетах одинаковое с фактической шероховатостью значение коэффициента гидравлического трения λ .

При турбулентном режиме движения для определения коэффициентов λ и C предложено большое количество расчетных формул. Некоторые из них, получившие наибольшее распространение при расчете систем водоснабжения и водоотведения, приведены

далее. Здесь же даются условия по выбору формул в зависимости от области сопротивления.

Область гидравлически гладких труб, шероховатость стенок труб не влияют на гидравлические сопротивления и коэффициент гидравлического трения. Эта область существует в диапазоне чисел Рейнольдса $Re_{кр} < Re < 20 \frac{d}{\Delta_3}$, где Δ_3 — эквивалентная шероховатость. Наибольшее распространение получила формула Блазиуса

$$\lambda = \frac{0,3164}{Re^{0,25}}. \quad (3.30)$$

Переходная область гидравлического сопротивления наблюдается при числах Рейнольдса в диапазоне $20 \frac{d}{\Delta} < Re < 500 \frac{d}{\Delta}$. Здесь наиболее употребительны следующие закономерности.

Формула Шевелева

$$\lambda = b(1 + a/v)^n d^{-m}, \quad (3.31)$$

в которой значения параметров b , a , n , m в зависимости от применяемых труб даны в табл. 3.1.

Гидравлический расчет самотечных и напорных сетей водоотведения в рассматриваемой зоне сопротивления осуществляется по формуле Федорова

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \lg \left(\frac{\Delta_3}{13,68R} + \frac{a_2}{Re} \right), \quad (3.32)$$

где a_2 — безразмерный коэффициент, учитывающий шероховатость труб. Величины Δ_3 и a_2 находятся их табл. 3.2.

Формула Альтшуля

$$\lambda = 0,11 \left(\frac{\Delta_3}{d} + \frac{68}{Re} \right)^{0,25}. \quad (3.33)$$

Таблица 3.1

Трубы	a	b	n	m
Новые стальные	0,684	0,0159	0,226	0,226
Новые чугунные	2,360	0,0144	0,284	0,284
Неновые стальные и чугунные при $v < 1,2$ м/с	0,867	0,0179	0,300	0,300
Асбестоцементные	3,510	0,0110	0,190	0,190

Таблица 3.2

Трубы, каналы, лотки	Δ_3 , мм	a_2	n
Керамические	1,35	90	0,013
Бетонные и железобетонные	2,00	100	0,014
Бетонные и железобетонные с гладкой затиркой	0,80	50	0,013
Асбестоцементные	0,60	73	0,012
Чугунные	1,00	83	0,013
Стальные	0,80	79	0,012
Кирпичные	3,15	110	0,015

Область гидравлически шероховатых труб имеет место в области чисел Рейнольдса $Re > 500 \frac{d}{\Delta_3}$. В этой области коэффициент гидравлического трения определяется по формулам:

для неновых стальных и чугунных труб при $v > 1,2$ м/с по формуле Шевелева

$$\lambda = \frac{0,021}{d^{0,3}}; \quad (3.34)$$

при использовании формулы Шези коэффициент Шези устанавливается по формуле Павловского

$$C = \frac{1}{n} R^y, \quad (3.35)$$

где n — коэффициент шероховатости, определяемый в зависимости от материалов стенок труб и каналов; y — показатель степени:

$$y = 2,5\sqrt{n} - 0,13 - 0,75\sqrt{R}(\sqrt{n} - 0,10). \quad (3.36)$$

3.8. Местные сопротивления

Местные сопротивления вызываются фасонными частями, арматурой и другим оборудованием трубопроводных сетей. Это оборудование вызывает изменение величины или направления скорости движения жидкости на отдельных участках трубопровода (при расширении или сужении потока, в результате его поворота, при протекании потока через диафрагмы, задвижки и т.д.), что всегда связано с появлением дополнительных потерь напора.

В водопроводных трубах потери напора на местные сопротивления обычно весьма невелики, составляя не более 10...20 % от потерь напора на трение. В воздухопроводах вентиляционных и пневмотранспортных установок, в дутьевых установках котельных потери на преодоление местных сопротивлений часто значительно больше потерь напора на трение. Местные сопротивления являются весьма существенными также при расчете паропроводов.

Величину потери напора, затраченной на преодоление какого-либо местного сопротивления, принято оценивать в долях от скоростного напора, соответствующего скорости непосредственно за рассматриваемым местным сопротивлением, т. е. определять ее из формулы

$$h_m = \zeta \frac{v^2}{2g}, \quad (3.37)$$

где ζ — называется коэффициентом местного сопротивления.

Коэффициенты различных местных сопротивлений находятся, как правило, опытным путем. Таблицы значений этих коэффициентов (или эмпирические кривые и формулы для них) содержатся во всех инженерных справочниках и руководствах по гидравлике. Для некоторых практически важных случаев значения коэффициентов местных сопротивлений удалось получить также теоретическим путем.

Иногда местные потери напора выражают в виде эквивалентной длины $l_{\text{эkv}}$ прямого участка трубопровода, сопротивление трения которого по величине равно рассматриваемым местным потерям напора, т. е. используя условие

$$\lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} = \zeta \frac{v^2}{2g},$$

или

$$l_{\text{эkv}} = \frac{\zeta d}{\lambda}. \quad (3.38)$$

Коэффициент гидравлического трения λ , как уже было выяснено, зависит от числа Рейнольдса и относительной шероховатости, поэтому одному и тому же значению коэффициента местного сопротивления ζ в общем случае соответствует различное значение эквивалентной длины. Лишь в квадратичной области сопротивления, когда λ не зависит от числа Рейнольдса, эквивалентная длина заданного местного сопротивления постоянна.

Основные виды местных потерь напора можно условно разделить на следующие группы:

потери, связанные с изменением сечения потока (или средней скорости потока). Сюда относятся различные случаи входа жидкости в трубу, выхода жидкости в резервуар, внезапного рас-

ширения, сужения, а также постепенного расширения и сужения потока;

потери, вызванные изменением направления потока. Здесь рассматриваются различного рода повороты, колена, угольники, отводы, используемые на трубопроводах;

потери, связанные с протеканием жидкости через арматуру различного типа (вентили, краны, обратные клапаны, сетки, отборы, дроссели-клапаны и т.п.);

потери, связанные с делением или слиянием потоков. Это, например, тройники, крестовины и отверстия в боковых стенках трубопроводов при наличии транзитного расхода.

Рассмотрим потери напора на местные сопротивления по указанным группам.

Потери напора, связанные с изменениями сечения потока. Рассмотрение местных сопротивлений целесообразно начать со случая, который часто встречается на практике, когда трубопровод внезапно расширяется от диаметра d_1 до диаметра d_2 . (рис. 3.11). Как показывают наблюдения, поток, выходящий из узкой трубы, не сразу заполняет все поперечное сечение широкой трубы; жидкость в месте расширения отрывается от стенок и дальше движется в виде свободной струи, отделенной от остальной жидкости поверхностью раздела. Поверхность раздела неустойчива, на ней возникают вихри, в результате чего происходит перемешивание транзитной струи с окружающей жидкостью. Струя постепенно расширяется, пока, наконец, на некотором расстоянии l от начала расширения не заполняет все сечение широкой трубы.

В кольцевом пространстве между струей и стенками трубы жидкость находится в вихревом движении: жидкость из этой зоны вовлекается в центральную струю; с другой стороны жидкость из центральной струи попадает в вихревую зону. Благодаря отрыву потока и связанному с ним вихреобразованию на участке трубы между сечениями 1—1 и 2—2 происходят значительные потери напора.

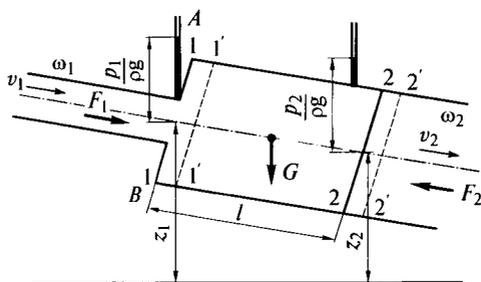


Рис. 3.11

Найдем величину этих потерь. Обозначим средние скорости течения в сечениях 1—1 и 2—2 через v_1 и v_2 , а давление через p_1 и p_2 . Давление на торцевой стенке AB , как показывает опыт, практически равно давлению на выходе из узкой части трубы, т. е. равняется p_1 .

По уравнению Бернулли потери напора между сечениями 1—1 и 2—2 (если положить $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$):

$$h_{\text{вн.р}} = \frac{p_1}{\rho g} - \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} - \frac{v_2^2}{2g}. \quad (3.39)$$

Из теоремы количества движения для тех же двух сечений можно получить

$$(p_1 - p_2)\omega_2 = Q\rho(v_2 - v_1) \quad (3.40)$$

(учитывая, что участок растекания потока 1—2 имеет малую длину, силами трения в этом уравнении можно пренебречь).

Разделив обе части уравнения (3.40) на ρg , получим

$$\left(\frac{p_1 - p_2}{\rho g}\right)\omega_2 = \frac{v_2\omega_2}{g}(v_2 - v_1),$$

или

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho g} = \frac{2v_2^2}{2g} - \frac{v_2v_1}{g}. \quad (3.41)$$

Подставляя (3.41) в уравнение Бернулли (3.39), найдем

$$h_{\text{вн.р}} = \frac{2v_2^2}{2g} - \frac{v_2v_1}{g} + \frac{v_1^2}{2g} - \frac{v_2^2}{2g} = \frac{v_2^2}{2g} - \frac{2v_2v_1}{2g} + \frac{v_1^2}{2g},$$

или

$$h_{\text{вн.р}} = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g}. \quad (3.42)$$

Отсюда следует, что потери напора при внезапном расширении равны скоростному напору от потерянной скорости. Этот результат называется теоремой или формулой Борда. Формулу (3.42) можно привести к виду

$$h_{\text{вн.р}} = \left(1 - \frac{v_2}{v_1}\right)^2 \frac{v_1^2}{2g} = \zeta_1 \frac{v_1^2}{2g}.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае

$$\zeta_1 = \left(1 - \frac{v_2}{v_1}\right)^2 = \left(1 - \frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2.$$

Если отнести коэффициент сопротивления к скорости в широкой трубе, то получим

$$h_{\text{вн.р}} = \zeta_2 \frac{v_2^2}{2g} = \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} - 1 \right)^2 \frac{v_2^2}{2g}.$$

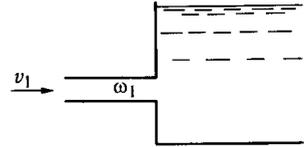


Рис. 3.12

Выход из трубы в резервуар показан на рис. 3.12. Считая поперечные размеры резервуара больше, чем сечения трубы, и полагая $v_2 = 0$, из формулы (3.42) получим

$$\zeta_{\text{вых}} = 1. \quad (3.43)$$

На рис. 3.13 изображено внезапное сужение трубы. В этом случае сопротивление зависит только от соотношения площадей потока (диаметров сечений) узкой и широкой частей трубы. Для расчета используется формула Идельчика:

$$\zeta_{\text{вн.с.}} = 0,5 \left(1 - \frac{d_2^2}{d_1^2} \right). \quad (3.44)$$

На рис. 3.14 показан вход в трубу из резервуара. Полагая сечение резервуара больше, чем сечение трубопровода, из формулы (3.44) получим

$$\zeta_{\text{вх}} = 0,5. \quad (3.45)$$

Если вход в трубу имеет закругленные кромки (рис. 3.14, б), то сопротивление его снижается до $\zeta_{\text{вх}} = 0,2$, а при весьма плавном входе до $\zeta_{\text{вх}} = 0,05$. В случае скошенных кромок (рис. 3.14, в) при входе потока $\zeta_{\text{вх}} = 0,15$. При выпущенном в резервуар конце трубы (рис. 3.14, г) сопротивление зависит от размеров трубы и глубины, на которую выпущена труба. Значения коэффициента сопротивления в зависимости от значений δ/d и b/d приведены в табл. 3.3.

На рис. 3.15 показано плавное расширение и сужение потоков (диффузор и конфузор), иногда такие сопротивления называют



Рис. 3.13

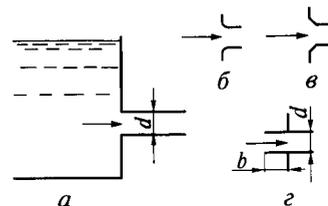


Рис. 3.14

Таблица 3.3

δ/d	Значение ζ при b/d				
	0	0,002	0,01	0,05	0,50
0	0,50	0,57	0,63	0,80	1,00
0,008	0,50	0,53	0,58	0,74	0,88
0,016	0,50	0,51	0,53	0,58	0,77
0,024	0,50	0,50	0,51	0,53	0,68
0,030	0,50	0,50	0,51	0,52	0,61
0,050	0,50	0,50	0,50	0,50	0,53

переходами. Коэффициент сопротивления плавного расширения потока (диффузора) определяется по формуле

$$\zeta = \frac{\lambda}{2 \sin(\alpha/2)} \frac{n^2 - 1}{n^2} + \sin \alpha \left(\frac{n-1}{n} \right)^2. \quad (3.46)$$

При плавном сужении потока (конфузоре) коэффициент сопротивления находится по формуле

$$\zeta = \frac{\lambda}{2 \sin(\alpha/2)} \frac{n^2 - 1}{n^2}, \quad (3.47)$$

где λ — коэффициент гидравлического трения; α — угол конусности; n — степень расширения (сужения) рассматриваемой конструкции, $n = \omega_1/\omega_2$.

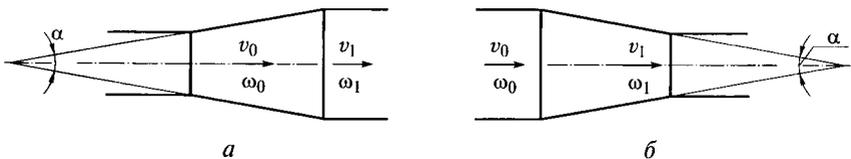


Рис. 3.15



Рис. 3.16

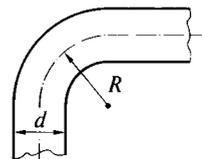


Рис. 3.17

Таблица 3.4

d , мм	20	25	34	39	49
ζ_{90}	1,7	1,3	1,1	1,0	0,83

Различают резкий поворот (рис. 3.16) и плавный поворот (рис. 3.17) трубы. При резком повороте трубы круглого сечения

$$\zeta = \zeta_{90} (1 - \cos \alpha), \quad (3.48)$$

где ζ_{90} — коэффициент сопротивления при угле поворота в 90° , его значения зависят от диаметра трубы и указаны в табл. 3.4.

При плавном повороте трубы круглого сечения

$$\zeta_\alpha = \zeta_{90} a, \quad (3.49)$$

где $\zeta_{90} = (0,2 + 0,001(100\lambda)^3) \sqrt{d/R}$; a — коэффициент, зависящий от угла поворота, указанный в табл. 3.5.

На рис. 3.18 изображена схема задвижки. Величины коэффициентов сопротивления зависят от степени открытия задвижки, эти данные приведены в табл. 3.6.

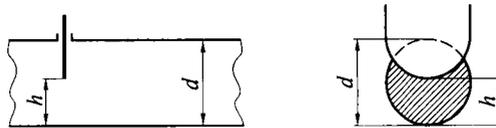


Рис. 3.18

Таблица 3.5

α	20	30	40	50	60	70	80
a	0,40	0,55	0,65	0,75	0,83	0,88	0,95
α	90	100	120	140	160	180	
a	1,00	1,05	1,13	1,20	1,27	1,33	

Таблица 3.6

Открытие h/d	1	7/8	6/8	5/8	4/8	3/8	2/8	1/8
$\omega_{отк}/\omega$	1,0	0,948	0,856	0,740	0,609	0,466	0,315	0,159
ζ	0	0,07	0,26	0,81	2,06	5,52	17,0	97,8

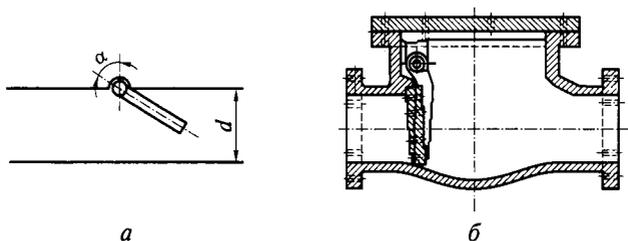


Рис. 3.19

На рис. 3.19 показан обратный клапан. Значения коэффициентов сопротивления обратного клапана определяются углом его открытия α , указанным в табл. 3.7.

Для всасывающего клапана с сеткой принимается $\zeta = 5 \dots 10$.

На рис. 3.20 изображена схема вентиля. Коэффициент сопротивления вентиля определяется для полностью открытого вентиля и зависит от его конструкции: для вентиля с прямым шпинделем (рис. 3.20, а) $\zeta_{\text{в}} = 3,0 \dots 5,5$; для вентиля с наклонным шпинделем (рис. 3.20, б) $\zeta_{\text{в}} = 1,4 \dots 1,85$.

При определении коэффициентов сопротивления тройников прежде всего надо знать распределение потоков. Здесь различают разделение потоков (рис. 3.21, а), когда подходящий поток разделяется на два: поток, идущий на ответвление, и поток, идущий транзитом, и соединение потоков (рис. 3.21, б), когда сливаются два потока: поток, идущий по стволу тройника, и поток, подходящий из ответвления. Потеря напора при этом определяется по формулам:

$$h_{\text{отв}} = \zeta_{\text{отв}} \frac{v_{\text{об}}^2}{2g}; \quad h_{\text{тр}} = \zeta_{\text{тр}} \frac{v_{\text{об}}^2}{2g}, \quad (3.50)$$

где индекс $\zeta_{\text{отв}}$ — коэффициент сопротивления потоку в ответвлении; $\zeta_{\text{тр}}$ — коэффициент сопротивления транзитному потоку; $v_{\text{об}}$ — скорость суммарного (объединенного) потока.

Таблица 3.7

α	70	65	60	55	50	45	40	35	30	25	20	15
ζ	1,7	2,3	3,2	4,6	6,6	9,5	14	20	30	42	62	90

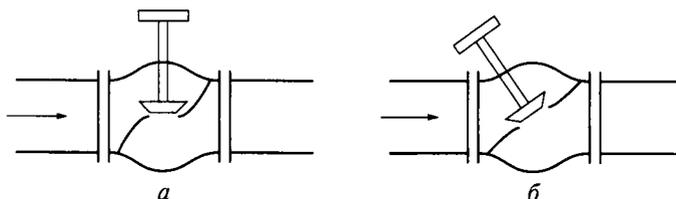


Рис. 3.20

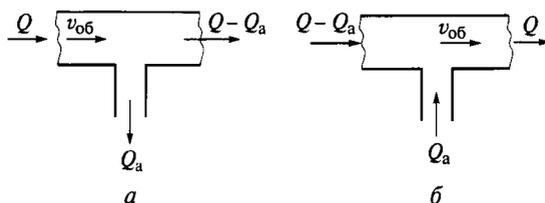


Рис. 3.21

В табл. 3.8 приводятся значения коэффициентов сопротивления для разделения потоков, а в табл. 3.9 — для соединения потоков. Эти коэффициенты зависят еще и от соотношения расходов потоков Q_a/Q , где Q_a — расход потока в ответвлении; Q — суммарный расход тройника.

Приведенные рекомендации относятся к развитому турбулентному течению жидкости с большими числами Рейнольдса, т.е. при незначительном влиянии вязкости на коэффициенты местных сопротивлений. При малых числах Рейнольдса на величины коэффициентов местных сопротивлений, как и на величины коэффициентов гидравлического трения, влияют силы вязкостного трения. Учитывать это влияние можно по формуле Альтшуля:

$$\zeta = \frac{A}{\text{Re}} + \zeta_{\text{кв}}, \quad (3.51)$$

где $\zeta_{\text{кв}}$ — коэффициент рассматриваемого местного сопротивления, определенный по приведенным ранее рекомендациям; A — коэффициент, определяемый для различных местных сопротивлений:

Внезапное расширение	30
Пробочный кран	150
Вентиль обыкновенный	3000
Шаровой клапан	5000
Колено 90°	600
Тройник	150
Задвижка при полном открытии	75
Конфузор	3200
Вентили при полном открытии	100...250

При наличии на трубопроводе последовательно нескольких местных сопротивлений обычно потери напора на них складыва-

Таблица 3.8

Q_a/Q	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$\zeta_{\text{отв}}$	0,95	0,88	0,89	0,95	1,10	1,28
$\zeta_{\text{тр}}$	0,04	-0,08	-0,05	0,07	0,21	0,35

Таблица 3.9

Q_u/Q	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$\zeta_{отв}$	-1,20	-0,40	0,08	0,47	0,72	0,01
$\zeta_{тр}$	0,04	0,17	0,30	0,41	0,51	0,60

ются. Однако при относительно небольших расстояниях между сопротивлениями общая потеря напора может отличаться от суммы потерь. Это объясняется тем, что поток после первого сопротивления не успевает стабилизироваться до второго сопротивления, т.е. эпюра скоростей не успевает восстановиться после деформации на первом сопротивлении. Расстояние, на котором сказывается взаимное влияние местных сопротивлений, можно определить по формуле Альтшуля:

$$l_{вл} = 0,5d \frac{\zeta_{кв}}{\lambda}. \quad (3.52)$$

Приближенно $l_{вл} = (40 \dots 60)d$.

Общая потеря напора от близко расположенных местных сопротивлений, как правило, не равна простой сумме потерь от отдельных сопротивлений. Поскольку суммарный коэффициент сопротивления меньше арифметической суммы частных коэффициентов, то на практике применяют простое суммирование потерь, что дает некоторый запас в расчетах.

ИСТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ ЧЕРЕЗ ОТВЕРСТИЯ И НАСАДКИ. РАСЧЕТ КОРОТКИХ ТРУБОПРОВОДОВ

4.1. Классификация гидравлических систем по сопротивлениям

Как было показано в гл. 3, движение реальной жидкости сопровождается потерей энергии на преодоление сопротивлений. В зависимости от преобладания и соотношения видов потерь энергии потоком — на местные сопротивления, на трение по длине или на то и другое — движение жидкости бывает трех различных видов.

1. При истечении жидкости через отверстия в стенках сосудов или резервуаров поток теряет энергию только на преодоление местных сопротивлений в отверстиях и добавочный член уравнения Бернулли h_m будет иметь вид

$$h_m = \sum \zeta \frac{v^2}{2g}.$$

2. При движении жидкости через короткие трубопроводы (к которым относятся всасывающие трубы насосов, сифоны, короткие участки напорных водоводов с большим количеством колен, задвижек, клапанов, напорные трубы под насыпями дорог) происходят как потери на преодоление местных сопротивлений $\zeta \frac{v^2}{2g}$,

так и на трение по длине $\lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}$, причем оба вида потерь оказываются существенными для расчетов:

$$h_c = \sum h_m + \sum h_l.$$

3. При движении жидкостей в длинных трубопроводах и каналах удельный вес потерь напора на преодоление местных сопротивлений очень мал (2...3 %) по сравнению с потерями напора на трение по длине, и поэтому местные потери из расчета практически можно исключить или учесть их, вводя некоторый запас в конечные результаты:

$$h_c = a \sum h_l,$$

где a — коэффициент, учитывающий потери напора на местные сопротивления.

В настоящей главе рассмотрены первые два случая движения потока при истечении через отверстия и насадки, а также через короткие трубопроводы, часто встречающиеся на практике.

4.2. Истечение через малое отверстие в тонкой стенке

Отверстие считается малым, если его вертикальный размер значительно (в 5—10 раз) меньше глубины погружения отверстия под уровень сосуда, из которого происходит вытекание жидкости. Стенка считается тонкой, если вытекающая струя соприкасается лишь с кромкой отверстия, обращенной внутрь сосуда, и не касается боковой поверхности отверстия. Это будет при толщине стенки не более 2,5 диаметра отверстия. Абсолютные же размеры отверстия и толщина стенки не имеют значения.

Если в боковой стенке или в дне сосуда с жидкостью на глубине H под уровнем имеется круглое отверстие диаметром d и площадью ω , то через него под действием напора будет вытекать струя жидкости (рис. 4.1).

На некотором расстоянии от отверстия, близком к $d/2$, вытекающая струя получает сжатие поперечного сечения, происходящее из-за непараллельности линий токов подходящего из сосуда к отверстию потока и характеризующее уменьшением диаметра и сечения струи до величины $\omega_c = \epsilon\omega$, где ω_c — площадь сечения струи в сжатом сечении (рис. 4.1, б).

Отношение $\frac{\omega_c}{\omega} = \frac{d_c^2}{d^2} = \epsilon$ называется *коэффициентом сжатия*

струи.

Для определения скорости и расхода вытекающей через отверстие жидкости выберем два сечения: сечение 0—0 на уровне свободной поверхности в сосуде и сечение 1—1 в сжатом сечении струи, где движение вновь становится плавноизменяющимся, и применим к ним уравнение Бернулли для потока, проведя ось отсчета через центр отверстия:

$$H + \frac{p_0}{\rho g} + \frac{\alpha_0 v_0^2}{2g} = \frac{p}{\rho g} + \frac{\alpha v^2}{2g} + \zeta_{\text{отв}} \frac{v^2}{2g},$$

где H — напор воды в резервуаре; p_0 — давление на свободной поверхности в сосуде; v_0 — скорость движения воды в сечении

0—0; p — давление среды, в которую вытекает струя; $\zeta_{\text{отв}} \frac{v^2}{2g}$ —

потеря напора при истечении из отверстия ($\zeta_{\text{отв}}$ — коэффициент сопротивления отверстия).

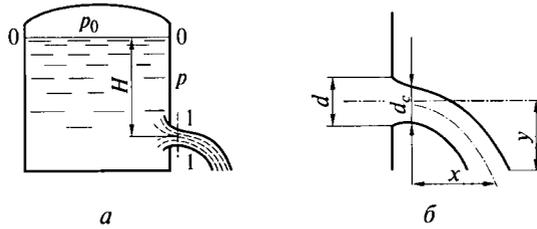


Рис. 4.1

Величину $H + \frac{p_0 - p}{\rho g} + \frac{\alpha_0 v_0^2}{2g}$ обозначим H_0 . Эта величина называется напором истечения.

Если сосуд имеет размеры, большие чем отверстие, то скорость частиц в нем v_0 при истечении жидкости очень мала и членом $\frac{\alpha_0 v_0^2}{2g}$ можно пренебречь. В этом случае можно принять

$$H_0 = H + \frac{p_0 - p}{\rho g}.$$

Из уравнения Бернулли получаем $H_0 = \frac{v^2}{2g} (\alpha + \zeta_{\text{отв}})$, откуда

$$v = \sqrt{\frac{1}{\alpha + \zeta_{\text{отв}}} \sqrt{2gH_0}}.$$

Величина $\sqrt{\frac{1}{\alpha + \zeta_{\text{отв}}}} = \varphi$ называется *коэффициентом скорости*, так как $\alpha > 1$ и вследствие потерь на трение в отверстии коэффициент скорости меньше единицы и составляет для воды $\varphi = 0,97 \dots 0,98$. Как показывают опыты и теоретические расчеты, скорости в сжатом сечении струи почти одинаковы; это позволяет принять для сжатого сечения струи $\alpha = 1$. Тогда имеем

$$\varphi = \sqrt{\frac{1}{1 + \zeta_{\text{отв}}}}.$$

Для идеальной жидкости $\alpha = 1$, $\zeta_{\text{отв}} = 0$ и скорость истечения запишется в виде

$$v = \sqrt{2gH_0}. \quad (4.1)$$

Эта формула называется формулой Торичелли. Она совпадает с известной из механики формулой скорости свободного падения тела без сопротивления с высоты H_0 . Для определения расхода,

вытекающего через отверстие, умножим скорость истечения на площадь сжатого сечения:

$$Q = \omega_c v = \varepsilon \varphi \omega \sqrt{2gH_0}.$$

Обозначив произведение коэффициентов сжатия ε и скорости φ через μ и назвав его *коэффициентом расхода*, окончательно получим

$$Q = \mu \omega \sqrt{2gH_0}. \quad (4.2)$$

Значение коэффициента расхода для истечения воды из отверстия в тонкой стенке зависит главным образом от степени сжатия струи. При всестороннем совершенном сжатии (см. далее) $\varepsilon \approx 0,64$, поэтому в среднем $\mu = \varepsilon \varphi = 0,64 \cdot 0,97 = 0,62$.

При увеличении размеров отверстия и напора величина коэффициента расхода уменьшается и колеблется в пределах $\mu = 0,59 \dots 0,63$. Значения коэффициентов расхода, скорости и сжатия приведены в приложении 1.

Изменение вязкости воды с повышением температуры мало влияет на коэффициент расхода для воды. Так, по опытным данным при повышении температуры с 16 до 90° коэффициент расхода увеличивается на 4%.

Если давление на свободной поверхности в сосуде и давление внешней среды равны $p_0 = p$, а также если можно пренебречь скоростью движения воды в сосуде, то напор истечения будет $H_0 = H$. Последний случай весьма распространен в практике, в частности в задачах об истечении из больших открытых сосудов в атмосферу.

Когда истечение происходит не в газовую среду, а под уровень (рис. 4.2), то, применив уравнение Бернулли, мы для расхода получим формулу

$$Q = \mu \omega \sqrt{2g \left(H_1 - H_2 + \frac{p_0 - p}{\rho g} \right)}, \quad (4.3)$$

где H_1 и H_2 — геометрические напоры с двух сторон отверстия.

Из формулы (4.3) можно установить, что величина расхода через затопленное отверстие не зависит от положения самого отверстия в пределах глубины H_2 и определяется лишь площадью отверстия ω и напором истечения H_0 , который в данном случае находится по формуле

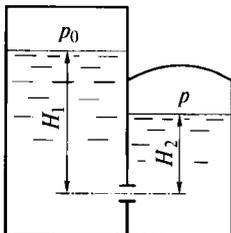


Рис. 4.2

$$H_0 = H_1 - H_2 + \frac{p_0 - p}{\rho g}.$$

При равенстве давлений в обоих сосудах $H_0 = H_1 - H_2$.

В зависимости от формы отверстия, через которое происходит истечение, форма поперечного сечения струи имеет самый разнообразный вид (рис. 4.3). Так, например, поперечное сечение струи, вытекающей через квадратное отверстие, имеет вид креста с четырьмя тонкими ребрами. При истечении через

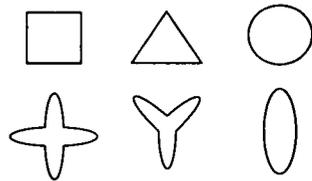


Рис. 4.3

треугольное отверстие сечение струи приобретает форму с тремя тонкими ребрами, а через круглое — эллиптическую. Это явление называется инверсией струи. Явление инверсии струи объясняется различными условиями сжатия по периметру отверстий, а также влиянием поверхностного натяжения жидкости.

Форма вытекающей струи в вертикальной плоскости (см. рис. 4.1, б) определяется уравнениями

$$x = vt; \quad y = \frac{gt^2}{2},$$

где $v = \varphi\sqrt{2gH_0}$; t — время.

Исключая t , получим уравнение $x^2 = 4\varphi^2 H_0 y$, т.е. уравнение параболы. В зависимости от расположения отверстия на вертикальной стенке сосуда относительно дна и боковых стенок сжатие струи происходит в различной степени.

Объясняется это тем, что частицы жидкости в сосуде подходят к отверстию со всех сторон и часть из них, опускаясь сверху или подходя сбоку или снизу, движется по криволинейным траекториям, направленным к центру отверстия. Стремясь по инерции продолжать движение к оси струи, они вызывают ее сжатие (см. рис. 4.1, а). Если же отверстие находится, например, у самого дна, то траектории движения частиц, притекающих вдоль дна, будут горизонтальны и выходящая струя не будет иметь сжатия снизу. Если отверстие граничит с боковой стенкой, то под влиянием последней струя не будет иметь сжатия со стороны этой боковой стенки. Если же отверстие не граничит со стенкой, но находится близко от нее, близость стенки также будет влиять на степень сжатия струи, но тем меньше, чем дальше отверстие от этой стенки.

Различают два вида сжатия: полное (или всестороннее) сжатие, при котором струя сжимается по всему периметру отверстия; неполное сжатие, при котором на части периметра отверстия струя сжатия не получает.

Полное сжатие разделяется на совершенное и несовершенное.

Совершенное сжатие струи бывает, когда расстояние от любой стороны отверстия до боковой или донной стенки резервуара будет не меньше тройного размера отверстия в направлении измеряемого расстояния (рис. 4.4), т.е. $l_1 > 3b$ и $l_2 > 3a$. При этом боковые стенки на сжатие не влияют.

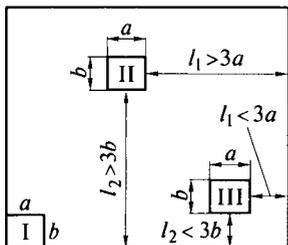


Рис. 4.4

Несовершенное сжатие наблюдается при более близком расположении отверстия к направляющим стенкам и дает некоторое увеличение коэффициента сжатия ϵ и коэффициента расхода μ .

Неполное сжатие еще сильнее увеличивает коэффициент расхода μ . При неполном сжатии коэффициент расхода можно определить по предложенной Н. Н. Павловским формуле

$$\mu_{\text{н}} = \mu \left(1 + 0,4 \frac{p}{\chi} \right),$$

где μ — коэффициент расхода отверстия при полном сжатии; p — периметр всего отверстия; χ — периметр части отверстия, на которой отсутствует сжатие.

Для несовершенного сжатия коэффициент расхода $\mu_{\text{нес}}$ может быть определен по формуле

$$\mu_{\text{нес}} = \mu (1 + k),$$

где k зависит от величины соотношения ω/Ω , в котором ω — площадь отверстия, а Ω — площадь поперечного сечения потока перед отверстием. Значения коэффициента k (при $\omega/\Omega = 0,50$) для прямоугольного отверстия $k = 0,15$, для круглого $k = 0,13$.

4.3. Истечение из больших отверстий

При определении расхода, вытекающего через прямоугольные отверстия больших размеров, встречающихся в плотинах, водозаборах, насосных станциях (рис. 4.5), было бы неточным применять формулу (4.2), так как при ее выводе скорость истечения определялась по среднему напору H_0 над центром отверстия.

При отверстиях большого размера по сравнению с их заглублением определение расхода по средней скорости ведет к некоторой ошибке.

Скорости по высоте отверстия распределяются по параболической кривой с уравнением $v = \sqrt{2gH_0}$, и скорость, соответствующая центру отверстия, не является средней скоростью для всего отверстия. Обозначим вертикальный размер отверстия через a , а напор в его центре через H . Тогда значение напоров в крайних вертикальных точках отверстия будут $H_1 = H - \frac{a}{2}$; $H_2 = H + \frac{a}{2}$, а

диапазон изменения давления по вертикали составит $H \left(1 \pm \frac{a}{2H} \right)$.

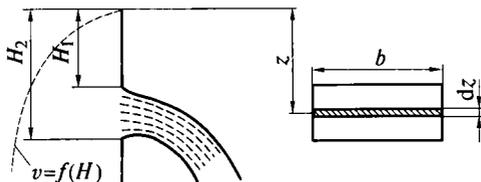


Рис. 4.5

Для малого отверстия принимается напор в его центре, следовательно, величиной $\frac{a}{2H}$ можно пренебречь, если ее значение меньше 5%. Полагая $\frac{a}{2H} < 0,05$, получим условие для малого отверстия $a < 0,1H$. Таким образом, если вертикальный размер отверстия a меньше $0,1H$, то такое отверстие будет малым; если данное условие не выдерживается, то отверстие следует считать большим.

Ограничиваясь истечением из открытого сосуда в атмосферу, для определения расхода через прямоугольное отверстие выделим в нем полоску шириной b и высотой dz . Если пренебречь также скоростью подхода, элементарный расход через такую полоску будет $dQ = \mu b \sqrt{2gz} dz$, где z — переменный напор над центром элементарной полоски.

Расход через все отверстие определяем интегрированием по высоте отверстия; при этом μ считается постоянным по всей высоте отверстия:

$$Q = \mu b \sqrt{2g} \int_{H_1}^{H_2} \sqrt{z} dz = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} (H_2^{3/2} - H_1^{3/2}). \quad (4.4)$$

Для отверстия непрямоугольной формы, применив тот же вывод, что и для прямоугольного, получим выражение для расхода

$$Q = \mu \sqrt{2g} \int_{H_1}^{H_2} b_z \sqrt{z} dz.$$

Значение данного интеграла может быть вычислено для любой формы отверстия при $b_z = f(z)$.

4.4. Истечение из призматического сосуда при переменном напоре

При решении ряда инженерных задач приходится встречаться со случаем, когда истечение жидкости из резервуара происходит при одновременном притоке в него расхода Q_0 (например, расход реки, притекающий в водохранилище).

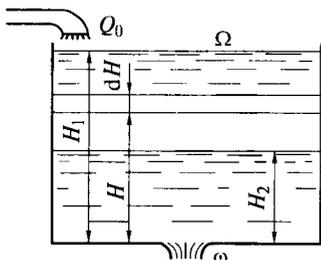


Рис. 4.6

Рассмотрим случай истечения жидкости в атмосферу из открытого призматического сосуда с площадью поперечного сечения Ω при постоянном притоке Q_0 (рис. 4.6). Движение жидкости в этом случае будет неустановившимся до тех пор, пока из отверстия не начнет вытекать такой же расход Q , как и притекает, т.е. $Q_0 = Q$.

При этом над центром отверстия установится постоянный напор H_0 , связанный с величиной Q_0 уравнением

$$Q_0 = \mu\omega\sqrt{2gH_0},$$

откуда

$$H_0 = \frac{Q_0^2}{2g\mu^2\omega^2}.$$

Если в сосуде был сначала напор $H_1 > H_0$, то $Q > Q_0$; в этом случае уровень жидкости в сосуде будет понижаться до тех пор, пока Q не станет равным Q_0 , причем $H = H_0$. Если в сосуде был сначала напор $H_1 < H_0$, то $Q < Q_0$; уровень жидкости в сосуде начнет повышаться до горизонта, при котором величина напора будет равна H_0 и $Q = Q_0$.

Определим время изменения уровня в сосуде от H_1 до H_2 (предполагая, что $H_1 > H_2 > H_0$ или $H_1 < H_2 < H_0$). Для этого рассмотрим истечение под напором H за бесконечно малый промежуток времени dt , предполагая, что в течение этого промежутка времени движение жидкости можно рассматривать как установившееся движение.

Приток в сосуд за время dt составит $Q_0 dt$. За это же время из отверстия выльется объем жидкости $Q dt$, и объем жидкости в сосуде изменится на ΩdH . В итоге получаем дифференциальное уравнение баланса объемов для условия постоянного притока в резервуар:

$$Q_0 dt - Q dt + \Omega dH = 0 \quad (4.5)$$

или

$$\mu\omega\sqrt{2gH_0}^{1/2} dt - \mu\omega\sqrt{2gH}^{1/2} dt + \Omega dH = 0.$$

Для определения времени, необходимого на изменение уровня в сосуде от $H = H_1$ до $H = H_2$, решим это уравнение относительно dt :

$$dt = \frac{\Omega dH}{\mu\omega\sqrt{2g}(\sqrt{H_0} - \sqrt{H})},$$

а его интегрирование дает

$$\frac{H_2}{H_1} = \frac{2\Omega}{\mu\omega\sqrt{2g}} \left(\sqrt{H_1} - \sqrt{H_2} + \sqrt{H_0} \ln \frac{\sqrt{H_0} - \sqrt{H_1}}{\sqrt{H_0} - \sqrt{H_2}} \right). \quad (4.6)$$

При отсутствии постоянного притока жидкости в сосуд (см. рис. 4.6) $Q_0 = 0$, $H_0 = 0$ формула (4.6) примет вид

$$\frac{H_2}{H_1} = \frac{2\Omega(\sqrt{H_1} - \sqrt{H_2})}{\mu\omega\sqrt{2g}}.$$

Для полного опорожнения сосуда (до оси отверстия) $H_2 = 0$

$$t_{\text{оп}} = \frac{2\Omega\sqrt{H_1}}{\mu\omega\sqrt{2g}} = \frac{2\Omega H_1}{\mu\omega\sqrt{2gH_1}}. \quad (4.7)$$

Здесь $\Omega H_1 = W$ — начальный объем жидкости в сосуде; $\mu\omega\sqrt{2gH_1} = Q_1$ — расход, вытекающий в начале истечения при напоре $H = H_1$.

Следовательно, формулу можно представить в виде

$$t_{\text{оп}} = \frac{2W}{Q_1},$$

т.е. время полного опорожнения призматического резервуара при переменном напоре в 2 раза больше времени истечения из резервуара такого же объема при постоянном напоре, равном начальному напору H_1 .

4.5. Истечение жидкости через насадки

Приставленный к отверстию патрубок, длина которого в несколько раз больше размера отверстия, называется насадком. Насадки способны увеличивать расход по сравнению с отверстиями. Они применяются в технике для получения мощной сконцентрированной струи, эффекта подсасывания и др. Многие элементы гидротехнических сооружений, например всасывающие трубы ГЭС, трубчатые водоспуски в плотинах, водопропускные трубы в насыпях дорог, по характеру гидравлических явлений в них аналогичны насадкам. Поэтому изучение гидравлики насадков важно для уяснения работы подобных устройств.

Насадки по форме разделяются на цилиндрические (рис. 4.7, б, в), конические (рис. 4.7, д, е), коноидальные (рис. 4.7, ж) и др. Насадок называется внешним, когда он приставлен к отверстию снаружи, и внутренним, когда он расположен внутри сосуда.

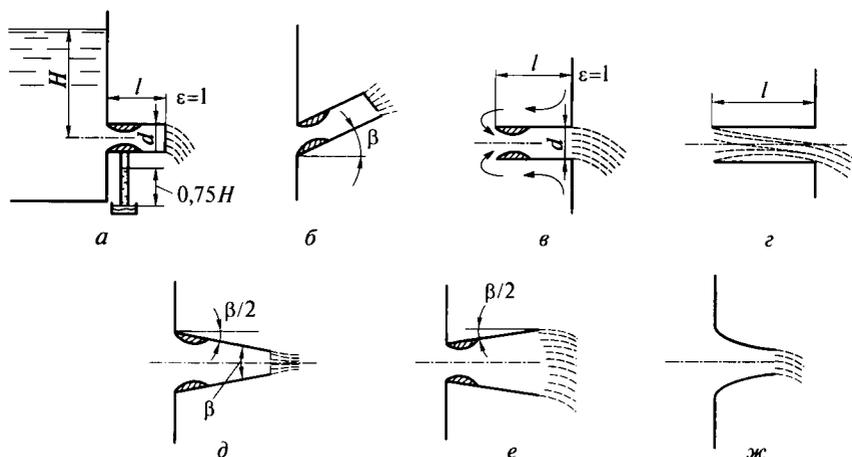


Рис. 4.7

Рассмотрим истечение жидкости через внешний цилиндрический насадок, имеющий длину $l = (3 \dots 4)d$ (рис. 4.7, а).

Струя жидкости, войдя в насадок, так же как при истечении через простое круглое отверстие, подвергается сжатию ($d_c \approx 0,8d$), но в дальнейшем постепенно расширяется, заполняет все поперечное сечение насадка и вытекает из него полным сечением ($\epsilon = 1$). Между сжатой струей и стенками насадка образуется отжим потока, заполненный жидкостью, находящейся в состоянии не поступательного, а вращательного движения. Между зоной отжима и активной поступательной струей происходит непрерывный обмен частицами. Если насадок из-за относительно короткой длины (меньше $3d$) работает не полным сечением (рис. 4.7, з), то характер истечения соответствует истечению через отверстие.

Определим скорость и расход жидкости для внешнего цилиндрического насадка. Для этого напишем уравнение Бернулли, выбрав первое сечение на свободной поверхности в сосуде и второе у выходного отверстия насадка. Плоскость сравнения проведем через центр тяжести выходного сечения насадка

$$H + \frac{p_0}{\rho g} + \frac{\alpha_0 v_0^2}{2g} = \frac{p}{\rho g} + \frac{\alpha v^2}{2g} + h_c,$$

где p_0 — давление над жидкостью в сосуде; v_0 — скорость движения частиц жидкости в сосуде (скорость подхода); p — давление внешней среды, в которую происходит истечение; v — средняя скорость струи, вытекающей из насадка; h_c — потеря напора в насадке.

Обозначим сумму

$$H + \frac{p_0 - p}{\rho g} + \frac{\alpha_0 v_0^2}{2g} = H_0$$

и назовем ее напором истечения, тогда получим

$$H_0 = \frac{\alpha v^2}{2g} + h_c. \quad (4.8)$$

Потери напора в насадке складываются из потерь при обтекании кромок отверстия $h_{отв}$, потерь на расширение струи $h_{расш}$ и потерь по длине насадка h_l , т.е.

$$h_c = h_{отв} + h_{расш} + h_l = \zeta_{отв} \frac{v_c^2}{2g} + \left(\zeta_{расш} + \lambda \frac{l}{d} \right) \frac{v^2}{2g}.$$

Поскольку $v_c = v/\epsilon$, то получим

$$h_c = \left(\frac{\zeta_{отв}}{\epsilon^2} + \zeta_{расш} + \lambda \frac{l}{d} \right) \frac{v^2}{2g}.$$

Подставляя полученное значение в (4.8), имеем

$$H_0 = \frac{\alpha v^2}{2g} + \left(\frac{\zeta_{отв}}{\epsilon^2} + \zeta_{расш} + \lambda \frac{l}{d} \right) \frac{v^2}{2g},$$

считая, что потери напора по длине много меньше, чем потери на местные сопротивления, получим

$$v = \frac{1}{\sqrt{\alpha + \frac{\zeta_{отв}}{\epsilon^2} + \zeta_{расш}}} \sqrt{2gH_0}.$$

Величину

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{\alpha + \frac{\zeta_{отв}}{\epsilon^2} + \zeta_{расш}}}$$

называют *коэффициентом скорости при истечении через насадок*. Окончательно

$$v = \varphi \sqrt{2gH_0}. \quad (4.9)$$

Принимая $\alpha = 1$, $\zeta_{отв} = 0,06$, $\epsilon = 0,64$, $\zeta_{расш} = 0,32$, находим значение $\varphi = 0,82$.

В конкретных условиях числовые значения коэффициентов могут несколько отклоняться от принятых здесь, и потому в действительности значение φ также может немного отличаться от 0,82.

Так как расход $Q = \omega v$, то

$$Q = \mu \omega \sqrt{2gH_0}, \quad (4.10)$$

где μ — коэффициент расхода, $\mu = \varphi$.

Опыты с цилиндрическим насадком подтверждают указанное значение коэффициента расхода μ . Таким образом, истечение через цилиндрический насадок происходит с большим расходом,

но со скоростью, меньшей, чем при простом круглом отверстии (без насадка).

Как видим, насадок дает увеличение расхода благодаря расширению струи после сжатия. Но чтобы это происходило, т. е. чтобы насадок заполнялся жидкостью, необходимо соблюдение ряда условий. Важнейшие из них следующие:

насадок должен иметь длину $l = (3 \dots 4) d$;

абсолютное давление в насадке вблизи сжатого сечения должно быть больше давления паров жидкости. В противном случае вблизи сжатого сечения жидкость начинает вскипать и в зоне отжима скапливаются ее пары, в результате чего струя начинает отделяться от стенок насадка и происходит так называемый срыв вакуума.

Это явление заключается в том, что объем выделившихся паров становится настолько велик, что они вырываются наружу, а в насадок проникает газ из внешней среды. После этого насадок перестает выполнять свою роль и истечение происходит, как из отверстия. Поэтому важно уметь определять давление в насадке.

Для определения давления в сжатом сечении струи применим уравнение Бернулли к сжатому сечению и выходному, обозначив давление и скорость в сжатом сечении соответственно через p_c и v_c , и получим

$$\frac{p_c}{\rho g} + \frac{\alpha v_c^2}{2g} = \frac{p_a}{\rho g} + \frac{\alpha v^2}{2g} + h_c.$$

Заменим v_c по уравнению неразрывности $v_c = v/\epsilon$, а потерю напора h_c через сопротивление расширению $h_c = \zeta_{\text{расш}} \frac{v^2}{2g}$, получим

$$\frac{p_c}{\rho g} = \frac{p_a}{\rho g} - \left(\frac{\alpha}{\epsilon^2} - \alpha - \zeta_{\text{расш}} \right) \frac{v^2}{2g},$$

откуда, заменяя скорость истечения по формуле (4.9) и учитывая, что $\frac{p_a}{\rho g} - \frac{p_c}{\rho g} = h_b$, получим

$$\frac{p_a}{\rho g} - \frac{p_c}{\rho g} = h_b = \left(\frac{\alpha}{\epsilon^2} - \alpha - \zeta_{\text{расш}} \right) \varphi^2 H_0$$

или, заменяя постоянные их числовыми значениями, имеем

$$h_b = 0,75 H_0. \quad (4.11)$$

Это равенство показывает, что вакуум в сжатом сечении тем больше, чем больше напор истечения H_0 . Пользуясь этой формулой для проверки условия работы насадка, следует вычислять величину h_b и сопоставлять ее с возможным вакуумом в насадке.

Обычно значение вакуума в насадке не должно превышать 7,5 м вод. ст., следовательно, напор в резервуаре должен быть не более 10 м вод. ст. При истечении из насадка под уровень в выражение напора истечения в качестве геометрического напора H_0 следует подставлять разность уровней, а при определении вакуума в насадке учитывать, что он будет в этом случае меньше на высоту затопления насадка.

4.6. Короткие трубы

При увеличении длины насадка увеличивается сопротивление на трение по длине и коэффициент расхода уменьшается. Работающие полным сечением короткие трубы рассчитываются по формуле, аналогичной формуле расхода через насадки:

$$Q = \mu \omega \sqrt{2gH_0},$$

причем значение коэффициента расхода в них, называемого в этом случае коэффициентом расхода системы, определяется по приведенным далее формулам.

Если истечение из короткой трубы происходит в газовую среду (в частности, в атмосферу), то в выражение напора истечения вводится высота уровня в питающем сосуде над центром выхода из трубы, а коэффициент расхода определяется по формуле

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{\alpha + \sum \zeta + \lambda \frac{l}{d}}}, \quad (4.12)$$

где $\sum \zeta$ — сумма коэффициентов всех местных сопротивлений; d — диаметр трубопровода.

Если же истечение происходит под уровень, то в выражении, (4.12) α обычно принимают равным единице, напор принимается равным разности уровней, тогда

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{\sum \zeta + \lambda \frac{l}{d}}}, \quad (4.13)$$

причем в число $\sum \zeta$ входит коэффициент сопротивления выхода $\zeta_{\text{вых}} = 1$.

Работающие полным сечением водопропускные трубы под насыпями, дюкеры, небольшой длины трубы, соединяющие резервуары, рассчитываются, как короткие трубы, по формуле (4.10) с вычислением коэффициента расхода по формуле (4.12) или (4.13).

4.7. Затопленные свободные турбулентные струи

Затопленной называется струя, распространяющаяся свободно, т. е. вдали от каких-либо ограничивающих стенок, в пространстве, заполненном той же жидкостью. Такая картина имеет место, например, при подаче или отсасывании масс воздуха через вентиляционные решетки, при горении светильного газа в горелках, при истечении воздуха из сопла в воздушную среду, при выходе в водоем трубопровода, заглубленного под уровень и служащего для наполнения бассейна, при истечении через затопленное отверстие и т. п.

Затопленные воздушные струи получили широкое распространение в системах вентиляции, при устройстве воздушных душей, воздушных завес.

Рассмотрим свободную турбулентную струю жидкости, выходящую из насадка в неограниченное пространство той же жидкости, находящейся в покое (рис. 4.8). Как показывают опыты, турбулентная струя постепенно расширяется и, наконец, рассеивается в массе окружающей жидкости. Расширение струи объясняется действием сил трения, возникающих на границе струи и окружающей жидкости. Образующиеся при этом вихри и связанное с ними интенсивное поперечное перемещение частиц (турбулентное перемешивание) приводит к тому, что периферийные слои струи подтормаживаются, а слои окружающей жидкости приходят в движение (или ускоряют свое движение). В результате обмена импульсов между струей и окружающей жидкостью скорость струи уменьшается, а масса струи и ее ширина возрастают (так как в движение в осевом направлении вовлекаются дополнительные массы жидкости). Наблюдения над подкрашенными турбулентными струями показывают, что границы струи очерчены прямыми линиями AC и BD

Рассмотрим структуру струи, вытекающей из отверстия AB (начальное сечение) с одинаковыми скоростями v_0 по всей площади сечения отверстия (рис. 4.9). Точка O , где пересекаются линии AC

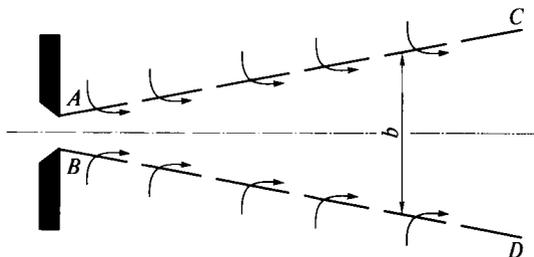


Рис. 4.8

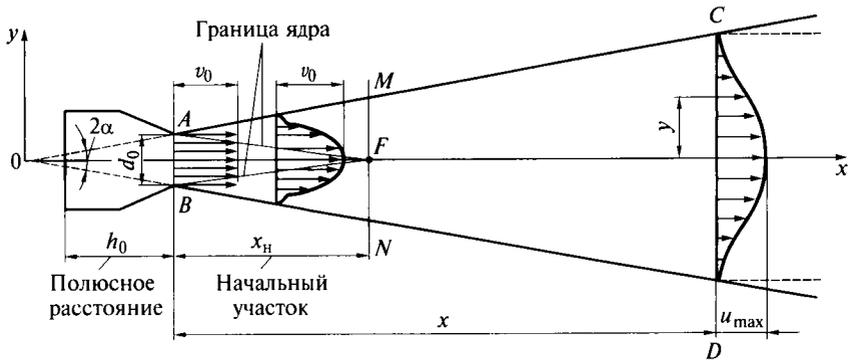


Рис. 4.9

и BD , образующие границы струи, называется полюсом струи. В струе можно выделить поперечное сечение MN , которое делит ее на два участка с различным характером распределения скоростей (так называемое переходное сечение). На начальном участке до сечения MN происходит формирование профиля скорости. Здесь можно выделить ядро постоянных скоростей AFB и пограничный слой AMF и BFN . Второй (основной) участок представляет собой сплошь пограничный слой, где скорости убывают вдоль струи, а также с удалением от оси струи. На границе струи скорость равна нулю.

Длина начального (авангардного) участка струи определяется формулой

$$x_H = \frac{1,145d_0}{\operatorname{tg} \alpha},$$

где d_0 — диаметр выходного отверстия круглого сопла.

Величина угла α одностороннего расширения струи зависит от формы сопла и начальной завихренности струи. Для круглого сопла $\alpha = 12^\circ 40'$.

Статическое давление на всем протяжении струи одинаково и равно давлению окружающей жидкости. Поэтому количество движения в направлении оси струи остается постоянным и равным количеству движения в начале струи, т. е.

$$\rho Q_0 v_0 = \rho Q v \quad (4.14)$$

или

$$v = v_0 \sqrt{\frac{\omega_0}{\omega}}, \quad (4.15)$$

где v и ω — средняя скорость и площадь струи в рассматриваемом участке.

Диаметр струи и площадь ее сечения на расстоянии x от сопла равны (так как диаметр меняется линейно с осевым расстоянием):

$$\begin{aligned} d &= d_0 + 2x \operatorname{tg} \alpha; \\ \omega &= \frac{\pi}{4} (d_0 + 2x \operatorname{tg} \alpha)^2. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Подставляя (4.16) в (4.15), получим

$$v = \frac{v_0}{1 + \frac{2x \operatorname{tg} \alpha}{d_0}}. \quad (4.17)$$

Для круглой струи по формуле Абрамовича:

$$v = \frac{0,645v_0}{1 + \frac{2x \operatorname{tg} \alpha}{d_0}}. \quad (4.18)$$

Эпюры распределения местных скоростей в различных сечениях основного участка струи подобны между собой, т. е.

$$u_{\max} = av_{\text{ср}}, \quad (4.19)$$

где для круглой струи $a = 0,5$.

Учитывая (4.18), приходим к выводу, что максимальная скорость (скорость на оси потока) меняется обратно пропорционально расстоянию x . Теория свободной затопленной струи применяется для решения ряда задач в области вентиляции, например, для расчета воздушных завес.

4.8. Истечение газов из отверстий

Рассмотрим истечение газа из резервуара при постоянном давлении через небольшое отверстие. Прежде всего определим скорость истечения.

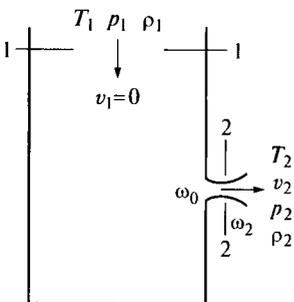


Рис. 4.10

Предположим, что внутри сосуда (рис. 4.10) в сечении 1—1 давление будет p_1 , плотность газа ρ_1 , температура его T_1 , а у выхода из отверстия в сечении 2—2 соответственно p_2 , ρ_2 и T_2 . Скорость газа на выходе из отверстия v_2 , а внутри сосуда $v_1 \approx 0$.

Процесс истечения газа с термодинамической точки зрения можно считать адиабатическим, так как на весьма коротком пути от резервуара до сечения 2—2 влиянием теплообмена между выходящи-

ми газом и внешним пространством можно пренебречь (нет ни отвода, ни подвода тепла).

Запишем уравнение Бернулли (при адиабатическом процессе) для сечений 1—1 и 2—2, временно пренебрегая потерями,

$$z_1 + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{v_2^2}{2g} - \frac{n}{n-1} \frac{p_1}{\rho g} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} \right]. \quad (4.20)$$

Пренебрегая разностью отметок и скоростью подхода v_1 и решая относительно скорости v_2 , получим

$$v_2 = \sqrt{2 \frac{n}{n-1} \frac{p_1}{\rho_1} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} \right]}. \quad (4.21)$$

Это есть формула Сен-Венана для скорости истечения. Из формулы (4.21) после преобразований имеем

$$\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} = 1 - \frac{v_2^2}{2} \frac{n-1}{n} \frac{\rho_1}{p_1}$$

и, наконец,

$$p_2 = p_1 \left(1 - \frac{n-1}{n} \frac{v_2^2}{2} \frac{\rho_1}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}}. \quad (4.22)$$

Разложив выражение в скобках по формуле бинома Ньютона и оставив только три первых члена разложения, получим

$$\left(1 - \frac{n-1}{n} \frac{v_2^2}{2} \frac{\rho_1}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} = 1 - \frac{v_2^2}{2} \frac{\rho_1}{p_1} + \frac{1}{2n} \left(\frac{v_2^2}{2} \frac{\rho_1}{p_1} \right)^2.$$

Тогда

$$p_1 - p_2 = \rho_1 \frac{v_2^2}{2} \left(1 - \frac{v_2^2}{4n} \frac{\rho_1}{p_1} \right).$$

Известно, что $n\rho_1/\rho_1 = c_1^2$, где c_1 — скорость звука в покоящемся газе.

Тогда

$$p_1 - p_2 = \rho_1 \frac{v_2^2}{2} \left(1 - \frac{v_2^2}{4c_1^2} \right),$$

решая относительно скорости v_2 , получим

$$v_2 = \sqrt{2 \frac{p_1 - p_2}{\rho_1} / \left(1 - \frac{v_2^2}{4c_1^2}\right)}. \quad (4.23)$$

Во всех случаях, когда отношение $v_2/2c_1$ значительно меньше 1, т.е. при $v_2 \ll c_1$ этим отношением можно пренебречь тогда скорость следует определять по формуле

$$v_2 = \sqrt{2 \frac{p_1 - p_2}{\rho_1}}, \quad (4.24)$$

полученной ранее для теоретической скорости истечения капельной жидкости.

Исходя из уравнения (4.20), находим весовой расход вытекающего газа (пренебрегая сжатием струи):

$$G = \rho_2 g \omega v_2 = \rho_2 g \omega \sqrt{2 \frac{n}{n-1} \frac{p_1}{\rho_1} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right]},$$

где ω — площадь сечения отверстия.

Учитывая, что $\rho_2 = \rho_1 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)$, имеем

$$G = \rho_1 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{n}} \omega \sqrt{2 \frac{n}{n-1} \frac{p_1}{\rho_1} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right]},$$

или

$$G = \omega \sqrt{2 \frac{n}{n-1} p_1 \rho_1 \left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{2}{n}} - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n+1}{n}} \right]}. \quad (4.25)$$

Влияние сжатия струи, скорости подхода газа и других факторов учитывается, как и для истечения капельной жидкости, введением коэффициента расхода μ , тогда получим

$$G = \mu \omega \sqrt{2 \frac{n}{n-1} p_1 \rho_1 \left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{2}{n}} - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n+1}{n}} \right]}. \quad (4.26)$$

Так же как в случае истечения несжимаемых жидкостей, коэффициент расхода может зависеть от числа Рейнольдса, а при истечении из отверстий, сечение которых ω соизмеримо с сечени-

ем резервуара Ω , также от отношения этих площадей, т.е. $\mu = f(\text{Re}; \omega/\Omega)$.

Исследуем полученную формулу (4.25). При заданных ω_1 , p_1 , и ρ_1 весовой расход зависит от давления среды, куда происходит истечение, а следовательно, от величины отношения $\beta = p_2/p_1$. При $\beta=0$ $G=0$. При $\beta=1$ $G=0$. Это означает, что G достигает максимального значения при некотором значении $\beta_{\text{кр}}$, называемом критическим. Зависимость $G = f(\beta)$ показана на рис. 4.11.

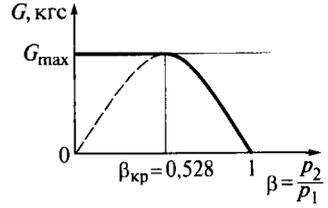


Рис. 4.11

Для определения $\beta_{\text{кр}}$ находим производную $\frac{dG}{d\beta}$ и приравняем ее к нулю:

$$\frac{dG}{d\beta} = \frac{\omega \sqrt{2 \frac{n}{n-1} p_1 \rho_1} \left(\frac{2}{n} \beta^{\frac{2-n}{n}} - \frac{n+1}{n} \beta^{\frac{1}{n}} \right)}{2 \sqrt{\beta^{\frac{2}{n}} - \beta^{\frac{n+1}{n}}}} = 0,$$

откуда

$$\frac{2}{n} \beta_{\text{кр}}^{\frac{2-n}{n}} = \frac{n+1}{n} \beta_{\text{кр}}^{\frac{1}{n}},$$

или

$$\beta_{\text{кр}} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)_{\text{кр}} = \left(\frac{2}{n+1} \right)^{\frac{n}{n-1}}. \quad (4.27)$$

То, что функция в скобках действительно имеет максимум при $p_2 = p_{\text{кр}}$ устанавливаем, взяв ее вторую производную и определив, что она меньше нуля.

Для воздуха $n = 1,405$ и формула (4.27) принимает вид

$$\beta_{\text{кр}} = \left(\frac{2}{2,41} \right)^{\frac{1,41}{0,41}} = 0,528 \approx 0,53,$$

иными словами, критическое давление равно примерно половине давления в резервуаре.

ГИДРАВЛИЧЕСКИЕ РАСЧЕТЫ НАПОРНЫХ ТРУБОПРОВОДОВ

5.1. Классификация трубопроводов и расходов

При расчете трубопроводов, передающих жидкости на большие расстояния, преобладают потери напора на трение по длине; местные потери в таких трубопроводах представляют по сравнению с потерями по длине ничтожную величину, и ими можно пренебречь.

Трубопроводы, в которых расчет может производиться только на трение по длине, получили название длинных трубопроводов. К ним относятся водопроводы, нефтепроводы и бензопроводы.

Различают простые и сложные трубопроводы. Простым называется трубопровод постоянного сечения, не имеющий ответвлений на всем его протяжении и пропускающий постоянный расход. Сложные трубопроводы имеют сеть труб с изменяющейся конфигурацией как в плане, так и в профиле. Выделяют следующие основные виды сложных трубопроводов:

последовательное и параллельное соединения, здесь трубопровод состоит из последовательно соединенных участков труб разных диаметров и длин либо из параллельных трубопроводов, берущих начало в одной точке и заканчивающихся в другой общей точке (рис. 5.1, *а*). Трубопроводы таких типов, как правило, переносят постоянный расход;

разветвленные тупиковые сети, в которых жидкость от источника питания поступает в магистраль, далее в боковые ответвления и, наконец, к местам потребления и обратно в магистраль не поступает (рис. 5.1, *б*);

кольцевые сети, представляющие систему замкнутых трубопроводов (колец), питаемых от основной магистрали и переносящих жидкость к местам потребления (рис. 5.1, *в*);

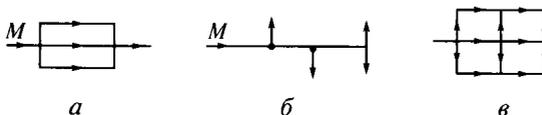


Рис. 5.1

комбинированные сети имеют в своем составе кольцевые сети и разветвленные тупиковые сети.

При гидравлическом расчете сложной сети трубопроводов необходимо различать следующие виды расходов:

сосредоточенный или узловой расход — расход, отделяющийся (рис. 5.2, а) или присоединяющийся к рассматриваемому трубопроводу в некоторой точке (узле);

путевой расход — расход, отбираемый из трубопровода непрерывно и равномерно по длине трубопровода (рис. 5.2, б). Путевой расход характеризуется величиной q , $\text{м}^3/(\text{с} \cdot \text{м})$, называемой удельным расходом (расходом, приходящимся на единицу длины трубопровода);

транзитный расход — часть расхода трубопровода, предназначенная для снабжения жидкостью последующих участков сети;

расчетный расход — расход, на величину которого осуществляется гидравлический расчет рассматриваемого участка трубопровода.

Определение расчетных расходов для сети трубопроводов сложного начертания является весьма важной задачей. Рассмотрим ее на примере нескольких участков магистрального трубопровода, для которого боковые ответвления заменены сосредоточенными (узловыми) расходами (рис. 5.3). Таким образом, рассматриваемая схема имеет сосредоточенные расходы Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6 и путевой расход q на участке 2—3. Необходимо установить расчетный расход на каждом участке.

Расчетные расходы на участках устанавливают, последовательно суммируя расходы против течения жидкости. Так можно уста-

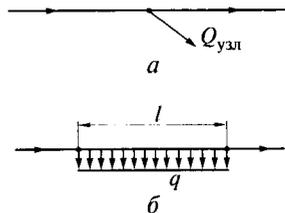


Рис. 5.2

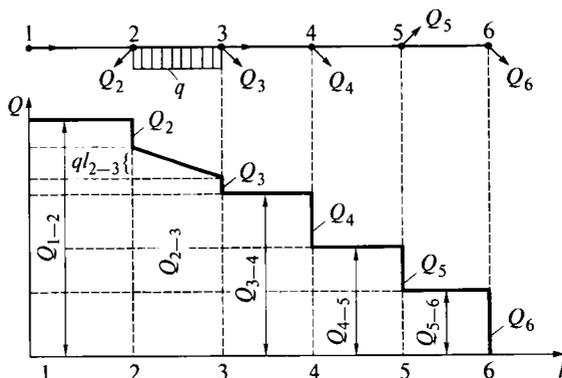


Рис. 5.3

новить расчетный расход для всех участков, кроме участка с путевым расходом. Для рассматриваемой схемы находим:

$$Q_{5-6} = Q_6;$$

$$Q_{4-5} = Q_6 + Q_5 = Q_{5-6} + Q_5;$$

$$Q_{3-4} = Q_6 + Q_5 + Q_4 = Q_{4-5} + Q_4;$$

$$Q_{1-2} = Q_6 + Q_5 + Q_4 + Q_3 + Q_2 + ql_{2-3} = Q_{3-4} + ql_{2-3} + Q_3 + Q_2.$$

Отсюда можно написать следующие зависимости для определения расчетных расходов.

Для конечных участков сети

$$Q_{\text{расч}} = Q_{\text{узн}}; \quad (5.1)$$

для участков без путевого расхода

$$Q_{\text{расч}} = Q_{\text{т.п}} + Q_{\text{узн}}, \quad (5.2)$$

где $Q_{\text{т.п}}$ — транзитный расход, который, как правило, является расчетным расходом для последующего участка.

Расход на участке с путевым расходом меняется по длине пути от $ql + Q_{\text{т.п}}$ в начале участка до $Q_{\text{т.п}}$ в конце участка (рис. 5.4). Определение расчетного расхода на этом участке производится из условия, чтобы фактическая потеря напора на участке с путевым расходом, возникающая при прохождении действительного переменного расхода, и расчетная потеря напора при замене действительного расхода на некоторый расчетный постоянный расход были одинаковы. В произвольном сечении на расстоянии x от начального сечения расход составит $Q_x = Q_{\text{т.п}} + ql - qx$. Полагаем, что движение жидкости происходит в квадратичной области сопротивления турбулентного режима движения, поэтому можно применить формулу Шези и установить потерю напора по длине на элементарном участке трубопровода длиной dx , т.е.

$$dh_l = \frac{Q_x^2}{K^2} dx = \frac{(Q_{\text{т.п}} + ql - qx)^2}{K^2} dx,$$

а потерю напора на всем участке вычислим как интеграл от предыдущего выражения

$$h_l = \frac{1}{K^2} \int_0^l (Q_{\text{т.п}} + ql - qx)^2 dx,$$

или

$$h_l = \frac{Q_{\text{т.п}}^2 l + Q_{\text{т.п}} ql^2 + q^2 l^3 / 3}{K^2}.$$

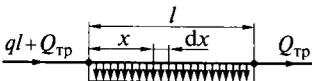


Рис. 5.4

С другой стороны, при расчетном расходе $Q_{\text{расч}}$ имеем ту же потерю напора:

$$h_l = \frac{Q_{\text{расч}}^2}{K^2} l.$$

Это позволяет получить зависимость для расчетного расхода на участке с путевым расходом:

$$Q_{\text{расч}} = \sqrt{Q_{\text{т.п}}^2 + Q_{\text{т.п}}ql + q^2l^2/3}. \quad (5.3)$$

При отсутствии транзитного расхода ($Q_{\text{т.п}} = 0$) формула (5.3) упрощается:

$$Q_{\text{расч}} = 0,58ql. \quad (5.4)$$

В практике вместо формулы (5.3) используется формула

$$Q_{\text{расч}} = Q_{\text{т.п}} + 0,55ql, \quad (5.5)$$

которая при $Q_{\text{т.п}} = 0$ практически совпадает с формулой (5.4), а при $Q_{\text{т.п}} > 0$ дает несколько завышенные результаты по сравнению с формулой (5.3).

5.2. Основные зависимости для гидравлического расчета трубопроводов

При гидравлическом расчете сети трубопроводов обычно принимается установившееся равномерное напорное движение жидкости в круглых трубах. Для случая движения воды в условиях городских и производственных трубопроводов удельная потенциальная энергия потока (величина $z + p/\rho g$) определяется величинами в несколько десятков метров, в то время как средняя скорость течения меняется в пределах $v = 0,8 \dots 1,6$ м/с, что дает значение удельной кинетической энергии в интервале $v^2/2g = 0,03 \dots 0,13$ м. Такое соотношение позволяет при гидравлическом расчете длинных трубопроводов пренебречь значениями $v^2/2g$, а учитывая, что для длинных трубопроводов местные потери напора незначительны, уравнение Бернулли можно применить в виде

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + h_l. \quad (5.6)$$

Обозначив $p/\rho g = H$ — напор в рассматриваемом сечении относительно отметки трубопровода, получим

$$(z_1 - z_2) + (H_1 - H_2) = h_l. \quad (5.7)$$

Рассматривая случаи, отвечающие квадратичной области гидравлических сопротивлений, в основу расчетов можно положить формулу Шези:

$$Q = K\sqrt{I} \quad (5.8)$$

или

$$h_l = \frac{1}{K^2} l Q^2, \quad (5.9)$$

где K — расходная характеристика, определяемая в зависимости от материала трубы и ее диаметра; l — гидравлический уклон, или уклон пьезометрической линии, $l = h_l/l$.

Вычисленные значения расходной характеристики для трубопроводов в зависимости от диаметра условного прохода и материала трубы приведены в Приложении 2. Значения K даны для условий работы труб в квадратичной области сопротивления при указанных ранее скоростях. Если скорость движения потока отличается от установленной, то значения K вычисляются по формуле

$$K_{\text{некв}} = aK,$$

где $K_{\text{некв}}$ — расчетное значение расходной характеристики для неквадратичной зоны сопротивления, а значения коэффициентов a приведены в Приложении 3.

При гидравлическом расчете трубопроводов довольно часто используются графические методы. Применение таких методов в ряде случаев значительно облегчает и упрощает решение некоторых сложных задач, придает им определенную наглядность. В отдельных случаях, например при исследовании совместной работы насосных установок и сети трубопроводов, графический метод является практически единственным способом получения необходимого решения. Для простого трубопровода диаметром d и длиной l , принимая $H = p_1/\rho g$ (необходимый напор в начале сети); $H_r = z_2 - z_1 + p_2/\rho g$ (геодезическая высота подъема жидкости относительно начала трубопровода); $s = l/K^2$ (сопротивление трубопровода), уравнение (5.6) можно привести к виду

$$H = H_r + sQ^2. \quad (5.10)$$

Поскольку для данного трубопровода величины H_r и s являются постоянными, то уравнение можно изобразить графически. Для этого, задаваясь значениями Q , вычисляют H и эти величины откладывают в масштабе.

В результате получают кривую, имеющую параболический характер (рис. 5.5), которую называют характеристической кривой.

В следующих подразделах будет показан гидравлический расчет простых и сложных трубопроводов, учитывая, что выбор материала труб, начертания сети (отметки узлов, длины участков) рассматриваются в специальных курсах по проектированию и сооружению трубопроводов (например, в курсах водоснабжения, отопления, газоснабжения и др.).

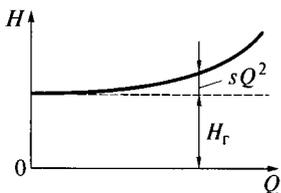


Рис. 5.5

Таким образом, гидравлический расчет связывает между собой расчетные расходы, диаметры трубопроводов, давления в расчетных сечениях или потери напора по длине.

5.3. Задачи по расчету простого трубопровода

Гидравлический расчет простого трубопровода сводится к решению следующих задач:

- определение разности напоров (потери напора) или одного из напоров в начале или конце трубопровода, необходимых для пропуска расчетного расхода через трубопровод заданного сечения;
- определение расхода жидкости, проходящего через трубопровод заданного сечения при известной разности напоров;
- определение необходимого диаметра трубопровода для пропуска расчетного расхода при известной разности напоров.

Задача по определению потери напора (разности напоров). Должны быть известны расчетный расход Q ; диаметр трубопровода d и материал, из которого он изготовлен; отметки начала и конца трубопровода z_1 и z_2 ; его длина l ; свободный (располагаемый) напор в конце трубопровода H_2 . Данная задача решается в следующем порядке:

- для трубопровода заданного диаметра d и материала по справочным таблицам устанавливается расходная характеристика K ;
- вычисляется расчетная потеря напора по длине h_l по формуле (5.9);
- находится необходимый напор H_1 из формулы (5.7).

Задача по определению расхода. Решается при известных отметках трубопровода z_1 , z_2 , известной длине l , для трубопровода заданного диаметра d и материала и известных напоров H_1 и H_2 в начале и конце трубопровода. Последовательность решения следующая:

- для трубы заданного диаметра d и известного материала по справочным таблицам устанавливается расходная характеристика K ;
- вычисляется расчетная потеря напора по длине h_l по формуле (5.7);
- вычисляется гидравлический уклон $I = h_l/l$;
- устанавливается искомый расход Q по формуле (5.8).

Задача по установлению диаметра трубопровода. Здесь должны быть известны расчетный расход Q ; отметки трубопровода z_1 и z_2 ; его длина l ; напоры H_1 и H_2 ; задан материал применяемых труб. Задача решается в следующей последовательности:

- вычисляется располагаемая потеря напора по длине h_l по формуле (5.7);
- по формуле (5.9) вычисляется заданная расходная характеристика K_0 ;

• по справочным таблицам устанавливается диаметр d , которому соответствует вычисленная расходная характеристика K_0 . Поскольку диаметр трубопровода изменяется дискретно, то получить точное совпадение табличной и заданной расходных характеристик практически невозможно. Для инженерной практики можно рассмотреть два варианта решения.

Первый вариант допускает некоторое изменение исходных данных: это или увеличение расхода против расчетного, или уменьшение исходной разности напоров. В этом случае выбирается такой диаметр трубопровода, для которого расходная характеристика K больше заданной K_0 , но следующий, меньший по сортаменту, диаметр имеет расходную характеристику меньше заданной. Для выбранного диаметра корректируется расход или разность напоров в соответствии с рассмотренными ранее задачами.

Второй вариант не допускает изменения исходных параметров. В этом случае трубопровод следует составить из двух последовательно установленных трубопроводов, выполненных из рядом расположенных по сортаменту диаметров d_1 и d_2 , для которых соответствующие расходные характеристики K_1 и K_2 по отношению к заданной расходной характеристике определяются неравенством $K_1 < K_0 < K_2$. Теперь задача сводится к установлению длины трубопроводов каждого диаметра. Положим, что на участке длиной x будет трубопровод диаметром d_1 , тогда на участке длиной $l - x$ будет трубопровод диаметром d_2 . Так как потери на всем участке трубопровода складывается из потерь напора на каждом из участков, то

$$h_l = h_x + h_{l-x},$$

или

$$h_l = \frac{1}{K_1^2} x Q^2 + \frac{1}{K_2^2} (l - x) Q^2,$$

решая это выражение относительно x , имеем

$$x = \frac{h_l - \frac{lQ^2}{K_2^2}}{\left(\frac{1}{K_1^2} - \frac{1}{K_2^2}\right) Q^2}.$$

Такое решение позволяет удовлетворить требованиям неизменности исходных данных.

5.4. Основные положения по экономическому расчету трубопроводов

В ряде случаев в результате гидравлического расчета длинного трубопровода необходимо одновременно установить диаметр тру-

бопровода и напор в его начальном сечении. Такая задача встречается при расчете трубопровода, когда известными являются расход и конфигурация участка. В этом случае возникает множество решений, так как при прочих равных условиях диаметр трубопровода определяет и потери напора в нем: чем меньше диаметр, тем больше потеря напора, и наоборот. Поэтому при решении необходимо сформулировать оптимальные экономически выгодные условия сооружения и эксплуатации трубопроводов, ограничивающие выбор их диаметров.

Трубопроводы меньших диаметров требуют значительно меньших капитальных затрат на сооружение. Стоимость, объем земляных работ по укладке труб тем меньше, чем меньше диаметр. Однако уменьшение диаметра ведет к увеличению мощности насосов и двигателей, их стоимости и эксплуатационных расходов. Экономически наиболее выгодным диаметром трубопровода считается такой, при котором будет наименьшей полная стоимость трубопровода, зависящая от затрат на приобретение, сооружение и прокладку самого трубопровода, расходов на сооружение насосных установок и эксплуатационных расходов.

Для точного определения экономически наиболее выгодного диаметра существует ряд методов, которые рассматриваются в специальных курсах, например в курсе водоснабжения. В основу этих методов положены следующие приемы. Составляют выражения для полной стоимости трубопровода, включая капитальные затраты на его сооружение, прокладку и эксплуатационные расходы, выраженные в функции от диаметра трубопровода. Затем находят минимум этой функции, т. е. вычисляют производную от стоимости по диаметру трубопровода и приравнивают ее к нулю. Из полученного таким образом уравнения определяют диаметр трубопровода, при котором его полная стоимость минимальна.

Проиллюстрируем это графически (рис. 5.6). Для нахождения конкретных условий трубопровода, пропускающего постоянный расход Q , сначала вычисляют капитальные затраты на сооружение трубопровода в зависимости от диаметра и откладывают на графике (кривая 1), затем находят эксплуатационные расходы также в зависимости от диаметра и в тех же масштабах изображают на графике (кривая 2). После этого суммированием ординат этих кривых находят графическую зависимость полной стоимости трубопровода от диаметра (кривая 3). Суммарная кривая имеет минимум в точке O , которая определяет величину экономически наиболее выгодного диаметра d_3 и соответствующую ей минимальную полную стоимость трубопровода T_{\min} .

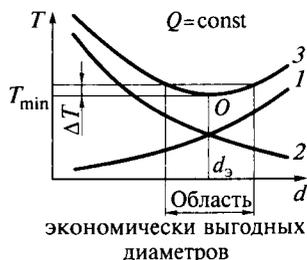


Рис. 5.6

В соответствии с ГОСТ на сортаменты трубопроводов они выпускаются с определенными заранее установленными диаметрами. Поэтому при решении, аналогичном изображенному на рис. 5.6, может оказаться, что экономически наивыгоднейшему диаметру d_3 не соответствуют диаметры, определяемые сортаментом. В этом случае следует определить не минимальную полную стоимость трубопровода, а ее значение, увеличенное на ΔT , которое может быть наперед задано (например, $\Delta T = 0,01 T_{\min}$, что, соответствует увеличению минимальной полной стоимости на 1%). Такое увеличение приведет к расширению области экономически выгодных диаметров, и в нее обязательно войдут значения диаметров, регламентируемых ГОСТ.

Анализом и многочисленными расчетами установлено, что если вместо диаметров трубопровода рассматривать среднюю скорость течения жидкости, то области минимальных затрат соответствуют области экономически выгодных скоростей. Значения этих скоростей для труб меньших диаметров составляют 0,6...1,2 м/с, для труб больших диаметров — 0,9...1,6 м/с. В случае принятия экономической скорости v_3 для расчетного расхода можно определить диаметр трубопровода

$$d = \sqrt{\frac{4Q}{\pi v_3}}, \quad (5.11)$$

найти ближайший по сортаменту диаметр и далее решать задачу по определению потери напора.

5.5. Гидравлический расчет разветвленной тупиковой сети

Рассмотрим основные положения гидравлического расчета разветвленной тупиковой сети, питаемой из водонапорной башни B (рис. 5.7). В практике водоснабжения обычно встречаются два вида задач:

- установить диаметры трубопроводов и величину напора воды в начале сети (уровень воды в водонапорной башне), обеспечивающие подачу расчетных расходов в заданные точки (узлы);
- установить диаметры трубопроводов при заданных напорах в начале и конце сети, также обеспечивающие подачу расчетных расходов в заданные точки (узлы).

Перед выполнением гидравлического расчета сети проводят подготовительную работу:

- на сети выбирают наиболее удаленную и высоко расположенную точку (точка b на рис. 5.7). Считается, что если обеспечить подачу воды в эту точку, то все остальные точки снабжения могут

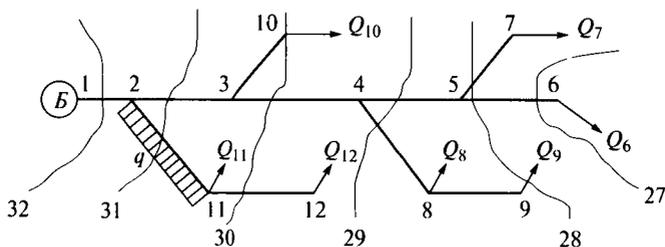


Рис. 5.7

быть обеспечены водой без особого труда. Линия от башни до выбранной точки называется магистралью (главной линией), а линии, отходящие от магистрали — ответвлениями. Ответвления бывают первого порядка — отходящие непосредственно от магистрали; второго порядка — отходящие от ответвлений первого порядка; третьего, четвертого и других порядков;

- затем разветвленную сеть разбивают на расчетные участки, которые являются простыми трубопроводами. Расчетные участки обозначают двумя цифрами, этими же цифрами обозначают все величины, относящиеся к данному участку. Например, для участка 1—2: расчетный расход Q_{1-2} , длина l_{1-2} , диаметр трубопровода d_{1-2} и т.д.;

- в соответствии с планом местности устанавливают длины участков, отметки поверхности земли и отметки заложения трубопроводов в характерных точках (узлах);

- по известным узловым и путевым расходам определяют расчетные расходы в соответствии с формулами (5.1), (5.2) и (5.5).

Теперь обратимся к рассмотрению сформулированных ранее задач.

Для решения задачи по определению диаметра трубопроводов и напора в начале сети должны быть заданы или определены в соответствии с приведенными ранее рекомендациями:

длины участков трубопроводов l_{1-2}, l_{2-3}, \dots ;

узловые и, при наличии, путевые расходы воды (см. рис. 5.7);

отметки трубопроводов в узловых точках z_1, z_2, z_3, \dots ;

минимальные допустимые напоры $H_{св}$ в конечных точках рассматриваемой сети.

Последовательность решения.

1. Устанавливают расчетные расходы отдельных участков. В этом случае удобно вести расчет «против течения воды» начиная с ответвлений высших порядков и заканчивая магистралью. При этом расходы ответвлений будут узловыми расходами по отношению к магистрали или к ответвлениям высшего порядка, а расчетные расходы в последующих участках — транзитными для предыдущих.

2. Ведут расчет магистрали (на рис. 5.7, линия 1—6).

2.1. Используя значения экономической скорости, вычисляют диаметры трубопроводов на всех участках магистрали по формуле (5.11). Вычисленные диаметры округляют до ближайшего сортаментного значения.

2.2. Для каждого участка магистрали по вычисленным диаметрам находят сначала расходные характеристики K , а затем потери напора по формуле (5.9).

2.3. Начиная с конца магистрали последовательно для каждого участка вычисляют напор в его начале по формуле (5.7). Для этого необходимо последовательно вычислить:

$$H_5 = (z_6 - z_5) + H_{св} + h_{l_{5-6}};$$

$$H_4 = (z_5 - z_4) + H_5 + h_{l_{4-5}};$$

.....;

$$H_1 = (z_2 - z_1) + H_2 + h_{l_{1-2}}.$$

Этот расчет целесообразно сопровождать построением пьезометрической линии. Величина H_1 , вычисленная последней, представляет собой уровень воды в водонапорной башне или служит основой для расчета насосной установки.

3. Ведут расчет ответвлений. Поскольку известны напоры в начале и конце ответвлений, их расчет принципиально отличается от расчета магистрали и может проводиться, как показано при рассмотрении следующей задачи. Однако чаще всего расчет ведут аналогично расчету магистрали, только «по течению воды»; определяют напоры H в конечных точках и сравнивают их с заданными $H_{св}$. Как правило, в результате расчетов должно быть $H_i > H_{св}$, если же окажется, что $H_i < H_{св}$, значит, магистраль намечена неправильно и расчет следует выполнить заново, принимая новое направление магистрали.

Для задачи по определению диаметров трубопроводов при известной разности напоров в начале и в конце разветвленной сети должны быть известны те же величины, что и для предыдущей, а также величина напора воды в водонапорной башне.

Последовательность решения.

1. Устанавливают расчетные расходы воды для всех участков разветвленной сети.

2. Ведут расчет магистрали.

2.1. Устанавливают располагаемые потери напора для всей магистрали (см. обозначения даны на рис. 5.7):

$$\sum h_l = (z_1 - z_6) + (H_1 - H_{св}).$$

2.2. Находят средний гидравлический уклон для магистрали:

$$I_{ср} = \frac{\sum h_l}{\sum l},$$

где $\sum l = l_{1-2} + l_{2-3} + \dots + l_{5-6}$.

2.3. Вычисляют для каждого участка значение расходной характеристики из формулы (5.9), например:

$$K_{1-2} = \frac{Q_{1-2}}{\sqrt{I_{\text{ср}}}}; \quad K_{2-3} = \frac{Q_{2-3}}{\sqrt{I_{\text{ср}}}}.$$

2.4. По вычисленным значениям K находят из таблиц диаметры трубопроводов, для чего выписывают для каждого участка в соответствии с сортаментом труб:

ближайшее меньшее значение диаметров: $d'_{1-2}; d'_{2-3}; \dots$;

ближайшее большее значение диаметров: $d''_{1-2}; d''_{2-3}; \dots$;

2.5. Для указанных значений диаметров для каждого участка вычисляют потери напора по формуле (5.9):

для меньших диаметров: $h'_{1-2}; h'_{2-3}; \dots$;

для больших диаметров: $h''_{1-2}; h''_{2-3}; \dots$.

2.6. Рассматривают различные комбинации найденных сортаментных диаметров. Если число участков магистрали n , то количество возможных комбинаций составляет 2^n . Из этого числа следует выбрать лишь те варианты, для которых сумма потерь напора по длине для всех участков магистрали равна или несколько меньше располагаемого напора:

$$\sum h_l \leq (z_1 - z_n) + (H_1 - H_{\text{св}}).$$

2.7. Из выбранного числа вариантов необходимо остановиться на том, при котором трубы имеют меньшую массу, а следовательно, и меньшую стоимость. Величину меньшей суммарной массы косвенно можно охарактеризовать выражением

$$\sum ld = \min.$$

2.8. После окончательного выбора варианта необходимо установить напор в каждой точке магистрали по формуле (5.9).

3. Расчет ответвлений производят аналогично расчету магистрали. В качестве располагаемого напора, с одной стороны, используют свободный напор в концевых точках $H_{\text{св}}$, а с другой — вычисленные в предыдущем расчете напоры в узловых точках магистрали.

5.6. Расчет сложных замкнутых трубопроводов

Рассмотрим вначале расчет параллельно соединенных трубопроводов (рис. 5.8). Магистральный трубопровод в некоторой точке (точка A на рис. 5.8) разветвляется на несколько труб, которые затем вновь объединяются (точка B). Расход основного трубопровода также распределяется по трубам, и после объединения остается прежним.

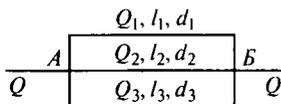


Рис. 5.8

Основной задачей при расчете такого трубопровода является определение расходов по каждой из параллельных труб Q_1 , Q_2 , Q_3 и потери напора между точками A и B . При этом предполагают известными общий расход Q , материал труб, их диаметры (d_1 , d_2 , d_3) и длины (l_1 , l_2 , l_3).

Рассматриваемая схема позволяет установить, что расход магистральной делится по параллельным трубам, следовательно, имеет место соотношение

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3. \quad (5.12)$$

С другой стороны, потеря напора при движении воды от узла A к узлу B определяется как

$$h_l = (z_A - z_B) + (H_A - H_B).$$

Потери напора по каждой линии параллельных трубопроводов при пренебрежении скоростными напорами равны:

$$h_{l_1} = (z_A - z_B) + (H_A - H_B);$$

$$h_{l_2} = (z_A - z_B) + (H_A - H_B);$$

$$h_{l_3} = (z_A - z_B) + (H_A - H_B)$$

или

$$h_l = h_{l_1} = h_{l_2} = h_{l_3}, \quad (5.13)$$

т.е. потери напора по длине во всех трубопроводах, соединенных параллельно, одинаковы.

Используя зависимость (5.9), можно записать:

$$h_{l_1} = \frac{1}{K_1^2} l_1 Q_1^2; \quad h_{l_2} = \frac{1}{K_2^2} l_2 Q_2^2; \quad h_{l_3} = \frac{1}{K_3^2} l_3 Q_3^2,$$

решая эти выражение относительно расходов с учетом соотношения (5.13), получим:

$$Q_1 = K_1 \sqrt{h_l / l_1};$$

$$Q_2 = K_2 \sqrt{h_l / l_2}; \quad (5.14)$$

$$Q_3 = K_3 \sqrt{h_l / l_3}.$$

Уравнения (5.14) вместе с уравнением (5.12) дают систему из четырех уравнений с четырьмя неизвестными: Q_1 ; Q_2 ; Q_3 и h_l , которая легко может быть решена. Для этого расходы из уравнений (5.14) подставляют в уравнение (5.12):

$$Q = K_1 \sqrt{h_l / l_1} + K_2 \sqrt{h_l / l_2} + K_3 \sqrt{h_l / l_3}$$

или, решая относительно h_l , имеем

$$h_l = \frac{Q^2}{\left(K_1/\sqrt{l_1} + K_2/\sqrt{l_2} + K_3/\sqrt{l_3}\right)^2}. \quad (5.15)$$

Зная h_l , нетрудно установить значение каждого расхода Q_1 ; Q_2 ; Q_3 по параллельным линиям, используя уравнение (5.14).

5.7. Понятие о расчете кольцевых сетей

Обратимся теперь к рассмотрению основных положений расчета кольцевых сетей. Задача сводится к определению диаметров труб всех участков сети и напора в ее начале, когда заданы значения расходов в узловых точках, расположение и отметки трубопроводов, длины отдельных участков.

Первым, наиболее ответственным, этапом данной задачи является предварительное распределение потоков в кольцевых сетях. Казалось бы, целесообразно наметить движение воды так, чтобы вода поступила в расчетные точки (узлы) наиболее коротким путем. Это обеспечило бы наименьшую длину и стоимость сети, но по характеру движения такая сеть обратилась бы в разветвленную тупиковую сеть. Для обеспечения надежности работы кольцевой сети должна быть предусмотрена взаимозаменяемость участков при аварии на одном из них. Распределение расходов по участкам кольцевой сети должно обеспечить необходимые узловые расходы и удовлетворять условию баланса расходов в каждом узле:

$$\sum Q = 0, \quad (5.16)$$

где $\sum Q$ — алгебраическая сумма расходов, притекающих к узлу (берутся со знаком плюс) и оттекающих из него (берутся со знаком минус).

Следующий этап расчета сводится к определению диаметров трубопроводов исходя из экономической скорости по уравнению (5.11). Затем для каждого участка устанавливаются потери напора по длине по формуле (5.9). Сеть считается увязанной (рассчитанной), если при данных расходах по ветвям кольцевой сети потери напора по одной ветви кольца равны потерям напора по другой его ветви:

$$\sum h_l = 0, \quad (5.17)$$

где $\sum h_l$ — алгебраическая сумма потерь напора по кольцу.

Если рассматривать движение воды относительно кольца, то можно принять положительными потери напора, возникающие при движении воды по ходу часовой стрелки, а отрицательными — против хода часовой стрелки.

Таким образом, задача расчета кольцевых сетей сводится к совместному решению системы уравнений вида (5.16) и (5.17). Уравнений вида (5.16) составляется столько, сколько узлов в рассматриваемой кольцевой сети, а уравнений вида (5.17) — столько, сколько колец в данной сети.

Существует несколько способов расчета (увязки) кольцевой сети, которые сводятся к последовательной корректировке предварительного распределения расходов по участкам сети с тем, чтобы добиться удовлетворения системы уравнений (5.16) и (5.17). Способы эти весьма трудоемки, особенно при расчете многокольцевых сетей. В настоящее время разработаны способы расчета кольцевых сетей с использованием электронных вычислительных машин.

5.8. Применение ЭВМ для гидравлического расчета сетей

Расчеты водопроводных сетей требуют значительной вычислительной работы, особенно при расчете кольцевых сетей. Работа такого типа может быть выполнена с помощью электронно-вычислительных машин (ЭВМ). Для увязки сети на ЭВМ предложено много методов, для них разработаны алгоритмы и программы, базирующиеся на методе В.Г.Лобачева и его разновидностях.

При расчетах предполагаются заданными конфигурация сети, узловые расходы, диаметры труб, сопротивления участков сети,

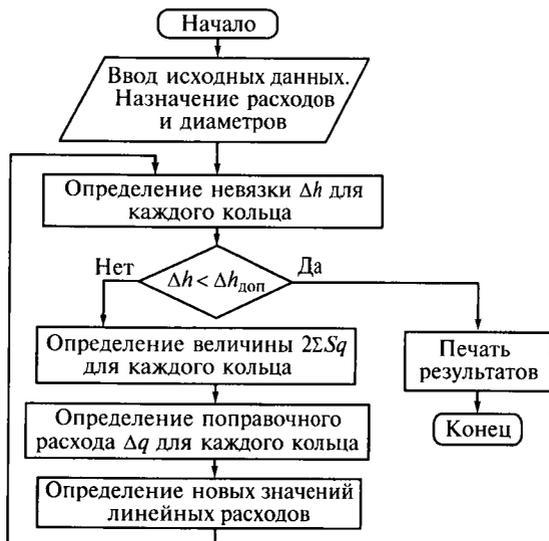


Рис. 5.9

геодезические отметки и свободные напоры в характерных точках. Все эти данные вводятся в машину.

Предварительно намеченные расходы участков должны удовлетворять уравнению баланса расходов в узлах (5.16), однако при этом они не удовлетворяют условию (5.17) равенства нулю алгебраической суммы потерь напора в каждом кольце. В результате в каждом кольце имеется невязка Δh , которая устраняется введением поправочного расхода Δq , который не нарушает уравнение баланса расходов. На рис. 5.9 приведен возможный алгоритм расчета кольцевой сети. На практике невязки потерь напора по отдельным кольцам допускаются 0,3...0,5 м, а невязка по периметру сети — 1,0... 1,5 м. Алгоритм расчета предусматривает определение невязки как по каждому кольцу, так и по периметру сети, ее сопоставление с допустимой невязкой и при необходимости определения поправочного расхода для каждого кольца.

5.9. Гидравлический удар в трубопроводах

Гидравлическим ударом называется резкое изменение (повышение или понижение) давления в трубопроводе при резком изменении скорости движения жидкости.

Предположим, что в напорном трубопроводе движется жидкость. Прекратим ее движение, например мгновенно закроем задвижку. В результате остановки движения произойдет резкое повышение давления в трубе вследствие перехода кинетической энергии жидкости в потенциальную. При этом в первую очередь давление увеличится непосредственно у задвижки после остановки ближайших к задвижке масс жидкости. Затем, по мере остановки последующих слоев жидкости, увеличение давления будет с большой скоростью распространяться вверх по трубопроводу, создавая волну повышения давления.

Повышение давления вызывает сжатие жидкости и увеличение диаметра трубы. Указанная упругая деформация жидкости и трубы происходит со скоростью распространения повышенного давления (в жидкости) по длине трубопровода. Скорость распространения упругих деформаций называется скоростью распространения ударной волны. Характер изменения давления у задвижки показан на схематической «ударной диаграмме» (рис. 5.10), из рассмотрения которой следует, что повышение давления у задвижки происходит не в самом начале удара, а через некоторый, правда, весьма малый, промежуток времени с момента начала повышения дав-

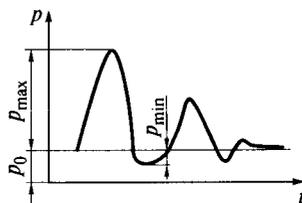


Рис. 5.10

ления. Это объясняется тем, что явление удара происходит в упругой среде.

Таким образом, после остановки последнего слоя вся жидкость в трубопроводе будет сжата. Но так как в этот момент давление в резервуаре меньше давления в трубопроводе, то жидкость придет в движение по направлению к резервуару. В результате произойдет резкое понижение давления в трубопроводе. Понижение давления, передающееся от слоя к слою и распространяющееся по направлению к задвижке, называется отраженной (обратной) ударной волной. Время пробега прямой и обратной (отраженной) ударных волн составляет длительность фазы гидравлического удара. Когда давление снизится во всем трубопроводе, жидкость остановится, находясь под пониженным давлением. При этом положении давление в трубопроводе будет меньше, чем в резервуаре, поэтому начнется обратное движение жидкости к задвижке, причем мы получим уже меньшее повышение давления, так как часть энергии будет потеряна (см. рис. 5.10). За этой обратной ударной волной последует другая, т.е. повторится фаза гидравлического удара, и т.д.

Описанный процесс происходит чрезвычайно быстро, так как скорости распространения ударной волны очень велики. Потери энергии, сопутствующие колебательному движению жидкости, приводят к постепенному затуханию данного процесса. На рис. 5.10 приведена диаграмма изменения давления при гидравлическом ударе в зависимости от времени, которая показывает, что давление при гидравлическом ударе может во много раз превышать давление, имеющееся в условиях статического напора.

Впервые явление гидравлического удара экспериментально и теоретически было изучено известным русским ученым Н. Е. Жуковским, который в 1898 г. создал теорию гидравлического удара. Эта теория не только не устарела, но является основой всех исследований в данной области. В дальнейшем ученые подвергли разработке и усовершенствовали теорию Жуковского, они учли некоторые факторы, которыми ранее Н. Е. Жуковский в своем общем решении считал возможным пренебречь.

При выводе основных зависимостей гидравлического удара Н. Е. Жуковский пользовался теоремой о количестве движения.

Рассмотрим некоторый слой (отсек) остановившейся жидкости, в области которого наблюдались повышение давления, сжатие жидкости и расширение стенок трубы. Предположим, что за время Δt между сечениями 1—1 и 2—2 на длине Δx произошло расширение стенок трубы (рис. 5.11). Обозначим скорость распространения упругих деформаций (скорость распространения ударной волны) через c . Тогда

$$\Delta x = c\Delta t.$$

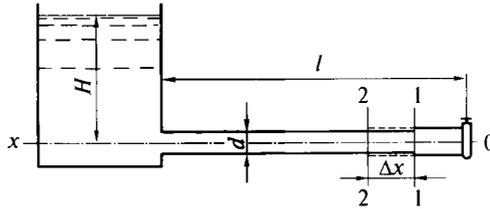


Рис. 5.11

Предположим, что до расширения объем жидкости между сечениями 1—1 и 2—2 находился под давлением p . При этом масса отсека

$$m = \rho \omega \Delta x. \quad (5.18)$$

Когда расширение стенок трубы закончилось, давление достигло значения $p' = p + \Delta p$, плотность жидкости увеличилась до $\rho' = \rho + \Delta \rho$, а площадь живого сечения — до $\omega' = \omega + \Delta \omega$. Значит, возросла и масса жидкости в отсеке:

$$m' = m + \Delta m = (\rho + \Delta \rho)(\omega + \Delta \omega)\Delta x.$$

Таким образом, увеличение массы составит

$$\begin{aligned} \Delta m &= m' - m = (\rho + \Delta \rho)(\omega + \Delta \omega)\Delta x - \rho \omega \Delta x = \\ &= \Delta x (\rho \omega + \rho \Delta \omega + \omega \Delta \rho + \Delta \rho \Delta \omega - \rho \omega). \end{aligned}$$

Пренебрегая произведением бесконечно малых величин, окончательно получим

$$\Delta m = \rho \omega \Delta x \left(\frac{\Delta \rho}{\rho} + \frac{\Delta \omega}{\omega} \right) = m \left(\frac{\Delta \rho}{\rho} + \frac{\Delta \omega}{\omega} \right).$$

Разделив левую и правую части полученного выражения на величину массы m , которой обладал отсек 1—1 и 2—2 до повышения давления, найдем относительное увеличение массы:

$$\frac{\Delta m}{m} = \frac{\Delta \rho}{\rho} + \frac{\Delta \omega}{\omega}. \quad (5.19)$$

Из формулы (5.19) следует, что относительное увеличение массы равно сумме относительных увеличений плотности жидкости и поперечного сечения трубопровода, которые соответствуют увеличению давления Δp .

Согласно закону Гука

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = \frac{\Delta p}{E_0}, \quad (5.20)$$

где E_0 — модуль упругости жидкости.

Вместе с тем в соответствии с законом Гука также можно записать

$$\frac{\Delta d}{d} = \frac{\Delta \sigma}{E}, \quad (5.21)$$

где Δd — увеличение диаметра трубы; $\Delta \sigma$ — увеличение растягивающих напряжений в стенках трубопровода при увеличении давления на Δp ; E — модуль упругости материала, из которого сделан трубопровод.

Из гидростатики известно, что сила гидростатического давления, которая стремится разорвать трубу,

$$\Delta F = d \Delta l \Delta p,$$

где Δl — длина элемента трубопровода.

Определим увеличение растягивающих напряжений, действующих в площадях продольного сечения стенок трубопровода. В нашем случае

$$\Delta \sigma = \frac{\Delta F}{2\delta \Delta l} = \frac{d \Delta l \Delta p}{2\delta \Delta l} = \frac{d \Delta p}{2\delta}, \quad (5.22)$$

где δ — толщина стенок трубы.

Подставляя выражение (5.21) в формулу (5.22), получим

$$\frac{\Delta d}{d} = \frac{d \Delta p}{2E\delta}. \quad (5.23)$$

Определим относительное увеличение площади:

$$\frac{\Delta \omega}{\omega} = \frac{d^2 + 2d\Delta d + (\Delta d)^2 - d^2}{d^2} = 2 \frac{\Delta d}{d}.$$

Если пренебречь квадратом бесконечно малой величины $(\Delta d)^2$, то можно получить

$$\frac{\Delta \omega}{\omega} = 2 \frac{\Delta d}{d} = \frac{d \Delta p}{\delta E}. \quad (5.24)$$

Теперь выразим относительное увеличение массы жидкости через величины, характеризующие поперечные размеры трубопровода, материал его стенок, давление и род жидкости. Для этого подставим значения величин, входящих в формулу (5.19), согласно формулам (5.20) и (5.24):

$$\frac{\Delta m}{m} = \Delta p \left(\frac{1}{E_0} + \frac{d}{\delta E} \right). \quad (5.25)$$

Если через v обозначить скорость жидкости в трубопроводе до его расширения, то после расширения в отсеке 1—1 и 2—2 она будет $v + \Delta v$. Выразим изменение массы жидкости в отсеке через

скорость, приняв направление оси x против течения (см. рис. 5.11). Тогда

$$\Delta m = \rho v \omega \Delta t - \rho \omega \Delta t (v + \Delta v) = -\rho \Delta v \omega \Delta t.$$

Разделим выражение для Δm на выражение для массы m , полученное по формуле (5.18),

$$\frac{\Delta m}{m} = \frac{\rho \Delta v \omega \Delta t}{\rho \omega \Delta x} = -\frac{\Delta v \Delta t}{\Delta x}.$$

Так как $\Delta x = c \Delta t$, то

$$\frac{\Delta m}{m} = -\frac{\Delta v \Delta t}{\Delta x} = -\frac{\Delta v}{c}. \quad (5.26)$$

Применим к массе жидкости, находящейся в отсеке между сечениями 1—1 и 2—2, теорему о количестве движения. Проекция изменения количества движения массы жидкости на ось x (если пренебречь весьма малыми изменениями величин ρ и ω):

$$-m \Delta v = -\rho \omega \Delta x \Delta v = -\rho \omega c \Delta t \Delta v. \quad (5.27)$$

Проекция импульса сил давления за то же время

$$(\omega + \Delta \omega)(p + \Delta p) \Delta t = (\omega p + \omega \Delta p + \Delta \omega p + \Delta \omega \Delta p - \omega p).$$

Пренебрегая бесконечно малой величиной $\Delta p \Delta \omega$, а также выражением $p \Delta \omega$, которое мало по сравнению с величиной $\omega \Delta p$, получим

$$\omega \Delta p \Delta t = -\rho \omega c \Delta t \Delta v$$

или

$$\Delta p = -\rho c \Delta v. \quad (5.28)$$

Перемножим уравнения (5.26) и (5.28):

$$\frac{\Delta v \Delta p}{c} = \Delta p c \Delta v \left(\frac{1}{E_0} + \frac{d}{\delta E} \right)$$

или

$$c^2 = \frac{\frac{1}{\rho}}{\frac{1}{E_0} + \frac{d}{\delta E}} = \frac{\frac{E_0}{\rho}}{1 + \frac{d E_0}{\delta E}}. \quad (5.29)$$

Выражение $\frac{E_0}{\rho} = c_0^2$ представляет собой квадрат скорости распространения упругих деформаций в жидкости с плотностью ρ и модулем упругости E_0 . Для воды

$$c_0 = \sqrt{E_0/\rho} = 1\,425 \text{ м/с.}$$

Извлекая теперь из выражения квадратный корень, получим известную формулу Н. Е. Жуковского для скорости распространения ударной волны:

$$c = \frac{1425}{\sqrt{1 + \frac{dE_0}{\delta E}}}. \quad (5.30)$$

Определим величину давления, возникающего при гидравлическом ударе, по выражению (5.28), в котором значения Δp и Δv заменим их дифференциалами:

$$dp = -\rho c dv.$$

Интегрируя это выражение, получим

$$p - p_0 = -\rho c(v - v_0), \quad (5.31)$$

где p_0 и v_0 — давление и скорость, соответствующие начальному моменту перед ударом.

Из формулы (5.31) следует, что максимальное давление при гидравлическом ударе имеет место в случае уменьшения скорости жидкости до нуля, т. е. при $v = 0$

$$p - p_0 = \rho c v_0. \quad (5.32)$$

Выражение (5.32) есть известная формула Жуковского для определения наибольшего давления при гидравлическом ударе. Она справедлива при так называемом прямом гидравлическом ударе, длительность фазы которого $T = 2l/c$ больше времени закрытия трубопровода T_3 , т. е. $T > T_3$. Это значит, что отраженная волна подойдет к концу трубы в тот момент, когда задвижка уже будет полностью закрыта.

Большие давления, возникающие при гидравлическом ударе, опасны для целостности труб. Существует ряд методов, позволяющих уменьшить величину давления при гидравлическом ударе, одним из которых является медленное закрытие запорно-регулирующих устройств. При этом давление определяется по формуле

$$p = \rho v_0 c \frac{T}{T_3}, \quad (5.33)$$

где T — длительность фазы удара; T_3 — время закрытия запорного устройства.

5.10. Расчет трубопроводов для газов

Перекачка по трубам газов (природный и искусственный газы, воздух, пар) имеет весьма широкое применение для различных бытовых и технических целей. По сравнению с движением капель-

ных жидкостей движение газов характеризуется рядом особенностей, обусловливаемых различиями их физических свойств.

Под углом зрения гидравлических расчетов следует различать два случая: течения при малых относительных перепадах давления и течения при больших относительных перепадах (имеется в виду перепад Δp между начальным и конечным сечениями труб, отнесенный к среднему давлению). В первом случае возможно пренебречь сжимаемостью газов, т. е. считать, что плотность транспортируемого газа неизменна по всей длине трубопровода; тогда расчеты воздухопроводов и газопроводов принципиально не отличаются от расчетов для несжимаемых жидкостей.

При больших относительных перепадах (примерно, если $\Delta p/p > 5\%$) пренебрегать сжимаемостью газа нельзя и нужно учитывать непрерывный характер изменения плотности газа в зависимости от давления.

Рассмотрим сначала случай течения газа при малых перепадах давления.

При расчете течения в трубах газов обычно рассматриваются потери не напора, а давления. Формулы для определения потерь давления на трение и местные потери в этом случае принимают вид:

$$\Delta p_{\text{тр}} = \rho g h_{\text{тр}} = \lambda \frac{l}{d} \rho \frac{v^2}{2}; \quad (5.34)$$

$$\Delta p_{\text{м}} = \rho g h_{\text{м}} = \zeta \rho \frac{v^2}{2}. \quad (5.35)$$

Здесь Δp — потерянное давление; ρ — плотность газа, определяемая по формуле $\rho = \frac{p_{\text{ср}}}{gRT}$, в которой $p_{\text{ср}} = \frac{p_1 + p_2}{2}$, где p_1 и p_2 — значения давления в концевых сечениях трубопровода. Величина $\rho \frac{v^2}{2}$ носит название динамического давления.

Формулу (5.34) представляют также в виде

$$R_{\text{тр}} = \frac{\Delta p_{\text{тр}}}{l} = \frac{\lambda}{d} \rho \frac{v^2}{2},$$

где $R_{\text{тр}}$ — так называемое удельное сопротивление трения (сопротивление трения на 1 пог. м длины трубопровода). Эта величина аналогична гидравлическому уклону и связана с ним соотношением

$$R_{\text{тр}} = \rho g I_{\text{тр}}.$$

Уравнение Бернулли при расчете трубопроводов для газов записывается в виде

$$\rho g (z_1 - z_2) + (p_1 - p_2) + \frac{\rho}{2} (v_1^2 - v_2^2) = \Delta p_{\text{пот}}.$$

В большинстве практически важных случаев величиной $\rho g(z_1 - z_2)$ в этом уравнении можно пренебречь, так как вследствие очень малой плотности газа эта величина незначительна по сравнению с другими членами уравнения.

Тогда уравнение Бернулли можно записать в виде $p_1 + \rho \frac{v_1^2}{2} = p_2 + \rho \frac{v_2^2}{2} + \Delta p_{\text{пот}}$, а при постоянном сечении трубопровода в виде $p_1 - p_2 = \Delta p_{\text{пот}}$.

Вентиляционные трубы часто имеют некруговое сечение, поэтому вместо диаметра в уравнение вводят эквивалентный диаметр $d = 4R$. Отметим попутно, что при расчетах вентиляции потери на местные сопротивления имеют, как правило, бóльшую величину, чем потери на трение, т.е. такие системы относятся к коротким трубам.

В длинных газопроводах, наоборот, потери давления на местные сопротивления невелики по сравнению с потерями давления на трение, и здесь можно полагать

$$\Delta p_{\text{пот}} \cong \Delta p_{\text{тр}} = \lambda \frac{l}{d} \rho \frac{v^2}{2}.$$

Коэффициент гидравлического трения λ , входящий в эту формулу, может определяться по тем же формулам, что и при движении несжимаемых жидкостей по трубам.

При расчете длинных газопроводов (имеющих часто длину, равную десяткам и сотням километров), а также трубопроводов сжатого воздуха имеют место значительные перепады давления между началом и концом трубопровода.

В этом случае нельзя без больших погрешностей полагать объемный вес газа постоянным по длине трубопровода, как это делается при расчете газопроводов низкого давления. Кроме того, даже при сохранении постоянства диаметра по длине газопровода движение газа в таких трубопроводах является неравномерным. Действительно, в соответствии с уравнением неразрывности $\rho \omega v = \text{const}$ или при $\omega = \text{const}$

$$\rho v = \text{const}.$$

Но давление газа по длине газопровода уменьшается, т.е. уменьшается его плотность, следовательно, возрастает скорость течения газа, которая в конце газопровода всегда больше, чем в его начале.

Далее при расчетах таких газопроводов можно пренебрегать не только изменениями удельной энергии положения, т.е. членом $\rho g(z_1 - z_2)$ в уравнении Бернулли (об этом уже говорилось ранее), но также изменениями удельной кинетической энергии газа.

Поэтому при расчетах движения газов с большими перепадами давления уравнение Бернулли сводится к зависимости (для бес-

конечно малого участка трубопровода, на котором объемный вес газа и скорость его течения можно считать постоянными)

$$-\Delta p = \Delta p_{\text{тр}}. \quad (5.36)$$

С учетом формулы Дарси — Вейсбаха формула (5.36) получает вид

$$-dp = \lambda \frac{dl}{d} \rho \frac{v^2}{2}. \quad (5.37)$$

Для интегрирования этого уравнения нужно знать характер изменения скорости, объемного веса и коэффициента гидравлического трения вдоль газопровода, т. е. зависимости

$$\rho = f(l); \quad v = f_1(l); \quad \lambda = f_2(l).$$

Эти зависимости определяются термодинамическими процессами, имеющими место при движении газа по трубопроводу. В случае отсутствия теплообмена между газом и окружающей средой газ будет расширяться адиабатически и его температура будет непрерывно понижаться. При наличии теплообмена между газом и окружающей средой температура газа T может сохраняться постоянной по всей длине газопровода (изотермическое течение), равной температуре окружающей среды. Это обычно имеет место для длинных трубопроводов без тепловой изоляции, и поэтому большинство промышленных газопроводов работает в условиях изотермического течения.

Для коэффициента гидравлического трения λ , как известно, имеет место зависимость

$$\lambda = f\left(\text{Re}; \frac{\Delta}{d}\right).$$

Относительная шероховатость по длине газопровода не изменяется (для данных Δ и d). Число Рейнольдса можно представить в виде

$$\text{Re} = \frac{\rho v d}{\mu} = \frac{4G}{\mu g \pi d},$$

где G — весовой расход.

При изотермическом течении потока динамический коэффициент вязкости μ сохраняется неизменным по длине трубопровода (так как температура газа не меняется) и, следовательно, остается постоянным и число Рейнольдса. Таким образом, несмотря на изменение средней скорости течения газа и его объемного веса, величина коэффициента трения вдоль газопровода не меняется.

Скорость v и плотность ρ в любом сечении связаны со скоростью и плотностью в начальном сечении v_1 и ρ_1 уравнением неразрывности:

$$v = v_1 \frac{\rho_1}{\rho}.$$

Подставляя это выражение в (5.37), получим

$$-dp = \lambda \frac{dl}{d} \frac{\rho_1^2}{\rho} \frac{v_1^2}{2}. \quad (5.38)$$

Из уравнений состояния газа

$$\rho = \frac{p}{gRT} \quad (5.39)$$

имеем

$$\frac{\rho_1^2}{\rho} = \frac{p_1^2}{pgRT},$$

в соответствии с этим формулу (5.38) можно привести к виду

$$-pdp = \left(\frac{\lambda}{d} \frac{v_1^2}{2} \frac{p_1^2}{gRT} \right) dl. \quad (5.40)$$

Интегрируя это уравнение от p_1 до p_2 (p_2 — давление в конце рассматриваемого участка газопровода), получим

$$\frac{p_1^2 - p_2^2}{2} = \lambda \frac{l}{d} \frac{v_1^2}{2} \frac{p_1^2}{gRT}.$$

С учетом формулы (5.39) найдем

$$\frac{p_1^2 - p_2^2}{2} = \lambda \frac{l}{d} \frac{v_1^2}{2} p_1 \rho_1$$

и далее, вводя весовой расход, получим

$$\frac{p_1^2 - p_2^2}{2} = \lambda \frac{l}{d} \frac{G^2}{2g\omega^2} \frac{p_1}{\rho_1 g}. \quad (5.41)$$

Уравнение (5.41) можно представить в виде

$$\frac{p_1^2 - p_2^2}{2p_1} = \lambda \frac{l}{d} \frac{v_1^2}{2} \rho_1 g. \quad (5.42)$$

Левая часть последнего уравнения (5.42) может быть затем преобразована к виду

$$\frac{p_1^2 - p_2^2}{2p_1} = \frac{(p_1 - p_2)(p_1 + p_2)}{2p_1} = \frac{1}{2}(p_1 - p_2) \left(1 + \frac{p_2}{p_1} \right)$$

и поэтому

$$p_1 - p_2 = \frac{2}{1 + \frac{p_2}{p_1}} \lambda \frac{l}{d} p_1 \frac{v_1^2}{2}$$

величину относительного давления можно преобразовать

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{p_1 - \Delta p}{p_1} = 1 - \frac{\Delta p}{p_1}.$$

Подставляя последнее выражение в (5.41), получим окончательно

$$p_1 - p_2 = \frac{2}{2 + \frac{\Delta p}{p_1}} \lambda \frac{l}{d} p_1 \frac{v_1^2}{2}. \quad (5.43)$$

Уравнение отличается от формулы Дарси—Вейсбаха для определения потерь давления при движении несжимаемой жидкости лишь множителем, зависящим от величины отношения $\Delta p/p_1$. До тех пор пока сохраняется условие $\Delta p/p_1 < 5\%$, пренебрежение этим множителем дает ошибку до 2,5%, что допустимо в большинстве инженерных расчетов. Таким образом, можно прийти к выводу, что не абсолютная величина начального давления газа p_1 определяет, можно ли при расчете газопровода пользоваться формулой Дарси, а относительная величина изменения этого давления по длине газопровода в целом. Формула для определения расхода газа имеет вид

$$G = \omega \sqrt{\frac{p_1^2 - p_2^2}{\lambda l} \frac{g^2 d p_1}{p_1}},$$

или

$$G = \omega \sqrt{\frac{g d}{\lambda} \frac{p_1^2 - p_2^2}{I R T}}. \quad (5.44)$$

Коэффициент гидравлического трения λ , входящий в полученные зависимости, определяется по тем же формулам, что и при движении несжимаемых жидкостей.

**ДВИЖЕНИЕ ВОДЫ В ОТКРЫТЫХ РУСЛАХ
И КАНАЛАХ**

**6.1. Особенности равномерного движения
жидкости в каналах**

Движение жидкости в открытых руслах каналов и характеризуется наличием свободной поверхности. При равномерном движении будут постоянны площадь и форма живого сечения, расход и средняя скорость течения, местные скорости в сходственных точках сечений.

Определим некоторые особенности равномерного движения жидкости. Рассмотрим поток в условиях равномерного движения (рис. 6.1) в канале с уклоном i . Поверхность воды в канале имеет также уклон — пьезометрический уклон i_n . Для равномерного движения эти уклоны равны, и, кроме того, они равны и гидравлическому уклону I :

$$i = i_n = I. \tag{6.1}$$

Вспомним, что живым сечением потока называется поверхность, проведенная нормально к линиям тока. Следовательно, живое сечение будет нормально к поверхности воды и к линии дна. Обычно уклон дна невелик, поэтому, не делая большой ошибки, можно считать живые сечения вертикальными. Для постоянного сечения потока, расположенного вертикально, основной его характеристикой будет глубина потока. Глубина равномерного движения потока называется нормальной глубиной и обозначается h_0 .

При применении уравнения Бернулли ранее мы определяли геодезическую высоту как расстояние от плоскости сравнения до центра тяжести живого сечения потока. Здесь, поскольку давление в сечениях подчиняется закону гидростатики, геодезическую отметку лучше всего определять от плоскости сравнения до поверхности воды. Уравнение Бернулли, написанное для равномерного движения в открытом потоке, при равенстве скоростей в сечениях и одинаковых (атмосферных) давлениях на поверхности будет

давление в сечениях подчиняется закону гидростатики, геодезическую отметку лучше всего определять от плоскости сравнения до поверхности воды. Уравнение Бернулли, написанное для равномерного движения в открытом потоке, при равенстве скоростей в сечениях и одинаковых (атмосферных) давлениях на поверхности будет

$$z_1 - z_2 = h_l.$$

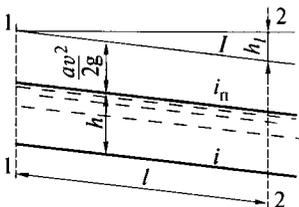


Рис. 6.1

Это означает, что при равномерном движении потеря напора по длине определяется разностью отметок поверхности воды.

6.2. Определение коэффициента C в формуле Шези

Основной формулой для равномерного движения воды в каналах и руслах является формула Шези:

$$Q = \omega C \sqrt{Ri} \quad \text{или} \quad v = C \sqrt{Ri}. \quad (6.2)$$

Коэффициент C в этой формуле называется коэффициентом Шези, или «скоростным множителем». Он имеет размерность квадратного корня из ускорения, играет в практических расчетах весьма важную роль и поэтому должен определяться возможно точнее. Величина коэффициента C зависит от шероховатости стенок и дна русла, от геометрической формы и размеров поперечного сечения русла и определяется по эмпирическим формулам, предложенным различными авторами на основе опытных данных.

Поскольку формулы для коэффициента Шези зависят от гидравлического радиуса, то проще всего объединить эти два параметра и формулу Шези представить в виде:

$$Q = \omega W \sqrt{i} \quad \text{или} \quad v = W \sqrt{i}, \quad (6.3)$$

где W — скоростная характеристика потока, $W = C \sqrt{R}$, физический смысл которой — средняя скорость потока при гидравлическом уклоне, равном единице.

В настоящее время применяются одночленные степенные формулы для определения коэффициентов C и W . Так как коэффициенты C и W размерные, то, вычисляя их, следует пользоваться метровыми мерами, для которых составлены все последующие формулы, а также таблицы для определения коэффициента шероховатости n .

Наиболее точной формулой, основанной на большом количестве опытных материалов, следует признать уже упоминавшуюся формулу Павловского:

$$C = \frac{1}{n} R^y, \quad \text{или} \quad W = \frac{1}{n} R^{y+0.5} = \frac{1}{n} R^z, \quad (6.4)$$

где n — коэффициент шероховатости, зависящий от поверхности стенок русла; z — показатель степени, $z = y + 0,5$, определяемый по формуле Павловского,

$$z = 0,37 + 2,5\sqrt{n} - 0,75(\sqrt{n} - 0,1)\sqrt{R}. \quad (6.5)$$

Ранее применялись и в литературе приводятся формулы с постоянным значением показателя z . С учетом этого частные виды формул для скоростной характеристики приводятся к виду

$$W = \frac{1}{n} R^{0,7}, \text{ или } W = \frac{1}{n} R^{0,67}. \quad (6.6)$$

Первая формула является модификацией формулы Форхгеймера, а вторая — Манинга.

Значения коэффициентов шероховатости даны в приложениях: для неукрепленных искусственных русел (Приложение 4); для русел с искусственным креплением (Приложение 5) и для естественных русел (Приложение 6). Значения скоростной характеристики, рассчитанной по формулам (6.4), (6.5), даны для искусственных русел произвольного сечения в Приложениях 7 и 8, а для естественных водотоков в Приложении 9.

6.3. Формы сечений каналов и их гидравлические характеристики

Наиболее часто встречаемые формы поперечных сечений каналов приведены на рис. 6.2. Основными гидравлическими характеристиками каналов являются: глубина жидкости в канале — h_0 ; ширина канала понизу — b ; коэффициент заложения откосов — m ; ширина канала поверху — B ; площадь живого сечения канала — ω ; смоченный периметр — χ ; гидравлический радиус — R .

Рассмотрим трапециевидальное сечение канала, его геометрические размеры определяются шириной канала понизу — b ; коэффициентом заложения откосов — m ; глубиной воды в канале — h . Напомним, что коэффициент заложения откосов представляет собой котангенс угла наклона откоса к горизонту $m = \text{ctg}\theta$.

Определим через указанные величины гидравлические характеристики канала:

площадь живого сечения

$$\omega = (b + mh)h; \quad (6.7)$$

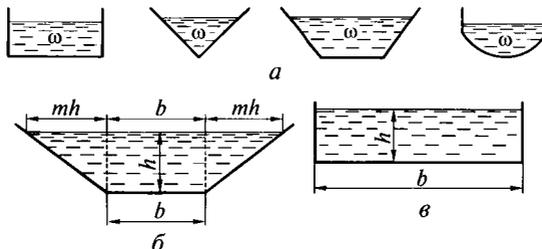


Рис. 6.2

ширина канала поверху

$$B = b + 2mh; \quad (6.8)$$

смоченный периметр

$$\chi = b + 2h\sqrt{1+m^2}; \quad (6.9)$$

гидравлический радиус

$$R = \frac{(b+mh)h}{b+2h\sqrt{1+m^2}}. \quad (6.10)$$

Из приведенных формул можно получить зависимости для соответствующих элементов для русел прямоугольной и треугольной форм сечения. В прямоугольном русле стенки вертикальны, следовательно, $m = 0$, тогда получим:

$$\omega = bh; \quad B = b; \quad \chi = b + 2h; \quad R = \frac{bh}{b + 2h}.$$

Для русла треугольной формы $b = 0$, поэтому имеем:

$$\omega = mh^2; \quad B = 2mh; \quad \chi = 2h\sqrt{1+m^2}; \quad R = \frac{mh}{2\sqrt{1+m^2}}.$$

6.4. Гидравлически наивыгоднейшее сечение канала

Гидравлически наивыгоднейшей называется такая форма поперечного сечения русла, которая при заданных площади сечения канала и шероховатости дает наибольшую пропускную способность.

Если взять ряд живых сечений различной формы, но одинаковой площади ω и шероховатости, то наивыгоднейшим из них будет то сечение, которое при том же уклоне будет пропускать наибольший расход.

Рассматривая формулу расхода (6.3), замечаем, что при постоянных площади сечения ω и уклоне i расход Q тем больше, чем больше гидравлический радиус R , так как при $\omega = \text{const}$ W также возрастает вместе с R . Но так как $R = \omega/\chi$, то максимальной пропускной способностью будет обладать сечение с наименьшим смоченным периметром χ .

Таким образом, вопрос сводится к нахождению формы сечения с минимальной величиной смоченного периметра χ при заданной площади сечения ω .

В трапециевидальном сечении при одинаковой площади живого сечения ω и постоянном коэффициенте откоса m , назначаемом в

зависимости от рода грунта, может быть различное соотношение между шириной по дну b и глубиной h .

Наивыгоднейшей с гидравлической точки зрения будет такая форма трапеции, которая при одинаковой площади живого сечения ω обладает наименьшим смоченным периметром χ .

Найдем такое отношение ширины дна к глубине, которое дает минимальный смоченный периметр; для этого исследуем на минимум функцию $\chi = f(h)$ при постоянной площади сечения ω и постоянном коэффициенте откоса m .

Выразив ширину канала по дну b из формулы (6.7) и подставив это значение в формулу (6.9), получим следующее соотношение:

$$\chi = \frac{\omega}{h} - mh + 2h\sqrt{1+m^2}.$$

Находя производную смоченного периметра по глубине, имеем

$$\begin{aligned} \frac{d\chi}{dh} &= -\frac{\omega}{h^2} - m + 2\sqrt{1+m^2} = -\frac{(b+mh)h}{h^2} - m + 2\sqrt{1+m^2} = \\ &= -\frac{b}{h} - 2m + 2\sqrt{1+m^2}. \end{aligned}$$

Так как при минимуме χ отношение $b/h = \beta_{г.н}$ и в тоже время $\frac{d\chi}{dh} = 0$, то получим

$$\beta_{г.н} = 2(\sqrt{1+m^2} - m). \quad (6.11)$$

Это выражение определяет соотношение между шириной b и глубиной h для гидравлически наивыгоднейшего сечения трапецеидальной формы.

Следует отметить еще свойство гидравлически наивыгоднейшего трапецеидального сечения. Если в выражении для гидравлического радиуса (6.10) заменить $b = \beta_{г.н}h = 2h(\sqrt{1+m^2} - m)$, то после сокращения имеем

$$R_{г.н} = h/2, \quad (6.12)$$

т.е. для трапецеидальных гидравлически наивыгоднейших сечений гидравлический радиус R равен половине глубины.

При различных значениях коэффициента m из всех трапеций наивыгоднейшей будет та, которая представляет собой половину правильного шестиугольника, т.е. при $m = \text{ctg } 60^\circ = 0,866$.

6.5. Гидравлический расчет каналов

При решении задач на равномерное движение в открытых руслах часто применяется понятие «расходная характеристика» (раньше ее называли «модулем расхода»):

$$Q = K\sqrt{i}. \quad (6.13)$$

Как видно из формулы (6.13), расходная характеристика численно равна расходу в русле при уклоне $i = 1$ и, следовательно, имеет размерность расхода. Понятие расходной характеристики позволяет несколько упростить решение некоторых задач на расчет каналов.

При гидравлическом расчете каналов встречаются следующие основные типы задач.

Первый тип задач. Требуется определить пропускную способность Q канала (скорость протекания воды в нем v), если известны его размеры (b , h и m), коэффициент шероховатости n и уклон i .

Технология расчета следующая: определяются последовательно площадь живого сечения канала ω , смоченный периметр χ , гидравлический радиус R ; устанавливается коэффициент шероховатости n ; затем по табличным данным находят значение скоростной характеристики W или скоростного множителя C и, наконец, по формуле (6.3) или (6.2) определяется расход потока или его средняя скорость.

Аналогично решается задача об определении уклона канала, если известны Q , b , h , m и n . Эта задача также решается непосредственно по формуле Шези, если ее решить относительно искомого уклона:

$$i = \frac{Q^2}{\omega^2 W^2} = \frac{Q^2}{\omega^2 C^2 R}.$$

При необходимости найти уклон канала или лотка по наибольшей допускаемой скорости v_{\max} , более удобной является формула

$$i = \frac{v^2}{W^2} = \frac{v^2}{C^2 R}.$$

Второй тип задач. Известными величинами являются b , m , n , i , необходимо определить глубину при заданном расходе Q_0 . Эта задача называется задачей о нормальной глубине. Как отмечалось ранее, нормальной называется такая глубина, которая устанавливается в русле при заданном расходе в условиях равномерного движения.

Данная задача имеет несколько вариантов решения. Первый вариант решения — подбором по формуле Шези. Здесь удобно вначале вычислить расходную характеристику

$$K_0 = \frac{Q}{\sqrt{i}}.$$

Теперь задаются каким-либо значением глубины h_1 и вычисляют соответствующие ей значения ω_1 , χ_1 , R_1 , W_1 (C_1) и K_1 . Полученное значение K_1 сравнивают с K_0 . Тут возможны три случая: $K_1 < K_0$, $K_1 > K_0$, $K_1 = K_0$. Поскольку глубина связана с расходной

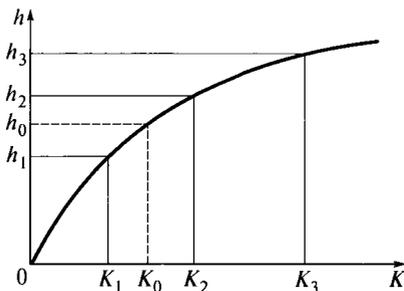


Рис. 6.3

характеристикой, то это дает возможность принять решение о назначении и расчете следующей глубины; ее назначают в первом случае $h_2 > h_1$, во втором случае $h_2 < h_1$, а в третьем случае $h_1 = h_0$, т.е. здесь расчет оканчивается. Во всех случаях подбора глубины необходимо выполнить столько расчетов, сколько необходимо для нахождения нормальной глубины h_0 .

Второй вариант расчета аналогичен предыдущему, только в нем сокращается число отдельных расчетов. Здесь целесообразно вычислить не менее трех пар значений $K=f(h)$, при этом обязательно должно быть одно значение K больше K_0 и одно значение K меньше K_0 . После этих вычислений следует построить график (рис. 6.3) $K=f(h)$, используя при необходимости также точку $K=0$ при $h=0$. По графику можно довольно точно найти искомое h и затем еще раз проверить его по формуле.

Третий тип задач. Требуется подобрать размеры поперечного сечения канала — ширину b и глубину h , если известны Q , i и n . Этот тип задач наиболее часто встречается в инженерной практике при проектировании каналов. Так как у нас имеются две неизвестные величины: b и h , то задача оказывается неопределенной. Поэтому иногда одной из них задаются, а вторую определяют. При этом следует стремиться к тому, чтобы сечение получилось гидравлически наиболее выгодным. Если ширина b и глубина h не ограничены условиями расчета, то можно рассчитывать канал гидравлически наиболее выгодного сечения. Для этого определяют $\beta_{г.н}$ по формуле (6.11), а затем выражают b через h и подбирают значение h_0 аналогично предыдущей задаче.

6.6. Допустимые максимальные и минимальные скорости течения

Средняя скорость v движения воды в каналах должна находиться в пределах $v_{\min} \leq v \leq v_{\max}$, где v_{\max} — максимальная допустимая скорость течения воды при равномерном движении; v_{\min} —

минимальная допустимая скорость течения воды при равномерном движении. При $v > v_{\max}$ русло канала будет размываться водой, а при $v < v_{\min}$ русло будет заиливаться наносами, которые транспортирует поток.

Скорость протекания воды зависит от уклона канала, а максимальная скорость протекания воды зависит только от материала, из которых сложены стенки и дно русла канала. Некоторые данные по максимальным допустимым значениям скоростей для земляных и укрепленных каналов приведены в табл. 6.1.

Для определения максимальных допустимых скоростей используются многочисленные эмпирические формулы, в которых эта скорость зависит от среднего диаметра частиц грунта d , глубины потока h или его гидравлического радиуса R и других параметров. Для примера приведем формулу Леви:

$$v_{\text{доп}} = A\sqrt{gd} \lg \frac{R}{7d}, \quad (6.14)$$

где A — коэффициент, учитывающий уплотненность грунта ($A = 3,2$ для хорошо уплотненных грунтов, $A = 2,8$ для грунтов с рыхлой структурой).

Формула Латышенкова:

$$v_{\text{доп}} = 5d^{0,3}h^{0,2}. \quad (6.15)$$

Минимальные скорости протекания воды в канале устанавливаются из условия недопущения заиления каналов и зависят от размеров и количества взвешенных частиц в потоке. Здесь также применяются эмпирические формулы, например формула Леви:

$$v_{\text{мин}} = 0,01 \frac{v_{\text{г.к}}}{\sqrt{d}} \sqrt[4]{\frac{p}{0,01} \frac{0,0225}{n}} \sqrt{R}, \quad (6.16)$$

где $v_{\text{г.к}}$ — скорость падения частиц в покоящейся жидкости, называемая гидравлической крупностью частицы; d — средний диаметр частиц преобладающей массы взвешенных наносов; p — массовая

Таблица 6.1

Характеристика стенок и дна канала	$v_{\text{доп}}$, м/с	Характеристика стенок и дна канала	$v_{\text{доп}}$, м/с
Пыль, ил	0,15... 0,20	Граниты, диабазы	15... 20
Песок мелкий	0,20... 0,60	Каменная кладка	4... 10
Песок крупный	0,50... 0,90	Одинокое мощение	2,3... 4,5
Гравий	0,60... 1,20	Двойное мощение	2,8... 4,7
Супесь, суглинок	0,70... 1,00	Бетонная облицовка	9... 25
Глина	1,00... 1,80	Дерево	25... 36

насыщенность (в процентах) взвешенных наносов с $d_{cp} > 0,25$ мм; n — коэффициент шероховатости русла; R — гидравлический радиус.

Допустимую минимальную скорость протекания воды в канале можно также определить по формуле А. С. Гиришкана:

$$v_{min} = A Q^{0,2}, \quad (6.17)$$

где Q — расход потока, м³/с; A — коэффициент, принимаемый в зависимости от гидравлической крупности частиц по следующим данным:

$v_{г.к},$ мм/с.....	< 1,5	1,5...3,5	> 3,5
A	0,33	0,44	0,55

6.7. Расчет каналов, имеющих замкнутый поперечный профиль

Безнапорное движение жидкости в трубах, или, что тоже, движение в закрытых каналах с неполным заполнением, обычно встречается в канализационных или водосточных системах.

Полное заполнение допускается обычно только в водосточных (ливневых) системах. Наиболее распространенными сечениями канализационных каналов являются: круглое (рис. 6.4); шатровое (рис. 6.5), овоидальное (рис. 6.6) и лотковое (рис. 6.7).

Гидравлический расчет канализационных сетей производится по тем же формулам, что и обычных каналов. Коэффициент C берется по формуле Павловского при n от 0,011 до 0,025. Ввиду того что величины ω и χ для рассматриваемых сечений труб определять затруднительно, при выполнении практических расчетов пользуются специальными графиками и таблицами, приводимыми в справочной литературе.

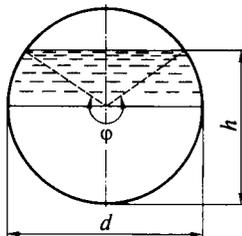


Рис. 6.4

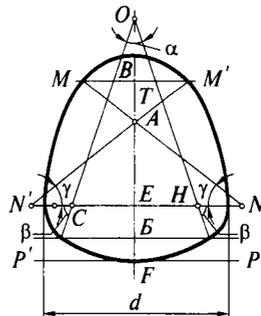


Рис. 6.5

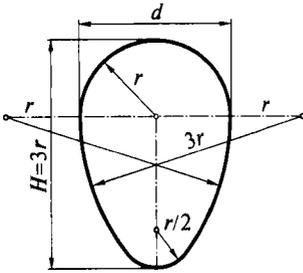


Рис. 6.6

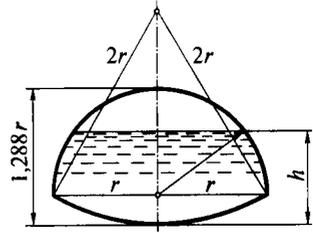


Рис. 6.7

Покажем такие графики на примере круглого сечения. Обозначим через h глубину наполнения трубы, а через d ее диаметр. Отношение $h/d = a$ называют степенью наполнения трубы, ее значения меняются в диапазоне $0 < \frac{h}{d} < 1$. При заданном уклоне значения расхода и средней скорости будут меняться в зависимости от наполнения трубы от нуля до некоторых величин, соответствующих полному наполнению канала v_n и Q_n .

Если проследить изменение скорости и расхода в зависимости от наполнения труб, то в безразмерном виде имеем:

$$\frac{v}{v_n} = \frac{W\sqrt{i}}{W_n\sqrt{i}} = \left(\frac{R}{R_n}\right)^2;$$

$$\frac{Q}{Q_n} = \frac{\omega W\sqrt{i}}{\omega_n W_n\sqrt{i}} = \frac{\omega}{\omega_n} \left(\frac{R}{R_n}\right)^2.$$

Указанные зависимости имеют максимум, причем скорость и расход в условиях максимума имеют большие значения, чем при полном наполнении. Расчеты показывают, что в зависимости от характера замкнутого профиля v_{\max} лежит в пределах $h_1 \approx (0,80 \dots 0,85)d$, а Q_{\max} находится при $h_2 \approx (0,93 \dots 0,95)d$. Объясняется это тем, что при наполнении верхней части круглого сечения смоченный периметр χ растет быстрее, чем площадь ω , и поэтому гидравлический радиус R начинает при $h > 0,81d$ уменьшаться, давая вместе с тем и уменьшение скорости v .

На рис. 6.8 показан график зависимости степени наполнения круглой трубы от относительных скоростных $M = W/W_n$ и расходных $N = K/K_n$ характеристик, который можно использовать для расчета параметров потока при любом наполнении трубы.

Наиболее часто встречающейся задачей является определение расхода или средней скорости потока для канала с известными: диаметром d , уклоном i , материалом n и наполнением h/d . Реше-

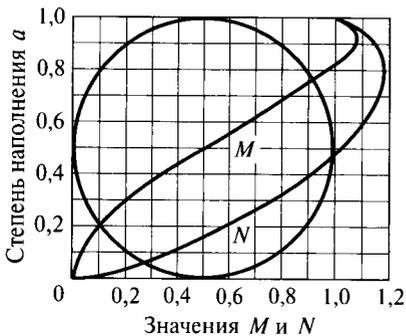


Рис. 6.8

ние такой задачи начинается с определения расхода или средней скорости при полном наполнении:

$$Q_n = \omega_n W_n \sqrt{i} \quad \text{или} \quad v_n = W_n \sqrt{i}.$$

Затем по графику находят относительные скоростные W/W_n и расходные K/K_n характеристики при заданном наполнении трубы h/d . Теперь можно рассчитать искомое значение расхода или скорости

$$Q = Q_n \frac{K}{K_n} \quad \text{или} \quad v = v_n \frac{W}{W_n}.$$

Максимум скорости в шатровом, овоидальном и лотковом сечениях теоретически получается примерно при том же наполнении. Однако испытания труб этих сечений в натуре не дают явно выраженного максимума скорости и расхода при этих теоретических значениях наполнения вследствие влияния зажатого сверху сечения трубы воздуха.

6.8. Неравномерное движение в открытых руслах

Движение жидкости будет неравномерным в том случае, если по длине потока изменяются его живое сечение и средняя скорость, или если при постоянном живом сечении изменяются величины и распределение скоростей по сечению, или одновременно изменяется и то, и другое.

При неравномерном движении гидравлический уклон потока (уклон линии энергии) I , пьезометрический уклон i_n (уклон свободной поверхности) и уклон дна потока i не равны между собой (рис. 6.9 и 6.10), т. е. $I \neq i_n \neq i$.

Примерами неравномерного движения воды в открытых руслах является движение воды в реках с изменяющимся живым сечени-

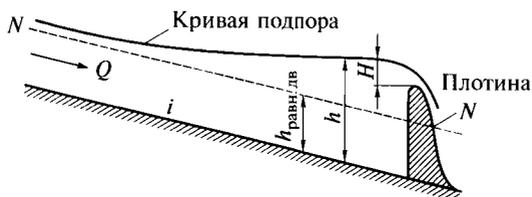


Рис. 6.9

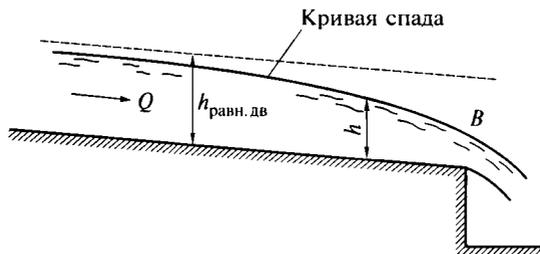


Рис. 6.10

ем: на расширениях и сужениях рек, на переходах от мелких мест (перекатов) к глубоким (плесам), при преграждении русел плотинами, перепадами, мостами и т. п.

При неравномерном движении в открытых руслах глубина потока изменяется по его длине и свободная поверхность потока бывает криволинейной. Здесь возможны два явления:

п о д о р — когда глубины по длине потока возрастают (см. рис. 6.9), а скорости течения по длине потока уменьшаются; это определяется выражением $\frac{dh}{dl} > 0$;

с п а д — когда глубины по длине потока уменьшаются; это явление наблюдается в каналах и реках перед уступом или резким увеличением уклона (см. рис. 6.10); для этого случая $\frac{dh}{dl} < 0$.

Кроме того, в открытых руслах иногда образуется гидравлический прыжок, т.е. резкий переход от малых глубин с большими скоростями к большим глубинам, в этом случае $\frac{dh}{dl} \rightarrow \infty$. Гидравлический прыжок есть местное явление, при котором нарушается условие плавной изменяемости движения, и он рассматривается отдельно.

Призматическими руслами называют такие русла, у которых форма и площадь поперечного сечения по длине потока не изменяются и зависят только от глубины потока; для них $\omega = f(h)$, а $\frac{d\omega}{dl} = 0$.

Примерами призматического русла могут служить каналы трапециевидального сечения с постоянной шириной дна и постоянным заложением откосов или канализационный коллектор постоянного сечения.

Непризматическими руслами называют русла, у которых форма поперечного сечения по длине потока изменяется: примерами таких русел может служить канал с расширяющимся дном или

переменным заложением откоса. Площадь живого сечения в непризматическом русле может сохраняться по длине. Например, русло реки из мелкого и широкого может постепенно переходить в узкое глубокое, и если даже площадь живого сечения при этом не меняется, русло все же будет непризматическим.

Как мы увидим далее, основное уравнение неравномерного движения и способы построения кривых свободной поверхности для призматических русел значительно упрощаются.

Естественные русла являются непризматическими, однако в пределах отдельных участков с медленно изменяющейся по длине формой и площадью живых сечений естественные русла можно приближенно считать призматическими.

По уклону дна открытые русла подразделяют:

на русла с прямым (положительным) уклоном дна $i > 0$, у которых направление течения и падения дна совпадают;

русла с горизонтальным дном $i = 0$;

русла с обратным (отрицательным) уклоном дна $i < 0$, у которых направление течения противоположно направлению падения дна.

Наиболее распространенным случаем, с которым мы в дальнейшем будем встречаться, являются русла с прямым уклоном дна $i > 0$.

6.9. Удельная энергия сечения. Критическая глубина

При анализе условий неравномерного движения в открытых руслах применяется понятие удельной энергии сечения. Если плоскость сравнения провести через наинизшую точку живого сечения (рис. 6.11), то удельная энергия

$$\mathcal{E} = h + \frac{\alpha v^2}{2g}. \quad (6.18)$$

Удельная энергия потока относительно плоскости сравнения, проходящей через наинизшую точку сечения, называется *удельной энергией сечения*.

Проследим изменение удельной энергии сечения \mathcal{E} с изменением уклона дна русла i при постоянном расходе $Q = \text{const}$. С уменьшением уклона i уменьшается скорость потока v и возрастает глубина h . Поэтому в выражении для

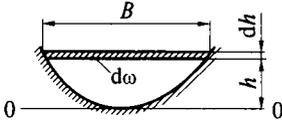


Рис. 6.11

\mathcal{E} при $i \rightarrow 0$ имеем $v \rightarrow 0$, $\frac{\alpha v^2}{2g} \rightarrow 0$ и $\mathcal{E} \approx h$.

График для \mathcal{E} в этой части выражается

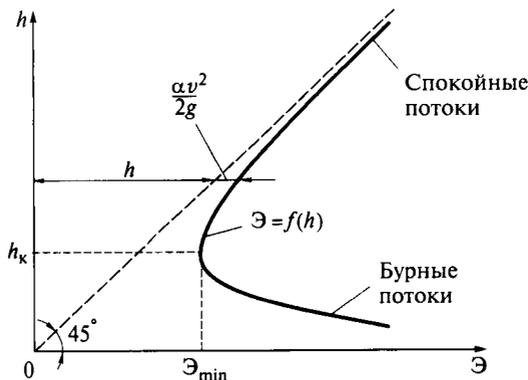


Рис. 6.12

линией, приближающейся к прямой, расположенной под углом 45° к оси абсцисс (рис. 6.12). При больших значениях уклона i скорость v увеличивается, а глубина потока h уменьшается. Поэтому в выражении энергии член h будет стремиться к нулю $v \rightarrow \infty$ и $\frac{\alpha v^2}{2g} \rightarrow \infty$, т.е. кривая удельной энергии сечения будет приближаться к оси абсцисс. Таким образом, обе ветви кривой удельной энергии сечения уходят в бесконечность. Так как кривая идет непрерывно и при конечных h значения Θ также конечны, то удельная энергия сечения будет иметь минимум Θ_{\min} . Та глубина потока, при которой удельная энергия сечения имеет наименьшее значение Θ_{\min} , называется критической глубиной h_k (см. рис. 6.12).

Если в выражении удельной энергии Θ заменить $v = Q/\omega$, то

$$\Theta = h + \frac{\alpha Q^2}{2g\omega^2}.$$

Для определения критической глубины необходимо найти минимум удельной энергии, т.е. найти производную $\frac{d\Theta}{dh}$ и приравнять ее к нулю:

$$\frac{d\Theta}{dh} = 1 - \frac{\alpha Q^2}{g\omega^3} \frac{d\omega}{dh} = 0,$$

но $\frac{d\omega}{dh} = B$ (см. рис. 6.11), где B — ширина живого сечения поверху.

Следовательно, при минимуме Θ получим

$$1 - \frac{\alpha Q^2}{g\omega_k^3} B_k = 0$$

или

$$\frac{\omega_k^3}{B_k} = \frac{\alpha Q^2}{g}, \quad (6.19)$$

где индексы «к» показывают, что рассматриваемые элементы потока находятся при критической глубине h_k .

Полученное уравнение является основным для нахождения критической глубины в сечении любой геометрической формы.

Удельная энергия сечения характеризует энергетические особенности потока. При $h > h_k$ энергия потока переносится в основном за счет потенциальной энергии, а при $h < h_k$ поток несет энергию в виде кинетической энергии. Поэтому критическая глубина разделяет поток по характеру течения на бурное состояние потока при $h < h_k$, спокойное состояние потока при $h > h_k$ и критическое состояние потока при $h = h_k$. На кривой изменения удельной энергии сечения с глубиной потока верхняя ветвь соответствует спокойному состоянию потока, нижняя — бурному.

Для русла прямоугольного сечения $\omega_k = bh_k$, $B_k = b$, а подставляя эти значения в формулу (6.19) и решая относительно h_k , получим

$$h_k = \sqrt[3]{\frac{\alpha Q^2}{gb^2}}. \quad (6.20)$$

Треугольная форма сечения русла имеет $\omega_k = mh_k^2$, $B_k = mh_k$, и теперь из формулы имеем

$$h_k = \sqrt[5]{\frac{\alpha Q^2}{gm^2}}. \quad (6.21)$$

Для русел других форм (трапецеидальные, круглые, лотковые, шатровые, овоидальные и др.) непосредственное решение основного уравнения (6.19) относительно h_k затруднительно ввиду сложности зависимости площади сечения от глубины. Поэтому критическая глубина h_k для сечения любой геометрической формы находится подбором. Для этого предварительно вычисляют величину $\frac{\alpha Q^2}{g}$, затем назначают произвольную глубину h_1 и для

нее вычисляют B_1 , ω_1 и $\frac{\omega_1^3}{B_1}$. Полученное значение $\frac{\omega_1^3}{B_1}$ сравнивают с ранее вычисленным $\frac{\alpha Q^2}{g}$, здесь возможны следующие случаи:

$\frac{\omega_1^3}{B_1} > \frac{\alpha Q^2}{g}$, это означает, что исходная глубина больше крити-

ческой $h_1 > h_k$ и в последующем расчете следует принять $h_2 < h_1$;

$$\frac{\omega_1^3}{B_1} < \frac{\alpha Q^2}{g}, \text{ здесь исходная глубина меньше критической } h_1 < h_k,$$

значит, в дальнейшем следует принять $h_2 > h_1$;

$$\frac{\omega_1^3}{B_1} = \frac{\alpha Q^2}{g}, \text{ к этому случаю должны стремиться все рассмот-}$$

ренные варианты, ибо здесь $h_1 = h_k$.

Для ускорения расчетов можно воспользоваться графиком. Вычислив значения $\frac{\omega_1^3}{B_1}; \frac{\omega_2^3}{B_2}; \dots; \frac{\omega_n^3}{B_n}$ строят кривую $\frac{\omega_n^3}{B_n} = f(h)$; точка кривой с абсциссой $\frac{\alpha Q^2}{g}$ имеет своей ординатой искомую величину h_k .

Критическим называется такой уклон дна водотока, при котором данный расход в условиях равномерного движения протекает с критической глубиной. Иначе говоря, критическим называется такой уклон, при котором нормальная глубина равна критической $h_0 = h_k$.

Критический уклон, соответствующий заданному расходу, всегда можно вычислить из формулы Шези, подставив в нее ω , h и W , соответствующие $h = h_k$, т. е.

$$i_k = \frac{Q^2}{\omega_k^2 W_k}.$$

Заменяв $Q^2 = \frac{g\omega_k^3}{\alpha B_k}$ согласно (6.19), для $h = h_k$ получим

$$i_k = \frac{g\omega_k^3}{\alpha B_k \omega_k^2 W_k^2} = \frac{g\omega_k}{\alpha B_k W_k^2}. \quad (6.22)$$

Понятие критического уклона играет значительную роль в анализе кривых свободной поверхности потока.

Еще один параметр существенно влияет на характер течения потока при неравномерном движении — параметр кинетичности потока, или число Фруда. Этот параметр определяется выражением

$$P_k = Fr = \frac{\alpha Q^2 B}{g\omega^3}. \quad (6.23)$$

Числовое значение P_k характеризует состояние потока. При критическом состоянии потока $P_k = 1$. При уклоне $i < i_k$ глубина $h_0 > h_k$ и поток будет спокойным, а параметр кинетичности $P_k < 1$. При уклоне $i > i_k$ глубина $h_0 < h_k$ и поток будет бурным, здесь $P_k > 1$.

Спокойному состоянию потока на кривой удельной энергии сечения (см. рис. 6.12) соответствует верхняя ветвь, для нее $\frac{\alpha v^2}{2g} < h$,

а бурному состоянию соответствует нижняя ветвь кривой, здесь $\frac{\alpha v^2}{2g} > h$.

6.10. Основное дифференциальное уравнение неравномерного движения

Если по длине установившегося плавно изменяющегося потока выделить два поперечных сечения 1—1 и 2—2 (рис. 6.13) на расстоянии dl и соответственно обозначить координату точки на поверхности в сечении 1—1 через z (относительно плоскости сравнения 0—0) и среднюю скорость в нем через v , то в сечении 2—2 координата точки будет $z + dz$, а скорость $v + dv$ (очевидно, что для рассматриваемого случая dz и dv будут отрицательны). Составим для сечений 1—1 и 2—2 уравнение Бернулли:

$$z + \frac{\alpha v^2}{2g} = z + dz + \frac{\alpha (v + dv)^2}{2g} + dh_c.$$

Раскроем член $\frac{\alpha (v + dv)^2}{2g} = \frac{\alpha v^2}{2g} + \frac{\alpha 2vdv}{2g} + \frac{\alpha (dv)^2}{2g}$, величиной $\frac{\alpha (dv)^2}{2g}$ можем пренебречь как очень малой, а член $\frac{\alpha 2vdv}{2g} = \alpha d\left(\frac{v^2}{2g}\right)$. В итоге, после сокращения одинаковых членов в левой и правой частях уравнения получим

$$-dz = \alpha d\left(\frac{v^2}{2g}\right) + dh_c$$

или, разделив все члены на dl , имеем

$$-\frac{dz}{dl} = \frac{d}{dl}\left(\frac{\alpha v^2}{2g}\right) + \frac{dh_c}{dl}. \quad (6.24)$$

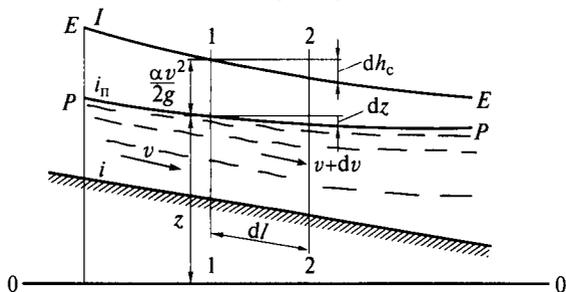


Рис. 6.13

Величина $-\frac{dz}{dl}$ есть уклон свободной поверхности (пъезометрический уклон) — i_p . Знак минус показывает, что отметки поверхности воды по течению всегда понижаются, т. е. $dz < 0$; dh_c — потеря напора на участке dl , которую в данном случае можно представить как потерю по длине на трение, а величина $\frac{dh_c}{dl}$ — потеря напора на трение, приходящаяся на единицу dl длины потока, называемая уклоном трения.

Вспомянув формулу Шези для равномерного движения, можем написать $\frac{dh_c}{dl} = \frac{Q^2}{K^2}$. Теперь, учитывая, что $v = Q/\omega$, дифференциальное уравнение неравномерного движения примет вид

$$-\frac{dz}{dl} = \frac{d}{dl} \left(\frac{\alpha Q^2}{2g\omega^2} \right) + \frac{Q^2}{K^2}. \quad (6.25)$$

В данном случае v , ω и K по длине потока переменны, и использование формулы Шези для неравномерного движения возможно лишь для участка длиной dl .

Представим ω и K в виде функций глубины h и длины l и преобразуем полученное основное уравнение.

Из схемы продольного профиля потока при неравномерном движении (рис. 6.14) видно, что для произвольно выбранного сечения 2—2, отстоящего на расстоянии l от начального сечения 1—1, можно написать зависимость $z = h - il + a$, где h — глубина потока в сечении 2—2; i — уклон дна; a — координата дна в сечении 1—1.

Продифференцировав это выражение по l и изменив знаки на обратные, получим

$$-\frac{dz}{dl} = i - \frac{dh}{dl}.$$

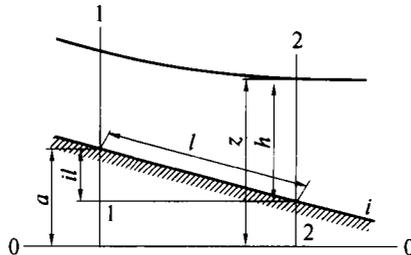


Рис. 6.14

Подставляя полученное выражение в (6.25), имеем

$$i - \frac{dh}{dl} = \frac{d}{dl} \left(\frac{\alpha Q^2}{2g\omega^2} \right) + \frac{Q^2}{K^2}.$$

Полагая русло непризматическим, т.е. $\omega = f(h, l)$, выполним дифференцирование первого члена правой части уравнения:

$$\frac{d}{dl} \left(\frac{\alpha Q^2}{2g\omega^2} \right) = -\frac{\alpha Q^2}{g\omega^3} \left(\frac{\partial \omega}{\partial l} + \frac{\partial \omega}{\partial h} \frac{dh}{dl} \right) = -\frac{\alpha Q^2}{g\omega^3} \left(\frac{\partial \omega}{\partial l} + B \frac{dh}{dl} \right),$$

где B — ширина живого сечения поверху, $B = \frac{\partial \omega}{\partial h}$.

Тогда

$$i - \frac{dh}{dl} = -\frac{\alpha Q^2}{g\omega^3} \left(\frac{\partial \omega}{\partial l} + B \frac{dh}{dl} \right) + \frac{Q^2}{K^2}.$$

Отсюда

$$\frac{dh}{dl} = \frac{i - \frac{Q^2}{K^2} \left(1 - \frac{\alpha K^2}{g\omega} \frac{\partial \omega}{\partial l} \right)}{1 - \frac{\alpha Q^2 B}{g\omega^3}}.$$

Для призматических русел $\frac{\partial \omega}{\partial l} = 0$ основное дифференциальное уравнение значительно упрощается:

$$\frac{dh}{dl} = \frac{i - \frac{Q^2}{K^2}}{1 - \frac{\alpha Q^2 B}{g\omega^3}}. \quad (6.26)$$

6.11. Исследование форм свободной поверхности в призматическом русле

Вспомним, что величина $\frac{\alpha Q^2 B}{g\omega^3} = \Pi_k$, причем для бурного потока $\Pi_k > 1$, для спокойного $\Pi_k < 1$, а для критического состояния $\Pi_k = 1$. Заменив это значение в дифференциальном уравнении (6.26), имеем

$$\frac{dh}{dl} = i \frac{1 - \frac{K_0^2}{K^2}}{1 - \Pi_k}. \quad (6.27)$$

Проведем анализ возможных форм свободной поверхности в начале для русла с прямым уклоном ($i > 0$). Здесь могут встретиться следующие три случая: уклон больше критического $i > i_k$; уклон меньше критического $i < i_k$; уклон равен критическому $i = i_k$.

Первый случай — уклон больше критического $i > i_k$. Нормальная и критическая глубины делят поток на три зоны: зона *a*, здесь глубины больше нормальной глубины $h > h_0$; зона *b*, с глубинами в диапазоне $h_0 > h > h_k$; зона *c*, глубины здесь меньше критической $h < h_k$.

Зона *a*. Поскольку глубина h больше нормальной $h > h_0$, то $K > K_0$, а $\frac{K_0^2}{K^2} < 1$ и, следовательно, в уравнении (6.27) числитель будет положителен. Величина параметра кинетичности для спокойного состояния $\Pi_k < 1$, знаменатель тоже положителен, а значит, будет положительна и вся дробь $\frac{dh}{dl} > 0$. Такое положение соответствует кривой подпора, т. е. глубина потока по течению будет расти. Рассмотрим характер данной кривой: при $h \rightarrow h_0$, $K \rightarrow K_0$, числитель уравнения (6.27) обратится в нуль, а значит, $\frac{dh}{dl} = 0$, это означает, что кривая подпора начинается с равномерного движения; при $h \rightarrow \infty$, $K \rightarrow \infty$, а $\Pi_k \rightarrow 0$ и $\frac{dh}{dl} \rightarrow i$, это говорит о том, что кривая стремится к прямой, образующей с линией глубин тот же угол, что и дно потока с горизонтальной линией. Следовательно, в своей нижней части кривая свободной поверхности приближается к горизонтальной линии. Таким образом, мы имеем вогнутую кривую подпора типа I_a (рис. 6.15).

Зона *b*. Глубина потока в этой зоне меньше нормальной, но больше критической: $h_0 > h > h_k$. Поскольку глубина h меньше нормальной $h < h_0$, то $K < K_0$, а $\frac{K_0^2}{K^2} > 1$ и, следовательно, в уравнении (6.27) числитель будет отрицательным. Величина параметра кинетичности для спокойного состояния $\Pi_k < 1$, знаменатель будет по-

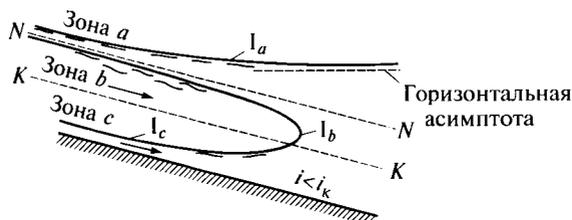


Рис. 6.15

ложителен, следовательно, вся дробь будет отрицательна, т.е. $\frac{dh}{dl} < 0$. Такое положение соответствует кривой спада, т.е. глубина потока по течению будет убывать. Рассмотрим характер данной кривой: при $h \rightarrow h_0$, $K \rightarrow K_0$, числитель уравнения (6.27) обратится в нуль, а значит, $\frac{dh}{dl} = 0$, это означает, что кривая подпора начинается с равномерного движения; при $h \rightarrow h_k$, $\Pi_k \rightarrow 1$ и $\frac{dh}{dl} \rightarrow -\infty$, это говорит о том, что нарушается непрерывность кривой свободной поверхности и она заканчивается водопадом. В рассматриваемой зоне мы имеем выпуклую кривую спада типа I_b (см. рис. 6.15).

Зона с. Глубина потока меньше критической $h < h_k$. Поскольку глубина h меньше нормальной $h < h_0$, то $K < K_0$, а $\frac{K_0^2}{K^2} > 1$ и, следовательно, в уравнении (6.27) числитель будет отрицательным. Величина параметра кинетичности для бурного состояния $\Pi_k > 1$, знаменатель будет тоже отрицательным, а следовательно, вся дробь будет положительна, т.е. $\frac{dh}{dl} > 0$. Такое положение соответствует кривой подпора, т.е. глубина потока по течению будет возрастать.

При $h \rightarrow h_k$, $\Pi_k \rightarrow 1$ и $\frac{dh}{dl} \rightarrow +\infty$, это говорит о том, что здесь также нарушается непрерывность кривой свободной поверхности и она заканчивается гидравлическим прыжком. Таким образом, мы имеем вогнутую кривую подпора типа I_c (см. рис. 6.15).

Второй случай — уклон меньше критического $i < i_k$. Нормальная глубина меньше критической $h_0 < h_k$. Как и в предыдущем случае, нормальная и критическая глубины делят поток на три зоны: зона a , здесь глубины больше критической глубины $h > h_k$; зона b , с глубинами в диапазоне $h_0 < h < h_k$; зона c , глубины здесь меньше нормальной глубины $h < h_0$.

Зона а. Поскольку глубина h больше нормальной $h > h_0$, то $K > K_0$, а $\frac{K_0^2}{K^2} < 1$ и, следовательно, в уравнении (6.27) числитель будет положителен. Величина параметра кинетичности для спокойного состояния $\Pi_k < 1$, знаменатель тоже положителен, а значит, $\frac{dh}{dl} > 0$. Такое положение соответствует кривой подпора, т.е. глубина потока по течению будет расти. Рассмотрим характер дан-

ной кривой: при $h \rightarrow \infty$, $K \rightarrow \infty$, $\frac{K_0^2}{K^2} \rightarrow 0$ и $\Pi_k \rightarrow 0$, а $\frac{dh}{dl} \rightarrow i$, это говорит о том, что кривая стремится к прямой, образующей с линией глубин тот же угол, что и дно потока с горизонтальной линией. Следовательно, в своей нижней части кривая свободной поверхности приближается к горизонтальной линии. При $h \rightarrow h_k$, $\Pi_k \rightarrow 0$, знаменатель уравнения (6.27) обратится в нуль, а значит, $\frac{dh}{dl} \rightarrow +\infty$, это означает, что кривая подпора начинается с гидравлического прыжка. Таким образом, мы имеем выпуклую кривую подпора типа Π_a (рис. 6.16).

Зона *b*. Глубина потока в этой зоне больше нормальной, но меньше критической: $h_k > h > h_0$. Поскольку глубина h больше нормальной $h > h_0$, то $K > K_0$, а $\frac{K_0^2}{K^2} < 1$ и, следовательно, в уравнении (6.27) числитель будет положительным. Величина параметра кинетичности для бурного состояния $\Pi_k > 1$, знаменатель будет отрицателен, следовательно, вся дробь будет отрицательна, т.е. $\frac{dh}{dl} < 0$. Такое положение соответствует кривой спада, т.е. глубина потока по течению будет убывать. Рассмотрим характер данной кривой при $h \rightarrow h_k$, $\Pi_k \rightarrow 1$ и $\frac{dh}{dl} \rightarrow -\infty$, это говорит о том, что кривая свободной поверхности начинается с водопада, при $h \rightarrow h_0$, $K \rightarrow K_0$, числитель уравнения (6.27) обратится в нуль, а значит $\frac{dh}{dl} = 0$, это означает, что кривая подпора заканчивается равномерным движением. В рассматриваемой зоне мы имеем вогнутую кривую спада типа Π_b (см. рис. 6.16).

Зона *c*. Глубина потока меньше нормальной $h < h_0$. Поскольку глубина h меньше нормальной $h < h_0$, то $K < K_0$, а $\frac{K_0^2}{K^2} > 1$ и, сле-

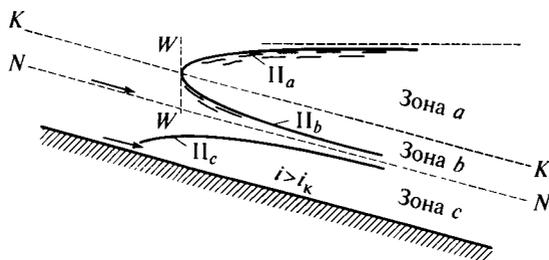


Рис. 6.16

довательно, в уравнении (6.27) числитель будет отрицательным. Величина параметра кинетичности для бурного состояния $\Pi_k > 1$, знаменатель будет тоже отрицательным, а следовательно, вся дробь будет положительна, т.е. $\frac{dh}{dl} > 0$. При $h \rightarrow h_0$, $K \rightarrow K_0$, числитель

уравнения (6.27) обратится в нуль, а значит, $\frac{dh}{dl} = 0$. Таким образом, мы имеем вогнутую кривую подпора типа Π_c (см. рис. 6.16).

Третий случай — уклон равен критическому $i = i_k$, нормальная глубина также равна критической $h_0 = h_k$. Поскольку здесь нормальная и критическая глубины совпадают, то они делят поток на две зоны: зона a , здесь глубины больше нормальной и критической $h > h_0 = h_k$; зона c , глубины здесь меньше нормальной критической $h < h_0 = h_k$.

Зона a . Глубина потока $h > h_0$, $K > K_0$, $\frac{K_0^2}{K^2} < 1$, следовательно, числитель выражения положителен, $\Pi_k < 1$, значит, знаменатель тоже положителен, а $\frac{dh}{dl} > 0$, здесь мы имеем кривую подпора, т.е. глубина потока возрастает по течению. Эта кривая имеет промежуточное положение между кривыми I_a и Π_a , а поскольку эти кривые — одна вогнута, другая выпукла, то промежуточное положение отвечает прямой линии. Таким образом, в этой зоне имеем кривую подпора Π_a в виде горизонтальной плоскости (рис. 6.17).

Зона c . Глубина потока h меньше нормальной $h < h_0$, то $K < K_0$, а $\frac{K_0^2}{K^2} > 1$ и, следовательно, в уравнении числитель будет отрицательным. Величина параметра кинетичности для бурного состояния $\Pi_k > 1$, знаменатель будет тоже отрицательным, а следовательно, вся дробь будет положительна, т.е. $\frac{dh}{dl} > 0$. Такое положение соответствует кривой подпора, глубина потока по течению

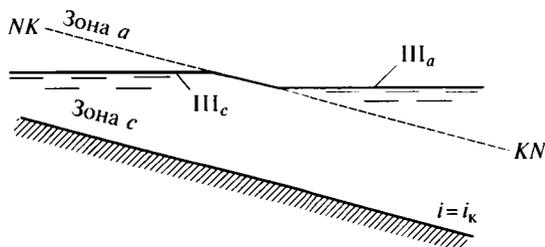


Рис. 6.17

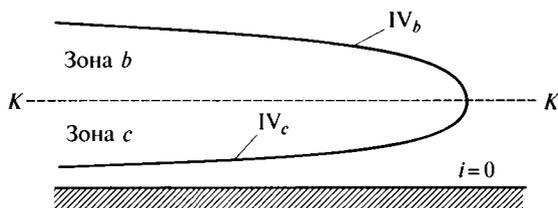


Рис. 6.18

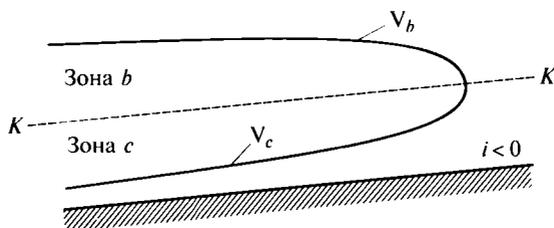


Рис. 6.19

будет возрастать. Кривая подпора типа III_c имеет вид горизонтальной плоскости (см. рис. 6.17).

Для русла с горизонтальным дном $i = 0$ или с обратным уклоном $i < 0$, не приводя подробного анализа, укажем, что кривые свободной поверхности потока имеют два вида (рис. 6.18, 6.19): выпуклая кривая спада типа IV_b и V_b и вогнутая кривая подпора типа IV_c и V_c . Эти случаи также иногда встречаются в практике.

6.12. Построение кривых свободной поверхности в призматическом русле

Существует много различных способов интегрирования дифференциального уравнения неравномерного движения в открытом призматическом русле. Один из методов интегрирования дифференциального уравнения неравномерного движения с использованием показательного закона был предложен в 1912 г. ученым Б.А. Бахметьевым. Более простой метод с использованием относительных расходных характеристик был разработан академиком Н.Н. Павловским. Преимущество этого метода заключается в том, что для него требуется лишь одна таблица значений интеграла, в то время как для метода Б.А. Бахметьева необходимы таблицы для каждого значения показательной функции. Далее остановимся на пояснении способа, разработанного Н.Н. Павловским, который можно рекомендовать для расчета большинства русел, встречающихся в практике.

Преобразуем уравнение (6.26) следующим образом:
числитель

$$i - \frac{Q^2}{K^2} = i \left(1 - \frac{K_0^2}{K^2} \right),$$

знаменатель

$$1 - \frac{\alpha Q^2 B}{g\omega^3} = 1 - \frac{\alpha i K_0^2 B \omega^2 W^2}{g\omega^3 K^2} = 1 - \frac{\alpha i B W^2}{g\omega} \frac{K_0^2}{K^2} = 1 - j \frac{K_0^2}{K^2},$$

тогда

$$\frac{dh}{dl} = i \frac{1 - \frac{K_0^2}{K^2}}{1 - j \frac{K_0^2}{K^2}} = i \frac{\frac{K^2}{K_0^2} - 1}{\frac{K^2}{K_0^2} - j}. \quad (6.28)$$

Отношение $\frac{K}{K_0} = \Pi$ Н. Н. Павловский назвал относительной расходной характеристикой. При этой замене уравнение (6.28) примет вид

$$\frac{dh}{dl} = i \frac{\Pi^2 - 1}{\Pi^2 - j}. \quad (6.29)$$

Приняв Π за независимую переменную, получим

$$\frac{dh}{dl} = \frac{dh}{d\Pi} \frac{d\Pi}{dl}.$$

Величину $\frac{d\Pi}{dh}$ Н. Н. Павловский заменил некоторым постоянным средним значением в пределах рассматриваемого участка:

$$\frac{d\Pi}{dh} = \frac{\Pi_2 - \Pi_1}{h_2 - h_1} = a, \quad (6.30)$$

где Π_1 и Π_2 — значения относительных расходных характеристик в сечениях 1—1 и 2—2; h_1 и h_2 — значения глубин в тех же сечениях.

Теперь после замены переменных в уравнении (6.30) получим

$$\frac{d\Pi}{dl} = ai \frac{\Pi^2 - 1}{\Pi^2 - j}.$$

Разделив переменные и преобразовав, имеем

$$\begin{aligned} aidl &= \frac{\Pi^2 - j}{\Pi^2 - 1} d\Pi = \frac{\Pi^2 - 1 + 1 - j}{\Pi^2 - 1} d\Pi = \\ &= d\Pi + (1 - j) \frac{d\Pi}{\Pi^2 - 1}. \end{aligned} \quad (6.31)$$

Интегрирование полученного уравнения возможно при условиях: величина a принимается постоянной на рассматриваемом участке, а величина j заменяется на \bar{j} , определяемую по формуле

$$\bar{j} = \frac{\alpha i \bar{B} \bar{W}^2}{g \bar{\omega}},$$

где \bar{B} , \bar{W} , $\bar{\omega}$ — средние для рассматриваемого участка значения B , W , ω .

Представив уравнение (6.31) в форме интеграла

$$ai \int_0^l dl = \int_{\Pi_1}^{\Pi_2} d\Pi + (1 - \bar{j}) \int_{\Pi_1}^{\Pi_2} \frac{d\Pi}{\Pi^2 - 1},$$

можно получить его решение

$$ail = \Pi_2 - \Pi_1 + (1 - \bar{j})(\Phi(\Pi_2) - \Phi(\Pi_1)), \quad (6.32)$$

где $\Phi(\Pi) = \int \frac{d\Pi}{\Pi^2 - 1} + C$.

Решение Павловского получается довольно простым, так как интеграл $\Phi(\Pi)$ легко берется. При $\Pi > 1$ он вычисляется по формуле

$\Phi(\Pi) = \frac{1}{2} \ln \frac{\Pi + 1}{\Pi - 1} = 1,151 \lg \frac{\Pi + 1}{\Pi - 1}$, а при $\Pi < 1$ — $\Phi(\Pi) =$

$$= \frac{1}{2} \ln \frac{\Pi + 1}{1 - \Pi} = 1,151 \lg \frac{\Pi + 1}{1 - \Pi}.$$

Решение задачи по расчету и построению кривых подпора и спада идет в следующей последовательности.

Предварительно при известных расходе, форме сечения, уклоне, коэффициенте шероховатости на рассматриваемом участке определяют нормальную и критическую глубины h_0 и h_k . Затем исследуют форму кривой свободной поверхности потока с целью установить, нет ли на данном участке разрыва функции. При наличии гидравлического прыжка его необходимо предварительно рассчитать. Если кривая заканчивается водопадом, то расчет ведется только до критической глубины. Теперь можно назначить глубины, по которым будем строить кривую свободной поверхности, в зависимости от точности расчетов кривую свободной поверхности можно разбить на большее или меньшее число участков.

Для каждой из глубин находят значения ω , B , χ , R , W , K , а по известной глубине h_0 находят K_0 , Π , и $\Phi(\Pi)$. Если одна из глубин является нормальной глубиной, то величину относительной расходной характеристики принимают $\Pi = 1 \pm 0,005$, где знак «плюс» относится к кривой подпора, а знак «минус» — к кривой спада. Далее для каждой пары соседних глубин вычисляют значения B , W , $\bar{\omega}$, \bar{j} , a . И, наконец, по уравнению (6.32) находят расстоя-

яние между рассматриваемыми глубинами. Аналогичные расчеты выполняются для каждой пары соседних глубин.

6.13. Построение кривых свободной поверхности воды в непризматических и призматических руслах по способу В. И. Чарномского

Русло является непризматическим, если его поперечное сечение изменяется по длине.

Дифференциальное уравнение неравномерного движения в случае непризматического русла (канала) получается весьма сложным, поэтому при построении кривой свободной поверхности воды в нем отказываются от интегрирования этого уравнения и пользуются методом конечных разностей. В соответствии с этим методом В. И. Чарномским в 1914 г. был разработан способ, основанный на непосредственном применении уравнения Бернулли к рассматриваемому участку.

Представим участок непризматического русла и предположим, нам заданы: расход Q , размеры, форма и шероховатость русла, а также уклон его дна i . Выведем уравнение, из которого, зная глубину потока в одном сечении канала, можно найти глубину в другом его сечении при условии, что расстояние между ними нам известно.

Для решения такой задачи намечаем два произвольных сечения 1—1 и 2—2, расположенных друг от друга на достаточно близком расстоянии, которое обозначаем через l_{1-2} (см. рис. 6.14). Проводим плоскость сравнения 0—0 на уровне нижней точки дна в сечении 2—2. Выписываем уравнение Бернулли для упомянутых двух сечений:

$$z_1 + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_c, \quad (6.33)$$

где z_1 и z_2 — отметки свободной поверхности соответственно в сечениях 1—1 и 2—2.

Считая $\alpha_1 \approx \alpha_2 = 1$ и учитывая, что $z_1 = h_1 + il$ и $z_2 = h_2$, уравнение Бернулли можно переписать в виде

$$h_1 + il_{1-2} + \frac{v_1^2}{2g} = h_2 + \frac{v_2^2}{2g} + h_c,$$

где h_1 и h_2 — глубина воды в сечениях 1—1 и 2—2 соответственно; il_{1-2} — падение дна канала на длине l_{1-2} ; v_1 и v_2 — средние скорости в сечениях 1—1 и 2—2 соответственно.

В искусственных руслах (каналах) при плавно изменяющемся движении местные потери напора отсутствуют. Поэтому потеря

напора, входящая в уравнение Бернулли, $h_c = i_{\text{тр}} l_{1-2}$, где через $i_{\text{тр}}$ обозначен гидравлический уклон, называемый здесь уклоном трения.

Строго говоря, величина $i_{\text{тр}}$ изменяется по длине русла с изменением глубины, однако с некоторым приближением принимают $i_{\text{тр}} = \text{const}$. Далее, принимая допущение, согласно которому потери напора при неравномерном движении выражаются теми же зависимостями, что и в случае равномерного движения, можем записать:

$$i_{\text{ср}} = \frac{v_{\text{ср}}^2}{W_{\text{ср}}^2},$$

где $v_{\text{ср}} = \frac{v_1 + v_2}{2}$; $W_{\text{ср}} = \frac{W_1 + W_2}{2}$, причем величины, имеющие индексы 1 вычислены для сечения 1—1, а индексы 2 соответственно для сечения 2—2.

Подставляя выражение для величины h_c в уравнение Бернулли, получаем

$$h_1 + i l_{1-2} + \frac{v_1^2}{2g} = h_2 + \frac{v_2^2}{2g} + i_{\text{тр}} l_{1-2}$$

или

$$(i - i_{\text{тр}}) l_{1-2} = \left(h_2 + \frac{v_2^2}{2g} \right) - \left(h_1 + \frac{v_1^2}{2g} \right),$$

откуда

$$l_{1-2} = \frac{\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1}{i - i_{\text{тр}}}. \quad (6.34)$$

Величины \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 представляют собой удельную энергию сечения в соответствующих сечениях канала.

По уравнению (6.34) можно путем подбора определять глубину h_2 , если нам заданы h_1 и l_{1-2} . По этому же уравнению (также решая его путем подбора) можно строить кривую свободной поверхности. При построении кривой свободной поверхности поступают следующим образом. Зная, например, местоположение сечения 2—2, а также величины h_2 , v_2 и \mathcal{E}_2 , задаются величиной l , т. е. устанавливают местоположение сечения 1—1. Далее в сечении 1—1 задаются рядом глубин и для них вычисляют v_1 и \mathcal{E}_1 , затем определяют средние на участке 1—2 значения величин $v_{\text{ср}}$, $W_{\text{ср}}$ и величину среднего на участке уклона трения $i_{\text{тр}}$. В результате отыскивают такую глубину h_1 , при которой будет иметь место равенство (6.34).

Способ Чарномского может быть применен и для построения свободной поверхности потока в любом призматическом русле. В этом случае уравнение (6.34) решается без подбора.

Уравнение (6.34) проще решить в отношении длины l_{1-2} рассматриваемого участка, чем в отношении глубины (h_1 или h_2) в одном из граничных сечений. Поэтому при построении кривой свободной поверхности потока задаются рядом глубин ($h_n, h_{n+1}, h_{n+2}, \dots$) возрастающих (или убывающих) через некоторые интервалы Δh , начиная, например, от известной h_n и принимая далее каждую пару соседних глубин (h_n и h_{n+1} ; h_{n+1} и h_{n+2} и т.д.) за глубины на границах участка (за h_1 и h_2), из равенства (6.34) находят расстояние l .

Для облегчения вычислений следует предварительно построить два вспомогательных графика: $\Theta = f(h)$, по которому для разных глубин находим при расчете величины Θ ; $i_{тр} = f(h)$, по этому графику, зная среднюю глубину на рассматриваемом участке, находим величину $i_{тр}$. Затем, используя значения глубин и расстояний между ними, начиная от сечения с заданной глубиной, строят кривую свободной поверхности потока.

6.14. Движение воды в естественных руслах

Естественное русло (река) имеет всегда неправильную форму, поэтому движение воды в нем является неравномерным.

При построении кривой свободной поверхности реку разбивают на отдельные расчетные участки достаточно большой длины (иногда в несколько километров). В пределах каждого выделенного участка кривую свободной поверхности принимают в виде прямой линии (рис. 6.20), при этом задача о построении кривой свободной поверхности в реке сводится к нахождению отметки свободной поверхности в сечении m русла, если расход Q и отметка свободной поверхности в некотором сечении ($m+1$) русла нам заданы. Решив эту задачу, мы легко сможем построить искомую кривую свободной поверхности по длине всего русла реки.

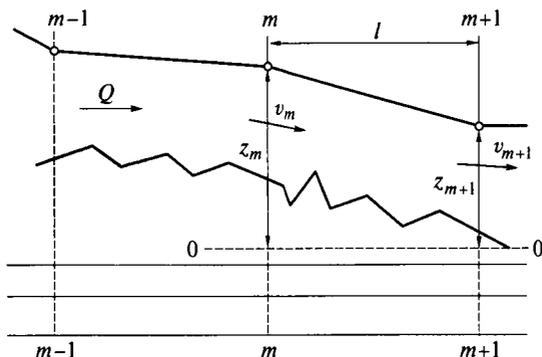


Рис. 6.20

Для решения указанной задачи были предложены два различных метода:

первый метод состоит в замене действительного расчетного участка реки, ограниченного сечениями m и $m + 1$, некоторым фиктивным призматическим руслом, для которого по уравнению неравномерного движения, относящемуся к призматическим руслам (см. ранее), и определяют искомую отметку горизонта воды в сечении m ;

второй метод состоит в непосредственном применении уравнения Бернулли (6.33) к выделенному расчетному участку русла реки.

Второй метод является несколько более точным, но требует относительно большой вычислительной работы. Первый метод применяется только для ориентировочных подсчетов. Основным вопросом, относящимся к первому методу, является вопрос о замене действительного русла фиктивным призматическим. Для решения этой задачи был предложен ряд различных приближенных приемов. Не будем останавливаться на пояснении их, отметим только, что в качестве фиктивного призматического русла здесь всегда выбирают или широкое прямоугольное русло, или широкое параболическое русло.

Рассмотрим только один из многих имеющихся способов расчета, относящихся ко второму методу. Согласно этому способу пренебрегаем изменением скоростного напора при переходе от сечения m к сечению $m + 1$ (см. рис. 6.20), при этом в уравнении считаем

$$\frac{\alpha v_1^2}{2g} - \frac{\alpha v_2^2}{2g} \approx 0.$$

Величину потерь напора $h_{тр}$, входящую в уравнение (6.33), представляем в виде

$$h_{тр} = \frac{Q^2}{\bar{K}^2} l, \quad (6.35)$$

где l — длина расчетного участка, ограниченного сечениями m и $m + 1$; $\bar{K}^2 = \frac{1}{2}(K_m^2 + K_{m+1}^2)$.

Величины ω_m , K_m , ω_{m+1} , K_{m+1} должны, разумеется, вычисляться при z_m , z_{m+1} горизонта воды в рассматриваемых граничных сечениях.

Учитывая (6.35), уравнение (6.33) переписываем в виде

$$z_m - z_{m+1} = \frac{Q^2}{\bar{K}^2}, \quad (6.36)$$

затем, пользуясь этим уравнением, находим (путем подбора) искомую отметку z_m , зная отметку z_{m+1} и расход Q .

Расчет по формуле (6.36) технически оформляем следующим образом. Переписываем уравнение в виде

$$z_m - \frac{Q^2}{K^2} = z_{m+1}. \quad (6.37)$$

Левая часть выражения (6.37) является функцией от z_m , т.е.

$$z_m - \frac{Q^2}{K^2} = \varphi(z_m), \quad (6.38)$$

правая же часть уравнения (6.37) нам известна.

Имея это в виду, все вычисления при расчете по уравнению сводим в таблицу. Очевидно, искомое значение z_m должно давать

$$\varphi(z_m) = z_{m+1}.$$

В заключение отметим, что помимо изложенного в литературе освещается целый ряд других специальных способов решения указанной задачи. Один из этих способов (например, способ Н. Н. Павловского) позволяет решить данную задачу непосредственно (без подбора); по другим способам (например, способ А. Н. Рахманова) задача решается на основе гидрометрических данных, не прибегая к вычислению модулей расхода и коэффициентов Шези (для чего необходимо предварительно для реки устанавливать приближенное значение коэффициента шероховатости n).

6.15. Общие понятия о гидравлическом прыжке

Гидравлическим прыжком называется резкое увеличение глубины потока при переходе его из бурного состояния в спокойное, т.е. от некоторой глубины h_1 , меньшей h_k , к некоторой глубине h_2 , большей h_k (рис. 6.21). Этот переход происходит на сравнительно небольшой длине l_p . Поэтому в районе гидравлического прыжка мы получаем резко изменяющееся движение.



Рис. 6.21

Длина l_n называется длиной прыжка. Глубины h_1 и h_2 , измеряемые в сечениях 1—1 и 2—2 (в начале и конце прыжка), называются сопряженными глубинами. Разность глубин $a = h_2 - h_1$ называется высотой прыжка.

Гидравлический прыжок появляется всегда в том случае, когда свободная поверхность при увеличении глубины пересекает линию критической глубины (линию KK).

В пределах прыжка можно наблюдать следующий характер движения воды. Линия ABC (см. рис. 6.21) является поверхностью раздела между транзитной струей и вальцом $ABCD$. Ниже поверхности раздела поток резко расширяется от глубины h_1 до h_2 . Выше этой поверхности имеем поверхностный валец (водооборотная область). Внизу вальца осредненные скорости направлены вдоль транзитной струи, вверху — в противоположную сторону.

Движение воды в вальце происходит весьма бурно, валец насыщен пузырьками воздуха и потому малопрозрачен. Верхняя поверхность его неровная — волнообразная. Прыжок не находится на одном месте, он совершает небольшие поступательные перемещения то вперед, то назад.

Непосредственно за прыжком располагается так называемый послепрыжковый участок, который характеризуется следующим. В сечении 2—2 эпюра осредненных скоростей имеет вид, показанный на рис. 6.21. Продольная скорость в верхней точке этого живого сечения (точка C) равна нулю, в то время как придонные скорости являются большими (в связи с чем и размывающая способность потока в сечении 2—2 получается относительно большой). Выравнивание эпюры скоростей до эпюры, свойственной обычно равномерному движению, происходит по длине $l_{п.п.}$. Кроме того, прыжок способствует резкому повышению пульсации скоростей (что также вызывает увеличение размывающей способности потока).

Послепрыжковым участком обычно называют участок потока за прыжком длиной $l_{п.п.}$, в пределах которого происходит выравнивание эпюры скоростей и снижение (до нормальной величины) пульсации скоростей. Заметим, что на участке спокойного движения наибольшая размывающая способность потока имеет место непосредственно за прыжком; далее вдоль послепрыжкового участка эта способность постепенно снижается и в сечении 3—3 принимает величину, свойственную равномерному режиму.

Вопрос о гидравлическом прыжке впервые был исследован в XIX в. Беланже и Буссинеском, которые, используя теорему количества движения, нашли уравнение, связывающее сопряженные глубины h_1 и h_2 . Это уравнение получило название основного уравнения прыжка.

Представим гидравлический прыжок в призматическом русле любой правильной формы (рис. 6.22). При выводе уравнения гидравлического прыжка делаются следующие допущения:

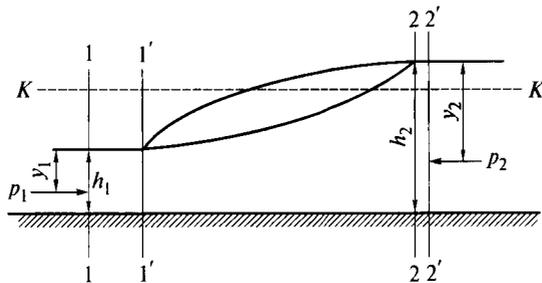


Рис. 6.22

уклон русла на участке прыжка очень мал, и проекцией силы тяжести на направление движения можно пренебречь;

силы трения у стенок русла также малы, вследствие небольшого расстояния и ими можно также пренебречь;

в сечениях до и после прыжка движение плавноизменяющееся, поэтому давление в этих сечениях подчиняется закону гидростатики;

коэффициенты количества движения в расчетных сечениях равны между собой: $\alpha_{01} \approx \alpha_{02} \approx \alpha_0$.

Определим изменение количества движения в прыжке за интервал времен dt . Количество движения жидкости в сечении до гидравлического прыжка будет равно $\rho_1 \alpha_{01} v_1^2 \omega_1 dt$, в сечении после гидравлического прыжка — $\rho_2 \alpha_{02} v_2^2 \omega_2 dt$. Импульс силы определяется как разность сил давления в сечениях до и после гидравлического прыжка: $\rho_1 g y_{c1} \omega_1 dt - \rho_2 g y_{c2} \omega_2 dt$. Отсюда, учитывая, что плотность постоянна, сокращая на dt и используя указанные допущения, имеем

$$\alpha_0 v_2^2 \omega_2 - \alpha_0 v_1^2 \omega_1 = g y_{c1} \omega_1 - g y_{c2} \omega_2,$$

поскольку $Q = \omega_1 v_1 = \omega_2 v_2$, то, заменяя скорости через расход, деленный на соответствующую площадь сечения, получим

$$\frac{\alpha_0 Q^2}{g \omega_1} + y_{c1} \omega_1 = \frac{\alpha_0 Q^2}{g \omega_2} + y_{c2} \omega_2. \quad (6.39)$$

Это уравнение называется основным уравнением совершенно гидравлического прыжка, а входящая в его обе части однотипная функция $\Pi(h) = \frac{\alpha_0 Q^2}{g \omega} + y_c \omega$ называется прыжковой функцией. Уравнение показывает, что для сопряженных глубин h_1 и h_2 величины $\Pi(h)$ одинаковы, т.е. $\Pi(h_1) = \Pi(h_2)$.

Анализ формулы (6.39) показывает, что прыжковая функция стремится к бесконечности при $h \rightarrow 0$ ($\omega \rightarrow 0$) и при $h \rightarrow \infty$ ($\omega \rightarrow \infty$). Это означает, что прыжковая функция имеет минимум, найдем

глубину соответствующую этому минимуму, для чего установим производную прыжковой функции

$$\frac{d\Pi(h)}{dh} = -\frac{\alpha_0 Q^2}{g\omega^2} \frac{d\omega}{dh} + \frac{d(y_c\omega)}{dh}.$$

Выражение $d(y_c\omega)$ представляет собой приращение статического момента площади живого сечения относительно свободной поверхности жидкости:

$$d(y_c\omega) = \omega(y_c + dh) + d\omega \frac{dh}{2} - y_c\omega.$$

Пренебрегая вторым слагаемым правой части полученного уравнения как величиной высшего порядка малости, получим

$$d(y_c\omega) = \omega dh.$$

Приращение площади живого сечения $d\omega = Bdh$. С учетом этих значений имеем

$$\frac{d\Pi(h)}{dh} = -\frac{\alpha_0 Q^2}{g\omega^2} B + \omega.$$

Приравнивая эту производную к нулю, найдем

$$\frac{\alpha_0 Q^2}{g\omega^3} B - 1 = 0.$$

Это уравнение отличается от уравнения для определения критической глубины h_k тем, что в нем находится коэффициент количества движения α_0 вместо коэффициента кинетической энергии α . Так как эти коэффициенты близки по величине, можно принимать $\alpha_0 = \alpha$ и считать, что минимум прыжковой функции, как и минимум удельной энергии, соответствует критической глубине.

На рис. 6.23 показана схема графика прыжковой функции. На нем нанесена кривая $\Pi(h)$, а также уже знакомая нам кривая $\mathcal{E}(h)$. Такой график можно легко построить для данного русла, пользуясь зависимостями (6.39) и (6.18).

Как видно из графика, кривая $\Pi(h)$ имеет минимум, причем можно показать, что он совпадает с минимумом кривой $\mathcal{E}(h)$ и отвечает критической глубине. Пользуясь же графиком прыжковой функции и учитывая зависимость (6.39), можно легко найти для данного русла одну сопряженную глубину, если другая задана (см. построения, представленные на графике).

Для прямоугольного русла основное уравнение прыжка упрощается. В этом случае мы имеем: $\omega = bh$; $y_c = h/2$, а уравнение прыжка запишется в виде

$$\frac{\alpha_0 Q^2}{gbh_1} + \frac{bh_1^2}{2} = \frac{\alpha_0 Q^2}{gbh_2} + \frac{bh_2^2}{2}$$

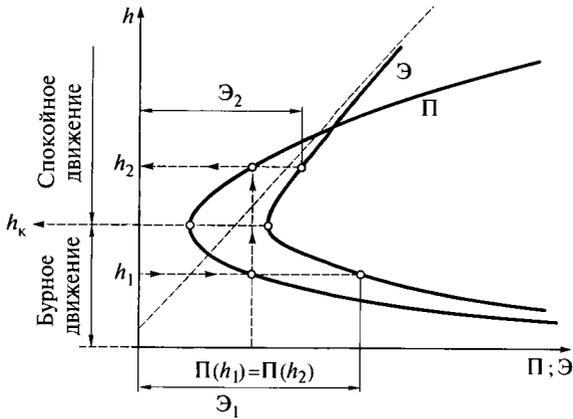


Рис. 6.23

или

$$\frac{\alpha_0 Q^2}{gb^2 h_1} + \frac{h_1^2}{2} = \frac{\alpha_0 Q^2}{gb^2 h_2} + \frac{h_2^2}{2}.$$

Теперь можно выполнить следующие преобразования:

$$\frac{\alpha_0 Q^2}{gb^2} \left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2} \right) = \frac{h_2^2}{2} - \frac{h_1^2}{2},$$

откуда

$$\frac{2\alpha_0 Q^2}{gb^2} \frac{h_2 - h_1}{h_1 h_2} = (h_2 - h_1)(h_2 + h_1).$$

Сократив левую и правую части уравнения на $(h_2 - h_1)$, получаем симметричное в отношении h_1 и h_2 квадратное уравнение

$$h_1 h_2^2 + h_2 h_1^2 - \frac{2\alpha Q^2}{gb^2} = 0. \quad (6.40)$$

Решая уравнение (6.40) в отношении h_1 и используя здесь только положительный корень, а затем аналогично в отношении h_2 , получим:

$$h_1 = \frac{h_2}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{8\alpha Q^2}{gb^2 h_2^3}} - 1 \right); \quad (6.41)$$

$$h_2 = \frac{h_1}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{8\alpha Q^2}{gb^2 h_1^3}} - 1 \right). \quad (6.42)$$

Пользуясь этими уравнениями, можно определить одну из сопряженных глубин, если другая известна.

Переходя к вопросу о длине прыжка l_n , отметим, что длина прыжка определяется по эмпирическим формулам. Наиболее простой эмпирической зависимостью здесь является формула

$$l_n = ma,$$

где m — коэффициент, лежащий в пределах $3 < m < 6$; a — высота прыжка.

Для длины прыжка было предложено и много других формул, например в литературе часто приводится формула Сафранца:

$$l_n = 4,5h_2,$$

а также формула Павловского:

$$l_n = 2,5(1,9h_2 - h_1).$$

В пределах гидравлического прыжка получаем относительно большую потерю напора, которая обусловливается наличием интенсивной пульсации скоростей. В случае прямоугольного горизонтального русла потеря энергии в прыжке как разность удельных энергий сечений

$$\begin{aligned} h_c &= \left(h_1 + \frac{\alpha v_1^2}{2g} \right) - \left(h_2 + \frac{\alpha v_2^2}{2g} \right) = \\ &= \left(h_1 + \frac{\alpha Q^2}{2gb^2h_1^2} \right) - \left(h_2 + \frac{\alpha Q^2}{2gb^2h_2^2} \right). \end{aligned} \quad (6.43)$$

Из уравнения гидравлического прыжка для прямоугольного русла (6.40) имеем

$$\frac{\alpha Q^2}{gb^2} = \frac{h_1h_2^2 + h_2h_1^2}{2}.$$

Используя эту зависимость, уравнение (6.43) можно привести к виду

$$h_c = \frac{(h_2 - h_1)^3}{4h_1h_2} = \frac{a^3}{4h_1h_2}.$$

Потеря энергии в прыжке прямо пропорциональна третьей степени высоты прыжка.

6.16. Формы свободной поверхности потока при резком изменении уклона дна цилиндрического русла

Представим на рис. 6.24 цилиндрическое русло, которое в некотором сечении имеет резкий перелом дна, причем будем считать, что уклоны дна $i_1 > i_k$ и $i_2 < i_k$ (см. рис. 6.24) и глубины равно-

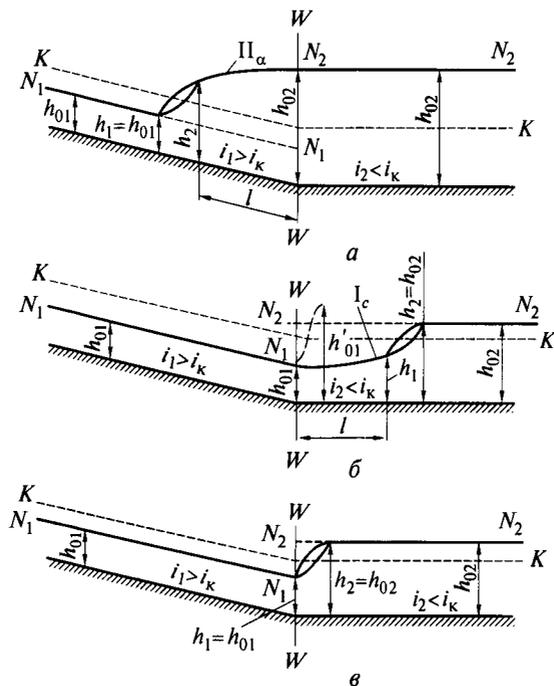


Рис. 6.24

мерного движения h_{01} и h_{02} заданы. Очевидно, $h_{01} < h_k$; $h_{02} > h_k$. В связи с этим в данном случае свободная поверхность потока должна будет пересекать линию критических глубин KK .

Можно показать, что в этом случае могут иметь место три различные формы свободной поверхности, изображенные на рис. 6.24. Как видно, каждая из них характеризуется наличием гидравлического прыжка, находящегося на расстоянии l от вертикали WW (для рис. 6.24, в размер $l = 0$).

Для того чтобы выяснить, какая из этих форм должна получиться в данном случае, рассуждаем следующим образом. Представим себе условно, что на всем протяжении первого (левого) участка канала имеет место равномерный режим движения воды, причем в сечении WW устанавливается глубина равномерного движения h_{01} . Принимая $h_{01} = h_1$, по основному уравнению прыжка вычисляем глубину h_2 , сопряженную с глубиной h_1 , и представляем в сечении WW фиктивный гидравлический прыжок.

После этого сопоставляем найденную глубину h_2 с нормальной h_{02} . При этом считаем:

если $h_2 > h_{02}$, то должна получиться картина движения воды, показанная на рис. 6.24, а;

если $h_2 < h_{02}$ — картина (рис. 6.24, б);

если $h_2 = h_{02}$ — картина (рис. 6.24, в).

Установив таким образом вид свободной поверхности потока, далее легко можем найти длину l для схем, представленных на рис. 6.24, а, б. Например, длину l для схемы 6.24, а, б (когда прыжок отогнан от вертикали WW вправо) определяем следующим образом:

по основному уравнению гидравлического прыжка находим глубину h_1 сопряженную с глубиной $h_2 = h_{02}$;

по уравнению Павловского определяем длину l кривой подпора типа I_c , причем считаем, что в начале этой кривой (в сечении WW) имеет место заданная глубина h_{01} , в конце — установленная выше глубина h_1 .

ГЛАВА 7

ВОДОСЛИВЫ И СООРУЖЕНИЯ

7.1. Основные понятия и классификация водосливов

Если открытый канал или русло перегородить стенкой, то уровень воды перед ней будет повышаться и, достигнув верха стенки воды, начнет переливаться под действием силы тяжести. В этом случае говорят, что происходит протекание воды через водослив, под которым понимают саму стенку, на той ее части, где происходит истечение воды. Протекание воды через водослив в определенной мере можно считать аналогичным истечению жидкости через отверстия или насадки, при отсутствии в них верхних границ.

Саму стенку, точнее ее верхнюю грань, называют порогом. Водослив разделяет поток на две области (рис. 7.1) с различным характером течения: часть водного потока перед водосливом (сооружением) называют верхним бьефом, после водослива — нижним бьефом. При изучении движения жидкости через водослив используют следующие обозначения: возвышение верха стенки над дном со стороны верхнего бьефа — высота порога водослива P ;

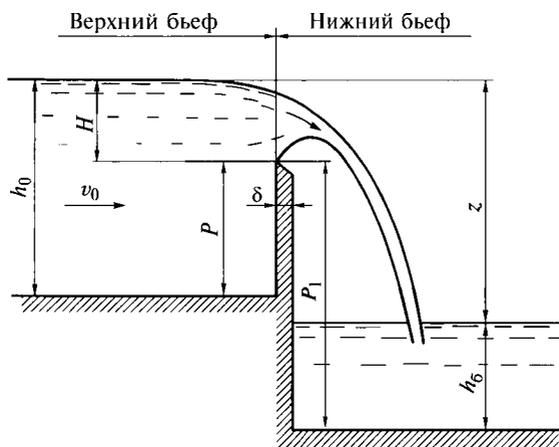


Рис. 7.1

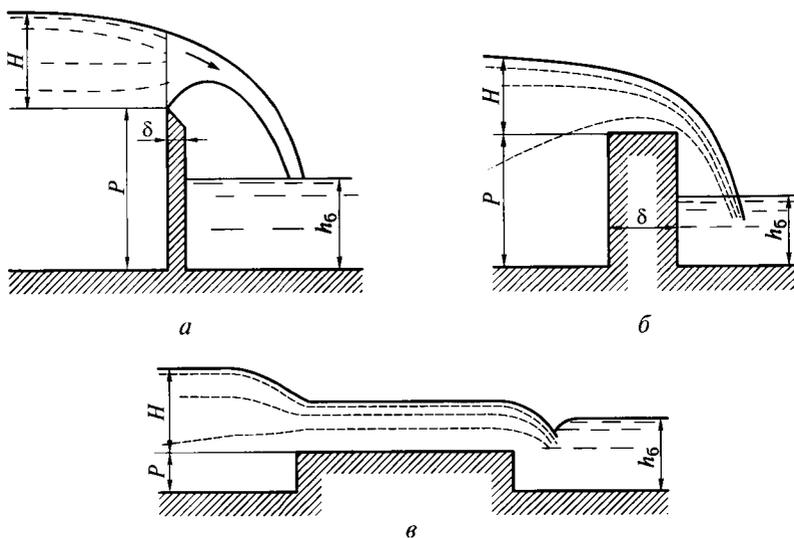


Рис. 7.2

возвышение верха стенки над дном потока со стороны нижнего бьефа — высота водослива P_1 ; разность отметки уровня воды перед водосливом и отметки порога водослива — геометрический напор H ; глубина потока после водослива — бытовая глубина h_6 ; разность отметок воды перед водосливом и после него — перепад z .

Водосливы классифицируются по толщине водосливной стенки, форме водосливного отверстия, расположению и форме стенки в плане, очертанию самого порога, условиям работы водослива (сжатие потока, подтопление водослива, сопряжение струй).

По толщине стенки (порога) различают: водосливы с тонкой стенкой (рис. 7.2, а), водосливы практического профиля (рис. 7.2, б), водосливы с широким порогом (рис. 7.2, в). Основанием для отнесения водослива к указанной классификации является не абсолютная толщина стенки δ , а относительная δ/H . Для водосливов с тонкой стенкой $\delta/H < 0,67$ движение потока характеризуется полным отрывом струи от стенки. Для водосливов с широким порогом $\delta/H > 2,5$ протекание потока через стенку определяется характером сопротивлений движению потока на пороге водослива. Водослив практического профиля занимает промежуточное положение между водосливом с тонкой стенкой и водосливом с широким порогом, для него δ/H находится в пределах $0,67 < \delta/H < 2,5$.

По форме водосливного отверстия водосливы подразделяются на прямоугольные (рис. 7.3, а), треугольные (рис. 7.3, б), трапециевидальные (рис. 7.3, в), криволинейные (рис. 7.3, г) и др. В качестве элементов, входящих в гидротехнические, водопроводные,

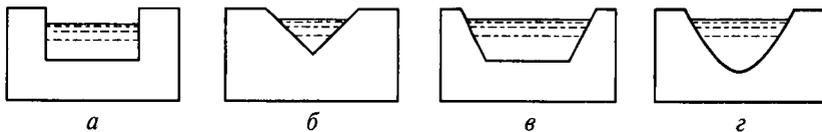


Рис. 7.3

канализационные и другие сооружения, наиболее часто употребляются прямоугольные и треугольные формы сечения. Водосливы других форм отверстий применяются как измерители расходов открытых потоков в лабораториях.

По расположению в плане водосливы делятся на прямолинейные, криволинейные и ломаные. Прямолинейные водосливы бывают нормальные или лобовые (рис. 7.4, *а*), расположенные перпендикулярно к направлению движения потока; косые (рис. 7.4, *б*), расположенные под углом к направлению потока; боковые (рис. 7.4, *в*), расположенные параллельно движению потока. Ломаный водослив представлен на рис. 7.4, *г*, а криволинейные — на рис. 7.4, *д, е*.

По условию работы водосливы рассматриваются с двух позиций: по характеру бокового сжатия потока и по характеру протекания воды в нижнем бьефе. В первом случае различают водосливы без бокового сжатия (рис. 7.5, *а*), когда ширина подходящего потока B и ширина отверстия водослива b совпадают, и водосливы с боковым сжатием (рис. 7.5, *б*), когда ширина отверстия водослива меньше ширины подходящего потока и изливающийся поток сжимается как правило с двух сторон. Боковое сжатие затрудняет протекание воды через водослив, приводя к уменьшению расходов, что должно учитываться в расчетах. Во втором случае разделяют водосливы на свободные и подтопленные (за-

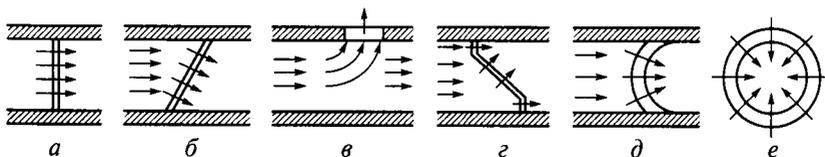


Рис. 7.4

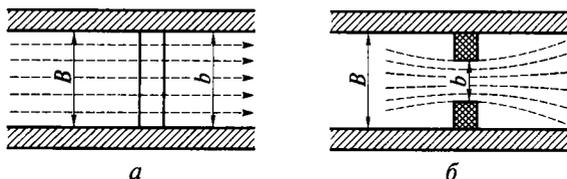


Рис. 7.5

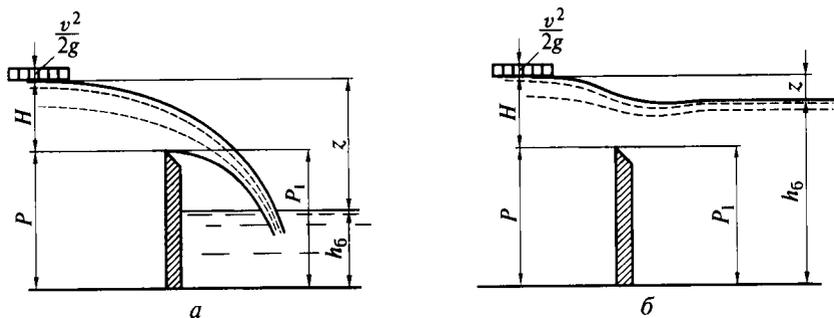


Рис. 7.6

топленные). Для свободных водосливов глубина в нижнем бьефе не влияет на расход и условия протекания потока через водослив (рис. 7.6, а), для подтопленных или затопленных водосливов (рис. 7.6, б) уровень воды в нижнем бьефе влияет на условия протекания воды через водослив.

7.2. Водослив с тонкой стенкой

Рассмотрим поток, протекающий через прямоугольный водослив с тонкой стенкой, имеющей острую кромку (см. рис. 7.1). Свободная поверхность воды при подходе к стенке начинает понижаться, образуется кривая спада. Это определяет условие для нахождения напора H перед водосливом, он измеряется на расстоянии не менее $3H$, т.е. там, где кривая спада становится практически незаметной. С другой стороны, сразу же после прохождения гребня водослива происходит сжатие струи. На уровне гребня водослива очертания верхней и нижней границ струи становятся почти параллельными и составляют угол $41^{\circ}30'$ к горизонтали, толщина струи здесь равна $0,435H$.

Расход жидкости через прямоугольный водослив с тонкой стенкой можно установить на основе закономерностей истечения жидкости через большие отверстия. В подразд. 4.2 получено для большого прямоугольного отверстия уравнение (4.4), которое при $H_1 = 0$ и $H_2 = H$ будет иметь вид

$$Q = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} H^{3/2},$$

или, заменяя $\frac{2}{3} \mu = m_0$, где m_0 — коэффициента расхода водослива, получим

$$Q = m_0 b \sqrt{2g} H^{3/2}. \quad (7.1)$$

Значения коэффициента расхода прямоугольного водослива с тонкой стенкой без бокового сжатия m_0 изменяются в пределах $m_0 = 0,40 \dots 0,50$. Его среднее значение может быть найдено по толщине струи на уровне гребня водослива $b_c = 0,435H$. Так как сжатие в этом сечении отсутствует $\varepsilon = 1$, то, приняв коэффициент скорости $\varphi = 0,97$, получим следующее выражение для расхода:

$$Q = \varepsilon\varphi\omega\sqrt{2gH} = 1 \cdot 0,97 \cdot 0,435bH\sqrt{2gH} = 0,422b\sqrt{2gH^3/2},$$

т.е. коэффициент расхода m_0 равен 0,422.

Сказанное позволяет заключить, что на величину коэффициента расхода основное влияние оказывает характер вертикального сжатия струи, что, в свою очередь, определяется условиями подхода потока, т.е. величинами P и H . Кроме того, на коэффициент расхода влияет еще и скорость подхода жидкости v_0 . Одной из наиболее употребительных экспериментальных зависимостей для m_0 , учитывающей указанные факторы, является формула Базена:

$$m_0 = \left(0,405 + \frac{0,003}{H} \right) \left[1 + 0,55 \left(\frac{H}{H+P} \right)^2 \right]. \quad (7.2)$$

Для незатопленного прямоугольного водослива с тонкой стенкой без бокового сжатия коэффициент расхода приближенно можно определять по следующей зависимости, справедливой при $P > 0,5H$ и $H > 0,1$ м.

$$m_0 = 0,402 + 0,054 H/P. \quad (7.3)$$

7.3. Учет особых условий работы водослива с тонкой стенкой

Боковое сжатие струи. Если водослив расположен в канале, ширина русла которого B больше ширины отверстия водослива b , то в расчетах следует учитывать боковое сжатие. Для водослива с тонкой стенкой этот фактор оценивается влиянием относительной ширины отверстия b/B на изменение коэффициента расхода водослива

$$m_0 = \left[0,405 + \frac{0,003}{H} - 0,03 \left(1 - \frac{b}{B} \right) \right] \times \left[1 + 0,55 \left(\frac{b}{B} \right)^2 \left(\frac{H}{H+P} \right)^2 \right]. \quad (7.4)$$

При малых напорах ($H = 0,05 \dots 0,07$ м) характер протекания через водослив изменяется, наблюдается «прилипание» струи, т.е. струя не отрывается от стенки, а стекает по ней. В этих условиях закономерности для коэффициента расхода (7.2) и (7.4) становятся неверными. Такое же явление наблюдается в случае, когда не обеспечивается свободный доступ воздуха под струю.

Затопление (подтопление) водослива. Если уровень воды в нижнем бьефе начинает повышаться, то при достижении им отметки гребня водослива произойдет снижение расхода через водослив. Будем считать, что напор на водосливе H остается постоянным при изменении уровня воды в нижнем бьефе. График изменения пропускной способности водослива приведен на рис. 7.7. Из графика видно, что при отметках воды в нижнем бьефе меньших, чем отметка гребня водослива, расход остается постоянным. В случае когда отметки воды начинают превышать отметки гребня водослива, т.е. при $z < H$, расход начинает снижаться и при $z = 0$ расход $Q = 0$. Водослив, работающий в этой области, называется затопленным, а условие $z < H$ или $h_6 > P$ называют условием затопления водослива. Данное условие является необходимым, но недостаточным. Переливающаяся через водослив жидкость, подобно падающему телу развивает значительную скорость, при этом живое сечение струи уменьшается, струя сжимается и, двигаясь с большой скоростью, отгоняет жидкость от водослива. При прямоугольном сечении русла ниже водослива последний может быть незатоплен даже при бытовой глубине $h_6 > P$, уровень воды не влияет на расход водослива и он остается неподтопленным.

Для оценки условий затопления прямоугольного водослива с тонкой стенкой при прямоугольном отводном канале, равном ширине водослива, определяется относительный перепад z/P_1 и сравнивается с величиной $(z/P_1)_{кр}$, значения которой даны в табл. 7.1 в зависимости от отношения H/P_1 .

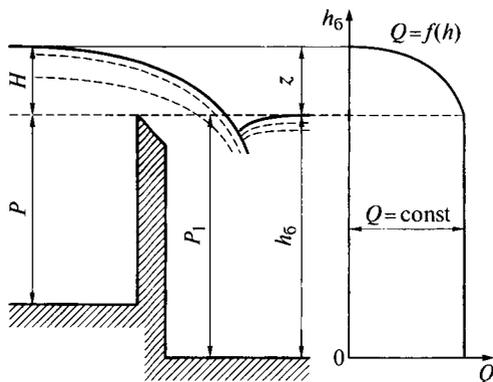


Рис. 7.7

Таблица 7.1

H/P_1	0	0,25	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50
$(z/P_1)_{кр}$	1,00	0,80	0,72	0,68	0,66	0,66	0,67
H/P_1	1,75	2,00	2,25	2,50	2,75	3,00	
$(z/P_1)_{кр}$	0,69	0,70	0,73	0,76	0,80	0,85	

Если $z/P_1 > (z/P_1)_{кр}$, то ниже водослива поток будет отогнан и водослив незатоплен, а при $z/P_1 < (z/P_1)_{кр}$ водослив будет затоплен и это выражение будет вторым условием, которое следует устанавливать для решения вопроса о затоплении водослива. Из табл. 7.1 видно, что диапазон изменения $(z/P_1)_{кр}$ относительно невелик, поэтому для ориентировочных расчетов второе условие можно записать в виде $z/P_1 < 0,7$.

Для гидравлического расчета затопленных водосливов применяют формулу

$$Q = m_0 \sigma_3 b \sqrt{2g} H^{3/2}, \quad (7.5)$$

где σ_3 — коэффициент затопления, $\sigma_3 < 1$, он находится по формуле

$$\sigma_3 = 1,05 \left(1 + 0,2 \frac{H-z}{P_1} \right) \sqrt[3]{\frac{z}{H}}. \quad (7.6)$$

В случае наклона стенки водослива по течению потока или против него происходит изменение поля скоростей по сравнению с вертикальной стенкой (рис. 7.8). Это вызывает изменение характера сжатия потока: так при стенке, наклоненной по течению потока, $\alpha < 90^\circ$ сжатие снижается (рис. 7.8, а), расход потока увеличивается; при стенке, наклоненной против течения потока, $\alpha > 90^\circ$ сжатие увеличивается (рис. 7.8, б), это приводит к снижению расхода водослива.

Численный учет изменения расхода для наклонных водосливов производится путем умножения коэффициента расхода m_0

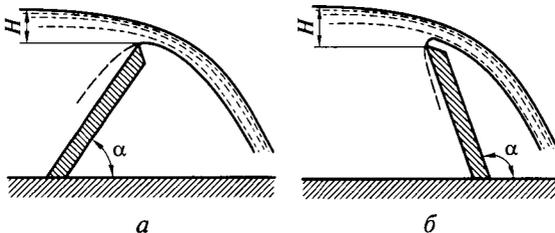


Рис. 7.8



Рис. 7.9

на поправочный коэффициент σ_α , зависящий от угла наклона стенки к горизонту. Связь коэффициента σ_α и угла наклона стенки α приведена на рис. 7.9. Для стенок, наклоненных по течению потока, $\alpha < 90^\circ$, величины $\sigma_\alpha > 1$, а для стенок, наклоненных против течения потока, $\alpha > 90^\circ$, — $\sigma_\alpha < 1$.

Как отмечалось ранее, если водослив расположен под углом θ к направлению потока, то такие водосливы являются косыми. Для косых водосливов без стеснения на выходе и угле $\theta < 45^\circ$ по данным ВНИИ ВОДГЕО расход определяется по тем же формулам, что и для нормального водослива и с теми же коэффициентами расхода. В случае стеснения косого водослива на выходе вертикальными стенками расчет ведется по формуле

$$Q = \sigma_{\text{кос}} m_0 b \sqrt{2g} H^{3/2},$$

где $\sigma_{\text{кос}}$ — поправочный коэффициент, зависящий от угла θ .

Существенно изменяется характер истечения при $\theta = 0$, т. е. для бокового водослива. В пределах водосливного отверстия возникает кривая спада, имеющая в общем случае нелинейный характер. Наиболее точные решения для бокового водослива могут быть получены на основе уравнений движения потока с переменным расходом по пути. Однако для относительно небольшой протяженности водосливной грани (ширины водослива b) расход может быть получен по формуле

$$Q = m_0 b \sqrt{2g} (h_{\text{ср}} - P)^{3/2},$$

где $h_{\text{ср}} = (h_1 + h_2)/2$, h_1 и h_2 — глубины в начале и конце водослива; P — высота порога водослива.

7.4. Водосливы-расходомеры

Водосливы с тонкой стенкой, работающие в незатопленных условиях, являются надежными измерителями расходов. Ими измеряют расходы от 0,0005 до 10 м³/с. Водосливы удобны, когда требуется частое и точное определение расходов, особенно в условиях водопроводно-канализационных сооружений, при иссле-

довательских работах. Водосливы-расходомеры довольно часто применяются в гидравлических лабораториях.

Рассмотрим основные типы водосливов.

Водослив с прямоугольным отверстием (см. рис. 7.3, а) подчиняется приведенным ранее закономерностям. Такой водослив устанавливается в каналах и имеет горизонтальное водосливное ребро. Наибольший напор не должен превышать 1 м, наименьший напор, обеспечивающий достаточно точное определение расхода, должен быть не менее 0,05 м.

Треугольный водослив (см. рис. 7.3, б) устраивается с различными углами при вершине θ в пределах от 20° до 120° в зависимости от величины и интервалов измеряемых расходов. Наиболее распространен водослив с углом выреза $\theta = 90^\circ$, для которого

$$Q = \int_0^H \mu b_z \sqrt{2gz} dz = \int_0^H \mu 2 \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \sqrt{2g} (H - z) z^{1/2} dz = \frac{8}{15} \mu \sqrt{2g} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} H^{5/2},$$

где $b_z = 2 \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} (H - z)$. В случае $\mu = 0,6$, $\theta = 90^\circ$ и $\frac{8}{15} \mu \sqrt{2g} = 1,4$ формула принимает вид

$$Q = 1,4 H^{5/2}, \quad (7.7)$$

где H подставляется в метрах, а расход получают в метрах кубических в секунду ($\text{м}^3/\text{с}$).

Трапецидальный водослив (см. рис. 7.4, в), применяемый в качестве измерителя расхода, имеет форму в виде равнобедренной трапеции с шириной порога, равной $(3 \dots 4) H_{\max}$. Для таких водосливов характерно устойчивое значение коэффициента расхода. Расчетная зависимость для коэффициента расхода через трапецидальный водослив может быть получена из формулы

$$Q = \int_0^H \mu b_z \sqrt{2gz} dz,$$

в которую перед интегрированием необходимо подставить

$$b_z = b + 2(H - z) \operatorname{tg} \theta.$$

В результате получаем зависимость

$$Q = m_0 \left(1 + 0,8 \frac{H}{b} \operatorname{tg} \theta \right) b \sqrt{2g} H^{3/2},$$

где $m_0 = \frac{2}{3} \mu$.

Чтобы не учитывать в расчетах боковое сжатие, рекомендуеться делать угол заложения боковых граней таким, чтобы $\operatorname{tg} \theta = 1/4$, тогда при $m_0 = 0,42$ имеем

$$Q = 1,8 b H^{3/2}. \quad (7.8)$$

Здесь, как и для треугольного водослива, коэффициент 1,86 имеет размерность $m^{0,5}/c$ и для получения расхода в m^3/c величины b и H следует подставлять в метрах.

Пропорциональные водосливы. Все рассмотренные ранее водосливы имеют степенную связь между расходом Q и напором H . Однако можно создать водослив, имеющий более простую формулу:

$$Q = kH.$$

Такой водослив должен иметь криволинейные боковые стенки, а значит, величина b_z должна зависеть только от z . Для получения такой зависимости рассмотрим, с одной стороны, уравнение

$$dQ = \mu b_z \sqrt{2gz} dz, \quad (7.9)$$

а, с другой стороны, приращение напора dz на любой отметке z вызывает одинаковое приращение расхода dQ , т. е.

$$dQ = k dz, \quad (7.10)$$

решая совместно уравнения (7.9) и (7.10) получим

$$b_z = \frac{k}{\mu \sqrt{2gz}}. \quad (7.11)$$

Если построить график зависимости (7.11), принимая в рассмотрение величину $b_z/2$, то можно установить, что при $z \rightarrow 0$ $b_z/2 \rightarrow \infty$, что указывает на невозможность создания пропорционального водослива, измеряющего расход во всем диапазоне напоров. Делают водосливы с конечными значениями b при $z = 0$, это приводит к нарушению прямой пропорциональности в области малых напоров. Близким к пропорциональному водосливу является трапецидальный, суживающийся кверху водослив. Здесь в некотором ограниченном диапазоне напоров $H_{\min} < H < H_{\max}$ с достаточной для практических целей можно пользоваться зависимостью

$$Q = kH - Q_0,$$

где Q_0 — некоторый условный начальный расход.

Г. В. Железняков, изучая данный водослив, получил

$$k = \frac{1}{2} m \sqrt{2g} \frac{b^{1,5}}{\operatorname{tg} \theta^{0,5}}; \quad Q_0 = 0,025 m \sqrt{2g} \frac{b^{2,5}}{\operatorname{tg} \theta^{1,5}},$$

а интервал напоров, для которых справедливы указанные зависимости, при точности измерения расходов $\pm 3\%$:

$$0,15 \frac{b}{\operatorname{tg} \theta} < H < 0,45 \frac{b}{\operatorname{tg} \theta}.$$

Для получения надежных результатов измерения расходов водосливами необходимо при их установке и работе соблюдать следующие правила:

перед подходом к водосливу поток должен протекать прямолинейно, а его направление должно быть нормальным к ребру водослива;

водослив должен быть неподтопленным, а под струю обеспечено поступление воздуха;

края водосливного отверстия должны быть заострены, не имея вмятин и зазубрин, фаска среза должна быть обращена в сторону падения струи;

ребро прямоугольного и трапецеидального водосливов должно быть установлено горизонтально.

7.5. Водослив с широким порогом

Водосливы с широким порогом характеризуются шириной (толщиной) порога (водосливной стенки) в пределах $(2...3)H < \delta < (8...10)H$ (см. рис. 7.2, *в*). В некоторых случаях такие водосливы могут иметь скругленное ребро или наклонную верховую грань. Как и другие виды водосливов, водосливы с широким порогом могут быть незатопленными и затопленными.

Незатопленный водослив с широким порогом. В зависимости от ширины порога такого водослива на нем могут устанавливаться различные схемы протекания потока.

При $\delta < (2...4)H$ глубина потока непрерывно понижается на пороге (рис. 7.10, *а*), как и на водосливе практического профиля.

При $(2...4)H < \delta < (8...10)H$ на пороге устанавливается параллельноструйное движение с глубиной $h < h_k$ (рис. 7.10, *б*).

При $\delta > (8...10)H$ на условия протекания потока начинают влиять силы трения, т.е. пропускная способность водослива становится зависимой от потерь энергии по длине, и водослив можно рассматривать как короткий канал. В этом случае на пороге в его начале устанавливаются так называемая сжатая (т.е. наименьшая) глубина h_c и ряд затухающих волн с переходом через критическую глубину. Такой переход к глубинам более критической, обозначенной на рис. 7.10, *в* линией $K-K$, называется волнистым гидравлическим прыжком.

Наиболее характерной формой протекания через водослив с широким порогом является случай с примерно параллельноструйным движением (рис. 7.10, *а*)

Протекание через водослив связано со значительным искривлением отдельных струек потока, что приводит к нарушению условий плавной изменяемости движения, т.е. к распределению давления в сечениях по закону, отличному от гидростатического.

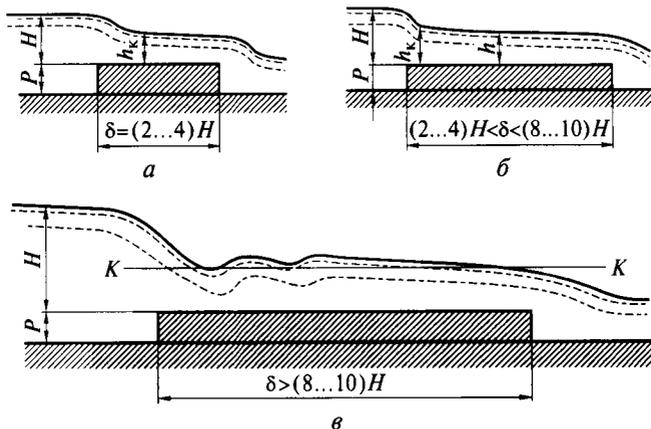


Рис. 7.10

Обычно потерями напора по длине вдоль порога пренебрегают, а свободную поверхность потока в пределах водослива считают горизонтальной. Применяя уравнение Бернулли для сечений до водослива и на его пороге, имеем

$$H + \frac{\alpha v_0^2}{2g} = h + \frac{\alpha v^2}{2g} + h_c,$$

а считая, что местные потери между сечениями равны

$$h_c = \zeta \frac{v^2}{2g},$$

и решая относительно скорости на пороге водослива, получим

$$v = \varphi \sqrt{2g(H_0 - h)},$$

где H_0 — напор на подходе к водосливу, $H_0 = H + \frac{\alpha v_0^2}{2g}$; φ — коэффициент скорости, $\varphi = \sqrt{\frac{1}{\alpha + \zeta}}$.

Для прямоугольного водослива величина расхода

$$Q = bhv = \varphi bh \sqrt{2g(H_0 - h)}. \quad (7.12)$$

Для того чтобы по уравнению (7.12) установить расход, необходимо знать глубину, которая устанавливается на пороге водослива. Для ее определения предложено несколько способов, рассмотрим один из них.

Из рис. 7.11 видно, что искомая глубина на пороге при всех условиях не может быть более H_0 , она должна лежать в пределах $0 < h < H_0$.

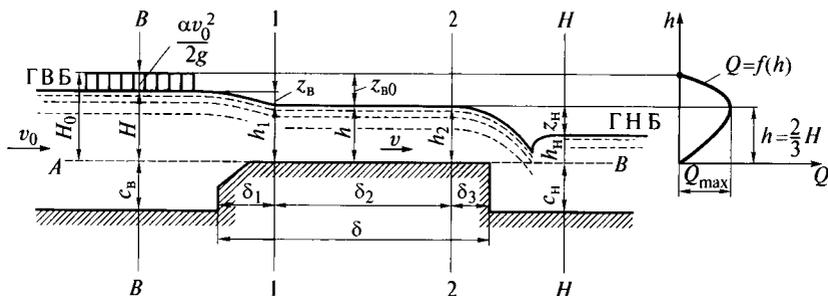


Рис. 7.11

Считая, что H_0 нам задана ($H_0 = \text{const}$), обратимся к формальному анализу уравнения (7.12). Назначив в нем $h = H_0$, получим $Q = 0$, а при $h = 0$ также имеем $Q = 0$. Как видно, функция $Q = f(h)$ для граничных значений h получает величины, равные нулю. Отсюда заключаем, что при некотором промежуточном значении h рассматриваемая функция должна иметь максимум. Более подробный анализ уравнения показывает: при изменении h от нуля до H_0 функция $Q = f(h)$ может быть представлена кривой, имеющей вид, изображенный на графике (см. рис. 7.11).

Учитывая указанное обстоятельство, Беланже предложил пользоваться для определения глубины h следующим постулатом (положение, принимаемое без доказательства): при заданном напоре глубина h на пороге водослива сама собой устанавливается такая, при которой имеет место максимальный расход.

Этот постулат называют иногда принципом наибольшего расхода. Согласно ему искомая глубина h должна удовлетворять уравнению

$$\frac{dQ}{dh} = \frac{d(\varphi b h \sqrt{2g(H_0 - h)})}{dh} = 0.$$

Считая $\varphi = \text{const}$ и $b = \text{const}$, получаем

$$\frac{d(h\sqrt{(H_0 - h)})}{dh} = \sqrt{H_0 - h} - \frac{h}{2\sqrt{H_0 - h}} = 0,$$

откуда

$$h = \frac{2}{3} H_0.$$

Именно такая глубина h согласно Беланже должна устанавливаться на пороге рассматриваемого водослива. Подставляя значение h в уравнение (7.12), можно переписать его в виде

$$Q = \varphi b \frac{2}{3} H_0 \sqrt{2gH_0 \left(1 - \frac{2}{3}\right)},$$

или

$$Q = mb\sqrt{2g}H_0^{3/2}, \quad (7.13)$$

где $m = \varphi \frac{2}{3} \sqrt{1 - \frac{2}{3}} = 0,385\varphi$.

Как видно, уравнение ничем не отличается от основной расчетной зависимости, приведенной в подразд. 7.2.

Некоторые авторы на основании соответствующих опытов рекомендовали принимать для широкого порога, не имеющего скругления входного ребра, $\varphi \approx 0,85$, а для порога, имеющего скругленное ребро, $\varphi \approx 0,92$.

Исходя из этих значений φ в соответствии с (7.13) получаем величину коэффициента расхода: для порога, не имеющего скругления входного ребра, $m = 0,32$; для порога, имеющего скругленное ребро, $m = 0,35$.

Подтопление прямоугольного водослива с широким порогом.

Представим картину истечения воды через подтопленный водослив с широким порогом (рис. 7.12, а). Как видно, он характеризуется в общем случае наличием одного положительного z_B и одного отрицательного z_{BC} перепадов. Свободная поверхность в пределах перепада z_{BC} поднимается вверх благодаря тому, что часть кинетической энергии потока в этом месте переходит в потенциальную энергию. В связи с этим z_{BC} называется перепадом восстановления.

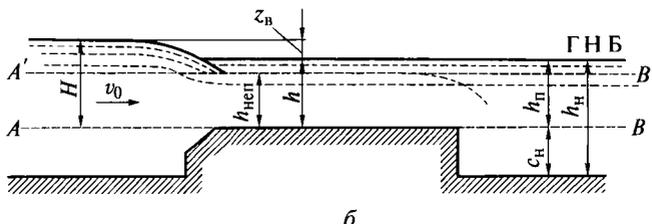


Рис. 7.12

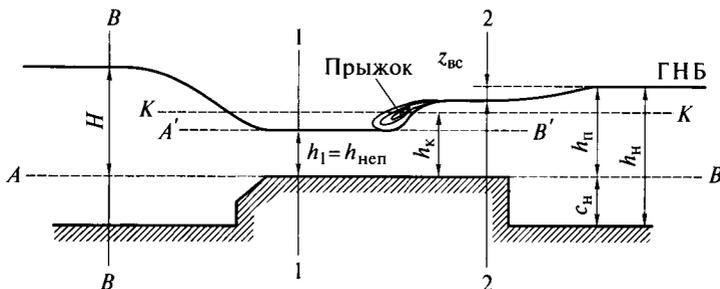


Рис. 7.13

В «старых способах» расчета перепадом восстановления пренебрегали и представляли себе картину истечения в случае подтопленного водослива в виде, показанном на рис. 7.12, б: считали, что подтопленный водослив характеризуется наличием только одного перепада свободной поверхности $z_{вс}$.

Покажем на рис. 7.12, б пунктиром струю, которая получается, когда при заданном H водослив является неподтопленным ($h_{неп}$ — глубина, которая сама собой устанавливается на пороге в этом случае; $A'B'$ — уровень воды, возвышающийся на величину $h_{неп}$ над порогом водослива).

Согласно способам Беланже и Бахметева водослив с широким порогом получается подтопленным, если уровень воды нижнего бьефа поднимается выше того горизонта воды, который сам собой устанавливается на пороге неподтопленного водослива. Учитывая это, получаем следующие критерии подтопления водослива:

согласно Беланже водослив с широким порогом следует считать подтопленным, если $h_{п} > \frac{2}{3} H_0$ или $h_{н} > p_{н} + \frac{2}{3} H_0$;

согласно Бахметеву водослив следует считать подтопленным, если $h_{п} = h_{к}$ или $h_{п} = p_{н} + h_{к}$.

Поэтому, когда горизонт воды нижнего бьефа, поднявшись выше линии KK , определяемой критической глубиной, будет надвигаться на порог водослива, на последнем возникает гидравлический прыжок (рис. 7.13) и сечение 1—1 может оказаться не открытым горизонтом воды нижнего бьефа.

Исследования Р.Р.Чугаева, проведенные с учетом явления гидравлического прыжка на водосливе и поясненного ранее перепада восстановления, показали, что водослив с широким порогом следует считать подтопленным, если высота подтопления

$$h_{н} = nH_0; \quad h_{н} > p_{н} + nH_0,$$

где $n = 0,85 \dots 0,75$.

7.6. Водослив со стенкой практического профиля

В практике строительства плотин чаще всего применяются так называемые безвакуумные водосливы практического профиля.

Предположим, мы имеем водослив с тонкой стенкой (рис. 7.14, *а*). Для того чтобы получить безвакуумный водослив практического профиля, сливную грань его (рис. 7.14, *б*) очерчивают по линии, представляющей собой нижнюю границу струи, переливающейся через водослив с тонкой стенкой. При таком построении профиля водосливной стенки на сливной поверхности ее (под струей) давление будет близким к атмосферному.

Если мы очертим сливную грань по некоторой кривой BC_2 , лежащей левее линии BC_1 , то струя будет стремиться отрываться от стенки. В этом случае под струей возникает вакуум, и водослив будет называться вакуумным водосливом.

В гребне плотины может быть устроено несколько водосливных отверстий, разделенных быками (рис. 7.15). Расчет водосливов практического профиля ведется по формуле

$$Q = \sigma_n \epsilon m B \sqrt{2g} H_0^{3/2}, \quad (7.14)$$

где σ_n — коэффициент подтопления, учитывающий уменьшение Q благодаря подтоплению водослива нижним бьефом, для неподтопленного водослива $\sigma_n = 1$; ϵ — коэффициент бокового сжатия $\epsilon = B_c/B$ (B_c — действительная, или эффективная, ширина водо-

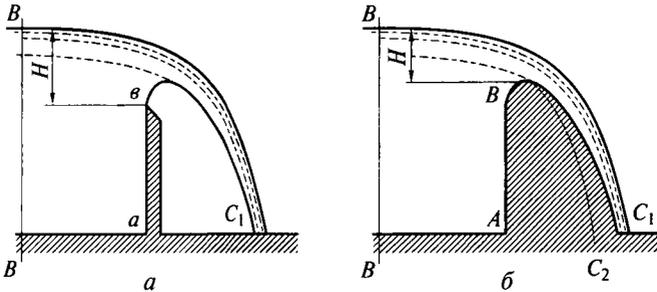


Рис. 7.14

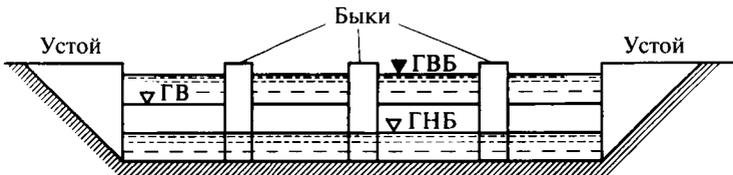


Рис. 7.15

сливного фронта, $B_c = \sum b_c$, b_c — так называемая сжатая ширина отдельных струй); m — коэффициент расхода водослива; B — ширина водосливного фронта, $B = \sum b$ (b — ширина отдельных водосливных отверстий).

В том случае, когда

$$\Omega_n \geq 4BH,$$

где Ω_n — площадь живого сечения верхнего бьефа по линии bb (см. рис. 7.14), скоростью подхода следует пренебречь и считать $H_0 = H$.

Основным вопросом расчета водослива со стенкой практического профиля является вопрос о величине коэффициентов σ_n , ε и m . Зная для данного водослива σ_n , ε и m , можно по формуле легко решить три основные задачи:

найти Q при заданных B и H ;

найти B при заданных H и Q ;

найти H при заданных B и Q .

Имея это в виду, остановимся на пояснении вопроса, каким образом следует устанавливать численные значения коэффициентов σ_n , ε и m для того или иного конкретного случая водослива.

Коэффициент подтопления водослива. Величина σ_n устанавливается на основании экспериментальных данных в зависимости от отношения h_n/H_0 , где h_n — высота подтопления, т.е. превышение горизонта воды нижнего бьефа над гребнем водослива.

Если в нижнем бьефе имеется незатопленный прыжок, то величина σ_n должна быть принята равной 1, так как в этом случае водослив будет неподтопленным.

Коэффициент бокового сжатия. В практике часто $H_0/b < 1$. Ограничиваясь рассмотрением только таких случаев, укажем, что величину ε удобно определять по следующим эмпирическим формулам:

при наличии одного водосливного отверстия

$$\varepsilon = 1 - 0,2\xi_y \frac{H_0}{b},$$

где ξ_y — коэффициент уменьшения, учитывающий скругление вертикальных ребер устоев;

при наличии нескольких одинаковых водосливных отверстий, отделенных друг от друга быками:

$$\varepsilon = 1 - 0,2 \frac{\xi_y + (n-1)\xi_b}{n} \frac{H_0}{b},$$

где n — число отдельных водосливных отверстий (одинакового размера); ξ_b — коэффициент уменьшения, учитывающий форму быков в плане.

Численные значения коэффициентов уменьшения ξ_y и ξ_b можно определять, пользуясь следующими данными:

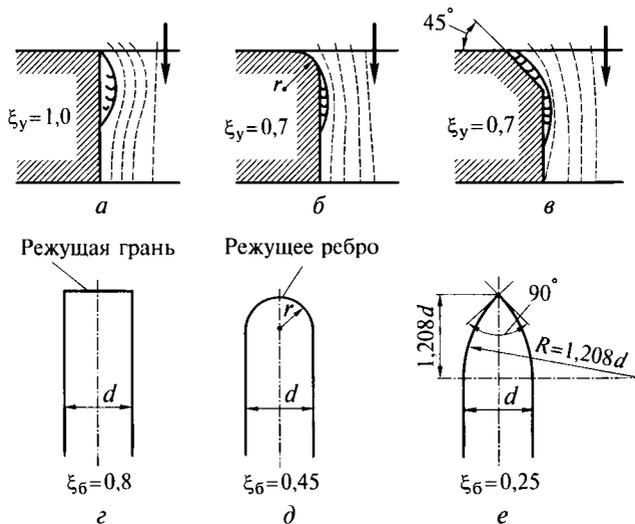


Рис. 7.16

величину ξ_y принимаем согласно Кригеру в зависимости от формы устоев в плане (рис. 7.16 а, б, в);

величину ξ_6 находим согласно Офицерову в зависимости от формы быков в плане (рис. 7.16, з, д, е).

Коэффициент расхода. Водосливные стенки практического профиля могут иметь самое различное очертание. В справочной литературе приводятся числовые значения коэффициентов расхода, найденные опытным путем для разных конструкций водосливов.

7.7. Сопряжение бьефов

Представим водосливную плотину (рис. 7.17). Живое сечение струи, ниспадающей с водослива или с порога перепада, постепенно уменьшается книзу (так как при падении воды скорость ее движения увеличивается). Наиболее сжатое сечение струи (сечение С—С) оказывается у самого дна нижнего бьефа. Глубина струи h_c , измеряемая в этом сечении, называется сжатой глубиной. Глубина h_c всегда меньше критической. Следовательно, поток здесь находится в бурном состоянии и обладает большой кинетической энергией.

Глубина потока в нижнем бьефе h_6 находится по кривой связи $Q = f(h)$, построенной или на основании гидromетрических данных, или (в случае призматического канала) по уравнению равномерного движения воды в открытом русле.

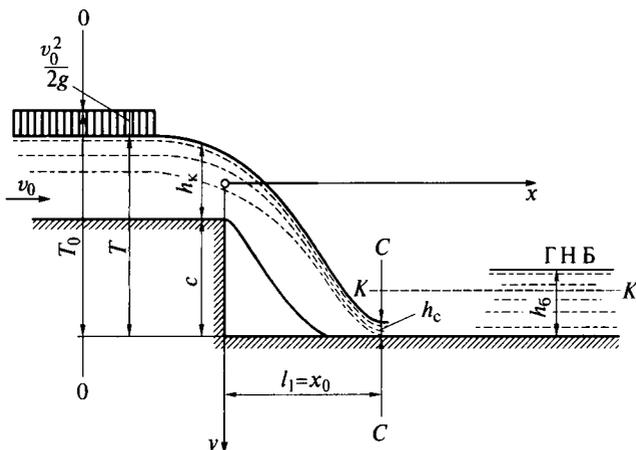


Рис. 7.17

В практике обычно приходится сталкиваться со случаем, когда уклон дна нижнего бьефа меньше критического ($i < i_k$), а следовательно, бытовая глубина $h_6 > h_k$ (поток находится в спокойном состоянии). Как известно, переход от бурного потока к спокойному, при котором свободная поверхность пересекает линию критических глубин KK , сопровождается образованием гидравлического прыжка.

Основная задача расчета сопряжения бьефов состоит в том, чтобы установить, какая форма свободной поверхности воды будет иметь место при сопряжении струи, падающей в нижний бьеф, с потоком нижнего бьефа.

Первое, с чем приходится сталкиваться при расчете сопряжения бьефов, — это с определением величины сжатой глубины h_c в сечении $C-C$.

7.8. Определение глубины в сжатом сечении

Для определения сжатой глубины h_c используем уравнение Бернулли. Сечение $0-0$ возьмем перед плотиной (см. рис. 7.17); сечение $C-C$ наметим по сечению, где имеет место сжатая глубина. Плоскость сравнения назначим на уровне дна нижнего бьефа.

Потери напора $h_{c(0-C)}$ от сечения $0-0$ до сечения $C-C$ выразим обычной формулой: $h_{c(0-C)} = \zeta \frac{v^2}{2g}$, где ζ — коэффициент сопротивления; v — скорость в сжатом сечении.

Напишем уравнение Бернулли для сечений $0-0$ и $C-C$:

$$T + \frac{\alpha v_0^2}{2g} = h_c + \frac{\alpha v^2}{2g} + \zeta \frac{v^2}{2g},$$

или

$$T_0 = h_c + (\alpha + \zeta) \frac{v^2}{2g},$$

где T_0 — полный напор в сечении 0—0, $T_0 = T + \frac{\alpha v_0^2}{2g}$.

Так как $v = \frac{Q}{bh_c}$ и $(\alpha + \zeta) = \frac{1}{\varphi^2}$, где b — ширина русла, φ — коэффициент скорости, учитывающий потери напора в пределах сооружения (от сечения 0—0 до сечения С—С), уравнение Бернулли можно переписать в следующем виде:

$$T_0 = h_c + \frac{Q^2}{2gb^2h_c^2\varphi^2}. \quad (7.15)$$

Этим уравнением и пользуемся для определения h_c в случае прямоугольного русла.

Так как уравнение (7.15) является кубическим в отношении h_c , то решать его приходится подбором. При этом следует иметь в виду, что глубина h_c должна быть меньше критической. В связи с этим из трех корней кубического уравнения (7.15) надо интересоваться только тем, который удовлетворяет условию: $0 < h_c < h_k$.

Покажем один из наиболее простых способов подбора h_c , для чего преобразуем уравнение в следующий вид:

$$h_c = \frac{Q}{\varphi b \sqrt{2g(T_0 - h_c)}}. \quad (7.16)$$

Полагая на начальном этапе расчета значение h_c в знаменателе уравнения (7.16) равным нулю, имеем

$$h_{c1} = \frac{Q}{\varphi b \sqrt{2gT_0}}.$$

Теперь полученное значение h_{c1} вновь подставляем в формулу и получаем новое значение h_{c2} :

$$h_{c2} = \frac{Q}{\varphi b \sqrt{2g(T_0 - h_{c1})}}.$$

Для оценки результатов и окончания расчетов устанавливают величину $\frac{h_{c1} - h_{c2}}{h_{c1}} 100 < (2...3) \%$, если данное неравенство выполняется, то расчет оканчивается, если неравенство не выполняется, расчет продолжается по указанной методике.

Для упрощения расчетов по определению h_c в случае прямоугольного отводящего русла (обычно встречающегося в практике) имеются специальные расчетные графики.

7.9. Типы сопряжения бьефов

При уклоне отводящего русла $i < i_k$ (что обычно и имеет место в практике) возможны три типа сопряжения бьефов.

Первый тип: сопряжение бьефов при помощи отогнанного гидравлического прыжка. В этом случае прыжок оказывается на некотором расстоянии от сооружения (рис. 7.18). Длина l называется длиной отгона прыжка; она представляет собой длину кривой подпора.

На этом участке потока глубины возрастают от h_c до h_1 , которая является первой сопряженной глубиной отогнанного прыжка (сопряженной с глубиной $h_2 = h_6$).

Второй тип: гидравлический прыжок в сжатом сечении (рис. 7.19). В этом случае нижний бьеф не затопливает прыжка, но и отгона прыжка тоже нет; прыжок начинается в сжатом сечении ($l = 0$). Сопряжение потока в этом случае называется сопряжением бьефов с надвинутым прыжком.

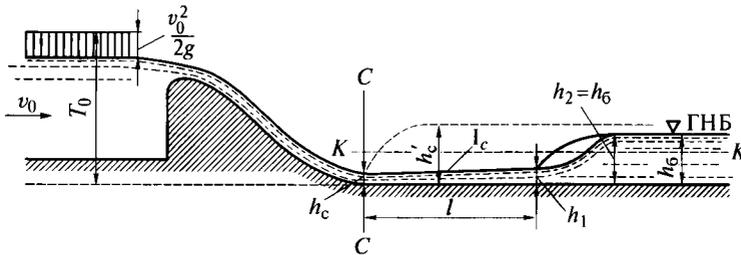


Рис. 7.18

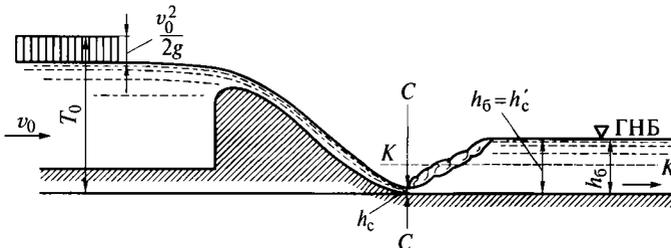


Рис. 7.19

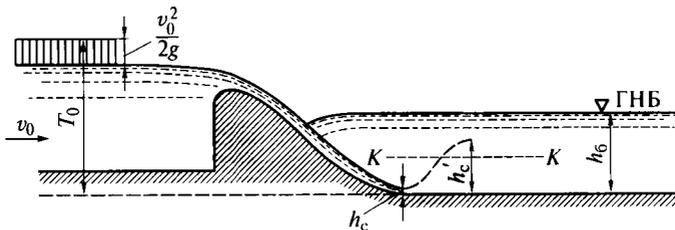


Рис. 7.20

Третий тип: сопряжение бьефов при помощи затопленного гидравлического прыжка. В этом случае нижний бьеф затопливает прыжок (рис. 7.20).

При расчете сопряжения бьефов прежде всего необходимо установить, какой из трех названных типов сопряжения имеет место в рассматриваемом случае. При решении этой задачи поступают следующим образом. Определив сжатую глубину h_c , по основному уравнению прыжка находим глубину h'_c , сопряженную с глубиной h_c (рис. 7.21). При этом представляем себе в сечении $C-C$ фиктивный (воображаемый) прыжок (см. пунктир на рис. 7.21). Первая глубина такого прыжка будет $h_1 = h_c$, вторая $h_2 = h'_c$.

Далее, анализируя соотношение глубин, имеем:

если нижний бьеф не затопливает фиктивный прыжок, т. е. $h_6 < h'_c$, то имеем отогнанный прыжок — первый тип сопряжения (см. рис. 7.18);

если горизонт нижнего бьефа оказывается на одном уровне с горизонтом, определяемым глубиной h'_c , т. е. $h_6 = h'_c$, то фиктивный прыжок обращается в действительный — второй тип сопряжений (см. рис. 7.19);

если нижний бьеф затопливает фиктивный прыжок, т. е. $h_6 > h'_c$, то имеем затопленный прыжок — третий тип сопряжения бьефов (см. рис. 7.20).

Таким образом, тот или другой тип сопряжения бьефов получается в зависимости от соотношения глубин h'_c и h_6 .

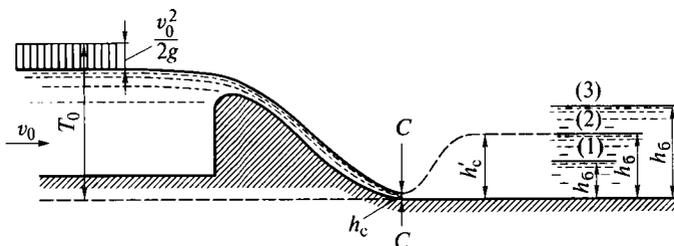


Рис. 7.21

В случае отогнанного прыжка дополнительно приходится расчетом устанавливать длину отгона прыжка (см. рис. 7.18). Ее определяем, пользуясь решением Павловского или Чарномского для уравнения неравномерного движения. При расчете предварительно должна быть найдена глубина h_1 по основному уравнению прыжка, считая, что $h_2 = h_6$, после чего находится длина отгона прыжка при известных глубинах h_c и h_1 .

7.10. Общие замечания о гашении кинетической энергии в нижнем бьефе сооружения

Как правило, наиболее выгодной с экономической точки зрения является форма сопряжения бьефов, когда прыжок является затопленным (см. рис. 7.20). В том случае, когда прыжок согласно первоначальному расчету получается отогнанным или надвинутым, приходится ставить вопрос об устройстве в нижнем бьефе особых гасителей энергии, при помощи которых можно было бы, погасив излишек энергии потока, получить в конечном счете затопленный гидравлический прыжок.

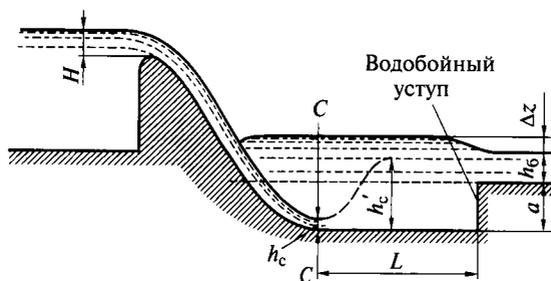


Рис. 7.22

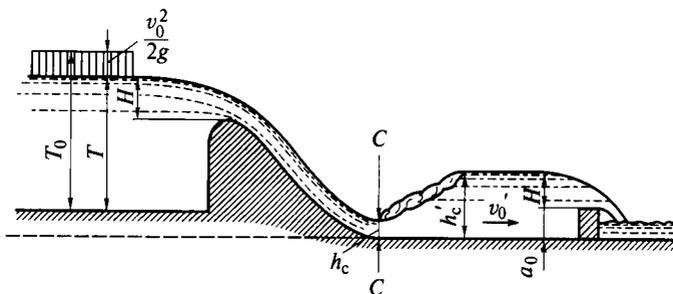


Рис. 7.23

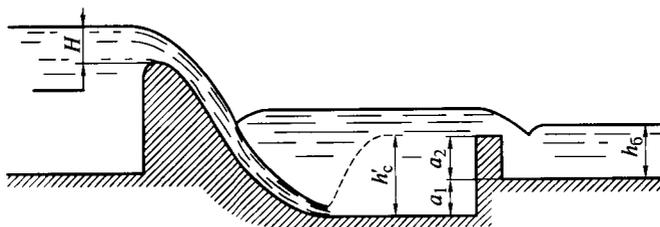


Рис. 7.24

Различают следующие типы гасителей:

- водобойный колодец (рис. 7.22). Как видно, идея водобойного колодца заключается в искусственном увеличении глубины нижнего бьефа за счет опускания дна нижнего бьефа (непосредственно у сооружения) на величину a ;
- водобойная стенка (рис. 7.23). Здесь глубина нижнего бьефа увеличивается за счет подпора, вызываемого специальной водобойной стенкой (высотой a_0), устроенной в нижнем бьефе;
- водобойный колодец комбинированного типа (рис. 7.24). В этом случае глубина нижнего бьефа увеличивается за счет опускания дна русла бьефа, а также за счет подпора, создаваемого водобойной стенкой.

7.11. Расчет водобойного колодца

Гидравлический расчет водобойного колодца состоит в определении глубины колодца a и его длины L (см. рис. 7.22).

Определение глубины колодца. Идея устройства водобойного колодца заключается в том, чтобы, понижая дно нижнего бьефа на величину a , получить новую глубину, достаточную для затопления прыжка.

Необходимая глубина колодца a , при которой получается затопленный прыжок, должна удовлетворять условию

$$a + \Delta z + h_6 > h'_c.$$

Для большей надежности работы колодца желательно, чтобы в нем образовывался затопленный гидравлический прыжок, для чего глубину после прыжка следует увеличить на некоторый коэффициент запаса $\sigma = 1,05 \dots 1,10$, тогда

$$\sigma h'_c = a + \Delta z + h_6,$$

откуда искомая глубина колодца

$$a = \sigma h'_c - \Delta z - h_6. \quad (7.17)$$

Перепад на выходе из водобойного колодца определяется как действующий напор в затопленном водосливе с широким порогом, который находится по формуле (7.12):

$$\Delta z = \frac{\alpha Q^2}{2g\varphi^2 b^2 h_0^2} - \frac{\alpha Q^2}{2gb^2(a + \Delta z)}.$$

С устройством колодца (т.е. при понижении дна нижнего бьефа) высота падения струи увеличивается, напор в начальном сечении (по отношению к плоскости сравнения, проведенной на уровне дна колодца) также увеличивается до величины $T'_0 = T_0 + a$. При этом сжатая глубина h_c должна уменьшаться, а с ее уменьшением вторая сопряженная глубина прыжка h'_c должна увеличиваться.

В связи с тем, что величина h'_c сама зависит от a , данную задачу приходится решать подбором. При этом намечаем следующий ход расчета:

- задаемся какой-либо величиной a ;
- находим $T'_0 = T_0 + a$;
- пользуясь найденным T'_0 , определяем новое значение сжатой глубины h_c ;
- зная h_c , вычисляем сопряженную глубину h'_c , пользуясь основным уравнением гидравлического прыжка;
- сопоставляем найденную величину h'_c с новой глубиной нижнего бьефа, равной $a + \Delta z + h_0$.

Если $\sigma h'_c \neq a + \Delta z + h_0$, задаемся новым значением a и повторяем расчет, добиваясь равенства $\sigma h'_c = a + \Delta z + h_0$.

Определение длины колодца. В случае плотины длина L измеряется от сечения $C-C$ (см. рис. 7.22), местоположение которого определяется конструкцией плотины (очертанием сливной грани). Длина колодца здесь принимается равной длине прыжка или несколько меньше, например

$$L = (0,7 \dots 0,8)l_n,$$

где l_n определяется, как указано в подразд 6.15, с учетом, что $h_1 = h_c$, и $h_2 = h'_c$.

В случае перепада на канале длина колодца складывается из дальности полета струи и длины прыжка:

$$L = l_1 + (0,7 \dots 0,8)l_n,$$

где l_1 — дальность полета струи.

Для определения l_1 используем уравнение траектории материальной точки, имеющей начальную горизонтальную скорость v_0 :

$$y = \frac{gx^2}{2v_0^2},$$

откуда (для точки с координатами $x = x_0$ и соответственно $y = y_0$)

$$l_1 = x_0 = v_0 \sqrt{\frac{2y_0}{g}}.$$

Величина $y_0 = P_1 + h_k/2$.

7.12. Расчет водобойной стенки

При устройстве водобойной стенки дно нижнего бьефа не понижается (см. рис. 7.23), высота падения струи не изменяется, следовательно, глубина h_c , а вместе с тем и глубина h'_c остаются постоянными. Поэтому задача об определении теоретической высоты стенки a_0 , при которой прыжок располагается в сжатом сечении, решается без подбора (если сама стенка работает как неподтопленный водослив). При этом должно соблюдаться следующее условие:

$$\sigma h'_c = a_0 + H'. \quad (7.18)$$

Последовательность расчета следующая:

вычисляем T_0 и по ее значению находим h_c ;

определяем критическую глубину h_k , и устанавливаем характер сопряжения в нижнем бьефе;

из уравнения гидравлического прыжка находим глубину h'_c как сопряженную с глубиной h_c ;

определяем скорость подхода к водобойной стенке $v'_0 = \frac{Q}{bh'_c}$;

из формулы водослива (7.14) находим полный напор на этой стенке, предполагая, что стенка работает как неподтопленный водослив практического профиля:

$$H'_0 = \left(\frac{Q}{mb\sqrt{2g}} \right)^{\frac{2}{3}};$$

находим геометрический напор на водобойной стенке

$$H' = H'_0 - \frac{(v'_0)^2}{2g};$$

находим высоту водобойной стенки

$$a_0 = \sigma h'_c - H'.$$

При расчете водобойной стенки всегда следует проверить условия сопряжения бьефов за ней. В некоторых случаях здесь может получиться отогнанный прыжок, тогда приходится устраивать еще одну водобойную стенку меньшей высоты, иногда — за второй третью и т. д.

Положение водобойной стенки определяется аналогично, как и для водобойного колодца.

7.13. Расчет перепадов и быстротоков

Для передачи воды с высоких отметок на низкие устраивают водоперехватывающие и водоотводящие каналы. Соответствующие каналы создают также на участке пропуска того или другого естественного водотока под дорожным полотном.

Уклон дна таких каналов обычно стремятся задать равным уклону поверхности земли. Когда уклон местности (вдоль трассы канала) велик, скорость движения воды в канале может оказаться больше максимально допустимой. При таком положении приходится уменьшать уклон дна канала и наряду с этим устраивать на канале специальные сооружения, так называемые перепады и быстротоки.

Различают одноступенчатые перепады без колодца или с колодцем, образованным водобойной стенкой или водобойным уступом (рис. 7.25); многоступенчатые перепады бесколодезного типа (рис. 7.26) или колодезного типа (рис. 7.27).

Одноступенчатый перепад имеет четыре основные части: вход, стенку падения, водобой (часть русла нижнего бьефа, которая принимает удар падающей струи), выход.

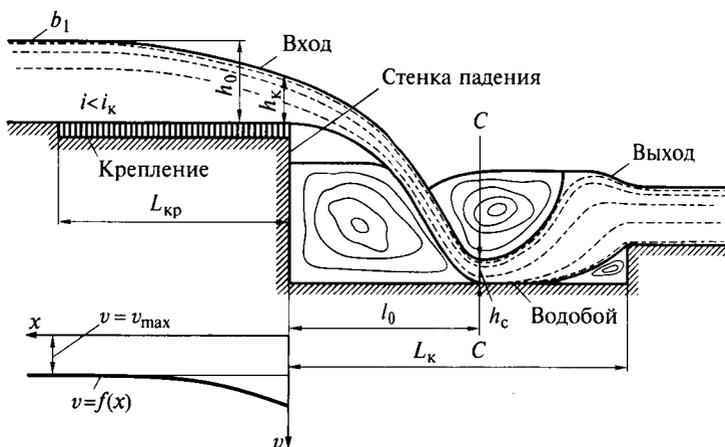


Рис. 7.25

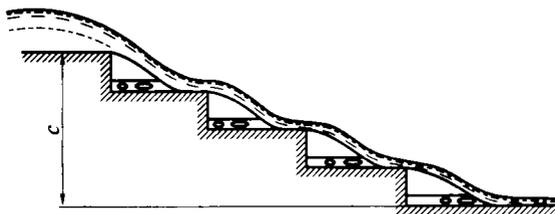


Рис. 7.26

При уклоне дна верхнего бьефа $i < i_k$ в конце канала верхнего бьефа получается кривая спада типа I_b , причем у сливного ребра перепада устанавливается глубина, примерно равная критической глубине h_k .

В связи с наличием в конце канала верхнего бьефа кривой спада I_b скорость v в этом канале при подходе к перепаду увеличивается (см. график на рис. 7.25), поэтому русло верхнего бьефа в этом месте покрывают креплением на длину $L_{кр}$.

Стенку падения перепада не всегда делают вертикальной; иногда ей придают уклон, в некоторых же случаях ее делают криволинейной. В пределах водобойной части перепада всегда устраивают соответствующее крепление дна русла; иногда здесь применяют специальные гасители энергии. Выходная часть перепада часто представляет собой водобойный уступ или водобойную стенку; эта часть с гидравлической точки зрения должна рассматриваться как водослив.

Расчет одноступенчатого перепада ведется аналогично расчету водобойного колодца, как это было описано в подразд. 7.11. Расчет многоступенчатого колодезного перепада проводят, предполагая, что высота c стенок падения отдельных ступеней перепада, а также ширина канала, на котором сооружается перепад, заданы. В результате расчета требуется установить высоту водобойных стенок a и длину колодцев L_k (см. рис. 7.27).

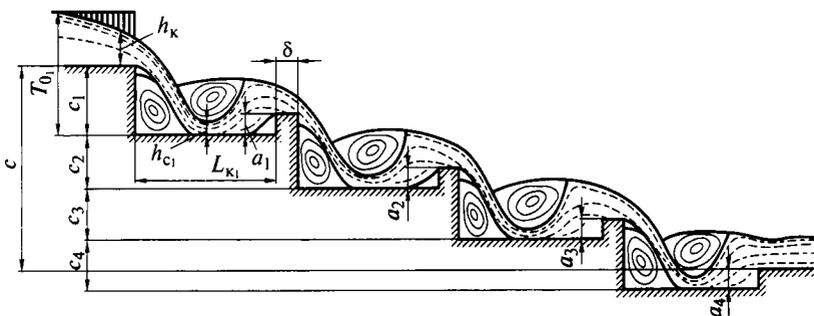


Рис. 7.27

Быстроток представляет собой канал (рис. 7.29) с уклоном больше критического: $i > i_k$. При расчете быстротоков приходится строить кривую свободной поверхности (кривую спада Π_B), пользуясь уравнением Павловского, а также решать вопрос о сопряжении потока с нижним бьефом.

В целях гашения кинетической энергии потока по длине быстротоков иногда устраивают так называемую искусственную шероховатость. Конструкция такой «шероховатости» может быть различной: в виде бетонных выступов, деревянных реек и т. п.

При наличии больших скоростей воды в быстротоке может происходить аэрация потока, т. е. насыщение потока пузырьками воздуха, который захватывает вода при ее движении. Благодаря аэрации потока глубина его несколько увеличивается.

В основании быстротока при наличии отогнанного или надвинутого гидравлического прыжка устраивают водобойный колодец, расчет которого приведен в подразд. 7.11.

ГЛАВА 8

ДВИЖЕНИЕ ГРУНТОВЫХ ВОД

8.1. Виды движения грунтовых вод

Законы движения грунтовых вод находят себе обширное применение при решении различных инженерных задач.

Ряд вопросов водоснабжения решается на основе общих законов движения грунтовых вод, а именно: определение количества воды, притекающей к колодцам или водосборным галереям, определение размеров фильтров, понижения горизонта воды в колодцах при откачке и т. п.

При решении вопросов, связанных с осушением территории открытыми канавами или подземным дренажем, законы движения грунтовых вод позволяют определить горизонт грунтовых вод после осушения; при орошении необходимо учитывать потери воды в каналах на фильтрацию, а также решать вопросы об устойчивости дамб и откосов канала.

Весьма важную роль играют законы движения грунтовых вод при расчете устойчивости гидротехнических сооружений и фильтрации под ними воды.

Содержащаяся в грунте вода может быть в различных состояниях:

- парообразная вода содержится в порах грунта вместе с заполняющим эти поры воздухом;
- гигроскопическая вода обволакивает частицы грунта тончайшим слоем, связанным с грунтом силами сцепления;

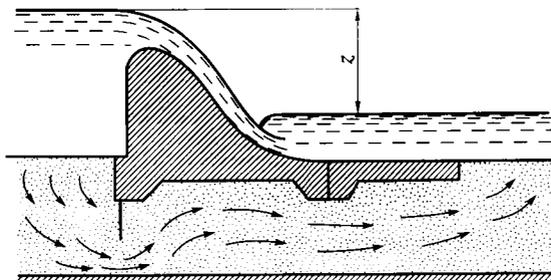


Рис. 8.1

- капиллярная вода заполняет тончайшие поры грунта и находится под действием сил поверхностного натяжения и силы тяжести;

- пленочная вода удерживается частицами грунта молекулярными силами и остается в грунте после удаления из его капиллярной и гравитационной воды;

- гравитационная, или грунтовая, вода заполняет все поры грунта и находится под действием силы тяжести.

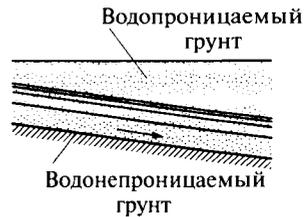


Рис. 8.2

Заполняющая поры грунта грунтовая (гравитационная) вода, находясь в состоянии движения, образует поток грунтовой воды, или фильтрационный поток. В связных грунтах капиллярный слой воды бывает довольно значительным, и гидравлические решения, основанные на законах движения только гравитационной воды, бывают не совсем точными.

Движение грунтовых вод может быть напорным (рис. 8.1) и безнапорным (рис. 8.2). При безнапорном движении в грунтовом потоке имеется свободная поверхность.

Некоторые вопросы фильтрации достаточно просто и точно решаются гидравлическим путем. Другие же вопросы фильтрации разрешаются лишь методами гидромеханики, основанными на применении точного математического анализа.

8.2. Основной закон фильтрации

Основной закон фильтрации, называемый законом Дарси, был установлен в 1852—1855 гг. на основе опытов, проведенных с песчаным грунтом.

Опытная установка для демонстрации этого закона (рис. 8.3) состоит из вертикального цилиндра, на боковой поверхности которого установлен ряд пьезометров. Цилиндр заполнен испытуемым грунтом, лежащим на специальной поддерживающей сетке. Над грунтом поддерживается постоянный уровень воды, притекающей через кран; излишек воды более определенного уровня сливается через трубу.

Фильтрующаяся через грунт вода собирается под решеткой на дне цилиндра и вытекает наружу через кран.

После регулировки подачи воды краном добиваются равенства притока и фильтрации воды через грунт в цилинд-

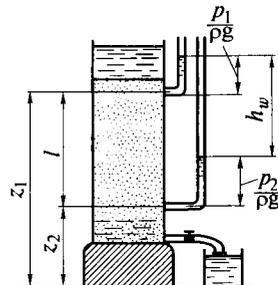


Рис. 8.3

ре, при котором движение грунтовой воды будет установившимся.

Выбрав по высоте цилиндра два сечения на расстоянии l , можно будет наблюдать различные уровни воды в пьезометрах $\frac{p_1}{\rho g}$ и $\frac{p_2}{\rho g}$, разность которых h_c показывает потерю напора на длине l .

Предположив, что в однородном грунте потери напора по длине происходят равномерно, можем найти гидравлический уклон i , представляющий потерю напора на единицу длины:

$$i = \frac{h_c}{l}.$$

Так как скорость движения воды в грунте очень мала, то скоростной напор ничтожно мал, и поэтому гидравлический уклон здесь равен пьезометрическому уклону.

Написав для сечений 1—1 и 2—2 уравнение Бернулли, получим

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + h_c, \quad (8.1)$$

где $\frac{p_1}{\rho g}$ и $\frac{p_2}{\rho g}$ — пьезометрические высоты; z_1 и z_2 — отметки сечений относительно плоскости основания.

Если обозначить сечение цилиндра через ω , то фильтрационный расход через грунт

$$Q = k\omega \frac{h_i}{l} = k\omega i,$$

где k — коэффициент фильтрации.

Частное от деления расхода Q на всю площадь сечения

$$v = \frac{Q}{\omega} = ki \quad (8.2)$$

называется скоростью фильтрации.

Как видим из выражения (8.2), скорость фильтрации пропорциональна коэффициенту фильтрации k и первой степени уклона i ; последнее объясняется тем, что движение грунтовых вод происходит при ламинарном режиме.

Скорость фильтрации есть фиктивная скорость, так как при определении ее мы брали полную площадь сечения ω вместо площади твердых частиц. В действительности, если площадь пор в сечении обозначить ω' , то средняя скорость движения жидких частиц в порах грунта будет $v = Q/\omega'$.

Отношение $\omega'/\omega = p$, представляющее собой отношение объема пор в грунте ко всему объему грунта, называется *коэффициентом*

порозности грунта. Так как $\omega' = \omega p$, то $v' = \frac{Q}{\omega p}$, откуда связь между скоростью фильтрации и скоростью движения жидкости $v' = v/p$.

Опыты показывают, что движение грунтовых вод подчиняется закону Дарси не во всех случаях, а лишь при малых числах Рейнольдса фильтрационного потока:

$$Re = \frac{vd}{\nu p^{1/3}} < 5.$$

Н. Н. Павловский на основе опытных данных установил величину критической скорости фильтрации v_k , до которой применим закон Дарси:

$$v_k = (0,75p + 0,23) \frac{\nu N}{6,5d}, \quad (8.3)$$

где p — коэффициент порозности; ν — коэффициент кинематической вязкости, $\text{см}^2/\text{с}$; d — диаметр зерен грунта, см ; N — постоянное число, равное 50...60.

При $t = 10^\circ\text{C}$, $\nu = 0,013$, $p = 0,40$ (среднее значение порозности в песчаных грунтах) и $N = 50$ формула (8.3) приобретает вид

$$v_k d = 0,053.$$

При скорости фильтрации $v > v_k$ движение грунтовых вод подчиняется уравнению $v = ki^m$, где m — показатель степени, приближающийся к 0,5, как при турбулентном движении наземных вод.

В этом случае для определения скорости турбулентной фильтрации Н. Н. Павловский предложил формулу, аналогичную формуле Шези:

$$v = Ap\sqrt{i},$$

где A — эмпирический коэффициент, определяемый для крупнозернистых грунтов ($d > 5$ см) по формуле С. В. Избаша:

$$A = \left(20 - \frac{14}{d}\right) \sqrt{d},$$

где d — диаметр частиц грунта, см .

8.3. Формулы для определения коэффициента фильтрации

Коэффициент фильтрации k , характеризующий водопроницаемость грунта, зависит от многих факторов: величины и формы частиц грунта, степени их однородности, температуры воды. Распределение различных частиц данного грунта по крупности обычно характеризуется гранулометрической кривой, получаемой в

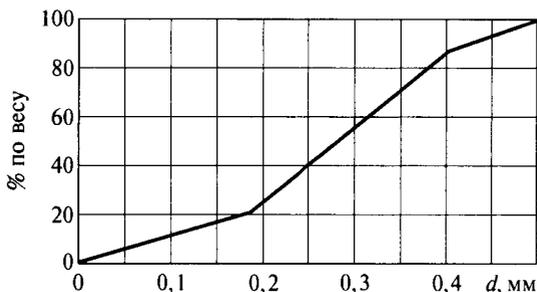


Рис. 8.4

результате механического анализа грунта. На оси абсцисс этой кривой (рис. 8.4) откладываются значения диаметра частиц, а на оси ординат — процентное отношение суммарного веса частиц с диаметром меньше данного к весу всего исследуемого образца грунта. Коэффициент фильтрации можно определить одним из следующих способов:

- с помощью специальных формул, в которые входят физические постоянные грунта;
- лабораторным исследованием образцов грунта в специальных приборах;
- в ответственных случаях для крупных проектов коэффициент фильтрации определяется изучением грунта в действительных полевых условиях с помощью пробных откачек воды из колодцев или нагнетаний.

Далее приведены наиболее употребительные формулы для определения коэффициента фильтрации песчаных грунтов.

Формула Хазена:

$$k = A c \tau d_3^2, \quad (8.4)$$

где A — коэффициент, учитывающий размерность коэффициента фильтрации, если k измеряется в метрах в сутки, то $A = 1$; c — коэффициент, зависящий от степени засорения песка глинистыми частицами и принимаемый в пределах $c = 500 \dots 1000$ (причем с увеличением содержания глинистых частиц в песке c уменьшается); τ — коэффициент, учитывающий изменение вязкости с изменением температуры $\tau = 0,7 + 0,03t$, здесь t — температура воды, °С; d_3 — эффективный диаметр частиц грунта, в котором содержится лишь 10 % частиц с данным и меньшим диаметром, мм.

Формула Хазена применима для песков, имеющих $d = 0,1 \dots 3,0$ мм и при коэффициенте неоднородности менее 5, который может быть определен с помощью кривой гранулометрического анализа (см. рис. 8.4) как отношение d_{60}/d_3 , где d_{60} — диаметр частиц грунта, в котором содержится 60 % частиц с данным или меньшим диаметром, мм.

Формула Замарина:

$$k = 8,07 \frac{p^3}{(1-p)^2} c \tau d_e, \quad (8.5)$$

где p — коэффициент пористости; c — коэффициент, зависящий от пористости грунта; τ — коэффициент, учитывающий вязкость воды и зависящий от температуры; d_e — действующий диаметр зерна, мм, определяемый на основе гранулометрического анализа грунта.

Формула Зауэрбрея:

$$k = 3,48 \frac{p^3}{(1-p)^2} \tau d_{17}. \quad (8.6)$$

В формуле (8.6) обозначения такие же, как и в предыдущих, кроме d_{17} — диаметр частиц грунта, в котором содержится 17 % частиц с данным или меньше, мм.

Лабораторный метод определения коэффициента фильтрации выполняется на приборе Дарси (см. рис. 8.3). В прибор устанавливается образец грунта, при этом он должен иметь ненарушенную естественную структуру. Определение коэффициента фильтрации k ведется в следующем порядке. После установки грунта сосуд осторожно заполняют водой и после полного его наполнения открывают краны вверху и внизу и пропускают воду через фильтр. Для поддержания постоянного напора в верхней части сосуда устанавливают переливную трубу. При открытом нижнем кране и постоянном напоре происходит фильтрация воды через испытуемый грунт. Установленные на расстоянии l пьезометры дают показания, разность которых позволяет измерить величину h_c , а измеренный расход и известная площадь сечения прибора позволяют вычислить коэффициент фильтрации по формуле (8.2).

Полевой метод установления коэффициента фильтрации используется при проведении изыскательских работ. Здесь предварительно отрывают специальные колодцы (шурфы) и затем создают кривую депрессии путем откачки или накачки воды. Измерив отметки кривой депрессии (см. подразд. 8.6), проводят вычисление коэффициента фильтрации по специальным формулам.

8.4. Уравнение равномерного движения грунтовых вод

Пусть имеется грунтовый поток с плавно изменяющимся движением; выделим в грунтовом потоке (рис. 8.5) два живых сечения, находящихся на расстоянии ds друг от друга. При плавно

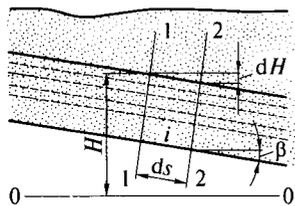


Рис. 8.5

изменяющемся движении давление в живом сечении распределяется по законам гидростатики и удовлетворяет закону

$$z + \frac{p}{\rho g} = H = \text{const.}$$

Поэтому для всех линий тока потеря напора на рассматриваемом участке будет одна и та же — dH . Так как кривизна струй при плавно изменяющемся течении очень незначительна, то для всех линий тока расстояние между сечениями остается постоянным ds и, следовательно, гидравлический уклон для всех линий тока в живом сечении будет тоже постоянным:

$$I = -\frac{dH}{ds}.$$

Местные скорости фильтрации во всех точках живого сечения в однородном грунте будут одинаковы:

$$u = kI = -k \frac{dH}{ds} = \text{const.}$$

Эпюра скоростей грунтового потока по живому сечению будет иметь вид прямоугольника, и средняя скорость фильтрации в живом сечении будет равна любой местной скорости u :

$$v = -k \frac{dH}{ds} = kI = \text{const.} \quad (8.7)$$

При равномерном движении все линии тока будут параллельны линии дна, поэтому

$$I = -\frac{dH}{ds} = i.$$

При неплавном изменяющемся движении грунтового потока уравнение (8.7) не будет справедливо, так как линии тока значительно искривлены, гидравлический уклон и местные скорости u будут различными по живому сечению, и расчет движения грунтового потока получается много сложнее.

8.5. Неравномерное движение грунтовых вод

Рассмотрим формы свободной поверхности потока при неравномерном течение грунтовых вод с плавно изменяющимся движением (рис. 8.6). Для него согласно (8.2) $v = kl$. Возьмем в потоке два сечения: 1 — 1 и 2 — 2 с координатой свободной поверхности z и глубиной потока h сечения l . Обозначим уклон водонепроницаемого слоя i , а уклон свободной поверхности I . Тогда

$$\frac{dz}{ds} = I = i - \frac{dh}{ds}; \quad v = kI = k \left(i - \frac{dh}{ds} \right)$$

и

$$Q = k\omega \left(i - \frac{dh}{ds} \right). \quad (8.8)$$

Полученное выражение является основным уравнением неравномерного движения грунтового потока.

Если бы движение грунтового потока было равномерным, то расход был бы $Q = k\omega_0 i_0$, где ω_0 и i_0 — площадь живого сечения и уклон грунтового потока при равномерном движении. Приравняв оба расхода, сократив на k , обозначив $\omega/\omega_0 = \eta$ и решив относительно $\frac{dh}{ds}$, получим

$$\frac{dh}{ds} = \frac{i}{\eta} \left(\eta - \frac{i_0}{i} \right). \quad (8.9)$$

Проведем исследование форм свободной поверхности грунтового потока для трех случаев: $i > 0$; $i = 0$; $i < 0$.

Первый случай — дно потока имеет прямой уклон ($i > 0$). Проведя линию нормальных глубин NN (рис. 8.7), мы можем наметить две зоны.

Зона a ($h > h_0$). При этом $\eta = \frac{\omega}{\omega_0} > 1$ и, следовательно, $\frac{dh}{ds} > 0$, а значит, мы имеем кривую подпора. При $h \rightarrow h_0$ $\frac{dh}{ds} \rightarrow 0$, а при $h \rightarrow \infty$ $\frac{dh}{ds} \rightarrow i$, следовательно, кривая подпора имеет асимптотами линию нормальных глубин и горизонтальную линию.

Зона b ($h < h_0$). В этом случае $\omega < \omega_0$ и по (8.9) $\frac{dh}{ds} < 0$, т. е. глубина грунтового потока вниз по течению уменьшается; имеем выпук-

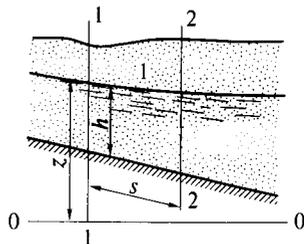


Рис. 8.6



Рис. 8.7

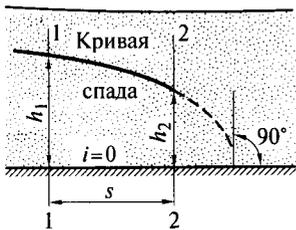


Рис. 8.8

имеет вид $\frac{dh}{ds} = -\frac{i}{\eta}$, и кривая свободной поверхности является кривой спада (рис. 8.8).

Третий случай — дно потока имеет обратный уклон ($i < 0$). Обозначив абсолютную величину обратного уклона через i' , получим

$$Q = -k\omega \left(i' + \frac{dh}{ds} \right),$$

т.е. глубины в этом случае всегда убывают; следовательно, имеем кривую спада (рис. 8.9).

Интегрированием уравнений неравномерного движения грунтового потока Н. Н. Павловский в 1930 г. дал решение вопроса о кривых свободной поверхности для $i = 0$ и $i \neq 0$. При $i = 0$ из (8.8) имеем

$$ds = -\frac{k\omega}{Q} dh.$$

При большой ширине грунтового потока движение становится плоским и $\omega = bh$; $Q = bq$; $ds = \frac{k}{q} h dh$, откуда

$$l = \frac{k}{2q} (h_1^2 - h_2^2),$$

где l — расстояние между сечениями потока с глубинами h_1 и h_2 , $l = s_1 - s_2$.

$$\text{При } i > i_0 \quad \eta = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{bh}{bh_0} = \frac{h}{h_0}; \quad dh = h_0 d\eta,$$

тогда

$$\frac{dh}{ds} = \frac{i(\eta - 1)}{\eta}; \quad \frac{id\eta}{h_0} = \frac{\eta}{\eta - 1} d\eta. \quad (8.10)$$

Проинтегрировав между сечениями 1—1 и 2—2 с расстоянием l между ними, получим



Рис. 8.9

$$\frac{il}{h_0} = \eta_2 - \eta_1 + \ln \frac{\eta_2 - 1}{\eta_1 - 1}, \quad \text{или} \quad \frac{il}{h_0} = \eta_2 - \eta_1 + 2,3 \lg \frac{\eta_2 - 1}{\eta_1 - 1}.$$

При $i < 0$

$$\frac{\omega}{\omega'_0} = \frac{h}{h'_0} = \eta'.$$

Так как $dh = h'_0 d\eta'$, то уравнение (8.10) может быть представлено в виде

$$\frac{i'ds}{h'_0} = -\frac{\eta'}{1 + \eta'} d\eta'.$$

Интегрируя уравнение между сечениями 1—1 и 2—2 с расстоянием l между ними, получим:

$$\frac{i'l}{h'_0} = \eta'_2 - \eta'_1 + \ln \frac{1 + \eta'_2}{1 + \eta'_1}, \quad \text{или} \quad \frac{i'l}{h'_0} = \eta'_2 - \eta'_1 + 2,3 \lg \frac{1 + \eta'_2}{1 + \eta'_1}.$$

8.6. Приток грунтовых вод к колодцам и водосборным галереям

Колодец на водонепроницаемом слое. Такой колодец (рис. 8.10) называется совершенным колодцем, и приток грунтовых вод к нему происходит по периферийной части колодца. До откачки грунтовые воды будут иметь естественный уровень $A-A$, высота которого H называется мощностью водоносного пласта.

Если из такого колодца откачивать воду, то уровень воды в колодце и в водоносном пласте понизится и образует так называемую депрессионную воронку, форма которой при однородном грунте будет симметричной. Пока откачиваемый расход воды Q будет постоянным, то уровень воды в колодце установится на определенной отметке h_0 и движение грунтовых вод можно считать установившимся.

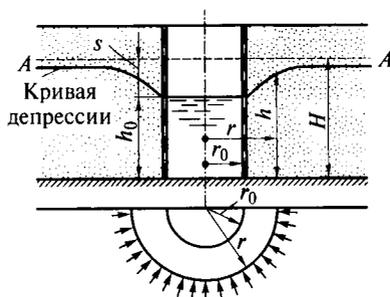


Рис. 8.10

Живые сечения фильтрационного потока представляют собой круглоцилиндрические поверхности с вертикальными образующими и осью, находящейся в центре колодца. Площадь такого сечения, находящегося на произвольном расстоянии r от центра колодца, имеет вид

$$\omega = 2\pi rh,$$

где h — глубина потока в данном сечении.

Считая водоупор горизонтальным ($i = 0$), уклон кривой депрессии или гидравлический уклон можно записать в виде

$$I = \frac{dh}{dr}. \quad (8.11)$$

Поскольку расход грунтового потока определяется зависимостью (8.2), то можно записать:

$$Q = 2\pi krh \frac{dh}{dr}. \quad (8.12)$$

Разделив переменные, имеем

$$hdh = \frac{Q}{2\pi k} \frac{dr}{r}.$$

Интегрируем данное уравнение от сечения r_0 (радиус колодца) с глубиной h_0 , до значения r , соответствующего сечению с глубиной h :

$$h^2 - h_0^2 = \frac{Q}{\pi k} \ln \frac{r}{r_0}.$$

Это уравнение кривой депрессии (депресссионной воронки) к совершенному колодцу, имеющей вид выпуклой кривой. В предельном случае $h = H_0$, $r = R$, где H — мощность водоносного слоя; R — радиус влияния колодца, получим

$$H^2 - h_0^2 = \frac{Q}{\pi k} \ln \frac{R}{r_0}.$$

Теперь, переходя к десятичным логарифмам и решая относительно расхода, получим

$$Q = 1,36k \frac{H^2 - h_0^2}{\lg \frac{R}{r_0}}. \quad (8.13)$$

Радиус влияния колодца можно установить на основе гидрогеологических изысканий либо по эмпирической формуле:

$$R = 3000s\sqrt{k}, \quad (8.14)$$

где s — снижение уровня воды в колодце, м, $s = H - h_0$; k — коэффициент фильтрации, м/с.

Поглощающие (абсорбирующие) колодцы. При наличии водоносных пластов, обладающих достаточно большой проницаемостью, воду с поверхности земли (в целях, например, осушения этой поверхности) можно отвести в эти водоносные пласты с помощью поглощающих (абсорбирующих) колодцев (рис. 8.11). В отличие от колодца на водонепроницаемом слое здесь движение грунтовой воды направлено не к его оси, а в противоположную сторону (вода просачивается из колодца в водоносный пласт).

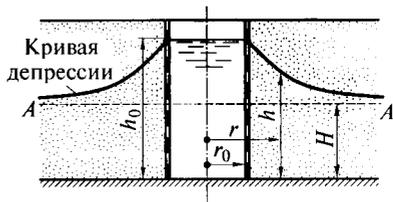


Рис. 8.11

Этот случай движения грунтовой воды является обратным тому, который мы рассматривали ранее. Применяя аналогичный метод рассуждения, величину поглощаемого колодцем расхода получим в виде

$$Q = -2\pi rhk \frac{dh}{dr}$$

(знак минус поставлен потому, что глубина h здесь уменьшается в направлении оси r и, следовательно, $dh < 0$).

Разделяя переменные и интегрируя это уравнение в пределах от r_0 до R и от h_0 до H , получим

$$Q = \pi k \frac{h_0^2 - H^2}{\ln \frac{R}{r_0}}.$$

Переходя к десятичным логарифмам, окончательно имеем

$$Q = 1,36k \frac{h_0^2 - H^2}{\lg \frac{R}{r_0}}. \quad (8.15)$$

Пользуясь этим уравнением, можно определить поглощающую способность колодца.

Артезианский колодец (случай напорного движения воды). Если водоносный пласт прикрыт сверху водонепроницаемым слоем (рис. 8.12), причем грунтовые воды, насыщающие этот пласт, находятся под давлением больше атмосферного, то такой водоносный пласт называется артезианским, а колодец, питающийся из этого пласта, носит название артезианского колодца.

Если прорезать водонепроницаемую породу, прикрывающую водоносный пласт, буровыми скважинами, то грунтовая вода в этих скважинах поднимается до некоторой высоты H_1 , соответствующей давлению воды в водоносном пласте. Очевидно, гори-

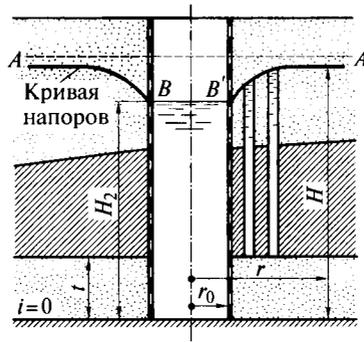


Рис. 8.12

горизонтальная линия $A-A$, до которой поднимается вода в скважинах, будет являться линией естественного напора грунтовых вод.

При откачке воды из артезианского колодца вокруг него образуется депрессионная воронка, причем кривая депрессии в данном случае будет являться кривой напоров, а не кривой свободной поверхности, как в обыкновенном колодце. Эту кривую можно получить лишь с помощью скважин, доведенных до водоносного пласта.

Живые сечения потока в водоносном слое имеют постоянную высоту, равную толщине водоносного пласта t .

Площадь круглоцилиндрического живого сечения ω на некотором расстоянии r от оси колодца определяется формулой

$$\omega = 2\pi r t.$$

В связи с этим дифференциальное уравнение движения грунтовых вод имеет вид

$$Q = 2\pi r t k \frac{dH}{dr},$$

где H — напор в точке, определяемой координатой r .

Разделяя переменные, получаем

$$\frac{2\pi k t}{Q} dH = \frac{dr}{r}.$$

Интегрируя это уравнение в пределах от r_0 до r и от H_2 до H , получим

$$\frac{2\pi k t}{Q} (H - H_2) = \ln \frac{r}{r_0}.$$

Переходя к десятичным логарифмам, окончательно имеем

$$H - H_2 = 0,37 \frac{Q}{k t} \lg \frac{r}{r_0}.$$

По этому уравнению можно построить кривую напоров, а также определить дебит колодца Q , если принять $H = H_1$ и $r = R$:

$$Q = 2,73kt \frac{H_1 - H_2}{\lg \frac{R}{r_0}},$$

где R — радиус влияния колодца.

Приток грунтовой воды к водосборной галерее, или дрене. Рассмотрим случай, когда дно галереи (дрены) располагается непосредственно на водоупоре. После сооружения такой галереи, по истечению некоторого времени, поверхность грунтовой воды примет вид кривых депрессии AB , показанных на рис. 8.13. При этом вода, просачивающаяся в галерею с двух ее сторон, должна непрерывно отводиться по ней, для чего галерее (или каналу) придается определенный продольный уклон.

Обозначим через $q = Q/b$ односторонний приток грунтовой воды, приходящейся на единицу длины галереи, где b — протяженность галереи. Координатные оси расположены так, как это показано на рис. 8.13.

Для определения расхода q возьмем произвольное живое сечение на расстоянии x от галереи. Глубину грунтовой воды в этом сечении обозначим через h . Тогда расход воды для этого сечения запишется в виде

$$q = hk \frac{dh}{dx} \quad \text{или} \quad \frac{q}{k} dx = h dh.$$

Интегрируя это уравнение в пределах от 0 до x и от h до h_0 , получим

$$\frac{qx}{k} = \frac{h^2 - h_0^2}{2},$$

где h_0 — глубина воды в галерее.

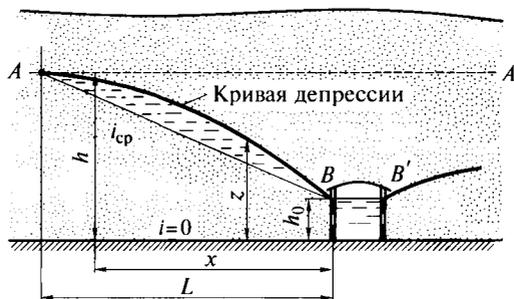


Рис. 8.13

Окончательно уравнение кривой депрессии получаем в виде

$$h = \sqrt{\frac{2qx}{k} + h_0^2}. \quad (8.16)$$

Задаваясь различными расстояниями x , по уравнению (8.16) находим соответствующие глубины h . В результате по точкам можем построить искомую кривую депрессии.

Для определения расхода q , входящего в уравнение (8.16), полагаем в этом уравнении $h = H_0$ и $x = L$, в результате получаем

$$q = k \frac{H_0^2 - h_0^2}{2L}, \quad (8.17)$$

где L — так называемая длина влияния галереи, т.е. та длина, на которой сказывается осушительное действие галереи (дрены).

Для определения полного расхода $Q = 2qb$ используют зависимость

$$Q = kb \frac{H_0^2 - h_0^2}{L}. \quad (8.18)$$

Для определения L иногда принимают

$$L = \frac{H_0 - h_0}{i_{\text{cp}}},$$

где i_{cp} — средний уклон кривой депрессии. Величина i_{cp} принимается в зависимости от рода грунта в пределах от 0,15 (для глины) до 0,0003 (для крупного песка).

ГЛАВА 9

ГИДРАВЛИЧЕСКОЕ ПОДОБИЕ

9.1. Понятие геометрического, кинематического и динамического подобий

Для решения многих вопросов гидравлики на научной основе приходится обращаться к экспериментальному изучению законов движения жидкости или работы различного рода сооружений. Использование принципов гидравлического подобия при проектировании и создании гидравлических моделей требует знания общих законов механического подобия.

Прежде всего определим само понятие подобия. Здесь необходимо вспомнить, что в элементарной геометрии дается следующее определение подобия многоугольников: одноименные многоугольники (с одинаковым числом сторон) подобны, если у них соответственные углы равны и сходственные стороны пропорциональны. Из этого определения можно установить, что параметры одного из многоугольников могут быть получены из соответствующих параметров другого многоугольника путем специального преобразования, при котором сходственные углы остаются одинаковыми, а сходственные стороны умножаются на некоторый постоянный коэффициент. Другими словами, в отношении сторон многоугольника выполняется действие, аналогичное преобразованию одних единиц измерения в другие, например при переводе измеренных длин из метров в сантиметры.

Переходя от частного к общему, можно привести следующее определение подобия. Два явления называются физически подобными, если по заданным характеристикам одного из них можно получить соответствующие характеристики другого простым пересчетом, который аналогичен переходу от одной системы единиц измерения к другой системе.

Вопросы подобия могут быть рассмотрены с различных точек зрения. Так, в гидравлике изучают геометрическое подобие, кинематическое подобие и динамическое (механическое) подобие.

Геометрическое подобие. Две системы называются геометрически подобными, если отношение между всеми соответствующими размерами одинаково, а сходственные углы равны. Следовательно, геометрическое подобие заключается в подобии формы. Матема-

тически указанные соотношения геометрического подобия выражаются следующими равенствами:

$$\begin{aligned} l_n/l_m &= L_\lambda; \\ \alpha_n &= \alpha_m, \end{aligned} \quad (9.1)$$

где l_n — некоторый произвольный размер одной системы (натуры); l_m — соответствующий размер другой системы (модели); L_λ — коэффициент пропорциональности или масштаб геометрического подобия; α_n, α_m — соответствующие углы природы и модели.

Отношения площадей соответствующих элементов рассматриваемых систем прямо пропорциональны отношению квадратов длин, а отношения объемов — отношению кубов длин. Следовательно, отношения площадей и объемов можно выразить через масштаб геометрического подобия, т. е.

$$\omega_n/\omega_m = L_\lambda^2; \quad W_n/W_m = L_\lambda^3.$$

Аналогичные соотношения можно вывести и для других геометрических параметров природы и модели: статического момента, момента инерции.

Кинематическое подобие. Движение двух систем будет кинематически подобным, если отношения скоростей всех соответствующих частиц жидкости равны между собой, а траектории движения обеих систем геометрически подобны.

Таким образом, для кинематического подобия необходимо наличие геометрического подобия и, кроме того, постоянство отношения отрезков времени, требующихся для прохождения соответствующими частицами соответствующих расстояний, т. е.

$$t_n/t_m = T_\lambda, \quad (9.2)$$

где T_λ — масштаб кинематического подобия или масштаб времени.

Действительно, скорость частицы жидкости можно представить в виде $v = dl/dt$, тогда отношение скоростей имеет вид

$$\frac{v_n}{v_m} = \frac{dl_n}{dt_n} \frac{dt_m}{dl_m} = \frac{L_\lambda}{T_\lambda}.$$

Согласно указанному ранее кинематическое подобие можно представить как подобие движения и определять через масштабы длины и времени. Через эти же величины выражаются и остальные кинематические параметры потока. Так, отношение ускорений и отношение расходов будут иметь следующий вид:

$$\frac{a_n}{a_m} = \frac{L_\lambda}{T_\lambda^2}; \quad \frac{Q_n}{Q_m} = \frac{L_\lambda^3}{T_\lambda}.$$

Динамическое подобие. Две системы называются динамически подобными, если они кинематически подобны и отношения масс соответствующих частиц обеих систем равны между собой или равны отношения между соответствующими силами, которые вли-

яют на движение соответствующих частиц жидкости. Динамическое подобие требует соблюдения соотношений (9.1), (9.2) и дополнительно

$$F_H/F_M = F_\lambda, \quad (9.3)$$

где F_λ — масштаб динамического подобия, или масштаб сил.

Динамически подобные системы подчиняются основному закону динамики Ньютона: сила равна массе, умноженной на ускорение, следовательно, для двух сил, действующих на соответствующие частицы в натуре и модели, возникающие ускорения будут пропорциональны массам частиц. Так, для сил, действующих в натуре и в модели, имеем:

$$F_H = m_H \frac{d^2 l_H}{dt_H^2}; \quad F_M = m_M \frac{d^2 l_M}{dt_M^2}.$$

Подставив данные соотношения в выражение для динамического подобия (9.3), получим связь между четырьмя основными отношениями (масштабами), характеризующими подобие механических систем,

$$\frac{F_H}{F_M} = \frac{m_H}{m_M} \frac{d^2 l_H dt_M^2}{dt_H^2 d^2 l_M} \quad \text{или} \quad F_\lambda = m_\lambda \frac{L_\lambda}{T_\lambda^2}. \quad (9.4)$$

Уравнение (9.4), называемое характеристическим уравнением, определяет условия для получения строгого динамического подобия двух соответствующих систем.

Равнодействующая сила, вызывающая ускорение частицы жидкости, складывается из системы различных сил, причем одна или несколько могут преобладать над другими. В общем случае на движение жидкости оказывают влияние сила тяжести, сила внутреннего трения, сила упругости, сила давления, сила поверхностного натяжения, архимедова сила и др.

Данные силы обычно объединяются в две группы: силы массовые и силы поверхностные. Массовые силы пропорциональны массе жидкости, а для однородных жидкостей — пропорциональны объему. Общая закономерность для таких сил выражается следующим соотношением:

$$F_m = \rho a W, \quad (9.5)$$

где ρ — плотность жидкости, кг/м³; a — ускорение, м/с²; W — объем жидкости, м³. К числу массовых сил относят силу тяжести, силу инерции, центробежную силу и др.

Поверхностные силы пропорциональны площади той поверхности жидкости, на которую они действуют. В общем виде такую закономерность можно выразить формулой

$$F = p\omega, \quad (9.6)$$

где p — единичная сила, или напряжение, Н/м²; ω — площадь действия силы, м².

К числу поверхностных сил следует отнести силы давления, силы упругости, силы трения и др.

Поверхностное натяжение измеряется силой, приходящейся на единицу длины (периметра), а общая сила поверхностного натяжения вычисляется по формуле

$$F = \sigma l, \quad (9.7)$$

где σ — единичная сила, или коэффициент поверхностного натяжения, Н/м; l — длина или периметр действия силы, м.

Если движение жидкости вызывается одновременным действием нескольких сил, то решение задачи подобия или моделирования на уменьшенной модели сильно усложняется.

Пусть на жидкость действует несколько равноправных сил, определяемых соотношениями (9.5), (9.6) и (9.7). Чтобы создать геометрически подобную модель рассматриваемого явления, для которой масштаб геометрического подобия составляет L_λ , на уменьшенной модели соответствующие геометрические элементы уменьшаются против натуральных: длины в $1/L_\lambda$ раз, площади в $1/L_\lambda^2$ раз, а объемы в $1/L_\lambda^3$ раз. Теперь для одинаковых жидкостей в натуре и модели можно установить изменение действующих сил. Так, массовые силы уменьшатся в $1/L_\lambda^3$ раз, поверхностные силы в $1/L_\lambda^2$ раз, а силы поверхностного натяжения лишь в $1/L_\lambda$ раз. Следовательно, в созданной модели нарушится соотношение между действующими силами, что приведет к искажению наблюдаемого явления, а результаты измерений на модели не могут быть распространены на соответствующие данные натуре.

На практике обычно приходится строить именно уменьшенные подобия натуре — модели. При этом исследуется действие одной силы, которая является главной в изучаемом явлении. Пренебрежение влиянием остальных сил может привести к определенным неточностям в конечных результатах. Чтобы свести эти неточности к минимуму, на масштабы и абсолютные размеры моделей накладываются определенные ограничения, при которых остальные, второстепенные, силы будут взаимно уравновешены или ими можно пренебречь.

9.2. Критерии гидродинамического подобия

Обратимся к уравнению (9.4), связывающему основные масштабы динамического подобия и, заменив в нем отношения масс отношениями объемов и плотностей, получим

$$F_\lambda = \frac{\rho_\lambda L_\lambda^4}{T_\lambda^2}, \quad (9.8)$$

или, разделив на F_λ , получим

$$\frac{\rho_\lambda L_\lambda^4}{T_\lambda^2 F_\lambda} = 1. \quad (9.9)$$

Полученные соотношения являются прямым следствием закона инерции Ньютона и выражают общий закон подобия, также называемый законом подобия Ньютона.

Выражение можно переписать в форме отношения безразмерных комплексов для условий природы и модели:

$$\left(\frac{\rho L^4}{T^2 F} \right)_н = \left(\frac{\rho L^4}{T^2 F} \right)_м. \quad (9.10)$$

Комплекс $\frac{\rho L^4}{T^2 F}$ представляет собой отношение сил инерции к действующим силам и называется числом Ньютона. Для простоты записи подобные комплексы обозначаются по первым буквам фамилии — Ne (Newton). Следовательно, требование общего закона подобия выражается в равенстве чисел Ньютона в природе и на модели: $Ne_n = Ne_m$ или $Ne = idem$. Здесь *idem* — термин, который в переводе с латинского на русский соответствует понятию «то же самое» и применяется для обозначения одинаковости сравниваемых безразмерных величин в сходственных точках изучаемых явлений.

Соблюдение равенства чисел или критериев Ньютона с учетом, что в большинстве гидравлических явлений участвует не одна, а несколько сил, при моделировании гидравлических задач оказывается невозможным. Точнее, возможно лишь при $L_\lambda = 1$, т. е. когда модель и натура имеют одинаковые размеры. Однако опыт показывает, что при соответствующем выборе масштаба изучаемые явления и закономерности движения в природе и модели оказываются достаточно подобными. Это позволяет применять методы моделирования для решения многих практических задач. При этом на моделях воспроизводится главная действующая сила, а влиянием других сил пренебрегают. Моделирование в этих случаях требует специальных критериев, которые устанавливаются на основе общего закона подобия Ньютона.

Критерий подобия при моделировании силы тяжести. Рассмотрим систему, движение в которой определяется в основном действием сил тяжести, а влиянием остальных сил можно пренебречь. При создании подобной ей модельной системы следует также за основную силу принять силу тяжести. Следовательно, для условий природы и модели значения сил тяжести будут определяться аналогичными соотношениями:

$$F_n = \rho_n g_n W_n \text{ и } F_m = \rho_m g_m W_m.$$

Найдем отношение указанных сил

$$F_\lambda = \frac{\rho_n g_n W_n}{\rho_m g_m W_m} = \rho_\lambda g_\lambda L_\lambda^3.$$

подставим в зависимость (9.8) и после упрощения получим

$$\frac{L_\lambda}{g_\lambda T_\lambda} = 1. \quad (9.11)$$

Теперь из выражения (9.11) можно получить связь между масштабами времени и длины при условии обеспечения динамического подобия сил тяжести

$$T_\lambda = \sqrt{\frac{L_\lambda}{g_\lambda}}. \quad (9.12)$$

Поскольку для всех практических случаев отношение ускорений сил тяжести в натуре и на модели равно единице, то зависимость упрощается:

$$T_\lambda = \sqrt{L_\lambda}. \quad (9.13)$$

Зависимости (9.12) и (9.13) являются важнейшими в практике моделирования сил тяжести, поскольку остальные масштабные соотношения являются производными и легко выводятся из соответствующих формул. Так, например, отношение скоростей в натуре и на модели находится следующим образом:

$$v_\lambda = \frac{v_n}{v_m} = \frac{L_\lambda}{T_\lambda} = \sqrt{L_\lambda g_\lambda},$$

или при $g_\lambda = 1$, $v_\lambda = \sqrt{L_\lambda}$.

В целях применения законов подобия к переносу результатов исследований на модели в натурные условия удобно пользоваться безразмерными числовыми выражениями — критериями. Последние обычно составляются из характерной длины, скорости и силы, вызывающей движение. Критерий подобия для сил тяжести получим из уравнения (9.12), заменив масштаб времени через масштабы длины и скорости по выражению $T_\lambda = L_\lambda/v_\lambda$:

$$\frac{v_\lambda^2}{g_\lambda L_\lambda} = 1, \text{ или } \left(\frac{v^2}{gL} \right)_n : \left(\frac{v^2}{gL} \right)_m = 1.$$

Таким образом, безразмерное число, зависящее от длины, скорости и ускорения свободного падения, должно быть одинаковым для двух динамически подобных систем, движение которых определяется силой тяжести. Указанное число называется критерием Фруда и обозначается Fr

$$Fr = \frac{v^2}{gL}, \quad (9.14)$$

а требование закона подобия при моделировании сил тяжести выражается равенством критериев Фруда или

$$Fr = \text{idem}. \quad (9.15)$$

Критерий подобия при моделировании сил внутреннего трения. Обратимся к рассмотрению подобного движения двух систем, для которых преобладающей силой является сила внутреннего трения, а влияние остальных сил практически не проявляется. Для условий движения жидкости в натуре и на модели сила трения определяется выражениями $F_n = \mu_n \omega_n \left(\frac{du}{dn} \right)_n$ и $F_m = \mu_m \omega_m \left(\frac{du}{dn} \right)_m$, где μ — динамическая вязкость, Па · с; ω — площадь действия силы трения, м²; du/dn — градиент скорости по нормали к направлению движения, 1/с.

Находя отношение указанных сил $F_\lambda = \frac{\mu_\lambda L_\lambda^2}{T_\lambda}$ и подставляя это отношение в зависимость (9.8), получим

$$\frac{\rho_\lambda L_\lambda}{\mu_\lambda T_\lambda} = 1. \quad (9.16)$$

Эта зависимость дает возможность получения связи между масштабами времени и длины для соблюдения динамического подобия сил трения

$$T_\lambda = \frac{\rho_\lambda L_\lambda^2}{\mu_\lambda}. \quad (9.17)$$

Заменяя в уравнении отношение динамического коэффициента вязкости к плотности через кинематический коэффициент вязкости, получим более удобный вид уравнения:

$$T_\lambda = \frac{L_\lambda^2}{\nu_\lambda}. \quad (9.18)$$

Аналогично приведенным ранее выкладкам можно получить безразмерный критерий подобия двух динамически подобных систем, движение которых обусловливается действием сил внутреннего трения. Для этого заменим отношение масштабов длины и времени в уравнении (9.18) через масштаб скорости, тогда получим

$$\left(\frac{vL}{\nu} \right)_n : \left(\frac{vL}{\nu} \right)_m = 1.$$

Выведенное безразмерное соотношение называется критерием Рейнольдса и обозначается $Re = \frac{vL}{\nu}$, а требование

$$Re = \text{idem} \quad (9.19)$$

является неперменным условием моделирования сил трения.

Сведения о других критериях подобия. Приведенные выше выкладки, на основе которых получены выражения для масштабных соотношений и критериев подобия, позволяют установить общую схему для нахождения указанных величин в случае действия одной главной силы. Вначале устанавливается закономерность для главной силы, определяющей движение жидкости в натуре и на модели, затем находится их отношение и подставляется в общий закон подобия (9.8). В результате преобразований получается связь между масштабом времени и масштабом длин, в которой еще участвуют и отношения некоторых физических величин (свойства жидкости и среды), зависящих от характера рассматриваемых сил. Для получения критериев подобия преобразование общего закона подобия заключается в представлении его в форме безразмерного соотношения, включающего в себя характерную длину, скорость и физический параметр, характеризующий рассматриваемую силу.

Приведем без вывода некоторые критерии подобия. Лицам, изучающим данный материал, для более полного усвоения рекомендуется выполнить пропущенные преобразования.

1. Главная сила — сила давления.

Зависимость для силы давления определяется соотношением

$$F = \Delta p \omega,$$

где Δp — разность давлений, Па.

Критерий гидродинамического подобия называется критерием Эйлера и имеет вид

$$Eu = \frac{v^2 \rho}{\Delta p}.$$

2. Главная сила — сила поверхностного натяжения.

Зависимость для силы поверхностного натяжения дана формулой (9.7), а критерий гидродинамического подобия — критерий Вебера — определяется безразмерным комплексом

$$We = \frac{\rho v^2 L}{\sigma}.$$

3. Главная сила — сила упругости (сжимаемости).

Зависимость для силы упругости аналогична зависимости для силы давления:

$$F = E \omega,$$

где E — модуль объемной упругости, Па,

Критерий гидродинамического подобия называется числом Маха, которое определяется следующим выражением:

$$M = v \sqrt{\frac{\rho}{E}} = \frac{v}{c},$$

где c — скорость распространения звука в упругой среде (жидкость или газ), м/с.

4. Главная сила — подъемная сила.

Подъемная сила возникает в результате действия на жидкость или на тело двух сил: силы тяжести и архимедовой силы. Результирующая сила определяется зависимостью

$$F = \Delta \rho g W,$$

где $\Delta \rho$ — разность плотностей двух жидкостей или жидкости и находящего в ней тела, кг/м³.

Критерий гидродинамического подобия в этом случае — критерий Ричардсона¹ — имеет вид

$$Ri = \frac{gL}{v^2} \frac{\Delta \rho}{\rho}.$$

В последнем случае критерий состоит как бы из двух частей: из критерия, обратного критерию Фруда, учитывающего собственно силу тяжести, и относительной разности плотностей, которая определяет эффект плавучести и имеет положительное значение для жидкостей и тел, имеющих положительную плавучесть, и отрицательное — для «тяжелых» (тонущих) жидкостей и тел.

Условия определения критериев подобия при действии одной главной силы дают возможность сформулировать их физический смысл. В общем виде каждый из приведенных критериев представляет собой отношение силы инерции, возникающей под действием приложенной к жидкости главной силы, к самой приложенной силе. Следовательно, критерий Фруда представляет собой отношение силы инерции к силе тяжести; критерий Рейнольдса — отношение силы инерции к силе трения; критерий Эйлера — отношение силы инерции к силе давления; критерий Вебера — отношение силы инерции к силе поверхностного натяжения; критерий Маха — отношение силы инерции к силе упругости; критерий Ричардсона — отношение силы инерции к подъемной силе.

Использование безразмерных критериев подобия при создании моделей в определенной мере избавляет от употребления единиц измерения, так как эти критерии, а также масштабные соотношения подобия не изменяют своего значения при применении различных систем единиц измерения.

¹ В курсах аэродинамики указанный критерий применяется при изучении конвекции и называется критерием Архимеда.

При создании моделей необходимо уметь пересчитывать различные характеристики и свойства потока, поэтому для каждого из рассмотренных ранее законов моделирования необходимо знать масштабные соотношения.

Подобие при действии двух главных сил. В ряде случаев возникает необходимость создать модель, динамически подобную натуре, в которой имеют место две равноправные силы. Моделирование в этом случае невозможно без изменения физических свойств жидкости, т. е. на модели и в натуре должны быть различные жидкости. Задача моделирования в данном случае сводится к ответу на вопросы, какими физическими свойствами должна обладать жидкость, применяемая на модели и какие дополнительные условия необходимы, чтобы обеспечить требуемое гидродинамическое подобие.

Рассмотрим данную задачу на примере одновременного действия силы тяжести и силы внутреннего трения. Для подобия сил тяжести необходимо соблюсти условие $Fr = idem$, а для подобия сил трения — $Re = idem$. С другой стороны, сходственные частицы в натуре и на модели должны проходить сходственные расстояния за интервалы времени, отношение которых представляет собой масштаб времени. Следовательно, масштабы времени при моделировании по Фруду и Рейнольдсу должны быть одинаковы.

Масштаб времени при подобии сил тяжести определяется зависимостью (9.12), а при подобии сил трения (9.18). Приравнивая правые части указанных уравнений и решая относительно масштаба длины, имеем

$$L_{\lambda} = \sqrt[3]{\frac{v_{\lambda}^2}{g_{\lambda}}}. \quad (9.20)$$

Полученное соотношение определяет масштаб моделирования длин, который выбирается не произвольно, а в зависимости от отношений кинематического коэффициента вязкости и ускорения сил тяжести в натуре и на модели.

Если исследования намечается провести в обычных условиях земного притяжения, т. е. при $g_{\lambda} = 1$, то для уменьшения размеров модели следует применить жидкость с коэффициентом вязкости меньшим, чем у жидкости в натуре, и тогда масштаб определится в виде $L_{\lambda} = v_{\lambda}^{2/3}$.

Если же указанное невозможно, то исследование можно провести при условии $g_n > g_m$, для чего нужно увеличить массовую силу, действующую на жидкость в модели, например исследовать поведение жидкости в поле центробежных сил. Масштаб моделирования в этом случае находится из соотношения $L_{\lambda} = g_{\lambda}^{-1/3}$.

Определяющий действие рассматриваемых сил критерий трудно получить из уравнения (9.20), для чего возвести обе части равенства в куб и перенести все члены в левую часть:

$$\frac{g_\lambda L_\lambda^3}{v_\lambda^2} = 1.$$

Полученный критерий носит название критерия Галилея:

$$Ga = \frac{gL^3}{v^2}. \quad (9.21)$$

Смысл критерия Галилея как меры отношения сил, определяющих процесс движения, непосредственно из формулы не виден, поэтому умножим и разделим критерий на квадрат скорости и преобразуем:

$$\frac{gL^3}{v^2} \frac{v^2}{v^2} = \left(\frac{vL}{v} \right)^2 \frac{gL}{v^2} = Re \frac{Re}{Fr}.$$

Теперь ясно, что критерий Галилея может быть представлен в виде двух комплексов, один из которых есть отношение силы инерции к силе внутреннего трения, а другой — отношение силы тяжести к силе внутреннего трения. Аналогичным образом следует поступать в случае действия других главных сил.

9.3. Анализ размерностей

Размерные и безразмерные величины. Методы анализа размерностей основываются на понятии о размерности физической величины. Физическая величина, определяющая какое-либо свойство тела, например длину, объем, скорость, температуру, массу, характеризуется еще некоторой количественной мерой, позволяющей сравнивать одинаковые величины между собой. Кроме того, различные физические величины связаны между собой определенными соотношениями. Поэтому для установления количественных связей между физическими величинами некоторые из них приняты за основные, а значения остальных величин выражаются через единицы измерения основных величин.

В гидравлике используется Международная система единиц (СИ), в которой за основные механические единицы измерения приняты: единица длины — 1 м (метр), единица массы — 1 кг (килограмм), единица времени — 1 с (секунда). Сами единицы измерения установлены международными соглашениями в виде некоторых эталонов единиц измерения. Метр есть длина пути, проходимого светом в вакууме за интервал времени $1/299\,792\,458$; секунда есть время, равное $9\,192\,631\,770$ периодам излучения, соответствующего переходу между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия-133; килограмм есть единица массы, равная массе международного прототипа килограмма.

Все физические величины, численное значение которых зависит от принятой системы единиц измерения, называются размерными величинами. Если установлены размерности основных величин, то характеристики физических величин могут быть выражены комбинацией размерностей основных физических величин. Такие величины называются производными, следовательно, размерность любой физической величины можно определить через основные единицы измерения.

Обозначим размерности основных механических единиц: длины — L , времени — T , массы — M . Тогда размерность производной физической величины может быть представлена в виде степенного одночлена, включающего в себя размерности основных единиц:

$$L^x T^y M^z,$$

где x , y , z — показатели степени, имеющие положительные, отрицательные значения и значения, равные нулю.

Приведенное соотношение между основными единицами измерения, дающее возможность установить размерность производной физической величины, называют формулой размерности. Так, размерность площади в общем виде можно представить как $L^2 T^0 M^0$ или L^2 , т. е. площадь определяется размерностью длины и не зависит от размерностей времени и массы, а размерность силы $L^1 T^{-2} M^1$ определяется всеми тремя основными единицами размерности.

Значение показателей степени в формуле размерности устанавливается не произвольно, а в зависимости от определения или характеристики производной физической величины. Например, скорость определена как физическая величина, характеризующая длину пути, проходимого телом в единицу времени. Из этой формулировки можно установить размерность скорости

$$[v] = \left[\frac{dl}{dt} \right] = \frac{L}{T}.$$

Аналогично можно найти размерности и любой другой величины. Другая группа физических величин, у которых все размерности сокращаются, называется безразмерными величинами. Примерами такого рода величин являются гидравлический уклон, представляющий собой отношение двух линейных величин: напора и длины; коэффициент расхода, определяемый как отношение действительного расхода, протекающего через отверстие, насадок или трубу, к теоретическому расходу; число Рейнольдса, которое, как показано ранее, представляет собой отношение сил инерции к силе трения, и др.

Важной особенностью безразмерных величин является их независимость от применяемой системы единиц измерения. Это об-

В выражениях (9.22) размерности правой и левой частей одинаковы, что позволяет привести их к безразмерному виду:

$$\frac{[a_1^{\alpha_1}][a_2^{\alpha_2}] \dots [a_n^{\alpha_n}]}{[a_{n+1}]} = 1;$$

$$\frac{[a_1^{\beta_1}][a_2^{\beta_2}] \dots [a_n^{\beta_n}]}{[a_{n+2}]} = 1;$$

.....

$$\frac{[a_1^{\varphi_1}][a_2^{\varphi_2}] \dots [a_n^{\varphi_n}]}{[a_m]} = 1.$$
(9.23)

Введем для безразмерных комплексов, полученных в равенствах (9.23), следующие обозначения:

$$\pi_{n+1} = \frac{a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_n^{\alpha_n}}{a_{n+1}};$$

$$\pi_{n+2} = \frac{a_1^{\beta_1} a_2^{\beta_2} \dots a_n^{\beta_n}}{a_{n+2}};$$

.....

$$\pi_m = \frac{a_1^{\varphi_1} a_2^{\varphi_2} \dots a_n^{\varphi_n}}{a_m}.$$
(9.24)

Эти безразмерные величины являются комплексами, аналогичными рассмотренным ранее критериям подобных явлений. Эти комплексы не зависят от выбора системы единиц измерения, однако число входящих в комплекс величин определяется числом основных единиц размерности плюс один член, т.е. $n + 1$.

После определения безразмерных комплексов структура физической связи, определенная функцией \bar{f} , может быть представлена в следующем виде:

$$\bar{f}(\pi_{n+1}; \pi_{n+2}; \dots; \pi_m) = 0. \quad (9.25)$$

Таким образом, связь между m размерными величинами принимает новый вид соотношения $m : n$ безразмерных пи-членов, которые являются комбинацией из $n + 1$ размерной величины.

Выполнение подобного рода преобразований целесообразно при гидравлическом моделировании изучаемых явлений. При этом следует отметить ряд положительных сторон применения пи-теоремы. Во-первых, полученные комплексы являются безразмерными величинами, которые не зависят от размерности, а значит, будут иметь одинаковые значения для условий природы и модели. Во-вторых, сокращается число переменных величин, подлежащих

изучению, так как число комплексов меньше, чем число исходных физических величин. В-третьих, комплексы позволяют более удобно проводить графическую и математическую обработку результатов наблюдения.

Для того чтобы показать указанные преимущества использования пи-теоремы, обратимся к конкретным примерам.

Примеры применения пи-теоремы. Получение пи-членов с помощью анализа размерностей ограничено следующими двумя положениями: во-первых, считается, что заранее известно, какие постоянные и переменные величины определяют рассматриваемую физическую связь; во-вторых, между всеми существенными для данного процесса физическими величинами имеет место степенная функциональная связь.

Метод анализа размерностей не дает указания по выбору перечня физических величин для рассматриваемого процесса. Вся ответственность за составление такого перечня лежит на исследователе. Если одна или несколько из существенных для исследуемого явления величин будут пропущены, то настоящий метод может привести к неверным результатам.

Рассмотрим условия применения пи-теоремы на примере движения вязкой жидкости внутри круглой трубы. Установим вначале переменные, которые могут оказывать влияние на движение жидкости. Прежде всего это ряд линейных размеров: длина трубы l , ее диаметр d , шероховатость стенок Δ ; затем кинематические и динамические параметры потока: средняя скорость потока v , разность давлений Δp ; наконец, физические свойства жидкости: плотность ρ , ускорение силы тяжести g , динамическая вязкость μ , коэффициент поверхностного натяжения σ , модуль упругости E .

Таким образом, общую закономерность для движения жидкости в круглой трубе можно записать в функциональном виде

$$f(l; d; \Delta; v; \Delta p; \rho; g; \mu; \sigma; E) = 0. \quad (9.26)$$

Здесь каждый из приведенных десяти физических параметров выражается в соответствии с формулой размерности через три основные единицы измерения: длину, массу, время. Следовательно, в результате анализа размерности должно получиться $10 - 3 = 7$ безразмерных пи-членов, которые будут связаны функцией

$$\bar{f}(\pi_1; \pi_2; \dots; \pi_7) = 0. \quad (9.27)$$

Каждый пи-член состоит из четырех переменных, причем три из них являются независимыми по размерности, а четвертая переменная для каждого пи-члена имеет свое значение.

Выбор независимых по размерности переменных производится произвольно, однако в данном случае целесообразно принять: диаметр трубы d — размерность L ; среднюю скорость потока v — размерность L/T ; плотность жидкости ρ — размерность M/L^3 .

Запишем теперь все семь пи-членов в соответствии с зависимостями (9.24) в следующем виде:

$$\begin{aligned}\pi_1 &= d^{x_1} v^{y_1} \rho^{z_1} l^{-1}; & \pi_2 &= d^{x_2} v^{y_2} \rho^{z_2} \Delta^{-1}; \\ \pi_3 &= d^{x_3} v^{y_3} \rho^{z_3} \Delta p^{-1}; & \pi_4 &= d^{x_4} v^{y_4} \rho^{z_4} g^{-1}; \\ \pi_5 &= d^{x_5} v^{y_5} \rho^{z_5} \mu^{-1}; & \pi_6 &= d^{x_6} v^{y_6} \rho^{z_6} \sigma^{-1}; \\ \pi_7 &= d^{x_7} v^{y_7} \rho^{z_7} E^{-1}.\end{aligned}\tag{9.28}$$

Для определения показателей степени в каждом из пи-членов следует помнить, что здесь мы имеем безразмерные комбинации входящих физических величин, т.е. размерность должна сократиться. Поскольку в каждом пи-члене имеются три неизвестных показателя степени, то необходимо составить систему из трех уравнений, решив которые можно установить неизвестные показатели степени. Такими уравнениями служат суммы показателей степеней при величинах, имеющих размерности длины, времени и массы, которые для сокращения размерности должны быть равны нулю.

Так, первый пи-член, выраженный через размерности, имеет вид

$$\pi_1 = L^{x_1} \left(\frac{L}{T} \right)^{y_1} \left(\frac{M}{L^3} \right)^{z_1} L^{-1},$$

что позволяет составить следующие линейные уравнения:

$$\text{для размерности длины: } x_1 + y_1 - 3z_1 - 1 = 0;$$

$$\text{для размерности времени: } -y_1 = 0;$$

$$\text{для размерности массы: } z_1 = 0.$$

Решая полученную систему уравнений, нетрудно найти, что $x_1 = 1$; $y_1 = 0$; $z_1 = 0$, а первый пи-член примет вид

$$\pi_1 = d/l.$$

Аналогично находится вид второго пи-члена:

$$\pi_2 = d/\Delta.$$

Следующий пи-член, выраженный через размерности:

$$\pi_3 = L^{x_3} \left(\frac{L}{T} \right)^{y_3} \left(\frac{M}{L^3} \right)^{z_3} \left(\frac{M}{LT^2} \right)^{-1},$$

а система линейных уравнений для него такова:

$$\text{для размерности длины: } x_3 + y_3 - 3z_3 + 1 = 0;$$

$$\text{для размерности времени: } -y_3 + 2 = 0;$$

$$\text{для размерности массы: } z_3 - 1 = 0.$$

Отсюда $x_3 = 0$; $y_3 = 2$; $z_3 = 1$, следовательно,

$$\pi_3 = \frac{\rho v^2}{\Delta p} = Eu.$$

Проведя такой же анализ для всех остальных пи-членов¹, трудно получить их общий вид:

$$\pi_4 = \frac{v^2}{gl} = Fr; \quad \pi_5 = \frac{\rho v d}{\mu} = Re; \quad \pi_6 = \frac{\rho v^2 d}{\sigma} = We; \quad \pi_7 = \frac{\rho v^2}{E} = M.$$

Последние пять безразмерных комплексов знакомы нам по предыдущему разделу настоящей работы. Это критерии или числа Эйлера, Фруда, Рейнольдса, Вебера, Маха. Теперь общее выражение функциональной связи рассматриваемых физических величин можно представить в виде функциональной связи безразмерных комплексов

$$\bar{f}\left(\frac{d}{l}; \frac{\Delta}{d}; Eu; Fr; Re; We; M\right) = 0. \quad (9.29)$$

Применяя принципы анализа размерности к условиям моделирования, следует предварительно установить, какая из возможных сил будет главной, и соответственно этому строить модель, определять последовательность проведения опытов и их обработку.

Рассмотрим условия применения функциональной связи (9.29), когда из всех действующих сил главной является сила внутреннего трения. В этом случае наблюдаемое явление не должно зависеть от критериев Фруда, Вебера, Маха. Таким образом, модель должна быть выполнена на основе критерия Рейнольдса, т. е. $Re = idem$.

Основной целью опытов должно быть установление эмпирической зависимости λ для возможного диапазона изменения остальных параметров. Используя предположение Вейсбаха о пропорциональности потерь напора скоростному напору:

$$h_l = \frac{\Delta p}{\rho g} = k \frac{v^2}{2g},$$

можно избавиться от критерия Эйлера и функциональную связь представить в виде

$$h_l = 2\varphi\left(\frac{l}{d}; \frac{\Delta}{d}; Re\right) \frac{v^2}{2g}. \quad (9.30)$$

Первый пи-член взят в виде его обратной величины. Это возможно при соблюдении геометрического подобия, а именно: если имеет место равенство

$$\left(\frac{d}{l}\right)_H = \left(\frac{d}{l}\right)_M, \quad \text{то должно быть и} \quad \left(\frac{l}{d}\right)_H = \left(\frac{l}{d}\right)_M.$$

Если теперь на исследуемой трубе установить ряд приборов для измерения давления или пьезометров (рис. 9.1) и выполнить наблюдения, то окажется, что показания пьезометров расположат-

¹ Изучающим данный материал предлагается выполнить необходимые выкладки самостоятельно.

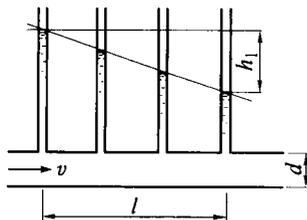


Рис. 9.1

ся по прямой линии, которая будет изменять свое положение при изменении любого из параметров, но характер прямолинейной зависимости потери напора по длине сохранится. Это позволяет зависимость (9.30) записать в новом виде:

$$h_l = 2\varphi \left(\frac{\Delta}{d}; \text{Re} \right) \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}.$$

Обозначая

$$\lambda = 2\varphi \left(\frac{\Delta}{d}; \text{Re} \right),$$

получим основной параметр, подлежащий экспериментальному определению. Этот безразмерный параметр, называемый коэффициентом гидравлического трения, или коэффициентом Дарси, необходимо изучать в функциональной зависимости от отношения Δ/d и чисел Рейнольдса.

Первые исследования зависимости λ от Δ/d и Re для напорных трубопроводов были выполнены Никурадзе. Опыты проводились в трубах с искусственной равнозернистой шероховатостью из кварцевого песка. Песок различной крупности наносился сплошным слоем на внутреннюю поверхность трубы. В полученных таким образом трубах с различными значениями отношения Δ/d или Δ/r при определенных расходах (средних скоростях) измеряли потерю напора по длине и находили значение коэффициента λ по формуле

$$\lambda = \frac{h_l}{\frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}}.$$

В период опытов находились также значения кинематического коэффициента вязкости и вычислялось число Рейнольдса. В итоге проведенных измерений и последующих вычислений получены значения при определенных значениях Δ/r и Re . Эти данные были обработаны в форме графика (см. рис. 3.10), причем для удобства представления графика и его анализа откладывались не абсолютные величины переменных, а их логарифмы. На вертикальной оси отложены $\lg(100\lambda)$, а по горизонтальной — $\lg \text{Re}$. Опытные точки, отмеченные на графике различными условными обозначениями, отвечают одинаковому значению отношения Δ/r .

Анализ опытного графика позволяет сделать определенные выводы о функциональной зависимости коэффициента Дарси от рассматриваемых параметров и при дополнительной математической обработке получить эмпирические зависимости. Более подробное описание различных областей рассмотренной опытной

зависимости приведено в разделах, посвященных гидравлическим сопротивлениям. Здесь на частном примере мы остановимся на одном весьма важном свойстве, полученном из результатов наблюдений.

Обращаясь к графику (см. рис. 3.10), можно определить две зоны, в которых коэффициент λ не зависит от одного из рассматриваемых параметров. При малых числах Рейнольдса $Re < 2000$ или $\lg Re < 3,3$ все опытные точки независимо от значений Δ/r ложатся на одну прямую, а при больших числах Рейнольдса образуется семейство горизонтальных линий, каждая из которых отвечает своему значению Δ/r и не зависит от $\lg Re$, а значит, и от Re .

В пределах рассмотренных областей изучаемое явление остается себе подобным при изменении одного из параметров, т. е. если в первой зоне происходит изменение параметра Δ/r , то при одинаковых числах Рейнольдса в опытах будет наблюдаться одно и то же значение λ . В этих условиях принято говорить, что процесс обладает свойством автомодельности или является автомодельным по данному параметру. При малых числах Рейнольдса движение жидкости в трубах автомодельно по параметру Δ/r , а при больших числах Рейнольдса — автомодельно по параметру Re .

Первая из указанных областей отвечает ламинарному режиму движения жидкости, когда частицы жидкости движутся в трубопроводе по прямым линиям, параллельным образующим трубы. Следовательно, все ламинарные течения при одинаковых граничных условиях подобны друг другу. Аналогично можно сказать и об области квадратичного сопротивления режима движения, где коэффициент λ не зависит от числа Рейнольдса.

В процессе проведения экспериментальных исследований весьма важно установить наличие автомодельных зон и их границ, тогда все множество изучаемых процессов в указанных границах автомодельности сливается в один обобщенный случай подобных между собой явлений.

Рассмотрим теперь другой, более сокращенный, метод анализа размерности. Этот метод рассмотрим на примере движения жидкости через водослив с тонкой стенкой (см. рис. 7.1).

Расход жидкости при установившемся движении через водослив с тонкой стенкой зависит от ширины водослива b , напора перед водосливом H , а также свойств жидкости, определяемых плотностью ρ и ускорением силы тяжести g . Следовательно, расход жидкости через водослив является функцией указанных величин:

$$Q = kb^x H^y \rho^z g^n, \quad (9.31)$$

где k — коэффициент пропорциональности, являющийся безразмерной величиной; x, y, z, n — показатели степени.

Размерность правой и левой частей выражения должна быть одинакова. Считая расход пропорциональным ширине водослива,

т. е. полагая $x = 1$, запишем соотношение (9.31) в форме размерностей

$$\frac{L^3}{T} = L^y \left(\frac{M}{L^3} \right)^z \left(\frac{L}{T^2} \right)^n$$

и приравняем суммы показателей в обеих частях уравнения:

по размерности длины: $3 = 1 + y - 3z + n$;

по размерности времени: $-1 = -2n$;

по размерности массы: $0 = z$.

Решая полученную систему трех уравнений с тремя неизвестными, найдем $y = 3/2$, $z = 0$, $n = 1/2$, и, подставляя эти значения в зависимость (9.31), имеем

$$Q = kbH^{3/2}g^{1/2}$$

или, заменив $k = m\sqrt{2}$, получим известную формулу, определяющую расход жидкости через водослив с тонкой стенкой,

$$Q = mb\sqrt{2g}H^{3/2}.$$

В полученной формуле m является абсолютной постоянной величиной, значение которой следует определить опытным путем. Этот пример показывает, что методы анализа размерности могут принести большую пользу при организации экспериментальных исследований, позволяя сократить число опытов и получить определенную экономию во времени и средствах.

ПРИЛОЖЕНИЯ

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Коэффициенты расхода, скорости и сжатия при истечении воды из отверстий и насадок

Тип отверстия или насадка	ε	φ	μ
Малое отверстие при совершенном сжатии	0,64	0,97	0,62
Отверстие средних размеров при всестороннем сжатии и отсутствии направляющих стенок	—	—	0,65
Большие отверстия с несовершенным, но всесторонним сжатием	—	—	0,70
Донные отверстия без сжатия по дну со значительным боковым сжатием	—	—	0,65 ... 0,70
Донные отверстия без сжатия по дну с умеренным боковым сжатием	—	—	0,70 ... 0,75
Донные отверстия без сжатия по дну с весьма плавными боковыми подходами	—	—	0,80 ... 0,85
Внешний цилиндрический насадок при $l = (3 \dots 4)d$ и полном заполнении	1,0	0,82	0,82
Внешний цилиндрический насадок при расположении насадка под углом к стенке:			
$\alpha = \pi/9$	1,0	0,78	0,78
$\alpha = \pi/4,5$	1,0	0,75	0,75
$\alpha = \pi/3$	1,0	0,72	0,72
Внутренний цилиндрический насадок при:			
$l = 0,5d$	0,52	0,98	0,98
$l = (3 \dots 4)d$	1,0	0,71	0,71

Тип отверстия или насадка	ϵ	ϕ	μ
Конически расходящийся насадок при угле конусности $\theta = (\pi/36 \dots \pi/24)$	1,0	0,45 ... 0,50	0,45 ... 0,50
Конически сходящийся насадок при угле конусности:			
$\theta = \pi/60$	—	—	0,89
$\theta = \pi/13$	0,98	0,96	0,94
$\theta = \pi/3$	—	—	0,90
Коноидальный насадок (при максимальной пропускной способности)	1,0	0,98	0,98

Расходные характеристики для труб различных диаметров

Диаметр условного прохода, мм	Значения расходной характеристики K , м ³ /с, для труб				
	новых стальных при $v = 1$, м/с	неновых стальных при $v \geq 1,2$, м/с	железобетонных, неновых чугунных при $v \geq 1,2$, м/с	асбестоцементных при $v = 1$, м/с	пластмассовых при $v = 1$, м/с
50	0,0206	0,01645	0,0093	0,0121	0,01285
60	0,0259	0,0209	—	—	0,0203
75	0,0404	0,0328	—	—	—
80	0,0570	0,0469	0,0324	0,0346	0,0328
100	0,0912	0,0760	0,0565	0,0730,	0,0555
125	0,136	0,1144	0,1015	0,1145	0,104
150	0,212	0,1805	0,164	0,178	0,148
175	0,257	0,219	—	—	—
200	0,440	0,380	0,351	0,380	0,443
250	0,779	0,646	0,625	0,669	0,873
300	1,23	1,085	1,05	1,045	1,19
350	1,84	1,635	1,51	1,52	—
400	2,60	2,32	2,14	2,15	—
450	3,53	3,16	2,90	—	—
500	4,61	4,16	3,84	3,74	—
600	7,33	6,65	6,20	6,87	—
700	10,5	9,53	9,32	10,25	—
800	14,8	13,5	13,3	14,5	—
900	20,0	18,4	18,1	19,6	—
1000	26,2	24,2	23,9	25,8	—
1200	42,0	39,2	38,8	—	—
1400	62,6	58,5	57,5	—	—
1500	74,8	70,3	—	—	—
1600	88,6	83,8	81,4	—	—

Значения поправочных коэффициентов a

Средняя скорость потока v , м/с	Значения a для труб			
	новых стальных	неновых стальных, чугунных и железобетонных	асбестоцементных	пластмассовых
0,20	0,869	0,842	0,874	0,834
0,30	0,927	0,884	0,906	0,873
0,40	0,948	0,913	0,929	0,902
0,50	0,962	0,932	0,947	0,924
0,60	0,973	0,947	0,961	0,944
0,70	0,981	0,960	0,973	0,960
0,80	0,990	0,971	0,983	0,975
0,90	0,994	0,980	0,992	0,988
1,00	1,000	0,985	1,000	1,000
1,20	1,007	1,000	1,013	1,021
1,40	1,014	1,000	1,024	1,039
1,60	1,018	1,000	1,034	1,055
1,80	1,022	1,000	1,041	1,068
2,00	1,025	1,000	1,048	1,081
2,20	1,028	1,000	1,054	1,093
2,40	1,031	1,000	1,059	1,104
2,60	1,033	1,000	1,064	1,114
2,80	1,035	1,000	1,068	1,124
3,00	1,036	1,000	1,072	1,132
3,40	—	1,000	1,079	—
3,80	—	1,000	1,085	—
4,20	—	1,000	1,089	—
4,60	—	1,000	1,094	—
5,00	—	1,000	1,097	—

Коэффициент шероховатости n для неукрепленных искусственных русел

Поверхность русла	Для лучших условий	Для средних условий	Для худших условий
Каналы в плотном лессе, плотном мелком гравии и плотной земле, затянутые илистой пленкой (для хороших условий — сплошной, для худших — прерывистой):			
при полной планировке дна и откосов	0,018	0,019	0,020
при частичной подчистке дна и откосов, после землеройной машины	0,020	0,0225	0,025
при производстве работ машинами без последующей дополнительной планировки	0,020	0,025	0,0275
Большие земляные каналы:			
в лессе, плотной земле, без наносов, затянутые илистой пленкой	—	0,019	—
в песчаных и супесчаных грунтах, находящихся в хороших условиях содержания	—	0,020	—
в галечнике с песком	—	0,0225	—
Большие земляные каналы при различных условиях содержания и ремонта:			
при полной планировке дна и откосов	0,0225	0,025	0,0275
при частичной планировке	0,025	0,0275	0,030
при производстве работ землеройными машинами без последующей планировки	0,025	0,030	0,035
Малые земляные каналы при различных условиях содержания и ремонта:			
при полной планировке дна и откосов	0,025	0,0275	0,030

Поверхность русла	Для лучших условий	Для средних условий	Для худших условий
при частичной планировке	0,0275	0,030	0,035
при производстве работ землеройными машинами без последующей планировки	0,030	0,035	0,040
Большие земляные каналы в плохих условиях:			
с местными обвалами откосов	—	0,025	—
с местными обвалами откосов, местами с водорослями, бульжником или гравием по дну, заметно заросшие травой	0,030	—	—
с неправильным профилем, заметно засоренные камнями и водорослями	—	0,035	—
со значительными промоинами и обвалами, заросшие камышом, с густыми корнями, крупными камнями по дну	—	—	0,040
Каналы и русла в скальных породах:			
чисто высеченные	0,020	0,0225	0,025
в средних условиях производства работ, без сплошного тщательного «сглаживания» поверхности, но с принятием мер против заметных выступов, остающихся при разработке выемки	0,030	—	0,035
грубо высеченные	0,040	—	0,045

Коэффициент шероховатости n для русел с искусственным креплением

Поверхность русла	Для лучших условий	Для средних условий	Для худших условий
Исключительно гладкая, а также покрытая эмалью или глазурью	0,0009	—	—
Цементная: из чистого цемента	0,010	0,012	0,013
штукатуренная цементным раствором	0,011	0,013	0,015
Бетонированная: наиболее гладкая с весьма тщательной отделкой, хорошо устроенными швами облицовки, без песка и гравия на дне при небольшом количестве закруглений в плане, имеющих к тому же большие радиусы	0,011	0,012	0,013
без специальной весьма гладкой отделки (без тщательной сплошной штукатурки) или при не вполне ровно затертой поверхности, с удовлетворительно устроенными швами, без песка и гравия на дне, при закруглениях в плане средней величины	0,013	0,014	0,015
без специальной весьма гладкой отделки (без тщательной сплошной штукатурки) или при не вполне ровно затертой поверхности, с удовлетворительно устроенными швами, при наличии песка и гравия на дне, при худших швах, при крутых закруглениях; шероховатые бетонные поверхности бетонировка, выполненная посредством цемент-пушки:	0,015	0,016	0,018
при сглаживании поверхности проволочными щеткам	0,016	—	—

Поверхность русла	Для лучших условий	Для средних условий	Для худших условий
без сглаживания поверхности	—	0,019	—
при плохом производстве работ	—	—	0,021
Металлическая:			
гладкая неокрашенная	0,011	0,012	0,014
гладкая окрашенная	0,012	0,013	0,017
ржавая, шероховатая; стальная рифленая	0,021	0,025	0,030
Деревянная:			
желоб из клепок	0,011	0,012	0,014
из продольно расположенных досок или брусьев:			
строганных	0,010	0,014	0,018
нестроганных	0,012	0,015	0,018
из поперечно расположенных досок или брусьев:			
строганных	0,012	0,015	0,019
нестроганных	0,013	0,016	0,020
Кирпичная и каменная:			
кладка из кирпича, покрытого глазурью	0,011	0,013	0,015
кирпичная кладка на цементном растворе	0,012	0,015	0,017
облицовка из тесаного камня	0,013	0,015	0,017
бутовая кладка на цементном растворе	0,018	0,025	0,030
сухая кладка	0,025	0,030	0,035
мошение:			
из булыжного камня	0,020	0,0225	0,0275
из рваного камня	0,0225	0,0275	0,030
Прочие поверхности:			
брезент по деревянным рейкам	0,014	0,015	0,016
грунты, пропитанные битумом или дегтем	0,017	0,018	0,019
фашинные тюфяки и тяжелые фашины	0,0225	0,025	0,0275

**Ориентировочные значения коэффициента шероховатости n
и показателя степени z для естественных русел**

Характеристика русла	n	z	
		при $R < 1$	при $R > 1$
Естественные русла, в том числе реки горного происхождения, но с небольшими уклонами в благоприятных условиях: чистое, прямое, незасоренное земляное русло (глина, песок, мелкий гравий) со свободным течением	0,025	0,737	0,698
Галечно-гравийное русло со свободным течением	0,029	0,753	0,711
Периодические потоки (большие и малые) при очень хорошем состоянии поверхности и формы ложа; галечно-гравийные русла в благоприятных условиях, но с заметным содержанием наносов или более крупной (чем в предыдущем случае) галькой	0,033	0,773	0,727
Земляные русла периодических водотоков (сухих логов) в благоприятных условиях, правильные, хорошо разработанные галечниковые русла горных рек в нижнем течении; сравнительно чистые русла постоянных равнинных водотоков в обычных условиях, русло извилистое, с некоторыми неправильностями в направлении струй или же прямое, но с неправильностями в рельефе дна (отмели, промоины, местами камни)	0,040	0,800	0,750
Периодические (ливневые и весенние) водотоки, несущие во время паводка заметное количество наносов, с крупногалечным или покрытым растительностью (травой и пр.) ложем; русла больших и средних рек, значительно засоренные, извилистые и частично заросшие, каменистые, с неспокойным течением; поймы больших и средних рек, сравнительно разработанные, нормально поросшие растительностью (травой, кустарником)	0,050	0,835	0,779

Характеристика русла	n	z	
		при $R < 1$	при $R > 1$
Русла периодических водотоков, сильно засоренные и извилистые; поймы рек, неровные, плохо разработанные, сильно заросшие (промоины, кустарники, деревья, с наличием заводей; порожнистые участки равнинных рек; галечно-валунные русла горного типа (в среднем течении) с неправильной поверхностью водного зеркала	0,067	0,888	0,823
Периодические водотоки и валунные русла горного типа с бурным пенистым течением, с изрытой поверхностью водного зеркала (с летящими вверх брызгами воды); русла и поймы равнинных рек, значительно заросшие, со слабым течением, с большими глубокими промоинами	0,080	0,924	0,854
Поймы равнинных рек, значительно заросшие, со слабым течением, с большими глубокими промоинами, но с сильно искривленным, косоструйным течением, заводями и пр.; русла горноводопадного типа с крупновалунным и извилистым ложем, с ярко выраженными перепадами, пенистость настолько сильна, что вода, потеряв прозрачность, имеет белый цвет, а шум потока доминирует над всеми остальными звуками	0,100	0,974	0,895
Реки болотного типа (заросли, кочки, стоячая вода во многих местах и пр.); поймы местные, с очень большими мертвыми пространствами, с местными углублениями (озерами и пр.)	0,130	1,046	0,955

Скоростные характеристики W , м/с, для искусственных русел произвольного сечения при различных значениях гидравлического радиуса R и коэффициента шероховатости n

R , м	n													
	0,011	0,0115	0,012	0,0125	0,013	0,0135	0,014	0,0145	0,015	0,0155	0,016	0,0165		
0,01	4,00	3,76	3,53	3,33	3,15	2,98	2,83	2,69	2,56	2,43	2,32	2,22		
0,02	6,40	6,03	5,69	5,38	5,10	4,84	4,60	4,38	4,18	3,99	3,81	3,65		
0,03	8,43	7,95	7,51	7,12	6,75	6,42	6,11	5,83	5,56	5,32	5,09	4,88		
0,04	10,24	9,67	9,15	8,68	8,24	7,84	7,48	7,14	6,82	6,53	6,26	6,00		
0,05	11,92	11,26	10,67	10,12	9,62	9,17	8,74	8,35	7,99	7,65	7,34	7,05		
0,06	13,48	12,75	12,09	11,48	10,92	10,41	9,94	9,50	9,09	8,71	8,36	8,03		
0,07	14,97	14,17	13,44	12,77	12,15	11,59	11,07	10,59	10,14	9,72	9,33	8,97		
0,08	16,39	15,52	14,73	14,00	13,33	12,72	12,16	11,63	11,14	10,69	10,27	9,87		
0,09	17,75	16,82	15,97	15,19	14,47	13,81	13,20	12,64	12,11	11,63	11,17	10,75		
0,10	21,26	20,09	19,02	18,05	17,15	16,33	15,57	14,87	14,23	13,62	13,06	12,54		
0,12	23,86	22,57	21,39	20,32	19,33	18,42	17,59	16,81	16,09	15,42	14,80	14,22		
0,14	26,30	24,90	23,62	22,46	21,38	20,40	19,49	18,64	17,86	17,13	16,45	15,82		
0,16	28,62	27,11	25,74	24,49	23,34	22,28	21,30	20,39	19,55	18,76	18,03	17,35		
0,18	30,83	29,23	27,77	26,44	25,21	24,08	23,03	22,07	21,17	20,33	19,55	18,82		
0,20	32,95	31,26	29,72	28,31	27,01	25,81	24,71	23,68	22,73	21,84	21,01	20,24		
0,22	35,00	33,22	31,60	30,11	28,74	27,49	26,32	25,24	24,24	23,30	22,43	21,61		
0,24	36,97	35,11	33,41	31,86	30,43	29,11	27,89	26,75	25,70	24,72	23,80	22,94		

R, м	n													
	0,011	0,0115	0,012	0,0125	0,013	0,0135	0,014	0,0145	0,015	0,0155	0,016	0,0165		
0,26	38,89	36,95	35,18	33,55	32,06	30,68	29,41	28,22	27,12	26,10	25,14	24,24		
0,28	40,75	38,74	36,89	35,20	33,65	32,22	30,89	29,66	28,51	27,44	26,44	25,51		
0,30	42,57	40,48	38,57	36,81	35,20	33,71	32,33	31,06	29,87	28,76	27,72	26,75		
0,32	44,34	42,18	40,20	38,38	36,72	35,17	33,75	32,42	31,19	30,04	28,96	27,96		
0,34	46,07	43,84	41,79	39,92	38,20	36,60	35,13	33,76	32,49	31,30	30,19	29,14		
0,36	47,76	45,46	43,36	41,42	39,65	38,01	36,49	35,07	33,76	32,53	31,38	30,31		
0,38	49,42	47,05	44,89	42,90	41,07	39,38	37,81	36,36	35,01	33,74	32,56	31,45		
0,40	51,04	48,61	46,39	44,35	42,47	40,73	39,12	37,62	36,23	34,93	33,71	32,57		
0,45	54,98	52,39	50,03	47,85	45,85	44,00	42,28	40,69	39,20	37,82	36,52	35,30		
0,50	58,76	56,02	53,52	51,22	49,10	47,14	45,33	43,64	42,07	40,60	39,22	37,93		
0,55	62,40	59,52	56,89	54,47	52,24	50,18	48,27	46,49	44,83	43,28	41,83	40,47		
0,60	65,91	62,90	60,15	57,61	55,28	53,12	51,11	49,25	47,51	45,89	44,37	42,94		
0,65	69,32	66,18	63,31	60,66	58,22	55,97	53,87	51,93	50,11	48,42	46,83	45,33		
0,70	72,64	69,37	66,38	63,62	61,09	58,74	56,56	54,53	52,64	50,88	49,22	47,67		
0,75	75,86	72,47	69,37	66,51	63,88	61,44	59,18	57,08	55,11	53,28	51,56	49,94		
0,80	79,01	75,50	72,28	69,33	66,60	64,08	61,74	59,56	57,52	55,62	53,84	52,17		
0,85	82,08	78,45	75,13	72,08	69,26	66,66	64,24	61,98	59,88	57,91	56,07	54,34		
0,90	85,08	81,35	77,92	74,77	71,87	69,18	66,68	64,36	62,19	60,16	58,26	56,47		
0,95	88,02	84,18	80,65	77,41	74,42	71,65	69,08	66,68	64,45	62,36	60,40	58,56		

1,00	90,91	86,96	83,33	80,00	76,92	74,07	71,43	68,97	66,67	64,52	62,50	60,61
1,10	96,52	92,36	88,54	85,03	81,79	78,79	76,00	73,41	70,98	68,72	66,59	64,59
1,20	101,94	97,58	93,58	89,90	86,50	83,35	80,43	77,70	75,16	72,78	70,55	68,45
1,30	107,19	102,64	98,46	94,61	91,06	87,77	84,71	81,87	79,21	76,72	74,39	72,19
1,40	112,29	107,55	103,20	99,19	95,49	92,06	88,88	85,91	83,14	80,55	78,11	75,83
1,50	117,26	112,33	107,81	103,65	99,80	96,24	92,93	89,85	86,96	84,27	81,74	79,36
1,60	122,10	116,99	112,30	107,99	104,00	100,31	96,88	93,68	90,69	87,90	85,28	82,81
1,70	126,82	121,54	116,69	112,23	108,11	104,29	100,73	97,43	94,33	91,44	88,73	86,17
1,80	131,44	125,99	120,98	116,38	112,12	108,17	104,50	101,08	97,89	94,90	92,10	89,46
1,90	135,97	130,34	125,18	120,43	116,04	111,97	108,19	104,67	101,37	98,29	95,40	92,68
2,00	140,40	134,61	129,30	124,41	119,89	115,70	111,80	108,17	104,78	101,61	98,63	95,83
2,10	144,75	138,80	133,33	128,30	123,66	119,35	115,34	111,61	108,12	104,86	101,79	98,91
2,20	149,01	142,90	137,30	132,13	127,36	122,93	118,82	114,98	111,40	108,05	104,90	101,94
2,30	153,21	146,94	141,19	135,89	130,99	126,45	122,23	118,29	114,62	111,18	107,95	104,91
2,40	157,33	150,91	145,01	139,58	134,56	129,91	125,58	121,55	117,78	114,25	110,94	107,83
2,50	161,39	154,81	148,78	143,21	138,07	133,31	128,88	124,75	120,89	117,27	113,88	110,69
2,60	165,39	158,66	152,48	146,79	141,53	136,65	132,12	127,89	123,95	120,25	116,78	113,51
2,70	169,33	162,44	156,13	150,31	144,93	139,95	135,31	130,99	126,95	123,17	119,62	116,28
2,80	173,21	166,18	159,72	153,78	148,29	143,19	138,46	134,04	129,91	126,05	122,42	119,01
2,90	177,03	169,86	163,27	157,20	151,59	146,39	141,55	137,04	132,83	128,89	125,18	121,70
3,00	180,81	173,49	166,76	160,57	154,85	149,54	144,61	140,01	135,71	131,68	127,90	124,35

Скоростные характеристики W , м/с, для искусственных русел произвольного сечения при различных значениях гидравлического радиуса R и коэффициента шероховатости n

R , м	n													
	0,017	0,0175	0,018	0,019	0,02	0,021	0,0225	0,025	0,0275	0,03	0,035	0,04		
0,01	2,12	2,03	1,94	1,79	1,65	1,53	1,37	1,16	0,99	0,86	0,66	0,52		
0,02	3,50	3,35	3,22	2,98	2,76	2,57	2,32	1,98	1,71	1,49	1,16	0,93		
0,03	4,68	4,50	4,32	4,01	3,73	3,48	3,15	2,70	2,34	2,06	1,62	1,31		
0,04	5,76	5,54	5,33	4,95	4,61	4,31	3,91	3,37	2,93	2,58	2,05	1,67		
0,05	6,77	6,51	6,27	5,83	5,44	5,09	4,63	4,00	3,49	3,09	2,46	2,02		
0,06	7,72	7,43	7,16	6,67	6,23	5,83	5,31	4,60	4,03	3,57	2,86	2,35		
0,07	8,63	8,31	8,01	7,47	6,98	6,54	5,97	5,18	4,55	4,03	3,24	2,68		
0,08	9,51	9,16	8,83	8,24	7,71	7,23	6,60	5,74	5,05	4,48	3,62	3,00		
0,09	10,35	9,97	9,62	8,98	8,41	7,89	7,22	6,28	5,53	4,92	3,99	3,31		
0,10	12,04	11,59	11,15	10,37	9,67	9,04	8,22	7,09	6,19	5,46	4,35	3,56		
0,12	13,68	13,17	12,69	11,81	11,03	10,33	9,41	8,15	7,14	6,32	5,07	4,18		
0,14	15,23	14,67	14,14	13,19	12,33	11,57	10,56	9,17	8,06	7,16	5,77	4,78		
0,16	16,71	16,11	15,54	14,51	13,58	12,76	11,66	10,16	8,95	7,97	6,46	5,36		
0,18	18,13	17,49	16,88	15,78	14,79	13,90	12,73	11,11	9,82	8,75	7,12	5,94		
0,20	19,51	18,83	18,18	17,01	15,96	15,01	13,77	12,04	10,66	9,52	7,78	6,51		
0,22	20,84	20,12	19,44	18,20	17,09	16,09	14,77	12,95	11,48	10,27	8,42	7,06		
0,24	22,14	21,38	20,67	19,36	18,20	17,15	15,76	13,83	12,29	11,01	9,05	7,61		

0,26	23,40	22,61	21,86	20,50	19,27	18,17	16,72	14,70	13,07	11,73	9,67	8,15
0,28	24,63	23,80	23,03	21,60	20,33	19,18	17,66	15,55	13,85	12,45	10,28	8,69
0,30	25,83	24,98	24,17	22,68	21,36	20,16	18,58	16,38	14,61	13,14	10,88	9,22
0,32	27,01	26,12	25,28	23,74	22,37	21,13	19,48	17,20	15,35	13,83	11,47	9,74
0,34	28,16	27,24	26,38	24,79	23,36	22,07	20,37	18,01	16,09	14,51	12,06	10,25
0,36	29,30	28,35	27,45	25,81	24,33	23,01	21,24	18,80	16,81	15,18	12,64	10,76
0,38	30,41	29,43	28,51	26,81	25,29	23,92	22,10	19,58	17,53	15,84	13,21	11,27
0,40	31,50	30,49	29,54	27,80	26,23	24,82	22,95	20,35	18,23	16,49	13,77	11,77
0,45	34,16	33,08	32,07	30,20	28,53	27,02	25,01	22,22	19,96	18,08	15,16	12,99
0,50	36,72	35,58	34,50	32,52	30,74	29,14	27,01	24,04	21,63	19,63	16,51	14,19
0,55	39,20	37,99	36,86	34,77	32,89	31,20	28,95	25,81	23,25	21,13	17,82	15,36
0,60	41,60	40,33	39,14	36,95	34,98	33,20	30,83	27,53	24,84	22,60	19,11	16,51
0,65	43,93	42,61	41,36	39,07	37,01	35,14	32,67	29,21	26,38	24,04	20,37	17,64
0,70	46,21	44,83	43,53	41,14	38,99	37,04	34,46	30,84	27,90	25,45	21,61	18,75
0,75	48,42	46,99	45,64	43,16	40,92	38,90	36,21	32,45	29,38	26,82	22,82	19,83
0,80	50,59	49,11	47,71	45,13	42,81	40,71	37,92	34,02	30,83	28,17	24,01	20,90
0,85	52,71	51,18	49,73	47,06	44,66	42,49	39,60	35,55	32,25	29,50	25,18	21,95
0,90	54,79	53,20	51,71	48,95	46,47	44,23	41,24	37,06	33,64	30,80	26,33	22,98
0,95	56,83	55,19	53,65	50,81	48,25	45,94	42,86	38,54	35,02	32,08	27,46	24,00
1,00	58,82	57,14	55,56	52,63	50,00	47,62	44,44	40,00	36,36	33,33	28,57	25,00
1,10	62,71	60,94	59,27	56,18	53,40	50,89	47,54	42,84	38,99	35,79	30,74	26,96

R, м	n													
	0,017	0,0175	0,018	0,019	0,02	0,021	0,0225	0,025	0,0275	0,03	0,035	0,04		
1,20	66,48	64,62	62,86	59,62	56,70	54,06	50,53	45,59	41,54	38,17	32,85	28,86		
1,30	70,13	68,18	66,34	62,95	59,89	57,13	53,44	48,26	44,02	40,48	34,91	30,71		
1,40	73,67	71,64	69,72	66,19	63,00	60,11	56,26	50,86	46,43	42,73	36,90	32,52		
1,50	77,12	75,01	73,02	69,34	66,02	63,02	59,01	53,39	48,77	44,92	38,85	34,27		
1,60	80,49	78,30	76,23	72,41	68,97	65,85	61,69	55,85	51,06	47,06	40,74	35,99		
1,70	83,77	81,50	79,36	75,40	71,84	68,61	64,30	58,25	53,29	49,14	42,59	37,66		
1,80	86,98	84,63	82,42	78,33	74,65	71,31	66,86	60,60	55,47	51,18	44,40	39,30		
1,90	90,11	87,70	85,41	81,20	77,40	73,95	69,36	62,90	57,60	53,16	46,17	40,89		
2,00	93,19	90,70	88,34	84,00	80,09	76,54	71,80	65,14	59,68	55,11	47,90	42,45		
2,10	96,20	93,64	91,21	86,75	82,72	79,07	74,19	67,34	61,72	57,01	49,59	43,98		
2,20	99,15	96,52	94,03	89,44	85,30	81,55	76,54	69,50	63,72	58,88	51,24	45,47		
2,30	102,05	99,35	96,79	92,08	87,83	83,98	78,84	71,61	65,67	60,71	52,86	46,94		
2,40	104,89	102,12	99,50	94,67	90,32	86,37	81,09	73,68	67,59	62,50	54,45	48,37		
2,50	107,69	104,85	102,17	97,22	92,76	88,71	83,31	75,71	69,47	64,25	56,00	49,77		
2,60	110,44	107,53	104,79	99,72	95,16	91,02	85,48	77,71	71,32	65,97	57,52	51,14		
2,70	113,14	110,17	107,36	102,18	97,51	93,28	87,62	79,67	73,13	67,66	59,02	52,49		
2,80	115,80	112,77	109,90	104,60	99,83	95,50	89,72	81,59	74,91	69,32	60,49	53,81		
2,90	118,42	115,32	112,39	106,99	102,11	97,69	91,79	83,48	76,66	70,95	61,92	55,10		
3,00	121,00	117,84	114,85	109,33	104,36	99,85	93,82	85,34	78,38	72,55	63,34	56,37		

Скоростные характеристики W , м/с, для естественных водотоков при различных значениях гидравлического радиуса R и коэффициента шероховатости n

R , м	n								
	0,025	0,0286	0,033	0,04	0,05	0,067	0,08	0,1	0,133
0,02	2,05	1,62	1,25	0,87	0,56	0,30	0,20	0,12	0,06
0,04	3,50	2,82	2,22	1,59	1,07	0,61	0,43	0,26	0,14
0,06	4,79	3,89	3,11	2,28	1,56	0,93	0,66	0,43	0,23
0,08	5,97	4,90	3,95	2,93	2,05	1,25	0,91	0,60	0,34
0,10	7,09	5,85	4,75	3,56	2,52	1,56	1,16	0,78	0,45
0,20	12,04	10,13	8,41	6,51	4,79	3,16	2,44	1,74	1,10
0,30	16,38	13,93	11,70	9,22	6,95	4,74	3,74	2,75	1,83
0,40	20,35	17,43	14,75	11,77	9,01	6,30	5,04	3,79	2,61
0,50	24,04	20,70	17,64	14,19	10,99	7,82	6,34	4,84	3,41
0,60	27,53	23,80	20,38	16,51	12,91	9,31	7,61	5,89	4,23
0,70	30,84	26,76	23,00	18,75	14,76	10,76	8,87	6,94	5,05
0,80	34,02	29,60	25,52	20,90	16,56	12,18	10,10	7,97	5,88
0,90	37,06	32,33	27,95	22,98	18,30	13,57	11,31	8,99	6,70
1,00	40,00	34,97	30,30	25,00	20,00	14,93	12,50	10,00	7,52
1,10	42,84	37,51	32,58	26,96	21,65	16,25	13,66	10,99	8,33
1,20	45,59	39,99	34,79	28,86	23,26	17,54	14,80	11,96	9,13
1,30	48,26	42,39	36,93	30,71	24,82	18,81	15,92	12,92	9,92
1,40	50,86	44,72	39,02	32,52	26,35	20,04	17,01	13,85	10,69
1,50	53,39	47,00	41,06	34,27	27,84	21,25	18,07	14,77	11,46
1,60	55,85	49,21	43,04	35,99	29,29	22,43	19,11	15,67	12,20
1,70	58,25	51,38	44,98	37,66	30,71	23,58	20,13	16,55	12,94
1,80	60,60	53,49	46,87	39,30	32,09	24,70	21,13	17,41	13,66
1,90	62,90	55,55	48,72	40,89	33,45	25,80	22,10	18,25	14,36
2,00	65,14	57,57	50,52	42,45	34,77	26,88	23,06	19,07	15,05
2,10	67,34	59,55	52,29	43,98	36,07	27,93	23,99	19,87	15,72
2,20	69,50	61,49	54,02	45,47	37,33	28,95	24,89	20,66	16,38
2,30	71,61	63,38	55,72	46,94	38,57	29,96	25,78	21,42	17,02
2,40	73,68	65,24	57,38	48,37	39,78	30,94	26,65	22,17	17,64
2,50	75,71	67,07	59,01	49,77	40,96	31,89	27,49	22,90	18,25
2,60	77,71	68,85	60,60	51,14	42,12	32,83	28,32	23,61	18,85
2,70	79,67	70,61	62,17	52,49	43,26	33,75	29,13	24,30	19,42

R, м	n								
	0,025	0,0286	0,033	0,04	0,05	0,067	0,08	0,1	0,133
2,80	81,59	72,34	63,71	53,81	44,37	34,64	29,92	24,98	19,99
2,90	83,48	74,03	65,21	55,10	45,46	35,52	30,69	25,64	20,54
3,00	85,34	75,69	66,69	56,37	46,52	36,37	31,44	26,29	21,07
3,10	87,17	77,33	68,15	57,62	47,57	37,21	32,18	26,91	21,59
3,20	88,97	78,93	69,58	58,84	48,59	38,02	32,89	27,52	22,09
3,30	90,74	80,52	70,98	60,03	49,59	38,82	33,59	28,12	22,58
3,40	92,49	82,07	72,36	61,21	50,57	39,60	34,28	28,70	23,06
3,50	94,20	83,60	73,71	62,36	51,54	40,37	34,94	29,27	23,52
3,60	95,89	85,10	75,04	63,50	52,48	41,11	35,59	29,82	23,97
3,70	97,56	86,58	76,35	64,61	53,40	41,84	36,23	30,35	24,40
3,80	99,20	88,04	77,64	65,70	54,31	42,56	36,85	30,87	24,83
3,90	100,81	89,48	78,91	66,78	55,20	43,26	37,45	31,38	25,24
4,00	102,41	90,89	80,15	67,83	56,07	43,94	38,04	31,88	25,63
4,10	103,98	92,28	81,38	68,87	56,92	44,60	38,62	32,36	26,02
4,20	105,52	93,65	82,59	69,88	57,76	45,26	39,18	32,82	26,39
4,30	107,05	95,01	83,77	70,88	58,58	45,89	39,73	33,28	26,75
4,40	108,56	96,34	84,94	71,86	59,39	46,51	40,26	33,72	27,10
4,50	110,04	97,65	86,09	72,83	60,18	47,12	40,78	34,15	27,44
4,60	111,51	98,94	87,22	73,78	60,95	47,72	41,29	34,57	27,76
4,70	112,95	100,22	88,34	74,71	61,71	48,30	41,78	34,97	28,08
4,80	114,38	101,47	89,44	75,63	62,45	48,87	42,27	35,37	28,38
4,90	115,79	102,71	90,52	76,53	63,18	49,42	42,74	35,75	28,67
5,00	117,18	103,93	91,58	77,41	63,90	49,96	43,20	36,12	28,96
5,10	118,55	105,14	92,63	78,29	64,60	50,49	43,64	36,48	29,23
5,20	119,91	106,33	93,67	79,14	65,29	51,01	44,08	36,83	29,49
5,30	121,24	107,50	94,68	79,98	65,97	51,52	44,50	37,17	29,75
5,40	122,57	108,65	95,69	80,81	66,63	52,01	44,91	37,50	29,99
5,50	123,87	109,79	96,68	81,63	67,28	52,49	45,32	37,82	30,23
5,60	125,16	110,92	97,65	82,43	67,92	52,96	45,71	38,12	30,45
5,70	126,43	112,03	98,61	83,22	68,54	53,42	46,09	38,42	30,67
5,80	127,69	113,13	99,55	83,99	69,15	53,87	46,46	38,71	30,88
5,90	128,94	114,21	100,49	84,75	69,76	54,31	46,82	38,99	31,08
6,00	130,16	115,28	101,41	85,50	70,35	54,74	47,17	39,26	31,27
6,10	131,38	116,33	102,31	86,24	70,93	55,16	47,51	39,53	31,45
6,20	132,58	117,37	103,20	86,96	71,49	55,57	47,84	39,78	31,63

R, м	n								
	0,025	0,0286	0,033	0,04	0,05	0,067	0,08	0,1	0,133
6,30	133,76	118,40	104,08	87,68	72,05	55,97	48,17	40,02	31,80
6,40	134,94	119,41	104,95	88,38	72,60	56,35	48,48	40,26	31,96
6,50	136,09	120,41	105,81	89,07	73,13	56,73	48,79	40,49	32,11
6,60	137,24	121,40	106,65	89,75	73,66	57,10	49,08	40,71	32,26
6,70	138,37	122,38	107,48	90,42	74,17	57,46	49,37	40,92	32,39
6,80	139,49	123,34	108,30	91,08	74,68	57,82	49,65	41,13	32,53
6,90	140,60	124,29	109,11	91,72	75,17	58,16	49,92	41,32	32,65
7,00	141,69	125,23	109,91	92,36	75,66	58,49	50,18	41,51	32,77
7,10	142,78	126,16	110,70	92,99	76,14	58,82	50,44	41,70	32,88
7,20	143,85	127,08	111,47	93,60	76,60	59,14	50,69	41,87	32,99
7,30	144,90	127,98	112,24	94,21	77,06	59,45	50,92	42,04	33,09
7,40	145,95	128,88	112,99	94,80	77,51	59,75	51,16	42,20	33,18
7,50	146,99	129,76	113,74	95,39	77,95	60,04	51,38	42,36	33,27
7,60	148,01	130,64	114,47	95,97	78,38	60,33	51,60	42,51	33,35
7,70	149,03	131,50	115,19	96,54	78,80	60,61	51,81	42,65	33,42
7,80	150,03	132,35	115,91	97,10	79,22	60,88	52,02	42,79	33,49
7,90	151,02	133,19	116,61	97,65	79,63	61,14	52,21	42,91	33,56
8,00	152,00	134,03	117,31	98,19	80,02	61,40	52,40	43,04	33,62
8,10	152,97	134,85	117,99	98,72	80,41	61,65	52,59	43,16	33,67
8,20	153,93	135,66	118,67	99,24	80,80	61,89	52,76	43,27	33,72
8,30	154,88	136,46	119,34	99,76	81,17	62,13	52,94	43,38	33,77
8,40	155,83	137,26	120,00	100,27	81,54	62,36	53,10	43,48	33,81
8,50	156,76	138,04	120,65	100,76	81,90	62,58	53,26	43,57	33,84
8,60	157,68	138,81	121,29	101,26	82,25	62,80	53,41	43,66	33,88
8,70	158,59	139,58	121,92	101,74	82,60	63,01	53,56	43,75	33,90
8,80	159,49	140,34	122,54	102,21	82,93	63,21	53,70	43,83	33,92
8,90	160,39	141,09	123,16	102,68	83,26	63,41	53,84	43,91	33,94
9,00	161,27	141,82	123,76	103,14	83,59	63,60	53,97	43,98	33,96
9,10	162,15	142,56	124,36	103,59	83,91	63,78	54,10	44,04	33,97
9,20	163,01	143,28	124,95	104,04	84,22	63,96	54,22	44,10	33,97
9,30	163,87	143,99	125,54	104,47	84,52	64,14	54,33	44,16	33,98
9,40	164,72	144,70	126,11	104,90	84,82	64,31	54,44	44,21	33,97
9,50	165,56	145,40	126,68	105,33	85,11	64,47	54,55	44,26	33,97
9,60	166,39	146,08	127,24	105,74	85,40	64,63	54,65	44,30	33,96
9,70	167,21	146,77	127,79	106,15	85,67	64,78	54,74	44,34	33,95

R, м	n								
	0,025	0,0286	0,033	0,04	0,05	0,067	0,08	0,1	0,133
9,80	168,03	147,44	128,34	106,56	85,95	64,93	54,83	44,38	33,93
9,90	168,84	148,11	128,88	106,95	86,21	65,07	54,92	44,41	33,91
10,00	169,64	148,77	129,41	107,34	86,47	65,21	55,00	44,44	33,89
11,00	177,21	154,95	134,34	110,89	88,78	66,32	55,59	44,51	33,52
12,00	184,08	160,48	138,65	113,88	90,58	67,02	55,80	44,28	32,90
13,00	190,32	165,41	142,42	116,37	91,95	67,37	55,71	43,80	32,11
14,00	196,00	169,81	145,69	118,42	92,95	67,42	55,38	43,12	31,18
15,00	201,17	173,74	148,52	120,09	93,62	67,22	54,83	42,29	30,15
16,00	205,89	177,25	150,97	121,42	94,01	66,81	54,12	41,34	29,06
17,00	210,18	180,36	153,06	122,44	94,15	66,23	53,28	40,30	27,93
18,00	214,08	183,12	154,83	123,20	94,08	65,50	52,32	39,19	26,78
19,00	217,63	185,56	156,31	123,71	93,82	64,64	51,27	38,03	25,62
20,00	220,86	187,70	157,54	124,01	93,39	63,69	50,16	36,84	24,47

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Альтшуль А. Д.* Гидравлические сопротивления / А. Д. Альтшуль. — М. : Недра, 1970. — 224 с.
2. *Альтшуль А. Д.* Гидравлика и аэродинамика / А. Д. Альтшуль, Л. С. Животовский, Л. П. Иванов. — М. : Стройиздат, 1987. — 414 с.
3. *Гиргидов А. Д.* Техническая механика жидкости и газа : учебник / А. Д. Гиргидов. — СПб. : Изд-во СПбГТУ, 1999. — 395 с.
4. *Гиргидов А. Д.* Механика жидкости и газа (гидравлика) : учебник / А. Д. Гиргидов. — СПб. : Изд-во СПбГТУ, 2002. — 545 с.
5. *Емцев Б. Т.* Техническая гидромеханика / Б. Т. Емцев. — М. : Машиностроение, 1987. — 440 с.
6. *Идельчик И. Е.* Справочник по гидравлическим сопротивлениям / И. Е. Идельчик. — М. : Машиностроение, 1973. — 559 с.
7. *Константинов Ю. М.* Гидравлика : учебник / Ю. М. Константинов. — 2-е изд. — Киев : Выща. шк., 1988. — 398 с.
8. *Повх И. Л.* Техническая гидромеханика / И. Л. Повх. — Л. : Машиностроение. Ленингр. отд-ние, 1976.
9. Примеры расчетов по гидравлике / под ред. А. Д. Альтшуля. — М. : Стройиздат, 1977.
10. Справочник по гидравлике / под ред. В. А. Большакова. — Киев : Выща. шк., 1977. — 343 с.
11. Справочник по гидравлическим расчетам / под ред. П. Г. Киселева. — М. : Энергия, 1977. — 312 с.
12. *Талиев В. Н.* Аэродинамика вентиляции / В. Н. Талиев. — М. : Стройиздат, 1979.
13. *Чугаев Р. Р.* Гидравлика : учебник / Р. Р. Чугаев. — 4-е изд. — Л. : Энергия, 1982. — 672 с.
14. *Чугаев Р. Р.* Гидравлические термины / Р. Р. Чугаев. — М. : Высш. шк., 1974.
15. *Штеренлихт Д. В.* Гидравлика. В 2 кн. Кн. 1 : учебник / Д. В. Штеренлихт. — М. : Энергоатомиздат, 1991. — 351 с. Кн. 2. — М. : Энергоатомиздат, 1991. — 367 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
Глава 1. Гидростатика	13
1.1. Гидростатическое давление и его свойства	13
1.2. Дифференциальные уравнения равновесия жидкости	15
1.3. Равновесие жидкости под действием силы тяжести	17
1.4. Относительный покой	20
1.5. Сила давления на плоские поверхности	21
1.6. Эпюра давления. Графоаналитический способ определения силы давления и точки ее приложения	23
1.7. Давление жидкости на криволинейные поверхности	26
1.8. Плавание тел. Закон Архимеда. Остойчивость погруженных и плавающих тел	28
1.9. Равновесие газов в поле силы тяжести	31
Глава 2. Основы кинематики и динамики жидкости	34
2.1. Характеристика движения жидкости	34
2.2. Основные понятия гидродинамики и виды движения жидкости	36
2.3. Дифференциальные уравнения движения жидкости (уравнения Эйлера)	41
2.4. Уравнение неразрывности несжимаемой жидкости	43
2.5. Вихревое и потенциальное движение	47
2.6. Уравнения Эйлера в функции компонентов вихря	49
2.7. Уравнение Бернулли для установившегося движения идеальной жидкости	50
2.8. Вывод уравнения Бернулли из закона живых сил	53
2.9. Уравнение Бернулли для элементарной струйки реальной жидкости	56
2.10. Уравнение Бернулли для потока	59
2.11. Уравнение Бернулли для реальных газов	61

Глава 3. Гидравлические сопротивления	66
3.1. Виды сопротивлений	66
3.2. Основное уравнение равномерного движения	67
3.3. Два режима движения жидкости	69
3.4. Дифференциальные уравнения при движении жидкости с сопротивлениями	72
3.5. Свойства ламинарного режима	76
3.6. Особенности турбулентного движения жидкости в трубах и каналах	79
3.7. Потери напора на трение в трубах при турбулентном режиме	82
3.8. Местные сопротивления	87
Глава 4. Истечение жидкости через отверстия и насадки. Расчет коротких трубопроводов	97
4.1. Классификация гидравлических систем по сопротивлениям	97
4.2. Истечение через малое отверстие в тонкой стенке	98
4.3. Истечение из больших отверстий	102
4.4. Истечение из призматического сосуда при переменном напоре	103
4.5. Истечение жидкости через насадки	105
4.6. Короткие трубы	109
4.7. Затопленные свободные турбулентные струи	110
4.8. Истечение газов из отверстий	112
Глава 5. Гидравлические расчеты напорных трубопроводов	116
5.1. Классификация трубопроводов и расходов	116
5.2. Основные зависимости для гидравлического расчета трубопроводов	119
5.3. Задачи по расчету простого трубопровода	121
5.4. Основные положения по экономическому расчету трубопроводов	122
5.5. Гидравлический расчет разветвленной тупиковой сети	124
5.6. Расчет сложных замкнутых трубопроводов	127
5.7. Понятие о расчете кольцевых сетей	129
5.8. Применение ЭВМ для гидравлического расчета сетей	130
5.9. Гидравлический удар в трубопроводах	131
5.10. Расчет трубопроводов для газов	136
Глава 6. Движение воды в открытых руслах и каналах	142
6.1. Особенности равномерного движения жидкости в каналах	142

6.2. Определение коэффициента C в формуле Шези	143
6.3. Формы сечений каналов и их гидравлические характеристики	144
6.4. Гидравлически наиболее выгодное сечение канала	145
6.5. Гидравлический расчет каналов	146
6.6. Допустимые максимальные и минимальные скорости течения	148
6.7. Расчет каналов, имеющих замкнутый поперечный профиль	150
6.8. Неравномерное движение в открытых руслах	152
6.9. Удельная энергия сечения. Критическая глубина	154
6.10. Основное дифференциальное уравнение неравномерного движения	158
6.11. Исследование форм свободной поверхности в призматическом русле	160
6.12. Построение кривых свободной поверхности в призматическом русле	165
6.13. Построение кривых свободной поверхности воды в непризматических и призматических руслах по способу В.И.Чарномского	168
6.14. Движение воды в естественных руслах	170
6.15. Общие понятия о гидравлическом прыжке	172
6.16. Формы свободной поверхности потока при резком изменении уклона dna цилиндрического русла	177
Глава 7. Водосливы и сооружения	180
7.1. Основные понятия и классификация водосливов	180
7.2. Водослив с тонкой стенкой	183
7.3. Учет особых условий работы водослива с тонкой стенкой	184
7.4. Водосливы-расходомеры	187
7.5. Водослив с широким порогом	190
7.6. Водослив со стенкой практического профиля	195
7.7. Сопряжение бьефов	197
7.8. Определение глубины в сжатом сечении	198
7.9. Типы сопряжения бьефов	200
7.10. Общие замечания о гашении кинетической энергии в нижнем бьефе сооружения	202
7.11. Расчет водобойного колодца	203
7.12. Расчет водобойной стенки	205
7.13. Расчет перепадов и быстротоков	206
Глава 8. Движение грунтовых вод	210
8.1. Виды движения грунтовых вод	210
8.2. Основной закон фильтрации	211
8.3. Формулы для определения коэффициента фильтрации	213

8.4. Уравнение равномерного движения грунтовых вод	215
8.5. Неравномерное движение грунтовых вод	216
8.6. Приток грунтовых вод к колодцам и водосборным галереям	219
Глава 9. Гидравлическое подобие	225
9.1. Понятие геометрического, кинематического и динамического подобий	225
9.2. Критерии гидродинамического подобия	228
9.3. Анализ размерностей	235
Приложения	245
Приложение 1. Коэффициенты расхода, скорости и сжатия при истечении воды из отверстий и насадок	245
Приложение 2. Расходные характеристики для труб различных диаметров	247
Приложение 3. Значения поправочных коэффициентов a	248
Приложение 4. Коэффициент шероховатости n для неукрепленных искусственных русел	249
Приложение 5. Коэффициент шероховатости n для русел с искусственным креплением	251
Приложение 6. Ориентировочные значения коэффициента шероховатости n и показателя степени z для естественных русел	253
Приложение 7. Скоростные характеристики W , м/с, для искусственных русел произвольного сечения при различных значениях гидравлического радиуса R и коэффициента шероховатости n	255
Приложение 8. Скоростные характеристики W , м/с, для искусственных русел произвольного сечения при различных значениях гидравлического радиуса R и коэффициента шероховатости n	258
Приложение 9. Скоростные характеристики W , м/с, для естественных водотоков при различных значениях гидравлического радиуса R и коэффициента шероховатости n	261
Список литературы	265

Учебное издание

Лапшев Николай Николаевич

Гидравлика

Учебник

3-е издание, стереотипное

Редактор *Ю. А. Милютин*

Технический редактор *Н. И. Горбачева*

Компьютерная верстка: *Г. Ю. Никитина*

Корректоры *И. В. Могилевец, Н. Л. Котелина*

Изд. № 103108043. Подписано в печать 23.07.2009. Формат 60 × 90/16.
Гарнитура «Таймс». Бумага офсетная № 1. Печать офсетная. Усл. печ. л. 17,0.
Тираж 2 000 экз. Заказ № 28670.

Издательский центр «Академия». www.academia-moscow.ru
Санитарно-эпидемиологическое заключение № 77.99.60.953.Д.007831.07.09 от 07.07.2009.
129085, г. Москва, пр-т Мира, д. 101в, стр. 1, а/я 48. Тел. 8(495)648-05-07,
факс 8(495)616-00-29.

Отпечатано в соответствии с качеством предоставленных издательством
электронных носителей в ОАО «Саратовский полиграфкомбинат».
410004, г. Саратов, ул. Чернышевского, 59. www.sarpk.ru



Издательский центр «Академия»

*Учебная литература
для профессионального
образования*

Наши книги можно приобрести (оптом и в розницу)

Москва 129085, Москва, пр-т Мира, д. 101 в, стр. 1
(м. Алексеевская)
Тел./факс: (495) 648-0507, 330-1092, 334-1563
E-mail: sale@academia-moscow.ru

Филиалы: Северо-Западный

198020, Санкт-Петербург, наб. Обводного канала,
д. 211-213, литер «В»
Тел.: (812) 251-9253, 252-5789, 575-3229
Факс: (812) 251-9253, 252-5789
E-mail: fspbacad@peterstar.ru

Приволжский

603005, Нижний Новгород, ул. Алексеевская, д. 24г и 24д
Тел.: (8312) 18-1678
E-mail: pf-academia@bk.ru

Уральский

620144, Екатеринбург, ул. Щорса, д. 92а, корп. 4
Тел.: (343) 257-1006
Факс: (343) 257-3473
E-mail: academia-ural@mail.ru

Сибирский

630108, Новосибирск, ул. Станционная, д. 30
Тел. / факс: (383) 300-1005
E-mail: academia_sibir@mail.ru

Дальневосточный

680014, Хабаровск, Восточное шоссе, д. 2а
Тел. / факс: (4212) 27-6022,
E-mail: filialdv-academia@yandex.ru

Южный

344037, Ростов-на-Дону, ул. 22-я линия, д. 5/7
Тел.: (863) 253-8566
Факс: (863) 251-6690
E-mail: academia-rostov@skytc.ru

Представительство в Республике Татарстан

420094, Казань, Ново-Савиновский район,
ул. Голубятникова, д. 18
Тел. / факс: (843) 520-7258, 556-7258
E-mail: academia_kazan@mail.ru

www.academia-moscow.ru



УВАЖАЕМЫЕ ЧИТАТЕЛИ!
ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР
«АКАДЕМИЯ»

ПРЕДЛАГАЕТ ВАШЕМУ ВНИМАНИЮ
СЛЕДУЮЩИЕ КНИГИ:

В. Я. БЕСПАЛОВ, Н. Ф. КОТЕЛЕНЕЦ

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ МАШИНЫ

Объем 320 с.

В учебном пособии рассматриваются трансформаторы и электрические машины, используемые в современной технике. Показана их решающая роль в генерации, распределении, преобразовании и утилизации электрической энергии. Даны основы теории, характеристики, режимы работы и примеры конструкций и применения электрических генераторов, трансформаторов и двигателей.

Для студентов высших учебных заведений. Может быть использовано в системе повышения квалификации и переподготовки инженеров-электромехаников и инженеров смежных специальностей.

И. Я. БРАСЛАВСКИЙ, З. Ш. ИШМАТОВ, В. Н. ПОЛЯКОВ

**ЭНЕРГОСБЕРЕГАЮЩИЙ АСИНХРОННЫЙ
ЭЛЕКТРОПРИВОД**

Объем 256 с.

В учебном пособии изложены основные сведения о наиболее распространенных классах современных систем регулируемых асинхронных электроприводов и их энергетических показателях. Рассмотрены в общем виде возможности снижения энергопотребления в асинхронных электроприводах при работе в установившихся и переходных режимах. Обоснована целесообразность автоматизации энергоемких технологических процессов с использованием регулируемых асинхронных электроприводов, что позволяет удовлетворять возрастающие технологические требования и одновременно решать задачи энергосбережения. Приведены рациональные структуры энергосберегающих автоматизированных частотно-регулируемых асинхронных электроприводов для типовых производственных механизмов. Даны количественные оценки снижения энергопотребления.

Для студентов высших учебных заведений.