А. И. БОГОМОЛОВ, д-р техн. наук,
В. С. БОРОВКОВ, Ф. Г. МАЙРАНОВСКИЙ,
кандидаты технических наук

ВЫСОКОСКОРОСТНЫЕ ПОТОКИ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

ДОПУЩЕНО
МИНИСТЕРСТВОМ ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ СССР
В КАЧЕСТВЕ УЧЕБНОГО ПОСОБИЯ
ДЛЯ СТУДЕНТОВ ГИДРОТЕХНИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ
ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

МОСКВА СТРОЙИЗДАТ 1979

ББК 30.123
Б74
УДК 532.543(075.8)

Рецензенты: кафедра гидравлики Московского ордена Ленина энергетического института (зав. кафедрой д-р техн. наук проф. Б. Т. Емцев); д-р техн. наук проф. *Н. А. Картвелишвили.*

Богомолов А. И. и др.

Б74 Высокоскоростные потоки со свободной поверхностью: Учеб. пособие для студентов вузов, обучающихся по спец. «Гидротехника» / А. И. Богомолов, В. С. Боровков, Ф. Г. Майрановский. — М.: Стройиздат, 1979. — 347 с., ил.

Дан анализ особенностей кинематической и турбулентной структуры высокоскоростных потоков со свободной поверхностью. Рассмотрено влияние параметра кинатичности на гидродинамические характеристики потоков, а также их динамическое воздействие на элементы сооружений. Освещены вопросы, связанные с неустойчивостью потоков и их управлением. Описаны методика и техника экспериментальных исследований и основные принципы моделирования. Даны расчеты параметров потоков и элементов сооружений. Пособие предназначено для студентов гидротехнических специальностей вузов.

Б $\frac{30210\text{-}378}{047(01)\text{-}79}$ 247-79. 2105000000

ББК 30.123
532

ПРЕДИСЛОВИЕ

Задачи повышения уровня подготовки инженерных кадров, поставленные XXV съездом КПСС, требуют совершенствования учебных программ и создания новых учебников и учебных пособий. В соответствии с Конституцией СССР подготовка научных кадров должна проводиться на основе внедрения последних достижений науки в учебный процесс.

Большая работа по повышению уровня преподавания курса гидравлики для гидротехников на протяжении многих лет проводилась д-ром техн. наук проф. А. И. Богомоловым. Итогом этой работы явился учебник А. И. Богомолова и К. А. Михайлова «Гидравлика», изд. 2-е, перераб. и доп. (М., Стройиздат, 1972). Хотя этот учебник можно считать наиболее полным, ряд вопросов, связанных с движением высокоскоростных потоков, освещен в нем недостаточно подробно.

Необходимость создания настоящего учебного пособия объясняется двумя основными причинами. Первая из них связана с уточнением гидравлических расчетов высоконапорных гидротехнических сооружений, туннельных водосбросов, а также безнапорных труб, широко используемых в дорожном строительстве. Методы традиционной гидравлики не всегда позволяют эффективно решать наиболее сложные инженерные задачи, связанные с расчетом высокоскоростных потоков. Именно этим объясняется появление в последнее время монографий на эту тему, среди которых особого внимания заслуживают работы Н. А. Картвелишвили, Б. Т. Емцева, В. М. Лятхера, Л. И. Высоцкого, а также ряд работ Т. Г. Войнич-Сяноженцкого. Сложность рассматриваемых явлений потребовала от исследователей широкого использования математического аппарата теоретической гидромеханики, статистической теории турбулентности и ряда других сложных математических методов.

Высокоскоростные потоки обладают рядом специфических особенностей, таких как аэрация, катящиеся волны и др. Трудности экспериментального исследования этих потоков вызвали ряд противоречивых мнений о влиянии высокой кинетичности потока на его структуру и гидравлическое сопротивление. Необходимость изложения вопросов гидравлики высокоскоростных потоков с единых позиций, с четким определением их особенностей и места в общем классе гидравлических явлений послужила второй причиной создания учебного пособия.

По замыслу проф. А. И. Богомолова настоящее учебное пособие должно способствовать широкому освоению новых методов решения задач гидравлики высокоскоростных потоков. К сожалению, безвременная кончина А. И. Богомолова не позволила ему самому в полной мере воплотить этот замысел. Материалы проф. А. И. Богомолова использованы при написании некоторых разделов книги. Главы 11 и 12 написаны канд. техн. наук В. В. Холодковым.

Отдельные части рукописи при ее написании обсуждались с д-ром техн. наук проф. А. Д. Альтшулем. Авторы приносят благодарность д-ру техн. наук проф. Н. А. Картвелишвили и коллективу кафедры гидравлики МЭИ за ряд ценных практических замечаний, сделанных ими при рецензировании рукописи. Большая работа, выполненная канд. техн. наук доц. Н. В. Данильченко по научному редактированию пособия, способствовала улучшению содержания книги и методики изложения ряда вопросов.

В пособии использованы некоторые оригинальные материалы исследований инженеров В. Д. Корывановой, Т. Д. Крашенинниковой и Т. Н. Халабаевой. Авторы выражают им признательность за большую помощь при подготовке рукописи к печати.

ОСНОВНЫЕ УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

B — ширина канала поверху;
b — ширина канала;
c — скорость динамической волны;
C_{D_0} — коэффициент гидродинамического сопротивления одиночного тела, обтекаемого безграничным потоком с постоянной скоростью;
C_f — коэффициент гидродинамического сопротивления поверхности;
$C_к$ — коэффициент гидродинамического сопротивления капли;
C_k — коэффициент гидродинамического сопротивления выступов шероховатости в условиях их взаимного влияния;
C_{k0} — коэффициент гидродинамического сопротивления одиночного выступа шероховатости;
d — диаметр трубы;
Fr — число Фруда;
G — вес;
g — ускорение свободного падения;
H — глубина потока; напор;
h — глубина нижнего динамического слоя;
$h_{кр}$ — критическая глубина;
$i = \sin\theta$ — уклон дна канала;
$i_а$ — уклон, соответствующий началу аэрации потока;
k — геометрическая высота выступов шероховатости; коэффициент корреляции;
$k_{ск}$ — средняя высота выступа шероховатости;
k_s — эквивалентная песочная шероховатость;
L — характерная длина; макромасштаб турбулентности;
l — масштаб пульсаций;
m — коэффициент расхода водослива;
n — частота пульсаций;
p — давление;
$\overline{p}$ — осредненное по времени местное давление;
p' — пульсация давления;
Q — расход воды;
q — удельный расход воды (на единицу ширины канала);
R — гидравлический радиус;
S — спектральная плотность;
T — характерный период; температура;
t — время;
u — средняя по сечению скорость течения;
$\overline{u}$ — осредненная по времени местная скорость течения;
u_* — динамическая скорость;
$u_{кр}$ — критическая скорость;
u_x, u_y, u_z — продольная, поперечная и вертикальная компоненты скорости течения;
u'_x, u'_y, u'_z — пульсационные продольная, поперечная и вертикальная компоненты скорости течения;
v — скорость непрерывной (кинематической) волны;
W — объем;
x, y, z — продольная, поперечная и вертикальная координаты;
α — воздухосодержание; волновой угол; корректив кинетической энергии;

$\doteq b/H$ — относительная ширина канала; корректив количества движения;

γ — коэффициент перемежаемости;

δ — толщина пограничного слоя;

δ_1 и δ_2 — толщина вытеснения и потери импульса;

θ — угол наклона дна канала к горизонту;

λ — коэффициент гидравлического сопротивления;

ν — кинематическая вязкость;

$\nu_т$ — турбулентная вязкость;

ρ — плотность жидкости;

$\rho_а$ — плотность воздуха;

σ — коэффициент поверхностного натяжения;

τ_0 и $\tau_в$ — касательные напряжения на дне и на свободной поверхности потока;

φ — потенциал скорости;

χ — смоченный периметр;

ψ — функция тока;

ω — площадь живого сечения.

ГЛАВА 1. ОСНОВНЫЕ ОСОБЕННОСТИ ВЫСОКОСКОРОСТНЫХ ОТКРЫТЫХ ПОТОКОВ

§ 1. Высокоскоростные потоки и задачи инженерных расчетов гидротехнических сооружений

В гидравлике открытые потоки принято разделять на спокойные — докритические (при $Fr = u^2/gH < 1$) и бурные — сверхкритические (при $Fr > 1$). Однако переход через критическое значение числа Фруда ($Fr_{кр} = 1$) зачастую не вызывает изменения структуры потока, гидравлических сопротивлений и распределения скоростей. Изменение качественного состояния потока может происходить только под влиянием новых, ранее не действовавших сил в самом потоке или на его границах. Так, например, переход от ламинарного режима движения к турбулентному сопровождается действием новых сил — турбулентных касательных напряжений.

Для открытого высокоскоростного потока возникновение новых дополнительных сил связано с возмущениями, проявляющимися на его свободной поверхности. Эти возмущения приводят к локальным искривлениям свободной поверхности, вызывают аэрацию, образование катящихся волн и другие сопутствующие явления, что сопровождается действием дополнительных сил гравитации, поверхностного натяжения, сил аэродинамического сопротивления.

Потоки, характеристики которых зависят от условий на свободной поверхности, выделяются в особую категорию и называются высокоскоростными.

Аналогично в газовой динамике высокоскоростными потоками газа называются такие потоки, в которых появляются дополнительные силы, связанные со сжимаемостью газа. Эти силы становятся заметными в околокритическом, критическом и сверхкритическом режимах (критическим в газовой динамике называется режим, при котором скорость газа равна скорости звука).

В настоящем учебном пособии рассматриваются высокоскоростные открытые потоки главным образом в гидротехнических сооружениях. Ряд общих закономерностей, установленных для высокоскоростных потоков в этих сооружениях, может быть эффективно использован и в других областях инженерной практики (в гидромелиорации, химической технологии, тепловой и атомной энергетике и гидроэнергетике) с учетом конкретной специфики рассматриваемых потоков.

Высокоскоростные открытые потоки наблюдаются в таких гидротехнических сооружениях, как водосливы высоких плотин, быстротоки, водосбросные гидротехнические туннели с большими уклонами, а также управляющие устройства различного назначения.

Рассмотрим конструктивные особенности и основные эксплуатационные характеристики поверхностных водосливов высоконапорных плотин. Поскольку особенности высокоскоростных потоков наиболее отчетливо проявляются при значительной протяженности водосливного тракта, ограничимся рассмотрением водосливов высоких гравитационных или контрфорсных плотин, которые часто в гидравлическом отношении выполняются одинаково.

Характерным примером может служить водослив Братской ГЭС (рис.1.1). Оголовок, очертание которого выполнено по координатам Кригера — Офицерова, плавно сопрягается с плоской водосливной поверхностью. Особенностью водослива является большая протяженность водосливной поверхности, превышающая 100 м. Верхняя часть водослива разделена на пролеты быками. Водосливная поверхность плотины, наклоненная к горизонту под углом 52°, заканчивается носком-трамплином, отбрасывающим поток на значительное расстояние с тем, чтобы исключить опасность размыва основания плотины.

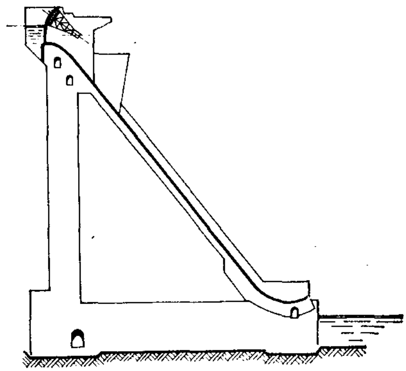


РИС. 1.1

Стремление увеличить напор на водосливе и снизить протяженность водосливного фронта (особенно в условиях узких каньонов) приводит к увеличению скоростей потока и удельных расходов воды, сбрасываемой через водослив. Так, для водослива Братской ГЭС удель-

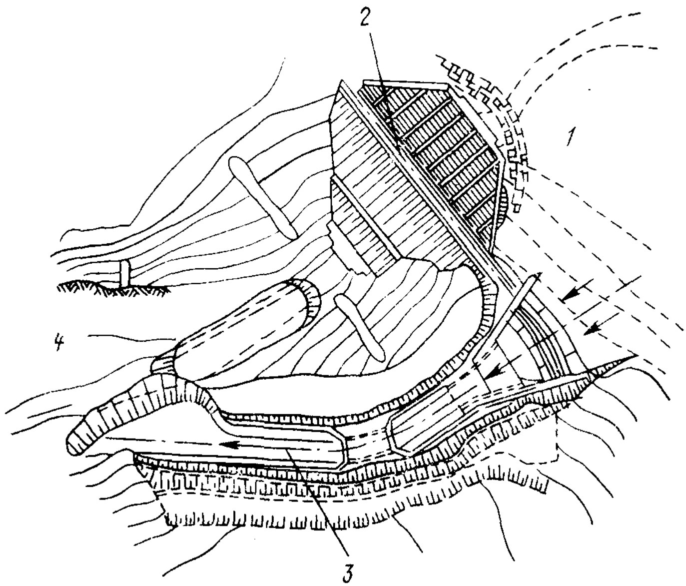


РИС. 1.2

1 — верхний бьеф; 2 — плотина; 3 — быстроток; 4 — нижний бьеф ный расход составляет 30 $м^2/с$ при скорости потока свыше 35 м/с на сходе с носка-трамплина. Близкие параметры имеет поток на водосливе Красноярской ГЭС. На водосливе Усть-Каменогорской ГЭС при напоре 35,8 м на носке-трамплине удельные расходы достигают 47 $м^2/с$, а скорости потока — 25 м/с.

Особенности высокоскоростных потоков, связанные с возникновением и развитием возмущений на свободной поверхности потока, особенно четко проявляются в условиях течения на быстротоке (рис. 1.2). Быстроток представляет собой канал прямоугольного или трапецеидального поперечного сечения с уклоном больше критического. Так как быстроток используется обычно в качестве берегового водосброса, уклон его определяется очертанием береговых склонов. Входная часть быстротока выполняется в виде водослива практического профиля или широкого порога.

Водосливы в зависимости от ширины быстротока могут иметь один или несколько пролетов. Вода к водосливу обычно подводится подходным каналом, имеющим малый уклон. Вследствие малой скорости течения в подход-

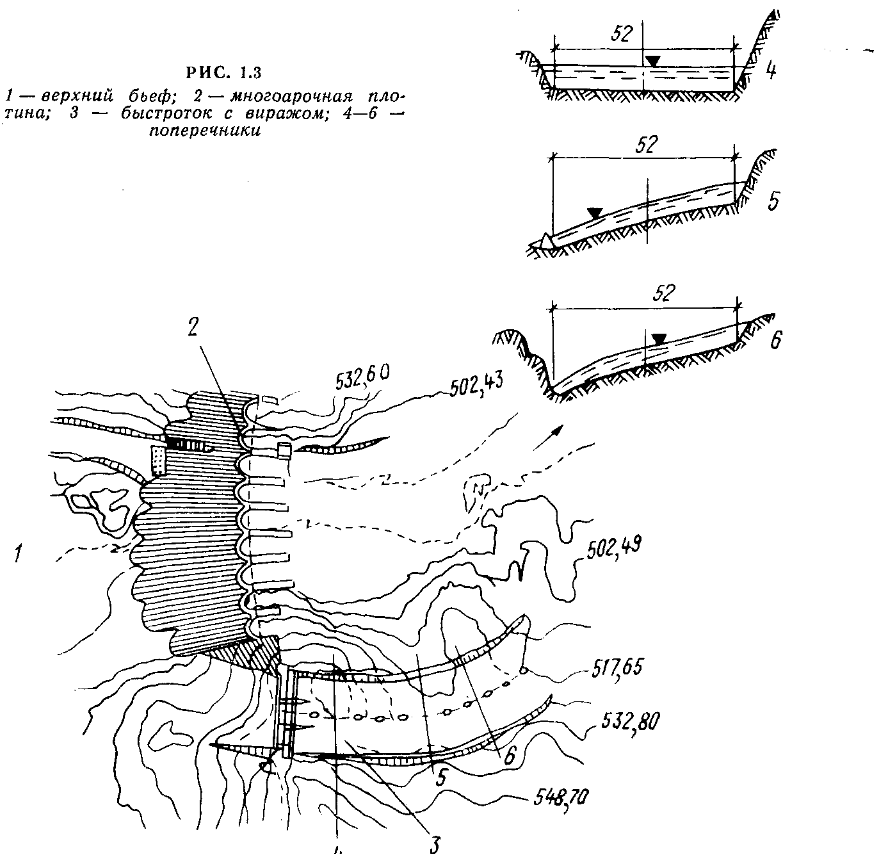


РИС. 1.3

1 — верхний бьеф; 2 — многоарочная плотина; 3 — быстроток с виражом; 4—6 — поперечники ном канале его дно и откосы не имеют крепления за исключением короткого участка, примыкающего к водосливу. В зависимости от назначения быстротока водослив на входе в быстроток может быть оборудован затворами или автоматически сбрасывает воду при повышении уровня водохранилища. Трасса быстротока в плане может быть прямолинейной либо изогнутой в зависимости от конкретных условий гидроузла (рис. 1.3). Ширина быстротока в зависимости от задач, определяемых условиями строительства, может быть постоянной либо уменьшающейся по течению. Сужение быстротока несколько осложняет сопряжение сбросного потока с нижним бьефом, но во многих случаях экономически оправдано, поскольку снижает объем работ по сооружению быстротока. Сопряжение быстротока с нижним бьефом плотины осуществляется либо консольным сбросом и носком-трамплином, либо затоплением прыжка с помощью водобойного колодца.

По длине быстротока возможны его сужение или расширение, повороты, сопряжения участков с различными уклонами дна и т. д. Расчет таких участков относится к классу задач управления высокоскоростным потоком. Решение этих задач направлено на отыскание таких геометрических форм управляющих устройств, которые обеспечили бы движение высокоскоростного потока с заданными параметрами. Параметры потока назначаются обычно из условий безаварийной работы проектируемой конструкции и лежащих ниже участков русла. Проектирование рациональных управляющих устройств является актуальной задачей гидротехнического и дорожно-транспортного строительства. Согласно Л. И. Высоцкому [3], различают несколько способов воздействия на высокоскоростной поток: с помощью боковых стенок при плоском дне, с помощью дна и стенок криволинейной формы.

По конструктивному исполнению управляющие устройства с плоским дном могут быть с криволинейными и ломаными в плане стенками. Криволинейное дно может иметь цилиндрическую форму либо двоякую кривизну.

По управляющему воздействию на поток конструкции делятся на виражи, рассеивающие трамплины, трамплины-виражи, трамплины специального назначения, переходные участки

С помощью виража (см. рис. 1.3) поток поворачивается на заданный угол и переводится в отводящее русло с заданными параметрами. Рассеивающие трамплины (рис. 1.4) и трамплины специального назначения служат для отброса потока от сооружения на возможно большее расстояние с одновременной деформацией потока для эффективного гашения его избыточной энергии. Трамплины-виражи (рис. 1.5) применяются для расширения потока и отброса его в сторону от сооружения. Кроме того, они обеспечивают гашение энергии потока затопленным прыжком, возникающим в ковшовой зоне A при малых расходах. Переходные участки сопрягают части быстротоков, имеющие различные геометрические параметры (ширину, форму сечения, уклон и т п.).

Кроме указанных выше задач расчета параметров управляющих устройств при их проектировании необходимо решать вопросы кавитационной стойкости материалов, динамического воздействия потока на элементы управляющих устройств, аэрации потока на подходе и в их пределах.

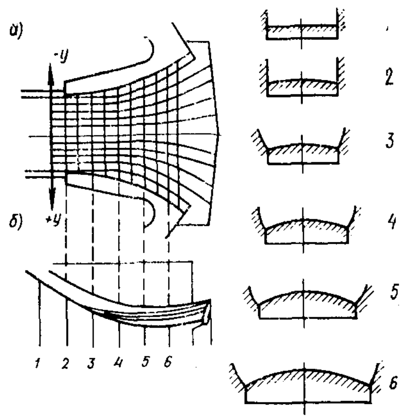


РИС. 1.4

а — план рассеивающего трамплина; б — разрез рассеивающего трамплина; 1—6 — поперечные сечения

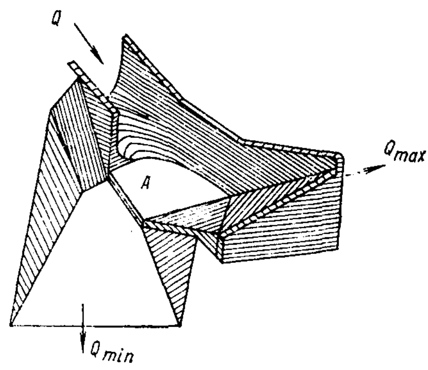


РИС. 1.5

Проблема расчета параметров высокоскоростного потока становится особенно острой при проектировании безнапорных туннельных водосбросов на гидроузлах с высокими напорами (например, на Чиркейском и Рогунском гидроузлах).

На рис. 1.6 показан разрез по эксплуатационному водосбросу Чиркейского гидроузла. Водосброс состоит из 510-м туннеля диаметром около 12 м, открытого канала длиной 160 м и концевого водосброса, выполняющего функции носка-трамплина. Напор над уровнем носка-трамплина составляет 160 м. Водосливная грань входного оголовка туннеля выполнена по координатам Кригера—Офицерова. Входной оголовок имеет один пролет шириной 22 м, перекрываемый сегментным затвором. Входная часть туннеля на длине 75 м постепенно сужается от 20,5 до 11 м. Водосбросный туннель выполнен прямолинейным в плане. Особенностью туннеля является поворот в вертикальной плоскости на угол около 50°. Этот поворот, выполненный с радиусом закругления $R = 60$ м, сопрягает участок крутого падения ($i = \sin\theta = 0{,}82$) с участком пологого падения ($i = 0{,}076$). Длина крутопадающей части туннеля $L_1 \approx 100$ м ($L_1/D \approx 10$), поэтому характеристики течения на этом участке переменны по длине.

Возникновение и нарастание аэрации потока и образование стоячих волн приводят к увеличению его глубины и могут вызвать занапоривание туннеля. При высокой скорости течения — свыше 40 м/с нестабильность режима работы туннеля вследствие возникновения мощных динамических нагрузок может привести к разрушению обделки туннеля.

Таким образом, для проектирования безнапорных гидротехнических туннелей, водосливов высоких плотин, быстротоков и управляющих устройств необходим детальный анализ кинематической структуры, динамики, турбулентности, волнообразования и аэрации высокоскоростного потока.

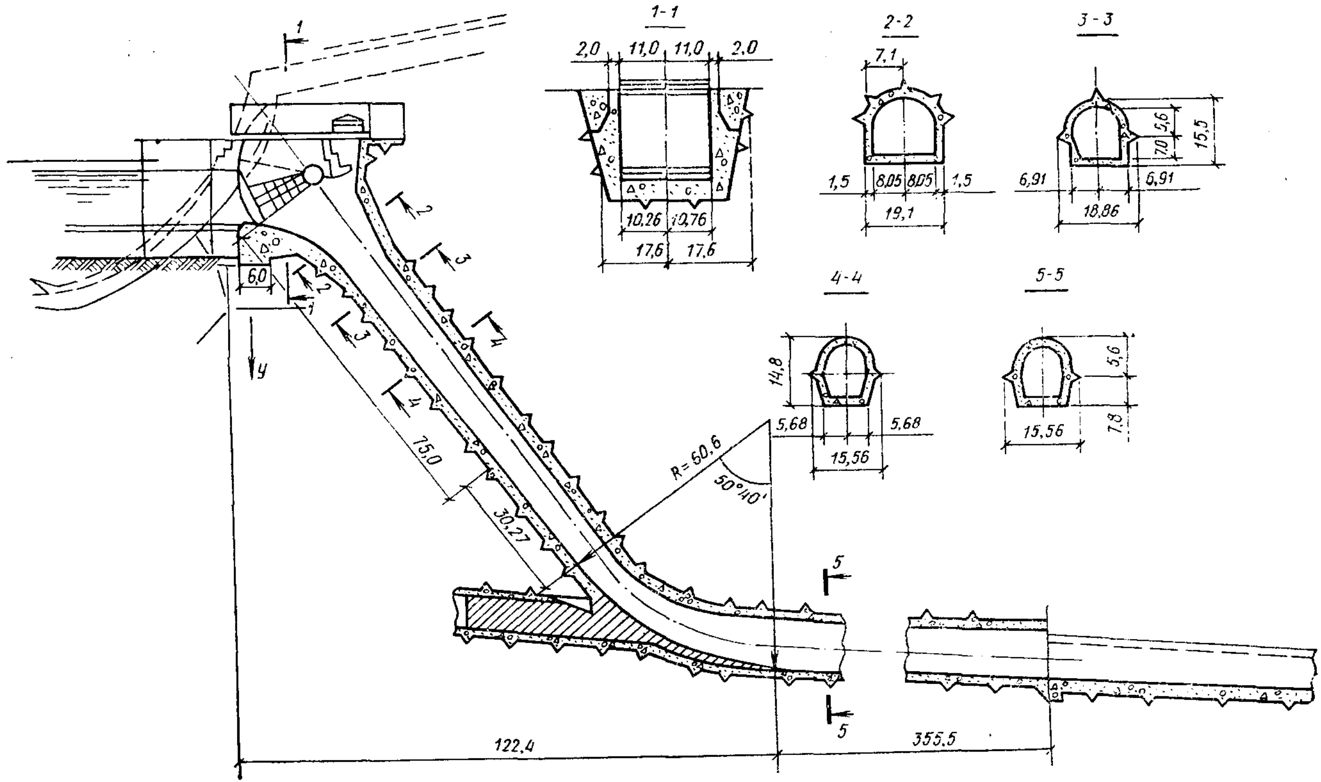

1-1
2,0
11,0
11,0
2,0
10,26
10,76
17,6
17,6
2-2
7,1
1,5
8,05
8,05
1,5
19,1
3-3
5,6
7,0
15,5
6,91
6,91
18,86
4-4
14,8
5,68
5,68
15,56
5-5
5,6
7,8
15,56
R=60,6
50°40'
75,0
30,27
6,0
y
122,4
355,5

РИС. 1.6

§ 2. Параметры, определяющие движение высокоскоростных потоков

Рассмотрим критерии, определяющие движение открытых потоков вообще и высокоскоростных потоков в частности. Как известно, движение жидкости в плоском двухмерном потоке описывается следующими дифференциальными уравнениями, вывод которых приводится в курсах гидравлики [1]:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u_x}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_z\frac{\partial u_x}{\partial z}=gi-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right);\\
&\frac{\partial u_z}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_z}{\partial x}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}=-g\sqrt{1-i^2}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\\
&\qquad+\nu\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right);\\
&\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=0.
\end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

Первые два уравнения в системе (1.1) представляют собой уравнения Навье—Стокса для случая, когда из всех массовых сил учитывается только сила свободного падения; третьим уравнением в системе является уравнение неразрывности. При этом предполагается, что ось x направлена вдоль потока, ось z — по нормали к дну. Изменения по оси y, направленной поперек потока, в данном случае не рассматриваются. В первых двух уравнениях системы слагаемые в левой части представляют собой проекции ускорения на оси x и z соответственно. Первое и второе слагаемые в правой части — проекции сила тяжести и сил давления на эти же оси. Последнее слагаемое в правой части представляет собой проекцию сил вязкости, отнесенных к единице массы жидкости.

Произведем оценку величины членов, входящих в уравнения, используя метод, рассмотренный подробно А. А. Гухманом. Согласно этому методу при сравнительной оценке величины производных можно использовать следующее правило:

$$\frac{d^n y}{dx^n}\sim\frac{y}{x^n}, \tag{1.2}$$

где символ «$\sim$» обозначает равенство по порядку величин.

Тогда

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}\sim\frac{u_x}{x}\ \text{и}\ \frac{\partial u_z}{\partial z}\sim\frac{u_z}{z}.$$

Поскольку величина z имеет порядок глубины потока $z\sim H$, а величина x имеет порядок длины канала $x\sim l$, находим: $\frac{\partial u_x}{\partial x}\sim\frac{u_x}{l}$ и $\frac{\partial u_z}{\partial z}\sim\frac{u_z}{H}$.

Из уравнения неразрывности следует, что

$$u_x/l\sim u_z/H. \tag{1.3}$$

Знаки слагаемых, входящих в уравнение, не учитываем, поскольку слагаемые сравниваются по абсолютной величине. Аналогично вместо первых двух уравнений системы (1.1) получим:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{u_x}{t}+u_x\frac{u_x}{l}+u_z\frac{u_x}{H}\sim gi-\frac{1}{\rho}\frac{p}{l}+\nu\left(\frac{u_x}{l^2}+\frac{u_x}{H^2}\right);\\ &\frac{u_z}{t}+u_x\frac{u_z}{l}+u_z\frac{u_z}{H}\sim -g\sqrt{1-i^2}-\frac{1}{\rho}\frac{p}{H}+\nu\left(\frac{u_z}{l^2}+\frac{u_z}{H^2}\right), \end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

где t — время, равное по порядку величин отношению l/u_x.

Согласно выражению (1.3) найдем, что $u_z\sim u_xH/l$. Подставляя полученные значения u_z и t в уравнения (1.4), находим:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{u_x^2}{l}+\frac{u_x^2}{l}+\frac{u_x^2}{l}\sim gi-\frac{1}{\rho}\frac{p}{l}+\nu\left(\frac{u_x}{l^2}+\frac{u_x}{H^2}\right);\\ &\frac{u_x^2}{l}\frac{H}{l}+\frac{u_x^2}{l}\frac{H}{l}+\frac{u_x^2}{l}\frac{H}{l}\sim -g\sqrt{1-i^2}-\\ &-\frac{1}{\rho}\frac{p}{H}+\nu\left(\frac{u_x}{l^2}\frac{H}{l}+\frac{u_x}{H^2}\frac{H}{l}\right). \end{aligned}\right\} \tag{1.5}$$

Так как $H\ll l$, отбросим в системе уравнений (1.5) члены высшего порядка малости. В первом уравнении исключается член $u_x/l^2\ll u_x/H^2$. Во втором уравнении исключим все слагаемые в левой части и слагаемое, содержащее коэффициент вязкости, в правой части. С учетом сделанных оценок исходные дифференциальные уравнения движения примут вид:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u_x}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_z\frac{\partial u_x}{\partial z}=gi-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2};\\ &\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}=-g\sqrt{1-i^2}. \end{aligned}\right\} \tag{1.6}$$

Второе уравнение позволяет найти изменение давления по нормали к дну канала.

Для равномерного движения левая часть первого уравнения обращается в нуль и градиент давления также равен нулю, поэтому можно записать, что

$$gi=-\nu\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}. \tag{1.7}$$

Величина $-\nu\dfrac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}$ представляет собой производную касательных напряжений $\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial\tau}{\partial z}$. Таким образом,

$$gi=\frac{1}{\rho}\frac{\partial\tau}{\partial z}, \tag{1.8}$$

Это уравнение справедливо как для ламинарного, так и для турбулентного движения (касательные напряжения при турбулентном движении необходимо рассчитывать с учетом турбулентной вязкости) [1].

Согласно изложенному выше, получим:

$$gi \sim \frac{1}{\rho}\,\frac{\tau}{H}\,.$$

Деля обе части на u_x^2/H, приведем это соотношение к безразмерному виду:

$$\frac{i}{\mathrm{Fr}} \sim \frac{\tau}{\rho u_x^2}\,,$$

где

$$\mathrm{Fr} = \frac{u^2}{gH} \sim \frac{u_x^2}{gH}\,.$$

Как известно,

$$\frac{\tau}{\rho u_x^2} \sim \lambda, \tag{1.9}$$

поэтому $i/\mathrm{Fr} \sim \lambda$.

Таким образом, при равномерном течении параметры потока определяются уклоном канала, числом Фруда и коэффициентом гидравлического сопротивления.

Выполним анализ системы уравнений (1.6) для неравномерного движения. Из второго уравнения системы (1.6) найдем:

$$p \sim -\rho g H \sqrt{1-i^2}.$$

После подстановки этого соотношения в первое уравнение с учетом того, что

$$\nu\,\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} = \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial \tau}{\partial z} \sim \frac{1}{\rho}\,\frac{\tau}{H}\,,$$

получим:

$$\frac{u_x^2}{l} \sim gi + \frac{gH}{l}\sqrt{1-i^2} - \frac{1}{\rho}\,\frac{\tau}{H}\,.$$

Для перехода к безразмерному виду умножим обе части полученного соотношения на H/u_x^2:

$$\frac{H}{l}\left(1 - \frac{\sqrt{1-i^2}}{\mathrm{Fr}}\right) \sim \frac{1}{\mathrm{Fr}}\,i - \lambda.$$

Иначе, вводя для рассматриваемого случая x вместо l, имеем:

$$\frac{i}{\mathrm{Fr}} \sim \lambda + \frac{H}{x}\left(1 - \frac{\sqrt{1-i^2}}{\mathrm{Fr}}\right). \tag{1.10}$$

Сравнивая выражения (1.9) и (1.10), видим, что в условиях неравномерного движения проявляется дополнительное влияние числа Фруда, зависящее от степени неравномерности H/x.

Интегрированием уравнений (1.6) и уравнения неразрывности по координате z в пределах от 0 до H может быть получено уравнение импульсов, которое в свою очередь сводится к уравнению Бернулли. Известно, что уравнение Бернулли можно получить также на основе баланса энергии, как это обычно принято в инженерной гидравлике. В уравнении Бернулли сопоставляется энергия потока для двух сечений относительно некоторой общей плоскости сравнения. Энергию потока, определяемую относительно плоскости, проходящей через нижнюю точку сечения, принято называть энергией сечения. Определим энергию сечения при неравномерном движении в канале единичной ширины с большим уклоном дна (рис. 1.7). Энергия сечения AB складывается из потенциальной энергии и кинетической. Рассмотрим удельную энергию, т. е. энергию, отнесенную к единице веса жидкости, проходящей через сечение AB. Удельная потенциальная энергия складывается из энергии положения и энергии гидростатического давления. В пределах рассматриваемого сечения в окрестности точки M, расположенной на расстоянии z от дна канала, выделим элементарную площадку высотой dz. Вес жидкости, проходящей через эту площадку в единицу времени,

$$dG = \rho g u dz \cdot 1. \tag{1.11}$$

Разложим полную скорость u на две составляющие: u_x — нормальную к сечению AB и u_z — тангенциальную. Тогда $u^2 = u_x^2 + u_z^2$. Поскольку u_z не переносит жидкость через рассматриваемое сечение, в выражение (1.11) следует вместо u подставлять величину u_x:

$$dG = \rho g u_x \, dz \cdot 1. \tag{1.12}$$

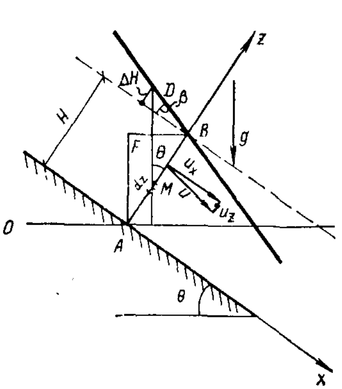


РИС. 1.7

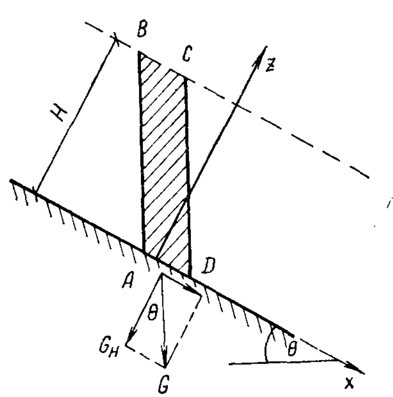


РИС. 1.8

В общем случае неравномерного течения со значительным изменением глубины по направлению x, т. е. при больших значениях dH/dx, составляющая скорости u_x у поверхности может отличаться от u_x вблизи дна даже при отсутствии трения. В дальнейшем будем считать, что при отсутствии трения продольная составляющая скорости u_x по высоте сечения не изменяется [4]. Экспериментальные данные по распределению скоростей на входе в канал с большим уклоном подтверждают это допущение.

Для элементарной площадки dz в окрестности произвольной точки M энергия положения относительно плоскости сравнения $0 - 0$ равна:

$$dGz \cos\theta = \rho g u_x \, dz \cdot 1 z \cos\theta. \tag{1.13}$$

Как известно, энергия давления в потоке жидкости связана с составляющей веса, нормальной к дну канала. При равномерном движении в канале с большим уклоном (рис. 1.8) вес столба жидкости, расположенного над единичной площадкой AD, пропорционален площади параллелограмма $ABCD$, которая равна $AD \times H = 1 \times H$. Составляющая веса, нормальная к дну, $G_н = \gamma H \cdot 1 \times 1 \cos\theta$. Таким образом, сила давления на единичную площадку равна $\gamma H \cos\theta$. Энергия давления в окрестности точки M (см. рис. 1.7) при равномерном движении

$$Э_д = \rho g u_x \, dz \cdot 1 \, (H - z) \cos\theta. \tag{1.14}$$

Суммарная потенциальная энергия жидкости, проходящей через элементарную площадку, при равномерном движении

$$\rho g u_x \, dz \cdot 1 z \cos\theta + \rho g u_x \, dz \cdot 1 \, (H - z) \cos\theta = \rho g u_x \cos\theta H dz. \tag{1.15}$$

Удельная потенциальная энергия сечения при равномерном движении

$$Э_п = \frac{1}{G} \int_0^H \rho g u_x \cos\theta H dz = \frac{1}{G} \rho g u_x \cos\theta H^2. \tag{1.16}$$

Вес жидкости, проходящей через рассматриваемое сечение AB в единицу времени,

$$G = \int_0^H \rho g u_x \, dz = \rho g u_x H. \tag{1.17}$$

Подставляя выражение (1.17) в формулу (1.16), найдем:

$$Э_п = \cos\theta H. \tag{1.18}$$

Результат, полученный в предположении постоянства величины u_x по живому сечению, не изменился бы при любом законе изменения u_x. Действительно,

$$Э_п = \frac{\int_0^H \rho g u_x \cos\theta H dz}{\int_0^H \rho g u_x \, dz} = \frac{\rho g \cos\theta H \int_0^H u_x \, dz}{\rho g \int_0^H u_x \, dz} = \cos\theta H.$$

Следует отметить, что удельная потенциальная энергия сечения равномерного высокоскоростного потока, движущегося в канале с большим уклоном, определяется не только глубиной потока, но также зависит и от уклона канала [4].

При неравномерном движении энергия давления может отличаться от энергии давления, определенной выше. В этом случае энергия давления в окрестности точки M (см. рис. 1.7)

$$dЭ_п = dG\,[(H-z)\cos\theta + \Delta H\cos\theta]. \tag{1.19}$$

Отрезок ΔH с точностью до величины второго порядка малости (см. рис. 1.7) можно определить как

$$\Delta H = (H-z)\,\mathrm{tg}\,\beta\,\mathrm{tg}\,\theta, \tag{1.20}$$

где β — угол наклона свободной поверхности к линии дна канала.

При этом участок кривой свободной поверхности BD, вследствие его малой длины, можно считать прямолинейным. После подстановки соотношения (1.20) в уравнение (1.19) с учетом выражения (1.12) получим:

$$dЭ_п = \rho g u_x\,dz\cdot 1[(H-z)+(H-z)\,\mathrm{tg}\,\beta\,\mathrm{tg}\,\theta]\cos\theta. \tag{1.21}$$

Суммарная потенциальная энергия с учетом формул (1.13) и (1.21)

$$\rho g u_x\,dz\cdot 1z\cos\theta + \rho g u_x\,dz\cdot 1\,[(H-z)+(H-z)\,\mathrm{tg}\,\beta\,\mathrm{tg}\,\theta]\cos\theta = \rho g u_x\,dz\cdot 1\,[H + (H-z)\,\mathrm{tg}\,\beta\,\mathrm{tg}\,\theta]\cos\theta. \tag{1.22}$$

Удельная потенциальная энергия при неравномерном движении

$$Э_п = \frac{\int_0^H \rho g u_x\,[H + (H-z)\,\mathrm{tg}\,\beta\,\mathrm{tg}\,\theta]\cos\theta dz}{\int_0^H \rho g u_x\cdot 1dz}.$$

При u_x, не изменяющейся по z, в результате интегрирования получим:

$$Э_п = H\left(1+\frac{1}{2}\,\mathrm{tg}\,\beta\,\mathrm{tg}\,\theta\right)\cos\theta. \tag{1.23}$$

По сравнению со случаем равномерного движения удельная потенциальная энергия сечения, строго говоря, оказывается несколько большей. Второе слагаемое в скобках при малых β существенно меньше 1 и, как правило, может не учитываться. Поэтому с достаточной степенью точности можно считать, что для неравномерного движения при $\beta < \theta$, так же как и для равномерного,

$$Э_п = H\cos\theta. \tag{1.24}$$

Пренебрегая указанными малыми величинами в выражении (1.22), можно сделать вывод, что удельная потенциальная энергия любой точки живого сечения постоянна и равна $H\cos\theta$. Следовательно, уровни жидкости в пьезометрах, подсоединенных к разным точ-

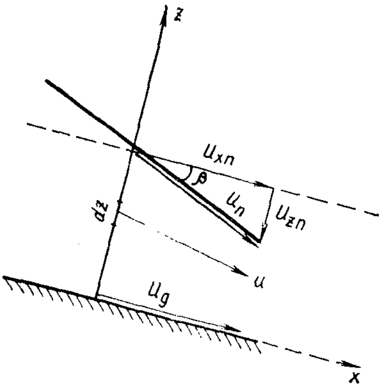


РИС. 1.9

кам живого сечения, устанавливаются по линии $\bar{F}B$ (см. рис. 1.7), что подтверждается опытом.

Определим удельную кинетическую энергию сечения при неравномерном движении. Кинетическая энергия жидкости, проходящей через элементарную площадку dz в окрестности произвольной точки M, определяется как половина произведения массы жидкости на квадрат полной скорости: $mu^2/2$ (где $m = \rho u_x \mathrm{d}z \cdot 1$; $u = \sqrt{u_x^2 + u_z^2}$.

На свободной поверхности полную скорость $u_{\text{п}}$ разложим на две составляющие: $u_{x\text{п}}$ и $u_{z\text{п}}$ (рис. 1.9). При этом у поверхности $u_{z\text{п}} = u_{x\text{п}} \operatorname{tg} \beta$. У дна канала полная скорость при отсутствии трения принимается $u_{\text{д}} = u_x = u_{x\text{п}}$ в соответствии с ранее сделанными допущениями о постоянстве продольной составляющей скорости по сечению потока. Таким образом, составляющая u_z изменяется по сечению потока от нуля на дне до $u_{z\text{п}}$ на поверхности. Определим закономерность изменения u_z по сечению потока, используя уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{\partial u_x}{\partial x}.$$

Поскольку величина u_x не изменяется по z, после интегрирования получим:

$$u_z = u_x \frac{z}{H} \operatorname{tg} \beta.$$

Это соотношение показывает, что при постоянной по сечению u_x составляющая скорости u_z изменяется по линейному закону.

При этом выражение для кинетической энергии принимает вид:

$$\frac{\rho u_x \, dz \cdot 1\,(u_x^2 + u_z^2)}{2} = \frac{\rho u_x \, dz \cdot 1}{2} u_x^2 \left[1 + \left(\frac{z}{H}\right)^2 \operatorname{tg}^2 \beta\right].$$

Удельная кинетическая энергия сечения

$$Э_{\text{к}} = \frac{\int_0^H \frac{1}{2} \rho u_x \cdot 1 u_x^2 \left[1 + \left(\frac{z}{H}\right)^2 \operatorname{tg}^2 \beta\right] dz}{\int_0^H \rho g u_x \cdot 1 dz} = \frac{u_x^2}{2g}\left(1 + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^2 \beta\right). \quad (1.25)$$

Удельная кинетическая энергия сечения, так же как и потенциальная, при неравномерном движении незначительно отличается от соответствующей энергии при равномерном движении. Действительно, второе слагаемое в скобках обычно значительно меньше единицы.

Таким образом, в условиях неравномерного движения при сравнительно малых значениях β удельная энергия

$$Э = Э_{п} + Э_{к} = H \cos\theta + \frac{u_x^2}{2g}. \qquad (1.26)$$

Считая, как и ранее, поток плоским, выразим среднюю скорость через удельный расход и глубину по формуле

$$u_x = q/H.$$

Подставляя это соотношение в уравнение (1.26), получаем:

$$Э = H \cos\theta + \frac{q^2}{2gH^2}.$$

Это выражение показывает, что при постоянстве расхода с увеличением глубины потока потенциальная энергия сечения возрастает прямо пропорционально глубине, а кинетическая энергия более интенсивно уменьшается пропорционально $1/H^2$. Поскольку при $H \to \infty$ неограниченно возрастает первое слагаемое, а при $H \to 0$ неограниченно возрастает второе слагаемое, можно заключить, что функция $Э$ имеет минимум при некотором значении глубины. Для отыскания минимума функции, как это обычно делается, приравниваем первую производную этой функции нулю:

$$\frac{dЭ}{dH} = \cos\theta - \frac{q^2}{gH^3} = 0. \qquad (1.27)$$

Отсюда

$$H_{кр} = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g \cos\theta}}. \qquad (1.28)$$

Для каналов с большим уклоном это выражение было получено Б. Т. Емцевым [4]. Глубина $H_{кр}$ обычно называется критической глубиной. Учитывая, что $q = u_{x\,кр} H_{кр}$, из уравнения (1.27) найдем, что минимум энергии соответствует условию

$$Fr_{кр} = \frac{u_{x кр}^2}{gH_{кр} \cos\theta} = \frac{u_{x кр}^2}{gH'_{кр}} = 1. \qquad (1.29)$$

В соотношении (1.29) $H'_{кр} = H_{кр} \cos\theta = aH_{кр}$ (где a — поправочный коэффициент, в данном случае равный $\cos\theta$).

Минимальная удельная энергия сечения

$$Э_{min} = H_{кр} \cos\theta + \frac{H_{кр} \cos\theta}{2} = \frac{3}{2} H_{кр} \cos\theta.$$

При малом уклоне $\cos\theta \approx 1$ и

$$\mathrm{Fr}_{\text{кр}} = \frac{u^2_{x\text{кр}}}{gH_{\text{кр}}} = 1, \tag{1.30}$$

а удельная энергия сечения

$$Э_{min} = \frac{3}{2} H_{\text{кр}}.$$

В общем случае существенно неравномерного потока в канале с большим уклоном дна критическое значение числа Фруда может быть получено с использованием соотношений (1.23) и (1.25) и представлено в виде:

$$\mathrm{Fr}_{\text{кр}} = \frac{u^2_{x\text{кр}}}{gH_{\text{кр}}} \frac{1 + \frac{1}{3}\,\mathrm{tg}^2\beta}{\left(1 + \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}\,\beta\,\mathrm{tg}\,\theta\right)\cos\theta}. \tag{1.31}$$

В этом случае поправочный коэффициент

$$a = \cos\theta \frac{1 + \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}\,\beta\,\mathrm{tg}\,\theta}{1 + \frac{1}{3}\,\mathrm{tg}^2\beta}. \tag{1.32}$$

Обычно считают, что канал имеет большой уклон дна при $\sin\theta > 0{,}1$. Анализ выражения (1.31) показывает, что влияние неравномерности течения на величину критического числа Фруда можно не учитывать, если уклон свободной поверхности по отношению к дну канала $\sin\beta < 0{,}2$.

Выражение (1.31) для критического числа Фруда получено в предположении постоянства скорости по сечению, т. е. в условиях отсутствия трения по дну канала. Как известно, реальная удельная кинетическая энергия сечения

$$Э_{\text{к}} = \frac{\alpha U^2}{2g}, \tag{1.33}$$

где α — корректив кинетической энергии, равный отношению реальной кинетической энергии жидкости к условной, подсчитанной в предположении постоянства скорости по сечению потока.

С учетом соотношения (1.33) выражение для критического числа Фруда примет вид

$$\mathrm{Fr}_{\text{кр}} = \frac{U^2_{\text{кр}}}{gH_{\text{кр}}} \frac{\alpha}{\cos\theta} \frac{1 + \frac{1}{3}\,\mathrm{tg}^2\beta}{1 + \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}\,\beta\,\mathrm{tg}\,\theta}. \tag{1.34}$$

§ 3. Основные виды высокоскоростных потоков

Если в спокойный поток ввести внешнее возмущение в виде препятствия (рис. 1.10) на дне, то уровень воды перед препятствием повысится, а за ним понизится. Обращаясь к графику удельной энергии сечения (рис. 1.11), отметим, что для спокойного потока потеря энергии, вызванная препятствием, приводит к местному уменьшению глубины, которое сглаживается на некотором расстоянии [2]. Если число Фруда $\mathrm{Fr} > 1$ (рис. 1.12), то потери энергии, вызванные препятствием, приводят к местному повышению уровня. При режимах течения, близких к критическому, небольшое изменение удельной энергии может привести к различному состоянию потока, что вызовет изменение уровней и местной кривизны вблизи препятствия. Поэтому изменение числа Фруда от $\mathrm{Fr} < 1$ до $\mathrm{Fr} > 1$ может вызвать некоторые качественные изменения в поведении высокоскоростного потока. Наблюдения показывают, что при значениях Fr, ненамного отличающихся от единицы, возможно образование остановившихся волн. Как правило, возникновение этих волн связано с действием внешних локальных возмущений.

Предположим, что поток находится в бурном режиме течения ($i > i_{\text{кр}}$), близком к критическому состоянию (точка A на рис. 1.11). Под действием внешнего локального возмущения кинетическая энергия потока преобразуется в потенциальную и поток переходит из бурного состояния в спокойное (точка B на рис. 1.11). Как известно из курса гидравлики [2], этот переход может осуществляться только гидравлическим прыжком. При уклоне $i > i_{\text{кр}}$ спокойный поток не может находиться в равновесном состоянии и получает ускорение вследствие перехода избыточной потенциальной энергии в кинетическую и уменьшения гидравлических потерь. Ускорение потока приводит к переходу его в бурное состояние. В связи с уменьшением глубины гидравлические потери возрастают и может произойти повторный переход из бурного состояния в спокойное.

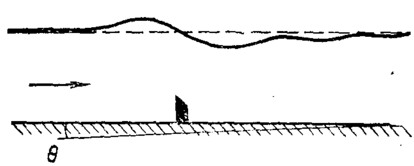


РИС. 1.10

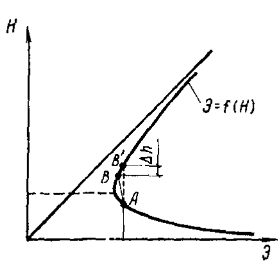


РИС. 1.11

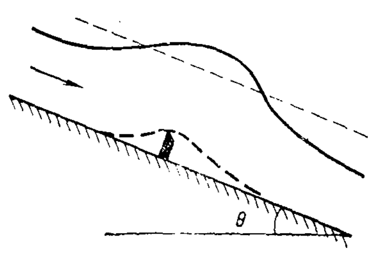


РИС. 1.12

Эти переходы приводят к волнистости на свободной поверхности потока в околокритическом режиме. При соотношении глубин $H_B/H_A < 2$ (где H_B и H_A — глубины в точке B и в точке A соответственно; см. рис. 1.11) образуются остановившиеся волны [2], представляющие собой систему постепенно затухающих волн.

Основными характеристиками волн являются: длина волны L (расстояние между двумя соседними гребнями или впадинами), высота волны $h_в$ (расстояние от подошвы волны до гребня), скорость движения волнового фронта c.

По характеру действующих сил волны разделяют на капиллярные и гравитационные. Появление капиллярных волн связано с действием сил поверхностного натяжения. Скорость движения капиллярных волн определяется соотношением [2]

$$c = \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\rho L}}. \tag{1.35}$$

Гравитационные волны возникают под действием сил тяжести. Скорость распространения этих волн определяется глубиной потока (если $L \gg H$):

$$c = \sqrt{gH}. \tag{1.36}$$

В тех случаях, когда высота волны соизмерима с глубиной потока, скорость волны может вычисляться по соотношению

$$c = \sqrt{\frac{gH_в}{2H_1}(H_в + H_1)}, \tag{1.37}$$

где $H_в = h_в + H_1$ (здесь H_1 — глубина невозмущенного потока).

Если волна движется по течению, скорость перемещения ее относительно неподвижного наблюдателя равна $c_0 = u + c$.

При остановившейся волне

$$u = c \approx \sqrt{gH_1} \quad \text{или} \quad \frac{u^2}{gH_1} \approx 1.$$

Следовательно, условия образования остановившейся волны соответствуют так называемым околокритическим режимам с числами Фруда, близкими к 1.

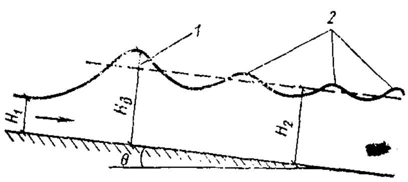


РИС. 1.13

1 — одиночная волна; 2 — кноидальные волны

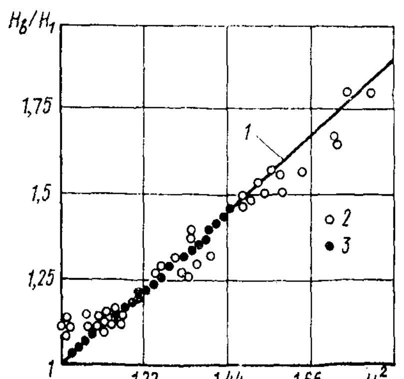


РИС. 1.14

1 — расчет по зависимости (1.38); 2 — данные К. Тиррио; 3 — данные Р. Лемуэна

В настоящее время принято считать, что в околокритическом режиме переход от бурного течения к спокойному осуществляется в виде комбинации одиночной волны и системы кноидальных волн (рис. 1.13). Высота одиночной волны больше высоты кноидальных волн. Исследования позволили установить, что глубина под гребнем уединенной волны зависит от числа Фруда:

$$\frac{H_в}{H_1} = \frac{u_1^2}{gH_1} = \mathrm{Fr}_1. \qquad (1.38)$$

Глубина $H_в$ примерно в 1,5 раза превышает среднюю глубину H_2 (см. рис. 1.13).

На рис. 1.14 приведены экспериментальные данные, показывающие, что высота реальной одиночной волны в среднем несколько меньше высоты, определяемой соотношением (1.38). Остановившиеся волны могут существовать также в виде косых волн на свободной поверхности, вызываемых возмущениями на боковых стенках канала. Фронт косой волны направлен под углом к направлению сосредоточенного течения. Подробный анализ косых волн будет дан ниже.

Если скорость волны c меньше скорости потока u, то волна будет смещаться по течению относительно неподвижного наблюдателя со скоростью $u - c$. Такие волны называются катящимися. Эти волны при некоторых условиях могут произвольно возникать в потоке при числах Фруда, бóльших 2. На участке канала ниже кривой спада первоначально появляются небольшие отдельные возмущения на свободной поверхности. По мере продвижения они объединяются, образуя единый волновой фронт, если распределение скоростей в плане достаточно равномерное (рис. 1.15). Высокие волны, имеющие бóльшие скорости, нагоняют малые волны и поглощают их. Вследствие этого происходит рост катящихся волн по длине канала. Развитые катящиеся волны имеют характерный профиль с обрывистым фронтом (рис. 1.16). Высота гребней значительно превышает среднюю глубину, а в хвостовой части волны глубина водного потока мала.

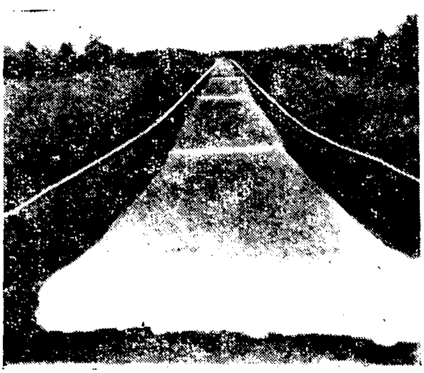


РИС. 1.15

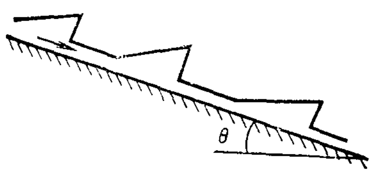


РИС. 1.16

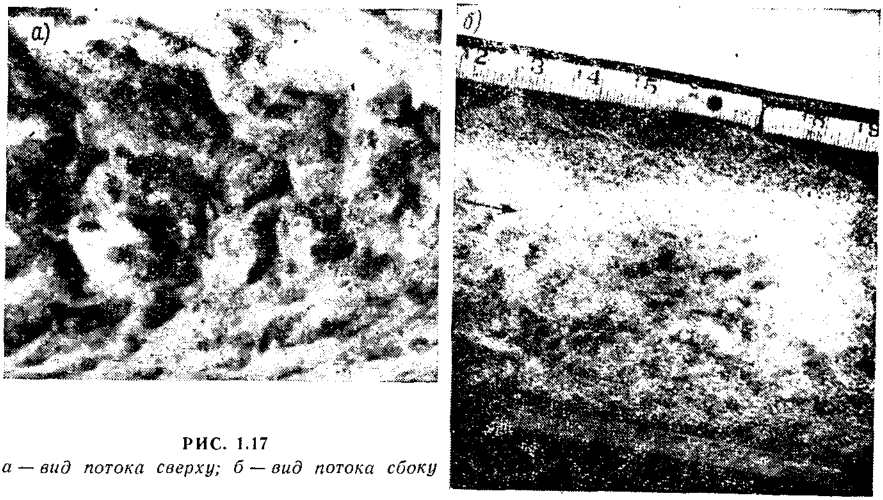


РИС. 1.17

а — вид потока сверху; б — вид потока сбоку

При увеличении числа Фруда на поверхности потока появляются нерегулярные возмущения турбулентного характера. Эти возмущения с возрастанием числа Фруда становятся более интенсивными и вызывают аэрацию потока. В этих условиях от поверхности потока отрываются водные массы, распад которых приводит к образованию капель. Ниже поверхности поток насыщен пузырьками воздуха (рис. 1.17). При очень больших значениях числа Фруда воздушные включения проникают до дна канала и поток становится полностью аэрированным. Полная аэрация потока, как показывают наблюдения, наступает при очень больших уклонах дна канала ($i > 0{,}5$). Поскольку в инженерной практике редко встречаются каналы с уклонами дна более 0,5, полностью аэрированные потоки в настоящем пособии не рассматриваются. Следует отметить, что иногда на поверхности высокоскоростного потока могут одновременно проявляться различные виды возмущений. Часто в высокоскоростных потоках можно наблюдать комбинацию капиллярных и гравитационных волн. Иногда возникает комбинация косых и катящихся волн с аэрацией.

Таким образом, из сказанного выше можно заключить, что высокоскоростные потоки обладают рядом структурных особенностей, интенсивно проявляющихся на свободной поверхности. Эти особенности необходимо учитывать при анализе и расчете гидравлических характеристик высокоскоростных потоков.

ГЛАВА 2. РАВНОМЕРНЫЕ ВЫСОКОСКОРОСТНЫЕ ПОТОКИ В ГЛАДКОМ КАНАЛЕ

§ 4. Двухслойная динамическая модель высокоскоростного потока

В высокоскоростных потоках на свободной поверхности действует ряд дополнительных факторов, изменяющих структуру течения. Так, например, резкие локальные искривления свободной поверхности и отрыв масс жидкости при большой скорости движения приводят к возникновению значительных аэродинамических сил, тормозящих в итоге поверхностные слои потока. Возмущение на свободной поверхности потока вызывает дополнительное действие сил тяжести и поверхностного натяжения, стремящихся нейтрализовать, погасить это возмущение. Таким образом, в поверхностном слое потока совершается дополнительная работа сил тяжести, поверхностного натяжения и сил аэродинамического сопротивления. Когда на поверхности потока образуются крупные волновые образования, возможны дополнительные потери энергии, связанные с орбитальным движением частиц жидкости под волной. Как известно, это движение заметно проявляется лишь в поверхностных слоях.

Во всех перечисленных выше случаях действуют дополнительные силы вблизи свободной поверхности. Эффект этих дополнительных сил можно свести к касательным напряжениям $\tau_в$, действующим на свободной поверхности. Если в потоках с гладкой поверхностью эти силы малы и их можно не учитывать, то при расчете высокоскоростных потоков пренебречь этими силами нельзя, так как это может вызвать значительную погрешность. В этих условиях свободную поверхность высокоскоростного потока можно представить условно как некоторую «жесткую» границу с касательными напряжениями $\tau_в$ (рис. 2.1). При этом следует помнить, что величина этих касательных напряжений зависит от состояния свободной поверхности, определяемого в значительной степени структурой потока в целом. Строго говоря, влияние и нижней, и верхней границ потока распространяется на всю глубину. По мере удаления от границ влияние их ослабевает. Исследования осредненной кинематической и турбулентной структуры в каналах с различной шероховатостью сте-

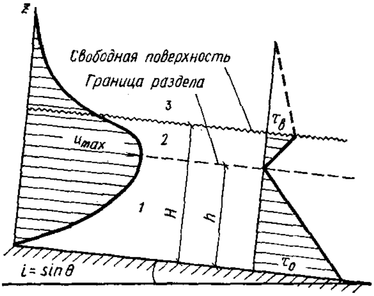


РИС. 2.1

1 — нижний динамический слой; 2 — верхний динамический слой; 3 — спутный поток воздуха нок показали, что на динамической оси потока, проходящей через точку максимума скорости, касательные напряжения равны нулю. Ниже динамической оси потока характеристики течения в канале определяются взаимодействием потока с дном канала; выше динамической оси — с верхней границей канала. Для высокоскоростного потока как величина $\tau_в$, так и положение динамической оси, служащей границей раздела, определяются структурой всего потока. Однако после того, как динамическое равновесие установилось, можно считать верхний и нижний слои независимыми в динамическом отношении. Следовательно, установившийся поток представим состоящим из двух динамически независимых слоев, граница раздела которых проходит через точку максимума скорости ($z = h$).

В этом случае при равномерном течении условие равновесия можно записать для каждой из зон в отдельности:
для нижней

$$\tau_0 = \rho g h i; \tag{2.1}$$

для верхней

$$\tau_в = \rho g (H - h) i. \tag{2.2}$$

Для всего потока в целом имеем:

$$\tau_\Sigma = \tau_0 + \tau_в = \rho g H i.$$

В условиях постоянной плотности из соотношений (2.1) и (2.2) находим, что

$$\tau_в / \tau_0 = (H - h)/h. \tag{2.3}$$

Как видно из этого выражения, положение точки максимума скорости определяется соотношением касательных напряжений по верхней и нижней границам. Из выражения (2.3) следует, что если дно канала гладкое и τ_0 невелико, то влияние верхней границы распространяется на бо́льшую область, и точка максимума скорости должна быть заглублена больше, чем при шероховатом дне. Однако состояние свободной поверхности будет также зависеть от величины τ_0; при шероховатом дне (при больших τ_0) возрастает и величина $\tau_в$. Поэтому положение границы раздела в высокоскоростном потоке определить значительно сложнее, чем при течении в канале с твердыми стенками разной шероховатости.

Для расчета и анализа характеристик высокоскоростного потока необходимо разделить его на динамически независимые слои. Для этого прежде всего следует определить величину касательных напряжений на свободной поверхности. Вычислить $\tau_в$ можно методом последовательных приближений. Считая в первом приближении, что $\tau_0 = \rho g H i$, определяем состояние свободной поверхности и величину $\tau'_в$. В следующем приближении принимаем $\tau'_0 = \rho g H i - \tau'_в$ и т. д., пока не совпадут по величине два соседних последовательных приближения τ_0. После разделения потока на два динамических слоя рассчитываются гидродинамические характеристики каждого слоя в отдельности.

Все особенности высокоскоростного потока связаны с характеристиками течения в верхнем динамическом слое. Однако параметры течения в верхнем слое невозможно установить без тщательного исследования осредненных и турбулентных характеристик нижнего динамического слоя. Поэтому изучение гидродинамики нижнего динамического слоя высокоскоростного потока имеет первостепенное значение.

§ 5. Кинематическое подобие равномерных открытых потоков

Высокоскоростные потоки становятся равномерными при достаточно большой длине быстротоков, водосливов и каналов. Но даже в тех случаях, когда длины недостаточно велики и течение не успевает развиваться до равномерного, необходимо рассчитывать параметры равномерного потока для определения характеристик неравномерного движения. Как уже говорилось, высокоскоростной поток можно разделить по глубине на два динамически независимых слоя. Поскольку касательные напряжения на границе раздела между слоями равны нулю, нижний динамический слой можно считать аналогом открытого потока с гладкой свободной поверхностью. В реальных условиях, как правило, толщина нижнего динамического слоя оказывается значительно больше толщины верхнего слоя. Кроме того, течение в нижнем слое оказывает существенное влияние на величину $\tau_в$ и на положение границы раздела. Уравнения движения равномерного потока получены в гл. 1 из системы уравнений (1.1) путем исключения слагаемых, равных нулю. Для равномерного движения было найдено:

$$\left.\begin{aligned} gi &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial\tau}{\partial z}; \\ -g\sqrt{1-i^2} &= \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz}. \end{aligned}\right\} \qquad (2.4)$$

Интегрируя каждое уравнение системы по координате z в пределах от 0 до h, получаем (при условии $p = p_0$, если $z = h$):

$$\tau = \rho g(h-z)\,i; \qquad (2.5)$$

$$p = p_0 + \rho g(h-z)\sqrt{1-i^2}. \qquad (2.6)$$

Из соотношений (2.5) и (2.6) очевидно, что и распределение касательного напряжения τ, и распределение давления p по глубине нижней зоны высокоскоростного равномерного потока подчиняются линейному закону. При $z = 0$ (на дне канала) касательное напряжение максимально и равно:

$$\tau_0 = \rho ghi. \qquad (2.7)$$

Поскольку $\sqrt{\tau_0/\rho}$ имеет размерность скорости, эту величину принято называть динамической скоростью u_* или скоростью трения [1]. Таким образом,

$$u_* = \sqrt{ghi}. \tag{2.8}$$

Одним из основных является вопрос о кинематическом подобии, т. е. об инвариантности течения в различных точках потока. Скорость движения в точке потока относительно другой точки, находящейся на расстоянии Δz, по Т. Карману, можно характеризовать последовательностью производных скорости u', u'', u''', ... При этом относительную скорость можно представить в виде ряда Тейлора:

$$u = u'\,\Delta z + u''\,\Delta z^2/2! + u'''\,\Delta z^2/3! + \ldots$$

В этом ряду члены выше третьего порядка имеют малую величину, поэтому, следуя Л. И. Седову, ограничимся первыми тремя членами.

Согласно π-теореме Букингема, известной из теории размерностей, число безразмерных комплексов, характеризующих процесс, равно числу определяющих размерных параметров за вычетом числа основных размерностей. Основными размерностями при анализе изменения скорости являются длина [L] и время [T]. При трех определяющих параметрах и двух основных размерностях имеем один безразмерный комплекс:

$$\frac{u''^2}{u'\,u'''} = c, \tag{2.9}$$

где c — некоторое число.

Этот комплекс можно рассматривать как дифференциальное уравнение, решая которое можно установить вид функции $u = f(z)$. Выполним интегрирование этого дифференциального уравнения.

Произведем замену переменных:

$$u' = w; \quad u'' = w'; \quad u''' = w''. \tag{2.10}$$

Тогда дифференциальное уравнение (2.9) принимает вид:

$$ww'' = w'^2/c. \tag{2.11}$$

Произведем еще одну замену переменных:

$$w' = \frac{dw}{dz} = P; \quad w'' = \frac{d^2 w}{dz^2} = \frac{dP}{dz} = \frac{dP}{dw}\cdot\frac{dw}{dz} = P\,\frac{dP}{dw}. \tag{2.12}$$

Подставляя новые переменные в уравнение (2.11), имеем:

$$w\,\frac{dP}{dw} - \frac{P}{c} = 0.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получаем:

$$P = c_1\, w^{1/c}.$$

После перехода к первоначальным переменным с использованием соотношений (2.10) и (2.12) и интегрирования, находим:

$$u=\left(\frac{c-1}{c}\right)^{\frac{c}{c-1}}\frac{1}{c/(c-1)+1}(c_1z+c_2)^{\frac{c}{c-1}+1}+c_3=A(z+B)^{\frac{2c-1}{c-1}}+D, \tag{2.13}$$

здесь c_1, c_2 и c_3 — постоянные интегрирования;
A, B, и D — коэффициенты.

Полученное решение имеет степенной вид и справедливо при $c \neq 0{,}5$ и $c \neq 1$. Если $c = 0{,}5$, интегрирование уравнения (2.11) позволяет найти:

$$u=A_1\ln(z+B_1)+D_1. \tag{2.14}$$

Аналогично при $c = 1$ получаем

$$u=A_2e^{z/B_2}+D_2. \tag{2.15}$$

Таким образом, кинематическое подобие течения может существовать в том случае, если закон изменения скорости описывается соотношениями (2.13), (2.14) и (2.15). Однако, исходя из теории подобия, нельзя отдать предпочтение какому-либо одному из полученных профилей скорости. Вид профиля скорости может быть определен из уравнения движения (2.4) с использованием гипотезы Буссинеска относительно связи касательного напряжения и градиента скорости в турбулентном потоке [1]. Согласно этой гипотезе принимается (по аналогии с законом вязкого трения Ньютона):

$$\frac{\tau_т}{\rho}=\nu_т\frac{du}{dz}, \tag{2.16}$$

где $\nu_т$ — так называемая турбулентная вязкость; $\tau_т$ — касательное напряжение, имеющее турбулентную природу.

Полное касательное напряжение можно представить в виде суммы вязких касательных напряжений и турбулентных касательных напряжений:

$$\frac{\tau}{\rho}=(\nu+\nu_т)\frac{du}{dz}. \tag{2.17}$$

Турбулентная вязкость $\nu_т$ определяется турбулентными пульсациями скорости, которые сложным образом изменяются по глубине потока. Исходя из теории размерности обычно предполагается, что турбулентная вязкость пропорциональна характерной длине L и характерной скорости. За характерную длину часто принимается расстояние от граничной поверхности z, а в качестве характерной скорости—динамическая скорость u_*.
Тогда

$$\nu_т=\varkappa u_* z, \tag{2.18}$$

где $\varkappa$ — безразмерный коэффициент пропорциональности.

Подставляя выражения (2.17) и (2.18) в соотношение (2.5), получаем:

$$g(h-z)i=(\nu+\varkappa u_* z)\frac{du}{dz}.$$

Принимая во внимание, что $ghi = u_*^2$, имеем:

$$\left(1-\frac{z}{h}\right)u_*^2=\nu\left(1+\frac{\varkappa u_* z}{\nu}\right)\frac{du}{dz}.$$

Интегрируя это уравнение, получаем:

$$\frac{u}{u_*}=\frac{1}{\varkappa}\left(1+\frac{\nu}{\varkappa u_* h}\right)\ln\left(1+\frac{\varkappa u_* z}{\nu}\right)-\frac{1}{\varkappa}\frac{z}{h}+\mathrm{const}.$$

Постоянная интегрирования может быть определена из условия $u = u_k$ при $z = k_s$ (где u_k — скорость в точке, отвечающей высоте эквивалентной шероховатости $z = k_s$):

$$\mathrm{const}=\frac{u_k}{u_*}-\frac{1}{\varkappa}\left(1+\frac{\nu}{\varkappa u_* h}\right)\ln\left(1+\frac{\varkappa u_* k_s}{\nu}\right)+\frac{1}{\varkappa}\frac{k_s}{h}.$$

Таким образом, профиль скорости принимает вид:

$$\frac{u}{u_*}=\frac{1}{\varkappa}\left(1+\frac{\nu}{\varkappa u_* h}\right)\ln\frac{1+\varkappa u_* z/\nu}{1+\varkappa u_* k_s/\nu}-\frac{1}{\varkappa}\left(\frac{z}{h}-\frac{k_s}{h}\right)+\frac{u_k}{u_*}. \quad (2.19)$$

В этом выражении, полученном И. П. Гинзбургом, $\varkappa u_* z/\nu > 30 \gg 1$, а величина $u_* h/\nu > u_* z/\nu$. Следовательно, выражение (2.19) можно упростить:

$$\frac{u}{u_*}=\frac{1}{\varkappa}\ln\frac{\varkappa u_* z/\nu}{1+\varkappa u_* k_s/\nu}-\frac{1}{\varkappa}\left(\frac{z}{h}-\frac{k_s}{h}\right)+\frac{u_k}{u_*}. \quad (2.20)$$

Для гладкого канала ($k_s \to 0$) имеем:

$$\frac{u}{u_*}=\frac{1}{\varkappa}\ln\frac{u_* z}{\nu}-\frac{1}{\varkappa}\frac{z}{h}+\beta, \quad (2.21)$$

где β — числовой коэффициент.

Для шероховатого канала ($\varkappa u_* k_s/\nu \gg 1$)

$$\frac{u}{u_*}=\frac{1}{\varkappa}\ln\frac{z}{k_s}-\frac{1}{\varkappa}\left(\frac{z}{h}-\frac{k_s}{h}\right)+\frac{u_k}{u_*}. \quad (2.22)$$

Если, следуя Л. Прандтлю, предположить постоянство касательных напряжений по глубине ($\tau = \rho u_*^2$), то для гладкого канала (при $\nu_т \approx \varkappa u_* z$)

$$\frac{u}{u_*}=\frac{1}{\varkappa}\ln\frac{u_* z}{\nu}+\beta, \quad (2.23)$$

а для шероховатого

$$\frac{u}{u_*}=\frac{1}{\varkappa}\ln\frac{z}{k_s}+\frac{u_k}{u_*}. \quad (2.24)$$

Полученные выражения при $\tau = \mathrm{const}$ оказываются близкими к аналогичным соотношениям, учитывающим изменение касательного напряжения по глубине потока: и в том и в другом случае профиль скорости имеет логарифмический вид. Однако соотношения (2.23) и (2.24) лучше согласуются с опытом, чем более сложные зависимости (2.21) и (2.22).

Установим вид функции для $\nu_т$, при котором реализуется экспоненциальный вид профиля скорости (2.15). Этот профиль скорости, исходя из теории подобия, представим в безразмерном виде

$$\frac{u}{u_*} = ae^{\alpha z/h} + b ,$$

где a, α и b — некоторые константы.

Подставляя $\mathrm{d}u/\mathrm{d}z$ в выражение (2.17), получаем с учетом соотношения (2.5):

$$u_*^2\left(1-\frac{z}{h}\right)=(\nu_т+\nu)\,\frac{\alpha u_*\,a}{h}\,e^{\alpha z/h}.$$

Отсюда находим:

$$\nu_т=\frac{1}{2a}\,u_*\,h\left(1-\frac{z}{h}\right)e^{-\alpha z/h}.$$

Это выражение является условием существования профиля скорости экспоненциального вида. Анализ показывает, что $\nu_т \to u_*\,h/(2a)$ (при $z\to 0$), т. е. является величиной конечной. Поскольку в непосредственной близости стенки турбулентность гасится, очевидно, что при $z\to 0$ должно соблюдаться условие $\nu_т\to 0$ [8]. Следовательно, для условий течения в канале экспоненциальный профиль вида (2.15) физически реализоваться не может.

Выполним более детальный анализ степенного профиля скорости, полученного выше в виде (2.13):

$$u = A\,(z+B)^n + D,$$

где $n = (2c-1)/(c-1)$.

Найдем выражение для турбулентной вязкости, отвечающее этому профилю, учитывая, что

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z} = An\,(z+B)^{n-1}.$$

Подставляя производную $\mathrm{d}u/\mathrm{d}z$ в зависимость (2.17) с учетом соотношения (2.5), после преобразований получаем:

$$\nu_т=\frac{u_*^2}{An}\left(1-\frac{z}{h}\right)(z+B)^{1-n}.$$

Будем считать, как это обычно принято, что в той части потока, где справедлив степенной профиль, влияние физической вязкости мало́ по сравнению с влиянием турбулентности. Поскольку при $z\to 0$ должно удовлетворяться условие, согласно которому $\nu_т\to 0$, находим, что $B = 0$.

Таким образом,

$$\nu_т=\frac{u_*^2}{An}\left(1-\frac{z}{h}\right)z^{1-n}$$

и профиль скорости принимает вид:

$$u = Az^n + D .$$

Вследствие того что $u \to 0$ при $z \to 0$, константа D также равна нулю и

$$u = Az^n.$$

С учетом граничного условия при $z = h$ $u = u_{max}$ получаем:

$$u/u_{max} = (z/h)^n. \quad (2.25)$$

Из сравнения двух последних соотношений можно установить, что

$$A = u_{max}/h^n.$$

Следовательно,

$$\nu_т = \frac{u_*^2}{n u_{max}} h^n z^{1-n} \left(1 - \frac{z}{h}\right). \quad (2.26)$$

Анализ этого выражения показывает, что при $n \geqslant 1$ оно не удовлетворяет условию $\nu_т \to 0$ при $z \to 0$, поэтому при $0 < n < 1$ реализуется профиль вида (2.25).

§ 6. Гидравлическое сопротивление и распределение скоростей при равномерном течении над гладким дном

Рассмотрим характеристики плоского потока в канале над гладким дном. Как известно, канал можно считать гидравлически гладким, если [1]

$$u_* k_s/\nu < 5. \quad (2.27)$$

Из этого следует, что даже в условиях значительной шероховатости каналы могут работать в режиме гладкого сопротивления при малых динамических скоростях. На основе экспериментальных исследований [8] поток можно условно разделить на следующие характерные слои:

вязкий подслой, непосредственно примыкающий к граничной поверхности; толщина этого слоя $\delta_в$ невелика ($\sim 10^{-3} h$);

пристеночная область турбулентного течения, примыкающая к вязкому подслою; этот слой занимает около 20% глубины всего потока;

внешняя область течения, расположенная над пристеночной областью и занимающая около 80% глубины потока.

Между этими слоями имеются переходные зоны.

Вязкий подслой, несмотря на малую толщину, играет важную роль во взаимодействии движущейся жидкости с ограничивающей поверхностью. Раньше считалось, что движение вблизи стенки определяется только вязкими силами и является ламинарным. Канал считался гидравлически гладким, когда толщина этой «ламинарной пленки», определяемая соотношением (2.27), превышала величину выступов шероховатости. Распределение скоростей по толщине ламинарной пленки обычно определялось в виде

$$u/u_* = u_* z/\nu \quad (2.28)$$

и соответствовало постоянному касательному напряжению. Последние детальные исследования структуры потока вблизи стенки [8] показали, что течение здесь нельзя рассматривать как ламинарное. Действительно, хотя это течение похоже на ламинарное, оно не является установившимся. Если вблизи стенки в поток ввести индикатор (мелкие частицы или краску) и рассматривать в микроскоп область вязкого подслоя (рис. 2.2 — данные Ф. Хама), можно заметить, что здесь образуются отдельные характерные полосы замедленного течения с увеличенной концентрацией индикатора. По мере удаления от стенки по́лосы все больше и больше раскачиваются, толщина их нарастает и на расстоянии $30 > u_* z/\nu > 10$ полосы разрушаются. При разрушении полос образуется турбулентное пятно. Вследствие интенсивных пульсаций и градиента скорости жидкость из области турбулентного пятна с большой скоростью перемещается в область развитого турбулентного движения. Таков механизм обмена количеством движения между вязким подслоем и основным потоком. Измерение скоростей в зоне образования турбулентных пятен позволило обнаружить отчетливое чередование ламинарного и турбулентного режимов течения (рис. 2.3 — данные Г. Шубауэра и Ф. Клебанова). Это чередование режимов течения, обычно называемое перемежаемостью, характеризуется коэффициентом перемежаемости

$$\gamma = t_т / t_\Sigma, \tag{2.29}$$

где $t_т$ — время существования турбулентного режима течения;
t_Σ — общее время наблюдения.

Осредненная местная скорость перемежающегося течения определяется из соотношения

$$u t_\Sigma = u_т\, t_т + u_в\,(t_\Sigma - t_т)$$

или

$$u = u_т\,\gamma + u_в\,(1-\gamma)\ ,$$

где $u_в$ — скорость вязкого течения;
$u_т$ — скорость турбулентного течения.

Для периода существования вязкого течения в подслое можно записать уравнение движения в следующем виде [8]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\ . \tag{2.30}$$

Эта форма уравнения отвечает нестационарному вязкому движению в подслое. Схематично нестационарное движение можно представить в виде периодически нарастающего и разрушающегося вязкого подслоя. При этом предполагается, что в момент разрушения движение жидкости турбулентно вплоть до самой стенки. Вследствие прилипания жидкости к стенке возникают вязкие касательные напряжения, распространение которых в толщу подслоя постепенно приводит к восстановлению вязкого течения. В неко-

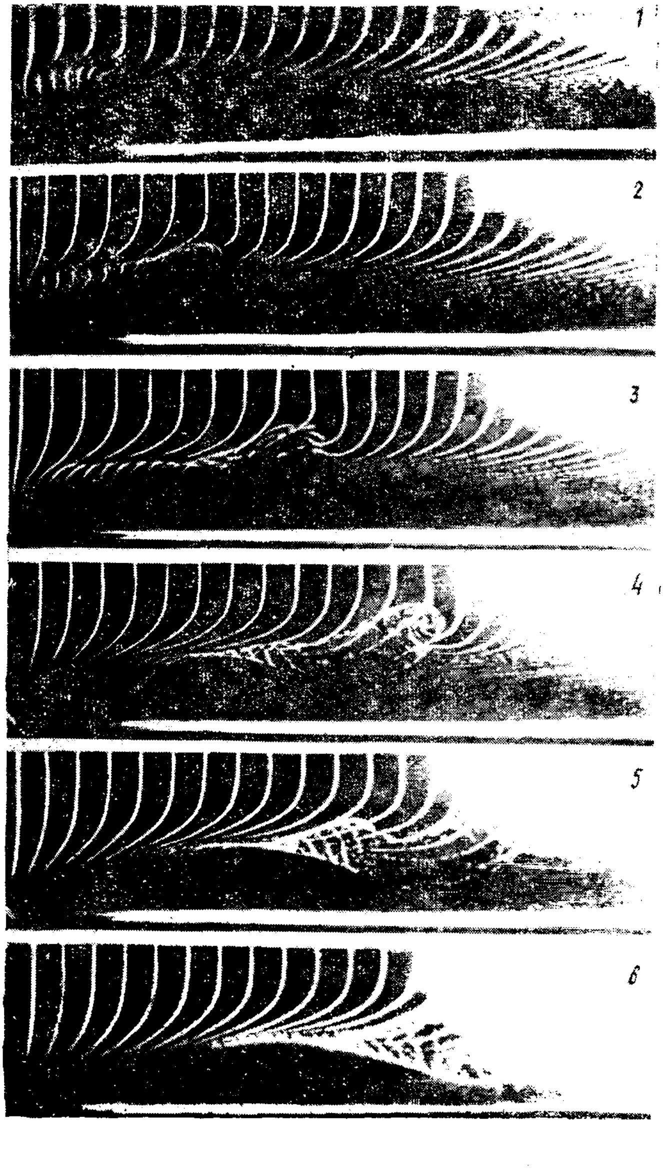


РИС. 2.2

1—3 — нарастание возмущения (полосы); 4 — критическое состояние перед разрушением (закручивание полос); 5 — разрушение и выброс турбулентной массы в толщу потока; 6 — состояние течения после разрушения полос и возврат к исходному положению 1 торый момент времени t_0 толщина вязкого подслоя становится достаточно большой и, как указывалось выше, движение в нем становится неустойчивым, что приводит к быстрому разрушению подслоя. Кратковременность процесса разрушения по сравнению с длительностью увеличения вязкого подслоя позволяет не учитывать период разрушения при математическом описании. Схематизация такого явления соответствует следующим граничным и начальным условиям:

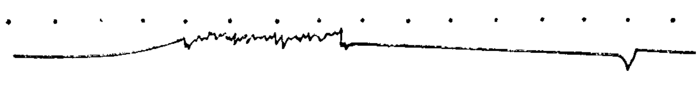
$$\left.\begin{aligned} &1)\ t=0,\ z>0,\ u=u_0(z);\\ &2)\ t_0 \geqslant t \geqslant 0,\ z=0,\ u=0;\\ &3)\ t_0>t>0,\ z=z_в,\ u=u_0(z),\end{aligned}\right\} \qquad (2.31)$$

где $z_в$ — предельная толщина вязкого подслоя.

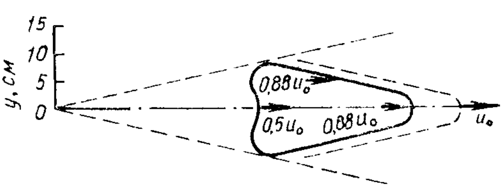
Первое граничное условие определяет скорость в вязком подслое непосредственно после его разрушения. Согласно второму граничному условию скорость на стенке равна нулю во все моменты времени. Третье граничное условие определяет скорость на верхней границе вязкого подслоя. При этих граничных условиях решение уравнения (2.30), выполненное методом интегральных преобразований Лапласа [6], имеет вид:

$$\frac{u}{u_0}=1-\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{erf}\frac{2nz_в-z}{2\sqrt{\nu t}}-\operatorname{erf}\frac{2(n-1)z_в+z}{2\sqrt{\nu t}}, \qquad (2.32)$$

а)



б)



в)

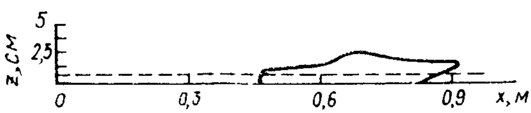


РИС. 2.3

а — пульсации скорости в зоне турбулентного пятна; б — горизонтальная проекция пятна; в — боковая проекция пятна где $\mathrm{erf}\,x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-n^2} dn$ — интеграл вероятности [6] (здесь x—аргумент функции); n — переменная интегрирования.

Поскольку при $n > 1$ члены ряда (2.32) приближаются к единице и, имея разные знаки, взаимно компенсируются, выражение (2.32) может быть упрощено:

$$\frac{u}{u_0} = 1 - \mathrm{erf}\,\frac{2z_{\text{в}} - z}{2\sqrt{\nu t}} + \mathrm{erf}\,\frac{z}{2\sqrt{\nu t}}. \tag{2.33}$$

Решение (2.33) включает в себя интеграл вероятности, значения которого табулированы [6]. Полученное выражение позволяет определить мгновенное значение скорости в любой точке z вязкого подслоя в любой момент времени t. Это выражение получено для расчетной схемы, согласно которой скорость на внешней границе развивающегося вязкого подслоя u_0 принимается постоянной. Однако, поскольку толщина вязкого подслоя во времени изменяется, принимать u_0 постоянной нельзя. Интегрирование уравнения (2.30) при граничных условиях (2.31) с учетом изменения скорости u_0 по координате z встречает большие математические трудности, поэтому будем приближенно рассматривать процесс развития вязкого подслоя как последовательную смену состояний с постоянными, но разными по величине значениями граничной скорости u_0. Граничную скорость для каждого состояния будем определять по соотношению логарифмического вида (2.23) при $\varkappa = 0{,}4$ и $\beta = 4{,}9$ [8]. Эти значения констант отвечают опытным данным для пристеночной области турбулентного течения. Таким образом, для граничной скорости имеем:

$$\frac{u_0}{u_*} = 5{,}75 \lg \frac{u_* z_{\text{в}}}{\nu} + 4{,}9 \approx 5{,}75 \lg \frac{7u_* z_{\text{в}}}{\nu}, \tag{2.34}$$

где $z_{\text{в}}$ — координата внешней границы вязкого подслоя.

Анализ размерностей позволяет считать, что толщина вязкого подслоя $z_{\text{в}}$ определяется временем его увеличения t и вязкостью жидкости ν. Эти величины связаны простым соотношением

$$z_{\text{в}} = \alpha \sqrt{\nu t_{\text{c}}}, \tag{2.35}$$

где α — коэффициент пропорциональности.

Это соотношение отвечает также структуре слагаемых в уравнении (2.33). Подставляя это соотношение в (2.34), находим

$$\frac{u_0}{u_*} = 5{,}75 \lg \frac{7\alpha u_* \sqrt{t_{\text{c}}}}{\sqrt{\nu}}, \tag{2.36}$$

где t_{c} — фиксированное время, характеризующее рассматриваемое состояние и определяемое как доля от всего периода увеличения подслоя.

Таким образом, для вычисления скорости на внешней границе вязкого подслоя u_0 необходимо определить две неизвестные величины: коэффициент α и период t_0.

После подстановки зависимости (2.36) в соотношение (2.33) основное уравнение также будет содержать два неизвестных. Чтобы найти эти неизвестные нам параметры, примем два условия.

Первое условие

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\right)_{z=z_\text{в}}=\left(\frac{\mathrm{d}u_\text{т}}{\mathrm{d}z}\right)_{z=z_\text{в}}.$$

Здесь в левой части равенства взята производная скорости в вязком подслое по координате z при фиксированном $t=t_\text{c}$; в правой части равенства — производная скорости в пристеночном турбулентном слое. Распределение скорости в этом слое описывается соотношением

$$\frac{u_\text{т}}{u_*}=5{,}75\lg\frac{u_*z}{\nu}+4{,}9\,. \tag{2.37}$$

Равенство производных означает плавное сопряжение профилей в вязком подслое и в турбулентной области при $z=z_\text{в}$.

Второе условие

$$\frac{1}{t_0}\int\limits_0^{t_0}\tau_0(t)\,\mathrm{d}t=\rho u_*^2.$$

Это условие определяет осредненное за период t_0 значение касательных напряжений на дне канала.

Согласно первому условию произведем дифференцирование выражения (2.33) по координате z, имея в виду, что

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\operatorname{erf}\frac{z}{2\sqrt{\nu t}}=\frac{1}{\sqrt{\pi\nu t}}e^{-\frac{z^2}{4\nu t}}.$$

Скорость u_0 в данный фиксированный момент времени t_c есть величина постоянная. Тогда

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\right)_{z=z_\text{в}}=\frac{2u_0}{\sqrt{\pi\nu t_\text{c}}}e^{-\frac{z_\text{в}^2}{4\nu t_\text{c}}}. \tag{2.38}$$

Дифференцируя соотношение (2.37), находим:

$$\left(\frac{\mathrm{d}u_\text{т}}{\mathrm{d}z}\right)_{z=z_\text{в}}=\frac{u_*}{\varkappa z_\text{в}}. \tag{2.39}$$

Приравнивая выражения (2.38) и (2.39), согласно первому условию получаем:

$$\frac{2u_0}{\sqrt{\pi\nu t_\text{c}}}e^{-\frac{z_\text{в}^2}{4\nu t_\text{c}}}=\frac{u^*}{\varkappa z_\text{в}}.$$

После подстановки в это равенство соотношений (2.35) и (2.36) и некоторых преобразований имеем:

$$2,3\lg\frac{7\alpha u_*\sqrt{t_c}}{\sqrt{\nu}}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{1}{\alpha}\,e^{\alpha^2/4}. \tag{2.40}$$

Это выражение справедливо для любого фиксированного момента времени, в том числе и для $t_c = t_0$.

Для использования второго условия необходимо найти мгновенное значение касательного напряжения на дне канала. Согласно известному определению $\tau_0 = \mu\left(\frac{du}{dz}\right)_{z=0}$. Дифференцируя уравнение (2.33) по z, получаем при $z = 0$:

$$\left(\frac{du}{dz}\right)_{z=0}=\frac{u_0}{\sqrt{\pi\nu t}}\left(1+e^{-\frac{z_в^2}{\nu t_c}}\right). \tag{2.40}$$

В этом соотношении второе слагаемое в скобках значительно меньше единицы, поэтому

$$\left(\frac{du}{dz}\right)_{z=0}=\frac{u_0}{\sqrt{\pi\nu t}}.$$

Таким образом, мгновенное значение касательного напряжения на дне канала

$$\frac{\tau_0}{\rho}=\frac{u_0\sqrt{\nu}}{\sqrt{\pi t}}. \tag{2.41}$$

Подставляя выражение (2.41) во второе условие, после интегрирования и некоторых преобразований находим:

$$\frac{u_*t_0}{\sqrt{\nu}}=\frac{5}{\sqrt{\pi}}\left(\ln\frac{7\alpha u_*\sqrt{t_0}}{\sqrt{\nu}}-1\right). \tag{2.42}$$

Совместное решение уравнений (2.40) и (2.41) (при $t_c = t_0$) методом последовательных приближений позволило определить:

$$\alpha=3,5; \tag{2.43}$$

$$u_*\sqrt{t_0}/\sqrt{\nu}=13,7. \tag{2.44}$$

Подставляя полученные значения в соотношение (2.33), получаем распределение скоростей в вязком подслое для каждого фиксированного момента времени t_c:

$$\frac{u}{u_*}=5,75\lg 335\sqrt{\frac{t_c}{t_0}}\left[1+\operatorname{erf}\frac{u_*z}{27,5\nu}\sqrt{\frac{t_0}{t_c}}-\right.$$
$$\left.-\operatorname{erf}\left(3,5-\frac{u_*z}{27,5\nu}\sqrt{\frac{t_0}{t_c}}\right)\right]. \tag{2.45}$$

Профили, рассчитанные по полученной зависимости (2.45), представлены на рис. 2.4 для ряда фиксированных значений t_c/t_0.

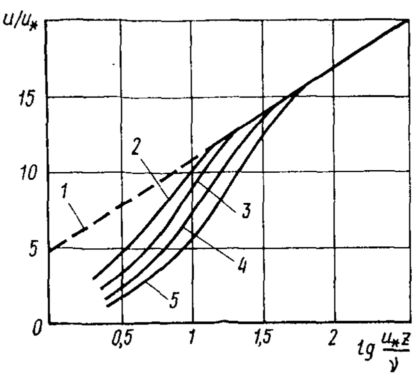


РИС. 2.4

1 — $t_c/t_0=0$; 2 — $t_c/t_0=0,1$; 3 — $t_c/t_0=0,25$; 4 — $t_c/t_0=0,5$; 5 — $t_c/t_0=1$

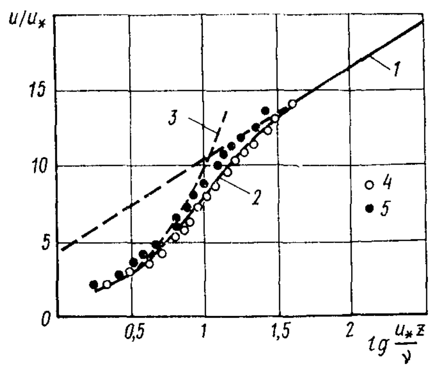


РИС. 2.5

1 — расчет по соотношению (2.34); 2 — расчетный профиль; 3 — $u/u_*=u_*z/\nu$; 4 — данные Д. Коулса; 5 — данные С. Клайна

Численное интегрирование этого профиля по переменной t_c/t_0 от нуля до 1 позволило получить профиль осредненной скорости в вязком подслое. Сравнение расчетного осредненного профиля с экспериментальными данными (рис. 2.5) обнаруживает их хорошую сходимость. Результаты расчета профиля скорости также хорошо согласуются с данными, полученными Т. Блэком.

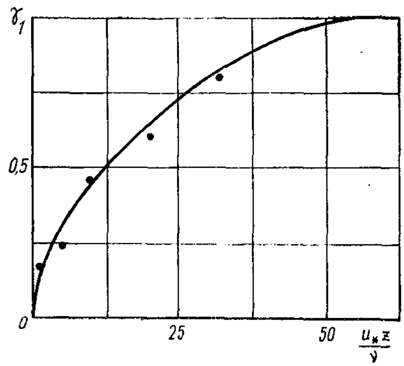


РИС. 2.6

Анализ приведенных выше данных позволяет рассчитать изменение по толщине вязкого подслоя коэффициента перемежаемости, определяемого соотношением (2.29).

Осредненный профиль скорости в вязком подслое можно представить как результат чередования турбулентного течения и развитого вязкого течения (при $t_c = t_0$). Расчет коэффициента перемежаемости в этом случае может быть выполнен по соотношению

$$u/u_* = \gamma u_т/u_* + (1-\gamma)\, u_в/u_*$$

с учетом данных, приведенных на рис. 2.4 и 2.5, где $u_в/u_*$ — безразмерная скорость в вязком подслое при $t = t_0$. Результаты расчета представлены на рис. 2.6. Зависимость, аппроксимирующая расчетные данные, имеет вид:

$$\gamma = 1 - e^{-0,06u_* z/\nu}. \tag{2.46}$$

Характерный период увеличения толщины вязкого подслоя t_0 может быть определен из соотношения (2.44). Безразмерная частота разрушения вязкого подслоя ($n = 1/t_0$) определяется как

$$n\nu/u_*^2 = 5,3 \cdot 10^{-3}. \tag{2.47}$$

Сравним полученный результат с экспериментальными данными. Наиболее тщательные измерения периодичности в вязком подслое были выполнены С. Клайном с сотрудниками и Е. Карино и Р. Бродки. Однако данные С. Клайна, к сожалению, не могут быть использованы, поскольку они характеризуют периодичность появления вязких структур не во времени, а в пространстве, причем в направлении, перпендикулярном осредненному течению. Е. Карино и Р. Бродки исследовали возникновение и распад вязких структур в подслое с помощью кинокамеры, движущейся со скоростью потока. Именно таким образом им удалось зарегистрировать весь цикл возникновения, увеличения и распада отдельных вязких структур. В результате исследований ими была получена экспериментальная зависимость

$$t_0 = A\,\mathrm{Re}^{-1,75}, \tag{2.48}$$

где $\mathrm{Re} = Ud/\nu = 4\,Uh/\nu$ (здесь d — диаметр трубы);
A — размерная постоянная.

Сравним соотношение (2.47) с экспериментальной зависимостью (2.48). Представим

$$\frac{n\nu}{u_*^2} = \frac{U^2}{u_*^2}\,\frac{\nu^2}{U^2 d^2}\,\frac{nd^2}{\nu} = \frac{8}{\lambda}\,\frac{1}{\mathrm{Re}^2}\,\frac{nd^2}{\nu},$$

где λ — коэффициент гидравлического сопротивления.

Поскольку $\lambda = 0,316/\mathrm{Re}^{0,25}$, по Блазиусу, для гладкой трубы (что отвечает условиям опытов Е. Карино и Р. Бродки) находим:

$$\frac{n\nu}{u_*^2} = \frac{8}{0,316}\,\mathrm{Re}^{-1,75}\,\frac{d^2}{\nu} = 25\,\frac{nd^2}{\nu}\,\mathrm{Re}^{-1,75}.$$

Отсюда

$$\mathrm{Re}^{-1,75} = \frac{1}{25}\,\frac{n\nu}{u_*^2}\,\frac{\nu}{nd^2}.$$

Подставляя это соотношение в экспериментальную зависимость (2.48) и учитывая, что $t_0 = 1/n$, получаем:

$$\frac{1}{n} = A\,\frac{1}{25}\,\frac{n\nu}{u_*^2}\,\frac{\nu}{nd^2}.$$

Таким образом, экспериментальная зависимость приводится к следующему безразмерному виду:

$$\frac{n\nu}{u_*^2} = \frac{25}{A}\,\frac{d^2}{\nu}.$$

Анализ данных Е. Карино и Р. Бродки, полученных при $d = 5,08 \times 10^{-2}$ м и $\nu = 0,4 \cdot 10^{-6}$ м²/с, позволил установить, что $A \approx 3,5 \cdot 10^7$ с. Подставляя эти значения в приведенное выше соотношение, находим:

$$n\nu/u_*^2 \approx 4,5 \cdot 10^{-3}.$$

Полученное экспериментальное значение безразмерного комплекса, характеризующего частоту возмущений в вязком подслое, удовлетворительно согласуется с расчетным значением (2.47).

Найдем предельную безразмерную толщину вязкого подслоя. Подставляя соотношение (2.35) в зависимость (2.44) и учитывая выражение (2.43), имеем:

$$u_* z_{\text{в}max} / \nu = 48. \tag{2.49}$$

Определим с использованием полученных данных наибольшее значение скорости на внешней границе вязкого подслоя в момент его разрушения, т. е. при $t = t_0$. Подставляя выражение (2.49) в зависимость (2.34), получаем: $u_{0max}/u_* \approx 14{,}5$. Рассчитанные характеристики толщины вязкого подслоя $u_* z_{\text{в}max}/\nu$ и наибольшей скорости на его внешней границе совпадают с общепринятыми значениями этих параметров [8].

Перейдем к рассмотрению характеристик течения в пристеночной турбулентной области, т. е. при $u_* z/\nu > 50$. Распределение скоростей в этой области течения в виде соотношения (2.21) было получено при условии линейного распределения турбулентной вязкости по глубине потока (2.18). Однако эксперимент показывает, что как в каналах, так и в трубах [8] турбулентная вязкость изменяется по поперечному сечению более сложным образом (рис. 2.7). В области $z/h > 0{,}2$ различие между реальной турбулентной вязкостью и рассчитанной по соотношению (2.18) становится настолько существенным, что для расчета требуется другая зависимость. Анализ экспериментальных данных позволил приближенно представить изменение турбулентной вязкости по глубине открытого потока следующим выражением:

$$\frac{\nu_\text{т}}{\varkappa u_* h} = \frac{z}{h} \, \frac{1 - z/h}{1 + z/h - (z/h)^2/4}. \tag{2.50}$$

Экспериментальные данные, приведенные Е. М. Минским, дают заниженную величину турбулентной вязкости вследствие неточного определения касательного напряжения τ_0 на дне канала. Расчет касательного напряжения, соответствующего реальному коэффициенту гидравлического сопротивления, показал, что оно занижено примерно на 70—80%. На рис. 2.7 приведены данные, скорректированные с учетом поправки τ_0.

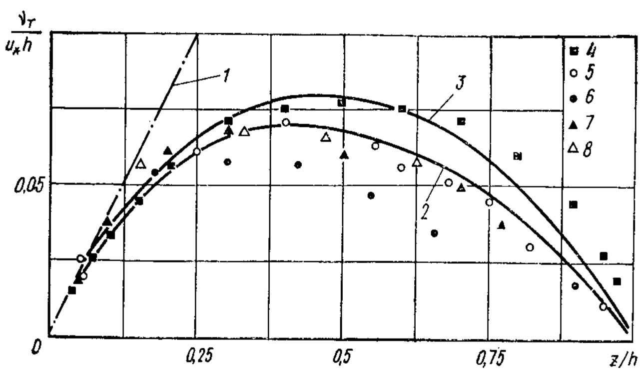


РИС. 2.7

1—$\nu_\text{т} = \varkappa u_* z$; 2 — расчет по соотношению (2.50); 3 — расчет по соотношению (2.51); 4 — данные И. Никурадзе (большие числа Рейнольдса); 5 — данные В. С. Боровкова; 6 — скорректированные данные Е. М. Минского; 7 — данные Ф. Клебанова, пограничный слой; 8 — данные А. Таунсенда, пограничный слой

Для круглых труб опытные данные лучше согласуются со следующей зависимостью:

$$\frac{\nu_т}{\varkappa u_* h} = \frac{z}{r} \frac{1 - z/r}{1 + \dfrac{z}{2r} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{z}{r}\right)^2}, \tag{2.51}$$

где r — радиус трубы.

Можно отметить, что при $z \to 0$ эти зависимости дают $\nu_т \to 0$, т. е. вблизи твердой границы касательные напряжения определяются действием сил вязкости. При $z/h \to 1$ (или $z/r \to 1$) обе зависимости приводят к $\nu_т \to 0$. Такое условие не является очевидным, поскольку в этой точке равны нулю и касательное напряжение, и градиент средней скорости. Поэтому турбулентная вязкость $\nu_т$, вычисляемая как

$$\nu_т = \frac{\tau}{\mathrm{d}u/\mathrm{d}z},$$

является в этой точке величиной неопределенной. Для области потока, близкой к свободной поверхности (или к оси трубы), некоторые исследователи принимают $\nu_т = \mathrm{const}$ [8]. Тем не менее, даже по этим данным, можно установить некоторое уменьшение $\nu_т$ при $z/h > 0{,}4$. Результаты экспериментов, приведенные на рис. 2.7, показывают, что при $0{,}4 < z/h < 0{,}8$ величина $\nu_т$ изменяется слабо, однако при $z/h > 0{,}8$ величина $\nu_т$ заметно уменьшается. Полученные аппроксимации для $\nu_т$ в канале и в круглой трубе согласуются с линейным законом изменения $\nu_т$ (2.18) до $z/h \approx 0{,}1$; при $z/h > 0{,}2$ погрешность вычисления $\nu_т$ по линейной зависимости (2.18) превышает 50%. На рис. 2.7 приведены данные по распределению турбулентной вязкости в поперечном сечении пограничного слоя на плоской пластине. Можно отметить, что как характер распределения, так и величина турбулентной вязкости в пограничном слое и в плоском канале практически совпадают. Это подтверждает гипотезу об аналогичности течения в канале и в пограничном слое на плоской пластине.

Используя аппроксимацию для $\nu_т$, определим изменение скорости по глубине открытого потока. Из соотношений (2.5) и (2.17) имеем:

$$g(h - z)\, i = (\nu + \nu_т) \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}. \tag{2.52}$$

Отсюда

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z} = \frac{g(h - z)\, i}{\nu + \nu_т} = \frac{ghi\,(1 - z/h)}{\nu + \nu_т}.$$

Подставив в это соотношение значение $\nu_т$ из выражения (2,50), после преобразований получим:

$$\frac{\mathrm{d}(u/u_*)}{\mathrm{d}(z/h)} = \frac{u_* h}{\nu} \frac{1 - z/h}{1 + \dfrac{\varkappa u_* h}{\nu} \dfrac{z}{h} \dfrac{1 - z/h}{1 + z/h - (z/h)^2/4}}.$$

Учитывая, что в рассматриваемой области течения, лежащей выше вязкого подслоя,

$$\frac{\varkappa u_* h}{\nu}\frac{z}{h}=\frac{\varkappa u_* z}{\nu}>50\varkappa,$$

первым слагаемым в знаменателе можно пренебречь. Тогда выражение упрощается и принимает вид:

$$\frac{d(u/u_*)}{d(z/h)}=\frac{1}{\varkappa}\frac{1+z/h-(z/h)^2/4}{z/h}.$$

После интегрирования имеем:

$$\frac{u}{u_*}=\frac{1}{\varkappa}\left[\ln\frac{z}{h}+\frac{z}{h}-\frac{1}{8}\left(\frac{z}{h}\right)^2\right]+C, \tag{2.53}$$

где C — константа интегрирования.

Определим константу C из условия смыкания полученного профиля с профилем скорости в вязком подслое при $z=z_в$:

$$\frac{u_{0\,max}}{u_*}=\frac{1}{\varkappa}\left[\ln\frac{z_в}{h}+\frac{z_в}{h}-\frac{1}{8}\left(\frac{z_в}{h}\right)^2\right]+C.$$

Отсюда

$$C=\frac{u_{0\,max}}{u_*}-\frac{1}{\varkappa}\left[\ln\frac{z_в}{h}+\frac{z_в}{h}-\frac{1}{8}\left(\frac{z_в}{h}\right)^2\right]. \tag{2.54}$$

С учетом того, что при $z=z_в$ $u_{0max}/u_*\approx 14{,}5$ и $u_*z_в/\nu=48$, при $\varkappa=0{,}4$ находим:

$$C\approx 14{,}5-2{,}5\ln 48+2{,}5\ln\frac{u_* h}{\nu}=2{,}5\ln\frac{u_* h}{\nu}+4{,}9. \tag{2.55}$$

Анализ опытных данных И. Никурадзе по распределению скоростей в непосредственной близости стенки позволил установить, что параметр $\varkappa$ является слабой функцией числа Рейнольдса (рис. 2.8). При больших числах Рейнольдса параметр $\varkappa=0{,}4$.

Подставляя выражение для C в соотношение (2.53), получаем распределение скоростей в открытом потоке:

$$\frac{u}{u_*}=2{,}5\ln\frac{u_* z}{\nu}+2{,}5\frac{z}{h}-0{,}3\left(\frac{z}{h}\right)^2+4{,}9. \tag{2.56}$$

Приведенные выше данные, указывающие на аналогию между течением в канале и в пограничном слое на плоской пластине, позволяют считать, что полученный профиль скорости в виде (2.56) может быть использован для расчета распределения скоростей в пограничном слое. Аналогично получаем распределение скоростей при течении в круглых трубах:

$$\frac{u}{u_*}=2{,}5\ln\frac{u_* z}{\nu}+1{,}25\frac{z}{r}-0{,}6\left(\frac{z}{r}\right)^2+4{,}9. \tag{2.57}$$

Сопоставление профилей (2.56) и (2.57) показывает, что закон распределения скоростей в трубах и каналах неодинаков. Анализ

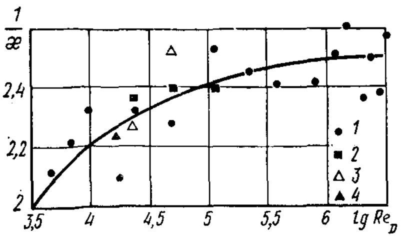


РИС. 2.8

1 — гладкие трубы; 2—4 — шероховатые трубы (2 — $r/k_s=507$; 3 — $r/k_s=252$; 4 — $r/k_s=126$)

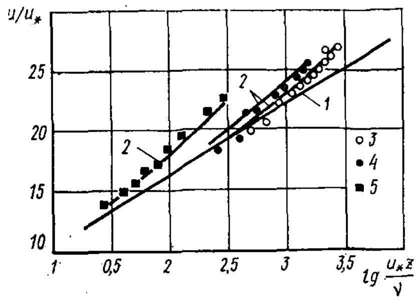


РИС. 2.9

1 — профиль И. Никурадзе для гладкой трубы; 2 — расчет по зависимости (2.62); 3—5 — профили скорости в гладких каналах (3 — данные В. С. Боровкова, $\mathrm{Re}=240\cdot10^3$; 4 — то же, $\mathrm{Re}=120\cdot10^3$; 5 — данные С. Клайна и др., $Re=32\cdot10^3$)

профилей (2.56) и (2.57) показывает также, что с увеличением z/h (или z/r), т. е. с удалением от твердой границы, распределение скоростей все заметнее отклоняется от логарифмического. При этом слагаемое, содержащее z^2, остается малым, и его следует учитывать лишь при точном вычислении максимальной скорости. Поэтому выражения (2.56) и (2.57), описывающие распределение скоростей в каналах и трубах, можно упростить:

для каналов

$$\frac{u}{u_*}=5{,}75\lg\frac{u_* z}{\nu}+2{,}5\frac{z}{h}+4{,}9; \tag{2.58}$$

для труб

$$\frac{u}{u_*}=5{,}75\lg\frac{u_* z}{\nu}+1{,}25\frac{z}{r}+4{,}9. \tag{2.59}$$

Этим выражениям соответствуют и более простые зависимости для турбулентной вязкости:

при течении в каналах

$$\frac{\nu_{\text{т}}}{\varkappa u_* h}=\frac{z}{h}\,\frac{1-z/h}{1+z/h}; \tag{2.60}$$

при течении в круглых трубах

$$\frac{\nu_{\text{т}}}{\varkappa u_* r}=\frac{z}{r}\,\frac{1-z/r}{1+z/(2r)}. \tag{2.61}$$

Для удобства анализа и сравнения с экспериментальными данными выражения (2.58) и (2.59) могут быть представлены в виде:

$$\frac{u}{u_*}=2{,}5\ln\frac{u_* z}{\nu}+2{,}5\frac{\nu}{u_* h}\,\frac{u_* z}{\nu}+4{,}9; \tag{2.62}$$

$$\frac{u}{u_*}=2,5\ln\frac{u_* z}{\nu}+2,5\frac{\nu}{u_* d}\,\frac{u_* z}{\nu}+4,9, \qquad (2.63)$$

где d — диаметр трубы.

Сравнение профилей, рассчитанных по соотношениям (2.62) и (2.63), с экспериментальными данными для каналов (рис. 2.9) и труб (рис. 2.10) позволяет отметить хорошую сходимость результатов расчета с данными эксперимента. Для высокоскоростных потоков, когда скорости вблизи свободной поверхности снижаются вследствие дополнительных эффектов торможения, распределение скоростей (2.56) или (2.58) справедливо лишь для зоны, лежащей ниже точки максимума скорости. При этом все характерные параметры (u_*, h) определяются для этой зоны.

Интегрированием профиля скорости (2.53) с учетом выражения (2.55) найдем отношение средней скорости U к динамической для потока в канале:

$$\frac{U}{u_*}=5,75\lg\frac{u_* h}{\nu}+3,55. \qquad (2.64)$$

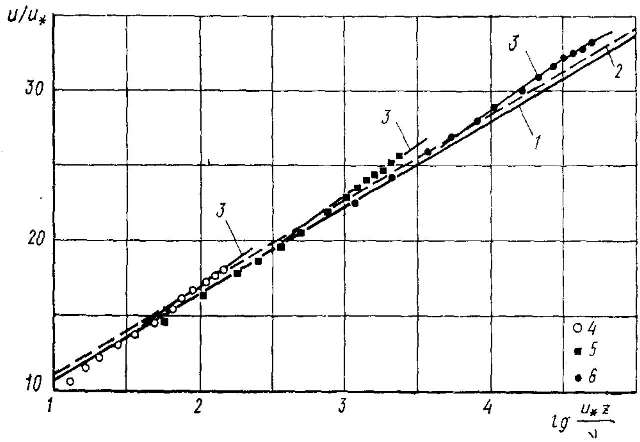


РИС 2.10

1 — расчет по зависимости (2.23) при $\varkappa=0,4$ и $\beta=4,9$; 2 — то же, при $\beta=5,5$; 3 — расчет по зависимости (2.59); 4—6 — данные И. Никурадзе (4 — Re=4 · 10³; 5 — Re=105 · 10³; 6 — Re=3240 · 10³)

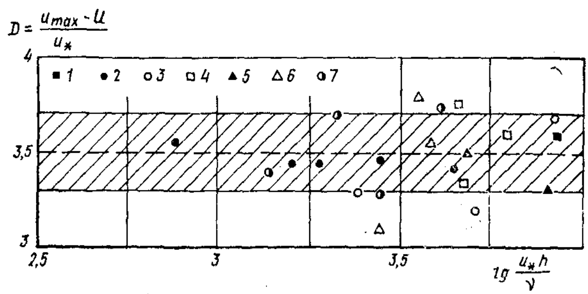


РИС. 2.11

1 — данные В. П. Троицкого; 2 — данные Е. Эккерта; 3 — данные Ж. Конт-Белло; 4 — данные М. Випарелли; 5 — данные Ж. Хальбронна и др.; 6 — данные Л. Гогиберидзе; 7 — данные В. С. Боровкова

Аналогично для течения в круглой трубе для больших чисел Рейнольдса находим:

$$\frac{U}{u_*} = 5{,}75 \lg \frac{u_* r}{\nu} + 1{,}55. \tag{2.65}$$

Найдем дефицит скорости D для течения в канале и в трубе:

$$D = (u_{max} - U)/u_*. \tag{2.66}$$

Максимальную скорость при течении в открытом канале вычисляем по соотношению (2.56) при $z = h$:

$$\frac{u_{max}}{u_*} = 5{,}75 \lg \frac{u_* h}{\nu} + 7{,}1. \tag{2.67}$$

Максимальную скорость при течении в трубе определим аналогично по соотношению (2.57) при $z = r$:

$$\frac{u_{max}}{u_*} = 5{,}75 \lg \frac{u_* r}{\nu} + 5{,}55. \tag{2.68}$$

Экспериментальные значения дефицита средней скорости $(u_{max} - U)/u_*$ при различных $u_* h/\nu$ приведены на рис. 2.11.

Заметный разброс в экспериментальных данных связан с погрешностями измерения максимальной скорости. Действительно, погрешность всего лишь в $\pm 1\%$ при измерении максимальной скорости приводит к неточному определению значения дефицита скорости в пределах от 3,3 до 3,7 раза (см. рис. 2.11).

Используя полученные соотношения для средней и максимальной скорости, найдем дефицит средней скорости для течения в канале:

$$D_к = 1{,}42/\varkappa; \tag{2.69}$$

при $\varkappa = 0{,}4$

$$D_к \approx 3{,}5. \tag{2.70}$$

Для течения в трубе

$$D_т = 1{,}6/\varkappa; \tag{2.71}$$

при $\varkappa = 0{,}4$

$$D_т \approx 4. \tag{2.72}$$

Обычно принято считать, что профили скорости в координатах $u/u_* = f\,(u_* z/\nu)$ имеют универсальный характер, т. е. при разных числах Рейнольдса описываются одной зависимостью логарифмического вида. Однако данные, представленные на рис. 2.9 и 2.10, позволяют сделать вывод о том, что профили скорости в этих координатах не являются универсальными. Таким образом, логарифмический профиль $u/u_* = 5{,}75 \lg (u_* z/\nu) + 5{,}5$, полученный экспериментально И. Никурадзе, может считаться универсальным лишь в первом приближении. На отсутствие строгой универсальности логарифмического профиля обращали внимание такие исследователи, как К. Милликен, И. О. Хинце [8], и др. Действительно, этот профиль при $\beta = 5,5$ осредняет все экспериментальные профили (см. рис. 2.10) без учета их особенностей. При различных способах осреднения разные исследователи получают различные значения β. Анализ полученных профилей скорости показывает, что универсальность распределения скоростей может быть достигнута только в форме дефицита скорости $(u-U)/u_* = f\ (z/h)$.

Действительно, подставляя в это выражение соотношения (2.56) и (2.64), найдем для течения в канале

$$\frac{u-U}{u_*} = 5,75 \lg \frac{z}{h} + 2,5 \frac{z}{h} - 0,3 \left(\frac{z}{h}\right)^2 + 1,35. \qquad (2.73)$$

На рис. 2.12 сравнивается расчет по выражению (2.73) с данными экспериментальных исследований в гладких каналах. Выра-

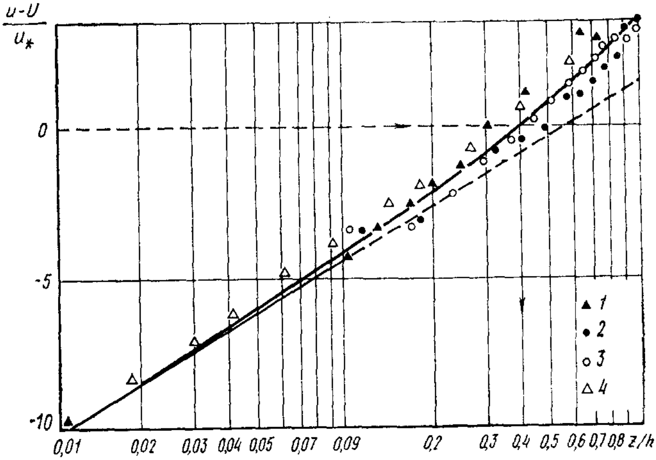


РИС. 2.12

1 — данные С. Клайна и др., Re=19 · 10³; 2 — данные В. С. Боровкова, Re=120×10³; 3 — данные В. С. Боровкова, Re=240×10³; 4 — данные Ж. Конт-Белло, Re=900·10³

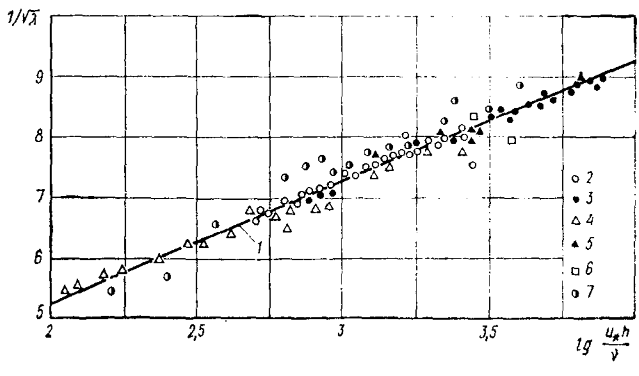


РИС. 2.13

1 — расчет по зависимости (2.74); 2 — данные Э. Марки; 3 — данные А. Яссина; 4 — данные Э. Рейниуса; 5 — данные В. С. Боровкова; 6 — данные Л. Гогиберидзе; 7 — данные Р. Пауэлла жение (2.73) позволяет установить, что точка средней скорости в гладком канале находится на расстоянии $z/h \approx 0,4$ от дна (см. рис. 2.12). Именно в этой точке обычно рекомендуется определять среднюю скорость при измерениях.

Полученное значение дефицита скорости в трубе практически совпадает со средним экспериментальным значением этого параметра, полученным И. Никурадзе [8]. Принимая во внимание, что $u/u_* = \sqrt{8}/\sqrt{\lambda}$, определим из соотношений (2.64) и (2.65) коэффициент гидравлического сопротивления для каналов и труб:

при течении в каналах

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2\lg\frac{u_* h}{\nu} + 1,25\lg \mathrm{Re}\sqrt{\lambda} - 0,85, \tag{2.74}$$

где $\mathrm{Re} = 4Uh/\nu$;

при течении в круглых трубах

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2\lg\frac{u_* r}{\nu} + 0,55 = 2\lg \mathrm{Re}\sqrt{\lambda} - 0,95, \tag{2.75}$$

где $\mathrm{Re} = Ud/\nu$.

Следует отметить, что коэффициенты гидравлического сопротивления при течении в канале и в круглой трубе практически одинаковы, несмотря на значительное различие в распределении скоростей. Сравнение расчетной зависимости (2.74) с экспериментальными данными по гидравлическому сопротивлению в прямоугольных каналах представлено на рис. 2.131. Данные опытов относятся как к потокам с гладкой свободной поверхностью, так и к высокоскоростным потокам. Для высокоскоростных потоков, когда скорости вблизи свободной поверхности заметно снижались вследствие эффектов торможения, коэффициент гидравлического сопротивления определялся для нижней зоны в соответствии с двухслойной динамической моделью. Использование этой модели позволило выделить в высокоскоростном потоке зону, занимающую, как правило, бóльшую часть его толщины. Кинематические и динамические характеристики течения в этой зоне не отличаются от соответствующих характеристик потоков с гладкой свободной поверхностью. Следует особо подчеркнуть, что определенный для нижней динамической зоны коэффициент гидравлического сопротивления характеризует лишь часть гидравлических сопротивлений высокоскоростного потока. Расчет полного гидравлического сопротивления высокоскоростного потока должен проводиться с учетом сопротивления верхней динамической зоны.

ГЛАВА 3. ВЫСОКОСКОРОСТНЫЕ ПОТОКИ В ШЕРОХОВАТОМ КАНАЛЕ

§ 7. Взаимодействие потока с элементами шероховатости

Ранее было рассмотрено течение над гладкой граничной поверхностью. В непосредственной близости от такой поверхности периодически возникает, развивается и разрушается вязкий подслой. Как было показано, наибольшая безразмерная толщина вязкого подслоя $u_* z_в/\nu$ согласно соотношению (2.49) не превышает 50. Поскольку в настоящее время не имеется подробных экспериментальных исследований течения в вязком подслое вблизи шероховатой поверхности, будем условно считать, что шероховатость не изменяет существенно характера течения в вязком подслое.

Определяя величину шероховатости безразмерным комплексом $u_* k/\nu$ (где k — геометрическая высота выступов шероховатости), можно считать, что при $u_* k/\nu > 50$ выступы шероховатости выходят за пределы вязкого подслоя даже тогда, когда толщина его максимальна, и оказывают непосредственное воздействие на пристеночную область турбулентного течения во все моменты времени развития вязкого подслоя. Если $u_* k/\nu < 50$, выступы шероховатости оказывают влияние только в тех случаях, когда толщина развивающегося вязкого подслоя меньше высоты выступов шероховатости: $u_* z_в/\nu < u_* k/\nu$. Если толщина вязкого подслоя превосходит высоту выступов шероховатости, их влияние на характеристики пристеночного турбулентного течения не проявляется.

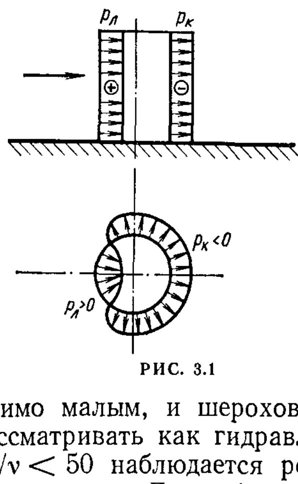


Рис. 3.1

Чем меньше высота выступов шероховатости, тем бо́льшую часть времени они скрыты в пределах вязкого подслоя и тем меньше эффект их воздействия на течение. При $u_* k/\nu < 10$ влияние выступов шероховатости становится пренебрежимо малым, и шероховатую поверхность в этом случае можно рассматривать как гидравлически гладкую. В диапазоне $10 < u_* k/\nu < 50$ наблюдается режим течения с неполным проявлением шероховатости. Далее будем рассматривать течение в условиях полного проявления шероховатости, т. е. при $u_* k/\nu > 50$.

В условиях полного проявления шероховатости ее выступы обтекаются турбулентным потоком. Взаимодействуя с выступом шероховатости как с препятствием (рис. 3.1), поток оказывает на него динамическое воздействие. Величина динамического воздействия определяется в основном разностью давлений на лобовую и кормовую

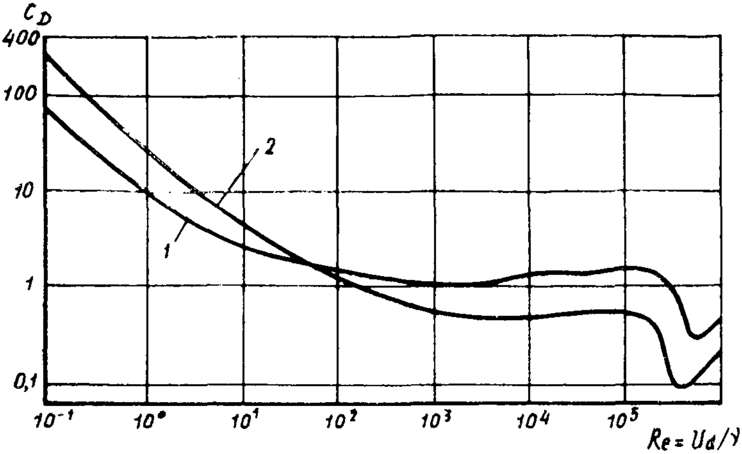


РИС. 3.2
1 — цилиндр; 2 — шар

части выступа шероховатости. В лобовой части выступа давление повышенное по сравнению с давлением в потоке, в кормовой части пониженное. Распределение избыточного давления по периметру выступа в общем случае неравномерное (см. рис. 3.1). Максимум давления в лобовой части выступа $p_{л_{max}} = \rho U^2/2$ (где U — скорость набегающего потока). Наибольшее понижение давления в кормовой части $p_{к\ min}$ близко по абсолютной величине к максимальному лобовому давлению $p_{л\ max}$. Однако и величина, и характер распределения давления в кормовой части выступа могут меняться в зависимости от формы выступа и режима обтекания.

Сила гидродинамического давления на выступ определяется по известному соотношению

$$F_0 = C_D \frac{\rho U^2}{2} \Omega_м, \qquad (3.1)$$

где $\Omega_м$ — площадь миделева сечения;
C_D — коэффициент гидродинамического сопротивления выступа.

Рассмотренное выше силовое воздействие на препятствие относится к безграничному потоку, во всех точках которого скорости течения одинаковы. При взаимодействии потока с элементом шероховатости, находящимся на граничной поверхности, скорости течения существенно изменяются по высоте выступа. Поэтому силовое воздействие потока на элемент шероховатости будет зависеть от распределения скоростей, а распределение скоростей в свою очередь определяется размерами и формой выступов шероховатости и их расположением. При распределении скоростей $U = u(z)$ силовое воздействие на выступ

$$F_0 = C_D \int\limits_0^{\Omega_М} \rho \frac{u^2(z)}{2} \, d\omega, \qquad (3.2)$$

где $d\omega = b(z)\, dz$ [здесь $b(z)$ — ширина выступа на высоте z].

В этом случае коэффициент гидродинамического сопротивления выступа

$$C_D = \frac{F_0}{\int\limits_0^{\Omega_М} \rho \frac{u^2(z)}{2} \, d\omega}. \qquad (3.3)$$

Все виды шероховатостей можно разделить на два класса: двухмерную шероховатость и трехмерную. Выступ двухмерной шероховатости характеризуется двумя параметрами: высотой выступа $k = k_{ск}$ и протяженностью по потоку l. При двухмерной шероховатости выступ занимает всю ширину канала, поэтому силовое воздействие можно определять на единицу ширины выступа ($b = \text{const} = 1$). Тогда $d\omega = dz$, и силовое воздействие

$$F_0 = C_D \int\limits_0^{k} \rho \frac{u^2(z)}{2} \, dz. \qquad (3.4)$$

Выступ трехмерной шероховатости характеризуется тремя геометрическими параметрами: высотой k, протяженностью по потоку l и шириной поперек потока b. Ширина выступа b может быть переменной по высоте z (для выступов конической, сферической, эллиптической формы). Определяя силу, действующую на элемент шероховатости, по соотношению (3.2), для трехмерной шероховатости имеем:

$$F_0 = C_D \int\limits_0^{k} \rho \frac{u^2(z)}{2} b(z) \, dz. \qquad (3.5)$$

Таким образом, при известном распределении скоростей и заданном $b(z)$ для расчета силы F_0 необходимо знать величину коэффициента гидродинамического сопротивления C_D.

Коэффициент гидродинамического сопротивления одиночного выступа C_{D0} зависит от формы выступа и режима обтекания. При небольшой по сравнению с глубиной потока высоте выступа режим обтекания определяется числом Рейнольдса. На рис. 3.2 показано изменение коэффициента гидродинамического сопротивления для цилиндра и шара диаметром d, обтекаемых безграничным потоком, в зависимости от числа Рейнольдса. Из этого рисунка видно, что при достаточно больших числах Рейнольдса $\left(10^5 > \frac{Ud}{\nu} > 10^3\right)$ коэффициент гидродинамического сопротивления изменяется слабо и может быть принят постоянным. Поскольку для высокоскоростных потоков числа Рейнольдса достаточно велики, то будем в дальнейшем считать, что коэффициент C_{D_0} не зависит от числа Рейнольдса. Сопротивление тел различной формы в безграничном потоке изучено достаточно полно, сопротивление тел, находящихся на плоскости, — более слабо.

Сравним коэффициенты гидродинамического сопротивления одного и того же тела при установке его в безграничный поток и на плоскость. Рассмотрим в качестве примера плоскую пластинку bc (бесконечной ширины), обтекаемую потоком с распределением скоростей, показанным на рис. 3.3. Разделяя тело на две равные части осью симметрии $0 — 0$, имеем:

$$F_0 = F_1 + F_2 = 2F_1,$$

где F_0 — сила, действующая на все тело;
F_1 и F_2 — силы, действующие на каждую часть тела.

Если вместо оси симметрии ввести жесткую границу, то при сохранении прежнего распределения скоростей суммарное воздействие на тело не изменится. Таким образом, сила, действующая на тело ab, закрепленное на плоскости, равна половине силы, действующей на свободное тело bc, при условии, если поток имеет распределение скоростей, показанное на рис. 3.3. Поскольку миделево сечение свободного тела вдвое больше сечения тела, закрепленного на плоскости, то при указанном выше соотношении сил коэффициенты гидродинамического сопротивления их равны. Следовательно, этот подход позволяет определять коэффициент гидродинамического сопротивления тела, закрепленного на плоскости, по коэффициенту гидродинамического сопротивления свободного тела. В качестве эквивалентного свободного тела необходимо принимать симметричное тело, каждая половина которого представляет собой рассматриваемый элемент шероховатости. Так, например, если рассматриваемый элемент шероховатости — полушарие, то эквивалентное ему свободное тело — шар.

Определим силу, действующую на единицу ширины свободного тела bc в условиях симметричного распределения скоростей, показанного на рис. 3.3. Представим приближенно распределение скоростей по обе стороны от оси симметрии в виде:

$$u(z)/u_k = (z/k)^n, \tag{3.6}$$

где u_k — скорость на высоте выступа шероховатости.

Параметр n зависит от коэффициента гидравлического сопротивления λ граничной поверхности и определяется для открытых каналов соотношением $n = 1{,}25\sqrt{\lambda}$.

При распределении скоростей (3.6) сила, действующая на единицу ширины двухмерного эквивалентного свободного тела,

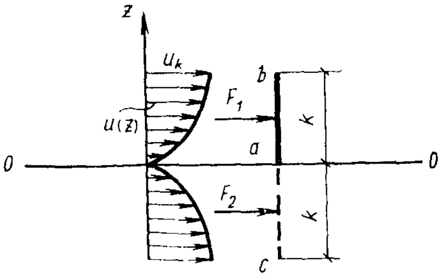


РИС. 3.3

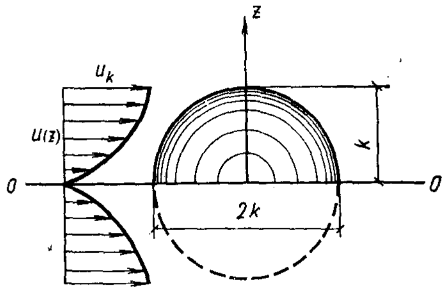


РИС. 3.4

$$F_0=\frac{1}{1+2,5\sqrt{\lambda}}C_{D0}\,2k\rho\,\frac{u_k^2}{2},$$

где C_{D0} — коэффициент гидродинамического сопротивления свободного тела при обтекании его безграничным потоком со скоростью u_k.

Сила F_1, действующая на единичный элемент двухмерной шероховатости высотой k, закрепленный на плоскости, равна:

$$F_1=\frac{F_0}{2}=\frac{1}{1+2,5\sqrt{\lambda}}C_{D0}\,k\rho\frac{u_k^2}{2}=C_{k0}\;k\rho\frac{u_k^2}{2},$$

где C_{k0} — коэффициент гидродинамического сопротивления одиночного элемента шероховатости.

Рассмотрим обтекание двухмерного выступа шероховатости, имеющего вид тонкой пластины ab высотой k (см. рис. 3.3). Эквивалентное свободное тело этой шероховатости представляет собой также тонкую пластину высотой $2k$. Коэффициент гидродинамического сопротивления C_{D0} такого тела равен 2 [1], следовательно,

$$C_{k\,0}=\frac{1}{1+2n}C_{D\,0}=\frac{2}{1+2,5\sqrt{\lambda}}. \tag{3.7}$$

Экспериментальные исследования сопротивления тел, установленных на гладкой плоскости [9], позволяют проверить это соотношение, полученное расчетом для двухмерной шероховатости. Согласно данным этих экспериментов, коэффициент гидродинамического сопротивления пластины, установленной на плоскости, близок к 1,5. При вычислении коэффициента сопротивления принималось распределение скоростей $u(z)/u_k=(z/k)^{1/7}$, т. е. показатель степени n в соотношении (3.6) принимался постоянным и равным 1/7. В этом случае согласно (3.7)

$$C_{k0}=\frac{1}{1+2/7}C_{D0}=0,78C_{D0}=1,56.$$

Таким образом, расчетное значение C_{k0} оказалось близким к значению, определенному экспериментально.

Для трехмерных элементов шероховатости при $b = \text{const}$ расчет дает такое же соотношение между C_{k0} и C_{D0}, что и для двухмерных элементов, т. е. для этих элементов справедливо выражение (3.7). При переменной ширине элемента b для расчета C_{k0} необходимо пользоваться общей зависимостью (3.3).

Рассчитаем для примера соотношение между C_{k0} и C_{D0} для одиночного выступа шероховатости полусферической формы (рис. 3.4). Как уже указывалось, свободным эквивалентным телом для выступа шероховатости полусферической формы является сфера. Силу, действующую на сферу при симметричном распределении скоростей степенного вида (3.6), вычислим по соотношению

$$F = C_{D0}\, \rho \int\limits_{-k}^{+k} b(z) \frac{u^2(z)}{2}\, dz. \tag{3.8}$$

Для окружности радиусом k выражение для $b(z)$ имеет вид:

$$b = 2\sqrt{k^2 - z^2}.$$

Подставляя это выражение в соотношение (3.8), с учетом зависимости (3.6) получаем:

$$F = C_{D0}\, \rho u_k^2 \int\limits_{-k}^{+k} \sqrt{k^2 - z^2}\, (z/k)^{2n}\, dz. \tag{3.9}$$

Сила, действующая на ту же сферу при обтекании ее безграничным потоком, имеющим постоянную скорость u_k,

$$F_0 = C_{D0}\, \rho \frac{u_k^2}{2} \frac{\pi (2k)^2}{4}. \tag{3.10}$$

Выражение (3.9) в общем виде не интегрируется. Используя численное интегрирование и сопоставляя результат с соотношением (3.10), находим:

$$\frac{C_{k0}}{C_{D0}} = \frac{1}{1 + 4\sqrt{\lambda}}. \tag{3.11}$$

В тех случаях, когда не имеется данных о величине коэффициента гидродинамического сопротивления свободного тела, эквивалентного элементу шероховатости, он может быть определен расчетом. Этот расчет основан на использовании геометрических характеристик свободного эквивалентного тела и экспериментальных данных по сопротивлению тел различной формы. Коэффициент гидродинамического сопротивления тела произвольной формы C_{D0} принято представлять в виде:

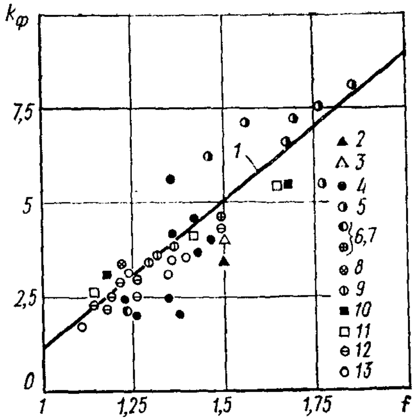
$$C_{D0} = k_{\text{ф}}\, C_{D\text{ш}}, \tag{3.12}$$

где $C_{D\text{ш}}$ — коэффициент гидродинамического сопротивления свободного шара ($C_{D\text{ш}} = 0{,}47$);

$k_{\text{ф}}$ — коэффициент формы.

РИС. 3.5

1 — расчет по зависимости (3.13); 2—7 — тела неправильной формы (2 — данные З. Горбиса, графит; 3 — данные Шуберта, антрацит; данные Р. Романовского: 4 — речная галька дискообразная; 5 — то же, пластинчатая; 6, 7 — данные Петтиджона и Христиансена); 8—13 — тела правильной формы (данные П. Романкова: 8 — куб; 9 — призма; 10 — диск; 11 — цилиндр; данные З. Горбиса: 12 — алюминиевые цилиндры; 13 — деревянные кубики)



Анализ экспериментальных данных позволил установить, что

$$k_ф = 8(f-1)+1. \qquad (3.13)$$

В этом соотношении геометрический параметр $f=(d_т/d_s)^2$ (где $d_т$ — диаметр шара, поверхность которого равна поверхности эквивалентного свободного тела; d_s — диаметр шара, объем которого равен объему эквивалентного свободного тела). Геометрический параметр f обычно легко определяется при известных размерах элемента шероховатости.

На рис. 3.5 дано сравнение зависимости (3.13) с результатами экспериментов разных исследователей.

Используя предлагаемый метод расчета, определим для примера коэффициент гидродинамического сопротивления одиночного элемента шероховатости в виде конуса высотой k и диаметром основания $d=k$ (рис. 3.6). Эквивалентное свободное тело представляет собой тело вращения, коэффициент гидродинамического сопротивления которого неизвестен. Вычислим поверхность эквивалентного свободного тела:

$$\Omega = 2\pi \frac{k}{2} 1,12k = 1,12\pi k^2.$$

Объем эквивалентного свободного тела

$$W = \frac{2}{3}\pi \frac{k^2}{4} k = \frac{1}{6}\pi k^3.$$

Приравнивая поверхность тела Ω к поверхности шара, найдем диаметр $d_т$ по соотношению $\pi d_т^2 = 1,12\,\pi k^2$:

$$d_т = 1,06k.$$

Приравнивая объем тела W к объему шара, найдем диаметр d_s по соотношению $\pi d_s^3/6 = \pi k^3/6$:

$$d_s = k.$$

Геометрический параметр $f=(d_т/d_s)^2 = 1,12$.

Коэффициент формы $k_ф = 8(1,12-1)+1 = 1,96$.

Коэффициент гидродинамического сопротивления эквивалентного свободного тела согласно (3.12) равен:

$$C_{D_0} = k_ф \cdot 0,47 = 1,96 \cdot 0,47 = 0,93.$$

По соотношению (3.5) определим силу, действующую на эквивалентное свободное тело, учитывая, что $b(z) = k - z$:

$$F_0 = 2\rho C_{D_0} \int\limits_0^k \frac{u_k^2}{2} \left(\frac{z}{k}\right)^{2n} (k - z)\, dz.$$

После численного интегрирования и сопоставления с силой, действующей на эквивалентное свободное тело в безграничном потоке, находим:

$$\frac{C_{k0}}{C_{D_0}} = \frac{1}{1 + 5\sqrt{\lambda}}. \quad (3.14)$$

Полученные соотношения для двухмерных и некоторых трехмерных тел иллюстрируются кривыми, показанными на рис. 3.7. Следует еще раз подчеркнуть, что эти соотношения учитывают влияние реального распределения скоростей на коэффициент гидродинамического сопротивления C_{k_0} элементов шероховатости. В общем виде соотношение между C_{k0} и C_{D0} может быть записано следующим образом:

$$\frac{C_{k0}}{C_{D_0}} = \frac{1}{1 + A\sqrt{\lambda}}. \quad (3.15)$$

В табл. 3.1 даны значения C_{D0} и A для различных типов шероховатости.

Изложенная выше методика дает удовлетворительные результаты по расчету коэффициентов C_{D0} и C_{k0} для трехмерных элементов, у которых высота больше половины продольного размера, что чаще всего и наблюдается в практике. Если длина элемента шероховатости больше высоты, необходимо учитывать дополнительное сопротивление, связанное с потерями на трение. В особых случаях, когда элементы шероховатости представляют собой плавно обтекаемые тела, на их сопротивление может оказывать влияние уровень турбулентности набегающего потока [9].

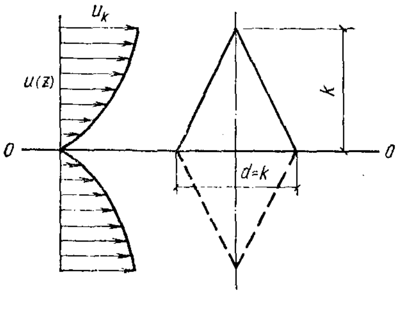


РИС. 3.6

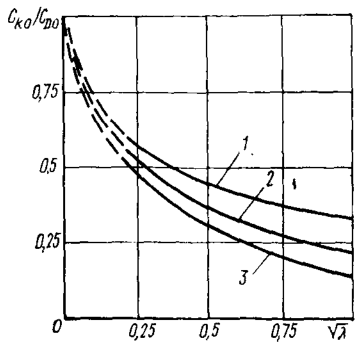
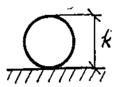
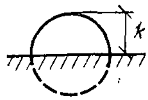
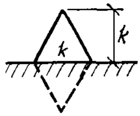
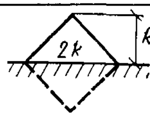
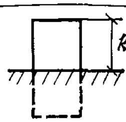
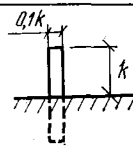
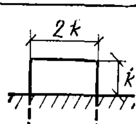
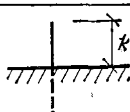
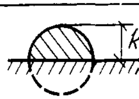
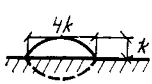


РИС. 3.7

1 — двухмерные тела; 2 — полусфера; 3 — конус

Элемент шероховатости	Схема установки и эквивалентное тело	C_{D0} эквивалентного тела	A	Примечание
Шар		0,47	2,5	Трехмерные элементы
Полушарие		0,47	4	
Конус		0,93	5	
		0,85	5	
Куб		1,68	2,5	
Цилиндр		0,87	2,5	
Прямоугольный брус		2	2,5	Двухмерные элементы
Длинная прямоугольная пластина		2	2,5	
Полуцилиндр		1,2	2,5	
Эллиптический цилиндр		0,6	2,5	

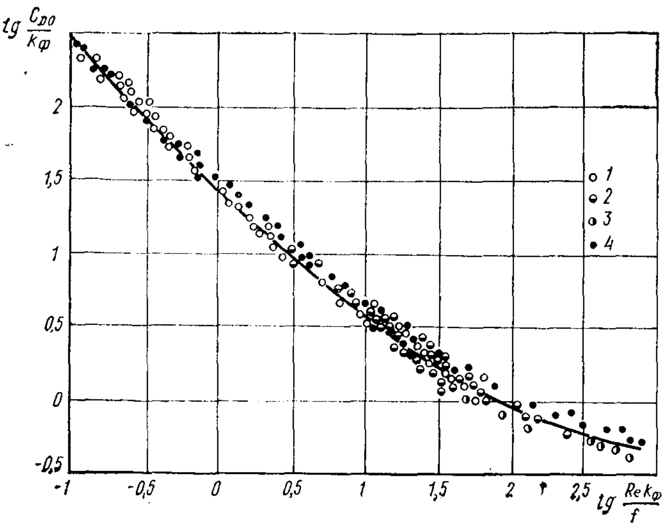


РИС. 3.8

1 — медные цилиндры; 2 — капроновые цилиндры; 3— частицы неправильной формы (кварц); 4 — шар

Как указывалось выше, элементы шероховатости, обтекаемые высокоскоростным потоком, работают в зоне автомодельности по числу Рейнольдса, т. е. C_{D0} и C_{k0} не зависят от числа Рейнольдса. Однако в некоторых случаях (например, на начальном участке в условиях малой относительной шероховатости) влияние числа Рейнольдса на сопротивление выступов может быть заметным. При очень малых числах Рейнольдса ($u_k d_s/\nu < 1$) обтекание выступов шероховатости безотрывное, и сопротивление выступов произвольной формы может быть найдено по соотношению $C_{D0} = 24\ f/\mathrm{Re}$. При увеличении числа Рейнольдса степень зависимости C_{D0} от Re изменяется.

Обтекание эквивалентного свободного тела аналогично обтеканию частицы той же формы при ее падении. Поэтому, используя данные [9], находим:

$$C_{D0} = 24f/\mathrm{Re} + \sqrt{0,47k_\phi}\sqrt{C_{D0}},$$

где $\mathrm{Re} = u_k\, d_s/\nu$.

Из этого соотношения получаем:

$$\sqrt{C_{D0}} = \frac{1}{\sqrt{0,47k_\phi}}\left(C_{D0} - \frac{24}{\mathrm{Re}} f\right).$$

Возводим обе части равенства в квадрат:

$$C_{D0} = \frac{1}{0,47k_\phi}\left(C_{D0}^2 - \frac{48}{\mathrm{Re}} C_{D0} f + \frac{570}{\mathrm{Re}^2} f^2\right).$$

Решая квадратное уравнение относительно C_{D0}, имеем:

$$C_{D0} = \frac{24}{\mathrm{Re}} f + 0,24k_\phi\left(1 + \sqrt{1 + \frac{200}{k_\phi \mathrm{Re}} f}\right).$$

Это соотношение можно представить в более компактном виде:

$$C_{D0} = 0,12k_\phi\left(1 + \sqrt{1 + \frac{200}{k_\phi \mathrm{Re}} f}\right)^2. \tag{3.16}$$

Сопоставление полученной расчетной зависимости с экспериментальными данными по сопротивлению свободных тел различной формы в диапазоне чисел Рейнольдса от 0,02 до 10^3 (рис. 3.8) позволяет отметить хорошую сходимость результатов расчета и эксперимента.

§ 8. Геометрическая и гидравлическая шероховатость

Шероховатость поверхности представляет собой систему выступов, которая, взаимодействуя с потоком, оказывает на него динамическое воздействие. Это динамическое воздействие в конечном счете определяет гидравлическое сопротивление шероховатой поверхности.

При обтекании потоком выступа шероховатости (рис. 3.9) за выступом образуется так называемая активная вихревая зона длиной L_w. Установлено наличие небольшой циркуляционной зоны также и перед выступом шероховатости, продольный размер которой не превышает величину k.

Длина активной вихревой зоны за выступом шероховатости L_w зависит от высоты выступа $k_{ск}$, его формы, а также от величины гидродинамического сопротивления граничной поверхности, на которой установлен элемент шероховатости [9]. При гладкой граничной поверхности длина этой зоны близка к $(6 \div 8)\, k_{ск}$. В пределах вихревой зоны реализуется значительная часть гидравлических потерь, связанных с обтеканием элемента шероховатости. Часть потока, взаимодействующая непосредственно с выступом шероховатости, резко деформируется и отклоняется от граничной поверхности. При этом давление за элементом шероховатости понижается, и в нижней части вихревой зоны возникает возвратное течение.

Найдем сумму сил, действующих в продольном направлении на поверхность единичной длины и ширины. Для упрощения анализа примем в качестве элементов шероховатости двухмерные одинаковые выступы высотой $k_{ск}$, установленные с шагом s в продольном направлении. На единичной длине рассматриваемого участка поверхности размещается $1/s$ элементов шероховатости. Силовое воздействие потока на единичный элемент поверхности $F_п$ складывается из сил, связанных с гидродинамическим сопротивлением элемен-

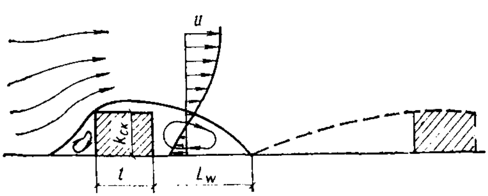


Рис. 3.9

тов шероховатости, и сил трения по граничной поверхности. Будем считать, что силы трения по граничной поверхности действуют только за пределами вихревой зоны. Сумма сил при $s > L_w$ выражается следующим образом:

$$F_{\text{п}} = C_{k0}\,\rho\,\frac{u_k^2}{2}\,k_{\text{ск}}\,\frac{1}{s} + \frac{\lambda_{\text{г}}}{4}\,\rho\,\frac{U^2}{2}\left(1 - \frac{L_w}{s}\right),$$

где u_k — скорость на вершине выступов шероховатости;
U — средняя скорость течения в канале;
$\lambda_{\text{г}}$ — коэффициент гидравлического сопротивления граничной поверхности.

Сила $F_{\text{г}}$, с которой граничная поверхность с установленными на ней выступами воздействует на поток, равна по величине силе $F_{\text{п}}$. Выразим эту силу через суммарные касательные напряжения на границе потока τ_0:

$$F_{\text{г}} = \tau_0 \cdot 1 \cdot 1.$$

Из равенства сил $F_{\text{г}}$ и $F_{\text{п}}$ следует:

$$\tau_0 = C_{k0}\,\rho\,\frac{u_k^2}{2}\,k_{\text{ск}}\,\frac{1}{s} + \frac{\lambda_{\text{г}}}{4}\,\rho\,\frac{U^2}{2}\left(1 - \frac{L_w}{s}\right).$$

Суммарные касательные напряжения τ_0 выразим через коэффициент гидравлического сопротивления λ, учитывающий как сопротивление выступов шероховатости, так и трение по граничной поверхности, на которой они установлены:

$$\frac{\lambda}{4}\,\rho\,\frac{U^2}{2} = C_{k0}\,\rho\,\frac{u_k^2}{2}\,k_{\text{ск}}\,\frac{1}{s} + \frac{\lambda_{\text{г}}}{4}\,\rho\,\frac{U^2}{2}\left(1 - \frac{L_w}{s}\right). \qquad (3.17)$$

Когда канал работает в режиме шероховатого сопротивления ($u_* k_{\text{ск}}/\nu > 50$), коэффициент λ определяется только характеристиками шероховатости и глубиной потока и не зависит от числа Рейнольдса. При одной и той же высоте выступов, как указывалось выше, они могут создавать различное сопротивление в зависимости от формы и расположения, вследствие чего $k_{\text{ск}}$ не может являться единственной характеристикой шероховатости, определяющей сопротивление. Поэтому принято использовать условную, так называемую эквивалентную шероховатость k_s, в качестве которой принимается песочная шероховатость, создающая гидравлическое сопротивление, равное сопротивлению реальной шероховатости поверхности. Введение эквивалентной шероховатости позволяет рассчитывать гидравлическое сопротивление для самых различных типов шероховатости по одной и той же зависимости [8]:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2\lg\frac{2h}{k_s} + 1{,}74. \qquad (3.18)$$

Однако, чтобы использовать эту зависимость для расчета коэффициента гидравлического сопротивления λ, необходимо иметь количественную связь между характеристиками геометрической и эквивалентной шероховатости k_s. Эта связь может быть установлена с использованием соотношений (3.17) и (3.18). Преобразуя соотношение (3.17), получаем:

$$C_{k0}\, u_k^2 \frac{k_{\text{ск}}}{s} = \frac{\lambda}{4}\left[1 - \frac{\lambda_{\text{г}}}{\lambda}\left(1 - \frac{L_w}{s}\right)\right] U^2. \tag{3.19}$$

Принимая во внимание, что $L_w \approx 7k_{\text{ск}}$ и $\lambda_{\text{г}} \approx 0{,}01$, находим условие, при котором трение по граничной поверхности можно не учитывать:

$$\lambda > 0{,}1\,(1 - 7k_{\text{ск}}/s). \tag{3.20}$$

Для естественной шероховатости отношение $s/k_{\text{ск}}$ обычно не превышает 7, поэтому $\lambda_{\text{г}}$ в соотношении (3.19) может не учитываться. При искусственной шероховатости канала коэффициент гидравлического сопротивления достаточно велик и неравенство (3.20) в большинстве случаев также выполняется. Это позволяет в дальнейшем силы трения по граничной поверхности не учитывать. При этом соотношение (3.19) упрощается:

$$C_{k0}\, u_k^2\, k_{\text{ск}}/s = \lambda U^2/4.$$

Учитывая, что $\lambda U^2 = 8u_*^2$, имеем:

$$C_{k0} \frac{u_k^2}{u_*^2} \frac{k_{\text{ск}}}{s} = 2.$$

Представляя в этом соотношении

$$\frac{u_k}{u_*} = \frac{u_k}{u_{ks}} \frac{u_{ks}}{u_*},$$

где u_{ks} — скорость при $z = k_s$,

и выражая по зависимости (3.6) $u_k/u_{ks} = (k_{\text{ск}}/k_s)^n$, получаем:

$$C_{k0}\,(u_{ks}/u_*)^2\,(k_{\text{ск}}/k_s)^{2n}\, k_{\text{ск}}/s = 2. \tag{3.21}$$

Отношение u_{ks}/u_*, согласно данным И. Никурадзе, близко к 8,5. Более детальный анализ показывает, что отношение u_{ks}/u_* не является постоянным и изменяется в зависимости от коэффициента гидравлического сопротивления λ. Обозначив $(u_{ks}/u_*)^2 = A_1(\lambda)$, соотношение (3.21) запишем в виде:

$$C_{k0}\left(\frac{k_{\text{ск}}}{k_s}\right)^{2n} \frac{k_{\text{ск}}}{s} A_1(\lambda) = 2.$$

Отсюда находим:

$$\frac{k_s}{k_{\text{ск}}} = \left(C_{k0} \frac{k_{\text{ск}}}{s} \frac{A_1(\lambda)}{2}\right)^{1/(2n)}.$$

Как уже указывалось, для течений в каналах и трубах $n \sim \sqrt{\lambda}$. Поскольку величина $A_1(\lambda)$ для больших значений λ экспериментально не исследована, используем полученное соотношение лишь для качественного анализа. При этом будем учитывать, что согласно оценочным расчетам $A_1(\lambda)^{1/(2n)}$ изменяется незначительно в широком диапазоне изменения λ. Таким образом, после логарифмирования имеем:

$$\lg \frac{k_s}{k_{\text{ск}}} \sim \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \lg C_{k0} \frac{k_{\text{ск}}}{s}. \qquad (3.22)$$

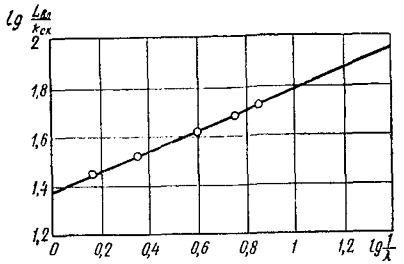


РИС. 3.10

Гидродинамическое сопротивление выступа в выражении (3.22) в общем случае может изменяться также в результате взаимного влияния элементов шероховатости. В дальнейшем будем рассматривать только искусственную шероховатость, составленную из одинаковых элементов при регулярной их расстановке на граничной поверхности. При естественной шероховатости определение ее геометрической и эквивалентной шероховатости обычно устанавливают экспериментально [9].

Взаимное влияние элементов шероховатости наблюдается только в тех случаях, когда расстояние между ними меньше некоторого предельного значения длины $L_{\text{вл}}$, которую будем называть длиной влияния элемента шероховатости. Это влияние связано с тем, что лежащий ниже элемент шероховатости оказывается в пределах гидродинамического следа лежащего выше элемента. При $s < L_w$ может одновременно проявляться и обратное влияние, что связано с искажением активной вихревой зоны, приводящим к изменению давления в кормовой части лежащего выше элемента шероховатости [9].

Анализ экспериментальных данных позволяет установить, что относительная длина зоны $L_{\text{вл}}/k_{\text{ск}}$ существенно зависит от коэффициента гидравлического сопротивления канала. Эта зависимость (рис. 3.10) может быть выражена простым соотношением

$$L_{\text{вл}}/k_{\text{ск}} = 7 + 10\,(1/\lambda)^{2/3}. \qquad (3.23)$$

Входящие в это соотношение числовые коэффициенты получены для двухмерной шероховатости типа тонких ребер и могут несколько изменяться для других видов шероховатости. Однако имеющийся экспериментальный материал не позволяет надежно установить степень этого влияния, поэтому в дальнейшем для всех видов шероховатости будет использоваться соотношение (3.23), из которого следует, что $L_{\text{вл}}/k_{\text{ск}} \to 15$ при $\lambda \to 1$ и $L_{\text{вл}}/k_{\text{ск}} \to 200$ при $\lambda \to 0{,}01$.

Анализ экспериментальных данных позволил также установить, что в пределах длины влияния (при $s/L_{\text{вл}} < 1$) изменение коэффициента гидродинамического сопротивления аппроксимируется следующей зависимостью:

$$C_k/C_{ko} = (s_0/L_{\text{вл}})^{1/2}, \tag{3.24}$$

где C_k — коэффициент гидродинамического сопротивления в условиях взаимного влияния элементов шероховатости;

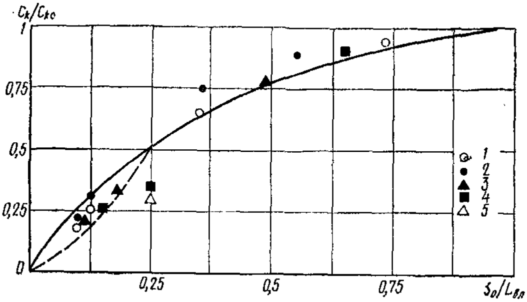


РИС. 3.11

1 — $\lambda=0{,}1$; 2 — $\lambda=0{,}11$; 3 — $\lambda=0{,}16$; 4 — $\lambda=0{,}42$; 5 — $\lambda=0{,}7$

C_{ko} — коэффициент гидродинамического сопротивления при $s \geqslant L_{\text{вл}}$; s_0 — расстояние между вершинами выступов «в свету» ($s_0 \leqslant L_{\text{вл}}$).

Экспериментальные данные, представленные на рис. 3.11, не обнаруживают существенного влияния λ на характер изменения C_k/C_{ko} в пределах зоны взаимного влияния. Использование зависимостей (3.15), (3.23) и (3.24) позволяет установить значения коэффициента гидродинамического сопротивления элементов шероховатости C_k в условиях их взаимного влияния при обтекании потоком с реальным распределением скоростей. Нетрудно видеть, что основным параметром при расчете C_k является коэффициент гидравлического сопротивления канала λ. Таким образом, известны все параметры, позволяющие проанализировать связь между величиной эквивалентной и геометрической шероховатости с использованием балансового соотношения (3.17).

На рис. 3.12 представлена зависимость

$$\frac{k_s}{k_{\text{ск}}} = f\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \lg \frac{1}{C_k} \frac{s}{k_{\text{ск}}}\right),$$

полученная по материалам экспериментальных исследований разных авторов. Поскольку, как правило, материалы экспериментальных исследований не содержат прямых данных по величине k_s, рассмотрим более подробно методику обработки и обобщения результатов экспериментальных исследований. Подробное освещение методики является необходимым, поскольку такой анализ самого разнообразного материала выполнен впервые. Кроме того, обработка и обобщение экспериментальных данных является одним из важнейших элементов научного исследования, поэтому знакомство с основными анализами экспериментальных данных представляет самостоятельный интерес.

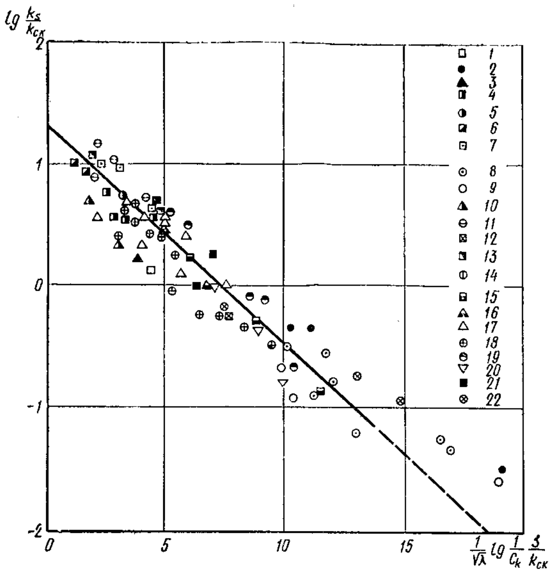


РИС. 3.12

двухмерная шероховатость: 1—10 — напорные потоки (данные М. Д. Миллионщикова и др.: 1 — скругленная резьба, 2 — кольцевые выточки; 3 — треугольная резьба; данные В. Нуннера: 4 — полуцилиндрические выступы, 5 — выступы прямоугольного сечения; 6 — данные Р. Коха, выступы квадратного сечения; 7 — данные Р. Вебба, выступы квадратного сечения; 8 — данные Е. Калинина, кольца полуэллиптические; 9 — данные А. Д. Альтшуля, стыки трубопровода; 10 — данные Фрича, зубчатая шероховатость); 11—14 — безнапорные потоки (11 — данные К. Райу и Р. Гарде, поперечные тонкие ребра; 12 — данные Р. Бауэра, сетчатая шероховатость; 13 — данные В. Сэйра и М. Альбертсона, поперечные ребра; 14 — данные В. С. Боровкова, поперечные ребра); трехмерная шероховатость: 15—17 — данные М. Д. Миллионщикова и др. (15 — полусферы в ряд; 16 — полусферы в шахматном порядке; 17 — пирамиды); 18 — данные В. С. Боровкова, цилиндрические выступы; 19—22 — данные Г. Шлихтинга (19 — шары; 20 — конусы; 21 — уголки; 22 — сегменты)

В данном случае была принята следующая схема анализа экспериментальных данных:

1) устанавливались геометрические характеристики шероховатости $k_{ск}$ и s, а также форма выступов;

2) при данной величине и форме выступов определялось эквивалентное свободное тело для элемента шероховатости и находился коэффициент гидродинамического сопротивления C_{D0};

3) устанавливались геометрические характеристики канала (или трубы): глубина (диаметр), ширина, уклон;

4) устанавливалась величина коэффициента гидравлического сопротивления λ в квадратичном режиме сопротивления;

5) при данной величине λ и известных характеристиках канала определялась величина эквивалентной шероховатости по формуле И. Никурадзе (3.18);

6) вычислялась величина C_{k0} по зависимости (3.15); коэффициент A либо определялся по табл. 3.1, либо рассчитывался по методике, изложенной в настоящей главе;

7) по зависимости (3.23) определялась длина влияния элемента шероховатости $L_{вл}$;

8) устанавливалась величина коэффициента гидродинамического сопротивления выступов шероховатости с учетом их взаимного влияния;

9) вычислялись параметры, входящие в соотношение (3.22), и их значения наносились на график (см. рис. 3.12).

Во всех случаях расчет выполнялся по указанной схеме, однако при обработке экспериментальных данных ряда исследователей имелись некоторые особенности, о которых целесообразно упомянуть.

Экспериментальные исследования под руководством акад. М. Д. Миллионщикова проводились в трубах с искусственной шероховатостью, которая представляла собой различного вида резьбу и кольцевые выточки на внутренней поверхности трубы. Точность изготовления выступов шероховатости была высокой и обеспечивала постоянство их высоты с отклонением не более 0,03 мм. При проведении экспериментов особое внимание уделялось исключению возможных погрешностей, связанных с искажением потока при входе в испытуемую трубу. В процессе экспериментов измерялись перепад статического давления, расход воды и распределение скоростей. Перепады статического давления измерялись точными микроманометрами специальной конструкции. Для исследований применялись воздух и дистиллированная вода.

Результаты исследований коэффициента гидравлического сопротивления λ представлены графиками в обычной системе координат $\lg 100\,\lambda = f\,(\lg \mathrm{Re})$. Полученные экспериментально значения λ изменяются в пределах от 0,02 до 0,125.

Анализ этих данных позволяет отметить некоторое непостоянство коэффициента λ при $D/k_{\text{ск}} = \text{const}$ даже при достаточно больших числах Рейнольдса. Особенно отчетливо это непостоянство проявляется при скругленной резьбе и полусферических выступах. Непостоянство λ объясняется зависимостью коэффициента C_k от числа Рейнольдса для этих видов шероховатости. Действительно, как было показано выше, коэффициент гидродинамического сопротивления выступа C_k является параметром, определяющим величину эквивалентной шероховатости, а следовательно, и коэффициента гидравлического сопротивления λ. Для плохо обтекаемых выступов типа ребер, пластинок, пирамид и т. п. коэффициент гидродинамического сопротивления C_k является более стабильным в большом диапазоне чисел Рейнольдса. При обработке экспериментальных данных для хорошо обтекаемых выступов шероховатости (полусферы) величина λ в режиме полного проявления шероховатости определялась для чисел Re, предшествующих кризису обтекания. Коэффициент гидродинамического сопротивления C_{D0} для всех видов одноходовых резьб и выточек, за исключением скругленной резьбы, принимался равным 2; для резьбы со скругленными кромками —1,2, как для тела цилиндрической формы; для прочих видов исследованной шероховатости — по данным табл. 3.1 или расчетом по методике, приведенной выше. При оценке взаимного влияния выступов шероховатости, имеющих значительный размер l в продольном направлении (см. рис. 3.9), величина s_0 в соотношении (3.24) определялась как $s - l$.

Существенно бóльшие значения коэффициента гидравлического сопротивления λ были достигнуты в опытах Р. Вебба, В. Нуннера и Р. Коха. Так, в опытах Р. Вебба λ изменялся от 0,09 до 0,25; в опытах В. Нуннера — от 0,12 до 0,32. В опытах Р. Коха достигнуты очень большие значения коэффициента (до 0,75). В опытах Р. Вебба, В. Нуннера и Р. Коха выступы шероховатости были двухмерными и имели прямоугольное поперечное сечение. Кроме того, часть опытов В. Нуннера была выполнена в трубах с шероховатостью в виде полуцилиндрических выступов.

Опыты В. Фрича были выполнены также при больших значениях λ. Особый интерес представляют те опыты, в которых испытывалась несимметричная зубчатая шероховатость (рис. 3.13) при различных направлениях течения. Оказалось, что для шероховатости, приведенной на рис. 3.13, *б*, сопротивление примерно в 2 раза больше, чем для шероховатости, приведенной на рис. 3.13, *а*. Действительно, в первом случае выступ шероховатости как бы заполняет около половины объема вихревой зоны, что и приводит к уменьшению величины C_k.

В экспериментальных исследованиях, выполненных Э. Калининым и др., величины $s/k_{\text{ск}}$ были достаточно большими и изменялись от 20 до 100. Выступы шероховатости на поверхности трубы имели полуэллиптическое сечение. При этом в соответствии с табл. 3.1 коэффициент гидродинамического сопротивления их принимался равным 0,6.

Величины $s/k_{ск}$ в экспериментах А. Д. Альтшуля достигли 800. Выступами шероховатости служили сварные швы разной формы. При такой редкой расстановке выступов шероховатости большое значение имеют потери на сопротивление стенок трубы. Поскольку в общем случае потери на сопротивление по длине зависят от шероховатости самой стенки и числа Рейнольдса, они исключались из суммарных потерь в трубопроводе со стыками. Однако, так как все эксперименты с искусственной шероховатостью проводятся обычно в гладких каналах и трубах, к потерям на стыках добавлялись потери на гладкое трение. Коэффициент λ гладкой трубы принимался равным 0,01, что отвечает $Re \approx 10^6$. Этот условный прием позволяет сопоставлять данные экспериментов, проводимых при редкой расстановке элементов шероховатости, с данными экспериментов, в которых величина сопротивления по длине трубопровода сравнительно невелика.

Опыты К. Райу и Р. Гарде, а также В. Сэйра и М. Альбертсона по измерению гидравлических потерь и силового воздействия на элементы шероховатости были выполнены в аэродинамических трубах и в открытых каналах при гладкой свободной поверхности. В качестве элементов шероховатости использовались ребра прямоугольной формы, установленные с шагом $s/k_{ск} = 2 \div 40$. Эти опыты позволили определить эквивалентную шероховатость и величину коэффициента гидродинамического сопротивления выступа, а также установить степень взаимного влияния элементов шероховатости (рис. 3.11).

Экспериментальные исследования В. С. Боровкова и В. Бауэра выполнялись в открытых каналах в условиях высокоскоростного потока. В опытах В. С. Боровкова шероховатость представляла собой ребра квадратного сечения, установленные с шагом $s/k_{ск} = 4$. В опытах В. Бауэра шероховатость создавалась с помощью сетки, уложенной на дно канала. Поскольку сетка была выполнена из круглой проволоки, коэффициент гидродинамического сопротивления C_{D_0} был принят равным 1,2 (см. табл. 3.1). Обработка опытов производилась при использовании двухслойной динамической модели высокоскоростного потока (см. гл. 1).

Описанные выше экспериментальные данные относятся к двухмерной шероховатости, для которой было составлено уравнение баланса сил.

При трехмерной шероховатости дополнительными параметрами являются размер элемента поперек потока, определяющий площадь миделева сечения, а также шаг элементов в поперечном направлении. Эти два дополнительных параметра должны быть включены в уравнение баланса сил. Анализ характера обтекания трехмерных элементов (рис. 3.14) показывает, что течение вблизи элемента шероховатости обладает рядом особенностей, связанных с пространственной картиной течения. При обтекании трехмерного элемента шероховатости происходит трехстороннее сжатие потока в отличие от одностороннего сжатия при обтекании двухмерных элементов. Кроме того, возникают боковые сосредоточенные струи, направленные под углом к основному течению и являющиеся как бы дополнительным препятствием.

Таким образом, можно предположить, что при не слишком редкой установке выступов в поперечном направлении каждый ряд их будет создавать сопротивление, близкое к сопротивлению двухмерной шероховатости. Это предположение позволяет считать, что параметры, определяющие сопротивление трехмерной шероховатости, не отличаются от соответствующих параметров двухмерной. Следует еще раз отметить, что параметр s и в данном случае представляет собой продольное расстояние между выступами шероховатости. Взаимное влияние трехмерных выступов шероховатости может отличаться от взаимного влияния двухмерных элементов. Однако за неимением надежных данных по взаимному влиянию трехмерных элементов при расчете C_k используется соотношение (3.24), полученное по результатам испытаний двухмерных элементов. В качестве

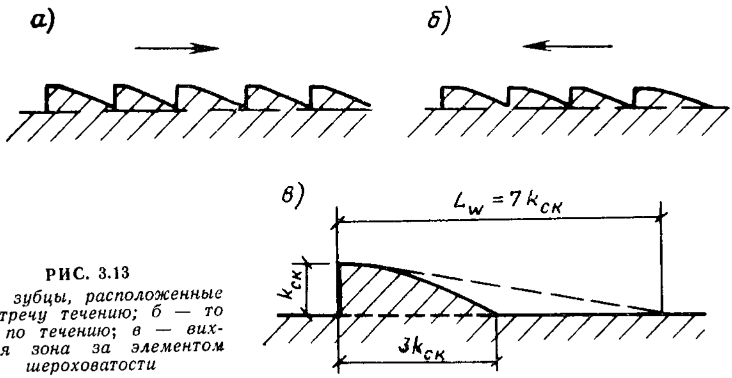


РИС. 3.13

а — зубцы, расположенные навстречу течению; б — то же, по течению; в — вихревая зона за элементом шероховатости

s_0 принимается расстояние «в свету» между рядами выступов как при шахматном, так и при коридорном расположении элементов. Такой выбор s_0 при шахматном расположении выступов учитывает особенности обтекания трехмерных элементов (см. рис. 3.14).

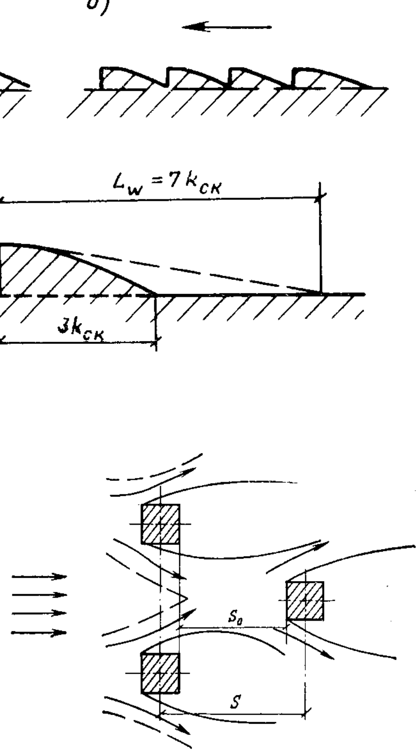


РИС. 3.14

Анализ экспериментальных данных М. Д. Миллионщикова и др. по сопротивлению труб с трехмерными элементами шероховатости позволил проверить это предположение. При обработке данных М. Д. Миллионщикова значения C_{D_0} взяты из табл. 3.1.

Тщательные исследования сопротивления трехмерных элементов с вычислением эквивалентной шероховатости k_s по профилю скорости вблизи стенки (по методике, описанной выше) были выполнены также Г. Шлихтингом [9]. В качестве элементов шероховатости испытывались шары разного диаметра, сегменты, конусы и уголки. Испытания проводились в аэродинамической трубе прямоугольного поперечного сечения. Элементы шероховатости размещались на съемной пластине, в пределах которой развивался пограничный слой. Коэффициент гидравлического сопротивления λ вычислялся по коэффициенту гидродинамического сопротивления C_f шероховатой плоской пластины по известным соотношениям [8].

Экспериментальные данные В. С. Боровкова по сопротивлению трехмерной шероховатости в виде цилиндрических выступов получены в условиях высокоскоростного открытого потока. Выступы располагались в шахматном порядке. Отношение $s/k_{\text{ск}}$ изменялось от 2 до 6, значение λ — от 0,03 до 0,21. Величина эквивалентной шероховатости вычислялась по коэффициенту гидравлического сопротивления нижнего динамического слоя, толщина которого определялась по точке максимума скорости.

Данные по испытаниям трехмерной и двухмерной шероховатости (см. рис. 3.12) хорошо согласуются между собой. Это говорит о том, что при $s_2/k_{\text{ск}} < 15$ (где s_2 — расстояние между элементами шероховатости поперек потока) трехмерная шероховатость дает сопротивление, близкое к сопротивлению двухмерной шероховатости, установленной с тем же продольным шагом. Сопротивление двухмерной и трехмерной шероховатости может быть описано следующей зависимостью:

$$\lg \frac{k_s}{k_{\text{ск}}} = 1,3 - \frac{0,18}{\sqrt{\lambda}} \lg \frac{1}{C_k} \frac{s}{k_{\text{ск}}}. \tag{3.25}$$

Можно отметить, что данные экспериментальных исследований разных исследователей отклоняются от зависимости (3.25) по шкале $\lg \frac{k_s}{k_{\text{ск}}}$ в среднем на 0,1. Разброс экспериментальных значений связан как с неточностью определения величины C_k, так и с неизбежными погрешностями при экспериментальном определении λ.

При редкой расстановке выступов шероховатости и малой величине λ (например, вследствие значительной глубины в канале и большого диаметра трубы), как уже указывалось, становятся заметными потери на трение непосредственно о граничную поверхность, на которой установлены элементы шероховатости. При этом условие (3.20) не выполняется и соответствующие экспериментальные значения $k_s/k_{\text{ск}}$ отходят от зависимости (3.25). Из рис. 3.12 видно, что зависимость (3.25) удовлетворительно согласуется с экспериментальными данными до значений параметра

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \lg \frac{1}{C_k} \frac{s}{k_s},$$

не превышающих 12—15. При бо́льших значениях этого параметра зависимость (3.25) дает заниженные значения эквивалентной шероховатости. Это, возможно, связано с условностью расчета величины k_s для таких случаев (на что указывалось ранее).

Полученное соотношение (3.25) позволяет рассчитать коэффициент гидравлического сопротивления λ для выступов искусственной шероховатости с использованием известной зависимости И. Никурадзе (3.18). После подстановки соотношения (3.25) в зависимость (3.18) и несложных преобразований получаем:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{2 \lg \frac{2h}{k_{\text{ск}}} - 0,85}{1 - 0,35 \lg \frac{1}{C_k} \frac{s}{k_{\text{ск}}}}. \tag{3.26}$$

Расчет по соотношению (3.26) может выполняться лишь методом последовательных приближений, поскольку коэффициент гидродинамического сопротивления C_k также является функцией λ. Для вычисления C_k следует пользоваться зависимостями (3.15), (3.23) и (3.24).

Соотношение (3.26) может быть использовано при значениях $\frac{1}{C_k}\left(\frac{s}{k_{\text{ск}}}\right) \leqslant 100$ и $h/k_{\text{ск}} > 4$. При $h/k_{\text{ск}} < 4$ высота выступов шероховатости становится соизмеримой с глубиной потока. Выступы шероховатости резко искажают структуру потока, и их следует рассматривать как элементы местных сопротивлений. В этом случае исходное балансовое соотношение (3.17) становится неточным.

Для упрощения расчетов в широком диапазоне изменения коэффициента гидравлического сопротивления λ в ряде случаев целесообразно пользоваться более простой зависимостью, используя приближенное соотношение между C_k и C_{D0}, полученное на основе совместного анализа выражений (3.15), (3.23) и (3.24):

$$C_k/C_{D0} = 0,1\,(s/k_{\text{ск}})^{1/2}. \tag{3.27}$$

После подстановки (3.27) в (3.26) получаем зависимость для расчета λ, не требующую использования метода последовательных приближений:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{2\lg\dfrac{2h}{k_{\text{ск}}} - 0,85}{1 - 0,35\lg\dfrac{10}{C_{D0}}\left(\dfrac{s}{k_{\text{ск}}}\right)^{1/2}}. \tag{3.28}$$

Эта приближенная зависимость позволяет определить коэффициент гидравлического сопротивления гладкой поверхности с установленными на ней выступами шероховатости определенной формы при известной глубине потока h и заданных геометрических характеристиках искусственной шероховатости (высоте выступа $k_{\text{ск}}$ и продольном шаге s).

Проверочные расчеты показали, что использование приближенного соотношения (3.28) не дает существенных отличий по сравнению с более точным методом последовательных приближений, о котором упоминалось выше. На

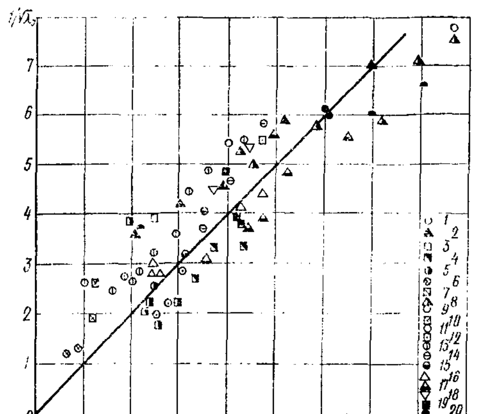


РИС. 3.15

см. экспликацию к рис. 3.12

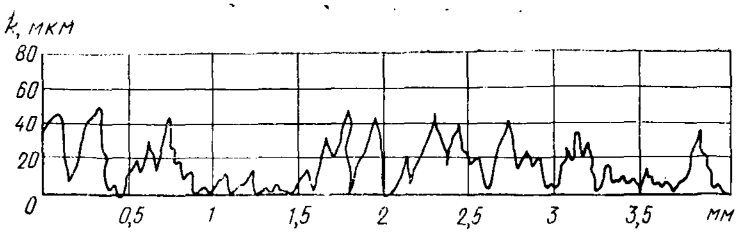


РИС. 3.16

рис. 3.15 представлено сравнение расчетного коэффициента гидравлического сопротивления $\lambda_р$, полученного по зависимости (3.28), с коэффициентом $\lambda_э$, полученным в результате экспериментов разных исследователей. Экспериментальные данные получены для течений в открытых каналах и трубах при двухмерной и трехмерной шероховатости.

Оценки показывают, что отклонение экспериментальных значений от приближенной зависимости (3.28) не превышает в среднем 50%. Для сравнения отметим,что, согласно данным К. Райу и Р. Гарде, использование зависимости Г. Морриса для расчета сопротивления каналов с искусственной шероховатостью дает значения λ, в среднем отличающиеся от экспериментальных в 2 раза. Учет среднего отклонения экспериментальных значений $k_s/k_{ск}$ относительно аппроксимирующей зависимости (3.25) позволяет с использованием соотношения (3.28) установить величину соответствующего разброса в значениях λ. Расчеты показали, что при $k_s/k_{ск} \sim 10$ это отклонение не превышает 25%, при $k_s/k_{ск} \sim 1$ составляет 10% и при $k_s/k_{ск} \sim 0{,}1$ уменьшается до 5%.

Как уже указывалось, выполненный выше анализ и предложенный метод расчета могут быть использованы для течения в канале с регулярной искусственной шероховатостью. При естественной шероховатости, а также при нерегулярной искусственной шероховатости определение величины эквивалентной шероховатости значительно осложняется. Геометрические характеристики естественной нерегулярной шероховатости значительно менее определенны. На рис. 3.16 приведена типичная профилограмма бетонной шероховатости. Как видно из рисунка, высота выступов и расстояние между ними изменяются по длине профилограммы и являются случайными величинами. Наиболее значительными характеристиками этих двух случайных величин являются среднеквадратичная высота выступа и среднеквадратичное расстояние между ними. Кроме того, на сопротивление поверхности оказывают влияние дисперсия выступов и их форма.

При естественной шероховатости за линию отсчета, эквивалентную линии граничной поверхности, принимают некоторую среднюю линию, положение которой на профилограмме определяется соотношением

$$z_{ср} = \frac{\sum_{i=0}^{N} z_i}{N+1},$$

где z_i — расстояние от базисной линии до профиля поверхности (рис. 3.17).

Среднеквадратичная высота выступов k_c определяется в виде:

$$k_c = 2\sqrt{\frac{\sum\limits_{i=0}^{N} k_{ci}^2}{N+1}},$$

где k_{ci} — высота каждого выступа над средней линией поверхности;
N — число выступов на профилограмме.

Среднеквадратичное расстояние между выступами определяется аналогично:

$$s_c = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=0}^{N} s_{ci}^2}{N+1}}.$$

Дисперсия выступов по высоте является количественной характеристикой их неоднородности и определяет отклонение высоты выступов от средней высоты выступа:

$$Д = \frac{\sum\limits_{i=0}^{N} (k_{ci} - k_{ск})^2}{N+1},$$

где

$$k_{ск} = \frac{\sum\limits_{i=0}^{N} |k_{ci}|}{N+1}.$$

Анализ, выполненный М. Д. Миллионщиковым, показал, что для песочной шероховатости, испытанной И. Никурадзе, дисперсия $Д/k_{ск} = 0{,}23 \div 0{,}3$. Для технически гладких труб дисперсия значительно больше ($Д/k_{ск} \approx 1{,}5$). Согласно экспериментальным данным, при одной и той же относительной гладкости гидравлическое сопротивление тем больше, чем больше дисперсия высоты выступов. Это говорит о том, что в гидродинамическом отношении крупные выступы более активны. Действительно, мелкие выступы оказываются в пределах циркуляционных зон, образующихся за крупными элементами шероховатости, и их вклад в общее сопротивление оказывается малым. Таким образом, при расчете величины $k_{ск}$ следовало бы учитывать не все выступы шероховатости, а только те из них, которые вносят заметный вклад в общее сопротивление. Поэтому приближенная величина $k_{ск}$ может быть установлена по соотношению

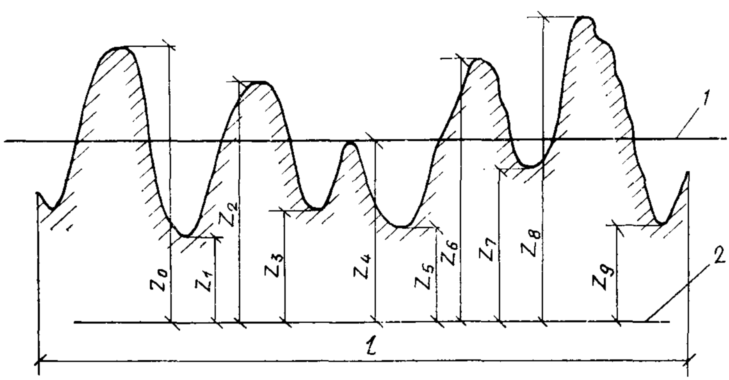


РИС. 3.17
1 — средняя линия; 2 — базисная линия

$$k_{ск}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{5} z_{i\,max}-\sum\limits_{i=1}^{5} z_{i\,min}}{5},$$

где $z_{i\,max}$ и $z_{i\,min}$ — ординаты высших и низших точек профилограммы.

Строгое решение этой задачи может быть выполнено лишь в результате детального гидродинамического анализа. Такой анализ трудоемок, целесообразен лишь в исключительных случаях и требует использования ЭВМ. Кроме того, необходимо проведение исследований по определению C_{D_0} выступов естественной шероховатости различной формы. Такие исследования, основанные на статистическом анализе шероховатой поверхности и учитывающие гидродинамические особенности обтекания и взаимодействия выступов, должны составить основу строгого научного подхода к определению величины эквивалентной шероховатости.

§ 9. Расчет искусственной шероховатости на быстротоках

Одной из основных инженерных задач, связанных с расчетом коэффициента гидравлического сопротивления высокоскоростного потока, является подбор усиленной искусственной шероховатости. Усиленная шероховатость устанавливается на быстротоках для гашения кинетической энергии потока. При определенных режимах течения высокоскоростного потока волны на его поверхности могут быть небольшими, и аэрация может отсутствовать. В этих случаях сопротивление свободной поверхности мало́, и гидравлические потери определяются взаимодействием потока с дном канала.

В последнее время рекомендуется подбор искусственной шероховатости производить с использованием данных П. И. Гордиенко, полученных в результате экспериментальных исследований гидравлических сопротивлений в открытых каналах с различными видами шероховатости. Эти исследования посвящены сопротивлению высокоскоростных потоков. Было установлено, что в условиях «быстроточного» режима течения коэффициент гидравлического сопротивления не зависит от наполнения канала. Такое необычное поведение коэффициента сопротивления связывалось с особенностями «быстроточного» режима течения. Однако при расчете коэффициента гидравлического сопротивления глубина потока определялась для различных видов шероховатости неодинаково. Выбор глубины имеет большое значение при экспериментальном определении коэффициента гидравлического сопротивления. Действительно, при известных значениях расхода Q, уклона канала i и глубины потока h коэффициент гидравлического сопротивления λ определяется в виде:

$$\lambda=8gb^2h^3\,i/Q^2=8gh^3\,i/q^2.$$

Из этой зависимости видно, что при вычислении λ глубина h входит в третьей степени. Поэтому корректному и единообразному назначению глубины следует уделять большое внимание. Обычно принято, следуя И. Никурадзе, измерять глубину от некоторой условной отметки дна. Превышение этой отметки над граничной поверхностью, на которой находятся выступы шероховатости, вычисляется как отношение суммарного объема элементов шероховатости к площади дна канала. В опытах П. И. Гордиенко для ребер различной конфигурации глубина отсчитывалась от вершин выступов шероховатости. Анализ показал, что если глубину измерять по общепринятой методике, то коэффициент гидравлического сопротивления оказывается зависящим от относительной шероховатости канала, причем степень этой зависимости не отличается существенно от общепринятой. Расчеты по соотношению (3.26) дают результаты, согласующиеся с данными исследований П. И. Гордиенко при условии корректировки глубин

При проектировании искусственной усиленной шероховатости на быстротоках необходимо определять высоту выступов $k_{ск}$ и их шаг s. Расстановка выступов должна обеспечить наибольшее значение коэффициента гидравлического сопротивления λ при данном значении $k_{ск}$. Анализ экспериментальных данных, представленных на рис. 3.11, показывает, что зависимость (3.23) при малых значениях $s/L_{вл}$ недостаточно точно согласуется с данными эксперимента.

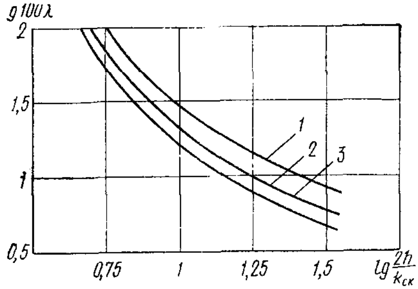


РИС. 3.18

1 — $s/k_{ск}=5$; 2 — $s/k_{ск}=15$; 3 — $s/k_{ск}=40$

Характеру изменения C_k при малых $s/L_{вл}$ больше соответствует кривая, проведенная пунктиром (см. рис. 3.11). Увеличение отношения $s/L_{вл}$ повышает гидродинамическое сопротивление C_k каждого выступа и одновременно снижает концентрацию элементов шероховатости. Так как коэффициент гидравлического сопротивления λ пропорционален произведению C_k на концентрацию элементов шероховатости $1/s$ [см. соотношение (3.19)], то можно считать, что максимальное значение λ будет достигаться при $s = L_w$. При $s \geqslant L_w$ соотношения (3.26) и (3.28) сохранятся. Поэтому, принимая шаг $s = L_w$, можно определить по выражению (3.28) значение $k_{ск}$, при котором будет обеспечиваться необходимая величина коэффициента λ. Таким образом, параметром, определяющим наиболее эффективную расстановку выступов искусственной шероховатости, является длина водоворотной зоны L_w. Относительная длина водоворотной зоны $L_w/k_{ск}$ зависит от формы выступов и коэффициента λ, причем с увеличением этого коэффициента величина $L_w/k_{ск}$ несколько уменьшается. Как уже указывалось, для редко расположенных выступов на гладкой граничной поверхности $L_w/k_{ск} = 6 \div 8$. Можно считать, что при больших значениях λ оптимальная расстановка будет достигнута при $s_0 = L_w = (5 \div 6)\ k_{ск}$.

Анализ зависимости (3.28) показывает, что коэффициент гидравлического сопротивления значительно более сильно зависит от высоты выступа $k_{ск}$, чем от шага выступов s (рис. 3.18). Так, например, изменение шага в 8 раз (при уменьшении $s/k_{ск}$ от 40 до 5) приводит к увеличению λ в 1,8 раза. Такое же увеличение λ может быть достигнуто (при $s/k_{ск}$ = const) за счет увеличения высоты выступа лишь в 2,5 раза. Учитывая, что при проектировании следует стремиться к уменьшению объема работ, можно использовать обнаруженное различие в степени влияния на λ указанных параметров.

Объем работ пропорционален произведению высоты выступов $k_{ск}$ и их количества $1/s$. Следовательно, требование уменьшения объема работ сводится к нахождению наименьшей величины $k_{ск}/s$

(или наибольшего $s/k_{ск}$). Однако максимальное значение $s/k_{ск}$ не должно превышать $L_{вл}/k_{ск}$, поскольку, как уже указывалось, именно на длине $L_{вл}$ распределение скоростей восстанавливается до состояния, соответствующего данному значению коэффициента λ. Таким образом, при $s = L_{вл}$ средняя скорость потока равна заданной (допустимой) средней скорости, отвечающей выбранной величине $k_{ск}$. При $s > L_{вл}$ происходит ускорение потока на участке за пределами зоны влияния. Действительно, за пределами зоны влияния скорость потока определяется лишь сопротивлением граничной поверхности и практически не управляется искусственной шероховатостью.

Из соотношения (3.28) видно, что при $s = L_{вл}/2$ коэффициент сопротивления λ возрастает на 20% против его величины при $s = L_{вл}$. Поэтому, принимая шаг $s = L_{вл}/2$, можно рассчитывать на 10%-ный запас по средней скорости потока, поскольку средняя скорость пропорциональна $1/\sqrt{\lambda}$. Следовательно, при проектировании усиленной шероховатости можно принимать шаг выступов $s = L_{вл}/2$.

Пример расчета. Подобрать искусственную шероховатость на быстротоке, имеющем уклон $i = 0{,}115$, ширину $b = 4{,}6$ м и расход $Q = 18{,}5$ м³/с. Максимально допустимая скорость на быстротоке $U = 6$ м/с. Влияние аэрации и волнообразования на гидравлические сопротивления не учитывается.

Решение. 1. Определяем глубину потока при максимально допустимой скорости:

$$h = \frac{Q}{Ub} = \frac{18{,}5}{6 \cdot 4{,}6} = 0{,}67 \text{ м}.$$

2. Коэффициент гидравлического сопротивления быстротока находим по соотношению

$$\lambda = 8gb^2 h^3 i/Q^2 = 8 \cdot 9{,}8 \cdot 4{,}6^2 \cdot 0{,}67^3 \cdot 0{,}115/18{,}5^2 = 0{,}167.$$

3. По соотношению (3.23) находим относительную длину зоны влияния элемента шероховатости:

$$L_{вл}/k_{ск} = 7 + 10\,(1/0{,}167)^{2/3} = 40.$$

4. Принимаем шаг между элементами шероховатости

$$\frac{s}{k_{ск}} = \frac{1}{2}\,\frac{L_{вл}}{k_{ск}} = 20.$$

5. Принимаем тип шероховатости в виде ребер квадратного сечения. Коэффициент гидродинамического сопротивления этих элементов $C_{D_0} = 2$.

6. Преобразуя соотношение (3.26), находим:

$$\lg\frac{2h}{k_{ск}} = 0{,}43 + \frac{0{,}5}{\sqrt{\lambda}}\left[1 - 0{,}35\lg\frac{10}{C_{D_0}}\left(\frac{s}{k_{ск}}\right)^{1/2}\right] =$$

$$= 0{,}43 + \frac{0{,}5}{\sqrt{0{,}167}}\left[1 - 0{,}35\lg\frac{10}{2}(20)^{1/2}\right] = 1{,}09.$$

Отсюда

$$h/k_{ск} = 6{,}2; \quad k_{ск} = 0{,}67/6{,}2 = 0{,}11 \text{ м};$$

$$s = 20k_{ск} = 20 \cdot 0{,}11 = 2{,}2 \text{ м}.$$

Таким образом, искусственная шероховатость в виде квадратных ребер высотой 0,11 м, установленных с шагом 2,2 м, создает на быстротоке сопротивление, при котором средняя скорость не будет превышать предельно допустимого значения.

Выполним расчет с использованием полученных зависимостей при условии, когда коэффициент гидродинамического сопротивления выступов максимален. Наибольшее сопротивление выступов, как уже указывалось, достигается при $s/k_{ск} = 5$.

Определяем относительную высоту выступов шероховатости при $s/k_{ск} = 5$:

$$\lg \frac{2h}{k_{ск}} = 0,43 + \frac{0,5}{\sqrt{0,167}} \left[1 - 0,35 \lg \frac{10}{2} 5^{1/2}\right] = 1,2.$$

Отсюда

$$h/k_{ск} = 8; \quad k_{ск} = 0,67/8 = 0,085 \text{ м};$$

$$s = 5 \cdot 0,085 = 0,42 \text{ м}.$$

Сопоставление результатов расчета показывает, что рекомендуемый метод расчета позволяет обеспечить необходимую величину коэффициента гидравлического сопротивления λ при снижении объема работ в 4 раза по сравнению с традиционной расстановкой. При аэрации и интенсивном волнообразовании гидравлические потери возрастают, поэтому в реальном потоке скорость может быть несколько меньше расчетной.

При большой относительной шероховатости канала в некоторых случаях волнообразование связано с обтеканием выступов шероховатости (рис. 3.19). Согласно экспериментальным данным А. М. Калякина (рис. 3.20), при одной и той же относительной шероховатости высота волн (возмущений) на свободной поверхности потока сложным образом зависит от числа Фруда. Данные, представленные на рис. 3.20, показывают, что максимум высоты возмущений приходится на числа Фруда $U^2/gh = 0,5 \div 0,7$. Наибольшая высота возмущений оказывается близкой к величине скоростного напора (при обтекании незатопленных препятствий высота подъема жидкости перед препятствием также близка к величине динамического напора). Если выступы шероховатости существенно возмущают свободную поверхность, предполагается, что на сопротивление выступа оказывают влияние не только трение по его поверхности и вихреобразование, но также и волны на свободной поверхности. Эти факторы имеют различную физическую природу, и поэтому их действие может считаться независимым. В этом случае суммарный коэффициент сопротивления выступа шероховатости можно представить как

$$C_\Sigma = C_k + C_w,$$

где C_w — коэффициент волнового сопротивления.

Таким образом, волновое сопротивление может исследоваться отдельно. Учитывая немонотонность изменения высоты возмущений по числу Фруда (см. рис. 3.20), можно ожидать, что волновое сопротивление изменяется также немонотонно. Из рис. 3.21 видно, как изменяется коэффициент волнового сопротивления выступа ку-

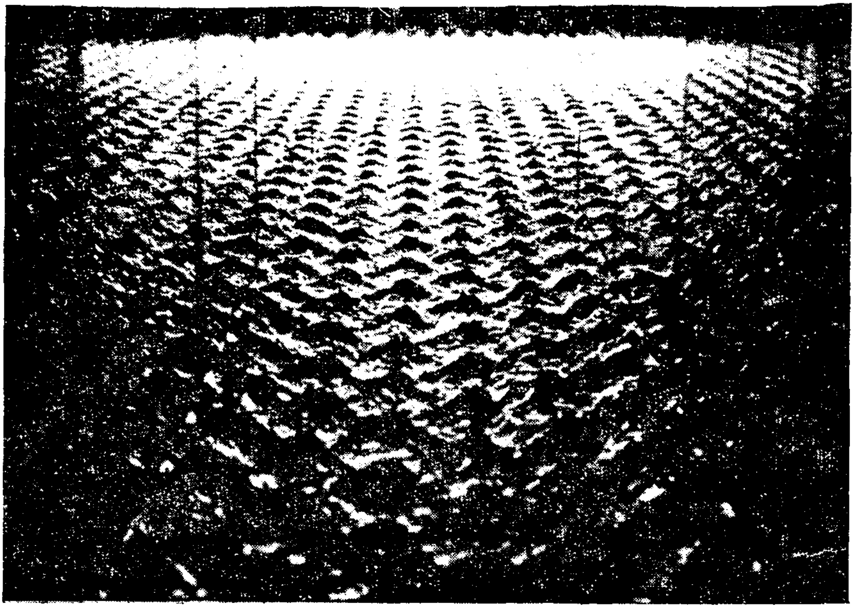


Рис. 3.19

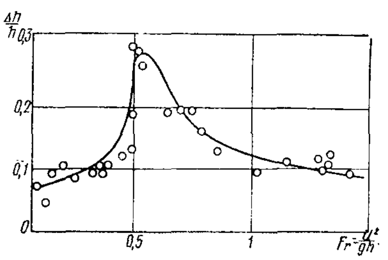


РИС. 3.20

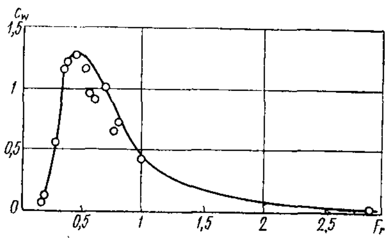


РИС. 3.21

бической формы. Представленные данные подтверждают связь между изменением C_w и Δh. Максимум C_w также приходится на числа Фруда, близкие к 0,5.

В экспериментах А. М. Калякина коэффициент волнового сопротивления C_w определялся по измерениям силового воздействия на выступ шероховатости с помощью тензометрического устройства. Для исключения влияния числа Рейнольдса на сопротивление эксперименты выполнялись на жидкостях разной вязкости. Это позволило, поддерживая постоянным число Рейнольдса, в широком диапазоне изменять числа Фруда. Коэффициент волнового сопротивления C_w вычислялся как $C_w = C_\Sigma - C_h$. Величина C_h определялась по измерениям при $\mathrm{Fr} \ll 1$.

Данные, представленные на рис. 3.21, показывают, что в условиях своего наибольшего проявления волновое сопротивление C_w имеет тот же порядок величины, что и вихревое сопротивление C_k. Волновое сопротивление заметно в области изменения чисел Фруда от 0,1 до 2. С уменьшением относительной шероховатости возмущения на свободной поверхности уменьшаются и волновое сопротивление становится менее заметным. При значениях $h/k_{ск} > 4$ волновое сопротивление невелико и может не учитываться.

Существенная роль волнового сопротивления известна и давно учитывается в теории движения корабля. Схематично можно представить, что образующиеся при движении корабля волны искажают свободную поверхность, создавая перепад уровней: перед кораблем уровень повышается, за ним понижается. Если корабль движется со скоростью U, равной скорости распространения волн c, то на носовую его часть действует большее статическое давление, чем на кормовую. При скорости $U > c$ корабль обгоняет волну и волновое сопротивление уменьшается. При обтекании выступа шероховатости высокоскоростным потоком возмущения (волны), образующиеся в окрестности выступа шероховатости, также вызывают дополнительный перепад статического давления и как следствие — волновое сопротивление.

Теоретическое решение, полученное Л. Н. Сретенским для расчета волнового сопротивления тела, движущегося в идеальной жидкости, было экспериментально проверено А. М. Калякиным для случая обтекания выступов шероховатости реальным потоком. В результате исследований им было предложено следующее выражение для расчета коэффициента волнового сопротивления:

$$C_w = \frac{1}{2}\pi^2\left(\frac{h}{h_1}\right)^3 \frac{k_{ск}}{h}\,\frac{1}{\mathrm{Fr}^3}\,e^{-2/\mathrm{Fr}},$$

где h — глубина потока;

h_1 — расстояние от свободной поверхности до середины выступа шероховатости.

Это соотношение учитывает немонотонность изменения C_w по числу Фруда и согласуется с приведенными выше экспериментальными данными. Однако необходимы дальнейшие исследования с тем, чтобы установить влияние формы и характера расположения выступов на величину волнового сопротивления.

Коэффициент гидравлического сопротивления при известном C_Σ (для $h/k_{ск} < 4$) следует рассчитывать по балансовому соотношению (3.17) с учетом дополнительных потерь, связанных с резкой перестройкой структуры течения. Учет этих потерь требует проведения дальнейших детальных исследований, однако, поскольку C_Σ зависит от числа Фруда, можно считать, что коэффициент гидравлического сопротивления при $h/k_{ск} < 4$ также будет зависеть от числа Фруда. Этот вывод подтверждается экспериментальными данными разных исследователей.

§ 10. Гидравлическое сопротивление и распределение скоростей при течении над шероховатым дном

Эквивалентная шероховатость является важнейшим параметром, определяющим не только сопротивление, но также и распределение скоростей. Определим распределение скоростей по глубине потока над шероховатым дном при известном значении эквивалентной шероховатости k_s. При расчете, так же как и в случае течения над гидравлически гладким дном, используем выражение для турбулентной вязкости в виде (2.50) и (2.51) для открытых каналов и круглых труб соответственно. Как и при течении над гладкой поверхностью, интегрированием соотношения (2.52) с учетом принятых аппроксимаций для $\nu_т$ получаем распределение скоростей в открытом канале в виде [см. формулу (2.53)]:

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\varkappa}\left[\ln\frac{z}{h} + \frac{z}{h} - \frac{1}{8}\left(\frac{z}{h}\right)^2\right] + C.$$

Постоянную интегрирования C определим из следующих граничных условий:

$$z = k_s; \quad u = u_{ks} = Au_*,$$

где A — коэффициент, величина которого может изменяться по данным И. Никурадзе от 8 до 9,5 (среднее значение $\sim$ 8,5).

Таким образом, постоянная интегрирования

$$C = A - \frac{1}{\varkappa}\left[\ln\frac{k_s}{h} + \frac{k_s}{h} - \frac{1}{8}\left(\frac{k_s}{h}\right)^2\right].$$

Профиль скорости в открытом шероховатом канале принимает вид:

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\varkappa}\left(\ln\frac{z}{k_s} + \frac{z - k_s}{h} - \frac{1}{8}\,\frac{z^2 - k_s^2}{h^2}\right) + A. \tag{3.29}$$

Аналогично для круглых труб получаем:

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\varkappa}\left(\ln\frac{z}{k_s} + \frac{1}{2}\,\frac{z - k_s}{r} - \frac{1}{4}\,\frac{z^2 - k_s^2}{r^2}\right) + A. \tag{3.30}$$

На рис. 3.22 дано сравнение зависимости (3.30), полученной расчетом, с экспериментальными данными И. Никурадзе. Сопоставление расчетных и экспериментальных данных позволяет считать, что полученный расчетом профиль скорости согласуется с реальным распределением скоростей как вблизи стенки, так и во внешней области течения, где распределение скоростей заметно отличается от логарифмического. Следует отметить, что для шероховатых труб (так же как и для гладких) профиль скорости зависит не только от z/k_s, но и от относительной шероховатости трубы k_s/r. Поэтому в обычном представлении $u/u_* = f(z/k_s)$ профиль скорости не является универсальным. Профиль, предложенный И. Никурадзе в виде

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\varkappa} \ln \frac{z}{k_s} + 8,48,$$

не учитывает влияния относительной шероховатости на распределение скоростей и может считаться универсальным лишь в первом приближении.

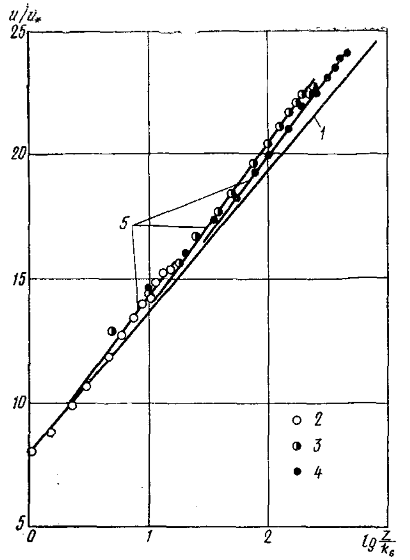


РИС. 3.22

1 — профиль И. Никурадзе; 2—4 — данные И. Никурадзе (2 — $\mathrm{Re}=108 \cdot 10^3$; $r/k_s=15$; 3 — $\mathrm{Re}=344 \cdot 10^3$; $r/k_s=252$; 4 — $\mathrm{Re}=970 \cdot 10^3$, $r/k_s=507$); 5 — расчет по соотношению (3.30)

Сравнение результатов расчета по полученной зависимости (3.29) с экспериментальными данными по распределению скоростей в открытых шероховатых каналах дано на рис. 3.23. Сравнение рис. 3.23 с рис. 3.22 показывает, что для открытых каналов влияние относительной шероховатости k_s/h на распределение скоростей проявляется более сильно, чем для труб. Это учитывается зависимостями (3.29) и (3.30).

Для небольших значений k_s/h (или k_s/r) при $\varkappa = 0,4$ и средней величине $A = 8,5$ выражения для профилей скорости принимают вид:

для каналов

$$\frac{u}{u_*} = 5,75 \lg \frac{z}{k_s} + 2,5 \frac{z}{h} - 0,3 \frac{z^2}{h^2} + 8,5; \tag{3.31}$$

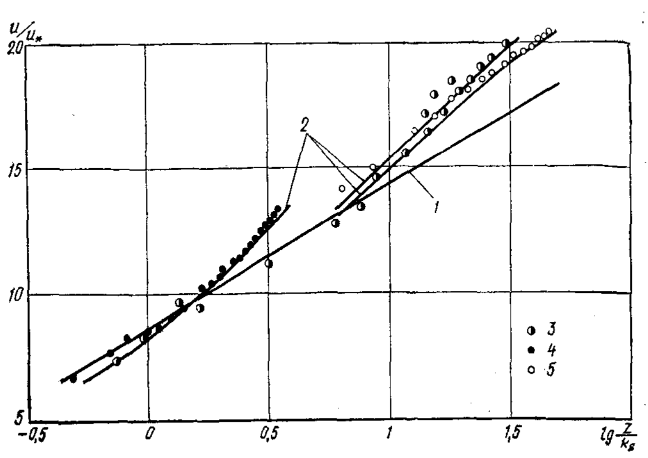


РИС. 3.23

1 — расчет по соотношению (2.24) при $\varkappa = 0,4$ и $u\kappa/u^* = 8,48$; 2 — расчет по соотношению (3.29); 3 — данные С. Корсина и А. Кистлера, $\delta/k_s=30$ (гофрированная поверхность); 4 — данные В. С. Боровкова $h/k_s=4$ (цилиндрические выступы, расположенные в шахматном порядке); 5 — то же, $h/k_s=50$ (деревянный канал)

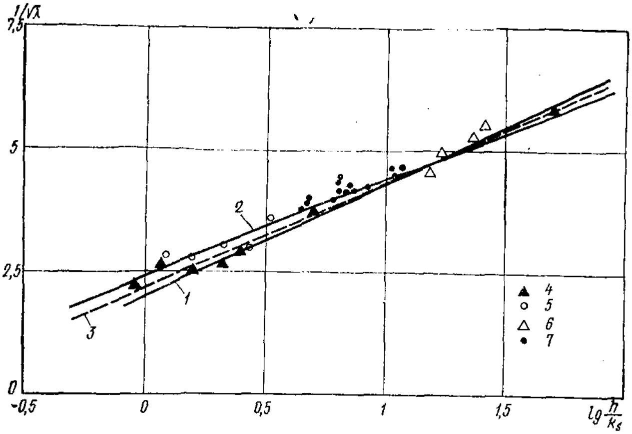


Рис. 3.24

1 — расчет по зависимости (3.37) для канала; 2 — расчет по зависимости И. Никурадзе; 3 — расчет по зависимости (3.38) для труб; 4—7 — данные В. С. Боровкова (4 — $k_s=2,85$ см; 5 — $k_s=1,96$ см; 6 — $k_s=0,2$ см; 7 — $k_s=0,35$ см)

для круглых труб

$$\frac{u}{u_*}=5,75\lg\frac{z}{k_s}+1,25\frac{z}{r}-0,6\frac{z^2}{r^2}+8,5. \qquad (3.32)$$

Интегрируя соотношение (3.29) по глубине потока, находим:

$$\frac{U}{u_*}=5,75\lg\frac{h}{k_s}-2,5\frac{k_s}{h}+0,3\left(\frac{k_s}{h}\right)^2+7,1. \qquad (3.33)$$

Интегрируя соотношение (3.30) по площади, находим для круглой трубы:

$$\frac{U}{u_*}=5,75\lg\frac{r}{k_s}-1,25\frac{k_s}{r}+0,6\left(\frac{k_s}{r}\right)^2+5,07. \qquad (3.34)$$

Максимальная скорость течения в открытом канале из соотношения (3.29) при $z=h$

$$\frac{u_{max}}{u_*}=5,75\lg\frac{h}{k_s}-2,5\frac{k_s}{h}+0,3\left(\frac{k_s}{h}\right)^2+10,7. \qquad (3.35)$$

Аналогично при $z=r$ максимальная скорость течения в круглой трубе

$$\frac{u_{max}}{u_*}=5,75\lg\frac{r}{k_s}-1,25\frac{k_s}{r}+0,6\left(\frac{k_s}{r}\right)^2+9,15. \qquad (3.36)$$

Выражения (3.33) — (3.36) позволяют определить дефицит средней скорости в открытых каналах $D_к=3,6$ и для круглых труб $D_т=4,08$.

Следует отметить, что полученные значения дефицита средней скорости для открытых шероховатых каналов и труб практически совпадают с установленными выше значениями дефицита для режима гладкого сопротивления. Соотношение (3.33) дает возможность найти зависимость для расчета коэффициента гидравлического сопротивления в шероховатых каналах:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}=2\lg\frac{2h}{k_s}-0,45\frac{k_s}{h}+0,2\left(\frac{k_s}{h}\right)^2+1,74. \qquad (3.37)$$

Выражение для коэффициента гидравлического сопротивления шероховатых труб, полученное из зависимости (3.34), имеет вид:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}=2\lg\frac{r}{k_s}-0,45\frac{k_s}{r}+0,2\left(\frac{k_s}{r}\right)^2+1,74. \qquad (3.38)$$

На рис. 3.24 показаны зависимости коэффициента гидравлического сопротивления от относительной шероховатости каналов и труб. На рисунке видно совпадение результатов расчета по полученным зависимостям (3.37) и (3.38) для каналов и труб, а также малое отклонение их от известной зависимости И. Никурадзе (3.18). Как и в режиме гладкого сопротивления, течение в плоских шероховатых каналах оказывается эквивалентным в динамическом отношении течению в круглых трубах, несмотря на установленное выше заметное различие в распределениях скоростей. Именно это обстоятельство дает возможность использовать зависимость (3.18) для расчета величины эквивалентной шероховатости при обработке экспериментальных данных по сопротивлению труб и каналов.

Выполненный выше анализ предполагает постоянство двух коэффициентов: $\varkappa$ и A — в соотношениях (3.29) и (3.30). В действительности эти коэффициенты могут изменяться в некоторых пределах. Так, например, обработка опытов И. Никурадзе, выполненных в шероховатых трубах, показывает, что $\varkappa$ изменяется от 0,39 до 0,45. Одновременно изменяется также и коэффициент A. В инженерных расчетах при вычислении коэффициента гидравлического сопротивления, как правило, изменение этих параметров не учитывается.

ГЛАВА 4. УНИВЕРСАЛЬНЫЕ КИНЕМАТИЧЕСКИЕ И ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ РАВНОМЕРНЫХ ОТКРЫТЫХ ПОТОКОВ

§ 11. Течение при переходном режиме сопротивления в условиях равнозернистой шероховатости

Ранее были рассмотрены характеристики течения при гладком и шероховатом режимах сопротивления. Принято считать, что переходный режим сопротивления наблюдается при $5 < u_* k_s/\nu < 50$. Однако параметром, определяющим переход, является не эквивалентная, а геометрическая высота выступа шероховатости. К этому же выводу пришли на основании своих экспериментов К. Колбрук и К. Уайт.

Объясняя опыты И. Никурадзе, Л. Прандтль предполагал наличие устойчивой ламинарной пленки на граничной поверхности. В тех случаях, когда толщина этой пленки больше высоты выступов шероховатости, поверхность считалась гидравлически гладкой; когда высота элементов шероховатости больше толщины ламинарной пленки,— гидравлически шероховатой. В переходной зоне сопротивления высота элементов была соизмерима с толщиной ламинарной пленки.

Согласно новым экспериментальным исследованиям (см.гл. 2), постоянной ламинарной пленки не существует. Вблизи граничной поверхности периодически возникает и разрушается вязкий подслой, толщина которого изменяется во времени. В связи с этим указанная выше схема Л. Прандтля требует корректировки.

Будем считать, как и ранее, что наличие шероховатости не влияет существенно на характеристики течения в вязком подслое. Рассмотрим обтекание одиночного выступа шероховатости периодическим вязким подслоем (рис. 4.1). В момент разрушения вязкого подслоя t_0 турбулентное течение проникает до граничной поверхности и весь выступ обтекается турбулентным потоком. При этом выступ шероховатости оказывает наибольшее воздействие на характеристики течения. В любой момент времени нарастания толщины вязкого подслоя (например, t_1) выступ частично находится в турбулентком потоке, а частично в пределах подслоя. Часть выступа, находящаяся в пределах вязкого подслоя, не оказывает существенного влияния на характеристики течения. Таким образом, по мере нарастания толщины вязкого подслоя эффективная высота выступа уменьшается, а начиная с некоторого момента времени t_2 выступ полностью скрывается в вязком подслое и не влияет на характеристики течения вплоть до момента повторного разрушения подслоя.

При заданной высоте выступа время, в течение которого проявляется эффект шероховатости, может быть установлено с использованием полученных ранее данных о величине перемежаемости (см. рис. 2.6). Действительно, коэффициент перемежаемости γ представляет собой отношение времени существования турбулентного режима течения к общему времени на данном расстоянии z от граничной поверхности. При безразмерной высоте выступа шероховатости $u_* k/\nu < 3 \div 5$, согласно расчету С. Гольдштейна, вследствие малых скоростей течения вблизи граничной поверхности происходит безотрывное обтекание выступа. Поэтому во все периоды увеличения и разрушения вязкого подслоя шероховатость не проявляет себя при $u_* \, k/\nu < 3$. При безразмерной высоте выступа шероховато-

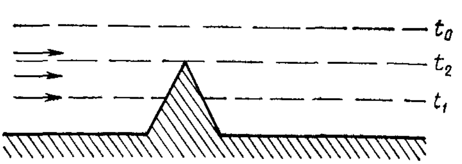


Рис. 4.1

сти $u_* k/\nu > 3$ происходит интенсивное вихреобразование за выступом от момента разрушения вязкого подслоя t_0 до момента времени t_2, при котором толщина вязкого подслоя становится равной высоте выступа.

Сопротивление выступа и характер его обтекания в условиях переходного режима могут меняться в зависимости от числа Рейнольдса. Для системы выступов строгий расчет их суммарного сопротивления (с учетом взаимного влияния) в зависимости от числа Рейнольдса становится сложным. Отсутствие необходимых данных не позволяет использовать для переходной области балансовые соотношения, подобно тому как это было выполнено для режима течения с полным проявлением шероховатости. В связи с этим предлагается упрощенная схема течения в переходной области сопротивления, позволяющая произвести расчет гидравлических характеристик. Согласно этой схеме предполагается, что в моменты времени, когда толщина вязкого подслоя превышает высоту элементов шероховатости, существует гидравлически гладкий режим течения в основной толще потока, а в моменты времени, когда толщина вязкого подслоя меньше высоты выступов, в основной толще потока устанавливается шероховатое течение. Таким образом, при переходном режиме сопротивления в основной толще потока происходит последовательная смена гладкого и шероховатого режимов течения. Относительная продолжительность шероховатого режима течения равна величине коэффициента перемежаемости γ; продолжительность гладкого режима равна $1-\gamma$. Отметим, что, так как согласно определению коэффициент перемежаемости γ есть отношение продолжительности турбулентного режима течения в вязком подслое к общему времени наблюдения, его величина может быть установлена по разным параметрам (профилю скорости, гидравлическому сопротивлению, турбулентным характеристикам и т. д.):

$$\gamma=\frac{\Pi_{\text{пер}}-\Pi_{\text{гл}}}{\Pi_{\text{шер}}-\Pi_{\text{гл}}}, \tag{4.1}$$

где $\Pi_{\text{пер}}$, $\Pi_{\text{гл}}$ и $\Pi_{\text{шер}}$ — значения параметров соответственно в переходном, гладком и шероховатом режимах сопротивления.

Так, например, если в качестве параметра выбран коэффициент гидравлического сопротивления λ, то входящий в соотношение (4.1) параметр $\Pi_{\text{пер}}$ равен $\lambda_{\text{пер}}$ (при данном числе Рейнольдса), $\Pi_{\text{гл}}=\lambda_{\text{гл}}$ и $\Pi_{\text{шер}}=\lambda_{\text{шер}}$. Из соотношения (4.1) любой параметр в переходной области может быть определен следующим образом:

$$\Pi_{\text{пер}}=\gamma\Pi_{\text{шер}}+(1-\gamma)\,\Pi_{\text{гл}}. \tag{4.2}$$

Следовательно, для расчета рассматриваемого параметра в переходной области необходимо знать величину γ и соответствующие значения параметров при гладком и шероховатом режимах течения.

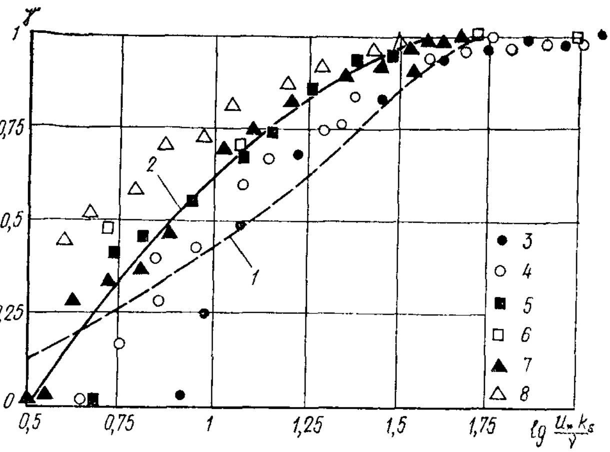


РИС. 4.2

1 — расчет по зависимости (2.46); 2 — расчет по зависимости (4.4); 3—8 — по данным И. Никурадзе (3— $r/k_s=15$; 4— $r/k_s=30,6$; 5 — $r/k_s=60$; 6 — $r/k_s=126$; 7— $r/k_s=252$; 8 — $r/k_s=507$)

Если рассматриваются взаимно зависимые параметры, их значения следует рассчитывать также по соотношению (4.2). Рассмотрим зависимые параметры λ и $\sqrt{\lambda}$. Согласно соотношению (4.2),

$$\lambda_{пер}=\gamma\lambda_{шер}+(1-\gamma)\,\lambda_{гл}. \qquad (4.3)$$

Казалось бы, для получения $\sqrt{\lambda_{пер}}$ следует извлечь квадратный корень из правой и левой частей выражения (4.3):

$$(\sqrt{\lambda_{пер}})'=\sqrt{\gamma\lambda_{шер}+(1-\gamma)\lambda_{гл}}\,.$$

Определенная таким образом величина $(\sqrt{\lambda_{пер}})'$ представляет собой корень квадратный из средневзвешенного (по времени) значения $\lambda_{пер}$.

Если в качестве параметра взять $\sqrt{\lambda}$, то согласно соотношению (4.2) имеем:

$$\sqrt{\lambda_{пер}}=\gamma\sqrt{\lambda_{шер}}+(1-\gamma)\ \sqrt{\lambda_{гл}}\,.$$

В этом случае $\sqrt{\lambda_{пер}}$ определен как средневзвешенное значение параметра (в данном случае $\sqrt{\lambda}$). Строго говоря, эти два соотношения не адекватны и лишь второе из них соответствует определению коэффициента перемежаемости (4.1). Сравнение этих двух зависимостей показывает, что наибольшее расхождение в значениях $\sqrt{\lambda_{пер}}$ не превышает 5%. Это находится в пределах погрешности экспериментально определяемых значений $\sqrt{\lambda}$.

Обработка экспериментальных данных И. Никурадзе по сопротивлению труб с равнозернистой песочной шероховатостью в переходной области позволила получить экспериментальное значение коэффициента перемежаемости (рис. 4.2).

Обработка экспериментальных данных производилась следующим образом:

1) по заданной относительной шероховатости k_s/r устанавливалось значение $\lambda_{шер}$;

2) при фиксированном значении числа Рейнольдса по графику И. Никурадзе (рис. 4.3) определялась величина коэффициента гидравлического сопротивления в переходной области $\lambda_{пер}$ и при гладком режиме $\lambda_{гл}$;

3) значение γ вычислялось по соотношению (4.1);

4) для данного значения k_s/r и фиксированного значения $\mathrm{Re} = Ud/\nu$ вычислялась величина $u_* k_s/\nu$ как $\frac{Ud}{\nu}\,\frac{k_s}{2r}\,\frac{\sqrt{\lambda_{\text{пер}}}}{\sqrt{8}}$.

Анализ данных обработки (см. рис. 4.2) показывает, что характер изменения γ для всех значений относительных шероховатостей сохраняется, однако с увеличением r/k_s значения γ несколько возрастают (при тех же $u_* k_s/\nu$). Влияние r/k_s на γ, возможно, связано с различной величиной дисперсии выступов шероховатости, которая для опытов И. Никурадзе существенно повышалась при увеличении r/k_s.

В среднем опытные данные удовлетворительно аппроксимируются следующей зависимостью:

$$\gamma = 1 - e^{0,12(3 - u_* k_s/\nu)} = 1 - 1,45e^{-0,12 u_* k_s/\nu}. \qquad (4.4)$$

Для сравнения на рис. 4.2 пунктиром нанесена кривая изменения γ, полученная при расчете нестационарного вязкого подслоя [см. соотношение (2.46)]. Незначительное расхождение кривых связано, возможно, с условностью принятой выше модели нестационарного вязкого подслоя.

Выполним расчет коэффициента гидравлического сопротивления в переходном режиме, используя зависимость (4.2) и полученные ранее соотношения для $\lambda_{\text{шер}}$ (3.38) и $\lambda_{\text{гл}}$ (2.75). После несложных преобразований для условий опытов И. Никурадзе получаем:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_{\text{пер}}}} - 2\lg\frac{r}{k_s} = (1-\gamma)\,2\lg\frac{u_* k_s}{\nu} + 1,2\gamma + 0,55. \qquad (4.5)$$

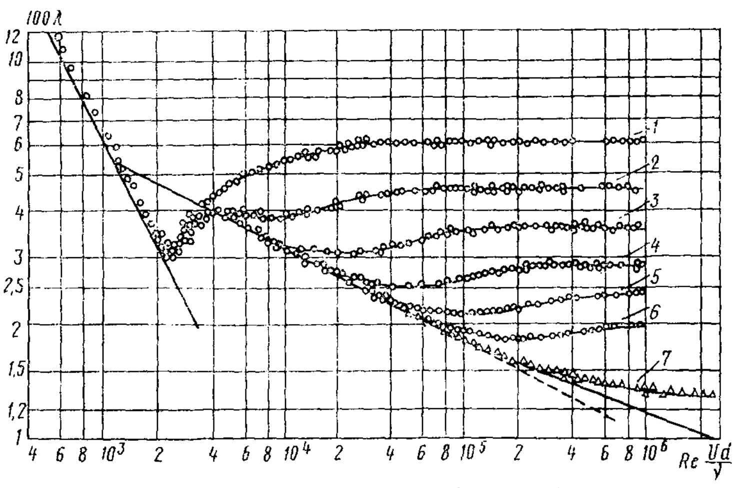


РИС. 4.3

1—6 — данные И. Никурадзе, песочная шероховатость (1—r/k_s=15; 2 — r/k_s=30,6; 3 — r/k_s=60; 4 — r/k_s=126; 5 — r/k_s=256; 6 — r/k_s=507); 7 — данные Галавича, техническая шероховатость, r/k_s=1300

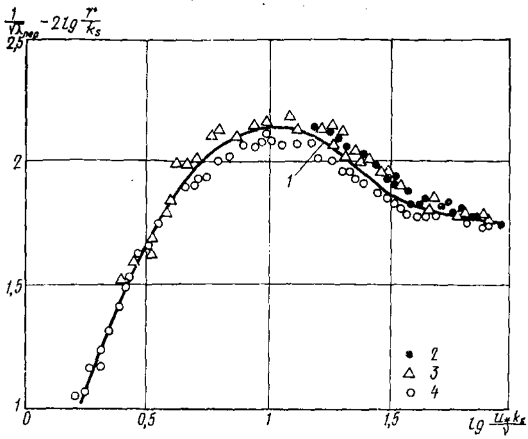


РИС. 4.4

1 — расчет по соотношению (4.5); 2—4 — данные И. Никурадзе (2 — $r/k_s=15$; 3 — $r/k_s=60$; 4 — $r/k_s=507$)

Сравнение расчетной кривой с экспериментальными данными И. Никурадзе для труб с песочной шероховатостью (рис. 4.4) показывает их хорошую сходимость. Расчеты для условий опытов А. П. Зегжды также показали возможность использования соотношений (4.3) и (4.4) для определения коэффициента гидравлического сопротивления $\lambda_{пер}$. Следует отметить, что многие гидротехнические сооружения, предназначенные для пропуска высокоскоростных потоков, например бетонные каналы и туннели большого диаметра, работают в переходном режиме сопротивления, поэтому расчет $\lambda_{пер}$ представляет значительный практический интерес.

Профиль скорости в переходном режиме сопротивления принято представлять в виде профиля, соответствующего гладкому режиму сопротивления с некоторой добавкой $\Delta u/u_*$. Это допускается, поскольку коэффициент турбулентной вязкости считается одинаковым для всех режимов сопротивления. Таким образом, профиль скорости для каналов, работающих в переходном режиме сопротивления, имеет вид:

$$\frac{u}{u_*}=\left(\frac{u}{u_*}\right)_{гл}-\frac{\Delta u}{u_*}=5{,}75\lg\frac{u_* z}{\nu}+2{,}5\frac{z}{h}-0{,}3\left(\frac{z}{h}\right)^2+4{,}9-\frac{\Delta u}{u_*}.$$

Аналогично для труб

$$\frac{u}{u_*}=5{,}75\lg\frac{u_* r}{\nu}+1{,}25\frac{z}{r}-0{,}6\left(\frac{z}{r}\right)^2+4{,}9-\frac{\Delta u}{u_*}. \tag{4.6}$$

С другой стороны, согласно соотношению (4.1) профиль скорости в переходном режиме сопротивления можно представить следующим образом:

$$\frac{u}{u_*}=\gamma\left(\frac{u}{u_*}\right)_{шер}+(1-\gamma)\left(\frac{u}{u_*}\right)_{гл}, \tag{4.7}$$

где $(u/u_*)_{шер}$ — профиль скорости, соответствующий шероховатому режиму сопротивления [по выражению (3.31) или (3.32)].

Из соотношения (4.7) с использованием зависимостей (3.32) и (4.6) получаем для течения в трубах:

$$\frac{\Delta u}{u_*} = 5{,}75\gamma\left(\lg\frac{u_* k_s}{\nu} - 0{,}6\right). \quad (4.8)$$

Нетрудно заметить, что для течения в канале добавка $\Delta u/u_*$ получается такой же, как и для течения в трубе. Расчет добавки $\Delta u/u_*$ по соотношению (4.8) с использованием выражения (4.4) для γ иллюстрируется рис. 4.5. Здесь же приведены экспериментальные значения $\Delta u/u_*$, полученные обработкой опытов И. Никурадзе, по распределению скоростей в переходном режиме сопротивления. Близкое совпадение расчетных и экспериментальных значений позволяет рекомендовать полученные соотношения для расчета распределения скоростей в каналах и трубах при переходном режиме сопротивления.

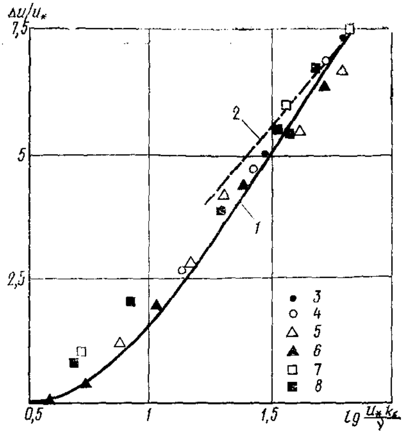


РИС. 4.5

1 — расчет по зависимости (4.8); 2 — добавка при квадратичном сопротивлении; 3—8 — данные И. Никурадзе (3 — $r/k_s=15$; 4 — $r/k_s=30{,}6$; 5 — $r/k_s=60$; 6 — $r/k_s=126$, 7 — $r/k_s=252$; 8 — $r/k_s=507$)

Некоторое отклонение от расчетной кривой обнаруживается лишь в двух сериях опытов с малыми значениями относительной шероховатости ($k_s/r = 1/252$ и $k_s/r = 1/507$). Это отклонение, по-видимому, связано с большой дисперсией крупности зерен для этих двух серий опытов, где, строго говоря, шероховатость не может считаться равнозернистой. Очевидно, по своим характеристикам, согласно М. Д. Миллионщикову, она приближается к обычной технической шероховатости, для которой характерна повышенная дисперсия в высоте выступов.

§ 12. Течение при переходном режиме сопротивления в условиях технической шероховатости

Вследствие значительной дисперсии в высоте выступов взаимодействие технической шероховатости с нестационарным вязким подслоем имеет некоторые особенности. В момент разрушения вязкого подслоя, так же как и при равнозернистой шероховатости, все выступы обтекаются турбулентным потоком. При увеличении толщины вязкого подслоя не только уменьшается эффективная высота выступов, но и сокращается число выступов, воздействующих на турбулентный поток (рис. 4.6).

Толщина вязкого подслоя, как было показано выше, уменьшается с возрастанием числа Рейнольдса. При этом безразмерный комплекс $u_* z_в/\nu$ сохраняется постоянным и близким к 50. При малых числах Рейнольдса абсолютная толщина вязкого подслоя макси-

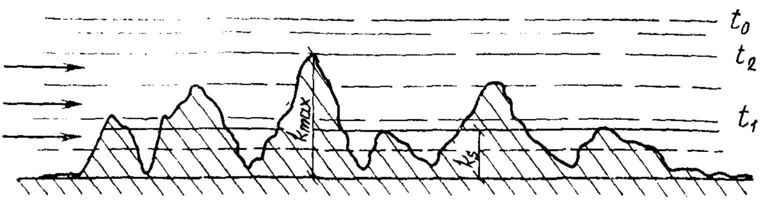


РИС. 4.6

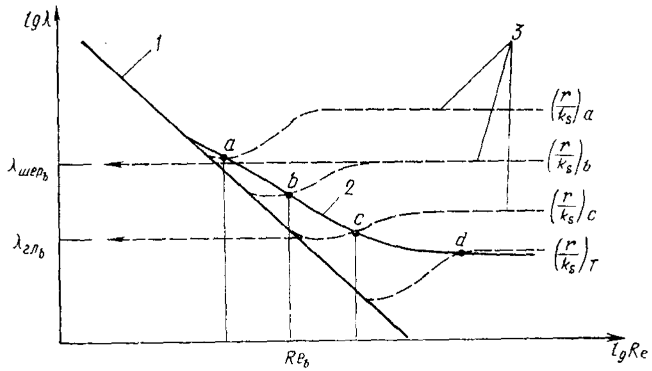


РИС. 4.7

1 — гладкие трубы; 2 — трубы с технической шероховатостью; 3 — трубы с равнозернистой шероховатостью

мальна. Как уже указывалось, при малой безразмерной величине шероховатости $u_* k/\nu < 3$ период обтекания выступов турбулентным потоком мал, обтекание безотрывное и режим сопротивления гладкий. С увеличением динамической скорости наибольшая толщина вязкого подслоя уменьшается. При безразмерной высоте самых крупных выступов больше 3 они начинают оказывать воздействие на характеристики турбулентного течения. Следовательно, можно считать, что эффект шероховатости становится заметным при $u_* k_{max}/\nu > 3$. Этот вывод согласуется с результатами экспериментальных исследований К. Колбрука и К. Уайта. Для всех остальных выступов ($u_* k/\nu < 3$) обтекание безотрывное, и они не дают заметного вклада в общее сопротивление.

Как показывает анализ поверхностей, обычная техническая шероховатость имеет нерегулярный характер и характеристики ее подчиняются статистическим закономерностям. Обычно считается, что эти закономерности согласуются с нормальным законом распределения вероятностей, при котором максимальная высота выступов шероховатости превышает среднюю в 3—3,5 раза. Вероятность появления таких выступов невелика и составляет не более 0,1%. Другими словами, один максимальный выступ высотой $(3 \div 3{,}5)\, k_{ск}$ (где $k_{ск}$ — средняя высота выступа шероховатости) приходится на 1000 более мелких выступов.

Учитывая, что для естественной шероховатости средний шаг $s_{ср}$ примерно в 4—5 раз больше средней высоты выступа, можно установить, что шаг между наиболее крупными выступами достигает $1{,}5 \cdot 10^3\ k_{max}$. При такой редкой расстановке суммарное влияние крупных выступов на сопротивление невелико, поэтому отход от кривой сопротивления гладких труб при технической шероховатости значительно более плавный, чем при равнозернистой (см. рис. 4.3). При увеличении числа Рейнольдса начинают играть все более заметную роль мелкие выступы. Следовательно, в отличие от равнозернистой шероховатости эффективная высота выступов технической шероховатости в переходном режиме сопротивления не остается постоянной, а зависит от числа Рейнольдса. Таким образом, в переходной зоне сопротивления отношение эффективной шероховатости к радиусу трубы k_s/r изменяется.

Изменение величины k_s/r в переходной зоне сопротивления можно определить путем совмещения диаграмм сопротивления $\lambda = f(\mathrm{Re})$ для равнозернистой и технической шероховатости (рис. 4.7). В точках пересечения кривых a, b и т. д. для технической и равнозернистой шероховатости эффективная относительная шероховатость равна соответствующей равнозернистой $(k_s/r)_a$, $(k_s/r)_b$ и т. д. Поэтому сопротивление в произвольной точке b переходного режима можно представить как сопротивление, получающееся в результате перемежаемости гладкого режима при числе Рейнольдса, равном Re_b, и шероховатого режима, сопротивление при котором определяется относительной шероховатостью $(k_s/r)_b$. В конце переходной зоны (точка d) сопротивление технической шероховатости перестает зависеть от числа Рейнольдса и величина ее эффективной шероховатости также не изменяется. Именно это значение принято считать эквивалентной зернистой шероховатостью технической поверхности $k_{sт}$. Величина этой шероховатости, как правило, известна, поэтому удобно сопоставлять эффективную шероховатость переходной зоны с этой эквивалентной шероховатостью поверхности в условиях квадратичного сопротивления.

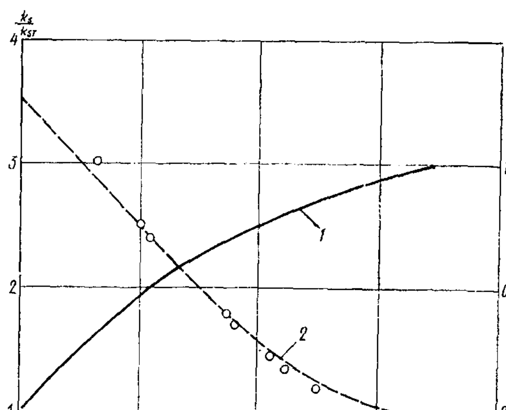


РИС. 4.8

1 — расчет γ по зависимости (4.10); 2 — расчет $k_s/k_{sт}$ по зависимости (4.9)

На рис. 4.8 представлены данные по изменению эффективной шероховатости технических трубопроводов в переходном режиме сопротивления. Данные получены в результате обработки опытов Г. А. Мурина с использованием указанной выше методики. По оси ординат дано отношение эффективной шероховатости в переходной зоне k_s к шероховатости в условиях квадратичного сопротивления $k_{s\text{т}}$. По оси абсцисс отложено значение безразмерного параметра шероховатости $u_* k_{s\text{т}}/\nu$. Анализ данных показывает, что при уменьшении значений $u_* k_{s\text{т}}/\nu$ отношение $k_s/k_{s\text{т}}$ увеличивается, приближаясь к 3,5 при $u_* k_{s\text{т}}/\nu \to 1$. Это согласуется с ранее сделанным предположением о соотношении между максимальной и средней высотой выступа шероховатости. При $u_* k_{s\text{т}}/\nu \to 50$ отношение $k_s/k_{s\text{т}} \to$ $\to 1$.

Экспериментальные данные по величине отношения $k_s/k_{s\text{т}}$ для стальных поверхностей удовлетворительно аппроксимируются следующей зависимостью:

$$k_s/k_{s\text{т}} = 1 + 3e^{-0,18 u_* k_{s\text{т}}/\nu}. \tag{4.9}$$

Из рис. 4.8 видно, что значение $u_* k_{s\text{т}}/\nu = 1$, определяющее начало отхода от кривой гладкого сопротивления, соответствует $u_* k_s/\nu = 3,5$, что согласуется с данными, приведенными выше. Для удобства выполнения расчетов на этом же рисунке представлено изменение коэффициента перемежаемости γ в функции от $u_* k_{s\text{т}}/\nu$, полученное преобразованием осредненной экспериментальной кривой (см. рис. 4.2.) с использованием данных по соотношению $k_s/k_{s\text{т}}$. При необходимости расчет изменения γ в переходном режиме сопротивления может быть выполнен по приближенной зависимости

$$\gamma = 1 - e^{-0,12 u_* k_{s\text{т}}/\nu}. \tag{4.10}$$

Расчет коэффициента гидравлического сопротивления в переходном режиме может производиться либо с использованием зависимостей (4.9) и (4.10), либо по рис. 4.8.

Если при вычислении коэффициента гидравлического сопротивления $\lambda_{\text{пер}}$ использовать в качестве параметра $1/\sqrt{\lambda}$, то по соотношению (4.3) имеем:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_{\text{пер}}}} = \gamma \frac{1}{\sqrt{\lambda_{\text{шер}}}} + (1-\gamma) \frac{1}{\sqrt{\lambda_{\text{гл}}}}. \tag{4.11}$$

В этом соотношении можно принимать:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_{\text{шер}}}} = 2 \lg \frac{r}{k_s} + 1,74;$$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_{\text{гл}}}} = 2 \lg \frac{u_* r}{\nu} + 0,55.$$

Эти зависимости, как показано выше, без большой погрешности могут быть использованы для расчета сопротивления каналов и труб. Учитывая, что для переходного режима $k_s \neq k_{s\text{т}}$, представим выражение для $1/\sqrt{\lambda_{\text{шер}}}$ иначе:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_{\text{шер}}}} = 2\lg\frac{r}{k_{s\text{т}}} - 2\lg\frac{k_s}{k_{s\text{т}}} + 1{,}74. \tag{4.12}$$

Расчет производится по следующей схеме:

1) при известных $r/k_{s\text{т}}$ и Re находятся коэффициенты гидравлического сопротивления для шероховатого и гладкого режимов;

2) рассчитывается параметр $u_* k_{s\text{т}}/\nu$ по соотношению

$$\frac{Ud}{\nu}\,\frac{k_{s\text{т}}}{2r}\,\frac{\sqrt{\lambda_{\text{шер}}}}{\sqrt{8}};$$

3) по величине $u_* k_{s\text{т}}/\nu$ находятся значения γ и $k_s/k_{s\text{т}}$;

4) вычисляется значение $\lambda_{\text{пер}}$ с использованием соотношений (4.11), (4.12) и (2.75);

5) при необходимости производится корректировка значения u_* (по $\lambda_{\text{пер}}$), затем γ и $k_s/k_{s\text{т}}$;

6) находится уточненное значение $\lambda_{\text{пер}}$.

Контрольные расчеты показали, что повторное уточнение незначительно и его можно не производить.

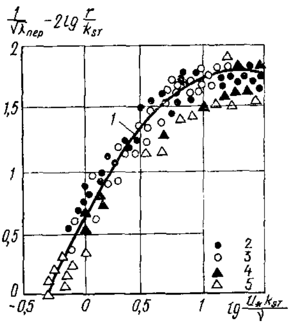


РИС. 4.9

1 — расчет по зависимости (4.12); 2, 3 — данные Ф. А. Шевелева (2 — d=155,1 мм; 3 — d=302 мм); 4, 5 — данные Г. А. Мурина (4 — d=40,5 мм; 5 — d=74 мм)

На рис. 4.9 в координатах

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_{\text{пер}}}} - 2\lg\frac{r}{k_{s\text{т}}} = f\left(\frac{u_* k_{s\text{т}}}{\nu}\right)$$

дано сравнение расчетного коэффициента гидравлического сопротивления с результатами экспериментальных исследований Ф. А. Шевелева и Г. А. Мурина. Расчет выполнялся по соотношению, полученному из выражений (4.11) и (4.12) в виде:

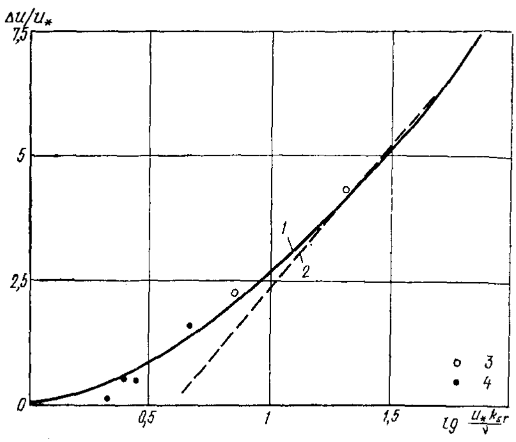


РИС. 4.10

1 — расчет по соотношению (4.13); 2 — добавка при квадратичном сопротивлении; 3, 4 — данные А. Д. Альтшуля, стальные трубы (3 — d=302,6 мм; 4 — d=205 мм)

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_{пер}}}-2\lg\frac{r}{k_{sт}}=(1-\gamma)\,2\lg\frac{u_* k_{sт}}{\nu}-2\lg\frac{k_s}{k_{sт}}+1{,}2\gamma+0{,}55.$$

Результаты расчета хорошо согласуются с экспериментальными данными.

Распределение скоростей при переходном режиме сопротивления в условиях технической шероховатости, так же как и при зернистой шероховатости, можно представить как

$$\left(\frac{u}{u_*}\right)_{пер}=\left(\frac{u}{u_*}\right)_{гл}-\frac{\Delta u}{u_*}.$$

Отношение $\Delta u/u_*$ с учетом зависимости (4.8) и изменяющейся величины k_s в переходной зоне имеет вид:

$$\frac{\Delta u}{u_*}=5{,}75\gamma\left(\lg\frac{u_* k_{sт}}{\nu}+\lg\frac{k_s}{k_{sт}}-0{,}6\right). \qquad (4.13)$$

Расчет по зависимости (4.13) иллюстрируется рис. 4.10. Анализ расчетных данных показывает, что при $u_* k_{sт}/\nu > 10$ профиль скорости в переходном режиме практически не отличается от профиля скорости при квадратичном сопротивлении. Лишь в узком диапазоне $u_* k_{sт}/\nu$ от 1 до 10 эти отличия заметны. Экспериментальные данные, полученные обработкой опытов А. Д. Альтшуля, подтверждают эти выводы.

Другой подход к расчету сопротивления труб и каналов развит в работах А. Д. Альтшуля [1]. Основываясь на полуэмпирической теории турбулентности и учитывая влияние физической вязкости наравне с турбулентной, А. Д. Альтшулю удалось получить обобщенное выражение для распределения скоростей. Интегрированием профиля скорости было найдено выражение для коэффициента гидравлического сопротивления в виде:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}=-2\lg\left(\frac{2{,}5}{\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}}+\frac{k_s}{3{,}7d}\right). \qquad (4.14)$$

Сопоставление этого выражения с экспериментальными данными показало, что зависимость (4.14) хорошо описывает сопротивление технически шероховатых труб во всех режимах турбулентного движения, однако не позволяет произвести расчет сопротивления однородной зернистой шероховатости в переходной области.

§ 13. Универсальный степенной профиль скорости

Распределение скоростей из общих соображений кинематического подобия может быть представлено не только в логарифмическом, но и в степенном виде (см. § 5). В ряде случаев такое представление более удобно для анализа и инженерных расчетов.

Степенной профиль скорости имеет вид:

$$u/u_{max}=(z/h)^n, \qquad (4.15)$$

где h — глубина потока;

u_{max} — скорость на поверхности.

Поскольку в условиях гладкого сопротивления параметром, определяющим подобие профилей скорости, является $u_* z/\nu$, а в условиях шероховатости сопротивления z/k_s, можно вместо общего соотношения (4.15) ввести два частных соотношения. В качестве нормирующего параметра следует использовать динамическую скорость u_*. Тогда для условий гладкого сопротивления

$$u/u_* = C_{\text{гл}} (u_* z/\nu)^n. \tag{4.16}$$

Для условий шероховатого сопротивления

$$u/u_* = C_{\text{шер}} (z/k_s)^n. \tag{4.17}$$

В соотношении (4.16) (при $z = h$, $u = u_{max}$)

$$C_{\text{гл}} = \frac{u_{max}}{u_*} \left(\frac{\nu}{u_* h} \right)^n. \tag{4.18}$$

Соответственно в соотношении (4.17)

$$C_{\text{шер}} = \frac{u_{max}}{u_*} \left(\frac{k_s}{h} \right)^n. \tag{4.19}$$

Установим связь параметров $C_{\text{гл}}$, $C_{\text{шер}}$ и n с интегральными характеристиками потока. Интегрированием выражения (4.15) для условий плоского течения в канале находим:

$$\frac{U}{u_{max}} = \frac{1}{n+1}. \tag{4.20}$$

Отсюда получаем:

$$n = \frac{u_{max} - U}{U}. \tag{4.21}$$

Для пространственного течения в круглой трубе соотношение между максимальной и средней скоростью равно [9]:

$$\frac{U}{u_{max}} = \frac{2}{(n+1)(n+2)} = \frac{2}{n^2 + 3n + 2}. \tag{4.22}$$

Значение n обычно менее 0,5, поэтому в выражении (4.22) величина $n^2 < 3n$. Таким образом, выражение (4.22) можно заменить приближенным соотношением

$$\frac{U}{u_{max}} \approx \frac{2}{3n+2}. \tag{4.23}$$

Преобразуем соотношение (4.21) к виду

$$n = \frac{u_{max} - U}{u_*} \frac{u_*}{U} = D \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{8}},$$

где $D = (u_{max} - U)/u_*$ — дефицит средней скорости.

Учитывая, что для плоского потока, согласно (2.69), $D_{\text{к}} = 1{,}42/\varkappa$ при $\varkappa = 0{,}4$, находим:

$$n = 1{,}25 \sqrt{\lambda}. \tag{4.24}$$

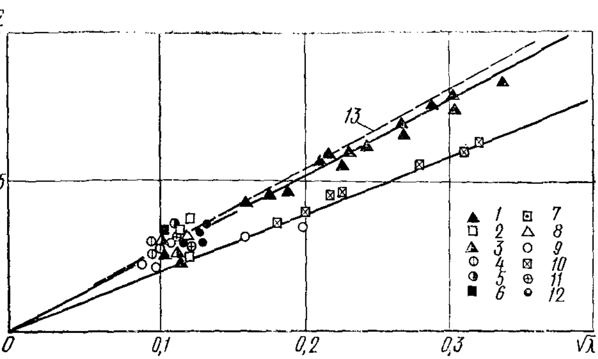


РИС. 4.11

1—8 — плоские потоки в каналах Боровкова, шероховатые каналы с большими уклонами; 2 — то же, гладкие каналы; 3 — данные Л. Гогиберидзе; 4 — данные М. Випарелли; 5 — данные Л. Рао; 6 — данные В. П. Троицкого; 7 — данные Ж. Хальбронна; 8 — данные В. Бауэра); 9—11— течение в трубах (9—данные И. Никурадзе; 10 — данные В. Ннннера; 11 — данные Ж. Конт-Белло); 12 — течение в пограничном слое, данные Е. Эккерта; 13 — то же, данные Ф. Хама

Аналогично для пространственного течения в трубе при $D_{т} = 4{,}07$ и $\varkappa = 0{,}4$

$$n \approx \sqrt{\lambda}. \tag{4.25}$$

Подобная связь для потоков в трубах установлена А. Д. Альтшулем и В. Нуннером [1]. Экспериментальные данные по связи показателя степени n с коэффициентом гидравлического сопротивления λ для каналов и труб приведены на рис. 4.11. Данные относятся к течению при гладких и шероховатых граничных поверхностях в широком диапазоне изменения чисел Рейнольдса и относительной шероховатости. Результаты экспериментальных исследований подтверждают полученные выше расчетные соотношения (4.24) и (4.25). На этом же графике приведена связь между n и λ, полученная обработкой данных Ф. Хама [8] для пограничного слоя на плоской пластине. Анализ показывает, что для пограничного слоя соотношение между n и λ близко соотношению (4.24) для плоского течения в канале.

Коэффициенты $C_{гл}$ и $C_{шер}$ в выражениях (4.16) и (4.17) могут быть определены экспериментально при известном показателе степени n по любой точке профиля скорости. Из соотношений (4.18) и (4.20) находим для плоского потока:

$$C_{гл} = \frac{u_{max}}{U} \frac{U}{u_*} \left(\frac{\nu}{u_* h} \right)^n = \frac{(n+1)\sqrt{8}}{\sqrt{\lambda}} \left(\frac{\nu}{u_* h} \right)^n. \tag{4.26}$$

Подставляя в это выражение соотношение (4.24), получаем:

$$C_{гл} = 3{,}55 \frac{n+1}{n} \left(\frac{\nu}{u_* h} \right)^n. \tag{4.27}$$

РИС. 4.12

1 — расчет по зависимости (4.28) для труб; 2 — то же, (4.27) для гладких каналов; 3 — данные И. Никурадзе; 4 — данные В. С. Боровкова; 5 — данные Ж. Хальбронна; 6 — данные В. Бауэра; 7 — данные М. Випарелли; 8 — данные Р. Клайна и др.

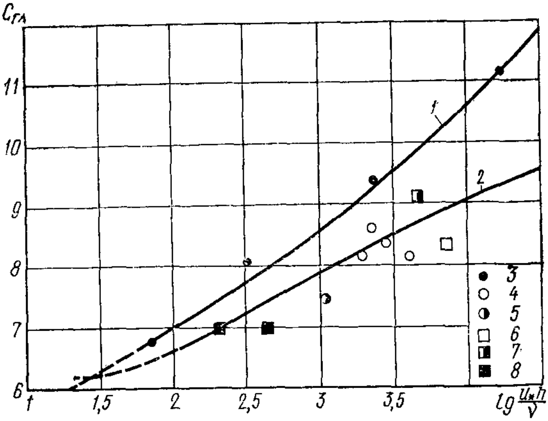
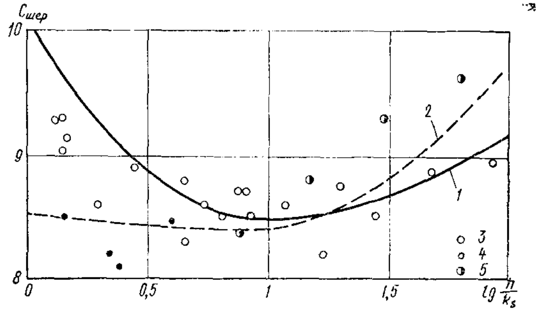


РИС. 4.13

1 — расчет по зависимости (4.29); 2 — расчет по зависимости (4.30); 3 — данные В. С. Боровкова для каналов; 4 — данные М. Д. Миллионщикова и др. для труб; 5 — данные И. Никурадзе для труб



Аналогично для труб использование соотношений (4.18), (4.22) и (4.25) позволяет найти:

$$C_{\text{гл}} = \sqrt{2}\,\frac{(n+1)(n+2)}{n}\left(\frac{\nu}{2u_*h}\right)^n. \tag{4.28}$$

На рис. 4.12 дано сопоставление этих расчетных зависимостей с экспериментальными данными ряда исследователей по величине коэффициента $C_{\text{гл}}$ для труб и каналов. Расчет по зависимостям (4.27) и (4.28) выполнялся с использованием соотношений (2.74) и (2.75) для коэффициента гидравлического сопротивления при течении в каналах и трубах.

При течении в шероховатых каналах и трубах с использованием выражения (4.19) можно найти:

для каналов

$$C_{\text{шер}} = 3{,}55\,\frac{n+1}{n}\left(\frac{k_s}{h}\right)^n; \tag{4.29}$$

для труб

$$C_{\text{шер}} = \sqrt{2}\,\frac{(n+1)(n+2)}{n}\left(\frac{k_s}{2h}\right)^n. \tag{4.30}$$

На рис. 4.13 приведено сравнение данных, полученных расчетом по этим зависимостям, с результатами экспериментальных исследований. Можно отметить, что $C_{гл}$ и $C_{шер}$ характеризуют величину скорости вблизи стенки. Так, величина $C_{шер}$ имеет вполне определенный физический смысл. Действительно, из соотношения (4.17) следует, что $C_{шер}$ есть отношение скорости при $z = k_s$ к динамической скорости и совпадает со второй константой турбулентности [с параметром A в выражении (3.29)].

Как видно из рис. 4.13, в поведении коэффициента $C_{шер}$ для труб и каналов имеются некоторые различия, заметные при больших значениях гидравлического сопротивления. При большой величине эквивалентной шероховатости k_s влияние пространственного характера становится заметным даже при $z = k_s$.

Представленные на рис. 4.13 данные для труб получены по опытам И. Никурадзе, М. Д. Миллионщикова и др. осреднением значений $C_{шер}$ по ряду профилей при одинаковых значениях r/k_s. Коэффициент $C_{шер}$, обычно принимаемый для шероховатых труб величиной постоянной и равной 8,48, оказывается несколько меняющимся даже для песочной шероховатости И. Никурадзе. Представление $C_{гл}$ и $C_{шер}$ в виде зависимости от показателя степени n (рис. 4.14) позволяет установить, что при любом значении n величины соответствующих коэффициентов C для труб и каналов совпадают. Коэффициенты C тесно связаны с показателем степени n и не зависят от формы канала. Некоторое различие величин $C_{шер}$ для канала и трубы наблюдается лишь в области больших значений n, отвечающих значительной шероховатости ($k_s/h > 0{,}4$). Как уже указывалось, при такой большой шероховатости на величину скорости в точке $z = k_s$ может оказывать влияние пространственный характер течения.

Степенные профили в форме (4.16) и (4.17) могут быть использованы лишь при соответствующем режиме сопротивления. Сделаем попытку получить более общее выражение для распределения скоростей в канале на основе зависимости (4.15). Представим эту зависимость в виде:

$$\frac{u}{u_*} = \frac{u_{max}}{u_*}\left(\frac{z}{h}\right)^n. \qquad (4.31)$$

С учетом соотношения (4.20) выражение (4.31) можно представить как

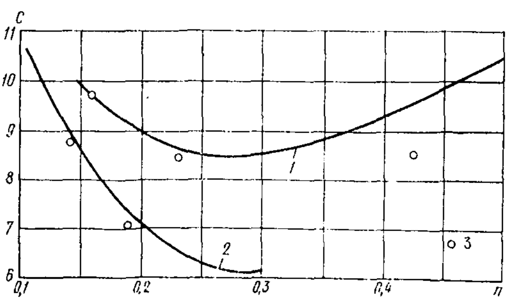


РИС. 4.14

1 — изменение $C_{шер}$; 2 — изменение $C_{гл}$; 3 — данные И. Никурадзе (трубы)

$$\frac{u}{u_*}=\frac{u_{max}}{U}\,\frac{U}{u_*}\left(\frac{z}{h}\right)^n=(n+1)\sqrt{\frac{8}{\lambda}}\left(\frac{z}{h}\right)^n. \tag{4.32}$$

Из этого соотношения найдем максимальную скорость при $z=h$:

$$u_{max}/u_*=(n+1)\sqrt{8/\lambda}. \tag{4.33}$$

Используя полученное ранее выражение для $n=f\ (\lambda)$, найдем с учетом зависимости (4.33) соотношение между максимальной и динамической скоростью:

$$u_{max}/u_*=(n+1)\sqrt{8/\lambda}=[(1{,}25\sqrt{\lambda})+1]\sqrt{8/\lambda}=3{,}5+\sqrt{8/\lambda}. \tag{4.34}$$

Таким образом, степенной профиль скорости принимает вид:

$$u/u_*=(3{,}5+\sqrt{8}/\sqrt{\lambda})\,(z/h)^n. \tag{4.35}$$

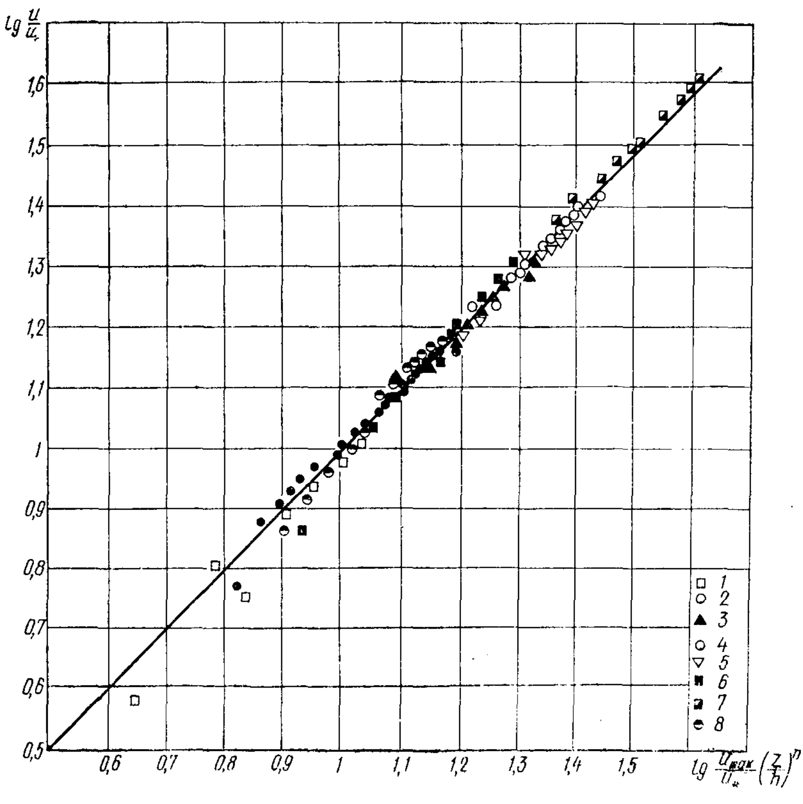


РИС. 4.15

1—4 — данные В. С. Боровкова (1 — $h/k_s=2{,}5$, $i=0{,}072$, канал с искусственной шероховатостью; 2 — $h/k_s=7{,}8$, $i=0{,}232$, канал с искусственной шероховатостью; 3 — $h/k_s=78$, $i=0{,}232$, канал, облицованный строгаными досками; 4 — канал из оргстекла); 5 — данные Ж. Конт-Белло, гладкий канал; 6 — данные С. Коррсина и А. Кистлера, шероховатая пластина; 7 — данные И. Никурадзе, гладкая труба, $Re=43{,}4\cdot 10^3$; 8 — то же, шероховатая труба

Подставляя выражение (4.24) в зависимость (4.35), получаем другой вид степенного профиля скорости:

$$\frac{u}{u_*} = \frac{3,5\,(n+1)}{n}\left(\frac{z}{h}\right)^n. \tag{4.36}$$

Используя выражение (4.25) и учитывая, что в трубах дефицит скорости $D = 4{,}07$, аналогично получаем для круглых труб:

$$\frac{u}{u_*} = \sqrt{2}\,\frac{(n+1)(n+2)}{n}\left(\frac{z}{r}\right)^n. \tag{4.37}$$

Этот вид степенного профиля скорости представляет собой удобную для анализа и расчетов однопараметрическую функцию с параметром n. Большим преимуществом является возможность использования этой зависимости для расчетов распределения скоростей в любых режимах сопротивления.

На рис. 4.15 дано сопоставление степенного профиля скорости в форме (4.31) с экспериментальными данными для нижнего динамического слоя высокоскоростных открытых потоков в гладких и шероховатых каналах, а также для течения в пограничном слое и в трубах. Анализ данных позволяет отметить хорошую сходимость расчетного профиля с результатами измерений.

Обычно принято считать, что профиль степенного вида не может удовлетворительно описать распределение скоростей по всей глубине потока. В частности, по Л. Прандтлю, степенной профиль не отвечает экспериментальным данным как вблизи граничной поверхности, так и в области потока вблизи максимума скорости. Для подтверждения этого положения сравнивают обычно степенной профиль при $n = 1/7$ с универсальным логарифмическим профилем (рис. 4.16). Однако по приведенным выше данным этому показателю сте-

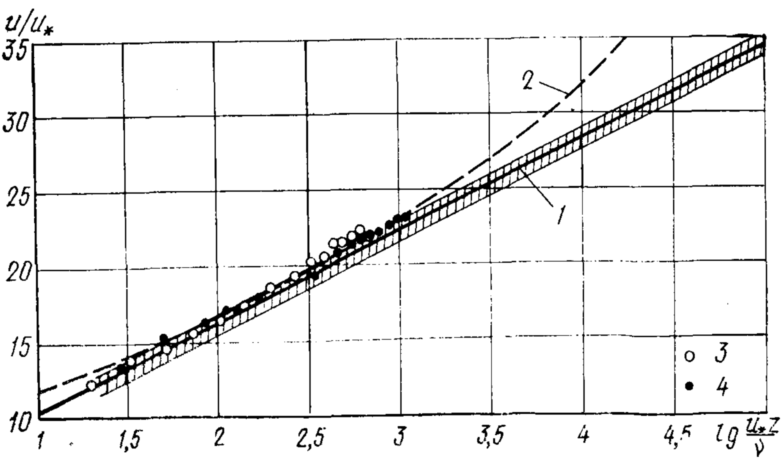


РИС. 4.16

1 — логарифмический профиль И. Никурадзе [зависимость (2.23) при $\varkappa=0{,}4$ и $\beta=5{,}5$; заштрихована область расположения экспериментальных точек И. Никурадзе]; 2 — степенной профиль при $n=1/7$; 3 — данные И. Никурадзе, $\mathrm{Re}=23{,}3\cdot10^3$; 4 — то же, $\mathrm{Re}=43{,}4\cdot10^3$

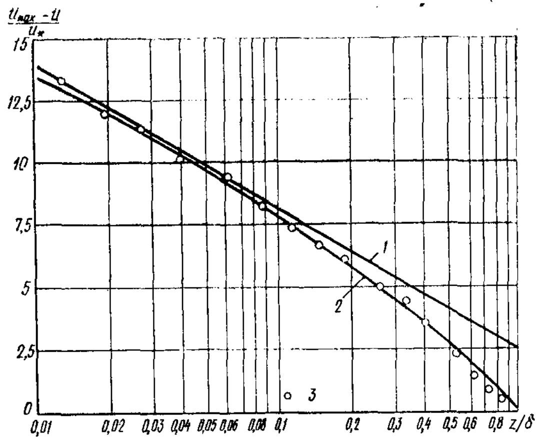


РИС. 4.17

1 — логарифмический профиль; 2 — степенной профиль [см. соотношение (4.36)], где $n=0,145$; 3 — данные Ф. Клебанова и З. Диль, $\mathrm{Re}=152\cdot10^3$

пени отвечает конкретная величина коэффициента гидравлического сопротивления λ. В условиях гладкого режима сопротивления коэффициент λ, а следовательно, и n однозначно определяются числом Рейнольдса. Анализ экспериментальных данных И. Никурадзе позволил установить, что обычно рекомендуемый показатель степени $n = 1/7$ соответствует числам Рейнольдса $\mathrm{Re} = (20 \div 50)10^3$.

На рис. 4.16 показано сравнение степенного профиля при $n = 1/7$ с экспериментальными данными И. Никурадзе для указанного диапазона чисел Рейнольдса. Эти экспериментальные данные специально выделены из общей массы экспериментальных точек. Можно отметить вполне удовлетворительную сходимость эксперимента со степенным профилем $u/u_* = (u_{max}/u_*)(z/r)^{1/7}$. Степенной профиль вида $u/u_* = (u_{max}/u_*)\,(z/r)^n$ хорошо согласуется с экспериментом и для других чисел Рейнольдса при условии правильного выбора показателя степени n.

Логарифмический профиль достаточно хорошо описывает распределение скоростей в трубах. При течении в широких открытых каналах (так же как и в пограничном слое) реальное распределение скоростей существенно отличается от логарифмического (для $z/h > 0,2$). Тем не менее степенной профиль скорости и в этих случаях согласуется с экспериментальными данными (рис. 4.17). В качестве иллюстрации на рис. 4.17 дано сравнение распределения скоростей в пограничном слое с логарифмическим и степенным профилями скорости. Как видно из рисунка, при $z/\delta > 0,2$ (здесь δ — толщина пограничного слоя, являющаяся аналогом глубины открытого потока h) реальное распределение скоростей существенно отличается от логарифмического профиля и хорошо согласуется со степенным.

Степенной вид профиля скорости определяет целесообразность представления в степенном виде также и закона гидравлического сопротивления. Из степенного профиля скорости с показателем $n = 1/7$, как известно [9], следует закон сопротивления Блазиуса с показателем степени $1/4$. При переменном показателе степени n в профиле скорости можно ожидать также и переменного показателя степени в законе сопротивления.

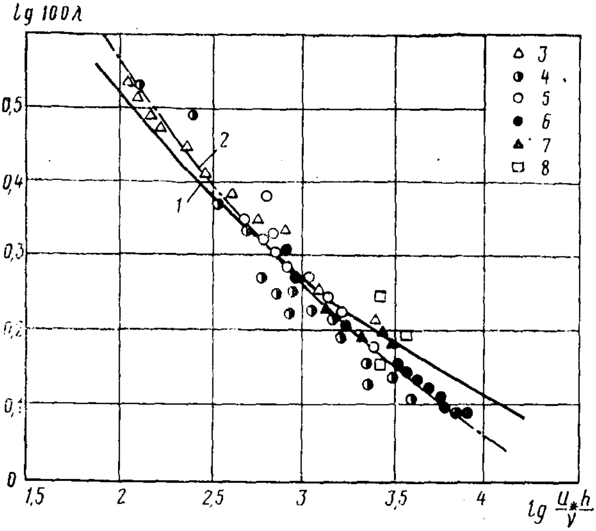


РИС. 4.18

1 — расчет по зависимости (4.38); 2 — расчет по зависимости И. Никурадзе (гладкие трубы); 3 — данные Э. Рейнциса; 4 — данные Р. Пауэлла; 5 — данные Э. Марки; 6 — данные А. М. Яссина; 7 — данные В. С. Боровкова; 8 — данные Л. Гогиберидзе

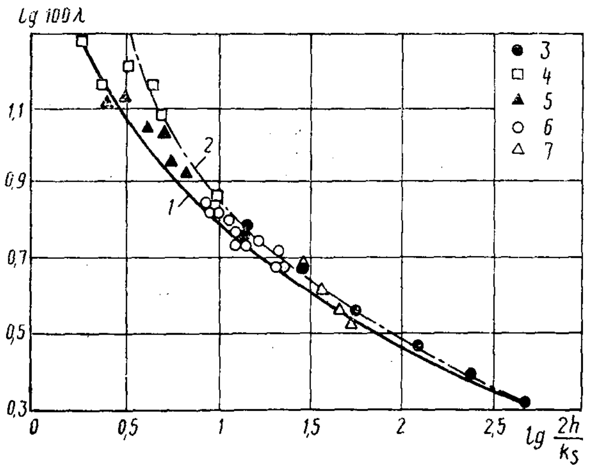


РИС. 4.19

1 — расчет по зависимости (4.39); 2 — расчет по зависимости И. Никурадзе; 3 — данные И. Никурадзе; 4—7 — данные В. С. Боровкова (4 — k_s=2,85 см; 5 — k_s=1,96 см; 6 — k_s=0,35 см; 7 — k_s=0,2 см)

При гладком режиме сопротивления можно представить, что

$$\lambda = A\left(\frac{\nu}{u_* h}\right)^{m_1 \sqrt{\lambda}}.$$

При шероховатом режиме сопротивления аналогично предполагаем, что

$$\lambda = B\left(\frac{k_s}{h}\right)^{m_2 \sqrt{\lambda}};$$

в этих соотношениях A, B, m_1 и m_2 — некоторые переменные коэффициенты.

Близкие по форме соотношения для расчета λ в трубопроводах были предложены А. Д. Альтшулем [1]. Анализ и обработка экспериментальных данных по гидравлическому сопротивлению гладких и шероховатых каналов (рис. 4.18 и 4.19) позволили получить для гладкого режима сопротивления

$$\lambda = 0{,}55\left(\frac{\nu}{u_* h}\right)^{3,5\sqrt{\lambda}}, \tag{4.38}$$

а для шероховатого

$$\lambda = 0{,}5\left(\frac{k_s}{2h}\right)^{3,5\sqrt{\lambda}}. \tag{4.39}$$

Эти зависимости удобны и при расчете турбулентного пограничного слоя. Важно отметить, что полученные зависимости справедливы во всем реальном диапазоне изменения чисел Рейнольдса и относительной шероховатости. На рис. 4.18 и 4.19 нанесены также данные по величине коэффициента гидравлического сопротивления для труб. Как видно из этого сопоставления, различие между сопротивлением труб и каналов невелико.

В расчетах высокоскоростных потоков часто используется так называемый корректив кинетической энергии (коэффициент Кориолиса) и корректив количества движения (коэффициент Буссинеска). Корректив кинетической энергии α представляет собой отношение кинетической энергии реального потока к кинетической энергии потока, вычисленной по средней скорости:

$$\alpha = \frac{\int\limits_{\omega} u^3\,\mathrm{d}\omega}{U^3\,\omega}, \tag{4.40}$$

где ω — площадь живого сечения.

Для плоского потока

$$\alpha = \frac{\int\limits_0^h u^3\,\mathrm{d}z}{U^3\,h}. \tag{4.41}$$

Корректив количества движения β равен отношению количества движения реального потока к количеству движения, вычисленному по средней скорости:

$$\beta = \frac{\int\limits_{\omega} u^2\,\mathrm{d}\omega}{U^2\omega}. \tag{4.42}$$

Для плоского потока

$$\beta = \frac{\int\limits_0^h u^2\,\mathrm{d}z}{U^2\,h}. \tag{4.43}$$

Найдем коэффициенты α и β с использованием степенного профиля скорости. Подставляя в соотношения (4.41) и (4.43) выраже-

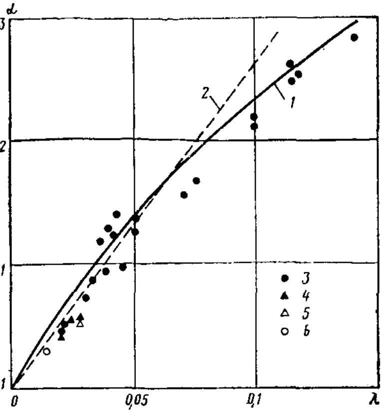


РИС. 4.20

1 — расчетная кривая [см. соотношение (4.44)]; 2 — экспериментальная кривая Базена ($\alpha=1+2{,}68\lambda$); 3 — данные В. С. Боровкова для шероховатых каналов; 4 — то же, для канала с деревянным дном; 5 — данные О. Ф. Васильева и др. для натурного быстротока Ак-Тепе; 6 — данные В. П. Троицкого для гладкого бетонного канала

ние (4.32) для профиля скорости, получаем после интегрирования и преобразований зависимости для плоского потока:

$$\alpha = 1 + n^2 \frac{n+3}{3n+1};$$

$$\beta = 1 + n^2 \frac{1}{2n+1}.$$

С учетом соотношения (4.24) находим:

$$\alpha = 1 + 1{,}55\lambda \frac{1{,}25\sqrt{\lambda}+3}{3{,}75\sqrt{\lambda}+1}; \qquad (4.44)$$

$$\beta = 1 + 1{,}55\lambda \frac{1}{2{,}5\sqrt{\lambda}+1}. \qquad (4.45)$$

Сопоставление расчетной зависимости (4.44) с экспериментальными данными разных авторов (рис. 4.20) обнаруживает их хорошее соответствие.

Аналогично для круглых труб, используя соотношения (4.37), (4.40) и (4.42), получаем [1]:

$$\alpha_т = \frac{(n+1)^3 (n+2)^3}{4(3n+1)(3n+2)}; \qquad (4.46)$$

$$\beta_т = \frac{(n+1)^2 (n+2)^2}{2(2n+1)(2n+2)}. \qquad (4.47)$$

При расчете по этим зависимостям используется связь между n и λ в виде (4.25). Результаты расчета согласуются с данными, приведенными в литературе [1].

ГЛАВА 5. ХАРАКТЕРИСТИКИ ТЕЧЕНИЯ НА НАЧАЛЬНОМ УЧАСТКЕ ОТКРЫТОГО ПОТОКА

§ 14. Положение критического сечения на участке развития потока

При входе потока в канал с большим уклоном характеристики течения изменяются в соответствии с новыми условиями (площадью поперечного сечения, уклоном, шероховатостью канала и т. п.). На входе в канал жидкость получает ускорение, и в некотором сече-

[1] При выводе зависимостей (4.46) и (4.47) интегрирование производится пределах от нуля до r по координате $z = r - a$ (где a — текущий радиус).

нии поток переходит из спокойного состояния в бурное. Сечение, в котором глубина потока равна критической глубине, назовем критическим (рис. 5.1). В этом сечении, как было указано в § 2, число Фруда равно 1. При входе в канал наблюдается резкое падение кривой свободной поверхности, поэтому обычно принимают, что критическое сечение находится на «вершине» входного оголовка. Однако рядом исследователей было замечено, что глубина в этом сечении отличается от критической. Следовательно, связывать положение критического сечения с указанной характерной точкой на входе в канал не всегда можно вследствие большого разнообразия очертаний входных оголовков.

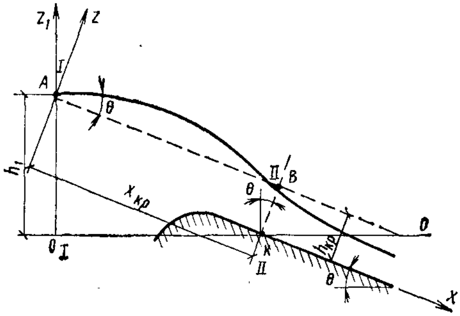


Рис. 5.1

Рассмотрим вопрос о местонахождении критического сечения для расчетной схемы (см. рис. 5.1), при которой уклон постоянен сразу за вершиной оголовка. Примем условно за начальное сечение вертикальную плоскость, проходящую через точку пересечения линии критической глубины с линией полного напора. Будем считать, что в начальном сечении скорость потока равна нулю (при малых скоростях подхода) и кинетическую энергию в этом сечении не учитываем. Составим уравнение Бернулли для сечений $I - I$ и $II - II$, где $I - I$ — начальное сечение и $II - II$ — критическое сечение (плоскость сравнения проведем через низшую точку сечения $II - II$):

$$h_1 = h_{кр} \cos\theta + \frac{u_{кр}^2}{2g}. \tag{5.1}$$

В этом выражении потери энергии на участке $I - II$ малы и не учитываются. Из рис. 5.1 видно, что

$$h_1 = h_{кр} \cos\theta + x_{кр}\, i_р, \tag{5.2}$$

где $i_р$ — уклон прямой AB, который в данном случае совпадает с уклоном дна канала i (по определению).

Следовательно,

$$x_{кр}\, i = \frac{u_{кр}^2}{2g}. \tag{5.3}$$

Изменение скрости материальной точки A на поверхности жидкости происходит под действием силы тяжести, поскольку на этом участке силы сопротивления малы и не оказывают заметного влияния на движение точки. При движении точки в потенциальном поле силы тяжести изменение ее скорости определяется только перепадом высот и не зависит от траектории (см. рис. 5.1.).

Скорость в критическом сечении по соотношению (5.3)

$$u_{кр}=\sqrt{2g\,x_{кр}\,i}. \qquad (5.4)$$

В критическом сечении [см. формулу (1.30)] число Фруда

$$\mathrm{Fr}_{кр}=\frac{\alpha u_{кр}^2}{gh_{кр}\cos\theta}=1.$$

Поскольку длина рассматриваемого участка невелика, трение незначительно, и можно считать скорость по глубине потока постоянной, т. е. $\alpha = 1$.

Таким образом, именно для критического сечения

$$\mathrm{Fr}_{кр}=\frac{u_{кр}^2}{gh_{кр}\cos\theta}. \qquad (5.5)$$

Подставляя в соотношение (5.5) выражение (5.4) для $u_{кр}$, находим:

$$x_{кр}=\frac{h_{кр}\cos\theta}{2i}=\frac{h_{кр}}{2\operatorname{tg}\theta}. \qquad (5.6)$$

Полученная зависимость позволяет определить положение критического сечения по отношению к начальному.

Определим угол наклона свободной поверхности к дну канала в критическом сечении. Из уравнения неразрывности для любого сечения имеем: $h = q/U$. После дифференцирования этого соотношения по координате x получим:

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}=-\frac{q}{U^2}\,\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}. \qquad (5.7)$$

Для критического сечения после преобразований находим:

$$\left(\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}\right)_{кр}=\operatorname{tg}\beta_{кр}=\frac{i}{\cos\theta}=\operatorname{tg}\theta. \qquad (5.8)$$

Из соотношения (5.8) следует интересный вывод о том, что угол наклона свободной поверхности к дну канала в критическом сечении равен углу наклона дна канала.

Для определения положения критического сечения необходимо знать уклон дна канала и расход воды. Расчет выполняем следующим образом:

1) при заданном расходе определяем критическую глубину $h_{кр}$;

2) по известному коэффициенту расхода рассчитываем напор на входном оголовке, необходимый для пропуска расчетного расхода;

3) находим точку пересечения линии критической глубины с линией напора;

4) от точки пересечения (см. рис. 5.1) откладываем отрезок, равный $x_{кр}$ и определенный по зависимости (5.6), и таким образом устанавливаем положение критического сечения.

Этот способ расчета связывает положение критического сечения с условной точкой, лежащей на линии напора и не связанной с сооружением. В некоторых случаях удобнее анализировать положение критического сечения относительно характерной точки сооружения. В гидравлике водосливных сооружений характерной точкой считается наивысшая точка входного оголовка (рис. 5.2, точка O). Задача сводится к нахождению отрезка $x_0 = OK$. Принимая во внимание, что $x_0 = x_{кр} - AG$, найдем из геометрических соотношений величину отрезка $AG = AE + EG$ (где $EG = h_{кр} \operatorname{tg} \theta$; $AE = AD/\cos\theta$; $AD = A_1D - AA_1$).

Из треугольника OA_1D находим: $A_1D = H/\operatorname{tg}\theta$, а из треугольника A_1AF получаем: $AA_1 = h_{кр}/\sin\theta$.

Таким образом,

$$AG = \frac{1}{\cos\theta}\left(\frac{H}{\operatorname{tg}\theta} - \frac{h_{кр}}{\sin\theta}\right) + h_{кр}\operatorname{tg}\theta.$$

С учетом этого вычисляем:

$$x_0 = \frac{h_{кр}\cos\theta}{2i} - \frac{1}{\cos\theta} \times \left(\frac{H}{\operatorname{tg}\theta} - \frac{h_{кр}}{\sin\theta}\right) - h_{кр}\operatorname{tg}\theta.$$

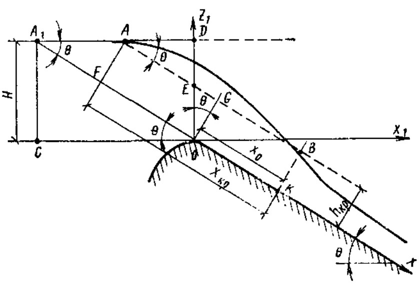


РИС. 5.2

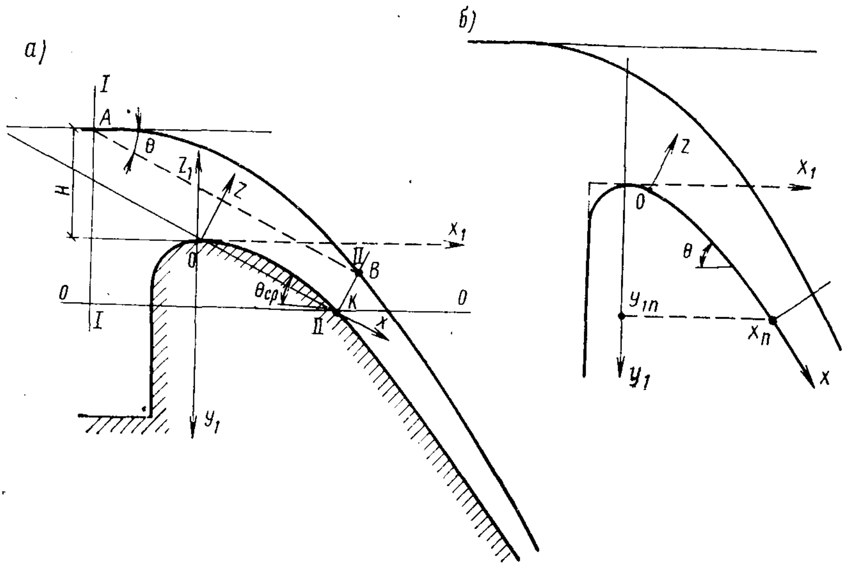


РИС. 5.3

После преобразований получаем:

$$x_0 = \frac{h_{кр} \cos\theta}{i} \left(\frac{3}{2} - \frac{k_в}{\cos\theta} \right), \tag{5.9}$$

где $k_в = H/h_{кр}$.

Следует заметить, что полученное соотношение справедливо для уклонов дна канала, бо́льших критического.

В тех случаях, когда входной оголовок канала выполнен в виде водослива практического очертания, имеющего значительную протяженность водосливной поверхности оголовка (рис. 5.3), необходимо учитывать изменение уклона по длине оголовка.

Для оголовка практического очертания Кригера — Офицерова соотношение между координатами водосливной поверхности оголовка (см. рис. 5.3, *а*) можно представить зависимостью

$$y_1/H_0 = 0{,}48\,(x_1/H_0)^{1{,}8},$$

где $H_0 = H + \dfrac{U_1^2}{2g} \approx H$.

Координаты x_1 и y_1 водосливной грани могут быть связаны с расстоянием x от вершины оголовка следующими соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} x/H_0 &\approx 1{,}12\,(x_1/H_0)^{1{,}25}; \\ y_1/H_0 &\approx 0{,}4\,(x/H_0)^{1{,}44}; \\ i = \sin\theta &= 0{,}575\,(x/H_0)^{0{,}44}. \end{aligned} \right\} \tag{5.10}$$

В этих соотношениях точное равенство соответствует криволинейным координатам (см. рис. 5.3, *б*). Учитывая, что обычно величина $x_{кр}$ невелика, расстояние отсчитывается по прямой, соединяющей точки O и K (см. рис. 5.3, *а*). На этом участке средний уклон поверхности водослива к горизонту

$$i_{ср} = \sin\theta_{ср} = \frac{1}{x_0} 0{,}575 \int_0^{x_0} \left(\frac{x}{H} \right)^{0{,}44} dx = 0{,}4 \left(\frac{x_0}{H} \right)^{0{,}44}. \tag{5.11}$$

Следовательно, уклон $i_{ср}$ не является величиной постоянной, а зависит от x_0. Оценочные расчеты показывают, что величина $\cos\theta_{ср}$ изменяется незначительно и может быть принята равной 1.

Дальнейший расчет положения критического сечения на водосливе практического очертания выполняется по соотношению (5.9) с подстановкой $i = i_{ср}$ по (5.11).

После преобразований находим:

$$\frac{x_0}{h_{кр}} \approx 2 \left(\frac{H}{h_{кр}} \right)^{1/3} \left(\frac{3}{2} - k_в \right)^{2/3} = 2k_в^{1/3} \left(\frac{3}{2} - k_в \right)^{2/3}. \tag{5.12}$$

Если канал с уклоном меньше критического переходит в канал с уклоном больше критического, расчет выполняется по соотношению (5.12). Однако в этом случае

$$k_в = H_0/h_{кр},$$

где $H_0 = H + u_1^2/(2g)$ — полная энергия потока в сечении I—I.

Следует помнить, что в соотношении (5.9) i — уклон лежащего ниже канала (быстротока).

Для определения $k_в$ воспользуемся известной формулой расхода через водослив:

$$q = m\sqrt{2g}H^{3/2},$$

где m — коэффициент расхода входного оголовка водослива.

Расход в критическом сечении можно также представить в виде:

$$q = u_{кр}h_{кр} = \sqrt{g\cos\theta}h_{кр}^{3/2}.$$

Приравнивая эти выражения, после преобразований получим

$$\left(\frac{H}{h_{кр}}\right)^3 = \frac{\cos\theta}{2m^2}.$$

Таким образом,

$$k_в = \frac{\sqrt[3]{\cos\theta}}{\sqrt[3]{2m^2}}.$$

Поскольку величина $\sqrt[3]{\cos\theta}$ близка к 1, с достаточной степенью точности можно считать:

$$k_в = \frac{1}{\sqrt[3]{2m^2}}. \tag{5.13}$$

Определим значение коэффициента расхода, при котором критическое сечение находится на вершине входного оголовка в точке 0.

Из выражения (5.12) при $x_0 = 0$ получим: $k_в \approx 3/2$. Тогда с учетом выражения (5.13) найдем:

$$m = \frac{1}{\sqrt{2}\, k_в^{3/2}} \approx 0,385. \tag{5.14}$$

Такой коэффициент расхода характерен для водослива с широким порогом. Если входной оголовок канала выполнен в виде горизонтального водослива с широким порогом, то при коэффициенте расхода $m = 0,385$ критическое сечение находится у входной кромки. Для водосливов с широким порогом величина коэффициента расхода $m = 0,385$ является наибольшей из возможных [2]. При меньших значениях коэффициента расхода критическое сечение может смещаться за пределы верховой грани водослива. Этот вывод, следующий из анализа выражений (5.9) и (5.13), качественно согласуется с результатами исследований Д. И. Кумина.

Для расчета положения критического сечения в этом случае необходимо знать уклон свободной поверхности на подходе к водосливу. При небольшой длине порога, плавном входе и наклонной плоскости гребня водослив по очертаниям приближается к водосливу практического профиля. Как известно, входной оголовок в виде водослива практического очертания имеет значительно больший коэффициент расхода [2], стремящийся к $m = 0,5$, что вызвано уменьшением степени сжатия потока вследствие улучшения обтекания им входного оголовка.

Таким образом, вследствие различного конструктивного оформления входного оголовка (от водослива с широким порогом до водослива практического очертания) коэффициент расхода m может существенно различаться: от 0,32 до 0,49.

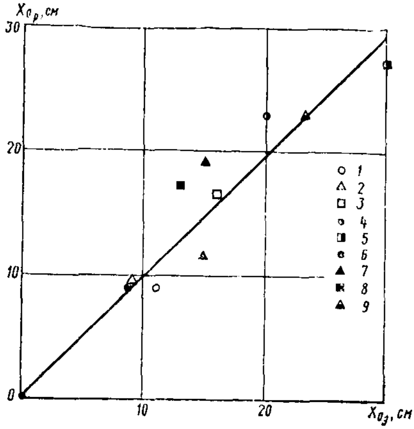


РИС. 5.4

Поз.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
k_s, см	2,85				1,96				
$h_{кр}$, см	4,23	12,3	7,6	10,2	12,3	3,87	5,42	7,65	10,6

Поскольку коэффициент расхода оголовка, как правило, известен, положение критического сечения удобнее вычислять по соотношению (5.9), преобразованному с учетом выражения (5.13) к виду:

$$x_0 = \frac{h_{кр}}{i}\left(\frac{3}{2}\sqrt{1-i^2} - \frac{1}{\sqrt[3]{2m^2}}\right). \tag{5.15}$$

Найдем положение критического сечения при наибольших значениях коэффициента расхода $m = 0{,}5$. В этом случае при $\sqrt{1-i^2} \approx \approx 1$ получим: $x_0 \approx 0{,}25\, h_{кр}/i$. Для водослива практического очертания с учетом зависимостей (5.11) и (5.13) находим: $x_0 \approx 0{,}8\, h_{кр}$, т. е. критическое сечение незначительно удалено от оголовка даже при наибольшем коэффициенте расхода. Это объясняется большим уклоном водосливной поверхности. Поскольку при входе в канал уклоны могут быть существенно меньшими, критическое сечение будет более удалено от входа.

На рис. 5.4 данные, полученные расчетом по зависимости (5.15), сравниваются с результатами экспериментальных исследований на моделях быстротоков с различной шероховатостью дна при различных расходах. При уклоне быстротоков $i = 0{,}072$ и коэффициенте расхода $m = 0{,}44$ критическое сечение удалено от оголовка примерно на $2{,}5\, h_{кр}$. Следует отметить, что существенное изменение шероховатости быстротока не сказывается на величине x_0. Это подтверждает правомерность сделанного выше допущения о малом значении трения на начальном участке. Обработка опытных данных по каналам с большим уклоном показала, что критическое сечение находится вблизи оголовка даже при хорошо очерченном входе.

§ 15. Общие сведения из теории пограничного слоя

Рассмотрим развитие течения в широком канале, предполагая, что на входе в канал распределение скоростей по нормали к дну равномерное (рис. 5.5). Используем декартову систему координат, направив ось x вдоль течения, ось y поперек потока, ось z по нормали к дну канала. Если канал широкий ($b \gg h$) изменение характеристик течения по координате y можно не учитывать.

Вследствие трения жидкости о дно канала скорости вблизи дна уменьшаются. Слой жидкости, в пределах которого заметно уменьшение скорости, принято называть пограничным слоем (слой *I*). Толщина этого слоя δ увеличивается по направлению течения. Вследствие этого толщина слоя *II* невозмущенного течения уменьшается. Слой *II* обычно называют ядром потока. Разделение потока на пограничный слой и ядро в значительной степени условно. В некоторых наиболее точных инженерных расчетах за толщину пограничного слоя принимают расстояние от дна канала до точки, в которой скорость составляет 99% скорости невозмущенного течения. Часто толщину пограничного слоя назначают с учетом реальной погрешности измерительных приборов и требуемой точности расчетов. Неопределенность в выборе толщины пограничного слоя привела к необходимости введения других линейных характеристик пограничного слоя. К ним относятся так называемые толщина вытеснения δ_1 и толщина потери импульса δ_2. Толщина вытеснения δ_1 определяется из сопоставления удельных расходов (на единицу ширины канала) для реального течения в пограничном слое q и течения без трения $q_н$. Вследствие действия сил трения реальный расход q будет меньше расхода $q_н$ на величину $q_1 = q_н - q$. Расход $q_н$ определяется (рис. 5.6) как $u_{max}\delta$. Реальный расход

$$q = \int_0^\delta u \mathrm{d}z.$$

Следовательно,

$$q_1 = u_{max}\,\delta - \int_0^\delta u \mathrm{d}z. \tag{5.16}$$

Как видно из рис. 5.6, величина q_1 представляет собой площадь фигуры *OAC*. Эта площадь равна площади прямоугольника с основанием u_{max} и высотой δ_1. Таким образом,

$$u_{max}\,\delta_1 = u_{max}\,\delta - \int_0^{\delta} u\,dz.$$

Откуда

$$\delta_1 = \int_0^{\delta}\left(1 - \frac{u}{u_{max}}\right)dz. \tag{5.17}$$

Величина δ_1 характеризует уменьшение расхода в реальном пограничном слое по сравнению с течением без трения. Эта величина определяется распределением скоростей в пограничном слое и практически не зависит от способа выбора величины δ.

Трение в реальном пограничном слое уменьшает не только расход, но также и количество движения на величину

$$I_2 = \rho u_{max}^2\,\delta - \rho\int_0^{\delta} u^2\,dz - \rho q_1 u_{max}. \tag{5.18}$$

Последнее слагаемое в этом выражении связано с изменением количества движения вследствие вытеснения части расхода q_1 из пограничного слоя через верхнюю границу при торможении потока. Подставляя зависимость (5.16) в выражение (5.18), получим:

$$I_2 = \rho u_{max}^2\,\delta - \rho\int_0^{\delta} u^2\,dz - \rho u_{max}^2\,\delta + \rho u_{max}\int_0^{\delta} u\,dz = \rho\int_0^{\delta} u\,(u_{max} - u)\,dz.$$

Представив

$$I_2 = \rho u_{max}^2\,\delta_2,$$

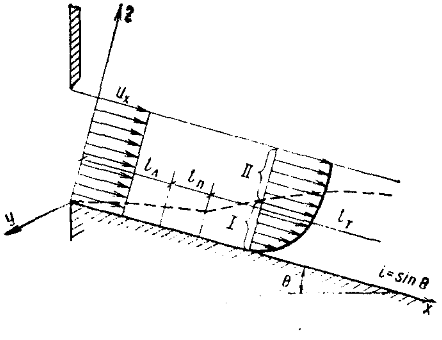


РИС. 5.5

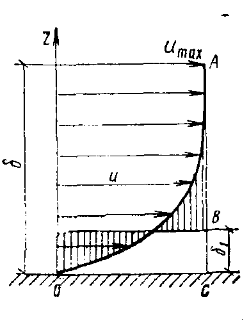


РИС. 5.6

находим:

$$\delta_2 = \int_0^{\delta} \frac{u}{u_{max}} \left(1 - \frac{u}{u_{max}}\right) dz. \qquad (5.19)$$

Следовательно, чтобы реальный поток обладал тем же количеством движения, что и идеальный, толщина его должна быть больше (по сравнению с идеальным) на величину δ_2, которую принято называть толщиной потери импульса. Изменение количества движения в пограничном слое связано с действием сил сопротивления по дну канала.

Согласно теореме импульсов,

$$I_2 = F_{\text{тр}}, \qquad (5.20)$$

где $F_{\text{тр}}$ — сила трения по дну канала.

Поскольку пограничный слой развивается по длине канала, сила трения $F_{\text{тр}}$ также изменяется. Силу трения, действующую на некоторой длине x, представим в виде:

$$F_{\text{тр}} = \int_0^x \tau_0 \, dx,$$

где τ_0 — касательное напряжение на дне канала.

Как и ранее, считаем ширину канала равной 1. Принимая u_{max} постоянной по длине канала, выражение (5.20) запишем следующим образом:

$$\rho u_{max}^2 \delta_2 = \int_0^x \tau_0(x) \, dx.$$

Дифференцируя это соотношение по x, получаем:

$$\frac{d\delta_2}{dx} = \frac{\tau_0(x)}{\rho u_{max}^2}. \qquad (5.21)$$

Безразмерное отношение $2\tau_0(x)/(\rho u_{max}^2)$ представляет собой так называемый местный коэффициент гидродинамического сопротивления C_f. Следовательно,

$$\frac{d\delta_2}{dx} = \frac{C_f}{2}. \qquad (5.22)$$

Таким образом, изменение толщины потери импульса по длине канала определяется величиной местного коэффициента гидродинамического сопротивления в тех случаях, когда скорость (или давление) в ядре потока не изменяются по длине.

В реальных условиях при входе потока в канал скорость (или давление) изменяется от сечения к сечению. Использование теоремы импульсов (5.20) для этого случая позволяет получить более общее соотношение

$$\frac{d\delta_2}{dx} + \left(2 + \frac{\delta_1}{\delta_2}\right)\frac{\delta_2}{u_{max}}\,\frac{du_{max}}{dx} = \frac{\tau_0(x)}{\rho u_{max}^2}. \qquad (5.23)$$

Это уравнение, известное как уравнение Т. Кармана или уравнение импульсов, широко используется для расчетов ламинарных и турбулентных пограничных слоев. При заданном (исходя из граничных условий) профиле скорости или распределении касательных напряжений по толщине пограничного слоя величина $\delta_2 = f(x)$ находится по выражению (5.21) или (5.23). Далее может быть установлено изменение τ_0 и C_f по длине канала. Уравнение (5.23) может быть получено также интегрированием уравнения (1.6) по толщине пограничного слоя.

§ 16. Особенности развивающегося пограничного слоя на начальном участке

Рассчитаем характеристики пограничного слоя на входе в канал с большим уклоном. Уравнение количества движения (5.21) получено для условий обтекания потоком плоской пластины в условиях отсутствия продольного градиента скорости u_{max} или давления. При оголовке практического профиля, выполненного по очертаниям, близким к траектории ниспадающей струи, давление в потоке близко к атмосферному. Действительно, вследствие резкого искривления траектории на частицы жидкости действует центробежная сила, которая уравновешивает нормальную к дну составляющую силы тяжести. Поэтому, несмотря на изменение скорости и геометрических размеров потока, можно принять продольный градиент давления вблизи оголовка равным нулю, так же как и при обтекании плоской пластины. По данным опытов, для режимов, близких к расчетным, давление сохраняется постоянным на расстояниях $x \leqslant H_0$. Будем считать, что пограничный слой начинает развиваться от вершины входного оголовка. Толщина пограничного слоя δ здесь невелика. Поэтому даже при значительной кривизне поверхности оголовка отношение δ к радиусу кривизны поверхности R

мало́ и влияние кривизны поверхности может не учитываться. Таким образом, при расстояниях от вершины оголовка $x \leqslant H_0$ для расчета может быть использовано выражение (5.21). При бо́льших значениях x следует использовать для расчета пограничного слоя выражение (5.23), учитывающее градиент давления в продольном направлении.

При плавном очертании входа на оголовок и малых скоростях подхода начальные возмущения в потоке незначительны. Поэтому образующийся вблизи вершины оголовка пограничный слой будет ламинарным. По мере удаления от вершины оголовка толщина пограничного слоя и скорости течения увеличиваются. На некотором расстоянии $x_л$ течение в пограничном слое становится неустойчивым и переходит в турбулентное. Как показали исследования [9], переход к турбулентному течению в пограничном слое осуществляется при значениях числа Рейнольдса $u_{max}\, \delta_1/\nu = 420$ [где δ_1 — толщина вытеснения, определяемая по соотношению (5.17)]. Для расчета ламинарного пограничного слоя необходимо задать форму профиля скорости в пограничном слое. Изменение скоростей удобно задавать полиномом вида:

$$u/u_{max} \doteq a_0 + a_1\, z/\delta + a_2\, (z/\delta)^2. \tag{5.24}$$

Коэффициенты полинома a_0, a_1 и a_2 определяются из граничных условий:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{при} & z=0 & u=0; \\ \text{»} & z=\delta & u=u_{max}; \\ \text{»} & z=\delta & \dfrac{\partial u}{\partial z}=0. \end{array}\right\} \tag{5.25}$$

Первое граничное условие означает, что скорость на поверхности обтекаемого контура оголовка равна нулю. Согласно второму граничному условию скорость на верхней границе равна скорости невозмущенного потока, которая в общем случае изменяется по координате x. Из третьего граничного условия следует, что профиль скорости в пограничном слое плавно сопрягается с профилем скорости в невозмущенном потоке.

Подставляя первое граничное условие в выражение (5.24), находим, что $a_0 = 0$. Из второго граничного условия находим:

$$1 = a_1 + a_2. \tag{5.26}$$

Прежде чем использовать третье граничное условие, произведем дифференцирование выражения (5.24) по переменной z:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z} = u_{max}\left(\frac{a_1}{\delta} + 2a_2\,\frac{z}{\delta^2}\right). \tag{5.27}$$

Тогда получаем:

$$0 = (a_1/\delta + 2a_2/\delta). \tag{5.28}$$

Решая совместно уравнения (5.26) и (5.28), находим:

$$a_1 = 2; \quad a_2 = -1.$$

Таким образом, распределение скоростей принимает вид:

$$u/u_{max} = 2z/\delta - (z/\delta)^2. \tag{5.29}$$

Введя безразмерную координату $\eta = z/\delta$, перепишем:

$$u/u_{max} = 2\eta - \eta^2. \tag{5.30}$$

Следует отметить, что в общем случае закон изменения скорости может быть задан и другими функциями [9]. Нужно только, чтобы эти функции были монотонны и удовлетворяли граничным условиям.

При ламинарном течении в пограничном слое касательные напряжения на поверхности оголовка определяются соотношением

$$\tau_0 = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_{z=0}. \tag{5.31}$$

Используя выражение (5.29), найдем:

$$\tau_0 = \mu \frac{2}{\delta} u_{max}. \tag{5.32}$$

При известном законе распределения скоростей толщина потери импульса δ_2 определяется по соотношениям (5.19) и (5.30):

$$\delta_2 = \int_0^\delta \frac{u}{u_{max}} \left(1 - \frac{u}{u_{max}}\right) dz = \delta \left[\int_0^1 (2\eta - \eta^2)\, d\eta - \int_0^1 (2\eta - \eta^2)^2 d\eta \right] = \frac{2}{15} \delta. \tag{5.33}$$

Толщина вытеснения δ_1 согласно (5.17) равна:

$$\delta_1 = \delta \int_0^1 (1 - 2\eta + \eta^2)\, d\eta = \frac{1}{3} \delta. \tag{5.34}$$

Подставим в расчетную зависимость (5.22) выражения (5.32) и (5.33):

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{2}{15} \delta \right) = \frac{2\mu}{\delta \rho u_{max}^2}.$$

Интегрируя это выражение, получаем:

$$\delta^2 = 30 \int \frac{\nu}{u_{max}} dx + C, \tag{5.35}$$

где C — постоянная интегрирования.

Для упрощения анализа предполагаем, что u_{max} не изменяется по длине потока на участке развития ламинарного пограничного слоя. Тогда из выражения (5.35) находим:

$$\delta^2 = 30 \nu x / u_{max} + C.$$

Учитывая, что $\delta = 0$ при $x = 0$, получаем $C = 0$.

Следовательно,

$$\delta \approx 5{,}5 \sqrt{\nu x / u_{max}}. \qquad (5.36)$$

Соответственно

$$\delta_1 \approx 1{,}8 \sqrt{\nu x / u_{max}}; \qquad (5.37)$$

$$\delta_2 \approx 0{,}7 \sqrt{\nu x / u_{max}}. \qquad (5.38)$$

Касательные напряжения на поверхности оголовка определим из выражений (5.32) и (5.36):

$$\tau_0 = \nu \rho \frac{2u_{max}}{5{,}5 \sqrt{\nu x / u_{max}}} = 0{,}36\, \rho u_{max} \sqrt{u_{max}\, \nu / x}. \qquad (5.39)$$

Поскольку коэффициент гидродинамического сопротивления $C_f = 2\tau_0/(\rho u_{max}^2)$, из (5.39) находим:

$$C_f = \frac{0{,}72}{\sqrt{u_{max}\, x / \nu}}. \qquad (5.40)$$

Полученные характеристики ламинарного пограничного слоя, как и следовало ожидать, близки к соответствующим соотношениям для ламинарного пограничного слоя на плоской пластине [9].

Так как в действительности на начальном участке вследствие ускорения потока скорости u_{max} изменяются, рассмотрим уравнение движения стационарного равномерного потока. Это уравнение может быть получено из общего уравнения (1.6) при $\partial u_x/\partial t = 0$. Слагаемое $\nu \partial^2 u_x/\partial z^2$, как это было указано в § 2, представим в виде $\partial \tau/(\rho \partial z)$. Таким образом, имеем:

$$\left.\begin{aligned} u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} &= gi - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial z}; \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= -g \sqrt{1-i^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (5.41)$$

Интегрированием второго уравнения системы найдем распределение давления по глубине потока:

$$p = \rho g \sqrt{1-i^2}\, (h-z). \qquad (5.42)$$

Подставляя выражение (5.42) в первое уравнение системы (5.41), получаем:

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} = gi - g\sqrt{1-i^2} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\rho \partial z}. \qquad (5.43)$$

В дальнейшем индекс x для обозначения продольной скорости опускаем.

Течение в невозмущенном потоке за пределами пограничного слоя, т. е. при $z \geqslant \delta$, характеризуется следующими условиями:

$$u = u_{max}; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \tau}{\partial z} = 0.$$

Последнее условие является следствием отсутствия касательных напряжений в толще невозмущенного потока. С учетом этих условий уравнение движения для невозмущенной части потока имеет вид:

$$u_{max}\frac{\mathrm{d}u_{max}}{\mathrm{d}x}=gi-g\sqrt{1-i^2}\,\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}.$$

Интегрируя это выражение, получим:

$$u_{max}^2=2gxi-2g\sqrt{1-i^2}\,h+C.$$

Постоянную интегрирования C найдем из условия, что в точке A (см. рис. 5.2) при $x=0$ скорость $u_{max}=0$ и $h=h_{\text{кр}}\cos\theta$ (по условию определения точки A):

$$C=2g\sqrt{1-i^2}\,h_{\text{кр}}\cos\theta.$$

Таким образом, изменение скорости невозмущенного потока описывается следующим выражением:

$$u_{max}=\sqrt{2g\left[xi-\sqrt{1-i^2}(h-h_{\text{кр}}\cos\theta)\right]}\,. \qquad (5.44)$$

В критическом сечении $h=h_{\text{кр}}\cos\theta$. Тогда при $x=x_{\text{кр}}$

$$u_{max}=u_{\text{кр}}=\sqrt{2gx_{\text{кр}}\,i},$$

что совпадает с принятым ранее выражением (5.4). При значениях $x<x_{\text{кр}}$ разность $h-h_{\text{кр}}\cos\theta>0$ и скорость, определяемая по выражению (5.44), будет несколько меньше скорости, определенной из условий свободного падения. При $x>x_{\text{кр}}$ разность $h-h_{\text{кр}}\cos\theta<0$, следовательно, u_{max} будет несколько превышать скорость свободного падения. В условиях, близких к равномерному движению, разность $h-h_{\text{кр}}\cos\theta$ приближается к постоянному значению и при достаточно больших значениях x второе слагаемое в подкоренном выражении уравнения (5.44) становится несущественным. Изменение скорости невозмущенного потока в этом случае без большой погрешности определяется соотношением

$$u_{max}=\sqrt{2gxi}.$$

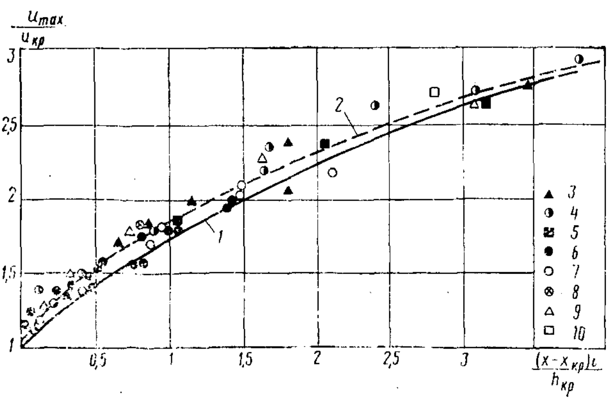


РИС. 5.7

1 — расчет по соотношению (5.45); 2 — осредняющая кривая; данные В. С. Боровкова, шероховатый канал: 3—5 — k_s=0,35 см (3 — i=0,072; 4 — i=0,150; 5 — i=0,232); 6—8 — i=0,072 (6 — k_s=2,85 см; 7 — k_s=1,96 см; 8 — k_s=0,2 см); 9 — то же, деревянный канал; 10 — то же, канал из оргстекла

Следует еще раз подчеркнуть, что расстояние x в этом выражении отсчитывается от условного нуля, определяемого положением точки A (см. рис. 5.2). Изменение скорости ниже критического сечения с учетом выражения (5.4) будет:

$$u_{max} = \sqrt{u_{\text{кр}}^2 + 2g(x - x_{\text{кр}})\, i}. \quad (5.45)$$

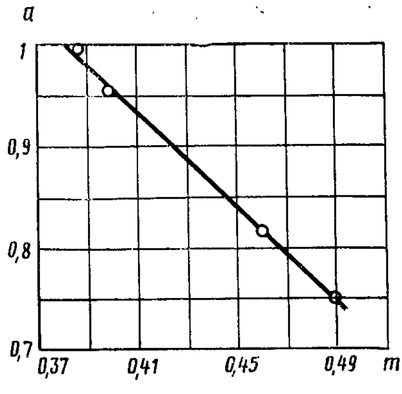


РИС. 5.8

Сопоставление результатов расчета по выражению (5.45) с экспериментальными данными приведено на рис. 5.7. Экспериментальные данные по изменению скорости невозмущенного потока на начальном участке получены в каналах с большими уклонами при различной и сильно изменяющейся шероховатости дна. Анализ этих данных показывает, что шероховатость дна канала не оказывает влияния на скорость невозмущенного потока. Как отмечалось ранее, экспериментальные значения скорости (для $x > x_{\text{кр}}$) несколько превышают значения, определенные по упрощенной зависимости (5.45). Однако это различие невелико, и для расчетов пограничного слоя можно пользоваться этой зависимостью.

Если критическое сечение расположено на значительном удалении от вершины оголовка, являющегося исходной точкой для расчета пограничного слоя, скорость над этой точкой может быть приближенно найдена как

$$u_0 = \sqrt{u_{\text{кр}}^2 - 2gix_0},$$

где x_0 — расстояние от оголовка до критического сечения BK (см. рис. 5.2), которое определяется по соотношению (5.15).

После подстановки в это выражение x_0 и некоторых преобразований находим:

$$u_0 = a u_{\text{кр}}, \quad (5.46)$$

где

$$a = \sqrt{2\left(1/\sqrt[3]{2m^2} - \sqrt{1 - i^2}\right)}.$$

В ряде случаев при $i^2 \ll 1$ можно использовать приближенное выражение

$$a = \sqrt{2\left(1/\sqrt[3]{2m^2} - 1\right)}. \quad (5.47)$$

На рис. 5.8 дана зависимость $a = f(m)$ по этому соотношению. Таким образом, при расчете пограничного слоя изменение скорости невозмущенного течения по координате x можно задавать в виде:

$$u_{max} = \sqrt{u_0^2 + 2gxi}. \quad (5.48)$$

В этом выражении расстояние x в отличие от предыдущих соотношений отсчитывается от вершины оголовка, что более оправданно при расчете пограничного слоя.

Рассмотрим развитие ламинарного пограничного слоя в условиях переменной по длине скорости невозмущенного течения и переменного уклона вблизи оголовка. Оба эти условия обычно наблюдаются при обтекании оголовка практического профиля. Считая очертание оголовка близким к траектории ниспадающей струи, найдем, что уклон плоскости оголовка в произвольной его точке

$$i \approx gx/u_0^2. \tag{5.49}$$

При переменном по длине уклоне скорость невозмущенного потока

$$u_{max} = u_0 \sqrt{1+2(gx/u_0^2)^2}. \tag{5.50}$$

После подстановки выражения (5.50) в соотношение (5.35), интегрирования и преобразования получаем:

$$\delta^2 = \frac{15\nu u_0}{g} \ln\left[\frac{2gx}{u_0^2} + \sqrt{1+2\left(\frac{gx}{u_0^2}\right)^2}\right]. \tag{5.51}$$

Учитывая, что $u_0 = au_{кр} = a\sqrt{gh_{кр}}$, из (5.51) находим:

$$\left(\frac{\delta}{h_{кр}}\right)^2 = 15a\frac{\nu}{u_{кр}h_{кр}} \ln\left[\frac{2}{a^2}\frac{x}{h_{кр}} + \sqrt{1+2\left(\frac{x}{a^2 h_{кр}}\right)^2}\right]. \tag{5.52}$$

Как уже указывалось, на некотором расстоянии $x_л$ от входного оголовка течение в пограничном слое становится турбулентным. В этом сечении число Рейнольдса для пограничного слоя

$$u_{max}\,\delta_1/\nu = 420.$$

Заменяя в этом соотношении δ_1 на $\delta/3$, согласно (5.34), получим:

$$u_{max}\,\delta/\nu = 1260. \tag{5.53}$$

Используя зависимость (5.52) для δ, зависимость (5.48) для u_{max} и формулу (5.53), можно определить длину $x_л$. Расчеты показывают, что течение в пограничном слое становится турбулентным уже на расстоянии 2—3 см от вершины оголовка как для моделей, так и для натурных сооружений. Расчет с использованием упрощенной зависимости (5.36) в предположении $u_{max} = u_0$ дает близкие результаты. Это объясняется весьма малой протяженностью ламинарного участка пограничного слоя. Наибольшая толщина ламинарного пограничного слоя также очень мала и не превышает 1 мм. Полученные результаты, вообще говоря, заранее не очевидные, позволяют сделать вывод о том, что развивающийся на входе в канал пограничный слой можно без заметной погрешности рассчитывать как турбулентный. Методика расчета характеристик турбулентного пограничного слоя близка к рассмотренной выше методике расчета ламинарного пограничного слоя.

ГЛАВА 6. РАСЧЕТ НЕРАВНОМЕРНЫХ ОТКРЫТЫХ ПОТОКОВ

§ 17. Кинематические и динамические характеристики неравномерного потока

Расчет кривых свободной поверхности при неравномерном движении основан на интегрировании уравнения неравномерного движения методом Б. А. Бахметева [2] и иногда дает значительную погрешность, что объясняется несколькими причинами. Как указывал Б. А. Бахметев, в окрестностях критического сечения, т. е. непосредственно вблизи входа в канал с большим уклоном, это уравнение неприменимо. Поскольку сечение с $h_{кр}$ обычно произвольно совмещалось с начальным, а интегрирование выполнялось последовательно от участка к участку, значительная погрешность в начальном створе приводила к погрешности при расчете глубины в других створах. Хотя критическое сечение, как правило, незначительно удалено от вершины оголовка, вследствие резкого изменения глубины на оголовке возможна значительная погрешность в установлении начальных условий. Кроме того, коэффициент гидравлического сопротивления расчетных участков определяется в предположении равномерности течения на каждом участке.

Более точно расчет кривых свободной поверхности может быть выполнен с использованием теории пограничного слоя.

Турбулентный пограничный слой развивается на участке значительно большей протяженности по сравнению с участком ламинарного пограничного слоя. Поэтому турбулентный пограничный слой на начальном участке канала при ускорении течения следует рассчитывать по общему соотношению (5.23). Учитывая, что при расчете этого слоя рассматривается изменение характеристик течения на участке значительной протяженности, давление нельзя считать постоянным по длине канала. Чтобы произвести интегрирование уравнения (5.23), необходимо входящие в него характеристики представить в функциональном виде через толщину вытеснения δ_2. Для этого, как и при расчете ламинарного пограничного слоя, следует задаваться видом распределения скоростей, которое должно удовлетворять граничным условиям. При расчете турбулентного пограничного слоя профиль скорости может быть задан в виде полинома, как это было сделано при расчете ламинарного пограничного слоя. Однако, как указывалось в гл. 2, из общих соображений кинематического подобия распределение скоростей целесообразно задавать в степенном виде:

$$u/u_{max} = (z/\delta)^n. \tag{6.1}$$

Этот вид профиля скорости отвечает граничным условиям при $z = 0$ и $z = \delta$, удобен для интегрирования и при правильном определении n может быть приведен в соответствие с условиями, определяющими течение. Толщина пограничного слоя δ может быть определена по-разному в зависимости от величины скорости, задаваемой на внешней границе слоя. В дальнейшем за толщину δ будем принимать расстояние от дна канала, на котором скорость составляет $0{,}97\ u_{max}$.

Анализ данных по величине показателя степени n при неравномерном течении на начальном участке канала, на водосливе и в пограничном слое (рис. 6.1) показывает, что различная степень неравномерности течения не изменяет заметно зависимости между n и гидравлическим сопротивлением. Вместо коэффициента гидравли-

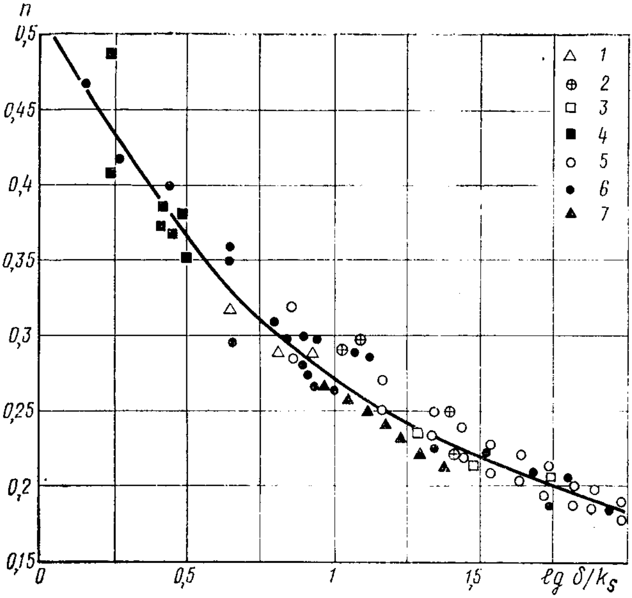


РИС. 6.1

1 — 3 — данные В. С. Боровкова, начальный участок шероховатого канала (1 — k_s=0,35 см, 2 — k_s=0,2 см, 3 — k_s=0,035 см); 4 — пограничный слой на шероховатой пластине (данные Ф. Хама); 5 — пограничный слой на шероховатой пластине (данные Спена); 6 — канал с большим уклоном (равномерное течение); 7 — шероховатый водослив, i=0,85 (данные В. Бауэра)

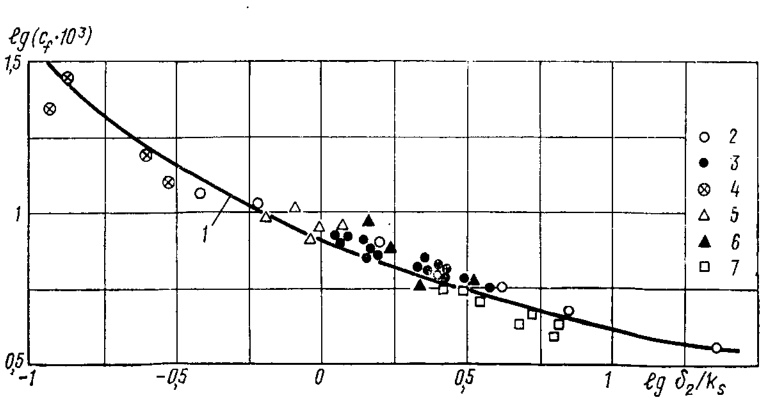


РИС. 6.2

1 — расчет по зависимости (6.2) 2 — данные Спена, пограничный слой на шероховатой пластине; 3 — данные В. Бауэра, шероховатый водослив; 4—7 — данные В. С. Боровкова, начальный участок канала (4 — k_s=2,8 см; 5 — k_s=0,35 см; 6 — k_s=0,2 см; 7 — k_s=0,035 см) ческого сопротивления λ в условиях неравномерного течения при анализе изменения n следует использовать параметры $U\delta/\nu$ и δ/k_s при гладком и шероховатом режимах соответственно. Поскольку при высоких скоростях течения обычно наблюдается шероховатый режим сопротивления, анализ будет выполняться для шероховатых каналов. Однако аналогичный анализ может быть выполнен и для гладких каналов.

Данные, представленные на рис. 6.1, показывают, что изменение n связано главным образом не с развитием пограничного слоя, а с величиной шероховатости поверхности (в опытах В. Бауэра величина n на начальном участке водослива изменяется слабо — от 0,21 до 0,26). Поэтому целесообразно считать n постоянным на начальном участке и определять его по параметрам равномерного течения. Экспериментальные данные получены в условиях значительного изменения относительной шероховатости $\delta/k_s = 1{,}5 \div 100$ и уклонов дна канала $i = 0{,}07 \div 0{,}37$. На графике приведены также данные по величине показателя степени для нижнего динамического слоя равномерного открытого потока. Здесь вместо толщины пограничного слоя δ взята глубина нижнего слоя h. Для всех перечисленных случаев профиль скорости соответствует зависимости (6.1) при $n = 1{,}25\sqrt{\lambda}$.

Данные по величине коэффициента гидродинамического сопротивления C_f для шероховатых каналов в условиях равномерного и неравномерного течения представлены на рис. 6.2 в зависимости от отношения толщины потери импульса δ_2 к величине эквивалентной шероховатости k_s, т. е. в форме, удобной для интегрирования уравнения (5.23). Экспериментальные данные, охватывающие широкий диапазон изменения относительной шероховатости каналов, хорошо согласуются с результатами исследования сопротивления шероховатых плоских пластин [9].

Исследования гидродинамических характеристик течения на водосливах, выполненные В. Бауэром, показали, что закон изменения C_f по длине водосливной поверхности в условиях шероховатого сопротивления совпадает с рассмотренными выше данными при условии некоторого уточнения величины k_s (на возможность такой корректировки указывал сам В. Бауэр). При корректировке величины k_s показатель степени n, определенный В. Бауэром, также согласуется с данными, представленными на рис. 6.1.

Зависимость C_f от относительной шероховатости обычно принято представлять в степенном виде $C_f \sim (k_s/\delta_2)^N$ с постоянным показателем степени. В частности, для умеренной шероховатости N принимают близким к 0,2—0,3, но для каналов с большой относительной шероховатостью (типа быстротоков) величина N значительно больше. Так как $C_f = 2\,(u_*/u_{max})^2$, получаем (см. § 13):

$$C_f \approx C\,(k_s/\delta)^{m\sqrt{\lambda}} \sim (k_s/\delta_2)^{m_1\sqrt{\lambda}}.$$

По экспериментальным данным установлено:

$$C_f = 8\cdot 10^{-3}\,(k_s/\delta_2)^{1{,}5\sqrt{\lambda}}. \qquad (6.2)$$

Переменный показатель степени учитывает влияние относительной шероховатости, поэтому зависимость (6.2) оказывается пригодной для расчета C_f в большом диапазоне изменения относительной шероховатости. Анализ профилей скорости и коэффициентов местного гидродинамического сопротивления на начальном участке течения в каналах показал, что и показатель степени n, и коэффициент C_f достаточно точно следуют зависимостям, установленным для условий равномерного течения (см. рис. 6.1 и 6.2). Это объясняется небольшими градиентами давления на начальных участках каналов. Если в качестве безразмерного параметра, характеризующего градиент давления, принять

$$\Pi = \frac{\delta_2}{u_{max}} \frac{\mathrm{d}u_{max}}{\mathrm{d}x},$$

то для начального участка в канале с большим уклоном максимальное значение Π не превосходит 10^{-3}. При таких градиентах давления профиль скорости в пограничном слое, согласно [9], не отличается существенно от профиля скорости при течении без градиента давления.

Коэффициент гидравлического сопротивления λ, входящий в показатель степени в выражении (6.2), считается не зависящим от x и вычисляется по формулам равномерного движения ($\lambda = \lambda_c$).

§ 18. Расчет турбулентного пограничного слоя на начальном участке

Выражение (6.1) для распределения скоростей и выражение (6.2) для коэффициента гидродинамического сопротивления позволяют произвести интегрирование уравнения (5.23):

$$\frac{\mathrm{d}\delta_2}{\mathrm{d}x} + \left(2 + \frac{\delta_1}{\delta_2}\right) \frac{\delta_2}{u_{max}} \frac{\mathrm{d}u_{max}}{\mathrm{d}x} = \frac{\tau_0(x)}{\rho u_{max}^2}.$$

Установим предварительно соотношение между толщиной потери импульса δ_2 и толщиной вытеснения δ_1. Воспользуемся для этого выражениями (5.17) и (5.19). Используя распределение скоростей в виде (6.1), найдем δ_1:

$$\delta_1 = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{u_{max}}\right) \mathrm{d}z = \int_0^\delta \left[1 - \left(\frac{z}{\delta}\right)^n\right] \mathrm{d}z = \delta \frac{n}{n+1}. \tag{6.3}$$

Аналогично найдем толщину потери импульса δ_2:

$$\delta_2 = \int_0^\delta \frac{u}{u_{max}} \left(1 - \frac{u}{u_{max}}\right) \mathrm{d}z = \int_0^\delta \left(\frac{z}{\delta}\right)^n \left[1 - \left(\frac{z}{\delta}\right)^n\right] \mathrm{d}z = \delta \frac{n}{(n+1)(2n+1)}. \tag{6.4}$$

Таким образом, соотношение между характерными толщинами пограничного слоя, называемое обычно формпараметром [9], равно:

$$\delta_1/\delta_2 = 2n + 1. \tag{6.5}$$

С учетом полученных соотношений уравнение (5.23) принимает вид:

$$\frac{d\delta_2}{dx} + (2n+3)\frac{1}{u_{max}}\frac{du_{max}}{dx}\delta_2 = \frac{C_f}{2}.$$

Подставляя значение C_f из уравнения (6.2) и n из выражения (4.24), получим:

$$\frac{d\delta_2}{dx} + (2{,}5\sqrt{\lambda_c}+3)\frac{1}{u_{max}}\frac{du_{max}}{dx}\delta_2 = 4\cdot 10^{-3}\left(\frac{k_s}{\delta_2}\right)^{1,5\sqrt{\lambda_c}}.$$

Решив это уравнение, можно найти закон изменения толщины δ_2 по координате x.

Умножая обе части равенства на $\delta_2^{1,5\sqrt{\lambda_c}}$, имеем:

$$\delta_2^{1,5\sqrt{\lambda_c}}\frac{d\delta_2}{dx} + (2{,}5\sqrt{\lambda_c}+3)\frac{1}{u_{max}}\frac{du_{max}}{dx}\delta_2^{1+1,5\sqrt{\lambda_c}} = 4\cdot 10^{-3} k_s^{1,5\sqrt{\lambda_c}}.$$

Принимая во внимание, что

$$\delta_2^{1,5\sqrt{\lambda_c}}\frac{d\delta_2}{dx} = \frac{1}{1+1{,}5\sqrt{\lambda_c}}\frac{d\delta_2^{1+1,5\sqrt{\lambda_c}}}{dx}.$$

и обозначив $\delta_2^{1+1,5\sqrt{\lambda_c}} = \theta$, находим:

$$\frac{1}{1+1{,}5\sqrt{\lambda_c}}\frac{d\theta}{dx} + (2{,}5\sqrt{\lambda_c}+3)\frac{1}{u_{max}}\frac{du_{max}}{dx}\theta = 4\cdot 10^{-3} k_s^{1,5\sqrt{\lambda_c}}$$

коэффициент гидравлического сопротивления λ_c считается не зависящим от координаты x). Это уравнение можно привести к каноническому виду линейного дифференциального уравнения первого порядка:

$$\frac{d\theta}{dx} + a_1\frac{1}{u_{max}}\frac{du_{max}}{dx}\theta = b_1, \tag{6.6}$$

где

$$a_1 = (2{,}5\sqrt{\lambda_c}+3)(1+1{,}5\sqrt{\lambda_c}); \tag{6.7}$$

$$b_1 = 4\cdot 10^{-3} k_s^{1,5\sqrt{\lambda_c}}(1+1{,}5\sqrt{\lambda_c}). \tag{6.8}$$

Общее решение этого уравнения имеет вид [6]:

$$\theta = e^{-a_1\int\frac{1}{u_{max}}\frac{du_{max}}{dx}dx}\int b_1 e^{a_1\int\frac{1}{u_{max}}\frac{du_{max}}{dx}dx} + C.$$

Поскольку

$$\int \frac{1}{u_{max}} \frac{\mathrm{d}u_{max}}{\mathrm{d}x} \mathrm{d}x = \int \mathrm{d}(\ln u_{max}) = \ln u_{max}$$

и

$$e^{a_1 \ln u_{max}} = u_{max}^{a_1},$$

находим:

$$\theta = \frac{1}{u_{max}^{a_1}} b_1 \int u_{max}^{a_1} \mathrm{d}x + C. \qquad (6.9)$$

Решение (6.9) дифференциального уравнения по форме не отличается от известных решений для турбулентного пограничного слоя с градиентом давления [9]. Однако в отличие от известных решений величины a_1 и b_1, входящие в уравнение (6.9), не являются постоянными, а изменяются в зависимости от коэффициента гидравлического сопротивления равномерного течения [см. соотношения (6.7) и (6.8)]. Это позволяет производить более точный учет условий течения в широком диапазоне изменения шероховатости.

Для вычисления интеграла (6.9) воспользуемся выражением (5.48), определяющим изменение максимальной скорости по длине рассматриваемого участка канала:

$$u_{max} = u_0 \sqrt{1 + 2gxi/u_0^2}.$$

Обозначив $2gi/u_0^2$ через β, получаем:

$$\theta = \frac{1}{u_0^{a_1} (1 + \beta x)^{a_1/2}} b_1 \int u_0^{a_1} (1 + \beta x)^{a_1/2} \mathrm{d}x + C.$$

После интегрирования имеем:

$$\theta = \frac{1}{u_0^{a_1} (1 + \beta x)^{a_1/2}} b_1 \frac{u_0^{a_1} (1 + \beta x)^{a_1/2 + 1}}{\beta \left(\frac{a_1}{2} + 1 \right)} x + C.$$

Это выражение можно упростить:

$$\theta = \frac{b_1 (1 + \beta x)}{\beta (a_1/2 + 1)} + C. \qquad (6.10)$$

Определим постоянную интегрирования C из граничного условия на оголовке $x = 0$; $\delta_2 = 0$, т. е. $\theta = 0$.

Тогда

$$C = -b_1/\beta (a_1/2 + 1). \qquad (6.11)$$

Подставив выражение (6.11) в зависимость (6.10), после преобразований находим:

$$\theta = \frac{b_1 x}{a_1/2 + 1}. \qquad (6.12)$$

Возвращаясь к переменной δ_2, получаем:

$$\delta_2^{1 + 1,5\sqrt{\lambda_c}} = \frac{b_1 x}{a_1/2 + 1},$$

или

$$\delta_2 = \left(\frac{b_1 x}{a_1/2+1}\right)^{\frac{1}{1+1,5\sqrt{\lambda_c}}}.$$

После подстановки a_1 и b_1 по соотношениям (6.7) и (6.8) и преобразований находим окончательно:

$$\frac{\delta_2}{x} = \left[\frac{8\cdot 10^{-3}(1+1,5\sqrt{\lambda_c})}{(2,5\sqrt{\lambda_c}+3)(1+1,5\sqrt{\lambda_c})+2}\right]^{\frac{1}{1+1,5\sqrt{\lambda_c}}} \times$$

$$\times\left(\frac{k_s}{x}\right)^{\frac{1,5\sqrt{\lambda_c}}{1+1,5\sqrt{\lambda_c}}}. \qquad (6.13)$$

Из выражения (6.13) следует, что интенсивность развития турбулентного пограничного слоя в открытом канале полностью определяется величиной шероховатости k_s и коэффициентом гидравлического сопротивления потока, вычисляемым по параметрам равномерного движения. Это объясняется тем, что λ_c является основным ключевым параметром, определяющим как распределение скоростей, так и местный коэффициент гидродинамического сопротивления в условиях развивающегося течения.

Первый сомножитель в выражении (6.13) зависит только от λ_c и может быть аппроксимирован простой зависимостью:

$$f(\lambda) = (10\sqrt{\lambda_c} - 0,5)\,5\cdot 10^{-3}.$$

Тогда

$$\delta_2/x = (10\sqrt{\lambda_c} - 0,5)\,5\cdot 10^{-3}\,(k_s/x)^{\frac{1,5\sqrt{\lambda_c}}{1+1,5\sqrt{\lambda_c}}}. \qquad (6.14)$$

Следует заметить, что скорость течения u_{max} не входит в число параметров, определяющих развитие пограничного слоя на начальном участке шероховатого канала, поскольку динамические характеристики течения полностью определяются относительной шероховатостью. Полученное выражение для толщины потери импульса позволяет установить закон изменения по длине местного коэффициента гидродинамического сопротивления C_f. После подстановки соотношения (6.14) в выражение (6.2) и преобразований имеем:

$$C_f = 8\cdot 10^{-3}\left[(10\sqrt{\lambda_c} - 0,5)\,5\cdot 10^{-3}\right]^{-1,5\sqrt{\lambda_c}}(k_s/x)^{\frac{1,5\sqrt{\lambda_c}}{1+1,5\sqrt{\lambda_c}}}.$$

Полученное соотношение с достаточной степенью точности может быть аппроксимировано более простой зависимостью, удобной для практического пользования:

$$C_f = 0,2\sqrt{\lambda_c}\,(k_s/x)^{\frac{1,5\sqrt{\lambda_c}}{1+1,5\sqrt{\lambda_c}}}. \qquad (6.15)$$

Это выражение показывает, что коэффициент местного гидродинамического сопротивления уменьшается по длине начального участка.

При расчете пограничного слоя на начальном участке канала более удобно в качестве характерного геометрического размера принимать не эквивалентную шероховатость, а глубину равномерного потока h_c. После преобразований выражения (6.15) получаем:

$$C_f = 0,5\lambda_c\,(h_c/x)^{\frac{1,5\sqrt{\lambda_c}}{1+1,5\sqrt{\lambda_c}}}. \qquad (6.16)$$

Для ориентировочных расчетов может быть использовано более простое выражение

$$C_f = 0,5\lambda_c\,(h_c/x)^{\sqrt{\lambda_c}}. \qquad (6.17)$$

На рис. 6.3 дано сравнение результатов расчета по зависимости (6.16) с экспериментальными данными по величине местного коэффициента C_f на начальном участке шероховатых каналов и на водосливе с усиленной шероховатостью.

Рассмотрим изменение касательного напряжения на дне канала в пределах начального участка. Учитывая, что по определению

$$\tau = 2C_f\,\rho u^2_{max},$$

и принимая во внимание соотношения (5.48) и (6.16), получаем:

$$\frac{\tau}{\rho u^2_{кр}} = 0,25\lambda_c\left(\frac{h_c}{x}\right)^{\frac{1,5\sqrt{\lambda_c}}{1+1,5\sqrt{\lambda_c}}}\left(a^2 + 2\frac{x}{h_{кр}}\,i\right). \qquad (6.18)$$

Параметры $u_{кр}$ и $h_{кр}$ введены для удобства расчетов, поскольку, как правило, они бывают известны, a вычисляется по зависимости (5.46).

Определим из выражения (6.18) касательное напряжение на дне канала при $2\,x_c i/h_{кр} \gg a^2$:

$$\frac{\tau_c}{\rho u^2_{кр}} = 0,5\lambda_c\left(\frac{h_c}{x_c}\right)^{\frac{1,5\sqrt{\lambda_c}}{1+1,5\sqrt{\lambda_c}}}\frac{x_c\,i}{h_{кр}}. \qquad (6.19)$$

Из соотношений (6.18) и (6.19) находим изменение касательных напряжений по длине начального участка в виде

$$\frac{\tau}{\tau_c} = \left(\frac{x_c}{x}\right)^{\frac{1,5\sqrt{\lambda_c}}{1+1,5\sqrt{\lambda_c}}}\left(a^2\frac{h_{кр}}{2x_c\,i} + \frac{x}{x_c}\right). \qquad (6.20)$$

Анализ этого выражения показывает, что интенсивность изменения τ/τ_c по длине начального участка зависит от λ_c, уклона дна канала и параметра a, определяемого коэффициентом расхода входного оголовка. На рис. 6.4 представлены результаты расчета по этому соотношению при величине $a = 0{,}75$, соответствующей среднему коэффициенту расхода для входного оголовка практического очертания. Сопоставление зависимостей (6.16) и (6.19), описывающих изменение C_f и τ по длине участка неравномерного течения, показывает резкое различие в характере их изменения. Это различие объясняется более интенсивным увеличением максимальной скорости по сравнению с увеличением касательных напряжений, поэтому $C_f = 2\,\tau/\rho\, u_{max}^2$ по длине уменьшается.

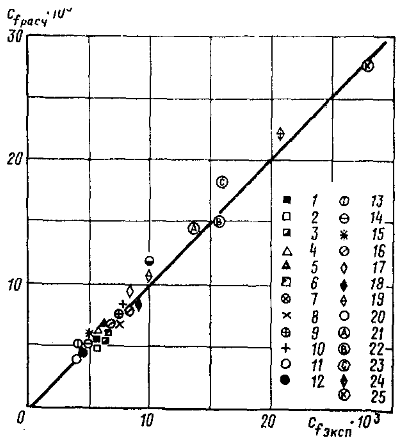


РИС. 6.3

1—10 — данные В. Бауэра (1 — x/h=110; 2 — x/h=100; 3 — x/h=90; 4 — x/h=85; 5 — x/h=75; 6 — x/h=65; 7 — x/h=55; 8 — x/h=45; 9 — x/h=40; 10 — x/h=30); 11—15 — данные В. С. Боровкова, гладкий канал (11 — x/h=100; 12 — x/h=75; 13 — x/h=50; 14 — x/h=30; 15 — x/h=20); 16—20 — то же, шероховатый канал, k_s=0,35 см (16 — x/h=100; 17 — x/h=75; 18 — x/h=50; 19 — x/h=30; 20 — x/h=20); 21—25 — то же, k_s=2,8 см (21 — x/h=50; 22 — x/h=30; 23 — x/h=20; 24 — x/h=10; 25 — x/h=5)

Зная изменение толщины потери импульса δ_2 по длине начального участка канала [см. уравнение (6.14)], можно, используя соотношения (6.4) и (6.5), установить изменение на этом участке и других характерных толщин пограничного слоя. Так, толщина вытеснения

$$\delta_1 = \delta_2\,(2n+1) = \left(10\sqrt{\lambda_c} - 0{,}5\right)\left(1 + 2{,}5\sqrt{\lambda_c}\right) 5 \times 10^{-3}\, x\,(k_s/x)^{\frac{1{,}5\sqrt{\lambda_c}}{1+1{,}5\sqrt{\lambda_c}}}. \qquad (6.21)$$

Для зависимости (6.21) можно получить более простую аппроксимацию:

$$\delta_1/x = \left(10\sqrt{\lambda_c} - 0{,}9\right) 10^{-2}\,(k_s/x)^{\frac{1{,}5\sqrt{\lambda_c}}{1+1{,}5\sqrt{\lambda_c}}}. \qquad (6.22)$$

Изменение толщины пограничного слоя на начальном участке канала в условиях ускоряющегося потока

$$\frac{\delta}{x} = \frac{\delta_2}{x}\,\frac{(n+1)(2n+1)}{n} = \frac{(n+1)(2n+1)}{n}\left(10\sqrt{\lambda_c} - 0{,}5\right) 5 \times 10^{-3}\left(\frac{k_s}{x}\right)^{\frac{1{,}5\sqrt{\lambda_c}}{1+1{,}5\sqrt{\lambda_c}}}. \qquad (6.23)$$

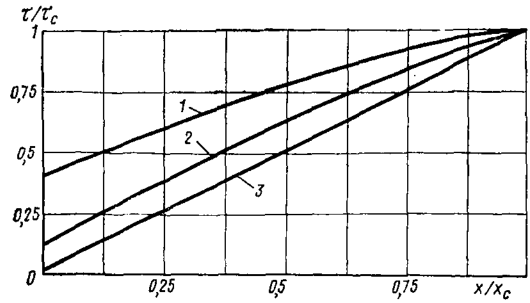


РИС. 6.4

1 — $\lambda_c = 0,15$, $i = 0,072$; 2 — $\lambda_c = 0,05$, $i = 0,37$; 3 — $\lambda_c = 0,018$; $i = 0,785$

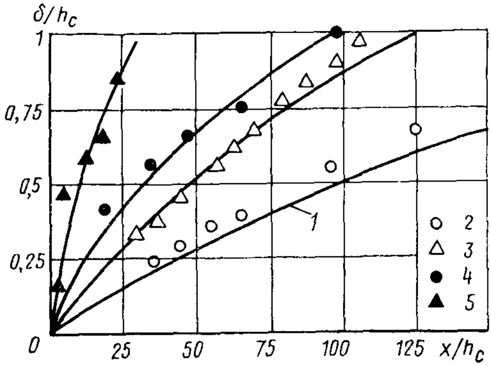


РИС. 6.5

1 — расчетные кривые [см. соотношение (6.26)]; 2, 3 — данные В. Бауэра (2 — гладкий канал, $\lambda = 0,014$; 3 — шероховатый канал, $\lambda = 0,033$); 4, 5 — данные В. С. Боровкова, шероховатый канал (4 — $\lambda = 0,05$; 5 — $\lambda = 0,18$)

Это выражение также может быть аппроксимировано:

$$\delta/x = 0,275\sqrt{\lambda_c}\,(k_s/x)^{\frac{1,5\sqrt{\lambda_c}}{1+1,5\sqrt{\lambda_c}}}. \qquad (6.24)$$

Если в качестве характерного геометрического размера принять глубину равномерного потока h_c, то выражения (6.22) и (6.23) с учетом зависимости (6.2) примут вид:

$$\delta_1/h_c = 2,5\cdot 10^{-2}\,(10\lambda_c - 0,9\sqrt{\lambda_c})\,(x/h_c)^{\frac{1}{1+1,5\sqrt{\lambda_c}}}; \qquad (6.25)$$

$$\delta/h_c = 0,7\lambda_c\,(x/h_c)^{\frac{1}{1+1,5\sqrt{\lambda_c}}}. \qquad (6.26)$$

На рис. 6.5 дано сравнение результатов расчета по зависимости (6.26) с данными экспериментальных исследований.

При обработке экспериментальных профилей скорости толщина пограничного слоя определялась из условия $u = 0,97u_{max}$ на внешней границе. Анализ показал, что метод определения толщины пограничного слоя, предложенный В. Бауэром, отвечает этому условию.

Можно отметить вполне удовлетворительное соответствие результатов расчета и эксперимента в широком диапазоне изменения коэффициента λ_c. Даже в случае гладкого трения расчет по зависимости (6.26) дает результаты, мало отличающиеся от экспериментальных данных. Однако, для того чтобы полученную зависимость можно было с уверенностью рекомендовать для расчета пограничных слоев в гладких каналах, необходимы более детальные исследования.

В тех случаях когда очертание оголовка несовершенное, т. е. он создает заметное местное сопротивление, течение в придонных слоях потока искажается. При этом скорости в придонных слоях уменьшаются. Чем больше величина местного сопротивления, тем большему искажению подвергается поток. Измерения, выполненные непосредственно вблизи оголовка, показывают, что скорости в придонном слое могут заметно отличаться от скорости невозмущенного течения там, где влияние пограничного слоя еще не могло проявиться. Действительно, местное сопротивление приводит, как известно, к уменьшению коэффициента расхода m. Поэтому целесообразно связать это уменьшение с величиной дополнительного сжатия потока вследствие местного сопротивления. Примем за коэффициент дополнительного сжатия величину

$$\varepsilon_{д} = 1 - \frac{\delta_0}{h_0},$$

где δ_0 — слой, в пределах которого эпюра скорости деформируется вследствие сжатия потока на оголовке;

h_0 — глубина на оголовке при заданном расходе $h_0 = h_{кр}/a$ [где a — величина, определяемая по соотношению (5.47)].

Используя связь между величиной местного сопротивления и степенью сжатия [1], можно получить приближенное соотношение

$$\delta_0/h_0 = 1 - m/m_0, \tag{6.27}$$

где m_0 — наибольший коэффициент расхода оголовка, очерченного по профилю ниспадающей струи ($m_0 = 0{,}49$).

Поскольку это соотношение приближенное, а коэффициент a близок к 1, можно считать, что

$$\delta_0/h_{кр} = 1 - m/m_0. \tag{6.28}$$

На рис. 6.6 приведено сравнение расчета по зависимости (6.28) с результатами анализа экспериментальных данных ряда авторов. Некоторый разброс экспериментальных точек связан, по всей вероятности, с трудностью точного определения величин m и δ_0.

В части потока, подвергнувшейся возмущающему действию оголовка, скорости уменьшены по сравнению со скоростью невозмущенного течения. Будем условно считать в связи с этим, что при входе на оголовок уже существует начальный пограничный слой толщиной δ_0. При выводе основных зависимостей пограничного слоя в качестве граничного условия толщина δ_0 принималась равной 0 при $x = 0$. При $\delta_0 \neq 0$ в расчете параметров пограничного слоя следует учитывать это граничное условие. В этом случае изменение толщины потери импульса δ_2 имеет вид:

$$\frac{\delta_2}{x}=\left[\frac{8\cdot 10^{-3}(1+1{,}5\sqrt{\lambda_c})}{(2{,}6\sqrt{\lambda_c}+3)(1+1{,}5\sqrt{\lambda_c})+2}\left(\frac{k_s}{x}\right)^{1{,}5\sqrt{\lambda_c}}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\delta_{2\,0}}{x}\right)^{1+1{,}5\sqrt{\lambda_c}}\right]^{\frac{1}{1+1{,}5\sqrt{\lambda_c}}}, \qquad (6.29)$$

где $\delta_{2\,0}$ — толщина потери импульса, соответствующая начальной толщине пограничного слоя δ_0.

Расчет по зависимости (6.29) достаточно сложен, поэтому его целесообразно упростить. С этой целью введем понятие эквивалентной длины $x_э$ (расстояние, на котором в условиях реальной шероховатости канала пограничный слой смог бы развиться от нуля до величины δ_0). Эквивалентная длина $x_э$ может быть найдена из соотношения (6.26) при известной величине δ_0:

$$\frac{x_э}{h_c}=\left(\frac{\delta_0}{h_c}\frac{1}{0{,}7\lambda_c}\right)^{1+1{,}5\sqrt{\lambda_c}}.$$

Представляя

$$\frac{\delta_0}{h_c}=\frac{\delta_0}{h_0}\frac{h_0}{h_c}=\frac{\delta_0}{h_0}\frac{h_{кр}}{ah_c},$$

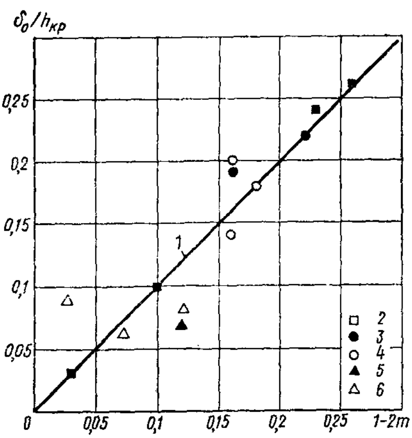


РИС. 6.6

1 — расчет по зависимости (6.28); 2—4 — данные В. С. Боровкова (2 — k_s=2,85 см; 3 — k_s=1,96 см; 4 — k_s=0,2 см); 5 — данные В. П. Троицкого; 6 — данные Ж. Хальбронна

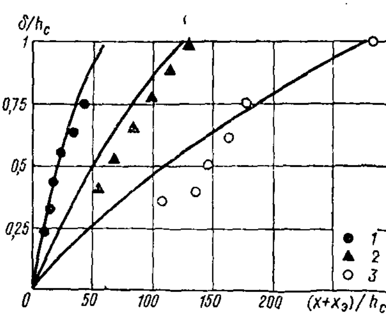


РИС. 6.7

1 — данные В. С. Боровкова, шероховатый канал, $x_э/h$=8; 2 — данные Ж. Хальбронна, гладкий водослив, $x_э/h$=30; 3 — данные В. П. Троицкого, гладкий канал, $x_э/h$=100 после подстановки получим:

$$\frac{x_э}{h_c}=\left[\left(1-\frac{m}{m_0}\right)\frac{h_{кр}}{ah_c}\,\frac{1{,}43}{\lambda_c}\right]^{1+1{,}5\sqrt{\lambda_c}}. \qquad (6.30)$$

При расчете эквивалентной длины по выражению (6.30) можно использовать следующее соотношение:

$$h_{кр}/h_c=(8i/\lambda_c)^{1/3}. \qquad (6.31)$$

Использование эквивалентной длины позволяет рассчитывать параметры пограничного слоя по зависимостям, полученным выше, для условия $\delta_0=0$, если в качестве длины вводить $x+x_э$.

На рис. 6.7 представлены примеры расчета пограничных слоев по зависимости (6.26) при существенно различных значениях эквивалентной длины. Там же представлены экспериментальные данные, отвечающие условиям расчета. Сравнение показывает, что расчет по принятой схеме дает результаты, мало отличающиеся от экспериментальных.

§ 19. Инженерные расчеты водосливов и начальных участков каналов с большими уклонами

Использование теории пограничного слоя позволяет эффективно решать ряд важных инженерных задач по расчету течений на водосливах и на начальных участках каналов. К этим задачам, в частности, относятся расчет длины зоны неравномерного движения, изменение глубины по длине начального участка, а также расчет гидравлических сопротивлений на начальном участке.

Рассмотрим изменение глубины на начальном участке течения в канале с плавным очертанием входного оголовка, не создающего значительных местных потерь ($\delta_0=0$). Так как поток состоит из пограничного слоя и потенциального ядра, удельный расход можно представить в виде:

$$q=u_{max}(h-\delta)+\int_0^{\delta}u\,dz.$$

Разделим обе части равенства на u_{max}, тогда

$$\frac{q}{u_{max}}=h-\delta+\int_0^{\delta}\frac{u}{u_{max}}\,dz=h-\int_0^{\delta}\left(1-\frac{u}{u_{max}}\right)dz.$$

Принимая во внимание, что согласно уравнению (5.17) интеграл в этом выражении представляет собой толщину вытеснения, получим:

$$h=q/u_{max}+\delta_1. \qquad (6.32)$$

Отношение q/u_{max} представляет собой условную глубину $h_у$, соответствующую течению без трения. Второе слагаемое учитывает увеличение глубины вследствие торможения в пограничном слое и вытеснения части жидкости за его пределы. Подставляя в зависимость (6.32) выражение расхода через параметры критического сечения $q = U_{кр}h_{кр}$ и учитывая соотношение (5.45) между критической скоростью и скоростью на оголовке, а также выражение (5.25) для δ_1, получим:

$$\frac{h}{h_c} = 2\left(\frac{i}{\lambda_c}\right)^{1/3} \frac{1}{\sqrt{a^2 + 2xi/h_{кр}}} + 2{,}5\cdot 10^{-2}\left(10\lambda_c - 0{,}9\sqrt{\lambda_c}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{x}{h_c}\right)^{\frac{1}{1+1{,}5\sqrt{\lambda_c}}}. \qquad (6.33)$$

Первое слагаемое в выражении (6.33) уменьшается с увеличением x, тогда как второе слагаемое возрастает. Однако поскольку толщина вытеснения δ_1 составляет около 20% толщины пограничного слоя δ и максимальная толщина пограничного слоя близка к h_c, можно заключить, что второе слагаемое на всем участке развития пограничного слоя остается значительно меньше первого. Для малых x, когда толщина пограничного слоя еще мала, т. е. вблизи оголовка, второе слагаемое пренебрежимо мало́ по сравнению с первым. Для сечения, в котором устанавливается критическая глубина (см. § 16), при уклонах, больших 0,2, величина второго слагаемого не превышает 0,03 $h_{кр}$ и может не учитываться. В связи с этим выполненный выше расчет местоположения критического сечения без учета развития пограничного слоя не нуждается в корректировке.

Как уже указывалось, соотношение (6.33) пригодно для расчета глубины при $\delta_0 = 0$. В тех случаях, когда $\delta \neq 0$, это выражение следует использовать в несколько измененном виде:

$$\frac{h}{h_c} = 2\left(\frac{i}{\lambda_c}\right)^{1/3} \frac{1}{\sqrt{a^2 + 2xi/h_{кр}}} + 2{,}5\cdot 10^{-2}\left(10\lambda_c - 0{,}9\sqrt{\lambda_c}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{x + x_э}{h_c}\right)^{\frac{1}{1+1{,}5\sqrt{\lambda_c}}}, \qquad (6.34)$$

где $x_э$ определяется по зависимости (6.30).

Как и в предыдущем случае, при x, близких к x_0, второе слагаемое остается малым (не превышает 5%) и в инженерных расчетах может не учитываться. На рис. 6.8 дано сравнение результатов расчета по соотношению (6.34) с данными экспериментов в каналах с постоянным уклоном $i = 0{,}072$ при сильно изменяющейся шероховатости k_s/h_c. На рис. 6.9 дано сравнение этого соотношения с данными В. П. Троицкого, полученными в гладком канале ($i = 0{,}23$), и с данными Ж. Хальбронна, полученными на модели водослива с плоской водосливной гранью ($i \approx 0{,}65$). Во всех случаях результаты расчета согласуются с экспериментальными данными. Параметры, входящие в расчетные зависимости (6.33) и (6.34), как правило, заданы или легко определяются, поэтому предлагаемый метод поз-

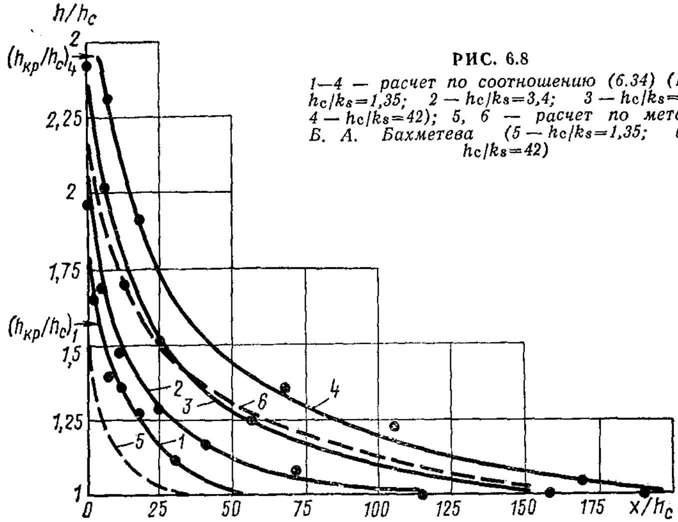


Рис. 6.8

1—4 — расчет по соотношению (6.34) (1 — $h_c/k_s=1{,}35$; 2 — $h_c/k_s=3{,}4$; 3 — $h_c/k_s=24$; 4 — $h_c/k_s=42$); 5, 6 — расчет по методу Б. А. Бахметева (5 — $h_c/k_s=1{,}35$; 6 — $h_c/k_s=42$)

воляет просто и с достаточной точностью определять глубины в любом створе на начальном участке канала.

На рис. 6.8 и 6.9 показаны также кривые свободной поверхности, рассчитанные по методу Б. А. Бахметева. Как и следовало ожидать, наибольшие расхождения между расчетом и экспериментом наблюдаются в начальной части кривой спада и особенно при смещении критического сечения по отношению к вершине оголовка (см. рис. 6.8). В этих случаях погрешность расчета глубин методом интегрирования уравнения неравномерного движения может достигать 20%. Учет действительного местоположения критического сечения с использованием зависимостей, приведенных в § 17, позволяет снизить погрешность примерно в 2 раза. Однако методы расчета, основанные на использовании теории пограничного слоя, остаются и в этом случае предпочтительными. Это связано как с более высокой точностью расчета, так и с удобством вычислений, особенно тогда, когда традиционные методы требуют численного интегрирования.

Определим длину начального участка, т. е. такого участка, в пределах которого происходит изменение глубины потока. Принимая в соотношении (6.33) или (6.34) $h = 1{,}05\, h_c$ (с учетом точности измерений), можно, решая соответствующее уравнение, установить длину участка неравномерного движения x_c при различных величинах коэффициента гидравлического сопротивления λ_c. Расчеты показывают, что изменение относительной длины начального участка x_c/h_c, в зависимости от коэффициента гидравлического сопротивления, аппроксимируется простым соотношением

$$x_c/h_c \approx 4\left(1+1{,}3\sqrt{\lambda_c}\right)^2/\lambda_c. \qquad (6.35)$$

На рис. 6.10 дано сравнение экспериментальных значений x_c/h_c с расчетом по соотношению (6.35). Из сравнения расчетных и экспериментальных данных видно, что влияние начальной толщины пограничного слоя на длину начального участка невелико и в большинстве случаев может не учитываться.

Зависимость (6.35) может быть получена также без использования сложных соотношений, описывающих изменение глубины по длине начального участка. Действительно, в концевом створе участка стабилизации профиль скорости может быть представлен в степенном виде:

$$u/u_{max} = (z/h_c)^n,$$

где $n \approx 1{,}3\sqrt{\lambda_c}$ согласно (4.24).

Отсюда следует, что

$$u_{max}/U_c = 1 + n = 1 + 1{,}3\sqrt{\lambda_c}.$$

Учитывая, что в конце участка стабилизации $u_{max} = \sqrt{2gx_c i}$, находим:

$$2gx_c\, i/U_c^2 = (1 + 1{,}3\sqrt{\lambda_c})^2.$$

Принимая во внимание, что $8\, gh_c i/U_c^2 = \lambda_c$, получаем окончательно:

$$x_c/h_c = 4\,(1 + 1{,}3\sqrt{\lambda_c})^2/\lambda_c.$$

Это выражение совпадает с аппроксимацией результатов расчета по зависимости (6.33), проведенного для условия $h = h_c$, и согласуется с экспериментальными данными.

В некоторых инженерных расчетах необходимо определить место выхода пограничного слоя на свободную поверхность потока.

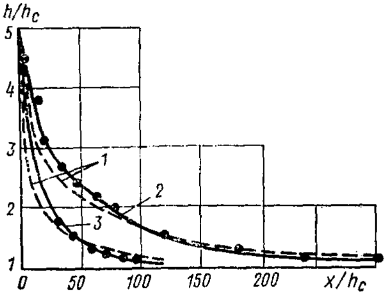


РИС. 6.9

1 — расчет по методу Б. А. Бахметева; 2 — расчет по зависимости (6.34), гладкий бетонный канал, i=0,23 (данные В. П. Троицкого); 3 — то же, гладкий водослив; i=0,65 (данные Ж. Хальбронна)

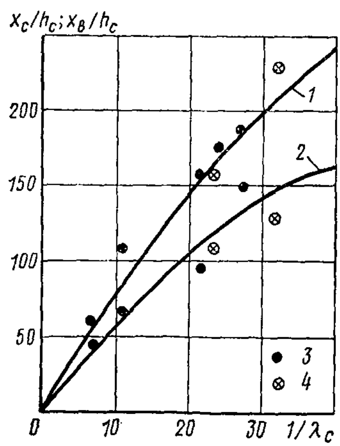


РИС. 6.10

1 — расчет по зависимости (6.35), x_c/h_c; 2 — расчет по зависимости (6.36), $x_в/h_c$; 3 — данные В. С. Боровкова, шероховатый канал; 4 — данные Ж. Хальбронна, гладкий водослив

Для того чтобы определить расстояние от оголовка до места выхода пограничного слоя на поверхность $x_в$, воспользуемся соотношением (6.32). В этом соотношении глубину h приравниваем толщине пограничного слоя $\delta_в$ в месте выхода пограничного слоя. Таким образом, имеем:

$$\delta_в = \frac{q}{u_{max}} + \delta_{1в}.$$

Используя соотношение (6.3) между δ_1 и δ, получаем:

$$\delta_в = \frac{q}{u_{max}} (n+1).$$

Разделив обе части этого равенства на $h_с$, с учетом соотношений (5.48), (4.24) и (6.23) после преобразований находим:

$$\frac{x_в}{h_с} = \left[\frac{8,2}{\lambda_с^3} (1+1,3\sqrt{\lambda_с})^2\right]^{\frac{1+1,5\sqrt{\lambda_с}}{3+1,5\sqrt{\lambda_с}}}. \qquad (6.36)$$

При выводе этого соотношения, так же как и при расчете $x_с$, влияние начальной толщины пограничного слоя считалось малым. В целях упрощения были опущены также и другие величины, не оказывающие заметного влияния на результаты расчета. На рис. 6.10 представлено сравнение результатов расчета по соотношению (6.36) с экспериментальными данными. Сравнение показывает удовлетворительную сходимость с экспериментом. Анализ данных, представленных на рис. 6.10, позволяет заключить, что расстояния $x_с$ и $x_в$ в общем случае не совпадают и различаются тем больше, чем меньше коэффициент $\lambda_с$.

После выхода пограничного слоя на поверхность ($x > x_в$) происходит изменение течения в пограничном слое, поскольку действие сил сопротивления еще не полностью уравновешивает действие сил тяжести. На этом участке возрастают касательные напряжения за счет увеличения скорости и уменьшения глубины до $h_с$.

Рассмотрим изменение гидравлического сопротивления на начальном участке высокоскоростного потока, используя полученные выше соотношения. В качестве характеристики гидравлического сопротивления примем местный коэффициент гидравлического сопротивления $\lambda_м$, являющийся аналогом коэффициента гидродинамического сопротивления C_f и определяемый по соотношению

$$\lambda_м = 4C_f (u_{max}/U)^2, \qquad (6.37)$$

где U — средняя по сечению скорость потока.

Местный коэффициент гидравлического сопротивления пропорционален отношению местного касательного напряжения (для данного x) к $\rho U^2/2$ и поэтому характеризует поток в данном сечении. Коэффициент $\lambda_м$ может быть использован при вычислении осредненного по некоторой длине коэффициента λ в условиях резко неравномерного движения. Соотношение (6.37) показывает, что коэффициент $\lambda_м$ изменяется по длине начального участка вследствие изменения коэффициента C_f и соотношения u_{max}/U.

Изменение местного коэффициента гидравлического сопротивления на начальном участке при $u_{max} = \text{const}$ рассматривалось В. С. Боровковым и Ф. Г. Майрановским. Было установлено, что для поверхностей с технической шероховатостью, характерной для трубопроводов, изменение местного коэффициента гидравлического сопротивления описывается зависимостью

$$\lambda_м/\lambda_с = (x_с/x)^{0,2}. \tag{6.38}$$

Так как при неускоряющемся потоке отношение u_{max}/U изменяется слабо по длине начального участка, то

$$\lambda_м/\lambda_с \approx C_f/C_{fс},$$

где $C_{fс}$ — коэффициент гидродинамического сопротивления при равномерном течении $(x = x_с)$.

Используя соотношение (6.16), находим:

$$\lambda_м/\lambda_с = (x_с/x)^{\frac{1,5\sqrt{\lambda_с}}{1+1,5\sqrt{\lambda_с}}}. \tag{6.39}$$

Сравнение зависимостей (6.38) и (6.39) показывает, что эти выражения идентичны при значениях $\lambda_с \approx 0{,}0275$. Таким образом, соотношение (6.39) является более общим, справедливым в широком диапазоне изменения $\lambda_с$.

Определим изменение местного коэффициента гидравлического сопротивления $\lambda_м$ для условий ускоряющегося течения. Учитывая, что $u_{max}/U = h/h_у$, и принимая C_f по соотношению (6.16), находим:

$$\lambda_м = 2\lambda_с\,(h_с/x)^{\frac{1,5\sqrt{\lambda_с}}{1+1,5\sqrt{\lambda_с}}}\,(h/h_у)^2. \tag{6.40}$$

Это соотношение можно преобразовать к виду, более удобному для анализа:

$$\lambda_м = \lambda_с\,(h_{у.\,с}/h_с)^2\,(h/h_у)^2\,(x_с/x)^{\frac{1,5\sqrt{\lambda_с}}{1+1,5\sqrt{\lambda_с}}},$$

где $h_{у.с}$ — условная глубина потока, определяемая без учета трения для сечения $x = x_с$.

Для сечения $x = x_с$ имеем:

$$h_с/h_{у.\,с} = u_{max\ с}/U_с.$$

Учитывая, что для стабилизированного течения согласно соотношениям (4.20) и (4.24) $u_{max}/U_с = 1 + n \approx 1 + 1{,}3\sqrt{\lambda_с}$, находим:

$$\lambda_м = \lambda_с\,(1 + 1,3\sqrt{\lambda_с})^2\,(h/h_у)^2\,(x_с/x)^{\frac{1,5\sqrt{\lambda_с}}{1+1,5\sqrt{\lambda_с}}}. \tag{6.41}$$

Пример расчета по этой зависимости для $\lambda_с = 0{,}088$ и сравнение с результатами эксперимента представлены на рис. 6.11. Там же показано изменение по длине начального участка отношения $\lambda_м/\lambda_с$ для неускоряющегося потока при том же значении $\lambda_с$. И в том и в другом случае величина местного коэффициента гидравлического сопротивления на начальном участке оказывается больше величины λ_c. При этом ускорение потока снижает величину $\lambda_м$. Для определения локального коэффициента гидравлического сопротивления принято обычно использовать известную формулу Маннинга $\lambda = 8\,gn^2/h^{1/3}$, где n — коэффициент шероховатости. На рис. 6.11 представлены для сравнения также результаты расчета по этой формуле. Очевидное расхождение, не только количественное, но даже и качественное, свидетельствует о том, что расчет сопротивлений неравномерного потока по формулам для равномерного течения физически неоправдан. Действительно, в качестве определяющего параметра в расчет местного коэффициента гидравлического сопротивления входит местная глубина потока, которая определяется при неравномерном течении не столько сопротивлением, сколько ускорением потока. Традиционная методика расчета не отражает этого обстоятельства. Как показано выше, сопротивление на начальном участке определяется не всей глубиной потока, а только толщиной пограничного слоя.

Полученные выше результаты позволяют рассчитать изменение коэффициента скорости φ по длине начального участка канала с большим уклоном. Как известно [2], коэффициент скорости φ представляет собой отношение действительной средней скорости в данном сечении к условной скорости, рассчитанной в предположении отсутствия потерь.

Действительная средняя скорость $U = q/h$. Условная скорость $U_у = q/h_у$.

Таким образом,

$$\varphi = U/U_у = h_у/h. \tag{6.42}$$

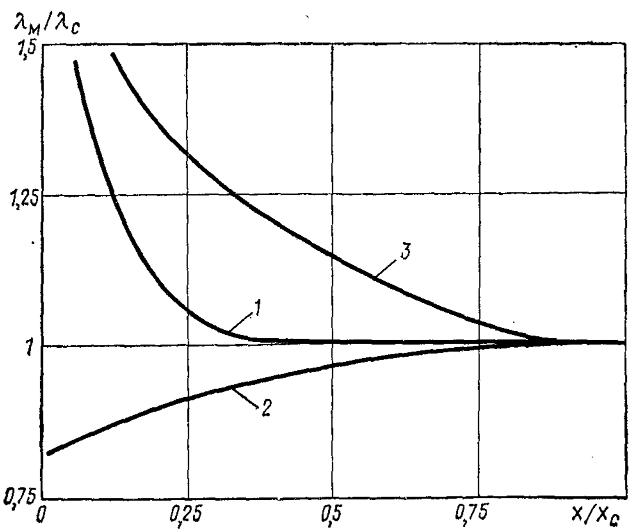


РИС. 6.11
1 — ускоряющееся течение; 2 — квазиравномерное движение (по Маннингу); 3 — течение с постоянной скоростью (u_{max}=const)

Согласно выражению (6.32) $h = h_у + \delta_1$. Тогда

$$\varphi = \frac{1}{1+\delta_1/h_у},$$

или

$$1/\varphi - 1 = \delta_1/h_у. \tag{6.43}$$

Подставляя зависимость (6.43) в выражение (6.22) для δ_1, с учетом соотношения (6.33) получаем:

$$1/\varphi - 1 = 1{,}25\cdot 10^{-2}\sqrt{\lambda_с}\,(10\lambda_с - 0{,}9\sqrt{\lambda_с})\,(x/h_с)^{\frac{1{,}5+0{,}75\sqrt{\lambda_с}}{1+1{,}5\sqrt{\lambda_с}}}. \tag{6.44}$$

Точное определение величины коэффициента φ особенно важно при гидравлическом расчете высоких водосливных плотин. Принимая для бетонных водосливов, согласно оценочным расчетам, $\lambda_с \approx 0{,}02$, после преобразований находим:

$$\frac{1}{\varphi} - 1 \approx 1{,}5\cdot 10^{-3}\,\frac{1}{i}\left(\frac{T - H_0 + h}{h_{кр}}\right)^{4/3}, \tag{6.45}$$

где T — напор над рассматриваемым сечением водослива;
H_0 — напор над оголовком;
h — глубина в рассматриваемом сечении (см. рис. 6.13).

При расчетах коэффициента φ для сжатого сечения на высоконапорной водосливной плотине $h \ll (T - H_0)$, поэтому выражение (6.45) можно представить в виде:

$$\frac{1}{\varphi} - 1 \approx 1{,}5\cdot 10^{-3}\,\frac{1}{i}\left(\frac{T - H_0}{h_{кр}}\right)^{4/3}. \tag{6.46}$$

Учитывая, что уклоны водосливной поверхности высоконапорных водосливных плотин близки к 0,8, имеем:

$$\frac{1}{\varphi} - 1 \approx 2\cdot 10^{-3}\left(\frac{T - H_0}{h_{кр}}\right)^{4/3}. \tag{6.47}$$

Полученная зависимость позволяет рассчитывать коэффициент скорости в любом сечении на водосливе вплоть до сжатого сечения. В тех случаях, когда водосливная плотина заканчивается носком-трамплином, необходимо при расчетах коэффициента φ для сечения на кромке трамплина учитывать его протяженность $l_т$ (расстояние от сжатого сечения до концевой кромки носка-трамплина):

$$\frac{1}{\varphi} - 1 \approx 2\cdot 10^{-3}\left(\frac{T - H_0 + l_т}{h_{кр}}\right)^{4/3}. \tag{6.48}$$

Сопоставление зависимости (6.47) с данными натурных исследований, проведенных на крупнейших водосбросных плотинах, представлено на рис. 6.12. Здесь же приведены результаты расчета по эмпирической зависимости, полученной Г. П. Скребковым на основе модельных исследований. При проектировании часто используются рекомендации Н. Н. Павловского [2], согласно которым для высо-

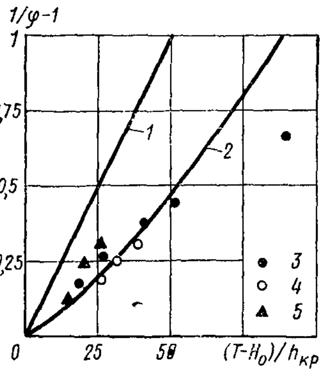


РИС. 6.12

1 — расчет по формуле Г. П. Скребкова; 2 — расчет по зависимости (6.47); 3—5 — данные натурных экспериментов [3 — на Братской ГЭС; 4 — на Красноярской ГЭС; 5 — на Скай-Джамп (Япония)]

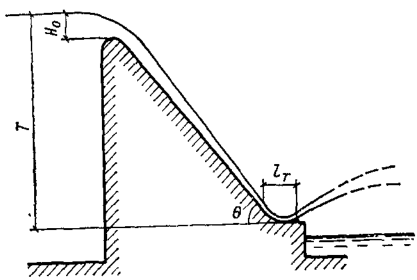


РИС. 6.13

ких водосливных плотин коэффициент φ следует принимать равным 0,9. Однако как по данным натурных измерений, так и по выполненным расчетам для высоконапорных водосливных плотин коэффициент скорости может быть значительно меньше 0,9 (до 0,5).

Рассмотрим изменение коэффициентов количества движения и кинетической энергии на начальном участке. Поскольку по длине начального участка изменяется и распределение скоростей, и глубина потока, коэффициенты β и α будут также изменяться. На входном оголовке, где скорости не меняются по глубине потока, $\alpha = 1$ и $\beta = 1$. В условиях равномерного течения для высокоскоростных потоков α_c и β_c существенно отличаются от единицы. Следовательно, при расчетах начального участка необходимо учитывать изменение α и β.

Определим коэффициент кинетической энергии используя степенной профиль скорости вида (6.1) и соотношение (4.41). Тогда

$$\alpha = \frac{u_{max}^3 \int\limits_0^h (u/u_{max})^3\, dz}{U^3 h} = u_{max}^3 \frac{\int\limits_0^\delta (u/u_{max})^3\, dz + \int\limits_\delta^h (u/u_{max})^3\, dz}{U^3 h}.$$

Учитывая, что при $z < \delta$ распределение скоростей определяется соотношением (6.1), а при $z > \delta$ скорость по глубине не изменяется и равна u_{max}, имеем:

$$\alpha = u_{max}^3 \frac{\int\limits_0^\delta (z/\delta)^{3n}\, dz + (h - \delta)}{U^3 h}.$$

После интегрирования и преобразований получаем:

$$\alpha = \left(\frac{u_{max}}{U}\right)^3 \left(1 - \frac{\delta}{h} \frac{3n}{1+3n}\right). \tag{6.49}$$

Переходя от толщины пограничного слоя δ к толщине вытеснения δ_1, по соотношению (6.3) находим:

$$\alpha = \frac{3}{3n+1}\left(\frac{u_{max}}{U}\right)^3\left[\frac{U}{u_{max}}(n+1) - \frac{2}{3}\right].$$

В пределах начального участка u_{max} изменяется по закону свободного падения (5.48), и отношение U/u_{max}, согласно зависимости (6.42), равно $h_у/h$. Таким образом,

$$\alpha = \frac{3}{3n+1}\left(\frac{2}{h_у}\right)^3\left[\frac{h_y}{h}(n+1) - \frac{2}{3}\right]. \tag{6.50}$$

Аналогично можно получить и выражение для коэффициента количества движения в виде:

$$\beta = \left(\frac{u_{max}}{U}\right)^2\left(1 - \frac{\delta}{h}\frac{2n}{1+2n}\right) = \frac{2n}{2n+1}\left(\frac{h}{h_у}\right)^2\left[\frac{h_у}{h}(n+1) - \frac{1}{2}\right]. \tag{6.51}$$

Анализ зависимостей (6.50) и (6.51) с учетом соотношений (4.24) и (6.34) показывает, что изменение как α, так и β определяется коэффициентом гидравлического сопротивления $\lambda_с$ и начальными условиями на входном оголовке. В широком диапазоне изменения $\lambda_с$ от 0,025 до 0,150 при коэффициентах расхода m входного оголовка 0,45—0,49 вместо зависимости (6.50) можно использовать упрощенное выражение для коэффициента α на участке неравномерного движения:

$$\alpha \approx 1 + (\alpha_с - 1)(x/x_с)^{1/3}, \tag{6.52}$$

где $\alpha_с$ — коэффициент кинетической энергии для условий равномерного течения (см. § 15);
$x_с$ — длина участка неравномерного движения, определяемая по соотношению (6.35).

Характеристики потока на водосливной плотине до настоящего времени устанавливались расчетом либо на основе теории потенциальных течений, либо с использованием уравнения плавно изменяющегося движения [2]. Однако и тот и другой способы обладают рядом очевидных неточностей [2], поэтому характеристики течения на водосливах определяются главным образом в результате экспериментальных исследований. Рассмотренные выше методы расчета неравномерного течения позволяют надежно определить все параметры потока на водосливе. При больших пролетах водосливных отверстий поток на водосливной поверхности плоский, и для этого случая полностью применимы все полученные выше зависимости.

Учитывая важность определения характеристик потока на высоконапорной водосливной плотине и новизну предлагаемого метода, рассмотрим пример расчета конкретного сооружения. В качестве такого сооружения примем высоконапорную водосливную плотину с оголовком практического очертания (рис. 6.13). Исходные данные для расчета принимаем следующие: $T = 100$ м; $H_0 = 6$ м; уклон водосливной поверхности $i = 0{,}79$; коэффициент расхода входного оголовка $m = 0{,}46$; коэффициент шероховатости поверхности водослива по шкале Маннинга $n = 0{,}014$. По своим основным параметрам принятое в расчете сооружение близко к высоконапорным водосбросам Братского и Красноярского гидроузлов.

Так как криволинейный оголовок высоконапорной водосливной плотины плавно сопрягается с прямолинейной частью водосливной поверхности, при $i = 0{,}79$ определим длину криволинейной части водослива с учетом соотношения (5.10): $(x_п/H_0)^{0,44} = i/0{,}575 = 0{,}79/0{,}575$, откуда $x_п/H_0 = 2{,}04$.

Перейдем к расчету основных гидравлических характеристик потока на водосливе.

1. Удельный расход по основной формуле водослива

$$q = m\sqrt{(2g)}\,H_0^{3/2} = 0{,}46\sqrt{2\cdot 9{,}8}\cdot 6^{3/2} = 28{,}6 \text{ м}^2/\text{с}.$$

2. Характеристики критического сечения:

а) критическая глубина

$$h_{кр} = \sqrt[3]{\alpha q^2/g} = \sqrt[3]{1\cdot 28{,}6^2/9{,}8} = 4{,}35 \text{ м};$$

$$h_{кр}/H_0 = 4{,}35/6 = 0{,}725;$$

б) скорость в критическом сечении

$$u_{кр} = q/h_{кр} = 28{,}6/4{,}35 = 6{,}6 \text{ м/с};$$

в) расстояние от вершины оголовка до критического сечения по соотношению (5.15) при $i_{ср} = 0{,}4\,(x_0/H_0)^{0,44}$ и $\sqrt{1 - i^2} \approx 1$

$$\frac{x_0}{H_0} = \frac{h_{кр}}{i_{ср}H_0}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{\sqrt[3]{2m^2}}\right) = \frac{0{,}725}{0{,}4\,(x_0/H_0)^{0,44}}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{\sqrt[3]{2\cdot 0{,}46^2}}\right) =$$

$$= \frac{0{,}31}{(x_0/H_0)^{0,44}},$$

откуда $(x_0/H_0)^{1,44} = 0{,}31$ и $x_0/H_0 = 0{,}46$.

3. Параметры потока на вершине оголовка:

а) скорость на вершине оголовка $u_0 = a u_{кр}$, где по зависимости (5.46)

$$a = \sqrt{2\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2m^2}} - 1\right)} = \sqrt{2\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2\cdot 0{,}46^2}} - 1\right)} = 0{,}835;$$

тогда

$$u_0 = 0{,}835\cdot 6{,}6 = 5{,}5 \text{ м/с};$$

б) глубина на вершине оголовка

$$h_0 = q/u_0 = 28{,}6/5{,}5 = 5{,}2 \text{ м}.$$

Глубина на вершине оголовка заметно отличается от критической глубины, поскольку критическое сечение расположено ниже вершины оголовка.

4. Изменение максимальной скорости в пределах криволинейного оголовка по соотношению (5.48)

$$u_{max\,п} = \sqrt{u_0^2 + 2gxi_{ср}} = \sqrt{u_0^2 + 2gx\cdot 0{,}4\,(x/H_0)^{0,44}},$$

где $i_{ср}$ — средний уклон поверхности водослива от $x = 0$ до x [см. соотношение (5.11)].

5. Максимальная скорость на нижней границе оголовка водослива при $x = x_п = 2{,}04H_0$

$$u_{max\,п} = \sqrt{5{,}5^2 + 2\cdot 9{,}8\cdot 2{,}04\cdot 6\cdot 0{,}4\cdot 2{,}04^{0,44}} = 12{,}7 \text{ м/с}.$$

6. Изменение максимальной скорости по длине прямолинейной части водосливной поверхности $(x > x_п)$

$$u_{max} = \sqrt{u_{max\,п}^2 + 2g\,(x - x_п)\,i} = \sqrt{12{,}7^2 + 2\cdot 9{,}8\,(x - 2{,}04\cdot 6)\,0{,}79} =$$

$$= \sqrt{-30 + 15{,}4x}.$$

7. Расчетные параметры в условиях равномерного течения (при расчете предполагается, что к моменту стабилизации течения поток не аэрируется;

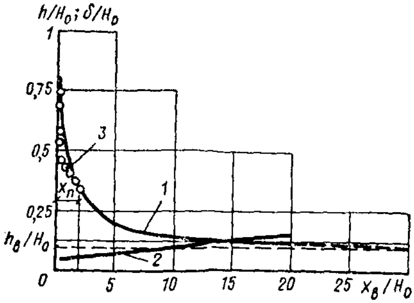


РИС. 6.14

1 — расчет по зависимости (6.34); 2 — расчет по зависимости (6.26); 3 — данные Кригера—Офицерова (пунктирной линией показана глубина потока при равномерном движении)

в тех случаях, когда длина сооружения недостаточна для установления равномерного движения, эти параметры определяются условно):

а) глубина в условиях равномерного течения

$$h_c=(q^2n^2/i)^{0,3}=(28,6^2\cdot 0,014^2/0,79)^{0,3}=0,62 \text{ м};$$

б) коэффициент гидравлического сопротивления

$$\lambda_c=\frac{8gn^2}{h_c^{1/3}}=\frac{8\cdot 9,8\cdot 0,014^2}{0,62^{1/3}}=0,018.$$

8. Изменение глубины потока в пределах криволинейной части водослива:

а) эквивалентная длина $x_э$ по соотношению (6.30)

$$\frac{x_э}{h_c}=\left[\left(1-\frac{m}{m_0}\right)\frac{h_{кр}}{ah_c}\,\frac{1,43}{\lambda_c}\right]^{1+1,5\sqrt{\lambda_c}}=$$

$$=\left[\left(1-\frac{0,46}{0,49}\right)\frac{4,35}{0,835\cdot 0,62}\,\frac{1,43}{0,018}\right]^{1+1,5\sqrt{0,018}}=80;$$

$$x_э=80h_c=80\cdot 0,62\approx 50 \text{ м};$$

б) изменение глубины ($x < x_п$)

$$\frac{h}{h_c}=\frac{h_{кр}}{h_c}\,\frac{1}{\sqrt{a^2+\frac{2x}{h_{кр}}0,4\left(\frac{x}{H_0}\right)^{0,44}}}+2,5\cdot 10^{-2}(10\lambda_c-0,9\sqrt{\lambda_c})\times$$

$$\times\left(\frac{x+x_э}{h_c}\right)^{\frac{1}{1+1,5\sqrt{\lambda_c}}}=\frac{4,35}{0,62}\,\frac{1}{\sqrt{0,835^2+\frac{2\cdot 0,4x^{1,44}}{4,35\cdot 6^{0,44}}}}+$$

$$+2,5\cdot 10^{-2}(10\cdot 0,018-0,9\sqrt{0,018})\left(\frac{x+50}{0,62}\right)^{\frac{1}{1+1,5\sqrt{0,018}}}=$$

$$=7\frac{1}{\sqrt{0,7+0,1x^{1,44}}}+1,5\cdot 10^{-3}\left(\frac{x+50}{0,62}\right)^{0,83}.$$

Подставляя $x_п$, вычисляем соответствующее значение h/h_c. В этом соотношении первое слагаемое представляет собой $h_у/h_c$, второе слагаемое равно δ_1/h_c. На рис. 6.14 представлены экспериментальные данные, рекомендуемые для построения свободной поверхности потока на оголовке практического очертания Кригера—Офицерова. Сравнение обнаруживает удовлетворительное совпадение расчета и эксперимента.

9. Изменение глубины потока в пределах прямолинейной части водослива

$$\frac{h}{h_c}=\frac{q}{h_c u_{max}}+\frac{\delta_1}{h_c}=\frac{28,6}{0,62\sqrt{-30+15,4x}}+$$

$$+1,5\cdot 10^{-3}\left(\frac{x+50}{0,62}\right)^{0,83}.$$

Длина начального участка, т. е. участка стабилизации течения [см. зависимость (6.35)],

$$\frac{x_c}{h_c}=\frac{4}{\lambda_c}(1+1,3\sqrt{\lambda_c})^2=\frac{4}{0,018}(1+1,3\sqrt{0,018})^2=305;$$

$$x_c=0,62\cdot 305\approx 190 \text{ м}.$$

При расчетном расходе длина участка стабилизации оказалась больше длины водосливной грани и определенные выше параметры стабилизированного течения являются условными.

10. Изменение толщины пограничного слоя по длине водосливной грани [см. соотношение (6.26)]

$$\frac{\delta}{h_c}=0,7\lambda_c\left(\frac{x+x_э}{h_c}\right)^{\frac{1}{1+1,5\sqrt{\lambda_c}}}=0,7\cdot 0,018\left(\frac{x+50}{0,62}\right)^{\frac{1}{1+1,5\sqrt{0,018}}}=$$

$$=0,0126\left(\frac{x+50}{0,62}\right)^{0,83}$$

Результаты расчета показывают (см. рис. 6.14), что выход пограничного слоя на поверхность происходит при $x_в/H_0=17$ или $x_в=17\cdot 6\approx 100$ м ($x_в$ меньше x_c).

11. Изменение динамических характеристик потока на водосливе:

а) изменение коэффициента гидродинамического сопротивления [см. зависимость (6.16)]

$$C_f=0,5\lambda_c(h_c/x)^{\frac{1,5\sqrt{\lambda_c}}{1+1,5\sqrt{\lambda_c}}}=0,5\cdot 0,018(h_c/x)^{\frac{1,5\sqrt{0,018}}{1+1,5\sqrt{0,018}}}=$$

$$=0,009(h_c/x)^{0,12}.$$

Для условий равномерного течения

$$C_{fc}=0,009(h_c/x_c)^{0,12}, \text{ тогда } C_f/C_{fc}=(x_c/x)^{0,12};$$

б) изменение касательных напряжений по длине участка неравномерного движения по выражению (6.20) (при $x>x_п$)

$$\frac{\tau}{\tau_c}=\left(\frac{x_c}{x}\right)^{\frac{1,5\sqrt{\lambda_c}}{1+1,5\sqrt{\lambda_c}}}\left(a^2\frac{h_{кр}}{2x_c i}+\frac{x}{x_c}\right)=\left(\frac{190}{x}\right)^{\frac{1,5\sqrt{0,018}}{1+1,5\sqrt{0,018}}}\times$$

$$\times\left(0,835^2\frac{4,35}{2\cdot 190\cdot 0,79}+\frac{x}{190}\right)=\left(\frac{190}{x}\right)^{0,12}\left(0,01+\frac{x}{190}\right).$$

Результаты расчета показаны на рис. 6.15. Можно отметить, что при данном λ_c изменение τ_x близко к линейному.

12. Изменение коэффициента скорости φ по длине водосливной грани [см. соотношение (6.43)]

$$1/\varphi-1=\delta_1/h_у$$

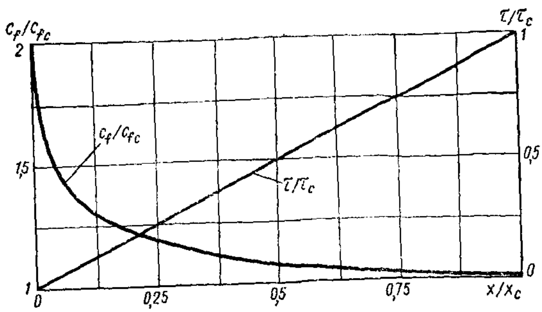


РИС. 6.15

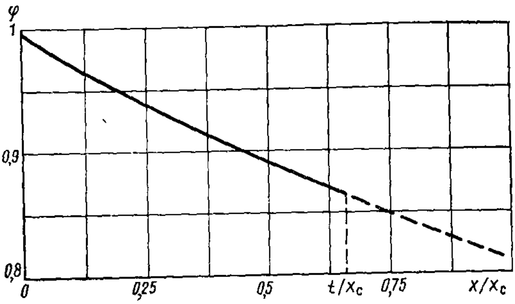


РИС. 6.16

ТАБЛИЦА 6.1

№ расчетного створа	Расстояние от вершины оголовка x/H_0	$h_у/h_c$	δ_1/h_c	h/h_c	δ/h_c	C_f/C_{fc}	τ/τ_c	φ	α
1	0	8,35	0,06	8,41	0,5	—	—	0,995	1,00
2	0,2	7,8	0,06	7,86	—	1,85	0,02	—	1,01
3	0,32	7,34	0,06	7,4	—	—	—	—	1,01
4	0,5	6,65	0,07	6,72	—	—	—	—	1,01
5	1	5,22	0,07	5,29	—	1,51	0,05	—	1,02
6	2	3,63	0,07	3,7	0,6	1,4	0,1	0,980	1,03
7	3	2,93	0,07	3	—	—	—	0,980	1,04
8	4	2,5	0,08	2,58	0,66	1,3	0,18	0,960	1,05
9	6	2,01	0,1	2,11	0,82	1,22	0,24	0,950	1,05
10	8	1,75	0,1	1,85	0,84	—	—	—	1,06
11	10	1,54	0,12	1,66	0,98	1,15	0,36	0,920	1,07
12	12	1,4	0,12	1,52	1,02	—	—	—	1,08
13	15	1,25	0,13	1,38	1,14	1,09	0,53	0,900	1,08
14	20	1,08	0,16	1,24	1,45	1,06	0,68	0,870	1,08
15	30	0,88	0,19	1,07	—	1	1	0,810	

(расчет выполняется с учетом результатов, полученных в пп. 8 и 9). Анализ результатов (рис. 6.16) показывает, что коэффициент φ (при заданном $\lambda_с$) уменьшается почти линейно по длине водосливной грани, приближаясь к значению $\varphi = 0,865$ для сжатого сечения.

13. Изменение корректива кинетической энергии α по длине водосливной грани по выражению (6.50) при $n = 1,3\sqrt{\lambda_с} = 1,3\sqrt{0,018} = 0,175$

$$\alpha = \frac{3}{3n+1}\left(\frac{h}{h_у}\right)^3\left[\frac{h_у}{h}(n+1) - \frac{2}{3}\right] =$$

$$= \frac{3}{3\cdot 0,175+1}\left(\frac{h}{h_у}\right)^3\left[\frac{h_у}{h}(0,175+1) - \frac{2}{3}\right] = 1,97\left(\frac{h}{h_у}\right)^3\left(\frac{h_у}{h}\,1,175 - 0,66\right).$$

Результаты выполненных расчетов сведены в табл. 6.1.

ГЛАВА 7. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

§ 20. Задачи изучения турбулентности

«Турбулентность — это неупорядоченное движение, возникающее в жидкостях или газах при обтекании ими непроницаемых поверхностей, а также в тех случаях, когда соседние друг с другом потоки взаимодействуют между собой или проникают один в другой» —такое определение турбулентности было дано Т. Карманом и Дж. Тейлором. Это определение указывает на основное свойство турбулентности — неупорядоченность турбулентного движения. Вследствие неупорядоченности турбулентное движение невозможно представить детерминированным и во всех деталях описать как функцию времени и пространства. Согласно И. О. Хинце [8], турбулентное движение жидкости предполагает наличие неупорядоченности, в которой различные характеристики течения претерпевают хаотическое изменение как по времени, так и по пространственным координатам и в которой могут быть выделены статистически точные их осредненные значения.

Следуя Рейнольдсу, мгновенное значение скорости и давления представим в виде:

$$\left.\begin{aligned} u &= \bar{u} + u'; \\ p &= \bar{p} + p', \end{aligned}\right\} \qquad (7.1)$$

где $\bar{u}$ и $\bar{p}$ — осредненные по времени местная скорость и давление;
u' и p' — мгновенные значения турбулентной пульсации скорости и давления.

Турбулентное движение можно характеризовать его интенсивностью и размером вихрей (масштабом). Интенсивность турбулентности принято характеризовать среднеквадратичной величиной $u' = \sqrt{\overline{u'^2}}$.

Если турбулентное течение квазистационарно, т. е. средняя скорость течения не изменяется по времени, то можно пользоваться осреднением за интервал времени T. В противном случае осреднение производится по большому числу опытов, в которых сохраняются одинаковые граничные и начальные условия.

Турбулентность представляет собой наложение (суперпозицию) вихрей разных масштабов. При одной и той же интенсивности турбулентности чем меньше размер турбулентного вихря, тем больше градиент скорости в нем и тем бо́льшие вязкие напряжения противодействуют вихревому движению. Следовательно, вязкостью определяется наименьший размер вихрей, существующих в потоке (наибольший размер определяется величиной устройства, по которому движется жидкость). Действие вязких напряжений приводит к преобразованию кинетической энергии турбулентного движения в тепло, поэтому турбулентное течение по своей природе является диссипативным. При отсутствии внешнего источника энергии турбулентное движение затухает, вырождается.

С увеличением скорости течения интенсивность турбулентности нарастает. Пульсации скорости и давления по абсолютной величине становятся настолько значительными, что свободная поверхность высокоскоростного потока делается бугристой, шероховатой. Взаимодействие быстродвижущегося потока, имеющего шероховатую свободную поверхность, с окружающим воздухом приводит к вовлечению воздуха в движение. При этом поверхностные слои жидкости затормаживаются и возникают дополнительные потери энергии.

Исследование турбулентности высокоскоростного потока позволяет установить характеристики шероховатости на его свободной поверхности и произвести инженерный расчет дополнительных потерь энергии, связанных с вовлечением в движение воздуха, окружающего высокоскоростной поток.

При высокой интенсивности турбулентности пульсации скорости могут приводить к отрыву от потока частиц жидкости, что является одним из факторов, определяющих аэрацию высокоскоростного потока. Размер отрывающихся частиц определяется масштабом турбулентности, а высота подъема их над свободной поверхностью — интенсивностью пульсаций скорости. Как уже отмечалось, в турбулентном потоке существует одновременно набор вихрей разного размера (масштаба), причем вихри каждого масштаба могут обладать большей или меньшей пульсационной энергией. Постоянство средних характеристик турбулентности вовсе не исключает появления в потоке пульсаций скорости и давления, значительно бо́льших средней величины, но вероятность их появления невелика. Обычно принято считать, что вероятность появления различных по величине пульсаций скорости (или давления) подчиняется нормальному закону распределения ошибок (или закону Гаусса). Однако в условиях течения с градиентом скорости распределение вероятностей турбулентных пульсаций может иметь значительную асимметрию, т. е. заметно отличаться от нормального распределения. Для решения задач по экстремальным гидродинамическим нагрузкам на сооружения и устройства, а также для оценки повторяемости нагрузок необходимо знать закон распределения вероятностей турбулентных пульсаций скорости и давления.

Турбулентность может играть также большую роль в процессе возникновения катящихся волн, которые при общей неустойчивости потока развиваются из сравнительно небольших возмущений. При этом из широкой суперпозиции турбулентных возмущений, одновременно существующих в потоке, вследствие неустойчивости выделяется и нарастает лишь одна компонента, масштаб которой, согласно Т. Г. Войнич-Сяноженцкому, близок к наибольшему масштабу турбулентности (или макромасштабу). В расчетах по прогнозированию возникновения катящихся волн и по определению их параметров должны быть учтены реальные характеристики турбулентности высокоскоростных потоков.

Обрушение волновых структур и турбулентных выбросов, образующихся на поверхности высокоскоростного потока, приводит к захвату крупных воздушных включений и аэрации потока. Дробление этих включений на мелкие воздушные пузырьки и распределение пузырьков в толще потока определяются главным образом турбулентностью. Расчет начала аэрации, определение количества частиц жидкости, летящих над потоком в виде капель, и расчет глубины проникания воздушных пузырьков в толщу потока могут быть выполнены на основе детального изучения турбулентной структуры высокоскоростных потоков.

При расчете конструкций водосливов, быстротоков, управляющих устройств и гасителей, взаимодействующих с высокоскоростными потоками, одной из основных задач является обеспечение кавитационной стойкости материала. Условия возникновения кавитации можно найти из уравнения Бернулли:

$$p + \rho u^2/2 + \rho g h = \mathrm{const},$$

где h — высота над плоскостью сравнения.

Увеличение скорости потока при $h = \mathrm{const}$ приводит к уменьшению давления. При некоторой критической скорости u давление в точке становится равным давлению насыщенных паров и образуются парогазовые пузырьки, что приводит к разрыву сплошности потока. Разрушение материала вследствие кавитации (кавитационная эрозия) происходит, как принято сейчас считать, при резком разрушении парогазовых пузырьков в области повышенного давления. Движение окружающей жидкости к центру пузырька приводит к интенсивному локальному повышению давления. По Рэлею, давление при разрушении пузырьков может почти в 1300 раз превышать давление в окружающей жидкости. Резкие локальные повышения давления в зоне кавитации разрушают материал .

Турбулентные пульсации скорости и давления могут существенно влиять на возникновение кавитации и интенсивность кавитационной эрозии. Действительно, даже если осредненная скорость $\bar{u} < u$, в периоды положительных пульсаций (нарастание скорости по сравнению с $\bar{u}$) будет возникать кавитация (при условии, что в эти же моменты времени p' будет отрицательным или очень малым). Очевидно, что для расчета такой перемежающейся кавитации необходимо знать интенсивность турбулентных пульсаций скорости и давления, временно́й масштаб турбулентности (периодичность) и связь между пульсациями скорости и давления. Следует заметить, что пульсации давления в точке определяются пульсациями скоростного поля в ее окрестности. Исследование взаимосвязи между турбулентными пульсациями скорости и давления является важной задачей исследования турбулентности, имеющей большое прикладное значение.

Исследование турбулентности необходимо также для решения задач динамического воздействия потока на элементы сооружений. Как известно, динамическое воздействие потока на препятствие (например, на элемент шероховатости или на гаситель) пропорционально $\rho u^2/2$. Очевидно, что силовое воздействие будет пульсировать вследствие пульсации скорости. Мгновенное динамическое давление в точке равно $\rho(\bar{u} + u')^2/2$. Зона повышения (или понижения) динамического давления определяется пространственным масштабом турбулентности. Изменение давления в пределах этой зоны зависит от изменения пульсационной составляющей скорости в пределах масштаба турбулентности или в пределах вихря. В тех случаях, когда существенна роль пульсационной составляющей статического давления p', необходимо установить соотношение между пульсациями скорости и давления как по времени, так и в пространстве. Особенности распределения пульсационных нагрузок динамического и статического давления могут привести не только к увеличению местных нагрузок, но и к созданию пульсирующих опрокидывающих моментов, действующих на элементы сооружений (например, на плиты крепления быстротока).

§ 21. Уравнения движения турбулентного потока

Дифференциальные уравнения движения [см. формулу (1.1)], известные как уравнения Навье — Стокса для вязкой жидкости, справедливы как для ламинарного, так и для турбулентного потока. При турбулентном движении, следуя Рейнольдсу [8], будем представлять параметры как комбинацию осредненных и пульсационных величин. В этом случае мгновенные значения скорости и давления, входящие в уравнения Навье — Стокса, выражаются по формулам (7.1).

Осредненные характеристики вычисляются следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \bar{u} &= \frac{1}{T}\int_0^T u\,dt; \\ \bar{p} &= \frac{1}{T}\int_0^T p\,dt, \end{aligned}\right\} \qquad (7.2)$$

где T — интервал осреднения по времени.

Величина интервала осреднения должна быть значительно больше максимального периода пульсаций.

Интегрирование соотношений (7.1) по интервалу T с учетом выражений (7.2) позволяет установить:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{T}\int_0^T u'\,dt=\overline{u'}=0;\\ &\frac{1}{T}\int_0^T p'\,dt=\overline{p'}=0. \end{aligned}\right\} \tag{7.3}$$

Аналогично могут быть установлены также другие правила осреднения:

$$\left.\begin{aligned} &\overline{\varphi+\psi}=\overline{\varphi}+\overline{\psi};\\ &\overline{C\varphi}=C\,\overline{\varphi};\\ &\overline{\overline{\varphi}\psi}=\overline{\varphi}\,\overline{\psi};\\ &\overline{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}=\frac{\partial}{\partial x}\overline{\varphi}, \end{aligned}\right\} \tag{7.4}$$

где φ и ψ — любые пульсирующие величины;
C — постоянный множитель.

Подставляя соотношения (7.1) в уравнения Навье — Стокса для плоского турбулентного движения, получаем :

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial(\overline{u}+u')_x}{\partial t}+(\overline{u}+u')_x\frac{\partial(\overline{u}+u')_x}{\partial x}+(\overline{u}+u')_z\frac{\partial(\overline{u}+u')_x}{\partial z}=\\ &=gi-\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\overline{p}+p')}{\partial x}+\nu\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\overline{u}+u')_x+\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\overline{u}+u')_x\right];\\ &\frac{\partial(\overline{u}+u')_z}{\partial t}+(\overline{u}+u')_x\frac{\partial(\overline{u}+u')_z}{\partial x}+(\overline{u}+u')_z\frac{\partial(\overline{u}+u')_z}{\partial z}=\\ &=-g\sqrt{1-i^2}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\overline{p}+p')}{\partial z}+\nu\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\overline{u}+u')_z+\right.\\ &\qquad\left.+\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\overline{u}+u')_z\right];\\ &\frac{\partial(\overline{u}+u')_x}{\partial x}+\frac{\partial(\overline{u}+u')_z}{\partial z}=0. \end{aligned}\right\} \tag{7.5}$$

В эти уравнения входят мгновенные локальные значения скорости и давления, однако, учитывая случайный характер изменения параметров, целесообразно эти уравнения осреднить. С учетом приведенных выше правил осреднения уравнения преобразуются к следующему виду:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial t}+\bar{u}_x\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x}+\overline{u'_x\frac{\partial u'_x}{\partial x}}+\bar{u}_z\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial z}+\overline{u'_z\frac{\partial u'_x}{\partial z}}=gi-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}+\\
&\qquad+\nu\left(\frac{\partial^2\bar{u}_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\bar{u}_x}{\partial z^2}\right);\\
&\frac{\partial \bar{u}_z}{\partial t}+\bar{u}_x\frac{\partial \bar{u}_z}{\partial x}+\overline{u'_x\frac{\partial u'_z}{\partial x}}+\bar{u}_z\frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z}+\overline{u'_z\frac{\partial u'_z}{\partial z}}=-g\sqrt{1-i^2}-\\
&\qquad-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial z}+\nu\left(\frac{\partial^2\bar{u}_z}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\bar{u}_z}{\partial x^2}\right);\\
&\qquad\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x}+\frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z}=0.
\end{aligned}\right\} \tag{7.6}$$

Вычитая последнее уравнение системы (7.6) из исходного, получаем уравнение неразрывности пульсационного движения:

$$\frac{\partial u'_x}{\partial x}+\frac{\partial u'_z}{\partial z}=0. \tag{7.7}$$

Умножая выражение (7.7) на u'_x и осредняя, находим:

$$\overline{u'_x\frac{\partial u'_x}{\partial x}}+\overline{u'_x\frac{\partial u'_z}{\partial z}}=0. \tag{7.8}$$

Суммируя соотношение (7.8) с левой частью первого уравнения системы (7.6), получаем:

$$\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial t}+\bar{u}_x\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x}+\bar{u}_z\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial z}+\overline{2u'_x\frac{\partial u'_x}{\partial x}}+\overline{u'_x\frac{\partial u'_z}{\partial z}}+\overline{u'_z\frac{\partial u'_x}{\partial z}}=$$

$$=gi-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2\bar{u}_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\bar{u}_x}{\partial z^2}\right).$$

С учетом соотношений

$$\overline{2u'_x\frac{\partial u'_x}{\partial x}}=\frac{\partial\overline{u'^2_x}}{\partial x}$$

и

$$\overline{u'_x\frac{\partial u'_z}{\partial z}}+\overline{u'_z\frac{\partial u'_x}{\partial z}}=\frac{\partial\overline{u'_x u'_z}}{\partial z},$$

для первого уравнения и аналогичных соотношений для второго уравнения преобразуем систему (7.6) к виду:

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial t}+\bar{u}_x\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x}+\bar{u}_z\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial z}=gi-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial x^2}+\right.\\
&\qquad\left.+\frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial z^2}\right)-\frac{\partial \overline{u_x'^2}}{\partial x}-\frac{\partial \overline{u_x' u_z'}}{\partial z};\\
&\frac{\partial \bar{u}_z}{\partial t}+\bar{u}_z\frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z}+\bar{u}_x\frac{\partial \bar{u}_z}{\partial x}=-g\sqrt{1-i^2}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial z}+\\
&\qquad+\nu\left(\frac{\partial^2 \bar{u}_z}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 \bar{u}_z}{\partial x^2}\right)-\frac{\partial \overline{u_z'^2}}{\partial z}-\frac{\partial \overline{u_z' u_x'}}{\partial x};\\
&\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x}+\frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z}=0.
\end{aligned}
\right\} \qquad (7.9)
$$

Систему уравнений (7.9) обычно называют системой уравнений Рейнольдса для плоского потока. Сравнение этой системы с исходными уравнениями Навье — Стокса показывает, что в уравнениях Рейнольдса имеются два добавочных слагаемых. Принято считать, что эти слагаемые представляют собой нормальные и касательные напряжения, связанные с пульсационным движением. Поясним это, используя теорему импульсов (рис. 7.1) для пульсационного движения. Уравнение импульсов запишем в обычном виде:

$$
F\mathrm{d}t=\mathrm{d}\,(mu), \qquad (7.10)
$$

где F — сила;
m — масса;
u — скорость движения.

Выделим на плоскости, нормальной к оси z, единичную площадку. Нормальные к площадке пульсации u_z' будут переносить в единицу времени массовый расход $\rho u_z'$. Соответствующее количество пульсационного движения равно $\rho u_z' u_x'$. Изменение количества движения вдоль оси x равно импульсу силы в этом направлении. Сила F, отнесенная к единице площади, представляет собой напряжение. Поскольку ось x касательна к площадке, то и напряжение будет касательным. За интервал времени $\mathrm{d}t$ через единичную площадку пройдет массовый расход $\rho u_z'\mathrm{d}t$. При скорости пульсационного движения u_x', направленной по касательной к площадке, количество движения, связанное с этой пульсационной скоростью, за время $\mathrm{d}t$ равно

$$
\rho u_z'\, u_x'\, \mathrm{d}t.
$$

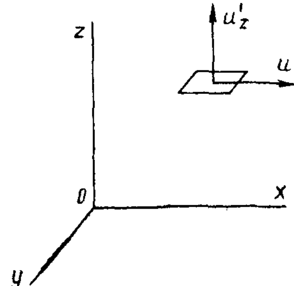


Рис. 7.1

Среднее за интервал времени T количество движения

$$\frac{1}{T}\int_0^T \rho u_z' u_x' \, dt = \rho \overline{u_z' u_x'}. \qquad (7.11)$$

Аналогично для пульсаций скорости, нормальных к площадке,

$$\frac{1}{T}\int_0^T \rho u_z'^2 \, dt = \rho \overline{u_z'^2}. \qquad (7.12)$$

Согласно теореме импульсов среднее количество движения, определяемое соотношением (7.11), равно касательным напряжениям, взятым с обратным знаком. Аналогично соотношение (7.12) представляет собой напряжения, нормальные к площадке, также взятые с обратным знаком. Таким образом, в уравнения Рейнольдса (7.9) для турбулентного течения по сравнению с уравнениями Навье — Стокса входят дополнительно производные от турбулентных нормальных и касательных напряжений.

Выполним оценочное сравнение турбулентных касательных напряжений с вязкими напряжениями. Считая градиент скорости du'/dz по порядку величин близким к U/H (где U — средняя скорость потока; H — его глубина), найдем вязкие касательные напряжения:

$$\tau_в \sim \rho \nu U/H.$$

Принимая пульсационные скорости по порядку величин близкими к $0{,}1U$ [8], получим турбулентные касательные напряжения:

$$\tau_т \sim 10^{-2} \rho U^2.$$

Таким образом,

$$\tau_т/\tau_в \sim 10^{-2}\, UH/\nu.$$

Поскольку для турбулентного течения числа Рейнольдса $\gg 10^2$, турбулентные касательные напряжения в основной толще потока значительно превосходят вязкие касательные напряжения.

Для плавно изменяющихся течений величина $\dfrac{\partial \overline{u_x'^2}}{\partial x}$ значительно меньше $\dfrac{\partial \overline{u_x' u_z'}}{\partial z}$ (см. гл. 1), поэтому нормальными напряжениями в первом уравнении системы (7.9) можно пренебречь. Во втором уравнении оказывается возможным пренебречь производной касательных напряжений по продольному направлению x. В условиях резко изменяющихся течений необходимо учитывать изменение напряжений по продольной координате. В рамках приближений, принятых в теории пограничного слоя (см. гл. 5), система уравнений Рейнольдса для стационарного течения упрощается:

$$\left.\begin{aligned}
&\bar{u}_x \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \bar{u}_z \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial z} = gi - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial z^2} - \\
&\qquad - \frac{\partial \overline{u'_x u'_z}}{\partial z};\\
&0 = -g\sqrt{1-i^2} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} - \frac{\partial \overline{u'^2_z}}{\partial z};\\
&\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z} = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (7.13)$$

Интегрирование второго уравнения системы (7.13) позволяет установить распределение давления по глубине равномерного турбулентного потока:

$$\bar{p} = -\rho g \sqrt{1-i^2}\int \mathrm{d}z - \rho \int \frac{\partial \overline{u'^2_z}}{\partial z}\,\mathrm{d}z + C.$$

Постоянную интегрирования C найдем из граничных условий $z=h$, $\bar{p}=0$ и $\overline{u'^2_z}=\overline{u'^2_h}$ (где $\overline{u'^2_h}$ — средняя величина квадрата вертикальных пульсаций на свободной поверхности):

$$C = \rho g h \sqrt{1-i^2} + \rho\overline{u'^2_h}.$$

Тогда

$$\bar{p} = \rho g \sqrt{1-i^2}\,(h-z) + \rho\left(\overline{u'^2_h} - \overline{u'^2_z}\right). \qquad (7.14)$$

Соотношение (7.14) показывает, что распределение давления по глубине турбулентного потока может отличаться от гидростатического, выражаемого первым слагаемым (7.14)

$$\bar{p} = \rho g (h-z)\sqrt{1-i^2}. \qquad (7.15)$$

Для оценки дополнительного давления, связанного с проявлением турбулентных пульсаций, используется приближенная зависимость между пульсационной и динамической скоростью:

$$\overline{u'^2_z} \sim u_*^2 = ghi.$$

Подставляя эту зависимость в соотношение (7.14), находим при $z \to 0$:

$$\bar{p} = \rho g h\left(\sqrt{1-i^2} + i\right). \qquad (7.16)$$

В выражении (7.16) появилось по сравнению с соотношением (7.15) дополнительное слагаемое—уклон дна канала. Таким образом, давление на дно в высокоскоростном турбулентном потоке тем больше отличается от давления на дно, которое создает медленно движущийся поток, чем больше уклон дна канала. Это является одной из важнейших особенностей высокоскоростного потока, которая должна учитываться при его расчетах.

Действительно, как уже указывалось, высокоскоростные потоки образуются при больших уклонах дна, превышающих 0,1 и достигающих значений 0,9. При таких больших уклонах давление на дно канала может почти вдвое превышать гидростатическое.

§ 22. Пульсации скоростей и давлений

В турбулентном потоке между пульсациями скоростей и давлений имеются вполне определенные связи. Чтобы показать это, воспользуемся уравнением движения турбулентного потока (7.5). Почленно вычитая из этого уравнения осредненное уравнение турбулентного движения (7.6), получаем:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u'_x}{\partial t}+u'_x\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x}+\bar{u}_x\frac{\partial u'_x}{\partial x}+u'_z\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial z}+\\
&+\bar{u}_z\frac{\partial u'_x}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u'_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u'_x}{\partial z^2}\right);\\
&\frac{\partial u'_z}{\partial t}+u'_x\frac{\partial \bar{u}_z}{\partial x}+\bar{u}_x\frac{\partial u'_z}{\partial x}+u'_z\frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z}+\\
&+\bar{u}_z\frac{\partial u'_z}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial z}+\nu\left(\frac{\partial^2 u'_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u'_z}{\partial z^2}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{7.17}$$

Дифференцируя первое уравнение системы по x, а второе уравнение по z и суммируя их, находим:

$$\left.\begin{aligned}
&2\frac{\partial u'_x}{\partial x}\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x}+2\frac{\partial u'_z}{\partial z}\frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z}+2\frac{\partial u'_z}{\partial x}\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial z}+\\
&+2\frac{\partial \bar{u}_z}{\partial x}\frac{\partial u'_x}{\partial z}+u'_x\left(\frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \bar{u}_z}{\partial x\partial z}\right)+\\
&+\bar{u}_x\left(\frac{\partial^2 u'_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u'_z}{\partial x\partial z}\right)+u'_z\left(\frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 \bar{u}_z}{\partial z^2}\right)+\\
&+\bar{u}_z\left(\frac{\partial^2 u'_x}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 u'_z}{\partial z^2}\right)+\left(\frac{\partial^2 u'_x}{\partial t\partial x}+\frac{\partial^2 u'_z}{\partial t\partial z}\right)=\\
&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 p'}{\partial z^2}+\\
&+\nu\left(\frac{\partial^3 u'_x}{\partial z^2\partial x}+\frac{\partial^3 u'_z}{\partial z^3}\right)+\nu\left(\frac{\partial^3 u'_x}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 u'_z}{\partial x^2\partial z}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{7.18}$$

Уравнения неразрывности для осредненных и пульсационных скоростей имеют вид:

$$\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x}+\frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z}=0; \quad \frac{\partial u'_x}{\partial x}+\frac{\partial u'_z}{\partial z}=0. \tag{7.19}$$

Используя эти уравнения, находим, что суммы слагаемых в скобках в уравнении (7.18) тождественно равны нулю. Например,

$$\frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \bar{u}_z}{\partial x \partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x}+\frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z}\right)=0.$$

Аналогично

$$\frac{\partial^3 u'_x}{\partial z^2\,\partial x}+\frac{\partial^3 u'_z}{\partial z^3}=\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial u'_x}{\partial x}+\frac{\partial u'_z}{\partial z}\right)=0.$$

Следовательно, уравнение (7.18) можно представить в виде:

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p'}{\partial z^2}\right)=$$

$$=-2\left(\frac{\partial u'_x}{\partial x}\,\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x}+\frac{\partial u'_z}{\partial z}\,\frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z}+\frac{\partial u'_z}{\partial x}\,\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial z}+\frac{\partial \bar{u}_z}{\partial x}\,\frac{\partial u'_x}{\partial z}\right). \tag{7.20}$$

Интересно отметить, что ни вязкость жидкости, ни нестационарность течения не оказывают прямого воздействия на пульсации давления. Влияние этих параметров проявляется косвенно, поскольку, согласно уравнениям (7.6), скоростные характеристики, входящие в правую часть уравнения (7.20), зависят как от вязкости, так и от нестационарности. Введем обозначение:

$$-2\left(\frac{\partial u'_x}{\partial x}\,\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x}+\frac{\partial u'_z}{\partial z}\,\frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z}+\frac{\partial u'_z}{\partial x}\,\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial z}+\frac{\partial \bar{u}_z}{\partial x}\,\frac{\partial u'_x}{\partial z}\right)=f. \tag{7.21}$$

Тогда

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p'}{\partial z^2}\right)=f. \tag{7.22}$$

Уравнение (7.22) известно как уравнение Пуассона. Функция f, определяемая соотношением (7.21), носит название кинематической функции. При вычислении пульсаций давления предполагается, что кинематическая функция, зависящая от характеристик скорости, известна. Для решения дифференциального уравнения (7.22) необходимо задать условия на границах. При отсутствии волн на свободной поверхности потока граничное условие имеет вид:

$$z=h; \quad p'=0. \tag{7.23}$$

Граничное условие при $z=0$ можно получить из уравнений (7.17). Учитывая, что на твердой границе $\bar{u}_x=\bar{u}_z=0$ и что сама граница неподвижна, находим:

$$\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p'}{\partial z}=\nu\,\frac{\partial^2 u'_z}{\partial z^2}.$$

Пульсации скорости в вязком подслое не проникают к стенке ближе чем на $z \leqslant 5 \frac{\nu}{u_*}$, поэтому граничное условие на твердой поверхности при $z = 0$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial z} = 0. \qquad (7.24)$$

Решение уравнения (7.22) можно представить в виде [6]:

$$p'(x, z, t) = \rho \int\int f(\eta, \zeta, t)\, G(x, z, t, \eta, \zeta)\, d\eta\, d\zeta. \qquad (7.25)$$

Соотношение (7.25) позволяет определить пульсацию давления в точке (x, z), если известна кинематическая функция f в любой точке потока ($\eta = x + \Delta x$; $\zeta = z + \Delta z$) и некоторая вспомогательная функция G, называемая функцией влияния или функцией Грина [6]. Из этого соотношения следует вывод: пульсация давления в данной точке не только определяется параметрами течения в этой точке, но и зависит от кинематических характеристик во всей области течения, причем степень этой зависимости выражается через функцию Грина G.

Предположим, что кинематическая функция равна нулю во всех точках потока, кроме некоторой точки, расположенной на расстоянии Δx_1 и Δz_1 от заданной. Тогда функция $G(x, z, \eta_1, \zeta_1)$ будет определять степень влияния кинематической функции в точке ($\eta_1 = x + \Delta x_1$; $\zeta_1 = z + \Delta z_1$) на величину пульсации давления в точке (x, z).

Так как пульсация давления в данной точке зависит, строго говоря, от совокупности значений кинематической функции во всех точках потока, то для вычисления p' необходимо выполнить интегрирование по координате x от $-\infty$ до $+\infty$ и по координате z от 0 до h.

Рассмотрим пульсацию давления на дне канала в условиях равномерного течения. Кинематическая функция, согласно выражению (7.21), в этом случае имеет вид $\left(\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} = \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z} = \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial x} = 0\right)$:

$$f = -2 \frac{\partial u'_z}{\partial x} \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial z}. \qquad (7.26)$$

Пульсация давления на дне канала в точке $(x, z = 0)$

$$p'(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^h G(x, z = 0, \eta, \zeta)\, f(\eta, \zeta, t)\, d\eta\, d\zeta. \qquad (7.27)$$

Таким образом, для вычисления p' необходимо определить функцию влияния G и кинематическую функцию f. Кинематическая функция находится по данным измерений осредненных и пульсационных вертикальных скоростей в потоке. Функция влияния G может быть найдена как аналитически, так и методами аналогового моделирования [6].

Наибольшее распространение в настоящее время получили так называемые модели ЭГДА (электрогидродинамической аналогии). Для определения функции G методом ЭГДА неподвижным границам потока соответствует диэлектрик, свободная поверхность — поверхность нулевого электрического потенциала (заземленная поверхность). В любую точку модели (η, ζ) подается ток I, в точке (x, z) фиксируется потенциал U. Функция влияния при этом определяется по соотношению

$$G=-cU/I,$$

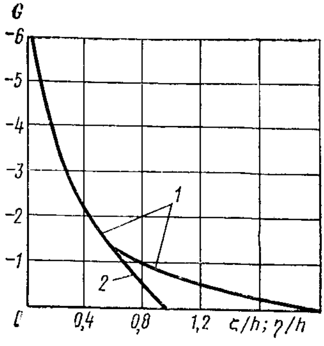


РИС. 7.2
$1-\zeta/h$; $2-\eta/h$

где c — электропроводность электролита на модели ЭГДА.

Аналитически функция G может быть найдена в результате интегрального преобразования исходного уравнения (7.22). В частности, применение интегрального преобразования Фурье позволило В. М. Лятхеру [7] получить для условий равномерного плоского потока выражение для функции влияния. Анализ представленных на рис. 7.2 данных показывает, что на пульсацию давления в точке на дне канала оказывают влияние возмущения, находящиеся на расстоянии, не превышающем $\Delta z\approx 0{,}6\ h$ и $\Delta x\approx h$. Используя полученное выражение для функции G и экспериментальные данные относительно $\bar{u}_x$ и $\bar{u}'_z$, В. М. Лятхер установил, что при естественной шероховатости канала

$$p'\approx 3{,}5\rho u_*^2. \tag{7.28}$$

Выражение (7.28) позволяет определить пульсацию давления на дне равномерного турбулентного потока в зависимости от величины динамической скорости.

§ 23. Уравнение энергии турбулентного потока

Приведенная выше система уравнений Рейнольдса является незамкнутой (число неизвестных превышает число уравнений) в связи с тем, что эти уравнения содержат дополнительные неизвестные, связанные с пульсационным движением. Некоторые необходимые дополнительные соотношения между пульсационными характеристиками могут быть установлены с использованием уравнения энергии. Уравнения полной энергии могут быть получены умножением уравнений Навье — Стокса на мгновенные значения соответствующих компонент скорости. Для этого все три уравнения Навье — Стокса следует записать в обобщенном виде:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=F_i-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}+\nu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}, \tag{7.29}$$

где каждый из индексов i и j последовательно равняется x, y и z.

Уравнение неразрывности при такой записи также упрощается:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i}=0. \tag{7.30}$$

Уравнения Рейнольдса (7.9) при этом имеют вид:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t}+\bar{u}_j\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}=F_i-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i}+\nu\frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j^2}-\frac{\partial \overline{u_i' u_j'}}{\partial x_j}. \tag{7.31}$$

Теперь умножим уравнение Навье — Стокса (7.29) на мгновенную скорость u_i:

$$u_i\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_i u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=u_i F_i-\frac{1}{\rho}u_i\frac{\partial p}{\partial x_i}+\nu u_i\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}. \tag{7.32}$$

Представим

$$u_i\frac{\partial p}{\partial x_i}=\frac{\partial}{\partial x_i}pu_i-p\frac{\partial u_i}{\partial x_i}.$$

Используя уравнение неразрывности (7.30), находим:

$$u_i\frac{\partial p}{\partial x_i}=\frac{\partial}{\partial x_i}pu_i. \tag{7.33}$$

Слагаемое в выражении (7.32), содержащее вязкость, удобно представить с использованием условия неразрывности в виде:

$$\nu u_i\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}=\nu u_i\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)=\nu\frac{\partial}{\partial x_j}u_i\times$$
$$\times\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)-\nu\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right). \tag{7.34}$$

Подставляя соотношения (7.33) и (7.34) в выражение (7.32), получим:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\frac{u_i^2}{2}}_{\mathrm{I}}+\underbrace{u_j\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{u_i^2}{2}}_{\mathrm{II}}=\underbrace{u_i F_i}_{\mathrm{III}}-\underbrace{\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}pu_i}_{\mathrm{IV}}+$$
$$+\underbrace{\nu\frac{\partial}{\partial x_j}u_i\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)}_{\mathrm{V}}-\underbrace{\nu\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)}_{\mathrm{VI}}. \tag{7.35}$$

Уравнение (7.35) представляет собой баланс полной энергии течения:

I — изменение удельной кинетической энергии по времени,
II — изменение кинетической энергии по координатам, которое можно представить как удельную работу полного динамического напора в единицу времени;
III и IV — работа массовых сил и сил давления;
V — работа вязких напряжений;
VI — диссипация полной энергии в тепло.

Выполним операцию осреднения для всех слагаемых уравнения (7.35), представляя мгновенную скорость и давление в виде суммы осредненных и пульсационных величин:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\overline{u_i^2}}{2}+\frac{\partial}{\partial t}\frac{\overline{u_i'^2}}{2}+\frac{1}{2}\left(\overline{u_j\frac{\partial u_i^2}{\partial x_j}}+\overline{u_j\frac{\partial u_i'^2}{\partial x_j}}+\right.$$

$$\left.+\overline{2u_j'\frac{\partial u_i u_i'}{\partial x_j}}+\overline{u_j'\frac{\partial u_i'^2}{\partial x_j}}\right)=\bar{u}_i F_i-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}\overline{pu_i}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}\overline{p' u_i'}+$$

$$+\nu\frac{\partial}{\partial x_j}\bar{u}_i\left(\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\bar{u}_j}{\partial x_i}\right)+\nu\overline{\frac{\partial}{\partial x_j}u_i'\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right)}-$$

$$-\nu\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_j}\left(\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\bar{u}_j}{\partial x_i}\right)-\nu\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right)}. \qquad (7.36)$$

Умножая уравнение Рейнольдса (7.31) на $\bar{u}_i$, получим уравнение энергии осредненного движения:

$$\bar{u}_i\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial t}+\bar{u}_i\bar{u}_j\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_j}=\bar{u}_i F_i-\frac{1}{\rho}\bar{u}_i\frac{\partial\bar{p}}{\partial x_i}+$$

$$+\bar{u}_i\nu\frac{\partial^2\bar{u}_i}{\partial x_j^2}-\bar{u}_i\frac{\partial\overline{u_i' u_j'}}{\partial x_j}.$$

Выполняя преобразования, аналогичные тем, которые выполнялись для уравнений Навье — Стокса, получаем:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\overline{u_i^2}}{2}+\frac{1}{2}\bar{u}_j\frac{\partial\bar{u}_i^2}{\partial x_j}=\bar{u}_i F_i-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}\overline{pu_i}+\nu\frac{\partial}{\partial x_j}\bar{u}_i\times$$

$$\times\left(\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\bar{u}_j}{\partial x_i}\right)-\nu\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_j}\left(\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\bar{u}_j}{\partial x_i}\right). \qquad (7.37)$$

Уравнение энергии пульсационного движения может быть получено вычитанием уравнения (7.37) из соотношения (7.36):

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\frac{\overline{u_i'^2}}{2}}_{\mathrm{I}}+\frac{1}{2}\left(\underbrace{\bar{u}_j\frac{\partial\overline{u_i'^2}}{\partial x_j}}_{\mathrm{II}}+\underbrace{\overline{2u_i' u_j'}\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_j}}_{\mathrm{III}}+\underbrace{\overline{u_j'\frac{\partial(u_i')^2}{\partial x_j}}}_{\mathrm{IV}}\right)=$$

$$=\underbrace{-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}\overline{p' u_i'}}_{\mathrm{V}}+\underbrace{\nu\overline{\frac{\partial}{\partial x_j}u_i'\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right)}}_{\mathrm{VI}}-$$

$$\underbrace{-\nu\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right)}}_{\mathrm{VII}}. \qquad (7.38)$$

Уравнение (7.38) представляет собой суммарное балансовое уравнение пульсационного движения, учитывающее изменение энергии пульсационного движения по трем координатным направлениям.

В уравнении (7.38):

I и II — изменение удельной кинетической энергии турбулентности:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\overline{u_i'^2}}{2}+\frac{1}{2}u_j\,\overline{\frac{\partial u_i'^2}{\partial x_j}}=\frac{\partial}{\partial t}e,$$

где

$$e=\frac{\rho}{2}\overline{\left(u_x'^2+u_y'^2+u_z'^2\right)}=\frac{\rho}{2}\overline{u_i'^2};$$

III — изменение энергии, затрачиваемой осредненным течением на работу против турбулентных касательных напряжений (осредненное течение теряет эту энергию, а пульсационное — приобретает);

IV — перенос кинетической энергии турбулентности пульсационным движением (конвективная диффузия кинетической энергии турбулентности);

V — суммарные потери энергии турбулентности за счет работы по переносу жидкости через область переменного давления (или диффузия потенциальной энергии турбулентности);

VI — работа вязких напряжений сдвига;

VII — диссипация энергии турбулентности.

Уравнение баланса пульсационной энергии для плоского равномерного квазистационарного потока упрощается и приводится к виду:

$$\overline{u_x'u_z'}\,\frac{\partial\overline{u_x}}{\partial z}+\overline{u_x'u_z'\frac{\partial u_x'}{\partial z}}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}\overline{u_z'p'}+$$

$$+\nu\frac{\partial}{\partial z}\overline{u_x'\frac{\partial u_x'}{\partial z}}-\nu\overline{\left(\frac{\partial u_x'}{\partial z}\right)^2}. \tag{7.39}$$

Из этого уравнения видно, что в зоне больших градиентов скорости $\frac{\partial\overline{u_x}}{\partial z}$ вблизи твердой граничной поверхности генерация турбулентности происходит наиболее интенсивно. С удалением от твердой границы этот градиент уменьшается, следовательно, генерация энергии также уменьшается и роль конвективных членов в связи с этим возрастает. В общий баланс турбулентной энергии здесь существенный вклад вносит энергия, привнесенная из области, близкой к граничной поверхности. Поэтому вблизи свободной поверхности, там где осредненная скорость практически не изменяется по глубине (градиент скорости мал), могут быть обнаружены значительные турбулентные пульсации. В основной толще потока, согласно И. О. Хинце [8], генерация энергии турбулентных пульсаций оказывается близкой к ее диссипации. Для этой зоны уравнение турбулентной энергии можно записать в виде:

$$\overline{u_x'u_z'}\,\frac{\partial\overline{u_x}}{\partial z}=-\nu\overline{\left(\frac{\partial u_x'}{\partial z}\right)^2}. \tag{7.40}$$

Уравнения энергии позволяют получить дополнительные связи между параметрами турбулентности.

Однако система уравнений Рейнольдса, дополненная уравнением баланса пульсационной энергии, остается по-прежнему незамкнутой. Эту систему можно решить используя различные гипотезы о связи поля осредненных скоростей с турбулентными характеристиками течения. Гипотезы могут быть разработаны лишь на основе детального исследования турбулентности.

§ 24. Статистические характеристики турбулентности

Случайный характер турбулентного течения наиболее эффективно описывается статистически [8]. Статистические методы позволяют выявить основные закономерности случайных процессов, анализируя ряд мгновенных значений пульсационных характеристик [6]. Ряд мгновенных значений пульсирующей величины в какой-либо точке, полученный за время наблюдения T, принято называть реализацией пульсирующей величины. Время наблюдения соответственно называется длительностью реализации.

Как уже указывалось, генерация турбулентности происходит в зоне высоких градиентов скорости, т. е. вблизи дна канала. Поскольку градиент скорости изменяется по глубине потока, характеристики турбулентности также не остаются постоянными. Составляющие пульсации скорости по координатным осям могут быть различными. Таким образом, даже в простейшем случае равномерного течения в канале структура турбулентности имеет сложный пространственный характер. Поэтому для описания ее пользуются большим числом статистических параметров.

Более просто описываются частные случаи турбулентного движения, когда пульсационные характеристики сохраняются постоянными (в среднем) во всех точках потока. В этом случае турбулентность называется однородной. Если характеристики турбулентности одинаковы по всем координатным осям, турбулентность называется изотропной. Строго говоря, физически реализовать однородную изотропную турбулентность не представляется возможным, однако достаточно хорошую модель такой турбулентности можно получить при движении потока за решетками [8]. Ряд закономерностей, полученных для однородной изотропной турбулентности, можно приближенно использовать при анализе реальной турбулентности. Реальная турбулентность представляет собой систему вихревых структур, имеющих различный размер и различную скорость вихревого движения.

Существуют два принципиально различных подхода к исследованию турбулентного движения. При первом из них, называемом методом Лагранжа, наблюдатель следит за изменением вихревой структуры при ее перемещении. Практически наблюдения при таком подходе можно осуществлять с помощью кинокамеры, перемещающейся вдоль потока со скоростью вихревой структуры. Преимущество этого способа — возможность проследить развитие, взаимодействие и разрушение вихревых структур. В последнее время метод Лагранжа находит все более широкое распространение. Другой метод исследования, называемый методом Эйлера, состоит в изучении пульсационных характеристик в определенной точке при прохождении через нее различных вихревых структур. В этом случае в точке наблюдения можно зафиксировать пульсацию измеряемых величин. Уравнения, использованные в настоящей книге, получены на основе метода Эйлера. Характеристики турбулентности, использованные в дальнейшем, также получены методом Эйлера.

Поскольку через точку наблюдения проходят различные вихревые структуры, вызывающие пульсацию, реализацию любой пульсирующей величины (рис. 7.3) можно представить как комбинацию периодических компонент. Представим для упрощения, что пульсация определяется наличием в турбулентном потоке вихревых структур трех типов. Каждая из них вызывает пульсацию определенной амплитуды и продолжительности. Сложение этих пульсаций приводит к сложной результирующей пульсации. Таким образом, сложную результирующую пульсацию можно представить как сумму периодических компонент, каждая из которых имеет свою частоту и амплитуду. Амплитуда каждой компоненты (гармоники) может, вообще говоря, несколько изменяться вследствие разной интенсивности вихрей одного и того же размера. Линейный размер (масштаб) вихрей может быть установлен из анализа взаимной зависимости пульсаций в двух точках потока, отстоящих на расстоянии l друг от друга. Из теории вероятности [6] известно, что характеристикой взаимной зависимости двух случайных величин является так называемый коэффициент корреляции

$$R(l)=\overline{u'(x)\,u'(x+l)}\Big/\sqrt{\overline{u'^2(x)}\;\overline{u'^2(x+l)}}. \qquad (7\cdot41)$$

Иногда используется ненормированная корреляция (или ковариация) $R_0(l)=\overline{u'(x)\,u'(x+l)}$. Когда l меньше размера самых мелких вихрей, пульсации в соседних точках будут практически оди-

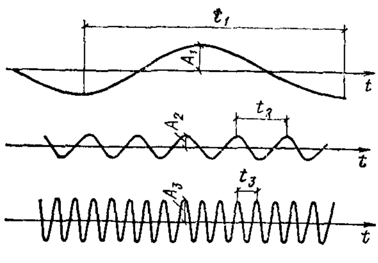
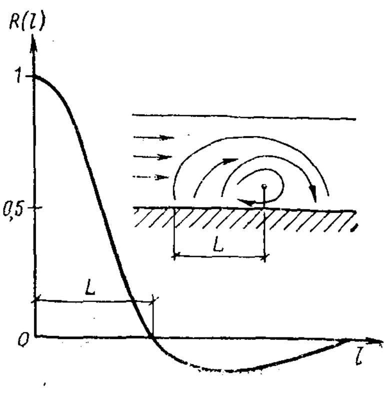


РИС. 7.3



▶ РИС. 7.4

наковыми и коэффициент корреляции равен единице. При увеличении l пульсации одного знака в соседних точках будут связаны лишь с вихрями, имеющими размер, больший l. Меньшие вихри могут в отдельные моменты времени вызывать пульсации противоположного направления.

При осреднении по времени значение коэффициента корреляции будет уменьшаться. При некотором достаточно большом значении $l = L$ значение коэффициента корреляции обращается в нуль (рис. 7.4). При $l > L$ коэффициент корреляции может стать отрицательным. Это, по-видимому, можно объяснить тем, что точки наблюдения оказались расположенными по разные стороны от центров проходящих больших вихрей. Макромасштаб турбулентности (или интегральный масштаб)

$$L_{\text{т}} = \int_0^\infty R(l)\,\mathrm{d}l \tag{7.42}$$

характеризует средний размер наибольших вихрей, существующих в потоке. Корреляции могут быть исследованы для одних и тех же компонент пульсаций (например, R_{xx}), для разных компонент (например, R_{xz}) и для разных пульсирующих характеристик (например, $R_{\lambda p}$). Рассмотренные выше корреляции являются двухточечными пространственными. Могут быть исследованы также одноточечные корреляции (или автокорреляции) $R(t)$, которые вычисляются как корреляции одной и той же величины (или разных величин) в одной точке, но в разные моменты времени:

$$R(t) = \overline{u'(t)\,u'(t+\Delta t)} / \sqrt{\overline{u'^2(t)}\;\overline{u'^2(t+\Delta t)}}. \tag{7.43}$$

Автокорреляция, так же как и пространственная корреляция позволяет определить временной масштаб

$$T_{\text{т}} = \int_0^\infty R(t)\,\mathrm{d}t. \tag{7.44}$$

Считая, что вихри перемещаются относительно неподвижной точки наблюдения со скоростью, равной осредненной местной скорости течения $\bar{u}$, легко установить связь между временным и пространственным масштабами турбулентности:

$$T_{\text{т}} = L_{\text{т}}/\bar{u}. \tag{7.45}$$

Это соотношение, известное как гипотеза «замороженной турбулентности», было впервые выведено одним из основателей статистической теории турбулентности Дж. Тейлором.

Для проверки этой гипотезы А. Фавром и др. проведены исследования корреляционных функций с задержкой по времени и при одновременном смещении точек измерения относительно друг друга в пространстве. Сопоставление пространственных и временных корреляций позволило установить, что гипотеза Дж. Тейлора подтверждается, однако перенос вихрей осуществляется со скоростью, равной 0,8 скорости осредненного течения.

Пространственно-временные корреляции позволяют также определить продолжительность жизни вихрей t_0 в турбулентном потоке. Анализ данных, приведенных на рис. 7.5, позволяет отметить, что с увеличением l максимальное значение коэффициента корреляции уменьшается, что указывает на затухание (вырождение) вихря в процессе его движения. Полное вырождение вихря происходит в данном случае на расстоянии, равном (3—5) $L_т$.

Вихри разных масштабов, как уже указывалось, обладают различной пульсационной энергией. Разделением турбулентных пульсаций на составляющие гармоники (см. рис. 7.3) можно найти величину турбулентной энергии, соответствующей каждой гармонике, т. е. каждому размеру вихря.

Практически разделение сложных процессов (или их электрических аналогов при измерении) производится с помощью полосовых фильтров, представляющих собой электрическое устройство, которое пропускает сигнал определенной частоты и отсеивает все остальные сигналы. Частота n связана с размером вихря l известным соотношением $n = u/l$ (где u — скорость переноса).

Энергия пульсаций e, равная $\rho \overline{u'^2}/2$, может определяться по уровню электрического сигнала на выходе полосового фильтра. Таким образом, можно установить величину энергии турбулентности e_i, соответствующую каждому размеру вихря l_i или частоте n_i. Подобное представление связи между e_i и n_i называется частотно-энергетическим спектром.

На типичном частотно-энергетическом спектре пульсаций (рис. 7.6) можно выделить три характерные области.

1. Область наиболее крупных (низкочастотных) вихрей, получающих энергию непосредственно от осредненного течения и передающих ее вихрям более мелкого масштаба. В этой области спектра с уменьшением размера (или увеличением частоты) вихрей их энергия возрастает, достигая максимального значения при $l \approx$

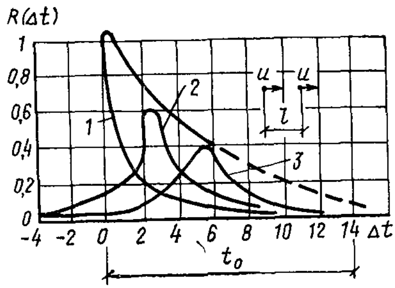


РИС. 7.5

1 — l/δ=0; 2 — l/δ=1,5; 3 — l/δ=3 (δ — толщина пограничного слоя)

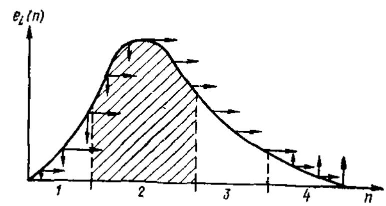


РИС. 7.6

горизонтальные стрелки показывают передачу энергии от одних участков спектра к другим; вертикальные стрелки: вниз — генерацию турбулентности; вверх — диссипацию энергии в тепло; 1 — крупные вихри; 2 — энергонесущие вихри; 3 — инерционный интервал; 4 — интервал диссипации

$\approx L_т$. Крупные вихревые структуры, питающиеся энергией осредненного движения, вырождаются медленно, являются наиболее устойчивыми и существуют достаточно долго. Наиболее крупные вихри содержат в себе около 20% всей кинетической энергии турбулентности [8].

2. Область энергосодержащих вихрей — область спектра, в пределах которой вихри вносят наибольший вклад в энергию турбулентности. В этой области энергетический спектр имеет максимум. Энергонесущие вихри имеют размер, меньший макромасштаба турбулентности, и подвержены меньшему влиянию осредненного течения.

3. Область универсального равновесия, в которой турбулентность находится в статистическом равновесии и не зависит от интегральных характеристик течения. Поток турбулентной энергии поступает в эту область из области энергонесущих вихрей. Здесь заметно проявляется диссипация турбулентности, сильно возрастающая с увеличением частоты вихрей. Поэтому область равновесия обычно разделяют на два интервала: инерционный и вязкой диссипации.

При анализе результатов измерений и в расчетных зависимостях часто используют так называемую спектральную плотность $S(n)$, величина которой представляет собой пульсационную энергию, приходящуюся на единичный частотный интервал:

$$S(n) = \frac{e}{n_1 - n_2},$$

где n_1 и n_2 — границы полосы частот, пропускаемых фильтром.

По характеру определения очевидно, что

$$\int_0^\infty S(n)\,dn = u'^2.$$

Детальный анализ формы спектральной плотности $S(n)$ при различных частотах выполняется исходя из баланса пульсационной энергии для вихрей данного размера. При решении уравнения баланса делаются различные предположения относительно скорости передачи энергии по спектру частот. Эти достаточно сложные расчеты позволяют установить, в частности, что в области энергосодержащих вихрей спектральная плотность изменяется по закону $S(n) \sim n^{-1}$. В инерционном интервале области универсального равновесия $S(n) \sim n^{-5/3}$, а в интервале вязкой диссипации $S(n) \sim n^{-7}$.

Закон изменения спектральной плотности в инерционном интервале может быть получен достаточно просто исходя из теории размерностей. Согласно А. Н. Колмогорову [8], принято считать, что турбулентные характеристики в этом интервале не зависят от характеристик осредненного течения и вязкости. Действительно, самые крупные вихревые структуры в инерционном интервале значительно мельче самых крупных вихрей, существующих в потоке.

Поэтому непосредственное воздействие осредненного течения на вихри этого масштаба незначительно. С другой стороны, размеры вихрей и их энергия достаточно велики, поэтому потеря энергии за счет действия сил вязкости незначительна. В связи с этим принято считать, что единственным параметром, определяющим энергию пульсаций в инерционном интервале, является диссипация ε, измеряемая в $м^2/с^3$. Диссипация в данном случае характеризует скорость передачи энергии по спектру частот. Поскольку энергия измеряется в $м^2/с^2$, можно предположить, что $e \sim u'^2 \sim \varepsilon^\alpha l^\beta$ (где l — размер вихря).

Из этого соотношения могут быть получены два уравнения для расчета показателей степени α и β: для линейных величин $2=2\alpha+$ $+\beta$, а для времени $-2=-3\,\alpha$. Отсюда находим: $\alpha=2/3$; $\beta=2/3$. Таким образом, — $e \sim \varepsilon^{2/3} l^{2/3}$ или $e \sim \varepsilon^{2/3} n^{-2/3}$.

Спектральная плотность в инерционном интервале

$$S(n) \sim \varepsilon^{2/3} n^{-5/3}. \tag{7.46}$$

При увеличении частоты (т. е. при уменьшении размеров) вихрей роль вязкости, как уже указывалось, возрастает. В интервале максимальной диссипации турбулентность, согласно гипотезе А. Н. Колмогорова, определяется двумя параметрами: диссипацией и вязкостью ν. Использование этих двух параметров позволяет установить масштаб вихрей, на уровне которых происходит вязкая диссипация энергии:

$$l_\nu = (\nu^3/\varepsilon)^{1/4}. \tag{7.47}$$

Оценим величину масштаба диссипации l_ν. Поскольку

$$\varepsilon = \nu \overline{\left(\frac{du'_x}{dz}\right)^2} \sim \nu \left(\frac{u_*}{h}\right)^2,$$

где u_* — динамическая скорость,

получаем: $$l_\nu/h \sim 1/\sqrt{u_* h/\nu}.$$

Для условий высокоскоростного потока при $h \approx 1$ м, $i \approx 0{,}5$ скорость $u_* = \sqrt{ghi} = 2{,}2$ м/с. Подставляя эти значения, находим:

$$\frac{u_* h}{\nu} = \frac{2{,}2\cdot 1}{10^{-6}} = 2{,}2\cdot 10^6.$$

Таким образом,

$$\frac{l_\nu}{h} \approx \frac{1}{1{,}5\cdot 10^3} \approx 0{,}7\cdot 10^{-3}.$$

При глубине $h = 1$ м масштаб диссипации $l_\nu \approx 0{,}7$ мм. Макромасштаб турбулентности $L_т$ принято считать близким к размеру (глубине) потока. Следовательно, размеры турбулентных вихревых структур в высокоскоростном потоке изменяются в широких пределах (от h до $10^{-3}\,h$).

Спектральная плотность и ненормированная корреляционная функция содержат одинаковое количество информации о случайном процессе, представленной в различной форме. Корреляционная функция более удобна для измерений и анализа масштабов вихревых структур. С другой стороны, спектральная плотность дает ясное представление о распределении турбулентной энергии по частотам пульсации. Поэтому связь между корреляцией и спектром представляет большой интерес. В теории случайных функций [6] доказывается, что спектральная функция может быть получена cos-преобразованием ненормированной корреляции:

$$S(\omega) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\infty R(\Delta t) \cos \omega t \, dt,$$

где $\omega = 2\pi n$ — круговая частота.

Возможно также обратное преобразование:

$$R(\Delta t) = \int\limits_0^\infty S(\omega) \cos \omega t \, dt.$$

Поскольку изменение турбулентных пульсаций по времени носит случайный характер, интересно исследовать не только энергетические и пространственные, но также и вероятностные характеристики этих пульсаций. Основной вероятностной характеристикой случайного процесса является закон распределения вероятностей, который может быть представлен как в дифференциальной, так и в интегральной форме. Интегральная функция распределения $\Phi(u')$ определяется как вероятность того, что пульсация u' будет меньше некоторого заданного значения. Заданное значение u' выбирается в пределах между ее наибольшими и наименьшими значениями. Производная от интегральной функции распределения называется дифференциальным законом или плотностью распределения. Закон распределения вероятностей содержит полную информацию о случайной величине, однако часто бывает удобнее анализировать не сам закон, а его параметры, определяющие наиболее существенные его особенности. В качестве таких параметров используются так называемые моменты распределения. Начальным моментом распределения случайной величины является математическое ожидание. Если процесс пульсации представлен рядом дискретных значений случайной величины (что обычно и делается при статистической обработке на ЭВМ), математическое ожидание вычисляется по алгоритму

$$m_u = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} u,$$

где u — любая пульсирующая величина;
N — число ее дискретных значений.

Как правило, исследуются не сами случайные величины, а их отклонения от математического ожидания, которые называются центрированными величинами. Центрирование производится по следующему правилу:

$$u' = u - m_u.$$

Моменты центрированной случайной величины называются центральными моментами. Первый центральный момент равен нулю. Второй центральный момент называют дисперсией и вычисляют как

$$Д = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} u_i'^2}{N}.$$

Дисперсия является мерой рассеяния случайной величины относительно ее среднего значения и имеет размерность квадрата случайной величины. По методу своего определения дисперсия пропорциональна энергии турбулентных пульсаций e. Для того чтобы иметь меру рассеяния с размерностью измеряемой величины, пользуются среднеквадратичным отклонением $\sigma = \sqrt{Д}$.

Третий центральный момент является характеристикой симметричности распределения относительно математического ожидания. Этот момент вычисляется по алгоритму

$$m_3 = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} u_i'^3$$

и имеет размерность куба измеряемой величины. В качестве безразмерной характеристики используют коэффициент асимметрии

$$\mu_3 = \frac{1}{\sigma^3} m_3.$$

Четвертый центральный момент характеризует степень островершинности кривой распределения, которая связана с частотой появления пульсаций высокой интенсивности. Он вычисляется следующим образом:

$$m_4 = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} u_i'^4.$$

Обычно за количественную характеристику островершинности принимают эксцесс, который вычисляется по алгоритму

$$\mu_4 = m_4/\sigma_4 - 3.$$

Наиболее распространенным является так называемый нормальный закон распределения — закон Гаусса. Плотность распределения вероятностей в этом случае определяется соотношением

$$f(u') = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-u'^2/(2\sigma^2)}.$$

Для вычисления центральных моментов нормального распределения в теории вероятностей используется следующая формула:

$$m_к = (k-1)\sigma^2 m_{к-2}.$$

Согласно этой формуле для нормального распределения как первый, так и все другие нечетные моменты равны нулю. Второй и четвертый моменты

$$m_2 = \sigma^2; \quad m_4 = 3\sigma^4.$$

По теореме А. М. Ляпунова [6], распределение вероятностей приближается к нормальному, если случайная величина представляет собой сумму n независимых случайных величин при небольшой доле каждого слагаемого в общей сумме. Поскольку турбулентные пульсации в потоке являются результатом совместного действия многих случайных факторов, закон распределения их, по-видимому, не будет заметно отличаться от нормального закона. В непосредственной близости твердой границы вследствие нестационарности вязкого подслоя возникают концентрированные выбросы, дающие значительный вклад в общий пульсационный процесс, — здесь могут быть наиболее заметные отклонения от нормального закона распределения.

ГЛАВА 8. ТУРБУЛЕНТНОСТЬ ВЫСОКОСКОРОСТНЫХ ПОТОКОВ

§ 25. Стандарты турбулентных пульсаций скорости

Структура турбулентности, кинематические и динамические характеристики потока взаимосвязаны и взаимно определяют друг друга: особенности кинематики осредненного течения и динамики потока неизбежно отражаются на структуре турбулентности. Структура турбулентности определяется рядом статистических параметров, которые определяют не только количественные, но также и качественные стороны турбулентности. Характеристики турбулентности, найденные по измерениям продольной и вертикальной составляющих скорости, дают исчерпывающую информацию о турбулентной структуре плоского потока.

Закон распределения вероятностей турбулентных пульсаций скорости u_x' или u_z' характеризует вероятность P появления всех возможных значений амплитуды пульсационных составляющих скорости. Экспериментальное исследование законов распределения вероятностей позволяет установить, насколько близки турбулентные пульсации скорости к классу случайных процессов, подчиняющихся нормальному закону распределения. Установить это важно, поскольку исследование нормальных случайных функций значительно упрощается в связи с тем, что закон распределения в этом случае определяется лишь математическим ожиданием и вторым моментом. Примеры полученных законов распределения продольных и вертикальных пульсаций скорости в интегральной форме для шероховатого канала даны на рис. 8.1. По оси абсцисс отложено отношение $(u'/\sqrt{\overline{u'^2}})$ пульсации скорости к ее среднеквадратичному значению. По оси ординат дана интегральная вероятность появления всех пульсаций, интенсивность которых меньше заданного уровня.

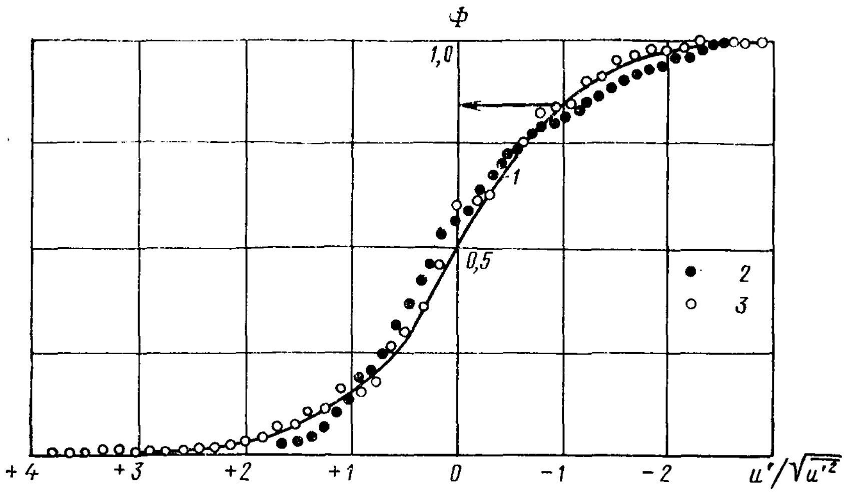


РИС. 8.1

1 — нормальное распределение; 2 — вертикальные пульсации z/h=0,53; 3 — продольные пульсации z/h=0,14

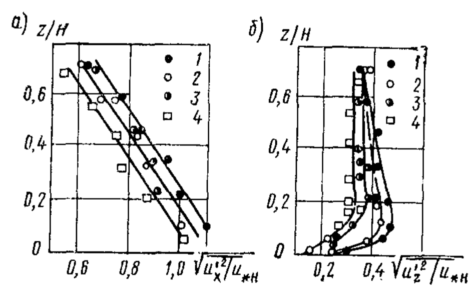


РИС. 8.2

а — продольные пульсации; б — вертикальные пульсации; 1 — i=0,072; 2 — i=0,150; 3 — i=0,232; 4 — i=0,370

Так, например, интегральная вероятность появления в потоке всех пульсаций, меньших чем $\sqrt{\overline{u'^2}}$ [т. е. при $u'/\sqrt{\overline{u'^2}} = \pm 1$], составляет примерно 0,15 (см. рис. 8.1).

Сравнение показывает, что полученные экспериментальные данные удовлетворительно описываются нормальным законом распределения вероятностей. Исследование закона распределения вероятностей обычно сводится к исследованию поведения его определяющих характеристик — центральных моментов. Первый центральный момент для любой случайной величины равен нулю по определению. Второй центральный момент, качественно определяющий степень рассеяния случайной величины, является важной характеристикой случайного процесса и в данном случае определяет стандарт пульсаций скорости. Типичное распределение стандарта продольных пульсаций u_x' и стандарта вертикальных пульсаций скорости u_z' по глубине высокоскоростного открытого потока приведено на рис. 8.2. Стандарт пульсаций здесь отнесен к динамической скорости $u_{*H} = \sqrt{gH_i}$, где H — глубина высокоскоростного потока.

Рассмотрение этих распределений позволяет отметить их следующие характерные особенности: стандарт продольных пульсаций максимален вблизи дна канала. К поверхности величина его уменьшается по линейному закону. Стандарт вертикальных пульсаций имеет максимум в точке потока $z/H \approx 0{,}25$. От точки максимума к дну канала интенсивность вертикальных пульсаций падает вследствие стабилизирующей роли дна канала. По направлению к свободной поверхности величина стандарта вертикальных пульсаций изменяется мало.

Нормирующим параметром при анализе стандартов пульсаций скорости обычно принимается динамическая скорость $u_* = \sqrt{\tau_0/\rho}$ (где τ_0 — касательные напряжения на дне). Для открытых потоков такую нормировку предложил Б. А. Фидман. Как известно, турбулентные касательные напряжения (см. гл. 7) связаны с пульсациями скорости соотношением

$$\tau = -\rho\overline{u_x' u_z'}.$$

Вблизи дна на верхней границе вязкого подслоя (см. гл. 2) турбулентные касательные напряжения

$$\tau_0 \approx \tau_{max} = \left(-\rho\overline{u_x' u_z'}\right)_{max}.$$

Обычно, следуя Л. Прандтлю, считают, что пульсации скорости u_x' пропорциональны u_z'. Тогда

$$u_*^2 \approx \overline{u_x'^2} \approx \overline{u_z'^2}.$$

Отсюда следует, что если стандарты пульсаций относить к динамической скорости, можно ожидать одинакового распределения стандартов при различных касательных напряжениях на дне. Однако при использовании для нормирования динамической скорости u_{*H}, вычисленной по глубине потока H, экспериментальные данные обнаруживают отчетливую раскладку по уклону (или числу Фруда). Нормировка динамической скоростью u_*, вычисленной по толщине нижнего динамического слоя ($u_* = \sqrt{ghi}$), позволяет получить универсальные профили стандартов пульсаций как продольной, так и вертикальной составляющих скорости. Если в качестве характерного геометрического параметра использовать толщину вытеснения δ_1 (см. гл. 5), то оказывается возможным сопоставить распределение стандартов пульсаций в высокоскоростном потоке, в пограничном слое на плоской пластине и в трубе (рис. 8.3). Толщина вытеснения δ_1 может быть установлена по определению в виде $\delta_1/\delta = 1 - U/u_{max}$, где U/u_{max} вычисляется с использованием соотношений (4.20) или (4.22).

Выбор δ_1 в качестве геометрического параметра оказывается оправданным, поскольку на величину δ_1 мало влияет «срезка» верхней части пограничного слоя, характерная для высокоскоростного потока. Распределения стандартов пульсаций для рассмотренных течений оказываются совпадающими в той части, где совпадают или оказываются близкими профили осредненных скоростей, т. е. в нижнем динамическом слое.

Вблизи свободной поверхности в высокоскоростном потоке наблюдается некоторое увеличение интенсивности турбулентности по сравнению с пограничным слоем подобно тому, как это имеет место в трубах. Увеличение интенсивности турбулентности в трубах вызывается действием диаметрально противоположной поверхности трения, а в случае высокоскоростного потока — взаимодействием его с воздухом вблизи свободной поверхности. Такое поведение стандартов пульсаций у поверхности потока подчеркивает обоснованность двухслойной модели. Косвенным подтверждением целесообразности этой модели является также возможность получения универсального профиля стандартов пульсаций при нормировке их динамической скоростью u_*. Результаты измерений стандартов продольных и вертикальных пульсаций в высокоскоростном потоке согласуются с данными Х. Рейхардта для прямоугольной трубы [8] и с данными С. Коррсина и А. Кистлера для пограничного слоя на шероховатой пластине [8].

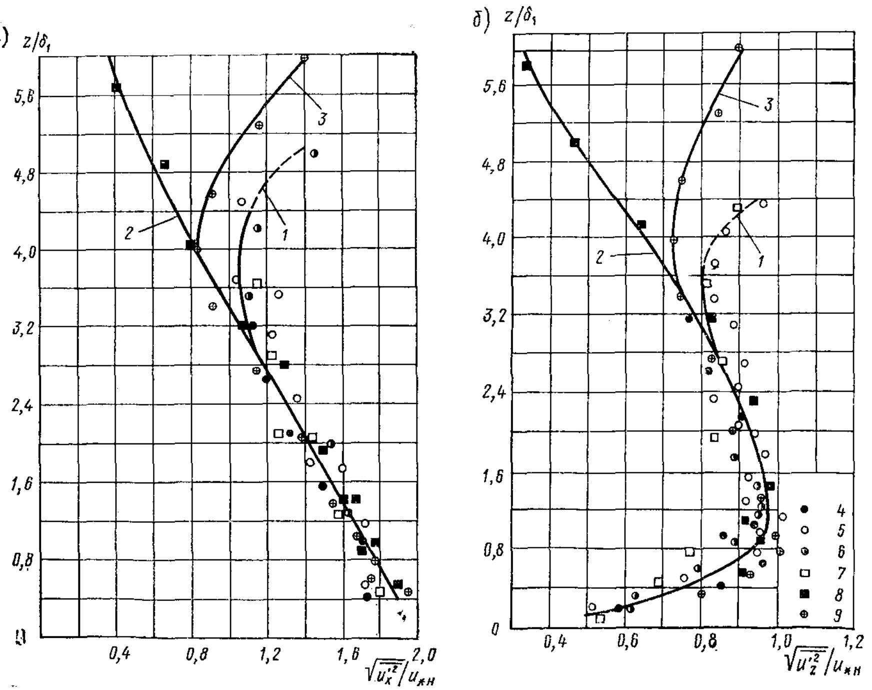


РИС. 8.3

а — распределение стандартов продольных пульсаций скорости; б — то же, вертикальных пульсаций скорости; 1 — в шероховатом канале; 2 — в пограничном слое; 3 — в трубе; 4—7 — данные В. С. Боровкова, шероховатый канал (4 — i=0,072; 5 — i=0,150; 6 — i=0,232; 7 — i=0,370); 8 — данные С. Коррсина и А. Кистлера, пограничный слой на шероховатой пластине; 9 — данные Х. Рейхардта, прямоугольная труба

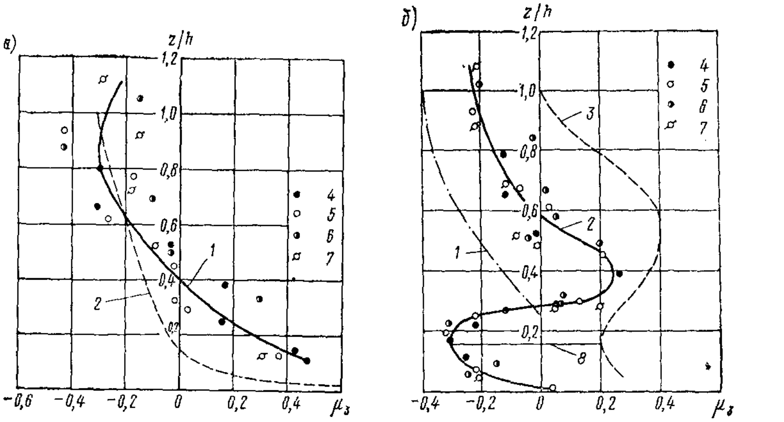


РИС. 8.4

а — коэффициент асимметрии продольных пульсаций; б — коэффициент асимметрии вертикальных пульсаций; 1—5 — данные В. С. Боровкова (1 — шероховатый канал, k_s=0,35 см; 2 — то же, i=0,072; 3 — то же, i=0,150; 4 — то же, i=0,232; 5 — то же, i=0,370); 6 — данные Ж. Конт-Белло, гладкий напорный канал; 7 — данные К. Ханжалича и Б. Лаундера, шероховатый напорный канал; 8 — вершина выступов шероховатости (среднее положение)

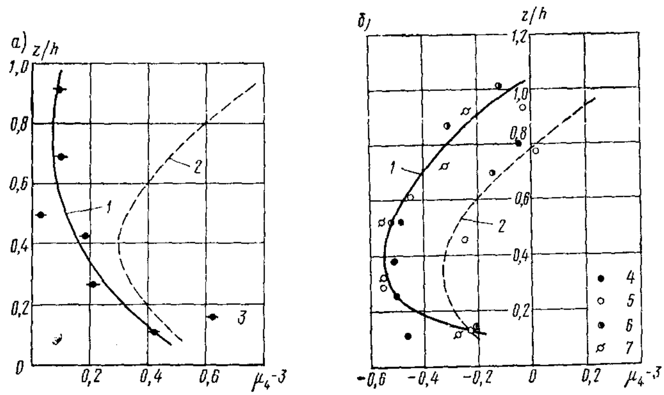


РИС. 8.5

а — эксцесс продольных пульсаций; б — эксцесс вертикальных пульсаций; 1 — данные К. Ханжалича и Б. Лаундера, шероховатый напорный канал; 2 — данные Ж. Конт-Белло, гладкий напорный канал; 3—7 — данные В. С. Боровкова (3 — шероховатый канал; 4 — i=0,072; 5 — i=0,150; 6 — i=0,232; 7 — i=370)

Нечетные моменты распределения могут служить для характеристики асимметрии распределения вероятности пульсаций скорости, простейший из них — третий центральный момент. Безразмерный коэффициент асимметрии μ_3 представляет собой частное от деления третьего центрального момента на куб стандарта пульсаций, который равен нулю при симметричном распределении пульсаций скорости относительно математического ожидания. Экспериментальные данные о величине коэффициента асимметрии в различных точках по глубине потока в гладком и шероховатом каналах для продольных пульсаций u'_x и для вертикальных пульсаций u'_z представлены на рис. 8.4. По своей абсолютной величине коэффициент асимметрии продольных пульсаций скорости невелик. У дна потока он положителен, при $z/h \approx 0{,}3$ близок к нулю, а при бо́льших расстояниях от дна становится отрицательным. Положительность коэффициента асимметрии при $z/h < 0{,}3$ означает, что для этой зоны потока среди максимальных отклонений в случайном процессе турбулентных пульсаций чаще встречаются случаи интенсивных выбросов «ускорения», т. е. в сторону бо́льших значений мгновенной скорости (по отношению к осредненному значению). При отрицательном коэффициенте асимметрии более частыми из максимальных являются случаи «торможения» скорости по отношению к скорости осредненного течения. Коэффициент асимметрии вертикальных пульсаций скорости отрицателен в нижней зоне потока, положителен при $z/h = 0{,}3 \div 0{,}6$, а вблизи свободной поверхности снова становится отрицательным. Полученные экспериментальные данные об изменении коэффициента асимметрии по глубине бурного потока качественно согласуются с данными измерений Ж. Конт-Белло в гладком и К. Ханжалича и Б. Лаундера в шероховатом канале.

Четвертый центральный момент характеризует степень островершинности кривой распределения вероятностей. Количественно островершинность распределения описывается обычно с помощью эксцесса или коэффициента сплющивания. Для нормального распределения коэффициент сплющивания равен нулю. Если эксцесс больше нуля, то распределение вероятностей имеет более острую вершину, чем нормальное, и наоборот. Экспериментальные данные об изменении величины эксцесса пульсаций u'_x и u'_z по глубине потока приведены на рис. 8.5. Эксцесс продолных пульсаций отрицателен в толще потока и стремится к нулю у дна и у свободной поверхности. Эксцесс вертикальных пульсаций положителен и при $z/h > 0{,}5$ становится близким к нулю.

Анализ данных показывает, что по своим вероятностным качествам случайный процесс турбулентных пульсаций составляющих скорости наиболее близок к процессам с нормальным распределением вероятностей лишь в точке потока $z/h \approx 0{,}25$. В слоях, более отдаленных от дна, распределение вероятностей пульсаций также не сильно отличается от нормального. Вертикальные пульсации в этих слоях потока ближе, чем продольные, следуют нормальному закону распределения. В зоне, близкой к дну потока ($z/h < 0{,}25$), вероятность распределения турбулентных пульсаций скорости не подчиняется нормальному закону распределения.

§ 26. Масштабы турбулентности

Исследование масштабов турбулентности, т. е. характерных размеров турбулентных образований (молей), сохраняющих свою индивидуальность на значительном отрезке проходимого пути, необходимо, в частности, для понимания процессов переноса и рассеяния энергии турбулентным потоком. Различают продольный, вертикальный и поперечный пространственные масштабы, соотношения между которыми определяют особенности вихревых структур. Особый интерес представляет изучение максимального размера вихревых структур — макромасштаба и минимального размера — микромасштаба турбулентности (см. гл. 7).

Экспериментальное исследование продольных масштабов турбулентности по результатам измерений вертикальной и продольной пульсационных составляющих скорости возможно путем анализа автокорреляционных функций. Временны́е корреляции или автокорреляции характеризуют связь между значениями пульсаций скорости в данной точке потока в различные моменты времени. Поскольку в продольном направлении равномерный поток однороден, автокорреляция есть симметричная функция одного аргумента. Аргументом этой функции является t — параметр сдвига или задержка по времени. Автокорреляционная функция позволяет определить интегральный временной масштаб или макромасштаб турбулентности в направлении осредненного течения $T_x = \int_0^\infty R(t)\mathrm{d}t$.

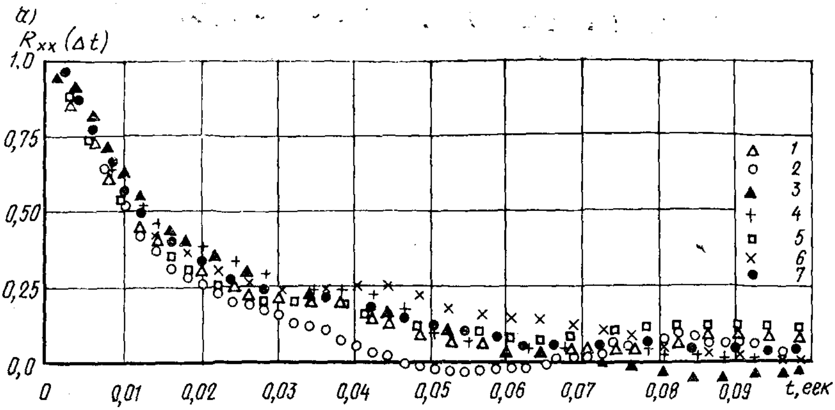
Между интегральным временным масштабом и пространственным интегральным масштабом обычно принимается простая связь [см. соотношение (7.45)]

$$L_x = uT_x. \tag{8.1}$$

В потоках с поперечным сдвигом между временным и пространственным масштабом может существовать в зависимости от уровня турбулентности более сложная связь, на что указывает И. О. Хинце [8]. Поэтому представляется более оправданным сравнивать непосредственно нормированные автокорреляционные функции, используя приближенное соотношение (8.1) лишь для оценок.

Анализ автокорреляций для высокоскоростного потока позволяет отметить их общую особенность — слабую изменяемость $R(t)$ по глубине в основной толще потока для $z/H > 0{,}15$ как для продольных, так и для вертикальных пульсаций скорости. Выбор H в качестве характерного геометрического размера при анализе масштабов турбулентности связан с тем, что вихревые структуры могут распространяться во всей толще потока. Непосредственно у дна канала наблюдается заметное уменьшение макромасштаба турбулентности. Типичные нормированные автокорреляции для продольной и вертикальной составляющих скорости приведены на рис. 8.6. Более тщательный анализ автокорреляций позволяет отметить слабую тенденцию к увеличению масштаба T_x максимальных вихрей с увеличением расстояния от дна потока. При этом временные масштабы средних и малых вихревых структур сохраняются неизменными.

Инвариантность автокорреляции $R(t)$ по глубине потока для $z/H > 0{,}15$ позволяет сделать вывод о том, что продольный про-



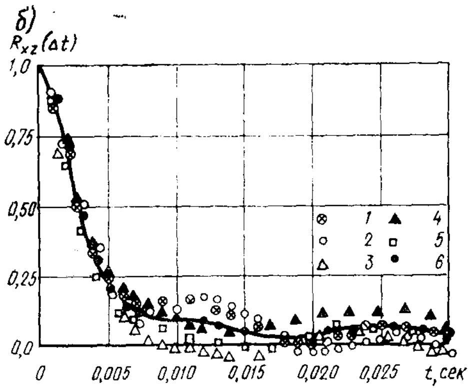


РИС. 8.6

а — автокорреляция продольных пульсаций; 1 — $z/H=0,146$; 2 — $z/H=0,268$; 3 — $z/H=0,380$; 4 — $z/H=0,512$; 5 — $z/H=0,635$; 6 — $z/H=0,756$; 7 — инварианта; б — автокорреляция вертикальных пульсаций: 1 — $z/H=0,22$; 2 — $z/H=0,341$; 3 — $z/H=0,463$; 4 — $z/H=0,586$; 5 — $z/H=0,707$; 6 — инварианта

странственный макромасштаб турбулентности в основной толще потока пропорционален осредненной местной скорости течения. Аналогичный вывод сделал Е. М. Минский на основе анализа экспериментальных данных. Постоянство автокорреляции $R(t)$ потока за пределами вязкого подслоя обнаруживается также по экспериментальным данным, полученным Лауфером, Шубауэром и Клебановым [8], Ж. Конт-Белло и др. Инвариантность автокорреляции $R(t)$ по глубине потока позволяет получить более надежные данные по продольным макромасштабам турбулентности сопоставлением автокорреляций, осредненных по z/H. Это повышает надежность и точность вычисления автокорреляционных функций вследствие

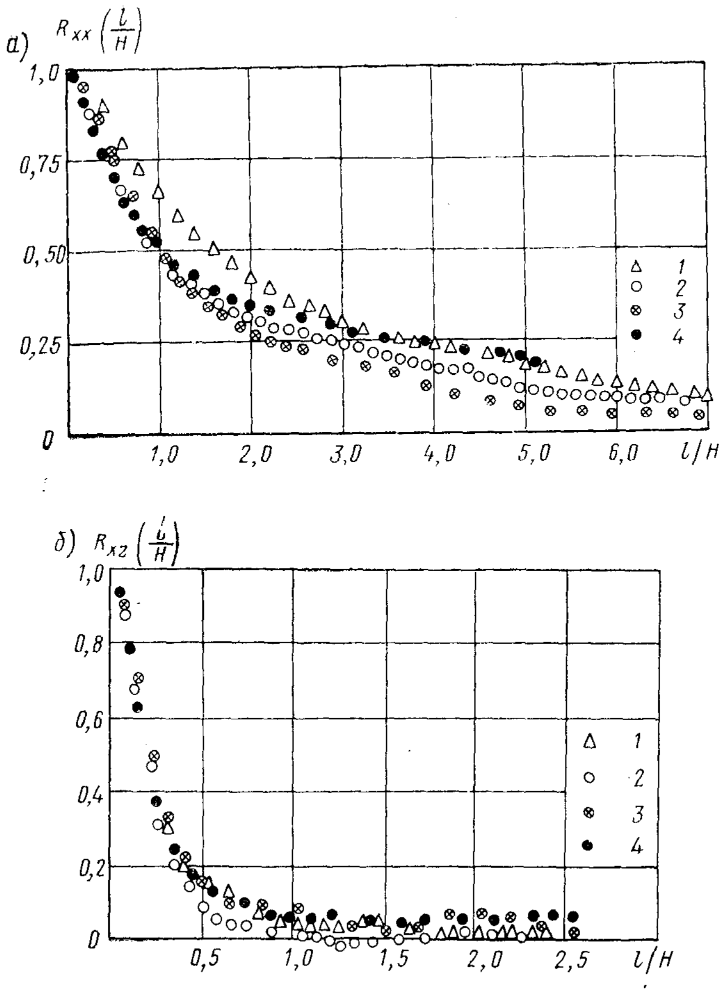


РИС. 8.7

а — автокорреляция продольных пульсаций в каналах с различными уклонами; б — автокорреляция вертикальных пульсаций в каналах с различными уклонами; 1 — $i=0,072$; 2 — $i=0,150$; 3 — $i=0,232$; 4 — $i=0,370$

использования более представительных статистик. Нормированные автокорреляционные функции, вычисленные по результатам измерений продольных u'_x и вертикальных u'_z пульсаций скорости в каналах с различным уклоном, приведены на рис. 8.7. Автокорреляции не обнаруживают систематического влияния уклона, если использовать в качестве геометрического параметра $l = tU$ (U— средняя по сечению скорость потока). Исследование автокорреляций при различных наполнениях и различной абсолютной шероховатости канала подтвердило универсальность полученных автокорреляционных функций для различных условий течения при использовании в качестве параметра безразмерного отношения l/H (рис. 8.8).

Анализ универсальных автокорреляционных функций позволяет установить, что средний макромасштаб вертикальных пульсаций скорости составляет $L_{xz} \approx (0{,}3 \div 0{,}4)\ H$. Продольный макромасштаб турбулентности, определенный по измерениям пульсаций скорости u'_x, оказался близким к L_{xx} $(1{,}75 \div 2)\ H$. На независимость безразмерных макромасштабов L/H от числа Re и шероховатости

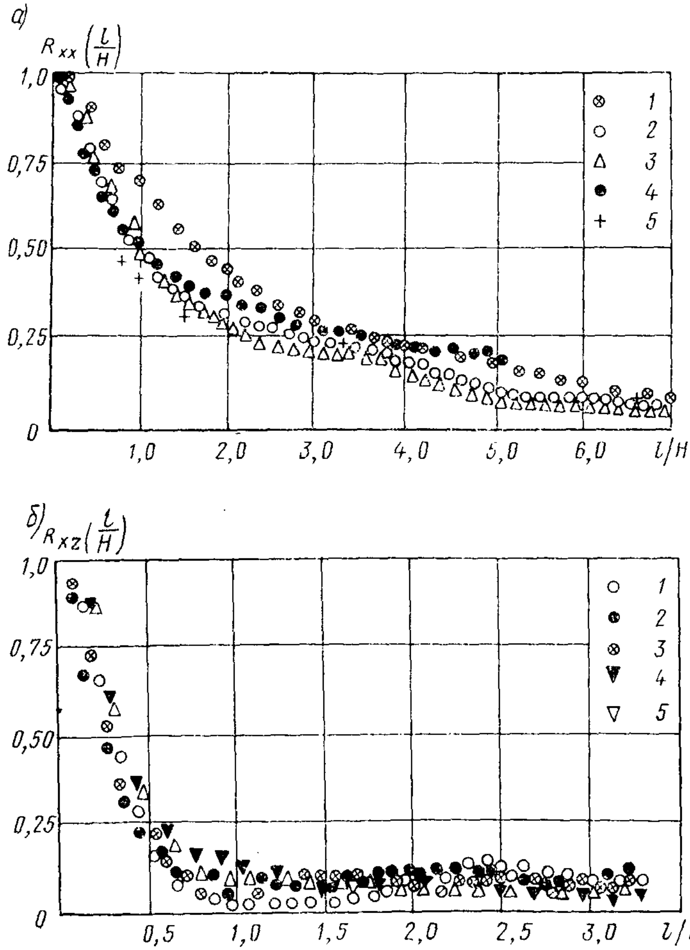


РИС. 8.8

а — универсальные автокорреляции (H/k_s=const): 1—4 — данные В. С. Боровкова, шероховатый канал (1 — i=0,072; 2 — i=0,150; 3 — i=0,232; 4 — i=0,370); 5 — данные А. Иппена, гладкий канал; б — универсальные автокорреляции (H=idem): 1—3 — данные В. С. Боровкова, шероховатый канал (1 — H/k_s=5,5; 2 — H/k_s=8,3; 3 — H/k_s=13); 4, 5 — то же, гладкий канал (4 — оргстекло; 5 — дерево) указывает М. Рао по результатам своих опытов в открытом канале. Полученные результаты измерений автокорреляции согласуются также с данными измерений А. Иппена и Ф. Рейчлена в высокоскоростном открытом потоке при числах Фруда $10 \div 17$ (см. рис. 8.8). Значительно бо́льшая величина макромасштаба продольных пульсаций по сравнению с масштабом вертикальных пульсаций характерна и для течения в пограничном слое плоской пластины. На основании этого А. Таунсендом выдвинута гипотеза о существовании в потоке вихрей в форме длинных круговых цилиндров с осью, параллельной вектору осредненной скорости. Экспериментально полученные автокорреляции отвечают этой схеме.

При идентичности автокорреляций в открытом потоке и в пограничном слое плоской пластины следует отметить некоторое количественное расхождение в величинах безразмерных макромасштабов, причем L/H для открытого потока оказывается существенно больше, чем L/δ для пограничного слоя. Это различие может быть объяснено тем, что глубина открытого потока H не эквивалентна толщине пограничного слоя. Если L_x относить к толщине вытеснения δ_1, то полученные величины макромасштабов турбулентности в высокоскоростном потоке и в пограничном слое пластины оказываются близкими.

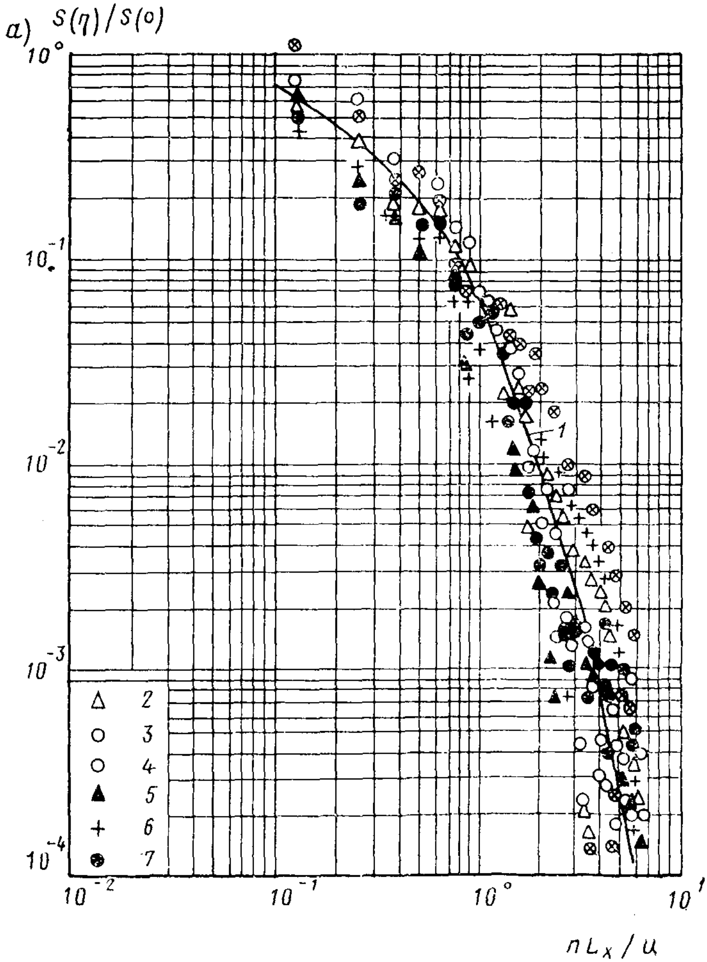
§ 27. Энергетические спектры

Энергетический спектр (или спектральная плотность) турбулентных пульсаций скорости потока характеризует распределение кинетической пульсационной энергии по частотному диапазону пульсаций. Спектральная плотность и ненормированная корреляционная функция связаны известным соотношением $S(\eta) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty R_0(\Delta t)\cos 2\pi n t\,dt$, представляющим собой разложение четной функции $R_0(\Delta t)$ на сумму элементарных гармоник с непрерывным спектром (см. гл. 7). Спектральная плотность представляет интерес для инженерных расчетов динамики сооружений и может оказаться полезной при анализе устойчивости потока и особенно при исследовании процесса аэрации высокоскоростного потока.

Использование в качестве параметра числа Струхаля $nL_x/\bar{u}$, вычисленного по макромасштабу турбулентности L_x, позволяет получить инвариантные при разных z/H спектры продольных и вертикальных пульсаций для основной толщи потока (рис. 8.9; $z/H > 0{,}15$). Рассмотрение экспериментальных данных позволяет отметить идентичность спектров в разных точках по глубине потока.

В связи с отсутствием систематических изменений в спектрах при различных z/H исследовалось влияние интегральных параметров потока на осредненный по глубине спектр (при $z/H > 0{,}15$). Это позволило значительно уменьшить погрешность определения спектра и повысить надежность полученных результатов. Примеры спектров продольных и вертикальных пульсаций в шероховатом канале при постоянной глубине и сильно изменяющемся уклоне (от 7,2 до 37%) представлены на рис. 8.10.

Спектральные плотности для потоков в каналах с различной абсолютной и относительной шероховатостью при постоянном уклоне дна канала приведены на рис. 8.11. Анализ данных (рис. 8.10 и 8.11) позволяет отметить, что использование $\eta = nL_x/\bar{u}$ в качестве параметра сохраняет универсальность спектров в широком диапа-

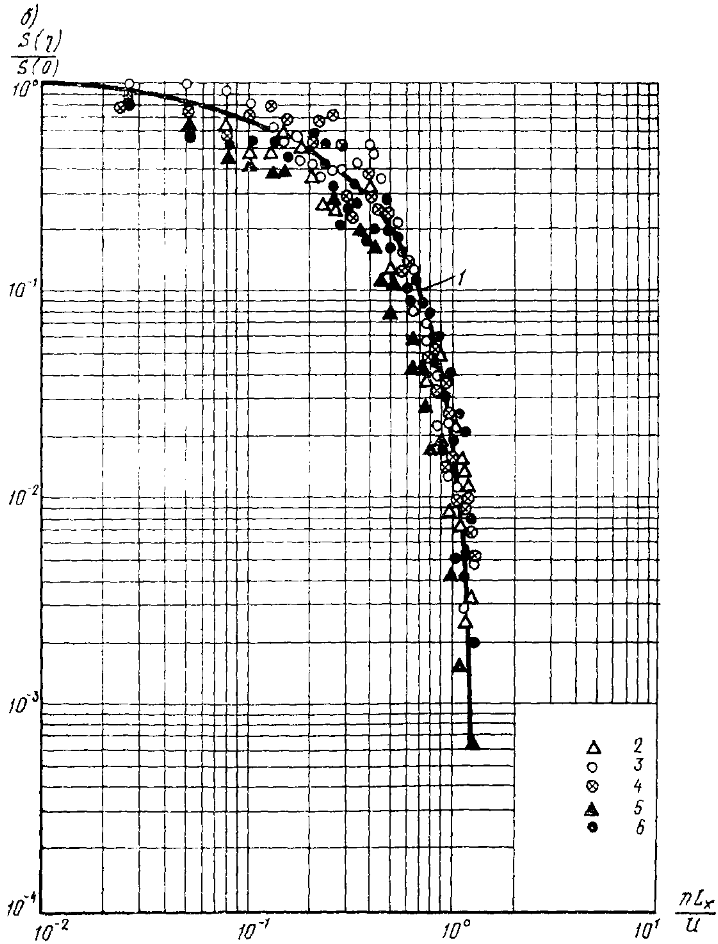


•РИС. 8.9

а — спектры продольных пульсаций скорости в разных точках по глубине потока: 1 — 5 — $z/H=0{,}512$; 6 — $z/H=0{,}635$; 7 — $z/H=0{,}756$; б — спектры вертикальных пульсаций скорости;

зоне изменения уклона дна и шероховатости канала. Некоторый разброс в спектрах вертикальных пульсаций может объясняться неточностью определения числа Струхаля. Форма полученного универсального спектра продольных пульсаций скорости позволяет выделить три характерные области с различной степенью зависимости спектральной плотности от частоты пульсаций:

1. Низкочастотная или энергосодержащая область спектра, определяемая энергией больших вихрей, движение которых связано с интегральными условиями течения и не зависит от действия сил вязкости. Согласно Ш. Чену [8], для этого участка спектра характерно непосредственное влияние осредненного движения на наиболее



осредненный спектр; шероховатый канал: 2 — $z/H=0,146$; 3 — $z/H=0,268$; 4 — $z/H=0,390$; рости: 1 — осредненный спектр; 2 — $z/H=0,22$; 3 — $z/H=0,341$; 4 — $z/H=0,463$; 5 — $z/H=0,586$; 6 — $z/H=0,707$

крупные вихревые структуры. При этих условиях спектральная плотность $S(\eta) \sim n^{-1}$, где n — частота пульсаций. Анализ универсального спектра продольных пульсаций показывает, что энергосодержащая часть спектра сохраняется до значений $nL_x/\bar{u} = (0{,}3 \div 0{,}5)$.

2. Среднечастотная область спектра (область универсального равновесия) определяется энергией вихрей среднего масштаба, на-

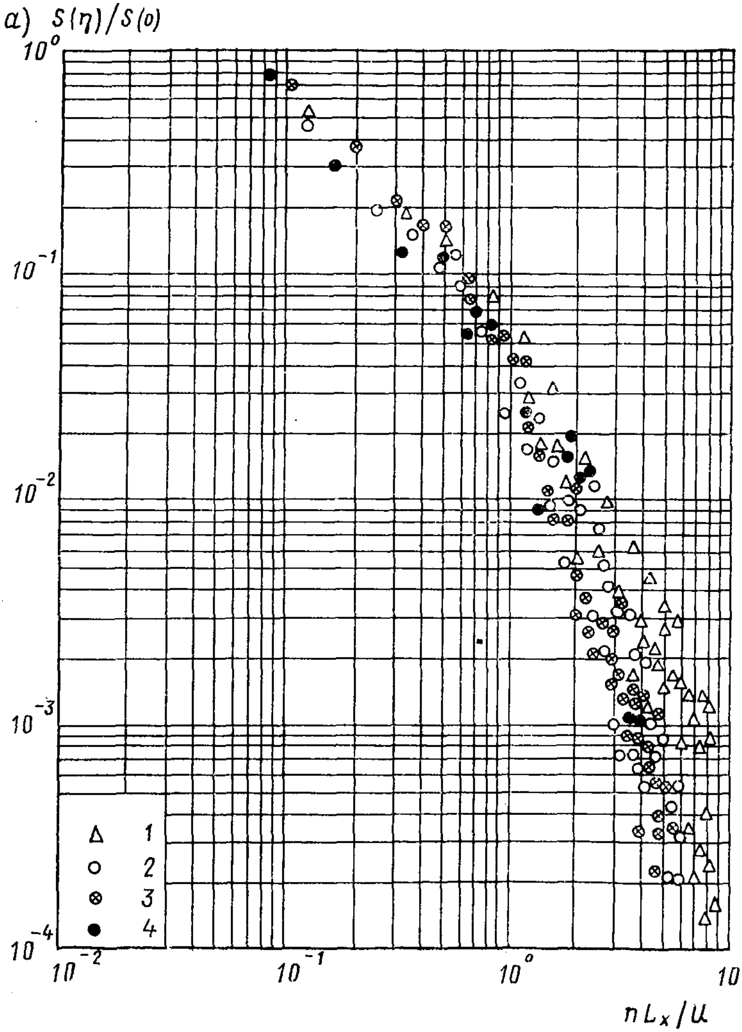
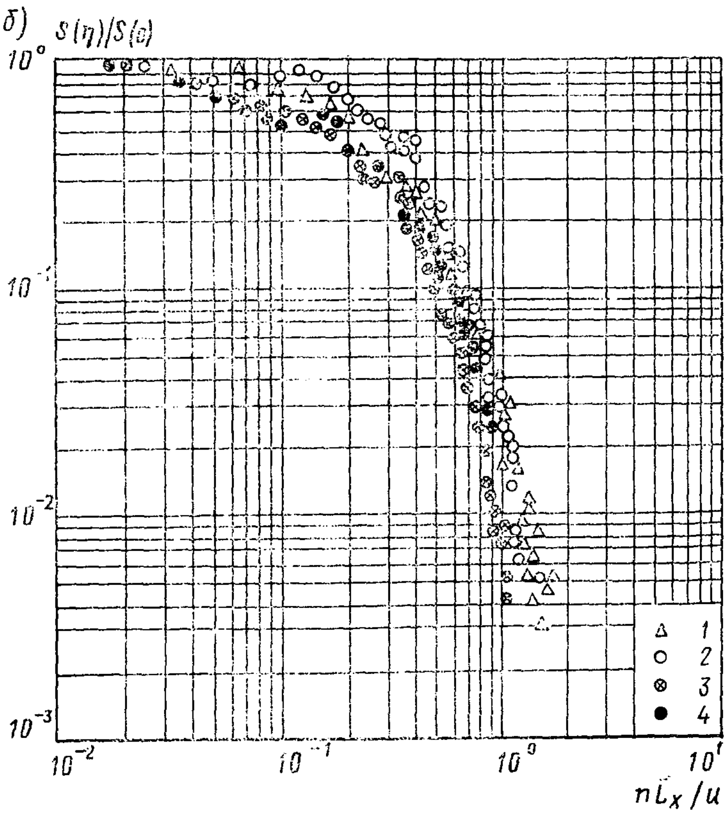


РИС. 8.10

а — спектры продольных пульсаций скорости в каналах с разными уклонами; б — 2 — i=0,150; 3 — i=0,232; 4 — i=0,370 ходящихся в статистическом равновесии и обладающих свойствами локальной изотропии. Это равновесие названо А. Н. Колмогоровым универсальным, поскольку турбулентность в этой зоне не зависит от внешних условий и определяется лишь скоростью диссипации энергии турбулентности. Согласно теоретическим расчетам А. М. Обухова и В. Гейзенберга, спектральная плотность $S(\eta)$ в этом случае оказывается пропорциональной $n^{-5/3}$. По Ш. Чену, этот закон изменения спектральной плотности соответствует малым градиентам скорости при незначительном влиянии первичного движения потока на вихревые структуры указанного масштаба. Экспериментальный спектр продольных пульсаций следует закону «(—5/3)» в диапазоне чисел $nL_x/\bar{u}$ от 0,5 до 2.

3. Высокочастотная область спектра (область вязкой диссипации) формируется вихрями малых размеров, движение которых управляется исключительно действием сил вязкости и не подвергается влиянию осредненного течения. Для этой области В. Гейзенбергом



спектры вертикальных пульсаций скорости в каналах с разными уклонами: 1 — i=0,072;

получен закон изменения спектральной плотности в виде $S(\eta) \sim n^{-7}$. Экспериментальный спектр обнаруживает переход к закону «(—7)» лишь у верхней границы исследованного частотного диапазона при $nL_x/\bar{u} > 4$. Следует отметить качественное и количественное совпадение универсального спектра продольных пульсаций для высокоскоростного потока со спектром, полученным Ф. Клебановым

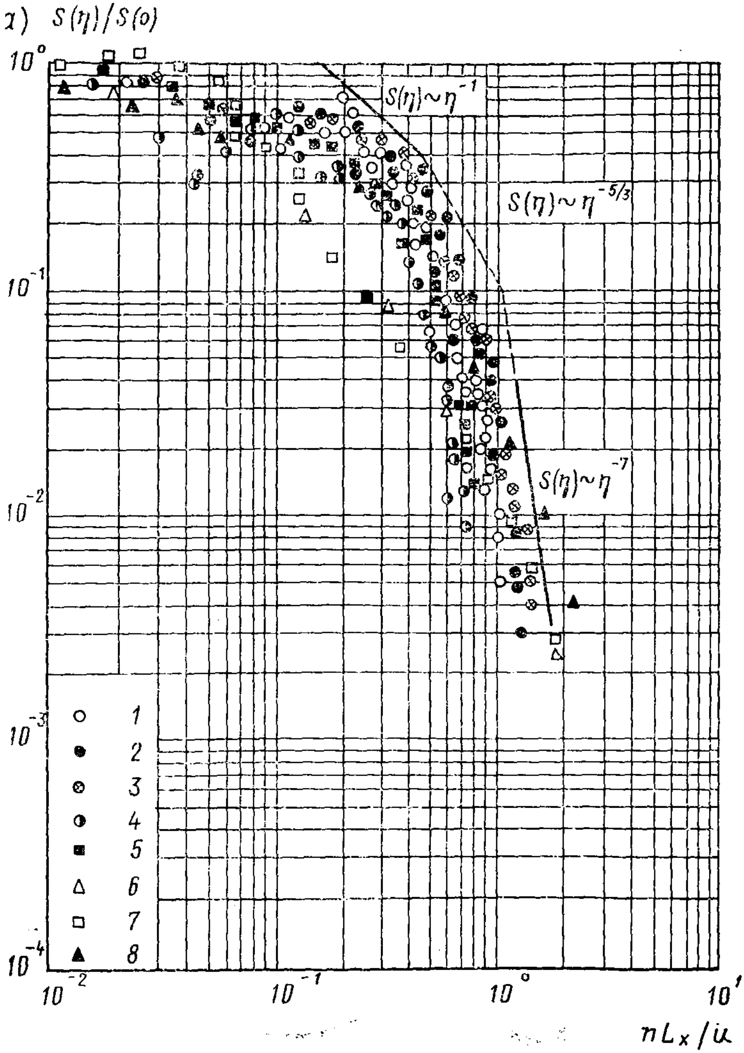


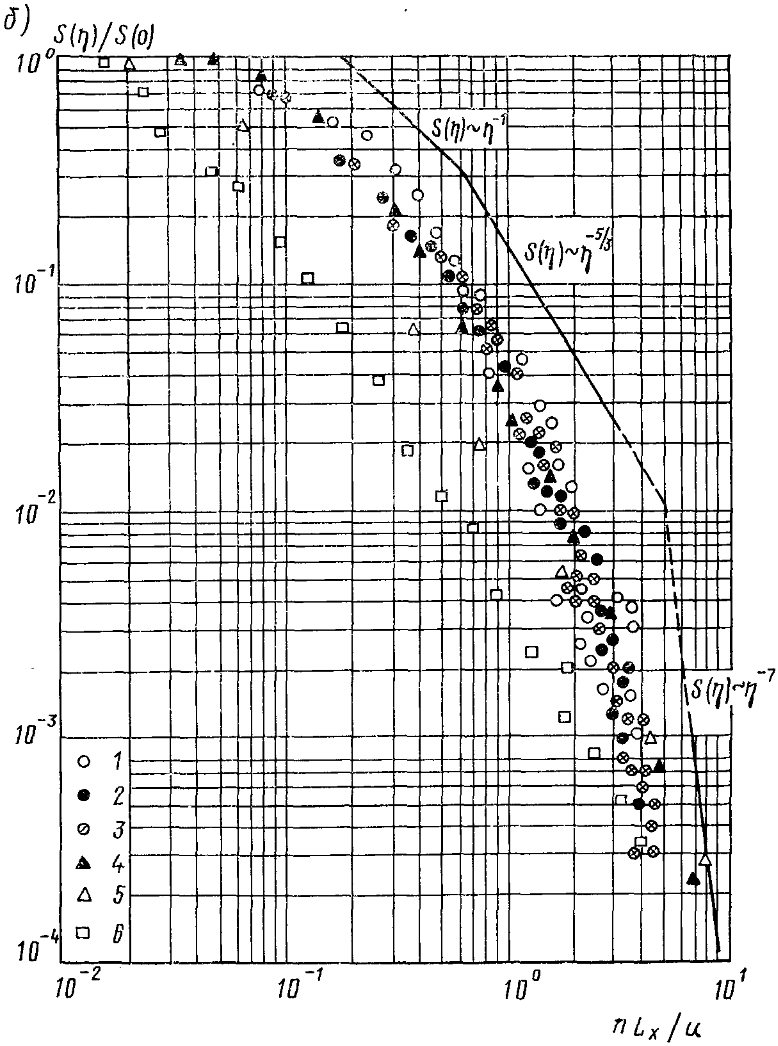
РИС. 8.11

а — спектры вертикальных пульсаций скорости: 1—3 — данные В. С. Боровкова, канал (4 — оргстекло, 5 — дерево); 6 — данные Ж. Конт-Белло, гладкий напорный канал, П. Мери, пограничный слой, $\Delta z/\delta=0,2$;

1—3 — данные В. С. Боровкова ($1 - H/k_s=5,5$; $2 - H/k_s=8,3$; $3 - H/k_s=13$); 4 — данные гладкий напорный канал; $z/r=0,335$; 6 — данные Дж. Лауфера, гладкие трубы, $z/r=0,28$

и З. Диль [8] в пограничном слоем плоской пластины, и некоторое расхождение с данными Дж. Лауфера [8] и Ж. Конт-Белло для напорного канала.

Спектр вертикальных пульсаций по своей форме отличается от спектра продольных пульсаций более слабой изменяемостью в диапазоне малых частот, малой протяженностью области локальной изотропии и более резким переходом к закону изменения спектральной плотности «(—7)». Видимо, малой протяженностью области ло-



шероховатый канал ($1 - H/k_s=5{,}5$; $2 - H/k_s=8{,}3$; $3 - H/k_s=13$); 4, 5 — то же, гладкий $z/r=0{,}67$; 7 — данные Дж. Лауфера, гладкие трубы, $z/r=0{,}69$; 8 — данные Ж. Шона и б — спектры продольных пульсаций скорости при различной шероховатости канала: Ф. Клебанова и З. Диль, пограничный слой: $z/\delta=0{,}57$; 5 — данные Ж. Конт-Белло, кальной изотропии в спектре вертикальных пульсаций скорости объясняется тот факт, что некоторые исследователи (Дж. Лауфер и Ф. Клебанов) вовсе не отметили в этом спектре области с законом изменения «(—5/3)». Ш. Чен объясняет различие в спектрах тем, что масштабы и интенсивность вертикальных пульсаций скорости существенно меньше масштабов и интенсивности продольных пульсаций.

По данным К. Лейса, двухмерный характер течения определяет существование участка с законом изменения «(—3)» в инерционной области спектра. Оказалось, что экспериментальные данные близки к этому закону на участке перехода от инерционного к вязкому интервалу спектра.

Следует отметить качественное и количественное совпадение спектра вертикальных пульсаций скорости высокоскоростного открытого потока с аналогичным спектром, полученным французскими исследователями Ж. Шоном и П. Мери в пограничном слое на гладкой стенке большой аэродинамической трубы.

Полученные спектры позволили оценить величины микромасштабов турбулентности. Микромасштаб турбулентности $l_{\text{т}}$ характеризует среднее расстояние, в пределах которого мгновенная скорость изменяется на величину стандарта. Микромасштаб турбулентности $l_{\text{т}}$ связан со спектральной плотностью следующим соотношением:

$$\frac{1}{l_{\text{т}}}=\frac{4\pi^2}{\overline{U}^2}\int\limits_0^\infty n^2\,S(n)\,\mathrm{d}n,$$

где $S(n)$ — спектральная плотность, нормированная дисперсией пульсации.

Переход к параметру $\eta = nL/\overline{U}$, который оказался удобным при анализе спектров, позволяет определить отношение $L/l_{\text{т}}$ следующим образом:

$$\frac{L}{l_{\text{т}}}=4\pi\left[\int\limits_0^\infty \eta^2\,\frac{S(\eta)}{S(0)}\,\mathrm{d}\eta\right]^{1/2}.$$

Интегрирование полученного спектра вертикальных пульсаций скорости показало, что $L_{xz}/l_{\text{т}xz} = 2{,}25$, т. е. $l_{\text{т}xz}/H = 0{,}15 \div 0{,}23$. Интегрированием спектра продольных пульсаций находим, что соотношение продольного макро- и микромасштабов $L_{xx}/l_{\text{т}xx} = 6{,}25$, т. е. $l_{\text{т}xx}/H = 0{,}25 \div 0{,}3$. Соотношение микромасштабов оказывается близким к известному соотношению для изотропной турбулентности $l_{\text{т}xx}=\sqrt{2}\,l_{\text{т}xz}$. Сопоставление микромасштабов продольных и вертикальных пульсаций скорости позволяет отметить значительно меньшую анизотропию мелких вихрей по сравнению с анизотропией крупных вихрей. Этот экспериментальный факт согласуется с общими теоретическими представлениями, указывающими, на то, что малые вихри практически не подвергаются влиянию осредненного течения.

Отмечая совпадение спектров высокоскоростного потока с аналогичными спектрами для пограничного слоя, можно еще раз подчеркнуть сходство внутренней структуры этих двух течений. Замеченное расхождение спектров высокоскоростного потока и спектров в напорном канале указывает на некоторое отличие не только в осредненной кинематической, но также и в турбулентной структуре этих потоков.

§ 28. Турбулентные касательные напряжения

Турбулентные касательные напряжения $\tau_т$ являются наиболее важными характеристиками турбулентной структуры, поскольку именно они определяют потери энергии в потоке. Как известно, в равномерных потоках распределение касательных напряжений по глубине линейно. Это следует из соотношения

$$d\tau/dz = dP/dx,$$

где $\tau = -\rho\overline{u'_x u'_z} + \mu\,(du/dz)$ — полное касательное напряжение.

Полное касательное напряжение складывается из турбулентных напряжений Рейнольдса $\tau_т = -\rho\overline{u'_x u'_z}$ и вязких напряжений трения $\tau_в = \mu(du/dz)$. Поскольку в основной толще потока роль вязких напряжений невелика [8], полное касательное напряжение практически равно напряжению Рейнольдса $\tau \approx -\rho\overline{u'_x u'_z}$. Методика измерения турбулентных касательных напряжений описана в работе [8]. Результаты измерений распределения турбулентных касательных напряжений по глубине высокоскоростного открытого потока в шероховатом канале представлены на рис. 8.12. Анализ полученных данных позволяет отметить, что в основной толще потока турбулентные касательные напряжения уменьшаются от дна канала

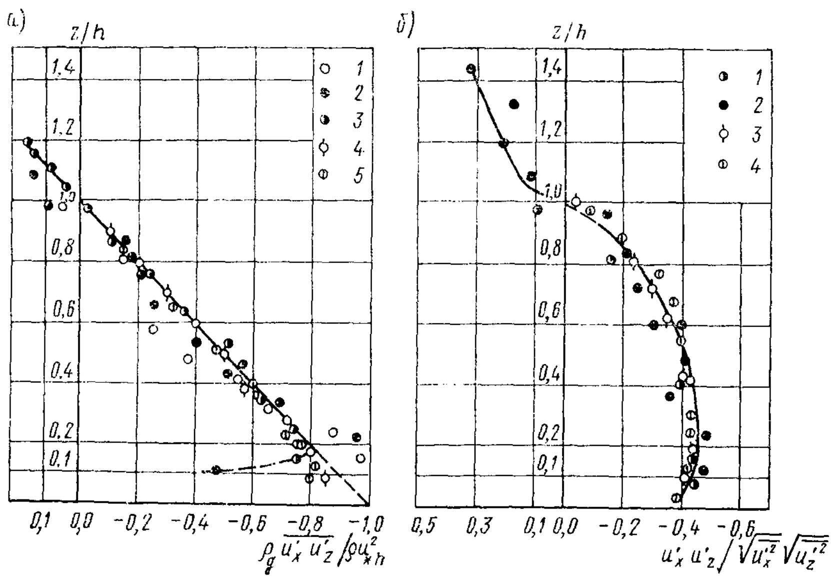


РИС. 8.12

а — распределение турбулентных касательных напряжений по глубине потока: 1—2 — данные В. С. Боровкова, шероховатый канал (1 — i=0,072; 2 — то же, i=0,232); 3 — данные К. Ханжалича и Б. Лаундера, напорный канал с разной шероховатостью стенок; 4 — данные Дж. Лауфера, круглая труба; 5 — данные Х. Рейхардта, прямоугольный напорный канал; б — изменение коэффициента корреляции по глубине потока: 1, 2 — данные В. С. Боровкова (1 — i=0,072; 2 — i=0,232); 3 — данные Дж. Лауфера, прямоугольный напорный канал; 4 — данные Ж. Конт-Белло, прямоугольный канал к поверхности потока по закону, близкому в линейному. Линейная экстраполяция эпюры до дна канала позволила установить, что определенная таким образом величина касательных напряжений на дне τ_0 оказывается близкой к квадрату динамической скорости $u_*^2 = ghi$ для нижней зоны потока. Максимум турбулентных касательных напряжений находится вблизи вершин выступов шероховатости, что согласуется с данными И. К. Никитина, К. Ханжалича и Б. Лаундера. В зоне течения между выступами шероховатости турбулентные касательные напряжения, видимо, резко уменьшаются. В этой области течения заметна роль вязких напряжений трения. Кроме того, резкое уменьшение касательных напряжений трения вблизи выступов может также компенсироваться силами давления, действующими на выступы шероховатости. Данные Дж. Лауфера и Х. Рейхардта, приведенные на рис. 8.12, показывают, что в гладких трубах максимум турбулентных касательных напряжений расположен значительно ближе к стенке.

Особый интерес представляют исследования турбулентных касательных напряжений вблизи точки максимума скорости, через которую проходит граница раздела между верхним и нижним динамическими слоями потока. Результаты прямых измерений показывают, что турбулентные касательные напряжения на границе раздела действительно равны нулю и слои можно рассматривать как динамически независимые.

Результаты измерений турбулентных касательных напряжений в высокоскоростном потоке удовлетворительно согласуются с данными измерений $\tau_т$, выполненными К. Ханжаличем и Б. Лаундером в трубе с различной шероховатостью стенок (см. рис. 8.12). Изменение знака $\tau_т$ в верхнем динамическом слое (см. рис. 8.12) объясняется чисто формальными причинами: в нижней зоне касательное напряжение заменяет тормозящее действие отбрасываемой опоры — дна канала; в верхней зоне потока (при отбрасывании нижней активной части потока) касательные напряжения, действующие против сил трения, изменяют знак. Величина турбулентных касательных напряжений на свободной поверхности потока τ_2, определенная непосредственными измерениями в канале с уклоном $i = 0{,}23$, оказалась близкой к $0{,}25\ \tau_0$.

Коэффициент корреляции $\overline{u_x' u_z'}/\sqrt{\overline{u_x'^2}}\sqrt{\overline{u_z'^2}}$ характеризует связь между продольной и вертикальной составляющими пульсаций скорости. По результатам измерений в высокоскоростном потоке (см. рис. 8.12) коэффициент оказывается малоизменяющимся в основной толще нижнего слоя и близким к $0{,}35 \div 0{,}45$. В зоне, близкой к границе раздела, значение коэффициента корреляции уменьшается до нуля. Сравнительно небольшая величина коэффициента корреляции здесь указывает на слабую связь между этими пульсациями. В верхней зоне коэффициент корреляции изменяет знак, что указывает на наличие сил сопротивления по поверхности потока. Корреляции между различными пульсациями (например, u_x' и u_z')

в одной и той же точке потока при различной задержке по времени позволяют оценить продольное расстояние, на котором сохраняется связь между продольной и вертикальной составляющими пульсаций скорости (рис. 8.13).

Сравнение $R_{xz}(\Delta t)$ с автокорреляциями $R_{xx}(\Delta t)$ показывает, что длина, на которой сохраняется связь между пульсациями u'_x и u'_z, близка к макромасштабу продольных пульсаций либо несколько превосходит его. Следует отметить четко выраженную аномалию в поведении $R_{xz}(\Delta t)$ вблизи границы раздела двух динамических слоев. Значения $R_{xz}(\Delta t)$ для точек этой зоны потока колеблются вблизи нуля, что характерно для процесса с четко выраженной периодикой. Близкое по характеру поведение функции $R_{xz}(\Delta t)$ у динамической оси потока было обнаружено в гладкой трубе К. Лауном и в плоском канале с разной шероховатостью стенок К. Ханжаличем и Б. Лаундером. Выше границы раздела корреляция $R_{xz}(\Delta t)$ принимает обычный вид. Не исключено, что эта периодичность $R_{xz}(\Delta t)$ вблизи границы раздела указывает на возможность физического источника периодических возмущений, которые при условии общей неустойчивости потока могут развиваться [7], например, в катящиеся волны на свободной поверхности. Такая периодичность указывает также на существование равноценного турбулентного обмена через границу раздела между верхним и нижним динамическими слоями, что при осреднении приводит к нулевым турбулентным касательным напряжениям. Отсутствие турбулентных касательных напряжений и близость стандартов продольных и вертикальных пульсаций позволяют утверждать, что турбулентность в этой зоне не отличается от изотропной турбулент-

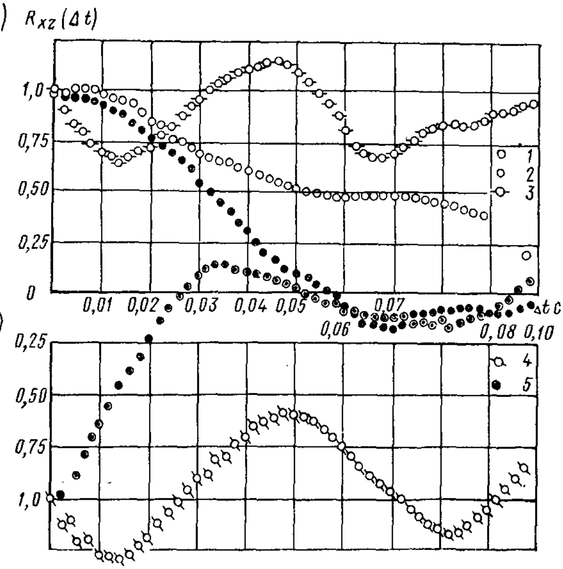


РИС. 8.13

а — изменение взаимной корреляции $u'_x u'_z$ по глубине потока в нижнем динамическом слое; б — изменение взаимной корреляции $u'_x u'_z$ по глубине потока в верхнем динамическом слое; 1 — $z/h=0,22$; 2 — $z/h=0,44$; 3 — $z/h=0,88$; 4 — $z/h=1,03$; 5 — $z/h=1,09$

ности, создаваемой, например, решетками. Судя по данным К. Лауна, К. Ханжалича и Б. Лаундера, такое же заключение можно сделать относительно турбулентности на оси потока в трубе и на динамической оси потока в плоском канале с разной шероховатостью стенок. Результаты исследования турбулентных касательных напряжений высокоскоростного потока позволили подтвердить как ранее сделанный вывод о подобии этого потока течению в трубах и каналах, так и обоснованность принятой двухслойной модели высокоскоростного открытого потока.

Полученные данные позволяют также установить величину генерации турбулентности в различных точках по глубине потока. Как указывалось в гл. 7, генерация турбулентности осредненным течением определяется как произведение турбулентных касательных напряжений на градиент осредненной скорости $\Pi = \overline{u'_x u'_z}\,(\mathrm{d}\bar{u}/\mathrm{d}z)$. В качестве безразмерного параметра, характеризующего генерацию турбулентности, принято использовать безразмерный комплекс $\Pi h/u_*^3$. Этот комплекс позволяет получить универсальное распределение генерации турбулентной энергии в основной толще потока как для гладких, так и для шероховатых каналов. Некоторые отклонения от универсальности наблюдаются лишь в непосредственной близости от стенки, где уменьшение турбулентных касательных напряжений, как указывалось, связано в основном с действием шероховатости. На рис. 8.14 приведены данные по генера-

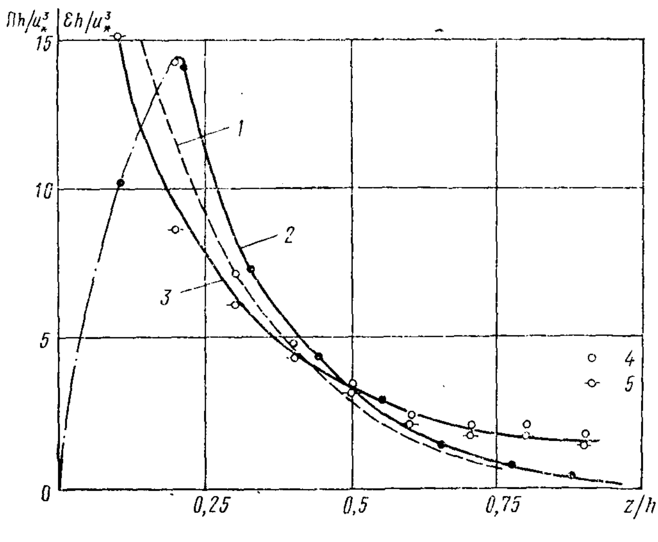


РИС. 8.14

1 — данные Ф. Клебанова, генерация турбулентности в пограничном слое; 2 — данные авторов, генерация турбулентности в шероховатом открытом канале; 3 — то же, диссипация турбулентности; 4 — данные Дж. Лауфера, диссипация энергии в прямоугольном напорном канале; 5 — данные Ф. Клебанова; диссипация турбулентности в пограничном слое ции турбулентности при течении в шероховатом канале и в пограничном слое на гладкой поверхности. Можно отметить, что при $z/h > 0{,}2$ генерация турбулентности не зависит от характеристик поверхности. Анализ данных показывает, что наибольшее порождение турбулентности происходит в пристенной зоне. В случае гладкой граничной поверхности, по данным Дж. Лауфера [8], максимум генерации находится вблизи внешней границы вязкого подслоя. Это еще раз подтверждает, что неустойчивость вязкого подслоя является причиной, порождающей турбулентность. При течении над шероховатым дном максимум генерации турбулентности близок к вершинам выступов шероховатости.

На рис. 8.14 приведены данные по диссипации пульсационной энергии в трубах и каналах. Диссипация ε вычисляется с использованием также экспериментальных данных о величине пространственных производных пульсационных составляющих скорости по соотношению

$$\varepsilon = \nu\,\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right)}.$$

Для сравнения диссипации и генерации пульсационной энергии в различных точках потока диссипация представлена безразмерным комплексом $\varepsilon h/u_*^3$. Анализ данных по диссипации (см. рис. 8.14) показывает, что диссипация, так же как и генерация, уменьшается в основной толще потока с увеличением z/h. В непосредственной близости к стенке, там, где заметно проявляется роль вязких напряжений, диссипация, по данным А. Таунсенда, слегка снижается. Сопоставление генерации и диссипации в различных точках потока позволяет заключить, что в средней части потока $0{,}2 < z/h < 0{,}6$ диссипация и генерация турбулентности практически совпадают. При $0{,}1 < z/h < 0{,}2$ генерация турбулентности превосходит диссипацию. Из этой области интенсивного образования вихрей турбулентность переносится как в вышележащие слои, так и по направлению к стенке. Проникание турбулентных пульсаций в область вязкого подслоя может явиться причиной его разрушения. Это подтверждается наблюдениями Е. Карино и Б. Бродки. В непосредственной близости к стенке ($z/h < 0{,}1$) вязкая диссипация превышает генерацию турбулентности. Для областей потока, значительно удаленных от стенки ($z/h > 0{,}6$), там, где градиенты скорости невелики, генерация турбулентности незначительна и диссипация преобладает. Уровень турбулентности в этой области поддерживается за счет поступления пульсационной энергии из нижележащих слоев.

§ 29. Турбулентные гидродинамические нагрузки на границе высокоскоростного потока

Одна из основных задач инженерного расчета высокоскоростного потока связана с определением турбулентных гидродинамических нагрузок на водосливы, быстротоки и другие сооружения. Пульсации давления зависят от градиента скорости и пульсационных составляющих скорости (см. гл. 7). Иначе, пульсация давления определяется динамической скоростью (7.28), которая в условиях высокоскоростного потока может достигать значительной величины. Гидродинамические нагрузки, возникающие вследствие действия пульсаций давления, вызывают вибрации и усталостное разрушение элементов сооружения. Максимальные пульсационные нагрузки могут привести к хрупкому разрушению конструкций, резко увеличивать кавитационную эрозию, создавать опасные опрокидывающие моменты. Экспериментальными или расчетными методами обычно устанавливаются пульсации давления в точке на границе потока. Пульсации давления в высокоскоростном открытом потоке бывают волнового и турбулентного происхождения. Волны на быстротоке или водосливе могут быть периодическими (например, катящимися) либо случайного происхождения (турбулентные выбросы).

Не рассматривая полную аэрацию высокоскоростного потока и волновые воздействия, ограничимся в соответствии с результатами детальных исследований В. М. Лятхера описанием лишь тех пульсаций давления, которые вызваны турбулентностью [7]. Кроме пульсаций давления в точке необходимо знать пульсацию нагрузки на элемент сооружения конечного размера. Переход от пульсации давления в точке к пульсациям нагрузки осуществляется с использованием корреляционной функции.

На рис. 8.15 представлена нормированная корреляция R_p пульсаций давления на твердой границе потока. В данном случае кор-

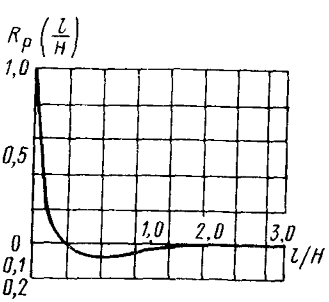


Рис. 8.15

1 — данные Вильмарта и Вулдриджа

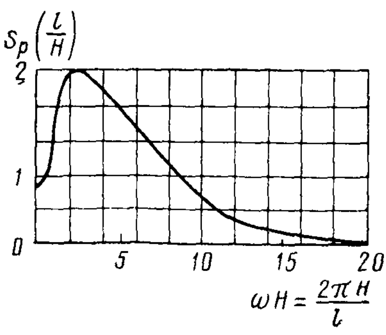


Рис. 8.16

реляция вычисляется как

$$R_p = \frac{\overline{p'(x)\,p'(x+l)}}{\sqrt{\overline{p'^2}(x)\,\overline{p'^2}(x+l)}}\,.$$

Анализ данных, представленных на рис. 8.15, позволяет установить, что масштаб пульсаций давления не сильно отличается от масштаба вертикальных пульсаций скорости. Отрицательные значения корреляции наблюдаются при $l/H = 0{,}4$, (где l — масштаб пульсаций). Положительное значение корреляции означает, что в рассматриваемых точках мгновенные пульсации давления в среднем имеют один и тот же знак. При отрицательной корреляции пульсации давления в рассматриваемых (достаточно удаленных) точках чаще имеют разные знаки, что вызывает опрокидывающие моменты.

Для решения инженерных задач, связанных с необходимостью учета резонансных явлений, обычно используется спектральная плотность пульсаций давления. На рис. 8.16 представлена нормированная спектральная плотность пульсаций давления в точке потока. Определением спектральной плотности в данном случае служит соотношение

$$\overline{p'^2} = 2\int_0^\infty S'_p\,(l/H)\,\mathrm{d}\,(l/H)\,.$$

Нормирование спектральной плотности выполнено делением ее значений на произведение $u_*^2\overline{u_z'^2}_{max}$. (Величина максимума стандарта вертикальных пульсаций, как было показано выше, близка к $0{,}9u_*$.) Спектральная плотность (см. рис. 8.16) позволяет отметить, что наибольшей энергией обладают пульсации масштаба $0{,}4\ H$. Эти пульсации представляют наибольшую опасность, особенно в случае, если частота собственных колебаний конструкции (резонансная частота) близка к частоте этих пульсаций. Для определения этой частоты необходимо скорость сноса возмущений у твердой границы u разделить на масштаб пульсаций

$$n = (u/l) = 2{,}5(u/H).$$

По данным В. М. Лятхера, скорость $\bar{u}$ в этом выражении близка к $0{,}5\ U$. Другими словами, число Струхаля, соответствующее максимуму спектральной плотности, $nH/U \approx 1$.

Переход от пульсаций давления в точке к пульсациям нагрузки производится интегрированием по площади с учетом корреляции. Анализ, выполненный В. М. Лятхером [7], позволил установить коэффициенты перехода от спектра пульсаций давления к спектру пульсирующей нагрузки (рис. 8.17). В качестве пульсирующей нагрузки в данном случае рассматривается условная нагрузка, равномерно распределенная по площади элемента. Коэффициент перехода от пульсаций давления в точке к пульсирующей нагрузке

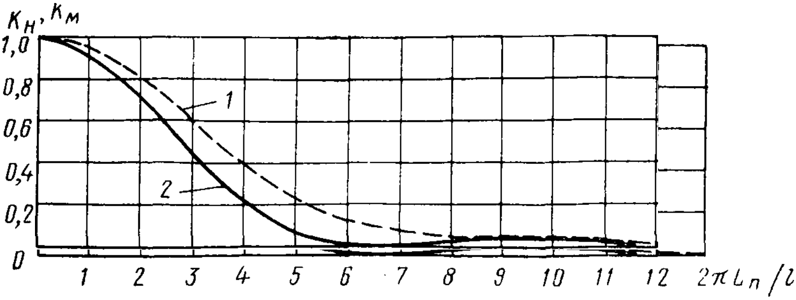


РИС. 8.17

1 — переходные коэффициенты для вычисления спектра опрокидывающего момента; 2 — то же, удельной нагрузки

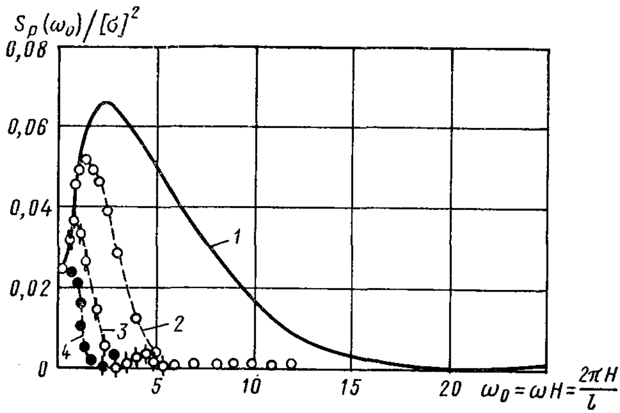


РИС. 8.18

1 — исходный нормированный спектр пульсации давления в точке; 2, 3, 4 — нормированные спектры удельной нагрузки на плиты длиной соответственно $L=H$, $L=2H$, $L=3H$

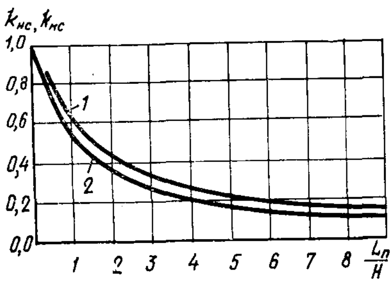


РИС. 8.19

1 — относительная величина стандарта опрокидывающего момента; 2 — то же, удельной нагрузки на плиту со стороны потока (в долях стандарта пульсации давления в точках)

на площадку для разных областей спектра различен и может быть выражен для плоского потока следующим образом [7]:

$$K_н \approx \sin^2 \frac{\pi L_п}{l} \bigg/ \left(\frac{\pi L_п}{l} \right)^2 .$$

Аналогично переходный коэффициент для спектральной плотности опрокидывающего момента на единицу ширины плиты записывается в виде

$$K_{\text{м}} = \frac{L^4}{4}\left[\frac{1}{\left(\frac{\pi L_{\text{п}}}{l}\right)^2}\left(\frac{\sin\frac{\pi L_{\text{п}}}{l}}{\pi L_{\text{п}}/l} - 1\right)^2 + \frac{\sin \pi L_{\text{п}}/l}{\pi L_{\text{п}}/l}\,\frac{\sin^2\frac{\pi}{2}\frac{L_{\text{п}}}{l}}{\left(\frac{\pi L_{\text{п}}}{2l}\right)^2}\right].$$

Данные, представленные на рис. 8.17, показывают, что с увеличением размера элемента $L_{\text{п}}$ величина равномерно распределенной пульсирующей нагрузки и момента снижается. В качестве примера на рис. 8.18 приведены спектральные плотности удельной нагрузки на плиты быстротока при различной длине плит $L_{\text{п}}$. Эти спектральные плотности получены умножением спектральной плотности пульсаций давления в точке на коэффициент перехода $K_{\text{н}}$. Следует отметить, что с увеличением размера плиты $L_{\text{п}}$ резко уменьшается интенсивность высокочастотной части спектра. Максимум спектра смещается в область низкочастотной части тем больше, чем больше длина плиты $L_{\text{п}}$. Для определения среднеквадратичной величины нагрузки необходимо исследовать произведение $S_p K_{\text{н}}$ при всех значениях $L_{\text{п}}/l$. Результаты исследования, выполненного В. М. Лятхером, представлены на рис. 8.19. При $L_{\text{п}} > 3H$ величина пульсации нагрузки становится малой вследствие того, что длина плиты на порядок больше макромасштаба турбулентных пульсаций давления.

Как показывают результаты экспериментальных исследований, распределение вероятностей пульсаций давления в точке отличается от нормального закона (закона Гаусса). Эти отклонения вызваны влиянием твердой границы на турбулентные характеристики течения. Из математической статистики известно [6], что с увеличением числа независимо действующих факторов вероятностные характеристики случайного процесса пульсаций приближаются к характеристикам нормального закона. Поэтому с увеличением размера плиты $L_{\text{п}}$ можно ожидать, что закон распределения вероятностей пульсаций давления будет приближаться к нормальному. Экспериментальные исследования [7] показывают, что распределение вероятностей пульсаций нагрузки подчиняется нормальному закону при $L_{\text{п}} > 3H$. При нормальном законе вычисление вероятностей появления экстремальных нагрузок за расчетный период эксплуатации сооружения упрощается [7].

Пример расчета. Определить предельную нагрузку и опрокидывающий момент на плиту крепления быстротока длиной $L_{\text{п}} = 3$ м. Быстроток имеет уклон $i = 0{,}1$, глубина равномерного течения на быстротоке $H = 1$ м.

Решение 1. Вычисляем динамическую скорость

$$u_* = \sqrt{gHi} = \sqrt{9{,}8\cdot 1\cdot 0{,}1} \approx 1 \text{ м/с}.$$

2. По зависимости 7.28 находим стандарт пульсаций давления в точке

$$p' = 3{,}5\rho u_*^2 = 3{,}5\cdot 1000\cdot 1^2 = 3{,}5\cdot 10^3 \text{ Н/м}^2.$$

При $L_{\text{п}}/H = 3$ по графикам на рис. 8.19 определяем коэффициенты перехода от пульсаций давления в точке к среднеквадратичным значениям нагрузки $K_{\text{нс}} = 0{,}26$.

3. Среднеквадратичное значение нагрузки, вызванной пульсациями давления,

$$F_p = 3{,}5 \cdot 10^3 \cdot 0{,}26 = 0{,}9 \cdot 10^3 \text{ Н/м}^2.$$

Полученное среднеквадратичное значение пульсационной нагрузки составляет в данном случае около 10% статической нагрузки. При нормальном законе распределения максимальная пульсационная нагрузка может достигать $3F_p$, т. е. составлять примерно 30% статической.

ГЛАВА 9. ВОЛНОВЫЕ СТРУКТУРЫ В ВЫСОКОСКОРОСТНЫХ ПОТОКАХ

§ 30. Классификация волн в высокоскоростных потоках. Динамические и непрерывные волны

Волны в высокоскоростном потоке вызываются разными причинами. Источником одних видов волн является действие механизмов, заключенных в самом высокоскоростном потоке. К ним относятся так называемые катящиеся волны и волновые образования (выбросы), связанные с интенсивностью турбулентных пульсаций. Другие виды волн возникают при резком изменении условий течения потока. К ним относятся косые волны, которые образуются в управляющих устройствах, стоячие волны, возникающие в околокритическом режиме течения (см. гл. 1), и волны, которые появляются в высокоскоростном потоке при движении его в канале с усиленной шероховатостью. К третьей группе волн относятся волны, возникновение которых не связано со структурой высокоскоростного потока, т. е. поступающие в поток извне. Причинами их появления могут быть регулирование расхода высокоскоростного потока, периодические возмущения на входе в канал, вызванные ветровыми волнами в водохранилище, и др.

Все волны делятся на два больших класса: волны динамические и волны непрерывные.

Динамические волны связаны непосредственно с динамическим возмущением потока. Возмущение возникает в результате внешних воздействий или вызывается причинами внутреннего характера. Так, к внешним причинам можно отнести различные управляющие устройства, усиленную шероховатость, ветровые волны и другие быстроизменяющиеся факторы, а к внутренним — турбулентные пульсации. Динамические волны представляют собой, как правило, возмущения небольшой длины и не изменяют существенно интегральных характеристик осредненного течения (расхода и скорости). Их называют иногда дискретными.

Непрерывная волна влияет на изменение интегральных характеристик течения (расхода и скорости) и является волной большой длины. Примерами непрерывных волн служат волны, появляющиеся в результате увеличения (или уменьшения) расхода воды в канале.

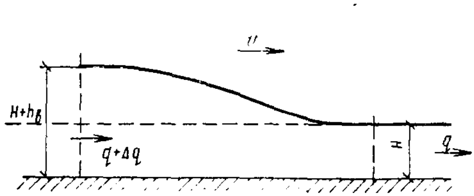


РИС. 9.1

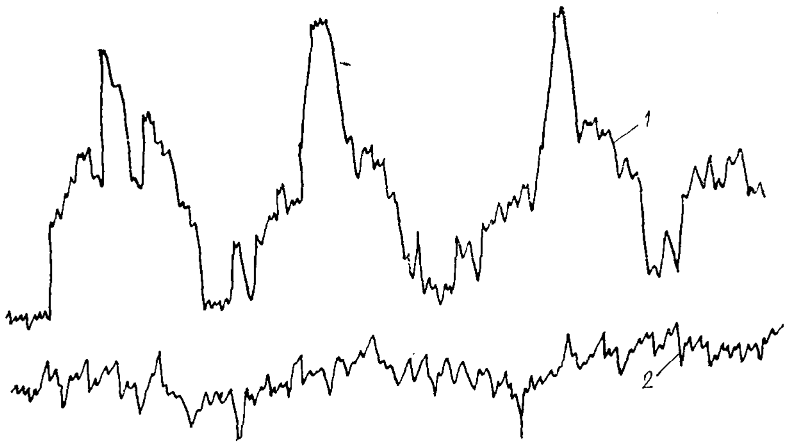


РИС. 9.2

$1 - x/H_c = 10$; $2 - x/H_c = 50$

Термин «непрерывная волна» введен впервые Г. Уоллисом взамен термина «кинематическая волна». Однако последний термин также встречается в литературе.

Рассмотрим движение непрерывной волны. Предполагая малое изменение глубины ($\Delta H \ll H$), из формулы для дополнительного расхода, переносимого волной (рис. 9.1), находим

$$v = \Delta q / \Delta H,$$

где v — скорость распространения непрерывной волны.

Это соотношение можно записать в дифференциальной форме

$$v = \partial q / \partial H.$$

Подставляя в это соотношение $q = UH$ и дифференцируя, получаем

$$v = \partial UH / \partial H = U + H \partial U / \partial H, \qquad (9.1)$$

где U — скорость невозмущенного потока.

Из зависимости видно, что скорость непрерывной волны превышает исходную скорость течения тем больше, чем больше исходная глубина и градиент скорости потока.

При движении непрерывной волны сопротивление F зависит от скорости и глубины потока. Выражая скорость по формуле Шези

$$U = \sqrt{8gHi/\lambda},$$

найдем производную $\partial U/\partial H$, входящую в уравнение (9.1),

$$\frac{\partial U}{\partial H} = \frac{\partial}{\partial H}\sqrt{\frac{8gHi}{\lambda}} = \frac{U}{2H}\left(1 - \frac{H}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial H}\right). \tag{9.2}$$

Используя для анализа упрощенную зависимость для расчета λ в шероховатом канале $\lambda = 0{,}11\ (k_s/4H)^{0,25}$, находим

$$\frac{\partial\lambda}{\partial H} = -\frac{\lambda}{4H}.$$

Тогда

$$\frac{\partial U}{\partial H} = \frac{U}{2H}\left(1 + \frac{1}{4}\right) = \frac{5}{8}\frac{U}{H}. \tag{9.3}$$

Скорость движения непрерывной волны согласно выражению (9.2) с учетом зависимости (9.3)

$$v = U + 5/8\,U \approx 1{,}62\,U, \tag{9.4}$$

Таким образом, скорость движения непрерывной волны более чем в 1,5 раза превышает скорость невозмущенного течения в канале.

Как известно, превышение скорости динамической волны в канале глубиной H над скоростью невозмущенного потока U определяется по известной формуле Лагранжа [2] (при $\cos\theta \approx 1$)

$$c = \sqrt{gH}. \tag{9.5}$$

Динамические волны обладают кинетической и потенциальной энергией. Суммарная энергия динамической волны, деленная на ее длину, запишется в виде [2]

$$E = \frac{1}{8}\rho g h_{\text{в}}^2, \tag{9.6}$$

где $h_{\text{в}}$ — высота волны над невозмущенной поверхностью потока.

Если вынужденные динамические волны вносятся в поток извне и поток не поддерживает или не генерирует их заново, то такие волны, взаимодействуя с потоком, затухают. На рис. 9.2 показан пример затухания вынужденных динамических волн при движении их в высокоскоростном потоке. Поток поддерживает только те волны, которые попадают в резонанс с наиболее интенсивными возмущениями, имеющимися в самом потоке.

Исследуем затухание динамических волн, поступающих в поток извне, при условии отсутствия такого резонанса. Двигаясь вдоль потока, волны постоянно теряют свою энергию вследствие диссипации. Согласно исследованиям В. В. Шулейкина, диссипация

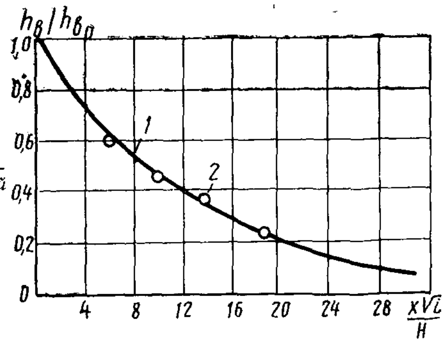


РИС. 9.3

1 — расчет по зависимости (9.9); 2 — экспериментальные данные авторов, шероховатый канал

энергии, отнесенная к единице длины волны, может быть представлена в виде:

$$W = \frac{1}{2}\rho \nu_т (g^3/c^4) h_в^2, \tag{9.7}$$

где $\nu_т$ — турбулентная вязкость в потоке, определяющая процесс рассеивания энергии.

Поскольку изменение энергии равно ее диссипации, можно записать $dE/dt = -W$.

Переходя от времени t к продольной координате x по соотношению $dx = c dt$ (где x — расстояние, пройденное волной, относительно наблюдателя, перемещающегося со скоростью U), имеем:

$$\frac{dE}{dt} = c\frac{dE}{dx} = -W. \tag{9.8}$$

Принимая турбулентную вязкость в потоке, среднюю для поперечного сечения канала, $\nu_т \approx 0{,}04\ u_* H$ (согласно данным, приведенным в гл. 2), после подстановки в выражения (9.7) и (9.8) получаем

$$\frac{1}{h_в}\frac{dh_в}{dx} = -\frac{0{,}08\sqrt{i}}{H},$$

где H — глубина невозмущенного потока в канале.

Интегрируя это уравнение, находим:

$$h_в/h_{в_0} = e^{-0.08\sqrt{i}\frac{x}{H}}, \tag{9.9}$$

где $h_{в0}$ — начальная высота волны на входе в канал.

Это соотношение позволяет определить интенсивность затухания динамических волн при их движении по поверхности открытого высокоскоростного потока. При выводе зависимости (9.9) предполагалось, что $\nu_т \gg \nu$, поэтому соотношение справедливо для условий развитого турбулентного течения в плоском канале. На рис. 9.3 представлено сравнение расчета по зависимости (9.9) с экспериментальными данными авторов, полученными при модельных исследованиях движения динамических волн в туннеле большого уклона, которое показывает удовлетворительное согласие расчета и эксперимента.

§ 31. Возникновение катящихся волн

При движении потока в канале вследствие взаимодействия с граничными поверхностями на него действуют различные возмущающие факторы, которые при некоторых условиях не затухают, а усиливаются, нарастают по течению потока. Нарастание возмущений может привести к возникновению катящихся волн. Анализ условий возникновения катящихся волн можно выполнить, используя уравнения Сен-Венана.

Рассмотрим для простоты плоское плавно изменяющееся течение в открытом русле. В этом случае система уравнений (1.6) совместно с уравнением неразрывности запишется в виде

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u_x}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+U_z\frac{\partial u_x}{\partial z}=gi-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau}{\partial z};\\
&\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}=-g\sqrt{1-i^2};\\
&\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=0.
\end{aligned}\right\} \tag{9.10}$$

Из второго уравнения системы находим:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=g\frac{\partial H}{\partial x}\sqrt{1-i^2}.$$

Учитывая, что $\partial H/\partial x$ есть уклон свободной поверхности потока относительно дна канала и обозначая $i_0=i-(\partial H/\partial x)\sqrt{1-i^2}$ (где i_0 — уклон свободной поверхности относительно горизонтали), запишем уравнения системы в виде

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u_x}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_z\frac{\partial u_x}{\partial z}=gi_0+\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau}{\partial z};\\
&\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=0.
\end{aligned}\right\} \tag{9.11}$$

Граничные условия для рассматриваемого случая:
на дне

$$z=0;\ u_x=u_z=0;\ \tau=\tau_0;$$

на свободной поверхности

$$\left. z=H;\ u_z(H)=\frac{\partial H}{\partial t}+u_x(H)\frac{\partial H}{\partial x}.\right\} \tag{9.12}$$

Второе граничное условие определяет деформацию свободной поверхности потока под действием вертикальной составляющей скорости u_z при $z = H$. Слагаемое $\partial H/\partial t$ определяет изменение положения свободной поверхности во времени. Второе слагаемое $u_x(H)\,\partial H/\partial x$ определяет непараллельность свободной поверхности оси x.

Произведем почленное интегрирование первого уравнения системы (9.11) по глубине потока

$$\int_0^H \frac{\partial u_x}{\partial t}\,dz + \int_0^H u_x \frac{\partial u_x}{\partial x}\,dz + \int_0^H u_z \frac{\partial u_x}{\partial z}\,dz = gHi_0 + \frac{1}{\rho}\int_0^H \frac{\partial \tau}{\partial z}\,dz. \quad (9.13)$$

Для вычисления интегралов воспользуемся известным правилом интегрирования по частям

$$\int_0^H \frac{\partial u_x}{\partial t}\,dz = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^H u_x\,dz - u_x(H)\frac{\partial H}{\partial t},$$

Учитывая, что $\int_0^H u_x dz = UH = q$ (где q — удельный расход потока, а U — средняя по сечению скорость потока), находим

$$\int_0^H \frac{\partial u_x}{\partial t}\,dz = \frac{\partial q}{\partial t} - u_x(H)\frac{\partial H}{\partial t}. \quad (9.14)$$

Второй интеграл в уравнении (9.13) представим в виде

$$\int_0^H u_x \frac{\partial u_x}{\partial x}\,dz = \frac{1}{2}\int_0^H \frac{\partial u_x^2}{\partial x}\,dz = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\int_0^H u_x^2\,dz - \frac{1}{2}u_x^2(H)\frac{\partial H}{\partial x}. \quad (9.15)$$

Третий интеграл в уравнении (9.13) примет вид

$$\int_0^H u_z \frac{\partial u_x}{\partial z}\,dz = \int_0^H \frac{\partial u_x u_z}{\partial z}\,dz - \int_0^H u_x \frac{\partial u_z}{\partial z}\,dz = u_x u_z\Big|_0^H +$$

$$+ \int_0^H u_x \frac{\partial u_x}{\partial x}\,dz = u_x(H)\,u_z(H) - \frac{1}{2}u_x^2(H)\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\int_0^H u_x^2\,dz.$$

Заметим, что при преобразовании третьего слагаемого использовано уравнение неразрывности системы (9.10). Согласно граничному условию зависимости (9.12), находим:

$$\int_0^H u_z \frac{\partial u_x}{\partial z}\,dz = u_x(H)\left[\frac{\partial H}{\partial t} + u_x(H)\frac{\partial H}{\partial x}\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\int_0^H u_x^2\,dz -$$

$$- \frac{1}{2}u_x^2(H)\frac{\partial H}{\partial x}. \quad (9.16)$$

Второе слагаемое в правой части уравнения (9.13) имеет вид

$$\frac{1}{\rho}\int\limits_0^H \frac{\partial\tau}{\partial z}\,dz = \frac{1}{\rho}\tau\Big|_0^H = -\frac{1}{\rho}\tau_0 + \frac{1}{\rho}\tau(H). \tag{9.17}$$

Здесь τ_0 — касательные напряжения на дне;
$\tau(H)$ — касательные напряжения на свободной поверхности потока.

В условиях неаэрированного потока и гладкой свободной поверхности $\tau(H) = 0$.

Подставив преобразованные интегралы в исходное уравнение, получаем:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\int\limits_0^H u_x^2\,dz = gHi_0 - \frac{1}{\rho}\tau_0. \tag{9.18}$$

Следует отметить, что уравнение (9.18) можно использовать для анализа условий возникновения катящихся волн в турбулентных и ламинарных потоках, если их свободная поверхность гладкая.

Произведем преобразование уравнения неразрывности:

$$\int\limits_0^H \frac{\partial u_x}{\partial x}\,dz = \frac{\partial}{\partial x}\int\limits_0^H u_x\,dz - u_x(H)\frac{\partial H}{\partial x};$$

$$\int\limits_0^H \frac{\partial u_z}{\partial z}\,dz = u_z\Big|_0^H = \frac{\partial H}{\partial t} + u_x(H)\frac{\partial H}{\partial x}.$$

Таким образом, уравнение неразрывности получаем в виде

$$\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial t} = 0. \tag{9.19}$$

Второе слагаемое в уравнении (9.18) запишем как

$$\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_0^H u_x^2\,dz = \frac{\partial}{\partial x}\beta U^2 H, \tag{9.20}$$

где β — коэффициент количества движения;
U — средняя по глубине скорость потока.

Корректив количества движения β для простоты анализа примем равным 1.

Влияние гидравлических характеристик течения потока на величину β в условиях равномерного и неравномерного течения рассматривалось в главах 4 и 6. Подробный вывод уравнения движения потока с учетом корректива количества движения и тщательным анализом используемых допущений приводится в монографии Н. А. Картвелишвили [5].

После упрощений и преобразований уравнение движения с использованием уравнения неразрывности примет вид

$$\frac{1}{g}U\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{g}\frac{\partial U}{\partial t} = i_0 - \frac{1}{\rho g H}\tau_0. \tag{9.21}$$

Обозначая $\tau_0/(\rho g H) = i_f$, где i_f — гидравлический уклон, это же уравнение запишем в виде

$$\frac{1}{g} U \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t} = i - \frac{\partial H}{\partial x} \sqrt{1-i^2} - i_f. \quad (9.22)$$

Как уже указывалось, в потоке всегда имеются факторы, вызывающие возмущения, которые можно представить в виде малых волн. Анализ устойчивости течения потока сводится обычно к установлению того, возрастают ли эти малые волны по длине потока или затухают. Если возмущения нарастают, образуются большие катящиеся волны, и поток считается неустойчивым.

При исследовании устойчивости потока с помощью уравнения Сен-Венана (9.22) анализируются характеристики нестационарности, связанные с возмущающими факторами. Одним из первых такой анализ выполнил В. В. Ведерников. Следуя В. В. Ведерникову, можно ввести в рассмотрение две характерные скорости возмущения потока: скорость перемещения волнового фронта в потоке относительно неподвижного наблюдателя c_0 и скорость распространения постоянной глубины (непрерывной волны) v (рис. 9.4). Рассмотрим прямую волну повышения, которая увеличивает глубину потока и направлена по течению. При этом скорость перемещения волнового фронта

$$c_0 = U + c = U + \sqrt{gH\cos\theta}, \quad (9.23)$$

где θ — угол наклона дна канала.

Исследуем деформацию волны при ее движении. Будем следить за некоторой точкой A, расположенной на фронте волны (см. рис. 9.4) на высоте H_A от дна потока: $H_A = H + \Delta H_A$. Находясь на волновом фронте, она перемещается вдоль канала со скоростью волнового фронта, определяемой соотношением (9.23), и за некоторый промежуток времени t пройдет продольное расстояние $c_0 t$. За то же время сечение с постоянной глубиной H_A переместится на расстояние vt и при $c_0 t > vt$ происходит распластывание волны. При этом часть объема W_1 переместится из верхней части волны в нижнюю[1].

[1] Такая схема распластывания волны рассмотрена А. М. Пуляевским.

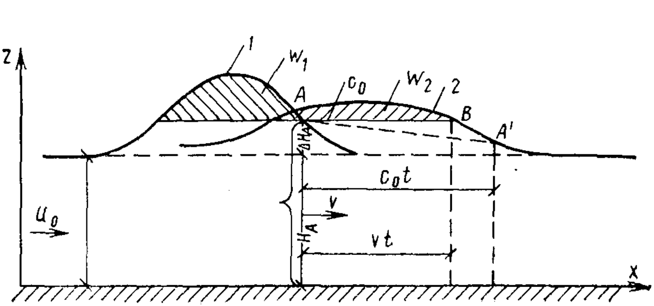


РИС. 9.4
1 — исходное состояние волны; 2 — состояние в момент времени t

Представляя характерные скорости возмущения в виде первых членов разложения в ряде Маклорена, имеем:

$$c_{0A} = U_A + \left(\frac{\partial c_0}{\partial H}\right)_{H=H_A} \Delta H;$$

$$v_A = U_A + \left(\frac{\partial v}{\partial H}\right)_{H=H_A} \Delta H.$$

В этом случае при отсутствии возмущения ($\Delta H = 0$) $c_{0A} = v_A = U_A$, где U_A — скорость невозмущенного течения в створе A. Следовательно, возмущение в виде прямой волны повышения будет распластываться или продвигаться без изменения при условии $c_0 \geqslant v$ или $(\partial c_0/\partial H) \geqslant (\partial v/\partial H)$.

Возмущения будут нарастать и становиться круче при условии

$$\frac{\partial c_0}{\partial H} < \frac{\partial v}{\partial H}. \tag{9.24}$$

Последнее условие В. В. Ведерников принимает за условие возникновения катящихся волн.

Для того чтобы ввести в уравнение Сен-Венана (9.22) скорость распространения постоянной глубины волны v, удобно в качестве независимой переменной использовать глубину потока H. При этом уравнение Сен-Венана записывается относительно новых независимых переменных H и t. Преобразование к новым независимым переменным выполним по следующему правилу:

$$U_x = U^*(H, t);$$
$$x = x^*(H, t).$$

При следовании за постоянной глубиной (соответствующие параметры отмечены звездочкой)

$$\frac{\partial H}{\partial z} \frac{\partial x^*}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial t} = 0. \tag{9.25}$$

Поскольку это соотношение записано для постоянной глубины, скорость

$$v = \frac{\partial x^*}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t} \Big/ \frac{\partial H}{\partial x}. \tag{9.26}$$

Таким образом,

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &= \frac{\partial U^*}{\partial t} - v\frac{\partial U^*}{\partial H} \Big/ \frac{\partial x}{\partial H};\\ \frac{\partial U}{\partial x} &= \frac{\partial U^*}{\partial h} \Big/ \frac{\partial x}{\partial h};\\ \frac{\partial H}{\partial x} &= 1 \Big/ \frac{\partial x}{\partial H}. \end{aligned}\right\} \tag{9.27}$$

Запишем уравнение неразрывности в новых переменных, выполнив предварительные преобразования,

$$\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial t} = H\frac{\partial U}{\partial x} + U\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial t} = 0.$$

С использованием выражений (9.25) и (9.27) имеем:

$$\frac{\partial x^*}{\partial t}=v=U+H\frac{\partial U^*}{\partial H}. \tag{9.28}$$

Отсюда находим:

$$\frac{\partial U^*}{\partial H}=\frac{v-U}{H}. \tag{9.29}$$

Динамическое уравнение (9.22) с использованием соотношений (9.25) и (9.27) преобразуется к виду

$$\frac{1}{g}\frac{\partial U^*}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial H}-\frac{H}{g}\left(\frac{\partial U^*}{\partial H}\right)^2=(i-i_f)\frac{\partial x}{\partial H}-\sqrt{1-i^2}.$$

Подставляя в это соотношение (9.29), имеем:

$$\frac{1}{g}\frac{\partial U^*}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial H}-\frac{1}{g}\frac{(v-U)^2}{H}=(i-i_f)\frac{\partial x}{\partial H}-\sqrt{1-i^2}. \tag{9.30}$$

Дифференцируя уравнение (9.30) по H, найдем после преобразований искомую производную $\partial v/\partial H$ [см. уравнение (9.27)]

$$\frac{\partial v}{\partial H}=\frac{3}{2}\frac{v-U}{H}+\frac{H}{2(v-U)}\left[\frac{\partial^2 U^*}{\partial t\partial H}\frac{\partial x}{\partial H}+\frac{\partial U^*}{\partial t}\frac{\partial^2 x}{\partial h^2}+\right.$$
$$\left.+(i-i_f)\frac{\partial^2 x}{\partial H^2}\right]+\frac{gH}{2(v-U)}\frac{\partial i_f}{\partial H}\frac{\partial x}{\partial H}. \tag{9.31}$$

Последнее слагаемое в соотношении (9.31) учитывает изменение гидравлического сопротивления при изменении глубины.

Для возмущения, наложенного на равномерное установившееся течение, это уравнение упрощается. В этом случае существуют следующие условия:

$$U=U_0;\ H=H_0;\ i=i_f;\ v=v_0$$
$$\frac{\partial H}{\partial t}=0;\quad \frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\partial U^*}{\partial t}=0.$$

С учетом этих условий уравнение (9.31) приводим к виду

$$\frac{\partial v}{\partial H}=\frac{3}{2}\frac{v_0-U_0}{H_0}+\frac{gH_0}{2(v_0-U_0)}\frac{\partial i_f}{\partial H}\frac{\partial x}{\partial H}. \tag{9.32}$$

Примем во внимание, что для равномерного течения $i_f=\lambda U_0^2/8gH_0$, где λ — коэффициент гидравлического сопротивления.

Из соотношения (9.30) найдем выражение для v_0 на фронте волны, нарушающей равномерное движение,

$$v_0=U_0+\sqrt{gH_0\cos\theta}, \tag{9.33}$$

где $\cos\theta=\sqrt{1-i^2}$.

После подстановки зависимости (9.33) в выражение (9.32) и преобразований получаем:

$$\left(\frac{\partial v}{\partial H}\right)_0=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{H_0}\cos\theta}+g\frac{i}{U_0}\frac{\partial x}{\partial H}\left[1+\frac{U_0}{2\sqrt{g/H_0\cos\theta}}\left(\frac{H_0}{\lambda_0}\frac{\partial\lambda}{\partial H}-1\right)\right]. \tag{9.34}$$

Для того чтобы получить критериальное соотношение [см. выражение (9.24)], необходимо определить $\partial c_0/\partial H$. Дифференцируя зависимость (9.23) по H, получим:

$$\frac{\partial c_0}{\partial H}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{H_0}\cos\theta}. \tag{9.35}$$

Приравнивая зависимости (9.34) и (9.35), получаем условие, при котором возмущения развиваются в катящиеся волны

$$\frac{\partial x}{\partial H}\left[1+\frac{U_0}{2\sqrt{gH_0\cos\theta}}\left(\frac{H_0}{\lambda_0}\frac{\partial\lambda}{\partial H}-1\right)\right]>0.$$

Для прямых волн повышения $\partial x/\partial H<0$, поэтому условие возникновения катящихся волн преобразуется к виду

$$1+\frac{U_0}{2\sqrt{gH_0\cos\theta}}\left(\frac{H_0}{\lambda_0}\frac{\partial\lambda}{\partial H}-1\right)<0.$$

Из этого соотношения (при $\cos\theta\approx1$) получаем:

$$(U_0^2/gH_0)>\left[4\Big/\left(\frac{H_0}{\lambda_0}\frac{\partial\lambda}{\partial H}-1\right)^2\right]. \tag{9.36}$$

Этот критерий возникновения катящихся волн получен для широкого канала без учета неравномерности распределения скоростей по сечению.

Критерий возникновения катящихся волн можно получить с учетом соотношений (9.1) и (9.2). Подставляя эти соотношения в критериальное уравнение (9.24) и учитывая зависимость (9.23), можно получить критерий в виде выражения (9.36).

Форма поперечного сечения канала и неравномерность распределения скоростей потока оказывают существенное влияние на возникновение катящихся волн. Критерий возникновения катящихся волн с учетом указанных параметров получен различными методами Н. А. Картвелишвили [5] и Т. Г. Войнич-Сяноженцким. Для плоского течения критерий, полученный Н. А. Картвелишвили, имеет вид

$$\frac{U_0^2}{gH_0}>\frac{1}{\left[\frac{1}{2}\left(3-\frac{H_0}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial H}\right)-\beta\right]^2}, \tag{9.37}$$

где β — корректив количества движения.

Для расчета условий возникновения катящихся волн по этим критериям необходимо знать величины λ и β. Коэффициент β является функцией λ (см. гл. 4). Для упрощения анализа связь между β и λ представим в виде

$$\beta\approx1+\lambda. \tag{9.38}$$

Обычно при анализе критерия устойчивости коэффициент гидравлического сопротивления λ принимают по Маннингу или Н. Н. Павловскому [2]. Учитывая, что сопротивление каналов практически подчиняется зависимостям, установленным И. Никурадзе (см. главы 2 и 3), целесообразнее при анализе устойчивости высокоскоростного потока в шероховатых каналах использовать соотношение (3.18)

$$(1/\sqrt{\lambda}) = 2 \lg 2H/k_s + 1,74.$$

Дифференцируя это выражение по H и подставляя в зависимость (9.37), с учетом выражения (9.38) получаем после преобразований новый вид критерия возникновения катящихся волн

$$\frac{U_0}{\sqrt{gH_0}} > \frac{1,4}{1 - 1,4(\sqrt{\lambda} - 0,45)^2}. \tag{9.39}$$

Расчет по соотношению (9.39) при λ, изменяющемуся от 0,04 до 0,25, показал, что значение критического числа Фруда U_0^2/gH_0 остается практически постоянным и близким к 2.

Т. Г. Войнич-Сяноженцкий получил критерий возникновения катящихся волн, совпадающий по форме с критерием (9.37), однако корректив количества движения рекомендуется определять с учетом турбулентных пульсаций скорости потока:

$$\beta_0 = 2\beta - 1 \approx 1 + 2\lambda. \tag{9.40}$$

Используя выражение (9.40), преобразуем критерий (9.37) к виду

$$\frac{U_0}{\sqrt{gH_0}} > \frac{1,7}{1 - 3,5(\sqrt{\lambda} - 0,25)^2}. \tag{9.41}$$

Расчеты по этому соотношению при $0,04 < \lambda < 0,25$ показали, что критическое значение числа Фруда U_0^2/gH_0 увеличивается с ростом λ от 3 до 5.

Изложенный выше метод не позволяет установить, какие именно возмущения приводят к неустойчивости высокоскоростного потока и возникновению катящихся волн. Считая источником начальных возмущений турбулентность пограничного слоя, В. М. Лятхер нашел, что при значениях числа Фруда, близких к 2, длина наиболее интенсивных внутренних возмущений в потоке примерно 0,5 H.

§ 32. Характеристики катящихся волн

Если числа Фруда достаточно большие, то на некотором расстоянии от входа в канал на поверхности потока начинают проявляться возмущения, которые постепенно нарастают. На рис. 9.5 представлена осциллограмма волновых профилей при течении в гладком канале с уклоном $i = 0,119$ и числом $\mathrm{Fr} = 30$, полученных Р. Броком. Анализ осциллограммы позволяет отметить, что катящиеся волны имеют характерный пилообразный профиль с крутым фронтом и очень пологим хвостом.

Критерий образования катящихся волн является необходимым, но не достаточным условием их возникновения. По данным экспериментальных исследований и натурных наблюдений А. О. Гамбаряна, для образования и развития катящихся волн необходима достаточно

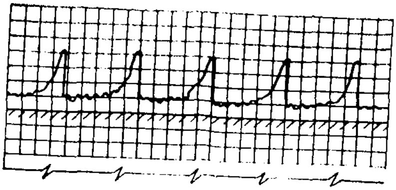


Рис. 9.5

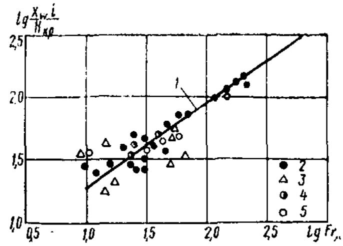


Рис. 9.6

1 — расчет по зависимости (9.42), модельный канал; 2 — данные А. О. Гамбаряна; 3 — данные Е. П. Федорова, натурный быстроток; 4 — данные К. Н. Арсенишвили, натурный быстроток; 5 — данные М. Р. Разумовского, модельный канал

большая длина канала x_w, которую можно определить по соотношению

$$(x_w\, i/H_{кр}) \geqslant 4\,\mathrm{Fr}^{2/3}. \tag{9.42}$$

На рис. 9.6 представлено сравнение зависимости (9.42) с данными измерений А. О. Гамбаряна. Для удобства анализа соотношение (9.42) может быть преобразовано к виду

$$(x_w/H_0) \geqslant (30/\lambda_c), \tag{9.43}$$

где H_0 — нормальная глубина в условиях равномерного течения;
λ_c — коэффициент гидравлического сопротивления.

Из соотношения (9.43) следует, что расстояние от входа в канал до сечения, в котором возникают волны, находится в обратной пропорциональной зависимости от коэффициента гидравлического сопротивления и в прямой пропорциональной зависимости от наполнения канала.

Согласно данным наблюдений и опытов заметное волнообразование происходит за пределами участка неравномерного движения потока. В гл. 6 показано, что длина участка неравномерного движения потока при отсутствии волн определяется теми же параметрами, т. е. увеличивается с глубиной и уменьшением коэффициента гидравлического сопротивления. Соотношение, определяющее длину начального участка при отсутствии волн, оказывается качественно близким к соотношению (9.43). Это указывает на то, что пограничный слой активно воздействует на процесс образования и рост катящихся волн. Пограничный слой, по-видимому, является источником тех возмущений, которые при общей неустойчивости потока и достаточной длине могут привести к возникновению катящихся волн.

Сопоставление длины начального участка x_c (при безволновом движении) с величиной x_w показывает, что длина x_w, определенная по соотношению (9.43), значительно превосходит длину x_c. Анализ данных экспериментальных и натурных исследований, проведенных А. О. Гамбаряном и др., показывает, что формулы (9.42) и (9.43)

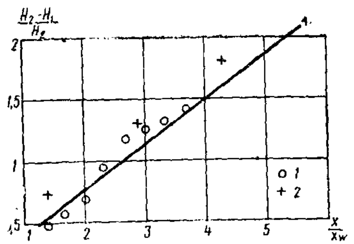


РИС. 9.7

1 — данные Е. П. Федорова, натурный быстроток; 2 — данные А. О. Гамбаряна, модельный канал

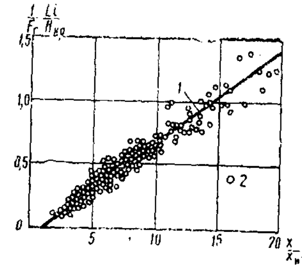


РИС. 9.8

1 — расчет по зависимости (9.44); 2 — данные А. О. Гамбаряна

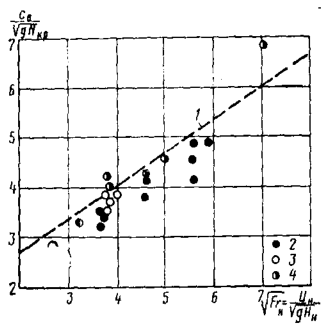


РИС. 9.9

1 — расчет по зависимости (9.45); 2, 3 — данные Р. Брока (2 — гладкий канал; 3 — шероховатый канал); 4 — данные А. О. Гамбаряна

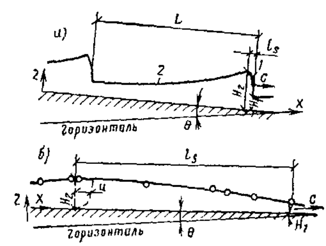


РИС. 9.10

а — профиль волны: 1 — лобовая часть волны; 2 — хвостовая часть волны; б — данные Р. Брока, лобовая часть волны (увеличена)

определяют условия возникновения волн, имеющих высоту, равную примерно половине нормальной глубины. Если начало волнообразования связывать с возникновением мелких волн, высота которых близка к 0,1 H, то расстояние x_w уменьшается примерно втрое.

По мере продвижения по каналу как высота, так и длина волн возрастают. На рис. 9.7 показано изменение относительной высоты волны $(H_2 - H_1)/H_2$ по длине натурного и модельного канала. (Здесь H_2 и H_1 — глубины в створах гребня и подошвы волны соответственно.) На рис. 9.8 представлено изменение безразмерной длины волны по течению. Анализ экспериментальных данных позволяет отметить, что как высота волны, так и ее длина L изменяются на участке роста волны по закону, близкому к линейному. Изменение длины волны можно описать следующей эмпирической зависимостью:

$$\frac{L}{H_{\text{кр}}} \approx \frac{0,5}{\lambda}\left(\frac{x}{x_w} - 1\right). \qquad (9.44)$$

Эта зависимость получена при $x/x_w < 15 \div 20$. При $x/x_w > 15 \div 20$ параметры волн стабилизируются. Стабилизация волн, по всей вероятности, связана с их обрушением.

Катящиеся волны перемещаются относительно неподвижного наблюдателя со скоростями, превышающими скорость осредненного течения потока. На рис. 9.9 представлены экспериментальные данные А. О. Гамбаряна и Р. Брока по изменению скорости волны в зависимости от числа Фруда, вычисленного для условий безволнового течения потока. Скорость волны

$$c_0 = c + U_н,$$

где c — скорость волны относительно потока;

$U_н$ — осредненная скорость безволнового потока.

Экспериментальные данные удовлетворительно аппроксимируются следующей зависимостью

$$\frac{c_0}{\sqrt{gH_{кр}}} = \frac{2}{3}\left(\sqrt{Fr_н} + 2\right), \tag{9.45}$$

где $H_{кр}$ — критическая глубина;

$Fr_н = U_н^2/(gH_н)$ — число Фруда, вычисленное по параметрам безволнового потока.

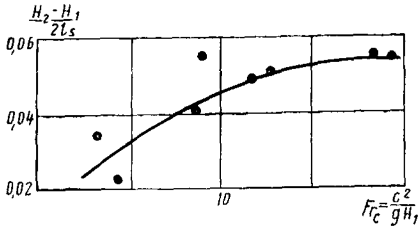


РИС. 9.11

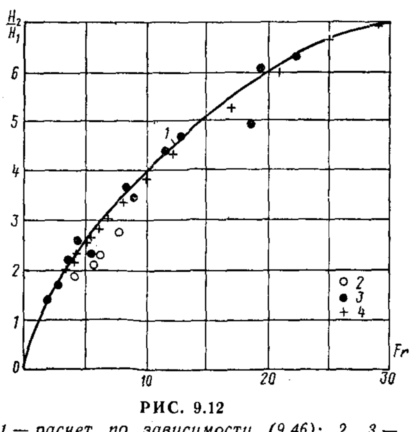


РИС. 9.12

1 — расчет по зависимости (9.46); 2, 3 — данные Р. Брока, катящиеся волны, $Fr_c = c^2/gH_1$ (2 — шероховатый канал; 3 — гладкий канал); 4 — данные Б. А. Бахметева и А. Е. Матцке, стационарный гидравлический прыжок, $Fr = u/gH_1$

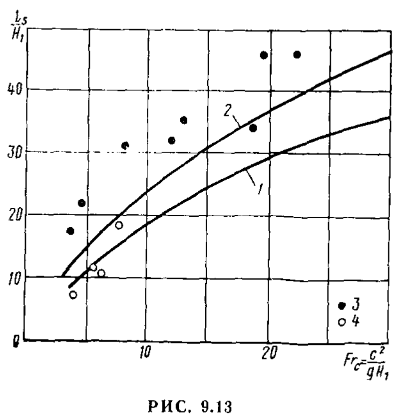


РИС. 9.13

1 — расчет по формуле М. Д. Чертоусова $l_s/H_1 = 10{,}3\,(\sqrt{Fr_c} - 1)^{0,81}$; 2 — данные В. Т. Чоу; 3 — гладкий канал; 4 — шероховатый канал

Эта зависимость качественно близка к известной зависимости Г. Тома. Обработка экспериментальных данных позволила установить также, что полная скорость катящихся волн c_0 в среднем в 1,5 раза больше осредненной скорости течения потока $U_н$, что согласуется с полученным выше уравнением (9.4). Лобовая часть катящейся волны значительно более крутая, чем хвостовая (рис. 9.10). Крутизна лобовой части волны $(H_2 - H_1)/l_s$ с ростом ее скорости по данным Р. Брока для гладкого канала возрастает (рис. 9.11) и приближается к 0,05 при числах Фруда $\mathrm{Fr}_c = c^2/(gH_1) > 15$. В гл. 1 указывалось на волновую природу гидравлического прыжка, представляющего собой частный случай остановившейся волны. Если двигаться вместе с катящейся волной, то навстречу ей будет двигаться жидкость со скоростью c. Таким образом, катящуюся волну можно представить аналогом гидравлического прыжка. За первую сопряженную глубину в этом случае следует принимать H_1. Тогда за параметр, определяющий характеристики такого «прыжка», по аналогии следует принять число Фруда $\mathrm{Fr}_c = c^2/gH_1$. На рис. 9.12 приведены данные по отношению «сопряженных» глубин катящейся волны в зависимости от числа Фруда. Эти данные обнаруживают неожиданно хорошую сходимость с результатами измерений Б. А. Бахметева и А. Е. Матцке в совершенном гидравлическом прыжке. Здесь же показана кривая, полученная расчетом по соотношению

$$(H_2/H_1) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+8\mathrm{Fr}} - 1\right). \tag{9.46}$$

На рис. 9.13 представлены экспериментальные данные изменения относительной длины лобовой части катящейся волны в функции от характерного числа Фруда. Длина лобовой части волны в данном случае является аналогом длины прыжка. Сравнение экспериментальных данных с расчетом по известной зависимости М. Д. Чертоусова и с данными В. Т. Чоу показывает, что длина лобовой части катящейся волны в гладком канале несколько превышает длину гидравлического прыжка. Для течения в шероховатом канале длина l_s/H_1 приближается к длине стационарного совершенного прыжка.

Эта аналогия позволяет предполагать, что начало обрушения катящихся волн (так же как и обрушение стационарного прыжка — волны) происходит при числах Фруда $\mathrm{Fr}_c = (c^2/gH_1) > 3$.

Этому условию (см. рис. 9.11) отвечает крутизна лобовой части волны $(H_2 - H_1)/l_s \approx 0{,}03$. Однако, несмотря на частичное обрушение, высота катящихся волн с увеличением Fr_c нарастает.

Из анализа приведенных данных видно, что аналогия между катящейся волной и стационарным прыжком имеет определенную физическую основу.

ГЛАВА 10. АЭРАЦИЯ ВЫСОКОСКОРОСТНЫХ ПОТОКОВ

§ 33. Критерий возникновения аэрации

Подавляющее большинство водосбросных сооружений работает в условиях аэрации высокоскоростного потока.

Аэрация потока представляет собой самопроизвольное вовлечение воздуха в водный поток при одновременном выбросе капель жидкости в воздух. Рассмотрим область вблизи поверхности высокоскоростного аэрированного потока (рис. 10.1, *а*). Видно, что поверхность аэрированного потока имеет крайне нерегулярный характер. Над поверхностью имеются свободно летящие капли, а в толще потока — воздушные включения. Схема высокоскоростного аэрированного потока представлена на рис. 10.1, *б*. Аэрированный поток принято разделять на три зоны: в зоне 1 происходит движение капель воды в воздухе; в зоне 2 — движение воздушных пузырьков в воде; в зоне 3 — движение воды без воздушных включений (с увеличением степени аэрации потока толщина зоны 3 уменьшается).

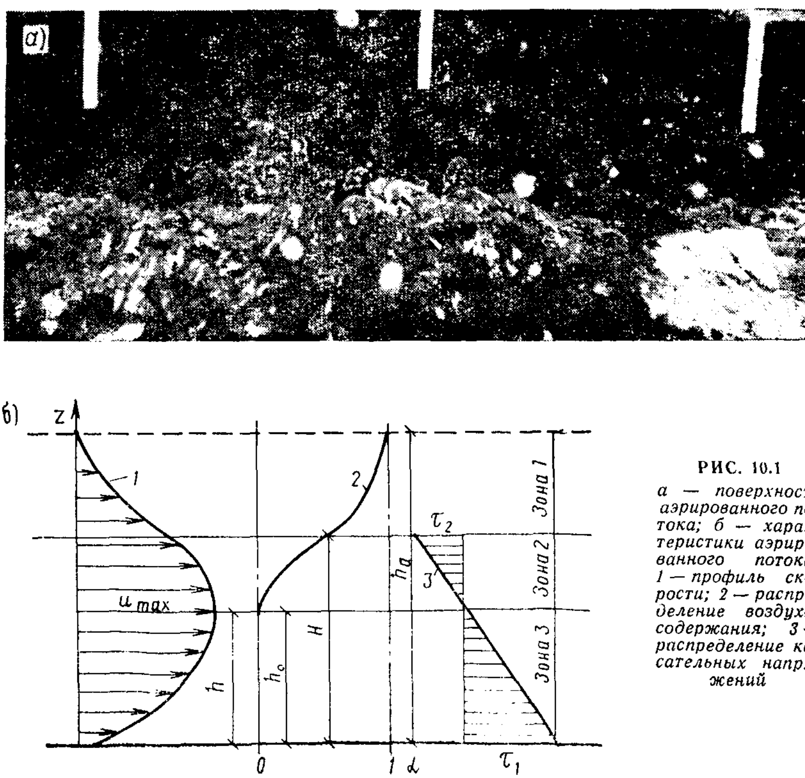


РИС. 10.1

а — поверхность аэрированного потока; б — характеристики аэрированного потока: 1 — профиль скорости; 2 — распределение воздухосодержания; 3 — распределение касательных напряжений

Количество воздуха в каждой точке аэрированного потока характеризуется объемным воздухосодержанием α, равным объему воздуха, отнесенному ко всему объему водовоздушной смеси. Верхняя граница зоны 1 характеризуется воздухосодержанием $\alpha = 0{,}95$, нижняя — $\alpha = 0{,}5$. На нижней границе зоны 2 $\alpha = 0{,}05$.

Аэрированный поток считается равномерным, когда все его характеристики не изменяются по длине канала. При равномерном движении аэрированного потока существует динамическое равновесие между количеством воздуха, вовлекаемого в поток и покидающего его пределы вследствие всплывания воздушных пузырьков. В условиях динамического равновесия количество возвращающихся в поток капель жидкости равно количеству выбрасываемых капель. Аэрация существенно изменяет основные гидравлические характеристики высокоскоростного потока, поэтому при расчете высокоскоростного потока необходимо установить, будет ли поток аэрирован и в какой степени. Т. Г. Войнич-Сяноженцким получен критерий начала аэрации по схеме обрушения неустойчивых волновых образований на свободной поверхности потока. Этот критерий имеет вид

$$\frac{\mathrm{Fr_a}}{\sqrt{1-i^2}} = 44\left(1+\frac{0{,}0023}{R^2}\right)\left(1+\frac{8{,}7}{C}\right)^{-2}. \tag{10.1}$$

где $\mathrm{Fr_a} = U^2/(gR)$;
U — средняя скорость;
R — гидравлический радиус;
C — коэффициент Шези;
i — уклон дна канала.

Формула представлена в размерном виде, все величины выражены в системе СИ. Для условий натурных сооружений, т. е. для больших значений R, когда действием сил поверхностного натяжения можно пренебречь, зависимость (10.1) упрощается и преобразуется к безразмерному виду

$$\mathrm{Fr_a}/(\sqrt{1-i^2}) = 44/(1+\sqrt{\lambda})^2, \tag{10.2}$$

где λ — коэффициент гидравлического сопротивления.

Другой подход к определению критерия возникновения аэрации основан на анализе деформации свободной поверхности потока под действием пульсационной составляющей скорости u_z', нормальной к свободной поверхности потока (рис. 10.2). Под действием этой пульсации масса жидкости поднимается над уровнем невозмущенной свободной поверхности потока. При этом кинетическая энергия турбулентных пульсаций переходит в потенциальную энергию под-

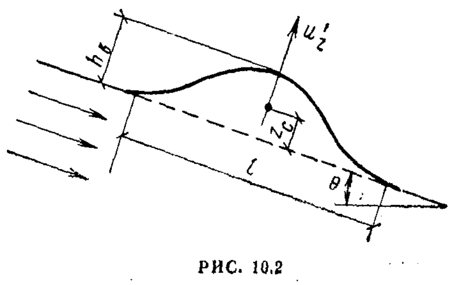


Рис. 10.2

нятой массы жидкости. Деформации свободной поверхности потока кроме силы тяжести будет препятствовать также сила поверхностного натяжения. Обозначая размер возмущений, ответственных за начало аэрации, через l, баланс удельной энергии в условиях предельного поднятия массы жидкости запишем в виде

$$\rho\,(u_z'^2/2) = \rho g z_c \cos\theta + (2\sigma/r), \qquad (10.3)$$

где z_c — положение центра тяжести поднятой массы жидкости над уровнем невозмущенной свободной поверхности;
σ — поверхностное натяжение;
r — радиус кривизны в зоне деформации свободной поверхности.

Учитывая трехмерность возмущений, будем приближенно считать, что масса возмущенной жидкости над свободной поверхностью близка к массе шарового сегмента высотой $h_в$ (см. рис. 10.2). Для шарового сегмента имеют место следующие геометрические соотношения:

$$\left(\frac{l}{h_в}\right)^2 = 4\left(2\,\frac{r}{h_в} - 1\right); \qquad (10.4)$$

$$\frac{z_c}{h_в} = \frac{1}{4}\,\frac{4r/h_в - 1}{3r/h_в - 1}. \qquad (10.5)$$

Подставляя выражения (10.4) и (10.5) в зависимость (10.3), после преобразований получаем:

$$u_z'^2 = g h_в\,\frac{[(l/h_в)^2 + 2]\cos\theta}{3/2\,(l/h_в)^2 + 2} + \frac{4\sigma}{\rho h_в\,[(l/h_в)^2/8 + 1/2]}. \qquad (10.6)$$

Обычно, следуя Ж. Хальбронну, начало аэрации связывают с возможностью полного отрыва масс жидкости от свободной поверхности потока. Это условие формулируется в виде $l/h_в = 1$. Другими словами, предполагается, что при отрыве массы жидкости образуется шар радиусом $r = l/2 = h_в/2$. Если подставить это соотношение в выражение (10.6) и использовать данные по среднему масштабу и средней пульсационной энергии массы жидкости (см. гл. 8), можно убедиться, что условие полного отрыва капель требует такого высокого уровня турбулентных пульсаций, который может реализоваться при значениях числа Фруда $U^2/gH \cong 100$. Однако, как показывают многочисленные наблюдения, аэрация начинается при значительно меньших числах Фруда. При этих числах Фруда реальная кинетическая энергия турбулентных пульсаций недостаточна для полного отрыва масс жидкости, что указывает на необоснованность этого предположения. Таким образом, условие, соответствующее началу аэрации, требует уточнения.

Уточненное условие начала аэрации сформулируем на основе известного явления захвата воздуха при обрушении неустойчивых волн. Идентичное условие было сформулировано впервые П. А. Войновичем и А. И. Шварцем. Однако математическая реализация этого принципа была построена с использованием теории развития волн на свободной поверхности потока идеальной жидкости. Эта теория не учитывает реальных параметров потока и, в частности, турбулентности, которая, как указывалось, играет определяющую роль в процессе захвата воздуха жидкостью. Из теории волн известно, что волны становятся неустойчивыми и обрушаются, когда их крутизна $h_в/l$ достигает значения 0,14. В соответствии с этим условие начала аэрации запишем в виде $h_в/l = 0{,}14$. Подставляя это условие в соотношение (10.6), после преобразования получим:

$$\frac{u_z'^2}{gH}=\frac{l}{H}\,\frac{\sqrt{1-i^2}}{(l/h_в)}\left[1+160\,\frac{\sigma}{\rho g H^2\sqrt{1-i^2}}\right]. \tag{10.7}$$

Расчеты показывают, что второе слагаемое в соотношении (10.7) составляет не более 10% первого слагаемого даже для модельных потоков, где проявление сил поверхностного натяжения наиболее заметно. Поэтому с достаточной точностью условие начала аэрации можно записать в более простом виде

$$(u_z'^2/gH)=l/\left(H\frac{l}{h_в}\right)\sqrt{1-i^2}. \tag{10.8}$$

В. М. Лятхером [7] из уравнения количества движения было получено критериальное соотношение, которое после преобразований записывается как

$$\left(u_z'^2/gH\right)\sim(l/H)\sqrt{1-i^2}, \tag{10.9}$$

где l — масштаб возмущений, ответственных за начало аэрации.

При преобразовании считалось, что силы поверхностного натяжения не оказывают существенного влияния на начало аэрации. Это соотношение может быть представлено также в виде

$$i_а\sim(l/H)\sqrt{1-i_а^2}, \tag{10.10}$$

где $i_а$ — уклон канала, при котором возникает аэрация потока.

Следует отметить, что за масштаб l принимается размер пульсаций, близкий к масштабу диссипации. Соотношения (10.8) и (10.10) качественно совпадают.

Учитывая, что в потоке существуют возмущения разных масштабов с различной пульсационной энергией, установим параметры тех возмущений, которые определяют начало аэрации. Как показано в гл. 8, распределение пульсационной энергии по частотам определяется частотно-энергетическим спектром.

При анализе устойчивости возмущений разного масштаба используем следующее выражение спектральной плотности вертикальных пульсаций скорости:

$$S(\eta)=S_0 f(\eta), \tag{10.11}$$

где S_0 — значение спектральной плотности при $\eta = 0$;

$f(\eta)$ — функция, описывающая изменение спектральной плотности по η, или нормированная спектральная плотность $S(\eta)/S_0$ вертикальных пульсаций скорости (рис. 10.3); здесь $\eta=(nL/\bar{u}) = (L/l)$ — отношение макромасштаба L к масштабу рассматриваемых пульсаций l;

n — частота пульсаций;

u — осредненная местная скорость.

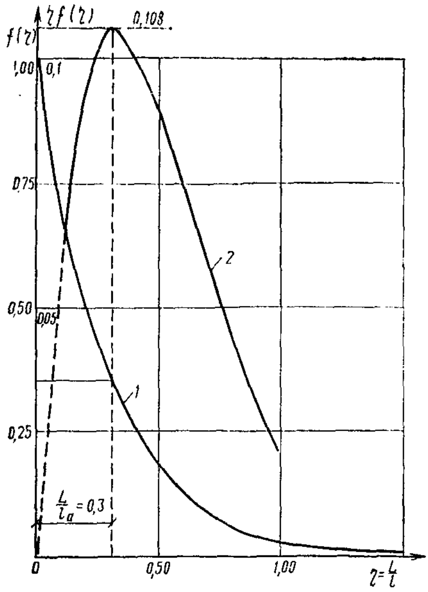


РИС. 10.3
$1 - f(\eta)$; $2 - \eta f(\eta)$

Нулевое значение спектральной плотности вертикальных пульсаций скорости можно установить экспериментально с использованием определения спектра [8]

$$\overline{u_z'^2} = \int_0^\infty S(\eta)\, d\eta - S_0 \int_0^\infty f(\eta)\, d\eta.$$

Интегрирование нормированной спектральной плотности $f(\eta)$ вертикальных пульсаций скорости (см. в гл. 8) позволило установить, что $\int_0^\infty f(\eta)\, d\eta \approx 0{,}25$. Тогда $S_0 = 4\overline{u_z'^2}$. Определенное таким образом значение S_0 оказалось близким к соответствующему значению для изотропной турбулентности [8]. С учетом найденного значения S_0 спектральную плотность запишем в виде

$$S(\eta) = 4\overline{u_z'^2}\, f(\eta).$$

Тогда

$$u_z'^2 = S(\eta) = 4\overline{u_z'^2}\, f(\eta). \qquad (10.12)$$

Подставляя зависимость (10.12) в балансовое соотношение (10.6) и пренебрегая действием сил поверхностного натяжения, получим:

$$4\overline{u_z'^2}\, f(\eta) = gh_{\text{в}} \frac{(l/h_{\text{в}})^2 + 2}{(3/2)(l/h_{\text{в}})^2 + 2} \cos\theta. \qquad (10.13)$$

Принимая, как и ранее, $h_{\text{в}}/l = 0{,}14$ и учитывая, что продольный макромасштаб вертикальных пульсаций $L \approx 0{,}3\ H$, после преобразований получаем:

$$\left(\overline{u_z'^2}/gH\right) = [0{,}007/\eta f(\eta)] \cos\theta. \qquad (10.14)$$

Используем соотношение между пульсационной и динамической скоростью (см. рис. 8.3, *б*)

$$\sqrt{\overline{u_z'^2}} = 0{,}9u_* = 0{,}9\sqrt{ghi},$$

где h — расстояние от дна канала до точки максимума скорости.

Условие начала аэрации запишем в виде

$$\operatorname{tg}\theta_{\text{а}} = \frac{0{,}007}{0{,}81\eta f(\eta)} \frac{H}{h}. \qquad (10.15)$$

Из соотношения (10.15) следует, что критический уклон канала, при котором начинается аэрация, будет минимальным при максимальном произведении $\eta f(\eta)$. На рис. 10.3 представлены нормированная спектральная плотность вертикальных пульсаций $f(\eta)$ и график изменения произведения $\eta f(\eta)$. Максимум произведения $\eta f(\eta)$ отвечает пульсациям скорости масштаба $L/l_{\text{а}} = 0{,}3$ и составляет 0,108. Поэтому начало аэрации связано с действием пульсаций масштаба $l_{\text{а}} = \frac{1}{3}L \approx H$. Подставляя значение $\eta f(\eta) = 0{,}108$ в соотношение (10.15), найдем, что

$$\operatorname{tg}\theta_{\text{а}} \approx 0{,}08H/h; \tag{10.16}$$

(индекс «а» показывает, что данный параметр рассматривается в условиях начала аэрации).

Анализ экспериментальных данных показывает, что в условиях начала аэрации $H/h \approx 1{,}15$, поэтому соотношение, описывающее условие начала аэрации, приобретает вид

$$\operatorname{tg}\theta_{\text{а}} > 0{,}09 \tag{10.17}$$

или

$$\frac{\mathrm{Fr}_{\text{а}}}{\cos\theta} = \left(\frac{U^2}{gH}\right)_a = \frac{0{,}7}{\lambda}, \tag{10.18}$$

т. е.

$$i_{\text{а}} = 0{,}09\sqrt{i - i_{\text{а}}^2}. \tag{10.19}$$

Следует подчеркнуть, что полученные критериальные соотношения определяют начало аэрации в условиях равномерного режима течения. При равномерном движении аэрация начинается при уклонах канала $i > i_{\text{а}}$. На рис. 10.4 дана диаграмма устойчивости потока, построенная по соотношению (10.18) и позволяющая установить, является ли поток аэрированным. Из экспериментальных точек нанесены на диаграмму лишь те, в которых аэрация наблюдалась при минимальных уклонах канала. На этой же диаграмме нанесен критерий (10.1), полученный Т. Г. Войнич-Сяноженцким.

На рис. 10.5 представлена фотография свободной поверхности высокоскоростного потока в момент, предшествующий началу аэрации ($i = 0{,}072$). На поверхности видны волновые структуры, продольный размер которых l близок к глубине потока. Высота этих образований составляет $\sim 0{,}1\, l$. При таких значительных размерах волновых структур силы поверхностного натяжения невелики и могут не учитываться.

За основную количественную характеристику аэрации принято считать среднее воздухосодержание $\bar{\alpha}$. Обычно среднее воздухосодержание связывают с числом Фруда и начало аэрации определяют, экстраполируя экспериментально установленную зависимость среднего воздухосодержания от числа Фруда до значения $\bar{\alpha} = 0$. Таким образом получают число Фруда, соответствующее началу аэрации.

Следует отметить, что по методике экспериментального определения обычно не удается разделить явление образования волн (турбулентных выбросов) на поверхности потока от явления аэрации. Это связано с тем, что в практике исследований аэрации наиболее широко используется прибор, основанный на принципе различной проводимости воды и воздуха. Выходной сигнал такого прибора $I \sim (t_а/t_0)$, где $t_а$ — суммарное время нахождения датчика в воздушной среде к общему времени наблюдения ($t_а = t_{а1} + t_{а2} + \ldots$) (рис. 10.6). Вблизи свободной поверхности (рис. 10.6, *а*) такой прибор будет реагировать на воздух, находящийся между волнами. Если начало аэрации связано с обрушением волн высотой $h_в = 0{,}14\ l$, необходимо определить число Фруда не при нулевом значении $\bar{\alpha}$, а при значении $\bar{\alpha} = 0{,}14$.

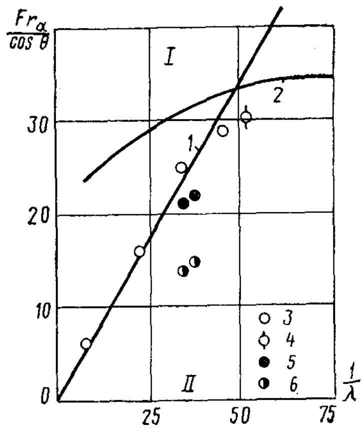


РИС. 10.4

1 — расчет по критериальному соотношению (10.18); 2 — то же, (10.1); 3 — данные В. Д. Корывановой и В. С. Боровкова; 4 — Южный канал; 5 — быстроток Биг-Хилл; 6 — быстроток Стринг-Гали; I — область аэрированных потоков; II — область неаэрированных потоков

В условиях даже широкого канала (или водослива) значительное влияние на аэрацию потока могут оказывать боковые стенки. На боковых стенках, так же как и на дне канала, развиваются пограничные слои. Пограничные слои пронизывают всю толщу потока, поэтому потенциальное ядро не экранирует турбулентные возмущения, и они активно проявляются у свободной поверхности вблизи боковых стенок канала. По мере ускорения движения потока на начальном участке касательные напряжения на боковых стенках возрастают. Как показано в гл. 6, рост касательных напряжений описывается соотношением

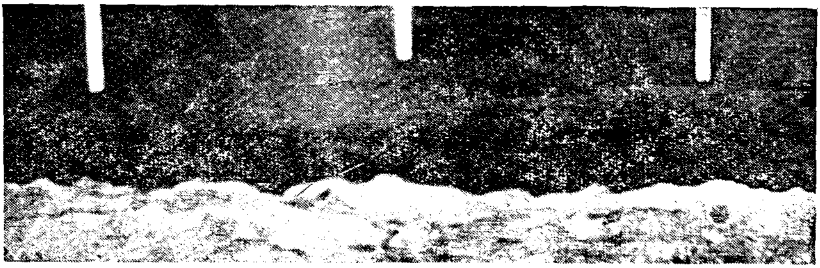


РИС. 10.5

$$\tau/\tau_c = (x/x_c)^{1/\left(1+1,5\sqrt{\lambda_c}\right)},$$

где индекс «с» обозначает равномерное стабилизированное течение.

Поскольку величина касательных напряжений определяет величину квадрата пульсационной скорости, то

$$\overline{u'^2} = \frac{\tau_c}{\rho}\left(\frac{x}{x_c}\right)^{1/\left(1+1,5\sqrt{\lambda_c}\right)}.$$

Масштаб возмущений, развивающихся на боковой стенке канала, можно считать пропорциональным толщине развивающегося пограничного слоя. Если шероховатость боковых стенок канала такая же, как и шероховатость дна, можно считать, что интенсивность развития пограничного слоя на боковой стенке будет такой же, как и на дне. Поэтому примем, что при $x = x_c$ $\delta = h_c$. Используя соотношение (6.26) для роста толщины пограничного слоя, находим:

$$\frac{\delta}{h_c} = \left(\frac{x}{x_c}\right)^{1/\left(1+1,5\sqrt{\lambda_c}\right)}.$$

Принимая критериальное соотношение (10.14) при $\eta f(\eta) = 0,108$, условие начала аэрации получим в виде

$$\overline{u'^2}/g\delta_a = 0,065\cos\theta.$$

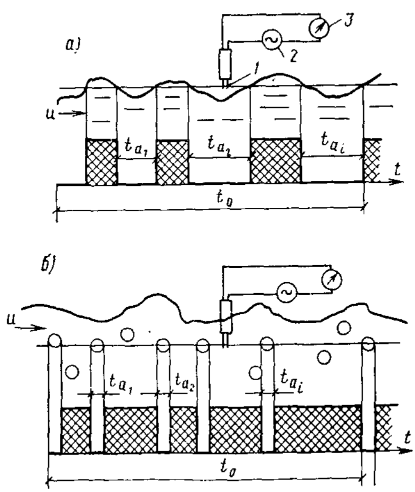


РИС. 10.6

а — измерение воздухосодержания в аэрированном потоке вблизи свободной поверхности; б — то же, в толще потока; 1 — датчик; 2 — источник питания; 3 — регистрирующий прибор

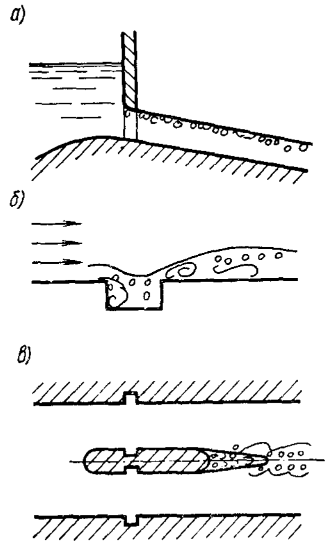


РИС. 10.7

а — аэрация потока при истечении из-под щита; б — то же, при обтекании паза затвора (план); в — то же, при обтекании раздельного быка

Подставляя в эту зависимость полученные соотношения для пульсационной скорости и толщины пограничного слоя, после преобразований находим, что условие начала аэрации на боковой стенке канала выполняется для любого расстояния x при $\operatorname{tg} \theta > 0{,}09$.

Таким образом, аэрация на боковых стенках возникает практически сразу при входе потока в канал, что подтверждается многочисленными наблюдениями на натурных объектах.

Интересно отметить, что величина параметра $\overline{u'^2}/g\delta$ зависит только от уклона канала и не изменяется по его длине.

В ряде случаев необходимо установить возможность возникновения аэрации высокоскоростного потока при прохождении его через местные сопротивления в канале (рис. 10.7). Так, например, аэрация потока при обтекании пазов и некоторых других элементов затворных конструкций, а также при обтекании раздельных бычков в затворных камерах безнапорных туннелей может существенно снизить кавитационное разрушение элементов гидротехнических сооружений. Аэрация высокоскоростного потока при обтекании шашек-гасителей способствует уменьшению динамических нагрузок на водобой и снижает кавитационную эрозию гасителей.

При исследовании кавитации принято рассматривать в качестве эталонного кавитирующего тела цилиндр. Рассмотрим в связи с этим аэрацию высокоскоростного потока при обтекании им одиночного цилиндрического тела (рис. 10.8). При обтекании потоком цилиндрического тела давление в лобовой части повышается. Распределение давления на поверхности при больших числах Рейнольдса показано на рис. 10.9. Наибольшее понижение давления наблюдается на боковых поверхностях цилиндра (при угле $\varphi \cong 70°$). Повышение давления в лобовой части цилиндра равно скоростному напору $(\rho u^2)/2$, а понижение давления при больших числах Рейнольдса может достигать двойного скоростного напора. В кормовой части цилиндра давление возрастает и становится близким к статическому. Резкое повышение давления приводит к отрыву пограничного слоя от боковой поверхности

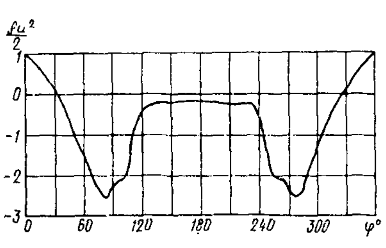


РИС. 10.9

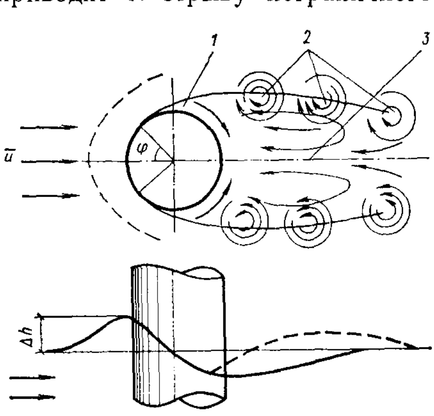


РИС. 10.8

← *1 — зона отрыва пограничного слоя; 2 — зона интенсивного вихреобразования; 3 — зона возвратного течения* цилиндра. В кормовой зоне позади цилиндра образуется турбулентный след, ширина которого возрастает с увеличением расстояния от цилиндра и течение в нем направлено в сторону цилиндра (см. рис. 10.8). Взаимодействие транзитного потока с возвратным течением рождает интенсивные вихревые структуры. Особенность обтекания цилиндра потоком со свободной поверхностью состоит в том, что изменение давления на поверхности цилиндра приводит к резким локальным изменениям уровня жидкости вблизи цилиндра. В связи со значительными изменениями уровня свободной поверхности проявление сил тяжести становится существенным, поэтому при больших числах Рейнольдса параметром, определяющим характер обтекания цилиндра, будет число Фруда $Fr = U^2/gd$.

Исследования аэрации потока при обтекании одиночного цилиндра позволили установить, что наиболее интенсивно процесс вовлечения воздуха в поток происходит на границе следа и транзитного потока (рис. 10.10). В этой области уровень интенсивности вертикальных пульсаций скорости потока достигает 20—25% скорости набегающего потока. Вдвое бо́льшую интенсивность имеют поперечные пульсации (рис. 10.11). Значительные поперечные пульсации скорости связаны с наличием вблизи границы следа мощных вихревых структур, ось вращения которых параллельна оси цилиндра. Эти пульсации также влияют на захват воздуха, способствуя замыканию образующихся полостей на свободной поверхности потока. Наблюдения позволили установить, что особенность аэрации потока за цилиндром состоит в том, что ее начало связано не с образованием неустойчивых волн на свободной поверхности (как это свойственно высокоскоростному потоку в канале), а с замыканием полостей, образующихся вследствие вертикальных пульсаций скорости (рис. 10.12). Можно предполагать, что в тех случаях, когда в результате деформации образуется полость в виде полусферы радиусом R, имеется возможность ее замыкания и образования воздушного пузыря. Баланс удельной энергии для этого критического состояния запишем в виде

$$\rho \frac{\overline{u_z'^2}}{2} = \frac{2\sigma}{R} + \frac{1}{3}\rho g R,$$

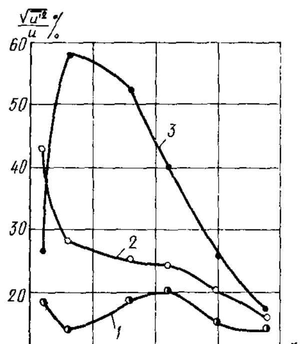
где $\rho \dfrac{\overline{u_z'^2}}{2}$ — сила, связанная с действием вертикальной компоненты пульсации скорости;

$2\sigma/R$ — сила, связанная с действием поверхностного натяжения;

$\dfrac{1}{3}\rho g R$ — сила, связанная с действием плавучести.

Это соотношение позволяет установить, что процесс начала аэрации зависит от сил инерции, сил тяжести и поверхностного натяжения жидкости. Экспериментальные исследования позволили

РИС. 10.10



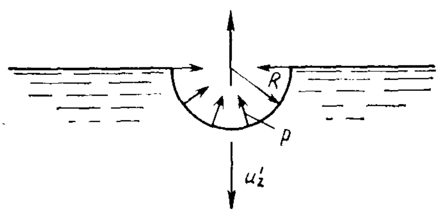


РИС. 10.12

◀ РИС. 10.11

1 — продольные пульсации скорости; 2 — вертикальные пульсации скорости; 3 — поперечные пульсации скорости

установить критериальную зависимость начала аэрации при обтекании цилиндра в виде

$$Fr_a = (185/We),$$

где $Fr_a = U^2/gd$;

$We = (\rho U^2 d)/\sigma$ — число Вебера;

d — диаметр цилиндра.

Эта зависимость оказывается справедливой при $Re = \frac{Ud}{\nu} > 10^3$.

§ 34. Движение капель воды в воздухе и воздушных включений в воде при аэрации потока

Гидравлические параметры аэрированного потока существенно зависят от характера движения капель и воздушных включений. В тех случаях, когда энергия пульсационного движения значительно превосходит энергию начала аэрации, аэрация нарастает. При этом наряду с обрушением неустойчивых волновых структур происходит отрыв масс жидкости от поверхности потока и непосредственное вовлечение воздушных включений в поток жидкости (рис. 10.13). Массы воды, отрываясь от поверхности потока, первоначально попадают в спутный поток воздуха и под действием сил поверхностного натяжения приобретают форму, близкую к форме шара. Капля, двигаясь в продольном направлении со скоростью, равной скорости потока, удаляясь от свободной поверхности, все более интенсивно обдувается сравнительно медленно движущимся воздухом. При этом давление вокруг капли распределяется как показано на рис. 10.14. В лобовой части капли давление направлено к ее центру, а в кормовой — от центра. При та-

РИС. 10.13

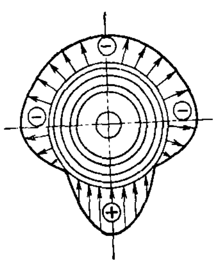


РИС. 10.14

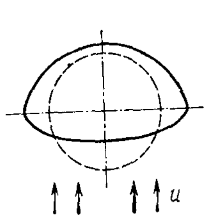


РИС. 10.15

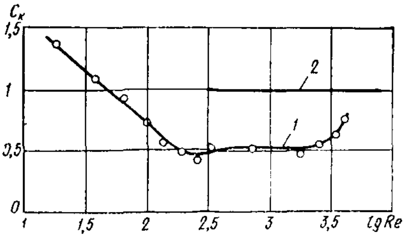


РИС. 10.16

1 — капля; 2 — тонкий диск

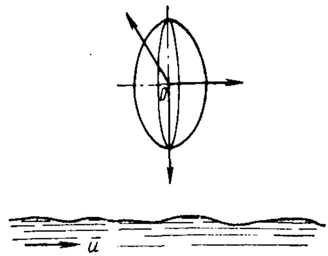


РИС. 10.17

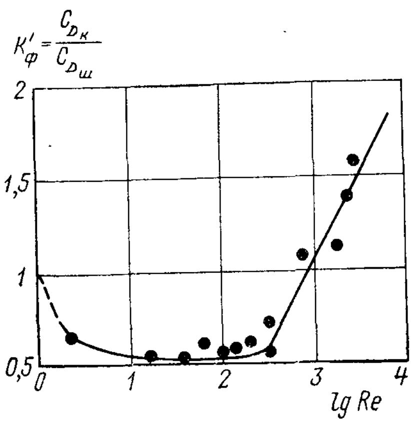


РИС. 10.18

ком действии сил давления кривизна капли в лобовой части уменьшается, а в кормовой возрастает (рис. 10.15). Силовое воздействие F на каплю определяется суммарным действием лобового и кормового давления и связано с коэффициентом сопротивления капли $C_к$ соотношением

$$C_к = F \Big/ \left(\rho_а \frac{U^2}{2} \omega_м\right), \qquad (10.20)$$

где $\rho_а$ — плотность воздуха; $\omega_м$ — площадь поперечного сечения капли, нормального к вектору скорости.

Зависимость коэффициента сопротивления капли диаметром $d_к$ от числа Рейнольдса $\mathrm{Re} = Ud_к/\nu$ (где U — скорость движения капли относительно воздуха) показана на рис. 10.16. Коэффициент сопротивления капли $C_к$ определяется режимом обтекания капли, ее формой и циркуляцией жидкости внутри капли при ее движении. Режим обтекания капли и циркуляция в капле тесно связаны с ее формой. С увеличением числа Рейнольдса (при малых его значениях) коэффициент сопротивления $C_к$ уменьшается, что связано с уменьшением абсолютной величины давления в кормовой части капли. Снижение «отрицательного» давления в кормовой части уменьшает асимметрию капли, и она приближается по форме к эллипсоиду вращения с соотношением осей $k = 0{,}6$ (рис. 10.17). При некотором критическом значении числа Рейнольдса давление в кормовой части меняет знак и начинает действовать в направлении центра капли так же, как и давление в ее лобовой части. Изменение знака давления в кормовой части связано с так называемым «отрывом» пограничного слоя. Для эллипсоида вращения отрыв пограничного слоя происходит при числах Re, значительно меньших, чем для шара.

Это объясняется менее благоприятными условиями обтекания эллипсоида по сравнению с шаром. При отрыве пограничного слоя сопротивление капли падает вследствие того, что в кормовой части давление, направленное к центру капли, возрастает. Именно это приводит к изменению формы капли и дальнейшему ее сплющиванию. Как показывают эксперименты, сплющивание уменьшает толщину капли, превращая ее из эллипсоида в круглый диск с $k = 0{,}1, \ldots, 0{,}2$. В этом состоянии коэффициент сопротивления капли приближается к коэффициенту сопротивления тонкого диска (см. рис. 10.16).

Зависимость для коэффициента сопротивления тел несферической формы имеет вид

$$C_D = \frac{24}{\mathrm{Re}} f + 0{,}24K_\text{ф}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{200f}{K_\text{ф}\mathrm{Re}}}\right), \qquad (10.21)$$

где f — параметр формы;

$K_\text{ф}$ — коэффициент формы.

Расчет коэффициента сопротивления «твердой» капли (т. е. без учета циркуляции в ней) C_D по соотношению (10.21) с учетом реальной ее формы при различных числах Рейнольдса показал, что «твердая» капля имела бы коэффициент сопротивления примерно в 2—2,5 раза больший, чем коэффициент сопротивления реальной жидкой капли той же формы. Это объясняется наличием в капле циркуляции, которая снижает коэффициент трения на границе раздела жидкость — воздух.

Обработка экспериментальных данных позволила получить отношение $K'_\text{ф}$ коэффициентов сопротивления реальной жидкой капли $C_{\text{Дк}}$ и твердого шара $C_{\text{Дш}}$ в функции от числа Рейнольдса (рис. 10.18). При числах Рейнольдса от 10 до 250 величина $K'_\text{ф}$ остается постоянной и равной 0,55. При числах Рейнольдса от 250 до 5000 величина $K'_\text{ф}$ увеличивается с ростом числа Рейнольдса

$$K'_\text{ф} = \lg(\mathrm{Re}/100). \qquad (10.22)$$

При этом коэфффициент сопротивления капли можно вычислять по зависимости

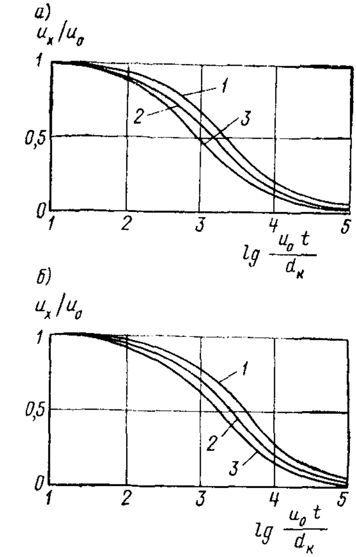
$$C_\text{к} = K'_\text{ф}\left[\frac{24}{\mathrm{Re}} + 0{,}24\left(1 + \sqrt{1 + \frac{200}{\mathrm{Re}}}\right)\right]. \qquad (10.23)$$

В момент отрыва капли продольная составляющая ее скорости близка к скорости потока U. Вследствие сопротивления воздуха скорость ее снижается. Изменение продольной скорости капли по времени при ее движении в воздухе можно проанализировать на основе приближенного уравнения

$$m\frac{dU_x}{dt} = -C_{\text{к}x}\frac{\rho U_x^2}{2}\,\omega_\text{м}, \qquad (10.24)$$

где m — масса капли.

Площадь миделева сечения $\omega_\text{м}$ в общем случае зависит от сопротивления капли и поверхностного натяжения жидкости. Как пока-



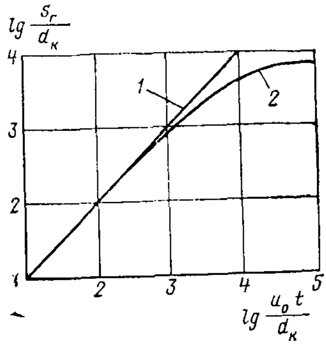


РИС. 10.20

1 — $S_г = u_0 t$; 2 — расчет по зависимости (10.28)

РИС. 10.19

а — реальная форма капли; б — сферическая форма капли; 1 — Re $=10^2$; 2 — Re $=5\cdot10^2$; 3 — Re $=2{,}5\cdot10^3$

зали исследования, капля в большом диапазоне чисел Рейнольдса имеет форму эллипсоида вращения с соотношением осей $k = 0{,}6$. При этом диаметр миделева сечения $d_м = 1{,}10\, d_к/\sqrt[3]{k}$. Тогда

$$\omega_м \cong 2{,}1\pi d_к^2/4. \tag{10.25}$$

Принимая во внимание, что $m = \rho\,(\pi d_к^3/6)$, и учитывая, что при отрывном обтекании изменение коэффициента сопротивления капли можно аппроксимировать зависимостью

$$C_{к_x} = 0{,}1\,\mathrm{Re}^{0{,}25}, \tag{10.26}$$

после интегрирования уравнения (10.24) находим:

$$U_x = U_0 \Big/ \left(1 + 0{,}2\,\frac{\rho_а}{\rho}\,\mathrm{Re}^{0{,}25}\,\frac{U_0 t}{d_к}\right)^{0{,}8}, \tag{10.27}$$

где U_0 — продольная скорость капли в момент отрыва (относительно воздуха);

U_x — относительная скорость в момент времени t.

Это соотношение описывает изменение скорости капли во времени в случае, если обтекание ее отрывное, т. е. число $\mathrm{Re} > 250$.

Продольная скорость движения капли, согласно полученной зависимости (10.27), определяется двумя параметрами: числом Рейнольдса и числом Струхаля ($\mathrm{Sh} = U_0 t/d_к$). Анализ расчетов, выполненных по зависимости (10.27) и представленных на рис. 10.19, *а*, позволяет заключить, что число Рейнольдса не оказывает существенного влияния на изменение скорости капли при ее движении. При значениях числа Струхаля $\mathrm{Sh} = 10^3 \div 10^4$ относительная скорость капли не превышает 5—10% ее начальной скорости.

На рис. 10.19, *б* показано изменение скорости капли, полученное расчетом, в предположении, что форма ее не отличается от сферической. Сравнение данных, представленных на рис. 10.19, *а* и *б*, указывает на то, что неучет реальной формы капли может дать погрешность до 25%.

Интегрирование уравнения (10.27) позволило получить выражение для пути $S_г$, который проходит капля в горизонтальном направлении за время t,

$$\frac{S_г}{d_к}=25\frac{\rho}{\rho_а}\,\mathrm{Re}^{-0,25}\left[\left(1+0,2\frac{\rho_а}{\rho}\,\mathrm{Re}^{0,25}\frac{U_0 t}{d_к}\right)^{0,2}-1\right]. \qquad (10.28)$$

Расчет, выполненный по этой зависимости (рис. 10.20), показывает, что на начальном участке движения, т. е. там, где скорость капли незначительно отличается от начальной, путь, пройденный каплей, прямо пропорционален времени движения. Отклонение от линейной зависимости становится особенно заметным на конечной стадии движения капли.

Одновременно с горизонтальным перемещением капля под действием вертикальной пульсации скорости поднимается на некоторую высоту, а затем снова падает в поток. Максимальное время движения капли в вертикальном направлении может быть приближенно определено как

$$t=2\sqrt{\frac{2\,(h_а-H)}{g}}\,. \qquad (10.29)$$

где $h_а$ — максимальная высота выброса капель над дном канала.

Заметим, что скорость вертикальных перемещений капли относительно воздуха существенно меньше ее скорости по горизонтали, поэтому действие сил сопротивления можно не учитывать. Выражение (10.29) показывает суммарное время подъема и падения капли. Подставляя соотношение (10.29) в зависимость (10.27), можно установить величину продольной скорости капли в момент ее возвращения в поток. Подстановка соотношения (10.29) в выражение (10.28) дает возможность определить расстояние, которое пролетит капля над потоком.

Расчеты движения капель в воздухе возможны лишь при условии, если известна их крупность. В § 32 установлено, что аэрация потока зависит в основном от крупных турбулентных образований, обладающих большой пульсационной энергией. Такая крупномасштабная турбулентность приводит к образованию сравнительно крупных капель (рис. 10.21). Крупные капли при обтекании их воздушным потоком деформируются и принимают форму диска. Под действием лобового давления сравнительно тонкий диск начинает прогибаться и может принять форму полой сфероидальной чашки, опрокинутой навстречу потоку воздуха (рис. 10.22). В этом состоянии капля неустойчива и разрывается в центре вследствие действия пульсаций давления. Экспериментальные исследования показывают, что в состоянии, предшествующем разрыву, капля принимает форму полусферы с радиусом, равным диаметру первоначальной капли.

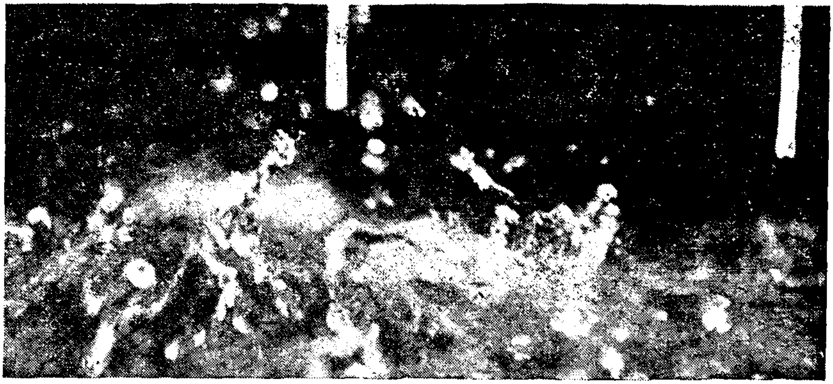


РИС. 10.21

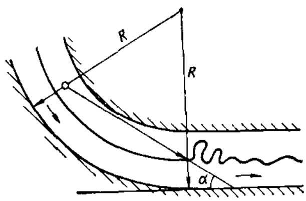


РИС. 10.23

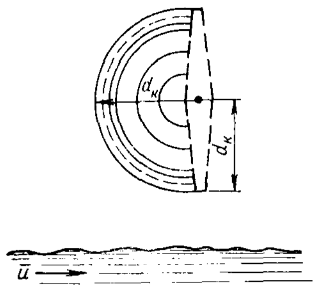


РИС. 10.22

Условию предельного состояния отвечает равенство работ сил поверхностного натяжения A_σ и динамического давления. Работа сил поверхностного натяжения A_σ равна произведению коэффициента поверхностного натяжения на приращение поверхности ΔS при деформации диска в полусферу.

Рассмотрим деформацию дискообразной капли в полую сфероидальную чашку (см. рис. 10.22). Приращение поверхности $\Delta S = \pi d_к^2$. Тогда $A_\sigma = \sigma \pi d_к^2$. Сила динамического воздействия потока на сфероидальную чашку

$$F_д = C_к \rho \frac{(U - u')^2}{2} \frac{\pi (2d_к)^2}{4}, \qquad (10.30)$$

где U — скорость движения капли относительно воздушного потока;
u' — пульсация скорости в воздушном потоке.

Учитывая, что сила $F_д$ совершает работу на среднем пути $d_к/2$, получим для условия предельного состояния следующее равенство:

$$We_{кр} = (\rho_a U^2 d_к)/\sigma = 4 \Big/ \left[C_к \left(1 + \frac{u'}{U} \right)^2 \right]. \qquad (10.31)$$

При числах Вебера $We > We_{кр}$ капля разрушается. Принято считать, что критическое число Вебера постоянно, причем разные авторы принимают различные значения $We_{кр}$. Выражение (10.31) показывает, что критическое значение числа Вебера зависит от коэффициента гидродинамического сопротивления капель и уровня турбулентности в потоке воздуха.

Наибольший диаметр устойчивых капель определяется из соотношения

$$d_{кр} = 4\sigma \Big/ \left[C_к \rho_а U^2 \left(1 + \frac{u'}{U} \right)^2 \right]. \tag{10.32}$$

где для условий высокоскоростного потока коэффициент $C_к$ можно принимать равным единице, а $u'/U = 0{,}15$.

При этом

$$d_{кр} = 3\sigma/(\rho_а U^2).$$

Полученное соотношение можно использовать также для расчета наибольшего диаметра устойчивых воздушных пузырей в воде. Следует лишь учитывать скорость движения воздушных пузырей относительно жидкости и вместо $\rho_а$ в расчетное соотношение подставлять плотность воды ρ. Расчет по соотношению (10.32) показывает, что, например, при скорости капель $U = 10$ м/с диаметр устойчивых капель не превышает 2 мм. При распаде крупных капель образуется спектр мелких капель, средний размер которых близок к $0{,}2\ d_{кр}$.

В гидротехнической практике часто требуется повернуть высокоскоростной поток в вертикальной плоскости. Если такой поворот осуществляется от большего уклона к меньшему, то вблизи поворота могут наблюдаться особые эффекты, непосредственно связанные с движением водяных капель (или более крупных водных масс — молей) над поверхностью потока (рис. 10.23). Оторвавшиеся от основного потока массы жидкости движутся в продольном направлении со скоростью, близкой к осредненной скорости потока. Поскольку эти массы не связаны с основным потоком и не испытывают реакции дна, траектория продольного движения этих масс жидкости остается прямолинейной при повороте основного потока в месте перехода крутопадающей части канала или туннеля в пологопадающую. В связи с этим свободные массы жидкости падают на поверхность основного потока с большой энергией, равной

$$\rho\,(\pi L^3/\sigma)\,(U^2/2),$$

где L — размер моля (капли);
$\bar{U}$ — осредненная скорость потока.

Будем считать, что часть этой энергии расходуется на подъем столба жидкости высотой $h'_а = h_а - H$ и диаметром L. Кроме того, часть кинетической энергии моля будет расходоваться на работу против центробежных сил на повороте, стабилизирующих течение. Считая, что моли падают в конце участка поворота (см. рис. 10.23), найдем вертикальную проекцию скорости $U \sin \theta$. Указанный баланс энергии моля имеет вид

$$\rho \frac{\pi L^3}{6} \frac{U^2 \sin \theta}{2} = \rho \frac{\pi L^2}{4} h_а' \frac{h_а}{2} + \rho \frac{\pi L^2}{4} h_а' \frac{U^2}{R} \frac{h_а}{2},$$

где L — максимальный размер моля, принимаемый равным макромасштабу турбулентности ($L \approx 0{,}3H$);
R — радиус поворота потока;
$h_а'/2$ — центр тяжести поднятого столба жидкости.

Из уравнения баланса энергии моля находим, что предельная высота подъема столба жидкости определяется зависимостью

$$\frac{h_а}{H} = 0{,}4 \sin \theta \left[\sqrt{\mathrm{Fr}} \Big/ \left(\sqrt{1 + \frac{U^2}{gR}} \right) \right], \tag{10.33}$$

где $\mathrm{Fr} = U^2/gH$.

Рассчитаем в качестве примера высоту выбросов, образующихся за поворотом водосбросного гидротехнического туннеля, при следующих условиях: $\sin \theta = 0{,}8$; $U = 40$ м/с; $R = 60$ м; $H = 6$ м. (Расчетные данные соответствуют условиям течения в водосбросном туннеле Чиркейской ГЭС).

Подставляя расчетные данные в зависимость (10.33), получаем

$$\frac{h_а'}{H} = 0{,}4 \cdot 0{,}8 \left[\left(\sqrt{\frac{40^2}{9{,}8 \cdot 6}} \right) \Big/ \left(\sqrt{1 + \frac{40^2}{9{,}8 \cdot 60}} \right) \right];$$

$$h_а' = 0{,}8 \cdot 6 \approx 5 \text{ м}.$$

Схематизированный расчет показывает, что поворот потока является не только фильтром, улавливающим летящие воздушные массы, но также мощным генератором выбросов. Эти выбросы при обрушении вызывают резкое увеличение аэрации потока вслед за поворотом. Этот вывод подтверждается результатами экспериментальных исследований.

§ 35. Среднее воздухосодержание и гидравлическое сопротивление равномерного аэрированного потока

Выше были рассмотрены условия, определяющие начало аэрации равномерного высокоскоростного потока. Как было показано, при уклоне $i = i_а = 0{,}08$ отношение $h_в/H = h_в/l = 0{,}14$. При увеличении уклона канала турбулентные пульсации обладают большей энергией и поднимают массу жидкости на высоту $h_а$, бо́льшую чем $h_в$. Однако, поскольку в этом случае $h_в/l > 0{,}14$, эти турбулентные образования неустойчивы и быстро разрушаются. Можно показать, что высота выбросов $h_а$ определяет среднее воздухосодержание. Среднее воздухосодержание в потоке $\bar{\alpha}$ — отношение объема воздуха к объему воды в аэрированном потоке. При расчете среднего воздухосодержания за верхнюю границу аэрированного потока принимают плоскость, параллельную дну канала и расположенную на высоте $h_а$, которая соответствует $\alpha = 95\%$ (рис. 10.24).

Обозначив через h_0 глубину, на которой воздухосодержание составляет 5%, определим среднее воздухосодержание из соотношения

$$\bar{\alpha}=\frac{1}{H}\int\limits_{h}^{h_\text{a}}\alpha_z\,\mathrm{d}z, \tag{10.34}$$

где α_z — воздухосодержание на высоте z от дна канала;
H — глубина эквивалентного потока чистой воды.

За эквивалентный поток принимается такой неаэрированный поток, масса жидкости в котором равна массе жидкости аэрированного потока.

Считая приближенно эпюру воздухосодержания симметричной относительно плоскости H, среднее воздухосодержание можно определить из геометрического соотношения

$$\bar{\alpha}=(h_\text{a}-H)/H. \tag{10.35}$$

Если эпюра аэрации не симметрична, определить среднее воздухосодержание можно лишь интегрированием эпюры, т. е. по соотношению (10.34). Приближенно среднее воздухосодержание в этом случае можно рассчитать, вводя корректив в зависимость (10.35) на несимметричность эпюры

$$\bar{\alpha}=\frac{1+k_\text{a}}{2}\left(\frac{h_\text{a}}{H}-1\right), \tag{10.36}$$

где

$$k_\text{a}=(H-h)/(h_\text{a}-H). \tag{10.37}$$

По данным экспериментальных исследований, коэффициент асимметрии k_a в среднем близок к 0,75—0,8.

Исследование спектральной плотности вертикальных пульсаций скорости (см. гл. 8) показало, что энергия наиболее интенсивных пульсаций равна $4\rho\,(\overline{u'^2}/2)$. Именно эти пульсации в состоянии поднять жидкость на наибольшую высоту $(h_\text{a}-H)\cos\theta$, т. е.

$$h_\text{a}=\frac{\overline{4u_z'^2}}{2g\cos\theta}+H=\frac{\overline{2u_z'^2}}{g}\,\frac{1}{\cos\theta}+H. \tag{10.38}$$

Среднее воздухосодержание представим в виде

$$\bar{\alpha}=\left(\frac{h_\text{a}}{H}-1\right)\frac{1+k_\text{a}}{2}=\frac{2\overline{u_z'^2}}{gH}\,\frac{1}{\cos\theta}\,\frac{1+k_\text{a}}{2}. \tag{10.39}$$

Как указывалось в гл. 1, поверхностные эффекты, свойственные высокоскоростным потокам, приводят к дополнительным потерям энергии. В результате этих потерь скорость вблизи свободной поверхности потока уменьшается. Далее будет показано, что максимум скорости при этом располагается ниже свободной поверхности на глубине $h_{max}\approx h$ от дна потока. Уровень пульсационной энергии крупномасштабных турбулентных образований будет опреде-

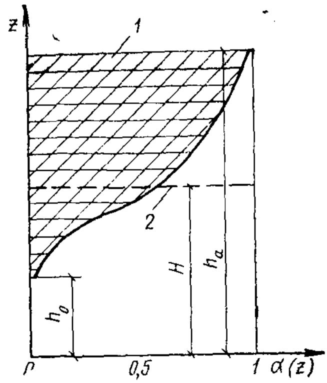


РИС. 10.24

1 — верхняя граница аэрированного потока; 2 — поверхность эквивалентного потока чистой воды

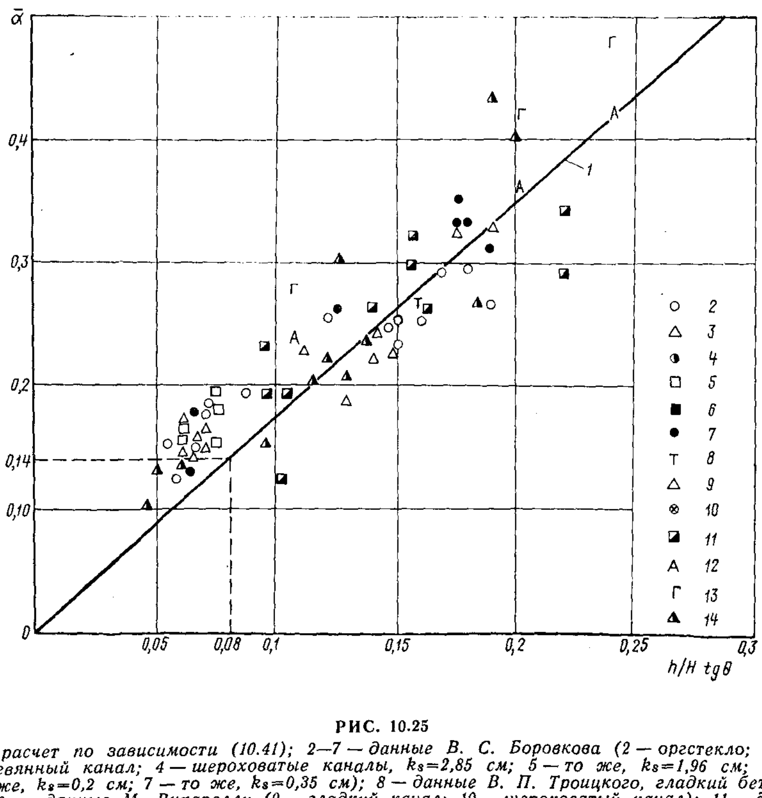


РИС. 10.25

1 — расчет по зависимости (10.41); 2—7 — данные В. С. Боровкова (2 — оргстекло; 3 — деревянный канал; 4 — шероховатые каналы, k_s=2,85 см; 5 — то же, k_s=1,96 см; 6 — то же, k_s=0,2 см; 7 — то же, k_s=0,35 см); 8 — данные В. П. Троицкого, гладкий бетон; 9, 10 — данные М. Випарелли (9 — гладкий канал; 10 — шероховатый канал); 11 — данные Л. Рао, гладкий канал; 12 — данные А. Андерсона, шероховатый канал; 13 — данные А. Андерсона, гладкий канал; 14 — данные В. Д. Корывановой, шероховатый канал ляться динамической скоростью, рассчитанной по глубине нижней зоны

$$\overline{u_z'^2} = 0{,}8u_*^2 = 0{,}8ghi.$$

Подставляя это соотношение в зависимость (10.39), получаем при $k_а \approx 0{,}8$

$$\bar{\alpha} = 1{,}65\,\frac{h}{H}\,\mathrm{tg}\,\theta. \qquad (10.40)$$

Соотношение (10.40) показывает, что в рамках сделанных допущений среднее воздухонасыщение потока определяется в основном только уклоном канала.

Сравнение результатов расчета ($\bar{\alpha}$) по полученной зависимости (10.40) с экспериментальными данными разных авторов показано на рис. 10.25. На графике значение $\bar{\alpha}$ дано в зависимости от параметра $(h/H)\,\mathrm{tg}\,\theta$. Данные по $\bar{\alpha}$ получены в условиях стабилизированного (равномерного) течения при частичной аэрации потока. Поток частично аэрирован, если воздушные включения не проникают до дна канала. Данные получены в широком диапазоне изменения коэффициента гидравлического сопротивления λ (0,015—0,15) при изменении уклона канала в пределах 0,07—0,4. Анализ результатов экспериментов подтверждает ранее сделанный вывод о том, что аэрация определяется главным образом уклоном канала. С достаточной точностью среднее воздухонасыщение можно определить по простой зависимости, скорректированной с учетом экспериментальных данных,

$$\bar{\alpha} = 1{,}75\,(h/H)\,i. \qquad (10.41)$$

Некоторое расхождение между расчетной зависимостью (10.40) и экспериментальной зависимостью (10.41) можно объяснить приближенностью связи между $\overline{u_z'^2}$ и $\overline{u_*^2}$, использованной в расчете.

Как уже указывалось, аэрация возникает вследствие развития пограничного слоя не только на дне канала, но и на боковых стенках. Причем на боковых стенках аэрация развивается значительно раньше. В зоне стабилизированного (равномерного) течения общее количество вовлеченного в поток воздуха будет определяться суммарным действием пограничных слоев на дне и стенках канала. На рис. 10.26 представлено распределение концентрации воздуха в поперечном сечении высокоскоростного аэрированного потока. Линии равных концентраций воздуха для канала с одинаковой шероховатостью дна и стенок показывают, что вблизи стенок изменяется положение как точки наибольшей концентрации, так и точки средней концентрации воздуха.

Эпюры аэрации в пристеночной зоне по данным А. Андерсона (рис.10.27) изменяются таким образом, что средняя концентрация на каждой вертикали сохраняется практически постоянной. По-видимому, этот экспериментальный факт можно объяснить тем, что боко-

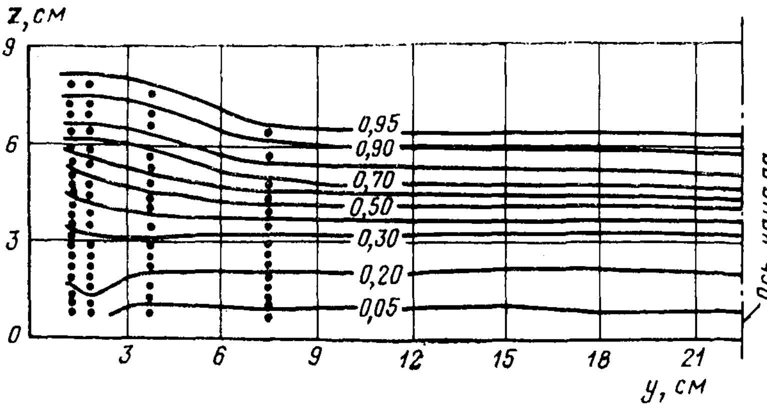


РИС. 10.26

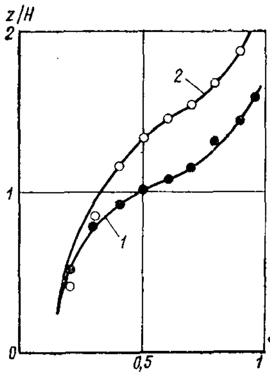


РИС. 10.27

1 — на оси канала ($y/b=0,5$); 2 — в пристеночной области ($y/b=0,025$)

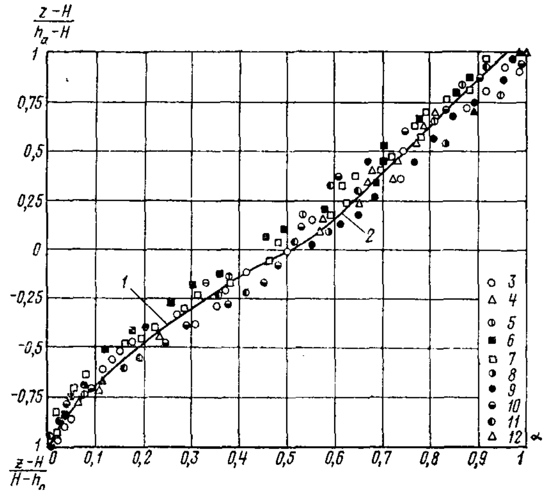


РИС. 10.28

1 — расчет по зависимости (10.42); 2 — то же, (10.43); 3—11 — данные В. С. Боровкова (3 — оргстекло, $i=0,072$; 4 — дерево, шероховатые каналы, $i=0,072$; 5 — $H/k_s=16,5$; 6 — $H/k_s=19$; 7 — $H/k_s=21$; $H/k_s=11,5$; 8 — $i=0,072$; 9 — $i=0,15$; 10 — $i=0,232$; 11 — $i=0,37$; 12 — данные О. Ф. Васильева, натурный быстроток, $i=0,4$

вые стенки сложным образом влияют на процесс аэрации. С одной стороны, они увеличивают воздухонасыщение в поверхностном слое, а с другой — снижают касательные напряжения на дне, т. е. уменьшают турбулентность, генерируемую дном. В результате средняя аэрация вблизи боковых стенок оказывается близкой к средней аэрации центральной зоны канала. Это позволяет предположить, что средняя аэрация в условиях пространственного режима определяется теми же параметрами, что и для плоского потока.

Распределение воздухосодержания по глубине потока описывается следующими соотношениями:

при $z < H$

$$\alpha = \frac{1}{2}\left[1 - \operatorname{erf} 1{,}2\, \frac{1 - z/H}{1 - h_0/H}\right]; \tag{10.42}$$

при $z > H$

$$\alpha = \frac{1}{2}\left[1 + \operatorname{erf} 1{,}0\, \frac{z/H - 1}{h_а/H - 1}\right], \tag{10.43}$$

где H — глубина эквивалентного потока чистой воды;
h_0 — ордината точки с воздухосодержанием 0,05;
$h_а$ — ордината точки с воздухосодержанием 0,95;
erf — интеграл ошибок, значения которого берутся по математическим таблицам [6] в зависимости от аргумента.

Расчет по этим зависимостям может быть выполнен, если известны соответствующие параметры. Считая, что уклон канала задан, при $k = 0{,}75 \div 0{,}8$ по соотношению (10.41) находим $\bar{\alpha}$ и по зависимостям (10.36) и (10.37) определяем h_0/H и $h_а/H$. На рис. 10.28 дано сравнение зависимостей (10.42) и (10.43) с экспериментальными данными, полученными при равномерном течении. Опыты выполнены в гладких и шероховатых каналах в широком диапазоне изменения шероховатости и уклона канала. Сравнение обнаруживает удовлетворительную сходимость расчетных и экспериментальных данных.

Рассмотрим динамические характеристики аэрированного потока, которые в общих чертах описывались в гл. 1. Там же указывалось, что поверхностные эффекты, свойственные высокоскоростному потоку и в особенности аэрированному потоку, оказывают влияние на кинематические и динамические характеристики этих потоков. В отличие от неаэрированного потока в аэрированном дополнительные затраты энергии связаны с вовлечением воздуха в поток и с поднятием капель над границей раздела вода—воздух. Дополнительные затраты энергии можно разделить условно на две группы: 1) затраты энергии на создание дополнительной потенциальной энергии масс жидкости и капель, поднятых над границей раздела. К этой же группе отнесем энергию, затраченную на создание потенциальной энергии воздушных пузырей в воде; 2) затраты энергии, связанные с торможением водных масс и капель, обдуваемых воздушным потоком.

Рассмотрим первую группу затрат энергии. Потенциальная энергия жидкости, поднятой над границей раздела вода—воздух на высоту Δh, равна произведению ее веса на Δh. Оценим величину веса капель на единицу площади поверхности канала

$$G_к = 0{,}25\rho g\,(h_а - H), \tag{10.44}$$

где $0{,}25\rho g$ — средний вес капель в единице объема над границей раздела.

Коэффициент 0,25 в этом выражении получен с учетом того, что плотность водовоздушной смеси в этой зоне изменяется от 0,5 до 0.

Учитывая, что плотность изменяется по закону, близкому к линейному (см. рис. 10.28), примем среднюю высоту подъема жидкости равной $^1/_3$ $(h_а - H)$. Тогда уравнение для потенциальной энергии жидкости, поднятой над границей раздела, будет представлено в виде

$$Э_1 \approx \frac{0,25}{3} \rho g (h_а - H)^2.$$

Поскольку объем воздушных включений ниже границы раздела приблизительно равен объему водных масс и капель над границей раздела и считая, что форма эпюры близка к симметричной, потенциальную энергию воздушных включений можно считать близкой к энергии $Э_1$. Тогда зависимость для потенциальной энергии капель и воздушных включений, примет вид

$$Э_п \approx 2Э_1 = \frac{0,5}{3} \rho g (h_а - H)^2.$$

Энергию, приходящуюся на единицу веса эквивалентного потока чистой воды, представим в виде

$$Э_п' = \frac{0,5}{3} \frac{(h_а - H)^2}{H} = \frac{0,5}{3} \left(\frac{h_а}{H} - 1\right)^2 H. \qquad (10.45)$$

Выражение (10.45) позволяет оценить величину потенциальной энергии капель и воздушных включений в условиях когда аэрированный поток находится в состоянии динамического равновесия. Капли и воздушные включения через некоторый промежуток времени возвращаются к границе раздела, и поток сохраняет общее количество капель и воздушных включений неизменным.

В настоящее время принято разделять энергию потока на энергию осредненного течения и энергию турбулентных пульсаций. Следует указать на условность этого разделения, поскольку движение едино и выделение пульсационных составляющих движения есть не более чем удобный расчетный прием, впервые предложенный О. Рейнольдсом. При рассмотрении в особенности крупномасштабных турбулентных образований часто трудно разделить осредненное течение от пульсаций, поскольку вертикальный размер этих турбулентных структур соизмерим с глубиной потока, а продольный может значительно превосходить глубину. М. А. Великанов, учитывая это, предлагал выделять такие крупномасштабные пульсации в отдельный подкласс структурных турбулентных образований. Энергия структурных образований тесно связана с энергией осредненного движения. Как было установлено выше, аэрация потока осуществляется вследствие действия, прежде всего, крупномасштабных пульсаций. Поэтому можно считать, что дополнительная энергия на аэрацию потока отбирается главным образом от осредненного движения.

При возвращении капель и пузырей к границе раздела потенциальная энергия их преобразуется в кинетическую энергию вихрей малого масштаба, которые быстро диссипируют. Выразив

$h_а/H - 1$ в зависимости (10.45) через среднее воздухосодержание, согласно соотношениям (10.35) и (10.41), получаем при $H \approx h$:

$$Э'_п = \frac{0,5}{3}\,\bar{\alpha}^2 H = 0,5h^2 i^2 \frac{1}{H} \approx 0,5hi^2. \qquad (10.46)$$

Обычно принято определять потери энергии на некоторой длине канала L. Если бы по всей длине L поток непрерывно производил работу с интенсивностью $Э'_п$, то постоянно накапливались бы массы воды над границей раздела и воздушные включения в свободном потоке. Это связано с тем, что и каплям, и воздушным включениям требуется определенное время для возвращения к границе раздела.

Максимальная высота подъема капли $(h_а - H)$ может быть определена с использованием соотношения (10.41) (при $h_0 \approx H$)

$$(h_а - H)/H = \bar{\alpha} = 1,75i.$$

Тогда максимальное время пребывания капли над потоком с учетом выражения (10.29) можно найти следующим образом:

$$t = 3,75\sqrt{Hi/g}.$$

Время пребывания капли над потоком при подъеме ее на расчетную высоту определится соотношением

$$t_{ср} = 3,75\sqrt{Hi/3g} = 2\sqrt{Hi/g}. \qquad (10.47)$$

В соотношении (10.47) расчетная высота принята $(h_а - H)/3$ в предположении нормального закона распределения вероятностей турбулентных выбросов. За это время поток переместится на длину $l = Ut_{ср}$. Поэтому на длине L поток должен «возобновлять» потенциальную энергию капель и пузырей L/l раз.

Удельную энергию взвешивания на длине L можно представить в виде

$$\Delta h_в = 0,5Hi^2\,(L/l).$$

Дополнительный уклон линии энергии, отвечающий этим затратам,

$$i_в = \frac{\Delta h_в}{L} = 0,5\,\frac{H}{l}\,i^2.$$

После подстановки в это соотношение $l = Ut_{ср}$ и его преобразований, получаем:

$$i_в \approx 0,1i\sqrt{\lambda},$$

где i — уклон дна канала.

Соотношение позволяет дать сравнительную оценку энергии взвешивания. Поскольку λ обычно не превышает 0,1, дополнительные затраты составляют не более 3% потерь на трение и могут не учитываться.

Перейдем к рассмотрению второй группы затрат энергии, связанных с торможением водных масс в воздухе выше границы раздела вода—воздух. Водные массы, выбрасываемые в зону *1* выше границы раздела (см. рис. 10.1, *б*), обтекаются воздухом и тормозятся. При этом продольная скорость этих масс уменьшается на величину ΔU, определяемую по соотношению (10.27). Учитывая, что число Рейнольдса, входящее в это соотношение, оказывает сравнительно слабое влияние, после подстановки численных значений ρ_a, ρ, $Re_к = 500$ и преобразований с учетом $t_{ср}$ получаем:

$$\frac{\Delta U}{U_0}=\frac{10^{-3}\,(U_0\,u_*/gd_к)}{1+10^{-3}\,(U_0 u_*/gd_к)}, \tag{10.48}$$

где $d_к$ — средний размер массы жидкости, выбрасываемой выше границы раздела.

В дальнейшем будем считать, что $d_к = k_0 H$, где k_0 — некоторый коэффициент.

Капли, потерявшие часть своей продольной скорости, возвращаются на свободную поверхность с вертикальной скоростью U_z. Учитывая, что средняя высота падения капель примерно 0,5 Hi, находим, что $U_z^2 \approx 2g\,0{,}5\,Hi = gHi = u_{*н}^2$. Заторможенные водные массы, возвращаясь в поток, обмениваются количеством движения с его верхним слоем, вследствие чего на поверхности создаются дополнительные касательные напряжения. Аналогично тому, как определяются касательные напряжения между двумя слоями в турбулентном потоке [9], будем считать, что величина этих касательных напряжений описывается зависимостью

$$\tau_2=\rho_1\,\Delta U U_z, \tag{10.49}$$

где ρ_1 — средняя плотность по толщине зоны 1.

Подставляя в это соотношение ΔU и $U_z = u_*$, после преобразований получаем:

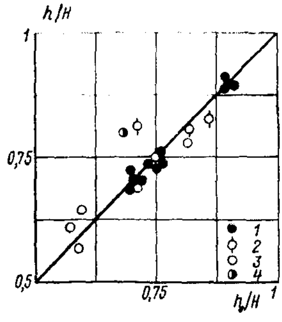
$$\tau_2=\rho_1 U_0^2\,\frac{10^{-3}}{k_0}\left[i\Big/\left(1+\frac{3\cdot 10^{-3}}{\sqrt{\lambda}}\,\frac{i}{k_0}\right)\right].$$

Оценив члены в этом соотношении, можно прийти к выводу, что без большой погрешности его можно заменить более простым (при оценке принималось, что второе слагаемое в знаменателе меньше 1)

$$(\tau_2/\rho U_0^2)=(\rho_1\cdot 10^{-3}/\rho k_0)\,i. \tag{10.50}$$

Выделим в части потока, расположенной ниже границы раздела (см. рис. 10.1, *б*), две динамически независимые зоны. В придонной зоне (зона 3) течение определяется взаимодействием потока с дном канала, т. е. касательным напряжением τ_1. Как показали экспериментальные исследования (см. гл. 8), распределение касательных напряжений в этой зоне линейное. В зоне 2 отличие от линейного распределения касательных напряжений связано с изменением плотности и довольно незначительно, поэтому из геометрических соотношений (см. рис. 10.1, *б*) получаем:

$$\frac{\tau_2}{\tau_1}=\frac{\rho_2}{\rho}\left(\frac{H}{h}-1\right),$$



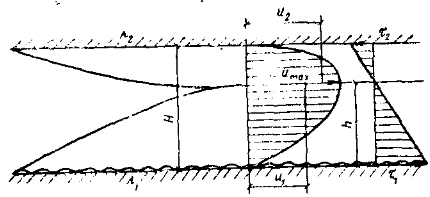


РИС. 10.30

РИС. 10.29

◄ *1, 2 — данные В. С. Боровкова (1 — шероховатый канал; 2 — деревянный канал); 3, 4 — данные Л. Рао (3 — шероховатый канал; 4 — гладкий канал)*

где h — глубина, на которой находится максимум скорости.
ρ_2 — средняя плотность по толщине зоны 2.

С другой стороны, из (10.50) можем найти:

$$\frac{\tau_2}{\tau_1} \cong \frac{\rho_1}{\rho} \frac{8\cdot 10^{-3}}{k_0} \frac{i}{\lambda_1}. \tag{10.51}$$

При сопоставлении этих двух зависимостей получим:

$$k_0 = \frac{\rho_1 \, 8\cdot 10^{-3} i}{\rho_2 \lambda_1} \left[1 \Big/ \left(\frac{H}{h} - 1\right)\right]. \tag{10.52}$$

Соотношение (10.52) позволяет определить величину коэффициента k_0 при известном h/H. Анализ экспериментальных данных (рис. 10.29) показывает, что положение точки максимума скорости близко к нижней границе проникания воздушных включений, т. е. $h \approx h_0$ (см. рис. 10.1, *б*).

Учитывая, что

$$\bar{\alpha} = \left(\frac{k_a + 1}{2k_a}\right) (H - h)/H,$$

где k_a — коэффициент асимметрии эпюры аэрации,

с использованием соотношения (10.41) находим при $k_a = 0{,}75$

$$(H/h) - 1 = 1{,}5 i. \tag{10.53}$$

Тогда из соотношения (10.52) имеем при $\rho_2/\rho_1 = 3$

$$k_0 = (2\cdot 10^{-3})/\lambda_1. \tag{10.54}$$

Это соотношение позволяет установить, что при изменении λ_1 от 0,02 до 0,1 k_0 изменяется от 0,1 до 0,02. Таким образом, средний размер водных масс над границей раздела близок к 0,05 h.

Условие равновесия для безнапорного частично аэрированного равномерного потока запишем в виде

$$\rho_{2-3}\, gHi = \tau_1 + \tau_2, \tag{10.55}$$

где ρ_{2-3} — средняя плотность по толщине зон 2 и 3.

Касательные напряжения на дне τ_1

$$\tau_1 = \frac{1}{8} \lambda_1 \rho U_1^2, \tag{10.56}$$

где U_1 — средняя скорость по толщине зоны 3 (см. рис. 10.1, *б*).

Можно показать, что при наличии двух границ сопротивления средние скорости в каждой из динамических зон не сильно различаются между собой. В качестве аналога рассмотрим течение между двумя жесткими границами с различными коэффициентами гидравлического сопротивления (рис. 10.30). Задавая профиль скорости в каждой зоне в виде степенной зависимости

$$u/u_0=(z/\delta)^{1,25\sqrt{\lambda}},$$

где δ — толщина зоны;

λ — соответствующий коэффициент гидравлического сопротивления, найдем, что средняя скорость в каждой из зон равна:

$$U/u_0=1/(1+1,25\sqrt{\lambda}).$$

Соотношение средних скоростей в зонах определяется при этом простым соотношением

$$U_1/U_2=(1+1,25\sqrt{\lambda_2})/(1+1,25\sqrt{\lambda_1}). \tag{10.57}$$

Расчеты показывают, что даже если $\lambda_2 = 0,02$, а $\lambda_1 = 0,2$, отношение скоростей не превышает $U_2/U_1 = 1,25$. Таким образом, в условиях аэрированного потока, не делая большой ошибки, можно считать, что $U_1 = U_2 = U_а$.

Обозначая через $U_а$ среднюю скорость потока, запишем:

$$U_а H=U_1 h+U_2 (H-h),$$

где U_2 — средняя скорость по толщине зоны 2.

Использование зависимостей (1.57) и (1.53) позволяет установить приближенное соотношение между скоростями $U_а$ и U_1 в виде $(U_а/U_1)\approx 1+i\sqrt{\lambda}$.

$$\tau_1=\frac{1}{8}\rho\lambda_1 U_1^2. \tag{10.58}$$

Для того чтобы установить степень влияния аэрации потока на величину гидравлических потерь, сравним коэффициенты гидравлических сопротивлений реального аэрированного потока и эквивалентного потока чистой воды (без аэрации). В качестве эквивалентного потока примем поток с глубиной $H_н$, равной глубине H аэрированного потока (см. рис. 10.1, *б*). Будем считать, что эквивалентный поток движется в таком же канале, что и аэрированный поток (уклоны и шероховатость каналов одинаковы).

Для эквивалентного потока условие равновесия имеет вид

$$\tau_н=\rho g H_н i=\rho g H i.$$

С другой стороны,

$$\tau_н=\frac{1}{8}\rho\lambda_н U_н^2,$$

где $U_н$ — средняя скорость эквивалентного неаэрированного потока.

Аналогично для аэрированного потока

$$\tau_а=\tau_1+\tau_2=\frac{1}{8}\rho_{2-3}\lambda_а U_а^2.$$

Из этих соотношений следует, что

$$\frac{\lambda_а}{\lambda_н} \approx \left(\frac{U_н}{U_1}\right)^2 \frac{1}{(1+2i\sqrt{\lambda_1})}. \qquad (10.59)$$

Считая, согласно двухслойной динамической модели, зоны 2 и 3 независимыми, условие равновесия для зоны 3 запишем в виде

$$\tau_1 = \rho g h i.$$

Используя соотношение (10.58), находим

$$U_1^2 = (8ghi)/\lambda_1.$$

Аналогично для неаэрированного потока

$$U_н^2 = 8gHi/\lambda_н.$$

Подставляя значения квадратов скоростей в выражение (10.59), получим:

$$\frac{\lambda_а}{\lambda_н} = \frac{1}{(1+2i\sqrt{\lambda_1})} \frac{H}{h} \frac{\lambda_1}{\lambda_н}. \qquad (10.60)$$

Рассматривая шероховатый режим сопротивления, используем для удобства анализа формулу А. Д. Альтшуля [1]

$$\lambda_i = 0,11\,(k_s/4h_i)^{0,25} = 0,08\,(k_s/h_i)^{0,25}, \qquad (10.61)$$

где h_i — характерная глубина потока или слоя.

После подстановки в соотношение (10.60) имеем:

$$(\lambda_а/\lambda_н) = \frac{1}{1+2i\sqrt{\lambda}} (H/h)^{5/4}. \qquad (10.62)$$

Подставляя в зависимость (10.62) соотношение (10.53) после преобразований получаем:

$$(\lambda_а/\lambda_н) \approx 1 + 1,8\,i\,(1-\sqrt{\lambda_1}). \qquad (10.63)$$

При среднем значении $\lambda_1 = 0,05$ получаем

$$\lambda_а/\lambda_н \approx 1 + 1,3\,i. \qquad (10.64)$$

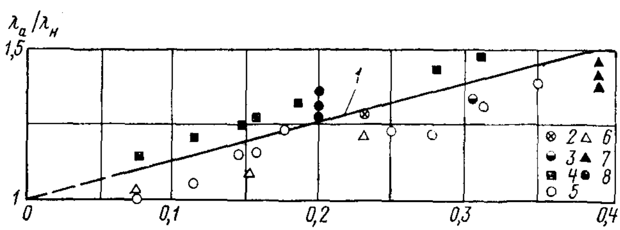


РИС. 10.31
1 — расчет по зависимости (10.64); 2 — данные В. П. Троицкого, гладкий бетонный канал; 3 — данные И. Б. Исаченко, шероховатый канал; 4, 5 — данные В. С. Боровкова, шероховатый канал (4 — H/k_s=12,5; 5 — H/k_s=6,25); 6 — то же, гладкий канал; 7 — данные О. Ф. Васильева, натурный быстроток, H/k_s=25; 8 — данные М. Випарелли, H/k_s=37,5

На рис. 10.31 представлено сравнение полученного соотношения с экспериментальными данными, которое обнаруживает удовлетворительную сходимость. Зависимость (10.64) показывает, что сопротивление аэрированного потока повышается с увеличением уклона канала. Действительно, с увеличением уклона канала возрастает аэрация потока и повышается сопротивление на свободной поверхности. Следует иметь в виду, что зависимость (10.64) справедлива лишь для частично аэрированных потоков, реализующихся при $i < 0{,}5$.

§ 36. Характеристики неравномерных аэрированных потоков

Многие исследователи заметили, что в реальных сооружениях с уклонами, значительно превышающими $i > i_а = 0{,}08$, аэрация возникает не всегда. Этот факт становится понятным, если вспомнить что турбулентность, определяющая явление аэрации, развивается на значительной длине начального участка с развитием пограничного слоя на дне. По мере развития турбулентного пограничного слоя толщина его увеличивается, а толщина потенциального ядра пото к уменьшается (рис. 10.32). Развивающиеся вместе с пограничным слоем турбулентные структуры воздействуют на тонкое потенциальное ядро и раскачивают его. Там, где турбулентные пульсации преодолевают экранирующий эффект потенциального ядра, на гладкой поверхности потока возникают возмущения (см. рис. 10.32), высота которых нарастает по мере движения потока. Нарастание малых возмущений, как уже указывалось, свойственно потокам, движущимся с уклоном, большим или равным $i_а$. В некотором сечении, там, где крутизна волн $h_в/l$ становится предельной (0,14), происходит их обрушение, и возникает аэрация потока. Начиная с этого сечения представим аэрацию потока как результат турбулентного смешения двух слоев различной плотности: слоя воды и слоя воздуха. В результате турбулентной диффузии в окрестности

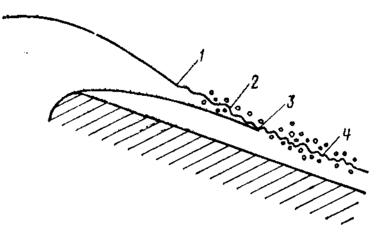


РИС. 10.32

1 — начало волнообразования; 2 — разрушение волн, начало аэрации; 3 — выход пограничного слоя на поверхность; 4 — зона стабильной аэрации

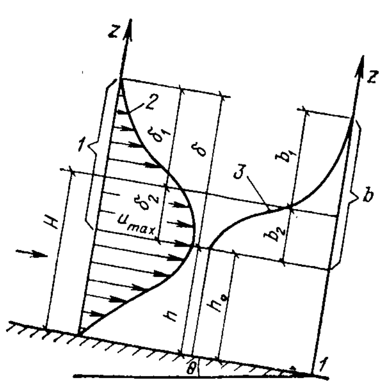


РИС. 10.33

1 — зона смешения; 2 — профиль скорости, 3 — профиль плотности свободной поверхности образуется область изменения плотности. Эту область, которая располагается по обе стороны от свободной поверхности, будем называть зоной смешения (см. рис. 10.33). Плотность по высоте зоны смешения изменяется вследствие изменения концентрации воздуха. Концентрация воздуха α в нижней зоне ($z < H$) изменяется от нуля (на нижней границе зоны смешения) до некоторого значения α_H на границе раздела вода—воздух. В верхней зоне ($z > H$) концентрация воздуха изменяется от α_H до $\alpha = 1$ на ее верхней границе. Разумеется, толщина зоны — понятие условное, поскольку концентрация асимптотически приближается к значениям $\alpha = 1$ и $\alpha = 0$ на верхней и нижней границе соответственно. В соответствии с обычной точностью экспериментальных измерений воздухосодержания примем нижнюю границу зоны смешения там, где $\alpha = 0{,}05$, и верхнюю — при $\alpha = 0{,}95$. Гидравлические характеристики в зоне смешения будем рассчитывать, используя модель дисперсоида. Согласно этой модели предполагаем, что в зоне смешения движется однородная жидкость с переменной плотностью. При этом движение отдельных воздушных пузырьков в воде и капель в воздухе относительно несущей среды не рассматривается. Возникновение зоны смешения изменяет профиль скорости вблизи свободной поверхности (рис. 10.33). Слой δ, в котором наблюдается это изменение, называется динамическим слоем. Слой b, в котором изменяется плотность, называется диффузионным. Система уравнений, описывающая движение дисперсоида в слое смешения, имеет вид

$$\left.\begin{aligned} &u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{1}{\rho_д} \frac{\partial \tau}{\partial z} - \frac{1}{\rho_д} \frac{\partial p}{\partial x} + gi;\\ &-\frac{1}{\rho_д} \frac{\partial p}{\partial z} + g\cos\theta = 0;\\ &u_x \frac{\partial \rho_д}{\partial x} + u_z \frac{\partial \rho_д}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(D_т \frac{\partial \rho_д}{\partial z}\right);\\ &\frac{\partial \rho_д u_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho_д u_z}{\partial z} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{10,65}$$

где $D_т$ — коэффициент турбулентной диффузии;
$\rho_д$ — плотность дисперсоида.

Первые два уравнения системы (10.65) представляют собой уравнения движения в проекции на оси x и z. Третье уравнение — уравнение турбулентной диффузии и четвертое — уравнение неразрывности. Плотность дисперсоида $\rho_д$ связана с концентрацией воздуха простым соотношением

$$\rho_д = \rho(1-\alpha). \tag{10.66}$$

Граничные условия имеют вид (см. рис. 10.33)

$$x = x_a \; z > H; \; u_x = 0; \; \rho_д = \rho_a;$$

$$x = x_a \; z < H; \; u_x = u_{x0}; \; \rho_д = \rho;$$

$$x > x_а\ z=H-\delta_2;\ u_x=u_0;\ \rho_д=\rho;\ \frac{\partial u_x}{\partial z}=0;$$

$$x > x_а\ z=H+\delta_1;\ u_x=u_{x_а};\ \rho_д=\rho_а;\ \frac{\partial u_x}{\partial z}=0;$$

$$x > x_а\ z=h=H-b_2;\ \rho_д=\rho;\ \frac{\partial \rho}{\partial z}=0;$$

$$x > x_а\ z=H+b_1;\ \rho_д=\rho_а;\ \frac{\partial \rho}{\partial z}=0;$$

$$x > x_а\ z=H;\ u_x=u_{xH};\ \rho_д=\rho_H,$$

где $x_а$ — расстояние от входа в канал, на котором возникает аэрация.

Индекс «д» относится к параметрам дисперсоида; индекс «а» — к параметрам воздушного потока. Параметры водного потока даны без индексов.

При определении граничных условий предполагалось, что в сечении $x = x_а$, т. е. там, где смешение только начинается, но еще не развилось, скорости и плотности вблизи границы раздела не изменяются по высоте. Заметим, что скорость у поверхности водного потока на начальном участке $x < x_а$ может приниматься постоянной по глубине, поскольку существует потенциальное ядро течения. Скорость воздушного потока предполагается равной нулю. Действительно, заметное движение воздуха начинается только после возникновения аэрации. Коэффициент турбулентной диффузии $D_т$ будем принимать пропорциональным коэффициенту турбулентной вязкости $\nu_т$. Следуя Л. Прандтлю [9], считаем, что для нижней зоны

$$\nu_{т_2}=\beta_2(u_0-u_H)\,\delta_2. \tag{10.67}$$

Аналогично для верхней зоны

$$\nu_{т_1}=\beta_1 u_h\,\delta_1, \tag{10.68}$$

где β_1 и β_2 — коэффициенты пропорциональности.

Коэффициенты турбулентной диффузии в каждой зоне

$$D_т = A\nu_т.$$

Коэффициент пропорциональности A по данным разных авторов несколько изменяется в зависимости от вида смешивающихся потоков, оставаясь при этом близким к 1.

Используя для преобразований уравнения системы (10.65) методы, обычно применяемые в теории движения сжимаемых газов с переменной плотностью, и вводя после оценки слагаемых ряд упрощений, получаем следующую приближенную систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_т\frac{\partial u_x}{\partial z}\right);\\ u_x\frac{\partial \rho_д}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(D_т\frac{\partial \rho_д}{\partial z}\right). \end{aligned}\right\} \tag{10.69}$$

Здесь u_x — средняя скорость по толщине верхней зоны и нижней зоны динамического слоя. Изменение плотности дисперсоида по толщине слоя смешения для любого $x > x_а$ можно получить интегрированием второго уравнения системы при граничных условиях, записанных выше.

В рамках сделанных допущений о слабом влиянии изменения плотности на кинематические характеристики в слое смешения первое уравнение системы (10.69) совпадает с упрощенным уравнением движения для несжимаемой жидкости. Близкое по форме, но несколько более сложное уравнение было получено Л. Рао для описания движения в зоне смешения аэрированного потока.

Второе уравнение системы представляет собой дифференциальное уравнение в частных производных с коэффициентами, зависящими от координаты x. Для решения его вместо переменной x удобно использовать новую переменную t. Связь между прежней и новой переменной определяется соотношением

$$t = \int_0^x \frac{D_т}{U}\, dx. \tag{10.70}$$

Использование новой переменной позволяет преобразовать второе уравнение к более простому виду

$$\frac{\partial \rho_д}{\partial t} = \frac{\partial^2 \rho_д}{\partial z^2}. \tag{10.71}$$

Решение этого уравнения имеет вид для зоны:
верхней при $z > H$

$$\frac{\rho_н - \rho_д}{\rho_н - \rho_а} = \operatorname{erf} \frac{z-H}{2\sqrt{t_1}}; \tag{10.72}$$

нижней при $z < H$

$$\frac{\rho_д - \rho_н}{\rho - \rho_н} = \operatorname{erf} \frac{H-z}{2\sqrt{t_2}}, \tag{10.73}$$

где $$\operatorname{erf}(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-n^2}\, dn; \quad \text{— интеграл ошибок;}$$

$$\eta = (z-H)/(2\sqrt{t}).$$

Значения интеграла ошибок при разных η приведены в математических таблицах [6].

Анализ соотношений (10.72) и (10.73) показывает, что переменная $\sqrt{t}$ пропорциональна соответствующим толщинам зон смешения:

$$\sqrt{t_1} = B_1 (H - h). \tag{10.74}$$

$$\sqrt{t_2} = B_1' (h_а - H). \tag{10.75}$$

Полученные соотношения (10.72) и (10.73) при подстановке $\sqrt{t}$ позволяют рассчитать распределение плотности по глубине неравномерного аэрированного потока (или эпюру аэрации). Количественный расчет возможен при известных H, h и $h_а$. Сравнение с данными измерений В. П. Троицкого (рис. 10.34) позволило установить что $B_1 \approx 1{,}2$, $B_1' \approx 1$ при $\rho_н = 0{,}5\rho$.

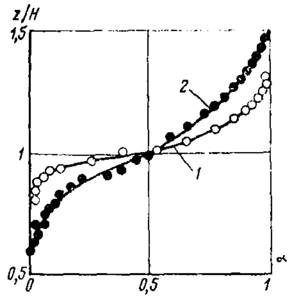


РИС. 10.34

1 — x/h_c=150; 2 — x/h_c=300

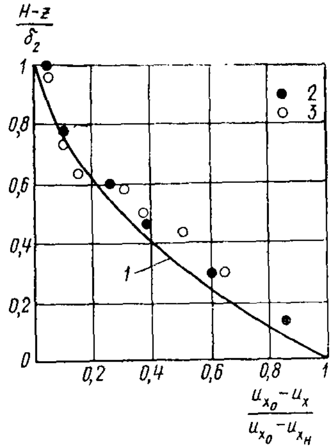


РИС. 10.35

1 — расчет по зависимости (10.79), B_2^1=1,5; 2 — x/x_c=0,2; 3 — x/x_c=1

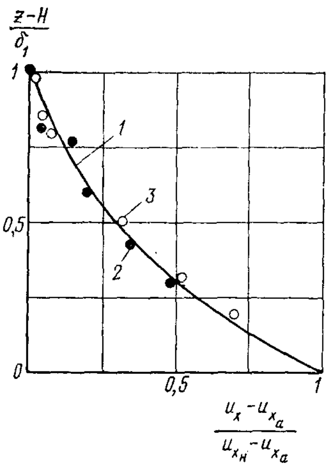


РИС. 10.36

1 — расчет по (10.78); 2 — x/x_c=0,2; 3 — x/x_c=1

Изменение плотности по толщине слоя смещения может быть рассчитано по следующим соотношениям, полученным в результате решения уравнений (10.69):

для зоны ниже границы раздела $z < H$

$$1-\alpha=\frac{\rho_{д}}{\rho}=\frac{1}{2}\left[1+\operatorname{erf}1{,}2\left(1-\frac{z}{H}\right)\Big/\left(1-\frac{h}{H}\right)\right]; \qquad (10.76)$$

для зоны выше границы раздела $z > H$

$$1-\alpha=\frac{\rho_{д}}{\rho}=\frac{1}{2}\left[1-\operatorname{erf}\,1{,}0\left(\frac{z}{H}-1\right)\Big/\left(\frac{h_a}{H}-1\right)\right]. \qquad (10.77)$$

Аналогичные решения, также основанные на модели дисперсонда, были получены Л. Рао и др.

Анализ экспериментальных данных (см. рис. 10.34), а также зависимостей (10.76) и (10.77) показывает, что характер распределения плотности в слое смешения не изменяется по мере развития аэрации. Развитие аэрации приводит лишь к увеличению толщины зон и среднего воздухосодержания $\bar{\alpha}$ по длине канала.

Кроме распределения плотности по толщине зоны смешения необходимо установить распределение скорости движения дисперсоида в окрестности границы раздела. Расчет распределения скоростей выполним с использованием первого уравнения системы (10.69). Это уравнение по виду не отличается от уже рассмотренного выше уравнения диффузии и решение его можно записать в виде:

для $z < H$

$$\frac{u_{x0}-u_x}{u_{x0}-u_{xH}} = 1 - \operatorname{erf} B_2 \frac{H-z}{\delta_2}; \qquad (10.78)$$

для $z > H$

$$\frac{u_x-u_{xa}}{u_{xH}-u_{xa}} = 1 - \operatorname{erf} B_2' \frac{z-H}{\delta_1}. \qquad (10.79)$$

Соотношения (10.78) и (10.79) не отличаются от зависимостей, полученных Л. Рао и другими в результате решения более полных уравнений.

Сопоставление расчетных зависимостей (10.78) и (10.79) с экспериментальными данными для верхней зоны (рис. 10.35) и для нижней зоны смешения (рис. 10.36) обнаруживает удовлетворительную сходимость при $B_2 = B_2' = 1{,}5$.

Следует, однако, отметить, что экспериментальные измерения скоростей в зоне смешения представляют значительные трудности вследствие различного влияния воздушных включений и капель на показания измерительных приборов. В связи с этим точно установить положение границ динамической зоны не представляется возможным. Анализ данных разных авторов показывает, что толщины динамических и диффузионных слоев практически одинаковы.

Соотношения (10.70), (10.74) и (10.75) позволяют установить характер изменения толщины зоны смешения по продольной координате. Действительно, если обозначить $u_{xH}/u_{x0} = c$ и среднюю скорость в зоне (например, в нижней) представить как

$$U = \frac{1}{2}(u_H + u_0),$$

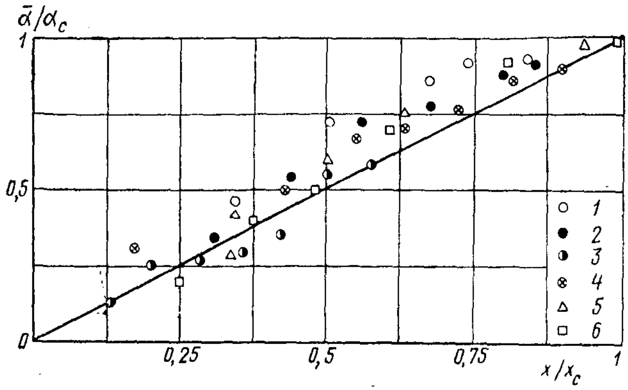


РИС. 10.37

1 — данные Н. Б. Исаченко (1 — гладкий канал, Re=1,2 · 10⁵; 2 — то же, Re=1,77×10⁵; 3 — шероховатый канал; 4 — данные Л. Рао, шероховатый канал; 5 — гладкий бетонный канал, Re=0,6 · 10⁵; 6 — то же, данные В. П. Троицкого Re=2,7 · 10⁵ то из зависимостей (10.67) и (10.68) находим:

$$t \sim \int_0^x \frac{(u_{x0}-u_{xH})\,\delta_2}{U}\,\mathrm{d}x = \frac{2\,(1-c)}{1+c}\int_0^x \delta_2\,\mathrm{d}x \sim \int_0^x \delta_2\,\mathrm{d}x;$$

здесь δ_2 — толщина нижнего динамического слоя (см. рис. 10.33).

Согласно выражению (10.74) имеем $\sqrt{t} \sim \delta_2$ или $t \sim \delta_2^2$.

Тогда

$$(\mathrm{d}t/\mathrm{d}x) \sim \delta_2\,(\mathrm{d}\delta_2/\mathrm{d}x). \qquad (10.80)$$

Сравнивая эту зависимость с соотношением (10.80), заключаем, что $\delta_2 \sim x$.

Аналогичный вывод можно получить для динамической зоны, расположенной выше границы раздела, и для толщины диффузионных зон b_1 и b_2. Учитывая, что толщина b определяет величину средней аэрации $\bar{\alpha}$ (§ 35), можно ожидать, что $\bar{\alpha}$ будет возрастать прямо пропорционально расстоянию x. На рис. 10.37 показано изменение относительного среднего воздухосодержания $\bar{\alpha}/\alpha_c$ по длине канала x/x_c (индекс «с» относится к условиям стабилизированной аэрации). Экспериментальные данные свидетельствуют о том, что характер изменения среднего воздухосодержания по длине канала близок к линейному. Отметим, что при $x/x_c > 0{,}5 \div 0{,}7$ опытные точки несколько отклоняются от линейного закона в сторону бо́льших значений $\bar{\alpha}$. По-видимому, это связано с несколько более интенсивным проявлением турбулентных пульсаций при выходе пограничного слоя на поверхность потока.

Изменение $\bar{\alpha}$ по x можно исследовать также на основе использования данных по изменению турбулентных касательных напряжений по длине канала. Согласно зависимости (10.39)

$$\bar{\alpha} = \frac{\overline{2u_z'^2}}{gH}\,\frac{1}{\cos\theta}\,\frac{1+k_a}{2}.$$

Глубина H, входящая в это соотношение, изменяется по длине канала и может быть определена по соотношению (6.32)

$$H = (q/u_{x\,\max}) + \delta_1,$$

где δ_1 — толщина вытеснения.

Толщина вытеснения зависит от сопротивления граничной поверхности. В случае аэрированного потока имеются две граничные поверхности, создающие сопротивление. Как было показано выше, эффект сопротивления верхней границы может быть учтен за счет увеличения коэффициента гидравлического сопротивления нижней границы по соотношению (10.64). Таким образом, суммарная толщина вытеснения для аэрированного потока δ_{1a} может быть приближенно выражена в виде

$$(\delta_{1a}/\delta_a)=(1{,}25\sqrt{\lambda_a})/(1+1{,}25\sqrt{\lambda_a}),$$

где δ_a — условная толщина пограничного слоя, величина которого определяется коэффициентом гидравлического сопротивления λ_a.

Согласно соотношению (6.26), имеем:

$$\frac{\delta_{1a}}{H_c}\approx\frac{\lambda_{a.c}^{3/2}}{1+1{,}25\sqrt{\lambda_{a.c}}}\left(\frac{x}{H_c}\right)^{\frac{1}{1+1{,}5\sqrt{\lambda_{a.c}}}},$$

где $\lambda_{a.c}$ — коэффициент гидравлического сопротивления аэрированного потока в условиях стабилизации течения.

Учитывая, что аэрация потока начинается на достаточно больших расстояниях x, скорость u_{xmax} может быть определена:

$$u_{x\,max}=\sqrt{2gxi}.$$

Тогда после преобразований имеем:

$$\frac{q}{u_{x\,max}}=\frac{2H_c}{\sqrt{\lambda_{a.c}}}\sqrt{\frac{H_c}{x}}.$$

Таким образом, изменение глубины неравномерного аэрированного потока можно представить в виде

$$\frac{H}{H_c}=\frac{2}{\sqrt{\lambda_{a.c}}}\sqrt{\frac{H_c}{x}}+\frac{\lambda_{a.c}^{3/2}}{1+1{,}25\sqrt{\lambda_{a.c}}}\left(\frac{x_a}{H_c}\right)^{\frac{1}{1+1{,}5\sqrt{\lambda_{a.c}}}}. \qquad (10.81)$$

Учитывая, что

$$(\overline{u_z'^2}/\overline{u_{zc}'^2})=(\tau/\tau_c), \qquad (10.82)$$

где τ — местное касательное напряжение на дне канала,

и принимая изменение касательных напряжений в соответствии с выражением (6.20), находим:

$$(\overline{u_z'^2}\,/\,\overline{u_{zc}'^2})=\left(\frac{x}{x_c}\right)^{\frac{1}{1+1{,}5\sqrt{\lambda_c}}}. \qquad (10.83)$$

Здесь $\overline{u_{zc}'^2}$ — интенсивность вертикальных пульсаций в условиях стабилизированного течения.

Как показали данные экспериментальных исследований, величина пульсаций скорости $\sqrt{\overline{u_{zc}'^2}}$ может быть выражена как $\overline{u_{zc}'^2}=0{,}8ghi$.

Подставляя соотношения (10.81), (10.82) и (10.83) в зависимость (10.39), получаем:

$$\bar{\alpha}=\frac{1{,}6u_{*c}^2}{gH_c}\Phi\frac{1}{\cos\theta}\frac{1+k_a}{2}, \qquad (10.84)$$

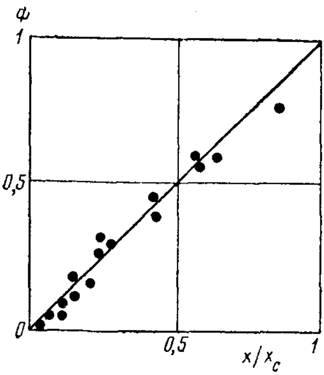


РИС. 10.38

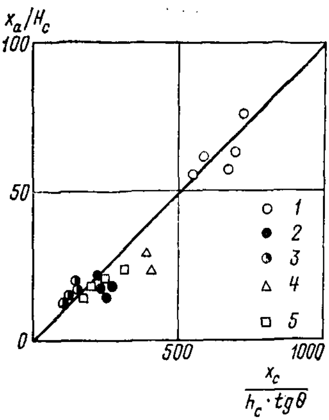


РИС. 10.39

1—3 — данные Н. Б. Исаченко (1 — гладкий канал; 2 — шероховатый канал, i=0,315; 3 — то же, i=0,51); 4 — данные Л. Рао, гладкий канал; 5 — данные В. П. Троицкого, гладкий бетонный канал

где

$$\Phi=\frac{(x/x_c)^{\frac{1}{1+1,5\sqrt{\lambda_c}}}}{\frac{2}{\sqrt{\lambda_c}}\sqrt{\frac{H_c}{x}+\frac{\lambda_{a.c}^{3/2}}{1+1,25\sqrt{\lambda_{a.c}}}\left(\frac{x}{H_c}\right)^{\frac{1}{1+1,5\sqrt{\lambda_{a.c}}}}}}. \qquad (10.85)$$

На рис. 10.38 показано изменение параметра Ф, рассчитанного по зависимости (10.85) при $\lambda_{a.c}$, изменяющегося от 0,025 до 0,25. Расчет выполнен с использованием зависимости (6.35). Анализ данных, представленных на рис. 10.38, показывает, что независимо от величины коэффициента гидравлического сопротивления $\lambda_{a.c}$ параметр $\Phi = x/x_c$.

Тогда

$$\bar{\alpha}=0,8\,\frac{u_{*c}^2}{gH_c}\,\frac{1}{\cos\theta}\,(1+k_a)\frac{x}{x_c}=0,8\frac{h}{H_c}\,\mathrm{tg}\,\theta\,(H+k_a)\frac{x}{x_c'}\,.$$

Учитывая, что $k_a \approx 0,8$, получаем:

$$\bar{\alpha}\approx 1,65\,[(h/H_c\,\mathrm{tg}\,\theta)\,(x/x_c)]. \qquad (10.86)$$

Это соотношение при $x = x_c$ обращается в полученное ранее соотношение (10.40) для аэрации равномерного потока.

Как уже указывалось, экспериментальным данным лучше отвечает коэффициент 1,75. Поэтому для расчета изменения среднего воздухонасыщения по длине канала следует пользоваться зависимостью

$$\bar{\alpha}=1,75\,\frac{h}{H}\,\frac{x}{x_c}\,\mathrm{tg}\,\theta. \qquad (10.87)$$

Соотношение (10.87) показывает, что $\bar{\alpha}$ линейно возрастает по длине канала. Этот вывод совпадает с выводом, сделанным ранее на основе рассмотрения модели дисперсоида, и удовлетворительно согласуется с экспериментом. Так же как и для равномерного потока, полученная зависимость справедлива лишь для тех расстояний x, при которых поток остается частично аэрированным, т. е. $\bar{\alpha} < 1$.

Учитывая, что начало аэрации определялось условием $\bar{\alpha} = 0{,}14$, из соотношения (10.87) получаем критериальное уравнение, определяющее начало аэрации в условиях неравномерного движения,

$$(h_c/H_c)\frac{x_a}{x_c}\operatorname{tg}\theta = 0{,}08, \tag{10.88}$$

где h_c и H_c — геометрические параметры потока в условиях стабилизированного течения;

x_a — расстояние от входа в канал до сечения, в котором начинается аэрация потока.

Сравнение критериальной зависимости (10.88) с данными экспериментальных исследований разных авторов (рис. 10.39) показывает удовлетворительную сходимость результатов.

ГЛАВА 11. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ ВЫСОКОСКОРОСТНЫМИ ПОТОКАМИ

§ 37. Принципы управления высокоскоростными потоками

Общую задачу управления движением потока можно поставить в двух вариантах. Прежде всего — это традиционно называемая в механике «прямая» задача, в которой при известной конфигурации русла задаются параметры потока (например, скорость, глубина) в одном из его живых сечений и требуется определить распределение параметров потока во всей области течения. При решении «обратной» задачи определяется конфигурация водовода (дно и боковые стенки), на котором происходит наперед заданное изменение параметров потока. Задачу управления открытым высокоскоростным потоком можно сформулировать следующим образом: рассчитать такую конфигурацию управляющего участка водовода, которая при его наименьшей длине и заданных деформациях свободной поверхности (на рассчитываемом участке и ниже его по течению) обеспечила бы заданные параметры потока в конечном сечении управляющего участка водовода.

Управление параметрами высокоскоростных потоков выполняют, используя границы водовода, а именно:

а) дно специальной формы двоякой кривизны с криволинейными обковыми стенками, не играющими управляющей роли;

б) криволинейные или ломаные боковые стенки при плоском дне водовода;

в) дно и стенки особой криволинейной формы (способ разработан пока недостаточно, в настоящее время имеются относящиеся к нему некоторые результаты экспериментальных исследований).

Экспериментальные и натурные испытания подтверждают высокую управляющую эффективность пространственно искривленных конструкций. Главная особенность этих конструкций состоит в использовании центробежных эффектов, возникающих в потоке при его движении над криволинейным дном. Несколько ограничивает широкое внедрение конструкций с пространственными криволинейными поверхностями в практику гидротехнического строительства известная сложность, связанная с производством работ при их возведении.

Конфигурацию криволинейной поверхности дна, управляющей бурным потоком, рассчитывают по следующей схеме [3]: выбирают план поверхностных линий тока таким образом, чтобы обеспечить заданное движение потока в плане; задают продольное очертание граничной линии тока, определяющей конфигурацию боковой стенки управляющего участка, стремясь обеспечить плавный перевод потока с собственно быстротока на управляющий участок и с управляющего участка на отводящий (в случае расчета конструкций переходных участков водосбросов). Затем в пределах управляющей конструкции определяют отметки свободной поверхности пространственного искривленного потока. Далее, используя уравнение неразрывности, определяют глубины потока по вертикалям, что при известных отметках свободной поверхности потока дает возможность найти отметки дна сооружения, т. е. определить конфигурацию дна участка, управляющего бурным потоком. Боковые стенки управляющего участка проектируют в виде вертикальных цилиндрических поверхностей и управляющей роли они не выполняют.

Следует отметить, что расчет конкретной конструкции с дном двоякой кривизны связан с преодолением трудностей математического порядка, что заставляет использовать как численные методы, так и различные искусственные преобразования и приемы. При расчете сложных конструкций с помощью ЭВМ необходимо применять численные методы. Метод расчета управляющих устройств различного назначения с дном двоякой кривизны описан в монографии Л. И. Высоцкого [3], где показано, что эти конструкции компактны и имеют протяженность меньшую, чем управляющие участки водосбросов с плоским дном. Тем не менее, когда это возможно, дно водосбросов проектируют плоским. В этом случае рассчитывают специальные формы боковых стенок на участке деформации потока.

Произвольно назначать конфигурацию боковых стенок при решении задачи целенаправленного управления бурным потоком нельзя. Например, для нахождения конфигурации так называемого «безволнового» сужающегося сопряжения двух параллельных каналов, имеющих общую прямолинейную ось, А. Иппеном и Д. Даусоном исследовалось сужение, образованное дугами сопрягаемых окружностей (рис. 11.1). Очертание управляющего устройства авторы приняли по аналогии с традиционным плавным сужением спокойных потоков. Результаты экспериментов А. Иппена и Д. Даусона (см. рис. 11.1) показывают, что управлять бурными потоками способами, применяемыми для спокойных потоков, невозможно, так как свойства бурного и спокойного потоков качественно различны. Волны, образовавшиеся в начале сужения, не уменьшались. Их взаимное наложение привело к увеличению глубины потока на его оси в 4—5 раз по сравнению с глубиной невозмущенного бурного потока.

Теория и методы расчета двухмерных потоков основываются на изучении характерных свойств бурных потоков. Отличия свойств бурных и спокойных потоков можно продемонстрировать на характере распространения в потоке малых возмущений различных параметров движения (например, скорости, глубины и т. д.).

Если жидкость находится в покое, то распространяющееся возмущение образует волны в виде системы концентрических окружностей (рис. 11.2, *а*). Скорость распространения малого возмущения

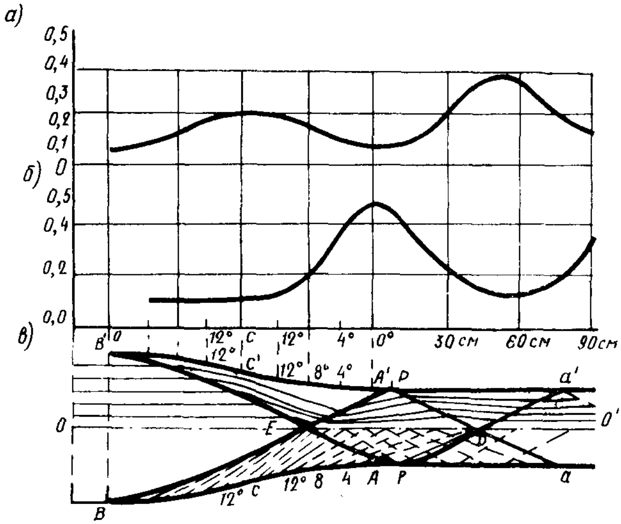


РИС. 11.1

а — разрез по линии BCAP; б — разрез по линии OEDO′; в — план переходного участка

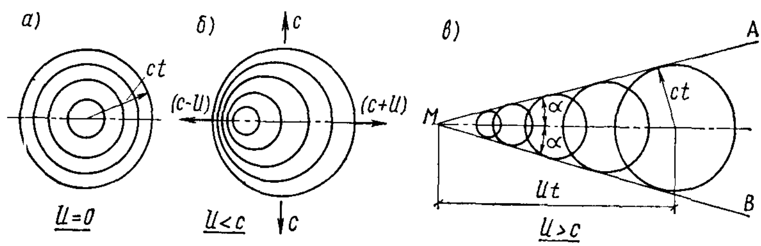


РИС. 11.2

свободной поверхности в движущемся потоке определяется в каждой точке известными законами кинематики. Вектор абсолютной скорости перемещения волны возмущения (в неподвижной системе координат) определяется векторной суммой относительной и переносной скоростей. Относительной скоростью здесь будет скорость распространения возмущения — волновая скорость c, переносной — скорость U движения потока. В случае, если $U/c < 1$, волны возмущения образуют систему эксцентрических окружностей (радиусом $c \cdot t$, где t — время); поскольку скорость потока $U < c$, возмущения распространяются во все стороны, но вверх по течению с меньшей скоростью ($c - U$), чем вниз по течению ($c + U$) (см. рис. 11.2, *б*).

При движении потока со скоростью $U > c$ волны возмущений сносятся потоком вниз по течению. В этом случае малые возмущения не смогут распространяться за пределы клина, образованного двумя линиями, совпадающими с касательными к окружностям радиусом $c \cdot t$ (см. рис. 11.2, *в*). Вершина клина будет совпадать с источником возмущений. Угол, составленный каждой из указанных касательных с направлением скорости, называют волновым углом, его можно определить из соотношения

$$\alpha = \arcsin \frac{c}{U} = \arcsin \frac{\sqrt{gH}}{U} = \arcsin \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Fr}}}, \qquad (11.1)$$

где

$$\mathrm{Fr} = \frac{U^2}{c^2} = \frac{U^2}{gH}. \qquad (11.2)$$

Потоки, движущиеся со скоростью больше волновой скорости $U > c$, т. е. $\mathrm{Fr} > 1$, называют бурными, а при $U < c$, $\mathrm{Fr} < 1$ — спокойными. Из соотношения (11.1) следует: чем выше скорость потока (U), т. е. чем больше значение числа Фруда, характеризующее кинетичность потока, тем меньше значение волнового угла α. Прямые MA и MB (см. рис. 11.2, *в*) называют линиями малого возмущения (или линиями Маха, как в аэродинамике). На использовании этих двух понятий (волнового угла α и линии малого возмущения) основываются многие способы расчета устройств для управления бурными потоками.

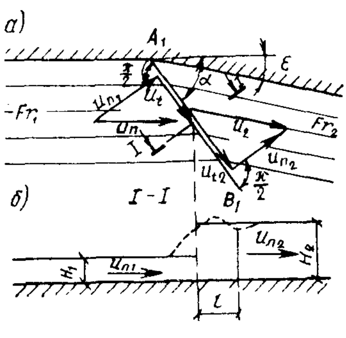


Рис. 11.3

а — план течения; б — разрез по сечению I—I

Допустим, боковая стенка канала в точке A_1 повернута на угол ε (рис. 11.3). В этом случае в бурном потоке ($H_1 < H_{кр}$ и $\mathrm{Fr}_1 > 1$) возникает возмущение в виде волны, фронт которой A_1B_1 будет расположен под углом α к первоначальному положению боковой стенки.

Эту волну называют косым гидравлическим прыжком. В зависимости от соотношения глубин H_1 и H_2 он может быть совершенным и волнистым.

Вектор скорости U_1 до прыжка можно разложить на два направления: по нормали к фронту волны и параллельно ему. Из треугольника скоростей найдем $U_{n1} = U_1 \sin \alpha_1$ и тогда число Фруда по нормали к фронту волны до прыжка опишется зависимостью

$$\mathrm{Fr}_{n_1} = \frac{U_{n_1}^2}{gH_1} = \frac{U_1^2 \sin^2 \alpha_1}{gH_1} = \mathrm{Fr}_1 \sin^2 \alpha_1. \tag{11.3}$$

Если прыжок совершенный, т. е. если $H_2/H_1 \geqslant 2$, то соотношение сопряженных глубин в направлении нормали к фронту волны с учетом зависимости (11.3) определится по соотношению

$$H_2/H_1 = \frac{1}{2}\left[\sqrt{1+8\mathrm{Fr}_1 \sin^2 \alpha_1} - 1\right]. \tag{11.4}$$

Из формулы можно определить предельные значения α_1, при которых образуются косые гидравлические прыжки. В самом деле, наибольшее соотношение сопряженных глубин H_2/H_1 будет, согласно последней формуле, при $\sin \alpha_1 = 1$ или когда $\alpha_1 = (\pi/2)$. В этом случае фронт гидравлического совершенного прыжка перпендикулярен вектору скорости U_1, или оси потока, т. е. прыжок будет прямой. Следовательно, образование косого гидравлического прыжка происходит при $\alpha_1 < (\pi/2)$.

Естественно, при $H_2 = H_1$ гидравлического прыжка не образуется, т. е. косой прыжок вырождается в линию возмущения. Согласно уравнению (11.4), получим:

$$\alpha_1 = \arcsin \sqrt{\frac{1}{\mathrm{Fr}_1}}.$$

Таким образом, если образовался косой гидравлический прыжок, то значения α_1 должны быть заключены в пределах

$$\arcsin \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Fr}_1}} < \alpha_1 < \frac{\pi}{2}.$$

Из первого и второго треугольника скоростей (см. рис. 11.3) находим:

$$U_{t1} = (U_{n1}/\operatorname{tg} \alpha_1); \quad U_{t2} = [U_{n2}/\operatorname{tg}(\alpha_1 - \varepsilon)].$$

Так как $U_{t_1} = U_{t_2}$, то, приравнивая правые части последних зависимостей, найдем:

$$(U_{n1}/U_{n2}) = [\operatorname{tg} \alpha_1/\operatorname{tg}(\alpha_1 - \varepsilon)]. \tag{11.5}$$

Согласно уравнению неразрывности, $H_1 U_{n1} = H_2 U_{n2}$ и тогда формулу (11.5) перепишем в следующем виде:

$$(H_2/H_1) = [\operatorname{tg} \alpha_1/\operatorname{tg}(\alpha_1 - \varepsilon)]. \tag{11.6}$$

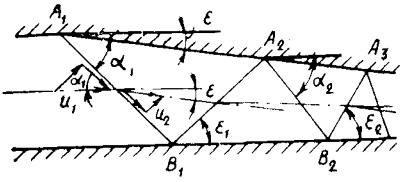


РИС. 11.4

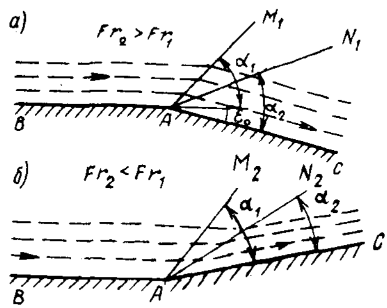


РИС. 11.5

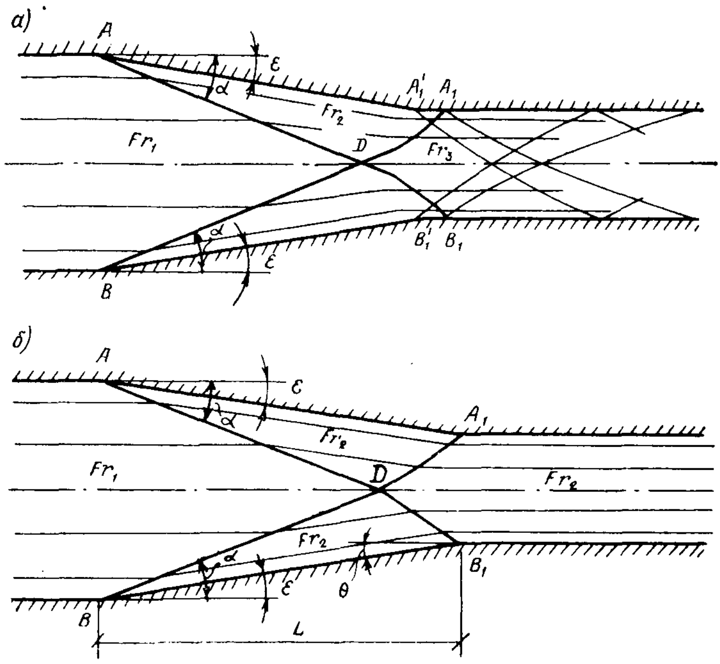


РИС. 11.6

Из уравнений (11.4) и (11.6) находим:

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}(\alpha_1-\varepsilon)}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+8\mathrm{Fr}_1\sin^2\alpha_1}-1\right)$$

и так как

$$\operatorname{tg}(\alpha_1-\varepsilon)=[(\operatorname{tg}\alpha_1-\operatorname{tg}\varepsilon)/(1+\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\varepsilon)],$$

то, решая совместно эти уравнения, находим $\operatorname{tg}\varepsilon$ (формула А. Т. Иппена):

$$\operatorname{tg}\varepsilon=\frac{\left(\sqrt{1+8\mathrm{Fr}_1\sin^2\alpha_1}-3\right)\operatorname{tg}\alpha_1}{2\operatorname{tg}^2\alpha_1+\sqrt{1+8\mathrm{Fr}_1\sin^2\alpha_1}-1}. \qquad (11.7)$$

Таким образом, если заданы ε и $\mathrm{Fr}_1=U_1^2/gH_1$, то из уравнения (11.7) можно определить α_1.

При переходе через косой гидравлический прыжок поток сохраняет свое состояние ($\mathrm{Fr}_2>1$) или изменяет его на спокойное ($\mathrm{Fr}_2<<1$). В первом случае прыжок называется слабым, а во втором — сильным. Если ширина канала ограничена, фронт прыжка достигает противоположной стенки и возникает отраженный косой гидравлический прыжок с линией фронта B_1A_2 под углом ε_1 к правой стенке канала (рис. 11.4). Следовательно, за линией фронта A_1B_1 каждая линия тока отклоняется на угол ε по часовой стрелке. За фронтом отраженной волны B_1A_2 эти линии тока отклоняются вновь, но уже на угол ε_1 против часовой стрелки. Как правило, отраженная волна возникает, если после фронтов волн A_1B_1 и B_1A_2 сохраняется бурное состояние потока.

Если боковая стенка повернута на угол ε от потока, то возникает косая волна расширения (рис. 11.5). Эта волна имеет пологий фронт, и ее глубины уменьшаются в секторной области, ограниченной прямыми — характеристиками AM_1 и AN_1 или AM_2 и AN_2, наклоненными соответственно к первоначальному и конечному положениям боковой стенки под углами α_1 и α_2. Первый и второй типы косой расширяющейся волны зависят от состояния потока до и после фронта волны, т. е. от соотношения значений чисел Фруда Fr_1 и Fr_2. Если бурное состояние потока сохраняется на всем протяжении канала, кинетичность потока возрастает, и в этом случае его сопряжение будет определяться характеристиками AM_1 и AN_1 (см. рис. 11.5, *а*). В районе поворота стенки движение частиц ускоряется, в результате расширяются струи и уменьшается глубина потока по течению.

Если же до поворота кинетичность потока выше, чем за поворотом, то в этом случае происходит торможение потока, сужение струй и возрастание глубин.

В первом случае при $\mathrm{Fr}_1<\mathrm{Fr}_2$ волну называют волной расширения (см. рис. 11.5, *а*), а во втором при $\mathrm{Fr}_1>\mathrm{Fr}_2$ — волной сжатия.

Допустим, два прямоугольных канала шириной b_1 и b_3 соединены переходным сужающимся симметричным участком также прямоугольного сечения (рис. 11.6). В этом случае в точках A и B возникают возмущения и фронты волн будут расположены по линиям ADB_1, BDA_1. Если точки B_1 и A_1 находятся за входным сечением второго канала (см. рис. 11.6, *а*), то во входном сечении в точках A_1' и B_1' возникают волны расширения, и тогда во втором канале образуется волновое движение. Если же длину переходного участка подобрать так, чтобы точки B_1 и B_1', а также A_1 и A_1' совпали (см. рис. 11.6, *б*), тогда на втором канале можно либо полностью устранить возмущения, либо свести их до минимума за счет интерференции волн расширения и отраженного гидравлического прыжка.

Зависимости, полученные для определения параметров косых прыжков, обычно используются для выполнения приближенного расчета так называемого «безволнового» сужения. Подобный расчет при заданной степени сужения потока заключается в специальном выборе угла поворота боковой прямолинейной стенки и длины участка сужения при заданных параметрах недеформированного потока. Теоретически при выполнении сужения по этой схеме деформации потока должны отсутствовать. В действительности же из-за приближенности этой расчетной схемы полностью избежать волнообразования не удается, поэтому для уменьшения деформации свободной поверхности потока на участках сужения значительно увеличивают их длину. Для уменьшения волнообразования на управляющих участках водосбросных сооружений с плоским дном применяются криволинейные очертания боковых стенок специальной формы, расчет которых обычно выполняется в предположении двухмерности течения. Уравнения плавно изменяющегося (одномерного) движения применимы лишь при малой кривизне боковых стенок, т. е. при незначительном угле плановой деформации стенки. В поставленной выше задаче требуется осуществить необходимую деформацию бурного потока на участке наименьшей длины. Это заставляет максимально увеличивать деформацию потока в плане, что в свою очередь приводит к образованию на управляющем участке косых гидравлических прыжков и стационарных волн [4], чем нарушаются основные предпосылки одномерной теории, и требуется перейти к более сложной двухмерной схеме.

С другой стороны, очевидно, что сбрасываемый поток в общем случае является пространственным. Однако получить точное решение уравнений движения трехмерного бурного потока в настоящее время не представляется возможным. Кроме того, среди водосбросов можно выделить широкий класс сооружений, в которых сбрасываемый поток характеризуется пренебрежимо малыми значениями одной из составляющих скоростей и ускорений. Для описания движения таких потоков можно ограничиться только двумя независимыми переменными, из-за чего эти потоки и называются двухмерными. Приближенно поток в канале считают двухмерным, если глубина его в несколько раз меньше ширины, рельеф дна является достаточно плавным и искривление струй в плане не слишком велико [4].

Основные предпосылки двухмерной теории впервые сформулированы Н. М. Бернадским для спокойных потоков:

1) вертикальные (или нормальные к выбранной координатной плоскости) составляющие местных скоростей и ускорений малы;

2) векторы скоростей жидких частиц, расположенных на одной вертикали (или нормали к дну), лежат в одной плоскости;

3) распределение скоростей на любой вертикали — практически равномерное.

§ 38. Уравнения двухмерного бурного потока

Систему динамических уравнений движения двухмерного потока при большом уклоне дна и уравнение неразрывности можно получить из уравнений трехмерного потока с учетом приведенных выше предпосылок двухмерной теории:

$$\left.\begin{aligned} u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} u_y &= g \sin\theta - g\cos\theta \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial x}\right) - \lambda \frac{u_x U}{8H}; \\ u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} u_y &= -g\cos\theta \left(\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial y}\right) - \lambda \frac{u_y U}{8H}; \\ \frac{\partial}{\partial x}(Hu_x) + \frac{\partial}{\partial y}(Hu_y) &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (11.8)$$

где x, y — координаты (рис. 11.7, *а*);
u_x, u_y — компоненты скорости U, осредненной по нормали к координатной плоскости $x o y$;
θ — угол наклона координатной плоскости к горизонту;
z и H — соответственно отметка дна и глубина;
$\lambda = \frac{8g}{C^2}$ — коэффициент гидравлического трения;
C — коэффициент Шези;
g — ускорение свободного падения.

Рассматривается лишь плоское дно водовода, имеющего постоянный уклон $i = \sin\theta$. Совмещая координатную плоскость xoy с плоским дном (см. рис. 11.7, *б*) и учитывая, что в этом случае grad z = = 0, преобразуем систему уравнений (11.8) к следующему виду:

$$\left.\begin{aligned} u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} &= g\sin\theta - g\cos\theta \frac{\partial H}{\partial x} - \lambda \frac{u_x U}{8H}; \\ u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} &= -g\cos\theta \frac{\partial H}{\partial y} - \lambda \frac{u_y U}{8H}; \\ \frac{\partial}{\partial x}(Hu_x) + \frac{\partial}{\partial y}(Hu_y) &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (11.9)$$

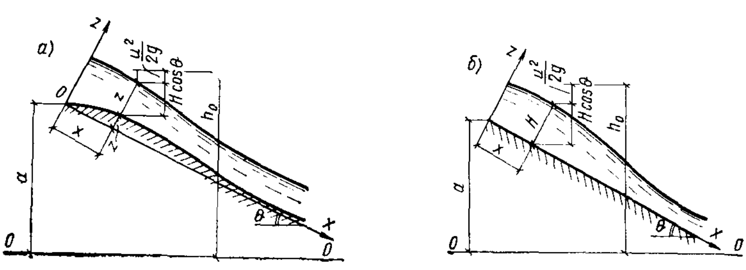


Рис. 11.7

Система (11.9) содержит три искомые функции u_x (x, y); u_y (x, y); H (x, y) и не имеет решения в явном виде (в виде конечных формул). В связи с этим для решения системы (11.9) применяются приближенные графоаналитические или численные методы.

Рассматриваемая система уравнений является квазилинейной, так как она линейна относительно частных производных искомых функций, но сами эти функции входят в систему нелинейно.

Чтобы лучше понять суть применяемого метода решения системы (11.9), упростим ее, рассматривая случай, когда силами сопротивления можно пренебречь. Движение будем считать потенциальным, а дно потока — горизонтальным. Введем потенциал скорости по отношениям $u_x = \partial\varphi/\partial x$; $u_y = \partial\varphi/\partial y$.

Тогда исходная система уравнений (11.9) принимает вид

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\left[c^2-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2\right]-2\,\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\left[c^2-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right]=0. \quad (11.10)$$

После введения обозначений:

$$\left.\begin{aligned} A&=\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2-1=\frac{u_x^2}{c^2}-1;\\ B&=\frac{1}{c^2}\,\frac{\partial\varphi\partial\varphi}{\partial x\partial y}=\frac{u_x u_y}{c^2};\\ D&=\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2-1=\frac{u_y^2}{c^2}-1.\end{aligned}\right\} \quad (11.11)$$

Уравнение (11.10) записывается [3] в виде

$$A\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+2B\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}+D\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0. \quad (11.12)$$

Вычислим далее значение $B^2 - AD$, где A, B, D находятся по соотношениям (11.11)

$$B^2-AD=\frac{u^2}{c^2}-1. \quad (11.13)$$

Рассмотрим некоторые особенности решения уравнения (11.12). Предположим, что в плоскости xy имеется некоторая гладкая кривая η (x, y), вдоль которой отыскивается функция φ (x, y), являющаяся решением уравнения (11.12). Обозначим производные функции φ вдоль кривой η как

$$p=\partial\varphi/\partial x;\quad q=\partial\varphi/\partial y;\quad l=\partial^2\varphi/\partial x^2;$$

$$m=\partial^2\varphi/\partial x\partial y;\quad n=\partial^2\varphi/\partial y^2.$$

Полные дифференциалы функций p и q вдоль кривой η можно записать в виде

$$\mathrm{d}p=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\,\mathrm{d}y;$$

$$\mathrm{d}q=\frac{\partial^2 q}{\partial x\,\partial y}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\,\mathrm{d}y.$$

Используя принятые обозначения, запишем эти соотношения:

$$l\mathrm{d}x+m\mathrm{d}y=\mathrm{d}p;$$
$$m\mathrm{d}x+n\mathrm{d}y=\mathrm{d}q.$$

Вводя принятые обозначения в уравнение (11.10), получаем систему из трех линейных алгебраических уравнений относительно трех неизвестных l, m и n:

$$\left.\begin{aligned} &Al+2Bm+Dn=0;\\ &l\mathrm{d}x+m\mathrm{d}y=\mathrm{d}p;\\ &m\mathrm{d}x+n\mathrm{d}y=\mathrm{d}q.\end{aligned}\right\} \tag{11.14}$$

Решение этой системы может быть выражено через детерминанты следующим образом [6]:

$$l=\frac{\Delta_1}{\Delta};\quad m=\frac{\Delta_2}{\Delta};\quad n=\frac{\Delta_3}{\Delta}, \tag{11.15}$$

где

$$\Delta=\begin{vmatrix} 0 & 2B & D\\ \mathrm{d}p & \mathrm{d}y & 0\\ 0 & \mathrm{d}x & \mathrm{d}y\end{vmatrix}=A(\mathrm{d}y)^2-2B\mathrm{d}x\mathrm{d}y+D(\mathrm{d}x)^2. \tag{11.16}$$

$$\left.\begin{aligned} &\Delta_1=\begin{vmatrix} 0 & 2B & D\\ \mathrm{d}p & \mathrm{d}y & 0\\ \mathrm{d}q & \mathrm{d}x & \mathrm{d}y\end{vmatrix}=D\mathrm{d}p\mathrm{d}x-2B\mathrm{d}p\mathrm{d}y-D\mathrm{d}q\mathrm{d}y;\\ &\Delta_2=\begin{vmatrix} A & 0 & D\\ \mathrm{d}x & \mathrm{d}p & 0\\ 0 & \mathrm{d}q & \mathrm{d}y\end{vmatrix}=A\mathrm{d}p\mathrm{d}y+D\mathrm{d}x\mathrm{d}q;\\ &\Delta_3=\begin{vmatrix} A & 2B & 0\\ \mathrm{d}x & \mathrm{d}y & \mathrm{d}p\\ 0 & \mathrm{d}x & \mathrm{d}q\end{vmatrix}=A\mathrm{d}q\mathrm{d}y-2B\mathrm{d}q\mathrm{d}x-A\mathrm{d}p\mathrm{d}x.\end{aligned}\right\} \tag{11.17}$$

Известно [6], что система имеет единственное решение, если ее детерминант Δ не равен нулю. (Единственное решение отвечает невозмущенному течению.) Если имеется возмущение течения, то вдоль линии возмущения решение системы будет неопределенным. Если $\Delta=0$, а Δ_1, Δ_2 и Δ_3 не равны нулю, то возмущение можно представить в виде «разрыва». Когда все детерминанты равны нулю, возмущение можно представить непрерывным, однако производные параметров течения на линии возмущения будут определены не единственным образом. Рассмотрим случай, когда $\Delta_1=\Delta_2=\Delta_3=$ $=0$.

Из условия $\Delta=0$ получаем:

$$A(\mathrm{d}y)^2-2B\mathrm{d}x\mathrm{d}y+D\mathrm{d}x^2=0. \tag{11.18}$$

Решая это квадратное уравнение, находим:

$$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x=[(B\pm\sqrt{B^2-AD})/A]. \tag{11.19}$$

Выражение (11.19) представляет собой уравнение линии возмущения, которое называют обычно уравнением характеристики. Поскольку в уравнении (11.19) правая часть имеет два действительных значения, можно выделить два семейства характеристик:

$$\left.\begin{aligned}(\mathrm{d}y/\mathrm{d}x)_1&=[(B+\sqrt{B^2-AD})/A];\\(\mathrm{d}y/\mathrm{d}x)_2&=[(B-\sqrt{B^2-AD})/A].\end{aligned}\right\}\qquad(11.20)$$

Использование соотношения (11.19) позволяет преобразовать каждое из уравнений (11.17) к одному и тому же виду

$$(B\pm\sqrt{B^2-AD})\,\mathrm{d}p+D\mathrm{d}q=0.\qquad(11.21)$$

Это уравнение называют дифференциальным соотношением на характеристиках. Таким образом, дифференциальному уравнению второго порядка (11.12) соответствуют два семейства характеристик. Если дифференциальное уравнение имеет n-й порядок, то ему соответствует n семейств характеристик.

В заключение отметим, что использование метода характеристик позволило преобразовать уравнение (11.12) в частных производных к обыкновенному дифференциальному уравнению (11.18).

§ 39. Уравнения характеристик двухмерного бурного потока

Обращаясь вновь к уравнению двухмерного потенциального течения (11.12), запишем уравнение направления характеристик с учетом выражений A, B и D в виде

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_{1,2}=\frac{u_x u_y\pm c\sqrt{u^2-c^2}}{u_x^2-c^2},\qquad(11.22)$$

где 1, 2 — индексы семейства характеристик.

Поскольку направления характеристик зависят от значения местной скорости $u=\sqrt{u_x^2+u_y^2}$, характеристики в неравномерном потоке — криволинейны. Найдем угол, образуемый в некоторой точке течения вектором скорости u и направлениями характеристик. Для этого обозначим через ε угол, образуемый вектором скорости в любой точке течения с осью x, тогда:

$$\left.\begin{aligned}u_x&=u\cos\varepsilon;\\u_y&=u\sin\varepsilon.\end{aligned}\right\}\qquad(11.23)$$

Подставляя выражения (11.23) в (11.22) и учитывая соотношение (11.1), можно получить [4]:

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_{1,2}=\mathrm{tg}\,(\varepsilon\pm\alpha)=\frac{\mathrm{tg}\,\varepsilon\pm\mathrm{tg}\,\alpha}{1\pm\mathrm{tg}\,\varepsilon\,\mathrm{tg}\,\alpha},\qquad(11.24)$$

где

$$\mathrm{tg}\,\alpha=1/\sqrt{(\mathrm{Fr}-1)}.\qquad(11.25)$$

Из уравнения (11.24) следует, что если в какой-либо точке области течения (потока) (x, y) известно направление скорости u (т. е.

угол ε) и мы отложим по обе стороны от вектора скорости углы, равные $\pm\alpha$, то получим направления характеристик первого (I) и второго (II) семейства (точнее, направления касательных $\tau_1\tau_2$ к характеристикам), проходящих через эту точку. Характеристики первого семейства образуют угол $+\alpha$ с линией тока (с вектором скорости), а характеристики второго семейства — угол $-\alpha$ (рис. 11.8).

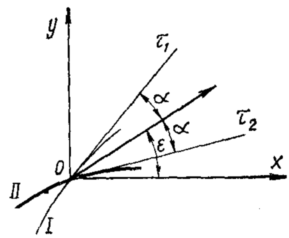


Рис. 11.8

Направления, которые в аэродинамике называются направлениями Маха, в гидравлике называются направлениями распространения малых возмущений. Линии, имеющие в каждой точке направление Маха, называют линиями Маха. Следовательно, характеристики совпадают с линиями распространения малых возмущений (линиями Маха) в каждой точке течения. Физический смысл их определяется тем, что если в какой-либо точке бурного потока (x, y) поместить источник малых возмущений, то они будут сказываться лишь в области, ограниченной линиями распространения малых возмущений (линиями Маха), совпадающими с характеристиками, проведенными через эту точку.

Из уравнения (11.22) следует, что если вдоль характеристики параметры потока (глубина, скорость) не меняются, то характеристика не меняет своего направления и остается прямолинейной.

Подставляя значения A, B и D в виде соотношений (11.11) в дифференциальное уравнение на характеристиках (11.19), а также учитывая, что $p = u_x = (\partial\varphi/\partial x)$, $u_y = (\partial\varphi/\partial y) = q$, после некоторых преобразований можно получить дифференциальную зависимость между углом ε и числом Фруда

$$d\varepsilon = \pm \frac{\sqrt{\mathrm{Fr}-1}}{\mathrm{Fr}\,(\mathrm{Fr}+2)}\,d\mathrm{Fr}. \qquad (11.26)$$

Уравнение (11.24) совместно с зависимостью (11.26) представляет собой уравнение характеристик потенциального двухмерного потока. Интегрированием уравнения (11.26) с учетом соотношения (11.1) можно получить зависимость, описывающую связь между параметрами потока в конечной форме:

$$\varepsilon = \mp\,[\sqrt{3}\,\mathrm{arcctg}\,(\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\alpha) - \alpha] + c_1. \qquad (11.27)$$

Уравнение (11.27) можно представить графически двумя семействами кривых, образующих универсальную сетку для всех бурных потоков — диаграмму характеристик, которая часто используется для проведения графоаналитических методов расчета бурных потоков.

В случае непотенциального движения система уравнений двухмерного бурного потока в русле с большим уклоном (11.9) имеет три семейства характеристик. В общем виде уравнения трех семейств различных и вещественных характеристик получены Б. Т. Емцевым и приведены в монографии [4]. Не повторяя необходимых выкладок, определим направления характеристик уравнениями

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{1,2} = \frac{u_x u_y \pm c_* \sqrt{u_x^2 + u_y^2 - c_*^2}}{u_x^2 - c_*^2}; \tag{11.28}$$

$$(dy/dx)_3 = (u_y/u_x), \tag{11.29}$$

где индексы 1, 2, 3 соответствуют номеру характеристик;

$$c_* = \sqrt{gH\cos\theta}, \tag{11.30}$$

здесь c_* — скорость распространения малых возмущений в жидкости со свободной поверхностью (волновая скорость, вычисленная с учетом уклона дна);

H — глубина потока, отсчитываемая по нормали к дну водовода;

θ — угол наклона дна водотока (координатной плоскости к горизонту).

Число Фруда, вычисленное с учетом уклона дна, описывается соотношением

$$\mathrm{Fr}_* = \frac{u^2}{c_*^2} = \frac{u^2}{gH\cos\theta}, \tag{11.31}$$

Имея в виду, что

$$u_y/u_x = \operatorname{tg}\varepsilon = (dy/dx)_3, \tag{11.32}$$

уравнение (11.28) преобразуется к виду, аналогичному зависимости (11.24),

где $\operatorname{tg}\alpha$ вычисляется по формуле

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Fr}_* - 1}} = \sqrt{\frac{\cos\theta}{\mathrm{Fr} - \cos\theta}}. \tag{11.33}$$

Здесь также справедлив вывод, что в каждой точке течения направления характеристик (первого и второго семейств) и линии малых возмущений совпадают. Волновой угол при движении потока в русле с большим уклоном дна является функцией уклона и вычисляется по соотношению

$$\alpha = \arcsin\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Fr}_*}} = \arcsin\sqrt{\frac{\cos\theta}{\mathrm{Fr}}}. \tag{11.34}$$

Из соотношения (11.34) следует, что с увеличением уклона волновой угол уменьшается (становится более острым).

Дифференциальные соотношения на характеристиках системы уравнений (11.9) для случая плоского дна с продольным уклоном $i = \sin\theta$ получены Б. Т. Емцевым [4].

Для первого и второго семейств характеристик в виде

$$\cos(\varepsilon \mp \alpha)\frac{du_x}{dx} + \sin(\varepsilon \mp \alpha)\frac{du_y}{dx} = \frac{g\cos\alpha}{u}\frac{dH}{dx} \mp$$

$$\mp \frac{\sin\alpha}{u\cos(\varepsilon \pm \alpha)}\left[\lambda\frac{u_x u}{8H}\sin(\varepsilon \pm \alpha) - \lambda\frac{u_y u}{8H}\cos(\varepsilon \pm \alpha)\right] +$$

$$+\frac{u \operatorname{tg}\theta \sin^2\alpha}{H\cos(\varepsilon\pm\alpha)}; \qquad (11.35)$$

для третьего семейства

$$\mathrm{d}h_0=\frac{1}{g}\left(\lambda\frac{u_x u}{8H}+\lambda\frac{u_y u}{8H}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=-\frac{\lambda}{2}\mathrm{Fr}\,\mathrm{d}s, \qquad (11.36)$$

где u_x, u_y — составляющие местной скорости u, которые вычисляются по зависимости (11.23);

h_0 — полный гидродинамический напор (см. рис. 11.7, *б*):

$$h_0=a-x\sin\theta+H\cos\theta+\frac{u_x^2+u_y^2}{2g}. \qquad (11.37)$$

Остальные обозначения совпадают с принятыми в системах уравнений (11.8) и (11.9). Как и ранее, в соотношениях (11.35) верхние знаки принадлежат первому семейству характеристик.

Третье семейство характеристик динамических уравнений (11.9) по направлению совпадает с линиями тока, а дифференциальное соотношение (11.36), на нем, очевидно, представляет собой уравнение Бернулли, выражающее закон изменения гидродинамического напора (h_0) вдоль линии тока.

Дифференциальное соотношение на первом и втором семействах характеристик в виде выражения (11.35) мало удобно для практических расчетов. Для упрощения этих уравнений используем уравнения (11.23) и (11.34), а также следующие соотношения:

$$\frac{\mathrm{d}h_0}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}x}\cos\theta-\sin\theta+\frac{u\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x};$$

$$\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\cos\varepsilon-\sin\varepsilon\, u\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}x};$$

$$\frac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\sin\varepsilon+u\cos\varepsilon\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}x};$$

$$\cos\alpha=\sqrt{\frac{\mathrm{Fr}-\cos\theta}{\mathrm{Fr}}};$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{\frac{\cos\theta}{\mathrm{Fr}-\cos\theta}}.$$

Опуская необходимые преобразования, уравнение (11.35) запишем в виде

$$\pm H\sqrt{\frac{\cos\theta}{\mathrm{Fr}}}\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}x}=\frac{\cos\theta}{\mathrm{Fr}}\sqrt{\frac{\mathrm{Fr}-\cos\theta}{\mathrm{Fr}}}\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}x}-$$

$$-\frac{\sin\theta}{\mathrm{Fr}}\sqrt{\frac{\mathrm{Fr}-\cos\theta}{\mathrm{Fr}}}+\frac{\sin\theta\cos\varepsilon}{\mathrm{Fr}\cos(\varepsilon\pm\alpha)}-\frac{\lambda}{2}\frac{\cos\theta}{\mathrm{Fr}\cos(\varepsilon\pm\alpha)}. \qquad (11.38)$$

Учитывая, что проекции дифференциалов дуг характеристик первого и второго семейств (соответственно индексам) на ось x имеют вид: $dx_{1,2} = ds_{1,2}\cos(\varepsilon \pm \alpha)$, представим уравнения (11.38) в окончательном виде:

$$\pm H\sqrt{\frac{\mathrm{Fr}}{\cos\theta}}\,d\varepsilon = \sqrt{\frac{\mathrm{Fr}-\cos\theta}{\mathrm{Fr}}}\,dH - \sqrt{\frac{\mathrm{Fr}-\cos\theta}{\mathrm{Fr}}}\times$$

$$\times \operatorname{tg}\theta\cos(\varepsilon \pm \alpha)\,ds + \operatorname{tg}\theta\cos\varepsilon\,ds - \frac{\lambda}{2}\,ds. \qquad (11.39)$$

При выполнении расчетов (сужений, расширений и т. д.) двухмерных бурных потоков на плоском дне с большим уклоном методом характеристик целесообразно пользоваться дифференциальными соотношениями на первом и втором семействах характеристик в виде выражения (11.39), где учитывается и большой уклон, и трение.

Если уклон плоского дна мал, то полагая, что $i = \sin\theta = \operatorname{tg}\theta$; $\cos\theta = 1$, получим из уравнения (11.39):

$$\pm H\sqrt{\mathrm{Fr}}\,d\varepsilon = \sqrt{\mathrm{Fr}-1}\,dH - \sqrt{\mathrm{Fr}-1}\,i\,ds\cos(\varepsilon \pm \alpha) + i\cos\varepsilon\,ds -$$

$$-\frac{\lambda}{2}\,ds. \qquad (11.40)$$

Аналогичное уравнение в несколько другом виде получено Б. Т. Емцевым [4]. В случае вихревого движения в горизонтальном русле при $\theta = 0$; $i = \sin\theta = 0$ (без трения $\lambda = 0$) из соотношения (11.39) легко получаем:

$$\mp H\sqrt{\mathrm{Fr}}\,d\varepsilon = \sqrt{\mathrm{Fr}-1}\,dH\,. \qquad (11.41)$$

В случае потенциального движения в горизонтальном русле зависимость (11.39) нетрудно привести к уравнению (11.26), которое легко интегрируется и может быть представлено в конечном виде соотношением (11.27).

Уместно отметить, что при равномерном движении двухмерного бурного потока с плоским дном, уклон которого $i = \sin\theta$, характеристики течения являются прямолинейными [4]. В этом случае параметры потока вдоль прямолинейных характеристик обоих семейств остаются постоянными, т. е. $d\varepsilon = 0$; $dH = 0$, и уравнение (11.39) преобразуется к виду

$$\cos(\varepsilon \pm \alpha) = \sqrt{\frac{\mathrm{Fr}}{\mathrm{Fr}-\cos\theta}}\left(\cos\varepsilon - \frac{\lambda}{2\operatorname{tg}\theta}\right). \qquad (11.42)$$

Если равномерное движение происходит параллельно оси x, т. е. $\varepsilon = \mathrm{const} = 0$, то уравнение (11.42) упрощается и его можно записать в виде

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{\mathrm{Fr}}{\mathrm{Fr}-\cos\theta}}\left(1 - \frac{\lambda}{2\operatorname{tg}\theta}\right).$$

Тогда, выражая $\cos\alpha$ через число Фруда, т. е. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{\mathrm{Fr} - \cos\theta}}{\mathrm{Fr}}$, из соотношения (11.42) получим:

$$(\mathrm{Fr} - \cos\theta)/\mathrm{Fr} = 1 - \frac{\lambda}{2\,\mathrm{tg}\,\theta}$$

и далее

$$\sin\theta = \frac{1}{2}\,\mathrm{Fr} = \mathrm{const} = i. \qquad (11.43)$$

Очевидно, что зависимость (11.43) является одним из видов уравнений равномерного движения. Для расчетов бурных потоков в общем случае целесообразно пользоваться уравнениями характеристик (11.28), (11.29), (11.36) и (11.39). Если известно решение системы зависимостей (11.9), то известны и значения функций $u_x(x, y)$, $u_y(x, y)$ и $H(x, y)$. Тогда, подставив их значения в уравнения характеристик (11.28), (11.29), (11.36), (11.39), можно построить непрерывную сеть характеристик, которые покроют всю область течения.

Поскольку решение системы динамических уравнений (11.9) в обычной постановке рассматриваемых здесь обратных задач механики неизвестно, то, чтобы его приближенно найти, применяют метод характеристик. Зная необходимые значения параметров потока [значения функций $u_x(x, y)$, $u_y(x, y)$, $H(x, y)$] в граничных сечениях или задавшись ими, выбирают закон изменения этих параметров (с учетом динамических особенностей и свойств течения) на рассматриваемом участке. Используя уравнения направления характеристик [например, уравнения (11.28), (11.29)], строят сетку характеристик. Далее, по дифференциальным соотношениям (11.36), (11.39) определяют значения искомых функций на характеристиках. Поскольку характеристики покрывают непрерывно всю область течения (x, y), можно определить значения искомых функций $u_x(x, y)$, $u_y(x, y)$, $H(x, y)$ во всех точках потока. Пользуясь методом характеристик, можно рассчитать плановые конфигурации боковых стенок управляющих участков, где поток будет формироваться по заданному закону.

§ 40. Некоторые типовые расчетные задачи и схемы их численного решения

Уравнения характеристик (11.28), (11.32), (11.36), (11.39) позволяют решить любую задачу расчета двухмерного бурного потока в водоводе с плоским дном. Расчеты можно выполнить графоаналитическим способом, а также аналитическим (численно) с помощью ЭВМ. Графоаналитические способы решения применяются для расчета потенциальных течений потока на входных и переходных участках водосбросов при малых уклонах дна.

При расчете двухмерных потоков в руслах с большим уклоном дна с учетом потерь на трение и т. д. применяют численные способы

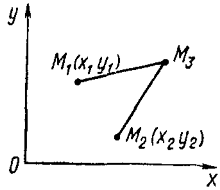


РИС. 11.9

расчета, поскольку вышеприведенные уравнения характеристик нельзя проинтегрировать в элементарных функциях. Для численного решения различных задач в этом случае можно применить метод Ж. Массо, в основе которого лежит замена дифференциальных уравнений характеристик соответствующими конечноразностными соотношениями. Ниже рассматривается решение тех задач, набор которых позволяет решить проблему управления двухмерным бурным потоком в руслах с плоским дном.

Идею метода Массо рассмотрим применительно к численному решению квазилинейного гиперболического уравнения второго порядка (11.12). Для этого уравнения получены уравнения характеристик (11.19) и (11.22), которые перепишем здесь в виде

$$(\mathrm{d}y/\mathrm{d}x)_{12} = t_{12}, \tag{11.44}$$

где $t = (B \pm \sqrt{B - AD})/A$.

Предположим, что в двух близких точках M_1 и M_2 плоскости x, y (рис. 11.9) известны φ, p, q, т. е. в точках M_1 и M_2 известны значения искомых функций и их производных, значения которых в точках M_1 и M_2 обозначены соответственно [$(x_1, y_1, \varphi_1, p_1, q_1)$ и $(x_2, y_2, \varphi_2, p_2, q_2)$[. Тогда через точку M_1 проведем прямую в направлении характеристики первого семейства характеристик, выходящей из точки M_1. Через точку M_2 — прямую в направлении характеристик второго семейства; выходящей из точки M_2. Эти прямые пересекутся, в некоторой точке M_3. Координаты x_3, y_3 этой точки M_3 являются решением системы

$$\left.\begin{aligned} y_3^{(1)} - y_1 &= t_{11}\,(x_3^{(1)} - x_1);\\ y_3^{(1)} - y_2 &= t_{22}\,(x_3^{(1)} - x_2), \end{aligned}\right\} \tag{11.45}$$

где t_{11} — угловой коэффициент касательной к характеристике первого семейства в точке M_1;

t_{22} — угловой коэффициент касательной к характеристике второго семейства в точке M_2 [корни уравнения (11.44) в точках M_1 и M_2].

Выражения (11.45) получаются из уравнений направления характеристик (11.44) при замене входящих в них дифференциалов конечными разностями. Далее, заменяя в соотношениях (11.22) дифференциалы конечными разностями, получают систему уравнений для отыскания значений $p_3^{(1)}$, $q_3^{(1)}$, $\varphi_3^{(1)}$ в точке M_3 (в первом приближении)

$$\left.\begin{aligned} &a_1\,[(p_3^{(1)} - p_1) + t_{21}\,(q_3^{(1)} - q_1)] = 0;\\ &a_2\,[(p_3^{(1)} - p_1) + t_{21}\,(q_3^{(1)} - q_2)] = 0;\\ &\varphi_3^{(1)} - \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = \frac{1}{2}\,[p_1\,(x_3^{(1)} - x_1) + q_1\,(y_3^{(1)} - y_1)] + \frac{1}{2}\times\\ &\times[p_2\,(x_3^{(1)} - x_2) + q_2\,(y_3^{(1)} - y_1)], \end{aligned}\right\} \tag{11.46}$$

где a_i — значения a в точке M_i $(i = 1,2)$;
t_j — значения t в точке M_j.

Решая систему зависимостей (11.45) и (11.46), находят первое приближение функций $\varphi_3^{(1)}$, $p_3^{(1)}$, $q_3^{(1)}$ и координат $x_3^{(1)}$, $y_3^{(1)}$ в точке M_3. Это приближение может оказаться недостаточно точным, поскольку криволинейные характеристики были заменены отрезками прямых, а дифференциалы всюду заменены конечными приращениями. Поэтому проводят дополнительные уточнения методом последовательных приближений. При этом вычисляют угловые коэффициенты характеристик первого и второго семейств в точке M_3, найденные в первом приближении, и вводят в расчет средние арифметические:

$$t_{11}^{(2)} = \frac{1}{2}\left(t_{11}^{(1)} + t_{13}^{(1)}\right);$$

$$t_{22}^{(2)} = \frac{1}{2}\left(t_{22}^{(1)} + t_{23}^{(1)}\right).$$

Так же поступают с другими величинами — получают уточненные координаты точки M_3 и уточненные значения искомых функций в точке M_3. Уточнения продолжают до тех пор, пока значения всех величин, полученные при двух последовательных приближениях с заданной точностью, не совпадают. Обычно при небольшом расстоянии между точками M_1 и M_2 достаточно сделать 1—2 уточнения.

Решение рассмотренной задачи отыскания третьей точки M_3 (x_3, y_3) и параметров в ней φ_3, p_3, q_3 по известным данным в двух точках позволяет численно решать различные задачи для систем соотношений (11.12) и (11.10) и им подобным. Рассмотрим лишь три типовые задачи, имеющие значения для расчета двухмерных бурных течений.

Задача Коши. Находят решение уравнения (11.12), если на некоторой кривой NN, лежащей в плоскости течения xoy (рис. 11.10) и не являющейся характеристикой, заданы все параметры (φ, p, q).

Решение. Задача Коши решается по методу Массо. Разбивают кривую NN на ряд малых участков в точках M_1, M_2, ..., M_n. По известным параметрам в близких точках M_1, M_2 вышеуказанным общим способом определяют координаты точки A_1 и параметры (v_{A1}, p_{A1}, q_{A1}) в ней. По точкам M_2, M_3 находят решение для точки A_2, по точкам M_3, M_4 решают задачу для точки A_3 и т. д. Затем ряд точек A_1, A_2, ..., A_n рассматривается как исходный, и определяются точки B_1, ..., B_n и параметры в них и т. д., пока не будет заполнен «треугольник» $M_1M_n K$, в котором сторона M_1K — ломаная линия, являющаяся некоторым приближением к характеристике первого семейства, выходящей из точки M_1. Ломаная линия M_nK является приближением к характеристике второго семейства, выходящей из точки M_n. Подобное построение можно выполнить и с другой стороны кривой, т. е. построить «треугольник» $M_1M_nK_2$. В случае нелинейных систем (11.12), (11.10), (11.9) (когда характеристики заранее неизвестны) при построении в области M_1M_nK получают приближения характеристик с помощью ломаных линий.

Задача Гурса. Задаются параметры на двух характеристиках разных семейств MN и MK, выходящих из точки M (рис. 11.11). Требуется решить уравнение (11.10), в области, ограниченной характеристиками MN и MK.

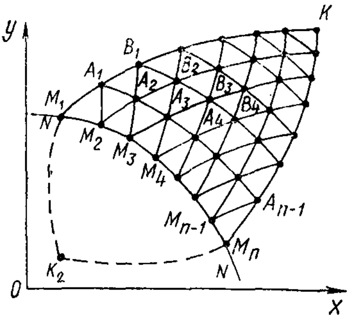


РИС. 11.10

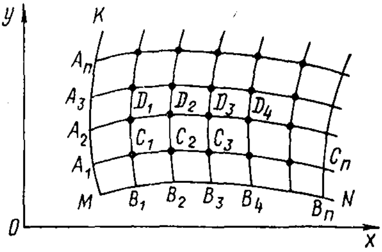


РИС. 11.11

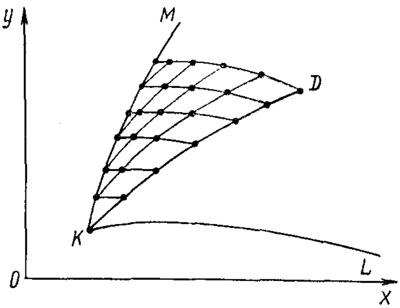


РИС. 11.12

Решение. Задача решается методом Массо. На характеристиках MN и MK выбирают ряд близких точек A_1, A_2, A_3 ... и B_1, B_2 ... С помощью элементарного решения общей задачи по точкам A_1 и B_1 находят точку C_1 и параметры в ней, по точкам B_2 и C_2 определяют точку C_2 и параметры в ней. Далее получают ряд точек C_1, C_2, ..., C_n, являющийся приближением к характеристике C_1, ..., C_n. Принимая ломаную линию C_1, ..., C_n за характеристику с известными на ней параметрами, строят новый ряд точек D_1, D_2, ..., D_n и т. д. При этом заполняют элементарными четырехугольниками «криволинейный» (с двумя ломаными сторонами) четырехугольник, две стороны которого — заданные характеристики MN и MK, две — дуги характеристик, исходящие из точек N и K.

Первая смешанная задача. Находят решения системы (11.10) или (11.12), если заданы параметры на кривой KL (рис. 11.12), являющейся характеристикой, и на дуге KM, которая ни в одной точке не имеет характеристического направления.

Решение. Последовательно решаются задачи Коши и задачи Гурса. Начинают с решения задачи Коши с начальными данными на дуге KM. При этом находят решение в «треугольнике» MKD, ограниченном дугой KM и дугами двух характеристик разных семейств, выходящих из точек K и M. Таким образом, приближенно определяется вторая характеристика KD, выходящая из точки K, которая вначале была неизвестна, а также на ней определяются все параметры. Решение задачи в области LKD сводится к решению задачи Гурса, так как известны параметры на характеристиках KL и KD, выходящих из одной точки K.

ГЛАВА 12. РАСЧЕТ КОНСТРУКЦИЙ С ПЛОСКИМ ДНОМ ДЛЯ УПРАВЛЕНИЯ БУРНЫМИ ПОТОКАМИ

§ 41. Расчет входного участка водосброса с радиальным сужением

В данной главе рассматриваются способы расчета входных и переходных участков водосбросных сооружений при малом и большом уклонах дна. Рассмотренные способы расчета конкретных конструкций с плоским дном позволят изучить метод управления потоком и применить его для проектирования сооружений различного назначения (поворот потока, сужение или расширение с поворотом и т. д.).

В гидротехническом строительстве нередко применяют открытые водосбросные сооружения, головную часть которых выполняют в виде водосливной плотины, за которой устраивают входной сужающийся участок быстротока (рис. 12.1 и 12.2). Для развития водосливного фронта водосливной порог обычно выполняют криволинейным (часто круговым) в плане. Задачу о форме входного сужающегося участка, обеспечивающего заданные параметры бурного потока на входе в быстроток, сформулируем следующим образом. Требуется рассчитать такие плановые формы боковых стенок входного сужающегося участка водосброса, которые при плоском горизонтальном дне водовода обеспечат наименьшие деформации свободной поверхности на водосбросе. При этом длина участка сужения должна быть минимальной.

Отметим, что, например, глубина потока на водосбросе гидроузла Эль-Матэ (см. рис. 12.1) более чем в 30 раз меньше его ширины в сечении за водосливным порогом. В самом узком сечении водосброса это соотношение уменьшается приблизительно до 10. При таких отношениях ширины потока к его глубине движение может считаться двухмерным [4].

При радиальном направлении боковых стенок сужения за круговой в плане плотиной образуется участок радиального потока (см. рис. 12.2), который на переходном участке следует перевести в прямолинейный на собственно быстротоке. Для расчета входного

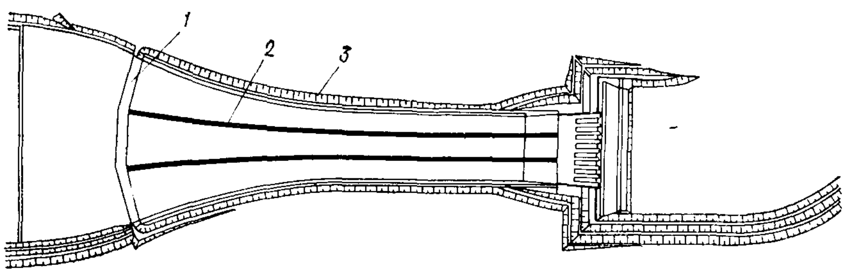


РИС. 12.1

1 — водосливная плотина; 2 — разделительные стенки; 3 — боковые стенки

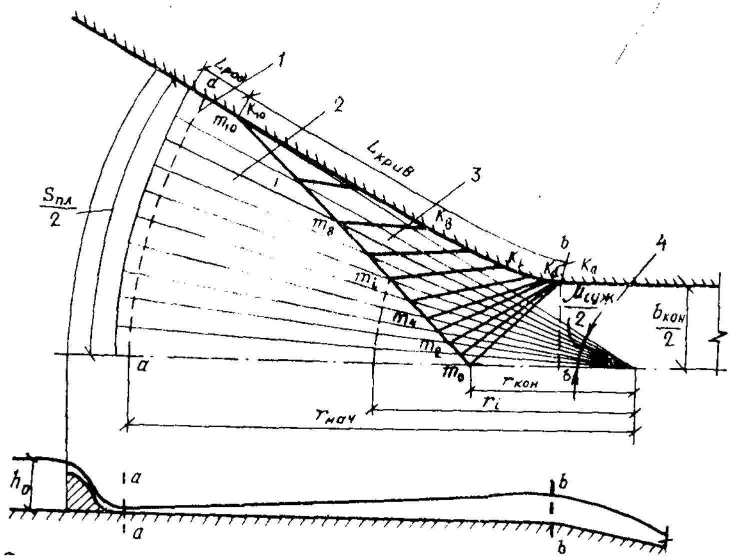


РИС. 12.2

1 — сжатое сечение за плотиной; 2 — радиальный поток; 3 — простая волна расширения (сопрягающее течение); 4 — призматический отводящий канал

сужающегося участка водосброса необходимо знать закономерности радиального потока, представляющего собой течение, в котором линиями тока являются прямые лучи, пересекающиеся в одном центре. Чтобы получить уравнение неравномерного движения радиального потока, воспользуемся системой уравнений двухмерного бурного потока в полярной системе координат с учетом уравнения неразрывности, полученной Б. Т. Емцевым [4] в виде:

$$\left.\begin{aligned} & u_r\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{u_\mu}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \mu}-\frac{u_\mu^2}{r}=g\sin\theta\cos\mu-g\cos\theta\frac{\partial(z_0+H)}{\partial r}-T_r;\\ & u_r\frac{\partial u_\mu}{\partial r}+\frac{u_\mu}{r}\frac{\partial u_\mu}{\partial \mu}+\frac{u_r u_\mu}{r}=-g\sin\theta\sin\mu-\\ & -\frac{g\cos\theta}{r}\frac{\partial(z_0+H)}{\partial \mu}-T_\mu;\\ & \frac{\partial}{\partial r}(ru_r H)+\frac{\partial}{\partial \mu}(ru_\mu H)=0, \end{aligned}\right\} \quad (12.1)$$

где μ и r — полярные координаты, плоскость которых выбрана так же, как плоскость xoy (рис. 12.3);

u_μ и u_r — компоненты скорости, осредненной по нормали к координатной плоскости;

θ — угол наклона координатной плоскости к горизонту;

g — ускорение силы тяжести;

z_0, H — соответственно отметка дна и глубина потока.

Компоненты сил трения T_r и T_μ определяются по формулам

$$\left.\begin{aligned} T_r &= \lambda \frac{u^2}{8H} \cos(u, r); \\ T_\mu &= \lambda \frac{u^2}{8H} \sin(u, r), \end{aligned}\right\} \tag{12.2}$$

где λ — коэффициент гидравлического трения.

Поскольку за круговой в плане плотиной образуется участок радиального течения, в первую очередь рассмотрим радиальный сток, т. е. поток, линиями тока которого являются прямые лучи, сходящиеся в одной точке (в начале или центре координат). В этом случае (см. рис. 12.3) $u_\mu = 0$.

Исключив из системы уравнений (12.1) соответствующие члены с u_μ, получим:

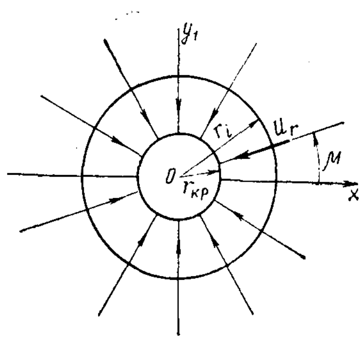
$$\left.\begin{aligned} & u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} = g \sin\theta \cos\mu - g\cos\theta \frac{\partial (z_0 + H)}{\partial r} - T_r; \\ & -g \sin\theta \sin\mu - \frac{g\cos\theta}{r} \frac{\partial (z_0 + H)}{\partial \mu} = 0; \\ & \frac{\partial}{\partial r}(r u_r H) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{12.3}$$

Для радиального потока с плоским дном ($\partial z_0/\partial r = 0$, $\partial z/\partial\mu = 0$), наклоненным под углом θ к горизонту, из зависимости (12.3) получим:

$$\left.\begin{aligned} & u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} = g \sin\theta \cos\mu - g\cos\theta\, \partial H/\partial r - T_r; \\ & -g \sin\theta \sin\mu - \frac{1}{r} g \cos\theta \frac{\partial H}{\partial \mu} = 0; \\ & \frac{\partial}{\partial r}(r u_r H) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{12.4}$$

Для радиального стока, центр которого совпадает с началом координат (см. рис. 12.3), сила трения определяется следующим

Рис. 12.3



образом:

$$\left.\begin{aligned} T_r &= \lambda \frac{u^2}{8H} \cos(u, r) = \lambda \frac{u^2}{8H} \cos\pi = -\lambda \frac{u^2}{8H}; \\ T_\mu &= 0 . \end{aligned}\right\} \qquad (12.5)$$

Имея в виду, что $\mathrm{Fr} = u^2/gH$ и $T_r = -\lambda\,(u^2/8H)$, первое уравнение системы (12.4) можно записать в виде

$$\frac{d}{dr}\left(H \frac{\mathrm{Fr} + 2\cos\theta}{2}\right) = \sin\theta\cos\mu + \frac{\lambda}{8}\mathrm{Fr}. \qquad (12.6)$$

Отсюда после преобразований получим уравнение неравномерного движения для радиального потока с плоским дном, наклоненным под углом к горизонту, в виде

$$\frac{\mathrm{Fr} - \cos\theta}{\mathrm{Fr}} \frac{d\,\mathrm{Fr}}{dr} = \frac{\mathrm{Fr} + 2\cos\theta}{r} + \frac{3}{8}\frac{\lambda}{k}\mathrm{Fr}^{4/3} r^{2/3} + \frac{3}{k}\sin\theta\cos\mu\,\mathrm{Fr}^{1/3} r^{2/3}, \qquad (12.7)$$

где $k = \sqrt[3]{\frac{q_0^2}{g}}$,

причем

$$q_0 = Q/\mu_{\text{суж}}, \qquad (12.8)$$

где Q — расход на быстротоке;

$\mu_{\text{суж}}$ — угол сужения радиального потока (в радианах).

Если дно горизонтальное, то $\theta = 0$ и уравнение движения примет вид

$$\frac{\mathrm{Fr} - 1}{\mathrm{Fr}} \frac{d\,\mathrm{Fr}}{dr} = \frac{\mathrm{Fr} + 2}{r} + \frac{3}{8}\frac{\lambda}{k}\mathrm{Fr}^{4/3} r^{2/3}. \qquad (12.9)$$

При неучете сопротивления ($\lambda = 0$) из уравнения (12.9) легко получить уравнение потенциального сходящегося или расходящегося радиального потока на плоском горизонтальном дне

$$\frac{\mathrm{Fr} - 1}{\mathrm{Fr}} \frac{d\,\mathrm{Fr}}{dr} = \frac{\mathrm{Fr} + 2}{r}. \qquad (12.10)$$

Это уравнение интегрируется в квадратурах, и его решение приведено Б. Т. Емцевым [4] в виде

$$\sqrt{\frac{(\mathrm{Fr} + 2)^3}{\mathrm{Fr}}} = 3\sqrt{3}\,\frac{r}{r_{\text{кр}}}, \qquad (12.11)$$

где $r_{\text{кр}}$ — значение r, при котором достигаются критические параметры $\mathrm{Fr} = \mathrm{Fr}_{\text{кр}} = 1$; $u_r = u_{\text{кр}}$; $H = H_{\text{кр}}$.

Величина $r_{\text{кр}}$ определяется по формуле

$$r_{\text{кр}} = \frac{q_0}{\sqrt{gH_{\text{кр}}^3}} = \frac{q_0}{\sqrt{g}\left(\frac{2}{3}h_0\right)^{3/2}}, \qquad (12.12)$$

где $h_0 = z + H + u^2/2g$, а при горизонтальном плоском дне $h_0 = H + u^2/2g$.

Опуская индекс r в третьем уравнении системы (12.3) запишем уравнение неразрывности радиального потока ($u_r = u$):

$$ruH = \text{const} = q_0. \tag{12.13}$$

Учитывая, что число Фруда $\mathrm{Fr} = u^2/gH$ и полный гидродинамический напор (при условии потенциальности движения) $h_0 = H + (u^2/2g) = \text{const}$ для глубины потока в любой точке его, из уравнения Бернулли имеем: $H = 2h_0/(\mathrm{Fr} + 2)$.

После преобразований из уравнения (12.11) получим:

$$\frac{r}{r_{\text{кр}}} = \frac{P(\mathrm{Fr})}{P(\mathrm{Fr}_{\text{кр}})}; \tag{12.14}$$

$$P(\mathrm{Fr}) = P(\mathrm{Fr}_{\text{кр}}) \frac{r}{r_{\text{кр}}}, \tag{12.15}$$

где

$$P(\mathrm{Fr}) = \sqrt{\frac{(\mathrm{Fr}+2)^3}{\mathrm{Fr}}}. \tag{12.16}$$

Уравнение неразрывности (12.13) с учетом зависимости (12.16) можно переписать в виде

$$q_0 = ruH = \frac{r}{P(\mathrm{Fr})} \sqrt{g(2h_0)^3} = \text{const}.$$

Поскольку $\mathrm{Fr} = \mathrm{Fr}_{\text{кр}} = 1$, а $P(\mathrm{Fr}_{\text{кр}}) = 3\sqrt{3}$, нетрудно заметить, что выражения (12.15) и (12.11) тождественны. В дальнейшем, при выполнении расчетов, в основном будем пользоваться выражением (12.15).

Структура бурного радиального потока и потока на призматическом участке быстротока достаточно проста, поэтому их движение можно описать методами одномерной теории. Однако расчет собственно переходного участка, переводящего радиальный поток в призматический, прямолинейный на быстротоке, требует применения, по крайней мере, двухмерной теории.

Поскольку движение потока на участке сужения условно принято потенциальным, то расчет входного участка быстротока заключается [4] в построении двух симметричных простых волн расширения, сопрягающих радиальный (за плотиной) и прямолинейный (на быстротоке) потоки. Простые волны, как известно, представляют собой частные виды течений, имеющих семейство прямолинейных характеристик (линий возмущения), вдоль которых все параметры потока сохраняют постоянные значения. Построение простых волн осуществляется графоаналитическим методом [4]. Как показывает опыт расчетов, проведенных по этому способу, конфигурация участка сужения зависит от соотношения чисел Фруда в начальном ($\mathrm{Fr}_{\text{нач}}$) и конечном ($\mathrm{Fr}_{\text{кон}}$) сечениях радиального бурного потока. За начальное принимается сжатое сечение за плотиной (сечение $a—a$, см. рис. 12.2), а число Фруда в этом сечении — $\mathrm{Fr}_{\text{нач}}$ определяется величиной расчетного напора и расхода. За конечное сечение радиального потока принимается сечение, где параметры радиального и прямолинейного потоков одинаковы (см. рис. 12.2).

Для каждой пары фиксированных значений $\mathrm{Fr}_{\text{нач}}$ и $\mathrm{Fr}_{\text{кон}}$ можно найти оптимальный угол сужения $\mu_{\text{суж}}^{\text{опт}}$, при котором длина участка сужения будет наименьшей. Это будет иметь место в случае, если простая волна начинается в начальном сечении переходного участка.

Учитывая, однако, что криволинейная характеристика (m_0, m_1, m_2, ..., m_n, см. рис. 12.2) мало отличается от прямой линии, можно найти приближенное значение угла сужения $\mu_{\text{суж}}$ по формуле

$$\mu_{\text{суж}}^{\text{опт}} = 2\arcsin \frac{1}{\mathrm{Fr}_{\text{кон}}} \left[\sqrt{\mathrm{Fr}_{\text{кон}} - \left[\frac{P(\mathrm{Fr}_{\text{кон}})}{P(\mathrm{Fr}_{\text{нач}})}\right]^2} - \frac{P(\mathrm{Fr}_{\text{кон}})}{P(\mathrm{Fr}_{\text{нач}})} \sqrt{\mathrm{Fr}_{\text{кон}} - 1} \right], \qquad (12.17)$$

где $P(\mathrm{Fr})$ — вычисляется по соотношению (12.16).

Форму входного сужающегося участка быстротока будем определять следующим способом. Допустим, что заданы расчетный расход на быстротоке Q, длина водосливной плотины (порога) $S_{\text{пл}}$, ширина призматического канала (прямоугольной формы) $b_{\text{кан}}$, уклон его i, коэффициент шероховатости n, высота водосливной стенки p, полный гидродинамический напор h_0 и условия сопряжения с нижним бьефом.

Предположим, что поток в начале призматического канала — равномерный, т. е. силы сопротивления компенсируются силой тяжести. По известным соотношениям одномерной теории определим числа Фруда в начальном ($\mathrm{Fr}_{\text{нач}}$) и конечном ($\mathrm{Fr}_{\text{кон}}$) сечениях переходного участка.

Найдя $\mathrm{Fr}_{\text{нач}}$ и $\mathrm{Fr}_{\text{кон}}$ из уравнения (12.17), определим приближенное значение угла сужения ($\mu_{\text{суж}}^{\text{опт}}$) радиального потока. Зная расход на быстротоке Q и найдя $\mu_{\text{суж}}^{\text{опт}}$ из выражения (12.8), получаем q_0 — расход на угол в 1 рад. Далее по формуле (12.12) вычисляем значение $r_{\text{кр}}$, затем из уравнения (12.11) находим поочередно координаты начального ($r_{\text{нач}}$) и конечного ($r_{\text{кон}}$) сечений. Найденные значения $r_{\text{нач}}$ и $r_{\text{кон}}$ связаны между собой соотношением

$$\frac{r_{\text{нач}}}{r_{\text{кон}}} = \frac{P(\mathrm{Fr}_{\text{нач}})}{P(\mathrm{Fr}_{\text{кон}})}, \qquad (12.18)$$

где $P(\mathrm{Fr})$ вычисляется по (12.16).

Выражение (12.18) следует из уравнения неразрывности (12.13) или соотношения (12.15). Значение $r_{\text{кон}}$ (а тем более $r_{\text{нач}}$) будет всегда больше $r_{\text{кр}}$, что очевидно из уравнения (12.14).

Для определения конфигурации боковой стенки необходимо построить простую волну расширения (см. рис. 12.2). Для этого разбиваем круговой сектор (с центром в точке o, лежащей на оси быстротока), центральный угол которого равен половине угла сужения радиального потока ($1/2\mu_{\text{суж}}^{\text{опт}}$), лучами om_1, om_2, ..., om_n на ряд малых секторов с равными углами $\Delta\mu = \frac{1}{2n}\mu_{\text{суж}}$ (для удобства построения). (Углы $\Delta\mu$ могут быть и различными, что принципиального значения не имеет.) Из точки m_0, координата которой $r_{m0} = r_{\text{кон}}$, проводим две прямолинейные характеристики под углом $\alpha_{m0} = \arcsin 1/\sqrt{\text{Fr}_{\text{кон}}}$ к оси симметрии канала. Характеристика первого семейства m_0k_0 отделит прямолинейный поток в призматическом канале от зоны простой волны. Характеристику второго семейства проводим до ее пересечения в точке m_1 с первым лучом om_1. Измерив значение r_{m1}, вычисляем $P\,(\text{Fr}_{m1})$ по соотношению (12.15), где $r = r_{m1}$.

Следует заметить, что для удобства расчетов целесообразно заранее построить график функции $P\,(\text{Fr}) = \sqrt{\frac{(\text{Fr}+2)^3}{\text{Fr}}}$, который представлен на рис. 12.4.

Найдя из выражения (12.15) $P\,(\text{Fr}_{m1})$, по графику $P\,(\text{Fr})$ (см. рис. 12.4) определяем Fr_{m1} — число Фруда в точке m_1. Далее из точки m_1 проводим прямолинейную характеристику первого семейства под углом $\alpha_{m1} = \arcsin 1/\sqrt{\text{Fr}_{m1}}$ к лучу om_1 или под углом $\alpha_{m1} + \Delta\mu_1$ к оси потока, а также характеристику второго семейства под углом α_{m1} до пересечения в точке m_2 с вторым лучом om_2 (или под углом $\alpha_{m1} - \Delta\mu_1$ к оси потока).

Продолжая подобные построения, получим семейство прямолинейных характеристик m_ik_i, выходящих из точек m_i под углами $\alpha_{m1} = \arcsin 1/\sqrt{\text{Fr}_{mi}}$ к соответствующим лучам om_i и образующих простую волну. Ряд точек m_0, m_1, ..., m_n определит собой характеристику, отделяющую радиальный поток от простой волны.

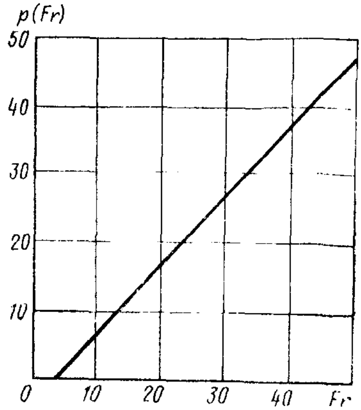


Рис. 12.4

Для построения граничной линии тока, определяющей форму боковой стенки в плане, учтем, что вдоль каждой из прямых характеристик в простой волне параметры потока приняты постоянными. Будем считать, что в зоне между соседними прямыми характеристиками m_ik_i и $m_{i+1}\,k_{i+1}$ вектор скорости образует с осью симметрии потока угол, равный среднему арифметическому между его значениями в точках m_i, m_{i+1}. Проведем из точки k_0, определяющей ширину канала, отрезок под углом $\frac{1}{2}\Delta\mu_1$ к оси до пересечения в точке k_1 с характеристикой m_1k_1. Из точки k_1 проведем отрезок под углом $\Delta\mu_1 + \frac{1}{2}\Delta\mu_2$ до пересечения с характеристикой m_2k_2 в точке k_2. Продолжая построения, получим всю стенку вплоть до точки k_n (m_n). При этом следует иметь в виду, что в силу приближенности формулы (12.17) и расчета в целом возможно некоторое несовпадение точки k_n с сечением $r = r_{\text{нач}}$. Если такое совпадение достигнуто, то длина участка сужения получается наименьшей. Если же при первом построении совпадение не достигнуто, то путем вариантных построений (расчетов) можно получить требуемую точность расчета.

Таким образом, на участке сужения имеют место три вида течения: радиальный поток, ограниченный водосливной плотиной и криволинейной (ломаной) характеристикой k_0, m_1, ..., m_n; простая волна расширения m_n, ..., m_1m_0, k_0k_1, ..., k_n, ограниченная с верховой стороны характеристикой m_0m_1, ..., m_n, а с низовой — характеристикой m_0k_0 и переводящая верховой радиальный поток в низовой прямолинейный на собственно быстротоке; и, наконец, ниже прямолинейной характеристики m_0k_0 — прямолинейный поток в призматической части быстротока.

Особый вид течения — простая волна может существовать в рассматриваемом случае лишь при условии равномерности низового прямолинейного потока. Для лучшего соответствия принятой расчетной схемы реальному потоку уклон плоского дна управляющего участка должен быть близок к среднему уклону трения на участке сужения, а призматический участок должен иметь уклон, равный уклону трения при равномерном движении на быстротоке. Поскольку указанные уклоны трения (на входном участке и призматическом канале) в общем случае не одинаковы, плоское дно быстротока должно иметь излом по линии, совпадающей с прямолинейной характеристикой.

Пример расчета. Допустим, что при входе в призматический канал быстротока (т. е. в конечном сечении входного участка) поток должен иметь в конечном сечении $\text{Fr}_{\text{кон}} = 2{,}5$. Расчетный расход на быстротоке Q, длина водосливного порога $S_{\text{пл}}$ и другие начальные условия таковы, что в начальном сечении входного участка водосброса $\text{Fr}_{\text{нач}} = 11$. Ширина канала быстротока $\frac{1}{2}b_{\text{кан}} = 1$ м.

Прежде всего, по соотношению (12.17) найдем значение угла сужения, предварительно вычислив по зависимости (12.16) значения функций $\text{P}(\text{Fr}_{\text{нач}}) = 14{,}12$, а также $\text{P}(\text{Fr}_{\text{кон}}) = 6{,}04$:

$$\mu_{\text{суж}} = 2\arcsin\frac{1}{2{,}5}\left[\sqrt{2{,}5-\left(\frac{6{,}04}{14{,}12}\right)^2} - \frac{6{,}04}{14{,}12}\sqrt{2{,}5-1}\right] =$$

$$= 0{,}786 \text{ рад, т.е. } \frac{1}{2}\mu_{\text{суж}} = 0{,}393 \text{ рад, или } \frac{1}{2}\mu_{\text{суж}} = 23^\circ\,10'\ .$$

ТАБЛИЦА 12.1

Индексы точек	$\bar{r}_i$	$P(\mathrm{Fr}_i)$	Fr_i	$\sin\alpha_i$	α_i	$\bar{r}_{i+1}$
m_0	2,54	6,04	2,5	0,631	39°05′	2,7
m_1	2,7	6,4	3,04	0,575	35°10′	2,815
m_2	2,815	6,66	3,3	0,552	33°30′	2,99
m_3	2,99	7,09	3,69	0,521	31°30′	3,18
m_4	3,18	7,52	4,19	0,491	29°30′	3,4
m_5	3,4	8,05	4,75	0,459	27°20′	3,65
m_6	3,65	8,65	5,35	0,433	25°40′	3,95
m_7	3,95	9,35	6,1	0,406	25°03′	4,28
m_8	4,28	10,17	6,97	0,379	22°20′	4,7
m_9	4,7	11,12	7,94	0,355	20°50′	5,2
m_{10}	5,2	12,3	9,13	0,331	19°20′	5,86
m_{11}	5,86	13,9	10,78			

Координату точки m_0 (r_{m0}), где параметры радиального и прямолинейного (на быстротоке) потоков одинаковы, можно найти следующим образом.

Уравнение неразрывности (12.13) радиального потока и потока в призматическом канале быстротока для конечного сечения сужающегося участка можно записать в виде

$$q_0 = r_{\text{кон}} U_{\text{кон}} H_{\text{кон}} = \frac{Q}{\mu_{\text{суж}}} = \frac{b_{\text{кан}} U_{\text{кан}} H_{\text{кан}}}{\mu_{\text{суж}}}. \qquad (12.19)$$

Поскольку в точке m_0 параметры потока таковы, что $U_{\text{кон}} = U_{\text{кан}}$; $H_{\text{кон}} = H_{\text{кан}}$, то $r_{\text{кон}} = (b_{\text{кан}}/\mu_{\text{суж}})$.

В дальнейшем все линейные величины будем вычислять в безразмерном виде, относя их абсолютные значения к ширине быстротока $\frac{1}{2} b_{\text{кан}} = 1$ и, с учетом этого получим:

$$\bar{r}_{\text{кон}} = (r_{\text{кон}}/b_{\text{кан}}) = (2/\mu_{\text{суж}}) = (1/0,393) = 2,54 = \bar{r}_{m0}.$$

Затем из соотношения (12.18) определим координату начального сечения

$$\bar{r}_{\text{нач}} = \bar{r}_{\text{кон}} \frac{P(\mathrm{Fr}_{\text{нач}})}{P(\mathrm{Fr}_{\text{кон}})} = 2,54 \frac{14,12}{6,04} = 5,96.$$

Закон изменения чисел Фруда радиального потока определим из соотношения (12.15):

$$P(\mathrm{Fr}_i) = \frac{P(\mathrm{Fr}_{\text{кон}})}{\bar{r}_{\text{кон}}} \bar{r}_i = \frac{P(\mathrm{Fr}_{\text{нач}})}{\bar{r}_{\text{нач}}} \bar{r}_i = \frac{6,04}{2,54} \bar{r}_i = \frac{14,12}{5,96} \bar{r}_i = 2,37\bar{r}_i;$$

$$P(\mathrm{Fr}_i) = 2,37\bar{r}_i,$$

где $\bar{r}_i$ — координата m_i-й точки радиального потока, отнесенная к 0,5 $b_{\text{кан}}$

Рассматривая лишь половину потока (между осью и боковой стенкой), построение входного участка осуществим по вышеизложенной схеме.

Для этого половину радиального потока с центральным углом $\frac{1}{2}\mu_{суж} = 23°10'$ лучами $om_1, \ldots, om_2$ разделим на малые сектора (например, на 11) с углами $\Delta\mu_{суж} = 1°06'$. Отметим на оси точку с координатой $\bar{r}_{mi} = 2{,}54$. Из этой точки проведем две прямолинейные характеристики под углом $\alpha_{кон} = \alpha_{m0} = \arcsin \frac{1}{\sqrt{2{,}5}} = 39°05'$. Характеристика m_0k_0 отделит прямолинейный поток на быстротоке от зоны простой волны. Характеристику второго семейства m_0m_1 проведем из точки m_0 до пересечения с лучом om_1. Измерим $\bar{r}_{m1}$ и, подставив значение $\bar{r}_{m1}$ в выражение (12.15, *а*), найдем $P\ (\mathrm{Fr}_{m1})$, а затем по графику рис. 12.4. [или подбором из соотношения (12.16)] определим значение Fr_{m1}. Из точки m_1 под углами $\alpha_{m1} = \arcsin 1/\sqrt{\mathrm{Fr}_{m1}}$ к лучу om_1 проведем характеристики m_1k_1 и m_1m_2 и т. д. Построение произведем до точки пересечения криволинейной характеристики $m_0m_1, \ldots, m_n\ (m_{11})$ с последним лучом $om_n\ (om_{11})$. Построение граничной линии тока, определяющей конфигурацию боковой стенки, можно проводить по вышеизложенной методике, идя «сверху вниз», начиная с точки $m_{11}\ (k_{11})$, или «снизу вверх», начиная с точки k_0.

Данные построений и вычислений представлены в табл. 12.1.

Вычисленное по зависимости (12.18) значение $\bar{r}_{нач} = 5{,}96$ и заданное значение $\mathrm{Fr}_{нач} = 11$ незначительно отличаются от полученных при графоаналитическом расчете (см. табл. 12.1). Ошибка в нахождении координаты начального сечения равна:

$$\frac{\Delta r}{\bar{r}_{нач}} = \frac{5{,}96 - 5{,}86}{5{,}86} = 0{,}017.$$

В случае необходимости расчет можно уточнить, проведя повторное построение по этой же схеме.

§ 42. Учет сил сопротивления при расчете входного участка водосброса

Расчет входного участка водосброса в предположении потенциальности движения потока может быть применен и для водоводов, уклон дна которых близок к среднему уклону трения на рассчитываемых переходных участках. Для уточнения расчета (что особенно важно для ответственных сооружений и водоводов, длина переходных участков которых соизмерима с шириной) следует учитывать силы сопротивления движению потока.

При расчете входного участка быстротока с радиальным сужением необходимо знать параметры реального (с учетом сил трения) радиального потока в любой его точке (сечении). Для определения их воспользуемся уравнением неравномерного радиального потока (12.9).

Для нахождения решения уравнения неравномерного движения радиального потока с учетом сил сопротивления упростим уравнение (12.9).

Для этого введем вспомогательную величину

$$L = k^{3/5} = \sqrt[5]{q_0^2/g} \qquad (12.20)$$

и обозначим

$$r/L = \eta. \tag{12.21}$$

Учтя, что $r = \eta L$; $\mathrm{d}r = L\mathrm{d}\eta$; $\frac{\mathrm{dFr}}{\mathrm{d}r} = \frac{1}{L}\frac{\mathrm{dFr}}{\mathrm{d}\eta}$, представим обыкновенное нелинейное уравнение (12.9) в безразмерном виде

$$\frac{\mathrm{Fr}-1}{\mathrm{Fr}}\,\frac{\mathrm{dFr}}{\mathrm{d}\eta} = \frac{\mathrm{Fr}+2}{\eta} + \frac{3}{2}\lambda\,\mathrm{Fr}^{4/3}\,\eta^{2/3}. \tag{12.22}$$

Решение уравнения (12.9) дает возможность найти закон изменения числа Фруда на участке радиального течения. Уравнение неравномерного движения радиального потока в безразмерном виде можно решить известными численными методами и методом малого параметра, приняв за таковой коэффициент гидравлического трения λ. Графически решение, полученное конечно-разностным методом, представлено на рис. 12.5, где приведена кривая $\mathrm{Fr} = \mathrm{Fr}(\eta)$ при $\lambda = \mathrm{const} = 0$—$0{,}03$ и граничных условиях $\mathrm{Fr} = 2$, $\eta = 2$. Коэффициент шероховатости n будем здесь считать постоянным, что можно принять для одного водовода или, по крайней мере, для входного участка быстротока.

Определив значение коэффициента трения и значение числа Фруда из соотношения (12.22), можно вычислить величину поправки $\lambda\mathrm{Fr}_1(\eta)$ к значению $\mathrm{Fr}_0 \times \times (\eta)$, найденному из условия потенциальности движения в виде уравнения (12.10).

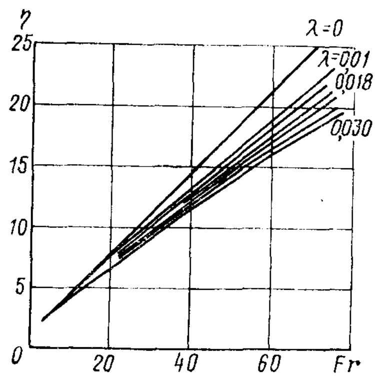


РИС. 12.5

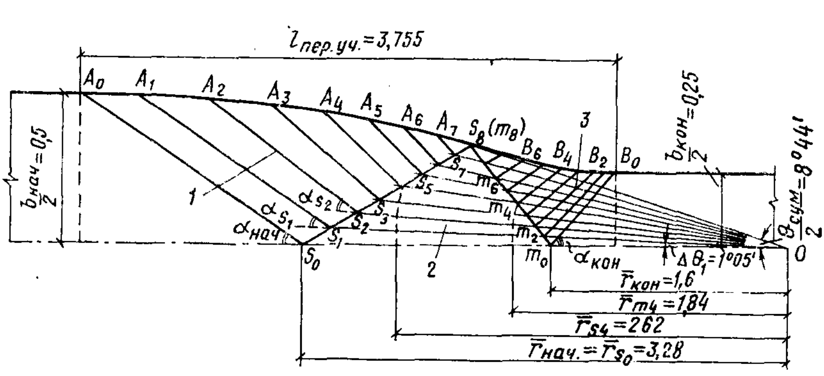


РИС. 12.6

1 — простая волна сжатия; 2 — радиальное течение; 3 — простая волна расширения

В качестве приближенного допущения примем, что для реального потока можно применить ту же схему расчета, что и для потенциального. Сопряжение радиального потока с прямолинейным и для реальной жидкости произведем через простые волны. Однако в этом случае параметры радиального потока (в каждой его точке или сечении) следует определять по зависимости (12.22), учитывающей силы трения. Таким образом, влияние сил трения будет приближенно учтено и в пределах простой волны.

Аналогично изложенному в предыдущем параграфе выберем (или определим) из исходных данных $\mathrm{Fr}_{\text{нач}}$ и $\mathrm{Fr}_{\text{кон}}$. Считая поток в призматическом канале равномерным, координату $r_{\text{кон}}$ точки m_0 (рис.12.6), где параметры радиального и прямолинейного потоков одинаковы, определим из уравнения (12.10) при $\mathrm{Fr} = \mathrm{Fr}_{\text{кон}}$. Найдем приближенное значение угла сужения $\mu_{\text{суж}}$ по формуле (12.16).

Характеристики переходного течения и граничной линии тока строятся по соотношению (12.22) тем же способом, как и при вычислении числа Фруда в реальном потоке.

§ 43. Расчет переходных участков водосбросных сооружений с малым уклоном дна

Способ построения простых волн дает возможность рассчитать переходные участки, сопрягающие участки водовода разной ширины. Допустим, что поток в призматическом верхнем канале шириной $b_{\text{нач}}$ с заданными параметрами (скоростью $U_{\text{нач}}$ и глубиной $H_{\text{нач}}$) следует перевести в призматический низовой канал шириной $b_{\text{кон}}$. Течение симметрично относительно оси канала, поэтому все построение рассматривается, как и ранее, для одной половины потока. Предположим, что поток в верховом и низовом каналах, близких к переходному участку сужения, равномерный. В этом случае построение течения на переходном (сужающемся) участке осуществим следующим образом. Построив простую волну сжатия $A_0S_0S_n$ (см. рис. 12.6), переведем прямолинейный поток из верхового канала в сужающийся радиальный с центром в точке O. Полученный радиальный поток переведем в низовой призматический канал через простую волну расширения $m_0m_nB_0$. На рис. 12.6 точки m_n (m_8) и S_n (S_8) совпадают. Таким образом, на переходном участке кроме двух прямолинейных равномерных потоков будут иметь место три вида течения: простая волна сжатия $A_0S_0S_n$, радиальный сужающийся поток $S_0S_nm_nm_0$ и простая волна расширения $m_0m_nB_0$.

Для построения этих течений необходимо знать параметры потока в любой точке переходного участка. Связь между параметрами потока в верховой и низовой частях канала получим из уравнения неразрывности:

$$b_{\text{нач}} U_{\text{нач}} H_{\text{нач}} = b_{\text{кон}} U_{\text{кон}} H_{\text{кон}}. \tag{12.23}$$

Учтем, что $\mathrm{Fr} = u^2/gH$ и $H = 2h_0/(\mathrm{Fr} + 2)$ (что следует из уравнения Бернулли), где $h_0 = H + u^2/2g$ — полный гидродинамический напор. После преобразований из уравнения (12.23) получим следующую зависимость:

$$\beta_{суж} = \frac{b_{нач}}{b_{кон}} = \frac{P(Fr_{нач})}{P(Fr_{кон})}, \qquad (12.24)$$

где $\beta_{суж}$ — степень сужения потока;

$P(Fr)$ — как и в предыдущем, вычисляется по формуле (12.15);

$Fr_{нач}$ и $Fr_{кон}$ — числа Фруда соответственно в начальном и конечном сечениях переходного участка.

Для проведения дальнейших рассуждений запишем уравнение неразрывности радиального потока (12.12) с учетом соотношения (12.6) в виде:

$$ruH = q_0 = Q/\mu_{суж}, \qquad (12.25)$$

где $\mu_{суж}$ — угол сужения, рад;

q_0 — приведенный расход радиального потока.

Для определения числа Фруда в любой точке радиального потока будем пользоваться уравнением (12.14). Выберем начальное сечение радиального потока в точке S_0 (см. рис. 12.6), где параметры верхового прямолинейного и радиального потоков одинаковы. Конечное сечение радиального потока выберем в точке m_0, где равны параметры радиального и низового прямолинейного потоков. Обозначив r для этих сечений соответственно $r_{нач}$ и $r_{кон}$, из зависимости (12.25) получим аналогично уравнению (12.16):

$$\frac{r_{нач}}{r_{кон}} = \frac{P(Fr_{нач})}{P(Fr_{кон})} = \beta_{суж}. \qquad (12.26)$$

Наименьшую длину переходного участка получим в том случае, если точки S_n и m_n простых волн сжатия и расширения совпадут. Тогда, учитывая, что криволинейные характеристики S_0S_n и m_0m_n мало отличаются от прямых (см. рис. 12.6), приближенное значение оптимального угла сужения радиального потока определим из выражения

$$\mu_{суж} = 2\,\mathrm{arc\,ctg}\left\{\sqrt{Fr_{кон}-1} + \frac{P(Fr_{кон})}{P(Fr_{нач}) - P(Fr_{кон})} \times \right.$$
$$\left. \times \left[\sqrt{Fr_{кон}-1} + \sqrt{Fr_{нач}-1}\right]\right\}. \qquad (12.27)$$

Относительную длину переходного участка $\bar{l}_{пер.уч} = L_{пер.уч}/b_{кон}$ в этом случае можно определить из уравнения

$$\bar{l}_{пер.\,уч} = \frac{1}{2}\sqrt{Fr_{нач}-1} + \frac{1}{2}\,\frac{P(Fr_{кон})}{P(Fr_{нач})}\sqrt{Fr_{кон}-1} +$$
$$+ \frac{1}{\mu_{суж}}\,\frac{P(Fr_{нач}) - P(Fr_{кон})}{P(Fr_{нач})}. \qquad (12.28)$$

Приведенные здесь выражения (12.27) и (12.28) нетрудно получить из следующих соображений. Например, наименьшую длину переходного участка (при совпадении точек S_n и m_n) найдем следующим образом:

$$L_{пер.уч} = \frac{1}{2}\,b_{нач}\mathrm{ctg}\,\alpha_{нач} + (r_{нач} - r_{кон}) + \frac{1}{2}\,b_{кон}\mathrm{ctg}\,\alpha_{кон}. \qquad (12.29)$$

Представим данное выражение в безразмерном виде

$$\bar{l}_{\text{пер.уч}}=\frac{L_{\text{пер.уч}}}{b_{\text{нач}}}=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\alpha_{\text{нач}}+\frac{1}{2}\frac{b_{\text{кон}}}{b_{\text{нач}}}\operatorname{ctg}\alpha_{\text{кон}}+\frac{r_{\text{нач}}-r_{\text{кон}}}{b_{\text{нач}}}.$$

Последнее слагаемое соотношения (12.29) найдем, используя теорему синусов для «треугольника» $S_0S_n\,(m_n)m_0$ и уравнение неразрывности (12.26), в виде

$$\frac{r_{\text{нач}}-r_{\text{кон}}}{b_{\text{нач}}}=\frac{1}{\mu_{\text{суж}}}\frac{r_{\text{нач}}-r_{\text{кон}}}{r_{\text{нач}}}=\frac{1}{\mu_{\text{суж}}}\frac{P(\mathrm{Fr}_{\text{нач}})-P(\mathrm{Fr}_{\text{кон}})}{P(\mathrm{Fr}_{\text{нач}})}.$$

Учитывая далее, что

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}=\sqrt{\mathrm{Fr}-1},$$

$$\sin\alpha=1/\sqrt{\mathrm{Fr}}.$$

Подставляя полученные соотношения в выражение (12.28), получим зависимость (12.29).

Зависимости (12.25), (12.28), (12.29) показаны на графике (рис. 12.7), в четвертях которого (для постоянных значений $\mathrm{Fr}_{\text{кон}}=2{,}4,\ 6,\ 8,\ 12$) соответственно:

в I — $\bar{l}_{\text{пер. уч}}=\bar{l}_{\text{пер. уч}}(\beta_{\text{суж}})$; во II — $\beta_{\text{суж}}=\beta_{\text{суж}}(\mathrm{Fr}_{\text{нач}})$;
в III — $\mu_{\text{суж}}=\mu_{\text{суж}}(\mathrm{Fr}_{\text{нач}})$; в IV — $\bar{l}_{\text{пер. уч}}=\bar{l}_{\text{пер. уч}}(\bar{\mu}_{\text{суж}})$.

Из приведенных зависимостей видно, что при заданной кинетичности ($\mathrm{Fr}_{\text{нач}}$) потока в верховом прямолинейном канале относительная длина переходного участка $\bar{l}_{\text{пер. уч}}$ уменьшается при уменьшении $\mathrm{Fr}_{\text{кон}}$, а угол сужения $\mu_{\text{суж}}$ увеличивается. Чем больше степень сужения $\beta_{\text{суж}}$ при фиксированном $\mathrm{Fr}_{\text{нач}}$, тем меньше кинетичность потока в низовом прямолинейном канале.

Практический способ расчета. Произведем построение переходного участка: имея заданными $b_{\text{нач}}$, $U_{\text{нач}}$, $H_{\text{нач}}$ и $b_{\text{кон}}$, вычисляем $\mathrm{Fr}_{\text{нач}}=U_{\text{нач}}^2/gH_{\text{нач}}$, определяем $\mu_{\text{суж}}$ и $P\,(\mathrm{Fr}_{\text{кон}})$ из уравнения (12.15). Из соотношения (12.15) или по графику (рис. 12.4) найдем $\mathrm{Fr}_{\text{кон}}$. Угол сужения $\mu_{\text{суж}}$ определим из зависимости (12.28) или по рис. 12.7. Координату $\bar{r}_{\text{нач}}=r_{\text{нач}}/b_{\text{нач}}$, точки S_0, где параметры радиального и прямолинейного начального потоков равны, приближенно определим из соотношения

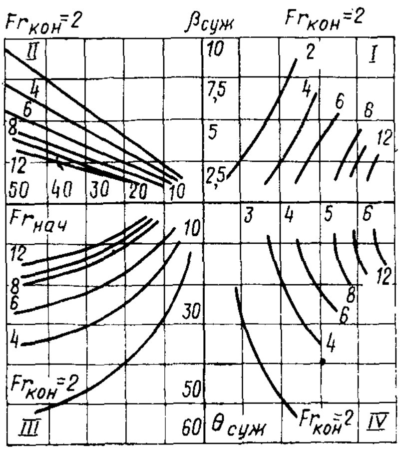


Рис. 12.7

$$\bar{r}_{\text{нач}}=(1/\mu_{\text{суж}}),\tag{12.30}$$

которое следует из уравнений (12.24) и (12.26).

Построение простых волн $A_0S_0S_n$ (S_8) и m_n (m_8)m_0B_0 (см. рис. 12.6) производится способом, аналогичным изложенному в § 41 настоящей главы. Эти волны могут быть построены независимо друг от друга; построение начинается от точек S_0, m_0.

Граничную линию тока, которая дает плановые очертания боковой стенки, построим следующим образом. Будем считать, что в зоне между соседними характеристиками S_iA_i, $S_{i+1}A_{i+1}$, а также m_iB_i и $m_{i+1}B_{i+1}$ векторы скорости образуют с осью симметрии потока угол, равный среднему арифметическому между его значениями в точках S_i, S_{i+1} и m_{i+1}.

Из точек A_0 и B_0, определяющих ширину потока в верховой и низовой частях канала, проводим отрезки прямых: из точки A_0 под углом $(-\frac{1}{2}\Delta\mu_1)$ к оси потока до пересечения в точке A_1 с характеристикой S_1A_1, из точки B_0 под углом $(+\frac{1}{2}\Delta\mu_1)$ к оси потока до пересечения в точке B_1 с характеристикой m_1B_1. Из точек A_1 и B_1 проведем отрезки соответственно: первый под углом $\left(-\Delta\mu_1+\frac{\Delta\mu_2}{2}\right)$ к оси потока до пересечения в точке A_2 характеристики S_2A_2 и второй — под углом $\left(\Delta\mu_1+\frac{\Delta\mu_2}{2}\right)$ до пересечения в точке B_2 характеристики m_2B_2. Продолжая подобные построения, получим очертания боковой стенки, сопрягая верховую и низовую ее части в точке S_n (m_n). Пример подобного расчета, выполненного для $Fr_{нач} = 8{,}15$, $Fr_{кон} = 2$, показан на рис. 12.6.

Пример расчета. Допустим, что в верховом канале с шириной $b_{нач} = 1$ имеет место поток, показатель кинетичности которого $Fr_{нач} = 12$. Следует поток сузить таким образом, чтобы кинетичность потока в низовом канале на выходе с участка сужения не превышала значения $Fr_{кон} = 4$.

Прежде всего, определим по зависимости (12.26), при какой степени сужения возможно выполнить поставленное условие, предварительно найдя по формуле (12.15) или из рис. 12.4 значения P ($Fr_{нач}$) и P ($Fr_{кон}$).

$$\beta_{суж} = \frac{P\,(Fr_{нач})}{P\,(Fr_{кон})} = \frac{15{,}12}{7{,}35} = 2{,}06.$$

Следовательно, низовой канал должен иметь ширину $b_{кон} = \frac{b_{нач}}{\beta_{суж}} = 0{,}486 b_{нач} = 0{,}486 \cdot 1$.

Найдем оптимальный (при заданных $Fr_{нач}$ и $Fr_{кон}$) угол сужения радиального потока $\mu_{суж}$ по формуле (12.28):

$$\mu_{суж} = 2\,\mathrm{arcctg}\left\{\sqrt{4-1} + \frac{7{,}35}{15{,}12-7{,}35}\left[\sqrt{4-1}+\sqrt{12-1}\right]\right\} =$$

$$= 17°\,28' \quad \text{или} \quad \mu_{суж} = 0{,}305 \text{ рад}.$$

При дальнейших расчетах линейные величины будем искать в безразмерном виде, относя их абсолютные значения к ширине $b_{нач} = 1$.

Найдем длину переходного участка $\bar{l}_{пер.\,уч}$ по соотношению (12.28)

$$\bar{l}_{пер.уч} = \frac{1}{2}\sqrt{12-1} + \frac{1}{2}\,\frac{7{,}35}{15{,}12}\sqrt{4-1} + \frac{1}{0{,}305}\cdot\frac{15{,}12-7{,}35}{15{,}12} = 3{,}755.$$

Индексы точек	$\bar{r}_i$	$P(\mathrm{Fr}_i) = 4{,}62\,\bar{r}_i$	Fr_i	$\sin\alpha_i = 1/\sqrt{\mathrm{Fr}_i}$	α_i	$\bar{r}_{i+1}$
S_0	3,28	15,12	12	0,289	16°50′	3,11
S_1	3,11	14,3	11,1	0,3	17°30′	2,95
S_2	2,95	13,5	10,3	0,311	18°08′	2,77
S_3	2,77	12,75	9,6	0,323	18°50′	2,62
S_4	2,62	12,05	8,7	0,339	19°50′	2,49
S_5	2,49	11,45	8,3	0,347	20°20′	2,39
S_6	2,39	11	7,8	0,358	21°	2,28
S_7	2,28	10,5	7,3	0,37	21°45′	2,18
$S_8(m_8)$	2,18	10,03	6,75	0,385	22°40′	2,08
m_7	2,08	9,55	6,3	0,399	23°30′	1,99
m_6	1,99	9,15	5,95	0,41	24°20′	1,915
m_5	1,915	8,8	5,6	0,423	25°	1,84
m_4	1,84	8,46	5,1	0,443	26°20′	1,775
m_3	1,775	8,16	4,8	0,457	27°10′	1,72
m_2	1,72	7,92	4,6	0,466	27°50′	1,655
m_1	1,655	7,62	4,2	0,488	29°10′	1,6
m_0	1,6	7,35	4	0,5	—	—

Далее определяем координату точки S_0 $(\bar{r}_{s_0})$ по зависимости (12.30)

$$\bar{r}_{s_0} = \bar{r}_{\text{нач}} = \frac{1}{\mu_{\text{суж}}} = \frac{1}{0{,}305} = 3{,}28.$$

Зная P ($\mathrm{Fr}_{\text{нач}}$) и P ($\mathrm{Fr}_{\text{кон}}$), определим по выражению (12.14) закон изменения чисел Фруда в радиальном потоке:

$$P(\mathrm{Fr}_i) = \frac{P(\mathrm{Fr}_{\text{нач}})}{\bar{\eta}_{\text{нач}}}\,\bar{r}_i = \frac{15{,}12}{3{,}28}\,\bar{r}_i = 4{,}62\bar{r}_i, \tag{а}$$

где $\bar{r}_i$ — координата i-той точки радиального потока, отнесенная к $b_{\text{нач}}$ (см. рис. 12.6).

Построение, как и ранее, рассматривается для половины потока, между осью и боковой стенкой, тогда половина центрального угла $\mu_{\text{суж}}$ будет $1/2\mu_{\text{суж}} = 8°44'$.

Разбиваем далее половину радиального потока с углом 8°44′, например, на восемь малых секторов с углами $\Delta\mu_{\text{суж}} = 1°5{,}5'$. Находим на оси точку S_0, координата которой $\bar{r}_s = \bar{r}_{\text{нач}} = 3{,}28$. Далее из точки S_0 проводим две прямолинейные характеристики под углом $\alpha_{s0} = \alpha_{\text{нач}} = \arcsin 1/\sqrt{12} = 16°50'$. Характеристика S_0A_0 определит при пересечении с боковой гранью (стенкой) верхового канала точку A_0, с которой начинается переходный участок. Характеристику первого семейства проводим до пересечения ее с лучом om_1S_1 в точке S_1. Измеряем r_{s1} и, подставив в (а), находим P (Fr_{s1}) и затем Fr_{s1}. Зная Fr_{s1}, определяем угол α_{s1} и т. д. Данные построений и вычислений представлены в табл. 12.2.

Экспериментальная проверка способа расчета проводилась на модели, рассчитанной для: $Fr_{кон} = 2$; $Fr_{нач} = 8{,}15$; $\beta_{суж} = 2$, при значениях угла сужения $\mu_{суж} = 24°10'$ и относительной длине участка сужения $\bar{l}_{пер.уч} = 2{,}775$. Призматический канал прямоугольной формы имел ширину в начальном сечении $b_{нач} = 28$ см, в конечном — $b_{кон} = 14$ см. Сужение исследовалось на переходном участке длиной $L_{пер.уч} = 77{,}65$ см и нижерасположенном призматическом — длиной 150 см. Чтобы рассчитать расход, произвели регулирование потока таким образом, чтобы в начальном сечении переходного участка уклон соответствовал равномерному режиму. Результаты опытов и сравнение их с теоретическим расчетом приведены на рис. 12.8.

При $Fr_{нач} = 8{,}4 \approx Fr_{нач.расч} = 8{,}15$ наибольшие отклонения опытных глубин от теоретических на всей длине переходного участка находятся в пределах $7 \div 13\%$. Неравномерность распределения опытных глубин по отношению к средней глубине в поперечном сечении на всей длине сужающегося участка не выше 10%, но несколько увеличивается (до 13—17%) в начале низового призматического канала.

Поведение потока изучалось и при нерасчетных режимах. Числа Фруда в начальном сечении переходного участка $Fr_{нач}$ при нерасчетных режимах менялись в диапазоне $11 \div 42$. При увеличении числа Фруда в начальном сечении против расчета неравномерности распределения глубин в поперечных сечениях увеличивается.

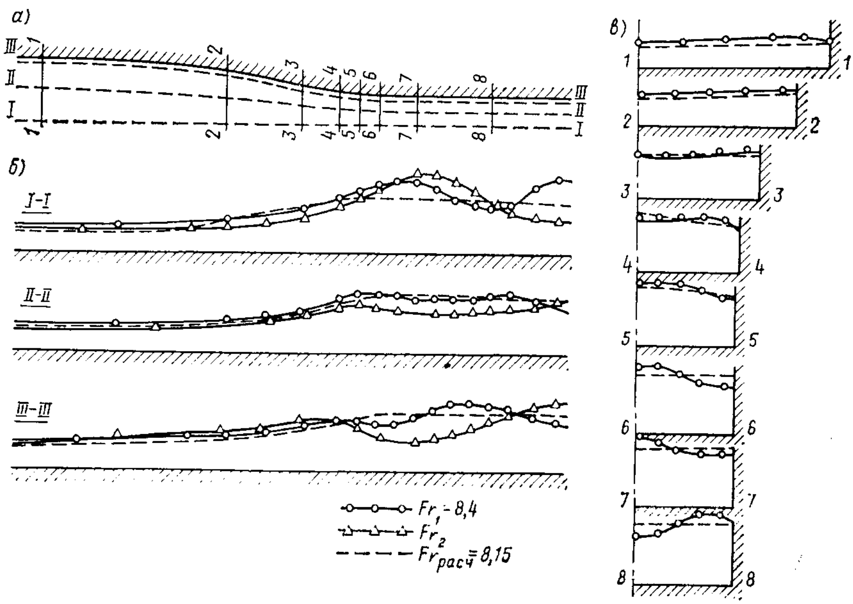


РИС. 12.8

а — план сужения; б — кривые свободной поверхности в продольных сечениях I—I, II—II, III—III; в — поток в поперечных сечениях 1—1, 2—2, ..., 8—8

Например, при значении числа Фруда $\mathrm{Fr}_{\text{нач}} = 37$ наибольшая неравномерность распределения глубин в поперечных сечениях имела место на расстоянии $0{,}75 b_{\text{нач}}$ от входа в призматический канал и достигала 40%. Вниз по течению указанная неравномерность глубин несколько снижается. Отмеченное увеличение неравномерности глубин в поперечных сечениях потока не вызывает необходимости увеличения высоты стенок переходного участка, поскольку увеличение кинетичности вызывается уменьшением расхода, а следовательно, и глубин потока.

Очевидно, результаты опытов лучше соответствовали бы расчету, если бы уклон плоского дна переходного участка был равен среднему уклону трения на переходном участке, а уклон низового призматического канала обеспечивал равномерное движение.

§ 44. Расчет сопряжения равномерных бурных потоков при большом уклоне дна водовода

При построении сопрягающих течений на водосбросах, имеющих большой продольный уклон, могут встретиться случаи, когда необходимо обеспечить сопряжение для различных сочетаний условий в верховом и низовом каналах.

Рассмотрим способ расчета переходных участков с большим уклоном дна при условии равномерности потока в верховом и низовом каналах с учетом сил сопротивления. Построение сопрягающего течения на переходном участке, а также расчет граничной линии тока, определяющей конфигурацию переходного участка, производятся приближенным решением уравнений двухмерного бурного потока методом характеристик.

Допустим, что равномерный бурный поток шириной $b_{\text{нач}}$, параметры которого (скорость $U_{\text{нач}}$, глубина $H_{\text{нач}}$) заданы, требуется перевести в равномерный поток шириной $b_{\text{кон}}$ — в конечном сечении переходного участка. Деформации свободной поверхности, которые обычно имеют место при сужении и расширении бурного потока, должны быть минимальными. Дно водовода принимается плоским с постоянным уклоном $i = \sin\theta$, где θ — угол наклона дна к горизонту.

На переходном участке должна быть решена задача безволнового сопряжения двух равномерных потоков при заданных параметрах потока в верховом канале и при известной степени сужения или расширения $\beta = b_{\text{нач}}/b_{\text{кон}}$.

Имея заданными параметры потока в начальном сечении переходного участка, нетрудно их определить и в конечном сечении, считая верховой и низовой потоки в призматических прямолинейных каналах одномерными. Так, из уравнения неразрывности, записанного для указанных сечений в виде выражения (12.23), можно получить:

$$(H_{\text{кон}}/H_{\text{нач}})^3 = (b_{\text{нач}}/b_{\text{кон}})^2\,(\mathrm{Fr}_{\text{нач}}/\mathrm{Fr}_{\text{кон}}).$$

Глубина потока отсчитывается по нормали к дну потока.

Запишем условие равномерности движения в прямоугольном русле

$$\omega_{нач} C_{нач} \sqrt{R_{нач} i} = \omega_{кон} C_{кон} \sqrt{R_{кон} i} = \omega C \sqrt{R i}, \qquad (12.31)$$

где $\omega = bH$;

$R = bH/b + 2H$ — гидравлический радиус;

C — коэффициент Шези;

$i = \sin\theta$ — уклон дна водотока.

Для простоты дальнейших рассуждений определим коэффициент Шези по Маннингу. Из выражения (12.31) следует

$$\frac{H_{кон}}{H_{нач}} = \frac{b_{нач}}{b_{кон}} \left(\frac{b_{кон} + 2H_{кон}}{b_{нач} + 2H_{нач}} \right)^{2/5}. \qquad (12.32)$$

Если считать, что ширина двухмерного потока b много больше его глубины H, т. е. $b > H$, тогда гидравлический радиус $R \approx H$ равен глубине потока, и соотношение (12.32) примет вид

$$\frac{H_{кон}}{H_{нач}} = \left(\frac{b_{нач}}{b_{кон}} \right)^{3/5}. \qquad (12.33)$$

Из соотношения (12.32) или (12.33) следует, что при заданной степени изменения ширины потока $\beta = b_{нач}/b_{кон}$ фиксированной глубине потока $H_{нач}$ соответствует вполне определенная глубина $H_{кон}$.

Вычислив глубину $H_{кон}$ и найдя число Фруда, определим скорость $U_{кон}$ в конечном сечении: $U_{кон} = \sqrt{\mathrm{Fr}_{кон} g H_{кон} \cos\theta}$.

Таким образом, все параметры потока в конечном сечении определены. При известных параметрах потока в начальном и конечном сечениях переходного участка задача сопряжения равномерных потоков может иметь бесчисленное множество решений. Для однозначности решения задачи при известных граничных условиях необходимо задать закон изменения хотя бы одного из параметров потока на переходном участке.

Зададим, например, закон изменения глубины потока вдоль его оси так, чтобы кривая свободной поверхности потока плавно сопрягалась с равномерными потоками в верховом и низовом каналах. Этим условиям отвечает, в частности, закон изменения глубины в виде

$$H_i = H_{нач} + \frac{1}{2} (H_{кон} - H_{нач}) \left(1 - \cos\pi \frac{x_i - x_0}{x_к - x_0} \right), \qquad (12.34)$$

где x_0 — координата точки B_0, в которой $H_{b0} = H_{нач}$;

x_k — координата точки B_k, в которой $H_{bk} = H_{кон}$;

x_i — координата произвольной точки оси течения.

Оси координат выбраны как показано на рис. 12.9. Используя (12.34), можно определить значения глубин в любой точке оси потока при известных $H_{нач}$ и $H_{кон}$. Вид кривой свободной поверхности на оси переходного участка, вычисленной по формуле (12.34), показан на рис. 12.10. Чтобы воспользоваться в даль-

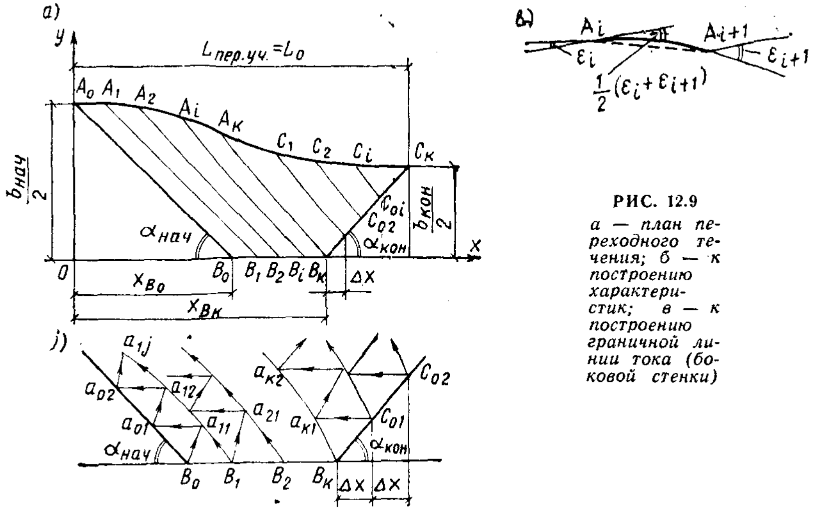


РИС. 12.9

а — план переходного течения; б — к построению характеристик; в — к построению граничной линии тока (боковой стенки)

нейшем расчете уравнением (12.34), необходимо определить длину переходного участка $L = x_k - x_0$ (см. рис. 12.9), которую можно найти из уравнения Бернулли для осевой линии тока между точками B_k и B_0 в виде

$$\Delta H = H_{нач} - H_{кон} = \frac{1}{2}\Sigma\lambda_{i-1}\,\mathrm{Fr}_{i-1}\,\Delta x_i, \qquad (12.35)$$

где $H_{нач}$, $H_{кон}$ — гидродинамический напор в точках B_i и B_0 оси потока;
λ_i — коэффициент гидравлического сопротивления;
Fr_i — число Фруда в точке B_i оси B_0B_k;
Δx_i — расстояние между точками B_i и B_{i-i} с координатами x_i и x_{i-1}.

Гидродинамический напор в любой точке B_i оси B_0B_k будем определять следующим образом:

$$h_i = a - x_i \sin\bar{\theta} + H_i \cos\theta + (U_i^2/2g). \qquad (12.36)$$

Находя соответствующие значения $H_{нач}$ и $H_{кон}$ по (12.36) и имея в виду, что $U^2 = \mathrm{Fr}_i g H_i \cos\theta$, перепишем уравнение Бернулли (12.35) в виде

$$(x_k - x_0)\sin\theta + H_{нач}\left(\cos\theta + \frac{\mathrm{Fr}_{нач}}{2}\right) - H_{кон}\left(\cos\theta + \frac{\mathrm{Fr}_{кон}}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\lambda_{i-1}\,\mathrm{Fr}_{i-1}\,(x_i - x_{i-1}).$$

Записав аналогичное соотношение для точек B_i и B_{i-1} оси потока

$$(x_i - x_{i-1})\sin\theta + H_{i-1}\left(\cos\theta + \frac{\mathrm{Fr}_{i-1}}{2}\right) - H_i\left(\cos\theta + \frac{\mathrm{Fr}_i}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\lambda_{i-1}\,\mathrm{Fr}_{i-1}\,\Delta x_i,$$

найдем из него выражение для определения числа Фруда в любой точке B_i оси B_0B_k:

$$\mathrm{Fr}_i=2\left[\frac{x_i-x_{i-1}}{H_i}\sin\theta+\frac{H_{i-1}}{H_i}\left(\cos\theta+\frac{\mathrm{Fr}_{i-1}}{2}\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{\lambda_{i-1}}{2}\,\frac{\mathrm{Fr}_{i-1}(x_i-x_{i-1})}{H_i}-\cos\theta\right]. \tag{12.37}$$

При вычислении коэффициента Шези по Маннингу имеем:

$$\lambda\cdot=\lambda_{\text{нач}}\sqrt[3]{\frac{H_{\text{нач}}}{H_i}}=\lambda_{i-1}\sqrt[3]{\frac{H_{i-1}}{H_i}}. \tag{12.38}$$

Длину $L=x_k-x_0$ находим последовательными приближениями, определяя вначале правую часть уравнения (12.35) по средним параметрам потока на оси участка сужения·

$$\left.\begin{aligned}\lambda_{\text{ср}}&=\frac{1}{2}(\lambda_{\text{нач}}+\lambda_{\text{кон}})=\frac{1}{2}\lambda_{\text{нач}}\left(1+\sqrt[3]{\frac{H_{\text{нач}}}{H_{\text{кон}}}}\right);\\ \mathrm{Fr}_{\text{ср}}&=\frac{1}{2}(\mathrm{Fr}_{\text{нач}}+\mathrm{Fr}_{\text{кон}})=\frac{1}{2}\left[1+\left(\frac{b_{\text{нач}}}{b_{\text{кон}}}\right)^2\left(\frac{H_{\text{нач}}}{H_{\text{кон}}}\right)^3\right].\end{aligned}\right\} \tag{12.39}$$

Подставив зависимости (12.39) в правую часть уравнения (12.35), найдем в первом приближении длину переходного участка по оси потока

$$L_1=A_0\Big/\left(\frac{1}{2}\lambda_{\text{ср}}F_{\text{ср}}-\sin\theta\right), \tag{12.40}$$

где

$$A_0=H_{\text{нач}}\left(\cos\theta+\frac{\mathrm{Fr}_{\text{нач}}}{2}\right)-H_{\text{кон}}\left(\cos\theta+\frac{\mathrm{Fr}_{\text{кон}}}{2}\right). \tag{12.41}$$

Считая $L=x_k-x_0=L_1$, по выражениям (12.34), (12.37) и (12.38) находим значения соответствующих величин $(H_i)_1$, $(\mathrm{Fr}_i)_1$, $(\lambda_i)_1$ в первом приближении, что необходимо для вычисления правой части уравнения (12.34), после чего определяем длину переходного участка (по оси потока) во втором приближении $L=L_2$ по формуле

$$L_2=\left[\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(\lambda_i)_1(\mathrm{Fr}_i)_1\,\Delta x_{i+1}-A_0\right]/\sin\theta. \tag{12.42}$$

Каждое последующее приближение позволяет уточнить значение расчетных параметров потока. Проведя подобные вычисления необходимое число раз, в итоге получим значение длины переходного участка $L=L_n$ с заданной точностью.

Найденное значение L следует сравнить с допустимой в сооружении длиной переходного участка, которая по каким-либо соображениям может быть ограниченной для конкретного объекта.

В случае $L \leqslant L_{\text{доп}}$ возможно выполнять дальнейший расчет по приводимой ниже схеме. Определив параметры потока на осевой линии и зная параметры потока в начальном и конечном сечениях переходного участка, произведем расчет конфигурации боковой стенки управляющего устройства. Расчет будем выполнять методом характеристик, изложенным в гл. 11.

Область сопрягающего течения ограничена с верховой и низовой сторон прямолинейными характеристиками A_0B_0 и B_kC_k, параметры потока в любой из точек которых равны параметрам соответствующих (верхового или низового) равномерных потоков. На участке оси потока, являющейся третьей (нижней) границей переходного течения, параметры потока найдены при определении длины ($L_n = L$) переходного участка. В точки оси B_1, B_i, B_k, по характеристикам второго семейства A_1B_1, A_iB_i, A_kB_k «приходят» возмущения, возникшие в точках излома боковой стенки $A_iA_1A_iA_k$, координаты которой мы и должны определить. Следовательно, построив характеристики второго семейства B_1A_1, ..., B_iA_i, ..., B_kA_k, исходящие из точек оси B_1, ..., B_i, ..., B_k, мы должны прийти в соответствующие точки A_1, ..., A_i, ..., A_k, лежащие на граничной линии тока $A_1A_iA_k$. Направление этих характеристик найдем по соотношениям (11.34), значения параметров потока в каждой их точке вычислим по дифференциальным соотношениям на характеристиках (11.39). В итоге получим конфигурацию части боковой стенки на участке.

Определить параметры потока в области C_0 $(A_k)B_k$, ..., $C_kC_iC_0$ и оставшуюся часть граничной линии тока $C_0C_iC_k$ можно двумя способами, а именно — при построении характеристик:

а) первого семейства B_1C_1', ..., B_iC_i', начиная с точек B_1, ...,B_i, или

б) второго семейства $C_{01}C_1$, ..., $C_{0i}C_i$, ..., начиная с точек C_{0i}, находящихся на прямолинейной характеристике B_kC_k.

Построение характеристик B_iA_i или $C_{0i}C_i$ проводим, решая «первую смешанную задачу». Указанная задача в общей постановке (см. гл. 11) заключается в нахождении решения системы уравнений (11.9).

Предполагается, что параметры потока известны на линии A_0B_0, являющейся характеристикой и на дуге (или прямой), которая в одной точке не имеет характеристического направления, например на B_0B_k.

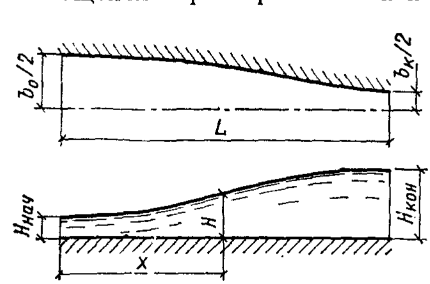


РИС. 12.10

Вначале рассмотрим построение характеристик второго семейства B_iA_i на примере построения характеристики B_1A_1, исходящей из точки B_1, лежащей на оси потока B_0B_k, Зная все параметры потока в точке B_0 и задав координату x_{B1} точки B_1, определим из соотношений (12.35), (12.37), (12.38) все параметры потока в выбранной точке B_1 (H_{B1} Fr_{B1}, λ_{B1}). Углы наклона соответствующих характеристик α_{B0} и α_{B1} к оси $B_0B_к$ в нашем случае найдем из выражения (11.34).

Координаты x_{a11}, y_{a11} точки пересечения характеристики первого и второго семейств (см. рис. 12.9), проведенные соответственно из точек B_1B_0, находим из системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} y_{a11}-y_{B0}&=(x_{a11}-x_{B0})(\varepsilon_{B0}+\alpha_{B0});\\ y_{a11}-y_{B1}&=(x_{a11}-x_{B1})(\varepsilon_{B0}-\alpha_{B1}).\end{aligned}\right\} \quad (12.43)$$

Далее определим расстояния ΔS_{a11B0} и ΔS_{a11B1} между соответствующими точками вдоль характеристик

$$\left.\begin{aligned} \Delta S_{a11B0}&=\sqrt{(x_{a11}-x_{B0})^2+(y_{a11}-y_{B0})^2};\\ \Delta S_{a11B1}&=\sqrt{(x_{a11}-x_{B1})^2+(y_{a11}-y_{B1})^2}.\end{aligned}\right\} \quad (12.44)$$

Затем в точке a_{11} определим величины ε_{a11} и h_{a11} из дифференциальных соотношений на характеристиках (11.39), заменив их конечными разностями:

$$-H_{B0}\sqrt{\frac{\mathrm{Fr}_{B0}}{\cos\theta}}(\varepsilon_{a11}-\varepsilon_{B0})=\sqrt{\frac{\mathrm{Fr}_{B0}-\cos\theta}{\mathrm{Fr}_{B0}}}(H_{a11}-H_{B0})-$$
$$-\sqrt{\frac{\mathrm{Fr}_{B0}-\cos\theta}{\mathrm{Fr}_{B0}}}\operatorname{tg}\theta\cos(\varepsilon_{B0}+\alpha_{B0})\,\Delta S_{B0a11}+\cos\varepsilon_{B0}\operatorname{tg}\theta\Delta S_{B0a11}-$$
$$-\frac{\lambda_{B0}}{8}\Delta S_{B0a11};$$

$$+H_{B1}\sqrt{\frac{\mathrm{Fr}_{B1}}{\cos\theta}}(\varepsilon_{B1}-\varepsilon_{a11})=\sqrt{\frac{\mathrm{Fr}_{B1}-\cos\theta}{\mathrm{Fr}_{B1}}}(H_{B1}-H_{a11})-$$
$$-\sqrt{\frac{\mathrm{Fr}_{B1}-\cos\theta}{\mathrm{Fr}_{B1}}}\operatorname{tg}\theta\cos(\varepsilon_{B1}-\alpha_{B1})\,\Delta S_{B1a11}+\cos\varepsilon_{B1}\operatorname{tg}\theta\Delta S_{B1a11}-$$
$$-\frac{\lambda_{B1}}{8}\Delta S_{B1a11}.$$

Найдем число Фруда Fr_{a11} в точке a_{11}. Заменив приближенно истинную линию тока, проходящую через точку a_{11}, отрезком прямой (см. рис. 12.9, *б*), наклоненной к оси потока под углом $\varepsilon_{ср} = \frac{1}{2}(\varepsilon_{a01}+\varepsilon_{a11})$, найдем координаты точки a_{01}, лежащей на прямолинейной характеристике A_0B_0 из соотношения:

$$\left.\begin{aligned} y_{a01}-y_{B0}&=(x_{a01}-x_{B0})\operatorname{tg}(\varepsilon_{B0}-\alpha_{B0});\\ y_{a01}-y_{a11}&=(x_{a01}-x_{a11})\operatorname{tg}\left(\frac{\varepsilon_{a01}+\varepsilon_{a11}}{2}\right).\end{aligned}\right\} \quad (12.45)$$

Далее находим $\Delta Sa_{01}a_{11}$ по уравнению, аналогичному уравнению (12.44). Зная число Фруда в точке a_{01}, определяем число Фруда в точке a_{11} из выражения (12.3) и α_{a11} из выражения (11.34). Продолжая подобные построения, получаем координаты и параметры потока в точках $a_{12}, a_{13}, \ldots, a_{ij}$ характеристики B_1A_1 вплоть до точки A_1.

Ординату последней точки A_1 на характеристике B_1A_1, принадлежащей граничной линии тока и определяющей конфигурацию боковой стенки, например сужения, определим из условия (см. рис. 12.9, *в*)

$$y_{A1}=y_{A0}-(x_{A1}-x_{A0})\,\mathrm{tg}\,\frac{\varepsilon_{A0}+\varepsilon_{A1}}{2}\pm\Delta y, \qquad (12.46)$$

где Δy задается в зависимости от требуемой точности.

Поскольку $y_{A0}=\frac{1}{2}\,b_{\text{нач}};\quad x_{A0}=0,\quad \varepsilon_{A0}=0,$ соотношение (12.46) для точки A_1 примет вид

$$y_{A1}=0{,}5b_{\text{нач}}-x_{A0}\,\mathrm{tg}\,\frac{\varepsilon_{A1}}{2}\pm\Delta y.$$

Следует отметить, что мы построили характеристику B_1A_1 и определили параметры потока в каждой ее точке лишь в первом приближении. Это приближение может оказаться недостаточно точным по следующим причинам.

Во-первых, при нахождении координат, например, точки a_{11}, мы заменили криволинейные характеристики, выходящие из точек B_0 и B_1, отрезками прямых. Таким образом, мы вместо криволинейной характеристики B_1A_1 получили ломаную линию $B_1a_{11}a_{12}, \ldots, a_{ij}A_1$, являющуюся лишь некоторым приближением к истинной характеристике второго семейства, выходящей из точки B_1.

Во-вторых, при определении параметров потока в найденных точках a_{11}, a_{12}, дифференциальные соотношения на характеристиках заменили конечными приращениями.

В-третьих, при нахождении числа Фруда в точке a_{11} мы также заменили дифференциальное уравнение Бернулли конечно-разностным уравнением. Поэтому может возникнуть необходимость уточнить как координаты точек характеристик, так и параметры потока в этих точках. Необходимые уточнения можно выполнять несколькими известными способами.

Второе приближение при построении, например, точки a_{11} можно получить следующим образом. Прежде всего вычислить среднеарифметические угловые коэффициенты характеристик, выходящих из точек B_0 и B_1, по известным угловым коэффициентам в точках B_0, B_1, a_{11}. Тогда в уравнениях (12.43) вместо углового коэффициента $K_{B0a_{11}}$ характеристики, выходящей из точки B_0, определяемого в первом приближении из выражения (12.47), следует подставить уточненное значение

$$k'_{B_0a_{11}}=\frac{1}{2}\left[\mathrm{tg}\,(\varepsilon_{B0}-\alpha_{B0})+\mathrm{tg}\,(\varepsilon_{a11}-\alpha_{a11})\right]. \qquad (12.47)$$

Аналогично поступают и с характеристикой, выходящей из точки B_1. Вместо ее углового коэффициента в первом приближении подставляют в уравнение (12.43) его уточненное значение: $k'_{B_1a_{11}}=\frac{1}{2}\left[\,\mathrm{tg}\,(\varepsilon_{B1}-\alpha_{B1})+\right.$ $\left.+\,\mathrm{tg}\,(\varepsilon_{a11}-\alpha_{a11})\,\right]$.

Затем, подставляя в уравнение системы (12.43) уточненные значения угловых коэффициентов $k'_{B_0a_{11}}$ и $k'_{B_1a_{11}}$, находят уточненные координаты точки a'_{11}.

По этому же принципу определяют среднеарифметические значения и других параметров в точках a'_{11}, B_0 и B_1. Второе приближение для $\varepsilon_{a'11}$ и $h_{a'11}$ находим, подставляя в систему уточненные значения всех параметров. Имея уточненные значения координат точки a'_{11} ($x_{a'11}$, $y_{a'11}$) и параметров потока в этой точке, находим уточненные координаты точки a'_{01}, находящейся на пересечении характеристики A_0B_0 и линии тока, проходящей через точку a'_{11}.

Для определения числа Фруда в «уточненной точке» a'_{11} по формуле (12.37) следует вместо величины коэффициента трения $\lambda_{a\,01}$ подставить на отрезке вновь проведенной линии тока $a'_0a'_{11}$ среднее значение коэффициента трения $\lambda_{a'_{01}\,a'_{11}} = \frac{1}{2}(\lambda'_{a'_{11}} + \lambda_{a'_{11}})$.

Длину отрезка линии тока $a'_{01}a'_{11}$ следует определять по соотношениям (12.44), подставляя уточненные координаты. В результате уточнений мы получим второе приближение к построению характеристики и определению параметров в точке a'_{11}. Если найденные во втором приближении параметры точек и их координаты нужно еще уточнять, поступают аналогично.

Процесс уточнения продолжают до тех пор, пока значения искомых величин, полученные при двух последовательных приближениях, будут совпадать с требуемой точностью. Точность, с которой можно получить искомые величины, очевидно, зависит от близости исходных точек при построении.

Характеристики B_2A_2, B_3A_3, ..., B_iA_i строятся по способу, аналогичному для характеристик B_1A_1 с небольшими изменениями схемы расчета. Различие при построении любой из характеристик B_iA_i заключается в том, что параметры потока в точках характеристик $B_{i-1}A_{i-1}$ не постоянны как на характеристике A_0B_0, а определяются положением (координатами) точек на характеристике $B_{i-1}A_{i-1}$.

Построение каждой последующей i-той характеристики выполняется после построения предыдущей (i — 1) характеристики и определения параметров потока в точках на ней.

При проведении линий тока (или заменяющих их отрезков прямых линий под соответствующими углами к оси потока) из точек a_{ij} на характеристике B_iA_i (i — номер характеристики B_iA_i, j — номер точки на характеристике B_iA_i) находятся координаты точек $a^0_{i-1,j}$ на предыдущих характеристиках $B_{i-1}\ A_{i-1}$ по соотношениям, аналогичным (12.43). После определения координат точки $a^0_{i-1,j}$ ($x_{a^0_{i-1,j}}$; $y_{a^0_{i-1,j}}$ линейной интерполяцией определяются параметры потока в ней по параметрам потока в соседних точках на характеристике B_{i-1}, A_{i-1}, известных из уже выполненного построения характеристики $B_{i-1}\ A_{i-1}$. Для этого вначале определяется коэффициент пропорциональности из соотношения

$$\nu = (y^0_{i-1,j} - y_{i-1,j})\,(y^0_{i-1,j+1} - y_{i-1,j}), \tag{12.48}$$

где $y^0_{i-1,j}$, $y_{i-1,j}$, $y^0_{i-1,j+1}$ — ординаты соответствующих точек ($a^0_{i-1,j}$ и т. д.) на характеристиках B_iA_i и $B_{i-1}A_{i-1}$ (см. рис. 12.9).

При известных параметрах потока в точках a_{i-1j}, и $a_{i-1,\,j+1}$ характеристики $B_{i-1}A_{i-1}$ и найденном из формулы (12.48) значении коэффициента ν можно определить все параметры и в точке $a^0_{i-1,j}$ (с ординатой $y^0_{i-1,j}$) из соотношений:

$$
\left.\begin{aligned}
Fr^0_{i-1,j} &= Fr_{i-1,j} + \nu\,(Fr_{i-1,j+1} - Fr_{i-1,j});\\
H^0_{i-1,j} &= H_{i-1,j} + \nu\,(H_{i-1,j+1} - H_{i-1,j});\\
\lambda^0_{i-1,j} &= \lambda_{i-1,j} + \nu\,(\lambda_{i-1,j+1} - \lambda_{i-1,j}).
\end{aligned}\right\} \qquad (12.49)
$$

Определив все параметры потока в точке $a^0_{i-1,j}$, находим число Фруда в точке a_{ij} из выражения (12.37).

Если известны координаты и параметры потока в точках a_{ij} и $a^0_{i-1,j}$ характеристики B_iA_i, находим координаты точки $a_{i,j+1}$ (на этой же характеристике). Подобные построения проводим для последней точки характеристики B_iA_i, ордината которой (в случае построения сужающегося участка) определяется из соотношения (12.46).

В результате построения криволинейных (ломаных) характеристик B_1A_1, B_2A_2 ,..., B_kA_k будут известны часть граничной линии тока A_0A_1..., ..., A_iA_k и параметры потока в области $A_0B_0B_iB_kA_kA_iA_0$.

Для сохранения общности способа расчета построение области C_0 $(A_k)B_kC_kC_i$ переходного течения и оставшейся части граничной линии тока $C_0C_iC_k$ мы будем проводить, строя характеристики второго семейства $C_{0i}C_i$, исходящие из точек C_{01}, C_{02}, ..., C_{0i} прямолинейной характеристики B_kC_k, отделяющей зону переходного течения от равномерного потока в нижнем канале. Построение характеристик $C_{0i}C_i$ и определение параметров потока в точках на них проводятся аналогично, с учетом того, что вдоль прямолинейной характеристики все параметры потока постоянны и отвечают параметрам низового равномерного потока.

По окончании всего расчета граничная линия тока, а следовательно, и конфигурация боковой стенки переходного участка станут известны. Будут определены и параметры потока в точках на характеристиках во всей области переходного течения.

Полную длину криволинейной части переходного участка, отнесенную к ширине верхового канала $b_{нач}$, $\bar{l}_{пер.уч} = (L_{пер.уч}/b_{нач})$, как следует из рассмотрения рис. 12.9, можно определить из соотношения (12.50)

$$
\bar{l}_{пер.уч} = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\alpha_{нач} + \frac{b_{кон}}{2b_{нач}}(\operatorname{ctg}\alpha_{нач} + \operatorname{ctg}\alpha_{кон}) + \frac{L}{b_{нач}}, \qquad (12.50)
$$

где $\alpha_{нач}$, $\alpha_{кон}$ — углы наклона прямолинейных характеристик в начальном и конечном сечениях переходного участка;
L — длина переходного участка по оси B_0 B_k, $(L = x_{Bk} - x_{B0})$;
$b_{нач}$ $b_{кон}$ — соответственно ширина верхового и низового каналов.

Из выражения, определяющего значения волновых углов $\alpha_{нач}$ и $\alpha_{кон}$, видно, что кинетичность потока при входе на переходный участок и при выходе из него повышается. Увеличение уклона дна (т. е. уменьшения $\cos\theta$) вызывает увеличение полной длины криволинейной части переходного участка ($L_{пер.уч}$). При условии равномерности движения в верховом и низовом каналах увеличение степени сужения $\beta = (b_{нач}/b_{кон})$ также приводит к увеличению $\bar{l}_{пер.уч}$.

Рассмотренный способ расчета переходного течения, сопрягающего два равномерных потока, имеет достаточно простые алгоритмы счета и потому удобен для применения ЭВМ. С помощью ЭВМ можно выполнять расчеты по предложенному способу с необходимой (наперед заданной) точностью.

Некоторые результаты расчетов сужающихся переходных участков, полученные с помощью ЭВМ, показаны на рис. 12.11.

Как видно из графических зависимостей, увеличение уклона дна в 5 раз при фиксированных значениях чисел Фруда $\mathrm{Fr}_{\text{нач}}$ и степени сужения потока $\beta_{\text{суж}}$ увеличивает длину участка сужения $\bar{l}_{\text{пер.уч}}$ приблизительно в 1,5 раза (кривая *1*). Увеличение степени сужения $\beta_{\text{суж}}$ в 1,33 раза вызывает увеличение $\bar{l}_{\text{пер.уч}}$ в 1,1 раза (кривая *1*). Эти количественные соотношения справедливы лишь для представленных на рис. 12.11 конкретных значений чисел Фруда и степеней сужения. Однако качественная взаимосвязь параметров сужения останется подобно проанализированной, очевидно, и для других значений $\mathrm{Fr}_{\text{нач}}$, $\beta_{\text{суж}}$ и уклонов дна $i = \sin\theta$.

На рис. 12.12 представлены результаты расчета конфигурации переходного участка сужения равномерного потока. Расчеты выполнены для двух степеней сужения $\beta_{\text{суж}} = 1{,}5$ и 2 и двух значений чисел Фруда $\mathrm{Fr}_{\text{нач}} = 64{,}7$ и 68,3 при постоянном уклоне плоского дна $i = 0{,}5$. Обращает на себя внимание значительная длина переходных участков сужения, рассчитанных для вышеуказанных условий. Очевидно, что «безволновое» сопряжение равномерных потоков возможно лишь при значительной длине переходного участка в особенности при больших значениях чисел Фруда ($\mathrm{Fr}_{\text{нач}}$) и уклонах дна.

Экспериментальная проверка предлагаемого способа расчета проводилась на модели, рассчитанной для значения числа Фруда в начальном сечении участка сужения $\mathrm{Fr}_{\text{нач}} = 17{,}2$, степени сужения потока $\beta_{\text{суж}} = 2$. Длина переходного сужающегося участка в этом случае $l_{\text{пер.уч}} = 9{,}5$.

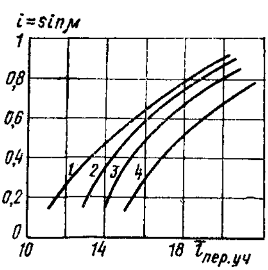


РИС. 12.11

1 — $\mathrm{Fr}_{\text{нач}} = 64{,}7$ $\beta_{\text{суж}} = 1{,}5$; *2* — $\mathrm{Fr}_{\text{нач}} = 64{,}7$ $\beta_{\text{суж}} = 2$; *3* — $\mathrm{Fr}_{\text{нач}} = 68{,}3$ $\beta_{\text{суж}} = 1{,}5$; *4* — $\mathrm{Fr}_{\text{нач}} = 68{,}3$ $\beta_{\text{суж}} = 2$

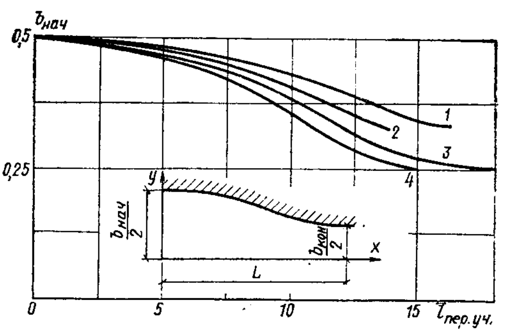


РИС. 12.12

1 — $\mathrm{Fr}_{\text{нач}} = 64{,}7$ $\beta_{\text{суж}} = 1{,}5$; *2* — $\mathrm{Fr}_{\text{нач}} = 68{,}3$ $\beta_{\text{суж}} = 1{,}5$; *3* — $\mathrm{Fr}_{\text{нач}} = 68{,}3$ $\beta_{\text{суж}} = 2$; *4* — $\mathrm{Fr}_{\text{нач}} = 64{,}7$ $\beta_{\text{суж}} = 2$

Для проверки работы выбранной конструкции переходного участка при режимах, отличающихся от расчетного, числа Фруда в начальном сечении в опытах менялись в диапазоне $6{,}5 \div 41{,}3$. При значениях чисел Фруда, близких к расчетному, отклонения опытных глубин от расчетных на всей длине переходного участка и ниже его по течению не превышали 7—12%. Это свидетельствует о весьма удовлетворительном совпадении расчетных и опытных данных.

При отклонении опытного значения числа Фруда от расчетного наблюдалось некоторое увеличение волнообразования.

§ 45. Расчет сужения и расширения неравномерного бурного потока с учетом сил сопротивления при большом уклоне плоского дна

Способ расчета сужения и расширения бурного потока целесообразно применять на безнапорных водоводах (в быстротоках, туннелях, косогорных трубах и т. д.), имеющих большую длину, где поток приближенно можно считать близким к равномерному. На водосбросных сооружениях, длина которых часто бывает ограниченой, в большинстве случаев движение неравномерное.

Допустим, что неравномерный бурный поток, параметры которого ($b_{\text{нач}}$ — ширина, $H_{\text{нач}}$ — глубина, $U_{\text{нач}}$ — скорость) в начальном сечении A_{00} (со стороны верхнего бьефа) известны, требуется перевести в низовой канал шириной $b_{\text{кон}}$ на переходном участке заданной длины $L_{\text{пер.уч}}$ (рис. 12.13). Дно водовода, как и прежде, принимается плоским, имеющим уклон $i = \sin\theta$, где θ — угол наклона оси потока, совпадающий с осью координатной плоскости xoy (см. рис. 12.13).

Будем считать, что известны параметры потока на граничных линиях: на характеристике A_0B_0, на оси B_0B_k и в конечном сечении B_kC_k. Следовательно, можно построить характеристики первого и второго семейств, исходящие из каждой точки граничных линий. Чтобы сохранить общность рассуждений и одинаковую схему построений, целесообразно строить, как и ранее, характеристики второго семейства, B_1A_1, ..., B_2A_k, исходящие из точек оси B_1, B_2, и характеристики $C_{10}C_1$, $C_{20}C_2$, ..., исходящие из точек C_{10}, C_{20} — конечного сечения B_kC_k. В результате построения сетки характеристик найдем очертание граничной линии тока $A_0A_iA_kC_iC_k$ и будем знать параметры потока на характеристиках, а следовательно, и в любой точке сопрягающего течения.

Следовательно, решение сформулированной задачи разбивается на два этапа. Вначале следует определить граничные условия на характеристике A_0B_0 (в зоне неравномерного движения A_0OB_0), на оси B_0B_k и в конечном сечении B_kC_k. Затем решается основная часть задачи, в результате которой определяется конфигурация переходного участка и аналитически рассчитываются параметры потока в зоне переходного сопрягающего течения.

Криволинейная характеристика строится на основе уравнения неравномерного движения. Параметры неравномерного бурного потока в «треугольнике» $A_0 0 B_0$ меняются по закону неравномерного движения так же, как если бы это движение происходило в призматическом водоводе шириной $b_{\text{нач}}$, равной ширине верхового канала. Они могут быть рассчитаны по любому из известных способов (см. гл. 11). Построение характеристики $A_0 B_0$ проводим следующим образом. Вначале делим сечение $A_0 0$ на n частей, т. е. выбираем $\Delta y = \frac{1}{2} \frac{b_{\text{нач}}}{n}$. Принимаем, что параметры потока в попереч-

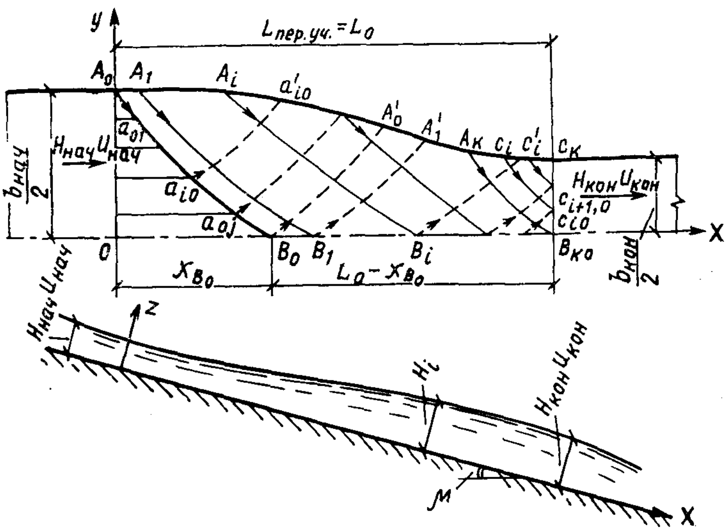


РИС. 12.13

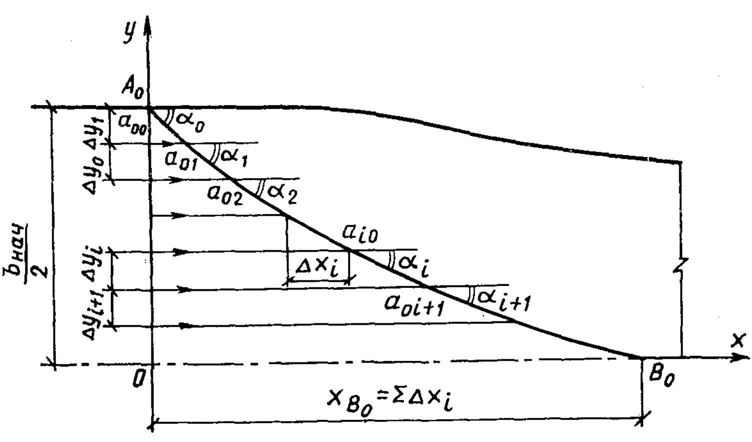


РИС. 12.14

ных сечениях каждой из «полосок» шириной Δy одинаковы и равны таковым в левой граничной точке сечения (рис. 12.14).

Зная уклон плоского дна водовода $i = \sin\theta$ и параметры потока в начальном сечении $A_0 0$, определяем угол наклона характеристики $A_0 B_0$ в точке A_0 к оси по соотношению (11.34). Координаты точки a_{01} характеристики $A_0 B_0$ найдем из соотношения

$$y_{01} = y_{a_{01}} = \frac{1}{2} b_{\text{нач}} \mp \Delta y_1,$$

где $-\Delta y_1$ используется при расчете сужающегося участка; $+\Delta y_1$ — расширяющегося переходного участка,

а также из выражения

$$x_{01} = x_{a\,01} = \Delta y_1 \operatorname{ctg} \alpha_1 = \Delta y_1 \sqrt{\frac{\mathrm{Fr}_{\text{нач}} - \cos\theta}{\mathrm{Fr}_{\text{нач}}}} = \frac{b_{\text{нач}}}{2n} \sqrt{\frac{\mathrm{Fr}_{\text{нач}} - \cos\theta}{\mathrm{Fr}_{\text{нач}}}}. \tag{12.51}$$

Вычислив абсциссу $(x_{a_{01}})$ точки a_{01} и имея параметры неравномерного потока на участке $0B_0$ (из построения кривой свободной поверхности), определяем параметры потока $(h_{a_{01}}, U_{a_{01}}, \mathrm{Fr}_{a_{01}}, \alpha_{a_{01}})$ в точке a_{01} в первом приближении. В результате построения заменяем часть истинной криволинейной характеристики $A_0 B_0$ прямолинейным отрезком $A_0 a_{01}$ и в первом приближении находим параметры потока в точке a_{01}. Эти параметры равны параметрам потока в точке оси потока $0B_0$, абсцисса которой равна асбсциссе точки a_{01}. Чтобы точнее определить параметры в точках характеристики $A_0 B_0$ и их координат, выполняем ряд приближений.

Второе приближение можно осуществить следующим образом. Зная число Фруда в точке a_{01}, найденное в первом приближении, определяем значение углового коэффициента характеристики в точке a_{01} по соотношению

$$k_{a_{01}} = k_1 = \operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\frac{\cos\theta}{\mathrm{Fr}_1 - \cos\theta}}. \tag{12.52}$$

Значение углового коэффициента в точке A_0 определяется аналогично. Среднее значение угловых коэффициентов характеристики $A_0 B_{01}$ на участке $A_0 a_{01}$ найдем из выражения

$$k_{\text{ср}} = \frac{k_{\text{нач}} + k_1}{2} = \frac{1}{2} (\operatorname{tg}\alpha_{\text{нач}} + \operatorname{tg}\alpha_1) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\cos\theta}{\mathrm{Fr}_{\text{нач}} - \cos\theta}} + \sqrt{\frac{\cos\theta}{\mathrm{Fr}_1 - \cos\theta}} \right). \tag{12.53}$$

Выполняя второе приближение, проводим из точки A_0 прямую под углом, угол наклона которой к оси Ox определяется из соотношения:

$$\alpha_0' = \alpha_{\text{нач}}' = \operatorname{arctg} k_{\text{ср}}, \tag{12.54}$$

где $k_{\text{ср}}$ вычисляется по формуле (12.53).

Абсциссу точки a'_{01} во втором приближении определим из выражения

$$\Delta x'_1 = \frac{\Delta y}{k_{\text{ср}}} = \frac{2\Delta y_1}{\operatorname{tg}\alpha_{\text{нач}} + \operatorname{tg}\alpha_1} = 2\Delta y_1 \Bigg/ \left(\sqrt{\frac{\cos\theta}{\mathrm{Fr}_{\text{нач}} - \cos\theta}} + \sqrt{\frac{\cos\theta}{\mathrm{Fr}_1 - \cos\theta}}\right). \tag{12.55}$$

Зная координаты точки a'_{01} и повторяя вычисления, аналогичные выполненным для точки a_{01} с координатами (x_{01}, y_{01}) (см. рис. 12.9, *б*), находим уточненные параметры потока в точке a'_{01}. Число таких приближений определяется заданной точностью вычислений. (При уменьшении шага Δx число уточнений уменьшается или вообще уточнений не потребуется.)

Выполнив серию необходимых уточнений и определив окончательно координаты точки a_{01} и параметры потока в ней, продолжаем построение характеристики A_0B_0. Проводя из точек a_{02}, a_{03}, ..., a_{0i} прямолинейные отрезки под углами, определяемыми по соотношению: $\alpha_i = \arcsin\sqrt{\cos\theta/\mathrm{Fr}_i}$, строим ломаную характеристику A_0a_{01}, ..., $a_{0i}B_0$ вплоть до точки B_0, лежащей на оси потока. Координаты точки B_0 могут быть определены из выражения

$$x_{B0} = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \frac{1}{\cos\theta} \sum \sqrt{\mathrm{Fr}_{i-1} - \cos\theta}\, \Delta y_i =$$
$$= \frac{1}{\cos\theta} \Delta y_i \sum \sqrt{\mathrm{Fr}_{i-1} - \cos\theta}. \tag{12.56}$$

Построена характеристика A_0B_0 и определены в каждой ее точке параметры потока, следовательно, на первую часть задачи дан ответ — найдены условия на границе переходного сопрягающего течения.

Поскольку координата точки B_0 известна, длина участка оси, где изменяются параметры потока от начальных в точке B_0 до их значений в конечном сечении B_kC_k, определится из соотношения

$$L = L_{\text{пер.уч}} - x_{B0} = L_0 - x_0. \tag{12.57}$$

Связь между параметрами потока в точках оси B_0 и B_k может быть найдена из уравнения неразрывности (12.50).

Закон изменения глубин на оси зададим в виде

$$H_i = H_{\text{нач}} + \frac{1}{2}(H_{\text{кон}} - H_{\text{нач}})\left[1 - \cos\pi\frac{x_i - x_0}{x_k - x_0}\right], \tag{12.58}$$

где $L_0 = L_{\text{пер. уч}}$;

x_0, x_k — координаты точек оси B_0 и B_k, в которых глубины потока соответственно равны $H_{\text{нач}}$ и $H_{\text{кон}}$.

Из уравнения Бернулли, записанного для оси потока между точками B_0 и B_k, можно получить зависимость

$$(L_0 - x_0)\sin\theta + H\left(\cos\theta + \frac{\mathrm{Fr}_{\text{нач}}}{2}\right) - H_{\text{кон}}\left(\cos\theta + \frac{\mathrm{Fr}_{\text{кон}}}{2}\right) =$$
$$= \frac{1}{8}\sum^{n} \lambda_{i-1}\mathrm{Fr}_{i-1}\Delta x_i, \tag{12.59}$$

где $x_0 = x_{B0}$ — координата точки B_0 [остальные обозначения аналогичны принятым в уравнении (12.35)].

Глубину $H_{\text{кон}}$ в точке B_k оси B_0B_k определим методом последовательных приближений. В первом приближении найдем $H_{\text{кон}}$, вычисляя правую часть соотношения (12.59) по средним значениям параметров потока на участке B_0B_k, определяемым по соотношениям (12.39).

Правую часть уравнения (12.59) запишем в виде

$$\frac{1}{8}\sum_{1}^{n}\lambda_{i-1}\,\mathrm{Fr}_{i-1}\,\Delta x_i = \frac{1}{8}\,\lambda_{\text{ср}}\mathrm{Fr}_{\text{ср}}(L_0 - x_{B0}). \qquad (12.60)$$

Используя уже известные выражения (12.33), (12.38), (12.56) и уравнение (12.60), перепишем уравнение (12.59) в виде

$$(L_0 - x_{B0})\sin\theta + H_{B0}\left(\cos\theta + \frac{\mathrm{Fr}_{B0}}{2}\right) - H_{Bk}\left(\cos\mu + \frac{\mathrm{Fr}_{Bk}}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{8}\,\lambda_{B0}(L_0 - x_{B0})\left[1 + \sqrt[3]{\frac{H_{B0}}{H_{\text{кон}}}}\right]\left[\mathrm{Fr}_{B0} + \mathrm{Fr}_{\text{нач}}\left(\frac{b_{\text{нач}}}{b_{\text{кон}}}\right)^2\left(\frac{H_{\text{нач}}}{H_{\text{кон}}}\right)^3\right].$$

Из этого уравнения найдем в первом приближении глубину $H_{\text{кон}}$ в точке B_k.

Для определения глубины $H_{\text{кон}}$ во втором приближении поступаем следующим образом. Зная $(H_{\text{кон}})_1$, по уравнению (12.58) находим глубины потока $(H_i)_2$ во всех точках оси B_0B_k. Для вычисления правой части уравнения (12.60) определим числа Фруда $(\mathrm{Fr}_i)_2$; и коэффициенты гидравлического трения λ_i в точках оси B_0B_k, используя соотношения (12.37) и (12.38),

$$\frac{1}{8}\Sigma\,(\lambda_{i-1})_2\,(\mathrm{Fr}_{i-1})_2\,\Delta x_i = (\Delta H)_2.$$

Записав уравнение (12.59) в виде

$$(L_0 - x_{B_0})\sin\theta + H_{B_0}\left(\cos\theta + \frac{\mathrm{Fr}_{B_0}}{2}\right) - (H_{\text{кон}})_2\left[\cos\theta + \frac{(\mathrm{Fr}_{\text{кон}})_2}{2}\right] = (\Delta H)_2 =$$

$$= \frac{1}{8}\sum_{1}^{n}(\lambda_{i-1})_2\,(\mathrm{Fr}_{i-1})_2\,\Delta x_i,$$

определяем глубину $H_{\text{кон}} = (H_{\text{кон}})_2$ во втором приближении. Выполнив ряд аналогичных вычислений, наконец, найдем глубину $H_{\text{кон}}$ в последнем приближении с учетом требуемой точности.

Определив $(H_{\text{кон}})_n$, найдем параметры потока $(H_i\;\mathrm{Fr}_i\lambda_i)$ во всей точках оси B_0B_k по формулам (12.37), (12.38), (12.58).

Параметры потока в конечном сечении B_kC_k переходного участка могут быть заданы изменяющимися по любому закону. Закон изменения параметров потока в конечном сечении B_kC_k можно выбрать (задать) в зависимости от условий, которым должен удовлетворять поток ниже переходного участка (в низовом канале). Удобно задать глубину потока во всех точках сечения постоянной и равной глубине в точке B_k, т. е. $H_{C_{10}} = H_{C_{20}} = \ldots = H_{C_{10}} = H_{Bk} = H_{\text{кон}} = \text{const}$.

Схема расчета переходного течения не изменится при любом другом законе изменения параметров потока в конечном сечении, отличающемся от выбранного здесь, при котором упрощаются промежуточные вычисления.

Построение сопрягающего течения в области $A_0B_0B_kC_kA_kA_0$ будем выполнять в два этапа. Вначале решим «первую смешанную задачу» (см. гл. 11) для области течения $A_0B_0\ B_kA_kA_0$ (рис.12.15) исходя из известных параметров потока на оси B_0B_k и граничной криволинейной характеристики A_0B_0. Построение криволинейных характеристик второго семейства B_1A_1, B_kA_k (выходящих из B_i точек оси, см. рис. 12.15), определение параметров потока в точках этих характеристик и построение части граничной линии тока на участке выполним аналогично построению характеристики B_2A_2 в случае сопряжения равномерных потоков (см. § 44). При построении характеристики B_1A_1 следует помнить,что в случае сужения (или расширения) неравномерного бурного потока характеристика A_0B_0 — криволинейная и параметры потока на ней определяются их положением (координатами) на характеристике. По окончании первого этапа расчета определяется конфигурация боковой стенки на участке $A_0A_iA_k$ и параметры потока в точках характеристик, построенных в области $A_0B_0B_kA_kA_0$.

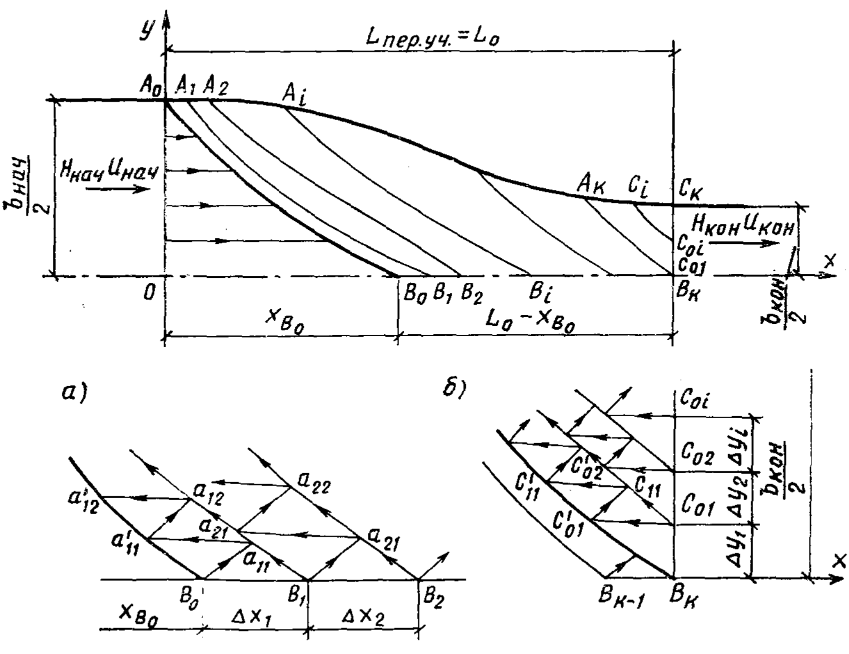


РИС. 12.15

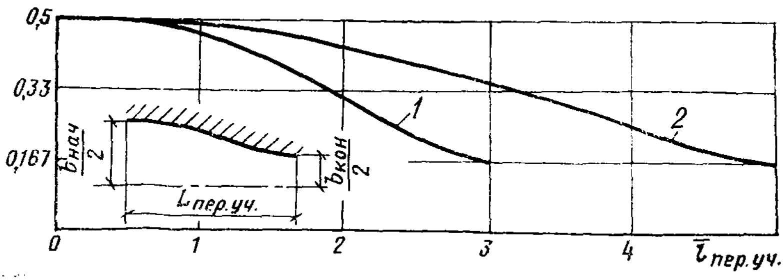


РИС. 12.16

$1 - Fr_{нач} = 8$ $\beta_{суж} = 3$ $l_{пер.уч} = 3$ $i = 0,3$;

$2 - Fr_{нач} = 8$ $\beta_{суж} = 3$ $l_{пер.уч} = 5$ $i = 0,3$

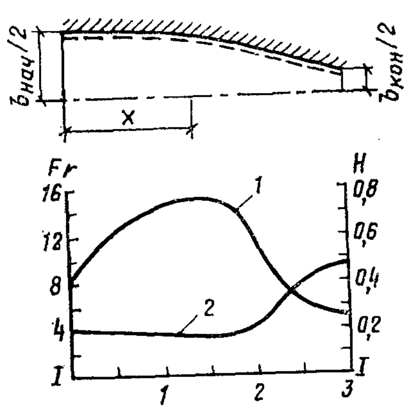


РИС. 12.17

1 — число Фруда Fr (x); *2 — глубина потока* $h(x)$

Решая «первую смешанную задачу» для «треугольной области» $A_kB_kC_kA_k$, известными будем считать параметры потока в точках линии B_kC_k (конечного сечения) и в точках характеристики B_kA_k, найденные при выполнении первого этапа решения задачи. Зная параметры потока в точках сечения B_kC_k и выбрав на линии B_kC_k область концентрации точек $C_{01}, \ldots, C_{0i}$ (или выбрав Δy_i), построим характеристики второго семейства $C_{0i}C_i$, выходящие из намеченных точек C_{0i}.

Второй этап решения задачи полностью определяет конфигурацию боковой криволинейной стенки $A_0A_kC_0C_k$ и расчетные параметры потока во всей области сопрягающего течения.

На рис. 12.16 и 12.17 представлены результаты расчетов очертаний управляющего участка и параметров потока на его оси.

Следует отметить одну особенность расчета сужения неравномерного бурного потока. Рассмотренная выше схема расчета при заданной (фиксированной) длине участка сужения может применяться лишь в случае, когда выполняется условие

$$L_{пер.уч} - x_{B0} = L_0 - x_{B0} = L \geqslant 0. \tag{12.61}$$

При этом условии возмущение, возникшее в точке A_0, достигает оси потока и характеристику A_0B_0, совпадающую по направлению с линией малого возмущения, распространяющегося из точки A_0, можно полностью построить, а параметры потока в точках ее определить вплоть до точки B_0, лежащей на оси B_rB_k.

При выполнении особого условия, т. е. равенства $L_0 - x_{B0} = 0$, параметры потока на участке ниже конечного сечения (включая и конечное сечение) определяются из расчета неравномерного движения по одномерной теории. Для построения переходного участка выполняется лишь вторая часть вышеприведенного расчета, т. е. делается сопряжение течения в области «треугольника» $C_kA_kB_k$, что, вообще говоря, теоретически возможно. Этот особый случай требует дополнительной экспериментальной проверки.

Экспериментальная проверка предложенного способа расчета показала удовлетворительное совпадение опытных и расчетных параметров. На бо́льшей части переходных участков отклонения опытных глубин от теоретически рассчитанных не превосходили 10—15%. Лишь в сечениях, где поток становился явно пространственным и $B/H < 3$, существенно нарушались предпосылки двухмерности течения — указанные отклонения несколько увеличивались (до 20—25%).

§ 46. Расчет сопряжения неравномерного потока с равномерным

Необходимость в решении задачи подобного типа возникает достаточно часто, поскольку сужение потока целесообразно осуществлять в начале быстротока, где течение обычно неравномерное. Сопрягающее течение в этом случае с верховой стороны ограничено криволинейной характеристикой A_0B_0 (рис.12.18, *а*), расчет и построение ее даны в § 45. С низовой стороны переходное течение ограничено прямолинейной характеристикой B_kC_k, параметры потока в каждой точке которой заданы как параметры низового равномерного потока. Параметры потока на участке оси B_0B_k также определяются по способу, изложенному в § 45.

Сопрягающее течение в области $A_0B_0B_kC_kA_kA_0$ строят в два этапа по следующей схеме. «Верховая» часть области течения, ограниченная криволинейными характеристиками второго семейства A_0B_0 и A_kB_k, а также осью B_0B_k, строится аналогично тому, как это сделано при решении первой части задачи расчета сопряжения неравномерных потоков. Построение «низовой» части сопрягающего течения в «треугольнике» $A_kB_kC_k$, ограниченном криволинейно характеристикой A_kB_k и прямолинейной характеристикой B_kC_k, выполняется так же, как при решении второй части расчета сужающегося сопряжения равномерных потоков.

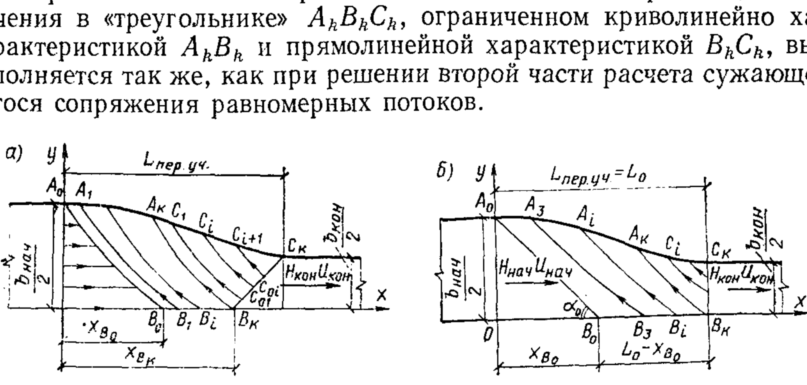


РИС. 12.18

а — к построению сопряжения неравномерного и равномерного потоков; б — то же, равномерного и неравномерного потоков

Следует отметить, что задачу указанного типа можно решить по приведенной схеме в случае соблюдения следующего соотношения: характеристика A_0B_0 не выходит за пределы сопрягающего участка, т. е.

$$(L_{\text{пер.уч}})_{\text{доп}} > (x_{B0}-x_{A0})+b_{\text{кон}}\operatorname{ctg}\alpha_{\text{кон}}=(x_{B0}-x_{A0})+$$
$$+b_{\text{кон}}\sqrt{\frac{\mathrm{Fr}_{\text{кон}}-\cos\theta}{\cos\theta}},$$

где $(L_{\text{пер.уч}})_{\text{доп}}$ — заданная (допустимая) длина участка сужения или расширения;

θ — угол наклона плоского дна водовода к горизонту;

x_{B_0}, x_{A_0} — координаты (абсциссы) точек B_0 и A_0 (криволинейной) характеристики B_0A_0 (см. рис. 12.18);

$\mathrm{Fr}_{\text{кон}}$ — число Фруда в конечном сечении переходного участка (в низовом прямолинейном равномерном потоке).

§ 47. Расчет сопряжения равномерного потока с неравномерным

Задача указанного типа может возникнуть при проектировании переходного сужающегося участка на быстротоке, имеющем большую длину. В этом случае бурный поток при большой длине верхового канала может стать близким к равномерному, который и требуется сузить (или расширить) до заданной ширины.

Задача решается следующим образом. Вначале определяются параметры потока в низовом канале, т. е. в конечном сечении B_kC_k. Затем находятся параметры потока на оси B_0B_k. Сопрягающее течение будет ограничено с верховой стороны прямолинейной характеристикой A_0B_0 (см. рис. 12.18, *б*), параметры потока в каждой точке которой равны параметрам в верховом равномерном потоке. С низовой стороны сопрягающее течение ограничено сечением B_kC_k с уже определенными параметрами потока. Построение сопрягающего течения разбивается на два этапа. Вначале рассчитывается верховая область течения $A_0B_0B_kA_kA_0$ аналогично расчету при построении сужающегося сопряжения равномерных потоков. Построение «низовой» части сопрягающего течения в области $A_kB_kC_kA_k$ осуществляется так же, как это было сделано во второй части расчета сопряжения неравномерных потоков. В результате построение полностью определит конфигурацию граничной линии тока, следовательно, и боковой стенки участка сужения, переводящего равномерный поток в неравномерный.

Таким образом, подробное решение задач безволнового сопряжения равномерных и неравномерных потоков (см. § 44, 45) дает возможность полностью решать задачи и в других постановках.

ГЛАВА 13. МОДЕЛИРОВАНИЕ И ТЕХНИКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ ВЫСОКОСКОРОСТНЫХ ПОТОКОВ

§ 48. Теория подобия гидравлических явлений

Высокоскоростные потоки реализуются в различных элементах высоконапорных гидротехнических сооружений, таких как водопропускные туннели, каналы большого уклона, водосливы высоких плотин. Вследствие сложных граничных и начальных условий течения (геометрии, нестационарности и т. д.) достаточно надежно аналитически описать характеристики течения высокоскоростных потоков невозможно. Поэтому при проектировании элементов высоконапорных гидротехнических сооружений используется их гидравлическое моделирование. Моделирование широко применялось и применяется при проектировании практически всех наиболее крупных отечественных и зарубежных гидросооружений. Законы моделирования высокоскоростных потоков основываются на теории подобия гидравлических явлений. Первый вклад в разработку принципов теории подобия сделал Ньютон, который выделил три физические категории независимых размерностей: длину, массу (как меру инерции) и время. Наиболее эффективно методы теории подобия стали развиваться только в последние десятилетия. В современной теории подобия можно выделить три основных метода:

1) анализ размерности;
2) анализ подобия сил, характеризующих явление;
3) анализ дифференциальных уравнений.

Анализ размерности базируется на так называемой π-теореме, которая устанавливает связь между функцией, выраженной через размерные параметры, и функцией, представленной в безразмерной форме. Пусть рассматриваемое явление описывается функцией вида

$$f(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) = 0, \tag{13.1}$$

определяющей связь между n размерными физическими величинами (параметрами). Тогда, если число независимых размерностей (основных единиц измерения) этих параметров m, то функция (13.1) может быть преобразована к виду

$$\varphi(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \ldots, \pi_{n-m}) = 0. \tag{13.2}$$

Это соотношение содержит связь между $(n - m)$ безразмерными параметрами π_1, π_2, ..., π_{n-m}. Использование π-теоремы позволяет существенно сократить число рассматриваемых параметров.

Выбор независимых размерностей определяется характером изучаемого явления. В механике независимыми размерностями являются длина $[L]$, время $[T]$ и масса $[M]$. Эти три независимые размерности выбирают при анализе гидравлических явлений. В качестве примера применения метода анализа размерности рассмотрим задачу движения волны. Прежде всего выбираем наиболее существенные физические величины, определяющие движение волны и влияющие на характер рассматриваемого явления. Будем считать, что скорость волны $c\ [L\ T^{-1}]$ зависит от следующих физических величин:

1) ускорения силы тяжести $g\ [LT^{-2}]$;

2) поверхностного натяжения на границе раздела вода—воздух $\sigma\ [MT^{-2}]$;

3) вязкости $\nu[L^2T^{-1}]$;

4) плотности жидкости $\rho[ML^{-3}]$;

5) глубины $H[L]$;

6) длины волны $L_в$.

Таким образом, имеем основное функциональное уравнение

$$f\,(c;\ g;\ \sigma;\ \nu;\ \rho;\ H;\ L_в) = 0. \qquad (13.3)$$

Согласно π-теореме из семи размерных физических величин ($m=7$) при трех независимых размерностях ($n = 3$) можно образовать четыре безразмерных параметра ($m - n = 4$). Перепишем функциональную зависимость (13.3) в виде произведения величин в некоторых степенях:

$$c = g^a\, \sigma^b\, \nu^c\, \rho^d\, H^e\, L_в^k. \qquad (13.4)$$

Формула размерности принимает вид

$$(LT^{-1}) = (LT^{-2})^a\, (MT^{-2})^b\, (L^2\, T^{-1})^c\, (ML^{-3})^d\, (L)^e\, (L)^k.$$

Для нахождения показателей степени составляем три уравнения размерности при шести неизвестных:

$$[L]\ \ 1 = a + 2c - 3d + e + k;$$
$$[T] - 1 = -2a - 2b - c;$$
$$[M]\ 0 = b + d.$$

В такой постановке метод анализа размерностей оказался неэффективным. Для решения задачи производим сравнительную оценку степени влияния каждой из физических величин на рассматриваемое явление. В случае достаточно больших волн и пренебрежимо малых силах вязкого сопротивления при их движении исключаем σ и $\nu_в$. Тогда уравнение (13.4) примет вид

$$c = Ag^a\, \rho^b\, H^c\, L_в^d,$$

а соответствующее уравнение размерности

$$[L] 1 = a - 3b + c + d;$$
$$[T] - 1 = -2a;$$
$$[M]\ 0 = b;$$
$$a = 1/2;\quad b = 0;\quad d = (1/2) - c.$$

В результате получаем следующую функциональную связь

$$c = A\sqrt{gH}\,(L_{в}/H)^{d}, \tag{13.5}$$

где A — коэффициент пропорциональности;
d — показатель степени.

Анализ размерности в данном случае позволил установить вид определяющих безразмерных параметров. Для нахождения зависимости скорости волны c от остальных величин экспериментально определяем коэффициент A и показатель степени d.

Рассмотренный пример позволяет сделать некоторые общие выводы относительно практического применения анализа размерности:

1. Эффективность анализа размерности зависит главным образом от удачного выбора определяющих размерных параметров.

2. В случае если число определяющих параметров $m > n + 1$ (n — число независимых размерностей), анализ размерности выявляет соответствующие безразмерные комплексы. Если $m = n + 1$, можно установить функциональную связь, справедливую с точностью до постоянного множителя.

Из второго вывода следует, что увеличение числа независимых размерностей при сохранении числа определяющих параметров повышает эффективность метода анализа размерности. Г. Хантли предложил усовершенствованный метод анализа размерности, согласно которому две основные размерности — длина и масса — преобразовываются к первичным составляющим. В рассмотренной выше задаче глубина воды H и длина волны $L_{в}$ имеют одинаковую размерность, однако определяются по взаимно перпендикулярным направлениям. Направления могут играть существенную роль также и потому, что скорость волны характеризуется изменением продольной координаты L_x по времени, а ускорение силы тяжести связано с вертикальным направлением L_z. Таким образом, согласно дополнению Г. Хантли, вместе одной независимой размерности L вводятся три независимые размерности L_x, L_y и L_z. Эти основные единицы носят название векторных единиц длины в отличие от скалярной единицы длины L.

Г. Хантли предлагает отличать размерность массы M_u как меру инерции от размерности $M_к$ как количества вещества. Учитывая, однако, что эти два понятия, согласно теории относительньсти, идентичны, такое разделение требует более детального обоснования.

Рассмотрим применение этого модифицированного анализа размерности на некоторых простейших примерах. Требуется установить высоту выброса и продольный путь моля жидкости, отрывающегося со свободной поверхности высокоскоростного потока, относительно неподвижного наблюдателя. Не учитывая сопротивление моля в воздухе, в качестве размерных параметров выбираем следующие:

1) дальность полета моля L;
2) высоту выброса моля ΔH;
3) начальную скорость выброса u'_z;

4) ускорение силы тяжести g;

5) продольную скорость моля относительно неподвижного наблюдателя U_x.

Попробуем решить эту задачу традиционным методом анализа размерности. Для определения высоты выброса моля выбираем три параметра: ΔH, u'_z и g. В результате находим:

$$\Delta H = A\,(u'_z)^2/g$$

или

$$(\Delta H/H) = A\,(u'_z)^2/gH\,. \tag{13.6}$$

Продольный путь, пройденный молем, зависит как от начального угла выброса, так и от начальной продольной скорости. Угол выброса определяется соотношением u'_z/U_x. Таким образом, получаем $L = f(u'_z;\ U_x;\ g)$. Размерности u'_z и U_x в традиционном рассмотрении совпадают, и задача имеет вид $L = AU^2/g$, где характерная скорость u (u'_z или U_x) осталась неопределенной. Начальный угол выброса вообще не учитывается в полученном решении.

Следовательно, традиционным методом анализа размерности можно определить высоту ΔH, но чтобы найти длину $L_в$, необходимо ввести еще один дополнительный параметр (U_x). Повторим вычисления с учетом векторных свойств единицы длины. В этом случае соответствующие размерности примут вид $u'_z\ [L_z T^{-1}]$; $U_x = [L_x T^{-1}]$ и $g\ (L_z T^{-2}]$.

Тогда вместо функциональной зависимости

$$L = (u'_z)^a\,(U_x)^b\,g^c$$

имеем:

$$L_x = ((L_z\,T^{-1})^a\,(L_x\,T^{-1})^b\,(L_z\,T^{-2})^c\,.$$

Так как векторные размерности независимы, то можно найти:

$$\begin{cases} 1 = b & [L_x]; \\ 0 = a + c & [L_z]; \\ 0 = -a - b - 2c & [T]. \end{cases}$$

Таким образом, $b = 1$; $a = 1$; $c = -1$. Отсюда

$$L = A\,(U_x\,u'_z)/g.$$

Модифицированный анализ размерности позволил получить значительно более конкретный результат. Из полученного соотношения найдем время перемещения моля под потоком $t = L/U_x = Au'_z/g$ или с учетом выражения (13.6)

$$t = \sqrt{A\Delta H/g}. \tag{13.7}$$

Найденные в результате анализа размерности соотношения (13.6) и (13.7) с точностью до числового коэффициента совпадают с соответствующими зависимостями (10.38) и (10.29).

При модифицированном анализе размерности необходимо более детально рассматривать независимые векторные длины для каждо-

Основные силы	F_g	F_σ	F_p	F_μ
F_I	$\frac{F_I}{F_g}=\frac{U^2}{gL}$ — число Фруда	$\frac{F_I}{F_\sigma}=\frac{\rho U^2 L}{\sigma}$ — число Вебера	$\frac{F_p}{F_I}=\frac{\Delta p}{\rho U^2}$ — число Эйлера	$\frac{F_I}{F_\mu}=\frac{\rho UL}{\mu}$ — число Рейнольдса
F_μ	$\frac{F_g}{F_\mu}=\frac{\rho L^2 g}{\mu U}$	$\frac{F_\sigma}{F_\mu}=\frac{\sigma}{\mu U}$	$\frac{F_p}{F_\mu}=\frac{\Delta p L}{\mu U}$ — число Стокса	—
F_p	$\frac{F_g}{F_p}=\frac{\rho g L}{\Delta p}$	$\frac{F_\sigma}{F_p}=\frac{\sigma}{\Delta p L}$	—	—
F_σ	$\frac{F_g}{F_\sigma}=\frac{\rho g L^2}{\sigma}$	—	—	—

го из параметров. В ряде случаев это требует дополнительной информации об изучаемом явлении.

Например, следует установить длину начального участка открытого потока. Функциональное уравнение запишем в виде $x = f(\rho; U_x; H; \tau)$; установим соответствующие размерности $x\,[L_x]$; $\rho\,[ML_x^{-1}L_z^{-\prime}L_y^{-1}]$; $U_x\,[L_xT^{-1}]$; $H\,[L_z]$.

Размерность касательных напряжений τ в традиционном рассмотрении выражается $[MT^{-2}L^{-1}]$. Для того чтобы установить, какая величина длины входит в размерность τ, воспользуемся соотношением $\tau = -\rho\overline{u_x' u_z^{-\prime}}$. Тогда, учитывая, что $\rho\,[ML_x^{-1}L_y^{-1}L_z^{-1}]$; $u_x'[L_x'T^{-1}]$, получаем $\tau[ML_y^{-1}T^{-2}]$.

Ограничиваясь случаем течения в плоском канале, после преобразования зависимости и анализа размерности имеем:

$$(x/H) = A\tau/\rho U_x^2 = (A/\lambda).$$

Данные примеры показывают, что модификация анализа размерности значительно повышает его эффективность, однако для выбора основных параметров и определения их размерностей требуется достаточная исходная информация.

Другой метод теории подобия основывается на анализе сил, существенных для рассматриваемого явления. Использование этого метода включает в себя следующие основные операции:

1. Устанавливаются силы, которые по предположению считаются наиболее существенными для данной задачи.

2. С помощью физических представлений о рассматриваемом явлении каждая из этих сил выражается через характерные параметры.

3. Составляются отношения соответствующих сил и находятся безразмерные комплексы.

В механике несжимаемой жидкости используются следующие пять характерных сил:

сила инерции F_I (ρU^2L^2);

сила тяжести F_g $(\rho L^3 g)$;

сила давления F_p $(\Delta p L^2)$;

сила вязкости F_μ (μUL);

сила поверхностного натяжения F_σ (σL).

Для подобия двух рассматриваемых систем необходимо, чтобы отношения всех основных сил были равны, а системы геометрически подобны.

В табл. 13.1 приведены безразмерные параметры, представляющие отношения основных сил.

Иногда вместо баланса сил удобнее использовать баланс энергий. В этом случае необходимо выделить энергию положения E_g $(\rho g L^4)$, энергию давления E_p $(\Delta p L^3)$, кинетическую энергию E_I $(\rho U^2 L^3)$ и энергию поверхностного натяжения E_σ (σL^2). Соответствующие энергии, отнесенные к единице массы жидкости, имеют вид e_g $(\rho g L)$; e_p (Δp); e_I (ρU^2); $e_{\text{в}}$ (σL^{-1}). Баланс удельной энергии был использован, в частности, для расчета начала аэрации высокоскоростного потока [см. соотношение (10.3)].

Метод подобия сил позволяет без вычисления установить безразмерные комплексы. Однако, какие характерные величины должны входить в эти комплексы и какие из этих комплексов наиболее существенны для данного явления, необходимо установить исходя из выходной информации о рассматриваемом явлении или по результатам эксперимента.

Часто при решении задач, связанных с движением жидкости, имеется довольно полная информация о рассматриваемом явлении. Большинство задач гидромеханики можно аналитически описать граничными условиями и соответствующими уравнениями (как правило, дифференциальными). В этих случаях более целесообразно применять методы анализа дифференциальных уравнений. Как известно, уравнения выражают точные количественные связи между параметрами исследуемого явления. Если для описания явления используются полные и корректные уравнения и граничные условия, то найденные параметры образуют систему, необходимую и достаточную для моделирования. Применение методов теории подобия позволяет не только найти характерные безразмерные комплексы, но и связи между ними, выраженные в уравнениях. Применение теории подобия к основным уравнениям и граничным условиям включает в себя следующие операции:

1) преобразование уравнений к безразмерному виду;
2) отбор параметров;
3) комбинацию параметров.

Преобразуя уравнения к безразмерному виду, прежде всего заменяют операторы дифференцирования соответствующими конечными параметрами, т. е. интегральными. Согласно А. А. Гухману, такую замену выполняют по следующему правилу

$$(\mathrm{d}^n x/\mathrm{d}y^n) = (x_0/y_0^n)\,\varphi\,(y/y_0). \qquad (13.8)$$

В этом соотношении x_0 и y_0 — граничные значения переменных x и y соответственно. Функцию $\varphi\,(y/y_0)$ можно определить следующим образом. Пусть зависимость между переменными x и y имеет вид $x = f\,(y)$. Тогда производная n-го порядка

$$\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}y^n} = \frac{x_0}{y_0^n}\,\frac{\mathrm{d}^n\,(x/x_0)}{\mathrm{d}\,(y/y_0)^n} = \frac{x_0}{y_0^n}\,\frac{\mathrm{d}^n f\,(y/y_0)}{\mathrm{d}\,(y/y_0)^n}\,.$$

Таким образом,

$$\varphi\,(y/y_0) = [\mathrm{d}^n f\,(y/y_0)]/[\mathrm{d}\,(y/y_0)^n]. \tag{13.9}$$

Из (13.9) следует, если функция $f\,(y/y_0)$ и ее производные $n-1$-порядка непрерывны, то можно ожидать, что $\varphi\,(y/y_0)$ имеет порядок 1. В качестве иллюстрации этого положения рассмотрим функцию, меняющуюся от 0 до f_0 при изменении аргумента от 0 до y_0. Тогда функция $\bar{f} = f/f_0$ и переменная $\bar{y} = y/y_0$ будут меняться от 0 до 1. Соответственно первая производная

$$\frac{\mathrm{d}\bar{x}}{\mathrm{d}\bar{y}} = \frac{1-0}{1-0} \backsim 1$$

(знак $\backsim$ в данном случае соответствует термину «порядок»);

$$\frac{\mathrm{d}^2\bar{f}}{\mathrm{d}\bar{y}^2} = \frac{(\mathrm{d}\bar{f}/\mathrm{d}\bar{y})-0}{1-0} \backsim 1;$$

$\varphi\,(\bar{y}) = (\bar{d^n f})/(\bar{dy^n}) \backsim 1$, т. е. функция $\varphi\,(\bar{y})$ имеет порядок единицы.

В этом случае можно считать, что

$$\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}y^n} = \frac{f_0}{y_0^n}\,\varphi\,(\bar{y}) \backsim \frac{f_0}{y_0^n}\,. \tag{13.10}$$

Однако, как показано С. Клайном, для того чтобы использовать соотношение (13.10) необходимо ввести дополнительное условие гладкости функции $f\,(\bar{y})$. Гладкость функции предполагает, что в интервале изменения функции $\varphi(y/y_0) \backsim 1$. Функция $f = x$ может резко меняться в некоторой малой области $0 \leqslant \bar{y} \leqslant \varepsilon$ и слабо меняться в остальной области ($\varepsilon \leqslant \bar{y} \leqslant 1$) (рис. 13.1).

В этом случае

$$(\mathrm{d}\bar{f}/\mathrm{d}\bar{y}) \backsim [(1-0)/(\varepsilon-0)] \backsim (1/\varepsilon);$$

$$(\mathrm{d}\bar{f}^n/\mathrm{d}\bar{y}^n) \backsim (1/\varepsilon^n).$$

При этом оценка $\varphi\,(\bar{y}) \backsim 1$ оказывается уже несправедливой. Критерием гладкости функции может служить результат экспериментальной проверки. Кроме того, имеются различные приближенные методы оценки функции в разных подынтервалах ее изменения. Наиболее широкое применение получил метод Пуанкаре. Основная идея этого метода состоит в разложении исходной функции x в ряд вида $\bar{f} = \bar{f}_0 + \varepsilon\bar{f}_1 + \varepsilon^2\,\bar{f}_2 + \ldots$. Каждая из функций $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \ldots$ находится после подстановки разложения в исходное уравнение и приравнивания членов с одинаковыми степенями малого параметра ε. При достаточно большом числе членов ряда решение методом Пуанкаре приближается к точному решению исходного уравнения. В ряде случаев, однако, этот метод не позволяет получить решение вследствие существования так называ-

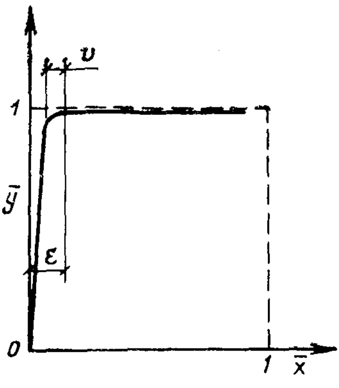


РИС. 13.1

емых «особых точек». Этот специальны: вопрос выходит за рамки учебного посо бия и в настоящей книге не обсуждается Для более полного изучения теории приб лижений можно рекомендовать моногра фию М. Ван-Дайка, С. Клайна и В. Ва зова.

Переход от производных к интег ральным комплексам, представленны зависимостью (13.10), позволил в ре зультате оценок исключить некото рые слагаемые в исходной систем уравнений (1.1) (как малые величи ны) и преобразовать ее к системе ура внений (1.6).

Применение теории подобия к анализу уравнений позволяет в ря де случаев уменьшить число независимых переменных за счет введения новых координат. Процесс нахождения таких координат проиллюстрируем на примере анализа первого уравнения системы (1.6). Считая, что в пределах пограничного слоя толщиной δ функции φ (характеризующие изменение производных) — гладкие, представим дифференциальное уравнение (1.6) в виде интегральных комплексов [по правилу (13.10)]: $u_{max}^2/x \backsim \tau_0/\rho\delta$ или в безразмерном виде

$$\delta/x \backsim \tau_0/\rho u_{\max}^2 = c_f. \tag{13.11}$$

При этом координата подобия принимает вид

$$\eta = z/\delta = (z/x)\,(1/c_f). \tag{13.12}$$

Согласно соотношению (13.12), две независимые координаты x и y заменены единой координатой подобия η.

В гл. 6 было установлено, что распределение скоростей в любом сечении пограничного слоя можно описать функцией вида $u/u_{max} = (z/\delta)^n$. Согласно соотношениям (6.4) и (6.14), интенсивность роста пограничного слоя $\delta/x = f(\lambda_c)$. Так как в выражении (13.12) коэффициент гидродинамического сопротивления c_f является аналогом коэффициента гидравлического сопротивления λ_c, то $\delta/x = f(c_f)$.

Можно показать, что введение координаты подобия η в уравнение (1.6) позволяет преобразовать это уравнение в частных производных к обыкновенному дифференциальному уравнению, что оказывается справедливым как для ламинарного, так и для турбулентного пограничного слоя. Для ламинарного пограничного слоя $\tau = \rho\nu \dfrac{du_x}{dz} \backsim \rho\nu\, u_{max}/\delta$. Поэтому $\delta/x \backsim \dfrac{\rho\nu u_{max}}{\rho u_{max}^2/\delta} = \nu/u_{max}\ \delta$ или $\delta \backsim \sqrt{\nu\, x/u_{max}}$. Обобщенная координата подобия принимает вид

$$\eta = z/\delta = z/x\,(\sqrt{u_{max}\, x/\nu}), \tag{13.13}$$

а коэффициент гидродинамического сопротивления

$$c_f \infty \sqrt{\nu/u_{max}\, x}. \tag{13.14}$$

Соотношение (13.14) с точностью до числового множителя совпадает с решением зависимости (5.40). Обобщенная координата η, определяемая по выражению (13.13), носит название переменной Блазиуса. Подстановка ее в исходное дифференциальное уравнение позволяет преобразовать его в обыкновенное дифференциальное уравнение [9]

$$f'''(\eta) + \frac{m+1}{2} f(\eta) f''(\eta) + m_1 [1 - f'^2(\eta)] = 0. \tag{13.15}$$

Функция $f(\eta)$, характеризующая изменение скоростей в пограничном слое, полностью определяется единственным аргументом η. Сведение уравнения в частных производных к обыкновенному дифференциальному уравнению позволяет считать, что координата η является координатой подобия. В уравнении (13.15) функция $f'(\eta) = u_x/u_{max}$; коэффициент m_1 характеризует изменение максимальной скорости потока по длине канала $u_{max}/u_{max\,H} = (x/x_H)^m$ (здесь x_H и $u_{max\,H}$ — координата начального сечения и соответствующая максимальная скорость). При $m_1 = 0$ уравнение (13.15) переходит в уравнение Блазиуса [9].

В случае турбулентного пограничного слоя $\tau = \rho\nu_т\, du/dz$, где $\nu_т$ — коэффициент турбулентной вязкости. В данном случае рассмотрим течение за пределами вязкого подслоя. При этом влияние физической вязкости можно не учитывать. Представим коэффициент турбулентной вязкости в простейшем виде $\nu_т = \varkappa u_* z$ [1]. Имея в виду, что $u_* \approx u_{max}\sqrt{c_f/2}$ и принимая, что коэффициент гидродинамического сопротивления изменяется по длине канала как $c_f = A^2 x^{2m}$, где A и m — некоторые коэффициенты, находим $\nu_т = \varkappa A u_{max} z x^m$. При таком представлении $\nu_т$ удобнее вместо зависимости (13.12) в качестве координаты подобия использовать соотношение

$$\eta = z/x \, \frac{1}{\varkappa} \sqrt{c_f} = \frac{1}{\varkappa A} \cdot \frac{z}{x^{m+1}}. \tag{13.16}$$

Выполним преобразования исходного уравнения пограничного слоя, которое запишем в виде

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} = u_{max} \frac{du_{max}}{dx} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_т \frac{\partial u}{\partial z}\right). \tag{13.17}$$

При $\nu_т = \varkappa\, u_*\, z$ получаем:

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} = u_{max} \frac{du_{max}}{dx} + \varkappa u_* \frac{\partial u}{\partial z} + \varkappa u_* z \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}. \tag{13.18}$$

Выразим скорости u_x и u_z через функцию тока [2]:

$$u_x = \frac{\partial \psi}{\partial z}; \quad u_z = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{13.19}$$

Подставляя выражение (13.19) в зависимость (13.18), представим исходное уравнение в виде

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = u_{max} \frac{du_{max}}{dx} + \varkappa u_* \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \varkappa u_* z \frac{\partial^3 \psi}{\partial z^3}. \tag{13.20}$$

В уравнении (13.20) $u_* = u_{max}\sqrt{c_f/2} = A u_{max} x^m$; $z = \varkappa A x^{m+1}\eta$.

Так как η предполагается координатой подобия, то скорости u_x, u_z, а следовательно, и функцию тока ψ необходимо выразить через η. С этой целью уравнение (13.20) перепишем в виде интегральных комплексов

$$\frac{\psi}{z} \frac{\psi}{xz} F_1(\eta) \infty \varkappa u_* \frac{\psi}{z^2} F_2(\eta),$$

где $F_1(\eta)$ и $F_2(\eta)$ — некоторые неизвестные функции.

Простые преобразования позволяют найти $\psi = \varkappa u_* x f(\eta)$ [отношение $F_2(\eta)/F_1(\eta)$ обозначено здесь через $f(\eta)$].

Теперь необходимо перейти от дифференцирования по x и z к дифференцированию по η, используя правила дифференцирования сложных функций [6]. Например,

$$\frac{\partial\psi}{\partial z} = \frac{\partial\psi}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z};$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x} + \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_{\eta=\text{const}};$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}\right] = \frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial z}\right)^2 + \frac{\partial\psi}{\partial\eta}\frac{\partial^2\eta}{\partial z^2}.$$

Выполняя все необходимые математические операции, вместо уравнения (13.20) в частных производных можно получить обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\eta f'''(\eta) + f''(\eta)\,[1 + (m+1)\,f(\eta)] + m_1 = 0. \qquad (13.21)$$

В уравнении (13.21) слагаемое m_1 определяет закон изменения максимальной скорости по длине потока.

Таким образом, использование теории подобия позволяет преобразовать дифференциальные уравнения в частных производных и получить так называемые автомодельные решения относительно координаты η к обыкновенным дифференциальным уравнениям. При отсутствии автомодельного решения для данной задачи уравнение в частных производных сводится не к одному уравнению, а к системе дифференциальных уравнений [8]. В рассмотренных примерах мы ограничились преобразованием исходных уравнений. Подобным же образом следует преобразовать к новым переменным граничные условия. Как было показано С. Клайном, в ряде случаев именно граничные условия оказывают решающее влияние на выбор координаты подобия.

Преобразование уравнений и граничных условий к координатам подобия не только позволяет получить максимальную информацию о рассматриваемом явлении, но и может служить основой достаточно строгого научного подхода к проблеме построения приближенных моделей и разработке методов аналогового моделирования.

§ 49. Моделирование высокоскоростных открытых потоков

Моделирование представляет собой замену явления, реально существующего в натуре, физически подобным явлением на модели. Основная идея моделирования состоит в том, чтобы на наиболее простой модели и с наименьшими материальными затратами получить результаты, описывающие исследуемое явление с заданной степенью точности. Выбор вида модели, ее параметров, пересчет данных испытаний на модели к условиям натурного явления, а также оценка точности и надежности моделирования — все эти вопросы решаются на основе теории подобия. Строго говоря, для соблюдения подобия натурному явлению на модели необходимо, чтобы соблюдалась идентичность всех определяющих критериев при условии геометрического подобия модели и натуры. Как правило, строгое соблюдение идентичности всех определяющих критериев подобия при моделировании не может быть выполнено. Например, при решении некоторой задачи требуется соблюдение двух условий: $\mathrm{Fr} = U^2/gL = \mathrm{idem}$ и $\mathrm{Re} = UL/\nu = \mathrm{idem}$ (idem обозначает идентичность данного критерия на модели и натуре). Идентичность критерия Re обеспечивается при $M_u = M_\nu M_L^{-1}$, где M_u, M_ν и M_L — масштабы скорости, вязкости и линейного размера соответственно.

Для идентичности критерия Фруда необходимо, чтобы $M_u = M_g^{1/2} M_L^{1/2}$ (здесь M_g — масштаб ускорения силы тяжести).

Из этих соотношений следует $M_L = M_\nu^{2/3} M_g^{-1/3}$. Чтобы масштаб линейных размеров был минимальным, необходимо выбрать масштабы M_ν и M_g наименьшими. Однако в реальных условиях моделирования масштаб ускорения силы тяжести $M_g = 1$. Что касается масштаба вязкости, то, если использовать в качестве жидкости для моделирования летучие эфиры, можно получить $M_\nu \approx 1/3$. В этом случае масштаб линейного размера модели $M_L \approx 2$, т.е. модель всего в 2 раза должна быть меньше, чем натурный объект. Учитывая, что при моделировании высокоскоростных потоков приходится изучать достаточно крупные натурные объекты, выдерживать одновременно условия $\mathrm{Re} = \mathrm{idem}$ и $\mathrm{Fr} = \mathrm{idem}$ практически невозможно. Поэтому в практике гидравлического моделирования часто используют так называемое приближенное моделирование. Принципы построения приближенных моделей основываются на теории подобия гидравлических явлений. В частности, если моделируемое явление описывается дифференциальными уравнениями и граничными условиями, выбрать наиболее существенные для данной задачи параметры можно в результате сравнительной оценки соответствующих безразмерных комплексов.

Теория приближенного подобия позволяет иногда установить степень погрешности, связанной с исключением того или иного критерия подобия. Один и тот же критерий оказывает решающее влияние на исследуемое явление в определенной области своего изменения и не оказывает практически никакого влияния в другой области. Следуя определению, данному В. М. Лятхером и А. М. Прудовским, будем называть автомодельной такую область значений аргумента, в пределах которой изменение этого аргумента приводит к изменению рассматриваемой функции не более чем на заданную малую величину. Например, если сравнивается развитие пограничного слоя на модели и натуре, то, как показано в предыдущем параграфе, можно выбрать такую безразмерную координату η, которая позволяет получить автомодельное решение. В данном случае при фиксированном значении координаты η координаты x и z не оказывают самостоятельного влияния на решение. Аналогично в определенном диапазоне изменения числа Рейнольдса влияние его на характеристики течения пренебрежимо мало, т. е. можно говорить об автомодельности по числу Re. Подобным же образом при определенных условиях принимают автомодельность по числу Фруда и Вебера. Более того, иногда выделяют автомодельные области по некоторым геометрическим параметрам. Так, например, в области гладкого сопротивления гидравлические характеристики течения не зависят от относительной шероховатости канала (k_s/H). В области автомодельности по какому-либо параметру влияние этого параметра играет первостепенную роль в практике гидравлического моделирования. Автомодельность, полученная для определенных граничных условий при переходе к другим граничным условиям, может нарушаться. Так, например, в гидравлике широко используется понятие автомодельности по числу Рейнольдса. Для течений в трубах и каналах с равнозернистой или технической шероховатостью при значениях параметра $u_* k_s/\nu > 70$ (см. гл. 3) влияние числа Re на коэффициент гидравлического сопротивления λ пренебрежимо мало (по сравнению с влиянием относительной шероховатости k_s/H). Другими словами, при $u_* k_s/\nu > 70$ гидродинамические характеристики обычно считаются автомодельными по числу Рейнольдса. Вместо параметра $u_* k_s/\nu$ часто используют параметр $Uk_s/\nu = (UH/\nu)(k_s/H)$. Согласно данным А. Д. Альтшуля [1], для равнозернистой и технической шероховатости режим течения может считаться автомодельным по числу Рейнольдса при $UH/\nu > 500H/k_s$. В случае регулярной усиленной шероховатости, как показывают тщательные эксперименты, выполненные под руководством акад. М. Д. Миллионщикова, автомодельность по Re не достигается вплоть до значений $Uk_s/\nu \approx 10^4$. Эти эксперименты указывают на необходимость осторожного подхода к прогнозированию областей автомодельности при разных граничных условиях. Однако при моделировании часто приходится предполагать, что автомодельность, полученная при определенных граничных условиях, сохраняется при других граничных условиях. Поскольку такое предположение не всегда справедливо, необходимо его проверить на модели при реальных граничных условиях.

Все открытые потоки можно разделить на потоки с гладкой свободной поверхностью и высокоскоростные потоки. При моделировании потоков с гладкой свободной поверхностью, таких, как напорные потоки, необходимым и достаточным условием подобия можно считать подобие геометрических характеристик и равенство коэффициентов гидравлического сопротивления [1]

$$\lambda_{\text{м}} = \lambda_{\text{н}}. \qquad (13.22)$$

Эти два условия оказываются достаточными при моделировании не только равномерных открытых потоков, но и неравномерных (например, на начальных участках водосливов и быстротоков). Действительно, согласно соотношениям, приведенным в гл. 6, распределение скоростей на начальном участке определяется коэффициентом гидравлического сопротивления $\lambda_{\text{с}}$, максимальной скоростью u_{max} и толщиной пограничного слоя δ. Максимальная скорость (при $u_0 \approx 0$) на расстоянии x, как показано ранее, зависит от уклона дна канала. Толщина пограничного слоя на расстоянии x зависит только от h_c и λ_c. Таким образом, условия моделирования открытых потоков с гладкой свободной поверхностью можно представить в виде $\lambda_{см} = \lambda_{сн}$.

Из (13.22) имеем по формуле Дарси $(8gH_{см}i_м/U_{см}^2) = (8gH_{сн}i_н/U_{сн}^2)$. Учитывая, что, согласно геометрическому подобию,

$$i_м = i_н, \tag{13.23}$$

находим $(U_{см}/U_{сн}) = (H_{см}/H_{сн})^{1/2}$
или

$$M_u = M_L^{1/2}. \tag{13.24}$$

Соотношение (13.24) формально определяют, как правило, моделированием по числу Фруда. Учитывая, однако, что в данном случае рассматривается автомодельное течение по Фруду, более правильно определять такое моделирование как моделирование по коэффициенту гидравлического сопротивления λ.

В высокоскоростных потоках (как указывалось в гл.1) характеристики течения дополнительно зависят от параметров возмущений на свободной поверхности. Возмущения на свободной поверхности определяются двумя безразмерными комплексами:

$$u_z'^2/gl \quad и \quad (\rho u_z'^2 l)/\sigma,$$

где $u_z'^2$ — интенсивность пульсаций;
l — масштаб возмущения.

Параметр $\overline{u_z'^2}/gl$ для течения в канале представим в виде

$$\frac{u_z'^2}{gl} = \frac{\bar{u}^2}{gH}\,\frac{u_z'^2}{u_*^2}\,\frac{u_*^2}{U^2}\,\frac{L}{l}\,\frac{H}{L}.$$

Если в качестве характерного возмущения взять такое возмущение, которое обладает средней энергией турбулентности, то для соответствующей пульсации $u'^2_z = \overline{u_z'^2} \approx u_*^2$. При этом, имея в виду, что масштаб l пропорционален глубине H, находим:

$$(\overline{u_z'^2}/gl) \sim (U^2/gH)\,\lambda.$$

Но так как $\lambda \sim gHi/U^2$, то условие $\overline{u_z'^2}/gl = \mathrm{idem}$ сводится к простому геометрическому условию $i = \mathrm{idem}$. Поскольку возмущения свободной поверхности связаны с действием не только средней пульсации $\overline{u_z'^2}$, необходимо установить возможность моделирования всего спектра турбулентных пульсаций скорости.

Анализ экспериментальных данных, приведенных в гл. 8, показывает, что нормированные спектры турбулентных пульсаций скорости могут быть представлены в универсальном виде $u_z'^2 = f(l/H)$. Это позволяет считать, что возможно моделировать весь спектр турбулентных пульсаций скорости. Причем для моделирования спектра возмущений на свободной поверхности требуется соблюдение следующих обычных условий моделирования:

$$\left.\begin{aligned}\lambda_{\text{м}} &= \lambda_{\text{н}};\\ M_u &= M_{\text{н}}^{1/2}.\end{aligned}\right\} \tag{13.25}$$

Необходимо, однако, указать, что условия (13.25) имеют определенные ограничения, связанные с автомодельностью по параметру $\rho u_z'^2 l/\sigma$. Силы поверхностного натяжения σ на границе вода — воздух как силы тяжести способствуют стабилизации свободной поверхности. Поэтому вследствие независимости действия сил относительное влияние параметра $\rho u_z'^2 l/\sigma$ мало, при условии

$$(gl/u_z'^2) \gg (\sigma/\rho u_z'^2\, l). \tag{13.26}$$

Из этого соотношения получаем:

$$l \gg \sqrt{\sigma/\rho g}. \tag{13.27}$$

Так как для границы вода — воздух $\sigma = 0{,}072$ Н/м, то из выражения (13.27) получаем, что влияние сил поверхностного натяжения несущественно для возмущений, масштаб которых $l \gg 8\cdot10^{-3}$ м. Если величина сил поверхностного натяжения допускается не более 10% сил тяжести, то можно не учитывать поверхностное натяжение при $l > 0{,}025$ м.

Тогда по зависимости (13.26) $\sigma/(\rho u_z'^2 l) = 0{,}1\,(gl)/u_z'^2$; $l = \sqrt{10\sigma/\rho g}$.

Пусть, например, моделируется аэрированный высокоскоростной поток в канале, и по условиям моделирования требуется, чтобы силы поверхностного натяжения составляли не более 10% сил тяжести. Согласно данным, приведенным в гл. 10, наиболее мощные возмущения свободной поверхности связаны с турбулентными пульсациями, имеющими масштаб, равный глубине потока. Анализ спектральной плотности (см. гл. 8) показывает, что энергия пульсаций, имеющих масштаб $l = L = 0{,}3H$ (где L — макромасштаб турбулентности), в 10 раз меньше, чем энергия пульсаций, имеющих масштаб $l = H$. Поэтому аэрация высокоскоростного потока определяется в основном действием пульсаций, имеющих масштабы $0{,}3H \leqslant l \leqslant H$. Для моделирования возмущений, имеющих размер $L = H = 0{,}3H$, из соотношения (13.27) получаем наименьшую возможную глубину на модели $h_{\text{м}} = 0{,}1$ м. При меньших значениях глубины на модели возмущение, связанное с действием пульсаций размера L, будет моделироваться с искажением и состояние поверхности потока на модели и в натуре не будет подобным. Соотношение (13.27) представляет собой дополнительное условие корректного моделирования высокоскоростных потоков.

§ 50. Экспериментальные стенды и приборы для исследования высокоскоростных открытых потоков

При проведении экспериментальных исследований высокоскоростных открытых потоков для выявления их кинематических и динамических особенностей предъявляются особые требования как к экспериментальным стендам, так и к измерительным приборам.

Специфические задачи исследования высокоскоростного потока делятся на две большие группы:

1) исследование осредненных (по времени) характеристик потока;

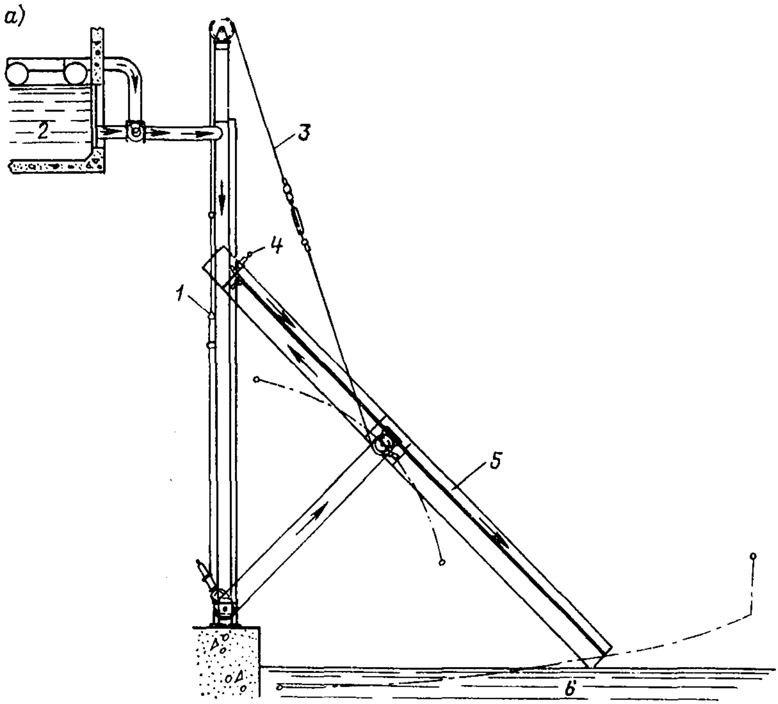
2) исследование пульсационных характеристик потока.

Осредненные по времени характеристики могут быть локальными (например, осредненная местная скорость и осредненное воздухосодержание в каждой точке потока) и интегральными. Интегральные характеристики потока — средняя по сечению скорость U, среднее воздухосодержание α и характерная глубина H — позволяют при известном уклоне канала определить важнейший интегральный динамический параметр потока — коэффициент гидравлического сопротивления λ.

К локальным пульсационным характеристикам высокоскоростного потока относятся турбулентные пульсации скорости и пульсации плотности в точке измерений, турбулентные пульсации давления, пульсации уровня свободной поверхности.

Параметры и конструктивное исполнение экспериментального стенда определяются задачами исследований. Для лабораторных исследований конкретных объектов их модели выполняют в соответствии с принципами моделирования, рассмотренными в предыдущих параграфах. Здесь же остановимся лишь на некоторых особенностях проектирования стендов для изучения физических особенностей высокоскоростных потоков.

Осредненные интегральные и локальные характеристики высокоскоростных потоков исследуются как в условиях равномерного, так и в условиях неравномерного движения. Для получения равномерного высокоскоростного потока на экспериментальном стенде необходимо, чтобы длина экспериментального канала $L_к$ была больше длины стабилизации течения $x_с$, которая определяется соотношением (6.35). Согласно этому соотношению, длина экспериментального канала назначается тем больше, чем больше глубина исследуемого потока и чем меньше коэффициент гидравлического сопротивления λ. Оценочные расчеты $L_к$ по этому соотношению показывают, что для гладких каналов ($\lambda \approx 0{,}013 \div 0{,}015$) эта длина может достигать ($300 \div 400$) H. В условиях сильно шероховатых каналов ($\lambda \approx 0{,}08 \div 0{,}09$) необходимая длина канала также остается достаточно большой ($L_к \approx 100H$). Когда длина экспериментального канала недостаточна, обычно считается возможным для уменьшения участка неравномерного течения использовать щит-регулятор на входе в канал (рис. 13.2). С помощью щита-регулятора на входе в канал устанавливается глубина, близкая к глубине равномерного движения. При таком положении щита средняя скорость течения на входе в канал оказывается равной или близкой к средней скорости равномерного движения потока. Однако практическое постоянство глубины и средней скорости потока по длине канала является необходимым, но недостаточным условием равномерного (т. е. во всех отношениях стабилизированного) течения. Вследствие нарастания



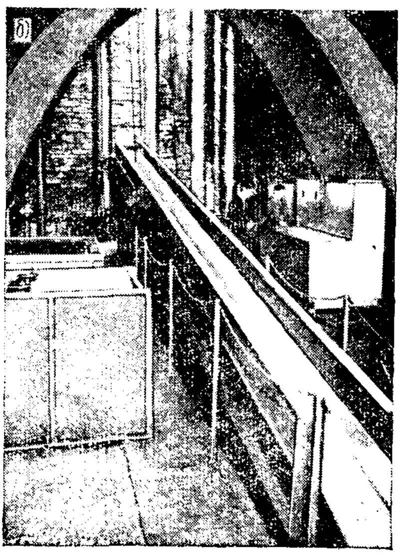


РИС. 13.2

а — принципиальная схема стенда (Миннесотский университет, США); 1 — направляющие стойки; 2 — бак-питатель; 3 — вантовая система регулирования уклона; 4 — автоматический щит-регулятор; 5 — канал с переменным уклоном; 6 — нижний бьеф; б — внешний вид канала со щитом-регулятором

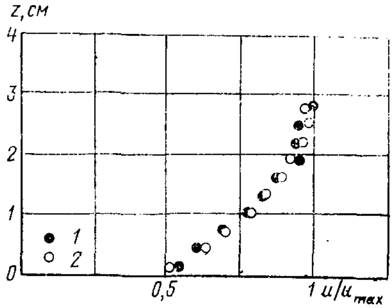


РИС. 13.3

1 — распределение скоростей при подаче из-под щита; 2 — то же, при свободной подаче

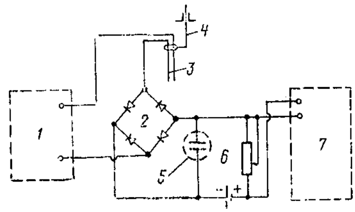


РИС. 13.4

1 — источник питания (генератор высокой частоты); 2 — выпрямитель; 3 — двухэлектродный датчик; 4 — мерная игла; 5 — емкостный фильтр; 6 — компенсатор постоянной составляющей; 7 — шлейфовый осциллограф

пограничного слоя на дне канала изменяется и распределение скоростей по глубине потока: скорости увеличиваются у поверхности и уменьшаются в придонной области. При этом изменяются также и пульсационные характеристики. Можно показать (аналогично тому, как это было сделано в гл. 6 для условий ускоряющегося потока), что интенсивность роста пограничного слоя δ/x при $U = \text{const}$ будет функцией коэффициента гидравлического сопротивления λ_c и безразмерного расстояния x/h_c, т. е. определяется лишь параметрами стабилизированного равномерного течения [см. зависимость (6.26)]. Следовательно, использование щита-регулятора на входе в канал практически не уменьшает длину участка неравномерного движения потока. Данные, представленные на рис. 13.3, при $(x/H_c) = 30$ подтверждают это: щит-регулятор лишь выравнивает поток при входе его в канал.

При исследовании характеристик катящихся волн параметры экспериментального стенда должны обеспечить их возникновение и развитие, т. е. длина канала $L_к$ должна способствовать росту волн вплоть до их стабилизации. Анализ данных, приведенных в гл. 9, показывает, что длина стабилизации волн в 15—20 раз превышает x_c, может достигать 1000 H и более. Поэтому исследование в лабораторных условиях естественного развития катящихся волн, как правило, возможно при весьма малых глубинах потока. В связи с этим делаются попытки искусственно создавать волны. При этом характеристики потока на стенде должны отвечать условиям неустойчивости, а параметры искусственно созданных волн не должны сильно отличаться от параметров стабилизированных волн (см. гл. 9).

Исследуя характеристики неравномерного движения, а также развитие возмущений на входном участке канала (например, образование косых волн), необходимо особое внимание уделять гашению избыточной кинетической энергии потока на подходе его к каналу. Градиент скорости и уровень пульсаций в потоке следует сводить до минимума. Обычно для этой цели устраивают достаточно большую емкость, которая плавно сопрягается с экспериментальным каналом. Для получения плоского потока экспериментальный канал должен иметь ширину $B > (8 \div 10)H$ и возможно более гладкие боковые стенки.

Рассмотрим устройство и основные характеристики приборов, применяемых для исследований осредненных характеристик высокоскоростных потоков. Глубину H высокоскоростного (неаэрированного) потока с пульсирующей свободной поверхностью часто измеряют электрическим тастером — мерной иглой с электрическим контактом. При соприкосновении с водой загорается электрическая лампочка. Поскольку возмущения на свободной поверхности имеют различную высоту, то с помощью такого тастера фиксируют верхнее положение контакта с наиболее «высокими» возмущениями на свободной поверхности (отдельные вспышки лампы) и нижнее положение постоянного контакта с водой (лампа горит постоянно). Считая, что поверхность потока располагается посередине между зафиксированным верхним и нижним положением иглы, определяют глубину потока, предполагая симметричность формы возмущений относительно его поверхности. Поскольку в действительности возмущение несимметрично, такой метод измерения глубины можно рассматривать лишь как приближенный. Как было показано в главах 8 и 9, и турбулентные возмущения, и катящиеся волны несимметричны. В связи с этим контактный метод измерения глубины может дать систематическую погрешность. Чтобы исключить эту погрешность, необходимо регистрировать мгновенное положение уровня с последующим его осреднением за достаточно большой интервал времени. Мгновенное положение уровня можно регистрировать двухэлектродным датчиком, закрепленным на мерной игле. Сигнал датчика регистрируется обычно на шлейфовом осциллографе. Измерительная схема прибора приведена на рис. 13.4. Датчик представляет собой сопротивление, величина которого изменяется в зависимости от уровня жидкости между электродами. Следует отметить, что для устранения электролиза прибор питается переменным током. Емкость конденсатора в фильтре (см. рис. 13.4) рассчитывается с учетом условия неискаженного прохождения тех частот, которые отвечают возмущениям на свободной поверхности. Применение прибора позволяет исключить систематические погрешности при измерении глубины, а также получить информацию о геометрических характеристиках возмущений на поверхности потока.

Глубина высокоскоростного аэрированного потока устанавливается на основе анализа эпюры аэрации. Воздухосодержание потока обычно измеряется прибором (рис. 13.5), принцип действия которого аналогичен вышеописанному. Отличие состоит лишь в устройстве датчика, который в данном приборе представляет собой зонд игольчатого типа, выполненный из двух электрически изолированных проволок, свернутых в двойную спираль вокруг оси зонда. Наружная поверхность навитых проволок обнажена. Зонд реагирует на изменение проводимости водовоздушной смеси. Как было пока-

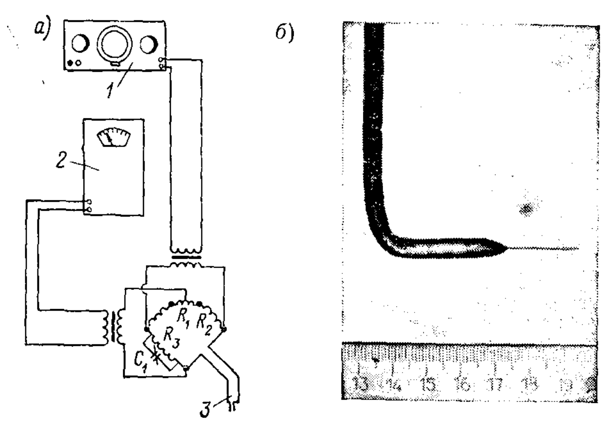


РИС. 13.5

а — электрическая схема прибора: 1 — источник питания; 2 — регистратор (шлейфовый осциллограф или стрелочный прибор); 3 — датчик; б — внешний вид датчика

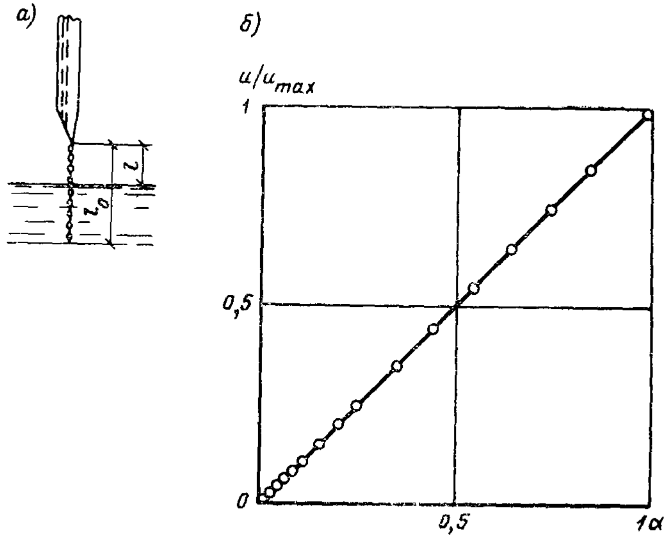


РИС. 13.6

а — схема калибровки; б — пример калибровочного графика, u_{max} — сигнал при $l=l_0$

зано Рэлеем, электрическое сопротивление смеси линейно зависит от объемного воздухосодержания потока, а показания прибора не зависят от скорости последнего (что было экспериментально доказано О. Лэмбом). Поэтому вместо тарировки прибора можно использовать калибровку его в статических условиях. Калибровка прибора выполняется погружением зонда в покоящуюся жидкость так, чтобы определенная его часть находилась на воздухе (рис. 13.6). Отношение длины l к общей длине зонда l_0 есть объемное воздухосодержание $\overline{\alpha}$. При этом по вторичному прибору отмечается сигнал u. Пример калибровочного графика приведен на рис. 13.6, *б*.

Поскольку воздухосодержание в точке измерений пульсирует относительно некоторой средней величины, для получения достоверного осредненного значения необходимо регистрировать мгновенный сигнал и осреднять его за достаточно большой промежуток времени, значительно превышающий период пульсации. Если в качестве регистратора используется стрелочный прибор, это может привести к ошибкам, связанным с нелинейной динамической характеристикой прибора. Чтобы исключить эти ошибки и не производить осреднения мгновенного сигнала, часто используют прибор, имеющий другой принцип действия (рис. 13.7). Зонд такого прибора аналогичен вышеописанному за исключением того, что свитые в спираль проволоки не имеют изоляции лишь на концах. Контакты между проволоками осуществляются через воду. При малой толщине зонда пузырьки воздуха, находящиеся в потоке, «накалываются» на зонд и размыкают контакт. При этом прохождение импульсов на счетчик *4* прекращается, в то время как счетчик *3* продолжает регистрировать все импульсы. Осредненное воздухосодержание в точке получают делением числа импульсов, зарегистрированных счетчиком *4*, на общее число импульсов, зарегистрированных счетчиком *3*. Среднее воздухосодержание $\overline{\alpha}$ и глубину эквивалентного потока чистой воды H можно определить интегрированием эпюры аэрации.

Измерение осредненной местной скорости имеет свои особенности лишь в поверхностной зоне высокоскоростного потока. Здесь на измерительный прибор непосредственно воздействуют интенсивные поверхностные возмущения и воздушные включения при аэрации по-

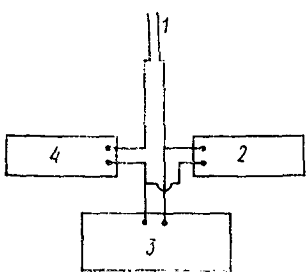


РИС. 13.7

1 — зонд; 2 — генератор импульсов; 3 — базовый счетчик импульсов; 4 — счетчик импульсов, проходящих через зонд

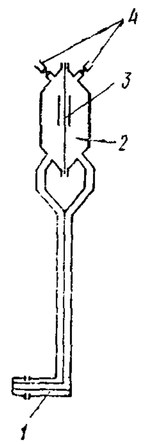


РИС. 13.8

1 — насадок Пито; 2 — мембранный датчик; 3 — мембрана с тензорезистором; 4 — вентили для удаления воздуха из магистралей и полостей датчика тока. Были сделаны попытки для измерений в верхней зоне потока использовать стандартную трубку Пито. Для работы в слое водовоздушной смеси измерительная система трубки Пито была усовершенствована, чтобы исключить попадание в нее пузырьков воздуха (попадание пузырьков воздуха в магистрали статического и динамического давления резко искажает показания трубки Пито). С этой целью перед измерением в систему трубка Пито — манометр подается противотоком чистая вода под давлением, превышающим динамическое давление в измеряемой точке. Этот прием позволяет удалить из магистралей системы пузырьки воздуха. Через некоторое время после отключения противотока давление в системе устанавливается равным измеряемому. Однако работа с такой измерительной системой требует много времени, поэтому для измерений часто используют трубку Пито с мембранным датчиком (рис. 13.8). Прогиб мембраны, пропорциональный динамическому напору, преобразуется с помощью тензорезисторов в электрический сигнал. Если мембрана достаточно жесткая, то прогиб ее невелик, и переток воды в магистралях практически отсутствует. Это исключает попадание в систему воздушных включений. Малый объем жидкости в системе трубки Пито с мембранным датчиком и преобразование скоростного напора в электрический сигнал позволяют использовать ее для регистрации не только осредненной, но и мгновенной скорости.

По данным о мгновенной скорости можно установить турбулентные характеристики потока. Однако для того чтобы получить эти характеристики неискаженными, измерительная система, включающая датчик, усилитель, регистратор-осциллограф, должна обладать определенными свойствами. Одной из основных характеристик датчика является его пространственная разрешающая способность. Пространственная разрешающая способность определяется размером приемной площадки датчика L_p, на которую непосредственно воздействует поток (для случая трубки Пито размер L_p равен диаметру внутреннего отверстия трубки). Размер L_p определяет масштаб наименьших вихрей, которые могут быть без искажения зарегистрированы данным прибором. Действительно, если масштаб вихрей $l \ll L_p$, то датчик одновременно будет воспринимать действие нескольких соседних вихрей. Величина L_p для измерителя мгновенной скорости выбирается в соответствии с поставленными задачами исследований. Если предполагается исследовать только наиболее крупные энергонесущие вихри, имеющие масштаб $l = 0{,}3\ H$, размер приемной площадки датчика может быть соответственно увеличен. Если необходимо исследовать весь спектр турбулентных пульсаций вплоть до масштабов диссипации ($l_v/H \approx 10^{-2} \div 10^{-3}$), размер приемной площадки датчика должен быть небольшим. Требование достаточной пространственной разрешающей способности датчика относится к измерителям мгновенной скорости любых типов. Сильно уменьшить приемную площадку датчика (для повышения его пространственной разрешающей способности) не всегда удается.

Например, если датчик основан на динамическом принципе (т. е регистрирует динамическое воздействие потока), уменьшение размеров приемного элемента уменьшает величину воспринимаемой силы, т. е. уменьшает полезный сигнал. Компенсировать это за счет применения больших коэффициентов усиления полезного сигнала не удается, так как вместе с полезным сигналом усиливаются и помехи. Помехи, имеющие, как правило, случайный характер, не удается отделить от полезного сигнала, характер изменения которого также случаен.

Для таких измерительных устройств пространственная разрешающая способность датчика $L_{\text{р}}$ выбирается с учетом возможностей и качества усилительной и регистрирующей аппаратуры. Пространственная разрешающая способность датчика должна соответствовать частотной разрешающей способности аппаратуры. Разрешающая способность усилительной и регистрирующей аппаратуры по частоте может устанавливаться при выбранном $L_{\text{р}}$ и известной заранее скорости потока $n_{\text{р}} \approx U/L_{\text{р}}$. Чем меньше $L_{\text{р}}$ и больше скорость потока U, тем более высокой должна быть разрешающая способность аппаратуры по частоте (так, например, при $L_{\text{р}} = 10^{-3}$ м и $U = 10$ м/с $n = 10^4$ Гц $= 10$ кГц). В пределах рабочего диапазона по частоте, ограниченного сверху частотой $n_{\text{р}}$, вторичная аппаратура должна работать как линейная динамическая система. Динамическую систему считают линейной, если выходной сигнал совпадает с сигналом на входе по частоте, отличаясь лишь по амплитуде и фазе. Динамическую систему характеризует так называемая комплексная передаточная функция $\Pi(i\omega) = ce^{-ia\omega}$, где $c = |\Pi(i\omega)|$ — модуль передаточной функции (амплитудный параметр); a — фазовый параметр передаточной функции. Так, например, спектры на выходе $S_y(\omega)$ и входе $S_x(\omega)$ линейной динамической системы связаны соотношением

$$S_y(\omega) = c^2 S_x(\omega), \tag{13.28}$$

где $\omega = 2\pi n$ — круговая частота.

Модуль передаточной функции равен отношению значений сигнала на выходе и входе системы и определяется амплитудной характеристикой системы. Фазовый параметр системы a определяет сдвиг фаз между сигналами входа и выхода. Хотя соответствие между сигналом на выходе измерительной системы и сигналом на входе можно установить при любом известном виде передаточной функции, измерения и анализ становятся значительно проще, если в рабочем частотном диапазоне амплитудная характеристика постоянна, а фазовая линейна. Требование постоянства амплитудной характеристики будет выполняться при $c = \text{const}$, линейность фазовой характеристики — при $a = \text{const}$.

Если исследуются пульсации, представляющие собой стационарный случайный процесс, то постоянное несовпадение по фазе сигналов на выходе и входе измерительной системы при $a = \text{const}$ роли не играет. Фазовые характеристики измерительных систем целесооб-

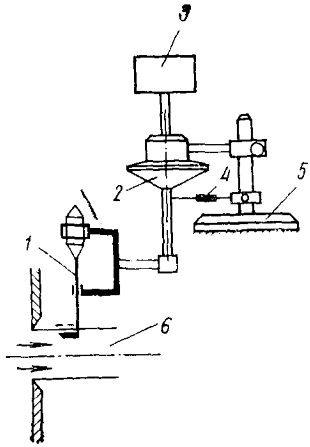


РИС. 13.9

1 — датчик; 2 — вибратор; 3 — генератор; 4 — регистратор вибраций; 5 — опорная конструкция вибратора; 6 — струя

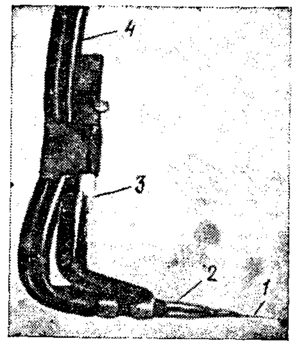


РИС. 13.10

1 — приемный элемент (вид сбоку); 2 — корпус датчика; 3 — захват; 4 — электрический кабель

разно выбирать одинаковыми при одновременном измерении и анализе турбулентности в разных точках потока.

Выражение (13.28) показывает, что соотношение спектров на входе и выходе системы не зависит от фазовой характеристики и определяется только амплитудной характеристикой системы. Амплитудная характеристика измерительной системы, состоящей из нескольких звеньев (например, из датчика, усилителя и шлейфового осциллографа), исследуется по звеньям.

Первоначально устанавливается амплитудная характеристика шлейфов (гальванометров осциллографа). Для этого от звукового генератора на шлейф подается сигнал определенного напряжения. Частота сигнала ω изменяется в пределах рабочего диапазона. Отклонение светового луча A регистрируется при каждой частоте сигнала. Амплитудная характеристика строится в координатах $A = f(\omega)$. В рабочем диапазоне частот при постоянном напряжении входного сигнала величина A должна быть постоянной. Аналогично исследуется и амплитудная характеристика усилителя. Во всем рабочем диапазоне частот соотношение амплитуд (напряжений) выходного и входного сигналов усилителя должно быть постоянным. Далее определяется амплитудная характеристика датчика.

Исследование амплитудной характеристики датчика является наиболее сложным, поскольку не всегда возможно организовать одинаковое пульсирующее воздействие на датчик в рабочем диапазоне частот. Для этой цели используются сложные стенды, позволяющие создавать и контролировать пульсирующее воздействие на датчик. На рис. 13.9 приведена схема динамического стенда для исследования амплитудной характеристики датчиков скорости потока.

Рассмотрим для примера исследование амплитудной характеристики трубки Пито с мембранным датчиком давления. Динамический стенд (см. рис. 13.9), включающий струйную установку, вибратор, генератор для питания вибратора и регистратор вибраций, должен быть подготовлен к работе: установлен режим струйной установки, калиброванным прибором измерена осредненная скорость вблизи границы струи. Испытуемый датчик жестко закрепляется на вибраторе так, чтобы рабочий насадок трубки Пито при включенном вибраторе оказывался то в струе, то вне ее. Регулируя напряжение генератора, питающего вибратор, обеспечиваем постоянную амплитуду колебаний. При постоянной амплитуде колебаний рабочий насадок достигает одной и той же точки в сечении струи, т. е. периодически оказывается под действием одного и того же давления. Исследование амплитудной характеристики трубки Пито с мембранным датчиком показало, что она сохраняется постоянной до частот, не превышающих 100 Гц. Таким образом, низкая частотная разрешающая способность трубки Пито с мембранным датчиком не соответствует ее высокой пространственной разрешающей способности. Действительно, при $n_{\text{р}} = 100$ Гц и скорости потока равной, например, 10 м/с, минимальный размер вихрей, которые будут регистрироваться без искажения, составит 0,1 м (в то время как $L_{\text{р}} = 10^{-3}$ м).

При постоянной пульсирующей нагрузке и частотах $n > n_{\text{р}}$ модуль передаточной функции нарастает по мере приближения частоты колебаний к резонансной частоте датчика n_g (собственная частота колебательной системы датчика). Поэтому расшифровка выходного сигнала системы становится более сложной.

В тех случаях, когда нельзя исследовать амплитудные характеристики, частотную разрешающую способность датчика определяют приближенно по соотношению

$$n_{\text{р}} \approx (1/3 \div 1/4)\, n_{\text{д}},$$

где $n_{\text{д}}$ — резонансная частота датчика в воде.

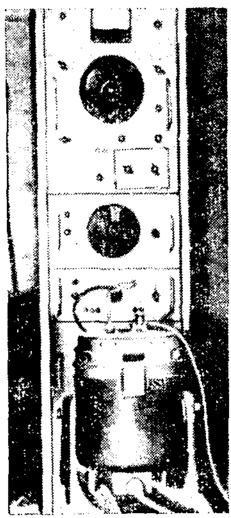
Резонансная частота колебательной системы датчика (например, мембраны) зависит от ее массы, жесткости и конструктивного исполнения. Чем больше величина колеблющейся массы, тем ниже резонансная частота.

Исследование резонансных характеристик трубки Пито с мембранным датчиком показало, что при не заполненных жидкостью магистралях резонансная частота мембраны близка к 1000 Гц. Резкое уменьшение резонансной частоты при заполнении магистралей водой связано с увеличением массы жидкости в системе, приводимой в колебательное движение (т. е. присоединенной массы жидкости).

Следовательно, для повышения резонансной частоты датчика динамического типа необходимо уменьшить его размеры, увеличить жесткость и уменьшить величину присоединенной массы. С учетом этих требований создан датчик скорости динамического типа с плоским приемным элементом, внешний вид которого показан на рис. 13.10. Размер приемного элемента датчика около 5 мм (см. рис. 13.10). Выполненый из упругого материала приемный элемент с наклеенными на него тензорезисторами одновременно является преобразователем силового воздействия в электрический сигнал. Высокая жесткость, малый вес и небольшой размер колебательной системы позволили увеличить частотную разрешающую способность этого прибора.

На рис. 13.11 показан стенд для динамических испытаний, а также представлена амплитудная характеристика датчика с плоским приемным элементом, полученная на этом стенде. Характеристика позволяет установить, что действительно резонансная частота датчика близка к 1000 Гц, и разрешающая способность по частоте может быть принята равной 250 Гц с некоторым запасом. (К датчикам, воспринимающим динамическое воздействие потока, следует отнести и датчики давления. Характеристики этих датчиков исследуются так же, как и характеристики динамических датчиков скорости.)

В тех случаях, когда ставится задача исследовать весь спектр турбулентных пульсаций вплоть до масштабов диссипации, используют измерительные приборы, основанные на принципах массо- или теплообмена. На принципе регистрации массообмена сравни-



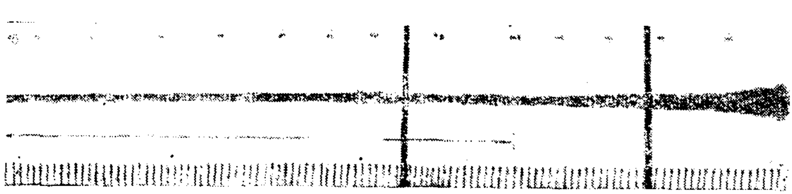


РИС. 13.11

Внешний вид стенда с установленным датчиком (струйная установка не показана) и амплитудная характеристика датчика с плоским приемным элементом тельно недавно разработан электрохимический метод измерения скорости потока. Сущность метода состоит в следующем. Если в поток проводящей жидкости поместить два электрода и приложить к ним напряжение, то между электродами возникает ток. На катоде происходит восстановление, а на аноде — электроокисление ионов. При постоянном напряжении между электродами и постоянной концентрации ионов сила тока зависит только от скорости подачи ионов к электродам. Теоретическими и экспериментальными исследованиями установлено, что сила тока

$$I/I_0 \approx 1 + au^n, \tag{13.29}$$

где u — скорость потока;
I_0 — ток при отсутствии течения жидкости;
a — коэффициент пропорциональности;
n — коэффициент, имеющий порядок 0,5.

Поскольку разряд ионов происходит мгновенно, датчик не имеет ограничений по частотной разрешающей способности. По конструктивному исполнению электрод может быть предельно малого размера. Следовательно, по принципу действия электрохимический датчик скорости обладает идеальными техническими данными. Однако ряд обстоятельств затрудняет работу этого прибора: чувствительность к изменению химического состава и температуры воды, к загрязнению электродов продуктами электролиза и взвешенными частицами, имеющимися в воде и т. д. Тем не менее в настоящее время электрохимический метод измерения мгновенной скорости интенсивно совершенствуется и все более широко используется в гидравлических исследованиях.

Для детального исследования турбулентной структуры водных потоков применяют также термоанемометр, принцип действия которого связан с процессом теплообмена между движущейся жидкостью и тонкой нагретой металлической нитью. При охлаждении разогретой нити потоком движущейся жидкости происходит уменьшение ее электрического сопротивления. Для уменьшения тепловой инерции нить делают очень тонкой (2—10 мкм). Иногда вместо тонкой нити, прочность которой невелика, применяют металлическую пленку толщиной в несколько микронов, нанесенную на керамическое основание. Материалом для нити (или пленки) служат платина, сплав платины с иридием, вольфрам. Нить охлаждается за счет теплопроводности, свободной и вынужденной конвекции и теплового излучения. Исследования работы термоанемометра показали, что влияние излучения и свободной конвекции пренебрежимо мало. Количество тепла, отдаваемого нитью окружающей жидкости в единицу времени,

$$\alpha \pi d l \,(T_{\text{н}} - T_{\text{в}}),$$

где α — коэффициент теплоотдачи;
d, l — диаметр и длина нити соответственно;
$T_{\text{н}}$, $T_{\text{в}}$ — температуры нити и воды соответственно.

В условиях теплового равновесия такое же количество тепла должно выделяться электрическим током, проходящим через нить ($I^2R_н$), т. е.

$$I^2 R_н = \alpha\pi d l\,(T_н - T_в), \qquad (13.30)$$

где I — сила тока;
$R_н$ — электрическое сопротивление нагретой нити.

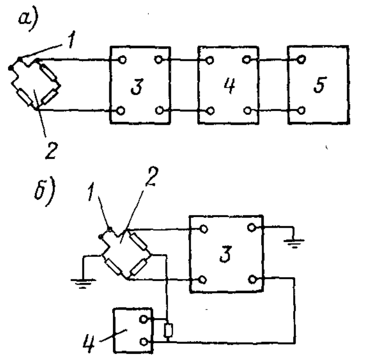


РИС. 13.12

а — термоанемометр постоянного тока; 1 — нить термоанемометра; 2 — мост Уинстона; 3 — компенсатор; 4 — усилитель; 5 — осциллограф; б — термоанемометр постоянной температуры: 1 — нить термоанемометра; 2 — мост Уинстона; 3 — усилитель; 4 — осциллограф

Тщательные теоретические и экспериментальные исследования теплообмена между цилиндрическим телом (нитью) и потоком жидкости позволили определить коэффициент теплоотдачи α в соотношении (13.30) для различных условий. Оказалось, что в общем случае для нити, расположенной поперек потока, соотношение (13.30) может быть записано в виде

$$[(I^2 R_н)/(R_н - R_0)] = A + B\sqrt{u}, \qquad (13.31)$$

где R_0 — сопротивление нити при температуре воды;
u — мгновенная скорость жидкости в точке измерений;
A и B — коэффициенты, сложным образом зависящие от физических свойств жидкости и материала нити, определяемые экспериментально.

Для измерения пульсаций скорости потока с помощью термоанемометра применяют два различных метода: метод постоянного тока и метод постоянной температуры, требующие различной вторичной аппаратуры (рис. 13.12). При первом методе регистрируется изменение сопротивления нити при I = const, при втором — изменение тока, причем с помощью системы обратной связи сопротивление и

РИС. 13.13

а — вторичная аппаратура термоанемометра: 1 — блок моста; 2 — вольтметр переменного тока; 3 — вольтметр постоянного тока; 4 — блок линеаризации; б — датчик термоанемометра температура нити поддерживаются постоянными. Более детально теория термоанемометра рассмотрена И. О. Хинце [8]. Внешний вид датчика и вторичной аппаратуры термоанемометра показан на рис. 13.13.

Для определения статистических характеристик турбулентности (см. гл. 7) необходимо выполнить различные достаточно сложные преобразования выходного сигнала. Если конкретная задача исследования турбулентности связана с анализом какой-либо одной характеристики (например, закона распределения вероятностей, корреляции, спектра), для преобразования сигнала в эту характеристику часто используют различные специальные приборы. Однако чаще оказывается более удобно определять статистические характеристики турбулентности с использованием ЭВМ. Для обработки информации о турбулентном процессе на ЭВМ эту информацию необходимо накопить (скорость обработки информации на ЭВМ обычно во много раз превосходит скорость ее поступления) и затем преобразовать к кодовому виду для ввода. Информация об исследуемом процессе на выходе измерительной системы, как правило, представляет собой переменный электрический сигнал — аналог процесса. Этот сигнал регистрируется осциллографом либо накапливается на магнитной ленте. Оба эти метода имеют свои преимущества и недостатки. Первый метод накопления информации позволяет визуально контролировать качество информации и своевременно устранять дефектные места в записи до ввода информации в ЭВМ. Второй метод позволяет более просто осуществить предварительное кодирование информации (представление переменного процесса последовательностью чисел, записанных в коде ЭВМ). До недавнего времени считывали и кодировали информацию, накопленную в виде осцил-

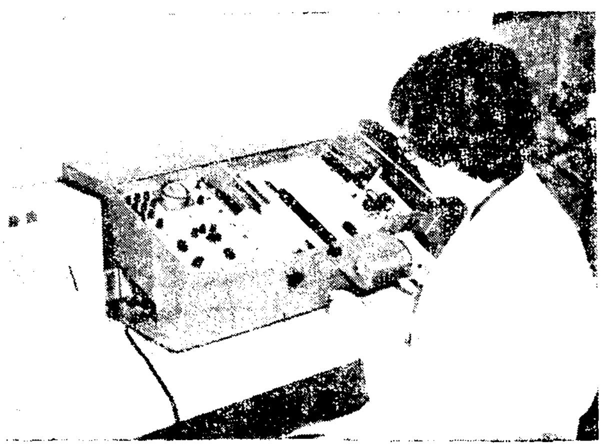


Рис. 13.14

лограмм, вручную. Однако в последнее время созданы как автоматические установки, так и более простые полуавтоматы (рис. 13.14) для считывания информации с осциллограмм и преобразования ее в код ЭВМ.

§ 51. Некоторые методические особенности экспериментального исследования высокоскоростных открытых потоков

Методика определения характеристик высокоскоростных открытых потоков имеет ряд особенностей, связанных прежде всего с тем, что на показания измерительных приборов влияют большой уклон канала, турбулентность и воздушные включения.

При использовании динамической трубки для измерений скорости потока из измеряемого полного напора необходимо исключить величину статического давления. Величина статического давления в точке измерений обычно определяется в предположении гидростатического закона распределения давления по глубине потока $p = \rho g\,(h - z)$. Как было показано в гл. 2, при большом уклоне канала избыточное статическое давление в потоке следует определять с учетом соотношения (2.6): $p = \rho g\,(h - z)\sqrt{1 - i^2}$.

При этом величина статического давления может оказаться меньше той величины, которая определяется в предположении гидростатического давления.

Найдем для примера погрешность в измерении скорости ($u \approx 3$ м/с) по измерению полного напора в точке, расположенной на 30 см ниже свободной поверхности потока при уклоне канала $i = 0{,}4$.

Избыточный статический напор в точке измерения с учетом зависимости (2.6) $h_{\text{ст}} = (h - z)\sqrt{1 - i^2} = 30\sqrt{1 - 0{,}4^2} = 27{,}5$ см. вод. ст., что на 2,5 см меньше статического напора, рассчитанного в предположении гидростатического распределения давления.

Если величина измеряемой скорости близка к 3 м/с, то динамический напор $(u^2/2g) = (3^2/2 \cdot 9{,}8) \approx 0{,}45$ м.

При такой величине динамического напора неточное определение статического давления даст погрешность в определении скорости, близкую к 3%.

С увеличением заглубления точки измерений под уровень свободной поверхности и с увеличением уклона канала погрешность измерений скорости возрастает.

При определении величины статического давления в потоке необходимо учитывать также влияние турбулентных пульсаций скорости. Обычно статическое давление в потоке измеряется с помощью приемника статического давления трубки Пито. Однако появление пульсационных составляющих скорости изменяет вектор мгновенной скорости не только по величине, но и по направлению (рис. 11.15). При этом вектор мгновенной скорости оказывается направленным под некоторым углом φ к оси насадка трубки Пито. Такое обтекание насадка потоком приводит к сложному распределению давления по

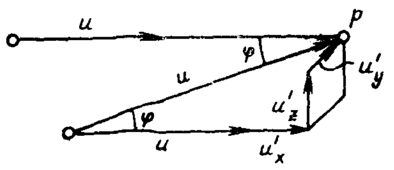


РИС. 13.15

поверхности насадка и к существенным погрешностям в измерении статического давления. (Как показывает опыт, измеренное статическое давление оказывается ниже действительного.) Для оценки влияния турбулентных пульсаций скорости на работу приемника статического давления трубки Пито, следуя И. О. Хинце [8], используем эмпирическую зависимость вида

$$p_{\text{ст.изм}} - p_{\text{ст}} = A(\cos\varphi - 1)\left(\frac{\rho u^2}{2}\right), \tag{13.32}$$

где $p_{\text{ст.изм}}$, $p_{\text{ст}}$ — измеренное и реальное статическое давление;
A — коэффициент, равный ~ 1;
u — мгновенная скорость.

Мгновенную скорость вычислим, произведя геометрическое суммирование осредненной и пульсационной составляющих скорости (см. рис. 13.15):

$$u = \sqrt{(\bar{u} + u'_x)^2 + u_y'^2 + u_z'^2}. \tag{13.33}$$

Выразим

$$\cos\varphi = (\bar{u} + u'_x)/u. \tag{13.34}$$

Подставляя соотношения (13.33) и (13.34) в зависимость (13.32), после преобразований, разложения в ряд и осреднения получаем:

$$\bar{p}_{\text{ст.изм}} - \bar{p}_{\text{ст}} = -\frac{1}{2} A\rho\overline{u^2}\left(\frac{\overline{u_z'^2} + \overline{u_y'^2}}{2\bar{u}^2} + \frac{\overline{u_z'^4} + \overline{u_y'^4} + 2\overline{u_z'^2 u_y'^2}}{2\bar{u}^4} + \ldots\right). \tag{13.35}$$

Считая, что $u'_x \sim u'_y \sim u'_z$ и пренебрегая малыми слагаемыми, найдем:

$$\bar{p}_{\text{ст.изм}} - \bar{p}_{\text{ст}} = -\frac{1}{2} \mathrm{A}\rho\overline{u_y'^2}, \tag{13.36}$$

где $\mathrm{A} \approx 1$.

Выражение (13.36) показывает, что средняя величина, регистрируемая приемником статического давления трубки Пито, ниже действительного статического давления. Абсолютная погрешность в величине измеренного статического давления возрастает пропорционально квадрату пульсационной составляющей скорости.

Высокая интенсивность турбулентности высокоскоростных потоков оказывает влияние также и на работу приемника динамического давления трубки Пито. Так же как и в предыдущем случае, для того чтобы оценить это влияние, рассмотрим чувствительность трубки к изменению направления скорости

$$p_{\text{полн}} = p_{\text{ст}} + \frac{1}{2}\rho u^2 + \mathrm{B}(\cos\varphi - 1)\frac{1}{2}\rho u^2. \tag{13.37}$$

После подстановки зависимостей (13.33) и (13.34) в соотношение (13.37) и преобразований, аналогичных тем, которые были сделаны в случае статического давления, получаем:

$$\bar{p}_{\text{полн.изм}}-\bar{p}_{\text{ст.изм}}=\frac{1}{2}\rho\bar{u}^2\left[1+\frac{\overline{u_x'^2}+\overline{u_y'^2}+\overline{u_z'^2}}{\bar{u}^2}-(\text{B}-\text{A})\left(\frac{\overline{u_z'^2}+\overline{u_y'^2}}{2\bar{u}^2}+\ldots\right)\right].$$

Считая, как и прежде, стандарты составляющих пульсаций скорости близкими, получим

$$\bar{p}_{\text{полн.изм}}-\bar{p}_{\text{ст.изм}}=\frac{1}{2}\rho\bar{u}^2\left[1+\frac{\bar{u}'^2}{\bar{u}^2}(3-\text{B}+\text{A})\right]. \qquad (13.38)$$

Как показали экспериментальные исследования, значение B, в стационарных условиях близкое к 3, в условиях квазистационарного потока может быть значительно больше. Соотношение (13.38) получено в предположении, что точки отбора статического и динамического давлений трубки Пито разнесены на достаточно большое расстояние, и корреляция между этими давлениями отсутствует. Кроме того, предполагается, что вторичные приборы, регистрирующие показания трубки, безынерционны. Таким образом, при использовании трубки Пито для измерений скорости высокоскоростного турбулентного потока следует учитывать возможные погрешности, связанные с турбулентными пульсациями скорости.

При измерении статического давления на стенде канала погрешности, обусловленные действием турбулентных пульсаций скорости, резко уменьшаются вследствие малости пульсаций в непосредственной близости стенки. Приемник статического давления представляет собой отверстие в стенке, диаметр которого стремятся уменьшить с тем, чтобы свести площадку измерений к точке. В практике экспериментальных исследований диаметр этого отверстия принимают 1—2 мм. Измерение осредненного статического давления выполняют пьезометром, диаметр которого назначают значительно больше диаметра приемника (для уменьшения пульсаций уровня). Нуль пьезометра определяют по уровню жидкости в нем при отсутствии статической нагрузки. В этом случае как в трубке пьезометра, так и в приемном отверстии образуется мениск. При малом диаметре приемного отверстия силы поверхностного натяжения создадут заметное избыточное (или пониженное) давление в приемном отверстии при отсутствии статического давления. Так, например, при радиусе отверстия $R = 1$ мм получаем:

$$p=\frac{2\sigma}{R}=\frac{2\cdot 0{,}072}{10^{-3}}=150\ \text{Па}=1{,}5\ \text{см вод. ст.}$$

Неучет давления, вызванного действием сил поверхностного натяжения, может дать систематическую погрешность, особенно заметную в условиях лабораторного эксперимента.

Кроме эффектов турбулентности и поверхностного натяжения на точность измерения локальных характеристик высокоскоростных аэрированных потоков влияет присутствие воздушных включений.

Воздушные включения сложным образом взаимодействуют с измерительными приборами. При измерении скорости аэрированного потока трубкой Пито показания ее зависят от плотности водовоздушной смеси, представление о которой как о дисперсоиде в данном случае себя не оправдывают. Плотность водовоздушной смеси $\rho_{см}$ пульсирует во времени вокруг некоторого осредненного значения, причем, как показывает опыт, пульсации плотности связаны с пульсациями скорости потока. В связи с этим выражение (13.38) для условий измерений в дисперсоиде с пульсирующей плотностью можно приближенно записать в виде

$$\Delta\overline{p}_{изм} = \overline{p}_{полн.\ изм} - \overline{p}_{ст.\ изм} = \frac{1}{2}\rho_{см}\overline{u}^2 \times$$
$$\times\left[1 + \frac{\overline{u'^2}}{\overline{u}^2}(3 - B + A)\right] + \frac{1}{2}\frac{\overline{\rho'_{см}u'^2}}{\overline{u}^2}(3 - B + A). \qquad (13.39)$$

Степень корреляции между пульсациями скорости u' и плотностью воздушной смеси ρ' оказывается различной в зависимости от положения точки измерений и параметров течения. Для аэрированных потоков она изучена недостаточно. Кроме того, дискретность аэрированного потока может оказывать дополнительное влияние в том случае, если воздушные включения непосредственно контактируют с трубкой Пито. Оценку возможности такого контакта произведем с использованием критического числа Стокса

$$St_{кр} = \frac{1}{18}\frac{\rho_а}{\rho}\left(\frac{d_а}{d_П}\right)^2 Re_а, \qquad (13.40)$$

$$Re_а = ud_П/\nu,$$

где $d_а$ — диаметр воздушного пузырька;
$d_п$ — диаметр трубки Пито;
$\rho_а$ — плотность воздуха;
ν — кинематическая вязкость воды.

Считая, что при $St > St_{кр}$ воздушные пузырьки будут контактировать с трубкой Пито, и учитывая, что $St_{кр} \approx 0{,}1$ (по данным Э. Ричардсона), определим то значение скорости, начиная с которого пузырьки воздуха будут контактировать с трубкой Пито.

Поскольку, как показывает опыт, $d_а \approx d_п \approx 5$ мм, из выражения (13.40) находим скорость контакта, м/с:

$$u_К = \frac{0{,}1\cdot 18\cdot\rho}{\rho_а}\frac{\nu}{d_П} \approx 0{,}3.$$

Небольшая величина скорости контакта $u_к$ указывает на то, что при измерениях трубкой Пито в высокоскоростном аэрированном потоке воздушные включения могут контактировать с трубкой Пито. В момент контакта давление на приемное отверстие трубки будет определяться давлением внутри воздушного пузырька $p_п$. Таким образом, на показания трубки Пито кроме параметров, входящих в соотношение (13.39), будут влиять резкие колебания динамического давления, возникающие при контакте с воздушным пузырьком. Расшифровка показаний трубки Пито (т. е. вычисление скорости по измеренному перепаду давлений) в этом случае становится затруднительной. Исследования Ж. Хальбронна показали, что действие указанных выше факторов можно приближенно учесть, расшифровывая показания трубки Пито по соотношению

$$\Delta p_{изм} = \rho (1 - \gamma\alpha) \frac{u^2}{2}, \qquad (13.41)$$

где γ — числовой коэффициент ($0 < \gamma < 1$).

Величина коэффициента γ, согласно Ж. Хальбронну, зависит от числа пузырьков, контактирующих с трубкой Пито. На рис. 13.16 представлено изменение γ в зависимости от $d_а/d_п$ и воздухосодержания потока α. Кривые *1*, *2*, *3* соответствуют постоянным значениям $d_а/d_п$ причем $(d_а/d_п)_1 > (d_а/d_п)_2 > (d_а/d_п)_3$.

Значительное влияние пульсационных составляющих на величину измеренного сигнала приводит к необходимости рассматривать трубку Пито в этом случае как динамическую систему, для которой можно записать:

$$\Delta p_{изм} = \frac{1}{2} \rho_{см} \bar{u}^2 \Pi(\bar{u}', \rho'_{см}, p_п, \omega),$$

где Π — передаточная функция системы;

ω — круговая частота пульсаций полного давления в точке измерений.

Кроме указанных выше факторов, на показания трубки Пито будет влиять непостоянство ее амплитудной характеристики. Поэтому данные Ж. Хальбронна, касающиеся величины γ, относятся, строго говоря, лишь к определенной использованной им измерительной системе. В практике экспериментальных исследований измерениям скорости в высокоскоростном аэрированном потоке предшествует тарировка трубки в потоке водовоздушной смеси с заранее известными параметрами. Обычно тарировка выполняется в вертикально установленной трубе Вентури, в которой движется водовоздушная смесь заданной концентрации. Величина передаточной функции системы определяется в рабочем диапазоне скоростей по соотношению расходов водовоздушной смеси: известному и вычисленному по измерениям трубкой Пито.

Для исследования турбулентности высокоскоростных аэрированных потоков в настоящее время не имеется достаточно надежных измерительных приборов. Приборы, основанные на принципах теплообмена (термоанемометры), не могут быть использованы, так как при резко различающихся коэффициентах теплопроводности воды и воздуха тепловой режим датчиков оказывается крайне неблаго-

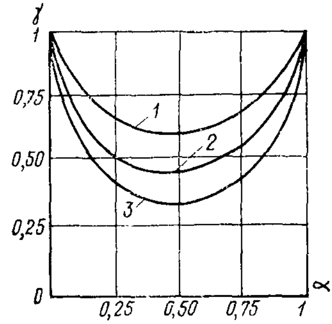


Рис. 13.16

приятным. Приборы, основанные на принципе массообмена, могут быть использованы, однако теория измерения с помощью этих приборов в аэрированных потоках пока не разработана.

Применение датчиков динамического типа также принципиально возможно, однако сигнал датчика в этом случае сложным образом зависит от скорости и плотности:

$$I \sim c_1 (\bar{\rho}_{\text{см}} + \rho'_{\text{см}}) (u + u')^2 + c_2 (\bar{\rho}_{\text{см}} + \rho'_{\text{см}}) d_{\text{пл}} (\mathrm{d}u/\mathrm{d}t)), \qquad (13.42)$$

где c_1 и c_2 — коэффициенты пропорциональности;
$d_{\text{пл}}$ — размер приемной площадки датчика.

Второе слагаемое в выражении (13.42) учитывает действие присоединенной массы. Присоединенной массой называется масса жидкости (масса воздуха мала), которая, находясь в непосредственной близости от датчика, колеблется вместе с его приемным элементом (как бы увеличивая массу колебательной системы датчика). Увеличение массы колебательной системы снижает резонансную частоту датчика, поэтому величину этой массы можно установить по соотношению резонансных частот датчика в воде и в воздухе.

Предполагая, что коэффициенты c_1 и c_2 отличаются несильно, сравним величину слагаемых в соотношении (13.42)

$$\frac{c_1 (\bar{\rho}_{\text{см}} + \rho') (u + u')^2}{c_2 (\rho_{\text{см}} + \rho) d_{\text{пл}} (\mathrm{d}u/\mathrm{d}t)} \approx \frac{u^2}{d_{\text{пл}} (\mathrm{d}u/\mathrm{d}t)}.$$

Оценивая величину $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ как $\frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{\Delta u u}{L} \sim \frac{u' u}{H}$, находим:

$$\frac{u^2}{d_{\text{пл}} (\mathrm{d}u/\mathrm{d}t)} = \frac{u^2 H}{d_{\text{пл}} u' u} = \frac{H}{d_{\text{пл}}} \frac{u}{u'}.$$

Имея в виду, что обычно величина $d_{\text{пл}} < 0{,}1H$, получаем:

$$\frac{u^2}{d_{\text{пл}} (\mathrm{d}u/\mathrm{d}t)} \approx 10 \frac{u}{u'} = 10 \frac{u}{u_*} = 10 \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{\lambda}}.$$

При $\lambda > 0{,}002$

$$\frac{u^2}{d_{\text{пл}} (\mathrm{d}u/\mathrm{d}t)} < 200.$$

Приведенный выше оценочный расчет показал, что пульсирующая составляющая сигнала датчика, связанная с эффектом присоединенной массы, составляет пренебрежимо малую долю полного сигнала. Обычно полный сигнал разделяют на постоянную и пульсирующую составляющие. Не рассматривая пульсаций плотности и пренебрегая малыми величинами, запишем пульсационные составляющие сигнала по зависимости (13.42) в виде

$$I' \sim 2c_1 \rho_{\text{см}} u u' + c_2 \rho d_{\text{пл}} (\mathrm{d}u/\mathrm{d}t). \qquad (13.43)$$

Оценивая соотношение между составляющими пульсирующего сигнала аналогично проведенному выше, найдем, что второе слагаемое в соотношении (13.43) составляет менее 5% величины пульсирующего сигнала. Таким образом, при расшифровке пульсирующей составляющей сигнала от датчика скорости динамического типа второе слагаемое в соотношении (13.43) также может быть опущено.

Действительно, по соотношению резонансных частот датчика в воздухе и в воде установлено, что присоединенная масса датчика невелика и представляет собой слой жидкости толщиной около 0,3 мм.

Возвращаясь к соотношению (13.42), преобразуем его первое слагаемое с учетом пульсаций плотности воздушной смеси к виду (составляющие высшего порядка малости опускаем)

$$I' \sim 2\overline{\rho}_{\text{см}} uu' + \rho'_{\text{см}} u^2 \ldots \tag{13.44}$$

Это соотношение показывает, что пульсационная составляющая сигнала датчика скорости динамического типа в потоке с пульсирующей плотностью зависит как от пульсаций скорости, так и от пульсаций плотности водовоздушной смеси. Выделение пульсаций скорости в этом случае возможно лишь при одновременной регистрации пульсаций скорости плотности. В техническом отношении это не вызывает затруднений.

Следует, однако, отметить, что приведенные выше соотношения получены на основе приближенных оценок. Разработка теории измерений для высокоскоростных аэрированных потоков требует дальнейших методических исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Альтшуль А. Д., Киселев П. Г.** Гидравлика и аэродинамика. 2-е изд. — М., 1975.
2. **Богомолов А. И., Михайлов К. А.** Гидравлика. — 2-е изд. — М., 1972.
3. **Высоцкий Л. И.** Управление бурными потоками на водосбросах. М., 1977.
4. **Емцев Б. Т.** Двухмерные бурные потоки. М., 1967.
5. **Картвелишвили Н. А.** Потоки в недеформируемых руслах. Л., 1973.
6. **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике. М., 1970.
7. **Лятхер В. М.** Турбулентность в гидросооружениях. М., 1968.
8. **Хинце И. О.** Турбулентность. М., 1963.
9. **Шлихтинг Г.** Теория пограничного слоя. М., 1969.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Анатолий Иванович Богомолов, Валерий Степанович Боровков, Феликс Григорьевич Майрановский

ВЫСОКОСКОРОСТНЫЕ ПОТОКИ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Редакция литературы по инженерному оборудованию
Зав. редакцией *И. П. Скворцова*
Редакторы *Г. А. Лебедева, К. Н. Долгова*
Мл. редактор *А. А. Минаева*
Внешнее оформление художника *С. Г. Стручкова*
Технический редактор *В. Д. Павлова*
Корректор *Л. М. Вайнер*

ИБ № 691

Сдано в набор 29.01.79 Подписано к печати 13.07.79 Т-12156
Формат 60×90$^{1}/_{16}$. Бумага тип. № 1 Гарнитура «Литературная» Печать высокая.
Печ. л. 21,5 Уч.-изд. л. 21,96 Тираж 3000 экз. Изд. № AI-6555
Зак. 837 Цена 1 р. 10 к.
Стройиздат, Москва, 103006, Каляевская, 23а

Московская типография № 4 Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли
Москва, 129041, Б. Переяславская, 46