

С.А. СЕРКЕРОВ

ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИОННОГО И МАГНИТНОГО ПОТЕНЦИАЛОВ

*Допущено Государственным комитетом СССР по народному
образованию в качестве учебника для студентов
вузов, обучающихся по специальности «Геофизические
методы поисков и разведки»*



Москва «Недра» 1990

ББК 26.21
С 32
УДК 550.831 : 681.3

Рецензенты: д-р техн. наук проф. *К. Е. Веселов*;
Кафедра геофизических методов разведки Азербайджанского
института нефти и химии им. *М. Азизбекова*

Серкеров С. А.

С 32 Теория гравитационного и магнитного потенциалов:
Учебник для вузов. — М.: Недра, 1990. — 304 с: ил.
ISBN 5—247—00749—2

Рассмотрены теория геофизических полей, их основные свойства, виды потенциалов притяжения и магнитных. Приведены интегральные теоремы и уравнения теории потенциала (формулы Остроградского — Гаусса, Грина, Пуассона, Лапласа). Описаны свойства гармонической и сферической функций, решения фундаментальных задач теории (Дирихле, Неймана), ряды, полученные при разложении гравитационных и магнитных потенциалов по сферическим функциям. Показано применение этих рядов при определении фигуры Земли, нормальных значений силы тяжести, изучении магнитного поля.

Для студентов вузов, обучающихся по специальности «Геофизические методы поисков и разведки».

С 1803020000—052 — 37—89
043(1)—90

ББК 26.21

ISBN 5—247—00749—2

© С. А. Серкеров, 1990

Теория гравитационного и магнитного потенциалов — специальная дисциплина профессиональной подготовки горных инженеров-геофизиков в области гравиразведки и магниторазведки. Полученные при изучении данного курса знания служат основой для последующего углубленного изучения гравиразведки и магниторазведки. Их можно использовать на практике при решении различных задач теории и практики интерпретации.

Теория потенциала — один из наиболее разработанных и мощных разделов математической физики, который целиком входит в теорию гравитационной и магнитной разведки полевой геофизики. Теория потенциала является как бы фундаментом курсов гравиразведки и магниторазведки, связывающим воедино все стороны теории и практики их применения. В свою очередь теория потенциала базируется на элементах теории поля, поэтому в книге кратко рассмотрены основные элементы теории поля. Учитывая специфику курса гравиразведки и магниторазведки в нефтяных вузах и на нефтяных факультетах вузов страны, в соответствии с программой курса потенциалы гравитационного и магнитного полей рассматриваются совместно. Такое изложение материала позволяет избежать ненужных повторений, которые были бы обязательными при раздельном описании теории гравитационного и магнитного потенциалов.

Так как раздел сферических функций не читается в курсах по высшей математике, в книге кратко изложены элементы теории сферических функций и основы аппарата разложения функций по сферическим функциям, без которых невозможно обойтись в теории потенциала. Рассмотрены также задачи представления потенциала силы тяжести и магнитного потенциала Земли в виде рядов сферических функций и вопросы применения полученных рядов при вычислении нормальных значений силы тяжести, определении фигуры Земли и решении ряда других задач.

Для облегчения усвоения материала даны примеры применения наиболее важных и часто встречающихся формул.

История развития теории потенциала, как и гравиметрии, начинается с работ Галилея и Ньютона. После них следует отметить работы голландского физика Гюйгенса, французских математиков Клеро и Лапласа. Понятие о потенциальной, или, как тогда называли, силовой функции, впервые ввел французский математик Лежандр. По его словам, идея применения потенциала была им заимствована у Лапласа. По вопросам

земного магнетизма следует назвать работы Гильберта и Кулона.

Дальнейшее развитие теории потенциала получила в работах английского математика Грина, немецкого математика Гаусса, а также в трудах немецких математиков Дирихле и Неймана, английского физика и математика Стокса и некоторых других исследователей. Из русских и советских ученых следует назвать Ф. А. Слудского, П. К. Штернберга, Л. В. Сорокина, А. А. Михайлова.

По исследованию закономерностей изменения значений магнитного поля Земли следует отметить работы И. М. Симонова и Н. А. Умова. Еще до появления основной работы Гаусса о магнитном поле Земли И. М. Симонов в 1835 г. получил для магнитного поля Земли выражение потенциала диполя как функции широты и долготы, которое впоследствии оказалось тождественным с первым членом разложения потенциала магнитного поля Земли, выведенного Гауссом. Н. А. Умовым впервые была дана интерпретация постоянных членов разложения Гаусса, физический смысл которых оставался до того неизвестным.

В СССР развитие отдельных вопросов теории потенциала тесно связано с широким внедрением и применением гравиметрического и магнитометрического методов разведки начиная с 1919 г., когда по инициативе В. И. Ленина была создана Особая комиссия по изучению Курской магнитной аномалии, в состав которой вошли основоположники разведочной геофизики в СССР: П. П. Лазарев, П. М. Никифоров, А. А. Михайлов, Л. В. Сорокин, Г. А. Гамбурцев и др. Дальнейшее развитие и применение теории потенциала связано с разработкой методов интерпретации значений гравитационного и магнитного полей, с совершенствованием методов гравиметрии и магнитометрии, с решением различных задач высшей геодезии и астрономии, которые подробно рассматриваются в курсах гравиразведки и магниторазведки.

Данный учебник составлен на основе лекций, читаемых автором студентам-геофизикам в Московском институте нефти и газа им. И. М. Губкина. При этом использованы некоторые из книг, учебников и учебных пособий по теории потенциала, теории поля, по курсам гравиразведки и магниторазведки, например, Н. И. Идельсона, И. К. Овчинникова, А. К. Маловичко, К. Е. Веселова, М. У. Сагитова, Г. Н. Дубошина, Б. М. Яновского и др.

Книга написана для студентов вузов, обучающихся по специальности «Геофизические методы поисков и разведки». Она может быть полезна студентам-гравиметристам и магнитологам физического и физико-математического факультетов университетов, геодезических институтов, слушателям соответствующих

факультетов военных академий, а также в практической работе инженерно-техническим работникам геолого-геофизических организаций, занимающимся гравиметрическими и магнитометрическими исследованиями.

При записи кратных интегралов там, где нет необходимости в отдельном написании каждого интеграла, принята наиболее удобная и компактная форма записи: $\int_v$ — объемный (трехкратный) интеграл по объему v ; $\int_s$ или $\int_\Sigma$ — поверхностный (двукратный) интеграл по поверхности S или Σ ; $\int_l$ — интеграл (криволинейный) по длине кривой или дуги l .

§ 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛЯ

Скалярные и векторные, постоянные и переменные поля

Некоторая заданная величина A образует в области пространства v поле, если каждой точке M этой области соответствует некоторое определенное значение величины A . В общем случае различным точкам области v соответствуют различные значения величины A , т. е. поле является функцией точки M : $A=A(M)$.

Поля бывают скалярные и векторные. Если данная величина $A=U$ скалярная, то и поле ее скалярное. Если же данная величина $A=F(M)$ векторная (скорость, сила), то и поле ее векторное. Значение скаляра U в каждой точке M определяется величиной и знаком, а вектора $\vec{F}$ — его абсолютной величиной (длиной) и направлением.

Примерами скалярных полей являются поля плотности тела (в каждой точке M тела плотность имеет определенное значение, которое меняется от точки к точке), температуры нагретого тела, давления в атмосфере и др.; примерами векторных полей — поля скорости воды в реке (при течении жидкости в каждый заданный момент времени существует векторное поле скоростей $\vec{F}$), плотности потока тепла в земной коре, плотности электрического поля в проводнике и др.

Если вектор $\vec{F}$ — сила, приложенная к точке M , поле называется силовым. Примеры силовых полей — поле силы тяжести, поле магнитных сил, электромагнитное поле в земле и др.

Соответствие между точками области v и значениями функции A в этих точках устанавливается различными способами, такими же, как и для любой другой функции: аналитическими выражениями функции A в области v ; табличными значениями функции, заданными в зависимости от координат точки M ; различными построениями, показывающими распределение величины A вдоль профиля или в пространстве, например графиками или поверхностями равных значений этой величины.

Поле величин A в области v можно представить в виде воображаемого множества точек этой области и соответствующих им значений величины A , указанных в этих точках числами

в случае скалярного поля $A=U(M)$ или стрелками в случае векторного поля $\vec{A}=\vec{F}(M)$. В дальнейшем будем считать, что величина A в области v — однозначная функция координат, а поле непрерывное, за исключением особых точек, линий или поверхностей, на которых оно терпит разрыв.

Поле A однородно в области v , если во всех точках M этой области значение A одно и то же. В случае векторного поля это означает, что во всех точках M области v абсолютная величина вектора одинаковая.

Поле является переменным, если величина A зависит не только от положения точки в пространстве, но и от времени; в общем случае зависимость величины A от времени различна для различных точек. Поле постоянно, если значения величины A в точках заданной области не зависят от времени. К постоянным полям относятся, например, поле электрических зарядов в пространстве, электрическое поле постоянного тока, магнитное поле постоянного тока. Переменные поля — это магнитное поле Земли, электромагнитные поля.

Деление земных полей на постоянные и переменные в какой-то степени условно. Все зависит от решаемой задачи, вернее, от точности измерения исследуемых величин.

Рассмотрим переменность или постоянство поля на примерах гравитационного и магнитного полей Земли.

Гравитационное и магнитное поля Земли

Гравитационное поле Земли. На основании закона Ньютона о всемирном тяготении две точечные массы m_1 и m_2 притягиваются друг к другу с силой, прямо пропорциональной этим массам и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними r :

$$F = - Gm_1m_2/r^2,$$

где G — гравитационная постоянная.

Примем $m_2=1$, $m_1=m$. Рассмотрим силу притяжения, действующую на единичную массу со стороны массы m :

$$F = - Gm/r^2.$$

Знак минус в этой формуле указывает на то, что сила направлена в сторону массы m , а за положительное направление радиуса-вектора r принято противоположное направление — в сторону единичной массы. Эта величина силы притяжения, отнесенная к единичной массе, является напряженностью поля силы притяжения в данной точке, кроме того, как видно из последней формулы, она численно равна ускорению силы притяжения.

Если рассмотреть сумму притяжений масс, заключенных в объеме Земли v , получим

$$F = -G \int \frac{dm}{r^2} = -G \int \frac{\sigma dv}{r^2},$$

где r — расстояние от притягиваемой точки до массы dm , заключенной в элементе объема dv ; σ — плотность распределения масс ($\sigma = dm/dv$).

Земля вращается вокруг своей оси. Поэтому на тела, находящиеся на поверхности Земли, действует и центробежная сила; возникающая из-за суточного вращения Земли вокруг своей оси. Величину центробежной силы можно определить из равенства

$$C = m\omega^2 r_1,$$

где r_1 — расстояние от точки на поверхности Земли, в которой заключена масса m , до оси вращения Земли (радиус вращения); ω — угловая скорость вращения в рад/с;

$$\omega = 2\pi/86164 \approx 7,3 \cdot 10^{-5}.$$

Здесь 86164 — число секунд в 24 ч. Примем, что масса m равна единице. Тогда величина

$$C = r_1 \omega^2$$

будет характеризовать напряженность центробежной силы или центробежное ускорение.

Сила тяжести Земли равна сумме силы притяжения и центробежной силы:

$$\vec{g} = \vec{F} + \vec{C} = -G \int \sigma \frac{1}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} dv + \vec{r}_1 \omega^2.$$

Так как эта величина отнесена к единичной массе, она является и напряженностью поля силы тяжести Земли, кроме того, она численно равна ускорению свободного падения. Величина g на поверхности Земли меняется от 978,0 (на экваторе) до 983,2 Гал (на полюсах). Из двух компонентов силы тяжести отношение максимального значения центробежной силы к минимальному значению силы притяжения составляет примерно 1 : 288, но в то же время центробежная сила при переходе от полюсов к экватору изменится от 0 приблизительно до 3,4 Гал.

Рассмотрим проекции силы тяжести на оси координат x , y , z . Проекцию центробежной силы на ось x можно определить по формуле

$$C_x = |\vec{C}| \cos(\vec{C}, x) = |\vec{C}| \cos(\vec{r}_1, x) = r_1 \omega^2 x / r_1 = \omega^2 x,$$

где учтены значения

$$r_1^2 = x^2 + y^2; \quad \cos(r_1, x) = x/r_1.$$

Аналогично

$$C_y = \omega^2 y; \quad C_z = 0.$$

Для проекции силы притяжения на ось x найдем

$$F_x = |\vec{F}| \cos(\vec{F}, x) = -|\vec{F}| \cos(\vec{r}, x) = -G \int_v \sigma[(x - \xi)/r^3] dv,$$

где учтено, что

$$\cos(\vec{r}, x) = (x - \xi)/r.$$

Аналогично для составляющих F_y и F_z :

$$F_y = -G \int_v \sigma[(y - \eta)/r^3] dv;$$

$$F_z = -G \int_v \sigma[(z - \zeta)/r^3] dv.$$

Для определения проекций силы тяжести на координатные оси запишем

$$g_x = F_x + C_x; \quad g_y = F_y + C_y; \quad g_z = F_z + C_z.$$

Подставляя в эти равенства найденные выражения для проекций сил $\vec{F}$ и $\vec{C}$, получим

$$g_x = -G \int_v \sigma[(x - \xi)/r^3] dv + \omega^2 x,$$

$$g_y = -G \int_v \sigma[(y - \eta)/r^3] dv + \omega^2 y,$$

$$g_z = -G \int_v \sigma[(z - \zeta)/r^3] dv.$$

Полная величина ускорения свободного падения

$$g = \sqrt{g_x^2 + g_y^2 + g_z^2}.$$

Рассматривая гравитационное поле в целом, можно отметить, что величина и направление силы тяжести в любой точке поверхности Земли непрерывно изменяются со временем. Эти изменения, или вариации, силы тяжести — следствия различных причин. Среди них внутренние причины, связанные с развитием и динамикой Земли, с различными явлениями, происходящими в ее недрах, и внешние, обусловленные влиянием небесных тел, явлениями, происходящими на них.

Вариации, связанные с внешними причинами, вызываются в основном притяжением Луны и Солнца. Эти вариации зависят

от периодически изменяющегося над данной точкой поверхности Земли положения Луны и Солнца. Поэтому и вариации являются периодическими, иначе их называют приливыми (по аналогии с явлением земных приливов). Они имеют относительно большую амплитуду, поэтому их нетрудно измерить. Периодические вариации силы тяжести измеряют экспериментально в соответствующих обсерваториях, их теоретически вычисляют для любого наперед заданного момента времени для любой точки Земли. По этим данным строят соответствующие таблицы и графики, по которым учитывают поправку за солнечно-лунное притяжение при высокоточных гравиметрических измерениях.

Кроме того, изучение приливных вариаций силы тяжести имеет и самостоятельное значение. Дело в том, что если бы Земля была абсолютно жестким телом, величины вычисленных значений вариаций, вызванных положениями Луны и Солнца, точно совпали бы с измеряемыми на поверхности Земли значениями. В действительности же измеряемые значения вариаций силы тяжести больше вычисленных для жесткой Земли. Эти отклонения связаны с упругой деформацией Земли, вызванной влиянием приливных сил. Поэтому, изучая такие отклонения, можно определить упругость вещества земных недр.

Непериодические, или неприливно-е изменения силы тяжести имеют относительно меньшую амплитуду, соизмеримую с погрешностями измерений. Поэтому до сравнительно недавнего времени их наличие ставилось под сомнение. Только после того, как стало возможным проводить гравиметрические измерения с высокой степенью точности, было доказано их существование и измерение неприливных вариаций силы тяжести приобрело практическое значение. Причиной неприливных вариаций силы тяжести могут быть изменения высот пунктов наблюдений в результате опусканий и подъемов поверхности Земли, изменения уровня грунтовых вод, плотности масс атмосферных слоев, перераспределение масс в глубинных слоях Земли, явления, связанные с землетрясениями, вулканическая деятельность и некоторые другие.

Изучение неприливных вариаций силы тяжести приобрело особо важное значение в последние годы, когда работами ряда авторов была показана возможность осуществления эффективного контроля за режимом эксплуатации месторождений нефти и газа, а также газохранилищ, слежения за перемещениями масс в пределах месторождения. Результаты исследования вариаций гравитационного поля позволили предсказать ранее неизвестные пути миграции газа, определить направления изменчивости коллекторских свойств пород, фиксировать факты обводнения пластов в результате эксплуатации месторождения.

Магнитное поле Земли. Наблюдаемое на поверхности Земли магнитное поле — сумма нескольких полей, отличающихся своей природой

$$\vec{H}_T = \vec{H}_0 + \vec{H}_m + \vec{H}_a + \vec{H}_e + \delta\vec{H},$$

где $\vec{H}_0$ — поле, создаваемое однородной намагниченностью земного шара (иначе, дипольное); $\vec{H}_m$ — поле, вызываемое влиянием неоднородностей глубоких слоев земного шара (его называют также полем недипольным, а также полем мировых или материковых аномалий, имея в виду его огромные размеры); $\vec{H}_a$ — поле, вызываемое намагниченностью верхних частей земной коры, — аномальное магнитное поле Земли; $\vec{H}_e$ — поле, создаваемое внешними причинами; $\delta\vec{H}$ — поле вариаций, также связанное с внешними причинами.

Сумма полей дипольного и недипольного называют главным магнитным полем Земли;

$$\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{H}_m.$$

Сумму же полей однородного намагничивания $\vec{H}_0$, мировых аномалий $\vec{H}_m$ и внешнего поля $\vec{H}_e$ называют нормальным магнитным полем Земли:

$$\vec{H}_N = \vec{H}_0 + \vec{H}_m + \vec{H}_e.$$

Здесь величина H_e мала и ею можно пренебречь, поэтому в таких случаях нормальное поле совпадает с главным магнитным полем Земли.

С учетом нормального поля наблюдаемое на поверхности Земли поле можно записать в виде

$$\vec{H}_T = \vec{H}_N + \vec{H}_a + \delta\vec{H}.$$

Отсюда видно, что если исключить поле вариаций, наблюдаемые значения магнитного поля будут значениями нормального и аномального магнитных полей Земли.

Если рассматривать магнитное поле Земли как сумму постоянной и переменной частей, можно записать

$$\vec{H}_T = \vec{H} + \sum_i \delta\vec{H}_i \sin(2\pi t/L_i + \varphi_i),$$

где $\vec{H}_T$ — рассмотренная выше полная напряженность магнитного поля; $\vec{H}$ — напряженность постоянного поля (главного маг-

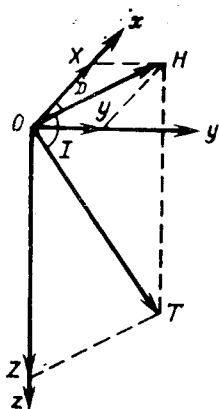


Рис. 1. Элементы геомагнитного поля

нитного поля Земли); $\delta \vec{H}_i$ — амплитуда i -й гармоники переменного поля; L_i — период; φ_i — фазовый угол.

Эта формула верна для промежутков времени, малых по сравнению с историческими эпохами. Период L_i может меняться от сотых долей секунды до нескольких лет. Максимальные значения амплитуды δH_i имеют место для вариаций с периодами 10^4 — 10^2 с. Эти значения не превышают сотых долей H . Поэтому при решении многих задач можно принять $H \gg \delta H_i$, т. е. можно пренебречь переменной частью магнитного поля Земли.

Перейдем от обозначения H , принятого в учении о геомагнетизме, к обозначению T , принятому в магниторазведке. Рассмотрим составляющие полного вектора напряженности геомагнитного поля $\vec{T}$.

Возьмем прямоугольную систему координат с началом в точке измерений, ось z направим вертикально вниз (рис. 1), ось x на географический север, ось y — перпендикулярно к оси x на восток. В такой системе координат проекции вектора $\vec{T}$ на оси x , y , z называют соответственно северной, восточной и вертикальной составляющими магнитного поля Земли и обозначают буквами X , Y , Z . Проекцию полного вектора напряженности на горизонтальную плоскость xOy называют горизонтальной составляющей магнитного поля и обозначают H . При этом, как видно из рисунка,

$$\vec{H} = \vec{X} + \vec{Y}; \quad H^2 = X^2 + Y^2.$$

Направление $\vec{H}$ определяет направление магнитного меридиана, а плоскость, в которой лежат векторы $\vec{H}$ и $\vec{T}$, называется плоскостью магнитного меридиана. Угол между направлением магнитного меридиана в данной точке и некоторым заданным направлением называется магнитным азимутом (он отсчитывается от направления магнитного меридиана по часовой стрелке).

Угол D между направлениями географического и магнитного меридианов называется магнитным склонением (он отсчитывается от направления оси x по направлению движения часовой стрелки), а угол I между направлениями векторов $\vec{H}$ и $\vec{T}$ называется магнитным наклоением (он отсчитывается от горизонтальной плоскости вниз; в северном полушарии вектор $\vec{T}$ направлен вниз, поэтому I — положительный; в

южном полушарии, наоборот, $\vec{T}$ направлен вверх, поэтому угол I — отрицательный). Рассмотренные составляющие X , Y , Z , H , D , I являются элементами земного магнетизма.

В первом приближении магнитное поле Земли можно рассматривать как поле шара, намагниченного по оси, отклоняющейся от оси вращения приблизительно на $11^\circ 5'$. При этом магнитный потенциал шара можно определить как потенциал диполя:

$$U = M \cos \theta / R^2,$$

где M — магнитный момент Земли; R — радиус Земли; $\theta = 90^\circ - \varphi$; φ — магнитная широта.

Напряженность магнитного поля Земли T , значения его вертикальной Z и горизонтальной H составляющих можно определить из равенств:

$$Z = -(\partial U / \partial R) = (2M / R^3) \cos \theta;$$

$$H = -(\partial U / R \partial \theta) = (M / R^3) \sin \theta;$$

$$T = \sqrt{H^2 + Z^2} = (M / R^3) \sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta}.$$

Полный вектор T достигает своего наибольшего значения на полюсах, а наименьшего — на экваторе: на магнитном полюсе при $\theta = 0$

$$T = Z = 2M / R^2, \quad H = 0;$$

на магнитном экваторе при $\theta = 90^\circ$

$$T = H = M / R^3, \quad Z = 0.$$

Магнитная стрелка у магнитных полюсов займет вертикальное положение, а на магнитном экваторе — горизонтальное.

Элементы магнитного поля Земли можно определить по приведенным формулам лишь приближенно. В действительности это поле содержит большое число аномалий различных размеров и характера.

В целом магнитное поле, наблюдаемое на поверхности Земли, является суммой нескольких полей: поля однородно намагниченного шара, или дипольного поля (рассмотренного выше); поля, связанного с неоднородностью глубоких слоев земного шара, — недипольного поля (поле мировых или материковых аномалий); поля, создаваемого намагниченностью верхних частей земной коры, и поля, вызываемого внешними по отношению к Земле причинами.

Все элементы магнитного поля Земли изменяются с течением времени. Эти изменения называются вариациями элементов земного магнетизма. Вариации магнитного поля имеют различные периоды и характер изменения. Медлен-

ные вариации элементов земного магнетизма (изменения среднегодовых значений геомагнитного поля), периоды которых измеряют отрезками времени в сотни лет, называются вековыми. Эти вариации связаны с источниками, находящимися внутри земного шара, и вызваны теми же причинами, которые обуславливают и магнитное поле Земли. Поле, вызванное внешними источниками (токовыми системами в околоземном пространстве), или просто внешнее поле, имеет характер быстротечных вариаций (суточные вариации магнитного поля — солнечно-суточные, лунно-суточные, магнитные бури и другие изменения, годовые вариации). Доля главного поля в общем магнитном поле Земли в среднем более 95%, аномального поля — около 4% и внешнего поля — менее 1%. Внешнее поле Земли является переменным электромагнитным полем Земли, так как оно не только магнитное, но и электрическое. В то же время главное и аномальное поля в короткие промежутки времени можно считать постоянными геомагнитными полями (главное магнитное поле Земли подвержено вековым изменениям, но за короткие промежутки времени ими можно пренебрегать).

Таким образом, магнитное поле Земли в промежутках времени, малых по сравнению с историческими эпохами, можно рассматривать как постоянное поле с наложением на него переменного, амплитуда которого на несколько порядков меньше амплитуды постоянного поля. Поэтому в большинстве случаев при изучении земного магнетизма можно пользоваться законами стационарного (постоянного) поля. В то же время переменная часть магнитного поля вызывает изменения во времени главного магнитного поля. Хотя величина этих изменений по сравнению с величиной постоянной части и незначительна, будучи связанной с другими геофизическими явлениями, происходящими в ионосфере, она дает возможность судить и об этих явлениях и их причинах.

Изучение переменного поля и его закономерностей представляет большой научный и практический интерес, хотя бы потому, что от состояния ионосферы зависит слышимость радиопередающих устройств.

Что же касается гравитационного поля, то практически оно постоянное, но в общем и оно переменное — в нем присутствует переменная часть, связанная с наличием значительных вертикальных движений земной поверхности, достигающих для некоторых районов нескольких сантиметров в год, с изменением плотности пород в недрах Земли в результате расширения вещества из-за радиоактивного разогрева, фазовых превращений, перемещения масс в результате конвекций и др.

Если предположить, например, что пункт наблюдения поднимется или опустится на 10 см, то сила тяжести в этом пункте изменится на 0,03 мГал. Если в 100-километровом плоском слое

плотность изменится на $0,00001 \text{ г/см}^3$, то сила тяжести на поверхности изменится на $0,04 \text{ мГал}$.

Изменение положения масс в недрах Земли при извержениях вулканов, землетрясениях также должно приводить к изменению силы тяжести. В Японии, в районе активных вулканов, были установлены факты скачкообразного изменения силы тяжести более чем на $0,1\text{--}0,2 \text{ мГал}$. Причины этих изменений объясняются подъемом магмы, плотность которой отличается от плотности окружающих масс.

§ 2. СКАЛЯРНОЕ ПОЛЕ И ЕГО ПРОИЗВОДНАЯ

Производная поля по произвольному направлению, уровенная поверхность

Пусть в области v задано скалярное поле $U = U(M)$. В этой области через некоторую точку M в произвольно взятом направлении l проведем линию (рис. 2, а). Найдем значение производной от функции U по этому направлению l . С этой целью рассмотрим значения функции $U(M)$ в самой точке M и в близкой к ней точке M_1 на линии l . Предел отношения

$$[U(M_1) - U(M)] / \Delta M M_1,$$

если он существует, является производной от функции $U(M)$ по направлению l :

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \lim_{M_1 \rightarrow M} \frac{U(M_1) - U(M)}{\Delta M M_1} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta l}.$$

Это мера быстроты изменения величины $U(M)$ в точке M по направлению l .

Будем считать, что в каждой точке M области v имеется производная по любому направлению. Так как таких направле-

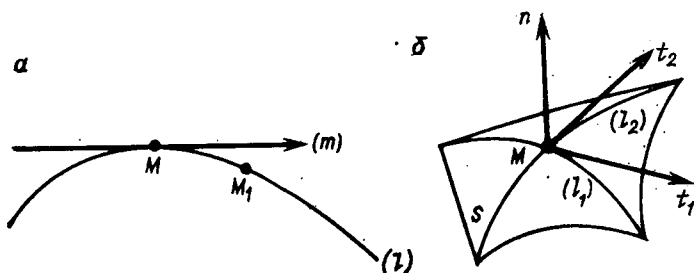


Рис. 2. Схема расположения точек M и M_1 на линии l (а) и трех взаимно перпендикулярных направлений n , t_1 и t_2 в точке M на уровенной поверхности (б)

ний бесчисленное множество, функция $U(M)$ в каждой точке M имеет бесчисленное множество производных.

Но для определения значения производной от U по любому направлению l в точке M , следовательно для характеристики поведения поля U в окрестности этой точки, достаточно знать производные от U по трем произвольно взятым взаимно перпендикулярным направлениям n, t_1, t_2 . В этом случае [полагая $n=f(l), t_1=f(l)$ и $t_2=f(l)$] возьмем производную от функции U по направлению l (по правилу дифференцирования сложной функции):

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \frac{\partial U}{\partial n} \frac{dn}{dl} + \frac{\partial U}{\partial t_1} \frac{dt_1}{dl} + \frac{\partial U}{\partial t_2} \frac{dt_2}{dl}.$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} dn/dl &= \cos(l, n), \quad dt_1/dl = \cos(l, t_1), \\ dt_2/dl &= \cos(l, t_2) \end{aligned}$$

являются направляющими косинусами касательной m к линии l в точке M , получим

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \frac{\partial U}{\partial n} \cos(l, n) + \frac{\partial U}{\partial t_1} \cos(l, t_1) + \frac{\partial U}{\partial t_2} \cos(l, t_2). \quad (I.1)$$

Эта формула выражает производную от функции U по произвольному направлению l через значения производных от U по трем произвольно взятым взаимно перпендикулярным направлениям n, t_1 и t_2 .

Введем понятие уровня поверхности. Уровенной поверхностью, или поверхностью уровня скалярной функции U , называют поверхность S , во всех точках которой U имеет одно и то же постоянное значение. Соединив в области v все точки с некоторым равным значением $U=C$, получим уровенную поверхность. Через каждую точку (не являющуюся особой или экстремальной) можно провести уровенную поверхность, положение которой определяется однозначно. Придавая постоянной C различные численные значения, получим семейство уровенных поверхностей $U(M)=C$.

Таким семейством часто пользуются для изображения поля U . С этой целью уровенные поверхности проводят через одинаковый интервал значений U (сечение уровенных поверхностей).

Часть пространства, заключенную между двумя уровенными поверхностями, называют уровенным слоем. Расстояние по нормали между двумя уровенными поверхностями называют толщиной уровенного слоя.

Пусть S — уровенная поверхность функции U , проходящая через некоторую точку M заданной области v (рис. 2, б). Через

эту точку проведем три линии по трем взаимно перпендикулярным направлениям: направление n — по нормали к поверхности, два других t_1 и t_2 — в касательной к точке M плоскости. Тогда направления t_1 и t_2 (как и любые другие прямые в касательной плоскости) будут касательными к некоторым кривым l_1 и l_2 , принадлежащим уровенной поверхности. Вдоль этих кривых функция $U(M)$ не изменяет своего значения и поэтому производные

$$\partial U / \partial t_1 = \partial U / \partial t_2 = 0. \quad (1.2)$$

Возьмем теперь любое направление l , проходящее через точку M . Применяя формулу (1.1) к трем взаимно перпендикулярным направлениям n , t_1 и t_2 , с учетом равенства (1.2) получаем

$$\partial U(M) / \partial l = \partial U(M) / \partial n \cos(l, n). \quad (1.3)$$

Правая часть равенства (1.3) не что иное, как проекция производной функции U в точке M по нормали на направление l . Поэтому производная по данному направлению от функции U равна проекции производной по нормали на данное направление.

Рассмотрим два частных случая равенства (1.3).

1. Пусть $\cos(l, n) = 0$. Это имеет место при $l \perp n$. Тогда

$$\partial U(M) / \partial l = 0,$$

что говорит о том, что линия l лежит в касательной плоскости, проведенной к точке M уровенной поверхности. Интегрируя, найдем

$$U(M) = \text{const}.$$

Это и есть уравнение уровенной поверхности.

2. Пусть $\cos(l, n) = 1$, т. е. угол между l и n равен нулю, что имеет место только при совпадении направлений l и n . Поэтому

$$\partial U / \partial l = \partial U / \partial n.$$

В этом случае получаем максимальное значение производной — оно наблюдается только по направлению нормали.

Обозначим $\partial U / \partial n = a$.

Переходя к конечным пределам, напишем $\Delta U / \Delta n = a$. Отсюда

$$\Delta n = \Delta U / a. \quad (1.4)$$

Из этого равенства видно, что при $\Delta U = \text{const}$ значение Δn обратно пропорционально величине нормальной производной функции U . Если $\Delta U = \text{const}$ — приращение между значениями функции U на двух ее соседних уровенных поверхностях (сечение уровенных поверхностей), легко догадаться, что Δn — это расстояние между уровенными поверхностями, взятое по

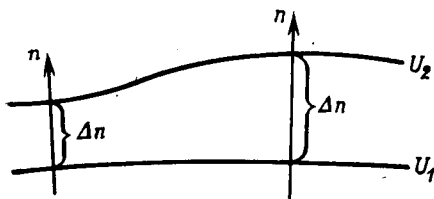


Рис. 3. Уровенные поверхности U_1 и U_2 и расстояние между ними Δn

направлению нормали (толщина уровня). Поэтому при постоянном значении ΔU расстояние между уровнями скалярного поля тем меньше, чем больше значение нормальной производной функции U (рис. 3).

Градиент скалярного поля

Если по направлению n отложить вектор, равный по величине производной $\partial U(M)/\partial n$ с учетом знака $\partial U/\partial n$, то из равенства (1.3) будет видно, что проекция этого вектора на любое направление l равна производной $\partial U(M)/\partial l$. Построенный по такому правилу вектор называется градиентом¹ скалярного поля, или градиентом функции $U(M)$, и обозначается $\text{grad } U(M)$. Тогда (1.3) можно переписать в виде:

$$\partial U(M)/\partial l = \text{grad}_l U(M),$$

где $\text{grad}_l U(M)$ — проекция вектора $\text{grad } U(M)$ на направление l .

Так как длина вектора $\text{grad } U$ равна величине нормальной производной функции $U(M)$, а эта производная соответствует максимальному значению производной $\partial U/\partial l$, вектор $\text{grad } U$ характеризует по направлению и по численному значению наибольшую скорость изменения функции U для данной точки M скалярного поля. Применительно к уровенной поверхности направление градиента всегда указывает на направление наибольшей крутизны подъема этой поверхности скалярного поля.

Выбор направления нормали к поверхности уровня не влияет на направление $\text{grad } U(M)$ — он всегда направлен в сторону возрастания функции.

С использованием понятия $\text{grad } U(M)$ для характеристики поля U в точке M вместо совокупности трех производных от U по трем взаимно перпендикулярным направлениям достаточно знать направление нормали n к поверхности уровня в этой точке и значение производной от U по этому направлению.

¹ Слово «градиент» в переводе означает «уклон». Впервые понятие «градиент» начало применяться в XIX в. в метеорологии в качестве показателя скорости изменения температуры и давления атмосферы.

В декартовых прямоугольных координатах

$$\text{grad } U(M) = \vec{a}(M) = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k}, \quad (1.5)$$

т. е. является вектором, проекции которого на оси координат представляют собой частные производные функции U в точке M :

$$a_x = \partial U / \partial x, \quad a_y = \partial U / \partial y, \quad a_z = \partial U / \partial z. \quad (1.6)$$

Градиент обозначается и как ∇U , где ∇ — оператор Гамильтона — символический вектор:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}.$$

Таким образом, скалярное поле $U(M)$ всегда порождает поле векторов $\vec{a} = \text{grad } U$, которое можно представить как состоящее из множества векторов, выходящих из точек уровня функции U , направленных по нормали в сторону увеличения поля и имеющих длину, равную величине нормальной производной от U в точке M .

Если $\vec{a} = \text{grad } U$, поле векторов $\vec{a}$ называется потенциальным, а скалярная функция U — потенциалом поля [иногда потенциалом называют не функцию $U(M)$, а $-U(M)$]. Для потенциального поля должны выполняться условия (1.6). Необходимые и достаточные условия потенциального поля укажем ниже (после рассмотрения определения ротора векторного поля).

Ввиду важности понятия градиента дадим другое его определение, основанное на применении объемной или пространственной производной. Введем понятие вектора плоской площадки Σ , ограниченной контуром l , вдоль которого установлено положительное направление обхода. Вектором плоской площадки, или направленным элементом поверхности, называется вектор $d\vec{S}$ (рис. 4), модуль которого равен величине dS площадки Σ , а направление выбрано перпендикулярно к Σ так, чтобы от конца вектора положительный обход площадки казался идущим против часовой стрелки. (Выбор положительного направления обхода на контуре площадки связан с выбором лицевой стороны площадки, т. е. стороны от которой отходит вектор $d\vec{S}$, при этом в случае замкнутой поверхности положительное направление обхода площадок выбирается так, чтобы лицевая сторона, от которой отходит вектор $d\vec{S}$, была внешней.) Проекции вектора $d\vec{S}$ на координатные оси



Рис. 4. Направленный элемент поверхности $d\vec{S}$

будут равны проекциям элемента площади поверхности на соответствующие координатные плоскости со знаком плюс или минус в зависимости от того, будет ли угол между нормалью и координатной осью острым или тупым.

Объемной (пространственной) производной скалярного поля в точке M называется величина, получаемая следующим образом: 1) точка M поля U окружается замкнутой оболочкой Σ ; 2) вычисляется интеграл $\oint_{\Sigma} U dS$ по поверхности Σ ; 3) находится предел отношения этого интеграла к объему v , заключенному внутри поверхности Σ , когда этот объем v стремится к нулю (к нулю стремится диаметр тела — расстояние наиболее удаленных друг от друга двух точек тела).

Объемная производная скалярного поля — вектор, являющийся градиентом этого поля. Это свойство можно принять за определение градиента:

$$\text{grad } U = \lim_{v \rightarrow 0} \left[\oint_{\Sigma} U(r) \vec{dS} / v \right], \quad (1.7)$$

где Σ — замкнутая поверхность.

Запишем поверхностный интеграл в числителе этого равенства через объемный. С этой целью выразим вектор $\vec{dS}$ через его проекции по осям координат x, y, z :

$$d\vec{S} = dS_x \vec{i} + dS_y \vec{j} + dS_z \vec{k}.$$

Здесь проекции

$$dS_x = dS \cos(n, x); \quad dS_y = dS \cos(n, y); \quad dS_z = dS \cos(n, z),$$

где учтено, что вектор $\vec{dS}$ имеет направление нормали. Тогда

$$d\vec{S} = [\cos(n, x) \vec{i} + \cos(n, y) \vec{j} + \cos(n, z) \vec{k}] dS. \quad (1.8)$$

Поэтому

$$\oint_{\Sigma} U(r) d\vec{S} = \oint_{\Sigma} U(r) [\cos(n, x) \vec{i} + \cos(n, y) \vec{j} + \cos(n, z) \vec{k}] dS.$$

На основании формулы Остроградского — Гаусса получим

$$\begin{aligned} \oint_{\Sigma} U(r) [\cos(n, x) \vec{i} + \cos(n, y) \vec{j} + \cos(n, z) \vec{k}] dS &= \\ &= \int_v \left(\frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k} \right) dv = \int_v \text{grad } U(r) dv, \end{aligned}$$

где v — объем области, ограниченный поверхностью Σ .

Окончательно найдем

$$\oint_{\Sigma} U(r) d\vec{S} = \int_v \text{grad } U(r) dv.$$

Если подставить это значение поверхностного интеграла в числитель равенства (I.7), оно обратится в тождество, что и доказывает его справедливость.

В случае двумерных (плоских) полей, т. е. когда они не меняются по направлению одной из трех осей (в нашем случае по направлению оси y), формулы (I.5) и (I.7) примут вид

$$\text{grad } U(M) = (\partial U / \partial x) \vec{i} + (\partial U / \partial z) \vec{k};$$

$$\text{grad } U(M) = \lim_{S \rightarrow 0} \left(\oint_l U \vec{dl} / S \right),$$

где l — некоторый замкнутый контур, взятый в плоскости xOz вокруг точки M ; S — площадь сечения, ограниченного контуром l ; $\vec{dl}$ — направленный элемент дуги кривой l , т. е. элемент дуги этой кривой, рассматриваемый как некоторый малый вектор. Проекция его по осям координат равны величинам dx и dz , а выражение под знаком криволинейного интеграла нужно понимать как скалярное произведение $U \vec{dl}$ (в данном случае произведение скаляра на векторную величину). Вектор $\vec{dl}$ имеет направление внешней нормали к l , а длина его равна длине элемента дуги dl .

Рассмотрим следующие примеры.

1. Определим величину $\text{grad } |\vec{r}|$ при

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}; \quad |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Найдем

$$\text{grad } |\vec{r}| = (\partial r / \partial x) \vec{i} + (\partial r / \partial y) \vec{j} + (\partial r / \partial z) \vec{k}.$$

Так как

$$\partial r / \partial x = x/r; \quad \partial r / \partial y = y/r; \quad \partial r / \partial z = z/r,$$

то

$$\text{grad } |\vec{r}| = (x/r) \vec{i} + (y/r) \vec{j} + (z/r) \vec{k} = \vec{r} / |\vec{r}| = \vec{r}_1,$$

т. е. получим поле единичных векторов, имеющих направление радиуса-вектора.

2. Определим величину $\text{grad } \varphi$ при

$$\varphi = a / \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = a/r,$$

где a — некоторая постоянная.

Найдем вначале производные $\partial \varphi / \partial x$, $\partial \varphi / \partial y$ и $\partial \varphi / \partial z$. Получим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{a}{r^2} \frac{x}{r} = -a \frac{x}{r^3}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -a \frac{y}{r^3}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -a \frac{z}{r^3}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\text{grad } \varphi &= (\partial\varphi/\partial x)\vec{i} + (\partial\varphi/\partial y)\vec{j} + (\partial\varphi/\partial z)\vec{k} = \\ &= - (a/r^3) (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = - a\vec{r}/r^3.\end{aligned}$$

Длина этого вектора

$$|\text{grad } \varphi| = a/r^2 = a/(x^2 + y^2 + z^2).$$

При $a = Gm$, где G — гравитационная постоянная, а m — масса, заключенная в начале координат (точечная масса), выражение $\text{grad } \varphi$ определяет силу притяжения между массой m и единичной массой, находящейся на расстоянии r от начала координат. При этом функция φ будет потенциалом поля этой силы.

3. Определим величину $\text{grad } \varphi$, если скалярная функция $\varphi = -\ln(1/r) = \ln r$ при $r = \sqrt{x^2 + z^2}$.

В данном случае (двухмерное или плоское поле)

$$\text{grad } \varphi = (\partial\varphi/\partial x)\vec{i} + (\partial\varphi/\partial z)\vec{k}.$$

Так как

$$\partial\varphi/\partial x = x/(x^2 + z^2); \quad (\partial\varphi/\partial z) = z/(x^2 + z^2),$$

то

$$\text{grad } \varphi = (x\vec{i} + z\vec{k})/(x^2 + z^2) = \vec{r}/r^2.$$

§ 3. ВЕКТОРНОЕ ПОЛЕ И ЕГО ПРОИЗВОДНЫЕ

В каждой точке M пространства v , где задано векторное поле $\vec{F}(M)$, вектор $\vec{F}(M)$ имеет определенную величину и направление. Векторное поле изображают с помощью векторных линий. Векторной линией (рис. 5) называется такая кривая l , в каждой точке которой касательная имеет направление вектора $\vec{F}(M)$.

Через каждую точку M будет проходить одна определенная линия. Семейством векторных линий определяется семейство ортогональных к ним поверхностей, которые называются нормальными поверхностями поля. Ими, так же как и векторными линиями, можно изобразить поле $\vec{F}(M)$.

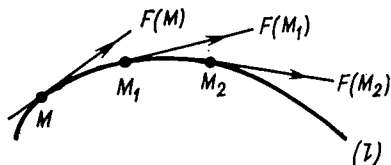


Рис. 5. Векторная линия l

Совокупность линий, проведенных параллельно векторам поля через все точки некоторой (невекторной) линии L , образует векторную поверхность. Если L замкнутая линия, то полученная таким способом векторная поверхность ограничивает некоторую часть пространства, называемую векторной трубкой. В силовом поле векторные линии и трубки называются силовыми линиями и силовыми трубками. Поперечным сечением векторной трубки называют ее сечение поверхностью, нормальной к векторным линиям.

Поток векторного поля

Рассмотрим поток векторного поля через поверхность. Термин «поток» заимствован из гидродинамики, где действительно речь идет о потоке жидкости через поперечное сечение реки или трубы с движущейся жидкостью. В нашем случае, если поле изобразить силовыми линиями, создается впечатление о потоке этих линий через поверхность, взятую в области задания поля. Такое формальное понимание потока весьма полезно для теории и практики.

Если Σ — некоторая замкнутая поверхность, ограничивающая область v , поток вектора $\vec{F}$ через нее определяется числом векторных линий, выходящих из области v наружу (расходящихся из нее), минус число линий, входящих в эту область извне (сходящихся к ней). Считая схождение линий отрицательным расхождением, можно принять, что поток через поверхность Σ определяется числом векторных линий, расходящихся из ограничиваемой ею области v . Если векторные линии проходят через v насквозь, то поток вектора $\vec{F}$ через поверхность Σ равен нулю, следовательно поток через замкнутую поверхность определяется только теми линиями, которые либо начинаются, либо кончаются в области v , — разностью чисел этих линий.

В векторном поле в местах расположения точек обрыва векторных линий находятся источники поля: положительные — истоки там, где векторные линии начинаются, т. е. в местах, откуда они расходятся, и отрицательные — стоки там, где кончаются векторные линии, т. е. в местах их схождения.

Дифференциальные уравнения векторных линий поля имеют вид

$$dx/F_x = dy/F_y = dz/F_z.$$

Интегрируя, можно определить уравнения линий. Для случая двумерного поля, когда оно не зависит от переменной y ,

$$dx/F_x = dz/F_z.$$

Рассмотрим следующие частные случаи.

1. Пусть

$$\vec{F} = -Gm\vec{r}/r^3$$

при

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

что соответствует полю силы притяжения точечной массы. Так как в данном случае

$$F_x = -Gmx/r^3; \quad F_y = -Gmy/r^3, \quad F_z = -Gmz/r^3,$$

подставляя эти значения проекций силы в уравнение векторных линий, найдем

$$dx/x = dy/y = dz/z.$$

Интегрируя их, получим

$$x = C_1 z; \quad y = C_2 z.$$

Отсюда видно, что уравнения векторных линий — это уравнения прямых, проходящих через начало координат. При этом постоянные C_1 и C_2 являются угловыми коэффициентами прямых. Меняя их, получим различные прямые.

2. Этот пример соответствует двумерному полю — полю бесконечной горизонтальной материальной линии.

Пусть

$$\vec{F} = -G\lambda\vec{r}/r^2; \quad \vec{r} = x\vec{i} + z\vec{k},$$

т. е.

$$F_x = G\lambda x/r^2; \quad F_z = G\lambda z/r^2.$$

Подставляя их в уравнение векторной линии, найдем

$$dx/x = dz/z,$$

т. е. получим то же уравнение, что и приведенное выше. Поэтому

$$x = C_1 z.$$

Для уяснения физического смысла потока вектора и определения его величины рассмотрим следующий простой пример. Предположим, что в некотором канале течет вода. Плотность ее всюду постоянна и равна единице. Течение воды будем считать стационарным или установившимся, т. е. таким, что скорость ее частиц в каждой точке не зависит от времени. Определим количество воды, протекающей через некоторую поверхность за единицу времени. Рассмотрим вначале элемент поверхности dS . За некоторый бесконечно малый промежуток времени dt через поверхность dS протечет количество воды

$$dQ = v_n dS dt,$$

где v_n — проекция вектора скорости течения воды на направление внешней нормали $\vec{n}$ к поверхности площадки dS . Это количество воды заполнит объем цилиндра с основанием dS и высотой $v_n dt$. Тогда через всю поверхность Σ за время dt протечет количество воды

$$Q = dt \int_{\Sigma} v_n dS.$$

За единицу времени получим количество воды

$$Q = \int_{\Sigma} v_n dS.$$

Так как

$$v_n = |\vec{v}| \cos(v, n),$$

то

$$v_n dS = |\vec{v}| \cos(v, n) dS = |\vec{v}| \cos(v, n) |\vec{n}_1| dS = (\vec{v} \cdot \vec{n}_1) dS = \vec{v} \cdot \vec{dS},$$

т. е. получили скалярное произведение вектора скорости воды $\vec{v}$ на вектор элемента площади $\vec{dS}$. Здесь учтено, что $\vec{n}_1 \cdot dS = \vec{dS}$ и умножение на модуль единичного вектора $\vec{n}_1$, имеющего направление нормали, не изменит равенство, так как $|\vec{n}_1| = 1$. Тогда окончательно поток воды, протекающей через поверхность dS в единицу времени, можно записать в виде

$$Q = \int_{\Sigma} \vec{v} \cdot \vec{dS}.$$

Отсюда видно, что поток воды через поверхность зависит от величины поверхности, величины вектора скорости $\vec{v}$ и направления этого вектора относительно нормали к поверхности (от величины косинуса угла между $\vec{v}$ и нормалью к поверхности $\vec{n}$). Эти выводы верны для случая произвольной (не замкнутой) поверхности Σ . Если же поверхность Σ замкнутая, величина потока будет равна разности между количеством воды, вытекающей из области, ограниченной поверхностью Σ , и тем количеством воды, которое втекает в эту область. При $Q = 0$ из замкнутой области вытекает столько же воды, сколько в нее втекает. Если же $Q > 0$, из замкнутой поверхности вытекает больше воды, чем втекает в нее, что говорит о наличии источников внутри поверхности, увеличивающих количество воды. Если же $Q < 0$, часть воды внутри поверхности пропадает, т. е. там имеются стоки или места исчезновения воды.

Переходя от потока воды к общему понятию потока вектора $\vec{F}$ через поверхность, величину Q можно записать в виде

$$Q = \int_{\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{S}.$$

В этом случае, как было отмечено выше, поток вектора через поверхность характеризуется числом векторных линий, пересекающих поверхность. В векторном поле различаются два потока через замкнутую поверхность Σ — скалярный поток вектора, связанный со скалярным произведением $(\vec{F} \cdot d\vec{S})$, равный

$$\int_{\Sigma} \vec{F}(M) \cdot d\vec{S},$$

и векторный поток поля, связанный с векторным произведением $[\vec{F} d\vec{S}]$, равный

$$\int_{\Sigma} \vec{F}(M) \times d\vec{S}.$$

Понятие скалярного потока вектора приводит к определению дивергенции, а понятие векторного потока вектора — к определению ротора.

Дивергенция и ротор векторного поля как объемные производные

Дивергенция. Дивергенцией векторного поля является скалярная величина, равная объемной или пространственной производной этого поля в точке M . Она представляет собой предел отношения скалярного потока векторного поля через замкнутую поверхность, окружающую точку M , к объему, ограниченному этой поверхностью, когда вся поверхность стягивается к точке M :

$$\operatorname{div} \vec{F} = \lim_{v \rightarrow 0} \left[\int_{\Sigma} \vec{F}(M) \cdot d\vec{S} / v \right]. \quad (I.9)$$

В координатной форме дивергенция, или расходимость, векторного поля $\vec{F}$ в точке M будет

$$\operatorname{div} \vec{F} = \nabla \vec{F} = \partial F_x / \partial x + \partial F_y / \partial y + \partial F_z / \partial z. \quad (I.10)$$

Идентичность этих двух равенств можно показать следующим образом. Заменим поверхностный интеграл в числителе (I.9) объемным. Записывая скалярное произведение двух век-

торов под интегралом через их проекции с учетом равенства (I.8) получим

$$\begin{aligned}\int_{\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \int_{\Sigma} (F_x dS_x + F_y dS_y + F_z dS_z) = \\ &= \int_{\Sigma} [F_x \cos(n, x) + F_y \cos(n, y) + F_z \cos(n, z)] dS.\end{aligned}$$

Тогда на основании формулы Остроградского — Гаусса найдем

$$\int_{\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_v \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) dv = \int_v \operatorname{div} \vec{F} dv.$$

В пределе, когда $v \rightarrow 0$, из этого равенства и получается формула (I.10): при равенстве объемных интегралов подынтегральные выражения также должны быть равны.

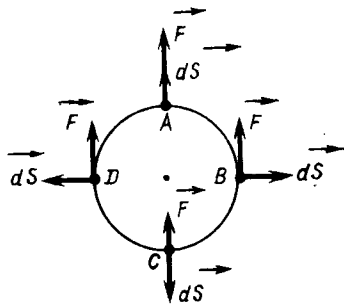
Для определения вклада разных точек поверхности Σ в численное значение дивергенции рассмотрим одно из сечений этой поверхности (можно принять ее за сферу, тогда сечение станет окружностью) (рис. 6). На поверхности выберем четыре точки — A, B, C, D , в которых задано направление вектора $\vec{F}$. В этих же точках построим вектор плоской площадки $d\vec{S}$ и рассмотрим значения скалярного произведения векторов $\vec{F}$ и $d\vec{S}$ [слагаемые суммы числителя выражения (I.9)]. Из рисунка видно, что скалярное произведение

$$\vec{F} \cdot d\vec{S} = |\vec{F}| \cdot |d\vec{S}| \cos(\vec{F}, d\vec{S})$$

равно нулю в точках D и B (из-за того, что векторы $\vec{F}$ и $d\vec{S}$ взаимно перпендикулярны в этих точках, см. прилож. 1). В точках A и C соответственно

$$\vec{F}(A) \cdot d\vec{S} = |\vec{F}(A)| dS; \quad \vec{F}(C) \cdot d\vec{S} = -|\vec{F}(C)| dS.$$

Рис. 6. Схема к определению численного значения дивергенции



Сумма

$$\vec{F}(A) \cdot \vec{dS} + \vec{F}(C) \cdot \vec{dS} = [|\vec{F}(A)| - |\vec{F}(C)|] dS \neq 0,$$

если $|\vec{F}(A)| \neq |\vec{F}(C)|$. Поэтому основной вклад в значения дивергенции вносят точки, в которых векторы $\vec{F}$ и $\vec{dS}$ имеют одинаковые или близкие направления, тогда как вклад точек, в которых векторы $\vec{F}$ и $\vec{dS}$ перпендикулярны, равен нулю.

Дивергенция вектора $\vec{F}$ в точке M определяется числом векторных линий, расходящихся из единицы объема, или густотой точек обрыва векторных линий. Величину дивергенции можно найти для любой точки векторного поля. Отсюда следует, что всякое векторное поле $\vec{F}$ порождает некоторое скалярное поле $\text{div } \vec{F}$, т. е. поле расходимости. Если дивергенция положительная, точка M является источником поля, если же отрицательная — стоком. При этом сама величина дивергенции характеризует мощность (или плотность) источника или стока.

Если в области v $\text{div } \vec{F}(M) = 0$, такое векторное поле в данной области называется соленоидальным, или трубчатым. Для такого поля скалярный поток вектора через любую замкнутую поверхность Σ области v равен нулю. Если брать некоторую векторную трубку в поле, потоки вектора $\vec{F}$ через все (непродольные) сечения этой трубки будут иметь одно и то же значение, следовательно число векторных линий, содержащихся в трубке (пронизывающих ее поперечное сечение), не меняется вдоль трубки.

Соленоидальное, или трубчатое, векторное поле — это поле, не имеющее ни источников, ни стоков. Векторные линии соленоидального поля не могут ни начинаться, ни кончаться; они могут уходить в бесконечность или быть замкнутыми.

Типичное соленоидальное поле — это электромагнитное поле применяемого в электромеханике замкнутого соленоида.

В случае двухмерного, или плоского, поля, т. е. когда значения поля не меняются вдоль оси y , формулы (I.9) и (I.10) можно переписать:

$$\text{div } \vec{F} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{S} \int_l \vec{F} \cdot \vec{dl},$$

где S — площадь области, ограниченной замкнутым контуром l ;

$$\text{div } \vec{F} = \partial F_x / \partial x + \partial F_z / \partial z.$$

А из условия соленоидального поля $\text{div } \vec{F} = 0$ следует, что

$$\partial F_x / \partial x = \partial F_z / \partial z.$$

Рассмотрим следующие примеры.

1. Определим величину $\operatorname{div} \vec{r}$ при

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Найдем

$$\operatorname{div} \vec{r} = \partial r_x / \partial x + \partial r_y / \partial y + \partial r_z / \partial z = 3,$$

что указывает на сумму трех единичных векторов, направленных по осям координат x, y, z .

2. Найдем $\operatorname{div} F$, если вектор

$$\vec{F} = \frac{a}{x^2 + y^2 + z^2} \frac{\vec{r}}{r} = \frac{a\vec{r}}{r^3},$$

где a — постоянная, зависящая от величины аномальных масс;

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Определим вначале проекции вектора $\vec{F}$ на оси координат x, y, z . Получим

$$\vec{F}_x = |\vec{F}| \cos(\vec{F}, x) = |\vec{F}| \cos(r, x) = ax/r^3,$$

где учтено, что вектор $\vec{F}$ направлен по радиусу-вектору $\vec{r}$ и $\cos(r, x) = \partial r / \partial x = x/r$.

Аналогично, учитывая, что

$$\cos(r, y) = y/r; \quad \cos(r, z) = z/r,$$

найдем

$$F_y = ay/r^3, \quad F_z = az/r^3.$$

Тогда для определяемой величины получим

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{F} &= \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = a \frac{r^2 - 3x^2}{r^5} + a \frac{r^2 - 3y^2}{r^5} + a \frac{r^2 - 3z^2}{r^5} = \\ &= a \frac{3r^2 - 3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, в рассматриваемом случае $\operatorname{div} \vec{F} = 0$, следовательно, поле векторов $\vec{F}$ является соленоидальным (при $r \neq 0$).

3. Определим величину $\operatorname{div} \vec{F}$ для двухмерного, или плоского, поля

$$\vec{F} = \vec{r}/r^2, \quad \vec{r} = x\vec{i} + z\vec{k}.$$

Так как

$$\vec{F} = \frac{x}{x^2 + z^2} \vec{i} + \frac{z}{x^2 + z^2} \vec{k},$$

т. е.

$$F_x = x/(x^2 + z^2), \quad F_z = z/(x^2 + z^2),$$

получим

$$\partial F_x / \partial x = (z^2 - x^2) / (x^2 + z^2)^2, \quad \partial F_z / \partial z = (x^2 - z^2) / (x^2 + z^2)^2.$$

Поэтому

$$\operatorname{div} \vec{F} = \partial F_x / \partial x + \partial F_z / \partial z = 0.$$

Отсюда следует, что и данное поле соленоидальное (при $r \neq 0$), оно не имеет ни источников, ни стоков.

Ротор. К определению ротора, или вихря, поля приводит понятие векторного потока векторного поля. Ротор, или вихрь, поля $\vec{F}$ есть вектор, определенный в каждой точке поля и являющийся объемной производной этого поля, взятой с обратным знаком:

$$\operatorname{rot} \vec{F} = - \lim_{v \rightarrow 0} \left[\left(\int_{\Sigma} \vec{F} \times d\vec{S} \right) / v \right]. \quad (1.11)$$

Определим проекции вектора $\vec{C} = \operatorname{rot} \vec{F}$ по направлениям декартовых осей координат. Векторное произведение

$$\begin{aligned} \vec{F} \times d\vec{S} &= (F_y dS_z - F_z dS_y) \vec{i} + (F_z dS_x - F_x dS_z) \vec{j} + \\ &+ (F_x dS_y - F_y dS_x) \vec{k}. \end{aligned}$$

Так как $\vec{C} = \operatorname{rot} \vec{F}$, с учетом проекций вектора $d\vec{S}$

$$C_x = F_y dS_z - F_z dS_y = [F_y \cos(n, z) - F_z \cos(n, y)] dS;$$

$$C_y = F_z dS_x - F_x dS_z = [F_z \cos(n, x) - F_x \cos(n, z)] dS;$$

$$C_z = F_x dS_y - F_y dS_x = [F_x \cos(n, y) - F_y \cos(n, x)] dS.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \vec{F} \times d\vec{S} &= \int_{\Sigma} \{ [F_y \cos(n, z) - F_z \cos(n, y)] \vec{i} + \\ &+ [F_z \cos(n, x) - F_x \cos(n, z)] \vec{j} + \\ &+ [F_x \cos(n, y) - F_y \cos(n, x)] \vec{k} \} dS. \end{aligned}$$

С применением формулы Остроградского — Гаусса после небольших перестановок получим

$$\int_{\Sigma} \vec{F} \times d\vec{S} = \vec{i} \int_v \left(\frac{\partial F_y}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial y} \right) dv + \vec{j} \int_v \left(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z} \right) dv + \\ + \vec{k} \int_v \left(\frac{\partial F_x}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial x} \right) dv.$$

Подставляя это значение интеграла в числитель (I.11), пользуясь теоремой о среднем значении объемного интеграла при $v \rightarrow 0$ и переходя к пределу, найдем

$$\text{rot } \vec{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \vec{k} = \\ = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}. \quad (\text{I.12})$$

Для определения вклада разных точек поверхности Σ в численное значение ротора, или вихря, поля рассмотрим рис. 6. Определим значения векторного произведения векторов $\vec{F}$ и $d\vec{S}$ [слагаемые суммы числителя (I.11)]

$$|\vec{F} \times d\vec{S}| = |\vec{F}| |d\vec{S}| \sin(\vec{F}, d\vec{S})$$

в тех же четырех точках A , B , C и D . Векторы $\vec{F}$ и $d\vec{S}$ совпадают или имеют противоположные направления в точках A и C и перпендикулярны друг другу в точках B и D . Поэтому вклад точек A и C в значение ротора равен нулю. Основной вклад в величину ротора делают точки D и B , в которых векторы $\vec{F}$ и $d\vec{S}$ взаимно перпендикулярны или имеют направления, близкие к этому.

В случае дивергенции все было наоборот (основной вклад в ее значение вносили, как было изложено выше, точки типа A и C). Это объясняет физический смысл того, почему значение $\text{div rot } \vec{F}$, которое рассмотрим ниже, всегда равно нулю.

Если рассмотреть направления векторов $\vec{F} \times d\vec{S}$ в точках D и B , то они противоположны (в точке D вектор перпендикулярен к плоскости рисунка и направлен на нас, в точке B — от нас), т. е. к этим точкам приложена пара сил, которая стремится по-

вернуть рисунок вокруг своей оси (вот откуда возникает крутящая сила вихревых областей поля).

Вектор $\text{rot } \vec{F}$ полностью определяется густотой и направлением линий обрыва нормальных поверхностей. Величина $\text{rot } \vec{F}$ характеризует плотность вихрей поля.

Если поле $\vec{F}$ не меняется вдоль оси y , т. е. если поле двумерное, формулы (I.11), (I.12) можно переписать:

$$\text{rot } \vec{F} = -\lim_{S \rightarrow 0} \frac{\int \vec{F} \times d\vec{l}}{S},$$

где $d\vec{l}$ — направленный элемент дуги; l — некоторый замкнутый контур, взятый вокруг точки M в плоскости xOz (в плоскости, перпендикулярной к направлению простираения тела); S — площадь области, ограниченной линией l . В декартовых координатах

$$\text{rot } \vec{F} = (\partial F_x / \partial z - \partial F_z / \partial x) \vec{j}.$$

Рассмотрим следующие примеры.

1. Определим величину $\text{rot } \vec{F}$, если

$$\vec{F} = \frac{a}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \frac{\vec{r}}{r} = \frac{a\vec{r}}{r^4}, \quad r \neq 0,$$

где a — постоянная, зависящая от гравитационных масс, а вектор

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Определим проекции вектора $\vec{F}$ на оси координат x , y , z :

$$F_x = |\vec{F}| \cos(\vec{F}, x) = \cos(r, x) |\vec{F}|,$$

где учтено, что вектор $\vec{F}$ направлен по r . Так как

$$\cos(r, x) = \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r},$$

то $F_x = ax/r^4$.

Аналогично найдем

$$F_y = ay/r^4, \quad F_z = az/r^4.$$

Тогда на основании (I.12) получим

$$\text{rot } \vec{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

Определим величину, стоящую в первой скобке:

$$\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{az}{r^4} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{ay}{r^4} \right) = \frac{-4ayz}{r^6} + \frac{4ayz}{r^6} = 0.$$

Аналогично найдем

$$\partial F_x / \partial z - \partial F_z / \partial x = 0; \quad \partial F_y / \partial x - \partial F_x / \partial y = 0.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае

$$\text{rot } \vec{F} = 0.$$

2. Определим величину $\text{rot } \vec{F}$, если

$$\vec{F} = (xi + 2zk) / (x^2 + z^2).$$

Отсюда видно, что

$$F_x = x / (x^2 + z^2), \quad F_z = 2z / (x^2 + z^2).$$

Для этой функции $\vec{F}$

$$\text{rot } \vec{F} = (\partial F_x / \partial z - \partial F_z / \partial x) \vec{j}.$$

Входящие сюда производные:

$$\partial F_x / \partial z = -2xz / (x^2 + z^2)^2; \quad \partial F_z / \partial x = -4xz / (x^2 + z^2)^2.$$

Поэтому

$$\text{rot } \vec{F} = \frac{2xz}{(x^2 + z^2)^2} \vec{j}.$$

Объемные производные поля в криволинейных ортогональных координатах

Криволинейные координаты. На практике решение различных дифференциальных уравнений, интегралов удобнее и легче проводить в той системе координат, которая повторяет форму структурных особенностей поля. Рассмотрим случай ортогональной криволинейной системы координат, частным случаем которой являются сферические, цилиндрические и декартовы системы координат.

Обозначим криволинейные координаты через t_1 , t_2 и t_3 . Выразим их в декартовых координатах:

$$t_1 = t_1(x, y, z), \quad t_2 = t_2(x, y, z), \quad t_3 = t_3(x, y, z)$$

и наоборот

$$x = x(t_1, t_2, t_3), \quad y = y(t_1, t_2, t_3), \quad z = z(t_1, t_2, t_3).$$

Пусть точка O — некоторая точка в заданной области пространства. Примем, что относительно этой точки координаты x ,

y , z и t_1 , t_2 , t_3 получили приращения dx , dy , dz и dt , dt_2 , dt_3 . Если отложить эти приращения на соответствующих координатных линиях начиная от точки O , в пространстве получим некоторый малый параллелепипед. В декартовых координатах он будет прямоугольным с плоскими гранями. Таким он будет и в рассматриваемых криволинейных координатах t_1 , t_2 и t_3 вследствие их ортогональности и малости ребер параллелепипеда.

Определим квадрат элемента дуги dl^2 (в нашем случае квадрат большой диагонали параллелепипеда) в декартовой системе координат:

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Выразим его через приращения координат ортогональной криволинейной системы dt_1 , dt_2 и dt_3 . С этой целью перейдем от значений dx , dy и dz к этим приращениям:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial x}{\partial t_2} dt_2 + \frac{\partial x}{\partial t_3} dt_3;$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial y}{\partial t_2} dt_2 + \frac{\partial y}{\partial t_3} dt_3;$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial z}{\partial t_2} dt_2 + \frac{\partial z}{\partial t_3} dt_3.$$

Подставив в равенство для dl^2 эти значения дифференциалов, найдем

$$dl^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial x}{\partial t_2} dt_2 + \frac{\partial x}{\partial t_3} dt_3 \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial y}{\partial t_2} dt_2 + \frac{\partial y}{\partial t_3} dt_3 \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial z}{\partial t_2} dt_2 + \frac{\partial z}{\partial t_3} dt_3 \right)^2.$$

Раскрывая квадраты выражений в скобках в правой части этой формулы, найдем

$$dl^2 = H_1^2 dt_1^2 + H_2^2 dt_2^2 + H_3^2 dt_3^2, \quad (I.13)$$

где

$$\begin{aligned} H_1^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial t_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t_1} \right)^2, \\ H_2^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial t_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t_2} \right)^2, \\ H_3^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial t_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t_3} \right)^2. \end{aligned} \quad (I.14)$$

Все члены с коэффициентами $dt_1 dt_2$, $dt_1 dt_3$, $dt_2 dt_3$ из-за ортогональности линий t_1 , t_2 и t_3 равны нулю, поэтому они и не вошли в рассматриваемую формулу.

В равенстве (I.13) каждый член правой части соответствует квадрату длины одного из трех ребер параллелепипеда. Поэтому длины ребер

$$dl_1 = H_1 dt_1; \quad dl_2 = H_2 dt_2; \quad dl_3 = H_3 dt_3.$$

Тогда площади граней будут

$$dS_1 = H_2 H_3 dt_2 dt_3;$$

$$dS_2 = H_1 H_3 dt_1 dt_3;$$

$$dS_3 = H_1 H_2 dt_1 dt_2,$$

а элемент объема

$$dv = dl_1 dl_2 dl_3 = H_1 H_2 H_3 dt_1 dt_2 dt_3.$$

В полученных выражениях величины H_1 , H_2 и H_3 называются коэффициентами Ламэ.

Дивергенция вектора в криволинейных координатах. Дивергенция поля $\vec{F}$ определяется из равенства

$$\operatorname{div} \vec{F} = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{\sum \int F_n dS}{v},$$

где Σ — поверхность, ограничивающая некоторый объем v вокруг точки M . Применим эту формулу к объему рассмотренного выше элементарного параллелепипеда, полагая, что точка M находится внутри него. Ввиду малости его граней, следовательно, и самого объема дивергенцию, или расходимость, поля можно определить из формулы

$$\operatorname{div} \vec{F} = (dL_1 + dL_2 + dL_3) / dv,$$

где dL_1 , dL_2 и dL_3 — потоки поля через соответствующие пары граней параллелепипеда: dL_1 — через правую и левую, dL_2 — через заднюю и переднюю и dL_3 — через верхнюю и нижнюю, т. е. полный поток поля

$$\int_{\Sigma} F_n dS = dL_1 + dL_2 + dL_3.$$

Определим величины dL_1 , dL_2 и dL_3 . Правая и левая грани перпендикулярны к координатной линии t_1 . При этом на правой грани направление внешней нормали совпадает с направлением t_1 , на левой грани эти направления противоположны. Обозначим проекции вектора $\vec{F}$ на координатные линии (на направления касательных к координатным линиям) t_1 , t_2 и t_3 соответственно через F_1 , F_2 и F_3 . Тогда

$$\begin{aligned} dL_1 &= (F_1 dS_1)_I - (F_1 dS_1)_{II} = (H_2 H_3 F_1 dt_2 dt_3)_I - \\ &- (H_2 H_3 F_1 dt_2 dt_3)_{II} = [(F_1 H_2 H_3)_I - (F_1 H_2 H_3)_{II}] dt_2 dt_3, \end{aligned}$$

где индексы I и II указывают на части потока через первую (правую) и вторую (левую) грани параллелепипеда. Заменяя приращение функции ее дифференциалом, выражение в квадратных скобках можно переписать:

$$\frac{\partial(F_1 H_2 H_3)}{\partial t_1} dt_1.$$

Поэтому

$$dL_1 = \frac{\partial(H_2 H_3 F_1)}{\partial t_1} dt_1 dt_2 dt_3. \quad (I.15)$$

Аналогично определим потоки через соответствующие пары других граней:

$$dL_2 = \frac{\partial(H_1 H_3 F_2)}{\partial t_2} dt_1 dt_2 dt_3;$$

$$dL_3 = \frac{\partial(H_1 H_2 F_3)}{\partial t_3} dt_1 dt_2 dt_3.$$

Суммируя эти потоки и деля на объем параллелепипеда

$$dv = H_1 H_2 H_3 dt_1 dt_2 dt_3,$$

получим искомую величину дивергенции поля:

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial(H_2 H_3 F_1)}{\partial t_1} + \frac{\partial(H_1 H_3 F_2)}{\partial t_2} + \frac{\partial(H_1 H_2 F_3)}{\partial t_3} \right]. \quad (I.16)$$

Эта формула выражает дивергенцию поля в криволинейных ортогональных координатах. С применением ее запишем дивергенцию поля в декартовых, сферических и цилиндрических координатах.

а. В декартовых координатах $H_1 = H_2 = H_3 = 1$ и $t_1 = x$, $t_2 = y$, $t_3 = z$.

Поэтому

$$\operatorname{div} \vec{F} = \partial F_x / \partial x + \partial F_y / \partial y + \partial F_z / \partial z.$$

б. В сферических координатах, когда

$$x = r \sin \theta \cos \varphi; \quad y = r \sin \theta \sin \varphi; \quad z = r \cos \theta,$$

значения

$$t_1 = r, \quad t_2 = \theta, \quad t_3 = \varphi,$$

$$F_1 = F_r, \quad F_2 = F_\theta, \quad F_3 = F_\varphi.$$

Определим H_1 , H_2 и H_3 из (I.14):

$$H_1^2 = (\partial x / \partial r)^2 + (\partial y / \partial r)^2 + (\partial z / \partial r)^2 = (\sin \theta \cos \varphi)^2 + (\sin \theta \sin \varphi)^2 + \cos^2 \theta = 1;$$

$$\begin{aligned}
H_2^2 &= (\partial x / \partial \theta)^2 + (\partial y / \partial \theta)^2 + (\partial z / \partial \theta)^2 = (r \cos \theta \cos \varphi)^2 + \\
&+ (r \cos \theta \sin \varphi)^2 + (-r \sin \theta)^2 = r^2; \\
H_3^2 &= (\partial x / \partial \varphi)^2 + (\partial y / \partial \varphi)^2 + (\partial z / \partial \varphi)^2 = (-r \sin \theta \sin \varphi)^2 + \\
&+ (r \sin \theta \cos \varphi)^2 = r^2 \sin^2 \theta.
\end{aligned}$$

С учетом этих значений H_1 , H_2 и H_3 , полагая $F_1 = F_r$, $F_2 = F_\theta$ и $F_3 = F_\varphi$, из формулы (I.16) найдем

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \vec{F} &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} r^2 \sin \theta F_r + \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta F_\theta) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (r F_\varphi) \right] = \\
&= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 F_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta F_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi}. \quad (I.17)
\end{aligned}$$

в. В цилиндрических координатах

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z;$$

$$t_1 = \rho, \quad t_2 = \varphi, \quad t_3 = z, \quad F_1 = F_\rho, \quad F_2 = F_\varphi, \quad F_3 = F_z.$$

Из (I.14) аналогично тому, как это делалось выше, получим $H_1 = 1$, $H_2 = \rho$, $H_3 = 1$.

Тогда из (I.16) найдем

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \vec{F} &= \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho F_\rho) + \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial z} (\rho F_z) \right] = \\
&= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho F_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}. \quad (I.18)
\end{aligned}$$

Рассмотрим случай двумерного, или плоского, поля, когда $\vec{F}$ не меняется по направлению оси y . В этом случае относя плоскость xOz к полярным координатам ρ и φ , из равенства (I.18) получим

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho F_\rho) + \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} \right].$$

Рассмотрим следующий пример. Предположим, что $\operatorname{div} \vec{F} = 0$. Определим величину $\vec{F}$ из формулы (I.17), полагая, что F зависит только от r . При $F_r = F$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 F) = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial}{\partial r} (F r^2) = 0.$$

Интегрируя, найдем

$$F r^2 = -C \quad \text{или} \quad F = -C/r^2,$$

где C — некоторая произвольная постоянная.

Примем, что поле потенциальное, т. е.

$$\vec{F} = \operatorname{grad} U, \quad \text{т. е.} \quad |\vec{F}| = \partial U / \partial n = \partial U / \partial r,$$

где U — потенциал поля; $\vec{n}$ — нормаль к поверхности. Определим теперь величину потенциала U . Приравняв $\partial U/\partial r$ к полученному выше решению для F , найдем

$$dU/\partial r = -C/r^2.$$

Интегрируя, получим

$$U = C/r + C_1,$$

где C_1 — произвольная постоянная.

Такое поле с найденными выражениями для U и F при $C_1=0$ и коэффициентом C , зависящим от массы, будет соответствовать полю силы притяжения от точечной массы, от однородного сферического слоя для внешних по отношению к телу точек.

Рассмотрим теперь формулу (I.18). Так же как и выше, предположим, что поле $\vec{F}$ зависит только от ρ и что

$$\text{div } \vec{F} = 0, \quad \vec{F} = \text{grad } U.$$

Тогда из (I.18) при $|\vec{F}| = F_\rho$ получим

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho F_\rho) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho F) = 0.$$

Отсюда, интегрируя, найдем $F_\rho = C$ или $F = C/\rho$, где C — некоторая произвольная постоянная. Так как

$$\vec{F} = \text{grad } U, \quad \text{т. е.} \quad |\vec{F}| = \partial U/\partial n = \partial U/\partial \rho,$$

то $\partial U/\partial \rho = C/\rho$. Отсюда

$$U = C \ln \rho + C_1 = -C \ln (1/\rho) + C_1,$$

где C_1 — другая произвольная постоянная. Такое поле (см. гл. II) при соответствующих значениях постоянных C и C_1 будет соответствовать случаю плоского поля силы притяжения от масс, распределенных с постоянной линейной плотностью на бесконечной горизонтальной материальной линии, или от масс однородного бесконечного горизонтального цилиндра.

Градиент скалярного поля U в криволинейных ортогональных координатах. Полученные формулы можно применить для выражения градиента некоторого заданного скалярного поля U в криволинейных ортогональных координатах.

Воспользуемся равенством

$$\text{grad } U = \lim_{v \rightarrow M} \left(\int_{\Sigma} U \vec{dS}/v \right).$$

В случае рассматриваемых криволинейных координат направленный элемент площади можно записать в виде

$$\vec{dS} = dS_1 \vec{e}_1 + dS_2 \vec{e}_2 + dS_3 \vec{e}_3,$$

где dS_1, dS_2, dS_3 — проекции вектора $\vec{dS}$ по направлениям координатных линий t_1, t_2, t_3 ; e_1, e_2, e_3 — единичные векторы, имеющие направления этих линий. Тогда

$$\text{grad } U = \lim_{v \rightarrow 0} \left[\frac{\int_{\Sigma} U dS_1}{v} \vec{e}_1 + \frac{\int_{\Sigma} U dS_2}{v} \vec{e}_2 + \frac{\int_{\Sigma} U dS_3}{v} \vec{e}_3 \right].$$

Из-за малости площади граней и самого объема рассматриваемого элементарного параллелепипеда запишем

$$\text{grad } U = (1/dv)[dL'_1 \vec{e}_1 + dL'_2 \vec{e}_2 + dL'_3 \vec{e}_3], \quad (1.19)$$

где dL'_1, dL'_2, dL'_3 — потоки скалярного поля U по направлениям координатных линий t_1, t_2 и t_3 (через соответствующие пары граней):

$$dL'_1 = \int_{\Sigma} U dS_1; \quad dL'_2 = \int_{\Sigma} U dS_2; \quad dL'_3 = \int_{\Sigma} U dS_3.$$

Величины dL'_1, dL'_2, dL'_3 можно определить так же, как и значения потоков dL_1, dL_2, dL_3 с использованием площадей граней параллелепипеда dS_1, dS_2, dS_3 . Для величины dL'_1 , учитывая, что внешняя нормаль к грани I имеет положительное направление, для грани II — отрицательное, получим

$$dL'_1 = (U dS_1)_I - (U dS_1)_{II}.$$

В отличие от дивергенции, для которой величина скалярного потока векторного поля $\int_{\Sigma} \vec{F} \cdot \vec{dS}$ зависит от косинуса угла между

векторами $\vec{F}$ и $\vec{dS}$, в данном случае такой зависимости нет. Поэтому поток скалярного поля будет зависеть только от изменения функции U . Тогда

$$dL'_1 = (U_I - U_{II}) dS_1.$$

Подставляя сюда найденное значение dS_1 , получим

$$dL'_1 = (U_I - U_{II}) H_2 H_3 dt_2 dt_3.$$

Здесь величина в скобках выражает изменение функции U при переходе от грани I к грани II. Учитывая, что расстояние между гранями мало, запишем

$$U_I - U_{II} = (\partial U / \partial t_1) dt_1.$$

Поэтому

$$dL_1' = (\partial U / \partial t_1) H_2 H_3 dt_1 dt_2 dt_3.$$

Аналогично, определяя потоки скалярного поля через две другие пары соответствующих граней, найдем

$$dL_2' = (\partial U / \partial t_2) H_1 H_3 dt_1 dt_2 dt_3;$$

$$dL_3' = (\partial U / \partial t_3) H_1 H_2 dt_1 dt_2 dt_3.$$

Суммируя найденные потоки поля по направлениям координатных линий t_1, t_2, t_3 и подставляя значение элемента объема

$$dv = H_1 H_2 H_3 dt_1 dt_2 dt_3$$

в (I.19), получим

$$\text{grad } U = \frac{1}{H_1} \frac{\partial U}{\partial t_1} \vec{e}_1 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial U}{\partial t_2} \vec{e}_2 + \frac{1}{H_3} \frac{\partial U}{\partial t_3} \vec{e}_3. \quad (\text{I.20})$$

Эта формула и определяет величину вектора $\text{grad } U$ в криволинейных ортогональных координатах. Рассмотрим частные случаи этой формулы.

а. В декартовых координатах при $H_1 = H_2 = H_3 = 1$,

$$t_1 = x, t_2 = y, t_3 = z, \vec{e}_1 = \vec{i}, \vec{e}_2 = \vec{j}, \vec{e}_3 = \vec{k}$$

получим

$$\text{grad } U = (\partial U / \partial x) \vec{i} + (\partial U / \partial y) \vec{j} + (\partial U / \partial z) \vec{k}.$$

б. В сферических координатах

$$t_1 = r, t_2 = \theta, t_3 = \varphi;$$

$$\vec{e}_1 = \vec{e}_r, \vec{e}_2 = \vec{e}_\theta, \vec{e}_3 = \vec{e}_\varphi.$$

Выше были получены $H_1 = 1, H_2 = r, H_3 = r \sin \theta$. Поэтому

$$\text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi.$$

в. В цилиндрических координатах

$$t_1 = \rho, t_2 = \varphi, t_3 = z;$$

$$\vec{e}_1 = \vec{e}_\rho, \vec{e}_2 = \vec{e}_\varphi, \vec{e}_3 = \vec{e}_z;$$

$$H_1 = 1, H_2 = \rho, H_3 = 1.$$

Поэтому из (I.20) найдем

$$\text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial \rho} \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{e}_z.$$

В полярных координатах на плоскости (для плоского поля) отсюда получим

$$\text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial \rho} \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi.$$

Ротор, или вихрь, поля в ортогональных криволинейных координатах. Полагая, что точка M находится внутри параллелепипеда, определим

$$\text{rot } \vec{F} = - \lim_{v \rightarrow M} \left(\int_{\Sigma} \vec{F} \times \vec{dS} / v \right).$$

Пусть так же, как и выше, векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ единичные, имеющие направление координатных линий t_1, t_2, t_3 . Обозначим через F_1, F_2, F_3 проекции вектора $\vec{F}$ соответственно на эти координатные линии. Аналогично обозначим через dS_1, dS_2, dS_3 проекции вектора $\vec{dS}$ на эти же координатные линии. Тогда

$$\vec{F} = F_1 \vec{e}_1 + F_2 \vec{e}_2 + F_3 \vec{e}_3;$$

$$\vec{dS} = dS_1 \vec{e}_1 + dS_2 \vec{e}_2 + dS_3 \vec{e}_3.$$

Поэтому для векторного произведения

$$\begin{aligned} \vec{F} \times \vec{dS} &= (F_2 dS_3 - F_3 dS_2) \vec{e}_1 + (F_3 dS_1 - F_1 dS_3) \vec{e}_2 + \\ &+ (F_1 dS_2 - F_2 dS_1) \vec{e}_3 = -dC_1 \vec{e}_1 - dC_2 \vec{e}_2 - dC_3 \vec{e}_3, \end{aligned}$$

где

$$dC_1 = F_3 dS_2 - F_2 dS_3;$$

$$dC_2 = F_1 dS_3 - F_3 dS_1;$$

$$dC_3 = F_2 dS_1 - F_1 dS_2.$$

Здесь dC_1, dC_2 и dC_3 — проекции вектора $\vec{dC} = \vec{F} \times \vec{dS}$ соответственно на координатные линии t_1, t_2, t_3 . С учетом этих проекций для определения ротора получим выражение

$$\text{rot } \vec{F} = \lim_{v \rightarrow M} \left[\frac{1}{v} \left(\int_{\Sigma} dC_1 \right) \vec{e}_1 + \frac{1}{v} \left(\int_{\Sigma} dC_2 \right) \vec{e}_2 + \frac{1}{v} \left(\int_{\Sigma} dC_3 \right) \vec{e}_3 \right].$$

Из-за малости объема рассматриваемого параллелепипеда снова заменим интегралы подынтегральными выражениями и, спустив знак предела, так же как и выше запишем

$$\text{rot } \vec{F} = (1/dv) (dC_1 \vec{e}_1 + dC_2 \vec{e}_2 + dC_3 \vec{e}_3). \quad (1.21)$$

Рассмотрим более подробно dC_1, dC_2 и dC_3 . Определим вначале dC_1 . Эта величина является проекцией вектора $\vec{dC}$ на

координатную линию t_1 , поэтому ее нужно определить по граням I и II (правую и левую), перпендикулярным к линии t_1 . Так как направления нормалей на этих гранях противоположные,

$$dC_1 = (dC_1)_I - (dC_1)_{II} = (F_3 dS_2 - F_2 dS_3)_I - (F_3 dS_2 - F_2 dS_3)_{II}.$$

Подставив сюда найденные выше значения dS_1 и dS_3 , получим

$$dC_1 = [(F_3 H_1 H_3) dt_1 dt_3 - (F_2 H_1 H_2) dt_1 dt_2]_I - [(F_3 H_1 H_3) dt_1 dt_3 - (F_2 H_1 H_2) dt_1 dt_2]_{II}.$$

Перегруппируем члены в квадратных скобках. Так как dC_1 — проекция $\text{rot } \vec{F}$ на координатную линию t_1 , значение коэффициента H_1 можно вынести за скобки:

$$dC_1 = [(F_3 H_3)_I - (F_3 H_3)_{II}] H_1 dt_1 dt_2 - [(F_2 H_2)_I - (F_2 H_2)_{II}] H_1 dt_1 dt_2.$$

Ввиду малости расстояния междугранями выражения в квадратных скобках можно переписать через соответствующие дифференциалы:

$$dC_1 = H_1 \left[\frac{\partial(F_3 H_3)}{\partial t_2} - \frac{\partial(F_2 H_2)}{\partial t_3} \right] dt_1 dt_2 dt_3.$$

Аналогично найдем и значения двух других проекций вектора $d\vec{C}$:

$$dC_2 = H_2 \left[\frac{\partial(F_1 H_1)}{\partial t_3} - \frac{\partial(F_3 H_3)}{\partial t_1} \right] dt_1 dt_2 dt_3;$$

$$dC_3 = H_3 \left[\frac{\partial(F_2 H_2)}{\partial t_1} - \frac{\partial(F_1 H_1)}{\partial t_2} \right] dt_1 dt_2 dt_3.$$

Подставив найденные dC_1 , dC_2 и dC_3 в (I.21), с учетом выражения для элемента объема dv найдем

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{F} = & \frac{1}{H_2 H_3} \left[\frac{\partial(F_3 H_3)}{\partial t_2} - \frac{\partial(F_2 H_2)}{\partial t_3} \right] \vec{e}_1 + \frac{1}{H_1 H_3} \left[\frac{\partial(F_1 H_1)}{\partial t_3} - \right. \\ & \left. - \frac{\partial(F_3 H_3)}{\partial t_1} \right] \vec{e}_2 + \frac{1}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial(F_2 H_2)}{\partial t_1} - \frac{\partial(F_1 H_1)}{\partial t_2} \right] \vec{e}_3. \end{aligned} \quad (\text{I.22})$$

Эта формула и выражает вихрь поля через криволинейные ортогональные координаты. Рассмотрим ее частные случаи.

а. В декартовых координатах

$$t_1 = x, \quad t_2 = y, \quad t_3 = z; \quad H_1 = H_2 = H_3 = 1;$$

$$F_1 = F_x, \quad F_2 = F_y, \quad F_3 = F_z.$$

Поэтому из (I.22) найдем

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

б) В сферических координатах

$$t_1 = r, \quad t_2 = \theta, \quad t_3 = \varphi;$$

$$H_1 = 1, \quad H_2 = r, \quad H_3 = r \sin \theta;$$

$$F_1 = F_r, \quad F_2 = F_\theta, \quad F_3 = F_\varphi.$$

При этих значениях координат t и коэффициентов Ламэ из (I.22) получим

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{F} = & \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (F_\varphi \sin \theta) - \frac{\partial F_\theta}{\partial \varphi} \right] \vec{e}_r + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial F_r}{\partial \varphi} - \right. \\ & \left. - \frac{\partial(r F_\varphi)}{\partial r} \right] \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r F_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right] \vec{e}_\varphi. \end{aligned}$$

в. В цилиндрических координатах

$$t_1 = \rho, \quad t_2 = \varphi, \quad t_3 = z;$$

$$H_1 = 1, \quad H_2 = \rho, \quad H_3 = 1;$$

$$F_1 = F_\rho, \quad F_2 = F_\varphi, \quad F_3 = F_z.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{F} = & \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial F_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial F_\varphi}{\partial z} \right) \vec{e}_\rho + \left(\frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial \rho} \right) \vec{e}_\varphi + \\ & + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial(\rho F_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial F_\rho}{\partial \varphi} \right] \vec{e}_z. \end{aligned}$$

§ 4. УСЛОВИЯ ПОТЕНЦИАЛЬНОСТИ ПОЛЯ, ПОТЕНЦИАЛ И ПОТЕНЦИАЛЬНОЕ ПОЛЕ

Потенциальные и квазипотенциальные поля

Выше на основании соотношения

$$\vec{F} = \operatorname{grad} U \quad (I.23)$$

поле было названо потенциальным, а функции U — потенциалом поля $\vec{F}$. Соотношение (I.23) равносильно

$$F_x = \partial U / \partial x, \quad F_y = \partial U / \partial y, \quad F_z = \partial U / \partial z, \quad (I.24)$$

т. е. равносильно тому, что выражение

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = dU$$

является полным дифференциалом некоторой функции U . Для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$\operatorname{rot} \vec{F} = 0, \quad (I.25)$$

т. е. выполнение следующих трех условий, вытекающих из равенства нулю координат вектора $\operatorname{rot} \vec{F}$:

$$\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = 0. \quad (I.26)$$

Таким образом, поле называется потенциальным, если его ротор, или вихрь, в точках заданной области равен нулю. И наоборот, если для поля $\vec{F}$ выполняется условие (I.25), т. е. если оно является потенциальным, всегда найдется такая функция U , что для нее будет выполняться равенство (I.23). При этом связь между проекциями вектора $\vec{F}$ и производными функции U по осям координат будет осуществляться в соответствии с (I.24): производные потенциала U по направлению осей координат будут равняться проекциям вектора $\vec{F}$ на эти же оси. Отсюда следует, что расчет потенциального поля $\vec{F}$ можно заменить расчетом его потенциала U . От последнего по написанным формулам можно перейти к полю $\vec{F}$ дифференцированием функции U по координатам рассматриваемой точки. Практическое значение такого применения потенциала U состоит в том, что рассчитать и исследовать скалярное поле U проще, чем векторное поле $\vec{F}$, определяемое совокупностью трех скалярных полей его компонент F_x , F_y и F_z .

С применением полученных выражений для ротора поля в криволинейных ортогональных координатах, в том числе в сферических и цилиндрических, условия потенциальности поля можно записать в виде:

а) в ортогональных криволинейных координатах t_1 , t_2 и t_3

$$\frac{\partial(F_3 H_3)}{\partial t_2} - \frac{\partial(F_2 H_2)}{\partial t_3} = 0; \quad \frac{\partial(F_1 H_1)}{\partial t_3} - \frac{\partial(F_3 H_3)}{\partial t_1} = 0;$$

$$\frac{\partial(F_2 H_2)}{\partial t_1} - \frac{\partial(F_1 H_1)}{\partial t_2} = 0;$$

б) в сферических координатах r , θ и φ

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (F_\varphi \sin \theta) - \partial F_\theta / \partial \varphi = 0;$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial F_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial (r F_\varphi)}{\partial r} = 0;$$

$$\frac{\partial (r F_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta} = 0;$$

в) в цилиндрических координатах ρ , φ и z

$$\frac{\partial F_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial F_\varphi}{\partial z} = 0;$$

$$\frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial \rho} = 0;$$

$$\frac{\partial(\rho F_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial F_\rho}{\partial \varphi} = 0.$$

Поле, для которого выполняется равенство [5]

$$\vec{F} = \alpha \operatorname{grad} U,$$

где α и U — скалярные функции координат точек области, называется квазипотенциальным. В этом случае полным дифференциалом функции U будет выражение

$$(F_x dx + F_y dy + F_z dz) / \alpha = dU$$

и поле векторов будет отличаться от потенциального поля наличием численного множителя α , имеющего в различных точках области задания различные значения.

Необходимое и достаточное условие квазипотенциального поля — выполнение равенства $\vec{F} \cdot \operatorname{rot} \vec{F} = 0$.

Так как проекциями вектора $\vec{F}$ на оси координат x , y , z являются F_x , F_y и F_z , а проекциями вектора $\operatorname{rot} \vec{F}$ на те же оси — соответственно функции

$$\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y},$$

скалярное произведение векторов $\vec{F}$ и $\operatorname{rot} \vec{F}$ можно записать в виде

$$F_x \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) + F_y \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) + F_z \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) = 0,$$

что имеет место, когда векторы $\vec{F}$ и $\operatorname{rot} \vec{F}$ взаимно перпендикулярны или когда $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$.

Если исследуемое поле $\vec{F}$ двумерное, или плоское, условие потенциальности поля $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$ в декартовых координатах можно переписать: $\partial F_x / \partial z = \partial F_z / \partial x$. А из условий квазипотенциальности поля видно, что двумерные поля всегда квазипотенциальны.

Определение потенциала поля

Вычисление потенциала поля $\vec{F}$, для которого $\text{rot } \vec{F} = 0$, равносильно задаче вычисления функции U по ее полному дифференциалу

$$dU = F_x dx + F_y dy + F_z dz,$$

в котором проекции вектора $\vec{F}$ должны удовлетворять условиям (1.24), т. е. по формуле

$$U = \int_{AB} \vec{F}(r) \vec{dr} = \int_{r_0}^r \vec{F}(r) \vec{dr}, \quad (1.27)$$

где r_0 соответствует некоторой начальной фиксированной точке $A(r_0)$ с координатами (x_0, y_0, z_0) ; r — переменной точке $B(r)$. Этот криволинейный интеграл практически вычисляют по ломаной, составленной из отрезков, параллельных осям координат (величина интеграла не зависит от пути интегрирования):

$$U = U(x_0, y_0, z_0) + \int_{x_0}^x F_x(x, y_0, z_0) dx + \\ + \int_{y_0}^y F_y(x, y, z_0) dy + \int_{z_0}^z F_z(x, y, z) dz.$$

Здесь значение $U(x_0, y_0, z_0)$ можно заменить постоянной C .

Аналогично для плоского поля

$$U = U(x_0, z_0) + \int_{x_0}^x F_x(x, z_0) dx + \int_{z_0}^z F_x(x, z) dz.$$

Рассмотрим несколько примеров.

а. Определить, является ли потенциальным поле силы притяжения от некоторого тела объема v

$$\vec{F} = G \int_v \sigma(\xi, \eta, \zeta) \frac{\vec{r} d\xi d\eta d\zeta}{[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2]^{3/2}}.$$

Так как

$$\vec{r} = (x - \xi)\vec{i} + (y - \eta)\vec{j} + (z - \zeta)\vec{k},$$

то

$$\vec{F} = \vec{i} G \int_v \sigma \frac{x - \xi}{r^3} dv + \vec{j} G \int_v \sigma \frac{y - \eta}{r^3} dv + \vec{k} G \int_v \sigma \frac{z - \zeta}{r^3} dv.$$

Отсюда видно, что проекциями вектора $\vec{F}$ на оси координат x, y, z будут функции

$$F_x = G \int_v \sigma \frac{x - \xi}{r^3} dv; \quad F_y = G \int_v \sigma \frac{y - \eta}{r^3} dv; \quad F_z = G \int_v \sigma \frac{z - \zeta}{r^3} dv.$$

Проверим первое условие из (I.26). Найдем

$$\frac{\partial F_z}{\partial y} = -G \int_v \sigma \frac{3(z - \zeta)(y - \eta)}{r^5} dv;$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial z} = -G \int_v \sigma \frac{3(y - \eta)(z - \zeta)}{r^5} dv.$$

Значения этих производных проекций F_z и F_y равны друг другу. Поэтому

$$\partial F_z / \partial y - \partial F_y / \partial z = 0.$$

Аналогично можно показать, что выполняются и два других равенства выражений (I.26). Следовательно, $\text{rot } \vec{F} = 0$ и поле $\vec{F}$ потенциальное.

б. Проверить, является ли потенциальным поле силы притяжения, величина которой

$$F = \frac{3}{4} GMm \left(\frac{R^2 - r^2}{R^3 r} \ln \frac{r + R}{r - R} + \frac{2}{R^3} \right),$$

где M и m — массы; R — постоянная.

Определим проекции силы $\vec{F}$ на оси координат x, y, z . Так как

$$F_x = |\vec{F}| \cos(F, x) = -|\vec{F}| \cos(r, x) = -|\vec{F}| (x - \xi) / r,$$

то

$$F_x = -D \left(\frac{R^2 - r^2}{R^3 r} \ln \frac{r + R}{r - R} + \frac{2}{R^3} \right) \frac{x - \xi}{r},$$

где

$$D = 3GMm/4.$$

Аналогично найдем

$$F_y = -D \left(\frac{R^2 - r^2}{R^3 r} \ln \frac{r + R}{r - R} + \frac{2}{R^3} \right) \frac{y - \eta}{r};$$

$$F_z = -D \left(\frac{R^2 - r^2}{R^3 r} \ln \frac{r + R}{r - R} + \frac{2}{R^3} \right) \frac{z - \zeta}{r}.$$

Для потенциальности поля необходимо, чтобы выполнялись условия

$$\partial F_z / \partial y = \partial F_y / \partial z; \quad \partial F_x / \partial z = \partial F_z / \partial x; \quad \partial F_y / \partial x = \partial F_x / \partial y.$$

Проверим последнее условие. Определим производные $\partial F_x / \partial y$ и $\partial F_y / \partial x$. После небольших преобразований получим

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{2D}{Rr^4} \ln \frac{r+R}{r-R} (x-\xi)(y-\eta);$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{2D}{Rr^4} \ln \frac{r+R}{r-R} (y-\eta)(x-\xi).$$

Отсюда видно, что $\partial F_x / \partial y = \partial F_y / \partial x$.

Аналогично можно показать, что и два других условия потенциальности также выполняются, следовательно полученная функция $\vec{F}$ потенциальная.

в. В случае двумерной задачи проверить, является ли потенциальным поле силы притяжения

$$\vec{F} = 2G\lambda \vec{r} / r^2,$$

где λ — масса единицы длины аномального тела (бесконечной горизонтальной материальной линии):

$$r = x\vec{i} + z\vec{k}.$$

Так как

$$\vec{F} = 2G\lambda \frac{1}{r^2} (x\vec{i} + z\vec{k}),$$

то

$$F_x = 2G\lambda x / r^2; \quad F_z = 2G\lambda z / r^2.$$

Рассматриваемая аномалия не зависит от y , поэтому и условия потенциальности поля примут простейший вид

$$\partial F_x / \partial z - \partial F_z / \partial x = 0.$$

Взяв производные от F_x по z и от F_z по x , найдем

$$\partial F_x / \partial z = -4G\lambda xz / r^4; \quad \partial F_z / \partial x = -4G\lambda xz / r^4.$$

Значения этих производных равны друг другу, следовательно

$$\partial F_x / \partial z - \partial F_z / \partial x = 0; \quad \text{rot } \vec{F} = 0,$$

т. е. поле $\vec{F}$ потенциальное.

г. Определить потенциал поля $\vec{F} = 2G\lambda \vec{r} / r^2$, принимая $A(x_0, z_0) = A(0, 1)$.

Эта функция $\vec{F}$, как было показано в п. а, потенциальная, и ее проекции

$$F_x = -2G\lambda x / (x^2 + z^2);$$

$$F_z = -2G\lambda z / (x^2 + z^2).$$

Для определения потенциала поля запишем

$$\begin{aligned} U &= \int_{x_0}^x F_x(x, z_0) dx + \int_{z_0}^z F_z(x, z) dz + C = -2G\lambda \int_0^x [x/(x^2 + 1)] dx - \\ &- 2G\lambda \int_1^z [z/(x^2 + z^2)] dz + C = -2G\lambda \left[(1/2) \ln(x^2 + 1) \right]_0^x + \\ &+ (1/2) \ln(x^2 + z^2) \Big|_1^z + C = -(2G\lambda/2) \ln(x^2 + z^2) + \\ &+ C = 2G\lambda \ln[1/(\sqrt{x^2 + z^2})] + C = 2G\lambda \ln(1/r) + C. \end{aligned}$$

При $C=0$ найдем

$$U = 2G\lambda \ln(1/r).$$

Это выражение является логарифмическим потенциалом протяжения бесконечной горизонтальной материальной линии. Его можно определить и при любых других координатах точки $A(x_0, z_0)$, например при $x_0=1$ и $z_0=0$, но нельзя брать $x_0=0$ и $z_0=0$, так как в этом случае получаемая при интегрировании функция $\ln(x^2 + z^2)$ не существует.

Ввиду важности темы определения потенциалов притяжения рассмотрим аналогичный пример и для трехмерного случая.

д. Определить потенциал притяжения поля $\vec{F} = -Gm\vec{r}/r^3$ при $\vec{r} = xi + yj + zk$, т. е. $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $r \neq 0$.

Здесь m — масса тела. Заданная функция силы притяжения является потенциальной, что легко проверить. Ее проекции:

$$F_x = -Gm \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}};$$

$$F_y = -Gm \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}};$$

$$F_z = -Gm \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

В качестве начальной точки интегрирования возьмем точку $A(1, 0, 0)$. Тогда

$$U = -Gm \left[\int_1^x \frac{x}{x^3} dx + \int_0^y \frac{y dy}{(x^2 + y^2 + 0)^{3/2}} + \int_0^z \frac{z dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right] +$$

$$+ C = -Gm \left(-\frac{1}{x} \Big|_1^x - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Big|_0^y - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \Big|_0^z \right) + C = /$$

$$= -Gm \left(1 - \frac{1}{r} \right) + C = -Gm + Gm \frac{1}{r} + C.$$

Принимая $C = Gm$, найдем $U = Gm/r$. Это потенциал притяжения точечной массы.

В заключение выясним физический смысл потенциала поля. С этой целью запишем равенство (I.1) в декартовых координатах. При $n = x$, $t_1 = y$, $t_2 = z$ получим

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \frac{\partial U}{\partial x} \cos(l, x) + \frac{\partial U}{\partial y} \cos(l, y) + \frac{\partial U}{\partial z} \cos(l, z).$$

Здесь косинусы являются направляющими косинусами линии l . Поэтому с учетом (I.24) получим

$$\partial U / \partial l = F_x \cos(l, x) + F_y \cos(l, y) + F_z \cos(l, z) =$$

$$= |\vec{F}| \cos(\vec{F}, l) = F_l,$$

где F_l — проекция вектора $\vec{F}$ на направление l .

Отсюда видно, что производная потенциала по произвольному направлению равна составляющей вектора $\vec{F}$ по этому же направлению. Поэтому равенства (I.24) — частный случай этого общего правила. Кроме того, из полученных равенств следует, что величина приращения $\partial U = F_l \partial l$.

Если $\vec{F}$ — сила, то произведение силы F_l на путь ∂l равно работе. Поэтому приращение потенциала ∂U равно работе, которая производится силой при перемещении единичной массы из одной точки в другую на расстояние ∂l . На основании этого потенциал, определяемый формулой (I.27), будет равен работе, совершаемой силой при перемещении единичной массы из некоторой точки r_0 в точку r .

Предположим теперь, что функция U такая, что $U \rightarrow 0$ при $r_0 \rightarrow \infty$. Примем, что в отдельности $x_0 \rightarrow \infty$, $y_0 \rightarrow \infty$ и $z_0 \rightarrow \infty$. В этом случае $U(r_0) = C = 0$. Равны нулю и значения $F_x(x, \infty)$, $F_y(x, y, \infty)$. Поэтому для таких функций

$$U(x, y, z) = \int_{\infty}^z F_z(x, y, z) dz.$$

Аналогично в двумерном случае

$$U(x, z) = \int_{\infty}^z F_z(x, z) dz.$$

§ 5. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ И ПРИМЕНЕНИЕ ОПЕРАТОРОВ ГАМИЛЬТОНА И ЛАПЛАСА

Соотношения векторного поля

Рассмотрим основные соотношения векторного поля, которыми будем пользоваться в дальнейшем.

1. Для потенциального поля

$$\vec{F} = \text{grad } U, \quad (I.28)$$

причем $F_x = \partial U / \partial x$; $F_y = \partial U / \partial y$; $F_z = \partial U / \partial z$, т. е. проекции вектора $\vec{F}$ на оси координат равны производным функции U по направлению этих же осей, выполняется равенство

$$\text{div } \vec{F} = \text{div grad } U = \Delta U. \quad (I.29)$$

Действительно, так как

$$\text{div } \vec{F} = \partial F_x / \partial x + \partial F_y / \partial y + \partial F_z / \partial z,$$

с использованием выражений (I.10) найдем

$$\text{div grad } U = \partial^2 U / \partial x^2 + \partial^2 U / \partial y^2 + \partial^2 U / \partial z^2 = \Delta U.$$

2. Для поля $\vec{F}$, заданного равенством (I.28), всегда

$$\text{rot } \vec{F} = \text{rot grad } U = 0. \quad (I.30)$$

Справедливость этого равенства, которое является необходимым и достаточным условием потенциальности поля, легко доказать.

В самом деле, так как

$$\text{rot } \vec{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \vec{k},$$

а F_x , F_y и F_z связаны с величиной U соотношениями (I.24), для проекции вектора $\text{rot } \vec{F}$ на ось x найдем

$$\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} = 0.$$

Аналогично можно показать и равенство нулю двух других проекций вектора ротора $\vec{F}$ на оси координат y и z . Это говорит о справедливости равенства (I.30).

3. Другое важное соотношение выполняется для вихревого поля и заключается в том, что всегда

$$\text{div } \vec{F} = \text{div rot } \vec{C} = 0. \quad (I.31)$$

Действительно, так как

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z},$$

а

$$F_x = \frac{\partial C_z}{\partial y} - \frac{\partial C_y}{\partial z}; \quad F_y = \frac{\partial C_x}{\partial z} - \frac{\partial C_z}{\partial x}; \quad F_z = \frac{\partial C_y}{\partial x} - \frac{\partial C_x}{\partial y},$$

то

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{C} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial C_z}{\partial y} - \frac{\partial C_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial C_x}{\partial z} - \frac{\partial C_z}{\partial x} \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial C_y}{\partial x} - \frac{\partial C_x}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Раскрывая скобки, нетрудно убедиться в том, что это выражение равно нулю.

Справедливость (I.31) была показана и при рассмотрении рис. 6, из которого следует, что $\operatorname{rot} \vec{F}$ существует в точках D и B или близких к ним, в которых векторы $\vec{F}$ и $d\vec{S}$ имеют перпендикулярные или близкие к ним направления, тогда как значения дивергенции в указанных точках равны нулю или малы. Наоборот, в значение дивергенции основной вклад вносят точки, расположенные как A и C , в которых значения ротора равны нулю.

В равенстве (I.31) вектор $\vec{F} = \operatorname{rot} \vec{C}$. В этом выражении вектор $\vec{C}$ называется векторным потенциалом поля $\vec{F}$. В отличие от векторного потенциала рассмотренный выше обычный потенциал называется скалярным. Термин просто «потенциал» относится только к скалярному потенциалу. Необходимое условие существования векторного потенциала — равенство нулю дивергенции вектора $\vec{F}$. Векторный потенциал поля $\vec{F}$ является некоторой вспомогательной функцией, сводящей изучение векторного поля $\vec{F}$ к изучению некоторого другого векторного поля $\vec{C}$. Такая замена одного исследуемого вектора другим облегчает процесс изучения поля, а иногда упрощает решение ряда трудных задач. Для примера сравним выражения, определяющие простой, или скалярный, и векторный потенциалы:

$$\vec{A} = \operatorname{grad} U, \quad \operatorname{rot} \vec{A} = \operatorname{rot} \operatorname{grad} U = 0;$$

$$\vec{F} = \operatorname{rot} \vec{C}, \quad \operatorname{div} \vec{F} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{C} = 0.$$

Здесь U — скалярный потенциал векторного поля $\vec{A}$, равенство $\text{rot } \vec{A} = 0$ определяет условия существования этого потенциала. Во второй строке $\vec{C}$ — векторный потенциал поля $\vec{F}$, равенство $\text{div } \vec{F} = 0$ определяет необходимое условие его существования, т. е. если в точках какой-то области поле $\vec{F}$ соленоидальное, оно имеет в этой области векторный потенциал и однозначно им определяется.

Если C_1 — векторный потенциал поля $\vec{F}$, т. е. если $\text{rot } C_1 = \vec{F}$, то и вектор

$$\vec{C} = \vec{C}_1 + \text{grad } \varphi$$

(где φ — произвольная скалярная функция) также будет векторным потенциалом этого поля. Действительно

$$\vec{F} = \text{rot } \vec{C} = \text{rot } \vec{C}_1 + \text{rot grad } \varphi = \text{rot } \vec{C}_1.$$

Векторным потенциалом характеризуется, например, стационарное магнитное поле при наличии сторонних токов. Рассмотрим этот вопрос более подробно.

Как было отмечено выше, амплитуда переменной части магнитного поля Земли слишком мала по сравнению с амплитудой постоянной части. Поэтому и периодические колебания магнитного поля будут очень мало влиять на величину индуцированного электрического поля и при изучении элементов магнитного поля Земли можно пользоваться законами стационарного поля.

Стационарное магнитное поле при наличии сторонних токов удовлетворяет уравнениям

$$\text{rot } \vec{H} = (4\pi/c) \vec{i}; \quad \text{div } \vec{B} = 0; \quad \vec{B} = \mu \vec{H},$$

где $\vec{H}$ и $\vec{B}$ — векторы напряженности магнитного поля и магнитной индукции; $\vec{i}$ — вектор плотности тока; μ — магнитная проницаемость среды; c — электродинамическая постоянная.

Для вакуума $\mu = 1$, $\vec{B} = \vec{H}$, поэтому из второго уравнения получим $\text{div } \vec{H} = 0$. Отсюда видно, что поле $\vec{H}$ соленоидальное, поэтому должен существовать такой вектор $\vec{C}$, для которого $\vec{H} = \text{rot } \vec{C}$. Здесь $\vec{C}$ — векторный потенциал магнитного поля $\vec{H}$. Подставляя найденное значение $\vec{H}$ в первую формулу уравнений поля, получим $\text{rot rot } \vec{C} = (4\pi/c) \vec{i}$. Решение этого уравнения будет рассмотрено ниже.

Для стационарного магнитного поля при отсутствии токов проводимости, т. е. при $\vec{i}=0$, уравнения поля примут вид системы

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \vec{H} &= 0, \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0,\end{aligned}$$

где

$$\vec{B} = \mu \vec{H} = \vec{H}(1 + 4\pi\kappa) = \vec{H} + 4\pi\vec{J},$$

$\vec{J}$ — вектор намагниченности; κ — магнитная восприимчивость.

Из равенства $\operatorname{rot} \vec{H} = 0$ видно, что поле $\vec{H}$ потенциальное и что $\vec{H} = \operatorname{grad} U$, где U — магнитный потенциал (скалярный).

Решение рассматриваемой системы уравнений можно записать в следующем виде. Подставляя решение первого уравнения системы во второе, найдем

$$\operatorname{div} \vec{B} = \operatorname{div}(\vec{H} + 4\pi\vec{J}) = \operatorname{div}(\operatorname{grad} U + 4\pi\vec{J}) = 0.$$

Отсюда получим $\Delta U + 4\pi \operatorname{div} \vec{J} = 0$, или $\Delta U = -4\pi \operatorname{div} \vec{J}$. Здесь величину $\operatorname{div} \vec{J}$ можно рассматривать как объемную плотность фиктивных магнитных зарядов.

Учитывая, что $\vec{J} = \kappa \vec{H}$, найдем

$$\Delta U + 4\pi \operatorname{div}(\kappa \vec{H}) = 0.$$

Легко показать, что

$$\operatorname{div}(\kappa \vec{H}) = \operatorname{div}(\kappa \operatorname{grad} U) = \kappa \Delta U + (\operatorname{grad} \kappa \cdot \operatorname{grad} U).$$

Тогда

$$\begin{aligned}\Delta U + 4\pi \operatorname{div}(\kappa \vec{H}) &= (1 + 4\pi\kappa) \Delta U + \\ &+ 4\pi (\operatorname{grad} \kappa \cdot \operatorname{grad} U) = 0.\end{aligned}$$

Или через μ получим

$$\mu \Delta U + 4\pi (\operatorname{grad} \mu \cdot \operatorname{grad} U) = 0.$$

Отсюда видно, что если μ (то же самое, что и κ) — величина постоянная, это уравнение переходит в уравнение Лапласа $\Delta U = 0$, т. е. в этом случае (для однородных сред) потенциал магнитного поля является еще и гармонической функцией.

Из полученных равенств можно сделать ряд практических выводов. Из них основной — при заданных выше условиях магнитное поле Земли можно считать потенциальным. Безусловно,

это относится к части поля за исключением его малой по амплитуде переменной части, если считать, что она не содержит источников электродвижущих сил. Больше всего этот вывод относится к элементам магнитного поля, наблюдаемым над объектами поисков магниторазведки, из значений которых всегда исключаются суточные вариации поля.

Рассмотрим наиболее часто встречающиеся выражения $\text{rot rot } \vec{F}$ и $\Delta(\varphi\psi)$.

Определим $\text{rot rot } \vec{F}$. Примем $\text{rot } \vec{F} = \vec{C}$; $\text{rot rot } \vec{F} = \vec{A} = \text{rot } \vec{C}$. Определим вначале только составляющую вектора A по оси x , т. е. проекцию A_x . На основании формулы (I.12) получим

$$\begin{aligned} A_x &= \frac{\partial C_z}{\partial y} - \frac{\partial C_y}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) = \\ &= \frac{\partial^2 F_y}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 F_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 F_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial x \partial z}. \end{aligned}$$

Прибавляя и вычитая величину $\partial^2 F_x / \partial x^2$, найдем

$$\begin{aligned} A_x &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial^2 F_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial z^2} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \text{div } \vec{F} - \Delta F_x, \end{aligned}$$

где

$$\Delta F_x = \frac{\partial^2 F_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial z^2}.$$

Аналогично, определяя A_y и A_z , получим

$$\begin{aligned} \vec{A} = \text{rot rot } \vec{F} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \text{div } \vec{F} - \Delta F_x \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial}{\partial y} \text{div } \vec{F} - \Delta F_y \right) \vec{j} + \\ &+ \left(\frac{\partial}{\partial z} \text{div } \vec{F} - \Delta F_z \right) \vec{k} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \text{div } \vec{F} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial}{\partial y} \text{div } \vec{F} \right) \vec{j} + \quad (\text{I.32}) \\ &+ \left(\frac{\partial}{\partial z} \text{div } \vec{F} \right) \vec{k} - \left(\Delta F_x \vec{i} + \Delta F_y \vec{j} + \Delta F_z \vec{k} \right) = \text{grad div } \vec{F} - \Delta \vec{F}, \end{aligned}$$

где $\Delta \vec{F}$ — вектор, составляющие которого равны величинам ΔF_x , ΔF_y и ΔF_z . Отсюда можно определить и $\Delta \vec{F}$:

$$\Delta \vec{F} = \text{grad div } \vec{F} - \text{rot rot } \vec{F}. \quad (\text{I.33})$$

Пусть φ и ψ — некоторые произвольные скалярные функции. Определим $\Delta(\varphi\psi)$:

$$\Delta(\varphi\psi) = \frac{\partial^2(\varphi\psi)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\varphi\psi)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(\varphi\psi)}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial x} + \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial}{\partial y} \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial y} + \psi \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial z} + \psi \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \\
& + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \psi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \psi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \\
& + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \varphi \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \psi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \right. \\
& \left. + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + \varphi \Delta \psi + \psi \Delta \varphi = \\
& = 2(\text{grad } \varphi \cdot \text{grad } \psi) + \varphi \Delta \psi + \psi \Delta \varphi.
\end{aligned} \tag{I.34}$$

Применение операторов Гамильтона и Лапласа

Все основные дифференциальные операции, произведенные над скалярными и векторными полями, и некоторые другие можно записать весьма удобным и запоминающимся способом, применяя особый символ

$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Этот символ был введен английским математиком Гамильтоном и получил название «набла», или «оператор Гамильтона». Являясь символическим векторно-дифференциальным оператором, он сохраняет все свойства и вектора, и знака дифференцирования. Рассмотрим основные случаи применения оператора Гамильтона.

а. Умножение на скалярную функцию U :

$$\nabla U = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) U = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k} = \text{grad } U.$$

В результате такого умножения получается градиент скалярной функции. Как видно из приведенной записи, применение оператора к скалярной функции сводится к взятию производных от нее по осям координат.

б. Скалярное умножение оператора на вектор $\vec{F}$. В результате такого умножения получим дивергенцию вектора

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \vec{F} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \cdot (F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}) = \\
&= \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = \text{div } \vec{F}.
\end{aligned}$$

В этой записи орты набла-вектора заменяются соответствующими проекциями вектора $\vec{F}$, т. е. согласно правилам скаляр-

ного умножения двух векторов получаем сумму произведений соответствующих проекций символического вектора $\vec{\nabla}$ и вектора $\vec{F}$.

в. Векторное умножение оператора Гамильтона на вектор $\vec{F}$. В результате такого умножения получим ротор вектора $\vec{F}$:

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{F} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \times (F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}) = \\ &= \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \vec{k} = \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

г. Применение оператора к произведению двух скалярных функций φ и U :

$$\begin{aligned}\nabla(\varphi \cdot U) &= \text{grad}(\varphi U) = \varphi \nabla U + U \nabla \varphi = \\ &= \varphi \text{grad} U + U \text{grad} \varphi.\end{aligned}$$

д. Применение оператора к произведению скаляра φ на вектор $\vec{F}$:

$$\begin{aligned}\nabla(\varphi \cdot \vec{F}) &= \text{div}(\varphi \vec{F}) = \varphi \nabla \vec{F} + (\vec{F} \cdot \nabla) \varphi = \\ &= \varphi \text{grad} \vec{F} + (\vec{F} \cdot \text{grad}) \varphi.\end{aligned}$$

В операциях определения градиента, дивергенции и ротора участвуют только первые производные от скалярных функций, поэтому эти операции являются дифференциальными операциями первого порядка. Дважды применяя оператор Гамильтона, можно произвести дифференциальные операции второго порядка. Рассмотрим несколько таких операций.

а. Применение оператора Гамильтона скалярно к градиенту потенциала φ . Так как

$$\nabla = (\partial/\partial x) \vec{i} + (\partial/\partial y) \vec{j} + (\partial/\partial z) \vec{k},$$

а

$$\text{grad} \varphi = (\partial \varphi / \partial x) \vec{i} + (\partial \varphi / \partial y) \vec{j} + (\partial \varphi / \partial z) \vec{k},$$

то

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \text{grad} \varphi &= \nabla(\nabla \varphi) = \nabla^2 \varphi = \text{div grad} \varphi = \\ &= \partial^2 \varphi / \partial x^2 + \partial^2 \varphi / \partial y^2 + \partial^2 \varphi / \partial z^2 = \Delta \varphi.\end{aligned}$$

Здесь символический оператор

$$\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$$

является скалярным дифференциальным оператором второго порядка и называется оператором Лапласа, или «лапласианом» от функции φ .

б. Применение оператора Гамильтона векторно к градиенту потенциала:

$$\nabla \times (\nabla \varphi) = \text{rot grad } \varphi = (\nabla \times \nabla) \varphi = 0.$$

Здесь $\nabla \times \nabla = 0$, как векторное произведение двух одинаковых векторов [см. равенство (I.12)].

в. Применение оператора Гамильтона скалярно к вектору $\vec{F}$:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = \text{div rot } \vec{F} = 0.$$

Здесь получили смешанное произведение трех векторов, из которых два вектора одинаковы, а такое произведение равно нулю.

г. Применение оператора Гамильтона векторно к вектору $\vec{F}$:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{F}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F} = \text{grad div } \vec{F} - \Delta \vec{F},$$

где

$$\Delta \vec{F} = \Delta F_x \vec{i} + \Delta F_y \vec{j} + \Delta F_z \vec{k}.$$

При получении этого выражения использована формула векторной алгебры

$$\vec{A} \times (\vec{A} \times \vec{F}) = \vec{A} (\vec{A} \cdot \vec{F}) - (\vec{A} \cdot \vec{A}) \vec{F},$$

так как вектор $\vec{A}$ равен оператору Гамильтона.

В случае двухмерного, или плоского, поля (постоянного вдоль оси y) операторы Гамильтона и Лапласа имеют вид

$$\nabla = \vec{i}(\partial/\partial x) + \vec{k}(\partial/\partial z);$$

$$\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial z^2.$$

Соответственно будут изменяться и выражения, полученные с их применением, например

$$\nabla \times \vec{F} = (\partial F_x/\partial z - \partial F_z/\partial x) \vec{j}.$$

§ 6. УРАВНЕНИЯ, ОПИСЫВАЮЩИЕ ПОЛЯ

Изучение векторного поля $\vec{F}$ можно свести к изучению полей его скалярных компонент. Поэтому поведение поля $\vec{F}$ может быть определено тремя градиентами скаляров F_x , F_y , F_z или девятью производными от этих скаляров по трем направлениям x , y и z . Однако обычно векторное поле $\vec{F}$ характеризуют двумя объемными, или пространственными, производными — дивергенцией и ротором, которые выражаются через эти девять производных.

Уравнениями поля служат уравнения системы, описывающей поле (оно определяется одновременно и дивергенцией и ротором):

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \vec{F} &= \vec{A}, \\ \operatorname{div} \vec{F} &= B,\end{aligned}\tag{I.35}$$

где $\vec{A}$ — вектор; B — скаляр, являющиеся функциями точки пространства, в котором существует поле $\vec{F}$.

Любое векторное поле, обращающее эти уравнения в тождества, при заданных функциях A и B является решением системы уравнений (I.35). Здесь предполагается, что в области задания векторная функция $\vec{F}$ непрерывно дифференцируемая, т. е. имеет там непрерывные частные производные. В этих равенствах векторная функция $\vec{A}$ называется объемной плотностью вихрей поля $\vec{F}$, а скалярная функция B — объемной плотностью источников поля $\vec{F}$.

а. Система (I.35) упрощается для области v , в которой поле $\vec{F}$ не имеет вихрей или источников. При отсутствии вихрей, т. е. когда поле $\vec{F}$ потенциальное,

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \vec{F} &= 0, \\ \operatorname{div} \vec{F} &= B.\end{aligned}\tag{I.36}$$

Так как $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$, должна существовать, как было рассмотрено выше, такая скалярная функция U , для которой

$$\vec{F} = \operatorname{grad} U,$$

причем

$$\partial U / \partial x = F_x, \quad \partial U / \partial y = F_y, \quad \partial U / \partial z = F_z, \quad (I.37)$$

т. е. проекции вектора $\vec{F}$ на оси координат равны производным функции U по направлениям этих же осей. Эта функция $\vec{F}$ и есть решение системы уравнений (I.36). Так как $\operatorname{div} \vec{F} = B$, с использованием равенств (I.37) получим

$$\operatorname{div} \vec{F} = \operatorname{div} \operatorname{grad} U = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \Delta U,$$

т. е. решение сводится к решению уравнения

$$\Delta U = B. \quad (I.38)$$

Это уравнение является уравнением Пуассона, широко применяемым при изучении гравитационных и магнитных полей.

б. Если же

$$\operatorname{rot} \vec{F} = A, \quad (I.39)$$

$$\operatorname{div} \vec{F} = 0,$$

система уравнений описывает соленоидальное, или трубчатое, поле. Так как $\operatorname{div} \vec{F} = 0$, должен существовать такой вектор $\vec{C}$, для которого $\vec{F} = \operatorname{rot} \vec{C}$. Это и есть решение системы (I.39). Подставляя данное значение в первое уравнение системы (I.39), найдем

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{C} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{C} - \nabla^2 \vec{C} = \vec{A}. \quad (I.40)$$

Если положить $\operatorname{div} \vec{C} = 0$, то

$$\nabla^2 \vec{C} = -\vec{A}. \quad (I.41)$$

в. Если в области v возможны нарушения как потенциальности, так и соленоидальности, т. е. когда верна система уравнений (I.35), в этой области можно представить поле $\vec{F}$ как сумму двух полей: потенциального и соленоидального (любое векторное поле $\vec{F}$, достаточно быстро убывающее при удалении в бесконечность, может быть единственным образом разложено на сумму безвихревого и соленоидального полей). Им соответствуют системы (I.36), (I.39), поэтому

$$\vec{F} = \operatorname{grad} U + \operatorname{rot} \vec{C}. \quad (I.42)$$

Здесь $\operatorname{grad} U$ — скалярный потенциал поля $\vec{F}$, а $\operatorname{rot} \vec{C}$ — вектор-

ный потенциал. Если положить $\operatorname{div} \vec{C} = 0$, получим

$$\nabla^2 U = B, \quad \nabla^2 \vec{C} = -\vec{A}. \quad (I.43)$$

г. Наиболее простой вид имеет поле, в котором отсутствуют вихри, и источники. В этом случае, т. е. когда поле и потенциальное, и соленоидальное,

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{F} &= 0, \\ \operatorname{div} \vec{F} &= 0. \end{aligned} \quad (I.44)$$

Для такого поля из равенства (I.38) при $B=0$ найдем

$$\Delta U = \partial^2 U / \partial x^2 + \partial^2 U / \partial y^2 + \partial^2 U / \partial z^2 = 0. \quad (I.45)$$

Это и есть уравнение Лапласа. Решением системы уравнений (I.44) является и функция $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{C} = 0$, т. е. $\nabla^2 \vec{C} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{C}$, которая получается путем подстановки решения второго уравнения (I.44) $\vec{F} = \operatorname{rot} \vec{C}$ в первое.

Векторное поле $\vec{F}$, удовлетворяющее уравнениям (I.45), т. е. являющееся и потенциальным и соленоидальным в некоторой области v , называется также лапласовым векторным полем в v . Пример лапласового поля — потенциальное поле вне источников.

Уравнения электромагнитного поля

Постоянное электромагнитное поле. Магнитное поле описывается векторами $\vec{B}$ и $\vec{H}$, связанными между собой соотношением $\vec{B} = \mu \vec{H}$, где $\vec{B}$ — вектор магнитной индукции; $\vec{H}$ — вектор напряженности магнитного поля; μ — магнитная проницаемость среды.

Электрическое поле описывается тремя векторами: $\vec{E}$ — напряженности электрического поля; $\vec{D}$ — электрической индукции; $\vec{i}$ — плотности тока. При этом

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad \vec{i} = \gamma \vec{E} = \frac{1}{\rho} \vec{E},$$

где ϵ — диэлектрическая проницаемость среды; γ — удельная электропроводность; ρ — удельное сопротивление.

Основной закон постоянного электромагнитного поля — это закон Био — Савара, который в дифференциальной форме имеет вид

$$\operatorname{rot} \vec{H} = 4\pi \vec{i} / c,$$

где c — электродинамическая постоянная. Это уравнение связывает напряженность поля с током в данной точке. Из него видно, что магнитное поле является вихревым в точках, в которых имеются токи, и безвихревым в точках отсутствия токов. Закон Био — Савара в интегральной форме

$$\oint \vec{H} dl = 4\pi \vec{I} / c,$$

где I — величина тока.

Рассматривая совместно постоянные магнитное и электрическое поля, получим систему уравнений, описывающую эти поля:

$$\text{rot } \vec{H} = 4\pi \vec{i} / c, \quad \text{rot } \vec{E} = 0;$$

$$\text{div } \vec{B} = 0, \quad \text{div } \vec{D} = 4\pi \rho.$$

Эта система содержит пять неизвестных векторных функций. Некоторые из них взаимосвязаны. С учетом этой связи приведенная система уравнений сводится к двум системам уравнений (I.36) и (I.39), рассматриваемым совместно. Остановимся более подробно на системе уравнений переменного электромагнитного поля.

Переменное электромагнитное поле. Рассмотрим вначале первые два уравнения системы — первые два уравнения Максвелла. Два основных уравнения электродинамики, которые являются обобщением известных законов Био — Савара и Фарадея, можно записать в виде

$$\int_l H_l dl = \frac{4\pi}{c} \int_S I_n dS; \quad (\text{I.46})$$

$$\int_l E_l dl = - \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_S B_n dS. \quad (\text{I.47})$$

Здесь c — скорость света в пустоте; H_l и E_l — проекции векторов $\vec{H}$ и $\vec{E}$ на направление касательной к контуру l (l — произвольный замкнутый контур; S — поверхность, ограниченная им). Уравнение (I.46) связывает циркуляцию вектора магнитной силы вдоль контура некоторой поверхности S с величиной потока вектора полного тока $\vec{I}$ через поверхность. Уравнение (I.47) связывает циркуляцию вектора электрической силы $\vec{E}$ с производной по времени от потока вектора магнитной индукции $\vec{B}$ через поверхность.

Применим к левым частям (I.46) и (I.47) формулу Стокса:

$$\int_l H_l dl = \int_S \text{rot}_n \vec{H} dS;$$

$$\int_l E_l dl = \int_S \text{rot}_n \vec{E} dS.$$

Тогда

$$\int_S \text{rot}_n \vec{H} dS = \frac{4\pi}{c} \int_S I_n dS;$$

$$\int_S \text{rot}_n \vec{E} dS = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_S B_n dS,$$

или

$$\int_S \left(\text{rot}_n \vec{H} - \frac{4\pi}{c} I_n \right) dS = 0;$$

$$\int_S \left(\text{rot}_n \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{dB_n}{dt} \right) dS = 0.$$

Эти уравнения верны для любого контура, включая и элементарный, ограничивающий элемент поверхности dS . На основании этого можно принять, что приводимые интегралы равны нулю из-за равенства нулю их подинтегральных выражений. Поэтому

$$\text{rot}_n \vec{H} = \frac{4\pi}{c} I_n;$$

$$\text{rot}_n \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial B_n}{\partial t}.$$

Здесь нормаль $\vec{n}$ к поверхности S имеет произвольную ориентировку, так как поверхность S произвольная. Поэтому можно записать

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \left[\vec{i} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{D}}{4\pi} \right) \right]; \quad (1.48)$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{d\vec{B}}{dt}, \quad (1.49)$$

где в (1.48) значение I заменено:

$$\vec{I} = \vec{i} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{D}}{4\pi} \right).$$

Здесь $\vec{i}$ — плотность тока проводимости; $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{D}}{4\pi} \right)$ — плотность тока смещения; I — плотность полного тока, или полный ток.

Равенства (1.48) и (1.49) — это первое и второе уравнения Максвелла в дифференциальной форме. При этом первое уравнение выражает тот факт, что магнитное поле создается не только при перемещении электрических зарядов, но и при изменении электрического поля во времени. Второе уравнение от-

ражает факт возникновения электрического поля при изменении во времени магнитного поля, т. е. является дифференциальной формой записи закона электромагнитной индукции Фарадея.

Другие два уравнения Максвелла (соответственно третье и четвертое) следуют из интегральных уравнений

$$\oint_S D_n dS = 4\pi q; \quad (I.50)$$

$$\oint_S B_n dS = 0. \quad (I.51)$$

Здесь (I.50) выражает поток электрической индукции через замкнутую поверхность S — он равен $4\pi q$, где q — полный заряд, заключенный внутри этой поверхности. Поэтому эта формула описывает электрическое поле, существующее вокруг зарядов. Уравнение (I.51) говорит об отсутствии магнитных зарядов. Запишем (I.50) и (I.51) в дифференциальной форме. С этой целью рассмотрим следующие пределы в случае, когда поверхность S стягивается к некоторой точке M внутри области, в которой находится заряд q :

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{1}{v} \oint_S D_n dS = \operatorname{div} \vec{D};$$

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{1}{v} \oint_S B_n dS = \operatorname{div} \vec{B}.$$

Здесь v — объем, ограниченный поверхностью S .

Рассматриваемые пределы дают значения объемных производных векторных полей $\vec{D}$ и $\vec{B}$ — пределы отношений скалярных потоков этих векторных полей через замкнутую поверхность S , окружающую точку M , к объему v , ограниченному этой поверхностью, когда последний стремится к нулю. По определению, эти пределы соответствуют дивергенции векторов $\vec{D}$ и $\vec{B}$. Беря такой же предел от правой части (I.50), найдем

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{4\pi q}{v} = 4\pi \lim_{v \rightarrow 0} \frac{q}{v} = 4\pi \rho,$$

где ρ — плотность электрического заряда. Поэтому уравнения (I.50) и (I.51) в дифференциальной форме можно переписать:

$$\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi \rho; \quad (I.52)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (I.53)$$

Объединяя эти формулы с равенствами (I.48) и (I.49), окончательно запишем

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{4\pi}{c} \left[\vec{i} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{D}}{4\pi} \right) \right], \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= - \frac{1}{c} \frac{d\vec{B}}{dt}, \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0, \quad \operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho.\end{aligned}\tag{I.54}$$

Эта система уравнений определяет систему уравнений электродинамики, или систему уравнений Максвелла. Ей в интегральной форме соответствуют уравнения (I.46), (I.47), (I.50), (I.51), которые выражают соотношения между величинами, относящимися к различным точкам пространства, конкретнее, между точками поверхности S и контура l и только между точками поверхности S . Уравнения в дифференциальной форме выражают соотношения между величинами, относящимися к одной и той же точке, — между их значениями, характеризующими окрестность этой точки.

Система уравнений (I.54) отличается от системы соответствующих четырех уравнений для случая постоянного электромагнитного поля тем, что она учитывает и возбудители переменного поля — вихри поля $\vec{H}$, возникающие в местах изменений электрической индукции $\vec{D}$, и вихри поля $\vec{E}$, возникающие в местах изменения магнитной индукции $\vec{B}$. В частном случае, когда в первых двух уравнениях системы (I.54)

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{D}}{4\pi} \right) = 0, \quad \frac{d\vec{B}}{dt} = 0,$$

из нее получается система уравнений постоянного поля.

В изотропной среде система уравнений Максвелла (I.54) дополняется соотношениями, связывающими $\vec{i}$, $\vec{D}$, $\vec{B}$:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}, \quad \vec{i} = \gamma (E + E_{\text{ст}}).$$

Эти соотношения такие же, как и в случае постоянного поля. Здесь функция $E_{\text{ст}}$ — часть вектора поля, соответствующая стороннему полю. Система уравнений (I.54) — наиболее общая. Из нее в различных частных случаях можно получить уравнения, описывающие те или иные поля, связанные с различными явлениями или процессами в природе. Рассмотрим несколько наиболее важных частных случаев.

а. Волновые уравнения. Принимая $\vec{B} = \mu \vec{H}$, $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, следовательно $\partial \vec{D} / \partial t = \epsilon \partial \vec{E} / \partial t$, перепишем равенства (I.48) и (I.49) только через векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в виде ($\vec{i} = \gamma \vec{E}$)

$$c \operatorname{rot} \vec{H} = 4\pi\gamma \vec{E} + \varepsilon \partial \vec{E} / \partial t; \quad (1.55)$$

$$c \operatorname{rot} \vec{E} = -\mu \partial \vec{H} / \partial t. \quad (1.56)$$

Применяя операцию ротора к обеим частям последнего равенства, найдем

$$c \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\mu \frac{\partial \operatorname{rot} \vec{H}}{\partial t}.$$

Так как

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} - \Delta \vec{E},$$

то

$$c (\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} - \Delta \vec{E}) = -\mu \partial \operatorname{rot} \vec{H} / \partial t.$$

С учетом равенства (1.55) запишем

$$c^2 (\Delta \vec{E} - \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E}) = \mu \frac{\partial}{\partial t} \left(4\pi\gamma \vec{E} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

или

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \frac{4\pi\gamma}{\varepsilon} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{c^2}{\mu\varepsilon} (\Delta \vec{E} - \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E}). \quad (1.57)$$

При отсутствии электрических зарядов, т. е. в случае, когда $\operatorname{div} \vec{E} = 0$, из (1.57) получим

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \frac{4\pi\gamma}{\varepsilon} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{c^2}{\mu\varepsilon} \Delta \vec{E}. \quad (1.58)$$

Точно такое же уравнение получим и для вектора $\vec{H}$, если применим операцию ротора к первому уравнению Максвелла (1.55):

$$\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} + \frac{4\pi\gamma}{\varepsilon} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \frac{c^2}{\mu\varepsilon} \Delta \vec{H}. \quad (1.59)$$

Эти уравнения являются волновыми уравнениями для случая однородной изотропной среды, в которой плотность зарядов ρ равна нулю. Они называются также телеграфными, так как их впервые применили при изучении распространения тока по кабелю.

Если в (1.58) принять $\gamma = 0$, получим

$$\partial^2 \vec{E} / \partial t^2 = (c^2 / \mu\varepsilon) \Delta \vec{E}. \quad (1.60)$$

Это — волновое уравнение для непроводящей среды (совершенный диэлектрик). Если в (I.60) заменить E функцией, характеризующей сжатие или разрежение в среде или относительное изменение плотности при движении, получим уравнение, описывающее закон распространения звука в воздухе.

б. Уравнение теплопроводности. Предположим, что в (I.58) и (I.59) вторые производные по времени

$$\partial^2 \vec{E} / \partial t^2 = 0; \quad \partial^2 \vec{H} / \partial t^2 = 0.$$

Тогда эти равенства переписутся в виде

$$\Delta \vec{E} = \frac{4\pi\gamma\mu}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; \quad (I.61)$$

$$\Delta \vec{H} = \frac{4\pi\gamma\mu}{c^2} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \quad (I.62)$$

Полученные уравнения являются уравнениями теплопроводности, так как уравнения такого типа (при замене E или H полем температур среды) описывают теплопередачу в среде. Уравнения (I.61) и (I.62) можно получить из (I.48), (I.49) совершенно так же, как и волновые уравнения, если пренебречь в них плотностью тока смещения, т. е. величиной $\partial \vec{D} / \partial t$. Для этого необходимо, чтобы поле изменялось достаточно медленно и чтобы электропроводность среды была бы относительно большой, т. е. величина $\frac{\partial}{\partial t} (\vec{D} / 4\pi)$ в (I.48) должна быть относительно малой по сравнению с $\vec{i}$.

Уравнения Пуассона и Лапласа

Для случая постоянного поля, когда $\vec{E}$ и $\vec{H}$ не зависят от времени, из (I.56) получим

$$\text{rot } \vec{E} = 0,$$

т. е. E — соответствует потенциальному полю. Поэтому, как было показано выше, должна существовать такая скалярная функция (потенциал поля), что

$$\text{grad } U = \vec{E}.$$

Подставив эту функцию в четвертое уравнение из системы (I.54) и заменив вектор $\vec{D}$ согласно формуле

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E},$$

найдем

$$\operatorname{div} \vec{D} = \operatorname{div} (\epsilon \vec{E}) = \epsilon \operatorname{div} \operatorname{grad} U = \epsilon \Delta U = 4\pi\rho.$$

Отсюда

$$\Delta U = 4\pi\rho/\epsilon. \quad (I.63)$$

Это уравнение является уравнением Пуассона. Оно будет получено ниже. В частном случае, когда плотность $\rho=0$, из (I.63) следует уравнение Лапласа $\Delta U=0$.

Эти уравнения Пуассона и Лапласа имеют важное значение в теории потенциала и широко применяются при изучении элементов гравитационного и магнитного полей. Уравнение Пуассона для случая потенциалов силы притяжения

$$\Delta U = \partial^2 U / \partial x^2 + \partial^2 U / \partial y^2 + \partial^2 U / \partial z^2 = -4\pi G\sigma, \quad (I.64)$$

где σ — плотность распределения масс. Оно описывает скалярные поля потенциалов в точках областей, занятых массами, т. е. внутри масс. В общем случае согласно системе уравнений (I.36) и ее решению (I.38) можно утверждать: если поле $\vec{F}$ удовлетворяет уравнениям $\operatorname{rot} F=0$, $\operatorname{div} F=B$, то оно однозначно определяется одной функцией U , такой, что $\vec{F} = \operatorname{grad} U$, а величина $\Delta U=B$ (в нашем случае $B=-4\pi G\sigma$).

В области отсутствия масс потенциал силы притяжения удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta U = \partial^2 U / \partial x^2 + \partial^2 U / \partial y^2 + \partial^2 U / \partial z^2 = 0. \quad (I.65)$$

Как было показано выше, это уравнение — частный случай уравнения Пуассона и получается из него при $\sigma=0$.

Функции U , заданные в некоторой области пространства v и удовлетворяющие в ней уравнению Лапласа (при условии существования и непрерывности первых и вторых производных функции U по осям координат), называются гармоническими в этой области. Гармоническими называются и поля, удовлетворяющие условиям (I.44), т. е. являющиеся одновременно и потенциальными, и трубчатыми.

В случае двухмерных аномалий, когда массы распределены с постоянной плотностью параллельно оси y (плоские поля), уравнения Пуассона и Лапласа примут вид

$$\partial^2 U / \partial x^2 + \partial^2 U / \partial z^2 = -4\pi G\sigma; \quad \partial^2 U / \partial x^2 + \partial^2 U / \partial z^2 = 0.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Что такое уровенная поверхность и уровенный слой?
2. Что такое градиент скалярного поля? По какой формуле он определяется? С каким направлением совпадает направление градиента в пространстве? Как связан градиент с потоком поля?

3. Что такое дивергенция поля? Как можно определить дивергенцию вектора? Какое поле называется соленоидальным, или трубчатым? Как связана дивергенция с потоком поля?

4. Что такое ротор, или вихрь, поля? Как можно определить вихрь поля? Какое поле называется потенциальным? Как связан вихрь с потоком поля?

5. Какие условия необходимы и достаточны для потенциальности поля? Как можно определить потенциал поля? Как можно определить силу притяжения через потенциал поля?

6. Какое поле называется квазипотенциальным? Какой физический смысл имеет потенциал притяжения? Что такое векторный потенциал? Чем он отличается от скалярного потенциала?

7. Какими уравнениями можно задавать поле в общем виде, потенциальное и соленоидальное поля?

8. Какие поля описывают уравнения Пуассона и Лапласа?

§ 7. ПОТЕНЦИАЛ ПРИТЯЖЕНИЯ ТОЧЕЧНОЙ МАССЫ И СИСТЕМЫ ТОЧЕЧНЫХ МАСС

Объемная гравитационная и точечная массы

Будем считать, что массы, занимающие некоторую заданную область пространства (объем v), распределены в ней непрерывно с некоторой объемной плотностью σ таким образом, что существует предел

$$\lim_{\Delta v \rightarrow 0} \sigma \Delta v = \Delta m,$$

где Δv и Δm — элементы объема и массы, взятые с центром в некоторой точке объема $M(\xi, \eta, \zeta)$. Отсюда $\sigma = dm/dv$. Здесь плотность σ — функция точки M , т. е. координат точки ξ, η, ζ . Она всюду внутри поверхности S , ограничивающей объем v , является непрерывной и ограниченной функцией. Вне поверхности S она равна нулю, т. е. при переходе из внутренней области во внешнюю значение плотности меняется скачкообразно. Общая масса тела

$$m = \int_v \sigma dv.$$

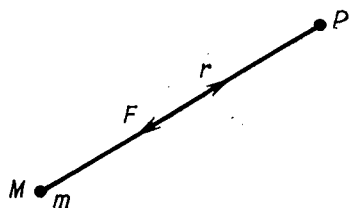
Если плотность постоянна, то $m = \sigma v$.

В случаях, когда размерами тела можно пренебречь, т. е. когда расстояние между двумя наиболее удаленными друг от друга точками тела мало по сравнению с r (r — расстояние между точкой M и точкой P , в которой рассматривается притяжение тела), массу тела можно принять за точечную, помещенную в точку M .

Потенциал притяжения точечной массы

Пусть задана область пространства v , ограниченная замкнутой поверхностью S . Переменную точку с координатами ξ, η, ζ в области v обозначим через M . Будем считать, что точка M принадлежит массам и является центром притяжения, поэтому назовем ее притягивающей. Пусть точка P с координатами x, y, z подвергается действию сил, т. е. является притягиваемой.

Рис. 7. Точечная масса m и направления векторов $\vec{F}$ и $\vec{r}$



Точка $P(x, y, z)$ обычно фиксированная, она может находиться внутри поверхности S , на ней или вне ее (рис. 7).

Будем рассматривать силу притяжения как вектор, приложенный к точке P и направленный к точке M (к массам). За положительное направление радиуса-вектора $\vec{r}$ примем направление от точки M к точке P (от масс к притягиваемой точке), т. е. начало его совместим с точкой $M(\xi, \eta, \zeta)$, а конец с точкой $P(x, y, z)$:

$$\vec{r} = (x - \xi)\vec{i} + (y - \eta)\vec{j} + (z - \zeta)\vec{k},$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — единичные векторы, имеющие направления осей координат; $x - \xi, y - \eta, z - \zeta$ — составляющие радиуса-вектора по осям координат.

Величина и направляющие косинусы $\vec{r}$ определяются по формулам

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}, \\ \cos \alpha &= dr/dx = (x - \xi)/r, \\ \cos \beta &= dr/dy = (y - \eta)/r, \\ \cos \gamma &= dr/dz = (z - \zeta)/r. \end{aligned} \tag{II.1}$$

Если рассмотреть производные от некоторой заданной исследуемой функции $f(r)$ по координатам x, y, z и ξ, η, ζ , легко убедиться, что

$$\frac{\partial f(r)}{\partial x} = -\frac{\partial f(r)}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial f(r)}{\partial y} = -\frac{\partial f(r)}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial f(r)}{\partial z} = -\frac{\partial f(r)}{\partial \zeta}.$$

Пусть в точке $M(\xi, \eta, \zeta)$ находится частица с массой m , а в точке $P(x, y, z)$ — единичная масса. В этом случае на точку P по закону Ньютона действует сила, численно равная

$$F = -Gm/r^2. \tag{II.2}$$

Знак минус в этой формуле учитывает, что $\vec{F}$ и $\vec{r}$ направлены по одной линии, но в противоположные стороны.

Проверим, является ли силовое поле $\vec{F}$ потенциальным. С этой целью определим проекции функции $\vec{F}$ по осям координат. По оси x с учетом $\cos \alpha$ из равенства (II.1) получим

$$\begin{aligned} F_x &= |\vec{F}| \cos(\vec{F}, x) = - |\vec{F}| \cos(r, x) = \\ &= - |\vec{F}| \cos \alpha = - G(m/r^2)(x - \xi)/r, \end{aligned}$$

т. е.

$$\begin{aligned} F_x &= - G(m/r^3)(x - \xi), \\ F_y &= - G(m/r^3)(y - \eta), \\ F_z &= - G(m/r^3)(z - \zeta). \end{aligned} \quad (\text{II.3})$$

Необходимое и достаточное условие потенциальности поля $\text{rot } \vec{F} = 0$, т. е.

$$\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = 0. \quad (\text{II.4})$$

Поэтому найдем производные $\partial F_z / \partial y$ и $\partial F_y / \partial z$ (проверим только выполнение первого из трех равенств (II.4)). Получим

$$\begin{aligned} \partial F_z / \partial y &= 3Gm(z - \zeta)(y - \eta)/r^5; \\ \partial F_y / \partial z &= 3Gm(y - \eta)(z - \zeta)/r^5. \end{aligned}$$

Подставив полученные значения производных в первое равенство из (II.4), легко убедиться в том, что оно выполняется.

Аналогично можно показать и справедливость двух других равенств из (II.4) для функции F . Это говорит о том, что поле векторов $\vec{F}$ потенциальное. Поэтому должно выполняться равенство (I.23), т. е. должен существовать потенциал поля F — функция V , причем связь между проекциями $\vec{F}$ и производными от функции V по осям координат выражается равенствами

$$\partial V / \partial x = F_x; \quad \partial V / \partial y = F_y; \quad \partial V / \partial z = F_z.$$

Подставляя сюда полученные выше значения проекций F_x , F_y и F_z , найдем

$$\begin{aligned} \partial V / \partial x &= - Gm(x - \xi)/r^3, \\ \partial V / \partial y &= - Gm(y - \eta)/r^3, \\ \partial V / \partial z &= - Gm(z - \zeta)/r^3. \end{aligned} \quad (\text{II.5})$$

Легко убедиться, что эти равенства выполняются, если

$$V(P) = Gm/r. \quad (\text{II.6})$$

Таким образом, потенциалом векторного поля

$$\vec{F} = -G \frac{m}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

является функция, определяемая равенством (II.6). Это и есть потенциал массы m , заключенной в точке M (точечной массы), т. е. так называемый потенциал притяжения точечной массы. Значение этого потенциала, как видно, обратно пропорционально расстоянию r .

Отметим некоторые свойства потенциала точечной массы (II.6).

Функция $V(P)$ конечна, непрерывна и однозначна во всем пространстве, за исключением точки M , в которой она обращается в бесконечность.

Частные производные любого порядка от функции $V(P)$ по координатам точки P также функции конечные, непрерывные и однозначные во всем пространстве, за исключением точки M , в которой все они обращаются в бесконечность.

Когда точка $P \rightarrow \infty$, функция $V(P)$ и любая частная производная от нее стремятся к нулю. В случае потенциала V это видно из (II.6) и связано с пределом $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} = 0$.

Во всем пространстве, за исключением точки M , функция V удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta V = \partial^2 V / \partial x^2 + \partial^2 V / \partial y^2 + \partial^2 V / \partial z^2 = 0.$$

В самом деле, пользуясь равенством (II.5), получим

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) = Gm \left[-\frac{1}{r^3} + 3 \frac{(x - \xi)^2}{r^5} \right];$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right) = Gm \left[-\frac{1}{r^3} + 3 \frac{(y - \eta)^2}{r^5} \right];$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right) = Gm \left[-\frac{1}{r^3} + 3 \frac{(z - \zeta)^2}{r^5} \right].$$

Складывая полученные значения вторых производных, найдем $\Delta V = 0$.

Это же можно показать, используя уравнения поля (I.44), решением которых является равенство (I.45). Рассматриваемое поле силы притяжения вне точки M относится к этому случаю, в таком поле отсутствуют источники, поэтому $\operatorname{div} \vec{F} = 0$.

Отметим, еще, что поверхностями уровня $V(P) = C = \text{const}$ для потенциала притяжения точечной массы являются сферы, центры которых лежат в точке P .

Потенциал притяжения системы точечных масс

Пусть задано некоторое конечное число k точек $M_1, M_2, M_3, \dots, M_k$ с заключенными в них массами $m_1, m_2, m_3, \dots, m_k$ (рис. 8). Пусть также $r_1, r_2, \dots, r_k$ — расстояния от некоторой

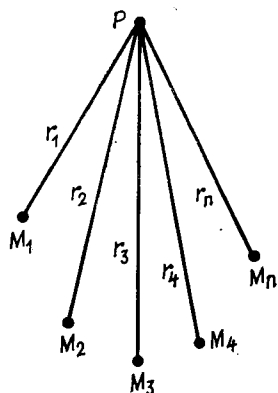


Рис. 8. Точки M_i и расстояния между ними и точкой P

фиксированной притягиваемой точки P до точек соответственно $M_1, M_2, \dots, M_k$. Будем считать, что в точке P заключена единичная масса и P не совпадает ни с одной из точек M_i ($i = 1, 2, \dots, k$). Тогда по закону Ньютона от точек M_i на точку P будут действовать силы

$$F_1 = -Gm_1/r_1^2;$$

$$F_2 = -Gm_2/r_2^2;$$

$$\vdots$$

$$F_k = -Gm_k/r_k^2.$$

По правилу сложения сходящихся сил равнодействующая этих сил численно равна

$$F(P) = -G \left(\frac{m_1}{r_1^2} + \frac{m_2}{r_2^2} + \dots + \frac{m_k}{r_k^2} \right) = -G \sum_{i=1}^k \frac{m_i}{r_i^2}. \quad (\text{II.7})$$

Аналогично на основании равенств (II.3) для проекций силы на координатные оси можем написать

$$F_x = -G \sum_{i=1}^k (m_i/r_i^3) (x - \xi_i);$$

$$F_y = -G \sum_{i=1}^k (m_i/r_i^3) (y - \eta_i);$$

$$F_z = -G \sum_{i=1}^k (m_i/r_i^3) (z - \zeta_i).$$

Нетрудно видеть, что эти выражения F_x , F_y и F_z будут равны частным производным по координатам x , y и z от функции

$$V(P) = G \sum_{i=1}^k (m_i/r_i), \quad (\text{II.8})$$

которая является потенциалом силы притяжения (II.7). Эту функцию $V(P)$ можно рассматривать как сумму потенциалов притяжения всех точечных масс данной материальной системы:

$$V = \sum_{i=1}^k V_i; \quad V_i = Gm_i/r_i.$$

Приведенные формулы выражают имеющий важное практическое значение принцип так называемой суперпозиции полей отдельных источников, заключающийся в наложении полей без их взаимного влияния друг на друга.

Потенциал, выраженный формулой (II.8), определяет потенциал притяжения системы точечных масс. Он обладает всеми перечисленными выше свойствами потенциала притяжения точечной массы. Надо только из области действия силы F и ее потенциала исключить не одну точку M , как это было сделано выше, а все k точек M_i . Во всех этих точках функции F , F_x , F_y , F_z и V обращаются в бесконечность и поэтому рассмотренные свойства действуют во всех точках пространства, кроме точек M_i . Некоторые свойства разберем более подробно.

Обозначим через r расстояние от точки P до начала координат, через m_c суммарную массу системы, т. е.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$$

$$m_c = m_1 + m_2 + \dots + m_k = \sum_{i=1}^k m_i.$$

Можно отметить, что, когда точка P неограниченно удаляется от начала координат и от притягивающих масс, функция V , оставаясь всюду положительной, неограниченно убывает таким образом, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (rV) = G \sum_{i=1}^k m_i = Gm_c.$$

Это свойство, т. е. то, что при $r \rightarrow \infty$ значение $V \rightarrow 0$, верно и для любой частной производной функции V . При этом

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial x} \right) = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial y} \right) = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial z} \right) = -Gm_c.$$

Действительно, так как $\vec{F} = \text{grad } V$, т. е.

$$\partial V / \partial x = F_x; \quad \partial V / \partial y = F_y; \quad \partial V / \partial z = F_z,$$

из приведенных выше выражений для проекций вектора силы притяжения следует, что при $r \rightarrow \infty$

$$\left| \frac{x - \xi_i}{r_i} \right| \leq 1; \quad \left| \frac{y - \eta_i}{r_i} \right| \leq 1; \quad \left| \frac{z - \zeta_i}{r_i} \right| \leq 1,$$

т. е. потенциал V — функция, регулярная на бесконечности.

Во всех точках пространства, за исключением точек M_i , потенциал V удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\partial^2 V / \partial x^2 + \partial^2 V / \partial y^2 + \partial^2 V / \partial z^2 = 0.$$

В самом деле

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) = \frac{\partial F_x}{\partial x} = 3G \sum_{i=1}^k \frac{m_i (x - \xi_i)^2}{r_i^5} - G \sum_{i=1}^k \frac{m_i}{r_i^3};$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{\partial F_y}{\partial y} = 3G \sum_{i=1}^k \frac{m_i (y - \eta_i)^2}{r_i^5} - G \sum_{i=1}^k \frac{m_i}{r_i^3};$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{\partial F_z}{\partial z} = 3G \sum_{i=1}^k \frac{m_i (z - \zeta_i)^2}{r_i^5} - G \sum_{i=1}^k \frac{m_i}{r_i^3}.$$

Суммируя эти равенства, легко убедиться, что $\Delta V = 0$.

Что же касается уровенной поверхности, то она даже для системы, состоящей из двух точек, имеет сложный вид, но обладает всегда тем свойством, что направление равнодействующей сил притяжения, действующих на точку P , совпадает с направлением нормали к поверхности уровня, проходящей через эту точку. Это следует из равенства $\vec{F} = \text{grad } V$, т. е. $\vec{F} = (\partial V / \partial n) \vec{n}_1$ и $(\partial F / \partial l) = (\partial V / \partial n) \cos(l, n)$, где $\vec{n}$ — нормаль в точке P к уровенной поверхности функции V ; $\vec{n}_1$ — единичный вектор, имеющий направление этой нормали; l — некоторое произвольное направление.

Первое из этих равенств говорит о том, что в потенциальном поле вектор $\vec{F}$ всегда направлен по нормали к уровенной поверхности функции V , а из первого и второго равенств следует, что вектор $\vec{F}$ всюду имеет направление, совпадающее с направлением наиболее интенсивного изменения потенциала V .

Направляющие косинусы нормали к уровенной поверхности $V(x, y, z) = C = \text{const}$ соответственно

$$\cos(n, x) = \frac{\partial V}{\partial x} / \sqrt{(\partial V / \partial x)^2 + (\partial V / \partial y)^2 + (\partial V / \partial z)^2};$$

$$\cos(n, y) = \frac{\partial V}{\partial y} / \sqrt{(\partial V / \partial x)^2 + (\partial V / \partial y)^2 + (\partial V / \partial z)^2};$$

$$\cos(n, z) = \frac{\partial V}{\partial z} / \sqrt{(\partial V / \partial x)^2 + (\partial V / \partial y)^2 + (\partial V / \partial z)^2},$$

где

$$\sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2} = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = |\vec{F}|.$$

§ 8. ПОТЕНЦИАЛ ПРИТЯЖЕНИЯ ОБЪЕМНЫХ МАСС

Рассмотрим более сложный случай, когда притягивающая система состоит из бесконечного множества материальных точек (материальных частиц), т. е. представляет собой непрерывно протяженное материальное тело.

Пусть внутри области v находится сплошное распределение масс. Плотность распределения масс σ меняется от точки к точке, т. е. является функцией координат точки. Пусть с уменьшением элемента объема Δv количество заключенной в нем массы $\Delta m \rightarrow 0$, но таким образом, что

$$\lim_{\Delta v \rightarrow 0} (\Delta m / \Delta v) = \sigma,$$

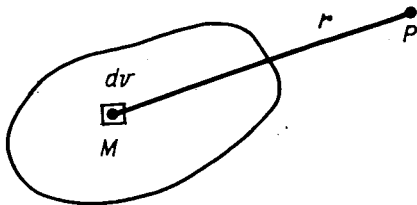
т. е. масса m — не только непрерывная, но и дифференцируемая функция координат. В этом случае производная от массы по объему приобретает значение плотности, т. е. можем написать

$$dm/dv = \sigma \text{ или } dm = \sigma dv.$$

Принимая элемент объема за материальную точку, совпадающую с точкой M и обладающую массой dm , получим (рис. 9) $dV = G dm/r$, где dV — потенциал силы, с которой рассматриваемый элемент объема притягивает некоторую точку P с единичной массой (точка P может находиться вне масс, на поверхности и внутри масс). Заменяв каждый элемент объема материальной точкой, получим систему неподвижных материальных точек. Так как потенциал системы точечных масс равен сумме потенциалов составляющих масс, суммируя значение dV по всем элементарным объемам в пределе, когда $\Delta v \rightarrow 0$, а число элементарных областей неограниченно возрастает, получим

$$V(P) = \int_v G \frac{dm}{r} = G \int_v \sigma \frac{dv}{r}. \quad (\text{II.9})$$

Рис. 9. Элемент объема, точка M объемного тела и расстояние r между точками M и P



Это выражение и определяет потенциал притяжения объемных масс.

Приведем еще одно выражение для потенциала притяжения объемных масс для случая однородных по плотности тел. Этот вид записи позволяет определить значения рассматриваемого потенциала через интеграл по поверхности S объема v , занимаемого массами.

При постоянной плотности получим

$$V(P) = G\sigma \int_v \frac{dv}{r}.$$

Так как

$$r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2,$$

получим

$$r \partial r / \partial x = x - \xi.$$

Дифференцируя эти выражения по x , найдем

$$(\partial r / \partial x)^2 + r (\partial^2 r / \partial x^2) = 1.$$

Аналогично, беря производные от r по переменным y и z , найдем

$$\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 + r \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = 1; \quad \left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)^2 + r \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = 1.$$

Складывая эти три выражения, получим $1 + \Delta r r = 3$, где учтено, что

$$(\partial r / \partial x)^2 + (\partial r / \partial y)^2 + (\partial r / \partial z)^2 = 1.$$

Поэтому $1/r = \Delta r / 2$.

Заменив по этой формуле функцию $1/r$ в выражении потенциала объемных масс, найдем

$$V(P) = \frac{\sigma}{2} G \int_v \Delta r dv.$$

На основании формулы Грина для одной функции запишем (см. гл. III):

$$V(P) = \frac{\sigma}{2} G \int_v \Delta r dv = \frac{\sigma}{2} G \int_S \frac{\partial r}{\partial n} dS.$$

Здесь

$$\int_S (\partial r / \partial n) dS = \int_S \cos \varphi dS,$$

где φ — угол между радиусом-вектором точки P и внешней нормалью к поверхности S .

С учетом этого интеграла получим

$$V(P) = G \frac{\sigma}{2} \int_S \cos \varphi \, dS.$$

Эта формула является формулой Гаусса.

Основные свойства потенциала притяжения объемных масс

а. Замечательное свойство потенциала притяжения объемных масс заключается в том, что в отличие от потенциала точечной массы он никогда не обращается в бесконечность, даже тогда, когда точка P лежит внутри области v (в этом случае расстояние r от точки P до одной из точек, в которой находится масса dm , обращается в нуль, из-за чего $(1/r) \rightarrow \infty$, но значение потенциала имеет конечную величину, что будет показано ниже).

б. Потенциал притяжения объемных масс для всех точек пространства, расположенных вне притягивающих масс, удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta V = \partial^2 V / \partial x^2 + \partial^2 V / \partial y^2 + \partial^2 V / \partial z^2 = 0.$$

В этом легко убедиться, определив из (II.9) соответствующие значения вторых производных.

Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left[-G \int_v \frac{x - \xi}{r^3} dm \right] = \\ &= -G \int_v \left[\frac{1}{r^3} - 3 \frac{(x - \xi)^2}{r^5} \right] dm. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} &= -G \int_v \left[\frac{1}{r^3} - 3 \frac{(y - \eta)^2}{r^5} \right] dm; \\ \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} &= -G \int_v \left[\frac{1}{r^3} - 3 \frac{(z - \zeta)^2}{r^5} \right] dm. \end{aligned}$$

Сложив эти три уравнения, с учетом

$$r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2$$

получим $\Delta V = 0$.

в. Во всех внутренних точках объема v потенциал притяжения объемных масс

$$V = G \int_v \sigma (dv/r)$$

удовлетворяет уравнению (или теореме) Пуассона

$$\Delta V = -4\pi G\sigma.$$

Справедливость этого равенства была показана в гл. I. Верна и теорема, обратная теореме Пуассона, а именно, если функция V , непрерывная во всем пространстве вместе с ее первыми производными, гармоническая вне области v и регулярная на бесконечности, удовлетворяет внутри v уравнению Пуассона, то V — потенциал притяжения объемных масс, распределенных в объеме v с плотностью σ , т. е. функция (II.9).

г. Потенциал притяжения объемного тела также является функцией, регулярной на бесконечности, т. е. $\lim_{r \rightarrow \infty} (rV) = Gm$, где m — общая масса рассматриваемого объемного тела.

При этом сама функция V стремится к нулю: $\lim_{r \rightarrow \infty} V = 0$.

Чтобы показать справедливость значения первого из указанных пределов, поступим следующим образом [1]. Поместим последовательно всю массу тела в ближайшую к точке P и в наиболее удаленную точки M_1 и M_2 (рис. 10). Для этих точек M_1 и M_2 запишем выражения потенциалов по формуле для точечной массы (когда $r \rightarrow \infty$, тело конечного объема можно заменить точечной массой): $V_1 = Gm/r_1$; $V_2 = Gm/r_2$, где r_1 и r_2 — расстояния от точки P соответственно до ближайшей и наиболее удаленной точек; m — суммарная масса объемного тела.

Значения двух приведенных потенциалов будут удовлетворять неравенству

$$G \frac{m}{r_2} < G \int_v \frac{dm}{r} < G \frac{m}{r_1}$$

или

$$Gm/r_2 < V < Gm/r_1.$$

Умножив это неравенство на r и перейдя к пределу при $r \rightarrow \infty$, $r_1 \rightarrow \infty$ и $r_2 \rightarrow \infty$, получим искомое значение

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (rV) = Gm,$$

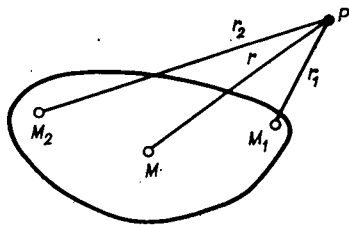


Рис. 10. Взаимное расположение точек объемного тела M , M_1 , M_2 и P при доказательстве регулярности на бесконечности

где учтено, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (r/r_1) = \lim_{r \rightarrow \infty} (r/r_2) = 1.$$

д. Для потенциала притяжения объемного тела предел

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (r^2 \partial V / \partial r) = Gm.$$

Значения рассмотренных пределов дают право утверждать, что в случаях, когда расстояние r намного больше линейных размеров тела объема v произвольной формы, справедливы приближенные равенства:

$$V \simeq Gm/r; \quad \partial V / \partial r \simeq -Gm/r^2,$$

где $m = \int_v dm$ — суммарная масса тела.

Таким образом, любое объемное тело, когда точка P достаточно удалена от него, притягивает ее к себе совершенно так же, как и материальная точка M с массой m , удаленная от точки P на расстояние r . При этом точку M можно поместить в центр массы тела.

На основании значений указанных пределов следует заключить, что, во-первых, потенциал объемных масс и его первая производная являются функциями координат точки P , ограниченными и непрерывными во всем пространстве, и, во-вторых, при удалении точки P в бесконечность функция $V(P)$ стремится к нулю, как $1/r$, функция dV/dr стремится к нулю как $1/r^2$.

е. В любой ограниченной области v , расположенной вне притягивающих масс, потенциал объемных масс не может иметь ни максимума, ни минимума. Максимальное или минимальное значение потенциала может иметь место только на границе этой области, т. е. на ее поверхности S . Справедливость этого положения для любых гармонических функций, будет доказана ниже, при рассмотрении свойств гармонических функций.

ж. Если S — некоторая замкнутая поверхность (произвольной формы), включающая массы, а m — суммарная величина этих масс, расположенных внутри или на поверхности S , имеет место равенство

$$\int_S (\partial V / \partial n) dS = -4\pi G \int_v dm = -4\pi Gm,$$

где v — объем, ограниченный поверхностью S ; V — потенциал притяжения указанных масс.

Если же S — некоторая замкнутая поверхность, взятая вне масс, а V — потенциал притяжения этих объемных масс, то всегда справедливо равенство

$$\int_S (\partial V / \partial n) dS = 0.$$

Справедливость этих двух равенств будет показана при рассмотрении следствий формул Грина (см. гл. III).

Потенциал притяжения однородного шара

Выражение для потенциала притяжения объемных масс в каждой данной точке P зависит от формы тела и от распределения масс внутри него. Интеграл (II.9) вычисляется в элементарных функциях только для отдельных тел простейшей формы. Рассмотрим его значение для однородного по плотности шара.

Из выражения для потенциала притяжения объемных масс при постоянном значении σ легко найти выражение для потенциала притяжения однородного шара радиусом R .

Перейдем к сферическим координатам:

$$r^2 = \rho^2 + \tau^2 - 2\rho\tau \cos \theta;$$

$$dv = \tau^2 \sin \theta d\theta d\varphi d\tau,$$

где $OP = \rho$; $MP = r$; $OM = \tau$ (рис. 11), при этом τ меняется от 0 до R , φ — от 0 до 2π , а θ — от 0 до π .

Поэтому

$$V(P) = G\sigma \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\tau^2 \sin \theta d\theta d\varphi d\tau}{\sqrt{\rho^2 + \tau^2 - 2\rho\tau \cos \theta}}.$$

Интегрирование этого выражения по φ дает 2π . Для интегрирования по θ обозначим

$$\rho^2 + \tau^2 - 2\rho\tau \cos \theta = t.$$

Тогда

$$dt = 2\rho\tau \sin \theta d\theta.$$

Для новых пределов интегрирования

$$t_n = (\rho - \tau)^2, \quad t_v = (\rho + \tau)^2,$$

где индексы n и v — обозначения нижнего и верхнего пределов.

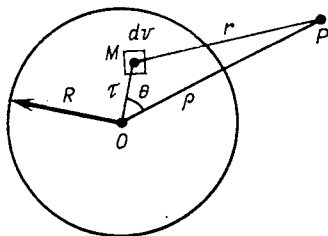


Рис. 11. Расстояние между точками O , M и P при определении потенциала притяжения однородного шара

При этих обозначениях

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{\rho^2 + \tau^2 - 2\rho\tau \cos \theta}} &= \int_{z_H}^{z_B} \frac{dt}{2\rho\tau \sqrt{t}} = \\ &= \frac{1}{2\rho\tau} \int_{(\rho-\tau)^2}^{(\rho+\tau)^2} \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{[\rho\tau]} \sqrt{t} \Big|_{(\rho-\tau)^2}^{(\rho+\tau)^2} = \frac{1}{[\rho\tau]} [\sqrt{(\rho+\tau)^2} - \sqrt{(\rho-\tau)^2}] = \\ &= \frac{1}{\rho\tau} (|\rho+\tau| - |\rho-\tau|). \end{aligned}$$

Учитывая полученные значения интегралов по φ и θ , из общей формулы получим выражение для определения потенциала

$$V(P) = \frac{2\pi G\sigma}{\rho} \int_0^R \tau (|\rho+\tau| - |\rho-\tau|) d\tau. \quad (\text{II.10})$$

Для внешней точки при $\rho > R$ значение $|\rho-\tau| = \rho-\tau$. Поэтому

$$\begin{aligned} V(P) &= \frac{2\pi G\sigma}{\rho} \int_0^R \tau (\rho + \tau - \rho + \tau) d\tau = \\ &= \frac{2\pi G\sigma}{\rho} \int_0^R 2\tau^2 d\tau = \frac{4\pi G\sigma}{3\rho} \tau^3 \Big|_0^R = G \frac{m}{\rho}, \end{aligned} \quad (\text{II.11})$$

где m — масса шара.

Отсюда видно, что потенциал притяжения однородного шара для внешней по отношению к нему точки равен потенциалу притяжения точки с массой, равной массе шара и расположенной в его центре. Иными словами, однородный шар притягивает внешнюю точку так, как если бы вся его масса была сосредоточена в его центре. Это верно и для любого неоднородного шара, состоящего из однородных concentрических слоев.

Рассмотрим выражение для потенциала притяжения шара во внутренней точке P ($\rho < \tau$). Потенциал V представим в виде двух частей: потенциала шара с радиусом ρ и полого шара, ограниченного сферами с радиусами ρ и R (рис. 12): $V = V_1 + V_2$. Для шара с радиусом ρ точка P — внешняя, поэтому его потенциал V_1 можно определить из (II.11):

$$V_1 = 4\pi G\sigma\rho^3/3\rho = (4/3)\pi G\sigma\rho^2.$$

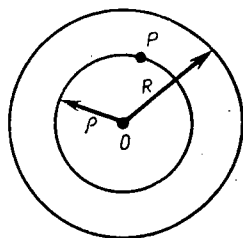


Рис. 12. Расположение точек при определении потенциала притяжения шара для внутренних точек

Потенциал V_2 определим из (II.10) при $\rho < \tau$:

$$V_2 = \frac{2\pi G\sigma}{\rho} \int_{\rho}^R \tau (|\rho + \tau| - |\rho - \tau|) d\tau =$$

$$= \frac{2\pi G\rho}{\rho} \int_{\rho}^R \tau (\rho + \tau + \rho - \tau) d\tau = 4\pi G\sigma \frac{\tau^2}{2} \Big|_{\rho}^R = 2\pi G\sigma (R^2 - \rho^2). \quad (\text{II.12})$$

Тогда сумма

$$V = V_1 + V_2 = (2/3)\pi G\sigma (3R^2 - \rho^2) =$$

$$= 2\pi G\sigma R^2 (1 - \rho^2/3R^2) = (3/2)G(M/R) (1 - \rho^2/3R^2).$$

Таким образом, потенциал притяжения однородного шара

$$V(P) = \begin{cases} (3/2)G(m/R)(1 - \rho^2/3R^2), & \rho \leq R, \\ Gm/\rho, & \rho > R. \end{cases} \quad (\text{II.13})$$

Эта функция обладает всеми приведенными выше свойствами потенциала притяжения объемных масс. Рассмотрим некоторые из них на примере.

Функция (II.13) — ограниченная и непрерывная во всем пространстве (и внутри шара, и вне его). При этом

$$V(0) = (3/2)G(m/R), \quad V(R) = Gm/R$$

и при $\rho \rightarrow \infty$ значение $V \rightarrow 0$. Характер убывания этой функции (при $R=1$) видно из рис. 13.

Рассмотрим теперь характер изменения первых и вторых производных функции $V(P)$ по ρ (ρ совпадает с направлением нормали). Получим

$$\frac{\partial V}{\partial \rho} = \begin{cases} -Gm\rho/R^3, & \rho \leq R, \\ -Gm/\rho^2, & \rho > R; \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} = \begin{cases} -Gm/R^3, & \rho \leq R, \\ 2Gm/\rho^3, & \rho > R. \end{cases}$$

Исследуя характер изменения этих функций, можно отметить следующее (рис. 14 и 15 при $R=1$).

Первая производная потенциала является отрицательной функцией, ограничена во всем пространстве, на границе шара не терпит разрыва, в бесконечности равна нулю и, кроме того,

$$dV(0)/d\rho = 0; \quad dV(R)/d\rho = -Gm/R^2.$$

Вторая производная от V по ρ — знакопеременная функция, на границе шара терпит разрыв, внутри шара равна постоянной

Рис. 13. График изменения потенциала притяжения однородного шара

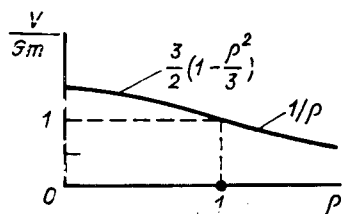


Рис. 14. График изменения функции $\frac{1}{Gm} \frac{\partial V}{\partial \rho}$

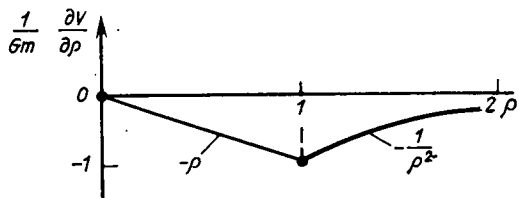
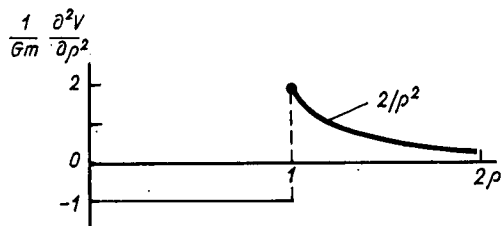


Рис. 15. График изменения функции $\frac{1}{Gm} \frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2}$



величине. Скачок функции на границе шара при переходе точки P из внутренней области во внешнее пространство

$$B = -Gm/R^3 - 2Gm/R^3 = -3Gm/R^3.$$

Так как $m = (4/3)\pi R^3\sigma$, то $B = -4\pi G\sigma$. Эта величина соответствует тому факту, что внутри шара (внутри масс) функция V удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\partial^2 V / \partial x^2 + \partial^2 V / \partial y^2 + \partial^2 V / \partial z^2 = -4\pi G\sigma,$$

вне шара (вне масс) — уравнению Лапласа

$$\partial^2 V / \partial x^2 + \partial^2 V / \partial y^2 + \partial^2 V / \partial z^2 = 0.$$

Потенциал притяжения однородного шарового слоя

Выведем выражение для потенциала притяжения однородного по плотности шарового слоя, заключенного между сферами с радиусами R_1 и R_2 (рис. 16). Для внешних точек, т. е. при

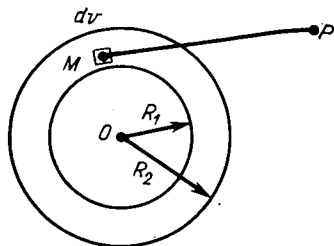


Рис. 16.
Шаровой
слой и
элемент
объема
в нем

$\rho > R$, необходимо пользоваться выражением (II.11), интегрировать нужно в пределах от R_1 до R_2 . Тогда

$$V(P) = \frac{4}{3} \pi G \sigma \frac{1}{\rho} \tau^3 \Big|_{R_1}^{R_2} = \frac{4}{3} \frac{\pi G \sigma}{\rho} (R_2^3 - R_1^3).$$

Для внутренних точек ($\rho < R$) нужно пользоваться формулой (II.12), заменив пределы интегрирования ρ и R на R_1 и R_2 , т. е.

$$V(P) = 2\pi G \sigma \tau^2 \Big|_{R_1}^{R_2} = 2\pi G \sigma (R_2^2 - R_1^2).$$

Объединив оба случая, запишем

$$V(P) = \begin{cases} 2\pi G \sigma (R_2^2 - R_1^2), & \rho \leq R, \\ \frac{4}{3} \pi G \sigma \frac{1}{\rho} (R_2^3 - R_1^3), & \rho > R. \end{cases}$$

Отсюда видно, что для внутренних точек потенциал притяжения — постоянная величина, поэтому однородный шаровой слой не притягивает точки, расположенные в его внутренней полости области (в сфере радиуса R_1). Что же касается внешних точек, то легко показать, что однородный шаровой слой массы m притягивает их, как точечная масса m , расположенная в его центре.

Можно показать, что все приведенные формулы будут верны не только для одного слоя, но и для любого конечного числа шаровых слоев с центром в одной и той же точке. При этом можно допускать, что слои не однородные и их плотности могут меняться по направлению нормали к поверхности. Например, если взять k однородных шаровых слоев, то для внешней по отношению к ним точки P (внешней по отношению к сфере наибольшего радиуса) их суммарный потенциал притяжения

$$V = (G/\rho) (m_1 + m_2 + \dots + m_k) = (G/\rho) \sum_{i=1}^k m_i,$$

где m_i — масса i -го слоя.

Любой шаровой слой или шар, в котором плотность меняется только в зависимости от ρ (по нормали к поверхности), можно представить в виде ряда бесконечно тонких однородных слоев. Тогда для всего шарового слоя или шара

$$V(P) = (G/\rho) \sum_{i=1}^k m_i,$$

где i — номер любого элементарного тонкого слоя.

Поэтому будет иметь место равенство

$$V(P) = Gm/\rho,$$

где m — масса всего шарового слоя или шара.

Эти же формулы можно перенести и на значения силы притяжения.

Зная выражение потенциала, силу притяжения можно найти из равенства

$$\vec{F} = \text{grad } V = \frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k}.$$

Проекции силы на координатные оси можно определить из выражений

$$F_x = \partial V / \partial x; \quad F_y = \partial V / \partial y; \quad F_z = \partial V / \partial z.$$

Для рассмотренного выше объемного тела на основании (II.9) найдем

$$F_x = -G \int_v \sigma \frac{x - \xi}{r^3} dv;$$

$$F_y = -G \int_v \sigma \frac{y - \eta}{r^3} dv;$$

$$F_z = -G \int_v \sigma \frac{z - \zeta}{r^3} dv.$$

Тогда для самой силы получим выражение

$$\vec{F} = -G \int_v \sigma \frac{\vec{r}}{r^3} dv.$$

Потенциал притяжения однородного эллипсоида

Вначале рассмотрим некоторые определения, касающиеся эллипсоидов, необходимые для изложения дальнейшего материала. Обозначим через E эллипсоид с полуосями a , b и c . Примем $c \leq b \leq a$. Начало декартовой системы координат совместим с центром эллипсоида и оси x , y и z направим по его главным осям. В этом случае уравнение эллипсоида можно записать в виде

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1.$$

Обозначим через E_1 второй эллипсоид с полуосями a_1 , b_1 и c_1 , концентрический с эллипсоидом E . Тогда уравнением эллипсоида E_1 будет

$$x^2/a_1^2 + y^2/b_1^2 + z^2/c_1^2 = 1.$$

Эллипсоид E_1 называется подобным эллипсоиду E , если $a_1 = ka$, $b_1 = kb$, $c_1 = kc$, т. е., чтобы получить подобный эллипсоид, необходимо увеличить все полуоси исходного эллипсоида в k раз. Тогда уравнение

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = k^2$$

будет уравнением семейства подобных и подобно расположенных эллипсоидов а число k — параметром этого семейства.

Предположим, теперь, что полуоси эллипсоидов E и E_1 связаны соотношениями

$$a_1^2 = a^2 + \lambda; \quad b_1^2 = b^2 + \lambda; \quad c_1^2 = c^2 + \lambda.$$

Тогда эллипсоид E_1 с уравнением

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} - 1 = 0$$

называется софокусным эллипсоиду E . При изменении λ из этого равенства получим семейство софокусных эллипсоидов и число λ будет параметром этого семейства.

Задача определения потенциала и составляющих силы притяжения однородного эллипсоида — одна из важнейших задач теории потенциала в небесной механике и астрономии, но имеет ограниченное применение в гравиразведке. Поэтому дадим без выводов только конечные выражения, позволяющие определять потенциал и составляющие силы притяжения, а в дальнейшем магнитный потенциал и составляющие напряженности магнитного поля. Подробные сведения о полях и об интерпретации аномалий, вызванных телами эллиптической формы, можно найти в работах А. А. Юнькова.

Пусть точка $P(x, y, z)$ — внешняя по отношению к эллипсоиду. Тогда потенциал силы притяжения

$$V(P) = \pi abc \sigma G \int_0^\infty \left(1 - \frac{x^2}{a^2 + \lambda} - \frac{y^2}{b^2 + \lambda} - \frac{z^2}{c^2 + \lambda} \right) \frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}},$$

где

$$f(\lambda) = (a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda),$$

a — положительный корень уравнения эллипсоида E_1 , т. е. то значение $\lambda \geq 0$, при котором это уравнение обращается в нуль. В уравнении λ зависит от x, y, z , следовательно в функции

$V(P)$ нижний предел интегрирования также является функцией от этих переменных.

Для определения составляющих силы притяжения от однородного эллипсоида воспользуемся выражениями

$$F_x = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad F_z = \frac{\partial V}{\partial z}.$$

Тогда

$$F_x = -2\pi Gabc\sigma x \int_t^{\infty} \frac{1}{a^2 + \lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}} - \\ - \pi Gabc\sigma \left(1 - \frac{x^2}{a^2 + t} - \frac{y^2}{b^2 + t} - \frac{z^2}{c^2 + t} \right) \frac{1}{\sqrt{f(t)}} \frac{dt}{dx}.$$

В этом равенстве t , как корень, обращает многочлен в круглых скобках в нуль, поэтому второе слагаемое равно нулю. Тогда

$$F_x = -2\pi G\sigma abc x \int_t^{\infty} \frac{1}{a^2 + \lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}}.$$

Аналогично

$$F_y = -2\pi G\sigma abc y \int_t^{\infty} \frac{1}{b^2 + \lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}};$$

$$F_z = -2\pi G\sigma abc z \int_t^{\infty} \frac{1}{c^2 + \lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}}.$$

Перепишем полученные выражения в более удобном виде. С этой целью обозначим

$$A = -2\pi abc \int_t^{\infty} \frac{1}{a^2 + \lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}};$$

$$B = -2\pi abc \int_t^{\infty} \frac{1}{b^2 + \lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}};$$

$$C = -2\pi abc \int_t^{\infty} \frac{1}{c^2 + \lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}}.$$

Тогда выражения для потенциала и составляющих силы притяжения однородного эллипсоида для внешних точек

$$V(P) = G\sigma (Ax^2 + By^2 + Cz^2)/2 + D,$$

где

$$D = \pi G\sigma abc \int_t^{\infty} \frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}};$$

$$F_x = G\sigma Ax; \quad F_y = G\sigma By; \quad F_z = G\sigma Cz.$$

Без доказательства приведем две важные теоремы для случая внешней точки — теоремы Лапласа и Маклорена, которые имеют примерно одинаковый смысл.

Теорема Лапласа. Однородные софокусные эллипсоиды притягивают внешнюю точку с силами, направления которых совпадают друг с другом, а величины пропорциональны массам эллипсоидов.

Теорема Маклорена. Потенциалы двух однородных софокусных эллипсоидов для внешней точки относятся друг к другу, как массы этих эллипсоидов. Известна и другая формулировка теоремы Маклорена: два софокусных однородных эллипсоида равной массы, но различных размеров, производят во всем внешнем к обоим эллипсоидам пространстве одинаковое действие.

Для перехода от внешней точки к внутренней обычно пользуются теоремой Ньютона.

Теорема Ньютона. Однородный слой, заключенный между двумя концентрическими, подобными и подобно расположенными эллипсоидами, не оказывает никакого притяжения на материальную точку, находящуюся во внутренней полости этого слоя.

Рассмотрим значение потенциала и составляющих силы притяжения внутри эллипсоида. Пользуясь теоремой Ньютона, можно показать, что потенциал притяжения однородного эллипсоида для внутренних точек определяется из рассмотренной выше формулы для внешнего пространства, если принять нижний предел интегрирования $t=0$, т. е. из равенства

$$V(P) = \pi G\sigma abc \int_0^\infty \left(1 - \frac{x^2}{a^2 + \lambda} - \frac{y^2}{b^2 + \lambda} - \frac{z^2}{c^2 + \lambda} \right) \frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}}$$

(случай $t=0$ соответствует поверхности эллипсоида). Аналогично, заменяя в формулах для составляющих силы притяжения F значение нижнего предела интегрирования на число $t=0$, получим и выражения для составляющих силы притяжения:

$$F_x = -2\pi G\sigma abc x \int_0^\infty \frac{1}{a^2 + \lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}};$$

$$F_y = -2\pi G\sigma abc y \int_0^\infty \frac{1}{b^2 + \lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}};$$

$$F_z = -2\pi G\sigma abc z \int_0^\infty \frac{1}{c^2 + \lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}}.$$

Потенциал притяжения однородного эллипсоида для внутренней и внешней точек обладает всеми свойствами потенциала

притяжения объемных масс — является непрерывной и конечной функцией координат, внутри масс удовлетворяет уравнению Пуассона, вне масс — уравнению Лапласа. В центре эллипсоида потенциал достигает наибольшей величины и при удалении точки от центра в бесконечность уменьшается до нуля как $1/r$.

Интегралы, входящие в выражения потенциала и составляющих силы притяжения от однородного эллипсоида, сводятся к эллиптическим интегралам первого и второго родов и к тригонометрическим функциям, поэтому при практических расчетах необходимо пользоваться соответствующими таблицами интегралов.

§ 9. ПОТЕНЦИАЛЫ ПРИТЯЖЕНИЯ ПРОСТОГО СЛОЯ И ЛИНЕЙНЫХ МАСС

Примем, что массы распределены на некоторой поверхности S в виде тонкого слоя толщиной h . Предположим, что, когда толщина слоя бесконечно уменьшается, существует предел

$$\lim_{h \rightarrow 0} (\sigma h) = \mu.$$

Величина μ — плотность масс, конденсированных на поверхность S . Она называется поверхностной плотностью распределения масс, или массой единицы поверхности тела. μ является непрерывной и конечной функцией координат текущей точки M поверхности S . Поверхностная плотность имеет реальное применение, когда рассматривают тела, один из трех размеров которых мал по сравнению с другими (материальный диск, материальные полосы и др.).

Всю массу, распределенную на поверхности S , можно определить из равенства $m = \int_S \mu dS$. Если μ постоянная, то $m = \mu S$.

Потенциал притяжения простого слоя

Допустим, что действующие массы сосредоточены на поверхности S (она может быть и замкнутой, и не замкнутой) в виде слоя незначительной толщины h (рис. 17). Пусть dS — элемент поверхности слоя. Тогда с точностью до бесконечно малых высшего порядка $dv = h dS$. Примем, что при $h \rightarrow 0$ поверхностная плотность распределения масс на S равна μ (μ — непрерывная и конечная функция координат точки M на поверхности S).

Если к такому слою применить формулу потенциала притяжения объемных масс, при заданных условиях объемный интеграл (II.9)

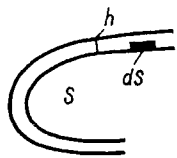


Рис. 17. Простой слой

превратится в интеграл по поверхности и окончательно получим

$$V(P) = \lim_{h \rightarrow 0} G \int_v \sigma \frac{dv}{r} = G \int_S \left(\lim_{h \rightarrow 0} \sigma h \right) \frac{dS}{r} = G \int_S \mu \frac{dS}{r}. \quad (\text{II.14})$$

Эта функция носит название потенциала притяжения простого слоя (в отличие от потенциала так называемого двойного слоя, который рассмотрим в дальнейшем), лежащего на поверхности S . Эта функция для любой точки, не принадлежащей поверхности S , является конечной, непрерывной и однозначной функцией координат и имеет непрерывные частные производные любого порядка. Последние можно получить дифференцированием выражений потенциала под знаком интеграла.

Рассмотрим случай нормальной производной. Так как

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) \frac{\partial r}{\partial n} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial n} = -\frac{1}{r^2} \cos \varphi,$$

где φ — угол между направлениями нормали $\vec{n}$ к поверхности S и радиуса-вектора r , из (II.14) получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial n} &= G \frac{\partial}{\partial n} \left[\int_S \mu \frac{dS}{r} \right] = G \int_S \mu \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS = \\ &= -G \int_S \mu \frac{\cos \varphi}{r^2} dS. \end{aligned} \quad (\text{II.15})$$

Введем обозначения для пределов, к которым стремится нормальная производная потенциала простого слоя, когда точка P стремится к поверхности S из внутренней или из внешней области, соответственно $\partial V_i / \partial n$ и $\partial V_e / \partial n$. При определении значений этих пределов невозможно пользоваться формулой (II.15) для всей области, если при переходе через поверхность точка P совпадает с одной из точек поверхности M : $r \rightarrow 0$ и интеграл в правой части указанной формулы не будет существовать. Во избежание этой трудности окружим область поверхности вокруг точки перехода некоторой малой поверхностью (сферой радиуса R) Σ . Область вне Σ ($S - \Sigma$) обозначим через S_1 . Тогда с учетом этих поверхностей формулу (II.15) можно переписать:

$$\frac{\partial V}{\partial n} = -G \int_{\Sigma} \mu \frac{\cos \varphi}{r^2} dS - G \int_{S_1} \mu \frac{\cos \varphi}{r^2} dS. \quad (\text{II.16})$$

Рассмотрим теперь предел, когда точка $P \rightarrow M$. В этом случае и поверхность $\Sigma \rightarrow M$. Поэтому

$$\lim_{\Sigma \rightarrow M} \int_{S_1} \mu \frac{\cos \varphi}{r^2} dS = \int_S \mu \frac{\cos \varphi}{r^2} dS.$$

На основании теоремы о среднем предел

$$\lim_{\Sigma \rightarrow M} \int_{\Sigma} \mu \frac{\cos \varphi}{r^2} dS = \lim_{\Sigma \rightarrow M} \frac{\mu}{R^2} \int_{\Sigma} \cos \varphi dS.$$

Так как положительное направление нормали к поверхности Σ внешнее, а радиус-вектор r направлен в сторону точки P , величина $\cos \varphi = 1$ при переходе из внутренней области к поверхности и $\cos \varphi = -1$ при переходе из внешней области к поверхности S . Поэтому

$$\lim_{\Sigma \rightarrow M} \frac{\mu}{R^2} \int_{\Sigma} \cos \varphi dS = \lim_{\Sigma \rightarrow M} \left(\frac{\mu}{R^2} 2\pi R^2 \right) = 2\pi\mu$$

при подходе к поверхности из внутренней области [интегрирование ведется по полусфере — по одну сторону от линии A (рис. 18)]. Аналогично, если подходить к поверхности от точек внешней области,

$$\lim_{\Sigma \rightarrow M} \int_{\Sigma} \mu (\cos \varphi / r^2) dS = -2\pi\mu.$$

Подставляя найденные значения пределов в (II.16), найдем

$$\partial V_i / \partial n = -G 2\pi\mu - G \int_{\Sigma} \mu (\cos \varphi / r^2) dS;$$

$$\partial V_e / \partial n = G 2\pi\mu - G \int_{\Sigma} \mu (\cos \varphi / r^2) dS.$$

Отсюда видно, что

$$\partial V_i / \partial n - \partial V_e / \partial n = -4\pi\mu G.$$

Кроме того,

$$(\partial V_i / \partial n + \partial V_e / \partial n) / 2 = -G \int_{\Sigma} \mu (\cos \varphi / r^2) dS = \overline{\partial V} / \partial n,$$

где $\overline{\partial V} / \partial n$ — значения нормальной производной потенциала притяжения простого слоя в точках поверхности S . Таким образом, при переходе через слой нормальная производная потенциала простого слоя терпит разрыв на величину $\pm 4\pi\mu G$; среднее из

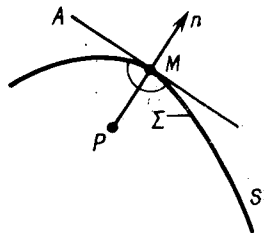


Рис. 18. Простой слой S и поверхность Σ

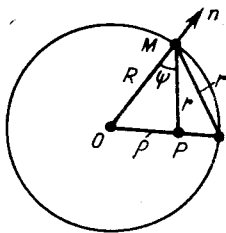


Рис. 19. Расположение угла φ для сферы радиусом R

предельных значений потенциала, получающих при переходе через границу из внутренней и внешней областей, равно значению потенциала на поверхности S (формула Племели).

В полученных формулах нормальную производную потенциала простого слоя можно выразить через значения исходного потенциала, заданные на поверхности S (при условии, что S — сфера радиуса R , слой в общем случае неоднородный). С этой целью воспользуемся формулой (рис. 19)

$$\rho^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos \varphi.$$

Если точка P находится на поверхности S (т. е. $P \rightarrow M$, $\rho = R$), отсюда получим $\cos \varphi = r/2R$. Тогда из (II.15) найдем

$$\frac{\partial V(M)}{\partial n} = -\frac{G}{2R} \int_S \mu \frac{dS}{r}.$$

Сравнивая это выражение с (II.14), получим $\partial V(M)/\partial n = -V(M)/2R$.

Величина силы притяжения $\vec{F}$ от простого слоя

$$\vec{F} = \text{grad } V = -G \int_S \mu (\vec{r}/r^3) dS.$$

Отсюда для определения проекций силы притяжения получим равенства

$$F_x = (\partial V / \partial x) = -G \int_S \mu [(x - \xi)/r^3] dS;$$

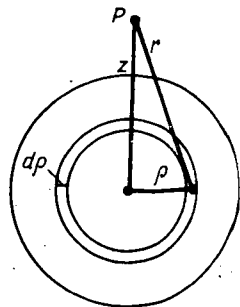
$$F_y = \partial V / \partial y = -G \int_S \mu [(y - \eta)/r^3] dS;$$

$$F_z = \partial V / \partial z = -G \int_S \mu [(z - \zeta)/r^3] dS.$$

Эти первые производные потенциала V претерпевают разрыв непрерывности при прохождении точки P через поверхность S . Величина скачка в значениях функции по направлению нормали к поверхности при этом равна $-4\pi G\mu$.

Выражение потенциала притяжения простого слоя широко применяется в гравиразведке при определении силы тяжести от

Рис. 20. Однородный круглый материальный диск и расстояния ρ и r



различных материальных полос и при решении многих других задач. Ввиду важности получаемых результатов рассмотрим следующие частные случаи.

Однородный материальный диск. Определим потенциал притяжения масс однородного по плотности круглого материального диска радиусом R в точке P , расположенной на прямой, проходящей через центр диска перпендикулярно к его плоскости (рис. 20). В данном случае в полярных координатах на плоскости диска с центром, совпадающим с центром диска,

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2}, \quad dS = \rho d\rho d\varphi,$$

где z — расстояние от центра диска до точки P .

Потенциал притяжения диска в точке P можно найти из (II.14), интегрируя по ρ от 0 до R , по φ от 0 до 2π :

$$\begin{aligned} V &= G\mu \int_S \frac{dS}{r} = G\mu \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\rho d\rho d\varphi}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} = \\ &= 2\pi G\mu \int_0^R \frac{\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} = 2\pi G\mu (\sqrt{R^2 + z^2} - |z|). \end{aligned}$$

В центре диска при $z=0$

$$V = 2\pi G\mu R.$$

Определим теперь величину проекции силы притяжения F_z в точке P . Получим

$$\begin{aligned} F_z &= -G\mu \int_S \frac{zdS}{r^3} = -G\mu \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{z\rho d\rho d\varphi}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} = \\ &= -2\pi G\mu z \int_0^R \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} = -2\pi G\mu z \left(\frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right). \end{aligned}$$

Эта функция во всех точках оси диска, за исключением его поверхности, является конечной, непрерывной и однозначной, в бесконечности она равна нулю. На поверхности диска она

испытывает разрыв непрерывности, при переходе через поверхность величина скачка в значениях функции равна $4\pi G\mu$.

Однородный сферический слой. Пусть S однородный сферический слой радиусом R ($\mu = \text{const}$). Для этого случая, переходя к сферическим координатам

$$r^2 = \rho^2 + \tau^2 - 2\rho\tau \cos \theta;$$

$$dS = \tau^2 \sin \theta d\theta d\varphi,$$

из (II.9) найдем

$$V(P) = G\mu \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\tau^2 \sin \theta d\theta d\varphi}{\sqrt{\rho^2 + \tau^2 - 2\rho\tau \cos \theta}}.$$

Раскрывая этот интеграл, аналогично тому, как была получена формула (II.10), найдем

$$V(P) = (2\pi G\mu/\rho) \tau (|\rho + \tau| - |\rho - \tau|).$$

Отсюда при $\tau = R$

$$V(P) = (2\pi G\mu/\rho) R (|\rho + R| - |\rho - R|).$$

Раскрывая скобки в последнем выражении для случаев, когда точка P находится внутри ($\rho \leq R$) и вне сферического слоя ($\rho > R$), найдем

$$V(P) = \begin{cases} 4\pi G\mu R, & \rho \leq R, \\ (4\pi G\mu/\rho) R^2, & \rho > R. \end{cases}$$

Так как масса сферического слоя $m = \mu 4\pi R^2$ ($4\pi R^2$ — поверхность слоя), то $\mu = m/4\pi R^2$. Тогда окончательно

$$V(P) = \begin{cases} Gm/R, & \rho \leq R, \\ Gm/\rho, & \rho > R. \end{cases} \quad (11.17)$$

Это же выражение можно было получить из (II.13) для однородного шара, полагая для внутренних точек $\rho = R$ и заменяя в них массу массой сферического слоя.

Из полученного равенства видно, что потенциал однородного сферического слоя для внутренней точки — постоянная величина, не зависит от ρ , поэтому однородный сферический слой внутреннюю точку не притягивает.

Это замечательное положение впервые было высказано Ньютоном. Справедливость его можно понять из следующего. Пусть P — данная внутренняя точка. На поверхности сферы возьмем произвольный по очертанию бесконечно малый контур, ограничивающий элемент поверхности dS_1 (рис. 21). Из всех точек этого контура проведем прямые через точку P и продолжим их

до пересечения со сферическим слоем. Тогда на противоположной стороне рассматриваемого сферического слоя получим контур элемента поверхности dS_2 . Ньютоном геометрически было доказано, что силы притяжения масс элементов поверхности dS_1 и dS_2 равны по величине и противоположны по направлению. Поэтому притяжение каждого элемента сферического слоя будет уравниваться притяжением противоположного элемента, тогда все силы притяжения друг друга уравниваются. Но на внешнюю точку сферический слой действует так, как будто вся его масса сосредоточена в центре, т. е. как материальная точка массы m , заключенная в его центре.

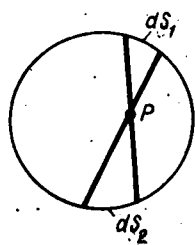


Рис. 21. Взаимное расположение элементов поверхности dS_1 и dS_2 на сферическом слое

Как меняются производные первого порядка найденной функции V (II.17)? Рассмотрим только производную по ρ (ρ совпадает с направлением нормали):

$$\frac{\partial V}{\partial \rho} = \begin{cases} 0, & \rho \leq R, \\ -Gm/\rho^2, & \rho > R. \end{cases}$$

Полученные выражения силы притяжения подтверждают отмеченные выше положения, т. е. то, что однородный сферический слой не притягивает внутреннюю точку и что внешнюю точку он притягивает так, как если бы вся его масса была сосредоточена в его центре (как точечная масса). Кроме того, из последних двух формул видно, что при переходе через сферический слой (на границе) потенциал однородного сферического слоя не терпит разрыва, т. е. он является непрерывной функцией координат. Но первая же производная по ρ уже терпит разрыв. При этом разность между значениями производных на поверхности слоя (при $\rho=R$) $\alpha = -Gm/\rho^2 = -Gm/R^2$. Так как $m = 4\pi R^2\mu$, то $\alpha = -4\pi G\mu$. Таким образом, производная по ρ потенциала однородного сферического слоя при переходе точки P через слой терпит разрыв на величину $-4\pi G\mu$. Это положение верно не только для сферического слоя, но и для слоев несферической формы, причем поверхностная плотность распределения массы μ будет равняться ее величине в точке слоя, через которую точка P переходит поверхность по нормали.

Кроме того, как было показано выше для общего случая, и в данном случае величина нормальной производной от потенциала однородного сферического слоя равна полусумме значений ее внешнего и внутреннего пределов:

$$\frac{1}{2} (\partial V_i/\partial n + \partial V_e/\partial n) = \partial \bar{V}/\partial n = -2\pi G\mu.$$

Потенциал притяжения линейных масс

Если задано тело, двумя размерами которого можно пренебречь по сравнению с третьим (например, шириной и толщиной по сравнению с длиной), массу такого тела можно считать линейной, т. е. распределенной вдоль какой-то линии L . В этом случае элемент поверхности $dS = d \, dl$, где dl — элемент дуги (линии), d — толщина тела.

В пределе, когда $d \rightarrow 0$, плотность масс, распределенных на поверхности, будет стремиться к бесконечности, но так же, как и в рассмотренных выше случаях, примем, что существует предел

$$\lim_{d \rightarrow 0} (\mu d) = \lambda.$$

Эта величина λ называется линейной плотностью тела, или массой его единицы длины. Она является непрерывной и конечной функцией координат переменной точки линии L . Суммарная масса такой линии $m = \int_L dl$. Если λ — постоянная величина, то $m = \lambda L$, где L — длина линии.

Возьмем теперь массы, как бы лежащие на бесконечно тонкой линии L . Пусть λ — масса, приходящаяся на единицу ее длины, или линейная плотность масс (рис. 22).

Представим линию в виде вытянутой в одну сторону узкой площадки шириной d с распределенными на ней массами, плотность которых (поверхностная) μ . Если dl — элемент длины этой площадки, то $dS = d \, dl$.

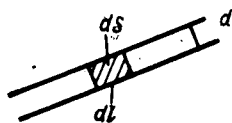
Допустим, что при $d \rightarrow 0$ поверхностная плотность $\mu \rightarrow \infty$, но так, что

$$\lim_{d \rightarrow 0} (\mu d) = \lambda,$$

причем λ — непрерывная функция координат точки M на рассматриваемой линии.

Для заданных таким образом масс из выражения потенциала притяжения для простого слоя (II.14) получим (в пределе поверхностный интеграл превращается в интеграл по длине линии L)

$$V(P) = \lim_{d \rightarrow 0} G \int_S \mu (dS/r) = \lim_{d \rightarrow 0} G \int_S \mu d (dl/r) = G \int_L \lambda (dl/r). \quad (\text{II.18})$$



Полученное выражение является выражением потенциала притяжения линейных масс, лежащих на бесконечно тонкой линии L . При этом сила притяжения

Рис. 22. Линейные массы

$$\vec{F} = \text{grad } V = (\partial V / \partial x) \vec{i} + (\partial V / \partial y) \vec{j} + (\partial V / \partial z) \vec{k}.$$

Для проекций силы получим

$$F_x = \frac{\partial V}{\partial x} = -G \int_L \lambda \frac{x - \xi}{r^3} dl;$$

$$F_y = \frac{\partial V}{\partial y} = -G \int_L \lambda \frac{y - \eta}{r^3} dl;$$

$$F_z = \frac{\partial V}{\partial z} = -G \int_L \lambda \frac{z - \zeta}{r^3} dl.$$

В векторной форме

$$\vec{F} = -G \int_L \lambda \vec{r} dl / r^3.$$

Рассмотрим следующий пример. Определим потенциал притяжения линейных масс однородной круговой проволоки (окружности радиусом R) в точке P , расположенной на прямой, проходящей через центр окружности перпендикулярно к ее плоскости. Из (II.18) получим

$$V = G \int_L \lambda dl / r = G\lambda \int_L dl / r.$$

Так как (рис. 23)

$$r = \sqrt{R^2 + z^2}; \quad dl = R d\varphi,$$

где z — расстояние от центра окружности до точки P , то

$$V = G\lambda \int_0^{2\pi} \frac{R d\varphi}{\sqrt{R^2 + z^2}} = \frac{2\pi R\lambda G}{\sqrt{R^2 + z^2}} = G \frac{m}{\sqrt{R^2 + z^2}},$$

где $m = 2\pi R\lambda$ — масса проволоки. В центре окружности отсюда получим $V = Gm/R$.

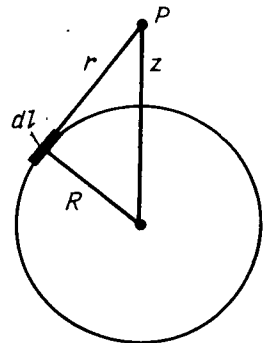


Рис. 23. Однородные массы, расположенные на окружности, и элемент dl

Аналогично для проекции силы притяжения F_z в точке P

$$F_z = -G\lambda \int_L \frac{zdl}{r^3} = -G\lambda \int_0^{2\pi} \frac{Rz d\varphi}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = -G \frac{mz}{(R^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Таким путем можно определить и другие проекции силы притяжения.

§ 10. ПОТЕНЦИАЛЫ ДИПОЛЯ И ОБЪЕМНОГО НАМАГНИЧЕННОГО ТЕЛА

Закон Кулона

Взаимодействие между двумя изолированными элементарными магнитными массами (точечными массами, зарядами) m_1 и m_2 в изотропной однородной среде происходит согласно закону Кулона

$$F = m_1 m_2 / \epsilon r^2,$$

где r — расстояние между точками, в которых заключены массы, ϵ — диэлектрическая проницаемость среды, окружающей массы.

Примем, что масса $m_1 = m$ находится в точке $M(\xi, \eta, \zeta)$, а $m_2 = 1$ — в точке $P(x, y, z)$. Тогда для этих масс при $\epsilon = 1$ (в вакууме) закон Кулона примет вид $F = m/r^2$. Эта сила, с которой масса m действует на единичную массу (на единичный положительный заряд), помещенную в точку P , характеризует напряженность поля. Следует отметить, что магнитные массы изолированными не бывают, необходимо учесть и влияние отрицательных масс.

Магнитные массы

В отличие от гравитационных масс, которые в природе всегда имеют один знак (положительные), магнитные массы не бывают одного знака — любой величине положительной массы соответствует такая же величина отрицательной массы. Только если один из полюсов магнита находится в бесконечности, можно считать, что действует магнитная масса одного знака. В качестве источников магнитного поля нас интересуют намагниченные тела.

Под действием внешнего магнитного поля, в частности магнитного поля Земли, горные породы намагничиваются в различной степени. Степень намагниченности зависит от магнитной восприимчивости пород, т. е. от их способности намагничиваться. Каковы бы ни были величина намагниченности и ее распре-

деление внутри тела, магнитное поле от намагниченного тела можно рассматривать как поле совокупности большого числа элементарных магнитных диполей. При этом магнитный момент каждого элемента тела совпадает с магнитным моментом соответствующего ему диполя.

Векторная сумма всех моментов, соответствующих элементам объема тела (элементарных моментов тела), называется магнитным моментом этого тела.

Если обозначить магнитный момент элемента объема тела dv через $d\vec{M}$, то величина $\vec{J} = d\vec{M}/dv$ называется намагниченностью тела. Будем считать, что $\vec{J}$ — функция непрерывно дифференцируемая всюду внутри тела вплоть до его поверхности.

Если тело однородно намагниченное, то его полный момент $\vec{M} = \vec{J}v$, где v — объем тела.

Магнитный момент элементарного диполя

$$d\vec{M} = \lim_{d \rightarrow 0} (md)\vec{l}_1,$$

где m — интенсивность точечного источника, заключенного в положительном полюсе диполя; d — длина диполя; $\vec{l}_1$ — единичный вектор, направленный по оси диполя от отрицательной массы — m к положительной m .

Магнитный момент единицы длины двумерных магнитных масс сечением dS

$$d\vec{P} = \vec{J}dS.$$

Если задан однородно намагниченный бесконечный горизонтальный круговой цилиндр сечением S (вектор $\vec{J}$ находится в плоскости сечения), то магнитный момент единицы его длины $\vec{P} = \vec{J}S$.

Для слабомagnetных материалов величина $\vec{J}$ прямо пропорциональна напряженности намагничивающего поля H : $\vec{J} = \chi \vec{H}$, где χ — магнитная восприимчивость. Для тел с большей магнитной восприимчивостью величина $\vec{J}$ зависит от формы тела. Причина такой зависимости следующая. Если тело конечных размеров поместить в поле $\vec{H}$, то оно намагничивается, т. е. на его противоположных концах возникают магнитные полюсы. Эти полюсы в свою очередь создают внутри тела поле $\vec{H}'$, которое направлено навстречу внешнему полю $\vec{H}$. Из-за этого

напряженность внутри тела уменьшается. Поэтому поле $\vec{H}'$ называется размагничивающим, а напряженность $\vec{H}$ — напряженностью внутреннего размагничивающего поля. Суммарное поле внутри тела $\vec{H}_в = \vec{H} - \vec{H}'$. Здесь величина $\vec{H}'$ пропорциональна намагниченности: $\vec{H}' = \vec{J}N$, где N — коэффициент размагничивания. Поэтому $\vec{H}_в = \vec{H} - \vec{J}N$.

Учитывая соотношение $\vec{J} = \kappa \vec{H}_в$, найдем $\vec{H}_в = \vec{H} - \kappa N \vec{H}_в$.

Отсюда

$$\vec{H}_в = \vec{H} / (1 + \kappa N).$$

Умножив обе части этого равенства на κ , получим

$$\vec{J} = \kappa \vec{H} / (1 + \kappa N).$$

Коэффициент размагничивания N зависит только от формы тела. Он может меняться от 0 до 4π . Для шара $N = (4/3)\pi$, для кругового цилиндра, намагниченного перпендикулярно к его оси, $N = 2\pi$.

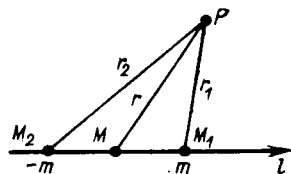
Из полученных выражений видно, что в общем случае направление вектора $\vec{J}$ может не совпасть с направлением намагничивающего поля и при однородном намагничивании. Кроме того, напряженность внутреннего размагничивающего поля в разных точках тела может иметь разные направления относительно направления внешнего намагничивающего поля. Поэтому и направления вектора намагниченности внутри тела могут быть разными, следовательно в общем случае тело может намагничиваться неоднородно.

Направление $\vec{J}$ совпадает с направлением намагничивающего поля, например, в случаях однородно намагниченного шара (коэффициенты N равны по всем осям), трехосного эллипсоида, когда направление внешнего поля совпадает с одной из его главных осей (составляющие поля $\vec{H}$ по другим осям будут равны нулю). Кроме того, при вычислении намагниченности горных пород в магнитном поле Земли по значению магнитной восприимчивости для случаев относительно больших κ необходимо учесть влияние коэффициента размагничивания.

Потенциал диполя

Пусть заданы две точки M_1 и M_2 , в которых расположены две равные по величине, но противоположные по знаку массы m и $-m$ (рис. 24).

Рис. 24. Диполь



Возьмем положительное направление линии $\vec{l}$, соединяющей массы и идущей от отрицательной массы к положительной. Расстояния PM , PM_1 , PM_2 и M_1M_2 обозначены соответственно r , r_1 , r_2 и d . Точка M делит расстояние M_1M_2 пополам. При заданных таким образом массах образуется диполь, если $d \ll r$. При этом расстояние d называется длиной диполя, прямая l — осью диполя, точка M — центром диполя, точки M_1 и M_2 (иногда массы m , $-m$) — полюсами диполя. Плоскость, перпендикулярная к линии l и проходящая через точку M , — экваториальная плоскость.

Требуется найти потенциал U от заданных таким образом двух точечных масс в точке P .

Применяя формулу потенциала от системы точечных масс $-m$ и m , найдем (так как рассматривается потенциал магнитного диполя, коэффициент G здесь опускается)

$$U(P) = (m/r_1 - m/r_2) = m(1/r_1 - 1/r_2).$$

Разделим и умножим правую часть этого равенства на d :

$$U(P) = md \frac{1/r_1 - 1/r_2}{d}.$$

В пределе, когда $d \rightarrow 0$ (что имеет место при $d \ll r$), выражение $(1/r_1 - 1/r_2)/d$ дает значение производной функции $1/r$ по направлению l :

$$\lim_{d \rightarrow 0} \frac{1/r_1 - 1/r_2}{d} = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{\Delta(1/r)}{\Delta l} = \frac{\partial}{\partial l} (1/r).$$

Но

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{1}{r} \right) &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) \frac{\partial r}{\partial l} = \\ &= -\frac{1}{r^2} \cos(r, l) = -\frac{1}{r^2} \cos \theta, \end{aligned}$$

где θ — угол между направлениями r и l .

Подставив полученное выражение в формулу для U , при

$$\lim_{d \rightarrow 0} (md) = v$$

окончательно получим

$$U(P) = v \frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{1}{r} \right) = -v \frac{1}{r^2} \cos \theta. \quad (\text{II.19})$$

Это выражение определяет потенциал притяжения диполя.

В (II.19) величина v называется моментом диполя. В общем случае v — это вектор,

$$\vec{v} = \lim_{d \rightarrow 0} (md \cdot \vec{l}_1),$$

где l_1 — единичный вектор, имеющий направление l . Принимается, что вектор $\vec{v}$ всегда направлен в сторону положительной массы m . Абсолютная величина момента диполя равна произведению массы положительного полюса на длину диполя.

Перепишем равенство (II.19) в более удобной векторной форме. По формуле производной сложной функции [при $x=f(l)$, $y=f(l)$ и $z=f(l)$]

$$\frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) \frac{dx}{dl} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \right) \frac{dy}{dl} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) \frac{dz}{dl}.$$

Так как $\partial/\partial x(1/r)$, $\partial/\partial y(1/r)$, $\partial/\partial z(1/r)$ — проекции вектора $\text{grad}(1/r)$ по осям координат x , y , z , а dx/dl , dy/dl , dz/dl — направляющие косинусы по осям координат x , y , z единичного вектора, имеющего направление l , то в виде скалярного произведения двух векторов

$$\frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{1}{r} \right) = \left(\vec{l}_1 \cdot \text{grad} \frac{1}{r} \right).$$

Поэтому окончательно формулу (II.19) в векторной форме можно переписать:

$$U(P) = [\vec{v} \cdot \text{grad}(1/r)]. \quad (\text{II.20})$$

Из (II.19) видно, что в отличие от поля точечной массы потенциал диполя убывает обратно пропорционально квадрату расстояния r . Кроме того, потенциал диполя зависит от угла отклонения радиуса-вектора $\vec{r}$ от направления момента диполя.

Рассмотрим частные случаи.

1. Пусть угол θ равен нулю, т. е. r направлен по направлению l . Тогда $|U(P)| = v/r^2$. В этом случае, т. е. по направлению оси диполя, потенциал $U(P)$ имеет максимальное значение и убывает обратно пропорционально квадрату r .

2. Пусть $r \perp l$, т. е. $\theta = 90^\circ$. При этих условиях, как видно из рис. (II.19), значение $U(P) = 0$, т. е. в точках экваториальной плоскости диполя значения его потенциала равны нулю.

Для определения напряженности поля диполя примем, что ось x направлена по оси диполя и начало координат взято в самом диполе, т. е. координаты $\xi = \eta = \zeta = 0$ и

$$\cos \theta = \cos(r, l) = \cos(r, x) = x/r.$$

Тогда из (II.19) найдем

$$U(P) = -vx/r^3.$$

Величину силы притяжения, или напряженности, диполя получим из выражения $\vec{F} = \text{grad } U$, т. е. $F_x = \partial U / \partial x$, $F_y = \partial U / \partial y$, $F_z = \partial U / \partial z$. Поэтому дифференцируя выражение для U по переменным x, y, z , найдем

$$F_x = -v/r^3 + 3vx^2/r^5;$$

$$F_y = 3vxy/r^5;$$

$$F_z = 3vzx/r^5.$$

Рассмотрим два частных случая.

а. Примем, что точка P находится на продолжении оси диполя, т. е. $y=0, z=0, r=x$. Тогда

$$F_y=0; \quad F_z=0; \quad F_x = -v/r^3 + 3vr^2/r^5 = 2v/r^3.$$

Поэтому

$$\vec{F} = (2/r^3)\vec{v}.$$

б. Примем, что точка P находится в экваториальной плоскости, т. е. $x=0$. Тогда, подставляя это значение x в полученные выше выражения для проекций F_x, F_y и F_z , найдем,

$$F_x = -v(1/r^3); \quad F_y=0; \quad F_z=0.$$

Поэтому

$$\vec{F} = -\vec{v}/r^3.$$

Из найденных выражений $\vec{F}$ видно, что вектор силы, действующий на точку P со стороны диполя, обратно пропорционален кубу расстояния от точки P до диполя и его направление совпадает с направлением оси диполя или противоположно ему.

Потенциал объемного намагниченного тела.

Связь между значениями гравитационного и магнитного потенциалов

Ознакомившись с потенциалами притяжения отдельного диполя, можно найти и потенциал сплошного намагниченного тела, которое можно рассматривать как систему бесконечно большого числа магнитных диполей с упорядоченно расположенными магнитными осями.

Если объем намагниченного тела v , вектор намагниченности $\vec{J}$, а $\vec{J} dv$ — магнитный момент дифференциально малого объема dv , то $d\vec{v} = \vec{J} dv$ и из (II.20) найдем

$$dU = [\vec{J} \cdot \text{grad}(1/r)] dv,$$

где dU — магнитный потенциал, создаваемый элементом dv .

Тогда, проинтегрировав выражение для dU по всему объему намагниченного тела, определим созданный им потенциал:

$$U(P) = \int_v [\vec{J} \cdot \text{grad}(1/r)] dv. \quad (\text{II.21})$$

Другие формы этого равенства получим, пользуясь при определении выражениями (II.19) и интегрируя полученные значения по объему v :

$$U(P) = \int_v J \frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{1}{r} \right) dv = - \int_v J \frac{\cos \theta}{r^2} dv. \quad (\text{II.22})$$

Здесь вектор $\vec{J}$ имеет направление $\vec{v}$, совпадающее с направлением l .

Установим связь между значениями гравитационного и магнитного потенциалов, соответствующими одному и тому же аномальному телу. Рассмотрим случай однородно намагниченного тела, когда вектор $\vec{J}$ имеет постоянную величину и направление по всему телу.

Для этого случая из равенства (II.22) получим

$$U(P) = \int_v J \frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{1}{r} \right) dv = J \frac{\partial}{\partial l} \int_v \frac{dv}{r}.$$

Полагая тело однородным по плотности σ , после умножения и деления правой части на величину $G\sigma$ найдем

$$U(P) = \frac{J}{G\sigma} \frac{\partial}{\partial l} \left(G \int_v \sigma \frac{dv}{r} \right) = \frac{J}{G\sigma} \frac{\partial V}{\partial l}, \quad (\text{II.23})$$

где на основании (II.9)

$$V = G \int_v \sigma (dv/r)$$

является гравитационным потенциалом притяжения объемных масс (в отличие от магнитного потенциала U , он обозначен через V).

Таким образом, магнитный потенциал однородного по плотности и однородно намагниченного тела равен произведению величины $J/G\sigma$ на производную гравитационного потенциала тела, полученную по направлению вектора намагниченности.

Полученным равенством можно пользоваться при решении различных задач магниторазведки, так как оно позволяет находить магнитный потенциал однородно намагниченного тела, если известен его гравитационный потенциал (при постоянной плотности этого тела).

Перепишем формулу (II.23) через производные гравитационного потенциала по осям координат x , y и z . По правилу дифференцирования сложной функции

$$U(P) = \frac{J}{G\sigma} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dl} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dl} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{dz}{dl} \right) = \\ = \frac{J}{G\sigma} \left[\frac{\partial V}{\partial x} \cos(l, x) + \frac{\partial V}{\partial y} \cos(l, y) + \frac{\partial V}{\partial z} \cos(l, z) \right].$$

Так как направления l и $\vec{J}$ совпадают,

$$U(P) = (1/G\sigma) (J_x V_x + J_y V_y + J_z V_z), \quad (\text{II.24})$$

где $V_x = \partial V / \partial x$; $V_y = \partial V / \partial y$; $V_z = \partial V / \partial z$;

J_x, J_y, J_z — проекции вектора $\vec{J}$ на оси координат:

$$J_x = |\vec{J}| \cos(J, x), \quad J_y = |\vec{J}| \cos(J, y), \quad J_z = |\vec{J}| \cos(J, z).$$

Формулы (II.23), (II.24), связывающие гравитационный и магнитный потенциалы тела, являются уравнениями Пуассона и широко применяются при решении различных задач гравитационной и магниторазведки.

Найдем теперь выражения, определяющие проекции силы $\vec{F}$ (напряженности поля) на координатные оси. Так как

$$\vec{F} = \text{grad } U = (\partial U / \partial x) \vec{i} + (\partial U / \partial y) \vec{j} + (\partial U / \partial z) \vec{k},$$

с использованием (II.24) найдем

$$F_x = (\partial U / \partial x) = X = (1/G\sigma) (J_x V_{xx} + J_y V_{xy} + J_z V_{xz});$$

$$F_y = (\partial U / \partial y) = Y = (1/G\sigma) (J_x V_{xy} + J_y V_{yy} + J_z V_{yz});$$

$$F_z = (\partial U / \partial z) = Z = (1/G\sigma) (J_x V_{xz} + J_y V_{yz} + J_z V_{zz}).$$

В случае двумерных гравитационных и магнитных аномалий при $J_y = 0$, $V_y = 0$ (равны нулю и все значения производных от V , в индексы которых входят y) из приведенных равенств, начиная с (II.24), получим

$$U(P) = (1/G\sigma) (J_x V_x + J_z V_z);$$

$$\vec{F} = (\partial U / \partial x) \vec{i} + (\partial U / \partial z) \vec{k};$$

$$F_x = (1/G\sigma) (J_x V_{xx} + J_z V_{xz});$$

$$F_z = (1/G\sigma) (J_x V_{xz} + J_z V_{zz}).$$

Для наиболее применяемого на практике случая вертикального намагничивания ($J_x = J_y = 0$, $J_z = J$ — трехмерные аномалии) найдем

$$U = (1/G\sigma)JV_z; \quad F_x = (1/G\sigma)JV_{xz}; \\ F_y = (1/G\sigma)JV_{yz}; \quad F_z = (1/G\sigma)JV_{zz}.$$

Для двумерных аномалий при вертикальном намагничивании будут справедливы эти же формулы, за исключением того, что проекция $F_y = 0$.

Рассмотрим несколько примеров.

Поле однородно намагниченного шара. Пусть m , σ , R — соответственно масса, плотность и радиус шара. Для такого шара согласно полученным выше формулам

$$V(P) = \begin{cases} Gm/\rho, & \rho \geq R, \\ 2\pi G\sigma (R^2 - \rho^2/3), & \rho < R. \end{cases}$$

Определим вначале значения производной $\partial V/\partial l$: при $\rho > R$

$$\frac{\partial V}{\partial l} = -G \frac{m}{\rho^2} \frac{d\rho}{dl} = -G \frac{m}{\rho^2} \cos \theta;$$

при $\rho < R$

$$\frac{\partial V}{\partial l} = \frac{\partial V}{\partial \rho} \frac{d\rho}{dl} = -\frac{4}{3} \pi G\sigma \rho \frac{d\rho}{dl} = -G \frac{m}{R^3} \rho \cos \theta.$$

В этих выражениях учтено, что угол между положительным направлением ρ (от центра к точке P) и вектором J равен величине θ .

Тогда согласно (II.23) при $M = Jv$ найдем

$$U(P) = \begin{cases} -\frac{M}{\rho^2} \cos \theta, & \rho \geq R, \\ -\frac{M}{R^3} \rho \cos \theta, & \rho < R, \end{cases}$$

где M — магнитный момент шара.

На поверхности шара при $\rho = R$ обе эти формулы дают одно и то же значение

$$U(P) = - (M/R^2) \cos \theta.$$

Из сравнения полученной формулы при $\rho > R$ с формулой для потенциала диполя видно, что потенциал однородно намагниченного шара для внешней точки равен потенциалу диполя с тем же моментом M , помещенным в центре шара.

Определим теперь величину силы $\vec{F}$ (напряженности поля). С этой целью разложим ее на две составляющие — по направ-

лению нормали (вертикальную составляющую напряженности магнитного поля) и по направлению касательной вдоль магнитного меридиана (горизонтальная составляющая напряженности H):

$$Z = \frac{\partial U}{\partial \rho}; \quad H = \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \theta}.$$

Дифференцируя выражение потенциала, соответствующее значению $\rho > R$, найдем

$$Z = (2M/\rho^3) \cos \theta; \quad H = (M/\rho^3) \sin \theta.$$

Для точек, находящихся на шаре при $\rho = R$, получим

$$Z = (2M/R^3) \cos \theta; \quad H = (M/R^3) \sin \theta.$$

Полный вектор напряженности

$$|\vec{T}| = \sqrt{Z^2 + H^2} = (M/R^3) \sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta}.$$

На магнитных полюсах $\theta = 0$ и 180° , поэтому

$$Z = \pm 2M/R^3; \quad H = 0;$$

$$|\vec{T}| = Z_{\max} = 2M/R^3.$$

На магнитном экваторе $\theta = 90$ или 270° , следовательно

$$Z = 0; \quad H = \pm M/R^3; \quad |\vec{T}| = H_{\max}.$$

Если через Z_p обозначить значение вертикальной составляющей на Северном полюсе, через H_e — значение горизонтальной составляющей на магнитном экваторе, то $Z_p/H_e = 2$.

Если I — угол между направлением полного вектора напряженности магнитного поля и касательной к меридиану в точке P (угол магнитного наклона), то $\operatorname{tg} I = Z/H$.

Для определения магнитного момента шара получим

$$M = H_e R^3 = Z_p R^3 / 2.$$

Приведенные формулы имеют важное значение, ими можно аппроксимировать в первом приближении магнитное поле Земли.

Поле однородно намагниченного эллипсоида. Для определения потенциала и составляющих магнитного поля от однородно намагниченного эллипсоида воспользуемся известными выражениями для гравитационного потенциала и его производных (см. § 8). Рассмотрим случай внешней задачи.

Магнитный потенциал найдем из формулы

$$U(P) = (1/G\sigma) (J_x V_x + J_y V_y + J_z V_z).$$

Значения производных

$$V_x = \partial V / \partial x = F_x; \quad V_y = F_y; \quad V_z = F_z$$

были найдены выше:

$$V_x = GA\sigma x; \quad V_y = GB\sigma Y; \quad V_z = GC\sigma z,$$

где

$$A = -2\pi abc \int_t^{\infty} \frac{1}{a^2 + \lambda} \frac{d\lambda}{V\bar{f}(\lambda)};$$

$$B = -2\pi abc \int_t^{\infty} \frac{1}{b^2 + \lambda} \frac{d\lambda}{V\bar{f}(\lambda)};$$

$$C = -2\pi abc \int_t^{\infty} \frac{1}{c^2 + \lambda} \frac{d\lambda}{V\bar{f}(\lambda)}.$$

Тогда для магнитного потенциала получим

$$U(P) = AxJ_x + ByJ_y + CzJ_z. \quad (\text{II.25})$$

По этой же формуле можно определить потенциал и для внутренних точек, если в интегралах A , B , C нижний предел интегрирования принять равным нулю. Рассмотрим следующий частный случай. Найдем магнитное поле сжатого эллипсоида при $a = b > c$. Из (II.25) при $A = B$

$$U(P) = A(xJ_x + yJ_y) + CzJ_z.$$

Предположим, что эллипсоид намагничен по оси z . Тогда

$$U(P) = CzJ_z, \quad (\text{II.26})$$

где при $t=0$

$$C = -2\pi a^2 c \int_0^{\infty} \frac{1}{c^2 + \lambda} \frac{d\lambda}{V\bar{f}(\lambda)}.$$

Так как

$$\bar{f}(\lambda) = (a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda),$$

то при $a = b$

$$\bar{f}(\lambda) = (a^2 + \lambda)^2 (c^2 + \lambda).$$

Тогда

$$C = -2\pi a^2 c \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{(a^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)^{3/2}}.$$

Этот интеграл берется в простейших выражениях:

$$C = -4\pi a^2 c \left(\frac{1}{q^2 c} - \frac{1}{q^3} \arctg \frac{q}{c} \right),$$

где $q^2 = a^2 - c^2$. Подставив это значение c в формулу для потенциала (II.26), окончательно получим

$$U = -3M \left(\frac{1}{q^2 c} - \frac{1}{q^3} \operatorname{arctg} \frac{q}{c} \right) z,$$

где учтено, что магнитный момент эллипсоида

$$M = 4\pi a^2 c J / 3.$$

Отсюда можно определить и составляющие напряженности магнитного поля по оси координат.

§ 11. ВОЗМОЖНОСТИ СОВМЕСТНОГО АНАЛИЗА ПРОИЗВОДНЫХ ГРАВИТАЦИОННОГО И МАГНИТНОГО ПОЛЕЙ

Рассмотрим с наиболее общих позиций вопрос об определении коэффициента $J/G\sigma$ и углов, образуемых вектором $\vec{J}$ с осями координат x, y, z по совокупности любых двух магнитной и гравитационной аномалий, соответствующих одному и тому же источнику. Более просто и сравнительно легко эту задачу можно решить в волновых числах с применением преобразований Фурье. Поэтому остановимся на этом пути. Выразим вначале уравнения Пуассона о связи между гравитационным и магнитным потенциалами и их производными в волновых числах, т. е. через спектры гравитационных и магнитных аномалий. Рассмотрим трехмерные аномалии.

Уравнение Пуассона в спектральном виде

Установим вначале связь между спектрами магнитных аномалий со спектром гравитационной аномалии ускорения свободного падения.

Спектр аномалии $f(x, y)$ (предполагаем, что он существует)

$$S(u, v)_f = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp[-i(ux + vy)] dx dy,$$

где u и v — волновые числа (здесь и в дальнейшем индексы при спектрах и автокорреляционных функциях указывают на аномалии, которым они принадлежат).

Воспользуемся применяемыми в гравиразведке и магнито-разведке соотношениями связи между спектрами аномалий различных производных:

$$S_{V_x} = -(iu/\rho) S_{V_z}; \quad S_{V_y} = -(iv/\rho) S_{V_z};$$

$$S_{V_{xz}} = iu S_{V_z}; \quad S_{V_{yz}} = iv S_{V_z};$$

$$S_{V_{zz}} = -\rho S_{V_z}; \quad S_{V_{xx}} = -[(iu)^2/\rho] S_{V_z};$$

$$S_{V_{yy}} = -[(iv)^2/\rho] S_{V_z}; \quad S_{V_{xy}} = -(iuv/\rho) S_{V_z},$$

где $\rho = \sqrt{u^2 + v^2}$.

Применяя преобразования Фурье к обеим частям равенства (II.24) и равенств, полученных из него для проекций $F_x=X$, $F_y=Y$ и $F_z=Z$, и учитывая приведенные соотношения связи между спектрами аномалий различных производных гравитационного поля, найдем

$$S(u, v)_U = \frac{1}{G\sigma\rho} (-iuJ_x - ivJ_y + \rho J_z) S(u, v)_{V_z},$$

$$S(u, v)_X = \frac{S(u, v)_{V_z}}{G\sigma\rho} [u^2 J_x + uvJ_y + iu\rho J_z];$$

$$S(u, v)_Y = \frac{S(u, v)_{V_z}}{G\sigma\rho} [uvJ_x + v^2 J_y + iv\rho J_z];$$

$$S(u, v)_Z = \frac{S(u, v)_{V_z}}{G\sigma\rho} [iu\rho J_x + iv\rho J_y - \rho^2 J_z].$$

Эти формулы связывают спектры аномалий магнитного потенциала со спектром непосредственно измеряемой гравитационной аномалии и выражают уравнения Пуассона для связи между потенциалами в волновых числах.

Рассмотрим теперь энергетические спектры. Зная спектр аномалий $S(u, v)$, ее энергетический спектр можно определить из равенства

$$Q(u, v) = 2\pi S(u, v) S(-u, -v) = 2\pi |S(u, v)|^2.$$

Пользуясь этой формулой, из приведенных равенств получим следующие выражения для энергетических спектров аномалий:

$$Q(u, v)_U = \frac{A(u, v)}{(G\sigma\rho)^2} Q(u, v)_{V_z};$$

$$Q(u, v)_X = \frac{A(u, v)}{(G\sigma\rho)^2} u^2 Q(u, v)_{V_z};$$

$$Q(u, v)_Y = \frac{A(u, v)}{(G\sigma\rho)^2} v^2 Q(u, v)_{V_z};$$

$$Q(u, v)_Z = \frac{A(u, v)}{(G\sigma\rho)^2} \rho^2 Q(u, v)_{V_z},$$

где

$$A(u, v) = u^2 J_x^2 + v^2 J_y^2 + 2uvJ_x J_y + \rho^2 J_z^2, \quad (\text{II.27})$$

при вертикальном намагничивании $A(u, v) = \rho^2 J^2$.

В этих равенствах от энергетического спектра аномалии V_z можно перейти к энергетическим спектрам аномалий V_{xz} , V_{yz} и V_{zz} на основании следующих формул, получаемых с помощью приведенных соотношений связи между спектрами различных производных

$$u^2 Q(u, v) v_z = Q(u, v) v_{xz};$$

$$v^2 Q(u, v) v_z = Q(u, v) v_{yz};$$

$$\rho^2 Q(u, v) v_z = Q(u, v) v_{zz}.$$

Учитывая последние выражения, из формул для энергетических спектров найдем

$$\begin{aligned} \frac{A(u, v)}{(G\sigma\rho)^2} &= \frac{Q(u, v)_U}{Q(u, v) v_z} = \frac{Q(u, v)_X}{u^2 Q(u, v) v_z} = \\ &= \frac{Q(u, v)_Y}{v^2 Q(u, v) v_z} = \frac{Q(u, v)_Z}{\rho^2 Q(u, v) v_z} = \frac{Q(u, v)_X}{Q(u, v) v_{xz}} = \frac{Q(u, v)_Y}{Q(u, v) v_{yz}} = \frac{Q(u, v)_Z}{Q(u, v) v_{zz}}. \end{aligned}$$

Всем этим отношениям соответствует одна и та же функция $A(u, v)$. Из этих равенств, пользуясь любым отношением, можно определить значения функции

$$A(u, v)/(G\sigma\rho)^2 = P(\varphi),$$

а следовательно, и величины $J_x/G\sigma$, $J_y/G\sigma$,

$J_z/G\sigma$ и $J/G\sigma = K$ (при вертикальном намагничивании — сразу величину K).

Определение коэффициента k

Приведем несколько соотношений, облегчающих определение коэффициента K . В полярных координатах на плоскости при $u = \rho \cos \varphi$, $v = \rho \sin \varphi$, $u^2 + v^2 = \rho^2$ из (II.27) получим

$$\begin{aligned} P(\varphi) &= K^2 (\cos^2 \varphi \cos^2 \alpha + \sin^2 \varphi \cos^2 \beta + \\ &+ \sin 2\varphi \cos \alpha \cos \beta + \cos^2 \gamma), \end{aligned}$$

где

$$K = J/G\sigma; \quad \cos \alpha = J_x/J; \quad \cos \beta = J_y/J; \quad \cos \gamma = J_z/J;$$

α , β , γ — углы, образованные вектором $\vec{J}$ с осями координат x , y , z . Отсюда видно, что правая часть полученного равенства не зависит от ρ , а зависит только от φ . При значениях $\varphi = 0$ и $\varphi = 90^\circ$ найдем

$$P(0) = K^2 (1 - \sin^2 \beta);$$

$$P(90^\circ) = K^2 (1 - \sin^2 \alpha).$$

Максимальное значение

$$P(\varphi)_{\max} = K^2;$$

минимальное

$$P(\varphi)_{\min} = K^2 \cos^2 \gamma.$$

Кроме того, легко показать, что

$$P(\varphi) + P(\varphi + 90^\circ) = P(\varphi)_{\min} + P(\varphi)_{\max} = K^2 (1 + \cos^2 \gamma);$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(\varphi) d\varphi = \frac{K^2}{2} (1 + \cos^2 \gamma).$$

Из этих соотношений можно определить K и углы α , β , γ .

Двухмерное, или плоское поле. Для двухмерных аномалий при $u = \omega$, $v = 0$, $\rho = |\omega|$, $Y = 0$, $X = H$ и $J_x^2 + J_z^2 = J^2$ уравнение Пуассона для потенциала и их производных можно переписать через спектры аномалий:

$$S(\omega)_Y = \frac{1}{G\sigma|\omega|} (-i\omega J_x + |\omega| J_z) S(\omega)_{V_z};$$

$$S(\omega)_X = \frac{1}{G\sigma|\omega|} (\omega^2 J_x + i\omega|\omega| J_z) S(\omega)_{V_z};$$

$$S(\omega)_Z = \frac{1}{G\sigma|\omega|} (\omega|\omega| J_x - \omega^2 J_z) S(\omega)_{V_z}.$$

Связь между энергетическими спектрами легко получить из приведенных выше соотношений, учитывая, что для двухмерных аномалий $P(\varphi) = K^2$, т. е. является постоянной величиной. Поэтому в получаемых выражениях энергетические спектры автоматически можно заменить и автокорреляционными функциями соответствующих аномалий. Эти выражения и их обобщение на случай магнитных аномалий ΔT ввиду легкости их получения здесь не приводим. Подробно об этом можно прочесть в работах В. Н. Страхова, О. А. Соловьева, С. А. Серкорова и других исследователей.

Приведем конечные выражения некоторых формул двухмерной задачи, позволяющих определять коэффициент K :

$$\begin{aligned} K^2 &= \frac{\left[\int_{-\infty}^{\infty} U(x) dx \right]^2}{\left[\int_{-\infty}^{\infty} V_z(x) dx \right]^2} = \frac{\left[\int_{-\infty}^{\infty} H(x) dx \right]^2}{\left[\int_{-\infty}^{\infty} V_{xz}(x) dx \right]^2} = \frac{\left[\int_{-\infty}^{\infty} H(x) dx \right]^2}{\left[\int_{-\infty}^{\infty} V_{zz}(x) dx \right]^2} = \\ &= \frac{\left[\int_{-\infty}^{\infty} Z(x) dx \right]^2}{\left[\int_{-\infty}^{\infty} V_{xz}(x) dx \right]^2} = \frac{\left[\int_{-\infty}^{\infty} Z(x) dx \right]^2}{\left[\int_{-\infty}^{\infty} V_{zz}(x) dx \right]^2}. \end{aligned}$$

Другая серия формул

$$\begin{aligned}
 K^2 &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} U^2(x) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} V_{zz}^2(x) dx} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} H^2(x) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} V_{xz}^2(x) dx} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} Z^2(x) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} V_{zz}^2(x) dx} = \\
 &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} H^2(x) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} V_{zz}^2(x) dx} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} Z^2(x) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} V_{xz}^2(x) dx} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} [Z^2(x) + H^2(x)] dx}{\int_{-\infty}^{\infty} [V_{xz}^2(x) + V_{zz}^2(x)] dx}
 \end{aligned}$$

Некоторые из этих формул известны в литературе (А. А. Логачев, В. Н. Страхов, Б. М. Яновский и др.).

Для иллюстрации некоторых приведенных положений рассмотрим модельный пример (рис. 25). Значения энергетического спектра магнитной аномалии Z , соответствующие однородно намагниченному шару, показанные на рис. 25, a , уменьшены в

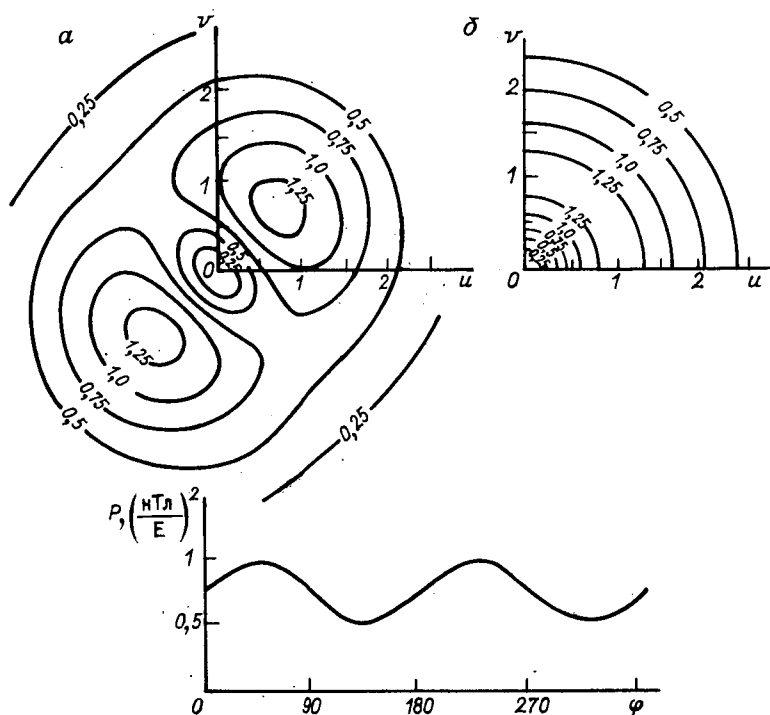


Рис. 25. Результаты определения коэффициента K .

Изолинии энергетического спектра: a — магнитной аномалии; $б$ — гравитационной аномалии ускорения свободного падения; $в$ — график изменения функции P

1000 раз. Значения энергетического спектра гравитационной аномалии V_{zz} от того же тела в пределах одной четверти горизонтальной плоскости, также уменьшенные в 1000 раз, приведены на рис. 25, б. График изменения функции

$$Q(u, v)_z / Q(u, v)_{V_{zz}} = P(\varphi)$$

в зависимости от угла φ показан на рис. 25, в. По данным этого графика по формулам, полученным из приведенных выше,

$$|K| = \sqrt{P(\varphi)_{\max}}; \quad \cos \gamma = \sqrt{P(\varphi)_{\min} / P(\varphi)_{\max}};$$

$$\sin \beta = \sqrt{1 - P(0) / P(\varphi)_{\max}}; \quad \sin \alpha = \sqrt{1 - P(90^\circ) / P(\varphi)_{\max}}$$

определены значения искомых параметров: $|K| = 1$ нТл/Е; $|\cos \gamma| = 0,71$; $|\cos \beta| = 0,50$; $|\cos \alpha| = 0,5$, т. е. $\gamma = 45^\circ$, $\alpha = \beta = 60^\circ$. Эти данные совпадают с принятыми при расчетах.

После определения отношений компонент вектора намагниченности к плотности равенства, выражающие спектры элементов магнитного поля через спектры гравитационных аномалий, можно использовать и для определения псевдогравитационных или псевдомагнитных аномалий. Как видно из равенств, приведенных выше, для этого при известных значениях J_x/σ , J_y/σ , J_z/σ достаточно знать спектр одного из элементов гравитационного поля, в данном случае аномалии V_z . Определив через спектр этой аномалии спектры элементов магнитного поля X , Y , Z (их можно называть спектрами псевдомагнитных аномалий), пользуясь обратным преобразованием Фурье, можно найти и значения самих элементов магнитного поля X , Y , Z . И наоборот, определяя из указанных равенств спектр аномалии V_z (спектр псевдогравитационной аномалии) через спектр какого-то одного элемента магнитного поля, аналогично можно вычислить и псевдогравитационную аномалию. Например, формулы, определяющие аномалии Z , будут иметь вид

$$Z(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S(u, v)_z \exp[i(ux + vy)] du dv =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(i \frac{J_x}{G\sigma} u + i \frac{J_y}{G\sigma} v - \rho \frac{J_z}{G\sigma} \right) \times$$

$$\times S(u, v)_{V_z} \exp[i(ux + vy)] du dv.$$

Для двумерных аномалий ($u = \omega$, $\rho = |\omega|$, $v = 0$)

$$Z(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(i \frac{J_x}{G\sigma} \omega - |\omega| \frac{J_z}{G\sigma} \right) \times$$

$$\times S(\omega)_{V_z} \exp(i\omega x) d\omega.$$

Указанным путем при известных $J_x/G\sigma$, $J_y/G\sigma$, $J_z/G\sigma$ можно вычислить не только псевдомагнитные или псевдогравитационные аномалии, но и их энергетические характеристики, например энергетический спектр, автокорреляционную функцию, взаимный энергетический спектр, взаимную корреляционную функцию. При этом, естественно, нужно пользоваться выражениями связи между энергетическими спектрами гравитационных и магнитных аномалий.

От спектров псевдомагнитных и псевдогравитационных аномалий не всегда нужно переходить к аномалиям — необходимый анализ и интерпретацию можно проводить и в частотной области спектральными методами. Например, зная спектры гравитационной и магнитной аномалий, величины $J_x/G\sigma$, $J_y/G\sigma$, $J_z/G\sigma$ можно определить, подбирая в приведенных выше выражениях спектров указанные величины таким образом, чтобы полученные данные в точках осей u , v , ω равнялись бы значениям спектра магнитной аномалии. Это легко осуществить с учетом действительной и мнимой частей спектров, а именно, учитывая ту их особенность, что действительная часть спектра аномалии Z и мнимые части спектров составляющих магнитного поля X , Y и Z (в двухмерном случае) всегда зависят только от величины $J_z/G\sigma$ оставшиеся их части зависят только от чисел $J_x/G\sigma$ и $J_y/G\sigma$ (для двухмерных аномалий от $J_x/G\sigma$).

Метод подбора по гравитационным и магнитным полям. Одним из результативных методов совместной интерпретации значений элементов гравитационного и магнитного полей при пуассоновском характере аномалиеобразующих объектов являются аппроксимационные методы, основанные на подборе полезных составляющих полей полями некоторого эквивалентного распределения масс. При совместной аппроксимации гравитационных и магнитных полей применяется смешанная мера аппроксимации, в качестве которой берется некоторый обобщенный функционал, являющийся взвешенной суммой двух функционалов, один из которых строится по данным наблюдений элементов гравитационного поля, другой — по данным наблюдений элементов магнитного поля. Методика применения этих методов при решении двухмерной задачи для случая изолированных тел по наблюдаемым элементам гравитационных и магнитных полей, содержащих случайные и систематические погрешности, следующая. Рассмотрим вначале способы, разработанные В. Н. Страховым.

Пусть заданы $U^n(x)$, которыми могут служить элементы гравитационного и магнитного полей $g^n(x)$ и $H^n(x)$. Предполагается, что из априорных данных можно построить некоторую приближенную модель распределения источников с постоянной плотностью σ и намагниченностью J . Пусть далее значениями $U^m(x; D(P^*))$ будут $g^m(x; D(P^*))$ и $H^m(x; D(P^*))$ — значения

тех же элементов полей в точках x , соответствующие заданной области D (заданной модели), определяемые вектором параметров P^* . Полагают также, что значения наблюдаемых элементов полей содержат фоновую составляющую $U^\Phi(x; t_k^*)$, где $k=1,2$; t_k^* — вектор параметров для k -го элемента. Значения этих параметров неизвестны и подлежат определению вместе с вектором P^* . Тогда составляют функционал $\Phi_{g,m}$ и векторы параметров P^* и t^* определяют из условия

$$\Phi_{g,m}^2(P^*\{t_k^*\}) = P_g \Phi_g^2 + P_m \Phi_m^2 = \min,$$

где P_g и P_m — веса, с которыми берутся соответственно функционалы гравитационного и магнитного полей Φ_g^2 и Φ_m^2 . При этом каждый из этих функционалов имеет вид

$$\Phi^2(P^*, \{t_k^*\}) = \sum_{i=1}^N [U^n(x_i) - U^m(x_i; D(P^*)) - U^\Phi(x_i; t_k^*)]^2,$$

где N — число пунктов наблюдений. В зависимости от того, как берут веса, как выбирают модельный класс источников, фоновые составляющие и какие параметры конкретно определяют, могут отличаться друг от друга аппроксимационные методы. Рассмотрим некоторые из них.

В работе В. Н. Страхова и М. И. Лапиной веса определяют из выражений

$$P_g = \frac{\beta_g^2}{\beta_g^2 + \beta_m^2}; \quad P_m = \frac{\gamma^2 \beta_m^2}{\beta_g^2 + \beta_m^2},$$

где

$$\beta_g = \frac{g_{\max}}{\delta_g}; \quad \beta_m = \frac{H_{\max}}{\delta_n}; \quad \gamma = \frac{g_{\max}}{H_{\max}};$$

$g_{\max}$, $H_{\max}$ — максимальные по модулю значения g , и H ; δ_g и δ_n — среднеквадратические величины случайных помех в наблюдаемых значениях полей. Фоновую составляющую поля аппроксимируют выражением

$$U^\Phi(x) = A + Bx_1 + Cx_2 \quad (x_1 = x, x_2 = z).$$

Определяемые авторами параметры — величины интегральных характеристик возмущающих масс, связанные с комплексными моментами источников. При этом исходные поля аппроксимируются полями некоторых задаваемых распределений масс, которыми могут служить, например, распределения масс, носителями которых являются многоугольник, область с границей в форме эллипса, область с границей в форме эллиптической лемнискаты Бута или так называемые «каркасы». Под «каркасами» понимаются распределения в виде совокупности точечных

источников с одинаковыми массами для гравитационного поля и с одинаковыми моментами для магнитного поля, рассматриваемых как некоторая связанная система.

Рассмотрим методику совместной интерпретации значений гравитационного и магнитного полей, разработанную Ф. М. Гольцманом и Т. Б. Калининой. В ней, пользуясь методами теории статистических решений, на основании критерия максимального правдоподобия строят так называемую оптимальную функцию отклика, или функцию достаточного приема $\lambda(P^*)$, по величине максимума которой и оценивают неизвестные параметры. При этом выражение для $\lambda(P^*)$ формально имеет такой же вид, какой имеет правая часть приведенной выше формулы, с той лишь разницей, что веса $P_g = -1/\delta_g^2$, $P_m = -1/\delta_m^2$ и отсутствует в нем фоновая составляющая $U\Phi$. А в качестве модели экспериментальных данных задаются функции, соответствующие значениям гравитационного и магнитного полей от различных тел, в частности, если имеет место случай однородного по плотности и однородно намагниченного шара, то

$$U_g^N(x) = G\sigma \frac{h}{(h^2 + x^2)^{3/2}} + n_g(x);$$

$$U_m^N(x) = M \frac{2h^2 - x^2}{(h^2 + x^2)^{5/2}} + n_m(x),$$

где σ — избыточная плотность; M — магнитный момент; h — глубина залегания центра шара.

Если учесть эти функции, выражение для $\lambda(P^*)$ примет вид

$$\lambda(M, h) = -\frac{1}{\delta_m^2} \sum_{i=1}^N \left[U_m^N(x_i) - M \frac{2h^2 - x_i^2}{(h^2 + x_i^2)^{5/2}} \right]^2 -$$

$$-\frac{1}{\delta_g^2} \sum_{i=1}^N \left[U_g^N(x_i) - G\sigma \frac{h}{(h^2 + x_i^2)^{3/2}} \right]^2.$$

Здесь значения σ считают известными, определяют M и h . Максимум этой функции в пространстве M и h дает искомые оценки неизвестных параметров.

В заключение следует отметить, что применение уравнения Пуассона для связи между гравитационным и магнитным потенциалами дает большие возможности совместному анализу и интерпретации данных потенциальных полей, особенно в частотной области с применением спектров аномалий. В частности, выше приведены формулы, позволяющие с наиболее общих позиций определять параметр K и углы, составляемые вектором намагничивания с осями координат, по любой совокупности гравитационной и магнитной аномалий. Кроме того, многие из

этих формул можно использовать и как признаки принадлежности гравитационной и магнитной аномалий одному и тому же аномальному телу и для решения ряда других задач.

Аппроксимационные методы подбора по гравитационному и магнитному полям наиболее эффективны при совместной интерпретации их значений.

§ 12. ПОТЕНЦИАЛ ПРИТЯЖЕНИЯ ДВОЙНОГО СЛОЯ

При выводе формулы потенциала диполя рассматривалось влияние как положительных, так и отрицательных масс. Для магнитных масс это естественно. Примем, что и гравитационные массы бывают отрицательными, например, при определении потенциала так называемого двойного слоя. Понятие двойного слоя для теории притяжения гравитационных масс — чисто математическое, но весьма удобное и широко применяемое.

Рассмотрим вначале определение двойного слоя. Пусть задана некоторая поверхность S (рис. 26). Представим себе две другие поверхности S_1 и S_2 , расположенные с обеих сторон от поверхности S на малых, но равных расстояниях от нее, отсчитываемых по нормам $\vec{n}$ к ней. Каждой точке M поверхности S на поверхностях S_1 и S_2 будут соответствовать точки M_1 и M_2 , находящиеся на одной нормали n с точкой M . Расстояние M_1M_2 обозначим через d (точка M делит его пополам).

Пусть на поверхностях S_1 и S_2 расположены массы с плотностями μ_1 и μ_2 , причем $\mu_1 = \mu$, $\mu_2 = -\mu$. Такая совокупность поверхностных масс, распределенных на S_1 и S_2 в пределах при $d \rightarrow 0$, представляет собой так называемый двойной слой, расположенный на поверхности S (название двойного слоя дано в отличие от рассмотренного выше названия простого слоя). Расстояние d называется толщиной двойного слоя. Как и выше в случае диполя, расстояния от точки P до точек M_1 , M , M_2 обозначим соответственно r_1 , r , r_2 . За положительное направление нормали примем направление от отрицательных масс к положительным. В точках M_1 и M_2 поверхностей S_1 и S_2 возьмем две элементарные поверхности dS_1 и dS_2 , являющиеся проекциями элемента dS поверхности S , взятого с центром в

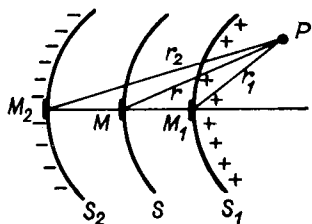


Рис. 26. Двойной слой

точке M . При заданных таким образом массах точки M_1 и M_2 соответственно с массами dm_1 и dm_2 ($dm_1 = \mu_1 dS_1 = \mu dS$; $dm_2 = \mu_2 dS_2 = -\mu dS$) образуют элемент двойного слоя с центром в точке M — диполь. Тогда в пределе (при $d \rightarrow 0$)

$$\lim_{d \rightarrow 0} (ddm) = \lim_{d \rightarrow 0} (\mu d) ds = \beta ds,$$

где $\beta = \lim_{d \rightarrow 0} (\mu d)$ — плотность (иногда момент и мощность) двойного слоя. Функцию β будем считать непрерывной во всех точках поверхности S . Значение потенциала от рассматриваемого диполя обозначим dU . Это значение можно найти из (II.19) после замены в ней v на βdS , l на n , U на V и умножения ее на G :

$$dV = G\beta \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS = -G\beta \frac{1}{r^2} \cos(r, n) dS. \quad (\text{II.28})$$

Выражение потенциала от двойного слоя (сумма потенциалов от двух простых слоев, находящихся друг от друга на малом расстоянии, с расположенными на них массами разных знаков) получим как сумму потенциалов диполей dV по всей поверхности S (в пределе, когда $d \rightarrow 0$, поверхности S_1 и S_2 бесконечно приближаются к поверхности S , как бы сливаются с нею, и интегрирование проводится по поверхности S):

$$V(P) = G \int_S \beta \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS = -G \int_S \beta \frac{1}{r^2} \cos(r, n) dS. \quad (\text{II.29})$$

Это выражение и определяет потенциал притяжения двойного слоя. При $\beta = \text{const}$ двойной слой называется однородным.

Потенциал притяжения двойного слоя удовлетворяет уравнению Лапласа, если точка P не лежит на поверхности S . Показать это можно следующим образом.

Перепишем (II.29) в виде

$$V(P) = G \int_S \beta \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS.$$

Дифференцируя под знаками интеграла и производной по нормали, найдем

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= G \int_S \beta \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right] dS = \\ &= G \int_S \beta \frac{\partial}{\partial n} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) \right] dS = G \int_S \beta \frac{\partial}{\partial n} \left[-\frac{x - \xi}{r^3} \right] dS. \end{aligned}$$

Тогда

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = G \int_S \beta \frac{\partial}{\partial n} \left[-\frac{r^2 - 3(x - \xi)^2}{r^5} \right] dS.$$

Аналогично найдем

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = G \int_S \beta \frac{\partial}{\partial n} \left[-\frac{r^2 - 3(y - \eta)^2}{r^5} \right] dS;$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = G \int_S \beta \frac{\partial}{\partial n} \left[-\frac{r^2 - 3(z - \zeta)^2}{r^5} \right] dS.$$

Складывая все три равенства, получим

$$\partial^2 V / \partial x^2 + \partial^2 V / \partial y^2 + \partial^2 V / \partial z^2 = 0.$$

Отметим, что поверхности, на которых расположены простой и двойной слои, должны удовлетворять ряду требований (по А. М. Ляпунову):

1) в каждой точке поверхности S существует определенная касательная плоскость;

2) существует такая длина R , при которой если какую-нибудь точку M поверхности S взять за центр сферы радиусом R , то прямая, параллельная нормали к поверхности S в точке M , может встретить S внутри сферы лишь в одной точке;

3) если θ — острый угол, который образует нормаль в какой-нибудь точке M поверхности S с нормалью в другой точке M_1 этой поверхности, а r — расстояние между этими двумя точками, то можно указать два таких положительных числа α и β_1 , не зависящих от выбора точек M и M_1 , что при любом положении этих точек $\theta < \beta_1 r^\alpha$.

Можно подчинить поверхность S и условию гладкости: гладкой называют поверхность или часть поверхности, в каждой точке которой существует определенная касательная плоскость (следовательно и определенная нормаль), непрерывно изменяющая свое положение при непрерывном перемещении точки.

Рассмотрим более подробно входящую в (II.28) и имеющую наиболее частое применение функцию

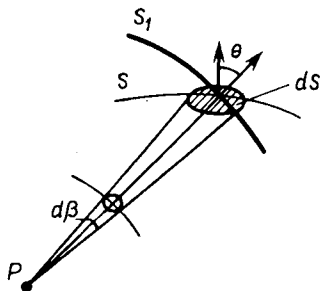
$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \cos(r, n) = -\frac{1}{r^2} \cos \theta,$$

где θ — угол между направлениями $\vec{r}$ и $\vec{n}$. Эта функция имеет простую геометрическую интерпретацию.

Предположим, что нам задан конус с вершиной в точке P . Площадь части поверхности, вырезаемой данным конусом на сфере S_1 радиусом r , проведенной с центром в точке P , обозначим ΔS_1 . Тогда телесный угол, или угол зрения, под которым из вершины конуса виден контур сечения ΔS_1 , будет определяться отношением площади ΔS к квадрату радиуса сферы r , т. е. выражением

$$\gamma = \Delta S_1 / r^2.$$

Рис. 27. Телесный угол видимости поверхности dS из точки P



Отсюда для определения элемента телесного угла получим формулу (рис. 27)

$$d\gamma = dS_1/r^2.$$

Предположим теперь, что элемент площади dS_1 не принадлежит указанной сфере, а является элементом dS произвольной поверхности S . Тогда dS_1 можно определить через dS : $dS_1 = dS \cos \theta$, где θ — угол между нормалью и поверхностям S_1 и S . Так как нормалью к поверхности S_1 является r , то θ — угол между направлениями $\vec{r}$ и нормали $\vec{n}$ к поверхности S . Поэтому элемент рассматриваемого телесного угла

$$d\gamma = dS \cos \theta / r^2. \quad (\text{II.30})$$

Элемент телесного угла, или угла видимости, будет положительным или отрицательным в зависимости от величины $\cos \theta$, т. е. от того, будет ли угол θ острым или тупым. Полный телесный угол получим, интегрируя $d\gamma$ по поверхности S :

$$\gamma = - \int_S \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS = \int_S \frac{1}{r^2} \cos \theta dS. \quad (\text{II.31})$$

Эта интегральная форма записи телесного угла, а полученный интеграл, взятый с обратным знаком, называется интегралом Гаусса. Следует отметить, что если поверхность S незамкнутая, телесный угол не будет зависеть от формы поверхности. Например, на рис. 27 поверхности S и S_1 видны под одним и тем же телесным углом. Этому телесному углу будут соответствовать и многие другие поверхности с контурами, ограниченными теми же лучами, проведенными из точки P , которыми ограничены контуры поверхности S_1 . Поэтому величину телесного угла в (II.31) можно определить интегрированием по любой из указанных поверхностей.

Если же поверхность S замкнутая, рекомендуется рассмотреть следующие случаи.

1. Вершина конуса, т. е. точка P находится в области v_1 вне

поверхности S . Тогда

$$\gamma = \int_S (1/r^2) \cos \theta \, dS = 0.$$

2. Точка P находится внутри поверхности S в области v . В этом случае независимо от формы поверхности

$$\gamma = \int_S (1/r^2) \cos \theta \, dS = 4\pi r^2/r^2 = 4\pi.$$

Здесь интеграл по поверхности S заменен интегралом по сфере радиусом r .

3. Точка P находится на поверхности S . В этом случае интегрирование в предыдущей формуле нужно проводить по поверхности полусферы. Поэтому

$$\gamma = \int_S (1/r^2) \cos \theta \, dS = 2\pi r^2/r^2 = 2\pi.$$

Объединяя указанные три случая в один, запишем

$$\int_S \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS = \begin{cases} -4\pi, & P \in v, \\ -2\pi, & P \in S, \\ 0, & P \in v_1. \end{cases} \quad (\text{II.32})$$

Эта формула определяет значение интеграла Гаусса в случаях, когда точка P находится внутри, вне и на замкнутой поверхности S (v и v_1 — внутренняя и внешняя области относительно S).

Выражение элемента телесного угла (II.30) широко применяют при выводе формул потенциалов и силы притяжения от различных сложных тел. Замена по указанной формуле интегрирования по поверхности интегрированием по элементу телесного угла дает простую геометрическую интерпретацию соответствующим выражениям и облегчает во многих случаях процесс вывода формул.

С учетом (II.30) формулу (II.29) можно переписать в более простом виде:

$$V(P) = -G \int_S \beta \, d\gamma. \quad (\text{II.33})$$

Рассмотрим случай однородного двойного слоя. Примем, что момент, или плотность двойного слоя, т. е. величина β , — постоянная величина. Тогда

$$V(P) = -G\beta \int_S d\gamma = -G\beta\gamma.$$

В этом случае на основании значений интеграла Гаусса (II.32) получим

$$V(P) = \begin{cases} -4\pi G\beta, & P \in v, \\ -2\pi G\beta, & P \in S, \\ 0, & P \in v_1. \end{cases}$$

Из этого равенства видно, что потенциал притяжения однородного двойного слоя, лежащего на произвольной замкнутой поверхности, — постоянный для точек внутреннего и внешнего относительно S пространств. Следовательно, он не оказывает никакого влияния на массы, лежащие внутри или вне S .

Пусть P_i и P_e — внутренняя и внешняя по отношению к поверхности S точки, а M — текущая точка поверхности S . Тогда на основании последнего равенства

$$\begin{aligned} V(P_e) - V(P_i) &= 4\pi G\beta; \\ \frac{1}{2}[V(P_e) + V(P_i)] &= V(M). \end{aligned}$$

Отсюда видно, что при переходе через границу (через слой S) из внешней области во внутреннюю значение потенциала двойного слоя изменяется скачком на $4\pi G\beta$; среднее значение потенциала по точкам внутреннего и внешнего пространств равно его значению на поверхности S . Разрыв в значениях потенциала, равный $4\pi G\beta$, сохраняется и при переходе через незамкнутую поверхность S , причем не только для однородного двойного слоя, но и для слоя с любым переменным, но конечным значением момента β . Верно и обратное утверждение [5]: если при переходе через некоторую поверхность потенциал поля терпит разрыв непрерывности, эта поверхность является двойным слоем.

Из последних двух равенств можно определить и предельные значения $V(P_e)$ и $V(P_i)$ в отдельности:

$$\begin{aligned} V(P_e) &= V(M) + 2\pi G\beta; \\ V(P_i) &= V(M) - 2\pi G\beta. \end{aligned}$$

Эти равенства справедливы и для неоднородного сферического двойного слоя.

Если точка P находится на поверхности S , в этих равенствах значения $V(M)$ можно выразить через значения потенциала простого слоя. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим сферический двойной слой (в общем случае неоднородный) радиусом R . Из рис. 28 видно, что

$$\rho^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos(r, n),$$

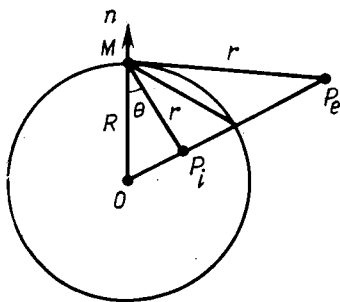


Рис. 28. Схема расположения точек O , M , P_i и P_e для сферического двойного слоя

где $\rho = OP$, $r = PM$. Когда точка P лежит на поверхности S , значение $\rho = R$. Поэтому

$$R^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos(r, n).$$

Отсюда

$$\cos(r, n) = r/2R.$$

Подставляя это значение косинуса угла в (II.29), найдем

$$V(M) = -G \frac{1}{2R} \int_S \beta \frac{dS}{r}.$$

Сравнивая эту формулу с выражением для потенциала простого слоя, видим, что

$$G \int_S \beta dS/r = V_0(M),$$

где $V_0(M)$ — потенциал простого слоя, плотность которого равна β . Поэтому

$$V(M) = -V_0(M)/2R. \quad (\text{II.34})$$

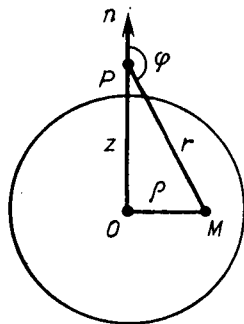
Тогда равенства для $V(P_e)$ и $V(P_i)$ можно переписать в виде

$$V(P_e) = (-1/2R) V_0(M) + 2\pi G\beta, \quad (\text{II.35})$$

$$V(P_i) = (-1/2R) V_0(M) - 2\pi G\beta.$$

Рассмотрим следующий пример. Определим потенциал притяжения однородного двойного слоя, расположенного на круговом диске (рис. 29). Пусть μ — плотность двойного слоя, R — радиус диска, начало полярных координат в центре диска. Потенциал притяжения определим в точках P прямой, проходящей через центр диска перпендикулярно к его плоскости. Расстояние от начала координат до точки P обозначим z .

Рис. 29. Двойной слой, расположенный на круговом диске



Воспользуемся формулой

$$V(P) = -G \int_S \beta \frac{1}{r^2} \cos(r, n) dS.$$

Здесь $\cos(r, n) = \cos \varphi = -z/r$ (см. рис. 29), $r^2 = \rho^2 + z^2$, $dS = \rho d\rho d\varphi$. Поэтому значения потенциала найдем, интегрируя по углу φ в пределах от 0 до 2π , по ρ — от 0 до R :

$$\begin{aligned} V(P) &= G\beta \int_S \frac{z}{r^3} dS = G\beta \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{z\rho d\rho d\varphi}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} = \\ &= 2\pi G\beta z \int_0^R \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} = 2\pi G\beta z \left(\frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right). \end{aligned}$$

Эта функция во всех точках пространства, не принадлежащих диску, конечна, непрерывна и однозначна и в бесконечности равна нулю. Когда $|z| \rightarrow 0$, значения $|V(P)| = 2\pi G\beta$. При этом при подходе к поверхности со стороны положительных значений z $V(P) = 2\pi G\beta$, при подходе же со стороны отрицательных значений z $V(P) = -2\pi G\beta$. Поэтому при переходе через поверхность диска функция потенциала притяжения теряет непрерывность и величина скачка в ее значениях равна $4\pi G\beta$.

Силы притяжения в точках оси диска

$$F_z = \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{2\pi G\beta R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Отсюда получим, что на поверхности диска

$$F_z = -2\pi G\beta/R,$$

т. е. функция F_z всюду (и при переходе через поверхность диска) непрерывна, однозначна и конечна. В бесконечности она стремится к нулю. При этом непрерывность напряжения поля на поверхности диска обусловлена тем, что при переходе через слой с положительными и отрицательными массами, располо-

женные на поверхности диска S на бесконечно малом (по сравнению с r) расстоянии друг от друга, напряженность дважды испытывает разрыв непрерывности, но каждый раз с разным знаком, поэтому суммарная величина изменения напряженности равна нулю.

§ 13. ПОТЕНЦИАЛЫ ПРИТЯЖЕНИЯ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ МАТЕРИАЛЬНОЙ ЛИНИИ И ДВУХМЕРНЫХ ОБЪЕМНЫХ МАСС (ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ ПОТЕНЦИАЛЫ)

Потенциал притяжения горизонтальной материальной линии

Рассмотрим частный случай формулы для потенциала притяжения линейных масс

$$V(P) = G \int_L \lambda(1/r) dl,$$

когда L прямая (рис. 30) с постоянным значением λ , залегающая на глубине ξ и приходящая под началом координат параллельно оси y . Элемент дуги $dl = d\eta$ возьмем в точке $M(0, \eta, \xi)$, а точка $P(x, 0, 0)$, в которой рассматривается значение потенциала, находится на оси x . Расстояние между точками P и M $r = \sqrt{PC^2 + CM^2} = \sqrt{x^2 + \eta^2 + \xi^2}$, так как $PC = \sqrt{x^2 + \xi^2}$, $CM = \eta$. Определим потенциал V от такой линии L длиной $2l$, заданной на интервале $(-l, +l)$:

$$\begin{aligned} V(P) &= G \int_L \lambda \frac{dl}{r} = G\lambda \int_{-l}^l \frac{d\eta}{\sqrt{x^2 + \eta^2 + \xi^2}} = \\ &= G\lambda [\ln(\eta + \sqrt{x^2 + \eta^2 + \xi^2}) + C] \Big|_{-l}^l = \\ &= G\lambda \ln \frac{\sqrt{x^2 + l^2 + \xi^2} + l}{\sqrt{x^2 + l^2 + \xi^2} - l}, \end{aligned}$$

где C — постоянная.

По этой формуле можно определить потенциал V в точке P от прямой линии конечной длины $2l$.

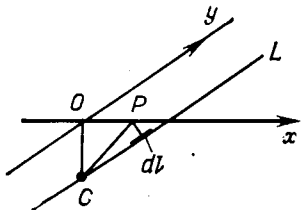


Рис. 30. Однородные массы, расположенные на горизонтальной прямой линии L

При $l \gg \sqrt{x^2 + \xi^2}$, пользуясь приближенным значением корня $\sqrt{l^2 + (x^2 + \xi^2)} \approx l + (x^2 + \xi^2)/2l$,

найдем

$$\begin{aligned} U(P) &= G\lambda \ln \frac{l + (x^2 + \xi^2)/2l + l}{l + (x^2 + \xi^2)/2l - l} = \\ &= G\lambda \ln \frac{2l + (x^2 + \xi^2)/2l}{(x^2 + \xi^2)2l} = G\lambda \ln \frac{4l^2 + x^2 + \xi^2}{x^2 + \xi^2}. \end{aligned}$$

При $l \gg \sqrt{x^2 + \xi^2}$ значением $x^2 + \xi^2$ в числителе можно пренебречь, поэтому

$$\begin{aligned} V(P) &= G\lambda \ln \frac{4l^2}{x^2 + \xi^2} = G\lambda \left[\ln(4l^2) + \ln \frac{1}{x^2 + \xi^2} \right] = \\ &= 2G\lambda \ln(2l) + 2G\lambda \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + \xi^2}}. \end{aligned}$$

Здесь при $l \rightarrow \infty$ величина $2G\lambda \ln 2l$ также стремится к бесконечности, но она постоянная и ее можно не учитывать, так как теоретическое и практическое значение имеет не абсолютная величина потенциала, а его разность между точками поля и градиент потенциала. В обоих случаях слагаемое $2G\lambda \ln 2l$, от которого зависит только абсолютное значение потенциала, исчезает, поэтому потенциал бесконечной однородной линии или однородного бесконечного тонкого стержня, проходящего на глубине ξ параллельно оси y ,

$$V(P) = 2G\lambda \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + \xi^2}} = 2G\lambda \ln \frac{1}{r}, \quad (\text{II.36})$$

где в общем случае

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (z - \xi)^2}.$$

Это выражение определяет потенциал притяжения простейшего двумерного тела бесконечной горизонтальной материальной линии и является логарифмическим. Оно не зависит от направления y , с которым совпадает направление простирающейся линии.

Логарифмический потенциал обладает теми же свойствами, что и потенциалы притяжения рассмотренных видов за исключением того, что в бесконечности он обращается в бесконечность, взятую со знаком минус. Это связано с тем фактом, что массы, создающие поле, занимают бесконечную область.

В частности, покажем, что выражение логарифмического потенциала удовлетворяет уравнению Лапласа $\partial^2 V / \partial x^2 + \partial^2 V / \partial z^2 = 0$ во всех точках пространства, кроме точек, в которых $r \rightarrow 0$

и $r \rightarrow \infty$. Это следует из того, что во всех этих точках $\Delta[\ln(1/r)] = 0$. В самом деле, так как $\ln(1/r) = -\ln r$, то

$$-\frac{\partial^2(\ln r)}{\partial x^2} = -\frac{1}{r^2} + 2\frac{(x-\xi)^2}{r^4};$$

$$-\frac{\partial^2(\ln r)}{\partial z^2} = -\frac{1}{r^2} + 2\frac{(z-\zeta)^2}{r^4}.$$

Откуда $\Delta[\ln(1/r)] = 0$.

Проекции силы притяжения на оси координат получим, дифференцируя (II.36) по x и z :

$$F_x = \partial V / \partial x = 2G\lambda(\xi - x)/r^2;$$

$$F_z = \partial V / \partial z = 2G\lambda(\zeta - z)/r^2.$$

Тогда $\vec{F} = -2G\lambda r \vec{r}/r^2$.

Потенциал притяжения двумерных объемных масс

Пусть задано некоторое двумерное тело сечением S , простирающееся до бесконечности по направлению оси y . Плотность σ меняется только по сечению S (не меняется по простиранию) и является непрерывной и конечной функцией координат точек сечения. Такое тело можно разбить на множество бесконечных материальных линий, направление простирания которых совпадает с направлением самого тела.

Потенциал притяжения такого двумерного тела можно представить в виде суммы потенциалов бесконечных горизонтальных материальных линий. Тогда, полагая $\lambda = \sigma dS$, из (II.36) получим

$$V(P) = 2G \int_S \sigma \ln(1/r) dS. \quad (\text{II.37})$$

Формула (II.37) определяет потенциал притяжения бесконечного горизонтального двумерного тела сечением S , который является также логарифмическим потенциалом.

Потенциал, определяемый (II.37), является потенциалом притяжения объемных масс и в теории потенциала при решении двумерных (или плоских) задач имеет такое же значение, какое имеет потенциал объемных масс, определяемый равенством (II.9) в трехмерном случае. Для составляющих силы притяжения по осям координат x и z найдем

$$F_x = \frac{\partial V}{\partial x} = 2G \int_S \sigma \frac{\xi - x}{r^2} dS;$$

$$F_z = \frac{\partial V}{\partial z} = 2G \int_S \sigma \frac{\zeta - z}{r^2} dS.$$

Тогда

$$\vec{F} = -2G \int_S (\sigma/r^2) [(x - \xi)\vec{i} + (z - \xi)\vec{k}] dS = -2G \int_S \sigma (\vec{r}/r^2) dS.$$

Как видно из полученных равенств, они определяют силу притяжения и ее составляющие по осям координат x и z от горизонтально залегающего двухмерного тела произвольного сечения S .

§ 14. ПРОСТОЙ СЛОЙ, ДИПОЛЬ И ДВОЙНОЙ СЛОЙ ДЛЯ ПОЛЯ С ЛОГАРИФМИЧЕСКИМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Логарифмический потенциал простого слоя

Для определения потенциала притяжения масс, расположенных на какой-то цилиндрической поверхности с плотностью μ , не меняющейся по направлению образующей, поверхность можно разбить в этом направлении на полосы шириной dl и рассматривать их как бесконечные материальные линии с плотностью $\lambda = \mu dl$. Тогда на основании (II.36) для одной линии $dV = 2G\mu \ln(1/r) dl$. Интегрируя по длине линии l (сечение поверхности плоскостью, перпендикулярной к направлению протирания), окончательно найдем

$$V(P) = 2G \int_l \mu \ln(1/r) dl. \quad (\text{II.38})$$

Эта формула определяет логарифмический потенциал притяжения простого слоя (слоя, масс, расположенных с плотностью μ на цилиндрической поверхности, вытянутой в направлении оси y до бесконечности). Этот простой слой в отличие от рассмотренного выше объемного простого слоя называется плоским простым слоем.

В общем случае в формуле (II.38) линия l может быть незамкнутой.

Потенциал притяжения плоского простого слоя удовлетворяет уравнению Лапласа вне и внутри области, ограниченной контуром l . Функция эта непрерывна при переходе через l , а ее нормальная производная терпит разрыв непрерывности. Вообще говоря, логарифмический потенциал простого слоя не ограничен на бесконечности. На основании (II.38) для составляющих F_x и F_z получим

$$F_x = \frac{\partial V}{\partial x} = -2G \int_l \mu \frac{x - \xi}{r^2} dl;$$

$$F_z = \frac{\partial V}{\partial z} = -2G \int_l \mu \frac{z - \xi}{r^2} dl.$$

Тогда

$$\vec{F} = \text{grad } V = -2G \int_l \mu (\vec{r}/r^2) dl,$$

где

$$\vec{r} = (x - \xi)\vec{i} + (z - \zeta)\vec{k}.$$

Рассмотрим два примера. Определим проекцию силы F_z от однородных полос, залегающих вертикально и горизонтально.

а. Предположим, что l — вертикальная полоса, залегающая под началом координат на глубинах от $\zeta = h_1$ до $\zeta = h_2$. Тогда, беря интеграл в правой части выражения для F_z по ζ в пределах от h_1 до h_2 при $\xi = 0$, $z = 0$ и полагая $l = \zeta$, $dl = d\zeta$, $\mu = \text{const}$ и $r^2 = (x^2 + \zeta^2)$ (рис. 31), получим

$$\begin{aligned} F_z(x) &= 2G\mu \int_{h_1}^{h_2} \frac{\zeta}{x^2 + \zeta^2} d\zeta = \\ &= G\mu \ln(x^2 + \zeta^2) \Big|_{h_1}^{h_2} = G\mu \ln \frac{x^2 + h_2^2}{x^2 + h_1^2}. \end{aligned}$$

Это выражение определяет значение силы притяжения от вертикальной материальной бесконечной полосы (h_1 и h_2 — глубины залегания верхней и нижней границ полосы).

б. Пусть l — прямая длиной $2a$, залегающая симметрично под началом координат на глубине ζ . Тогда, интегрируя правую часть выражения для F_z по ξ в пределах от $-a$ до a , полагая $l = \xi$, $dl = d\xi$, $\mu = \text{const}$, $z = 0$ (рис. 32) при $r^2 = (x - \xi)^2 + \zeta^2$, получим

$$\begin{aligned} F_z &= 2G\mu \int_{-a}^a \frac{\zeta d\xi}{(x - \xi)^2 + \zeta^2} = -2G\mu \arctg \frac{x - \xi}{\zeta} \Big|_{-a}^a = \\ &= 2G\mu \left(\arctg \frac{x + a}{\zeta} - \arctg \frac{x - a}{\zeta} \right). \end{aligned}$$

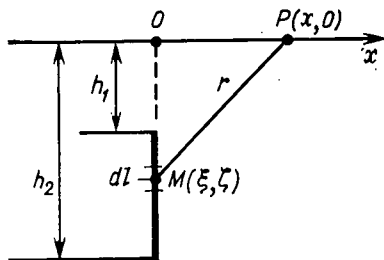


Рис. 31. Простой слой в виде однородной полоски вертикальной прямой линии

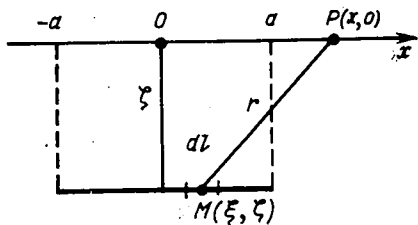


Рис. 32. Простой слой в виде однородной полоски горизонтальной линии

Эта формула определяет силу притяжения горизонтальной материальной бесконечной полосы шириной $2a$, залегающей на глубине ξ . Аналогично можно получить значение силы тяжести и для других двухмерных тел известной конфигурации l .

Логарифмический потенциал диполя

Диполь и двойной слой для поля с логарифмическим потенциалом называют плоскими в отличие от объемных, рассмотренных выше.

Плоский диполь образуют две расположенные близко друг к другу, параллельные линии 1 и 2 (рис. 33) с массами разного знака, но одинаковой постоянной плотности λ . Потенциал притяжения точки P массами линий 1 и 2 (рис. 33) в соответствии с (II.36)

$$V(P) = 2G\lambda[\ln(1/r_1) - \ln(1/r_2)],$$

где r — расстояние от точки P до центра диполя. Аналогично тому, как это делалось в случае объемного двойного слоя, умножая и деля правую часть последнего равенства на d (d — длина диполя), в пределе, когда $d \rightarrow 0$, найдем

$$\begin{aligned} V(P) &= 2G \lim_{d \rightarrow 0} \lambda d \frac{\ln(1/r_1) - \ln(1/r_2)}{d} = \\ &= 2G \lim_{d \rightarrow 0} (\lambda d) \lim_{d \rightarrow 0} \frac{\ln(1/r_1) - \ln(1/r_2)}{d} = \\ &= 2Gp \frac{\partial}{\partial n} \left(\ln \frac{1}{r} \right), \end{aligned}$$

где, как и выше, $p = \lim_{d \rightarrow 0} (\lambda d)$ — момент диполя, направленный от отрицательной линии к положительной; $\vec{n}$ — нормаль, направленная от отрицательной массы к положительной, или

$$V(P) = 2Gp \frac{\partial}{\partial r} \left(\ln \frac{1}{r} \right) \frac{dr}{dn} = -2Gp \frac{1}{r} \cos \varphi, \quad (\text{II.39})$$

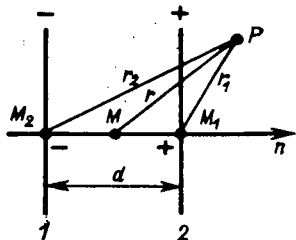


Рис. 33. Плоский диполь

где φ — угол между направлениями $\vec{n}$ и $\vec{r}$.

Это равенство определяет потенциал притяжения плоского диполя, или логарифмический потенциал диполя. В отличие от рассмотренных видов логарифмических потенциалов притяжения этот потенциал равен нулю на бесконечности.

Выражение (II.39) при $G=1$ соответствует магнитному потенциалу бесконечной горизонтальной дипольной, или двухполюсной, линии, залегающей на глубине ξ , магнитный момент единицы длины которой p .

Перепишем (II.39) через направляющие косинусы векторов $\vec{n}$ и $\vec{r}$ относительно осей координат x и z . Так как для двухмерных аномалий нормаль $\vec{n}$ находится в плоскости, перпендикулярной к линии простирания тела, с которой совместили ось y ,

$$\cos \varphi = \cos(r, n) = \cos(r, x) \cos(n, x) + \cos(r, z) \cos(n, z).$$

Тогда (II.39) примет вид

$$V(P) = -2Gp[\cos(r, x) \cos(n, x) + \cos(r, z) \cos(n, z)]/r.$$

Предположим, что нормаль $\vec{n}$ имеет вертикальное направление (для магнитных аномалий случай вертикального намагничивания), т. е. $\cos(n, x) = 0$, $\cos(n, z) = 1$, $\cos \varphi = \cos(r, z)$. Тогда

$$V(P) = -2Gp(1/r) \cos(r, z).$$

Так как $\cos(r, z) = (z - \xi)/r$, окончательно получим

$$V(P) = -2Gp \frac{z - \xi}{r^2} = -2Gp \frac{z - \xi}{(x - \xi)^2 + (z - \xi)^2}.$$

Эта формула определяет потенциал притяжения плоского диполя, момент которого имеет вертикальное направление. Рассмотрим ее более подробно. Из формулы видно, что при $r \rightarrow \infty$ значение $V(P) \rightarrow 0$. Легко показать, что для всех точек пространства, не совпадающих с диполем, функция $V(P)$ — непрерывная, конечная и однозначная функция координат. Во всех этих точках она удовлетворяет уравнению Лапласа. Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= 4Gp \frac{(z - \xi)(x - \xi)}{r^4}; \\ \frac{\partial V}{\partial z} &= -2Gp \frac{(x - \xi)^2 - (z - \xi)^2}{r^4}. \end{aligned}$$

Для вторых производных

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 4Gp(z - \xi) \frac{r^2 - 4(x - \xi)^2}{r^6};$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 4G\rho(z-\xi) \frac{r^2 + 2[(x-\xi)^2 - (z-\xi)^2]}{r^6}.$$

Складывая эти два равенства, после небольших преобразований получим $\partial^2 V/\partial x^2 + \partial^2 V/\partial z^2 = 0$.

Проекции силы притяжения плоского диполя на координатные оси x и z в случае, когда момент диполя имеет вертикальное направление, можно найти из равенств $F_x = \partial V/\partial x$, $F_z = \partial V/\partial z$ с учетом полученных выше выражений для этих производных. Сила притяжения

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_z \vec{k} = \frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k}.$$

Модуль

$$|\vec{F}| = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2} = \frac{2G\rho}{(x-\xi)^2 + (z-\xi)^2}.$$

Двойной слой для поля с логарифмическим потенциалом

Плоский двойной слой можно образовать из плоских диполей, если их расположить на некоторой цилиндрической поверхности таким образом, чтобы положительные массы оказались с одной стороны поверхности, а отрицательные — с другой. Тогда элементарную полоску поверхности dl , взятую на цилиндрической поверхности в направлении ее простираения, можно рассматривать как плоский диполь с моментом $dp = \tau dl$, где τ — момент полоски единичной ширины, имеющей направление нормали к поверхности в точке M .

Потенциал от такого диполя в некоторой точке P можно определить по формуле (II.39):

$$dV = -2G\tau \cos \varphi dl/r.$$

Тогда для плоского двойного слоя

$$V(P) = -2G \int_l \tau \left(\frac{1}{r}\right) \cos \varphi dl, \quad (\text{II.40})$$

где l — длина поверхности, взятая в направлении, перпендикулярном к линии простираения цилиндрической поверхности.

Эта функция удовлетворяет уравнению Лапласа как внутри, так и вне области, ограниченной контуром l , и равна нулю на бесконечности. На контуре l она терпит разрыв непрерывности.

Выражение, входящее в (II.39) и (II.40) и равное

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\ln \frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r} \cos \varphi,$$

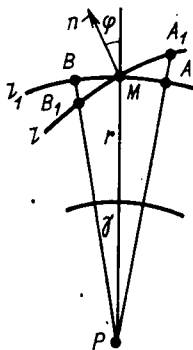


Рис. 34. Плоский угол γ

где φ — угол между направлениями радиуса-вектора $\vec{r}$ и нормали n , сводится к плоскому углу, под которым из точки P виден периметр сечения поверхности, т.е. линия l , и поэтому имеет простую геометрическую интерпретацию. Рассмотрим его более подробно.

Величина плоского угла, заключенного между двумя прямыми PA и PB , проведенными из одной и той же точки P (рис. 34), будет определяться отношением длины дуги окружности AB к ее радиусу $PM=r$: $\gamma = \widehat{AB}/r$. Отсюда для определения элемента плоского угла (или элементарного угла) получим выражение $d\gamma = dl_1/r$, где dl_1 — элемент дуги, взятый на линии l_1 (на дуге окружности) с центром в точке M . В этой формуле dl_1 выразим через элемент дуги dl любой произвольной кривой l , проходящей через точку M . Из рис. 34 видно, что если элемент дуги dl взять на линии l с центром в точке M , то $dl_1 = dl \cos \varphi$. Поэтому элемент плоского угла $d\gamma = dl \cos \varphi / r$. Полную величину плоского угла γ получим, интегрируя это выражение по длине дуги l :

$$\gamma = \int \cos \varphi (dl/r).$$

Данная формула определяет интегральную форму записи плоского угла.

Из рис. 34 видно, что угол видимости из точки P кривых AB или A_1B_1 один и тот же. Это верно и для множества других кривых, проходящих через точку M и ограниченных прямыми PA и PB . Поэтому угол видимости не изменится, если интегрирование проводить по любой из них.

Если линия l замкнутая, можно выделить три случая.

а. Точка P находится в области v_1 вне линии l . Тогда для любой l величина

$$\gamma = \int_l \cos \varphi \frac{dl}{r} = 0.$$

б. Точка P находится внутри линии l в области v . Тогда при замене интегрирования по l интегрированием по окружности радиусом r

$$\gamma = \int_l (1/r) \cos \varphi dl = 2\pi r/r = 2\pi.$$

в. Точка P находится на линии l . В этом случае интегрирование нужно проводить, полагая l равным половине окружности, т. е. $\gamma = \pi r/r = \pi$.

Объединяя все три случая и переходя к исходной функции, запишем

$$\int_l \frac{\partial}{\partial n} \left(\ln \frac{1}{r} \right) dl = - \int_l \frac{1}{r} \cos \varphi dl = \begin{cases} -2\pi, & P \in v, \\ -\pi, & P \in l, \\ 0, & P \in v_1, \end{cases} \quad (\text{II.41})$$

где v , v_1 — внутренняя и внешняя относительно l области.

Сравнивая эту формулу с (II.40) видим, что определяемые из нее значения соответствуют потенциалу масс, если τ постоянная и $2G\tau = 1$.

С учетом $d\gamma$ формулу (II.40) можно переписать:

$$V(P) = -2G \int_l \tau d\gamma.$$

Если в этой формуле τ — постоянная, т. е. слой однородный плоский двойной, получим

$$V(P) = -2G\tau \int_l d\gamma = -2G\tau\gamma.$$

На основании этих формул определение потенциала и соответствующей ему напряженности поля можно свести к нахождению плоских углов видимости кривой l из точки P . Поэтому согласно (II.41)

$$V(P) = \begin{cases} -4\pi G\tau, & P \in v, \\ -2\pi G\tau, & P \in l, \\ 0, & P \in v_1. \end{cases}$$

Отсюда видно, что потенциал притяжения однородного плоского двойного слоя, лежащего на произвольной замкнутой линии, — постоянная величина для внешних и внутренних точек, а также и для точек, расположенных на линии l . Поэтому такой плоский слой не действует на массы, находящиеся внутри или

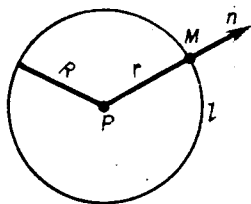


Рис. 35. Однородный плоский двойной слой, расположенный на окружности радиусом R

вне его. Потенциал притяжения при переходе через слой из внешней области во внутреннюю меняется скачком на величину $4\pi G\tau$.

Рассмотрим примеры. Определим потенциал притяжения в центре окружности с радиусом R , т.е. l — эта окружность (рис. 35). В этом случае для любой точки M $\cos \varphi = \cos(r, n) = -1$, так как $\vec{r}$ и $\vec{n}$ направлены по одной и той же линии в противоположные стороны. Кроме того, $r = R = \text{const}$. Поэтому при $\tau = \text{const}$ из (II.40) найдем

$$V = 2G\tau \int \frac{dl}{R} = 2G\tau l/R = 4\pi G\tau.$$

Так как $l = 2\pi R$ — длина окружности, это выражение соответствует потенциалу бесконечной горизонтальной полой цилиндрической трубы радиусом R в точке, расположенной на ее оси. Поверхность трубы представляет собой плоский двойной слой с постоянным τ , простирающийся по направлению оси y до бесконечности. Полученное значение, как и следовало ожидать, постоянное и равно $4\pi G\tau$. Производные от него равны нулю, поэтому на массы, расположенные в центре трубы, сила притяжения не действует.

Рассмотрим более подробно два важных частных случая формулы (II.40), соответствующих вертикальному и горизонтальному направлениям момента полоски тела τ .

а. Момент плоского двойного слоя и нормаль к его поверхности имеют вертикальное направление. Такое направление по всей длине l может быть только в том случае, когда сама поверхность горизонтальна. Тогда, как было показано выше, $\cos \varphi = \cos(r, z) = (z - \xi)/r$. Поэтому (II.40) примет вид

$$V(P) = -2G \int \tau (z - \xi)/r^2 dl.$$

Здесь l — длина горизонтальной прямой линии. Примем $\tau = \text{const}$, $l = 2a$ и тело залегает симметрично под началом координат. При $G = 1$ такое тело соответствует вертикально намагниченной горизонтальной бесконечной дипольной пластинке. Потенциал притяжения такой пластинки определяется из равенства (при $dl = d\xi$ и $z = 0$)

$$V(P) = 2\tau \int_{-a}^a \frac{\xi d\xi}{(x-\xi)^2 + \zeta^2} = -2\tau \operatorname{arctg} \frac{x-\xi}{\zeta} \Big|_{-a}^a = \\ = 2\tau \left(\operatorname{arctg} \frac{x+a}{\zeta} - \operatorname{arctg} \left(\frac{x-a}{\zeta} \right) \right).$$

Для проекций силы отсюда найдем

$$F_x = \frac{\partial V}{\partial x} = 2\tau \left[\frac{\xi}{(x+a)^2 + \zeta^2} - \frac{\xi}{(x-a)^2 + \zeta^2} \right]; \\ F_z = \frac{\partial V}{\partial z} = -2\tau \left[\frac{x+a}{(x+a)^2 + \zeta^2} - \frac{x-a}{(x-a)^2 + \zeta^2} \right].$$

б. Момент плоского двойного слоя имеет горизонтальное направление по всему контуру l , т. е. плоский двойной слой залегает вертикально. Примем, что он расположен под началом координат на глубине от ξ_1 до ξ_2 . В этом случае в выражении

$$\cos \varphi = \cos(r, n) = \cos(r, x) \cos(n, x) + \cos(r, z) \cos(n, z)$$

значение $\cos(n, z) = 0$, $\cos(n, x) = 1$. Тогда

$$\cos \varphi = \cos(r, x) = (x - \xi)/r.$$

Поэтому для определения потенциала из (II.40) при $z=0$, $\xi=0$, $\tau=\text{const}$, $dl=d\xi$ получим

$$V(P) = -2G\tau \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{x}{r_2} d\xi = -2G\tau \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{x}{x^2 + \zeta^2} d\zeta = \\ = -2G\tau \operatorname{arctg} \frac{\zeta}{x} \Big|_{\xi_1}^{\xi_2} = 2G\tau \left(\operatorname{arctg} \frac{\xi_1}{x} - \operatorname{arctg} \frac{\xi_2}{x} \right).$$

При $G=1$ это выражение потенциала V соответствует вертикальной бесконечной дипольной пластинке при условии ее горизонтального намагничивания. Для проекций силы отсюда найдем

$$F_x = \frac{\partial V}{\partial x} = 2G\tau \left(\frac{\xi_2}{x^2 + \zeta_2^2} - \frac{\xi_1}{x^2 + \zeta_1^2} \right); \\ F_z = \frac{\partial V}{\partial z} = 2G\tau \left(\frac{x}{x^2 + \zeta_1^2} - \frac{x}{x^2 + \zeta_2^2} \right).$$

§ 15. ПОТЕНЦИАЛ ДВУХМЕРНЫХ МАГНИТНЫХ МАСС И ВОЗМОЖНОСТЬ ПРИМЕНЕНИЯ ДВУХМЕРНОЙ ЗАДАЧИ

Потенциал двухмерных магнитных масс

Пусть нам задано некоторое двухмерное магнитное тело произвольного сечения S , простирающееся до бесконечности по на-

правлению оси y . Пусть также магнитный момент единицы длины этого тела — непрерывная, конечная и однозначная функция координат точек сечения, постоянная величина по направлению простираения. Такое тело можно разбить на множество бесконечных горизонтальных дипольных линий и его потенциал определить как сумму потенциалов этих линий. Поэтому, полагая $\vec{p} = \vec{J} dS$, где $\vec{J}$ — вектор намагниченности ($\vec{J}$ направлен по $\vec{n}$) при $G=1$ и $V=U$, из (II.39) найдем

$$U(P) = -2 \int_S J (\cos \varphi / r) dS, \quad (\text{II.42})$$

где φ — угол между направлениями вектора намагниченности $\vec{J}$ и радиуса-вектора $\vec{r}$. Формула (II.42) определяет потенциал двумерных магнитных масс произвольного сечения S , лежащих горизонтально, и является магнитным потенциалом двумерного тела. Этой формулой можно пользоваться при нахождении потенциала и вертикальной и горизонтальной составляющих магнитного поля двумерных тел известного сечения S . Рассмотрим следующие примеры.

а. Бесконечный горизонтальный намагниченный цилиндр. Для бесконечного горизонтального кругового цилиндра радиусом R , намагниченного перпендикулярно оси, из (II.42), интегрируя по площади круга S , найдем

$$U(P) = - (2\mu/r) \cos \varphi, \quad (\text{II.43})$$

где $\mu = \pi R^2 J$ — магнитный момент единицы длины цилиндра; r — расстояние от точки P до оси цилиндра.

Как видно, выражение (II.43) не зависит от радиуса сечения цилиндра, а определяется его магнитным моментом μ и по виду полностью аналогично выражению (II.39), т.е. бесконечный горизонтальный круговой цилиндр притягивает так же, как и бесконечная полюсная линия с таким же моментом, совпадающая с осью цилиндра.

Примем, что вектор намагниченности составляет с вертикальной осью угол φ_0 , а радиус-вектор — угол φ_1 . Тогда $\varphi = \varphi_1 - \varphi_0$, поэтому

$$U(P) = - \frac{2\mu}{r} (\cos \varphi_1 \cos \varphi_0 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_0).$$

В прямоугольной системе координат, учитывая, что

$$\cos \varphi_1 = \frac{\xi}{r} = \frac{\xi}{\sqrt{x^2 + \xi^2}}, \quad \sin \varphi_1 = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + \xi^2}},$$

найдем

$$U(P) = -2\mu \left(\frac{\xi \cos \varphi_0}{x^2 + \xi^2} - \frac{x \sin \varphi_0}{x^2 + \xi^2} \right).$$

Отсюда можно определить полный вектор напряженности магнитного поля $\vec{T}$ и его составляющие Z и H :

$$\vec{T} = \text{grad } U(P) = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k};$$

$$Z = |\vec{T}| \cos(T, z) = \partial U / \partial z, \quad H = |\vec{T}| \cos(T, x) = \partial U / \partial x.$$

При вертикальной намагниченности

$$Z = 2\mu \frac{\xi^2 - x^2}{(x^2 + \xi^2)^2}, \quad (II.44)$$

$$H = 4\mu \frac{x\xi}{(x^2 + \xi^2)^2}.$$

б. Бесконечный эллиптический цилиндр. Такой цилиндр представляет собой эллипсоид, одна из осей которого (возьмем ось a) бесконечно велика. Примем, что из двух других осей вертикальная ось $c > b$ и что направление намагниченности совпадает с этой осью. Рассмотрим случай внешнего поля.

Формулы для потенциала и его производных можно определить из формул для трехмерного случая, приведенных в § 10. Рассмотрим элементы магнитного поля на поверхности цилиндра.

Магнитный потенциал такого эллиптического цилиндра (при $a \rightarrow \infty$)

$$U(P) = 2\pi J b c \xi \int_0^\infty \frac{du}{(c^2 + u) \sqrt{(c^2 + u)(b^2 + u)}}.$$

Интеграл в правой части этого равенства можно раскрыть, применяя подстановку $u = c^2 \tan^2 \varphi$. В результате интегрирования получим

$$U = 4\mu \xi / c(b + c),$$

где $\mu = \pi b c J$ — магнитный момент единицы длины эллиптического цилиндра. При этом значения x , ξ , b , c связаны друг с другом уравнением эллипса

$$x^2/b^2 + \xi^2/c^2 = 1.$$

Дифференцируя полученную функцию U по x и z , можно определить и значения вертикальной и горизонтальной составляющих магнитного поля. Например, для горизонтальной составляющей

$$H = 4\mu x \xi / b c \tau,$$

где

$$\tau = \sqrt{(x^2 + \xi^2 - q^2)^2 + 4x^2 q^2}; \quad q^2 = c^2 - b^2.$$

Пользуясь теоремой Маклорена и софокусными эллипсоидами, полученные выражения можно связать и с решениями для внешних точек.

21

Возможность применения двухмерной задачи

Большое число наблюдаемых аномалий — линейные, вытянутые в каком-либо одном направлении. Такие аномалии образуются телами, простирающимися параллельно поверхности земли на большие расстояния и имеющими поперечные размеры, малые по сравнению с их длиной. Сечения таких тел можно аппроксимировать плоскими фигурами различной формы. Гравитационные и магнитные поля указанных тел при постоянстве их сечений постоянны вдоль линий их простираения, с которыми обычно совмещают направление оси y , т.е. такие поля являются двухмерными или плоскими.

В действительности аномальные тела с бесконечными простираениями в природе не существуют. Все тела ограничены как в горизонтальном, так и в вертикальном направлении. Один из горизонтальных размеров этих тел может быть больше другого в несколько раз и более. Такие тела с некоторым приближением и принимают за двухмерные. Необходимо выяснить, в каких случаях на практике можно пользоваться формулами для двухмерных тел.

Чтобы ответить на этот вопрос, нужно сравнить гравитационное или магнитное поле тела, имеющего бесконечное простираение, с полем тела конечных размеров. В качестве такого тела в случае гравитационного поля примем горизонтальную материальную прямую линию, для случая магнитного поля — однополюсную линию (второй полюс находится в бесконечности). Для оценки погрешности, возникающей от замены аномалии конечного тела аномалией бесконечного тела, воспользуемся методикой А. К. Маловичко.

Рассмотрим горизонтальную материальную линию длиной $2l$, залегающую под началом координат на глубине ζ и простирающуюся, по оси y . Начало координат возьмем над линией (ось x перпендикулярна к l). Выражение для потенциала притяжения от такой линии по направлению оси x при $y=0$ было получено в § 13. В более общем случае с сохранением переменной y для потенциала притяжения получим выражение

$$V(P) = G\lambda \ln \frac{\sqrt{x^2 + \zeta^2 + (y+l)^2} + (y+l)}{\sqrt{x^2 + \zeta^2 + (y-l)^2} + (y-l)},$$

где λ — масса единицы длины (гравитационная). В случае магнитного поля от однополюсной линии при вертикальном намагничивании для получения потенциала величину $G\lambda$ в этой фор-

муле нужно заменить величиной магнитного момента единицы длины линии μ .

Беря производные от функции V по ξ и x , найдем

$$F_{zl} = \frac{G\lambda\xi}{\xi^2 + x^2} \left[\frac{y+l}{\sqrt{x^2 + \xi^2 + (y+l)^2}} - \frac{y-l}{\sqrt{x^2 + \xi^2 + (y-l)^2}} \right], \quad (\text{II.45})$$

$$F_{xl} = \frac{-G\lambda x}{\xi^2 + x^2} \left[\frac{y+l}{\sqrt{x^2 + \xi^2 + (y+l)^2}} - \frac{y-l}{\sqrt{x^2 + \xi^2 + (y-l)^2}} \right].$$

Эти аномалии могут соответствовать гравитационным аномалиям V_z и V_x от горизонтальной материальной линии конечной длины или магнитным аномалиям Z и H от однополюсной линии конечной длины (при $G\lambda = \mu$).

Рассмотрим значение аномалии F_{zl} на оси y в точке с координатами $x=0$ и $y=l$, т. е. над правым концом линии (в плане). Из (II.45) получим

$$F_{zl}(0, l) = 2G\lambda l / \xi \sqrt{\xi^2 + 4l^2}.$$

Аналогично найдем и максимальное значение аномалии (при $x=0$ и $y=0$):

$$F_{zl}(0, 0) = 2G\lambda l / \xi \sqrt{\xi^2 + l^2}.$$

Рассмотрим отношение n максимального значения аномалии к ее значению в точке $P(0, l)$:

$$n = \frac{F_{zl}(0, 0)}{F_{zl}(0, l)} = \frac{\sqrt{\xi^2 + 4l^2}}{\sqrt{\xi^2 + l^2}} = \sqrt{\frac{1 + 4a^2}{1 + a^2}}.$$

Здесь α — величина l/ξ . Отсюда видно, что при изменении α от 0 до ∞ n изменяется от 1 до 2, причем уже при $\alpha=4$ $n=1,95$, а при $\alpha=5$ $n=1,97$, т. е. при изменении α от 5 до ∞ величина n изменяется всего на 0,03.

На основании этих результатов приближенно примем, что уже при $\alpha=5$ $n=2$. Это равносильно тому, что на ось y изолиния поля, соответствующая величине $1/n=1/2$, т. е. одной половине максимального значения аномалии (обозначим ее $y_{0.5}$), отсечет отрезок, равный l . Таким образом, при $\alpha=1/\xi=5$ $y_{0.5}=l$. Определим теперь, какой отрезок отсечет эта изолиния на оси x , т. е. найдем величину $x_{0.5}$.

Для точек на оси x из (II.45) (при $y=0$)

$$F_{zl}(x, 0) = \frac{2G\lambda\xi l}{(x^2 + \xi^2) \sqrt{x^2 + \xi^2 + l^2}}.$$

Снова определим отношение

$$n = \frac{F_{zl}(0, 0)}{F_{zl}(x, 0)} = \frac{x^2 + \xi^2}{\xi^2} \sqrt{\frac{x^2 + \xi^2 + l^2}{\xi^2 + l^2}} = (\beta^2 + 1) \sqrt{1 + \frac{\beta^2}{a^2 + 1}},$$

где $\beta = x/\xi$. Примем $n=2$. Тогда при изменении α от 5 до ∞ величина β будет меняться только от 0,98 до 1. Поэтому примем $\beta = x/\xi = 0,98$. Отсюда $x_{0,5} = 0,98\xi$, а $y_{0,5} = l$. Это значит, что $y_{0,5} = l = 5\xi$ при $\alpha = l/\xi = 5$. Поэтому

$$y_{0,5}/x_{0,5} = 5\xi/0,98\xi = 5,1 \approx 5.$$

Это число соответствует отношению полуосей овала, образованного изолинией аномалии со значением, равным половине максимального.

При этом отношении полуосей трехмерную аномалию, соответствующую конечной линии, примем, как рекомендует А. К. Маловичко, за двухмерную, вызванную бесконечной линией. Оценим погрешность такой замены. Так как двухмерную аномалию рассматривают всегда по оси x , проходящей перпендикулярно к линии простираения тела через максимальное значение аномалии, при оценке погрешности также необходимо рассматривать аномалию в точках оси x .

Точные значения двухмерной аномалии F_z получим из (II.45) при $l \rightarrow \infty$:

$$F_z(x) = 2G\lambda\xi/(x^2 + \xi^2).$$

Тогда, разделив полученное значение $F_{zl}(x, 0)$ на эту функцию $F_z(x)$, найдем

$$F_{zl}(x, 0) = F_z(x) l / \sqrt{x^2 + \xi^2 + l^2}.$$

Из этого равенства получим

$$A = \frac{F_z(x) - F_{zl}(x, 0)}{F_z(x)} = 1 - \frac{l}{\sqrt{x^2 + \xi^2 + l^2}} = 1 - \frac{\alpha}{\sqrt{1 + \alpha^2 + \beta^2}}.$$

Точно такое же выражение получим и для аномалии F_x . Здесь число A определяет относительную погрешность, возникающую из-за замены трехмерных гравитационных аномалий F_z, F_x (соответственно V_z и V_x) от горизонтальной матеральной линии конечной длины двухмерными аномалиями от бесконечной линии или то же самое для магнитных аномалий Z и H от однополюсной линии.

Полученные значения полуосей овала соответствуют $\alpha = 5$ и $\beta = 0,98$. Для этих чисел из последней формулы получим $A = 0,038$, т. е. относительная ошибка меньше 4%. После небольших преобразований последнего выражения абсолютная ошибка

$$\begin{aligned} A_1 &= AF_z(x) = F_z(x) \left[1 - \frac{l}{\sqrt{x^2 + \xi^2 + l^2}} \right] = \\ &= F_z(0) \frac{\sqrt{1 + \alpha^2 + \beta^2} - \alpha}{(1 + \beta^2)\sqrt{1 + \alpha^2 + \beta^2}}. \end{aligned}$$

Отсюда при $\alpha=5$

$$A_1 = \frac{\sqrt{26 + \beta^2} - 5}{(1 + \beta^2) \sqrt{26 + \beta^2}} F_z(0).$$

Эта ошибка уменьшается с увеличением β . При $\beta=0$ $A_1=0,02 F_z(0)$, т. е. составляет всего 2% максимального значения аномалии.

Таким образом, из примера аномалии от горизонтальной материальной линии видно, что если отношение полуосей овала изолинии со значением, равным половине максимального значения аномалии, равно или больше 5, аномалию с абсолютной погрешностью 2% максимального значения или меньше можно принять за двухмерную.

§ 16. ПОТЕНЦИАЛ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ И ЕГО ПРОИЗВОДНЫЕ

Потенциал силы тяжести

Сила тяжести $\vec{g}$ является равнодействующей силы притяжения масс Земли $\vec{F}$ и центробежной силы $\vec{C}$, вызванной вращением Земли вокруг своей оси:

$$\vec{g} = \vec{F} + \vec{C}.$$

Соответственно и потенциал силы тяжести будет равен сумме потенциалов силы притяжения и центробежной силы (рис. 36)

$$W = V + Q.$$

Потенциал силы притяжения Земли можно определить как потенциал притяжения объемных масс:

$$V = G \int_v \sigma dv/r, \quad (\text{II.46})$$

где интегрирование проводится по всему объему Земли v .

Определим потенциал центробежной силы, возникающей при вращении Земли вокруг своей оси.

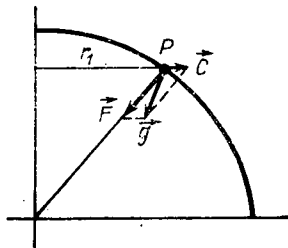


Рис. 36. Сила притяжения и ее составляющие

Потенциал центробежной силы. Известно, что центробежная сила направлена по перпендикуляру от оси вращения и что величина силы, действующей на точку с массой, равной единице $C=a^2/r_1$, где a — линейная скорость движения точки P ; r_1 — расстояние ее от оси вращения.

Выражение скорости a через угловую скорость вращения Земли ω : $a=\omega r_1$, поэтому

$$C=(\omega r_1)^2/r_1=\omega^2 r_1.$$

Возьмем систему прямоугольных координат, расположенных так, что ось z совпадает с осью вращения. В этом случае центробежная сила всегда направлена параллельно плоскости xOy . Найдем ее проекции по осям координат x , y и z , при этом учтем, что центробежная сила направлена по радиусу r_1 и поэтому ее направление образует с осями x , y и z те же углы, что и r_1 .

Учитывая, что

$$\cos(C, x) = \cos(r_1, x) = x/r_1;$$

$$\cos(C, y) = \cos(r_1, y) = y/r_1;$$

$$\cos(C, z) = \cos(r_1, z) = 0,$$

для проекций центробежной силы найдем

$$C_x = C \cos(C, x) = Cx/r_1 = \omega^2 x,$$

$$C_y = C \cos(C, y) = Cy/r_1 = \omega^2 y, \quad (II.47)$$

$$C_z = 0.$$

Если Q — потенциал центробежной силы, то должно выполняться равенство $\vec{C} = \text{grad } Q$, т. е. $\partial Q/\partial x = C_x$; $\partial Q/\partial y = C_y$; $\partial Q/\partial z = C_z$.

Легко убедиться, что этим условиям, при значениях проекций C_x , C_y и C_z , определяемых (II.47), удовлетворяет функция

$$Q = (\omega^2/2) (x^2 + y^2). \quad (II.48)$$

Тогда потенциал силы тяжести найдем, складывая правые части равенств (II.46), (II.48):

$$W = G \int_v \frac{dv}{r} + \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2). \quad (II.49)$$

Формула для потенциала силы тяжести — очень важная, она широко применяется при определении нормальных значений силы тяжести, определении фигуры Земли и решении других задач гравиметрии и гравиразведки. Потенциал силы тяжести, как любая потенциальная функция, обладает всеми рассмотренными свойствами. Исключение составляет то, что при $r \rightarrow \infty$ значение W стремится к бесконечности, а не к нулю из-за увеличения центробежной силы. Однако поведение силы тяжести

на таких больших расстояниях от Земли нас не интересует, так как не имеет практического применения. Кроме того, при рассмотрении уравнений Пуассона и Лапласа для потенциала силы тяжести необходимо учесть, что для потенциала центробежной силы

$$\partial^2 Q / \partial x^2 + \partial^2 Q / \partial y^2 + \partial^2 Q / \partial z^2 = \Delta Q = 2\omega^2,$$

т.е. функция Q не удовлетворяет уравнению Лапласа. Поэтому, например, для случая внутренних точек Земли

$$\Delta W = -4\pi G\sigma + 2\omega^2.$$

Значения силы тяжести $\vec{g}$ связаны с потенциалом W соотношением $\vec{g} = \text{grad } W$, т.е.

$$\begin{aligned} g_x &= \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial x}, \\ g_y &= \frac{\partial W}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial y}, \\ g_z &= \frac{\partial W}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial Q}{\partial z}. \end{aligned} \quad (\text{II.50})$$

Из (II.49) после соответствующего дифференцирования получим

$$\begin{aligned} g_x &= -G \int_v \sigma \frac{x - \xi}{r^3} dv + \omega^2 x; \\ g_y &= -G \int_v \sigma \frac{y - \eta}{r^3} dv + \omega^2 y; \\ g_z &= -G \int_v \sigma \frac{z - \zeta}{r^3} dv. \end{aligned}$$

Эти выражения являются проекциями по осям координат ускорения свободного падения

$$\vec{g} = -G \int_v \sigma (1/r^2) (\vec{r}/r) dv + \omega^2 \vec{r}_1 = -G \int_v \sigma (\vec{r}/r^3) dv + \omega^2 \vec{r}_1.$$

Через значения нормальной производной

$$\vec{g} = \frac{\partial W}{\partial n} \vec{n}_1, \quad (\text{II.51})$$

где $\vec{n}_1$ — единичный вектор, имеющий направление внутренней нормали (сила тяжести увеличивается в сторону масс).

Отношение максимального значения центробежной силы, которое она имеет на экваторе, к значению g_e силы тяжести на экваторе $\omega^2 r_e / g_e$, где r_e — радиус экватора, всего равен прибли-

зительно $1:288,4$ (при $r_e=6378,245$ км, $g_e=978,049$ Гал, $\omega=2\pi/86164 \frac{1}{c}$), т. е. отношение максимального значения центробежной силы к минимальному значению силы тяжести — относительно малая величина. Однако если на долю изменения силы притяжения от полюсов к экватору, объясняемого в основном сплюснутостью Земли, приходится всего около 1800 мГал, то на долю изменения центробежной силы от полюсов к экватору приходится около 3400 мГал, т. е. доля центробежной силы в изменении силы тяжести от полюсов к экватору значительно больше, чем доля изменения силы притяжения.

Производная потенциала силы тяжести по произвольному направлению, уровенная поверхность

Положение о том, что производные потенциала силы тяжести по переменным x, y, z равны проекциям силы тяжести по направлениям этих же осей, верно не только для этих осей, но и для некоторого произвольного направления в пространстве l . Рассмотрим приращение потенциала dW при перемещении точки $P(x, y, z)$ по направлению l в бесконечно близкую соседнюю точку P_1 с координатами $x+dx, y+dy, z+dz$:

$$dW = \frac{\partial W}{\partial x} dx + \frac{\partial W}{\partial y} dy + \frac{\partial W}{\partial z} dz.$$

Для направления l введем его направляющие косинусы $\cos(l, x), \cos(l, y), \cos(l, z)$. Тогда $dx=dl \cos(l, x)$; $dy=dl \cos(l, y)$; $dz=dl \cos(l, z)$. Поэтому

$$dW = \left[\frac{\partial W}{\partial x} \cos(l, x) + \frac{\partial W}{\partial y} \cos(l, y) + \frac{\partial W}{\partial z} \cos(l, z) \right] dl.$$

Так как

$$\partial W / \partial x = g_x = g \cos(g, x);$$

$$\partial W / \partial y = g_y = g \cos(g, y);$$

$$\partial W / \partial z = g_z = g \cos(g, z),$$

то

$$dW = g dl [\cos(g, x) \cos(l, x) + \cos(g, y) \cos(l, y) + \cos(g, z) \cos(l, z)].$$

Здесь выражение в скобках соответствует косинусу угла между направлениями $\vec{g}$ и $\vec{l}$. Поэтому окончательно получим

$$dW = g \cos(g, l) dl,$$

или

$$\partial W / \partial l = g \cos(g, l) = g_l,$$

т.е. производная потенциала силы тяжести по любому направлению равна ее проекции по этому направлению.

Рассмотрим два частных случая полученной формулы.

а. Пусть $\vec{l} \perp \vec{g}$, т.е. $\cos(g, l) = 0$. Тогда $\partial W / \partial l = 0$, т.е. $W = C = \text{const}$. Это уравнение поверхности с равными значениями потенциала силы тяжести, т.е. уровенной поверхности потенциала силы тяжести. Как всякая уровенная поверхность потенциала, она обладает тем свойством, что в каждой ее точке сила (в данном случае сила тяжести) направлена по нормали к поверхности. Это свойство следует из равенства $\vec{g} = \text{grad } W$.

Различным значениям постоянной в уравнении уровенной поверхности соответствуют различные уровенные поверхности или семейство уровенных поверхностей. Величину постоянной можно определить таким образом, что уровенная поверхность потенциала силы тяжести совпадает с невозмущенной поверхностью воды в океанах. Такая поверхность называется геоидом и она соответствует поверхности или фигуре некоторой идеальной Земли.

б. Пусть $\vec{l} \parallel \vec{g}$, т.е. $\cos(g, l) = 1$. В этом случае $\partial W / \partial l = g$. Переходя к конечным пределам, запишем $\Delta W = g \Delta l$. Так как $l \parallel g$, а g направлено по нормали к уровенной поверхности, то и линия l направлена по нормали n . Тогда $\Delta W = g \Delta n$. Здесь ΔW — приращение функции W между двумя точками, взятыми на направлении нормали; Δn — приращение аргумента, которое будет соответствовать расстоянию между взятыми точками по нормали.

Если изобразить скалярное поле потенциала силы тяжести уровенными поверхностями, взятыми с сечением или шагом $\Delta W = C = \text{const}$, величина Δn будет равна расстоянию между двумя ближайшими друг к другу или соседними уровенными поверхностями. Из последнего равенства видно, что расстояние Δn обратно пропорционально g и поэтому уровенные поверхности приближаются друг к другу в точках, где величина g больше, и удаляются в точках с меньшими значениями g (рис. 37, точки A и B).

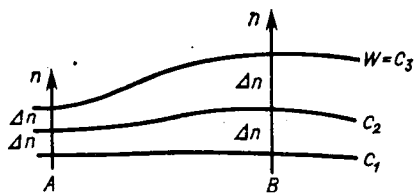


Рис. 37. Линии уровенных поверхностей потенциала силы тяжести

Физический смысл первых и вторых производных потенциала силы тяжести

Рассмотрим физический смысл производных потенциала силы тяжести Земли. Из (II.50) видно, что первые три производные функции W по осям координат x , y и z $\partial W/\partial x$, $\partial W/\partial y$, $\partial W/\partial z$ определяют скорости изменения потенциала силы тяжести по направлениям этих осей и равны проекциям силы тяжести на эти оси.

Что же касается вторых производных, то их у потенциала силы тяжести шесть:

$$W_{xx} = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}; \quad W_{yy} = \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}; \quad W_{zz} = \frac{\partial^2 W}{\partial z^2};$$

$$W_{xy} = \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}; \quad W_{xz} = \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z}; \quad W_{yz} = \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z}.$$

Физический смысл производных W_{xz} , W_{yz} , W_{zz} легко понять из выражений

$$W_{xz} = \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right) = \frac{\partial g}{\partial x};$$

$$W_{yz} = \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right) = \frac{\partial g}{\partial y};$$

$$W_{zz} = \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = \frac{\partial W}{\partial z} \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right) = \frac{\partial g}{\partial z},$$

в которых учтено, что $\partial W/\partial z \approx g$. Отсюда видно, что W_{xz} , W_{yz} и W_{zz} — производные силы тяжести g по осям координат и определяют скорости изменения g по направлениям этих осей. Величина $N = \sqrt{W_{xz}^2 + W_{yz}^2}$ носит название горизонтального градиента силы тяжести: $N = \partial g/\partial s$, где s — направление максимального изменения силы тяжести в горизонтальной плоскости.

Полная скорость изменения силы тяжести g

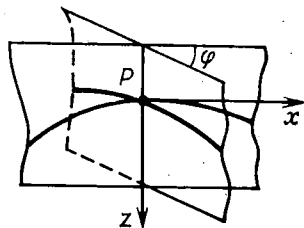
$$K = \sqrt{W_{xz}^2 + W_{yz}^2 + W_{zz}^2}.$$

Три другие вторые производные потенциала силы тяжести W_{xx} , W_{yy} и W_{xy} определяют форму уровенной поверхности потенциала в данной точке P . Покажем это [3].

Возьмем некоторую уровенную поверхность потенциала силы тяжести $W(x, y, z) = \text{const}$. Возьмем начало координат в некоторой точке P уровенной поверхности. Ось z направим по нормали к этой поверхности (в сторону увеличения поля), тогда координатная плоскость xPy будет касательной к уровенной поверхности в данной точке. Принимая $z = f(x, y)$, получим

$$W[x, y, z(x, y)] = \text{const},$$

Рис. 38. Нормальное сечение уровенной поверхности силы тяжести



т. е. уравнение уровенной поверхности — сложная функция от координат x и y .

Через данную точку P на уровенной поверхности W (рис. 38) проведем ряд нормальных плоскостей и из них выделим одну, образующую с плоскостью xPz угол φ . Кривизна нормального сечения уровенной поверхности, соответствующая этой выделенной плоскости, как известно из дифференциальной геометрии,

$$\frac{1}{\rho_{\varphi}} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cos^2 \varphi + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \cos \varphi \sin \varphi + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \sin^2 \varphi. \quad (\text{II.52})$$

Найдем производные $\partial^2 z / \partial x^2$, $\partial^2 z / \partial x \partial y$, $\partial^2 z / \partial y^2$. Дифференцируя равенство для W по x (по правилу дифференцирования сложной функции), получим

$$\partial W / \partial x + (\partial W / \partial z) (\partial z / \partial x) = 0.$$

Дифференцируя это выражение еще раз по x , найдем

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \frac{\partial z}{\partial x} \right) + \frac{\partial W}{\partial z} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0,$$

откуда

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial W}{\partial z^2} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0.$$

Так как на уровенной поверхности $\partial z / \partial x = 0$, $\partial W / \partial z = g$, из последнего равенства окончательно получим

$$\partial^2 W / \partial x^2 + g \partial^2 z / \partial x^2 = 0,$$

откуда

$$\partial^2 z / \partial x^2 = - (1/g) W_{xx}.$$

Аналогично найдем

$$\partial^2 z / \partial y^2 = - (1/g) W_{yy}; \quad \partial^2 z / \partial x \partial y = - (1/g) W_{xy}.$$

Подставляя эти значения производных от z в (II.52), получим

$$\frac{1}{\rho_{\varphi}} = - (1/g) (W_{xx} \cos^2 \varphi + 2 W_{xy} \cos \varphi \sin \varphi + W_{yy} \sin^2 \varphi). \quad (\text{II.53})$$

Из приведенного равенства видно, что производные W_{xx} , W_{yy} и W_{xy} характеризуют кривизну нормального сечения уровенной поверхности, т. е. геометрию уровенной поверхности. При $\varphi=0$ и $\varphi=\pi/2$ из него можно определить кривизну сечений, соответствующих координатным плоскостям xz и yz :

$$1/\rho_\varphi = - (1/g) W_{xx}; \quad (1/\rho_\varphi) = - (1/g) W_{yy}.$$

Кривизну главных сечений уровенной поверхности (сечения, у которых кривизна $1/\rho_\varphi$ максимальная) можно получить из (II.53), дифференцируя его и приравнявая к нулю. Нетрудно убедиться, что углы φ_0 , соответствующие этим сечениям, определяются из значений производных W_{xy} , $W_\Delta = W_{yy} - W_{xx}$:

$$\operatorname{tg} 2\varphi_0 = - (1/W_\Delta) W_{xy}. \quad (\text{II.54})$$

Это уравнение дает два значения, отличающихся друг от друга на $\pi/2$: φ_0 ; $\varphi_0 + \pi/2$. Подставляя эти значения углов в (II.53), беря разность полученных равенств и учитывая (II.54), после небольших преобразований получим

$$(1/\rho_1) - (1/\rho_2) = (1/g) W_\Delta \sec 2\varphi_0,$$

где $1/\rho_1$ и $1/\rho_2$ — кривизны, соответствующие углам φ_0 и $\varphi_0 + \pi/2$, а их разность определяет разность кривизн главных сечений. Из последнего равенства видно, что эта разность кривизн главных сечений уровенной поверхности определяется только через W_Δ .

Что же касается значений вторых производных потенциала силы тяжести W , каждую из них можно вычислить по значениям ускорения свободного падения. Но точность таких вычислений не всегда удовлетворяет практическим целям. Поэтому гораздо ценнее непосредственное измерение вторых производных.

Из рассмотренных шести производных W производные W_{xy} , W_{xz} , W_{yz} и $W_\Delta = W_{yy} - W_{xx}$ измеряются с помощью гравитационных вариометров и используются в геологоразведочных целях. Кроме того, производные W_{xz} и W_{yz} можно измерить с помощью гравитационных градиентометров.

Определение потенциала и его производных на основе аппарата преобразований Фурье

Аналитические выражения для гравитационного и магнитного потенциалов или для различных элементов этих полей в большинстве случаев легче получить на основе аппарата преобразований Фурье.

Пусть $f(x)$ определяет выражение некоторого гравитационного или магнитного потенциала, непрерывного вдоль профиля, и пусть

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < +\infty.$$

Для такой функции существует пара преобразований Фурье:

$$S(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-i\omega x) dx;$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \exp(i\omega x) d\omega,$$

где ω — волновое число.

Первая формула определяет преобразование, или трансформанту, Фурье или спектр функции $f(x)$, вторая — значения потенциала через ее спектр, т.е. является формулой обратного преобразования Фурье.

Аналогично в трехмерном случае для непрерывной по площади функции $f(x, y)$ при

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x, y)| dx dy < \infty$$

существует пара преобразований Фурье:

$$S(u, v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp[-i(ux + vy)] dx dy;$$

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S(u, v) \exp[i(ux + vy)] du dv,$$

где u, v — также волновые числа.

В случае, когда функция $f(x, y)$ зависит только от переменной $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, пара двукратных преобразований Фурье принимает более простой вид:

$$S(\rho) = \int_0^{\infty} r f(r) J_0(\rho r) dr;$$

$$f(r) = \int_0^{\infty} \rho S(\rho) J_0(\rho r) d\rho,$$

где $\rho = \sqrt{u^2 + v^2}$.

Эта пара преобразований является также парой преобразований Ханкеля нулевого порядка функции $f(r)$.

Для определения потенциала и его производных от различных тел достаточно по приведенным выше формулам определить спектры потенциалов или каких-либо других элементов поля от таких простейших тел, как бесконечная горизонтальная материальная линия в двухмерном случае и точечная масса в трехмерном для гравитационных аномалий и бесконечная линия полюсов или однополюсная линия в двухмерном случае и точечный полюс в трехмерном для магнитных аномалий. Далее, пользуясь известными теоремами о спектрах и полученными выражениями для них, легко определить спектры потенциалов и их производных от других более сложных источников гравитационного и магнитного полей. После этого по формулам обратного преобразования Фурье можно найти значения самого потенциала и его производных для этих тел.

Спектры аномалий силы тяжести V_z и аномалий вертикальной составляющей магнитного поля Z от наиболее применяемых на практике простейших тел даны ниже.

а. Бесконечная горизонтальная материальная линия, или однополюсная линия (при $G\lambda = m$):

$$S(\omega) = G\sqrt{2\pi\lambda} \exp(-|\omega|h),$$

где λ — масса единицы тела; h — глубина залегания; m — магнитная масса.

б. Бесконечная горизонтальная материальная полоса шириной $2l$ (бесконечная горизонтальная заряженная полоса — при $C\mu = J$):

$$S(\omega) = 2\sqrt{2\pi}G\mu(\sin \omega l/\omega) \exp(-|\omega|h),$$

где μ — поверхностная плотность тела.

в. Бесконечная вертикальная материальная полоса:

$$S(\omega) = \sqrt{2\pi}G\mu \frac{1}{|\omega|} [\exp(-|\omega|h_1) - \exp(-|\omega|h_2)],$$

где h_1 и h_2 — глубины залегания верхней и нижней границ полосы.

г. Точечная масса (шар), или точечный магнитный полюс (при $Gm = M$):

$$S(\rho) = Gm \exp(-\rho h),$$

где m — масса тела; M — магнитный момент.

При умножении правых частей этих выражений на $|\omega|$ с указанной выше заменой гравитационной массы на магнитную из них получаются спектры магнитных аномалий соответственно от бесконечной горизонтальной дипольной линии, бесконечной горизонтальной дипольной пластинки шириной $2l$, вертикального схематического магнита и вертикального диполя.

Для того чтобы определить спектры высших горизонтальных $f_x^n(x)$, $f_y^n(x)$ и вертикальных $f_z^n(x)$ производных порядка n от исходного гравитационного или магнитного потенциала $f(x)$, можно пользоваться равенствами, получаемыми на основе теорем о спектрах:

$$S_x^n(u, v) = (-iu)^n S(u, v);$$

$$S_y^n(u, v) = (-iv)^n S(u, v);$$

$$S_z^n(u, v) = (-\rho)^n S(u, v),$$

где S_x^n , S_y^n , S_z^n , S — спектры функций соответственно f_x^n , f_y^n , f_z^n , f . Для двумерных аномалий $u = \omega$, $v = 0$, $\rho = |\omega|$, поэтому

$$S_x^n(\omega) = (-i\omega)^n S(\omega); \quad S_z^n(\omega) = (-|\omega|)^n S(\omega).$$

В случае производных одного порядка для определения спектров аномалий f_x^n , f_y^n через спектр аномалии f_z^n можно воспользоваться равенствами

$$S_x^n(u, v) = -(iu/\rho) S_z^n(u, v);$$

$$S_y^n(u, v) = -(iv/\rho) S_z^n(u, v).$$

Отсюда для двумерных аномалий получим

$$S_x^n(\omega) = -i(\omega/|\omega|) S_z^n(\omega).$$

Например, для магнитного поля при $n=1$ спектры X - и Y -составляющих через спектр вертикальной составляющей магнитного поля можно определить из равенств

$$S_X(u, v) = -(iu/\rho) S_Z(u, v);$$

$$S_Y(u, v) = -(iv/\rho) S_Z(u, v).$$

Для двумерных аномалий спектр горизонтальной составляющей H можно найти из равенства

$$S_H(\omega) = -i(\omega/|\omega|) S_Z(\omega).$$

Аналогично из приведенных формул можно получить выражения, определяющие спектр потенциала поля $S(\omega)$ через значения спектров его производных, а следовательно и значения самого потенциала. Например, через спектр первой вертикальной производной потенциала S_z в трехмерном и двумерном случаях соответственно найдем

$$S(u, v) = -(1/\rho) S_z(u, v);$$

$$S(\omega) = -(1/|\omega|) S_z(\omega).$$

От выражений этих спектров по формулам обратного преобразования Фурье можно перейти и к значениям аномалий.

Кроме самих аномалий и их спектров в гравимагниторазведке широко используют их энергетические характеристики, при-

чем не только для случайных, но и для детерминированных аномалий. К основным энергетическим характеристикам аномалий относятся их автокорреляционные функции и энергетические спектры. Остановимся коротко на их определении.

Для детерминированных аномалий $f(x)$ и $f(x, y)$ из класса $U_{\alpha 2}$ (по В. Н. Страхову) при

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x) dx < \infty; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x, y) dx dy < \infty$$

значения автокорреляционных функций $B(\tau)$ и $B(\xi, \eta)$ определяются из равенств

$$B(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) f(x - \tau) dx;$$

$$B(\xi, \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) f(x - \xi, y - \eta) dx dy.$$

Между энергетическими спектрами Q и автокорреляционными функциями гравитационных и магнитных аномалий существует связь, определяемая парами преобразований Фурье. Для двухмерных аномалий в симметричной форме записи преобразований

$$Q(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} B(\tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau;$$

$$B(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} Q(\omega) \exp(+i\omega\tau) d\omega.$$

Для трехмерных аномалий

$$Q(u, v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B(\xi, \eta) \exp[-i(u\xi + v\eta)] d\xi d\eta;$$

$$B(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Q(u, v) \exp[+i(u\xi + v\eta)] du dv.$$

Для осесимметричных аномалий последние два равенства можно переписать через преобразования Ханкеля нулевого порядка:

$$Q(\rho) = \int_0^{\infty} \tau B(\tau) J_0(\rho\tau) d\tau;$$

$$B(\tau) = \int_0^{\infty} \rho Q(\rho) J_0(\rho\tau) d\rho,$$

где $\tau = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$. Энергетические спектры можно определить и через простые спектры исходных аномалий:

$$Q(\omega) = \sqrt{2\pi} |S(\omega)|^2;$$

$$Q(u, v) = 2\pi |S(u, v)|^2.$$

Пользуясь приведенными выражениями, можно записать значения энергетических спектров для аномалий от рассмотренных выше простейших тел.

Применение энергетических характеристик аномалий, мало чувствительных к погрешностям наблюдений, как в отдельности, так и совместно с данными исходных аномалий, позволяет решать ряд новых задач, повышает надежность и достоверность получаемых результатов. Эти вопросы подробно рассматриваются в соответствующем разделе курса гравиразведки и магниторазведки, поэтому останавливаться здесь на них не будем. В качестве примера приведем значения энергетических спектров и автокорреляционных функций для аномалий силы тяжести от бесконечной горизонтальной материальной линии и от шара или от точечной массы: бесконечная горизонтальная линия

$$Q(\omega) = \sqrt{2\pi} 2\pi (G\lambda)^2 \exp(-2|\omega|h);$$

$$\begin{aligned} B(\tau) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} Q(\omega) \exp(+i\omega\tau) d\omega = \\ &= 2\pi (G\lambda)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-2|\omega|h) \cos \omega\tau d\omega = \\ &= \pi (2G\lambda)^2 \frac{2h}{\tau^2 + 4h^2}; \end{aligned}$$

точечная масса

$$Q(\omega) = 2\pi (Gm)^2 \exp(-2\rho h);$$

$$\begin{aligned} B(\tau) &= 2\pi (Gm)^2 \int_0^{\infty} \rho \exp(-2\rho h) J_0(\rho\tau) d\rho = \\ &= 2\pi (Gm)^2 \frac{2h}{(\tau^2 + 4h^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Возможности интерпретации гравитационных и магнитных аномалий можно расширить одновременным применением значений исходного элемента поля и его производных, т.е. совместной интерпретацией этих значений. Рассмотрим применение взаимных корреляционных функций исходного элемента гравитационного или магнитного поля и его первой горизонтальной или вертикальной производной.

Определим вначале взаимные энергетические спектры. В общем виде для двух сигналов $f_1(x)$ и $f_2(x)$ со спектрами $S_1(\omega)$ и $S_2(\omega)$ взаимный энергетический спектр

$$Q_{12}(\omega) = \sqrt{2\pi} S_1(\omega) S_2(-\omega). \quad (\text{II.55})$$

Рассмотрим три случая.

1. Пусть $f_1(x) = f(x)$ — исходный элемент поля, а $f_2(x) = f_x(x) = \partial f(x) / \partial x$. Если при этом $S_1(\omega) = S(\omega)$ — спектр аномалии $f(x)$, на основании теоремы о спектрах спектр производной $f_x(x)$

$$S_2(\omega) = i\omega S(\omega).$$

Тогда по (II.55)

$$\begin{aligned} Q_{12}(\omega) &= -\sqrt{2\pi} i\omega S(\omega) S(-\omega) = -i\omega Q(\omega), \\ Q_{21}(\omega) &= -Q_{12}(\omega), \end{aligned} \quad (\text{II.56})$$

где $Q(\omega)$ — энергетический спектр аномалии $f(x)$.

2. Пусть по-прежнему $f_1(x) = f(x)$, но $f_2(x) = \partial f(x) / \partial z = f_z(x)$ — вертикальная производная аномалия $f(x)$. Тогда на основании теоремы о спектрах $S_2(\omega) = -|\omega| S(\omega)$. Поэтому

$$\begin{aligned} Q_{12}(\omega) &= -\sqrt{2\pi} |\omega| S(\omega) S(-\omega) = -|\omega| Q(\omega), \\ Q_{21}(\omega) &= Q_{12}(\omega). \end{aligned} \quad (\text{II.57})$$

3. Пусть $f_1(x) = f_x(x)$, $f_2(x) = f_z(x)$. Тогда из (II.55) — (II.57)

$$\begin{aligned} Q_{12}(\omega) &= -i\omega |\omega| Q(\omega), \\ Q_{21}(\omega) &= -Q_{12}(\omega). \end{aligned} \quad (\text{II.58})$$

Определим теперь значения взаимных корреляционных функций. Так как для аномалий $f_1(x)$ и $f_2(x)$ взаимная корреляционная функция

$$\begin{aligned} B_{12}(\tau) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} Q_{12}(\omega) \exp(i\omega\tau) d\omega = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} Q_{12}(\omega) \cos \omega\tau d\omega + i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} Q_{12}(\omega) \sin \omega\tau d\omega, \end{aligned}$$

то, учитывая четность и нечетность функций, определяемых равенствами (II.55) — (II.58), получим:

1) для функций $f(x)$ и $f_x(x)$

$$B_{12}(\tau)_1 = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \omega Q(\omega) \sin \omega\tau d\omega, \quad (\text{II.59})$$

$$B_{21}(\tau)_1 = -B_{12}(\tau)_1, \quad B_{12}(0)_1 = B_{21}(0)_1 = 0;$$

2) для функций $f(x)$ и $f_z(x)$

$$B_{12}(\tau)_2 = -\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty |\omega| Q(\omega) \cos \omega \tau d\omega, \quad B_{12}(\tau)_2 = B_{21}(\tau)_2;$$

3) для функций $f_x(x)$ и $f_z(x)$

$$B_{12}(\tau)_3 = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \omega |\omega| Q(\omega) \sin(\omega \tau) d\omega, \quad (II.60)$$

$$B_{12}(\tau)_3 = -B_{21}(\tau)_3, \quad B_{12}(0)_3 = B_{21}(0)_3 = 0.$$

Кроме того, с учетом выражения автокорреляционной функции аномалии

$$B(\tau) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty Q(\omega) \cos \omega \tau d\omega$$

и теоремы о спектре производной по параметру z в рассмотренных трех случаях получим

$$B_{12}(\tau)_1 = -\partial[B(\tau)]/\partial\tau; \quad (II.61)$$

$$B_{12}(\tau)_2 = \frac{1}{2} \partial[B(\tau)]/\partial h, \quad (II.62)$$

где h — глубина залегания тела;

$$B_{12}(\tau)_3 = -\frac{1}{2} \partial^2[B(\tau)]/\partial h \partial \tau. \quad (II.63)$$

По этим формулам можно определить взаимные корреляционные функции аномалии и ее производных через автокорреляционную функцию исходной аномалии. С этой целью при практических расчетах можно применить и формулы, определяющие их через значения исходного поля

$$B_{12}(\tau)_1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) f_x(x - \tau) dx;$$

$$B_{12}(\tau)_2 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) f_z(x - \tau) dx;$$

$$B_{12}(\tau)_3 = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) f_z(x - \tau) dx.$$

Если провести аналогию между $B_{12}(\tau)_1$, $B_{12}(\tau)_2$ и $B(\tau)$, с одной стороны, и функциями V_{xz} , V_{zz} и V_z , с другой, из равенств (II.61), (II.62) будет видно, что выражения для $-B_{12}(\tau)_1$ и $2B_{12}(\tau)_2$ соответствуют по форме функциям V_{xz} и V_{zz} , если за выражение исходной аномалии принять функцию $B(\tau)$. По-

этому и графики функций $B_{12}(\tau)_1$ и $B_{12}(\tau)_2$ будут иметь тот же вид, что и графики функций V_{xz} и V_{zz} . Но в отличие от них из-за того, что в выражение $B(\tau)$ глубина залегания входит как величина $2h$, кривые $B_{12}(\tau)_1$ и $B_{12}(\tau)_2$ будут более растянутыми по горизонтальной оси, поэтому значения абсцисс всех их характерных точек будут больше, чем для кривых V_{xz} и V_{zz} .

Совместная интерпретация функций V_z и $B(\tau)$, V_{xz} и $B_{12}(\tau)_1$, V_{zz} и $B_{12}(\tau)_2$ расширяет возможности интерпретации и позволяет получать более надежные и достоверные данные. В этом можно убедиться на простейшем примере применения закономерностей изменения функций $\tau_m/x_m = \kappa_m$, $\tau_0/x_0 = \kappa_0$, где τ_m и x_m — координаты точек экстремальных значений кривых $B_{12}(\tau)_1$ и $V_{xz}(x)$; τ_0 и x_0 — координаты точек пересечения функциями $B_{12}(\tau)_2$ и $V_{zz}(x)$ горизонтальной оси. Закономерности изменения кривых κ_m и κ_0 строго зависят от формы и параметров аномальных тел. Причем, если построить графики зависимости изменения значений этих функций от отношения горизонтальных или вертикальных размеров тел к глубине залегания, точки, соответствующие разным телам (например, горизонтально- и вертикально вытянутым), будут располагаться на плоскости рисунка в разных непересекающихся областях. Такое свойство их позволяет уверенно определять формы тел и соответствующие им параметры. Следует также отметить, что если аномалии подчиняются уравнению Пуассона для связи между потенциалами, при вычислении взаимных корреляционных функций в качестве аномалий V_{xz} и V_{zz} при вертикальном намагничивании можно принять магнитные аномалии H и Z . Это расширяет возможности совместной интерпретации данных гравитационных и магнитных аномалий (см. также § 11).

Эквивалентность, единственность и неустойчивость решения обратной задачи теории потенциала

Как известно, за исключением определения общей массы, горизонтальных координат центра тяжести и значений предельной глубины, обратная задача гравirazведки и магниторазведки решается неоднозначно. Подробно эти вопросы рассматриваются в курсе гравirazведки и магниторазведки, тем не менее, некоторые основные сведения об эквивалентности, единственности и устойчивости решения обратной задачи здесь также необходимо привести.

Единственность решения обратной задачи гравirazведки или магниторазведки — это возможность однозначного нахождения источников по заданному элементу гравитационного или магнитного поля при определенных допущениях об этих источниках.

Эквивалентными называются распределения масс с одинаковыми внешними полями. Решение обратной задачи гравиразведки и магниторазведки неоднозначно как раз из-за наличия таких эквивалентных по создаваемому внешнему полю распределений масс.

Существуют различные множества эквивалентных аномальных тел или эквивалентных семейств тел. Среди них можно выделить одно- и двухпараметрические эквивалентные семейства, бывают и более сложные случаи. Однопараметрические эквивалентные семейства — это семейства, для которых задание только одного параметра (например, плотности) делает решение обратной задачи единственным. Примеры однопараметрических эквивалентных семейств — бесконечное множество шаров или бесконечных горизонтальных круговых цилиндров с различной избыточной плотностью, но равными избыточными массами. Как известно, в трехмерном и двухмерном случаях они создают одинаковые внешние поля. К однопараметрическим эквивалентным семействам относятся также семейства софокусных эллипсоидов и коаксиальных цилиндров и множество других тел. Примером двухпараметрических эквивалентных семейств, введенных В. Н. Страховым для двухмерной задачи, является семейство контактных поверхностей в форме конхоиды Слюза. Это семейство обладает тем свойством, что для однозначного построения границы необходимо задавать два параметра — плотность и глубину залегания асимптоты конхоиды.

Более сложные ситуации имеют место для слоистых сред, состоящих из нескольких границ типа контактных поверхностей. При этом бывают среды с такими криволинейными границами раздела, которые вообще не порождают внешние поля (значения избыточных плотностей на границах имеют разные знаки, и поля от границ взаимно уничтожают друг друга). В этих случаях невозможно определить параметры сред, например форму границ, значения избыточных плотностей на границах, число границ. Единственное условие решения задач в подобных ситуациях — использование априорной информации. Наличие такой информации позволяет значительно сузить пределы эквивалентности и может привести к единственному решению. При решении обратной задачи большую роль играют теоремы разделения полей. Они позволяют свести задачу, решаемую по суммарному полю от нескольких объектов, к задаче, решаемой по полю от одного объекта.

Существуют несколько теорем о единственности решения обратной задачи. Основные из них для тел типа рудных — теоремы Новикова и Раппопорта — Сретенского. Эти теоремы устанавливают единственность решения обратной задачи при заданных значениях избыточных плотностей соответственно для

классов тел, звездных относительно заданной внутренней произвольной точки и областей, обладающих средней плоскостью. К классу звездных относительно некоторой внутренней точки тел (тела, для которых лучи, исходящие из этой точки, пересекают их поверхности только один раз) относятся призмы, уступы, шары, эллипсоиды и многие другие. Для задач типа структурных существуют также теоремы Страхова, Новоселицкого, Чередниченко и некоторых других исследователей о единственности решения обратной задачи.

Рассмотренная выше эквивалентность характеризует так называемую теоретическую эквивалентность, от которой следует отличать чаще встречающуюся практическую эквивалентность. Если при теоретической эквивалентности внешние поля от разных тел совпадают абсолютно точно, то при практической эквивалентности поля могут отличаться друг от друга в дискретных точках на некоторую малую величину ϵ (ϵ — эквивалентность по В. Н. Страхову). Примером практической эквивалентности могут служить, например, поле силы тяжести от бесконечной горизонтальной призмы и подобранное к нему поле от бесконечной горизонтальной материальной линии. Практическая неоднозначность решения обратной задачи, связанная с практической эквивалентностью, обусловливается погрешностями наблюдений, которыми осложнены наблюдаемые данные. В пределах величины этих погрешностей наблюдений (величины ϵ) одну и ту же аномалию можно аппроксимировать влиянием разных тел.

Из-за наличия практической эквивалентности решение обратной задачи становится неустойчивым, т.е. малым изменениям поля могут соответствовать большие изменения в распределении масс. Задача устойчивая, если малым изменениям поля соответствуют малые изменения в распределении масс. Задачи математической физики делятся на корректно поставленные и некорректно поставленные (по Ж. Адамару). Задачу называют поставленной корректно, если решение: 1) существует, 2) оно единственное, 3) непрерывно зависит от входных данных. Задача называется некорректной, если нарушается хотя бы одно из указанных условий. Из этих условий следует и понятие неустойчивой задачи, а именно, это задача, в которой нарушаются второе и третье условия. Некорректные задачи можно решать только с привлечением априорной информации. При этом основой решения является сформулированный А. Н. Тихоновым общий принцип регуляризации.

Вопросы для самоконтроля

1. Как меняется с расстоянием потенциал притяжения точечной массы?
2. Какой вид имеет выражение для потенциала системы точечных масс? В каких точках он не существует? Как можно показать его регулярность на бесконечности?
3. Какой вид имеет выражение для потенциала притяжения объемных масс? Какими свойствами обладает этот вид потенциала притяжения? Существует ли потенциал притяжения объемных масс в точке $r=0$? Как можно определить потенциал объемных масс для случаев внутренних и внешних точек? Как меняется с расстоянием потенциал, его первая и вторая производные для шара и шарового слоя? Какие производные от потенциала для них терпят разрыв при переходе через поверхность?
4. Как можно определить потенциал однородного эллипсоида? Что выражают теоремы Лапласа, Маклорена и Ньютона?
5. Какой вид имеет выражение для потенциала притяжения простого слоя? Что такое простой слой? Терпит ли потенциал притяжения простого слоя разрыв при переходе точки из внутренней области во внешнюю? Терпит ли разрыв при этом первая производная от потенциала? Терпит ли разрыв нормальная производная от потенциала однородного сферического слоя на его границе? Как можно объяснить физически то, что однородный сферический диск не притягивает внутреннюю точку?
6. Что такое элементарный диполь? Чем отличается потенциал диполя от потенциала точечной массы? Как определяется момент диполя? Притягивает ли диполь точку экваториальной плоскости? В каком направлении притяжение диполя максимально?
7. Чем отличается потенциал объемных намагниченных масс от гравитационного потенциала объемных масс? Как определяется момент объемного намагниченного тела?
8. Какой вид имеет уравнение Пуассона для связи между гравитационным и магнитным потенциалами? Как можно определить при вертикальном намагничивании вертикальную и горизонтальную составляющие магнитного поля через производные гравитационного поля?
9. Как можно определить отношение величины вектора намагничивания к плотности? Какие существуют признаки принадлежности гравитационной и магнитной аномалий одному и тому же телу?
10. Что такое двойной слой? Как определяется момент двойного слоя? Как можно определить потенциал двойного слоя? Чем отличается потенциал двойного слоя от потенциала простого слоя?
11. Каким условиям должны удовлетворять поверхности, на которых расположены простой и двойной слои? Как можно определить потенциал двойного слоя через телесный угол? Терпит ли разрыв потенциал двойного слоя при переходе из внутренней области во внешнюю?
12. Чем отличаются потенциалы притяжения двухмерных тел от потенциалов притяжения трехмерных тел? Какой вид имеют потенциалы притяжения для случаев плоского поля?
13. Какой вид имеет выражение для потенциала притяжения бесконечной горизонтальной материальной линии? В каких точках не существует потенциала притяжения масс бесконечной горизонтальной материальной линии? Какими свойствами обладает потенциал притяжения масс бесконечной горизонтальной материальной линии?
14. Что такое плоский простой слой? Какой вид имеет выражение для потенциала притяжения плоского простого слоя? Терпит ли разрыв потенциал плоского простого слоя при переходе через поверхность слоя? Терпит ли разрыв при этом нормальная производная потенциала простого плоского слоя?
15. Как с расстоянием меняется потенциал притяжения плоского диполя? Чем различаются потенциалы притяжения плоского и объемного дипо-

лей? К чему стремится потенциал плоского диполя при переходе точки в бесконечность?

16. Что такое плоский двойной слой? Чем он отличается от объемного двойного слоя? Как определяется момент плоского двойного слоя? Какой вид имеет выражение для потенциала плоского двойного слоя? Как можно определить потенциал плоского двойного слоя через плоский угол видимости? Притягивает ли однородный плоский двойной слой массы, расположенные во внутренних и внешних точках? Терпит ли разрыв непрерывности потенциал притяжения плоского двойного слоя при переходе точки через слой?

17. Как можно определить потенциал притяжения двухмерных магнитных масс? От чего зависит потенциал притяжения масс бесконечного горизонтального кругового цилиндра, намагниченного перпендикулярно оси? Для каких аномалий (каких размеров) можно применить двухмерную задачу?

18. Каковы составляющие потенциала силы тяжести? Как определяется потенциал центробежной силы и какой вид имеет выражение для него? Каково выражение для потенциала силы тяжести?

19. Какой физический смысл имеют первые производные по осям координат от потенциала силы тяжести? Как определяется горизонтальный градиент силы тяжести?

20. Какой физический смысл имеют производные второго порядка от потенциала силы тяжести?

21. Как связаны горизонтальные производные второго порядка от потенциала силы тяжести с геометрией уровенной поверхности потенциала?

§ 17. ФОРМУЛЫ ОСТРОГРАДСКОГО — ГАУССА
И СТОКСА В ВЕКТОРНОЙ ФОРМЕ

Формула Остроградского — Гаусса

Формула Остроградского — Гаусса — одна из важных в теории кратных интегралов. Она устанавливает связь между трехкратным интегралом по объему v и интегралом по поверхности, ограничивающей этот объем. Эта формула широко применяется в теории потенциала.

Рассмотрим векторную форму записи формулы Остроградского — Гаусса.

Пусть поверхность S ограничивает некоторый объем v и в точках области v даны функции $N(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$, конечные, непрерывные и однозначные для всех точек заданной области вплоть до поверхности S , которые имеют конечные и интегрируемые производные $\partial N/\partial x$, $\partial Q/\partial y$, $\partial R/\partial z$. Если $\vec{n}$ — внешняя нормаль к поверхности S , справедлива формула

$$\begin{aligned} \int_v (\partial N/\partial x + \partial Q/\partial y + \partial R/\partial z) dv = \\ = \int_S [N \cos(n, x) + Q \cos(n, y) + R \cos(n, z)] dS. \end{aligned}$$

Это и есть формула Остроградского — Гаусса.

В более удобной векторной форме записи три разных скалярных поля N , Q , R можно заменить одним векторным.

Пусть $\vec{F}$ некоторый вектор:

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k},$$

такой, что $F_x = N$, $F_y = Q$, $F_z = R$. Тогда

$$\frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = \operatorname{div} \vec{F}.$$

Это выражение определяет подынтегральную функцию левой части формулы Остроградского — Гаусса. Если определить проекцию вектора $\vec{F}$ на направление $\vec{n}$, то

$$\begin{aligned} \operatorname{pr}_{\vec{n}} \vec{F} &= |\vec{F}| \cos(n, F) = F_x \cos(n, x) + F_y \cos(n, y) + \\ &+ F_z \cos(n, z) = N \cos(n, x) + Q \cos(n, y) + R \cos(n, z). \end{aligned}$$

Это выражение соответствует подынтегральной функции правой части формулы Остроградского — Гаусса. Поэтому

$$\int_v \operatorname{div} \vec{F} dv = \int_S \operatorname{pr}_n \vec{F} dS. \quad (\text{III.1})$$

Это и есть векторная форма записи формулы Остроградского — Гаусса. Интеграл в правой части этого равенства является потоком поля $\vec{F}$ через поверхность S . Поэтому объемный интеграл от расходимости вектора $\vec{F}$ равен потоку поля $\vec{F}$ через поверхность этого объема.

Из (III.1) можно получить и определение дивергенции. Действительно, в пределе, когда объем стягивается к точке M , можно написать

$$\lim_{v \rightarrow M} \int_v \operatorname{div} \vec{F} dv = \operatorname{div} \vec{F}(M) v,$$

так как в точке M и в ее окрестности величину $\operatorname{div} \vec{F}$ можно принять за постоянную, равную $\operatorname{div} \vec{F}(M)$. Поэтому с учетом полученного равенства из (III.1) найдем

$$\operatorname{div} \vec{F}(M) = \lim_{v \rightarrow M} \left(\int_S \operatorname{pr}_n \vec{F} dS / v \right). \quad (\text{III.2})$$

Рассмотрим случай плоского поля, заданного на плоскости xOz . Для него

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_z \vec{k};$$

$$\operatorname{div} \vec{F} = dF_x/dx + dF_z/dz;$$

$$\operatorname{pr}_n \vec{F} = F_x \cos(n, x) + F_z \cos(n, z).$$

С учетом этих равенств аналогом формулы Остроградского — Гаусса для плоских полей будет

$$\int_S \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) dS = \int_l [F_x \cos(n, x) + F_z \cos(n, z)] dl,$$

или в более компактной форме

$$\int_S \operatorname{div} \vec{F} dS = \int_l \operatorname{pr}_n \vec{F} dl. \quad (\text{III.3})$$

Аналог равенства (III.2)

$$\operatorname{div} \vec{F}(M) = \lim_{S \rightarrow M} \left(\int_l \operatorname{pr}_n \vec{F} dl / S \right). \quad (\text{III.4})$$

В этих формулах S — некоторая заданная область на плоскости xOz или площадь этой области; l — замкнутый контур этой области; $\vec{n}$ — нормаль к этому контуру, внешняя по отношению к S ; M — текущая точка области S .

Формула Стокса

Рассмотренная формула Остроградского — Гаусса связывает интеграл по поверхности трехмерной области с интегралом по самой области (по ее объему).

Рассмотрим другую, такую же важную для теории потенциала, формулу — формулу Стокса, которая связывает криволинейный интеграл по контуру поверхности с интегралом по самой поверхности.

Пусть S — любая незамкнутая поверхность, такая, что прямые, параллельные оси z , пересекают ее только в одной точке. Обозначим контур этой поверхности l (l — замкнутая пространственная кривая). Пусть на поверхности S и в ближайшей ее окрестности заданы три непрерывные функции $N(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ со своими непрерывными производными первого порядка. Для таких функций справедлива формула Стокса:

$$\begin{aligned} \int_l Ndx + Qdy + Rdz = \\ = \int_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos(n, x) + \left(\frac{\partial N}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos(n, y) + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial y} \right) \cos(n, z) \right] dS. \end{aligned}$$

Запишем эту формулу в более удобной векторной форме. Пусть функции N , Q и R являются проекциями по осям координат x , y , z некоторого вектора

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k},$$

т.е. $a_x = N$, $a_y = Q$, $a_z = R$. Тогда формулу Стокса можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \int_l a_x dx + a_y dy + a_z dz = \\ = \int_S \left[\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \cos(n, x) + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \cos(n, y) + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \cos(n, z) \right] dS. \end{aligned} \quad (\text{III.5})$$

Пусть $d\vec{l}$ — направленный элемент дуги, т. е. элемент дуги, рассматриваемый как малый вектор $d\vec{l}$ с составляющими dx , dy , dz , т. е.

$$d\vec{l} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}.$$

Тогда выражение под знаком криволинейного интеграла можно записать в виде скалярного произведения векторов $\vec{a}$ и $d\vec{l}$:

$$a_x dx + a_y dy + a_z dz = \vec{a} \cdot d\vec{l}.$$

Разности производных в круглых скобках в (III.5), стоящие под знаком интеграла по поверхности, равны проекциям вектора $\vec{F} = \text{rot } \vec{a}$, т. е.

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} &= F_x; & \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} &= F_y; \\ \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} &= F_z. \end{aligned}$$

Поэтому формулу Стокса можно переписать:

$$\int_l \vec{a} \cdot d\vec{l} = \int_S [F_x \cos(n, x) + F_y \cos(n, y) + F_z \cos(n, z)] dS.$$

Введем в эту формулу и направленный элемент площади поверхности S с проекциями

$$\begin{aligned} dS_x &= \cos(n, x) dS; & dS_y &= \cos(n, y) dS; \\ dS_z &= \cos(n, z) dS, \end{aligned}$$

где $\vec{n}$ — нормаль к поверхности, т. е.

$$d\vec{S} = \cos(n, x) dS\vec{i} + \cos(n, y) dS\vec{j} + \cos(n, z) dS\vec{k}.$$

Тогда выражение под знаком поверхностного интеграла можно записать в виде скалярного произведения векторов $\vec{F}$ и $d\vec{S}$:

$$F_x \cos(n, x) dS + F_y \cos(n, y) dS + F_z \cos(n, z) dS = \vec{F} \cdot d\vec{S}.$$

Поэтому, переходя от вектора $\vec{F}$ к $\text{rot } \vec{a}$, формулу Стокса окончательно можно переписать в виде

$$\int_l \vec{a} \cdot d\vec{l} = \int_S \text{rot } \vec{a} \cdot d\vec{S}. \quad (\text{III.6})$$

Здесь интеграл в правой части определяет величину скалярного потока векторного поля $\vec{F} = \text{rot } \vec{a}$ через поверхность S .

Введем еще проекции векторов $\vec{a}$ и $\vec{F}$ из выражений

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot d\vec{l} &= |\vec{a}| |d\vec{l}| \cos(a, dl) = a_l dl; \\ \vec{F} \cdot d\vec{S} &= |\vec{F}| |d\vec{S}| \cos(F, dS) = \\ &= |\vec{F}| dS \cdot \cos(F, n) = F_n dS = \text{rot}_n \vec{a} dS,\end{aligned}$$

где $a_l = |\vec{a}| \cos(a, dl)$ — проекция вектора $\vec{a}$ на направление dl , т. е. на касательную к контуру l ; $\text{rot}_n \vec{a} = |\text{rot } \vec{a}| \cos(F, n)$ — проекция вектора $\text{rot } \vec{a}$ на направление нормали к поверхности n .

Через значения этих проекций формула Стокса запишется:

$$\int_l a_l dl = \int_S \text{rot}_n \vec{a} dS. \quad (\text{III.7})$$

Криволинейный интеграл в левой части этой формулы, следовательно и формулы (III.6), называется циркуляцией вектора $\vec{a}$ вдоль контура l . Поэтому из формулы Стокса следует, что циркуляция поля вдоль контура некоторой поверхности равна интегралу по самой поверхности от нормальной составляющей вихря или потоку ротора через поверхность. Циркуляция вектора вдоль линии l обычно обозначают кружочком на знаке интеграла, что указывает на условие замкнутости линии.

Рассмотрим частный случай формулы Стокса, когда поверхность S плоская и совпадает с координатной плоскостью xOz . В этом случае $dy=0$, а направление нормали $\vec{n}$ совпадает с осью z . Поэтому значения $\cos(n, x) = \cos(n, z) = 0$, т. е. $\cos(n, y) = 1$. Тогда формула Стокса примет вид

$$\int_l N dx + R dz = \int_S (\partial N / \partial z - \partial R / \partial x) dS$$

или через проекции вектора $\vec{a}$

$$\int_l a_x dx + a_z dz = \int_S (\partial a_x / \partial z - \partial a_z / \partial x) dS. \quad (\text{III.8})$$

Эта формула соответствует двумерным гравитационным и магнитным аномалиям и является формулой Грина (частный ее случай, когда плоская поверхность совпадает с одной из координатных плоскостей).

Из формулы Стокса видно, что если поле $\vec{a}$ потенциальное, т. е. если $\text{rot } \vec{a} = 0$, циркуляция вектора $\vec{a}$ вдоль линии l всегда равна нулю.

Рассмотрим для потенциального поля $\vec{a}$ криволинейный интеграл, стоящий в левой части формулы Стокса, в случае, когда контур или линия l незамкнутая:

$$A = \int_l a_x dx + a_y dy + a_z dz.$$

Эта величина имеет простой физический смысл — она равна работе, совершаемой полем, когда некоторая точка, на которую действует сила поля, проходит линию l . При этом она не зависит от пути, по которому переносится точка, а зависит только от начальной и конечной точек кривой C и D . Определим величину A через потенциал поля V .

Так как для потенциального поля

$$\vec{a} = \text{grad } V,$$

$$\text{то } a_x = \partial V / \partial x, \quad a_y = \partial V / \partial y, \quad a_z = \partial V / \partial z.$$

Поэтому

$$A = \int_{CD} \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz = \int_{CD} dV = \int_{(C)}^{(D)} dV = V(D) - V(C).$$

Отсюда следует, что работа, совершенная силой поля при переносе точки из C в D , равна разности потенциалов в точках D и C .

Из формулы Стокса можно получить и определение ротора. Пусть m — любое направление, проходящее через некоторую заданную точку M , и пусть ΔS — некоторая малая плоская площадка, проходящая через точку M ортогонально к m , а l — контур этой площадки. Применим к ней формулу Стокса:

$$\int_l a_i dl = \int_S \text{rot}_m^i \vec{a} dS.$$

По теореме о среднем для линейных интегралов напомним

$$\int_l a_i dl = \text{rot}_m^i \vec{a} \big|_{M_1} \cdot S,$$

где M_1 — некоторая точка площадки ΔS .

Беспрестанно сжимая площадку к точке M и переходя к пределу, получим значение проекции ротора, или вихря, на любое заданное направление $\vec{m}$ в точке M :

$$\text{rot}_{\vec{m}} \vec{a} = \lim_{\Delta S \rightarrow M} \left(\int_l a_t dl / \Delta S \right).$$

Таким образом, проекция вектора $\vec{F} = \text{rot} \vec{a}$ в данной точке поля M по некоторому направлению $\vec{m}$ равна пределу отношения циркуляции вектора $\vec{a}$ по контуру площадки S , проходящей через точку M (перпендикулярно к $\vec{m}$) к величине этой площадки ΔS .

Сравнивая формулы Остроградского — Гаусса и Стокса, необходимо помнить следующее. В правые части обеих формул входят потоки поля (скалярные потоки векторного поля). При этом в формуле Стокса речь идет о потоке вектора через незамкнутый кусок поверхности, опирающийся на некоторый замкнутый контур l , тогда как в формуле Остроградского — Гаусса говорится о потоке через некоторую замкнутую поверхность или оболочку.

§ 18. УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА И ЛАПЛАСА. ИХ ПОЛУЧЕНИЕ И ПРИМЕНЕНИЕ

Получение уравнений Пуассона и Лапласа

Эти важнейшие уравнения теории потенциала можно получить, исходя из формулы Остроградского — Гаусса.

Рассмотрим вначале простейший случай однородного шара объемом v , радиусом R и массой m (рис. 39).

Пусть $\vec{F}$ — сила притяжения, с которой действует шар на точку P , в которой находится единичная масса, S — поверхность шара, а r — расстояние между точкой P и центром шара.

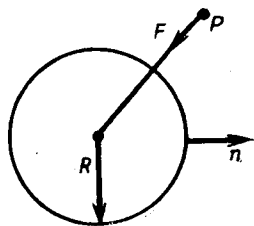


Рис 39. Однородный шар и нормаль к нему

Тогда

$$\vec{F} = -G \frac{m}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}.$$

Пусть точка P совпадает с поверхностью S . Определим поток вектора $\vec{F}$ через поверхность S ($\vec{n}$ — внешняя нормаль к поверхности S):

$$\begin{aligned} \int_S \text{пр}_{\vec{n}} \vec{F} dS &= \int_S |\vec{F}| \cos(F, n) dS = -Gm \int \frac{dS}{R^2} = \\ &= -Gm 4\pi R^2 / R^2 = -4\pi Gm. \end{aligned} \quad (\text{III.9})$$

Здесь учтено, что сила $\vec{F}$ и нормаль $\vec{n}$ имеют противоположные направления [$\cos(F, n) = 180^\circ$].

Будем деформировать поверхность S заданного шара при постоянной его массе m . Так как масса в объеме v не меняется (т. е. число и мощность источников в объеме постоянны), поток вектора через любую поверхность S (не только для сферы), окружающую массу (в общем случае любой формы), постоянный и определяется равенством (III.9).

Предположим, что дано некоторое произвольное (рис. 40) тело с поверхностью Σ . Внутри Σ возьмем некоторую точку M и окружим ее замкнутой поверхностью S (в общем случае произвольной формы). Объем, ограниченный поверхностью S , пусть будет v , а масса — m . Тогда поток вектора силы притяжения $\vec{F}$, соответствующий массе m , через поверхность S будет определяться равенством (III.9). В то же время массы, находящиеся вне поверхности S , создают потоки, равные нулю (соответствующие им векторные линии пронизывают поверхность S — сколько линий входит, столько же и выходит).

Воспользуемся равенством (III.2). В пределе, когда $v \rightarrow M$ (т. е. для точки M и ее окрестности), с учетом (III.9) найдем

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{F}(M) &= \lim_{v \rightarrow M} \left(\int_S \text{пр}_{\vec{n}} \vec{F} dS / v \right) = \\ &= - \lim_{v \rightarrow M} (4\pi Gm/v) = -4\pi G\sigma, \end{aligned} \quad (\text{III.10})$$

где σ — плотность распределения масс в точке M (плотность

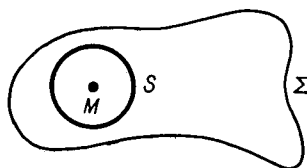


Рис. 40. Поверхности S , Σ для случая произвольного объемного тела

в общем случае — непрерывная функция координат точки M , имеющей непрерывные частные производные первого порядка).

Учитывая, что для силы притяжения

$$\vec{F} = \text{grad } U,$$

где U — потенциал притяжения, а $\text{div } \vec{F} = \text{div grad } U = \Delta U$, окончательно получим

$$\Delta U = -4\pi G\sigma. \quad (\text{III.11})$$

Это и есть уравнение Пуассона. Таким образом, в точках области с известным распределением масс, потенциал притяжения удовлетворяет уравнению Пуассона.

Можно привести иной ход рассуждений. Значение ΔU в точке M для заданных масс объема Σ можно представить в виде $\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2$, где ΔU_1 и ΔU_2 — значения суммы вторых производных по осям координат потенциала притяжения объемных масс, соответствующие влиянию на точку M масс, расположенных вне поверхности S (значение ΔU_1) и внутри нее (ΔU_2).

Для масс, находящихся вне поверхности S , точка M — внешняя, поэтому на основании свойства потенциала притяжения объемных масс $\Delta U_1 = 0$. Для масс, находящихся внутри поверхности S , справедливо равенство (III.10) (в пределе поверхность S можно принять за сферу, а отношение m к v даст значение плотности в точке M), поэтому

$$\Delta U_2 = -4\pi G\sigma(M).$$

Окончательно получим

$$\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2 = -4\pi G\sigma(M).$$

Частным случаем уравнения Пуассона является уравнение Лапласа

$$\Delta U = 0, \quad (\text{III.12})$$

которое получается из уравнения Пуассона при $\sigma = 0$. Поэтому в точках пространства, где отсутствуют массы (т. е. при $\sigma = 0$), потенциал притяжения удовлетворяет уравнению Лапласа. (Справедливость этого уравнения в общем виде для потенциала притяжения объемных масс была показана выше.) А функции, непрерывные в некоторой области v , имеющие непрерывные в v первые и вторые производные и удовлетворяющие уравнению Лапласа, называются гармоническими в области v . Таким образом, потенциал притяжения вне масс является гармонической функцией.

Для случая двухмерных или плоских полей уравнение Пуассона можно получить таким же путем, пользуясь равенством

(III.4) и выражениями логарифмических потенциалов притяжения. С этой целью рассмотрим, например, формулу (II.36). Выражение силы притяжения, соответствующее этому виду логарифмического потенциала, имеет вид

$$\vec{F} = 2G\lambda \vec{r}/r^2,$$

где $\vec{r} = (x-\xi)\vec{i} + (z-\zeta)\vec{k}$; $\lambda = \sigma S$; S — площадь сечения двухмерного тела (бесконечного горизонтального кругового цилиндра).

Значение интеграла в числителе правой части (III.4) получим таким же путем, как это сделано при выводе формулы (III.9), учитывая, что и в данном случае сечением тела является круг радиусом r , а контур l — окружность, длина которой $2\pi r$:

$$\begin{aligned} \int_l \text{pr}_n \vec{F} dl &= 2G\lambda \frac{1}{r} \int_l \cos(F, n) dl = \\ &= -2G\lambda \frac{1}{r} \int_l dl = -2G\lambda \frac{2\pi r}{r} = -4\pi G\lambda = -4\pi G\sigma S. \end{aligned}$$

Подставим это значение интеграла в (III.4), в пределе, когда $S \rightarrow M$, получим

$$\text{div } \vec{F}(M) = \lim_{S \rightarrow M} (-4\pi G\sigma S/S) = -4\pi G\sigma.$$

И, наконец, учитывая, что

$$\text{div } \vec{F} = \text{div grad } U = \Delta U,$$

найдем $\Delta U = -4\pi G\sigma$. Как и следовало ожидать, получили то же уравнение, что и (III.11). Оно верно не только для масс бесконечного горизонтального кругового цилиндра, но и для масс любого другого двухмерного аномального тела произвольного сечения S . При этом формулу (III.4) можно применить, не полагая, что S — это сечения тела (S для формулы — это произвольная область на плоскости xOz , контур l которой может находиться как внутри, так и вне масс).

Определим значение оператора Лапласа ΔQ для потенциала центробежной силы Q . Из (II.48) получим

$$\Delta Q = \partial^2 Q / \partial x^2 + \partial^2 Q / \partial y^2 + \partial^2 Q / \partial z^2 = 2\omega^2. \quad (\text{III.13})$$

Тогда для потенциала силы тяжести в точках отсутствия масс с учетом равенств (III.12), (III.13) найдем

$$\Delta W = \Delta U + \Delta Q = 2\omega^2;$$

для точек, расположенных внутри масс с учетом (III.11), (III.13),

$$\Delta W = -4\pi G\sigma + 2\omega^2.$$

Решение уравнения Лапласа в цилиндрических координатах

Уравнение Лапласа — основное в теории гармонических функций. При рассмотрении свойств этих функций и решении различных задач теории потенциала применительно к гармоническим функциям приходится выражать уравнение Лапласа в различных координатах. Выразим его в цилиндрических координатах, т. е. определим значения производных $\partial^2 V / \partial x^2$, $\partial^2 V / \partial y^2$, $\partial^2 V / \partial z^2$, где V — некоторая заданная потенциальная функция, через цилиндрические координаты: $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $z = z$. Отсюда

$$dx = \cos \varphi d\rho - \rho \sin \varphi d\varphi; \quad dy = \sin \varphi d\rho + \rho \cos \varphi d\varphi.$$

Напишем выражения полного дифференциала функции V в координатах x , y , z и ρ , φ , z :

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz;$$

$$dV = \frac{\partial V}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial V}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial V}{\partial z} dz.$$

Из этих равенств получим

$$\frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy = \frac{\partial V}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial V}{\partial \varphi} d\varphi.$$

Подставляя сюда значения dx и dy , выраженные в координатах ρ и φ , найдем

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial V}{\partial x} \cos \varphi d\rho - \frac{\partial V}{\partial x} \rho \sin \varphi d\varphi + \frac{\partial V}{\partial y} \sin \varphi d\rho + \frac{\partial V}{\partial y} \rho \cos \varphi d\varphi \right] = \\ = \frac{\partial V}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial V}{\partial \varphi} d\varphi. \end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты при $d\rho$ и $d\varphi$ в правой и левой частях друг к другу, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial V}{\partial y} \sin \varphi &= \frac{\partial V}{\partial \rho}; \\ -\frac{\partial V}{\partial x} \sin \varphi + \frac{\partial V}{\partial y} \cos \varphi &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \varphi}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \cos \varphi \frac{\partial V}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \sin \varphi \frac{\partial V}{\partial \varphi},$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \sin \varphi \frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \cos \varphi \frac{\partial V}{\partial \varphi}.$$

(III.14)

Найдем теперь значения $\partial^2 V / \partial x^2$ и $\partial^2 V / \partial y^2$. Так как

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right); \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right),$$

то $\partial^2 V / \partial x^2$ и $\partial^2 V / \partial y^2$ можно найти из (III.14), заменив в них V в первом случае на $\partial V / \partial x$, во втором — на $\partial V / \partial y$. Из первой формулы (III.14) получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\cos \varphi \frac{\partial V}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \sin \varphi \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right) - \\ &\quad - \frac{1}{\rho} \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\cos \varphi \frac{\partial V}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \sin \varphi \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right) = \\ &= \cos^2 \varphi \frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho} \cos \varphi \sin \varphi \frac{\partial^2 V}{\partial \rho \partial \varphi} + \\ &\quad + \cos \varphi \sin \varphi \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial V}{\partial \varphi} - \frac{1}{\rho} \sin \varphi \left(\cos \varphi \frac{\partial^2 V}{\partial \rho \partial \varphi} - \sin \varphi \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \\ &\quad + \frac{1}{\rho^2} \sin \varphi \left(\sin \varphi \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \cos \varphi \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right) = \cos^2 \varphi \frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} - \\ &\quad - \frac{2}{\rho} \cos \varphi \sin \varphi \frac{\partial^2 V}{\partial \rho \partial \varphi} + \frac{1}{\rho} \sin^2 \varphi \frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{2}{\rho} \sin \varphi \cos \varphi \frac{\partial V}{\partial \varphi} + \\ &\quad + \frac{1}{\rho^2} \sin^2 \varphi \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}. \end{aligned}$$

Аналогично из второй формулы (III.14) получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} &= \sin^2 \varphi \frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \sin \varphi \cos \varphi \frac{\partial^2 V}{\partial \rho \partial \varphi} + \\ &\quad + \frac{1}{\rho} \cos^2 \varphi \frac{\partial V}{\partial \rho} - \frac{2}{\rho} \sin \varphi \cos \varphi \frac{\partial V}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho^2} \cos^2 \varphi \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}. \end{aligned}$$

Из последних равенств найдем

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}.$$

Подставляя значение этой суммы в уравнение Лапласа, окончательно получим

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0. \quad (\text{III.15})$$

Это и есть уравнение Лапласа в цилиндрических координатах. Перепишем его в несколько ином виде. Положим $V = R\Phi N$, где R , Φ и N — функции соответственно координат ρ , φ , z . Подставив это значение V в (III.15) и разделив его на $R\Phi N/\rho^2$, получим

$$\frac{\rho}{R} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + \frac{\rho^2}{N} \frac{d^2 N}{dz^2} = 0.$$

Обозначим

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = -n^2, \quad \frac{1}{N} \frac{d^2 N}{dz^2} = \alpha^2. \quad (\text{III.16})$$

Тогда

$$\rho \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) + (\alpha^2 \rho^2 - n^2) R = 0.$$

После подстановки $\gamma = \alpha \rho$ окончательно получим

$$\frac{d^2 R}{d\gamma^2} + \frac{1}{\gamma} \frac{dR}{d\gamma} + \left(1 - \frac{n^2}{\gamma^2} \right) R = 0. \quad (\text{III.17})$$

Это дифференциальное уравнение представляет собой уравнение Бесселя, а функции, являющиеся решением этого уравнения, называются функциями Бесселя.

Дифференциальное уравнение Бесселя — это линейное уравнение второго порядка без правой части с непостоянными коэффициентами. Общее решение такого уравнения $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные; y_1 и y_2 — линейно независимые решения уравнения.

Если отыскать решения уравнения в виде степенного ряда

$$y = x^p (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_i x^i + \dots) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{i+p},$$

полагая $a_0 \neq 0$, получим

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(x/2)^{2k+p}}{k! \Gamma(p+k+1)},$$

где $p = \pm n$; Γ — гамма-функция [при x — целом положительном $\Gamma(x) = (x-1)!$]. Решение уравнения при $p = n$ обозначают через J_n и называют функцией Бесселя первого рода порядка n . Аналогично решение уравнения при $p = -n$ обозначают $J_{-n}(x)$ и называют функцией Бесселя первого рода порядка $-n$. Таким образом,

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(x/2)^{2k+n}}{k! \Gamma(k+n+1)}; \quad (\text{III.18})$$

$$J_{-n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(x/2)^{2k-n}}{k! \Gamma(k-n+1)}. \quad (\text{III.19})$$

Если n — не целое число, функция $J_{-n}(x)$ является линейно независимой от $J_n(x)$. Поэтому общее решение уравнения (III.17) имеет вид

$$y = C_1 J_n(x) + C_2 J_{-n}(x).$$

Если n — целое число, функции $J_n(x)$ и $J_{-n}(x)$ будут линейно зависимыми, поэтому из них общего решения составить нельзя. В этом случае в качестве второго решения, линейно независимого от $J_n(x)$, нужно брать функцию [5]

$$Y_n(x) = \lim_{m \rightarrow n} \frac{\cos(m\pi) J_m(x) - J_{-m}(x)}{\sin(m\pi)},$$

которая при $m=n$ дает неопределенность вида $0/0$, раскрываемую обычным способом.

С учетом функции $Y_n(x)$ общее решение (III.17) при n целом запишется в виде

$$y = C_1 J_n(x) + C_2 Y_n(x),$$

функция $Y_n(x)$ называется функцией Бесселя второго рода порядка n , или же функцией Неймана (в некоторых литературных источниках ее называют функцией Вебера).

Таким образом, элементарными решениями уравнения (III.17) являются функции $J_n(\alpha\rho)$ и $Y_n(\alpha\rho)$. Элементарными решениями первого и второго дифференциальных уравнений из равенств (III.16) соответственно будут $\cos n\varphi$, $\sin n\varphi$, $\exp(-\alpha z)$, $\exp(\alpha z)$. Учитывая условие равенства потенциала нулю в бесконечности, из полученных элементарных решений нужно исключить функции $\exp(\alpha z)$ и $Y_n(\alpha\rho)$ (последняя обращается в бесконечность при $\rho=0$). Тогда решение уравнения (III.15) можно записать в виде

$$V(\rho, \varphi, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (A_{nk} \cos n\varphi + B_{nk} \sin n\varphi) \exp(-\alpha z) J_n(\alpha\rho).$$

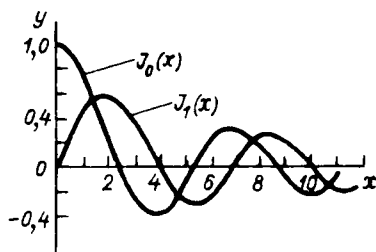
В частном случае осесимметричного поля, когда значения функции не зависят от угла φ , получим $n=0$. Тогда

$$V(\rho, z) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \exp(-\alpha z) J_0(\alpha\rho).$$

В этих равенствах коэффициенты A_{nk} и B_{nk} определяются на основании учета граничных значений функции.

Таким образом, решение уравнения Лапласа, выраженного в цилиндрических координатах, приводит к цилиндрическим функциям Бесселя, которые широко применяются при решении различных задач гравиразведки и магниторазведки, в частности при построении различных способов трансформаций гравитационных и магнитных аномалий. При этом, например, функция $J_0(\rho R)$ — частотная характеристика усреднения по окружности радиусом R , а функция $2J_1(\rho R)/\rho R$ — частотная характеристика усреднения по площади круга радиусом R .

Рис. 41. Графики изменения функций Бесселя $J_0(x)$ и $J_1(x)$



Ввиду широкого применения функций $J_0(x)$ и $J_1(x)$ в гра-
вимагниторазведке дадим их краткую характеристику.

Ряды функций $J_0(x)$, $J_1(x)$ можно получать из (III.18) при
значениях $n=0$ и $n=1$:

$$\begin{aligned} J_0(x) &= 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 (2!)^2} - \dots = \\ &= 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} - \frac{x^6}{2304} + \dots; \end{aligned}$$

$$J_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^3 2! 3!} + \frac{x^5}{2^5 2! 3!} - \dots = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{16} + \frac{x^5}{384} - \dots$$

Из этих равенств видно, что полученные ряды — знакопере-
дующиеся, быстро сходящиеся. Функция $J_0(x)$ является четной,
т. е. $J_0(-x) = J_0(x)$, так как в нее входят значения x только в
четной степени. В ряд функции $J_1(x)$ значение x входит только
в нечетных степенях, поэтому $J_1(-x) = -J_1(x)$, т. е. $J_1(x)$ —
нечетная функция. При $x=0$ значение $J_0(x) = 1$, а $J_1(x) = 0$.

Функции $J_0(x)$ и $J_1(x)$ (рис. 41) являются функциями с за-
тухающими экстремальными значениями, стремящимися к нулю
на бесконечности. Они имеют бесчисленное множество корней,
т. е. чисел, обращающих значение функции в нуль.

Первые три корня функции $J_0(x)$ — это числа 2,405; 5,520
и 8,654, а дальше корни повторяются приблизительно через
3,14; первые три корня функции $J_1(x)$ — это числа 3,832; 7,016
и 10,173, а дальше корни повторяются также приблизительно
через 3,15 и 3,14.

При больших значениях x можно пользоваться асимптоти-
ческими формулами

$$\begin{aligned} J_0(x) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right); \\ J_1(x) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{3}{4}\pi\right). \end{aligned}$$

Уравнение Лапласа в сферических координатах

Выражение уравнения Лапласа в сферических координатах имеет большое практическое применение, особенно в тех случаях, когда необходимо рассматривать и исследовать значения потенциалов на сферических поверхностях.

Уравнение Лапласа

$$\partial^2 V / \partial x^2 + \partial^2 V / \partial y^2 + \partial^2 V / \partial z^2 = 0$$

получим в сферических координатах, если выразим декартовые координаты точки x, y, z через сферические. В сферических координатах

$$x = \rho \sin \theta \cos \lambda; \quad y = \rho \sin \theta \sin \lambda; \quad z = \rho \cos \theta.$$

Обозначим: $\rho_1 = \rho \sin \theta$. Тогда

$$x = \rho_1 \cos \lambda, \quad y = \rho_1 \sin \lambda. \quad (\text{III.20})$$

На основании этих равенств, принимая функцию $V(x, y)$ зависящей от переменных ρ_1 и λ , можно определить производные $\partial V / \partial x$ и $\partial^2 V / \partial x^2$. По правилу дифференцирования сложной функции, учитывая, что ρ_1 не зависит от λ , найдем

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= \frac{\partial V}{\partial \rho_1} \frac{\partial \rho_1}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 V}{\partial \rho_1^2} \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial x^2} \frac{\partial V}{\partial \rho_1} + \frac{\partial^2 V}{\partial \rho_1 \partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial \rho_1}{\partial x} + \\ &+ \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda \partial \rho_1} \frac{\partial \rho_1}{\partial x} \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial V}{\partial \lambda} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} = \\ &= \frac{\partial^2 V}{\partial \rho_1^2} \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial V}{\partial \rho_1} \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial \rho_1 \partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial \rho_1}{\partial x} + \\ &+ \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial V}{\partial \lambda} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (\text{III.21})$$

Аналогично, дифференцируя по y , найдем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 V}{\partial \rho_1^2} \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial V}{\partial \rho_1} \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial \rho_1 \partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\partial \rho_1}{\partial y} + \\ &+ \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial V}{\partial \lambda} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y^2}. \end{aligned} \quad (\text{III.22})$$

Из (III.20) получим

$$\rho_1^2 = x^2 + y^2; \quad \lambda = \arctg(y/x).$$

Из этих выражений определим производные функции λ и ρ_1 по x и y :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho_1}{\partial x} &= \frac{x}{\rho_1}; & \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial x^2} &= \frac{\rho_1^2 - x^2}{\rho_1^3}; \\ \frac{\partial \rho_1}{\partial y} &= \frac{y}{\rho_1}; & \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial y^2} &= \frac{\rho_1^2 - y^2}{\rho_1^3}; \\ \frac{\partial \lambda}{\partial x} &= -\frac{y}{\rho_1^2}; & \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} &= \frac{2xy}{\rho_1^4}; \\ \frac{\partial \lambda}{\partial y} &= \frac{x}{\rho_1^2}; & \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y^2} &= \frac{2xy}{\rho_1^4}.\end{aligned}$$

Подставив эти значения производных в равенства для $\partial^2 V / \partial x^2$ и $\partial^2 V / \partial y^2$ и сложив их, после небольших преобразований найдем

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 V}{\partial \rho_1^2} \left(\frac{x^2}{\rho_1^2} + \frac{y^2}{\rho_1^2} \right) + \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2} \left(\frac{y^2}{\rho_1^4} + \frac{x^2}{\rho_1^4} \right) + \\ &+ \frac{\partial V}{\partial \rho_1} \left(\frac{\rho_1^2 - x^2}{\rho_1^3} + \frac{\rho_1^2 - y^2}{\rho_1^3} \right) = \\ &= \frac{\partial^2 V}{\partial \rho_1^2} + \frac{1}{\rho_1^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial V}{\partial \rho_1}.\end{aligned}\quad (\text{III.23})$$

Рассмотрим теперь функции

$$z = \rho \cos \theta, \quad \rho_1 = \rho \sin \theta. \quad (\text{III.24})$$

При сравнении их с выражениями x и y из (III.20) видно, что они полностью идентичны друг другу, если в правой части (III.20) заменить ρ_1 на ρ и λ на θ . Поэтому для вторых производных этих функций по аналогии с равенством (III.23) напишем

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \rho_1^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \rho}.$$

Определив отсюда производную $\partial^2 V / \partial z^2$ и прибавив ее к сумме двух других вторых производных, выраженных формулой (III.23), найдем

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} &= \frac{1}{\rho_1^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial V}{\partial \rho_1} + \frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \\ &+ \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \rho}.\end{aligned}\quad (\text{III.25})$$

В этом равенстве необходимо от ρ_1 и $\partial V / \partial \rho_1$ перейти к переменным ρ и θ . С этой целью, зная, что потенциал притяжения V является функцией от ρ_1 , и ρ_1 зависит от ρ и θ , по правилу

дифференцирования сложной функции найдем

$$\frac{\partial V}{\partial \rho_1} = \frac{\partial V}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial \rho_1} + \frac{\partial V}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \rho_1}.$$

Кроме того, из (III.23) видно, что

$$\rho^2 = \rho_1^2 + z^2; \quad \theta = \arctg(\rho_1/z).$$

Отсюда с учетом (III.24)

$$\frac{\partial \rho}{\partial \rho_1} = \frac{\rho_1}{\rho} = \sin \theta; \quad \frac{\partial \theta}{\partial \rho_1} = \frac{z}{\rho^2} = \frac{1}{\rho} \cos \theta.$$

Подставив найденные значения производных в равенство для производной $\partial V / \partial \rho_1$, получим

$$\frac{\partial V}{\partial \rho_1} = \frac{\partial V}{\partial \rho} \sin \theta + \frac{\partial V}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{\rho}.$$

Разделив обе части этого равенства на $\rho_1 = \rho \sin \theta$, получим

$$\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial V}{\partial \rho_1} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{\rho^2} \frac{\partial V}{\partial \theta}.$$

Подставив это выражение в (III.25) и заменив в нем ρ_1^2 на $\rho_1^2 = \rho^2 \sin^2 \theta$, найдем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \\ &+ \frac{\operatorname{ctg} \theta}{\rho^2} \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2} = 0 \end{aligned}$$

или после небольших преобразований

$$\Delta V = \frac{1}{\rho^2} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2} \right] = 0.$$

Отсюда окончательно

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2} = 0. \quad (\text{III.26})$$

Это выражение и определяет уравнение Лапласа в сферических координатах. Решение этого уравнения приводит, как увидим в дальнейшем, к сферическим функциям, применяемым при представлении гравитационного и магнитного потенциалов в виде рядов сферических функций.

Таким образом, решение уравнения Лапласа, выраженного в цилиндрических координатах, приводит к функциям Бесселя и к рядам бесселевых функций, в сферических координатах — к сферическим функциям и к их рядам.

Уравнение Лапласа в криволинейных ортогональных координатах

Ввиду большого значения уравнения Лапласа в теории потенциала необходимо показать, как можно выразить его в общем виде и в криволинейных координатах. Пользуясь получаемым выражением, можно предложить и другой путь записи уравнения Лапласа в цилиндрических и сферических координатах. Такой путь, связанный с применением криволинейных координат, имеет и самостоятельное значение.

Уравнение Лапласа можно выразить в криволинейных координатах с помощью полученного в гл. I выражения дивергенции поля в криволинейных ортогональных координатах. Воспользуемся этим равенством:

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial (H_2 H_3 a_1)}{\partial t_1} + \frac{\partial (H_1 H_3 a_2)}{\partial t_2} + \frac{\partial (H_1 H_2 a_3)}{\partial t_3} \right],$$

где H — коэффициент Ламе:

$$H_1 = \frac{\partial l}{\partial t_1}, \quad H_2 = \frac{\partial l}{\partial t_2}, \quad H_3 = \frac{\partial l}{\partial t_3};$$

∂l — элемент дуги.

Для потенциального поля $\vec{a} = \operatorname{grad} V$; $|\vec{a}| = \frac{\partial V}{\partial n}$; $\vec{n}$ — нормаль. Поэтому

$$a_1 = \frac{\partial a}{\partial t_1} = \frac{\partial a}{\partial t_1} \frac{\partial t_1}{\partial l} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial V}{\partial t_1}.$$

Аналогично получим

$$a_2 = \frac{1}{H_2} \frac{\partial V}{\partial t_2}, \quad a_3 = \frac{1}{H_3} \frac{\partial V}{\partial t_3}.$$

Подставляя эти значения проекций вектора $\vec{a}$ в формулу для $\operatorname{div} a$, найдем

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial t_1} \left(\frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial V}{\partial t_1} \right) + \frac{\partial}{\partial t_2} \left(\frac{H_1 H_3}{H_2} \frac{\partial V}{\partial t_2} \right) + \frac{\partial}{\partial t_3} \left(\frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial V}{\partial t_3} \right) \right].$$

Уравнения Лапласа получим, приравнявая это выражение к нулю:

$$\operatorname{div} \vec{a} = \operatorname{div} \operatorname{grad} V = \Delta V = 0,$$

т. е.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t_1} \left(\frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial V}{\partial t_1} \right) + \frac{\partial}{\partial t_2} \left(\frac{H_1 H_3}{H_2} \frac{\partial V}{\partial t_2} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial t_3} \left(\frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial V}{\partial t_3} \right) = 0. \end{aligned} \quad (\text{III.27})$$

Коэффициенты H в декартовых координатах можно определить из равенств

$$H_1^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial t_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t_1} \right)^2;$$

$$H_2^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial t_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t_2} \right)^2;$$

$$H_3^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial t_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t_3} \right)^2.$$

Формула (III.27) выражает уравнение Лапласа в криволинейных ортогональных координатах. Рассмотрим его частные случаи.

а. Декартовая система координат. Для нее $t_1 = x$, $t_2 = y$, $t_3 = z$ и, как видно из приведенных равенств, $H_1 = H_2 = H_3 = 1$.

При этих значениях получим наиболее применяемую форму уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

б. Сферическая система координат. Для данной системы

$$t_1 = r; \quad t_2 = \theta; \quad t_3 = \varphi;$$

$$x = r \sin \theta \cos \varphi; \quad y = r \sin \theta \sin \varphi;$$

$$z = r \cos \theta.$$

Пользуясь последними тремя равенствами, выражающими декартовые координаты через сферические, получим

$$H_1^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r} \right)^2 = (\sin \theta \cos \varphi)^2 +$$

$$+ (\sin \theta \sin \varphi)^2 + \cos^2 \theta = 1;$$

$$H_2^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta} \right)^2 = (r \cos \theta \cos \varphi)^2 +$$

$$+ (r \cos \theta \sin \varphi)^2 + (-r \sin \theta)^2 = r^2.$$

Аналогично

$$H_3^2 = (-r \sin \theta \sin \varphi)^2 + (r \sin \theta \cos \varphi)^2 = r^2 \sin^2 \theta.$$

При этих значениях коэффициентов Ламе H_1 , H_2 и H_3 для сферической системы координат из (III.27) получим

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin \theta \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right) = 0.$$

Отсюда окончательно

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (\text{III.28})$$

Эта формула и выражает уравнение Лапласа в сферических координатах.

в. Цилиндрическая система координат. В данном случае

$$t_1 = \rho; \quad t_2 = \varphi; \quad t_3 = z;$$

$$x = \rho \cos \varphi; \quad y = \rho \sin \varphi; \quad z = z.$$

С использованием этих равенств для определения коэффициентов H получим вспомогательные выражения:

$$\partial x / \partial \rho = \cos \varphi; \quad \partial y / \partial \rho = \sin \varphi; \quad \partial z / \partial \rho = 0;$$

$$\partial x / \partial \varphi = -\rho \sin \varphi; \quad \partial y / \partial \varphi = \rho \cos \varphi; \quad \partial z / \partial \varphi = 0;$$

$$\partial x / \partial z = 0; \quad \partial y / \partial z = 0; \quad \partial z / \partial z = 1.$$

Тогда, согласно приведенным выше формулам для определения коэффициентов H , найдем

$$H_1^2 = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1; \quad H_1 = 1;$$

$$H_2^2 = (-\rho \sin \varphi)^2 + (\rho \cos \varphi)^2 = \rho^2; \quad H_2 = \rho; \quad H_3 = 1.$$

Поэтому из (III.27) получим формулу, выражающую уравнение Лапласа в цилиндрических координатах:

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho \frac{\partial V}{\partial z} \right) = 0$$

или окончательно

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \rho \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0. \quad (\text{III.29})$$

При решении плоской задачи в полярных координатах ρ и φ получим

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0.$$

§ 19. ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ГРИНА

Рассмотрим некоторые преобразования, введенные Грином, без которых невозможно обойтись при решении основных задач в теории потенциала.

Две формулы Грина и следствия из них

Пусть имеются две конечные и непрерывные функции координат U и V , заданные в некоторой ограниченной области пространства v , имеющие внутри этого объема конечные и непрерывные первые производные и конечные вторые производные, допускающие интегрирование.

Возьмем вектор квазипотенциального поля $\vec{F} = U \text{ grad } V$ и применим к нему формулу Остроградского (III.1)

$$\int_v \text{div } \vec{F} dv = \int_S \text{пр}_n^{\vec{F}} dS.$$

Определим подынтегральные функции правой и левой частей

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{F} &= \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = U \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} + U \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \\ &+ \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} + U \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial z} = \\ &= U \Delta V + (\text{grad } U \cdot \text{grad } V). \end{aligned}$$

Здесь в скобках дано скалярное произведение двух векторов $\text{grad } U$ и $\text{grad } V$.

Проекция на нормаль $\vec{n}$

$$\text{пр}_n^{\vec{F}} = \text{пр}_n^{\vec{F}} (U \text{ grad } V) = U \text{пр}_n^{\text{grad } V} = U (\partial V / \partial n).$$

Поэтому для вектора рассматриваемого квазипотенциального поля формулу Остроградского можно переписать:

$$\int_v [U \Delta V + (\text{grad } U \cdot \text{grad } V)] dv = \int_S U (\partial V / \partial n) dS.$$

Эта формула является предварительной, или первой, формулой Грина.

Рассмотрим частный случай этой формулы.

Пусть в предварительной формуле Грина $U = V$. Тогда, учитывая, что

$$(\text{grad } U \cdot \text{grad } V) = (\text{grad } U \cdot \text{grad } U) = \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2,$$

получим

$$\int_v U \Delta U dv + \int_v \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \right] dv = \int_S U (\partial U / \partial n) dS,$$

или

$$\int_v \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \right] dv = \int_S U \frac{\partial U}{\partial n} dS - \int_v U \Delta U dv. \quad (\text{III.30})$$

Этот интеграл называется интегралом Дирихле. Обозначим левую часть этой формулы через I :

$$I = \int_v [(\partial U / \partial x)^2 + (\partial U / \partial y)^2 + (\partial U / \partial z)^2] dv.$$

Эта функция не может принимать отрицательные значения, т. е. всегда $I \geq 0$. Поэтому из правой части полученной формулы видно, что

$$\int_S U (\partial U / \partial n) dS \geq \int_v U \Delta U dv.$$

Знак равенства может иметь место только тогда, когда $I=0$, т. е. равны нулю все производные первого порядка от функции U : $\partial U / \partial x = \partial U / \partial y = \partial U / \partial z = 0$, что верно только для постоянной функции U .

Перепишем интеграл Дирихле в более удобном виде через длину вектора градиента поля. Так как

$$\text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k},$$

то

$$|\text{grad } U|^2 = \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2.$$

Тогда

$$\int_v |\text{grad } U|^2 dv = \int_S U \frac{\partial U}{\partial n} dS - \int_v U \Delta U dv.$$

Для гравитационного потенциала на основании уравнения Пуассона $\Delta U = -4\pi G\sigma$. Поэтому

$$\int_v |\text{grad } U|^2 dv = \int_S U \frac{\partial U}{\partial n} dS + 4\pi G \int_v \sigma U dv.$$

При $\sigma=0$, т. е. для точек вне масс, или для гармонической функции U ,

$$\int_v |\text{grad } U|^2 dv = \int_S U (\partial U / \partial n) dS.$$

Вернемся теперь к предварительной формуле Грина. Левая ее часть не меняется от перестановки функций U и V . Поэтому, меняя местами U и V (т. е. для другого квазипотенциального поля $\vec{F} = V \text{ grad } U$), получим

$$\int_v [V \Delta U + (\text{grad } U \cdot \text{grad } V)] dv = \int_S V (\partial U / \partial n) dS.$$

Из этих равенств, вычитая из первого второе, окончательно получим

$$\int_v (U \Delta V - V \Delta U) dv = \int_S \left(U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n} \right) dS. \quad (\text{III.31})$$

Эта формула является второй формулой Грина. Если в ней вместо внешней нормали использовать внутреннюю, то в (III.31) изменится знак правой части. В частном случае при $U=1$

$$\int_v \Delta V dv = \int_S (\partial V / \partial n) dS. \quad (\text{III.32})$$

Рассмотрим несколько следствий из (III.32).

1. Пусть V — потенциал притяжения объемных масс. Тогда для точек области v , в которых находятся массы, согласно уравнению Пуассона

$$\Delta V = -4\pi G\sigma.$$

Подставляя это значение ΔV в (III.32), найдем

$$4\pi Gm = - \int_S (\partial V / \partial n) dS,$$

где учтено, что

$$m = \int_v \sigma dv.$$

Таким образом, если суммировать по всей поверхности S тела значения силы притяжения $-\partial V / \partial n = g$, можно определить массу тела

$$m = \frac{1}{4\pi G} \int_S g dS.$$

2. Пусть $\Delta V = 0$, т. е. функция V — гармоническая, что справедливо для потенциала притяжения в точках пространства вне

масс. Тогда из (III.32) получим

$$\int_S (\partial V / \partial n) dS = 0, \quad (\text{III.33})$$

т. е. интеграл от нормальной производной гармонической функции по замкнутой поверхности S равен нулю.

Фундаментальная формула Грина

Фундаментальная формула Грина получается из его второй формулы при значениях функции U или V , равных $1/r$, где r — расстояние от элементов объема и поверхности dv и dS до точки P , в которой рассматривается функция U . Примем $V = 1/r$. Подставив в первую формулу Грина вместо V функцию $1/r$, найдем

$$\int_v \left[U \Delta \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \Delta U \right] dv = \int_S \left[U \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} \right] dS. \quad (\text{III.34})$$

Рассмотрим три случая полученного равенства ($P \in v_1$, $P \in v$, $P \in S$).

1. Точка P лежит вне поверхности S в области v_1 . В этом случае во всех внутренних точках M функция $1/r$ удовлетворяет равенству $\Delta(1/r) = 0$.

Действительно

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{r} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{x-\xi}{r^3} \right) = -\frac{1}{r^3} + 3 \frac{x-\xi}{r^4} \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r^3} + \\ &+ 3 \frac{(x-\xi)^2}{r^5}. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1}{r} \right) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{y-\eta}{r^3} \right) = -\frac{1}{r^3} + \frac{3(y-\eta)^2}{r^5}; \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{1}{r} \right) &= -\frac{1}{r^3} + \frac{3(z-\xi)^2}{r^5}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \Delta \left(\frac{1}{r} \right) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{3}{r^3} + \\ &+ 3 \frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\xi)^2}{r^5} = 0. \end{aligned}$$

Учитывая это равенство, из (III.34) при $P \in v_1$ получим

$$\int_v \frac{1}{r} \Delta U dv + \int_S \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} dS - \int_S U \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS = 0. \quad (\text{III.35})$$

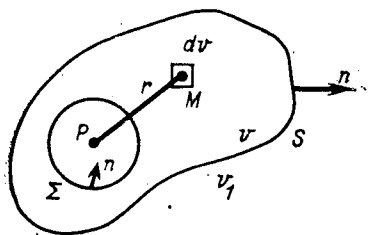


Рис. 42. Расположение точек M и P при выводе фундаментальной формулы Грина для случая внутренней точки

2. Точка P лежит внутри области v (рис. 42, внутри S). В этом случае, т. е. когда $P \in v$, формулу Грина нельзя применять ко всей области v , так как в точке M , когда она совпадает с точкой P , функция $1/r$ терпит разрыв. Поэтому окружим точку P некоторой сферой Σ . В этом случае вне поверхности Σ в области v снова можно применять формулу Грина. Применяя ее, получим

$$\int_{v_2} \frac{1}{r} \Delta U dv = \int_S U \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS - \int_S \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} dS + \int_{\Sigma} U \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS - \int_{\Sigma} \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} dS, \quad (\text{III.36})$$

где v_2 — область v , за исключением ее части, ограниченной поверхностью Σ (поверхностные интегралы берутся сразу под двум поверхностям S и Σ , соответствующим области v_2 , причем нормаль по отношению к области v_2 внешняя).

Найдем предел выражения (III.36) при бесконечном сжатии поверхности Σ , т. е. в пределе, когда поверхность Σ стягивается к точке P (при $\Sigma \rightarrow 0$). В этом случае интеграл по объему v_2 будет стремиться к интегралу по объему v :

$$\lim_{\Sigma \rightarrow 0} \int_{v_2} \frac{1}{r} \Delta U dv = \int_v \frac{1}{r} \Delta U dv.$$

Рассмотрим значения последних двух интегралов (III.36):

$$\int_{\Sigma} U \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS - \int_{\Sigma} \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} dS = - \int_{\Sigma} U \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) dS + \int_{\Sigma} \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} dS.$$

Здесь внешняя нормаль по отношению к объему v_2 для поверхности Σ является внутренней, поэтому при интегрировании по поверхности Σ

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) = - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right); \quad \frac{\partial U}{\partial n} = - \frac{\partial U}{\partial r}.$$

В пределе первый интеграл

$$\begin{aligned} \lim_{\Sigma \rightarrow 0} \left[- \int_{\Sigma} U \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) dS \right] &= \lim_{\Sigma \rightarrow 0} \int_{\Sigma} \frac{U}{r^2} dS = \lim_{\Sigma \rightarrow 0} \frac{U}{r^2} \int_{\Sigma} dS = \\ &= \lim_{\Sigma \rightarrow 0} U \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi U(P). \end{aligned}$$

Здесь интегрирование проводится по поверхности Σ при бесконечно малом, но постоянном радиусе сферы r (при интегрировании по поверхности Σ r — расстояние от элемента поверхности до точки P), и значение функции U в пределе становится равным ее значению в точке P (в точке P и в ее окрестностях U можно принять за постоянную величину).

Второй рассматриваемый интеграл формулы (III.36)

$$\lim_{\Sigma \rightarrow 0} \int_{\Sigma} \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} dS \rightarrow 0,$$

так как первая производная $\partial U / \partial r$ по условию — конечная величина, элемент поверхности dS пропорционален r^2 , величина $(1/r)dS$ пропорциональна r , а условие $\Sigma \rightarrow 0$ равносильно условию $r \rightarrow 0$.

Подставляя найденные значения рассмотренных в пределе трех интегралов в (III.36), получим

$$\begin{aligned} - \int_v \frac{1}{r} \Delta U dv + \int_S \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} dS - \int_S U \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS = \\ = 4\pi U(P). \end{aligned} \quad (\text{III.37})$$

3. Точка P лежит на поверхности S ($P \in S$). В этом случае, рассуждая так же, как и выше, получим соотношение, аналогичное (III.37), только в его правой части будет величина $2\pi U(P)$. Это связано с тем, что когда точка находится на поверхности S ,

$$\lim_{\Sigma \rightarrow 0} \int_{\Sigma} (U/r^2) dS = 2\pi U(P), \quad (\text{III.38})$$

так как интеграл берется по полусфере.

Объединив все три рассмотренных случая, окончательно получим

$$\begin{aligned} - \int_v \frac{1}{r} \Delta U dv + \int_S \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} dS - \\ - \int_S U \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS = \begin{cases} 0, & P \in v, \\ 2\pi U(P), & P \in S, \\ 4\pi U(P), & P \in v. \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{III.39})$$

Эта формула называется фундаментальной формулой Грина. Первая строка этой формулы позволяет определять значение потенциала U в точках области v_1 , внешней по отношению к v . Вторая строка дает значение потенциала в точках P на поверхности S , и третья — определяет выражение потенциала U в любой внутренней точке P области v .

В фундаментальной формуле Грина интеграл [обозначим его $U_1(P)$]

$$\int_v \frac{1}{r} \Delta U dv = U_1(P)$$

является потенциалом притяжения объемных масс, если их плотность в каждой точке M объема v равна $\Delta U(M)$; интеграл

$$\int_S \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} dS = U_2(P)$$

есть потенциал притяжения простого слоя, если величина $\partial U / \partial n$ равна плотности распределения масс на поверхности S (поверхностная плотность).

Интеграл

$$\int_S U \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS = U_3(P)$$

является потенциалом притяжения двойного слоя, величина момента которого в каждой точке M на поверхности S равна U .

Таким образом, в левой части фундаментальной формулы Грина находится сумма потенциалов притяжения трех видов — объемных масс, простого слоя и двойного слоя:

$$-U_1(P) + U_2(P) - U_3(P) = \begin{cases} 0, & P \in v_1, \\ 2\pi U(P), & P \in S, \\ 4\pi U(P), & P \in v. \end{cases} \quad (\text{III.40})$$

Если функция U гармоническая, т. е. $\Delta U = 0$, формулу (III.39) можно переписать:

$$\int_S \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} dS - \int_S U \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS = \begin{cases} 0, & P \in v_1, \\ 2\pi U(P), & P \in S, \\ 4\pi U(P), & P \in v. \end{cases} \quad (\text{III.41})$$

Приведем еще одно соотношение, полученное из (III.39) при $U = 1$:

$$\int_S \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS = \begin{cases} 0, & P \in v_1, \\ -2\pi, & P \in S, \\ -4\pi, & P \in v. \end{cases} \quad (\text{III.42})$$

В левой части этого равенства находится интеграл от нормальной производной функции $1/r$ по замкнутой поверхности. В зависимости от того, где находится точка P , он равен 0, -2π и -4π . Формула (III.42) является формулой Гаусса. Подынтегральное выражение этой формулы имеет, как было показано выше, простое геометрическое значение. Оно определяет величину элементарного телесного угла, или угла видимости, элемента поверхности dS из точки P . Поэтому (III.42) определяет полный телесный угол, или угол видимости, и является интегральной формой записи этого угла.

Запишем полученные формулы для случая гравитационного потенциала, когда на основании уравнения Пуассона внутри масс, т. е. для точек области v , ограниченной поверхностью S ,

$$\Delta U = -4\pi G\sigma.$$

Тогда интеграл

$$\int_v \frac{1}{r} \Delta U dv = -4\pi G \int_v \frac{\sigma}{r} dv = -4\pi U(P),$$

так как функция

$$G \int_v \sigma \frac{1}{r} dv = U(P)$$

есть потенциал притяжения объемных масс для внешней точки P .

Подставив полученное значение объемного интеграла в (III.39), найдем

$$\int_S \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} dS - \int_S U \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS = \begin{cases} -4\pi U(P), & P \in v_1, \\ -2\pi U(P), & P \in S, \\ 0, & P \in v. \end{cases} \quad (\text{III.43})$$

Из этой формулы выделим наиболее важный для практики случай, когда точка P находится в области v_1 вне поверхности S : функцию $U(P)$ можно определить из равенства

$$U(P) = -\frac{1}{4\pi} \int_S \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} dS + \int_S U \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS, \quad P \in v_1. \quad (\text{III.44})$$

Рассмотрим частный случай этой формулы, когда поверхность S является уровнем поверхности потенциала U . В точках такой поверхности функция U — постоянная величина. Тогда

$$\int_S U \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS = U \int_S \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS = 0,$$

так как точка P — внешняя для этой поверхности, а для внешней точки P интеграл Гаусса, определяющий угол видимости замкнутой поверхности S , как было показано выше, равен нулю. Поэтому

$$U(P) = -\frac{1}{4\pi} \int_S \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} dS.$$

Отсюда видно, что значения потенциала можно определить во всех точках внешнего пространства, если заданы форма поверхности и на ней значения нормальной производной потенциала. Интеграл в правой части этой формулы имеет вид потенциала притяжения простого слоя. Поэтому его можно приравнять к потенциалу притяжения этого вида, если брать плотность распределения масс на поверхности уровня равной

$$\mu = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial U}{\partial n}.$$

Полная масса такого слоя

$$\int_S \mu dS = -\frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\partial U}{\partial n} dS = M.$$

В силу первого следствия из формулы Грина (III.32) эта масса равна всей массе M , заключенной внутри урванной поверхности S . Отсюда следует, что если всю эту массу M вынести на поверхность и распределить там в виде простого слоя с плотностью $\mu = -(1/4\pi) (\partial U / \partial n)$, потенциал такого слоя во всех точках P внешнего пространства будет иметь такие же значения, что и потенциал первоначального распределения масс. Иными словами, полученный таким образом слой полностью эквивалентен первоначальному распределению масс, поэтому он называется эквивалентным урванным слоем. Но такое распределение масс не оказывает никакого воздействия на внутреннюю точку поверхности.

В формуле (III.43) значение потенциала в разных областях описывается разными уравнениями, что вызывает определенные трудности в ее применении. Эти трудности можно обойти, если (III.44) преобразовать таким образом, чтобы она одна описала потенциал поля в точках вне и на поверхности S . Такое преобразование (III.44) существует (преобразование по М. С. Молоденскому), рассмотрим его ниже.

Так как в указанных выше формулах при переходе через поверхность S значения потенциалов меняются скачками, для того, чтобы (III.44) описала потенциал и на и вне поверхности S , необходимо ввести в рассмотрение разрывную функцию

$$I = -\frac{1}{4\pi} \int_S U_0 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS.$$

Здесь U_0 — потенциал на поверхности S . Эта функция вне поверхности S равна нулю (как интеграл Гаусса для точек внешнего пространства), на поверхности S равна $U_0/2$ (интеграл Гаусса равен -2π).

Для получения указанного преобразования в правую часть (III.44) добавим функцию I :

$$U(P) = -\frac{1}{4\pi} \int_S \left[\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} - (U - U_0) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right] dS. \quad (\text{III.45})$$

Эта функция удовлетворяет случаям, когда точка P находится вне S и на поверхности S . В самом деле, когда точка P находится вне S ,

$$I = -\frac{1}{4\pi} \int_S U_0 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS = 0$$

и формула (III.45) будет совпадать с (III.44). Когда же точка P расположена на S ,

$$U(P) = -\frac{1}{4\pi} \int_S \left[\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right] dS + \frac{U_0}{2}.$$

Определив U_0 из равенства (III.43) и подставив ее в последнее равенство, найдем

$$U(P) = -\frac{1}{2\pi} \int_S \left[\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right] dS,$$

т. е. получим ту же формулу, которая и соответствует в равенстве (III.43) точкам поверхности S .

Распространим основные из полученных формул и на случаи плоских полей. Из-за наличия полной аналогии в приемах получения формул с примененными выше, выводы формул опустим.

Аналог второй основной формулы Грина на плоскости (III.31)

$$\int_S (U \Delta V - V \Delta U) dS = \int_l \left(U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n} \right) dl. \quad (\text{III.46})$$

Здесь S — некоторая область на плоскости; l — контур области; n — направление нормали к этому контуру (внешней по отношению к S), а оператор Лапласа имеет вид

$$\Delta U = \partial^2 U / \partial x^2 + \partial^2 U / \partial z^2.$$

Фундаментальная формула Грина (III.39) для случая плоских полей с учетом выражения логарифмического потенциала

примет вид

$$\begin{aligned}
 & - \int_S \Delta U \ln \frac{1}{r} dS + \int_l \frac{\partial U}{\partial n} \ln \frac{1}{r} dl - \int_l U \frac{\partial}{\partial n} \left[\ln \left(\frac{1}{r} \right) \right] dl = \\
 & = \begin{cases} 0, & P \in v_1, \\ \pi U(P), & P \in l, \\ 2\pi U(P), & P \in v. \end{cases} \quad (\text{III.47})
 \end{aligned}$$

Здесь, так же как и в формуле (III.39), левая часть равенства состоит из потенциалов притяжения трех видов: интеграл

$$\int_S \Delta U \ln (1/r) dS = U_1(P)$$

является логарифмическим потенциалом притяжения объемных двухмерных масс, если плотность распределения масс в каждой точке M сечения тела S равна $\Delta U(M)/2$; интеграл

$$\int_l \frac{\partial U}{\partial n} \ln \frac{1}{r} dl = U_2(P)$$

представляет собой потенциал притяжения плоского простого слоя, если поверхностная плотность распределения масс равна $(1/2)\partial U/\partial n$; интеграл

$$\int_l U \frac{\partial}{\partial n} \left(\ln \frac{1}{r} \right) dl = U_3(P)$$

является потенциалом притяжения плоского двойного слоя, если $0,5 U$ равно величине его момента. Таким образом, в данном случае в левой части фундаментальной формулы Грина для плоских полей находится сумма логарифмических потенциалов притяжения трех видов, а именно, объемных двухмерных масс и плоских простого и двойного слоев:

$$-U_1(P) + U_2(P) - U_3(P) = \begin{cases} 0, & P \in v_1, \\ \pi U(P), & P \in l, \\ 2\pi U(P), & P \in v. \end{cases}$$

Рассмотрим частные случаи второй и фундаментальной формулы Грина. Пусть функция $V=1$. Тогда из (III.46) получим

$$\int_S \Delta U dS = \int_l (\partial U/\partial n) dl. \quad (\text{III.48})$$

Предположим, что U — потенциал притяжения двухмерных объемных масс. Тогда внутри масс $\Delta U = -4\pi G\sigma$. Поэтому из

(III.48) найдем

$$4\pi G\lambda = - \int_l (\partial U / \partial n) dl.$$

На основании этой формулы, если просуммировать по контуру сечения S значения силы притяжения $g = -\partial U / \partial n$, можно определить массу единицы длины двумерного тела:

$$\lambda = \int_S \sigma dS = \frac{1}{4\pi G} \int_l g dl.$$

Для точек поля вне контура l функция U гармоническая, т. е. $\Delta U = 0$. Поэтому из (III.48) получим

$$\int_l (\partial U / \partial n) dl = 0,$$

т. е. интеграл от нормальной производной гармонической функции по замкнутому контуру l всегда равен нулю.

Рассмотрим частные случаи фундаментальной формулы Грина для плоского поля. Пусть заданная в плоскости xOz функция U гармоническая, т. е. $\Delta U = 0$.

Из (III.47) найдем

$$\int_l \frac{\partial U}{\partial n} \ln \frac{1}{r} dl - \int_l U \frac{\partial}{\partial n} \left(\ln \frac{1}{r} \right) dl = \begin{cases} 0, & P \in v_1, \\ \pi U(P), & P \in l, \\ 2\pi U(P), & P \in v. \end{cases}$$

Пусть также функция $U = 1$. Тогда

$$\int_l \frac{\partial}{\partial n} \left(\ln \frac{1}{r} \right) dl = \begin{cases} 0, & P \in v_1, \\ -\pi, & P \in l, \\ -2\pi, & P \in v. \end{cases}$$

Как было показано в гл. II, интеграл в левой части этого равенства, взятый с обратным знаком, определяет плоский угол видимости из точки P контура l . Поэтому полученная формула дает полную величину этого угла в зависимости от того, где находится точка P — вне контура l , на нем или внутри него.

Рассмотрим фундаментальную формулу Грина для двумерного поля в точках, занятых гравитационными массами. Примем в (III.47) $\Delta U = -4\pi G\sigma$. Тогда с учетом равенства (II.37) для точек сечения S получим

$$\int_S \Delta U \ln \frac{1}{r} dS = -4\pi G \int_S \sigma \ln \frac{1}{r} dS = -2\pi U(P).$$

Подставляя это значение интеграла по площади в (III.47), найдем

$$\int_l \frac{\partial U}{\partial n} \ln \frac{1}{r} dl - \int_l U \frac{\partial}{\partial n} \left(\ln \frac{1}{r} \right) dl =$$

$$= \begin{cases} -2\pi U(P), & P \in v_1, \\ -\pi U(P), & P \in l, \\ 0, & P \in v. \end{cases}$$

В заключение в качестве примера применения второй основной формулы Грина рассмотрим вопрос определения гармонических моментов.

Определение гармонических моментов

Гармонические моменты, определяемые однозначно из данных исходных полей (например, масса, координаты центра тяжести тел), имеют важное значение при интерпретации аномалий. Их можно найти из равенства

$$L_k = \int_v \sigma(\xi, \eta, \zeta) E(\xi, \eta, \zeta) dv,$$

где k — порядок момента; E — гармонический полином или шаровые функции Лапласа (см. гл. VI). Гармонический момент нулевого порядка определяется при $E=1$:

$$L_0 = \int_v \sigma(\xi, \eta, \zeta) dv = m.$$

Если же E принимает значения ξ, η, ζ , получим три гармонических момента первого порядка. Они равны произведениям координат центра тяжести тела на величину его полной массы m или L_0 :

$$\int_v \sigma(\xi, \eta, \zeta) \xi dv = \xi_0 m.$$

$$\int_v \sigma(\xi, \eta, \zeta) \eta dv = \eta_0 m;$$

$$\int_v \sigma(\xi, \eta, \zeta) \zeta dv = \zeta_0 m;$$

Гармонические моменты тела легко определяются из второй формулы Грина. Применим ее к двум функциям V — потенциалу силы притяжения и E :

$$\int_v (E \Delta V - V \Delta E) dv = \int_S \left(E \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial E}{\partial n} \right) dS.$$

Любой гармонический полином является гармонической функцией, поэтому $\Delta E = 0$. Предположим, что внутри объема v находятся массы, распределенные с плотностью σ . Тогда в точ-

ках этой области $\Delta V = -4\pi G\sigma$. Поэтому

$$-4\pi G \int_v \sigma E dv = \int_S (E \partial v / \partial n - V \partial E / \partial n) = dS.$$

Область v выберем в виде вертикального кругового цилиндра конечной высоты. Обозначим боковую его поверхность S_1 . В качестве верхнего основания примем поверхность земли или плоскость наблюдений S_{Σ_1} , за нижнее основание примем некоторую горизонтальную плоскость S_{Σ_2} , проходящую заведомо ниже аномальных масс. Тогда

$$\begin{aligned} 4\pi G \int_v \sigma E dv &= \int_{S_1} \left(V \frac{\partial E}{\partial n} - E \frac{\partial V}{\partial n} \right) dS + \\ &+ \int_{S_{\Sigma_1}} \left(V \frac{\partial E}{\partial n} - E \frac{\partial V}{\partial n} \right) dS + \int_{S_{\Sigma_2}} \left(V \frac{\partial E}{\partial n} - E \frac{\partial V}{\partial n} \right) dS. \end{aligned}$$

Из поверхности объема v горизонтальную бесконечную плоскость, или поверхность наблюдений, получим в случае, когда радиус цилиндра R будет бесконечно возрастать. Рассмотрим именно этот случай.

Можно показать, что в пределе, когда $R \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned} \int_{S_1} \left(V \frac{\partial E}{\partial n} - E \frac{\partial V}{\partial n} \right) dS &= 0; \int_{S_{\Sigma_1}} \left(V \frac{\partial E}{\partial n} - E \frac{\partial V}{\partial n} \right) dS = \\ &= \int_{S_{\Sigma_2}} \left(V \frac{\partial E}{\partial n} - E \frac{\partial V}{\partial n} \right) dS. \end{aligned}$$

Поэтому окончательно получим

$$4\pi G \int_v \sigma E dv = 2 \int_{S_{\Sigma_1}} \left(V \frac{\partial E}{\partial n} - E \frac{\partial V}{\partial n} \right) dS.$$

Здесь V и $\partial V / \partial n$ — значения соответственно потенциала и вертикальной составляющей силы притяжения. Рассмотрим два частных случая этой формулы.

1. Предположим, что $E=1$. Тогда

$$4\pi G \int_v \sigma dv = 4\pi G \int_v \sigma dv = 4\pi Gm;$$

$$\int_{S_{\Sigma_1}} \left(V \frac{\partial E}{\partial n} - E \frac{\partial V}{\partial n} \right) dS = - \int_{S_{\Sigma_1}} \frac{\partial V}{\partial n} dS = \int_{S_{\Sigma_1}} V_z dS,$$

где $\partial V / \partial n = -V_z$. Поэтому

$$m = \frac{1}{2\pi G} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} V_z dS.$$

Здесь интеграл численно равен объему, заключенному между поверхностью значений функции V_z и плоскостью xOy .

2. Пусть $E=\xi$. Тогда

$$4\pi G \int_v \sigma \xi dv = -2 \int_{S_{\Sigma_1}} \xi \frac{\partial V}{\partial n} dS = 2 \int_{S_{\Sigma_1}} \xi V_z dS.$$

Так как

$$\int_v \sigma \xi dv = \xi_0 m,$$
$$4\pi G \xi_0 m = 2 \int_{S_{\Sigma_1}} \xi V_z dS.$$

Отсюда

$$\xi_0 = \frac{1}{2\pi G m} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \xi V_z(\xi, \eta, \zeta) dS.$$

Аналогично, полагая $E = \eta$, найдем

$$\eta_0 = \frac{1}{2\pi G m} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \eta V_z(\xi, \eta, \zeta) dS.$$

Из этих формул можно определить горизонтальные координаты центра тяжести аномального тела. Аналогичные формулы существуют и для двухмерного случая.

Вопросы для самоконтроля

1. Что выражает формула Остроградского — Гаусса. Как записать ее в векторной форме? Как связана формула Остроградского — Гаусса с потоком поля? Как получить определение дивергенции поля на основании формулы Остроградского — Гаусса? Как записать формулу Остроградского — Гаусса для плоского поля?

2. Что выражает формула Стокса? Как связана формула Стокса с ротором поля? Как можно записать формулу Стокса для плоского поля?

3. Какой вид имеет уравнение Пуассона? Что оно выражает? Как получить уравнение Пуассона? Какой вид имеет уравнение Пуассона для случая двухмерного, или плоского, поля?

4. Что выражает уравнение Лапласа? Как связаны гармонические функции с уравнением Лапласа? Как выразить уравнение Лапласа в цилиндрических координатах? Как связаны цилиндрические функции Бесселя с уравнением Лапласа? Как представить уравнение Лапласа в сферических координатах? Как связаны сферические функции с уравнением Лапласа? Как выразить уравнение Лапласа в криволинейных координатах?

5. Что выражает первая, или предварительная, формула Грина? Что выражает вторая, основная, формула Грина? Какой интеграл называется интегралом Дирихле? Может ли иметь интеграл Дирихле отрицательное значение? Какие два важных следствия вытекают из второй формулы Грина? Как определить массу тела, пользуясь второй формулой Грина?

6. Чему равен интеграл по замкнутой поверхности от гармонической функции? Что выражает фундаментальная формула Грина? Как связана фундаментальная формула Грина с основными потенциалами притяжения — с объемным и с потенциалами простого и двойного слоев? В каком случае из фундаментальной формулы Грина можно получить формулу Гаусса для телесного угла? Что понимается под эквивалентным урoвненным слоем?

7. Какой вид имеет фундаментальная формула Грина для случая плоского поля? С какими двухмерными потенциалами притяжения она связана?

8. Что понимается под гармоническими моментами? Что выражают гармонические моменты первого и второго порядков? Как определить гармонические моменты, пользуясь второй формулой Грина?

§ 20. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Функция U , непрерывная внутри области v вместе с ее первыми и вторыми производными и удовлетворяющая во всех точках области v уравнению Лапласа

$$\Delta U = \partial^2 U / \partial x^2 + \partial^2 U / \partial y^2 + \partial^2 U / \partial z^2 = 0,$$

называется гармонической функцией в области v . Таких функций бесконечное множество. Например, функция $1/r$ — гармоническая во всех точках области v , кроме точки, в которой r обращается в нуль. Постоянная величина, очевидно, также является гармонической функцией.

Если функция U не зависит от одной из координат, например от y , уравнение Лапласа можно записать так:

$$\partial^2 U / \partial x^2 + \partial^2 U / \partial z^2 = 0.$$

В этом случае U сохраняет одно и то же значение на любой прямой, параллельной оси y (распределение значений U в плоскостях, параллельных плоскости xOz , одно и то же, поэтому достаточно рассмотреть лишь плоскость xOz).

Остановимся на основных свойствах гармонических функций. Многие из этих свойств непосредственно следуют из формул Грина.

1. Если функция U — гармоническая в области v , а S — замкнутая поверхность некоторой другой области, принадлежащей v , то на основании равенства (III.33)

$$\int_S (\partial U / \partial n) dS = 0, \quad (IV.1)$$

т. е. интеграл от нормальной производной гармонической функции по замкнутой поверхности S равен нулю.

Справедливо и обратное утверждение: если функция U непрерывна в области v вместе со всеми своими производными до второго порядка включительно и обладает тем свойством, что равенство (IV.1) имеет место для любой из v ограниченной области с кусочно-гладкой поверхностью S , функция $U(M)$ в области v удовлетворяет уравнению Лапласа, т. е. является гармонической функцией.

Условие (IV.1) необходимо и достаточно для того, чтобы непрерывная функция $U(M)$, имеющая в области v непрерывные

частные производные до второго порядка включительно, была гармонической в этой области.

2. Это свойство следует из формулы (III.41), а именно, если функция $U(P)$ — гармоническая в некоторой ограниченной области v с поверхностью S , то ее значение в любой точке вне области, на поверхности или внутри S выражается через значения этой же функции и ее нормальной производной на поверхности:

$$\int_S \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} dS - \int_S U \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS = \begin{cases} 0, & P \in v_1, \\ 2\pi U, & P \in S, \\ 4\pi U, & P \in v, \end{cases} \quad (\text{IV.2})$$

где v_1 — область внешняя относительно S .

Так как интеграл в этой формуле, а также и в (IV.1) не содержит производных второго порядка функции U , для применения этих равенств достаточно предположить, что гармоническая функция непрерывна вместе с производными первого порядка вплоть до поверхности S .

В частном случае, когда поверхность S — сфера, равенство (IV.2), написанное для внутренней области, приводит к очень важной теореме, которая гласит: если функция U является гармонической в области v , то ее значение во всякой внутренней точке P равно интегральному среднему ее значений, взятому по поверхности S любой сферы радиусом R (с центром в точке P), лежащей целиком внутри области v . Действительно, если S — поверхность сферы, точка P — центр сферы, R — ее радиус, при интегрировании по поверхности сферы $r = R = \text{const}$. Поэтому из (IV.2) для внутренней области получим

$$\begin{aligned} 4\pi U(P) &= \int_S \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} dS - \int_S U \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS = \\ &= \frac{1}{R} \int_S \frac{\partial U}{\partial n} dS + \int_S U \frac{1}{r^2} dS = \frac{1}{R^2} \int_S U dS, \end{aligned}$$

так как первый интеграл на основании условия (IV.1) равен нулю, направление внешней нормали n совпадает с направлением радиуса сферы и

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2}.$$

Отсюда

$$U(P) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_S U dS, \quad P \in v. \quad (\text{IV.3})$$

Эта формула выражает теорему Гаусса о среднем значении гармонической функции. Из нее можно определить гармоническую функцию в центре сферы по ее значениям, заданным на поверхности сферы.

Верна и теорема, обратная теореме Гаусса: если функция $U(M)$, непрерывная вместе с ее первыми и вторыми произведениями в области v , удовлетворяет во всех точках этой области теореме Гаусса о среднем, то она является гармонической в области v .

Совершенно аналогичны свойства гармонической функции на плоскости [5]. В данном случае вместо (IV.2) будем иметь формулу

$$\int_l \ln\left(\frac{1}{r}\right) \frac{\partial U}{\partial n} dl - \int_l U \frac{\partial}{\partial n} \left(\ln \frac{1}{r}\right) dl = \begin{cases} 0, & P \in v_1, \\ \pi U, & P \in l, \\ 2\pi U, & P \in v, \end{cases} \quad (\text{IV.4})$$

где l — контур, ограничивающий область на плоскости, в которой задана гармоническая функция U . А теорема о среднем будет выражаться в виде

$$U(P) = \frac{1}{2\pi R} \int_l U dl, \quad P \in v,$$

где R — радиус окружности; l — длина окружности (интегрирование проводится по длине окружности); в правой части формулы находится среднее значение аномалии на окружности.

В полярных координатах

$$U(P) = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi} U(R, \varphi) d\varphi. \quad (\text{IV.5})$$

Теорема Гаусса о среднем значении гармонической функции широко применяется при решении различных задач теории потенциала, в частности и при определении аналитически продолженных значений гравитационной или магнитной аномалии. С этой целью на поверхности сферы берутся шесть точек и среднее по поверхности сферы определяется как среднее по этим шести точкам.

Пусть радиус сферы R , а плоскость ее экватора совпадает с плоскостью наблюдений. На поверхности сферы возьмем шесть точек: четыре на экваторе (рис. 43, точки 1—4) и две на полю-

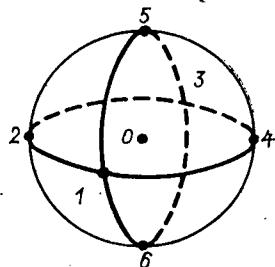


Рис. 43. Схема расположения точек 1—6 на сфере радиусом R

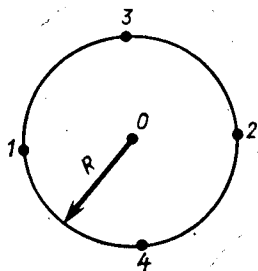


Рис. 44. Схема расположения точек 1—4 на окружности радиусом R

сах — (точки 5 и 6). Тогда по теореме Гаусса значение аномалии в центре сферы

$$U(0) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_S U dS \approx \frac{1}{6} [U(1) + U(2) + U(3) + U(4) + U(5) + U(6)].$$

Обозначим

$$(1/4)[U(1) + U(2) + U(3) + U(4)] = \overline{U(R)},$$

где $\overline{U(R)}$ — среднее значение аномалии U на окружности радиусом R , совпадающей с поверхностью сферы в плоскости ее экватора. Тогда

$$6U(0) = 4\overline{U(R)} + U(5) + U(6). \quad (\text{IV.6})$$

Если $U(5)$ — значение U в точке верхнего полюса (аналитически продолженное в область верхнего полупространства значение U), то, зная его, из последнего равенства можно определить

$$U(6) = 6U(0) - 4\overline{U(R)} - U(5),$$

т. е. можно продолжить значения наблюдаемой аномалии в область нижнего полупространства на глубину R . Аналогично, зная значение $U(6)$, из (IV.6) можно определить $U(5)$, т. е. аналитически продолжить аномалию в область верхнего полупространства.

Для двумерных аномалий теорема Гаусса о среднем значении приводит к интегралу по окружности (IV.5). Ограничиваясь четырьмя значениями аномалии U на окружности (рис. 44, с профилем наблюдений совпадают точки 1, 0, 2; точка 3 находится в верхнем полупространстве, а точка 4 — в нижнем — аномалию считают не зависящей от направления переменной y), получим

$$U(0) = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi} U(R, \varphi) d\varphi \approx [U(1) + U(2) + U(3) + U(4)]/4.$$

Из этого равенства по известным $U(0)$, $U(1)$, $U(2)$ и $U(3)$ можно определить $U(4)$ или, если известно $U(4)$, а $U(3)$ не известно, можно определить это последнее значение.

3. Функция, гармоническая внутри области и непрерывная вплоть до границы области, достигает своего наибольшего и наименьшего значения только на границе области, кроме того случая, когда эта функция постоянная.

Чтобы показать справедливость этого утверждения [5], предположим, что функция U достигает наибольшего (наименьшего) значения в некоторой внутренней точке P той области v , в которой U — гармоническая функция. С центром в точке P в области v проведем некоторую сферу S с достаточно малым радиусом. Применяя формулу (IV.1) к поверхности сферы S , найдем $\int_S (\partial U / \partial n) dS = 0$. Так как функция U имеет максимум

(минимум) в точке P , вблизи точки P на всяком луче, выходящем из этой точки, значение U будет меньше (больше) значения функции U в самой точке P . Тогда во всех точках поверхности S производная $\partial U / \partial n$, взятая по направлению к точке P , будет положительной (отрицательной), следовательно интеграл в левой части последнего равенства будет величиной отрицательной (положительной), что приводит к противоречию, ибо правая часть равенства равна нулю.

4. Гармоническая функция, имеющая постоянное значение $U=C$ во всех точках некоторой замкнутой поверхности S , является постоянной в области v , ограниченной поверхностью S .

Доказать это положение можно на основании интеграла Дирихле

$$\int_v |\text{grad } U|^2 dv = \int_S U \frac{\partial U}{\partial n} dS.$$

По условию $U=C$. Тогда

$$\int_S U \frac{\partial U}{\partial n} dS = 0.$$

Отсюда следует, что и интеграл Дирихле от рассматриваемой функции должен равняться нулю. А он равен нулю, если $|\text{grad } U|=0$, т. е. когда равны нулю производные $\partial U / \partial x$, $\partial U / \partial y$, $\partial U / \partial z$, что может иметь место только при $U=\text{const}$ в области v . Но так как на поверхности S значение $U=C$, в силу условия непрерывности $U=C$ и в точках области v .

Верна и следующая теорема: если функция U , гармоническая во всем пространстве, ограничена сверху или снизу, то $U=\text{const}$ (теорема Лиувилля).

5. Гармоническая функция, нормальная производная которой обращается в нуль во всех точках поверхности S , постоянна во всей области v . Это свойство сводится к предыдущему и доказывается аналогично.

6. Свойство минимума интеграла Дирихле. Предположим, что задана некоторая совокупность непрерывных с их первыми и вторыми производными в области v функций, принимающих на поверхности S этой области одни и те же значения. Из всей совокупности функций гармонической будет только та, которая обращает интеграл Дирихле по объему v в нуль.

Пусть U_1 — гармоническая функция, а U_2 — негармоническая, принимающая на поверхности S такие же значения, какие принимает функция U_1 , и удовлетворяющая поставленным условиям непрерывности. Возьмем разность функций $U_2 - U_1 = V$, т. е. $U_2 = V + U_1$. Рассмотрим интеграл Дирихле от функции U_2 :

$$\begin{aligned} \int_v |\text{grad } U_2|^2 dv &= \int_v |\text{grad } (V + U_1)|^2 dv = \\ &= \int_v \left\{ \left[\frac{\partial(V + U_1)}{\partial x} \right]^2 + \left[\frac{\partial(V + U_1)}{\partial y} \right]^2 + \left[\frac{\partial(V + U_1)}{\partial z} \right]^2 \right\} dv = \\ &= \int_v |\text{grad } V|^2 dv + \int_v |\text{grad } U_1|^2 dv + \\ &+ 2 \int_v \left(\frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial U_1}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial U_1}{\partial z} \right) dv. \end{aligned}$$

В полученном выражении последний интеграл

$$\begin{aligned} \int_v \left(\frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial U_1}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial U_1}{\partial z} \right) dv &= \\ = \int_v (\text{grad } V \cdot \text{grad } U_1) dv &= \int_S V \frac{\partial U_1}{\partial n} dS \end{aligned}$$

на основании предварительной формулы Грина (III.30). Но так как на поверхности S значения $V = U_2 - U_1$ равны нулю, этот интеграл тоже равен нулю. Поэтому

$$\int_v |\text{grad } U_2|^2 dv = \int_v |\text{grad } V|^2 dv + \int_v |\text{grad } U_1|^2 dv.$$

Но так как при $V \neq 0$ в объеме v интеграл

$$\int_v |\text{grad } V|^2 dv > 0,$$

то

$$\int_v |\text{grad } U_2|^2 dv > \int_v |\text{grad } U_1|^2 dv.$$

Отсюда и следует, что интеграл Дирихле от гармонической функции из указанной совокупности U_1 всегда меньше интеграла Дирихле от негармонической функции. Верна и обратная теорема: функция U , непрерывная в области v с ее первыми и вторыми производными и имеющая там минимальное значение интеграла Дирихле, является гармонической в этой области.

7. Функция U , гармоническая во всем пространстве и регулярная на бесконечности, может равняться только нулю.

Справедливость этого положения можно показать на основании равенства (IV.2). Предположим, что поверхность S — сфера с центром в точке P и радиусом R . Тогда

$$r=R, \partial/\partial n(1/r) = -1/R^2, \partial U/\partial n = \partial U/\partial R.$$

Для этих функций в сферических координатах при $dS = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$ третья строка формулы (IV.2) запишется в виде

$$4\pi U(P) = \int_S R(\partial U/\partial R) \sin \theta d\theta d\varphi + \int_S U \sin \theta d\theta d\varphi.$$

По условию функция U — гармоническая во всем пространстве, поэтому радиус R можно брать сколь угодно большим. А при $R \rightarrow \infty$ по условиям регулярности $U \rightarrow 0$, $R\partial U/\partial R \rightarrow 0$. Отсюда и следует, что функция $U=0$ для всех точек пространства.

Без доказательств отметим следующие свойства гармонических функций.

Если существует гармоническая функция U , принимающая на поверхности S заданную совокупность значений U , то она есть единственная, т. е. не может существовать другая такая гармоническая функция (теорема единственности).

Две гармонические функции, имеющие одинаковые нормальные производные во всех точках заданной поверхности S , могут отличаться друг от друга только на постоянную величину по всей области, в которой они гармоничны, т. е. заданием значений $\partial U/\partial n$ на поверхности S гармоническая функция U в области v определяется только с точностью до некоторой постоянной величины.

Всякая гармоническая в некоторой области функция бесконечно дифференцируема в этой области.

Любая производная от гармонической в некоторой области функции U есть также функция, гармоническая в этой области.

Последние два свойства следуют из утверждения об аналитической природе гармонических функций (см. § 21). Их можно доказать также исходя из свойств интеграла Пуассона или его ядра.

Проиллюстрируем все рассмотренные свойства на примере простейшей функции — линейной функции (рис. 45) $U = \alpha x + \beta$, где α и β — некоторые постоянные.

Эта функция гармоническая — имеет непрерывные первую и вторую производные и удовлетворяет уравнению Лапласа $\partial^2 U/\partial x^2 = 0$. Если принять за направление внешней нормали n к границе некоторого отрезка $[a, b]$, где функция задана, в точке b направление этого отрезка, а в точке a — противоположное направление, то для любой линейной функции сумма зна-

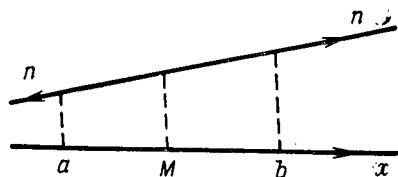


Рис. 46. Нормаль $\vec{n}$ к концам прямой линии, заданной на интервале $[a, b]$

чений первых производных этой функции по направлению n в концах отрезка будет равна нулю.

Если функция $U(x)$ линейна на отрезке $[a, b]$, то она не может принимать свое наибольшее либо наименьшее значение внутри отрезка, за исключением того случая, когда $U(x) = \text{const}$. Наибольшее и наименьшее значения линейной функции достигаются на концах отрезка.

Значение линейной функции в середине интервала $[a, b]$ в точке M равно среднему из двух значений, взятых на границах интервала, т. е.

$$U[(a+b)/2] = [U(a) + U(b)]/2.$$

Линейная функция однозначно определяется на отрезке $[a, b]$ значениями, заданными на концах интервала:

$$U(x) = \frac{b-x}{b-a} U(a) + \frac{x-a}{b-a} U(b).$$

Все указанные свойства очевидны для линейной функции. Ими обладают и любые другие гармонические функции нескольких переменных.

§ 21. СВЯЗЬ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С АНАЛИТИЧЕСКИМИ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ

Теория функций комплексной переменной — хорошо разработанный, достаточно эффективный и наиболее удобный математический аппарат, применяемый при решении многих задач в различных естественных науках. Ее с успехом применяют и в решении некоторых достаточно трудных задач гравиразведки и магниторазведки, особенно в области двухмерных, или плоских, полей, при этом наиболее важные результаты получены в работах В. Н. Страхова, М. С. Жданова, Г. М. Воскобойникова, Г. Я. Голиздры, С. В. Шалаева, А. В. Цирульского и ряда других исследователей. Применение теории функций комплексной переменной в гравиразведке и магниторазведке основано на наличии связи между гармоническими и аналитическими функциями.

Связь гармонических функций с аналитическими

Связь между гармоническими и аналитическими функциями следует из условий Коши — Римана, которым удовлетворяют аналитические функции комплексного переменного. Напомним определение аналитической функции.

Если функция $y=f(z)$ дифференцируема во всех точках некоторого круга с центром z_0 , имеющего даже произвольно малый радиус (другими словами, в точке z_0 и ее окрестности), то она называется аналитической в точке z_0 . Функция называется аналитической в данной области, если она аналитическая во всех точках этой области.

Для того чтобы заданная функция $f(z)=U(x, y)+iV(x, y)$ комплексного переменного $z=x+iy$ была аналитической (или регулярной) внутри области v , необходимо и достаточно, чтобы функции U и V имели внутри v непрерывные частные производные первого порядка по x и y и эти производные удовлетворяли бы условиям Коши — Римана:

$$\partial U/\partial x=\partial V/\partial y; \quad \partial U/\partial y=-\partial V/\partial x. \quad (\text{IV.7})$$

Например, функция $f(z)=(x^2-y^2)+i2xy$ — аналитическая всюду, тогда как функция $f(z)=(2x+y)+i(x+2y)$ — неаналитическая.

Связь гармонических функций двух переменных с аналитическими функциями комплексного переменного заключается в следующем [5].

Если функция $f(z)=U(x, y)+iV(x, y)$ аналитическая, то ее вещественная и мнимая части U и V всегда являются гармоническими функциями. Действительно, дифференцируя первое из условий Коши — Римана по x , а второе по y (у всякой аналитической функции U и V должны существовать производные всех порядков), получим $\partial^2 U/\partial x^2=\partial^2 V/\partial x\partial y$, $\partial^2 U/\partial y^2=-\partial^2 V/\partial x\partial y$.

Складывая эти равенства, найдем

$$\partial^2 U/\partial x^2+\partial^2 U/\partial y^2=0.$$

Аналогичное условие можно получить и для функции $V(x, y)$, дифференцируя первое условие Коши — Римана по y , а второе — по x .

Таким образом, если функция $f(z)=U+iV$ аналитическая, то функции U и V всегда гармонические. Но не всегда заданные гармонические функции $U(x, y)$ и $V(x, y)$ образуют аналитическую функцию $f(z)=U(x, y)+iV(x, y)$. Для этого функции U и V должны удовлетворять условиям Коши — Римана. Этими условиями они взаимосвязаны.

Из условий Коши — Римана для заданной гармонической функции $U(x, y)$ можно определить другую гармоническую функцию $V(x, y)$ с точностью до постоянной слагаемой. В сово-

купности эти функции U и V дадут аналитическую функцию и, наоборот, по заданной гармонической функции V из условий Коши—Римана с точностью до постоянной можно определить и гармоническую функцию U .

Таким образом, вещественная и мнимая части аналитической функции суть гармонические функции и, наоборот, всякую гармоническую функцию можно рассматривать как вещественную часть некоторой аналитической функции, при этом ее мнимая часть определяется с точностью до постоянной слагаемой, т. е. сама функция по вещественной ее части определяется с точностью до чисто мнимого постоянного слагаемого.

Наличие связи между аналитическими и гармоническими функциями имеет важное значение и ее, как было указано выше, с успехом применяют при интерпретации данных гравитационных и магнитных аномалий. Получаемые при этом для аномалий функции комплексного аргумента называют комплексными напряженностями и комплексными потенциалами. Комплексная напряженность и комплексный потенциал имеют прямое отношение к теории потенциала, поэтому рассмотрим кратко их определение и некоторые вопросы применения.

Комплексная напряженность и комплексный потенциал

Комплексная напряженность. На плоскости xOz возьмем комплексную переменную (ось Oz направлена вверх) $\gamma = x + iz$. Переменную точки M в области распределения масс обозначим $\delta = \xi + i\zeta$. Операцию сопряжения отметим черточкой над переменной:

$$\bar{\gamma} = x - iz, \quad \bar{\delta} = \xi - i\zeta.$$

Обозначим через $F_x(x, z)$ и $F_z(x, z)$ составляющие вектора напряженности гравитационного или магнитного поля $\vec{F}$. Тогда комплексная напряженность поля

$$E(\gamma) = iF_x(x, z) + F_z(x, z). \quad (\text{IV.8})$$

В областях, свободных от масс, двухмерная, или плоская, потенциальная функция $\vec{F}$ должна удовлетворять уравнениям поля

$$\text{div } \vec{F} = 0, \quad \text{rot } \vec{F} = 0,$$

т. е. должны выполняться равенства

$$\partial F_x / \partial x + \partial F_z / \partial z = 0, \quad \partial F_x / \partial z - \partial F_z / \partial x = 0. \quad (\text{IV.9})$$

Эти равенства выражают рассмотренные выше условия Коши—Римана. Как было показано, если функция $E(\gamma)$ имеет

действительную и мнимую части с непрерывными частными производными первого порядка в точках некоторой области и удовлетворяющими в них условиям Коши — Римана, такая функция является аналитической в этой области.

Рассмотрим производные комплексной напряженности поля по переменным x , z и γ .

Из (IV.8) видно, что

$$\frac{\partial E}{\partial x} = i \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_z}{\partial x} = i \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} = i F_{xx} + F_{xz}.$$

Аналогично

$$\partial E / \partial z = i (\partial F_x / \partial z) + (\partial F_z / \partial z) = i F_{xz} + F_{zz}.$$

Таким путем можно определить производные любого порядка по переменным x и z от функции E . Как следует из теории аналитических функций комплексной переменной, все эти производные являются аналитическими функциями в областях, свободных от источников.

Из полученных производных видно, что

$$\partial E / \partial x = -i (\partial E / \partial z). \quad (\text{IV.10})$$

В общем виде производную от функции E по комплексной переменной γ нужно определить согласно одному из равенств, полученных с учетом условий Коши — Римана:

$$\frac{\partial E}{\partial \gamma} = i \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z} - i \frac{\partial F_z}{\partial z} = i \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} - i \frac{\partial F_z}{\partial z}.$$

На основании этих равенств с учетом (IV.10) получим $\partial E / \partial x - i (\partial E / \partial z) = 2 (\partial E / \partial \gamma)$, т. е.

$$\frac{\partial E}{\partial \gamma} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial E}{\partial x} - i \frac{\partial E}{\partial z} \right).$$

Согласно этой формуле для определения производной от функции $E(\gamma)$ по комплексной переменной γ можно применить оператор дифференцирования

$$\frac{\partial}{\partial \gamma} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

Аналогично, если дифференцировать по сопряженной переменной, получим

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\gamma}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

С применением этих операторов перепишем уравнения (IV.9) в более удобной комплексной форме. Умножим первое

из этих равенств на i , а второе — на -1 ;

$$i \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) = 0, \quad \frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z} = 0.$$

Складывая правые и левые части этих равенств, найдем

$$\left(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z} \right) + i \left(\frac{\partial F_z}{\partial z} + \frac{\partial F_x}{\partial x} \right) = 0.$$

Через оператор дифференцирования по переменной $\bar{\gamma}$ эту формулу можно записать в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial z} \right) (iF_x + F_z) = 0,$$

т. е.

$$\partial E(\gamma) / \partial \bar{\gamma} = 0. \quad (\text{IV.11})$$

Формула (IV.11) и является комплексной формулой записи условий Коши — Римана. Полученному дифференциальному уравнению удовлетворяет комплексная напряженность плоского поля для областей, в которых отсутствуют источники. В общем случае, когда

$$\operatorname{div} \vec{F} = \partial F_x / \partial x + \partial F_z / \partial z = B(x, z),$$

где $B(x, z)$ — некоторая скалярная функция, уравнение (IV.11) имеет вид [2]

$$\partial E(\gamma) / \partial \bar{\gamma} = -B(\gamma) / 2.$$

Комплексный потенциал поля. Комплексный потенциал векторного поля $\vec{F}$, соответствующий его комплексной напряженности

$$E(\gamma) = F_z(x, z) + iF_x(x, z),$$

определяется выражением

$$q(\gamma) = V(x, z) + iN(x, z). \quad (\text{IV.12})$$

Здесь функция $V(x, z)$ — скалярный потенциал поля $\vec{F}$:

$$\vec{F} = \operatorname{grad} V,$$

т. е.

$$dV / \partial x = F_x, \quad \partial V / \partial z = F_z;$$

функция же $N(x, z)$ — гармоническая, связанная с $V(x, z)$ условиями Коши — Римана и определяемая через проекции поля $\vec{F}$ и производных потенциала V выражениями

$$\partial N / \partial z = F_x = \partial V / \partial x, \quad -\partial N / \partial x = F_z = \partial V / \partial z.$$

Определим производную от функции q по комплексной переменной γ . Применим оператор дифференцирования

$$\frac{\partial}{\partial \gamma} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

Получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial q(\gamma)}{\partial \gamma} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial z} \right) (V + iN) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial z} \right) + \\ &+ i \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial N}{\partial x} \right) = (F_x - iF_z) = iE(\gamma). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\partial q(\gamma) / \partial \gamma = iE(\gamma). \quad (\text{IV.13})$$

Отсюда следует, что комплексный потенциал поля $\vec{F}$ — это функция, производная от которой по комплексной переменной γ равна комплексной напряженности поля $E(\gamma)$, умноженной на i . Действительная часть комплексного потенциала равна потенциалу исходного поля $\vec{F}$, а мнимая часть определяется через этот потенциал из условий Коши — Римана. При этом необходимо пользоваться тем же приемом, которым определяли потенциал V поля $\vec{F}$ по проекциям F_x и F_z (см. гл. I). Рассмотрим следующий пример определения функции $N(x, z)$.

Задача определения $N(x, z)$, как и задача определения потенциала V , сводится к вычислению функции по ее полному дифференциалу

$$\partial N = (\partial N / \partial x) dx + (\partial N / \partial z) dz,$$

а именно, к формуле

$$N(x, z) = C + \int_{x_0}^x N_x(x, z_0) dx + \int_{z_0}^z N_z(x, z) dz,$$

где C — некоторая постоянная; (x_0, z_0) — координаты начальной точки пути интегрирования.

Так как на основании условий Коши — Римана

$$N_x = \partial N / \partial x = -F_z; \quad N_z = \partial N / \partial z = F_x,$$

формула для определения функции $N(x, z)$ при значении постоянной $C=0$ переписывается в виде

$$N(x, z) = - \int_{x_0}^x F_z(x, z_0) dx + \int_{z_0}^z F_x(x, z) dz. \quad (\text{IV.14})$$

Рассмотрим следующий пример.

Пусть $V(x, z) = 2G\lambda \ln(1/r)$, $r = \sqrt{x^2 + z^2}$, где λ — масса единицы длины бесконечной горизонтальной материальной линии, а $V(x, z)$ — потенциал ее силы притяжения. По этой функции определим проекции силы притяжения F_x и F_z :

$$F_x = \frac{\partial V}{\partial x} = -2G\lambda \frac{x}{x^2 + z^2}; \quad F_z = \frac{\partial V}{\partial z} = -2G\lambda \frac{z}{x^2 + z^2}.$$

Подставляя эти значения функций F_x и F_z в формулу (IV.14), найдем

$$N(x, z) = 2G\lambda \int_{x_0}^x \frac{z_0}{x^2 + z_0^2} dx - 2G\lambda \int_{z_0}^z \frac{x}{x^2 + z^2} dz.$$

Здесь в качестве координат (x_0, z_0) можно брать координаты любой начальной точки, но только такой, для которой имеет смысл получаемая функция $N(x, z)$. Поэтому в данном случае нельзя брать $x_0 = 0$ и $z_0 = 0$. Примем $x_0 = 1$ и $z_0 = 0$. Тогда (первый интеграл обращается в нуль)

$$\begin{aligned} N(x, z) &= -2G\lambda \int_0^z \frac{x}{x^2 + z^2} dz = -2G\lambda \operatorname{arctg} \frac{z}{x} \Big|_0^z = \\ &= -2G\lambda \operatorname{arctg} \frac{z}{x}. \end{aligned}$$

Подставляя это значение функции N и заданное выражение потенциала V в формулу (IV.12), получим

$$q(\gamma) = 2G\lambda \left(\ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + z^2}} - i \operatorname{arctg} \frac{z}{x} \right).$$

Этому выражению комплексного потенциала на основании (IV.13) соответствует функция комплексной напряженности

$$\begin{aligned} E(\gamma) &= -\frac{1}{i} \frac{\partial q(\gamma)}{\partial \gamma} = i \frac{\partial q(\gamma)}{\partial \gamma} = \frac{i}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial z} \right) q(\gamma) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial z} + \right. \\ &+ i \frac{\partial}{\partial x} \Big) q(\gamma) = -G\lambda \left(\frac{\partial}{\partial z} + i \frac{\partial}{\partial x} \right) \left[\frac{1}{2} \ln(x^2 + z^2) + i \operatorname{arctg} \frac{z}{x} \right] = \\ &= -\frac{2G\lambda}{x^2 + z^2} (z + ix) = \frac{-2G\lambda i(x - iz)}{(x + iz)(x - iz)} = -i \frac{2G\lambda}{\gamma}. \end{aligned}$$

Данную формулу можно получить и из равенства (IV.8), подставив в него найденные выражения функций F_x и F_z . Подобные формулы были использованы при интерпретации значений гравитационных аномалий С. В. Шалаевым и рядом других авторов.

Выражение комплексной напряженности через массы источников поля

Комплексную напряженность можно выразить через массы или плотности источников поля и записать в более удобной и компактной форме. Рассмотрим вначале выражение логарифмического потенциала притяжения простого слоя. Перепишем в ином виде выражение (II.38):

$$V(r) = 2G \int_l \mu \ln \frac{1}{r} dl = 2G \int_l \mu \ln \frac{1}{|r - r'|} dl, \quad (\text{IV.15})$$

где приняты обозначения:

$$r = r(x, z), \quad r' = r'(\xi, \zeta), \\ |r - r'| = [(x - \xi)^2 + (z - \zeta)^2]^{1/2}.$$

Аналогично запишем и другие основные виды логарифмических потенциалов притяжения:

для бесконечной горизонтальной матеральной линии

$$V(r) = 2G\lambda \ln \frac{1}{|r - r'|}; \quad (\text{IV.16})$$

для двумерных гравитационных масс

$$V(r) = 2G \int_S \sigma \ln \frac{1}{|r - r'|} dS; \quad (\text{IV.17})$$

для плоского диполя

$$V(r) = 2Gp \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{|r - r'|}; \quad (\text{IV.18})$$

для плоского двойного слоя

$$V(r) = 2G \int_l \tau \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{|r - r'|} dl; \quad (\text{IV.19})$$

для двумерных магнитных масс

$$U(r) = 2 \int_S J \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{|r - r'|} dS. \quad (\text{IV.20})$$

Рассмотрим теперь формулу (IV.15). Найдем комплексную напряженность поля, соответствующую этой формуле. Определим производную:

$$\frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{1}{|r - r'|} = - \frac{x - \xi}{[(x - \xi)^2 + (z - \zeta)^2]} = - \frac{x - \xi}{|r - r'|^2}.$$

Аналогично запишем

$$\frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{1}{|r - r'|} = - \frac{z - \zeta}{|r - r'|^2}.$$

С учетом этих производных дифференцируя (IV.15) по x и z , найдем

$$F_x(r) = \frac{\partial V(r)}{\partial x} = -2G \int_l \mu \frac{x - \xi}{|r - r'|^2} dl;$$

$$F_z(r) = \frac{\partial V(r)}{\partial z} = -2G \int_l \mu \frac{z - \zeta}{|r - r'|^2} dl.$$

Тогда комплексную напряженность поля определим из (IV.8):

$$E(\gamma) = F_z(x, z) + iF_x(x, z) = -2G \int_l \mu \frac{(z - \zeta) + i(x - \xi)}{|r - r'|^2} dl.$$

Перепишем это выражение через комплексные переменные

$$\gamma = x + iz, \quad \delta = \xi + i\zeta. \quad \text{Так как } \gamma - \delta = (x + iz) - (\xi + i\zeta) = (x - \xi) + i(z - \zeta),$$

комплексно сопряженная ее величина

$$\overline{\gamma - \delta} = (x - \xi) - i(z - \zeta).$$

Поэтому

$$i(\overline{\gamma - \delta}) = (z - \zeta) + i(x - \xi).$$

Кроме того,

$$|r - r'|^2 = (x - \xi)^2 + (z - \zeta)^2 = [(x - \xi) + i(z - \zeta)][(x - \xi) - i(z - \zeta)] = (\gamma - \delta)(\overline{\gamma - \delta}).$$

С учетом этих выражений формулу для определения комплексной напряженности поля перепишем в виде

$$E(\gamma) = -i2G \int_l \mu(\delta) \frac{\overline{\gamma - \delta}}{(\gamma - \delta)(\overline{\gamma - \delta})} dl = i2G \int_l \mu(\delta) \frac{dl}{\delta - \gamma}. \quad (\text{IV.21})$$

Формула (IV.21) выражает комплексную напряженность через комплексную переменную и является наиболее удобной формой ее записи. Эта функция аналитическая всюду вне l и обращается в нуль на бесконечности, так как значения $1/(\delta - \gamma)$ аналитичны во всех точках, в которых $(\delta - \gamma)$ не равны нулю.

Аналогично можно записать выражения для комплексных напряженностей и потенциалов, определяемых равенствами (IV.16) и (IV.17):

для бесконечной горизонтальной материальной линии

$$E(\gamma) = i2G\lambda \frac{1}{\delta - \gamma},$$

для двумерных гравитационных масс

$$E(\gamma) = i2G \int_S \frac{\sigma(\delta)}{\delta - \gamma} dS. \quad (\text{IV.22})$$

Подобные же выражения существуют и для плоских дипольных потенциалов, определяемых равенствами (IV.18) — (IV.20) [2]:

для плоского диполя

$$E(\gamma) = i2G \frac{P_k(\delta)}{(\gamma - \delta)^2},$$

где $P_k(\delta) = P_x(\delta) + iP_z(\delta)$ — комплексная плотность момента диполя:

для плоского двойного слоя

$$E(\gamma) = 2G \int_l \frac{\tau_k(\delta)}{(\gamma - \delta)^2} dl, \quad (\text{IV.23})$$

где $\tau_k(\delta) = \tau_x(\delta) + i\tau_z(\delta)$ — комплексная плотность дипольных моментов двойного слоя;

для двумерных магнитных масс

$$E(\gamma) = 2 \int_S J_k(\delta) \frac{dS}{(\gamma - \delta)^2}, \quad (\text{IV.24})$$

где $J_k(\delta) = J_x(\delta) + iJ_z(\delta)$ — комплексная интенсивность намагничивания магнитных масс. Комплексный потенциал для этого случая можно записать в виде

$$U(\gamma) = -2 \int_S J(\delta) \frac{1}{\gamma - \delta} dS. \quad (\text{IV.25})$$

Представление комплексной напряженности интегралами типа Коши

Интеграл

$$f(\gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{f(\delta)}{\delta - \gamma} d\delta,$$

выражающий значение аналитической функции $f(\delta)$ в некоторой точке δ через ее значения на любом контуре l , лежащем в области аналитичности функции $f(\delta)$ и содержащем точку δ внутри l , называется интегралом Коши. При этом контур l замкнутый. Для точек δ , лежащих во внешней области, интеграл Коши обращается в нуль:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{f(\delta)}{\delta - \gamma} d\delta = \begin{cases} f(\gamma), & \text{внутри } l, \\ 0, & \text{вне } l. \end{cases}$$

Этот интеграл имеет смысл для любого положения точки δ на

комплексной плоскости при условии, что она не лежит на контуре l .

Предположим теперь, что кривая l — произвольная замкнутая или разомкнутая гладкая кривая, расположенная в конечной части комплексной плоскости. Предположим также, что $f_1(\delta)$ — произвольная непрерывная функция, заданная в точках кривой l . Тогда интеграл

$$f_1(\gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{f_1(\delta)}{\delta - \gamma} d\delta \quad (\text{IV.26})$$

называется интегралом типа Коши. При этом функция $f_1(\delta)$ называется плотностью этого интеграла, а $1/(\delta - \gamma)$ — его ядром.

Функция $f_1(\gamma)$, описываемая интегралом типа Коши, является аналитической во всей плоскости комплексного переменного, за исключением точек самой кривой l .

Из приведенных формул для комплексной напряженности поля формулы (IV.21) и (IV.23) выражаются интегралом типа Коши. В таком виде можно записать и (IV.22) — (IV.24). Для этого нужно пользоваться равенством [2]

$$\int_S \varphi(\delta) \frac{\partial \psi(\delta)}{\partial \bar{\delta}} dS = \frac{1}{2i} \int_l \varphi(\delta) \psi(\delta) dl, \quad (\text{IV.27})$$

выражающим интеграл по замкнутой поверхности S интегралом через ее контур l . Здесь $\varphi(\delta)$ — произвольная на S аналитическая функция; $\psi(\delta)$ — функция комплексной переменной, имеющая непрерывные частные производные по x и z .

Положим $\varphi(\delta) = 1/(\delta - \gamma)$, $\psi(\delta) = \bar{\delta}$. Тогда

$$\int_S \frac{dS}{\delta - \gamma} = \frac{1}{2i} \int_l \frac{\bar{\delta}}{\delta - \gamma} d\delta. \quad (\text{IV.28})$$

Рассмотрим формулу (IV.22) при постоянном значении δ . Заменяя в ней интеграл по поверхности его выражением из (IV.28), найдем

$$E(\gamma) = G\sigma \int_l \frac{\bar{\delta}}{\delta - \gamma} dl.$$

Для случая постоянной плотности эта формула и выражает значения поля силы притяжения простого слоя интегралом типа Коши. Она соответствует значениям поля вне масс. Подобную формулу можно получить и для внутренних точек, и для переменных значений плотности. Интегралы типа Коши аналогично можно получить при постоянных значениях τ_k и J_k и для выражений $E(\gamma)$, определяемых формулами (IV.23) и (IV.24). В общем случае (при переменных значениях намагниченности) для магнитного поля удобно выразить в виде интеграла типа Коши не функции E , а потенциалы. Например, комплексный по-

тенциал однородно намагниченного двухмерного тела можно представить в виде интеграла типа Коши так же, как и комплексную напряженность гравитационного поля от однородного двухмерного тела. Это следует из полного совпадения формул (IV.22) и (IV.25) для данных случаев.

Интегралы типа Коши имеют важное значение при исследовании полей с применением аппарата теории функций комплексного переменного и особенно в теории логарифмического потенциала. С применением этого аппарата наиболее важные результаты получены В. Н. Страховым, М. С. Ждановым, а также в работах Г. М. Воскобойникова, Г. Я. Голыздры, А. В. Цирульского и ряда других исследователей.

Ряд Тейлора и особые точки аналитических функций

Всякая функция $f(\gamma)$, аналитическая внутри некоторого круга с центром γ_0 , может быть представлена единственным образом во всех точках внутри этого круга в виде степенного ряда

$$f(\gamma) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (\gamma - \gamma_0)^n,$$

где C_n — комплексные числа, определяемые формулой

$$C_n = \frac{1}{n!} f^n(\gamma_0).$$

Этот ряд является рядом Тейлора функции $f(\gamma)$ в окрестности точки γ_0 .

При применении аналитических функций для интерпретации аномалий важное значение имеют особые точки этих функций, т. е. такие точки, в окрестности которых функция $f(\gamma)$ не может быть представлена в виде абсолютно и равномерно сходящегося ряда Тейлора с центром в этой точке. Особые точки аналитической функции комплексного переменного разделяются на изолированные и неизолированные. Изолированная особая точка имеет место в том случае, когда внутри некоторого круга с достаточно малым радиусом, проведенного с центром в этой точке, нет других особых точек этой функции. Если такие точки имеются, то особая точка является неизолированной. Изолированные особые точки бывают однозначного и многозначного характера (в зависимости от того, однозначна или многозначна рассматриваемая аналитическая функция в их достаточно малой окрестности).

Изолированные особые точки однозначного характера делятся на три типа:

1) устранимая особая точка, когда существует предел

$$\lim_{\gamma \rightarrow \gamma_0} f(\gamma) \neq \infty;$$

2) полюс, когда

$$\lim_{\gamma \rightarrow \gamma_0} f(\gamma) = \infty;$$

3) существенно особая точка, когда не существует предела

$$\lim_{\gamma \rightarrow \gamma_0} f(\gamma).$$

Если особые точки являются точками многозначного характера, их называют также точками ветвления функции. Среди последних выделяют три основных вида: 1) алгебраические точки ветвления; 2) логарифмические точки ветвления и 3) степенно-логарифмические точки ветвления.

Значение особых точек при интерпретации аномалий определяется в основном следующими причинами: характер изменения полей зависит от закономерностей расположения особых точек; точность вычисления трансформированных значений аномалий зависит от расположения точек счета относительно особых точек (чем они ближе к особым точкам, тем точность ниже); во многих случаях (например, для конечных двумерных тел правильной геометрической формы — выпуклых и звездных многоугольников и др.) особые точки располагаются внутри тела или на его границе, тем самым дают важную информацию о расположении самого тела.

§ 22. ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ И ЕЕ РЕШЕНИЕ

Определение гармонической в области v функции U , если заданы ее значения на поверхности S этой области, называется первой граничной задачей теории гармонических функций, или задачей Дирихле. Область v может быть как конечной, так и бесконечной. В последнем случае эта область лежит вне поверхности S . Если область v конечная (внутри поверхности), задача является внутренней задачей Дирихле, если эта область бесконечна (вне поверхности) — внешней задачей Дирихле.

Предельное условие в задаче Дирихле записывают в виде $U|_S = f(M)$, т. е. на поверхности S задана непрерывная функция $f(M)$, где M — переменная точка этой поверхности. Во внешней задаче Дирихле ставится также условие: функция U должна обращаться в нуль на бесконечности. Есть и другая задача: на

поверхности S заданы значения нормальной производной гармонической функции

$$\left. \frac{\partial U}{\partial n} \right|_S = f(M).$$

Задача нахождения гармонической функции по значениям ее нормальной производной, заданной на поверхности S называется задачей Неймана.

Рассмотрим решение задачи Дирихле для двух простейших поверхностей — для сферы и плоскости [1, 3, 5].

Решение задачи Дирихле для сферы

В общем случае решение задачи Дирихле дает фундаментальная формула Грина (III.37)

$$4\pi U(P) = - \int_v \frac{1}{r} \Delta U dv + \int_S \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} dS - \int_S U \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS.$$

Так как U — гармоническая функция, то $\Delta U = 0$ и поэтому

$$4\pi U(P) = \int_S \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} dS - \int_S U \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS. \quad (\text{IV.29})$$

Применение этой формулы затруднено тем, что в ней кроме самой функции U на поверхности S присутствуют и нормальная ее производная $\partial U / \partial n$. Наложением дополнительного условия исключим $\partial U / \partial n$. С этой целью применим формулу Грина (III.31) к двум гармоническим функциям h и U . Полагая в ней $\Delta h = 0$ и $\Delta U = 0$, найдем

$$\int_S h \frac{\partial U}{\partial n} dS - \int_S U \frac{\partial h}{\partial n} dS = 0.$$

Сложив это выражение с (IV.29), найдем

$$4\pi U(P) = \int_S \frac{\partial U}{\partial n} \left(\frac{1}{r} + h \right) dS - \int_S U \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} + h \right) dS. \quad (\text{IV.30})$$

По условию функция h — гармоническая. Кроме того, наложим на нее ограничения: на поверхности S значение $h = 1/r$. В этом случае первый интеграл правой части (IV.30) равен нулю. Тогда

$$4\pi U(P) = - \int_S U \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} + h \right) dS = - \int_S U \frac{\partial Q}{\partial n} dS, \quad (\text{IV.31})$$

где $Q = 1/r + h$. Эта функция Q называется функцией Грина. В полученной формуле отсутствует интеграл с нормальной производной функции U , поэтому с помощью функции Q потенциал определяется только по его значениям, заданным на поверхности S .

Формулу (IV.31) можно свести к формуле для потенциала простого слоя. С этой целью обозначим

$$-\frac{1}{4\pi} \frac{\partial Q}{\partial n} = \mu.$$

Тогда (IV.31) примет вид $U(P) = \int_S U \mu dS$.

Будем считать, что на поверхности S функция $U=1/r$. Тогда

$$U(P) = \int_S \mu dS/r.$$

Отсюда видно, что это выражение определяет потенциал притяжения простого слоя, распределенный по поверхности S с поверхностной плотностью μ , а значение $U=1/r$ соответствует потенциалу точечной массы, равной единице.

Если же r — постоянная величина, то $U(P)=1/r$, так как в данном случае величина всей массы простого слоя, распределенного на сфере,

$$\begin{aligned} m &= \int_S \mu dS = -\frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\partial Q}{\partial n} dS = -\frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} + h \right) dS = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS - \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\partial h}{\partial n} dS = - \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS = 1. \end{aligned}$$

Здесь учтено, что функция h внутри замкнутой поверхности гармоническая и

$$\int_S (\partial h / \partial n) dS = 0,$$

как интеграл от нормальной производной гармонической функции по замкнутой поверхности. Отсюда следует, что величина μ , определяемая через функцию Грина, является плотностью простого слоя, полученного при распределении единичной массы равномерно по всей поверхности S . Полученный слой называется слоем Грина, или эквивалентным слоем Грина (эквивалентным по отношению к внешнему полю). На внешнюю точку сферический слой Грина действует точно так же, как и единичная масса, заключенная во внутренней точке P . Но на основании леммы Пуанкаре действие этого слоя на внутреннюю точку слабее, чем действие на нее единичной массы, помещенной в точке P . Следовательно, при распределении единичной массы из внутренней точки P по поверхности сферы внешнее поле остается без изменения, а внутреннее ослабевает. Это положение лежит в основе метода, предложенного Пуанкаре для решения задачи Дирихле (метод выметания внутренних масс на поверхность сферы).

Слой Грина в общем случае может быть и не сферическим.

Рассмотрим некоторые основные свойства функции Грина.

1. Функция Грина равна нулю на поверхности S и сумме $1/r + h$ всюду в рассматриваемой области задания U .

2. По условию h — гармоническая во всем пространстве функция, а $1/r$ — гармоническая во всех точках, кроме точки $r=0$. Поэтому функция Грина $Q=1/r+h$ терпит разрыв в точке $r=0$, т. е. при $P \rightarrow M$. Во всех остальных точках пространства она непрерывная и гармоническая, т. е. $\Delta Q=0$.

3. В точках области v функция Грина принимает только положительные значения, или всюду внутри S $Q=1/r+h>0$, т. е. $1/r>-h$.

В самом деле, умножая функцию Грина на r , найдем $Qr=1+rh$. Тогда, учитывая непрерывность функции h , получим

$$\lim_{r \rightarrow 0} Qr = 1.$$

Так как при $P \rightarrow M$ функция r — положительная, из последнего выражения следует, что и функция Q — положительная. Но на поверхности S значение $Q=0$. Поэтому при переходе по лучам от точки M к точке по поверхности S функция Q не может иметь отрицательные значения. Это следствие того, что функция Грина, являясь гармонической в области v , не может иметь там ни максимума, ни минимума, поэтому не может стать и отрицательной.

4. Поверхности уровня функции Грина всегда замкнутые, окружают точку P и из-за однозначности функции Q не могут пересекаться друг с другом, причем на любой из этих уровневых поверхностей внутри S нормальная производная $\partial Q / \partial n < 0$. Это следует из того, что функция Грина, являясь гармонической, убывает по нормали от точки P к поверхности.

5. Функция Грина симметрична относительно точек P и M , т. е. ее значения не изменяются, если менять местами эти точки.

Вернемся теперь к уравнению (IV.31). При его решении в зависимости от формы S необходимо найти соответствующую ей функцию Q . Построение функции Q в принципе возможно, но это довольно трудная задача, поэтому функция найдена для весьма немногих поверхностей. Рассмотрим решение внутренней задачи Дирихле для сферы. Пусть S — сфера радиусом R , а $U(M)$ — заданные предельные значения гармонической функции на поверхности сферы, причем точка M — переменная точка этой поверхности. Точку P возьмем внутри поверхности S . Обозначим (рис. 46): $OM=R$, $MP=r$, $OP=\rho$, $OP_1=\rho_1$, а угол между направлениями из центра сферы O на точки M и P — через φ , $\vec{n}$ — нормаль, внешняя к поверхности S . Здесь точка P_1 является сопряженной с точкой P или симметричной P относи-

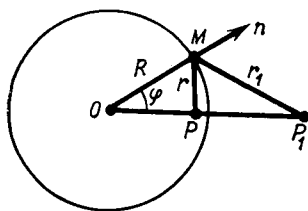


Рис. 46. Сфера радиусом R и расположение точек P и P_1

тельно поверхности S , т. е. такой, что $\rho\rho_1=R^2$. Путем проверки нетрудно убедиться, что для сферы функция Грина

$$Q = (1/r) - (R/\rho) (1/r_1). \quad (\text{IV.32})$$

Проверим, равно ли значение Q на поверхности S нулю.

Из треугольников MOP и MOP_1 найдем

$$r^2 = R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos \varphi; \quad (\text{IV.33})$$

$$r_1^2 = R^2 + \rho_1^2 - 2R\rho_1 \cos \varphi. \quad (\text{IV.34})$$

Умножая обе части (IV.33) на ρ^2/R^2 , получим

$$r_1^2 \rho^2 / R^2 = \rho^2 + (\rho_1 \rho)^2 / R^2 - 2\rho^2 \rho_1 (1/R) \cos \varphi.$$

При $\rho\rho_1=R^2$ отсюда найдем

$$r_1^2 (\rho^2 / R^2) = \rho^2 + R^2 - 2R\rho \cos \varphi.$$

Сравнив эту формулу с (IV.33), получим

$$r_1^2 (\rho^2 / R^2) = r^2.$$

Следовательно, на поверхности сферы $r_1(\rho/R) = r$, поэтому $Q=0$ и это равенство выполняется для любой точки P , взятой всюду внутри поверхности сферы S при условии, что точка M находится на поверхности S .

Функция Грина для сферы обладает и всеми другими свойствами функций Грина. Из сравнения (IV.32) с выражением функции Грина в общем виде следует, что $h = -(R/\rho) (1/r_1)$. Отсюда следует, что эта функция отрицательная внутри сферы. Кроме того, легко показать, что в области v внутри S $1/r > -h$, т. е. $Q > 0$.

Для решения уравнения (IV.31) вычислим нормальную производную функции Q на поверхности сферы S при $h = -(R/\rho) (1/r_1)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial n} &= \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} - \frac{R}{\rho} \frac{1}{r_1} \right) = \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{R}{\rho} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_1} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \frac{\partial r}{\partial n} - \frac{R}{\rho} \frac{\partial}{\partial r_1} \left(\frac{1}{r_1} \right) \frac{\partial r_1}{\partial n} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial n} + \frac{R}{\rho} \frac{1}{r_1^2} \frac{\partial r_1}{\partial n}. \end{aligned} \quad (\text{IV.35})$$

Для определения значения $\partial r/\partial n$ и $\partial r_1/\partial n$ продифференцируем равенства (IV.33) и (IV.34) по n , полагая

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \frac{\partial r}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial n} = \frac{\partial r}{\partial R}, \quad \frac{\partial r_1}{\partial n} = \frac{\partial r_1}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial n} = \frac{\partial r_1}{\partial R},$$

так как $dR/dn=1$ (нормаль совпадает с направлением R). Тогда после небольших преобразований получим

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \frac{R - \rho \cos \varphi}{r}, \quad \frac{\partial r_1}{\partial n} = \frac{R - \rho_1 \cos \varphi}{r_1}.$$

Подставляя найденные значения $\partial r/\partial n$ и $\partial r_1/\partial n$ в (IV.35), найдем

$$\frac{\partial Q}{\partial n} = -\frac{R - \rho \cos \varphi}{r^3} + \frac{R}{\rho} \frac{R - \rho_1 \cos \varphi}{r_1^3}.$$

Так как на поверхности сферы $G=0$, т. е. $1/r=R/\rho r_1$, $\rho \rho_1=R^2$, то $r_1=Rr/\rho$, $\rho_1=R^2/\rho$. При этих значениях r_1 и ρ_1 из равенства для $\partial Q/\partial n$ получим

$$\frac{\partial Q}{\partial n} = \frac{\rho \cos \varphi - R}{r^3} + \frac{R}{\rho} \frac{\rho^3}{R^3 r^3} \left(R - \frac{R^2}{\rho} \cos \varphi \right).$$

Отсюда

$$\partial Q/\partial n = (\rho^2 - R^2)/Rr^3.$$

Подставив найденное значение нормальной производной $\partial Q/\partial n$ под интеграл в (IV.31) и разделив на 4π , окончательно найдем

$$U(P) = \frac{R^2 - \rho^2}{4\pi R} \int_S \frac{U(M)}{r^3} dS. \quad (\text{IV.36})$$

Полученный интеграл называется интегралом Пуассона, дающим значение гармонической функции U для данной точки P внутри сферы по заданным значениям U на поверхности сферы, т. е. решение первой граничной задачи Дирихле. Необходимо еще доказать, что полученная функция удовлетворяет уравнению Лапласа, т. е. является гармонической функцией координат точки P , и что на поверхности сферы значения $U(P)$ совпадают с заданными.

С этой целью рассмотрим более подробно ядро интеграла Пуассона, а именно функцию $(R^2 - \rho^2)/r^3$. Покажем, что при произвольной фиксированной точке M эта функция является гармонической в точке P ($P \neq M$). Тем самым будет показано, что интеграл в правой части (IV.36) дает гармоническую в точке P функцию $U(P)$.

Воспользуемся формулой

$$r^2 = R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos \varphi.$$

Из нее получим

$$r(\partial r/\partial \rho) = \rho - 2R \cos \varphi;$$

$$R^2 - \rho^2 = r^2 - 2\rho^2 + 2R\rho \cos \varphi.$$

Тогда для ядра интеграла Пуассона найдем

$$\frac{R^2 - \rho^2}{r^3} = \frac{1}{r} - \frac{2\rho}{r^2} \frac{\rho - R \cos \varphi}{r} = \frac{1}{r} - \frac{2\rho}{r^2} \frac{\partial r}{\partial \rho}.$$

Представим это выражение в виде

$$\frac{R^2 \rho^2}{r^3} = \frac{1}{r} + 2\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{r} \right). \quad (\text{IV.37})$$

В этой формуле функция $1/r$ является гармонической во всех точках пространства, кроме точки $r=0$. Поэтому, чтобы доказать гармоничность ядра интеграла Пуассона, достаточно доказать гармоничность функции $\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{r} \right)$.

Для удобства через a обозначим величину $1/r$, т. е.

$$\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{r} \right) = \rho \frac{\partial a}{\partial \rho}.$$

В этом выражении a — гармоническая функция. Покажем, что и произведение $\rho \partial a / \partial \rho$ также является гармонической функцией координат точки P , т. е. x, y, z , от которых зависит и расстояние ρ . Так как $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$, то $\partial \rho / \partial x = x/\rho$, $\partial \rho / \partial y = y/\rho$, $\partial \rho / \partial z = z/\rho$. С учетом этих производных

$$\frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{x}{\rho} \frac{\partial a}{\partial \rho};$$

$$\frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial a}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{y}{\rho} \frac{\partial a}{\partial \rho};$$

$$\frac{\partial a}{\partial z} = \frac{\partial a}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} = \frac{z}{\rho} \frac{\partial a}{\partial \rho}.$$

Умножим обе части первого из этих равенств на x , второго — на y и третьего — на z :

$$x \frac{\partial a}{\partial x} = \frac{x^2}{\rho} \frac{\partial a}{\partial \rho}; \quad y \frac{\partial a}{\partial y} = \frac{y^2}{\rho} \frac{\partial a}{\partial \rho}; \quad z \frac{\partial a}{\partial z} = \frac{z^2}{\rho} \frac{\partial a}{\partial \rho}.$$

Складывая эти равенства, найдем

$$x \frac{\partial a}{\partial x} + y \frac{\partial a}{\partial y} + z \frac{\partial a}{\partial z} = \frac{\partial a}{\partial \rho} \frac{1}{\rho} (x^2 + y^2 + z^2) = \rho \frac{\partial a}{\partial \rho}.$$

Правая часть этого выражения гармоническая, если его левая часть удовлетворяет уравнению Лапласа. Рассмотрим вна-

чале первый член левой части. Определим лапласиан от функции $x \frac{\partial a}{\partial x}$. Получим

$$\begin{aligned}\Delta \left(x \frac{\partial a}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(x \frac{\partial a}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(x \frac{\partial a}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(x \frac{\partial a}{\partial x} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial a}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(x \frac{\partial a}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(x \frac{\partial a}{\partial x} \right) \right] = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \frac{\partial a}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(x \frac{\partial^2 a}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(x \frac{\partial^2 a}{\partial x \partial z} \right) = \\ &= \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + x \frac{\partial^3 a}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + x \frac{\partial^3 a}{\partial x \partial y^2} + x \frac{\partial^3 a}{\partial x \partial z^2} = 2 \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \\ &+ x \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 a}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 a}{\partial z^2} \right) \right] = \\ &= 2 \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + x \frac{\partial}{\partial x} \Delta a = 2 \frac{\partial^2 a}{\partial x^2},\end{aligned}$$

так как $\Delta a = 0$.

Аналогично найдем

$$\Delta \left(y \frac{\partial a}{\partial y} \right) = 2 \frac{\partial^2 a}{\partial y^2}; \quad \Delta \left(z \frac{\partial a}{\partial z} \right) = 2 \frac{\partial^2 a}{\partial z^2}.$$

Просуммировав полученные выражения, найдем

$$\begin{aligned}\Delta \left(x \frac{\partial a}{\partial x} + y \frac{\partial a}{\partial y} + z \frac{\partial a}{\partial z} \right) &= \rho \frac{\partial a}{\partial \rho} = \\ &= 2 \left(\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial z^2} \right) = 2 \Delta a = 0,\end{aligned}$$

где $a = 1/r$.

Это соотношение и доказывает, что ядро интеграла Пуассона

$$\frac{R^2 - \rho^2}{r^3} = \frac{1}{r} + 2\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{r} \right)$$

является гармонической функцией координат точки P .

Одновременно со свойством гармоничности ядра интеграла Пуассона отметим еще несколько его свойств.

1. Ядро интеграла Пуассона, как функция точки P , непрерывно дифференцируемо любое число раз во всех точках пространства, кроме точки $P = M$.

2. При решении внутренней задачи Дирихле для сферы во всех внутренних точках M вплоть до ее поверхности ядро интеграла Пуассона является величиной неотрицательной (оно больше или равно нулю).

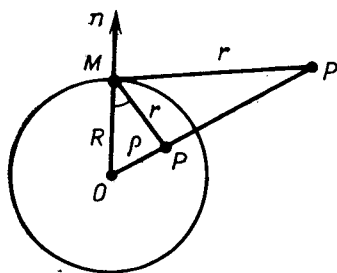


Рис. 47. Взаимное расположение точек O , M , P и расстояния между ними R , r и ρ для сферы

3. Интеграл, связанный с ядром интеграла Пуассона по поверхности S ,

$$\frac{1}{4\pi R} \int_S \frac{R^2 - \rho^2}{r^3} dS = 1$$

для всех точек P в области v ($P \neq M$).

Теперь посмотрим, действительно ли получаемые из интеграла Пуассона значения функции $U(P)$ удовлетворяют заданным условиям, т. е. совпадают с заданными на поверхности S значениями. С этой целью снова воспользуемся формулой (IV.33), поменяв в ней местами ρ и r , соответственно и угол φ на угол ψ между направлениями нормали $\vec{n}$ и радиуса-вектора $\vec{r}$ (рис. 47) ($r = MP$, точка M — это точка поверхности S , $OP = \rho$):

$$\rho^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos \psi.$$

Отсюда для ядра интеграла Пуассона получим

$$\frac{R^2 - \rho^2}{r^3} = 2R \frac{\cos \psi}{r^2} - \frac{1}{r}.$$

Тогда интеграл Пуассона запишем в виде

$$U(P) = \frac{1}{2\pi} \int_S U(M) \frac{\cos \psi}{r^2} dS - \frac{1}{4\pi R} \int_S \frac{U(M)}{r} dS.$$

Сравнивая интеграл в правой части этой формулы с выражениями потенциалов простого и двойного слоев, видим, что

$$\int_S \frac{U(M)}{r} dS = U_1(P);$$

$$\int_S U(M) \frac{\cos \psi}{r^2} dS = -U_2(P),$$

где U_1 и U_2 — потенциалы притяжения простого и двойного слоев (при $Q=1$), плотности которых равны $U(M)$. Поэтому

$$U(P) = -(1/2\pi) U_2(P) - (1/4\pi R) U_1(P).$$

Таким образом интеграл Пуассона можно представить в виде потенциалов двух видов — простого и двойного слоев. Так как рассматриваемая задача Дирихле внутренняя, точка P находится внутри сферы, т. е. является точкой P_i . Будем теперь стремиться точку P к M . Тогда, имея в виду непрерывность функции $U_1(P)$, получим $U_1(P) = U(M)$. Поэтому (при $P \rightarrow M$)

$$U(M) = -(1/2\pi)U_2(M) - (1/4\pi R)U(M).$$

В этом равенстве значения $U_2(M)$ определим из (II.35) при $Q=1$, $V_0(M) = U(M)$, $\beta = U(M)$, $V(P_i) = U_2(M)$:

$$U_2(M) = -(1/2R)U(M) - 2\pi U(M).$$

Поэтому

$$U(M) = (1/4\pi R)U(M) + U(M) - (1/4\pi R)U(M) = U(M).$$

Таким образом, доказано и второе положение, т. е. при $P \rightarrow M$ значения $U(P)$, определяемые интегралом Пуассона, совпадают с заданными на поверхности S .

Без доказательства отметим еще два следствия, непосредственно вытекающих из интеграла Пуассона и из свойств его ядра.

1. Всякая гармоническая в некоторой области функция является бесконечно дифференцируемой в этой области.

2. Любая производная от гармонической в некоторой области функции есть функция, также гармоническая в этой области.

Выразим теперь уравнение (IV.36) в сферических координатах. Возьмем начало координат O в центре сферы. Обозначим координаты точки P через ρ , θ , φ , а координаты точки M через R , θ' , φ' , т. е.

$$x = \rho \sin \theta \cos \varphi; \quad \xi = R \sin \theta' \cos \varphi';$$

$$y = \rho \sin \theta \sin \varphi; \quad \eta = R \sin \theta' \sin \varphi';$$

$$z = \rho \cos \theta; \quad \zeta = R \cos \theta'.$$

При этих значениях декартовых координат

$$\begin{aligned} r^2 &= (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2 = \\ &= R^2 + \rho^2 - 2\rho R [\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos (\varphi' - \varphi)]. \end{aligned}$$

Если через ψ обозначить угол между направлениями из начала координат на точки P и M , можно написать

$$r^2 = R^2 + \rho^2 - 2\rho R \cos \psi,$$

где

$$\cos \psi = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos (\varphi' - \varphi).$$

Тогда, учитывая, что элемент поверхности в сферических координатах

$$dS = R^2 \sin \theta' d\theta' d\varphi',$$

уравнение (IV.18) можно переписать:

$$U(P) = \frac{R}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} U(M) \frac{(R^2 - \rho^2) \sin \theta' d\theta' d\varphi'}{(\rho^2 + R^2 - 2\rho R \cos \psi)^{3/2}}.$$

В этой формуле переменными являются величины $U(M)$, θ' , φ' (переменный угол ψ выражается через координаты θ' , φ' по указанной выше формуле).

Формула (IV.36) определяет решение внутренней задачи Дирихле для сферы. Совершенно аналогично решается внешняя задача Дирихле, дающая значения гармонической функции в точках вне сферы. Формула, определяющая решение внешней задачи Дирихле вне сферы, такая же, как и (IV.36), только отличается от нее знаком в правой части. Это вызвано тем, что нормаль, внешняя по отношению к сфере, для наружного пространства становится внутренней нормалью.

Из интеграла Пуассона (IV.36) можно получить и теорему Гаусса о среднем значении гармонической функции (IV.4). В самом деле, при $\rho=0$ и $r=R$ (в центре сферы) из равенства (IV.36) получим

$$U(P) = (1/4\pi R^2) \int_S U dS,$$

т. е. теорема Гаусса о среднем значении гармонической функции — частный случай интеграла Пуассона. Перейдем к решению задачи Дирихле для плоскости.

Решение задачи Дирихле для плоскости

Требуется найти функцию $U(x, y, z)$, гармоническую в точке P полупространства $z > 0$, если известны ее предельные значения на плоскости $z=0$.

Пусть r — расстояние от переменной точки $M(\xi, \eta, 0)$ до точки $P(x, y, z)$ и r_1 — расстояние от переменной точки M до сопряженной точки P_1 , симметричной точке P относительно плоскости $z=0$. В данном случае функция Грина

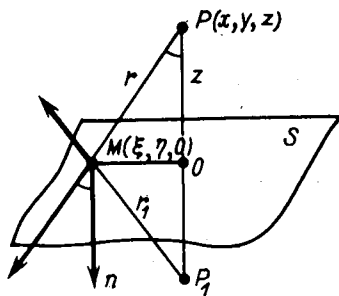
$$G = 1/r - 1/r_1, \quad (IV.38)$$

где (рис. 48)

$$r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2, \quad (IV.39)$$

причем $z = OP$, $r = PM$.

Рис. 48. Горизонтальная плоскость S и направления векторов $\vec{r}$, $\vec{r}_1$ и $\vec{n}$



Для нормальной производной функции Q

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial n} &= \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_1} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) \frac{\partial r}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial r_1} \left(\frac{1}{r_1} \right) \frac{\partial r_1}{\partial n} = \\ &= -\frac{1}{r^2} \cos(r, n) + \frac{1}{r_1^2} \cos(r_1, n). \end{aligned} \quad (\text{IV.40})$$

Для случая, когда точка M находится на плоскости, $r = r_1$, $\cos(r_1, n) = -\cos(r, n)$. Поэтому

$$\partial Q / \partial n = -2 \cos(r, n) / r^2. \quad (\text{IV.41})$$

Из рисунка видно, что

$$\cos(r, n) = z/r.$$

Тогда

$$\partial Q / \partial n = -2z/r^3. \quad (\text{IV.42})$$

Рассматривая функцию Грина G для горизонтальной бесконечной плоскости, отметим следующее. Функции $1/r$ и $1/r_1$ — гармонические во всех точках пространства, кроме точек $r=0$ и $r_1=0$. На бесконечности они являются и регулярными. Поэтому функция Грина для плоскости также гармоническая и регулярная на бесконечности. На поверхности S , т. е. в точках рассматриваемой плоскости, она равна нулю, так как $r=r_1$. В бесконечности, т. е. при $M \rightarrow \infty$, функция $Q \rightarrow 0$. Тогда при этом значении нормальной производной функции Грина из (IV.31) окончательно получим

$$U(P) = \frac{z}{2\pi} \int_S \frac{U(\xi, \eta, 0)}{r^3} dS, \quad (\text{IV.43})$$

где

$$r = [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2]^{1/2}.$$

Этот интеграл представляет собой интеграл Пуассона для плоскости. По этой формуле можно определить значения гармонической функции в точках пространства на высоте z . Причем

интегрирование распространяется на всю плоскость, т. е. производится в бесконечных пределах.

Формулу (IV.43) можно получить из (IV.36), приняв плоскость за сферу бесконечного радиуса. Примем $\rho = R - z$, тогда из (IV.36)

$$U(P) = \frac{z}{2\pi} \int_S \frac{U dS}{r^3} + \frac{z^2}{4\pi R} \int_S \frac{U dS}{r^3}.$$

В пределе при $R \rightarrow \infty$ из сферы получим плоскость, разделяющую все пространство на две части, второй интеграл обращается в нуль и поэтому

$$U(P) = \frac{z}{2\pi} \int_S \frac{U dS}{r^3},$$

т. е. это формула (IV.43).

Для удобства применения запишем (IV.43) в прямоугольной и цилиндрической системах координат. В прямоугольной системе координат

$$U(x, y, z) = \frac{z}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U(\xi, \eta, 0) d\xi d\eta}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2]^{3/2}}.$$

В цилиндрической системе координат с началом в точке, являющейся проекцией точки P на плоскость,

$$U(0, 0, Z) = \frac{z}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{U(\rho, \varphi, 0) \rho d\rho d\varphi}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}}.$$

В полученных формулах для бесконечной горизонтальной плоскости, когда функция $U(\xi, \eta, 0)$ постоянная, интеграл

$$(z/2\pi) \int_S (dS/r^3) = 1$$

при бесконечных пределах интегрирования. Поэтому указанные формулы не изменятся, если написать их в виде [на примере (IV.43)]

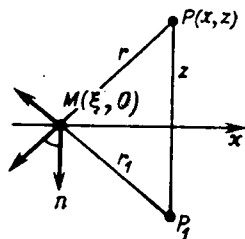
$$U(P) - U_0 = \frac{z}{2\pi} \int_S [U(\xi, \eta, 0) - U_0] \frac{dS}{r^3},$$

где U_0 — любая постоянная, в частности значение функции U в начале координат.

Формулой в таком виде пользуются, например, при получении вычислительных схем для определения значений первой вертикальной производной от функции U в точках самой плоскости. Для этого случая, дифференцируя последнюю формулу по z и затем принимая $z=0$, найдем

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{1}{2\pi} \int_S [U(\xi, \eta, 0) - U(0, 0, 0)] \frac{1}{r^3} dS,$$

Рис. 49. Ось x и расположение точек M , P и P_1 для задачи плоского поля



где $r = [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]^{1/2}$. В полярных координатах эта формула имеет вид

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{1}{2\pi} \int_S [U(\rho, \varphi, 0) - U(0, 0, 0)] \frac{d\rho d\varphi}{\rho^2}.$$

Рассмотрим теперь плоское, или двухмерное, поле, заданное в точках бесконечной горизонтальной прямой, совпадающей с направлением оси x . Уравнение Лапласа будет иметь вид

$$\Delta U = \partial^2 U / \partial x^2 + \partial^2 U / \partial z^2 = 0.$$

Задача Дирихле в данном случае решается с помощью формулы (IV.4). Рассмотрим снова решение внутренней задачи Дирихле, для которой из (IV.4) получим

$$U(P) = \frac{1}{2\pi} \int \ln \left(\frac{1}{r} \right) \frac{\partial U}{\partial n} dl - \frac{1}{2\pi} \int U \frac{\partial}{\partial n} \left(\ln \frac{1}{r} \right) dl.$$

Вводя снова гармоническую функцию h аналогично тому, как это сделано выше, вместо (IV.31) получим

$$U(P) = -(1/2\pi) \int U(\partial Q / \partial n) dl, \quad (\text{IV.44})$$

где Q — функция Грина для прямой линии: $Q = \ln(1/r) + h$. Нетрудно показать, что в данном случае $h = -\ln(1/r_1)$. Поэтому (рис. 49) $Q = \ln(1/r) - \ln(1/r_1)$, где $r^2 = (x - \xi)^2 + z^2$. Для точки M на оси x $Q = \ln(1/r) - \ln(1/r_1) = 0$, так как в данном случае $r = r_1$. Кроме того, как и выше для плоскости, $\cos(r, n) = -\cos(r_1, n)$. При этих исходных данных для нормальной производной от функции Грина

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial n} &= \frac{\partial}{\partial n} \left(\ln \frac{1}{r} \right) - \frac{\partial}{\partial n} \left(\ln \frac{1}{r_1} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\ln \frac{1}{r} \right) \frac{\partial r}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial r_1} \left(\ln \frac{1}{r_1} \right) \frac{\partial r_1}{\partial n} = \\ &= -\frac{1}{r} \cos(r, n) + \frac{1}{r_1} \cos(r_1, n) = -\frac{2}{r} \cos(r, n). \end{aligned}$$

Так как $\cos(r, n) = z/\rho$, окончательно получим $\partial Q / \partial n = -2z/\rho^2$.

Подставляя это значение нормальной производной функции Грина в (IV.44), найдем

$$U(P) = \frac{z}{\pi} \int_{\Gamma} U(M) \frac{dl}{r^2} = \frac{z}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(M) \frac{d\xi}{(x - \xi)^2 + z^2}.$$

Эта формула решает задачу Дирихле для плоского поля и является также интегралом Пуассона.

В данном случае этот интеграл определяет функцию U на высоте z по заданным на оси x значениям функции $U(x, 0)$, т. е. решает задачу аналитического продолжения аномалий в области верхнего полупространства на высоту z .

Полученный интеграл Пуассона для плоскости (IV.43) можно переписать в виде интеграла свертки. Действительно, интеграл свертки для трехмерных аномалий имеет вид

$$f_T(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta) P(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta.$$

Сравнивая это равенство с выражением интеграла Пуассона, видим, что

$$f_T(x, y) = U(x, y), \quad f(\xi, \eta) = U(\xi, \eta);$$

$$P(x - \xi, y - \eta) = \frac{z}{r^3} = \frac{z}{[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2]^{3/2}}.$$

Здесь функция $f_T(x, y)$ — преобразованная, или трансформированная, а функция $P(\xi, \eta)$ — ядро интеграла свертки, или переходная характеристика способа преобразования.

Беря преобразования Фурье от обеих частей интеграла свертки (то же самое и от интеграла Пуассона), можно показать, что

$$S_T(u, v) = S(u, v) \Phi(u, v),$$

где S_T и S — спектры функций соответственно.

$$f_T(x, y) = U(x, y), \quad f(\xi, \eta) = U(\xi, \eta);$$

$\Phi(u, v)$ — спектр функции P , т. е.

$$S(u, v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta) \exp[-i(u\xi + v\eta)] d\xi d\eta;$$

$$S_T(u, v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_T(x, y) \exp[-i(ux + vy)] dx dy;$$

$$\Phi(u, v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(x, y) \exp[-i(ux + vy)] dx dy =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z \exp[-i(ux + vy)] dx dy}{[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2]^{3/2}} = \exp(-\rho z), \quad \rho = \sqrt{u^2 + v^2}.$$

Функция $\Phi(u, v)$ — называется частотной характеристикой преобразования. На основании полученных равенств интеграл Пуассона окончательно можно записать в виде

$$U(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(\xi, \eta) P(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta.$$

Спектр аномалии после трансформации

$$S_{\tau}(u, v) = S(u, v) \exp(-\rho z).$$

Здесь функция $\Phi(u, v) = \Phi(\rho) = \exp(-\rho z)$ — частотная характеристика способа аналитического продолжения аномалий в области верхнего полупространства на высоту z , т. е. интеграл Пуассона выражает именно эту операцию аналитического продолжения аномалий в области верхнего полупространства.

Аналогично для двухмерных, или плоских, аномалий

$$U(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} U(\xi) P(x - \xi) d\xi;$$

$$P(x - \xi) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\pi} \frac{z}{(x - \xi)^2 + z^2}.$$

При этом частотная характеристика

$$\begin{aligned} \Phi(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} P(x) \exp(-i\omega x) dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z}{(x - \xi)^2 + z^2} \exp(-i\omega x) dx = \exp(-|\omega|z). \end{aligned}$$

Через спектры аномалий можно записать

$$S_{\tau}(\omega) = S(\omega) \Phi(\omega) = S(\omega) \exp(-|\omega|z).$$

С учетом выражений частотных характеристик трансформированные значения аномалий, полученные в результате решения интеграла Пуассона, через значения их спектров можно переписать в следующем виде. Для трехмерных аномалий

$$\begin{aligned} f_{\tau}(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(u, v) S(u, v) \exp[i(ux + vy)] du dv = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S(u, v) \exp(-\rho z) \exp[i(ux + vy)] du dv. \end{aligned}$$

Если исходная аномалия $f(x, y)$ зависит только от переменной $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, т. е. если она симметрична относительно вертикальной оси, это равенство перепишется через формулу обратного

преобразования Ханкеля нулевого порядка:

$$f_T(r) = \int_0^{\infty} \rho S(\rho) \exp(-\rho r) J_0(\rho r) d\rho.$$

Спектр $S(\rho)$ можно определить из равенства

$$S(\rho) = \int_0^{\infty} r f(r) J_0(\rho r) dr.$$

Для двумерных аномалий

$$\begin{aligned} f_T(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega) S(\omega) \exp(i\omega x) d\omega = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \exp(-|\omega|z) \exp(i\omega x) d\omega. \end{aligned}$$

Интеграл Пуассона, как было отмечено выше, решает задачу аналитического продолжения аномалий в области верхнего полупространства. Не менее важное значение имеет более трудная задача аналитического продолжения потенциала и его производных в области нижнего полупространства, позволяющая построить карту аномалий в вертикальной плоскости. В то же время эта задача наиболее исследована. Работами В. Н. Страхова, его учеников и других исследователей аппарат ее решения доведен до совершенства. Вопросы теории и практики применения этой задачи, численные схемы, реализующие ее, и практические примеры подробно рассматриваются в курсах гравитразведки и магниторазведки. Приведем здесь только формулу, с помощью которой решается эта задача.

Решение задачи аналитического продолжения гармонической функции U в области нижнего полупространства для случая горизонтальной бесконечной плоскости сводится к решению интегрального уравнения (IV.43) относительно значений $U(M)$ [заданы значения $U(P)$]. В случае двумерных аномалий задача сводится к решению относительно значений $U(M)$ интегрального уравнения

$$U(P) = \frac{z}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(M) \frac{d\xi}{(x - \xi)^2 + z^2}.$$

Указанные интегральные уравнения легче всего решаются с применением спектров аномалий. При этом, например, для двумерных аномалий, заданных в точках оси x ,

$$U(0, -z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(|\omega|z) d\omega \int_{-\infty}^{\infty} U(\xi) \cos \omega \xi d\xi.$$

Эта формула определяет значения функции U в начале координат на бесконечной горизонтальной линии, находящейся на глубине z от поверхности земли при условии

$$\int_{-\infty}^{\infty} |U(x, z)|^2 dx < +\infty, \quad z > -H,$$

где H — глубина залегания ближайшей к поверхности земли особой точки поля. Аналогичная формула имеет место и для трехмерных аномалий. Например, для осесимметричных аномалий, заданных на бесконечной горизонтальной плоскости,

$$U(0, -z) = \int_0^{\infty} \exp(\rho z) \rho d\rho \int_0^{\infty} r U(r, 0) J_0(\rho r) dr,$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Это равенство верно при условии

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |U(x, y, z)|^2 dx dy < +\infty, \quad z > -H,$$

которое выполняется для полей от конечных возмущающих тел. Оно не выполняется для тел бесконечного простираения в горизонтальном направлении. Если же брать производные от потенциала второго порядка и выше, оно выполняется для любых тел ограниченного погружения на глубину.

§ 23. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА

Решение задачи Неймана для сферы

Как уже было отмечено, задача Неймана заключается в определении гармонической функции U по заданным на поверхности значениям нормальной производной функции $\partial U / \partial n$. Как было показано, заданием значений $\partial U / \partial n$ на граничной поверхности гармоническую функцию можно определить только с точностью до некоторой постоянной. При этом задаваемые на поверхности S значения нормальной производной должны отвечать условию

$$\int_S (\partial U / \partial n) dS = 0, \quad (\text{IV.45})$$

являющемуся одним из свойств гармонических функций. Рассмотрим вначале решение внутренней задачи Неймана.

Внутренняя задача Неймана. Эта задача решается тем же путем, что и задача Дирихле, с использованием формул Грина. Исходной является фундаментальная формула Грина, соответствующая внутренней относительно поверхности S точке P . Эта

формула для гармонической функции U имеет вид

$$4\pi U(P) = \int_S \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} dS - \int_S U \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS. \quad (\text{IV.46})$$

Здесь в точках M поверхности S по условию заданы только значения нормальной производной $\partial U / \partial n$, отвечающие равенству (IV.45). Значения же $U(M)$ неизвестны, поэтому данной формулой в таком виде, в каком она записана, нельзя пользоваться. Наложением дополнительного условия исключим из нее значения функции $U(M)$. С этой целью введем вспомогательную гармоническую функцию h_1 так же, как вводили функцию h при решении задачи Дирихле. Запишем вторую формулу Грина для двух гармонических функций U и h_1 :

$$\int_S h_1 \frac{\partial U}{\partial n} dS - \int_S U \frac{\partial h_1}{\partial n} dS = 0.$$

Складывая эту формулу с формулой (IV.46), получим

$$4\pi U(P) = \int_S \frac{\partial U}{\partial n} \left(\frac{1}{r} + h_1 \right) dS - \int_S U \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} + h_1 \right) dS.$$

Обозначим

$$N = (1/r) + h_1. \quad (\text{IV.47})$$

Тогда

$$4\pi U(P) = \int_S N \frac{\partial U}{\partial n} dS - \int_S U \frac{\partial N}{\partial n} dS. \quad (\text{IV.48})$$

Определим величину интеграла по поверхности от нормальной производной функции N :

$$\int_S \frac{\partial N}{\partial n} dS = \int_S \frac{\partial h_1}{\partial n} dS + \int_S \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS. \quad (\text{IV.49})$$

Первый интеграл в правой части (IV.49) равен нулю, согласно свойствам гармонической функции (функция h_1 — гармоническая всюду внутри S). Второй интеграл

$$\int_S \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS = -4\pi,$$

согласно (III.42) — точка P находится внутри S . Поэтому

$$\int_S (\partial N / \partial n) dS = -4\pi.$$

Примем $\partial N / \partial n = C$, где C — некоторая постоянная. Тогда

$$\int_S [(\partial N / \partial n) dS = C \int_S dS = -4\pi.$$

Отсюда

$$\partial N / \partial n = C = -4\pi / S, \quad (\text{IV.50})$$

где S — площадь всей поверхности. Функция N , отвечающая этому условию, называется функцией Неймана. Подставляя это значение нормальной производной в (IV.48), получим

$$4\pi U(P) = \int_S N (\partial U / \partial n) dS + (4\pi / S) \int_S U dS. \quad (\text{IV.51})$$

Последний интеграл в этой формуле — постоянная. Обозначим

$$(4\pi / S) \int_S U dS = C_1.$$

Тогда

$$4\pi U(P) = C_1 + \int_S N (\partial U / \partial n) dS.$$

Определим C_1 для случая, когда поверхность S — сфера радиусом R . Так как для сферы $S = 4\pi R^2$, на основании теоремы Гаусса о среднем значении гармонической функции найдем

$$C_1 = (4\pi / 4\pi R^2) \int_S U dS = 4\pi U(0),$$

где $U(0)$ — значение гармонической функции в центре сферы. Поэтому из (IV.51) получим

$$U(P) = U(0) + (1/4\pi) \int_S N (\partial U / \partial n) dS. \quad (\text{IV.52})$$

Функция Неймана обладает следующими основными свойствами.

1. Функция Неймана является гармонической во всех точках пространства, кроме точки $r=0$.

2. При $r \rightarrow 0$ функция $N \rightarrow \infty$.

3. Значения нормальной производной $\partial N / \partial n$ на поверхности S равны постоянной величине $C = -4\pi / S$. Для сферы $C = -1/R^2$, т. е. поверхность S является уровенной поверхностью для нормальной производной функции Неймана.

4. Функция Неймана, так же как и функция Грина, симметрична относительно координат точек P и M .

Для определения функции Неймана для сферы применим интеграл Пуассона (IV.36) к произведению функций ρ и $\partial U / \partial \rho$, где $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$ — гармоническая функция. Выше было показано, что, если U — гармоническая функция координат точки $P(x, y, z)$ в некоторой области v , то и функция $\rho (\partial U / \partial \rho)$ является гармонической в точках этой же области. Поэтому инте-

интеграл Пуассона можно применить к функции $\rho(\partial U/\partial \rho)$. Получим

$$\left(\rho \frac{\partial U}{\partial \rho}\right)_P = \frac{1}{4\pi R} \int_S \rho \frac{\partial U(M)}{\partial \rho} \frac{R^2 - \rho^2}{r^3} dS.$$

Для поверхности S (сфера радиусом R) $\rho = R$ и $\partial U/\partial \rho = \partial U/\partial n$, так как направление ρ совпадает с направлением внешней нормали n . Поэтому

$$\left(\rho \frac{\partial U}{\partial \rho}\right)_P = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\partial U}{\partial n} \frac{R^2 - \rho^2}{r^3} dS.$$

Поделим обе части этого равенства на ρ и проинтегрируем по ρ в пределах от 0 до ρ :

$$\begin{aligned} \int_0^\rho \frac{\partial U(P)}{\partial \rho} d\rho &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\rho \left[\int_S \frac{\partial U}{\partial n} \frac{R^2 - \rho^2}{\rho r^3} dS \right] d\rho = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\partial U}{\partial n} \left[\int_0^\rho \frac{R^2 - \rho^2}{\rho r^3} d\rho \right] dS. \end{aligned}$$

Здесь интеграл

$$\int_0^\rho [\partial U(P)/\partial \rho] d\rho = U(P) - U(0).$$

Поэтому

$$U(P) - U(0) = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\partial U}{\partial n} \left[\int_0^\rho \frac{R^2 - \rho^2}{\rho r^3} d\rho \right] dS. \quad (\text{IV.53})$$

Сравнивая эту формулу с (IV.52), видим, что

$$N = \int_0^\rho \frac{R^2 - \rho^2}{\rho r^3} d\rho. \quad (\text{IV.54})$$

В сферических координатах с началом в центре сферы

$$r^2 = \rho^2 + R^2 - 2R\rho \cos \varphi.$$

Отсюда после небольших преобразований найдем

$$\begin{aligned} \frac{R^2 - \rho^2}{\rho r^3} &= \frac{1}{r\rho} + \frac{2}{r^3} (R \cos \varphi - \rho); \\ \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{r} \right) &= \frac{R \cos \varphi - \rho}{r^3}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\frac{R^2 - \rho^2}{\rho r^3} = \frac{1}{r\rho} + 2 \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{r} \right).$$

С учетом этого выражения равенство (IV.54) можно переписать:

$$N = \int_0^{\rho} \left[\frac{1}{r\rho} + 2 \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{r} \right) \right] d\rho = \frac{2}{r} + \int_0^{\rho} \frac{\partial \rho}{r\rho}. \quad (\text{IV.55})$$

Пользуясь подстановкой $\rho = R^2/\rho_1$ и производя интегрирование, найдем

$$\int \frac{d\rho}{\rho r} = -\frac{1}{R} \ln(R^2 - R\rho \cos \varphi + Rr) + \frac{1}{R} \ln \rho. \quad (\text{IV.56})$$

Здесь функция $\ln \rho$ — постоянная величина для поверхности сферы, поэтому при интегрировании по поверхности она приведет к постоянной величине, поэтому ее можно отбросить. Тогда из (IV.55) найдем

$$\begin{aligned} N &= \frac{2}{r} - \frac{1}{R} \ln(R^2 - R\rho \cos \varphi + Rr) \Big|_0^{\rho} = \\ &= \frac{2}{r} - \frac{1}{R} \ln \frac{R - \rho \cos \varphi + r}{2R}. \end{aligned} \quad (\text{IV.57})$$

Эта функция и является функцией Неймана для сферы.

Подставив эту функцию под интеграл в (IV.53), окончательно получим

$$U(P) = U(0) + \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\partial U(M)}{\partial n} \left[\frac{2}{r} - \frac{1}{R} \ln \frac{R - \rho \cos \varphi + r}{2R} \right] dS. \quad (\text{IV.58})$$

Формула (IV.58) решает внутреннюю задачу Неймана для сферы. Она верна и для предельного случая, когда точка P приближается к поверхности и совпадает с одной из ее точек M . Тогда в (IV.58) достаточно заменить функции ρ и r их значениями для поверхности S : $\rho = R$, $r = 2R \sin(\varphi/2)$.

Решение внешней задачи Неймана. При решении этой задачи по заданным на поверхности S значениям нормальной производной $\partial U/\partial n$ функции U необходимо найти ее значения вне S . При этом функция U является гармонической вне поверхности и регулярной на бесконечности, поверхность S — сфера. Во внешней задаче Неймана, так же как и во внутренней, функцию U можно найти с точностью до постоянной. Эту постоянную в данном случае определяют из условия, что функция U стремится на бесконечности к нулю.

Для решения внешней задачи Неймана воспользуемся интегралом Пуассона для внешней сферической задачи

$$U(P) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_S U(M) \frac{\rho^2 - R^2}{r^3} dS.$$

Применим этот интеграл к гармонической функции $\rho(\partial U/\partial \rho)$:

$$\rho \frac{\partial U(P)}{\partial \rho} = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\partial U(M)}{\partial \rho} \frac{\rho^2 - R^2}{r^3} dS.$$

Разделив обе части этого равенства на ρ и проинтегрировав по ρ в пределах от ρ до ∞ аналогично тому, как это делалось для вывода (IV.53), найдем

$$U(P) \Big|_{\rho}^{\infty} = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\partial U(M)}{\partial n} \left[\int_{\rho}^{\infty} \frac{\rho^2 - R^2}{r^3} d\rho \right] dS.$$

Учитывая, что на бесконечности $U(P)=0$, согласно (IV.56) получим

$$\begin{aligned} -U(P) &= \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\partial U}{\partial n} \left(-\frac{2}{r} + \frac{1}{R} \ln \frac{R^2 - R\rho \cos \varphi + Rr}{\rho} \right) \Big|_{\rho}^{\infty} dS = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\partial U}{\partial n} \left[\frac{2}{r} - \frac{1}{R} \ln \frac{R^2 - R\rho \cos \varphi + Rr}{\rho R(1 - \cos \varphi)} \right] dS, \end{aligned}$$

где учтено, что при $\rho \rightarrow \infty$ значение $r \rightarrow \infty$. Отсюда окончательно найдем

$$U(P) = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\partial U(M)}{\partial n} \left[-\frac{2}{r} + \frac{1}{R} \ln \frac{R - \rho \cos \varphi + r}{\rho(1 - \cos \varphi)} \right] dS. \quad (\text{IV.59})$$

Эта формула позволяет определить значения функции U во всех внешних точках по заданным на сфере значениям ее нормальной производной. Ее можно применить и для определения функции U в точках самой поверхности S . Для этого необходимо принять $\rho = R$, $r = 2R \cos(\varphi/2)$. Тогда

$$U(P) = \frac{1}{4\pi R} \int_S \frac{\partial U}{\partial n} \left[-\frac{1}{\sin(\varphi/2)} + \ln \left(1 + \frac{1}{\sin(\varphi/2)} \right) \right] dS.$$

Решение задачи Неймана для плоскости

Аналогично тому, как решается задача Неймана для сферы, решается и задача Неймана для плоскости. Для этого необходимо найти гармоническую в одном из полупространств функцию U по значениям ее нормальной производной, заданным в точках бесконечной горизонтальной плоскости.

Функция Неймана в данном случае имеет вид (см. рис. 47) $N = 1/r + 1/r_1$. Эта функция удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к функциям Неймана. Действительно, функция N гармоническая во всем полупространстве, кроме точки $r=0$, и регулярная на бесконечности. Нормальная производная от нее

$$\frac{\partial N}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) \frac{\partial r}{\partial n} + \frac{\partial}{\partial r_1} \left(\frac{1}{r_1} \right) \frac{\partial r_1}{\partial n} = -\frac{1}{r^2} \cos(r, n) - \frac{1}{r_1^2} \cos(r_1, n).$$

Так как в точках самой плоскости $r=r_1$, $\cos(r_1, n) = -\cos(r, n)$, то

$$\frac{\partial N}{\partial n} = -\frac{1}{r^2} \cos(r, n) + \frac{1}{r^2} \cos(r, n) = 0.$$

На бесконечности $N=0$.

Значение функции Неймана на поверхности S , т. е. в точках самой плоскости,

$$N = (1/r) + (1/r_1) = 2/r.$$

Поэтому решение задачи Неймана для плоскости получим из равенства (IV.52) при $U(0)=0$:

$$U(P) = \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} dS, \quad (\text{IV.60})$$

где интегрирование распространяется на всю бесконечную плоскость. При этом в прямоугольной системе координат при $\partial U / \partial n = U_z$

$$U(P) = U(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U_z(\xi, \eta, 0) d\xi d\eta}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2]^{1/2}}.$$

В цилиндрической системе координат

$$U(0, 0, z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{U_z(\rho, \varphi, 0) \rho d\rho d\varphi}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Формулу (IV.60) в частном случае можно получить из (IV.58), решающей задачу Неймана для сферы, приняв в ней $U(0)=0$ при $R \rightarrow \infty$. Это справедливо при решении внутренней задачи. Для случая внешней задачи Неймана из (IV.59) при $R \rightarrow \infty$ найдем

$$U(P) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{r_1} \frac{\partial U}{\partial n} dS.$$

Нормаль в данном случае направлена от плоскости к точке P . Полученные формулы верны и тогда, когда точка P лежит на плоскости.

Формулу (IV.60) можно свести к потенциалу простого слоя, расположенного на поверхности S . Обозначим

$$\frac{\partial U}{\partial n} = F, \quad \frac{1}{2\pi} \frac{\partial U}{\partial n} = \frac{1}{2\pi} F = \mu.$$

Тогда

$$U(P) = \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{\mu}{r} dS.$$

Сравнивая это выражение с потенциалом притяжения простого слоя, видим, что оно определяет потенциал притяжения простого слоя с поверхностной плотностью распределения масс $\mu = (1/2\pi)F$. Здесь функция F соответствует вертикальному градиенту поля U (в случае гравитационного потенциала величине силы притяжения V_z). Поэтому в точках поверхности S (в данном случае бесконечной горизонтальной плоскости) значения вертикального градиента функции U пропорциональны плотности распределения масс на поверхности: $F(\mu) = 2\pi\mu(M)$. Величину всей массы рассматриваемого слоя можно определить из равенства

$$m = \int_S \mu dS = \frac{1}{2\pi} \int_S F dS = \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{\partial U}{\partial n} dS.$$

Отсюда видно, что если всю массу m аномального тела распределить на некоторой бесконечной горизонтальной плоскости с плотностью

$$\mu = (1/2\pi) (\partial U / \partial n),$$

внешнее поле от такого тела будет совпадать с полем простого слоя, расположенного на этой поверхности с плотностью μ , т. е. такой простой слой эквивалентен данному телу по отношению к значениям внешнего поля.

Занишем (IV.60) в наиболее общем виде для определения производных функции U различных порядков. Обозначим производную

$$\frac{\partial^{m+n+l} U(x, y, z)}{\partial x^m \partial y^n \partial z^l} = U_{m, n, l},$$

где m, n, l — порядки производной от функции U по направлениям x, y, z .

Величину указанной производной можно определить, дифференцируя соответствующее число раз обе части выражения (IV.60). При этом необходимо учесть, что в правой части этой формулы от переменных x, y, z зависит только функция $1/r$ (интегрирование ведется по переменным ξ, η). Беря производные соответствующее число раз, из (IV.60) получим

$$U_{m, n, l} = \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{\partial U}{\partial n} \frac{\partial^{m+n+l}}{\partial x^m \partial y^n \partial z^l} \left(\frac{1}{r} \right) dS.$$

Эта формула — наиболее общая по сравнению с теми, которые были получены для плоскости при решении задачи Дирихле и Неймана.

Для поля, не зависящего от переменной y и заданного в точках плоскости xOz , задачу Неймана можно решить на осно-

вании формулы (IV.4). Рассмотрим внутреннюю область, для которой

$$2\pi U(P) = \int_l \ln\left(\frac{1}{r}\right) \frac{\partial U}{\partial n} dl - \int_l U \frac{\partial}{\partial n} \left(\ln \frac{1}{r}\right) dl.$$

Так же, как и в рассмотренных выше задачах, введем в эту формулу с помощью второй формулы Грина гармоническую функцию h :

$$2\pi U(P) = \int_l N \frac{\partial U}{\partial n} dl - \int_l U \frac{\partial N}{\partial n} dl, \quad (\text{IV.61})$$

где $N = \ln(1/r) + h$ — функция Неймана. Для плоского поля $h = \ln(1/r_1)$ (см. рис. 49). Поэтому $N = \ln(1/r) + \ln(1/r_1)$, где $r^2 = (x - \xi)^2 + z^2$. На оси x значение $r = r_1$. Поэтому для точек оси x

$$N = 2 \ln(1/r). \quad (\text{IV.62})$$

Значения нормальной производной функции Неймана

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial n} &= \frac{\partial}{\partial n} \left(\ln \frac{1}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial n} \left(\ln \frac{1}{r_1} \right) = - \frac{\partial}{\partial n} (\ln r) - \frac{\partial}{\partial n} (\ln r_1) = \\ &= - \frac{\partial(\ln r)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} - \frac{\partial(\ln r_1)}{\partial r_1} \frac{\partial r_1}{\partial n} = - \frac{1}{r} \cos(r, n) - \frac{1}{r_1} \cos(r_1, n). \end{aligned}$$

Так как для точки на оси x $r = r_1$, $\cos(r_1, n) = -\cos(r, n)$, получим $\partial N / \partial n = 0$. Поэтому решение задачи Неймана в этом случае можно найти из (IV.61) с учетом (IV.62):

$$U(P) = \frac{1}{2\pi} \int_l N \frac{\partial U}{\partial n} dl = \frac{1}{\pi} \int_l \ln \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} dl.$$

Так как интегрирование распространяется на всю ось x , окончательно

$$U(P) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} d\xi = - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial U}{\partial n} \ln [(x - \xi)^2 + z^2] d\xi. \quad (\text{IV.63})$$

В этой формуле $\partial U / \partial n = F$ — вертикальный градиент функции U . Обозначим

$$\frac{1}{\pi} \frac{\partial U}{\partial n} = \frac{1}{\pi} F = \lambda.$$

Тогда (IV.63) перепишем в виде

$$U(P) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \ln(1/r) d\xi.$$

Из сравнения этой формулы с выражением для потенциала плоского простого слоя видно, что при $l=\xi$ и $dl=d\xi$ она определяет потенциал притяжения плоского простого слоя, расположенного на бесконечной оси ξ с линейной плотностью λ . При этом в точках оси ξ значения вертикального градиента U пропорциональны линейной плотности λ : $F=\pi\lambda$. Величину всей массы можно определить из выражения

$$m = (1/\pi) \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d\xi.$$

Отсюда следует, что если всю массу аномального тела распределить на ось ξ с плотностью $\lambda = (1/\pi) (\partial U / \partial \xi)$, внешнее поле от такого тела будет совпадать с полем бесконечного горизонтального плоского простого слоя, распределенного на оси ξ с плотностью λ .

Выше было показано, что интеграл Пуассона осуществляет операцию аналитического продолжения аномалий в области верхнего полупространства. Эта операция как составная часть входит и в формулы, полученные в результате решения задачи Неймана. Только в них значения потенциала и его производных в общем случае некоторого элемента поля f определяют через значения нормальной производной этой функции $\partial f / \partial n$. Поэтому и формулу (IV.60) можно представить в виде интеграла свертки

$$\hat{f}_T(x, y) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi, \eta) P(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta,$$

где

$$\hat{f}_T(x, y) = U(P) = U(x, y);$$

$$\hat{f}(\xi, \eta) = \partial U(\xi, \eta) / \partial n = U_z(\xi, \eta);$$

$$P(x - \xi, y - \eta) = [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + h^2]^{-1/2}.$$

Аналогично для плоского поля [формула (IV.63)]

$$\hat{f}_T(x) = (1/\sqrt{2\pi}) \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) P(x - \xi) d\xi,$$

где

$$P(x - \xi) = -(\sqrt{2\pi}/\pi) \ln[(x - \xi)^2 + h^2].$$

Беря преобразования Фурье от обеих частей равенств для функций $\hat{f}_T(x, y)$ и $\hat{f}_T(x)$ по формулам

$$S_T(u, v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_T(x, y) \exp[-i(ux + vy)] dx dy;$$

$$S_T(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_T(x) \exp(-i\omega x) dx,$$

в более удобной спектральной форме, как и выше, получим выражения

$$S_{\tau}(u, v) = S(u, v) \Phi(u, v);$$

$$S_{\tau}(\omega) = S(\omega) \Phi(\omega).$$

Здесь частотными характеристиками преобразования полей соответственно в трехмерном и двухмерном случаях являются функции

$$\Phi(u, v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(\xi, \eta) \exp[-i(u\xi + v\eta)] d\xi d\eta =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp[-i(u\xi + v\eta)] d\xi d\eta}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + h^2]^{1/2}} = -\frac{1}{\rho} \exp(-\rho h);$$

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} P(\xi) \exp(-i\omega\xi) d\xi =$$

$$= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln[(x-\xi)^2 + h^2] \exp(-i\omega\xi) d\xi = -\frac{1}{|\omega|} \exp(-|\omega| h)$$

Отсюда видно, что при решении задачи Неймана исходное поле $\partial f / \partial n$ подвергается одновременно двум операциям — аналитическому продолжению на высоту и определению первообразной функции, так как частотными характеристиками операции вычисления первообразной по z являются функции $-1/\rho$ и $-1/|\omega|$.

С учетом приведенных выражений частотных характеристик трансформированные значения аномалии, полученные в результате решения задачи Неймана, можно переписать через спектры исходных аномалий следующим образом. Для трехмерных аномалий

$$f_{\tau}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(u, v) S(u, v) \exp[i(ux + vy)] du dv =$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\rho} S(u, v) \exp(-\rho z) \exp[i(ux + vy)] du dv.$$

Если аномалия $f(x, y)$ симметрична относительно вертикальной оси, т. е. зависит только от переменной $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, это выражение можно переписать через формулу обратного преобразования Ханкеля:

$$f_{\tau}(r) = \int_0^{\infty} S(\rho) \exp(-\rho z) J_0(\rho r) d\rho.$$

Здесь функцию $S(\rho)$ можно определить из равенства

$$S(\rho) = \int_0^{\infty} r f(r) J_0(\rho r) dr.$$

Для двухмерных аномалий

$$\begin{aligned} f_{\tau}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega) S(\omega) \exp(i\omega x) d\omega = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|\omega|} S(\omega) \exp(-|\omega|z) \exp(i\omega x) d\omega. \end{aligned}$$

Рассмотрим очень кратко на примере магнитного поля вопрос определения потенциала и его горизонтальных производных через значения вертикальной производной. Более подробно этот вопрос рассматривается в курсе «гравиразведка и магниторазведка».

Пусть функция U в формуле (IV.60) выражает значения магнитного потенциала. Тогда для определения составляющих напряженности магнитного поля $X = \partial U / \partial x$, $Y = \partial U / \partial y$, $Z = \partial U / \partial z$, переходя в (IV.60) под интегралом от значения производной к вертикальной составляющей магнитного поля, найдем

$$U(P) = \frac{1}{2\pi} \int_S Z(M) \frac{1}{r} dS, \quad M \in S.$$

Эта формула позволяет определить значения потенциала магнитного поля через значения функции Z .

Беря производные по x и y от обеих частей равенства (IV.60) и имея в виду, что в правой его части от переменных x и y зависит только функция

$$r = [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2]^{1/2},$$

получим

$$X = -\frac{1}{2\pi} \int_S Z(M) \frac{x - \xi}{r^3} dS;$$

$$Y = -\frac{1}{2\pi} \int_S Z(M) \frac{y - \eta}{r^3} dS.$$

Из этих формул можно определить составляющие X , Y через значения функции Z .

Для случая двухмерных аномалий из (IV.63) аналогично найдем

$$U(P) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Z(\xi) \ln\left(\frac{1}{r}\right) d\xi;$$

$$X(P) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Z(\xi) \frac{x - \xi}{(x - \xi)^2 + z^2} d\xi,$$

где $r = [(x - \xi)^2 + z^2]^{1/2}$.

При $z=0$ из этих выражений получаются формулы, определяющие значения одних производных потенциала U через другие на исходной плоскости наблюдений. Аналогичные формулы можно найти и для значений производных порядков выше первого. Они будут верны при соответствующих обозначениях и для производных гравитационного поля.

Учет разновысотности наблюдений

Большинство существующих способов интерпретации основано на использовании гравитационных и магнитных аномалий, заданных в точках горизонтальной плоскости или прямой. В то же время наблюдаемые значения элементов полей относятся к физической поверхности Земли, которая по-разному и значительно может отличаться от горизонтальной плоскости. Пренебрежение различием высот пунктов наблюдений может привести к достаточно большим ошибкам в результатах интерпретации.

Рассмотренные выше решения задач Дирихле и Неймана также основаны на применении значений аномалий, заданных в точках сферы, горизонтальной плоскости или прямой. Поэтому и они не учитывают разновысотность наблюдений.

Учетом разновысотности наблюдений занимались многие исследователи (В. И. Аронов, В. А. Кузиванов, В. А. Магницкий, М. С. Молоденский, В. Н. Страхов и другие).

М. С. Молоденским решена задача редуцирования значений аномалий, измеренных на физической поверхности Земли, на плоскость. Метод решения этой задачи основан на аппроксимации реальных возмущающих масс простым слоем, распределенным на физической поверхности Земли. При этом потенциал притяжения аномальных масс в некоторой точке P

$$V(P) = G \int_S \mu (1/r) dS,$$

где μ — плотность простого слоя, соответствующая распределению аномальных масс; r — расстояние от точки P до текущей точки поверхности Земли S .

Из выражения для нормальной производной потенциала можно получить уравнение

$$2G\pi\mu_0 \cos \alpha = \Delta g_0 + G \int_S \mu \frac{z - z_0}{r^3} dS,$$

где μ_0 — плотность в некоторой расчетной точке O ; Δg_0 — аномалия силы тяжести на физической поверхности S в точке O ; z и z_0 — значения высот текущей точки поверхности и точки O ; α — угол наклона поверхности S в текущей точке. Величина

$2\pi\mu_0 G$ определяет скачок в значении первой производной потенциала простого слоя на поверхности S .

Из последнего равенства после небольших преобразований получают более удобную для расчетов формулу, из которой определяют (например, методом последовательных приближений) значения плотности μ . Зная распределение величин μ в точках S , легко можно определить решением прямой задачи для простого слоя и значения силы тяжести в точках рассматриваемой горизонтальной плоскости P .

Рассмотренный способ — достаточно трудоемкий и непростой, особенно в условиях сложного рельефа. Наиболее удобным для применения является способ, предложенный В. И. Ароновым, идея которого заключается в следующем.

В точках M некоторой внутренней поверхности S' подбирается такая функция $U(M)$, которая при аналитическом продолжении вверх в узлы исходной расчетной сети совпадает со значениями наблюдаемого элемента поля $U(P)$ в точках физической поверхности S . Дальнейшие вычисления ведутся уже по подобранным на поверхности S' значениям $U(M)$ с использованием интеграла Пуассона, дающего решение внешней задачи Дирихле для бесконечной плоскости или линии. При этом в двухмерном варианте, например, значения $U(M)$ определяются из интегрального уравнения (интеграл Пуассона)

$$U(P) = \frac{z - z'}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U(M) d\xi}{(x - \xi)^2 + (z - z')^2},$$

путем его замены системой линейных алгебраических уравнений.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие функции называются гармоническими? Какими свойствами обладают гармонические функции? Чему равно интегральное среднее от гармонической функции по поверхности сферы?

2. Что выражает теорема Гаусса о среднем значении гармонической функции? Как можно применить эту теорему Гаусса для получения вычислительных схем в случае аналитического продолжения аномалий?

3. Достигают ли гармонические функции внутри области их задания максимального или минимального значений?

4. Какие функции называются аналитическими? Какие условия называются условиями Коши — Римана? Как связаны гармонические и аналитические функции между собой? Как можно образовать из гармонических функций аналитическую функцию?

5. Что такое комплексная напряженность поля? Что понимается под комплексным потенциалом поля? Как связаны действительная и мнимая части комплексного потенциала с потенциалом поля? Как можно записать комплексную напряженность через массы источников поля?

6. Какой вид имеют интегралы типа Коши? Как можно представить комплексную напряженность поля интегралами типа Коши? Какие точки называются особыми? Какие существуют типы изолированных особых точек?

7. Какая задача теории гармонических функций называется задачей Дирихле? Каковы граничные условия задачи Дирихле? Какая задача называется задачей Неймана? Каковы граничные условия задачи Неймана? Как можно решить задачу Дирихле?

8. Какая функция называется функцией Грина? Какой вид имеет функция Грина для сферы? Какими свойствами обладает функция Грина? Чему равна функция Грина на поверхности сферы? Как можно определить нормальную производную от функции Грина?

9. Какой интеграл называется интегралом Пуассона? Какую задачу он решает? Как из интеграла Пуассона можно получить теорему Гаусса о среднем значении гармонической функции?

10. Какой вид имеет функция Грина для плоскости? Как определяется нормальная производная от функции Грина для плоскости? Какой вид имеет интеграл Пуассона для плоскости?

11. Как можно решить задачу Дирихле для случая плоского поля? Какой вид имеет функция Грина для плоского поля? Какой вид имеет интеграл Пуассона для плоского поля?

12. Как можно решить задачу Неймана? Какую функцию называют функцией Неймана? Какими свойствами обладает функция Неймана? Как можно определить нормальную производную от функции Неймана? Какой вид имеет функция Неймана для сферы?

13. Какой вид имеет функция Неймана для плоскости? Какой вид имеет функция Неймана для случая плоского поля? В чем заключается практическое применение решения задачи Неймана?

Для тел произвольной формы выражением потенциала силы тяжести и магнитного потенциала в том виде, в каком они представлены в равенствах (II.22), (II.49), невозможно пользоваться, так как входящие в эти формулы объемные интегралы не раскрываются в элементарных функциях. Только для весьма немногих тел простейшей формы получаются простые и удобные выражения. Поэтому в общем случае приходится прибегать к какому-либо способу приближенного представления функций объемных потенциалов.

Таким математическим аппаратом является аппарат бесконечных рядов того или иного вида, теория которых позволяет разложить потенциал на сумму бесчисленного множества простых слагаемых, из которых можно затем брать столько первых членов, сколько требуется в конкретной задаче. Весьма удобный способ представления потенциала в виде бесконечного ряда — классическое разложение его по так называемым сферическим, или шаровым, функциям.

§ 24. СФЕРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И УРАВНЕНИЕ ЛАПЛАСА

Сферические функции [1, 6] появляются при изучении некоторых частных решений уравнения Лапласа

$$\Delta U = \partial^2 U / \partial x^2 + \partial^2 U / \partial y^2 + \partial^2 U / \partial z^2 = 0.$$

Пусть эти частные решения имеют вид однородного многочлена степени n (n — некоторое целое положительное число) с тремя независимыми переменными x, y, z . Многочлен нескольких переменных называется однородным многочленом степени n , если при умножении этих переменных на произвольную величину t многочлен умножается на t^n , т. е. имеет место тождество

$$U_n(tx, ty, tz) = t^n U_n(x, y, z); \quad U_n(tx, ty, tz) = t^n U_n(x, y, z)$$

при любых допустимых значениях x, y, z, t . Число n может быть любым фиксированным вещественным числом.

Примеры однородных многочленов (C_1, C_2, C_3, C_4 — некоторые постоянные): первой степени

$$U_1(x, y, z) = C_1 x + C_2 y + C_3 z,$$

третьей степени

$$U_3(x, y) = C_1x^3 + C_2x^2y + C_3xy^2 + C_4y^3.$$

Такие однородные многочлены $U_n(x, y, z)$ в силу равенства $\Delta[U_n(x, y, z)] = 0$ называются гармоническими многочленами степени n . Вообще всякий общий гармонический многочлен n -й степени можно представить в виде [1, 5]

$$U_n(x, y, z) = \sum_{s=1}^{2n+1} C_n^s U_n^s(x, y, z),$$

где C_n^s ($s=1, 2, \dots, 2n+1$) — некоторые произвольные постоянные; $U_n^s(x, y, z)$ — некоторые линейно независимые гармонические многочлены n -й степени.

В сферических координатах при

$$x = \rho \sin \theta \cos \lambda, \quad y = \rho \sin \theta \sin \lambda, \quad z = \rho \cos \theta$$

всякий однородный многочлен n -й степени можно представить в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от ρ , а другая — только от координат θ и λ :

$$U_n = \rho^n Y_n(\theta, \lambda), \quad (V.1)$$

$$\text{где } Y_n(\theta, \lambda) = \sum_{m_1+m_2+m_3=n} C_n^{(m_1, m_2, m_3)} \sin^{m_1+m_2} \theta \cos^{m_3} \theta \cos^{m_1} \lambda \sin^{m_2} \lambda.$$

Если U_n , определяемый (V.1), является гармоническим многочленом, то он называется объемной сферической функцией, а множитель $Y_n(\theta, \lambda)$ — поверхностной сферической функцией, или просто сферической функцией порядка n . Из последнего равенства видно, что сферическая функция порядка n есть многочлен относительно синусов и косинусов углов θ и λ , каждый член которого является произведением функции одного только θ на функцию одной только λ . Кроме того, так как

$$\sin^{m_1+m_2} \theta \cos^{m_3} \theta = (1 - \cos^2 \theta)^{(m_1+m_2)/2} \cos^{m_3} \theta,$$

множители, содержащие только θ , можно рассматривать как функцию $\cos \theta$. Их принято обозначать $P_n^k(\cos \theta)$ (n — порядок многочлена; k меняется от нуля до n , так как сферическая функция в общем виде — это линейная комбинация $2n+1$ элементарных сферических функций).

Другой множитель, содержащий только угол λ , можно представить в виде тригонометрического многочлена относительно синусов и косинусов целых кратностей λ . Этот многочлен будет содержать только косинусы, если m_2 — четное число, и только синусы, если m_2 — нечетное. Число членов с косинусами раз-

личных кратностей угла λ будет равно $n+1$, а число членов с синусами равно n , так как наибольшая кратность λ будет равна $m_1 + m_2 \leq n$.

Таким образом, всякую сферическую функцию порядка n в общем виде можно записать так:

$$Y_n(\theta, \lambda) = \sum_{k=0}^n P_n^k(\cos \theta) [A_{nk} \cos k\lambda + B_{nk} \sin k\lambda], \quad (\text{V.2})$$

где A_{nk} и B_{nk} — произвольные постоянные.

Сферические функции тесно связаны с уравнением Лапласа и получаются из него при его решении в сферических координатах.

Пусть в уравнении Лапласа (III.26) при $\rho=r$ и $V=U$

$$\frac{1}{\rho^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \lambda^2} \right] = 0 \quad (\text{V.3})$$

функция U — гармонический многочлен, выраженный в сферических координатах. Будем искать решение этого уравнения в виде произведения

$$U = f(\rho) Y(\theta, \lambda).$$

Подставляя это выражение в (V.3), найдем

$$\frac{1}{\rho^2} Y(\theta, \lambda) \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho^2 \frac{\partial f(\rho)}{\partial \rho} \right] + \frac{f(\rho)}{\rho^2} \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial Y(\theta, \lambda)}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y(\theta, \lambda)}{\partial \lambda^2} \right\} = 0.$$

Разделив переменные, сможем написать

$$\frac{1}{f(\rho)} \frac{\partial}{\partial \rho} [\rho^2 f'(\rho)] = - \frac{1}{Y(\theta, \lambda)} \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial Y(\theta, \lambda)}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y(\theta, \lambda)}{\partial \lambda^2} \right\}.$$

Левая часть этого равенства зависит только от ρ , а правая — только от θ и λ , что может иметь место лишь в том случае, когда обе части равенства равны одной и той же постоянной, которую обозначим α :

$$\frac{1}{f(\rho)} \frac{\partial}{\partial \rho} [\rho^2 f'(\rho)] = \alpha; \quad (\text{V.4})$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \lambda^2} + \alpha Y = 0. \quad (\text{V.5})$$

Заменим функцию U на U_n . Сравнивая (V.1) и (V.4), видим, что $f(\rho) = \rho^n$. При этом значении $f(\rho)$ из (V.5) найдем

$$\alpha = n(n+1). \quad (\text{V.6})$$

Подставляя это значение α в (V.5), получим равенство

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y_n}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y_n}{\partial \lambda^2} + n(n+1) Y_n = 0,$$

которое имеет место для любой сферической функции порядка n . Так как сферическая функция в общем виде является линейной комбинацией одночленов, каждый из которых равен произведению функции от θ на функцию от λ , то частное решение данного уравнения найдем в виде $P_n(\theta) L_n(\lambda)$. Для этого выражения последнее равенство перепишем:

$$\frac{L_n}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial P_n}{\partial \theta} \right) + \frac{P_n}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 L_n}{\partial \lambda^2} + n(n+1) P_n L_n = 0.$$

После разделения переменных это уравнение распадается на два [по той же причине, по которой выше было получено два уравнения (V.4) и (V.5), только в данном случае вместо постоянной α взято число l]:

$$d^2 P_n / d\lambda^2 = -l P_n;$$

$$\sin \theta \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP_n}{d\theta} \right) + [n(n+1) \sin^2 \theta - l] P_n = 0.$$

Из первого равенства следует, что $l = k^2$, где k — некоторое целое число, только в этом случае функция L_n будет линейной комбинацией косинуса и синуса. Тогда, переходя от $\sin \theta$ к $\cos \theta$, обозначив $\cos \theta$ через x , последнее уравнение перепишем:

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP_n}{dx} \right] + \left[n(n+1) - \frac{k^2}{1-x^2} \right] P_n = 0. \quad (\text{V.7})$$

Это и есть искомое уравнение, частными решениями которого будут сферические функции.

При $k=0$

$$(1-x^2) \frac{d^2 P_n}{dx^2} - 2x \frac{dP_n}{dx} + n(n+1) P_n = 0. \quad (\text{V.8})$$

Это уравнение является уравнением Лежандра.

§ 25. ПОЛИНОМЫ ЛЕЖАНДРА. ИХ СВЯЗЬ С ПОТЕНЦИАЛАМИ ПРИТЯЖЕНИЯ

Полиномы Лежандра

Частное решение уравнения (V.8) имеет вид

$$P_n(x) = C \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n},$$

где C — произвольная постоянная. При $C = 1/2^n n!$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n(x^2 - 1)^n}{dx^n}. \quad (\text{V.9})$$

Этот многочлен называется многочленом, или полиномом, Лежандра, а формула (V.9) — формулой Родрига.

Эта формула позволяет определить полиномы Лежандра любого порядка n . При $n=0, 1, 2, 3$ из нее получим соответственно

$$P_0(x) = 1; \quad P_1(x) = x;$$

$$P_2(x) = (3x^2 - 1)/2; \quad P_3(x) = (5x^3 - 3x)/2.$$

При $k \neq 0$ частным решением уравнения (V.7) будут так называемые присоединенные функции Лежандра, определяемые через полиномы Лежандра следующим образом:

$$P_n^k(x) = (1 - x^2)^{k/2} \frac{d^k P_n(x)}{dx^k}. \quad (\text{V.10})$$

Из (V.10) можно определить значения различных присоединенных функций Лежандра. Приняв $n=1, 2, 3$ и $k=1, 2, 3$, получим

$$P_1^1(x) = (1 - x^2)^{1/2};$$

$$P_2^1(x) = 3x(1 - x^2)^{1/2};$$

$$P_2^2(x) = 3(1 - x^2);$$

$$P_3^1(x) = (3/2)(1 - x^2)^{1/2}(5x^2 - 1);$$

$$P_3^2(x) = 15(1 - x^2)x;$$

$$P_3^3(x) = 15(1 - x^2)^{3/2}.$$

Многочлены Лежандра получаются из частного решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка (V.8). У таких уравнений согласно теории существует и второе частное решение, линейно независимое от первого. Оно имеет вид функций [1]

$$Q_n(x) = P_n(x) \int_{\infty}^x \frac{dx}{(1 - x^2)P_n^2(x)}.$$

Эти функции называются функциями Лежандра второго рода. При $n=0, 1, 2$ и 3 для них получим

$$Q_0 = (1/2) \ln[(x+1)/(x-1)];$$

$$Q_1 = P_1(x) Q_0(x) - 1 = (1/2)x \ln[(x+1)/(x-1)] - 1;$$

$$Q_2 = P_2(x) Q_0(x) - (3/2)x;$$

$$Q_3 = P_3(x) Q_0(x) - (5/2)x^2 + (2/3).$$

Следует отметить, что уравнение (V.7) также имеет второе линейно независимое решение $Q^k_n(x)$:

$$Q^k_n(x) = P^k_n(x) \int_{\infty}^x \frac{dx}{(1-x^2)[P^k_n(x)]^2}.$$

Эти функции называют присоединенными функциями Лежандра второго рода.

Все элементарные сферические функции порядка n — это произведения присоединенных функций Лежандра на косинусы или синусы целых кратностей угла λ . В свою очередь присоединенные функции Лежандра выражаются через полиномы Лежандра. Поэтому основными элементарными функциями являются эти последние. Кроме того, из всех сферических функций наиболее важные при представлении гравитационного и магнитного потенциалов в виде ряда сферических функций — полиномы Лежандра, поэтому больше внимания в дальнейшем уделим им.

Рассмотрим основные свойства многочленов Лежандра.

а. Свойство ортогональности. Бесконечная последовательность функций $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ называется ортогональной на отрезке (a, b) , если выполняется условие

$$\int_a^b f_n(x) f_m(x) dx = 0$$

для любых двух неравных значений n и m .

Возьмем последовательность многочленов Лежандра (V.9) $P_0(x), P_1(x), P_2(x), \dots, P_n(x), \dots$. Эта последовательность является ортогональной в промежутке $(-1, 1)$, т. е.

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \frac{1}{2^n \cdot n!} \int_{-1}^1 \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} P_m(x) dx = 0$$

при $n \neq m$.

Справедливость этого равенства можно показать, например, интегрируя интеграл в правой части формулы по частям при [1]

$$P_m(x) = u; \quad \frac{d^2(x^2-1)^n}{dx^n} dx = dv.$$

При $n = m$

$$\int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx = 2/(2n+1).$$

Аналогично можно показать и ортогональность присоединенных функций Лежандра, т. е. всякая система функций $P_0^k(x),$

$$P_1^k(x), \dots, P_n^k(x), P_{n+1}^k(x), \dots,$$

при каждом определенном k образует ортогональную в промежутке $(-1, 1)$ систему

$$\int_{-1}^1 P_n^k(x) P_m^k(x) dx = 0, \quad m \neq n.$$

При $m = n$

$$\int_{-1}^1 [P_n^k(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+k)!}{(n-k)!}.$$

Свойством ортогональности обладают и общие сферические функции порядка n . В этом случае бесконечная последовательность сферических функций двух переменных $Y_0(\theta, \lambda)$,

$$Y_1(\theta, \lambda), \dots, Y_n(\theta, \lambda), \dots$$

образует на сфере единичного радиуса ортогональную систему функций, т. е.

$$\int_{(\Sigma)} Y_n(\theta, \lambda) Y_m(\theta, \lambda) dS = 0, \quad n \neq m$$

(интегрирование ведется по поверхности сферы). Свойство ортогональности очень важное. Оно позволяет определять коэффициенты рядов при представлении гравитационного или магнитного потенциалов в виде сферических функций.

б. Многочлены Лежандра при аргументах 1 и -1 равны соответственно 1 и $(-1)^n$.

в. Коэффициент y высшей степени x многочлена Лежандра равен $(2n)!/[2^n(n!)^2]$. Значение этого коэффициента можно получить, произведя в (V.9) дифференцирование функции $(x^2-1)^n$. Действительно, после n -кратного дифференцирования для коэффициента при x^n получим значение $2n(2n-1)(2n-2)\dots[2n-(n-1)]$. Тогда для коэффициента при высшей степени полинома

$$\frac{2n(2n-1)(2n-2)\dots(n+1)}{2^n n!} \frac{n!}{n!} = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}.$$

Полиномы Лежандра связаны друг с другом рекуррентным соотношением

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x).$$

Из этого равенства можно определить P_{n+1} по известным значениям P_n и P_{n-1} .

Без доказательства приведем еще два соотношения, выражающие свойства ортогональности полиномов Лежандра на отрезке от 1 до -1 .

При $m \neq n$

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = 0,$$

при $m = n$

$$\int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx = 2/(2n+1).$$

**Представление функции $1/r$ в виде ряда
многочленов Лежандра**

Рассмотрим рис. 50, где $MP=r$, $OM=R$, $OP=\rho$, а угол $\angle MOP=\theta$; начало координат расположено в точке O ; M — переменная точка интегрирования, в которой находится масса (точка M может быть внутри тела, на его поверхности, на какой-то линии, например при рассмотрении потенциалов притяжения объемных масс, простого слоя, линейных масс, или просто где-то в пространстве, например потенциал притяжения точечной массы). Точка P — это та фиксированная точка, в которой расположена единичная масса или в которой ищется значение потенциала.

Расстояние r — это расстояние между двумя точками $M(\xi, \eta, \zeta)$ и $P(x, y, z)$:

$$r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2$$

или через угол θ

$$r^2 = R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos \theta. \quad (\text{V.11})$$

Функцию $1/r$ легко представить в виде ряда сферических простейших функций — полиномов Лежандра. Учитывая, что $1/r$ входит в формулы потенциалов притяжения всех рассмотренных видов, получаемый для $1/r$ ряд многочленов Лежандра можно использовать и при представлении этих потенциалов притяжения в виде ряда многочленов Лежандра.

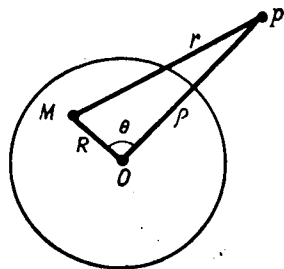


Рис. 50. Схема расположения точек P , M , O для представления функции $1/r$ в виде ряда полиномов Лежандра

Рассмотрим отношение R/r . Для него из (V.11) найдем

$$\frac{R}{r} = \frac{1}{\sqrt{1 + \rho^2/R^2 - 2(\rho/R)\cos\theta}}.$$

Обозначим $\rho/R = t$, $\cos\theta = x$. Тогда

$$\frac{R}{r} = \frac{1}{\sqrt{1 + t^2 - 2xt}}.$$

Пусть $\rho < R$, т. е. $\rho/R < 1$. Для этого случая разложим функцию R/r в ряд Маклорена по степеням t :

$$\frac{R}{r} = f(0) + tf'(0) + \frac{t^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{t^n}{n!} f^n(0) + \dots$$

Дифференцируя $R/r = f(t)$ по t и приравнявая t к нулю, найдем производные:

$$f(0) = 0; \quad f'(0) = x;$$

$$f''(0) = 3x^2 - 1; \quad f'''(0) = 3(5x^3 - 3x)$$

и т. д. При этих значениях производных ряд Маклорена перепишется в виде

$$\frac{R}{r} = 1 + xt + \frac{3x^2 - 1}{2} t^2 + \frac{5x^3 - 3x}{2} t^3 + \dots$$

Сравнивая коэффициенты при t^n полученного ряда с приведенными выше полиномами Лежандра при $n=0, 1, 2, 3$, видим, что

$$\begin{aligned} \frac{R}{r} &= P_0(x) + tP_1(x) + t^2P_2(x) + \dots + t^nP_n(x) + \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n(x). \end{aligned}$$

Переходя от x к $\cos\theta$, от t к ρ/R , для функции $1/r$ будем иметь

$$\frac{1}{r} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{R^{n+1}} P_n(\cos\theta). \quad (\text{V.12})$$

Этот ряд является рядом сферических функций, а конкретнее — рядом полиномов Лежандра. Он сходится равномерно при всех значениях $\rho/R < 1$ или $\rho < R$ и при $0 \leq \theta \leq \pi$.

Если $\rho/R > 1$, т. е. $\rho > R$, из соотношения (V.11) нужно определить

$$\frac{\rho}{R} = \frac{1}{\sqrt{1 + R^2/\rho^2 - 2(R/\rho)\cos\theta}}$$

и, обозначив $R/\rho = t$, $\cos\theta = x$, способом, приведенным выше, получим ряд

$$\frac{\rho}{r} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^n}{\rho^n} P_n(\cos\theta),$$

или

$$\frac{1}{r} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^n}{\rho^{n+1}} P_n(\cos \theta). \quad (\text{V.13})$$

Область сходимости этого ряда определяется областью сходимости ряда Маклорена — он сходится равномерно при всех значениях

$$\rho/R > 1 \quad \text{или} \quad \rho > R \quad \text{и} \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

В предыдущих разделах было показано, что функция $1/r$ гармоническая всюду, кроме самой точки P . Поэтому в этих точках гармоническими будут и выражения правых частей равенств (V.12), (V.13). А так как в их правых частях находится сумма членов, конкретнее, сумма целых однородных многочленов степени n , среди которых нельзя осуществить никакого приведения подобных членов, становится ясно, что каждое слагаемое правой части в отдельности является гармонической функцией, т. е. при любом n

$$\Delta[(\rho^n/R^{n+1}) P_n(\cos \theta)] = 0, \quad \rho < R, \quad (\text{V.14})$$

и

$$\Delta[(R^n/\rho^{n+1}) P_n(\cos \theta)] = 0, \quad \rho > R. \quad (\text{V.15})$$

Справедливость этих равенств покажем на примере с $n=2$. Получаемые при этом значения слагаемых из (V.14) и (V.15) обозначим соответственно U_1 и U_2 :

$$U_1 = (\rho^2/R^3) P_2(\cos \theta), \quad \rho < R;$$

$$U_2 = (R^2/\rho^3) P_2(\cos \theta), \quad \rho > R.$$

Так как многочлен Лежандра

$$P_2(\cos \theta) = (3 \cos^2 \theta - 1)/2,$$

а в сферических координатах $z = \rho \cos \theta$, т. е. $\cos \theta = z/\rho$, то

$$U_1 = \frac{1}{2R^3} (3z^2 - \rho^2) = \frac{1}{2R^3} (2z^2 - x^2 - y^2);$$

$$U_2 = (R^2/2\rho^5) (2z^2 - x^2 - y^2),$$

где учтено, что $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Рассмотрим вначале функцию U_1 . Для нее

$$\partial U_1 / \partial x = -x/R^3; \quad \partial U_1 / \partial y = -y/R^3; \quad \partial U_1 / \partial z = 2z/R^3.$$

Тогда

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} = -\frac{1}{R^3}; \quad \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} = -\frac{1}{R^3}; \quad \frac{\partial^2 U_1}{\partial z^2} = \frac{2}{R^3}.$$

Отсюда видно, что

$$\partial^2 U_1 / \partial x^2 + \partial^2 U_1 / \partial y^2 + \partial^2 U_1 / \partial z^2 = 0,$$

т. е. функция U_1 — гармоническая.

Рассмотрим теперь функцию U_2 . Для ее производных после небольших преобразований получим

$$\partial U_2 / \partial x = (R^2 / 2\rho^7) (3x\rho^2 - 15xz^2);$$

$$\partial U_2 / \partial y = (R^2 / 2\rho^7) (3y\rho^2 - 15yz^2);$$

$$\partial U_2 / \partial z = (R^2 / 2\rho^7) (9z\rho^2 - 15z^3).$$

Дифференцируя второй раз, найдем

$$\partial^2 U_2 / \partial x^2 = (R^2 / 2\rho^9) (3\rho^4 - 15\rho^2 x^2 - 15\rho^2 z^2 + 105x^2 z^2);$$

$$\partial^2 U_2 / \partial y^2 = (R^2 / 2\rho^9) (3\rho^4 - 15\rho^2 y^2 - 15\rho^2 z^2 + 105y^2 z^2);$$

$$\partial^2 U_2 / \partial z^2 = (R^2 / 2\rho^9) (9\rho^4 - 90\rho^2 z^2 + 105z^4).$$

Суммируя первые два равенства, нетрудно убедиться, что

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2} = -\frac{R^2}{2\rho^9} (9\rho^4 - 90\rho^2 z^2 + 105z^4).$$

Следовательно и в данном случае

$$\Delta U_2 = \partial^2 U_2 / \partial x^2 + \partial^2 U_2 / \partial y^2 + \partial^2 U_2 / \partial z^2 = 0.$$

Аналогично можно показать гармоничность членов выражений (V.14) и (V.15) при любом другом значении n .

Разложение потенциалов притяжения других видов

В случаях, когда поле симметрично относительно вертикальной оси z , можно перейти от разложения потенциала притяжения точечной массы в ряды полиномов Лежандра к более общим задачам. Применение полиномов Лежандра в этих случаях основано на использовании следующей аналогии (Н. И. Идельсон).

Предположим, что потенциал притяжения $V(\rho, \theta)$ представлен в виде равномерно сходящегося для всех значений ρ и θ ряда

$$V(\rho, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (\rho^n / R^n) P_n(\cos \theta), \quad \rho < R,$$

или

$$V(\rho, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{R^{n+1}}{\rho^{n+1}} P_n(\cos \theta), \quad \rho > R,$$

где A_n и B_n — некоторые постоянные числа.

Каждый член этих рядов, как было отмечено выше, является гармонической функцией координат точки P . При $\theta=0$ значения $P_n(\cos \theta)=1$, $\rho=z$, поэтому для точек положительной части оси

$$V(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z^n/R^n), \quad z < R,$$

или

$$V(z) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{R^{n+1}}{z^{n+1}}, \quad z > R.$$

На основании этих формул, если известно, что функция $V(\rho, \theta)$ симметрична относительно оси z и если заданы ее значения в точках этой оси, т. е. значения $V(\rho, \theta)=V(z)$, и представлены они в виде указанного ряда по степеням z^n или $1/z^{n+1}$, механически с использованием коэффициентов этого ряда A_n или B_n можно перейти к более общим рядам с полиномами Лежандра, т. е. к случаю $\theta \neq 0$. Таким путем можно найти функцию $V(\rho, \theta)$, гармоническую внутри или же вне сферы радиусом R . Для этого достаточно заменить в них значения z^n на $\rho^n P_n(\cos \theta)$ при $\rho < R$ или $1/z^{n+1}$ на $(1/\rho^{n+1})P_n(\cos \theta)$ при $\rho > R$.

Покажем это на примере следующих задач. Рассмотрим потенциалы притяжения масс однородных круговой проволоки, кругового материального диска, с расположенными на нем простым и двойным слоями. Выражения потенциалов притяжения от этих тел в точках оси z , проходящей через их центры, найдены в разделах потенциалов притяжения линейных масс, простого и двойного слоев.

а. Потенциал притяжения масс однородной круговой проволоки радиусом R на оси z

$$V(z) = G \frac{m}{\sqrt{R^2 + z^2}}.$$

Разлагая в ряд, получим: при $z < R$, т. е. при $z/R < 1$,

$$V(z) = \frac{m}{R} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)^{-1/2} = \frac{m}{R} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{z^2}{R^2} + \frac{3}{8} \frac{z^4}{R^4} - \dots\right);$$

при $z > R$, т. е. $z/R > 1$,

$$V(z) = \frac{m}{R} \left(1 + \frac{R^2}{z^2}\right)^{-1/2} = \frac{m}{z} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{R^2}{z^2} + \frac{3}{8} \frac{R^4}{z^4} - \dots\right).$$

Согласно отмеченному выше, переходя к рядам полиномов Лежандра, в произвольной точке P с координатами ρ и θ найдем: при $\rho < R$

$$V(\rho) = \frac{m}{R} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{R^2} P_2(\cos \theta) + \frac{3}{8} \frac{\rho^4}{R^4} P_4(\cos \theta) - \dots\right];$$

при $\rho > R$

$$V(\rho) = \frac{m}{\rho} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{R^2}{\rho^2} P_2(\cos \theta) + \frac{3}{8} \frac{R^4}{\rho^4} P_4(\cos \theta) - \dots \right].$$

6. Потенциал притяжения однородного простого слоя, лежащего на круговом материальном диске радиусом R , в точках на его оси

$$V(z) = 2\pi\mu (\sqrt{R^2 + z^2} - z).$$

Разлагая в ряд подкоренное выражение, найдем:
при $z < R$

$$V(z) = 2\pi\mu \left[-z + R \left(1 + \frac{z^2}{2R^2} - \frac{z^4}{8R^4} + \frac{z^6}{16R^6} - \dots \right) \right];$$

при $z > R$

$$V(z) = 2\pi\mu \left[-z + z \left(1 + \frac{R^2}{2z^2} - \frac{R^4}{8z^4} + \frac{R^6}{16z^6} - \dots \right) \right].$$

Поэтому для произвольной точки ρ получим:
при $\rho < R$

$$V(\rho) = 2\pi\mu \left[R - \rho P_1(\cos \theta) + \frac{\rho^2}{2R} P_2(\cos \theta) - \frac{\rho^4}{8R^3} P_4(\cos \theta) + \dots \right];$$

при $\rho > R$

$$V(\rho) = 2\pi\mu \left[\frac{R^2}{2\rho} - \frac{R^4}{8\rho^3} P_2(\cos \theta) + \frac{R^6}{16\rho^5} P_4(\cos \theta) - \dots \right].$$

в. Потенциал притяжения двойного слоя, лежащего на плоском круговом диске радиусом R в точках его оси,

$$V(z) = 2\pi G\beta z \left(\frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right).$$

Разлагая это выражение в ряд, находим:
при $z < R$

$$V(z) = 2\pi G\beta \left[1 - \frac{z}{R} \left(1 - \frac{z^2}{2R^2} + \frac{3z^4}{8R^4} - \dots \right) \right];$$

при $z > R$

$$V(z) = 2\pi G\beta \left[1 - \left(1 - \frac{R^2}{2z^2} + \frac{3R^4}{8z^4} - \dots \right) \right].$$

Переходя к рядам полиномов Лежандра, получим:
при $\rho < R$

$$V(\rho) = 2\pi G\beta \left[1 - \frac{\rho}{R} P_1(\cos \theta) + \frac{\rho^3}{2R^3} P_3(\cos \theta) - \frac{3\rho^5}{8R^5} P_5(\cos \theta) + \dots \right];$$

при $\rho > R$

$$V(\rho) = 2\pi G\beta \left[\frac{R^2}{2\rho^2} P_1(\cos \theta) - \frac{3R^4}{8\rho^4} P_3(\cos \theta) + \frac{5R^6}{16\rho^6} P_5(\cos \theta) - \dots \right].$$

Таким путем можно определить и для потенциалов притяжения других видов их значения в произвольной точке ρ внешней или внутренней области сферы радиусом R по заданным значениям потенциала в точках вертикальной оси z .

§ 26. РЯДЫ СФЕРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Выше было получено разложение функции $1/r$ в ряд простейших сферических функций — полиномов Лежандра. Рассмотрим более общий случай разложения функции в ряд сферических функций [1, 3].

Пусть $f(\theta, \lambda)$ — некоторая заданная на сфере единичного радиуса S функция сферических координат θ и λ произвольной точки M , которая представима в виде равномерно сходящегося ряда

$$\begin{aligned} f(\theta, \lambda) &= Y_0(\theta, \lambda) + Y_1(\theta, \lambda) + \dots + Y_n(\theta, \lambda) + \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta, \lambda), \end{aligned} \quad (\text{V.16})$$

где Y_n — сферические функции, заданные формулой (V.2).

Возможность разложения функции $f(\theta, \lambda)$ в ряд сферических функций вытекает из теоремы (Н. И. Идельсон): всякая функция $f(\theta, \lambda)$, гармоническая внутри сферы радиусом $R=1$ и обращающаяся на этой сфере в заданную функцию $f(\theta, \lambda)$, разлагается для всякой внутренней точки сферы в бесконечный ряд многочленов $Y_n(\theta, \lambda)$, принадлежащих к заданной функции $f(\theta, \lambda)$. Для того чтобы показать правильность этого положения, разложим в ряд ядро полученного выше интеграла Пуассона, решающего задачу Дирихле для сферы, и именно функцию

$$(R^2 - \rho^2)/r^3 = (1 - \rho^2)/r^3.$$

Согласно (V.12) при $R=1$

$$\frac{1}{r} = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n P_n(\cos \theta).$$

Согласно же (V.11)

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{1 + \rho^2 - 2\rho \cos \theta}}.$$

Из последних двух равенств, дифференцируя $1/r$ по ρ , найдем

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{\cos \theta - \rho}{r^3} = \sum_{n=0}^{\infty} n \rho^{n-1} P_n(\cos \theta).$$

Умножая на 2ρ , получим

$$\frac{2\rho \cos \theta - 2\rho^2}{r^3} = \sum_{n=0}^{\infty} 2n \rho^n P_n(\cos \theta).$$

Прибавляя к этому выражению значение

$$\frac{1}{r} = \frac{r^2}{r^3} = \frac{1 + \rho^2 - 2\rho \cos \theta}{r^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n P_n(\cos \theta),$$

найдем

$$\frac{1 - \rho^2}{r^3} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n + 1) \rho^n P_n(\cos \theta).$$

Этот ряд и выражает ядро интеграла Пуассона через сферические функции. С учетом этого равенства интеграл Пуассона можно записать в виде (при $R=1$)

$$\begin{aligned} f(\theta, \lambda)_1 &= \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{1 - \rho^2}{r^3} f(\theta', \lambda') dS = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n + 1}{4\pi} \rho^n \int_S f(\theta', \lambda') P_n(\cos \theta) dS, \end{aligned}$$

где θ, λ — координаты внутренней точки ρ сферы S ; θ', λ' — координаты точки M на сфере S .

В полученном выражении интеграл $\int_S f(\theta', \lambda') P_n(\cos \theta) dS$, оставаясь функцией переменных θ и λ , также будет сферической функцией порядка n . Примем

$$\int_S f(\theta', \lambda') P_n(\cos \theta) dS = [4\pi / (2n + 1)] Y_n(\theta, \lambda).$$

Тогда из интеграла Пуассона окончательно получим

$$f(\theta, \lambda)_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n Y_n(\theta, \lambda).$$

Отсюда видно, что функция, гармоническая внутри сферы, разлагается в ряд по степеням ρ , коэффициенты которого являются сферическими функциями $Y_n(\theta, \lambda)$. Их значения равны значениям самой функции $f(\theta, \lambda)_1$ на поверхности S , т. е. функции $f(\theta, \lambda)$. Если же брать функцию, гармоническую вне сферы, согласно (V.13) найдем

$$f(\theta, \lambda)_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\rho^{n+1}} Y_n(\theta, \lambda).$$

От полученных последних двух формул можно перейти и к разложению произвольной функции $f(\theta, \lambda)$, заданной на сфере, в ряд сферических функций. Для этого необходимо переходить в них к пределу при $\rho \rightarrow 1$. При этом функция $f(\theta, \lambda)_1$, по определению, переходит в $f(\theta, \lambda)$. В пределе получим бесконечный ряд

$$f(\theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta, \lambda).$$

Для всех тех функций, с которыми приходится иметь дело на практике, такое разложение является единственным.

Определим теперь более полный вид ряда сферических функций (V.1). Заменяя в нем функцию Y_n ее выражением из равенства (V.2), получим

$$f(\theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n (A_{nk} \cos k\lambda + B_{nk} \sin k\lambda) P_n^k(\cos \theta). \quad (\text{V.17})$$

Коэффициенты этого ряда определяем так же, как коэффициенты ряда Фурье, — умножая обе части равенства на элементарную сферическую функцию

$$P_n^k(\cos \theta) \cos k\lambda \quad \text{или} \quad P_n^k(\cos \theta) \sin k\lambda,$$

интегрируя по всей поверхности сферы S и используя свойство ортогональности сферических функций:

$$\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} P_n^k(\cos \theta) P_a^k(\cos \theta) \cos(k\lambda)_{\sin}^{\cos} (c\lambda) \sin \theta d\theta d\lambda = 0$$

при любом $k \neq c$ или $k = c$, но $n \neq a$, где a и c , как и k и n — некоторые целые положительные числа; при любом $k = c$ и $n = a$

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} [P_n^k(\cos \theta) \cos k\lambda]^2 \sin \theta d\theta d\lambda = \frac{2n\delta_k}{2n+1} \frac{(n+k)!}{(n-k)!},$$

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} [P_n^k(\cos \theta) \sin k\lambda]^2 \sin \theta d\theta d\lambda = \frac{2n\delta_k}{2n+1} \frac{(n+k)!}{(n-k)!},$$

где $\delta_0 = 2$, $\delta_k = 1$ ($k > 0$).

Коэффициенты определяются из формул

$$A_{nk} = \frac{2n+1}{2\pi\delta_k} \frac{(n-k)!}{(n+k)!} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\theta, \lambda) P_n^k(\cos \theta) \cos k\lambda \sin \theta d\theta d\lambda,$$

(V.18)

$$B_{nk} = \frac{2n+1}{2\pi\delta_k} \frac{(n-k)!}{(n+k)!} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\theta, \lambda) P_n^k(\cos \theta) \sin k\lambda \sin \theta d\theta d\lambda.$$

Таким образом, заданную на поверхности сферы единичного радиуса функцию $f(\theta, \lambda)$ (считаем, что она отвечает соответствующим условиям — она конечная, непрерывная, однозначная) можно представить в виде ряда (V.17), коэффициенты которого определяем из (V.18), пользуясь значениями $f(\theta, \lambda)$. В развернутом виде ряд (V.17) можно записать так:

$$\begin{aligned} f(\theta, \lambda) = & A_{00}P_0(\cos \theta) + A_{10}P_1(\cos \theta) + (A_{11} \cos \lambda + \\ & + B_{11} \sin \lambda)P_1'(\cos \theta) + A_{20}P_2(\cos \theta) + (A_{21} \cos \lambda + \\ & + B_{21} \sin \lambda)P_2'(\cos \theta) + (A_{22} \cos 2\lambda + B_{22} \sin 2\lambda)P_2^2(\cos \theta) + \\ & + A_{30}P_3(\cos \theta) + (A_{31} \cos \lambda + B_{31} \sin \lambda)P_3'(\cos \theta) + \\ & + (A_{32} \cos 2\lambda + B_{32} \sin 2\lambda)P_3^2(\cos \theta) + (A_{33} \cos 3\lambda + \\ & + B_{33} \sin 3\lambda)P_3^3(\cos \theta) + \dots + A_{n0}P_n(\cos \theta) + \\ & + (A_{n1} \cos \lambda + B_{n1} \sin \lambda)P_n'(\cos \theta) + \\ & + (A_{n2} \cos 2\lambda + B_{n2} \sin 2\lambda)P_n^2(\cos \theta) + \dots + \\ & + (A_{nn} \cos n\lambda + B_{nn} \sin n\lambda)P_n^n(\cos \theta) + \dots \end{aligned}$$

Каждая строка этой суммы содержит сферические многочлены только одного порядка. Первые члены каждой строки состоят из многочленов Лежандра $P_n(\cos \theta)$ и не зависят от долготы. Эти члены разложения носят название зональных сферических функций, так как полином $P_n(\cos \theta)$ как бы делит всю сферу на $n+1$ зону. Он обращается в нуль на параллелях,

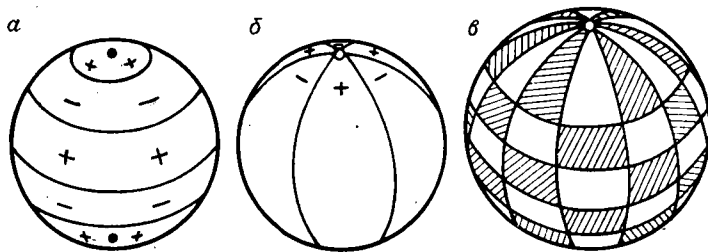


Рис. 51. Характер изменения знака некоторых сферических функций: а — зональных, б — секториальных; в — тессеральных

разделяющих эти зоны, сохраняет знак в пределах одной зоны и меняет его при переходе в другую зону. Эти сферические функции выражают составляющие поля $f(\theta, \lambda)$, симметричные относительно оси вращения сферы. У последних членов каждой строки $k=n$. Эти сферические функции называют секториальными сферическими функциями. Они обращаются в нуль на меридианах, принимая попеременно то положительные, то отрицательные значения в сферических секторах, ограниченных этими меридианами. Наконец, все промежуточные члены каждой строки — сферические функции, для которых $k \neq n$, называют тессеральными функциями. Они делят сферу системой параллелей и меридианов на сферические трапеции, в каждой из которых функция сохраняет постоянный знак. Характер изменения знаков этих функций показан на рис. 51.

Каждая строка разложения содержит $2n+1$ членов, из которых один (первый) зональный, два (последние) секториальных и $2n-2$ — тессеральных. Общее число членов $(n+1)^2$.

Таким образом, при разложении некоторой функции $f(\theta, \lambda)$ (например, потенциала силы тяжести или магнитного потенциала) в ряд сферических функций ее представляют комбинацией знакопеременных на сфере функций, таких, которые в сумме дают исходную функцию $f(\theta, \lambda)$. При этом более мелкие (локальные) детали функции $f(\theta, \lambda)$ учитываются более высокими гармониками разложения (членами с большими номерами индексов n и k), низкие гармоники разложения учитывают детали, простирающиеся на большие площади [региональные особенности функции $f(\theta, \lambda)$].

Можно провести параллель между рядом Фурье и рядом сферических функций — совершенно так же, как ряд Фурье заменяет исходную функцию вдоль профиля суммой знакопеременных тригонометрических полиномов, ряд сферических функций заменяет функцию на сфере суммой знакопеременных на ней сферических функций.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие многочлены называются однородными? Какие многочлены называются гармоническими? Какой вид имеют сферические функции?
2. Какая связь между сферическими функциями и уравнением Лапласа? Какая связь между полиномами Лежандра и уравнением Лапласа?
3. В чем заключается ортогональность полиномов Лежандра? Как можно разложить функцию $1/r$ в ряд многочленов Лежандра? Какая связь многочленов Лежандра с потенциалами притяжения простейших видов?
4. Как можно разложить в ряды полиномов Лежандра потенциалы, симметричные относительно вертикальной оси полей?
5. Из каких простейших функций состоят ряды сферических функций? Какие существуют виды сферических функций? Какие функции являются зональными, секториальными и тессеральными сферическими функциями? Чем они отличаются друг от друга?
6. Какую аналогию можно провести между рядами сферических функций и рядами Фурье?

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГРАВИТАЦИОННОГО И МАГНИТНОГО ПОТЕНЦИАЛОВ В ВИДЕ РЯДОВ СФЕРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Представление некоторых видов потенциалов притяжения в виде рядов простейших сферических функций — полиномов Лежандра при наличии симметрии относительно вертикальной оси было рассмотрено в гл. V. Здесь же рассмотрим представление в виде рядов сферических функций гравитационного и магнитного потенциалов Земли.

§ 27. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛА СИЛЫ ТЯЖЕСТИ ЗЕМЛИ В ВИДЕ РЯДА СФЕРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Разложим потенциал силы тяжести

$$W = G \int_V \sigma \frac{dv}{r} + \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2) \quad (\text{VI.1})$$

в ряд сферических функций. Такое разложение необходимо, так как формулой (VI.1) в данном виде не всегда можно пользоваться из-за того, что интеграл в правой части выражения, определяющий потенциал притяжения объемных масс, раскрывается в элементарных функциях для сравнительно небольшого числа геометрических тел простейшей формы.

Возьмем прямоугольную систему координат, начало которой поместим в центр масс Земли, а ось z направим по оси вращения Земли. Тогда плоскость xy совпадет с плоскостью экватора. Точка $M(\xi, \eta, \xi)$ — переменная точка тела, в которой берется элемент массы, и при интегрировании она может находиться внутри тела и на его поверхности. Точка $P(x, y, z)$ — фиксированная, в ней заключена единичная масса и исследуется значение потенциала силы тяжести. Рассмотрим случай, когда точка P находится вне тела (см. рис. 50).

Формулу (VI.1) можно записать в виде ряда сферических функций (так же как и выражение потенциала притяжения любого другого вида, если в ней заменить функцию $1/r$ ее выражением из равенства (V.13), представленным в виде ряда полино-

мов Лежандра при $\rho > R$,

$$\frac{1}{r} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^n}{\rho^{n+1}} P_n(\cos \theta) = \frac{1}{\rho} + \frac{R}{\rho^2} \cos \theta + \\ + \frac{1}{2} \frac{R^2}{\rho^3} (3 \cos^2 \theta - 1) + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{R^n}{\rho^{n+1}} P_n(\cos \theta),$$

где полиномы Лежандра первых четырех порядков P_0 , P_1 , P_2 заменены их значениями, полученными выше.

Подставляя это значение $1/r$ в (VI.1), найдем

$$W = G \int_v \sigma \frac{dv}{\rho} + G \int_v \frac{R}{\rho^2} \cos \theta dm + \\ + G \int_v \frac{R^2(3 \cos^2 \theta - 1)}{2\rho^3} dm + \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2) + T, \quad (\text{VI.2})$$

где

$$T = G \sum_{n=3}^{\infty} \int_v \frac{R^n P_n(\cos \theta)}{\rho^{n+1}} dm.$$

Рассмотрим по порядку первые три интеграла этого равенства, которые обозначим Φ_1 , Φ_2 , Φ_3 . Так как для данной фиксированной точки P величина ρ постоянна, первый интеграл

$$\Phi_1 = G \int_v \frac{dm}{\rho} = \frac{G}{\rho} \int_v dm = G \frac{M}{\rho}, \quad (\text{VI.3})$$

где M — масса Земли.

Второй интеграл

$$\Phi_2 = \frac{G}{\rho^2} \int_v R \cos \theta dm.$$

Найдем величину $\cos \theta$ через значения прямоугольных координат. Так как

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad R^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2,$$

то

$$r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2 = (x^2 + y^2 + z^2) + \\ + (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) - 2(x\xi + y\eta + z\zeta) = \rho^2 + R^2 - 2(x\xi + y\eta + z\zeta).$$

Сравнивая это равенство с выражением

$$r^2 = \rho^2 + R^2 - 2\rho R \cos \theta,$$

получаемым из рис. 50, найдем

$$\cos \theta = (x\xi + y\eta + z\zeta) / R\rho. \quad (\text{VI.4})$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= \frac{G}{\rho^2} \int_v R \cos \theta \, dm = \frac{G}{\rho^2} \int_v R \frac{x\xi + y\eta + z\zeta}{R\rho} \, dm = \\ &= \frac{G}{\rho^3} \left(x \int_v \xi \, dm + y \int_v \eta \, dm + z \int_v \zeta \, dm \right). \end{aligned}$$

Интегралы $\int_v \xi \, dm$, $\int_v \eta \, dm$, $\int_v \zeta \, dm$, как известно из механики, определяют координаты центра масс ξ_0 , η_0 , ζ_0 :

$$\xi_0 = \int_v \xi \, dm / \int_v dm, \quad \eta_0 = \int_v \eta \, dm / \int_v dm, \quad \zeta_0 = \int_v \zeta \, dm / \int_v dm.$$

Так как начало координат выбрано в центре масс, значения ξ_0 , η_0 , ζ_0 равны нулю. Отсюда

$$\int_v \xi \, dm = \int_v \eta \, dm = \int_v \zeta \, dm = 0.$$

Поэтому

$$\Phi_2 = (G/\rho^2) \int_v R \cos \theta \, dm = 0. \quad (\text{VI.5})$$

Перейдем к третьему интегралу равенства (VI.2)

$$\Phi_3 = \frac{G}{2\rho^3} \int_v R^2 (3 \cos^2 \theta - 1) \, dm.$$

Подставляя сюда значение $\cos \theta$ из (VI.4), найдем

$$\begin{aligned} \Phi_3 &= \frac{G}{2\rho^3} \int_v R^2 \left[3 \frac{(x\xi + y\eta + z\zeta)^2}{R^2 \rho^2} - 1 \right] dm = \\ &= \frac{G}{2\rho^5} \int_v [3(x\xi + y\eta + z\zeta)^2 - \rho^2 R^2] \, dm. \end{aligned}$$

Так как

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

то

$$\begin{aligned} \Phi_3 &= \frac{G}{2\rho^5} \int_v (3x^2\xi^2 + 3y^2\eta^2 + 3z^2\zeta^2 + 6x\xi y\eta + \\ &+ 6x\xi z\zeta + 6y\eta z\zeta - R^2 x^2 - R^2 y^2 - R^2 z^2) \, dm = \\ &= \frac{G}{2\rho^5} \int_v [x^2(3\xi^2 - R^2) + y^2(3\eta^2 - R^2) + z^2(3\zeta^2 - R^2) + \\ &+ 6x\xi y\eta + 6x\xi z\zeta + 6y\eta z\zeta] \, dm. \end{aligned}$$

В полученное равенство входят три интеграла вида

$$\int_v x\xi y\eta dm = xy \int_v \xi\eta dm.$$

Эти интегралы называются произведениями инерции тела или его центробежными моментами. Для любого твердого тела всегда существуют три направления прямоугольных осей, проходящих через центр массы данного тела, при которых произведения инерции тела обращаются в нуль. Эти направления называются главными направлениями, оси — главными осями инерции, а моменты инерции по отношению к этим осям — главными моментами инерции данного тела. В нашем случае ось z совпадает с главной осью инерции. Оси x и y в плоскости экватора направим так, чтобы они совпадали с двумя другими главными осями инерции. Тогда все три интеграла рассмотренного вида обратятся в нуль и поэтому

$$\Phi_3 = (G/2\rho^5) \int_v [x^2(3\xi^2 - R^2) + y^2(3\eta^2 - R^2) + z^2(3\xi^2 - R^2)] dm. \quad (\text{VI.6})$$

Перепишем это выражение через значения главных моментов инерции Земли. Моментом инерции твердого тела называется интеграл $\int_v r_1^2 dm$, где r_1 — расстояние от точки тела до оси, относительно которой определяется момент инерции.

Пусть A , B и C — моменты инерции Земли относительно осей координат x , y и z (согласно изложенному выше, они будут главными моментами инерции). Тогда

$$A = \int_v (\eta^2 + \xi^2) dm, \quad B = \int_v (\xi^2 + \eta^2) dm,$$

$$C = \int_v (\xi^2 + \eta^2) dm.$$

Так как $R^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$, нетрудно убедиться, что

$$\begin{aligned} \int_v x^2(3\xi^2 - R^2) dm &= x^2 \int_v (2\xi^2 - \eta^2 - \zeta^2) dm = \\ &= x^2 \int_v [(\xi^2 + \xi^2) + (\xi^2 + \eta^2) - 2(\eta^2 + \xi^2)] dm = \\ &= x^2(B + C - 2A). \end{aligned}$$

Аналогично поступая и с выражениями в двух других скобках

подынтегральной функции равенства (VI.6), получим

$$\int_V y^2 (3\eta^2 - R^2) dm = y^2 (C + A - 2B);$$

$$\int_V z^2 (3\xi^2 - R^2) dm = z^2 (A + B - 2C).$$

Поэтому интеграл (VI.6) перепишем:

$$\Phi_3 = \frac{G}{2\rho^5} [x^2 (B + C - 2A) + y^2 (A + C - 2B) + z^2 (A + B - 2C)]. \quad (\text{VI.7})$$

Представим это выражение в сферических координатах: $x = \rho \cos \varphi \cos \lambda$; $y = \rho \cos \varphi \sin \lambda$; $z = \rho \sin \varphi$, где φ — геоцентрическая широта (угол между направлением к центру масс Земли и плоскостью экватора, а географическая широта — это угол между нормалью и плоскостью экватора); λ — долготы (углы φ и λ отсчитываются от плоскости xz). Заменяя здесь $\cos \lambda$ и $\sin \lambda$ функцией двойного угла $\cos 2\lambda$, найдем

$$x^2 = \rho^2 \cos^2 \varphi (1 + \cos 2\lambda) / 2;$$

$$y^2 = \rho^2 \cos^2 \varphi (1 - \cos 2\lambda) / 2;$$

$$z^2 = \rho^2 \sin^2 \varphi.$$

Внося эти выражения в (VI.7), сгруппировав вместе члены, содержащие $\cos 2\lambda$, после небольших преобразований окончательно получим

$$\Phi_3 = \frac{G}{2\rho^3} \left(C - \frac{A+B}{2} \right) (1 - 3 \sin^2 \varphi) + \frac{3}{4} \frac{G}{\rho^3} (B - A) \cos^2 \varphi \cos 2\lambda.$$

Подставляя найденные значения интегралов Φ_1 , Φ_2 и Φ_3 в (VI.2), учитывая что

$$x^2 + y^2 = \rho^2 \cos^2 \varphi,$$

найдем

$$W = \frac{GM}{\rho} + \frac{G}{2\rho^3} \left(C - \frac{A+B}{2} \right) (1 - 3 \sin^2 \varphi) +$$

$$+ \frac{3}{4} \frac{G}{\rho^3} (B - A) \cos^2 \varphi \cos 2\lambda + \frac{\omega^2}{2} \rho^2 \cos^2 \varphi + T. \quad (\text{VI.8})$$

В полученной формуле первый член правой части представляет собой потенциал притяжения шара с массой, равной массе Земли. Второй член, зависящий от широты точки местности, учитывает действие добавочных масс, расположенных вдоль земного экватора. Формула (VI.8) только с первым и четвертым

членами дает значение потенциала W на поверхности шарообразной Земли, с добавлением второго члена — на поверхности сфероидальной Земли. Третий член, содержащий долготу, учитывает неравномерное распределение масс по долготе. Формула (VI.8) без T дает значение потенциала силы тяжести на поверхности трехосного эллипсоида, поскольку форма Земли больше соответствует трехосному эллипсоиду, чем эллипсоиду вращения или сфероиду.

Пренебрегая значением T и рассматривая Землю как тело вращения, мало отличающееся от шара [в этом случае моменты инерции относительно экваториальных осей равны $A=B$ и третий член формулы (VI.8) исчезает], из последнего равенства получим потенциал силы тяжести для эллипсоида вращения или сфероида:

$$W = G \frac{M}{\rho} + \frac{G}{2\rho^3} (C - A) (1 - 3 \sin^2 \varphi) + \frac{\omega^2}{2} \rho^2 \cos^2 \varphi.$$

Величину $C-A$ (в случае Земли, сжатой у полюсов $C > A$) можно определить так: $C-A = \mu a^2$, где a — радиус экватора; μ — воображаемая добавочная масса, расположенная вдоль экватора Земли, которая делает C отличающимся от A и B (этот избыток массы можно представить в виде кольца, надетого на тело шара по экватору). По сравнению с массой Земли эта масса — малая величина первого порядка, т. е. порядка сжатия Земли. Тогда

$$W = G \frac{M}{\rho} + \frac{G\mu a^2}{2\rho^3} (1 - 3 \sin^2 \varphi) + \frac{\omega^2}{2} \rho^2 \cos^2 \varphi. \quad (\text{VI.9})$$

Формула (VI.9), полученная в результате разложения потенциала силы тяжести в ряд сферических функций [как и (VI.8), если пренебречь в ней величиной T], а отличие от (VI.1) позволяет исследовать потенциал силы тяжести Земли и применять его для решения различных задач.

§ 28. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФИГУРЫ ЗЕМЛИ И НОРМАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

Сила тяжести на поверхности сфероида

Формулу (VI.9) можно применять при исследовании фигуры Земли и определении нормальных значений ускорения свободного падения [1].

Фигуру Земли можно определить как уровенную поверхность потенциала силы тяжести

$$W = C. \quad (\text{VI.10})$$

Здесь постоянная C берется таким образом, чтобы уровенная поверхность совпадала хотя бы в одной точке с земным экватором, вернее, чтобы на земном экваторе радиус уровенной поверхности равнялся a .

Так как потенциал силы тяжести, определяемый приближенным равенством (VI.9) зависит только от радиуса ρ и геоцентрической широты φ (в нем отсутствует зависимость от долготы λ), уравнение (VI.10) является уравнением поверхности вращения (эллипсоида вращения) или сфероида и, как было сказано выше, отвечает случаю сфероидальной Земли. Для определения постоянной C в (VI.10) выберем точку, лежащую на поверхности сфероида с координатами $\varphi=0$ и $\rho=a$. Для этой точки из (VI.9) найдем

$$W = G \frac{M}{a} + \frac{G\mu}{2a} + \frac{\omega^2 a^2}{2}.$$

Приравнявая это значение к C и подставляя в (VI.10), с учетом (VI.9) найдем

$$\frac{GM}{\rho} + \frac{G\mu a^2}{2\rho^3} (1 - 3 \sin^2 \varphi) + \frac{\omega^2}{2} \rho^2 \cos^2 \varphi = \frac{GM}{a} + \frac{G\mu}{2a} + \frac{\omega^2 a^2}{2}.$$

Отсюда

$$\frac{\rho}{a} = \frac{1 + (\mu a^2 / 2M \rho^2)(1 - 3 \sin^2 \varphi) + (\omega^2 \rho^2 / 2GM) \cos^2 \varphi}{1 + \mu / 2M + \omega^2 a^2 / 2GM}.$$

Обозначим

$$\mu / 2M = m, \quad \omega^2 a^3 / GM = q.$$

Здесь $q = \omega^2 a / (GM/a^2)$ представляет собой отношение центробежной силы на экваторе к силе притяжения шара массой M (с точностью до малых второго порядка q является отношением центробежной силы к силе тяжести на земном экваторе). Тогда

$$\frac{\rho}{a} = \frac{1 + (a^2 / \rho^2) m (1 - 3 \sin^2 \varphi) + (\rho^3 / a^3) (q/2) \cos^2 \varphi}{1 + m + q/2}.$$

Величины m и q являются малыми (порядка сжатия Земли). Поэтому

$$\frac{1}{1 + m + q/2} = 1 - \left(m + \frac{q}{2}\right) + \left(m + \frac{q}{2}\right)^2 - \dots$$

На основании этого равенства, отбрасывая члены второго порядка малости, получим

$$\frac{\rho}{a} = 1 + \frac{a^2}{\rho^2} m (1 - 3 \sin^2 \varphi) + \frac{\rho^3}{a^3} \frac{q}{2} \cos^2 \varphi - \left(m + \frac{q}{2}\right).$$

Величины a^2/ρ^2 и ρ^3/a^3 мало отличаются от единицы (в первом приближении $\rho=a$, т. е. Земля есть шар), поэтому в произ-

ведениях $(a^2/\rho^2)m$, $(\rho^3/a^3)(q/2)$, где m и $q/2$ — малые величины первого порядка, можно a^2/ρ^2 и ρ^3/a^3 заменить единицей (при этом мы сделаем ошибку второго порядка малости). Учитывая это и переходя от $\cos \varphi$ к $\sin \varphi$, найдем

$$(\rho/a) = 1 - (3m + q/2) \sin^2 \varphi. \quad (\text{VI.11})$$

Легко показать, что это есть уравнение сфероида $x^2/a^2 + y^2/a^2 + z^2/b^2 = 1$ со сжатием

$$\alpha = (a - b)/a = 3m + q/2. \quad (\text{VI.12})$$

Таким образом, рассматриваемая уровенная поверхность потенциала силы тяжести (фигура Земли) с точностью до малых второго порядка представляет собой эллипсоид вращения или сфероид.

Определим величину силы тяжести на поверхности найденного выше сфероида. Так как во всех точках уровенной поверхности сила тяжести направлена по нормали в сторону увеличения поля,

$$g = -\frac{\partial W}{\partial n} = -\frac{\partial W}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial n} = -\frac{\partial W}{\partial \rho} \cos(\rho, n).$$

Здесь ρ — направление к центру масс Земли, а угол между направлением ρ и плоскостью экватора равен геоцентрической широте φ ; n — направление внешней нормали, а угол между направлением n и плоскостью экватора равен географической широте φ' . Разность $\varphi' - \varphi$ достигает максимального значения в $11,6'$ под широтой 45° , причем $\cos 11,6' = \cos(\rho, n) = 0,999995$. Поэтому можно записать $g \approx -\partial W/\partial \rho$. Дифференцируя (VI.9) по ρ , для g находим приближенное равенство

$$g = \frac{GM}{\rho^2} \left[1 + 3m \frac{a^2}{\rho^2} (1 - 3 \sin^2 \varphi) - q \frac{\rho^3}{a^3} \cos^2 \varphi \right].$$

Так как значение g определяем для точек поверхности сфероида, ρ в первом члене можно заменить его значением из (VI.11), а в остальных членах, учитывая малость m и q , можно принять $a^2/\rho^2 = 1$, $a^3/\rho^3 = 1$. Тогда

$$g = \frac{GM}{a^2} \frac{1 + 3m(1 - 3 \sin^2 \varphi) - q \cos^2 \varphi}{[1 - (3m + q/2) \sin^2 \varphi]^2}.$$

После возведения в квадрат знаменателя, отбрасывая малые члены второго порядка и разлагая в ряд по биному Ньютона, найдем

$$\frac{1}{[1 - (3m + q/2) \sin^2 \varphi]^2} \approx \frac{1}{1 - 2(3m + q/2) \sin^2 \varphi} \approx 1 + (6m + q) \sin^2 \varphi.$$

Подставляя это выражение в формулу для g , раскрывая скобки, пренебрегая квадратами величин m и q и переходя от $\cos \varphi$ к $\sin \varphi$, найдем

$$g = (GM/a^2)[1 + 3m - q + (2q - 3m)\sin^2 \varphi].$$

На экваторе $\varphi = 0$, поэтому

$$g_e = (GM/a^2)(1 + 3m + q),$$

где g_e значение силы тяжести на экваторе. Тогда

$$g = g_e(1 + \beta \sin^2 \varphi), \quad (\text{VI.13})$$

где $\beta = 2q - 3m$. С использованием величины сжатия Земли α (VI.12) получим

$$\beta = (5/2)q - \alpha. \quad (\text{VI.14})$$

Значение β можно определить из (VI.13), используя силу тяжести на полюсе g_p , получаемую из (VI.13) при $\varphi = 90^\circ$:

$$\beta = (g_p - g_e)/g_e.$$

Поэтому β есть относительный избыток силы тяжести на полюсе по сравнению с экватором. Формулы (VI.13), (VI.14) составляют теорему Клеро. Формула (VI.13) определяет закон нормального распределения силы тяжести на поверхности сфероидов (нормального сфероидов), а (VI.14) — сжатие земного сфероидов через величину q .

Уравнение типа (VI.13) можно получить также, если предположить, что Земля представляется трехосным эллипсоидом с малым экваториальным сжатием.

Коэффициенты подобных формул определяют по данным наблюдений на многих пунктах поверхности Земли способом наименьших квадратов. Этим добиваются, во-первых, уменьшения влияния ошибок наблюдений, во-вторых, что самое главное, уменьшения влияния местных (локальных) аномалий, связанных с различными неоднородностями в земной коре. Подставляя найденные таким способом численные значения коэффициентов в исходное равенство, получим формулу для распределения значений ускорения свободного падения на поверхности некоторой идеальной теоретической Земли, соответствующей выбранной модели. Естественно, эта идеальная Земля будет тем ближе к реальной, чем ближе приближенное выражение потенциала силы тяжести (которое берется за основу при выводе значений g) к точному выражению потенциала силы тяжести реальной Земли, определяемому (VI.1).

Вычисляемые по подобным формулам значения силы тяжести для поверхности теоретической Земли называются нормальными значениями силы тяжести и в отличие от измеренных обозначаются γ_0 .

Формулы для определения нормальных значений силы тяжести были получены многими авторами (Гельмертом, Кассини-сом, Гейсканеном, И. Д. Жонголовичем, Н. П. Грушинским и др.), но практическое применение нашли лишь две — формула Гельмерта (1901—1909 гг.) для эллипсоида вращения и Кассиниса (1930 г.), принятая как международная.

В СССР пользуются преимущественно формулой Гельмерта (так как входящее в нее сжатие очень близко к сжатию эллипсоида Красовского $\alpha = 1 : 298,3$, принятого для обработки всех геодезических сетей на территории СССР). Сейчас в формулу Гельмерта вносится поправка на новую потсдамскую систему, равная — 14 мГал.

Формула Стокса и изучение геоида

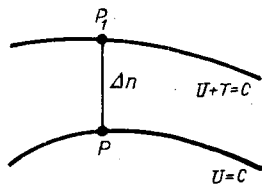
Рассмотренные значения потенциала силы тяжести были получены на поверхности сфероида, или на поверхности некоторой идеальной Земли (идеального геоида). Реальные значения элементов поля силы тяжести, а также и реальная поверхность Земли будут, безусловно, отличаться от них. Для построения поверхности, более приближенной к поверхности реальной Земли, используется формула Стокса, полученная им в 1849 г. — одна из основных при изучении фигуры Земли. По значениям аномалий силы тяжести, заданным на поверхности Земли, формула Стокса позволяет определить отклонения геоида от более простой поверхности сфероида. Таким образом, изучение более сложной поверхности геоида сводится к определению по аномалиям силы тяжести отклонений от геометрически правильной фигуры сфероида. Поэтому поверхность сфероида в такой постановке задачи называется отсчетной поверхностью. При этом следует иметь в виду, что и отсчетная поверхность и поверхность геоида являются внешними поверхностями относительно масс Земли, что центры тяжести масс и сфероида, и геоида совпадают с началом координат и что скорости вращения обоих этих тел одинаковы.

Лемма Брунса. Представим потенциал силы тяжести реальной Земли в виде суммы двух потенциалов:

$$W(x, y, z) = U(x, y, z) + T(x, y, z),$$

где U — потенциал силы тяжести идеальной Земли, в данном случае нормального сфероида; T — потенциал масс, на который потенциал силы тяжести Земли отличается от потенциала сфероида, т. е. T — это часть потенциала силы тяжести реальной Земли, связанная со значениями аномалий силы тяжести на поверхности Земли. Иначе, потенциал T называется возмущающим потенциалом. Тогда уравнение $U(x, y, z) = C_1$, где C_1 — некоторая постоянная, определяющая поверхность, со-

Рис. 52. Точки P и P_1 на уровнях поверхностях U и $U+T$



ответствующая нормальному сфероиду, а уравнение

$$W(x, y, z) = U(x, y, z) + T(x, y, z) = C, \quad (\text{VI.15})$$

где C — также постоянная — уравнение геоида. При этом необходимо иметь в виду, что величина T в любой точке поверхности весьма мала по сравнению с величиной U .

Рассмотрим семейство уровней поверхностей потенциала W . Предположим, что через точку P проходит уровеньная поверхность (рис. 52) $W(x, y, z) = C$. Если в (VI.15) $T=0$, то эта поверхность соответствует нормальному сфероиду $U(x, y, z) = C$, т. е. точка P принадлежит сфероиду. Добавим к величине U некоторый малый потенциал T . Тогда положение рассматриваемой уровеньной поверхности, соответствующей величине C , изменится под действием возмущающего потенциала и точка P переместится по направлению нормали в точку P_1 . Расстояние между точками P и P_1 обозначим Δn . Тогда в точке P потенциал $U(P) = C$. В точке P_1 (на геоиде) $U(P_1) + T = C$. Отсюда

$$\Delta U = U(P_1) - U(P) = -T.$$

Или при бесконечно малом расстоянии между точками P и P_1

$$\lim_{\Delta n \rightarrow 0} (\Delta U / \Delta n) = \partial U / \partial n = -T / \partial n.$$

Отсюда расстояние между точками P и P_1

$$\partial n = N = -T / (\partial U / \partial n) = T / \gamma, \quad (\text{VI.16})$$

где $\gamma = -\partial U / \partial n$ — нормальная производная функции U .

Из этой формулы видно, что всякое возмущение первоначального поля функцией T вызывает сдвиг его уровнейных поверхностей на расстояние T/γ . Это положение определяет содержание леммы Брунса. Таким образом, для определения отклонений (расстояний N) геоида от положения нормального сфероида необходимо найти величину возмущающего потенциала T .

Основное уравнение гравиметрии. Выразим аномалию силы тяжести через значения возмущающего потенциала T . С этой целью определим γ в точке P_1 через ее значение в точке P :

$$\gamma(P_1) = \gamma(P) + (\partial \gamma / \partial n) N.$$

Пользуясь формулой (VI.16), получим

$$\gamma(P_1) = \gamma(P) + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial n} T. \quad (\text{VI.17})$$

На основании же (VI.15) в точке P_1

$$-\partial W(P_1)/\partial n = -\partial U(P_1)/\partial n - \partial T/\partial n.$$

Обозначим $-\partial W/\partial n = g$. Тогда, учитывая, что $-\partial U/\partial n = \gamma$, найдем

$$g(P_1) = \gamma(P_1) - \partial T/\partial n.$$

Пользуясь формулой (VI.17) (заменяя здесь γ в точке P_1 ее значением в точке P), получим

$$g(P_1) = \gamma(P) + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial n} T - \frac{\partial T}{\partial n}.$$

В этой формуле

$$g(P_1) - \gamma(P) = \Delta g$$

соответствует значению силы тяжести. Поэтому

$$\Delta g = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial n} T - \frac{\partial T}{\partial n}. \quad (\text{VI.18})$$

Это уравнение называют также основным уравнением гравиметрии. Оно и выражает связь аномалий силы тяжести с величиной возмущающего потенциала. В левой его части находится так называемая смешанная аномалия силы тяжести — смешанная из-за того, что в разности $\Delta g = g(P_1) - \gamma(P)$ первая величина относится к поверхности геоида, а вторая — к точке на отсчетной поверхности (поверхности сфероида), т. е. они относятся к разным поверхностям. В формуле (VI.18) последний член выражает силу, развиваемую возмущающим потенциалом, а первый — поправку, учитывающую переход от сфероида к геоиду.

Так как величина T мала, для определения нормальной производной функции γ можно принять $U = GM/R$, где M — масса Земли; R — ее радиус, т. е. приближенное значение потенциала притяжения Земли, конкретнее, потенциал притяжения шарообразной Земли. Поэтому

$$\gamma = -\partial U/\partial n = -\partial U/\partial R = GM/R^2.$$

Тогда

$$\partial \gamma/\partial n = \partial \gamma/\partial R = -2GM/R^3,$$

т. е.

$$\frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial n} = -\frac{2}{R}.$$

Поэтому (VI.18) можно переписать:

$$\Delta g = -2T/R - \partial T / \partial n. \quad (\text{VI.19})$$

Это уравнение выражает граничные условия, которым должна удовлетворять функция T в точках поверхности относимости, в которых задана аномалия Δg .

Формула Стокса. В формуле (VI.19) заменим величину R на переменную ρ и, считая, что направление внешней нормали n совпадает с направлением радиуса ρ , найдем

$$\Delta g = -\frac{2T}{\rho} - \frac{\partial T}{\partial n} = -\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 T)_{\Sigma},$$

где индекс Σ указывает на принадлежность получаемых после дифференцирования значений к поверхности земного шара Σ .

Введем функцию

$$E = -2T - \rho \frac{\partial T}{\partial \rho} = \rho \Delta g = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 T).$$

Отсюда

$$\Delta g = \left(\frac{1}{\rho} E \right)_{\Sigma} = \frac{1}{R} E_{\Sigma}.$$

Тогда

$$E_{\Sigma} = R \Delta g.$$

По условию T — гармоническая функция. Тогда, как было показано в гл. IV, и функция $\rho(\partial T / \partial \rho)$ также гармоническая. Отсюда следует, что значения E определяют гармоническую функцию, принимающую на поверхности сферы Σ заданные значения $R \Delta g$.

Поэтому для определения E можно пользоваться интегралом Пуассона. Применяя его для случая внешней точки, получим

$$E(P) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 T) = \frac{\rho^2 - R^2}{4\pi R} \int_{\Sigma} E(M) \frac{d\Sigma}{r^3}. \quad (\text{VI.20})$$

Из этого равенства необходимо определить величину T . Умножим обе его части на $\rho d\rho$ и проинтегрируем по ρ в пределах от $\rho (\rho \geq R)$ до ∞ :

$$-\int_{\rho}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 T) d\rho = \frac{1}{4\pi R} \int_{\Sigma} E(M) \left[\int_{\rho}^{\infty} \frac{\rho^3 - R^2 \rho}{r^3} d\rho \right] d\Sigma.$$

Здесь функция T — регулярная на бесконечности, т. е.

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} (\rho^2 T) = 0.$$

Это следствие того, что T соответствует отклонению потенциала

геоида от потенциала отсчетного сфероида и вызвана не добавочными массами, а перераспределением массы внутри сфероида (общие массы сфероида и геоида равны друг другу, и начало координат совпадает с центрами масс этих тел). Другими словами, функция T соответствует сумме отброшенных членов в ряде сферических функций, полученном для потенциала силы тяжести. При описании потенциала силы тяжести для сфероида, из (VI.2) видно, что

$$T = G \sum_{n=3}^{\infty} \int_v \frac{R^n}{\rho^{n+1}} P_n(\cos \theta) dm,$$

т. е. в выражение T не входят члены, обратно пропорциональные ρ и ρ^2 . Отсюда и следует регулярность T на бесконечности. Поэтому

$$-\int_{\rho}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 T) d\rho = -\rho^2 T \Big|_{\rho}^{\infty} = \rho^2 T.$$

Из (VI.20) получим

$$T = \frac{1}{4\pi R \rho^3} \int_{\Sigma} E(M) \left[\int_{\rho}^{\infty} \frac{\rho^3 - R^3 \rho}{r^3} d\rho \right] d\Sigma. \quad (\text{VI.21})$$

Для вычисления внутреннего интеграла приведем подынтегральную функцию к более удобному виду. Так как

$$r^2 = R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos \varphi,$$

то

$$\begin{aligned} \partial r / \partial \rho &= (\rho - R \cos \varphi) / r; \\ \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{r} \right) &= -\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial \rho} = -\frac{\rho - R \cos \varphi}{r^3}. \end{aligned}$$

После небольших преобразований получим

$$-2\rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{\rho}{r} = \frac{\rho^3 - R^3 \rho}{r^3}.$$

Поэтому для внутреннего интеграла в (VI.21) найдем

$$\int \frac{\rho^3 - R^3 \rho}{r^3} d\rho = -2 \int \rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{r} \right) d\rho - \int \frac{\rho}{r} d\rho.$$

Интегрируя по частям, из первого интеграла правой части получим

$$2 \int \rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{r} \right) d\rho = \frac{2\rho^2}{r} - 4 \int \frac{\rho}{r} d\rho.$$

Тогда

$$\int \frac{\rho^3 - R^2 \rho}{r^3} d\rho = -\frac{2\rho^2}{r} + 3 \int \frac{\rho}{r} d\rho.$$

Интеграл в последнем члене этой формулы табличный. Опуская несложные, но громоздкие преобразования, запишем его конечное выражение:

$$\int \frac{\rho^3 - R^2 \rho}{r^3} d\rho = -2 \frac{\rho^2}{r} + 3r + 3R \cos \varphi \ln(r + \rho - R \cos \varphi).$$

Тогда из (VI.21) найдем

$$\rho^2 T = (1/4\pi R) \int_{\Sigma} E(M) \left[-2(\rho^2/r) + 3r + 3R \cos \varphi \ln(r + \rho - R \cos \varphi) \right] d\Sigma. \quad (VI.22)$$

Этот интеграл существует, так как существует, как было показано выше, предел $\lim_{\rho \rightarrow \infty} (\rho^2 T)$.

Для определения значения выражения в квадратных скобках (VI.22) при $\rho \rightarrow \infty$ рассмотрим функцию

$$r^2 = \rho^2 [1 + R^2/\rho^2 - 2(R/\rho) \cos \varphi].$$

При $\rho \gg R$, пользуясь рядом по биному Ньютона, получим

$$r \approx \rho - R \cos \varphi;$$

$$1/r \approx 1/\rho + (R/\rho^2) \cos \varphi.$$

С учетом этих выражений после подстановки пределов интегрирования из (VI.22) найдем

$$\begin{aligned} \rho^2 T &= \frac{1}{4\pi R} \int_{\Sigma} E(M) (\rho - 5R \cos \varphi + 3R \cos \varphi \ln 2\rho) dS - \\ &- \frac{1}{4\pi R} \int_{\Sigma} E(M) \left[-\frac{2\rho^2}{r} + 3r + 3R \cos \varphi \ln(r + \rho - R \cos \varphi) \right] d\Sigma. \end{aligned}$$

Здесь в правой части первый интеграл соответствует значениям, полученным при верхнем пределе интегрирования (сохранены в круглых скобках только постоянная часть $5R \cos \varphi$ и члены, возрастающие при $\rho \rightarrow \infty$, все остальные члены в пределе равны нулю), второй интеграл — нижнему пределу интегрирования. Разделив на ρ^2 , после небольших преобразований получим

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{4\pi R} \int_{\Sigma} E(M) \left(\frac{2}{r} - 3 \frac{r}{\rho^2} + \frac{1}{\rho} - \right. \\ &\left. - 5 \frac{R}{\rho^2} \cos \varphi - 3 \frac{R}{\rho^2} \cos \varphi \ln \frac{r + \rho - R \cos \varphi}{2\rho} \right) dS. \end{aligned}$$

Обозначим

$$\frac{2}{r} - 3 \frac{r}{\rho^2} + \frac{1}{\rho} - 5 \frac{R}{\rho^2} \cos \varphi - \\ - 3 \frac{R}{\rho^2} \cos \varphi \ln \frac{r + \rho - R \cos \varphi}{2\rho} = S(\rho, \varphi).$$

Тогда

$$T = \frac{1}{4\pi R} \int_S E(M) S(\rho, \varphi) d\Sigma. \quad (\text{VI.23})$$

Эта формула и определяет искомые значения возмущающего потенциала T для точек внешнего пространства. Для поверхности относимости S (в данном случае сферы) при $\rho = R$ получим

$$r = \sqrt{R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos \varphi} = 2R \sin(\varphi/2), \\ T = \frac{1}{4\pi R^2} \int_S E(M) S(\varphi) d\Sigma, \quad (\text{VI.24})$$

где

$$S(\varphi) = \operatorname{cosec}(\varphi/2) - 6 \sin(\varphi/2) + 1 - 5 \cos \varphi - \\ - 3 \cos \varphi \ln[\sin(\varphi/2) + \sin^2(\varphi/2)]. \quad (\text{VI.25})$$

Эта функция $S(\varphi)$ называется функцией Стокса для сфер.

Заменим в (VI.24) значения $E(M)$ на $R\Delta g$ и перейдем от T к расстоянию N согласно лемме Брунса (VI.16). Окончательно получим

$$N = \frac{1}{4\pi\gamma R} \int_S \Delta g S(\varphi) d\Sigma. \quad (\text{VI.26})$$

Это формула и является формулой Стокса. Она определяет отклонения геоида от сфероида по значениям аномалии силы тяжести.

Функцию Стокса (VI.25) можно определить и как сумму ряда

$$S(\varphi) = \frac{1}{R} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos \varphi),$$

получаемого при выводе формулы Стокса с применением сферических функций. Формулу Стокса можно переписать в более удобном для практического применения виде. Для этого нужно выразить элемент поверхности сферы в сферических координатах с полюсом в точке определения N :

$$dS = R^2 \sin \varphi d\varphi dA,$$

где A — азимут направления из полюса на элемент поверхности.
Тогда

$$N = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \Delta g S(\varphi) \sin \varphi \, d\varphi \, dA. \quad (\text{VI.27})$$

В этой формуле R — радиус земного шара, в качестве которого обычно принимают средний радиус Земли, определяемый как

$$R = \sqrt[3]{a^2 b},$$

где a и b — радиусы Земли.

В качестве γ также принимают среднее значение нормальной силы тяжести, которое нетрудно получить из формулы распределения силы тяжести на сфероиде:

$$\gamma = \gamma_e (1 + \beta \sin^2 \varphi).$$

Проинтегрировав это выражение по всей поверхности сферы Σ и разделив на площадь этой поверхности, найдем

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi R^2} \int_{\Sigma} \gamma \, d\Sigma &= \gamma_e \frac{1}{4\pi R^2} \left[\int_{\Sigma} d\Sigma + \beta \int_{\Sigma} \sin^2 \varphi \, d\Sigma \right] = \\ &= \gamma_e \left(1 + \frac{1}{3} \beta \right). \end{aligned}$$

В (VI.27) обозначим

$$(1/2) \sin \varphi S(\varphi) = F(\varphi).$$

Эта функция называется функцией Гельмерта. Тогда формула Стокса переписывается в виде

$$N = \frac{R}{2\pi\gamma} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \Delta g F(\varphi) \, d\varphi \, dA.$$

При применении этой формулы данные, наблюдаемые на физической поверхности Земли, необходимо привести к уровню моря или геоида. Кроме того, массы материков, выступающие над поверхностью геоида, необходимо или перенести внутрь геоида или распределить по его поверхности. Только тогда будут выполняться условия, отвечающие формуле Стокса. Полученная таким путем поверхность Земли будет уровенной поверхностью и ее обычно называют *регуляризованным геоидом*. Регуляризованный геоид отличается от действительного геоида на величину искажений, вызванных переносом масс, но эти искажения можно учесть. Данная формула Стокса соответствует поверхности сферы. Для эллипсоидальной уровенной поверхности обобщенная формула Стокса выведена Д. В. Загребиным [3] с применением функций Ламе.

Определение средней плотности Земли

Остановимся на вопросах применения потенциала силы тяжести Земли для определения значений ее средней плотности и массы.

Рассмотрим лапласиан от потенциала силы тяжести Земли

$$\Delta W = -4\pi G\sigma + 2\omega^2.$$

Умножим обе части этого выражения на элемент объема dv и проинтегрируем его по всему объему Земли v :

$$\int_v \Delta W dv = -4\pi G \int_v \sigma dv + 2\omega^2 \int_v dv.$$

Или

$$\int_v \Delta W dv = -4\pi GM + 2\omega^2 v,$$

где M — масса Земли.

На основании второй формулы Грина (III.31) при $U=1$ и $V=W$ получим

$$\int_v \Delta W dv = \int_S (\partial W / \partial n) dS.$$

Примем, что S — это поверхность уровня потенциала силы тяжести. Тогда производная по нормали $\partial W / \partial n = -g$, т. е. является ускорением свободного падения. Поэтому с учетом последних трех формул найдем

$$-\int_S g dS = -4\pi GM + 2\omega^2 v.$$

Разделив это выражение на объем, получим

$$-(1/v) \int_S g dS = -4\pi G\sigma + 2\omega^2.$$

Отсюда можно определить плотность:

$$\sigma = \frac{\omega^2}{2\pi G} + \frac{1}{4\pi Gv} \int_S g dS.$$

Предположим, что S — сфера радиусом R . Тогда, учитывая, что

$$\frac{1}{4\pi R^2} \int_S g dS = g_{\text{ср}}$$

является интегральной средней от ускорения свободного падения

на поверхности сферы, найдем

$$\alpha = \frac{\omega^2}{2\pi G} + \frac{R^2}{Gv} g_{\text{ср}} = \frac{\omega^2}{2\pi G} + \frac{3}{4} \frac{g_{\text{ср}}}{\pi G R}.$$

Отсюда можно определить значение средней плотности Земли. Если умножить обе части этого выражения на объем, то можно найти и величину массы Земли:

$$M = (\omega^2/2\pi G) v + (R^2/G) g_{\text{ср}}.$$

§ 29. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛА МАГНИТНОГО ПОЛЯ ЗЕМЛИ И ЕГО ПРОИЗВОДНЫХ В ВИДЕ РЯДА СФЕРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В случае, когда магнитное поле имеет потенциальный характер (для источников, находящихся внутри земного шара), магнитный потенциал можно записать в виде

$$U = \int_v dm/r. \quad (\text{VI.28})$$

Пользуясь разложением функции $1/r$ в ряд сферических функций, определяемый формулой (V.13) при $\rho > R$, а именно [6]

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^n}{\rho^{n+1}} P_n(\cos \theta) = \frac{1}{\rho} + \\ &+ \frac{R}{\rho^2} \cos \theta + \frac{1}{2} \frac{R^2}{\rho^3} (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots, \end{aligned}$$

найдем

$$\begin{aligned} U &= \int_v \frac{dm}{r} = \frac{1}{\rho} \int_v dm + \\ &+ \frac{1}{\rho^2} \int_v R \cos \theta \, dm + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{\rho^{n+1}}, \end{aligned} \quad (\text{VI.29})$$

где

$$A_n = \int_v R^n P_n(\cos \theta) \, dm. \quad (\text{VI.30})$$

Здесь первый член $(1/\rho) \int_v dm = 0$, так как сумма всех магнитных масс в каждой точке тела равна нулю. Поэтому (VI.29) можно переписать:

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n/\rho^{n+1}). \quad (\text{VI.31})$$

В частном случае при достаточно большом ρ в этой формуле можно пренебречь всеми членами, кроме первого. Тогда

$$U = (1/\rho^2) \int_v R \cos \theta dm = (M/\rho^2) \cos \varphi. \quad (\text{VI.32})$$

Здесь интеграл $\int_v R \cos \theta dm$ — проекция магнитного момента тела $\vec{M}$ на ось ρ (угол φ — угол между направлениями $\vec{M}$ и ρ). Формула (VI.32) выражает потенциал однородно намагниченного шара. Из нее следует, что всегда любое намагниченное тело (любой формы, с любым распределением в нем намагниченности) на достаточно большом расстоянии можно рассматривать как однородно намагниченный шар или диполь с таким же магнитным моментом, каким обладает данное тело. Это делает возможным при достаточно больших ρ ограничиваться рассмотрением поля диполя.

Для определения коэффициентов A_n выразим $\cos \theta$ через угловые координаты точек P и M :

$$\cos \theta = \cos \gamma \cos \gamma' + \sin \gamma \sin \gamma' \cos (\lambda - \lambda'),$$

где γ и λ — угловые координаты точки P , а γ' и λ' — угловые координаты точки M .

На основании теоремы сложения, которая известна в теории шаровых функций, можем написать

$$P_n(\cos \theta) = \sum_{k=0}^n \frac{(n-k)!}{(n+k)!} C_n P_n^k(\cos \gamma) P_n^k(\cos \gamma') \cos k(\lambda - \lambda'), \quad (\text{VI.33})$$

где

$$C_n = \begin{cases} 1 & \text{при } k=0, \\ 2 & \text{при } k>0, \end{cases}$$

т. е.

$$P_n(\cos \theta) = 1 + \frac{(n-1)!}{(n+1)!} 2P_n(\cos \gamma) P_n(\cos \gamma') \cos (\lambda - \lambda') + \\ + \frac{(n-2)!}{(n+2)!} 2P_n^2(\cos \gamma) P_n^2(\cos \gamma') \cos 2(\lambda - \lambda') + \dots$$

Пользуясь формулой

$$\cos k(\lambda - \lambda') = \cos k\lambda \cos k\lambda' + \sin k\lambda \sin k\lambda'$$

и подставляя значения (VI.33) в (VI.30), найдем

$$A_n = \sum_{k=0}^n (a_{nk} \cos k\lambda + b_{nk} \sin k\lambda) P_n^k(\cos \theta), \quad (\text{VI.34})$$

где

$$a_{nk} = \frac{(n-k)!}{(n+k)!} C_n \int_v R^n P_n^k(\cos \gamma') \cos k\lambda' dm;$$

$$b_{nk} = \frac{(n-k)!}{(n+k)!} C_n \int_v R^n P_n^k(\cos \gamma') \sin k\lambda' dm.$$

Тогда ряд (VI.31) перепишем в виде

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{\rho^{n+1}} (a_{nk} \cos k\lambda + b_{nk} \sin k\lambda) P_n^k(\cos \gamma). \quad (\text{VI.35})$$

В частном случае, когда тело имеет осевую симметрию (цилиндр, эллипсоид) формула (VI.35) не должна зависеть от λ , что имеет место только при $k=0$. В этом случае [6]

$$A_n = a_n P_n(\cos \gamma),$$

где

$$a_n = \int_v R^n P_n(\cos \gamma') dm.$$

Поэтому из (VI.35) найдем

$$\begin{aligned} U &= \frac{a_1}{\rho^2} P_1(\cos \gamma) + \frac{a_2}{\rho^3} P_2(\cos \gamma) + \dots = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\rho^{n+1}} P_n(\cos \gamma) = \frac{\cos \theta}{\rho^2} \int_v R \cos \gamma' dm + \\ &+ \frac{1}{2\rho^3} (3 \cos^2 \gamma - 1) \int_v R^2 \frac{1}{2} (3 \cos^2 \gamma' - 1) dm + \dots \end{aligned} \quad (\text{VI.36})$$

Если же намагниченное тело имеет и центр симметрии, то четные коэффициенты в (VI.36) также будут равны нулю ($a_2 = a_4 = a_6 = \dots = 0$).

§ 30. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ПОВЕРХНОСТИ ЗЕМЛИ, ПРИМЕНЕНИЕ СФЕРИЧЕСКОГО ГАРМОНИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Определение значений магнитного поля на поверхности Земли

Одна из важных задач при изучении магнитного поля Земли — представление его в виде аналитической зависимости компонент напряженности от координат точек земной поверхности. Зная такую функциональную зависимость, можно решать ряд задач научного и практического характера.

Первой попыткой такого представления была работа профессора Казанского университета И. М. Симонова, опубликованная в 1835 г. [6]. В ней И. М. Симонов, основываясь на результатах наблюдений того времени, высказывает предположение, что магнитное поле Земли — поле однородно намагниченного шара, магнитная ось которого проходит через центр земного шара, параллельно линии, соединяющей магнитные полюса. Несмотря на давность работа И. М. Симонова не утратила своего значения и в настоящее время, так как большая часть магнитного поля Земли является полем однородно намагниченного шара, и поэтому при рассмотрении многих вопросов можно принимать, что земной шар намагнитен однородно.

Следующий крупный шаг в аналитическом представлении магнитного поля Земли — теория Гаусса (1838 г.), которая дала возможность представить магнитное поле Земли как функцию координат данной точки, оставив в стороне физические причины возникновения этого поля. Теория Гаусса позволила решать ряд задач о структуре магнитного поля Земли, что имело и имеет до сего времени важное значение.

В основе теории Гаусса лежит предположение о том, что магнитное поле Земли вызывается источниками, которые находятся внутри земного шара и поэтому имеют потенциальный характер. При этом потенциал магнитного поля можно представить в виде ряда (VI.35).

Введем обозначения [6]:

$$a_{nk} = R^{n+2} \alpha_{nk}, \quad b_{nk} = R^{n+2} \beta_{nk},$$

где R — радиус Земли. Тогда (VI.35) перепишем:

$$U = R \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R}{\rho} \right)^{n+1} \sum_{k=0}^n (\alpha_{nk} \cos k\lambda + \beta_{nk} \sin k\lambda) P_n^k(\cos \theta). \quad (\text{VI.37})$$

Для точек, находящихся на поверхности земного шара, $\rho = R$, поэтому

$$U = R \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^n (\alpha_{nk} \cos k\lambda + \beta_{nk} \sin k\lambda) P_n^k(\cos \theta). \quad (\text{VI.38})$$

Составляющие напряженности магнитного поля по осям координат x и y можно найти, дифференцируя выражение (VI.37) по соответствующей координате и полагая в нем $\rho = R$ ($Z = -dU/d\rho$, $X = -(1/\rho)(\partial U/\partial\theta)$, $Y = [-(1/r \sin \theta)(\partial U/\partial\lambda)]$):

$$Z = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^n [(n+1) \alpha_{nk} \cos k\lambda + (n+1) \beta_{nk} \sin k\lambda] P_n^k(\cos \theta),$$

$$X = - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^n (\alpha_{nk} \cos k\lambda + \beta_{nk} \sin k\lambda) \frac{dP_n^k(\cos \theta)}{d\theta}, \quad (\text{VI.39})$$

$$Y = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^n (k\alpha_{nk} \sin k\lambda - k\beta_{nk} \cos k\lambda) \frac{P_n^k(\cos \theta)}{\sin \theta}.$$

Эти формулы вытекают из теории Гаусса. Из них видно, что в любой точке поверхности Земли можно определить элементы земного магнетизма, если известны коэффициенты α_{nk} и β_{nk} . Число этих коэффициентов $N = n(n+2)$, если в бесконечных рядах ограничиться членом порядка n . Поэтому для определения указанных коэффициентов необходимо иметь N уравнений. Но для получения надежных результатов число уравнений должно быть гораздо больше, и их решают методом наименьших квадратов. Сам Гаусс ограничился членом четвертого порядка ($n=4$). При этом число неизвестных 24 и Гаусс определил их по данным наблюдений в 12 точках, решая 36 уравнений (в каждой точке наблюдалось три составляющих X , Y , Z). Фанзелау ограничился членом $n=15$ (число неизвестных 255), решая систему уравнений из гораздо большего числа уравнений, чем 255, что стало возможным при появлении ЭВМ.

Разложение магнитного потенциала в ряд получило название сферического гармонического анализа. Первые несколько членов этого разложения имеют определенный физический смысл. Первый член разложения Гаусса представляет собой потенциал, создаваемый однородно намагниченным шаром, магнитный момент которого равен среднему моменту при неоднородном намагничивании.

При $n=1$ из равенств (VI.39) получим

$$\begin{aligned} Z &= 2[\alpha_{10} \cos \theta + (\alpha_{11} \cos \lambda + \beta_{11} \sin \lambda) \sin \theta], \\ X &= \alpha_{10} \sin \theta - (\alpha_{11} \cos \lambda + \beta_{11} \sin \lambda) \cos \theta, \\ Y &= \alpha_{11} \sin \lambda - \beta_{11} \cos \lambda. \end{aligned} \quad (\text{VI.40})$$

Эти формулы соответствуют выражениям, определяющим составляющие напряженности магнитного поля, вызванного однородным намагниченным шаром радиусом R , магнитный момент которого

$$M = R^3 \sqrt{\alpha_{10}^2 + \alpha_{11}^2 + \beta_{11}^2}.$$

Действительно, потенциал от однородно намагниченного шара в точке P

$$U = (M/r^2) \cos \gamma,$$

где γ — угол между осью магнита и направлением радиуса-вектора r . В сферических координатах

$$\cos \gamma = \sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos (\lambda - \lambda_0),$$

где φ и λ — широта и долгота точки P : φ_0 и λ_0 — широта и

долгота точки Q на сфере — точки пересечения магнитной оси с поверхностью.

Тогда

$$U = (M/r^2)[\sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos (\lambda - \lambda_0)].$$

Выражая магнитный момент шара через его намагниченность и объем, т. е. пользуясь формулой

$$M = (4/3)\pi R^3 J,$$

и принимая

$$\alpha_{10} = (4/3)\pi J \sin \varphi_0;$$

$$\alpha_{11} = (4/3)\pi J \cos \varphi_0 \cos \lambda_0;$$

$$\beta_{11} = (4/3)\pi J \cos \varphi_0 \sin \lambda_0,$$

получим

$$U = (R^3/r^2)[\alpha_{10} \sin \varphi + (\alpha_{11} \cos \lambda + \beta_{11} \sin \lambda) \cos \varphi].$$

Переходя от угла φ к углу $\theta = 90^\circ - \varphi$, т. е. заменяя φ на угол $90^\circ - \theta$, найдем

$$U = (R^3/r^2)[\alpha_{10} \cos \theta + (\alpha_{11} \cos \lambda + \beta_{11} \sin \lambda) \sin \theta].$$

Беря производные от этой функции согласно выражениям

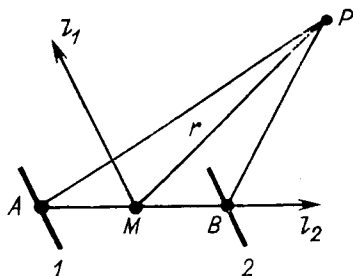
$$Z = -\partial U / \partial r, \quad X = -\frac{1}{r} \partial U / \partial \varphi, \quad Y = -\frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial U}{\partial \lambda},$$

придем к формулам (VI.40). При этом в них значение J нужно заменить средним значением намагниченности. Таким образом, первый член ряда Гаусса соответствует полю однородно намагниченного шара или полю диполя, помещенного в центр Земли.

Интерпретация остальных членов ряда впервые была дана Н. А. Умовым, который показал, что каждая шаровая функция, входящая в ряд Гаусса, представляет собой магнитный потенциал особого распределения, называемый мультиполем и имеющий соответствующие оси, число которых определяется порядком функций. Кроме того, каждому мультиполю соответствует магнитный момент, который можно назвать магнитным моментом того же порядка, какой имеет сама функция. Например, члены второго порядка разложения Гаусса соответствуют потенциалу квадруполь, который является совокупностью двух диполей, параллельных друг другу, но противоположно направленных и находящихся на некотором бесконечно малом расстоянии друг от друга. При этом сами диполи могут иметь любое направление и простираение. Рассмотрим потенциал квадруполь.

Обозначим расстояние между диполями d (рис. 53). На рисунке $AM = MB$, $AB = d$, $PM = r$. Диполи 1 и 2 параллельны друг

Рис. 53. Квадруполь



другу, но направлены в разные стороны. Квадруполь имеет две оси, направление одной из них совпадает с направлением d — это ось l_2 , а направление второй — совпадает с осью диполя (с направлением диполей) — это l_1 . В пределе, когда $d \ll r$, т. е. когда $d \rightarrow 0$, указанная система двух диполей образует квадруполь.

Потенциал квадруполя можно определить из выражения разности потенциалов от двух указанных диполей U_1 и U_2 : $U' = U_1 - U_2$ в пределе, когда $d \rightarrow 0$, а именно, из выражения

$$U = (\partial U' / \partial l_2) dl_2.$$

Окончательно потенциал квадруполя [6]

$$U = -\frac{M}{r^3} \left[\frac{3}{2} \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \frac{1}{2} \cos \theta_{12} \right],$$

где θ_1 и θ_2 — углы между направлениями осей квадруполя и вектора r ; θ_{12} — угол между осями квадруполя;

$$M = 2M_1 dh_2 = 2M_1 d,$$

где M_1 — момент диполя, называется моментом квадруполя.

Выражая в полученной формуле переменные в сферических координатах, нетрудно показать, что [6] потенциал квадруполя соответствует второму члену ряда сферического гармонического анализа

$$U = R[\alpha_{20} P_2^0(\cos \theta) + (\alpha_{21} \cos \lambda + \beta_{21} \sin \lambda) P_2^1(\cos \theta) + (\alpha_{22} \cos 2\lambda + \beta_{22} \sin 2\lambda) P_2^2(\cos \theta)],$$

коэффициенты которого являются функциями момента квадруполя и углов, определяющих направление его осей.

Значение сферического гармонического анализа при различных геофизических и космических исследованиях постоянно возрастает. Современное применение сферического гармонического анализа основано на использовании большого количества экспе-

риментального материала (иногда до 50—120 тыс. измеренных значений поля). При этом в большинстве случаев получаемые сферические ряды ограничивают 8—10-ю членами (80—120 коэффициентов), но есть примеры вычисления коэффициентов до 15, 23 порядков.

Так как на спутниках в настоящее время проводятся с достаточной точностью измерения только модуля полного вектора напряженности магнитного поля, сферический гармонический анализ применяется и для исследования этого элемента магнитного поля (модульный анализ). При этом за основу берется формула, получаемая из равенства

$$T = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

при замене в нем функций X , Y и Z их выражениями, полученными через сферические гармонические ряды.

Коэффициенты сферического гармонического ряда, полученные по данным измерений в разное время, меняются от эпохи к эпохе. Систематическое изменение коэффициентов указывает на то, что магнитное поле не остается постоянным, а непрерывно меняется, т. е. вековые изменения магнитного поля отражены и в изменении коэффициентов сферического ряда. Большое значение для исследования природы геомагнитного поля имеет знание закономерностей его изменения в большом временном интервале. Такие данные можно получить только на основе сферического гармонического анализа значений поля за прошлые эпохи. Но тогда измерения велись только по угловым элементам (склонениям и наклонениям—данные по измерениям склонения имеются с начала XVI в., а по измерениям наклонения—с XVIII в.). Кроме того, имеются еще и некоторые данные археомагнитных оценок. На основании указанных измерений, проводимых иногда с применением экстраполяции, выполнены сферические гармонические анализы значений поля за прошлые эпохи, которые дали возможность более или менее удовлетворительно изучить перемещение геомагнитных полюсов и расположение магнитного центра Земли за 400-летний интервал. Результаты сферического гармонического анализа значений геомагнитного поля позволяют определить магнитный момент Земли и его направление, местоположение магнитного центра, их изменение со временем и другие свойства поля.

Данные сферического гармонического анализа при известных значениях коэффициентов ряда (после определения этих коэффициентов) позволяют найти не только значения компонент поля X , Y и Z в точках пространства, но и различные градиенты этих компонент. Для этого необходимо продифференцировать выражения, определяющие эти компоненты через сферические ряды, по соответствующим сферическим координатам, а именно,

необходимо найти производные:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial r}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial Z}{\partial \theta}, \quad \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial Z}{\partial \lambda}; \\ \frac{\partial X}{\partial r}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial X}{\partial \theta}, \quad \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial X}{\partial \lambda}; \\ \frac{\partial Y}{\partial r}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial Y}{\partial \theta}, \quad \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial Y}{\partial \lambda}. \end{aligned}$$

Здесь выражения первой строки определяют производные функции Z по осям координат x, y, z , а выражения второй и третьей строк — производные функций X, Y по направлениям этих же осей координат. Это следует из того, что для декартовых координат x, y, z , взятых в точке P на сфере с положительными направлениями (x — к северу по касательной к меридиану, y — к западу по касательной к параллели, z — перпендикулярно к центру сферы), дифференциалы

$$dz = -dr, \quad dx = -r d\theta, \quad dy = -z \sin \theta d\lambda.$$

Определение среднеквадратических величин аномалий

При решении многих задач гравиразведки и магниторазведки необходимо определять среднеквадратические величины аномалий. Такая необходимость возникает и в случаях, когда приходится интерполировать значения силы тяжести или элементов магнитного поля на участки отсутствия наблюдаемых данных. В подобных ситуациях более точно можно интерполировать среднеквадратические величины аномалий, а не значения самих элементов поля, так как первые являются наиболее устойчивыми и малоизменяющимися в пределах ограниченных площадей. Кроме того, такая необходимость возникает и при оценках различных погрешностей. Среднеквадратические величины аномалий можно оценить по данным их автокорреляционных функций.

Значения автокорреляционных функций B случайных аномалий для трехмерных и двумерных случаев (на плоскости и вдоль профиля) соответственно

$$B(\xi, \eta) = \lim_{\substack{a \rightarrow \infty \\ b \rightarrow \infty}} \frac{1}{2a2b} \int_{-a}^a \int_{-b}^b f(x, y) f(x - \xi, y - \eta) dx dy;$$

$$B(\xi) = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{2a} \int_{-a}^a f(x) f(x - \xi) dx.$$

Отсюда для средних квадратов амплитуд аномалий получим

$$B(0, 0) = \lim_{\substack{a \rightarrow \infty \\ b \rightarrow \infty}} \frac{1}{4ab} \int_{-a}^a \int_{-b}^b f^2(x, y) dx dy;$$

$$B(0) = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{2a} \int_{-a}^a f^2(x) dx.$$

В сферических координатах (на поверхности сферы), разделив последнее выражение на всю площадь интегрирования, можем написать

$$B(0, 0) = \frac{1}{S} \int_S f^2(\theta, \lambda) dS,$$

где S — площадь интегрирования.

Интегрируя по поверхности всей сферы, получим

$$\begin{aligned} B(0, 0) &= \frac{1}{4\pi R^2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f^2(\theta, \lambda) R^2 \sin \theta d\theta d\lambda = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f^2(\theta, \lambda) \sin \theta d\theta d\lambda. \end{aligned} \quad (\text{VI.41})$$

С применением этой формулы определим величину среднего квадрата амплитуд геомагнитного потенциала, выраженного рядом сферических функций (VI.38). Получим

$$\begin{aligned} B(0, 0) = U^2 &= \frac{R^2}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left[\sum_{n=1}^\infty \sum_{k=0}^n (\alpha_{nk} \cos k\lambda + \beta_{nk} \sin k\lambda) \times \right. \\ &\times P_n^k(\cos \theta) \left. \right]^2 \sin \theta d\theta d\lambda. \end{aligned}$$

В этой формуле функции $P_n^k(\cos \theta) \cos k\lambda$ и $P_n^k(\cos \theta) \sin k\lambda$ ортогональны. Поэтому в правой ее части все интегралы, в подынтегральных выражениях которых встречаются произведения функций $P_n^k(\cos \theta) P_l^k(\cos \theta)$, $\cos k\lambda \cos m\lambda$, $\sin k\lambda \sin m\lambda$ (l, m, d — некоторые целые числа) при любом $n \neq l$, $k \neq m$, $k \neq d$, равны нулю. При $m = k$ и $d = k$

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left[P_n^k(\cos \theta) \frac{\cos k\lambda}{\sin k\lambda} \right]^2 \sin \theta d\theta d\lambda = \frac{4\pi}{2n+1}.$$

Поэтому для среднего квадрата амплитуд потенциала получим

$$B(0, 0) = \frac{R^2}{2n+1} \sum_{n=1}^\infty \sum_{k=0}^n (\alpha_{nk}^2 + \beta_{nk}^2).$$

Здесь величина

$$\frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^n (\alpha_{nk}^2 + \beta_{nk}^2)$$

представляет собой среднеквадратическое значение членов сферического ряда.

Вопросы для самоконтроля

1. В каких случаях необходимо разложение потенциала силы тяжести в ряды сферических функций? Какие оси называются главными осями инерции? Что такое главный момент инерции? Какие интегралы называются произведениями инерции тела вращения или его центробежными моментами?
2. Какой физический смысл имеют первые члены разложения потенциала силы тяжести в ряд сферических функций? Как можно определить потенциал силы тяжести на поверхности шарообразной Земли? Какие члены следует добавить к нему, чтобы получить потенциал силы тяжести на поверхности сфероида или эллипсоида вращения?
3. В чем заключается принцип определения фигуры Земли по потенциалу силы тяжести? Какими параметрами характеризуется эллипсоид вращения или сфероид?
4. Как найти нормальные значения силы тяжести? Что определяет формула Клеро?
5. Какой потенциал называется возмущающим? В чем заключается лемма Брунса? Что выражает основное уравнение гравиметрии? Что такое смешанная аномалия силы тяжести?
6. Что выражает функция Стокса? Где она применяется? Что определяет формула Стокса? Где она используется? Как применить формулу Стокса для исследования геоида? Чем отличается функция Гельмерта от функции Стокса?
7. Как определить среднюю плотность Земли?
8. Как представить потенциал магнитного поля Земли в виде ряда сферических функций? В чем заключается сферический гармонический анализ?
9. Какой физический смысл имеют первые члены разложения потенциала магнитного поля Земли в ряд сферических функций? Что такое квадруполь?
10. В чем заключается модульный анализ магнитного поля Земли?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

-
1. Грушинский Н. П. Теория фигуры Земли. — М.: Недра, 1976. — 512 с.
 2. Жданов М. С. Аналоги интеграла типа Коши в теории геофизических полей. — М.: Наука, 1984. — 327 с.
 3. Загребин Д. В. Введение в теоретическую гравиметрию. — Л.: Наука, 1976. — 292 с.
 4. Серкерев С. А. Элементы теории потенциала и их приложение в гравиразведке и магниторазведке. — М.: Изд-во МИНГ им. И. М. Губкина, 1980. — 100 с.
 5. Смирнов В. И. Курс высшей математики. — М.: Наука, 1981. — Т. 1. — 479 с. Т. 2. — 655 с.
 6. Яновский Б. М. Земной магнетизм. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1978. — 592 с.

- Вариации гравитационного поля 10
 - лунно-солнечные 10
 - магнитного поля 13
 - вековые 14
 - магнитные бури 14
 - суточные 14
 - неприливы 10
 - приливы 10
- Векторное поле 6, 22
 - произведение 301
 - смешанное 302
- Векторный потенциал 52
- Вихрь, или ротор, вектора 30
- Волновые числа 234
- Гармоническая функция 173, 201
 - —, основные свойства 201—208
- Гармонические многочлены 253
- Геоид 280
- Главные моменты инерции Земли 274
 - оси тела вращения 274
- Градиент потенциала 18
 - — в криволинейных ортогональных координатах 38
 - — в сферических координатах 40
 - — в цилиндрических координатах 40
 - — как объемная производная 20
- Граничные условия 221, 222
- Двойной слой 120
 - — плоский 131
- Деформация Земли 287
- Дивергенция вектора 26
 - — в криволинейных координатах 35
 - — в сферических координатах 36
 - — в цилиндрических координатах 37
 - — как объемная производная 26
 - —, определение 26
- Диполь 102, 103
 - плоский 131, 133
- Дипольная пластинка 126
- Задача Дирихле 220
 - — внешняя 220, 230
 - — внутренняя 220
- Неймана 221, 237, 242
- Закон Био — Савара 61
 - Кулона 100
 - Ньютона 7, 71
- Интеграл Дирихле 187
 - Пуассона 225
- Комплексный потенциал 212
- Координаты криволинейные 33
 - сферические 303
 - цилиндрические 303
- Коэффициенты Ламэ 35
 - ряда сферических функций 268
- Лемма Брунса 280
- Логарифмический потенциал 129
 - — бесконечной горизонтальной материальной линии 129
 - — двойного слоя 131, 135
 - — объемных масс 130
 - — простого слоя 131
- Масса
 - гравитационная 70
 - магнитная 100
 - точечная 70
- Магнитный момент Земли 13
- Магнитное поле Земли 11
 - — — внешнего происхождения 14
 - — — главное 11
 - — — дипольное 11
- Материальная бесконечная вертикальная полоса 132
 - — горизонтальная линия 128
 - — — полоса 132
- Материальный горизонтальный диск 95, 127
- Многочлены Лежандра 256
 - однородные 252
 - сферические 253
- Момент двойного слоя 121
 - диполя 104
 - простого слоя 91
- Намагниченность 101
- Направленный элемент дуги 32
 - — поверхности 19
- Напряженность поля
 - — вертикальной полосы 132
 - — горизонтального диска 95
 - — горизонтального цилиндра 130
 - — горизонтальной полосы 132
 - — дипольной пластинки 127
- Нормальные значения силы тяжести 279

Объемные производные поля 20
 Ось диполя 103
 Оператор Гамильтона 56
 — Лапласа 58
 Ортогональность сферических функций 257
 Плотность двойного слоя 121
 — линейная 98
 — объемная 77
 — поверхностная 91
 Поверхность векторная 23
 Поверхности равного потенциала 16
 Поле векторное 6, 22
 — вихревое 30—33
 — квазипотенциальное 45
 — скалярное 6, 15
 — соленоидальное 28
 — переменное 7
 — постоянное 7
 — потенциальное 19, 44
 Полиномы гармонические 253
 — Лежандра 255
 — однородные 252
 — сферические 253
 Полюса диполя 102
 Потенциал 19, 43
 — двойного слоя 120
 — дипольной пластинки 126
 — диполя 102
 — линейных масс 98
 — масс круговой проволоки 263
 — материального диска 95, 127
 — объемного тела 77
 — объемных намагниченных масс 105
 — простого слоя 91
 — силы тяжести 145
 — — сфероидальной Земли 276
 — — шарообразной Земли 276
 — системы точечных масс 73
 — сферического слоя 96, 97
 — — для внешних точек 96
 — — для внутренних точек 96
 — точечной массы 70
 — центробежной силы 146
 — шара 82
 — — для внешних точек 83, 84
 — — для внутренних точек 83, 84
 — эллипсоида 87
 — эллиптического цилиндра 141
 Поток поля 23, 26
 — векторный 23
 — скалярный 26
 — —, физический смысл 23
 Проекция вектора на нормаль
 — на координатные оси 300
 — по произвольному направлению 300

Производная поля по нормали 17
 — по произвольному направлению 15, 17
 Производные потенциала силы тяжести
 — — — второго порядка 150
 — — — первого порядка 148
 — — — физический смысл 150—152
 Простой слой 91
 Радиус-вектор 71
 Разложение гравитационного потенциала по полиномам Лежандра 261—262
 — — по сферическим функциям 262
 — магнитного потенциала по сферическим функциям 289
 Расстояние между уровнями поверхностями 16
 Расходимость векторного поля 28
 — — как объемная производная 26
 — — —, определение 26
 — — —, физический смысл 26
 Регулярность потенциала на бесконечности 80
 Ротор вектора 30
 — в криволинейных ортогональных координатах 41
 — в сферических координатах 43
 — в цилиндрических координатах 43
 — векторного поля как объемная производная 30
 — — —, определение 30
 — — —, физический смысл 31
 Ряды сферических функций 265
 — функций Бесселя 177
 Свойства полиномов Лежандра 257
 — потенциала 43
 — — двойного слоя 121, 125
 — — диполя 104
 — — объемного тела 79
 — — простого слоя 92
 — — силы тяжести 146
 — — системы точечных масс 75
 — — точечной массы 73
 — — центробежной силы 146
 — функции Грина 223
 — ядра интеграла Пуассона 227
 Связь гармонических функций с аналитическими 208
 Сила притяжения 7, 71, 146
 Силовое поле 6
 Система точечных масс 75
 Слой Грина 194, 222

- Составляющие вектора 300
- Сферические координаты 303
 - функции 252, 268
 - — зональные 268
 - —, определение 252
 - —, основные свойства 257
 - — секториальные 269
 - — тессеральные 269
- Сферический слой 96
- Сфероид 276
- Теорема Гаусса о среднем значении гармонических функций 203
- Толщина уровня слоя 16
- Трубка векторная 23
- Угол плоский 136
 - телесный 122
 - —, интегральная форма записи 123, 136
- Условия квазипотенциальности поля 45
 - Коши — Римана 209
 - потенциальности поля 44
- Уравнение Бесселя 177
 - векторных линий 24
 - волновое 66
 - Лапласа 68, 173
 - — в декартовых координатах 184
 - — в сферических координатах 180—185
 - — в цилиндрических координатах 176
 - —, получение 173
 - —, решение 175
 - Лежандра 255
 - —, решение 256
 - поля 59
 - телеграфное 66
 - теплопроводности 67
 - Пуассона 68, 171
- — о связи между потенциалами 105
- Уравнения Максвелла 62
- Уровенная поверхность 16
- Уровненный слой 16
- Уровень, или поверхность, относимости 280
- Фигура Земли 276
 - формула Остроградского — Гаусса 165
 - — — для плоского поля 166
 - Племели 94
 - Родрига 256
 - Стокса 167, 280, 286
- Формулы Грина 186, 188, 189
- Функция аналитическая 209
 - Гельмерта 287
 - Грина 221
 - — для плоскости 230
 - — для сферы 221
 - Лежандра присоединенная 256
 - Неймана 178, 239
 - — для плоскости 242
 - — для сферы 239
 - Стокса 286
- Функции Бесселя 177, 180
- Центробежная сила 8
- Центробежные моменты 274
- Шар 82
- Шаровой слой 85
- Шаровые функции 256
- Экваториальная плоскость диполя 103
- Эллипсоид вращения 87
 - подобный 88
 - софокусный 88
- Эллиптический цилиндр 141

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Глава I. Основные понятия теории поля	6
§ 1. Определение поля	6
§ 2. Скалярное поле и его производная	15
§ 3. Векторное поле и его производные	22
§ 4. Условия потенциальности поля, потенциал и потенциальное поле	43
§ 5. Основные соотношения векторного поля и применение операторов Гамильтона и Лапласа	51
§ 6. Уравнения, описывающие поля	59
Глава II. Виды потенциалов притяжения	70
§ 7. Потенциал притяжения точечной массы и системы точечных масс	70
§ 8. Потенциал притяжения объемных масс	77
§ 9. Потенциалы притяжения простого слоя и линейных масс	91
§ 10. Потенциалы диполя и объемного намагниченного тела	100
§ 11. Возможности совместного анализа производных гравитационного и магнитного полей	111
§ 12. Потенциал притяжения двойного слоя	120
§ 13. Потенциалы притяжения горизонтальной материальной линии и двухмерных объемных масс (логарифмические потенциалы)	128
§ 14. Простой слой, диполь и двойной слой для поля с логарифмическим потенциалом	131
§ 15. Потенциал двухмерных магнитных масс и возможность применения двухмерной задачи	139
§ 16. Потенциал силы тяжести и его производные	145
Глава III. Некоторые интегральные формулы теории потенциала	165
§ 17. Формулы Остроградского — Гаусса и Стокса в векторной форме	165
§ 18. Уравнения Пуассона и Лапласа. Их получение и применение	171
§ 19. Основные формулы Грина	185
Глава IV. Гармонические функции	201
§ 20. Основные свойства гармонических функций	201
§ 21. Связь гармонических функций с аналитическими и ее применение	208
§ 22. Задача Дирихле и ее решение	220
§ 23. Решение задачи Неймана	237
Глава V. Сферические функции	252
§ 24. Сферические функции и уравнение Лапласа	252
§ 25. Полиномы Лежандра. Их связь с потенциалами притяжения	255
§ 26. Ряды сферических функций	265
Глава VI. Представление гравитационного и магнитного потенциалов в виде рядов сферических функций	271
§ 27. Представление потенциала силы тяжести Земли в виде ряда сферических функций	271
	303

§ 28. Определение фигуры Земли и нормальных значений силы тяжести	276
§ 29. Представление потенциала магнитного поля Земли и его производных в виде ряда сферических функций	289
§ 30. Аналитическое представление магнитного поля на поверхности Земли, применение сферического гармонического анализа	291
Список литературы	299
Предметный указатель	300

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Серкеров Серкер Акберович

ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИОННОГО И МАГНИТНОГО ПОТЕНЦИАЛОВ

Заведующий редакцией *Е. Г. Першина*
 Редактор издательства *И. П. Иночкина*
 Технические редакторы *В. Ю. Любимова, Л. А. Мурашова*
 Корректор *Е. С. Глуховская*

ИБ № 7423

Сдано в набор 13.02.89. Подписано в печать 12.02.90. Т-07344. Формат 60×90¹/₁₆. Бумага типографская № 1. Гарнитура Литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 19,0. Усл. кр.-отт. 19,0. Уч.-изд. л. 18,6. Тираж 2750 экз. Заказ 905/1548—3. Цена 95 коп.

Ордена «Знак Почета» издательство «Недра», 125047, Москва, пл. Белорусского вокзала, 3.

Московская типография № 11 Государственного комитета СССР по печати. 113105, Москва, Нагатинская ул. д. 1.