Л.М.АЛЬПИН, Д.С.ДАЕВ, А.Д.КАРИНСКИЙ

ТЕОРИЯ ПОЛЕЙ, ПРИМЕНЯЕМЫХ В РАЗВЕДОЧНОЙ ГЕОФИЗИКЕ

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебника для студентов вузов, обучающихся по специальности «Геофизические методы поисков и разведки месторождений полезных ископаемых»

МОСКВА „НЕДРА" 1985

УДК 550.83.01(0.75)

Альпин Л. М., Даев Д. С., Каринский А. Д. Теория полей, применяемых в разведочной геофизике. Учебник для вузов. — М.: Недра, 1985. — 407 с.

Изложена теория полей: гравитационного, магнитостатического и электрического в вакууме, электрического и магнитного в поляризующей среде, постоянного электрического и магнитного, переменного электромагнитного; рассмотрены элементы теории упругости, распространение электромагнитных и упругих колебаний в среде, способы расчета полей и их зависимости от среды.

Для студентов геофизических специальностей геологоразведочных вузов и факультетов.

Ил. 83, список лит. — 18 назв.

Рецензенты:

1. Кафедра геофизики МГУ.
2. Д-р техн. наук *Б. С. Светов (ИЗМИРАН).*

А $\frac{1903010000-009}{043(01)-85}$ 23-85

© Издательство «Недра», 1985

Предисловие

Дальнейшее укрепление минерально-сырьевой базы нашей страны, на необходимость которого указано в Основных направлениях экономического и социального развития СССР на 1981—1985 годы и на период до 1990 года, требует повышения эффективности геофизических исследований. Успешному решению этой задачи во многом должно способствовать усиление фундаментальной подготовки геофизиков-разведчиков.

Курс «Теория полей, применяемых в разведочной геофизике» для студентов вузов, обучающихся по специальности 0105 «Геофизические методы поисков и разведки месторождений полезных ископаемых», является связующим звеном между общетеоретическими дисциплинами — физикой и математикой и специальными предметами — гравиразведкой, магниторазведкой, электроразведкой, сейсморазведкой и каротажем. Главное содержание курса составляет рассмотрение общих физико-математических закономерностей полей разной физической природы, изучение связей между причинами, порождающими поле, и величинами, характеризующими его, изучение методов построения теории полей. Данный курс является основой для более детального и глубокого изучения теории отдельных методов геофизической разведки.

От книги Л. М. Альпина «Теория поля», изданной в 1966 г., настоящий учебник отличается наличием глав, посвященных теории упругости и распространению упругих колебаний; значительно расширены разделы, посвященные переменному электромагнитному полю; иначе изложены вопросы, касающиеся возбудителей поля, его геометрии, пространственных производных, магнитного поля постоянного тока. Некоторые особенности изложения связаны с переходом от системы СГС к СИ. В книге излагаются закономерности поля, создаваемого магнитными массами. Для магнитной массы, рассматриваемой как фиктивное, но удобное понятие, используется внесистемная единица.

В отличие от вышедшего в 1979 г. второго издания учебника «Теория поля» И. К. Овчинникова в данной книге уделяется значительно больше внимания вопросам обоснования единственности решения прямой задачи, совместно рассматриваются закономер-

ности гравитационного, электростатического и магнитостатического полей, подробнее написаны разделы, посвященные распространению упругих колебаний.

В данной книге в ссылках опускается номер главы, когда идет речь о параграфах той же главы, а также номер параграфов, когда имеется в виду раздел того же параграфа.

В ряде случаев под одним номером дается группа формул. При ссылках на ту или иную из них номер группы дополняется нижним индексом — номером формулы в группе.

Первые пять глав написаны Л. М. Альпиным, шестая — Л. М. Альпиным и А. Д. Каринским, седьмая — А. Д. Каринским, восьмая и девятая — Д. С. Даевым.

Глава первая

Поле

Если каждой точке a области V соответствует некоторое значение величины $\mathcal{F}$, то имеем в этой области поле величины $\mathcal{F}$ или, короче, поле $\mathcal{F}$. В общем случае разным точкам a области V соответствуют разные значения величины $\mathcal{F}$, т. е. поле является функцией (положения) точки. Точка a, в которой наблюдают (рассматривают) поле, т. е. фактически или мысленно определяют значение величины $\mathcal{F}$, называется точкой наблюдения поля; она является его аргументом: $\mathcal{F}=\mathcal{F}(a)$.

Физическим является поле $\mathcal{F}$, когда величина $\mathcal{F}(a)$ описывает некоторое физическое явление в пространстве (и времени); например, поле сил, действующих на электрические заряды, называют электрическим полем.

Для исследования недр в разведочной геофизике применяют физические поля, распределенные в земной коре и над ней: гравитационное, магнитное, электрическое, электромагнитное, упругих колебаний и др. Геофизик создает поля для своих исследований или пользуется полями, существующими независимо от его деятельности. Он наблюдает эти поля в доступных областях пространства: на земной поверхности, над ней (в атмосфере) или под ней, на глубине (в море, в скважинах и т. д.). По результатам наблюдения он должен судить о геологических образованиях, недоступных для непосредственного изучения. Их исследование на расстоянии при помощи физических полей возможно благодаря зависимости распределения полей в пространстве и времени от физических свойств среды: ее плотности, электропроводности, упругости и т. п. При этом важно, что свойства среды (горных пород) в какой-либо области пространства влияют на поле не только в этой области, но и на расстояниях от нее.

Для оптимальной постановки исследования недр с помощью физических полей и для правильного истолкования результатов наблюдения этих полей необходимо знать закономерности их связей со свойствами среды, овладеть физико-математическим аппаратом, выражающим эти связи и позволяющим рассчитывать поля по заданным геофизическим условиям.

§ 1. СКАЛЯРНЫЕ И ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

Будем рассматривать поля скалярные $T(a)$ и векторные $\mathbf{M}(a)$. В этой главе будем изучать закономерности этих полей вне зависимости от их физической природы. Определяя положение точки a радиусом-вектором $\mathbf{L}_{oa}$ (с началом в некоторой точке O) или координатами ξ_1, ξ_2, ξ_3 этой точки, можно считать поле функцией радиуса-вектора или координат точки a. Систему координат

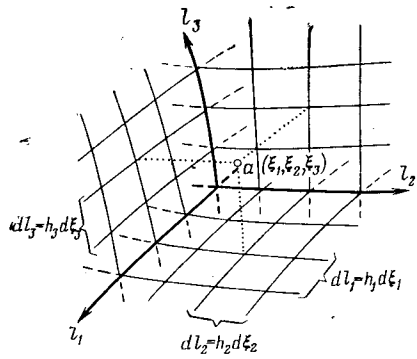


Рис. 1. Криволинейная ортогональная система координат

будем считать правой, прямоугольной, в общем случае криволинейной, образованной тремя взаимно ортогональными семействами координатных линий l_1, l_2, l_3, по которым отсчитываются координаты ξ_1, ξ_2, ξ_3 (рис. 1).

I. Определение поля. Значение скаляра T в какой-либо точке a определяется его абсолютной величиной $|T(a)|$ и знаком, а вектора $\mathbf{M}$ — его абсолютной величиной $M(a)$ и направлением: $\mathbf{M}=1_M M(a)$, где 1_M — единичный вектор по направлению вектора $\mathbf{M}$. Примерами скалярных полей являются: поле давления в атмосфере, поле температуры или плотности вещества в литосфере, поле концентрации ионов в электролитической ванне или содержания какого-либо минерала в горной породе. Примерами векторных полей являются: поле скорости воды в реке, поле плотности потока тепла в земной коре, поле плотности электрического тока в проводнике. Если $\mathbf{M}$ — сила, приложенная в точке a, то поле называется силовым. Примерами силовых полей являются: поле сил тяжести, поле земного магнетизма, электромагнитное поле в земле — естественное или искусственно создаваемое с помощью электродов или других «задающих» устройств (петель, индукционных рамок, антенн) [1].

Соответствие между точками области V и значениями, которые принимает функция $\mathcal{F}$ в этих точках, устанавливается различными способами.

1. Аналитическим выражением функции $\mathcal{F}(a)$ в области V, которое может быть представлено совокупностью различных выражений для разных частей области V.

2. Таблицами значений величины $\mathcal{F}$, соответствующих значениям координат точки a, взятым с достаточно малыми интервалами.

3. Графиками, изображающими зависимость величины $\mathcal{F}$ от положения точки a.

4. Построениями, иллюстрирующими распределение величины $\mathcal{F}$ в пространстве, например, поверхностями равных значений этой величины.

Полезно представлять себе поле $\mathcal{F}$ в области V пространственно, в виде воображаемого множества точек этой области и соответствующих им значений величины $\mathcal{F}(a)$, указанных в этих точках (числами в поле T и стрелками в поле $\mathbf{M}$).

---

[1] Вектор $\mathbf{M}$ иногда называют напряженностью поля $\mathbf{M}$. Силовое поле $\mathbf{M}$ иногда определяют как пространство, в котором действуют силы $\mathbf{M}$. Существование этих сил поля иногда можно рассматривать как свойство, приобретаемое пространством при определенных условиях.

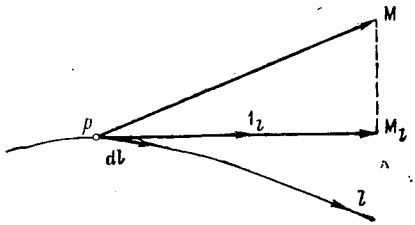


Рис. 2. Компонента $\mathbf{M}_l$ поля $\mathbf{M}$ в точке p линии l по направлению этой линии

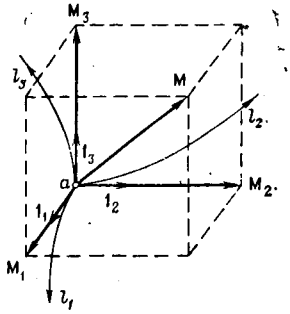


Рис. 3. Компоненты вектора $\mathbf{M}$ (a) по линиям l_k, т. е. по координатным направлениям

II. Компоненты векторного поля. Скалярная и векторная компоненты вектора $\mathbf{M}$ по направлению l определяются формулами

$$M_l = M\cos(\mathbf{M}, \mathbf{1}_l), \quad \mathbf{M}_l = \mathbf{1}_l M_l,$$

где $\mathbf{1}_l$ — единичный вектор (орт) по направлению l (рис. 2). Знак компоненты M_l — положительный, когда угол $(\mathbf{M}, \mathbf{1}_l)$ между вектором $\mathbf{M}$ и направлением l — острый, и отрицательный, когда этот угол тупой.

Вектор $\mathbf{M}$ будем определять его векторными или скалярными компонентами по координатным направлениям l_1, l_2, l_3:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_3 = \mathbf{1}_1 M_1 + \mathbf{1}_2 M_2 + \mathbf{1}_3 M_3, \tag{1.1}$$

где $\mathbf{M}_k = \mathbf{1}_k M_k$; $M_k = M\cos(\mathbf{M}, \mathbf{1}_k)$ $(k = 1, 2, 3)$; (1.1′)

$\mathbf{1}_k$ — единичные векторы по координатным направлениям l_k (рис. 3). Абсолютная величина вектора $\mathbf{M}$ и его направление определяются через его компоненты M_k формулами

$$M = \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2}, \quad \cos(\mathbf{M}, \mathbf{1}_k) = \frac{M_k}{M} \quad (k = 1, 2, 3).$$

Полагая $\mathbf{M} = \mathbf{1}_l$, получаем из (1.1), (1.1′):

$$\mathbf{1}_l = \mathbf{1}_1\cos(\mathbf{1}_l, \mathbf{1}_1) + \mathbf{1}_2\cos(\mathbf{1}_l, \mathbf{1}_2) + \mathbf{1}_3\cos(\mathbf{1}_l, \mathbf{1}_3). \tag{1.2}$$

При изучении поля $\mathbf{M}$ в точке p какой-либо интересующей нас поверхности S (рис. 4) или в точке a, расположенной вблизи этой поверхности у точки p, будем часто разлагать вектор $\mathbf{M}$ на нормальную и тангенциальные к поверхности S компоненты:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_n + \mathbf{M}_\tau = \mathbf{M}_n + \mathbf{M}_{t'} + \mathbf{M}_{t''}. \tag{1.3}$$

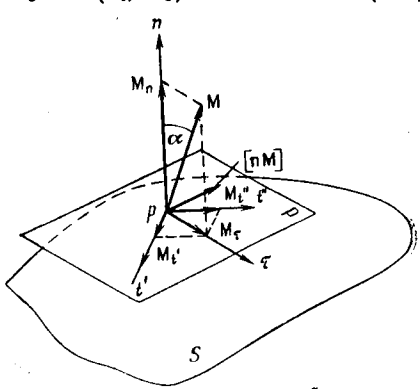


Рис. 4. Компоненты поля $\mathbf{M}$ в точке p на поверхности S

Здесь

$$\mathbf{M}_n=\mathbf{n}M_n \text{ и } M_n=(\mathbf{nM})=M\cos(\mathbf{M},\ \mathbf{n}) \qquad (1.3')$$

— векторное и скалярное значения нормальной компоненты вектора $\mathbf{M}$;

$$\mathbf{M}_\tau=\boldsymbol{\tau}M_\tau=[[\mathbf{nM}]\mathbf{n}]=\mathbf{M}_{t'}+\mathbf{M}_{t''} \text{ и } M_\tau=M\cos(\mathbf{M},\ \boldsymbol{\tau}) \qquad (1.3'')$$

— полная тангенциальная компонента вектора $\mathbf{M}$ (его проекция на плоскость P, касательную к поверхности S в точке p) и абсолютная величина этой компоненты;

$$\mathbf{M}_t=\mathbf{t}M_t \text{ и } M_t=(\mathbf{tM})=M\cos(\mathbf{M},\ \mathbf{t})=(\mathbf{M}_\tau\mathbf{t})=([[\mathbf{nM}]\mathbf{n}]\mathbf{t})=$$
$$=([\mathbf{nM}]\ [\mathbf{nt}]) \qquad (1.4)$$

— векторное и скалярное значения его компоненты по произвольно взятому тангенциальному направлению t; $\mathbf{M}_{t'}$ и $\mathbf{M}_{t''}$ — его векторные компоненты по двум взаимно перпендикулярным тангенциальным направлениям t' и t''; $\mathbf{n}$ и $\boldsymbol{\tau}=[[\mathbf{n}1_M]\mathbf{n}]$ — единичные векторы по нормали к поверхности S и по направлению проекции вектора $\mathbf{M}$ на плоскость P; $\mathbf{t}$ — единичный вектор по направлению t. Очевидно, что $[\mathbf{nM}_\tau]=[\mathbf{nM}]$, $[\mathbf{n}\boldsymbol{\tau}]M_\tau=[\mathbf{n}1_M]M$.

Угол α между полем $\mathbf{M}$ и нормалью n к поверхности S определяется формулой

$$\operatorname{tg}\alpha=M_\tau/M_n. \qquad (1.5)$$

Нормаль n к поверхности S, разграничивающей две области пространства V_1 и V_2, будем в общем случае считать направленной от V_1 к V_2. В случае замкнутой поверхности $S[V]$, ограничивающей область V, обычно направляют нормаль наружу относительно области[1] V.

III. Замечания, дополнения. 1. Место элемента объема, поверхности, линии будем определять некоторой его точкой — «средней» точкой элемента или точкой, которую он содержит. При этом будем оставлять неопределенным положение этой точки в элементе. Имеется в виду, что достаточная малость размеров элемента позволяет пренебречь следствием любых перемещений этой точки в нем (или даже в ближайшей его окрестности). Аналогично следует понимать выражения «средняя линия», «среднее сечение» элемента.

Поверхность или линию будем обычно считать гладкой в окрестности рассматриваемой ее точки. Гладкой называем поверхность (линию), в любой точке которой однозначно определяется нормаль (нормальная плоскость, касательная).

---

[1] Если замкнутая линия l (или поверхность S) ограничивает некоторый участок поверхности S (или область пространства V), то будем приписывать справа от l (или S), обозначение этого участка (или области), взятое в квадратные скобки.

2. Ориентированный элементарный отрезок dl линии l определяется вектором

$$\mathbf{dl}=\mathbf{l}_l dl=\mathbf{dl}_1+\mathbf{dl}_2+\mathbf{dl}_3=$$

$$=\mathbf{l}_1 dl_1+\mathbf{l}_2 dl_2+\mathbf{l}_3 dl_3, \qquad (1.6)$$

где dl — абсолютная величина вектора $\mathbf{dl}$, равная длине отрезка; dl_k и $\mathbf{dl}_k=\mathbf{l}_k dl_k$ — скалярные и векторные компоненты вектора $\mathbf{dl}$ по координатным направлениям. Ориентированная площадка dS определяется вектором

$$\mathbf{dS}=\mathbf{n}dS=\mathbf{dS}_1+\mathbf{dS}_2+\mathbf{dS}_3=$$

$$=\mathbf{l}_1 dS_1+\mathbf{l}_2 dS_2+\mathbf{l}_3 dS_3, \qquad (1.6')$$

где dS — абсолютная величина вектора $\mathbf{dS}$, равная площади площадки; $\mathbf{n}$ — единичный вектор по ее нормали n;

$$dS_k=dS\cos(\mathbf{dS},\ \mathbf{l}_k) \quad \text{и} \quad \mathbf{dS}_k=\mathbf{l}_k dS_k \qquad (1.6'')$$

— скалярные и векторные компоненты вектора $\mathbf{dS}$ по координатным направлениям.

Координатные элементы поверхностей S_k, т. е. площадки dS_k, ограниченные координатными линиями, определяются векторами

$$\mathbf{dS}_1=\mathbf{l}_1 dl_2 dl_3,\ \mathbf{dS}_2=\mathbf{l}_2 dl_3 dl_1,\ \mathbf{dS}_3=\mathbf{l}_3 dl_1 dl_2, \qquad (1.6''')$$

а координатный элемент пространства, т. е. элемент dV, ограниченный координатными поверхностями, имеет объем $dV=dl_1\times\times dl_2 dl_3$. Будем пользоваться тремя системами координат: декартовой x, y, z; цилиндрической r, φ, z; сферической R, θ, φ.

3. Элементарное перемещение dl_k точки по координатной линии l_k связано с приращением координаты ξ_k этой точки соотношением $dl_k=h_k d\xi_k$ $(k=1, 2, 3)$, где h_k — коэффициент Ламэ.

В декартовой системе $\xi_1=x$, $\xi_2=y$, $\xi_3=z$,

$$h_1=h_x=1,\ h_2=h_y=1,\ h_3=h_z=1. \qquad (1.7)$$

В цилиндрической системе $\xi_1=r$, $\xi_2=\varphi$, $\xi_3=z$,

$$h_1=h_r=1,\ h_2=h_\varphi=r,\ h_3=h_z=1. \qquad (1.7')$$

В сферической системе $\xi_1=R$, $\xi_2=\theta$, $\xi_3=\varphi$,

$$h_1=h_R=1,\ h_2=h_\theta=R,\ h_3=h_\varphi=R\sin\theta. \qquad (1.7'')$$

Поэтому элементы координатных линий, координатные элементы координатных поверхностей и пространства выражаются через дифференциалы $d\xi_k$ следующими формулами.

В системе x, y, z

$$dl_x=dx,\ dl_y=dy,\ dl_z=dz,\ dV=dxdydz,$$

$$dS_x=dydz,\ dS_y=dzdx,\ dS_z=dxdy. \qquad (1.8)$$

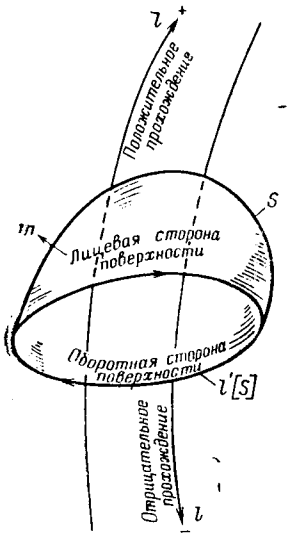
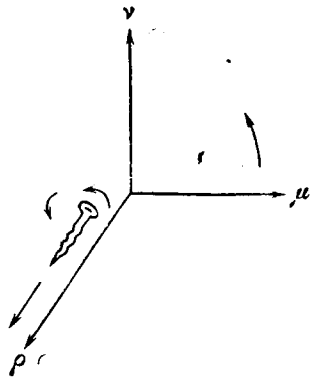


Рис. 5. Стороны поверхности S и обход по ее контуру l'. Линии l, пронизывающие поверхность S (обхватываемые контуром l')

Рис. 6. Правовинтовая система направлений ρ, μ, ν



В системе r, φ, z

$$dl_r=dr,\ dl_\varphi=rd\varphi,\ dl_z=dz,\ dV=rdrd\varphi dz,$$
$$dS_r=rd\varphi dz,\ dS_\varphi=dzdr,\ dS_z=rdrd\varphi. \qquad (1.8')$$

В системе R, θ, φ

$$dl_R=dR,\ dl_\theta=Rd\theta,\ dl_\varphi=R\sin\theta d\varphi,$$
$$dV=R^2\sin\theta dRd\theta d\varphi, \qquad (1.8'')$$
$$dS_R=R^2\sin\theta d\theta d\varphi,\ dS_\theta=R\sin\theta d\varphi dR,\ dS_\varphi=RdRd\theta.$$

4. Ориентация заданной в пространстве линии l определяется выбором направления (положительного) по ней, а поверхности S — ориентацией ее нормали[1] n.

Различают две условно выбираемые стороны поверхности — лицевую и оборотную; нормаль (положительную) считают направленной от оборотной стороны к лицевой.

Если l — ориентированные линии, пронизывающие поверхность S, то при определении числа их прохождений через эту поверхность будем различать прохождения с разными знаками: положительные — от оборотной стороны к лицевой и отрицательные — в противоположном направлении (рис. 5). Аналогичного правила знаков будем придерживаться при определении числа поверхностей S, пересекающих линию l, т. е. пронизываемых ею.

5. Три направления ρ, μ, ν (рис. 6) и, в частности, три координатных направления образуют право- или левовинтовую систему, если соответственно правый или левый винт, вращае-

[1] Неориентируемые (односторонние) поверхности здесь и в дальнейшем исключаются из рассмотрения.

мый около первого из этих направлений (по порядку их записи) от второго из них к третьему (по меньшей из двух дуг между ними), перемещается по первому направлению. Аналогично определяются тройки векторов, образующие правые и левые системы (правые и левые тройки векторов). Правая система преобразуется в левую перестановкой (инверсией) двух рядом написанных направлений. В дальнейшем будем говорить, что направление ρ образует с направлениями μ и ν правовинтовую (левовинтовую) систему, если тройка направлений ρ, μ, ν образует такую систему.

6. Обход по замкнутому контуру (контур, направление по контуру, ориентация по контуру) образует правовинтовую или левовинтовую систему с каким-либо направлением, если, смотря по этому направлению, мы видим обход по ходу стрелки часов или против ее хода соответственно. На рис. 5 обход по контуру $l'[S]$ образует правовинтовую систему с нормалью n к поверхности S, которую он ограничивает.

Два замкнутых контура охватывают друг друга (сцеплены), если каждый из них пронизывает нечетное число раз любую поверхность, опирающуюся на другой контур. Линию, не ограниченную с обеих сторон, часто следует считать замыкающейся на бесконечности.

7. Векторное поле $\mathbf{M}$ изображают с помощью векторных линий l^M, всюду направленных по полю: $\cos(\mathbf{M}, \mathbf{dl}^M)=1$, где $\mathbf{dl}^M=\mathbf{1}_M dl^M$ — элемент линии l^M. Линия l^M может быть замкнутой или ограниченной точками обрыва g^M: началом $g^M{}_+$ и концом $g^M{}_-$. Если линия l^M продолжается до бесконечности, то в зависимости от обстоятельств можно считать, что ее точки обрыва g^M находятся на бесконечности или что она замыкается на бесконечности.

Совокупность линий l^M, проведенных через точки некоторой (невекторной) линии l, образуют векторную поверхность. Если l — замкнутая линия (не расположенная на векторной поверхности), то получающаяся таким способом векторная поверхность ограничивает некоторую часть пространства, называемую векторной трубкой. Если вектор $\mathbf{M}$ означает скорость течения (жидкости, электричества), то векторные линии и трубки называют токовыми линиями и токовыми трубками. Векторные линии силового поля называют силовыми линиями.

8. Поле однородно в области V, если во всех точках этой области оно имеет одно и то же значение. Для векторного поля это означает одно и то же направление и одну и ту же абсолютную величину. В системе x, y, z однородное векторное поле

$$\mathbf{M}=\mathbf{1}_x C_x+\mathbf{1}_y C_y+\mathbf{1}_z C_z, \tag{1.9}$$

где C_x, C_y, C_z — постоянные.

В однородном поле **M** векторные линии — параллельные прямые, а векторные поверхности — цилиндрические.

Поле, заданное на поверхности S (на линии l) как функция положения точки на ней, является двухмерным (одномерным). Поле в пространстве часто называют двухмерным (одномерным), если оно не зависит от одной (двух) из трех координат.

Плоским называют поле, не меняющееся по направлению некоторой прямой l. В случае векторного поля часто к этому определению добавляют требование равенства нулю компоненты поля по направлению l — поле лежит в плоскости, нормальной к направлению l.

9. За исключением оговариваемых случаев, будем считать поле однозначной функцией точки[1]. Будем считать поле непрерывным за исключением отдельных особых точек, линий или поверхностей разрыва поля. Непрерывность поля T в некоторой точке a_1 означает, что любому, бесконечно малому смещению Δl точки a с положения a_1 по любому направлению l соответствует бесконечно малое приращение величины T. Если смещению Δl по некоторому направлению l соответствует конечное или бесконечно большое приращение величины T, то мы говорим, что по этому направлению поле T в точке a_1 терпит разрыв, конечный или бесконечно большой соответственно.

Точка, при приближении к которой величина $|T|$ неограниченно возрастает, является точкой бесконечно большого разрыва поля T, так как разность значений T между этой точкой и соседней, приближающейся к ней точкой, является бесконечно большой.

Кроме особых точек можно выделить иные необычные точки. Такой, например, является экстремальная точка, в которой величина T имеет значение, большее или меньшее, чем в любой соседней точке. Экстремальной будем называть также точку «минимакс», в которой величина T имеет и минимум и максимум в зависимости от направления линии, на которой определяют поведение поля T.

Поверхность S является поверхностью разрыва скалярного поля T, если бесконечно малому перемещению точки наблюдения, переводящему эту точку с одной стороны поверхности S на другую ее сторону, соответствует конечное или бесконечно большое приращение величины T. Иначе говоря, разность значений величины T в двух сливающихся, но расположенных с обеих сторон такой поверхности точках не равна нулю[2]. По поверхности или линии разрыва поля T величина T может меняться непрерывно.

---

[1] Неоднозначность поля нельзя смешивать с его неопределенностью; совокупность различных значений поля в одной и той же точке может быть вполне определенной.

[2] Разрыв поля T иногда полезно рассматривать как результат, мысленного сжатия области, в пределах которой величина T меняется очень интенсивно, но все же непрерывно (см. § 4).

Разрыв векторного поля **M** сводится к разрывам скаляров, которыми определяется вектор **M**, например, его скалярных компонент [1].

10. Поле $\mathcal{F}$ переменное, если величина $\mathcal{F}$ зависит от времени t. В общем случае $\mathcal{F}=\mathcal{F}(a, t)$, причем зависимость величины $\mathcal{F}$ от t может быть различной в различных точках a. Ниже, до пятой главы включительно, будет идти речь только о постоянном поле, за исключением § 1 главы четвертой.

Дифференцирование по времени t будем обозначать точкой над дифференцируемой величиной. Например, запись $\dot{\mathcal{F}}=0$ означает, что поле $\mathcal{F}$ постоянно.

11. Характер изменения поля при малых перемещениях точки a в различных направлениях l (поведение поля в малой окрестности точки a) определяется пространственными производными (градиент, дивергенция, ротор, лапласиан и др.) аналогично тому, как поведение функции $y(x)$ на малом интервале изменения аргумента x определяется производной от этой функции по аргументу x. О пространственных производных и их применении для характеристики скалярных и векторных полей будет идти речь в следующих параграфах этой главы.

12. Можно ограничиться рассмотрением некоторой, достаточно обширной области пространства θ, ограниченной со всех сторон замкнутой поверхностью $S[\theta]$. Взяв в средней части этой области некоторую точку O в качестве начала отсчета расстояний, можно было бы ограничиться рассмотрением только «конечных» точек пространства, т. е. точек, находящихся на ограниченных расстояниях от точки O. Однако часто бывает удобно считать размеры области θ бесконечно большими, а ее границу $S[\theta]$ бесконечно удаленной поверхностью Σ. Точки, находящиеся на поверхности Σ и вне ее, будем рассматривать как бесконечно удаленные (достаточно далекие) от начала отсчета O. Обычно будем представлять себе бесконечно удаленную поверхность Σ в виде сферической поверхности с центром в точке O, с радиусом R и с площадью $4\pi R^2$, где $R\to\infty$.

§ 2. ПРОИЗВОДНАЯ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ

Изменение скаляра T в окрестности точки a по направлению l характеризуется производной от T по этому направлению. Эта производная

$$\frac{\partial T}{\partial l}=\lim_{\Delta l\to 0}\frac{\Delta T}{\Delta l}, \tag{1.10}$$

[1] В точке, которая по существу не является особой, может возникнуть разрыв или появиться неопределенность той или иной компоненты поля **M** в связи с характером применяемой системы координат. Возьмем системы x, y, z и r, φ, z имеет компоненты $M_r(\varphi)=c\cos\varphi$ и $M_\varphi(\varphi)=-c\sin\varphi$, значения которых становятся неопределенными на оси z ввиду неопределенности координаты φ на этой оси. На плоскости $x=0$ при $y=0$ имеем разрыв $M_r(0)-M_r(\pi)=2c$, на плоскости $y=0$ при $x=0$ — разрыв $M_\varphi\left(-\frac{\pi}{2}\right)-M_\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)=-2c$.

где ΔT — приращение скаляра T, соответствующее перемещению Δl точки a по направлению l. Производная $\frac{\partial T}{\partial l}$ является мерой интенсивности («быстроты») изменения величины T по направлению l; она равна приращению величины T на единицу длины по этому направлению или, точнее приращению ΔT на пути Δl, отнесенному к единице длины этого пути[1].

Для определения значений производной от T по любому направлению l в какой-либо точке a и, следовательно, для характеристики поведения поля T в окрестности этой точки достаточны значения производных от T по трем произвольно взятым взаимно перпендикулярным (координатным) направлениям l_1, l_2, l_3.

Действительно, величина T является функцией координат ξ_k точки наблюдения a, а эти координаты меняются при перемещении точки a по направлению l и, следовательно, являются функциями положения точки a на линии l. Поэтому

$$\frac{\partial T}{\partial l} = \frac{\partial T}{\partial \xi_1}\frac{\partial \xi_1}{\partial l} + \frac{\partial T}{\partial \xi_2}\frac{\partial \xi_2}{\partial l} + \frac{\partial T}{\partial \xi_3}\frac{\partial \xi_3}{\partial l} = \sum_1^3 \frac{\partial T}{\partial \xi_k}\frac{1}{h_k}\frac{\partial l_k}{\partial l}.$$

Но $\frac{\partial l_k}{\partial l} = \cos(\mathbf{1}_l, \mathbf{1}_k)$, следовательно,

$$\frac{\partial T}{\partial l} = \sum_1^3 \frac{1}{h_k}\frac{\partial T}{\partial \xi_k}\cos(\mathbf{1}_l, \mathbf{1}_k). \qquad (1.10')$$

При изучении поля T у какой-либо поверхности S рассматривают нормальную и тангенциальные к ней производные $\frac{\partial T}{\partial n}$ и $\frac{\partial T}{\partial t}$, т. е. производные по нормали n к поверхности S и по направлениям $t(t'. t'')$ в плоскости, касательной к этой поверхности.

I. Градиент. Правую часть (1.10′) можно рассматривать как скалярное произведение единичного вектора $\mathbf{1}_l$, определяемого формулой (1.2), на вектор с компонентами $\frac{1}{h_k}\frac{\partial T}{\partial \xi_k}$. Обозначая

[1] Такое уточнение необходимо потому, что в пределах одной единицы длины производная $\frac{\partial T}{\partial l}$ может иметь различные значения. Обойтись без этого уточнения можно, условившись, что при определении $\frac{\partial T}{\partial l}$ мы имеем в виду вспомогательную (дольную) единицу длины столь малую, чтобы можно было пренебречь изменением на ней значения этой производной. В аналогичных случаях, которые весьма часто будут в дальнейшем встречаться, будем иногда для простоты изложения опускать соответствующие уточнения.

этот вектор через grad T, имеем согласно (1.10′)

$$\frac{\partial T}{\partial l} = (\mathbf{l}_l \operatorname{grad} T) = \operatorname{grad}_l T, \tag{1.10″}$$

где

$$\operatorname{grad} T = \sum_1^3 \mathbf{l}_k \frac{\partial T}{\partial l_k} = \sum_1^3 \frac{\mathbf{l}_k}{h_k} \frac{\partial T}{\partial \xi_k} \tag{1.11}$$

— градиент скаляра T.

Согласно (1.10″) производная от T по любому направлению равна компоненте вектора grad T по этому направлению. В частности,

$$\frac{\partial T}{\partial l_k} = \frac{1}{h_k} \frac{\partial T}{\partial \xi_k} = \operatorname{grad}_k T. \tag{1.10‴}$$

Из изложенного следует, что значение вектора grad T в какой-либо точке определяет поведение поля T в окрестности этой точки по всем направлениям.

Полный дифференциал функции T

$$dT = \sum_1^3 \frac{\partial T}{\partial \xi_k} d\xi_k = \sum_1^3 \frac{\partial T}{\partial l_k} dl_k.$$

Поэтому согласно (1.6), (1.10″) и (1.11)

$$dT = (\operatorname{grad} T \, \mathbf{dl}) = \operatorname{grad}_l T dl = \frac{\partial T}{\partial l} dl. \tag{1.11′}$$

В соответствии с этим приращение $\Delta T = T'' = T'$ скаляра $T(a)$ при перемещении точки a из положения a' в положение a'' по направлению l на малое расстояние Δl определяется формулой

$$\Delta T = T'' - T' = \frac{\partial T}{\partial l} \Delta l, \tag{1.11″}$$

которая следует непосредственно из определения (1.10) производной $\frac{\partial T}{\partial l}$.

Пусть $l_{\alpha\beta}$ — произвольно выбранный путь от точки α до точки β, dl — малые отрезки этого пути, а dT — соответствующие им приращения величины T. Согласно (1.11′) и (1.11″)

$$\int_{l_{\alpha\beta}} (\operatorname{grad} T \, \mathbf{dl}) = \int_{l_{\alpha\beta}} dT = T_\beta - T_\alpha, \tag{1.12}$$

где T_α и T_β — значения T в точках α и β.

Считая скаляр T однозначной функцией положения точки a, имеем на замкнутом пути $l_{\alpha\alpha}$ согласно (1.12) приращение $T_\alpha - T_\alpha = 0$, т. е. сумма приращений однозначной функции $T(a)$ на замкнутом пути равна нулю. Из этого следует, что знаки всех

этих приращений не могут быть одинаковыми и, следовательно, изменение однозначной функции T на замкнутом пути не может быть монотонным.

Согласно (1.7)—(1.7″) и (1.11) имеем в системах x, y, z; r, φ, z; R, θ, φ соответственно:

$$\operatorname{grad} T = \mathbf{1}_x \frac{\partial T}{\partial x} + \mathbf{1}_y \frac{\partial T}{\partial y} + \mathbf{1}_z \frac{\partial T}{\partial z}, \tag{1.13}$$

$$\operatorname{grad} T = \mathbf{1}_r \frac{\partial T}{\partial r} + \mathbf{1}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} + \mathbf{1}_z \frac{\partial T}{\partial z}, \tag{1.13'}$$

$$\operatorname{grad} T = \mathbf{1}_R \frac{\partial T}{\partial R} + \mathbf{1}_\theta \frac{1}{R} \frac{\partial T}{\partial \theta} + \mathbf{1}_\varphi \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \varphi}. \tag{1.13''}$$

Правые части этих равенств можно рассматривать как произведения символического вектора

$$\nabla = \mathbf{1}_x h_x + \mathbf{1}_y h_y + \mathbf{1}_z h_z = \ldots = \sum_1^3 \frac{\mathbf{1}_k}{h_k} \frac{\partial}{\partial \xi_k}, \tag{1.14}$$

называемого набла, на скаляр T и представить вектор $\operatorname{grad} T$ как результат применения этого дифференциального оператора (Гамильтона) к скаляру T:

$$\operatorname{grad} T = \nabla T. \tag{1.14'}$$

Если скаляр T является функцией $T(\zeta)$ скаляра $\zeta(a)$, то

$$\frac{\partial T}{\partial \xi_k} = \frac{\partial T}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial \xi_k} \quad (k = 1, 2, 3), \tag{1.15}$$

где ξ_k — координаты точки a.

Следовательно, согласно (1.15)

$$\operatorname{grad} T(\zeta) = \frac{\partial T}{\partial \zeta} \operatorname{grad} \zeta. \tag{1.15'}$$

В точке, в которой по направлению l поле T терпит разрыв, имеем $\frac{\partial T}{\partial l} = \infty$. Поэтому в особых для поля T точках и на особых линиях и поверхностях вектор $\operatorname{grad} T$ теряет смысл [1]. Поведение поля T у особой поверхности S характеризуется разрывом функции T, т. е. разностью $T^{(2)} - T^{(1)}$ значений скаляра T на сторонах S_1 и S_2 поверхности S, причем индексом 2 отмечаем лицевую сторону поверхности S.

II. Поверхности уровня. Поверхностью уровня, или уровенной поверхностью скаляра T, называют поверхность $S_{\text{ур}}$, во всех точках которой величина T имеет одно и то же значение [2].

[1] Очевидно, что в особых точках направления рассматриваемых ниже линий градиента становятся неопределенными.

[2] В поле сил тяжести уровень спокойной воды совпадает с поверхностью равных значений скаляра, называемого потенциалом этого поля.

Через каждую обычную точку (не являющуюся в поле T особой или экстремальной) можно провести уровенную поверхность, положение которой определяется однозначно. Нормали $n_{\text{ур}}$ к поверхностям уровня будем направлять в сторону увеличения скаляра T.

Производная от T по любому направлению, касательному к поверхности уровня, очевидно, равна нулю, следовательно, вектор $\operatorname{grad} T$ направлен по нормали $n_{\text{ур}}$ к поверхности уровня. Согласно (1.11)

$$\operatorname{grad} T = \mathbf{n}_{\text{ур}} \frac{\partial T}{\partial n_{\text{ур}}}, \quad |\operatorname{grad} T| = \frac{\partial T}{\partial n_{\text{ур}}}, \tag{1.16}$$

откуда в соответствии с (1.10″)

$$\frac{\partial T}{\partial l} = \frac{\partial T}{\partial n_{\text{ур}}} \cos(\mathbf{1}_l, \mathbf{n}_{\text{ур}}). \tag{1.16'}$$

Согласно (1.16), (1.16′) градиентом скаляра T является вектор, имеющий направление наиболее интенсивного возрастания скаляра T, и абсолютную величину, равную приращению T на единицу длины по этому направлению. Линии, проведенные по направлениям нормалей $n_{\text{ур}}$, т. е. векторные линии l^M поля $\mathbf{M} = \operatorname{grad} T$, называют линиями градиента.

Из изложенного следует, что вектор $\operatorname{grad} T$ заменяет совокупность производных от T по трем координатным направлениям.

В области V, в которой $\operatorname{grad} T = 0$, имеем $T = C$, где C — постоянная, т. е. величина, не зависящая от положения точки в области V. Вектором $\operatorname{grad} T$ поле T определяется с точностью до постоянной C:

$$\operatorname{grad}(T + C) = \operatorname{grad} T. \tag{1.17}$$

Зная векторное поле $\operatorname{grad} T$ в какой-либо области V, ограниченной поверхностью $S[V]$, и значение T в некоторой точке a_0 этой области, можно согласно (1.12) определить скалярное поле T во всей области V.

III. Двухмерный градиент. При изучении поля T, определяемого на некоторой поверхности S, т. е. двухмерного поля, можно пользоваться двухмерным градиентом, который будем обозначать $\operatorname{grad}^s T$. Аналогично (1.11), (1.16) и (1.16′) имеем

$$\operatorname{grad}^s T = \mathbf{t}' \frac{\partial T}{\partial t'} + \mathbf{t}'' \frac{\partial T}{\partial t''} = \boldsymbol{\nu}_{\text{ур}} \frac{\partial T}{\partial \nu_{\text{ур}}}, \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial \nu_{\text{ур}}} \cos(\mathbf{t}, \boldsymbol{\nu}_{\text{ур}}), \tag{1.18}$$

где $\boldsymbol{\nu}_{\text{ур}}$, $\mathbf{t}$, $\mathbf{t}'$, $\mathbf{t}''$ — единичные векторы, тангенциальные к поверхности S, причем вектор $\boldsymbol{\nu}_{\text{ур}}$ нормален к линии уровня $l_{\text{ур}}$ скаляра T на поверхности S, $\mathbf{t}$ имеет произвольное направление, а $\mathbf{t}'$ и $\mathbf{t}''$ взаимно перпендикулярны.

§ 3. ПРОИЗВОДНЫЕ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Векторное поле $\mathbf{M}$ характеризуют двумя пространственными производными — дивергенцией и ротором, которые выражаются через девять производных по координатным направлениям от трех скалярных компонент вектора $\mathbf{M}$ по этим направлениям. Дивергенция вектора $\mathbf{M}$ — скаляр, обозначаемый $\operatorname{div}\mathbf{M}$, а ротор (вихрь) вектора $\mathbf{M}$ — вектор, обозначаемый $\operatorname{rot}\mathbf{M}$. Дивергенцию и ротор называют соответственно скалярной и векторной производными векторного поля. Как будет показано в § 6, дивергенция определяет характер изменения поля $\mathbf{M}$ по его направлению, а ротор — по поверхности, нормальной к направлению этого поля (точнее, его вихревой части; см. разд. 1 § 6). К выражениям для ротора и дивергенции придем исходя из рассмотрения работы в поле $\mathbf{M}$ и потока вектора $\mathbf{M}$.

I. Поток вектора. Потоком вектора $\mathbf{M}$ через площадку dS называют произведение [1]

$$(\mathbf{M}\,\mathbf{dS}) = M_n dS = M dS \cos(\mathbf{M}, \mathbf{dS}),$$

в котором $\mathbf{M}$ — поле в средней точке a этой площадки; n — нормаль, направленная от оборотной стороны площадки к ее лицевой стороне; M_n — компонента вектора $\mathbf{M}$ по нормали n.

Произведение $(\mathbf{M}\,\mathbf{dS})$ имеет положительное значение, когда угол $(\mathbf{M}, \mathbf{dS})$ острый, и отрицательное, когда этот угол тупой. Следовательно, поток вектора $\mathbf{M}$ через площадку $\mathbf{dS}$ положителен, когда векторные линии проходят через эту площадку от оборотной стороны к лицевой стороне и отрицателен когда, они проходят через нее в обратном направлении.

Обозначая поток вектора $\mathbf{M}$ через поверхность S буквой ψ, имеем

$$\psi = \int_S (\mathbf{M}\mathbf{dS}) = \int_S M_n dS, \quad d\psi = (\mathbf{M}\mathbf{dS}). \tag{1.19}$$

Поток $\oint$ представляет собой алгебраическую сумму потоков через отдельные участки поверхности S, и его знак, так же как и знак каждого из этих потоков, зависит от выбора лицевой стороны на поверхности S. Очевидно, что поток вектора $\mathbf{M}$ через векторную поверхность (поверхность векторной трубки) равен нулю.

При определении потока $\oint (\mathbf{M}\,\mathbf{dS})$ через замкнутую поверхность (с наружной нормалью) положительные слагаемые соответствуют элементам поверхности, на которых вектор $\mathbf{M}$ направлен наружу.

---

[1] Если в скалярном произведении $(\mathbf{MdS})$ вектор $\mathbf{M}$ есть скорость течения жидкости, то оно определяет поток жидкости через площадку, т. е. количество жидкости, проходящей через нее в единицу времени. Отсюда название поток (скалярный поток) вектора для произведения $(\mathbf{MdS})$, а также названия векторный поток вектора и поток скаляра для произведений $[\mathbf{MdS}]$ и $\mathbf{TdS}$.

II. **Напряжение, циркуляция.** Скалярное произведение

$$(\mathbf{M}\,d\mathbf{l}) = M dl \cos(\mathbf{M}, d\mathbf{l}) = M_l dl = \\ = h_1 M_1 d\xi_1 + h_2 M_2 d\xi_2 + h_3 M_3 d\xi_3 \qquad (1.20)$$

вектора **M** в точке a на элемент пути dl, содержащий эту точку, будем называть работой[1] в поле **M** на пути dl. Работа $(\mathbf{M}\,d\mathbf{l})$ положительна, когда угол $(\mathbf{M}, d\mathbf{l})$ между направлением поля **M** и элемента пути $d\mathbf{l}$ острый, и отрицательна, когда этот угол тупой.

Работу в поле **M** на пути l_{ab} от точки a до точки b будем называть напряжением поля **M** на этом пути. Обозначая это напряжение через $\mathscr{E}_{ab}$, имеем

$$\mathscr{E}_{ab} = \int_a^b (\mathbf{M}d\mathbf{l}) = \int_a^b M_l dl, \quad d\mathscr{E} = (\mathbf{M}d\mathbf{l}). \qquad (1.21)$$

В общем случае это напряжение зависит не только от положения точек a и b, но также от всего пути l_{ab} между этими точками. Работы на различных участках пути l_{ab} могут иметь разные знаки, и величина $\mathscr{E}_{ab}$ равна алгебраической сумме этих работ. Знаки слагаемых и их суммы зависят от выбора направления на пути l_{ab}, которым определяется ориентация векторов $d\mathbf{l}$ по линии l_{ab}. Если путь l_{ab} совпадает с векторной линией, то работы $(\mathbf{M}\,d\mathbf{l})$ на всех его элементах dl имеют один знак — положительный, если направления пути l_{ab} и векторной линии одинаковы, и отрицательный в противном случае. Поэтому работа на любом отрезке векторной линии не может быть равна нулю.

Работу в поле **M** по замкнутому контуру l, обозначаемую $\oint (\mathbf{M}\,d\mathbf{l})$, называют циркуляцией вектора **M** по контуру l. Очевидно, что циркуляция по (замкнутой) векторной линии l^M отлична от нуля.

III. Ротор. Ротор вектора **M** в точке a представляет собой вектор, компонента которого по любому направлению ρ определяется формулой

$$\mathrm{rot}_\rho \mathbf{M} = \lim_{S_\rho \to 0} \frac{1}{S_\rho} \oint_{l[S_\rho]} (\mathbf{M}d\mathbf{l}), \qquad (1.22)$$

где $l[S_\rho]$ — замкнутый контур, расположенный на плоскости P_ρ, проходящей через точку a нормально к направлению ρ, и образующий правовинтовую систему с этим направлением; S_ρ — площадь участка плоскости P_ρ, ограниченного контуром $l[S_\rho]$ и содержащего точку a; стремление площади S_ρ к нулю происходит при стягивании контура $l[S_\rho]$ (и ограничиваемого им участка

---

[1] Если **M** — сила, с которой поле действует на единичную точечную массу (см. вторую главу), то $(\mathbf{M}\,d\mathbf{l})$ — работа в поле **M** при перемещении такой массы по пути dl. Отсюда название работа для произведения $(\mathbf{M}d\mathbf{l})$ при любом векторе **M**.

плоскости) к точке a. Взяв в качестве участка плоскости P_ρ элемент dS_ρ этой плоскости, содержащий точку a, получаем

$$\mathrm{rot}_\rho \mathbf{M} = \frac{1}{dS_\rho} \oint\limits_{l\,[dS_\rho]} (\mathbf{Mdl}),\quad \mathrm{rot}_k \mathbf{M} = \frac{1}{dS_k} \oint\limits_{l\,[dS_k]} (\mathbf{Mdl})\ (k = 1,\ 2,\ 3). \tag{1.22'}$$

Формула $(1.22')_2$ соответствует случаю, когда направление ρ совпадает с направлением координатной линии l_k. Умножая компоненты, определяемые этой формулой, на единичные векторы $\mathbf{1}_k$ и складывая эти произведения, получаем вектор $\mathrm{rot}\,\mathbf{M}$. По направлению L этого вектора его компонента, очевидно, имеет наибольшее значение, равное его абсолютной величине. Следовательно, если вращать площадку dS_ρ около точки a, в которой определяется компонента $\mathrm{rot}_\rho \mathbf{M}$, то правая часть $(1.22')_1$ должна принять наибольшее значение, равное $|\mathrm{rot}\,\mathbf{M}|$, когда направление ρ совпадает с направлением L вектора $\mathrm{rot}\,\mathbf{M}$. Считая, что контур $l[dS_L]$ образует правовинтовую систему с L, имеем

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{M} = \frac{\mathbf{1}_L}{dS_L} \oint\limits_{l\,[dS_L]} (\mathbf{Mdl}). \tag{1.22''}$$

Из $(1.22')_1$ можно получить теорему Стокса:

$$\int\limits_S (\mathrm{rot}\,\mathbf{M}\,d\mathbf{S}) = \oint\limits_{l\,[S]} (\mathbf{Mdl}), \tag{1.23}$$

где $l[S]$ — замкнутый контур, ограничивающий поверхность S.

Действительно, разделим поверхность S на элементы dS_i, ограниченные контурами l_i. Границы $l_{i,\,\Gamma}$ краевых элементов $dS_{i,\,\Gamma}$, расположенных у границы $l[S]$, содержат участки $\Delta l_{i,\,\Gamma}$, совокупностью которых является эта граница (рис. 7). Составим для всех элементов dS_i равенства вида $(1.22')_1$. Суммируя эти равенства, умноженные на $\mathbf{dS}_i$, получим

$$\sum_i (\mathrm{rot}\,\mathbf{M}\,d\mathbf{S}_i) = \sum_i \oint\limits_{l_i} (\mathbf{Mdl}). \tag{1.23'}$$

Левая часть (1.23'), очевидно, равна левой части (1.23). Что же касается правой части (1.23'), то в ее состав работа на линии $l_{\alpha\beta}$, разграничивающей смежные элементы dS_α и dS_β, входит дважды с разными знаками, так как в равенствах (1.22'), соответствующих этим элементам, обход по линии $l_{\alpha\beta}$ получается по взаимно противоположным направлениям. Поэтому ненулевые вклады в правую часть (1.23') вносят только работы по тем участкам $\Delta l_{i,\,\Gamma}$ контуров $l_{i,\,\Gamma}$, которые образуют контур $l[S]$ поверхности S. Следовательно, правая часть (1.23') совпадает с правой частью (1.23).

Согласно теореме Стокса поток вектора $\mathrm{rot}\,\mathbf{M}$ через поверхность S равен циркуляции вектора $\mathbf{M}$ по контуру $l[S]$. Из (1.23) следует, что если на какой-либо поверхности S всюду $\mathrm{rot}\,\mathbf{M}=0$, то по контуру l этой поверхности циркуляция равна нулю.

В правой части $(1.22')_2$ можно взять в качестве dS_k координатную площадку с контуром, состоящим из отрезков координатных линий, ортогональных к линии l_k. Возьмем такую площадку

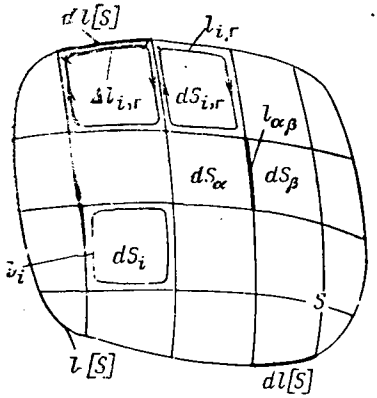


Рис. 7. Схема, поясняющая вывод теоремы Стокса.

Элементы dl [S] совпадают с участками $\Delta l_{i,r}$ контуров $l_{i,r}$ краевых элементов $dS_{i,r}$

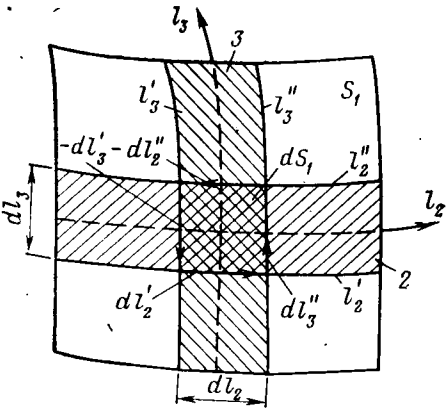


Рис. 8. Полосы *2* и *3* на координатной поверхности S_1 и их общая площадка dS_1

на координатной поверхности S_1 (рис. 8). На этой поверхности выделим двумя парами координатных линий l'_2, l''_2 и l'_3, l''_3 две взаимно ортогональные полосы *2* и *3* элементарной ширины dl_3 и dl_2 со средними линиями l_2 и l_3 соответственно. В общем случае ширина полосы и компонента поля $\mathbf{M}$ по ее ширине (по l_3 или l_2) меняется вдоль полосы и, следовательно, напряжения $(\mathbf{M}\,d\mathbf{l}_3)$ и $(\mathbf{M}\,d\mathbf{l}_2)$ на поперечниках dl_3 и dl_2 полос *2* и *3* являются соответственно функциями координат ξ_2 и ξ_3. Пусть dS_1 — общая площадка полос *2* и *3* с контуром $l[dS_1]$, состоящим из следующих друг за другом элементов dl'_2, dl''_3, $-dl''_2$, $-dl'_3$; тогда, согласно (1.22′)

$$\mathrm{rot}_1\,\mathbf{M}=\frac{1}{dl_2dl_3}\left[(\mathbf{M}dl_2)'+(\mathbf{M}dl_3)''-(\mathbf{M}dl_2)''-(\mathbf{M}dl_3)'\right], \tag{1.24}$$

где $(\mathbf{M}\,d\mathbf{l}_2)'$ и $(\mathbf{M}\,d\mathbf{l}_2)''$ — значения функции $(\mathbf{M}\,d\mathbf{l}_2)$ на элементах dl'_2 и dl''_2; $(\mathbf{M}\,d\mathbf{l}_3)'$ и $(\mathbf{M}\,d\mathbf{l}_3)''$ — значения функции $(\mathbf{M}\,d\mathbf{l}_3)$ на элементах dl'_3 и dl''_3.

Принимая во внимание, что

$$(\mathbf{M}dl_2)''-(\mathbf{M}dl_2)'=\frac{\partial(\mathbf{M}dl_2)}{\partial\xi_3}\,d\xi_3=\frac{\partial(\mathbf{M}dl_2)}{\partial l_3}\,dl_3, \tag{1.24′}$$

$$(\mathbf{M}dl_3)''-(\mathbf{M}dl_3)'=\frac{\partial(\mathbf{M}dl_3)}{\partial\xi_2}\,d\xi_2=\frac{\partial(\mathbf{M}dl_3)}{\partial l_2}\,dl_2, \tag{1.24″}$$

получаем

$$\mathrm{rot}_1\,\mathbf{M}=\frac{1}{dl_2dl_3}\left[\frac{\partial(\mathbf{M}dl_3)}{\partial l_2}\,dl_2-\frac{\partial(\mathbf{M}dl_2)}{\partial l_3}\,dl_3\right]=$$

$$=\frac{1}{h_2h_3}\left[\frac{\partial(M_3h_3)}{\partial\xi_2}-\frac{\partial(M_2h_2)}{\partial\xi_3}\right] \tag{1.25}$$

и аналогично

$$\operatorname{rot}_3 \mathbf{M} = \frac{1}{dl_3 dl_1}\left[\frac{\partial (\mathbf{M} dl_1)}{\partial l_3} dl_3 - \frac{\partial (\mathbf{M} dl_3)}{\partial l_1} dl_1\right] =$$

$$= \frac{1}{h_3 h_1}\left[\frac{\partial (M_1 h_1)}{\partial \xi_3} - \frac{\partial (M_3 h_3)}{\partial \xi_1}\right], \qquad (1.25')$$

$$\operatorname{rot}_3 \mathbf{M} = \frac{1}{dl_1 dl_2}\left[\frac{\partial (\mathbf{M} dl_2)}{\partial l_1} dl_1 - \frac{\partial (\mathbf{M} dl_1)}{\partial l_2} dl_2\right] =$$

$$= \frac{1}{h_1 h_2}\left[\frac{\partial (M_2 h_2)}{\partial \xi_1} - \frac{\partial (M_1 h_1)}{\partial \xi_2}\right]. \qquad (1.25'')$$

Следовательно,

$$\operatorname{rot} \mathbf{M} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\begin{vmatrix} \mathbf{1}_1 h_1 & \mathbf{1}_2 h_2 & \mathbf{1}_3 h_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial \xi_1} & \dfrac{\partial}{\partial \xi_2} & \dfrac{\partial}{\partial \xi_3} \\ h_1 M_1 & h_2 M_2 & h_3 M_3 \end{vmatrix}. \qquad (1.26)$$

В системах x, y, z; r, φ, z; R, θ, φ имеем соответственно

$$\operatorname{rot} \mathbf{M} = \begin{vmatrix} \mathbf{1}_x & \mathbf{1}_y & \mathbf{1}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ M_x & M_y & M_z \end{vmatrix} = \mathbf{1}_x\left[\frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z}\right] +$$

$$+ \mathbf{1}_y\left[\frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x}\right] + \mathbf{1}_z\left[\frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y}\right]. \qquad (1.27)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{M} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \mathbf{1}_r & \mathbf{1}_\varphi r & \mathbf{1}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ M_r & r M_\varphi & M_z \end{vmatrix} = \mathbf{1}_r\left[\frac{1}{r}\frac{\partial M_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial M_\varphi}{\partial z}\right] +$$

$$+ \mathbf{1}_\varphi\left[\frac{\partial M_r}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial r}\right] + \mathbf{1}_z\left[\frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r M_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial M_r}{\partial \varphi}\right)\right], \qquad (1.27')$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{M} = \frac{1}{R^2 \sin\theta}\begin{vmatrix} \mathbf{1}_R & \mathbf{1}_\theta R & \mathbf{1}_\varphi R \sin\theta \\ \dfrac{\partial}{\partial R} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial \varphi} \\ M_R & R M_\theta & R \sin\theta M_\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\mathbf{1}_R}{R \sin\theta}\left[\frac{\partial (\sin\theta M_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial M_\theta}{\partial \varphi}\right] + \frac{\mathbf{1}_\theta}{R}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial M_R}{\partial \varphi} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial (R M_\varphi)}{\partial R}\right] + \frac{\mathbf{1}_\varphi}{R}\left[\frac{\partial (R M_\theta)}{\partial R} - \frac{\partial M_R}{\partial \theta}\right]. \qquad (1.27'')$$

Правую часть (1.27) можно рассматривать как векторное произведение

$$\left[\left(\mathbf{1}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{1}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{1}_z \frac{\partial}{\partial z}\right)(\mathbf{1}_x M_x + \mathbf{1}_y M_y + \mathbf{1}_z M_z)\right] = [\nabla M]$$

символического вектора ∇ на вектор $\mathbf{M}$; следовательно,

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{M}=[\nabla\mathbf{M}]. \tag{1.28}$$

Из (1.25)—(1.27″) следует, что нормальная компонента вектора $\mathrm{rot}\,\mathbf{M}$ теряет смысл (обращается в бесконечность) на поверхности S, на которой терпит разрыв тангенциальная компонента вектора $\mathbf{M}$.

IV. Дивергенция. Дивергенция поля $\mathbf{M}$ в точке a определяется формулой

$$\mathrm{div}\,\mathbf{M}=\lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\oint\limits_{S[V]}(\mathbf{M}d\mathbf{S})=\lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\oint\limits_{S[V]}M_n dS, \tag{1.29}$$

в которой V — объем произвольно взятой области V, содержащей точку a; $S[V]$ — замкнутая поверхность, ограничивающая область V. Стремление объема V к нулю совершается стягиванием поверхности $S[V]$ к точке a, а нормаль n к этой поверхности считается направленной наружу. Согласно (1.29) в средней точке a объемного элемента dV, ограничиваемого поверхностью $S[dV]$,

$$\mathrm{div}\,\mathbf{M}=\frac{1}{dV}\oint\limits_{S[dV]}(\mathbf{M}d\mathbf{S}), \tag{1.29′}$$

т. е. дивергенция вектора $\mathbf{M}$ в точке a представляет собой поток вектора $\mathbf{M}$ через замкнутую поверхность $S[dV]$, ограничивающую окрестность dV точки a, отнесенный к единице объема этой окрестности.

Из (1.29′) можно получить теорему Гаусса—Остроградского[1]

$$\int\limits_V \mathrm{div}\,\mathbf{M}dV=\oint\limits_{S[V]}(\mathbf{M}d\mathbf{S}), \tag{1.30}$$

где $S[V]$ — замкнутая поверхность, ограничивающая область V.

Разделим область V на элементы dV_i, ограниченные поверхностями S_i. Границы S_i краевых элементов dV_i, расположенных у границы $S[V]$, содержат участки dS, совокупностью которых является эта граница. Составим для всех элементов dV_i равенства вида (1.29′). Умножая их на dV_i и суммируя, получаем равенство

$$\sum_i \mathrm{div}\,\mathbf{M}\,dV_i=\sum_i\oint\limits_{S_i}(\mathbf{M}d\mathbf{S}), \tag{1.30′}$$

в котором левая часть совпадает с левой частью (1.30). Что же касается правой части (1.30′), то в ее состав поток вектора $\mathbf{M}$ через границу $S_{\alpha\beta}$ (аналогичную линии $l_{\alpha\beta}$ на рис. 7) между соседними элементами dV_α и dV_β входит дважды при разных направлениях нормали к поверхности $S_{\alpha\beta}$ (наружу из областей dV_α и dV_β). Получаются два потока, сумма которых равна нулю. Поэтому ненулевые вклады в правую часть (1.30′) вносят только потоки через участки dS границ S_i, образующие границу $S[V]$ области V. Следовательно, правая часть (1.30′) совпадает с правой частью (1.30).

[1] В дальнейшем будем ее называть теоремой Остроградского.

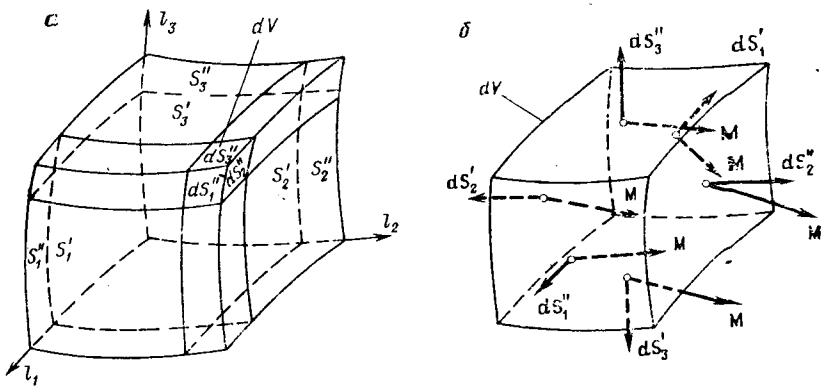


Рис. 9. Схема, поясняющая вывод выражения (1.32′) для дивергенции:
а — общий элемент dV трех взаимно ортогональных координатных трубок; *б* — грани dS элемента dV и векторы $\mathbf{M}$ в их центрах

Согласно теореме Остроградского (1.30) поток вектора $\mathbf{M}$ через замкнутую поверхность $S[V]$ равен интегралу дивергенции этого вектора, взятому по области V, ограниченной поверхностью $S[V]$, если во всех точках этой области $\operatorname{div}\mathbf{M}$ имеет смысл.

Из (1.30) следует, что если в какой-либо области V всюду $\operatorname{div}\mathbf{M}=0$, то поток вектора $\mathbf{M}$ через поверхность $S[V]$, ограничивающую эту область, равен нулю.

В правой части (1.29′) в качестве области dV можно взять координатный элемент пространства, ограниченный координатными площадками dS_k.

Координатными поверхностями S_2', S_2'', S_3', S_3'' выделим из пространства координатную трубку со средней линией l_1 и с поперечным сечением dS_1 (рис. 9). Площадь этого сечения и нормальная компонента вектора $\mathbf{M}$ на нем меняются вдоль трубки, и, следовательно, поток $(\mathbf{M}dS_1)$ является функцией координаты ξ_1. Аналогично можно представить потоки $(\mathbf{M}dS_2)$ и $(\mathbf{M}dS_3)$ через поперечные сечения координатных трубок со средними линиями l_2 и l_3 как функции координат ξ_2 и ξ_3. Пусть dV — общий элемент объема трех таких взаимно ортогональных координатных трубок, а его грани — площадки dS'_k, dS''_k $(k=1, 2, 3)$.

Применяя к элементу dV формулу (1.29′) и учитывая, что при этом нормали на его поверхности $S[dV]$ следует направлять наружу, имеем

$$\operatorname{div}\mathbf{M}=\frac{1}{dV}\sum_{1}^{3}[(\mathbf{M}dS_k)''-(\mathbf{M}dS_k)'], \qquad (1.31)$$

где $(\mathbf{M}dS_k)'$ и $(\mathbf{M}dS_k)''$ — значения функции $(\mathbf{M}dS_k)$, соответствующие сечениям dS_k' и dS_k'' трубки со средней линией l_k. Принимая во внимание, что

$$(\mathbf{M}dS_k)''-(\mathbf{M}dS_k)'=\frac{\partial(\mathbf{M}dS_k)}{\partial\xi_k}d\xi_k=\frac{\partial(\mathbf{M}dS_k)}{\partial l_k}dl_k,$$

получаем из (1.31)

$$\operatorname{div}\mathbf{M}=\frac{1}{dS_1}\frac{\partial(\mathbf{M}dS_1)}{\partial l_1}+\frac{1}{dS_2}\frac{\partial(\mathbf{M}dS_2)}{\partial l_2}+\frac{1}{dS_3}\frac{\partial(\mathbf{M}dS_3)}{\partial l_3} \tag{1.31'}$$

или

$$\operatorname{div}\mathbf{M}=\frac{1}{dl_1dl_2dl_3}\left[\frac{\partial(dl_2dl_3M_1)}{\partial l_1}dl_1+\frac{\partial(dl_3dl_1M_2)}{\partial l_2}dl_2+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial(dl_1dl_2M_3)}{\partial l_3}dl_3\right], \tag{1.32}$$

т. е.

$$\operatorname{div}\mathbf{M}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial(h_2h_3M_1)}{\partial\xi_1}+\frac{\partial(h_3h_1M_2)}{\partial\xi_2}+\frac{\partial(h_1h_2M_3)}{\partial\xi_3}\right]. \tag{1.32}$$

В системах x, y, z; r, φ, z; R, θ, φ имеем соответственно

$$\operatorname{div}\mathbf{M}=\frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial M_y}{\partial y}+\frac{\partial M_z}{\partial z}, \tag{1.33}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{M}=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rM_r)}{\partial r}+\frac{\partial M_\varphi}{\partial\varphi}+r\frac{\partial M_z}{\partial z}\right], \tag{1.33'}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{M}=\frac{1}{R^2\sin\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial}{\partial R}(R^2M_R)+R\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta M_\theta)+\right.$$
$$\left.+R\frac{\partial}{\partial\varphi}M_\varphi\right]. \tag{1.33''}$$

Правую часть (1.33) можно рассматривать как скалярное произведение $\left(\left[\mathbf{1}_x\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{1}_y\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{1}_z\frac{\partial}{\partial z}\right][\mathbf{1}_xM_x+\mathbf{1}_yM_y+\mathbf{1}_zM_z]\right)$ символического вектора ∇ на вектор $\mathbf{M}$. Следовательно,

$$\operatorname{div}\mathbf{M}=(\nabla\mathbf{M}). \tag{1.34}$$

§ 4. НЕКОТОРЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Выведем соотношения, аналогичные теореме Остроградского, и некоторые выражения для объемных, двухмерных и поверхностных производных.

I. Градиент и поток скаляра. Пусть $S[dV]$ — поверхность координатного элемента объема $dV=dxdydz$ с нормалями, направленными наружу. Ее грани в векторизованном виде

$$d\mathbf{S}_x'=-\mathbf{1}_xdydz,\quad d\mathbf{S}_y'=-\mathbf{1}_ydzdx,\quad d\mathbf{S}_z'=-\mathbf{1}_zdxdy,\quad d\mathbf{S}_x''=$$
$$=\mathbf{1}_xdydz,\ d\mathbf{S}_y''=\mathbf{1}_ydzdx,\ d\mathbf{S}_z''=\mathbf{1}_zdxdy.$$

Обозначив через $T'(x)$, $T'(y)$, $T'(z)$, $T''(x)$, $T''(y)$, $T''(z)$ значения T в центрах этих граней, имеем

$$\oint_{S[dV]}T\,d\mathbf{S}=\mathbf{1}_x(T''(x)-T'(x))dydz+\mathbf{1}_y(T''(y)-T'(y))dzdx+$$
$$+\mathbf{1}_z(T''(z)-T'(z))dxdy=\mathbf{1}_x\frac{\partial T}{\partial x}dV+\mathbf{1}_y\frac{\partial T}{\partial y}dV+$$
$$+\mathbf{1}_z\frac{\partial T}{\partial z}dV.$$

Следовательно, согласно (1.13)

$$\operatorname{grad} T = \frac{1}{dV} \oint\limits_{S\,[dV]} T\,d\mathbf{S} \text{ или } \operatorname{grad} T = \lim_{V\to 0} \frac{1}{V} \oint\limits_{S\,[V]} T\,d\mathbf{S}. \tag{1.35}$$

От равенства (1.35) можно перейти к аналогичному (1.30) равенству

$$\int\limits_V \operatorname{grad} T dV = \oint\limits_{S\,[V]} T\,d\mathbf{S}, \tag{1.36}$$

правая часть которого является потоком скаляра T через поверхность $S[V]$.

Для получения (1.36) мы, как и при выводе (1.30), разделим область V на элементы dV_i, ограниченные поверхностями S_i. Границы S_i краевых элементов dV_i (расположенных непосредственно у границы $S[V]$ области V) содержат элементы dS, совокупность которых составляет эту границу. Составим для всех элементов dV_i равенства $(1.35)_1$. Сложив эти равенства, умноженные на соответственные объемы dV_i, получим

$$\sum_i \operatorname{grad} T dV = \sum_i \oint\limits_{S_i} T\,d\mathbf{S}. \tag{1.36'}$$

Левая часть (1.36′) равна левой части (1.36). Что же касается правой части (1.36′), то в ее состав поток скаляра T через границу $S_{\alpha\beta}$ между соседними элементами dV_α и dV_β входит дважды: один раз как поток через участок поверхности $S[dV_\alpha]$ с нормалью, направленной в область dV_β, а другой — как поток через участок поверхности $S[dV_\beta]$ с нормалью, направленной в область dV_α. Сумма таких двух потоков, очевидно, равна нулю. Из этого следует, что ненулевой вклад в сумму потоков через поверхности S_i вносят только потоки через участки поверхностей краевых элементов dV_i, являющиеся элементами границы $S[V]$ области V. Но совокупность этих потоков представляет собой поток через поверхность $S[V]$, следовательно, равенство (1.36′) сводится к (1.36).

II. Ротор и векторный поток. Обозначая через $\mathbf{M}'(x)$, $\mathbf{M}'(y)$, $\mathbf{M}'(z)$, $\mathbf{M}''(x)$, $\mathbf{M}''(y)$, $\mathbf{M}''(z)$ значения вектора $\mathbf{M}$ в центрах граней dS_x', dS_y', dS_z', dS_x'', dS_y'', dS_z'' координатного элемента объема $dV = dxdydz$, имеем

$$\oint\limits_{S\,[dV]} [\mathbf{M}d\mathbf{S}] = [(\mathbf{M}''(x) - \mathbf{M}'(x))\,\mathbf{1}_x]\,dydz + [(\mathbf{M}''(y) -$$

$$- \mathbf{M}'(y))\,\mathbf{1}_y]\,dzdx + [(\mathbf{M}''(z) - \mathbf{M}'(z))\,\mathbf{1}_z]\,dxdy =$$

$$= ([\mathbf{1}_y\mathbf{1}_x]\,[M''_y(x) - M'_y(x)] + [\mathbf{1}_z\mathbf{1}_x]\,[M''_z(x) -$$

$$- M'_z(x)])\,dydz + ([\mathbf{1}_z\mathbf{1}_y]\,[M''_z(y) - M'_z(y)] +$$

$$+ [\mathbf{1}_x\mathbf{1}_y]\,[M''_x(y) - M'_x(y)])\,dzdx + ([\mathbf{1}_x\mathbf{1}_z]\,[M''_x(z) - M'_x(z)] +$$

$$+ [\mathbf{1}_y\mathbf{1}_z]\,[M''_y(z) - M'_y(z)])\,dxdy = \left[\mathbf{1}_z\left(\frac{\partial M_x}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial x}\right) +\right.$$

$$\left. + \mathbf{1}_x\left(\frac{\partial M_y}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial y}\right) + \mathbf{1}_y\left(\frac{\partial M_z}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial z}\right)\right] dV.$$

Следовательно, согласно (1.27)

$$\operatorname{rot}\mathbf{M} = -\frac{1}{dV}\oint\limits_{S\,[dV]}[\mathbf{M}d\mathbf{S}],\quad \operatorname{rot}\mathbf{M} = \lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\oint\limits_{S\,[V]}[d\mathbf{S}\mathbf{M}], \tag{1.37}$$

где $[d\mathbf{S}\,\mathbf{M}]$ — векторный поток вектора $\mathbf{M}$ через площадку $d\mathbf{S}$.

Из (1.37) можно получить аналогичное (1.30) соотношение

$$\int\limits_V \operatorname{rot}\mathbf{M}dV = \oint\limits_{S\,[V]}[d\mathbf{S}\mathbf{M}]. \tag{1.38}$$

Для этого, повторяя вывод соотношения (1.30), надо заменить равенства вида (1.29′) равенствами вида $(1.37)_1$.

III. Двухмерные производные. От выражений (1.29), $(1.35)_2$ и $(1.37)_2$ для трехмерных производных $\operatorname{div}\mathbf{M}$, $\operatorname{grad}T$ и $\operatorname{rot}\mathbf{M}$ можно перейти к аналогичным выражениям для двухмерных производных $\operatorname{div}^s\mathbf{M}_\tau$, $\operatorname{grad}^s T$ и $\operatorname{rot}^s\mathbf{M}_\tau$, т. е. для дивергенции, градиента и ротора, от величин, рассматриваемых как функции точки a на поверхности S. Заменяя в (1.29) трехмерную область V участком ΔS поверхности S, на которой задано поле тангенциального к ней вектора $\mathbf{M}_\tau$, а границу $S[V]$ области V — контуром $l[\Delta S]$ участка ΔS, получаем определение двухмерной дивергенции:

$$\operatorname{div}^s\mathbf{M}_\tau = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{1}{\Delta S}\oint\limits_{l\,[\Delta S]}(\mathbf{M}_\tau\boldsymbol{\nu})\,dl = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{1}{\Delta S}\oint\limits_{l\,[\Delta S]}M_\nu dl, \tag{1.39}$$

где $\boldsymbol{\nu}$ — единичная нормаль к линии $l[\Delta S]$, лежащая на поверхности S (в плоскости P, касательной к этой поверхности) и направленная наружу относительно участка ΔS;

$$\mathbf{M}_\tau = \mathbf{M}_\nu + \mathbf{M}_l,\quad M_\nu = (\boldsymbol{\nu}\mathbf{M}_\tau),\quad M_l = (\mathbf{1}_l\mathbf{M}_\tau), \tag{1.40}$$

а $\mathbf{1}_l$ — единичный вектор по касательной к линии $l[\Delta S]$.

Из $(1.35)_2$ аналогично получаем определение двухмерного градиента (см. разд. III § 2):

$$\operatorname{grad}^s T = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{1}{\Delta S}\oint\limits_{l\,[\Delta S]}\boldsymbol{\nu}T\,dl,$$

$$[\mathbf{n}\operatorname{grad}^s T] = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{1}{\Delta S}\cdot\oint\limits_{l\,[\Delta S]}T\,d\mathbf{l}. \tag{1.41}$$

В $(1.41)_2$ предполагается, что обход по контуру $l[\Delta S]$ образует правовинтовую систему с нормалью n к поверхности S и, следовательно,

$$[\mathbf{n}\boldsymbol{\nu}] = \mathbf{1}_l. \tag{1.40′}$$

Из $(1.37)_2$ получаем определение двухмерного ротора:

$$\operatorname{rot}^s\mathbf{M}_\tau = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{1}{\Delta S}\oint\limits_{l\,[\Delta S]}[\boldsymbol{\nu}\mathbf{M}_\tau]\,dl = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{\mathbf{n}}{\Delta S}\oint\limits_{l\,[\Delta S]}M_l dl, \tag{1.42}$$

потому что согласно $(1.40)_1$

$$[\nu \mathbf{M}_\tau] = [\nu \mathbf{M}_\nu] + [\nu \mathbf{M}_l] = [\nu \mathbf{l}_l] M_l = \mathbf{n} M_l. \qquad (1.40'')$$

От (1.39), (1.41), (1.42) можно перейти к соотношениям вида (1.30), (1.36), (1.38) для поля на поверхности. Например, из (1.39) и (1.41) получаем

$$\int_S \operatorname{div}^s \mathbf{M}_\tau \, dS = \oint_{l\,[S]} (\mathbf{M}_\tau [\mathbf{dl n}]), \quad \int_S [\mathbf{dS} \nabla T] = \oint_{l\,[S]} T \mathbf{dl}. \qquad (1.41')$$

так как $[\mathbf{dS} \operatorname{grad} T] = [\mathbf{n} \operatorname{grad}^s T] dS$.

IV. Поверхностные производные. Вернемся к полю в трехмерном пространстве и допустим, что точка a находится на поверхности S, на которой возможен разрыв вектора $\mathbf{M}$, причем пока допустим, что обе компоненты этого вектора имеют ограниченные значения. Пусть V_1 и V_2 — области пространства, разделяемые некоторой поверхностью S, а n — нормаль к ней, направленная от V_1 к V_2. Проведем в областях V_1 и V_2 поверхности S_1 и S_2 на малых расстояниях $h/2$ от поверхности S, взятых по нормали к ней, и обозначим через $\mathbf{M}^{(1)}$ и $\mathbf{M}^{(2)}$ значения вектора $\mathbf{M}$ на поверхностях S_1 и S_2 (рис. 10). Выделим на поверхности S участок ΔS, ограниченный контуром $l[\Delta S]$ и, взяв этот контур в качестве направляющей, а нормаль n в качестве образующей, построим прямой цилиндр $Ц$ с основаниями s_1 и s_2 на поверхностях S_1 и S_2, с боковой поверхностью $s_б$, проходящей через контур $l[\Delta S]$, с малой высотой h и с объемом $\Delta V = h \Delta S$. Через замкнутую по-

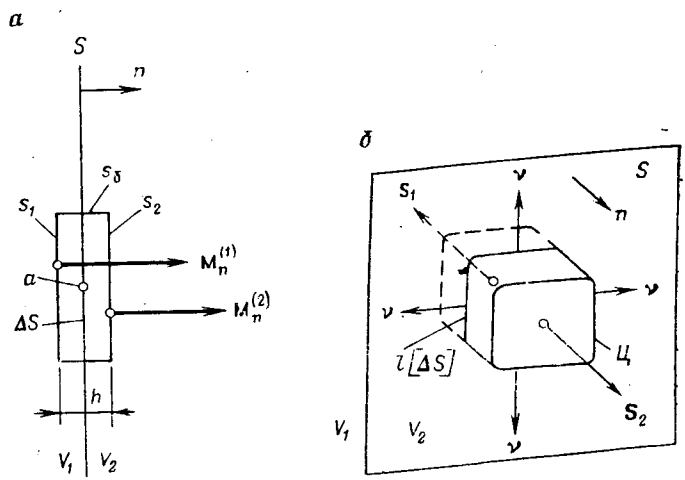


Рис. 10. Построение, поясняющее вывод выражения для поверхностных производных:

а — разрез по нормали n к поверхности S; *б* — вид (сбоку) из области V_2. Контур $l[\Delta S]$ образует правовинтовую систему с нормалью n, а нормаль ν к этому контуру и к поверхности $s_б$ лежит в плоскости S

верхность s этого цилиндра, состоящую из поверхностей s_1, s_2 и $s_б$, имеем поток вектора $\mathbf{M}$:

$$\oint_s (\mathbf{MdS}) = \int_{s_1} (\mathbf{MdS}) + \int_{s_2} (\mathbf{MdS}) + \int_{s_б} (\mathbf{MdS}). \tag{1.43}$$

Считая нормаль на поверхности s всюду направленной наружу относительно цилиндра $Ц$, имеем:

$$\mathbf{ds}_1 = -\mathbf{n}dS,\ \mathbf{ds}_2 = \mathbf{n}dS,\ \mathbf{ds}_б = \boldsymbol{\nu} ds_б = \boldsymbol{\nu} dndl. \tag{1.44}$$

Кроме того, имеем в дополнение к (1.40), (1.40′), (1.40″)

$$[\boldsymbol{\nu}\mathbf{M}_n] = -\mathbf{l}_l M_n,\ (\boldsymbol{\nu}\mathbf{M}_n) = (\mathbf{n}\mathbf{M}_\nu) = (\mathbf{n}\mathbf{M}_l) = (\boldsymbol{\nu}\mathbf{M}_l) = 0. \tag{1.40‴}$$

Следовательно,

$$\int_{s_1} (\mathbf{MdS}) + \int_{s_2} (\mathbf{MdS}) = \int_{\Delta S} (\mathbf{n}\,[\mathbf{M}^{(2)} - \mathbf{M}^{(1)}])\,dS =$$

$$= \int_{\Delta S} (M_n^{(2)} - M_n^{(1)})\,dS, \tag{1.45}$$

$$\int_{s_б} (\mathbf{MdS}) = h \oint_{l\,[\Delta S]} (\mathbf{M}^h{}_\tau \boldsymbol{\nu})\,dl,\ \mathbf{M}^h{}_\tau = \frac{1}{h} \int_{-\frac{1}{2}h}^{+\frac{1}{2}h} \mathbf{M}_\tau dn, \tag{1.45′}$$

где $\mathbf{M}^h{}_\tau$ — усредненное по образующей цилиндра $Ц$ значение тангенциальной к поверхности S компоненты поля $\mathbf{M}$. Ввиду малости высоты h цилиндра $Ц$ обычно можно заменить величину $\mathbf{M}^h{}_\tau$ значением $\mathbf{M}_\tau$ в средней точке образующей цилиндра, т. е. на контуре $l[\Delta S]$ его среднего сечения ΔS. Разделив обе части (1.43) на объем цилиндра ΔV, имеем

$$\frac{1}{\Delta V} \oint_s (\mathbf{MdS}) = \frac{1}{\Delta S} \int_{\Delta S} \frac{M_n^{(2)} - M_n^{(1)}}{h}\,dS + \frac{1}{\Delta S} \oint_{l\,[\Delta S]} (\boldsymbol{\nu}\mathbf{M}^h{}_\tau)dl. \tag{1.46}$$

Полагая $h \to 0$ и стягивая контур $l[\Delta S]$ к точке a на поверхности S, получаем в левой части (1.46), согласно (1.29), дивергенцию вектора $\mathbf{M}$ в точке a. В правой части во втором члене подынтегральная функция имеет ограниченное значение, так как мы полагаем, что $\mathbf{M}_\tau \neq \infty$. В первом же члене правой части подынтегральная функция при $h \to 0$ обращается в бесконечность, если при этом разность $M_n^{(2)} - M_n^{(1)}$ не стремится к нулю. Но при $h \to 0$ поверхности S_1 и S_2 представляют собой стороны поверхности S, и разность $M_n^{(2)} - M_n^{(1)}$ есть разрыв компоненты M_n на этой поверхности. Следовательно, на поверхности, на которой $M_n^{(2)} \neq M_n^{(1)}$, дивергенция вектора $\mathbf{M}$ теряет смысл.

В этом случае будем характеризовать поведение поля $\mathbf{M}$ у точки a на поверхности S пределом (при $h \to 0$ и $\Delta S \to 0$) отношения потока вектора $\mathbf{M}$ через поверхность s не к объему ΔV

цилиндра $Ц$, а к площади ΔS его поперечного сечения. Обозначая эту величину $\operatorname{Div}\mathbf{M}$, т. е. полагая

$$\operatorname{Div}\mathbf{M}=\lim_{\substack{\Delta S\to 0\\ h\to 0}}\frac{1}{\Delta S}\oint_{s}(\mathbf{M}d\mathbf{S}), \tag{1.47}$$

имеем согласно равенству (1.46), умноженному на h,

$$\operatorname{Div}\mathbf{M}=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{1}{\Delta S}\left[\int_{s_0}(\mathbf{M}d\mathbf{S})+\oint_{l\,[\Delta S]}(\mathbf{M}^{\Delta}_{\tau}\boldsymbol{\nu})\,dl\right], \tag{1.47'}$$

где

$$\int_{s_0}(\mathbf{M}d\mathbf{S})=\int_{\Delta S}(M_n^{(2)}-M_n^{(1)})\,dS,\quad \mathbf{M}^{\Delta}_{\tau}=\boldsymbol{\tau}\lim_{h\to 0}hM^{h}_{\tau}, \tag{1.45''}$$

а s_0 — совокупность сторон s_1 и s_2 участка ΔS.

Считая, что $M_\tau\neq\infty$ и, следовательно,, $M^{\Delta}_{\tau}=0$, получаем из (1.47′)

$$\operatorname{Div}\mathbf{M}=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{1}{\Delta S}\int_{s_0}(\mathbf{M}d\mathbf{S}). \tag{1.48}$$

Принимая во внимание $(1.45'')_1$ и учитывая, что при малых размерах площадки ΔS правая часть $(1.45'')_1$ равна $(M_n^{(2)}-M_n^{(1)})\,\Delta S$, получаем из (1.48)

$$\operatorname{Div}\mathbf{M}=M_n^{(2)}-M_n^{(1)}=(\mathbf{n}[\mathbf{M}^{(2)}-\mathbf{M}^{(1)}]). \tag{1.49}$$

Величину $\operatorname{Div}\mathbf{M}$ будем называть поверхностной дивергенцией вектора $\mathbf{M}$. Она отличается от объемной дивергенции $\operatorname{div}\mathbf{M}$, тем, что замкнутая поверхность, через которую берется поток вектора $\mathbf{M}$, содержит вместо трехмерной области с объемом ΔV двухмерную область с площадью ΔS, и в соответствии с этим поток делится не на объем ΔV, а на площадь ΔS. Согласно (1.48) имеем для любой поверхности S

$$\oint_{S_0}(\mathbf{M}d\mathbf{S})=\int_{S}\operatorname{Div}\mathbf{M}dS, \tag{1.48'}$$

где S_0 — замкнутая поверхность, обтягивающая поверхность S и состоящая из сторон S_1 и S_2 поверхности S.

Тождество (1.48′) аналогично теореме Остроградского (1.30) для объемной дивергенции.

Векторный поток вектора $\mathbf{M}$ через поверхность s цилиндра $Ц$ (см. рис. 10)

$$\oint_{s}[d\mathbf{S}\mathbf{M}]=\int_{s_1}[d\mathbf{S}\mathbf{M}]+\int_{s_2}[d\mathbf{S}\mathbf{M}]+\int_{s_6}[d\mathbf{S}\mathbf{M}], \tag{1.50}$$

причем согласно (1.44), (1.45′)

$$\int_{s_1}[d\mathbf{S}\mathbf{M}]+\int_{s_2}[d\mathbf{S}\mathbf{M}]=\int_{\Delta S}[\mathbf{n}(\mathbf{M}^{(2)}-\mathbf{M}^{(1)})]\,dS,$$

$$\int_{s_б}[\mathrm{dSM}] = -h\oint_{l[\Delta S]} M^h{}_n\,\mathrm{dl} + h\mathbf{n}\oint_{l[\Delta S]}(\mathbf{M}^h_\tau\,\mathrm{dl}), \tag{1.51}$$

$$M^h{}_n = \frac{1}{h}\int_{-\frac{1}{2}h}^{+\frac{1}{2}h} M_n\,dn, \tag{1.51'}$$

где $M^h{}_n$ — усредненное по образующей цилиндра $Ц$ значение компоненты вектора $\mathbf{M}$, нормальной к поверхности S. Разделив обе части (1.50) на объем $\Delta V = h\Delta S$ цилиндра $Ц$, получим:

$$\frac{1}{\Delta V}\oint_s[\mathrm{dSM}] = \frac{1}{\Delta S}\int_{\Delta S}\frac{[\mathbf{n}(\mathbf{M}^{(2)}-\mathbf{M}^{(1)})]}{h}\,dS -$$

$$-\frac{1}{\Delta S}\oint_{l[\Delta S]} M^h{}_n\,\mathrm{dl} + \frac{\mathbf{n}}{\Delta S}\oint_{l[\Delta S]}(\mathbf{M}^h{}_\tau\,\mathrm{dl}). \tag{1.52}$$

Полагая $h\to 0$ и стягивая контур $l[\Delta S]$ к точке a, получаем согласно (1.37) в левой части (1.52) ротор вектора $\mathbf{M}$ в этой точке. В правой части, во втором и третьем членах, подынтегральные функции имеют ограниченные значения, так как $M_n \neq \infty$ и $M_\tau \neq \infty$. В первом же члене подынтегральная функция обращается в бесконечность при $h\to 0$, если разность $[\mathbf{nM}^{(2)}]-[\mathbf{nM}^{(1)}]$ при этом не стремится к нулю. Но эта разность при $h\to 0$ представляет собой разрыв компоненты $[\mathbf{nM}] = [\mathbf{nM}_\tau]$ на поверхности S, следовательно, если тангенциальная компонента вектора $\mathbf{M}$ терпит разрыв на поверхности S, то ротор вектора $\mathbf{M}$ на этой поверхности теряет смысл.

В этом случае будем характеризовать поведение поля $\mathbf{M}$ у какой-либо точки поверхности S пределом, к которому при $h\to 0$ и $\Delta S\to 0$ стремится отношение векторного потока вектора $\mathbf{M}$ через поверхность s не к объему ΔV цилиндра $Ц$, а к площади ΔS его поперечного сечения. Обозначая эту величину $\mathrm{Rot}\,\mathbf{M}$, т. е. полагая в соответствии с (1.37)

$$\mathrm{Rot}\,\mathbf{M} = \lim_{\substack{\Delta S\to 0\\ h\to 0}}\frac{1}{\Delta S}\oint_s[\mathrm{dSM}], \tag{1.53}$$

имеем согласно равенству (1.52), умноженному на h,

$$\mathrm{Rot}\,\mathbf{M} = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{1}{\Delta S}\left[\int_{s_0}[\mathrm{dSM}] - \oint_{l[\Delta S]} M^\Delta_n\,\mathrm{dl} + \mathbf{n}\oint_{l[\Delta S]}(\mathbf{M}^\Delta_\tau\,\mathrm{dl})\right], \tag{1.53'}$$

где

$$\int_{s_0}[\mathrm{dSM}] = \int_{\Delta S}[\mathbf{n}(\mathbf{M}^{(2)}-\mathbf{M}^{(1)})]\,dS,\quad M^\Delta_n = \lim_{h\to 0} hM^h{}_n. \tag{1.51''}$$

Считая, что $M^h{}_n \neq \infty$, $M^h{}_\tau \neq \infty$ и, следовательно, $M^\Delta{}_n = 0$, $M^\Delta{}_\tau = 0$, получаем из (1.53')

$$\mathrm{Rot}\,\mathbf{M} = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{1}{\Delta S}\int_{s_0}[\mathrm{dSM}]. \tag{1.54}$$

(1.10‴) для компонент вектора $\operatorname{grad} T$, убеждаемся, что все компоненты вектора $\operatorname{rot}\operatorname{grad} T$ обращаются в нуль. Так, например, из (1.25) получаем

$$(\operatorname{rot}\operatorname{grad} T)_1 = \frac{1}{h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial \xi_2}\left(\frac{\partial T}{\partial \xi_3}\right) - \frac{\partial}{\partial \xi_3}\left(\frac{\partial T}{\partial \xi_2}\right)\right] = 0.$$

Следовательно,

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} T = 0. \tag{1.60}$$

Применяя преобразование (1.23) к вектору $\mathbf{M} = \operatorname{grad} T$, имеем согласно (1.60) для любого замкнутого контура l

$$\oint_l (\operatorname{grad} T d\mathbf{l}) = 0, \tag{1.61}$$

т. е. циркуляция вектора $\operatorname{grad} T$ равна нулю.

II. **Потенциал.** Согласно (1.60), если $\mathbf{M} = \operatorname{grad} T$, то $\operatorname{rot}\mathbf{M} = 0$. Справедливо также обратное положение:

если $\operatorname{rot}\mathbf{M} = 0$, то $\mathbf{M} = \operatorname{grad} T$. (1.62)

Действительно, в области V, в которой $\operatorname{rot}\mathbf{M} = 0$, циркуляция по любому замкнутому контуру l, согласно (1.23), равна нулю, из чего следует (1.62). Для доказательства проведем между точками *1* и *2* два пути *1*, *3*, *2* и *1*, *4*, *2* через произвольно взятые точки *3* и *4* (рис. 11). Работа по замкнутому контуру *1*, *3*, *2*, *4*, *1*, состоящему из путей *1*, *3*, *2* и *2*, *4*, *1*, представляет собой сумму работ по этим путям. Допуская, что циркуляция в поле $\mathbf{M}$ по любому замкнутому контуру равна нулю, имеем

$$\mathscr{E}_{1,3,2,4,1} = \mathscr{E}_{1,3,2} + \mathscr{E}_{2,4,1} = 0, \text{ т. е. } \mathscr{E}_{1,3,2} = -\mathscr{E}_{2,4,1} = \mathscr{E}_{1,4,2}.$$

Таким образом, работа $\mathscr{E}_{12}$ на пути *1*, *2* зависит только от положения точек *1* и *2*. В частности, работа $\mathscr{E}_{\phi a}$ на пути от фиксированной точки ϕ до переменной точки a является функцией положения точки a:

$$\int_{\phi}^{a} (\mathbf{M} d\mathbf{l}) = \mathscr{E}_{\phi a}(a). \tag{1.63}$$

Дифференцируя обе части этого равенства, получаем

$$(\mathbf{M} d\mathbf{l}) = d\mathscr{E}_{\phi a} = \frac{\partial \mathscr{E}_{\phi a}}{\partial l_1} dl_1 + \frac{\partial \mathscr{E}_{\phi a}}{\partial l_2} dl_2 + \frac{\partial \mathscr{E}_{\phi a}}{\partial l_3} dl_3. \tag{1.63'}$$

Следовательно, согласно (1.11) и (1.6) $(\mathbf{M} d\mathbf{l}) = (\operatorname{grad}\mathscr{E}_{\phi a}\, d\mathbf{l})$, т. е. $\mathbf{M} = \operatorname{grad}\mathscr{E}_{\phi a}$, поэтому, полагая $\mathscr{E}_{\phi a} = T + C$, где C — постоянная, имеем $\mathbf{M} = \operatorname{grad} T$.

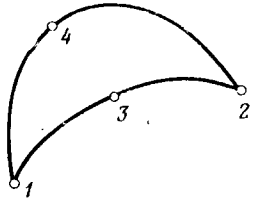


Рис. 11. Два пути, соединяющие точки *1* и *2*

Каждому скалярному полю T соответствует векторное поле $\mathbf{M} = \operatorname{grad} T$, но не каждый вектор $\mathbf{M}$ является градиентом какого-либо скаляра T. Если $\operatorname{rot}\mathbf{M} = 0$, то согласно (1.62) вектор $\mathbf{M}$ может быть представлен как градиент некоторого скаляра T. В таком случае поле $\mathbf{M}$ называется потенциальным, а скаляр T (или $-T$) называют потенциалом поля $\mathbf{M}$ и обозначают U. Обычно по-

$$\int_{s_б}[\mathbf{dSM}] = -h \oint_{l[\Delta S]} M^h{}_n \mathbf{dl} + h\mathbf{n} \oint_{l[\Delta S]} (\mathbf{M}^h_\tau \mathbf{dl}), \tag{1.51}$$

$$M^h{}_n = \frac{1}{h} \int_{-\frac{1}{2}h}^{+\frac{1}{2}h} M_n dn, \tag{1.51'}$$

где $M^h{}_n$ — усредненное по образующей цилиндра $Ц$ значение компоненты вектора $\mathbf{M}$, нормальной к поверхности S. Разделив обе части (1.50) на объем $\Delta V = h\Delta S$ цилиндра $Ц$, получим:

$$\frac{1}{\Delta V}\oint_s [\mathbf{dSM}] = \frac{1}{\Delta S}\int_{\Delta S} \frac{[\mathbf{n}(\mathbf{M}^{(2)} - \mathbf{M}^{(1)})]}{h} dS -$$

$$-\frac{1}{\Delta S}\oint_{l[\Delta S]} M^h{}_n \mathbf{dl} + \frac{\mathbf{n}}{\Delta S}\oint_{l[\Delta S]} (\mathbf{M}^h{}_\tau \mathbf{dl}). \tag{1.52}$$

Полагая $h \to 0$ и стягивая контур $l[\Delta S]$ к точке a, получаем согласно (1.37) в левой части (1.52) ротор вектора $\mathbf{M}$ в этой точке. В правой части, во втором и третьем членах, подынтегральные функции имеют ограниченные значения, так как $M_n \neq \infty$ и $M_\tau \neq \infty$. В первом же члене подынтегральная функция обращается в бесконечность при $h \to 0$, если разность $[\mathbf{nM}^{(2)}] - [\mathbf{nM}^{(1)}]$ при этом не стремится к нулю. Но эта разность при $h \to 0$ представляет собой разрыв компоненты $[\mathbf{nM}] = [\mathbf{nM}_\tau]$ на поверхности S, следовательно, если тангенциальная компонента вектора $\mathbf{M}$ терпит разрыв на поверхности S, то ротор вектора $\mathbf{M}$ на этой поверхности теряет смысл.

В этом случае будем характеризовать поведение поля $\mathbf{M}$ у какой-либо точки поверхности S пределом, к которому при $h \to 0$ и $\Delta S \to 0$ стремится отношение векторного потока вектора $\mathbf{M}$ через поверхность s не к объему ΔV цилиндра $Ц$, а к площади ΔS его поперечного сечения. Обозначая эту величину $\operatorname{Rot}\mathbf{M}$, т. е. полагая в соответствии с (1.37)

$$\operatorname{Rot}\mathbf{M} = \lim_{\substack{\Delta S \to 0 \\ h \to 0}} \frac{1}{\Delta S}\oint_s [\mathbf{dSM}], \tag{1.53}$$

имеем согласно равенству (1.52), умноженному на h,

$$\operatorname{Rot}\mathbf{M} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{1}{\Delta S}\left[\int_{s_0}[\mathbf{dSM}] - \oint_{l[\Delta S]} M^\Delta_n \mathbf{dl} + \mathbf{n}\oint_{l[\Delta S]} (\mathbf{M}^\Delta_\tau \mathbf{dl})\right], \tag{1.53'}$$

где

$$\int_{s_0}[\mathbf{dSM}] = \int_{\Delta S}[\mathbf{n}(\mathbf{M}^{(2)} - \mathbf{M}^{(1)})]\, dS, \quad M^\Delta_n = \lim_{h \to 0} hM^h{}_n. \tag{1.51''}$$

Считая, что $M^h{}_n \neq \infty$, $M^h{}_\tau \neq \infty$ и, следовательно, $M^\Delta{}_n = 0$, $M^\Delta{}_\tau = 0$, получаем из (1.53')

$$\operatorname{Rot}\mathbf{M} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{1}{\Delta S}\int_{s_0}[\mathbf{dSM}]. \tag{1.54}$$

Принимая во внимание (1.51″) и учитывая, что при малых размерах площадки ΔS правая часть $(1.51'')_1$ равна $[\mathbf{n}(\mathbf{M}^{(2)}-\mathbf{M}^{(1)})]\Delta S$, получаем вместо (1.54)

$$\operatorname{Rot}\mathbf{M}=[\mathbf{n}(\mathbf{M}^{(2)}-\mathbf{M}^{(1)})]. \qquad (1.54')$$

Вектор $\operatorname{Rot}\mathbf{M}$ будем называть поверхностным ротором вектора $\mathbf{M}$.

Согласно (1.54) для любой поверхности S имеем равенство

$$\int_{S_0}[d\mathbf{S}\mathbf{M}]=\int_S \operatorname{Rot}\mathbf{M}\,dS, \qquad (1.54'')$$

аналогичное равенству (1.48′).

Таким образом, на любой поверхности S, на которой компоненты вектора $\mathbf{M}$ имеют ограниченные значения, можно определить поверхностную дивергенцию и поверхностный ротор этого вектора. Если поверхность S не является особой, то на ней поверхностные производные равны нулю и в точках этой поверхности могут быть определены объемная дивергенция и объемный ротор вектора $\mathbf{M}$.

Разделив поток скаляра T через замкнутую поверхность s на площадь ΔS, получим при $h\to 0$, $\Delta S\to 0$ произведение $\mathbf{n}(T^{(2)}-T^{(1)})$. Имея в виду определение (1.35) вектора $\operatorname{grad}T$, можно назвать это произведение поверхностным градиентом скаляра T и пользоваться обозначением

$$\operatorname{Grad}T=\mathbf{n}(T^{(2)}-T^{(1)}). \qquad (1.53'')$$

Иногда удобно представить разрыв $T^{(2)}-T^{(1)}$ скаляра T как нормальную компоненту этого вектора (см. конец § 2 третьей главы).

Поверхностные производные являются вырождениями объемных производных, получающимися на особой поверхности поля, которую можно рассматривать как результат сжатия тонкого слоя (см. ниже). Что же касается двухмерных производных, о которых шла речь в разд. II, то они являются двухмерными аналогами трехмерных объемных производных и характеризуют поведение двухмерного поля (см. замечание 8 в § 1).

V. **Производные у предельно тонких слоев.** Полагая, что значение M ограничено, мы отбрасывали второй член в правой части (1.47′) и последних два члена в правой части (1.53′). Там, где компонента $M_\tau=\infty$ или $M_n=\infty$ на поверхности S, производная $\operatorname{Rot}\mathbf{M}$ или $\operatorname{Div}\mathbf{M}$ теряет смысл. Но встречаются особые случаи, когда при $M_\tau=\infty$ или $M_n=\infty$ члены, которые мы отбрасывали, имеют конечные значения. В таких случаях $\operatorname{Rot}\mathbf{M}$ и $\operatorname{Div}\mathbf{M}$ имеют смысл, но выражения, полученные для них, несправедливы. Постараемся получить для поверхностных производных выражения более общего вида, которые применимы и в этих особых случаях.

Будем рассматривать поверхность S как результат сжатия слоя, ограниченного поверхностями S_1 и S_2, в которых лежат основания цилиндра $Ц$, показанного на рис. 10, и выделим полоску, являющуюся поперечным сечением слоя, нормальным вектору $\mathbf{M}_\tau$. Интеграл в (1.51′) представляет собой напряжение $\mathscr{E}_{12}$ на толщине h слоя, а интеграл в $(1.45')_2$—поток ψ_τ вектора $\mathbf{M}$ через полоску, приходя-

щийся на единицу ее длины l. Поэтому

$$M^h{}_\tau = \frac{1}{h}\frac{\partial \psi_\tau}{\partial l}, \quad M^h{}_n = \frac{1}{h}\mathscr{E}_{12}, \tag{1.55}$$

где l—линия пересечения полоски с поверхностью S.

С уменьшением h компоненты M_τ и M_n стремятся к своим средним значениям $M^h{}_\tau$ и $M^h{}_n$ в слое.

При достаточно малом h

$$M^\Delta{}_\tau = hM^h{}_\tau = hM_\tau, \; M^\Delta{}_n = hM^h{}_n = hM_n. \tag{1.55'}$$

Поэтому, считая, что при сжатии слоя сохраняется конечное значение потока ψ_τ или напряжения $\mathscr{E}_{12}$, имеем на поверхности S

$$M_\tau = \infty, \; M^\Delta_\tau = \frac{\partial \psi_\tau}{\partial l} \neq \infty \text{ или } M_n = \infty, \; M^\Delta_n = \mathscr{E}_{12} \neq \infty. \tag{1.56}$$

Определим Div **M** для первого из этих случаев и Rot **M** для второго из них.

В первом случае в правой части (1.47′) второй член в квадратных скобках не равен нулю и согласно (1.45″) и (1.39) получаем вместо (1.49)

$$\mathrm{Div}\,\mathbf{M} = M^{(2)}{}_n - M^{(1)}{}_n + \mathrm{div}^s\,\mathbf{M}^\Delta{}_\tau, \tag{1.57}$$

где $\mathrm{div}^s\,\mathbf{M}^\Delta{}_\tau$—двухмерная дивергенция вектора $\mathbf{M}^\Delta{}_\tau$ на поверхности S.

Во втором случае в правой части (1.53′) второй член в квадратных скобках не обращается в нуль и вместо (1.54) имеем

$$\mathrm{Rot}\,\mathbf{M} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{1}{\Delta S}\left[\int_{s_0} [\mathrm{d}S\mathbf{M}] - \oint_{l\,[\Delta S]} \mathscr{E}_{12}\,\mathrm{d}\mathbf{l}\right]. \tag{1.58}$$

Поэтому согласно (1.53′) и $(1.41)_2$ получаем[1] вместо (1.54′)

$$\mathrm{Rot}\,\mathbf{M} = [\mathbf{n}(\mathbf{M}^{(2)} - \mathbf{M}^{(1)})] - [\mathbf{n}\,\mathrm{grad}^s \mathscr{E}_{12}], \tag{1.59}$$

где $\mathrm{grad}^s \mathscr{E}_{12}$—двухмерный градиент от напряжения $\mathscr{E}_{12}$ между сторонами поверхности S. Из (1.59) следует, что

$$\mathrm{Rot}_t\,\mathbf{M} = ((\mathbf{M}^{(2)} - \mathbf{M}^{(1)} - \mathrm{grad}^s \mathscr{E}_{12})\,[\mathbf{tn}]). \tag{1.59'}$$

§ 5. ВТОРЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ПОЛЯ

Вторыми являются производные от градиента скаляра и от ротора и дивергенции вектора. Начнем со вторых производных скалярного поля: rot grad T и div grad T. Затем перейдем ко вторым производным векторного поля: div rot **M**, grad div **M**, rot rot **M**. Попутно коснемся некоторых тем, связанных со вторыми производными поля.

I. **Ротор градиента.** Подставляя в (1.25)—(1.25″) вместо вектора **M** вектор grad T и вместо компонент вектора **M** выражения

[1] Формулы (1.48), (1.48′) и (1.54), (1.54″) при определениях (1.57) и (1.59) остаются справедливыми, но в состав поверхностей s_0 и S_0 при этом включаются соответственно контуры $l[\Delta S]$ и $l[S]$.

(1.10‴) для компонент вектора grad T, убеждаемся, что все компоненты вектора rot grad T обращаются в нуль. Так, например, из (1.25) получаем

$$(\operatorname{rot}\operatorname{grad} T)_1 = \frac{1}{h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial \xi_2}\left(\frac{\partial T}{\partial \xi_3}\right) - \frac{\partial}{\partial \xi_3}\left(\frac{\partial T}{\partial \xi_2}\right)\right] = 0.$$

Следовательно,

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} T = 0. \tag{1.60}$$

Применяя преобразование (1.23) к вектору $\mathbf{M}=\operatorname{grad} T$, имеем согласно (1.60) для любого замкнутого контура l

$$\oint_l (\operatorname{grad} T d\mathbf{l}) = 0, \tag{1.61}$$

т. е. циркуляция вектора grad T равна нулю.

II. **Потенциал.** Согласно (1.60), если $\mathbf{M}=\operatorname{grad} T$, то $\operatorname{rot}\mathbf{M}=0$. Справедливо также обратное положение:

если $\operatorname{rot}\mathbf{M}=0$, то $\mathbf{M}=\operatorname{grad} T$. (1.62)

Действительно, в области V, в которой $\operatorname{rot}\mathbf{M}=0$, циркуляция по любому замкнутому контуру l, согласно (1.23), равна нулю, из чего следует (1.62). Для доказательства проведем между точками *1* и *2* два пути *1*, *3*, *2* и *1*, *4*, *2* через произвольно взятые точки *3* и *4* (рис. 11). Работа по замкнутому контуру *1*, *3*, *2*, *4*, *1*, состоящему из путей *1*, *3*, *2* и *2*, *4*, *1*, представляет собой сумму работ по этим путям. Допуская, что циркуляция в поле $\mathbf{M}$ по любому замкнутому контуру равна нулю, имеем

$$\mathscr{E}_{1,3,2,4,1} = \mathscr{E}_{1,3,2} + \mathscr{E}_{2,4,1} = 0, \text{ т. е. } \mathscr{E}_{1,3,2} = -\mathscr{E}_{2,4,1} = \mathscr{E}_{1,4,2}.$$

Таким образом, работа $\mathscr{E}_{12}$ на пути *1*, *2* зависит только от положения точек *1* и *2*. В частности, работа $\mathscr{E}_{\phi a}$ на пути от фиксированной точки ϕ до переменной точки a является функцией положения точки a:

$$\int_{\phi}^{a} (\mathbf{M}d\mathbf{l}) = \mathscr{E}_{\phi a}(a). \tag{1.63}$$

Дифференцируя обе части этого равенства, получаем

$$(\mathbf{M}d\mathbf{l}) = d\mathscr{E}_{\phi a} = \frac{\partial \mathscr{E}_{\phi a}}{\partial l_1} dl_1 + \frac{\partial \mathscr{E}_{\phi a}}{\partial l_2} dl_2 + \frac{\partial \mathscr{E}_{\phi a}}{\partial l_3} dl_3. \tag{1.63'}$$

Следовательно, согласно (1.11) и (1.6) $(\mathbf{M}d\mathbf{l}) = (\operatorname{grad}\mathscr{E}_{\phi a}\, d\mathbf{l})$, т. е. $\mathbf{M}=\operatorname{grad}\mathscr{E}_{\phi a}$, поэтому, полагая $\mathscr{E}_{\phi a} = T + C$, где C — постоянная, имеем $\mathbf{M}=\operatorname{grad} T$.

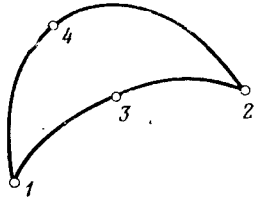


Рис. 11. Два пути, соединяющие точки *1* и *2*

Каждому скалярному полю T соответствует векторное поле $\mathbf{M}=\operatorname{grad} T$, но не каждый вектор $\mathbf{M}$ является градиентом какого-либо скаляра T. Если $\operatorname{rot}\mathbf{M}=0$, то согласно (1.62) вектор $\mathbf{M}$ может быть представлен как градиент некоторого скаляра T. В таком случае поле $\mathbf{M}$ называется потенциальным, а скаляр T (или $-T$) называют потенциалом поля $\mathbf{M}$ и обозначают U. Обычно по-

тенциалом поля $\mathbf{M}$ считают скаляр U, удовлетворяющий равенству[1] $\mathbf{M}=-\operatorname{grad} U$. Поверхности равных значений скаляра U называют эквипотенциальными поверхностями[2] векторного поля $\mathbf{M}=-\operatorname{grad} U$. Линии пересечения этих поверхностей с какой-либо поверхностью, например с поверхностью земли, называют эквипотенциальными линиями.

Для определения векторного поля $\mathbf{M}=-\operatorname{grad} U$ достаточно знать скалярное поле его потенциала U, так как значение компоненты вектора $\operatorname{grad} U$ по любому направлению l определяется согласно (1.10″) дифференцированием скаляра U по этому направлению.

III. **Дивергенция градиента.** Производную $\operatorname{div}\operatorname{grad} T$ называют лапласианом скаляра T и обозначают ΔT:

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} T=\Delta T, \text{ т. е. } (\nabla(\nabla T))=\nabla^2 T=\Delta T, \tag{1.64}$$

а символ $\Delta=\nabla^2$ называют оператором Лапласа.

Подставляя в (1.32) (1.32′) $\mathbf{M}=\operatorname{grad} T$, имеем согласно (1.10‴)

$$\Delta T=\frac{1}{dl_1 dl_2 dl_3}\left[\frac{\partial\left(dl_2 dl_3 \frac{\partial T}{\partial l_1}\right)}{\partial l_1}dl_1+\frac{\partial\left(dl_3 dl_1 \frac{\partial T}{\partial l_2}\right)}{\partial l_2}dl_2+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial\left(dl_1 dl_2 \frac{\partial T}{\partial l_3}\right)}{\partial l_3}dl_3\right] \tag{1.65}$$

или

$$\Delta T=\frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial \xi_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial T}{\partial \xi_1}\right)+\frac{\partial}{\partial \xi_2}\left(\frac{h_3 h_1}{h_2}\frac{\partial T}{\partial \xi_2}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial \xi_3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial T}{\partial \xi_3}\right)\right]. \tag{1.65′}$$

В системах x, y, z; r, φ, z; R, θ, φ имеем соответственно

$$\Delta T=\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, \tag{1.66}$$

$$\Delta T=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}+$$
$$+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, \tag{1.66′}$$
$$\Delta T=\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial T}{\partial R}\right)+\frac{1}{R^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial \theta}\right)+$$

---

[1] Для однородного поля (1.9) $\operatorname{rot}\mathbf{M}=0$ и, следовательно, $\mathbf{M}=-\operatorname{grad} U$, в чем убеждаемся, полагая

$$U=-C_x x-C_y y-C_z z \tag{1.63″}$$

и применяя к этому скаляру U формулу (1.13).

[2] Они являются неориентированными поверхностями уровня поля скаляра U.

$$+\frac{1}{R^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi^2}=\frac{\partial^2 T}{\partial R^2}+\frac{2}{R}\frac{\partial T}{\partial R}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 T}{\partial\theta^2}+\frac{\operatorname{ctg}\theta}{R^2}\frac{\partial T}{\partial\theta}+$$

$$+\frac{1}{R^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi^2}. \qquad (1.66'')$$

Согласно (1.66) оператор

$$\triangle=\nabla^2=(\nabla\nabla)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}. \qquad (1.67)$$

IV. **Гармоническая функция, уравнение Пуассона—Лапласа.** Перейдем в (1.66) от производных к конечным разностям. При достаточно малом Δx

$$\frac{\partial T}{\partial x}=\frac{1}{\Delta x}\left[T\left(x+\frac{\Delta x}{2},\ y,\ z\right)-T\left(x-\frac{\Delta x}{2},\ y,\ z\right)\right], \qquad (1.68)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)=\frac{1}{\Delta x}\left[\frac{\partial T}{\partial x}\left(x+\frac{\Delta x}{2},\ y,\ z\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial T}{\partial x}\left(x-\frac{\Delta x}{2},\ y,\ z\right)\right], \qquad (1.68')$$

где согласно (1.68)

$$\frac{\partial T}{\partial x}\left(x+\frac{\Delta x}{2},\ y,\ z\right)=\frac{1}{\Delta x}[T(x+\Delta x,\ y,\ z)-T(x,\ y,\ z)], \qquad (1.69)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}\left(x-\frac{\Delta x}{2},\ y,\ z\right)=\frac{1}{\Delta x}[T(x,y,\ z)-T(x-\Delta x,\ y,\ z)]. \qquad (1.69')$$

Обозначая $T(x,\ y,\ z)=T_a$, $T(x-\Delta x,\ y,\ z)=T'_x$, $T(x+\Delta x,\ y,\ z)=T''_x$, получаем из (1.68′) согласно (1.69) и (1.69′)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=\frac{1}{(\Delta x)^2}(T''_x-2T_a+T'_x). \qquad (1.70)$$

Аналогично

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=\frac{1}{(\Delta y)^2}(T''_y-2T_a+T'_y),\quad \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}=\frac{1}{(\Delta z)^2}(T''_z-2T_a+T'_z), \qquad (1.70')$$

где

$$T'_y=T(x,\ y-\Delta y,\ z),\ T''_y=T(x,\ y+\Delta y,\ z),$$

$$T'_z=T(x,\ y,\ z-\Delta z),\ T''_z=T(x,\ y,\ z+\Delta z).$$

Складывая эти выражения для вторых производных от T по x, y и z и полагая $\Delta x=\Delta y=\Delta z=h$, получаем

$$\nabla^2 T=\frac{1}{h^2}(T'_x+T''_x+T'_y+T''_y+T'_z+T''_z-6T_a)=$$

$$=\frac{6}{h^2}(T_{\text{ср}}-T_a), \qquad (1.71)$$

где

$$T_{\text{ср}}=\frac{1}{6}(T'_x+T''_x+T'_y+T''_y+T'_z+T''_z). \qquad (1.72)$$

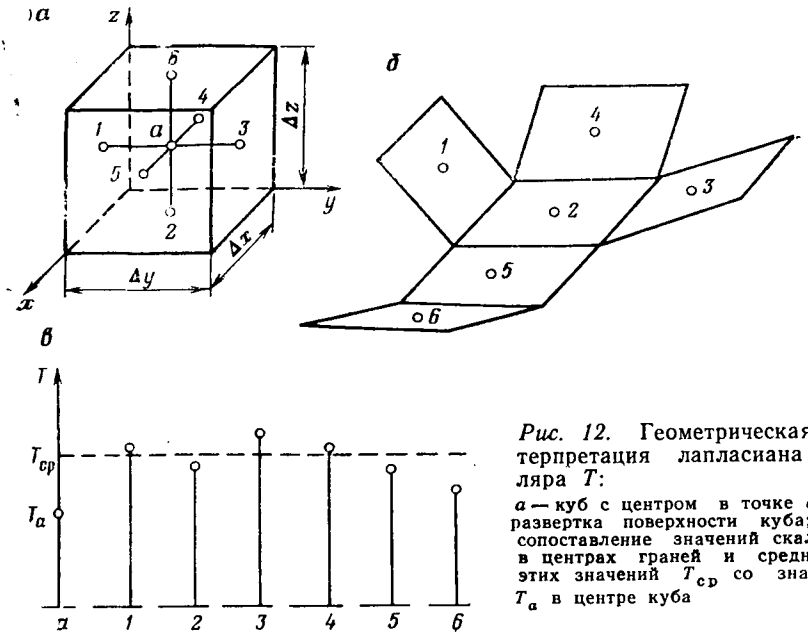


Рис. 12. Геометрическая интерпретация лапласиана скаляра T:

а — куб с центром в точке a; *б* — развертка поверхности куба; *в* — сопоставление значений скаляра T в центрах граней и среднего из этих значений $T_{ср}$ со значением T_a в центре куба

Из (1.71) следует, что если лапласиан поля T равен нулю, то $T_a=T_{ср}$. Функция T, удовлетворяющая условию $\nabla^2 T=0$ в какой-либо области пространства V, называется гармонической в этой области. Таким образом, значение гармонической функции в точке a есть среднее арифметическое из значений этой функции в шести точках a'_k, a''_k ($k=1, 2, 3$), расположенных на одинаковых (малых) расстояниях h от нее на любых трех взаимно перпендикулярных прямых l_k, пересекающихся в этой точке. Иначе говоря, значение гармонической функции в центре любого, достаточно малого куба равно среднему арифметическому из значений этой функции в центрах шести его граней (рис. 12).

Выполняя операцию ∇^2 над заданным полем T, мы определяем некоторую функцию $\beta(a)$, которая является мерой отличия поля T от поля гармонической функции. Но можно, наоборот, задаться некоторой функцией $\beta(a)$ и определять поле T, удовлетворяющее требованию, чтобы его лапласиан в любой точке a был равен $\beta(a)$. В таком аспекте равенство

$$\nabla^2 T=\beta(a) \qquad (1.73)$$

представляет собой уравнение поля T. Оно называется уравнением Пуассона. При $\beta(a)=0$ уравнение Пуассона (1.73) переходит в уравнение Лапласа

$$\nabla^2 T=0, \qquad (1.73')$$

любое решение которого согласно сказанному выше называется гармонической функцией. Если T' и T''—решения уравнения Пуассона (1.73), т. е. если $\nabla^2 T'=\beta(a)$ и $\nabla^2 T''=\beta(a)$, то ввиду линейно-

сти этого уравнения поле $T'''=T''-T'$, очевидно, удовлетворяет уравнению $\nabla^2 T'''=0$, и, следовательно, поле T'' может отличаться от поля T' только гармоническим слагаемым. Таким образом, уравнение Пуассона (1.73) определяет поле T с точностью до произвольной гармонической функции.

Мы видели, что значение лапласиана $\nabla^2 T$ в точке a с координатами x, y, z определяет отличие значения $T(x, y, z)$ функции T от среднего из ее шести значений: $T(x\pm\Delta x, y, z)$, $T(x, y\pm\Delta y, z)$, $T(x, y, z\pm\Delta z)$. Для производной $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ получаем аналогично (1.71), (1.72)

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x)=\frac{2}{(\Delta x)^2}[y_{\text{ср}}-y(x)],\quad y_{\text{ср}}=\frac{1}{2}[y(x+\Delta x)+y(x-\Delta x)]. \tag{1.71'}$$

При $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=0$ имеем согласно (1.71') $y(x)=y_{\text{ср}}$, а ордината $y(x)$ прямой $y=Ax+B$ (A и B—постоянные), соответствующей решению уравнения $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=0$, очевидно, равна полусумме ординат $y(x\pm\Delta x)$ этой прямой. Следовательно, производная $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ определяет отличие функции $y(x)$ от линейной зависимости y от x, т. е. отклонение кривой $y(x)$ от прямой $y=Ax+B$. Эта кривая выпукла при $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}<0$ и вогнута при $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}>0$. Сравнивая это с изложенным выше, мы видим, что лапласиан и гармоническая функция являются пространственными аналогами производной $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ и функции $Ax+B$.

Очевидно, что если в интервале $x_1\leqslant x\leqslant x_2$ функция $y(x)$ удовлетворяет уравнению $y=Ax+B$, то достаточно знать два ее значения на этом интервале, например, $y(x_1)$ и $y(x_2)$ в краевых точках интервала, чтобы определить значения $y(x)$ на всем этом интервале. В частности, если $y(x_1)=y(x_2)=y_1$, то функция $y(x)$ при любом x на интервале x_1, x_2 равна y_1. Аналогичным свойством обладает гармоническая функция: если функция $T(a)$ в области V удовлетворяет уравнению $\nabla^2 T=0$, то, как будет доказано в § 8, значениями этой функции на поверхности S, ограничивающей область V, т. е. во всех краевых точках области V, определяются ее значения во всех точках этой области[1]. В частности, если скаляр T имеет во всех точках поверхности одно и то же значение, то он имеет такое же значение во всех точках области V.

V. **Дивергенция ротора, векторный потенциал.** Составив по формулам (1.25)—(1.25″) выражения для компонент $\mathrm{rot}_1 \mathbf{A}$, $\mathrm{rot}_2 \mathbf{A}$,

[1] Можно сказать, что гармоническая функция зависит от координат x, y, z «в среднем линейно», а лапласиан поля T является мерой «нелинейности в среднем» его изменения по трем взаимно перпендикулярным направлениям. При $\nabla^2 T<0$ имеем «выпуклость в среднем», а при $\nabla^2 T>0$ — «вогнутость в среднем».

$\mathrm{rot}_3\,\mathbf{A}$ и подставив их вместо M_1, M_2, M_3 в (1.32′), получим

$$h_1h_2h_3\,\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A}=\frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(\frac{\partial(h_3A_3)}{\partial\xi_2}-\frac{\partial(h_2A_2)}{\partial\xi_3}\right)+\frac{\partial}{\partial\xi_2}\left(\frac{\partial(h_1A_1)}{\partial\xi_3}-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial(h_3A_3)}{\partial\xi_1}\right)+\frac{\partial}{\partial\xi_3}\left(\frac{\partial(h_2A_2)}{\partial\xi_1}-\frac{\partial(h_1A_1)}{\partial\xi_2}\right)$$

и, следовательно,

$$\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A}\equiv 0,\ \text{т. е. } (\nabla[\nabla\mathbf{A}])\equiv 0. \tag{1.74}$$

Если вектор **M** является ротором какого-либо вектора **A**, то вектор **A** называют векторным потенциалом поля **M**. Этот потенциал аналогичен скалярному потенциалу T поля $\mathbf{M}=\mathrm{grad}\,T$ в том смысле, что если известно поле **A**, то можно от него перейти к полю $\mathbf{M}=\mathrm{rot}\,\mathbf{A}$ с помощью производных по координатным направлениям от компонент вектора **A**.

Термин «потенциал» (без прилагательного) часто применяют в смысле скалярного потенциала (U, T), и, говоря «потенциальное поле» или «поле, имеющее потенциал», имеют в виду этот (обычный) потенциал.

Согласно (1.74) необходимым условием существования векторного потенциала **A** поля **M** является равенство нулю дивергенции вектора **M**: если $\mathbf{M}=\mathrm{rot}\,\mathbf{A}$, то $\mathrm{div}\,\mathbf{M}=0$. Справедливо также обратное положение ([9], с. 172):

если $\mathrm{div}\,\mathbf{M}=0$, то $\mathbf{M}=\mathrm{rot}\,\mathbf{A}$. (1.74′)

Если $\mathbf{A}_0$—векторный потенциал поля **M**, т. е. если $\mathrm{rot}\,\mathbf{A}_0=\mathbf{M}$, то вектор

$$\mathbf{A}=\mathbf{A}_0+\mathrm{grad}\,T, \tag{1.75}$$

где T—произвольный скаляр, очевидно, также является потенциалом этого поля, так как согласно (1.60) $\mathrm{rot}\,\mathbf{A}=\mathrm{rot}\,\mathbf{A}_0$.

Таким образом, векторный потенциал **A** поля **M** определяется этим полем с точностью до градиента произвольного скаляра [1].

Можно в выражении (1.75) подобрать скаляр T так, чтобы дивергенция вектора **A** была равна некоторой функции θ. Согласно (1.75) и (1.64) $\mathrm{div}\,\mathbf{A}=\mathrm{div}\,\mathbf{A}_0+\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,T=\mathrm{div}\,\mathbf{A}_0+\nabla^2T$, следовательно,

$$\mathrm{div}\,\mathbf{A}=\theta \text{ при } \nabla^2T=\theta-\mathrm{div}\,\mathbf{A}_0. \tag{1.76}$$

Таким образом, задание $\mathrm{div}\,\mathbf{A}=\theta$ равносильно подчинению функции T в выражении (1.75) для **A** уравнению (1.76)$_2$.

---

[1] Для однородного поля $\mathbf{M}=\mathbf{1}_x\,\mathrm{div}\,\mathbf{M}=0$ и, следовательно, $\mathbf{M}=\mathrm{rot}\,\mathbf{A}_0$, в чем убеждаемся согласно (1.27), полагая $\mathbf{A}_0=\mathbf{1}_zy$. Но кроме того $\mathbf{M}=\mathrm{rot}\,\mathbf{A}$, где $\mathbf{A}=\mathrm{div}\,\mathbf{M}'=0$, $\mathbf{M}'=\mathrm{rot}\,\mathbf{A}'_0=\mathrm{rot}\,\mathbf{A}'$, где $\mathbf{A}'_0=-\mathbf{1}_z\ln r$; $\mathbf{A}'=\mathbf{1}_rzr^{-1}$; $\mathbf{A}'-\mathbf{A}'_0=\mathbf{1}_rzr^{-1}+\mathbf{1}_z\ln r=\nabla T'$, где $T'=z\ln r$. Поля **M** и **M**′ имеют также скалярные потенциалы $\mathbf{1}_x=\mathrm{grad}\,x$, $\mathbf{1}_\varphi r^{-1}=\mathrm{grad}\,\varphi$.

VI. **Градиент дивергенции и ротор ротора.** Подставляя в выражение (1.13) для градиента скаляра T вместо T выражение (1.33) для дивергенции вектора $\mathbf{M}$, получаем

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{M}=\mathbf{1}_x\left(\frac{\partial^2 M_y}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 M_z}{\partial x\partial z}\right)+\mathbf{1}_y\left(\frac{\partial^2 M_z}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2 M_x}{\partial y\partial x}\right)+$$
$$+\mathbf{1}_z\left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial z\partial x}+\frac{\partial^2 M_y}{\partial z\partial y}\right)+\mathbf{1}_x\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}+\mathbf{1}_y\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}+\mathbf{1}_z\frac{\partial^2 M_z}{\partial z^2}. \qquad (1.77)$$

Если в (1.27) подставить вместо вектора $\mathbf{M}$ вектор $\operatorname{rot}\mathbf{M}$, то получим:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{M}=\mathbf{1}_x\left(\frac{\partial^2 M_y}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 M_z}{\partial z\partial x}\right)+\mathbf{1}_y\left(\frac{\partial^2 M_z}{\partial z\partial y}+\frac{\partial^2 M_x}{\partial x\partial y}\right)+$$
$$+\mathbf{1}_z\left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 M_y}{\partial y\partial z}\right)-\mathbf{1}_x\left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 M_x}{\partial z^2}\right)-$$
$$-\mathbf{1}_y\left(\frac{\partial^2 M_y}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 M_y}{\partial x^2}\right)-\mathbf{1}_z\left(\frac{\partial^2 M_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 M_z}{\partial y^2}\right). \qquad (1.78)$$

Из (1.78) и (1.77) следует равенство

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{M}-\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{M}=\mathbf{1}_x\nabla^2 M_x+\mathbf{1}_y\nabla^2 M_y+\mathbf{1}_z\nabla^2 M_z. \qquad (1.78')$$

Принимая во внимание, что

$$\mathbf{1}_x\nabla^2 M_x+\mathbf{1}_y\nabla^2 M_y+\mathbf{1}_z\nabla^2 M_z=\nabla^2\mathbf{M}, \qquad (1.79)$$

получаем из (1.78′)

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{M}=\operatorname{drad}\operatorname{div}\mathbf{M}-\nabla^2\mathbf{M}, \qquad (1.80)$$

$$[\nabla[\nabla\mathbf{M}]]=\nabla(\nabla\mathbf{M})-\nabla^2\mathbf{M}. \qquad (1.80')$$

Для простоты изложения мы при выводе формул (1.77)—(1.80′) пользовались декартовыми координатами. Применяя криволинейные координаты, получаем вместо (1.78′)

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{M}-\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{M}=\sum\nabla^2\mathbf{M}_k\,(k=1,2,3) \qquad (1.78'')$$

и приходим опять к формуле (1.80). Однако для общего случая в отличие от (1.79)

$$\nabla^2\mathbf{M}=\nabla^2(\mathbf{1}_1M_1)+\nabla^2(\mathbf{1}_2M_2)+\nabla^2(\mathbf{1}_3M_3), \qquad (1.79')$$

где в соответствии с (1.65′) оператор

$$\nabla^2=\Delta=\frac{1}{h_1h_2h_3}\sum_i\frac{\partial}{\partial\xi_i}\frac{h_{i+1}h_{i+2}}{h_i}\frac{\partial}{\partial\xi_i} \qquad (1.79'')$$

(i=1, 2, 3; $i+1$=2, 3, 1; $i+2$=3, 1, 2).

Встречающееся утверждение о неприменимости оператора $\Delta=\nabla^2$ к вектору и о необходимости ограничиться в соотношении (1.80) декартовыми координатами является ошибочным. Однако при дифференцировании вектора, представленного компонентами по координатным направлениям криволинейной системы, нельзя забывать дифференцировать орты $\mathbf{1}_k$. Векторы $\mathbf{1}_x$, $\mathbf{1}_y$, $\mathbf{1}_z$ не зависят от x, y, z, поэтому их производные по этим координатам равны нулю. В системах r, φ, z; R, θ, φ имеем

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\mathbf{1}_r=\mathbf{1}_\varphi,\quad\frac{\partial}{\partial\varphi}\mathbf{1}_\varphi=-\mathbf{1}_r,\quad\frac{\partial}{\partial\theta}\mathbf{1}_R=\mathbf{1}_\theta,\quad\frac{\partial}{\partial\varphi}\mathbf{1}_\varphi=-\mathbf{1}_R\sin\theta-\mathbf{1}_\theta\cos\theta,$$

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\mathbf{1}_R=\mathbf{1}_\varphi\sin\theta,\quad\frac{\partial}{\partial\vartheta}\mathbf{1}_\theta=-\mathbf{1}_R,\quad\frac{\partial}{\partial\varphi}\mathbf{1}_\theta=\mathbf{1}_\varphi\cos\theta.$$

Остальные первые производные от ортов каждой из этих систем по координатам той же системы равны нулю. Вывод приведенных формул и переход ко вторым производным см. в [2] (с. 8, 9).

В качестве определения лапласиана вектора, т. е. $\nabla^2 \mathbf{M}$, можно принять соотношение (1.80), (1.80′). Но этот лапласиан можно также непосредственно определить в любой ортогональной системе координат формулами (1.79′), (1.79″).

§ 6. ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ И ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ИХ ПРОИЗВОДНЫХ

Любое векторное поле $\mathbf{M}$ можно ([9], с. 192) выразить через три скалярных поля Λ, T, Φ по формуле

$$\mathbf{M}=\Lambda \operatorname{grad} T+\operatorname{grad} \Phi, \tag{1.81}$$

из которой следует, что

$$\operatorname{rot} \mathbf{M}=[\nabla\Lambda\nabla T], \quad (\mathbf{M} \operatorname{rot} \mathbf{M})=(\nabla\Phi\,[\nabla\Lambda\nabla T]). \tag{1.82}$$

В общем случае, когда ни один из векторов $\nabla\Lambda$, ∇T, $\nabla\Phi$ не коллинеарен другому (и не равен нулю), имеем согласно (1.82)

$$\operatorname{rot} \mathbf{M}\neq 0, \quad (\mathbf{M} \operatorname{rot} \mathbf{M})\neq 0. \tag{1.83}$$

I. **Квазипотенциальное поле.** Менее общим является векторное поле

$$\mathbf{M}=\Lambda \operatorname{grad} T, \tag{1.84}$$

для которого, очевидно, также справедливо $(1.82)_1$. Будем называть это поле квазипотенциальным. Потенциальное поле $\mathbf{M}=\operatorname{grad} T$ является частным видом квазипотенциального поля. Оно получается из (1.84) при $[\nabla\Lambda\nabla T]=0$. Исключая этот случай, получаем для квазипотенциального поля, согласно (1.82),

$$\operatorname{rot} \mathbf{M}\neq 0, \text{ но } (\mathbf{M} \operatorname{rot} \mathbf{M})=0. \tag{1.85}$$

Иначе говоря, квазипотенциальное поле перпендикулярно к своему ротору. Условие $(1.85)_2$ не только необходимо для справедливости выражения (1.84), оно также достаточно ([9], стр. 190) для этого, т. е. выражение $\mathbf{M}=\Lambda \operatorname{grad} T$ следует из равенства нулю произведения $(\mathbf{M} \operatorname{rot} \mathbf{M})$. Из (1.81) следует, что любое векторное поле за вычетом некоторого потенциального слагаемого является квазипотенциальным [1]. Обычно (но отнюдь не всегда) приходится иметь дело с квазипотенциальными или потенциальными полями, т. е. с векторными полями, в которых ротор вектора перпендикулярен к этому вектору или равен нулю.

Семейство векторных линий l^M (см. замечание 7 в § 1) квазипотенциального поля определяет ортогональное к нему семейство «нормальных поверхностей» S^M (рис. 13). Эти поверхности соот-

[1] Однако квазипотенциальное поле может отличаться от чисто вихревого (см. разд. III) коллинеарным ему потенциальным слагаемым. Так, например, полагая в (1.84) $\Lambda=\Lambda'+C$, имеем $\mathbf{M}=\mathbf{M}'+\mathbf{M}''$, $\mathbf{M}'=\Lambda' \operatorname{grad} T$, $\mathbf{M}''=C \operatorname{grad} T$, $\operatorname{rot} \mathbf{M}''=0$. $(\mathbf{M} \operatorname{rot} \mathbf{M}) = (\mathbf{M} \operatorname{rot} \mathbf{M}')=\Lambda(\nabla T[\nabla\Lambda'\nabla T])=0$.

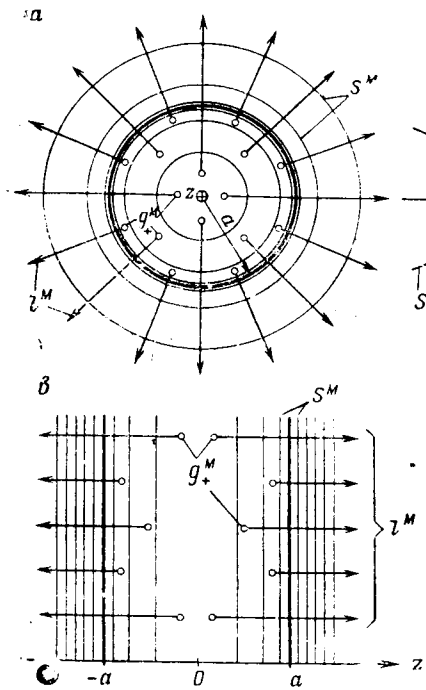


Рис. 13. Спектры линий l^M и поверхностей S^M в системе r, φ, z.

Поля: *а* — ламелларное с кривыми поверхностями S^M, *б* — соленоидальное с кривыми линиями l^M, *в* — ламелларное, коллинеарное оси z; спектры *а*, *б* — в плоскости z=const (жирными линиями показаны поверхности $r=a$), спектр *в* — в полуплоскости φ=const (жирными линиями показаны плоскости $|z|=a$)

ветствуют поверхностям уровня скаляра T, так как векторы grad T и Λ grad T коллинеарны [1]. На поверхностях S^M будем брать нормали по полю **M**:

$$\cos(\mathbf{M}, d\mathbf{S}^M)=1, \quad d\mathbf{S}^M=\mathbf{1}_M dS^M. \tag{1.86}$$

Очевидно, что поток вектора **M** через любой участок поверхности S^M всегда положителен. Ниже будем применять поверхности S^M, имея при этом в виду квазипотенциальное поле **M**, которое может, в частности, оказаться потенциальным.

II. **Источники поля и нарушение его соленоидальности.** Для того чтобы векторными линиями l^M иллюстрировать не только направление поля, но также его абсолютную величину, считают векторные линии проведенными с густотой $\varkappa M$, пропорциональной M. Будем считать, что через любую площадку dS проходит $\varkappa(\mathbf{MdS})$ линий l^M (см. замечание 4 в § 1). Таким образом, поток ψ вектора **M** через какую-либо поверхность определяется числом векторных линий l^M, пронизывающих эту поверхность, т. е. он равен этому числу, деленному на $\varkappa$. Поток $\psi_{S[V]}$ через замкнутую поверхность S [V] определяется разностью чисел линий, выходящих из области V и входящих в нее. Считая вхождение отрицательным

[1] Обозначение S^M будем иногда применять к эквипотенциальным поверхностям, так как в поле $\mathbf{M}=-\nabla U$ поверхности U=const являются неориентированными нормальными поверхностями S^M.

выходом, скажем, что поток $\psi_{S>}$ определяется числом линий l^M, выходящих или расходящихся из области V.

Если векторные линии проходят через область V насквозь, то поток вектора $\mathbf{M}$ через поверхность $S[V]$, очевидно, равен нулю, следовательно, поток через замкнутую поверхность определяется только теми линиями l^M, которые либо начинаются, либо кончаются в области V, разностью чисел этих линий.

Из изложенного следует, что правая часть (1.29′) определяется числом векторных линий, расходящихся из элемента объема dV, деленным на этот объем или, короче, числом линий, расходящихся из единицы объема. Поэтому дивергенцию вектора $\mathbf{M}$ называют его расхождением или расходимостью. Значение производной $\operatorname{div}\mathbf{M}$ в точке a является мерой расхождения поля $\mathbf{M}$ (его линий l^M) из единицы объема со средней точкой a.

Сечение векторной трубки нормальной поверхностью S^M будем называть поперечным (нормальным) сечением или (иногда, для краткости) сечением трубки, а поток вектора $\mathbf{M}$ через поперечное сечение трубки — потоком в трубке.

Поток ψ_{12} через замкнутую поверхность $S[V_{12}]$ отрезка V_{12} векторной трубки, ограниченного поперечными полю сечениями S_1 и S_2, равен $\psi_б - \psi_1 + \psi_2$, где $\psi_б$ — поток через боковую поверхность векторной трубки, равный нулю, а ψ_1 и ψ_2 — потоки через сечения S_1 и S_2. Знак минус при Ψ_1 взят, считая на S_1 нормаль направленной внутрь отрезка трубки, т. е. по полю, а при определении потока через $S[V_{12}]$ нормаль берут всюду направленной наружу относительно V_{12}. Таким образом,

$$\psi_{12} = \psi_2 - \psi_1, \text{ откуда } \int_{V_{12}} \operatorname{div}\mathbf{M}\, dV = \psi_2 - \psi_1! \tag{1.87}$$

согласно (1.30). Заменим область V_{12} элементарным отрезком $dV_{тр} = dl^M dS^M{}_{тр}$ элементарной векторной трубки с поперечным сечением $dS^M{}_{тр}$, причем условимся, что в пределах этого отрезка ориентация векторных линий не меняется. Вместо $\psi_2 - \psi_1$ получим приращение $\frac{\partial \psi_{тр}}{\partial l^M} dl^M$ потока $\psi_{тр} = M dS^M{}_{тр}$ в трубке на элементе dl^M ее длины, а вместо $(1.87)_2$ —

$$\operatorname{div}\mathbf{M} = \frac{dl^M}{dV_{тр}} \frac{\partial}{\partial l^M} (M dS^M_{тр}) = \frac{1}{dS^M_{тр}} \frac{\partial \psi_{тр}}{\partial l^M}. \tag{1.88}$$

Таким образом, дивергенция вектора $\mathbf{M}$ равна производной по направлению поля $\mathbf{M}$ от потока в трубке единичного среднего сечения.

Если в некоторой области $\theta \operatorname{div}\mathbf{M} = 0$, то согласно (1.87), (1.88) в пределах этой области потоки через все поперечные сечения какой-либо векторной трубки имеют одно значение, т. е. поток в трубке всюду одинаков, все сечения трубки пронизывают одни и те же линии l^M, эти линии нигде не обрываются. В таком случае поле в области θ называют соленоидальным, т. е. трубчатым, так как оно разделяется на трубки постоянного (вдоль них) потока.

Область называется аперифрактической, если в ней любая замкнутая поверхность может быть стянута в точку; в противном случае имеем перифрактическую область. Такой становится любая аперифрактическая область, если из нее изъять некоторую внутреннюю часть или хотя бы одну точку. Примером перифрактической области является сферический слой. Но если из этого слоя изъять хотя бы одну линию, соединяющую его границы, то от него останется аперифрактическая область. Если в аперифрактической области θ поле $\mathbf{M}$ соленоидально, то поток вектора $\mathbf{M}$ через любую замкнутую поверхность $S[V]$ в этой области равен нулю, так как во всей области V, охватываемой этой поверхностью, $\operatorname{div}\mathbf{M}=0$. Если же область θ перифрактическая, то в ней возможны замкнутые поверхности, потоки вектора $\mathbf{M}$ через которые отличны от нуля, потому что часть V' области V может не принадлежать области θ и может оказаться, что в V' $\operatorname{div}\mathbf{M}\neq 0$. Если поле $\mathbf{M}$ соленоидально во всем пространстве, то его линии l^M нигде не обрываются: каждая линия l^M должна быть замкнутой или продолжаться в обе стороны до бесконечности, где она, можно считать, замыкается.

Если правые части (1.87), (1.88) не равны нулю, т. е. если поток в трубке меняется от сечения к сечению, то между сечениями в ней имеются обрывы линий l^M (их концы или начала). Места, в которых начинаются и кончаются векторные линии называются соответственно истоками и стоками поля, его возбудителями. Считая стоки отрицательными истоками, называют и те и другие возбудители поля его источниками. Физически ими могут, например, быть электрические заряды, на которых начинаются и кончаются силовые линии электрического поля. Плотность источников поля $\mathbf{M}$ определяется густотой точек обрыва g^M векторных линий l^M, т. е. числом этих точек в единице объема, считая начала $g^M{}_+$ со знаком плюс и концы $g^M{}_-$ — со знаком минус. Поток вектора $\mathbf{M}$ через поверхность $S[V]$, ограничивающую область V, определяется числом точек g^M в области V. Таким образом, дивергенция вектора $\mathbf{M}$ определяется плотностью источников поля — числом точек g^M в единице объема.

Из сказанного следует, что дивергенцию поля $\mathbf{M}$, плотность его источников можно рассматривать как меру нарушения соленоидальности поля $\mathbf{M}$. Соленоидальность—геометрическая интерпретация отсутствия источников.

III. **Вихревые возбудители поля и нарушение его ламелларности.** Поле $\mathbf{M}$ можно изображать нормальными поверхностями S^M, проведенными с густотой $\varkappa' M$, пропорциональной M и равной числу поверхностей S^M, пересекающих единичный отрезок линии l^M. Область СЛ, заключенную между двумя поверхностями S^M, назовем нормальным слоем. Элементарным нормальным слоем сл будем называть слой, ограниченный очень близкими поверхностями S^M. Расстояние $dl^M{}_{\text{сл}}$ между его границами по линии l^M будем называть толщиной элементарного слоя сл, а напряжение $Mdl^M{}_{\text{сл}}$ на слое сл (на его толщине, между его границами S^M) обозначим $\mathscr{E}_{\text{сл}}$. Напряжение $\mathscr{E}$ на слое сл получается интегрированием произведения Mdl^M по линии l^M между границами S^M этого слоя. Оно согласно сказанному выше определяется числом поверхностей S^M, заключенных в слое. Там, где вдоль слоя меняется напряжение на нем и, следовательно, также меняется число поверхностей S^M в нем, эти поверхности должны обрываться. В таких

местах должны быть линии L^M обрыва поверхностей S^M. Линии L^M—замкнутые, но они могут замыкаться на бесконечности. Направление на линии L^M, ограничивающей поверхность S^M, выберем так, чтобы эта линия образовала правовинтовую систему с нормалью к поверхности S^M.

В общем случае напряжение $\mathscr{E}_{сл}$ на элементарном нормальном слое сл можно считать функцией положения точки a на средней поверхности $S^M{}_{ср}$ этого слоя. Будем рассматривать часть этого слоя в малой окрестности точки a и будем считать, что в пределах этой окрестности ориентация линий l^M не меняется. Поведение функции $\mathscr{E}_{сл}(a)$ на поверхности $S^M{}_{ср}$ будем характеризовать вектором

$$\operatorname{grad}^s \mathscr{E}_{сл} = \mathbf{v}_{ур} \frac{\partial}{\partial \nu_{ур}} \mathscr{E}_{сл}, \quad \mathscr{E}_{сл} = M dl^M_{сл}, \tag{1.89}$$

где $\mathbf{v}_{ур}$—единичная нормаль к линии уровня скаляра $\mathscr{E}_{сл}$ на $S^M{}_{ср}$, направленная в сторону увеличения $M dl_{сл}$. Направления векторов $\mathbf{v}_{ур}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{L}^M$ образуют правовинтовую систему (см. [1], стр. 51—54). В этой же работе доказывается, что

$$\operatorname{rot} \mathbf{M} = \frac{1}{dl^M_{сл}} [\mathbf{v}_{ур} \mathbf{1}_M] |\operatorname{grad}^s \mathscr{E}_{сл}| = \frac{-1}{dl^M_{сл}} [\mathbf{1}_M \operatorname{grad}^s \mathscr{E}_{сл}]. \tag{1.90}$$

Следовательно, ротор вектора $\mathbf{M}$ равен двухмерному градиенту напряжения на нормальном слое единичной средней толщины, умноженному векторно на единичный вектор по направлению поля $\mathbf{M}$.

Из изложенного выше следует, что ротор вектора $\mathbf{M}$ имеет направление линий L^M, которые, следовательно, являются векторными линиями $l^{\operatorname{rot} M}$ поля $\operatorname{rot} \mathbf{M}$. Векторные трубки в этом поле (вектора $\operatorname{rot} \mathbf{M}$) имеют формы колец.

Если в области θ $\operatorname{rot} \mathbf{M}=0$, то согласно (1.90) в пределах этой области поверхности S^M, содержащиеся в слое сл, нигде не обрываются. В этом случае поле $\mathbf{M}$ в области 0 является *ламеллярным*, т. е. слоистым, так как оно разделяется на слои неизменного (вдоль слоя) поперечного напряжения $\mathscr{E}_{сл}$.

Односвязной называется область, в которой любой замкнутый контур $l[S]$ может быть стянут в точку без выхода контура из этой области, т. е. без пересечения им ее границы. *Многосвязной* оказывается любая односвязная область, если из нее изъять кольца или линии, не обрывающиеся, в частности замыкающиеся внутри области. В случае изъятия одного кольца или одной замкнутой линии получается *двухсвязная* область.

Если в односвязной области θ поле $\mathbf{M}$ ламелларно, то, согласно (1.23), циркуляция вектора $\mathbf{M}$ по любому контуру $l[S]$ в этой области равна нулю, так как поверхность S может быть проведена полностью внутри области θ, т. е. там, где $\operatorname{rot} \mathbf{M}=0$. В неодносвязной области, несмотря на ламелларность поля $\mathbf{M}$ в ней, могут быть контуры, по которым циркуляция отлична от нуля, и, в частности, замкнутые линии l^M. В такой области поле $\mathbf{M}$ имеет многозначный потенциал (см. разд. III, § 3 главы пятой).

Там, где поверхности S^M обрываются, вектор $\operatorname{rot} \mathbf{M}$ отличен от нуля; он направлен по линиям L^M их обрыва и пропорционален густоте этих линий. Вокруг этих замкнутых векторных линий $l^{\operatorname{rot} M}$ поля $\operatorname{rot} \mathbf{M}$ (т. е. вокруг линий L^M) и определяемых ими кольцевид-

ных векторных трубок этого поля образуются замкнутые линии l^M поля **M**. Линии l^M и L^M взаимно сцеплены. В кольцевидных областях пространства, занятых линиями L^M, т. е. в векторных трубках поля вектора rot **M**, находятся возбудители поля **M** с замкнутыми линиями l^M. Такие поля и их возбудители называют вихревыми. Вихревые возбудители поля называют также вихрями или источниками вихревого типа [1].

Из сказанного следует, что ротор поля **M**, плотность его возбудителей вихревого типа можно рассматривать как меру нарушения ламелларности поля **M**. Ламелларность—геометрическая интерпретация отсутствия возбудителей вихревого типа.

IV. **Замечания.** 1. В области θ, в которой поле **M** коллинеарно некоторой прямой, имеем, согласно (1.88) и (1.90),

$$\operatorname{div}\mathbf{M}=\frac{\partial M}{\partial l^M},\quad \operatorname{rot}\mathbf{M}=[\mathbf{v}_{\text{ур}}\,\mathbf{1}_M]\,\frac{\partial M}{\partial v_{\text{ур}}}=-[\mathbf{1}_M\operatorname{grad}^s M]. \tag{1.91}$$

В этом поле проявляются с наибольшей простотой представления о дивергенции и роторе как о производных, характеризующих поле по его направлению и в поперечных к нему направлениях. Действительно, согласно (1.91), дивергенция определяет изменение величины M вдоль прямых l^M, а ротор—ее изменения в плоскостях S^M.

2. В поле **M** с кривыми линиями l^M или поверхностями S^M значения M меняются от точки к точке и там, где нет возбудителей поля. При этом изменение густоты линий l^M и поверхностей S^M происходит не за счет обрывов некоторых из них, а за счет их веерообразной формы, благодаря которой расстояния между соседними линиями l^M меняются по направлению поля, а между соседними поверхностями S^M—по направлениям, нормальным полю (см. рис. 13,*а*, *б*).

3. В общем случае согласно (1.88) и (1.90) дивергенция и ротор вместо изменений величины M определяют изменение вдоль линий l^M потока MdS^M в векторной трубке и изменение по поверхностям S^M напряжения Mdl^M между ними. Благодаря множителям dS^M и dl^M производные div **M** и rot **M** определяют только те изменения поля **M** в окрестности точки a, которые отражают присутствие в этой окрестности возбудителей поля.

4. На рис. 13 показаны в системе r, φ, z спектры линий l^M и поверхностей S^M для трех полей **M**: а) $\mathbf{M}=\mathbf{1}_r r$ при $r\leqslant a$, $\mathbf{M}=\mathbf{1}_r a^2 r^{-1}$ при $r\geqslant a$, $\operatorname{rot}\mathbf{M}=0$;

б) $\mathbf{M}=\mathbf{1}_\varphi r$ при $r\leqslant a$, $\mathbf{M}=\mathbf{1}_\varphi a^2 r^{-1}$ при $r\geqslant a$, $\operatorname{div}\mathbf{M}=0$;

в) $\mathbf{M}=\mathbf{1}_z z$ при $|z|\leqslant a$, $\mathbf{M}=\mathbf{1}_z a\operatorname{sgn} z$ при $|z|\geqslant a$, $\operatorname{rot}\mathbf{M}=0$.

В примере «а» поверхности S^M (цилиндрические, r=const) нигде не обрываются, линии l^M располагаются по лучам r. При $r>a$ линии l^M не обрываются,

---

[1] Говоря о поле **M** во всем пространстве (о «полном поле»), часто называют его вихревым, если где-либо $\operatorname{rot}\mathbf{M}\neq 0$ и чисто вихревым, если всюду $\operatorname{div}\mathbf{M}=0$. Рассматривая поле **M** в отдельной области V, называют его (в более узком смысле) вихревым в этой области, если в ней $\operatorname{rot}\mathbf{M}\neq 0$, и чисто вихревым, если в ней, кроме того, $\operatorname{div}\mathbf{M}=0$.

В аналогичном смысле можно пользоваться термином «дивергентное поле» и, в частности, называть поле чисто дивергентным в области V, если в ней $\operatorname{div}\mathbf{M}\neq 0$, а $\operatorname{rot}\mathbf{M}=0$.

но их густота уменьшается по направлению поля $\mathbf{M}$ за счет веерообразной формы их спектра. В области $r<a$ ($\operatorname{div}\mathbf{M}>0$) равномерно распределены начала g^M+ линий l^M (источники поля $\mathbf{M}$).

В примере «б» линии l^M (окружности $r=\text{const}$, $z=\text{const}$) нигде не обрываются, а поверхности S^M располагаются по полуплоскостям $\varphi=\text{const}$. При $r>a$ поверхности S^M не обрываются, но их густота уменьшается по направлениям r, нормальным полю $\mathbf{M}$, за счет веерообразной формы спектра поверхностей S^M. В области $r<a$, ($|\operatorname{rot}\mathbf{M}|>0$) равномерно распределены линии L^M обрыва поверхностей S^M (вихревые возбудители поля $\mathbf{M}$), параллельные оси z.

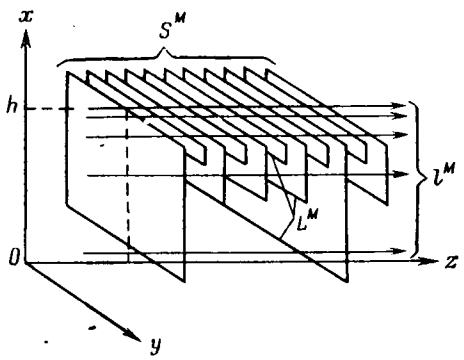


Рис. 14. Плоскости S^M и линии l^M вихревого поля, коллинеарного оси z системы x, y, z

В примере «в» поле $\mathbf{M}$ — одномерно, поверхности S^M (плоскости $z=\text{const}$) нигде не обрываются, а линии l^M коллинеарны оси z. При $|z|>a$ линии l^M не имеют обрывов и их густота не меняется. В области $|z|<a$ ($\operatorname{div}\mathbf{M}>0$) равномерно распределены начала линий[1] l^M.

5. Вихревое поле, коллинеарное некоторой прямой, можно иллюстрировать следующим примером. Пусть $\mathbf{M}$ — скорость течения воды с юга на север в средней (по ширине) части широкого канала глубиной h. Возьмем декартову систему с началом O на дне канала и с осями x, y, z, направленными вверх, на восток и на север соответственно. Пусть $\mathbf{M}=\mathbf{M}(x)=\mathbf{1}_z cx^\alpha$, где $\alpha>0$, $c>0$, $0\leqslant x\leqslant h$ (рис. 14). Скорость равна нулю на дне канала, а с уменьшением глубины $h-x$ увеличивается до ch^α у поверхности воды. В этом поле векторные линии l^M — неограниченные прямые, направленные на север, поверхности S^M — полосы разной ширины с горизонтальными краями, лежащими в вертикальных плоскостях $z=\text{const}$. Края каждой полосы, смыкаясь при $y=\pm\infty$, образуют линию L^M. Ее верхняя половина лежит на поверхности воды и направлена на восток, а нижняя — на некоторой глубине и направлена на запад. В соответствии с (1.27) $\operatorname{rot}\mathbf{M}=-\mathbf{1}_y\dfrac{dM}{dx}$, что согласуется с $(1.91)_2$, так как вектор $\mathbf{v}_{\text{ур}}$ направлен вверх и, следовательно,

$$[\mathbf{v}_{\text{ур}}\mathbf{1}_M]=[\mathbf{1}_x\mathbf{1}_z]=-\mathbf{1}_y,\ \text{а}\ \frac{\partial M}{\partial v_{\text{ур}}}=\frac{\partial M}{\partial x}.$$

Таким образом, $\operatorname{rot}\mathbf{M}=-\mathbf{1}_y c\alpha x^{\alpha-1}$. Это квазипотенциальное поле $\mathbf{M}=\Lambda\operatorname{grad}T$, где $\Lambda=cx^\alpha$, $T=z$, $(\mathbf{M}\operatorname{rot}\mathbf{M})=0$, так как $(\mathbf{1}_z\mathbf{1}_y)=0$.

6. Теперь учтем дополнительную скорость $\mathbf{M}'=\mathbf{1}_y c'$ движения воды, связанную с вращением Земли, и получим суммарную скорость $\mathbf{M}''=\mathbf{M}+\mathbf{M}'=\mathbf{1}_z cx^\alpha+\mathbf{1}_y c'=\Lambda\operatorname{grad}T+\operatorname{grad}\Phi$, где $\Phi=c'y$. Очевидно, что $(\mathbf{M}''\operatorname{rot}\mathbf{M}'')\neq 0$, т. е. поле $\mathbf{M}''$ не квазипотенциальное. Действительно, $\operatorname{rot}\mathbf{M}''=\operatorname{rot}\mathbf{M}$, поэтому $(\mathbf{M}''[\nabla\mathbf{M}''])=(\mathbf{M}[\nabla\mathbf{M}])+(\mathbf{M}'[\nabla\mathbf{M}])=-(\mathbf{1}_y\mathbf{1}_y)\,cc'\alpha x^{\alpha-1}=-cc'\alpha x^{\alpha-1}$.

7. Ввиду большой технической трудности задачи изображения поля $\mathbf{M}$ линиями l^M или поверхностями S^M от фактического выполнения этой задачи обычно приходится воздерживаться, за исключением очень простых случаев (плоских полей вне областей занятых их возбудителями). При $\operatorname{div}\mathbf{M}\neq 0$ или $\operatorname{rot}\mathbf{M}\neq 0$ необходимо было бы как-то изобразить непрерывное изменение густоты линий l^M или поверхностей S^M, что крайне трудно даже в случае плос-

[1] Примеры «а» и «в» соответствуют полям $\mathbf{f}$ однородных масс, заполняющих области $r<a$ и $|z|<a$, а пример «б» — полю $\mathbf{B}$ постоянного тока в цилиндре $r<a$. В этом можно убедиться, пользуясь формулами (2.78) и (5.26).

кого поля. Но идея изображения векторного поля с помощью линий l^M и поверхностей S^M весьма полезна для выработки конкретного (геометрического) представления о производных поля ($\operatorname{div}\mathbf{M}$ и $\operatorname{rot}\mathbf{M}$) и их связи с возбудителями поля.

8. Так как существование полей $\mathbf{M}$ обусловлено наличием их возбудителей (источников, вихрей), которые, как выяснится в следующих главах, определяются массами, токами (и их носителями, например, поляризованными телами, токовыми контурами), то говорят, что массы, токи (их носители) создают, порождают, возбуждают поля $\mathbf{M}$, а также их потенциалы U и $\mathbf{A}$.

§ 7. УРАВНЕНИЯ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Для заданного поля $\mathbf{M}$ дивергенция и ротор вектора $\mathbf{M}$ являются некоторыми функциями $w(a)$ и $\mathbf{W}(a)$, которые определяются этим полем по формулам (1.32′) и (1.26). Можно, наоборот, искать поле $\mathbf{M}$, дивергенция и ротор которого равны заданным функциям $w(a)$ и $\mathbf{W}(a)$. В таком аспекте равенства

$$\text{I. } \operatorname{rot}\mathbf{M}=\mathbf{W}(a),\quad \text{II. } \operatorname{div}\mathbf{M}=w(a) \tag{1.92}$$

представляют собой уравнения поля $\mathbf{M}$. Любое векторное поле, обращающее эти уравнения в тождества, при заданных функциях $\mathbf{W}(a)$ и $w(a)$ является решением системы уравнений (1.92). Правые части уравнений (1.92), определяющие влияние возбудителей поля, находящихся в области V, на решения этих уравнений, называют функциями возбуждения.

I. **Системы уравнений безвихревого и чисто вихревого полей.** Система (1.92) упрощается для области V, в которой поле $\mathbf{M}$ не имеет вихрей или источников. В первом случае имеем в области V ламелларное поле, удовлетворяющее системе

$$\text{I. } \operatorname{rot}\mathbf{M}=0,\quad \text{II. } \operatorname{div}\mathbf{M}=w(a), \tag{1.93}$$

а во втором случае — соленоидальное поле, удовлетворяющее системе

$$\text{I. } \operatorname{rot}\mathbf{M}=\mathbf{W}(a),\quad \text{II. } \operatorname{div}\mathbf{M}=0. \tag{1.94}$$

Согласно (1.62) и (1.74′) решениями уравнений $(1.93)_1$ и $(1.94)_2$ являются соответственно

$$\mathbf{M}=-\operatorname{grad}U,\quad \mathbf{M}=\operatorname{rot}\mathbf{A}. \tag{1.92′}$$

Подставляя $(1.92′)_1$ в $(1.93)_2$, а $(1.92′)_2$ в $(1.94)_1$, получаем вместо систем (1.93) и (1.94)

$$\nabla^2 U=-w(a), \tag{1.93′}$$

$$[\nabla\,[\nabla\mathbf{A}]]=\mathbf{W}(a). \tag{1.94′}$$

Принимая во внимание (1.80′) и полагая $\operatorname{div}\mathbf{A}=0$, (см. разд. VI, § 5) имеем вместо (1.94′)

$$\nabla^2\mathbf{A}=-\mathbf{W}(a). \tag{1.94″}$$

Таким образом, каждая из систем (1.93), (1.94) уравнений первого порядка для поля $\mathbf{M}$ сводится к одному уравнению второго порядка для потенциала (U, $\mathbf{A}$) этого поля.

Наиболее простой вид

$$\text{I. } \operatorname{rot}\mathbf{M}=0,\ \text{II. } \operatorname{div}\mathbf{M}=0 \tag{1.95}$$

принимает система (1.92) для области V, в которой нет ни вихрей, ни источников, т. е. для области, в которой поле является и ламеллярным, и соленоидальным.

Рассматривая систему (1.95) как частный вид системы (1.93) или (1.94), приходим соответственно к уравнению $\nabla^2 U=0$ или $\nabla^2\mathbf{A}=0$.

II. **Прямая и обратная задачи.** Будем различать две задачи теории векторного поля $\mathbf{M}$: прямую и обратную. Прямая задача состоит в определении поля вектора $\mathbf{M}$ по заданным его возбудителям, а обратная—в определении возбудителей заданного поля $\mathbf{M}$. Задание или определение возбудителей означает задание или определение плотностей источников и вихрей поля $\mathbf{M}$, т. е. функций $w(a)$ и $\mathbf{W}(a)$ и величин, заменяющих эти функции там, где они теряют смысл (см. разд. IV, § 4).

Посмотрим, в какой же мере поле $\mathbf{M}$ определяется заданием его ротора и дивергенции, т. е. функций $\mathbf{W}(a)$ и $w(a)$ в области V. Иначе говоря, выясним, в какой мере поле $\mathbf{M}$ определяется системой (1.92). Допустим, что $\mathbf{M}'$ и $\mathbf{M}''$—два векторных поля, каждое из которых удовлетворяет этой системе. Ввиду ее линейности из этого следует, что поле $\mathbf{M}'''=\mathbf{M}''-\mathbf{M}'$ должно удовлетворять системе $\operatorname{rot}\mathbf{M}'''=0$, $\operatorname{div}\mathbf{M}'''=0$. Следовательно, система (1.92) определяет поле $\mathbf{M}$ с точностью до произвольно взятого частного решения однородной системы (1.95). Таким образом, система (1.92) определяет только ту часть поля $\mathbf{M}$, которую создают возбудители, находящиеся в области V, т. е. она определяет поле $\mathbf{M}$ с точностью до любого поля, создаваемого в области V какими-либо возбудителями, произвольно распределенными вне области V. В частности, это справедливо для систем (1.93) и (1.94). В соответствии с этим уравнения (1.93′) и (1.94′) для потенциалов U и $\mathbf{A}$ определяют эти потенциалы с точностью до потенциалов полей, создаваемых какими-либо возбудителями, произвольно размещенными вне области V. Ниже будет сказано о дополняющих условиях, с помощью которых устраняется указанная неполнота определения поля $\mathbf{M}$ системами (1.93) и (1.94) и уравнениями (1.93′) и (1.94′). Но следует иметь в виду также несущественную (не связанную с возможным присутствием возбудителей вне области V и не отражающуюся на поле $\mathbf{M}$) неполноту определения потенциалов [U, $\mathbf{A}$], обусловленную тем, что соотношениями (1.92′) потенциал U определяется с точностью до постоянной, а потенциал $\mathbf{A}$—с точностью до градиента произвольного скаляра.

Решение обратной задачи теории поля не вызывает затруднений[1]. Для нахождения плотности возбудителей поля там, где оно известно, достаточно выполнить соответствующие дифференцирования его компонент согласно (1.26) и (1.32′). Прямая задача осложняется обычно возникающей необходимостью решить ее при отсутствии непосредственных данных о возбудителях поля или их части. Данные о возбудителях, находящихся вне области V, в которой определяется поле, заменяются сведениями о поле у границы этой области, а вместо находящихся внутри области V возбудителей, зависящих от поля и среды, задаются некоторые функции $\Lambda[\varepsilon, \mu, \gamma]$, являющиеся параметрами этой среды. Применению дифференциальных уравнений поля к решению прямой задачи в такой постановке будет уделено внимание здесь и в следующих главах.

Учет влияния среды приводит к замене уравнений (1.93′) и (1.94′) уравнениями более общего вида:

$$(\nabla(\Lambda\nabla U)) = -w^v(a), \quad \left[\nabla\frac{[\nabla \mathbf{A}]}{\Lambda}\right] = \mathbf{W}^v(a), \tag{1.96}$$

где $\Lambda = \Lambda(a)$ — параметр, характеризующий среду, а $w^v(a)$ и $\mathbf{W}^v(a)$ — функции возбуждения, аналогичные функциям $w(a)$ и $\mathbf{W}(a)$.

III. **Выбор частного решения.** Применение уравнения в частных производных $(1.96)_1$ или $(1.96)_2$ для решения прямой задачи теории поля сводится к определению потенциала U или $\mathbf{A}$ как одного из частных решений этого уравнения. Бесчисленное множество частных решений этого уравнения соответствует множеству полей, получающихся в области V при различных совокупностях возбудителей поля, находящихся вне этой области, и одинаковых возбудителей — внутри нее. Предполагается, что задана некоторая физическая ситуация (совокупность физических условий) и требуется определить то поле, которое мы фактически имели бы в области V при осуществлении этой ситуации. Заданная физическая ситуация включает функцию w^v или $\mathbf{W}^v$ и параметр среды Λ в области V, а также сведения о потенциале в некоторых точках этой области и на ограничивающей ее поверхности $S[V]$. Этими сведениями можно воспользоваться для формулировки условий, которым, кроме соответствующего дифференциального уравнения, должен удовлетворять искомый потенциал. Без таких «дополняющих» уравнение условий формулировка задачи была бы неполной, так как это

---

[1] В теории геофизической разведки обратная задача ставится иначе: по данным о поле в точках некоторой области, поверхности или линии требуется определить возбудители поля или свойства среды, от которых они зависят, в области пространства, в которой поле нам неизвестно. В такой постановке обратная задача является очень трудной. Решение ее обычно оказывается многозначным, из-за отсутствия сведений, достаточных для единственности этого решения (см. ниже). Здесь имеется в виду принципиальная многозначность, а не практическая, связанная с погрешностью результатов наблюдения и неустойчивостью решения задачи.

уравнение (с подстановкой функции w^v или $\mathbf{W}^v$ и параметра среды Λ) допускает бесчисленное множество частных решений. Нам же нужно только одно из них, а именно потенциал того поля **M**, которое мы фактически имели бы в области V при осуществлении заданной физической ситуации.

В общем случае из физических условий задачи можно извлечь больше условий, касающихся искомого решения U или **A**, чем необходимо для его определения. Тем не менее вопрос о совместности дополняющих условий, т. е. о существовании удовлетворяющего им частного решения уравнения, можем не рассматривать. В существовании такого решения мы может быть уверены, так как предполагается, что задаваемая физическая ситуация является реальной, т. е. практически осуществимой, а каждой такой ситуации, очевидно, соответствует некоторое вполне определенное поле. Поэтому, если решение задачи определяется частью дополняющих условий, то функция U или **A**, удовлетворяющая этой части условий, будет удовлетворять также остальным дополняющим условиям.

Весьма важным является вопрос о достаточности поставленных дополняющих условий, так как может оказаться, что их совокупностью решение задачи определяется не полностью, неоднозначно. Иначе говоря, может оказаться, что существуют различные частные решения уравнения, удовлетворяющие сформулированной совокупности дополняющих условий и, следовательно, определив по этим условиям некоторую функцию U или **A**, мы не можем утверждать, что именно она представляет собой искомый потенциал, т. е. потенциал того поля, которое существовало бы при заданной физической ситуации. Отсюда следует необходимость теоремы единственности, устанавливающей типы дополняющих условий, достаточных для обеспечения единственности решения уравнения $(1.96)_1$ или $(1.96)_2$. Такие теоремы практически необходимы в качестве опоры при решении поставленной выше задачи потому, что обычно мы ищем ее решение, по существу, подбором. Совокупность дополняющих условий должна служить гарантией, что именно то частное решение, которое им удовлетворяет, является потенциалом искомого поля. Для этого годится только такая совокупность дополняющих условий, относительно которой известно, что ей может удовлетворить только одно из частных решений, т. е. что две функции, удовлетворяющие уравнению и такой совокупности условий, должны совпадать по всей области V, для которой решается поставленная задача. В следующем параграфе будут выведены «достаточные» в указанном здесь смысле совокупности дополняющих условий для уравнений (1.96). Некоторые из этих условий задаются у границы (на краях) области, т. е. на поверхности $S[V]$. Задачи с такими («краевыми») условиями называют *краевыми задачами*. Особым является случай, когда функция возбуждения равна нулю и Λ=const в области V, т. е. когда уравнения (1.96) вырождаются в уравнения Лапласа и прямая задача сво-

дится к поиску гармонической функции, удовлетворяющей краевым условиям.

В качестве примера решения прямой задачи для этого особого случая приведем определение по «методу сеток» функции U, гармонической в области V и принимающей заданные значения на поверхности $S[V]$ (решение задачи Дирихле, см. замечание 14 в § 8). Согласно (1.71), функция U в точке a имеет значение, равное среднему из ее значений, в шести соседних точках $a_1, a_2, \ldots, a_6$ достаточно детальной кубической сетки. Для приближенного численного определения функции U в области V заменим ее совокупностью значений U в N точках кубической сетки и составим для них N линейных уравнений:

$$6U_{i0} = \sum_{j=1}^{6} U_{ij} \quad (i = 1, 2, \ldots, N), \qquad (1.93'')$$

где индексом $j=0$ отмечается значение U, соответствующее какому-либо некраевому элементу сеточной модели области V, а индексами $j=1, 2, \ldots, 6$ — значения U, соответствующие шести соседним элементам.

В уравнениях (1.93″) некоторые члены с разными индексами соответствуют одним и тем же элементам сетки, а члены, соответствующие краевым элементам модели области V, считаются известными (по значениям U на $S[V]$). Остающиеся неизвестными N значений U_{ij} определяются системой (1.93″).

IV. **Замечания.** 1. То, что решение находят подбором функций, ни в какой мере не умаляет строгости полученного результата.

2. Поиски нужной функции фактически осуществляются на основе физических соображений, опыта решенных ранее задач и с применением разработанных методов, имеющих более или менее общий характер (метод разделения переменных, метод изображений, применение функции Грина и т. д.).

3. Нужное частное решение обычно намечают в неокончательном виде, с множителями, подлежащими определению с помощью дополняющих условий, применение которых сводится к получению уравнений, позволяющих определить эти множители.

4. Процессу построения решения обычно придают весьма стройный вид. Наводящий характер некоторых доводов не подчеркивается. В связи с этим становится незаметной важная роль теоремы единственности, решающее значение необходимости удовлетворения построенным решением условиям единственности. Это может привести к недоразумениям и к ошибочному распространению способов решения за пределы их применимости, основанной на теореме единственности ([2], с. 244, 245).

5. Для искомой функции можно получить интегральное уравнение, эквивалентное дифференциальному уравнению и условиям, обеспечивающим единственность его решения. Найти решение этого интегрального уравнения в принципе можно, не прибегая к подбору (см. гл. четвертую). Применение интегральных уравнений для определения поля приводит к весьма сложным выражениям и громоздким вычислениям. Но при современной технике счета это обстоятельство не имеет столь решающего значения.

6. Соответствие некоторого частного решения дифференциального уравнения в частных производных (1.96) конкретным условиям решаемой прямой задачи гарантируется выполнением соответ-

ствующих условий единственности, независимо от способа, которым найдено это частное решение (пусть оно взято наугад).

§ 8. УСЛОВИЯ ЕДИНСТВЕННОСТИ

Выведем отдельно условия единственности для уравнений $(1.96)_1$ и $(1.96)_2$.

I. **Условия единственности решения уравнения скалярного потенциала.** Представим себе, что мы ищем для области V потенциал U, удовлетворяющий уравнению $(1.96)_1$. Допустим, что, исходя из заданной физической ситуации, мы не только знаем функции $w^v(a)$ и $\Lambda(a)$, входящие в это уравнение, но можем также извлечь некоторую совокупность дополняющих его условий, содержащую в общем случае «краевые» условия, касающиеся функции U у границы $S[V]$ области V, а также некоторые условия для этой функции внутри области V. Допустим, что какие-либо две функции $U'(a)$ и $U''(a)$ удовлетворяют в области V уравнению $(1.96)_1$ с подстановкой заданных функций $w^v(a)$ и $\Lambda(a)$, а также заданным дополняющим условиям.

Рассмотрим функцию

$$U'''(a)=U''(a)-U'(a). \tag{1.97}$$

Так как в области V

$$(\nabla(\Lambda\nabla U'))=-w''(a) \quad \text{и} \quad (\nabla(\Lambda\nabla U''))=-w^v(a), \tag{1.98}$$

то (ввиду линейности уравнения $(1.96)_1$) в этой области функция U''' удовлетворяет однородному уравнению

$$(\nabla(\Lambda\nabla U'''))=0. \tag{1.98'}$$

Полагая, что скаляры Λ и U и вектор ∇U непрерывны в области V и, следовательно, в ней непрерывно также произведение

$$U\Lambda\nabla U=\mathbf{X}, \tag{1.99}$$

будем считать, что скаляр U''', вектор $\nabla U'''$ и произведение

$$U'''\Lambda\nabla U'''=\mathbf{X}''' \tag{1.99'}$$

также непрерывны в этой области и дивергенция вектора $\mathbf{X}'''$ не теряет в ней смысла. Имея это в виду, применим к вектору $\mathbf{X}'''$ в этой области теорему Остроградского (1.30) и получим

$$\oint_{S[V]} U'''\Lambda(\nabla U'''\mathbf{dS})=\int_V \Lambda(\nabla U''')^2\,dV+\int_V U'''(\nabla(\Lambda\nabla U'''))\,dV. \tag{1.100}$$

Принимая во внимание (1.98') и учитывая, что

$$(\nabla U\mathbf{dS})=(\mathbf{n}\nabla U)\,dS=(\operatorname{grad}U)_n\,dS=\frac{\partial U}{\partial n}\,dS,$$

получаем из (1.100)

$$\oint_{S[V]} U'''\Lambda\frac{\partial U'''}{\partial n}\,dS=\int_V \Lambda(\nabla U''')^2\,dV. \tag{1.100'}$$

Если из краевых условий следует, что

$$\oint_{S[V]} U'''\Lambda\frac{\partial U'''}{dn}\,dS=0, \tag{1.101}$$

то интеграл в правой части (1.100′) обращается в нуль. Величины Λ и $(\nabla U''')^2$ не могут иметь отрицательных значений, поэтому из равенства нулю этого интеграла следует, что в области V

$$\nabla U'''=0,\ U'''=C,\ U''=U'+C, \tag{1.102}$$

где C—постоянная, т. е. величина, не зависящая от положения точки наблюдения a в области V. Если бы из заданных условий можно было бы еще заключить, что в какой-либо точке a_1 внутри области V или на ее границе $S\,[V]$

$$U'''(a_1)=0, \tag{1.103}$$

то из этого следовало бы, что $C=0$ и, следовательно, $U''=U'$, т. е. функции U'' и U' полностью совпадают во всей области V.

Можно видеть, что левая часть (1.101) обращается в нуль, если функция U''' удовлетворяет одному из следующих трех условий:

$$U'''=0 \text{ на } S\,[V], \tag{1.104}$$

$$\frac{\partial U'''}{dn}=0 \text{ на } S[V], \tag{1.105}$$

$$\oint_{S[V]}\Lambda\frac{\partial U'''}{\partial n}\,dS=0, \text{ причем } \frac{\partial U'''}{\partial t}=0 \text{ на } S[V], \tag{1.106}$$

где t—любое тангенциальное направление на поверхности $S\,[V]$.

Таким образом, условие (1.101) может быть заменено любым из трех условий (1.104)—(1.106). Условие (1.106) представляет собой совокупность двух условий, из которых второе позволяет вынести множитель U''' подынтегральной функции в левой части (1.101) за знак интеграла, после чего получаем интеграл, который, в силу первого из этих условий равен нулю:

$$\oint_{S[V]} U'''\Lambda\frac{\partial U'''}{\partial\bar{n}}\,dS=U'''\oint_{S[V]}\Lambda\frac{\partial U'''}{\partial n}\,dS=0.$$

Условие (1.104) содержит условие (1.103).

Представим себе, что из физических условий задачи следует, что искомая функция U должна удовлетворять одному из следующих трех краевых условий:

I. $U(p)=\zeta(p)$, (1.104′)

II. $\frac{\partial U}{\partial n}(p)=\varphi(p)$, (1.105′)

III. $\oint_{S[V]}\Lambda\frac{\partial U}{\partial n}\,dS=Q$, причем $[\mathbf{n}\nabla U(p)]=0$, (1.106′)

где p—точка на границе $S[V]$ области V; $\zeta(p)$, $\varphi(p)$—некоторые известные нам из физических условий задачи функции положения точки p на поверхности $S[V]$; Q—известное нам из этих же условий значение потока вектора $\Lambda \operatorname{grad} U$ через поверхность $S[V]$. Очевидно, что если функции U' и U'' удовлетворяют условию (1.104′), (1.105′) или (1.106′), то функция U''' удовлетворяет соответственно условию (1.104), (1.105) или (1.106), так как если, например, $U'(p)=\zeta(p)$ и $U''(p)=\zeta(p)$, то $U'''(p)=0$. Таким образом, условиям (1.104), (1.105), (1.106) для U''' соответствуют условия (1.104′), (1.105′), (1.106′) для U. Условию (1.103) для U''' соответствует задание значения U_1 функции U в какой-либо точке a_1 области V или ее границы $S[V]$:

$$U(a_1)=U_1. \qquad (1.103')$$

Условие (1.104′) содержит (1.103′). Следовательно, любого из условий (1.104′)—(1.106′) достаточно на поверхности $S[V]$ для обеспечения однозначности решения уравнения $(1.96)_1$ с точностью до постоянной C, которая обращается в нуль, когда удовлетворяется условие (1.104′) или одно из условий (1.105′), (1.106′), дополненное условием (1.103′). Следует иметь в виду, что однозначность решения уравнения $(1.96)_1$ с точностью до постоянной означает полную однозначность определения поля $\mathbf{M}=-\operatorname{grad} U$.

Выше мы полагали, что функции Λ, U и ∇U непрерывны в области V и поэтому векторы $\mathbf{X}$ и $\mathbf{X}'''$ также непрерывны в этой области. На этом основании мы применяли теорему Остроградского к вектору $\mathbf{X}'''$ и области V. Но в общем случае в области V могут находиться особые точки q_{oc}, линии l_{oc} и поверхности S_{oc}, у которых непрерывность функций U, ∇U и Λ (хотя бы некоторых из них) нарушается. При этом справедливость предположения о непрерывности векторов $\mathbf{X}$ и $\mathbf{X}'''$ в области V не является очевидной и может даже не соответствовать действительности. Для того чтобы изложенный вывод условий единственности оставался справедливым, несмотря на указанное осложнение, окружим особые поверхности, линии и точки «поверхностями безопасности» $S[S_{oc}]$, $S[l_{oc}]$, $S[q_{oc}]$ и будем вместо области V рассматривать область V^*, совпадающую с областью V без ее частей, заключенных внутри поверхностей безопасности. В соответствии с этим мы должны в (1.100), (1.100′), (1.101) подставить вместо области V область V^*, а вместо поверхности $S[V]$ границу $S[V^*]$ области V^*, состоящую из поверхности $S[V]$ и совокупности поверхностей безопасности, на которых нормали n должны быть направлены наружу относительно области V^*. Стягивая поверхности безопасности к особым точкам, линиям и поверхностям, которые они окружают, сведем к нулю объемы областей, исключаемых из области V, и поэтому объемное интегрирование будем по-прежнему производить по области V. Что же касается поверхностного интегрирования, то его надо будет распространить не только на поверхность $S[V]$, но также на совокупность стянутых поверхностей безопасности. Таким

образом, вместо (1.100′) получаем равенство

$$\oint\limits_{S[V]} (\mathbf{X}'''d\mathbf{S}) + \oint\limits_{S[S_{oc}]} (\mathbf{X}'''d\mathbf{S}) + \oint\limits_{S[l_{oc}]} (\mathbf{X}'''d\mathbf{S}) +$$

$$+ \oint\limits_{S[q_{oc}]} (\mathbf{X}'''d\mathbf{S}) = \int\limits_{V} \Lambda (\nabla U''')^2 dV; \qquad (1.100'')$$

для того, чтобы из него следовало нужное нам равенство (1.102), достаточно, чтобы, кроме краевых условий, обращающих в нуль первый из интегралов в левой части (1.100″), было соблюдено условие обращения в нуль потока вектора $\mathbf{X}'''$ через любую из поверхностей безопасности:

$$\oint\limits_{S[S_{oc}]} (\mathbf{X}'''d\mathbf{S}) = 0, \quad \oint\limits_{S[l_{oc}]} (\mathbf{X}'''d\mathbf{S}) = 0, \quad \oint\limits_{S[q_{oc}]} (\mathbf{X}'''d\mathbf{S}) = 0. \qquad (1.107)$$

Подставляя в (1.48′) вектор $\mathbf{X}'''$ вместо вектора $\mathbf{M}$, имеем

$$\oint\limits_{S[S_{oc}]} (\mathbf{X}'''d\mathbf{S}) = \int\limits_{S_{oc}} \mathrm{Div}\, \mathbf{X}''' dS = \int\limits_{S_{oc}} \mathrm{Div}\, (U'''\Lambda\nabla U''') dS. \qquad (1.108)$$

Следовательно, первое из условий (1.107) удовлетворяется, если

$$\mathrm{Div}\, (U'''\Lambda\nabla U''') = 0 \text{ на } S_{oc}. \qquad (1.109)$$

Будем полагать, что на поверхностях S_{oc} функции U, ∇U, Λ имеют ограниченные значения, и поэтому тангенциальная компонента X'''_{τ} вектора $\mathbf{X}'''$ также ограничена. Согласно (1.49), получаем из (1.109) требование

$$U'''^{(2)}\Lambda_2(\mathbf{n}\nabla U'''^{(2)}) = U'''^{(1)}\Lambda_1(\mathbf{n}\nabla U'''^{(1)}) \text{ на } S_{oc}, \qquad (1.109')$$

для выполнения которого достаточно, чтобы на каждой поверхности S_{oc} удовлетворялась совокупность условий:

$$U'''^{(2)} = U'''^{(1)}, \quad \Lambda_2 \frac{\partial U'''^{(2)}}{\partial n} = \Lambda_1 \frac{\partial U'''^{(1)}}{\partial n}. \qquad (1.110)$$

Представим себе, что из физических условий задачи известны разрывы функций U и $\Lambda \dfrac{\partial U}{\partial n}$ на поверхности S_{oc} и, следовательно, для этих функций имеем совокупность условий [1]:

$$1.\ U^{(2)} - U^{(1)} = \zeta_{12}(p), \quad 2.\ \Lambda_2 \frac{\partial U^{(2)}}{\partial n} - \Lambda_1 \frac{\partial U^{(1)}}{\partial n} = \varphi_{12}(p), \qquad (1.110')$$

где p—точка на поверхности S_{oc}; $\zeta_{12}(p)$ и $\varphi_{12}(p)$—некоторые известные из физических условий задачи функции положения точки p на этой поверхности. Очевидно, что, если каждая из функций U' и U'' удовлетворяет условиям (1.110′), то их разность U'''' удовлет-

[1] Если в каком-либо из условий (1.110′) правая часть равна нулю, то его называют однородным, в противном случае — неоднородным.

воряет условиям (1.110) и, следовательно, условию $(1.107)_1$ на поверхности S_{oc}.

Функцию U обычно представляют в областях V_1 и V_2, разделяемых поверхностью S_{oc} (внутри области V), различными аналитическими выражениями ($U^{(1)}$ и $U^{(2)}$), которые должны «сопрягаться» на поверхности S_{oc} в соответствии с условиями сопряжения (1.110′).

Для того чтобы функция U''' удовлетворяла условиям $(1.107)_2$ и $(1.107)_3$, достаточно, чтобы левая часть каждого из этих равенств принимала одно и то же значение при подстановке в нее вместо X''' векторов $U'\Lambda\nabla U'$ и $U''\Lambda\nabla U''$. Но величины U и ∇U у точек q_{oc} и линий l_{oc} принимают бесконечно большие значения. Поэтому здесь следует иметь в виду стремление функций U' и U''к совпадению при приближении точки наблюдения к этим точкам и линиям. Следовательно, в качестве условия для функции U у особых точек и линий достаточно задание выражений для нее у этих точек и линий («особенностей» функции U).

Таким образом, получаем теорему единственности решения уравнения $(1.96)_1$, согласно которой решение определяется в области V с точностью до постоянной C краевым условием одного из трех типов (I, II, III) на границе $S[V]$ области V, двумя условиями сопряжения (1.110′) на любой особой поверхности S_{oc}, находящейся внутри области V, и выражениями для U у всех особых точек и линий, находящихся в этой области, причем постоянная C определяется заданием значения потенциала в какой-либо точке области V.

II. **Замечания к теореме единственности решения уравнения скалярного потенциала.**

1. Для обеспечения однозначности решения можно на разных участках поверхности $S[V]$ задавать краевые условия различного типа. Но ни один из ее участков не должен остаться без какого-либо из этих условий.

2. Условие III типа, как и условия других типов, применимо не только ко всей поверхности $S[V]$, но также к ее отдельному участку.

3. Если хотя бы на одном участке поверхности $S[V]$ выполняется условие I типа, то потенциал U определяется полностью ($C=0$).

4. Участками поверхности $S[V]$ могут быть отдельные поверхности, например две сферические поверхности, образующие границу сферического слоя.

5. Дополняющие условия нельзя задавать произвольно, они должны следовать из физически осуществимых условий задачи. Произвольно наложенное на искомое решение условие может оказаться несовместным с другими дополняющими условиями и с уравнением $(1.96)_1$ при заданных функциях Λ и ω^v.

6. Граница $S[V]$ области V может полностью или частично совпадать с бесконечно удаленной поверхностью. Иначе говоря, область V может быть неограниченной (по всем направлениям или

по некоторым из них). В этом случае вместо тех или иных величин, например U, на поверхности $S[V]$ задаются асимптотические выражения этих величин, соответствующие удалению точки наблюдения на бесконечность (регулярность на бесконечности).

7. Выбор области V, для которой решается уравнение $(1.96)_1$, определяется не только частью пространства, в которой нас интересует поле **M**. Необходимо эту область выбирать так, чтобы иметь возможность задать на всей ее границе $S[V]$ краевые условия. Это обстоятельство может нас заставить включить в область V часть пространства, в которой нас поле не интересует.

8. Решение может быть представлено для разных частей области V различными аналитическими выражениями. Обычно поверхности, разграничивающие эти части области V, совпадают с поверхностями, особыми для искомого поля. Но они могут быть также не особыми. Бывают и такие случаи, когда для смежных частей области V, разграниченных особой для искомого поля поверхностью S_{oc}, функцию U представляют одним аналитическим выражением (функцией разрывной или имеющей разрывную нормальную производную).

9. Если части области V, для которых функция U представлена различными аналитическими выражениями, разграничены поверхностью, не являющейся особой, то для обеспечения единственности решения следует потребовать, чтобы на этой поверхности (как и на любой другой поверхности в области V) удовлетворялись условия сопряжения

$$U^{(2)}=U^{(1)},\quad \frac{\partial U^{(2)}}{\partial n}=\frac{\partial U^{(1)}}{\partial n}, \tag{1.110''}$$

получающиеся из (1.110′) при $\Lambda_2=\Lambda_1$, $\zeta_{12}(p)=0$, $\varphi_{12}(p)=0$.

10. Условия сопряжения (1.110′) и краевые условия (1.104′)—(1.106′) обычно объединяют под общим названием граничных (пограничных, краевых) условий.

11. Если $w^{V}=0$ во всей области V и в ней нет особых линий, точек и поверхностей, кроме поверхностей разрыва параметра Λ, то в этой области, за исключением этих поверхностей, потенциал U должен удовлетворять однородному уравнению

$$(\nabla(\Lambda\nabla U))=0, \tag{1.111}$$

причем условия сопряжения (1.110′) также становятся однородными:

$$U^{(2)}=U^{(1)},\quad \Lambda_2\frac{\partial U^{(2)}}{\partial n}=\Lambda_1\frac{\partial U^{(1)}}{\partial n}. \tag{1.112}$$

12. Допустим, что в области V, о которой шла речь в замечании 11, функция U имеет значения U', а на ее границе $S[V]$ величины ζ, φ и Q, входящие в краевые условия, имеют значения ζ', φ' и Q'. Если вместо U' потенциал U примет значения $U''=U'm$, где m—постоянный множитель, то на поверхности $S[V]$ величины ζ, φ и Q вместо значений ζ', φ' и Q' примут значения $\zeta''=m\zeta'$, $\varphi''=m\varphi'$, $Q''=mQ'$. Согласно теореме единственности из

этого следует также обратное, т. е. что когда величины ζ, φ, Q на поверхности $S[V]$ вместо значений ζ', φ', Q' принимают значения $m\zeta'$, $m\varphi'$, mQ', то функция U должна во всей области V вместо значений U' иметь значения mU'. Следовательно, пропорциональные изменения значений правых частей краевых условий на границе $S[V]$ такой области V вызывают пропорциональные им изменения потенциалов всех точек внутри этой области.

13. Из изложенного выше следует, что если в области V нет особых точек, линий и поверхностей и в ней всюду $\omega^{\nu}=0$ и $\nabla\Lambda=0$, то поле в ней полностью определяется краевыми условиями на поверхности $S[V]$. Но в такой области $(\nabla(\Lambda\nabla U))=\Lambda\nabla^2U=0$, т. е. $\nabla^2U=0$. Следовательно, функция, гармоническая в области V, определяется в ней полностью значениями, которые она имеет на границе $S[V]$, и с точностью до постоянной C значениями нормальной производной этой функции на поверхности $S[V]$.

14. Задачи определения гармонической функции в области V по ее значениям или значениям ее нормальной производной на границе $S[V]$ этой области называют соответственно з а д а ч а м и Д и р и х л е и Н е й м а н а.

15. Если в области V функция $U(a)=C$, то в этой области она удовлетворяет уравнению Лапласа, а на ее границе $S[V]$—краевым условиям

$$U(p)=C,\quad \frac{\partial U}{\partial n}(p)=0. \tag{1.113}$$

Следовательно, согласно теореме единственности функция, гармоническая в области V и удовлетворяющая на ее границе $S[V]$ хотя бы одному из этих условий, равна постоянной C во всей области V. В частности, функция, гармоническая в области V и обращающаяся в нуль на ее границе $S[V]$, равна нулю во всей области V.

III. **Условия единственности решения уравнения векторного потенциала.** Представим себе, что мы ищем для области V векторный потенциал $\mathbf{A}$, удовлетворяющий уравнению $(1.96)_2$. В соответствии с обозначением, применяемым в пятой главе, будем полагать $\Lambda=\mu$. Допустим, что, исходя из заданной физической ситуации, мы не только знаем функции $\mathbf{W}^{v}$ и μ, входящие в уравнение $(1.96)_2$, но можем также извлечь некоторую совокупность дополняющих его условий: краевые условия, касающиеся функции $\mathbf{A}$ у границы $S[V]$ области V и некоторые условия для этой функции внутри области V. Допустим, что две функции $\mathbf{A}'(a)$ и $\mathbf{A}''(a)$ удовлетворяют в области V уравнению $(1.96)_2$ с подстановкой заданных функций μ и $\mathbf{W}^{v}$, а также заданным дополняющим условиям. Рассмотрим функцию

$$\mathbf{A}'''(a)=\mathbf{A}''(a)-\mathbf{A}'(a). \tag{1.114}$$

Так как в области V

$$\left[\nabla\frac{[\nabla\mathbf{A}']}{\mu}\right]=\mathbf{W}^{v}(a)\quad\text{и}\quad\left[\nabla\frac{[\nabla\mathbf{A}'']}{\mu}\right]=\mathbf{W}^{v}(a), \tag{1.115}$$

то в этой области функция $\mathbf{A}'''$ удовлетворяет уравнению

$$\left[\nabla \frac{[\nabla \mathbf{A}''']}{\mu}\right]=0. \tag{1.115'}$$

Полагая, что векторы $\mathbf{A}$ и $[\nabla \mathbf{A}]$ и скаляр μ непрерывны в области V и, следовательно, в ней непрерывен вектор

$$\mathbf{X}=\left[\mathbf{A}\frac{[\nabla \mathbf{A}]}{\mu}\right], \tag{1.116}$$

можем считать, что вектор

$$\mathbf{X}'''=\left[\mathbf{A}'''\frac{[\nabla \mathbf{A}''']}{\mu}\right] \tag{1.116'}$$

также непрерывен в этой области. Применяя к вектору $\mathbf{X}'''$ в области V теорему Остроградского, получаем

$$\oint_{S[V]}\left(\left[\mathbf{A}'''\frac{[\nabla \mathbf{A}''']}{\mu}\right]d\mathbf{S}\right)=\int_V \operatorname{div}\left[\mathbf{A}'''\frac{[\nabla \mathbf{A}''']}{\mu}\right]dV=$$

$$=\int_V \frac{[\nabla \mathbf{A}''']^2}{\mu}dV+\int_V\left(\mathbf{A}'''\left[\nabla\frac{[\nabla \mathbf{A}''']}{\mu}\right]\right)dV \tag{1.117}$$

или, принимая во внимание (1.115'), имеем

$$\oint_{S[V]}(\mathbf{n}[\mathbf{A}'''[\nabla \mathbf{A}''']])\frac{dS}{\mu}=\int_V \frac{1}{\mu}[\nabla \mathbf{A}''']^2 dV. \tag{1.117'}$$

Если из краевых условий следует, что

$$\oint_{S[V]}(\mathbf{n}[\mathbf{A}'''[\nabla \mathbf{A}''']])\frac{dS}{\mu}=0, \tag{1.118}$$

то согласно (1.117') во всей области V

$$[\nabla \mathbf{A}''']=0, \text{ т. е. } \operatorname{rot}\mathbf{A}'''=0, \tag{1.119}$$

а это означает, что

$$\mathbf{A}'''=\operatorname{grad}T, \text{ т. е. } \mathbf{A}''=\mathbf{A}'+\operatorname{grad}T, \tag{1.119'}$$

где $T=T(a)$—произвольная скалярная функция точки a в области V. Если, кроме того, считать, что

$$\operatorname{div}\mathbf{A}'''=0, \tag{1.120}$$

то согласно $(1.119')_1$ $\nabla^2 T=0$ и, следовательно, T—функция, гармоническая в области V.

Можно видеть, что левая часть (1.118) обращается в нуль, если функция $\mathbf{A}(a)$ удовлетворяет одному из следующих двух условий:

$$[\mathbf{n}\mathbf{A}''']=0 \text{ на } S[V], \tag{1.121}$$

$$[\mathbf{n}[\nabla \mathbf{A}''']]=0 \text{ на } S[V], \tag{1.122}$$

т. е. если на границе $S[V]$ области V полная тангенциальная компонента ($\mathbf{A}'''_\tau$ или $[\nabla \mathbf{A}''']_\tau$) вектора $\mathbf{A}'''$ или $[\nabla \mathbf{A}''']$ и следователь-

но, компонента этого вектора по любому тангенциальному к поверхности $S[V]$ направлению t обращается в нуль. Действительно, вектор $[\mathbf{A}'''[\nabla\mathbf{A}''']]$ нормален к плоскости, в которой лежат векторы $\mathbf{A}'''$ и $[\nabla\mathbf{A}''']$, поэтому, если один из этих векторов нормален к поверхности $S[V]$, то вектор $[\mathbf{A}'''[\nabla\mathbf{A}''']]$ лежит в плоскости, касательной к этой поверхности, т. е. его нормальная к этой поверхности компонента $[\mathbf{A}'''[\nabla\mathbf{A}''']]_n=(\mathbf{n}[\mathbf{A}'''[\nabla\mathbf{A}''']])=0$. Таким образом, если в любой точке поверхности $S[V]$ $[\mathbf{n}\mathbf{A}''']=0$ или $[\mathbf{n}[\nabla\mathbf{A}''']]=0$, то подынтегральная функция в (1.118) обращается в нуль на всей этой поверхности.

Теперь представим себе, что из заданной физической ситуации мы для искомого потенциала $\mathbf{A}$ получили одно из следующих двух условий [1]:

$$\text{IV. } [\mathbf{n}\mathbf{A}(p)]=[\mathbf{n}\mathbf{N}(p)], \tag{1.121'}$$

$$\text{V. } [\mathbf{n}[\nabla\mathbf{A}(p)]]=[\mathbf{n}\mathbf{P}(p)], \tag{1.122'}$$

где p—точка на границе $S[V]$ области V; $\mathbf{N}(p)$ и $\mathbf{P}(p)$—некоторые известные нам из физических условий задачи функции положения точки p на этой поверхности. Очевидно, что если функции $\mathbf{A}'(a)$ и $\mathbf{A}''(a)$ удовлетворяют условию (1.121′) или (1.122′), то функция $\mathbf{A}'''(a)$ удовлетворяет соответственно условию (1.121) или (1.122). Ясно также, что если функции $\mathbf{A}'$ и $\mathbf{A}''$ удовлетворяют требованию $\operatorname{div}\mathbf{A}=\beta(a)$, то $\operatorname{div}\mathbf{A}'''=0$ и, следовательно, $\nabla^2T=0$. Таким образом, если функции μ, $\mathbf{A}$, $[\nabla\mathbf{A}]$ непрерывны в области V, то любого из краевых условий (1.121′), (1.122′) достаточно для обеспечения однозначности решения уравнения $(1.96)_2$ в этой области с точностью до градиента произвольной скалярной функции T, которая при заданной дивергенции вектора $\mathbf{A}$ должна быть гармонической.

Допустим теперь, что в области V имеются особые линии l_{oc} и поверхности S_{oc}, на которых непрерывность функций $\mathbf{A}$, $[\nabla\mathbf{A}]$ и μ (хотя бы некоторых из них) нарушается. Тогда вместо (1.117′) будем иметь равенство

$$\oint_{S[V]}(\mathbf{X}'''d\mathbf{S})+\oint_{S[S_{oc}]}(\mathbf{X}'''d\mathbf{S})+\oint_{S[l_{oc}]}(\mathbf{X}'''d\mathbf{S})=\int_V\frac{1}{\mu}[\nabla\mathbf{A}''']^2dV, \tag{1.117''}$$

аналогичное равенству (1.100″), и для обращения в нуль вектора $[\nabla\mathbf{A}''']$ потребуем, чтобы функция $\mathbf{A}'''$ удовлетворяла условиям

$$\oint_{S[S_{oc}]}(\mathbf{X}'''d\mathbf{S})=0,\qquad \oint_{S[l_{oc}]}(\mathbf{X}'''d\mathbf{S})=0, \tag{1.123}$$

которые соответствуют условиям (1.107). Первое из этих условий, согласно (1.48′), можно свести к условию

$$\operatorname{Div}\left[\mathbf{A}'''\frac{[\nabla\mathbf{A}''']}{\mu}\right]=0 \text{ на } S_{oc}. \tag{1.123'}$$

[1] Условия I—III (для скалярного потенциала U) были получены в разд. I.

Полагая, что фукции $\mathbf{A}$, $[\nabla\mathbf{A}]$, μ^{-1} имеют на поверхности S_{oc} ограниченные значения, заменим (1.123′) условием

$$\left(\mathbf{n}\left[\mathbf{A}'''^{(2)}\frac{[\nabla\mathbf{A}'''^{(2)}]}{\mu_2}\right]\right)=\left(\mathbf{n}\left[\mathbf{A}'''^{(1)}\frac{[\nabla\mathbf{A}'''^{(1)}]}{\mu_1}\right]\right), \qquad (1.123'')$$

для выполнения которого достаточно удовлетворить совокупности условий [1]

$$[\mathbf{n}\mathbf{A}'''^{(2)}]=[\mathbf{n}\mathbf{A}'''^{(1)}],\ \frac{1}{\mu_2}[\mathbf{n}[\nabla\mathbf{A}'''^{(2)}]]=\frac{1}{\mu_1}[\mathbf{n}[\nabla\mathbf{A}'''^{(1)}]]. \qquad (1.124)$$

Отсюда получаем для вектора $\mathbf{A}$ на поверхности S_{oc} совокупность условий сопряжения [2]:

1) $[\mathbf{n}(\mathbf{A}^{(2)}-\mathbf{A}^{(1)})]=[\mathbf{n}\mathbf{N}_{12}(p)]$,

$$2)\ \frac{1}{\mu_2}[\mathbf{n}[\nabla\mathbf{A}^{(2)}]]-\frac{1}{\mu_1}[\mathbf{n}[\nabla\mathbf{A}^{(1)}]]=\mathbf{P}_{12}(p), \qquad (1.124')$$

где p — любая точка на поверхности S_{oc}, а $\mathbf{N}_{12}(p)$ и $\mathbf{P}_{12}(p)$ — векторы, являющиеся заданными функциями положения точки p на этой поверхности. Обычно $\mathbf{N}_{12}(p)=0$ и $\operatorname{Div}\mathbf{A}=0$.

Условие $(1.123)_2$, очевидно, удовлетворяется, если выражения для функций $\mathbf{A}'$ и $\mathbf{A}''$ стремятся к совпадению при приближении точки наблюдения к линии l_{oc}. Следовательно, в качестве условия для вектора $\mathbf{A}$ на такой линии достаточно задать выражения для вектора $\mathbf{A}$ у этой линии (задать «особенности» функции $\mathbf{A}$).

Таким образом, получаем теорему единственности решения уравнения $(1.96)_2$, согласно которой это решение определяется в области V с точностью до градиента произвольной скалярной функции T (гармонической, если задана дивергенция вектора $\mathbf{A}$) краевым условием IV или V типа на границе $S[V]$ области V, двумя условиями сопряжения (1.124′) на любой особой поверхности S_{oc} внутри области V и выражениями для вектора $\mathbf{A}$ у всех особых линий в этой области.

IV. **Замечания к теореме единственности решения уравнения векторного потенциала.** Из замечаний, приведенных в разделе II, здесь уместны замечания 1, 4—8, 10 с подстановками $\mathbf{A}$, $\mathbf{W}^v$,

---

[1] Переход от (1.123″) к (1.124) основан на том, что нормальная компонента векторного произведения двух векторов определяется их тангенциальными компонентами; от их нормальных компонент она не зависит.

[2] Из вывода достаточных условий сопряжения $(1.124')_{1,2}$ на поверхности S_{oc} не следует их необходимость. Легко также видеть, что для единственности решения уравнения $(1.96)_2$ достаточно задать разрыв произведения $\mu^{-1}(\mathbf{n}[\mathbf{A}[\nabla\mathbf{A}]])$ на S_{oc} или интеграла этого произведения по S_{oc}. Аналогичное справедливо для уравнения $(1.96)_1$, условий $(1.110')_{1,2}$ и произведения $\Lambda U\frac{\partial U}{\partial n}$. Но условия (1.110′) и (1.124′) соответствуют обычно встречающимся случаям.

В следующих четырех главах для разных видов (f, E, B, ...) поля $\mathbf{M}$ будут получены условия на особой поверхности S_{oc}, необходимые в силу физических закономерностей этих полей. В § 8, 6, 7, 5 глав второй, третьей, четвертой, пятой соответственно будут даны указания об использовании этих, необходимых по физической сути дела условий в качестве условий, достаточных для единственности решений соответствующих уравнений.

μ, $(1.96)_2$, (1.124′), (1.121′)—(1.122′) вместо U, w^v, Λ, $(1.96)_1$, (1.110′), (1.104′)—(1.106′). К ним надо добавить следующие замечания.

1′. Если условие IV или V типа дополняется условием

$$A_n(p)=N_n(p) \text{ на } S[V], \qquad (1.125)$$

где $N_n(p)$ — некоторая известная из физических условий задачи функция положения точки p на поверхности $S[V]$, то согласно (1.119′) на ней $\partial T/\partial n=0$. Если, кроме того, задается дивергенция вектора $\mathbf{A}$ и, следовательно, имеем $\nabla^2 T=0$, то согласно замечанию 13 $T=C$, $\operatorname{grad} T=0$, $\mathbf{A}''=\mathbf{A}'$. Таким образом, сочетание условия IV или V типа с условиями (1.125) и выражением для $\operatorname{div}\mathbf{A}$ определяет потенциал $\mathbf{A}$ полностью.

2′. Сочетание условия IV типа с условием (1.125) равносильно краевому условию

$$\text{IVa. } \mathbf{A}(p)=\mathbf{N}(p) \text{ на } S[V], \qquad (1.125')$$

где $\mathbf{N}(p)$ — некоторая функция точки p на поверхности $S[V]$.

3′. Если V — все пространство, то условие IVa заменяется асимптотическим выражением для вектора $\mathbf{A}$, соответствующим удалению точки наблюдения на бесконечность.

§ 9. ДОПОЛНЕНИЯ К ПЕРВОЙ ГЛАВЕ

I. Производные поля, зависящего от расстояния L_{qa}. Часто приходится рассматривать поля скалярных или векторных величин $T(L_{qa})$, $\mathbf{M}(L_{qa})$, зависящих от расстояния $L_{qa}=L_{aq}=\sqrt{(x_a-x_q)^2+(y_a-y_q)^2+(z_a-z_q)^2}$ между двумя точками a и q, т. е. от абсолютной величины вектора $\mathbf{L}_{qa}=-\mathbf{L}_{aq}=\mathbf{1}_x(x_a-x_q)+\mathbf{1}_y(y_a-y_q)+\mathbf{1}_z(z_a-z_q)$. Такая величина T или $\mathbf{M}$ является функцией двух точек: a и q. В более общем случае величина T или $\mathbf{M}$ может зависеть, кроме того, от точки a или q (или от обеих точек) не через расстояние L_{qa}, например $T(q, L_{qa})$.

Дифференцируя функцию точек a и q, мы должны условиться, какую из них считаем переменной, указать, по какой из них мы дифференцируем. Эту точку называем аргументом функции, а другую — ее параметром. Аргумент будем указывать буквой (a или q) над обозначением производной, например $\operatorname{div}_a \mathbf{A}(a, q)$ или $\operatorname{grad}_q T(a, q)$. Аналогичное касается функции координат ξ_{ka} и ξ_{kq} точек a и q. Ниже следуют сведения о пространственных производных функций расстояния L_{qa}.

1. Направления векторов $\operatorname{grad}_a L_{qa}$ и $\operatorname{grad}_q L_{qa}$, очевидно, совпадают соответственно с направлениями векторов $\mathbf{L}_{qa}$ и $\mathbf{L}_{aq}$, так как при перемещении точки a расстояние L_{qa} увеличивается наиболее интенсивно, когда это перемещение происходит по направлению вектора $\mathbf{L}_{qa}$, а при перемещении точки q расстояние L_{qa} увеличивается наиболее интенсивно, когда это перемещение происходит

по направлению вектора $\mathbf{L}_{aq}=-\mathbf{L}_{qa}$. Абсолютная же величина каждого из векторов $\overset{a}{\nabla}L_{qa}$ и $\overset{q}{\nabla}L_{qa}$ равна единице, так как любому перемещению точки a по направлению вектора $\mathbf{L}_{qa}$ или точки q по направлению вектора $\mathbf{L}_{aq}$ соответствует такое же увеличение расстояния $L_{qa}=L_{aq}$. Таким образом,

$$\overset{a}{\nabla}L_{qa}=\frac{\mathbf{L}_{qa}}{L_{qa}},\quad \overset{q}{\nabla}L_{qa}=\frac{-\mathbf{L}_{qa}}{L_{qa}},\quad \overset{q}{\nabla}L_{qa}=-\overset{a}{\nabla}L_{qa}. \tag{1.126}$$

Справедливость (1.126) легко проверить, подставив (1.13) L_{qa} вместо T и выполнив дифференцирование по координатам точки a, а затем по координатам точки q.

2. Принимая во внимание (1.15′), имеем из (1.126) для функции $T(L_{qa})$:

$$\overset{a}{\nabla}T=\frac{\partial T}{\partial L_{qa}}\overset{a}{\nabla}L_{qa}=\frac{\partial T}{\partial L_{qa}}\frac{\mathbf{L}_{qa}}{L_{qa}}, \tag{1.126′}$$

$$\overset{q}{\nabla}T=\frac{\partial T}{\partial L_{qa}}\frac{\mathbf{L}_{aq}}{L_{aq}},\quad \overset{q}{\nabla}T=-\overset{a}{\nabla}T$$

и, в частности,

$$\overset{a}{\nabla}\frac{1}{L_{qa}}=-\frac{\mathbf{L}_{qa}}{L^3_{qa}},\quad \overset{q}{\nabla}\frac{1}{L_{qa}}=\frac{\mathbf{L}_{qa}}{L^3_{qa}}. \tag{1.127}$$

Но для функций $T(q, L_{qa})$, $T(a, L_{qa})$, $T(a, q, L_{qa})$ формулы (1.126′) в общем случае несправедливы.

3. Определение дивергенции вектора $\operatorname{grad}L^{-1}_{qa}$, т. е. лапласиана от L^{-1}_{qa}. Дифференцировать будем по точке a, но индексы a для упрощения письма опустим. По формулам (1.64) и (1.33) имеем

$$\nabla^2\frac{1}{L_{qa}}=\operatorname{div}\operatorname{grad}\frac{1}{L_{qa}}=\left(\nabla\left(\nabla\frac{1}{L_{qa}}\right)\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\nabla_x\frac{1}{L_{qa}}\right)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left(\nabla_y\frac{1}{L_{qa}}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\nabla_z\frac{1}{L_{qa}}\right).$$

Но согласно (1.127) $\nabla_x L^{-1}_{qa}=(x_a-x_q)L^{-3}_{qa}$ и, следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial x}(\nabla_x L^{-1}_{qa})=[L^2_{qa}-3(x_a-x_q)^2]L^{-5}_{qa}.$$

Поэтому при $L_{qa}>0$

$$\nabla^2\frac{1}{L_{qa}}=3L^{-5}_{qa}[L^2_{qa}-(x_a-x_q)^2-(y_a-y_q)^2-(z_a-z_q)^2=0. \tag{1.127′}$$

Такой же результат получился бы при дифференцировании по q.

4. Ротор от $\mathbf{L}_{qa}$ и градиент от скалярного произведения вектора $\mathbf{L}_{qa}$ на постоянный вектор $\mathbf{B}$, т. е. на однородное (в окрестности точки, по которой берется градиент) поле $\mathbf{B}$.

Согласно (1.126′) $\nabla L^2_{qa}=2L_{qa}\nabla L_{qa}=2\mathbf{L}_{qa}$, следовательно, $\mathbf{L}_{qa}=\frac{1}{2}\nabla L^2_{qa}$, поэтому в соответствии с (1.60)

$$\operatorname{rot}\mathbf{L}_{qa}=\frac{1}{2}\operatorname{rot}\operatorname{grad}L^2_{qa}=0. \qquad (1.127'')$$

Взяв ось x по направлению поля $\mathbf{B}$, имеем
$(\mathbf{L}_{aq}\mathbf{B})=L_{aq}B\cos(\mathbf{L}_{aq}, x)=B(x_q-x_a)$,
следовательно,

$$\overset{q}{\nabla}(\mathbf{L}_{aq}\mathbf{B})=B\overset{q}{\nabla}(x_q-x_a)=B\overset{q}{\nabla}x_q=B\mathbf{i}_x=\mathbf{B}. \qquad (1.127''')$$

5. В (1.23), (1.30), (1.36) и аналогичных им тождествах, полученных в § 3 и 4, имеем производные $\operatorname{rot}\mathbf{M}$, $\operatorname{div}\mathbf{M}$, $\operatorname{grad}T$ и др. под знаками интегралов. Подразумевается дифференцирование и интегрирование по одному и тому же переменному. За выполнением этого условия справедливости тождеств надо следить в случае функции ($\mathbf{M}$ или T) нескольких переменных и, в частности, функции точек a и q, определяющих вектор $\mathbf{L}_{qa}$.

II. **Угол видимости.** Телесным углом ω при вершине конуса определяется ограничиваемая его поверхностью[1] часть пространства. Конические поверхности с общей вершиной в точке q делят пространство пропорционально площадям $S_{сп}$ вырезаемых ими участков сферической поверхности произвольного радиуса $R_{сп}$ с центром в точке q (рис. 15). Эти площади при заданном радиусе $R_{сп}$ являются мерой телесных углов, соответствующих различным конусам. Но, применяя различные радиусы $R_{сп}$, мы для одного и того же конуса получаем различные площади $S_{сп}$, пропорциональные квадратам этих радиусов, поэтому телесные углы определяют отношениями площадей $S_{сп}$ к квадрату радиуса, т. е. полагают[2] $\omega=S_{сп}R^{-2}_{сп}$.

Углом видимости площадки dS из некоторой «точки зрения» q называется телесный угол при вершине конуса, образующие которого проходят через эту точку и через контур площадки dS. Пусть a — центр площадки dS, а dS' — ее проекция на сферическую поверхность с центром в точке q и с радиусом L_{qa}. Площадки dS и dS' являются сечениями одного и того же конуса с вершиной в точке q и, следовательно, видны под одним и тем же углом $d\omega_{qa}$. Принимая во внимание, что $\mathbf{dS}'\|\mathbf{L}_{qa}$, а площадь $dS'=dS\,|\cos(\mathbf{dS}, \mathbf{dS}')|$, имеем

$$d\omega_{qa}=\frac{dS'}{L^2_{qa}}=\frac{dS}{L^2_{qa}}\cos(\mathbf{dS}, \mathbf{L}_{qa})=\frac{(\mathbf{dS}\,\mathbf{L}_{qa})}{L^3_{qa}}. \qquad (1.128)$$

[1] Говоря о конусе или его поверхности, будем иметь в виду только одну из его полостей или ее границу.

[2] Развернув поверхность конуса до плоскости, получаем угол $\omega=2\pi$, под которым видно полупространство. Все пространство видно под углом 4π. Часть пространства внутри двугранного угла с плоским углом α при ребре образует конус с телесным углом $\omega=2\alpha$ при вершине, которой можем считать любую точку ребра.

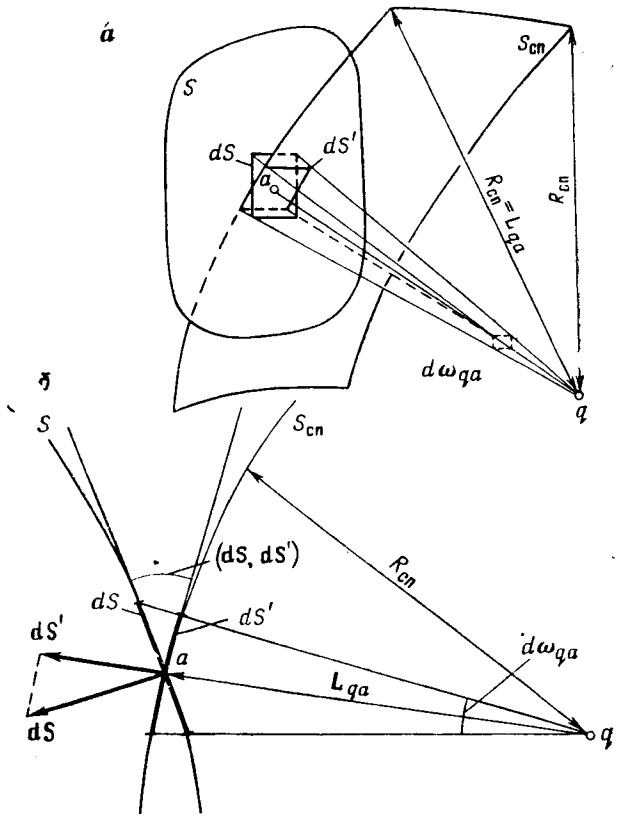


Рис. 15. Телесный угол видимости элемента dS (с центром в точке a) из точки q:

a — площадка dS и ее проекция dS', видные под одним и тем же углом $d\omega$; $б$ — разрез через L_{qa}, нормальный к линии пересечения площадок dS и dS'

Знак модуля при косинусе угла $(\mathbf{dS}, \mathbf{L}_{qa}) = (\mathbf{dS}, \mathbf{dS}')$ в (1.128) опущен, вследствие чего величина $d\omega_{qa}$ приобрела более общий, алгебраический смысл; она отрицательна, когда угол $(\mathbf{dS}, \mathbf{L}_{qa})$ — тупой, т. е. когда к точке q обращена лицевая сторона площадки dS.

Согласно (1.128) и (1.127) поверхность S видна из точки q под углом

$$\omega_{qa} = \int_S \frac{(\mathbf{dS}\,\mathbf{L}_{qa})}{L^3_{qa}} = \int_S \left(\mathbf{dS} \overset{q}{\nabla} \frac{1}{L_{qa}}\right) = \int_S \left(\mathbf{n} \overset{q}{\nabla} \frac{1}{L_{qa}}\right) dS, \qquad (1.128')$$

равным алгебраической сумме углов видимости частей поверхности S, обращенных к точке q разными сторонами этой поверхности. Понятно, что знаки этих углов и их суммы зависят от выбора ориентации нормали n.

В дальнейшем нам часто будет удобно считать a «точкой зрения», а q — центром площадки, угол видимости которой определяется. При этом вместо углов $d\omega_{qa}$, ω_{qa} будет идти речь об уг-

лах

$$d\omega_{aq}=\frac{(dS\,L_{aq})}{L^3_{aq}},\quad \omega_{aq}=\int\limits_S \frac{(dS\,L_{aq})}{L^3_{aq}}. \tag{1.128''}$$

Согласно (1.128′) угол ω_{qa} есть поток вектора $\mathbf{L}_{qa}L^{-3}_{qa}=\overset{q}{\nabla}L^{-1}_{qa}$ (зависящего от точки a) через поверхность S, а в соответствии с (1.127′) дивергенция этого вектора в любой точке a, не совпадающей с q, равна нулю. Поэтому по теореме (1.30) угол $\omega_{qa}=0$, если поверхность S замкнутая, а точка q находится вне ее. Если же точка q находится внутри замкнутой поверхности S, то она окружает точку q со всех сторон и модуль угла ее видимости из точки q, очевидно, равен площади сферической поверхности любого радиуса L_{qa}, деленной на L^2_{qa}, т. е. $\omega_{qa}=\pm 4\pi$, где знак минус соответствует случаю, когда (вопреки обычному) нормаль к поверхности S направлена внутрь. Таким образом, обозначив через ω^i и ω^e углы, под которыми видна замкнутая поверхность из точек q, произвольно взятых внутри и вне этой поверхности, имеем

$$\omega^e=0,\quad \omega^i=\pm 4\pi,\quad \omega^{ie}=\pm 2\pi. \tag{1.129}$$

Угол ω^{ie} соответствует промежуточному случаю, когда точка q находится на замкнутой поверхности S. В этом случае плоский элемент dS, содержащий эту точку, виден из нее под нулевым углом, а угол видимости остальной части поверхности S содержит половину пространства.

Формулы (1.129) справедливы также для поверхности, замкнутость которой нарушается бесконечно далеким окном, видным под бесконечно малым углом из конечных точек пространства. Примером такой почти замкнутой поверхности является неограниченная цилиндрическая поверхность с замкнутой направляющей и с конечной площадью поперечного сечения.

Угол ω видимости замкнутой или почти замкнутой поверхности S из точки q не меняется при перемещении этой точки в пределах какой-либо одной из двух областей V_i и V_e, разделяемых поверхностью S; на ней ω терпит разрыв, равный $\pm 4\pi$.

Сказанное о замкнутой поверхности справедливо также для более общего случая неограниченной поверхности S. Бесконечно удаленный контур такой поверхности делит бесконечно удаленную поверхность Σ (с наружной нормалью) на части Σ_α и Σ_β, принадлежащие областям V_1 и V_2, разделяемым поверхностью S (рис. 16). Поверхности Σ_α и Σ_β видны отовсюду под углами ω^α и ω^β (не зависящими от положения точки зрения). Эти углы и углы $\omega^{(1)}$ и $\omega^{(2)}$, под которыми видна поверхность S из областей V_1 и V_2, связаны соотношениями $\omega^{(1)}+\omega^\alpha=4\pi$, $-\omega^{(2)}+\omega^\beta=4\pi$. Но $\omega^\alpha+\omega^\beta=4\pi$, следовательно,

$$\omega^{(1)}=4\pi-\omega^\alpha=\omega^\beta,\quad \omega^{(2)}=\omega^\beta-4\pi=-\omega^\alpha. \tag{1.129'}$$

Если S — неограниченная плоскость, то

$$\omega^\alpha=\omega^\beta=2\pi,\quad \omega^{(1)}=2\pi,\quad \omega^{(2)}=-2\pi. \tag{1.129''}$$

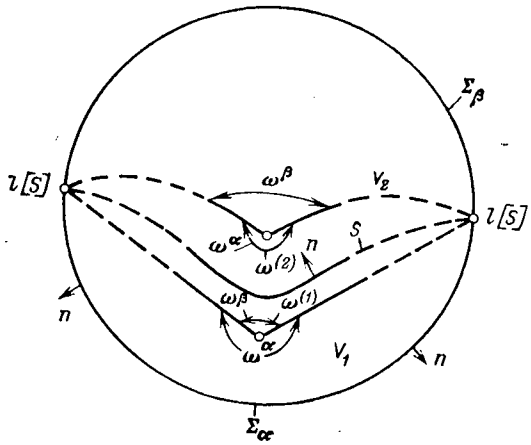


Рис. 16. Угол видимости поверхности S, простирающейся до бесконечности

Рассмотрим поведение угла видимости поверхности S из точки a при приближении этой точки к поверхности S. Предварительно разберем случай, когда эта поверхность представляет собой ограниченный контуром l участок плоскости P, разделяющей полупространства V_1 и V_2. Пусть p — точка на плоскости P, расположенная внутри контура l. Возьмем точку a на нормали к плоскости P, проходящей через точку p, на расстоянии L_{ap} от нее. При расстоянии L_{ap}, достаточно малом сравнительно с наименьшим расстоянием L_{al} от точки a до контура l, коническая поверхность с центром в точке a и направляющей l оказывается почти плоской и угол ω при ее вершине приближается к 2π, если точка a находится в области V_1, и к -2π, если она находится в области V_2. Таким образом, отмечая индексами 1 и 2 обозначения, относящиеся к областям V_1 и V_2, имеем

$$\omega^{(1)}(a) \approx 2\pi, \quad \omega^{(2)}(a) \approx -2\pi \text{ при } L_{ap} \ll L_{al}. \tag{1.130}$$

Для точки, почти совпадающей с точкой p, но находящейся на стороне S_1 или S_2 поверхности S (и принадлежащей области V_1 или V_2), знак приближенного равенства в (1.130) заменяется знаком равенства, а в точке p самой поверхности S угол ω обращается в нуль, так как из всякой точки плоскости любая часть этой плоскости видна под нулевым углом. Следовательно,

$$\omega^{(1)}(p) = 2\pi, \quad \omega(p) = 0, \quad \omega^{(2)}(p) = -2\pi. \tag{1.130'}$$

Формулы (1.130′) справедливы при любых размерах участка S плоскости P и остаются справедливыми и для элементарной площадки со средней точкой p.

В случае поверхности S произвольной формы выделим из нее элементарную площадку dS^p со средней точкой p, вблизи которой мы определяем поведение угла видимости поверхности S. Обозначим через S^* остальную часть этой поверхности и представим угол видимости поверхности S из произвольно взятой точки a в виде суммы двух углов

$$\omega(a) = \omega^*(a) + \omega^p(a), \tag{1.131}$$

из которых $\omega^p(a)$ — угол видимости площадки dS^p, а $\omega^*(a)$ — угол видимости поверхности S^*. Очевидно, что угол $\omega^*(a)$ при прохождении точки a через точку p не терпит разрыва, так как

точка p не находится на S^*: $\omega^{*(2)}(p)=\omega^{*(1)}(p)=\omega^*(p)$. Что же касается угла ω^p, то, согласно (1.130′), $\omega^{p(1)}(p)=2\pi$, $\omega^{p(2)}(p)=-2\pi$, $\omega^p(p)=0$. Таким образом,

$$\omega^{(1)}(p)=\omega^*(p)+2\pi,\ \omega^{(2)}(p)=\omega^*(p)-2\pi, \qquad (1.132)$$

$$\omega(p)=\omega^*(p),\ \omega^{(2)}(p)-\omega^{(1)}(p)=-4\pi.$$

Допустим, что на один контур l опираются две поверхности: S' и S'' с нормалями n' и n'', направленными от S' к S'', и пусть ω' и ω'' — углы видимости этих поверхностей из точки a. Совокупность поверхностей S' и S'' образует замкнутую поверхность, следовательно, согласно (1.129), если точка a находится в промежутке ΔV между поверхностями S' и S'', то мы должны иметь $-\omega'+\omega''=4\pi$, а если эта точка находится вне этого промежутка, то $-\omega'+\omega''=0$. Знак минус при ω' получается потому, что при включении поверхности S' в состав замкнутой поверхности, к которой применяется формула (1.129), мы должны изменить ориентацию нормали n' для того, чтобы она стала наружной. Таким образом,

$$\omega''=\omega'\pm4\pi \text{ в области } \Delta V, \qquad (1.132')$$

$$\omega''=\omega' \text{ вне области } \Delta V.$$

Знак минус соответствует случаю, когда нормали n' и n'' направлены от S'' к S'. Из сказанного выше можно сделать два вывода.

1. Опирающиеся на контур l поверхности, нормали которых одинаково согласованы с обходом по этому контуру, видны из точки, не лежащей между ними, под одним и тем же углом, а из точки, лежащей между ними, под углами, отличающимися на 4π. Иначе говоря, угол видимости поверхности определяется (с точностью до 4π) ее нормалью и краем (контуром l).

2. Если опирающуюся на фиксированный контур l поверхность S перемещать (меняя ее форму и размеры) как угодно, то углы видимости ее из всех точек пространства при этом будут оставаться без всяких изменений, за тем лишь исключением, что в результате перехода поверхности S через какую-либо область пространства ΔV углы видимости поверхности S из всех точек этой области получают приращение $\pm4\pi$.

III. **Симметрия поля.** Рассмотрим симметрию поля трех видов: зеркальную, цилиндрическую (осевую) и сферическую (центральную).

1. Зеркальная симметрия. Пусть q' и q'' — какие-либо две точки, симметричные относительно некоторой плоскости P. Тогда будем считать зеркально симметричным относительно этой плоскости скалярное поле T, удовлетворяющее условию

$$T(q'')=\pm T(q'),$$

и векторное поле $\mathbf{M}$, удовлетворяющее условию (рис. 17)

$$M_t(q'')=\pm M_t(q'),\ M_n(q'')=\mp M_n(q'),$$

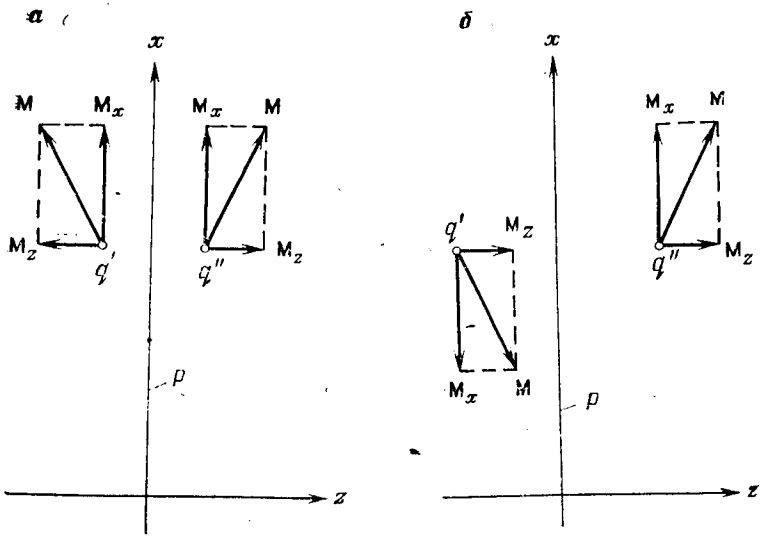


Рис. 17. Зеркальная симметрия векторного поля:
а — четная; *б* — нечетная. Оси *x* и *z* взяты по направлениям *t* и *n*

в котором M_n и M_t — компоненты вектора **M**; нормальная и любая тангенциальная к плоскости P. Плоскость P называют плоскостью зеркальной симметрии поля [1].

Четной является зеркальная симметрия, если указанные условия выполняются при верхних знаках, и нечетной — если они выполняются при нижних знаках. Нечетная симметрия получается из четной симметрии обращением знака скаляра T и направления вектора **M** в одной из каждых двух симметричных точек.

Из сказанного следует, что плоскость четной симметрии поля **M** является плоскостью четной симметрии поля M_t и нечетной симметрии поля M_n, а плоскость нечетной симметрии поля **M** является плоскостью нечетной симметрии поля M_t и четной симметрии поля M_n.

Если плоскость симметрии P скаляра T совпадает с плоскостью $z=0$ систем x, y, z и r, φ, z, а ее нормаль $\mathbf{n}=\mathbf{1}_z$, то либо $T=f(|z|)$, $T(-z)=T(+z)$, откуда $T^{(2)}(0)-T^{(1)}(0)=0$, либо $T=\frac{z}{|z|}f(|z|)$, $T(-z)=-T(+z)$, откуда $T^{(2)}(0)-T^{(1)}(0)=2T^{(2)}(0)$. В первом случае симметрия четная и скаляр T на плоскости P непрерывен или обращается в бесконечность (одинаково с обеих сторон этой плоскости). Во втором случае симметрия — нечетная и скаляр T на плоскости P терпит разрыв, равный $2T^{(2)}$, или обращается в нуль.

[1] Будем часто говорить короче — плоскость симметрии. Аналогично будем говорить ось или центр симметрии, имея в виду цилиндрическую или сферическую симметрию.

Сказанное о зеркальной симметрии поля T можно применить к компонентам M_n и M_t зеркально симметричного векторного поля $\mathbf{M}$. В частности, компонента M_t на плоскости нечетной симметрии поля $\mathbf{M}$ и компонента M_n на плоскости его четной симметрии должны быть равны нулю, если они на ней непрерывны.

2. Цилиндрическая симметрия. Если скаляр T имеет одинаковые значения во всех точках любой окружности с осью по некоторой прямой L, то поле T цилиндрически симметрично относительно оси L (ось симметрии). Если поле T симметрично относительно оси z системы r, φ, z, то $T=T(r, z)$, $\frac{\partial T}{\partial \varphi}=0$. Для симметрии поля T относительно прямой L необходима и достаточна его четная симметрия относительно любой плоскости, проходящей через эту прямую. Из этого следует, что на оси симметрии скаляр T непрерывен или принимает бесконечно большие значения. Поле T, нечетно симметричное относительно любой плоскости, проходящей через прямую L, равно нулю; поэтому цилиндрическая симметрия поля T может быть только четной. Если векторное поле $\mathbf{M}$ четно или нечетно симметрично относительно любой плоскости, проходящей через прямую L, то это поле является соответственно четно или нечетно симметричным относительно оси L.

Если ось z системы r, φ, z является осью четной симметрии поля $\mathbf{M}$, то $M_\varphi=0$, $\mathbf{M}=\mathbf{1}_r M_r(r, z)+\mathbf{1}_z M_z(r, z)$.

Если симметрия поля $\mathbf{M}$ относительно оси z нечетная, то $M_r=0$, $M_z=0$, $\mathbf{M}=\mathbf{1}_\varphi M_\varphi(r, z)$.

3. Сферическая симметрия. Скалярное поле T сферически симметрично относительно точки O (центр симметрии), если величина T имеет одинаковые значения во всех точках любой сферической поверхности с центром в этой точке. Взяв эту точку в качестве центра системы R, θ, φ, имеем $\frac{\partial T}{\partial \theta}=\frac{\partial T}{\partial \varphi}=0$, $T=T(R)$. Для симметрии поля T относительно точки O необходима его симметрия относительно любой прямой, проходящей через эту точку, а также его четная симметрия относительно любой плоскости, проходящей через нее. Каждое из этих условий достаточно для сферической симметрии поля. Из сказанного следует, что в центре симметрии скаляр T непрерывен или обращается в бесконечность.

Если векторное поле $\mathbf{M}$ четно симметрично относительно любой плоскости (любой оси), проходящей через точку O, то оно сферически симметрично относительно этой точки. Взяв центр симметрии поля $\mathbf{M}$ в качестве центра $R=0$ системы R, θ, φ, имеем: $M_\theta=0$, $M_\varphi=0$, $\mathbf{M}=\mathbf{1}_R M_R(R)$.

IV. **О применении оператора ∇.** Во многих случаях формулы, полученные для обыкновенных векторов, остаются справедливыми при замене части этих векторов символами набла. Таким способом можно было бы получить формулу (1.74) из известной формулы $(\mathbf{N}[\mathbf{N}\mathbf{M}])=0$. Однако допустимость подстановки ∇ вместо обыкновенного вектора должна быть обоснована для каждой кон-

кретной формулы. Выше были обоснованы формулы (1.74) и (1.80′). Можно также доказать справедливость формул

$$(\nabla[\mathbf{MN}])=(\mathbf{N}[\nabla\mathbf{M}])-(\mathbf{M}[\nabla\mathbf{N}]), \tag{1.133}$$

$$\nabla(\nabla T)=\nabla^2 T,\ [\nabla(\nabla T)]=0,\ (\nabla[\nabla\mathbf{M}])=0, \tag{1.134}$$

$$\nabla(\Lambda T)=\Lambda\nabla T+T\nabla\Lambda,\ (\nabla(\Lambda\mathbf{M}))=\Lambda(\nabla\mathbf{M})+(\mathbf{M}(\nabla\Lambda)), \tag{1.134′}$$

$$[\nabla(\Lambda\mathbf{M})]=\Lambda[\nabla\mathbf{M}]-[\mathbf{M}(\nabla\Lambda)]. \tag{1.134″}$$

Но $(\mathbf{M}[\mathbf{NM}])=0$, а произведение $(\mathbf{M}[\nabla\mathbf{M}])$ может отличаться от нуля. Таким образом, заменить в формуле, $(M[\mathbf{NM}])=0$ второй вектор символом ∇ нельзя, а два первых вектора в ней же заменить символами ∇ согласно $(1.134)_3$ можно.

Формула $\int(\mathbf{M}(\nabla T))dV=\int(\nabla(\mathbf{M}T))dV-\int(\nabla\mathbf{M})TdV$ (1.135)

аналогична формуле интегрирования по частям $\int wdv=\int d(wv)-\int vdw$. Но $\int d(wv)=uv+C$, а выполнить аналогично интегрирование в первом члене правой части (1.135), очевидно, нельзя, так как с выражением div $(\mathbf{M}T)dV$ нельзя обращаться как с полным дифференциалом $d(wv)$.

Согласно (1.134″), (1.127″) и $(1.126′)_1$ ротор сферически симметричного поля $T(L_{qa})\mathbf{L}_{qa}$ равен нулю:

если $\mathbf{M}=T(L_{qa})\mathbf{L}_{qa}$, то $\operatorname{rot}\mathbf{M}=0$ $(L_{qa}>0)$. (1.136)

Действительно,

$$[\nabla\mathbf{M}]=T[\nabla\mathbf{L}_{qa}]-[\mathbf{L}_{qa}\nabla T]=\frac{\mp 1}{L_{qa}}\frac{\partial T}{\partial L_{qa}}[\mathbf{L}_{qa}\mathbf{L}_{qa}]=0,$$

где верхний знак получается, когда переменной считается точка a.

V. **О фазе периодически меняющейся величины.** Изучая явление, зависящее периодически от времени, мы за каждый период T прослеживаем серию состояний явления, которые называем его фазами. Наблюдая изменения лика Луны, мы говорим, что за (лунный) месяц Луна проходит через все свои фазы от новолуния до исчезновения лунного серпа в конце месяца. Положения моментов t наступления фаз определяются в периоде T промежутками времени t_a отсчитываемыми от условного начала t_{a0} этого периода. Доли t_a/T периода T, соответствующие моментам наступления фаз, можно также называть фазами явления.

В аналогичном смысле будем говорить о состояниях и фазах скалярного поля $\beta(a, t)$, меняющегося во времени с периодом T. (Для определенности можно считать, что состояние величины $\beta(a, t)$ в момент t характеризуется совокупностью значений, принимаемых в этот момент ею и ее производными по времени.) Состояние величины β зависит от относительного положения момента t на интервале $t_{a0}\leqslant t\leqslant T+t_{a0}$, т. е. от t_a/T, где $t_a=t-t_{a0}$ (значение t_{a0} может зависеть от a). Для общности введем в выражение для $\beta(a, t)$ множитель $\beta_0(a)$, не зависящий от времени. Иначе говоря, положим $\beta(a, t)=\beta_0(a)R(a, t)$, где $R(a, t)$ — периодический множитель, зависящий от отношения t_a/T. Кроме того, возьмем в качестве аргумента функции R это отношение, умноженное на число m, и будем подбирать m так, чтобы период аналитического выражения функции R оказался равным T.

Итак, имеем

$$\beta(a, t)=\beta_0(a)R(a, t),\ R(a, t)=R\left(\frac{m}{T}t_a\right), \tag{1.137}$$

$t_a = t - t_{a0}$, $t_{a0} = t_{a0}(a)$,

$$R(a,\ t+nT) = R(a,\ t) \quad (n \text{ — целое число}). \tag{1.138}$$

Аргумент mt_a/T функции R будем называть фазой величины $\beta(a,\ t)$. Обозначая этот аргумент через Φ, имеем

$$\beta(a,\ t) = \beta_0(a) R(\Phi),\ \Phi = (mt/T) \pm \varphi(a) = \Phi(a,t), \tag{1.139}$$

где $$\varphi(a) = \mp mt_{a0}/T = \Phi(a,\ 0) \tag{1.139'}$$

— начальная фаза функции $\beta(a,\ t)$. Выбор знака перед $\varphi(a)$ — условный.

Таким образом, фаза Φ величины $\beta(a,\ t)$ — это безразмерный аргумент периодического множителя $R(a,\ t)$, определяющий относительное положение момента t в периоде T и удовлетворяющий условию (1.138).

В качестве примера возьмем случай зависимости величины R от времени по закону косинуса:

$$R(a,\ t) = \cos\frac{mt_a}{T} = \cos\left(\frac{mt}{T} - \frac{mt_{a0}}{T}\right). \tag{1.139''}$$

Полагая для выполнения условия (1.138) $m = 2\pi$, получаем

$$R(a,\ t) = \cos\Phi,\ \Phi = \frac{2\pi t}{T} \pm \varphi(a),\quad \varphi(a) = \mp\frac{2\pi t_{a0}}{T}, \tag{1.140}$$

где угол Φ — фаза величины $\beta(a,\ t) = \beta_0(a)\cos\frac{2\pi t_a}{T}$, а угол φ — ее начальная фаза.

Аналогичное сказанному о скаляре β справедливо для векторной величины $\mathbf{N}(a,\ t)$. Непосредственно применять сказанное выше можно к скалярным компонентам N_k векторной величины $\mathbf{N}$. При этом надо помнить, что t_{a0} может иметь для разных компонент N_k разные значения.

В случае периодической зависимости величины β от пространственной координаты ξ_k можно ввести понятие о фазе в геометрическом смысле. Вместо промежутка времени t_a можно взять расстояние по координатной линии l_k, а вместо T — длину волны λ (см. § 3 главы шестой).

Глава вторая

Статическое поле в вакууме [1]

§ 1. МАССЫ

Будем рассматривать массы m, взаимодействующие по закону обратной пропорциональности квадрату расстояния: гравитационные по закону Ньютона, электрические (заряды) и магнитные — по законам Кулона [2].

Практически мы непосредственно наблюдаем не заряды, а заряженные тела, но это не должно нам мешать рассматривать электричество в отдельности. Можно представить себе заряды, сплошь занимающие объемы или образующие тонкие (но все же объемные) слои на поверхностях тел, отвлекаясь от существования самих тел и от атомистической структуры электричества, неощутимой при макроскопическом изучении электрических явлений.

Аналогично электрическим зарядам мы можем представить себе магнитные массы, вводимые как понятие физически фиктивное, но удобное при изучении закономерностей взаимодействия намагниченных тел. Взаимодействие магнитов (магнитных стрелок) или электромагнитов происходит так, как если бы каждый из них был носителем «магнитных зарядов» разного знака, взаимодействующих по закону обратной пропорциональности квадрату расстояния. С наибольшей конкретностью мы воспринимаем понятие гравитационной массы. Тяжесть тела мы непосредственно ощущаем, и гравитационную массу тела, пропорциональную его весу, мы ассоциируем с его веществом. Но при изучении сил взаимодействия по закону Ньютона мы можем отвлечься от всех свойств тел, кроме их способности взаимно притягиваться.

В дальнейшем изложении, говоря о массах, будем иметь в виду массы любого из трех указанных видов:

$$m = m_{гр},\ m_{эл},\ m_{мгн}, \tag{2.1}$$

где $m_{гр}$ — гравитационная масса; $m_{эл} = e$ — электрический заряд (количество электричества); $m_{мгн}$ — магнитная масса. Но все

[1] Практически имеется в виду поле в пространстве, заполненном телами, не влияющими на рассматриваемое поле. Например, для гравитационного поля это любые тела, а для магнитного поля — все тела, кроме магнетиков. Но выражения, получаемые для поля в вакууме, принципиально применимы также в присутствии тел, влияющих на поле; надо только учесть дополнительные возбудители поля, носителями которых являются эти тела. Основой теории поля в пространстве, заполненном любыми телами, является теория поля в вакууме.

[2] В геофизической литературе принято магнитные заряды, как и источники гравитационного поля, называть массами. Для общности изложения здесь это название часто применяется сугубо условно также для источников электрического поля.

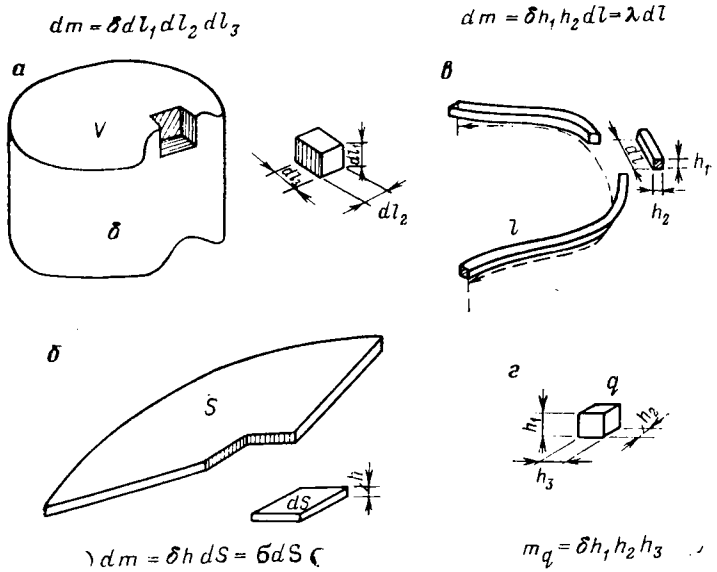


Рис. 18. Массы:
а — объемная; б — поверхностная; в — линейная; г — точечная

массы, о которых идет речь в одной формуле или в одном контексте, следует считать одной (какой-либо) природы. Исключение имеем в разд. I, §7 третьей главы.

I. Объемные массы. Условимся считать, что реальные массы являются объемными (рис. 18,*а*), т. е. они заполняют непрерывно области пространства V с некоторой объемной плотностью

$$\delta = dm/dV. \tag{2.2}$$

Величина δ является функцией положения точки, ее координат. Значение δ в какой-либо точке характеризует массу в достаточно малой окрестности этой точки. Согласно (2.2) масса m, находящаяся в области V, определяется формулами

$$m = \int_V \delta dV, \quad m = V\delta \text{ при } \nabla\delta = 0. \tag{2.3}$$

Формула $(2.3)_2$ соответствует случаю, когда в области V масса однородна, т. е. когда во всех точках области V функция δ имеет одно и то же значение.

Будем считать функцию δ ограниченной за исключением отдельных мест (точек, линий, поверхностей) нахождения вводимых ниже необъемных масс с плотностью δ, формально считаемой бесконечно большой. Функция δ может терпеть конечные разрывы на отдельных поверхностях и, в частности, на границах объемных масс. Кусочно-однородной называют массу,

если ее плотность δ меняется (разрывно) только на поверхностях, разграничивающих ее части.

Масса (и ее плотность) может быть положительной или отрицательной за исключением гравитационной массы, которая всегда положительна. Иногда рассматривают формально вводимые отрицательные гравитационной массы. Положительную магнитную массу часто называют северной, а отрицательную — южной. Равенство нулю плотности δ в какой-либо точке q означает, что заключенная в элементе объема dV, содержащем эту точку, масса $dm=\delta dV=0$, т. е. что в этом элементе объема массы нет. Но это не всегда следует понимать буквально, так как элемент объема может содержать две одинаковые по абсолютной величине массы разного знака:

$$dm^+=\delta^+dV,\ dm^-=-\delta^-dV, \tag{2.3'}$$

где δ^+ и δ^- — абсолютные величины объемных плотностей положительной и отрицательной масс. Плотность δ представляет собой алгебраическую сумму плотностей δ^+ и $-\delta^-$ положительных и отрицательных масс:

$$\delta=\delta^+-\delta^-,\ \delta\gtrless 0 \text{ при } \delta^+\gtrless\delta^-. \tag{2.4}$$

II. **Необъемные массы.** Введем в рассмотрение необъемные массы как понятия, имеющие (в силу принятого условия) формальный характер, но удобные при некоторых расчетах (рис. 18,*б*, *в*, *г*).

При достаточно малых геометрических размерах объемной массы m результаты интересующих нас расчетов, например по формуле $(2.15)_2$, не меняются при любых изменениях формы массы, ее геометрических размеров и плотности, если остается постоянной величина m. При этих условиях для удобства расчетов мысленно сжимают массу, т. е. уменьшают ее геометрические размеры, соответственно увеличивая ее плотность δ так, чтобы величина m оставалась неизменной, и в пределе, когда область V, занимаемая массой, стягивается к некоторой точке q, получают вместо объемной массы m точечную массу m_q такой же величины (см. рис. 18,*г*). Практически точечная масса представляет собой массу конечной величины, но очень малых геометрических размеров. Сжимая массу m, мы неограниченно увеличиваем ее плотность δ. Если, например, придать области V форму куба с ребром h и считать массу m однородной, то будем иметь: $V=h^3$, $m=h^3\delta$. Полагая $V\to 0$, имеем $h\to 0$ и, следовательно, считая m конечной величиной, получаем

$$\delta\to\infty, \text{ как } h^{-3} \text{ при } h\to 0. \tag{2.5}$$

Представим себе массу, имеющую форму слоя с малой толщиной h и с объемной плотностью δ. Выделим мысленно площадку dS поверхности слоя и расположенный против этой площадки элемент слоя с объемом hdS, в пределах которого будем считать массу однородной. Масса элемента слоя $dm=h\delta dS$, а эта

же масса, рассчитанная на единицу занимаемой ею площади, — двухмерная плотность слоя

$$dm/dS=h\delta=\sigma. \qquad (2.6)$$

При достаточно малой толщине слоя h результаты интересующих нас расчетов обычно зависят только от общей массы dm элемента слоя, поэтому мысленно сжимают слой, т. е. уменьшают его толщину h, соответственно увеличивая его плотность δ так, чтобы масса dm сохранялась без изменения. В пределе при $h\to 0$ получают вместо объемной массы поверхностную массу с поверхностной плотностью σ, определяемой по формуле (2.6). Поверхностная плотность σ представляет собой массу элемента поверхности, рассчитанную на единицу его площади (см. рис. 18,*б*). Сжимая слой до нулевой толщины, мы неограниченно увеличиваем его объемную плотность δ. Согласно (2.6) $\delta=\sigma h^{-1}$ и, следовательно, считая σ конечной величиной, имеем

$$\delta\to\infty, \text{ как } h^{-1} \text{ при } h\to 0. \qquad (2.5')$$

Величина σ может быть функцией координат ξ_1, ξ_2 системы, взятой на поверхности S. Величина m поверхностной массы определяется формулой

$$m=\int_S \sigma dS. \qquad (2.3'')$$

Если плотность σ не меняется на поверхности S, т. е. если $\mathrm{grad}^S\sigma=0$, то имеем однородную поверхностную массу $m=\sigma S$.

Рассмотрим еще нитевидную массу с объемной плотностью δ и с площадью поперечного сечения ΔS. Мысленно уменьшая поперечное сечение нити и соответственно увеличивая ее плотность так, чтобы масса $dm=\Delta S\delta dl$ элемента dl длины нити l оставалась без изменения, получаем в пределе при $\Delta S\to 0$ линейную массу (см. рис. 18,*в*) с линейной плотностью

$$dm/dl=\Delta S\delta=\lambda. \qquad (2.6')$$

При этом объемная плотность становится бесконечно большой. Полагая, что поперечное сечение нити является квадратом со стороной h, получаем $\Delta S=h^2$ и, следовательно,

$$\delta\to\infty, \text{ как } h^{-2} \text{ при } h\to 0. \qquad (2.5'')$$

Линейная плотность λ в общем случае является функцией координаты ξ, отсчитываемой вдоль линейной массы, т. е. $\lambda=\lambda(\xi)$. Величина m линейной массы определяется формулой

$$m=\int_l \lambda dl. \qquad (2.3''')$$

Если плотность λ не меняется вдоль линии l, т. е. если производная $\partial\lambda/\partial\xi=0$, то имеем однородную линейную массу $m=\lambda l$.

Переход от объемных масс к точечным, поверхностным и линейным массам, не занимающим объемов, упрощает наши расчеты, но вместе с тем допущение нереальной (по нашему условию) массы с бесконечно большой объемной плотностью δ может привести к некоторым столь же нереальным следствиям (см. разд. I, § 7). Необъемные массы определяются в пространстве точками q, линиями l и поверхностями S, по которым они распределены, величинами m_q точечных масс и функциями $\sigma(\xi_1, \xi_2)$ и $\lambda(\xi)$ координат на поверхностях S и линиях l. Величины m_q, σ и λ, как и величина δ, определяют массы, остающиеся не нейтрализованными, и поэтому аналогично (2.4) имеем

$$m_q = m^+_q - m^-_q, \quad \sigma = \sigma^+ - \sigma^-, \quad \lambda = \lambda^+ - \lambda^-, \tag{2.4'}$$

где m^+_q и m^-_q, σ^+ и σ^-, λ^+ и λ^- — величины, аналогичные δ^+ и δ^-.

Элементы dm объемных, поверхностных и линейных масс, равные δdV, σdS и λdl, при расчетах часто заменяют мысленно точечными массами, учитывая малость линейных размеров элементов dV, dS и dl, содержащих эти массы. Однако надо иметь в виду различие между элементарной массой и точечной массой. Элементарная масса является бесконечно малой величиной (не только геометрически, но и как масса), а точечная масса, имея нулевые геометрические размеры, не является бесконечно малой величиной. Элементарная масса отличается от точечной массы также порядком величины плотности δ.

III. **Замечания.** 1. Согласно сказанному выше заданием функций $\delta(q)$, $\sigma(q)$, $\lambda(q)$, значений m_q, поверхностей S и линий l, на которых расположены поверхностные и линейные массы, и точек q, в которых находятся точечные массы, определяется поле масс. Имея в виду, что необъемные массы фактически представляют собой сильно уплотненные объемные массы, можно сказать, что массы, находящиеся в пространстве, определяются функцией $\delta(q)$. Эта функция точки образует некоторое скалярное поле δ, в котором могут быть особые точки, линии и поверхности, т. е. места, в которых $\delta \to \infty$ (точечные, линейные и поверхностные массы), а также поверхности конечного разрыва (границы масс) и области, в которых $\delta = 0$. Это поле можно называть полем масс. Но так называют поле, создаваемое массами (см. § 2), поэтому вместо «поля масс» в указанном выше смысле мы обычно будем говорить «совокупность масс», а также «распределение масс», имея в виду совокупность масс и их распределение в пространстве, т. е. поле $\delta(q)$ с его особыми точками, линиями и поверхностями, в которых оно характеризуется величинами m_q, $\lambda(q)$, $\sigma(q)$. Симметрия масс есть симметрия этого поля.

2. Введенные согласно (2.1) индексы «гр», «эл», «мгн» относятся также к другим величинам, определяющим массы, например δ, σ, λ. Но эти индексы будем опускать там, где без них можно понять, о массах какой природы идет речь.

3. Совокупность масс в области V является нейтральной, если сумма масс, находящихся в этой области, равна нулю.

4. Совокупность масс в общем случае может меняться со временем. В частности, плотность δ может быть функцией точки и времени, т. е. четырех аргументов x, y, z, t. Здесь и в следующих трех главах будем предполагать, что совокупность масс во всем пространстве является постоянной, т. е. не меняется со временем. Это означает, что производные по времени от плотностей масс и от величин точечных масса равны нулю

$$\dot{\delta}=0,\ \dot{\sigma}=0,\ \dot{\lambda}=0,\ \dot{m}_q=0, \tag{2.7}$$

а точки, линии и поверхности, по которым распределены массы, фиксированы в пространстве. Только по мере необходимости мы будем в этих главах затрагивать общий случай, когда массы меняются со временем. Но постоянство совокупности масс не исключает их движения. Так, например, для того чтобы в некоторой точке q выполнялось условие $\dot{\delta}=0$, достаточно, чтобы масса δdV, находящаяся в элементе объема dV, содержащем эту точку, не менялась со временем. Для этого требуется только, чтобы прибывающая в элемент объема dV в течение любого промежутка времени масса была равна массе, убывающей из него за этот же промежуток времени. Но в главах второй и третьей будем предполагать, что массы находятся в статическом состоянии, т. е. что движения масс нет.

5. Вместо магнитных масс иногда говорят о магнитных полюсах. Поверхностные и линейные магнитные массы называют полюсными поверхностями и линиями, а точечную магнитную массу — точечным полюсом или просто полюсом.

6. Области, поверхности, линии, занятые электрическими объемными, поверхностными, линейными массами, называют заряженными, а если эти массы однородны — равномерно заряженными.

§ 2. ПОЛЯ КУЛОНОВЫХ И НЬЮТОНИАНСКИХ СИЛ

I. **Взаимодействие точечных масс.** Согласно законам Кулона и Ньютона точечная масса m_1, находящаяся в точке 1, действует на точечную массу m_2, находящуюся в точке 2, с силой

$$\mathbf{F}_{12}=\nu\frac{m_1m_2}{L^2_{12}}\frac{\mathbf{L}_{12}}{L_{12}}=\nu\frac{m_1m_2}{L^3_{12}}\mathbf{L}_{12}, \tag{2.8}$$

пропорциональной массам m_1 и m_2, обратно пропорциональной квадрату расстояния L_{12} между ними и направленной по линии, соединяющей эти массы. Множитель пропорциональности ν, определяющийся выбором единиц измерения величин (см. приложение), входящих в равенство (2.8), различен для масс различной природы:

$$\nu=-\gamma,\ 1/4\pi\varepsilon_0,\ \mu_0/4\pi \tag{2.9}$$

для гравитационных, электрических и магнитных масс соответственно;

$$\gamma=\frac{6{,}67}{10^{11}}\frac{\text{м}^3}{\text{кг}\cdot\text{с}^2},\quad \varepsilon_0=\frac{10^{-9}}{36\pi}\frac{\Phi}{\text{м}},\quad \mu_0=\frac{4\pi}{10^7}\frac{\text{Гн}}{\text{м}} \tag{2.9′}$$

— постоянные: гравитационная, электрическая, магнитная.

Направление силы $\mathbf{F}_{12}$ совпадает с направлением вектора $\mathbf{L}_{12}$ при $\nu m_1 m_2>0$ и вектора $\mathbf{L}_{21}=-\mathbf{L}_{12}$ при $\nu m_1 m_2<0$. Первый случай (отталкивание) соответствует взаимодействию одноименных электрических или магнитных масс, а второй (притяжение) — взаимодействию гравитационных масс, а также разноименных электрических или магнитных масс. Масса m_2 действует на массу m_1 с силой $\mathbf{F}_{21}=-\mathbf{F}_{12}$.

Единицей гравитационной массы является килограмм, а электрического заряда — кулон [1]. Согласно (2.8)—(2.9′) сила взаимодействия единичных точечных масс на расстоянии 1 м равна $6{,}67\cdot10^{-11}$ Н (ньютонов) для гравитационных масс и $9\cdot10^9$ Н для электрических зарядов. Единицей магнитной массы будем считать магнитную массу m_D, отталкивающую такую же массу на расстоянии в 1 м с силой, равной 10^{-7} Н.

Полагая в (2.8) $m_1=m_2=m_D$, $F_{12}=10^{-7}$ Н, получаем, согласно (2.9), (2.9′):

$$m^2_D=\frac{4\pi10^{-7}}{\mu_0}\,\text{м}^2\cdot\text{Н}=\frac{\text{м}^3}{\text{Гн}}\,\text{Н}=\text{А}^2\cdot\text{м}^2,$$

так как $\text{Н}\cdot\text{м}=\text{Гн}\cdot\text{А}^2$. Таким образом, единица m_D магнитной массы [2] равна 1 ампер-метру.

II. **Действие масс на точечную массу.** Закон Кулона — Ньютона (2.8) непосредственно применим также к неточечным (объемным, поверхностным и линейным) массам m_1 и m_2 при условии, что их линейные размеры достаточно малы сравнительно с минимальным расстоянием между ними. В частности, формулой (2.8) можно воспользоваться для определения силы $\mathbf{F}$, с которой элементарная масса действует на другую элементарную массу или на точечную массу. Согласно этой формуле элементарная масса $dm_q=\delta_q dV$, $\sigma_q dS$, $\lambda_q dl$ с центром в точке q действует на точечную массу m_a, находящуюся в точке a, с силой

$$d\mathbf{F}_{qa}=\nu m_a\frac{dm_q}{L^3_{qa}}\mathbf{L}_{qa}. \tag{2.8′}$$

---

[1] Для единицы гравитационной массы определяющим является второй закон Ньютона, а для единицы электрического заряда — равенство количества электричества (проходящего через поперечное сечение цепи тока) произведению силы тока на время. Единица магнитной массы в применяемой нами системе единиц СИ не предусмотрена ввиду фиктивности понятия магнитной массы.

[2] При таком выборе единицы магнитной массы получаем предусмотренную в системе СИ единицу дипольного магнитного момента (см. сноски в разд I, § 5 и в разд. II, § 1 главы пятой).

В соответствии с (2.8) и (2.8′) совокупность точечных или элементарных масс, находящихся в точках q, действует на точечную массу m_a с силой

$$\mathbf{F}(a)=\nu m_a\Sigma\frac{m_q}{L^3_{qa}}\mathbf{L}_{qa}\ \text{или}\ \mathbf{F}(a)=\nu m_a\int\frac{dm_q}{L^3_{qa}}\mathbf{L}_{qa} \tag{2.10}$$

соответственно. В общем случае, когда в пространстве имеются различные массы m, на точечную массу m_a, находящуюся в точке a, действует сила

$$\mathbf{F}(a)=\nu m_a\mathbf{f}(a), \tag{2.11}$$

пропорциональная вектору

$$\mathbf{f}(a)=\sum_q\frac{m_q}{L^3_{qa}}\mathbf{L}_{qa}+\int_V\frac{\delta_q}{L^3_{qa}}\mathbf{L}_{qa}dV+\int_S\frac{\sigma_q}{L^3_{qa}}\mathbf{L}_{qa}dS+\int_l\frac{+\lambda_q}{L^3_{qa}}\mathbf{L}_{qa}dl. \tag{2.12}$$

Вектор $\nu\mathbf{f}(a)$ согласно этим формулам не зависит от массы m_a, а если совокупность масс m, действующих на массу m_a, фиксирована, то этот вектор меняется только при изменении координат точки a (перемещение которой вызывает изменения абсолютных величин и направлений векторов $\mathbf{L}_{qa}$) и, следовательно, зависит только от положения точки a.

III. **Кулоново поле.** Из сказанного следует, что в пространстве, в котором присутствуют массы, мы имеем векторное поле $\nu\mathbf{f}(a)$, определяемое формулами (2.11), (2.12). Это кулоново поле, т. е. поле сил, определяемых законом (2.8). Оно является гравитационным, электрическим или магнитным в зависимости от природы масс.

Будем пользоваться обозначениями

$$\nu\mathbf{f}(a)=\mathbf{F}(a)/m_a=\mathbf{\Gamma}(a),\ \mathbf{E}(a),\ \mu_0\mathbf{H}(a) \tag{2.13}$$

соответственно для гравитационного, электрического и магнитного полей [1].

Вектором $\nu\mathbf{f}(a)$ определяется сила $\mathbf{F}(a)$, с которой находящиеся в пространстве массы m действуют на массу m_a, помещаемую в какую-либо точку пространства. Иначе говоря, массы m создают в пространстве поле $\nu\mathbf{f}(a)$, которое действует на массу m_a с силой $\mathbf{F}(a)$, пропорциональной этому полю. Физический смысл этого выражения состоит в том, что в присутствии масс пространство приобретает некоторое свойство, благодаря которому помещенная в любую точку a масса m_a подвергается действию силы, зависящей от положения этой точки. Но для обнаружения этого свойства

[1] В развернутом виде для магнитного поля, создаваемого в вакууме магнитами (влияние тел которых не учитывается) следовало бы вместо (2.13) писать:

$$\nu\mathbf{f}(a)=\frac{1}{m_a}\mathbf{F}(a)=\mathbf{B}(a)-\mu_0\mathbf{J}^0(a)=\mu_0\mathbf{H}(a), \tag{2.13′}$$

где $\mathbf{B}$ и $\mathbf{J}^0$ — векторы, которые будут введены в третьей главе.

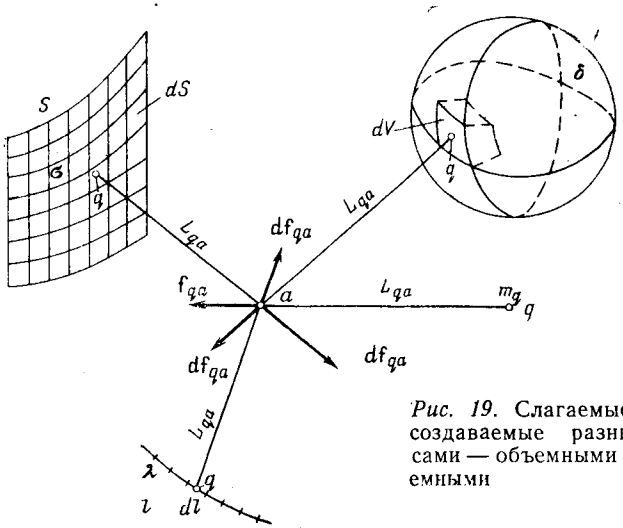


Рис. 19. Слагаемые поля **f**, создаваемые разными массами — объемными и необъемными

пространства, для проявления действия поля необходимо поместить в него массу m_a.

Точечную массу m_a, с помощью которой можно обнаружить поле $\nu\mathbf{f}(a)$, называют пробной массой. Условимся считать пробную массу положительной. Имея в виду более общий случай поля в присутствии среды, надо абсолютную величину пробной массы брать достаточно малой для того, чтобы она не вызывала изменений наблюдаемого поля, но при изучении поля в вакууме это ограничение не нужно и пробную массу можно, в частности, брать единичной.

Вектор $\nu\mathbf{f}(a)$ есть сила, с которой поле действует на единичную пробную массу, или, точнее, сила, с которой поле действует на точечную массу, отнесенная к единице этой массы. Вектор **E** называют напряженностью электрического поля или просто электрическим полем. Магнитным полем, а также напряженностью магнитного поля по исторически сложившейся традиции называют вектор $\mathbf{H} = (\nu/\mu_0)\mathbf{f}$. Для того чтобы освободиться от множителя ν, имеющего различные значения для полей разной природы, в этой главе удобно вместо поля $\frac{1}{m_a}\mathbf{F}(a)$ изучать поле $\mathbf{f}(a) = \frac{1}{\nu m_a}\mathbf{F}(a)$, определяемое формулой (2.12) как сумма полей [1]

$$\mathbf{f}(a) = \frac{m_q}{L^3_{qa}}\mathbf{L}_{qa},\quad \mathbf{df}(a) = \frac{dm_q}{L^3_{qa}}\mathbf{L}_{qa}, \tag{2.19}$$

создаваемых точечными массами m_q и элементарными (объемными, поверхностными, линейными) массами dm_q (рис. 19). Суммируя поля, определяемые формулами (2.14), получаем выражения для полей, создаваемых точечными, объемными, поверхностными,

[1] Вектор **f** будем иногда называть напряженностью поля **f**.

линейными массами соответственно:

$$\mathbf{f}(a)=\sum_q \frac{m_q}{L^3_{qa}}\mathbf{L}_{qa},\quad \mathbf{f}(a)=\int_V \frac{\delta dV}{L^3_{qa}}\mathbf{L}_{qa},$$

$$\mathbf{f}(a)=\int_S \frac{\sigma dS}{L^3_{qa}}\mathbf{L}_{qa},\quad \mathbf{f}(a)=\int_l \frac{\lambda dl}{L^3_{qa}}\mathbf{L}_{qa}. \tag{2.15}$$

Складывая правые части (2.15), получаем общее выражение (2.12) для поля $\mathbf{f}(a)$, создаваемого разными массами. Переход от (2.14) к (2.15) и (2.12), соответствующий переходу от (2.8), (2.8′) к (2.10), основан на принципе суперпозиции. Этот подтверждаемый опытом принцип (наложения) сводится к тому, что действие массы в присутствии других масс не отличается от ее действия в их отсутствии.

Компоненты f_l, f_k поля $\mathbf{f}$ по направлениям l, $l_k(\xi_k)$ определяются формулами

$$f_l=f\cos(\mathbf{f},\ \mathbf{1}_l),\quad f_k=f\cos(\mathbf{f},\ \mathbf{1}_k).$$

Для поля точечной массы m_q имеем согласно (2.14)

$$f(a)=\frac{|m_q|}{L^2_{qa}},\quad \cos(\mathbf{f},\ \mathbf{1}_l)=\frac{m_q}{|m_q|}\cos(\mathbf{L}_{qa},\ \mathbf{1}_l),$$

а для поля элементарной массы

$$df(a)=\frac{|dm_q|}{L^2_{qa}},\quad \cos(\mathbf{f},\ \mathbf{1}_l)=\frac{dm_q}{|dm_q|}\cos(\mathbf{L}_{qa},\ \mathbf{1}_l).$$

Поэтому получаем для полей точечной и элементарной масс:

$$f_l=\frac{m_q}{L^2_{qa}}\cos(\mathbf{L}_{qa},\ \mathbf{1}_l),\quad df_l=\frac{dm_q}{L^2_{qa}}\cos(\mathbf{L}_{qa},\ \mathbf{1}_l). \tag{2.16}$$

Для направления x имеем

$$\cos(\mathbf{L}_{qa},\ x)=(x_a-x_q)\,L^{-1}_{qa}. \tag{2.17}$$

Следовательно, для поля точечной массы m_q

$$f_x=m_a(x_a-x_q)\,L^{-3}_{qa}. \tag{2.18}$$

Подставляя y или z вместо x в (2.17), (2.18), получаем аналогичные формулы для направлений y и z. В общем случае поля, создаваемого различными массами, имеем согласно (2.12)

$$f_l=\sum_q \frac{m_q}{L^2_{qa}}\cos(\mathbf{L}_{qa},\ \mathbf{1}_l)+\int_V \frac{\delta_q}{L^2_{qa}}\cos(\mathbf{L}_{qa},\ \mathbf{1}_l)\,dV+$$

$$+\int_S \frac{\sigma_q}{L^2_{qa}}\cos(\mathbf{L}_{qa},\ \mathbf{1}_l)\,dS+\int_l \frac{\lambda_q}{L^2_{qa}}\cos(\mathbf{L}_{qa},\ \mathbf{1}_l)\,dl, \tag{2.19}$$

$$f_x = \sum_q \frac{m_q}{L^3_{qa}}(x_a - x_q) + \int_V \frac{\delta_q}{L^3_{qa}}(x_a - x_q)\,dV +$$

$$+ \int_S \frac{\sigma_q}{L^3_{qa}}(x_a - x_q)\,dS + \int_l \frac{\lambda_q}{L^3_{qa}}(x_a - x_q)\,dl \qquad (2.19')$$

и аналогично для f_y и f_z.

IV. **Замечания.** Сказанное выше о поле $\mathbf{f}$ дополним следующими замечаниями.

1. В поле $\mathbf{f}$ под действием сил $\nu\mathbf{f}m = \mathbf{F}$ положительные массы m должны двигаться параллельно силовым линиям, отрицательные — антипараллельно им. Но в настоящей главе предполагается, что массы являются неподвижными, закрепленными.

2. В случае гравитационного поля сила $\nu\mathbf{f}$ антипараллельна вектору $\mathbf{f}$ и силовые линии имеют направления, противоположные векторным линиям l^f; но для общности изложения будем называть силовыми векторные линии l^f, не делая исключения для гравитационного поля.

3. Поле, создаваемое точечной массой m_q, согласно $(2.14)_1$ сферически симметрично относительно точки q. В этом поле вектор $\mathbf{f}$ всюду параллелен вектору $m_q\mathbf{L}_{qa}$ и имеет одинаковую абсолютную величину на одинаковых расстояниях от точки q. Силовые линии — лучи, расходящиеся от точки q или сходящиеся к ней с одинаковой густотой по всем направлениям. Величина f обратно пропорциональна квадрату расстояния от массы m_q.

4. Если все массы находятся в пределах некоторой области пространства ϑ, ограниченной по всем направлениям, то при достаточном удалении точки a от этой области зависимость вектора $\mathbf{L}_{qa}$ от положения точки q становится незаметной и любой из векторов $\mathbf{L}_{qa}$ в выражении (2.12) можно заменить вектором $\mathbf{L}_{oa}$, где o — некоторая точка, произвольно взятая в области ϑ в качестве начала отсчета расстояний. Поэтому на расстояниях от области ϑ (от ее точки o), достаточно больших сравнительно с любым из ее линейных размеров, будем иметь согласно (2.12)

$$\mathbf{f}(a) = \frac{m_\vartheta}{L^3_{oa}}\mathbf{L}_{oa}, \quad m_\vartheta = \sum_q m_q + \int_\vartheta \delta dV + \int_S \sigma dS + \int_l \lambda dl, \qquad (2.20)$$

где m_ϑ — сумма масс, находящихся в области ϑ; q, S и l — точки, поверхности и линии, расположенные в области ϑ.

5. Обычно будем полагать, что все массы, создающие поле $\mathbf{f}$, находятся на ограниченных расстояниях от начала отсчета o (см. замечание 12 в § 1 главы первой) и согласно сказанному выше будем считать, что поле $\mathbf{f}$ в достаточно удаленных областях пространства совпадает с полем, которое мы имели бы, если бы все массы, фактически создающие поле, находились в какой-либо конечной точке, например, в точке o. При этом поле $\mathbf{f}$ на достаточно больших расстояниях от точки o убывает не медленнее, чем L^{-2}_{oa}, оно регулярно на бесконечности. При $m_\vartheta \neq 0$ поле $\mathbf{f}$ при-

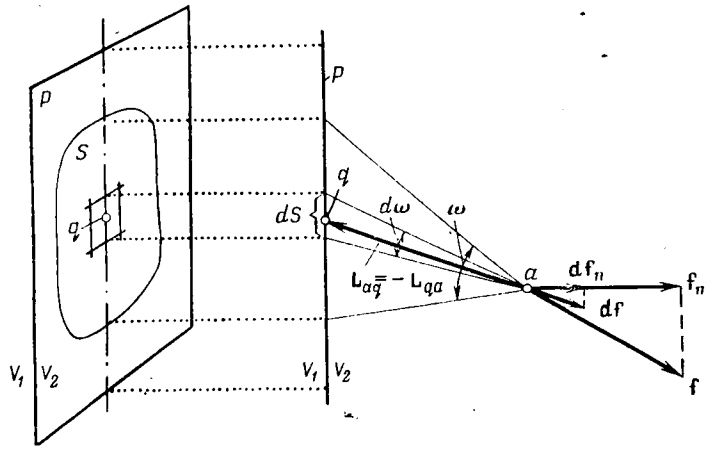


Рис. 20. Нормальная компонента поля плоской массы

больших значениях L_{oa} совпадает с полем, которое создавала бы точечная масса, равная m_Σ, если бы она находилась в точке o. Это означает, что во всех точках сферической поверхности достаточно большого радиуса с центром в конечной точке абсолютная величина вектора $\mathbf{f}$ имеет одно и то же значение, а его направление нормально к этой поверхности; по всем направлениям величина f убывает с расстоянием как обратная величина квадрата этого расстояния.

6. Исключениями являются случаи, когда массы простираются в каком-либо направлении до бесконечности или когда их сумма равна нулю. В этих случаях поле f может вести себя на бесконечности иначе, чем поле точечной массы. Оно при больших удалениях может убывать медленнее или быстрее, чем L_{oa}^{-2}, и притом различно по разным направлениям.

7. Формулой (2.12) устанавливается соответствие между полем $\mathbf{f}$ и распределением создающих его масс в пространстве (полем плотности этих масс). Необходимым и достаточным условием постоянства поля $\mathbf{f}$ является постоянство совокупности создающих его масс. Любое ее изменение должно вызвать некоторое изменение поля. Поэтому до тех пор, пока у нас идет речь о постоянном поле, следует считать, что совокупность масс в пространстве не меняется со временем, т. е. что выполняются условия постоянства совокупности масс (2.7).

V. **Поле плоской массы.** На участке S плоскости P, разделяющей полупространства V_1 и V_2, задана поверхностная масса, в общем случае неоднородная, с плотностью $\sigma(q)$ (рис. 20). Определим нормальную к плоскости P компоненту f_n напряженности поля $\mathbf{f}$, создаваемого этой плоской массой в произвольно взятой точке a. Нормаль n по обыкновению направим от V_1 к V_2. Согласно $(2.14)_2$ элемент массы $dm=\sigma dS$, занимающий площадку dS со

средней точкой q, создает в точке a поле $\mathbf{df}=\sigma dS L_{qa}^{-3}\mathbf{L}_{qa}$ с компонентой:

$$df_n = df\cos(\mathbf{f},\ \mathbf{n}) = \sigma dS L_{qa}^{-2}\cos(\mathbf{L}_{qa},\ \mathbf{dS}) = -\sigma(\mathbf{L}_{aq}\mathbf{dS})L_{aq}^{-3} = -\sigma d\omega,$$

где $d\omega$ — угол видимости площадки dS из точки a, определяемый формулой $(1.128'')_1$. Суммируя элементы df_n, соответствующие всем площадкам dS, составляющим участок S, получаем формулы

$$f_n = -\int_S \sigma d\omega,\quad f_n = -\sigma\omega, \tag{2.21}$$

из которых вторая формула соответствует случаю однородной плоской массы, видной из точки a под углом ω. Из $(2.21)_2$ видно, что поле скаляра f_n в случае плоской однородной массы отличается от поля угла видимости плоской поверхности S, несущей эту массу, только постоянным (не зависящим от положения точки a) множителем $-\sigma$. Следовательно, с помощью этого множителя можно перейти от результатов, полученных в § 9 первой главы для второго из этих двух полей, к аналогичным результатам для первого из них. Отмечая индексами 1 и 2 обозначения, относящиеся к областям V_1 и V_2, имеем в соответствии с $(1.130')$ для некрайней точки p участка S формулы

$$f_n^{(1)}(p) = -2\pi\sigma,\ f_n(p) = 0,\ f_n^{(2)}(p) = 2\pi\sigma, \tag{2.22}$$

справедливые при любых размерах участка S и, в частности, для элементарного участка dS.

Если участок S, на котором задана масса, занимает всю плоскость P, то в соответствии с $(1.129'')$

$$f(a) = 2\pi|\sigma|,\ f_n^{(1)}(a) = -2\pi\sigma,\ f_n^{(2)}(a) = 2\pi\sigma \tag{2.22'}$$

для точек a, произвольно взятых в полупространствах V_1 и V_2. Пользуясь системой x, y, z, или r, φ, z с осью z по нормали n и с началом в плоскости P, можно вместо $(2.22')$ написать

$$\mathbf{f} = 2\pi\sigma\,\mathrm{sgn}\,z\,\mathbf{1}_z = 2\pi\sigma\frac{z}{|z|}\mathbf{1}_z. \tag{2.23}$$

Формулы $(2.22')$ и (2.23) также справедливы для ограниченного участка S, содержащего проекцию p точки a при условии, что расстояние L_{pa} достаточно мало по сравнению с расстояниями от p до точек границы участка S.

Допустим, что на плоскостях $z=z_1$ и $z=z_2$ $(z_2>z_1)$ имеем однородные поверхностные массы с плотностями σ_1 и σ_2. Тогда согласно (2.23) при $z<z_1$, $z>z_2$ и $z_1<z<z_2$ имеем порознь однородные поля $\mathbf{f}$, равные соответственно

$$-2\pi(\sigma_1+\sigma_2)\mathbf{1}_z,\ 2\pi(\sigma_1+\sigma_2)\mathbf{1}_z,\ 2\pi(\sigma_1-\sigma_2)\mathbf{1}_z. \tag{2.23'}$$

Если $z_1=-h/2$, $z_2=+h/2$, $\sigma_1=-\sigma$, $\sigma_2=\sigma$ (рис. 21), то

$$\mathbf{f}=0 \text{ при } |z|>\frac{1}{2}h,\quad \mathbf{f}=-4\pi\sigma\mathbf{1}_z \text{ при } |z|<\frac{1}{2}h. \tag{2.23''}$$

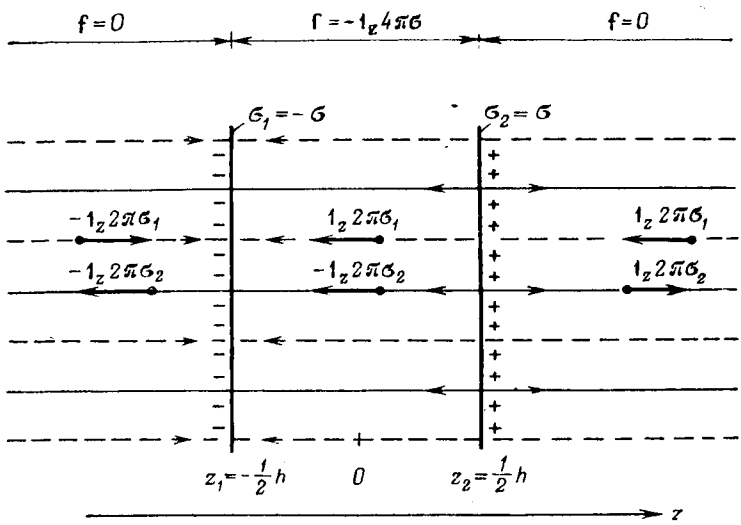


Рис. 21. Поле двух неограниченных параллельных однородных разноименных плоских масс

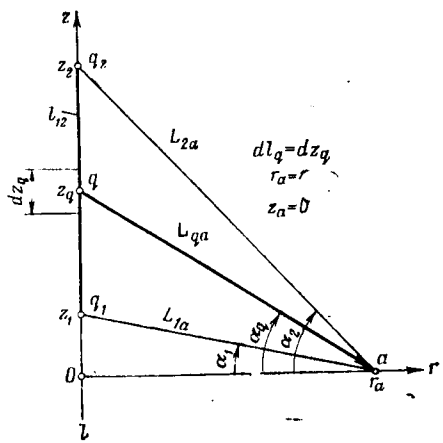


Рис. 22. Построение, поясняющее вывод выражений для компонент поля, создаваемого прямолинейной массой (прямолинейным током, см. главу пятую)

При $h\to\infty$ поле однородно во всем пространстве:

$$\mathbf{f}=-4\pi\sigma\mathbf{1}_z. \qquad (2.23''')$$

VI. **Поле прямолинейной массы.** Пусть линейная масса с плотностью λ расположена на отрезке l_{12} некоторой прямой l. Возьмем эту прямую и перпендикулярную к ней плоскость, проходящую через точку a, в качестве оси z и плоскости $z=0$ системы r, φ, z (рис. 22). Согласно $(2.15)_4$ в данном случае вектор $\mathbf{f}$ лежит в полуплоскости $\varphi=\text{const}$ и не зависит от координаты φ, т. е. $\mathbf{f}=\mathbf{1}_r f_r(r, z)+\mathbf{1}_z f_z(r, z)$. Определим компоненты $f_r(r, z)$ и $f_z(r, z)$ в точке a. Масса λdl_q элемента dl_q (отрезка l_{12}) с центром в точке q согласно $(2.14)_2$ создает в точке a поле $\mathbf{df}=\lambda L_{qa}^{-3}\mathbf{L}_{qa}dz_q$ с компонентами

$$df_r = \frac{\lambda dz_q}{L^2_{qa}} \cos \alpha_q, \quad df_z = \frac{-\lambda dz_q}{L^2_{qa}} \sin \alpha_q, \tag{2.24}$$

где $L_{qa} = \sqrt{r^2 + z^2_q}$; $r = r_a$ и z_q — координаты точек a и q; $\cos \alpha_q = rL^{-1}_{qa}$; $\sin \alpha_q = z_q L^{-1}_{qa}$, $\operatorname{tg} \alpha_q = z_q r^{-1}$.

Суммируя элементы df_r и df_z, получаем

$$f_r = \int_{z_1}^{z_2} \lambda \frac{\cos \alpha_q}{L^2_{qa}} dz_q, \quad f_z = -\int_{z_1}^{z_2} \lambda \frac{\sin \alpha_q}{L^2_{qa}} dz_q, \tag{2.24'}$$

где z_1 и z_2 — координаты концов q_1 и q_2 отрезка l_{12}; $dz_q = rd \operatorname{tg} \alpha_q = r \cos^{-2} \alpha_q d\alpha_q$, следовательно, для случая однородной прямолинейной массы

$$f_r = \lambda r \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{d\alpha_q}{L^2_{qa} \cos \alpha_q} = \frac{\lambda}{r} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \cos \alpha_q d\alpha_q = \frac{\lambda}{r} (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) =$$

$$= \frac{\lambda}{r} (z_2 L^{-1}_{2a} - z_1 L^{-1}_{1a}), \tag{2.25}$$

$$f_z = -\lambda r \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{d\alpha_q}{L^2_{qa}} \frac{\sin \alpha_q}{\cos^2 \alpha_q} = \frac{-\lambda}{r} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha_q d\alpha_q =$$

$$= \frac{\lambda}{r} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) = \lambda (L^{-1}_{2a} - L^{-1}_{1a}), \tag{2.25'}$$

где $L_{1a} = \sqrt{r^2 + z^2_1}$; $L_{2a} = \sqrt{r^2 + z^2_2}$.

Пусть $z_2 > 0 > z_1$, т. е. пусть проекция o точки a на прямую l совпадает с некрайней точкой p отрезка l_{12}. При этом условии, полагая $r \to 0$, получаем $\alpha_1 \to -\pi/2$, $\alpha_2 \to \pi/2$, $L_{1a} \to -z_1$, $L_{2a} \to z_2$. Следовательно, если p — некрайняя точка отрезка l_{12}, то при $a \to p$

$$f_r = \frac{2\lambda}{r}, \quad f_z = \lambda \left(\frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_1} \right) = \lambda \left(\frac{1}{z_2} - \frac{1}{z_1} \right). \tag{2.26}$$

Если $z_1 = -z_2$, т. е. если точка a находится на равных расстояниях от концов q_1 и q_2 отрезка l_{12}, то

$$\alpha_2 = -\alpha_1 = \alpha, \quad L_{1a} = L_{2a}, \quad f_r = \frac{2\lambda}{r} \sin \alpha, \quad f_z = 0. \tag{2.26'}$$

Если $z_2 > 0 > z_1$ и $r \ll |z_1|$, $r \ll z_2$, то

$$\mathbf{f} = \mathbf{1}_r \frac{2\lambda}{r}. \tag{2.27}$$

Эта формула справедлива при любом размере отрезка l_{12} и, в частности, для элементарного отрезка dl с центром в точке p, когда точка $a \to p$. Она также справедлива при любом положении точки a для поля однородной прямолинейной массы, не ограниченной с обеих сторон.

Выше предполагалось, что координата z_a точки a равна нулю. В более общем случае, когда $z_a \neq 0$, надо вместо z_q, z_1, z_2 подставить $z_q - z_a$, $z_1 - z_a$, $z_2 - z_a$.

§ 3. УРАВНЕНИЯ ПОЛЯ

В соответствии с изложенным в § 7 первой главы поле вектора $\mathbf{f}$ характеризуется уравнениями вида (1.92), и нам остается определить в общем виде свободные члены этих уравнений для поля $\mathbf{f}$. Иначе говоря, надо найти выражения для ротора и дивергенции поля $\mathbf{f}$ при произвольно заданном распределении масс в пространстве.

I. **Первое уравнение.** Согласно (2.14) поле $\mathbf{f}$ точечной массы или поле $\mathbf{df}$ элементарной массы определяется произведением $L_{qa}^{-3}\mathbf{L}_{qa}$. Поэтому в соответствии с (1.136) $\operatorname{rot}\mathbf{f}=0$. Это первое дифференциальное уравнение поля $\mathbf{f}$. Из него, согласно теореме Стокса (1.23), следует равенство нулю циркуляции вектора $\mathbf{f}$. Можно идти обратным путем: доказать, исходя из физических соображений, равенство нулю циркуляции вектора $\mathbf{f}$ и на этом основании заключить, что $\operatorname{rot}\mathbf{f}=0$. Действительно, в результате обхода массы m_a по замкнутому контуру $l[S]$ она оказывается в исходном положении, а массы m, создающие поле $\mathbf{f}$, согласно условию постоянства поля (2.7) при этом не меняются. Таким образом, вся система (масс в пространстве) после обхода находится в исходном состоянии. Следовательно, согласно принципу сохранения энергии, работа, совершаемая при обходе, должна быть равна нулю. А из этого по теореме Стокса получаем равенство $\int_S (\operatorname{rot}\mathbf{f}\, d\mathbf{S}) = 0$, из которого ввиду его справедливости для любой поверхности S следует равенство нулю вектора $\operatorname{rot}\mathbf{f}$. Таким образом, в кулоновом поле

$$\oint_l (\mathbf{f}\,d\mathbf{l}) = 0, \quad \operatorname{rot}\mathbf{f} = 0. \tag{2.28}$$

Равенство $(2.28)_2$ равносильно совокупности равенств нулю трех компонент вектора $\operatorname{rot}\mathbf{f}$, выражаемых формулами (1.25)—(1.27″). Например, в декартовых координатах

$$\frac{\partial f_z}{\partial y} = \frac{\partial f_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial f_x}{\partial z} = \frac{\partial f_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial f_y}{\partial x} = \frac{\partial f_x}{\partial y}. \tag{2.28'}$$

Равенство $(2.28)_1$ является интегральной формой первого уравнения поля $(2.28)_2$.

II. **Второе уравнение.** Согласно $(2.14)_1$ и (1.128′) в поле $\mathbf{f}$, создаваемом точечной массой m_q, поток вектора $\mathbf{f}$ через поверхность S

$$\Psi_{qS} = \int_S (\mathbf{f}\,d\mathbf{S}) = m_q \int_S \frac{(\mathbf{L}_{qa}\,d\mathbf{S})}{L_{qa}^3} = m_q \omega_{qS},$$

где ω_{qS} — угол видимости поверхности S из точки q; a — средняя точка элемента dS этой поверхности.

Следовательно, согласно (1.129) в поле точечной массы поток вектора $\mathbf{f}$ через замкнутую поверхность $S[V]$, ограничивающую область V, определяется формулой

$$\oint_{S[V]} (\mathbf{f}d\mathbf{S}) = \begin{cases} 4\pi m_q, & \text{если } q \text{ находится в области } V, \\ 0, & \text{если } q \text{ находится вне ее.} \end{cases} \tag{2.29}$$

Если поле $\mathbf{f}$ создается совокупностью точечных масс m_q, то согласно (2.29) массы m_q, находящиеся вне области V, создают потоки Ψ_{qS}, равные нулю, а массы m_q, расположенные внутри этой области, — потоки, равные $4\pi m_q$. Следовательно, в поле, создаваемом совокупностью точечных масс m_q, поток через замкнутую поверхность $S[V]$

$$\oint_{S[V]} (\mathbf{f}\,d\mathbf{S}) = 4\pi \sum_{V} m_q, \tag{2.29'}$$

где суммирование производится только по тем точкам q, которые находятся в области V. Очевидно, что формула (2.29′) остается справедливой при замене в ней точечных масс m_q элементарными массами δdV, σdS, λdl. Таким образом, получаем для поля объемных масс и для общего случая различных масс соответственно

$$\oint_{S[V]} (\mathbf{f}\,d\mathbf{S}) = 4\pi \int_V \delta dV, \qquad \oint_{S[V]} (\mathbf{f}\,d\mathbf{S}) = 4\pi m_V, \tag{2.30}$$

где m_V — сумма масс, находящихся в области V, определяемая формулой $(2.20)_2$ с подстановкой V вместо ϑ.

Формулы (2.30) выражают теорему Гаусса, согласно которой в кулоновом (ньютонианском) поле поток напряженности (Γ, $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$) через замкнутую поверхность пропорционален массе, находящейся внутри этой поверхности.

Применяя теорему Остроградского (1.30), получаем из $(2.30)_1$ для поля объемных масс равенство

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{f} dV = 4\pi \int_V \delta dV, \tag{2.31}$$

из которого (ввиду его справедливости для произвольной области V) следует равенство подынтегральных функций. Таким образом, имеем для поля $\mathbf{f}$ дифференциальное уравнение

$$\operatorname{div} \mathbf{f}(a) = 4\pi\delta(a), \tag{2.32}$$

интегральной формой которого является теорема Гаусса $(2.30)_1$. Применяя (1.32′), можно представить уравнение (2.32) в координатной системе ξ_1, ξ_2, ξ_3:

$$\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial\xi_1}(h_2h_3f_1) + \frac{\partial}{\partial\xi_2}(h_3h_1f_2) + \frac{\partial}{\partial\xi_3}(h_1h_2f_3)\right] = 4\pi\delta. \tag{2.33}$$

В частности, в декартовых координатах получаем

$$\frac{\partial f_x}{\partial x}+\frac{\partial f_y}{\partial y}+\frac{\partial f_z}{\partial z}=4\pi\delta. \qquad (2.33')$$

III. **Система уравнений.** Итак, для поля $\mathbf{f}$ имеем систему дифференциальных уравнений $(2.28)_2$ и (2.32):

$$\text{I. } \operatorname{rot}\mathbf{f}=0, \quad \text{II. } \operatorname{div}\mathbf{f}=4\pi\delta. \qquad (2.34)$$

Согласно первому уравнению этой системы поле $\mathbf{f}$ всюду ламеллярно; в нем нет замкнутых силовых линий. Из этого следует, что, если поле $\mathbf{f}$ не равно всюду нулю и, следовательно, линии l^f имеются, то они должны быть разомкнутыми, должны существовать точки обрыва g^f, т. е. поле $\mathbf{f}$ должно иметь источники. Второе уравнение системы (2.34) определяет место и количество (плотность, обильность) этих источников. По этому уравнению поток вектора $\mathbf{f}$ через границу $S[dV]$ малой окрестности dV точки a, отнесенный к единице объема этой окрестности, равен $4\pi\delta(a)$. Иначе говоря, число силовых линий l^f, расходящихся из окрестности dV точки a (считая схождение отрицательным расхождением), пропорционально массе, находящейся в этой окрестности.

При $\delta\gtrless 0$ имеем согласно (2.32) $\operatorname{div}\mathbf{f}\gtrless 0$, следовательно, силовые линии расходятся из мест, где масса положительна, и сходятся к местам, где она отрицательна. Они начинаются на положительных массах и кончаются на отрицательных. Истоками поля $\mathbf{f}$ и его стоками служат места, занятые соответственно положительными и отрицательными массами.

Согласно (1.38) из $(2.28)_2$ следует, что

$$\oint_S [d\mathbf{S}\,\mathbf{f}]=0. \qquad (2.28'')$$

Этот вид интегральной формы первого уравнения аналогичен интегральной форме (2.30) второго уравнения поля $\mathbf{f}$.

Уравнения поля $\mathbf{f}$ мы получили в двух формах: дифференциальной и интегральной. Интегральная форма (2.30) второго уравнения поля $\mathbf{f}$ представляет собой соотношение между напряженностью поля $\mathbf{f}$ в точках поверхности $S[V]$ и плотностью массы в точках области V, т. е. соотношение между величинами, относящимися к различным точкам пространства. Что же касается дифференциальной формы (2.32) этого же уравнения, то она является соотношением между величинами $\operatorname{div}\mathbf{f}$ и δ, относящимися к одной и той же точке и характеризующими поле и массу в окрестности этой точки[1]. Аналогичное можно отметить, сопоставляя интегральную и дифференциальную формы $(2.28)_1$ и $(2.28)_2$ первого уравнения поля $\mathbf{f}$.

---

[1] Любое из уравнений (законов) в дифференциальной форме, с которыми мы встретимся, представляет собой соотношение между величинами, относящимися к одной и той же точке, между их значениями, характеризующими окрестность этой точки (поле, массу, среду и т. д. в окрестности этой точки).

Подставляя в (2.32) функцию $\delta(a)$, заданную для какой-либо области V, получаем уравнение для этой области. В области V, в которой масс нет, поле $\mathbf{f}$ удовлетворяет системе однородных уравнений:

$$\text{I. } \operatorname{rot}\mathbf{f}=0. \quad \text{II. } \operatorname{div}\mathbf{f}=0. \tag{2.34'}$$

Прямая задача теории статического поля в вакууме состоит в определении поля $\mathbf{f}$ по заданным массам. Эту задачу для области V, в которой задана плотность объемных масс δ, можно решать с помощью системы дифференциальных уравнений (2.34), о чем более подробно будет идти речь в § 8. Определить поле, создаваемое заданными массами, можно по формуле (2.12), согласно которой расчет этого поля сводится к суммированию полей, порожденных элементарными и точечными массами. При таком прямом расчете поля могут встретиться затруднения только сугубо технического характера (громоздкое интегрирование), которое легко преодолеваются с помощью сравнительно простых технических средств. Но этот простой способ решения прямой задачи годится только тогда, когда известны все массы, создающие поле, где бы они ни находились. Пользуясь указанной формулой, надо подставить в нее величины $(m_q, \delta, \sigma, \lambda)$, определяющие все эти массы, даже в том случае, когда нас интересует поле только в отдельной области пространства V. Между тем поле $\mathbf{f}$ часто приходится рассчитывать в таких случаях, когда нам не все источники этого поля известны. При расчетах поля в вакууме (о которых идет речь в этой главе) все массы, создающие поле, могут быть заданы произвольно, и мы будем считать их в области V известными полностью. Но массы, находящиеся вне области V, могут не быть заданными при расчете поля в этой области.

Особенность способа расчета, опирающегося на систему (2.34), состоит в том, что поле $\mathbf{f}$ в области V определяется без сведений о массах, находящихся вне этой области. Система (2.34) сама по себе определяет поле $\mathbf{f}$ только с точностью до поля любых масс, находящихся вне этой области. Но эта недостаточность системы (2.34), как будет показано в § 8, восполняется некоторыми дополняющими условиями.

§ 4. ПОТЕНЦИАЛ

Согласно (1.62) из первого уравнения ($\operatorname{rot}\mathbf{f}=0$) системы (2.34) следует, что вектор

$$\mathbf{f}=-\operatorname{grad} U, \tag{2.35}$$

где U — потенциал поля $\mathbf{f}$. Для любого из векторных полей $\mathbf{f}$, создаваемых всевозможными совокупностями масс, должно существовать некоторое скалярное поле U, связанное с векторным полем $\mathbf{f}$ соотношением (2.35).

Согласно изложенному в § 2 главы первой из (2.35) следует, что вектор $\mathbf{f}$ всюду имеет направление наиболее интенсивного падения потенциала U. Это же направление имеют векторные линии

l^f поля f, отличающиеся от линий градиента потенциала только противоположной ориентацией. Эквипотенциальные поверхности нормальны к силовым линиям. Абсолютная величина f напряженности поля f равна падению потенциала на единицу длины по силовой линии или, точнее, падению потенциала на элементарном отрезке силовой линии, отнесенному к единице длины этого отрезка.

I. **Выражения для поля f через его потенциал** U. Согласно (1.10″) и (2.35) компонента поля f по любому направлению l

$$f_l = -\operatorname{grad}_l U = -\nabla_l U = -\frac{\partial U}{\partial l}. \tag{2.36}$$

В частности, для нормальной и тангенциальной компонент вектора f на какой-либо поверхности S

$$f_n = -\frac{\partial U}{\partial n},\quad f_t = -\frac{\partial U}{\partial t}, \tag{2.36′}$$

где $\partial U/\partial n$ и $\partial U/\partial t$ — нормальная и тангенциальная производные потенциала U на этой поверхности.

Принимая во внимание (1.10‴), имеем согласно (2.36) для компонент поля f по координатным направлениям l_1, l_2, l_3 выражения

$$f_k = -\frac{1}{h_k}\frac{\partial U}{\partial \xi_k}\quad (k = 1,\ 2,\ 3) \tag{2.37}$$

и, в частности, в системе x, y, z

$$f_x = -\frac{\partial U}{\partial x},\quad f_y = -\frac{\partial U}{\partial y},\quad f_z = -\frac{\partial U}{\partial z}. \tag{2.37′}$$

Из сказанного следует, что расчет поля f можно заменить расчетом поля U. От него по полученным выше формулам можно перейти к полю f дифференцированием функции U по точке наблюдения a (в которой определяются U и f) по координатам этой точки. Практический смысл такого применения потенциала U состоит в том, что рассчитать и исследовать скалярное поле U проще, чем векторное поле f, определяемое совокупностью трех скалярных полей его компонент f_1, f_2, f_3. На эквипотенциальной поверхности

$$U = \text{const},\ f_t = 0,\ \mathbf{f} = -\mathbf{n}\frac{\partial U}{\partial n}. \tag{2.38}$$

Возможны эквипотенциальные области. Во всех точках такой области $\operatorname{grad} U = 0$, $U = \text{const}$, $\mathbf{f} = 0$.

Встречаются отдельные точки, в которых $\mathbf{f} = 0$ и направление поля становится неопределенным. В таких точках потенциал U имеет максимум, минимум или «минимакс» (см. §1 главы первой).

II. **Выражения для потенциала** U **через напряженность поля f.** Умножая обе части равенства (2.35) скалярно на вектор **dl** и

интегрируя по линии l_{ab} от точки a до точки b, получаем согласно (1.12)

$$\int_a^b (\mathbf{f}d\mathbf{l}) = -\int_a^b (\operatorname{grad} U d\mathbf{l}) = -\int_a^b dU = U_a - U_b \tag{2.39}$$

и в соответствии с обозначением (1.21)

$$\mathscr{E}_{ab} = \int_a^b (\mathbf{f}\, d\mathbf{l}) = U_a - U_b. \tag{2.39'}$$

Равенство (2.39) является интегральной формой соотношения (2.36) между полем $\mathbf{f}$ и его потенциалом U. Вектор $\mathbf{f}$ под интегралом представляет собой напряженность поля в точке a', пробегающей путь l_{ab}. Таким образом, в постоянном поле $\mathbf{f}$ напряжение между любыми точками a и b, работа на любом пути между этими точками, равняется разности потенциалов этих точек.

Взяв в качестве точки b некоторую фиксированную точку ϕ, получаем, согласно (2.39), выражение для потенциала U в точке a как функцию положения одной только этой (переменной) точки:

$$U(a) = \int_a^{\phi} (\mathbf{f}\, d\mathbf{l}) + U(\phi). \tag{2.40}$$

Таким образом, потенциал U в точке a представляет собой работу, которую произвела бы сила $\mathbf{f}$ при перемещении единичной пробной массы от точки a по какому-либо пути до точки ϕ, плюс потенциал этой точки.

Очевидно, что результат применения формул (2.36)—(2.37') к потенциалу $U(a)$, определяемому формулой (2.40), не зависит от постоянной $U(\phi)$. Он не зависит также от положения точки ϕ, так как в этих формулах имеется в виду дифференцирование по точке a. Следовательно, положение точки ϕ и значение $U(\phi)$ в формуле (2.40) могут быть выбраны произвольно. Любое изменение положения точки ϕ или ее потенциала $U(\phi)$ вызывает изменение значения потенциала $U(a)$ во всех точках пространства на одну и ту же величину, оно не влияет на характер изменения потенциала U в окрестности какой-либо точки и поэтому не отражается на результате дифференцирования функции U в этой точке по какому-либо направлению. Значение постоянной $U(\phi)$ в (2.40) можно при расчетах поля оставить неопределенным, т. е. можно обозначить $U(\phi) = C$ и представить определение потенциала (2.40) в следующем виде:

$$U(a) = \int_a^{\phi} (\mathbf{f}\, d\mathbf{l}) + C. \tag{2.41}$$

Удобно положить $U(\phi) = 0$ и таким образом освободиться от несущественного для определения поля $\mathbf{f}$ слагаемого в выражении

для потенциала. Выбирая точку ϕ на бесконечности, имеем согласно (2.40)

$$U(a) = \int_a^{\infty} (\mathbf{f}\, d\mathbf{l}) + U(\infty). \tag{2.41'}$$

Чаще всего так поступают и, полагая $U(\infty)=0$, определяют потенциал по формуле

$$U(a) = \int_a^{\infty} (\mathbf{f}\, d\mathbf{l}). \tag{2.42}$$

Умножая обе части (2.42) на m_a, получаем

$$m_a U(a) = m_a \int_a^{\infty} (\mathbf{f}\, d\mathbf{l}). \tag{2.42'}$$

Правая часть (2.42′) есть работа, которую выполнило бы поле, если бы массе m_a была предоставлена возможность двигаться под его действием. Этой работе, деленной на m_a, равен потенциал U в точке a.

Подставляя (2.36) и (2.36′) в уравнения $(2.28)_1$ и (2.30), получаем

$$\oint_l \frac{\partial U}{\partial l}\, dl = 0, \quad \oint_{S[V]} \frac{\partial U}{\partial n}\, dS = -4\pi \int_V \delta dV, \quad \oint_{S[V]} \frac{\partial U}{\partial n}\, dS = -4\pi m_V. \tag{2.43}$$

Согласно $(2.43)_1$ сумма приращений потенциала на замкнутом пути равна нулю. Иначе говоря, сумма падений потенциала на замкнутом пути равна сумме его подъемов на этом пути. Из этого следует, что изменение потенциала на замкнутом пути не может быть монотонным.

Формулами (2.39)—(2.42) можно воспользоваться для расчета потенциала U по известному полю $\mathbf{f}$. Зная или задавая произвольно потенциал какой-либо точки b, можно по формуле (2.39) определить его в любой точке a, если нам известно поле $\mathbf{f}$ на пути l_{ab}, соединяющем эту точку с точкой b. Удобно выбрать этот путь по отрезку силовой линии l^f между эквипотенциальными поверхностями, проходящими через точки a и b. При этом $\cos(\mathbf{f}, d\mathbf{l}) = \pm 1$, $(\mathbf{f}\, d\mathbf{l}) = \pm f dl$, где знак минус получается, когда направление пути интегрирования противоположно направлению векторной линии l^f. Сказанное о выборе пути l_{ab} относится также к случаю, когда b есть фиксированная точка ϕ и, в частности, когда эта точка берется на бесконечности и потенциал вычисляется по формуле (2.41′) или (2.42).

Выбирая точку ϕ на бесконечности, мы придаем одинаковое значение $U(\phi)$ потенциалу во всех точках достаточно удаленной части пространства, предполагая, что там напряжения (работы) между различными точками незаметны. Вполне понятно, что для этого мы должны быть уверены, что напряженность поля $\mathbf{f}$ в этой

части пространства мало отличается от нуля, т. е. что величина $f(a)$ при неограниченном удалении точки a убывает и притом не слишком медленно. Интегралы в (2.41′) и (2.42)—несобственные, путь интегрирования $l_{a\infty}$ имеет бесконечно большую длину, но при достаточно быстром (интенсивном) уменьшении напряженности поля с удалением точки a до бесконечности падение потенциала $U(a)-U(\infty)$, т. е. работа на бесконечно длинном пути $l_{a\infty}$, имеет ограниченное значение, интегралы сходятся, потенциал «регулярен на бесконечности». При этом условии, выбирая точку ϕ на бесконечности, мы можем иметь в виду совокупность всех достаточно далеких точек. Если же это условие (регулярности потенциала на бесконечности) не выполняется, то брать точку ϕ на бесконечности неудобно. Для регулярности потенциала на бесконечности надо, чтобы там поле $\mathbf{f}$ удовлетворяло условию (2.20), для чего достаточно, чтобы все массы, создающие поле, находились на ограниченных расстояниях (см. разд. IV § 2).

III. **Выражения для потенциала через массы, создающие поле.** Согласно (2.42) и $(2.14)_1$ в случае поля, создаваемого точечной массой m_q, находящейся в точке q, имеем в точке a потенциал

$$U(a)=m_q\int_a^{\infty}\frac{(\mathbf{L}_{qa'},\mathbf{dl})}{L^3_{qa'}}. \tag{2.44}$$

Такое же выражение, но с подстановкой dm_q вместо m_q, получаем для потенциала dU поля $\mathbf{df}$, создаваемого элементарной массой dm_q. Индекс a' при L под интегралом обозначает переменную точку (аргумент функции L_{qa}), по которой производится криволинейное интегрирование от точки a до бесконечности. В сферической системе координат R, θ, φ с центром в точке q имеем $L_{qa'}=R$ $L_{qa}=R_a$. Перемещая точку a' по силовой линии, т. е. по лучу R, получаем $\mathbf{dl}=\mathbf{dR}$, $(\mathbf{L}_{qa'},\mathbf{dl})=(\mathbf{R}\,\mathbf{dR})=RdR$, следовательно:

$$U(a)=m_q\int_{R_a}^{\infty}\frac{dR}{R^2}=\frac{m_q}{R_a}.$$

Таким образом,

$$U(a)=m_q/L_{qa},\quad dU(a)=dm_q/L_{qa}, \tag{2.44′}$$

т. е. потенциал поля, создаваемого точечной или элементарной массой, обратно пропорционален расстоянию от нее. Из (2.44′) суммированием и интегрированием получаем для потенциалов $U(a)$ полей, создаваемых различными массами: точечными, объемными, поверхностными, линейными—соответственно выражения

$$\sum\frac{m_q}{L_{qa}},\quad\int_V\frac{\delta dV}{L_{qa}},\quad\int_S\frac{\sigma dS}{L_{qa}},\quad\int_l\frac{\lambda dl}{L_{qa}}, \tag{2.44″}$$

а для общего случая поля, создаваемого совокупностью различных масс,

$$U(a)=\sum_i \frac{m_q}{L_{qa}}+\int_V \frac{\delta dV}{L_{qa}}+\int_S \frac{\sigma dS}{L_{qa}}+\int_l \frac{\lambda dl}{L_{qa}}. \qquad (2.45)$$

Сопоставляя это выражение для потенциала с выражениями вида (2.19′) для компонент вектора $\mathbf{f}$, мы видим, что (в общем случае) расчет потенциала скалярного поля U проще расчета каждого из трех скалярных полей f_k, определяющих векторное поле $\mathbf{f}$. Но для расчета потенциала U в какой-либо области пространства по формуле (2.45), так же как для определения поля $\mathbf{f}$ по формуле (2.12), необходимо знать все массы, создающие поле, где бы они ни находились.

IV. **Уравнение Пуассона—Лапласа.** Подставим во второе уравнение системы (2.34) решение (2.35) первого уравнения этой системы и получим $(\nabla(\nabla U))=-4\pi\delta$, т. е.

$$\nabla^2 U=-4\pi\delta \qquad (2.46)$$

или согласно (1.65′)

$$\frac{1}{h_1h_2h_3}\sum\left[\frac{\partial}{\partial\xi_k}\left(\frac{h_1h_2h_3}{h_k^2}\frac{\partial U}{\partial\xi_k}\right)\right]=-4\pi\delta \quad (k=1,2,3) \qquad (2.46')$$

и, в частности, в декартовых координатах

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=-4\pi\delta. \qquad (2.46'')$$

Уравнение (2.46) эквивалентно системе уравнений (2.34). Для области V, в которой $\delta=0$, уравнение (2.46) превращается в уравнение Лапласа $\nabla^2 U=0$. Таким образом, вместо трех неизвестных f_x, f_y, f_z имеем одно искомое U, которое должно удовлетворять уравнению Пуассона—Лапласа.

V. **Замечания.** Сказанное о поле $\mathbf{f}$ в замечаниях, приведенных в § 2, дополним замечаниями о потенциале U этого поля.

1. В соответствии с $(2.20)_1$

$$U(a)=m_\vartheta/L_{oa} \text{ при } L_{oa}\gg L_\vartheta, \qquad (2.47)$$

где m_ϑ определяется согласно $(2.20)_2$; L_ϑ—максимальный линейный размер области ϑ. За исключениями, указанными в замечании 6, § 2, потенциал убывает с расстоянием L_{oa}, как L_{oa}^{-1}.

2. Условие постоянства во времени потенциала U, очевидно, совпадает с условием (2.7) постоянства поля $\mathbf{f}$.

3. В случае поля плоской массы, определяемого формулой (2.23), имеем массы на бесконечности. Полагая $U=0$ при $z=0$, т. е. выбирая точку ϕ на плоскости $z=0$ и считая потенциал $U(\phi)=0$, имеем согласно (2.40)

$$U(z)=\int_z^0 f_z dz=2\pi\sigma\int_z^0\frac{z dz}{|z|}=-2\pi\sigma|z|. \qquad (2.48)$$

В случае поля двух плоских масс, определяемого формулой (2.23″), положим опять $U=0$ при $z=0$, т. е. на средней плоскости между массами, и будем иметь в промежутке между ними, т. е. при $|z|<\frac{1}{2}h$, согласно (2.40)

$$U(z)=\int_z^0 f_z dz=-4\pi\sigma\int_z^0 dz=4\pi\sigma z. \tag{2.48′}$$

4. В случае однородного поля f, коллинеарного оси z, получаем согласно (2.37′)

$$\frac{dU}{dz}=-f_z,\quad U=-f_z z+C,\text{ где } f_z=\pm f, \tag{2.49}$$

а при произвольном направлении поля

$$U=-f_x x-f_y y-f_z z+C. \tag{2.49′}$$

5. В поле прямой, определяемом формулой (2.27), имеем, полагая $U=0$ при $r=r_0$, согласно (2.39),

$$U(r)-U(r_0)=\int_r^{r_0} f_r dr=2\lambda\ln\frac{r_0}{r} \tag{2.50}$$

или, не определяя точку ϕ и потенциал $U(\phi)$,

$$\frac{dU}{dr}=-\frac{2\lambda}{r},\quad U(r)=-2\lambda\int\frac{dr}{r}=2\lambda\ln\frac{C}{r}, \tag{2.50′}$$

где C—постоянная. Это выражение для потенциала U также справедливо в тех случаях, для которых согласно сказанному в конце § 2 справедливо соответствующее выражение (2.27) для поля f.

§ 5. ПОЛЕ НЕЙТРАЛЬНОЙ СОВОКУПНОСТИ МАСС

I. **Поле диполя.** Допустим, что в точках q_1 и q_2 прямой l находятся соответственно массы $m_1=-m$ и $m_2=m$, и пусть L_{12}—расстояние от точки q_1 до точки q_2, а q—точка, делящая пополам это расстояние (рис. 23). Потенциал U точки a в поле f, создаваемом совокупностью масс m_1, m_2, согласно (2.44″)$_1$ определяется формулой

$$U(a)=m\left(\frac{1}{L_{2a}}-\frac{1}{L_{1a}}\right). \tag{2.51}$$

Рассмотрим случай, когда расстояние $L_{12}\ll L_{qa}$, т. е. будем изучать поле на расстояниях от точки q, достаточно больших по сравнению с расстоянием между массами m_1 и m_2. При этих условиях совокупность масс m_1, m_2 называют диполем, а точки q_1 и q_2—его полюсами. Иногда полюсами называют массы m_1 и m_2. Точку q будем называть центром диполя, расстояние L_{12}—его длиной, прямую l—его осью, а нормальную к ней плоскость, проходящую через центр диполя,—его экваториальной плоскостью. Полярность диполя определяется указанием знаков его полюсов.

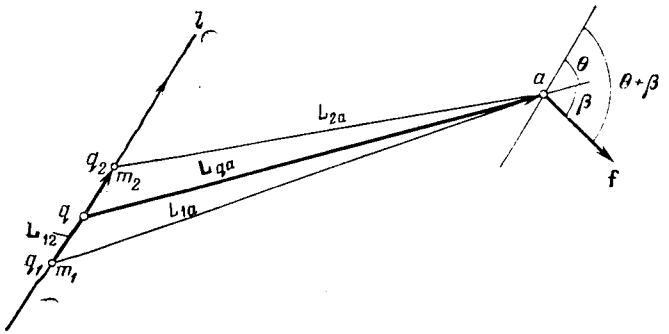


Рис. 23. Диполь

Разность в скобках в (2.51) можно представить как приращение функции L^{-1}_{qa}, соответствующее перемещению точки q по направлению l из точки q_1 в точку q_2 на расстояние $\mathbf{dl}=\mathbf{L}_{12}$, следовательно, согласно (1.11′) и $(1.127)_2$

$$\frac{1}{L_{2a}}-\frac{1}{L_{1a}}=\left(\mathbf{L}_{12}\overset{q}{\operatorname{grad}}\frac{1}{L_{qa}}\right)=\left(\mathbf{L}_{12}\overset{q}{\nabla}\frac{1}{L_{qa}}\right)=\left(\frac{\mathbf{L}_{12}\mathbf{L}_{qa}}{L^3_{qa}}\right). \tag{2.52}$$

Таким образом, получаем из (2.51) для потенциала U поля $\mathbf{f}$, создаваемого диполем, выражения

$$U(a)=\left(\mathbf{L}_{12}\overset{q}{\nabla}\frac{m}{L_{qa}}\right),\quad U(a)=\frac{(\mathbf{pL}_{qa})}{L^3_{qa}}, \tag{2.53}$$

где

$$\mathbf{p}=m\mathbf{dl}=m\mathbf{L}_{12},\quad L_{12}\ll L_{qa}. \tag{2.54}$$

Вектор $\mathbf{p}$, которым согласно $(2.53)_2$ полностью определяется поле диполя, называют моментом диполя[1]. Для большей общности выводимых формул оставляем знак массы m неопределенным, т. е. оставляем нефиксированной полярность диполя. При $m>0$ вектор $\mathbf{p}$ так же, как и вектор $\mathbf{L}_{12}$, направлен от точки q_1 к точке q_2, а при $m<0$ он имеет противоположное направление. В том и другом случае он направлен в сторону положительной массы. Абсолютная величина $|m|L_{12}$ момента диполя $\mathbf{p}$ равна произведению массы положительного полюса на длину диполя. Она не изменится, если будем варьировать значения $|m|$ и L_{12} так, чтобы их произведение сохранялось неизменным. Но чем меньшим мы возьмем значение L_{12}, тем меньше будет окрестность Q точки q, в которой выражения (2.53) согласно $(2.54)_2$ неприменимы. Чтобы ее размеры свести к нулю и таким образом добиться применимости выражений (2.53) во всем пространстве, выберем из всех пар значений $|m|$ и L_{12}, произведения которых равны p, предельные значения этих величин

$$L_{12}\to 0,\quad |m|=\frac{p}{L_{12}}\to\infty. \tag{2.55}$$

[1] В соответствии с (2.54) единицей момента электрического диполя является Кл·м, а магнитного — А·м². В этих единицах выражаются также дипольные моменты других нейтральных совокупностей масс.

Возьмем сферическую систему координат R, θ, φ с центром в центре диполя и с лучом $\theta=0$ по направлению момента диполя. В этой системе имеем $L_{qa}=R$, $(\mathbf{p}, \mathbf{L}_{qa})=\theta$ и, следовательно,

$$U=\frac{(\mathbf{pR})}{R^3}=\frac{p}{R^2}\cos\theta. \tag{2.56}$$

Из (2.56) легко получаем по формулам (2.37) и (1.13″) выражения

$$f_R=-\frac{\partial U}{\partial R}=\frac{2p}{R^3}\cos\theta,\quad f_\theta=-\frac{1}{R}\frac{\partial U}{\partial\theta}=\frac{p}{R^3}\sin\theta,$$
$$f_\varphi=-\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial\varphi}=0. \tag{2.57}$$

Вектор $\mathbf{f}$, его абсолютная величина и направление определяются формулами

$$\mathbf{f}=\frac{p}{R^3}(\mathbf{1}_R 2\cos\theta+\mathbf{1}_\theta\sin\theta),\quad f=\frac{p}{R^3}\sqrt{1+3\cos^2\theta}, \tag{2.57′}$$

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{f_\theta}{f_R}=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\theta,\quad \operatorname{tg}(\beta+\theta)=\frac{3\operatorname{tg}\theta}{2-\operatorname{tg}^2\theta}, \tag{2.57″}$$

где β—угол отклонения вектора $\mathbf{f}$ от исходящего из центра диполя луча, на котором находится точка a, а $\beta+\theta$—угол отклонения вектора $\mathbf{f}$ от луча $\theta=0$, т. е. от направления момента диполя (см. рис. 23).

Таким образом, в отличие от поля точечной массы, поле диполя (его напряженность) убывает с расстоянием L_{qa} от него, как L_{qa}^{-3}, а потенциал этого поля—как L_{qa}^{-2}. Кроме того, напряженность и потенциал поля зависят от угла отклонения радиуса-вектора $\mathbf{L}_{qa}$ от направления момента диполя.

II. **Нейтральная совокупность точечных масс.** Если совокупность масс состоит из нескольких диполей с моментами $\mathbf{p}_k$ ($k=1, 2, \ldots, n$), то аналогично $(2.53)_2$ имеем

$$U(a)=\frac{(\mathbf{ML}_{qa})}{L_{qa}^3},\quad \mathbf{M}=\Sigma\mathbf{p}_k, \tag{2.58}$$

где $\mathbf{M}=\Sigma\mathbf{p}_k$—дипольный момент совокупности масс; q—точка в достаточно малой окрестности Q, в которой они находятся. Если в этой окрестности находится очень много диполей и они расположены в ней хаотично (в равномерном беспорядке), то согласно $(2.58)_2$ $\mathbf{M}=0$. Поэтому дипольный момент совокупности диполей можно рассматривать как некоторую меру ее упорядочения, т. е. существования в ней преимущественного направления дипольных моментов (по числу и величине). Впоследствии увидим, что такое упорядочение может возникнуть под влиянием поля.

Каждая совокупность точечных масс m_i ($i=1, 2, 3, \ldots, N$) при $\Sigma m_i=0$ может быть представлена как совокупность диполей. Например, если заданы три массы $m_1=-m$, $m_2=2m$, $m_3=-m$, то, разбивая мысленно массу m_2 на массы $m'_2=m$ и $m''_2=m$, получаем два диполя: m_1, m'_2 и m_3, m''_2. Таким образом, формулы (2.58) применимы и в общем случае нейтральной совокупности точечных масс, причем момент $\mathbf{M}$ равен сумме моментов диполей, к которым сводится совокупность масс. Однако можно обойтись без перехода к диполям. Суммируя потенциалы полей точечных масс m_i, можно получить $(2.58)_1$ с другим, но равносильным $(2.58)_2$ определением дипольного момента $\mathbf{M}$ ([1], с. 174):

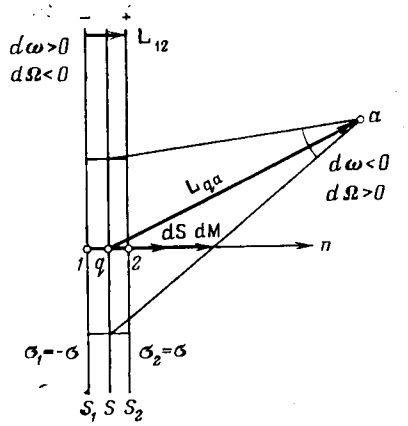


Рис. 24. Двойной слой

$$\mathbf{M}=\Sigma m_i \mathbf{L}_{qi},\ \Sigma m_i=0, \tag{2.59}$$

где $\mathbf{L}_{qi}$—расстояние от точки q до массы m_i. Правая часть $(2.59)_1$ не зависит от выбора точки q в силу равенства $(2.59)_2$.

Так, например, в случае диполя при положении точки q, показанном на рис. 23, имеем $\mathbf{L}_{q1}=-\frac{1}{2}\mathbf{L}_{12}$, $\mathbf{L}_{q2}=\frac{1}{2}\mathbf{L}_{12}$, $\mathbf{M}=-\frac{1}{2}\mathbf{L}_{12}(-m)+\frac{1}{2}\mathbf{L}_{12}m=\mathbf{L}_{12}m=\mathbf{p}$, а при q в точке q_1 имеем $\mathbf{L}_{q1}=0$, $\mathbf{L}_{q2}=\mathbf{L}_{12}$, $\mathbf{M}=\mathbf{L}_{12}m=\mathbf{p}$.

Дипольный момент является мерой сдвигов положительных масс нейтральной совокупности относительно ее отрицательных масс; его направление определяет среднее направление этих сдвигов, а его абсолютная величина характеризует эти сдвиги произведением количества сдвинутых масс на среднее значение их сдвигов.

III. **Двойной слой.** Представим себе две поверхности S_1 и S_2, расположенные с обеих сторон некоторой поверхности S на малых расстояниях $\frac{1}{2}L_{12}$ от нее, отсчитываемых по нормалям к ней (рис. 24). Каждой точке q поверхности S соответствуют на поверхностях S_1 и S_2 точки *1* и *2*, находящиеся на одной нормали с точкой q. Допустим, что на поверхностях S_1 и S_2 расположены поверхностные массы m_1 и m_2 с плотностями $\sigma_1=-\sigma$ и $\sigma_2=\sigma$ в точках *1* и *2*. Такая совокупность поверхностных масс представляет собой двойной слой, находящийся на поверхности[1] S. В отличие от

[1] Двойной магнитный слой называют магнитным листком.

двойного слоя отдельно взятую поверхностную массу называют иногда ординарным, простым слоем. Поверхности S_1 и S_2—стороны двойного слоя с массами m_1 и m_2—будем называть его обкладками, а расстояние L_{12} между ними—его толщиной. Пусть dS—элемент поверхности S с центром в точке q, а dS_1 и dS_2—элементы поверхностей S_1 и S_2 (с центрами *1* и *2*), являющиеся проекциями элемента dS. Совокупность масс

$$dm_1=\sigma_1 dS_1=-\sigma dS \text{ и } dm_2=\sigma_2 dS_2=\sigma dS \tag{2.60}$$

площадок dS_1 и dS_2 образует элемент двойного слоя с центром в точке q и создает в соответствии с (2.51) и (2.52) поле $\mathbf{df}$ с потенциалом в точке a:

$$dU(a)=dm_2\left(\frac{1}{L_{2a}}-\frac{1}{L_{1a}}\right)=\sigma dS\frac{(\mathbf{L}_{12}\mathbf{L}_{qa})}{L^3_{qa}}=\sigma L_{12}\frac{(\mathbf{dSL}_{qa})}{L^3_{qa}}, \tag{2.60'}$$

где $\mathbf{dS}=\mathbf{n}dS$; n—нормаль, направленная от S_1 к S_2.

Вектор

$$\mathbf{dM}=dm_2\mathbf{L}_{12}=\sigma\mathbf{L}_{12}dS=\mathbf{n}\sigma L_{12}dS, \tag{2.61}$$

аналогичный вектору $\mathbf{p}$, является дипольным моментом элемента dS двойного слоя; он параллелен вектору $\mathbf{L}_{12}$, когда $\sigma>0$, и при любом знаке σ направлен от отрицательной обкладки двойного слоя к его положительной обкладке. Согласно (2.61)

$$\frac{(\mathbf{ndM})}{dS}=\sigma L_{12}=\eta_{12},\ \mathbf{dM}=\eta_{12}\mathbf{dS}, \tag{2.62}$$

где η_{12}—плотность дипольных моментов[1] двойного слоя; $\eta_{12}\gtrless 0$ при $\sigma\gtrless 0$. Из (2.60′) согласно (2.62), (1.128″) имеем для $dU(a)$ два выражения:

$$dU(a)=\frac{(\mathbf{dML}_{qa})}{L^3_{qa}},\ dU(a)=-\eta_{12}d\omega, \tag{2.63}$$

где $d\omega=(\mathbf{dSL}_{aq})L_{aq}^{-3}$—угол видимости площадки dS из точки a, положительный, когда к точке a обращена сторона S_1 двойного слоя.

Часто бывает удобно вместо алгебраической величины η_{12}, знак которой зависит от выбора знака σ и направления нормали n, пользоваться положительной величиной

$$\eta=|\eta_{12}|=\frac{dM}{dS}=|\sigma|L_{12}=\eta_{12}\operatorname{sgn}\sigma_2, \tag{2.62'}$$

а вместо угла $d\omega$ со знаком, зависящим от произвольного выбора направления нормали n, применять угол $d\Omega$, знак которого связан

[1] Элемент двойного слоя можно представить как совокупность диполей, получившихся разбиением его на части системой нормальных к нему поверхностей. Величина $\mathbf{n}\eta_{12}$ представляет собой сумму моментов диполей, приходящихся на единицу площади двойного слоя.

с полярностью двойного слоя:

$$d\Omega = \frac{(-\mathbf{dS}^{\partial}\mathbf{L}_{aq})}{L^3_{aq}} = -\frac{(\mathbf{n}^{\partial}\mathbf{L}_{aq})}{L^3_{aq}}\,dS = -d\omega\,\mathrm{sgn}\,\sigma_2, \tag{2.64}$$

где $\mathbf{dS}^{\partial}$ и $\mathbf{n}^{\partial}$ —векторы, направленные от отрицательной обкладки двойного слоя к его положительной обкладке, т. е. по направлению дипольного момента $\mathbf{dM}$.

Согласно (2.64) угол $d\Omega$ положителен, когда видна оборотная сторона площадки $-\mathbf{dS}^{\partial}$, т. е. лицевая сторона площадки $\mathbf{dS}^{\partial} = \mathbf{n}^{\partial}dS$. Следовательно, угол $d\Omega$ положителен, когда к точке a обращена положительная обкладка двойного слоя: $d\Omega = -d\omega$ при $\sigma_2 > 0$ и $d\Omega = +d\omega$ при $\sigma_2 < 0$.

Применяя величины η и $d\Omega$, получаем вместо $(2.62)_2$, $(2.63)_2$

$$\mathbf{dM} = \eta\mathbf{dS}^{\partial} = \mathbf{n}^{\partial}\eta dS,\ dU(a) = \eta d\Omega. \tag{2.63'}$$

Согласно $(2.63')_2$ знак потенциала $dU(a)$ совпадает со знаком обкладки двойного слоя, обращенной к точке a. Такое же правило знаков следует из (2.63).

Из сказанного выше следует, что поле, создаваемое двойным слоем, расположенным на заданной поверхности, зависит от произведения $\sigma L_{12} = \eta_{12}$ и не изменится, если как угодно варьировать множители σ и L_{12}, но так, чтобы это произведение оставалось без изменения. Удобно полагать $L_{12} \to 0$, т. е. считать, что массы m_1 и m_2 расположены на сторонах S_1 и S_2 поверхности S и двойной слой не занимает объема. При этом следует допустить, что

$$|\sigma| \to \infty \ \text{ как } \ L_{12}^{-1} \ \text{ при } \ L_{12} \to 0. \tag{2.65}$$

Величину η_{12} в общем случае следует считать функцией положения точки q на поверхности S, так как расстояние L_{12} между обкладками S_1 и S_2 и плотность σ (включая ее знак) могут меняться по поверхности S. Однородным на каком-либо участке поверхности S называют двойной слой, если величина η_{12} имеет во всех точках этого участка одно и то же значение, иначе говоря, если на этом участке поверхности S $\mathrm{grad}^s \eta_{12} = 0$.

Выражения для дипольного момента $\mathbf{M}$ двойного слоя получаются из $(2.62)_2$ интегрированием по S. В частности, для однородного двойного слоя получаем формулы

$$\mathbf{M} = \eta_{12}\int_S \mathbf{dS} = \eta\int_S \mathbf{dS}^{\partial},\ \mathbf{M} = \eta_{12}\mathbf{S} = \eta\mathbf{S}^{\partial}, \tag{2.61'}$$

из которых вторая соответствует случаю плоского однородного двойного слоя.

Согласно (2.63) получаем для потенциала U поля $\mathbf{f}$, создаваемого двойным слоем, расположенным на поверхности S, выраже-

ния

$$U(a) = -\int_S \eta_{12} d\omega = \int_S \eta d\Omega = \int_S \frac{(d\mathbf{ML}_{qa})}{L^3_{qa}}. \tag{2.66}$$

В случае однородного двойного слоя

$$U(a) = -\eta_{12}\omega = \eta\Omega, \tag{2.66'}$$

где ω и Ω—углы видимости поверхности S из точки a, определяемые согласно (1.128″) и (2.64) интегрированием [1].

Из полученных формул следует, что поле скаляра $U(a)$ в случае однородного двойного слоя отличается от полей телесных углов $\omega(a)$ и $\Omega(a)$ только постоянными (не зависящими от положений точек a и q) множителями $-\eta_{12}$ и η. Следовательно, от результатов, полученных в § 9 первой главы для поля углов $\omega(a)$, можно перейти к аналогичным результатам для поля $U(a)$ умножением углов $\omega(a)$ на $-\eta_{12}$ или переходом от углов $\omega(a)$ к углам $\Omega(a)$ и умножением последних на η. В соответствии с (1.129) имеем согласно (2.66′) для потенциала $U(a)$ поля $\mathbf{f}$, создаваемого замкнутым (или «почти замкнутым», см. первую главу) однородным двойным слоем, выражения

$$U^i(a) = -4\pi\eta_{ie} = 4\pi\eta \operatorname{sgn}\sigma_i, \quad U^e(e) = 0. \tag{2.67}$$

В случае однородного двойного слоя, простирающегося до бесконечности, имеем в соответствии с (1.129′) в областях V_1 и V_2, разделяемых двойным слоем, потенциалы

$$U^{(2)}(a) = +\omega^\alpha\eta_{12}, \quad U^{(1)}(a) = -\omega^\beta\eta_{12}, \tag{2.67'}$$

где ω^α и ω^β—углы видимости из любой точки частей бесконечно удаленной поверхности (с внешней нормалью), принадлежащих областям V_1 и V_2.

В любом случае неограниченного однородного двойного слоя (замкнутого или простирающегося до бесконечности) потенциал в пределах каждой из областей, разделяемых двойным слоем, не зависит от положения точки наблюдения. Следовательно, во всем пространстве поле $\mathbf{f} = -\operatorname{grad} U$, создаваемое таким двойным слоем, равно нулю за исключением поверхности S, несущей двойной слой, на которой потенциал терпит разрыв и его градиент теряет смысл (см. § 7). В случае неограниченного плоского однородного двойного слоя имеем в соответствии с (1.129″)

$$U^{(1)}(a) = -2\pi\eta_{12}, \quad U^{(2)}(a) = 2\pi\eta_{12}, \tag{2.68}$$

[1] Двойной круг радиуса $r_к$, лежащий в плоскости $z=0$ системы r, φ, z с осью z, проходящей через центр круга и направленной по его дипольному моменту, создает на этой оси поле $\mathbf{f}$ с потенциалом $U(z)=\eta\Omega$, где $\Omega = 2\pi\left(1 - \frac{|z|}{\sqrt{r^2_к + z^2}}\right)\frac{z}{|z|}$ ([2], с. 48). Следовательно, на этой оси поле

$$\mathbf{f}(z) = 2\pi\eta r^2_к (r^2_к + z^2)^{-3/2}\mathbf{1}_z. \tag{2.66''}$$

В случае плоского однородного двойного слоя, занимающего участок S плоскости P, ограниченный контуром l, формулы (2.68) в соответствии с (1.130) справедливы для области V (с обеих сторон плоскости P), в пределах которой любая точка a имеет на плоскости P проекцию p, расположенную внутри контура l, причем расстояние $L_{ap} \ll L_{al}$, где L_{al}—наименьшее расстояние точки a от контура l. Неограниченный плоский однородный слой имеет предельный смысл. Подразумевается, что контур l имеет очень большие размеры и поэтому область V, для которой справедливы формулы (2.68), очень обширна. При любых размерах однородного плоского двойного слоя и, в частности, для элементарного двойного слоя, занимающего площадку dS, имеем в соответствии с (1.130′) аналогично (2.22)

$$U^{(1)}(p) = -2\pi\eta_{12}(p), \quad U(p) = 0, \quad U^{(2)}(p) = 2\pi\eta_{12}(p), \tag{2.69}$$

где $U^{(1)}(p)$ и $U^{(2)}(p)$—значения потенциала U у точки p плоскости P на ее сторонах, обращенных к областям V_1 и V_2, а $U(p)$—его значение в точке, принадлежащей самой плоскости P.

Пусть S—поверхность, опирающаяся на контур l и несущая однородный двойной слой с плотностью дипольных моментов η_{12}. Переместим эту поверхность (с двойным слоем) из одного положения в другое, не меняя формы, размеров и положения ее контура l и плотности дипольных моментов двойного слоя. Обозначая через S' и S'' поверхность S в двух ее положениях, а через U' и U''—значения потенциала U в точке a, соответствующие полям, создаваемым двойным слоем при этих его положениях, имеем согласно (1.132′)

$$U''(a) - U'(a) = \begin{cases} \mp 4\pi\eta_{12} & \text{внутри } \Delta V, \\ 0 & \text{вне } \Delta V, \end{cases} \tag{2.70}$$

где ΔV—область пространства, расположенная между поверхностями S' и S''; знак плюс соответствует случаю, когда нормаль n к поверхности S направлена от S'' к S'. Следовательно, потенциалы полей всех опирающихся на один контур l однородных двойных слоев с одинаковыми плотностями дипольных моментов η_{12} совпадают с точностью до постоянного слагаемого $\mp 4\pi\eta_{12}$. Перемещая однородный двойной слой, опирающийся на фиксированный контур l, мы нигде не меняем напряженности поля $\mathbf{f}$. Потенциал U получает приращение $\mp 4\pi\eta_{12}$ во всех точках той области пространства, через которую перешел двойной слой, причем знак минус имеем, когда перемещение происходит в ту сторону, куда направлена нормаль n, а знак плюс—когда оно происходит в противоположную сторону. Из полученных формул следует, что на двойном слое потенциал терпит разрыв (см. § 7).

IV. **Дипольная линия.** Аналогично диполю и двойному слою вводится дипольная линия (линейный диполь)—совокупность двух линейных масс с плотностями $-\lambda$ и λ, расположенных на линиях l_1 и l_2 с двух противоположных сторон от линии l, вблизи нее. Элемент длины дипольной линии состоит из двух параллельных отрез-

ков dl_1 и dl_2 длиной dl, на которых имеются массы $dm_1=-\lambda dl$ и $dm_2=\lambda dl$. Его дипольный момент $\mathbf{dM}$ и плотность дипольных моментов η^λ при $\lambda>0$ определяются формулами

$$\mathbf{dM}=\lambda \mathbf{L}_{12}dl=\mathbf{n}\eta^\lambda dl,\ \eta^\lambda=\lambda L_{12}, \tag{2.71}$$

а создаваемое им поле $\mathbf{f}$ имеет потенциал

$$dU(a)=\frac{(\mathbf{dML}_{qa})}{L^3_{qa}}=\eta^\lambda\frac{(\mathbf{nL}_{qa})}{L^3_{qa}}dl, \tag{2.72}$$

где q—точка на линии l; n—нормаль к этой линии в точке q, направленная к линии l_2; L_{12}—расстояние от l_1 до l_2 по нормали n.

В случае неограниченной прямой однородной ($\lambda=\text{const}$) дипольной линии

$$U(a)=2\eta^\lambda\frac{(\mathbf{nr})}{r^2}=2\eta^\lambda\frac{\cos\varphi}{r}; \tag{2.73}$$

здесь r и φ—координаты точки a в системе r, φ, z с осью z по линии l с началом ($r=0$, $z=0$) в точке q и с отсчетом угла φ в плоскости $z=0$ от направления вектора $\mathbf{n}$. Формула (2.73) так же, как формула (2.50′), справедлива тогда, когда применима формула (2.27) [1].

V. **Квадруполь.** Вернемся к нейтральной совокупности точечных масс и рассмотрим случай, когда ее дипольный момент равен нулю.

Допустим, что в точках q_1 и q_2 прямой l находятся два диполя: D_1 и D_2 с моментами $\mathbf{p}^{(1)}=-\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}^{(2)}=\mathbf{p}$ и пусть L_{12}—расстояние от точки q_1 до точки q_2 по направлению прямой l (рис. 25). Если расстояние L_{12} достаточно мало по сравнению с расстояниями L_{qa} от средней точки q отрезка L_{12} до точек a, в которых мы изучаем поле, создаваемое диполями D_1 и D_2, то совокупность этих диполей называют квадруполем. В частности, четыре одинаковые по абсолютной величине точечные массы, находящиеся в вершинах достаточно малого параллелограмма, образуют квадруполь, если массы на концах одной из его диагоналей положительны, а на концах другой — отрицательны.

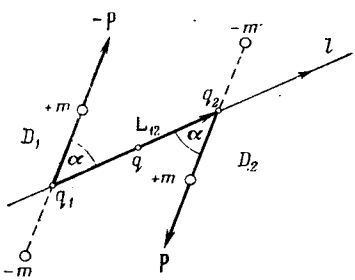


Рис. 25. Квадруполь: поверхностный при $\sin\alpha\neq 0$, линейный при $\sin\alpha=0$

Очевидно, что моменты $\mathbf{p}^{(1)}$ и $\mathbf{p}^{(2)}$ диполей, составляющих квадруполь, антипараллельны, но в общем случае их оси не совпадают. Если они совпадают, то квадруполь называют линейным.

---

[1] В присутствии диполей, двойных слоев и двойных линий правая часть (2.45) должна быть дополнена суммой потенциалов их полей:

$$U^D(a)=\Sigma\frac{(\mathbf{pL}_{qa})}{L^3_{qa}}-\int_S\eta_{12}d\omega+\int_l\eta^\lambda\frac{(\mathbf{nL}_{qa})}{L^3_{qa}}dl. \tag{2.74}$$

Потенциал $U^{\text{кв}}(a)$ поля квадруполя равен алгебраической сумме потенциалов полей, создаваемых диполями D_1 и D_2, и, следовательно, согласно $(2.53)_2$,

$$U^{\text{кв}}(a)=\left(\mathbf{p}^{(1)}\frac{\mathbf{L}_{1a}}{L^3_{1a}}\right)+\left(\mathbf{p}^{(2)}\frac{\mathbf{L}_{2a}}{L^3_{2a}}\right)=\left(\mathbf{p}\frac{\mathbf{L}_{2a}}{L^3_{2a}}\right)-\left(\mathbf{p}\frac{\mathbf{L}_{1a}}{L^3_{1a}}\right).$$

Полученную разность можно рассматривать как приращение

$$\left(\mathbf{p}\frac{\mathbf{L}_{qa}}{L^3_{qa}}\right)''-\left(\mathbf{p}\frac{\mathbf{L}_{qa}}{L^3_{qa}}\right)'=\frac{\partial}{\partial l}\left(\mathbf{p}\frac{\mathbf{L}_{qa}}{L^3_{qa}}\right)dl$$

потенциала $U^D(a)$ поля диполя D с моментом $\mathbf{p}$, находящегося в точке q, соответствующее перемещению $dl=L_{12}$ этой точки от точки q_1 до точки q_2. Следовательно,

$$U^{\text{кв}}(a)=dl\overset{q}{\nabla}_l\left(\mathbf{p}\frac{\mathbf{L}_{qa}}{L^3_{qa}}\right)=\left(\mathbf{dl}\overset{q}{\nabla}\left(\mathbf{p}\frac{\mathbf{L}_{qa}}{L^3_{qa}}\right)\right). \tag{2.75}$$

VI. **Замечания.** 1. Полюс (отдельная точечная масса), диполь, квадруполь—мультиполи нулевого, первого и второго порядков. Выше мы перешли от полюса к диполю, составленному из точечных масс, сумма которых равна нулю; его поле отлично от нуля благодаря сдвигу массы одного знака относительно массы противоположного знака. Мы перешли от диполя к квадруполю, составленному из диполей, сумма моментов которых равна нулю; его поле отлично от нуля благодаря сдвигу диполя с моментом одного направления относительно диполя с моментом противоположного направления. Продолжая этот процесс, можно аналогично получить выражения для потенциалов полей мультиполей более высоких порядков. При этом легко заметить, что с повышением порядка мультиполя на единицу увеличивается на единицу кратность дифференциальной операции $\overset{q}{\nabla}$ и, следовательно, показатель степени обратного расстояния $1/L_{qa}$, которой пропорционален потенциал. Таким образом, с повышением порядка мультиполя сильно возрастает быстрота (интенсивность) ослабления его поля с расстоянием от него.

2. Можно себе представить также нейтральную совокупность объемных масс с дипольным моментом $\mathbf{M}$. Допустим, например, что две одинаковые (по форме и размерам) массы с плотностями $\delta_1=-\delta$ и $\delta_2=\delta$ занимают одну и ту же область V. Если одну из этих масс сдвинуть относительно другой на малое расстояние L_{12}, то каждая пара соответствующих элементов $dm_1=-\delta dV$ и $dm_2=\delta dV$ этих масс, взаимно раздвинутых на расстояние L_{12}, образует диполь с моментом $\mathbf{dM}=\delta\mathbf{L}_{12}dV$, а вся совокупность объемных масс приобретает дипольный момент, равный сумме дипольных моментов, соответствующих элементам объема dV.

§ 6. О РАСЧЕТЕ ПОЛЯ ЗАДАННЫХ МАСС

Различаем две постановки задачи определения кулонова поля по заданным массам: 1) заданы все массы, создающие поле; 2) за-

даны только массы, находящиеся в части пространства, в которой надо определить поле. Здесь будет идти речь об этой задаче в первой ее постановке. О второй постановке задачи будет сказано в § 8 данной главы.

Порядок расчета (при первой постановке) может быть двояким. Можно определить потенциал U, затем перейти к полю $\mathbf{f}$ (к его компонентам) дифференцированием функции U в соответствии с формулами (2.35)—(2.37′). Можно, наоборот, определить поле $\mathbf{f}$ и перейти к потенциалу U интегрированием согласно (2.40)—(2.42).

Определить потенциал U или напряженность $\mathbf{f}$ можно тремя способами: а) непосредственным суммированием полей по формуле (2.12) или потенциалов по формуле (2.45) с соответствующими дополнениями: $U^D(a)$, $U^{\text{кв}}(a)$, ... (см. разд. V, § 5); б) решением дифференциального уравнения $(2.34)_2$ или (2.46); в) применением интегральных форм (2.30) или (2.43) этого уравнения, т. е. теоремы Гаусса.

При любой постановке задачи и любом способе ее решения надо учесть симметрию поля, о которой речь будет идти ниже, и нарушения непрерывности поля, о которых будет сказано в следующем параграфе.

I. **Поле симметричной массы.** Симметрия поля, создаваемого массами, определяется их симметрией. Если поле $\delta(q)$ с его особыми точками, линиями и поверхностями отличается симметрией какого-либо вида (см. § 9 первой главы), то поля $\mathbf{f}(a)$ и $U(a)$ обладают соответствующей симметрией ([1], с. 148—149). Например, если массы отличаются четной симметрией относительно плоскости $z=0$ системы r, φ, z, то потенциал и тангенциальная компонента вектора $\mathbf{f}$ четно-симметричны, а его нормальная компонента нечетно-симметрична относительно этой же плоскости.

Отметим обстоятельства, облегчающие расчет симметричного поля.

Симметрия позволяет заранее получить полезные при расчете поля сведения о его поведении в некоторых точках пространства.

1. На плоскости четной симметрии масс (без инверсии знаков) имеем

$$U^{(2)}=U^{(1)},\ f_t^{(2)}=f_t^{(1)},\ f_n^{(2)}=-f_n^{(1)},\ f_n^{(2)}-f_n^{(1)}=2f_n^{(2)}. \tag{2.76}$$

На такой поверхности (там, где на ней нет точечных или линейных масс) потенциал U и тангенциальная компонента поля f_t непрерывны, а нормальная его компонента равна нулю или терпит разрыв, равый $2f_n^{(2)}$ (там, где на плоскости симметрии имеется поверхностная масса, см. § 7).

2. На плоскости нечетной симметрии масс имеем [1]:

$$U^{(2)}=-U^{(1)},\ f_n^{(2)}=f_n^{(1)},\ f_t^{(2)}=-f_t^{(1)},$$
$$U^{(2)}-U^{(1)}=2U^{(2)},\ f_t^{(2)}-f_t^{(1)}=2f_t^{(2)}. \tag{2.77}$$

[1] Здесь U — разность U_a-U_φ, где U_φ — потенциал плоскости симметрии.

На такой плоскости (там, где на ней нет точечных или линейных масс) нормальная компонента поля f_n непрерывна, а потенциал U и тангенциальная компонента поля f_t равны нулю или терпят разрывы, равные соответственно $2U^{(2)}$ и $2f_t^{(2)}$ (там, где на плоскости симметрии имеется двойной слой, причем разрыв компоненты f_t обращается в нуль, когда этот слой однороден по направлению t; см. § 7).

3. Масса, цилиндрически симметричная относительно некоторой прямой, создает поле **f** с четной цилиндрической симметрией относительно этой прямой.

4. На оси цилиндрической симметрии масс (там, где на ней нет точечных или линейных масс) тангенциальная к ней компонента поля **f** и его потенциал непрерывны, а нормальная к ней компонента поля равна нулю.

При цилиндрической симметрии масс силовые линии лежат в плоскостях, проходящих через ось симметрии, а эквипотенциальные поверхности представляют собой поверхности вращения около этой оси.

5. В центре сферической симметрии масс потенциал U непрерывен, а напряженность поля **f** равна нулю, но они обращаются в бесконечность в центре симметрии, если там находится точечная масса.

Симметрия заданной массы позволяет соответствующим подбором системы координат уменьшить число неизвестных компонент f_k поля **f** и аргументов ξ_k искомых функций U и f_k.

В частности, очень легко рассчитать: а) поле, создаваемое сферически симметричной массой; б) поле цилиндрически симметричной массы, неограниченной и однородной по направлению оси симметрии; в) поле массы, четно-симметричной относительно некоторой плоскости, если она неограниченна и однородна по всем направлениям, параллельным этой плоскости. В каждом из этих случаев (эквипотенциальные) поверхности S^f являются поверхностями равных значений нормальной к ним компоненты f_n поля **f**. Пусть S_a — замкнутая поверхность, состоящая из поверхностей $S^f{}_a$ и S^0, из которых первая — поверхность S^f, проходящая через точку a, а вторая — векторная поверхность (на которой $f_n=0$). На $S^f{}_a$ $(\mathbf{fdS})=f_n dS=f dS$, так как на этой поверхности $f_t=0$.

В первом из указанных выше случаев симметрии поля можно в качестве поверхности S_a (и $S^f{}_a$) брать сферическую поверхность с центром в центре симметрии. Во втором случае можно в качестве S_a взять поверхность прямого кругового цилиндра с осью по оси симметрии, причем $S^f{}_a$ — боковая поверхность этого цилиндра, а S^0 — совокупность его оснований. В третьем случае поверхностью S_a может служить поверхность прямого цилиндра с образующей, нормальной к плоскости симметрии, и с основаниями, симметричными относительно этой плоскости, причем поверхностью $S^f{}_a$ является совокупность этих оснований, а поверхностью S^0 — боковая поверхность цилиндра.

Поток вектора **f** через поверхность $S^f{}_a$, очевидно, равен $f_n(a)S^f{}_a=f(a)S^f{}_a$, где $S^f{}_a$ — площадь поверхности $S^f{}_a$, а n — наружная нормаль. Если $m(a)$ — часть массы, создающей поле, заключенная внутри поверхности S_a, то согласно теореме Гаусса (2.30), $f_n(a)S^f{}_a=4\pi m(a)$,

$$f_n(a)=\frac{4\pi m(a)}{S^f{}_a},\quad m(a)=\int\limits_0^a S^f{}_{a'}\delta dl, \tag{2.78}$$

где интегрирование производится по координатной линии, совпадающей с векторной линией l^f, а штрих при a имеет такое же назначение как в (2.44). От

компоненты f_n, являющейся функцией одной координаты, нетрудно перейти к потенциалу U согласно (2.40).

Для сферически симметричной массы в системе R, θ, φ с центром в центре симметрии: $dl=dR$, $f_n(a)=f_R(R_a)$, $S^f{}_a=4\pi R^2{}_a$, $S^f{}_{a'}=4\pi R^2$, а масса $m(a)$ получается интегрированием по R функции $4\pi\delta(R)R^2$ от нуля до R_a.

Для указанной выше цилиндрически симметричной массы в системе r, φ, z с осью z по оси симметрии: $dl=dr$, $f_n(a)=f_r(r_a)$, $S^f{}_a=2\pi h r_a$, $S^f{}_{a'}=2\pi h r$, где h — произвольно взятая высота прямого кругового цилиндра. Масса $m(a)$ определяется интегрированием по r функции $2\pi h\delta(r)r$ от нуля до r_a.

Для указанной выше зеркально симметричной массы в системе x, y, z с плоскостью симметрии $z=0$; $dl=dz$, $f_n(a)=f_z(z_a)$, $S^f{}_a=S^f{}_{a'}=2S$, где S — площадь произвольно взятого поперечного сечения цилиндра. Масса $m(a)$ определяется интегрированием по z функции $2S\delta(z)$ от нуля до z_a.

II. **Применение уравнения (2.32).** Описанный способ расчета симметричных полей, основанный на применении интегральной формы (2.30) второго уравнения поля, отличается большой наглядностью. Но более простым является излагаемый ниже способ расчета тех же симметричных полей, основанный на применении дифференциальной формы (2.32) второго уравнения поля f. Для указанных выше трех случаев (благодаря обращению в нуль двух компонент поля и вследствие независимости третьей компоненты от двух координат) дифференциальное уравнение в частных производных превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение с одной неизвестной функцией одного аргумента ξ_m:

$$\frac{1}{h_1h_2h_3}\frac{d}{d\xi_m}\left(\frac{h_1h_2h_3}{h_m}f_m\right)=4\pi\delta(\xi_m). \tag{2.79}$$

Оно сразу сводится к квадратуре, после выполнения которой нетрудно, исходя из (2.37), определить потенциал. Таким образом,

$$\frac{h_1h_2h_3}{h_m}f_m=4\pi\int\delta(\xi_m)\,h_1h_2h_3d\xi_m,$$

$$U=-\int h_mf_md\xi_m. \tag{2.79'}$$

Появляющиеся при двукратном интегрировании аддитивные постоянные C и C' определяются значениями f_m при $\xi_m=0$ и U в точке ϕ. Если функция $\delta(\xi_m)$ представлена различными аналитическими выражениями для разных областей пространства V_μ ($\mu=1, 2, 3, \ldots, N$), т. е. для разных интервалов изменения координаты ξ_m, то для каждой из этих областей в отдельности составляется уравнение (2.79) и получаются выражения (2.79'). При этом появляется дополнительно $2N-2$ постоянных интегрирования C и C', для определения которых служат условия для f_m и U на $N-1$ границах между областями V_μ (см. § 7).

Изложенные здесь способы расчета пригодны и в тех случаях, когда совокупность масс, создающих поле, содержит необъемные массы или состоит только из таких масс. Но при определении аддитивных постоянных надо учесть поведение поля f и его потенциала U у таких масс (см. § 7).

III. **Логарифмический потенциал.** Допустим, что массы распределены одинаково во всех плоскостях, нормальных к некоторой оси l. Такие массы создают плоское поле $\mathbf{f}$. Для определенности допустим, что задана объемная масса с плотностью $\delta = \delta(r, \varphi)$ или $\delta(x, y)$ в системе r, φ, z, или x, y, z с осью z по оси l. Этому двухмерному (плоскому) полю скаляра δ соответствует плоское поле $\mathbf{f}$, в котором $f_z=0$, а f_r, f_φ, f_x и f_y не зависят от z. Определим потенциал U этого поля. Разобьем массу на цилиндры (столбики) с элементарными поперечными сечениями dS в плоскостях $z=\text{const}$, с образующими, параллельными оси z, и с массами $\lambda=\delta dS$ на единицу высоты. Тогда, согласно (2.50′), имеем с точностью до аддитивной постоянной

$$U(a) = -2\int_S \delta \ln L_{qa}\, dS, \quad U(a) = -2\delta \int_S \ln L_{qa}\, dS, \tag{2.80}$$

где S — плоскость $z=\text{const}$ или ее участок, а L_{qa} — расстояние в этой плоскости от элементарного цилиндра до точки a. Второе выражение (2.80) соответствует случаю однородной массы. Таким образом, плоское поле $\mathbf{f}$ имеет логарифмический потенциал, т. е. потенциал, определяемый согласно (2.80).

§ 7. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ПОЛЯ И ЕЕ НАРУШЕНИЯ

Из общих выражений (2.12) и (2.45) для поля, создаваемого массами, видно, что всюду вне масс напряженность $\mathbf{f}$ и потенциал U этого поля непрерывны. Бесконечно малому перемещению точки a соответствуют бесконечно малые приращения расстояний L_{qa} и, следовательно, также бесконечно малые приращения величин f_k и U. Но когда точка a совпадает с какой-либо из точек q, находящихся на границе массы или внутри нее, то $L_{qa}=0$ и, казалось бы, согласно указанным выражениям для f_k и U эти величины должны терпеть разрывы, принимая неограниченные значения.

I. **Поле у точечной массы и в объемной массе.** У точечной массы m_q величины f и U согласно $(2.14)_1$ и $(2.44')_1$ действительно терпят разрывы. Когда точка a проходит через точечную массу m_q по некоторому направлению l, величины $|U|$ и f обращаются в ∞, а компонента f_l, кроме того, меняет знак. Но, с другой стороны, расчеты полей симметричных масс по способам, описанным в § 6, показывают, что величины U и f внутри объемных масс и на их границах непрерывны.

Для количественной иллюстрации непрерывности поля $\mathbf{f}$ в области, занятой объемной массой, можно выделить из нее шарик с центром в точке q и представить поле $\mathbf{f}$ в виде суммы полей $\mathbf{f}^{\text{ш}}$ и $\mathbf{f}^{\text{ост}}$ массы шарика $m_{\text{ш}}$ и остальной массы $m_{\text{ост}}$.

Непрерывность поля $\mathbf{f}^{\text{ост}}$ в точке q (вне массы $m_{\text{ост}}$) очевидна; что же касается поля $\mathbf{f}^{\text{ш}}$, то можно доказать, что в точке q оно равно нулю. Однако при этом нельзя, полагая шарик однородным, ссылаться на равенство нулю поля однородного шара в его центре, так как не всегда можно массу выделенного нами шарика считать симметричной относительно точки q. Имеется в виду, например, случай, когда точка q находится на границе однородной массы, или

более общий случай, когда в окрестности точки q плотность δ зависит от координат θ и φ сферической системы с центром в точке q. Но можно убедиться, что в любом случае $f^{ш}(q)=0$. Действительно, $\mathbf{f}^{ш}(q)=\int d\mathbf{f}^{ш}(q)$, где $d\mathbf{f}^{ш}$ — поле, создаваемое частью массы $m^{ш}$, находящейся в элементарном координатном конусе с углом $d\omega$ при его вершине q. Отрезок этого конуса между координатными сферическими поверхностями с радиусами $R \pm \frac{1}{2} dR$ содержит массу $R^2\delta d\omega dR$, создающую в точке q поле с абсолютной величиной $|\delta| d\omega dR$. Поэтому

$$df^{ш}(q) \leqslant |\delta|_{\max} d\omega \int_0^{R_{ш}} dR, \text{ т. е. } df^{ш}(q) \leqslant |\delta|_{\max} R_{ш} d\omega,$$

где $R_{ш}$ — радиус шарика, $|\delta|_{\max}$ — максимальное по координате R значение $|\delta|$ в конусе. Знак равенства соответствует случаю, когда δ не зависит от R. При $R_{ш} \to 0$ получаем $df^{ш}(q) \to 0$ и, следовательно, $f^{ш}(q) \to 0$.

Ограниченность потенциала U в объемной массе подтверждается очевидным неравенством $|U^{ш}(q)| \leqslant 2\pi R^2_{ш} |\delta|_{\max}$, где $U^{ш}$ — потенциал поля $\mathbf{f}^{ш}$, а $|\delta|_{\max}$ — максимальное значение $|\delta|$ в шарике, создающем это поле. Знак равенства соответствует случаю однородного шарика, в центре которого $U^{ш}(q)=2\pi R^2_{ш}\delta$, как следует из (2.79′) (см. [2], с. 100, решение 7а).

Возвращаясь к основному изложению, отметим, что непрерывность величин U и $\mathbf{f}$ при прохождении через объемную массу объясняется малостью третьего порядка числителя в $(2.15)_2$ и $(2.44'')_2$. При перемещении точки a в объемной массе она на бесконечно малом пути пересекает бесконечно малую массу, чему соответствуют бесконечно малые приращения величин f_l и U. Между тем при переходе через точечную массу, т. е. через массу, занимающую бесконечно малый объем dV, но имеющую бесконечно большую плотность δ порядка $1/dV$, точка a на бесконечно малом пути пересекает конечную, а не бесконечно малую массу.

Таким образом, отмеченное различие в поведении полей точечной и объемной масс определяется конечной плотностью объемной массы и бесконечно большой объемной плотностью точечной массы ($\delta=\infty^3$). Промежуточное положение между объемными и точечными массами занимают линейная и поверхностная массы, объемная плотность которых равна бесконечности, но меньшего порядка по сравнению с объемной плотностью точечной массы (см. § 1). В соответствии с этим можно предположить, что поля таких масс в отношении нарушений непрерывности также занимают промежуточное положение между полями объемной и точечной масс. Оказывается, что у линейной массы ($\delta=\infty^2$) потенциал U и нормальная компонента вектора $\mathbf{f}$ обращаются в бесконечность, а на поверхностной массе ($\delta=\infty$) вектор $\mathbf{f}$ и потенциал U имеют ограниченные значения, но нормальная компонента вектора $\mathbf{f}$ терпит разрыв (конечный). Тангенциальная компонента вектора $\mathbf{f}$ у поверхностной или линейной массы непрерывна [1]. Более подробно о поведении поля $\mathbf{f}$ и его потенциала U у поверхностных масс будет сказано ниже.

[1] Условившись, что реальными являются только объемные массы, мы должны считать поле $\mathbf{f}$ и потенциал U всюду непрерывными, а нарушение их непрерывности формальным осложнением, возникающим вследствие допускаемого нами существования необъемных масс с плотностью $\delta=\infty$.

II. **Особые поверхности в кулоновом поле.** Пусть S — поверхность, на которой имеется масса с плотностью σ (рис. 26,*а*, *в*). Проведем через точку p этой поверхности, по нормали n к ней линию l и будем наблюдать потенциал $U(a)$ поля $\mathbf{f}$ в точке a, перемещающейся по этой линии. Представим этот потенциал в виде суммы $U^p(a)+U^*(a)$, где U^p—потенциал поля $\mathbf{f}^p$, создаваемого массой $dm(p)=\sigma dS_p$ элемента dS_p поверхности S, содержащего точку p, а U^* — потенциал поля $\mathbf{f}^*$, создаваемого массами остальных элементов поверхности S (и другими массами, находящимися в пространстве). Очевидно, что потенциал U^* поля $\mathbf{f}^*$, которое мы имели бы при отсутствии массы $dm(p)$, непрерывен в точке p. Что же касается потенциала U^p, то его изменение по нормали n у точки p определяется компонентой $f^p{}_n=-\partial U^p/\partial n$. Но эта компонента у точки p согласно (2.22), (2.22′) имеет такие же значения, как в поле неограниченной однородной плоской массы, потенциал которого непрерывен[1] в точке p. Таким образом, на поверхностной массе потенциал не терпит разрыва:

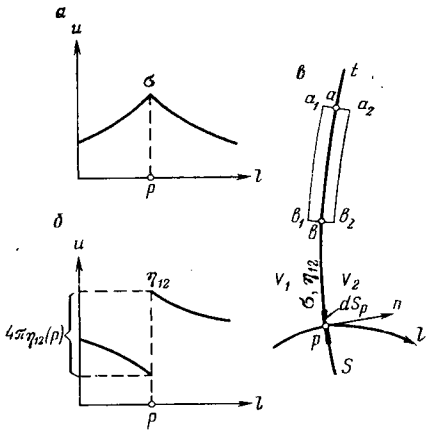


Рис. 26. Потенциал у поверхности, несущей поверхностные массы:
а и *б* — графики потенциала для простого и двойного слоев; *в* — поверхность S, на которой заданы σ и η_{12}, ее элемент dS_p и четырехугольный контур, служащий для вывода формулы (2.86)$_2$.

$$U^{(2)}(p)=U^{(1)}(p). \tag{2.81}$$

Перейдем к случаю, когда на поверхности S имеется двойной слой (рис. 26,*б*, *в*). Согласно выражениям (2.67)—(2.68), полученным для потенциала поля неограниченного (замкнутого, почти замкнутого или простирающегося до бесконечности) однородного двойного слоя, между любыми двумя точками a, находящимся в областях V_1 и V_2, разделяемых этим двойным слоем, имеем одну и ту же разность потенциалов $U^{(2)}(a)-U^{(1)}(a)=4\pi\eta_{12}$. Когда эти точки приближаются к какой-либо точке p двойного слоя, эта разность оказывается разрывом потенциала $U^{(2)}(p)-U^{(1)}(p)=4\pi\eta_{12}$ на двойном слое. Согласно (2.69) такой разрыв потенциала в поле плоского однородного двойного слоя имеется при любых и, в частности, элементарных его размерах. Сопоставляя (1.132)$_4$ с (2.66′), мы видим, что такой же разрыв потенциал терпит на любом однородном двойном слое. Нетрудно

[1] В противном случае компонента $f_n=-\dfrac{\partial U}{\partial n}$ обратилась бы в бесконечность, чему противоречит (2.22′). Это было принято во внимание при выводе формулы (2.48).

убедиться, что и в самом общем случае имеем на двойном слое разрыв

$$U^{(2)}(p)-U^{(1)}(p)=4\pi\eta_{12}(p), \tag{2.82}$$

где $\eta_{12}(p)$ — плотность дипольных моментов двойного слоя в точке p. Для этого выделим на поверхности S, несущей двойной слой, площадку dS_p, содержащую точку p, и представим потенциал в виде суммы $U^*(a)+U^p(a)$, в которой $U^p(a)$ — потенциал поля, создаваемого элементом двойного слоя, находящимся на площадке dS_p, а $U^*(a)$ — потенциал поля, создаваемого остальными элементами двойного слоя и другими источниками поля, находящимися в пространстве. Потенциал $U^*(a)$, который мы имели бы, если бы на площадке dS_p плотность дипольных моментов двойного слоя η_{12} была равна нулю, очевидно, непрерывен в точке p, а потенциал $U^p(a)$ принимает в этой точке значения, определяемые формулами (2.69):

$$U^{p(1)}(p)=-2\pi\eta_{12}(p),\ U^p(p)=0,$$
$$U^{p(2)}(p)=2\pi\eta_{12}(p). \tag{2.82'}$$

Поэтому

$$U^{(1)}(p)=U^*(p)-2\pi\eta_{12}(p),\ U(p)=U^*(p),$$
$$U^{(2)}(p)=U^*(p)+2\pi\eta_{12}(p), \tag{2.82''}$$

где $U(p)$ — потенциал на самой поверхности S, несущей двойной слой (на средней поверхности между его обкладками), а не на ее сторонах S_1 и S_2, принадлежащих к разделяемым ею областям V_1 и V_2. Следовательно, для любого двойного слоя получаем формулу (2.82), по которой потенциал U на нем терпит разрыв, равный $4\pi\eta_{12}$. Формула (2.82) применима к любой поверхности; отсутствию на поверхности S двойного слоя соответствует нулевое значение величины η_{12}, т. е. случай, когда формула (2.82) принимает частный вид (2.81). На любой поверхности S, на которой нет двойного слоя, потенциал U согласно (2.82) непрерывен.

Из (2.82″) следует, что

$$U(p)=\frac{1}{2}[U^{(1)}(p)+U^{(2)}(p)]=U^{\text{ср}}(p)=U^*(p), \tag{2.83}$$

где $U^{\text{ср}}(p)$ — среднее из значений потенциала на сторонах S_1 и S_2 двойного слоя.

Разрыв потенциала $4\pi\eta_{12}$ на двойном слое, ненулевое напряжение на исчезающе малом пути L_{12} между обкладками двойного слоя легко понять, принимая во внимание поле f между этими обкладками. Согласно $(2.23'')_2$ нормальная компонента f_n поля однородного плоского двойного слоя в зазоре между его обкладками имеет значение $f^i{}_n=-4\pi\sigma$, причем в соответствии с (2.65) $|\sigma|\to\infty$. Это, очевидно, также верно для поля элемента двойного слоя в его средней точке p. Поле остальных элементов двой-

ного слоя и других источников поля, очевидно, имеет в этой точке ограниченное значение, следовательно, в общем случае

$$f^i_n = -4\pi\sigma; \quad |f^i_n| \to \infty, \quad \text{как} \quad \frac{1}{L_{12}} \quad \text{при} \quad L_{12} \to 0. \tag{2.84}$$

Поэтому между сторонами S_1 и S_2 двойного слоя получается отличное от нуля напряжение:

$$\mathscr{E}_{12} = \int_1^2 f^i_n\, dn, \qquad \mathscr{E}_{12} = -4\pi\sigma \int_1^2 dn = -4\pi\sigma L_{12} = -4\pi\eta_{12}. \tag{2.84'}$$

Из (2.84′) плотность дипольных моментов двойного слоя η_{12} определяется напряжением поля $\mathbf{f}$ на пути от стороны S_2 к стороне S_1 двойного слоя. Это определение отличается от определения $(2.62)_1$ большей общностью; оно пригодно и в более сложном случае, когда двойной слой фактически представляет собой тонкий слой объемных масс, в котором плотность δ меняется по норма ли к его поверхности так, что

$$\int_1^2 \delta\,(q)\, dn = 0, \quad \text{но} \quad \int_1^2 \delta\,(q)\,(\mathbf{L}_{oq}\mathbf{dn}) = \eta_{12} = -\frac{1}{4\pi}\mathscr{E}_{12} \neq 0. \tag{2.84''}$$

Здесь q — точка, пробегающая от первой границы слоя до второй по нормали n к ним, а o — произвольно выбираемая (близкая) точка. Таким образом, разрыв потенциала на двойном слое объясняется бесконечно большим значением нормальной компоненты напряженности поля в зазоре между обкладками двойного слоя. Фактически этот разрыв сводится к тому, что на пути почти нулевой длины L_{12} от S_1 до S_2 происходит чрезвычайно интенсивное (быстрое) изменение потенциала, обусловленное очень большой напряженностью поля. Но, допуская, что $L_{12} \to 0$, получаем вместо крутого спада потенциала разрыв потенциала, а вместо очень большого значения величины f^i_n — ее бесконечно большое значение. Полагая $L_{12} \to 0$, мы исключаем из рассмотрения зазор между обкладками двойного слоя, и поле $\mathbf{f}$ в этом исчезающе малом зазоре нас интересует только в связи с его влиянием на напряжение $\mathscr{E}_{12}$ между сторонами двойного слоя.

III. **Поведение компонент поля $\mathbf{f}$ у поверхности S.** На этой поверхности в общем случае могут находиться и простой слой с плотностью σ, и двойной слой с плотностью дипольных моментов η_{12} (в частных случаях любая из этих величин может быть равна нулю). Как было отмечено в § 4 первой главы, поведение поля $\mathbf{f}$ у поверхности S (которая может быть особой для этого поля) характеризуется поверхностным ротором и поверхностной дивергенцией вектора $\mathbf{f}$.

Согласно (1.53) поверхностный ротор какого-либо вектора представляет собой отношение векторного потока этого вектора через замкнутую поверхность s, обтягивающую малый участок ΔS поверхности S, к площади ΔS этого участка. Но векторный

поток вектора $\mathbf{f}$ через любую замкнутую поверхность согласно (2.28″), равен нулю, следовательно,

$$\operatorname{Rot}\mathbf{f}=0. \tag{2.85}$$

Принимая во внимание (1.59), мы должны в общем случае представить поверхностный ротор вектора $\mathbf{f}$ формулой

$$\operatorname{Rot}\mathbf{f}=[\mathbf{n}(\mathbf{f}^{(2)}-\mathbf{f}^{(1)})]-[\mathbf{n}\operatorname{grad}^s\mathscr{E}_{12}],$$

в которой $\mathscr{E}_{12}$ — напряжение поля $\mathbf{f}$ между сторонами S_1 и S_2 поверхности S, определяемое формулой (2.84′). Поэтому уравнение (2.85) принимает вид

$$[\mathbf{n}(\mathbf{f}^{(2)}-\mathbf{f}^{(1)})]=[\mathbf{n}\operatorname{grad}^s\mathscr{E}_{12}] \quad \text{или} \quad f_t^{(2)}-f_t^{(1)}=\frac{\partial\mathscr{E}_{12}}{\partial t}, \tag{2.86}$$

где t — любое тангенциальное направление на поверхности S.

Формулу $(2.86)_2$ можно получить из уравнения $(2.28)_1$. Применяя это уравнение к показанному на рис. 26,*в* четырехугольному замкнутому контуру a_1, a_2, b_2, b_1, a_1, получаем $\mathscr{E}_{a_1a_2}+\mathscr{E}_{a_2b_2}+\mathscr{E}_{b_2b_1}+\mathscr{E}_{b_1a_1}=0$. Прижимая стороны a_1b_1 и a_2d_2 к отрезку ab линии t на поверхности S и полагая расстояние ab равным dt, имеем

$$\mathscr{E}_{a_1a_2}=\mathscr{E}_{12}(a),\quad \mathscr{E}_{b_2b_1}=-\mathscr{E}_{12}(b),\quad \mathscr{E}_{a_2b_2}=f_t^{(2)}dt,\quad \mathscr{E}_{b_1a_1}=-f_t^{(1)}dt$$

и, следовательно,

$$\mathscr{E}_{12}(a)-\mathscr{E}_{12}(b)+(f_t^{(2)}-f_t^{(1)})\,dt=0$$

или

$$-\frac{\partial}{\partial t}\mathscr{E}_{12}dt+(f_t^{(2)}-f_t^{(1)})\,dt=0,$$

что совпадает с $(2.86)_2$.

Пользуясь соотношением $(2.84')_2$, можно представить равенства (2.86) в следующем виде:

$$[\mathbf{n}(\mathbf{f}^{(2)}-\mathbf{f}^{(1)})]=-4\pi[\mathbf{n}\operatorname{grad}^s\eta_{12}],$$

$$f_t^{(2)}-f_t^{(1)}=-4\pi\frac{\partial\eta_{12}}{\partial t}=-4\pi\operatorname{grad}_t^s\eta_{12}. \tag{2.87}$$

Подставляя в $(2.87)_2$ соотношение $f_t=-\partial U/\partial t$, получаем,

$$\frac{\partial U^{(2)}}{\partial t}-\frac{\partial U^{(1)}}{\partial t}=4\pi\frac{\partial\eta_{12}}{\partial t}. \tag{2.87′}$$

Очевидно, что из (2.82) дифференцированием по тангенциальному направлению t можно получить равенство (2.87′), а из него — $(2.87)_2$ по формуле $\partial U/\partial t=-f_t$. Там, где на поверхности S величина η_{12} не меняется по направлению t, имеем

$$\frac{\partial\eta_{12}}{\partial t}=0,\quad \frac{\partial\mathscr{E}_{12}}{\partial t}=0,\quad f_t^{(2)}=f_t^{(1)},\quad \frac{\partial U^{(2)}}{\partial t}=\frac{\partial U^{(1)}}{\partial t}. \tag{2.88}$$

Эти равенства справедливы для любого тангенциального направления t на поверхности S, если на ней двойной слой однороден и, в частности, если двойного слоя на ней нет ($\eta_{12}=0$). Таким образом, на поверхности S, на которой нет неоднородного

лоты, выделяемой неохлажденным паром q_r, можно принять прямолинейной (рис. 5.15,*б*).

Оптимизация распределения регенеративного подогрева воды при ПО дает до $^1/_3$ экономии теплоты благодаря установке ПО.

Расчет тепловой схемы с пароохладителем типа Виолен выполняется по обычной методике. После расчета системы подогревателей определяют подогрев питательной воды в смесителе и конечную температуру питательной воды $h_{п.в}=h_{в1}+\tau_{см}$, где $h_{в1}=h_1'-\vartheta_1$. Для смешивающих подогревателей $\vartheta_1=0$.

Расчет тепловой схемы с пароохладителем Рикара имеет ту особенность, что расходы пара на «холодную» и охлажденную ступени (α_1 и α_2) определяют совместным решением уравнений тепловых балансов этих подогревателей. Это обусловлено тем, что через *П1* проходит питательная вода за вычетом $\alpha_{по}=\nu\alpha_2$, а в уравнение для *П2* входит также величина α_1.

При выборе параметров пара и воды у ПО необходимо правильно определить значения температурного напора на холодном и горячем концах пароохладителя.

5.7. Регенеративный подогрев воды на ТЭЦ

При регенеративном подогреве питательной воды на ТЭЦ к выработке электроэнергии на тепловом потреблении добавляют выработку ее паром регенеративных отборов. КПД турбоустановки ТЭЦ по производству электроэнергии возрастает особенно значительно при малом пропуске пара в конденсатор (на 20—25% относительно КПД турбоустановки без регенеративного подогрева воды).

На ТЭЦ регенеративные отборы осуществляют подогрев не только конденсата турбин, но и обратного конденсата от внешних потребителей теплоты и добавочной воды, компенсирующей в основном внешние потери пара и конденсата у потребителя. Обратный конденсат от потребителей имеет, как правило, более высокую температуру, чем основной конденсат. Доля его в общем потоке питательной воды довольно значительна, поэтому сумма регенеративных отборов на ТЭЦ и абсолютная экономия теплоты от регенерации менее значительна, чем на конденсационных электростанциях с теми же начальными параметрами пара и расходом пара и питательной воды.

Однако относительная экономия теплоты и повышение КПД теплофикационных турбоустановок и ТЭЦ благодаря регенерации оказываются значительно больше, чем у аналогичных конденсационных электростанций и турбоустановок, если относить экономию теплоты не к полному расходу теплоты $Q^0_{ту}$ на турбоустановку, а к расходу теплоты на производство электроэнергии, равному $Q^э_{ту}=Q^0_{ту}-Q_т$,

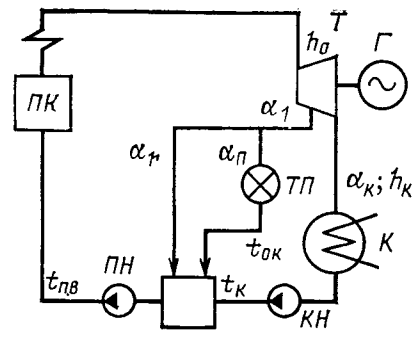


Рис. 5.16. Схема ТЭЦ с регенеративным подогревом питательной воды (одноступенчатый подогрев)

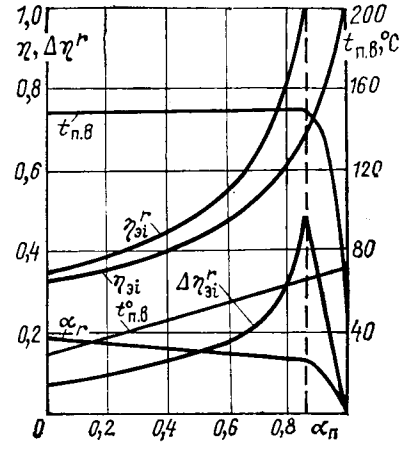


Рис. 5.17. Зависимость показателей ТЭЦ с регенеративным подогревом воды и без него от доли отпускаемого пара:

$\alpha_п$ и α_r — доли пара, отбираемого на внешнего потребителя и на регенерацию; $t_{п.в}$ и $t^0_{п.в}$ — температуры питательной воды и смеси конденсата турбины и обратного конденсата от внешнего потребителя; $\eta_{эi}$ — внутренний КПД турбоустановки по производству электроэнергии без регенерации; $\eta^r_{эi}$ — то же с регенерацией; $\Delta\eta^r_{эi}$ — относительное повышение КПД по производству электроэнергии вследствие регенерации

где $Q_т$ — расход теплоты на внешнего потребителя.

Сказанное выше иллюстрируют рис. 5.16, на котором показана схема ТЭЦ с одноступенчатой регенерацией, и рис. 5.17, где дано относительное повышение КПД теплофикационной турбоустановки по производству электроэнергии $\eta_{эi}$ в зависимости от доли отбора пара на внешнего потребителя $\alpha_п$.

Регенеративные отборы пара не должны вытеснять необходимые отборы пара на внешнего потребителя. Расчетный пропуск свежего пара через теплофикационную турбину выбирают с учетом регенеративных отборов. При построении графиков рис. 5.17 принято условно, что увеличение отбора пара на внешнего потребителя сверх значения $\alpha_п=1-\alpha_r$ (где доля отбора пара на регенерацию $\alpha_r\approx0{,}13$) в данном случае происходит за счет уменьшения регенеративного отбора и подогрева питательной воды от нормального значения ее $t_{п.в}$ до

температуры обратного конденсата $t_{о.к}$ (при $\alpha_п=\alpha_{о.к}=1$, $\alpha_к=0$). В соответствии с этим относительное повышение КПД турбоустановки снижается от своего максимального значения до нуля.

При определении удельной выработки электроэнергии на тепловом потреблении учитывают выработку не только на внешнем, но и на внутреннем потреблении теплоты при подогреве воды регенеративными отборами обратного конденсата и добавочной воды, кВт·ч/Дж, а именно:

$$э=(Э_т+Э_{г}^{о.к}+Э_{г}^{д.в})/Q_т.$$

Указанная выработка электроэнергии относится при этом к внешнему тепловому потреблению $Q_т$, так как теплота регенерации сохраняется в цикле.

Как и на конденсационных электростанциях, на ТЭЦ применяют многоступенчатый регенеративный подогрев воды ($z=6\div9$), причем теплофикационные регулируемые отборы используются, кроме внешнего потребления, также и на регенеративный подогрев конденсата и питательной воды.

Таким образом, регенеративный подогрев при использовании регулируемых отборов разделяется на следующие интервалы: от конденсатора турбины до ступени, соответствующей регулируемому отбору; между регулируемыми отборами — нижним и последующим более высокого давления; от верхнего регулируемого отбора до верхней ступени регенеративного подогрева воды. Температуры конечного подогрева питательной воды на ТЭЦ и КЭС с одинаковыми параметрами и расходом пара совпадают или близки.

Как и для КЭС, для ТЭЦ температуру конечного подогрева воды определяют на основе соответствующих технико-экономических расчетов.

Известные значения давления пара (в верхнем и регулируемых отборах) образуют границы интервалов, внутри которых распределение подогрева между ступенями подчиняется тем же закономерностям, что и на КЭС, т. е. геометрической или арифметической прогрессиям.

При наличии промежуточного перегрева (турбины Т-250-240, Т-180-130) подогрев между «холодной» и «горячей» ступенями распределяют, пользуясь приведенными выше соотношениями, методом аналитическим или «индифферентной» точки. Далее приводится вывод, показывающий возможность такого распределения

Распределение регенеративного подогрева воды на ТЭЦ. При определении оптимального распределения регенеративного подогрева воды на ТЭЦ необходимо выполнить условия

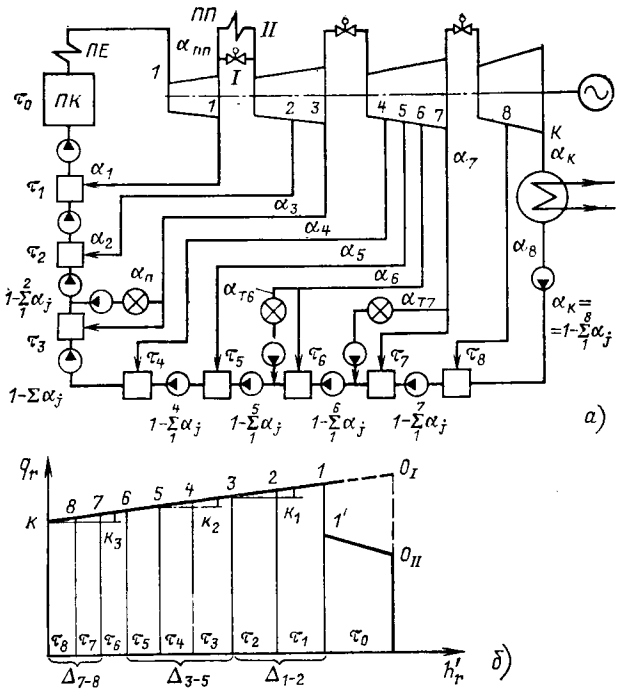


Рис. 5.18. Схема ТЭЦ с регенеративным подогревом воды (*а*) и зависимость q_r пара отборов теплофикационной турбины от этальпии насыщенной воды (*б*)
I — многоступенчатый подогрев без промежуточного перегрева пара; *II* — то же с промежуточным перегревом пара,

постоянства мощности турбоустановки N и количества отпускаемой внешнему потребителю теплоты $Q_т$, т. е. должно быть: $N=\text{const}$ и $Q_т=\text{const}$.

При отсутствии промежуточного перегрева пара и постоянной конечной температуре подогрева питательной воды $t_{п.в}=\text{const}$ расход теплоты на турбоустановку $Q_{ту}$ пропорционален расходу пара на турбину D_0.

Значение D_0 в данном случае удобно определить по уравнению

$$N_i = D_0\Delta H_к - \sum_{j=1}^{z} D_j\Delta H_j, \qquad (5.27)$$

где D_j — отбор пара; $\Delta H_к$ — теплоперепад конденсационного потока пара; ΔH_j — теплоперепад, недоработанный паром j-го отбора.

Значения отборов пара с давлением выше регулируемого зависят от подогрева τ_j и теплоты, отдаваемой греющим паром q_j, а с давлением регулируемого отбора и более низким — кроме того, от отбора пара $D_т$ на внешнего потребителя (рис. 5.18,*а*). Если принять линейную зависимость q_j от $\Sigma\tau_j$ (рис. 5.18,*б*) — линия kO_I, то ΔH_j можно также выразить в функции искомых величин подогрева воды в отдельных ступенях τ_j. Тогда минимизируемая

В § 3 мы получили систему (2.34) дифференциальных уравнений, которым должно удовлетворять поле $\mathbf{f}$. Она содержит три функции: $\operatorname{div}\mathbf{f}$, $\operatorname{rot}\mathbf{f}$ и δ; все они теряют смысл там, где имеются необъемные массы. У точечных и линейных масс поведение поля определяется его особенностями, которые выражаются формулами (2.92)—(2.93′). У поверхностей, на которых находятся простые и двойные слои, вместо уравнений системы (2.34) применимы равенства (2.85) и (2.89), которые следует рассматривать как поверхностные формы (вырождения) дифференциальных уравнений поля. Аналогично можно равенство (2.89′) считать поверхностной формой уравнения (2.46).

§ 8. РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ СТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ В ВАКУУМЕ

В первое уравнение системы (2.34), определяющей поле $\mathbf{f}$, плотность δ масс, создающих это поле, не входит; это однородное уравнение одинаково для всех возможных полей $\mathbf{f}$ (порождаемых различными совокупностями масс). Функция $\delta(a)$ входит в состав второго уравнения системы (2.34) и влияет на его решение. Это уравнение содержит три неизвестные компоненты поля, и поэтому оно в общем случае недостаточно для расчета поля (расчеты поля, о которых шла речь в § 6, облегчаются благодаря симметрии масс). Но согласно решению (2.35) уравнения $(2.34)_1$ поле $\mathbf{f}$ является потенциальным, и вместо системы (2.34) мы получили уравнение (2.46) для потенциала U поля $\mathbf{f}$. Решив это уравнение, мы найдем функцию U и сможем определить компоненты поля $\mathbf{f}$ по любым направлениям.

I. **Условия единственности.** В общем случае поле $\mathbf{f}$ в области V создают массы, находящиеся как внутри, так и вне этой области. Поля, получающиеся в области V при всевозможных совокупностях масс вне этой области, соответствуют уравнению (2.46) с одной и той же функцией $\delta(a)$ в правой части; их потенциалы являются его частными решениями. Таким образом, в соответствии со сказанным в § 7 первой главы уравнение (2.46) так же, как система (2.34), определяет поле в области V с точностью до поля, создаваемого любыми массами, находящимися вне области V, т. е. до произвольного частного решения уравнения Лапласа. Но в разд. I, § 8 главы первой была изложена теорема единственности, на основании которой можно среди множества различных функций, являющихся частными решениями уравнения (2.46), узнать ту, которая представляет собой потенциал U определяемого поля $\mathbf{f}$. Отличающим ее признаком является то, что она (и только она) удовлетворяет совокупности дополняющих условий, которые, согласно теореме единственности, соответствующей уравнению (2.46), обеспечивают однозначность решения этого уравнения. От изложенного в разд. I, § 8 главы первой применительно к уравнению $(1.96)_1$, перейти к уравнению (2.46) потенциала изучаемого нами здесь поля $\mathbf{f}$ можно подстановками

$$\mathbf{M}=\mathbf{f},\quad w^v(a)=4\pi\delta(a),\quad \Lambda=1,\quad Q=-4\pi m_V, \tag{2.94}$$

из которых четвертая подстановка относится к условию III типа и соответствует формуле $(2.43)_3$.

В рассматриваемом поле $\mathfrak{f}$ особыми поверхностями являются поверхности S, на которых имеются простые или двойные слои. В соответствии с (2.82) и (2.89′) в условиях (1.110′) надо положить

$$\zeta_{12}(p)=4\pi\eta_{12}(p),\quad \varphi_{12}(p)=-4\pi\sigma(p),\quad \Lambda_1=\Lambda_2=1. \tag{2.94′}$$

Особыми точками и линиями в рассматриваемом поле $\mathfrak{f}$, согласно изложенному в § 7, являются точки, в которых имеются точечные массы или диполи, и линии, несущие линейные массы или линейные диполи. У этих точек и линий применяются условия (2.92)—(2.93′) для U.

Таким образом, для определения потенциала U поля $\mathfrak{f}$ в области V надо знать функцию δ в этой области и значения, которые принимает на границе $S[V]$ области V потенциал U или его нормальная производная или же (если $S[V]$ — эквипотенциальная поверхность) значение потока вектора $\operatorname{grad} U$ через поверхность $S[V]$. Кроме того, надо (внутри области V) знать значения: функций σ и η во всех точках каждой особой поверхности, функций λ и η^{λ} во всех точках каждой особой линии и величин m_q и $\mathbf{p}$ во всех особых точках.

Вторым или третьим из указанных краевых условий (на $S[V]$) потенциал U определяется только с точностью до постоянного слагаемого, которое, однако, обращается в нуль при задании значения U хотя бы в одной точке области V или ее границы $S[V]$.

К замечаниям, приведенным в разд. II, § 8 главы первой, надо для рассматриваемого здесь поля добавить следующие.

1. Если областью V является все пространство, а массы имеются только на конечных расстояниях, то указанные в замечании 6, § 8 главы первой условия на бесконечности в данном случае сводятся к условию (2.47) «регулярности» функции U на бесконечности. Но если алгебраическая сумма этих масс равна нулю, а дипольный момент $\mathbf{M}_{\mathfrak{s}}$ их совокупности отличен от нуля, то в (2.47) надо вместо $m_{\mathfrak{s}}L_{oa}^{-1}$ подставить $(\mathbf{L}_{oa}\mathbf{M}_{\mathfrak{s}})L_{oa}^{-3}$. Если массы, создающие поле, простираются до бесконечности, то в зависимости от их распределения в далеких областях пространства получаем различные условия на бесконечности.

2. Если в области V масс нет, то поле в ней определяется полностью краевыми условиями на поверхности $S[V]$.

3. Если на границе $S[V]$ области V потенциал U или его нормальная производная $\partial U/\partial n$ обращается в нуль, а внутри этой области масс нет, то в любой ее точке соответственно $U=0$ или $\nabla U=0$.

II. **Формулы Грина.** Пусть

$$\mathbf{X}(q)=\varphi(q)\,\nabla\psi(q)-\psi(q)\,\nabla\varphi(q), \tag{2.95}$$

где $\varphi(q)$ и $\psi(q)$ — функции точки q, ограниченные и непрерывные вместе со своими первыми производными в области V. При-

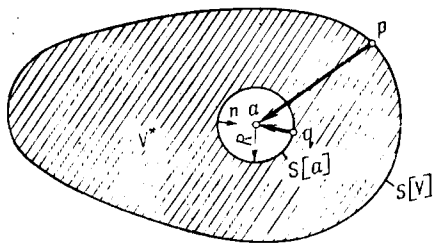


Рис. 27. Сферическая поверхность $S[a]$, выделяющая окрестность точки a из области V

меняя к вектору $\mathbf{X}$ в области V теорему Остроградского (1.30), получаем часто применяемые формулы Грина

$$\oint\limits_{S[V]} \varphi(\nabla\psi\, d\mathbf{S}) - \oint\limits_{S[V]} \psi(\nabla\varphi\, d\mathbf{S}) = \int\limits_V (\varphi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\varphi)\, dV,$$
$$\oint\limits_{S[V]} \frac{\partial\psi}{\partial n}\, dS = \int\limits_V \nabla^2\psi\, dV, \qquad (2.95')$$

из которых вторая получается при $\nabla\varphi=0$.

Положим в (2.95) $\varphi(q)=L_{qa}^{-1}$, где a — точка, находящаяся в области V. При этом мы нарушим принятое выше (и необходимое для применения теоремы Остроградского) условие непрерывности, так как при $q\to a$ $L_{qa}^{-1}\to\infty$. Но мы выделим точку a из области V, окружив ее сферической поверхностью «безопасности» $S[a]$ с центром в этой точке и с радиусом R (рис. 27). Для остающейся области V^*, расположенной между поверхностями $S[V]$ и $S[a]$, при $\varphi(q)=L_{qa}^{-1}$ получаем из $(2.95')_1$

$$\oint\limits_{S[V^*]} \frac{1}{L_{qa}}(\nabla\psi\, d\mathbf{S}) - \oint\limits_{S[V^*]} \psi\left(\overset{q}{\nabla}\left(\frac{1}{L_{qa}}\right) d\mathbf{S}\right) = \int\limits_{V^*} \frac{1}{L_{qa}}\nabla^2\psi dV - \int\limits_{V^*} \psi\overset{q}{\nabla}{}^2\frac{1}{L_{qa}}\, dV, \qquad (2.95'')$$

где $S[V^*]$ — совокупность поверхностей $S[V]$ и $S[a]$, ограничивающая область V^*.

Интегрируя отдельно по этим поверхностям и принимая во внимание, что согласно (1.127′) $\nabla^2 L_{qa}^{-1}=0$ в области V^*, получаем

$$\oint\limits_{S[V]} \frac{1}{L_{qa}}\frac{\partial\psi}{\partial n}\, dS + \oint\limits_{S[a]} \frac{1}{L_{qa}}\frac{\partial\psi}{\partial n}\, dS - \oint\limits_{S[V]} \psi\left(\overset{q}{\nabla}\frac{1}{L_{qa}}\, d\mathbf{S}\right) -$$
$$- \oint\limits_{S[a]} \psi\left(\overset{q}{\nabla}\frac{1}{L_{qa}}\, d\mathbf{S}\right) = \int\limits_{V^*} \frac{\nabla^2\psi}{L_{qa}}\, dV; \qquad (2.96)$$

здесь n — нормаль к поверхности $S[V^*]$, направленная наружу относительно области V^*.

Учитывая, что согласно (1.127)$_2$ $\overset{q}{\nabla} L_{qa}^{-1} = \mathbf{L}_{qa} L_{qa}^{-3}$, а в точке q, находящейся на поверхности $S[a]$, $\mathbf{L}_{qa} = -\mathbf{1}_R R$, имеем

$$\oint_{S[a]} \psi \left(\overset{q}{\nabla} \frac{1}{L_{qa}} \mathbf{dS} \right) = \oint_{S[a]} \psi \frac{(\mathbf{L}_{qa} \mathbf{dS})}{L_{qa}^3} = \frac{1}{R^2} \oint_{S[a]} \psi \, dS = \frac{S_a}{R^2} \psi_a^{\text{ср}} = 4\pi \psi_a^{\text{ср}}, \quad (2.97)$$

$$\oint_{S[a]} \frac{1}{L_{qa}} \frac{\partial \psi}{\partial n} dS = \frac{1}{R} \oint_{S[a]} \frac{\partial \psi}{\partial n} dS = -\frac{1}{R} \left(\frac{\partial \psi}{\partial R} \right)_a^{\text{ср}} S_a = -4\pi R \left(\frac{\partial \psi}{\partial R} \right)_a^{\text{ср}}, \quad (2.97')$$

где $S_a = 4\pi R^2$ — площадь сферической поверхности $S[a]$, а $\psi^{\text{ср}}{}_a$ и $(\partial\psi/\partial R)^{\text{ср}}{}_a$ — средние значения величин ψ и $\partial\psi/\partial R$ на этой поверхности.

При $R \to 0$, т. е. когда поверхность $S[a]$ стягивается к точке a, имеем

$$\psi_a^{\text{ср}} \to \psi(a), \quad R \left(\frac{\partial \psi}{\partial R} \right)_a^{\text{ср}} \to 0, \quad V^* \to V. \quad (2.97'')$$

Следовательно, полагая $R \to 0$, получаем из (2.96) основную формулу Грина:

$$\oint_{S[V]} \frac{1}{L_{qa}} (\nabla \psi \, \mathbf{dS}) - \oint_{S[V]} \psi \left(\overset{q}{\nabla} \frac{1}{L_{qa}} \mathbf{dS} \right) - \int_V \frac{\nabla^2 \psi}{L_{qa}} dV = 4\pi \psi(a). \quad (2.98)$$

Полагая $\psi = U$, где U — функция, удовлетворяющая уравнению (2.46) в области V, и обозначая точку q на поверхности $S[V]$ через p, получаем из (2.98)

$$U(a) = \int_V \frac{\delta(q)}{L_{qa}} dV + \frac{1}{4\pi} \oint_{S[V]} \frac{1}{L_{pa}} \frac{\partial U}{\partial n}(p) \, dS + \frac{1}{4\pi} \oint_{S[V]} U(p) \, d\omega, \quad (2.99)$$

где

$$d\omega = \frac{(\mathbf{L}_{ap} \mathbf{dS})}{L_{ap}^3} = -\frac{(\mathbf{L}_{pa} \mathbf{dS})}{L_{pa}^3} = -\left(\lim_{q \to p} \overset{q}{\nabla} \frac{1}{L_{qa}} \mathbf{dS} \right) = -\lim_{q \to p} \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{L_{qa}} dS \quad (2.99')$$

— угол видимости элемента dS поверхности $S[V]$ из точки a, положительный, когда к точке a обращена вутренняя сторона этого элемента.

Мы получили выражение (2.99) для решения $U(a)$ уравнения Пуассона в области V (для гармонической функции, если убрать объемный интеграл). В частности, формула (2.99) применима к потенциалу U поля $\mathbf{f}$ в области V при любых массах в пространстве, когда в этой области нет необъемных масс, а на поверхности $S[V]$ нет точечных и линейных масс. Формула (2.99) позволяет определить этот потенциал, не зная масс, находящихся на поверхности $S[V]$ и вне ее. Данные об этих массах заменяют значения на поверхности $S[V]$ потенциала и его нормальной производной.

III. **Функция Грина.** Согласно изложенному в разд. I и в первой главе решение $U(a)$ уравнения Пуассона (2.46) полностью определяется в области V значениями функций $\delta(q)$ и $U(p)$. Поэтому уместно попытаться исключить из выражения для $U(a)$ производную $\partial U/\partial n$. С этой целью вернемся к формуле $(2.95')_1$ и подставим в нее в качестве функции φ вместо L_{qa}^{-1} функцию Грина (функцию источника):

$$G(a, q) = \frac{1}{L_{qa}} + h(a, q), \tag{2.100}$$

где $h(a, q)$ — функция, удовлетворяющая условиям

$$\nabla^2 h(a, q) = 0, \quad h(a, p) = -\frac{1}{L_{pa}}. \tag{2.100'}$$

Здесь так же, как и в (2.95) — (2.98), аргументом считаем точку q, а через p обозначаем эту точку, когда она попадает на поверхность $S[V]$. Точка a является параметром функции Грина.

Из (2.100), (2.100') следует, что

$$\nabla^2 G(a, q) = 0 \text{ при } L_{qa} > 0, \; G(a, p) = 0, \tag{2.101}$$

$$G(a, q) \to \frac{1}{L_{qa}} \text{ при } L_{qa} \to 0. \tag{2.101'}$$

Условие (2.101') следует из того, что слагаемое h ограничено во всей области V, и поэтому им можно пренебречь сравнительно с L_{qa}^{-1} при $L_{qa} \to 0$. Функция $G(a, q)$ полностью определяется поверхностью $S[V]$; каждой поверхности $S[V]$ соответствует своя функция $G(a, q)$ точек a и q.

Можно доказать, что функция $G(a, q)$ симметрична относительно точек a и q:

$$G(a, q) = G(q, a), \; h(a, q) = h(q, a) \tag{2.101''}$$

и что $G > 0$ в области V, кроме ее границы, на которой $G = 0$.

Итак, полагаем в $(2.95')_1$ $\varphi = G(a, q)$ и получаем равенства $(2.95'')_1$, (2.96) с заменой функции L_{qa}^{-1} функцией $G(a, q)$, причем по-прежнему второй член правой части (2.95'') согласно $(2.101)_1$ обращается в нуль, а в левой части (2.96) при $R \to 0$ четвертый и второй члены стремятся соответственно к $-4\pi\psi(a)$ и к нулю в соответствии с (2.101'), (2.97) — (2.97''). Но согласно $(2.101)_2$ первый член левой части (2.96) также исчезает. Следовательно, вместо (2.99) получаем

$$U(a) = \int_V G(a, q)\,\delta(q)\,dV - \frac{1}{4\pi} \oint_{S[V]} \frac{\partial G}{\partial n}(a, p)\,U(p)\,dS, \tag{2.102}$$

где $\frac{\partial G}{\partial n}(a, p) < 0$, а нормаль n направлена наружу.

Полагая в (2.102) $\delta=0$, получаем для любой функции U, гармонической в области V, выражение

$$U(a)=-\frac{1}{4\pi}\oint\limits_{S[V]}\frac{\partial G}{\partial n}(a,\ p)U(p)\,dS \qquad (2.102')$$

через ее значения на границе области[1] V.

При $U(p)=0$ имеем из (2.99)

$$U(a)=\int\limits_{V} G(a,\ q)\,\delta(q)\,dV. \qquad (2.102'')$$

Из изложенного следует, что, располагая функцией Грина для некоторой поверхности $S[V]$, мы для области V имеем возможность найти решение уравнения Пуассона — Лапласа с краевым условием первого типа и решить задачу Дирихле (см. замечание 14 в § 8 главы первой). Но, чтобы для заданной поверхности $S[V]$ найти функцию Грина, необходимо подобрать такую функцию $h(a,\ q)$, которая удовлетворяет требованиям (2.100'), т. е. уравнению Лапласа в области V и краевому условию $h(a,\ p)=-L_{ap}^{-1}$ на $S[V]$. Следовательно, задача построения функции Грина для какой-либо поверхности $S[V]$ сводится к задаче Дирихле с определенным видом краевого условия первого типа.

Выше шла речь о внутренней задаче — определении $U(a)$ внутри поверхности $S[V]$. Можно также построить функцию Грина $G'(a,\ q)$ для внешней области V', расположенной вне поверхности $S[V]$:

$$G'(a,\ q)=\frac{1}{L_{qa}}+h'(a,\ q).$$

Функции G' и h' определяются формулами (2.100')—(2.101') с добавлением требования регулярности функции h' на бесконечности. Полагая, что U — функция, регулярная на бесконечности и гармоническая в области V', можно получить для $U(a)$ в этой области выражение (2.102') с заменой функции G функцией G' и обращением знака перед правой частью или направления нормали n.

Для выяснения физического смысла функции Грина и ее слагаемого $h(a,\ q)$ допустим, что в точке a внутри области V находится точечная масса m, а вне этой области, в частности на ее границе $S[V]$, имеются «наружные» массы, распределенные так, что в любой точке p границы $S[V]$ потенциал $U^{\text{нр}}$ их поля $\mathfrak{f}^{\text{нр}}$ равен с обратным знаком потенциала U^{a} поля $\mathfrak{f}^{a}$ массы m. Совокупность наружных масс будем обозначать $m_{\text{нр}}$. В точке q области V имеем потенциал $U(q)=U^{a}(q)+U^{\text{нр}}(q)$. Ясно, что функция $U^{\text{нр}}(q)m^{-1}$ удовлетворяет условиям (2.100'), а функция $U(q)m^{-1}$—

---

[1] Для функции $U(a)$, гармонической в области V, можно получить вместо (2.102') выражение через значения нормальной производной от U на поверхности $S[V]$. Для этого вместо функции Грина применяют аналогичную ей функцию Неймана.

условиям (2.101), (2.101′). Следовательно, эти функции совпадают с $h(a, q)$ и $G(a, q)$:

$$G(a, q)m = U(q),\ U(q) = U^{a}(q) + U^{\text{нр}}(q),$$
$$U^{a}(q) = mL_{aq}^{-1},\ U^{\text{нр}}(q) = mh(a, q). \qquad (2.103)$$

Таким образом, функция Грина — это отнесенный к единице массы m потенциал $U(q)$ поля масс m и $m_{\text{нр}}$ при распределении массы $m_{\text{нр}}$, удовлетворяющем условию $U^{\text{нр}}(p) = -mL_{ap}^{-1}$ на поверхности $S[V]$. А можно ли удовлетворить этому условию для произвольно заданной поверхности $S[V]$? Возможна ли хотя бы одна такая (так распределенная) масса $m_{\text{нр}}$? Иначе говоря, существует ли функция $G(a, q)$, удовлетворяющая условиям (2.100) — (2.101′)? На этот вопрос утвердительный ответ нетрудно получить на основе электростатической интерпретации функции Грина (см. разд. V, § 7 главы третьей). Там будет показано, что массу $m_{\text{нр}}$ можно представить в виде простого слоя на поверхности $S[V]$. Полю этого слоя соответствует слагаемое $h(a, q)$ функции Грина.

IV. **Решение уравнения Пуассона.** Здесь несколько дополним сказанное в разд. II и III о решении уравнения (2.46) и перейдем к случаю, когда в области V имеется особая точка (точечная масса).

1. Сопоставляя члены правой части (2.99) с полученными в предыдущих параграфах выражениями для потенциала U поля f, через массы, создающие это поле, мы видим, что любое решение U уравнения Пуассона (2.46) для области V может быть представлено суммой потенциалов трех полей f, создаваемых объемной массой с плотностью δ в области V, простым слоем с плотностью σ на поверхности $S[V]$ и двойным слоем с плотностью дипольных моментов η_{ie} на той же поверхности, причем

$$\sigma(p) = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial U}{\partial n}(p),\quad \eta_{ie}(p) = -\frac{1}{4\pi}U(p).$$

Очевидно, что прибавив (с плюсом или минусом) к правой части (2.99) какую-либо функцию, гармоническую в области V, получим опять решение уравнения Пуассона (2.46). Но два последних члена правой части (2.99), очевидно, удовлетворяют уравнению Лапласа в области V, поэтому, отбросив их, получим функцию, удовлетворяющую уравнению (2.46). Иначе говоря, функция

$$U(a) = \int_{V} \frac{\delta(q)}{L_{qa}}\,dV \qquad (2.102''')$$

также является решением уравнения Пуассона. Если $\delta = 0$ вне ограниченной со всех сторон области V, то можно в (2.102‴) распространить интегрирование на все пространство [1], так как в

[1] Выражение (2.102‴) получается непосредственно из (2.99), так как в этом случае второй и третий интегралы в (2.99) обращаются в нуль. Чтобы в этом убедиться, достаточно заменить в них подынтегральные функции их средними по $S[V]$ значениями и взять в качестве $S[V]$ сферическую поверхность достаточно большого радиуса ([1], с. 170).

точках q, в которых $\delta=0$, подынтегральная функция в (2.102‴) равна нулю. В этом случае решение (2.102‴) регулярно на бесконечности, а этого достаточно для его единственности. Следовательно для случая, когда $\delta=0$ вне ограниченной со всех сторон области V, выражение (2.102‴) является единственным решением уравнения Пуассона, удовлетворяющим условию регулярности на бесконечности.

Совпадающее с (2.102‴) выражение $(2.44'')_2$ для потенциала U было получено на основе перехода от поля точечной массы к полю элементарной объемной массы. Приведенный здесь вывод весьма важного решения (2.102‴) уравнения (2.46) отличается большей строгостью и большей общностью. Это позволит нам сослаться на выражение $(2.44'')_2$ при выводе уравнения (5.18′) для функции, отличающейся по физическому смыслу от потенциала U поля $\mathfrak{f}$.

2. В области V, в которой имеется необъемная масса, уравнение Пуассона (2.46) для потенциала U поля $\mathfrak{f}$ теряет смысл. Но допустим, что в области V функция δ отлична от нуля только в очень малой окрестности V_ε точки q, где δ имеет очень большое значение δ_ε. При не слишком малых значениях L_{aq} можно в выражении для $U(a)$ заменить эту объемную массу равной ей точечной массой $m=V_\varepsilon\delta_\varepsilon$. Заменяя среднее по области V_ε значение функции G ее значением в точке q, получаем при $U(p)=0$ согласно (2.102″) [1]

$$U(a)=mG(a,\ q). \qquad (2.103')$$

Поэтому можно сказать, что решение (2.102″) для случая точечной массы принимает вид (2.103′), а функция $G(a,\ q)$ является решением уравнения Пуассона при замене m единицей. Ниже эти выводы будут представлены в более развитом виде.

V. **Применение дельта-функции.** Если в области V $\delta=0$ за исключением одной из ее точек q, в которой находится точечная масса m, то в этой области согласно изложенному в предыдущих параграфах потенциал $U(a)$ определяется как функция, удовлетворяющая уравнению Лапласа в области V без ее элемента, содержащего точечную массу, условию $U(a)=mL_{qa}^{-1}$ у этой точки и условию на поверхности $S[V]$. Но можно в этом случае так же, как в случае объемной массы в области V, получить уравнение потенциала для всей области V, замещающее уравнение Лапласа вместе с условием у точечной массы. Для получения такого уравнения применяют дельта-функцию Дирака, которую будем обозначать $\delta_д$.

Пусть V_ε — малая окрестность точки q, ограниченная сферической поверхностью $S[V_\varepsilon]$ с радиусом R_ε и с центром в точке q, V — область, содержащая окрестность V_ε, а q' — точка, пробегающая область V. Положение точки q' будем определять относи-

[1] Меняя ролями точки a и q, получаем из $(2.103)_1$: $U(a)=mG(q,\ a)$, но согласно (2.101″) это совпадает с (2.103′).

тельно точки q вектором $\mathbf{L}_{qq'}$. Определить нужную нам трехмерную дельта-функцию можно так:

$$\delta_{\text{Д}}(L_{qq'}) = \lim_{R_\varepsilon \to 0} \begin{cases} 0 & \text{при } L_{qq'} > R_\varepsilon, \\ V_\varepsilon^{-1} & \text{при } L_{qq'} < R_\varepsilon, \end{cases} \qquad V_\varepsilon = \frac{4}{3}\pi R_\varepsilon^3. \tag{2.104}$$

Согласно (2.104) $\delta_{\text{Д}}(L_{qq'}) = \delta_{\text{Д}}(L_{q'q})$; при $L_{qq'} > 0$ $\delta_{\text{Д}}(L_{qq'}) = 0$, а при $L_{qq'} \to 0$ $\delta_{\text{Д}}(L_{qq'}) \to \infty$, как V_ε^{-1}, но

$$\int_V \delta_{\text{Д}}(L_{qq'})\, dV' = 1, \quad \text{а} \quad \int_V F(q')\, \delta_{\text{Д}}(L_{qq'})\, dV' = F(q) \tag{2.104'}$$

при условии, что функция $F(q')$ ограничена в области V. Если функция $F(q') \to \infty$ в некоторой точке области V, то для применимости $(2.104')_2$ достаточно, чтобы интеграл от функции $F(q')$ по окрестности этой точки имел ограниченное значение. Окрестность V_ε можно взять произвольной формы, причем в (2.104) надо вместо $R_\varepsilon \to 0$ писать $V_\varepsilon \to 0$, а вместо неравенств указать положения точки q': вне окрестности V_ε и внутри нее [1].

Пусть m — масса, распределенная в области V с ограниченной плотностью $\delta(q)$, где q — любая точка области V. Тогда при любых массах вне области V потенциал U в каждой точке q этой области удовлетворяет уравнению $\nabla^2 U(q) = -4\pi\delta(q)$. Вспомогательное обозначение q' заменяем (там, где это можно) обычным обозначением q, имея в виду, что q' — любая точка области V. Стянем массу m в окрестность V_ε одной из точек q области V. Взяв окрестность V_ε этой точки достаточно малой, будем полагать $m = \delta V_\varepsilon$ (т. е. заменим среднее по V_ε значение функции δ значением δ в точке q). При $V_\varepsilon \to 0$ получим в точке q $\delta \to \infty$ как $mV^{-1}{}_\varepsilon$ при $V_\varepsilon \to 0$, а в остальных точках q области V будем иметь $\delta = 0$; интеграл же функции δ по области V будет оставаться равным m. Теперь заметим, что, согласно (2.104) и $(2.104')$, произведение $m\delta_{\text{Д}}(L_{qq'})$ ведет себя так же, как δ в области V, из которой масса m стянута в точку q. В этой точке оно

---

[1] Ограничивая окрестность V_ε тремя парами координатных поверхностей, можно выразить дельта-функцию через разности координат точек q и q', определяющие компоненты вектора $\mathbf{L}_{qq'}$ по координатным направлениям.

В одномерном случае имеем аналогично (2.104), $(2.104')_1$

$$\delta_{\text{Д}}(x' - x) = \lim_{\alpha \to 0} \begin{cases} 0 & \text{при } |x' - x| > \alpha, \\ \dfrac{1}{2\alpha} & \text{при } |x' - x| < \alpha. \end{cases}$$

$\delta_{\text{Д}}(x' - x) = 0$ при $x' \neq x$; $\delta_{\text{Д}}(x' - x) \to \infty$ при $x' \to x$;

$$\int_a^b \delta_{\text{Д}}(x' - x)\, dx' = 1 \quad (a < x < b),$$

где x и x' — координаты точек q и q' оси x; 2α — длина малого отрезка этой оси со средней точкой q.

равно $mV^{-1}{}_{\varepsilon}$, в остальных точках — нулю; в результате его интегрирования по V получаем m. Следовательно, это произведение есть предельное выражение для функции δ в области V при стягивании массы m к какой-либо точке q этой области. Обозначая это предельное выражение через δ^{τ}, получаем, согласно $(2.104')_1$, в соответствии с (2.3)

$$\int_V \delta^{\tau} dV = m, \text{ где } \delta^{\tau} = m\delta_{\text{д}}(L_{qq'}) \qquad (2.104'')$$

— функция, определяющая распределение массы в области V. Она аналогична функции δ и условно ее можно назвать объемной плотностью массы в области V, в которой имеется только точечная масса.

Подставляя в (2.46) δ^{τ} вместо δ, получаем предельный вид уравнения Пуассона, соответствующий случаю, когда масса m стягивается к какой-либо из точек q области V:

$$\nabla^2 U = -4\pi\delta^{\tau}, \text{ т. е. } \nabla^2 U = 4\pi m\delta_{\text{д}}(L_{qq'}). \qquad (2.105)$$

Это неоднородное уравнение (Пуассона) для всей области V заменяет однородное уравнение (Лапласа) для этой области без ее точки q и условие $U(a) = m/L_{qa}$ у этой точки. Уравнение (2.105) должно быть дополнено условием на поверхности $S[V]$.

Учитывая изложенное в разд. I, § 8 первой главы, можно утверждать, что условиями

$$\nabla^2 U = 0 \text{ при } L_{qa} > 0,\ U = 0 \text{ на } S[V],$$
$$U \to m/L_{qa} \text{ при } L_{qa} \to 0 \qquad (2.104''')$$

однозначно определяется в области V потенциал $U(a)$ для случая, когда в точке q области V находится точечная масса m, а на границе этой области $U = 0$. Из сравнения $(2.104''')$ с условиями (2.101), (2.101′) для функции $G(a, q)$ следует, что функция Грина совпадает с функцией U/m, т. е. с потенциалом в точке a поля единичной точечной массы, находящейся в точке q, при $U = 0$ на $S[V]$. Следовательно, уравнению (2.105) для U должно соответствовать для функции G уравнение

$$\nabla^2 G = -4\pi\delta_{\text{д}}(L_{qq'}). \qquad (2.105')$$

Аналогично с помощью двумерной дельта-функции можно получить выражение для объемной плотности δ^{λ} в случае линейной массы. Выражение для объемной плотности δ^{σ} в случае поверхностной массы можно получить с помощью одномерной дельта-функции. Применяя одномерную или двумерную дельта-функцию и плотность δ^{σ} или δ^{λ}, можно получить уравнение, аналогичное уравнению (2.105) для трехмерной области V, в которой задана поверхностная или линейная масса соответственно.

Здесь шла речь о вырождениях объемной массы в точечную, поверхностную или линейную. Могут также представлять интерес случаи точечных вырождений линейных и поверхностных масс и соответствующие этим случаям одномерный и двухмерный аналоги уравнения (2.105). В этих случаях получаются линейная и поверхностная плотности λ^{τ} и σ^{τ} и применимы одномерная и двухмерная дельта-функции соответственно.

Таким образом, функцию Грина $G(a, q)$ для поверхности $S[V]$ можно определить[1] как решение уравнения (2.105′) для области V, обращающееся в нуль на $S[V]$.

Подставляя в $(2.104')_2$ $F(q')=G(a, q')$, имеем

$$G(a, q)=\int_V G(a, q')\,\delta_{\text{Д}}(L_{qq'})\,dV'.$$

Умножая это равенство на m и применяя обозначение $(2.104'')_2$, получаем

$$mG(a, q)=\int_V G(a, q')\,\delta^{\text{т}}dV'.$$

В соответствии с (2.102″) имеем для случая точечной массы в точке q области V, на границе которой $U=0$,

$$U(a)=\int_V G(a, q')\,\delta^{\text{т}}dV'.$$

Сравнивая последние два равенства, получаем соотношение $U(a)=mG(a, q)$, на котором основывался наш переход от (2.105) к уравнению (2.105′) для $G(a, q)$. Это соотношение совпадает с равенством (2.103′), которое было получено ранее путем замены точечной массы объемной без формального перехода к дельта-функции.

При $L_{q'a}\to 0$ $G(a, q')\to L^{-1}_{q'a}$, но это не мешает применению $(2.104')_2$ к функции $G(a, q')$, так как объемный интеграл функции $L^{-1}_{q'a}$ по окрестности точки a имеет ограниченное значение. (См. сказанное в разд. I, § 7 о потенциале U поля f внутри объемной массы).

§ 9. ДОПОЛНЕНИЯ КО ВТОРОЙ ГЛАВЕ

I. **Соотношение между полями точечной массы и диполя.** Правую часть (2.51) можно рассматривать как приращение функции mL^{-1}_{qa}, соответствующее перемещению точки q по направлению l из положения q_1 в положение q_2 на расстояние dl. Следовательно, потенциал поля диполя

$$U^D=\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{m}{L_{qa}}\right)dl=\frac{\partial U^{\text{т}}}{\partial l}dl=(\overset{q}{\nabla}U^{\text{т}}\,\mathbf{dl}) \tag{2.106}$$

или

$$U^D=\frac{1}{m}(\mathbf{p}\overset{q}{\nabla}U^{\text{т}})=\frac{p}{m}\,\overset{q}{\operatorname{grad}}_p U^{\text{т}}=\frac{1}{m}(\mathbf{p}\overset{q}{\nabla})\,U^{\text{т}}, \tag{2.106′}$$

где $U^{\text{т}}=mL^{-1}_{qa}$ — потенциал поля точечной массы m, находящейся в точке q; U^D — потенциал поля, создаваемого диполем,

[1] Аналогично можно определить функцию Грина для уравнения $LU=-4\pi\delta$, где L — линейный n-мерный оператор; частными его видами являются операторы Лапласа ∇^2 и Даламбера $\Box^2$ (см. разд. II, § 5 главы шестой).

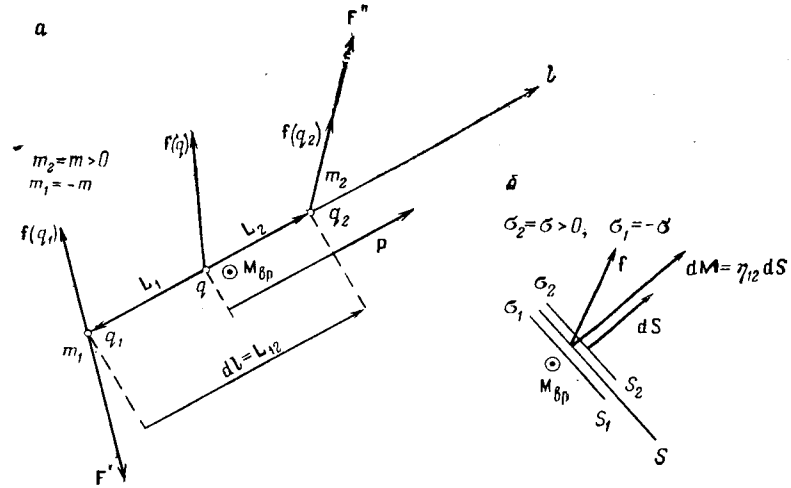


Рис. 28. Действие поля на диполь (*а*) и на элемент двойного слоя (*б*). Вектор $\mathbf{M}_{вр}$ нормален к плоскости рисунка и направлен в сторону читателя (точка в кружке)

находящимся в этой же точке и имеющим момент $\mathbf{p}=m\mathbf{dl}$; grad_p — компонента градиента по направлению момента диполя.

Таким образом, потенциал поля диполя, находящегося в точке q, можно определить как скалярное произведение его момента $\mathbf{p}$ на градиент по точке q потенциала U^{τ} поля $\mathbf{f}^{\tau}$, которое мы имели бы, если бы в этой точке вместо диполя была единичная положительная точечная масса. Согласно $(1.126')_3$ $\overset{q}{\nabla}(mL_{qa}^{-1})=-\overset{a}{\nabla}(mL_{qa}^{-1})=$ $=-\overset{a}{\nabla}U^{\tau}=\mathbf{f}^{\tau}$. Поэтому получаем из (2.106′) согласно (2.54)

$$U^D=\frac{1}{m}(\mathbf{pf}^{\tau})=(\mathbf{L}_{12}\mathbf{f}^{\tau})=L_{12}f^{\tau}{}_p. \tag{2.107}$$

Эта формула выражает потенциал поля диполя через напряженность $\mathbf{f}^{\tau}$ поля точечной массы [1].

II. **Действие поля на диполь и двойной слой.** Если диполь находится в поле $\mathbf{f}$, то на массы $m_1=-m$ и $m_2=m$ его полюсов действуют силы $\mathbf{F}'=-m\nu\mathbf{f}(q_1)$ и $\mathbf{F}''=m\nu\mathbf{f}(q_2)$, которые образуют главный вектор

$$\mathbf{F}=\mathbf{F}'+\mathbf{F}''=m\nu[\mathbf{f}(q_2)-\mathbf{f}(q_1)] \tag{2.108}$$

и пару с моментом (вращения) относительно центра диполя q:

$$\mathbf{M}_{вр}=[\mathbf{L}_1\mathbf{F}']+[\mathbf{L}_2\mathbf{F}'']=m\nu([\mathbf{L}_2\mathbf{f}(q_2)]-[\mathbf{L}_1\mathbf{f}(q_1)]), \tag{2.109}$$

[1] Для определенности можно в (2.107) считать $m=1$ А·м, $p=1$ А·м², $L_{12}=1$ м. Тогда U^D — потенциал поля диполя с единичным моментом, а $\mathbf{f}^{\tau}$ — напряженность поля единичной положительной точечной массы.

где L_1 и L_2 — расстояния точек q_1 и q_2 от точки q (рис. 28). Принимая во внимание, что разность $\mathbf{f}(q_2)-\mathbf{f}(q_1)$ представляет собой приращение вектора $\mathbf{f}$ на пути $dl=L_{12}$ по направлению l момента диполя, имеем

$$\mathbf{f}(q_2)-\mathbf{f}(q_1)=\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial l}\,dl=\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial p}\,L_{12}, \tag{2.110}$$

где $\partial\mathbf{f}/\partial p$ — производная от вектора $\mathbf{f}$ по направлению вектора $\mathbf{p}$.

Поэтому получаем из (2.108)

$$\mathbf{F}=m\nu L_{12}\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial p}=\nu p\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial p}=\nu(\mathbf{p}\nabla)\mathbf{f}. \tag{2.111}$$

Согласно (2.111) на диполь с моментом $\mathbf{p}$, параллельным полю $\mathbf{f}$, действует сила $\nu\mathbf{p}\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial l^{\mathrm{f}}}$, стремящаяся двигать его по прямой, коллинеарной полю, в сторону его усиления, сгущения силовых линий l^{f}.

Сила $\mathbf{F}=0$ при $\partial\mathbf{f}/\partial p=0$, т. е. когда вектор $\mathbf{f}$ не меняется по направлению момента диполя.

Подставляя в (2.109) $\mathbf{L}_2=\frac{1}{2}\mathbf{L}_{12}$, $\mathbf{L}_1=-\frac{1}{2}\mathbf{L}_{12}$, получаем

$$\mathbf{M}_{\mathrm{вр}}=\frac{\nu m}{2}[\mathbf{L}_{12}(\mathbf{f}(q_1)+\mathbf{f}(q_2))]=\nu m[\mathbf{L}_{12}\mathbf{f}^{\mathrm{ср}}]=\nu[\mathbf{p}\mathbf{f}^{\mathrm{ср}}],$$

где $\mathbf{f}^{\mathrm{ср}}$ среднее из значений $\mathbf{f}$ в точках q_1 и q_2. Но ввиду малости расстояния L_{12} имеем $\mathbf{f}_{\mathrm{ср}}=\mathbf{f}(q)$ и, следовательно,

$$\mathbf{M}_{\mathrm{вр}}=\nu[\mathbf{p}\mathbf{f}]. \tag{2.112}$$

Момент $\mathbf{M}_{\mathrm{вр}}$ обращается в нуль и, следовательно, диполь (с неподвижным центром q) находится в равновесии, когда угол $(\mathbf{p}, \mathbf{f})$ равен нулю или π. Но при $(\mathbf{p}, \mathbf{f})=\pi$ равновесие неустойчиво, так как пара сил, появляющаяся при отклонении диполя от этого положения на малый угол, вызывает увеличение этого угла. Согласно (2.112), поле $\mathbf{f}$ вращает диполь около оси, нормальной к плоскости, в которой лежат векторы $\mathbf{p}$ и $\mathbf{f}$, стремясь уменьшить угол отклонения вектора $\mathbf{p}$ от вектора $\mathbf{f}$.

Из изложенного выше следует, что поле $\mathbf{f}$ стремится упорядочить совокупность хаотически распределенных диполей, создавая в ней некоторое преимущественное направление дипольных моментов.

Выше мы считали, что массы m_1 и m_2, образующие диполь, жестко связаны между собой. Можно себе представить случаи, когда эта связь как бы упругая. Тогда поле раздвигает массы m_1 и m_2, увеличивая момент диполя. Если в отсутствие поля $L_{12}=0$ и $\mathbf{p}=0$, то под влиянием поля $\mathbf{f}$ получается сдвиг $\mathbf{L}_{12}$ и момент $\mathbf{p}$ по направлению поля тем бо́льшие, чем больше f.

Рассматривая элемент двойного слоя как диполь, можно к каждому элементу двойного слоя применить формулы (2.111) и

(2.112) с подстановкой $\mathbf{dM}=\eta_{12}\mathbf{dS}$ вместо $\mathbf{p}$. Таким образом, в соответствии с (2.112) имеем

$$\mathbf{dM}_{вр}=\nu\,[\mathbf{dM}\,\mathbf{f}]=\nu\eta_{12}\,[\mathbf{dS}\,\mathbf{f}],\quad \mathbf{M}_{вр}=\nu\int\limits_S \eta_{12}\,[\mathbf{dS}\,\mathbf{f}], \tag{2.113}$$

где $\mathbf{M}_{вр}$ и $\mathbf{dM}_{вр}$ — вращающие моменты, действующие на двойной слой и его элемент.

III. **Переход к полям Г, Е, Н.** От формул, полученных в этой главе для поля $\mathbf{f}$, нетрудно перейти, согласно (2.9) и (2.13), к полю определенной природы: **Г**, **Е**, **Н**. Так, например,[1]

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\mathbf{f}\vee\mathbf{H}=\frac{1}{4\pi}\,\mathbf{f}. \tag{2.114}$$

Вводя обозначения U_E и U_H для потенциалов полей **Е** и **Н**, имеем в соответствии с (2.35) и (2.114)

$$\mathbf{E}=-\nabla U_E,\ U_E=\frac{U}{4\pi\varepsilon_0}\vee\mathbf{H}=-\nabla U_H,\ U_H=\frac{U}{4\pi}. \tag{2.115}$$

Аналогично получаем для гравитационного поля и его потенциала U_Γ

$$\mathbf{\Gamma}=-\gamma\mathbf{f}=\nabla U_\Gamma,\quad U_\Gamma=\gamma U. \tag{2.115'}$$

Индексы при U впоследствии будем по возможности опускать. Уравнения (2.34), (2.85), $(2.89)_1$ и (2.46) с подстановкой (2.114) и $(2.115)_{2,4}$ имеют следующий вид:

$$\text{I. }\operatorname{rot}\mathbf{E}=0,\ \text{II. }\operatorname{div}\mathbf{E}=\frac{1}{\varepsilon_0}\delta_{эл},\quad \operatorname{Rot}\mathbf{E}=0,$$
$$\operatorname{Div}\mathbf{E}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sigma_{эл},\quad \nabla^2U_E=-\frac{1}{\varepsilon_0}\delta_{эл}. \tag{2.116}$$

$$\text{I. }\operatorname{rot}\mathbf{H}=0,\ \text{II. }\operatorname{div}\mathbf{H}=\delta_{мгн},\ \operatorname{Rot}\mathbf{H}=0, \tag{2.116'}$$
$$\operatorname{Div}\mathbf{H}=\sigma_{мгн},\ \nabla^2U_H=-\delta_{мгн}.$$

Смысл величин $\delta_{мгн}$, $\sigma_{мгн}$ в (2.116') будет уточнен в § 2 главы третьей.

Согласно (2.114), (2.11), (2.8), (2.9), поле точечной массы $l_q\vee m_q$

$$\mathbf{E}(a)=\frac{e_q}{4\pi\varepsilon_0 L^3_{qa}}\,\mathbf{L}_{qa}\vee\mathbf{H}(a)=\frac{m_q}{4\pi L^3_{qa}}\,\mathbf{L}_{qa} \tag{2.117}$$

действует на другую точечную массу $e_a\vee m_a$ с силой $(\mathbf{E}e_a\vee\mu_0\mathbf{H}m_a)$:

$$\mathbf{F}_{qa}=\frac{e_qe_a}{4\pi\varepsilon_0 L^3_{qa}}\mathbf{L}_{qa}\vee\mathbf{F}_{qa}=\frac{\mu_0m_qm_a}{4\pi L^3_{qa}}\mathbf{L}_{qa}. \tag{2.118}$$

---

[1] Объединяя аналогичные формулы (выражения), относящиеся к полям различной природы (**Е** и **Н**), будем их разделять знаком $\vee$ (или). Аналогично будем разделять приводимые в тексте парами обозначения, относящиеся к полям **Е** и **Н**, например, $\varepsilon_0\vee\mu_0$.

Подставляя в (2.112), $(2.113)_2$ согласно (2.13) $\nu\mathbf{f}=\mu_0\mathbf{H}$, получаем выражения для вращающих моментов $\mathbf{M}_{вр}$, действующих на диполь и однородный магнитный листок в однородном магнитном поле:

$$\mathbf{M}_{вр}=\mu_0[\mathbf{p}\ \mathbf{H}],\ \mathbf{M}_{вр}=\mu_0[\mathbf{M}\ \mathbf{H}], \tag{2.119}$$

где $\mathbf{M}$ — дипольный момент двойного слоя, определяемый согласно (2.61′).

Общее для любого векторного поля $\mathbf{M}$ обозначение $\mathscr{E}$ напряжения $\int(\mathbf{Mdl})$ применялось в этой главе для напряжения в поле $\mathbf{f}$. Отмечая индексами $\mathbf{f}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ обозначения $\mathscr{E}$, η для полей векторов $\mathbf{f}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, имеем в соответствии с (2.114), (2.84′)

$$\mathscr{E}^{\mathbf{E}}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\mathscr{E}^{\mathbf{f}}\vee\mathscr{E}^{\mathbf{H}}=\frac{1}{4\pi}\mathscr{E}^{\mathbf{f}}, \tag{2.120}$$

$$\eta^{\mathbf{E}}_{12}=-\varepsilon_0\mathscr{E}^{\mathbf{E}}_{12}\vee\eta^{\mathbf{H}}_{12}=-\mathscr{E}^{\mathbf{H}}_{12}. \tag{2.120′}$$

Глава третья

Статическое поле в присутствии среды

Расположенные определенным образом в пространстве тела, в которых или в присутствии которых изучаем поле (совокупность этих тел), образуют среду, влияющую в общем случае на поле. В этой главе пойдет речь об электрическом и магнитном полях, о влиянии, которое оказывают на них некоторые тела: диэлектрики, проводники, магнетики (см. ниже). Гравитационное поле, не подверженное влиянию среды, в этой главе (за исключением разд. I, § 7) и в следующих главах не рассматривается: $\nu\mathbf{f}=\mathbf{E}\sqrt{\mu_0}\mathbf{H}$. Среда характеризуется некоторым параметром $\Lambda=\varepsilon$, μ, γ или $\Lambda'=\chi$, $\varkappa$, ρ, смысл которого выяснится в дальнейшем изложении. В разных точках среды параметр Λ может иметь различные значения. Вне тел, т. е. в вакууме, параметр Λ имеет всюду одно определенное (для данного вида тел и поля) значение: $\varepsilon=1$, $\mu=1$, $\gamma=0$, $\chi=0$, $\varkappa=0$, $\rho=\infty$.

Среда в области V является однородной, если во всех точках этой области функция $\Lambda(a)$ имеет одно и то же значение, т. е. если в ней всюду $\nabla\Lambda=0$. Поверхность разрыва поля $\Lambda(a)$ называется поверхностью раздела[1]; она разграничивает области пространства, в которых Λ имеет (вблизи нее) разные значения. В частности, поверхностями раздела являются поверхности тел, отделяющие их от окружающего пространства. Кусочно-однородной называют среду, если она состоит из горсти однородных частей, разграниченных поверхностями раздела. Если среда однородна всюду (во всем пространстве), то ее называют неограниченной однородной средой. Вакуум можно рассматривать как частный случай однородной среды[2].

Если величина Λ не меняется в каком-либо направлении, то будем говорить, что среда однородна в этом направлении.

Среду будем, как правило, считать изотропной, т. е. будем полагать, что в любой ее точке она определяется скаляром Λ независимо от направления (см. § 1 главы четвертой).

§ 1. ВЛИЯНИЕ СРЕДЫ

Опыт показывает, что многие тела, сами по себе не образующие поля $\mathbf{f}$, будучи помещены в это поле, влияют на него, меняя

[1] Поверхность раздела — граница между двумя областями пространства (средами, заполняющими эти области), т. е. поверхность, разделяющая эти области. Ее аналогом на поверхности является линия раздела — граница между двумя ее участками, линия, разделяющая их. Термин «поверхность раздела», весьма четкий и давно принятый в физике и геофизике, в литературе по разведочной геофизике, к сожалению, подвергается искажению и превращается в неудачный термин «граница раздела» (граница границы!).

[2] Неоднородную в области V среду называют градиентной, если в этой области вектор $\nabla\Lambda$ всюду имеет смысл.

его направление и абсолютную величину. Тела, которые так ведут себя в магнитном поле, называют магнетиками, а в электрическом поле — проводниками и диэлектриками. Влияние проводников и диэлектриков на электрическое поле при детальном изучении оказывается весьма различным. Различного типа магнетики (парамагнетики, диамагнетики, ферромагнетики) также различно ведут себя в магнитном поле. Будем иметь в виду парамагнетики и идеализированные ферромагнетики (см. замечание 3, § 2).

В молекулах, из которых построены все вещества, имеются электрические микрозаряды обоих знаков и, если, несмотря на это, тело не создает вокруг себя электрического поля, то объясняется это тем, что в каждом элементе dV его объема алгебраическая сумма масс (зарядов) и векторная сумма дипольных моментов равны нулю, т. е. заряд и дипольный момент каждого элемента объема равны нулю. При внесении диэлектрика в электрическое поле каждый элемент его объема dV (совокупность зарядов, находящихся в этом элементе) приобретает некоторый дипольный момент $\mathbf{dM}$. Механизм этого явления, называемого поляризацией диэлектрика в электрическом поле, может быть различен. В некоторых диэлектриках молекулы приобретают дипольные моменты под действием поля. В других диэлектриках они и без воздействия поля имеют дипольные моменты, которые внутри каждого элемента объема распределены в равномерном беспорядке и поэтому их суммарный дипольный момент равен нулю. Но в таких диэлектриках, благодаря ориентирующему действию поля (см. разд. II, § 9 главы второй), направления моментов диполей в среднем становятся параллельными полю, причем среднее значение этих моментов в элементе dV оказывается тем большим, чем больше напряженность поля в этом элементе. В том и другом случае в каждом элементе объема dV поляризованного тела имеются «молекулярные» диполи с моментами $\mathbf{p}_{\text{мо}}$, суммой которых является момент $\mathbf{dM}$ этого элемента.

Совсем иной является природа поляризации (намагничения) магнетиков в магнитном поле. Но формально она может быть (и в свое время была) истолкована аналогично явлению поляризации диэлектриков в электрическом поле. Согласившись условно применять фиктивное понятие магнитной массы, аналогичной электрическому заряду, будем, продолжая эту аналогию, придерживаться толкования магнитной поляризации как упорядочения совокупности магнитных диполей, якобы находящихся в магнетике (см. главу пятую).

В первых четырех параграфах этой главы будет идти речь об электрическом поле $\mathbf{E}$, создаваемом электрическими массами $m_{\text{эл}}$, т. е. зарядами e в присутствии диэлектриков, и о магнитном поле $\mathbf{H}$, создаваемом магнитными массами $m_{\text{мгн}}$ (магнитными полюсами, магнитами) в присутствии магнетиков. С § 5 будут введены в рассмотрение также проводники.

Влияние поляризующегося тела (способного поляризоваться, т. е. диэлектрика, магнетика) на поле $\mathbf{f}$ объясняется тем, что элементы тела, поляризуясь в этом поле, приобретают дипольные моменты и как диполи создают вторичное поле $\mathbf{f}^{\text{втр}}$. Оно прибавляется к первичному («внешнему») полю $\mathbf{f}^{\text{прв}}$, в которое тело было внесено, в результате чего получается фактически наблюдаемое суммарное поле

$$\mathbf{f}=\mathbf{f}^{\text{прв}}+\mathbf{f}^{\text{втр}}, \tag{3.1}$$

отличающееся от первичного поля[1].

I. **Поляризация.** Элемент объема dV поляризованного (намагниченного) тела имеет дипольный момент

$$d\mathbf{M}=\mathbf{P}dV, \quad \mathbf{P}=\begin{cases}\mathbf{P}_{\text{эл}}-\text{электрическая поляризация},\\ \mathbf{J}-\text{магнитная поляризация}.\end{cases} \tag{3.2}$$

Вектор $\mathbf{P}$, называемый поляризацией (в смысле поляризованности, а не действия), представляет собой дипольный момент элемента объема, отнесенный к единице объема, или (менее точно) дипольный момент единицы объема. Его можно также назвать объемной плотностью дипольных моментов. Магнитную поляризацию (поляризованность) называют намагниченностью. Индекс «эл» при $\mathbf{P}$ будем опускать там, где он не необходим для отличия $\mathbf{P}_{\text{эл}}$ от $\mathbf{J}$.

В соответствии со сказанным выше поляризация среды $\mathbf{P}$ в точке a должна находиться в прямой зависимости от поля $\mathbf{f}$ в этой точке. Считая эту зависимость линейной, положим

$$\mathbf{P}(a)=\mathbf{P}^{\text{вр}}(a)+\mathbf{P}^{0}(a), \quad \mathbf{P}^{\text{вр}}(a)=\alpha(a)\mathbf{f}(a), \tag{3.3}$$

где $\alpha(a)$ — множитель, характеризующий среду в точке a; $\mathbf{P}^{0}(a)$ — постоянная (самопроизвольная, остаточная) поляризация, не меняющаяся с изменением поля $\mathbf{f}(a)$ и сохраняющаяся при $\mathbf{f}(a)=0$; $\mathbf{P}^{\text{вр}}(a)$ — «временная» поляризация, исчезающая с исчезновением поля $\mathbf{f}(a)$.

Постоянную поляризацию $\mathbf{P}^{0}$ можно задавать произвольно, а временную $\mathbf{P}^{\text{вр}}$ произвольно задавать нельзя, так как она зависит от поля $\mathbf{f}$.

Дипольный момент $\mathbf{dM}$ имеет размерность массы, умноженной на расстояние, поэтому согласно (3.2) величина $\mathbf{P}$ имеет такую же размерность, как $\mathbf{f}$ (масса, деленная на квадрат расстояния), следовательно, множитель α — безразмерный, но для полей $\mathbf{E}$ и

---

[1] Термин «первичное поле» имеет условный смысл. Например, при изучении влияния нарушения однородности среды на поле первичным называют то поле, которое было бы при отсутствии этого нарушения. Соответственно, условный смысл имеет термин «вторичное поле».

H он имеет разные значения: α_E и α_H. Векторы **P**, $\mathbf{P}^{\text{вр}}$, $\mathbf{P}^0$ в общем случае являются функциями точки и определяют поляризованность среды в окрестности этой точки. Поляризация в области V называется однородной, а среда в этой области — однородно поляризованной, если во всех точках этой области вектор **P** имеет одно и то же значение.

II. **Потенциал поля, создаваемого поляризованной средой.** Согласно (2.58), (3.2), $(1.127)_2$ потенциал $dU^{\text{п}}$ поля $\mathbf{df}^{\text{п}}$, создаваемого элементом объема dV поляризованного тела, определяется формулой

$$dU^{\text{п}}(a) = \frac{(\mathbf{dM}\,\mathbf{L}_{qa})}{L^3_{qa}} = \frac{(\mathbf{P}(q)\,\mathbf{L}_{qa})}{L^3_{qa}}dV = \left(\mathbf{P}(q)\overset{q}{\nabla}\frac{1}{L_{qa}}\right)dV, \qquad (3.4)$$

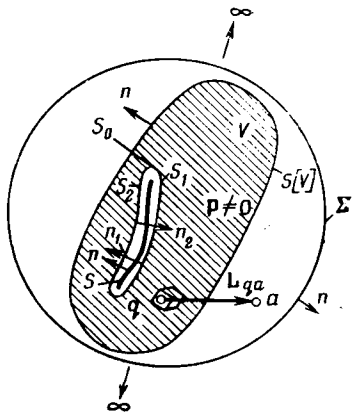


Рис. 29. Элемент поляризованной среды и поверхность разрыва ее поляризации, создающие поле в точке a

где L_{qa} — расстояние от точки q, которой определяется положение элемента dV, до точки a (рис. 29). Следовательно, поляризованное тело, занимающее область V, создает поле с потенциалом в точке a

$$U^{\text{п}}(a) = \int_V \frac{(\mathbf{dM}\,\mathbf{L}_{qa})}{L^3_{qa}} = \int_V \frac{(\mathbf{P}(q)\,\mathbf{L}_{qa})}{L^3_{qa}}dV = \int_V \left(\mathbf{P}\overset{q}{\nabla}\frac{1}{L_{qa}}\right)dV \qquad (3.4')$$

и с напряженностью $\mathbf{f}^{\text{п}}(a) = -\operatorname{grad} U^{\text{п}}(a)$.

На расстоянии L_{oa} от поляризованного тела (от некоторой его точки o), достаточно большом по сравнению со всеми линейными размерами тела, имеем согласно (3.4′) в соответствии с (2.58)

$$U^{\text{п}}(a) = \frac{1}{L^3_{oa}}\left(\mathbf{L}_{oa}\int_V \mathbf{P}\,dV\right) = \frac{(\mathbf{M}\,\mathbf{L}_{oa})}{L^3_{oa}}, \qquad (3.4'')$$

где **M** — дипольный момент поляризованного тела, определяемый формулами

$$\mathbf{M} = \int_V \mathbf{P}\,dV, \quad \mathbf{M} = \mathbf{P}V, \qquad (3.2')$$

из которых вторая формула соответствует случаю однородной поляризации.

Для однородности поляризации тела достаточно однородности тела ($\nabla\alpha = 0$) и полей **f** и $\mathbf{P}^0$ в нем. Легко определить поле $\mathbf{f} = \mathbf{P}/\alpha$ (при $\mathbf{P}^0 = 0$), под действием которого происходит некоторая поляризация тела. Нетрудно (в принципе) также определить первичное поле

$$\mathbf{f}^{\text{прв}} = \mathbf{f} - \mathbf{f}^{\text{втр}} = \mathbf{f} - \mathbf{f}^{\text{п}} = \frac{\mathbf{P}}{\alpha} + \operatorname{grad} U^{\text{п}}, \qquad (3.4''')$$

необходимое для получения желательной и, в частности, однородной поляризации заданного тела. Для этого надо только подставить в формулы (3.4′) и (3.4‴) заданную функцию α и желательное поле $\mathbf{P}$ и выполнить операции, указанные в этих формулах. Но определить поляризацию тела, внесенного в заданное поле $\mathbf{f}^{\text{прв}}$ (даже если оно однородно), в общем случае трудно. В формуле $(3.3)_2$, выражающей столь простую зависимость поля $\mathbf{P}$ от поля $\mathbf{f}$, имеется в виду не первичное поле, в которое внесено поляризуемое тело, а поле $\mathbf{f}=\mathbf{f}^{\text{прв}}+\mathbf{f}^{\text{втр}}$. Это суммарное поле фактически действует внутри и вне области V, занятой телом, и оно поляризует его, т. е. $\mathbf{P}=\alpha\mathbf{f}^{\text{прв}}+\alpha\mathbf{f}^{\text{втр}}+\mathbf{P}^0$. Поэтому если даже поля $\mathbf{f}^{\text{прв}}$ и $\mathbf{P}^0$ однородны и $\nabla\alpha=0$, то в общем случае произвольной формы тела поле $\mathbf{f}^{\text{втр}}$ и, следовательно, поле $\mathbf{P}$ оказываются неоднородными. Случай, когда тело однородно и имеет эллипсоидальную форму, является особым. Такое тело в однородном поле $\mathbf{f}^{\text{прв}}$ поляризуется однородно. Это, очевидно, верно, в частности, для шара, а также для предельных случаев эллиптического (кругового) цилиндра и плоскопараллельного слоя.

III. **Связанные массы.** Выражение (3.4′) для потенциала поля $\mathbf{f}^{\text{п}}$, создаваемого поляризованной средой, можно согласно (1.135) представить в виде

$$U^{\text{п}}(a)=\int\limits_V \operatorname{div}\frac{\mathbf{P}}{L_{qa}}\,dV-\int\limits_V\frac{\operatorname{div}\mathbf{P}}{L_{qa}}\,dV \tag{3.5}$$

или, применяя теорему Остроградского[1], в виде

$$U^{\text{п}}(a)=\oint\limits_{S[V]}\frac{(\mathbf{P}\,d\mathbf{S})}{L_{qa}}+\int\limits_V\frac{-\operatorname{div}\mathbf{P}}{L_{qa}}\,dV. \tag{3.5′}$$

Допустим, что в области V, ограниченной поверхностью $S[V]$, имеются поверхности S, являющиеся особыми в поле вектора $\mathbf{P}$, например, поверхности разрыва какой-либо из величин α, $\mathbf{f}$ или $\mathbf{P}^0$, от которых зависит поляризация $\mathbf{P}$. Выделим поверхности S из области V; охватив их поверхностями безопасности S_0, получим вместо области V область V^* (в которой обеспечена применимость теоремы Остроградского), ограниченную поверхностью $S[V^*]$, состоящей из поверхностей $S[V]$ и S_0. Стягивая каждую поверхность S_0 к охватываемой ею поверхности S, мы превращаем ее в совокупность сторон S_1 и S_2 поверхности S. При этом область $V^*\to V$ и, следовательно, область объемного интегрирования в (3.5′) остается без изменения; что же касается поверхностного интегрирования, то оно должно быть распространено не только на поверхность $S[V]$, но также

[1] Интегрирование и дифференцирование в первом члене правой части (3.5) производятся по одному и тому же аргументу (по точке q), что необходимо для применения теоремы Остроградского.

на S_1 и S_2. Обозначая индексами 1 и 2 величины, относящиеся к областям V_1 и V_2, разделяемым поверхностью S, получаем из (3.5′)

$$U^{\Pi}(a)=\int\limits_{V}\frac{-\operatorname{div}\mathbf{P}}{L_{qa}}dV+\int\limits_{S_1}\frac{(\mathbf{P}^{(1)}\,d\mathbf{S})}{L_{qa}}+\int\limits_{S_2}\frac{(\mathbf{P}^{(2)}\,d\mathbf{S})}{L_{qa}}+\oint\limits_{S[V]}\frac{(\mathbf{P}\,d\mathbf{S})}{L_{qa}}. \quad (3.5'')$$

Распространим область V на все пространство и примем во внимание, что согласно (3.3) величины P и f имеют одинаковый порядок. Поэтому, считая поле $\mathbf{f}$ регулярным на бесконечности (см. разд. IV, § 2 главы второй), можем последний член правой части (3.5″) отбросить. Что же касается второго и третьего членов правой части (3.5″), то, учитывая, что при поверхностном интегрировании надо направлять нормали наружу относительно области V^*, имеем

$$\int\limits_{S_1}\frac{(\mathbf{P}^{(1)}\,d\mathbf{S})}{L_{qa}}+\int\limits_{S_2}\frac{(\mathbf{P}^{(2)}\,d\mathbf{S})}{L_{qa}}=\int\limits_{S}\frac{(\mathbf{P}^{(1)}\mathbf{n}_1)+(\mathbf{P}^{(2)}\mathbf{n}_2)}{L_{qa}}dS=$$

$$=\int\limits_{S}\frac{P_n^{(1)}-P_n^{(2)}}{L_{qa}}dS, \quad (3.5''')$$

где $\mathbf{n}_1=\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}_2=-\mathbf{n}$ — нормали на поверхностях S_1 и S_2, а $\mathbf{n}$ — нормаль к поверхности S, направленная от S_1 к S_2. Таким образом, пользуясь обозначением (1.49), получаем из (3.5″)

$$U^{\Pi}(a)=\int\limits_{V}\frac{-\operatorname{div}\mathbf{P}}{L_{qa}}dV+\int\limits_{S}\frac{-\operatorname{Div}\mathbf{P}}{L_{qa}}dS, \quad (3.6)$$

где S — совокупность всех поверхностей разрыва нормальной компоненты вектора $\mathbf{P}$. Распространяя область V на все пространство, мы включаем в нее поляризованные тела, а также области, в которых нет поляризованной среды. Но объемное интегрирование по этим областям, в которых $\mathbf{P}=0$, не влияет на результат интегрирования.

Поверхность поляризованного тела представляет собой частный случай поверхности разрыва вектора $\mathbf{P}$. Обозначая индексом 1 область, занятую поляризованным телом, и полагая $\mathbf{P}^{(1)}=\mathbf{P}$, имеем на его поверхности

$$-\operatorname{Div}\mathbf{P}=P_n^{(1)}-P_n^{(2)}=P_n, \quad (3.7)$$

где нормаль n направлена от тела наружу.

Сопоставляя (3.6) с выражениями (2.44″) для потенциалов полей, создаваемых различными массами, мы видим, что интегралы в (3.6) можно рассматривать как потенциалы полей некоторых объемных и поверхностных масс с плотностями $-\operatorname{div}\mathbf{P}$ и $-\operatorname{Div}\mathbf{P}$, появляющихся в области V и на ее границе в результате поляризации среды, заполняющей ее. Будем эти массы называть связанными. Вводя обозначения

$$-\operatorname{div}\mathbf{P}=\delta_{\text{свз}},\quad -\operatorname{Div}\mathbf{P}=\sigma_{\text{свз}}, \quad (3.8)$$

получаем из (3.6)

$$U^{\text{п}}(a)=\int\limits_V \frac{\delta_{\text{свз}}}{L_{qa}}dV+\int\limits_S \frac{\sigma_{\text{свз}}}{L_{qa}}dS. \qquad (3.6')$$

Величины $\delta_{\text{свз}}$ и $\sigma_{\text{свз}}$, определяемые формулами (3.8), будем называть плотностями связанных объемных и поверхностных масс. Согласно (1.88) из $(3.8)_1$ следует, что объемные связанные массы отрицательны там, где поток вектора **P** через поперечное сечение векторной трубки поля **P** увеличивается по направлению этого поля, и положительны там, где этот поток уменьшается по направлению поля **P**. В соответствии с $(3.8)_2$ плотность поверхностных связанных масс положительна при $P_n^{(2)}<P_n^{(1)}$. На поверхности поляризованного тела согласно (3.7) и $(3.8)_2$ имеем связанные поверхностные массы с плотностью

$$\sigma_{\text{свз}}=P_n, \qquad (3.8')$$

положительной в тех точках поверхности тела, в которых вектор **P** направлен наружу, и отрицательной в точках этой поверхности, в которых вектор **P** направлен внутрь тела.

Если внутри поляризованного тела $\operatorname{div}\mathbf{P}=0$ и $\operatorname{Div}\mathbf{P}=0$, что, в частности, имеем в случае однородной поляризации тела, то связанные массы имеются только на его поверхности и создаваемое ими поле определяется этой поверхностью (ее формой и размерами) и значениями P_n на ней.

Приведем примеры.

1. Пусть NdV — число молекулярных диполей в элементе объема dV поляризованной среды, а $m^+_{\text{мо}}$, $\mathbf{p}_{\text{мо}}$ и $L_{\text{мо}}$ — средние значения массы положительного полюса диполя, его дипольного момента и расстояния между его полюсами. Тогда элемент объема dV этой среды имеет дипольный момент

$$d\mathbf{M}=N\mathbf{p}_{\text{мо}}dV=Nm^+_{\text{мо}}\mathbf{L}_{\text{мо}}dV=\mathbf{L}_{\text{мо}}dm^+=\delta^+\mathbf{L}_{\text{мо}}dV, \qquad (3.8'')$$

где $dm^+=Nm^+_{\text{мо}}dV$ — масса положительных полюсов диполей, находящихся в элементе объема; δ^+ — объемная плотность этой массы, т. е. произведение массы положительного полюса на число диполей в единице объема.

Сравнивая (3.8″) с (3.2), мы видим, что поляризация

$$\mathbf{P}=\delta^+\mathbf{L}_{\text{мо}}. \qquad (3.9)$$

Обозначая через m^+ сумму масс dm^+ в области V и подставляя (3.9) в формулы (3.2′), получаем для дипольного момента поляризованного тела соответствующие им выражения

$$\mathbf{M}=\int\limits_V \mathbf{L}_{\text{мо}}\delta^+dV, \quad \mathbf{M}=\mathbf{L}_{\text{мо}}\int\limits_V \delta^+dV=m^+\mathbf{L}_{\text{мо}}, \qquad (3.8''')$$

из которых второе выражение соответствует случаю однородной поляризации.

В этом случае представим, что в области V, которую тело занимало до поляризации, мы имели две объемные массы ($m^+>0$ и $m^-=-m^+$), равномерно распределенные в ней с плотностями

δ^+ и δ^-. В соответствии с замечанием 2, § 5 главы второй допустим, что масса m^+ сдвигается на малое расстояние $\frac{1}{2}L_{\text{мо}}$ по направлению вектора P, а масса m — на такое же расстояние в противоположном направлении, в результате чего нарушается полное совмещение масс разного знака и их полная взаимная нейтрализация. Сдвинутые массы m^+ и m^- занимают области V^+ и V^-, не полностью совпадающие, и, таким образом, у поверхности поляризованного тела образуется слой переменной толщины

$$h = L_{\text{мо}} |\cos(\mathbf{P}, \mathbf{n})| = \frac{1}{\delta^+} P \,|\cos(\mathbf{P}, \mathbf{n})| = \frac{1}{\delta^+} |P_n| , \qquad (3.10)$$

в пределах которого имеется масса с объемной плотностью $\delta = \delta^+ \operatorname{sgn} P_n$. Этот слой ввиду малости его толщины h можно, согласно (2.6), заменить поверхностной массой с плотностью $\sigma = h\delta = |P_n| \operatorname{sgn} P_n = P_n$ в соответствии с (3.8′).

2. Пусть тела I и II порознь однородно поляризованы по направлению оси z, а $\mathbf{P}^{(1)}$ и $\mathbf{P}^{(2)}$ — их поляризации (рис. 30). На обращенных друг к другу и нормальных к оси z гранях S_1 и S_2 этих тел имеем поверхностные массы с плотностями $\sigma_1 = P_z{}^{(1)}$ и $\sigma_2 = -P_z{}^{(2)}$. Приведем тела I и II в соприкосновение по этим граням и получим тело, состоящее из двух частей (I и II), разделенных плоскостью S, на которой компонента P_z терпит разрыв $P_z{}^{(2)} - P_z{}^{(1)}$. На этой плоскости имеем поверхностную массу с плотностью $\sigma_{\text{свз}} = \sigma_1 + \sigma_2 = P_z{}^{(1)} - P_z{}^{(2)}$, что соответствует формуле $(3.8)_2$, так как в данном случае нормаль n к поверхности S направлена по оси z и, следовательно, $P_z = P_n$.

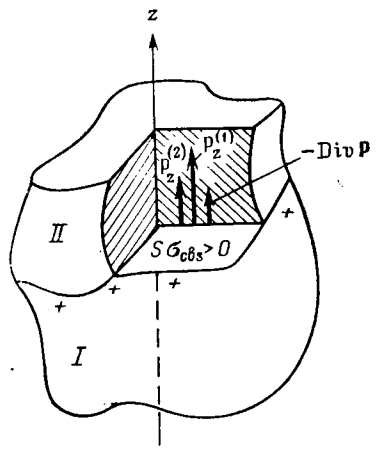


Рис. 30. Связанные массы на поверхности S разрыва вектора $\mathbf{P}$, нормального к этой поверхности

Для наглядности скаляр $-\operatorname{Div}\mathbf{P}$ показан стрелкой—как вектор $\mathbf{P}^{(1)}{}_n - \mathbf{P}^{(2)}{}_n$

3. Теперь представим себе тело, состоящее из нормальных к оси z плоскопараллельных слоев одинаковой толщины, порознь однородно поляризованных по направлению оси z с одинаковыми разрывами компоненты P_z на границах слоев. Выделим из тела прямой цилиндр с высотой h и с основаниями S' и S'', параллельными этим границам, и допустим, что между ними проходит k границ. Если P'_z и P''_z — значения компоненты P_z у оснований цилиндра S' и S'' (т. е. в слоях, прилегающих к этим основаниям), то на каждой границе имеем разрыв компоненты P_z, равный $\frac{1}{k}(P''_z - P'_z)$ и, следовательно, поверхностную мас-

су с плотностью $\sigma = -\frac{1}{k}(P''_z - P'_z)$. Если S — площадь основания цилиндра, то в нем содержится масса $m = k\sigma S = -(P''_z - P'_z)S$. Уменьшая толщину слоев и соответственно увеличивая их число, получаем в пределе вместо ступенчатого изменения величины P_z ее плавное линейное изменение по направлению z и можем считать приращение $P''_z - P'_z = h\partial P_z/\partial z$ и, следовательно, массу $m = -hS\partial P_z/\partial z = -V\partial P_z/\partial z$. Таким образом, при $k \to \infty$ мы вместо поверхностных масс имеем объемную массу с плотностью $m/V = -\partial P_z/\partial z$, что соответствует формуле $(3.8)_1$, так как в данном случае $P_x = P_y = 0$ и, следовательно, $\partial P_z/ = \operatorname{div} \mathbf{P}$. Следует отметить, что если векторные линии l^P поля $\mathbf{P}$ — параллельные прямые, то согласно $(1.91)_1$ формула $(3.8)_1$ принимает вид

$$\delta_{\text{свз}} = -\partial P/\partial l^P. \qquad (3.10')$$

Приведенные примеры подтверждают, что в поляризуемой среде появляются связанные массы: объемные там, где поляризация меняется непрерывно, и поверхностные там, где она меняется скачкообразно. В рассмотренных случаях связанные массы положительны, если абсолютная величина вектора $\mathbf{P}$ уменьшается по его направлению, и отрицательны, если она увеличивается по направлению вектора $\mathbf{P}$. Это соответствует более общему правилу знаков, приведенному выше.

Сумма масс, появляющихся внутри поляризованного тела и на его поверхности, равна нулю, так как при поляризации происходит только образование молекулярных диполей (или их повороты), но не разделение разноименных масс. Попытки разделить поляризованное тело так, чтобы часть его содержала избыток массы (получившейся в результате поляризации) одного знака, оказываются всегда безуспешными. Отсюда название «связанные» массы.

IV. **Зависимые и независимые массы.** Согласно $(3.3)_1$

$$\operatorname{div}\mathbf{P} = \operatorname{div}\mathbf{P}^{\text{вр}} + \operatorname{div}\mathbf{P}^0, \qquad (3.11)$$

$$\operatorname{Div}\mathbf{P} = \operatorname{Div}\mathbf{P}^{\text{вр}} + \operatorname{Div}\mathbf{P}^0.$$

Поэтому в соответствии с (3.8) имеем связанные массы $m_{\text{свз}}$ двух видов: п о с т о я н н ы е m^0 и в р е м е н н ы е $m_{\text{вр}}$:

$$m_{\text{свз}} = m^0 + m_{\text{вр}},\ \delta_{\text{свз}} = \delta^0 + \delta_{\text{вр}},\ \sigma_{\text{свз}} = \sigma^0 + \sigma_{\text{вр}}, \qquad (3.12)$$

где

$$\delta^0 = -\operatorname{div}\mathbf{P}^0,\ \delta_{\text{вр}} = -\operatorname{div}\mathbf{P}^{\text{вр}},\ \sigma^0 = -\operatorname{Div}\mathbf{P}^0,\ \sigma_{\text{вр}} = -\operatorname{Div}\mathbf{P}^{\text{вр}}. \qquad (3.12')$$

Массы m^0 определяются независимо от поля $\mathbf{f}$ произвольно задаваемым полем $\mathbf{P}^0$, и их можно также считать произвольно задаваемыми, н е з а в и с и м ы м и. Массы $m_{\text{вр}}$ зависят от $\mathbf{P}^{\text{вр}}$ и, следовательно, от $\mathbf{f}$; это з а в и с и м ы е массы, которые не могут быть заданы произвольно.

В отличие от связанных масс будем называть массы, не обусловленные явлением поляризации и отделимые от масс противоположного знака, с в о б о д н ы м и и обозначим их $m_{\text{свб}}$, а их плотности — $\delta_{\text{свб}}$ и $\sigma_{\text{свб}}$.

Свободными массами могут быть только электрические заряды (массы $m_{эл}=e$); свободных магнитных масс нет. Магнитостатическое поле создают только связанные массы. Свободные магнитные массы мы должны считать несуществующими даже в том фиктивном смысле, который имеет понятие магнитной массы вообще. Это вполне понятно, принимая во внимание, что фактическими возбудителями магнитостатического поля являются молекулярные замкнутые токи, эквивалентные парам разноименных магнитных масс (см. главу пятую). Независимыми источниками магнитного поля служат постоянные (связанные) магнитные массы m^0, носителями которых согласно $(3.12')_{1,3}$ являются постоянные магниты. Поле таких магнитов мы имели в виду во второй главе, говоря о магнитном поле в вакууме. При этом мы отвлекались от влияния тел магнитов как магнетиков, от их намагничения в магнитном поле (своем и других магнитов).

§ 2. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ СМЕЩЕНИЕ И МАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

В общем случае имеем поле, создаваемое свободными и связанными массами, для которого справедливы все формулы, полученные для поля $\mathbf{f}$ и его потенциала U в вакууме, с той лишь оговоркой, что в них массы m и их плотности следует заменить полными массами и их плотностями, т. е. вместо величин, m, δ, σ следует подставить

$$m_{\text{плн}}=m_{\text{свб}}+m_{\text{свз}},\quad \delta_{\text{плн}}=\delta_{\text{свб}}+\delta_{\text{свз}},\quad \sigma_{\text{плн}}=\sigma_{\text{свб}}+\sigma_{\text{свз}}. \tag{3.13}$$

В частности, для поля $\nu\mathbf{f}=\mathbf{F}(a)/m_a$, создаваемого объемными и поверхностными массами, мы получаем, согласно (2.32), $(2.89)_1$, уравнения

$$\operatorname{div}(\nu\mathbf{f})=4\pi\nu\delta_{\text{плн}},\quad \operatorname{Div}(\nu\mathbf{f})=4\pi\nu\sigma_{\text{плн}} \tag{3.13'}$$

или согласно (2.114), (2.9)

$$\left.\begin{aligned}&\operatorname{div}\mathbf{E}=\delta_{\text{плн}}/\varepsilon_0,\ \operatorname{Div}\mathbf{E}=\sigma_{\text{плн}}/\varepsilon_0\\&\operatorname{div}\mathbf{H}=\delta_{\text{плн}},\ \operatorname{Div}\mathbf{H}=\sigma_{\text{плн}}.\end{aligned}\right\} \tag{3.14}$$

Аналогично получаем из (2.30)

$$\oint\limits_{S[V]}(\mathbf{E}\,d\mathbf{S})=\frac{1}{\varepsilon_0}e_{V\,\text{плн}}\quad\vee\quad\oint\limits_{S[V]}(\mathbf{H}\,d\mathbf{S})=m_{V\,\text{плн}}. \tag{3.13''}$$

I. **Исключение зависимых масс.** В общем случае практически нельзя воспользоваться выражениями для поля $\mathbf{f}$ и потенциала U с подстановкой полных масс, так как для этого надо было бы знать все связанные массы, включая временные связанные массы, зависимые от искомого поля и поэтому нам неизвестные. Постараемся выйти из этого затруднения. Подставляя $(3.8)_1$ и $(3.13)_2$ в $(3.13')_1$, получаем $\operatorname{div}(\nu\mathbf{f})=4\pi\nu\delta_{\text{свб}}+4\pi\nu\delta_{\text{свз}}=4\pi\nu\delta_{\text{свб}}-4\pi\nu\operatorname{div}\mathbf{P}$, откуда

$$\operatorname{div}[\nu(\mathbf{f}+4\pi\mathbf{P})]=4\pi\nu\delta_{\text{свб}} \tag{3.14'}$$

или согласно обозначениям (3.2)

$$\operatorname{div}\ (\varepsilon_0\mathbf{E}+\mathbf{P}) = \delta_{\text{свб}} \vee \operatorname{div}\ [\mu_6(\mathbf{H}+\mathbf{J})] = 0. \qquad (3.14'')$$

Аналогичные выражения имеем для поверхностной дивергенции. Вводя обозначения

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E}+\mathbf{P} \vee \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H}+\mathbf{J}), \qquad (3.15)$$

получаем

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = \delta_{\text{свб}},\ \operatorname{Div}\mathbf{D} = \sigma_{\text{свб}} \vee \operatorname{div}\mathbf{B} = 0,\ \operatorname{Div}\mathbf{B} = 0. \qquad (3.16)$$

Итак, для избавления от зависимых источников в уравнениях поля мы от поля $\mathbf{E} \vee \mathbf{H}$ и уравнений (3.14) перешли к полю $\mathbf{D} \vee \mathbf{B}$ и его уравнениям (3.16).

Векторы **B** и **D** называют соответственно магнитной индукцией и электрическим смещением, или электрической индукцией.

Согласно равенствам $(3.16)_{3,4}$ поле **B** вовсе лишено источников. Но, подставляя в $(3.15)_2$ в соответствии с (3.2) и $(3.3)_1$ $\mathbf{J} = \mathbf{J}^{\text{вр}} \pm \mathbf{J}^0$, получаем

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H}+\mathbf{J}^{\text{вр}}) + \mu_0\mathbf{J}^0, \qquad (3.17)$$

и, следовательно, согласно $(3.12')_{1,3}$ и $(3.16)_{3,4}$

$$\operatorname{div}\ (\mathbf{H}+\mathbf{J}^{\text{вр}}) = \delta^0,\ \operatorname{Div}\ (\mathbf{H}+\mathbf{J}^{\text{вр}}) = \sigma^0. \qquad (3.17')$$

В отсутствие временной намагниченности, когда магнитное поле создают одни только постоянные магниты (без учета влияния их тел как магнетиков), имеем

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H}+\mathbf{J}^0),\ \operatorname{div}\mathbf{H} = \delta^0,\ \operatorname{Div}\mathbf{H} = \sigma^0\ \ (\mathbf{J}^{\text{вр}} = 0) \qquad (3.17'')$$

в соответствии со сказанным в конце предыдущего параграфа. Согласно $(3.17'')_{2,3}$ в уравнениях (2.116′) δ и σ следует понимать в смысле δ^0 и σ^0, а в (2.13) можно подставить $\mu_0\mathbf{H} = \mathbf{B} - \mu_0\mathbf{J}^0$ (см. разд. III, § 2 главы второй).

II. **Восприимчивость и проницаемость среды.** Векторы **D** и **B**, согласно изложенному выше, зависят от среды. Выразим эту зависимость, причем условимся считать $\mathbf{P}^0_{\text{эл}} = 0$, $\mathbf{P}_{\text{эл}} = \mathbf{P}^{\text{вр}}{}_{\text{эл}}$, т. е. исключим впредь из рассмотрения тела с постоянной электрической поляризацией.

Согласно (2.114) имеем из (3.3), (3.15)

$$\mathbf{P} = 4\pi\varepsilon_0\alpha_E\mathbf{E} \vee \mathbf{J} = 4\pi\alpha_H\mathbf{H} + \mathbf{J}^0, \qquad (3.18)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0(1+4\pi\alpha_E)\,\mathbf{E} \vee \mathbf{B} = \mu_0[(1+4\pi\alpha_H)\,\mathbf{H} + \mathbf{J}^0], \qquad (3.19)$$

или, полагая

$$4\pi\alpha_E = \chi \vee 4\pi\alpha_H = \varkappa, \qquad (3.15')$$

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0\chi\mathbf{E} \vee \mathbf{J} = \varkappa\mathbf{H} + \mathbf{J}^0, \qquad (3.18')$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0(1+\chi)\,\mathbf{E} \vee \mathbf{B} = \mu_0[(1+\varkappa)\,\mathbf{H} + \mathbf{J}^0], \qquad (3.19')$$

или же

$$\mathbf{P}=\varepsilon_0(\varepsilon-1)\,\mathbf{E}\vee\mathbf{J}=(\mu-1)\,\mathbf{H}+\mathbf{J}^0, \tag{3.18''}$$

$$\mathbf{D}=\varepsilon_0\varepsilon\mathbf{E}\vee\mathbf{B}=\mu_0[\mu\mathbf{H}+\mathbf{J}^0], \tag{3.19''}$$

где $\varepsilon=1+\chi\vee\mu=1+\varkappa.$ (3.20)

Соотношения (3.19″) называют уравнениями связи [1].

Множители $\chi\vee\varkappa$ и $\varepsilon\vee\mu$ — параметры среды, характеризующие ее как диэлектрик или магнетик. Параметр $\chi\vee\varkappa$ — *восприимчивость среды*: диэлектрическая, магнитная. Этим параметром определяют способность среды воспринимать поляризующее действие поля $\mathbf{E}\vee\mathbf{H}$. Параметр $\varepsilon\vee\mu$ — *относительная проницаемость среды*: диэлектрическая, магнитная. Слово «относительная» обычно будем для краткости опускать. Произведение

$$\varepsilon_0\varepsilon=\varepsilon_a\vee\mu_0\mu=\mu_a \tag{3.15''}$$

называют *абсолютной проницаемостью среды*: диэлектрической, магнитной. Парамер $\varepsilon\vee\mu$ определяет способность среды преобразовать поле $\mathbf{E}\vee\mathbf{H}$ в поле $\mathbf{D}\vee\mathbf{B}$.

В вакууме

$$\chi=0,\quad \varepsilon=1,\quad \mathbf{D}=\varepsilon_0\mathbf{E},\quad \varkappa=0, \tag{3.20'}$$

$$\mu=1\ ,\quad \mathbf{H}=\frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}-\mathbf{J}^0.$$

Подставляя (3.19″) в (3.16), получаем

$$\operatorname{div}(\varepsilon\mathbf{E})=\delta_{\text{своб}}/\varepsilon_0,\ \operatorname{Div}(\varepsilon\mathbf{E})=\sigma_{\text{своб}}/\varepsilon_0\vee \tag{3.21}$$

$$\operatorname{div}(\mu\,\mathbf{H})=\delta^0,\ \operatorname{Div}(\mu\mathbf{H})=\sigma^0.$$

Принимая во внимание соотношения

$$\operatorname{div}(\varepsilon\mathbf{E})=\varepsilon\operatorname{div}\mathbf{E}+(\mathbf{E}\operatorname{grad}\varepsilon),\ \operatorname{Div}(\varepsilon\mathbf{E})=\varepsilon_2E_n^{(2)}-\varepsilon_1E_n^{(1)}=$$

$$=\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}(E_n^{(2)}-E_n^{(1)})+\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{2}(E_n^{(1)}+E_n^{(2)})=\varepsilon_{\text{ср}}\operatorname{Div}\mathbf{E}+$$

$$+(\varepsilon_2-\varepsilon_1)E_n^{\text{ср}} \tag{3.22}$$

и обозначение (1.53″), получаем из (3.21)

$$\operatorname{div}\mathbf{E}+\frac{(\mathbf{E}\operatorname{grad}\varepsilon)}{\varepsilon}=\frac{\delta_{\text{своб}}}{\varepsilon_a}\vee\operatorname{div}\mathbf{H}+\frac{(\mathbf{H}\operatorname{grad}\mu)}{\mu}=\frac{\delta^0}{\mu}, \tag{3.21'}$$

---

[1] Согласно (3.8) и (3.18″) в общем случае дивергенция и ротор вектора $\mathbf{P}\vee\mathbf{J}$ не равны нулю, т. е. поле $\mathbf{P}\vee\mathbf{J}$ не является ни ламелларным, ни соленоидальным. Согласно $(2.116)_1$, $(2.116')_1$, имеем из (3.18″):

$$\operatorname{rot}\mathbf{P}=-\varepsilon_0[\mathbf{E}\nabla\varepsilon]\vee\operatorname{rot}\mathbf{J}=\operatorname{rot}\mathbf{J}^0-[\mathbf{H}\nabla\mu]. \tag{3.18'''}$$

$$\operatorname{Div}\mathbf{E}+\frac{(\mathbf{E}^{\text{ср}}\operatorname{Grad}\varepsilon)}{\varepsilon_{\text{ср}}}=\frac{\sigma_{\text{свб}}}{\varepsilon_0\varepsilon_{\text{ср}}}\quad\vee\quad\operatorname{Div}\mathbf{H}+\frac{(\mathbf{H}^{\text{ср}}\operatorname{Grad}\mu)}{\mu_{\text{ср}}}=\frac{\sigma^0}{\mu_{\text{ср}}},\qquad(3.21'')$$

где

$$(\mathbf{E}^{\text{ср}}\operatorname{Grad}\varepsilon)=(\varepsilon_2-\varepsilon_1)E^{\text{ср}}_n\vee(\mathbf{H}^{\text{ср}}\operatorname{Grad}\mu)=(\mu_2-\mu_1)H^{\text{ср}}_n.\qquad(3.22')$$

III. Замечания. I. Векторы **D** и **B** были введены выше как величины, удобные для освобождения второго уравнения от связанных масс, полностью или частично нам неизвестных до расчета поля. В этой вспомогательной роли вектор **B** оказался магнитным аналогом вектора **D**. С другой стороны, вектор **B** аналогичен вектору **E** в том смысле, что он, а не **H** является силовым вектором, действующим на токи[1] (см. § 1 главы пятой).

2. В соответствии с принятым условием здесь и далее речь идет об изотропной среде; предполагается, что в пространстве присутствуют только такие диэлектрики или магнетики, в которых проницаемость не зависит от направления — изотропные диэлектрики, изотропные магнетики. Однако некоторые из полученных формул справедливы также для анизотропной среды. Таковы например, формулы (3.15), (3.16). Для характеристики анизотропной поляризующейся среды и для преобразования в ней полей **E** и **H** в поля **D** и **B** (при $J^0=0$) вместо скалярных множителей ε и μ служат тензоры проницаемости ε и μ. В § 1 главы четвертой будет сказано несколько подробнее об аналогичном тензоре удельной электропроводности.

3. В общем случае в ферромагнетике, даже изотропном, соотношение между **H** и **B** может быть сложнее, чем по $(3.19'')_2$. Но все полученные выше формулы, касающиеся соотношения между намагниченностью и полями **H** и **B**, соответствуют принятому в § 1 условию, что в рассмотрение включаются только идеализированные ферромагнетики, в которых зависимость намагниченности от намагничивающего поля линейная.

4. Исключив из рассмотрения постоянную электрическую поляризацию, мы объединяем термином «независимые» (первичные) массы только свободные заряды $e_{\text{свб}}$ и постоянные магнитные массы m^0. Остальные массы $e_{\text{свз}}$ и $m_{\text{вр}}$ — зависимые (вторичные). В присутствии проводников появляются свободные заряды, независимость которых является неполной (см. § 5).

5. Если бы при выводе выражений (3.6), (3.6′) для U^n мы допустили существование в области V не только особых поверхностей поля вектора **P**, но также особых линий и точек этого поля, то пришли бы к необходимости дополнить эти выражения членами, соответствующими связанным точечным массам $m_{q\,\text{свз}}=m_{q\,\text{вр}}+m_q$ и линейным массам с плотностью $\lambda_{\text{свз}}=\lambda_{\text{вр}}+\lambda^0$, отличаемым от свободных точечных масс $m_{q\,\text{свб}}$ и свободных линейных масс с плотностью $\lambda_{\text{свб}}$. Но особые точки и линии поля **a** совпадают

[1] При $J^0=0$ имеем в вакууме $\mu_0\mathbf{H}=\mathbf{B}$. Формулы $(2.118)_2$, $(2.119)_1$ и (2.119) в этом случае принимают вид

$$\mathbf{F}_{qa}=m_a\mathbf{B}(a),\quad\mathbf{M}_{\text{вр}}=[\mathbf{pB}],\quad\mathbf{M}_{\text{вр}}=[\mathbf{MB}]=\eta\,[\mathbf{S}^e\mathbf{B}].\qquad(3.22'')$$

особыми точками и линиями поля $\mathbf{f}$, поэтому зависимые точечные и линейные массы обычно совмещаются с такими же независимыми массами, между тем как зависимые объемные и поверхностные массы часто имеются и там, где таких независимых масс нет (см. разд. III, § 3). В магнитном поле особыми точками и линиями являются точечные и линейные полюса постоянных магнитов (концы тонких стержней и края тонких листов, намагниченных продольно). Точечные полюса с массами $m_q{}^0$, линейные полюса с плотностью λ^0 и полюсные поверхности с плотностью σ^0 подразумевались в предыдущей главе, когда шла речь о магнитных величинах m_q, λ и σ.

6. Поверхностью разрыва потенциала в магнитном поле является двойной магнитный слой. Его можно представить как результат мысленного сжатия тонкого слоя магнетика, намагниченного по нормали к его поверхности, при условии, что с уменьшением толщины слоя h значение $|\sigma| = |J_n|$ на каждой стороне слоя увеличивается, а произведение $|\sigma|h$ остается неизменным. В случае постоянного намагничения, т. е. когда $\mathbf{J} = \mathbf{J}^0$ и $\sigma = \sigma^0 = J_n{}^0$, имеем предельно короткий магнит, полюса которого представляют собой две почти совпадающие полюсные поверхности. Такой магнит называют магнитным листком. К магнитному листку применимы формулы, полученные в § 5 главы второй для двойного слоя.

7. Однородный магнит, т. е. магнит, в котором поле $\mathbf{J}^0$ однородно, можно представить как совокупность магнитных листков с одинаковой плотностью дипольных моментов η. Для этого надо мысленно разделить его плоскостями, нормальными к вектору $\mathbf{J}^0$, на тонкие слои одинаковой толщины и заменить каждый из них магнитным листком. Однородный цилиндрический (имеющий форму прямого цилиндра) магнит с высотой h и поперечным сечением S, намагниченный по направлению образующей, можно рассматривать как столб, составленный из kh одинаковых дисков с толщиной $\Delta h = 1/k$, намагниченных по нормалям к их поверхностям. Магнитные моменты этого магнита и отдельно взятого диска определяются формулами

$$\mathbf{M} = \mathbf{J}^0 V = \mathbf{J}^0 hS, \quad \Delta\mathbf{M} = \mathbf{J}^0 S\Delta h = \mathbf{J}^0 S/k = \mathbf{M}/kh. \tag{3.23}$$

На основаниях цилиндра и на сторонах каждого диска имеем поверхностные массы с плотностью $\sigma^0 = J^0{}_n$. Каждый диск можно заменить магнитным листком с плотностью дипольных моментов

$$\eta = |\sigma^0| \Delta h = J^0 \frac{1}{k} = \frac{\Delta M}{S} = \frac{M}{khS}, \tag{3.23'}$$

а весь магнит — совокупностью kh листков, соответствующих kh дискам, из которых он состоит.

8. Для иллюстрации влияния поляризующегося тела на поле $\mathbf{f}$ можно воспользоваться случаем тела (в котором $\mathbf{P}^0 = 0$), внесенного в однородное первичное поле $\mathbf{f}^{\text{прв}}$ и однородно поляризованного по направлению этого поля. Такой случай имеем, когда тело однородно и имеет форму эллипсоида, причем одна из главных осей эллипсоида параллельна полю $\mathbf{f}^{\text{прв}}$. Согласно (3.8′) на поверхности тела возникают массы с плотностью $\sigma_{\text{свз}}$, положи-

тельные (m^+) на передней (считая по направлению поля $\mathbf{f}^{\text{прв}}$) стороне тела и отрицательные (m^-) на его тыльной стороне. Несколько более общий случай, когда вне тела среда также поляризующаяся, для электрического поля иллюстрирует рис. 41,*б*, помещенный в главе четвертой. В этом случае согласно $(3.8)_2$ $\sigma_{\text{свз}} = P_n^{(1)} - P_n^{(2)}$, где нормаль n направлена внутрь области ϑ. Очевидно, что поле $\mathbf{f}^{\text{втр}}$, создаваемое массами m^+ и m^- образует с первичным полем впереди и сзади тела острые углы, а внутри тела и по бокам его — тупые углы. В результате поляризации тела происходит усиление поля впереди и сзади тела и ослабление поля внутри него и по его бокам.

Совокупность масс, возникающих на поверхности тела, является нейтральной: $m^+ + m^- = 0$. Поэтому на расстояниях от тела, достаточно больших по сравнению с его размерами, поле этих масс совпадает с полем диполя, момент которого определяется формулой $(3.2')_2$.

9. Как было отмечено выше, источниками поля $\mathbf{D}$ являются свободные заряды, а поля $\mu\mathbf{H}$ — постоянные магнитные массы. Линии поля $\mathbf{B}$ (а также $\mathbf{D}$) называют линиями индукции. Линии поля $\mathbf{D}$ начинаются и кончаются на свободных зарядах, а линии поля $\mu\mathbf{H}$ — на постоянных магнитных массах. Поле $\mathbf{B}$ не имеет источников, и линии магнитной индукции нигде не обрываются; они замкнутые (или продолжаются до бесконечности). Линии поля $\mathbf{E}$ начинаются и кончаются на свободных и связанных зарядах, а линии поля $\mathbf{H}$ — на постоянных и временных магнитных массах. На рис. 41,*б* показано, что линии индукции $\mathbf{D} \vee \mathbf{B}$ пронизывают тело повышенной проницаемости с большей густотой.

10. Поле, фактически создаваемое всеми массами, зависимыми и независимыми, будем называть полем независимых масс в среде, имея в виду, что этими массами при заданной проницаемости среды полностью определяется поле (см. § 6) и, следовательно, все его источники, в том числе зависимые массы. В таком смысле следует, например, понимать «поле, создаваемое свободным зарядом $e_{\text{свб}}$ в диэлектрике». Непосредственно этот заряд создает в присутствии диэлектрика такое же поле, как в его отсутствии но заданием этого заряда и диэлектрика определяются также возникающие связанные заряды и создаваемое ими вторичное поле

§ 3. ПОЛЕ В ПРИСУТСТВИИ ПОЛЯРИЗУЮЩЕЙСЯ СРЕДЫ

Источники поля $\varepsilon\mathbf{E} \vee \mu\mathbf{H}$ совпадают с независимой частью источников поля $\mathbf{E} \vee \mathbf{H}$. На первый взгляд может показаться, что зная эти произвольно задаваемые источники $e_{\text{свб}} \vee m^0_{\text{мгн}}$, можно рассчитать поле $\varepsilon\mathbf{E} \vee \mu\mathbf{H}$ по формулам, справедливым для вакуума, и делением на $\varepsilon \vee \mu$ определить поле $\mathbf{E} \vee \mathbf{H}$. На самом же деле поле независимых масс $e_{\text{свб}} \vee m^0_{\text{мгн}}$ является только частью поля[1] $\varepsilon\mathbf{E} \vee \mu\mathbf{H}$. Кроме этой (дивергентной, потенциальной) части

[1] Следует учесть, что

$$\varepsilon\mathbf{E} = \mathbf{E} + \frac{1}{\varepsilon_0}\mathbf{P} \vee \mu\mathbf{H} = \mathbf{H} + \mathbf{J} \quad [\text{ср. } (3.18'),\ (3.18''')].$$

квазипотенциальное поле[1] $\varepsilon\mathbf{E}\vee\mu\mathbf{H}$ содержит еще вихревую часть. Действительно, принимая во внимание $(2.116)_1$ и $(2.116')_1$, имеем

$$\operatorname{rot}(\varepsilon\mathbf{E}) = -[\mathbf{E}\nabla\varepsilon]\vee\operatorname{rot}(\mu\mathbf{H}) = -[\mathbf{H}\nabla\mu]. \qquad (3.22''')$$

Следовательно, ротор вектора $\varepsilon\mathbf{E}\vee\mu\mathbf{H}$ обращается в нуль только там, где проницаемость среды не меняется по направлениям, нормальным к полю. В поле $\varepsilon\mathbf{E}\vee\mu\mathbf{H}$ имеются не только обрывающиеся, но также необрывающиеся векторные линии, а в поле $\mathbf{B}$ — только необрывающиеся векторные линии (индукции).

I. **Система уравнений поля.** Во второй главе расчет поля $\mathbf{f}$ сводится к нахождению решения системы уравнений (2.34), которая для $\mathbf{E}\vee\mathbf{H}$ принимает вид $(2.116)_{1,2}$ или $(2.116')_{1,2}$. При этом благодаря простоте первого уравнения (обращение в нуль ротора) система уравнений для вектора $\mathbf{E}\vee\mathbf{H}$ сводится к уравнению Пуассона для потенциала $U_E\vee U_H$. Теперь мы имеем поля $\varepsilon\mathbf{E}$ и $\mu\mathbf{H}$, первые уравнения которых согласно $(3.22''')$ уже не столь просты, и поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, вторые уравнения которых нам, согласно изложенному в § 2, не удобны. Поэтому системы $(2.116)_{1,2}$, $(2.116')_{1,2}$ заменим системами

$$\text{I. } \operatorname{rot}\mathbf{E}=0, \quad \text{II. } \operatorname{div}\mathbf{D}=\delta_{\text{свб}}; \qquad (3.24)$$

$$\text{I. } \operatorname{rot}\mathbf{H}=0, \quad \text{II. } \operatorname{div}\mathbf{B}=0. \qquad (3.25)$$

В каждой из этих систем первое и второе уравнения определяют разные поля ($\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}\vee\mathbf{H}$ и $\mathbf{B}$). Но эти поля взаимно связаны соотношением $(3.19'')$, благодаря чему уравнения $(3.24)_{\text{II}}$, $(3.25)_{\text{II}}$ можно представить в виде уравнений $(3.21')_{1,2}$ для $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$.

Уравнениям $(3.24)_{\text{I}}$ и $(3.25)_{\text{I}}$, очевидно, соответствуют интегральные и поверхностные формы

$$\oint_l(\mathbf{E}\,d\mathbf{l})=0, \quad \operatorname{Rot}\mathbf{E}=0\vee\oint_l(\mathbf{H}\,d\mathbf{l})=0, \quad \operatorname{Rot}\mathbf{H}=0, \qquad (3.26)$$

а уравнениям $(3.24)_{\text{II}}$, $(3.25)_{\text{II}}$—интегральные формы

$$\oint_{S[V]}(\mathbf{D}\,d\mathbf{S})=e_{V\,\text{свб}}\vee\oint_{S[V]}(\mathbf{B}\,d\mathbf{S})=0, \quad \oint_{S[V]}\mu(\mathbf{H}\,d\mathbf{S})=m^{\text{e}}_V \qquad (3.27)$$

и поверхностные формы $(3.16)_{2,4}$, $(3.21'')$.

Поток вектора $\mathbf{D}$ называют потоком смещения (электрической индукции), а поток вектора $\mathbf{B}$—магнитным потоком, или потоком магнитной индукции. Согласно (3.27) поток магнитной индукции через замкнутую поверхность равен нулю.

---

[1] Поле $\varepsilon\mathbf{E}\vee\mu\mathbf{H}$ удовлетворяет условию (1.85):

$$(\varepsilon\mathbf{E}\operatorname{rot}(\varepsilon\mathbf{E}))=-\varepsilon(\mathbf{E}[\mathbf{E}\nabla\varepsilon])=0\vee$$
$$(\mu\mathbf{H}\operatorname{rot}(\mu\mathbf{H}))=-\mu(\mathbf{H}[\mathbf{H}\nabla\mu])=0.$$

II. **Поле у особой поверхности.** Согласно (2.87), (2.89), (2.114) поверхностные формы уравнений поля можно представить в следующем виде:

$$E_t^{(2)} - E_t^{(1)} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial t}\eta_{12}^E \bigvee H_t^{(2)} - H_t^{(1)} = -\frac{\partial}{\partial t}\eta_{12}^H, \tag{3.28}$$

$$D_n^{(2)} - D_n^{(1)} = \sigma_{\text{свб}} \bigvee B_n^{(2)} - B_n^{(1)} = 0, \tag{3.29}$$

$$\varepsilon_2 E_n^{(2)} - \varepsilon_1 E_n^{(1)} = \frac{\sigma_{\text{свб}}}{\varepsilon_0} \bigvee \mu_2 H_n^{(2)} - \mu_1 H_n^{(1)} = \sigma^0. \tag{3.29'}$$

Равенства (3.28) — (3.29′) определяют поведение компонент векторов напряженности поля и индукции у какой-либо поверхности S, которая в общем случае является поверхностью раздела и носителем простого и двойного слоев, особой поверхностью. В равенствах (3.28) η_{12}—плотность дипольных моментов электрического или магнитного двойного слоя на поверхности S, определяемая формулой (2.120′).

Таким образом, на поверхности S: 1) нормальная компонента вектора магнитной индукции непрерывна; 2) нормальная компонента вектора $\mathbf{D}=\varepsilon_a\mathbf{E}$ терпит разрыв, равный поверхностной плотности свободных зарядов; 3) нормальная компонента вектора $\mu\mathbf{H}$ терпит разрыв, равный поверхностной плотности постоянных магнитных масс; 4) компонента вектора $\varepsilon_0\mathbf{E}\bigvee\mathbf{H}$ по тангенциальному направлению t терпит разрыв, равный $-\partial\eta_{12}/\partial t$ и исчезающий, когда двойной слой однороден по направлению t.

III. **Уравнение потенциала.** Подставляя решения $(2.115)_{1,3}$, первых уравнений систем (3.24) и (3.25) в соотношения (3.19″), получаем

$$\mathbf{D}=-\varepsilon_a\nabla U_E, \quad \mathbf{B}=-\mu_a\nabla U_H+\mu_0\mathbf{J}^0. \tag{3.30}$$

Следовательно, из вторых уравнений тех же систем получаем для потенциалов U_E и U_H уравнения

$$(\nabla(\varepsilon\nabla U_E)) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta_{\text{свб}}, \quad (\nabla(\mu\nabla U_H)) = -\delta^*, \tag{3.31}$$

т. е.

$$\nabla^2 U_E + \frac{(\nabla\varepsilon\nabla U_E)}{\varepsilon} = -\frac{\delta_{\text{свб}}}{\varepsilon_a},$$
$$\nabla^2 U_H + \frac{(\nabla\mu\nabla U_H)}{\mu} = -\frac{\delta^0}{\mu}, \tag{3.31'}$$

Из $(2.115)_{2,4}$, (2.82), (3.28), (3.29′), имеем равенства

$$U_E^{(2)} - U_E^{(1)} = \frac{1}{\varepsilon_0}\eta_{12}^E, \quad U_H^{(2)} - U_H^{(1)} = \eta_{12}^H; \tag{3.32}$$

$$\frac{\partial U_E^{(2)}}{\partial t} - \frac{\partial U_E^{(1)}}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\partial\eta_{12}^E}{\partial t}, \quad \frac{\partial U_H^{(2)}}{\partial t} - \frac{\partial U_H^{(1)}}{\partial t} = \frac{\partial\eta_{12}^H}{\partial t}; \tag{3.32'}$$

$$\varepsilon_2\frac{\partial U_E^{(2)}}{\partial n} - \varepsilon_1\frac{\partial U_E^{(1)}}{\partial n} = -\frac{\sigma_{\text{свб}}}{\varepsilon_0}; \quad \mu_2\frac{\partial U_H^{(2)}}{\partial n} - \mu_1\frac{\partial U_H^{(1)}}{\partial n} = -\sigma^0, \tag{3.32''}$$

определяющие поведение потенциалов электрического и магнитного полей у поверхности S в общем случае, о котором шла речь выше (в разд. II).

Аналогично можно представить интегральные формы уравнений поля. Равенства $(3.27)_{1,3}$ принимают вид

$$\oint_{S[V]} \varepsilon \frac{\partial U_E}{\partial n}\, dS = -\frac{1}{\varepsilon_0} e_{V\,\text{свб}}, \qquad \oint_{S[V]} \mu \frac{\partial U_H}{\partial n}\, dS = -m^0{}_V. \tag{3.33}$$

IV. **Определение зависимых источников поля.** Зависимость плотности зависимых источников поля от фактически действующего поля заставила нас исключить их из системы дифференциальных уравнений поля. Но после расчета поля, например, после получения решения системы (3.24)$\bigvee$(3.25) или эквивалентного ей уравнения (3.31), можно, зная суммарное поле и проницаемость среды, определить зависимые источники поля. Как же выражаются зависимости плотности этих источников от поля и среды? Сравнивая $(3.21')_1$ с $(3.14)_1$, видим, что

$$\delta_{\text{плн}} = \frac{\delta_{\text{свб}}}{\varepsilon} - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}(\mathbf{E}\nabla\varepsilon), \quad \delta_{\text{свз}} = \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\delta_{\text{свб}} - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}(\mathbf{E}\nabla\varepsilon), \tag{3.33'}$$

т. е. $\delta_{\text{свз}} = \delta_{\varepsilon\,\text{свб}} + \delta_{\varepsilon E}$,

где $\delta_{\varepsilon\,\text{свб}} = \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\delta_{\text{свб}}$ и $\delta_{\varepsilon E} = -\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}(\mathbf{E}\nabla\varepsilon)$ (3.34)

— плотности связанных зарядов двух типов: $e_{\varepsilon\,\text{свб}}$ и $e_{\varepsilon E}$. Заряды первого типа $e_{\varepsilon\,\text{свб}}$ появляются в диэлектрике там, где имеются свободные заряды, а заряды второго типа $e_{\varepsilon E}$—там, где ε меняется по направлению поля $\mathbf{E}$. Аналогично сравнением $(3.21')_2$, $(3.21'')$ с $(3.14)_{2,3,4}$ получаем

$$\sigma_{\text{свз}} = \sigma_{\varepsilon\,\text{свб}} + \sigma_{\varepsilon E}, \quad \sigma_{\varepsilon\,\text{свб}} = \frac{1-\varepsilon_{\text{ср}}}{\varepsilon_{\text{ср}}}\sigma_{\text{свб}}, \quad \sigma_{\varepsilon E} = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}{\varepsilon_{\text{ср}}} E_n^{\text{ср}} \tag{3.34'}$$

для связанных поверхностных зарядов и

$$\delta_{\text{вр}} = \delta^0{}_\mu + \delta_{\mu H}, \quad \delta^0{}_\mu = \frac{1-\mu}{\mu}\delta^0, \quad \delta_{\mu H} = -\frac{1}{\mu}(\mathbf{H}\nabla\mu), \tag{3.34''}$$

$$\sigma_{\text{вр}} = \sigma^0{}_\mu + \sigma_{\mu H}, \quad \sigma^0{}_\mu = \frac{1-\mu_{\text{ср}}}{\mu_{\text{ср}}}\sigma^0, \quad \sigma_{\mu H} = \frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_{\text{ср}}} H_n^{\text{ср}} \tag{3.34'''}$$

для временных объемных и поверхностных магнитных масс первого и второго типов—$m^0{}_\mu$ и $m_{\mu H}$, появляющихся там, где имеются постоянные магнитные массы и где μ меняется по направлению поля $\mathbf{H}$. Зависимые объемные массы второго типа получаются в местах непрерывного изменения проницаемости. Зависимые поверхностные массы второго типа появляются там, где проницаемость среды терпит разрыв, т. е. на поверхностях раздела между средами с различной проницаемостью.

Согласно $(3.34)_2$—$(3.34''')_2$ плотности зависимых масс первого типа пропорциональны плотности независимых масс, у которых они появляются, и имеют знаки, противоположные знакам этих масс. Каждый элемент независимой объемной или поверхностной массы образует поле, под действием которого к этому элементу обращаются полюса (диполей среды) обратного ему знака. Точечные и линейные зависимые массы обычно бывают только первого типа; они появляются соответственно у независимых точечных и линейных масс и имеют знаки, обратные знакам этих масс. У точечного заряда $e_{q\,\text{свб}}$, например, появляется связанный точечный заряд первого типа, равный $\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} e_{q\,\text{свб}}$. Сумма этих двух зарядов равна $\frac{1}{\varepsilon} e_{q\,\text{свб}}$. Объемная зависимая масса второго типа согласно $(3.34)_3$, $(3.34'')_3$ положительна, если угол между направлениями поля и градиента проницаемости среды тупой, и отрицательна, если этот угол острый. Поверхностная зависимая масса второго типа согласно $(3.34')_3$, $(3.34''')_3$ положительна там, где разность значений проницаемости $(\varepsilon_1-\varepsilon_2 \bigvee \mu_1-\mu_2)$ и среднее значение нормальной компоненты поля $\mathbf{E} \bigvee \mathbf{H}$ имеют одинаковые знаки.

Из сказанного следует, что массы второго типа положительны там, где проницаемость уменьшается по направлению поля, и отрицательны там, где по направлению поля проницаемость среды увеличивается.

Прибавляя к плотностям независимых масс плотности зависимых масс первого типа, получаем плотности

$$\delta_{\text{свб}}+\delta_{\varepsilon\text{свб}}=\delta_{\text{свб}}/\varepsilon \bigvee \delta^0+\delta^0{}_\mu=\delta^0/\mu,$$

$$\sigma_{\text{свб}}+\sigma_{\varepsilon\text{свб}}=\sigma_{\text{свб}}/\varepsilon_{\text{ср}} \bigvee \sigma^0+\sigma^0{}_\mu=\sigma^0/\mu_{\text{ср}} \qquad (3.35)$$

масс, существование которых не обусловлено нарушениями однородности среды. В общем случае могут совместно находиться зависимые массы (объемные или поверхностные) обоих типов, но они могут встречаться также в отдельности. В области V, в которой среда однородна хотя бы только по направлению поля, согласно $(3.34)_3$—$(3.34''')_3$, зависимых масс второго типа нет и, следовательно, полная плотность масс определяется формулой (3.35), по которой эта плотность меньше плотности независимых масс в столько раз, во сколько проницаемость среды больше единицы.

Итак, согласно изложенному

$$\operatorname{div} \mathbf{E}=\frac{1}{\varepsilon_0}(\delta_{\text{свб}}+\delta_{\varepsilon\text{свб}}+\delta_{\varepsilon E})=\frac{1}{\varepsilon_0}\left(\frac{\delta_{\text{свб}}}{\varepsilon}+\delta_{\zeta E}\right), \qquad (3.36$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H}=\delta^0+\delta^0{}_\mu+\delta_{\mu H}=\frac{\delta^0}{\mu}+\delta_{\mu H}, \qquad (3.36$$

$$\operatorname{Div} \mathbf{E}=\frac{1}{\varepsilon_0}(\sigma_{\text{свб}}+\sigma_{\varepsilon\text{свб}}+\sigma_{\varepsilon E})=\frac{1}{\varepsilon_0}\left(\frac{\sigma_{\text{свб}}}{\varepsilon_{\text{ср}}}+\sigma_{\varepsilon E}\right), \qquad (3.36'$$

$$\operatorname{Div} \mathbf{H}=\sigma^0+\sigma^0{}_\mu+\sigma_{\mu H}=\frac{\sigma^0}{\mu_{\text{ср}}}+\sigma_{\mu H}, \qquad (3.36''$$

где δ и σ (с индексами) определяются формулами (3.34)—(3.34‴), (3.35).

§ 4. УСЛОВИЯ, УПРОЩАЮЩИЕ ВЛИЯНИЕ ПРОНИЦАЕМОСТИ СРЕДЫ

Согласно (3.31) при заданной проницаемости среды $(\varepsilon\sqrt{\mu})$ поле полностью определяется независимыми массами. Но зависимость поля от этих масс в присутствии среды обычно сложная. В частности, потенциал $U(a)$ поля независимой массы $e_{qсбв}\sqrt{m^0_q}$ зависит не только от L_{qa}, но также от расстояний точек q и a от мест нарушения однородности среды[1]. Но влияние среды упрощается при некоторых частных видах функции $\varepsilon\sqrt{\mu}$.

I. **Однородность среды.** Рассмотрим случаи, когда среда удовлетворяет одному из следующих трех условий: 1) $\nabla\varepsilon=0 \vee \nabla\mu=0$; 2) $(\mathbf{E}\nabla\varepsilon)=0 \vee (\mathbf{H}\nabla\mu)=0$; 3) $[\mathbf{E}\nabla\varepsilon]=0 \vee [\mathbf{H}\nabla\mu]=0$.

В первом случае среда однородна, и согласно (3.21′), (3.21″), (3.31′)

$$\operatorname{div}\mathbf{E}=\delta_{свб}/\varepsilon_a,\ \operatorname{Div}\mathbf{E}=\sigma_{свб}/\varepsilon_a,\ \nabla^2U_E=-\delta_{свб}/\varepsilon_a, \tag{3.37}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{H}=\delta^0/\mu,\ \operatorname{Div}\mathbf{H}=\sigma^0/\mu,\ \nabla^2U_H=-\delta^0/\mu. \tag{3.37′}$$

Под влиянием однородной среды суммарная плотность масс, создающих поле, оказывается равной плотности независимых масс, деленной на проницаемость среды, что в соответствии со сказанным в конце § 3 объясняется отсутствием зависимых масс второго типа. Сравнивая формулы (3.37), (3.37′) с соответствующими формулами, полученными во второй главе для поля в вакууме, мы видим, что в данном случае поле определяется как поле, создаваемое в вакууме независимыми массами, деленными на $\varepsilon\sqrt{\mu}$. Однако это верно только тогда, когда среда однородна во всем пространстве. Если среда однородна только в области V, то для нее также справедливы формулы (3.37), (3.37′) и, следовательно, источниками поля, находящимися в ней, являются независимые массы, деленные на $\varepsilon\sqrt{\mu}$. Но поле в области V порождают также массы, находящиеся вне ее, а в их составе (в неоднородной вне области V среде) могут быть зависимые массы обоих типов. Поэтому однородность среды в отдельной области V недостаточна для того, чтобы определить в ней поле по формулам, справедливым для вакуума с делителем $\varepsilon\sqrt{\mu}$. Но если среда однородна всюду, то учет ее влияния сводится к делению заданных масс на проницаемость среды.

Во втором случае среда однородна по направлению поля. В этом случае также справедливы формулы (3.37), (3.37′), так как именно это условие обращает в нуль вторые члены левых частей в (3.21′), (3.21″), (3.31′), вследствие чего исчезают зависимые массы второго типа.

---

[1] Попутно отметим, что из-за этого обстоятельства в присутствии среды соотношение (2.107) несправедливо, так как преобразование (1.126′) неприменимо вследствие указанной зависимости $U(a)$ от точек a и q не только через расстояние L_{qa} между ними.

В третьем случае среда однородна по поверхностям, нормальным полю. При этом возможны зависимые источники поля $\mathbf{E}\vee\mathbf{H}$ обоих типов, но поле $\varepsilon\mathbf{E}\vee\mu\mathbf{H}$ упрощается, его ротор согласно (3.22″) равен нулю. А так как это поле удовлетворяет также уравнению (3.21), то вся система уравнений для него не отличается от системы уравнений поля $\mathbf{E}\vee\mathbf{H}$ в вакууме.

В последних двух случаях среда однородна не по всем направлениям. Тем не менее иногда расчет поля в этих случаях упрощается (см. замечания 4, 9, 10 в § 6).

Вернемся к первому случаю при условии однородности среды во всем пространстве, т. е. к случаю неограниченной однородной среды, которую также называют всюду однородной. Приведем примеры перехода от выражений, полученных для поля в вакууме, к полю в неограниченной однородной среде. В соответствии с (2.117) имеем для поля, создаваемого точечной массой[1],

$$\mathbf{E}(a)=\frac{e_{q\text{свб}}}{4\pi\varepsilon_a L^3_{qa}}\mathbf{L}_{qa}\vee\mathbf{H}(a)=\frac{m^0_q}{4\pi\mu L^3_{qa}}\mathbf{L}_{qa}, \tag{3.38}$$

$$U_E(a)=\frac{e_{q\text{свб}}}{4\pi\varepsilon_a}\frac{1}{L_{qa}}\vee U_H(a)=\frac{m^0_q}{4\pi\mu}\frac{1}{L_{qa}} \tag{3.38′}$$

и аналогично для поля, создаваемого объемной массой,

$$\mathbf{E}(a)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_a}\int\limits_V\frac{\delta_{\text{свб}}}{L^3_{qa}}\mathbf{L}_{qa}dV\vee\mathbf{H}(a)=\frac{1}{4\pi\mu}\int\limits_V\frac{\delta^0}{L^3_{qa}}\mathbf{L}_{qa}dV, \tag{3.39}$$

$$U_E(a)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_a}\int\limits_V\frac{\delta_{\text{свб}}}{L_{qa}}dV\vee U_H(a)=\frac{1}{4\pi\mu}\int\limits_V\frac{\delta^0}{L_{qa}}dV. \tag{3.39′}$$

Для поля неограниченной однородной прямолинейной массы получаем

$$U_E=\frac{\lambda_{\text{свб}}}{2\pi\varepsilon_a}\ln\frac{C}{r},\ \mathbf{E}=\frac{\mathbf{1}_r\lambda_{\text{свб}}}{2\pi\varepsilon_a r}\vee U_H=\frac{\lambda^0}{2\pi\mu}\ln\frac{C}{r},\ \mathbf{H}=\frac{\mathbf{1}_r\lambda^0}{2\pi\mu r}, \tag{3.38″}$$

где r—расстояние точки наблюдения от прямолинейной массы.

Из сказанного в разд. IV, § 7 главы второй о поведении поля у точечной или линейной массы следует, что формулы (3.38), (3.38′), (3.38″) остаются справедливыми, если однородность среды нарушается на расстояниях от точечной или линейной массы, очень больших сравнительно с расстоянием от нее до точки a, в которой определяется поле. Следовательно, эти формулы справедливы также в случае неоднородной среды для точки a, стремящейся к точечной или линейной массе (при $L_{qa}\to 0$, $r\to 0$), если в окрестности этой массы среда однородна.

---

[1] Потенциал, определяемый согласно (3.38′), зависит от положения точек a и q только через расстояние L_{qa} между ними. Поэтому соотношение (2.107) справедливо для неограниченной однородной среды так же, как для вакуума (см. сноску в начале § 4).

Закон Кулона для неограниченной однородной среды получаем в соответствии с (2.118):

$$\mathbf{F}_{qa} = \frac{e_{q\,\text{свб}} e_{a\,\text{свб}}}{4\pi\varepsilon_a L^3_{qa}} \mathbf{L}_{qa} \vee \mathbf{F}_{qa} = \frac{\mu_0 m_q{}^0 m^0{}_a}{4\pi\mu L^3_{qa}} \mathbf{L}_{qa}. \qquad (3.40)$$

Формулы (3.40) определяют силу взаимодействия между точечными электрическими или магнитными массами, помещенными в неограниченную однородную поляризующуюся среду. Сравнивая эти формулы с формулами (2.118) для взаимодействия масс в вакууме, мы видим, что заполняющая все пространство однородная поляризующаяся среда ослабляет силы взаимодействия находящихся в ней независимых масс (зарядов, магнитных полюсов); эти силы обратно пропорциональны ее проницаемости.

Для справедливости формул $(3.38)_2$—$(3.40)_2$ необходима однородность среды во всем пространстве, включая тела магнитов (создающих поля, взаимодействующих). Это строгое условие однородности среды не соблюдается в более сложной задаче о влиянии внешне однородной среды. В этой практически важной задаче $\nabla\mu_e=0$, где μ_e — проницаемость среды вне магнитов, отличающаяся от их проницаемости μ_i. Влияние значения μ_e на поле магнита с проницаемостью μ_i различно при разных формах магнита и зависит от соотношения между его размерами (см. в [17] § 74).

Уподобляя магнит однородному эллипсоиду вращения, однородно намагниченному по направлению оси симметрии, можно сказать, что влияние среды

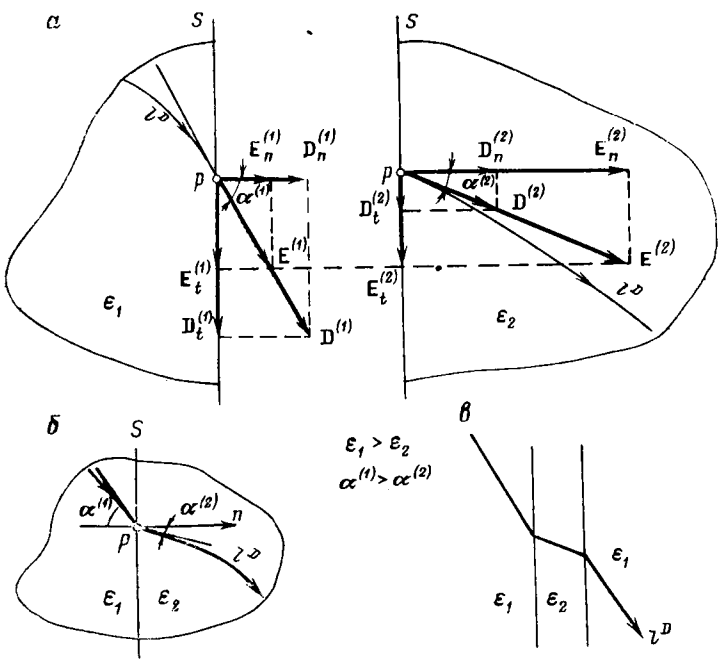


Рис. 31. Преломление линий поля на поверхности раздела сред с различной проницаемостью:

а — векторы E, D в областях V_1 и V_2, раздвинутых для наглядности; *б* — векторная линия, проходящая через поверхность раздела; *в* — векторная линия, проходящая через плоскопараллельный слой

зависит от отношения β длины магнита к его толщине (к диаметру его макси мального поперечного сечения), считая длиной магнита его размер по направ лению намагниченности. При достаточно большом значении β (длинный и тонки стержень) поле магнита обратно пропорционально μ_e, а при очень малой ег длине (пластинка, намагниченная по нормали) поле магнита практически н зависит от μ_e.

Из сказанного ясно, что формула $(3.38)_2$ справедлива также для случа внешне однородной среды ($\nabla\mu_e=0$) при условии, что m^0_q — масса полюса ма нита, однородного ($\nabla\mu_i=0$, но $\mu_i\neq\mu_e$), длинного, тонкого и продольно нама ниченного. При аналогичных условиях справедлива также формула $(3.40)_2$.

II. **Поверхность раздела.** Рассмотрим поверхность раздела S на которой независимых поверхностных масс (простого или двой ного слоя) нет и у которой $\mathbf{J}^0=0$ (рис. 31). Для такой поверхност имеем вместо формул (3.28)—(3.29′), (3.32)—(3.32′) более про стые формулы

$$E_t^{(2)}=E_t^{(1)},\ D_n^{(2)}=D_n^{(1)} \vee H_t^{(2)}=H_t^{(1)},\ B_n^{(2)}=B_n^{(1)}, \tag{3.41}$$

$$U^{(2)}=U^{(1)},\ \partial U^{(2)}/\partial t=\partial U^{(1)}/\partial t. \tag{3.41′}$$

Но $\mathbf{D}=\varepsilon_a\mathbf{E}$ и (в данном случае) $\mathbf{B}=\mu_a\mathbf{H}$, поэтому из (3.41) сле дует, что

$$\frac{D_t^{(2)}}{\varepsilon_2}=\frac{D_t^{(1)}}{\varepsilon_1},\ \frac{E_n^{(2)}}{\varepsilon_1}=\frac{E_n^{(1)}}{\varepsilon_2} \vee \frac{B_t^{(2)}}{\mu_2}=\frac{B_t^{(1)}}{\mu_1},\ \frac{H_n^{(2)}}{\mu_1}=\frac{H_n^{(2)}}{\mu_2}, \tag{3.41′}$$

$$\varepsilon_2\frac{\partial}{\partial n}U_E^{(2)}=\varepsilon_1\frac{\partial}{\partial n}U_E^{(1)} \vee \mu_2\frac{\partial}{\partial n}U_H^{(2)}=\mu_1\frac{\partial}{\partial n}U_H^{(1)}. \tag{3.41″}$$

Согласно этим формулам на поверхности раздела:

1) потенциалы и тангенциальные компоненты полей **E** и **H** тангенциальные производные потенциалов этих полей и нормаль ные компоненты векторов **D** и **B** непрерывны;

2) тангенциальные компоненты векторов **D** и **B** терпят разры вы, меняясь (при прохождении точки наблюдения через поверх ность S) пропорционально проницаемости среды;

3) нормальные компоненты полей **E** и **H** и нормальные произ водные их потенциалов терпят разрывы, меняясь обратно пропор ционально проницаемости среды.

Разрывы компонент поля, зависящие согласно (3.41″) от отно шения $\varepsilon_1/\varepsilon_2 \vee \mu_1/\mu_2$, не определяются им полностью. Этим отноше нием определяются только отношения разрывов компонент к и средним значениям у поверхности S. Ниже мы легко в этом убе димся, но предварительно познакомимся с удобным для характе ристики поверхности раздела коэффициентом отражени

$$\varepsilon_{12}=\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{2\varepsilon_{ср}}=\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2} \vee \mu_{12}=\frac{\mu_1-\mu_2}{2\mu_{ср}}=\frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1+\mu_2}. \tag{3.42}$$

Это название коэффициента связано с его применением пр расчете поля (в присутствии плоских поверхностей раздела) п методу зеркальных изображений. Коэффициент отражения поверх ности S определяется отношением проницаемостей сред, разделяе мых ею, например $\varepsilon_{12}=(1-\varepsilon_2/\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2/\varepsilon_1)^{-1}$. При изменении отно шения $\varepsilon_2/\varepsilon_1 \vee \mu_2/\mu_1$ от нуля до бесконечности коэффициент $\varepsilon_{12} \vee \mu$ меняется от $+1$ до -1.

Множитель $\varepsilon_{12}\vee\mu_{12}$ можно назвать коэффициентом контрастности поверхности раздела (сред, разделяемых ею). Чем больше модуль коэффициента контрастности, тем больше отношение абсолютной величины разрыва проницаемости к среднему из ее значений у поверхности раздела.

Теперь вернемся к разрывам компонент поля. Согласно $(3.41'')_{2,4}$, $(E_n^{(2)}-E_n^{(1)})(\varepsilon_1+\varepsilon_2)=(E_n^{(2)}+E_n^{(1)})(\varepsilon_1-\varepsilon_2)$. Следовательно,

$$E_n^{(2)}-E_n^{(1)}=2\varepsilon_{12}E_n^{\text{ср}} \vee H_n^{(2)}-H_n^{(1)}=2\mu_{12}H_n^{\text{ср}}. \tag{3.43}$$

Аналогично получаем из равенств $(3.41'')_{1,3}$

$$D_t^{(2)}-D_t^{(1)}=-2\varepsilon_{12}D_t^{\text{ср}} \vee B_t^{(2)}-B_t^{(1)}=-2\mu_{12}B_t^{\text{ср}}. \tag{3.43'}$$

Разрыв компоненты $E_n \vee H_n$ объясняется тем, что под влиянием поля на поверхности S появляется зависимая поверхностная масса второго типа с плотностью, пропорциональной среднему значению этой компоненты. Действительно, согласно (3.36''), (3.36''') на поверхности раздела

$$E_n^{(2)}-E_n^{(1)}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sigma_{\varepsilon E} \vee H_n^{(2)}-H_n^{(1)}=\sigma_{\mu H}. \tag{3.44}$$

Сравнивая (3.44) с (3.43), мы видим, что на поверхности раздела плотность зависимых масс определяется формулами

$$\sigma_{\varepsilon E}=2\varepsilon_{12}\varepsilon_0 E_n^{\text{ср}} \vee \sigma_{\mu H}=2\mu_{12}H_n^{\text{ср}}, \tag{3.45}$$

причем $\sigma_{\varepsilon E}=\sigma_{\text{свз}} \vee \sigma_{\mu H}=\sigma_{\text{вр}}$. (3.45')

Формулы (3.45) справедливы для любой поверхности S, но без (3.45'), так как в общем случае на поверхности находятся еще независимые поверхностные массы и, следовательно, также зависимые массы первого типа. Согласно (3.45) плотность зависимых масс второго типа пропорциональна коэффициенту контрастности и среднему значению нормальной компоненты поля.

В случае объемного (непрерывного) нарушения однородности среды аналогом коэффициента контрастности является градиент проницаемости, деленный на удвоенную проницаемость. Плотность зависимых объемных масс второго типа пропорциональна абсолютной величине этого вектора и компоненте поля по его направлению.

III. **Преломление поля на поверхности раздела.** Обозначим через α угол отклонения направления поля вблизи поверхности S от нормали n (направленной от V_1 к V_2) к ней. Очевидно, что тангенс угла α равен отношению полной тангенциальной (к поверхности S) компоненты поля к его компоненте, нормальной к этой поверхности. Следовательно, у поверхности S

$$\operatorname{tg}\alpha_E=E_\tau/E_n,\ \operatorname{tg}\alpha_D=D_\tau/D_n \vee \operatorname{tg}\alpha_H=H_\tau/H_n,\ \operatorname{tg}\alpha_B=B_\tau/B_n, \tag{3.46}$$

где индексами E, D, H, B отмечены углы α, относящиеся к полям соответствующих векторов.

В правой части каждого из равенств (3.46) имеем отношение двух величин, из которых одна непрерывна на поверхности S,

а другая терпит на ней разрыв. Из этого следует, что определяемые формулами (3.46) углы α должны терпеть разрывы на поверхности S. Согласно (3.41) и (3.41″) имеем из (3.46)

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_E^{(2)}}{\operatorname{tg}\alpha_E^{(1)}}=\frac{\operatorname{tg}\alpha_D^{(2)}}{\operatorname{tg}\alpha_D^{(1)}}=\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\quad\vee\quad\frac{\operatorname{tg}\alpha_H^{(2)}}{\operatorname{tg}\alpha_H^{(1)}}=\frac{\operatorname{tg}\alpha_B^{(2)}}{\operatorname{tg}\alpha_B^{(1)}}=\frac{\mu_2}{\mu_1}. \qquad (3.46')$$

Таким образом, силовые линии и линии индукции (смещения) при прохождении через поверхность раздела S резко меняют свое направление, т. е. преломляются, причем тангенс угла α меняется пропорционально проницаемости среды. Отклонение направления поля от нормали n меньше в среде с меньшей проницаемостью. Векторные линии полей **E**, **D**, **H**, **B** как бы стремятся пройти среду с меньшей проницаемостью по более краткому пути (см. рис. 31,*в*).

Из (3.46′) следует, что если на одной из сторон поверхности S поле нормально ($\operatorname{tg}\alpha=0$) или тангенциально к ней ($\operatorname{tg}\alpha=\infty$), то таким же оно является на другой ее стороне. Иначе говоря, если векторные линии встречают поверхность раздела под нулевым или прямым углом отклонения от нормали, то они не преломляются.

§ 5. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ПРИСУТСТВИИ ПРОВОДНИКОВ

Проводник—тело, отличающееся способностью проводить электричество. Если в проводнике создать электрическое поле, то в нем возникнет также электрический ток, т. е. движение электричества обоих знаков (положительного по направлению поля и отрицательного—в противоположном направлении) или одного из них [1].

I. **Влияние проводящего включения.** Представим себе, что мы внесли проводник C в первичное электрическое поле $\mathbf{E}^{\text{прв}}$, создаваемое некоторыми зарядами $e_{\text{прв}}$. Допустим пока, что других проводников нет и что диэлектрическая проницаемость ε всюду равняется единице (диэлектрики отсутствуют). Допустим также, что до внесения в поле $\mathbf{E}^{\text{прв}}$ проводник C был всюду нейтральным, т. е. в любом его элементе объема и на любом элементе его поверхности находились положительные и отрицательные заряды в равных количествах. Под действием поля в проводнике возникает электрический ток, вследствие чего у ограничивающей его поверхности S, за которой окружающая непроводящая среда (или вакуум) препятствует движению электричества, появляется слой зарядов, положительных на передней (считая по направлению поля) стороне проводника и отрицательных на тыльной его стороне. Этот слой чрезвычайно тонкий, и, следовательно, можно считать, что на поверхности проводника возникают поверхностные заряды с плотностью σ, причем $\sigma>0$ на передней части поверхности проводника и $\sigma<0$ на тыльной части его поверхности. Разделение зарядов, оче-

[1] Об электрическом токе и об электропроводности среды (тел) будет идти речь в следующей главе. Для интересующего нас здесь влияния проводников на электростатическое поле неважно, какова их электропроводность, лишь бы она не была нулевой.

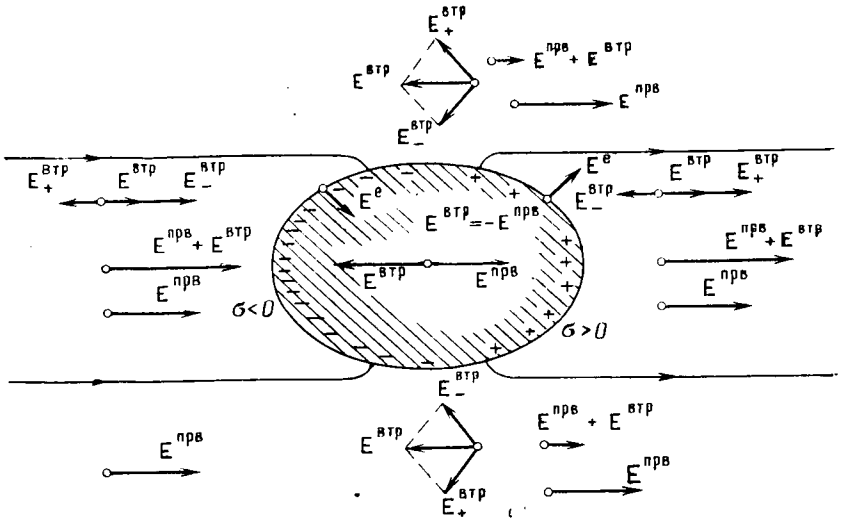


Рис. 32. Проводник в первично-однородном электростатическом поле. При $E^{втр}$ указаны знаки «+», «—» зарядов, создающих это поле

видно, не влияет на их общие количества, следовательно, сумма зарядов проводника равна нулю, как и до внесения его в поле, т. е. проводник в целом остается незаряженным (рис. 32). Но разделенные заряды создают внутри и вне проводника поле $E^{втр}$.

До тех пор, пока ток в проводнике существует, поверхностные заряды на нем накапливаются и значения $|\sigma|$ увеличиваются, т. е. $\sigma \neq 0$ и, следовательно, условие (2.7) постоянства поля E не выполняется; оно меняется. Для постоянства поля E необходимо, чтобы ток в проводнике прекратился и, следовательно, чтобы поле E в нем обратилось в нуль. Это означает, что заряды на поверхности проводника должны распределяться так, чтобы в любой точке внутри проводника они создавали поле $E^{втр}=-E^{прв}$:

Такая компенсация поля $E^{прв}$ полем $E^{втр}$ возможна, потому что поле $E^{втр}$, как показано на рис. 32, внутри включения направлено так, чтобы ослаблять суммарное поле сравнительно с полем $E^{прв}$. К моменту ослабления поля до нуля (когда $E^{втр}+E^{прв}=0$ в проводнике) накопление зарядов (увеличение $|\sigma|$) прекращается, и их поле становится постоянным.

Образование зарядов e^+ и e^- на поверхности проводника при внесении его в электрическое поле называют электростатической индукцией, а заряды e^+ и e^-, возникающие на проводнике,—индуцированными (наведенными). Первичное поле, вызывающее явление индукции, и заряды $e_{прв}$, создающие это поле, называют индуцирующими.

Суммарное поле E впереди и сзади проводника сильнее, а по бокам проводника слабее первичного поля [1]. Искажение поля получается таким, как будто проводник стягивает к себе проходящие поблизости силовые линии.

[1] Влияние, оказываемое проводником на электростатическое поле, аналогично влиянию диэлектрика на это поле, но оно сильнее. В частности, внутри проводника поле ослабляется до нуля.

Влияние проводника на электрическое поле зависит в общем случае от формы и размеров этого проводника и от характера первичного поля.

Обозначив через $e_{\text{прв}}$ и $e_{\text{инд}}$ (e^+ или e^-) индуцирующий и индуцируемый заряды, имеем

$$|e_{\text{инд}}| \leqslant |e_{\text{прв}}|, \quad |e_{\text{инд}}| = e^+ = -e^-. \tag{3.47}$$

Знак равенства в $(3.47)_1$ соответствует случаю, когда проводник окружает индуцирующий заряд со всех сторон и, следовательно, все линии, посылаемые или собираемые этим зарядом, перехватываются проводником. Особым является случай, когда внесенный в поле $\mathbf{E}^{\text{прв}}$ проводник C простирается до бесконечности в каком-либо направлении. В этом случае один из индуцированных зарядов удаляется на бесконечность и его поле на конечных расстояниях равно нулю. Такой случай мы имеем, когда «заземляем» проводник и отводим таким образом один из индуцированных зарядов «к земле».

В отличие от возникающих на поверхности диэлектрика связанных зарядов индуцированные на поверхности проводника заряды являются свободными. При желании можно полностью разобщить заряды e^+ и e^-.

Представим теперь, что кроме проводника C в пространстве имеется еще другой проводник C', в частности, это может быть проводник, на котором находится индуцирующий заряд e. В этом случае на проводнике C' под действием поля зарядов, индуцированных на проводнике C, появляются также индуцированные заряды. Поле этих зарядов, в свою очередь, индуцирует дополнительные заряды на проводнике C и так далее. В результате этого явления, называемого взаимной электростатической индукцией, на обоих проводниках появляются заряды с поверхностной плотностью, удовлетворяющей условиям обращения в нуль суммарного поля в любой точке внутри каждого из проводников и равенства нулю суммы индуцированных зарядов на каждом проводнике. Аналогичным условиям удовлетворяют индуцированные заряды в случае нескольких проводников.

В присутствии диэлектриков электростатическая индукция осложняется. Поле индуцированных зарядов вызывает дополнительную поляризацию диэлектриков и соответствующие ей связанные заряды. Эти (дополнительные) заряды в свою очередь индуцируют заряды на проводниках и т. д.

Допустим теперь, что заряд e введен в область V, занятую проводником C. В этом случае электричество со знаком заряда e движется в его поле от него к поверхности проводника, а электричество другого знака движется к заряду e и, не встречая препятствия, достигает его. Поле становится постоянным, когда заряд полностью нейтрализуется приходящим к нему электричеством, т. е. когда к нему прибывает заряд $e' = -e$, причем на поверхности проводника оказывается заряд $e'' = -e' = e$ с плотностью σ, удовлетворяющей условию равенства нулю поля в проводнике. Таким образом

заряд e переходит на поверхность проводника, и этот проводник оказывается заряженным. В данном случае проводник приобретает «собственный» («наложенный» на него) заряд $e_{\text{сбс}}=e$. Такой же собственный заряд $e_{\text{сбс}}$ приобретет проводник, если заряд e приведем в соприкосновение с поверхностью этого проводника. Заряд $e_{\text{сбс}}$, как и индуцированные заряды, распределяется по поверхности проводника так, чтобы поле $\mathbf{E}$ внутри проводника было равно нулю [1].

Обозначим индексами i и e величины, относящиеся к точкам, находящимся внутри и вне некоторого проводника C. Из сказанного выше следует, что

$$\mathbf{E}^i=0,\ \mathbf{D}^i=0,\ \operatorname{grad} U^i=0,\ U^i=U_C, \tag{3.48}$$

где U_C — значение потенциала во всех точках проводника C. В частности, на поверхности проводника, на ее внутренней стороне,

$$E^i_n=-\frac{\partial U^i}{\partial n}=0,\ E^i_t=-\frac{\partial U^i}{\partial t}=0,\ D^i_n=0,\ D^i_t=0. \tag{3.48'}$$

Из (3.48) следует, что область V, занимаемая проводником, является эквипотенциальной. Легко убедиться, что в этой области нет зарядов, т. е. что в любом элементе объема проводника (заряженного или незаряженного) алгебраическая сумма зарядов равна нулю. Действительно, согласно (3.48) в любой точке внутри проводника $\operatorname{div}\mathbf{D}^i=0$, $\operatorname{div}\mathbf{E}^i=0$ и, следовательно,

$$\delta^i_{\text{сзб}}=0,\ \delta^i_{\text{плн}}=0. \tag{3.49}$$

Легко понять, что необъемных зарядов внутри проводника тоже нет, так как согласно (3.48) потоки векторов $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$ через любую замкнутую поверхность, взятую внутри проводника, равны нулю и, следовательно, согласно $(3.13'')_1$, $(3.27)_1$ сумма зарядов (свободных, полных) всякого вида (объемных, необъемных) в любой части области, занятой проводником, должна быть равна нулю. Заряды могут находиться только на поверхности проводника. В отсутствии диэлектрической среды—это свободные заряды: наложенные, индуцированные или и те и другие. В общем случае на поверхности проводника имеются еще связанные заряды. На ней возможен также двойной слой.

II. **Поле у поверхности проводника.** Согласно $(3.28)_1$, $(3.32)_1$, $(3.29)_1$, $(3.32'')_1$, $(3.29')_1$, $(3.27)_1$ на внешней стороне поверхности

[1] Из этого следует, что нельзя произвольно задавать распределение заряда $e_{\text{сбс}}$ по поверхности S проводника C и нельзя в общем случае считать эту поверхность равномерно заряженной. Функция $\sigma(q)$ положения точки q на S должна удовлетворять некоторому интегральному уравнению. В случае уединенного проводника (т. е. вдали от других проводников, зарядов и нарушений однородности диэлектрика) это уравнение (4.93) с подстановкой S вместо S_0 (уравнение Робэна). Его решением является $\sigma=\text{const}$ для проводника сферической формы (см. разд. IV, § 6 главы четвертой). В общем случае величина $|\sigma|$ имеет наибольшие значения на наиболее выпуклых частях поверхности уединенного проводника (в случае металлического стержня — у его концов).

проводника C (в непроводящей среде, окружающей проводник)

$$E_i^e = -\frac{\partial U^e}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\partial \eta_{ie}}{\partial t},\quad U^e = U_C + \frac{1}{\varepsilon_0}\eta_{ie}, \tag{3.50}$$

$$D^e{}_n = \sigma_{\text{свб}},\quad E^e{}_n = \frac{\sigma_{\text{свб}}}{\varepsilon_a},\quad \frac{\partial U^e}{\partial n} = -\frac{\sigma_{\text{свб}}}{\varepsilon_a}, \tag{3.50'}$$

$$e^c{}_{\text{свб}} = \int\limits_{S_C} \sigma_{\text{свб}} dS = \int\limits_{S_C} (\mathbf{D}^e d\mathbf{S}) = -\varepsilon_0 \int\limits_{S_C} \varepsilon_e \frac{\partial U^e}{\partial n} dS, \tag{3.50''}$$

где $e^c{}_{\text{свб}}$—суммарный свободный заряд проводника (на его поверхности S_c).

Если на проводнике нет двойного слоя, то вместо (3.50) имеем

$$E^e{}_t = 0,\ \partial U^e/\partial t = 0,\ U^e = U^i = U_C. \tag{3.51}$$

Если проводник не заряжен, т. е. если сумма зарядов, находящихся на его поверхности S_C, равна нулю, то интегралы в (3.50″) обращаются в нуль, хотя величины $\sigma_{\text{свб}}$, $D^e{}_n$ и $\partial U^e/\partial n$ на этой поверхности могут отличаться от нуля, так как на ней могут находиться индуцированные заряды e^+ и $e^- = -e^+$. При таких зарядах на проводнике C напряжение $\mathscr{E}_{C\infty}$ между ним и бесконечностью может иметь нулевое значение. В частности, это верно для случая, когда через проводник проходит плоскость нечетной симметрии поля.

Согласно $(3.51)_1$ и (3.50′) у поверхности проводника

$$E^e{}_n = \pm E^e,\ \sigma_{\text{свб}} = \varepsilon_a E^e{}_n = \pm \varepsilon_a E^e, \tag{3.52}$$

где верхние знаки относятся к участкам поверхности проводника, на которых поле направлено от него, а нижние знаки—к ее участкам, на которых поле направлено к проводнику. Таким образом, у поверхности проводника поле имеет только нормальную к ней компоненту. Силовые линии подходят к поверхности проводника и отходят от нее по нормалям к ней.

Пусть C—проводник конечных размеров, соединенный тонкой проводящей нитью с проводником бесконечно больших размеров (с землей). Допустим, что до присоединения нити проводник C не был заряжен, но на нем были индуцированные полем заряды e^+ и e^-. Присоединив заземление, мы удалили один из зарядов и обратили в нуль потенциал проводника. Проводник оказался заряженным в том смысле, что теперь влияет на поле только один из его зарядов. Величина этого заряда определяется, согласно (3.50″), потоком вектора $\mathbf{D}^e$ через поверхность проводника.

III. **Электростатический экран.** Формулы (3.48) справедливы при любом поле и любых зарядах вне проводника и на его поверхности. Можно доказать, что если в проводнике имеется полость, то эти формулы справедливы также для области Φ, занимаемой

этой полостью[1]. Следовательно, проводник, отделяющий со всех сторон некоторую область ϑ от остального пространства, защищает ее от зарядов, находящихся вне этой области, обращая в нуль их поле внутри нее. Он является для нее электростатическим экраном. Таким экраном может, в частности, служить тонкая проводящая оболочка. В экранированной области ϑ (в которую не внесены заряды) поле равно нулю при любом поле вне ее.

Поместим во внутреннюю точку q области ϑ, занятой полостью, заряд e. Допустим, что проводник находится в вакууме и что других проводников в пространстве нет. Под действием поля, создаваемого зарядом e, в проводнике возникает движение зарядов, в результате которого после установления поля на поверхности $S[\vartheta]$, т. е. на стенке полости, появится заряд e', а на наружной поверхности S проводника C—заряд $e''=-e'$. Докажем, что в данном случае $e'=-e$. Для этого возьмем в теле проводника замкнутую поверхность $S([\vartheta])$, охватывающую область ϑ (вместе с ее стенкой $S[\vartheta]$) и содержащую заряды e и e'. Поле во всех точках этой поверхности равно нулю, следовательно, поток вектора $\mathbf{D}$ через эту поверхность также равен нулю. Поэтому согласно $(3.27)_1$ сумма зарядов $(e+e')$, заключенных внутри поверхности $S([\vartheta])$, должна быть равна нулю, откуда $e'=-e$. Таким образом, внесение заряда e в полость проводника сопровождается появлением такого же заряда на его наружной поверхности.

Если заряд e привести в соприкосновение со стенкой[2] полости, то он и заряд e' будут взаимно нейтрализованы, причем поле в полости исчезнет, а во внешнем пространстве останется без изменения поле заряда $e''=e$.

Посмотрим, как влияет экран на поле, создаваемое зарядом e, находящимся внутри него. При отсутствии проводящей оболочки вокруг точечного заряда e_q во всем пространстве имелось бы сферически симметричное поле, силовые линии которого являются лучами, расходящимися из точки q равномерно во все стороны и продолжающимися до бесконечности. С появлением экрана все силовые линии, расходящиеся из точки q, обрываются на его внутренней стороне, а пространство, окружающее экран, заполняется силовыми линиями, расходящимися от его внешней стороны. При этом силовые линии искривляются так, что подходят к внутренней по-

[1] Допустим, что проводник C ранее был сплошным и находился в том же поле, в котором он фактически находится, а затем из области ϑ была каким-то способом изъята проводящая среда и в результате образовалась полость. Пусть $S[\omega]$ — произвольно взятая внутри области ϑ замкнутая поверхность, ограничивающая часть ω области ϑ. Поток ψ вектора $\mathbf{D}$ через эту поверхность должен быть равен нулю, так как при образовании полости не появились заряды в области ϑ. Но для равенства нулю потока ψ через любую замкнутую поверхность в области ϑ необходимо, чтобы во всех точках этой области поле было равно нулю. Однако этот вывод, очевидно, несправедлив для полости, содержащей заряд, а также для аперифрактической полости, охватывающей проводник с полостью, в которой имеется заряд.

[2] С внешней стенкой полости, если занимаемая полостью область ϑ — перифрактическая, т. е. если она ограничена изнутри поверхностями некоторых проводников.

верхности экрана и отходят от его внешней поверхности по нормалям к этим поверхностям и с густотой, пропорциональной плотности зарядов на них. Таким образом, поле внутри и вне экрана отличается от первичного поля.

Вносимые экраном искажения незаметны только на расстояниях от точки q, достаточно малых сравнительно с расстояниями от нее до экрана, и (вне экрана) на расстояниях от экрана, достаточно больших сравнительно с его линейными размерами. Исключением является случай, когда экран представляет собой сферический слой с центром в точке q. В этом случае поле вне тела экрана совпадает с первичным полем. При более сложном первичном поле, например, если внутри экрана находится совокупность точечных зарядов e, неискажающим является экран, поверхности которого совпадают с двумя какими-либо замкнутыми эквипотенциальными поверхностями первичного поля, охватывающими источники этого поля (заряды e). Если с такой поверхностью совпадает только одна из поверхностей экрана (внутренняя или внешняя), то не искажается поле внутри или вне экрана.

В том, что экран не искажает поле в области пространства, к которой обращена поверхность экрана, совпадающая с эквипотенциальной поверхностью первичного поля, можно убедиться на основании теоремы единственности (см. § 6). Действительно, поток вектора **D** через любую замкнутую эквипотенциальную поверхность, охватывающую заряды e, не меняется при введении экрана. Ясно также, что эта поверхность остается эквипотенциальной, если с ней совпадает поверхность экрана. Следовательно, на этой поверхности сохраняется краевое условие III типа (1.106′), и поэтому не должно измениться поле в области, ограничиваемой этой поверхностью.

Из изложенного следует, что экран не защищает окружающее его пространство от поля зарядов, находящихся внутри экрана; он может только изменить это поле, ослабить его в одних местах, усилить в других и исказить форму силовых линий. Однако поле вокруг экрана определяется зарядом $e''=e$, находящимся на внешней стороне экрана, а этот заряд, как и в случае обычного заряженного проводника, можно отвести к земле и таким способом обратить в нуль его поле. Иначе говоря, заземленный экран защищает окружающее его пространство от поля, возникающего при внесении зарядов в полость экрана.

Пространство вне заземленного экрана можно рассматривать как область, заключенную между ним и бесконечно удаленной проводящей поверхностью. Эта область является полостью в проводнике, состоящем из двух проводящих оболочек, соединенных заземлением. Без этого соединения получилась бы перифрактическая полость, в которой можно построить замкнутую поверхность (охватывающую проводник с полостью, с зарядами e, e', e'') с ненулевым потоком вектора **D** (см. начало этого раздела).

Аналогично можно интерпретировать действие заземления в случае обычного заряженного проводника (без полости с зарядом в ней).

IV. **Поле в присутствии проводников.** Все формулы, полученные для электрического поля в отсутствии проводников, остаются верными и в их присутствии с оговоркой о необходимости учитывать

поле зарядов, индуцированных на проводниках, и принимать во внимание, что любые заряды на поверхностях проводников распределены с плотностью, которая должна удовлетворять условию обращения в нуль напряженности поля внутри каждого проводника.

В предыдущих параграфах этой главы мы видели, что в присутствии диэлектриков определение поля затрудняется из-за связанных зарядов, зависящих от этого поля. В присутствии проводников возникает новое принципиальное затруднение, состоящее в том, что плотность свободных поверхностных зарядов на проводниках также нам неизвестна до определения поля. Более того, обычно оказываются неизвестными плотности всех источников электрического поля, так как ими часто являются только поверхностные заряды (свободные и связанные), находящиеся на проводниках, и связанные заряды, возникающие в местах нарушения однородности среды.

Однако поле в областях пространства, занятых проводниками, равно нулю. Что же касается поля в остальной части пространства, то влияние, оказываемое на него проводниками (их зарядами), учитывается краевыми условиями на их поверхностях. Для этого, как будет показано в следующем параграфе, достаточно знать одну из двух величин для каждой из этих поверхностей: суммарный свободный заряд проводника или его потенциал. Но одну из этих величин всегда можно задавать произвольно. Действительно, суммарный заряд проводника можно произвольно менять наложением соответствующего свободного заряда, а потенциалу проводника можно придавать желаемое значение с помощью стороннего напряжения (см. разд. II, § 3 главы четвертой), включаемого между проводником и точкой отсчета потенциала. Понятно, что в первом случае мы не можем произвольно задавать потенциал проводника, а во втором—его заряд.

§ 6. ПРЯМАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ СТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ В ПРИСУТСТВИИ СРЕДЫ

Прямой задачей статического поля в присутствии среды является определение поля ($\mathbf{E}$, $\mathbf{D} \vee \mathbf{H}$, $\mathbf{B}$) по заданной проницаемости среды ($\varepsilon \vee \mu$) и заданным независимым массам. Свободные заряды проводников не являются полностью независимыми, но считаются заданными поверхности проводников; также считается заданным потенциал или собственный заряд каждого из них. Вместо постоянных магнитных масс может быть задана постоянная намагниченность, т. е. поле $\mathbf{J}^0$.

Решить прямую задачу можно с помощью системы дифференциальных уравнений (3.24), (3.25), которую сводят к уравнению (3.31), являющемуся аналогом уравнения (2.46).

В § 8 главы второй мы говорили о возможности определения потенциала U поля $\mathbf{f}$ в области V по источникам этого поля, заданным только в этой области. В присутствии среды неполнота данных об источниках определяемого поля, находящихся внутри и

вне области V, в которой требуется его определить, принципиально неминуема, так как до определения поля мы из величин, характеризующих его источники, обычно знаем только те, которые можно произвольно задавать: для электрического поля—свободные заряды в непроводящей среде и суммарные значения свободных зарядов на незаземленных проводниках, а для магнитного поля—постоянные магнитные массы. Остаются до определения поля неизвестными плотности связанных зарядов второго типа в непроводящей среде, плотности любых (свободных и связанных) зарядов на поверхности проводников и плотности временных магнитных масс второго типа [1].

Связанные заряды первого типа в непроводящей среде и временные магнитные массы первого типа можно считать заданными, поскольку заданы среда и независимые массы, к которым приурочены зависимые массы первого типа.

I. **Условия единственности.** Уравнение (3.31) для потенциала U позволяет по указанным неполным сведениям об источниках поля, заданным в области V, и по проницаемости среды, заданной также только в этой области, определить поле, создаваемое в ней источниками всех видов, где бы они ни находились. Расчет поля в произвольной среде с помощью уравнения (3.31), как и поля в вакууме по уравнению (2.46), сводится к нахождению функции U, являющейся частным решением этого уравнения и удовлетворяющей дополняющим условиям, обеспечивающим единственность его решения, т. е. позволяющим исключить бесчисленное множество частных решений, соответствующих полям, получающимся при других средах и независимых массах вне области V. Задание этих дополняющих условий заменяет задание среды и независимых источников вне области V.

Какие дополняющие условия достаточны для этой цели, должна указать теорема единственности, которую можно сформулировать для уравнения (3.31), пользуясь результатами, полученными в разделе I, § 8 главы первой, где изложение велось в общем виде применительно к уравнению $(1.96)_1$. Переход к уравнению (3.31) и к соответствующей ему теореме единственности совершается подстановками

$$\Lambda = \varepsilon, \quad w^{\sim} = \delta_{\text{свб}}/\varepsilon_0 \bigvee \Lambda = \mu, \quad w^{v} = \delta^0 = -\operatorname{div} \mathbf{J}^0$$

и заменой формул (1.106′), (1.110′) формулами (3.33), (3.32), (3.32″). Эта замена формул сводится к подстановкам

$$Q = -\frac{1}{\varepsilon_0} e_{V_{\text{свб}}}, \quad \zeta_{12} = \frac{1}{\varepsilon_0} \eta_{12}, \quad \varphi_{12} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \sigma_{\text{свб}}$$

---

[1] Для неизвестных плотностей электрических зарядов или магнитных масс можно составить интегральные уравнения (см. § 4 главы четвертой). Решая эти уравнения, можно определить не задаваемые нам источники поля и свести задачу к определению поля заданных масс по формулам (2.12), (2.45).

для электрического поля и

$$Q = -m^0,\ \zeta_{12} = \eta_{12},\ \varphi_{12} = -\sigma^0$$

для магнитного поля.

Особыми поверхностями, на которых задаются условия (3.32), (3.32″), являются поверхности, несущие первичные (т. е. независимые) массы (простые или двойные слои), и поверхности раздела между средами с различной проницаемостью. В электрическом поле особыми являются также поверхности проводников, но они ограничивают области, в которых поле равно нулю (см. ниже замечание 3). Особыми точками q_{oc} и линиями l_{oc} являются точки, в которых имеются точечные массы или диполи, и линии, на которых имеются линейные массы или линейные диполи. Условия у этих точек и линий можно получить, применяя $(3.27)_{1,3}$ к малой окрестности точки или элемента длины линии (см. ниже замечания 9 и 10). Если в этой окрестности среда однородна, то условия для U получаются из (3.38′), $(3.38'')_{1,3}$ заменой знаков равенства знаками стремления [см. сказанное выше о применимости формул (3.38), (3.38′), (3.38″)].

II. **Замечания.** К замечаниям, приведенным в разд. II, § 8 главы первой, надо применительно к рассматриваемому полю добавить следующее.

1. Если область ϑ отделена проводящей стенкой (экраном) от остального пространства и в этой области нет независимых зарядов, то в ней поле $\mathbf{E}=0$ и $U=\text{const}$, так как от поля зарядов, находящихся за экраном, область ϑ защищена (см. разд. III § 5).

Если проводник, окружающий эту область, простирается до бесконечности (экран заземлен), то на нем и, следовательно, во всей области ϑ потенциал $U=0$. Это верно и в том случае, когда область ϑ незамкнутая и стенка продолжается до бесконечности.

2. Из сказанного выше следует, что если пространство разделено неограниченными проводящими перегородками на простирающиеся до бесконечности области ϑ_k, то заряды, находящиеся в какой-либо из них, не создают поля в остальных областях или, точнее, это поле в них компенсируется полем зарядов, индуцированных на перегородках. Иначе говоря, поля в областях ϑ_k взаимно независимы.

3. Так как внутри проводников поле $\mathbf{E}$ равно нулю, то они не включаются в состав области V, в которой определяется электрическое поле. Их поверхности служат участками границы $S[V]$ области V. На поверхности каждого из проводников в соответствии со сказанным в разд. IV, § 5 может быть задано условие (третьего или первого типа):

$$\oint_{S[\vartheta_k]} \varepsilon \frac{\partial U}{\partial n}\, dS = -\frac{1}{\varepsilon_0} e_{k\,\text{свб}} \quad \text{или} \quad U = U_k, \tag{3.53}$$

где U_k, $e_{k\,\text{свб}}$ и $S[\vartheta_k]$ — потенциал, заряд и поверхность k-го проводника. В частности, если проводник заземлен, то на его поверхности является заданным условие $U_k=0$, а если он не заземлен

лен и на него не наложен заряд, то на его поверхности является заданным условие (третьего типа)

$$\oint\limits_{S[\vartheta_k]} \varepsilon \frac{\partial U}{\partial n} dS = 0 \quad \left(\frac{\partial U}{\partial t} = 0\right), \tag{3.53'}$$

так как сумма индуцированных на нем зарядов равна нулю.

4. Если независимые массы и нарушения однородности среды находятся в области ϑ, ограниченной со всех сторон, то в условие регулярности на бесконечности (2.47) надо подставить вместо суммарной массы m_ϑ сумму первичных масс, разделенную на проницаемость $(\varepsilon \vee \mu)$ среды вне области ϑ.

Случай, когда независимые массы простираются до бесконечности, аналогичен соответствующему случаю для масс в вакууме (см. замечание 1 § 8 главы второй). В случае, когда среда в далеких частях пространства однородна только по лучам R, исходящим из некоторой конечной точки O, следует вместо $\varepsilon \vee \mu$ взять проницаемость среды, усредненную по бесконечно удаленной поверхности:

$$\varepsilon_{ср} = \frac{1}{4\pi} \int \varepsilon d\omega \vee \mu_{ср} = \frac{1}{4\pi} \int \mu d\omega, \tag{3.54}$$

где $d\omega$ — угол видимости элемента dS этой поверхности.

5. В соответствии с замечанием 11 § 8 главы первой в области V, в которой нет независимых масс, потенциал U определяется полностью заданием краевых условий и проницаемости среды в этой области. Если в случае электрического поля областью V является все пространство, кроме его частей, занятых проводниками, то, полагая поле регулярным на бесконечности, можно считать, что оно полностью определяется функцией $\varepsilon(a)$ и значениями зарядов проводников или их потенциалов.

6. Необъемную массу можно представить как очень плотную объемную массу, определяемую функцией $\delta(q)$, а поверхность раздела заменить переходной зоной, в пределах которой (по нормали к ее границам) проницаемость меняется очень интенсивно, но непрерывно. Имея это в виду, можно сказать, что уравнением (3.31) и краевыми условиями поле $\mathbf{E} \vee \mathbf{H}$ в области V определяется по заданным в ней функциям $\delta_{свб}(q) \vee \delta^0(q)$ и $\varepsilon(q) \vee \mu(q)$.

7. Согласно (1.110') на каждой особой поверхности S функция U должна удовлетворять двум условиям сопряжения (3.32) и (3.32''), в которых предусмотрено, что в общем случае эта поверхность может быть поверхностью раздела и на ней могут находиться первичные массы: простые и двойные слои. В частных случаях условия сопряжения упрощаются. Наиболее часто встречается случай поверхности раздела, на которой нет ни двойного слоя, ни простого слоя первичных масс. В этом случае условия сопряжения сводятся к требованию непрерывности функции U и произведения ее нормальной производной на проницаемость среды, т. е. к условиям $(3.41')_1$ и (3.41''').

8. Если в области V среда кусочно-однородна и в ней нет независимых масс, то в ней потенциал всюду, кроме поверхностей раздела, удовлетворяет уравнению Лапласа $\nabla^2 U = 0$. Тем не менее в этом случае обычно проектируют для функции U в различных частях области V различные аналитические выражения, учитывая необходимость разрывов нормальной производной этой функции на поверхности раздела в соответствии со вторым из условий сопряжения (3.41‴).

9. Если в окрестности точечной массы $m_{q\,\text{свб}} \vee m^0_q$ проницаемость среды не меняется с расстоянием от точки q, например, если через точку q проходят поверхности раздела кусочно-однородной среды, то, применяя $(3.27)_{1,3}$, получаем в соответствии с (3.38)

$$\text{при } R \to 0 \quad \mathbf{E} \to \frac{e_{q\,\text{свб}}}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{\text{ср}}R^3}\mathbf{R} \vee \mathbf{H} \to \frac{m^0_q}{4\pi\mu_{\text{ср}}R^3}\mathbf{R}, \tag{3.53″}$$

где R — расстояние от точечной массы, а $\varepsilon_{\text{ср}} \vee \mu_{\text{ср}}$ определяется по формуле (3.54), в которой следует считать $d\omega$ — углом видимости элемента сферической поверхности достаточно малого радиуса R с центром в точке q.

10. Если в окрестности элемента $\lambda_{q\,\text{свб}} dl \vee \lambda^0_q dl$ линейной массы проницаемость среды зависит от угла поворота около прямой, на которой он расположен, например, если элемент dl лежит на поверхности раздела или является элементом линии пересечения поверхностей раздела, то, применяя (3.27), получаем в соответствии с (3.38″)

$$\text{при } r \to 0 \quad \mathbf{E} \to \frac{\boldsymbol{\lambda}_{q\,\text{свб}}\,\mathbf{r}}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{\text{ср}\alpha}r^2} \vee \mathbf{H} \to \frac{\boldsymbol{\lambda}^0_q\,\mathbf{r}}{2\pi\mu_{\text{ср}\alpha}r^2}, \tag{3.53‴}$$

где

$$\varepsilon_{\text{ср}\alpha} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varepsilon d\alpha \vee \mu_{\text{ср}\alpha} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mu d\alpha \tag{3.54′}$$

— проницаемость, усредненная по окружности l' бесконечно уменьшающегося радиуса r с центром q на элементе dl, лежащей в плоскости, нормальной к отрезку dl; α — плоский угол видимости элемента длины dl' из точки q.

§ 7. ДОПОЛНЕНИЯ К ТРЕТЬЕЙ ГЛАВЕ

11. **Формула Пуассона.** Согласно (3.4′), $(3.2)_2$, $(2.115)_4$ однородно намагниченная среда, заполняющая область V, создает поле $\mathbf{H}$ с потенциалом

$$U^{\text{п}}_H(a) = \frac{1}{4\pi}\left(\mathbf{J}\int_V^q \nabla \frac{1}{L_{qa}}\,dV\right). \tag{3.55}$$

Принимая во внимание (1.127), получаем

$$4\pi U^{\text{п}}{}_{H}(a) = -\left(\mathbf{J}\int\limits_{V}\overset{a}{\nabla}\frac{1}{L_{qa}}\,dV\right) = -\frac{1}{\delta_{\text{мгн}}}\left(\mathbf{J}\overset{a}{\nabla}\int\limits_{V}\frac{\delta_{\text{мгн}}}{L_{qa}}\,dV\right)$$

и согласно $(2.44'')_2$ и $(2.115)_{3,4}$

$$U^{\text{п}}{}_{H}(a) = -\frac{1}{\delta_{\text{мгн}}}(\mathbf{J}\overset{a}{\nabla}U_{H}(a)) = -(\mathbf{J}\overset{a}{\nabla}U_{H\,\text{ед}}(a)), \qquad (3.55')$$

т. е.

$$U^{\text{п}}{}_{H}(a) = \frac{1}{\delta_{\text{мгн}}}(\mathbf{J}\mathbf{H}(a)) = (\mathbf{J}\mathbf{H}_{\text{ед}}(a)), \qquad (3.55'')$$

где U_H и $\mathbf{H}$ — потенциал и напряженность поля, создаваемого однородной магнитной массой и плотностью $\delta_{\text{мгн}}$, занимающей область V, а $U_{H\,\text{ед}}$ и $\mathbf{H}_{\text{ед}}$ — значения U_H и $\mathbf{H}$ при единичном значении $\delta_{\text{мгн}}$.

Формулы (3.55′), (3.55″) определяют потенциал $U^{\text{п}}{}_{H}$ поля, создаваемого однородно намагниченным телом, через потенциал $U_{H\,\text{ед}}$ или напряженность $\mathbf{H}_{\text{ед}}$ поля, которое создавала бы магнитная масса единичной плотности, если бы она замещала это намагниченное тело [1].

Согласно $(2.114)_2$, $(2.115)_{3,4}$, (2.115′) поля $\mathbf{H}$ и $\boldsymbol{\Gamma}$ одинаковых по форме и плотности масс $m_{\text{мгн}}$ и $m_{\text{гр}}$ связаны соотношениями

$$U_H = \frac{1}{4\pi\gamma}U_{\Gamma}, \quad \mathbf{H} = -\frac{1}{4\pi\gamma}\boldsymbol{\Gamma}; \qquad (3.55''')$$

следовательно, из (2.55′) получаем формулу Пуассона

$$U_H = -\frac{1}{4\pi\gamma}(\mathbf{J}\overset{a}{\nabla}U_{\Gamma\,\text{ед}}) = -\frac{1}{4\pi\gamma\delta_{\text{гр}}}(\mathbf{J}\overset{a}{\nabla}U_{\Gamma}), \qquad (3.56)$$

в которой U_Γ — потенциал гравитационного поля, создаваемого однородной массой $m_{\text{гр}}$ с плотностью $\delta_{\text{гр}}$; $U_{\Gamma\,\text{ед}}$ — значение U_Γ при единичном значении $\delta_{\text{гр}}$.

Формула Пуассона (3.56) представляет собой соотношение между потенциалами U_Γ и U_H гравитационного поля, создаваемого однородной гравитационной массой, занимающей какую-либо область V, и магнитного поля, создаваемого однородно поляризованным магнетиком, занимающим ту же область. В соответствии с (3.55″) можно формулу (3.56) представить в виде

$$U_H = -\frac{1}{4\pi\gamma\delta_{\text{гр}}}(\mathbf{J}\boldsymbol{\Gamma}). \qquad (3.56')$$

Соотношения (3.56), (3.56′) позволяют воспользоваться результатами расчетов гравитационного поля для определения магнитного поля. Они имеют формальный характер и не предназна-

[1] Аналогичное, включая (3.55)—(3.55″), очевидно, справедливо для поля, создаваемого однородно поляризованным диэлектриком.

чены для выражения физической связи между гравитационным и магнитным полями.

II. **Взаимное влияние проводников.** Представим себе, что в пространстве имеются n проводников C_k $(k=1, 2, \ldots, n)$. Допустим, что на проводниках C_k суммарные свободные заряды равны e_k, а вне этих проводников свободных зарядов нет. Согласно замечанию 5 § 6, при заданной проницаемости среды поле полностью определяется свободными зарядами проводников e_k, следовательно, ими определяется потенциал в любой точке пространства и, в частности, на любом из этих проводников. Пусть U'_k и U''_k — значения потенциалов проводников в полях, соответствующих совокупностям e'_k и e''_k зарядов на проводниках. Можно доказать, что эти потенциалы и заряды взаимно связаны соотношением

$$\Sigma U'_k e''_k = \Sigma U''_k e'_k \quad (k=1, 2, \ldots, n). \tag{3.57}$$

Для проводников в неограниченном однородном диэлектрике можно из (3.57) получить соотношения

$$U_i = \Sigma b_{ik} e_k, \qquad e_i = \Sigma c_{ik} U_k$$

$$(i=1, 2, \ldots, n) \qquad (k=1, 2, \ldots, n), \tag{3.58}$$

в которых множители b_{ik} и c_{ik}, называемые соответственно потенциальными и емкостными (индукционными) коэффициентами, не зависят от зарядов и потенциалов проводников и полностью определяются их формами, размерами и взаимным расположением, а также диэлектрической проницаемостью среды.

Множитель c_{ik} при $i=k$ равен отношению заряда проводника C_k к его потенциалу, при условии, что остальные проводники заземлены. Он называется емкостью k-го проводника в системе проводников. При $n=1$ имеем только один емкостный коэффициент $c_{11}=e_1/U_1$. При этом, обозначая $c_{11}=C$, $e_1=e$, $U_1=U$, получаем

$$C=e/U. \tag{3.59}$$

Этот коэффициент называется емкостью уединенного проводника.

III. **О пробной массе в присутствии среды.** В § 2 главы второй шла речь о пробной точечной массе m_a, с помощью которой определяются векторы $\mathbf{F}(a)$ и $\mathbf{f}(a)=\dfrac{1}{\nu m_a}\mathbf{F}(a)$. Полю самой пробной массы там не уделялось внимания, так как оно само по себе не влияет на поле $\mathbf{f}(a)$. Можно представить пробную массу в виде однородного шарика с центром в точке наблюдения a. Сферически симметричное поле такой массы в точке a равно нулю. Сказанное остается справедливым при переходе от поля в вакууме к полю в неограниченной однородной среде. В общем же случае поле пробной массы в присутствии поляризующейся среды или проводников (в поле E) может вызвать изменение поля. Действительно,

под действием поля пробной массы появятся дополнительные массы $e_{\varepsilon E} \vee m_{\mu H}$ в местах нарушения однородности поляризующейся среды и дополнительные индуцированные заряды на проводниках. Поле всех этих дополнительных источников в общем случае не окажется равным нулю в точке a. В связи с этим в общем случае пробную массу следует представить исчезающе малой не только геометрически, но также в смысле количества массы. При этом условии ее поле является столь слабым, что вызываемыми им дополнительными источниками поля можно пренебречь.

IV. **Энергия поля.** Масса $e_a \vee m_a$ в поле $\mathbf{E} \vee \mathbf{H}$ подвергается действию силы $\mathbf{F}(a)$. При перемещении массы под действием этой силы совершается работа. Следовательно, благодаря существованию поля мы располагаем некоторым количеством энергии. Эта энергия локализована в поле и называется энергией поля. Она распределена в пространстве с плотностью, определяемой формулами

$$\frac{dW_{\text{эл}}}{dV}=\frac{1}{2}(\mathbf{ED}) \vee \frac{dW_{\text{мгн}}}{dV}=\frac{1}{2}(\mathbf{HB}), \tag{3.60}$$

в которых $W_{\text{эл}}$ и $W_{\text{мгн}}$ — электрическая и магнитная энергия. Формулы (3.60) применимы к анизотропной среде, но не применимы к ферромагнетикам. В изотропной среде (при $\mathbf{J}^0=0$) получаем согласно (3.60) и (3.19″)

$$\frac{dW_{\text{эл}}}{dV}=\frac{\varepsilon_a}{2}E^2 \vee \frac{dW_{\text{мгн}}}{dV}=\frac{\mu_a}{2}H^2. \tag{3.60'}$$

V. **Электростатическая интерпретация функции Грина.** Допустим, что в вакууме область V, ограниченная поверхностью $S[V]$, защищена заземленным экраном, а в точке a области V находится заряд e_a. В точке q этой же области имеем потенциал

$$U_E(q)=U^a{}_E(q)+U^S_E(q)=\frac{e_a}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{L_{aq}}+e_a\beta(a,\ q), \tag{3.61}$$

где $U^a{}_E$ — потенциал поля $\mathbf{E}^a$ заряда e_a; $U^S{}_E$ — потенциал поля $\mathbf{E}^S$ заряда $e^S=-e_a$, индуцированного на внутренней стороне $S[V]$ экрана.

Зависимость множителя β от точки a объясняется тем, что распределение заряда e^S на $S[V]$ зависит от положения индуцирующего заряда e_a в области V. Согласно (3.61)

$$\frac{4\pi\varepsilon_0}{e_a}U_E(q)=\frac{1}{L_{aq}}+4\pi\varepsilon_0\beta(a,\ q). \tag{3.61'}$$

Второй член правой части (3.61′) удовлетворяет условиям (2.100′) для функции $h(a,\ q)$, достаточным для ее однозначного определения. Действительно, в области V, очевидно, $\nabla^2U^S{}_E=0$, а на поверхности $S[V]$ в любой ее точке p потенциал U_E равен нулю и, следовательно, $4\pi\varepsilon_0\beta(a,\ p)=-L^{-1}_{ap}$.

Поэтому согласно (2.100)

$$G(a,\ q)=\frac{4\pi\varepsilon_0}{e_a}U_E(q),\ \ h(a,\ q)=4\pi\varepsilon_0\beta(a,\ q). \tag{3.62}$$

Таким образом, функцию Грина можно интерпретировать электростатически как умноженный на $4\pi\varepsilon_0 e^{-1}{}_a$ электрический потенциал, который мы имели бы в области V при условии, если бы она была ограничена заземленным экраном и в ее точку a был бы помещен заряд e_a.

Это условие принципиально осуществимо, следовательно, функция Грина существует для любой произвольно заданной поверхности $S[V]$ и любой точки a в области V.

Однако потенциал U поля $\mathfrak{f}$ согласно (2.102), (2.102′) выражается через нормальную производную функции Грина. Посмотрим, что соответствует этой производной в изложенной здесь интерпретации. Согласно $(3.62)_1$

$$\frac{\partial G}{\partial n}=\frac{4\pi\varepsilon_0}{e_a}\frac{\partial U_E}{\partial n}=-\frac{4\pi\varepsilon_0}{e_a}E_n, \tag{3.63}$$

где n — нормаль, направленная из области V. Для плотности σ заряда e^S на поверхности S (как на тыльной стороне проводника в поле заряда e_a) справедливы формулы (3.50′), в которых для нашего случая нормаль n должна быть направлена внутрь области V. Следовательно,

$$\sigma=-\varepsilon_0 E_n=\frac{e_a}{4\pi}\frac{\partial G}{\partial n}. \tag{3.64}$$

Таким образом, множитель при $U(p)$ в (2.102), (2.102′)

$$\frac{-1}{4\pi}\frac{\partial G}{\partial n}=\frac{-\sigma}{e_a} \tag{3.64′}$$

и определяется плотностью σ заряда e^S на $S[V]$. Этот заряд при единичном значении e_a называют слоем Грина.

В (3.63) знаки величин E_n и e_a совпадают, поэтому $\frac{\partial G}{\partial n}<0$ (функция G уменьшается с приближением точки q области V к поверхности $S[V]$), и согласно (3.64) $\sigma/e_a<0$. Следовательно, упомянутый множитель в выражениях (2.102), (2.102′) положителен.

Глава четвертая

Стационарное электрическое поле

§ 1. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

Поток электричества — электрический ток — описывается вектором $\mathbf{j}$, который называют плотностью тока. Этот вектор в какой-либо точке a определяется направлением движения электричества и количеством электричества de, проходящего за элемент времени dt через площадку dS с центром в точке a, нормальную к направлению движения:

$$\mathbf{j} = \mathbf{1}_w \frac{de}{dSdt}, \tag{4.1}$$

где $\mathbf{1}_w = \mathbf{w}/w$ — единичный вектор по направлению движения электричества; $\mathbf{w}$ — скорость этого движения.

Согласно (4.1) при $de > 0$ направление вектора $\mathbf{j}$ совпадает с направлением движения электричества, а при $de < 0$ вектор $\mathbf{j}$ имеет направление, противоположное направлению движения электричества.

В общем случае можем иметь движение электричества обоих знаков по разным (например, взаимно противоположным) направлениям и вектор

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}^+ + \mathbf{j}^-, \tag{4.1'}$$

где $\mathbf{j}^+$ и $\mathbf{j}^-$ — плотности токов, образуемых движением положительного и отрицательного электричеств, определяемые по формуле (4.1). Вектор $\mathbf{j}^+$ параллелен вектору $\mathbf{w}$, а вектор $\mathbf{j}^-$ — антипараллелен ему.

Если движение отрицательного электричества заменить таким же, но противоположного направления движением положительного электричества, то это не повлияет на показания приборов (гальванометров), с помощью которых обычно обнаруживают существование тока и определяют его направление[1]. Сводя с помощью такой замены движение любых зарядов к движению одних только положительных зарядов, можно сказать, что направление вектора $\mathbf{j}$ совпадает с направлением движения электричества, а абсолютная величина этого вектора есть отнесенное к единицам времени и площади количество электричества, проходящего за время dt через площадку dS, нормальную к направлению движения.

Эта глава посвящена постоянному полю; в ней будет рассматриваться постоянный ток, т. е. поле вектора $\mathbf{j} = \mathbf{j}(a)$, зави-

[1] В соответствии с этим вектор $\mathbf{j}$, определяемый по формуле (4.1), не меняется при подстановке в эту формулу $-de$ и $-\mathbf{w}$ вместо de и $\mathbf{w}$.

сящего от положения точки a, но не от времени t. Но в этом параграфе будем иметь в виду более общий случай, когда плотность тока может зависеть также от времени, т. е. когда $\mathbf{j} = \mathbf{j}(a, t)$. Пренебрегая изменениями направления и абсолютной величины вектора $\mathbf{j}$ за единицу времени в пределах единичной площадки, можно сказать, что абсолютная величина вектора $\mathbf{j}$ численно равна количеству электричества, проходящего в единицу времени через единичную площадку, нормальную к направлению движения электричества [1].

Векторные линии, поверхности и трубки поля $\mathbf{j}$ называют токовыми. Электрические заряды движутся по токовым линиям. На токовых поверхностях нормальная компонента вектора $\mathbf{j}$ равна нулю.

I. **Упорядоченное движение микрозарядов** (электронов, ионов). Весьма сложное, хаотическое движение микрозарядов может сочетаться с упорядоченным результирующим движением, которое сводится к общему их дрейфу в некотором направлении и образует ток в этом или противоположном (в случае отрицательных микрозарядов) направлении.

Движение микрозарядов в горной породе осложняется неоднородностью ее состава, так как даже однородная в масштабе геофизических измерений порода обычно в масштабе движений отдельных микрозарядов является неоднородной, имеет сложное строение и состоит из компонентов, различных по природе электропроводности и по значениям удельной электропроводности. Но, схематизируя явление электрического тока, представим, что все микрозаряды каждого знака в окрестности точки наблюдения одинаковы и движутся с одной и той же скоростью. Заменяя мик-

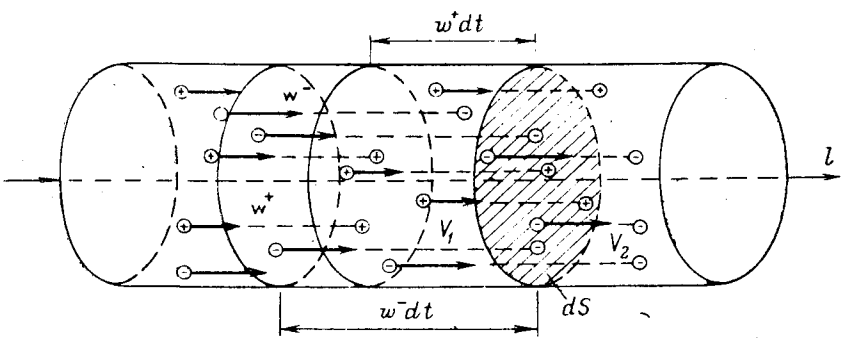


Рис. 33. Отрезки токовой трубки, содержащие положительные и отрицательные заряды, которые проходят за время dt через поперечное сечение трубки dS из области V_1 в область V_2. Разностью этих зарядов, деленной на dt, определяется ток в трубке

[1] Поле вектора $\mathbf{j}$ определяют токи, имеющиеся в пространстве; оно представляет собой поле тока. Но по возможности мы будем воздерживаться от такого применения термина «поле тока», так как ему в литературе часто придают смысл магнитного поля, создаваемого током, или электрического поля, под действием которого происходит движение электричества.

розаряды каждого знака сплошным объемным электричеством с плотностью, равной числу содержащихся в единице объема микрозарядов, умноженному на величину отдельного микрозаряда, получаем потоки положительного и отрицательного электричества с плотностью δ^+ и δ^- и скоростями $\mathbf{w}^+$ и $\mathbf{w}^-$.

Пусть dS — площадка, нормальная к направлению l движения электричества одного какого-либо знака, а $\mathbf{w}$ ($\mathbf{w}^+$ или $\mathbf{w}^-$) — скорость этого движения. Построим цилиндр с образующей по направлению l и с направляющей по контуру площадки dS (рис. 33). Допустим, что V_1 и V_2 — части цилиндра, разделяемые площадкой dS, а электричество движется из V_1 в V_2. За промежуток времени dt через площадку dS пройдут те заряды, которые находятся в V_1 на расстояниях от площадки dS, меньших отрезка wdt, т. е. количество электричества $de=w\delta dSdt$, занимающее объем $wdSdt$. Следовательно, согласно (4.1) имеем ток с плотностью

$$\mathbf{j}=\mathbf{w}\delta. \tag{4.2}$$

При $\delta>0$ вектор $\mathbf{j}$ параллелен вектору $\mathbf{w}$, а при $\delta<0$ — вектору $-\mathbf{w}$. В общем случае, имеем движение положительного и отрицательного электричества со скоростями $\mathbf{w}^+$ и $\mathbf{w}^-$ и, следовательно, токи с плотностями

$$\mathbf{j}^+=\mathbf{w}^+\delta^+,\quad \mathbf{j}^-=-\mathbf{w}^-\delta^-,\quad \mathbf{j}=\mathbf{w}^+\delta^+-\mathbf{w}^-\delta^-, \tag{4.2'}$$

где δ^+ — плотность положительного электричества; δ^- — абсолютная величина плотности отрицательного электричества; $\mathbf{j}=\mathbf{j}^++\mathbf{j}^-$ в соответствии с (4.1′).

Согласно (4.2′), для того чтобы вектор $\mathbf{j}$ был отличен от нуля, достаточно неравенства $\mathbf{w}^+\delta^+\neq\mathbf{w}^-\delta^-$, которым, конечно, не определяются значения δ^+ и δ^-. Так, например, при $\mathbf{w}^+=0$ $\mathbf{j}=-\mathbf{w}^-\delta^-$ и плотность тока вовсе не зависит от δ^+. В частности, не исключается случай, когда $\mathbf{j}\neq0$, а $\delta^+=\delta^-$ и, следовательно, согласно (2.4), $\delta=0$. Тем более ясно, что существование тока не исключает постоянства плотности электричества δ и плотностей δ^+ и δ^- в отдельности.

II. **Поток вектора j, цепь тока, сила тока.** Согласно определению вектора $\mathbf{j}$ поток

$$dI=(\mathbf{j}\ d\mathbf{S})=jdS\cos(\mathbf{j},\ d\mathbf{S}) \tag{4.3}$$

этого вектора через площадку dS есть количество электричества (положительного), проходящего через нее в единицу времени, взятое со знаком плюс, если ток проходит от оборотной стороны площадки к ее лицевой стороне, и со знаком минус, если ток проходит в противоположном направлении. Аналогично определяется поток

$$I=\int_S(\mathbf{j}\,d\mathbf{S})=\int_S j_n dS \tag{4.3'}$$

вектора $\mathbf{j}$ через поверхность S. Потоки через отдельные ее участки могут иметь различные знаки, а поток I через всю поверхность

S равен их алгебраической сумме. Через нормальную поверхность S^j поля $\mathbf{j}$, т. е. через поверхность, нормальную к токовым линиям l^j (с нормалью n по направлению тока), поток $I>0$, а если величина j имеет одно и то же значение во всех точках этой поверхности, то

$$I=jS^j. \qquad (4.3'')$$

Поток вектора $\mathbf{j}$ через токовую поверхность (через поверхность токовой трубки) равен нулю.

Изображая поле вектора $\mathbf{j}$ с помощью токовых линий и представляя их проведенными с густотой, пропорциональной плотности тока, можно сказать, что величины I, dI и j определяются числами токовых линий, пронизывающих поверхность S, площадку dS и единичную площадку, нормальную к направлению тока.

Цепью тока называют ряд последовательно соединенных проводников (звеньев, участков цепи), вдоль которого пропускают ток. Силой тока (током) I в проводнике (в цепи) называют поток вектора $\mathbf{j}$ через поперечное сечение проводника (цепи). При этом обычно имеют в виду часто применяемые в технике проводники сильно удлиненной формы (проволоки, шины) с поперечными сечениями, изменения которых в продольном направлении почти незаметны, причем предполагается, что ток через них пропускают в этом направлении и вектор $\mathbf{j}$ в них всюду нормален к поперечному сечению. Такой проводник в отличие от пространственного проводника (произвольной формы) сравним с линейным проводником (см. разд. IV). В нем нормальное сечение тока вполне определяется точкой, через которую его проводят; оно совпадает с поперечным сечением проводника, которое к тому же легко определяется (см. разд. III § 2).

Силу I любого тока можно определить как поток вектора $\mathbf{j}$ через сечение проводника поверхностью S^j. Но в общем случае пространственного тока это сечение, проведенное через какую-либо заданную точку проводника, может быть различным в зависимости от конфигурации токовых линий в нем и, следовательно, от разных обстоятельств, влияющих на распределение тока в проводнике. В частности, включая такой проводник по-разному в цепь, вдоль которой пропускается ток, будем иметь различные расположения и формы поверхностей S^j.

Силу тока будем обычно считать положительной величиной, полагая, что при ее определении потоком вектора $\mathbf{j}$ через поперечное сечение проводника нормаль на этом сечении берется по направлению вектора $\mathbf{j}$. Однако иногда удобно придавать значению силы тока алгебраический смысл, пользуясь некоторым условным правилом знаков, например, в законе Кирхгофа (4.20).

III. **Уравнение непрерывности.** Поток вектора $\mathbf{j}$ через замкнутую поверхность $S[V]$, ограничивающую область V, равен количеству электричества (положительного), растекающегося из области V в единицу времени, считая стекание электричества к этой области отрицательным растеканием из нее. Но изменение коли-

чества электричества e_V в области V, согласно закону сохранения количества электричества, может происходить только вследствие перехода электричества через ее границу $S[V]$.

Следовательно, поток вектора $\mathbf{j}$ через поверхность $S[V]$

$$\oint_{S[V]} (\mathbf{j}\, d\mathbf{S}) = -\dot{e}_V, \tag{4.4}$$

где $\dot{e}_V$ — производная по времени от величины e_V, т. е. приращение (положительное или отрицательное) заряда e_V, находящегося в области V, в единицу времени. Этот поток положителен, если $\dot{e}_V < 0$, т. е. если заряд e_V уменьшается, и отрицателен, если $\dot{e}_V > 0$, т. е. если заряд e_V увеличивается [1].

Если в области V находится объемный заряд с плотностью δ, то

$$e_V = \int_V \delta dV, \quad \dot{e}_V = \int_V \dot{\delta} dV.$$

Поэтому, применяя теорему Остроградского (1.30) к левой части (4.4), имеем

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{j}\, dV = -\int_V \dot{\delta} dV. \tag{4.4'}$$

Таким образом, получаем для поля вектора $\mathbf{j}$ уравнение

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = -\dot{\delta}. \tag{4.5}$$

Если из окрестности dV точки a растекается электричества (положительного) больше, чем к ней притекает, то в этой точке плотность заряда δ уменьшается и $\dot{\delta} < 0$; в противном случае значение δ увеличивается и $\dot{\delta} > 0$. Источники поля $\mathbf{j}$ находятся там, где плотность зарядов меняется во времени.

Равенство (4.4), являющееся выражением постулата сохранения количества электричества, называется уравнением непрерывности тока, а равенство (4.5) является дифференциальной формой этого уравнения. Согласно этому равенству там, где производная $\dot{\delta}$ не обращается в бесконечность, дивергенция вектора $\mathbf{j}$ имеет смысл, и, следовательно, величина j по направлению тока не терпит разрыва.

IV. **Необъемные токи.** В некоторых случаях объемные токи удобно заменить мысленно необъемными токами: линейными или поверхностными.

При достаточно малых размерах поперечного сечения тока ΔS нас часто интересуют только сила I этого тока и линия l, определяющая его расположение в пространстве (средняя токовая линия), а не его плотность j и поперечное сечение ΔS. В таком случае, мысленно уменьшая поперечное сечение ΔS, заменяют

[1] В этой главе до § 4 всюду, кроме (4.21), имеются в виду свободные заряды, но индекс «свб» при e, δ, σ, λ опускается. Предполагается (как во всей книге), что среда неподвижна и ее свойства не зависят от времени. Исключение составляют формулы (5.9″), (5.9‴).

объемный ток линейным по линии l с той же силой I. Считая, что во всех точках этого сечения плотность тока j имеет одно и то же значение и, следовательно, $I = j\Delta S$, получаем при $\Delta S \to 0$ $j \to \infty$. Если поперечное сечение тока — квадрат со стороной h, то $I = jh^2$. Следовательно, в линейном токе (проводнике) объемная плотность тока

$$j \to \infty \text{ как } h^{-2} \text{ при } h \to 0. \qquad (4.6)$$

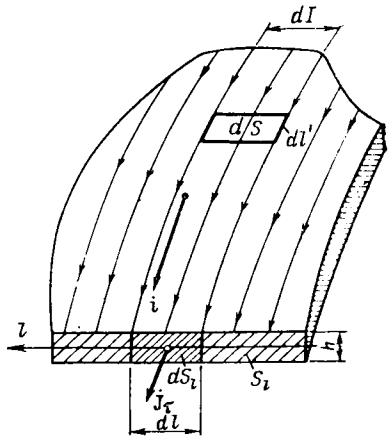


Рис. 34. Переход от полной тангенциальной компоненты $\mathbf{j}_\tau$ объемного тока в слое с толщиной h к поверхности плотности тока $\mathbf{i}$

Ток в очень тонком слое, параллельный поверхности этого слоя, часто заменяют током по некоторой поверхности S, например, по средней поверхности слоя, и таким образом получают поверхностный ток. Пусть h—толщина слоя; $\mathbf{j}_\tau$—полная тангенциальная (параллельная средней поверхности слоя) компонента вектора $\mathbf{j}$ в этом слое, l — линия на средней поверхности слоя, нормальная к вектору $\mathbf{j}_\tau$, а S_l — поперечное сечение слоя, проходящее через линию l. Поверхность S_l представляет собой полоску с шириной h, а элементарный отрезок этой полоски — площадку $hdl = dS_l$, через которую проходит поток $j_\tau hdl$ (рис. 34). На единицу длины линии l приходится поток, численно равный

$$\frac{\partial I}{\partial l} = j_\tau h. \qquad (4.7)$$

Чтобы перейти от объемного тока в тонком слое к поверхностному току на поверхности S, мысленно сжимаем слой до нулевой толщины, сохраняя без изменения произведение $j_\tau h$, для чего считаем, что

$$\text{при } h \to 0 \; j_\tau \to \infty \text{ как } h^{-1}. \qquad (4.6')$$

Вектор

$$\mathbf{i} = \tau \frac{\partial I}{\partial l} = \mathbf{j}_\tau h \qquad (4.7')$$

называют поверхностной плотностью тока в отличие от величины $\mathbf{j}$, которая является объемной плотностью тока. Направление вектора $\mathbf{i}$ совпадает с направлением поверхностного тока, а абсолютная величина его равна количеству электричества (положительного), проходящего в единицу времени через единичный отрезок линии l, поперечной поверхностному току. Согласно (4.6), (4.6′) в точках, в которых имеются необъемные токи, $j = \infty$ и, следовательно, $\operatorname{div} \mathbf{j}$ теряет смысл.

Из равенства (4.4), пользуясь которым, мы получили дифференциальное уравнение (4.5) для поля $\mathbf{j}$, можно также получить поверхностную форму этого уравнения. Выделим на поверхности S участок ΔS, ограниченный замкнутой линией $l[\Delta S]$, и заключим его в замкнутую поверхность s, пересекающую поверхность S по этой линии и построенную, как показано на рис. 10. Заряд $e_{\text{ц}}$, находящийся внутри поверхности s, и его производная $\dot{e}_{\text{ц}}$ определяются формулами

$$e_{\text{ц}} = \int\limits_{\Delta S} \sigma dS, \quad \dot{e}_{\text{ц}} = \int\limits_{\Delta S} \dot{\sigma} dS, \tag{4.8}$$

где $\dot{\sigma}$ — производная по времени от плотности σ поверхностного заряда на поверхности S. Поэтому, согласно (4.4),

$$\oint\limits_{s} (\mathbf{j}\, d\mathbf{S}) = -\int\limits_{\Delta S} \dot{\sigma} dS. \tag{4.9}$$

При достаточной малости h и ΔS левая часть (4.9), согласно (1.47), равна $\Delta S \operatorname{Div} \mathbf{j}$, а правая часть равна $-\dot{\sigma}\Delta S$. Следовательно,

$$\operatorname{Div} \mathbf{j} = -\dot{\sigma}, \quad j_n^{(2)} - j_n^{(1)} = -\dot{\sigma}. \tag{4.10}$$

Формула $(4.10)_2$ соответствует определению поверхностной дивергенции (1.49); она справедлива для поверхности S, на которой нет поверхностного тока, и, следовательно, компонента $\mathbf{j}_\tau$ имеет ограниченные значения. Если же $\mathbf{i} \neq 0$ на поверхности S, то на ней $j_\tau = \infty$ и согласно (1.57)

$$\operatorname{Div} \mathbf{j} = j^{(2)}{}_n - j^{(1)}{}_n + \operatorname{div}^s \mathbf{i}, \tag{4.11}$$

где $\operatorname{div}^s \mathbf{i}$ — двумерная дивергенция вектора $\mathbf{i}$ на поверхности S. Следовательно, при $i \neq 0$ имеем вместо $(4.10)_2$

$$j^{(2)}{}_n - j^{(1)}{}_n + \operatorname{div}^s \mathbf{i} = -\dot{\sigma}. \tag{4.12}$$

Согласно $(4.10)_2$ разрыв нормальной компоненты вектора $\mathbf{j}$ на поверхности S без поверхностного тока равен взятой с обратным знаком производной по времени от плотности поверхностного заряда на этой поверхности. Это вполне понятно. Действительно, нормальные компоненты $j^{(1)}{}_n$ и $j^{(2)}{}_n$ векторов $\mathbf{j}^{(1)}$ и $\mathbf{j}^{(2)}$ равны количествам электричества, проходящим в единицу времени через единичные площадки, параллельные поверхности S и расположенные около нее в областях V_1 и V_2. Первое из этих количеств подходит к единичной площадке поверхности S из области V_1, а второе отходит от этой площадки в область V_2.

Поэтому разность $j^{(1)}{}_n - j^{(2)}{}_n$ есть приращение заряда этой площадки в единицу времени, а $j^{(2)}{}_n - j^{(1)}{}_n$ — скорость убыли этого заряда, равная $-\dot{\sigma}$.

В более общем случае, когда на поверхности S имеется поверхностный ток с плотностью $\mathbf{i}$, изменение заряда площадки ΔS

происходит не только за счет разности между количествами электричества, приходящего к ней из области V_1 и отходящего от нее в область V_2, но также за счет потока

$$\oint_{l[\Delta S]} (\mathbf{i}[\mathbf{dl}\,\mathbf{n}]) = \int_{\Delta S} \mathrm{div}^s \mathbf{i} dS \tag{4.13}$$

вектора $\mathbf{i}$ через границу $l[\Delta S]$ этой площадки, которым определяется растекание (положительное или отрицательное) электричества от нее к соседним частям поверхности S.

Если S — поверхность соприкосновения проводника с непроводящей средой, то, отмечая индексами 1 и 2 области, занятые соответственно проводником и непроводящей средой, имеем $j^{(2)}{}_n = 0$. Поэтому, обозначая $j^{(1)}{}_n = j_n$, получаем согласно (4.10) при отсутствии поверхностного тока

$$j_n = \dot{\sigma}. \tag{4.10'}$$

V. **Дифференциальная форма закона Ома.** Плотность тока, возникающего в проводящей среде под действием электрического поля, пропорциональна напряженности этого поля:

$$\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E},\ \gamma = 1/\rho, \tag{4.14}$$

где $\mathbf{j}$ и $\mathbf{E}$ — плотность тока и напряженность поля в какой-либо точке; γ и ρ — удельная электропроводность и удельное сопротивление среды в этой точке.

Величина γ представляет собой параметр среды, определяющий способность среды пропускать электричество, движущееся под действием электрического поля, и численно равный плотности тока в этой среде при единичной напряженности поля $\mathbf{E}$ в ней. Формула $(4.14)_1$ выражает закон Ома в дифференциальной форме.

Возвращаясь к формуле (4.2'), отметим, что в поле $\mathbf{E}$ к микроразрядам приложены силы, сообщающие им некоторые ускорения, но среда тормозит движение микрозарядов и препятствует накоплению их скоростей. Механизм этого торможения может быть различным, например, в металле это соударения электронов с ионами кристаллической решетки. Но при любом характере торможения оно приводит к тому, что средняя скорость микрозарядов пропорциональна напряженности поля. Если, например, в области пространства, занятой раствором соли (электролитом), действует электрическое поле $\mathbf{E}$, то положительные и отрицательные ионы имеют скорости $\mathbf{w}^+ = u^+\mathbf{E}$, $\mathbf{w}^- = -u^-\mathbf{E}$, где u^+ и u^- — положительные множители пропорциональности, называемые подвижностями ионов. Подставляя эти выражения для $\mathbf{w}^+$ и $\mathbf{w}^-$ в формулу $(4.2')_3$ и сравнивая ее с (4.14), получаем

$$\mathbf{j} = (u^+\delta^+ + u^-\delta^-)\mathbf{E},\ \gamma = u^+\delta^+ + u^-\delta^-. \tag{4.14'}$$

VI. **Тензор электропроводности.** Согласно (4.14) вектор $\mathbf{j}$ отличается от вектора $\mathbf{E}$ только скалярным (положительным) мно-

жителем γ, и, следовательно, направление вектора плотности тока совпадает с направлением электрического поля, вызывающего этот ток, и токовые линии следуют по силовым линиям (при отсутствии сторонних сил, см. § 3). Для любого направления l $j_l = \gamma E_l$ и, в частности, для координатных направлений $j_k = \gamma E_k$ ($k=1, 2, 3$). Однако это справедливо только для изотропной проводящей среды, т. е. среды, электропроводность которой не зависит от направления. Некоторые среды и, в частности, некоторые горные породы отличаются анизотропной электропроводностью. Их способность пропускать электричество, движущееся под действием электрического поля, различна в разных направлениях.

В анизотропной среде вектор $\mathbf{j}$ равен скалярному произведению тензора электропроводности

$$\Upsilon = \begin{Vmatrix} \gamma_{xx} & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \gamma_{yy} & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \gamma_{zz} \end{Vmatrix}$$

на вектор $\mathbf{E}$. Это означает, что компоненты вектора $\mathbf{j}$ линейно зависят от компонент вектора $\mathbf{E}$

$$j_i = \sum^{k} \gamma_{ik} E_k \quad (k = x, y, z;\ i = x, y, z), \tag{4.15}$$

где множители γ_{ik} являются компонентами тензора электропроводности γ. Таким образом, в случае анизотропной среды следует в (4.14) считать γ тензором. Этот тензор симметричный ($\gamma_{ik} = \gamma_{ki}$); он определяется шестью значениями компонент γ_{ik}. Если соответствующим образом выбрать направления осей x, y, z, то получим $\gamma_{ik}=0$ при $i \neq k$ и, следовательно, $j_i = \gamma_{ii} E_i$, т. е.

$$j_x = \gamma_x E_x,\ j_y = \gamma_y E_y,\ j_z = \gamma_z E_z, \tag{4.15'}$$

где $\gamma_x = \gamma_{xx}$, $\gamma_y = \gamma_{yy}$, $\gamma_z = \gamma_{zz}$.

При этих направлениях осей x, y, z компоненты вектора $\mathbf{j}$ пропорциональны соответствующим компонентам вектора $\mathbf{E}$, но (в общем случае) множители пропорциональности γ_x, γ_y, γ_z имеют разные значения.

Анизотропия горной породы может быть обусловлена ее слоистостью (трещиноватостью, рассланцованностью). Обычно рассматривают случай двух значений удельной электропроводности: п о п е р е ч н о й γ_n — по некоторому направлению n, называемому осью анизотропии, и п р о д о л ь н о й $\gamma_t > \gamma_n$ по любому направлению t в плоскости, нормальной к направлению n и называемой плоскостью анизотропии.

Этот случай анизотропии будем здесь иметь в виду. Взяв систему x, y, z с осью z по оси анизотропии, имеем $\gamma_x = \gamma_y = \gamma_t$, $\gamma_z = \gamma_n$.

Векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{j}$ связаны (в этом случае) соотношениями

$$j_t = \gamma_t E_t,\ j_n = \gamma_n E_n \tag{4.15''}$$

и образуют с направлением n углы, определяемые формулами

$$\operatorname{tg}(\mathbf{E}, \mathbf{n}) = E_\tau / E_n,$$

$$\operatorname{tg}(\mathbf{j}, \mathbf{n}) = \frac{j_\tau}{j_n} = \frac{\gamma_t}{\gamma_n} \frac{E_\tau}{E_n} = \frac{\gamma_t}{\gamma_n} \operatorname{tg}(\mathbf{E}, \mathbf{n}), \qquad (4.15''')$$

из которых следует, что при $\gamma_n < \gamma_t$ $(\mathbf{j}, \mathbf{n}) \geqslant (\mathbf{E}, \mathbf{n})$, где знак равенства соответствует случаю, когда $E_n = 0$ или $E_\tau = 0$. Следовательно, токовые линии отклоняются от направления наименьшей электропроводности сильнее силовых линий; направления векторов $\mathbf{j}$ и $\mathbf{E}$ (направления токовых и силовых линий) в произвольно взятой точке анизотропной среды не совпадают. Однако, если в какой-либо точке один из векторов имеет направление n или τ, то в этой точке другой вектор имеет то же направление.

Анизотропный проводник, как и изотропный, может быть однородным или неоднородным.

Диэлектрики и магнетики, как и проводники, могут быть анизотропными. Среда, анизотропная в отношении диэлектрической или магнитной проницаемости, характеризуется тензором проницаемости, аналогичным тензору γ. В дальнейшем (как и в предыдущем изложении) будем предполагать, что среда изотропна.

§ 2. ПОСТОЯННЫЙ ТОК

Перейдем к случаю, когда в любой точке вектор $\mathbf{j}$ не меняется со временем, т. е. когда производная по времени от этого вектора равна нулю. В этом случае имеем постоянный (стационарный) ток. Постоянное поле вектора $\mathbf{j}$, и, согласно (4.14), электрическое поле $\mathbf{E}$ также должно быть постоянным, из чего следует, что должно выполняться условие

$$\dot{e}_V = 0, \quad \dot{\delta} = 0, \quad \dot{\sigma} = 0, \quad \dot{\lambda} = 0, \quad \dot{e}_q = 0, \qquad (4.16)$$

т. е. источники поля $\mathbf{E}$ должны быть неизменными, что соответствует условию (2.7) постоянства поля $\mathbf{f}$.

Условие (4.16) совместимо с движением зарядов. Действительно, выделим из токовой трубки с малыми поперечными размерами элементарный отрезок, заключенный между ее поперечными сечениями dS_1 и dS_2, и допустим, что в этом отрезке трубки ток направлен от dS_1 к dS_2. Выполнение условия $\delta = 0$ в объеме dV этого отрезка токовой трубки означает постоянство количества электричества $de = \delta dV$ в нем, а для этого достаточно, чтобы за любой промежуток времени dt через площадку dS_1 в элемент dV и через dS_2 из этого элемента проходили одинаковые количества электричества. При этом заряд de, находящийся в элементе dV, является постоянным, но не статическим (он остается таким же, но не тем же), так как непрерывно возобновляется. Таким образом, при $j \neq 0$ мы можем иметь $\delta = 0$ (а также $\delta = 0$, см. разд. I § 1).

Постоянное электрическое поле **E** в проводящей среде, как и постоянное поле вектора **j**, будем называть стационарным[1].

I. **Уравнение непрерывности постоянного тока.** Подставляя условие (4.16) в (4.4), (4.5), (4.10), получаем для постоянного тока

$$\operatorname{div}\mathbf{j}=0,\ \operatorname{Div}\mathbf{j}=0,\ \oint\limits_S(\mathbf{j}\,d\mathbf{S})=0. \tag{4.17}$$

Равенства (4.17) представляют собой дифференциальную, поверхностную и интегральную формы уравнения непрерывности постоянного тока. Согласно этим равенствам постоянное поле вектора **j** является всюду соленоидальным; оно не имеет источников. В этом поле векторные линии, т. е. токовые линии, нигде не обрываются; они должны быть замкнутыми. Если токовые линии продолжаются в обе стороны до бесконечности, то можно считать, что они там замыкаются.

В соответствии с (4.11) равенство $(4.17)_2$ может быть представлено в виде

$$j^{(2)}{}_n-j^{(1)}{}_n=-\operatorname{div}^s\mathbf{i}, \tag{4.18}$$

а в обычном случае, когда на поверхности S нет поверхностного тока, в виде

$$j^{(2)}{}_n=j^{(1)}{}_n,\ \ \gamma_2E^{(2)}{}_n=\gamma_1E^{(1)}{}_n, \tag{4.18'}$$

где γ_1 и γ_2 — удельная электропроводность среды с обеих сторон поверхности S.

У границы проводника в соответствии с (4.10′) для постоянного тока $j_n=0$, т. е. эта граница является токовой поверхностью. Таким образом, поверхность цепи тока, поверхность ее соприкосновения с окружающей непроводящей средой (изоляцией), является токовой поверхностью, а цепь тока — токовой трубкой. Эта трубка может быть мысленно расщеплена (разделена токовыми поверхностями) на более тонкие и, в частности, элементарные токовые трубки. Согласно сказанному выше, токовые трубки и, в частности, цепи постоянного тока должны быть замкнутыми.

Схематически можно изобразить замкнутую цепь тока в виде кольца или замкнутой линии (токовое кольцо, контур тока) произвольной формы (рис. 35).

Из соленоидальности поля **j** следует, что потоки вектора **j** через все непродольные сечения одной и той же токовой трубки и, в частности, токовой цепи имеют одно и то же значение. Обозначая через I' и I'' силы тока через произвольно взятые сечения S' и S'' цепи тока с нормалями, направленными от S' к S'' (по току), имеем в соответствии с $(4.17)_3$

$$I''=I'. \tag{4.19}$$

[1] Некоторые авторы называют стационарным гармонически меняющееся поле (см. начало § 6 главы шестой).

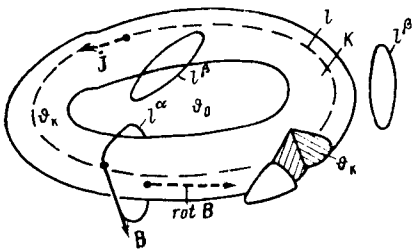


Рис. 35. Изображение цепи тока в виде токового кольца K или контура l.

Поверхность $S[\vartheta_K]$ кольца K делит пространство на внутреннюю ϑ_K и внешнюю ϑ_0 области. В области ϑ_0 имеются контуры l^α сцепленные кольцом K, и контуры l^β не сцепленные с ним (см. главу пятую)

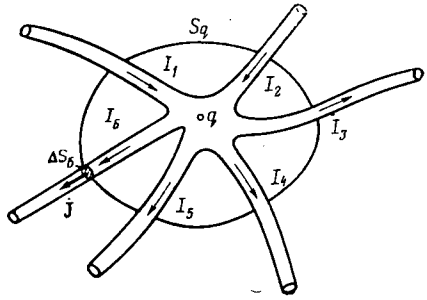


Рис. 36. Поток вектора j через замкнутую поверхность S_q, внутри которой находится разветвление линейных (квазилинейных) токов

Таким образом, сила постоянного тока во всех непродольных сечениях проводника (цепи) определяется ее значением I для какого-либо одного из них.

Применим $(4.17)_3$ к замкнутой поверхности S_q, охватывающей точку q разветвления линейных токов I_k $(k=1, 2, \ldots)$ (рис. 36). Подынтегральное выражение в $(4.17)_3$ обращается в нуль на всей площади поверхности S_q, кроме ее исчезающе малых участков ΔS_k, являющихся сечениями токов I_k. Поэтому получаем в результате интегрирования сумму потоков вектора j через эти сечения, равную сумме сил токов I_k, если условиться отрицательными считать токи, направленные к точке разветвления, и положительными — направленные от этой точки. Следовательно, согласно $(4.17)_3$ получаем

$$\Sigma I_k = 0. \tag{4.20}$$

В более общем случае переменных токов получаем из (4.4)

$$\Sigma I_k = -\dot{e}_q. \tag{4.20'}$$

Равенство (4.20) является линейной формой уравнения непрерывности постоянного тока и выражает первый закон Кирхгофа. Можно сказать, что равенства (4.17) выражают этот закон в дифференциальной, поверхностной и интегральной формах. Формула (4.20), очевидно, применима также к разветвлению токов, не являющихся линейными, если для них значения I_k являются определенными.

Поверхность токового кольца (см. рис. 35) делит пространство на две кольцевидные (двухсвязные) области ϑ_k и ϑ_0, из которых первая занята токовыми линиями, а вторая охватывается ими. В случае линейной цепи область ϑ_0 занимает все пространство, за исключением замкнутой линии, в которую вырождается область ϑ_k. В случае пространственной цепи (ток в земле на большой глубине) область ϑ_0 может выродиться в замкнутую

«линию», охватываемую токовыми линиями, заполняющими «все пространство», т. е. очень большую область ϑ_k.

II. **Поле E и его потенциал** U. Постоянное электрическое поле E в проводнике не отличается по своей природе от статического поля E в непроводящей среде или вакууме; это то же поле кулоновых сил, создаваемое электрическими зарядами, и для него справедливы уравнения (3.24), $(3.14)_1$, т. е. система

$$\text{I. } \operatorname{rot}\mathbf{E}=0,\ \text{II. } \operatorname{div}\mathbf{E}=\frac{\delta_{\text{илн}}}{\varepsilon_0}\ (\operatorname{div}\mathbf{D}=\delta_{\text{св}5}). \tag{4.21}$$

Подставляя в (4.14) решение $\mathbf{E}=-\operatorname{grad}U$ уравнения $(4.21)_1$, получаем для вектора j и его компоненты j_l по любому направлению l выражения через потенциал U:

$$\mathbf{j}=-\gamma\operatorname{gvad}U,\ j_l=-\gamma\frac{\partial U}{\partial l}. \tag{4.22}$$

Из (4.22) следует, что направление тока, возникающего под действием электрического поля, совпадает с направлением наиболее интенсивного падения потенциала; вектор плотности этого тока образует квазипотенциальное поле $-\gamma(a)\operatorname{grad}U(a)$. На токовой поверхности $j_n=0$ и, следовательно, $E_n=0$, $\frac{\partial U}{\partial n}=0$, а поверхность S^j, поперечная токовым линиям, является эквипотенциальной. Поток вектора j через какую-либо поверхность S согласно (4.22) выражается формулой

$$I=-\int_S\gamma\frac{\partial U}{\partial n}dS=-\int_S\frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial n}dS. \tag{4.22'}$$

Если в этой формуле S — сечение цепи тока, то $|I|$ — сила тока в цепи.

На поверхности S, на которой нет поверхностного тока, имеем согласно (4.18′) и (4.22)

$$\gamma_2\frac{\partial U^{(2)}}{\partial n}=\gamma_1\frac{\partial U^{(1)}}{\partial n}. \tag{4.23}$$

При $\gamma_2\neq\gamma_1$ нормальная производная потенциала терпит разрыв на поверхности S, но произведение этой производной на удельную электропроводность среды непрерывно на этой поверхности.

III. **Сопротивление участка цепи тока.** Разность потенциалов U_1-U_2 между двумя поперечными (эквипотенциальными) сечениями цепи тока S_1 и S_2, согласно (2.39′), равна напряжению $\mathscr{E}_{12}$ между ними, т. е. работе поля на пути l_{12} (рис. 37,*а*), их соединяющем:

$$U_1-U_2=\mathscr{E}_{12},\ \mathscr{E}_{12}=\int_1^2(\mathbf{E}\,d\mathbf{l})=\int_1^2\rho(\mathbf{j}\,d\mathbf{l}), \tag{4.24}$$

где в соответствии с (4.14) $(\mathbf{E}\,d\mathbf{l})=\rho(\mathbf{j}\,d\mathbf{l})$.

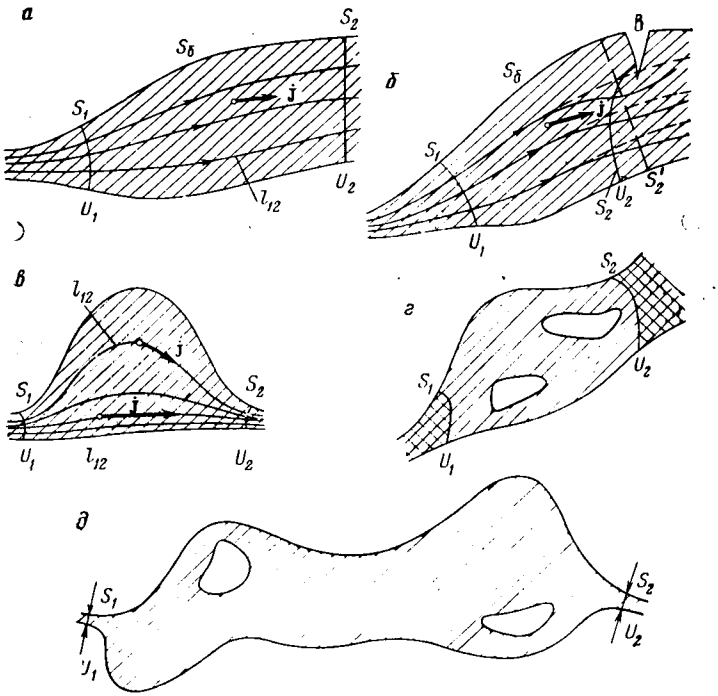


Рис. 37. Участок C_{12} цепи тока:
а — границы S_1, S_2, $S_б$ участка C_{12}, определяющие поле $\mathbf{j}/I$ на этом участке, *б* — прорезь B на соседнем участке, меняющая положение границы S_2 и поле вблизи нее на участке C_{12} (положение поверхности S_2 и линий тока при отсутствии прорези показаны пунктиром), *в* — схема, показывающая, что в токовых трубках, в которых отрезки l_{12} линий тока (между сечениями S_1 и S_2 короче, плотность тока больше; *г* — автономный участок цепи, заключенный между идеальными проводниками; *д* — автономный участок цепи, заключенный между сечениями квазилинейных проводников

Следовательно,

$$U_1 - U_2 = IR_{12}, \tag{4.24'}$$

где

$$R_{12} = \int_1^2 \rho \left(\frac{\mathbf{j}}{I} \, \mathrm{d}\mathbf{l} \right). \tag{4.25}$$

Путь l_{12} берется по току; в тех случаях, когда будем допускать в (4.25) путь l_{12} против тока, будем считать $I<0$, для того чтобы иметь всегда $R_{12}>0$.

Величину R_{12} назовем сопротивлением участка цепи C_{12} между ее поперечными сечениями S_1 и S_2, на котором ток проходит от S_1 к S_2. Область пространства V_{12}, занятая этим участком цепи, ограничена замкнутой поверхностью, состоящей из его боковой поверхности $S_б$, являющейся отрезком поверхности цепи тока, и сечений цепи S_1 и S_2. На поверхности $S_б$ потенциал U удов-

летворяет условию $\frac{\partial U}{\partial n}=0$, а на сечениях S_1 и S_2 — условию $\frac{\partial U}{\partial t}=0$, $\int\limits_S \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial n}\,dS=-I$. Этими краевыми условиями (II и III типов) и значениями удельного сопротивления ρ во всех точках области V_{12}, как будет показано в § 7, полностью определяется поле вектора $\mathbf{j}$ во всей области V_{12}, причем значения этого вектора оказываются пропорциональными силе тока I. Поэтому поле вектора $\mathbf{j}/I$ также вполне определяется в области V_{12} заданием ее границ (S_6, S_1 и S_2) и удельного сопротивления среды, заполняющей ее; оно не зависит от I. Таким образом, согласно (4.25), величина R_{12} полностью определяется проводником, образующим участок цепи между ее эквипотенциальными сечениями S_1 и S_2, — его формой, размерами и удельным сопротивлением. Она не зависит от силы тока в цепи, и на нее не влияют изменения остальной части цепи, не вызывающие нарушений эквипотенциальности поверхностей S_1 и S_2.

Вполне понятно, что, говоря о сопротивлении проводника, мы имеем в виду определенный способ введения его в цепь (при котором определенные участки S_1 и S_2 его поверхности являются эквипотенциальными сечениями цепи).

Равенство (4.24′) выражает закон Ома, согласно которому сила тока I равна отношению разности потенциалов U_1-U_2 между эквипотенциальными границами участка цепи к сопротивлению R_{12} проводника C_{12}, образующего этот участок. Величина R_{12} определяет способность проводника сопротивляться прохождению электрического тока и численно равна значению разности потенциалов U_1-U_2, при которой через проводник C_{12} проходит ток единичной силы. Определив величины U_1-U_2 и I при помощи измерений, можно вычислить сопротивление проводника R_{12}, пользуясь формулой (4.24′).

Для расчета R_{12} по формуле (4.25) следует подставить в нее значения функций $\mathbf{j}$ и ρ на отрезке какой-либо токовой линии, взятом между сечениями S_1 и S_2. Функция ρ предполагается заданной в области V_{12}, а для построения токовой линии и определения функции j на ней надо знать поле $\mathbf{j}=\gamma\mathbf{E}$ в этой области. Таким образом, расчет сопротивления R_{12} сводится к трудному в общем случае расчету электрического поля в области V_{12}.

Если величина j имеет одно и то же значение во всех точках каждого поперечного (току) сечения S участка C_{12}, то

$$j=\frac{I}{S},\quad R_{12}=\int_1^2 \rho\frac{dl}{S},\quad R_{12}=\rho\int_1^2\frac{dl}{S}, \tag{4.26}$$

где $(4.26)_3$ соответствует случаю однородного участка C_{12}.

Характер поля вектора $\mathbf{j}$ между поперечными сечениями S_1 и S_2 определяется требованием, чтобы результат интегрирования в (4.24) имел одно и то же значение по всем токовым линиям на

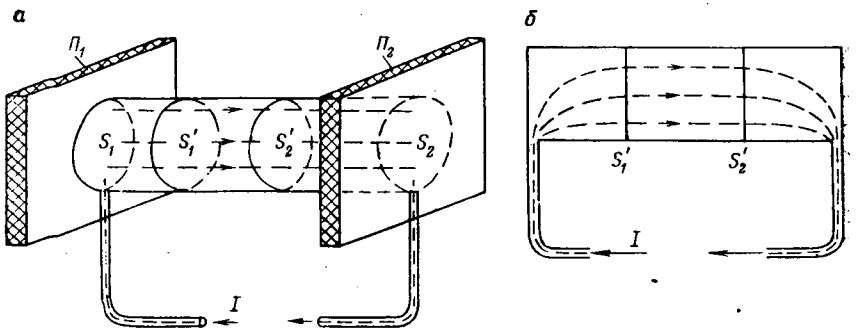


Рис. 38. Сопротивление цилиндрического проводника:
а — любые два поперечных сечения прямого цилиндра, являющиеся поперечными сечениями тока и выделяющие участок C_{12}, к которому применимы формулы (4.27), *б* — сечения, в средней части цилиндра ограничивающие участок C_{12}, к которому применимы формулы (4.27)

участке цепи C_{12} между этими сечениями. Для этого плотность тока на линиях, более длинных и проходящих через части проводника с большим удельным сопротивлением, должна быть меньше, чем на линиях, более коротких и проходящих через части проводника с большей удельной электропроводностью (рис. 37,*в*).

Если участок C_{12} между эквипотенциальными сечениями S_1 и S_2 представляет собой прямой однородный цилиндр произвольного поперечного сечения, то указанному требованию удовлетворяет однородное поле вектора **j**, параллельное образующей цилиндра с плотностью тока $j=I/S$, где S — площадь поперечного сечения цилиндра. При этом отрезки токовых линий между сечениями S_1 и S_2 имеют одинаковую длину l_{12} и произведение ρj имеет всюду одинаковое значение (рис. 38,*а*). Именно такое поле в данном случае удовлетворяет краевым условиям, указанным выше. Для этого случая согласно $(4.26)_3$ и (4.24′)

$$R_{12}=\frac{\rho l_{12}}{S},\quad I=\frac{U_1-U_2}{l_{12}}\frac{S}{\rho}. \tag{4.27}$$

Если однородный цилиндрический проводник включен в цепь тока так, что у его концов эквипотенциальные сечения S_1 и S_2 цепи тока не совпадают с поперечными сечениями цилиндра (рис. 38,*б*), то для участка C_{12} цепи тока между ее сечениями S_1 и S_2 условия, для которых мы получили формулы (4.27), не выполняются. Но искажения поля, вызываемые отклонениями эквипотенциальных поверхностей S_1 и S_2 от поперечных сечений цилиндра, не отражаются на распределении поля вектора **j** в части цилиндра, достаточно удаленной от S_1 и S_2. Поэтому к любому отрезку этого цилиндра, заключенному между его поперечными сечениями S'_1 и S'_2, достаточно далекими от S_1 и S_2, применимы формулы (4.27).

Эти формулы справедливы также для квазилинейного участка цепи. Так будем называть участок цепи, если любой его отре-

зок достаточной длины сравнительно с линейными размерами его поперечного сечения (форма которого может быть произвольной) можно считать однородным цилиндром. Проводники, образующие квазилинейные участки цепи, и токи в этих проводниках будем также называть квазилинейными. Частным случаем квазилинейного проводника является однородный цилиндрический участок C_{12}. Применяемые в технике проволоки и шины, за исключением их слишком сильно изогнутых участков, являются квазилинейными проводниками. Токовые линии в квазилинейном проводнике параллельны его осевой линии, в качестве которой может быть взята любая из них. Часто квазилинейный проводник мысленно заменяют линейным проводником, совпадающим с его осью.

Применяя $(4.27)_2$ к элементарному отрезку dl квазилинейной элементарной токовой трубки, имеем

$$dI = -\frac{dU}{dl^j}\frac{dS^j}{\rho}, \quad 1_j\frac{dI}{dS^j} = -\frac{1_E}{\rho}\frac{dU}{dl_j},$$

где $1_j dI = j dS^j$, $1_E dU = -E dl^j$, $1_j = 1_E$,
dS^j — площадь поперечного сечения токовой трубки, а dI и j — сила и плотность тока в ней. Таким образом, из закона Ома (4.24′) мы получаем формулу (4.14), которая выражает этот закон применительно к элементу объема проводника. Отсюда указанное выше название формулы (4.14).

IV. **Коэффициент участка цепи тока.** Если участок C_{12} однороден, то получаем в соответствии с (4.24′), (4.25)

$$R_{12} = \frac{\rho}{I}\int_1^2 (\mathbf{j}\,d\mathbf{l}), \quad \rho = K_{12}R_{12} = K_{12}\frac{U_1 - U_2}{I}, \tag{4.28}$$

где

$$K_{12} = \left(\int_1^2 \left(\frac{\mathbf{j}}{I}\,d\mathbf{l}\right)\right)^{-1} = I\left(\int_1^2 (\mathbf{j}\,d\mathbf{l})\right)^{-1} \tag{4.29}$$

— коэффициент участка C_{12} — величина, обратная множителю пропорциональности сопротивления R_{12} этого участка его удельному сопротивлению ρ. Коэффициент K_{12} служит для перехода от R_{12} к ρ и зависит только от формы и размеров проводника C_{12}. Вычисление коэффициента K_{12} по формуле (4.29), как и определение R_{12} по формуле (4.25), сводится к расчету поля в области V_{12}. В случаях, для которых получены формулы $(4.26)_3$ и $(4.27)_1$, имеем соответственно

$$K_{12} = \left(\int_1^2 \frac{dl}{S}\right)^{-1}, \quad K_{12} = \frac{S}{l_{12}}. \tag{4.29′}$$

Следует иметь в виду, что сопротивление R_{12} как величина, характеризующая участок цепи (проводник) C_{12}, имеет вполне определенный смысл только при условии полной независимости

значения интеграла в правой части (4.25) от остальной части цепи. Но, согласно сказанному выше, на значение этого интеграла не влияют изменения остальной части цепи, только если они не вызывают нарушения эквипотенциальности границ S_1 и S_2 участка C_{12}. В общем случае такие нарушения вполне возможны, когда изменения цепи происходит вблизи этого участка (рис. 37,*б*).

Неопределенность понятия сопротивления R_{12} участка C_{12} полностью отпадает, когда его границы S_1 и S_2 не могут быть неэквипотенциальными (рис. 37,*г*, *д*), например, когда они являются сечениями линейных проводников или поверхностями идеальных проводников (см. § 5). Пространственный участок C_{12}, ограниченный такими сечениями цепи, т. е. соединенный с соседними ее участками при помощи линейных или идеальных проводников, является автономным. В занимаемой им области V_{12} поля векторов $\mathbf{j}/I$ и $\mathbf{E}/I$ совершенно не зависят от остальной части цепи.

Геофизику приходится часто определять величину $R_{12}=(U_1-U_2)/I$ с целью характеристики пространственного участка цепи, не являющегося автономным. При этом следует иметь в виду, что в общем случае на сопротивление R_{12} участка C_{12} влияет не только его удельное сопротивление, но и удельное сопротивление соседних участков цепи.

§ 3. СТОРОННЕЕ ПОЛЕ. РАБОТА В ЦЕПИ ТОКА

Согласно уравнению $\operatorname{rot}\mathbf{E}=0$ векторные линии постоянного электрического поля $\mathbf{E}$ (силовые линии) не могут быть замкнутыми, а согласно уравнению $\operatorname{div}\mathbf{j}=0$ векторные линии постоянного поля $\mathbf{j}$ (токовые линии) не могут быть разомкнутыми. Вместе с тем векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{j}=\gamma\mathbf{E}$, очевидно, параллельны. Легко видеть, что удовлетворить указанным условиям во всем пространстве можно только, положив $\mathbf{j}=0$ всюду и $\mathbf{E}=0$ в проводящей среде. Действительно, если где-либо имеются замкнутые токовые линии, то согласно $(4.14)_1$ там должны быть такие же силовые линии, а так как в постоянном поле $\mathbf{E}$ замкнутых векторных линий быть не может, то не может быть и замкнутых векторных линий постоянного поля $\mathbf{j}$, связанного с полем $\mathbf{E}$ соотношением $(4.14)_1$. Но разомкнутых линий постоянного тока, согласно (4.17), также не может быть, следовательно, постоянное поле вектора $\mathbf{j}$, связанное с вектором $\mathbf{E}$ соотношением $(4.14)_1$, неосуществимо.

Физический смысл этого вывода состоит в том, что создать постоянный ток только электрическим полем $\mathbf{E}$ нельзя и, следовательно, нельзя осуществить постоянное электрическое поле в проводящей среде с помощью одних только зарядов (кулоновых сил, создаваемых ими). В § 5 главы третьей уже было показано, что поле $\mathbf{E}$, создаваемое зарядами в присутствии проводника, меняется до тех пор, пока оно не обратится в нуль в проводнике. В частности, если введем в проводящую среду два одинаковых, но разноименных заряда, то создаваемое ими электрическое поле вызовет ток, который будет их разряжать и, следовательно, ослаблять их поле до его полного обращения в нуль при полной

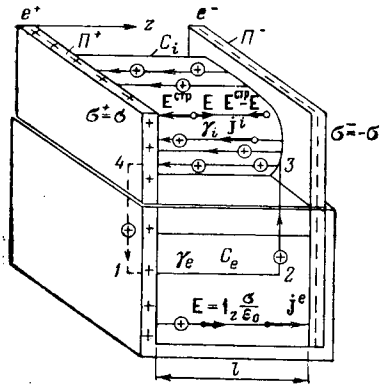


Рис. 39. Схематическое изображение цепи постоянного тока, состоящей из внутренней (проводник C_i) и внешней (проводник C_e) частей, соединенных идеально проводящими пластинами $П^+$ и $П^-$. Четырехугольником *12341* показан контур тока

нейтрализации зарядов. Но если в этом случае убыль электрических зарядов, вызываемую током, синхронно компенсировать каким-либо способом и таким образом поддерживать источники поля $\mathbf{E}$ неизменными, то это поле и поле $\mathbf{j}=\gamma\mathbf{E}$ окажутся постоянными.

I. **Стороннее поле.** Представим себе прямоугольный сосуд (из непроводящего материала), две противоположные стенки которого покрыты изнутри металлическими пластинами $П^+$ и $П^-$ (рис. 39). Сообщим этим пластинам заряды $e^+=e>0$ и $e^-=-e$ и получим между ними электрическое поле $\mathbf{E}$ с силовыми линиями, направленными от $П^+$ к $П^-$, и падение потенциала в этом же направлении z. Заполним сосуд жидким проводником C_e (раствором соли) с удельной электропроводностью γ_e, очень малой сравнительно с электропроводностью пластин. Под действием поля $\mathbf{E}$ в проводнике C_e возникнет ток с плотностью $\mathbf{j}^e=\gamma_e\mathbf{E}$ по направлению падения потенциала, и пластины будут разряжаться, вследствие чего величины e, E, j^e будут уменьшаться.

Но допустим, что выступающие над сосудом части пластин соединены однородным цилиндрическим проводником C_i с удельной электропроводностью γ_i, внутри которого, кроме поля $\mathbf{E}$, направленного от положительной пластины к отрицательной, действуют сторонние (не электрические, не кулоновы) силы, образующие стороннее поле $\mathbf{E}^{стр}$, аналогичное электрическому полю $\mathbf{E}$ в том смысле, что оно заставляет положительные заряды двигаться по направлению вектора $\mathbf{E}^{стр}$, а отрицательные — в противоположном направлении. Поле $\mathbf{E}^{стр}$ создает в проводнике C_i электрический ток с плотностью $\gamma_i\mathbf{E}^{стр}$, которая складывается с плотностью $\gamma_i\mathbf{E}$ тока, создаваемого в этом проводнике электрическим полем $\mathbf{E}$. В результате имеем в проводнике C_i ток с плотностью $\mathbf{j}^i=\gamma_i(\mathbf{E}+\mathbf{E}^{стр})$. Пусть поле $\mathbf{E}^{стр}$ в C_i сильнее поля $\mathbf{E}$ и направлено против него. Тогда векторы $(\mathbf{E}+\mathbf{E}^{стр})$ и $\mathbf{j}^i$ в проводнике C_i направлены против поля $\mathbf{E}$, и, следовательно, электричество (положительное) движется в этом проводнике от $П^-$ к $П^+$ против поля $\mathbf{E}$. Оно «нагнетается» под действием сторонних сил (преобладающих в этом проводнике над силами электрического поля) в сторону подъема потенциала вместо того, чтобы стекать по этому проводнику так же, как по проводнику C_e, в сторону падения потенциала.

Для постоянства зарядов e^+ и e^-, их плотностей $\sigma^+=\sigma$ и $\sigma^-=-\sigma$ и их поля $\mathbf{E}=\mathbf{1}_z\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ необходимо, чтобы сила тока, нагн

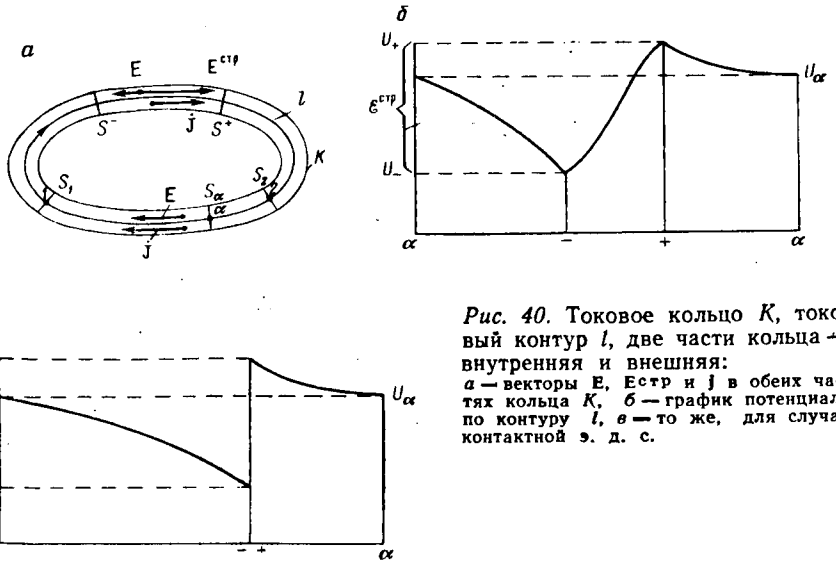


Рис. 40. Токовое кольцо K, токовый контур l, две части кольца — внутренняя и внешняя:
а — векторы **E**, $\mathbf{E}^{стр}$ и **j** в обеих частях кольца K, *б* — график потенциала по контуру l, *в* — то же, для случая контактной э. д. с.

тающего электричество (положительное) против падения потенциала через проводник C_i, была равна силе тока, разряжающего пластины через проводник[1] C_e.

В схематически представленной выше цепи (см. рис. 39) силовые линии обрываются (на пластинах), а токовые линии — замкнутые, и это возможно потому, что на некотором участке цепи действует поле $\mathbf{E}^{стр}$ и вектор $\mathbf{j}=\gamma(\mathbf{E}+\mathbf{E}^{стр})$ оказывается направленным против поля **E** вопреки соотношению $(4.14)_1$.

Каждая цепь постоянного тока должна содержать хотя бы один такой участок — источник тока (не смешивать с источниками поля вектора **j**), например, батарею гальванических элементов, динамомашину. Эту «внутреннюю» (активную) часть цепи в приведенной схеме изображает проводник C_i, а ее остальную — «внешнюю» — проводник C_e. Изображая цепь тока кольцом (контуром), будем различать в нем соответственно две части C_i и C_e, разделяемые сечениями (точками) S^- и S^+, соответствующими полюсам источника тока.

Цепь тока может содержать несколько активных участков (на которых действуют сторонние силы), и на некоторых из них направление поля $\mathbf{E}+\mathbf{E}^{стр}$ может совпадать с направлением поля **E** (заряжающийся аккумулятор), но для простоты мы обычно будем предполагать, что стороннее поле действует только на одном участке цепи (рис. 40) и на нем $\mathbf{E}^{стр}=-m\mathbf{E}$, где $m>1$.

[1] Если σ больше или меньше значения $\sigma(E^{стр})$, необходимого для такого равенства при данном поле $\mathbf{E}^{стр}$, то происходит переход электричества (положительного) от $П^+$ к $П^-$ по C_e или от $П^-$ к $П^+$ по C_i, вследствие чего σ автоматически принимает значение $\sigma(E^{стр})$.

II. **Электродвижущая сила.** Напряжение стороннего поля между точками *1* и *2*

$$\mathscr{E}_{12}^{\text{стр}} = \int_1^2 (\mathbf{E}^{\text{стр}} d\mathbf{l}) \tag{4.30}$$

аналогично напряжению $\mathscr{E}_{12}$ электрического поля **E**, но по разным путям l_{12} между точками *1* и *2* оно может иметь различные значения. Будем считать, что заданное поле $\mathbf{E}^{\text{стр}}$ коллинеарно полям **E** и **j**, и в выражении (4.30) для $\mathscr{E}^{\text{стр}}$ возьмем в качестве пути интегрирования отрезок токовой линии на участке C_{12}. Напряжение $\mathscr{E}_{12}^{\text{стр}}$ называют электродвижущей силой (э. д. с.) на участке C_{12} цепи тока.

Рассмотрим случай, когда длина активного участка C_{12} мала сравнительно с размерами его поперечного сечения, т. е. когда стороннее поле действует в тонком слое C_{12} между поперечными сечениями цепи S_1 и S_2 по нормали n к этим сечениям. В этом случае электродвижущая сила

$$\mathscr{E}^{\text{стр}} = \int_1^2 E_n^{\text{стр}} dn = hE_n^{\text{стр ср}}, \tag{4.30'}$$

где $E^{\text{стр ср}}{}_n$ — среднее значение компоненты $E^{\text{стр}}{}_n$ на толщине слоя h. Полагая $h \to 0$, а $E^{\text{стр ср}}{}_n \to \infty$, причем произведение $hE^{\text{стр ср}}{}_n$ остается без изменения, получаем контактную э. д. с.:

$$\mathscr{E}_{12}^{\text{кнт}} = \int_1^2 E_n^{\text{стр}} dn = hE_n^{\text{стр}} \quad (h \to 0,\ E_n^{\text{стр}} \to \infty). \tag{4.31}$$

Величина $\mathscr{E}_{12}^{\text{кнт}}$ положительна, если поле $\mathbf{E}^{\text{стр}}$ направлено от S_1 к S_2, и отрицательна, если оно имеет противоположное направление.

III. **Дополнение закона Ома.** Из сказанного в разд. I следует, что соотношение $(4.14)_1$ между векторами **j** и **E** справедливо только для внешней части цепи тока. В общем же случае мы имеем, кроме поля **E**, стороннее (некулоново) поле $\mathbf{E}^{\text{стр}}$, в котором электрические заряды движутся, как в поле **E**. Следовательно, соотношение $(4.14)_1$ для общего случая должно быть заменено соотношением

$$\mathbf{j} = \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{стр}}) \quad \rho\mathbf{j} = \mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{стр}}, \tag{4.32}$$

которое при $\mathbf{E}^{\text{стр}} = 0$, т. е. для внешней части цепи принимает вид $(4.14)_1$. В соответствии с этим формулы, полученные в § 2 с помощью соотношения $(4.14)_1$, справедливы только для внешней части цепи. Для получения аналогичных формул, применимых в общем случае, надо вместо $(4.14)_1$ воспользоваться соотношением (4.32). Подставляя его в (4.17) и $(4.24)_2$, получаем

$$\operatorname{div}(\gamma\mathbf{E}) = -\operatorname{div}(\gamma\mathbf{E}^{\text{стр}}), \quad \operatorname{Div}(\gamma\mathbf{E}) = -\operatorname{Div}(\gamma\mathbf{E}^{\text{стр}}), \tag{4.33}$$

$$\oint_S \gamma\,(\mathbf{E}\,d\mathbf{S}) = -\oint_S \gamma\,(\mathbf{E}^{\text{стр}} d\mathbf{S}),$$

$$\mathscr{E}_{12} = I\int_1^2 \rho\left(\frac{\mathbf{j}}{I}\,d\mathbf{l}\right) - \int_1^2 (\mathbf{E}^{\text{стр}} d\mathbf{l}),\quad \mathscr{E}_{12} + \mathscr{E}_{12}^{\text{стр}} = IR_{12}. \tag{4.34}$$

Включая в участок C_{12} всю цепь тока и совершая по ней обход по току, получаем из (4.34)

$$\mathscr{E}^{\text{стр}} = IR,\ \text{где}\ R = R_i + R_e = \oint \rho\left(\frac{\mathbf{j}}{I}\,d\mathbf{l}\right) \tag{4.34'}$$

и

$$\mathscr{E}^{\text{стр}} = \oint (\mathbf{E}^{\text{стр}} d\mathbf{l}) = \int_-^+ (\mathbf{E}^{\text{стр}} d\mathbf{l}) = \mathscr{E}_{+-}^{\text{стр}} \tag{4.34''}$$

— сопротивление всей цепи и э. д. с., действующая в ней; R_i — внутреннее сопротивление источника тока (участка C_{-+}); R_e — сопротивление внешней части цепи (участка C_{+-}).

Применяя (4.34) к внешнему участку цепи, имеем

$$U_+ - U_- = IR_e. \tag{4.35}$$

Подставляя в (4.35) выражение для I из (4.34'), получаем

$$U_+ - U_- = \mathscr{E}^{\text{стр}}\frac{R_e}{R_i + R_e} = \frac{\mathscr{E}^{\text{стр}}}{1 + \dfrac{R_i}{R_e}}. \tag{4.35'}$$

При $R_i \ll R_e$

$$U_+ - U_- \approx \mathscr{E}^{\text{стр}},\ \text{т. е.}\ \mathscr{E}_{-+} \approx -\mathscr{E}^{\text{стр}}. \tag{4.36}$$

Для случая $R_e = \infty$ (когда цепь разомкнута) в формулах (4.36) знаки приближенного равенства должны быть заменены знаками равенства. В этом случае, согласно (4.34'), $I = 0$ и стороннее напряжение $\mathscr{E}^{\text{стр}}$ только уравновешивает электрическое напряжение $\mathscr{E}_{+-}$ между сечениями S^+ и S^- (между полюсами источника тока).

IV. **Контактные э. д. с.** Формулы (4.36) справедливы, в частности, для пространственной цепи с контактной э. д. с. на некоторой поверхности S_{12} (например, с диффузионной э. д. с. на контакте пород, насыщенных растворами NaCl различной концентрации), так как в такой цепи внутренняя часть (тонкий слой у сечения S_{12}) имеет очень малую длину h и, следовательно, сопротивление R_i очень мало. Считая $h \to 0$, мы должны положить $R_i \to 0$. Обозначая индексами 1 и 2 величины, относящиеся к областям V_1 и V_2, разделяемым поверхностью S_{12}, получаем, согласно (4.36),

$$U^{(2)} - U^{(1)} = \mathscr{E}_{12}^{\text{конт}},\ \text{т. е.}\ \mathscr{E}_{12} = -\mathscr{E}_{12}^{\text{конт}}. \tag{4.37}$$

Согласно (4.37) на поверхности S_{12}, на которой действуют контактные э. д. с., потенциал U терпит разрыв. Но в § 7 главы второй было установлено, что потенциал терпит разрыв только на такой поверхности, на которой имеется двойной слой, следовательно, на поверхности S_{12}, на которой действуют контактные э. д. с., должен быть двойной слой. Сравнивая (4.37) с (2.82), видим, что этот двойной слой должен иметь плотность дипольных моментов

$$\eta_{12} = \varepsilon_0 \mathscr{E}_{12}^{\text{конт}}. \tag{4.37'}$$

С другой стороны, если на поверхности S_{12} находится двойной слой и, следовательно, она является поверхностью разрыва потенциала, то при $\gamma > 0$ согласно (4.37) на ней должны существовать контактные э. д. с. Это вполне понятно, так как силы поля $\mathbf{E}$ стремятся соединить обкладки двойного слоя, нейтрализовать его заряды и, следовательно, если в зазоре между обкладками среда проводящая, то для сохранности двойного слоя необходимо, чтобы в этом зазоре силам поля $\mathbf{E}$ противодействовали силы поля $\mathbf{E}^{\text{стр}}$. Согласно (4.37), (2.87), $(2.114)_1$ и $(2.115)_1$,

$$E_t^{(2)} - E_t^{(1)} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathscr{E}_{12}^{\text{конт}}, \quad [\mathbf{n}(\mathbf{E}^{(2)} - \mathbf{E}^{(1)})] =$$

$$= -[\mathbf{n}\,\mathrm{grad}^s \mathscr{E}_{12}^{\text{конт}}], \quad \frac{\partial U^{(2)}}{\partial t} - \frac{\partial U^{(1)}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\mathscr{E}_{12}^{\text{конт}}. \tag{4.38}$$

Равенство $(4.38)_3$ можно получить, дифференцируя равенство $(4.37)_1$ по направлению t.

На поверхности S_{12}, на которой нет контактной э. д. с., неоднородной по направлению t,

$$\frac{\partial \mathscr{E}_{12}^{\text{конт}}}{\partial t} = 0, \quad E_t^{(2)} = E_t^{(1)}, \quad \rho_2 j_t^{(2)} = \rho_1 j_t^{(1)}, \tag{4.38'}$$

$$\frac{\partial U^{(2)}}{\partial t} = \frac{\partial U^{(1)}}{\partial t},$$

а если на этой поверхности нет никакой контактной э. д. с., то на ней потенциал U непрерывен:

$$\text{при } \mathscr{E}_{12}^{\text{конт}} = 0 \qquad U^{(2)} = U^{(1)}. \tag{4.38''}$$

V. **Закон Джоуля — Ленца.** При перемещении электричества в проводнике под действием поля $\mathbf{E}+\mathbf{E}^{\text{стр}}$ в этом проводнике выделяется количество тепла, равное работе, производимой полем. При перемещении заряда e сила $e(\mathbf{E}+\mathbf{E}^{\text{стр}})$ производит на пути dl работу $e([\mathbf{E}+\mathbf{E}^{\text{стр}}]\mathbf{dl})$. Через сечение цепи тока за время dt проходит заряд Idt, поэтому на участке цепи C_{12}, т. е. на пути l_{12} между его границами S_1 и S_2, за это время совершается работа

$$Idt \int_1^2 ([\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{стр}}]\,\mathbf{dl}) = Idt\,(\mathscr{E}_{12} + \mathscr{E}_{12}^{\text{стр}}) = Idt\,(U_1 - U_2 + \mathscr{E}_{12}^{\text{стр}}).$$

Обозначая через Q_{12} количество тепла, выделяющееся на этом участке в единицу времени, и принимая во внимание (4.34), имеем

$$Q_{12} = I \int_1^2 ([\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{стр}}]\, d\mathbf{l}) = I\,(\mathscr{E}_{12} + \mathscr{E}_{12}^{\text{стр}}) = \frac{(\mathscr{E}_{12} + \mathscr{E}_{12}^{\text{стр}})^2}{R_{12}} = I^2 R_{12}. \quad (4.39)$$

Эта формула выражает закон Джоуля — Ленца.

Стороннее поле на этом же участке производит в единицу времени работу

$$P_{12} = I \int_1^2 (\mathbf{E}^{\text{стр}} d\mathbf{l}) = I\mathscr{E}_{12}^{\text{стр}}. \quad (4.40)$$

Если участок C_{12} находится во внешней части цепи, то

$$P_{12} = 0,\ Q_{12} = I\mathscr{E}_{12} = \frac{\mathscr{E}_{12}^2}{R_{12}} = I^2 R_{12}. \quad (4.41)$$

Согласно принятому условию путь l_{12} направлен по току, т. е. ток направлен от S_1 к S_2. Поэтому во внутренней части цепи $([\mathbf{E}+\mathbf{E}^{\text{стр}}]\, d\mathbf{l}) = (E_l + E^{\text{стр}}{}_l)\, dl = (E^{\text{стр}} - E)\, dl$, причем $E^{\text{стр}} > E$, $E^{\text{стр}} - E < E^{\text{стр}}$ и, следовательно, $P_{12} > Q_{12}$.

Во всей внутренней части цепи выделяется количество тепла

$$Q_i = I \int_-^+ ([\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{стр}}]\, d\mathbf{l}) = I\,(\mathscr{E}_{+-} + \mathscr{E}^{\text{стр}}) = I\,(\mathscr{E}^{\text{стр}} - U_+ + U_-) = I^2 R_i, \quad (4.42)$$

во внешней части

$$Q_e = I \int_+^- (\mathbf{E}\, d\mathbf{l}) = I\mathscr{E}_{+-} = I\,(U_+ - U_-) = I^2 R_e, \quad (4.42')$$

а во всей цепи

$$Q^0 = I \oint ([\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{стр}}]\, d\mathbf{l}) = I \oint ([\mathbf{E}^{\text{стр}}\, d\mathbf{l}) = I\mathscr{E}^{\text{стр}} = I^2 R = \frac{(\mathscr{E}^{\text{стр}})^2}{R} =$$
$$= I^2\,(R_i + R_e) = Q_i + Q_e. \quad (4.43)$$

Работа стороннего поля во внутренней части цепи — сторонняя энергия:

$$P_i = I \int_-^+ (\mathbf{E}^{\text{стр}} d\mathbf{l}) = I\mathscr{E}_{-+}^{\text{стр}} = I\mathscr{E}^{\text{стр}} = Q^0. \quad (4.43')$$

Следовательно, сторонняя энергия равна количеству тепла Q^0, выделяющегося во всей цепи. Только часть сторонней энергии, равная Q_i, выделяется в виде тепла во внутренней части цепи, т. е. на месте работы стороннего поля. Остальная часть этой энергии, равная $Q^0 - Q_i = Q_e$, выделяется в виде тепла во внешней части цепи. Очевидно, что эта часть энергии в каком-то виде должна по какому-то пути транспортироваться из места, где расходуется сторонняя энергия, к месту, где получается соответствую-

щая ей тепловая энергия, т. е. от внутренней части цепи к ее внешней части. Об этом будет идти речь в главе шестой.

В проводящей среде электрическому полю сопутствует явление электрического тока, сопряженное с работой электрического поля, с расходом энергии этого поля, с ее переходом в тепло. Следствием этой потери электрической энергии (при отсутствии источника тока) является уменьшение ее плотности $dW_{эл}/dV$ и поэтому также напряженности поля $\mathbf{E}$, квадрату которой, согласно (3.60′), пропорциональна плотность электрической энергии. Работа стороннего поля компенсирует эту потерю. За счет сторонней (например, химической) энергии электрическая энергия непрерывно восполняется, в результате чего плотность электрической энергии и, следовательно, напряженность электрического поля сохраняются.

Из токовой трубки с поперечным сечением dS выделим отрезок длиной dl и объемом $dV=(\mathbf{dS}\,\mathbf{dl})$. В этом элементе объема за время dt совершается работа

$$(\mathbf{j}\,\mathbf{dS})\,([\mathbf{E}+\mathbf{E}^{стр}]\,\mathbf{dl})\,dt, \tag{4.44}$$

следовательно, в нем в единицу времени выделяется количество тепла

$$dQ=(\mathbf{j}[\mathbf{E}+\mathbf{E}^{стр}])\,(\mathbf{dS}\,\mathbf{dl})=(\mathbf{j}[\mathbf{E}+\mathbf{E}^{стр}])\,dV. \tag{4.44′}$$

В том же элементе объема в единицу времени стороннее поле производит работу $dP=(\mathbf{j}\mathbf{E}^{стр})\,dV$. Таким образом, в единице объема проводника за единицу времени совершается работа сторонних сил и выделяется тепло, количества которых определяются формулами

$$\frac{dP}{dV}=(\mathbf{j}\mathbf{E}^{стр}),\quad \frac{dQ}{dV}=(\mathbf{j}\,[\mathbf{E}+\mathbf{E}^{стр}])=\frac{(E+E^{стр})^2}{\rho}=\rho j^2. \tag{4.45}$$

В частности, для элемента dV внешней части цепи имеем

$$\frac{dP}{dV}=0,\quad \frac{dQ}{dV}=(\mathbf{j}\mathbf{E})=\frac{E^2}{\rho}=\rho j^2. \tag{4.46}$$

Во внутренней части цепи $\frac{dP}{dV}>\frac{dQ}{dV}$, так как $(\mathbf{j}[\mathbf{E}+\mathbf{E}^{стр}])=$ $=j[E^{стр}-E]<jE^{стр}$. Разность $\frac{dP}{dV}-\frac{dQ}{dV}$ в этой части цепи представляет собой часть сторонней энергии (ежесекундно расходуемой в единице объема), не выделяющейся в этой же единице объема в виде тепла.

Формула $(4.45)_2$ выражает закон Джоуля — Ленца в дифференциальной форме.

§ 4. ИСТОЧНИКИ СТАЦИОНАРНОГО ПОЛЯ

Необходимость сторонних сил для сохранения поля $\mathbf{E}$ в проводящей среде не противоречит тому, что это поле (как и электростатическое поле) создают заряды. Но напряженность поля, порождаемого всеми зарядами (свободными и связанными), находящи-

мися вне области, занятой токовым кольцом, равна нулю в теле этого кольца так же, как в любом другом проводнике, находящемся в электростатическом поле. Поле в токовом кольце обращается в нуль при удалении из него сторонних сил, оно (как будет доказано в § 7 и как подтверждает опыт) не меняется при любых изменениях среды и зарядов вне области, занятой кольцом. Таким образом, источники постоянного поля $\mathbf{E}$ в токовом кольце могут находиться только внутри него и на его поверхности. Но из этих источников нет смысла выделять свободные заряды, так как они, как и связанные заряды, зависят от поля $\mathbf{E}$. Сопоставив уравнения $(4.33)_{\text{I}}$ и $(4.21)_{\text{II}}$, получим выражение для $\delta_{\text{плн}}$ через γ и $\mathbf{E}^{\text{стр}}$, не содержащее ε. Изменение ε (при заданных величинах γ и $\mathbf{E}^{\text{стр}}$) может влиять только на соотношение между свободными и полными зарядами, но не на полные источники поля $\mathbf{E}$ (см. разд. V § 8). В связи с этим при расчете стационарного поля по заданным функциям γ и $\mathbf{E}^{\text{стр}}$ (э. д. с.) можно полагать $\varepsilon=1$, $\mathbf{D}=\varepsilon_0\mathbf{E}$, $\mathbf{P}=0$, $\delta_{\text{свз}}=0$, $\sigma_{\text{свз}}=0$, $e_{\text{свз}}=0$. Но проще оставить неопределенными эти величины и не разделять источники поля $\mathbf{E}$ на свободные и связанные. Поэтому, не применяя индекса «плн», будем впредь (как правило) иметь в виду полные заряды, которые, однако, можно (и иногда будем) считать свободными, полагая $\varepsilon=1$.

I. **Плотность источников.** В соответствии с $(4.21)_{\text{II}}$ имеем

$$\operatorname{div}\mathbf{E}=\frac{\delta}{\varepsilon_0},\quad \operatorname{Div}\mathbf{E}=\frac{\sigma}{\varepsilon_0},\quad \oint\limits_{S[V]}(\mathbf{E}d\mathbf{S})=\frac{1}{\varepsilon_0}e_V, \tag{4.47}$$

где δ и σ — плотности полных зарядов; e_V — их количество в какой-либо области V, ограниченной замкнутой поверхностью $S[V]$. Вместе с тем согласно $(4.33)_{1,2}$

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\mathbf{E}&=-\frac{(\mathbf{E}\nabla\gamma)}{\gamma}-\frac{\operatorname{div}(\gamma\mathbf{E}^{\text{стр}})}{\gamma},\\ \operatorname{Div}\mathbf{E}&=\frac{\gamma_1-\gamma_2}{\gamma_{\text{ср}}}E_n^{\text{ср}}-\frac{\operatorname{Div}(\gamma\mathbf{E}^{\text{стр}})}{\gamma_{\text{ср}}},\end{aligned} \tag{4.48}$$

где[1] $\gamma_{\text{ср}}=\frac{1}{2}(\gamma_1+\gamma_2)$ и $E_n^{\text{ср}}=\frac{1}{2}(E_n^{(1)}+E_n^{(2)})$

— средние из значений, принимаемых величинами γ и E_n у поверхности S (на которой определяется $\operatorname{Div}\mathbf{E}$) в разделяемых этой поверхностью областях V_1 и V_2.

---

[1] В $(4.48)_2$ принято во внимание выражение для $\operatorname{Div}(\gamma\mathbf{E})$, аналогичное выражению $(3.22)_2$ для $\operatorname{Div}(\varepsilon\mathbf{E})$.

При $\gamma=0$ правые части (4.48) принимают неопределенные значения, а уравнения (4.33) обращаются в тождество. Все эти формулы, а также формулы, получаемые с их помощью ниже, применимы только для части пространства, заполненной проводящей средой.

Следовательно,

$$\delta = \delta_{\gamma E} + \delta_{\gamma \text{стр}}, \quad \sigma = \sigma_{\gamma E} + \sigma_{\gamma \text{стр}}, \quad e = e_{\gamma E} + e_{\gamma \text{стр}}, \tag{4.49}$$

где $\delta_{\gamma E} = -\frac{\varepsilon_0}{\gamma}(\mathbf{E}\nabla\gamma)$, $\sigma_{\gamma E} = \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_{\text{ср}}} \varepsilon_0 E^{\text{ср}}_n$ (4.50)

— плотности «вторичных» зарядов $e_{\gamma E}$, зависимых от поля $\mathbf{E}$;

$$\delta_{\gamma \text{стр}} = -\frac{\varepsilon_0}{\gamma} \operatorname{div}(\gamma \mathbf{E}^{\text{стр}}), \quad \sigma_{\gamma \text{стр}} = -\frac{\varepsilon_0}{\gamma_{\text{ср}}} \operatorname{Div}(\gamma \mathbf{E}^{\text{стр}}) \tag{4.51}$$

— плотности «первичных» зарядов $e_{\gamma\,\text{стр}}$, не зависимых от поля $\mathbf{E}$; δ, σ — плотности «общих» зарядов (свободных при $\varepsilon = 1$);

$$\gamma_{\text{ср}} = \frac{1}{\rho_1 \rho_2} \rho_{\text{ср}}; \quad \frac{\nabla\gamma}{\gamma} = -\frac{\nabla\rho}{\rho}. \tag{4.52}$$

Во внешней части цепи тока $\delta_{\gamma\,\text{стр}} = 0$, $\sigma_{\gamma\,\text{стр}} = 0$, $\mathbf{j} = \gamma\mathbf{E}$ и, следовательно, $\delta = \delta_{\gamma E}$, $\sigma = \sigma_{\gamma E}$.

Первичные заряды $e_{\gamma\,\text{стр}}$ находятся во внутренней части цепи тока, и их распределение в ней имеет для нас обычно формальное значение; для характеристики этой части цепи тока обычно вместо $\mathbf{E}^{\text{стр}}$ и γ_i применяют интегральные величины $\mathscr{E}^{\text{стр}}$ и R_i. Поверхностные заряды $e_{\gamma\text{стр}}$, согласно $(4.51)_2$, получаются на поверхностях разрыва нормальной компоненты вектора $\gamma\mathbf{E}^{\text{стр}}$ и, в частности, на сечениях S^+ и S^- цепи тока, ограничивающих ее внутреннюю часть (на полюсах источника тока). В цепи с контактной э. д. с. заряды $e_{\gamma\text{стр}}$ являются только поверхностными и образуют двойной слой.

Вторичные заряды $e_{\gamma E}$ зависят от поля $\mathbf{E}$ и от функции γ и появляются там, где проводящая среда неоднородна по направлению поля: поверхностные — на не параллельных полю поверхностях разрыва функции γ (на поверхностях раздела) и объемные — в местах непрерывного изменения удельной электропроводности среды по направлению поля. Заряды $e_{\gamma E}$ положительны, когда по направлению поля увеличивается ρ, и отрицательны, когда по этому направлению увеличивается γ.

Если область V заполнена однородной проводящей средой и в этой области стороннего поля нет, то, согласно (4.50), (4.51), в ней также нет электрических зарядов:

$\delta = 0$, $\sigma = 0$ при $\mathbf{E}^{\text{стр}} = 0$ и $\nabla\gamma = 0$.

Обозначая

$$\gamma_{12} = \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} = \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2\gamma_{\text{ср}}} = \frac{\rho_2 - \rho_1}{2\rho_{\text{ср}}} = \rho_{21} = -\rho_{12}, \tag{4.53}$$

имеем согласно $(4.50)_2$ в любой части цепи

$$\sigma_{\gamma E} = 2\varepsilon_0 \gamma_{12} E^{\text{ср}}_n. \tag{4.54}$$

Для внешней части цепи $E^{\text{ср}}{}_n = \rho_{\text{ср}} j_n$ и, следовательно,

$$\sigma_{\gamma E} = \varepsilon_0 (\rho_2 - \rho_1) j_n. \qquad (4.54')$$

Множитель $\gamma_{12} = \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} = \left(1 - \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)\left(1 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)^{-1}$ — коэффициент контрастности поверхности раздела между проводящими средами аналогичен множителям ε_{12} и μ_{12}, о которых шла речь в § 4 главы третьей. Его также называют коэффициентом отражения. Из (4.54) следует, что этот коэффициент является множителем пропорциональности между деленной на $2\varepsilon_0$ плотностью зарядов на поверхности раздела и средним значением нормальной компоненты поля на ней. Он зависит от отношения $\gamma_2/\gamma_1 = \rho_1/\rho_2$. При $0 \leqslant \gamma_2/\gamma_1 \leqslant \infty$ и $\infty \geqslant \rho_2/\rho_1 \geqslant 0$ $+1 \geqslant \gamma_{12} \geqslant -1$, а при $\gamma_2/\gamma_1 = \rho_1/\rho_2 = 1$ $\gamma_{12} = 0$.

II. **Уравнение плотности источников.** Допустим, что в области V, заполненной однородной средой 1 с удельной электропроводностью γ_1, задано первичное поле $\mathbf{E}^{\text{прв}}$, источники которого предполагают неизменными. Положим, что в области V $\mathbf{E}^{\text{стр}} = 0$. Представим себе, что в некоторой части ϑ области V среда 1 заменена средой 2 (неоднородной в общем случае) с удельной электропроводностью γ_2. Согласно (4.50) в области ϑ и на ее границе $S[\vartheta]$ возникают заряды $e_{\gamma E}$ с плотностями $\delta = \delta_{\gamma E}$ и $\sigma = \sigma_{\gamma E}$, которые создают вторичное поле

$$\mathbf{E}^{\text{втр}}(a) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int\limits_{\vartheta} \frac{\delta(q)\,dV}{L^3_{qa}}\,\mathbf{L}_{qa} + \int\limits_{S} \frac{\sigma(q)\,dS}{L^3_{qa}}\,\mathbf{L}_{qa}\right], \qquad (4.55)$$

где S — совокупность находящихся в области V поверхностей раздела $S_{\alpha\beta}$, у которых величина γ меняется скачкообразно от γ_α до γ_β.

Фактически действует суммарное поле

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{\text{прв}} + \mathbf{E}^{\text{втр}}, \qquad (4.56)$$

и оно должно быть подставлено в выражения (4.50) для плотностей зарядов $e_{\gamma E}$. Ниже (до конца этого параграфа) будет идти речь об источниках вторичного поля $\mathbf{E}^{\text{втр}}$, возникающих в связи с описанным выше нарушением однородности среды.

Подставляя (4.55), (4.56) в (4.50), можно получить для δ и σ в любой из точек q выражения через значения этих величин во всех остальных точках q. Таким путем мы приходим к интегральным уравнениям для функций $\delta(q)$ и $\sigma(q)$.

Рассмотрим случаи, когда $\sigma = 0$ или $\delta = 0$. Первый случай имеем, когда внутри области ϑ и на ее границе $S[\vartheta]$ величина γ непрерывна, а второй — когда среда в области ϑ однородна или кусочно-однородна.

В первом случае источниками вторичного поля являются только объемные заряды. Их плотность и напряженность их поля со-

гласно (4.50), (4.55), (4.56) определяются формулами

$$\delta(q)=\frac{-\varepsilon_0}{\gamma(q)}([\mathbf{E}^{\text{прв}}(q)+\mathbf{E}^{\text{втр}}(q)]\nabla\gamma(q)),\quad \mathbf{E}^{\text{втр}}(a)=\int\limits_{\vartheta}\frac{\delta(q)\,dV_q}{4\pi\varepsilon_0 L^3_{qa}}\mathbf{L}_{qa},\tag{4.57}$$

в соответствии с которыми имеем для функции $\delta(q)$ неоднородное интегральное уравнение Фредгольма II рода:

$$\delta(p)=-\frac{\varepsilon_0}{\gamma(p)}(\mathbf{E}^{\text{прв}}(p)\nabla\gamma(p))-\frac{1}{4\pi\gamma(p)}\int\limits_{\vartheta}\frac{\delta(q)\,dV_q}{L^3_{qp}}(\mathbf{L}_{qp}\nabla\gamma(p)).\tag{4.58}$$

Во втором случае источниками вторичного поля являются поверхностные заряды, распределенные на поверхностях раздела $S_{\alpha\beta}$ (в области ϑ) и, в частности, на поверхности $S[\vartheta]$, если на ней γ терпит разрыв. Согласно (4.54), (4.55) и (4.56) плотность зарядов $e_{\gamma E}$ и напряженность их поля определяются формулами

$$\sigma(q)=2\varepsilon_0\gamma_{\alpha\beta}(q)[E_n^{\text{прв}}(q)+E_n^{\text{втр}}(q)],\quad \mathbf{E}^{\text{втр}}(a)=\int\limits_{S}\frac{\sigma(q)\,dS_q}{4\pi\varepsilon_0 L^3_{qa}}\mathbf{l}_{qa},\tag{4.59}$$

где S — совокупность поверхностей $S_{\alpha\beta}$ (включая $S[\vartheta]$).

В соответствии с (4.59) для любой точки p поверхности раздела $S_{\alpha\beta}$

$$\sigma(p)-\lambda\int\limits_{S}K(p,q)\,\sigma(q)\,dS_q=f(p),\tag{4.60}$$

где

$$\lambda=\frac{1}{2\pi};\quad K(p,q)=\frac{\gamma_{\alpha\beta}(p)}{L^3_{qp}}(\mathbf{L}_{qp}\ \mathbf{n}_p);\quad f(p)=2\varepsilon_0\gamma_{\alpha\beta}E_n^{\text{прв}}(p),\tag{4.61}$$

а n_p — нормаль в точке p поверхности $S_{\alpha\beta}$, направленная от среды с удельной электропроводностью $\gamma=\gamma_\alpha$ к среде, в которой $\gamma=\gamma_\beta$. Интегральное уравнение (4.60) для функции $\sigma(q)$ аналогично уравнению (4.58) для $\delta(q)$. Процесс решения таких уравнений непрост, но он облегчается применением современных ЭВМ.

Разбивая поверхность S на площадки ΔS_q с центрами q и заменяя функцию $\sigma(q)$ совокупностью значений σ в точках q, можно свести равенство (4.60) при каждом положении точки p к линейному алгебраическому уравнению для неизвестных значений функции σ в точках q. Так, уравнение (4.60) сводится к системе таких уравнений. Другой метод (итераций) позволяет найти ряд последовательных приближений функции $\sigma(q)$. Подставляя под интеграл в (4.60) $\sigma(q)=0$, получаем $\sigma^{(0)}(p)=f(p)$ — это плотность зарядов, возникающих в точке p под действием только первичного поля. Меняя положение точки p, получаем функцию $\sigma^{(0)}(q)$, т. е. функцию $\sigma(q)$ в нулевом приближении. Подставляя функцию $\sigma^{(0)}(q)$ под интеграл вместо $\sigma(q)$, получаем равенство

$$\sigma^{(1)}(p)=\lambda\int\limits_{S}K(p,q)\,\sigma^{(0)}(q)\,dS_q+\sigma^{(0)}(p)\tag{4.60'}$$

и определяем первое приближение $\sigma^{(1)}(q)$ функции $\sigma(q)$. Оно соответствует влиянию первичного поля и поля зависимых зарядов нулевого приближения.

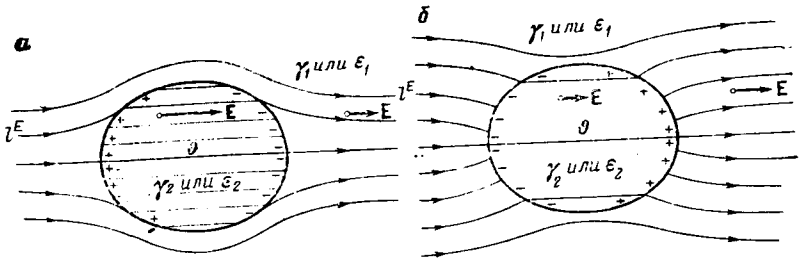


Рис. 41. Инородное (само по себе однородное) включение эллипсоидальной формы в однородном электрическом поле: стационарном или статическом.

Векторные линии li или l^D совпадают с линиями l^E, не прерывающимися у поверхности включения. Значения γ или ε внутри включения меньше (*а*) или больше (*б*), чем вне его

Таким же путем переходим последовательно к приближениям [$\sigma^{(2)}(q)$, $\sigma^{(3)}(q)$ и т. д.] функции $\sigma(q)$.

Уравнения, аналогичные (4.58) и (4.60), можно получить для плотностей источников статического поля (магнитного, электрического). Уравнение, аналогичное (4.60), можно составить, в частности, для плотности зарядов, индуцированных на поверхности проводника в электростатическом поле. Таким уравнением можно воспользоваться для определения гриновского слоя (см. разд. V, § 7 главы третьей).

III. **Заряды на поверхности включения.** Допустим, что поверхность $S[\vartheta]$ замкнута и нарушение однородности среды сводится к присутствию в ней инородного тела, заполняющего область ϑ (рис. 41). Будем считать включение однородным эллипсоидом с одной из осей по направлению первичного поля. Плотность σ на поверхности включения имеет разные знаки на его передней и тыльной (считая по направлению поля) частях. Нормаль n на $S[\vartheta]$ направляем, как обычно, от среды 1 к среде 2 (в данном случае внутрь области ϑ). При $\gamma_2 \lessgtr \gamma_1$ имеем на тыльной части поверхности $S[\vartheta]$, где $E_n > 0$, $\sigma \gtrless 0$, а на передней ее части, где $E_n < 0$, $\sigma \lessgtr 0$. Таким образом, на поверхности включения находятся два заряда e^+ и e^- с разными знаками. Сумма этих зарядов, очевидно, равна нулю, так как, согласно (4.54′) и $(4.17)_3$,

$$e_{\gamma E} = e^+ + e^- = \oint\limits_{S[\vartheta]} \sigma\, dS = \varepsilon_0 (\rho_2 - \rho_1) \oint\limits_{S[\vartheta]} (\mathbf{j}\, d\mathbf{S}) = 0. \qquad (4.62)$$

Распределение зарядов $e = e_{\gamma E}$, появляющихся под действием стационарного поля **E** на поверхности инородного включения в проводящей среде, аналогично распределению зарядов, индуцируемых на поверхности проводника в статическом поле **E**, и зарядов $e_{\varepsilon E}$ или масс $m_{\mu H}$, возникающих на поверхности диэлектрика или магнетика, поляризующегося в поле **E** или **H**. Заряды $e_{\gamma E}$ (e^+ и e^-), появляющиеся на поверхности включения в проводящей среде, иногда называют индуцированными, а тело (включение), на котором эти заряды возникают, — поляризованным. В случае нескольких включений получается взаимное их влияние, соответствующее взаимной индукции проводников в статическом поле. Формула (4.62) в этом случае справедлива для поверхности каждого включения в отдельности.

Процесс образования заряда $e_{\gamma E}$ на поверхности раздела $S[\vartheta]$ схематически[1] может быть представлен в следующем виде. До замены среды 1 в области ϑ средой 2 имеем внутри и вне этой области ток с плотностью $\gamma_1 \mathbf{E}^{\text{прв}}$. После замены получаем на поверхности $S[\vartheta]$ разрыв компоненты j_n и, следовательно, накопление заряда e на ней. В первый момент $j^{(2)}{}_n - j^{(1)}{}_n = (\gamma_2 - \gamma_1) E^{\text{прв}}{}_n(p)$; затем появляется меняющееся вторичное поле, создаваемое накапливающимся зарядом. При этом разрыв

$$j^{(2)}{}_n - j^{(1)}{}_n = \gamma_2 E^{(2)}{}_n(p) - \gamma_1 E^{(1)}{}_n(p), \tag{4.63}$$

где согласно (2.91) — (2.91″)

$$E^{(1)}_n(p) = E^{\text{ср}}_n(p) - \frac{1}{2\varepsilon_0}\sigma(p), \quad E^{(2)}_n(p) = E^{\text{ср}}_n(p) + \frac{1}{2\varepsilon_\vartheta}\sigma(p). \tag{4.63′}$$

Подставляя (4.10) и (4.63′) в (4.63), получаем

$$\dot{\sigma}(p) = (\gamma_1 - \gamma_2) E^{\text{ср}}_n(p) - \frac{1}{2\varepsilon_0}(\gamma_1 + \gamma_2)\sigma(p). \tag{4.63′′}$$

Отсюда при $\dot{\sigma}(p) = 0$, т. е. для установившегося постоянного поля, получаем уравнения (4.54), $(4.59)_1$, (4.60).

Пока $|\sigma| > 0$, величины σ, $\mathbf{E}^{\text{втр}}$, а также $\mathbf{E}$ меняются. Постоянство этих величин наступает при $\dot{\sigma} = 0$, когда исчезает разрыв компоненты j_n, а величина $|\sigma|$, увеличиваясь, достигает некоторого асимптотического значения. Для этого она должна замедлять свой рост, из чего следует, что величина $|\dot{\sigma}|$ должна со временем уменьшаться. Это вполне понятно, так как компонента $E^p{}_n(p)$ (см. разд. III, § 7 главы второй) у поверхности $S[\vartheta]$ направлена так, что она вызывает увеличение абсолютного значения компоненты $E_n(p)$ и, следовательно, также компоненты $j_n(p) = \gamma E_n(p)$ в среде с меньшей удельной электропроводностью и уменьшение этих величин в среде с большей удельной электропроводностью. Когда $\sigma(p)$ достигает значения, обращающего в нуль правую часть (4.63″), получаем $\dot{\sigma}(p) = 0$ и, следовательно, значение $\sigma(p)$ перестает меняться и вместе с ним перестает меняться поле $\mathbf{E}$.

§ 5. ВЛИЯНИЕ НАРУШЕНИЙ ОДНОРОДНОСТИ ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЫ

Неоднородности среды, являющиеся (как показано выше) носителями источников поля $\mathbf{E}$, очевидно, влияют на поля векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{j}$. Будем рассматривать поведение этих полей у разрывных нарушений однородности проводящей среды.

I. **Поверхность раздела.** Рассмотрим поле у поверхности раздела между средами с различными удельными сопротивлениями. Допустим, что эта поверхность находится во внешней части цепи тока и что на ней нет поверхностных токов. Поведение векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{j}$ у такой поверхности определяется формулами (4.18′), (4.38′), согласно которым на ней тангенциальная компонента вектора $\mathbf{E}$ и нормальная компонента вектора $\mathbf{j}$ непрерывны, а нормальная компонента вектора $\mathbf{E}$ и тангенциальная компонента век-

[1] Без учета свойственных переменному полю явлений, о которых будет идти речь в главе шестой. Для простоты будем здесь полагать $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$ и, следовательно, $\sigma_{\text{плн}} = \sigma_{\text{свб}}$.

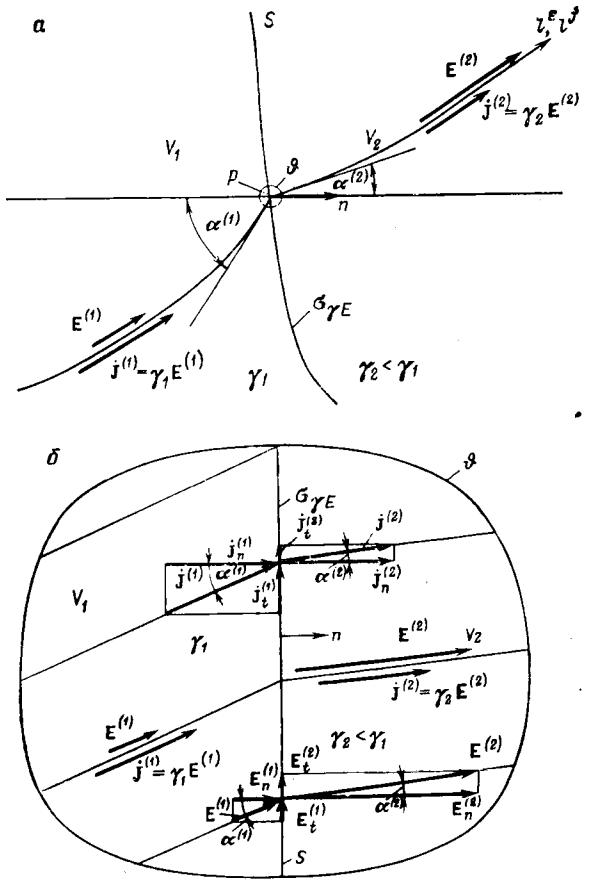


Рис. 42. Преломление поля на поверхности раздела между средами с различной удельной электропроводностью.

а — вид силовой линии l_E вблизи ее прохождения через поверхность раздела S; *б* — силовые (токовые) линии и векторы E, j в малой окрестности ϑ точки p преломляющей поверхности S. Слева от поверхности S (для наглядности) с точками преломления совмещены не начала векторов, а их концы

тора j терпят разрывы, причем компонента E_n меняется пропорционально удельному сопротивлению среды, а компонента j_t — пропорционально удельной электропроводности среды:

$$E^{(2)}{}_t/E^{(1)}{}_t=1,\ E^{(2)}{}_n/E^{(1)}{}_n=\rho_2/\rho_1,$$

$$j^{(2)}{}_t/j^{(1)}{}_t=\gamma_2/\gamma_1,\ j^{(2)}{}_n/j^{(1)}{}_n=1. \qquad (4.64)$$

Разрыв нормальной компоненты вектора E появляется на поверхности раздела потому, что на ней согласно (4.54) имеется поверхностный заряд $e_{\gamma E}$ с плотностью $\sigma_{\gamma E}=2\varepsilon_0\gamma_{12}E^{\text{ср}}{}_n$.

Согласно $(2.116)_4$ этому соответствует разрыв

$$E^{(2)}{}_n-E^{(1)}{}_n=2\gamma_{12}E^{\text{ср}}{}_n, \qquad (4.65)$$

зависящий от контрастности поверхности раздела и от нормальной компоненты поля E на ней. Относительная величина этого разрыва, т. е. отношение $E^{(2)}{}_n-E^{(1)}{}_n$ к $E^{\text{ср}}{}_n$, полностью определяется

коэффициентом контрастности γ_{12} этой поверхности [1].

Направление поля у поверхности раздела S (рис. 42) определяем углом α отклонения поля от нормали n к поверхности S. В изотропной среде направления полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{j}$ совпадают, и достаточно рассмотреть одно из них. Очевидно, что $\operatorname{tg}\alpha = E_\tau/E_n$, поэтому в областях V_1 и V_2 у поверхности S

$$\operatorname{tg}\alpha^{(1)} = E^{(1)}{}_\tau/E^{(1)}{}_n,\ \operatorname{tg}\alpha^{(2)} = E^{(2)}{}_\tau/E^{(2)}{}_n,$$

$$\operatorname{tg}\alpha^{(2)}/\operatorname{tg}\alpha^{(1)} = E^{(2)}{}_\tau E^{(1)}{}_n/E^{(2)}{}_n E^{(1)}{}_\tau. \qquad (4.66)$$

Следовательно, согласно $(4.64)_{1,2}$

$$\operatorname{tg}\alpha^{(2)}/\operatorname{tg}\alpha^{(1)} = \gamma_2/\gamma_1. \qquad (4.66')$$

То же получим согласно $(4.64)_{3,4}$, если будем исходить из формулы $\operatorname{tg}\alpha = j_\tau/j_n$.

Из (4.66′) видно, что силовые и токовые линии преломляются на поверхности раздела, причем тангенс угла α, образуемого ими с нормалью n к этой поверхности, принимает с обеих ее сторон значения, пропорциональные удельной электропроводности среды. Они поворачиваются к нормали в среде с большим удельным сопротивлением, как бы стремясь сократить путь в этой среде.

Если при конечных (ненулевых) значениях γ_1 и γ_2 один из углов $\alpha^{(1)}$ и $\alpha^{(2)}$ имеет значение 0 или $\pi/2$, то другой, согласно (4.66′), принимает то же значение. В этих случаях на поверхности раздела силовые и токовые линии не преломляются. Однако при $\alpha^{(1)} = \alpha^{(2)} = 0$ абсолютная величина вектора $\mathbf{E}$ терпит разрыв, а при $\alpha^{(1)} = \alpha^{(2)} = \pi/2$ терпит разрыв абсолютная величина вектора $\mathbf{j}$.

Уделим внимание двум предельным случаям: $\gamma_2/\gamma_1 = 0$, $\rho_2/\rho_1 = 0$. Будем считать, что знаменатели имеют конечные значения и что в первом случае $\gamma_2 = 0$, а во втором $\rho_2 = 0$.

II. **Граница проводящей среды.** В первом предельном случае идет речь о поверхности раздела между токовым кольцом и соприкасающейся с ним непроводящей средой. В случае тока в земле такой является, например, поверхность раздела земля — воздух или поверхность непроводящих горных пород, залегающих на глубине.

Очевидно, что при $\gamma_2 = 0$ $\mathbf{j}^{(2)} = \gamma_2 \mathbf{E}^{(2)} = 0$, т. е.

$$j^{(2)}{}_n = 0, \qquad j^{(2)}{}_t = 0. \qquad (4.67)$$

В силу непрерывности компоненты j_n имеем также $j^{(1)}{}_n = 0$ и, следовательно, $E^{(1)}{}_n = \rho_1 j^{(1)}{}_n = 0$. Таким образом, у изолятора в проводящей среде векторы $\mathbf{j}$ и $\mathbf{E}$ параллельны его поверхности:

$$j^{(1)}{}_n = 0,\ E^{(1)}{}_n = 0,\ \mathbf{j}^{(1)} = \mathbf{j}^{(1)}{}_\tau,\ \mathbf{E}^{(1)} = \mathbf{E}^{(1)}{}_\tau,$$

$$\operatorname{tg}\alpha^{(1)} = j^{(1)}{}_\tau/j^{(1)}{}_n = \infty, \qquad \alpha^{(1)} = \pi/2. \qquad (4.68)$$

---

[1] Разрыв тангенциальной компоненты вектора плотности тока

$$j^{(2)}{}_t - j^{(1)}{}_t = (\gamma_2 - \gamma_1) E_t \qquad (4.65')$$

соответствует вихревому характеру поля $\mathbf{j}$. На поверхности раздела, согласно $(4.97'')_2$, имеем поверхностный вихрь. Вихревые линии, вокруг которых циркуляция вектора $\mathbf{j}$ не обращается в нуль, лежит на этой поверхности и нормальны к направлению полной тангенциальной компоненты $\mathbf{j}_\tau$ поля $\mathbf{j}$.

Токовые и силовые линии огибают поверхность изолятора. В непроводящей среде у поверхности ее соприкосновения с проводящей средой, согласно (4.67), $E^{(2)}{}_n = \rho_2 j^{(2)}{}_n = \frac{0}{0}$, $E^{(2)}{}_t = \rho_2 j^{(2)}{}_t = \frac{0}{0}$. Но компонента E_t непрерывна на поверхности раздела. Поэтому

$$E^{(2)}{}_t = E^{(1)}{}_t = \rho_1 j^{(1)}{}_t. \qquad (4.67')$$

Что же касается компоненты $E^{(2)}{}_n$, то она остается неопределенной и вместе с ней оказываются неопределенными угол $\alpha^2 = \operatorname{arctg} E^{(2)}{}_\tau \, (E^{(2)}{}_n)^{-1}$ и плотность зарядов на поверхности токового кольца:

$$\sigma_{\text{плн}} = \varepsilon_0 (E^{(2)}{}_n - E^{(1)}{}_n) = \varepsilon_0 E^{(2)}{}_n \, (\sigma_{\text{плн}} = \sigma_{\text{свб}} + \sigma_{\text{свз}}). \qquad (4.69)$$

Таким образом, нормальная компонента $E^{(2)}{}_n$ и плотность зарядов $\sigma_{\text{плн}}$ на поверхности токового кольца не определяются полем $\mathbf{E}^{(1)}$, $\mathbf{j}^{(1)}$ внутри этого кольца. Это вполне понятно, так как поле $\mathbf{E}^{(1)}$ не зависит от зарядов, находящихся вне токового кольца (см. замечание 9 в § 7). А между тем поле этих зарядов индуцирует на поверхности кольца (так же, как на поверхности любого другого проводника) заряды $e_{\text{инд}}$ с некоторой плотностью $\sigma_{\text{инд}}$; оно имеет на внешней стороне этой поверхности нормальную компоненту, равную $\frac{1}{\varepsilon_0} \sigma_{\text{инд}}$ и в общем случае отличную от нуля. Кроме того, токовое кольцо, как и любой другой проводник, можно зарядить, наложив на его поверхность заряд $e_{\text{сбс}}$ с плотностью $\sigma_{\text{сбс}}$, который создает вне кольца поле с нормальной компонентной, равной $\frac{1}{\varepsilon_0} \sigma_{\text{сбс}}$ на внешней стороне поверхности кольца. Вместе со свободными зарядами на этой поверхности появляются также связанные заряды.

Но, кроме всех этих «статических», не связанных с полем $\mathbf{E}^{(1)}$ в кольце зарядов $e_{\text{стат}}$ с плотностью $\sigma_{\text{стат}}$, которым соответствует компонента $E^{(2)\text{стат}}{}_n$, мы в общем случае имеем на поверхности токового кольца еще другие заряды $e_{\text{стац}}$ с плотностью $\sigma_{\text{стац}}$, которым соответствует компонента $E^{(2)\text{стац}}{}_n$, связанная с полем $\mathbf{E}^{(1)}$ в кольце. Поэтому суммарная плотность

$$\sigma_{\text{сумм}} = \sigma_{\text{стат}} + \sigma_{\text{стац}}, \quad E^{(2)}{}_n = E^{(2)\text{стат}}{}_n + E^{(2)\text{стац}}{}_n. \qquad (4.69')$$

Поле $\mathbf{E}^{(2)\text{стац}}$ образуется теми же источниками, которые создают поле $\mathbf{E}^{(1)}$ в токовом кольце. Оно исчезло бы вместе с полем $\mathbf{E}^{(1)}$, если бы мы убрали из токового кольца поле $\mathbf{E}^{\text{стр}}$ и таким способом обесточили бы это кольцо. [1]

Согласно $(3.51)_1$ у поверхности токового кольца $E^{(2)\text{стат}}{}_t = 0$ и, следовательно, $E^{(2)}{}_t = E^{(2)\text{стац}}{}_t$, поэтому $E^{(2)}{}_t$ полностью определяется полем $\mathbf{E}^{(1)}$, как это и видно из (4.67'). Что же касается компоненты $E^{(2)}{}_n$ и плотности зарядов $\sigma_{\text{плн}} = \varepsilon_0 E^{(2)}{}_n$, то полностью эти величины не могут определяться полем $\mathbf{E}^{(1)}$ из-за их слагае-

[1] Поле $\mathbf{E}^{(2)\text{стац}}$ в пространстве, окружающем токовое кольцо, зависит от диэлектрической проницаемости среды. В (4.71) этот параметр не содержится, потому что в соответствии со сказанным во вступлении § 4 здесь имеется в виду полная плотность: $\sigma_{\text{плн}} = \sigma_{\text{свб}} + \sigma_{\text{свз}}$.

мых $E^{\text{стат}}{}_n$ и $\sigma_{\text{стат}}=\varepsilon_0 E^{(2)\text{стат}}{}_n$, не связанных с полем $\mathbf{E}^{(1)}$, но отличных в общем случае от нуля. Однако слагаемые $E^{(2)\text{стац}}{}_n$ и $\sigma_{\text{стац}}=\varepsilon_0 E^{(2)\text{стац}}{}_n$ определяются этим полем. Пусть $\sigma_{\text{стац}}(p)$ — значение $\sigma_{\text{стац}}$ в какой-либо точке p поверхности S токового кольца. Тогда у этой точки в соответствии с (2.91′)

$$E_n^{(1)\text{ стац}}(p)=E_n^{*\text{стац}}(p)-\frac{1}{2\varepsilon_0}\sigma_{\text{стац}}(p),\quad E_n^{(2)\text{ стац}}(p)=E_n^{*\text{стац}}(p)+$$

$$+\frac{1}{2\varepsilon_0}\sigma_{\text{стац}}(p); \tag{4.70}$$

через $\mathbf{E}^{*\text{стац}}$ обозначаем поле, порождаемое всеми зарядами, создающими поле $\mathbf{E}^{\text{стац}}$, кроме заряда $\sigma_{\text{стац}}dS$ элемента dS поверхности S, содержащего точку p. Но $E^{(1)\text{стац}}{}_n=0$, поэтому из $(4.70)_1$ получаем $E^{*\text{стац}}{}_n\ (p)=\frac{1}{2\varepsilon_0}\sigma_{\text{стац}}$ и, следовательно, согласно $(4.70)_2$,

$$E_n^{(2)\text{ стац}}(p)=2E_n^{*\text{стац}}(p)=\frac{1}{\varepsilon_0}\sigma_{\text{стац}}(p).$$

В дальнейшем при изучении стационарного поля мы исключим из рассмотрения поле $\mathbf{E}^{(2)\text{стат}}$ и его источники и будем опускать индекс «стац» в обозначениях поля $\mathbf{E}^{(2)\text{стац}}$ и его источников. Таким образом, имеем

$$E^{(2)}{}_n=2E^*{}_n,\ \sigma=2\varepsilon_0 E^*{}_n=\varepsilon_0 E^{(2)}{}_n, \tag{4.71}$$

где $E^*{}_n$ — нормальная компонента поля на самой поверхности кольца, т. е. в точке, принадлежащей этой поверхности, а не областям V_1 и V_2, разделяемым ею, а $E^{(2)}{}_n$ — эта же компонента на внешней стороне поверхности токового кольца.

III. **Идеальный проводник.** Во втором из указанных выше предельных случаев речь идет о поверхности раздела между обычной проводящей средой (с умеренной удельной электропроводностью) и идеальным проводником, т. е. проводником, в котором при $j>0$ $E=0$, $\nabla U=0$, так как его удельное сопротивление $\rho=0$.

Нулевым удельное сопротивление при обычных условиях не бывает, но в разведочной геофизике удобно пользоваться понятием идеального проводника с удельным сопротивлением, стремящимся к нулю. Действительно, пусть средой *2* является металл (медный электрод, стальная обсадная труба) или металлически проводящая руда (пирит, халькопирит), а средой *1* — обычная горная порода, состоящая из непроводящих минералов и проводящая электричество только благодаря электролитической проводимости воды, заполняющей ее поры. В таком случае отношение $\rho_2/\rho_1=\rho_2\gamma_1$ имеет чрезвычайно малое значение. Представим себе поверхность раздела S между двумя такими средами, поперечную токовым линиям. Плотности тока j должны быть в обеих средах одинакового порядка, т. е. величины $\gamma_1 E^{(1)}$ и $\gamma_2 E^{(2)}$ должны иметь значения одинакового порядка. Следовательно, величина $E^{(2)}$ будет иметь значения порядка $E^{(1)}\gamma_1\rho_2$, т. е. столь малые сравнительно с величиной $E^{(1)}$, что при помощи аппаратуры, применимой для наблюдения поля $\mathbf{E}^{(1)}$, мы не заметим поля $\mathbf{E}^{(2)}$ (напряжений между различными точками в среде *2*).

Возвращаясь к случаю произвольно расположенной поверхности раздела между обычно (умеренно) проводящей средой *1* и идеально проводящей средой *2*, имеем $\rho_2=0$ и, следовательно, $\mathbf{E}^{(2)}=\rho_2\,\mathbf{j}^{(2)}=0$, т. е.

$$E^{(2)}{}_n=0, \qquad E^{(2)}{}_t=0. \tag{4.72}$$

В силу непрерывности компоненты E_t имеем также $E^{(1)}{}_t=0$ и, следовательно, $j^{(1)}{}_t=\rho_1 E^{(1)}{}_t=0$. Таким образом, у идеального проводника в обычно проводящей среде векторы $\mathbf{j}$ и $\mathbf{E}$ (токовые и силовые линии) нормальны к его поверхности:

$$E^{(1)}{}_t=0,\ j^{(1)}{}_t=0,\ \mathbf{E}^{(1)}=\mathbf{E}^{(1)}{}_n,\ \mathbf{j}^{(1)}=\mathbf{j}^{(1)}{}_n,$$

$$\operatorname{tg}\alpha^{(1)}=E^{(1)}{}_\tau/E^{(1)}{}_n=0,\ \alpha^{(1)}=0. \tag{4.73}$$

На поверхности идеального проводника находится заряд с плотностью

$$\sigma=\varepsilon_0(\rho_2-\rho_1)\,j_n=-\varepsilon_0\rho_1 j_n=-\varepsilon_0 E^{(1)}{}_n, \tag{4.74}$$

где нормаль n направлена от области *1* к области *2*, т. е. внутрь идеального проводника.

IV. **Тонкие слои.** Представим теперь нарушение однородности среды в виде совокупности двух поверхностей раздела S_1 и S_2, ограничивающих тонкий слой толщиной h с удельной электропроводностью γ, расположенный между средами *1* и *2* с удельными электропроводностями γ_1 и γ_2. Такими поверхностями раздела могут быть, например, подошва и кровля тонкого пласта или внутренняя и внешняя стороны обсадной трубы. Силовая линия, проходящая через слой, претерпевает последовательно два преломления. Связанное с этим (преломляющее) влияние слоя при малой его толщине становится незаметным на достаточных расстояниях от него. Если $\gamma_1=\gamma_2$, то в первично-однородном поле силовые линии претерпевают на плоскопараллельном слое только смещение, пропорциональное его толщине. Преломляющее влияние слоя вовсе отпадает, когда поле нормально или параллельно его поверхностям.

Однако влияние слоя, как увидим ниже, даже при очень малой его толщине может быть значительным при некоторых условиях. Рассмотрим напряжение $\mathscr{E}_{12}$ на толщине слоя и поток dI через элемент длины dl его поперечного сечения, нормального к полной тангенциальной компоненте $\mathbf{j}_\tau$ плотности тока в нем. Нетрудно видеть, что

$$\mathscr{E}_{12}=hE_n=\rho h j_n=T^\rho j_n,\ T^\rho=h\rho, \tag{4.75}$$

$$dI=hj_\tau dl=h\gamma E_\tau dl=S^\gamma E_\tau dl,\ S^\gamma=h\gamma, \tag{4.75'}$$

где E_n и j_n — нормальные компоненты векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{j}$ в слое; E_τ — полная тангенциальная компонента вектора $\mathbf{E}$ в нем; $\rho=1/\gamma$ — удельное сопротивление слоя; T^ρ и S^γ — поперечное сопротивление и продольная проводимость слоя. Представим себе, что толщина слоя очень мала, но его удельное сопротивление ρ или его удельная электропроводность γ имеет очень большое значение и поэтому «параметр» слоя T^ρ или S^γ (соответственно) не

является малой величиной. При появлении такого слоя в первом случае возникает значительное напряжение $\mathscr{E}_{12}$ между поверхностями S_1 и S_2, что приводит к перераспределению потенциалов вне слоя, а во втором случае получается ток значительной силы I через поперечные сечения слоя, что вне слоя приводит к перераспределению тока.

Таким образом, имеем влияние тонкого слоя, обусловленное его поперечным сопротивлением T^ρ при $\rho \gg \rho_1$ и $\rho \gg \rho_2$ и его продольной проводимостью S^γ при $\gamma \gg \gamma_1$ и $\gamma \gg \gamma_2$. В первом случае можно пренебречь тангенциальной компонентой поля внутри слоя и, следовательно, считать $I=0$, а во втором случае можно пренебречь нормальной компонентой поля внутри слоя и, следовательно, считать $\mathscr{E}_{12}=0$.

Полагая $h \to 0$ при неизменном значении T^ρ в первом случае и S^γ — во втором, получаем «экранирующую поверхность» с конечным поперечным сопротивлением или с конечной продольной проводимостью, т. е. предельно тонкий слой, для которого

$$h \to 0,\ \rho \to \infty,\ E_n = \rho j_n \to \infty,\ h_\rho = T^\rho,$$

$$T^\rho j_n = hE_n = U^{(1)} - U^{(2)} \tag{4.76}$$

или

$$h \to 0,\ \gamma \to \infty,\ j_\tau = \gamma E_\tau \to \infty,\ h\gamma = S^\gamma, \tag{4.76'}$$

$$S^\gamma E_\tau = hj_\tau = i,$$

где $U^{(1)} - U^{(2)} = \mathscr{E}_{12}$ — перепад потенциала на экранирующей поверхности; i — поверхностная плотность тока.

В (4.76) считаются конечными значениями величин T^ρ, j_n, $U^{(1)} - U^{(2)}$, а в (4.76′) — S^γ, E_τ, i.

Продольная проводимость поверхности есть величина, обратная сопротивлению, которое оказывает квадратная площадка (произвольной, но достаточно малой величины) этой поверхности току, параллельному ее стороне. Поперечное сопротивление поверхности есть сопротивление, которое оказывает площадка (произвольной формы, но достаточно малой величины) этой поверхности пронизывающему ее (по нормали) току, умноженное на площадь этой площадки. Эти тонкие слои и заменяющие их поверхности можно называть несовершенно экранирующими или несовершенными экранами в отличие от совершенного экрана, каковым является слой с удельным сопротивлением ρ, равным бесконечности или нулю, независимо от его толщины h, или поверхность, заменяющая такой слой. В первом из этих случаев $T^\rho = \infty$, а во втором — $S^\gamma = \infty$.

В некоторых случаях продольную проводимость предельно тонкого слоя называют поверхностной проводимостью.

Пользуясь выражением $\mathbf{E} = -\nabla U$ и принимая во внимание непрерывность компоненты $j_n = -\gamma \frac{\partial U}{\partial n}$, получаем из (4.76) для поверхности с поперечным сопротивлением:

$$U^{(2)} - U^{(1)} = T^\rho \gamma \frac{\partial U}{\partial n}. \tag{4.77}$$

Подставляя (4.76′) в (4.18) и учитывая непрерывность компоненты $E_\tau = -\operatorname{grad}^s U$, получаем для поверхности с продольной проводимостью:

$$\gamma_2 \frac{\partial U^{(2)}}{\partial n} - \gamma_1 \frac{\partial U^{(1)}}{\partial n} = -\operatorname{div}^s (S^\gamma \operatorname{grad}^s U), \tag{4.78}$$

$$\gamma_2 \frac{\partial U^{(2)}}{\partial n} - \gamma_1 \frac{\partial U^{(1)}}{\partial n} = -S^\gamma \left(\frac{\partial^2 U}{\partial t'^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial t''^2} \right) \text{ при } \operatorname{grad}^s S^\gamma = 0, \tag{4.78′}$$

где grad^s — двухмерный градиент на поверхности S; t' и t'' — любые взаимно перпендикулярные тангенциальные к этой поверхности направления t; множитель при S^γ — двухмерный лапласиан функции U на поверхности S.

V. **Влияние включения.** Обратимся теперь к случаю инородного включения, рассмотренному в § 4, и для простоты положим, что поле $\mathbf{E}^{\text{прв}}$ однородно (см. рис. 41).

Заряды распределяются на поверхности включения так, что они при $\gamma_2 > \gamma_1$ усиливают поле $\mathbf{E}$ спереди и сзади включения (считая по направлению поля) и ослабляют это поле внутри включения. При $\gamma_2 < \gamma_1$ наблюдаем усиление поля внутри включения и ослабление спереди и сзади него. Вдали от включения поле, создаваемое зарядами, находящимися на его поверхности, исчезающе мало и, следовательно, $\mathbf{E} = \mathbf{E}^{\text{прв}}$.

Вне области ϑ, занятой включением, его влияние на поле $\mathbf{j}$ является таким же, как на поле $\mathbf{E}$, так как множитель γ в выражении $\gamma\mathbf{E}$ для вектора $\mathbf{j}$ здесь остается без изменения. Что же касается области ϑ, занятой включением, то в ней поле $\mathbf{j}$, кроме того, еще меняется пропорционально изменению множителя γ. В результате обоих изменений плотность тока в области ϑ увеличивается при $\gamma_2 > \gamma_1$ и уменьшается при $\gamma_2 < \gamma_1$, хотя поле $\mathbf{E}$ в этой области уменьшается при $\gamma_2 > \gamma_1$ и увеличивается при $\gamma_2 < \gamma_1$.

У боковой части поверхности включения поле $\mathbf{E}$ вне включения меняется так же, как внутри включения.

Изменение поля $\mathbf{j}$ при $\gamma_2 > \gamma_1$ сводится к сгущению токовых линий внутри включения за счет их разрежения вне включения у его боковой поверхности. Перераспределение тока между включением и его боковой периферией проявляется также перед включением и за ним, токовые линии сближаются у входа в него и у выхода из него, чему соответствует указанное выше усиление поля в этих местах. При $\gamma_2 < \gamma_1$ получается разрежение токовых линий внутри включения, а также перед ним и за ним, за счет чего по бокам включения (снаружи) токовые линии сгущаются.

Таким образом, ток как бы стремится проходить преимущественно там, где меньше удельное сопротивление.

§ 6. СТАЦИОНАРНОЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ЗЕМЛЕ

Геофизик-разведчик изучает токи в земле — в проводнике, который можно считать простирающимся до бесконечности. Такие токи (а также проводники и цепи, по которым они проходят)

следует всегда рассматривать как пространственные в отличие от обычно применяемых в технике токов (проводников, цепей), которые часто можно считать линейными. В случае пространственной цепи область ϑ_1, занятая токовыми линиями, может иметь поперечные сечения, простирающиеся очень далеко, теоретически до бесконечности, а кольцевая область ϑ_0, охватываемая токовым кольцом, может иметь поперечные сечения с нулевой площадью. Для существования постоянного тока, полностью расположенного в земле, необходимо, чтобы в ней где-то действовали сторонние силы (э. д. с.). Они могут быть объемными или контактными.

В первом случае это стороннее поле в некоторой области пространства, образующей внутренний участок цепи тока. Такие сторонние силы возникают в земле, например, там, где происходит фильтрация воды через проницаемую породу (песок, песчаник). В этом случае имеем стороннее поле электрокинетической природы с напряженностью $\mathbf{E}^{\text{фл}} = -k_{\text{фл}} \operatorname{grad} p$, где p — давление, а $k_{\text{фл}}$ — множитель, зависящий от свойств воды и породы и обычно положительный.

Другим примером стороннего поля в земле является поле диффузионной природы с напряженностью $\mathbf{E}^{\text{дф}} = k_{\text{дф}} \operatorname{grad} \lg c$, где c — концентрация раствора, заполняющего поры породы, а $k_{\text{дф}}$ — множитель пропорциональности, зависящий от раствора и породы.

Такое стороннее поле получается там, где происходит диффузия электролита, анионы и катионы которого перемещаются с различными скоростями. Множитель $k_{\text{дф}} > 0$, когда средняя скорость аниона больше.

Контактные э. д. с. диффузионной природы с напряжением $\mathcal{E}_{12}^{\text{конт}} = k_{\text{дф}} (\lg c_1 - \lg c_2)$ получаются на поверхностях соприкосновения растворов (в порах пород) с различными концентрациями c_1 и c_2. Контактные э. д. с. окислительно-восстановительной природы в земле появляются на поверхностях соприкосновения некоторых руд с вмещающими породами (с водой, насыщающей их поры).

I. **Цепь тока с питающими электродами.** Создавая в земле ток при помощи генератора и питающего кабеля с заземленными концами, получаем цепь, не полностью находящуюся в земле. Она

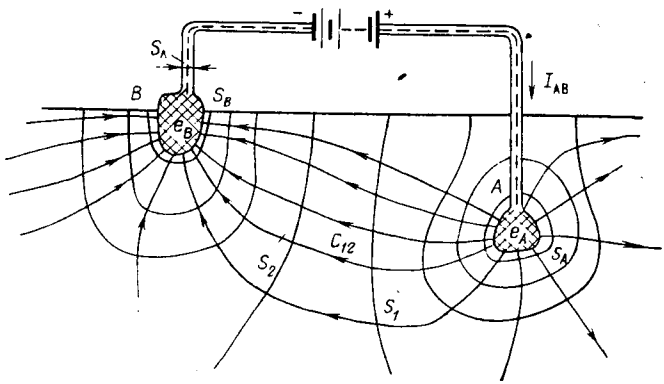


Рис. 43. Цепь тока, состоящая из линейной и пространственной частей, соединенных электродами A и B

состоит из двух частей: линейной части, к которой будем относить кабель вместе с генератором и контрольно-измерительными приборами, и пространственной части, расположенной в земле и имеющей поперечные сечения, которые достигают очень больших, практически неограниченных размеров (рис. 43).

Пространственную часть цепи соединяют с ее линейной частью посредством питающих электродов[1], которые представляют собой проводники (металлические), отличающиеся большой удельной электропроводностью по сравнению с горными породами (пространственной части) и имеющие площади соприкосновения с ними, большие по сравнению с поперечным сечением провода (линейной части). В пространственной части величина ρ обычно чрезвычайно велика по сравнению с удельным сопротивлением в линейной части. Но площади поперечных сечений цепи на неконцевых (не прилегающих к концам линейной части) участках также очень велики. Поэтому неконцевые участки C_{12} пространственной части имеют небольшие сопротивления R_{12} и, следовательно, не мешают получению тока, достаточного для возникновения на таких участках ощутимых напряжений $\mathscr{E}_{12}=R_{12}I=U_1-U_2$. На этих участках цепи получаются весьма малые (сравнительно с плотностью тока в линейной части) плотности тока j, но не слишком малые напряженности поля $\mathbf{E}=\rho\mathbf{j}$. В некоторых случаях удобно причислять электроды к пространственной части цепи и рассматривать их как хорошо проводящие включения в ней.

Для простоты изложения будем, как правило, считать электроды идеально проводящими и имеющими ограниченные размеры. В общем случае будем полагать, что электроды находятся на глубине и окружены проводящей средой, причем погруженные в нее части проводов, питающих электроды током, вместе с изоляцией имеют чрезвычайно малые поперечные размеры и поэтому практически не нарушают однородности среды (см. разд. I § 8).

II. **Эмиссия и заряд электрода.** Рассмотрим два поперечных сечения цепи $S_э$ и $S_л$, где $S_э$ — почти замкнутая поверхность соприкосновения электрода $Э$ с окружающей средой, а $S_л$ — поверхность его соприкосновения с концом питающей линии. Согласно (4.19) потоки вектора $\mathbf{j}$ через эти поверхности равны, если считать нормали n на них направленными в одну сторону, т. е.

---

[1] При измерениях напряжений в пространственной части цепи применяют измерительные электроды. Здесь, как правило, будет идти речь только о питающих электродах. Измерительный электрод, через который в момент измерения ток не проходит, влияет на поле как всякое другое инородное включение. Это влияние отпадает в случае точечного электрода, а также в случае линейного (или поверхностного) электрода, расположенного на эквипотенциальной поверхности наблюдаемого поля.

Внесенный в стационарное поле идеально проводящий шар любого радиуса при отсутствии других нарушений однородности среды оставляет без изменения ([2], с. 183) потенциал точки, в которой оказался его центр. Поэтому такой шар на достаточных (по сравнению с его радиусом) расстояниях от неоднородностей среды и, в частности, от других неточечных электродов (питающих и измерительных) пригоден в качестве измерительного электрода для определения потенциала в точке, в которую помещают центр шара.

по направлению тока или против него. Направляя нормаль на поверхности $S_л$ (на поперечном сечении линейной части) по току, а на поверхности $S_э$ наружу относительно тела электрода, имеем

$$I_э = \pm I, \quad I = \int_{S_л} (\mathbf{j}\, d\mathbf{S}), \quad I_э = \int_{S_э} (\mathbf{j}\, d\mathbf{S}), \tag{4.79}$$

где $I > 0$ — сила тока в линейной части цепи; $I_э$ — сила тока питания земли электродом — его эмиссия, положительная, когда из электрода ток поступает в землю, и отрицательная в противном случае. В первом случае будем называть электрод и его ток положительными, а во втором — отрицательными.

Согласно (4.54′) имеем на поверхности $S_э$ заряд, величина $e_э$ и плотность $\sigma_э$ которого определяются формулами

$$\sigma_э = \varepsilon_0 E_n = \varepsilon_0 \rho j_n, \quad e_э = \varepsilon_0 \int_{S_э} E_n dS = \varepsilon_0 \int_{S_э} \rho j_n dS, \tag{4.80}$$

где E_n, j_n и ρ — нормальные компоненты векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{j}$ и удельное сопротивление среды вне электрода у его поверхности; нормаль n, как было условлено, направлена от электрода к окружающей среде. Плотность эмиссии электрода, т. е. величина j_n на его поверхности согласно $(4.80)_1$ пропорциональна плотности $\sigma_э$ заряда на этой поверхности и удельной электропроводности окружающей среды вблизи нее. Если удельное сопротивление среды у поверхности $S_э$ всюду имеет одно и то же значение ρ, т. е. если среда у электрода однородна, то заряд электрода

$$e_э = \varepsilon_0 \rho \int_{S_э} (\mathbf{j}\, d\mathbf{S}) = \varepsilon_0 \rho I_э = \pm \varepsilon_0 \rho I. \tag{4.81}$$

Знаки соответствуют знакам электродов.

Идеально проводящий электрод называют также эквипотенциальным. У его поверхности $S_э$ (вне электрода) имеем согласно (4.73)

$$E_t = 0, \quad j_t = 0, \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_n, \quad \mathbf{j} = \mathbf{j}_n, \quad \frac{\partial U}{\partial t} = 0, \tag{4.82}$$

т. е. поверхность $S_э$ является эквипотенциальной.

III. **Поле в пространственной части цепи.** Допустим, что линейная часть цепи тока соединена с землей двумя идеально проводящими питающими электродами A и B, как показано на рис. 43, и пусть $I_A = I$ и $I_B = -I$ — эмиссии этих электродов. Согласно изложенному в разд. IV § 2, пространственная часть цепи (т. е. ее участок C_{AB}, заключенный между поверхностями S_A и S_B электродов A и B или между концами питающей линии, к которым присоединены электроды) является автономной.

Токовые линии в пространственной части цепи заполняют обширную область пространства и различны по длине и конфигурации. Распределение вектора $\mathbf{j}$ должно здесь удовлетворять требованию, чтобы по любой из токовых линий иметь напряжение

$$\mathcal{E}_{AB}=\int_A^B(\mathbf{E}\,\mathbf{dl})=\int_A^B\rho\,(\mathbf{j}\,\mathbf{dl})=U_A-U_B=R_{AB}\;I=\mathcal{E}^{\text{стр}}-R_{\text{л}}I, \qquad (4.83)$$

где U_A и U_B — потенциалы электродов A и B; $\mathcal{E}^{\text{стр}}$ — э. д. с. генератора, включенного в питающую линию; $R_{\text{л}}$ — сопротивление этой линии, а

$$I=\frac{\mathcal{E}^{\text{стр}}}{R_{\text{л}}+R_{AB}} \quad \text{и} \quad R_{AB}=\frac{1}{I}\int_A^B\rho\,(\mathbf{j}\,\mathbf{dl})=\frac{1}{I}\int_A^B(\mathbf{E}\,\mathbf{dl}) \qquad (4.84)$$

— сила тока в цепи и сопротивление ее участка C_{AB}, т. е. пространственной части цепи.

Источниками поля $\mathbf{E}$ в пространственной части цепи являются заряды $e_{\gamma E}$, определяемые формулами (4.50). Из них заряды e_A и e_B находятся на поверхностях S_A и S_B электродов A и B, а остальные заряды $e_{\gamma E}$ — внутри участка C_{AB} (в местах нарушения однородности среды) и на его боковой поверхности (на поверхности земли, непроводящего фундамента). Если среды, окружающие электроды A и B, однородны (порознь), то согласно (4.81)

$$e_A=\varepsilon_0\rho_A I,\quad e_B=-\varepsilon_0\rho_B I, \qquad (4.85)$$

где ρ_A и ρ_B — удельные сопротивления этих сред.

В общем случае линейная часть цепи может разветвляться и присоединяться к пространственному проводнику в различных местах при помощи многих электродов $Э$ с токами $I_Э$ разной силы и разного направления (в землю и из нее).

Размеры проводника, образующего пространственную часть цепи тока, весьма велики, и он простирается до таких расстояний (от электродов), на которых поле $\mathbf{E}$ становится незаметным. Поэтому будем представлять себе, что в общем случае пространственная часть цепи тока образует все пространство, заполненное средой с удельной электропроводностью $\gamma(a)$, а верхнее полупространство, заполненное воздухом, и другие части пространства, заполненные непроводящей средой, будем рассматривать как области, в которых функция $\gamma(a)$ обращается в нуль. Электроды (металлические) можно рассматривать как идеально проводящие включения, на поверхностях которых заданы заряды $e_Э$. Кроме этих зарядов, имеем заряды $e_{\gamma E}$ в местах нарушения однородности среды.

Потенциал и напряженность поля, создаваемого всеми этими зарядами, определяются формулами

$$U(a)=U^{\text{э}}(a)+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_S\frac{\sigma dS}{L_{qa}}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_V\frac{\delta\, dV}{L_{qa}}, \tag{4.86}$$

$$\mathbf{E}(a)=\mathbf{E}^{\text{э}}(a)+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_S\frac{\sigma\, dS}{L^3_{qa}}\mathbf{L}_{qa}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_V\frac{\delta\, dV}{L^3_{qa}}\mathbf{L}_{qa}, \tag{4.86'}$$

где S — поверхности раздела (в частности, земная поверхность); V — области, в которых величина γ меняется непрерывно; σ и δ — плотности зарядов $e_{\gamma E}$, определяемые по (4.50);

$$U^{\text{э}}(a)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_{S_{\text{э}}}\frac{\sigma_{\text{э}}dS}{L_{qa}},\quad \mathbf{E}^{\text{э}}(a)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_{S_{\text{э}}}\frac{\sigma_{\text{э}}dS}{L^3_{qa}}\mathbf{L}_{qa} \tag{4.87}$$

— потенциал и напряженность поля, создаваемого зарядами $e_{\text{э}}$ электродов $\mathcal{Э}$. Если среда всюду однородна или, точнее, если нарушения ее однородности находятся на расстояниях от области пространства, содержащей электроды $\mathcal{Э}$ и точку a, достаточно больших по сравнению с размерами этой области, то вместо (4.86), (4.86′) получаем $U(a)=U^{\text{э}}(a)$, $\mathbf{E}(a)=\mathbf{E}^{\text{э}}(a)$. Если обесточить электроды $\mathcal{Э}$, то получим всюду $\mathbf{j}=0$, и, следовательно, $\mathbf{E}=0$. При этом исчезнут заряды электродов $e_{\text{э}}$, а также все заряды $e_{\gamma E}$, находящиеся в местах нарушения однородности среды. Таким образом, поле, определяемое формулами (4.86), (4.86′), создается с помощью электродов (обусловлено существованием электродов $\mathcal{Э}$, питаемых токами $I_{\text{э}}$). Поэтому все это поле будем иногда называть полем электродов в присутствии неоднородной среды, хотя оно, конечно, отличается от поля $\mathbf{E}^{\text{э}}$, являющегося только частью поля $\mathbf{E}$, источники которой находятся на электродах.

Согласно $(4.80)_1$ плотность электричества $\sigma_{\text{э}}$ в любой точке q поверхности $\mathbf{S}_{\text{э}}$ какого-либо электрода $\mathcal{Э}$ определяется компонентой E_n поля $\mathbf{E}$, создаваемого всеми зарядами и, следовательно, зависит от эмиссии, формы и размеров всех электродов и от удельного сопротивления среды во всем пространстве. Величину $\sigma_{\text{э}}$ можно представить как сумму двух плотностей: $\sigma_{\text{э}}=\sigma_{\text{сбс}}+\sigma_{\text{инд}}$, где $\sigma_{\text{сбс}}$ — плотность собственного заряда $e_{\text{сбс}}$ электрода $\mathcal{Э}$, т. е. плотность электричества, которую мы имели бы на поверхности электрода при заданной его эмиссии, если бы среда была всюду однородной и такой же, как у этой поверхности, а остальные электроды находились бы на расстояниях от электрода $\mathcal{Э}$, больших по сравнению с его линейными размерами, а $\sigma_{\text{инд}}$ — плотность зарядов e^+ и e^-, индуцированных полями зарядов остальных электродов и зарядов, находящихся в местах нарушения однородности среды.

Согласно (4.62) сумма зарядов, индуцированных на поверхности электрода, равна нулю. Поэтому заряд электрода $e_Э = e_{сбс}$, не зависит от других электродов и от нарушений однородности среды, не соприкасающихся с поверхностью $S_Э$ электрода $Э$.

Распределение зарядов $e_{сбс}$, e^+ и e^- по поверхности $S_Э$ вместе с распределением других источников поля должно удовлетворять формулам, определяющим поведение поля в местах нарушения однородности среды и условию обращения в нуль напряженности поля в любой точке внутри каждого идеально проводящего электрода, как внутри любого другого идеального проводника.

IV. **Взаимно независимые электроды. Уединенный электрод.** Представим себе область V, содержащую электрод и столь обширную, что напряженность поля, создаваемого зарядом этого электрода, можно у ее краев считать равной нулю. Допустим также, что все остальные электроды находятся на столь больших расстояниях от области V, что их поле в ней можно считать равным нулю[1] по сравнению с полем электрода $Э$. Такие условия позволяют при расчете поля в области V считать ее простирающейся по всем направлениям до бесконечности и отвлечься от существования всех электродов, кроме того, который находится в области V.

Таким образом, приходим к представлению об электроде, независимом от остальных электродов, и можем рассматривать поле одного отдельно взятого электрода, хотя фактически для получения постоянного тока в земле с помощью электродов их должно быть не меньше двух. В поле такого электрода все токовые линии проходят от его поверхности до бесконечности или в обратном направлении. В этом случае проводящая среда, заполняющая пространство (область V), образует участок цепи тока $C_{Э\infty}$ или $C_{\infty Э}$, заключенный между поверхностью электрода $S_Э$ и бесконечно удаленной поверхностью S_∞ с потенциалом U_∞. Так же, как при изучении статического поля, будем считать, что S_∞ — сферическая поверхность бесконечно большого радиуса, и будем полагать, что $U_\infty = 0$.

Для определенности допустим, что электрод положительный. Поперечные сечения цепи тока на участке $C_{Э\infty}$ представляют собой замкнутые эквипотенциальные поверхности S^E, из которых каждая охватывает все поверхности S^E с бо́льшими потенциалами и охватывается всеми поверхностями S^E с меньшими потенциалами. Разность потенциалов $U_M - U_N$ между двумя точками M и N представляет собой падение потенциала на участке цепи C_{MN}, заключенном между ее двумя эквипотенциальными сечениями S_M и S_N, проходящими через эти точки. Этот участок — замкнутый уровенный слой, охватывающий электрод $Э$; длиной уча-

[1] Предполагается, что размеры электродов, их эмиссии и расстояния между ними ограничены и что неоднородность среды, как это обычно бывает в земле, не мешает достаточно быстрой убыли напряженности поля с удалением от электродов.

стка является толщина этого слоя, взятая по силовой линии, а его поперечными сечениями — эквипотенциальные поверхности, проходящие между поверхностями S_M и S_N.

В соответствии с (4.24) — (4.25) имеем для напряжения $\mathscr{E}_{MN}$ на участке C_{MN} и для сопротивления R_{MN} этого участка выражения

$$\mathscr{E}_{MN}=\int_M^N (\mathbf{E}\,\mathrm{dl})=IR_{MN},\quad R_{MN}=\int_M^N \rho\left(\frac{\mathbf{j}}{I}\,\mathrm{dl}\right), \tag{4.88}$$

где путь интегрирования берется по току.

В частности, если взять точку N на бесконечности, получим

$$U_M=U_M-U_\infty,\quad R_{M\infty}=\int_M^\infty \rho\left(\frac{\mathbf{j}}{I}\,\mathrm{dl}\right); \tag{4.89}$$

если, кроме того, взять точку M на поверхности электрода, то будем иметь

$$U_э=U_э-U_\infty=IR_э,\quad R_э=\int_э^\infty \rho\left(\frac{\mathbf{j}}{I}\,\mathrm{dl}\right), \tag{4.90}$$

где U_M — потенциал произвольно взятой точки M; $U_э$ — потенциал электрода; $R_{M\infty}$ — сопротивление, оказываемое току средой на пути от поверхности S_M до бесконечности или, точнее, до мест, столь удаленных от электрода, что в них поле, создаваемое при его помощи, незаметно; $R_э$ — сопротивление всего участка $C_{э\infty}$, т. е. сопротивление, оказываемое току средой на пути от поверхности электрода до бесконечности. Величину $R_э$ будем называть сопротивлением электрода (как заземления).

Несмотря на бесконечно большую длину участка $C_{M\infty}$ и, в частности, участка $C_{э\infty}$, его сопротивление и величина падения потенциала на нем, т. е. $R_{M\infty}$ и U_M и, в частности, $R_э$ и $U_э$, имеют ограниченные значения. Это объясняется уменьшением напряженности поля $\mathbf{E}$ с увеличением расстояния от электрода. При достаточной величине этих расстояний напряженность поля уменьшается столь быстро, что несобственные интегралы в формулах (4.89), (4.90) сходятся. Более того, обычно при определении сопротивления электрода $R_э$ и его потенциала $U_э$ по формулам (4.90) интегрирование практически можно ограничить не очень большими верхними пределами. Возьмем на какой-либо токовой линии l^j точки через равные интервалы Δl; проведем через эти точки эквипотенциальные поверхности и таким образом разделим участок $C_{э\infty}$ на короткие участки ΔC_i одинаковой длины (по линии l^j), т. е. на охватывающие электрод уровенные слои с толщиной одинакового порядка и с площадью, быстро возрастающей с удалением от электрода (рис. 44). Сопротивление

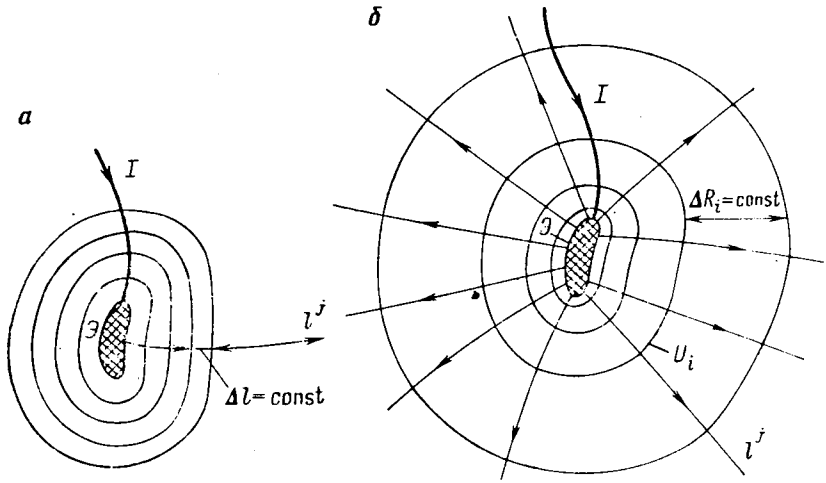


Рис. 44. Поле у уединенного эквипотенциального электрода.

а — среда, окружающая электрод, разделена на охватывающие его слои одинаковой (по токовой линии *l*), толщины; *б*—среда разделена на охватывающие электрод слои одинакового сопротивления; толщина слоя быстро возрастает с увеличением его расстояния от электрода

электрода $R_э$ и его потенциал $U_э$ представляют собой суммы сопротивлений ΔR_i этих слоев и падений потенциала $\Delta U_i = I\Delta R_i$ на них:

$$U_э = I\Sigma\Delta R_i, \quad R_э = \Sigma\Delta R_i. \tag{4.91}$$

Но дальние слои очень мало влияют на $R_э$ и $U_э$ вследствии обратной зависимости сопротивления слоя от площади его поверхности. Поэтому даже значительные изменения среды и, следовательно, характера полей **j** и **E** вдали от электрода не оказывают заметного влияния на его сопротивление $R_э$ и потенциал $U_э$ между тем как небольшие изменения среды в непосредственной близости к поверхности электрода или формы и размеров этой поверхности могут сильно изменить эти величины[1].

Пространственную часть цепи тока, содержащей два взаимно независимых электрода A и B, можно в соответствии с изложенным представить как бы состоящей из трех последовательно включенных участков $C_{A\infty}$, $C_{ср}$ и $C_{\infty B}$, из которых первый и тре-

[1] Сопротивления ΔR_i уровенных слоев, прилегающих к электроду, сильно увеличиваются с уменьшением площади $S_э$ поверхности электрода (при неизменной его форме). При $S_э \to 0$ $R_э \to \infty$. Поэтому либо $I_э \to 0$, либо (неограниченно увеличивая э. д. с.) $U_э \to \infty$, $\sigma_э \to \infty$, $j_n \to \infty$ Это соответствует случаю, когда электрод заменен непосредственным контактом линейной части цепи с ее пространственной частью. Назначение электрода состоит в том, чтобы предотвратить чрезмерное увеличение сопротивления концевого участка пространственной части цепи (прилегающего к ее стыку с линейной частью).

тий — крайние участки с сопротивлениями R_A и R_B — представляют собой пространства (точнее, обширные области), содержащие электроды A и B, а второй — средний участок пространственной части цепи, на котором все ее эквипотенциальные сечения имеют огромные площади. Сопротивления R_A и R_B велики по сравнению с сопротивлением $R_{ср}$ участка $C_{ср}$. Поэтому практически сопротивление пространственной части цепи $R_{AB}=R_A+R_B$.

Аналогично можно определить проводимость $1/R$ параллельного соединения m одноименных взаимно независимых электродов A_i ($i=1, 2, \ldots, m$), через проводимости $1/R_i$ этих электродов:

$$R^{-1}=\Sigma R_i^{-1}.$$

В общем случае, т. е. при произвольных расстояниях между электродами, имеем взаимно зависимые электроды. Каждый из них может иметь и собственный заряд и индуцированные полями других электродов заряды. Взаимная индукция электродов влияет на распределения эмиссии по их поверхностям. В частности, при сближении двух одноименных или разноименных электродов происходит соответственно уменьшение или увеличение плотности поверхностных зарядов и эмиссий на их сторонах, которыми они обращены друг к другу, за счет остальных частей их поверхностей. В связи с этим для последовательного соединения электродов A и B

$$R_{AB}\leqslant R_A+R_B,\ \mathscr{E}_{AB}\leqslant I(R_A+R_B), \tag{4.92}$$

а для параллельного соединения m электродов A_i

$$\frac{1}{R}\leqslant\sum_1^m\frac{1}{R_i}, \tag{4.92'}$$

где знаки равенства соответствуют соединениям взаимно независимых электродов.

Электрод в неограниченной однородной среде при «отсутствии» других электродов будем называть уединенным электродом (см. рис. 44).

В случае уединенного электрода согласно (4.86), (4.86′) $U=U^э$, $\mathbf{E}=\mathbf{E}^э$, где $U^э$ и $\mathbf{E}^э$ определяются формулами (4.87). В этом случае индуцированных зарядов на электроде нет, но поле все же зависит не только от величины заряда $e_э$, но также от его распределения на поверхности $S_э$. Значения $\sigma_э$ на элементах поверхности $S_э$ в данном случае, согласно (4.60), связаны между собой однородным интегральным уравнением

$$\sigma(p)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{S_э}\frac{\sigma(q)}{L^3_{qp}}(\mathbf{L}_{qp}\mathbf{n}_p)\,dS. \tag{4.93}$$

Разделив равенство (4.93) на $2\varepsilon_0$, получаем в левой части взятую с обратным знаком компоненту $E^{p(1)}{}_n(p)$ поля, создаваe-

мого у точки p поверхности $S_э$ (на ее внутренней стороне) зарядом $\sigma(p)dS_p$ элемента dS_p этой поверхности, содержащего точку p. А в правой части получаем компоненту $E^*_n(p)$ поля, создаваемого в этой же точке зарядами остальной части поверхности $S_э$ (см. разд. II § 7 главы второй). Следовательно, равенство (4.33) выражает условие обращения в нуль компоненты E_n на внутренней стороне поверхности $S_э$.

В (4.93), как и в (4.60), (4.61), средней точкой площадки dS считается q, а нормаль n берется в точке p, поэтому множитель при $\sigma(q)$ в (4.93), вообще говоря, не имеет смысла угла видимости площадки dS. Но если $S_э$ — сферическая поверхность, то для любых ее точек p и q $(\mathbf{L}_{qp}\mathbf{n}_p)=(\mathbf{L}_{pq}\mathbf{n}_q)$, поэтому произведение $(\mathbf{L}_{qp}\mathbf{n}_p)\,L_{qp}^{-3}\,dS$ равно углу видимости площадки dS из точки p. Из соображений симметрии ясно, что поверхность уединенного сферического электрода заряжена равномерно. Тем не менее полезно убедиться, что для случая сферической формы электрода решением уравнения (4.93) является $\sigma=$ $=\text{const}$. Исходя из такого допущения, вынесем множитель $\sigma(q)$ за знак интегрирования. В результате, согласно сказанному выше, будем иметь под знаком интеграла угол $d\omega$ видимости площадки dS_q из точки p, а интегрируя, получим угол $\omega=2\pi$ видимости внутренней стороны замкнутой поверхности из ее точки p [см. $(1.129)_3$]. Таким образом, уравнение (4.93) приводится к равенству $\sigma(p)=\sigma(q)$, тождественному при $\sigma=\text{const}$.

Согласно (4.80) уравнение (4.93) определяет также распределение плотности j_n эмиссии по поверхности электрода. Тривиальное решение ($\sigma=0$, $j_n=0$) уравнения (4.93) отпадает согласно (4.79), если $I_э\neq 0$.

Эквиэмиссионный (с равномерно распределенной плотностью эмиссии) электрод равномерно заряжен. В общем случае эквипотенциальный электрод не является эквиэмиссионным; он заряжен неравномерно за исключением случая сферической формы электрода.

V. **Необъемные электроды.** Если точка a находится настолько далеко от электрода $Э$, что расстояние L_{qa} практически не зависит от положения точки q на поверхности $S_э$, то

$$U^э(a)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 L_{qa}}\int\limits_{S_э}\sigma_э dS=\frac{e_э}{4\pi\varepsilon_0 L_{эa}},\quad \mathbf{E}^э(a)=\frac{e_э\mathbf{L}_{эa}}{4\pi\varepsilon_0 L_{эa}^3}, \tag{4.94}$$

где $L_{эa}$ — расстояние точки a от электрода $Э$ или для большей определенности от некоторой произвольно взятой его («средней») точки $Э$. В этом случае не заметно влияние индуцированных зарядов, а также влияние формы и размеров электрода $Э$, так как согласно (4.81) величина $e_э$ не зависит от них.

Допуская неточное определение поля вблизи электрода, можно мысленно как угодно уменьшать его и, в частности, представить его поверхность $S_э$ стянутой к точке $Э$. Таким образом, вместо объемного электрода с поверхностным (или иным) зарядом $e_э$ получим точечный электрод с точечным зарядом такой же величины. Поле точечного электрода в отличие от поля заменяемого им объемного электрода определяется формулами

(4.94) во всем пространстве. Точечный электрод удобен при теоретических расчетах, но имеет, как и точечный заряд, только формальный смысл, так как фактически создать в земле поле с помощью точечного электрода нельзя. При неограниченном умалении электрода получаем $R_э \to \infty$ и, следовательно, чтобы получить ток заданной силы I в цепи, содержащей точечный электрод, понадобилось бы стороннее напряжение $\mathcal{E}^{стр} \to \infty$.

Согласно (4.94) и (4.81) поле, создаваемое зарядом точечного электрода, определяется формулами

$$U^э(a) = \frac{\rho I}{4\pi}\frac{1}{L_{эa}}, \quad \mathbf{E}^э(a) = \frac{\rho I}{4\pi}\frac{\mathbf{L}_{эa}}{L^3_{эa}}, \tag{4.95}$$

В случае точечного электрода в неограниченной однородной среде эти формулы определяют все (фактически действующее) поле в любой точке пространства.

В случае совокупности точечных электродов $Э_q$, находящихся в точках q, вместо (4.95) имеем

$$U^э(a) = \frac{1}{4\pi}\sum\frac{\rho(q)\,I_q}{L_{qa}}, \quad \mathbf{E}^э(a) = \frac{1}{4\pi}\sum\frac{\rho(q)\,I_q}{L^3_{qa}}\mathbf{L}_{qa}, \tag{4.95'}$$

где $\rho(q)$ — значения ρ в точках q; I_q — эмиссии электродов.

Обычно эмиссии I_q и значения $\rho(q)$ являются заданными и поле $\mathbf{E}^э$, определяемое формулами (4.95'), можно считать первичной частью поля $\mathbf{E}$, выражаемого формулами (4.86), (4.86').

Для поля $\mathbf{E}$ точечного электрода, очевидно, справедливо все сказанное в главе второй о поле точечного заряда. В частности, совокупность двух точечных электродов с эмиссиями $I_2 = I$ и $I_1 = -I$ при малом расстоянии L_{12} между ними образует диполь с моментом

$$\mathbf{p} = \varepsilon_0 \rho I \mathbf{L}_{12}, \tag{4.96}$$

где ρ — удельное сопротивление среды, в которой находится диполь.

Поле $\mathbf{E}$, создаваемое электродным диполем в неограниченной однородной среде, определяется формулами, полученными в главе второй для поля диполя, с подстановкой выражения (4.96) для момента $\mathbf{p}$.

Из точечных электродов могут быть составлены квадруполи и мультиполи более высоких порядков.

Аналогично точечным электродам можно представить себе другие необъемные электроды: линейные или поверхностные (которым соответствуют реальные электроды очень вытянутой или сплюснутой формы), а также совокупности таких электродов, образующие линейные диполи и двойные слои.

Линейные и поверхностные электроды обычно не являются ни эквипотенциальными, ни эквиэмиссионными. Но для простоты расчета полей иногда считают их эквипотенциальными или экви-

эмиссионными. Расчет поля эквиэмиссионного электрода сводится к суммированию полей его элементов, рассматриваемых как точечные электроды с элементарными эмиссиями.

§ 7. ПРЯМАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ СТАЦИОНАРНОГО ПОЛЯ

Источники постоянного поля в проводящей среде не могут быть заданы произвольно и не могут считаться известными при расчете этого поля, так как плотности зарядов $e_{\gamma E}$ согласно (4.50) зависят от определяемого поля. Поэтому фактически вместо уравнений (4.47) применяют уравнения (4.33). Входящие в их состав функции γ и $\mathbf{E}^{стр}$ (или э. д. с.) могут быть заданы произвольно. Уравнения (4.33) должны быть дополнены[1] уравнениями для поля $\mathbf{E}$:

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}=0,\quad \operatorname{Rot}\mathbf{E}=0,\quad \oint_l(\mathbf{E}\,d\mathbf{l})=0. \tag{4.97}$$

I. **Система уравнений.** Согласно $(4.97)_1$ и $(4.17)_1$ имеем для стационарного электрического поля систему дифференциальных уравнений:

I. $\operatorname{rot}\mathbf{E}=0$, II. $\operatorname{div}\mathbf{j}=0$,

где $\mathbf{j}=\gamma(\mathbf{E}+\mathbf{E}^{стр})$ (4.98)

— уравнение связи.

Подставляя в $(4.98)_3$ решение $\mathbf{E}=-\nabla U$ уравнения $(4.98)_1$, получаем для $\mathbf{j}$ выражение

$$\mathbf{j}=-\gamma(\nabla U-\mathbf{E}^{стр}), \tag{4.98'}$$

подстановка которого в $(4.98)_2$ приводит к уравнению для потенциала U стационарного поля:

$$\operatorname{div}(\gamma\nabla U)=\operatorname{div}(\gamma\mathbf{E}^{стр}),\quad \text{т. е. } \nabla^2U+\frac{(\nabla\gamma\nabla U)}{\gamma}=\frac{\operatorname{div}(\gamma\mathbf{E}^{стр})}{\gamma}. \tag{4.99}$$

Найдя функцию U как решение этого уравнения, определяем поле $\mathbf{E}=-\nabla U$ и по заданным функциям γ и $\mathbf{E}^{стр}$ — также поле $\mathbf{j}=\gamma(\mathbf{E}+\mathbf{E}^{стр})$.

Прямая задача теории стационарного электрического поля состоит в определении полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{j}$ по заданным функциям γ и $\mathbf{E}^{стр}$. Вместо поля $\mathbf{E}^{стр}$ бывает известна э. д. с. или сила тока в цепи.

Условия прямой задачи применительно к полю в земле в соответствии с изложенным в § 6 настоящей главы формулируются

---

[1] Поля $\gamma\mathbf{E}$ и $\mathbf{j}$ в отличие от поля $\mathbf{E}$ не являются безвихревыми:

$$\operatorname{rot}(\gamma\mathbf{E})=-[\mathbf{E}\nabla\gamma],\quad \operatorname{rot}\mathbf{j}=-[\mathbf{E}\nabla\gamma]+\operatorname{rot}(\gamma\mathbf{E}^{стр}). \tag{4.97'}$$

Во внешней части цепи:

$$\operatorname{rot}\mathbf{j}=-[\mathbf{E}\nabla\gamma],\quad \operatorname{Rot}\mathbf{j}=[\mathbf{n}\tau](\gamma_2-\gamma_1)E_\tau. \tag{4.97''}$$

Согласно (4.17) постоянное поле вектора $\mathbf{j}$ аналогично полю $\mathbf{B}$, является чисто вихревым.

в следующем виде. В пространстве, заполненном средой, электропроводность которой определена некоторой функцией $\gamma(a)$, заданы (питающие) электроды или сторонние силы (поле $\mathbf{E}^{стр}$, контактные э. д. с.). Питающие линии (и все, что в них включено) исключаются из рассмотрения. Точечный электрод задается его эмиссией и положением (координатами), а эквипотенциальный — его эмиссией, формой, размерами и расположением. В случае неэквипотенциального электрода задаются еще некоторые данные об электропроводности тела электрода и о способе его питания током.

Система (4.98) и эквивалентное ей уравнение (4.99) не содержат ε, и, следовательно, ими определяются поле $\mathbf{E}$ и его потенциал в проводящей среде независимо от ее проницаемости. При известном фактическом распределении ε в проводящей среде можно было бы по найденному полю $\mathbf{E}$ рассчитать его свободные и связанные источники, пользуясь формулами § 3 третьей главы. Не зная функции ε, можно в принципе по полю $\mathbf{E}$ определить полные заряды и их виды $e_{\gamma стр}$ и $e_{\gamma E}$ по формулам § 4 и 5 этой главы. Более того, при соответствующих условиях можно, не зная поля $\mathbf{E}$, определить заряды, его создающие, пользуясь соответствующими интегральными уравнениями § 4 и 6.

II. **Условия единственности.** В соответствии с изложенным в § 7 и 8 главы первой расчет стационарного электрического поля в какой-либо области V, ограниченной поверхностью $S[V]$, сводится к нахождению функции U, удовлетворяющей уравнению (4.99) [с подстановкой заданных функций γ и $\mathbf{E}^{стр}$] в области V и дополняющим условиям, достаточным для обеспечения единственности его решения.

Формулировку теоремы единственности для уравнения (4.99), указывающей, какие условия для этого достаточны, можно получить, исходя из теоремы единственности, выведенной в § 8 главы первой для уравнения $(1.96)_1$. Переход к рассматриваемому здесь уравнению (4.99) совершается подстановками:

в уравнение $(1.96)_1$ и в дальнейшем

$$\Lambda = \gamma, \quad \omega^v = -\operatorname{div}(\gamma \mathbf{E}^{стр}); \tag{4.100}$$

в краевое условие III типа согласно (4.22′)

$$Q = -I, \quad \Lambda = \gamma; \tag{4.100′}$$

в условия сопряжения (1.110′) согласно (4.37) и $(4.33)_2$

$$\zeta_{12} = \mathcal{E}_{12}^{кнт}, \quad \varphi_{12} = \operatorname{Div}(\gamma \mathbf{E}^{стр}), \quad \Lambda = \gamma. \tag{4.100″}$$

Особыми поверхностями, на которых задаются условия (1.110′) с подстановкой (4.100″), являются: поверхности раздела между средами с различными удельными сопротивлениями и поверхности, на которых заданы контактные э. д. с. В (4.100″) не предусмотрены поверхностные электроды и поверхности с поперечным сопротивлением или продольной проводимостью (см. § 5).

Особыми являются также поверхности объемных электродов, но полем внутри идеально проводящих электродов и электродов с заданным распределением эмиссии мы можем не интересоваться. Что же касается неэквипотенциальных объемных электродов, на которых не заданы распределения эмиссий, то их поверхности следует рассматривать как поверхности раздела, а собственно электродами считать их точки или идеально проводящие части, к которым подводится питание.

Особыми точками q_{oc} и линиями l_{oc} являются точечные и линейные электроды и электродные диполи.

Для внешней части цепи тока $\mathbf{E}^{стр}=0$, $\mathbf{j}=\gamma\mathbf{E}$ и, следовательно,

$$\operatorname{div}(\gamma\mathbf{E})=0, \quad \text{т. е. } \operatorname{div}\mathbf{E}=-\frac{1}{\gamma}(\mathbf{E}\operatorname{grad}\gamma) \tag{4.101}$$

или

$$(\nabla(\gamma\nabla U))=0, \quad \text{т. е. } \nabla^2 U=-\frac{1}{\gamma}(\nabla U\nabla\gamma). \tag{4.101'}$$

Поэтому поле в области V во внешней части цепи определяется только функцией $\gamma(a)$ и дополняющими условиями. Если в этой области среда однородна, то в ней

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}=0, \ \operatorname{div}\mathbf{E}=0, \ \nabla^2 U=0. \tag{4.101''}$$

III. **Замечания.** Дополним приведенные в разд. II § 8 первой главы замечания к теореме единственности уравнения $(1.96)_1$, частным видом которого является уравнение (4.101').

1. Если область V, в которой нет электродов и стороннего поля, отделена от остальной части пространства идеально проводящей стенкой (экраном с бесконечно большой продольной проводимостью), то в ней $\mathbf{E}=0$ (см. замечание 1 в § 6 главы третьей). Если идеальный проводник простирается до бесконечности (экран «зазем лен»), то на нем и, следовательно, также в области V $U=0$. Это остается справедливым и в том случае, когда область V незамкнутая, и идеально проводящая стенка продолжается до бесконечности.

2. Так как внутри идеальных проводников поле $\mathbf{E}=0$, то они не включаются в область V, в которой определяется поле; их поверхности служат участками границы $S[V]$ этой области. Если идеальный проводник является электродом, то на его поверхности обычно задается краевое условие (III типа):

$$\int_{S_э}\gamma\frac{\partial U}{\partial n}dS=-I_э, \quad \frac{\partial U}{\partial t}=0, \tag{4.102}$$

где n — нормаль, направленная из электрода наружу.

Вместо эмиссии $I_э$ может быть известно напряжение, включенное между электродом и бесконечностью. В этом случае на поверхности электрода задается краевое условие (I типа) $U=U_э$

Если идеальный проводник не является электродом, то на его поверхности задается условие (III типа):

$$\oint_S \gamma \frac{\partial U}{\partial n} dS = 0, \qquad \frac{\partial U}{\partial t} = 0. \tag{4.102'}$$

Это, в частности, справедливо для идеально проводящих измерительных электродов, не потребляющих тока (когда в измерительной линии сила тока равна нулю).

3. На фиксированных, поперечных току границах S_1 и S_2 участка C_{12} цепи тока могут быть заданы:

либо условия III типа

$$\int_{S_1} \gamma \frac{\partial U}{\partial n} dS = -I, \quad \int_{S_2} \gamma \frac{\partial U}{\partial n} dS = I, \quad \frac{\partial U}{\partial t} = 0, \tag{4.103}$$

где I — сила тока в цепи, а n — нормаль, направленная по току от S_1 к S_2;

либо условия I типа $U=U_1$ на S_1, $U=U_2$ на S_2, которые можно заменить заданием разности потенциалов $U_1-U_2=\mathscr{E}_{12}$ между сечениями S_1 и S_2, поскольку нас интересует не U, а $\nabla U=-\mathbf{E}$.

4. В проводящей среде, у поверхности непроводника (у поверхности непроводящего включения, у боковой поверхности участка цепи тока, у поверхности раздела земля — воздух) согласно $(4.68)_2$, является заданным краевое условие II типа: $\partial U/\partial n=0$.

5. Если электроды и нарушения однородности среды находятся в области ϑ, ограниченной со всех сторон, то в условии регулярности на бесконечности (2.47) надо подставить вместо массы m_ϑ величину $\frac{\rho}{4\pi}\Sigma I_\vartheta$, где ρ — удельное сопротивление среды вне области ϑ.

Если на бесконечности среда радиально однородна, т. е. если $\partial\gamma/\partial R=0$ при $R\to\infty$, где R — радиальная координата сферической системы R, θ, φ с центром в некоторой точке o области ϑ, то вместо массы m_ϑ следует подставить величину $\frac{1}{4\pi\gamma_{ср}}\Sigma I_\vartheta$, где

$$\gamma_{ср}=\frac{1}{4\pi R^2}\oint_S \gamma\, dS=\frac{1}{4\pi}\oint_S \gamma\, d\omega=\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\gamma(\theta,\varphi)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi \tag{4.104}$$

— удельная электропроводность среды, усредненная по сферической поверхности S достаточно большого радиуса R; $d\omega=\sin\theta d\theta d\varphi$ — угол видимости элемента dS этой поверхности из точки o.

6. Замечания 5, 6 и 8 в § 6 главы третьей справедливы также для стационарного электрического поля с заменой проницаемости среды ее электропроводностью, проводников идеальными провод-

никами, зарядов эмиссиями и уравнения $(3.31)_1$ уравнением (4.99).

7. На особой поверхности S согласно (4.100″) функция U должна удовлетворять двум условиям сопряжения

$$U^{(2)} - U^{(1)} = \mathscr{E}_{12}^{\text{конт}}, \quad \gamma_2 \frac{\partial U^{(2)}}{\partial n} - \gamma_1 \frac{\partial U^{(1)}}{\partial n} = \operatorname{Div}(\gamma \mathbf{E}^{\text{стр}}), \tag{4.105}$$

в которых предусмотрено, что в общем случае эта поверхность может быть поверхностью разрыва функций γ и $\gamma\mathbf{E}^{\text{стр}}$ и на ней могут действовать контактные э. д. с. Если S — поверхность раздела во внешней части цепи тока и, следовательно, на ней $\operatorname{Div}(\gamma\mathbf{E}^{\text{стр}})=0$, $\mathscr{E}_{12}^{\text{конт}}=0$, то эти условия принимают более простой вид

$$U^{(2)}=U^{(1)}, \quad \gamma_2 \frac{\partial U^{(2)}}{\partial n} = \gamma_1 \frac{\partial U^{(1)}}{\partial n}, \tag{4.105′}$$

т. е. они сводятся к требованию непрерывности функции U и произведения ее нормальной производной $\partial U/\partial n$ на удельную электропроводность среды.

8. На экранирующей поверхности S должны выполняться условия (4.77)—(4.78′).

9. Пусть V — область пространства, занятая участком внешней части цепи, заключенным между двумя ее фиксированными поперечными току сечениями S_1 и S_2, которые совпадают с границами соседних идеально проводящих участков цепи. Граница $S[V]$ области V состоит из боковой поверхности отрезка токового кольца и из его сечений S_1 и S_2. Согласно сказанному в разд. II и в замечаниях 3 и 4 поле во всех точках области в этом случае полностью определяется заданием формы, размеров и удельного сопротивления (в общем случае как функции точки) участка C_{12}, а также силы тока I в цепи или напряжения $\mathscr{E}_{12}$ на участке C_{12}. Из этого следует, что при всяких изменениях на других участках цепи и вне ее не меняются поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{j}$ на участке C_{12}, если не меняется условие, заданное на S_1 и S_2, т. е. сила тока I или напряжение $\mathscr{E}_{12}$. Если же значение задаваемой величины I или $\mathscr{E}_{12}$ меняется, то (согласно замечанию 12, § 8 главы первой) пропорционально меняются абсолютные значения (но не направления) векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{j}$ во всех точках этого участка и, следовательно, также значение той из величин $\mathscr{E}_{12}$ и I, которая не является заданной.

Отсюда следуют три вывода:

а) источники поля $\mathbf{E}$, действующего на участке C_{12}, не могут находиться вне него;

б) напряжение $\mathscr{E}_{12}=U_1-U_2$ на участке C_{12} должно быть пропорционально силе тока I, т. е. $\mathscr{E}_{12}=R_{12}I$, где множитель пропорциональности R_{12} определяется формулой (4.25);

в) изменение величины $\mathscr{E}_{12}$ или I, задаваемой в качестве краевого условия, не влияет на направления векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{j}$ в этой области.

Эти выводы справедливы также для всей внешней части цепи тока, для ее пространственной части и для всего токового кольца.

§ 8. ДОПОЛНЕНИЯ К ЧЕТВЕРТОЙ ГЛАВЕ

I. **Нарушения однородности среды, не искажающие поля.** Представим себе, что среда в области V, о которой шла речь выше (замечание 9 § 7), однородна, т. е. в этой области всюду $\nabla\gamma=0$. В этом случае потенциал U в области V удовлетворяет уравнению Лапласа, и поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{j}$ определяются в ней значением одной из величин I и $\mathscr{E}_{12}$. Если нарушить однородность среды в области V, то в общем случае потенциал не будет удовлетворять этому уравнению и поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{j}$ при том же значении заданной величины I или $\mathscr{E}_{12}$ станут иными.

Но при некоторых видах нарушений однородности среды в области V будем иметь в ней, как и при отсутствии нарушений однородности среды, потенциал, удовлетворяющий уравнению Лапласа. Это, очевидно, справедливо для нарушений, при которых среда остается однородной по направлению поля, так как при этом условии $(\mathbf{E}\operatorname{grad}\gamma)=0$, $(\nabla\gamma\nabla U)=0$, и следовательно, как и в однородной среде, вместо (4.101′) получаем (4.101″). Если, наоборот, однородность среды нарушается только по направлению поля, то $[\mathbf{E}\operatorname{grad}\gamma]=0$ и согласно $(4.97'')_1$ $\operatorname{rot}\mathbf{j}=0$ и, следовательно, $\mathbf{j}=-\operatorname{grad}U_j$, где U_j — некоторый скаляр, являющийся потенциалом поля вектора $\mathbf{j}$ в области V. Подставляя это выражение для $\mathbf{j}$ во II уравнение поля $\operatorname{div}\mathbf{j}=0$, получаем $\nabla^2U_j=0$. Таким образом, если среда в области V однородна по всем направлениям, поперечным полю, то в этой области имеем аналогично (4.101^{II})

$$\operatorname{rot}\mathbf{j}=0,\quad \operatorname{div}\mathbf{j}=0,\quad \nabla^2U_j=0.$$

Упрощение уравнения поля в области V, когда среда в ней однородна по направлению поля или по поверхностям, поперечным ему, объясняется отсутствием при этих условиях источников поля $\mathbf{E}$ или вихрей поля $\mathbf{j}$ в области V так же, как если бы в ней среда была однородна по всем направлениям. В связи с этим при сохранении однородности среды по направлению поля и постоянстве напряжения $\mathscr{E}_{12}$ между границами S_1 и S_2 области V изменения функции γ в этой области не должны вызывать в ней изменений поля $\mathbf{E}=-\nabla U$ и искажений поля $\mathbf{j}=\gamma\mathbf{E}$, а при сохранении однородности среды по поверхностям, поперечным полю, и постоянстве силы тока I через поверхности S_1 и S_2 изменения функции γ в области V не должны вызывать в ней изменений поля $\mathbf{j}$ и искажений поля $\mathbf{E}=\rho\mathbf{j}$. В обоих случаях несоблюдение постоянства величин $\mathscr{E}_{12}$ и I не приводит к искажениям полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{j}$.

В отношении разрывных нарушений однородности среды сказанное выше означает, что поверхности раздела, параллельные

полю, при постоянстве значения $\mathscr{E}_{12}$ не должны вызывать изменений поля $\mathbf{E}$, а поверхности раздела, нормальные к направлению поля, при постоянстве значения I не должны приводить к изменениям поля $\mathbf{j}$. Что же касается искажений полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{j}$, то они под влиянием поверхностей раздела, только параллельных полю или только нормальных к нему, не должны появиться нигде.

Однако в общем случае изменение среды в каком-либо месте сопряжено с нарушениями ее однородности по направлению поля и в поперечных ему направлениях. Действительно, допустим, например, что в области V была однородная среда с удельной электропроводностью γ_0 и что эта среда заменена средой с удельной электропроводностью γ внутри поперечного отрезка токовой трубки (определяемой по полю, существовавшему до замены среды), занимающего область V', которая является частью области V и ограничивается боковой поверхностью S'_6 и основаниями (поперечными сечениями трубки) S'_1 и S'_2. В этом случае получаются одновременно параллельная полю поверхность раздела S'_6 и поперечные ему поверхности раздела S'_1 и S'_2. Поэтому возникают изменения полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{j}$ (и их искажения).

Но в двух случаях это осложнение отпадает: когда отрезок токовой трубки взят на всем протяжении автономного участка C_{12} или когда он является отрезком всего токового кольца.

Если в первом из этих случаев остается постоянным напряжение $\mathscr{E}_{12}$, а во втором — сила тока I, то краевым условиям и условиям сопряжения мы удовлетворим, допустив, что во всей области не меняется поле $\mathbf{E}$ в первом случае и поле $\mathbf{j}$ — во втором. В более общем случае могут меняться обе величины — $\mathscr{E}_{12}$ и I, но только одну из них можно задать произвольно, так как ею определяются поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{j}$ на заданном участке C_{12} и, следовательно, также вторая из этих величин. Иначе говоря, отношение $\mathscr{E}_{12}/I$ не является произвольным; оно представляет собой сопротивление R_{12} участка цепи, и его изменение определяется изменением функции γ в пределах этого участка. Его можно рассматривать как сопротивление параллельного соединения в первом случае и как сопротивление последовательного соединения — во втором.

Очевидно, что все сказанное здесь будет, в частности, справедливо, если в качестве участка C_{12} возьмем всю пространственную часть цепи тока, заключенную между двумя идеально проводящими или точечными электродами, или же (в случае уединенного электрода) между одним таким электродом и бесконечно удаленной поверхностью.

Сказанное также справедливо, когда размеры поперечного сечения цепи неограничены и участок C_{12} представляет собой поперечный полю слой, замкнутый или продолжающийся до бесконечности.

Представим себе область V в виде тонкого слоя. Нетрудно убедиться, что если $\gamma<\gamma_0$ и слой параллелен полю или же $\gamma>$

$>\gamma_0$ и слой нормален полю, то поле искажается только у краев слоя. Экранирующие поверхности (о которых шла речь в § 5) при произвольном их расположении могут оказать на распределение поля сильное влияние. Но экранирующая поверхность (включая ее края) не влияет на поле, если она имеет поперечное сопротивление и параллельна первичному полю или она имеет продольную проводимость и нормальна полю. Это справедливо даже при $T^{\rho}=\infty$ и $S^{\nu}=\infty$.

Предельно тонкую нить с повышенным удельным сопротивлением можно всегда рассматривать как предельно узкую полоску поверхности с поперечным сопротивлением, параллельной полю. Следовательно, даже при бесконечно большом удельном сопротивлении нити и при произвольном ее расположении она не может заметно влиять на распределение поля.

II. **Аналогия со статическим полем.** Ниже показана аналогия между стационарным электрическим полем, создаваемым с помощью идеально проводящих электродов[1] при $\mathbf{E}^{\text{стр}}=0$ (левая колонка), и электростатическим полем, создаваемым в диэлектрике зарядами проводников при отсутствии в нем (вне проводников) свободных зарядов (правая колонка).

Источники поля находятся на поверхностях электродов и в местах нарушения однородности среды, где $(\mathbf{E}\nabla\gamma)\neq 0$	Источники поля находятся на поверхностях проводников и в местах нарушения однородности среды, где $(\mathbf{E}\nabla\varepsilon)\neq 0$
В идеальном проводнике поле $\mathbf{E}=0$	В проводнике поле $\mathbf{E}=0$
Плотность тока $\mathbf{j}=\gamma\mathbf{E}$	Вектор индукции $\mathbf{D}=\varepsilon_a\mathbf{E}$
$\operatorname{div}\mathbf{j}=0$, $(\nabla(\gamma\nabla U))=0$	$\operatorname{div}\mathbf{D}=0$, $(\nabla(\varepsilon\nabla U))=0$
Эмиссия электрода $I_{\text{э}}=\int\limits_{S_{\text{э}}}(\mathbf{j}d\mathbf{S})$	Свободный заряд проводника $e_{\text{свб}}=\int\limits_{S}(\mathbf{D}d\mathbf{S})$

Эта аналогия позволяет переходить от формул, справедливость которых доказана для одного из этих полей, к соответствующим формулам для другого поля. В частности, это дает возможность от сказанного в § 7 главы третьей о взаимном влиянии проводников перейти к рассмотрению взаимного влияния электродов.

Допустим, что в пространстве, заполненном средой, в общем случае неоднородной, имеется n идеально проводящих электродов $\mathcal{Э}_k$ с эмиссиями I_k $(k=1, 2, \ldots, n)$. Некоторые из этих эмиссий могут быть равны нулю; соответствующие электроды фактически являются обыкновенными идеальными проводниками.

Пусть U_k — потенциалы электродов при их эмиссиях I_k и при заданной в пространстве функции γ. Каждой совокупности значений I_k соответствует определенная совокупность значений U_k. Представим себе, что U'_k, I'_k и U''_k, I''_k — две возможные совокупности значений U_k и I_k. В соответствии с (3.57)

[1] Линии, соединяющие электроды и содержащие сторонние напряжения, мысленно исключаются из рассматриваемого пространства.

$$\Sigma U'_k I''_k = \Sigma U''_k I'_k \quad (k=1, 2, \ldots, n). \tag{4.106}$$

III. **Принцип взаимности питающих и измерительных электродов.** Пусть $I'_1 = I'_2 = \ldots I'_m = 0$, $I''_{m+1} = I''_{m+2} = \ldots = I''_n = 0$. Этот случай имеем, например, когда речь идет о двух вариантах применения электродов:

1) электроды $1, 2, \ldots, m$ являются измерительными, а электроды $m+1, m+2, \ldots, n$ — токовыми;

2) электроды $1, 2, \ldots, m$ являются токовыми, а электроды $m+1, m+2, \ldots, n$ — измерительными. Для этого случая из (4.106) получаем соотношение

$$\sum_{k=1}^{k=m} U'_k I''_k = \sum_{k=m+1}^{k=n} U''_k I'_k, \tag{4.107}$$

являющееся выражением принципа взаимности питающих и измерительных (идеально проводящих) электродов.

Пример. Имеем три пары электродов: AB, MN и PQ. Питая электроды AB током I_{AB}, получаем разности потенциалов $U_M - U_N$ и $U_P - U_Q$, а питая электроды MN и PQ токами I_{MN} и I_{PQ} — разность потенциалов $U_A - U_B$. Направления токов (в земле) соответствуют порядку индексов при I. Применим вместо $k=1 \div 6$ индексы A, B, M, N, P, Q (соответственно). Положив $I'_A = -I'_B = I_{AB}$, $I'_M = I'_N = I'_P = I'_Q = I''_A = I''_B = 0$, $I''_M = -I''_N = I_{MN}$, $I''_P = -I''_Q = I_{PQ}$ и отбросив штрихи в обозначениях U'_A, U'_B, U''_M, U''_N, U''_P, U''_Q, получим из (4.107)

$$(U_A - U_B) I_{AB} = (U_M - U_N) I_{MN} + (U_P - U_Q) I_{PQ}. \tag{4.107'}$$

При $I_{PQ} = cI_{MN}$ имеем

$$(U_A - U_B) I_{MN}^{-1} = (U_M - U_N + cU_P - cU_Q) I_{AB}^{-1}, \tag{4.107''}$$

а при $c=0$, т. е. в случае двух пар электродов AB и MN,

$$(U_A - U_B) I_{MN}^{-1} = (U_M - U_N) I_{AB}^{-1}. \tag{4.107'''}$$

Формула (4.107) в отличие от (4.106) имеет смысл не только для объемных, но также для необъемных электродов. Справедливость формулы (4.107) для случая точечных электродов в неограниченной однородной среде легко доказать, исходя из выражения $(4.94)_1$ для потенциала поля точечного электрода в такой среде.

IV. **Сопротивление и емкость электрода.** Допустим теперь, что среда, в которой находятся идеально проводящие электроды, всюду однородна. В этом случае в качестве статического аналога стационарного поля можно взять поле, создаваемое в вакууме зарядами, находящимися на проводниках. При этом свободному заряду проводника (совпадающему с его полным зарядом) соответствует в стационарном поле заряд электрода $e_э = \varepsilon_0 \rho I_э$.

Из этого следует, что для стационарного поля, создаваемого идеально проводящими электродами в неограниченной однородной

среде, справедливы равенства (3.57), (3.58), в которых надо считать $e_k=\varepsilon_0\rho I_k$.

В частности, для случая уединенного электрода по аналогии с (3.59) имеем

$$C_э=\frac{e_э}{U_э}=\varepsilon_0\rho\frac{I_э}{U_э}. \tag{4.108}$$

Сравнивая это с $(4.90)_1$, получаем соотношение

$$R_эC_э=\rho\varepsilon_0 \tag{4.108'}$$

между сопротивлением уединенного электрода $R_э$ и емкостью $C_э$ такого же уединенного проводника в вакууме. Это соотношение позволяет воспользоваться результатами расчетов емкостей проводников различной формы для определения сопротивлений электродов такой же формы. В более общем случае группы идеально проводящих электродов (в неограниченной однородной среде) можно получить формулы, полезные при расчете их сопротивления (в группе), исходя из равенств (3.57), (3.58).

V. **О влиянии проницаемости.** Возможность определения стационарного поля уравнениями (4.101)—(4.101″), не содержащими ε, может показаться странной, так как изменение ε вызывает изменение связанных источников поля **E**. Но посмотрим, как зависят источники поля от ε, γ, **E** и $\mathbf{E}^{стр}$. Согласно (4.49)—(4.51), $\delta_{плв}=-\varepsilon_0\rho[(\mathbf{E}\nabla\gamma)+\operatorname{div}(\gamma\mathbf{E}^{стр})]$. Следовательно, в соответствии с (3.33′) $\delta_{свб}=\varepsilon_0(\mathbf{E}\nabla\varepsilon)-\varepsilon_a\rho[(\mathbf{E}\nabla\gamma)+\operatorname{div}(\gamma\mathbf{E}^{стр})]$, $\delta_{свз}=-\varepsilon_0(\mathbf{E}\nabla\varepsilon)+(\varepsilon_a-\varepsilon_0)\rho[(\mathbf{E}\nabla\gamma)+\operatorname{div}(\gamma\mathbf{E}^{стр})]$.

Таким образом, $\delta_{плп}$ не зависит от проницаемости ε, а $\delta_{свб}$ и $\delta_{свз}$ зависят от нее. Из этого следует, что влияние проницаемости на $\delta_{свз}$ компенсируется ее влиянием на $\delta_{свб}$.

Перейдем к выражениям для плотностей поверхностных зарядов во внешней части цепи тока. Согласно (4.49)—(4.51) и (3.34′)

$$\sigma_{плн}=\varepsilon_0\frac{\gamma_1-\gamma_2}{\gamma_{ср}}E_n^{ср}\quad \sigma_{плн}=\frac{\sigma_{свб}}{\varepsilon_{ср}}+\varepsilon_0\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_{ср}}E_n^{ср},$$

следовательно,

$$\sigma_{свб}=\varepsilon_0\left[(\varepsilon_2-\varepsilon_1)+\frac{\varepsilon_{ср}}{\gamma_{ср}}(\gamma_1-\gamma_2)\right]E_n^{ср},$$

$$\sigma_{свз}=\varepsilon_0\left[(\varepsilon_1-\varepsilon_2)+\frac{1-\varepsilon_{ср}}{\gamma_{ср}}(\gamma_1-\gamma_2)\right]E_n^{ср}.$$

Подставляя сюда $(\gamma_1-\gamma_2)\rho_{ср}=(\rho_2-\rho_1)\gamma_{ср}$, получаем

$$\sigma_{плн}=\varepsilon_0\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_{ср}}E_n^{ср},\quad \sigma_{свб}=\varepsilon_0\left[(\varepsilon_2-\varepsilon_1)+\frac{\varepsilon_{ср}}{\rho_{ср}}(\rho_2-\rho_1)\right]E_n^{ср},$$

$$\sigma_{свз}=\varepsilon_0\left[(\varepsilon_1-\varepsilon_2)+\frac{1-\varepsilon_{ср}}{\rho_{ср}}(\rho_2-\rho_1)\right]E_n^{ср}. \tag{4.109}$$

Применим полученные формулы к поверхностям S_A и S_B идеально проводящих электродов A и B в цепи тока с двумя питающими электродами. Полагая для S_A $\varepsilon_1=1$, $\varepsilon_2=\varepsilon$, $\rho_1=0$, $\rho_2=\rho$, $E^{(1)}{}_n=0$, $E^{(2)}{}_n=E=\rho j$, получаем $\sigma_{плн}=$

$=\varepsilon_0 E=\varepsilon_0\rho j$, $\sigma_{свб}=\varepsilon_a\rho j$, $\sigma_{свз}=(\varepsilon_0-\varepsilon_a)\rho j$. То же, но со знаком «—» получаем для S_B. При $\varepsilon=1$ $\sigma_{пли}=\sigma_{свб}=\pm\varepsilon_0\rho j$, $\sigma_{свз}=0$. Следовательно, при изменении проницаемости среды от 1 до ε плотности $\sigma_{свб}$ и $\sigma_{свз}$ получают приращения $\mp(\varepsilon_0-\varepsilon_a)\rho j$ и $\pm(\varepsilon_0-\varepsilon_a)\rho j$, а $\sigma_{пли}$ не меняется. При этом постоянство сопротивления и э. д. с. в цепи предотвращают изменение силы тока I в ней и, следовательно, полей j и $E=\rho j$ в земле, а постоянство поля E, обеспечивает неизменность полных плотностей зарядов электродов A и B. Необходимые же для этого приращения их свободных зарядов получаются за счет сторонней энергии, которая должна быть затрачена для этого во внутренней части цепи. Аналогичное происходит в конденсаторе при увеличении проницаемости среды, находящейся между его обкладками. При постоянном напряжении на нем (на его обкладках) получаются приращения свободных зарядов и такие же, но с обратными знаками, приращения связанных зарядов.

VI. **Об источниках стационарного электрического поля.** Стационарное электрическое поле определяется системой уравнений (4.98) или эквивалентным ей уравнением (4.99). Все эти уравнения не содержат величин, характеризующих в явном виде распределение электрических зарядов в пространстве. Для расчета стационарного поля E, j в области V достаточно знать функции $E^{стр}(q)$ и $\gamma(q)$ и условия на $S[V]$. При этом можно полностью отвлечься от существования зарядов, являющихся источниками изучаемого поля E. В связи с этим обычно при изучении стационарного поля этим зарядам, их распределению в пространстве и зависимости поля от них не уделяют внимания и часто совсем забывают об их существовании.

Аналогичное положение отмечается в отношении зависимых (зависящих от поля и среды) источников электростатического и магнитостатического полей; вместо этих источников задается проницаемость среды. Но в электростатике и в магнитостатике обычно в той или иной мере интересуются также полем в областях пространства, занятых свободными зарядами и магнитами. Поэтому хотя бы независимым источникам поля приходится уделять внимание.

Что же касается стационарного поля, то обычно поле E во внутренней части цепи не рассматривают, и вместо $E^{стр}$ задают напряжение $\mathscr{E}^{стр}$ (формально можно вместо $E^{стр}$ рассматривать сторонний ток $j^{стр}=\gamma_i E^{стр}$). Поэтому часто понятие о зарядах полностью исключают при рассмотрении стационарного поля (потом при переходе к переменному электромагнитному полю приходится опять вспоминать о зарядах в связи с соотношением $\operatorname{div} j=-\delta_{свб}$).

В настоящей книге, вопреки традиции, всем источникам стационарного и статического поля уделяется много внимания по следующим методологическим мотивам.

С познавательной точки зрения выпадение понятия о зарядах из поля зрения учащегося на интервале (стационарного поля) между изучением статического и переменного (электромагнитного) поля образует неуместный пробел. Опыт показал, что возникающие на этой почве недоразумения затрагивают не только учащихся.

Исключение из рассмотрения физической сути — порождения поля зарядами — было бы явным изъяном в настоящей книге, в которой теория различных полей рассматривается в тесной логической и физической взаимосвязи, в их последовательном развитии и составляет одну цельную дисциплину.

При изучении электрического тока в цепи, полностью пространственной и заключенной в земле, назревает необходимость интересоваться полем не только во внешней части цепи, но также в ее внутренней части, т. е. в области пространства, в которой действует стороннее поле, например фильтрационная э. д. с.

С усложнением задач теории разведочной геофизики все большее значение приобретает метод интегральных уравнений. Такие уравнения, позволяющие свести определение поля к расчету его возбудителей (зарядов, порождающих поле), отличаются особой наглядностью. Формально можно вместо зарядов (на поверхностях раздела) ввести фиктивные поверхностные источники поля j. Но это искусственное удаление от физической сути дела.

Опыт показал, что представление о распределении зарядов, создающих поле, очень полезно для понимания и развития электрических методов разведочной геофизики.

Глава пятая

Магнитное поле постоянного тока

§ 1. ТОК В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В магнитном поле[1] на элемент длины dl линейного тока I, содержащий точку q, действует сила $\mathbf{dF}$, определяемая законом Ампера:

$$\mathbf{dF}(q) = I[\mathbf{dl}\ \mathbf{B}], \tag{5.1}$$

где $\mathbf{dl}$ — вектор, направленный по току; $\mathbf{B}$ — вектор магнитной индукции в точке q.

Если l — контур тока с силой I, то на него согласно (5.1) действуют силы $\mathbf{dF}$, которые образуют главный вектор

$$\mathbf{F} = \oint_l \mathbf{dF} = I \oint_l [\mathbf{dl}\mathbf{B}] \tag{5.1'}$$

и главный момент (вращения) относительно какой-либо точки o:

$$\mathbf{M}_{вр} = \oint_l [\mathbf{L}_{oq}\mathbf{dF}] = I \oint_l [\mathbf{L}_{oq}[\mathbf{dl}\,\mathbf{B}]] = I \oint_l (\mathbf{L}_{oq}\mathbf{B})\,\mathbf{dl} - I \oint_l \mathbf{B}(\mathbf{L}_{oq}\mathbf{dl}). \tag{5.2}$$

I. **Токовый контур в однородном магнитном поле.** Рассмотрим действие, оказываемое на токовый контур однородным (в пределах области V, содержащей контур) полем $\mathbf{B}$. В этом случае

$$\mathbf{F} = -I\left[\mathbf{B}\oint_l \mathbf{dl}\right] = 0, \tag{5.1''}$$

так как здесь интеграл представляет собой сумму векторов $\mathbf{dl}$, образующих замкнутый многоугольник[2].

Что же касается вращающего момента $\mathbf{M}_{вр}$, то в случае однородного поля $\mathbf{B}$

$$\oint_{l\,[S]} \mathbf{B}(\mathbf{L}_{oq}\mathbf{dl}) = \mathbf{B}\oint_{l\,[S]} (\mathbf{L}_{oq}\mathbf{dl}) = \mathbf{B}\int_S (\mathrm{rot}\,\mathbf{L}_{oq}\,\mathbf{dS}) = 0,$$

[1] Имеется в виду поле $\mathbf{B}$, создаваемое намагниченными телами (как сказано в предыдущих главах), а также токами, о чем будет идти речь в следующих параграфах этой главы.

[2] Согласно $(1.41^1)_2$ $\oint_{l[S]} \mathbf{dl} = \int_S [\mathbf{dS}\nabla 1] = 0.$

так как согласно $(1.127'')$ $\operatorname{rot}\mathbf{L}_{oq}=0$. Таким образом, в соответствии с $(1.41')_2$ из (5.2) получаем

$$\mathbf{M}_{\text{вр}}=I\oint\limits_{l\,[S]}(\mathbf{L}_{oq}\mathbf{B})\,d\mathbf{l}=I\int\limits_{S}[d\mathbf{S}\overset{q}{\nabla}(\mathbf{L}_{oq}\mathbf{B})],\quad d\mathbf{S}=\mathbf{n}_I dS,$$

где n_I — нормаль к поверхности S, образующая с током I по контуру $l[S]$ правовинтовую систему. Но так как поле $\mathbf{B}$ однородно, то согласно $(1.127''')^q$ $(\mathbf{L}_{oq}\mathbf{B})=\mathbf{B}$, следовательно,

$$\mathbf{M}_{\text{вр}}=I\int\limits_{S}[d\mathbf{S}\,\mathbf{B}]=-I\left[\mathbf{B}\int\limits_{S}d\mathbf{S}\right]\quad\text{или}\quad\mathbf{M}_{\text{вр}}=[\mathbf{MB}],\tag{5.2'}$$

где

$$\mathbf{M}=I\int\limits_{S}d\mathbf{S}=I\int\limits_{S}\mathbf{n}_I dS.\tag{5.3}$$

В случае плоского контура

$$\mathbf{M}_{\text{вр}}=I(\mathbf{SB}),\quad\mathbf{M}=I\mathbf{S}=\mathbf{n}_I IS,\tag{5.4}$$

где S — площадь участка плоскости, ограничиваемая контуром. В этом случае вектор $\mathbf{M}_{\text{вр}}$ лежит в плоскости контура.

II. Магнитные моменты токов и магнитов[1]. Вектор $\mathbf{M}$ называют магнитным моментом тока[2]. Согласно (5.4) он образует с током правовинтовую систему. Контур тока $l[S]$ и опирающуюся на него поверхность S будем часто отмечать нижним индексом I. Поверхность S_I назовем поверхностью тока. На ней лицевую сторону выберем так, чтобы наблюдатель, смотрящий по направлению момента $\mathbf{M}$ (и нормали n_I), видел оборотную сторону поверхности S_I, а ток I — ориентированным по ходу часовой стрелки.

Согласно $(5.2')_2$ момент $\mathbf{M}_{\text{вр}}$ нормален к плоскости, в которой лежат векторы $\mathbf{M}$ и $\mathbf{B}$, и стремится повернуть контур так, чтобы уменьшить угол $(\mathbf{M}, \mathbf{B})$ между их направлениями. При $(\mathbf{M}, \mathbf{B})=0$, т. е. когда момент направлен по полю, $\mathbf{M}_{\text{вр}}=0$. Это положение равновесия поле стремится придать контуру. Вектор $\mathbf{M}_{\text{вр}}$ обращается в нуль также при $(\mathbf{M}, \mathbf{B})=\pi$. Но при этом равновесие контура является неустойчивым.

Сравнивая (5.4) с $(3.22'')_3$, видим, что в магнитном поле на контур l с током I действует такой же вращающий момент, какой действовал бы в этом же поле на однородный магнитный листок с плотностью дипольных моментов $\eta=I$ с положительной обкладкой, соответствующей лицевой стороне поверхности тока, и с краевой линией, совпадающей с контуром l. Таким образом, линейный ток I эквивалентен опирающемуся на его контур однородному магнитному листку с плотностью дипольных моментов

$$\eta=I.\tag{5.5}$$

---

[1] Имеется в виду любая намагниченность: $\mathbf{J}$, $\mathbf{J}^{\text{вр}}$ или $\mathbf{J}^0$.

[2] Согласно (5.3) единица магнитного момента тока равна 1 А·м^2.

Элементарный токовый контур (элементарных размеров) имеет дипольный магнитный момент

$$\mathbf{dM}=I\mathbf{dS}, \qquad (5.3')$$

где dS — площадка, ограничиваемая этим контуром. Элементарный токовый контур эквивалентен элементарному магнитному диполю, т. е. диполю с магнитным моментом элементарной величины.

Формула $(5.2')_2$ применима также к совокупности токов, причем вместо магнитного момента тока следует брать магнитный момент совокупности токов, равный сумме их магнитных моментов. Примером такой совокупности токов является соленоид (рис. 45,*б*). Если h — длина соленоида, S — площадь его витка и N — число витков, то его магнитный момент

$$M=hkSI=kVI, \qquad (5.6)$$

где $k=N/h$ — число витков на единицу длины соленоида.

Виткам соленоида соответствует $hk=N$ магнитных листков, которые согласно замечанию 7 § 2 главы третьей можно заменить дисками толщиной $h/N=1/k$. Совокупность этих дисков образует однородный цилиндрический магнит с моментом, направленным по его образующей (рис. 45,*в*). Сравнивая (5.6) с (3.23), видим, что соленоид эквивалентен такому же как он по форме и размерам цилиндру с однородной намагниченностью

$$J=kI \qquad (5.7)$$

по направлению образующей. На основаниях такого цилиндра находятся поверхностные магнитные массы с плотностью

$$\sigma=\pm J=\pm kI. \qquad (5.8)$$

Представим себе прямой цилиндр, на боковой поверхности которого имеется поверхностный ток по окружностям цилиндра с одинаковой плотностью i и с одинаковой ориентацией (по окружностям) во всех точках этой поверхности (рис. 45,*а*). Сила по-

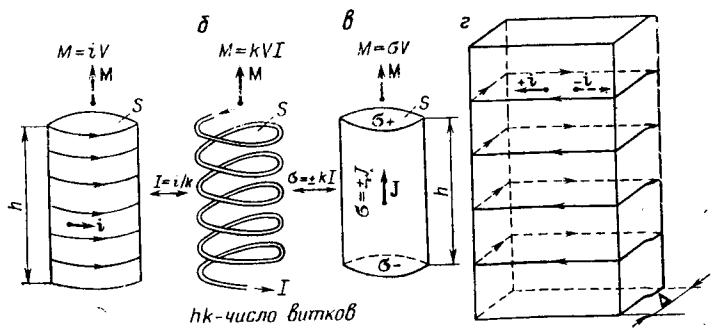


Рис. 45. Эквивалентность цилиндра (*в*), однородно намагниченного по направлению образующей, такому же по форме и размерам соленоиду (*б*) и поверхностному току (*а*) на такой же цилиндрической поверхности, по ее направляющей. Двойной поверхностный ток (*г*) эквивалентен продольно намагниченной поверхности

верхностного тока по цилиндрическому кольцу высотой dh, заключенному между двумя поперечными сечениями цилиндра, равна idh. Согласно (5.4) магнитный момент этого кольцевого тока равен $iSdh$, а весь поверхностный ток имеет магнитный момент

$$M=iSh=iV. \qquad (5.6')$$

Следовательно, этот поверхностный ток эквивалентен соленоиду, равномерно навитому на такой же цилиндр с плотностью намотки k и с силой тока

$$I=i/k. \qquad (5.8')$$

Учитывая сказанное выше о соленоиде и намагниченном цилиндре и сравнивая (5.7) с (5.8), мы видим, что описанный поверхностный ток по боковой поверхности цилиндра эквивалентен такому же цилиндру с однородной намагниченностью

$$J=i, \qquad (5.8'')$$

имеющему на основаниях магнитные массы плотностью $\sigma=\pm i$.

Разделим поверхность S, опирающуюся на токовый контур $l(S)$, на две части S_1 и S_2 при помощи линии L и заменим ток I по контуру $l[S]$ токами I_1 и I_2 такой же силы по замкнутым контурам $l[S_1]$ и $l[S_2]$, ограничивающим поверхности S_1 и S_2 и совпадающим по линии L, причем направим эти токи так, чтобы лицевые стороны S_1 и S_2 совпадали с лицевой стороной S. Очевидно, что $\int\limits_{S_1} \mathbf{dS}+\int\limits_{S_2} \mathbf{dS}=\int\limits_{S} \mathbf{dS}$, следовательно, согласно (5.3') магнитный момент совокупности токов I_1 и I_2 равен магнитному моменту тока I. Это вполне понятно, так как по линии L имеются два тока одинаковой силы и взаимно противоположных направлений, и, следовательно, силы, с которыми магнитное поле действует на эту линию, взаимно уравновешиваются. Разделив поверхность S на площадки dS и заменив ток I токами такой же силы по контурам $l[dS]$ этих площадок, получаем совокупность элементарных токов, заполняющих контур $l[S]$, причем момент каждого из этих токов определяется формулой (5.3'). Из сказанного выше следует, что совокупность этих элементарных токов I эквивалентна такому же току по контуру $l[S]$. Переходя к соленоиду от отдельного контура, убеждаемся, что совокупность заполняющих цилиндр элементарных токов эквивалентна току такой же силы по соленоиду, навитому на этот цилиндр, и рассмотренному выше поверхностному току соответствующей плотности i по боковой поверхности цилиндра.

Таким образом, намагниченный цилиндр эквивалентен заполняющей его совокупности элементарных токов. Это, очевидно, также справедливо для намагниченного тела любой формы.

III. **Дополнения к § 1.** 1. Придавая поперечому сечению цилиндра, о котором шла речь выше, вытянутую форму, получаем «продольно намагниченный» слой (рис. 45,*г*) и эквивалентную ему совокупность двух взаимно противоположных поверхностных

токов на его поверхностях по направлениям, нормальным намагничению слоя. Пусть Δ — толщина слоя, а $\mathbf{i}$ и $-\mathbf{i}$ — плотности поверхностных токов. Полагая $\Delta\to 0$ и $i\to\infty$, причем произведение $i\Delta$ остается без изменения, получаем двойной поверхностный ток и эквивалентную ему продольно намагниченную поверхность, на которой согласно (3.8″) $J_\tau=\infty$, а произведение $J_\tau\Delta$ имеет конечное значение.

2. Заменяя отрезок линейного тока I с длиной dl отрезком (такой же длины) элементарной токовой трубки с поперечным сечением dS и с плотностью тока $\mathbf{j}$, мы должны в (5.1) вместо $I\mathbf{dl}$ подставить $dI\mathbf{dl}=(\mathbf{j}\,d\mathbf{S})\mathbf{dl}=\mathbf{j}(d\mathbf{S}\,\mathbf{dl})=\mathbf{j}dV$. Таким образом, получаем для силы $\mathbf{dF}$, действующей на элемент объемного тока $\mathbf{j}dV$ в магнитном поле $\mathbf{B}$, выражение

$$\mathbf{dF}=[\mathbf{jB}]\,dV. \tag{5.9}$$

3. Подставляя в (5.9) выражение (4.2) для вектора $\mathbf{j}$ через линейную скорость $\mathbf{w}$ движения зарядов, получаем силу, действующую на заряд de, движущийся со скоростью $\mathbf{w}$ в магнитном поле $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{dF}=[\mathbf{wB}]\,de, \tag{5.9′}$$

Прибавляя силу $\mathbf{E}de$, с которой на заряд de действует электрическое поле, получаем лоренцеву силу $\mathbf{dF^*}=(\mathbf{E}+[\mathbf{w}\ \mathbf{B}])de$, действующую на заряд de, движущийся в электромагнитном поле. В частности, это выражение справедливо для зарядов, несомых средой, если она движется вместе с ними в электромагнитном поле со скоростью $\mathbf{w}$. Но отношение $\mathbf{dF^*}$ к de представляет собой силу, действующую на единицу заряда. Оно аналогично полю $\mathbf{E}$. Обозначим его $\mathbf{E^*}$. Таким образом, на заряды, несомые движущейся средой, действует эффективное электрическое поле

$$\mathbf{E^*}=\mathbf{E}+[\mathbf{w}\ \mathbf{B}]. \tag{5.9″}$$

Подставляя $\mathbf{E^*}$ вместо $\mathbf{E}$ в соотношение (4.32), получаем закон Ома для проводящей среды, движущейся в электромагнитном поле со скоростью $\mathbf{w}$:

$$\mathbf{j}=\gamma(\mathbf{E^*}+\mathbf{E^{стр}})=\gamma(\mathbf{E}+[\mathbf{w}\ \mathbf{B}]+\mathbf{E^{стр}}) \tag{5.9‴}$$

([17], с. 534). Здесь, в виде исключения из общего для настоящей книги правила идет речь о поле в движущейся среде.

§ 2. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА В ОТСУТСТВИИ МАГНИТНОЙ СРЕДЫ

Здесь и в следующих двух параграфах будем полагать, что всюду имеем $\mu=1$ и $\mathbf{J^0}=0$.

1. **Поле линейных, объемных и поверхностных токов.** Опыт показывает, что элемент $I\mathbf{dl}$ линейного тока I, содержащий точку q (рис. 46), создает в пространстве, в котором отсутствуют

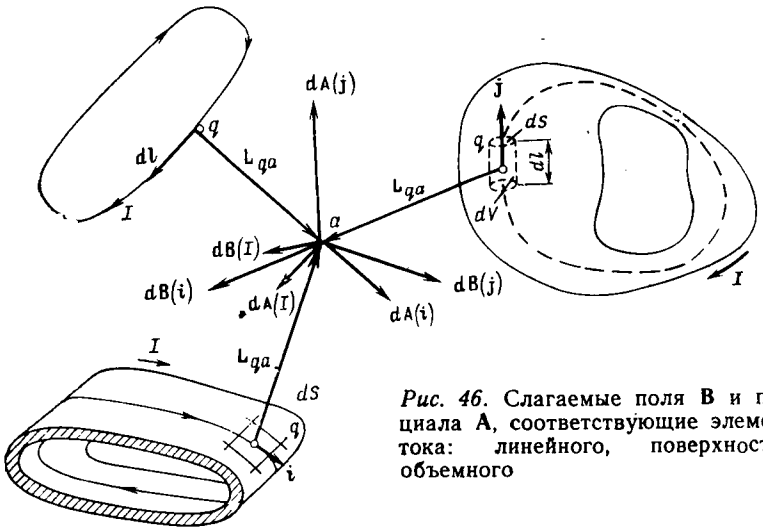


Рис. 46. Слагаемые поля **B** и потенциала **A**, соответствующие элементам тока: линейного, поверхностного, объемного

магнетики, магнитное поле[1], определяемое законом Био—Савара—Лапласа:

$$\mathbf{dB}(a) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{[\mathbf{dl}\, \mathbf{L}_{qa}]}{L^3_{qa}}, \tag{5.10}$$

где $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$.

Интегрируя равенство (5.10), по контуру l линейного тока, получаем для магнитного поля, создаваемого линейным током, выражение

$$\mathbf{B}(a) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_l \frac{[\mathbf{dl}\, \mathbf{L}_{qa}]}{L^3_{qa}}. \tag{5.11}$$

---

[1] Идет речь о поле $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ (при $\mu = 1$), действующем на токи и магнитные массы, согласно сказанному в § 1 настоящей главы и в главе второй.

Поле **B** можно определить, исходя из закона Ампера (5.1). Пусть **dF** — сила, приложенная к элементу $I\mathbf{dl}$ линейного тока I, а **n** — единичная нормаль к плоскости (взаимно перпендикулярных) векторов **dF** и **dl**, образующая правовинтовую систему **dF**, **dl**, **n**. Тогда согласно (5.1)

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{n} dF_{\max}}{I dl}, \tag{5.10'}$$

где $dF_{\max}$ — максимальное из значений, принимаемых силой dF при вращении элемента $I\mathbf{dl}$ около направления силы **dF**, а нормаль n определяется при этом значении dF.

Из (5.2') можно получить другое определение поля **B**:

$$\mathbf{B} = \frac{\boldsymbol{\nu}}{dM} dM_{\text{вр max}}, \tag{5.10''}$$

где $\boldsymbol{\nu}$ — единичный вектор по направлению магнитного момента **dM** элементарного токового контура при устойчивом равновесии этого контура, а $\mathbf{dM}_{\text{вр max}}$ — вращающий момент, действующий на контур, когда момент **dM** перпендикулярен к вектору $\boldsymbol{\nu}$.

Заменяя элемент $I\mathbf{dl}$ линейного тока отрезком такой же длины dl элементарной токовой трубки с сечением dS и с силой тока $dI=(\mathbf{j}\ d\mathbf{S})$, где $\mathbf{j}$ — плотность тока в элементе объема $dV=(\mathbf{dl}\ d\mathbf{S})$ этого отрезка токовой трубки, имеем $dI\,[\mathbf{dl}\ \mathbf{L}_{qa}]=(\mathbf{j}\ d\mathbf{S})\,[\mathbf{dl}\ \mathbf{L}_{qa}]=(\mathbf{dl}\ d\mathbf{S})\,[\mathbf{j}\ \mathbf{L}_{qa}]=[\mathbf{j}\ \mathbf{L}_{qa}]\,dV$. Подставляя это выражение в $(5.10)_1$ и интегрируя по области V, занимаемой токовым кольцом, получаем формулы для полей, создаваемых соответственно элементом объемного тока и всем токовым кольцом:

$$d\mathbf{B}(a)=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{[\mathbf{j}\,\mathbf{L}_{qa}]}{L^3_{qa}}dV,\quad \mathbf{B}(a)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V\frac{[\mathbf{j}\mathbf{L}_{qa}]}{L^3_{qa}}dV. \tag{5.12}$$

Чтобы перейти от выражении для векторов $\mathbf{B}$ и $\mathbf{dB}$ к выражениям для их компонент по какому-либо направлению, надо заменить векторные произведения их компонентами по этому направлению, например

$$B_x(a)=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint\limits_l\frac{[\mathbf{dl}\,\mathbf{L}_{qa}]_x}{L^3_{qa}}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint\limits_l\frac{(z_a-z_q)\,dy-(y_a-y_q)\,dz}{L^3_{qa}} \tag{5.11'}$$

в случае линейного тока и

$$B_x(a)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V\frac{[\mathbf{j}\mathbf{L}_{qa}]_x}{L^3_{qa}}dV=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V\frac{(z_a-z_q)\,j_y-(y_a-y_q)\,j_z}{L^3_{qa}}dV \tag{5.12'}$$

в случае объемного тока.

Заменяя в (5.12) элемент $\mathbf{j}dV$ объемного тока элементом $\mathbf{i}dS$ поверхностного тока (см. рис. 34), получаем для магнитного поля такого тока выражения

$$d\mathbf{B}(a)=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{[\mathbf{i}\,\mathbf{L}_{qa}]}{L^3_{qa}}dS,\quad \mathbf{B}(a)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_S\frac{[\mathbf{i}\,\mathbf{L}_{qa}]}{L^3_{qa}}dS. \tag{5.13}$$

Чтобы получить фактически действующее поле $\mathbf{B}$, надо сложить поля, определяемые формулами (5.11), $(5.12)_2$, $(5.13)_2$ (см. рис. 46).

II. Векторный потенциал. Согласно (1.127)

$$[\mathbf{j}\,L_{qa}]\,L^{-3}_{qa}=[(\overset{a}{\nabla}L^{-1}_{qa})\,\mathbf{j}]=[\overset{a}{\nabla}(\mathbf{j}L^{-1}_{qa})]-[\overset{a}{\nabla}\mathbf{j}]\,L^{-1}_{qa}.$$

Производная по a от $\mathbf{j}(q)$ равна нулю, поэтому $\int\limits_V\frac{[\mathbf{j}\,\mathbf{L}_{qa}]}{L^3_{qa}}dV_q=$

$$=\left[\overset{a}{\nabla}\int\limits_V\frac{\mathbf{j}}{L_{qa}}dV_q\right].$$

Таким образом, определяемый выражением $(5.12)_2$ вектор

$$\mathbf{B}=\operatorname{rot}\mathbf{A},\quad \text{где}\quad \mathbf{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V\frac{\mathbf{j}}{L_{qa}}dV \tag{5.14}$$

— векторный потенциал магнитного поля постоянного объемного тока в отсутствии магнетиков. Зная поле **A** в какой-либо области пространства, можно согласно $(5.14)_1$ определить поле **B** дифференцированием вектора **A**. Поле **A**, как и поле **B**, является векторным, но оно удобнее для расчета, так как его выражение $(5.14)_2$ через плотность тока, создающего поле **B**, проще соответствующего выражения $(5.12)_2$ для поля **B** и аналогично выражению $(2.44'')_2$ для скалярного потенциала U. Область интегрирования в $(5.14)_2$ та же, что в $(5.12)_2$.

От $(5.14)_2$ можно перейти к выражениям

$$\mathbf{A}(a)=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_l \frac{\mathbf{dl}}{L_{qa}}, \quad \mathbf{A}(a)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_S \frac{\mathbf{i}\,dS}{L_{qa}} \tag{5.14'}$$

для векторного потенциала поля **B**, создаваемого соответственно линейным и поверхностным токами. Действительно, подставляя в $(5.14)_2$ $j=I/\Delta S$ и $\Delta V=\Delta S dl$, где ΔS — площадь поперечного сечения тока (заменяемого линейным), получаем $(5.14')_1$. Аналогично получаем $(5.14')_2$ подстановками $j=dI/dS$, $dS=hdl'$, где dl' и h — размеры поперечного сечения тока (заменяемого поверхностным).

От выражений для вектора **A** легко перейти к выражениям для его компоненты по какому-либо направлению. Например, для объемных и линейных токов из $(5.14)_2$ и $(5.14')_1$ получаем [1]:

$$A_x(a)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{j_x dV}{L_{qa}}, \quad A_x(a)=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_l \frac{dx}{L_{qa}}. \tag{5.14''}$$

Если направление тока всюду коллинеарно некоторой прямой, то согласно $(5.14)_2$, $(5.14')$ поле **A** также коллинеарно ей, а если направление тока всюду компланарно некоторой плоскости, то поле **A** также компланарно ей.

Применяя к $(5.14')_1$ преобразование $(1.41')_2$, получаем для векторного потенциала **A** выражение

$$\mathbf{A}(a)=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_S \left[d\mathbf{S}\,\nabla^q \frac{1}{L_{qa}}\right], \tag{5.15}$$

в котором S — произвольно взятая поверхность, опирающаяся на контур l, а q точка, пробегающая по этой поверхности.

Посмотрим, чему равны дивергенция и лапласиан вектора **A**, определяемого формулой $(5.14)_2$. Интегрирование в $(5.14)_2$ про-

[1] Из того обстоятельства, что выражения $(5.14'')_1$ для компонент векторного потенциала **A** аналогичны выражению $(2.44'')_2$ для скалярного потенциала U, следует, что векторный потенциал **A**, определяемый формулой $(5.14)_2$, не терпит разрыва на поверхностном токе, так же как скалярный потенциал U не терпит разрыва на поверхностной массе. Из этого также следует, что тангенциальная компонента вектора **A** терпит разрыв на продольно намагниченной поверхности и на эквивалентном ей двойном поверхностном токе (см. разд. III, § 1). За этим исключением вектор **A** на любой поверхности непрерывен.

У линейного тока согласно $(5.14')_1$ вектор-потенциал принимает бесконечно большие значения.

изводится по точке q, а дивергенцию надо брать по аргументу a вектора $\mathbf{A}$, поэтому [1]

$$\operatorname{div}\mathbf{A}=\overset{a}{\operatorname{div}}\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V\frac{\mathbf{j}}{L_{qa}}\,dV\right)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V\overset{a}{\operatorname{div}}\frac{\mathbf{j}}{L_{qa}}\,dV, \tag{5.16}$$

где, так же как в $(5.14)_2$, область интегрирования V можно ограничить поверхностью $S[V]$ токового кольца. Подынтегральная функция $\overset{a}{\nabla}(\mathbf{j}L_{qa}^{-1}))=(\overset{a}{\nabla}\mathbf{j})\,L_{qa}^{-1}+(\mathbf{j}\overset{a}{\nabla}L_{qa}^{-1})=-(\mathbf{j}\overset{q}{\nabla}L_{qa}^{-1})$, так как $\mathbf{j}=\mathbf{j}(q)_q$ и следовательно $(\overset{a}{\nabla}\mathbf{j})=0$, а $\overset{a}{\nabla}L_{qa}^{-1}=-\overset{q}{\nabla}L_{qa}^{-1}$. Поэтому [2] $\overset{a}{\nabla}(\mathbf{j}L_{qa}^{-1}))=$ $=-(\overset{q}{\nabla}(\mathbf{j}L_{qa}^{-1}))+(\overset{q}{\nabla}\mathbf{j})\,L_{qa}^{-1}$.

Таким образом, из (5.16) получаем

$$\operatorname{div}\mathbf{A}=-\frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V\overset{q}{\operatorname{div}}\frac{\mathbf{j}}{L_{qa}}\,dV+\frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V\frac{\overset{q}{\operatorname{div}}\mathbf{j}}{L_{qa}}\,dV=0. \tag{5.17}$$

Здесь принято во внимание, что согласно $(4.17)_1$ $\overset{q}{\operatorname{div}}\mathbf{j}=0$ и

$$\int\limits_V\overset{q}{\operatorname{div}}\frac{\mathbf{j}}{L_{qa}}\,dV=\oint\limits_{S[V]}\frac{j_n dS}{L_{qa}}=0, \tag{5.16'}$$

так как $j_n=0$ на поверхности $S[V]$ токового кольца. Таким образом, поле $\mathbf{A}$ является соленоидальным, его векторные линии нигде не обрываются и согласно $(5.14)_1$ охватываются силовыми линиями магнитного поля $\mathbf{B}$.

В более общем случае переменного поля, когда согласно (4.5) и (4.10) $\operatorname{div}\mathbf{j}=-\dot{\delta}$ и $\operatorname{Div}\mathbf{j}=-\dot{\sigma}$, имеем вместо (5.17)

$$\operatorname{div}\mathbf{A}=\frac{-\mu_0}{4\pi}\left(\int\limits_S\frac{\dot{\sigma}_{\text{свб}}}{L_{qa}}\,dS+\int\limits_V\frac{\dot{\delta}_{\text{свб}}}{L_{qa}}\,dV\right). \tag{5.17'}$$

Чтобы в этом убедиться, распространим интегрирование в (5.17') на все пространство и преобразуем первый из интегралов в (5.17) по теореме Остроградского. При этом мы полагаем, что все токи находятся на конечных расстояниях и учитываем возможность существования особых для поля $\mathbf{j}L_{qa}^{-1}$ поверхностей S, на которых компонента j_n терпит разрывы. В частности, такими являются

---

[1] Интеграл по q от дивергенции по a нельзя преобразовать по теореме Остроградского (см. замечание 5 в разд. I, § 9 главы первой). Поэтому далее совершается переход к дифференцированию по q.

[2] На первый взгляд может показаться, что из тождества (1.126') следует равенство $(\overset{a}{\nabla}(\mathbf{j}L_{qa}^{-1}))=-(\overset{q}{\nabla}(\mathbf{j}L_{qa}^{-1}))$. Но надо учесть, что величина $\mathbf{j}$ не является функцией точки a, и принять во внимание оговорку, следующую за формулами (1.127) и касающуюся применимости формул (1.126').

поверхности токовых колец. В результате интегрирования по поверхностям безопасности, охватывающим особые поверхности S, получаем интегралы по S от

$$-L_{qa}^{-1}\operatorname{Div}\mathbf{j}=L_{qa}^{-1}\,\sigma_{\text{сзб}}.$$

Согласно $(2.44'')_{2,3}$, (2.115) для вакуума правая часть (5.17′) равна $-\mu_0\varepsilon_0\dot{U}$, следовательно, $\operatorname{div}\mathbf{A}=-\mu_0\varepsilon_0\dot{U}$. Для среды однородной (всюду) по ε и μ получаем в соответствии с $(3.39')_1$ $\operatorname{div}\mathbf{A}=-\varepsilon_a\mu_a\dot{U}$, с чем совпадает условие (6.40). Так, естественно, совершается переход к этому условию Лоренца от формул, справедливых для постоянного поля.

Из главы второй мы знаем, что потенциал U поля $\mathbf{f}$ удовлетворяет уравнению Пуассона $\nabla^2U=-4\pi\delta$. Но выражение $(5.14'')_1$ для компоненты A_x вектора $\mathbf{A}$ отличается от выражения $(2.44'')_2$ для потенциала U только заменой скаляра δ скаляром $\mu_0 j_x/4\pi$. Следовательно, функция A_x должна удовлетворять уравнению Пуассона с правой частью $-\mu_0 j_x$. Таким образом, компоненты A_x, A_y, A_z вектора $\mathbf{A}$ должны удовлетворять уравнениям

$$\nabla^2A_x=-\mu_0 j_x,\quad \nabla^2A_y=-\mu_0 j_y,\quad \nabla^2A_z=-\mu_0 j_z. \tag{5.18}$$

Отсюда получаем для векторного потенциала $\mathbf{A}$ уравнение

$$\nabla^2\mathbf{A}=-\mu_0\mathbf{j}. \tag{5.18′}$$

III. **Система уравнений поля.** Согласно $(5.14)_1$, (5.17) и (5.18′) $\operatorname{div}\mathbf{B}=\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{A}=0$, $\operatorname{rot}\mathbf{B}=\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A}-\nabla^2\mathbf{A}=\mu_0\mathbf{j}$.

Таким образом, поле $\mathbf{B}$, создаваемое постоянным током в вакууме, удовлетворяет системе дифференциальных уравнений

$$\text{I. }\operatorname{rot}\mathbf{B}=\mu_0\mathbf{j},\quad \text{II. }\operatorname{div}\mathbf{B}=0. \tag{5.19}$$

Согласно второму уравнению этой системы поле $\mathbf{B}$ является чисто вихревым; его силовые линии нигде не обрываются. Поле $\mathbf{B}$ не имеет источников.

Но в соответствии с изложенным в § 6 главы первой такие векторные линии должны охватывать некоторые кольцевидные области пространства, содержащие вихревые линии поля. Первое уравнение системы (5.19) указывает, где находятся эти вихревые линии и чем определяется их густота, плотность вихрей поля $\mathbf{B}$. Согласно этому уравнению вихревыми линиями[1] поля $\mathbf{B}$ являются токовые линии, и плотность вихрей этого поля в окрестности какой-либо точки определяется плотностью тока в ней. Силовые линии поля $\mathbf{B}$ замыкаются вокруг токов, которые занимают кольцевидные вихревые области этого поля.

Из уравнений системы (5.19) следует, что

$$\int_S(\operatorname{rot}\mathbf{B}\,d\mathbf{S})=\mu_0\int_S(\mathbf{j}\,d\mathbf{S}),\quad \int_V\operatorname{div}\mathbf{B}\,dV=0$$

для любой поверхности S и любой области V. Следовательно, по теоремам Стокса и Остроградского

$$\oint_{l\,[S]}(\mathbf{B}\,d\mathbf{l})=\mu_0 I_S,\quad \oint_{S\,[V]}(\mathbf{B}\,d\mathbf{S})=0,\quad [I_S=\int_S(\mathbf{j}\,d\mathbf{S})], \tag{5.19′}$$

[1] Линиями L^B, т. е. векторными линиями $l^{\operatorname{rot}\mathbf{B}}$ поля вектора $\operatorname{rot}\mathbf{B}$ (см. разд. III, § 6 главы первой).

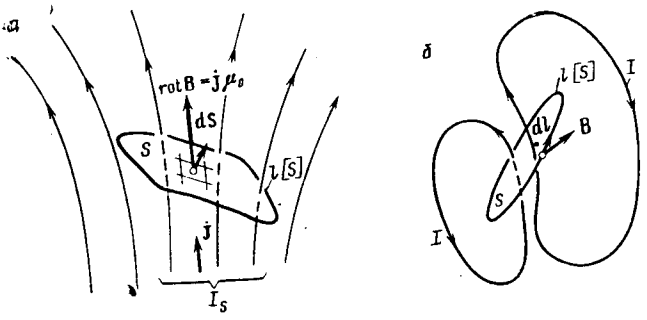


Рис. 47. Контуры $l[S]$, охватывающие токи: объемный (*а*), линейные (*б*)

где $l[S]$ — замкнутый контур, ограничивающий поверхность S; $S[V]$ — замкнутая поверхность, ограничивающая область V; I_S — поток вектора **j** через поверхность S, опирающуюся на контур $l[S]$, причем нормаль n к поверхности S образует правовинтовую систему с обходом по контуру $l[S]$ (рис. 47,*а*).

Равенства $(5.19')_{1,2}$ представляют собой уравнения поля **B** в интегральной форме[1]. Левую часть $(5.19')_1$, деленную на μ_0, называют магнитодвижущей силой в контуре $l[S]$.

Согласно $(5.19')_1$ магнитодвижущая сила в контуре $l[S]$ равна потоку вектора **j** через любую поверхность, опирающуюся на этот контур (потоку вектора **j**, сцепленному с этим контуром).

Если контур $l[S]$ охватывает несколько линейных (квазилинейных) токов, то этот поток равен алгебраической сумме сил I_k токов, пронизывающих поверхность S, опирающуюся на контур. Таким образом получаем линейную форму первого уравнения поля **B**:

$$\oint_{l[S]} (\mathbf{B}\,\mathrm{d}\mathbf{l}) = \mu_0 \Sigma I_k, \qquad (5\text{-}19'')$$

где сила тока I_k считается положительной, если этот ток образует правовинтовую систему с обходом по контуру $l[S]$, и отрицательной — в противном случае (рис. 47,*б*).

Равенства $(5.19')_1$ и $(5.19'')$ выражают закон полного тока для постоянного поля в отсутствии магнетиков.

Согласно $(5.19')_2$ поток вектора **B** через любую замкнутую поверхность равен нулю, что вполне естественно, так как вектор-

---

[1] Умножая обе части уравнения $(5.19')_1$ на m_a, получаем согласно (3.22″) равенство

$$\oint_{l[S]} (\mathbf{F}\,\mathrm{d}\mathbf{l}) = m_a \mu_0 I_S, \qquad (5.20)$$

левая часть которого — есть работа при перемещении пробной магнитной массы m_a по контуру $l[S]$, охватывающему ток I_S. Полагая в (5.20) $I_S=1$ А и $m_a=m_D=1$ А·м, т. е. единице магнитной массы, выбранной в § 2 главы второй мы видим, что при совершении единичной магнитной массой m_D обхода вокруг тока с силой в 1 А совершается работа, равная $4\pi 10^{-7}$ А²·Гн$=4\pi 10^{-7}$ Дж.

ные линии **B** нигде не обрываются и поэтому сколько их входит внутрь поверхности $S[V]$, столько же должно выходить из нее наружу.

§ 3. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ О МАГНИТНОМ ПОЛЕ ПОСТОЯННОГО ТОКА В ОТСУТСТВИИ МАГНИТНОЙ СРЕДЫ

Формулы, полученные в § 2, позволяют рассчитать поле **B**, создаваемое заданными токами, и его потенциал **A**. Для этого могут служить дифференциальная и интегральная формы $(5.19)_1$, $(5.19')_1$ первого уравнения поля **B**, дифференциальное уравнение (5.18′) потенциала **A** и выражения вида (5.10) — (5.14″). О применении уравнения потенциала **A** (в более общем случае) будет идти речь в § 5. Выражения вида (5.10) — (5.14″) пригодны для определения не только поля, создаваемого всем токовым кольцом, но также полей, создаваемых отдельными, произвольно выделенными частями тока (например, одной из сторон прямоугольного токового контура), с тем, чтобы сложив результаты, соответствующие всем частям тока, получить поле, создаваемое им.

Уравнение $(5.19')_1$ применимо только для поля, создаваемого токовым кольцом, взятым в целом, или какой-либо токовой трубкой, взятой целиком, а не отдельными участками цепи тока или трубки тока. Отметим, что, применяя это уравнение к незамкнутому току, мы получили бы для циркуляции вектора **B** по контуру l различные значения, так как такой ток пронизывает некоторые, но не все возможные поверхности S, опирающиеся на контур l. К току по линиям, начинающимся и кончающимся на бесконечности, уравнение $(5.19')_1$ применимо, так как можно считать, что этот ток замыкается бесконечно удаленным участком цепи.

Первое дифференциальное уравнение поля $\mathrm{rot}\,\mathbf{B}=\mu_0\mathbf{j}$ (а также интегральная форма этого уравнения) в общем случае недостаточно для определения поля **B**; для этого необходима вся система (5.19), определяющая не только ротор вектора **B**, но также его дивергенцию. Каждое из трех уравнений вида $\mathrm{rot}_x\mathbf{B}=\mu_0 j_x$ в общем случае содержит две неизвестные производные от компонент вектора **B** по координатным направлениям, так как $\mathrm{rot}_x\mathbf{B}=\partial B_z/\partial y-\partial B_y/\partial z$. Но симметрия магнитного поля (обусловленная симметрией тока) облегчает его расчет. В частности, благодаря симметрии поля можно надлежащим выбором системы координат добиться обращения в нуль двух из трех компонент поля и производных от третьей компоненты по двум из трех координатных направлений. Таким образом возникает возможность расчета поля с помощью одного только первого уравнения системы (5.19) или (5.19′). Аналогичное мы встречали в § 6 главы второй.

1. **Симметрия тока и его магнитного поля.** Электрический ток будем называть симметричным, если векторное поле его плотности $\mathbf{j}(a)$ симметрично (см. разд. III, § 9 главы первой). Простыми примерами объемных токов с цилиндрической симметрией являются: ток в однородном круглом кольце любого сечения (нечетная цилиндрическая симметрия) и ток в неограниченном однород-

ном круговом цилиндре (четная цилиндрическая симметрия). Простейшие примеры симметричных необъемных токов: линейные и поверхностные токи, расположенные на плоскости (четная зеркальная симметрия), прямолинейный ток (четная цилиндрическая симметрия), система круговых линейных токов с общей осью (нечетная цилиндрическая симметрия).

Исходя из приведенных выше выражений для **A** и **B**, можно доказать ([1], с. 315—317), что создаваемое током, четно или нечетно симметричным относительно некоторой плоскости S, поле **B** нечетно или четно симметрично (соответственно) относительно этой плоскости, а поле **A** обладает такой же симметрией относительно плоскости S, как ток, создающий поле **B**.

Из этого, в частности, следует, что на плоскости симметрии тока четной или нечетной имеем соответственно

$$B_t=0,\ A_n=0 \text{ или } B_n=0,\ A_t=0, \tag{5.21}$$

за исключением точек (на плоскости симметрии), через которые проходят линейные токи; в этих точках векторы **B** и **A** обращаются в бесконечность.

Имея в виду определения цилиндрической симметрии и сферической симметрии через зеркальную симметрию (см. разд. III, § 9 главы первой), можно из сказанного выше сделать следующие выводы.

1. Поле **B**, создаваемое током, четно симметричным относительно оси L, нечетно симметрично относительно этой оси. Из этого согласно сказанному в разд. III, § 9 главы первой следует, что компоненты магнитного поля в плоскостях, проходящих через ось четной симметрии тока, равны нулю, а силовые линии магнитного поля представляют собой окружности с общей осью по оси симметрии тока. Поле **A**, соответствующее этому полю **B**, четно симметрично относительно оси симметрии тока и векторы **A** лежат в плоскостях, проходящих через эту ось. В системе r, φ, z с осью z по оси симметрии тока

$$B_r=0,\ B_z=0,\ \mathbf{B}=\mathbf{B}_\varphi,\ B_\varphi=B_\varphi(r, z),$$
$$A_\varphi=0,\ \mathbf{A}=\mathbf{A}_r+\mathbf{A}_z,\ A_r=A_r(r, z),\ A_z=A_z(r, z). \tag{5.22}$$

Пример. Отрезок z_1z_2 оси z (см. рис. 22) с током I по направлению этой оси. Элемент отрезка $dl_q=dz_q$, $\sin(\mathbf{dl}_q, \mathbf{L}_{qa})=\cos\alpha_q$,

$$\mathbf{dB}=\mathbf{1}_\varphi dB_\varphi=\mathbf{1}_\varphi\frac{\mu_0 I dz_q}{4\pi L^2_{qa}}\cos\alpha_q.$$

Следовательно, аналогично (2.25) получаем

$$\mathbf{B}=\frac{\mu_0 I\mathbf{1}_\varphi}{4\pi r_a}\left[\frac{z_2-z_a}{\sqrt{r^2_a+(z_2-z_a)^2}}-\frac{z_1-z_a}{\sqrt{r^2_a+(z_1-z_a)^2}}\right]. \tag{5.22'}$$

Для частных случаев тока I по полуоси z имеем формулы

$$\mathbf{B}_+=\frac{\mu_0 I\mathbf{1}_\varphi}{4\pi r_a}\left(1+\frac{z_a}{\sqrt{r^2_a+z^2_a}}\right),\quad \mathbf{B}_-=\frac{\mu_0 I\mathbf{1}_\varphi}{4\pi r_a}\left(1-\frac{z_a}{\sqrt{r^2_a+z_1^2}}\right), \tag{5.22''}$$

из которых первая получается при $z_1=0$, $z_2=\infty$, а вторая — при $z_1=-\infty$, $z_2=0$. При $z_a=0$

$$\mathbf{B}_+=\mathbf{B}_-=\mu_0 I\mathbf{1}_\varphi/4\pi r_a. \tag{5.22'''}$$

2. На оси четной цилиндрической симметрии тока магнитное поле **B** и нормальная к ней компонента вектора **A** равны нулю, а тангенциальная к ней компонента вектора **A** непрерывна. Но там, где на оси симметрии тока находится линейный ток, магнитное поле **B** и тангенциальная компонента вектора **A** принимают бесконечно большие значения в соответствии с (5.11), $(5.14')_1$.

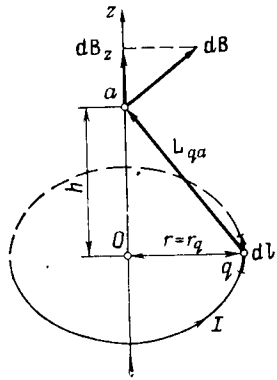


Рис. 48. Магнитное поле на оси кругового тока

3. Магнитное поле **B**, создаваемое током, нечетно симметричным относительно некоторой оси L, четно симметрично относительно этой оси. Векторы **B** в этом случае лежат в плоскостях, проходящих через ось симметрии тока. Поле **A**, соответствующее этому магнитному полю, нечетно симметрично относительно оси L. Векторные линии поля **A** представляют собой окружности с общей осью по оси L. В системе r, φ, z с осью z по оси симметрии тока

$$B_\varphi = 0, \quad \mathbf{B} = \mathbf{1}_r B_r(r, z) + \mathbf{1}_z B_z(r, z), \tag{5.23}$$

$$A_r = 0, \quad A_z = 0, \quad \mathbf{A} = \mathbf{1}_\varphi A_\varphi(r, z). \tag{5.23'}$$

4. На оси нечетной цилиндрической симметрии тока вектор **A** и компоненты вектора **B** в плоскости, нормальной к этой оси, равны нулю, а тангенциальная к этой оси компонента вектора **B** непрерывна.

Пример. Поле на оси кругового тока. Допустим, что по окружности $r = r_q$, $z = 0$ в системе r, φ, z задан ток I по направлению отсчета φ. Определим поле **B** в точке a с координатами $r = 0$, $z = h$ (рис. 48). В силу нечетной симметрии тока относительно оси z $B = \mathbf{1}_z B_z = \mathbf{n}_I B_z$, $dB_z = dB \cos(\mathbf{1}_z, d\mathbf{B}) = dB r_q (r_q^2 + h^2)^{-1/2}$, $dB = \mu_0 I dl / 4\pi L_{qa}^2$, так как угол $(\mathbf{dl}, \mathbf{L}_{qa}) = \pi/2$. Но $dl = r_q d\varphi$, а $L_{qa}^2 = r_q^2 + h^2$, следовательно,

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} I r_q (r_q^2 + h^2)^{-1} d\varphi, \quad dB_z = \frac{\mu_0}{4\pi} I r_q^2 (r_q^2 + h^2)^{-\frac{3}{2}} d\varphi,$$

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{r_q^2}{(r_q^2 + h^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{r_q^2}{(r_q^2 + h^2)^{3/2}},$$

$\mathbf{B} = \mathbf{n}_I \dfrac{\mu_0 I r_q^2}{2 (r_q^2 + h^2)^{3/2}}$, где $\mathbf{n}_I = \mathbf{1}_z$. Это согласно (5.5) совпадает с $(2.66'')$ при $n_I = n^\partial$, т. е. когда лицевая сторона тока соответствует положительной обкладке двойного слоя.

5. В § 1 было сказано об эквивалентности токового контура магнитному листку в отношении действия на него магнитного поля. В приведенном примере мы видим такую же эквивалентность в отношении способности создавать магнитное поле.

6. Если $z = 0$ — плоскость нечетной зеркальной симметрии тока, а ось z является осью его нечетной цилиндрической симметрии,

то на этой плоскости

$$\mathbf{A}=0,\ B_\varphi=0,\ B_z=0,\ \mathbf{B}=\mathbf{1}_r B_r(r). \tag{5.24}$$

Такую симметрию имеем, например, в случае, когда плоскость $z=0$ нормальна к общей оси двух круговых токов, одинаковых по силе и радиусу, но взаимно противоположно направленных, и делит пополам расстояние между их центрами.

7. Магнитное поле сферически симметричного тока равно нулю [1].

$$\text{Если } \mathbf{j}=\mathbf{1}_R j_R(R), \text{ то всюду } \mathbf{B}=0. \tag{5.25}$$

8. Допустим, что ток обладает четной цилиндрической симметрией относительно некоторой оси z, причем имеются в виду полные цепи тока (которые, однако, могут замыкаться на бесконечности).

Для того чтобы с помощью уравнения $(5.19')_1$ определить поле $\mathbf{B}$ в некоторой точке a, следует в качестве контура $l[S]$, по которому берется циркуляция, взять векторную линию l^B, проходящую через эту точку, т. е. окружность с осью по оси симметрии тока и с радиусом r, равным расстоянию от этой оси до точки a. Согласно (5.22) на таком контуре нормальная к нему компонента поля равна нулю и при соответствующем выборе обхода $(\mathbf{B}\,d\mathbf{l})=B\,dl$. Кроме того, величину $B_l=B$ можно взять за знак интеграла и, таким образом, получить согласно $(5.19')_1$

$$\mu_0 I_S=\oint\limits_{l^B[S]}(\mathbf{B}\,d\mathbf{l})=Bl^B=2\pi r B,\ B=\frac{\mu_0 I_S}{2\pi r}, \tag{5.26}$$

где I_S — охватываемый линией l^B поток вектора $\mathbf{j}$ через поверхность S, например через круг с окружностью l^B. В системе r, φ, z с осью по оси симметрии $I_S=I_S(r, z)$. В случае тока I по (всей) оси z имеем при любых r и z $I_S=I$ и, следовательно,

$$B=\mu_0 I/2\pi r. \tag{5.27}$$

Это поле тока по неограниченной прямой. Плоскость $z=\text{const}$ (и, в частности, $z=0$) делит этот ток на две части, из которых каждая создает в этой плоскости поле $B=\mu_0 I/4\pi r$ в соответствии с $(5.22''')$.

Из $(5.26)_2$ следует, что поле в любой точке a не изменится, если как угодно изменить ток (поле $\mathbf{j}$), лишь бы не изменились симметрия тока и значение его части I_S. Что же касается остальной части тока, не охватываемой линией l^B, то она никак не влияет на поле в этой точке. Если, например, сжать ток I_S и превратить его в линейный ток по оси симметрии, а остальную часть тока убрать, то поле $\mathbf{B}$ в точке a останется без изменения. В частности, однородный ток в неограниченном круговом цилиндре

[1] В этом случае поле $\mathbf{A}$, как и поле $\mathbf{j}$, сферически симметрично, поэтому согласно (1.136) $\operatorname{rot}\mathbf{A}=0$, $\mathbf{A}=\operatorname{grad}T$. С точностью до слагаемого $\operatorname{grad}T$ потенциал $\boldsymbol{A}=0$.

создает вне цилиндра поле **B**, совпадающее с магнитным полем неограниченного прямолинейного тока такой же силы, расположенного на оси цилиндра.

II. **Магнитное поле цепи тока с электродами.** О такой цепи тока шла речь в § 6 четвертой главы, где нас интересовало электрическое поле в земле. Зная поле вектора **j** в земле, можно соответствующее ему поле **B** рассчитать по формуле $(5.12)_2$, а магнитное поле линейной части цепи — по формуле (5.11). Но в некоторых случаях благодаря симметрии поля **j** расчет поля **B** можно выполнить минуя расчет поля **j**. Приведем такие расчеты, причем (как всюду в этом параграфе) будем считать $\mu=1$, $\mathbf{J}^0=0$ во всем пространстве.

1. Цепь с точечными электродами в неограниченной однородной проводящей среде. Поля **E** и **j** точечного электрода, очевидно, обладают сферической симметрией. Следовательно, согласно (5.25) магнитное поле тока, поступающего в землю из электрода или, короче, магнитное поле электрода всюду равно нулю. Таким образом, поле **B** во всем пространстве определяется по формуле (5.10) как поле линейных токов [1].

2. Поле точечного электрода $Э$ на поверхности однородного полупространства (на границе земля — воздух). Возьмем систему r, φ, z с осью z, направленной вертикально вниз, с началом в точке $Э$. Поле **j** обладает четной цилиндрической симметрией относительно оси z, поэтому $B_r=0$, $B_z=0$, $\mathbf{B}=\mathbf{1}_\varphi B_\varphi$. Применить формулу (5.26) можно только к взятому в целом току I_S (по всей длине токовых линий). Поэтому прибавим к электроду $Э$ линию, питающую его током I, а для того чтобы сохранить осевую симметрию, вообразим, что эта линия совпадает с верхней (отрицательной) полуосью z. Таким образом получаем цепь тока I, замыкающуюся по бесконечно удаленной линии. Определим поле $\mathbf{B}^0$, создаваемое

---

[1] Предельно короткая линия L с двумя точечными электродами с зарядами $\mp\frac{\varepsilon_0}{\gamma}I$ образует в однородной среде электрический диполь с моментом

$$\mathbf{p}=\frac{\varepsilon_0}{\gamma}I\mathbf{L}\ (L\to 0,\ I\to\infty).$$

Согласно (5.10) и $(5.14')_1$ такой диполь создает поле $\mathbf{B}=\mathrm{rot}\mathbf{A}$, определяемое формулами

$$\mathbf{B}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{[\mathbf{L}\mathbf{L}_{qa}]}{L^3_{qa}}=\frac{\gamma\mu_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{[\mathbf{p}\mathbf{L}_{qa}]}{L^3_{qa}},\quad \mathbf{A}=\frac{\gamma\mu_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{p}}{L_{qa}}. \tag{5.27'}$$

Если электроды находятся на оси z системы r, φ, z в точках с координатами

$$z_{1,2}=\mp\frac{1}{2}L,\ \text{то}\ L^2_{qa}=r^2+z^2,\ \sin(\mathbf{L},\mathbf{L}_{qa})=\frac{r}{\sqrt{r^2+z^2}},$$

$$\mathbf{B}=\mathbf{1}_\varphi B_\varphi,\ \mathbf{A}=\mathbf{1}_z A_z,$$

$$B_\varphi=\frac{\gamma\mu_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{rp}{(r^2+z^2)^{3/2}},\quad A_z=\frac{\gamma\mu_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{\sqrt{r^2+z^2}}. \tag{5.27''}$$

В случае неограниченной однородной магнитной среды, о которой будет речь в разд. I, § 6, надо в (5.27′) и (5.27″) вместо μ_0 подставить μ_a.

этим током в точке $a(r, z)$. Согласно (5.26) $\mathbf{B}^0=\mu_0 1_\varphi I_S/2\pi r$. При $z\leqslant 0$, т. е. для верхнего полупространства, надо считать $I_S=I$. При $z>0$, т. е. для нижнего полупространства, надо принять во внимание, что окружность l^B с осью по оси z (векторная линия), проведенная через точку a, охватывает не весь ток I, а только его долю I_S, попадающую в конус C с поверхностью $r/z=\text{const}$, проходящей через точку a. Но ввиду сферической симметрии (при $z>0$) поля $\mathbf{j}$ относительно точки $\mathcal{Э}$ доля $I_S=\omega I/2\pi$, где $\omega=2\pi[1-z(r^2+z^2)^{-1/2}]$ — телесный угол при вершине $\mathcal{Э}$ конуса C.

Таким образом, в воздухе $\mathbf{B}^0=\mu_0 I 1_\varphi/2\pi r$, а в земле $\mathbf{B}^0=\frac{\mu_0 I 1_\varphi}{2\pi r}[1-z(r^2+z^2)^{-1/2}]$. Чтобы получить поле $\mathbf{B}$, надо из $\mathbf{B}^0$ вычесть поле $\mathbf{B}^B$ воображаемого тока I по отрицательной полуоси z от $z_1=-\infty$ до $z_2=0$. Согласно $(5.22'')_2$ $\mathbf{B}^B=\frac{\mu_0 I 1_\varphi}{4\pi r}\left(1-\frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}}\right)$, следовательно, в воздухе $\mathbf{B}=\frac{\mu_0 I 1_\varphi}{4\pi r}\left(1+\frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}}\right)$, а в земле $\mathbf{B}=\frac{\mu_0 I 1_\varphi}{4\pi r}\left(1-\frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}}\right)$. Объединяя эти выражения, получаем

$$\mathbf{B}=\frac{\mu_0 I 1_\varphi}{4\pi r}\left(1-\frac{|z|}{\sqrt{r^2+z^2}}\right). \qquad (5.28$$

Однако важно иметь в виду, что к этой формуле при $z>0$ и при $z\leqslant 0$ мы пришли разными путями. При $z>0$ формула (5.28) получается благодаря сферической симметрии поля $\mathbf{j}$ в нижнем полупространстве, а при $z\leqslant 0$ она получена без этого условия. Поэтому для воздуха и для плоскости $z=0$ формула (5.28) применима также при любых нарушениях однородности проводящей среды в нижнем полупространстве, не нарушающих ее цилиндрическую симметрию относительно вертикальной прямой, проходящей через электрод $\mathcal{Э}$. В частности, формула (5.28) при $z\leqslant$ применима в случае, когда в земле $\gamma=\gamma(z)$, где $\gamma(z)$ — любая функция глубины z. Что же касается поля $\mathbf{B}$ в земле, то при сохранении симметрии поля относительно оси z надо еще определить отношение $I_S/I=m$ и ввести $I_S=mI$ в выражение для $\mathbf{B}^0$. Интересно отметить, что формула (5.28) при $z\leqslant 0$ совпадает с $(5.22'')_1$ и, следовательно, электрод в отношении образования в верхнем полупространстве поля $\mathbf{B}$ эквивалентен току по положительной полуоси z (вниз).

3. Цепь тока с точечными электродами $\mathcal{Э}_k$ на плоской поверхности горизонтально однородного полупространства. В соответствии с изложенным выше магнитное поле, создаваемое на поверхности $z=0$ и над ней каждым электродом $\mathcal{Э}_k$ с эмиссией I_k, определяется как поле тока I_k по вертикальной полупрямой от точки $\mathcal{Э}_k$ до бесконечности. Эти поля имеют только горизонтальные компоненты. Наоборот, поле, создаваемое лежащей на плоскости $z=0$ линейной частью цепи, имеет на этой плоскости только вертикальную компоненту.

III. **Скалярный потенциал магнитного поля постоянного тока.** Для пространства, взятого в целом, согласно $(5.19)_1$ поле $\mathbf{B}$ не является потенциальным, но для областей пространства вне токового кольца, где $\mathbf{j}=0$ rot $\mathbf{B}=0$ и, следовательно, в соответствии с (1.62) $\mathbf{B}=\operatorname{grad} T$. Все пространство вне токового кольца K является двухсвязной областью, в которой возможны контуры l^{α}, сцепленные с кольцом K (такие контуры, а также контуры l^{β}, не сцепленные с токовым кольцом, показаны на рис. 35). Поэтому в соответствии с изложенным в § 6 первой главы скалярный потенциал поля $\mathbf{B}$ должен быть многозначным. Но если ограничиться изучением поля в односвязной части пространства, то получается потенциал однозначный. Такой областью, например, окажется пространство вне токового кольца, если из него изъять слой, перегораживающий отверстие кольца, вследствие чего исчезнут контуры l^{α}. Слой этот может быть любой толщины и, в частности, его можно свести к поверхности, опирающейся на токовую линию, взятую на поверхности кольца K. Применяя такую «запретную перегородку», мы превращаем почти все пространство вне кольца в односвязную область с однозначным потенциалом, от которого нетрудно перейти к многозначному потенциалу.

Ограничиваясь изучением поля, создаваемого замкнутым линейным током по контуру l, определим потенциал U_I поля $\mathbf{B}$ в пространстве, из которого изъяты только не занимающий объема контур тока $l[S_I]$ и некоторая опирающаяся на него поверхность S_I — поверхность тока с нормалью n_I, образующей с ним правовинтовую систему.

Можно доказать ([1], с. 323, 324), что

$$\oint_{l\,[S_I]} \frac{[\mathbf{dl}\,\mathbf{L}_{qa}]}{L^3_{qa}} = -\operatorname{grad}\omega_I, \tag{5.29}$$

где $\omega_I = \int_{S_I} \frac{(\mathbf{dS}\,\mathbf{L}_{qa})}{L^3_{qa}}$

— угол видимости поверхности S_I из точки a, а левая часть $(5.29)_1$ согласно (5.11) равна $\frac{4\pi}{\mu_0 I}\mathbf{B}(a)$. Следовательно, из (5.29) получаем

$$\mathbf{B}(a) = -\mu_0 \nabla U_I(a), \text{ где } U_I(a) = \frac{I}{4\pi}\omega_I(a) + C, \tag{5.29'}$$

а угол $\omega_I(a)$, аналогичный углу Ω, определяемому формулой (2.64), положителен, когда к точке a обращена лицевая сторона тока. Согласно (5.5) выражение $(5.29')_2$ совпадает с выражением $U=\eta\Omega/4\pi$, которое получается из (2.66′) и $(2.115)_4$ для потенциала поля $\mathbf{B}/\mu_0$, создаваемого двойным магнитным слоем.

Мы опять убеждаемся в эквивалентности линейного тока магнитному листку. Отмеченная эквивалентность справедлива также в отношении тока по виткам соленоида, поверхностного тока на поверхности цилиндра (см. рис. 45,*а*), элементарных токов, запол-

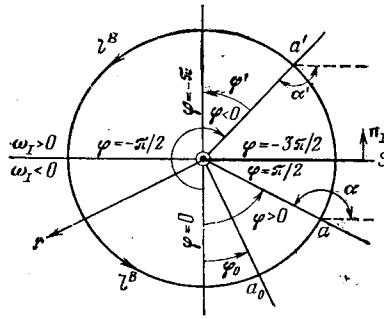


Рис. 49. Построение, поясняющее выво выражения для скалярного потенциал магнитного поля тока I по оси z, нормал ной к плоскости рисунка.

Ток и ось z направлены к читателю, α и α' плоские углы видимости луча $\varphi=\text{const}$ в пло кости $z=\text{const}$ из точек a и a' этой плоскости

няющих этот цилиндр. Поэтому, наблюдая магнитное поле эле ментарных токов, мы можем представить себе, будто это поле со здают элементарные магниты с такими же моментами.

Согласно (5.29′) поведение функции $U_I(a)$ и, в частности, е изменение при перемещении точки a по какому-либо контуру полностью определяется изменением угла $\omega_I(a)$. При переход от лицевой стороны поверхности S_I к ее оборотной стороне уго ω_I уменьшается на 4π, чему соответствует уменьшение потенциа ла U_I на I. Но этот разрыв не реальный, так как работа пр переходе через мысленно построенную поверхность S_I, очевид но, равна нулю. Для устранения формального разрыва м после каждого прохождения точки a через поверхность S_I с ли цевой стороны на оборотную или в обратном направлении може соответственно увеличивать или уменьшать на I потенциалы все точек контура l^α, определяемые формулой $(5.29')_2$. В результат получим непрерывно меняющийся угол ω_I и непрерывный (н многозначный) потенциал U_I. Такое устранение разрывов ω_I и U соответствует исчезновению запретной перегородки, вследствие ко торого пространство (без контура тока) оказывается двухсвязны

Пример. Скалярный потенциал магнитного поля прямолинейного ток Рассмотрим случай тока I по контуру, лежащему в полуплоскости $\varphi=\pi/2$ с стемы r, φ, z и состоящему из оси z (с током в сторону увеличения z) и п луокружности $r^2+z^2=\infty$. Фактически, очевидно, идет речь о поле тока оси z.

Согласно (5.27) поле $\mathbf{B}=\mu_0\mathbf{1}_\varphi I/2\pi r$. На оси z, т. е. при $r=0$, это выр жение теряет смысл, а область $r>0$ (пространство без оси z) является дву связной. Для того чтобы ее сделать односвязной, будем считать полуплоскос $\varphi=\pi/2$ запретной перегородкой, т. е. допустим, что $-3\pi/2<\varphi<\pi/2$.

Поверхность S_I — полуплоскость $\varphi=\pi/2$ с нормалью $\mathbf{n}_I=\mathbf{1}_\varphi$ видна из пол пространств $-\pi/2<\varphi<\pi/2$ и $-3\pi/2<\varphi<-\pi/2$ под углами ω_I равными $-$ и $+2\alpha'$, где $\alpha=\varphi+\pi/2$ и $\alpha'=\varphi'+\pi/2$ — плоские углы, показанные на рис. 4 а $\varphi=-\pi-\varphi$. Таким образом, всюду $\omega_I=-\pi-2\varphi$ и согласно (5.29′) $U_I(a)$ $=-\dfrac{I}{2\pi}\varphi_a+C'$, где $C'=C-I/4$. То же (с точностью до постоянной) получи исходя из напряжения $\mathcal{E}_{a_0a}$ в поле $\mathbf{B}/\mu_0$ на пути a_0a по векторной линии

Действительно, $\mathcal{E}_{a_0a}=\dfrac{1}{\mu_0}\int\limits_{a_0}^{a}Bdl^B=U_I(a_0)-U_I(a)$, $U_I(a)=U_I(a_0)-\mathcal{E}_a$

Но произведение $Bdl^B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} r d\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\varphi$, поэтому $\mathcal{E}_{a_0 a} = \frac{I}{2\pi}(\varphi_a - \varphi_0)$ и, следовательно, $U_I(a) = -\frac{I}{2\pi}\varphi_a + C''$; здесь $C'' = \frac{I}{2\pi}\varphi_0 + U_I(a_0)$. При $-3\pi/2 < \varphi < \pi/2$ имеем $3I/4 > U_I(a) - C' > -I/4$. Разрыв U_I на перегородке равен $\frac{3}{4}I - \left(-\frac{1}{4}I\right) = I$.

Теперь уберем перегородку, т. е. отменим пределы изменения угла φ. Допустим, что $\varphi_a = \varphi_0 \pm 2k\pi + (\varphi_{гл} - \varphi_0)$. Это означает, что отправившись из точки a_0 и двигаясь по линии l^B (по или против направления отсчета φ), мы сделали k оборотов вокруг оси z и еще прошли дугу $a_0 a$, измеряемую углом $\varphi_{гл} - \varphi_0$, где $\varphi_{гл}$ — главное значение угла φ_a.

При этом мы совершили работу $\mathcal{E}_{a_0 a} = \frac{I}{2\pi}(\varphi_a - \varphi_0) = \frac{I}{2\pi}(\varphi_{гл} - \varphi_0) \pm kI$. Поэтому в точке a потенциал $U_I(a) = U_I(a_0) - \mathcal{E}_{a_0 a} = U_I(a_0) - \frac{I}{2\pi}\varphi_{гл} + \frac{I}{2\pi}\varphi_0 \mp kI = -\frac{I}{2\pi}\varphi_{гл} + C_{мн}$, где $C_{мн} = U_I(a_0) + \frac{I}{2\pi}\varphi_0 \mp kI$ — многозначная постоянная (не зависящая от положения точки a).

IV. **Замечания.** 1. Подставляя в $(5.29')_2$ выражение $(5.29)_2$ для телесного угла ω_I и принимая во внимание (1.127), получаем при $C = 0$

$$U_I(a) = \frac{I}{4\pi}\int\limits_{S_I} \frac{(\mathrm{dS}\,\mathbf{L}_{qa})}{L^3_{qa}} = \frac{I}{4\pi}\int\limits_{S_I}\left(\mathrm{dS}\overset{q}{\nabla}\frac{1}{L_{qa}}\right) \tag{5.30}$$

и согласно (5.3′)

$$U_I(a) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{S_I} \frac{(\mathrm{dML}_{qa})}{L^3_{qa}} = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{S_I}\left(\mathrm{dM}\overset{q}{\nabla}\frac{1}{L_{qa}}\right) \tag{5.30′}$$

в соответствии с (2.66). Аналогичные выражения для векторного потенциала

$$\mathbf{A}(a) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_{S_I} \frac{[\mathrm{dML}_{qa}]}{L^3_{qa}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_{S_I}\left[\mathrm{dM}\overset{q}{\nabla}\frac{1}{L_{qa}}\right] \tag{5.30″}$$

получаются из (5.15).

2. При изучении магнитного поля токового контура на расстояниях от него, больших по сравнению с его линейными размерами, имеем согласно (5.30′) и (5.30″)

$$U_I(a) = \frac{(\mathbf{ML}_{qa})}{4\pi L^3_{qa}},\quad \mathbf{A}(a) = \frac{\mu_0[\mathbf{ML}_{qa}]}{4\pi L^3_{qa}}, \tag{5.31}$$

где $\mathbf{M}$ — магнитный момент тока, определяемый формулой (5.3), а L_{qa} — расстояние точки наблюдения a от средней точки q токового контура. В этом случае можно мысленно заменить ток эквивалентным ему диполем с моментом $\mathbf{p} = \mathbf{M} = I\mathbf{S}$, причем полагая $S \to 0$, мы должны считать, что $I \to \infty$.

3. Потенциалы dU_I и $\mathbf{dA}$ магнитного поля $\mathbf{dB}$ элементарного тока I, т. е. тока по замкнутому контуру элементарных размеров, выражаются формулами (5.31) с подстановкой $\mathbf{dM}$ вместо $\mathbf{M}$, где

$\mathbf{dM}$ — момент элементарного тока I, определяемый формулой (5.3′). Таким образом, элементарный ток эквивалентен в отношении образования магнитного поля $\mathbf{B}$ магнитному диполю с моментом $\mathbf{p}=\mathbf{dM}=I\,\mathbf{dS}$ элементарной величины.

§ 4. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ПОСТОЯННОГО ТОКА В ПРИСУТСТВИИ МАГНИТНОЙ СРЕДЫ

В § 1 третьей главы намагничение магнетика уподоблялось упорядочению ориентации моментов диполей. Теперь на основании изложенного в § 1 и 3 настоящей главы можем уточнить эту схему, приблизить ее к действительности, заменив диполи элементарными токами по чрезвычайно малым контурам — *молекулярными токами*. В отличие от таких токов обычные токи будем называть макроскопическими. Расположенные хаотически в ненамагниченном магнетике молекулярные токи согласно сказанному в § 1 под действием поля $\mathbf{B}$ поворачиваются около осей, поперечных полю и их дипольным моментам. Таким образом уменьшаются углы отклонения этих моментов от направления поля, в результате чего совокупность молекулярных токов в элементе объема dV приобретает суммарный дипольный момент $\mathbf{dM}=\mathbf{J}dV$, отличный от нуля и направленный (в изотропной среде при $\varkappa>0$) по полю.

I. **Влияние магнитной среды.** Молекулярные токи намагниченного магнетика создают свое магнитное поле. Поэтому в присутствии магнетиков поле

$$\mathbf{B}=\mathbf{B}_{\text{ма}}+\mathbf{B}_{\text{мо}}, \tag{5.32}$$

где $\mathbf{B}_{\text{мо}}$ — поле, создаваемое молекулярными токами, а $\mathbf{B}_{\text{ма}}$ — поле, создаваемое обычными макроскопическими токами и определяемое по формулам, приведенным в § 2 для поля $\mathbf{B}$. В частности, согласно $(5.19)_1$, $(5.14)_1$ и (5.17)

$$\operatorname{rot}\frac{\mathbf{B}_{\text{ма}}}{\mu_0}=\mathbf{j},\quad \mathbf{B}_{\text{ма}}=\operatorname{rot}\mathbf{A}_{\text{ма}},\quad \operatorname{div}\mathbf{A}_{\text{ма}}=0, \tag{5.33}$$

где $\mathbf{A}_{\text{ма}}$ — векторный потенциал поля $\mathbf{B}_{\text{ма}}$, выраженный формулами, приведенными в § 2 для вектора $\mathbf{A}$.

В соответствии с $(5.14)_2$ и $(5.14')_2$ векторный потенциал поля $\mathbf{B}_{\text{ма}}$, создаваемого объемными и поверхностными макроскопическими токами, определяется формулой

$$\mathbf{A}_{\text{ма}}(a)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V\frac{\mathbf{j}dV}{L_{qa}}+\frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_S\frac{\mathbf{i}dS}{L_{qa}}. \tag{5.34}$$

Для поля $\mathbf{B}_{\text{мо}}$, аналогичного полю $\mathbf{B}_{\text{ма}}$, справедливы формулы, приведенные в § 2, с подстановкой $\mathbf{B}_{\text{мо}}$ и $\mathbf{A}_{\text{мо}}$ вместо $\mathbf{B}$ и $\mathbf{A}$ и с заменой макроскопических токов токами молекулярными. Но поле $\mathbf{B}_{\text{мо}}$ мы воспринимаем как поле, создаваемое элементами dV намагниченного магнетика с дипольными моментами $\mathbf{dM}=\mathbf{J}dV$. Поэтому выведем выражения $\mathbf{A}_{\text{мо}}$ через намагниченность среды $\mathbf{J}$. Для этого воспользуемся формулой (5.30″) с подстановкой $\mathbf{dM}=$

$=\mathbf{J}dV$ и заменой поверхностного интегрирования объемным. Получающееся при этом в (5.30″) под интегралом произведение

$$-[(\overset{q}{\nabla} L_{qa}^{-1})\,\mathbf{J}]\,dV = -[\overset{q}{\nabla}(L_{qa}^{-1}\,\mathbf{J})]\,dV + [\overset{q}{\nabla}\mathbf{J}]\,L_{qa}^{-1}\,dV.$$

Следовательно,

$$\frac{4\pi}{\mu_0}\,\mathbf{A}_{\text{мо}} = -\int\limits_V \overset{q}{\operatorname{rot}}\frac{\mathbf{J}}{L_{qa}}\,dV + \int\limits_V \frac{\overset{q}{\operatorname{rot}}\,\mathbf{J}}{L_{qa}}\,dV. \tag{5.35}$$

Преобразуя первый из этих интегралов согласно (1.38) и принимая во внимание, что в области V могут находиться поверхности S, на которых вектор $\mathbf{J}$ терпит разрыв, получаем

$$\frac{4\pi}{\mu_0}\,\mathbf{A}_{\text{мо}} = \int\limits_V \frac{\operatorname{rot}\mathbf{J}}{L_{qa}}\,dV + \oint\limits_{S[V]} \frac{[\mathbf{J}d\mathbf{S}]}{L_{qa}} + \oint\limits_{S_{\text{бп}}} \frac{[\mathbf{J}d\mathbf{S}]}{L_{qa}}, \tag{5.35′}$$

здесь $S[V]$ — наружная граница области V; $S_{\text{бп}}$ — поверхность безопасности, выделяющая из области V поверхность разрыва S и стягиваемая к этой поверхности разрыва.

Распространяя объемное интегрирование на все пространство, будем считать $S[V]$ бесконечно удаленной поверхностью и поэтому полагать второй из интегралов в правой части (5.35′) равным нулю. Если еще принять во внимание (1.54″), то получим[1] из (5.35′)

$$\mathbf{A}_{\text{мо}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V \frac{\operatorname{rot}\mathbf{J}}{L_{qa}}\,dV + \frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_S \frac{\operatorname{Rot}\mathbf{J}}{L_{qa}}\,dS, \tag{5.36}$$

где объемное интегрирование производится по всему пространству, а поверхностное интегрирование — по всем поверхностям разрыва тангенциальной компоненты вектора $\mathbf{J}$.

II. **Эквивалентные плотности молекулярных токов.** Полученное для вектора $\mathbf{A}_{\text{мо}}$ выражение (5.36) аналогично выражению (5.34) для $\mathbf{A}_{\text{ма}}$. Поэтому будем рассматривать величины $\operatorname{rot}\mathbf{J}$ и $\operatorname{Rot}\mathbf{J}$, как объемную и поверхностную плотности $\mathbf{j}'$ и $\mathbf{i}'$ тока, эквивалентного совокупности молекулярных токов. Таким образом, положим

$$\operatorname{rot}\mathbf{J} = \mathbf{j}',\quad \operatorname{Rot}\mathbf{J} = \mathbf{i}' \tag{5.37}$$

и получим для вектора $\mathbf{A}_{\text{мо}}$ выражение

$$\mathbf{A}_{\text{мо}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V \frac{\mathbf{j}'}{L_{qa}}\,dV + \frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_S \frac{\mathbf{i}'}{L_{qa}}\,dS. \tag{5.34′}$$

Нетрудно убедиться, что возбудители поля $\mathbf{B}_{\text{мо}}$ действительно представляют собой поверхностные и объемные токи, плотности

[1] На поверхности $S_{\text{бп}}$ в (5.35′) нормаль внутренняя, а на поверхности S_0 в (1.54″) — наружная. Этим объясняется знак плюс при втором члене в правой части (5.36).

которых должны быть пропорциональны производным rot $\mathbf{J}$ и Rot $\mathbf{J}$. Сначала обратимся к равенству $(5.37)_2$, согласно которому

$$\mathbf{i}'=[\mathbf{n}(\mathbf{J}^{(2)}-\mathbf{J}^{(1)})]. \qquad (5.37')$$

В частном случае, когда $\mathbf{J}^{(2)}=0$, $\mathbf{J}^{(1)}=\mathbf{J}$, например на поверхности соприкосновения намагниченного тела 1 с ненамагниченной средой 2, имеем $\mathbf{i}'=-[\mathbf{n}\,\mathbf{J}]$, т. е. на такой поверхности должен быть поверхностный ток с плотностью i', равной компоненте J_τ вектора $\mathbf{J}$ (в намагниченном теле). Этот случай иллюстрируется примером однородно намагниченного цилиндра, приведенным в § 1 (см. рис. 45). У боковой поверхности этого цилиндра $\mathbf{J}^{(2)}=0$, $\mathbf{J}^{(1)}=\mathbf{J}$, а у его оснований $\mathbf{J}^{(2)}=0$, $[\mathbf{n}\,\mathbf{J}^{(1)}]=0$. В соответствии с изложенным выше плотность i' поверхностного тока на боковой поверхности цилиндра должна быть равна J. Такой согласно $(5.8'')$ поверхностный ток мы получили в § 1.

От рассмотренного случая можно перейти к случаю соприкосновения двух магнетиков по поверхности, параллельной вектору $\mathbf{J}$, и убедиться, что если этот вектор имеет в них различные значения, то на ней существует поверхностный ток с плотностью, соответствующей формуле (5.37′). Переходя от одной поверхности раздела к совокупности параллельных поверхностей раздела, а затем, заменяя ступенчатое изменение вектора $\mathbf{J}$ непрерывным его изменением, получаем вместо поверхностных токов объемный ток с плотностью, соответствующей формуле $(5.37)_1$[1].

Суммарное поле $\mathbf{B}=\mathbf{B}_{\text{ма}}+\mathbf{B}_{\text{мо}}$ представляет собой ротор суммы векторных потенциалов $\mathbf{A}_{\text{ма}}$ и $\mathbf{A}_{\text{мо}}$ полей $\mathbf{B}_{\text{ма}}$ и $\mathbf{B}_{\text{мо}}$

$$\mathbf{B}=\text{rot}\,\mathbf{A},\quad \mathbf{A}=\mathbf{A}_{\text{ма}}+\mathbf{A}_{\text{мо}}\ , \qquad (5.38)$$

и, следовательно, согласно (5.34) и (5.34′)

$$\mathbf{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{\mathbf{j}+\mathbf{j}'}{L_{qa}}\,dV+\frac{\mu_0}{4\pi}\int_S\frac{\mathbf{i}+\mathbf{i}'}{L_{qa}}\,dS. \qquad (5.38')$$

Для векторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ справедливы формулы, приведенные в § 2, с подстановкой $\mathbf{j}+\mathbf{j}'$ и $\mathbf{i}+\mathbf{i}'$ вместо $\mathbf{j}$ и $\mathbf{i}$. В частности, к правой части (5.18′) надо прибавить $-\mu_0\mathbf{j}'$. Таким образом,

$$\text{rot}\,\mathbf{A}=\mathbf{B},\quad \nabla^2\mathbf{A}=-\mu_0(\mathbf{j}+\mathbf{j}'). \qquad (5.39)$$

Из аналогии выражения (5.38′) выражению (5.14′) следует, что на любой поверхности S вектор $\mathbf{A}$ непрерывен, за исключением поверхности, несущей двойной поверхностный ток (продольно намагниченной поверхности при $J_\tau=\infty$), на которой компонента A_τ терпит разрыв.

Принимая во внимание (1.74) и (1.80) и полагая $\text{div}\,\mathbf{A}=0$, получаем из (5.39) вместо (5.19) систему уравнений.

$$\text{I. rot}\,\mathbf{B}=\mu_0(\mathbf{j}+\mathbf{j}'),\quad \text{II. div}\,\mathbf{B}=0. \qquad (5.40)$$

[1] Аналогичный переход был сделан более детально (в § 1 главы третьей) от поверхностных (связанных) масс к объемным (связанным) массам.

Согласно уравнениям (5.40) поле **B** не имеет источников (линии индукции нигде не обрываются); оно является чисто вихревым; его возбудители (вихревые линии) находятся там, где располагаются обычные (макроскопические) или молекулярные токи и плотность этих возбудителей (густота вихревых линий) пропорциональна суммарной плотности этих токов.

III. **Магнитный аналог вектора D.** Выше вместо неощутимых непосредственно молекулярных токов ввели векторы $\mathbf{j}'$ и $\mathbf{i}'$, которые являются функциями макроскопически воспринимаемой нами намагниченности магнетика **J** (магнитного момента единицы объема). Однако намагниченность магнетика зависит от поля, в котором он находится и, следовательно, не может быть задана произвольно. Поэтому выражение (5.38′) и уравнения (5.39), (5.40) в общем случае практически не пригодны для расчета поля. Но, подставляя в $(5.40)_1$ $\mathbf{j}'=\operatorname{rot}\mathbf{J}$, получаем

$$\operatorname{rot}\mathbf{B}-\mu_0\operatorname{rot}\mathbf{J}=\mu_0\mathbf{j},\quad \text{т. е.}\quad \operatorname{rot}\left(\frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}-\mathbf{J}\right)=\mathbf{j}. \tag{5.41}$$

Поэтому, обозначая

$$\frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}-\mathbf{J}=\mathbf{H},\ \text{имеем}\ \operatorname{rot}\mathbf{H}=\mathbf{j}. \tag{5.41′}$$

В правую часть уравнения $(5.41′)_2$ входит плотность только макроскопических токов, задаваемая независимо от магнитного поля.

Итак, для того чтобы освободить уравнения магнитного поля постоянного тока от неудобных для нас зависимых возбудителей поля **B**, мы перешли от этого силового поля к вспомогательному полю **H**, вихревые возбудители которого совпадают с независимыми возбудителями поля **B**.

Соотношение $(5.41′)_1$, которым мы здесь ввели вектор **H**, совпадает с соотношением $(3.15)_2$ между векторами **B** и **H**. Но здесь векторы **B** и **H** поменялись ролями. Вектор **H** оказался магнитным аналогом вектора **D**, а вектор **B** — аналогом вектора **E**, что вполне естественно, так как **B** и **E** — силовые векторы.

Правые части уравнений $(5.33)_1$ и $(5.41′)_2$ совпадают. Тем не менее в общем случае поле $\mathbf{B}_{\text{ма}}$ не совпадает с полем $\mu_0\mathbf{H}$; оно является вихревой частью поля $\mu_0\mathbf{H}$. Но в вакууме (при $\mathbf{J}^0=0$) $\mu_0\mathbf{H}=\mathbf{B}_{\text{ма}}=\mathbf{B}$.

§ 5. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ПОСТОЯННОГО ТОКА В ПРИСУТСТВИИ МАГНИТНОЙ СРЕДЫ

1. **Уравнения поля B, H.** Заменяя в (5.40) первое уравнение уравнением $(5.41′)_2$, получаем систему уравнений.

$$\text{I. } \operatorname{rot}\mathbf{H}=\mathbf{j},\quad \text{II. } \mathit{div}\,\mathbf{B}=0, \tag{5.42}$$

свободную от указанного в предыдущем параграфе недостатка системы (5.40).

Дифференциальным уравнениям системы (5.42) соответствуют уравнения магнитного поля в интегральной форме

$$\oint\limits_{l\,[S]} (\mathbf{Hdl}) = I_S, \qquad \oint\limits_{S\,[V]} (\mathbf{BdS}) = 0, \tag{5.43}$$

аналогичные интегральным формам (5.19′) уравнений (5.19) поля **B**.

Интегрируя обе части первого уравнения системы (5.42) по некоторой области V и применяя (1.38), получаем равенство

$$\oint\limits_{S\,[V]} [\mathbf{dSH}] = \int\limits_{V} \mathbf{j}\,dV, \tag{5.44}$$

которое можно рассматривать как иной (векторный) вид интегральной формы уравнения поля **H**.

Выясним, как ведет себя поле у поверхности S (разделяющей области пространства 1 и 2), на которой в общем случае имеется поверхностный ток с плотностью **i**. Построим, как показано, на рис. 10, замкнутую поверхность s, ограничивающую цилиндр $Ц$, поперечным сечением которого является участок ΔS поверхности S, и будем стягивать поверхность s к участку ΔS. Согласно (1.54) и (1.48) при малых размерах участка ΔS

$$\oint\limits_{s} [\mathbf{dSH}] = \Delta S\,\mathrm{Rot}\,\mathbf{H}, \quad \oint\limits_{s} (\mathbf{dSB}) = \Delta S\,\mathrm{Div}\,\mathbf{B}. \tag{5.45}$$

Применяя (5.44) и $(5.43)_2$ к поверхности s и ограничиваемой ею области $Ц$, имеем

$$\oint\limits_{s} [\mathbf{dSH}] = (\mathbf{j}_\tau + \mathbf{j}_n)\,\Delta S h = \mathbf{i}\Delta S, \quad \oint\limits_{s} (\mathbf{BdS}) = 0, \tag{5.45′}$$

где $\mathbf{j}_\tau$ и $\mathbf{j}_n$ — тангенциальная и нормальная компоненты вектора **j** на поверхности S; h — высота цилиндра $Ц$, которая стремится к нулю; $j_n h \to 0$ при $h \to 0$; $\mathbf{j}_\tau h = \mathbf{i}$ в соответствии с (4.7′).

Сопоставляя равенства (5.45) и (5.45′), получаем поверхностные формы уравнений магнитного поля

$$\mathrm{Rot}\,\mathbf{H} = \mathbf{i}, \quad \mathrm{Div}\,\mathbf{B} = 0 \tag{5.46}$$

или

$$[\mathbf{n}(\mathbf{H}^{(2)} - \mathbf{H}^{(1)})] = \mathbf{i}, \quad (\mathbf{n}(\mathbf{B}^{(2)} - \mathbf{B}^{(1)})) = 0 \tag{5.46′}$$

(считая $H_n \neq \infty$ и $B_\tau \neq \infty$), откуда согласно (1.4)

$$H^{(2)}{}_t - H^{(1)}{}_t = ([\mathbf{n}\,\mathbf{t}]\,\mathbf{i}), \quad B^{(2)}{}_n - B^{(1)}{}_n = 0. \tag{5.46″}$$

Таким образом, нормальная компонента вектора **B** непрерывна на любой поверхности, а полная тангенциальная компонента вектора **H** на поверхности S, на которой имеется поверхностный ток, терпит разрыв, равный плотности i этого тока [1].

II. **Уравнение связи.** Уравнения системы (5.42) определяют разные поля: **B** и **H**, ее надо дополнить уравнением связи между этими полями. Соотношение между векторами **B** и **H** задано

[1] При $\mathbf{i} = 0$ равенства (5.46″) совпадают с $(3.41)_{3,4}$.

определением $(5.41')_1$. Но это определение содержит намагниченность $\mathbf{J}^{вр}$, находящуюся в зависимости от намагничивающего поля. Для того чтобы введение вспомогательного вектора $\mathbf{H}$ имело смысл, надо, пользуясь этой зависимостью, ввести вместо вектора $\mathbf{J}$—$\mathbf{J}^0$ параметр магнитной среды.

В дальнейшем изложении необходимо исходить из некоторого определенного соотношения между намагниченностью, намагничивающим полем и средой, причем, исключая из рассмотрения неидеализированные ферромагнетики, можно считать намагниченность линейно зависящей от вектора, характеризующего магнитное поле. В соответствии с изложенным в этой главе следовало бы взять в качестве такого вектора индукцию $\mathbf{B}$. Но придерживаясь магнистостатической традиции, принимают соотношение $(3.18')_2$: $\mathbf{J}=\varkappa\mathbf{H}+\mathbf{J}^0$. Подставляя это соотношение в $(5.41')_1$, получаем $\mathbf{B}=\mu_0(1+\varkappa)\mathbf{H}+\mu_0\mathbf{J}^0$ или (обозначая $1+\varkappa=\mu$) $\mathbf{B}=\mu_0(\mu\mathbf{H}+\mathbf{J}^0)$ в соответствии с $(3.19'')_2$. Итак, имеем уравнение связи

$$\mathbf{H}=\frac{1}{\mu_a}\mathbf{B}-\frac{1}{\mu}\mathbf{J}^0. \tag{5.47}$$

Учтем, что поле $\mathbf{H}$, определяемое выражением (5.47), в отличие от полей $\mathbf{B}/\mu_0$, $\mathbf{B}_{ма}/\mu_0$ не является чисто вихревым:

$$\operatorname{div}\mathbf{H}=-\frac{1}{\mu_0\mu^2}(\mathbf{B}\nabla\mu)-\left(\nabla\frac{\mathbf{J}^0}{\mu}\right); \tag{5.47'}$$

следовательно, в общем случае $\operatorname{div}\mathbf{H}\neq 0$.

III. **Уравнение векторного потенциала.** Подставляя в уравнение связи (5.47) решение $\mathbf{B}=\operatorname{rot}\mathbf{A}$ второго уравнения системы (5.42), получаем для $\mathbf{H}$ выражение

$$\mathbf{H}=\frac{\operatorname{rot}\mathbf{A}}{\mu_a}-\frac{1}{\mu}\mathbf{J}^0=\frac{[\nabla\mathbf{A}]}{\mu_a}-\frac{1}{\mu}\mathbf{J}^0. \tag{5.48}$$

Подстановка этого выражения в первое уравнение системы (5.42) приводит к уравнению

$$\left[\nabla\frac{\nabla\mathbf{A}}{\mu}\right]=\mu_0\mathbf{j}+\mu_0\left[\nabla\frac{\mathbf{J}^0}{\mu}\right] \tag{5.49}$$

для векторного потенциала $\mathbf{A}$ магнитного поля, создаваемого токами и магнитами в присутствии магнитной среды.

Принимая во внимание, что

$$\mu\left[\nabla\left(\frac{1}{\mu}[\nabla\mathbf{A}]\right)\right]=[\nabla[\nabla\mathbf{A}]]+\frac{1}{\mu}[[\nabla\mathbf{A}]\nabla\mu]=\nabla(\nabla\mathbf{A})-$$

$$-\nabla^2\mathbf{A}+\frac{1}{\mu}[[\nabla\mathbf{A}]\nabla\mu]$$

и полагая $\operatorname{div}\mathbf{A}=0$, получаем из (5.49)

$$\nabla^2\mathbf{A}-\frac{1}{\mu}[[\nabla\mathbf{A}]\nabla\mu]=-\mu_a\mathbf{j}-\mu_a\left[\nabla\frac{\mathbf{J}^0}{\mu}\right]. \tag{5.49'}$$

Для поля вне магнитов вторые члены правых частей в (5.49), (5.49′) обращаются в нуль и, следовательно,

$$\left[\nabla \frac{[\nabla \mathbf{A}]}{\mu}\right] = \mu_0 \mathbf{j}, \quad \nabla^2 \mathbf{A} = \frac{1}{\mu}[[\nabla \mathbf{A}] \nabla \mu] - \mu_a \mathbf{j}. \tag{5.49″}$$

IV. **Решение уравнения вектора A.** Рассмотрим применение уравнения (5.49) к решению прямой задачи теории магнитного поля постоянного тока, т. е. к определению потенциала **A** этого поля в области V по заданным в ней функциям $\mathbf{j}(q)$, $\mu(q)$, $\mathbf{J}^0(q)$.

В § 8 первой главы была выведена теорема единственности решения уравнения $(1.96)_2$, указывающая, какие условия достаточны для обеспечения единственности его решения. Для перехода к уравнению (5.49) и к условиям единственности его решения надо положить в уравнении $(1.96)_2$ функцию возбуждения

$$\mathbf{W}^v(a) = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \left[\nabla \frac{\mathbf{J}^0}{\mu}\right]. \tag{5.50}$$

Краевые условия IV и V типов сводятся к заданию тангенциальных компонент $\mathbf{A}_\tau$ и $\mathbf{B}_\tau$ векторов **A** и **B** на границе $S[V]$ области V, а условие IVa означает задание вектора **A** на поверхности $S[V]$.

Ниже (до конца параграфа) будет идти речь о поле вне магнитов и поэтому будем полагать $\mathbf{J}^0=0$.

Если в области V нет особых поверхностей и особых линий, то заданием функций μ и $\mathbf{j}$ в области V и тангенциальной компоненты вектора **A** или вектора **B** на ее границе $S[V]$ магнитное поле **B**, **H** определяется полностью, а поле **A** — с точностью до градиента произвольной скалярной функции, гармонической, если задана дивергенция вектора **A**. Если, кроме того, задана нормальная компонента вектора **A** на поверхности $S[V]$, то этот вектор определяется полностью во всей области V.

Особыми линиями являются линии, по которым заданы линейные токи, а особыми поверхностями — поверхности разрыва функции μ (поверхности раздела между средами с различной магнитной проницаемостью), а также поверхности, на которых заданы поверхностные токи.

Если в области V имеются особые поверхности и линии, то для обеспечения единственности решения надо к краевым условиям добавить условия у этих поверхностей и линий. Для поверхности, на которой $B_\tau \neq \infty$, такими условиями будут условия сопряжения в (1.124′). Согласно $(5.46′)_1$ и сказанному выше (разд. II § 4) о непрерывности вектора **A** в этих условиях следует положить

$$\mathbf{N}_{12}=0, \quad \mathbf{P}_{12}=\mu_0 \mathbf{i}, \tag{5.51}$$

после чего они принимают вид

$$[\mathbf{n}\mathbf{A}^{(2)}] = [\mathbf{n}\mathbf{A}^{(1)}], \quad \frac{1}{\mu_2}[\mathbf{n}[\nabla \mathbf{A}^{(2)}]] - \frac{1}{\mu_1}[\mathbf{n}[\nabla \mathbf{A}^{(1)}]] = \mu_0 \mathbf{i}. \tag{5.51′}$$

Таким образом, условия сопряжения на поверхности S сводятся к требованию непрерывности тангенциальной компоненты[1] вектора $\mathbf{A}$ и разрыва, равного $([\mathbf{n}\,\mathbf{t}]i)$, тангенциальной компоненты H_t вектора $\mathbf{H}$ [см. (5.46″)]. Если на поверхности S нет поверхностного тока, то условия сопряжения сводятся к непрерывности тангенциальных компонент векторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{H}$.

Условие у особой линии (у линейного тока) получается в виде предельного выражения из $(5.43)_1$ подстановкой $I_S=I$ и стягиванием контура l к точке особой линии [см. (5.54), (5.57)].

§ 6. ПОЛЕ В ОДНОРОДНОЙ МАГНИТНОЙ СРЕДЕ

Если в области V $\nabla\mu=0$ и $\mathbf{J}^0=0$, то в ней система (5.42) и уравнение (5.49′) принимают следующий вид

$$\text{I. } \operatorname{rot}\frac{\mathbf{B}}{\mu}=\mu_0\mathbf{j}, \quad \text{II. } \operatorname{div}\frac{\mathbf{B}}{\mu}=0, \ \nabla^2\frac{\mathbf{A}}{\mu}=-\mu_0\mathbf{j}, \tag{5.52}$$

где

$$\frac{\mathbf{B}}{\mu}=\operatorname{rot}\frac{\mathbf{A}}{\mu}, \quad \operatorname{div}\frac{\mathbf{A}}{\mu}=0. \tag{5.52′}$$

Правые части уравнений (5.52) и уравнений (5.19), (5.18′) совпадают. Однако из идентичности возбудителей, находящихся в области V, не следует идентичность полей в этой области, так как возбудители, находящиеся вне ее, могут не совпадать. Поэтому из указанного совпадения правых частей не следует, что поля $\mathbf{B}/\mu$ и $\mathbf{A}/\mu$ можно определять в области V по формулам (5.11)—(5.13) и $(5.14)_2$, (5.14′), справедливым для полей $\mathbf{B}$ и $\mathbf{A}$ в вакууме.

I. **Поле в неограниченной однородной среде.** Если условия $\nabla\mu=0$ и $\mathbf{J}^0=0$ выполняются во всем пространстве, то всюду справедливы равенства (5.52) и (5.52′), а из этого следует, что для полей $\mathbf{B}/\mu$ и $\mathbf{A}/\mu$ справедливы выражения, полученные для $\mathbf{B}$ и $\mathbf{A}$ в § 2. Поэтому для векторов $\mathbf{B}$ и $\mathbf{A}$ в случае неограниченной однородной среды при отсутствии магнитов применимы указанные выражения, умноженные на μ. Таким образом, в неограниченной однородной среде (при $\mathbf{J}^0=0$)

$$4\pi\,\mathbf{H}(a)=\int_V\frac{[\mathbf{j}\mathbf{L}_{qa}]}{L^3_{qa}}\,dV+\int_S\frac{[\mathbf{i}\mathbf{L}_{qa}]}{L^3_{qa}}\,dS+\sum_k I_k\oint_{l_k}\frac{[\mathbf{dl}\mathbf{L}_{qa}]}{L^3_{qa}}, \tag{5.53}$$

$$\mathbf{B}(a)=\mu_0\mu\mathbf{H}(a)=\operatorname{rot}\mathbf{A}(a), \tag{5.53′}$$

$$\frac{4\pi}{\mu_0\mu}\mathbf{A}(a)=\int_V\frac{\mathbf{j}\,dV}{L_{qa}}+\int_S\frac{\mathbf{i}\,dS}{L_{qa}}+\sum_k I_k\oint_{l_k}\frac{\mathbf{dl}}{L_{qa}}. \tag{5.53″}$$

В § 3 предполагалось, что во всем пространстве $\mu=1$. Из изложенного выше следует, что формулы, полученные в разд. 1 § 3 для магнитных полей симметричных токов, применимы так-

[1] Фактически обычно оказывается непрерывным вектор $\mathbf{A}$, так как $\operatorname{Div}\mathbf{A}=0$

же в случае неограниченной однородной магнитной среды, но с оговоркой о необходимости умножения на μ правых частей (5.22′), (5.22″), $(5.26)_2$, (5.27). Очевидно, что это справедливо и тогда, когда в пространстве имеются нарушения однородности среды, если они находятся на достаточно больших расстояниях от области наблюдения поля и от токов, поле которых заметно в ней.

В частности, если в окрестности элемента $I\mathbf{dl}$ линейного тока магнитная среда однородна, то в точке a, приближающейся к средней точке q этого элемента, имеем согласно (5.27)

$$H(a) \to \frac{I}{2\pi r} \text{ при } r \to 0, \tag{5.54}$$

где r — расстояние от точки q до точки a, взятой в плоскости, нормальной к dl и проходящей через точку q.

II. **Нарушения однородности среды, не искажающие поля.** Изменения μ только поперек поля или только по полю не искажают поля, не меняют формы его векторных линий сравнительно с полем, создаваемым в вакууме теми же токами и определяемым формулами § 2 и 3. Объясняется это упрощением уравнений поля. При постоянстве μ по полю $(\mathbf{B}\nabla\mu)=0$ и, следовательно, $\operatorname{div}\mathbf{B}=\mu_a \operatorname{div}\mathbf{H}$, поэтому из $(5.42)_2$ имеем $\operatorname{div}\mathbf{H}=0$, и система уравнений для $\mu_0\mathbf{H}$ получается такой же как в вакууме. При постоянстве μ поперек поля $[\mathbf{H}\nabla\mu]=0$ и, следовательно, $\operatorname{rot}\mathbf{B}=\mu_a\mathbf{j}$, поэтому система уравнений для $\mathbf{B}$ получается такой же, как в неограниченной однородной среде.

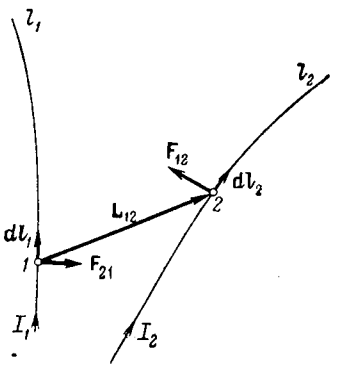
Пусть заданное поле $\mathbf{j}$ отличается четной цилиндрической симметрией относительно оси z системы r, φ, z. Векторные линии такого поля в вакууме являются окружностями с общей осью по оси z. Это позволило нам получить для расчета поля простую формулу $(5.26)_2$. Замена вакуума средой, симметричной относительно оси z, т. е. средой с проницаемостью $\mu=\mu(r, z)$, например кусочно-однородной средой с поверхностями раздела $r=f(z)$, $z=\text{const}$, $r=\text{const}$, очевидно, не вызывает нарушения симметрии поля. Поэтому $\mathbf{H}=\mathbf{1}_\varphi H_\varphi$,

$$H_\varphi = \frac{I_S(r, z)}{2\pi r}, \quad B_\varphi = \mu_0\mu(r, z)\frac{I_S(r, z)}{2\pi r}. \tag{5.55}$$

Допустим теперь, что $\mu=\mu(\varphi)$ (например, кусочно-однородная среда с поверхностями раздела в виде полуплоскостей $\varphi=\text{const}$). Векторные линии в такой, несимметричной относительно оси z среде, остаются окружностями с той же осью, а все сечения каждой векторной трубки одинаковы, и, следовательно, согласно $(5.42)_2$, $(5.46)_2$ значение B не зависит от φ. Поэтому из $(5.55)_2$ интегрированием по векторной линии получаем

$$\frac{2\pi r}{\mu_0} B_\varphi(r, z) = \int_S \mu(\varphi)(\mathbf{jdS}) = \int_0^r r j_z(r, z) \int_0^{2\pi} \mu(\varphi)\, d\varphi dr =$$

Рис. 50. Взаимодействие линейных токов



$$= 2\pi\mu_{ср}\int_0^r r j_z(r,\ z)\,dr = \mu_{ср}\int_S (\mathbf{j}\,d\mathbf{S}),$$

где

$$\mu_{ср} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mu(\varphi)\,d\varphi \qquad (5.56)$$

— среднее по φ значение функции $\mu(\varphi)$. Таким образом, аналогично (5.26), имеем

$$B(r,\ z) = \frac{\mu_0\mu_{ср}}{2\pi r} I_S(r,\ z),\quad H(r,\ \varphi,\ z) = \frac{\mu_{ср}}{2\pi\mu(\varphi)\,r} I_S(r,\ z) \qquad (5.57)$$

(см. [2], стр. 298—300) [1].

III. **Взаимодействие токов.** В неограниченной однородной магнитной среде элемент линейного тока $I\mathbf{dl}$ согласно (5.53), (5.53′) создает в точке a магнитное поле

$$\mathbf{dB}\ (a) = \frac{\mu_0\mu I}{4\pi}\,\frac{[\mathbf{dl}\mathbf{L}_{qa}]}{L^3_{qa}}. \qquad (5.58)$$

где q — средняя точка отрезка dl.

Если $I_1\mathbf{dl}_1$ и $I_2\mathbf{dl}_2$ — расположенные в неограниченной однородной магнитной среде элементы токов I_1 и I_2, то согласно (5.1) магнитное поле, создаваемое элементом тока $I_1\mathbf{dl}_1$ в точке 2, действует на элемент тока $I_2\mathbf{dl}_2$ (рис. 50) с силой

$$\mathbf{F}_{12} = I_2[\mathbf{dl}_2\mathbf{B}_{12}], \qquad (5.58′)$$

где в соответствии с (5.58)

$$\mathbf{B}_{12} = \frac{\mu_0\mu I_1}{4\pi L^3_{12}}[\mathbf{dl}_1\mathbf{L}_{12}], \qquad (5.58″)$$

следовательно,

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{\mu_0\mu I_1 I_2}{4\pi L^3_{12}}[\mathbf{dl}_2[\mathbf{dl}_1\mathbf{L}_{12}]]. \qquad (5.59)$$

Иначе можно сказать, что $\mathbf{F}_{12}$ — сила, с которой элемент тока $I_1\mathbf{dl}_1$ действует на элемент тока $I_2\mathbf{dl}_2$.

При произвольном взаимном расположении элементов dl_1 и dl_2 $F_{21} \neq F_{12}$. Если, например, точка 2 лежит на прямой l_1, на которой расположен элемент dl_1, то $[\mathbf{dl}_1\mathbf{L}_{12}] = 0$ и, следовательно, $\mathbf{F}_{12} = 0$; что же касается силы $\mathbf{F}_{21}$, то, если элемент $\mathbf{dl}_2$ не коллинеарен элементу $\mathbf{dl}_1$, она отлична от нуля. Но взаимодействие отдельно взятых участков токовых цепей является нереальным.

[1] В соответствии с (5.57) следует в (5.27′) и (5.27″) вместо μ_0 подставить $\mu_{ср}\mu_0$, а при переходе от $\mathbf{B}$ к $\mathbf{H}$ — $\mu_{ср}/\mu(\varphi)$.

Что же касается токовых цепей, взятых в целом, то силы взаимодействия, получающиеся из формул (5.1) и (5.58) интегрированием, удовлетворяют равенству $\mathbf{F}_{21}=-\mathbf{F}_{12}$.

Легко видеть, что силы взаимодействия линейных токов, расположенных в одной плоскости, лежат в этой плоскости. Коллинеарные токи взаимно притягиваются, если они параллельны, и отталкиваются, если они антипараллельны.

От выражений для сил взаимодействия линейных токов нетрудно перейти к выражениям для сил взаимодействия объемных и поверхностных токов.

В общем случае, когда магнитная среда не всюду однородна, формула (5.59) не справедлива, так как в общем случае не верны выражения (5.58) и (5.58″) для $\mathbf{dB}(a)$ и $\mathbf{B}_{12}$.

IV. **Замечания.** К сказанному о влиянии магнитной среды добавим следующее.

1. Из изложенного в третьей главе и в § 4 и 5 этой главы следует, что влияние магнитной среды на магнитное поле, создаваемое токами или магнитами в какой-либо области V, даже при условии, что в ней нет ни токов, ни магнитов и среда в ней однородна ($\nabla\mu=0$ или даже $\mu=1$), в общем случае может быть очень сложным. Оно может иметь различный характер в зависимости от характера распределения токов, магнитов и среды в пространстве (вне области V). Тем более это верно для области V, в которой находятся токи или магниты.

2. Следует помнить, что в общем случае (когда не всюду $\nabla\mu=0$) поле $\mathbf{H}=\mathbf{B}/\mu_0\mu$ (вне магнитов) так же, как поле $\mathbf{B}$ зависит от магнитной среды, от функции $\mu(q)$, определяющей распределение проницаемости среды в пространстве. Нельзя считать, что поле $\mathbf{H}$ в присутствии магнитной среды (не всюду однородной) — это магнитное поле, которое мы имели бы в отсутствии этой среды, т. е. поле, определяемое выражениями для $\mathbf{H}$, полученными во второй главе и в § 2, 3 этой главы.

3. Поле $\mathbf{H}$ не зависит от проницаемости среды μ только в исключительном случае неограниченной однородной среды, т. е. когда во всех точках пространства (включая области, занятые магнитами, токами, электромагнитами, с помощью которых создают магнитное поле) проницаемость μ имеет одно и то же значение.

4. На достаточно больших расстояниях от мест нарушения однородности среды (а также в некоторых более сложных частных случаях) можно практически применять для определения поля формулы, справедливые для неограниченной однородной среды (или несущественно отличающиеся от них). Но при экспериментальном изучении поля даже в таких условиях может возникнуть осложнение в связи с нарушением однородности среды применяемой аппаратурой.

5. Сравнивая $(3.40)_2$ и (5.59), видим, что в неограниченной однородной среде магнитные массы аналогично электрическим зарядам взаимодействуют с силой, обратно пропорциональной проницаемо-

сти среды, а электрические токи взаимодействуют с силой, прямо пропорциональной μ. Между тем в соответствии с изложенным в этой главе фактически вазимодействие магнитных полюсов должно свестись к взаимодействию молекулярных токов, носителями которых являются магниты. Аналогичное несоответствие замечаем при сравнении выражений для поля $\mathbf{H}$, создаваемого токами и магнитными массами в неограниченной однородной среде. Согласно $(3.38)_2$ поле $\mathbf{H}$, создаваемое магнитными массами, обратно пропорционально μ, а в соответствии с (5.53) поле $\mathbf{H}$, создаваемое токами в неограниченной однородной среде, не зависит от μ. Эти несоответствия связаны с устаревшей, но принятой по традиции редакцией формулы $(3.18')_2$, выражающей зависимость намагниченности от магнитного поля. Отклоняясь от этой традиции, следует считать временную намагниченность пропорциональной вектору $\mathbf{B}$, а не $\mathbf{H}$.

6. Удобно положить вместо $(3.18')_2$

$$\mathbf{J} = \varkappa'\mathbf{B} + \mathbf{J}^{\Delta} \tag{5.60}$$

где $\varkappa' = \dfrac{\varkappa}{\mu_a} = \dfrac{4\pi\alpha_H}{\mu_0\mu}$.

а $\mathbf{J}^{\Delta}$ — значение $\mathbf{J}$ при $\mathbf{B}=0$ (см. [17], с. 333—335). В соответствии с $(3.15)_2$ имеем вместо $(3.19'')_2$

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \varkappa'\mathbf{B} + \mathbf{J}^{\Delta}), \tag{5.61}$$

откуда $\mathbf{B} = \mu_a (\mathbf{H} + \mathbf{J}^{\Delta})$.

Различие между формулами $(3.19'')_2$ и $(5.61)_2$ исчезает при $\mathbf{J}^{\Delta}=\mathbf{J}^0=0$, следовательно, оно касается только поля внутри тел постоянных магнитов. Для пространства вне этих тел остаются справедливыми формулы, полученные в третьей главе.

В связи с переходом от $(3.19'')_2$ к $(5.61)_2$ можно видоизменить формулы $(3.40)_2$ и $(3.38)_2$ так, чтобы устранить несоответствия, отмеченные в замечании 5.

Действительно, из $(5.61)_2$ имеем для однородной среды

$$\operatorname{div}\mathbf{H} = -\operatorname{div}\mathbf{J}^{\Delta}, \quad \text{т. е.} \quad \operatorname{div}\mathbf{H} = \delta^{\Delta}, \tag{5.62}$$

где $\delta^{\Delta} = -\operatorname{div}\mathbf{J}^{\Delta}$,

аналогично $(3.12')_1$. Сравнивая $(5.62)_2$ с $(3.21')_2$ (при $\nabla\mu=0$), видим, что

$$\delta^0 = \mu\delta^{\Delta}, \quad m^0 = \mu m^{\Delta}, \quad \sigma^0 = \mu\sigma^{\Delta}, \quad \ldots, \tag{5.63}$$

где δ^{Δ}, m^{Δ}, σ^{Δ}, ... — величины, аналогичные δ^0, m^0, σ^0, ... Подставляя (5.63) в $(3.38)_2$ и $(3.40)_2$, получаем

$$\mathbf{H}(a) = \frac{m_q^{\Delta}}{4\pi L^3_{qa}}\mathbf{L}_{qa}, \quad \mathbf{F}_{qa} = \frac{\mu_0\mu m_q^{\Delta} m_a^{\Delta}}{4\pi L^3_{qa}}\mathbf{L}_{qa}. \tag{5.64}$$

Согласно этим формулам в неограниченной однородной магнитной среде поле $\mathbf{H}$ не зависит от μ, а сила взаимодействия точечных масс пропорциональна μ, как и должно быть по аналогии с (5.53) и (5.59).

Глава шестая
Переменное электромагнитное поле

§ 1. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

Электрическое поле **E**, **D** и магнитное поле **B**, **H** рассматривались в предыдущих главах как два отдельных поля. Но, как будет показано ниже, в общем случае между этими полями существует тесная связь. Поэтому принято называть совокупность полей **E**, **D** и **B**, **H** электромагнитным полем и считать, что это поле состоит из электрической и магнитной компонент (составляющих).

Собрав уравнения, выведенные выше для полей **E**, **D** и **B**, **H**, получим систему уравнений постоянного электромагнитного поля.

$$\text{I. } \operatorname{rot}\mathbf{H}=\mathbf{j},\ \text{II. } \operatorname{rot}\mathbf{E}=0,$$

$$\text{III. } \operatorname{div}\mathbf{B}=0,\ \text{IV. } \operatorname{div}\mathbf{D}=\delta_{\text{свб}}, \tag{6.1}$$

в которой все величины являются функциями точки a, но не зависят от времени t. Взяв производную div от обеих частей уравнения $(6.1)_{\text{I}}$, получаем $\operatorname{div}\mathbf{j}=0$. Это — уравнение $(4.17)_{\text{I}}$, полученное в четвертой главе исходя из постулата сохранения количества электричества, присоединяют к уравнениям $(6.1)_{\text{II,IV}}$ электрического поля. Систему (6.1) дополняют уравнениями связи (3.19″), (4.32).

Уравнения $(6.1)_{\text{II,IV}}$ и $(4.17)_{\text{I}}$ не содержат магнитных величин: они позволяют определить электрическое поле независимо от магнитного, а рассчитав поле **E**, можно перейти к полю $\mathbf{j}=\gamma(\mathbf{E}+\mathbf{E}^{\text{стр}})$. Подставив полученную функцию **j** в уравнение $(6.1)_{\text{I}}$, имеем для определения магнитного поля систему уравнений $(6.1)_{\text{I,III}}$, в которой неизвестными являются только магнитные величины **B** и **H**.

Будем впредь, как правило, считать, что величины, характеризующие электромагнитное поле и определяющие его возбудители, зависят не только от положения точки a, но также от времени t, т. е. полагать, что $\mathbf{B}=\mathbf{B}(a, t)$, $\mathbf{E}=\mathbf{E}(a, t)$, $\mathbf{H}=\mathbf{H}(a, t)$, $\mathbf{D}=\mathbf{D}(a, t)$, $\mathbf{j}=\mathbf{j}(a, t)$, $\delta=\delta(a, t)$, $\mathbf{E}^{\text{стр}}=\mathbf{E}^{\text{стр}}(a, t)$ и т. д. Но среду будем по-прежнему считать не меняющейся со временем: $\varepsilon=\varepsilon(a)$, $\mu=\mu(a)$, $\gamma=\gamma(a)$. Постоянные магниты (и ферромагнетики) исключим из рассмотрения, т. е. будем полагать, что всюду $\mathbf{J}^0=0$, $\mathbf{B}=\mu_a\mathbf{H}$.

Каждому установившемуся распределению возбудителей поля (токов, зарядов) соответствует электромагнитное поле, определяемое по формулам, справедливым для постоянного электромагнитного поля, и удовлетворяющее системе (6.1). Но каким является это поле в процессе изменения его возбудителей? Наиболее простым было бы предположение, что изменение возбудителей

всюду вызывает такое же и синхронное изменение электромагнитного поля. Это означало бы, что для каждого отдельного мгновения для переменного электромагнитного поля справедливы все формулы, полученные для постоянного электромагнитного поля, и, в частности, система уравнений[1] (6.1). Но опыт показывает, что фактически в общем случае приведенное предположение не соответствует действительности. В переменном электромагнитном поле, как будет показано ниже, наблюдаются явления (ток смещения и электромагнитная индукция), не согласующиеся с системой (6.1) и заставляющие заменить в ней уравнения $(6.1)_{I,II}$ уравнениями Максвелла.

I. **Ток смещения.** Как уже было отмечено, из (6.1), следует что $\operatorname{div}\mathbf{j}=0$, а согласно (4.5) в переменном поле $\operatorname{div}\mathbf{j}=-\dot{\delta}_{\text{свб}}$. Неравенство нулю дивергенции непостоянного поля $\mathbf{j}$ вполне понятно, так как токовые линии в цепи переменного тока могут обрываться. Такие обрывы получаются, например, на обкладках конденсатора в цепи переменного тока.

На рис. 51,*а* схематически представлен такой почти замкнутый контур l_I с током I и показан контур l^α, который можно считать сцепленным с токовым контуром (если отвлечься от неполной замкнутости контура l_I). На рисунке изображены также опирающиеся на контур l^α поверхности S' и S'', из которых вторая проведена через разрыв цепи, т. е. между обкладками конденсатора. Через поверхности S' и S'' проходят токи $I'=I$ и $I''=0$. Но S' и S'' опираются на один и тот же контур l^α и, следовательно, согласно интегральной форме $(5.43)_I$ уравнения $(6.1)_I$ потоки I' и I'' вектора $\mathbf{j}$ должны иметь одно и то же значение, равное циркуляции вектора $\mathbf{H}$ по l^α.

Устранить указанное противоречие можно, допустив, что в разрыве цепи, т. е. в зазоре между обкладками конденсатора, имеем явление, аналогичное электрическому току в том смысле, что оно, так же как ток, порождает магнитное поле. По анало-

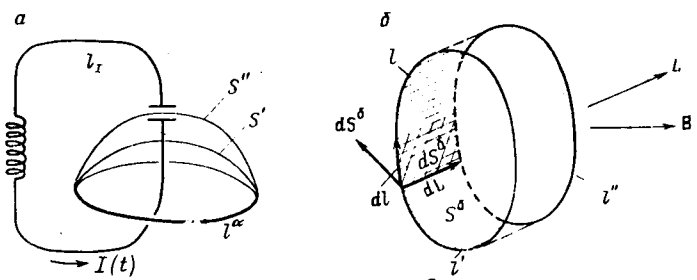


Рис. 51. Построения, поясняющие явления тока смещения и электромагнитной индукции.

а — почти замкнутая цепь тока (замкнутая конденсатором); поверхности S' и S'' опираются на контур l^α; *б* — перемещение элемента $\mathbf{dl}$ контура l по направлению L в поле $\mathbf{B}$

[1] Такое электромагнитное поле будем называть квазипостоянным. Часто применяемый термин «квазистатическое поле» нельзя считать удачным потому, что в статическом поле $\mathbf{j}=0$ и нет магнитного поля тока.

гии с током назовем это явление ток смещения[1] и обозначим его $I_{см}$. В отличие от него будем называть обычный ток I током проводимости.

II. **Первое уравнение Максвелла.** Попытаемся исправить уравнение $(6.1)_I$, прибавив к его правой части некоторый вектор $\mathbf{X}$:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=\mathbf{j}+\mathbf{X}. \tag{6.2}$$

Из (6.2) получаем $\operatorname{div}\mathbf{j}=-\operatorname{div}\mathbf{X}$, поэтому для согласования уравнения (6.2) с (4.5) надо положить $\operatorname{div}\mathbf{X}=\delta_{свб}$. Но из уравнения $(6.1)_{IV}$ следует, что $\delta_{свб}=\operatorname{div}\mathbf{D}$, т. е. $\operatorname{div}\mathbf{X}=\operatorname{div}\mathbf{D}$, чему удовлетворим, приняв $\mathbf{X}=\mathbf{D}$. Следовательно, указанное выше противоречие устраняется прибавлением к правой части $(6.1)_I$ слагаемого $\dot{\mathbf{D}}$. Таким образом, вместо $(6.1)_I$ получаем первое уравнение Максвелла

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=\mathbf{j}+\dot{\mathbf{D}}, \tag{6.3}$$

согласно которому поле вектора $\dot{\mathbf{D}}$, так же как поле вектора $\mathbf{j}$, создает магнитное поле. Вектор $\mathbf{D}$ будем называть плотностью тока смещения.

Введя обозначения

$$\mathbf{j}^{см}=\dot{\mathbf{D}},\quad \mathbf{j}^{плн}=\mathbf{j}+\mathbf{j}^{см}=\mathbf{j}+\dot{\mathbf{D}} \tag{6.4}$$

для плотностей тока смещения и полного тока, имеем

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=\mathbf{j}+\mathbf{j}^{см}=\mathbf{j}^{плн}. \tag{6.3'}$$

Интегрируя (6.3') по поверхности S, ограниченной контуром $l[S]$, и применяя теорему Стокса (1.23), получаем интегральную форму первого уравнения Максвелла:

$$\oint\limits_{l[S]}(\mathbf{Hdl})=I_S+I_{Sсм}=I_{S\,плн}, \tag{6.3''}$$

где I_S, $I_{Sсм}$, $I_{Sплн}$ — потоки векторов $\mathbf{j}$, $\mathbf{j}^{см}$, $\mathbf{j}^{плн}$ через поверхность S. В частности,

$$I_{S\,см}=\int\limits_S(\mathbf{j}^{см}\,\mathbf{dS})=\int\limits_S(\dot{\mathbf{D}}\mathbf{dS})=\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_S(\mathbf{DdS}). \tag{6.3'''}$$

Равенство (6.3'') выражает закон полного тока. При $\dot{\mathbf{D}}=0$, что всегда справедливо для постоянного поля, равенство (6.3'') принимает вид $(5.43)_I$.

Доказывая существование тока смещения, мы исходили из рассмотрения почти замкнутой цепи, разрыв которой представляет собой малый зазор между обкладками конденсатора (см. рис. 51,*а*). Иной характер имеет поле вектора $\mathbf{j}^{см}$ в цепи с развернутой емкостью (антенна); в такой цепи ток смещения занимает обширную область пространства. Но полученные выше фор-

[1] В диэлектрике, заполняющем зазор между обкладками конденсатора, при изменении поля $\mathbf{D}$ происходит взаимное смещение положительных и отрицательных зарядов, получается движение зарядов — электрический ток. Но ток смещения имеем и при отсутствии диэлектрика в разрыве цепи.

мулы фактически справедливы для любой цепи, включая незамкнутую (для тока проводимости). В любом случае при переменном (во времени) потоке вектора **D** через поверхность S имеем по контуру $l[S]$ отличную от нуля циркуляцию вектора **H**.

В общем случае в одном и том же месте могут существовать токи обоих видов: проводимости и смещения. В непроводящей среде $\gamma=0$, $\mathbf{j}=0$ и, следовательно, $\mathbf{j}^{\text{пл}}=\mathbf{j}^{\text{см}}$.

Взяв дивергенцию от обеих частей (6.3′), получим

$$\operatorname{div}\mathbf{j}^{\text{пл}}=0, \text{ т. е. } \operatorname{div}\mathbf{j}^{\text{см}}=-\operatorname{div}\mathbf{j}=\dot{\delta}_{\text{своб}} \tag{6.5}$$

и соответственно

$$\oint_{S[V]}(\mathbf{j}^{\text{пл}}\,d\mathbf{S})=0, \text{ т. е. } \oint_{S[V]}(\mathbf{j}^{\text{см}}\,d\mathbf{S})=-\oint_{S[V]}(\mathbf{j}\,d\mathbf{S})=\dot{e}_{V\,\text{своб}}. \tag{6.5′}$$

Равенствам (6.5) соответствуют поверхностные соотношения

$$\operatorname{Div}\mathbf{j}^{\text{пл}}=0, \ \operatorname{Div}\mathbf{j}^{\text{см}}=-\operatorname{Div}\mathbf{j}=\dot{\sigma}_{\text{своб}}. \tag{6.5″}$$

Эти соотношения имеем, например, на внутренних (обращенных к зазору) поверхностях обкладок конденсатора, показанного на рис. 51,*а*. В зазоре конденсатора линии тока проводимости сменяются линиями тока смещения.

Таким образом, линии тока проводимости и тока смещения, взятые по отдельности, могут быть разомкнуты, а линии полного тока — всегда замкнуты. Разомкнутый ток проводимости замыкается током смещения.

III. **Электромагнитная индукция.** Допустим, что по замкнутому контуру $l[S]$ согнута тонкая проводящая нить — проволока. Опытом установлено, что при изменении потока Ψ_S магнитной индукции через поверхность S, опирающуюся на контур $l[S]$, в нем (точнее, в проволоке) возникает электрический ток

$$I_{\text{эми}}=-\dot{\Psi}_S/R=\frac{-1}{R}\frac{\partial}{\partial t}\int_S(\mathbf{B}d\mathbf{S}), \tag{6.6}$$

где R — сопротивление контура (проволоки). Сравнивая (6.6) с (4.34′), заключаем, что в контуре l действует э. д. с.

$$\mathscr{E}_{\text{эми}}=-\dot{\Psi}_S=-\frac{\partial}{\partial t}\int_S(\mathbf{B}d\mathbf{S}), \tag{6.6′}$$

аналогичная напряжениям $\mathscr{E}$ и $\mathscr{E}^{\text{стр}}$ полей **E** и $\mathbf{E}^{\text{стр}}$. Ток $I_{\text{эми}}$ и э. д. с. $\mathscr{E}_{\text{эми}}$ называют индукционными, а их возникновение под действием меняющегося магнитного потока — электромагнитной индукцией. Формула (6.6′) выражает закон Фарадея — Максвелла — Ленца. Опыт показывает, что для справедливости этой формулы несущественны обстоятельства, которыми обусловлено изменение Ψ_S со временем. Поток Ψ_S может меняться из-за перемещения контура в поле **B** или вследствие изменения магнитной индукции **B**, вызванного изменением или перемещением токов (или магнитов), создающих магнитное поле. Для случая, когда контур l движется в магнитном поле, фор-

мула (6.6′) следует из выражения (5.9′), определяющего силу, с которой поле **B** действует на движущийся заряд (см. ниже), а переход к случаю изменения поля **B** со временем получается как обобщение, подтверждаемое опытом.

Меняя в (6.6′) порядок дифференцирования и интегрирования, получаем

$$\mathscr{E}_{\text{эми}} = -\int_S (\dot{\mathbf{B}}\,d\mathbf{S}). \qquad (6.6'')$$

Выведем выражение (6.6′) для напряжения $\mathscr{E}_{\text{эми}}$. Допустим, что тонкое проводящее кольцо со средней линией по контуру l движется в поле **B** по направлению L со скоростью $\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$ (рис. 51,*б*). Тогда согласно (5.9′) на единицу заряда, несомого кольцом, действует сила $[\mathbf{wB}] = \frac{1}{dt}[\mathbf{dLB}]$ с компонентой $[\mathbf{wB}]_l = \frac{1}{dtdl}(\mathbf{dl}\,[\mathbf{dLB}]) = \frac{1}{dtdl}([\mathbf{dldL}]\,\mathbf{B})$. При перемещении контура l на расстояние dL от положения l' до положения l'' он описывает ленту $S^{\text{б}}$, пронизываемую потоком $\Psi^{\text{б}}$ вектора **B**. При этом элемент dl контура l описывает отрезок ленты $S^{\text{б}}$ — площадку $\mathbf{dS}^{\text{б}} = [\mathbf{dl}\,\mathbf{dL}]$ с потоком $d\Psi^{\text{б}} = (\mathbf{dS}^{\text{б}}\mathbf{B}) = ([\mathbf{dl}\,\mathbf{dL}]\mathbf{B})$. Таким образом, компонента $[\mathbf{wB}]_l = \frac{1}{dt}\frac{d\Psi^{\text{б}}}{dl}$, где $\frac{d\Psi^{\text{б}}}{dl}$ — поток через единицу длины ленты $S^{\text{б}}$. Интегрируя по всей ее длине, получаем равенство

$$\oint_l [\mathbf{wB}]_l\,dl = \frac{1}{dt}\Psi^{\text{б}},$$

в котором левая часть — циркуляция вектора $[\mathbf{w}\,\mathbf{B}]$, заставляющего заряды двигаться по контуру l. Эту циркуляцию, аналогичную напряжению $\mathscr{E}^{\text{стр}}$, обозначим $\mathscr{E}_{\text{эми}}$ и выясним смысл полученного для нее выражения.

Пусть S' и S'' — поверхности, опирающиеся на контуры l' и l'', а Ψ' и Ψ'' — потоки, пронизывающие эти поверхности. Совокупность поверхностей S', S'', $S^{\text{б}}$ образует замкнутую поверхность, ограничивающую область V, поэтому $-\Psi' + \Psi'' + \Psi^{\text{б}} = 0$. (Нормаль на S' направлена внутрь области V (по L), поэтому поток Ψ' взят со знаком минус). Следовательно,

$$\Psi^{\text{б}} = \Psi' - \Psi'' = -d\Psi, \quad \frac{1}{dt}\Psi^{\text{б}} = -\dot{\Psi}.$$

Таким образом, в соответствии с (6.6′) имеем

$$\mathscr{E}_{\text{эми}} = \oint_l ([\mathbf{wB}]\,\mathbf{dl}) = -\dot{\Psi}. \qquad (6.6''')$$

Полагая, что для возникновения напряжения $\mathscr{E}_{\text{эми}}$ в кольце важно только отличие от нуля производной Ψ, но не причина изменения Ψ во времени, можно заменить движение кольца в поле **B** движением токов (магнитов), создающих поле **B**, относительно кольца или изменением этих токов (магнитных моментов магнитов). Так мы от (6.6‴) переходим к формулам (6.6), (6.6′), имеющим более общий смысл.

IV. Второе уравнение Максвелла. Формулы (6.6), (6.6′) применимы к любому кольцу, мысленно выделенному из проводящей среды. Следовательно, в такой среде в присутствии магнит-

ного поля, меняющегося во времени, должны возникать индукционные напряжения и токи по замкнутым контурам. Такое явление действительно наблюдается (токи Фуко). Можно предположить, что такие напряжения возникают и в непроводящей среде (и в вакууме), а отсутствие индукционных токов в ней объясняется только ее бесконечно большим удельным сопротивлением. Таким образом, в результате ряда обобщений приходим к выводу, что формула (6.6) справедлива для любого воображаемого замкнутого контура в какой бы то ни было среде.

По аналогии с (4.34″) можно считать, что

$$\mathscr{E}_{\text{эми}} = \oint\limits_{l\,[S]} (\mathbf{E}^{\text{эми}}\mathrm{d}\mathbf{l}), \qquad (6.7)$$

где $\mathbf{E}^{\text{эми}}$ напряженность некоторого индукционного поля, заставляющего электрические заряды двигаться по контуру $l\,[S]$. Сопоставляя (6.7) с (6.6″), получаем

$$\oint\limits_{l\,[S]} (\mathbf{E}^{\text{эми}}\mathrm{d}\mathbf{l}) = -\int\limits_{S} (\dot{\mathbf{B}}\mathrm{d}\mathbf{S}). \qquad (6.8)$$

Рассматривая поле $\mathbf{E}^{\text{эми}}$ как разновидность электрического поля, будем в дальнейшем считать, что в общем случае электрическое поле

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{\text{к}} + \mathbf{E}^{\text{эми}}, \qquad (6.9)$$

где $\mathbf{E}^{\text{к}}$ — кулоново поле, создаваемое электрическими зарядами, а $\mathbf{E}^{\text{эми}}$ — индукционное поле (поле электромагнитной индукции), возникающее при изменении во времени магнитного поля.

В соответствии с $(3.26)_1$ циркуляции вектора $\mathbf{E}^{\text{к}}$, совпадающего в случае постоянного поля с вектором $\mathbf{E}$, равна нулю:

$$\oint\limits_{l\,[S]} (\mathbf{E}^{\text{к}}\mathrm{d}\mathbf{l}) = 0. \qquad (6.8')$$

Что же касается циркуляции вектора $\mathbf{E}$, то согласно (6.8), (6.9), (6.8′) имеем

$$\oint\limits_{l\,[S]} (\mathbf{E}\mathrm{d}\mathbf{l}) = \oint\limits_{l\,[S]} (\mathbf{E}^{\text{к}}\mathrm{d}\mathbf{l}) + \oint\limits_{l\,[S]} (\mathbf{E}^{\text{эми}}\mathrm{d}\mathbf{l}) = -\int\limits_{S} (\dot{\mathbf{B}}\mathrm{d}\mathbf{S}). \qquad (6.10)$$

Применив теорему Стокса (1.23), получим равенство $\int\limits_{S} (\operatorname{rot}\mathbf{E}\,\mathrm{d}\mathbf{S}) = -\int\limits_{S} (\dot{\mathbf{B}}\mathrm{d}\mathbf{S})$. Оно справедливо для любой поверхности S, поэтому из него следует, что

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}. \qquad (6.11)$$

Это второе уравнение Максвелла, согласно которому вокруг мест, в которых меняется магнитное поле, возникают замкнутые линии поля $\mathbf{E}^{\text{эми}}$ — вихревого (индукционного) слагаемого электрического поля $\mathbf{E}$.

V. Дополнения к § 1. 1. В проводящей среде под влиянием вихревого поля $\mathbf{E}^{\text{эми}}$ возникают замкнутые токи, которые называют вихревыми в отличие от других токов, также замкнутых, но возникающих под действием невихревого поля $\mathbf{E}^{\text{к}}$ (при участии поля $\mathbf{E}^{\text{стр}}$)

2. Если при изменении какого-либо вектора во времени соблюдается пропорциональность между его компонентами по любым направлениям, то пространственная ориентация этого вектора не меняется. Его конец перемещается по прямой. При нарушении указанной пропорциональности вектор со временем меняет свою пространственную ориентацию. Каждый из векторов, описывающих

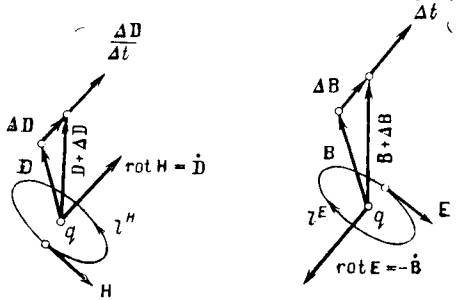


Рис. 52. Векторные линии полей **H** и **E**, образующихся вокруг мест, в которых отличны от нуля соответственно поля **D** и **B**

электромагнитное поле, в общем случае, в соответствии с (2.15), (5.11), (5.12) является суммой элементарных векторов, имеющих различное направление и меняющихся во времени различно. Поэтому векторы **B**, **E**, **H**, **D**, **j**, ... могут со временем менять свою пространственную ориентацию. Конец каждого из этих векторов описывает некоторую кривую, называемую г о д о г р а ф о м. В общем случае это пространственная кривая (двоякой кривизны), которая может иметь весьма сложный вид. Она может сама себя пересекать и может продолжаться, не замыкаясь. Если поле меняется периодически, годограф — замкнутая кривая; в случае гармонически меняющегося поля, о котором будет идти речь в § 6, годограф получается плоским и имеет эллиптическую форму (э л л и п т и ч е с к а я п о л я р и з а ц и я). В частных случаях он может оказаться окружностью или выродиться в отрезок прямой. В первом из этих случаев имеем постоянное по абсолютной величине в р а щ а ю щ е е с я п о л е, а во втором — л и н е й н о-п о л я р и з о в а н н о е п о л е.

3. На рис. 52 показаны (для общего случая) приращения $\Delta\mathbf{D} = \mathbf{D}(t+\Delta t) - \mathbf{D}(t)$ и $\Delta\mathbf{B} = \mathbf{B}(t+\Delta t) - \mathbf{B}(t)$ в точке q и переходы (при $\Delta t \to 0$) к производным $\dot{\mathbf{D}}$ и $\dot{\mathbf{B}}$. Показаны также направления векторов $\text{rot}\,\mathbf{H} = \dot{\mathbf{D}}$ (при $\mathbf{j} = 0$) и $\text{rot}\,\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}$ в точке q. Векторные линии l^{H} и l^{E} образуют правовинтовые системы соответственно с векторами $\dot{\mathbf{D}}$ и $-\dot{\mathbf{B}}$. В общем случае направления векторов $\dot{\mathbf{D}}$ и $\dot{\mathbf{B}}$ не совпадают с направлениями векторов **D** и **B** соответственно.

§ 2. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

I. **Система в общем виде.** Заменяя в системе (6.1) первые два уравнения уравнениями Максвелла (6.3), (6.11), получаем систему уравнений электродинамики:

$$\text{I. } \operatorname{rot}\mathbf{H}=\mathbf{j}+\dot{\mathbf{D}}, \qquad \text{II. } \operatorname{rot}\mathbf{E}=-\dot{\mathbf{B}},$$
$$\text{III. } \operatorname{div}\mathbf{B}=0, \qquad \text{IV. } \operatorname{div}\mathbf{D}=\delta_{\text{свб}}, \tag{6.12}$$

которую называют также системой уравнений Максвелла. В случае постоянного поля $\dot{\mathbf{D}}=0$ и $\dot{\mathbf{B}}=0$, поэтому уравнения $(6.12)_{\text{I,III}}$, (6.3″) и (6.10) принимают вид $(6.1)_{\text{I,II}}$, (3.26) и $(3.24)_1$.

В системе (6.12) в отличие от системы (6.1) величины, характеризующие электрическое и магнитное поля, связаны так, что выделить систему, определяющую одно из этих полей, независимо от другого в общем случае не удается (см. вступление к § 1). Это отражает тесную связь, существующую между электрической и магнитной составляющими электромагнитного поля.

Интегральными формами уравнений Максвелла $(6.12)_{\text{I,II}}$ являются (6.3″), (6.10). Уравнения $(6.12)_{\text{III, IV}}$ и их интегральные формы не отличаются от справедливых для постоянного электромагнитного поля уравнений $(6.1)_{\text{III,IV}}$ и их интегральных форм $(3.27)_{1,2}$.

Без изменения (при переходе от постоянного к переменному полю) остаются уравнения связи

$$\mathbf{D}=\varepsilon_a\mathbf{E},\ \mathbf{B}=\mu_a\mathbf{H},\ \mathbf{j}=\gamma(\mathbf{E}+\mathbf{E}^{\text{стр}}), \tag{6.13}$$

а также поверхностные формы (5.46), (4.38), (3.29) уравнений поля

$$[\mathbf{n}(\mathbf{H}^{(2)}-\mathbf{H}^{(1)})]=\mathbf{i},\ [\mathbf{n}(\mathbf{E}^{(1)}-\mathbf{E}^{(2)})]=[\mathbf{n}\operatorname{grad}^s\mathscr{E}_{12}^{\text{кнт}}], \tag{6.14}$$
$$(\mathbf{n}[\mathbf{B}^{(2)}-\mathbf{B}^{(1)}])=0,\ (\mathbf{n}[\mathbf{D}^{(2)}-\mathbf{D}^{(1)}])=\sigma_{\text{свб}},\ (\mathscr{E}_{12}^{\text{кнт}}=\eta_{12}/\varepsilon_0).$$

В (6.13) — (6.14) величины $\mathbf{E}^{\text{стр}}$, $\mathbf{i}$, $\mathscr{E}^{\text{кнт}}{}_{12}$, η_{12} зависят в общем случае не только от точки a, но также от времени t. Уравнения непрерывности тока (4.17) заменяются уравнениями (4.5), (4.10), (4.4):

$$\operatorname{div}\mathbf{j}=-\dot{\delta}_{\text{свб}},\ \operatorname{Div}\mathbf{j}=-\dot{\sigma}_{\text{свб}},\ \oint\limits_{S[V]}(\mathbf{j}d\mathbf{S})=-\dot{e}_{V\text{ свб}}, \tag{6.15}$$

где $\operatorname{Div}\mathbf{j}$ определяются согласно (4.11).

В этой главе и в предыдущих трех главах показан путь, ведущий от данных опыта до системы уравнений электродинамики. Опираясь на опытную проверку практических выводов из этой системы уравнений, можно ее принять в качестве основного закона электродинамических явлений и рассматривать выведенные выше закономерности электрического и магнитного полей как следствия этого закона.

Так, например, для стационарного поля получаем систему (4.98), полагая в (6.12) производные по времени равными нулю и взяв дивергенцию от $(6.12)_{\text{I}}$. От уравнений $(6.12)_{\text{II}}$, $(6.12)_{\text{IV}}$ переходим последовательно к системе уравнений электростатики (3.24), уравнению $(3.31)_1$, $(3.37)_3$ для потенциала, к решению $(3.39')_1$ уравнения $(3.37)_3$, к выражениям $(3.38')_1$ и $(3.38)_1$ для потенциала

и напряженности поля точечного заряда в неограниченном однородном диэлектрике и, наконец, к закону Кулона (3.41).

Более того, в самой системе уравнений электродинамики последние два уравнения можно рассматривать как следствия первых двух ([16], стр. 19). Действительно, взяв дивергенции обеих частей уравнения $(6.12)_{II}$, получаем $0 = \operatorname{div} \dot{\mathbf{B}} = \frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div} \mathbf{B})$, т. е. $\operatorname{div} \mathbf{B}$ нигде никогда не меняется со временем, поэтому уместно считать, что $\operatorname{div} \mathbf{B}=0$. Аналогично получаем из $(6.12)_I$

$$0 = \operatorname{div} \mathbf{j} + \operatorname{div} \dot{\mathbf{D}} = -\dot{\delta}_{\text{свб}} + \operatorname{div} \dot{\mathbf{D}} = \frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div} \mathbf{D} - \delta_{\text{свб}}),$$

откуда $\operatorname{div} \mathbf{D}=\delta_{\text{свб}}$.

II. **Электромагнитная энергия.** К системе (6.12) присоединяют выражение для электромагнитной энергии W, содержащейся в области V.

Согласно (3.60′)

$$W = \frac{1}{2}\int_V [\varepsilon_a (\mathbf{EE}) + \mu_a (\mathbf{HH})]\, dV = \frac{1}{2}\int_V (\varepsilon_a E^2 + \mu_a H^2)\, dV, \tag{6.16}$$

причем в общем случае следует считать, что $W = W(t)$.

За счет чего может меняться величина W? Согласно (6.16) имеем

$$\dot{W} = \int_V [\varepsilon_a (\mathbf{E}\dot{\mathbf{E}}) + \mu_a (\mathbf{H}\dot{\mathbf{H}})]\, dV = \int_V [(\dot{\mathbf{D}}\mathbf{E}) + (\dot{\mathbf{B}}\mathbf{H})]\, dV \tag{6.17}$$

или в результате подстановки выражений $\dot{\mathbf{D}} = \operatorname{rot} \mathbf{H} - \mathbf{j}$, $\dot{\mathbf{B}} = -\operatorname{rot} \mathbf{E}$ из уравнений Максвелла $(6.12)_{I,III}$

$$\dot{W} = \int_V ([\nabla \mathbf{H}]\, \mathbf{E})\, dV - \int_V (\mathbf{jE})\, dV - \int_V ([\nabla \mathbf{E}]\, \mathbf{H})\, dV.$$

Но согласно $(6.13)_3$ $\mathbf{E} = \rho\mathbf{j} - \mathbf{E}^{\text{стр}}$, следовательно,

$$\dot{W} = \int_V [([\nabla \mathbf{H}]\, \mathbf{E}) - ([\nabla \mathbf{E}]\, \mathbf{H})]\, dV + \int_V (\mathbf{jE}^{\text{стр}})\, dV - \int_V \rho j^2 dV. \tag{6.18}$$

Из (1.133) имеем $([\nabla \mathbf{E}]\mathbf{H}) - ([\nabla \mathbf{H}]\mathbf{E}) = (\nabla [\mathbf{EH}])$.

Поэтому, применяя теорему Остроградского, получаем

$$\int_V [([\nabla \mathbf{H}]\, \mathbf{E}) - ([\nabla \mathbf{E}]\, \mathbf{H})]\, dV = -\int_V \operatorname{div} [\mathbf{EH}]\, dV = -\oint_{S[V]} ([\mathbf{EH}]\, d\mathbf{S}),$$

т. е.

$$\dot{W} = P - Q - \oint_{S[V]} (\mathbf{Y}\, d\mathbf{S}), \tag{6.19}$$

где в соответствии с (4.45)

$$P = \int_V (\mathbf{jE}^{\text{стр}})\, dV \quad \text{и} \quad Q = \int_V \rho j^2 dV \tag{6.20}$$

— работа, совершаемая в области за единицу времени сторонними силами, и джоулево тепло, выделяющееся в этой области за эту же единицу времени, а

$$\mathbf{У}=[\mathbf{EH}]. \tag{6.21}$$

III. **Вектор Умова-Пойнтинга.** Равенство (6.19) определяет баланс энергии в области V за единицу времени. Согласно этому балансу приращение электромагнитной энергии за единицу времени, равное $\dot{W}$, происходит за счет трех явлений, которым соответствуют три члена правой части равенства (6.19). Смысл слагаемых P и Q ясен; они соответствуют превращениям сторонней энергии в электромагнитную и электромагнитной в тепловую. Приращение электромагнитной энергии в области V, определяемое разностью $P—Q$, равно количеству электромагнитной энергии, получающейся в этой области за счет траты в ней сторонней энергии, за вычетом количества электромагнитной энергии, превращающейся в этой области в тепло. Остается выяснить смысл третьего слагаемого в правой части (6.19). Для этого рассмотрим случай, когда в области V $\gamma=0$ и, следовательно, $\mathbf{j}=0$. В этом случае $P=0$, $Q=0$ и, следовательно,

$$\oint\limits_{S[V]} (\mathbf{У}d\mathbf{S}) = -\dot{W}. \tag{6.19'}$$

Согласно (6.19′) имеем в области V убыль или прирост электромагнитной энергии в единицу времени, если поток вектора **У** через границу $S[V]$ соответственно положителен или отрицателен.

Равенство (6.19′) аналогично равенству $(6.15)_3$, в котором вместо изменения количества электромагнитной энергии в области V идет речь об изменении количества электричества в этой области, а вместо потока вектора **У** через поверхность $S[V]$ берется поток вектора **j** через эту поверхность, равный количеству электричества, проходящему через эту поверхность в единицу времени. Таким образом, следует считать, что электромагнитная энергия перемещается и третье слагаемое в выражении (6.19) для $\dot{W}$ соответствует прохождению этой энергии через границу $S[V]$ области V Таким образом приходим к теореме Умова-Пойнтинга, согласно которой через границу $S[V]$ области V ежесекундно проходит количество электромагнитной энергии, определяемое потоком вектора **У** через эту поверхность. Поток вектора **У** через поверхность $S[V]$ представляет собой поток электромагнитной энергии через эту поверхность. В соответствии с этим можно рассматривать вектор **У** как вектор плотности потока электромагнитной энергии, аналогичный вектору плотности электрического тока **j**. Это означает, что направление вектора **У** совпадает с направлением движения электромагнитной энергии, а его абсолютная величина равна количеству этой энергии, проходящему в единицу времени через единичную площадку, нормальную к направлению движения электромагнитной энергии. Вектор **У** называют вектором Умова-Пойнтинга.

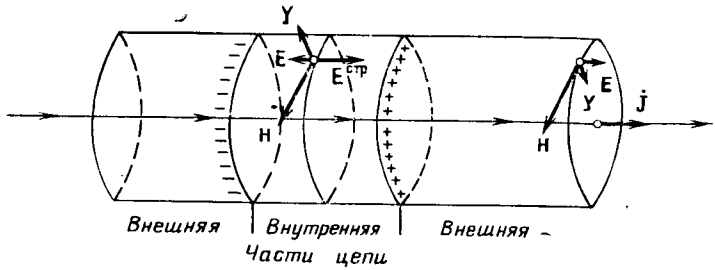


Рис. 53. Направления вектора Умова-Пойнтинга у боковой поверхности цилиндрического участка цепи тока

В случае постоянного поля $\dot{W}=0$ и поэтому

$$\oint\limits_{S\,[V]} (\mathbf{У}\,d\mathbf{S}) = P - Q, \qquad (6.19'')$$

а если $\mathbf{E}^{стр}=0$ в области V, т. е. если она расположена во внешней части цепи (постоянного) тока, то $P=0$ и, следовательно,

$$\oint\limits_{S\,[V]} (\mathbf{У}\,d\mathbf{S}) = -Q. \qquad (6.19''')$$

Определим направление вектора **У** у поверхности кольца с постоянным током: у внешней и внутренней частей цепи (рис. 53). Согласно (5.12) вектор **H** связан с вектором **j** так, что у поверхности кольца всюду вектор [**jH**] направлен внутрь тела кольца. Но направление вектора **j** совпадает с направлением вектора **E** во внешней части кольца и вектора $-\mathbf{E}$ · (вектора $\mathbf{E}^{стр}$, см. в конце разд. I, § 3 главы четвертой) во внутренней части кольца. Поэтому вектор **У** у поверхности внешней части кольца направлен (как [**jH**]) в тело кольца, а у поверхности внутренней части кольца — из тела кольца.

Из сказанного следует, что электромагнитная энергия выходит из внутренней части цепи в окружающее пространство и возвращается из него во внешнюю часть цепи тока. Здесь мы получаем ответ на вопрос, оставленный открытым в разд. V § 3 главы четвертой. Разность $P-Q$, соответствующая области пространства, занимаемой внутренней частью цепи тока, представляет собой долю сторонней энергии, не израсходованную в ней на джоулево тепло. Эта доля энергии в виде электромагнитной энергии транспортируется через пространство, окружающее цепь тока, от ее внутренней части к внешней, где она выделяется в виде тепла.

§ 3. ПОЛЕ В НЕПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ[1]

В непроводящей среде $\mathbf{j}=0$, поэтому если в ней не заданы свободные заряды, то вместо $(6.12)_{I,IV}$ получаем $\operatorname{rot}\mathbf{H}=\dot{\mathbf{D}}$ и

[1] Далее в этой и следующих главах будем, как правило, интересоваться только переменной частью поля и поэтому часто, не оговариваясь, определять поле и его возбудители с точностью до постоянных слагаемых.

$\operatorname{div}\mathbf{D}=0$. Если, кроме того, в изучаемой области V среда однородна (или, короче, если область V однородна), то в ней нет никаких зарядов и $\operatorname{div}\mathbf{E}=0$.

I. Волновые уравнения. Для области V, в которой $\gamma=0$, $\delta_{\text{свб}}=0$, $\nabla\varepsilon=0$, $\nabla\mu=0$, система (6.12) принимает простой симметричный вид

$$\text{I. } \operatorname{rot}\mathbf{H}=\varepsilon_a\dot{\mathbf{E}}, \quad \text{II. } \operatorname{rot}\mathbf{E}=-\mu_a\dot{\mathbf{H}},$$

$$\text{III. } \operatorname{div}\mathbf{H}=0, \quad \text{IV. } \operatorname{div}\mathbf{E}=0. \tag{6.22}$$

Она позволяет получить уравнения отдельно для векторов $\mathbf{H}$ и $\mathbf{E}$. Действительно, взяв производные по времени и роторы от $(6.22)_{\text{I,II}}$, получаем $\operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}}=\varepsilon_a\ddot{\mathbf{E}}$, $\operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}}=-\mu_a\ddot{\mathbf{H}}$, $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{H}=\varepsilon_a\operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}}$, $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E}=-\mu_a\operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}}$. Поэтому $\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{H}-\nabla^2\mathbf{H}=-\varepsilon_a\mu_a\ddot{\mathbf{H}}$, $\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{E}-\nabla^2\mathbf{E}=-\varepsilon_a\mu_a\ddot{\mathbf{E}}$. Таким образом, согласно $(6.22)_{\text{III,IV}}$ получаем для $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ волновые уравнения:

$$\nabla^2\mathbf{H}=\varkappa^2\ddot{\mathbf{H}}, \quad \nabla^2\mathbf{E}=\varkappa^2\ddot{\mathbf{E}}, \quad \text{где } \varkappa=\sqrt{\varepsilon_a\mu_a}. \tag{6.23}$$

Для выяснения характера решений этих уравнений применим их к полям

$$\mathbf{E}=\mathbf{1}_xE_x(z,\,t), \quad \mathbf{H}=\mathbf{1}_yH_y(z,\,t), \tag{6.23'}$$

т. е. к полям $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, лежащим в плоскостях $z=\text{const}$ системы x, y, z и не зависящим от x и y.

II. Распространение электромагнитного поля. Введем обозначение $\eta(z,\,t)$ для любого из полей E_x и H_y в правых частях равенств (6.23′). Для поля $\eta(z,\,t)$ уравнение $(6.23)_{1,2}$ принимает вид

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial z^2}=\varkappa^2\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}. \tag{6.24}$$

Нетрудно убедиться в том, что этому равнению удовлетворяет сумма $f(t-\varkappa z)+g(t+\varkappa z)$, где f и g произвольные функции, дважды дифференцируемые по t и z.

Полагая $g=0$, получаем решение

$$\eta(z,\,t)=f(t-\varkappa z). \tag{6.25}$$

Правая часть равенства (6.25) не изменится, если подставить в нее $z+\Delta z$ и $t+\Delta t$ вместо z и t при условии, что $\Delta t=\varkappa\Delta z$. Следовательно, при таком соотношении между приращениями Δz и Δt имеем

$$\eta(z+\Delta z,\;t+\Delta t)=\eta(z,\,t). \tag{6.25'}$$

Следовательно, если в момент t величина η имеет в плоскости с координатой z некоторое значение $\eta(z,\,t)$, то через промежуток времени $\Delta t=\varkappa\Delta z$ это же значение будет иметь величина η в плоскости $z+\Delta z$. Это означает, что поле η распространяется по направлению оси z со скоростью

$$v=\frac{\Delta z}{\Delta t}=\frac{1}{\varkappa}=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_a\mu_a}}=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}, \tag{6.26}$$

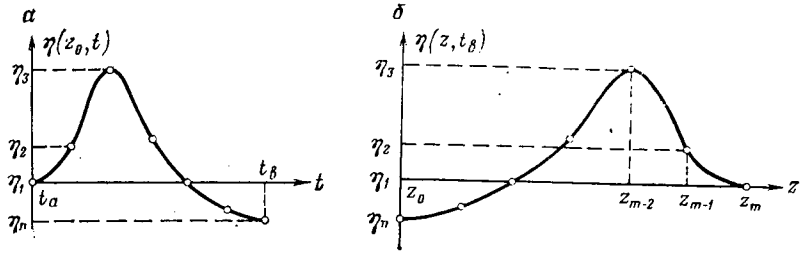


Рис. 54. Переход от временно́й волны (*а*) в плоскости $z=z_0$ к пространственной волне (*б*) в момент $t=t_в$

где $c=1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ — электродинамическая постоянная, равная скорости света в вакууме. Согласно (2.9′) $\varepsilon_0\mu_0=(1/9)\cdot10^{-16}$ Ф·Гн/м². Но произведение фарады на генри есть секунда в квадрате, следовательно, $c=3\cdot10^8$ м/с.

Если бы выше мы положили $f=0$ (вместо $g=0$), то получили бы распространение поля η в сторону уменьшения z.

Если в какой-либо плоскости $z=z_0$ со временем происходят некоторые изменения величины η, то в соответствии с (6.25) они должны происходить также на любых расстояниях $z-z_0$ от этой плоскости, но они возникают там с запаздываниями Δt, пропорциональными этим расстояниям. Допустим, что за интервал времени $t_a\leqslant t\leqslant t_b$ в плоскости $z=z_0$ последовательно появились значения $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ величины η. Тогда к моменту t_b эти значения успеют распространиться на расстояния $z_m, z_{m-1}, \ldots,$ тем бо́льшие, чем раньше они появились в плоскости $z=z_0$. Следовательно, кривой $\eta(z_0, t)$ соответствует такая же (с точностью до масштаба), но «обращенная» кривая $\eta(z, t_b)$ (рис. 54). На кривой $\eta(z, t_b)$ ординаты η следуют в обратном порядке по сравнению с их последовательностью на кривой $\eta(z_0, t)$.

III. **Электромагнитная волна.** Если зависимость величины η от времени является периодической, например синусоидальной, то ее зависимость от z изображается волнообразной кривой, на которой периоду T функции $\eta(z_0, t)$ соответствует пространственный период функции $\eta(z, t_b)$

$$\lambda=vT=\frac{T}{\varkappa}=\frac{T}{\sqrt{\varepsilon_a\mu_a}}, \tag{6.27}$$

называемый длиной волны [1].

С течением времени волна перемещается (распространяется) со скоростью v по направлению z, нормальному к поверхностям равных фаз, которые в рассматриваемом случае являются параллельными плоскостями (плоская волна). В общем случае поверхности равных фаз (волновые поверхности) — кривые и электро-

[1] Непериодически меняющуюся величину η можно считать периодической с бесконечно большим периодом T.

магнитное поле распространяется по нормальным к ним направлениям.

Очевидно, что зависимости от времени функций $\eta(z, t)$ и $\dot{\eta}(z, t)$ могут иметь разный вид. Поэтому наблюдаются различия фаз полей **B** и $\dot{\mathbf{B}}$ или **D** и $\dot{\mathbf{D}}$, а также полей **D** и rot **H** (при $\mathbf{j}=0$) или **B** и rot **E**. Отсюда — различие фаз электрической и магнитной составляющих электромагнитного поля (см. дополнение 5 в § 4).

§ 4. ПОЛЕ В ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ

Подставляя $(6.13)_3$ в $(6.12)_I$, получаем первое уравнение Максвелла в развернутом виде

$$\text{rot}\,\mathbf{H}=\gamma\mathbf{E}+\gamma\mathbf{E}^{\text{стр}}+\dot{\mathbf{D}}. \tag{6.28}$$

Вне области действия стороннего поля ($\mathbf{E}^{\text{стр}}=0$) имеем

$$\text{rot}\,\mathbf{H}=\gamma\mathbf{E}+\dot{\mathbf{D}}. \tag{6.29}$$

I. Телеграфные уравнения. Можно доказать, что в области V, в которой нет сторонних сил, а среда — электрически однородная ($\nabla\gamma=0$, $\nabla\varepsilon=0$) и не очень плохо проводящая, нет зарядов. Действительно, при указанных условиях из $(6.15)_I$ и $(6.12)_{IV}$ следует, что

$$\text{div}\,\mathbf{E}=-\frac{\delta_{\text{своб}}}{\gamma},\quad \text{div}\,\mathbf{E}=\frac{\delta_{\text{своб}}}{\varepsilon_a}, \tag{6.29'}$$

откуда получаем уравнение

$$\dot{\delta}=\frac{-\gamma}{\varepsilon_a}\delta. \tag{6.30}$$

Согласно (3.33′) $\delta_{\text{своб}}=\varepsilon\delta_{\text{плн}}$, поэтому уравнение (6.30) справедливо для любой из плотностей: $\delta_{\text{плн}}$ и $\delta_{\text{своб}}$. Решением уравнения (6.30) является функция времени

$$\delta(t)=\delta(t_0)\exp\frac{t_0-t}{\tau},\ \text{где}\ t>t_0,\ \text{а}\ \tau=\frac{\varepsilon_a}{\gamma} \tag{6.30'}$$

— время релаксации, т. е. время, за которое значение δ уменьшается в $e\approx 2{,}72$ раз. Обычно даже в сравнительно плохо проводящей среде ($\gamma=10^{-6}$—10^{-4} См/м) удельная электропроводность во много раз численно больше проницаемости ε_a ($\varepsilon_a\approx 10^{-10}$ Ф/м), поэтому величина τ очень мала. Заряд, появившись в проводящей среде, почти мгновенно исчезает. Будем, поэтому, считать, что в области V $\delta=0$ и $\text{div}\,\mathbf{E}=0$. Если, кроме того, в этой области $\nabla\mu=0$, то в ней согласно $(6.12)_{III}$ $\text{div}\,\mathbf{H}=0$. Таким образом, для области V, в которой[1] $\gamma>0$, $\mathbf{E}^{\text{стр}}=0$, $\nabla\gamma=0$, $\nabla\varepsilon=0$ и $\nabla\mu=0$ систему (6.12) надо заменить системой

[1] Очевидно, что последние три условия можно заменить (здесь и в аналогичных местах) менее жесткими условиями: $(\mathbf{E}\nabla\gamma)=0$, $(\mathbf{E}\nabla\varepsilon)=0$, $(\mathbf{H}\nabla\mu)=0$. Кроме того, ясно, что в доказательстве отсутствия зарядов в области V можно было заменить условие $\mathbf{E}^{\text{стр}}=0$ условием $\text{div}\,\mathbf{E}^{\text{стр}}=0$. Однако электромагнитное поле обычно определяют там, где $\mathbf{E}^{\text{стр}}=0$.

$$\text{I. } \operatorname{rot}\mathbf{H}=\gamma\mathbf{E}+\varepsilon_a\dot{\mathbf{E}}, \qquad \text{II. } \operatorname{rot}\mathbf{E}=-\mu_a\dot{\mathbf{H}}, \tag{6.31}$$
$$\text{III. } \operatorname{div}\mathbf{H}=0, \qquad \text{IV. } \operatorname{div}\mathbf{E}=0.$$

Аналогично изложенному в разд. I, § 3 получаем из системы (6.31)

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{H}=\gamma\operatorname{rot}\mathbf{E}+\varepsilon_a\operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}}=-\gamma\mu_a\dot{\mathbf{H}}-\varepsilon_a\mu_a\ddot{\mathbf{H}}, \qquad \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E}=$$
$$=-\mu_a\operatorname{rot}\mathbf{H}=-\gamma\mu_a\dot{\mathbf{E}}-\varepsilon_a\mu_a\ddot{\mathbf{E}} \text{ или согласно (1.80')}$$
$$\nabla^2\mathbf{H}=\varkappa^2\ddot{\mathbf{H}}+\gamma\mu_a\mathbf{H}, \quad \nabla^2\mathbf{E}=\varkappa^2\ddot{\mathbf{E}}+\gamma\mu_a\dot{\mathbf{E}}. \tag{6.32}$$

Эти волновые уравнения отличаются от (6.23) присутствием первой производной ($\dot{\mathbf{H}}$, $\dot{\mathbf{E}}$) по времени. Их называют телеграфными по аналогии с уравнением, применяемым в теории передачи электромагнитных сигналов по проводам.

О характере решений уравнений (6.32) будет сказано в конце разд. III.

II. **Квазистационарное поле.** Обратимся к уравнениям (6.28) и (6.29) и допустим, что скорость изменения электромагнитного поля во времени и удельное сопротивление среды достаточно малы для того, чтобы пренебречь слагаемым $\mathbf{j}^{\text{см}}=\dot{\mathbf{D}}=\varepsilon_a\dot{\mathbf{E}}$ сравнительно с величиной $\mathbf{j}$. Тогда получим вместо первых уравнений систем (6.12) и (6.31) уравнения

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=\gamma\mathbf{E}+\gamma\mathbf{E}^{\text{стр}} \text{ и } \operatorname{rot}\mathbf{H}=\gamma\mathbf{E}. \tag{6.33}$$

Электромагнитное поле, удовлетворяющее системе (6.12) с заменой первого уравнения уравнением $(6.33)_1$, т. е. с удалением слагаемого $\mathbf{D}$ из $(6.12)_1$, будем называть квазистационарным (поле в квазистационарном приближении или случае, квазистационарный процесс, квазистационарный ток).

В области, в которой среда однородна и нет сторонних сил ($\nabla\gamma=0$, $\nabla\varepsilon=0$, $\nabla\mu=0$, $\mathbf{E}^{\text{стр}}=0$), квазистационарное поле удовлетворяет системе (6.31) без слагаемого $\varepsilon_a\dot{\mathbf{E}}$ в первом уравнении. Вместо (6.32) получаем для квазистационарного поля уравнения теплопроводности

$$\nabla^2\mathbf{H}=\gamma\mu_a\dot{\mathbf{H}}, \qquad \nabla^2\mathbf{E}=\gamma\mu_a\dot{\mathbf{E}}. \tag{6.34}$$

Такие уравнения применяются в теории теплопередачи, обусловленной теплопроводностью среды.

III. **Затухание.** Для выяснения характера квазистационарного поля, удовлетворяющего уравнениям (6.34), обратимся опять к полю $\eta(z, t)$ (см. разд. II, § 3) и рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial z^2}=\gamma\mu_a\frac{\partial\eta}{\partial t}. \tag{6.35}$$

Подстановкой можно убедиться, что этому уравнению удовлетворяет функция $\eta(z, t)$, экспоненциально затухающая с увеличением z:

$$\eta(z, t)=\frac{C}{\sqrt{t}}\exp\frac{-\gamma\mu_a z^2}{4t} \quad (t>0), \tag{6.35'}$$

где C — множитель, зависящий от условий задачи.

Таким образом, первой производной по времени в уравнении (6.35) соответствует затухание поля η с увеличением z, между тем как вторая производная по времени в уравнении (6.24) согласно изложенному в § 3 определяет распространение поля по направлению z. Поэтому, возвращаясь к уравнению (6.32), можно считать, что решением уравнения

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} = \varkappa^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \gamma \mu_a \frac{\partial \eta}{\partial t} \qquad (6.36)$$

является поле η, распространяющееся по направлению z с экспоненциальным затуханием.

IV. **Дополнения к § 4.** 1. Перейти от телеграфных уравнений (6.32) и (6.36) к уравнениям теплопроводности (6.34), (6.35) можно, формально положив $\varkappa = 0$, чему согласно (6.26) соответствует $v = \infty$. В этом отражается особенность уравнения (6.34) — оно не учитывает ограниченность скорости распространения поля.

2. Уравнение $(6.33)_1$ не отличается от уравнения $(6.1)_1$. Следовательно, в квазистационарном случае магнитное поле токов определяется формулами, полученными в пятой главе для стационарного случая (для постоянного тока), причем для каждого мгновения надо в эти формулы подставлять значения сил и плотностей токов, соответствующие тому же мгновению (без запаздывания).

3. Электрическое поле $\mathbf{E}$ в квазистационарном случае согласно второму уравнению Максвелла отличается от квазипостоянного поля вихревым слагаемым $\mathbf{E}^{эми}$, возникающим вследствие электромагнитной индукции. Под влиянием поля $\mathbf{E}^{эми}$ в проводящей среде возникают электрические токи с плотностью $\mathbf{j}^{эми} = \gamma \mathbf{E}^{эми}$.

4. Поле $\mathbf{j}^{эми}$ создает во всем пространстве свое магнитное поле, прибавляющееся к полю произвольно заданных токов. Следовательно, осложнение электрической составляющей квазистационарного электромагнитного поля влечет за собой осложнения его магнитной составляющей.

5. Для того чтобы электромагнитное поле можно было считать квазистационарным, оно должно удовлетворять трем условиям квазистационарности.

Первое условие — медленность изменения поля и достаточная электропроводность среды. Оно было положено в основу определения квазистационарности поля (малость слагаемого $\dot{D}$ сравнительно с j в первом уравнении Максвелла).

Второе условие — замкнутость токов. Это условие следует из уравнения $(6.33)_1$, так как $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{H} = 0$ и, следовательно, $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$. Однако почти замкнутые токи не нарушают этого условия; их можно считать замкнутыми, исключив из рассмотрения малые области, занятые разрывами таких цепей.

Третье условие состоит в том, что размеры области пространства, содержащей токи, создающие магнитное поле, и точки наблюдения этого поля должны быть не слишком велики во избежание заметного запаздывания изменений магнитного поля в точках области относительно возбудителей этого поля (вопреки

сказанному в замечании 2) и связанной с этим несинхронности изменения электромагнитного поля в разных точках области. Однако остается несинхронность, связанная с различием зависимости от времени поля **B** и его производной $\dot{\mathbf{B}}$.

6. Условие $j^{\text{см}} \ll j$, очевидно, выполнимо только в проводящей среде, а магнитное поле в какой-либо точке пространства создают токи I и $I^{\text{см}}$, находящиеся где бы то ни было. Поле **H** в произвольно взятой точке состоит из трех слагаемых: $\mathbf{H}'$, $\mathbf{H}''$, $\mathbf{H}'''$, порождаемых соответственно токами проводимости, расположенными в проводящей среде, токами смещения, расположенными там же, и токами смещения, расположенными в непроводящей среде. В квазистационарном приближении допустимо пренебречь только вторым из этих слагаемых. Что же касается третьего слагаемого, то его относительный вклад может оказаться значительным. Это надо иметь в виду при изучении электромагнитного поля в присутствии не проводящей или плохо проводящей среды.

§ 5. ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИЕ ПОТЕНЦИАЛЫ

В предыдущих четырех главах мы изучали векторные поля, не имеющие задаваемых вихрей или источников. Для каждого из таких полей было удобно перейти от описывающих его векторов к потенциалу: скалярному или векторному. В этой главе мы изучаем векторное поле **B**, **H**, **E**, **D**, задаваемое источниками и вихрями. Оказывается, что для такого, более сложного поля также можно и целесообразно ввести потенциалы, через которые выражаются векторы, описывающие поле. Так же как и для менее сложных полей, переход к потенциалам удобен при изучении электромагнитного поля (см., например, разд. III) и при выполнении его расчетов — при решении прямых задач теории электромагнитного поля (см. главу седьмую).

I. **Потенциалы электромагнитного поля.** Вернемся к системе (6.12), определяющей электромагнитное поле в общем случае. Из $(6.12)_{\text{III}}$ согласно (1.74′) следует, что $\mathbf{B}=\operatorname{rot}\mathbf{A}$. Подставив это выражение для **B** в уравнение $(6.12)_{\text{II}}$, получаем $\operatorname{rot}\mathbf{E}=-\operatorname{rot}\dot{\mathbf{A}}$, т. е. $\operatorname{rot}(\mathbf{E}+\dot{\mathbf{A}})=0$, откуда в соответствии с (1.62) $\mathbf{E}+\dot{\mathbf{A}}=-\operatorname{grad}U$. Таким образом, векторы **B** и **E** выражаются через некоторые функции **A** и U

$$\mathbf{B}=\operatorname{rot}\mathbf{A}, \qquad \mathbf{E}=-\dot{\mathbf{A}}-\operatorname{grad}U. \tag{6.37}$$

Эти функции называют электродинамическими потенциалами: векторным и скалярным.

Нетрудно убедиться в том, что если $\mathbf{A}_0$ и U_0 — электродинамические потенциалы некоторого электромагнитного поля **B**, **E**, то его потенциалами являются также функции

$$\mathbf{A}=\mathbf{A}_0+\nabla T \text{ и } U=U_0-\dot{T}, \tag{6.38}$$

где T — произвольный скаляр (функция a и t).

II. **Уравнение Даламбера.** Допустим, что в области V, в которой изучаем поле, $\nabla\varepsilon=0$ и $\nabla\mu=0$. Согласно $(6.12)_{\text{I,IV}}$ имеем

равенства $\operatorname{rot}\mathbf{B}=\mu_a\mathbf{j}+\mu_a\varepsilon_a\dot{\mathbf{E}}, \operatorname{div}\mathbf{E}=\frac{1}{\varepsilon_a}\delta_{\text{свб}}$, а после подстановки (6.37), (6.23) в эти равенства:

$$(\nabla(\nabla\mathbf{A}))-\nabla^2\mathbf{A}=\mu_a\mathbf{j}-\varkappa^2\ddot{\mathbf{A}}-\varkappa^2\nabla\dot{U},\ (\nabla\dot{\mathbf{A}})+\nabla^2U=-\frac{1}{\varepsilon_a}\delta_{\text{свб}}.$$

Таким образом, мы получили для потенциалов $\mathbf{A}$ и U уравнения

$$\nabla^2\mathbf{A}-\varkappa^2\ddot{\mathbf{A}}=-\mu_a\mathbf{j}+\operatorname{grad}(\operatorname{div}\mathbf{A}+\varkappa^2\dot{U}),\ \nabla^2U+\operatorname{div}\dot{\mathbf{A}}=$$
$$=\frac{-1}{\varepsilon_a}\delta_{\text{свб}}. \qquad (6.39)$$

В этих уравнениях потенциалы $\mathbf{A}$ и U не разделены, но равенствами (6.37) потенциалы $\mathbf{A}$ и U, как уже было отмечено, определяются не полностью. Это позволяет нам дополнить равенства (6.37) некоторым условием, ограничивающим многозначность потенциалов $\mathbf{A}$ и U, «нормировать» их. Для этого применяют калибровочное уравнение, подбираемое так, чтобы привести уравнения электродинамических потенциалов к удобному виду. Положив в данном случае

$$\operatorname{div}\mathbf{A}=-\varkappa^2\dot{U}. \qquad (6.40)$$

получим вместо (6.39) волновые уравнения Даламбера

$$\nabla^2\mathbf{A}-\varkappa^2\ddot{\mathbf{A}}=-\mu_a\mathbf{j},\ \nabla^2U-\varkappa^2\ddot{U}=\frac{-1}{\varepsilon_a}\delta_{\text{свб}}, \qquad (6.41)$$

или, пользуясь оператором Даламбера $\Box^2=\nabla^2-\varkappa^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}$:

$$\Box^2\mathbf{A}=-\mu_a\mathbf{j},\ \Box^2U=-\frac{1}{\varepsilon_a}\delta_{\text{свб}}. \qquad (6.41')$$

Калибровка потенциалов отражается на уравнениях для них и, следовательно, на выражениях $\mathbf{A}$ и U, получаемых в результате решения этих уравнений, но не на решениях $\mathbf{B}$ и $\mathbf{E}$ системы (6.12).

Для области V, в которой не только $\nabla\varepsilon=0$ и $\nabla\mu=0$, но также $\mathbf{j}=0$ и $\delta_{\text{свб}}=0$, получаем вместо (6.41) однородные уравнения

$$\nabla^2\mathbf{A}=\varkappa^2\ddot{\mathbf{A}},\qquad \nabla^2U=\varkappa^2\ddot{U}, \qquad (6.41'')$$

соответствующие системе уравнений (6.22). Они аналогичны полученным из этой же системы уравнениям (6.23) для $\mathbf{H}$ и $\mathbf{E}$.

III. **Запаздывающие потенциалы.** Допустим, что в неограниченной однородной среде электромагнитное поле создают точечные заряды и линейные токи. Определим электродинамические потенциалы там, где нет зарядов и токов. Каждому заряду $e_{q\,\text{свб}}$, находящемуся в точке q, соответствует потенциал U, обладающий сферической симметрией относительно точки q. Возьмем систе-

му координат R, θ, φ с центром в этой точке. Тогда $U(a, t) = U(R, t)$ и уравнение $(6.41)_2$ согласно $(1.66'')$ примет вид

$$\frac{\partial^2 U}{\partial R^2} + \frac{2}{R}\frac{\partial U}{\partial R} = \varkappa^2 \ddot{U}.$$

Можно убедиться в том, что этому уравнению удовлетворяет функция $U(R, t) = \frac{f(t - \varkappa R)}{R}$, где f — произвольная, дважды дифференцируемая по R и t функция аргумента $t' = t - \varkappa R$. При $R \to 0$ $t' \to t$, $U(R, t) \to \frac{f(t)}{R}$. Чтобы в соответствии с $(3.38')_1$ иметь для постоянного поля $U(R) = \frac{e_{q\text{свб}}}{4\pi\varepsilon_a R}$, положим $f(t') = e_{q\text{свб}}(t')/(4\pi\varepsilon_a)$. Таким образом, $U(R, t) = e_{q\text{ свб}}(t')(4\pi\varepsilon_a R)^{-1}$, т. е. $U(a, t) = e_{q\text{ свб}}(t')(4\pi\varepsilon_a L_{qa})^{-1}$, так как $R = L_{qa}$. Аналогичное выражение получаем для векторного потенциала $\mathbf{A}$, соответствующего элементу $I\,\mathbf{dl}_q$. Из уравнения $(6.41)_1$ в согласии с $(5.53'')$ получаем $\mathbf{A}(a, t) = \mu_a I\,\mathbf{dl}_q(t')(4\pi L_{qa})^{-1}$. Переходя от точечных возбудителей e_q и $I\,\mathbf{dl}_q$ к объемным элементам зарядов и токов и интегрируя по всему пространству, получаем запаздывающие потенциалы

$$\mathbf{A}(a, t) = \mu_a \int_V \frac{\mathbf{j}(q, t')}{4\pi L_{qa}} dV, \quad U(a, t) = \frac{1}{\varepsilon_a}\int_V \frac{\delta_{\text{свб}}(q, t')}{4\pi L_{qa}} dV. \quad (6.41''')$$

Согласно $(6.41''')$ потенциалы $\mathbf{A}(a, t)$ и $U(a, t)$ определяются значениями, которые имели $\mathbf{j}$ и $\delta_{\text{свб}}$ в точках q в момент t'. Таким образом, значения потенциалов получаются в точке a с опозданиями $\Delta t = t - t' = \varkappa L_{qa}$, тем более заметными, чем больше расстояния от точек q до точки a.

Определяемые формулами $(6.41''')$ электродинамические потенциалы следует рассматривать как решения уравнений Даламбера (6.41), аналогичные решениям $(5.53'')$ и $(3.38')$ уравнения Пуассона $(5.52)_3$ и $(3.37)_3$ (см. конец § 8 главы второй). Формулы $(6.41''')$ выражают связь между фактическими распределениями (в пространстве и времени) потенциалов электромагнитного поля и его возбудителей. Но для того чтобы рассчитать по этим формулам потенциалы $\mathbf{A}$ и U, надо было бы знать поля $\mathbf{j}(q, t)$ и $\delta_{\text{свб}}(q, t)$. Между тем в непроводящей среде $\mathbf{j} = 0$, а в проводящей среде $\delta_{\text{свб}}$ и $\mathbf{j}$ зависят от электромагнитного поля. Но часть возбудителей электромагнитного поля обычно задается вне зависимости от этого поля — это сторонние токи и заряды, о которых пойдет речь ниже.

IV. Сторонние возбудители поля. Сторонними будем называть возбудители электромагнитного поля, задаваемые произвольно. В предыдущих главах встречались такие возбудители, например заряды $e_{\text{свб}}$ в непроводящей среде (глава третья); в пятой главе считались известными все токи.

Пусть l — проводящая, изолированная от окружающей проводящей среды, линия. Включив в нее генератор переменного тока, можно создать в ней сторонний ток желаемой силы $I^{\text{стр}}$. Соот-

ветствующую совокупность таких токов элементарной силы $dI^{стр}$ можно формально заменить сторонним объемным током $I^{стр}$ с плотностью $\mathbf{j}^{стр}$. Наряду с таким током имеем ток $I_{зав}$ (зависящий от поля и среды), обусловленный электропроводностью среды и действующим в ней электрическим полем, подлежащим определению. В результате получаем ток с плотностью $\mathbf{j}=\mathbf{j}_{зав}+\mathbf{j}^{стр}$, где $\mathbf{j}_{зав}$ — плотность тока $I_{зав}$. Ток $I_{зав}$ также называют током проводимости (и применяют обозначения $I_{пр}$ и $\mathbf{j}_{пр}$). Но этот термин мы, следуя традиции, применили в другом смысле.

На концах незамкнутой линии l_{12} с током $I^{стр}$ возникают заряды $e^{стр}$. Если в окружающей среде $\gamma=0$, то $e^{стр}=e_{свб}$, причем в соответствии с (4.20′)[1] $e^{стр}=\pm I^{стр}$. В общем случае будем иметь свободные заряды $e_{зав}$ и $e^{стр}$ (с плотностями $\delta_{зав}$ и $\delta^{стр}$), соответствующие токам $I_{зав}$ и $I^{стр}$ и связанные с ними соотношениями[2]

$$\operatorname{div}\mathbf{j}_{зав}=-\dot{\delta}_{зав},\quad \operatorname{div}\mathbf{j}^{стр}=-\dot{\delta}^{стр},$$

$$\sum_k I_{k\,зав}=-\dot{e}_{qзав},\quad \sum_k I_k^{стр}=-\dot{e}_q^{стр}, \tag{6.42}$$

аналогичными соотношениям (4.5), (4.20′).

Таким образом, в первое и четвертое уравнения Максвелла следует подставить

$$\mathbf{j}=\mathbf{j}_{зав}+\mathbf{j}^{стр},\quad \delta_{свб}=\delta_{зав}+\delta^{стр}, \tag{6.42′}$$

где величины в правых частях связаны соотношениями $(6.42)_{1,2}$.

Сравнивая $(6.42′)_1$ с (4.32), получаем

$$\mathbf{j}_{зав}=\gamma\mathbf{E},\quad \mathbf{j}^{стр}=\gamma\mathbf{E}^{стр}. \tag{6.42″}$$

Но при введении поля $\mathbf{E}^{стр}$ (в главе четвертой) было важно только то, что оно отличается от кулонова поля и поэтому может быть направлено против него. Что же касается поля $\mathbf{j}^{стр}$, то его отличительным признаком является произвольность его задания. При этом природа сил, заставляющих заряды двигаться, нас не интересует; поля $\mathbf{j}_{зав}$ и $\mathbf{j}^{стр}$ могут быть порождены силами одной и той же природы ($\mathbf{E}^{эми}$).

---

[1] Для простоты отвлекаемся здесь от распределения по линии l_{12} источников поля $\mathbf{j}^{см}$. Для допустимости такого пренебрежения можно вообразить, что на концах разомкнутой цепи мы имеем емкости, достаточно большие по сравнению с емкостью линии l_{12}. В частности, заменяя электрический диполь элементом Idl линейного тока (см. § 3 главы седьмой), следует мысленно дополнить этот элемент двумя идеально проводящими шаровыми электродами (аналог вибратора Герца).

[2] Индекс при $e_{зав}$ (и $\delta_{зав}$) указывает на связь этой части свободных зарядов с током $I_{зав}$. Помимо зарядов $e^{стр}$ и $e_{зав}$ в среде могут быть связанные заряды $e_{свз}$, зависимые от электрического поля и свойств среды (см. главу третью).

За исключением случаев стороннего поля в земле, о котором шла речь во вступлении к § 6 главы четвертой, нас обычно не интересуют отдельно взятые сомножители произведения $\gamma \mathbf{E}^{\text{стр}} = \mathbf{j}^{\text{стр}}$ или $\mathscr{E}^{\text{стр}} R^{-1} = I^{\text{стр}}$, а случай зависимости $\mathbf{E}^{\text{стр}}$ от $\mathbf{E}$ (вызванная поляризация) здесь не рассматривается. Таким образом, в формулах (6.42″) отличие поля $\mathbf{E}$ от поля $\mathbf{E}^{\text{стр}}$ состоит в том, что первое из них подлежит определению, а второе, умноженное на γ, является заданной функцией.

V. Телеграфные уравнения для электродинамических потенциалов. Выведем уравнения для потенциалов $\mathbf{A}$ и U в области V, в которой среда однородна ($\nabla\gamma=0$, $\nabla\varepsilon=0$, $\nabla\mu=0$). Из $(6.12)_{\text{I,IV}}$ получаем при этих условиях

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} - \varkappa^2\dot{\mathbf{E}} - \mu_a\gamma\mathbf{E} = \mu_a\mathbf{j}^{\text{стр}}, \quad \operatorname{div}\mathbf{E} = \frac{\delta_{\text{свб}}}{\varepsilon_a}, \tag{6.43}$$

где $\delta_{\text{свб}}=\delta^{\text{стр}}+\delta_{\text{зав}}$. Согласно (6.37) и (1.80′) из (6.43) имеем $(\nabla(\nabla\mathbf{A})) - \nabla^2\mathbf{A} + \varkappa^2\ddot{\mathbf{A}} + \varkappa^2\nabla\dot{U} + \mu_a\gamma\dot{\mathbf{A}} + \mu_a\gamma\nabla U = \mu_a\mathbf{j}^{\text{стр}}$, т. е.

$$\nabla^2\mathbf{A} - \varkappa^2\ddot{\mathbf{A}} - \mu_a\gamma\dot{\mathbf{A}} = -\mu_a\mathbf{j}^{\text{стр}} + \operatorname{grad}(\nabla\mathbf{A} + \varkappa^2\dot{U} + \mu_a\gamma U), \tag{6.43′}$$

а из $(6.43)_2$

$$\nabla^2 U + \operatorname{div}\dot{\mathbf{A}} = -\frac{1}{\varepsilon_a}\delta_{\text{свб}}. \tag{6.43″}$$

Принимая нормирование

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = -\varkappa^2\dot{U} - \mu_a\gamma U, \tag{6.44}$$

приводим уравнения (6.43′) и (6.43″) к удобному виду

$$\nabla^2\mathbf{A} - \varkappa^2\ddot{\mathbf{A}} - \mu_a\gamma\dot{\mathbf{A}} = -\mu_a\mathbf{j}^{\text{стр}}, \quad \nabla^2 U - \varkappa^2\ddot{U} - \mu_a\gamma\dot{U} = \frac{-\delta_{\text{свб}}}{\varepsilon_a}. \tag{6.45}$$

Для области V, в которой $\mathbf{j}^{\text{стр}}=0$ и $\delta_{\text{свб}}=0$, получаем однородные уравнения

$$\nabla^2\mathbf{A} - \varkappa^2\ddot{\mathbf{A}} - \mu_a\gamma\dot{\mathbf{A}} = 0, \quad \nabla^2 U - \varkappa^2\ddot{U} - \mu_a\gamma\dot{U} = 0, \tag{6.46}$$

аналогичные уравнениям (6.32) для $\mathbf{H}$ и $\mathbf{E}$.

Для квазистационарного случая удаляем из $(6.43)_1$ слагаемое $-\varkappa^2\mathbf{E}$, вследствие чего из уравнения (6.43′) выпадают слагаемые $-\varkappa^2\ddot{\mathbf{A}}$ и $\varkappa^2\dot{U}$. Поэтому при нормировании $\operatorname{div}\mathbf{A} = -\mu_a\gamma U$ имеем вместо (6.45) и (6.46) уравнения

$$\nabla^2\mathbf{A} - \mu_a\gamma\dot{\mathbf{A}} = -\mu_a\mathbf{j}^{\text{стр}}, \quad \nabla^2 U - \mu_a\gamma\dot{U} = \frac{-1}{\varepsilon_a}\delta_{\text{свб}}, \tag{6.45′}$$

$$\nabla^2\mathbf{A} - \mu_a\gamma\dot{\mathbf{A}} = 0, \quad \nabla^2 U - \mu_a\gamma U = 0. \tag{6.46′}$$

IV. Замечания. 1. Описанный выше способ введения электродинамических потенциалов не является единственным. Часто целесообразно применять другие потенциалы, по-иному связанные с электромагнитным полем и иначе нормированные. Об этом см. § 2 главы седьмой.

2. Однородные (т. е. без функций возбуждения) уравнения (6.41″), (6.46), (6.46′) и соответствующие им (автономные) си-

стемы вида (6.22) справедливые там, где нет возбудителей поля, независимых от него, не являются полными и недостаточны для определения электромагнитного поля. Эта неполнота компенсируется в той или иной мере некоторыми сведениями о возбудителях поля или условиями, заменяющими такие сведения. Так, например, в разд. II, § 3 было задано, что поле лежит в плоскости $z=\text{const}$ и не зависит от x и y. Более полные выражения для **H** и **E** должны удовлетворять системе (6.12) и соответствующим ей уравнениям (6.41), (6.45) или (6.45′).

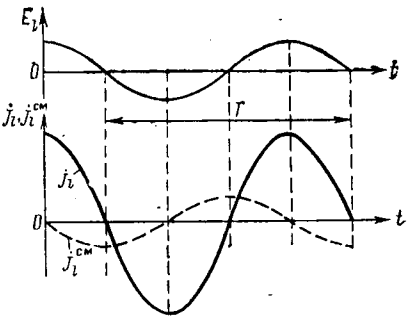


Рис. 55. Графики колебаний компонент векторов **E**, **j**, $\mathbf{j}^{см}$ по направлению l

3. Полагая (формально) $\varkappa=0$ в уравнениях (6.41), (6.45), (6.46), т. е. отбрасывая слагаемые $-\varkappa^2\ddot{U}$, $-\varkappa^2\ddot{\mathbf{A}}$, мы согласно (6.26) должны считать $v=\infty$, что равносильно допущению синхронности изменений поля и его возбудителей.

4. С другой стороны, времена, необходимые для распространения поля от его возбудителей до очень близких к ним точек наблюдения, так малы, что поле этих возбудителей в их ближайших окрестностях должно удовлетворять уравнениям электродинамических потенциалов без слагаемых со второй производной по времени.

5. Точечные заряды и линейные токи образуют в электромагнитном поле особые точки и линии. Из сказанного в замечании 4 следует, что у таких точек и линий должны выполняться такие же условия, как в квазистационарном электромагнитном поле.

§ 6. ГАРМОНИЧЕСКИ МЕНЯЮЩЕЕСЯ ПОЛЕ

Поле, меняющееся со временем синусоидально, т. е. по закону синуса или косинуса, называют гармонически меняющимся. Величина $\beta=I$, U, E_x, H_y, A_z, ..., характеризующая такое поле, совершает гармонические колебания [1].

I. Скалярное поле. Будем считать, что скалярное поле $\beta(a, t)=\beta_0(a)\cos\Phi(a, t)$, где $\beta_0(a)$ — амплитуда величины

[1] В дальнейшем в этой и следующей главах гармонически меняющимся полям будет уделено основное внимание. Объясняется это не только широким применением этого вида переменных электромагнитных полей для исследования недр. Разложение в ряд Фурье позволяет нам представить любое периодически меняющееся поле совокупностью гармонически меняющихся полей, а в более общем случае можно воспользоваться интегралом Фурье. Таким образом, закономерности гармонически меняющихся электромагнитных полей и результаты их расчетов для различных условий имеют общее значение (подробнее см. [4], с. 227).

Иногда гармонически меняющееся электромагнитное поле называют стационарным (установившимся). В этой книге стационарными называются постоянное электрическое поле в проводящей среде и магнитное поле постоянного тока.

III. **Векторное поле.** Перейдем к комплексному представлению векторного поля $\mathbf{N}=\Sigma\mathbf{N}_k=\Sigma\mathbf{1}_k N_k$ $(k=1, 2, 3)$ с компонентами N_k, меняющимися во времени гармонически: $N_k = N_{k_0}\cos(\omega t+\varphi_k)$. В соответствии с (6.48)—(6.49′)

$$\left.\begin{aligned} &N_k=\operatorname{Re}\breve{N}_k,\quad \breve{N}_k=N_{k_0}\exp[-i(\omega t+\varphi_k)]=\breve{N}_{k_0}\exp(-i\omega t),\\ &\breve{N}_{k_0}=N_{k_0}\exp(-i\varphi_k),\end{aligned}\right\} \quad (6.50)$$

где N_{k_0}, φ_k, $\breve{N}_{k_0}$ — амплитуда, начальная фаза и комплексная амплитуда компоненты N_k соответственно.

Векторы $\breve{\mathbf{N}}_k=\mathbf{1}_k\breve{N}_k$ и $\breve{\mathbf{N}}_{k_0}=\mathbf{1}_k\breve{N}_{k_0}$ — комплексные:

$$\breve{\mathbf{N}}_k=\operatorname{Re}\breve{\mathbf{N}}_k+i\operatorname{Im}\breve{\mathbf{N}}_k=\mathbf{1}_k N_{k_0}[\cos(\omega t+\varphi_k)-i\sin(\omega t+\varphi_k)], \quad (6.50')$$

$$\breve{\mathbf{N}}_{k_0}=\operatorname{Re}\breve{\mathbf{N}}_{k_0}+i\operatorname{Im}\breve{\mathbf{N}}_{k_0}=\mathbf{1}_k N_{k_0}(\cos\varphi_k-i\sin\varphi_k),$$

где $\operatorname{Re}\breve{\mathbf{N}}_k=\mathbf{N}_k$, $\operatorname{Im}\breve{\mathbf{N}}_k$, $\operatorname{Re}\breve{\mathbf{N}}_{k_0}$, $\operatorname{Im}\breve{\mathbf{N}}_{k_0}$ — вещественные векторы по координатному направлению l_k. Из них $\operatorname{Re}\breve{\mathbf{N}}_{k_0}$, $\operatorname{Im}\breve{\mathbf{N}}_{k_0}$ — постоянные (во времени) векторы, а $\operatorname{Re}\breve{\mathbf{N}}_k$, $\operatorname{Im}\breve{\mathbf{N}}_k$ — векторы, меняющиеся во времени. Их концы совершают гармонические колебания вдоль прямой, касательной к координатной линии l_k в точке наблюдения a.

Согласно (6.50), (6.50′)

$$\mathbf{N}=\operatorname{Re}\breve{\mathbf{N}}=\Sigma\operatorname{Re}\breve{\mathbf{N}}_k,\quad \text{где}\quad \breve{\mathbf{N}}=\Sigma\breve{\mathbf{N}}_k=\Sigma\mathbf{1}_k\breve{N}_k\ (k=1, 2, 3); \quad (6.50'')$$

$$\breve{\mathbf{N}}=\breve{\mathbf{N}}_0\exp(-i\omega t),\quad \breve{\mathbf{N}}_0=\Sigma\mathbf{1}_k\mathbf{N}_{k_0}\exp(-i\varphi_k)\ (k=1, 2, 3). \quad (6.51)$$

Векторы $\breve{\mathbf{N}}$ и $\breve{\mathbf{N}}_0$ — комплексные:

$$\breve{\mathbf{N}}=\operatorname{Re}\breve{\mathbf{N}}+i\operatorname{Im}\breve{\mathbf{N}},\quad \breve{\mathbf{N}}_0=\operatorname{Re}\breve{\mathbf{N}}_0+i\operatorname{Im}\breve{\mathbf{N}}_0, \quad (6.51')$$

где $\operatorname{Re}\breve{\mathbf{N}}=\mathbf{N}$, $\operatorname{Im}\breve{\mathbf{N}}$, $\operatorname{Re}\breve{\mathbf{N}}_0$, $\operatorname{Im}\breve{\mathbf{N}}_0$ — действительные векторы, причем

$$\operatorname{Re}\breve{\mathbf{N}}_0=\Sigma\mathbf{1}_k N_{k_0}\cos\varphi_k,\quad \operatorname{Im}\breve{\mathbf{N}}_0=-\Sigma\mathbf{1}_k N_{k_0}\sin\varphi_k. \quad (6.52)$$

Зависимость поля $\mathbf{N}$ от точки a может быть выражена через комплексный вектор $\breve{\mathbf{N}}_0$. Действительно, согласно (6.50″) (6.51), (6.52)

$$\mathbf{N}=\operatorname{Re}\breve{\mathbf{N}}=\Sigma\mathbf{1}_k N_{k_0}\cos(\omega t+\varphi_k)=\operatorname{Re}\breve{\mathbf{N}}_0\cos\omega t+\operatorname{Im}\breve{\mathbf{N}}_0\sin\omega t=$$

$$=\operatorname{Re}\breve{\mathbf{N}}_0\cos\omega t+\operatorname{Im}\breve{\mathbf{N}}_0\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right). \quad (6.52')$$

В общем случае тангенсы углов φ_1, φ_2, φ_3 имеют различные значения и, следовательно, согласно (6.52) векторы $\operatorname{Re}\breve{\mathbf{N}}_0$ и

$\operatorname{Im}\breve{\mathbf{N}}_0$—не коллинеарны. Поэтому в соответствии с (6.52′) вектор $\mathbf{N}$ есть сумма двух неколлинеарных линейно поляризованных действительных векторов, концы которых совершают гармонические колебания со сдвигом фаз, равным $\pi/2$. Следовательно, в общем случае вектор $\mathbf{N}$ поляризован эллиптически; его конец описывает эллипс с центром в его начале (см. разд. V § 1).

Если $\operatorname{tg}\varphi_1=\operatorname{tg}\varphi_2=\operatorname{tg}\varphi_3$, то согласно (6.52) векторы $\operatorname{Re}\breve{\mathbf{N}}_0$ и $\operatorname{Im}\breve{\mathbf{N}}_0$ коллинеарны и, следовательно, вектор $\mathbf{N}$ поляризован линейно. Полагая в этом случае $\varphi_1=\varphi_2=\varphi_3=\varphi_N$ (разность, равную π, между углами φ_k можно устранить изменением направлений положительного отсчета соответствующих координат ξ_k), имеем

$$\breve{\mathbf{N}}_0=\mathbf{N}^0\exp(-i\varphi_N),\quad \operatorname{Re}\breve{\mathbf{N}}_0=\mathbf{N}^0\cos\varphi_N,\quad \operatorname{Im}\breve{\mathbf{N}}_0=-\mathbf{N}^0\sin\varphi_N,$$

$$\mathbf{N}^0=\Sigma\mathbf{1}_k N_{k_0}, \tag{6.53}$$

$$\breve{\mathbf{N}}=\mathbf{N}^0\exp(-i(\omega t+\varphi_N)),\quad \mathbf{N}=\mathbf{N}^0\cos(\omega t+\varphi_N), \tag{6.53′}$$

где $\mathbf{N}^0$ — вещественный вектор. Конец вектора $\mathbf{N}$ перемещается по прямой (на которой лежит вектор $\mathbf{N}^0$) и описывает ее отрезок с длиной $2N^0$ и с центром в начале вектора $\mathbf{N}^0$ (в точке наблюдения a).

Полагая в дальнейшем

$$\operatorname{Re}\breve{\beta}=I,\ \delta,\ U,\ N_k,\ldots,\ \operatorname{Re}\breve{\mathbf{N}}=\mathbf{E},\ \mathbf{H},\ \mathbf{D},\ \mathbf{B},\ \mathbf{A},\ldots,$$

будем пользоваться формулами дифференцирования, соответствующими выражениям (6.49′), $(6.51)_1$. В частности,

$$\dot{\breve{\mathbf{N}}}=-i\omega\breve{\mathbf{N}}_0\exp(-i\omega t)=-i\omega\breve{\mathbf{N}},\quad \ddot{\breve{\mathbf{N}}}=-\omega^2\breve{\mathbf{N}}_0\exp(-i\omega t)=-\omega^2\breve{\mathbf{N}} \tag{6.54}$$

$$\operatorname{rot}\breve{\mathbf{N}}=\operatorname{rot}\breve{\mathbf{N}}_0\exp(-i\omega t),\quad \operatorname{div}\breve{\mathbf{N}}=\operatorname{div}\breve{N}_0\exp(-i\omega t).$$

IV. **Система уравнений поля.** Подставив выражения вида (6.49′), $(6.51)_1$ в уравнения (6.12), (6.13) и взяв производные по времени, получим систему уравнений гармонически меняющегося поля:

$$\text{I. } \operatorname{rot}\breve{\mathbf{H}}=\gamma\breve{\mathbf{E}}-i\omega\varepsilon_a\breve{\mathbf{E}}+\breve{\mathbf{j}}^{\text{стр}},\quad \text{II. } \operatorname{rot}\breve{\mathbf{E}}=i\omega\mu_a\breve{\mathbf{H}}, \tag{6.55}$$

$$\text{III. } \operatorname{div}\breve{\mathbf{B}}=0,\qquad \text{IV. } \operatorname{div}\breve{\mathbf{D}}=\breve{\delta}_{\text{своб}},$$

где в соответствии с (6.4), (6.42″), $\breve{\mathbf{j}}^{\text{см}}=-i\omega\varepsilon_a\breve{\mathbf{E}}$, $\breve{\mathbf{j}}^{\text{стр}}=\gamma\breve{\mathbf{E}}^{\text{стр}}$.

Из $(6.55)_1$ для непроводящей среды получаем согласно $(6.22)_1$

$$\operatorname{rot}\breve{\mathbf{H}}=-i\omega\varepsilon_a\breve{\mathbf{E}}, \tag{6.55′}$$

а для квазистационарного поля — уравнение $(6.33)_1$, в котором можем поменять $\mathbf{H}$ и $\mathbf{j}$ на $\breve{\mathbf{H}}$ и $\breve{\mathbf{j}}$ соответственно.

Для области V, в которой $\mathbf{E}^{\text{стр}}=0$, уравнение (6.55)[1] принимает вид

$$\operatorname{rot}\breve{\mathbf{H}}=\breve{\mathbf{j}}+\breve{\mathbf{j}}^{\text{см}}=(\gamma-i\omega\varepsilon_a)\breve{\mathbf{E}}=-i\omega\varepsilon'_a\breve{\mathbf{E}}, \tag{6.55''}$$

где

$$\varepsilon'_a=\varepsilon_0\varepsilon', \text{ а } \varepsilon'=\varepsilon\left(1+i\frac{\gamma}{\omega\varepsilon_a}\right) \tag{6.56}$$

— комплексная диэлектрическая проницаемость. Сравнивая (6.55″) с (6.55′), видим, что влияние проводимости среды на электромагнитное поле можно учесть заменой параметра ε комплексным параметром ε'[1].

Согласно (6.55″) компонента вектора $\breve{\mathbf{j}}^{\text{см}}$ по некоторому направлению l определяется формулой $\breve{j}^{\text{см}}_l=-i\omega\varepsilon_a\breve{E}_l=\omega\varepsilon_a\breve{E}_l\exp(-i\pi/2)$.

В соответствии с (6.50) $\breve{E}_l=E_{l_0}\exp(-i\varphi_{E_l})\exp(-i\omega t)$,

$$\breve{j}^{\text{см}}_l=\omega\varepsilon_a E_{l_0}\exp\left[-i\left(\varphi_{E_l}+\frac{\pi}{2}\right)\right]\exp(-i\omega t),$$

т. е. $\varphi_{j^{\text{см}}_l}=\varphi_{E_l}+\frac{\pi}{2}$,

где φ_{E_l} и $\varphi_{j^{\text{см}}_l}$ — начальные фазы величин E_l и $j^{\text{см}}_l$.

Следовательно, компонента $j^{\text{см}}_l$ опережает компоненту E_l (и j_l) по фазе на угол $\pi/2$ (рис. 55). Соотношение между величинами $j^{\text{см}}_l$ и $j_l=\gamma E_l$ можно характеризовать отношением их амплитуд[2].

$$\alpha=j^{\text{см}}_{l_0}/j_{l_0}=\frac{\omega\varepsilon_a}{\gamma}=\omega\varepsilon_a\rho. \tag{6.57}$$

Поэтому первое условие квазистационарности (см. разд. IV, § 4) для области V в случае гармонически меняющегося поля принимает вид: $\alpha\ll 1$.

Из (6.32) получаем для поля в однородной среде при $\delta_{\text{свб}}=0$ и $\mathbf{E}^{\text{стр}}=0$ уравнения

$$\nabla^2\breve{\mathbf{H}}+(\omega^2\varepsilon_a\mu_a+i\omega\gamma\mu_a)\breve{\mathbf{H}}=0,\quad \nabla^2\breve{\mathbf{E}}+(\omega^2\varepsilon_a\mu_a+i\omega\gamma\mu_a)\breve{\mathbf{E}}=0. \tag{6.58}$$

---

[1] Иногда вводят комплексную электропроводность $\gamma'=\gamma\left(1-\frac{i\omega\varepsilon_a}{\gamma}\right)$; тогда уравнение (6.55″) принимает вид $\operatorname{rot}\breve{\mathbf{H}}=\gamma'\breve{\mathbf{E}}$.

[2] Величину $\frac{1}{\alpha}=\frac{\gamma}{\omega\varepsilon_a}=\operatorname{tg}\Delta$ называют тангенсом угла потерь Δ.

Полагая в (6.58) $\gamma=0$, имеем в соответствии с $(6.23)_{1,2}$ для поля в однородной непроводящей среде при $\delta_{\text{свб}}=0$ уравнения

$$\nabla^2\breve{\mathbf{H}}+\omega^2\varepsilon_a\mu_a\breve{\mathbf{H}}=0,\quad \nabla^2\breve{\mathbf{E}}+\omega^2\varepsilon_a\mu_a\breve{\mathbf{E}}=0. \tag{6.58'}$$

Считая $\alpha\ll 1$, получаем из (6.58) для квазистационарного поля в однородной среде при $\mathbf{E}^{\text{стр}}=0$ уравнения

$$\nabla^2\breve{\mathbf{H}}+i\omega\gamma\mu_a\breve{\mathbf{H}}=0,\quad \nabla^2\breve{\mathbf{E}}+i\omega\gamma\mu_a\breve{\mathbf{E}}=0, \tag{6.58''}$$

соответствующие уравнениям (6.34).

Уравнения вида (6.58)—(6.58″) называются уравнениями Гельмгольца.

Согласно (6.49′), $(6.51)_1$, (6.54) временной фактор $\exp(-i\omega t)$ входит в виде множителя во все члены уравнений (6.55)—(6.55″), (6.58)—(6.58″). Следовательно, во всех этих уравнениях можно (сократив множитель $\exp(-i\omega t)$) заменить величины $\breve{\beta}$, $\breve{\mathbf{N}}$ амплитудными величинами β_0, $\mathbf{N}_0$.

V. Волновое число. Введя обозначение

$$k^2=\omega^2\varepsilon_a\mu_a+i\omega\gamma\mu_a=i\omega\mu_a(\gamma-i\omega\varepsilon_a)=\omega^2\mu_a\varepsilon'_a=\omega^2\varkappa'^2, \tag{6.59}$$

где $\varkappa'^2=\mu_a\varepsilon'_a$, получаем вместо (6.58)

$$\nabla^2\breve{\mathbf{H}}+k^2\breve{\mathbf{H}}=0,\quad \nabla^2\breve{\mathbf{E}}+k^2\breve{\mathbf{E}}=0, \tag{6.60}$$

здесь k — комплексное волновое число (см. разд. VI). Из уравнений (6.60) следует, что в однородной области V, в которой отсутствуют произвольно задаваемые возбудители поля, зависимость электромагнитного поля от γ, ε, μ и ω сводится к его зависимости от волнового числа k.

Положим

$$k=a+ib, \tag{6.59'}$$

где a и b — действительные величины. Из (6.59′) следует, что $k^2=(a^2-b^2)+i2ab$. Сопоставляя это равенство с (6.59), получаем систему уравнений для a и b:

$$a^2-b^2=\omega^2\varepsilon_a\mu_a,\quad 2ab=\omega\gamma\mu_a. \tag{6.59''}$$

Считая $\omega>0$, имеем $0\leqslant\frac{b}{a}<1$. Следовательно, возможные значения числа k лежат в первом или третьем квадрантах комплексной плоскости. Условимся считать, что число k лежит в первом квадранте, т. е. величины a и b — неотрицательные. При этом система (6.59″) имеет решение:

$$a=\sqrt{\frac{\omega\gamma\mu_a}{2}}\sqrt{\sqrt{1+\alpha^2}+\alpha}=\omega\sqrt{\frac{\varepsilon_a\mu_a}{2}}\sqrt{\sqrt{1+\frac{1}{\alpha^2}}+1},$$

$$b=\sqrt{\frac{\omega\gamma\mu_a}{2}}\sqrt{\sqrt{1+\alpha^2}-\alpha}=\omega\sqrt{\frac{\varepsilon_a\mu_a}{2}}\sqrt{\sqrt{1+\frac{1}{\alpha^2}}-1}, \tag{6.61}$$

где в соответствии с (6.57) $\alpha=\omega\varepsilon_a/\gamma$, а корни — арифметические. При $\omega=0$ $a=b=0$, т. е. $k=0$.

Действительная часть (a) и коэффициент (b) при мнимой части волнового числа соответственно называются фазовой постоянной (коэффициентом фазы) и коэффициентом затухания (поглощения). Физический смысл этих величин будет пояснен в разд. VI.

В непроводящей среде ($\gamma=0$, $\alpha=\infty$)

$$\alpha=\omega\sqrt{\varepsilon_a\mu_a},\quad b=0,\quad k^2=\omega^2\varepsilon_a\mu_a=\omega^2\varkappa^2=a^2 \tag{6.61'}$$

в соответствии с (6.58′). Из $(6.61)_2$ следует, что при $\alpha\gg 1$

$$b=\frac{\gamma}{2}\sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}}.$$

Для квазистационарного поля, полагая в (6.61) $\alpha\ll 1$, получаем

$$a=b=\sqrt{\frac{\omega\gamma\mu_a}{2}}=\sqrt{\frac{\omega\mu_a}{2\rho}},\quad k^2=i\omega\gamma\mu_a \tag{6.61''}$$

в соответствии с (6.58″).

VI. **Плоская волна в однородной среде.** Для выяснения характера решений уравнений (6.58)—(6.58″), (6.60) применим их к введенному в разд. II, § 3 полю $\eta(z,\ t)$. Считая $\eta(z,\ t)=\operatorname{Re}\breve{\eta}(z,\ t)$, $\breve{\eta}(z,\ t)=\eta_0(z)\exp(-i\omega t)$, получаем согласно (6.36), (6.60)

$$\frac{\partial^2\breve{\eta}}{\partial z^2}+k^2\breve{\eta}=0\quad\text{или}\quad\frac{\partial^2\breve{\eta}}{\partial z^2}+\omega^2\mu_a\varepsilon'_a\breve{\eta}=0. \tag{6.62}$$

Этому уравнению удовлетворяет поле $\breve{\eta}(z,\ t)=\breve{\eta}(0,0)\exp[-i(\omega t-kz)]=\breve{\eta}(0,\ 0)\exp[-i(\omega t-az)]\exp(-bz)$.

Тогда для действительной величины $\eta(z,\ t)$ получаем

$$\eta(z,\ t)=\eta_0(0)\exp(-bz)\cos[\varphi(0)+\omega t-az]. \tag{6.63}$$

Уравнению (6.62) удовлетворяет также комплексная амплитуда

$$\breve{\eta}_0(z)=\breve{\eta}_0(0)\exp(ikz)=\breve{\eta}_0(0)\exp(iaz)\exp(-bz), \tag{6.63'}$$

где в соответствии с (6.49)

$$\breve{\eta}_0(0)=\eta_0(0)\exp[-i\varphi(0)],\quad\breve{\eta}_0(z)=\eta_0(z)\exp[-i\varphi(z)], \tag{6.63''}$$

а $\eta_0(z)$, $\eta_0(0)$, $\varphi(z)$, $\varphi(0)$ — (действительные) амплитуды и начальные фазы поля η в плоскости с произвольным значением координаты z и в плоскости $z=0$.

Согласно (6.63)

$$\text{при}\ \frac{\Delta z}{\Delta t}=\frac{\omega}{a}\quad\eta(z+\Delta z,\ t+\Delta t)=\eta(z,\ t)\exp(-b\Delta z). \tag{6.64}$$

Следовательно, (6.63) является выражением плоской гармонической волны, распространяющейся по направлению z со скоростью $v=\Delta z/\Delta t=\omega/a$ и затухающей экспоненциально с показателем $-bz$. За период T поле распространяется на длину волны

$\lambda = vT$, т. е. приращения $\Delta z = \lambda$ и $\Delta t = T$ удовлетворяют условию $\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\omega}{a} = v$. Таким образом, в соответствии с (6.64)

$$v = \frac{\omega}{a} = \frac{2\pi f}{a}, \quad \lambda = vT = \frac{\omega T}{a} = \frac{2\pi}{a}. \tag{6.65}$$

Согласно $(6.65)_1$, $(6.61)_1$ скорость v в общем случае зависит от частоты — ч а с т о т н а я д и с п е р с и я.

Подстановкой в (6.63) легко убедиться, что

$$\eta(z,\ t+T) = \eta(z,\ t), \tag{6.64'}$$

$$\eta(z+\lambda,\ t) = \eta(z,\ t)\exp(-b\lambda). \tag{6.64''}$$

Первое из этих равенств выражает временну́ю периодичность поля $\eta(z,\ t)$ в плоскости $z = \text{const}$, а второе — мгновенное распределение этого поля в пространстве (по оси z) в момент t. Волнообразные кривые, изображающие это распределение для моментов t_1 и $t_2 = t_1 + T/4$, показаны на рис. 56. Придавая t всевозможные значения, получаем (в плоскости z, η) семейство кривых $\eta(z,\ t)$ с параметром t. Построим огибающую этого семейства, для чего исключим из уравнения (6.63) параметр семейства t, пользуясь условием $\eta = 0$ (обращение в нуль производной по параметру). Из этого условия имеем $\sin[\varphi(0) + \omega t - az] = 0$, т. е. $\cos[\varphi(0) + \omega t - az] = \pm 1$. Таким образом, получаем уравнение огибающей: $\eta^{\text{огб}} = \pm\eta_0(0)\exp(-bz)$. Это — уравнение показанной пунктиром на рис. 56 пары кривых, являющихся геометрическим местом экстремальных точек всех кривых семейства.

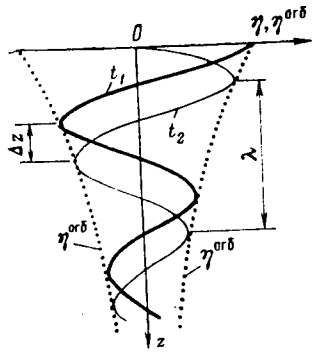


Рис. 56. Распределение поля η по оси z в моменты времени: $t = t_1$ и $t = t_2 = t_1 + \Delta t$.
Пунктиром показаны огибающие кривые

Для любых двух значений z_1 и z_2 координаты z имеем согласно $(6.63')$—$(6.63'')$

$$\frac{\eta_0(z_1)}{\eta_0(z_2)} = \exp[b(z_2 - z_1)], \quad \varphi(z_1) - \varphi(z_2) = a(z_2 - z_1). \tag{6.66}$$

Формулы (6.63)—(6.66) позволяют выяснить физический смысл величин a и b в (6.59′).

Фазовая постоянная a в соответствии с $(6.66)_2$, $(6.65)_2$ определяет интенсивность изменения фазы с расстоянием и длину λ плоской гармонической волны. На отрезке 2π метров (взятом по направлению распространения поля) укладывается $2\pi/\lambda = a$ волн. Чем больше величина a, тем короче длина волны λ.

Коэффициент затухания b в соответствии с (6.63), (6.64), (6.64″) определяет быстроту затухания поля с расстоянием. Согласно $(6.66)_1$ затухание можно охарактеризовать интенсивностью

уменьшения амплитуды плоской гармонической волны по направлению ее распространения. Чем больше величина b, тем быстрее убывает по этому направлению амплитуда поля. Полагая в $(6.66)_1$ расстояние z_2-z_1 равным единице длины или длине волны λ или же $1/b$, получаем формулы

$$d_{\text{ед}}=\exp b,\quad d_\lambda=\exp\left(2\pi\frac{b}{a}\right),\quad \delta=\frac{1}{b}. \tag{6.66'}$$

Первые две формулы определяют затухания $d_{\text{ед}}$ на единицу длины и d_λ на интервале, равном длине волны, а третья — глубину проникновения δ, равную расстоянию, на котором амплитуда поля уменьшается в e раз. Для характеристики затухания пользуются также логарифмическим декрементом

$$\ln d_{\text{ед}}=b \text{ или } \ln d_\lambda=2\pi\frac{b}{a}=\lambda b. \tag{6.66''}$$

Уменьшению амплитуды в e раз дано название непер. Согласно $(6.66'')_1$ коэффициент затухания b равен числу неперов на расстоянии, равном единице длины.

Рассмотрим на примере плоской волны некоторые особенности, присущие электромагнитному полю для двух случаев — в непроводящей среде ($\gamma=0$) и в квазистационарном случае ($\alpha\ll 1$).

При $\gamma=0$ $b=0$ и волновое число k является действительной величиной, равной фазовой постоянной a. Следовательно, согласно $(6.65)_2$ $2\pi/\lambda=k$, т. е. число волн, укладывающихся на отрезке 2π метров, равно k. Поэтому параметр k называется волновым числом. Согласно (6.61′) вместо (6.64), $(6.65)_1$, $(6.65)_2$ получаем (6.25′), (6.26), (6.27), а вместо $(6.66)_1$, $(6.66')_2$, $(6.66')_3$ имеем

$$\eta_0(z)=\text{const},\quad d_\lambda=0,\quad \delta=\infty. \tag{6.67}$$

Из (6.67), (6.26) следует, что в непроводящей среде электромагнитная волна не затухает, а скорость ее распространения не зависит от частоты, т. е. нет частотной дисперсии.

Для квазистационарного поля согласно (6.61″) вместо $(6.65)_1$, $(6.65)_2$, $(6.66)_1$, $(6.66')_2$, $(6.66')_3$ получаем соответственно

$$v=\sqrt{\frac{2\omega}{\gamma\mu_a}},\quad \lambda=\frac{2\sqrt{2}\pi}{\sqrt{\omega\gamma\mu_a}},\quad [\eta_0(z_1)/\eta_0(z_2)]=\exp\left[\sqrt{\frac{\omega\gamma\mu_a}{2}}\,(z_2-z_1)\right], \tag{6.68}$$

$$d_\lambda=\exp(2\pi),\quad \delta=\sqrt{\frac{2}{\omega\gamma\mu_a}}=\frac{\lambda}{2\pi}.$$

Из (6.68), в частности, следует, что при $\alpha\ll 1$ на интервале, равном длине λ плоской волны, ее амплитуда η_0 уменьшается в $\exp(2\pi)\approx 535$ раз.

VII. **Дополнительные сведения о плоской гармонической волне.** Здесь и в разд. II, § 3 для однородной области V, в которой $\mathbf{E}^{\text{стр}}=0$ и $\delta_{\text{свб}}=0$, плоское электромагнитное поле мы представляли полем $\eta(z, t)$, имея в виду, что $\mathbf{E}=\mathbf{1}_x E_x(z, t)$ и $\mathbf{H}=\mathbf{1}_y H_y(z, t)$. Мы допускали, что поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ взаимно ортогональны и что

они лежат в плоскости z=const, в которой их значения не меняются. Покажем на примере гармонически меняющегося поля, что эти два допущения, принятые выше произвольно, фактически следуют из уравнений Максвелла. Для этого будем теперь ограничивать характер электромагнитного поля только тем [1], что все декартовы компоненты векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ не зависят от x и y, т. е. $E_x=E_x(z,\,t)$, $E_y=E_y(z,\,t)$,... Согласно (6.51)

$$\breve{\mathbf{H}}(z,\,t)=\breve{\mathbf{H}}_0(z)\exp(-i\omega t),\quad \breve{\mathbf{E}}(z,\,t)=\breve{\mathbf{E}}_0(z)\exp(-i\omega t). \tag{6.69}$$

Подставляя выражения (6.69) в (6.55″), $(6.55)_{II}$ и пользуясь формулой (1.28), получаем уравнения:

$$\text{I.}\ \left[\mathbf{1}_z\frac{\partial\breve{\mathbf{H}}}{\partial z}\right]=(\gamma-i\omega\varepsilon_a)\breve{\mathbf{E}},\quad \text{II.}\ \left[\mathbf{1}_z\frac{\partial\breve{\mathbf{E}}}{\partial z}\right]=i\omega\mu_a\breve{\mathbf{H}}. \tag{6.69′}$$

Из $(6.69')_{I}$ и $(6.69')_{II}$ следует, что $\breve{E}_z=0$ и $\breve{H}_z=0$, а тогда согласно $(6.50)_{I}$ $E_z=0$ и $H_z=0$, т. е. каждый из векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ ортогонален направлению z распространения электромагнитной волны. Таким образом, электромагнитная волна — поперечная.

Допустим теперь, что поле $\mathbf{E}$ линейно поляризовано (см. разд. III) и положим в $(6.69')_{II}$ в соответствии с $(6.51)_{I}$, (6.63′)

$$\breve{\mathbf{E}}=\mathbf{1}_x\breve{E}_x=\mathbf{1}_x\breve{E}_0(0)\exp(ikz)\exp(-i\omega t). \tag{6.70}$$

Подставляя $\dfrac{\partial\breve{\mathbf{E}}}{\partial z}=\mathbf{1}_x\dfrac{\partial\breve{E}_x}{\partial z}=\mathbf{1}_x ik\breve{E}_x$ в левую часть уравнения $(6.69')_{II}$, получаем

$$\breve{\mathbf{H}}=\frac{k}{\omega\mu_a}[\mathbf{1}_z\mathbf{1}_x]\breve{E}_x=\mathbf{1}_y\frac{k}{\omega\mu_a}\breve{E}_x,\ \text{т. е.}\ \breve{\mathbf{H}}=\mathbf{1}_y\breve{H}_y,$$

$$\breve{H}_y=\frac{k}{\omega\mu_a}\breve{E}_x. \tag{6.70′}$$

Согласно (6.70), (6.70′) $\mathbf{E}=\mathbf{1}_xE_x$, $\mathbf{H}=\mathbf{1}_yH_y$, т. е. векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ взаимно ортогональны.

Из (6.70′) следует, что отношение $\breve{E}_x/\breve{H}_y=Z$ определяется выражением

$$Z=\frac{\omega\mu_a}{k}=\sqrt{\frac{\omega\mu_a}{\omega\varepsilon_a+i\gamma}}=\sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon'_a}}. \tag{6.71}$$

Параметр Z называется импедансом или волновым сопротивлением и полностью определяется частотой ω и электромагнитными свойствами среды. В общем случае Z — величина комплексная. Это связано с тем, что компоненты E_x и H_y могут иметь разные начальные фазы, т. е. могут меняться во времени несинхронно. В случаях, когда среда — непроводник или когда

[1] Допущение о взаимной ортогональности векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ выполняется при некоторых дополнительных условиях, о которых будет сказано ниже.

поле можно считать квазистационарным, выражения для Z упрощаются:

при $\gamma = 0$ $\quad Z = \sqrt{\mu_a/\varepsilon_a}$, (6.71′)

при $\alpha \ll 1$ $\quad Z = \sqrt{\omega\mu_a/i\gamma} = \sqrt{\omega\rho\mu_a}\exp(-i\pi/4)$. (6.71″)

Согласно (6.71′) в непроводящей среде величина Z — действительная и, следовательно, компоненты E_x и H_y меняются со временем синхронно, а векторы **E**, **H** и направление распространения электромагнитной волны в любой момент времени образует правовинтовую систему. Из (6.71″), в частности, следует, что в квазистационарном случае компонента E_x опережает по фазе компоненту H_y на $\pi/4$.

Сказанное выше о взаимной ортогональности векторов **E** и **H** относилось к линейно-поляризованной плоской волне. Для этой же волны было введено понятие импеданса Z. Коснемся некоторых особенностей плоской эллиптически поляризованной волны (подробнее, см., например, [4], с. 246–250).

Если определяемая выражениями (6.69) плоская электромагнитная волна поляризована эллиптически, то эллипсы поляризации векторов **E** и **H**—подобны, а оси этих эллипсов—взаимно перпендикулярны. Отношение компонент векторов $\breve{\mathbf{E}}$ и $\breve{\mathbf{H}}$ в соответствующих точках эллипсов определяется выражением (6.71). Вследствие различия начальных фаз этих компонент, направления действительных векторов **E** и **H** в каждый момент времени в общем случае не ортогональны друг другу. Исключение составляет случай непроводящей среды: при $\gamma = 0$ согласно (6.71′) Z — величина действительная и векторы **E** и **H** взаимно ортогональны.

Глава седьмая

Прямая задача теории переменного электромагнитного поля

Эта задача состоит в определении электромагнитного поля по заданным его возбудителям (не зависящим от поля). В этой главе речь пойдет об определении электромагнитного поля или его потенциалов на основе решения системы уравнений электродинамики или уравнений электродинамических потенциалов.

§ 1. УСЛОВИЯ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

В этом параграфе будем вести изложение применительно к общему случаю (произвольной зависимости поля от времени).

Из главы шестой известно, что электромагнитное поле $\mathcal{F}$, описываемое совокупностью векторов $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{j}$, удовлетворяет системе уравнений (6.12), (6.13) при заданных функциях $\gamma(a)$, $\varepsilon(a)$, $\mu(a)$, $\mathbf{j}^{\text{стр}}(a, t)$, характеризующих среду и независимые возбудители поля[1]. Выясним, какими условиями надо дополнить систему уравнений (6.12), (6.13) для того, чтобы ее решения определялись однозначно.

I. Краевые и начальные условия. Будем считать, что мы определяем электромагнитное поле в области V для промежутка времени $[t_0, t_м]$ $(t_0 \leqslant t \leqslant t_м)$. Допустим, что два поля $\mathcal{F}'$ и $\mathcal{F}''$, описываемые совокупностями векторов $\mathbf{E}'$, $\mathbf{H}'$, ..., $\mathbf{j}'$ и $\mathbf{E}''$, $\mathbf{H}''$, ..., $\mathbf{j}''$, удовлетворяют системе (6.12), (6.13) в области V в промежуток $[t_0, t_м]$, а $\mathcal{F}'''$—поле, описываемое совокупностью векторов $\mathbf{E}''' = \mathbf{E}' - \mathbf{E}''$, $\mathbf{H}''' = \mathbf{H}' - \mathbf{H}''$, ..., $\mathbf{j}''' = \mathbf{j}' - \mathbf{j}'' = \gamma \mathbf{E}'''$.

Последнее равенство объясняется тем, что поле $\mathbf{j}^{\text{стр}}$ задано и, следовательно, одинаково для электромагнитных полей $\mathcal{F}'$ и $\mathcal{F}''$. Иначе говоря, можно положить $\mathbf{j}^{\text{стр}'''} = 0$.

Согласно (6.16) электромагнитная энергия поля $\mathcal{F}'''$ в области V определяется формулой

$$W''' = \frac{1}{2} \int_V (\varepsilon_a E'''^2 + \mu_a H'''^2)\, dV, \tag{7.1}$$

из которой следует, что

$$W''' \geqslant 0. \tag{7.2}$$

При $W''' = 0$ $\quad \mathbf{H}' = \mathbf{H}''$, $\mathbf{E}' = \mathbf{E}''$, ..., $\mathbf{j}' = \mathbf{j}''$, (7.2′)

[1] Согласно $(6.42)_2$ плотность зарядов $\delta^{\text{стр}}(a, t)$ определяется с точностью до постоянного слагаемого полем $\mathbf{j}^{\text{стр}}(a, t)$.

следовательно, для единственности решения системы (6.12) достаточны условия, обеспечивающие равенство нулю величины W'''.

В соответствии с (6.19) производная по времени

$$\dot{W}''' = P''' - Q''' - \oint\limits_{S[V]} (\mathbf{У}'''\mathrm{d}\mathbf{S}), \tag{7.3}$$

где P''', Q''', $\mathbf{У}'''$ — скаляры P, Q и вектор $\mathbf{У}$, соответствующие разностному полю $\mathcal{F}'''$. Однако, как было отмечено, следует считать $\mathbf{j}^{\text{стр}'''}=0$, поэтому согласно $(6.20)_1$ $P'''=0$ и в соответствии с $(6.20)_2$, (6.21)

$$\dot{W}''' = -\int\limits_V \gamma E'''^2 dV - \oint\limits_{S[V]} [\mathbf{E}'''\,\mathbf{H}''']_n\, dS. \tag{7.3'}$$

Теперь представим себе, что нам из физических условий задачи известны значения полной тангенциальной компоненты электрического или магнитного поля в любой точке p поверхности $S[V]$ в любой момент времени от t_0 до $t_м$, т. е. допустим, что $[\mathbf{n}\mathbf{E}(p, t)]=\mathbf{R}(p, t)$ или $[\mathbf{n}\mathbf{H}(p, t)]=\mathbf{G}(p, t)$ при $t_0 \leqslant t \leqslant t_м$, (7.4) где вектор $\mathbf{R}(p, t)$ или $\mathbf{G}(p, t)$ задан во всех точках p поверхности $S[V]$. Если поля $\mathcal{F}'$ и $\mathcal{F}''$ этому условию удовлетворяют, то в любой точке границы $S[V]$ области V $[\mathbf{n}\mathbf{E}''']=0$ или $[\mathbf{n}\mathbf{H}''']=0$. При любом из этих равенств вектор $[\mathbf{E}'''\mathbf{H}''']$ лежит в плоскости, касательной к поверхности $S[V]$, поэтому $[\mathbf{E}'''\mathbf{H}''']_n=0$ и, следовательно,

$$\dot{W}''' = -\int\limits_V \gamma E'''^2 dV, \text{ откуда } \dot{W}''' \leqslant 0 \text{ при } t_0 \leqslant t \leqslant t_м. \tag{7.3''}$$

Таким образом, величина W''' в любой момент t промежутка времени $[t_0, t_м]$ не может быть больше, чем в момент t_0:

$$W'''(t) \leqslant W'''(t_0) \text{ при } t_0 \leqslant t \leqslant t_м. \tag{7.3'''}$$

Допустим еще, что заданы значения векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ в любой точке a области V для момента t_0, т. е. задано

$$\mathbf{E}(a, t_0)=\mathbf{E}_0(a) \text{ и } \mathbf{H}(a, t_0)=\mathbf{H}_0(a), \tag{7.4'}$$

где поля $\mathbf{E}_0(a)$ и $\mathbf{H}_0(a)$ известны во всей области V. Если составляющие $\mathbf{E}'$, $\mathbf{H}'$ и $\mathbf{E}''$, $\mathbf{H}''$ полей $\mathcal{F}'$ и $\mathcal{F}''$ удовлетворяют этому условию, то $\mathbf{E}'''(a, t_0)=0$, $\mathbf{H}'''(a, t_0)=0$ и согласно (7.1)

$$W'''(t_0)=0. \tag{7.5}$$

Сопоставляя (7.2), (7.3'''), (7.5), приходим к выводу, что

$$W'''(t)=0 \text{ при } t_0 \leqslant t \leqslant t_м, \tag{7.5'}$$

а из этого в соответствии с (7.2') следует, что в любой точке a области V в промежуток времени $[t_0, t_м]$ решения $\mathcal{F}'$ и $\mathcal{F}''$ системы (6.12), (6.13) совпадают:

$$\mathbf{E}'(a, t)=\mathbf{E}''(a, t),\ \mathbf{H}'(a, t)=\mathbf{H}''(a, t) \text{ при } t_0 \leqslant t \leqslant t_м. \tag{7.5''}$$

Следовательно, решение этой системы, удовлетворяющее краевым условиям (7.4) и начальным условиям (7.4′) является единственным.

II. **Условия сопряжения. Условия у особых точек и линий.** Условия (7.4), (7.4′) достаточны для обеспечения единственности решения системы уравнений электродинамики в области V, в которой нет особых точек, линий и поверхностей электромагнитного поля. Если такие точки q_{oc}, линии l_{oc} и поверхности S_{oc} в области V имеются, то при получении формулы (6.19) следовало бы (аналогично изложенному в разд. I, § 8 главы первой) охватить их поверхностями безопасности $S_{бп}$ ($S[q_{oc}]$, $S[l_{oc}]$ и $S[S_{oc}]$) и применить теорему Остроградского к области V^*, представляющей собой область V без ее частей, ограниченных поверхностями $S_{бп}$. В результате в правых частях (7.3), (7.3′) появились бы дополнительные члены — потоки вектора $\mathbf{У}'''$ через поверхности $S_{бп}$. Для обращения в нуль этих членов и получения формулы $(7.3'')_1$ достаточно, чтобы поля $\mathcal{F}'$ и $\mathcal{F}''$ удовлетворяли условиям (для поля $\mathcal{F}$) у особых точек и линий и условиям сопряжения на особых поверхностях. Выведем условия сопряжения.

Для единственности решения системы (6.12), (6.13) надо в соответствии с (7.3) потребовать, чтобы выполнялось равенство

$$\oint\limits_{S[S_{oc}]} (\mathbf{У}'''\mathbf{dS}) = 0 \quad \text{или в соответствии с (1.48′) равенство}$$

$$\int\limits_{S_{oc}} \operatorname{Div} У'''\,dS = 0.$$

При ограниченных значениях $\mathbf{У}'''$ это равенство согласно (1.49) принимает вид $\int\limits_{S_2} У_n'''^{(2)}\,dS = \int\limits_{S_1} У_n'''^{(1)}\,dS$, где $\mathbf{У}'''^{(1)}$ и $\mathbf{У}'''^{(2)}$ — значения вектора $\mathbf{У}'''$ на сторонах S_1 и S_2 поверхности S_{oc}. Для выполнения этого равенства потребуем, чтобы в каждой точке p поверхности S_{oc} в любой момент времени t интервала $[t_0,\ t_м]$ выполнялось условие

$$\mathbf{У}_n'''^{(2)}(p,\ t) = У_n'''^{(1)}(p,\ t), \text{ т. е. } [\mathbf{E}'''^{(2)}(p,\ t)\,\mathbf{H}'''^{(2)}(p,\ t)]_n =$$

$$= [\mathbf{E}'''^{(1)}(p,\ t)\,\mathbf{H}'''^{(1)}(p,\ t)]_n. \tag{7.6}$$

Достаточным для выполнения равенства (7.6) условием является непрерывность тангенциальных компонент векторов $\mathbf{E}'''$ и $\mathbf{H}'''$ на S_{oc}:

$$[\mathbf{n}\mathbf{E}'''^{(2)}(p,\ t)] = [\mathbf{n}\mathbf{E}'''^{(1)}(p,\ t)] \text{ и } [\mathbf{n}\mathbf{H}'''^{(2)}(p,\ t)] = [\mathbf{n}\mathbf{H}'''^{(1)}(p,\ t)]$$

$$\text{при } t_0 \leqslant t \leqslant t_м. \tag{7.6′}$$

Допустим, что из физических условий задачи известны разрывы функций $[\mathbf{nE}]$ и $[\mathbf{nH}]$ на S_{oc}, т. е. для любой точки p поверхности S_{oc} и любого момента времени t интервала $[t_0,\ t_м]$ могут быть заданы два условия сопряжения:

$$[\mathbf{nE}^{(2)}(p,\ t)]-[\mathbf{nE}^{(1)}(p,\ t)]=\mathbf{R}_{12}(p,\ t), \qquad (7.7)$$

$$[\mathbf{nH}^{(2)}(p,\ t)]-[\mathbf{nH}^{(1)}(p,\ t)]=\mathbf{G}_{12}(p,\ t) \text{ при } t_0\leqslant t\leqslant t_м,$$

где $\mathbf{R}_{12}(p,\ t)$ и $\mathbf{G}_{12}(p,\ t)$ — известные функции положения точки p на поверхности S_{oc} и времени t. Очевидно, что, если соответствующие компоненты полей $\mathcal{F}'$ и $\mathcal{F}''$ удовлетворяют условиям (7.7), то компоненты разностного поля $\mathcal{F}'''$ удовлетворяют условиям (7.6′). Таким образом, выполнение условий сопряжения (7.7) (наряду с краевыми и начальными условиями) достаточно для единственности решения системы (6.12), (6.13).

На основе краевых условий могут быть получены условия у особых точек и линий. Как и в случае постоянного поля, эти условия сводятся к совпадению полей $\mathcal{F}'$ и $\mathcal{F}''$ при неограниченном приближении точки наблюдения к q_{oc} или l_{oc}, а для этого достаточно задания выражений для соответствующих компонент электромагнитного поля у особых точек и линий (см. § 3, 4).

III. **Теорема единственности.** Таким образом, получаем теорему единственности решения системы уравнений электродинамики: переменное электромагнитное поле в области V в промежуток времени $[t_0,\ t_м]$ определяется однозначно системой уравнений (6.12), (6.13) с подстановкой заданных функций $\gamma(a)$, $\varepsilon(a)$, $\mu(a)$, $\mathbf{j}^{стр}(a,\ t)$, заданием краевых условий (7.4), начальных условий (7.4′), двух условий сопряжения (7.7) на любой особой поверхности, находящейся внутри области V, и заданием выражений у особых точек q_{oc} и линий l_{oc} в области V для компонент векторов, описывающих электромагнитное поле.

Эту теорему необходимо дополнить следующими замечаниями.

1. Если область V снаружи не ограничена, то краевые условия на внешней ее границе (бесконечно удаленной поверхности Σ) заменяются условиями в бесконечности. Асимптотические выражения для полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ (при удалении точки наблюдения в бесконечность) зависят от многих обстоятельств. Ограничиваясь условием нахождения всех возбудителей поля на конечных расстояниях R от начала отсчета, можно было бы пользоваться условием стремления E и H к нулю как R^{-2} при $R\to\infty$. Но это, достаточное при любых видах (локальных) возбудителей (в том числе постоянных), условие является слишком жестким; оно, как показывают расчеты, не выполняется в весьма важных случаях (см. § 3, 4). Можно обойтись менее жестким условием стремления E и H к нулю быстрее, чем R^{-1} при $R\to\infty$, достаточным для обращения в нуль потока вектора $[\mathbf{EH}]$ через бесконечно удаленную поверхность Σ. Это условие выполнимо для электромагнитного поля переменного диполя при $\gamma>0$ (см. § 3, 4); к случаю $\gamma=0$ можно перейти от случая малых значений γ как к предельному.

2. В отсутствии поверхностных токов и неоднородных двойных электрических слоев (неоднородных контактных э. д. с.) условия сопряжения (7.7) согласно (6.14) вырождаются в условия непрерывности тангенциальных (к S_{oc}) составляющих век-

торов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$:

$$[\mathbf{nE}^{(2)}(p,\ t)] = [\mathbf{nE}^{(1)}(p,\ t)],\ [\mathbf{nH}^{(2)}(p,\ t)] = [\mathbf{nH}^{(1)}(p,\ t)]$$
$$\text{при } t_0 \leqslant t \leqslant t_м. \tag{7.8}$$

Особыми поверхностями в этом случае являются поверхности разрыва параметров среды[1]: γ, ε, μ.

3. Можно доказать, что в случае гармонически меняющегося поля отпадает необходимость начальных условий (7.4′) для единственности решения системы уравнений электродинамики. Это видно хотя бы из того, что в системе (6.55) уравнения для величин $\breve{\beta}$, $\breve{\mathbf{N}}$ можно заменить уравнениями для не зависящих от времени амплитудных величин β_0, $\breve{\mathbf{N}}_0$. Очевидно, что краевые условия и условия сопряжения в случае гармонически меняющегося поля достаточно задать для амплитудных величин $\breve{\mathbf{E}}_0$, $\breve{\mathbf{H}}_0$.

4. Применительно к переменному электромагнитному полю остаются справедливыми замечания, приведенные в разд. IV § 7 главы первой, а также замечания, аналогичные тем, которые содержатся в разд. II § 8 главы первой.

§ 2. ПОТЕНЦИАЛЫ ГАРМОНИЧЕСКИ МЕНЯЮЩЕГОСЯ ПОЛЯ

Различают электродинамические потенциалы двух типов: электрического ($\mathbf{A}$, U) и магнитного ($\mathbf{A}^*$, U^*). Потенциалы магнитного типа применимы для области, в которой отсутствуют свободные заряды ([1], стр. 375—381). Обычно пользуются такими потенциалами, когда заданными (сторонними) возбудителями поля являются замкнутые токи — возбудители магнитного типа (в частности, магнитные диполи). В области, в которой присутствуют возбудители электрического типа (заданы разомкнутые токи, например, электрические диполи), вводят потенциалы электрического типа[2].

Вместо потенциалов $\mathbf{A}$, U или $\mathbf{A}^*$, U^* часто применяют связанные с ними поляризационные потенциалы $\mathbf{П}$ или $\mathbf{П}^*$—векторы Герца электрического или магнитного типа.

В § 5 гл. шестой, шла речь о произвольно меняющемся поле, рассматривались только потенциалы $\mathbf{A}$ и U. Здесь применительно к гармонически меняющемуся полю уделим внимание также потенциалам других типов.

I. Потенциалы электрического типа: $\mathbf{A}$, U, $\mathbf{П}$. В случае гармонически меняющегося поля вместо (6.37), (6.44), $(6.46)_1$ получаем для электродинамических потенциалов $\breve{\mathbf{A}}$ и $\breve{U}$ соотношения

$$\breve{\mathbf{B}} = \operatorname{rot} \breve{\mathbf{A}},\ \breve{\mathbf{H}} = \frac{1}{\mu_a} \operatorname{rot} \breve{\mathbf{A}}, \tag{7.9}$$

[1] Для выполнения условий $(7.8)_1$ и $(7.8)_2$ для переменного электромагнитного поля достаточно, чтобы на S_{oc} отсутствовали меняющиеся со временем неоднородные контактные э. д. с. и поверхностные токи.

[2] Электродинамические потенциалы электрического типа применимы и для такой области V, в которой заданные возбудители поля являются замкнутыми токами.

$$\breve{\mathbf{E}} = i\omega\breve{\mathbf{A}} - \operatorname{grad}\breve{U},\ \operatorname{div}\breve{\mathbf{A}} = -\mu_a(\gamma - i\omega\varepsilon_a)\breve{U},$$

$$\nabla^2\breve{\mathbf{A}} + k^2\breve{\mathbf{A}} = 0, \tag{7.9'}$$

где $(7.9')_2$—калибровочное уравнение, а выражение $(7.9')_3$ справедливо для однородной области V, в которой $j^{стр}=0$. Из $(7.9')_{1,2}$ следует, что

$$\breve{\mathbf{E}} = i\omega\breve{\mathbf{A}} + \operatorname{grad}\operatorname{div}\frac{\breve{\mathbf{A}}}{\mu_a(\gamma - i\omega\varepsilon_a)} = i\omega\left[\breve{\mathbf{A}} + \frac{1}{k^2}\operatorname{grad}\operatorname{div}\breve{\mathbf{A}}\right], \tag{7.10}$$

т. е. вектор $\breve{\mathbf{E}}$ (как и вектор $\breve{\mathbf{H}}$) выражается через один потенциал $\breve{\mathbf{A}}$.

Часто потенциалы электрического типа вводят несколько иначе. При $\nabla\mu=0$ уравнение $(6.55)_{III}$ принимает вид $\operatorname{div}\breve{\mathbf{H}}=0$, откуда следует $\breve{\mathbf{H}} = \operatorname{rot}\breve{\mathbf{A}}_H$, где $\mathbf{A}_H$ — вектор, аналогичный вектору $\breve{\mathbf{A}}$. Выполнив преобразования, аналогичные указанным в разд. I и V, § 5 главы шестой, получаем вместо $(7.9)_2$, $(7.9')_2$, (7.10), $(7.9')_3$ соответственно

$$\breve{\mathbf{H}} = \operatorname{rot}\breve{\mathbf{A}}_H,\ \operatorname{div}\breve{\mathbf{A}}_H = -(\gamma - i\omega\varepsilon_a)\breve{U}_H,$$

$$\breve{\mathbf{E}} = i\omega\mu_a\left[\breve{\mathbf{A}}_H + \frac{1}{k^2}\operatorname{grad}\operatorname{div}\breve{\mathbf{A}}_H\right],\ \nabla^2\breve{\mathbf{A}}_H + k^2\breve{\mathbf{A}}_H = 0. \tag{7.11}$$

В однородной области V векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ могут быть выражены через вектор Герца[1] $\breve{\mathbf{\Pi}}$. В случае гармонически меняющегося поля вектор $\breve{\mathbf{\Pi}}$ отличается от вектора $\breve{\mathbf{A}}$ только множителем $i\omega/k^2$:

$$\breve{\mathbf{\Pi}} = \frac{i\omega}{k^2}\breve{\mathbf{A}}. \tag{7.12}$$

Из $(7.9)_2$, $(7.9)'_3$, (7.10), (7.12) имеем

$$\breve{\mathbf{H}} = (\gamma - i\omega\,\varepsilon_a)\operatorname{rot}\breve{\mathbf{\Pi}},\ \nabla^2\breve{\mathbf{\Pi}} + k^2\breve{\mathbf{\Pi}} = 0,$$

$$\breve{\mathbf{E}} = k^2\breve{\mathbf{\Pi}} + \operatorname{grad}\operatorname{div}\breve{\mathbf{\Pi}} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\breve{\mathbf{\Pi}}. \tag{7.12'}$$

II. Потенциалы магнитного типа: $\mathbf{A}^*$, U^*, $\mathbf{\Pi}^*$. В отсутствии свободных зарядов уравнение $(6.55)_{IV}$ принимает вид $\operatorname{div}\breve{\mathbf{D}}=0$, откуда в соответствии с (1.74') следует

$$\breve{\mathbf{D}} = \operatorname{rot}\breve{\mathbf{A}}^*. \tag{7.13}$$

---

[1] В случае произвольно меняющегося электромагнитного поля векторы $\mathbf{\Pi}$ и $\mathbf{\Pi}^*$ связаны с электродинамическими потенциалами соотношениями ([1], с. 374—381): $U = -\operatorname{div}\mathbf{\Pi}$, $\mathbf{A} = \varepsilon_a\mu_a\dot{\mathbf{\Pi}} + \gamma\mu_a\mathbf{\Pi}$; $U^* = -\operatorname{div}\mathbf{\Pi}^*$, $\mathbf{A}^* = -\varepsilon_a\mu_a\dot{\mathbf{\Pi}}^*$.

Для однородной области V, в которой $j^{стр}=0$, аналогично $(7.9')_{2,3}$, (7.10) получаем выражения

$$\operatorname{div}\breve{\mathbf{A}}^*=-i\omega\varepsilon_a\mu_a\breve{U}^*,\quad \breve{\mathbf{H}}=\left(\frac{\gamma}{\varepsilon_a}-i\omega\right)\left(\breve{\mathbf{A}}^*+\frac{1}{k^2}\operatorname{grad}\operatorname{div}\breve{\mathbf{A}}^*\right),\tag{7.13'}$$

$$\nabla^2\breve{\mathbf{A}}^*+k^2\breve{\mathbf{A}}^*=0.$$

Если $\operatorname{div}\breve{\mathbf{D}}=0$ и $\nabla\varepsilon=0$, то $\operatorname{div}\breve{\mathbf{E}}=0$, т. е. в однородной по ε области V, в которой нет свободных зарядов, чисто вихревым является не только поле $\mathbf{D}$, но и поле $\mathbf{E}$. Поэтому вместо (7.13), (7.13′) можно получить

$$\breve{\mathbf{E}}=\operatorname{rot}\breve{\mathbf{A}}^*_E,\quad \operatorname{div}\breve{\mathbf{A}}^*_E=-i\omega\mu_a\breve{U}^*_E,\quad \breve{\mathbf{H}}=(\gamma-i\omega\varepsilon_a)\left(\breve{\mathbf{A}}^*_E+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{k^2}\operatorname{grad}\operatorname{div}\breve{\mathbf{A}}^*_E\right),\quad \nabla^2\breve{\mathbf{A}}^*_E+k^2\breve{\mathbf{A}}^*_E=0.\tag{7.14}$$

Аналогичный вектору $\breve{\mathbf{\Pi}}$ вектор Герца магнитного типа $\breve{\mathbf{\Pi}}^*$ отличается от вектора $\breve{\mathbf{A}}^*$ только множителем $(i\omega\varepsilon_a\mu_a)^{-1}$

$$\breve{\mathbf{\Pi}}^*=\frac{1}{i\omega\varepsilon_a\mu_a}\breve{\mathbf{A}}^*.\tag{7.15}$$

Из выражений (7.15), (7.13), $(7.13')_{2,3}$ имеем

$$\breve{\mathbf{E}}=i\omega\mu_a\operatorname{rot}\breve{\mathbf{\Pi}}^*,\quad \nabla^2\breve{\mathbf{\Pi}}^*+k^2\breve{\mathbf{\Pi}}^*=0,$$

$$\breve{\mathbf{H}}=k^2\breve{\mathbf{\Pi}}^*+\operatorname{grad}\operatorname{div}\breve{\mathbf{\Pi}}^*=\operatorname{rot}\operatorname{rot}\breve{\mathbf{\Pi}}^*.\tag{7.15'}$$

III. Граничные условия для потенциалов. Условия единственности для электродинамических потенциалов выводятся из условий единственности решения системы уравнений электродинамики и приведенных выше выражений, связывающих эти потенциалы с векторами, описывающими электромагнитное поле. В частности, в соответствии со сказанным в замечании 1 в разд. III § 1 для каждого из введенных в § 5 главы шестой и в разд. I, II этой главы векторных потенциалов условие в бесконечности обычно может быть записано в виде: при $R\to\infty$ $\mathbf{A}_{э-д}\to 0$ не медленнее, чем R^{-1}, (7.16) где $\mathbf{A}_{э-д}=\mathbf{A}, \mathbf{A}^*, \mathbf{\Pi}, \ldots$

Рассмотрим более подробно условия сопряжения для потенциалов гармонически меняющегося поля. Среду будем считать кусочно-однородной и полагать, что (меняющиеся во времени) поверхностные токи и неоднородные двойные электрические слои отсутствуют. При этих ограничениях условия сопряжения для электромагнитного поля имеют вид (7.8) и должны быть заданы на поверхностях разрыва параметров γ, ε или μ. Пусть поверхность S, по разные стороны которой (в областях V_1 и V_2) значения электромагнитных параметров равны соответственно γ_1, ε_1, μ_1 и γ_2, ε_2, μ_2, совпадает с координатной поверхностью S_3 ортогональной системы координат (см. разд. III § 1 главы первой). Волновое чис-

ло k в областях V_1, V_2 будем обозначать соответственно k_1, k_2.

Выведем условия сопряжения для потенциала $\breve{\mathbf{A}}$, связанного с векторами $\breve{\mathbf{H}}$ и $\breve{\mathbf{E}}$ равенствами $(7.9)_2$, (7.10). Из этих равенств для тангенциальных составляющих векторов $\breve{\mathbf{E}}$ и $\breve{\mathbf{H}}$ в соответствии с (1.11), (1.25), (1.25′) получаем

$$\left.\begin{aligned}
&\breve{E}_1 = i\omega\left(\breve{A}_1 + \frac{1}{k^2}\frac{\partial}{\partial l_1}\operatorname{div}\breve{\mathbf{A}}\right),\quad \breve{E}_2 = i\omega\left(\breve{A}_2 + \frac{1}{k^2}\frac{\partial}{\partial l_2}\operatorname{div}\breve{\mathbf{A}}\right),\\
&\breve{H}_1 = \frac{1}{\mu_0\mu}\frac{1}{dl_2 dl_3}\left[\frac{\partial(\breve{A}_3 dl_3)}{\partial l_2}dl_2 - \frac{\partial(\breve{A}_2 dl_2)}{\partial l_3}dl_3\right],\\
&\breve{H}_2 = \frac{1}{\mu_0\mu}\frac{1}{dl_3 dl_1}\left[\frac{\partial(\breve{A}_1 dl_1)}{\partial l_3}dl_3 - \frac{\partial(\breve{A}_3 dl_3)}{\partial l_1}dl_1\right],
\end{aligned}\right\} \tag{7.17}$$

где $\breve{E}_1$, $\breve{H}_1$, и $\breve{E}_2$, $\breve{H}_2$—компоненты векторов $\breve{\mathbf{E}}$ и $\breve{\mathbf{H}}$ по координатным направлениям l_1 и l_2. Тогда для выполнения условий (7.8) необходимо, чтобы у поверхности S удовлетворялись равенства

$$\left.\begin{aligned}
&\breve{A}_1^{(1)} + \frac{1}{k_1^2}\frac{\partial}{\partial l_1}\operatorname{div}\breve{\mathbf{A}}^{(1)} = \breve{A}_1^{(2)} + \frac{1}{k_2^2}\frac{\partial}{\partial l_1}\operatorname{div}\breve{\mathbf{A}}^{(2)},\\
&\breve{A}_2^{(1)} + \frac{1}{k_1^2}\frac{\partial}{\partial l_2}\operatorname{div}\breve{\mathbf{A}}^{(1)} = \breve{A}_2^{(2)} + \frac{1}{k_2^2}\frac{\partial}{\partial l_2}\operatorname{div}\breve{\mathbf{A}}^{(2)},\\
&\frac{1}{\mu_1}\left[\frac{\partial(\breve{A}_3^{(1)}\, dl_3)}{\partial l_2}dl_2 - \frac{\partial(\breve{A}_2^{(1)}\, dl_2)}{\partial l_3}dl_3\right] = \frac{1}{\mu_2}\left[\frac{\partial(\breve{A}_3^{(2)} dl_3)}{\partial l_2}dl_2 - \right.\\
&\left. - \frac{\partial(\breve{A}_2^{(2)} dl_2)}{\partial l_3}dl_3\right],\\
&\frac{1}{\mu_1}\left[\frac{\partial(\breve{A}_1^{(1)} dl_1)}{\partial l_3}dl_3 - \frac{\partial(\breve{A}_3^{(1)} dl_3)}{\partial l_1}dl_1\right] =\\
&= \frac{1}{\mu_2}\left[\frac{\partial(\breve{A}_1^{(2)} dl_1)}{\partial l_3}dl_3 - \frac{\partial(\breve{A}_3^{(2)} dl_3)}{\partial l_1}dl_1\right],
\end{aligned}\right\} \tag{7.18}$$

где $\breve{\mathbf{A}}^{(1)}$, $\breve{\mathbf{A}}^{(2)}$—значения вектора $\breve{\mathbf{A}}$ в областях V_1, V_2. В конкретных случаях в зависимости от применяемой (в соответствии с условиями задачи) системы координат эти условия могут быть представлены в более простом виде. Если граница S—плоскость z=const декартовой системы координат, то из (7.18) в соответствии с (1.8) получаем

$$\left.\begin{aligned}
&\breve{A}_x^{(1)}+\frac{1}{l^2_1}\frac{\partial}{\partial x}\operatorname{div}\breve{\mathbf{A}}^{(1)}=\breve{A}_x^{(2)}+\frac{1}{k^2_2}\frac{\partial}{\partial x}\operatorname{div}\breve{\mathbf{A}}^{(2)},\\
&\breve{A}_y^{(1)}+\frac{1}{k^2_1}\frac{\partial}{\partial y}\operatorname{div}\breve{\mathbf{A}}^{(1)}=\breve{A}_y^{(2)}+\frac{1}{k^2_2}\frac{\partial}{\partial y}\operatorname{div}\breve{\mathbf{A}}^{(2)},\\
&\frac{1}{\mu_1}\left[\frac{\partial\breve{A}^{(1)}_z}{\partial y}-\frac{\partial\breve{A}_y^{(1)}}{\partial z}\right]=\frac{1}{\mu_2}\left[\frac{\partial\breve{A}_z^{(2)}}{\partial y}-\frac{\partial\breve{A}_y^{(2)}}{\partial z}\right],\\
&\frac{1}{\mu_1}\left[\frac{\partial\breve{A}_x^{(1)}}{\partial z}-\frac{\partial\breve{A}_z^{(1)}}{\partial x}\right]=\frac{1}{\mu_2}\left[\frac{\partial\breve{A}_x^{(2)}}{\partial z}-\frac{\partial\breve{A}_z^{(2)}}{\partial x}\right],
\end{aligned}\right\}\qquad(7.19)$$

где $\operatorname{div}\breve{\mathbf{A}}$ определяется выражением (1.33).

Для выполнения условий $(7.19)_{1,2}$ достаточно потребовать непрерывности величин $\breve{A}_x$, $\breve{A}_y$ и $\frac{1}{k^2}\operatorname{div}\breve{\mathbf{A}}$, а для выполнения условий $(7.19)_{3,4}$ достаточной является непрерывность[1] величин $\frac{1}{\mu}\breve{A}_z$, $\frac{1}{\mu}\frac{\partial\breve{A}_x}{\partial z}$ и $\frac{1}{\mu}\frac{\partial\breve{A}_y}{\partial z}$. Поэтому условия сопряжения для электродинамического потенциала $\breve{\mathbf{A}}$ могут быть записаны в виде

$$\breve{A}_x^{(1)}=\breve{A}_x^{(2)},\quad \breve{A}_y^{(1)}=\breve{A}_y^{(2)},\quad \frac{1}{\mu_1}\breve{A}_z^{(1)}=\frac{1}{\mu_2}\breve{A}_z^{(2)},\quad \frac{1}{\mu_1}\frac{\partial\breve{A}_x^{(1)}}{\partial z}=\frac{1}{\mu_2}\frac{\partial\breve{A}_x^{(2)}}{\partial z},\qquad(7.20)$$

$$\frac{1}{\mu_1}\frac{\partial\breve{A}_y^{(1)}}{\partial z}=\frac{1}{\mu_2}\frac{\partial\breve{A}_y^{(2)}}{\partial z},\quad \frac{1}{k^2_1}\operatorname{div}\breve{\mathbf{A}}^{(1)}=\frac{1}{k^2_2}\operatorname{div}\breve{\mathbf{A}}^{(2)}.$$

Однако достаточные условия (7.20) — не необходимы и могут оказаться несовместными (см. разд. III, § 8 главы первой).

Аналогичным способом могут быть получены условия сопряжения для других векторных электродинамических потенциалов. Приведем эти условия для векторов $\breve{\mathbf{A}}_H$ и $\breve{\mathbf{A}}^*_E$, соответствующие условиям (7.18) для вектора $\breve{\mathbf{A}}$.

Для потенциала $\breve{\mathbf{A}}_H$, связанного с электромагнитным полем равенствами $(7.11)_{1,3}$[2]:

---

[1] Здесь учтено, что для непрерывного изменения тангенциальной производной от некоторой величины при переходе через границу S достаточно непрерывного изменения самой этой величины при переходе через S.

[2] Индексы «H» и «E», применявшиеся выше при обозначениях некоторых из электродинамических потенциалов, введенных в разд. I и II, будем далее, как правило, опускать.

$$
\left.
\begin{aligned}
&\mu_1\left[\breve{A}_1^{(1)}+\frac{1}{k^2_1}\frac{\partial}{\partial l_1}\operatorname{div}\breve{\mathbf{A}}^{(1)}\right]=\mu_2\left[\breve{A}_1^{(2)}+\frac{1}{k^2_2}\frac{\partial}{\partial l_1}\operatorname{div}\breve{\mathbf{A}}^{(2)}\right],\\
&\mu_1\left[\breve{A}_2^{(1)}+\frac{1}{k^2_1}\frac{\partial}{\partial l_2}\operatorname{div}\breve{\mathbf{A}}^{(1)}\right]=\mu_2\left[\breve{A}_2^{(2)}+\frac{1}{k^2_2}\frac{\partial}{\partial l_2}\operatorname{div}\breve{\mathbf{A}}^{(2)}\right],\\
&\frac{\partial(\breve{A}_3^{(1)}dl_3)}{\partial l_2}dl_2-\frac{\partial(\breve{A}_2^{(1)}dl_2)}{\partial l_3}dl_3=\frac{\partial(\breve{A}_3^{(2)}dl_3)}{\partial l_2}dl_2-\\
&-\frac{\partial(\breve{A}_2^{(2)}dl_2)}{\partial l_3}dl_3,\\
&\frac{\partial(\breve{A}_1^{(1)}dl_1)}{\partial l_3}dl_3-\frac{\partial(\breve{A}_3^{(1)}dl_3)}{\partial l_1}dl_1=\frac{\partial(\breve{A}_1^{(2)}dl_1)}{\partial l_3}dl_3-\\
&-\frac{\partial(\breve{A}_3^{(2)}dl_3)}{\partial l_1}dl_1.
\end{aligned}
\right\}\quad(7.21)
$$

Для потенциала $\breve{\mathbf{A}}^*{}_E$ в соответствии с $(7.14)_{1,3}$

$$
\left.
\begin{aligned}
&\varepsilon'_1\left[\breve{A}_1^{*(1)}+\frac{1}{k^2_1}\frac{\partial}{\partial l_1}\operatorname{div}\breve{\mathbf{A}}^{*(1)}\right]=\varepsilon'_2\left[\breve{A}_1^{*(2)}+\frac{1}{k^2_2}\frac{\partial}{\partial l_1}\operatorname{div}\breve{\mathbf{A}}^{*(2)}\right],\\
&\varepsilon'_1\left[\breve{A}_2^{*(1)}+\frac{1}{k^2_1}\frac{\partial}{\partial l_2}\operatorname{div}\breve{\mathbf{A}}^{*(1)}\right]=\varepsilon'_2\left[\breve{A}_2^{*(2)}+\frac{1}{k^2_2}\frac{\partial}{\partial l_2}\operatorname{div}\breve{\mathbf{A}}^{*(2)}\right],\\
&\frac{\partial(\breve{A}_3^{*(1)}dl_3)}{\partial l_2}dl_2-\frac{\partial(\breve{A}_2^{*(1)}dl_2)}{\partial l_3}dl_3=\frac{\partial(\breve{A}_3^{*(2)}dl_3)}{\partial l_2}dl_2-\\
&-\frac{\partial(\breve{A}_2^{*(2)}dl_2)}{\partial l_3}dl_3,\\
&\frac{\partial(\breve{A}_1^{*(1)}dl_1)}{\partial l_3}dl_3-\frac{\partial(\breve{A}_3^{*(1)}dl_3)}{\partial l_1}dl_1=\frac{\partial(\breve{A}_1^{*(2)}dl_1)}{\partial l_3}dl_3-\\
&-\frac{\partial(\breve{A}_3^{*(2)}dl_3)}{\partial l_1}dl_1.
\end{aligned}
\right\}\quad(7.22)
$$

§ 3. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ДИПОЛЬ В БЕЗГРАНИЧНОЙ ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

В этом и последующих параграфах рассмотрим некоторые расчеты переменного электромагнитного поля и результаты расчетов.

1. Постановка задачи и ее решение. Заданный переменный электрический диполь представим линейным элементом сторон-

него тока $I^{стр}dl$ (рис. 57,*а*) с переменными зарядами $\pm e$ на концах. В общем случае $e=e_{плн}=e^{стр}+e_{зав}+e_{свз}$ (см. разд. IV, § 5 главы шестой). Заряд $e^{стр}$ определяется согласно $(6.42)_4$ током $I^{стр}$.

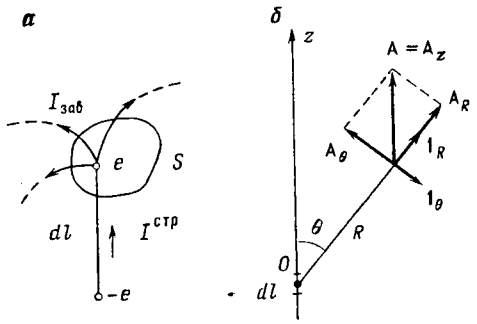


Рис. 57. Переменный электрический диполь (*а*) и векторный потенциал его поля (*б*)

Положим[1] $I^{стр}=I=I_0\cos\omega t$, $\hat{I}=I_0\exp(-i\omega t)$. Среда — однородна, т. е. всюду $\nabla\gamma=0$, $\nabla\varepsilon=0$, $\nabla\mu=0$ и, следовательно, $\nabla k=0$. Определим электромагнитное поле.

Применим «совмещенную систему» координат $R, \theta, \varphi; r, \varphi, z$ с общим началом O в центре отрезка dl и положительным направлением полярной оси (и оси z) по току I в момент $t=0$ (рис. 57,*б*). Введем электродинамический потенциал $\breve{\mathbf{A}}$, пользуясь соотношениями $(7.11)_{1-3}$. Вне диполя (при $R>0$) вектор $\breve{\mathbf{A}}$ подчиняется уравнению $(7.11)_4$. В соответствии с изложенным в § 1, 2 требуется найти решение этого уравнения, удовлетворяющее следующим дополняющим условиям: 1) условию в бесконечности (7.16); 2) условию у особой точки O ($R=0$), к получению которого переходим.

В соответствии со сказанным в разд. VI, § 5 главы шестой магнитное поле элемента Idl переменного тока при $R\to 0$ в каждый момент времени должно совпадать с магнитным полем элемента Idl постоянного тока. Тогда согласно $(5.27')_1$, (5.53) надо потребовать, чтобы при $R\to 0$ $\mathbf{H}\to \mathbf{1}_\varphi \frac{Idl\sin\theta}{4\pi R^2}$. Можно убедиться, что это условие будет выполнено, если для вектора $\breve{\mathbf{A}}$, связанного с полем $\mathbf{H}$ равенством $(7.11)_1$, будет выполняться условие

$$\text{при } R\to 0 \quad \breve{\mathbf{A}}\to \mathbf{1}_z\frac{\breve{I}dl}{4\pi R}, \tag{7.23}$$

где $R=\sqrt{r^2+z^2}$.

Согласно (7.23) вблизи диполя вектор $\mathbf{A}$ колинеарен оси z и зависит лишь от расстояния R от диполя до точки наблюдения. Будем искать решение уравнения $(7.11)_4$ в предположении, что эти условия выполняются во всем пространстве:

$$\breve{\mathbf{A}}=\mathbf{1}_z\breve{A}_z(R). \tag{7.24}$$

---

[1] Задаемся нулевой начальной фазой величины I.

Тогда согласно (1.79′), (7.24) вместо $(7.11)_4$ получаем уравнение $\nabla^2\breve{A}_z+k^2\breve{A}_z=0$, которое в соответствии с (1.66″), (7.24) можем записать в виде

$$\frac{1}{R^2}\frac{d}{dR}\left(R^2\frac{d\breve{A}_z}{dR}\right)+k^2\breve{A}_z=0 \quad \text{или} \quad \frac{d^2(\breve{A}_zR)}{dR^2}+k^2(\breve{A}_zR)=0. \tag{7.25}$$

Очевидно, что общее решение уравнения (7.25) имеет вид[1]

$$\breve{A}_z=\frac{C_1\exp(ikR)}{R}+\frac{C_2\exp(-ikR)}{R}, \tag{7.26}$$

где C_1 и C_2 — множители, не зависящие от R.

Согласно (6.59′), (7.26) $\breve{A}_z=C_1R^{-1}\exp(-bR)\exp(iaR)+C_2R^{-1}\times$ $\times\exp(bR)\exp(-iaR)$, где $b\geqslant 0$. При $b>0$ и $R\to\infty\exp(bR)\to\infty$, поэтому для выполнения условия (7.16) положим $C_2=0$. Условию (7.23) удовлетворим, положив $C_1=Idl/(4\pi)$. Таким образом,

$$\breve{A}_z=\frac{\breve{I}dl}{4\pi R}\exp(ikR)=\frac{I_0dl}{4\pi R}\exp[i(kR-\omega t)]=$$

$$=\frac{I_0dl}{4\pi R}\exp(-bR)\exp[i(aR-\omega t)]. \tag{7.27}$$

Выражения (7.24), (7.27) удовлетворяют уравнению $(7.11)_4$ и дополняющим условиям и, следовательно, являются решением рассматриваемой задачи.

Для перехода от $\breve{\mathbf{A}}$ к векторам $\breve{\mathbf{E}}$ и $\breve{\mathbf{H}}$ предварительно выразим поле $\breve{\mathbf{A}}$ в сферической системе координат. Как видно на рис. 57,*б*, при $\mathbf{A}=\mathbf{1}_zA_z$ $A_R=A_z\cos\theta$, $A_\theta=-A_z\sin\theta$, $A_\varphi=0$, т. е. согласно (7.27)

$$\mathbf{A}=\mathbf{1}_RA_R+\mathbf{1}_\theta A_\theta,\ \breve{A}_R=\frac{\breve{I}dl\cos\theta}{4\pi R}\exp(ikR),$$

$$\breve{A}_\theta=-\frac{\breve{I}dl\sin\theta}{4\pi R}\exp(ikR). \tag{7.27′}$$

Применяя формулы $(7.11)_1$, (1.27″), получаем $\mathbf{H}=\mathbf{1}_\varphi H_\varphi$, $\breve{H}_\varphi=$ $=\frac{\breve{I}dl}{4\pi}\sin\theta(R^{-2}-ikR^{-1})\exp(ikR)$. Поле $\mathbf{E}$ можем определить, пользуясь либо выражением для поля $\mathbf{H}$, уравнением (6.55″) и формулой (1.27″), либо формулами $(7.11)_3$, (7.27′), (1.13″), (1.33″). В

[1] Каждое из двух слагаемых в правой части (7.26) представляет собой сферическую волну с центром в точке O (поверхности равных фаз — сферические). Эти слагаемые определяют две сферические волны: «расходящуюся» и «сходящуюся».

результате получаем следующие выражения для ненулевых компонент векторов $\breve{\mathbf{H}}$ и $\breve{\mathbf{E}}$ в сферической системе координат:

$$\left.\begin{aligned}
\breve{H}_\varphi &= \frac{\breve{I}dl\sin\theta}{4\pi R^2}(1-ikR)\exp(ikR),\\
\breve{E}_R &= \frac{i}{\omega\varepsilon'_a}\frac{2\breve{I}dl\cos\theta}{4\pi R^3}(1-ikR)\exp(ikR),\\
\breve{E}_\theta &= \frac{i}{\omega\varepsilon'_a}\frac{\breve{I}dl\sin\theta}{4\pi R^3}(1-ikR-k^2R^2)\exp(ikR).
\end{aligned}\right\} \qquad (7.28)$$

II. **Поле в окрестности диполя.** При $R\to 0$ (или $\omega\to 0$) $kR\to 0$ и вместо (7.28) имеем

$$H_\varphi = \frac{Idl\sin\theta}{4\pi R^2},\quad \breve{E}_R = \frac{i}{\omega\varepsilon'_a}\frac{2\breve{I}dl\cos\theta}{4\pi R^3},\quad \breve{E}_\theta = \frac{i}{\omega\varepsilon'_a}\frac{\breve{I}dl\sin\theta}{4\pi R^3}. \qquad (7.29)$$

Покажем, что выражения $(7.29)_{2,3}$ определяют электрическое поле переменного электрического диполя в квазипостоянном приближении, т. е. такое поле $\mathbf{E}$, возбудителями (источниками) которого являются (полные) электрические заряды, причем это поле синхронно меняется с изменением во времени его возбудителей[1] (см. вступление к § 1 главы шестой).

Преобразуем некоторые выражения, выведенные в § 4, 5 главы шестой. Взяв дивергенцию от левой и правой частей (6.28) в соответствии с (1.74), (6.42)—(6.42″), получаем

$$div\,(\mathbf{j}_{зав}+\mathbf{D}) = -\mathrm{div}\mathbf{j}^{стр} = \delta^{стр}. \qquad (7.29')$$

В случае гармонически меняющегося поля выражения $(6.42)_{1,2}$, (7.29′) принимают вид

$$\mathrm{div}\,\breve{\mathbf{j}}_{зав} = i\omega\breve{\delta}_{зав},\quad \mathrm{div}\,\breve{\mathbf{j}}^{стр} = i\omega\breve{\delta}^{стр},$$

$$\mathrm{div}\,[(\gamma - i\omega\varepsilon_a)\breve{\mathbf{E}}] = -\mathrm{div}\breve{\mathbf{j}}^{стр} = -i\omega\breve{\delta}^{стр}. \qquad (7.30)$$

Для среды, однородной по электрическим свойствам ($\nabla\gamma=0$, $\nabla\varepsilon=0$), из $(7.30)_3$ следует, что $\mathrm{div}\,\breve{\mathbf{E}} = (-i\omega\breve{\delta}^{стр})/(\gamma - i\omega\varepsilon_a)$, а согласно $(4.21)_2$, (6.9) $\mathrm{div}\,\breve{\mathbf{E}} = \delta_{плн}/\varepsilon_0$, откуда, пользуясь $(7.30)_2$, получаем

$$\breve{\delta}_{плн} = -\frac{i\omega\varepsilon_0\breve{\delta}^{стр}}{\gamma - i\omega\varepsilon_a} = \frac{\breve{\delta}^{стр}}{\varepsilon'} = \frac{\mathrm{div}\,\breve{\mathbf{j}}^{стр}}{i\omega\varepsilon'}. \qquad (7.30')$$

Применяя (1.30), можем прийти к интегральной форме равенства (7.30′). Для изображенной на рис. 57,*а* замкнутой поверхности

---

[1] Очевидно, что определяемое выражением $(7.29)_1$ магнитное поле в любой момент времени совпадает с магнитным полем элемента Idl постоянного тока. Это обстоятельство послужило основой при формулировке условия (7.23).

S из (7.30′) имеем[1] $\breve{e}=\breve{e}_{\text{плн}}=\breve{e}^{\text{стр}}/\varepsilon'=-\breve{I}^{\text{стр}}/(i\omega\varepsilon')$, откуда

$$\breve{I}^{\text{стр}}=-i\omega\varepsilon'\breve{e}. \tag{7.31}$$

Пользуясь равенствами (6.56), (7.31) и выделяя действительные части комплексных величин, вместо выражений $(7.29)_{2,3}$ получаем

$$E_R=\frac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^3},\quad E_\theta=\frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^3}, \tag{7.29″}$$

где $p=edl$ — момент электрического диполя, а $e=e_0\cos\omega t$.

Таким образом, согласно (2.57), $(2.114)_1$, (7.29″) электрическое поле, определяемое выражениями $(7.29)_{2,3}$, в каждый момент времени совпадает с полем постоянного электрического диполя (зарядов e и $-e$ на концах отрезка dl).

Величина зарядов $\pm e$ зависит от тока I (в частности, от его частоты) и электрических свойств среды. Действительно, согласно (7.31), (6.56) при $I=I_0\cos\omega t$ имеем

$$e=\frac{I_0}{\omega\varepsilon}\left(1+\frac{\gamma^2}{\omega^2\varepsilon_a^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\sin(\omega t+\Delta), \tag{7.31′}$$

где $\Delta=\operatorname{arctg}(\gamma/\omega\varepsilon_a)$—угол потерь.

В частных случаях выражение (7.31′) упрощается. Если элемент Idl гармонически меняющегося тока находится в непроводящей среде ($\gamma=0$, $\Delta=0$), то

$$e=\frac{I_0\sin\omega t}{\omega\varepsilon}=\frac{e^{\text{стр}}}{\varepsilon}. \tag{7.31″}$$

Если электромагнитное поле можно считать квазистационарным $\left(\frac{\omega\varepsilon_a}{\gamma}\ll 1,\ \Delta\approx\frac{\pi}{2}\right)$, то

$$e\approx\varepsilon_0\rho I \tag{7.31‴}$$

в соответствии с (4.81).

Пользуясь полученными формулами с учетом того, что при $\nabla\varepsilon=0$ согласно $(4.21)_2$ $\delta_{\text{свб}}=\varepsilon\delta_{\text{плн}}$, а следовательно, $e_{\text{свб}}=\varepsilon e_{\text{плн}}$, можно определить заряды $e_{\text{свб}}=e^{\text{стр}}+e_{\text{зав}}$ и $e_{\text{зав}}$ и ток эмиссии $I_э=I_{\text{зав}}$. Приведем соответствующие выражения в комплексной форме[2]:

$$\breve{e}_{\text{свб}}=\varepsilon\breve{e}=\frac{i\breve{I}}{\omega\left(1+i\frac{\gamma}{\omega\varepsilon_a}\right)},\quad \breve{e}_{\text{зав}}=\frac{\gamma\breve{I}}{\omega^2\varepsilon_a}\left(1+i\frac{\gamma}{\omega\varepsilon_a}\right)^{-1},$$

$$\breve{I}_{\text{зав}}=-i\frac{\gamma}{\omega\varepsilon_a}\left(1+i\frac{\gamma}{\omega\varepsilon_a}\right)^{-1}\breve{I}.$$

---

[1] Учтено, что при выбранном положительном направлении $I^{\text{стр}}$ этот ток направлен внутрь области, ограниченной поверхностью S.

[2] Из $(6.42)_3$ или $(7.30)_1$ следует, что $\breve{I}_{\text{зав}}=i\omega\breve{e}_{\text{зав}}$.

В частности, при $\gamma = 0$

$$\breve{e}_{\text{зав}} = 0,\ \breve{I}_{\text{зав}} = 0;\ \text{при}\ \frac{\omega\varepsilon_a}{\gamma} \ll 1\ \breve{e}_{\text{свб}} \approx \varepsilon_a \rho \breve{I},$$

$$\breve{e}_{\text{зав}} = \frac{\breve{I}}{i\omega}\left(1 - i\frac{\omega\varepsilon_a}{\gamma}\right)^{-1} \approx -\breve{e}^{\text{стр}},\ \breve{I}_{\text{зав}} = -\breve{I}\left(1 - i\frac{\omega\varepsilon_a}{\gamma}\right)^{-1} \approx -\breve{I}.$$

III. **Поле в ближней и дальней зонах.** Как будет видно из дальнейшего изложения, целесообразно рассматривать отдельно поле на небольших расстояниях от диполя и вдали от него, а именно при $R \ll |k|^{-1}$ и при $R \gg |k|^{-1}$. Эти области пространства называют соответственно ближней и дальней зонами. Остальную часть пространства называют промежуточной зоной.

В ближней зоне параметр $|k|R \ll 1$ (область малого параметра). Применяя разложение в степенной ряд $\left(\exp(ikR) = 1 + ikR - \frac{k^2R^2}{2} - \ldots\right)$ и пренебрегая малыми величинами выше второго порядка, получаем, например, вместо (7.28)$_1$

$$\breve{H}_\varphi = \frac{\breve{I}dl}{4\pi R^2}\left(1 + \frac{ikR}{2}\right)\sin\theta. \tag{7.32}$$

В квазистационарном случае, $\left(\frac{\omega\varepsilon_a}{\gamma} \ll 1\right)$ согласно (6.61″) вместо (7.32) имеем $\breve{H}_\varphi = \frac{\breve{I}dl}{4\pi R^2}\left(1 + i\frac{\gamma\mu_a\omega R^2}{2}\right)\sin\theta$, откуда

$$H_\varphi = \frac{I_0 dl}{4\pi R^2}\sin\theta\cos\omega t - \frac{I_0 dl}{8\pi}\sin\theta\,\gamma\mu_a\omega\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right). \tag{7.32′}$$

Таким образом, в соответствии с (6.47′) величину H_φ можно представить в виде суммы двух колебаний с начальными фазами 0 и $\pi/2$. Первое слагаемое[1] в правой части (7.32′) меняется со временем синхронно с током I (как $\cos\omega t$) и не зависит от параметров среды; второе — сдвинуто по фазе на $\pi/2$ относительно I и прямо зависит от электропроводности и магнитной проницаемости среды, а также от частоты ω.

---

[1] Первое слагаемое в правой части (7.32′) определяет первичную часть магнитного поля (первичное поле) электрического диполя с гармонически меняющейся силой тока. Остальная (вторичная) часть этого поля (вторичное поле) определяется приближенно вторым слагаемым в правой части (7.32[1]). Аналогично можно разделять на первичную и вторичную части поля других возбудителей (см. разд. II, § 4). Первичное поле иногда называют прямым полем.

В дальней (или волновой) зоне параметр $|k|R\gg 1$. Из (7.28) получаем

$$\left.\begin{aligned}\breve{H}_\varphi &= -ik\frac{\breve{I}dl\sin\theta}{4\pi R}\exp(ikR),\\ \breve{E}_R &= \frac{\omega\mu_a}{k}\frac{2\breve{I}dl\cos\theta}{4\pi R^2}\exp(ikR),\\ \breve{E}_\theta &= -i\omega\mu_a\frac{\breve{I}dl\sin\theta}{4\pi R}\exp(ikR).\end{aligned}\right\} \qquad (7.33)$$

Если исключить из рассмотрения окрестность полярной оси (при $\operatorname{tg}\theta=0$ $E_\theta=0$), то в дальней зоне согласно $(7.33)_{2,3}$ $\frac{E_R}{E_\theta}\ll 1$ и $\mathbf{E}=\mathbf{1}_\theta E_\theta$. Для импеданса Z имеем выражение $Z=\breve{E}_\theta/\breve{H}_\varphi=\omega\mu_a/k$, совпадающее с (6.71).

При $\gamma=0$ из $(7.33)_{1,3}$ получаем

$$H_\varphi = -\frac{C\omega\sqrt{\varepsilon_a\mu_a}\sin\theta}{R}\sin(\omega t-aR), \qquad (7.33')$$

$$E_\theta = -\frac{C\omega\mu_a\sin\theta}{R}\sin(\omega t-aR),$$

где $C=I_0dl/4\pi$.

Определяемое этими выражениями электромагнитное поле представляет собой сферическую волну, распространяющуюся в сторону увеличения координаты R. Поверхности равных фаз величин H_φ и E_θ — сферические с центром в точке O. Направление вектора Умова — Пойнтинга в каждый момент времени согласно (6.21), (7.33′) совпадает с направлением вектора $\mathbf{1}_R$ (подробнее см. [17], стр. 464—468).

§ 4. МАГНИТНЫЙ ДИПОЛЬ В БЕЗГРАНИЧНОЙ ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Переменным магнитным диполем может служить элементарный замкнутый контур l линейного тока I, меняющегося со временем. Полагая $\breve{I}=I_0\exp(-i\omega t)$, определим момент[1] диполя аналогично (5.3′)

$$\mathbf{M}=\operatorname{Re}\breve{\mathbf{M}},\quad \breve{\mathbf{M}}=\breve{I}\mathbf{dS}=I_0\mathbf{dS}\exp(-i\omega t)=\mathbf{M}_0\exp(-i\omega t), \qquad (7.34)$$

где dS — площадка, ограниченная контуром l; нормаль n к dS образует правовинтовую систему с направлением тока I в момент $t=0$ (рис. 58).

I. **Постановка и решение задачи.** Магнитный диполь с моментом $\mathbf{M}$, определяемым формулой (7.34), находится в безграничной однородной среде ($\nabla k=0$). Определим электромагнитное поле.

[1] См. замечание 5 в разд. I, § 3 главы пятой и разд. IV, § 3 главы пятой.

Применим такую же систему координат, как и при решении предыдущей задачи. Поместим начало координат в центр магнитного диполя и направим полярную ось по n.

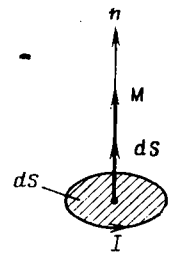


Рис. 58. Магнитный диполь и его момент $\mathbf{M}$

При $R>0$ векторный потенциал магнитного типа $\breve{\mathbf{A}}^*$, связанный с векторами $\breve{\mathbf{E}}$ и $\breve{\mathbf{H}}$ равенствами $(7.14)_{1,3}$, должен удовлетворять уравнению $(7.14)_4$ и двум дополняющим условиям: условию в бесконечности (7.16) и условию у особой точки $R=0$. Согласно $(5.31)_1$ для магнитного поля, возбуждаемого постоянным линейным током по замкнутому контуру элементарных размеров, в немагнитной среде справедливы выражения $\mathbf{B}/\mu_0=-\operatorname{grad} U_I$, $U_I=(\mathbf{M}\mathbf{L}_{qa})/4\pi L^3_{qa}$. Тогда в соответствии с изложенным в разд. I, § 6 главы пятой магнитное поле такого же возбудителя в безграничной однородной среде определяется формулой $\mathbf{B}/\mu_0\mu=\mathbf{H}=-\operatorname{grad}[(\mathbf{M}\mathbf{L}_{qa})/4\pi L^3_{qa}]$. Потребовав, чтобы вблизи переменного магнитного диполя электромагнитное поле было квазистационарным (см. разд. VI. § 5 главы шестой), получаем: при $R\to 0$ $\mathbf{H}\to \mathbf{1}_R 2M\cos\theta/4\pi R^3+\mathbf{1}_\theta M\sin\theta/4\pi R^3$. Пользуясь $(7.14)_3$, (1.13″), (1.33″), можно убедиться в том, что это условие будет выполнено, если

$$\text{при } R\to 0\ \breve{\mathbf{A}}^*\to(\mathbf{1}_R\cos\theta-\mathbf{1}_\theta\sin\theta)\frac{i\omega\mu_a\breve{M}}{4\pi R}=\mathbf{1}_z\frac{i\omega\mu_a\breve{M}}{4\pi R} \tag{7.35}$$

(см. рис. 57.*б*).

Условиям (7.16), (7.35) удовлетворяет следующее решение уравнения $(7.14)_4$:

$$\breve{\mathbf{A}}^*=\mathbf{1}_z\breve{A}^*_z,\ \breve{A}^*_z=\frac{i\omega\mu_a\breve{M}}{4\pi R}\exp(ikR)=\frac{\omega\mu_{a0}IdS}{4\pi R}\times$$

$$\times\exp(-bR)\exp\left[i\left(aR-\omega t+\frac{\pi}{2}\right)\right]. \tag{7.36}$$

Перейдя к компонентам $\breve{A}^*_R$ и $\breve{A}^*_\theta$ вектора $\breve{\mathbf{A}}^*$ и выполнив дифференцирование в формулах $(7.14)_{1,3}$, получаем следующие выражения для ненулевых компонент векторов $\breve{\mathbf{E}}$ и $\breve{\mathbf{H}}$ в сферической системе координат:

$$\left.\begin{aligned}
\breve{E}_\varphi&=\frac{i\omega\mu_a\breve{M}\sin\theta}{4\pi R^2}(1-ikR)\exp(ikR),\\
\breve{H}_R&=\frac{2\breve{M}\cos\theta}{4\pi R^3}(1-ikR)\exp(ikR),\\
\breve{H}_\theta&=\frac{\breve{M}\sin\theta}{4\pi R^3}(1-ikR-k^2R^2)\exp(ikR).
\end{aligned}\right\} \tag{7.37}$$

II. **Поле в ближней и дальней зонах.** В ближней зоне ($|k|R \ll 1$), пренебрегая слагаемыми, пропорциональными $(kR)^3$, $(kR)^4$, ..., имеем аналогично (7.32)

$$\breve{E}_\varphi = \frac{i\omega\mu_a \breve{M}\sin\theta}{4\pi R^2}\left(1+\frac{k^2R^2}{2}\right),$$

$$\breve{H}_R = \frac{2\breve{M}\cos\theta}{4\pi R^3}\left(1+\frac{k^2R^2}{2}\right),\quad \breve{H}_\theta = \frac{\breve{M}\sin\theta}{4\pi R^3}\left(1-\frac{k^2R^2}{2}\right). \tag{7.38}$$

В предельном случае (при $kR\to 0$) компоненты H_R и H_θ вектора $\mathbf{H}$ меняются синхронно с током I, а компонента E_φ вектора $\mathbf{E}$ запаздывает по фазе относительно 1 на $\pi/2$ (при $I=I_0\cos\omega t E_\varphi$ меняется во времени как $\sin\omega t$).

Рассмотрим подробнее электромагнитное поле в ближней зоне в квазистационарном случае, когда $\omega\varepsilon_a/\gamma \ll 1$. Положим в соответствии с (6.61″) $k^2=i\omega\gamma\mu_a$. Учитывая выражение $(7.34)_2$ для $\breve{\mathbf{M}}$ и выделяя действительные части комплексных величин, получаем из (7.38):

$$E_\varphi = E^0{}_\varphi + E^1{}_\varphi,\quad H_R = H^0{}_R + H^1{}_R,\quad H_\theta = H^0{}_\theta + H^1{}_\theta, \tag{7.39}$$

где

$$E^0{}_\varphi = \omega\mu_a \frac{M_0\sin\theta}{4\pi R^2}\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right), \tag{7.39′}$$

$$E^1{}_\varphi = \omega^2\gamma\mu^2{}_a \frac{M_0\sin\theta}{8\pi}\cos(\omega t-\pi),$$

$$H^0{}_R = \frac{M_0\cos\theta}{2\pi R^3}\cos\omega t,\quad H^1{}_R = \omega\gamma\mu_a\frac{M_0\cos\theta}{4\pi R}\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right), \tag{7.39″}$$

$$H^0{}_\theta = \frac{M_0\sin\theta}{4\pi R^3}\cos\omega t,\quad H^1{}_\theta = \omega\gamma\mu_a\frac{-(M_0\sin\theta)}{8\pi R}\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right). \tag{7.39‴}$$

Величины, определяемые формулами (7.39′)—(7.39‴), имеют разные начальные фазы и по-разному зависят от ω, γ, μ, что может быть истолковано на основе следующих представлений. Величины $H^0{}_R$, $H^0{}_\theta$ — компоненты первичного поля $\mathbf{H}^0$, создаваемого заданным током $I=I_0\cos\omega t$ по закону Био—Савара. Поэтому они синфазны с этим током и не зависят от γ и μ. По закону электромагнитной индукции переменное поле $\mathbf{H}^0$ возбуждает электрическое поле $\mathbf{E}^0=\mathbf{1}_\varphi E_\varphi{}^0$. В соответствии с $(6.55)_2$ величина $E^0{}_\varphi$ пропорциональна ω, μ и запаздывает по фазе относительно I, $H^0{}_R$ и $H^0{}_\theta$ на $\pi/2$. Поле $\mathbf{E}^0$ вызывает в среде (индукционные, вихревые), токи с плотностью $\mathbf{j}^0=\gamma\mathbf{E}^0=\mathbf{1}_\varphi\omega\gamma\mu_a\frac{M_0\sin\theta}{4\pi R^2}\cos(\omega t-\pi/2)$. Эти токи согласно уравнению $(6.33)_2$ создают магнитное поле $\mathbf{H}^1$ с компонентами $H^1{}_R$ и $H^1{}_\theta$, которые, как и величина $j^0{}_\varphi$, прямопро-

порциональны ω, γ и μ. Поле $\mathbf{H}^1$ в свою очередь в соответствии с $(6.55)_2$ возбуждает электрическое поле $\mathbf{E}^1=\mathbf{1}_\varphi E^1{}_\varphi$. Величина $E^1{}_\varphi$ прямопропорциональна произведению $(\omega\gamma\mu)(\omega\mu)$ и запаздывает по фазе относительно I на π.

В дальней зоне ($|k|R\gg 1$) аналогично (7.33) из (7.37) получаем

$$\left.\begin{aligned}\breve{E}_\varphi &= \frac{\omega\mu_a k\breve{M}\sin\theta}{4\pi R}\exp(ikR),\\ \breve{H}_R &= \frac{-ik2\breve{M}\cos\theta}{4\pi R^2}\exp(ikR),\\ \breve{H}_\theta &= \frac{-k^2\breve{M}\sin\theta}{4\pi R}\exp(ikR).\end{aligned}\right\} \qquad (7.40)$$

Если $|k|R\gg 1$ (точнее $|k|R\gg 2|\operatorname{ctg}\theta|$), то $H_R/H_\theta\ll 1$, $\mathbf{H}=\mathbf{1}_\theta H_\theta$. Отношение $\breve{E}_\varphi/\breve{H}_\theta=-\omega\mu_a/k$ отличается знаком от импеданса, определяемого выражением (6.71). Это связано с тем, что векторы $\mathbf{1}_\varphi$, $\mathbf{1}_\theta$ и $\mathbf{1}_R$ образуют левую систему, а векторы $\mathbf{1}_x$, $\mathbf{1}_y$ и $\mathbf{1}_z$—правую систему (см. разд. III, § 1 главы первой).

§ 5. НОРМАЛЬНОЕ ПАДЕНИЕ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ НА ПЛОСКУЮ ГРАНИЦУ

I. **Постановка и решение задачи.** Пусть плоская гармоническая линейно поляризованная электромагнитная волна распространяется в однородной среде, свойства которой характеризуют параметры γ_1, ε_1, μ_1. Введем декартову систему координат с осью z по направлению распространения волны. Тогда согласно (6.70), (6.70′) можем положить

$$\breve{\mathbf{E}}^0=\mathbf{1}_x\breve{E}^0{}_x,\quad \breve{\mathbf{H}}^0=\mathbf{1}_y\breve{H}^0{}_y,\quad \breve{E}^0{}_x=\breve{E}^0{}_x(0)\exp(ik_1z),$$

$$\breve{H}^0{}_y=\breve{H}^0{}_y(0)\exp(ik_1z)=\frac{k_1}{\omega\mu_0\mu_1}\breve{E}^0{}_x(0)\exp(ik_1z), \qquad (7.41)$$

где $\breve{E}^0{}_x(0)$ и $\breve{H}^0{}_y(0)$ — значения $\breve{E}^0{}_x$ и $\breve{H}^0{}_y$ в плоскости $z=0$.

Определяемое выражениями (7.41) электромагнитное поле полагаем заданным. Будем считать, что его независимые возбудители находятся в плоскости $z=-\infty$.

Допустим теперь, что эти возбудители поля остались прежними, но среда в полупространстве $z>0$ заменена средой с параметрами γ_2, ε_2, μ_2, т. е. плоскость $z=0$ — граница S_{12}, разделяющая пространство на два полупространства: V_1 и V_2 с порознь однородными средами. В этом случае поле, определяемое выражениями (7.41), следует рассматривать как электромагнитную волну, падающую на границу S_{12} по направлению, нормальному к этой границе. Определим электромагнитное поле в полупространствах V_1 и V_2, удовлетворяющее условиям (7.8) при $z=0$.

Будем искать решение в следующем виде:

$$\breve{\mathbf{E}} = \mathbf{1}_x \breve{E}_x(z), \quad \breve{\mathbf{H}} = \mathbf{1}_y \breve{H}_y(z), \tag{7.42}$$

$$\breve{E}_x^{(1)} = \breve{E}^0{}_x + \breve{E}'_x = \breve{E}^0{}_x(0)\,[\exp(ik_1 z) + v_{12}\exp(-ik_1 z)], \tag{7.42'}$$

$$\breve{H}_y^{(1)} = \breve{H}^0{}_y + \breve{H}'_y = \breve{E}^0{}_x(0)\,\frac{k_1}{\omega\mu_0\mu_1}\,[\exp(ik_1 z) - v_{12}\exp(-ik_1 z)],$$

$$\breve{E}_x^{(2)} = \breve{E}''_x = \breve{E}^0{}_x(0)\,w_{12}\exp(ik_2 z), \tag{7.42''}$$

$$\breve{H}_y^{(2)} = \breve{H}''_y = \breve{E}^0{}_x(0)\,\frac{k_2}{\omega\mu_0\mu_2}\,w_{12}\exp(ik_2 z),$$

где v_{12}, w_{12} — множители, подлежащие определению.

Согласно (7.42)—(7.42″) в полупространстве V_1 ищем решение задачи в виде суммы двух плоских волн, распространяющихся навстречу друг другу, а в полупространстве V_2 — в виде одной плоской волны, имеющей то же направление распространения, что и падающая волна. При записи (7.42′), (7.42″) учитывалось, что для плоской электромагнитной волны, удовлетворяющей условиям (7.42) и распространяющейся в однородной среде в направлении увеличения z, согласно (6.70′) $\breve{H}_y = (k/\omega\mu_a)\breve{E}_x$. Для такой же волны, но распространяющейся в направлении уменьшения z, $\breve{H}_y = -(k/\omega\mu_a)\breve{E}_x$.

Требуя, чтобы в соответствии с (7.8) при $z=0$ выполнялись условия $\breve{E}^{(1)}{}_x = \breve{E}^{(2)}{}_x$, $\breve{H}^{(1)}{}_y = \breve{H}^{(2)}{}_y$, получаем систему уравнений для v_{12} и w_{12}:

$$1 + v_{12} = w_{12}, \quad \frac{k_1}{\mu_1}(1 - v_{12}) = \frac{k_2}{\mu_2}(1 + v_{12}).$$

Из этих уравнений следует, что

$$v_{12} = \frac{k_1\mu_2 - k_2\mu_1}{k_1\mu_2 + k_2\mu_1}, \quad w_{12} = \frac{2k_1\mu_2}{k_1\mu_2 + k_2\mu_1}. \tag{7.43}$$

В полученном решении (7.42)—(7.43) компоненты $\breve{E}'_x$, $\breve{H}'_y$ определяют отраженную электромагнитную волну, а $\breve{E}''_x$, $\breve{H}''_y$ — прошедшую (преломленную) волну.

II. **Коэффициенты отражения и прохождения.** Выражения (7.43) определяют коэффициент отражения v_{12} и коэффициент прохождения w_{12} границы S_{12} (при нормальном падении волны). Коэффициенты v_{12} и w_{12} являются в общем случае комплексными величинами. Согласно (7.42′), (7.42″) это означает, что у границы S_{12} (при $z=0$) компоненты отраженной (E'_x, H'_y) и прошедшей (E''_x, H''_y) волн отличаются от соответствующих компонент падающей волны ($E^0{}_x$, $H^0{}_y$) не только по амплитуде, но и по фазе.

В среде, однородной по магнитным свойствам ($\mu_1 = \mu_2$), в

частности в немагнитной среде ($\mu_1=\mu_2=1$), выражения (7.43) упрощаются:

$$v_{12}=\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}=\frac{\sqrt{\varepsilon'_1}-\sqrt{\varepsilon'_2}}{\sqrt{\varepsilon'_1}+\sqrt{\varepsilon'_2}},\quad w_{12}=\frac{2k_1}{k_1+k_2}=\frac{2\sqrt{\varepsilon'_1}}{\sqrt{\varepsilon'_1}+\sqrt{\varepsilon'_2}}. \tag{7.44}$$

Если среда в области V_2 — идеальный проводник ($\gamma_2=\infty$, $|k_2|=\infty$), то согласно (7.43) $v_{12}=-1$, $w_{12}=0$.

Если среда в областях V_1 и V_2 — непроводящая (либо в более общем случае $\omega\varepsilon_{a1}/\gamma_1\gg 1$, $\omega\varepsilon_{a2}/\gamma_2\gg 1$), то вместо (7.44) в соответствии с (6.61′) получаем

$$v_{12}=\frac{\sqrt{\varepsilon_1}-\sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1}+\sqrt{\varepsilon_2}},\quad w_{12}=\frac{2\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_1}+\sqrt{\varepsilon_2}}. \tag{7.44′}$$

Если в областях V_1 и V_2 выполняются условия $\omega\varepsilon_{a1}/\gamma_1\ll 1$, $\omega\varepsilon_{a2}/\gamma_2\ll 1$, то в соответствии с (6.61″) из (7.44) имеем

$$v_{12}=\frac{\sqrt{\gamma_1}-\sqrt{\gamma_2}}{\sqrt{\gamma_1}+\sqrt{\gamma_2}},\quad w_{12}=\frac{2\sqrt{\gamma_1}}{\sqrt{\gamma_1}+\sqrt{\gamma_2}}. \tag{7.44″}$$

Коэффициенты v_{12} и w_{12} в (7.44′), (7.44″) — действительные величины, причем $w_{12}>0$, т. е. согласно (7.42″) у границы S_{12} компоненты $E^0{}_x$ и E''_x или $H^0{}_y$ и H''_y имеют одинаковые фазы. Согласно (7.42′) при $v_{12}>0$ величины $E^0{}_x$ и E'_x синфазны (у границы S_{12}), а при $v_{12}<0$ $E^0{}_x$ и E'_x меняются «в противофазе». В последнем случае говорят об отражении «с потерей полуволны». Как уже было отмечено, формулы (7.43)—(7.44″) определяют коэффициенты отражения и прохождения для случая нормального падения. При наклонном падении плоской электромагнитной волны на границу S_{12} соответствующие коэффициенты зависят от угла падения и ориентации векторов **E** и **H** относительно этой границы (см. [16], с. 432—449).

III. **Скин-эффект.** Вернемся к решению, полученному в разд. I, и допустим, что $\gamma_1=0$, а $\gamma_2>0$. В соответствии с (6.61′) $b_1=0$ и поэтому электромагнитное поле распространяется в области V_1 без поглощения.

Выражения (7.42″), определяющие электромагнитное поле в области V_2, можем представить в виде

$$\breve{E}^{(2)}{}_x=\breve{E}_x(0)\exp(ik_2z),\quad \breve{H}^{(2)}{}_y=\breve{H}_y(0)\exp(ik_2z),$$

где $\breve{E}_x(0)=\breve{E}^0{}_x(0)w_{12}$, $\breve{H}_y(0)=\breve{E}^0{}_x(0)k_2w_{12}/\omega\mu_0\mu_2$ — значения $\breve{E}_x$ и $\breve{H}_y$ в плоскости $z=0$, т. е. на границе проводящего полупространства.

Выражения для $\breve{E}^{(2)}{}_x$, $\breve{H}^{(2)}{}_y$ аналогичны выражению (6.63′) для поля $\breve{\eta}$. Следовательно, для компонент $E^{(2)}{}_x$, $H^{(2)}{}_y$ электромагнитного поля в области V_2 справедливы выражения, аналогичные формулам (6.63), (6.64)—(6.66″) для поля η. Таким образом, со-

разделения), получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\frac{d^2\psi}{dz^2}=(\lambda^2-k^2)\psi,\quad \frac{d^2\varphi}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr}+\lambda^2\varphi=0. \tag{7.48'}$$

Решения уравнений (7.48′) имеют вид

$$\psi(\lambda, z)=C'(\lambda)\exp[(\lambda^2-k^2)^{1/2}z]+C''(\lambda)\exp[-(\lambda^2-k^2)^{1/2}z],$$

$$\varphi(\lambda, r)=D'(\lambda)J_0(\lambda r)+D''(\lambda)Y_0(\lambda r), \tag{7.49}$$

где J_0 и Y_0 — функции Бесселя нулевого порядка первого и второго рода аргумента λr; $C'(\lambda)$, $C''(\lambda)$, $D'(\lambda)$, $D''(\lambda)$ — множители, не зависящие от r и z. Условимся выбирать корень числа (λ^2-k^2) так, чтобы

$$\mathrm{Re}[(\lambda^2-k^2)^{1/2}]\geqslant 0. \tag{7.50}$$

Принимая во внимание, что в области V_1 $-\infty<z<h$, а в области V_2 $h<z<\infty$, следует согласно (7.16), (7.50) положить $C''=0$ для области V_1 и $C'=0$ для области V_2. При $r\to 0$ $Y_0(\lambda r)\to-\infty$, а величина A^*_z должна иметь ограниченные значения при $r=0$ и $z\neq 0$. Поэтому положим $D''(\lambda)=0$. Таким образом, получаем согласно (7.49) для V_1 и V_2 соответственно

$$\breve{A}_z{}^{*(1)}(\lambda)=C'(\lambda)\exp(\lambda_1 z)D'_1(\lambda)J_0(\lambda r),$$

$$\breve{A}_z{}^{*(2)}(\lambda)=C''(\lambda)\exp(-\lambda_2 z)D'_2(\lambda)J_0(\lambda r), \tag{7.51}$$

где D'_1 и D'_2 — обозначения множителя D' для областей V_1 и V_2, а

$$\lambda_i=(\lambda^2-k_i^2)^{1/2}\ (i=1,2) \tag{7.51'}$$

— числа, удовлетворяющие условию (7.50).

Формулы (7.51) выражают частные решения уравнения $(7.47)_4$. Из них можно составить общие решения:

$$A_z^{*(1)}=\int_0^\infty A_z^{*(1)}(\lambda)\,d\lambda,\quad A_z^{*(2)}=\int_0^\infty A_z^{*(2)}(\lambda)\,d\lambda. \tag{7.51''}$$

Для удовлетворения условию (7.35) прибавим к правой части $(7.51'')_1$ решение (7.36) уравнения $(7.14)_4$ с подстановкой $\mu_a=\mu_0$. Вводя обозначения $C'(\lambda)D'_1(\lambda)=C(\lambda)$, $C''(\lambda)D'_2(\lambda)=D(\lambda)$, получаем

$$\breve{A}_z^{*(1)}=\frac{i\omega\mu_0\breve{M}}{4\pi R}\exp(ik_1R)+\int_0^\infty C(\lambda)\exp(\lambda_1 z)J_0(\lambda r)\,d\lambda,$$

$$\breve{A}_z^{*(2)}=\int_0^\infty D(\lambda)\exp(-\lambda_2 z)J_0(\lambda r)\,d\lambda, \tag{7.52}$$

где $R=(r^2+z^2)^{1/2}$.

Множители $C(\lambda)$, $D(\lambda)$ определим так, чтобы выполнялись условия (7.46). Воспользовавшись интегралом Зоммерфельда

$$\frac{\exp(ikL)}{L}=\int_0^\infty \frac{\lambda}{(\lambda^2-k^2)^{1/2}}\exp\left[-(\lambda^2-k^2)^{1/2}\,|\zeta|\right]J_0(\lambda|\rho|)\,d\lambda, \qquad (7.53)$$

где $L=(\rho^2+\zeta^2)^{1/2}$,
и полагая $L=R$, $\rho=r$, $\zeta=z$, можем представить выражение $(7.52)_1$ в виде

$$\breve{A}_z^{*(1)}=\int_0^\infty\left[\frac{i\omega\mu_0\breve{M}}{4\pi}\frac{\lambda}{\lambda_1}\exp(-\lambda_1|z|)+C(\lambda)\exp(\lambda_1 z)\right]J_0(\lambda r)\,d\lambda. \qquad (7.52')$$

Подставим (7.52′), $(7.52)_2$ в (7.46) и выполним дифференцирование по z; положим $z=h$ и получим систему уравнений [1]

$$\left.\begin{aligned}&\frac{i\omega\mu_0\breve{M}\lambda}{4\pi\lambda_1}\exp(-\lambda_1 h)+C(\lambda)\exp(\lambda_1 h)=D(\lambda)\exp(-\lambda_2 h),\\&-\frac{i\omega\mu_0\breve{M}\lambda}{4\pi}\exp(-\lambda_1 h)+\lambda_1 C(\lambda)\exp(\lambda_1 h)=-\lambda_2 D(\lambda)\exp(-\lambda_2 h).\end{aligned}\right\} \qquad (7.54)$$

Решение системы уравнений (7.54) для $C(\lambda)$ и $D(\lambda)$ имеет вид

$$\left.\begin{aligned}C(\lambda)&=\frac{i\omega\mu_0\breve{M}}{4\pi}\frac{\lambda}{\lambda_1}\lambda_{12}\exp(-\lambda_1 2h),\\D(\lambda)&=\frac{i\omega\mu_0\breve{M}}{4\pi}\frac{\lambda}{\lambda_1}(1+\lambda_{12})\exp[-(\lambda_1-\lambda_2)h]=\\&=\frac{i\omega\mu_0\breve{M}}{4\pi}\frac{2\lambda}{\lambda_1+\lambda_2}\exp[-(\lambda_1-\lambda_2)h],\\&\text{где }\lambda_{12}=\frac{\lambda_1-\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}.\end{aligned}\right\} \qquad (7.54')$$

Подставляя (7.54′) в (7.52), получаем

$$\breve{A}_z^{*(1)}=\frac{i\omega\mu_0\breve{M}}{4\pi R}\exp(ik_1R)+\frac{i\omega\mu_0\breve{M}}{4\pi}\int_0^\infty\frac{\lambda}{\lambda_1}\lambda_{12}\exp[-\lambda_1(2h-z)]J_0(\lambda r)\,d\lambda, \qquad (7.55)$$

$$\breve{A}_z^{*(2)}=\frac{i\omega\mu_0\breve{M}}{4\pi}\int_0^\infty\frac{2\lambda}{\lambda_1+\lambda_2}\exp[-\lambda_1 h-\lambda_2(z-h)]J_0(\lambda r)\,d\lambda.$$

Выражения (7.45′), (7.55) удовлетворяют уравнению $(7.14)_4$ и дополняющим условиям, следовательно, определяют решение рассматриваемой задачи для потенциала $\breve{A}^*$.

[1] Фактически получаем равенства интегралов от умноженных на $J_0(\lambda r)$ левых и правых частей (7.54). Но удовлетворение этим равенствам обеспечивается условиями (7.54).

Для перехода к полям **E** и **H** учтем, что согласно $(7.14)_{1,3}$, (7.45), (7.45′), (1.13′), (1.27′), (1.33′)

$$\breve{E}_r=0,\ \breve{E}_\varphi=-\frac{\partial\breve{A}^*_z}{\partial r},\ \breve{E}_z=0,\ \breve{H}_r=\frac{1}{i\omega\mu_0}\frac{\partial^2\breve{A}^*_z}{\partial r\partial z},$$

$$\breve{H}_\varphi=0,\ \breve{H}_z=\frac{1}{i\omega\mu_0}\left[k^2\breve{A}^*_z+\frac{\partial^2\breve{A}^*_z}{\partial z^2}\right]. \tag{7.56}$$

Подставляя выражения (7.55) для $\breve{A}^*_z$ в формулы $(7.56)_{2,4,6}$ и выполняя дифференцирование с учетом того, что $\partial J_0(\lambda r)/\partial r=-\lambda J_1(\lambda r)$ (где J_1 — функция Бесселя первого порядка первого рода), получаем для полупространств V_1, V_2:

$$\breve{E}^{(1)}_\varphi=\frac{i\omega\mu_0\breve{M}}{4\pi}\left\{\frac{r}{R^3}(1-ik_1R)\exp(ik_1R)+\right.$$

$$\left.+\int_0^\infty\frac{\lambda^2\lambda_{12}}{\lambda_1}\exp[-\lambda_1(2h-z)]J_1(\lambda r)\,d\lambda\right\},$$

$$\breve{H}^{(1)}_r=\frac{\breve{M}}{4\pi}\left\{\frac{zr}{R^5}(3-3ik_1R-k^2_1R^2)\exp(ik_1R)-\right.$$

$$\left.-\int_0^\infty\lambda^2\lambda_{12}\exp[-\lambda_1(2h-z)]J_1(\lambda r)\,d\lambda\right\},$$

$$\breve{H}^{(1)}_z=\frac{\breve{M}}{4\pi}\left\{\frac{\exp(ik_1R)}{R^3}\left[(-1+ik_1R+k^2_1R^2)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{z^2}{R^2}(3-3ik_1R-k^2_1R^2)\right]+\int_0^\infty\frac{\lambda^3\lambda_{12}}{\lambda_1}\times\right. \tag{7.57}$$

$$\left.\times\exp[-\lambda_1(2h-z)]J_0(\lambda r)\,d\lambda\right\},$$

$$\breve{E}^{(2)}_\varphi=\frac{i\omega\mu_0\breve{M}}{4\pi}\int_0^\infty\frac{2\lambda^2}{\lambda_1+\lambda_2}\exp[-\lambda_1h-\lambda_2(z-h)]J_1(\lambda r)\,d\lambda$$

$$\breve{H}^{(2)}_r=\frac{\breve{M}}{4\pi}\int_0^\infty\frac{2\lambda^2\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\exp[-\lambda_1h-\lambda_2(z-h)]J_1(\lambda r)\,d\lambda,$$

$$\breve{H}^{(2)}_z=\frac{\breve{M}}{4\pi}\int_0^\infty\frac{2\lambda^3}{\lambda_1+\lambda_2}\exp[-\lambda_1h-$$

$$-\lambda_2(z-h)]J_0(\lambda r)\,d\lambda.$$

Если точка наблюдения расположена на оси $z(r=0)$, то $J_0(\lambda r)=1$, $J_1(\lambda r)=0$, следовательно, $E_\varphi^{(1,2)}=0$, $H_r^{(1,2)}=0$, а из выражений для $H_z^{(1,2)}$ выпадает функция $J_0(\lambda r)$. Если магнитный диполь и точка наблюдения расположены на границе S_{12} ($h=0$, $z=0$), то из подынтегральных функций в выражениях (7.57) выпадают экспоненты.

III. **Частные случаи** 1. $h=0$, $z=0$, $\gamma_1=0$, $\gamma_2=\gamma>0$, а частота ω — достаточно мала для того, чтобы можно было считать $k_1\approx 0$, $\omega\varepsilon_{a2}/\gamma\ll 1$, $k^2_2\approx i\omega\mu_0\gamma$. В этом случае после ряда преобразований удается получить выражения для компонент электромагнитного поля в более простом виде (см. [7], стр. 110—122). Эти выражения дополнительно упрощаются, если точка наблюдения находится в ближней или дальней зоне.

В ближней зоне ($|k_2|r\ll 1$) выполняется соотношение $H_r\ll H_z$, поэтому приведем выражения только для компонент E_φ и H_z:

$$\breve{E}_\varphi=\frac{i\omega\mu_0\breve{M}}{4\pi r^2}\left(1+\frac{i\omega\gamma\mu_0 r^2}{4}\right),\quad \breve{H}_z=-\frac{\breve{M}}{4\pi r^3}\left(1-\frac{i\omega\gamma\mu_0 r^2}{4}\right).$$

Выделим действительные части комплексных величин и представим выражения для E_φ и H_z в виде, аналогичном (7.39):

$$E_\varphi=E^0{}_\varphi+E^1{}_\varphi,\quad H_z=H^0{}_z+H^1{}_z, \tag{7.58}$$

где

$$\left.\begin{aligned} E^0{}_\varphi&=\frac{\omega\mu_0 M_0}{4\pi r^2}\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right);\\ E^1{}_\varphi&=\frac{\omega^2\gamma\mu^2{}_0 M_0}{16\pi}\cos(\omega t-\pi);\end{aligned}\right\} \tag{7.58′}$$

$$H^0{}_z=-\frac{M_0}{4\pi r^3}\cos\omega t,\quad H^1{}_z=\frac{\omega\gamma\mu_0 M_0}{16\pi r}\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right). \tag{7.58″}$$

Сопоставим формулы (7.58′), (7.58″) с выражениями (7.39′), (7.39‴), предварительно подставив в последние (для экваториальной плоскости диполя и немагнитной среды) — H_z, μ_0, 1 вместо H_θ, μ_a, $\sin\theta$ соответственно. Величины $E^0{}_\varphi$, $H^0{}_z$ в (7.58′), (7.58″) совпадают с аналогичными величинами в (7.39′), (7.39‴). Объясняется это тем, что возбудителями полей $\mathbf{H}^0$ и $\mathbf{E}^0$ являются соответственно ток I в диполе и первичное поле $\mathbf{H}^0$; поэтому поля $\mathbf{H}^0$ и $\mathbf{E}^0$ не зависят от электрических параметров среды.

Величины $E^1{}_\varphi$ и $H^1{}_z$ в выражениях (7.58′), (7.58″) в 2 раза меньше величин $E^1{}_\varphi$ и и $H'^1{}_z=H'^1{}_\theta$, определяемых формулами (7.39)′, (7.39‴). Согласно сказанному в разд. II, § 4 возбудителями поля $\mathbf{H}^1$ являются вихревые токи, возникающие под действием поля $\mathbf{E}^0$, а возбудителем поля $\mathbf{E}^1$ — поле $\mathbf{H}^1$. В отсутствие вихревых токов в верхнем полупространстве поле $\mathbf{H}^1$ и, следовательно, поле $\mathbf{E}^1$ на плоскости S_{12} в 2 раза меньше, чем в неограниченной однородной проводящей среде.

В дальней зоне ($|k_2|r\gg 1$) выполняется соотношение $H_z\ll H_r$, следовательно, можно считать, что векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ лежат в пло-

скости S_{12}. Приведем выражения для E_φ и H_r в комплексной форме:

$$\breve{E}_\varphi = \frac{3\breve{M}}{2\pi r^4}\frac{1}{\gamma},\quad \breve{H}_r = -\frac{3\breve{M}}{2\sqrt{2}\pi r^4}\frac{1+i}{\sqrt{\omega\gamma\mu_0}}. \tag{7.59}$$

Согласно (7.59) амплитуды величин E_φ и H_r убывают с увеличением r как r^{-4}. Отношение $\breve{E}_\varphi/\breve{H}_r = -\sqrt{\omega\mu_0/\gamma}\exp(-i\pi/4)$ с точностью до знака совпадает с выражением (6.71″), определяющим импеданс плоской электромагнитной волны для случая квазистационарного поля (в немагнитной среде). Можно считать, что определяемое выражениями (7.59) поле в пределах небольшого участка плоскости S_{12} (где $r\approx\text{const}$) представляет собой плоскую электромагнитную волну, проходящую в полупространство V_2.

2. Пусть среда в области V_2 — идеально-проводящая, т. е. $\gamma_2\to\infty$, а точка наблюдения находится в области V_1. При $\gamma_2\to\infty$ имеем $|k_2|\to\infty$, $|\lambda_2|\to\infty$. Тогда согласно (7.51′), $(7.54')_3$ $\lambda_{12}=-1$ и выражение $(7.55)_1$ принимает вид

$$\breve{A}_z^{*(1)} = \frac{i\omega\mu_0\breve{M}}{4\pi R}\exp(ik_1R) - \frac{i\omega\mu_0\breve{M}}{4\pi}\int_0^\infty \frac{\lambda}{(\lambda^2-k_1^2)^{1/2}}\times$$

$$\times\exp[-\lambda_1(2h-z)]\,J_0(\lambda r)\,d\lambda. \tag{7.60}$$

При $\rho=r$, $\zeta=2h-z$, $k=k_1$ интеграл в правой части (7.60) совпадает с интегралом (7.53), следовательно,

$$\breve{A}_z^{*(1)} = \frac{i\omega\mu_0\breve{M}}{4\pi R}\exp(ik_1R) + \frac{i\omega\mu_0\breve{M}'}{4\pi R'}\exp(ik_1R'), \tag{7.60′}$$

где $R'=[r^2+(2h-z)^2]^{1/2}$, $\breve{\mathbf{M}}'=-\breve{\mathbf{M}}$.

Согласно (7.60′) электромагнитное поле в области V_1 определяется суммой двух сферических волн. Центром первой является точка O, в которой находится переменный магнитный диполь с моментом $\mathbf{M}$, а второй — точка O', симметричная точке O относительно плоскости S_{12} (рис. 59,*б*). Вторая волна совпадает со сферической волной, возбуждаемой переменным магнитным диполем (расположенным в точке O'), момент которого $\mathbf{M}'$ отличается от $\mathbf{M}$ только противоположным направлением. Таким образом, согласно (7.60′) электромагнитное поле в полупространстве V_1 равно сумме электромагнитных полей двух переменных магнитных диполей (расположенных в однородной среде с параметрами $\gamma=\gamma_1$, $\varepsilon=\varepsilon_1$, $\mu=\mu_1=1$): действительного и фиктивного, являющегося зеркальным изображением первого в плоскости S_{12}. Фактически слагаемые правой части (7.60′) — потенциалы падающей («прямой») волны и волны, отраженной от границы S_{12}.

Глава восьмая

Основы теории упругости [1]

Сейсмический метод разведки основан на изучении особенностей распространения механических колебаний в горных породах. Эти колебания вызываются внешними силами — ударным воздействием взрыва или специальных устройств. Под действием приложенных сил в горной породе происходит изменение взаимного положения частиц породы — деформация среды. Это приводит к возникновению внутренних сил — напряжений, которыми уравновешивается действие внешних сил. Если после окончания действия внешних сил тело мгновенно восстанавливает свое прежнее состояние и форму и напряжения исчезают, оно называется абсолютно или идеально упругим. Возникающие изменения размеров и формы называются *упругими деформациями*. Если после прекращения воздействия внешних сил тело восстанавливает старую форму постепенно, то оно называется пластическим или неабсолютно упругим.

В горных породах под действием ударных нагрузок происходят как упругие, так и неупругие деформации. Преобладание тех или иных определяется рядом причин, из которых решающими являются величина действующей силы и свойства самой породы. Если исключить из рассмотрения некоторые образования, например сухой песок, и рассматривать область, где силы, воздействующие на породы, малы по величине, то горные породы ведут себя как упругое тело. Поэтому возникающие в породах колебания можно рассматривать как колебания в упругой среде. Отчетливое понимание закономерностей распространения таких колебаний возможно лишь на основе знакомства с основными положениями теории упругости.

В теории упругости исходят из нескольких основных допущений и положений. Принимается, в частности, что: 1) материал, слагающий упругое тело, является сплошным, заполняющим все занимаемое пространство без разрывов, т. е. игнорируется молекулярное и атомистическое строение вещества и реализуется макроскопический подход к среде; 2) материал является идеально упругим; в нем не происходит поглощения энергии при нагрузке или разгрузке; 3) существует пропорциональность между деформацией и напряжением. Обычно ограничиваются рассмотрением однородной и изотропной среды.

Рассмотрение распространения сейсмических колебаний в горных породах с позиций теории упругости объясняется не только

[1] В этой и следующей главах иногда будем пользоваться обозначениями, отличными от введенных выше, но традиционными для курсов теории упругости и распространения упругих колебаний.

сходством горных пород с упругим телом при малых воздействиях, но и сложностью и недостаточной разработанностью вопроса о распространении таких колебаний в реальных средах. Некоторые физические явления, отличающие распространения сейсмических колебаний в горных породах от распространения в идеально упругой среде, например, наличие поглощения, могут быть в дальнейшем учтены путем введения в уравнения соответствующих поправочных членов и коэффициентов.

§ 1. НАПРЯЖЕНИЯ

I. **Виды напряжений.** Рассмотрим тело, подвергающееся воздействию внешних сил и находящееся в равновесии. Внешние силы могут быть приложены к поверхности тела — в этом случае говорят о поверхностных силах, или к каждому элементу объема тела — объемные силы. Примером первых может служить давление газов или твердых тел, соприкасающихся с телом, примером вторых — сила тяжести, центробежная сила.

Действие внешних сил для тела, находящегося в равновесии, уравновешивается силами внутреннего притяжения (отталкивания). Это порождает в теле внутреннее напряженное состояние, представляющее собой реакцию тела на действующие силы.

Чтобы оценить напряженное состояние, мысленно рассечем тело произвольной формы на две части A и B по поверхности S (рис. 60). Удалим часть A вместе с приложенными к ней силами. Для того чтобы часть B осталась в прежнем состоянии, надо задать на поверхности S систему поверхностных сил. Эти силы заменят действие части A на часть B. Для тела в целом данные силы являются внутренними. Они и определяют то напряженное состояние, которое существовало в соответствующих точках тела до его рассечения. Под действием этих внутренних сил и приложенных внешних сил каждая часть тела находится в равновесии. Компенсирующие поверхностные силы (на поверхности S), отнесенные к площадкам, на которые они действуют, и есть напряжения. В общем случае они меняются по величине и направлению при переходе от точки к точке тела.

Возьмем на поверхности S элементарную площадку dS с нормалью $\mathbf{n}$. В точке O на площадке действует сила $\mathbf{dP}$. Отношение

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{dP}/dS \tag{8.1}$$

называется вектором напряжения на площадке dS. Вектор $\mathbf{dP}$ может быть ориентирован по-разному относительно площадки. Таким образом, индекс n у вектора напряжения указывает только на ориентировку площадки, на которую действует данный вектор, но не на ориентировку последнего. Следует подчеркнуть, что вектор $\mathbf{p}$, как и сила $\mathbf{dP}$ зависит не только от положения центра элементарной площадки внутри тела, но и от ориентировки площадки в пространстве. Если мы рассечем тело другой поверхностью S_1, тоже проходящей через точку O, то система на-

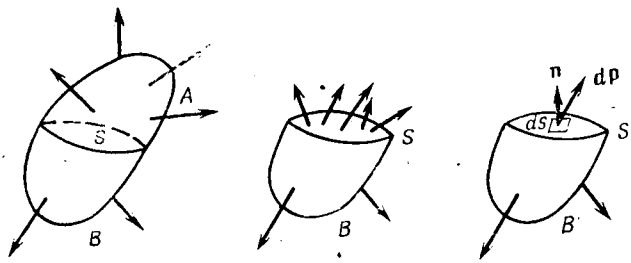


Рис. 60. Вектор напряжения

пряжений, компенсирующих удаление новой части, будет другая и соответствующая сила в точке O будет $\mathbf{dP}_1$, а не $\mathbf{dP}$. Будет иным и напряжение: $\mathbf{p}'_n$ вместо $\mathbf{p}_n$.

Следует предположить, что полная характеристика напряженного состояния тела в данной точке не может быть описана с помощью вектора. Для описания поля напряжений, вероятно, потребуется какое-то иное, более сложное понятие.

Вектор $\mathbf{p}_n$ можно разложить на три составляющие по координатным направлениям. В декартовой системе координат скалярные составляющие обозначим p_{nx}, p_{ny}, p_{nz}. Первый индекс указывает направление нормали к площадке, на которой действует вектор $\mathbf{p}$, а второй показывает, по какой оси взята составляющая.

В теории упругости важное значение имеют напряжения, действующие на площадках, перпендикулярных к координатным осям. Вырежем мысленно малый параллелепипед с гранями, параллельными координатным плоскостям (рис. 61). На каждой из трех его граней, видимых на рисунке, будут действовать разные векторы напряжений — $\mathbf{p}_x$, $\mathbf{p}_y$ и $\mathbf{p}_z$. Каждый из этих векторов можно разложить на три составляющие. Для вектора $\mathbf{p}_x$, действующего на площадке, перпендикулярной к оси x, будем иметь составляющие p_{xx}, p_{xy}, p_{xz}, для $\mathbf{p}_y$ — соответственно p_{yx}, p_{yy}, p_{yz}, для $\mathbf{p}_z$ — p_{zx}, p_{zy}, p_{zz}.

Составляющие p_{xx}, p_{yy} и p_{zz} — нормальные напряжения. Они перпендикулярны к соответствующим площадкам. Их обычно обозначают следующими символами:

$$p_{xx}=\sigma_x,\quad p_{yy}=\sigma_y,\quad p_{zz}=\sigma_z. \tag{8.2}$$

Остальные напряжения лежат в плоскости соответствующих площадок. Это касательные или тангенциальные напряжения. Их в дальнейшем будем обозначать символом τ:

$$p_{xy}=\tau_{xy},\quad p_{xz}=\tau_{xz},\quad p_{yx}=\tau_{yx},$$
$$p_{yz}=\tau_{yz},\quad p_{zx}=\tau_{zx},\quad p_{zy}=\tau_{zy}. \tag{8.3}$$

Знаки составляющих векторов напряжения зависят от выбора направления координатных осей. Если внешняя нормаль к площадке совпадает с направлением соответствующей координатной оси, то положительные составляющие вектора напряжения соответствуют направлениям координатных осей. Если внешняя нормаль

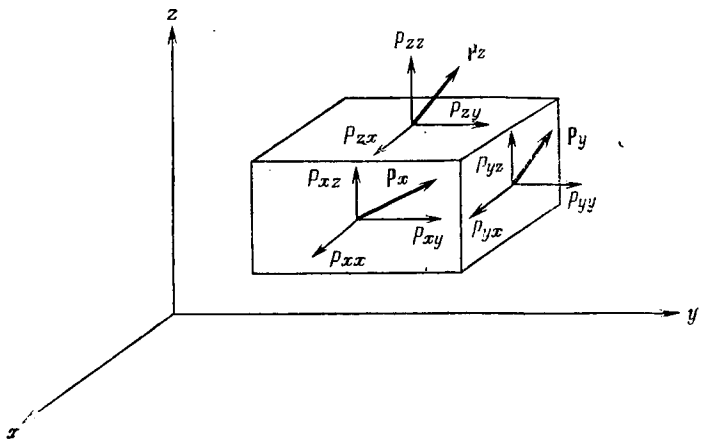


Рис. 61. Напряжения и их составляющие на площадках, перпендикулярных координатным осям

к площадке имеет направление, противоположное координатной оси, то положительные составляющие вектора напряжения имеют направления, противоположные координатным осям.

Положительные нормальные напряжения соответствуют растяжению, отрицательные — сжатию.

II. **Связь между напряжениями, действующими на различно ориентированных площадках в одной и той же точке.** Вырежем из тела бесконечно малый четырехгранник с ребрами dx, dy и dz, у которого грани dS_{yz}, dS_{xz} и dS_{xy} перпендикулярны к координатным осям x, y и z, а четвертая грань dS — наклонная, с нормалью $\mathbf{n}$ (рис. 62). Направляющие косинусы $\cos(\mathbf{n}, \mathbf{1}_x)$, $\cos(\mathbf{n}, \mathbf{1}_y)$, $\cos(\mathbf{n}, \mathbf{1}_z)$ определяют ориентировку нормали в пространстве.

Наша задача заключается в том, чтобы попытаться выразить составляющие напряжения $\mathbf{p}_n$, действующего на произвольно ориентированной наклонной площадке dS, через напряжения на гранях dS_{yz}, dS_{xz}, dS_{xy}. Если это удастся, то можно утверждать, что напряженное состояние в данной точке полностью характеризуется векторами $\mathbf{p}_x$, $\mathbf{p}_y$ и $\mathbf{p}_z$ или их составляющими.

Составим уравнения равновесия четырехгранника. Очевидно, что если четырехгранник не движется поступательно и не вращается, т. е. находится в равновесии, то геометрическая сумма приложенных к нему сил должна равняться нулю. В число этих сил входят поверхностные силы, действующие на каждую грань, и объемная сила. Объемная сила, пропорциональная объему четырехгранника ($V = 1/6 dx dy dz$), является величиной третьего порядка малости относительно dx, dy и dz. Поверхностная сила, действующая на каждой грани, равна произведению напряжения на площадь грани[1] и является величиной второго порядка малости

[1] Ввиду малости грани считаем напряжение на всей грани одинаковым.

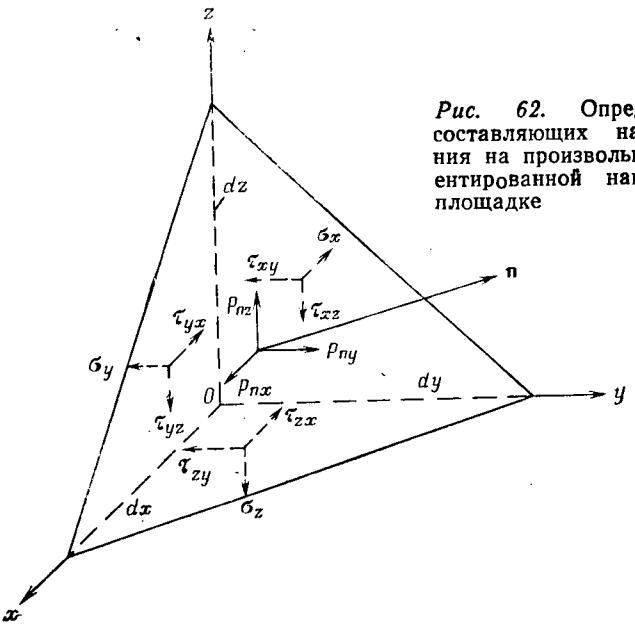


Рис. 62. Определение составляющих напряжения на произвольно ориентированной наклонной площадке

относительно dx, dy, dz. Например, $\mathbf{dP}_x=\mathbf{p}_x dS_{yz}=\mathbf{p}_x\cdot 1/2 dydz$. Ввиду этого при составлении уравнения равновесия объемной силой можно пренебречь по сравнению с поверхностными силами. В результате уравнение равновесия запишем в виде

$$\mathbf{p}_n dS=\mathbf{p}_x dS_{yz}+\mathbf{p}_y dS_{xz}+\mathbf{p}_z dS_{xy}. \tag{8.4}$$

Данное векторное уравнение можно заменить тремя скалярными для проекций векторов на оси x, y и z. При записи этих уравнений учтем, что площади граней четырехгранника, перпендикулярных к координатным осям, связаны с площадью наклонной грани dS следующим образом:

$$dS_{yz}=dS\cos(\mathbf{n},\ \mathbf{1}_x),\ dS_{xz}=dS\cos(\mathbf{n},\ \mathbf{1}_y),\ dS_{xy}=dS\cos(\mathbf{n},\ \mathbf{1}_z).$$

Тогда уравнение равновесия для сил, действующих на четырехгранник в проекции на ось x, запишется в виде

$$p_{nx}dS=\sigma_x dS\cos(\mathbf{n},\ \mathbf{1}_x)+\tau_{yx}dS\cos(\mathbf{n},\ \mathbf{1}_y)+\tau_{zx}dS\cos(\mathbf{n},\ \mathbf{1}_z). \tag{8.5}$$

Аналогичные уравнения можно записать для составляющих сил по осям y и z. Сокращая в левой и правой частях уравнений dS, имеем окончательно:

$$\left.\begin{aligned} p_{nx}&=\sigma_x\cos(\mathbf{n},\ \mathbf{1}_x)+\tau_{yx}\cos(\mathbf{n},\ \mathbf{1}_y)+\tau_{zx}\cos(\mathbf{n},\ \mathbf{1}_z),\\ p_{ny}&=\tau_{xy}\cos(\mathbf{n},\ \mathbf{1}_x)+\sigma_y\cos(\mathbf{n},\ \mathbf{1}_y)+\tau_{zy}\cos(\mathbf{n},\ \mathbf{1}_z),\\ p_{nz}&=\tau_{xz}\cos(\mathbf{n},\ \mathbf{1}_x)+\tau_{yz}\cos(\mathbf{n},\ \mathbf{1}_y)+\sigma_z\cos(\mathbf{n},\ \mathbf{1}_z).\end{aligned}\right\} \tag{8.6}$$

Эти уравнения называются формулами Коши. Они показывают, что составляющие вектора напряжения, действующего на любой наклонной площадке, выражаются через составляющие

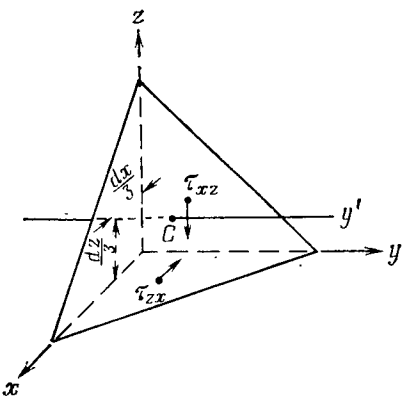


Рис. 63. Составление уравнений моментов

векторов напряжений, действующих **на трех площадках**, перпендикулярных к координатным осям. Иначе говоря, напряженное состояние в точке полностью описывается тремя векторами: $\mathbf{p}_x$, $\mathbf{p}_y$ и $\mathbf{p}_z$.

Условия равновесия требуют отсутствия не только поступательного движения, но и вращения тела. Составим три других уравнения равновесия четырехгранника — уравнения моментов. Удобно взять моменты относительно прямых, проходящих через центр тяжести C наклонной грани четырехгранника и параллельных координатным осям. Расстояния точки C от трех граней четырехгранника равны соответственно $1/3dx$, $1/3dy$ и $1/3dz$. Таким образом, проекции точки C на каждую из граней совпадают с их центрами тяжести. На рис. 63 изображена одна из прямых, проходящих через точку C и параллельных координатным осям, — прямая y', параллельная оси y. Из двенадцати составляющих сил, действующих на все грани четырехгранника десять либо пересекают ось y', либо параллельны ей. Лишь две касательные силы, соответствующие напряжениям τ_{xz} и τ_{zx}, будут создавать моменты. Уравнение моментов относительно прямой y' запишется так:

$$\tau_{xz}\, 1/2\, dzdy\, \frac{dx}{3} - \tau_{zx}\, 1/2\, dxdy\, \frac{dz}{3} = 0. \tag{8.7}$$

Аналогичным образом запишутся два других равенства для моментов относительно прямых, параллельных осям x и z. В результате имеем

$$\tau_{xz}=\tau_{zx},\ \tau_{zy}=\tau_{yz},\ \tau_{xy}=\tau_{yx}. \tag{8.8}$$

Эти равенства выражают закон взаимности касательных напряжений.

Таким образом, на основании выражений (8.6) и (8.8) можно утверждать, что напряженное состояние в данной точке полностью определяется шестью величинами: σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{xz} и τ_{zy}, которые являются составляющими векторов напряжений, действующих на трех площадках, перпендикулярных к координатным осям.

III. **Тензор напряжений.** Часто говорят, что напряженное состояние тела в данной точке характеризуется тензором напряжений. Поясним смысл такого утверждения. Для этого исследуем, как преобразуются составляющие векторов напряжений при переходе от системы координат x, y и z к системе x', y', z' с началом в той же точке, но повернутой относительно первой на некоторый угол. Ина-

че, говоря, выразим составляющие векторов напряжений в новой системе координат через составляющие в старой системе.

Возьмем бесконечно малую площадку, перпендикулярную к одной из новых осей, например x'. На этой площадке действует вектор напряжения $\mathbf{p}_{x'}$. Его составляющие по старым осям выражаются формулами Коши (8.6), в которых в данном случае индекс n заменяем на x'. Составляющие $\mathbf{p}_{x'}$ по осям x, y, z соответственно равны

$$\left.\begin{aligned} p_{x'x}&=\sigma_x\cos(\mathbf{1}_{x'},\mathbf{1}_x)+\tau_{yx}\cos(\mathbf{1}_{x'},\mathbf{1}_y)+\tau_{zx}\cos(\mathbf{1}_{x'},\mathbf{1}_z),\\ p_{x'y}&=\tau_{xy}\cos(\mathbf{1}_{x'},\mathbf{1}_x)+\sigma_y\cos(\mathbf{1}_{x'},\mathbf{1}_y)+\tau_{zy}\cos(\mathbf{1}_{x'},\mathbf{1}_z),\\ p_{x'z}&=\tau_{xz}\cos(\mathbf{1}_{x'},\mathbf{1}_x)+\tau_{yz}\cos(\mathbf{1}_{x'},\mathbf{1}_y)+\sigma_z\cos(\mathbf{1}_{x'},\mathbf{1}_z).\end{aligned}\right\}\qquad(8.9)$$

Проекция вектора $\mathbf{p}_{x'}$ на какую-нибудь новую ось равна сумме проекций на эту ось трех его составляющих по старым осям. В частности, проекция на ось x', т. е. $p_{x'x'}$ или в принятых обозначениях $\sigma_{x'}$, равна

$$\sigma_{x'}=p_{x'x}\cos(\mathbf{1}_{x'},\mathbf{1}_x)+p_{x'y}\cos(\mathbf{1}_{x'},\mathbf{1}_y)+p_{x'z}\cos(\mathbf{1}_{x'},\mathbf{1}_z).\qquad(8.10)$$

Подставляя в (8.10) выражения (8.9) для $p_{x'x}$, $p_{x'y}$ и $p_{x'z}$, получаем

$$\begin{aligned}\sigma_{x'}=&\sigma_x\cos^2(\mathbf{1}_{x'},\mathbf{1}_x)+\tau_{yx}\cos(\mathbf{1}_{x'},\mathbf{1}_y)\cos(\mathbf{1}_{x'},\mathbf{1}_x)+\\&+\tau_{zx}\cos(\mathbf{1}_{x'},\mathbf{1}_z)\cos(\mathbf{1}_{x'},\mathbf{1}_x)+\tau_{xy}\cos(\mathbf{1}_{x'},\mathbf{1}_x)\times\\&\times\cos(\mathbf{1}_{x'},\mathbf{1}_y)+\sigma_y\cos^2(\mathbf{1}_{x'},\mathbf{1}_y)+\tau_{zy}\cos(\mathbf{1}_{x'},\mathbf{1}_z)\times\\&\times\cos(\mathbf{1}_{x'},\mathbf{1}_y)+\tau_{xz}\cos(\mathbf{1}_{x'},\mathbf{1}_x)\cos(\mathbf{1}_{x'},\mathbf{1}_z)+\\&+\tau_{yz}\cos(\mathbf{1}_{x'},\mathbf{1}_y)\cos(\mathbf{1}_{x'},\mathbf{1}_z)+\sigma_z\cos^2(\mathbf{1}_{x'},\mathbf{1}_z).\end{aligned}\qquad(8.11)$$

Аналогичным образом нетрудно получить выражения для всех девяти составляющих напряжения в новой системе координат.

Приведем в качестве примера выражения для одной из тангенциальных составляющих—$\tau_{x'z'}$:

$$\begin{aligned}\tau_{x'z'}=&\sigma_x\cos(\mathbf{1}_{x'},\mathbf{1}_x)\cos(\mathbf{1}_{z'},\mathbf{1}_x)+\tau_{yx}\cos(\mathbf{1}_{x'},\mathbf{1}_y)\times\\&\times\cos(\mathbf{1}_{z'},\mathbf{1}_x)+\tau_{zx}\cos(\mathbf{1}_{x'},\mathbf{1}_z)\cos(\mathbf{1}_{z'},\mathbf{1}_x)+\\&+\tau_{xy}\cos(\mathbf{1}_{x'},\mathbf{1}_x)\cos(\mathbf{1}_{z'},\mathbf{1}_y)+\sigma_y\cos(\mathbf{1}_{x'},\mathbf{1}_y)\times\\&\times\cos(\mathbf{1}_{z'},\mathbf{1}_y)+\tau_{zy}\cos(\mathbf{1}_{x'},\mathbf{1}_z)\cos(\mathbf{1}_{z'},\mathbf{1}_y)+\tau_{xz}\cos(\mathbf{1}_{x'},\mathbf{1}_x)\times\\&\times\cos(\mathbf{1}_{z'},\mathbf{1}_z)+\tau_{yz}\cos(\mathbf{1}_{x'},\mathbf{1}_y)\cos(\mathbf{1}_{z'},\mathbf{1}_z)+\\&+\sigma_z\cos(\mathbf{1}_{x'},\mathbf{1}_z)\cos(\mathbf{1}_{z'},\mathbf{1}_z).\end{aligned}\qquad(8.12)$$

Как известно, формулы преобразования координат или составляющих радиуса-вектора при повороте координатных осей записываются следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} x'&=x\cos(\mathbf{1}_{x'},\mathbf{1}_x)+y\cos(\mathbf{1}_{x'},\mathbf{1}_y)+z\cos(\mathbf{1}_{x'},\mathbf{1}_z),\\ y'&=x\cos(\mathbf{1}_{y'},\mathbf{1}_x)+y\cos(\mathbf{1}_{y'},\mathbf{1}_y)+z\cos(\mathbf{1}_{y'},\mathbf{1}_z),\\ z'&=x\cos(\mathbf{1}_{z'},\mathbf{1}_x)+y\cos(\mathbf{1}_{z'},\mathbf{1}_y)+z\cos(\mathbf{1}_{z'},\mathbf{1}_z).\end{aligned}\right\}\qquad(8.13)$$

Сравнивая (8.11), (8.12) и (8.13), можно видеть, что составляющие напряжения при повороте координатных осей преобразуются как квадраты или попарные произведения формул преобразования координат. Совокупность девяти величин, преобразующихся при повороте координат таким образом, называется тензором. Следовательно, можно утверждать что напряженное состояние тела в данной точке полностью характеризуется тензором напряжений. Из формул (8.6) вытекает, что тензор напряжений — симметричный тензор, имеющий шесть независимых составляющих.

При записи выражений для компонент тензора часто пользуются системой координат ξ_k ($k=1, 2, 3$) см. разд. II, § 1 главы первой). Ортам $\mathbf{1}_x$, $\mathbf{1}_y$, $\mathbf{1}_z$ в этой системе соответствуют $\mathbf{1}_1$, $\mathbf{1}_2$, $\mathbf{1}_3$, поэтому имеем, например, $(\mathbf{n}, \mathbf{1}_y)=(\mathbf{n}, \mathbf{1}_2)$. Вводя обозначения вида $\cos(\mathbf{n}, \mathbf{1}_2)=\alpha_{n2}$, выражения для компонент тензора можем записать следующим образом:

$$p_{nm}=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} p_{ij}\alpha_{ni}\alpha_{mj}.$$

Опустив для краткости знаки суммирования, поскольку необходимость этой операции очевидна, получаем

$$p_{nm}=p_{ij}\alpha_{ni}\alpha_{mj} \quad (i, j=1, 2, 3); \tag{8.14}$$

здесь n—направление нормали к наклонной площадке; m—направление искомой компоненты; i и j принимают значения 1, 2, 3, соответствующие трем координатным осям. Развернутое выражение представляет собой сумму членов при всех возможных парных комбинациях значений i и j. Зависимость (8.14) позволяет определить компоненты тензора напряжений по одним осям координат, например x', y', z', через компоненты по другим осям, например x, y, z. Подставляя вместо m соответствующие направления компонент, нетрудно получить с помощью этой формулы выражения (8.11) и (8.12).

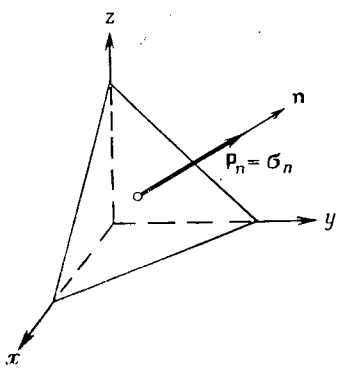


Рис. 64. Главное напряжение

IV. **Главные напряжения.** На произвольно ориентированной элементарной площадке, проведенной через данную точку, действуют в общем случае как нормальное, так и касательные напряжения. Можно, однако, представить себе площадку, ориентированную таким образом, что нормаль к ней совпадает с направлением действующего на ней напряжения. Иначе говоря, на данной площадке действует только нормальное напряжение.

Определим ориентацию такой площадки и величину действующего на ней напряжения через составляющие векторов напряжений, действующих на трех площадках, перпендикулярных к координатным осям.

Так как направления $\mathbf{n}$ и $\mathbf{p}_n$ совпадают (рис. 64), то

$$p_{nx}=\sigma_n\cos(\mathbf{n},\ \mathbf{1}_x),\quad p_{ny}=\sigma_n\cos(\mathbf{n},\ \mathbf{1}_y),\quad p_{nz}=\sigma_n\cos(\mathbf{n},\ \mathbf{1}_z). \tag{8.15}$$

Подставим эти выражения в (8.6) и перенесем все члены в одну сторону. Тогда получим

$$\left.\begin{aligned}&(\sigma_x-\sigma_n)\cos(\mathbf{n},\ \mathbf{1}_x)+\tau_{yx}\cos(\mathbf{n},\ \mathbf{1}_y)+\tau_{zx}\cos(\mathbf{n},\ \mathbf{1}_z)=0,\\&\tau_{xy}\cos(\mathbf{n},\ \mathbf{1}_x)+(\sigma_y-\sigma_n)\cos(\mathbf{n},\ \mathbf{1}_y)+\tau_{zy}\cos(\mathbf{n},\ \mathbf{1}_z)=0,\\&\tau_{xz}\cos(\mathbf{n},\ \mathbf{1}_x)+\tau_{yz}\cos(\mathbf{n},\ \mathbf{1}_y)+(\sigma_z-\sigma_n)\cos(\mathbf{n},\ \mathbf{1}_z)=0.\end{aligned}\right\} \tag{8.16}$$

Решая эту систему с учетом известного в аналитической геометрии соотношения

$$\cos^2(\mathbf{n},\ \mathbf{1}_x)+\cos^2(\mathbf{n},\ \mathbf{1}_y)+\cos^2(\mathbf{n},\ \mathbf{1}_z)=1, \tag{8.17}$$

можно определить четыре неизвестных σ_n, $\cos(\mathbf{n},\ \mathbf{1}_x)$, $\cos(\mathbf{n},\ \mathbf{1}_y)$ и $\cos(\mathbf{n},\ \mathbf{1}_z)$.

Определитель системы трех уравнений (8.16) должен равняться нулю:

$$\begin{vmatrix}\sigma_x-\sigma_n & \tau_{yx} & \tau_{zx}\\ \tau_{xy} & \sigma_y-\sigma_n & \tau_{zy}\\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z-\sigma_n\end{vmatrix}=0. \tag{8.18}$$

Развертывая определитель, получаем уравнение

$$\sigma^3_n-I_1\sigma^2_n+I_2\sigma_n-I_3=0, \tag{8.19}$$

где

$$\left.\begin{aligned}&I_1=\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z,\\&I_2=\sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_z+\sigma_z\sigma_x-\tau^2_{xy}-\tau^2_{yz}-\tau^2_{zx},\\&I_3=\sigma_x\sigma_y\sigma_z+2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx}-\sigma_x\tau^2_{yz}-\sigma_y\tau^2_{zx}-\sigma_z\tau^2_{xy}.\end{aligned}\right\} \tag{8.20}$$

Кубическое уравнение (8.19) имеет три корня: σ_1, σ_2, σ_3. Это так называемые главные напряжения. Эти корни всегда вещественны. В общем случае $\sigma_1\neq\sigma_2\neq\sigma_3$, хотя в частных случаях два из них или все три могут быть равны между собой.

Если главные напряжения σ_1, σ_2 и σ_3 различны, то для каждого из них может быть определено направление площадки, где это напряжение действует. Направляющие косинусы, фиксирующие ориентацию каждой такой площадки, могут быть определены из уравнений (8.16), в которые подставляются соответственно значения σ_1, σ_2 или σ_3.

Можно показать, что найденные три площадки перпендикулярны друг к другу.

Если $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3$, то на всех любым образом ориентированных элементарных площадках, проходящих через данную точку, дейст-

вуют только нормальные напряжения одинаковой величины. Это означает, что в данной точке тело испытывает состояние всестороннего сжатия или всестороннего расширения. При $\sigma_1=\sigma_2\neq\sigma_3$ направление площадки, на которой действует σ_3, определяется, как и в общем случае, подстановкой $\sigma_1=\sigma_2$ и σ_3 в (8.16). На всех площадках, перпендикулярных к ней, действуют только нормальные напряжения $\sigma_1=\sigma_2$. Итак, в каждой точке напряженного тела можно провести три взаимно перпендикулярные площадки, на которых действуют только нормальные напряжения. Это главные площадки. Если σ_1, σ_2 и σ_3 различны, эти площадки определены единственным образом. Когда три главные напряжения равны между собой, направления главных площадок можно выбирать произвольно.

Главные напряжения в данной точке—физические величины, не зависящие от выбора системы координат, а определяющиеся свойствами тела и действующими на него силами. Коэффициенты I_1, I_2 и I_3 также не зависят от системы координат, так как в соответствии со свойствами корней кубического уравнения они выражаются через корни следующим образом:

$$I_1=\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3,\quad I_2=\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1,\quad I_3=\sigma_1\sigma_2\sigma_3, \tag{8.21}$$

где I_1, I_2 и I_3—инварианты напряженного состояния.

Укажем без доказательства несколько свойств главных напряжений.

1. Если $\sigma_1\geqslant\sigma_2\geqslant\sigma_3$, то $\sigma_1\geqslant\sigma_n\geqslant\sigma_3$, т. е. из всех нормальных напряжений, действующих на различных элементарных площадках, проходящих через данную точку, наибольшим и наименьшим являются соответствующие главные напряжения.

2. Если $|\sigma_1|\geqslant|\sigma_2|\geqslant|\sigma_3|$, то $|\sigma_1|\geqslant|p_n|\geqslant|\sigma_3|$, т. е. из всех полных напряжений, действующих на различных элементарных площадках, проходящих через данную точку, наибольшим и наименьшим по абсолютной величине являются соответствующие главные напряжения.

3. $(\tau_n)_{max}=(\sigma_1-\sigma_3)/2$, т. е. наибольшее касательное напряжение равно полуразности наибольшего и наименьшего главных нормальных напряжений. Это касательное напряжение действует на площадках, проходящих через ось *2* и составляющих с осями *1* и *3* угол в 45° (рис. 65).

V. **Дифференциальные уравнения равновесия.** Исследуем, как изменяются составляющие тензора напряжений при переходе от данной точки тела к соседним. Рассмотрим для этого условия равновесия элементарного объема в форме параллелепипеда с ребрами dx, dy, dz (рис. 66). Равновесие, т. е. отсутствие поступательного движения и отсутствие вращения, обеспечивается при равенстве нулю суммы сил и результирующего момента сил, приложенных к данному объему. Первое из этих условий приводит к необходимости равенства нулю суммы составляющих всех сил по направлению каждой из координатных осей. На рис. 66 изображены

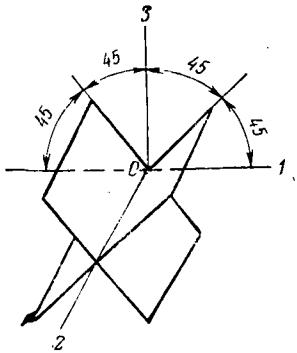


Рис. 65. Площадки, на которых действует наибольшее касательное напряжение

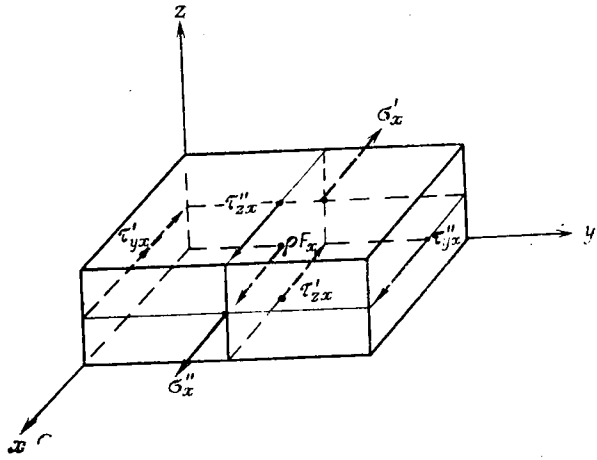


Рис. 66. Составление дифференциальных уравнений равновесия

составляющие напряжений по оси x, действующих на всех гранях параллелепипеда, и соответствующая составляющая объемной силы $F\rho$. Здесь ρ—плотность тела, $F=dQ/dm$—сила, приложенная к единице массы, или массовая сила. Поскольку $F=dQ/\rho dV$, то сила, приложенная к единице объема dQ/dV, т. е. объемная сила, равна $F\rho$.

Напряжения на каждой из двух параллельных граней параллелепипеда различны. Напряжения на видимых гранях отметим двумя штрихами, а на невидимых — одним.

Сила, действующая на каждой грани, равна произведению напряжения на площадь грани. Условие равновесия запишется для направления x следующим образом:

$$(\sigma''_x-\sigma'_x)\,dydz+(\tau''_{yx}-\tau'_{yx})\,dxdz+(\tau''_{zx}-\tau'_{zx})\,dxdy+ \\ +\rho F_x dxdydz=0. \qquad (8.22)$$

Приращения напряжения при переходе с одной грани на другую, параллельную первой, выражаемые разностью в скобках, ввиду малости расстояний могут быть заменены произведениями частных производных на расстояния:

$$\sigma''_x-\sigma'_x=\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}dx,\quad \tau''_{yx}-\tau'_{yx}=\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}dy, \\ \tau''_{zx}-\tau'_{zx}=\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}dz. \qquad (8.23)$$

Подставляя (8.23) в (8.22) и сокращая на $dxdydz$, получаем дифференциальное уравнение равновесия для направления x.

Уравнения для направлений y и z находятся аналогичным образом. В результате имеем три следующих уравнения:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}+\rho F_x=0,\\
&\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}+\rho F_y=0,\\
&\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}+\rho F_z=0.
\end{aligned} \tag{8.24}$$

Второе условие равновесия параллелепипеда требует равенства нулю моментов сил, действующих на тело. Соответствующие уравнения не приводят к новым зависимостям, а дают полученные ранее равенства (8.8):

$$\tau_{xz}=\tau_{zx},\ \tau_{zy}=\tau_{yz},\ \tau_{xy}=\tau_{yx}.$$

Учитывая эти зависимости, уравнения (8.24) можно переписать в виде

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}+\rho F_x=0,\\
&\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}+\rho F_y=0,\\
&\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}+\rho F_z=0.
\end{aligned}\right\} \tag{8.25}$$

Принимая во внимание обозначения (8.2) и (8.3) и выражение (1.33) для дивергенции в декартовой системе координат, можем записать уравнения (8.25) в виде

$$\operatorname{div}\mathbf{p}_x+\rho F_x=0,\ \operatorname{div}\mathbf{p}_y+\rho F_y=0,\ \operatorname{div}\mathbf{p}_z+\rho F_z=0. \tag{8.26}$$

В заключение приведем без вывода уравнения равновесия в цилиндрической и сферической системах координат:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi}+\frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z}+\frac{\sigma_r-\sigma_\varphi}{r}+\rho F_r=0,\\
&\frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial z}+\frac{2\tau_{r\varphi}}{r}+\rho F_\varphi=0,\\
&\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial \varphi}+\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}+\frac{\tau_{rz}}{r}+\rho F_z=0,
\end{aligned} \tag{8.27}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_R}{\partial R}+\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial \tau_{R\varphi}}{\partial \varphi}+\frac{1}{R}\frac{\partial \tau_{R\theta}}{\partial \theta}+\frac{1}{R}(2\sigma_R+\tau_{R\theta}\operatorname{ctg}\theta-\sigma_\varphi-\sigma_\theta)+\rho F_R=0,\\
&\frac{\partial \tau_{R\theta}}{\partial R}+\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial \tau_{\varphi\theta}}{\partial \varphi}+\frac{1}{R}\frac{\partial \tau_{\theta\varphi}}{\partial \theta}+\frac{1}{R}[3\tau_{R\theta}+(\sigma_\theta-\sigma_\varphi)\operatorname{ctg}\theta]+\rho F_\theta=0,
\end{aligned} \tag{8.28}$$

$$\frac{\partial \tau_{R\varphi}}{\partial R}+\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{1}{R}\frac{\partial \tau_{\varphi\theta}}{\partial \theta}+\frac{1}{R}(3\tau_{R\varphi}+2\tau_{\varphi\theta}\operatorname{ctg}\theta)+\rho F_\varphi=0.$$

§ 2. ДЕФОРМАЦИИ

Если на тело воздействовать внешними силами, то оно изменит свою форму и объем, т. е. деформируется. Представим себе прямолинейный отрезок ab в теле до деформации. Под воздействием внешних сил он может изогнуться, в некоторых местах оказаться растянутым, в других сжатым. Описать процесс деформирования математически здесь практически невозможно, так как многообразие кривых, в которые может перейти отрезок ab, неограничено. Однако отрезок ab можно подразделить на такие малые участки, чтобы они были прямолинейными до и после процесса деформации. При этом ограничении все многообразие изменений сводится к растяжению или сжатию малого отрезка, к его повороту или комбинации этих двух изменений. Сохранение в процессе деформирования прямолинейности малых отрезков возможно лишь при постоянстве величин деформации в рассматриваемой малой области в окрестностях данной точки. При таком дифференциальном подходе процесс деформации может быть описан математически, могут быть определены относительные перемещения каждой точки тела, как функции ее координат. В данном разделе мы исследуем геометрию явления, отвлекаясь от того, какими силами оно вызвано.

I. Тензор деформации. Рассмотрим деформацию в малой области Ω, включающей в себя точку $M(x, y, z)$ и ее окрестность (рис. 67). В этой области находится элементарный отрезок dS с началом в точке M и концом в точке M_1. Проекции dS на оси x, y, и z

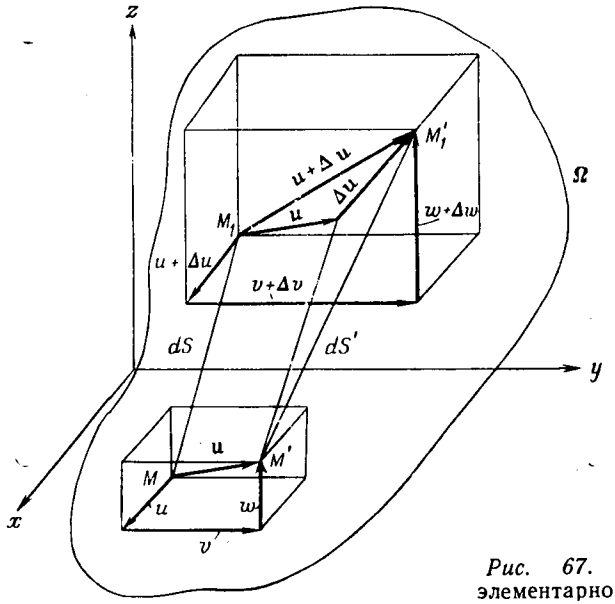


Рис. 67. Деформация элементарного отрезка

будут dx, dy, dz. При деформации точка M сместится и займет положение M', а точка M_1—положение M'_1. Отрезок dS в результате деформации превратится в dS'. Точка M сместится на $\mathbf{u}$, а точка M_1 на $\mathbf{u}+\Delta\mathbf{u}$. Проекции $\mathbf{u}$ на оси координат обозначим u, v и w. Проекции $\mathbf{u}+\Delta\mathbf{u}$ соответственно будут $u+\Delta u$, $v+\Delta v$, $w+\Delta w$. Отрезок $\Delta\mathbf{u}$ и его проекции Δu, Δv и Δw определяют различие в смещении точек M и M_1, т. е. деформацию в рассматриваемой области.

Заменим приращения Δu, Δv и Δw дифференциалами du, dv и dw. Так как величина и направление смещения меняются от точки к точке, т. е. $u=f_1(x, y, z)$, $v=f_2(x, y, z)$ и $w=f_3(x, y, z)$, дифференциалы du, dv и dw должны быть полными дифференциалами:

$$\left.\begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz,\\ dv &= \frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy+\frac{\partial v}{\partial z}dz,\\ dw &= \frac{\partial w}{\partial x}dx+\frac{\partial w}{\partial y}dy+\frac{\partial w}{\partial z}dz. \end{aligned}\right\} \tag{8.29}$$

Девять производных, фигурирующих в (8.29), полностью определяют деформацию в рассматриваемой малой области. Их совокупность образует тензор деформации.

В теории упругости принято разлагать этот тензор на симметричную и антисимметричную части. При этом смещение $\mathbf{du}$ и его компоненты—смещения по координатным осям, записывают в виде суммы двух смещений, т. е. $\mathbf{du}=\mathbf{du}_1+\mathbf{du}_2$, $du=du_1+du_2$, $dv=dv_1+dv_2$, $dw=dw_1+dw_2$, где

$$\left.\begin{aligned} du_1 &= \frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)dy+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)dz,\\ dv_1 &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)dz,\\ dw_1 &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)dx+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)dy+\frac{\partial w}{\partial z}dz; \end{aligned}\right\} \tag{8.30}$$

$$\left.\begin{aligned} du_2 &= -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)dy+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)dz,\\ dv_2 &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)dx-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)dz,\\ dw_2 &= -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)dx+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)dy. \end{aligned}\right\} \tag{8.31}$$

Производные и их суммы, фигурирующие в (8.30), составляют компоненты симметричной части тензора деформации, разности производных в (8.31)—компоненты его антисимметричной части.

Как будет показано ниже, du_1, dv_1 и dw_1 определяют собственно деформацию среды или так называемую чистую деформацию—смещение частиц среды в результате сжатий, растяжений и изменения объема, но не вращения; du_2, dv_2 и dw_2, напротив, опреде-

ляют вращение отрезка dS, т. е. всей рассматриваемой области Ω как целого относительно точки M.

Введем следующие обозначения:

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x},\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y},\ \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z},\\
&\gamma_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right),\ \gamma_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right),\\
&\gamma_{zy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right),\\
&\gamma_{yx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right),\ \gamma_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right),\\
&\gamma_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right),\\
&\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right),\ \omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right),\\
&\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right).
\end{aligned}\right\} \qquad (8.32)$$

Тогда выражения (8.31) можем переписать в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}
du_2 &= (\omega_y dz - \omega_z dy),\\
dv_2 &= (\omega_z dx - \omega_x dz),\\
dw_2 &= (\omega_x dy - \omega_y dx).
\end{aligned}\right\} \qquad (8.33)$$

Данные зависимости представляют собой покомпонентную запись векторного произведения двух векторов $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{dS}$:

$$\mathbf{du}_2 = [\boldsymbol{\omega}\mathbf{dS}]. \qquad (8.34)$$

Вектор $\boldsymbol{\omega}$, в свою очередь, как следует из выражений для его компонент (8.32), является вихревой частью вектора смещения $\mathbf{u}$ с компонентами u, v и w:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\operatorname{rot}\mathbf{u}. \qquad (8.35)$$

Вектор $\mathbf{du}_2$ определяет смещение из-за поворота отрезка dS на угол ω, т. е. малая область Ω испытывает поворот как твердое тело относительно оси, проходящей через точку M. При этом относительное расположение точек в области Ω сохраняется неизменным.

Обратимся теперь к исследованию чистой деформации, симметричной части тензора. Используя обозначения (8.32), симметричную часть тензора можно записать в виде

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{yx} & \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} & \varepsilon_y & \gamma_{zy} \\ \gamma_{xz} & \gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{vmatrix}. \qquad (8.36)$$

Очевидно, что $\gamma_{xy}=\gamma_{yx}$, $\gamma_{xz}=\gamma_{zx}$ и $\gamma_{yz}=\gamma_{zy}$. Таким образом, деформированное состояние тела в окрестности данной точки фактически определяется шестью величинами: ε_x, ε_y, ε_z, γ_{xy}, γ_{xz} и γ_{yz}.

В прикладной теории упругости тензором деформации часто называют симметричную часть тензора деформации с компонентами (8.36).

Выясним физический смысл этих величин. Допустим, что до деформации элементарный отрезок dS был ориентирован параллельно оси x. Тогда его проекции будут dx, 0, 0. Проекции отрезка dS' в общем случае равны: $dx'=dx+du$, $dy'=dy+dv$, $dz'=dz+dw$. При заданной ориентировке dS $dy=dz=0$, и на основании (8.29) имеем

$$dx' = \left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx,\quad dy' = \frac{\partial v}{\partial x}dx,\quad dz' = \frac{\partial w}{\partial x}dx. \tag{8.37}$$

Длина отрезка dS'

$$|dS'| = \sqrt{\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2}\,dx, \tag{8.38}$$

а относительное удлинение отрезка dS в результате деформации

$$\frac{|dS'|-dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x, \tag{8.39}$$

что получается при разложении (8.38) в ряд и пренебрежении членами порядка выше первого. Аналогичные выражения нетрудно получить для отрезков, ориентированных до деформации вдоль осей y и z. Таким образом, можно утверждать, что диагональные компоненты тензора деформации (8.36) ε_x, ε_y и ε_z представляют собой относительные удлинения бесконечно малых отрезков, которые до деформации были параллельны координатным осям.

Выясним физический смысл других компонент тензора деформации. Рассмотрим, как изменяется прямой угол между двумя отрезками, до деформации параллельными осям координат. Возьмем, например, отрезки dy и dz, лежащие в плоскости yOz (рис. 68). В результате деформации каждый из этих отрезков изменит свое положение в пространстве. Их проекции на плоскость yOz на рисунке показаны пунктиром. Нетрудно заметить, что при малых деформациях углы поворота отрезков dy и dz соответственно равны $\partial w/\partial y$ и $\partial v/\partial z$. Следовательно, величина $\gamma_{yz}=1/2(\partial w/\partial y+\partial v/\partial z)$ равна половине значения, на которое уменьшится в результате деформации прямой угол между двумя бесконечно малыми отрезками, до деформации параллельными осям координат. Аналогичный смысл имеют величины γ_{xy} и γ_{xz}. Величины γ_{xy}, γ_{xz}, γ_{yz} называются сдвигами.

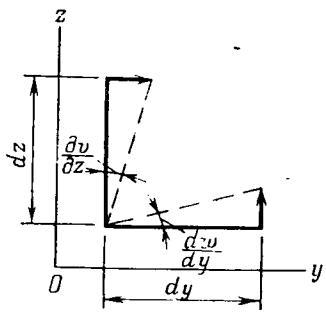


Рис. 68. Деформация сдвига

Формулы, по которым составляющие тензора деформации преобразуются при повороте координатных осей, т. е. при переходе от системы координат x, y, z к системе x', y', z', аналогичны формулам, по которым преобразуются состав-

ляющие тензора напряжения, например (8.14).

Приведем без вывода выражения для составляющих тензора деформации в цилиндрической и сферической системах координат:

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r},\quad \gamma_{r\varphi} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r}\right),\\
&\varepsilon_\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r},\quad \gamma_{\varphi z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \varphi}\right),\\
&\varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z},\quad \gamma_{zr} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}\right).
\end{aligned}\right\} \qquad (8.40)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon_R = \frac{\partial u_R}{\partial R},\quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{R}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{R}u_R,\\
&\varepsilon_\varphi = \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{R}u_R + \frac{1}{R\operatorname{tg}\theta}u_\theta,\\
&\gamma_{R\varphi} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial u_R}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial R} - \frac{1}{R}u_\varphi\right),\\
&\gamma_{\varphi\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{1}{R\operatorname{tg}\theta}u_\varphi + \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi}\right),\\
&\gamma_{\theta R} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial R} - \frac{1}{R}u_\theta + \frac{1}{R}\frac{\partial u_R}{\partial \vartheta}\right).
\end{aligned}\right\} \qquad (8.41)$$

II. **Главные удлинения.** Сопоставим деформированное состояние бесконечно малого объема dV_1, характеризующегося деформациями ε_x, ε_y, ε_z, γ_{yz}, γ_{xz} и γ_{xy}, и напряженное состояние бесконечно малого объема dV_2 другого тела, характеризующегося напряжениями σ_x, σ_y, σ_z, τ_{yz}, τ_{xz} и τ_{xy}. Путем соответствующего подбора нагрузок можно создать в элементе объема dV_2 любые напряжения. В частности, можно придать им значения, пропорциональные деформациям объема dV_1:

$$\left.\begin{aligned}
&\sigma_x = k\varepsilon_x,\quad \tau_{yz} = k\gamma_{yz},\\
&\sigma_y = k\varepsilon_y,\quad \tau_{xz} = k\gamma_{xz},\\
&\sigma_z = k\varepsilon_z,\quad \tau_{xy} = k\gamma_{xy},
\end{aligned}\right\} \qquad (8.42)$$

где k—произвольный коэффициент пропорциональности.

В § 1 было показано, что в каждой точке напряженного тела существуют три взаимно перпендикулярные площадки, на которых действуют только нормальные напряжения, а касательные равны нулю. Направление осей *1*, *2*, *3*, перпендикулярных к этим площадкам, и значения нормальных напряжений σ_1, σ_2 и σ_3 определяются системой уравнений (8.16). Найдя такие оси *1*, *2* и *3* для объема dV_2, имеем по аналогии с (8.42)

$$\left.\begin{aligned}
&k\varepsilon_1 = \sigma_1,\quad k\gamma_{23} = \tau_{23} = 0,\\
&k\varepsilon_2 = \sigma_2,\quad k\gamma_{13} = \tau_{13} = 0,\\
&k\varepsilon_3 = \sigma_3,\quad k\gamma_{12} = \tau_{12} = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (8.43)$$

Следовательно, в объеме dV_1 существуют три взаимно перпендикулярных направления, сдвиги между которыми равны нулю, т. е.

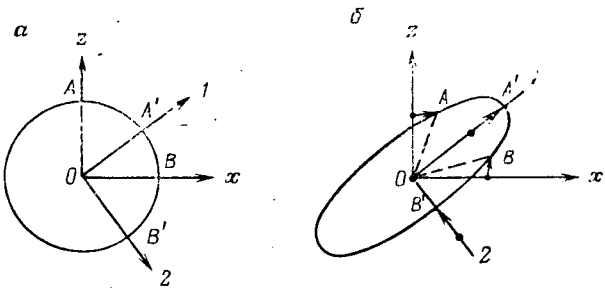


Рис. 69. Главные деформации

отрезки, ориентированные вдоль этих направлений, в результате деформации не испытывают поворотов. Так как dV_1—бесконечно малый объем, который стягивается в точку, можно считать, что три таких взаимно перпендикулярных направления, сдвиги между которыми равны нулю, существуют в каждой точке деформированного тела. Прямые, проведенные из данной точки по указанным направлениям, называются главными осями деформированного состояния в данной точке. Вдоль главных осей происходит только удлинение или сжатие. Вдоль других направлений, наряду со сжатием и расширением, происходят сдвиговые деформации, т. е. отрезки, ориентированные не по главным осям, испытывают при деформации кроме сжатия—растяжения также и поворот. Относительные удлинения по направлениям главных осей называются главными удлинениями, или главными деформациями.

Рассмотрим следующий пример. В теле до деформации проведена окружность с центром в точке O (рис. 69,*а*). Оси *1* и *2* являются главными осями деформации. После деформации окружность превратится в эллипс (рис. 69,*б*). Здесь хорошо видно, что точки A' и B' смещаются только в результате удлинения или сжатия отрезков, равных до деформации радиусу сферы. В то же время точки A и B испытывают смещение и вследствие угловой деформации. Отрезки OA и OB кроме удлинения еще и повернулись.

Определим теперь направления главных осей деформации и главные удлинения. Выделим в деформированном теле параллелепипед с ребрами dx, dy, dz, параллельными координатным осям. Допустим, что одна из главных осей совпадает с диагональю параллелепипеда dR, на концах которой находятся точки A и A_1. Если ε_n—одно из главных удлинений, то смещение точки A_1 относительно A в результате деформации будет

$$\mathbf{du}_1 = \mathbf{1}_R \varepsilon_n dR. \tag{8.44}$$

Проекции этого смещения на оси координат равны

$$\left.\begin{aligned} du_1 &= \varepsilon_n dR \cos(\mathbf{1}_R, \mathbf{1}_x), \\ dv_1 &= \varepsilon_n dR \cos(\mathbf{1}_R, \mathbf{1}_y), \\ dw_1 &= \varepsilon_n dR \cos(\mathbf{1}_R, \mathbf{1}_z). \end{aligned}\right\} \tag{8.45}$$

Подставим выражения (8.45) для du_1, dv_1 и dw_1 в формулы (8.30). С учетом обозначений (8.32) и того обстоятельства, что dx/dR, dy/dR и dz/dR являются направляющими косинусами для данной главной оси, после переноса всех членов в одну сторону имеем следующую систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned}(\varepsilon_x-\varepsilon_n)\cos(1_R,\ 1_x)+\gamma_{yx}\cos(1_R,\ 1_y)+\gamma_{zx}\cos(1_R,\ 1_z)=0,\\ \gamma_{xy}\cos(1_R,\ 1_x)+(\varepsilon_y-\varepsilon_n)\cos(1_R,\ 1_y)+\gamma_{zy}\cos(1_R,\ 1_z)=0,\\ \gamma_{xz}\cos(1_R,\ 1_x)+\gamma_{yz}\cos(1_R,\ 1_y)+(\varepsilon_z-\varepsilon_n)\cos(1_R,\ 1_z)=0.\end{aligned}\right\}\quad(8.46)$$

Решая эту систему с учетом известного соотношения

$$\cos^2(1_R,\ 1_x)+\cos^2(1_R,\ 1_y)+\cos^2(1_R,\ 1_z)=1,\qquad(8.47)$$

как и ранее [см. (8.16)], можем определить четыре неизвестных — ε_n, $\cos(1_R,\ 1_x)$, $\cos(1_R,\ 1_y)$, $\cos(1_R,\ 1_z)$.

Исключая из первых трех уравнений величины $\cos(1_R,\ 1_x)$, $\cos(1_R,\ 1_y)$ и $\cos(1_R,\ 1_z)$, которые в силу (8.47) не могут все одновременно равняться нулю, получаем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix}\varepsilon_x-\varepsilon_n & \gamma_{yx} & \gamma_{zx}\\ \gamma_{xy} & \varepsilon_y-\varepsilon_n & \gamma_{zy}\\ \gamma_{xz} & \gamma_{yz} & \varepsilon_z-\varepsilon_n\end{vmatrix}=0.\qquad(8.48)$$

Раскрывая определитель, получаем кубическое уравнение

$$\varepsilon^3{}_n-I_1\varepsilon^2{}_n+I_2\varepsilon_n-I_3=0.\qquad(8.49)$$

Корни данного кубического уравнения — ε_1, ε_2, ε_3 являются главными удлинениями, или главными значениями тензора деформации.

Коэффициенты I_1, I_2 и I_3 в (8.49) равны

$$\begin{aligned}I_1&=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z,\\ I_2&=\varepsilon_x\varepsilon_y+\varepsilon_y\varepsilon_z+\varepsilon_z\varepsilon_x-\gamma^2_{xy}-\gamma^2_{yz}-\gamma^2_{zx},\\ I_3&=\varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z+2\gamma_{xy}\gamma_{yz}\gamma_{zx}-\varepsilon_x\gamma^2_{yz}-\varepsilon_y\gamma^2_{zx}-\varepsilon_z\gamma^2_{xy}.\end{aligned}\qquad(8.50)$$

Коэффициенты I_1, I_2, I_3 называются соответственно первым, вторым и третьим инвариантами деформированного состояния в данной точке. Их инвариантность, т. е. независимость от преобразования координат, вытекает из известных свойств корней кубического уравнения, согласно которым

$$I_1=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3,\quad I_2=\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_2\varepsilon_3+\varepsilon_3\varepsilon_1,\quad I_3=\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3.\qquad(8.51)$$

Специальный интерес представляет физический смысл первого инварианта.

Возьмем бесконечно малый параллелепипед с ребрами dx, dy и dz, параллельными главным осям тензора деформации. Объем параллелепипеда до деформации $dV=dxdydz$. После деформации

$$dV^*=dx(1+\varepsilon_1)dy(1+\varepsilon_2)dz(1+\varepsilon_3)\approx dxdydz(1+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3),\qquad(8.52)$$

где мы пренебрегаем произведениями $\varepsilon_1\varepsilon_2$, $\varepsilon_2\varepsilon_3$, $\varepsilon_1\varepsilon_3$ и $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$ из-за их малости. Относительное изменение объема, т. е. объемное расширение (сжатие), будет определяться выражением

$$(dV^*-dV)/dV=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3=I_1. \tag{8.53}$$

Таким образом, первый инвариант деформированного состояния имеет простой физический смысл—это относительное изменение элементарного объема в результате деформации. Объемное расширение (сжатие) часто называют дилатацией и обозначают θ:

$$\Delta V/V=\theta=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z. \tag{8.54}$$

Учитывая обозначения (8.28), нетрудно заметить, что согласно (1.33) объемная деформация может быть представлена как дивергенция вектора смещения $\mathbf{u}$:

$$\operatorname{div}\mathbf{u}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=\theta. \tag{8.55}$$

§ 3. СВЯЗЬ МЕЖДУ ДЕФОРМАЦИЯМИ И НАПРЯЖЕНИЯМИ

I. **Закон Гука.** Одним из основных положений теории упругости является допущение о существовании однозначной линейной зависимости между деформацией и напряжением—Закон Гука:

$$\varepsilon=c\sigma. \tag{8.56}$$

Для небольших деформаций и напряжений, рассматриваемых в теории упругости, это допущение хорошо согласуется с опытными данными. О. Коши обобщил этот закон, установив линейную зависимость каждой составляющей деформации от всех шести компонент напряженного состояния тела в данной точке. Обобщенный закон Гука записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x&=c_{11}\sigma_x+c_{12}\sigma_y+c_{13}\sigma_z+c_{14}\tau_{yz}+c_{15}\tau_{zx}+c_{16}\tau_{xy}\\
\varepsilon_y&=c_{21}\sigma_x+c_{22}\sigma_y+c_{23}\sigma_z+c_{24}\tau_{yz}+c_{25}\tau_{zx}+c_{26}\tau_{xy}\\
\varepsilon_z&=c_{31}\sigma_x+c_{32}\sigma_y+c_{33}\sigma_z+c_{34}\tau_{yz}+c_{35}\tau_{zx}+c_{36}\tau_{xy}\\
\gamma_{yz}&=c_{41}\sigma_x+c_{42}\sigma_y+c_{43}\sigma_z+c_{44}\tau_{yz}+c_{45}\tau_{zx}+c_{46}\tau_{xy}\\
\gamma_{zx}&=c_{51}\sigma_x+c_{52}\sigma_y+c_{53}\sigma_z+c_{54}\tau_{yz}+c_{55}\tau_{zx}+c_{56}\tau_{xy}\\
\gamma_{xy}&=c_{61}\sigma_x+c_{62}\sigma_y+c_{63}\sigma_z+c_{64}\tau_{yz}+c_{65}\tau_{zx}+c_{66}\tau_{xy}.
\end{aligned} \tag{8.57}$$

Входящие в (8.57) 36 коэффициентов c_{ik} ($i=1, \ldots, 6$, $k=1, \ldots, 6$) характеризуют упругие свойства тела в данной точке. В 1839 г. Д. Грин показал, что $c_{ik}=c_{ki}$, и, следовательно, число независимых упругих постоянных не превышает 21.

В общем случае коэффициенты c_{ik}, т. е. упругие свойства тела, по разным направлениям различны. Такое тело называется анизотропным. Одинаковые компоненты напряжения вызывают здесь по разным направлениям разные деформации. Если упругие свойства одинаковы по всем направлениям, среда называется изотропной. В этом случае, как будет показано ниже, упругие свойства тела

характеризуются двумя константами. При наличии разных видов симметрии в упругой анизотропной среде число упругих постоянных уменьшается с 21 до 13, 9, 6 или 3.

Если коэффициенты c_{ik}—функции координат точек тела, оно является неоднородным. Если же упругие постоянные не меняются от точки к точке, тело называют однородным.

II. Закон Гука для изотропного тела. Модуль Юнга. Коэффициент Пуассона. Во многих практически важных случаях упругие свойства среды одинаковы по всем направлениям. Поэтому рассмотрению связи между деформациями и напряжениями в изотропном теле уделим особое внимание.

В однородной изотропной среде направления главных осей напряжения и деформации совпадают в каждой точке. Воспользуемся этим обстоятельством для получения уравнений, связывающих напряжения и деформации.

Направим оси x, y, z параллельно главным осям напряжений. Тогда система уравнений (8.57) ввиду того, что касательные напряжения τ_{ik} и сдвиги γ_{ik} (i, k=1, 2, 3) равны нулю, запишется в следующем виде:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= c_{11}\sigma_1 + c_{12}\sigma_2 + c_{13}\sigma_3,\\ \varepsilon_2 &= c_{21}\sigma_1 + c_{22}\sigma_2 + c_{23}\sigma_3,\\ \varepsilon_3 &= c_{31}\sigma_1 + c_{32}\sigma_2 + c_{33}\sigma_3.\end{aligned} \qquad (8.58)$$

Рассмотрим несколько различных нагрузок на тело:

а) $\sigma_1=\sigma>0$, $\sigma_2=\sigma_3=0$;

тогда согласно (8.58)

$$\varepsilon'_1=c_{11}\sigma,\ \varepsilon'_2=c_{21}\sigma,\ \varepsilon'_3=c_{31}\sigma;$$

б) $\sigma_2=\sigma>0$, $\sigma_1=\sigma_3=0$;

$$\varepsilon''_1=c_{12}\sigma,\ \varepsilon''_2=c_{22}\sigma,\ \varepsilon''_3=c_{32}\sigma;$$

в) $\sigma_3=\sigma>0$, $\sigma_1=\sigma_2=0$;

$$\varepsilon'''_1=c_{13}\sigma,\ \varepsilon'''_2=c_{23}\sigma,\ \varepsilon'''_3=c_{33}\sigma.$$

Так как упругие свойства тела во всех направлениях одинаковы, должны выполняться следующие равенства:

1) $\varepsilon'_1=\varepsilon''_2=\varepsilon'''_3$;

2) $\varepsilon'_2=\varepsilon'_3$, $\varepsilon''_1=\varepsilon''_3$, $\varepsilon'''_1=\varepsilon'''_2$;

учитывая, что $c_{ik}=c_{ki}$, должно выполняться равенство

$$\varepsilon'_2=\varepsilon'_3=\varepsilon''_1=\varepsilon''_3=\varepsilon'''_1=\varepsilon'''_2.$$

Из указанных равенств следует, что $c_{11}=c_{22}=c_{33}$ и $c_{12}=c_{13}=c_{21}=c_{23}=c_{31}=c_{32}$.

Введем следующие обозначения:

$$c_{11}=c_{22}=c_{33}=1/E,$$

где E—модуль Юнга;

$$c_{12}=c_{13}=c_{21}=c_{23}=c_{31}=c_{32}=-\nu/E,$$

где ν—коэффициент Пуассона [1].

Подставляя эти обозначения в (8.58), имеем

$$\varepsilon_1=\frac{1}{E}[\sigma_1-\nu(\sigma_2+\sigma_3)],\quad \varepsilon_2=\frac{1}{E}[\sigma_2-\nu(\sigma_1+\sigma_3)],$$

$$\varepsilon_3=\frac{1}{E}[\sigma_3-\nu(\sigma_1+\sigma_2)]. \tag{8.59}$$

Итак, упругие свойства однородной изотропной среды характеризуются двумя постоянными—модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν. Выясним их физический смысл.

Допустим имеем упругое тело в виде бруска длиной l и поперечным сечением S, верхний торец которого закреплен (рис. 70). К нижнему торцу бруска равномерно приложена сила F. Напряжение в направлении оси 1 будет

$$\sigma_1=\sigma=F/S.$$

Перпендикулярно к оси 1 оно равно нулю

$$\sigma_2=\sigma_3=0.$$

Из (8.59) следует, что

$$\varepsilon_1=\sigma/E \text{ и } \varepsilon_2=\varepsilon_3=-\nu\sigma/E.$$

И в то же время, как известно, ε—относительное удлинение (сжатие) тела в соответствующем направлении. В нашем случае $\varepsilon_1=\Delta l/l$. Следовательно,

$$\Delta l/l=\sigma/E \text{ или } E=\sigma l/\Delta l, \tag{8.60}$$

т. е. модуль Юнга численно равен напряжению, при котором длина тела увеличивается вдвое ($\Delta l=l$).

Растяжение бруска сопровождается сокращением его поперечных размеров. Относительное поперечное сжатие характеризуется величинами ε_2 и ε_1:

$$\varepsilon_2=\varepsilon_3=(d_1-d)/d=-\Delta d/d$$

и, следовательно,

$$-\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}=\left(\frac{\Delta d}{d}\right)\Big/\left(\frac{\Delta l}{l}\right)=\left(\frac{\nu\sigma}{E}\right)\Big/\left(\frac{\sigma}{E}\right)=\nu. \tag{8.61}$$

Таким образом, коэффициент Пуассона представляет собой отношение относительного поперечного сжатия к относительному продольному растяжению.

Выражения (8.59) определяют зависимость между напряжениями и деформациями для главных направлений. Из этих формул

[1] В литературе часто используется и другое обозначение для коэффициента Пуассона — σ.

можно получить соответствующие зависимости для произвольно ориентированных осей x, y, z. Не приводя здесь довольно громоздких выкладок, отметим, что для получения искомых зависимостей следует вначале преобразовать компоненты тензора деформации к новым осям координат по формулам вида (8.11), (8.12) или (8.14), которые в данном случае упрощаются ввиду отсутствия сдвигов в системе осей *1*, *2*, *3*. Далее в полученных выражениях следует выразить ε_1, ε_2 и ε_3 через напряжения σ_1, σ_2 и σ_3 согласно (8.59). Наконец, необходимо преобразовать эти напряжения к новым осям координат по формулам вида (8.11), (8.12), (8.14). В результате получим следующие формулы, определяющие зависимость между компонентами напряжения и деформации в любой точке однородного изотропного тела для произвольно выбранных декартовых координат x, y, z:

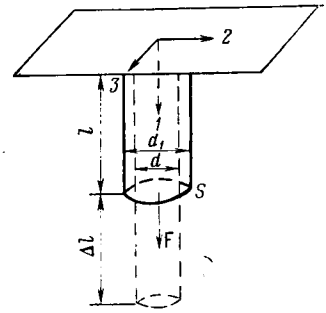


Рис. 70. Определение модуля Юнга

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], \quad \gamma_{yz} = \frac{(1+\nu)}{E}\tau_{yz},$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)]; \quad \gamma_{zx} = \frac{(1+\nu)}{E}\tau_{zx}; \tag{8.62}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)], \quad \gamma_{xy} = \frac{(1+\nu)}{E}\tau_{xy}.$$

Если сложить левые и правые части (8.62) для ε_x, ε_y и ε_z, получим

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z - 2\nu(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)].$$

Учитывая, что в соответствии с (8.54) сумма слева представляет собой дилатацию или объемное расширение θ, можем написать

$$\theta = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z). \tag{8.63}$$

III. **Выражение напряжений через деформации.** В ряде случаев при теоретических выкладках и инженерных расчетах возникает необходимость выразить или рассчитать напряжения по заданным или измеренным деформациям. Получим соответствующие зависимости для изотропной однородной среды.

Прибавим и вычтем из выражения для ε_x (8.62) член $\nu\sigma_x$:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x + \nu\sigma_x - \nu(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)].$$

Заменяя в этом выражении сумму трех нормальных напряжений, в соответствии с (8.63) имеем

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x(1+\nu)}{E} - \frac{\nu\theta}{1-2\nu}.$$

Отсюда

$$\sigma_x = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\theta + \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_x. \tag{8.64}$$

Аналогичный вид имеют выражения для σ_y и σ_z.

Из (8.62) получаем выражение для касательного напряжения τ_{yz} через сдвиг γ_{yz}:

$$\tau_{yz} = \frac{E}{(1+\nu)}\gamma_{yz}. \tag{8.65}$$

Аналогичный вид имеют выражения для τ_{zx} и τ_{xy}.

Для более компактной записи формул вида (8.64) и (8.65), выражающих напряжения через деформации, обычно используются следующие обозначения:

$$E\nu/(1+\nu)(1-2\nu)=\lambda,\ E/2(1+\nu)=\mu. \tag{8.66}$$

Величины λ и μ, характеризующие упругие свойства изотропной среды, называются **упругими константами Ламэ**. Воспользовавшись ими, выпишем выражения для всех компонент напряжения:

$$\begin{aligned}
&\sigma_x=\lambda\theta+2\mu\varepsilon_x,\ \tau_{yz}=2\mu\gamma_{yz},\\
&\sigma_y=\lambda\theta+2\mu\varepsilon_y,\ \tau_{zx}=2\mu\gamma_{zx},\\
&\sigma_z=\lambda\theta+2\mu\varepsilon_z,\ \tau_{xy}=2\mu\gamma_{xy}.
\end{aligned} \tag{8.67}$$

Константу μ часто называют **модулем сдвига**, так как она определяет величину сдвига при данном касательном напряжении. В жидкости сдвиговые деформации отсутствуют и $\mu=0$.

Вторая константа Ламэ—λ простого физического истолкования не имеет.

Выразим напряжения через объемную деформацию. Сложив левые и правые части первых трех уравнений в (8.67), получим:

$$\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z=3\lambda\theta+2\mu(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)$$

или, заменив здесь в соответствии с (8.54) сумму деформаций дилатацией θ, имеем

$$\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z=(3\lambda+2\mu)\theta. \tag{8.68}$$

Рассмотрим далее случай всестороннего сжатия упругого тела. Примем, что тело подвергается всестороннему давлению, направленному перпендикулярно к поверхности, что происходит, например, при погружении тела в жидкость. При отсутствии объемных сил тело будет находиться в равновесии при условии, если $\sigma_x=\sigma_y=\sigma_z=-\sigma$ и $\tau_{yz}=\tau_{xz}=\tau_{xy}=0$.

В этом случае имеем вместо (8.68)

$$-\sigma=(3\lambda+2\mu)\theta/3. \tag{8.69}$$

Знак «минус» указывает на то, что напряжения направлены противоположно нормали к поверхности тела. Введем обозначение

$$K=(3\lambda+2\mu)/3. \tag{8.70}$$

Тогда из (8.69) получаем

$$\sigma=-K\theta; \tag{8.71}$$

K называют модулем всестороннего сжатия. Его можно выразить через E и ν. В этом случае

$$K=E/3(1-2\nu). \tag{8.72}$$

Итак, упругие свойства изотропной среды определяются двумя константами. В зависимости от характера рассматриваемой задачи можно использовать одну из следующих трех пар величин: E и ν, λ и μ, K и μ. Выше были приведены формулы, определяющие λ и μ через E и ν. Нетрудно получить обратные зависимости:

$$E=\mu(2\mu+3\lambda)/(\mu+\lambda),\quad \nu=\lambda/2(\mu+\lambda). \tag{8.73}$$

Все коэффициенты упругости—положительные величины. Поэтому из (8.73) можно заключить, что значение коэффициента Пуассона должно быть заключено между 0 и 0,5. Экспериментальные данные указывают, что для горных пород он обычно равен 0,2—0,35.

В заключение приведем без вывода зависимости для сферической системы координат связывающие нормальные компоненты напряжения с деформациями (они понадобятся нам в дальнейшем):

$$\sigma_R=(\lambda+2\mu)\frac{\partial u_R}{\partial R}+2\lambda\frac{u_R}{R},$$

$$\sigma_\varphi=\sigma_\theta=\lambda\frac{\partial u_R}{\partial R}+2(\lambda+\mu)\frac{u_R}{R}. \tag{8.74}$$

IV. **Упругий потенциал.** В процессе деформации упругого тела действующие на него силы совершают работу. Происходит накопление потенциальной энергии. После снятия нагрузки эта энергия переходит в кинетическую и совершает работу движения. В результате восстанавливается первоначальное состояние тела.

Представим себе брусок с длинной стороной, направленной по оси x. Один конец его закреплен, а к другому равномерно приложена растягивающая сила $\mathbf{F}$. Сечение бруска S, а длина l. Единственная компонента напряжения в бруске $\sigma_x=F/S$. Компонента деформации по оси x—ε_x, и растяжение бруска будет равно $\varepsilon_x l$. Элементарному изменению деформации $d\varepsilon_x$ соответствует элементарная работа dA, равная произведению силы на соответствующее перемещение:

$$dA=\sigma_x S d\varepsilon_x l. \tag{8.75}$$

Напряжение σ_x мы можем выразить через деформацию в соответствии с законом Гука $\sigma_x=E\varepsilon_x$. Произведем соответствующую подстановку в (8.75) и определим работу, совершенную за весь

Перепишем последнее выражение в следующем виде:

$$\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + \\ + \rho F_x = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Учитывая, что согласно (8.55), (1.66) сумма производных в первых скобках представляет собой дилатацию θ, а во второй—выражение для лапласиана u в декартовой системе координат ($\Delta u = \nabla^2 u$), получаем окончательно уравнение для u и аналогичным образом для v и w—смещений по двум другим координатным направлениям:

$$\begin{aligned}
(\lambda+\mu)\frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu\nabla^2 u + \rho F_x &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\
(\lambda+\mu)\frac{\partial \theta}{\partial y} + \mu\nabla^2 v + \rho F_y &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\
(\lambda+\mu)\frac{\partial \theta}{\partial z} + \mu\nabla^2 w + \rho F_z &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.
\end{aligned} \tag{9.2}$$

Умножим левые и правые части уравнений (9.2) на единичные векторы $\mathbf{1}_x$, $\mathbf{1}_y$ и $\mathbf{1}_z$ соответственно и сложим их почленно. В результате получаем уравнение в векторной форме:

$$(\lambda+\mu)\operatorname{grad}\theta + \mu\nabla^2\mathbf{u} + \rho\mathbf{F} = \rho\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \tag{9.3}$$

где $\mathbf{u} = \mathbf{1}_x u + \mathbf{1}_y v + \mathbf{1}_z w$—вектор смещения.

Уравнение (9.3), определяющее распространение колебаний в упругой среде, называется уравнением Ламэ. При его решении упругие постоянные λ и μ, плотность тела ρ сила $\mathbf{F}$ полагаются заданными. Начальные и граничные условия (см. разд. III) вытекают из условий задачи. В результате решения определяются вектор смещения $\mathbf{u}$ и далее составляющие тензора деформации и напряжения.

II. **Волновые уравнения. Продольные и поперечные волны.** Поле упругих колебаний определяется в каждой точке вектором смещения $\mathbf{u}$. Как всякое векторное поле оно может быть представлено в виде суммы двух векторных полей. Одно из них является потенциальным $\mathbf{u}_P$ и характеризуется скалярным потенциалом φ:

$$\mathbf{u}_P = \operatorname{grad}\varphi; \tag{9.4}$$

другое поле вихревое и может быть описано с помощью векторного потенциала ψ:

$$\mathbf{u}_S = \operatorname{rot}\psi. \tag{9.5}$$

Следовательно, вектор смещения $\mathbf{u}$ можно записать следующим образом:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_P + \mathbf{u}_S = \operatorname{grad}\varphi + \operatorname{rot}\psi. \tag{9.6}$$

Согласно (1.13), (1.27) скалярные составляющие вектора смещения $\mathbf{u}$ по осям x, y, z декартовой системы координат u, v и w будут соответственно равны

$$u=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\psi_z}{\partial y}-\frac{\partial\psi_y}{\partial z},$$
$$v=\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial\psi_x}{\partial z}-\frac{\partial\psi_z}{\partial x}, \qquad (9.7)$$
$$w=\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\frac{\partial\psi_y}{\partial x}-\frac{\partial\psi_x}{\partial y}.$$

Аналогично (9.6) представим поле внешних сил в виде потенциальной и вихревой компонент, каждая из которых определяется соответственно скалярным Φ и векторным потенциалом Ψ:

$$\mathbf{F}=\operatorname{grad}\Phi+\operatorname{rot}\Psi. \qquad (9.8)$$

Подставляя в уравнение Ламэ (9.3) выражения (9.6) и (9.8) и изменяя порядок дифференциальных операторов, получаем

$$\nabla\left[\frac{\lambda+2\mu}{\rho}\nabla^2\varphi-\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+\Phi\right]+\operatorname{rot}\left[\frac{\mu}{\rho}\nabla^2\psi-\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}+\Psi\right]=0. \qquad (9.9)$$

Уравнение (9.9) будет удовлетворено, если положить

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-\frac{\lambda+2\mu}{\rho}\nabla^2\varphi=\Phi, \qquad (9.10)$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-\frac{\mu}{\rho}\nabla^2\psi=\Psi. \qquad (9.11)$$

Уравнения (9.10) и (9.11) [ср. с (6.41)] являются неоднородными волновыми уравнениями. Уравнение (9.11)—векторное и при расчетах его заменяют совокупностью трех скалярных уравнений для составляющих ψ_x и Ψ_x, ψ_y и Ψ_y, ψ_z и Ψ_z.

Тот факт, что уравнение Ламэ распадается на два независимых уравнения, свидетельствует о том, что в безграничной упругой среде могут существовать два независимых типа возмущений. Выясним характер каждого из них. Вспомним, что в соответствии с (8.55) и (8.35) $\operatorname{div}\mathbf{u}=\theta$ и $\operatorname{rot}\mathbf{u}=2\boldsymbol{\omega}$, где θ — дилатация или объемное расширение среды, а $\boldsymbol{\omega}$ — вектор вращения, характеризующий поворот элементарных объемов среды. Нетрудно заметить, что

$$\operatorname{div}\mathbf{u}=\theta=\operatorname{div}\mathbf{u}_P=\nabla^2\varphi,\quad \operatorname{rot}\mathbf{u}_P=\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi\equiv 0. \qquad (9.12)$$

Таким образом, распространение колебаний, описываемых уравнением (9.10), характеризуется изменением объемов отдельных областей среды, т. е. их сжатием и расширением. При этом происходит поступательное и возвратное движение частиц среды. Вращение элементарных объемов здесь отсутствует. Этот тип волн получил название продольных и обозначается индексом Р.

Существенно иной тип колебаний определяет уравнение (9.11). В этом случае

$$\operatorname{div} \mathbf{u}_S = \operatorname{div} \operatorname{rot} \boldsymbol{\psi} \equiv 0,$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} = \operatorname{rot} \mathbf{u}_S = 2\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{\psi}. \tag{9.13}$$

Распространение упругих колебаний сопровождается здесь вращением элементарных объемов среды. Явления сжатия и расширения в данном случае отсутствуют. Волны этого типа в соответствии с направлением смещения частиц среды получили название поперечных и обозначаются индексом S.

Продольные и поперечные волны в однородной изотропной среде распространяются независимо друг от друга. Продольные волны не генерируют поперечных, и наоборот. В неоднородных средах, когда λ, μ и ρ зависят от координат, продольные и поперечные волны не разделяются.

В области, где отсутствуют внешние силы, т. е. $\Phi = 0$ и $\Psi = 0$, выражения (9.10), (9.11) превращаются в однородные волновые уравнения [ср. с (6.23)]:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \nabla^2 \varphi = 0, \tag{9.14}$$

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{\psi}}{\partial t^2} - \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \boldsymbol{\psi} = 0. \tag{9.15}$$

Применяя поочередно операции div и rot к уравнению распространения колебаний (9.3) и учитывая зависимости (8.35) и (8.55), можем получить уравнения для дилатации и вектора вращения:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \nabla^2 \theta = \operatorname{div} \mathbf{F}, \tag{9.16}$$

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{\omega}}{\partial t^2} - \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot} \mathbf{F}. \tag{9.17}$$

Сходство этих уравнений с уравнениями (9.10) и (9.11) для потенциалов φ и $\boldsymbol{\psi}$ свидетельствует о связи пространственно-временного распределения этих величин.

III. **Начальные и граничные условия.** Для однозначного определения поля смещений с помощью уравнений (9.10)—(9.11) и (9.14)—(9.15), допускающих бесконечное множество решений, необходимо задать дополнительные——начальные и граничные условия. Как и в случае переменного электромагнитного поля, требуемые дополнительные условия вытекают из теоремы единственности.

Если требуется определить поле смещений в интервале времени $[0, t_M]$, $0 \leqslant t \leqslant t_M$, то начальные условия сводятся к заданию потенциала и его производной для момента времени $t=0$ во всех точках пространства, где ищется решение

$$\varphi(a, 0) = \varphi_0(a); \quad \left.\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi'_0(a). \tag{9.18}$$

Если до момента $t=0$ смещения в среде отсутствовали, эти условия задаются в следующем виде:

$$\varphi_\sigma(a)=0,\ \varphi'_0(a)=0. \tag{9.19}$$

Такая форма записи начальных условий означает отсутствие в среде других источников, кроме заданных.

Граничные условия включают в себя краевые условия и условия сопряжения (см. замечание 10 разд. II, § 8 главы первой). Краевые условия задаются на поверхности S, ограничивающей область V, в которой ищется решение. Способ задания этих условий может быть различным. В зависимости от характера задачи на поверхности S могут быть заданы потенциал и его нормальная производная, в других случаях—смещения, иногда напряжения. На части поверхности могут быть заданы напряжения, на другой части—смещения. Чаще всего приходится встречаться с внешней задачей, когда область, в которой определяется поле смещений, простирается до бесконечности. В этом случае, кроме условий на поверхности S, ограничивающей область V изнутри, требуется выполнение условий на бесконечности.

Задание краевых условий на поверхности S часто позволяет перейти к решению однородных волновых уравнений вместо уравнений с правой частью (9.10), (9.11). Действие источника, находящегося вне области V, ограниченной поверхностью S, заменяется условиями на этой поверхности и решение однородного уравнения в области V должно удовлетворять этим условиям.

Что касается условий сопряжения, то они определяют поведение поля на особых поверхностях, где происходит скачкообразное изменение упругих свойств среды.

Условия сопряжения могут быть записаны на основании следующих соображений. Допустим, что поверхность S разделяет среду на две области—одну с упругими и плотностными параметрами λ_1, μ_1, ρ_1, другую с λ_2, μ_2, ρ_2. Напряжения, действующие на обеих сторонах площадки, совпадающей с границей, должны быть равны, как и на всякой поверхности внутри среды. Если взять декартову систему координат, оси которой ориентированы таким образом, что z перпендикулярна к границе, а x и y лежат в плоскости ($z=0$), касательной к границе в данной точке, условие равенства напряжений запишется в виде
при $z=0$

$$(\tau_{zx})_1=(\tau_{zx})_2,\ (\tau_{zy})_1=(\tau_{zy})_2,\ (\sigma_z)_1=(\sigma_z)_2. \tag{9.20}$$

Учитывая уравнения (8.67) и (8.32), устанавливающие связь между напряжениями и деформациями и выражающие последние через смещение, получаем вместо (9.20)

$$\text{при } z=0\ \mu_1\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)_1=\mu_2\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)_2;$$

$$\mu_1\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)_1=\mu_2\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)_2; \tag{9.21}$$

$$\lambda_1\theta_1+2\mu_1\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_1=\lambda_2\theta_2+2\mu_2\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_2.$$

Вектор смещения и его компоненты при переходе через границу также должны меняться непрерывно. Действительно, допущение о том, что нормальная компонента смещения претерпевает разрыв, означает, что одна среда должна отрываться от другой или проникать в другую. Предположение о разрывности тангенциальной составляющей означает проскальзывание одной среды относительной другой. При упругих деформациях в твердых телах эти явления не могут существовать. Следовательно,

$$\mathbf{u}_1=\mathbf{u}_2$$

или

$$u_1=u_2,\ v_1=v_2;\ w_1=w_2 \text{ при } z=0. \tag{9.22}$$

Уравнения (9.21) и (9.22) составляют условия сопряжения, которым должно удовлетворять решение волновых уравнений.

§ 2. УПРУГИЕ ВОЛНЫ В ОДНОРОДНОЙ ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

I. **Сферические продольные волны.** Одним из простейших видов упругих колебаний являются сферические волны. Рассмотрим основные особенности сферических продольных волн, возбуждаемых сферическим источником.

Допустим, что источник колебаний представляет собой сферическую полость радиуса $R=l$. К внутренней стороне полости равномерно приложено давление $p(t)$, направленное радиально. Вид функции p, т. е. характер зависимости давления от времени, пока не определяем.

Давление, приложенное к поверхности полости, вызывает смещение частиц среды. Этот процесс распространяется в виде упругой волны, расходящейся от источника. Примем, что внешние силы (давление в полости) начали действие в момент $t=0$, т. е.

$$p(t)=0,\ \Phi(t)=0 \text{ при } t<0.$$

До момента $t=0$ какие-либо возмущения в среде отсутствовали, т. е. начальные условия запишем в виде (9.19)

$$\varphi(a,\ 0)=0,\ \text{ и } \left.\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|_{t=0}=0.$$

Ввиду центральной симметрии источника, однородности и изотропности среды возникающее возмущение также обладает сферической симметрией. Поэтому используем далее сферическую систему координат. Поскольку из-за центральной симметрии задачи производные по φ и θ равны нулю (см. разд. III, § 9 главы первой) уравнение (9.10) в данном случае согласно (1.66^{II}) запишется в виде

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-\frac{\lambda+2\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial R^2}+\frac{2}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial R}\right)=\Phi(t). \tag{9.23}$$

Повсюду, кроме $R=l$, внешние силы равны нулю. Так как нас интересует область за пределами полости $R>l$, можем переписать выражение (9.23) в виде

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-\frac{\lambda+2\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial R^2}+\frac{2}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial R}\right)=0. \tag{9.24}$$

Это уравнение после преобразования можно представить следующим образом:

$$\frac{\partial^2(R\varphi)}{\partial t^2}-\frac{\lambda+2\mu}{\rho}\frac{\partial^2(R\varphi)}{\partial R^2}=0. \tag{9.25}$$

Эквивалентность (9.24) и (9.25) можно проверить непосредственным дифференцированием (9.25).

Выражение (9.25) представляет собой одномерное волновое уравнение. Решение его (см. разд. II, § 3 главы шестой) можно записать в виде

$$R\varphi=f\left(t-\frac{R}{v_{\text{P}}}\right)+g\left(t+\frac{R}{v_{\text{P}}}\right), \tag{9.26}$$

где $v_{\text{P}}=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$.

Первое слагаемое в правой части этого выражения определяет возмущение произвольной формы, удаляющееся от источника со скоростью $v_{\text{P}}=\sqrt{(\lambda+2\mu)/\rho}$. Действительно, если аргумент функции f имеет одинаковые значения, сохраняется постоянной и сама функция. При временах t_2 и t_1 функции будут равны, если выполняется равенство

$$t_1-\frac{R_1}{v_{\text{P}}}=t_2-\frac{R_2}{v_{\text{P}}}. \tag{9.27}$$

Следовательно, возмущение, которое наблюдалось в момент времени t_1 в точках на расстоянии R_1 от начала координат, переместится, и в момент времени t_2 должно находиться уже на расстоянии R_2 от начала координат, равном

$$R_2=R_1+v_{\text{P}}(t_2-t_1). \tag{9.28}$$

Выражение (9.28) подтверждает, что коэффициент $\sqrt{(\lambda+2\mu)/\rho}$ действительно определяет скорость распространения продольных колебаний в упругой среде. Скорость эта полностью определяется упругими константами среды и ее плотностью.

Второе слагаемое в (9.26) характеризует волну, сходящуюся к источнику. По мере возрастания времени t координата R должна уменьшаться, если потребовать сохранения постоянным аргумента, а следовательно, и функции g. Нас будет интересовать расходящаяся волна, создаваемая источником в полости, поэтому следует положить $g\equiv 0$. В результате решение волнового уравнения (9.25) примет вид

$$\varphi=\frac{1}{R}f\left(t-\frac{R}{v_{\text{P}}}\right). \tag{9.29}$$

Поле смещений в соответствии с (9.4) будет определяться выражением

$$\mathbf{u}_{\text{р}} = \mathbf{1}_R \frac{\partial \varphi}{\partial R} = -\mathbf{1}_R \left[\frac{1}{R v_{\text{р}}} f' \left(t - \frac{R}{v_{\text{р}}} \right) + \frac{1}{R^2} f \left(t - \frac{R}{v_{\text{р}}} \right) \right]. \tag{9.30}$$

функцию $f\left(t - \frac{R}{v_{\text{р}}}\right)$ называют интенсивностью источника.

Выражение (9.30) показывает, что поле смещений обладает сферической симметрией. Смещения частиц среды везде направлены радиально и на одинаковых расстояниях от источника в данный момент времени имеют одинаковую величину. Возмущение такого вида называется продольной сферической волной. Из формулы (9.30) следует, что смещение частиц определяется двумя слагаемыми. Поскольку первый член имеет множитель $1/R$, а второй $1/R^2$, их вклад в формирование поля смещений на разных расстояниях от источника различен. Первый член играет определяющую роль при значительном удалении от источника, второй—вблизи него.

Рассмотрим теперь возбуждение продольной волны сферическим источником при различном характере функции $p(t)$.

Допустим вначале, что давление на стенках сферической полости меняется со временем по гармоническому закону. Как отмечалось в § 6 главы шестой, этот случай имеет особое значение, поскольку полученное решение на основе принципа суперпозиции и преобразования Фурье позволяет построить решения для различных функций возбуждения, в том числе импульсных

$$\breve{p} = p_0 \exp(i\omega t). \tag{9.31}$$

Решение уравнения (9.29) ищем в виде

$$\breve{\varphi} = \frac{C \exp[i\omega(t - R/v_{\text{р}})]}{R}, \tag{9.32}$$

где C—постоянная, не зависящая от R и t.

Для определения C используем граничное условие на поверхности полости, где давление $p(t)$ должно быть равно радиальному напряжению:

$$\sigma_R = -p(t) \quad \text{при} \quad R = l. \tag{9.33}$$

Знак «минус» в этом выражении необходим, потому что положительным в теории упругости считается напряжение растяжения. Выражая напряжение σ_R через смещения, а последние—через потенциал φ, в соответствии с (8.74) и (9.4) имеем

$$\left[(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial R^2} + \frac{2\lambda}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right]_{R=l} = -p(t). \tag{9.34}$$

Подставляя сюда выражения для $\breve{\varphi}$ (9.32) и $\breve{p}$ (9.31), найдем

$$C = -\frac{p_0 l \exp(i\omega l / v_{\text{р}})}{\left(\frac{4\mu}{l^2} - \rho\omega^2 \right) + i\omega \frac{4\mu}{l v_{\text{р}}}}. \tag{9.35}$$

Отсюда при $R>l$ имеем

$$\breve{\varphi}(R,\ t)=-\frac{p_0\,\frac{l}{\rho R}\exp(i\omega\tau)}{(\omega^2{}_{0\mathrm{P}}-\omega^2)+2i\omega h_{\mathrm{P}}}, \tag{9.36}$$

где

$$\omega_{0\mathrm{P}}=2v_{\mathrm{S}}/l,\ h_{\mathrm{P}}=\omega_{0\mathrm{P}}v_{\mathrm{S}}/v_{\mathrm{P}},$$
$$v^2{}_{\mathrm{S}}=\mu/\rho,\ \tau=t-(R-l)/v_{\mathrm{P}}. \tag{9.37}$$

Переходя к смещениям, получаем

$$\breve{\mathbf{u}}_{\mathrm{P}}=\mathbf{1}_R\frac{\partial\breve{\varphi}}{\partial R}=\mathbf{1}_R\frac{\frac{l}{R}\left(\frac{1}{R}+\frac{i\omega}{v_{\mathrm{P}}}\right)\frac{p_0}{\rho}}{(\omega^2{}_{0\mathrm{P}}-\omega^2)+2i\omega h_{\mathrm{P}}}\exp(i\omega\tau)=\mathbf{1}_R A\exp(i\omega\tau) \tag{9.38}$$

или, вводя обозначение

$$\breve{f}(\tau)=\frac{p_0\exp(i\omega\tau)}{\omega^2{}_{0\mathrm{P}}-\omega^2+2i\omega h_{\mathrm{P}}}, \tag{9.39}$$

запишем (9.38) в виде

$$\breve{\mathbf{u}}_{\mathrm{P}}=\mathbf{1}_R\frac{l}{\rho}\left[\frac{1}{Rv_{\mathrm{P}}}\breve{f}'(\tau)+\frac{1}{R^2}\breve{f}(\tau)\right]. \tag{9.40}$$

Поле смещений, создаваемое гармонически меняющимся сферическим источником, определяемое формулой (9.40), характеризуется теми же основными чертами, что и рассматривавшееся ранее поле в общем случае (9.30). Оно обладает сферической симметрией, смещения частиц среды происходят в радиальном направлении. Амплитуда смещения A, как следует из (9.38), зависит от амплитуды давления p_0, приложенного к поверхности полости, относительного удаления R/l точки наблюдения от полости, соотношения между частотой колебаний ω и параметрами $\omega_{0\mathrm{P}}$ и h_{P}, определяемого функцией

$$M_{\mathrm{P}}(\omega)=\frac{\frac{1}{R}+\frac{i\omega}{v_{\mathrm{P}}}}{\rho(\omega^2{}_{0\mathrm{P}}-\omega^2+2i\omega h_{\mathrm{P}})}. \tag{9.41}$$

Функцию $M_{\mathrm{P}}(\omega)$ называют комплексной частотной характеристикой очага продольных волн [5]. Используя это представление, выражение (9.38), определяющее поле смещений, можно записать в следующем виде:

$$\breve{\mathbf{u}}_{\mathrm{P}}=\mathbf{1}_R\frac{lp_0}{R}M_{\mathrm{P}}(\omega)\exp(i\omega\tau). \tag{9.42}$$

На практике приходится обычно сталкиваться с возбуждением более сложного вида, чем гармоническое. Чаще всего $p(t)$ представляет собой импульсную функцию, т. е. функцию, отличную от нуля в течение ограниченного промежутка времени t. В этом случае задачу для импульсной функции возбуждения, как отмечалось выше, можно свести к рассмотренному случаю для гармонического источника, представив импульс в виде интеграла Фурье,

Как известно, любая функция, описывающая реальные физические явления, удовлетворяет условиям Дирихле и может быть представлена в виде интеграла Фурье в комплексной форме, т. е. разложена на бесконечно большое число бесконечно малых гармонических составляющих

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \exp(i\omega t)\, d\omega, \tag{9.43}$$

где $S(\omega)$—комплексная спектральная функция, определяющая спектральную плотность всех гармонических составляющих интеграла Фурье:

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-i\omega t)\, dt = A(\omega) \exp[-i\varphi(\omega)]. \tag{9.44}$$

Здесь $A(\omega)$—амплитудный частотный спектр; $\varphi(\omega)$—фазовый частотный спектр.

Допустим, что $p(t)$—импульсная функция возбуждения, имеющая комплексный спектр $S(\omega)$. Тогда вместо (9.42) поле смещений будет определяться зависимостью

$$\mathbf{u}_{\mathrm{p}} = \mathbf{1}_R \int_{-\infty}^{\infty} \frac{rl}{R} M_{\mathrm{p}}(\omega) S(\omega) \exp(i\omega\tau)\, d\omega, \tag{9.45}$$

а комплексный спектр смещения формулой

$$S_{\mathrm{p}}(\omega, R) = \frac{l}{R} M_{\mathrm{p}}(\omega) \mathrm{S}(\omega) \exp\left(-i\omega \frac{R-l}{v_{\mathrm{p}}}\right). \tag{9.46}$$

Поле смещений при произвольной импульсной функции возбуждения $p(t)$ на основе принципа суперпозиции с учетом формулы (9.38) можно записать также в виде (9.40), т. е.

$$\mathbf{u}_{\mathrm{p}} = \mathbf{1}_R \frac{l}{\rho} \left[\frac{1}{Rv_{\mathrm{p}}} f'(\tau) + \frac{1}{R^2} f(\tau)\right], \tag{9.47}$$

где

$$f(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S(\omega)\exp(i\omega\tau)}{\omega^2_{0\mathrm{p}} - \omega^2 + 2i\omega h_{\mathrm{p}}}\, d\omega.$$

Таким образом, при импульсном возбуждении сферического источника смещения, как и в рассмотренном ранее случае, направлены радиально и на одинаковых расстояниях от источника имеют одну и ту же величину.

Обсудим некоторые особенности распространения сферической продольной волны в однородной изотропной среде. Как уже отмечалось выше, характер поля смещений зависит от расстояния до источника. Вдали от него, т. е. при $\frac{1}{R} \gg \frac{1}{R^2}$, поле смещений бу-

дет определяться более медленно убывающим членом в (9.40) и это выражение можно записать в виде

$$\mathbf{u}_{\text{р}} = \mathbf{1}_R \frac{l}{\rho R v_{\text{р}}} f'(\tau). \tag{9.48}$$

Допустим, что источник действует в течение ограниченного отрезка времени δt, начиная с $t=0$. В момент времени $t \gg \delta t$ возмущения среды будут наблюдаться в пределах сферического слоя

$$R_{\text{нар}} = v_{\text{р}} t \geqslant R \geqslant v_{\text{р}}(t - \delta t) = R_{\text{вн}}. \tag{9.49}$$

Все пространство при этом разделяется на три области: внутреннюю сферическую область, ограниченную радиусом $R_{\text{вн}}$, в которой возмущения уже закончились, сферический слой толщиной $\delta R = v_{\text{р}} \delta t$, в котором происходят возмущения, и наружную область, лежащую за сферической поверхностью радиуса $R_{\text{нар}}$, еще не затронутую возмущениями. Поверхность, ограничивающая снаружи слой, в котором происходят возмущения, называется передним фронтом, или просто фронтом волны; поверхность, ограничивающая этот слой изнутри, называется задним фронтом, или тылом волны. Оба фронта распространяются в среде с одинаковой скоростью $v_{\text{р}}$. Линии, ортогональные фронтам волны, называются лучами. В данном случае это радиальные прямые, исходящие из центра сферического источника.

Как следует из формулы (9.48), смещения частиц среды в определенный момент времени t вдоль какого-либо луча зависят от вида функции $f'(\tau)$ и отношения l/R. Поскольку в пределах участка δR, где существуют возмущения, при $R \gg \delta R$, отношение l/R практически сохраняется постоянным, характер смещений зависит только от функции $f'(\tau)$. Непосредственные вычисления показывают, что распределение смещений вдоль луча для фиксированного момента времени t при импульсном возбуждении (так называемый профиль волны или пространственная волна) имеет вид, близкий к изображенному на рис. 71,*а*. Таким образом, в определенный

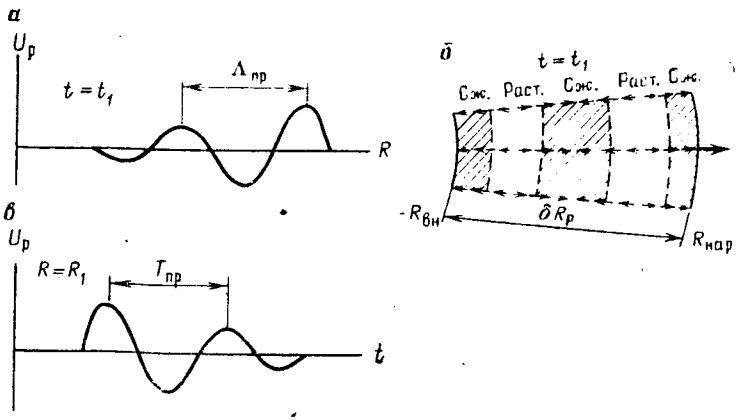


Рис. 71. Распространение сферической продольной волны

момент времени колебания, существующие в пределах ограниченного слоя δR, представляют собой чередование положительных и отрицательных смещений, создающих зоны растяжения и сжатия (рис. 71,*б*). С течением времени этот цуг колебаний без существенного изменения своей формы и с некоторым уменьшением амплитуды смещений все больше удаляется от источника.

График смещения частиц среды, находящихся на расстоянии $R=R_1$ от источника, в зависимости от времени показан на рис. 71,*в*. Этот график колебаний—временная волна—является обращенным графиком пространственной волны.

Расстояние между горбами или впадинами в пространственной волне называется видимой или преобладающей длиной волны $\Lambda_{пр}$, во временной волне промежуток времени между соседними экстремумами—видимым или преобладающим периодом колебаний $T_{пр}$. Эти две величины связаны между собой зависимостью

$$T_{пр}=\Lambda_{пр}/v_р. \tag{9.50}$$

Можно, очевидно, говорить и о преобладающей частоте $f_{пр}$ и круговой частоте $\omega_{пр}$. Подобно случаю гармонических электромагнитных колебаний здесь можно ввести волновое число k, где k—действительное число, равное числу длин волн, укладывающееся на отрезке 2π метров,

$$k=2\pi/\Lambda_{пр}=\omega_{пр}/v_р. \tag{9.51}$$

Фаза упругих колебаний меняется с изменением времени или расстояния от источника. В пространстве поверхности равных фаз (волновые поверхности) в случае сферического источника представляют собой концентрические сферы с центрами, совпадающими с центром источника.

Выше обсуждались основные особенности распространения сферической продольной волны на большом расстоянии от источника. Представляет интерес оценить более точно, при каких условиях справедлива асимптотическая формула (9.48).

Из (9.38) и (9.40) вытекает, что условие $\frac{1}{R}\gg\frac{1}{R^2}$ эквивалентно условию $\frac{1}{R}\ll\frac{\omega}{v_р}$ (дальняя зона). Учитывая (9.51), заключаем, что искомое расстояние должно удовлетворять условию

$$R\gg\frac{\Lambda}{2\pi}. \tag{9.52}$$

Таким образом, расстояние, на котором сферическая волна приобретает вид, описываемый выражением (9.48), приблизительно равно длине волны. В непосредственной близости от источника (ближняя зона) смещения частиц среды определяются членом со множителем $1/R^2$. Форма колебаний зависит здесь от функции $f(\tau)$, а следовательно, отличается от рассмотренного случая, когда она определялась функцией $f'(\tau)$. В области, переходной от малых к большим расстояниям (промежуточная зона), форма колебаний

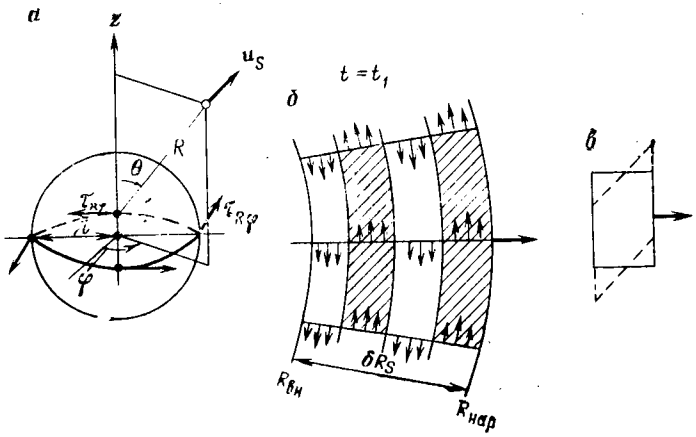


Рис. 72. Сферическая поперечная волна

зависит от обеих функций. Таким образом, можно заключить, что в пределах сферы с радиусом, равным Λ, происходит заметное изменение формы колебаний; за пределами этой области форма остается практически постоянной. Численные расчеты подтверждают этот вывод.

II. **Сферические поперечные волны.** Рассмотрим сферическую поперечную волну, возбуждаемую сферическим источником вращения. Допустим, что к поверхности сферической полости радиуса l, находящейся в однородной изотропной среде, приложены касательные силы, вызывающие повороты поверхности как единого целого относительно оси z (рис. 72,*а*). Касательные силы действуют параллельно горизонтальной плоскости. В любой точке поверхности касательная сила, отнесенная к единице площади, в сферической системе координат определяется выражением

$$\tau_{R\varphi}=\tau(t)\sin\theta. \qquad (9.53)$$

Повороты сферической поверхности вызывают возмущение, распространяющееся в окружающей среде в виде поперечной волны.

Допустим, что источник начал действовать в момент $t=0$, т. е.

$$\tau_{R\varphi}=0 \text{ при } t<0. \qquad (9.54)$$

Примем также, что до момента $t=0$ возмущения в среде отсутствовали, т. е. выполняются начальные условия вида (9.19).

В соответствии с вихревым характером действующих сил смещения в точке a в момент времени t будут определяться через векторный потенциал ψ в соответствии с формулой (9.5):

$$\mathbf{u}_S(a, t)=\operatorname{rot}\psi(a, t).$$

Векторный потенциал за пределами сферической поверхности, т. е. при $R>l$, определяется уравнением (9.15)

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-v_S^2\nabla^2\psi=0,$$

где $v_S^2=\mu/\rho$; v_S — скорость распространения поперечных волн в однородной изотропной среде.

Поле смещений будет обладать, как и источник, осевой симметрией относительно оси z. Оно будет иметь только компоненту u_φ.

В цилиндрической системе координат с осью симметрии, совпадающей с осью z, вектор-потенциал будет иметь здесь единственную компоненту ψ_z. Поэтому выражение для u_S запишем в виде

$$u_S = -1_\varphi \frac{\partial \psi_z}{\partial r}. \tag{9.55}$$

Уравнение для векторного потенциала примет в данном случае вид

$$\frac{\partial^2 \psi_z}{\partial t^2} - v_S^2 \nabla^2 \psi_z = 0. \tag{9.56}$$

Перейдем далее от цилиндрической к сферической системе координат. Смещение u_S можно записать тогда следующим образом:

$$u_S = -1_\varphi \frac{\partial \psi_z}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial r}, \tag{9.57}$$

где $R^2=z^2+r^2$.

Величина ψ_z теперь является функцией R и t и уравнение (9.56) можно записать в виде (9.24) и далее в виде (9.25), соответствующем условию центральной сферической симметрии. Опуская для краткости далее индекс z, у потенциала имеем

$$\frac{\partial^2 (R\psi)}{\partial t^2} - \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 (R\psi)}{\partial R^2} = 0. \tag{9.58}$$

Решение этого уравнения аналогично (9.29) имеет вид

$$\psi(R, t) = \frac{1}{R} f\left(t - \frac{R}{v_S}\right). \tag{9.59}$$

Вид функции f зависит от вида $\tau(t)$ в граничном условии (9.53).

Примем, что касательные силы, приложенные к сферической поверхности, а следовательно, и тангенциальные напряжения $\tau(t)$, меняются во времени по гармоническому закону

$$\breve{\tau}(t) = \tau_0 \exp(i\omega t). \tag{9.60}$$

Тогда решение уравнения (9.59), как известно, имеет вид

$$\breve{\psi} = \frac{C \exp[i\omega(t - R/v_S)]}{R}, \tag{9.61}$$

где C — постоянная, не зависящая от t и R.

Для определения C используем граничное условие на поверхности полости, где напряжение связано с деформацией следующим образом:

$$\tau_{R\varphi} = 2\mu\gamma_{R\varphi} \text{ при } R=l. \tag{9.62}$$

В соответствии с (8.41) $\gamma_{R\varphi}$ выражается через смещения следующим образом:

$$\gamma_{R\varphi} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial R} - \frac{u_\varphi}{R}\right).$$

Подставляя сюда выражение (9.57) с учетом того обстоятельства, что $\frac{\partial R}{\partial r} = \frac{r}{R} = \sin\theta$, получаем

$$\gamma_{R\varphi} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial R^2} - \frac{1}{R}\frac{\partial\psi}{\partial R}\right)\sin\theta. \tag{9.63}$$

В результате, используя (9.58), (9.60) и (9.63), можем записать (9.62) в форме

$$\tau_0 \sin\theta \exp(i\omega l) = -\mu\left(\frac{\partial^2\breve{\psi}}{\partial R^2} - \frac{1}{R}\frac{\partial\breve{\psi}}{\partial R}\right)\sin\theta \quad \text{при } R = l. \tag{9.64}$$

Подставляя в (9.64) выражение (9.61) для $\breve{\psi}$, затем дифференцируя и сокращая на $\sin\theta$, находим

$$C = \frac{\tau_0 l v_S^2 \exp(i\omega l/v_S)}{\mu\left(\frac{3v_S^2}{l^2} - \omega^2 + \frac{3i\omega v_S}{l}\right)}. \tag{9.65}$$

Отсюда при $R > l$ имеем

$$\breve{\psi}(R, t) = \frac{\tau_0 l v_S^2 \exp(i\omega\tau)}{R\mu(\omega_{0S}^2 - \omega^2 + 2i\omega h_S)}, \tag{9.66}$$

где

$$\omega_{0S} = \frac{v_S\sqrt{3}}{l}; \quad h_S = \frac{3}{2}\frac{v_S}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2}\omega_{0S};$$

$$\tau = t - \frac{R-l}{v_S}.$$

Переходя к смещениям, на основании (9.57) и учитывая, что $v_S^2 = \mu/\rho$, получаем

$$\breve{u}_S = 1_\varphi \frac{\frac{l}{R}\left(\frac{i\omega}{v_S} + \frac{1}{R}\right)\tau_0 \sin\theta}{\rho(\omega_{0S}^2 - \omega^2 + 2i\omega h_S)} \exp(i\omega\tau) = 1_\varphi A \exp(i\omega\tau). \tag{9.67}$$

Введя обозначение

$$\breve{f}(\tau) = \frac{\tau_0 \sin\theta \exp(i\omega\tau)}{\omega_{0S}^2 - \omega^2 + 2i\omega h_S}, \tag{9.68}$$

запишем (9.67) в следующем виде:

$$\breve{u}_S = 1_\varphi \frac{l}{\rho}\left[\frac{1}{Rv_S}\breve{f}'(\tau) + \frac{1}{R^2}\breve{f}(\tau)\right]. \tag{9.69}$$

Как и в рассмотренном ранее случае продольной сферической волны, здесь можно ввести представление о комплексной частот-

ной характеристике очага поперечных волн в виде

$$M_S(\omega) = \frac{\frac{i\omega}{v_S} + \frac{1}{R}}{\rho(\omega^2_{0S} - \omega^2 + 2i\omega h_S)}. \tag{9.70}$$

Тогда поле смещений будет описываться выражением

$$\breve{u}_S = \mathbf{1}_\varphi \frac{l\tau_0}{R} M_S(\omega) \sin\theta \exp(i\omega\tau). \tag{9.71}$$

Сходство выражений (9.38) и (9.67), (9.42) и (9.71) говорит об общности пространственно-временной картины распространения поперечных и продольных волн, возбуждаемых сферическим источником.

При импульсном характере источника распространение поперечной волны и распределение смещений в пространстве будут описываться зависимостями, подобными формулам (9.45), (9.47), отличающимися от последних скоростью распространения волны и характеристиками сферического очага — ω_0 и h. При импульсном возбуждении поперечная волна существует в сферическом слое толщиной δR_S, зависящей от времени действия источника и скорости распространения поперечной волны

$$\delta R_S = v_S \delta t. \tag{9.72}$$

Таким образом, сферический источник вращения как при гармоническом, так и при импульсном возбуждении создает поперечные колебания, которые распространяются в окружающем пространстве в виде сферической волны. Это означает, что поверхности равных фаз этой волны представляют собой сферы. Точки, лежащие на поверхности сферы определенного радиуса R, совершают поворот как единое целое вокруг оси z на некоторый угол $\Delta\varphi$. Для фиксированного момента времени смещения точек, лежащих на одной прямой, исходящей из очага, на разных расстояниях от его центра, будут различными по величине и направлению (рис. 72,*б*). В пространстве и во времени наблюдается волновая картина, для характеристики которой, как и для продольной волны, можно использовать представления о преобладающей длине волны, преобладающем периоде колебаний, волновом числе и т. п. Главное отличие от продольной волны будет заключаться в характере деформации упругой среды и иной скорости распространения поперечных колебаний. Если смещения в продольной волне совершаются в радиальном направлении — происходят деформации сжатия и растяжения, то в поперечной волне при смещениях, перпендикулярных к направлению распространения и разных по величине в соседних точках вдоль луча, наблюдаются деформации сдвига. Характер сдвиговых деформаций показан на рис. 72,*в*, где изображен элемент объема упругой среды в виде параллелепипеда, находившегося в равновесии и изменяющего свою форму при прохождении поперечной волны.

Следует заметить, что в жидкостях и газах, где отсутствует жесткое сцепление частиц среды друг с другом, сдвиговые деформации отсутствуют. Поэтому поперечных волн в таких средах не существует.

III. Плоские однородные и неоднородные волны. В теории распространения упругих колебаний широко пользуются представлением о плоских волнах. Под плоской волной понимается возмущение, поверхности равных фаз которого представляют собой плоскости, перпендикулярные к направлению распространения волны. Плоская волна является математической абстракцией, поскольку не существует реальных источников для ее возбуждения. Однако на достаточно больших расстояниях от источника сферическая волна в пределах ограниченного участка может рассматриваться как плоская. Условие удаления на большое расстояние является относительным. Чем меньше площадь участка сферической поверхности, тем меньше расстояние, на котором он может считаться плоским с заданной погрешностью. В принципе волну любого типа можно представить в виде совокупности плоских волн.

В плоской волне расхождение фронта отсутствует и амплитуда смещения не зависит от расстояния до источника. Профиль волны сохраняется постоянным.

Получим уравнения для плоских волн из общего уравнения распространения упругих колебаний (9.3). Будем рассматривать область вне действия внешних объемных сил, т. е. положим $\mathbf{F}=0$. Примем, что направление распространения плоской волны совпадает с осью x. В этом случае вектор смещения $\mathbf{u}$ и его компоненты u, v и w не зависят от координат y и z и, следовательно,

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \operatorname{grad}\theta = \mathbf{1}_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \nabla^2 \mathbf{u} = \mathbf{1}_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \mathbf{1}_y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \mathbf{1}_z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$$

Тогда векторное уравнение (9.3) можно записать в виде совокупности трех скалярных уравнений

$$(\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

$$\mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{9.73}$$

или, используя обозначения $v_P = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$ и $v_S = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$, можно написать

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v_P^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 (v, w)}{\partial t^2} - v_S^2 \frac{\partial^2 (v, w)}{\partial x^2} = 0. \tag{9.74}$$

Уравнения (9.74) представляют собой известные одномерные волновые уравнения. В соответствии с (9.74) возможно существование двух типов плоских волн. Первое уравнение описывает

плоскую продольную волну, которая распространяется вдоль оси x со скоростью v_P. Смещения происходят здесь по оси x. Второе уравнение характеризует поперечную волну, распространяющуюся также вдоль оси x, но со скоростью v_S. Смещения происходят в этом случае в плоскости, перпендикулярной к направлению распространения волны.

Решение уравнений (9.74) записывается в форме (9.26). Для $(9.74)_1$, например имеем

$$u = f\left(t - \frac{x}{v_P}\right) + g\left(t + \frac{x}{v_P}\right), \tag{9.75}$$

где f и g функции произвольного вида; v_P — скорость распространения продольной волны.

Второй член в (9.75) соответствует плоской волне, приходящей из бесконечности, т. е. распространяющейся в отрицательном направлении. Поскольку нас интересует волна, распространяющаяся в положительном направлении, полагаем $g=0$. В результате выражения, определяющие поле смещений плоской, продольной и поперечной волн, распространяющихся вдоль оси x, имеют вид

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{1}_x f_1\left(t - \frac{x}{v_P}\right), \quad \mathbf{u}_S = \mathbf{1}_t f_2\left(t - \frac{x}{v_S}\right), \tag{9.76}$$

где $\mathbf{1}_t$ — единичный вектор, лежащий в плоскости, перпендикулярной к оси x и определяющий направление смещения в поперечной волне. Конкретный вид функций f_1 и f_2 определяется характером возбуждения.

В рассматриваемых плоских волнах в каждой из плоскостей, перпендикулярных к направлению распространения, колебания имеют одинаковую фазу и амплитуду, т. е. поверхности равных фаз и амплитуд здесь совпадают. Такие волны называются *однородными плоскими волнами*.

Иногда приходится рассматривать плоскую волну, распространяющуюся вдоль направления R, составляющего углы α, β и γ с координатными осями x, y и z. Поверхности равных фаз плоской волны перпендикулярны к R и удовлетворяют уравнению $R=\text{const}$.

Тогда уравнение (9.76) для случая плоской продольной волны можно записать следующим образом:

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{1}_R f\left(t - \frac{R}{v_P}\right). \tag{9.77}$$

Обозначим направляющие косинусы R через n_x, n_y, n_z. Тогда (9.77) можно записать в виде

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{1}_R f\left(t - \frac{n_x x + n_y y + n_z z}{v_P}\right), \tag{9.78}$$

при этом должно выполняться уже упоминавшееся условие (8.17)

$$n^2_x + n^2_y + n^2_z = 1.$$

Аналогичным образом записывается уравнение для плоской поперечной волны.

Специальный интерес представляет плоская волна, меняющаяся во времени по гармоническому закону. Выражение для гармонической плоской продольной волны, распространяющейся вдоль произвольного направления R, имеет вид

$$\breve{\mathbf{u}}_{\mathrm{P}} = \mathbf{1}_R u_0 \exp\left[i\omega\left(t - \frac{R}{v_{\mathrm{P}}}\right)\right] = \mathbf{1}_R u_0 \exp(-ikR)\exp(i\omega t) \qquad (9.79)$$

или

$$\breve{\mathbf{u}}_{\mathrm{P}} = \mathbf{1}_R u_0 \exp[-ik(n_x x + n_y y + n_z z)]\exp(i\omega t), \qquad (9.79')$$

где u_0 — амплитуда волны; k — волновое число.

Пользуясь представлением функций с помощью интеграла Фурье, любую плоскую однородную волну можно представить в виде совокупности гармонических плоских волн. Для продольной волны имеем

$$\mathbf{u}_{\mathrm{P}} = \mathbf{1}_R \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \exp\left[i\omega\left(t - \frac{R}{v_{\mathrm{P}}}\right)\right] d\omega, \qquad (9.80)$$

где $S(\omega)$ — функция спектральной плотности.

При решении ряда задач, связанных с распространением упругих колебаний, наряду с однородными плоскими волнами пользуются понятием о неоднородной плоской волне. Оно вводится на основании формального допущения о том, что направляющие косинусы являются не вещественными, а комплексными числами:

$$n_x = n'_x + in''_x, \quad n_y = n'_y + in''_y, \quad n_z = n'_z + in''_z. \qquad (9.81)$$

Если при этом потребовать соблюдения условия (8.17), то выражение (9.79) по-прежнему будет решением волнового уравнения (9.74), хотя с учетом (9.81) примет вид

$$\breve{\mathbf{u}}_P = \mathbf{1}_R u_0 \exp[-ik(n'_x x + n'_y y + n'_z z)] \times$$
$$\times \exp[k(n''_x x + n''_y y + n''_z z)]\exp(i\omega t). \qquad (9.82)$$

Как следует из (9.82), поверхности равной фазы в этой волне представляют собой плоскости, определяемые уравнением

$$n'_x x + n'_y y + n'_z z = \mathrm{const}, \qquad (9.83)$$

а поверхности равной амплитуды — плоскости

$$n''_x x + n''_y y + n''_z z = \mathrm{const}. \qquad (9.84)$$

Плоскости равных фаз (9.83) и равных амплитуд (9.84) будут перпендикулярны друг к другу, поскольку подставляя (9.81) в (8.17) и приравнивая мнимые части правой и левой частей выражения, имеем

$$n'_x n''_x + n'_y n''_y + n'_z n''_z = 0.$$

Это равенство выражает условие ортогональности плоскостей (9.83) и (9.84). Волну вида (9.82) принято называть неоднород-

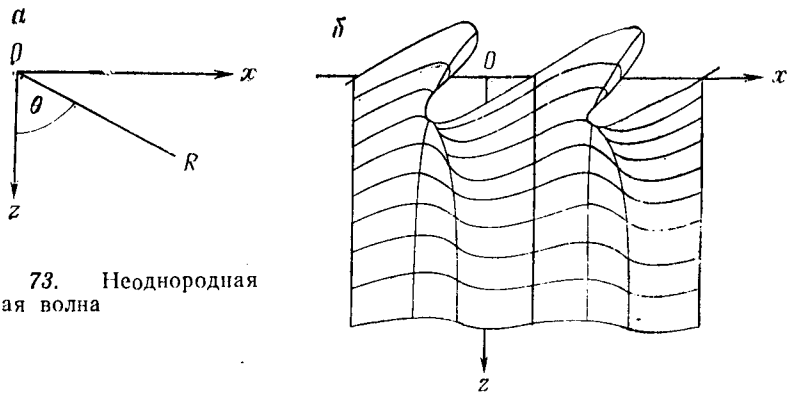


Рис. 73. Неоднородная плоская волна

ной плоской волной, поскольку поверхности равных фаз и равных амплитуд являются здесь плоскостями. Эта волна распространяется в направлении, определяемом (9.83), а амплитуда ее изменяется в одном из перпендикулярных направлений, вдоль фазовой плоскости. Формально возможное решение волнового уравнения, имеющее вид (9.82), соответствует, как мы увидим в дальнейшем, реальным физическим явлениям.

При рассмотрении плоских волн систему координат фиксируют обычно таким образом, чтобы вектор, совпадающий с направлением распространения волны, лежал в плоскости xOz. Тогда $n_y=0$, $n'_y=n''_y=0$, и направление распространения волны можно характеризовать одним углом θ, отсчитываемым, например, от оси z (рис. 73,*а*). В этом случае $n_x=\sin\theta$ и $n_z=\cos\theta$, и уравнение (9.79) приобретает вид

$$\breve{u}=u_0\exp[-ik(x\sin\theta+z\cos\theta)]\exp(i\omega t). \qquad (9.85)$$

В случае неоднородной волны угол θ также следует считать комплексной величиной $\theta=\theta'+i\theta''$.

Значения $\sin\theta$ и $\cos\theta$ при комплексном θ будут, как известно, выражаться формулами:

$$\sin\theta=\sin\theta'\mathrm{ch}\theta''+i\cos\theta'\mathrm{sh}\theta''$$

$$\cos\theta=\cos\theta'\mathrm{ch}\theta''-i\sin\theta'\mathrm{sh}\theta''. \qquad (9.86)$$

Рассмотрим случай, когда $\theta'=\pi/2$. Из (9.86) получаем

$\sin\theta=\mathrm{ch}\theta''$ и $\cos\theta=-i\mathrm{sh}\theta''$.

Тогда уравнение (9.85) можно записать в виде

$$\breve{u}=u_0\exp(-k\cdot\mathrm{sh}\theta''\cdot z)\exp(-ik\cdot\mathrm{ch}\theta''\cdot x)\exp(i\omega t). \qquad (9.87)$$

Выражение (9.87) описывает неоднородную плоскую волну, которая распространяется в направлении x с фазовой постоянной $k\mathrm{ch}\theta''$ и экспоненциально убывает в направлении z с коэффициентом затухания $k\mathrm{sh}\theta''$ (рис. 73,*б*). Неоднородные

плоские волны возникают при явлениях отражения и преломления упругих колебаний на границах сред с разными упругими свойствами[1]. Этим понятием широко пользуются при необходимости представления волн различного типа, в частности сферических, в виде суперпозиции плоских волн. Подобный прием облегчает решение ряда задач, особенно при разной симметрии волны и границ в среде.

IV. Одновременное возбуждение и распространение продольных и поперечных волн. Сосредоточенный источник. Рассмотрим случай, когда в пределах некоторого ограниченного объема V, неограниченной однородной упругой среды, действуют массовые силы $\mathbf{F}$, создающие поступательное движение. Подобный источник, как будет показано ниже, одновременно генерирует продольные и поперечные упругие волны. Используем совмещенную систему координат (r, φ, z и R, θ, φ) с осью z, направленной вниз.

Примем, что заданные массовые силы во всех точках объема V имеют одинаковую величину и направление, совпадающее с направлением оси z. Во времени они изменяются по гармоническому закону. Требуется определить смещение среды. Будем искать выражение для смещения среды на таких расстояниях от источника, чтобы формой последнего можно было пренебречь, рассматривая его в качестве источника сферической волны.

Запишем уравнения распространения упругих колебаний в форме (9.16) и (9.17):

$$\frac{\partial^2 \operatorname{div} \mathbf{u}}{\partial t^2} - v_p^2 \nabla^2 \operatorname{div} \mathbf{u} = \operatorname{div} \mathbf{F},$$

$$\frac{\partial^2 \operatorname{rot} \mathbf{u}}{\partial t^2} - v_s^2 \nabla^2 \operatorname{rot} \mathbf{u} = \operatorname{rot} \mathbf{F}.$$

В рассматриваемом случае $\breve{\mathbf{F}} = \mathbf{1}_z F_z \exp(i\omega t)$, и, следовательно

$$\operatorname{div} \breve{\mathbf{F}} = \frac{\partial F_z}{\partial z} \exp(i\omega t). \tag{9.88}$$

Составляющие rot$\mathbf{F}$ в декартовой системе координат будут соответственно равны

$$\operatorname{rot}_x \breve{\mathbf{F}} = \frac{\partial F_z}{\partial y} \exp(i\omega t), \quad \operatorname{rot}_y \breve{\mathbf{F}} = -\frac{\partial F_z}{\partial x} \exp(i\omega t),$$
$$\operatorname{rot}_z \mathbf{F} = 0. \tag{9.89}$$

Как будет показано в § 3 этой главы, решение неоднородного волнового уравнения для сферической волны при источнике, занимающем объем V, имеет вид

$$\varphi = \frac{1}{4\pi v^2} \int_V \frac{\Phi\left(t - \frac{R}{v}\right)}{R} dV, \tag{9.90}$$

где Φ — функция, характеризующая возмущающую силу.

[1] См. § 4 данной главы.

Решения неоднородных волновых уравнений (9.16) и (9.17) будем искать в виде (9.90)

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{div}\breve{\mathbf{u}}(a) &= \frac{1}{4\pi v_{\mathrm{P}}^2}\int_V \frac{\partial F_z}{\partial z_q}\frac{\exp\left[i\omega\left(t-\frac{R_{qa}}{v_{\mathrm{P}}}\right)\right]}{R_{qa}}\,dV,\\
\operatorname{rot}_x\breve{\mathbf{u}}(a) &= \frac{1}{4\pi v_{\mathrm{S}}^2}\int_V \frac{\partial F_z}{\partial y_q}\frac{\exp\left[i\omega\left(t-\frac{R_{qa}}{v_{\mathrm{S}}}\right)\right]}{R_{qa}}\,dV,\\
\operatorname{rot}_y\breve{\mathbf{u}}(a) &= -\frac{1}{4\pi v_{\mathrm{S}}^2}\int_V \frac{\partial F_z}{\partial x_q}\frac{\exp\left[i\omega\left(t-\frac{R_{qa}}{v_{\mathrm{S}}}\right)\right]}{R_{qa}}\,dV,
\end{aligned}\right\} \qquad (9.91)$$

где q — точка в области V с координатами x_q, y_q, z_q, центр элементарного объема dV; a — точка наблюдения с координатами x, y, z; R_{qa} — расстояние между точками q и a.

Преобразуем объемные интегралы (9.91) путем интегрирования по частям. Имея в виду, что $dV(q)=dx_q dy_q dz_q$, получаем для первого выражения в (9.91):

$$\operatorname{div}\breve{\mathbf{u}}(a) = \frac{1}{4\pi v_{\mathrm{P}}^2}\int_S F_z\frac{\exp\left[i\omega\left(t-\frac{R_{qa}}{v_{\mathrm{P}}}\right)\right]}{R_{qa}}dx_q dy_q -$$

$$-\frac{1}{4\pi v_{\mathrm{P}}^2}\int F_z\frac{\partial}{\partial z_q}\left\{\frac{\exp\left[i\omega\left(t-\frac{R_{qa}}{v_{\mathrm{P}}}\right)\right]}{R_{qa}}\right\}dV. \qquad (9.92)$$

Поскольку F_z на поверхности S отсутствует, первый интеграл в (9.92) будет равен нулю. Преобразуя подобным образом второе и третье выражения в (9.91), получаем в результате

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{div}\breve{\mathbf{u}}(a) &= -\frac{1}{4\pi v_P^2}\int_V F_z\frac{\partial}{\partial z_q}\left\{\frac{\exp\left[i\omega\left(t-\frac{R_{qa}}{v_{\mathrm{P}}}\right)\right]}{R_{qa}}\right\}dV,\\
\operatorname{rot}_x\breve{\mathbf{u}}(a) &= -\frac{1}{4\pi v_{\mathrm{S}}^2}\int_V F_z\frac{\partial}{\partial y_q}\left\{\frac{\exp\left[i\omega\left(t-\frac{R_{qa}}{v_{\mathrm{S}}}\right)\right]}{R_{qa}}\right\}dV,\\
\operatorname{rot}_y\breve{\mathbf{u}}(a) &= \frac{1}{4\pi v_{\mathrm{S}}^2}\int_V F_z\frac{\partial}{\partial x_q}\left\{\frac{\exp\left[i\omega\left(t-\frac{R_{qa}}{v_{\mathrm{S}}}\right)\right]}{R_{qa}}\right\}dV.
\end{aligned}\right\} \qquad (9.93)$$

Положим, что размеры источника, где действуют массовые силы, малы по сравнению с длиной поперечной и продольной волн. Поэтому можно считать, что подынтегральное выражение в пределах области V изменяется незначительно. Это позволяет заме-

нить интеграл произведением подынтегрального выражения в средней точке на объем V. Эту среднюю точку будем далее считать за начало координат. Дифференцирование по точке q заменим дифференцированием по точке a, т. е.

$$\frac{\partial}{\partial x_q} \text{ на } -\frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y_q} \text{ на } -\frac{\partial}{\partial y} \text{ и } \frac{\partial}{\partial z_q} \text{ на } -\frac{\partial}{\partial z},$$

так как

$$R_{qa}=\sqrt{(x_q-x)^2+(y_q-y)^2+(z_q-z)^2}$$

(см. разд. I, § 9 главы первой). В результате имеем

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\breve{\mathbf{u}}(a) &= \frac{1}{4\pi v_{\mathrm{P}}^2} F_z \frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{\exp\left[i\omega\left(t-\frac{R}{v_{\mathrm{P}}}\right)\right]}{R}\right\}V,\\
\operatorname{rot}_x\breve{\mathbf{u}}(a) &= \frac{1}{4\pi v_{\mathrm{S}}^2} F_z \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\exp\left[i\omega\left(t-\frac{R}{v_{\mathrm{S}}}\right)\right]}{R}\right\}V, \qquad (9.94)\\
\operatorname{rot}_y\mathbf{u}(a) &= -\frac{1}{4\pi v_{\mathrm{S}}^2} F_z \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\exp\left[i\omega\left(t-\frac{R}{v_{\mathrm{S}}}\right)\right]}{R}\right\}V.
\end{aligned}$$

Выразим производные, фигурирующие в (9.94), следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial R}\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial R}\frac{x}{R}, \quad \frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial R}\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial R}\frac{y}{R}, \quad \frac{\partial}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial R}\frac{\partial R}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial R}\frac{z}{R}.$$

Тогда (9.94) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\breve{\mathbf{u}}(a) &= \frac{1}{4\pi v_{\mathrm{P}}^2} F_z \frac{\partial}{\partial R}\left\{\frac{\exp\left[i\omega\left(t-\frac{R}{v_{\mathrm{P}}}\right)\right]}{R}\right\}\frac{z}{R}V,\\
\operatorname{rot}_x\breve{\mathbf{u}}(a) &= \frac{1}{4\pi v_{\mathrm{S}}^2} F_z \frac{\partial}{\partial R}\left\{\frac{\exp\left[i\omega\left(t-\frac{R}{v_{\mathrm{S}}}\right)\right]}{R}\right\}\frac{y}{R}V, \qquad (9.95)\\
\operatorname{rot}_y\breve{\mathbf{u}}(a) &= -\frac{1}{4\pi v_{\mathrm{S}}^2} F_z \frac{\partial}{\partial R}\left\{\frac{\exp\left[i\omega\left(t-\frac{R}{v_{\mathrm{S}}}\right)\right]}{R}\right\}\frac{x}{R}V.
\end{aligned}$$

Ротор вектора смещения $\mathbf{u}$ имеет только горизонтальную компоненту, абсолютная величина которой равна

$$|\operatorname{rot}_z\mathbf{u}|=\sqrt{(\operatorname{rot}_x\mathbf{u})^2+(\operatorname{rot}_y\mathbf{u})^2}. \qquad (9.96)$$

Учитывая, что $z/R=\cos\theta$ и $\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{R}=\frac{r}{R}=\sin\theta$, получаем следующие выражения:

будет равен сумме потенциалов, создаваемых каждым из источников:

$$\varphi(a, t) = \sum_q \frac{1}{r_{qa}} f\left(t - \frac{r_{qa}}{v_P}\right) + \int_V \frac{1}{r_{qa}} f\left(t - \frac{r_{qa}}{v_P}\right) dV, \qquad (9.104)$$

где r_{qa} — расстояние от соответствующего источника, расположенного в точке $q(x_q, y_q, z_q)$ до точки $a(x_a, y_a, z_a)$:

$$r_{qa} = \sqrt{(x_q - x_a)^2 + (y_q - y_a)^2 + (z_q - z_a)^2}.$$

Следует подчеркнуть, что возмущение в точке a в момент времени t определяется значениями функции интенсивности источников в более ранние и различные для разных источников моменты времени — $\left(t - \frac{r_{qa}}{v_P}\right)$. Необходимо разное время, чтобы при данной скорости v_P возмущение от разноудаленных источников достигло точки a. Для источников более сложного типа по сравнению с рассмотренными выше решение строится аналогичным образом.

II. Формулы Кирхгофа и Пуассона. Рассмотрим задачу определения поля смещения в некоторой части пространства, если известны значения потенциала и его производных на некоторой замкнутой поверхности S. Эта поверхность может окружать область, где сосредоточены источники, и тогда нас интересует поле смещений в остальной внешней части пространства (рис. 75,*б*) или, наоборот, поле смещений в пределах некоторой области, окруженной поверхностью S, ограничивающей эту область от внешней части пространства, где находятся источники (рис. 75,*в*). Эта задача была рассмотрена в свое время Г. Кирхгофом.

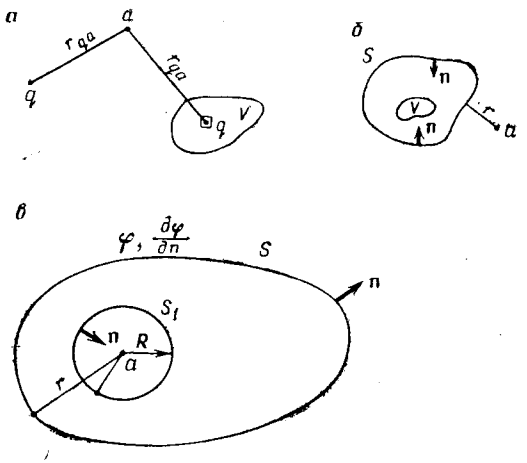


Рис. 75. Упругие волны от произвольных источников

Итак, в области V, ограниченной поверхностью S, требуется найти потенциал смещения $\varphi(a, t)$, создаваемый источниками, находящимися за пределами этой области. На поверхности S заданы потенциал φ и его нормальная производная $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ для любого момента времени t. Искомая функция $\varphi(a; t)$ должна удовлетворять однородному волновому уравнению (9.14)

$$\nabla^2\varphi - \frac{1}{v_p^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0$$

и краевым условиям на поверхности S — заданным значениям φ и $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$. Для решения задачи выразим искомую функцию через интеграл Фурье

$$\varphi(a, t) = \int_{-\infty}^{\infty} p(a, \omega)\exp(i\omega t)\,d\omega, \tag{9.105}$$

где $p(a, \omega)$ — спектральная плотность, которая зависит не только от частоты, но и от координат точки a. Получив решение для одной из гармонических составляющих, мы путем интегрирования вернемся к искомой функции φ.

Подставляя (9.105) в (9.14) и меняя порядок дифференцирования и интегрирования, получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty}\nabla^2 p(a, \omega)\exp(i\omega t)\,d\omega + \frac{1}{v_p^2}\int_{-\infty}^{\infty}\omega^2 p(a, \omega)\exp(i\omega t)\,d\omega = 0. \tag{9.106}$$

Уравнение (9.106) справедливо при любом заданном значении ω, поэтому можем записать его без знака интеграла. Учитывая также, что $\omega/v_p = k$ получаем вместо (9.106) однородное уравнение Гельмгольца

$$\nabla^2 p(a, \omega) + k^2 p(a, \omega) = 0. \tag{9.107}$$

Будем рассматривать каждую точку поверхности S в качестве источника элементарной сферической волны. Поэтому для дальнейшего решения задачи, целесообразно ввести функцию вида

$$\frac{\exp\left[i\omega\left(t - \frac{r}{v_p}\right)\right]}{r} = \frac{\exp(-ikr)}{r}\exp(i\omega t), \tag{9.108}$$

являющуюся решением однородного волнового уравнения (9.14) в случае гармонической сферической волны. Примем обозначение $\exp(-ikr)/r = \psi$. Итак, имеем в области V две скалярные функции p и ψ, непрерывные вместе со своими производными внутри V и на поверхности S. На основании формулы Грина $(2.95')_1$ можем написать

$$\int_V (p\nabla^2\psi - \psi\nabla^2 p)\,dV = \int_S \left(p\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial p}{\partial n}\right)dS. \tag{9.109}$$

Следует учесть, однако, что функция $\psi = \exp(-ikr)/r$ при $r = 0$ не удовлетворяет условиям непрерывности. Поэтому для исключения особенности из рассматриваемой области, что необходимо для применения теоремы Грина, мысленно заключим точку a в небольшую сферу радиусом R и исключим эту область из рассмотрения. После этого объем V будет ограничен наружной

поверхностью S и внутренней поверхностью S_1, и выражение (9.107) следует переписать в виде

$$\int_V (p\nabla^2\psi - \psi\nabla^2 p)\,dV = \int_S \left(p\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial p}{\partial n}\right)dS + \int_{S_1}\left(p\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial p}{\partial n}\right)dS_1. \tag{9.110}$$

Из (9.107) следует, что $\nabla^2 p = -k^2 p$. Величина ψ удовлетворяет однородному волновому уравнению Гельмгольца и, следовательно, $\nabla^2\psi = -k^2\psi$. Подставляя эти значения в (9.110), видим, что левая часть этого выражения равна нулю.

Выполним также некоторые преобразования со вторым членом в правой части (9.110) с учетом того, что для поверхности S_1 $\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial R}$ и элемент поверхности $dS_1 = R^2 d\Omega$, где Ω — телесный угол с центром в точке a. В результате имеем

$$\int_S \left(p\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial p}{\partial n}\right)dS + \int_{S_1}\left[p\left(\frac{\exp(-ikR)}{R^2} + ik\frac{\exp(-ikR)}{R}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\exp(-ikR)}{R}\frac{\partial p}{\partial n}\right] R^2 d\Omega = 0. \tag{9.111}$$

Устремим R к нулю, сжимая сферу к точке a. В результате под интегралом во втором члене останется величина $p\exp(-ikR)$. При $R\to 0$ $\exp(-ikR)\to 1$ и, следовательно, $p\exp(-ikR)\to p(a)$. Учитывая, что полный телесный угол в (9.111) равен 4π, получаем следующее выражение для $p(a, \omega)$:

$$p(a,\omega) = \frac{1}{4\pi}\int_S \left(\psi\frac{\partial p}{\partial n} - p\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)dS. \tag{9.112}$$

Производная в правой части (9.112)

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} = \frac{\partial\left[\exp\left(-i\frac{\omega}{v_p}r\right)\Big/ r\right]}{\partial n} = -\frac{i\omega}{v_p r}\exp\left(-i\frac{\omega}{v_p}r\right)\frac{\partial r}{\partial n} -$$

$$- \frac{1}{r^2}\exp\left(-i\frac{\omega}{v_p}r\right)\frac{\partial r}{\partial n}. \tag{9.113}$$

Подставляя это выражение в (9.112), получаем

$$p(a,\omega) = \frac{1}{4\pi}\int_S \left[\frac{\partial p}{\partial n}\frac{\exp\left(-i\frac{\omega}{v_p}r\right)}{r} - \frac{i\omega}{v_p r}p\exp\left(-i\frac{\omega}{v_p}r\right)\frac{\partial r}{\partial n} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{r^2}p\exp\left(-i\frac{\omega}{v_p}r\right)\frac{\partial r}{\partial n}\right] dS. \tag{9.114}$$

Перейдем теперь от спектральной плотности p к искомой функции $\varphi(a, t)$ и значениям потенциала и его производных на поверхности S. Для этого в соответствии с (9.105) необходимо умножить правую и левую части равенства (9.114) на $\exp(i\omega t)$ и проинтегрировать их по ω. Меняя при этом порядок интегрирования, получаем выражение

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(a\omega)\exp(i\omega t)\,d\omega = \frac{1}{4\pi}\int_S \left\{\frac{1}{r}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial p}{\partial n}\exp\left[i\omega\left(t-\frac{r}{v_p}\right)\right]d\omega + \right.$$

$$+\frac{1}{v_p r}\frac{\partial r}{\partial n}\int_{-\infty}^{\infty} i\omega p\exp\left[i\omega\left(t-\frac{r}{v_p}\right)\right]d\omega +$$

$$\left.+\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial n}\int_{-\infty}^{\infty} p\exp\left[i\omega\left(t-\frac{r}{v_p}\right)\right]d\omega\right\} dS, \qquad (9.115)$$

или окончательно

$$\varphi(a, t) = \frac{1}{4\pi}\int_S \left\{\frac{1}{r}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right]+\frac{1}{v_p r}\frac{\partial r}{\partial n}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right]+\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial n}[\varphi]\right\} dS; \qquad (9.116)$$

здесь r — расстояние между любой точкой поверхности S и точкой наблюдений a; n — внешняя нормаль к поверхности S. Квадратные скобки в (9.116) означают, что соответствующие функции на поверхности S берутся для времени $\tau = t - \frac{r}{v_p}$.

Выражение (9.116) называется формулой Кирхгофа. Оно позволяет определить потенциал смещения в любой точке области V, свободной от источников по заданным значениям потенциала и его производных на поверхности S, ограничивающей эту область. Иными словами, поле смещений в области V создаваемое источниками, расположенными вне этой области, можно определить, не зная этих источников, если известны значения потенциала и его нормальной производной на поверхности S.

При определении поля в области V значение функции φ и $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ на поверхности S заменяет задание всех источников, находящихся вне этой области.

Следует обратить внимание на то, что согласно (9.116) потенциал смещения в точке наблюдения для момента времени t определяется значениями потенциала и его производных на поверхности S, взятых для времени $\tau = t - \frac{r}{v_p}$, поскольку необходимо определенное время $\Delta t = r/v_p$ для распространения возмущений от точек поверхности S до точки наблюдения.

Формула Кирхгофа, показывающая, что смещение в некоторой точке определяется смещениями в близких к источнику точ-

ках пространства в более ранние моменты времени, является математическим выражением известного в физике принципа Гюйгенса, согласно которому каждая точка пространства, где происходят колебания, является источником элементарной сферической волны.

Наряду с рассмотренным выше представляет интерес более общий случай, когда кроме внешних источников, находящихся за пределами поверхности S, имеются источники внутри ее, в области V, где мы определяем потенциал смещения. Вывод формулы для этого случая принципиально ничем не отличается от приведенного выше и поэтому может быть опущен. Заметим только, что здесь приходится искать решение неоднородного волнового уравнения вида

$$\nabla^2\varphi - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \Phi, \tag{9.117}$$

где $\Phi(x, y, z, t)$ — потенциал поля массовых сил — функции описывающей распределение и характер источников в области V.

Выражение для потенциала смещения имеет здесь следующий вид:

$$\varphi(a, t) = \frac{1}{4\pi v_{\text{р}}^2}\int_V \frac{1}{r}[\Phi]\,dV + \frac{1}{4\pi}\int_S \left\{\frac{1}{r}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{v_{\text{р}} r}\frac{\partial r}{\partial n}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right] + \frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial n}[\varphi]\right\} dS; \tag{9.118}$$

здесь r в объемном интеграле — расстояние между элементом внутреннего источника и точкой наблюдения.

Объемный интеграл в (9.118) является частным решением неоднородного волнового уравнения и соответствует той части потенциала, которая вызывается источниками, находящимися в области V. Поверхностный интеграл в (9.116) и (9.118) соответствует общему решению однородного волнового уравнения и отражает влияние внешних источников.

Допустим теперь, что S представляет собой сферическую поверхность, а точка наблюдения a находится в центре сферы. Все источники расположены снаружи, вне объема, ограниченного поверхностью S. Тогда, полагая в формуле (9.116) $r=R$, где R — радиус сферы, и учитывая, что $R=v_{\text{р}}t'$, где t' — время, необходимое для распространения возмущения от поверхности сферы до ее центра, получаем выражение

$$\varphi(a, t) = t'\left(\overline{\frac{\partial\varphi}{\partial t}}\right) + \frac{\partial(t\,\bar{\varphi})}{\partial t}\bigg|_{t=t'}, \tag{9.119}$$

где $\overline{\frac{\partial\varphi}{\partial t}}$ и $\bar{\varphi}$ — средние значения функций $\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right]$ и $[\varphi]$ на поверхности сферы с радиусом R:

$$\overline{\frac{\partial\varphi}{\partial t}} = \frac{1}{4\pi R^2}\int_S \left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right] dS; \quad \bar{\varphi} = \frac{1}{4\pi R^2}\int_S [\varphi]\,dS.$$

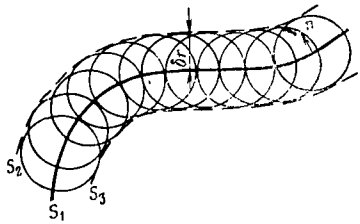


Рис. 76. Определение положения фронта волны на основе принципа Гюйгенса

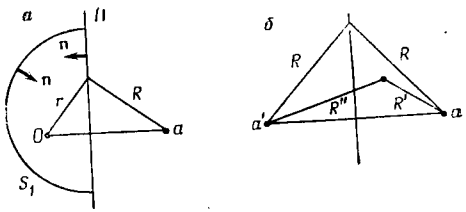


Рис. 77. Построения при выводе формулы (9.123)

Выражение (9.119) носит название формулы Пуассона.

III. Зоны Френеля. Область, существенная при распространении волн. В соответствии с принципом Гюйгенса и формулой Кирхгофа каждую точку пространства, охваченного волновым процессом, можно рассматривать в качестве вторичного точечного источника колебаний. Простейшим примером использования этого принципа является определение положения фронта волны для разных моментов времени, если задано его положение в некоторый момент времени $t=t_1$. Допустим, что фронт волны в момент времени t_1 представлен поверхностью S_1, окружающей источник. Часть этой поверхности изображена на рис. 76. Для определения положения фронта волны в момент времени $t_2=t_1+\delta t$ в соответствии с принципом Гюйгенса каждую точку поверхности S_1 следует рассматривать в качестве источника элементарной сферической волны. Все эти вторичные источники начинают действовать в один и тот же момент времени t_1. В момнт t_2 путь, пройденный каждой сферической волной, будет равен $\delta r=v_p\delta t$. Огибающая семейства сферических поверхностей, имеющих радиус δr, определит положение искомого фронта волны S_2 для момента времени t_2. Во внутренней по отношению к источнику области пространства огибающая поверхность укажет положение фронта S_3 в предшествующий момент времени, равный $t_0=t_1-\delta t$.

В отличие от такой элементарной кинематической интерпретации принципа Гюйгенса в формуле Кирхгофа, как было показано выше, учитываются амплитудно-фазовые соотношения при взаимодействии вторичных источников, определяющих характер смешения в каждой данной точке в определенный момент времени.

Наглядную интерпретацию принципа Гюйгенса и сравнительно простой способ определения волнового поля, вытекающий из формулы Кирхгофа, дал А. Френель.

Допустим, что замкнутая поверхность S образована плоскостью $П$ и примыкающей к ней полусферой S_1 (рис. 77,*а*). Точка наблюдения a находится вне области S со стороны плоскости, противоположной той, где расположена полусфера. Источник находится внутри области S. Примем, что источник является точечным, меняется во времени по гармоническому закону $\exp(i\omega t)$

и находится в точке O на прямой, перпендикулярной к плоскости $П$ и проходящей через точку наблюдения a. Множитель $\exp(i\omega t)$ в дальнейшем опускаем. Действие первичного источника заменяем краевыми условиями, т. е. заданием φ и $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ потенциала смещения и его нормальной производной на поверхности, окружающей источник.

В соответствии с (9.112)

$$\varphi(a) = -\frac{1}{4\pi}\int_{S_1}\left(\varphi\Big|_{S_1}\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{S_1}\right)dS - \frac{1}{4\pi}\int_{П}\left(\varphi\Big|_{П}\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{П}\right)\times$$

$$\times dS. \qquad (9.120)$$

Устремим теперь радиус полусферы S_1 к бесконечности. Если, как это наблюдается в рассматриваемом случае, источник и точка наблюдения находятся на конечном расстоянии друг от друга, все элементы поверхности S, бесконечно удаленные от них, т. е. расположенные на полусфере S_1, не будут вносить вклада в $\varphi(a)$. Таким образом, первый интеграл в правой части (9.120) можно опустить. В результате имеем

$$\varphi(a) = -\frac{1}{4\pi}\int_{П}\left(\varphi\Big|_{П}\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{П}\right)dS. \qquad (9.121)$$

В соответствии с точечным характером источника примем, что

$$\varphi = \frac{\exp(-ikr)}{r}.$$

В качестве функции ψ выберем функцию вида

$$\psi = \frac{\exp(-ikR')}{R'} - \frac{\exp(-ikR'')}{R''}, \qquad (9.122)$$

аналогичную встречавшейся ранее функции Грина и характеризующую разность эффектов сферических волн, исходящих из точек a и a', зеркально расположенных относительно плоскости $П$ (рис. 77,*б*). Здесь R' и R'' — расстояния от a и a' до любой точки пространства. Целесообразность выбора функции ψ такого вида определяется тем, что на плоскости $П$ функция ψ равна нулю, поскольку R' и R'' равны. Таким образом, второй член в правой части (9.121) также будет равен нулю. Тогда

$$\varphi(a) = -\frac{1}{4\pi}\int_{П}\varphi\Big|_{П}\frac{\partial\psi}{\partial n}dS. \qquad (9.123)$$

Определим теперь производную $\frac{\partial\psi}{\partial n}$. Ввиду противоположного направления нормалей на плоскости $П$ относительно точек a и a'

производные от обоих членов (9.122) будет иметь одинаковый знак и, следовательно,

$$\frac{\partial\psi}{\partial n}=2\,\frac{\partial\left(\frac{\exp(-ikR)}{R}\right)}{\partial n}=-2k\frac{\exp(-ikR)}{R}\left(i+\frac{1}{kR}\right)\frac{\partial R}{\partial n}. \qquad (9.124)$$

Если расстояния от точки наблюдения и от источника до плоскости Π таковы, что удовлетворяются условия

$R\gg\Lambda/2\pi$ или $kR\gg 1$, $r\gg\Lambda/2\pi$ или $kr\gg 1$,

то (9.124) можно записать в виде

$$\frac{\partial\psi}{\partial n}=-2\,\frac{i}{k}\,\frac{\exp(-ikR)}{R}\frac{\partial R}{\partial n}. \qquad (9.125)$$

Учитывая, что $\partial R/\partial n=\cos(\mathbf{1}_R,\ \mathbf{n})$ и $k=2\pi/\Lambda$, получаем следующее выражение для $\varphi(a)$:

$$\varphi(a)=\frac{i}{\Lambda}\int\limits_{\Pi}\frac{\exp[-ik(r+R)]}{rR}\cos(\mathbf{1}_R,\ \mathbf{n})\,dS. \qquad (9.126)$$

Из (9.126) вытекает, что потенциал смещения в точке a определяется суммой воздействий от элементарных источников, заполняющих плоскость Π. Нетрудно видеть, что элементарные площадки dS, находящиеся на одном и том же расстоянии R от точки наблюдения a и образующие кольцо dS_k, будут создавать одинаковый эффект в точке a, поскольку в пределах каждого такого кольца расстояние $r+R$ и величина $\cos(\mathbf{1}_R,\ \mathbf{n})$ одинаковы.

Для расчета поля в точке a проведем на плоскости Π систему концентрических колец (рис. 78). Ширину каждого из колец выберем такой, чтобы при переходе от его внутренней границы к внешней расстояние от источника до точки a менялось бы на $\Lambda/2$, т. е. выполнялись бы условия

$$\begin{aligned}
&(R_1+r_1)-(R_0+r_0)=\frac{\Lambda}{2},\\
&(R_2+r_2)-(R_0+r_0)=2\frac{\Lambda}{2},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&(R_n+r_n)-(R_0+r_0)=n\,\frac{\Lambda}{2}.
\end{aligned} \qquad (9.127)$$

Построенные таким образом кольцевые зоны называются **зонами Френеля**.

Интеграл в правой части (9.126) можно представить в виде суммы однотипных интегралов, первый из которых берется по пло-

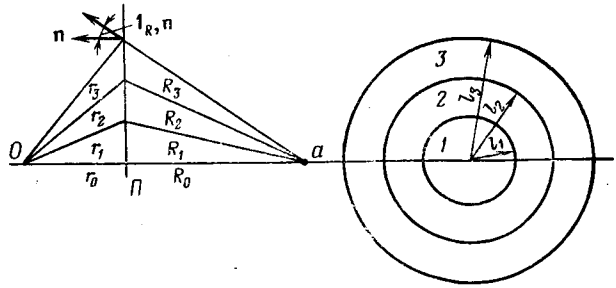


Рис. 78. Зоны Френеля

щади первой зоны Френеля, второй по площади второй зоны и т. д.:

$$\varphi_a = \frac{i}{\Lambda}\int\limits_{S_1}\frac{\exp[-ik(r+R)]}{rR}\cos(\mathbf{1}_R, \mathbf{n})\,dS + \\ + \ldots + \frac{i}{\Lambda}\int\limits_{S_n}\frac{\exp[-ik(r+R)]}{rR}\cos(\mathbf{1}_R, \mathbf{n})\,dS. \qquad (9.128)$$

Подынтегральные выражения во всех членах этой формулы имеют одинаковый вид. Определим площади зон Френеля, которые фигурируют в (9.128). Для этого вначале найдем наружные радиусы l каждой из зон, выразив их через r_0, R_0, и длину волны. Поскольку l намного меньше R и r, то

$$r_1 = \sqrt{r_0^2 + l_1^2} \approx r_0 + \frac{1}{2}\frac{l_1^2}{r_0}, \\ R_1 = \sqrt{R_0^2 + l_1^2} \approx R_0 + \frac{1}{2}\frac{l_1^2}{R_0}. \qquad (9.129)$$

Учитывая (9.127), получаем

$$l_1 = \sqrt{\frac{\Lambda r_0 R_0}{r_0 + R_0}}: \qquad (9.130)$$

Совершенно аналогично можно показать, что

$$l_n = \sqrt{\frac{n\Lambda r_0 R_0}{r_0 + R_0}}. \qquad (9.131)$$

Отсюда нетрудно заключить, что площади всех зон Френеля равны и определяются зависимостью

$$S = \frac{\pi\Lambda r_0 R_0}{r_0 + R_0}. \qquad (9.132)$$

В интегралах, фигурирующих в (9.128), подынтегральные выражения содержат величины rR и $\cos(\mathbf{l}_R, \mathbf{n})$, меняющиеся в пределах каждой зоны незначительно. Их средние значения для каждой зоны можно вынести за знак интеграла. Тогда каждый из интегралов, входящих в (9.128), которые мы обозначим I, будет определяться выражением следующего вида:

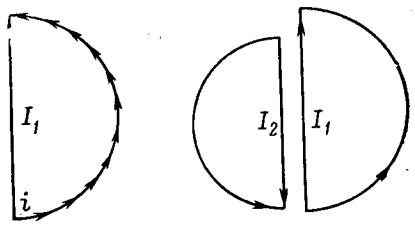


Рис. 79. Эффект в точке наблюдения от первых зон Френеля

$$I_m = \frac{i}{\Lambda} \frac{\cos(\mathbf{l}_R, \mathbf{n})}{rR} \int_{S_m} \exp[-ik(r+R)]\, dS, \qquad (9.133)$$

где $m=1, 2, \ldots, n$.

Член $\exp[-ik(r+R)]$, стоящий в (9.133) под знаком интеграла, будет существенно меняться в пределах каждой зоны, поскольку увеличение расстояния $r+R$ при переходе от внутренней границы зоны ко внешней составляет $\Lambda/2$. Амплитудный же множитель $\cos(\mathbf{l}_R, \mathbf{n})/rR$, стоящий перед интегралом, постоянен в пределах каждой зоны, но убывает по мере увеличения номера зоны, так как соответственно будет увеличиваться произведение rR и уменьшаться величина $\cos(\mathbf{l}_R, \mathbf{n})$ ввиду увеличения угла между $\mathbf{R}$ и $\mathbf{n}$.

Представим себе, что каждая из зон Френеля состоит из ряда узких колец. Источники, расположенные на каждом кольце, создадут в точке наблюдения эффект, который можно изобразить в виде вектора $\mathbf{i}$ (рис. 79). По мере удаления от внутреннего края зоны наружу векторы будут поворачиваться на некоторый угол в соответствии с изменением фазы возмущения, приходящего в точку наблюдения от колец большего радиуса. Разница в фазе между вектором, характеризующим эффект от первого кольца, находящегося у внутренней границы зоны, и последнего, расположенного у внешней границы, составляет по условию построения зон Френеля величину, равную π. Результирующий эффект от зоны будет определяться замыкающим вектором $\mathbf{I}_1$. Эффект от следующей зоны Френеля будет характеризоваться вектором $\mathbf{I}_2$, несколько меньшим по величине из-за уменьшения амплитудного множителя перед интегралом (9.133) и направленным противоположно $\mathbf{I}_1$. Таким образом, соседние зоны создают в точке наблюдения эффекты, которые в значительной мере компенсируют друг друга.

В соответствии со сказанным, (9.128) можно представить в виде знакопеременного ряда с убывающими членами

$$\varphi(a) = I_1 - I_2 + I_3 - I_4 + \ldots \qquad (9.134)$$

Запишем (9.134) в следующем виде:

$$\varphi(a) = \frac{I_1}{2} + \left(\frac{I_1}{2} - I_2 + \frac{I_3}{2}\right) + \left(\frac{I_3}{2} - I_4 + \frac{I_5}{2}\right) + \ldots$$

Стоящие в скобках члены будут малыми величинами, поскольку отношение $(I_1+I_3)/2$ незначительно отличается от I_2, $(I_3+I_5)/2$ от I_4 и т. д. Поэтому можно записать приближенное выражение

$$\varphi(a) \approx I_1/2, \qquad (9.135)$$

т. е. суммарный возмущающий эффект в точке наблюдения определяется в основном действием половины первой зоны Френеля.

В соответствии с (9.132) половина площади любой, в том числе первой зоны Френеля, равна

$$\frac{S}{2}=\frac{\pi\Lambda}{2}\frac{r_0R_0}{r_0+R_0}. \qquad (9.136)$$

Отсюда радиус круга, площадь которого составляет половину первой зоны, равен

$$l=\sqrt{\frac{\Lambda}{2}\frac{r_0R_0}{r_0+R_0}}. \qquad (9.137)$$

Равенства (9.127) представляют собой уравнения эллипса с фокусами в точках расположения источника O и пункта a. В пространстве первая зона Френеля образует эллипсоид вращения (рис. 80). Последующие зоны соответствуют пространству между двумя соседними эллипсоидами вращения. Эллипсоидом вращения будет, очевидно, и область с сечениями, равными половине первой зоны. Эта часть пространства и определяет процесс распространения возмущений от источника к точке наблюдения и называется областью, существенной для распространения колебаний. При изменении расстояний r_0 и R_0 и перемещений плоскости $П$ радиус области, существенной для распространения, будет меняться в соответствии с формулой (9.13), образовывая разные сечения эллипсоида. Максимальный радиус будет наблюдаться при $r_0=R_0$, следовательно, имеем из (9.13)

$$l_{\max}=\sqrt{\Lambda R_0}/2 \qquad (9.138)$$

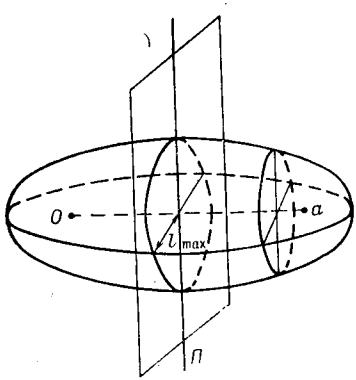


Рис. 80. Пространственное представление первой зоны Френеля

или, введя обозначения $r_0+R_0=L$, получим другой вид формулы (9.138)

$$l_{\max}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{\Lambda L}. \qquad (9.139)$$

Таким образом, размер области, существенной для распространения, зависит от расстояния между источником и точкой наблюдения и длины волны происходящих колебаний. Из (9.138) вытекает, что при $\Lambda\to 0$ $l\to 0$. Следовательно, с уменьшением длины волны площади поперечных сечений эллипсоидов уменьшаются и сами эллипсоиды вырождаются в прямую. В этом случае волна распространяется от источника по прямой, называемой лучом.

На основе представлений о зонах Френеля и области, существенной для распространения, можно более отчетливо уяснить себе процесс отражения упругих колебаний от поверхности раздела двух сред, отличающихся по упругим свойствам. В соответствии со сказанным выше эффект отражения зависит от площадки, существенно влияющей на отражение, размер которой увеличивается с увеличением длины волны и расстоянием источника и точки наблюдения от поверхности раздела.

§ 4. РАСПРОСТРАНЕНИЕ УПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ В ПРИСУТСТВИИ ПЛОСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА

Неоднородность среды существенным образом влияет на распространение упругих колебаний. Здесь наблюдаются явления отражения, преломления, дифракции волн, возникновения поверхностных волн и т. п. Наблюдаемая волновая картина сложным образом зависит от геометрии среды, распределения упругих и плотностных свойств и ряда других факторов. Из многих вопросов, связанных с распространением упругих волн в неоднородных средах, мы коснемся лишь двух — явлений, происходящих при падении плоской продольной волны на плоскую поверхность раздела, и волн Релея, возникающих при распространении упругих колебаний вдоль свободной поверхности раздела.

1. Отражение и преломление плоской продольной волны, падающей на плоскую поверхность раздела. Допустим, что плоская поверхность разделяет две однородные упругие среды, характеризующиеся параметрами λ_1, μ_1, ρ_1 и λ_2, μ_2, ρ_2. Скорости распространения продольных и поперечных волн в первой и второй средах обозначим v_{P1}, v_{S1}, v_{P2} и v_{S2}. Плоская продольная волна P падает на поверхность в направлении, составляющем угол α с нормалью к плоскости (рис. 81,*а*). Ориентируем прямоугольную систему координат таким образом, чтобы ось y была перпендикулярна к направлению распространения колебаний, т. е. лежала в плоскости равных значений амплитуды и фазы падающей волны. В этом случае имеем двумерную картину распределения возмущений, не зависящую от координаты y. Примем, что колебания изменяются во времени по гармоническому закону $\exp(i\omega t)$. Тогда выражение для вектора смещения падающей волны согласно (9.79), (9.85) можно записать в виде

$$\breve{\mathbf{u}}_P = \mathbf{1}_P a_0 \exp\left[i\omega\left(t - \frac{x\sin\alpha + z\cos\alpha}{v_{P1}}\right)\right]. \qquad (9.140)$$

При падении волны на поверхность раздела каждая точка этой поверхности в соответствии с принципом Гюйгенса может рассматриваться в качестве точечного источника вторичных волн. Генерируемые колебания распространяются в верхнем полупространстве — отраженные волны и в нижнем полупространстве — проходящие волны. Отраженные и проходящие колебания меняются во времени так же, как и падающая волна, т. е. по гармоническому закону, с тем же периодом колебаний T.

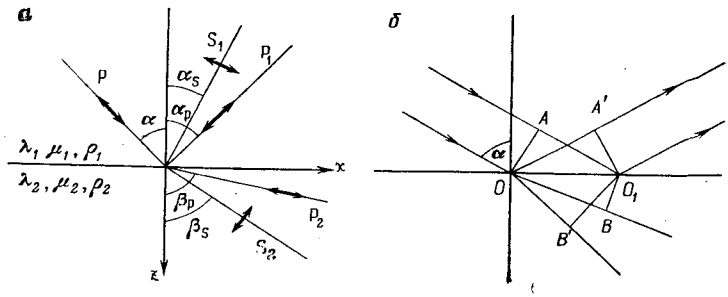


Рис. 81. Отражение и преломление плоской продольной волны, падающей на плоскую поверхность раздела

Можно предположить, что падающая на поверхность раздела продольная волна возбуждает четыре типа вторичных волн. В первой среде — продольную P_1 и поперечную S_1 отраженные волны, во второй — продольную P_2 и поперечную S_2 проходящие волны. Мы располагаем на поверхности раздела четырьмя независимыми условиями сопряжения, с помощью которых сможем в дальнейшем определить четыре неизвестных коэффициента, например амплитуды возникших волн.

Выделим на поверхности раздела две точки — O и O_1 (рис. 81,*б*). Фронт падающей волны OA (в гармонической волне — произвольная изофазовая поверхность) приходит в точку O_1 позже, чем в точку O, на промежуток времени Δt. За это время волна проходит отрезок $AO_1=\Delta t v_{P1}$. Допустим, что $\Delta t=T$. Тогда отрезок AO_1 равен длине продольной волны в первой среде

$$Tv_{P1}=\Lambda_{P1}. \tag{9.141}$$

Отрезок OO_1 тоже характеризует расстояние между точками с одинаковыми фазами, т. е. длину волны, но не в направлении распространения колебаний, а вдоль другого направления, совпадающего с поверхностью раздела. Мы будем использовать в этом случае термин *кажущаяся длина волны*. С истинной длиной волны $\Lambda_к$ связана соотношением

$$\Lambda_к=\Lambda/\sin\alpha. \tag{9.142}$$

Продольная волна, отразившаяся от поверхности раздела в точке O, за время $\Delta t=T$ пройдет расстояние, равное отрезку OA'. Ввиду равенства периода колебаний для падающей и всех вторичных волн отрезок OA' равен длине отраженной продольной волны Λ_{P1}. Проходящая продольная волна, распространяющаяся во второй среде, за время $\Delta t=T$ пройдет расстояние $OB=Tv_{P2}$. Это расстояние в силу тех же соображений, что и в предыдущем случае, будет равно длине проходящей продольной волны во второй среде Λ_{P2}. Аналогичные построения нетрудно выполнить для отраженной и проходящей поперечных волн. Для того чтобы не

перегружать рисунок, на нем показана только проходящая поперечная волна с фронтом $B'O_1$. Для преломленных волн длина волны тоже равна произведению периода колебаний T на скорость распространения, т. е.

$$\Lambda_{S1}=Tv_{S1} \text{ и } \Lambda_{S2}=Tv_{S2}.$$

Все волны имеют одинаковую кажущуюся длину вдоль направления, совпадающего с поверхностью раздела. Поэтому на основании (9.142) можем написать следующее равенство:

$$\frac{\Lambda_P}{\sin\alpha}=\frac{\Lambda_{P1}}{\sin\alpha_P}=\frac{\Lambda_{S1}}{\sin\alpha_S}=\frac{\Lambda_{P2}}{\sin\beta_P}=\frac{\Lambda_{S2}}{\sin\beta_S}. \tag{9.143}$$

Имея в виду, что $\Lambda=Tv$ и тот факт, что период T для всех волн одинаков, можем переписать (9.143) в виде

$$\frac{v_{P1}}{\sin\alpha}=\frac{v_{P1}}{\sin\alpha_P}=\frac{v_{S1}}{\sin\alpha_S}=\frac{v_{P2}}{\sin\beta_P}=\frac{v_{S2}}{\sin\beta_S}. \tag{9.144}$$

Последнее равенство представляет собой обобщенный закон отражения и преломления, известный также под названием закона Снеллиуса. Из него следует, в частности, что для однотипной волны угол падения равен углу отражения, $\alpha=\alpha_P$.

Поскольку отношения, фигурирующие в (9.144), представляют собой кажущуюся скорость распространения волн вдоль поверхности раздела, закон Снеллиуса можно трактовать как необходимость равенства кажущихся скоростей для падающей и всех вторичных волн на этой поверхности. Угол падения возбуждающей плоской волны везде одинаков, поэтому из равенства (9.144) вытекает постоянство углов отражения или прохождения для каждой из вторичных волн во всех точках поверхности раздела. Отсюда следует, что изофазовые поверхности отраженных и проходящих волн представляют собой плоскости.

Векторы смещения для отраженных и проходящих волн можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{u}}_{P1}&=\mathbf{1}_{P1}a_P\exp\left[i\omega\left(t-\frac{x\sin\alpha_P-z\cos\alpha_P}{v_{P1}}\right)\right],\\
\tilde{\mathbf{u}}_{S1}&=\mathbf{1}_{t_1}a_S\exp\left[i\omega\left(t-\frac{x\sin\alpha_S-z\cos\alpha_S}{v_{S1}}\right)\right],\\
\tilde{\mathbf{u}}_{P2}&=\mathbf{1}_{P2}b_P\exp\left[i\omega\left(t-\frac{x\sin\beta_P+z\cos\beta_P}{v_{P2}}\right)\right],\\
\tilde{\mathbf{u}}_{S2}&=\mathbf{1}_{t_2}b_S\exp\left[i\omega\left(t-\frac{x\sin\beta_S+z\cos\beta_S}{v_{S2}}\right)\right],
\end{aligned} \tag{9.145}$$

блюдается при $\alpha=i_P$:

$$\sin i_P=v_{P1}/v_{P2}. \tag{9.150}$$

Угол i_P называется углом внутреннего отражения, или критическим углом. Аналогичное явление наблюдается в случае проходящей поперечной волны при условии $v_{S2}>v_{P1}$ и угле $\alpha=i_S$, где

$$\sin i_S=v_{P1}/v_{S2}. \tag{9.151}$$

Если $\alpha>i_{P(S)}$, т. е. превышает значение критического угла, $\sin\beta_{P(S)}$ должен быть больше единицы. Это возможно, если считать угол $\beta_{P(S)}$ комплексной величиной, т. е. $\beta=\beta'+i\beta''$. Полагая $\beta'=\pi/2$, имеем в соответствии с (9.86)

$$\sin\beta=\operatorname{ch}\beta''\geqslant 1,\quad \cos\beta=-i\operatorname{sh}\beta''. \tag{9.152}$$

Уравнение продольной преломленной волны в этом случае запишется вместо $(9.145)_3$ в виде

$$\breve{\mathbf{u}}_{P2}=\mathbf{1}_{P2}b_P\exp\left[i\omega\left(t-\frac{x\cdot\operatorname{ch}\beta''-iz\cdot\operatorname{sh}\beta''}{v_{P2}}\right)\right]=$$

$$=\mathbf{1}_{P2}b_P\exp(-k\cdot\operatorname{sh}\beta''\cdot z)\exp(-ik\cdot\operatorname{ch}\beta''\cdot x)\exp(i\omega t). \tag{9.153}$$

Таким образом, проходящая волна при условии $\alpha>i_P$ представляет собой плоскую неоднородную волну (см. § 2), распространяющуюся во второй среде параллельно поверхности раздела. Интенсивность ее экспоненциально убывает в направлении, перпендикулярном к преломляющей поверхности.

При углах $\alpha>i_{P(S)}$ коэффициенты прохождения и отражения также становятся комплексными. Всякое комплексное число и в данном случае коэффициенты отражения и прохождения можно представить в виде $A=A'\exp(iA'')$, где A' и A'' действительные числа. Поэтому комплексность коэффициентов означает, что при отражении и преломлении происходит фазовый сдвиг, величина которого зависит от угла α.

Особый интерес представляет частный случай, когда волна падает на поверхность раздела по нормали, т.е. под углом $\alpha=0$. Из уравнения $(9.147)_2$ согласно (9.144) вытекает, что амплитудные коэффициенты для отраженной и проходящей поперечных волн в данном случае равны нулю, т. е.

$$a_S=b_S=0. \tag{9.154}$$

Следовательно, при нормальном падении плоской продольной волны на поверхность раздела поперечных волн не образуется. Это следует и из очевидных физических соображений, поскольку при нормальном падении продольной волны возникают только нормальные напряжения и смещения, и тангенциальные, порождающие поперечные колебания, отсутствуют.

Коэффициенты отражения и прохождения на основании $(9.147)_1$ и $(9.147)_3$ с учетом (9.154) в рассматриваемом случае примут вид [ср. с (7.43)]

$$A_{\text{р}} = \frac{z_2 - z_1}{z_2 + z_1} = \frac{\rho_2 v_{\text{P}2} - \rho_1 v_{\text{P}1}}{\rho_2 v_{\text{P}2} + \rho_1 v_{\text{P}1}}, \tag{9.155}$$

$$B_{\text{р}} = \frac{2z_1}{z_2 + z_1} = \frac{2\rho_1 v_{\text{P}1}}{\rho_2 v_{\text{P}2} + \rho_1 v_{\text{P}1}}. \tag{9.156}$$

Как следует из выражений (9.155) и (9.156), при нормальном падении возникают отраженные и проходящие продольные волны. Для образования отраженной волны (9.155) необходимо различие в волновых сопротивлениях контактирующих сред, т. е. $\rho_2 v_{\text{P}2} \neq \rho_1 v_{\text{P}1}$. Границы, где существует такое различие между волновыми сопротивлениями, называются отражающими границами. В зависимости от степени различия волновых сопротивлений можно говорить о сильных и слабых отражающих границах. При большом контрасте волновых сопротивлений на сильной границе интенсивность отраженной волны значительна. При малом контрасте на слабой границе интенсивность отраженной волны невелика.

При отражении волны от среды с бо́льшим волновым сопротивлением ($\rho_2 v_{\text{P}2} > \rho_1 v_{\text{P}1}$) коэффициент отражения положителен. Это означает, что фаза отраженной волны совпадает с фазой падающей волны. Например, если в некоторый момент времени зона сжатия падающей волны достигла границы, происходит отражение также зоны сжатия. Если в падающей волне на границе наблюдаем зону разряжения, то в этот же момент возникает зона разряжения отраженной волны. Если же отражение происходит от среды с меньшим волновым сопротивлением ($\rho_2 v_{\text{P}2} < \rho_1 v_{\text{P}1}$), коэффициент отражения становится отрицательной величиной. Это означает, что при отражении происходит изменение фазы на 180°, так называемая «потеря полуволны». Вместо пришедшей к границе зоны сжатия отражается зона расширения, и наоборот.

В некоторых руководствах выражение для коэффициента отражения записывается в следующем, отличном от (9.155), виде

$$A_{\text{р}} = \frac{\rho_1 v_{\text{P}1} - \rho_2 v_{\text{P}2}}{\rho_1 v_{\text{P}1} + \rho_2 v_{\text{P}2}}. \tag{9.157}$$

В таком виде коэффициентом отражения учитывается изменение направления распространения волны на 180° при отражении. Образующаяся при нормальном падении проходящая волна, как следует из выражения (9.156), на поверхности раздела всегда совпадает по фазе с падающей волной.

Отметим, что хотя формулы (9.155) и (9.156), определяющие коэффициенты отражения и прохождения $A_{\text{р}}$ и $B_{\text{р}}$, получены для случая нормального падения плоской волны, ими можно пользоваться для оценок и при косом падении волн при сравнительно небольших углах α. Как уже упоминалось выше, в интервале $\alpha =$

$=0—20°$ в большинстве случаев коэффициенты A_P и B_P меняются незначительно.

II. Поверхностные волны Релея. Следует различать волны объемные, наблюдающиеся в процессе распространения в любой точке пространства, окружающего источник, и волны поверхностные, образующиеся благодаря присутствию поверхности раздела и существующие вблизи нее. К последним относится поверхностная волна, возникающая у свободной поверхности упругой среды. Ее существование было теоретически доказано английским физиком Дж. Релеем.

Примем, что упругая среда с константами λ, μ и ρ занимает нижнее полупространство. Начало декартовых координат находится на его поверхности. Ось x направлена вдоль границы, ось z — в глубь среды. Будем считать, что колебания изменяются во времени по гармоническому закону и их распределение в пространстве не зависит от координаты y, т. е. рассматривается плоская задача. Считаем, что объемные силы отсутствуют. Предположим, что вдоль поверхности в направлении x распространяется поверхностная волна, которая представляет собой комбинацию (наложение) двух плоских неоднородных волн — продольной и поперечной, распространяющихся по оси x с одинаковой скоростью v_R. Поскольку речь идет не об истинных скоростях объемных продольных и поперечных волн v_P и v_S, а о кажущейся скорости вдоль направления x, такое предположение, как мы увидим ниже, может быть удовлетворено.

Таким образом, задача сводится к построению решения волновых уравнений (9.14) и (9.15) в виде выражений для неоднородных плоских продольной и поперечной волн вида (9.87) с таким выбором коэффициентов, чтобы скорость этих волн вдоль поверхности раздела была бы одинаковой, и последующему определению этой скорости. Искомые коэффициенты находят путем удовлетворения условий сопряжения на поверхности раздела.

Итак, будем искать решение волновых уравнений в виде

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} &= a \exp(-rz) \exp[i\omega(t - x/v_R)], \\ |\tilde{\psi}| &= b \exp(-sz) \exp[i\omega(t - x/v_R)], \end{aligned} \tag{9.158}$$

где v_R — скорость распространения продольной и поперечной неоднородных волн.

Будем полагать, что $r>0$ и $s>0$. Подставляя (9.158) в (9.14) и (9.15), получаем после некоторых преобразований

$$\begin{aligned} r &= \frac{\omega}{v_R}\sqrt{1 - v_R^2/v_P^2}, \\ s &= \frac{\omega}{v_R}\sqrt{1 - v_R^2/v_S^2}. \end{aligned} \tag{9.159}$$

Для определения скорости v_R поверхностной волны обратимся к условиям сопряжения (9.20), (9.22). При записи этих условий

для свободной поверхности необходимо учесть следующие обстоятельства. Смещение упругой среды на границе ничем не ограничено и условия (9.22) здесь вообще неприменимы. Условия (9.20) равенства напряжений на площадках по обе стороны поверхности раздела сводятся в данном случае к равенству нулю составляющих напряжений по осям x и z при $z=0$, т. е.

$$[\tau_{zx}]_{z=0}=0,\ [\sigma_z]_{z=0}=0. \tag{9.160}$$

Выразим напряжения через деформации (9.21), а последние — через потенциалы φ и ψ. При этом учтем, что в рассматриваемом случае отлична от нуля только компонента ψ_y вектора-потенциала $\boldsymbol{\psi}$. В дальнейшем индекс y опускаем. В результате условия (9.160) можно записать в виде

$$\begin{gathered}\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z}\right]_{z=0}=0,\\ \left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}+\left(1-2\frac{v^2_S}{v^2_P}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+2\frac{v^2_S}{v^2_P}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial z}\right]_{z=0}=0.\end{gathered} \tag{9.161}$$

Подставляя в (9.161) выражения для φ и ψ из (9.158) и производя преобразования, получаем следующие уравнения:

$$\begin{gathered}(2-v^2_R/v^2_S)\,a+2i\sqrt{1-v^2_R/v^2_S}\,b=0,\\ 2i\sqrt{1-v^2_R/v^2_P}\,a-(2-v^2_R/v^2_S)\,b=0.\end{gathered} \tag{9.162}$$

Выражения (9.162) образуют линейную однородную систему уравнений. Она имеет отличное от нуля решение относительно a и b, если определитель системы D равен нулю:

$$D=\left(2-\frac{v^2_R}{v^2_S}\right)^2-4\sqrt{\left(1-\frac{v^2_R}{v^2_P}\right)\left(1-\frac{v^2_R}{v^2_S}\right)}=0. \tag{9.163}$$

Вводя обозначения

$$k=v^2_R/v^2_S \text{ и } n=v^2_S/v^2_P, \tag{9.164}$$

можем переписать (9.163) в виде

$$D=(2-k)^2-4\sqrt{(1-k)(1-kn)}. \tag{9.165}$$

Возводя (9.165) в квадрат, получаем уравнение для k

$$k^3-8k^2+(24-16n)k-16(1-n)=0. \tag{9.166}$$

Уравнение (9.166) позволяет определить k и тем самым v_R — скорость поверхностной волны Релея, которая является функцией v_P и v_S — скоростей продольных и поперечных волн. Уравнение (9.166) обязательно имеет вещественный корень в интервале $0<k<1$. Следовательно, волна Релея всегда может существовать.

Расчеты показывают, что поверхностная волна Релея распространяется со скоростью около $0{,}9v_S$. Поскольку в уравнение (9.166) частота не входит, скорость v_R от частоты не зависит и поэтому колебания сложного вида распространяются в виде поверхностной волны без искажений.

Компоненты вектора смещения продольной волны по осям x и z на основании (9.7) будут иметь вид

$$\begin{aligned}
&\breve{u}=\frac{\partial\breve{\varphi}}{\partial x}-\frac{\partial\breve{\psi}}{\partial z}=-\left[a\frac{i\omega}{v_R}\exp(-rz)-sb\exp(-sz)\right]\times\\
&\times\exp[i\omega(t-x/v_R)],\\
&\breve{w}=\frac{\partial\breve{\varphi}}{\partial z}+\frac{\partial\breve{\psi}}{\partial x}=-\left[ar\exp(-rz)+\frac{i\omega}{v_R}b\exp(-sz)\right]\times\\
&\times\exp[i\omega(t-x/v_R)].
\end{aligned}\tag{9.167}$$

Прежде чем произвести некоторые преобразования (9.167), заметим, что из (9.162) и (9.164) следует

$$\frac{b}{a}=\frac{2i\sqrt{1-kn}}{2-k}=2ic;\tag{9.168}$$

выражения же (9.159) для r и s, учитывая, что $\Lambda_R=2\pi v_R/\omega$, и (9.164) можно представить в виде

$$r=\frac{2\pi}{\Lambda_R}\sqrt{1-kn},\quad s=\frac{2\pi}{\Lambda_R}\sqrt{1-k}.\tag{9.169}$$

Подставляя (9.168) и (9.169) в (9.167), получаем следующие выражения для компонент смещения:

$$\begin{aligned}
&\breve{u}=-ia\left[\frac{\omega}{v_R}\exp\left(-\frac{2\pi\sqrt{1-kn}}{\Lambda_R}z\right)-\right.\\
&\left.-2cs\exp\left(-\frac{2\pi\sqrt{1-k}}{\Lambda_R}z\right)\right]\exp[i\omega(t-x/v_R)],\\
&\breve{w}=a\left[r\exp\left(-\frac{2\pi\sqrt{1-kn}}{\Lambda_R}z\right)-\frac{2c\omega}{v_R}\exp\left(-\frac{2\pi\sqrt{1-k}}{\Lambda_R}z\right)\right]\times\\
&\times\exp[i\omega(t-x/v_R)].
\end{aligned}\tag{9.170}$$

Заменяя в этих выражениях экспоненту через $\cos\omega(t-x/v_R)+i\sin\omega(t-x/v_R)$ и отбрасывая мнимую часть, получаем окончательно

$$\begin{aligned}
&u=a\left[\frac{\omega}{v_R}\exp\left(-\frac{2\pi\sqrt{1-kn}}{\Lambda_R}z\right)-\right.\\
&\left.-2cs\exp\left(-\frac{2\pi\sqrt{1-k}}{\Lambda_R}z\right)\right]\sin\omega(t-x/v_R),\\
&w=a\left[\frac{2c\omega}{v_R}\exp\left(-\frac{2\pi\sqrt{1-k}}{\Lambda_R}z\right)-\right.\\
&\left.-r\exp\left(-\frac{2\pi\sqrt{1-kn}}{\Lambda_R}z\right)\right]\cos\omega(t-x/v_R).
\end{aligned}\tag{9.171}$$

Колебания частиц происходят в вертикальной плоскости, ориентированной в направлении распространения волны. Из формул (9.171) следует, что колебания по направлениям x и z сдвинуты по фазе на 90° и отличаются по амплитуде. Следовательно, частицы среды в процессе колебаний перемещаются по эллиптическим орбитам. Главная ось эллипса — вертикальна. Движение частиц в верхней части эллипса происходит в направлении, противоположном направлению распространения волны. Амплитуда колебаний убывает с глубиной по показательному закону. Коэффициенты, определяющие скорость убывания, обратно пропорциональны длине волны. Поэтому чем длиннее волна, тем глубже она проникает в упругую среду.

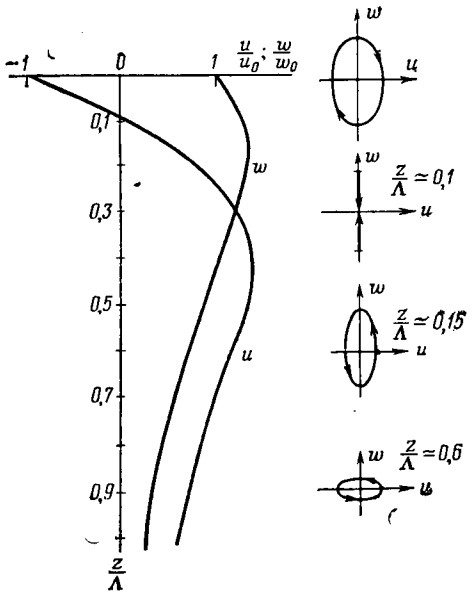


Рис. 83. Распределение смещений в поверхностной волне Релея

Анализ уравнения (9.171) показывает, что поверхностная волна практически сосредоточена в слое, толщина которого равна длине волны Λ_R. Амплитуда смещения по каждой из осей с глубиной меняется по-разному. Как видно на рис. 83, на котором изображены амплитуды вертикальной и горизонтальной составляющих смещения, в долях смещения на поверхности, при $z=0$ (w_0 и u_0) амплитуда вертикальной составляющей смещения w имеет на некоторой глубине максимум, а горизонтальная составляющая u на определенной глубине меняет свой знак на обратный. Вследствие этого изменяется эксцентриситет эллиптических орбит, и на некоторой глубине, изменяется направление движения частиц по эллиптической орбите.

Если учесть локальный характер источника поверхностной волны и тем самым перейти от двухмерной задачи к трехмерной, нетрудно заметить, что в этом случае фронт волны будет представлять собой цилиндрическую поверхность. Высота цилиндра равна приблизительно Λ_R. В цилиндрической волне амплитуда смещения убывает обратно пропорционально $\sqrt{R}$, а в объемных волнах — обратно пропорционально R, где R — расстояние от источника. Поэтому интенсивность поверхностных волн при достаточном удалении от источника выше, чем объемных, в связи с чем они представляют наибольшую опасность при землетрясениях.

Приложение

ПЕРЕХОД ОТ ЕДИНИЦ СИ К СИСТЕМЕ СГС

Вид формул в теории электрических и магнитных полей зависит от выбора системы единиц измерения. В настоящей книге эти формулы составлены применительно к единицам СИ. Удобно иметь возможность привести формулы к виду, соответствующему системе СГС, получившей широкое применение в физической и геофизической литературе. Подстановки, указанные в приводимой таблице, позволяют выполнить переход от СИ к СГС для равенств (неравенств), встречающихся в шести главах (от второй до седьмой).

Горизонтальные линии разграничивают таблицу на разделы, содержащие соответственно подстановки: 1—6, 7—11, 12—18, 19—30. Раздел 1—6 достаточен для преобразования равенств, встречающихся во второй главе. При переходе к третьей и четвертой главам надо применять разделы 1—6 и 7—11. Для пятой главы нужны разделы 1—6, 7—11 и 12—18, а для шестой и седьмой глав — все разделы таблицы.

Пользуясь таблицей, надо иметь в виду следующее.

1. Таблица применима только к равенствам. Она, как правило, не применима к отдельно взятой части равенства или к выражению, приведенному где-либо вне равенства с другим выражением.

2. Некоторые подстановки являются следствиями других подстановок. Например, подстановки 13 и 14 следуют из подстановки 12, а из подстановки 17 получаются подстановки 18, 19 и др.

3. Из некоторых подстановок следуют другие подстановки, не указанные в таблице. Например, из подстановок 1 и 2 ясно, что вместо $\varepsilon_0\mu_0$ надо подставить единицу.

4. Подстановки надо применять не только к величинам, представленным обозначениями, но также к численным значениям этих величин. Подстановки могут обратить равенства в тождества.

5. Таблицу следует рассматривать только как искусственное средство для преобразования равенств. Рекомендация подстановки одной величны вместо другой не означает, что эти величины соответствуют друг другу в системах СИ и СГС.

Таблица подстановок

Номер подстановки	Заменяемая величина	Подставляемая величина	Номер подстановки	Заменяемая величина	Подставляемая величина	Номер подстановки	Заменяемая величина	Подставляемая величина
1	ε_0	$1/4\pi$	11	$\varkappa$	$4\pi\varkappa$	21	f	f/c
2	μ_0	4π	12	I	I/c	22	ω	ω/c
3	$\mathbf{H}$	$\mathbf{H}/4\pi$	13	$\mathbf{j}$, $\mathbf{j}'$	$\frac{\mathbf{j}}{c}$, $\frac{\mathbf{j}'}{c}$	23	c	1
4	U^H	$U^H/4\pi$	14	$\mathbf{i}$, $\mathbf{i}'$	$\frac{\mathbf{i}}{c}$, $\frac{\mathbf{i}'}{c}$	24	T	cT
5	$\mathcal{E}^H$	$\mathcal{E}^H/4\pi$	15	U_I	$U_I/4\pi$	25	R	cR
6	ν	1	16	w	w/c	26	v	v/c
7	ε_a	$\varepsilon/4\pi$	17	t	ct	27	γ, ρ	$\frac{\gamma}{c}$, $c\rho$
8	μ_a	$4\pi\chi$	18	$\dot{\mathcal{F}}$	$\dot{\mathcal{F}}/c$	28	P, Q	$\frac{P}{c}$, $\frac{Q}{c}$
9	$\mathbf{D}$	$\mathbf{D}/4\pi$	19	$\ddot{\mathcal{F}}$	$\ddot{\mathcal{F}}/c^2$	29	У	У$/c$
10	χ	$4\pi\chi$	20	τ	$c\tau$	30	$\varkappa^2$	$c^2\varkappa^2$

Примечание: ν — множитель в законе Кулона; χ, $\varkappa$ (в подстановках 10,11) — поляризуемость, восприимчивость; w — скорость заряда, контура тока; $t(\tau)$ — время (релаксации); $\dot{\mathcal{F}}$, $\ddot{\mathcal{F}}$ — производные по времени (первая, вторая) от скаляра, вектора; $f(\omega)$ — частота (круговая); c — электродинамическая постоянная; T — период; R — сопротивление; $\gamma=1/\rho$ — удельная электропроводность; P и Q — сторонняя работа в области V и джоулево тепло, выделяющееся в этой области; v — скорость распространения поля; $\varkappa^2$ (в подстановке 30) — множитель при $\ddot{\mathbf{H}}$ и $\ddot{\mathbf{E}}$ в волновом уравнении.

Список литературы

1. *Альпин Л. М.* Теория поля. М., Недра, 1966.
2. *Альпин Л. М.* Практические работы по теории поля. М., Недра, 1971.
3. *Амензаде Ю. А.* Теория упругости. М., Высшая школа, 1976.
4. *Бурсиан В. Р.* Теория электромагнитных полей, применяемых в электроразведке. Л., Недра, 1972.
5. *Гурвич И. И., Боганик Г. Н.* Сейсмическая разведка. М., Недра, 1980.
6. *Джексон Дж.* Классическая электродинамика. М., Мир, 1965.
7. *Заборовский А. И.* Переменные электромагнитные поля в электроразведке. М., Изд-во МГУ, 1960.
8. *Иваненко Д., Соколов А.* Классическая теория поля. М., Гостехиздат, 1949.
9. *Кочин Н. Е.* Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М., Наука, 1965.
10. *Марков Г. Т., Чаплин А. Ф.* Возбуждение электромагнитных волн. М., Радио и связь, 1983.
11. *Морс Ф. М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики. Т. 1. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
12. *Никольский В. В.* Электродинамика и распространение радиоволн. М., Наука, 1973.
13. *Овчинников И. К.* Теория поля. М., Недра, 1979.
14. *Саваренский Е. Ф.* Сейсмические волны. М., Недра, 1972.
15. *Сретенский Л. Н.* Теория ньютоновского потенциала. М., Гостехиздат, 1946.
16. *Стрэттон Дж. А.* Теория электромагнетизма. М., Гостехиздат, 1948.
17. *Тамм И. Е.* Основы теории электричества. М., Наука, 1976.
18. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М., Наука, 1977.

Амплитуда действительная, комплексная 287, 289

Вектор вращения 341
— Герца 303
— комплексный 290
— напряжения 328
— Умова — Пойнтинга 275
Вихри 46
Возбудители поля 44, 46
Волны упругие плоские неоднородные 371, 394
— — — однородные 369
— — продольные, поперечные 355, 356
— — поверхностные Релея 396
— — сферические поперечные 365
— — — продольные 358
— электромагнитные плоские 277, 294, 296, 317
— — сферические 310, 315, 326
Восприимчивость диэлектрическая, магнитная 145
Время релаксации 279
Выражение напряжений через деформации 349

Глубина проникновения 296, 320
Годограф электромагнитного поля 272
Градиент 15, 17
— двумерный 17, 27
— поверхностный 32

Дельта-функция 126
Деформации 339
— главные 344
Дивергенция 23, 43
— двумерная 27
— поверхностная 30, 33
Дилатация 346
Диполь, его поле 98, 222, 249, 308, 314, 320
— и двойной слой под действием поля 130
Дисперсия частотная 295
Длина волны 278, 295, 390

Единственность решения прямой задачи 53, 59, 119, 166, 224, 260, 299, 305, 356
Емкость уединенного проводника 171
— — электрода 232

Задача Дирихле 59
— краевая 51
— Неймана 59
Закон Ампера 234
— Био — Савара — Лапласа 239
— Гука 346
— Джоуля—Ленца 196
— Кирхгофа 185
— Кулона — Ньютона 79, 155
— Ома в дифференциальной форме 181, 190, 194
— — для участка цепи 188
— полного тока 244, 258, 268
— Снеллиуса 391
— электромагнитной индукции 269
Запись комплексная 288
Заряд зависимый 285, 312
— индуцирующий, индуцированный, собственный 159
— свободный 142
— связанный 139
— сторонний 285, 312
— электрода 214, 221, 312
Зона ближняя, дальняя 313, 316, 325, 364
— Френеля 383

Импеданс 297, 314
Индукция магнитная, электрическая (смещение) 144
— электромагнитная 269
— электростатическая 159
Интеграл Зоммерфельда 323
— Фурье 362
Источник упругих волн сосредоточенный 373
— — поперечных волн сферический 365
— — продольных волн сферический 358
Источники поля 44, 151, 199, 233

Калибровка потенциала 283, 286, 304
Квадруполь 106
Константы упругие Ламэ 350
Коэффициент затухания 294, 295, 372
— контрастности (отражения) 156, 201
— Пуассона 348
— участка цепи тока 190
— фазы 294

Оглавление

Предисловие 3

Глава первая. Поле 5

§ 1. Скалярные и векторные поля 5
§ 2. Производная скалярного поля 13
§ 3. Производные векторного поля 18
§ 4. Некоторые соотношения 25
§ 5. Вторые производные поля 33
§ 6. Векторные поля и геометрическая интерпретация их производных 41
§ 7. Уравнения векторного поля 48
§ 8. Условия единственности 53
§ 9. Дополнения к первой главе 63

Глава вторая. Статическое поле в вакууме 74

§ 1. Массы 74
§ 2. Поля кулоновых и ньютонианских сил 79
§ 3. Уравнения поля 89
§ 4. Потенциал 92
§ 5. Поле нейтральной совокупности масс 98
§ 6. О расчете поля заданных масс 107
§ 7. Непрерывность поля и ее нарушения 111
§ 8. Решение прямой задачи теории статического поля в вакууме . . 119
§ 9. Дополнения ко второй главе 129

Глава третья. Статическое поле в присутствии среды . . . 134

§ 1. Влияние среды 134
§ 2. Электрическое смещение и магнитная индукция 143
§ 3. Поле в присутствии поляризующейся среды 148
§ 4. Условия, упрощающие влияние проницаемости среды 153
§ 5. Электростатическое поле в присутствии проводников 158
§ 6. Прямая задача теории статического поля в присутствии среды . . 165
§ 7. Дополнения к третьей главе 169

Глава четвертая. Стационарное электрическое поле . . . 174

§ 1. Электрический ток 174
§ 2. Постоянный ток 183
§ 3. Стороннее поле. Работа в цепи тока 191
§ 4. Источники стационарного поля 198
§ 5. Влияние нарушений однородности проводящей среды 204
§ 6. Стационарное электрическое поле в земле 211
§ 7. Прямая задача теории стационарного поля 223
§ 8. Дополнения к четвертой главе 228

Глава пятая. Магнитное поле постоянного тока 234

§ 1. Ток в магнитном поле 234
§ 2. Магнитное поле электрического тока в отсутствии магнитной среды 238
§ 3. Дополнительные сведения о магнитном поле постоянного тока в отсутствии магнитной среды 245
§ 4. Магнитное поле постоянного тока в присутствии магнитной среды 254
§ 5. Система уравнений магнитного поля постоянного тока в присутствии магнитной среды 257
§ 6. Поле в однородной магнитной среде 261

Глава шестая. Переменное электромагнитное поле 266

§ 1. Уравнения Максвелла 266
§ 2. Система уравнений электродинамики 273
§ 3. Поле в непроводящей среде 276
§ 4. Поле в проводящей среде 279
§ 5. Электродинамические потенциалы 282
§ 6. Гармонически меняющееся поле 287

Глава седьмая. Прямая задача теории переменного электромагнитного поля 299

§ 1. Условия единственности решений уравнений электродинамики . . 299
§ 2. Потенциалы гармонически меняющегося поля 303
§ 3. Электрический диполь в безграничной однородной среде 308
§ 4. Магнитный диполь в безграничной однородной среде 314
§ 5. Нормальное падение плоской волны на плоскую границу . . . 317
§ 6. Вертикальный магнитный диполь в присутствии горизонтальной границы 320

Глава восьмая. Основы теории упругости 327

§ 1. Напряжения 328
§ 2. Деформации 339
§ 3. Связь между деформациями и напряжениями 346

Глава девятая. Распространение упругих колебаний . . . 353

§ 1. Уравнения распространения упругих колебаний 353
§ 2. Упругие волны в однородной изотропной среде 358
§ 3. Упругие волны в однородной безграничной среде от произвольных источников 377
§ 4. Распространение упругих колебаний в присутствии плоской поверхности раздела 389

Приложение 400
Переход от единиц СИ к системе СГС 400
Список литературы 402
Предметный указатель 403

Лев Моисеевич Альпин
Дмитрий Сергеевич Даев
Александр Дмитриевич Каринский

ТЕОРИЯ ПОЛЕЙ, ПРИМЕНЯЕМЫХ В РАЗВЕДОЧНОЙ ГЕОФИЗИКЕ

Редакторы издательства Н. Г. Богачева, Т. И. Борушко
Технический редактор Е. В. Воробьева
Корректор И. Н. Таранева

ИБ № 4909

Сдано в набор 16.07.84 Подписано в печать 17.05.85. Т-10478
Формат 60×90¹/₁₆ Бумага типографская № 3.
Гарнитура «Литературная». Печать высокая Усл. печ. л. 25,5
Усл.-кр. отт. 25,5 Уч.-изд. л. 27,48 Тираж 3400 экз.
Заказ № 48/8842 — 3. Цена 1 р. 20 к.

Ордена «Знак Почета» издательство «Недра», 103633, Москва, К-12, Третьяковский проезд, 1/19

Ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени МПО «Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова» Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 113054, Москва, Валовая, 28