

Б. С. ВИНОГРАДОВ

ПРИКЛАДНАЯ ГАЗОВАЯ ДИНАМИКА

У т в е р ж д е н о
кафедрой тепловых двигателей
для студентов специальности
«энергомашиностроение»

Настоящее учебное пособие написано для инженерного факультета Университета дружбы народов имени Патриса Лумумбы. Здесь изложены физические основы газовой динамики и основные методы расчета газовых течений. Содержание материала и принятое соотношение между вопросами теории и практики удовлетворяет требованиям, предъявляемым к курсу, изучение которого ведется в прикладном аспекте.

ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

a — скорость звука, различные коэффициенты;	E — полный запас энергии единицы массы газа, степень турбулентности;
$a_{кр}$ — критическая скорость;	E_u — число Эйлера;
$a_{кр.н}$ — критическая скорость в косом скачке уплотнения;	f — сила, формпараметр профиля пограничного слоя;
$\tilde{a}_{кр}$ — критическая скорость в относительном движении;	$f(\zeta)$ — газодинамическая функция потока импульса;
b — хорда профиля крыла или лопатки;	F — площадь;
c — абсолютная скорость в сложном движении, толщина профиля крыла;	$F_{г}, F_{гэ}$ — площади поперечного сечения горла канала — геометрическая и эффективная;
c_u, c_a — проекции абсолютной скорости на фронтальное (окружное) и осевое направление решетки;	$F_{ж}$ — площадь живого сечения;
c_p, c_v — удельные теплоемкости при постоянном давлении и при постоянном объеме;	$F_{л*}$ — площадь поперечного сечения, занятая вытесненной массой;
C_x — коэффициент лобового сопротивления крыла или лопатки;	F_r — число Фруда;
C_y — коэффициент подъемной силы;	g — ускорение силы тяжести;
C_{xp}, C_{xb} — коэффициенты сопротивления трения, сопротивления давления, индуктивного сопротивления и волнового сопротивления;	G — вес, сила Жуковского;
D — диаметр;	h — теплоперепад единицы массы газа;
	h_t — теоретический теплоперепад;
	h_r — потерянная энергия;
	H^* — отношение толщин вытеснения и потери импульса;
	l — энтальпия единицы массы газа;

k — показатель изэнтропии;
 $\vec{K}$ — вектор секундного количества движения;
 l — размах крыла;
 L — работа единицы массы газа, внешняя механическая работа;
 $L_{ат}, L_{выт}$ — работа вталкивания и выталкивания единицы массы газа;
 L_r — работа трения, отнесенная к единице массы;
 m — масса;

$$m = V \sqrt{\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{k-1}} \frac{k}{R}}$$
— коэффициент в формуле расхода газа;
 M — число M — отношение скорости потока к скорости звука;
 $\tilde{M}$ — число M в относительном движении;
 M — момент внешних сил;
 $M_{сек}$ — массовый расход;
 n — показатель политропы;
 $\frac{1}{n}$ — показатель степени турбулентного профиля скорости;
 p — давление;
 p^* — давление торможения;
 $\tilde{p}^*$ — давление торможения в относительном движении;
 $p_{кр}$ — давление в критическом сечении;
 $\vec{P}, P_x, P_y$ — вектор силы и его компоненты;
 ΔP_a — добавочная составляющая осевой силы в решетке;
 P_r — число Прандтля;
 q — удельный тепловой поток;
 $q(\lambda)$ — приведенный расход — газодинамическая функция расхода;
 Q — массовая сила;
 Q_e — внешнее тепло, подведенное на единицу массы;
 Q_r — тепло трения;

r — радиус,
коэффициент восстановления температуры;
 $r(\lambda)$ — газодинамическая функция потока импульса;
 R — газовая постоянная единицы массы газа, радиус канала;
 $\vec{R}$ — сила, действующая на тело в потоке, сила, действующая на профиль в решетке
 R_a, R_u — ее осевая и фронтовая (окружающая) составляющие;
 R_f — сила трения;
 Re — число Рейнольдса, ($Re_{кр}$ — его критическое значение, при котором ламинарное движение переходит в турбулентное);
 Re_x, Re^*, Re^{**} — числа Рейнольдса, рассчитанные по длине обтекаемого тела, по толщине вытеснения и по толщине порти импульса;
 s — дуга кривой;
 S — энтропия единицы массы газа, площадь крыла в плане;
 Sh — число Струхала;
 t — время, шаг решетки;
 T — истинная (термодинамическая) температура газа;
 T^* — температура торможения;
 T_n^* — температура частичного торможения в косом скачке;
 $\tilde{T}^*$ — температура торможения в относительном движении;
 u — внутренняя энергия единицы массы газа, переносная (окружающая) скорость в сложном движении;
 U — силовая функция;
 v — удельный объем;

V — объем,
 $V_{сек}$ — объемный расход;
 w, w_x, w_y, w_z —
 — вектор скорости и его
 компоненты;
 w — скорость газа,
 относительная ско-
 рость в сложном дви-
 жении;
 $w_{ср}$ — среднерасходная ско-
 рость;
 w_n, w_t — нормальная и танген-
 циальная составляю-
 щие скорости в косом
 скачке;
 w_n, w_a — фронтовая (окруж-
 ная) и осевая состав-
 ляющие скорости в ре-
 шетке;
 w_{max} — максимальная ско-
 рость течения газа;
 $\tilde{w}_{max}$ — максимальная ско-
 рость в относительном
 движении;
 $\tilde{w}$ — комплексная скорость;
 w_o — скорость внешнего
 (относительно погра-
 ничного слоя) потока;
 w_m — средняя эквивалентная
 скорость обтекания ре-
 шетки;
 W — комплексный потенци-
 ал;
 x, y, z — координаты;
 X, Y, Z — проекции ускорений от
 массовых сил;
 x — длина;
 y — расстояние от стенки
 в пограничном слое;
 $y(\lambda)$ — газодинамическая
 функция расхода;
 $z(\lambda)$ — газодинамическая
 функция потока им-
 пульса;
 α — текущий угол,
 угол атаки;
 β_1, β_2 — входной и выходной
 углы потока в решет-
 ке;
 $\beta_{уст}$ — установочный угол ло-
 патки в решетке;
 Γ — циркуляция скорости;
 δ — угол поворота потока
 в течении Прандтля —
 Майера, толщина по-
 граничного слоя;

δ^* — толщина вытеснения;
 δ^{**} — толщина потери им-
 пульса;
 δ^{***} — толщина потери энер-
 гии;
 Δ — обозначение малых ве-
 личин, разности, при-
 ращения,
 оператор Лапласа;
 $\varepsilon(\lambda)$ — газодинамическая
 функция плотности за-
 торможенного потока;
 ζ — коэффициент сопро-
 тивления трубы;
 ζ_c — коэффициент потерь
 энергии в соплах;
 $\tau_{ад.с}$ — адиабатный к.п.д. со-
 пла;
 θ — полярный угол,
 угол раскрытия диф-
 фузора,
 угол отставания пото-
 ка в решетке,
 степень подогрева;
 Θ — угол изгиба профиля;
 κ — коэффициент пути
 смещения;
 λ — приведенная скорость
 (отношение скорости
 газа к критической
 скорости);
 $\tilde{\lambda}$ — приведенная скорость
 в относительном дви-
 жении;
 λ_n — приведенная скорость
 в косом скачке уплот-
 нения;
 λ_{max} — максимальная величина
 приведенной ско-
 рости;
 $\lambda_u = \frac{c_u}{a_{кр}}; \left(\tilde{\lambda}_u = \frac{c_u}{\tilde{a}_{кр}} \right)$;
 Λ — приведенная скорость
 (отношение скорости
 газа к максимальной
 скорости);
 μ — угол слабых возмущений,
 динамический коэффи-
 циент вязкости,
 отношение

$$\frac{u}{a_{кр}} \left(\tilde{\mu} = \frac{\tilde{u}}{\tilde{a}_{кр}} \right);$$

μ_c — коэффициент расхода сопла;
 γ — кинематический коэффициент вязкости, отношение критических скоростей в относительном и абсолютном движении $\tilde{a}_{кр}, a_{кр}$;
 ε — динамическая скорость в формуле универсального профиля скорости турбулентного пограничного слоя;
 τ — коэффициент сопротивления диффузора;
 $\tau(\lambda)$ — газодинамическая функция давления торможения;
 ρ — плотность газа;
 ρ^* — плотность в заторможенном потоке;
 $\tilde{\rho}^*$ — плотность газа в заторможенном потоке в относительном движении;
 $\rho_{ср}$ — средняя по сечению плотность;
 $\rho_{кр}$ — плотность в критическом сечении;
 ρ_m — средняя плотность газа в решетке;
 σ — коэффициент восстановления давления,

площадь, охваченная контуром, нормальное напряжение;
 τ — касательное напряжение;
 τ_c — касательное напряжение на стенке;
 $\tau(\lambda)$ — газодинамическая функция температуры торможения;
 φ — потенциал скорости, скоростной коэффициент сопла;
 φ_1, φ_2 — входной и выходной углы лопатки в решетке;
 Φ — полный импульс;
 χ — приведенная длина трубы;
 $\chi_{кр}$ — критическая приведенная длина трубы;
 ψ — функция тока, коэффициент смягчения удара в диффузоре;
 $\vec{\omega}, \omega_x, \omega_y, \omega_z$ — вектор угловой скорости и его составляющие;
 ω — угловая скорость, угол поворота потока в косом скачке уплотнения;
 $\vec{\Omega}, \Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$ — вектор вихря скорости и его компоненты.

ВВЕДЕНИЕ

Инженеру-теплоэнергетику, работающему в области двигателей внутреннего сгорания, турбин или компрессоров, часто приходится иметь дело с расчетом или исследованием газовых потоков в различных частях машин. Поэтому он должен хорошо знать законы движения газов и уметь применять их на практике.

Механика жидкостей и газов представляет собой весьма обширную отрасль науки, которая включает в себя такие дисциплины, как гидравлика, гидродинамика, аэродинамика, газовая динамика. В двух первых дисциплинах изучаются вопросы механики несжимаемой жидкости, например воды. В аэродинамике изучается движение воздуха, причем, пока рассмотрение ограничивается областью невысоких скоростей, воздух представляют как несжимаемую жидкость, не имеющую веса. При переходе к большим скоростям становится необходимым учитывать сжимаемость, подвод и отвод тепла. Именно здесь и начинается область газовой динамики.

В последнее время интенсивно развиваются новые отрасли механики жидкости и газа. К ним относятся гиперзвуковая аэродинамика, механика сильно разреженных газов, или супераэродинамика, и магнитная газодинамика. В гиперзвуковой аэродинамике изучается движение тел в газе с очень большими сверхзвуковыми скоростями. Супераэродинамика связана с течениями газа, настолько разреженного, что длина свободного пробега молекул становится соизмеримой с размерами обтекаемого тела. В этом состоянии газ уже нельзя рассматривать как сплошную среду: здесь приобретают большое значение индивидуальные взаимодействия молекул с обтекаемым телом. В магнитной газодинамике изучается движение

электропроводящего газа — плазмы — в магнитном поле. При взаимодействии электрического тока с магнитным полем возникают, как известно, электродинамические силы. Организованные соответствующим образом, эти силы, действующие на частицы газа, могут быть использованы для увеличения или уменьшения скорости или для изменения направления потока.

Значительную роль в газовой динамике играют экспериментальные исследования. С их помощью проверяются разработанные теорией методы расчета. Постановка эксперимента также позволяет быстро получить конкретные данные, необходимые при проектировании новых машин. Накопление экспериментальных данных и их последующий анализ часто дают возможность уточнить физическую картину явлений и выбрать рациональную расчетную схему. Методы экспериментальных исследований совершенствовались параллельно с развитием теории. В настоящее время они довольно тщательно систематизированы и составляют самостоятельный раздел газодинамики, называемый экспериментальной аэродинамикой, или экспериментальной газодинамикой.

Необходимый в практической работе инженера-теплоэнергетика круг вопросов, отобранных как из теоретических, так и из экспериментальных и прикладных разделов газодинамики, составляет отдельную дисциплину, называемую прикладной газовой динамикой. В прикладной газодинамике многие задачи даются не в такой строгой постановке, как, например, в теоретической газодинамике, а при решении часто применяются приближенные методы. В большинстве случаев эти методы достаточно просты, дают вполне удовлетворительную точность и поэтому имеют широкое распространение в инженерной практике.

Прикладная газовая динамика опирается на такие дисциплины, как теоретическая механика, гидравлика, термодинамика и, конечно, математика и физика. Они составляют тот фундамент, без которого изучение прикладной газодинамики невозможно. На этот предмет, в свою очередь, опираются такие специальные дисциплины, как теория двигателей внутреннего сгорания, теория турбин, теория компрессоров. Кроме того, с прикладной газодинамикой тесно связаны многие вопросы проектирования теплосилового оборудования.

В настоящем курсе сначала излагаются основные сведения из гидродинамики, частично знакомые из курса гидравлики, но несколько расширенные, затем рассматриваются простейшие вопросы газодинамики и сделан переход к более сложным. В последней главе собран материал чисто прикладного характера, связанный с расчетами теплоэнергетических машин и установок.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ГИДРОДИНАМИКИ

§ 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Методы расчета потоков несжимаемой жидкости, разработанные в гидродинамике, составляют одну из основ газовой динамики. В связи с этим в настоящей главе рассматриваются основные сведения из гидродинамики в том объеме, в котором они необходимы при изучении дальнейшего материала. Часть из них может быть знакома из курса гидравлики.

Задачи, изучаемые в гидродинамике, классифицируются следующим образом. В зависимости от взаимного расположения потока жидкости и обтекаемого тела они разделяются на внешние и внутренние, в зависимости от характера заданных и искомых величин — на прямые и обратные. Внешняя задача рассматривает твердое тело, обтекаемое снаружи потоком жидкости. Примером может служить обтекание крыла самолета потоком воздуха или обтекание корпуса корабля, движущегося в воде. Внутренняя задача рассматривает течение жидкости в трубах или каналах, когда поток жидкости движется внутри, а стенки твердого тела ограничивают его снаружи. Если при постановке задачи известны формы и размеры обтекаемого тела и требуется определить параметры потока во всех точках изучаемого пространства, то такая задача называется прямой задачей. Если же заданы параметры потока и требуется определить геометрические размеры и формы обтекаемого тела, то задача этого вида называется обратной задачей. Каждому виду задач соответствуют свои особенности расчета, хотя основные уравнения и закономерности и остаются во всех случаях одними и теми же.

Четко определить вид задачи удастся не всегда. Например, при расчете лопаточных решеток турбин или компрессоров

невозможно даже указать, чему более соответствует этот вид течения — внутренним или внешним задачам. Если рассматривать обтекание лопатки, находящейся в системе решетки, то это — типичная внешняя задача; если же рассматривать течение в канале, образованном двумя соседними лопатками, то здесь налицо все признаки внутренней задачи. Последнее, кстати говоря, не создает неудобств, а, наоборот, позволяет применять при расчете решеток как методы решения внешних, так и внутренних задач, причем эти методы взаимно дополняют друг друга.

В теории двигателей и турбомашин пользуются понятием рабочего тела. Рабочее тело — это движущаяся материальная среда — жидкая или газообразная, — которая служит в качестве посредника в процессе превращения тепла в механическую работу или в процессе передачи энергии из одного места машины в другое. Наиболее широко в теплоэнергетике применяются такие рабочие тела, как воздух, продукты сгорания углеводородов или других топлив, водяной пар, а в гидромашинах — вода или минеральные масла. Все эти вещества обладают различными свойствами. Если гидродинамические или газодинамические расчеты производить, принимая во внимание все свойства рабочего тела, то решение получается чрезвычайно громоздким. С другой стороны, если не учитывать всех свойств жидкости, а взять только те из них, которые оказывают заметное влияние на параметры потока, то задача может сильно упроститься без ущерба для точности. В связи с этим в гидродинамике и в газодинамике пользуются понятиями моделей жидкости. Модель жидкости — это воображаемая жидкость, отличающаяся от реальной тем, что она лишена некоторых свойств. Так, например, рассчитывая поток жидкости вдали от твердой стенки, можно пренебречь таким свойством, как вязкость. Следовательно, рассчитывается не реальная жидкость, а модель, называемая невязкой, или идеальной, жидкостью.

Обычно используются следующие модели жидкостей.

Идеальная жидкость — жидкость лишенная вязкости. Может быть как несжимаемая, так и сжимаемая. Это понятие введено Л. Эйлером.

Несжимаемая жидкость — жидкость, не изменяющая объема (плотности) при изменении давления.

Невесомая жидкость — жидкость, обладающая массой, но не имеющая веса. К такому понятию прибегают, рассматривая очень легкие жидкости, в которых силы тяжести весьма малы по сравнению с другими действующими силами.

Совершенный газ — газ, в котором силы сцепления между молекулами отсутствуют и собственный объем молекул ра-

вен нулю. Совершенный газ, лишенный вязкости, называют идеальным газом.

Различают также *бароклинную жидкость* — газ, плотность которого является функцией давления и температуры, и *баротропную жидкость* — газ, у которого плотность зависит только от давления.

В гидродинамике и в задачах обычной газодинамики жидкость представляют как сплошную среду. Это тоже своеобразная модель жидкости. Это представление допускает, что объем жидкости можно дробить на какие угодно мелкие части, вплоть до бесконечно малых, но ее свойства при этом остаются теми же самыми. Иначе говоря, здесь не принимается во внимание молекулярная структура вещества. Представление о жидкости, как о сплошной среде, было вызвано необходимостью использовать для расчетов методы математического анализа, в которых приходится оперировать бесконечно малыми массами и объемами. Модель сплошной среды применима для несжимаемых жидкостей, а также для газов не очень низких плотностей. Если же плотность газа становится очень низкой, как, например, на больших высотах, то расстояния между молекулами (длина свободного пробега) становятся соизмеримыми с размерами обтекаемых тел, и модель сплошной среды уже никак не соответствует реальной картине обтекания. В таких случаях расчеты ведутся по формулам, которые устанавливаются в механике сильно разреженных газов.

Движения жидкости в гидродинамике подразделяют на следующие виды.

Установившееся движение — такое, в котором параметры потока, т. е. скорости, давления, температуры и плотности, зависят только от координат рассматриваемой точки и не зависят от времени. Таким образом, в заданной точке пространства параметры потока с течением времени не изменяются.

Неустановившееся движение — такое, в котором параметры потока зависят не только от координат, но и от времени.

В общем случае движение жидкости является пространственным, или трехмерным. Это значит, что изменение скорости и других параметров потока происходит по всем трем осям координат. Если изменение параметров происходит по двум направлениям, то такое движение называется двумерным. Частным случаем двумерного движения является плоское, в котором оси координат прямолинейны и, следовательно, течение происходит в одной плоскости. Наконец, если изменение параметров потока происходит только в одном направлении, то движение называется одномерным.

Существует особый частный случай трехмерного потока, называемый осесимметричным потоком. Примером его может

служить картина обтекания какого-нибудь тела вращения потоком, набегающим параллельно оси симметрии. В этом случае картина течения в любой плоскости, проходящей через ось симметрии, получается одинаковой, т. е. вместо пространственного можно рассматривать плоский поток, правда, с некоторыми особенностями. Эти особенности заключаются в том, что в отличие от плоского потока, в котором площади поперечного сечения пропорциональны поперечному линейному размеру, в осесимметричном потоке они пропорциональны квадрату поперечного линейного размера.

В настоящем параграфе не рассматриваются такие понятия, как траектории частиц, линии тока, трубки тока и т. п., так как они известны из курса гидравлики.

§ 2. СКОРОСТЬ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОЙ ЧАСТИЦЫ

При течении жидкости ее элементарные объемы совершают сложное движение. Они могут двигаться поступательно, вращаться и деформироваться. Последнее связано с тем, что частицы жидкости весьма подвижны и легко смещаются относительно друг друга.

Скорость движения жидкой частицы определяется по теореме Коши — Гельмгольца, которая формулируется так:

Скорость перемещения жидкой частицы в общем случае складывается из скоростей трех движений: поступательного, вращательного и деформационного.

Для вывода формулы Коши — Гельмгольца рассмотрим элементарный объем жидкости, взятый в форме прямоугольного параллелепипеда (рис. 1). В точке A , имеющей координаты x, y, z , составляющие скорости жидкости равны

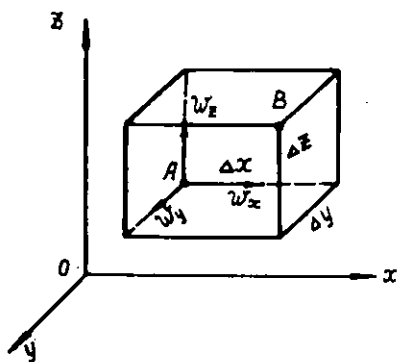


Рис. 1

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= f_1(x, y, z) \\ \omega_y &= f_2(x, y, z) \\ \omega_z &= f_3(x, y, z) \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

где f_1, f_2 , и f_3 — функции, определяющие величины проекций скорости в зависимости от координат. При переходе к точке B эти величины изменятся и будут равны

$$\left. \begin{aligned} w_{xB} &= f_1(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) \\ w_{yB} &= f_2(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) \\ w_{zB} &= f_3(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

Правые части уравнений (1.2) разложим в ряд по формуле Тейлора для функции многих переменных. При этом отбросим бесконечно малые второго и более высоких порядков, а также примем во внимание зависимости (1.1). Тогда

$$\left. \begin{aligned} w_{xB} &= w_x + \frac{\partial w_x}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial w_x}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial w_x}{\partial z} \Delta z \\ w_{yB} &= w_y + \frac{\partial w_y}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial w_y}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial w_y}{\partial z} \Delta z \\ w_{zB} &= w_z + \frac{\partial w_z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial w_z}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial w_z}{\partial z} \Delta z \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

Чтобы выделить в явном виде указанные в формулировке теоремы виды скоростей, к правой части формул (1.3) прибавим и вычтем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_z}{\partial x} \Delta z + \frac{\partial w_y}{\partial x} \Delta y \right) \\ & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} \Delta x + \frac{\partial w_z}{\partial y} \Delta z \right) \\ & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_y}{\partial z} \Delta y + \frac{\partial w_x}{\partial z} \Delta x \right) \end{aligned}$$

и сгруппируем члены. Первое уравнение системы (1.3) тогда примет вид

$$\begin{aligned} w_{xB} &= w_x + \frac{\partial w_x}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_x}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial x} \right) \Delta z + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_y}{\partial x} + \frac{\partial w_x}{\partial y} \right) \Delta y + \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_x}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial x} \right) \Delta z - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_y}{\partial x} - \frac{\partial w_x}{\partial y} \right) \Delta y. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Рассмотрим, в чем заключается смысл членов, входящих в правую часть формулы (1.4).

Нетрудно заметить, что $\frac{\partial w_x}{\partial x} \Delta x$ представляет собой скорость линейной деформации растяжения. Иначе говоря, это

есть удлинение элемента жидкости в единицу времени в направлении оси x .

Для того чтобы уяснить смысл третьего и четвертого слагаемого правой части формулы (1.4), обратимся к рис. 2, где изображена проекция элементарного объема жидкости на плоскость xoz . В начальный момент времени он занимает положение $ACDE$. Так как составляющая скорости w_x в точке C больше, чем в точке A , а w_z в точке E больше, чем в точке A , то грани параллелепипеда перекашиваются, и он за время dt занимает положение $AC'D'E'$. Углы поворота граней AC и AE равны

$$\Delta\alpha = \frac{\partial w_x}{\partial x} dt,$$

$$\Delta\beta = \frac{\partial w_z}{\partial x} dt$$

(здесь, вследствие малости углов, сами углы и их тангенсы приняты одинаковыми). Угловую деформацию элемента жид-

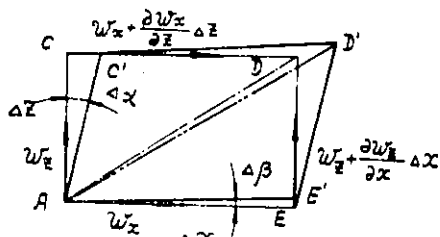


Рис. 2

кости характеризуют средней арифметической величиной углов поворота его сторон

$$\frac{\Delta\alpha + \Delta\beta}{2}.$$

Взяв от этой величины производную по времени, получим скорость угловой деформации в плоскости xoz , т. е. относительно оси y

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\Delta\alpha + \Delta\beta}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_x}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial x} \right) = \theta_y.$$

Рассматривая аналогичную картину в других плоскостях, можно получить скорости угловой деформации относительно осей x и z . Окончательно имеем:

$$\left. \begin{aligned} \theta_x &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_z}{\partial y} + \frac{\partial w_y}{\partial z} \right) \\ \theta_y &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_x}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial x} \right) \\ \theta_z &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_y}{\partial x} + \frac{\partial w_x}{\partial y} \right) \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

Рассматривая рис. 2, можно также заключить, что полуразность углов $\frac{\Delta\alpha - \Delta\beta}{2}$ равна углу, на который поворачивается диагональ AD . Производная от этой величины по времени дает угловую скорость элементарного объема относительно соответствующей оси. Следовательно,

$$\begin{aligned}\omega_x &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_z}{\partial y} - \frac{\partial w_y}{\partial z} \right) = \frac{1}{2} \Omega_x \\ \omega_y &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_x}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \Omega_y \\ \omega_z &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_y}{\partial x} - \frac{\partial w_x}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \Omega_z.\end{aligned}\quad (1.6)$$

Вектор $\vec{\Omega}$ называется *вихрем скорости**). Он совпадает по направлению с вектором угловой скорости и численно равен его удвоенной величине.

Сделав соответствующие подстановки из формул (1. 5) и (1. 6) в равенство (1. 4) и повторив весь вывод для проекций скорости w_y и w_z , получим следующие формулы скорости перемещения жидкого элементарного объема:

$$\left. \begin{aligned}w_{xB} &= w_x + \frac{\partial w_x}{\partial x} \Delta x + (\theta_y \Delta z + \theta_z \Delta y) + (\omega_y \Delta z - \omega_z \Delta y) \\ w_{yB} &= w_y + \frac{\partial w_y}{\partial y} \Delta y + (\theta_z \Delta x + \theta_x \Delta z) + (\omega_z \Delta x - \omega_x \Delta z) \\ w_{zB} &= w_z + \frac{\partial w_z}{\partial z} \Delta z + (\theta_x \Delta y + \theta_y \Delta x) + (\omega_x \Delta y - \omega_y \Delta x).\end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

Эти же формулы пригодны для определения и скорости перемещения жидкой частицы, так как если объем жидкости стремиться к нулю, то он будет охватывать лишь одну жидкую частицу. Следовательно, в формулах (1. 7) нужно только заменить Δx , Δy и Δz на dx , dy и dz . Таким образом, рассматривая правую часть формулы (1. 7), видим, что она складывается из скорости в исходной точке и приращения скорости, которое включает в себя скорость линейной и угловой деформации (второе и третье слагаемое) и скорость вращательного движения (четвертое слагаемое), что соответствует формулировке теоремы.

*) Заметим, что в теории поля вихрь скорости записывается в виде такого оператора $\vec{\Omega} = \text{rot } \vec{w}$, называемого ротором вектора скорости.

§ 3. УРАВНЕНИЕ НЕРАЗРЫВНОСТИ

Элементарную струйку можно представить себе в виде пучка линий тока небольшого поперечного сечения. Сечение выбирается настолько малым, чтобы во всех его точках все параметры потока можно было считать постоянными.

Если элементарную струйку пересечь такой поверхностью, которая будет нормальна всем линиям тока, то такое сечение называется живым сечением (рис. 3). В отличие от живого, поперечное сечение лежит в плоскости, перпендикулярной оси струйки. На рис. 3 живое сечение обозначено $F_{\text{ж}}$, а поперечное F . Нужно заметить, что понятия живого сечения и поперечного сечения применимы не только к элементарной струйке, но и к любому потоку (струе) жидкости. При небольших углах расхождения или схождения линий

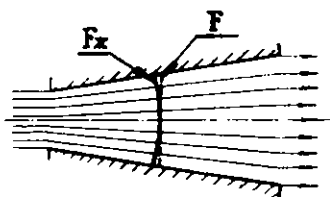


Рис. 3

тока разница между живым и поперечным сечением незначительна.

Количество жидкости, проходящей через заданное сечение потока в единицу времени, представляет расход жидкости. В зависимости от того, чем именно — объемом или массой — измеряется количество жидкости, расход называют *объемным* или *массовым* и вычисляют по формулам:

$$V_{\text{сек}} = \frac{V}{\Delta t}, \quad (1.8)$$

$$M_{\text{сек}} = \frac{M}{\Delta t}, \quad (1.9)$$

или при неустановившемся движении:

$$V_{\text{сек}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{dV}{dt}, \quad (1.10)$$

$$M_{\text{сек}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta t} = \frac{dM}{dt}. \quad (1.11)$$

В применявшейся ранее технической системе единиц широко использовался еще весовой расход — весовое количество жидкости, проходящей через данное сечение в единицу времени. Объемный расход измеряется в $\frac{\text{м}^3}{\text{сек}}$, массовый — в $\frac{\text{кг}}{\text{сек}}$,

весовой — в $\frac{\kappa\Gamma}{сек}$, где $\kappa\Gamma$ — килограмм-сила, а $\kappa\text{г}$ — килограмм-масса. Объемный и массовый расходы даны в Международной системе единиц СИ, а весовой расход — в технической.

Объемный расход через живое сечение элементарной струйки равен

$$V_{сек} = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt} (dF \cdot dx) = \frac{dx}{dt} \cdot dF = \omega \cdot dF.$$

Через живое сечение потока конечных размеров объемный расход будет

$$V_{сек} = \int_{F_{ж}} \omega dF, \quad (1.12)$$

а если скорость по сечению постоянна, то

$$V_{сек} = \omega F_{ж}. \quad (1.13)$$

В практических расчетах для удобства вычислений вместо живого сечения часто берут поперечное и расход выражают через некоторую среднюю скорость, называемую *среднерасходной скоростью*. Она представляет собой такое среднее значение скорости потока в данном сечении, которое, будучи умноженным на площадь поперечного сечения, дает истинное значение объемного расхода. Следовательно,

$$\omega_{cp} = \frac{V_{сек}}{F} = \frac{1}{F} \int \omega dF. \quad (1.14)$$

Массовый расход может определяться с помощью следующей формулы:

$$M_{сек} = \rho_{cp} \omega_{cp} F = \int_{F_{ж}} \rho \omega dF. \quad (1.15)$$

(По аналогичной формуле вычисляется и весовой расход, только вместо массовой плотности ρ в формулу подставляется удельный вес жидкости γ .)

Произведение $\rho\omega$ часто используется в расчетах как самостоятельная величина, называемая *плотностью тока*.

Если площадка, через которую вычисляется расход, расположена под косым углом к линиям тока (или к вектору скорости), то нужно либо спроектировать площадку на направление, перпендикулярное вектору скорости, либо принимать в расчет проекцию вектора скорости на направление нормали к площадке, т. е. брать не всю скорость, а только ее нормальную составляющую $\omega_n = \omega \cos \alpha$ *). Более удобен второй спо-

*) Здесь α — угол между вектором скорости и нормалью к площадке.

соб. Таким образом, в случае произвольного расположения поверхности, через которую определяется расход, относительно линий тока, расчет ведется по следующим формулам:

$$V_{сек} = \int_F w_n \cdot dF = \int_F w \cos \alpha dF, \quad (1.16)$$

$$M_{сек} = \int_F \rho w_n dF = \int_F \rho w \cos \alpha dF. \quad (1.17)$$

Большое значение в газодинамике имеет *уравнение неразрывности*, представляющее собой гидродинамическую форму записи закона сохранения вещества. Вывод этого уравнения рассмотрим для общего случая неустановившегося движения сжимаемого газа.

Если в пространстве, через которое движется поток, выделить неподвижный объем, например, в форме параллелепипеда $ABCDEFKL$ (рис. 4), и определить разность массовых количеств жидкости, втекающей и вытекающей через границы объема за определенное время Δt ,

то можно установить, что эта разность равна количеству жидкости, которое накапливается внутри объема за то же время. Нужно сразу заметить, что, поскольку рассматриваемый объем не меняет своих размеров и формы, накопление жидкости может происходить только за счет постепенного увеличения ее плотности *). Полученный вывод представляет собой закон неразрывности, или сплошности. Действительно, как это нетрудно заметить, при рассмотрении предполагается, что внутри заданного объема все заполнено жидкостью и не имеется каких-либо пустот. Подсчитаем эти количества жидкости.

Внутри объема $ABCDEFKL$ втекает:

через грань $ADEF$ $\rho w_x \Delta y \Delta z \Delta t$,

через грань $ABCD$ $\rho w_y \Delta x \Delta z \Delta t$,

через грань $ABLF$ $\rho w_z \Delta x \Delta y \Delta t$.

*) Так, например, для несжимаемой жидкости ($\rho = \text{const}$) накопления быть не может, поэтому разность количеств втекающей и вытекающей жидкости равна нулю.

Из объема вытекает:

через грань $BCKL$ $\left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} \Delta x\right) \left(w_x + \frac{\partial w_x}{\partial x} \Delta x\right) \Delta y \Delta z \Delta t$,

через грань $EFLK$ $\left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial y} \Delta y\right) \left(w_y + \frac{\partial w_y}{\partial y} \Delta y\right) \Delta x \Delta z \Delta t$,

через грань $CDEK$ $\left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial z} \Delta z\right) \left(w_z + \frac{\partial w_z}{\partial z} \Delta z\right) \Delta x \Delta y \Delta t$;

накапливается внутри объема $\frac{\partial \rho}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t$.

Взяв разность втекающих и вытекающих количеств и приравняв ее количеству накапливаемой жидкости, получим

$$\begin{aligned} \rho w_x \Delta y \Delta z \Delta t - \left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} \Delta x\right) \left(w_x + \frac{\partial w_x}{\partial x} \Delta x\right) \Delta y \Delta z \Delta t + \rho w_y \Delta x \Delta z \Delta t - \\ - \left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial y} \Delta y\right) \left(w_y + \frac{\partial w_y}{\partial y} \Delta y\right) \Delta x \Delta z \Delta t + \rho w_z \Delta x \Delta y \Delta t - \\ - \left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial z} \Delta z\right) \left(w_z + \frac{\partial w_z}{\partial z} \Delta z\right) \Delta x \Delta y \Delta t = \frac{\partial \rho}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t. \end{aligned}$$

Раскроем скобки, отбросим члены, содержащие малые величины второго и более высоких порядков, и приведем подобные члены. Тогда, сократив обе части равенства на $\Delta x \Delta y \Delta z \Delta t$ и собрав все величины в левую часть, запишем это равенство в следующем виде:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial w_y}{\partial y} + w_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \frac{\partial w_z}{\partial z} + w_z \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0. \quad (1.18)$$

Полученное уравнение можно записать в более компактном виде:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho w_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho w_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w_z) = 0. \quad (1.19)$$

Для сокращенного обозначения операции $\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$ при-

меняются операторы div (дивергенция) или ∇ (набла), заимствованные из теории поля. Тогда уравнение (1.19) запишется так:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} (\rho w) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla (\rho w) = 0, \quad (1.20)$$

Для установившегося движения $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ и уравнение неразрывности приобретает такой вид:

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{w}) = 0, \quad (1.21)$$

а для несжимаемой жидкости, т. е. при $\rho = \text{const}$,

$$\operatorname{div} \mathbf{w} = 0. \quad (1.22)$$

Имеется еще одна форма записи уравнения неразрывности, которая получается, если в равенстве (1.18) принять $\mathbf{w}_x = \frac{dx}{dt}$, $\mathbf{w}_y = \frac{dy}{dt}$, $\mathbf{w}_z = \frac{dz}{dt}$, вынести ρ за скобку и сгруппировать члены. После небольших преобразований уравнение принимает вид

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{w} = 0. \quad (1.23)$$

Если записать уравнение неразрывности для установившегося одномерного потока, для которого $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, $\mathbf{w}_y = 0$, $\mathbf{w}_z = 0$, то получим $\frac{d}{dx}(\rho \mathbf{w}_x) = 0$, следовательно

$$\rho \mathbf{w}_x = \text{const}. \quad (1.24)$$

Таким образом, в одномерном установившемся потоке скорость может изменяться только за счет плотности, а в случае несжимаемой жидкости она вообще не может изменяться. Это связано с тем, что в одномерном потоке линии тока параллельны, т. е. площадь сечения потока не меняется и поперечные составляющие скорости отсутствуют.

В тех случаях, когда линии тока расходятся или сходятся под небольшим углом, поперечные составляющие скорости настолько малы, что приближенно поток можно считать одномерным, полагая, что в каждом поперечном сечении скорость имеет постоянное (среднерасходное) значение и изменяется только по длине потока. При таком рассмотрении потока удобно пользоваться уравнением неразрывности в такой форме, которая получается из условия равенства массовых расходов на входе и выходе расчетного участка, а именно:

$$M_{\text{сек}_1} = M_{\text{сек}_2}$$

или

$$\rho_1 \mathbf{w}_1 F_1 = \rho_2 \mathbf{w}_2 F_2. \quad (1.25)$$

Для несжимаемой жидкости $\rho = \text{const}$ и, следовательно,

$$\omega_1 F_1 = \omega_2 F_2, \quad (1.26)$$

т. е. объемные расходы равны на входе и выходе. В этих формулах под ρ и ω подразумеваются их среднерасходные значения, а под F — площади поперечного сечения.

Уравнения неразрывности в форме (1. 25) и (1. 26) широко применяются в практических расчетах.

§ 4. УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ

В этом параграфе рассматриваются только наиболее распространенные формы дифференциальных уравнений движения идеальной жидкости, а именно — уравнения в форме Л. Эйлера и в форме И. Громеки, а также их интегралы.

Для вывода дифференциальных уравнений движения в потоке выделяется жидкий объем и рассматриваются силы, которые на него действуют. Жидким называется объем, контуры которого движутся вместе с жидкостью, т. е. этот объем состоит из одних и тех же частиц жидкости. На

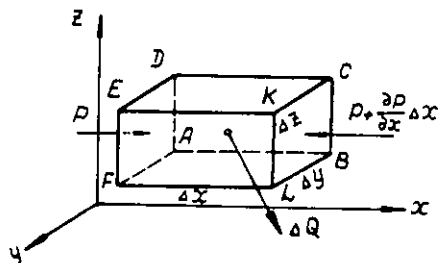


Рис. 5

рис. 5 такой объем взят в виде прямоугольного параллелепипеда $ABCDEFGLK$ со сторонами $\Delta x, \Delta y, \Delta z$.

На жидкость, заключенную в объеме $ABCDEFGLK$, действуют поверхностные силы — силы давления на грани объема и массовые силы (например, силы тяжести). Поверхностных касательных сил нет, так как рассматривается идеальная жидкость.

Согласно второму закону Ньютона, сумма всех внешних сил, действующих на жидкость, равна ее массе, умноженной на ускорение. В проекциях на координатные оси это можно записать в следующем виде (в проекции на ось x):

$$\rho \Delta y \Delta z - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y \Delta z + \Delta Q_x = \rho \Delta x \Delta y \Delta z \frac{dw_x}{dt}.$$

Раскрыв скобки, заменив проекции массовых сил $\Delta Q_x = \rho \Delta x \Delta y \Delta z X$, $\Delta Q_y = \rho \Delta x \Delta y \Delta z Y$, $\Delta Q_z = \rho \Delta x \Delta y \Delta z Z$, где X ,

Y, Z — проекции ускорений от массовых сил, и поделив обе части равенства на массу $\rho \Delta x \Delta y \Delta z$, получим

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + X = \frac{dw_x}{dt}.$$

Уравнения в проекциях на две другие координатные оси запишутся аналогично. Окончательно имеем:

$$\left. \begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{dw_x}{dt} \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{dw_y}{dt} \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{dw_z}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (1.27)$$

Эти уравнения были получены Леонардом Эйлером в 1755 году и носят его имя. Они справедливы как для несжимаемой, так и для сжимаемой жидкости.

При выводе уравнений движения реальной жидкости необходимо в число действующих сил включить еще силы трения. Система уравнений будет напоминать систему Эйлера, но левые части равенств будут дополнены добавочными слагаемыми, учитывающими трение *).

Другая форма дифференциальных уравнений движения идеальной жидкости была предложена профессором Казанского университета И. С. Громекой в 1881 году. Уравнения Громеки легко могут быть получены из уравнений Эйлера. Принимая во внимание, что $w = w(x, y, z, t)$, ускорение, входящее в правую часть первого уравнения системы (1.27), можно записать следующим образом:

$$\frac{dw_x}{dt} = \frac{\partial w_x}{\partial t} + \frac{\partial w_x}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w_x}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial w_x}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

или, так как $\frac{dx}{dt} = w_x, \frac{dy}{dt} = w_y, \frac{dz}{dt} = w_z$, то

$$\left. \begin{aligned} \frac{dw_x}{dt} &= \frac{\partial w_x}{\partial t} + w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_x}{\partial z} \\ \frac{dw_y}{dt} &= \frac{\partial w_y}{\partial t} + w_x \frac{\partial w_y}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_y}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_y}{\partial z} \\ \frac{dw_z}{dt} &= \frac{\partial w_z}{\partial t} + w_x \frac{\partial w_z}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_z}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_z}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (1.28)$$

*) Вывод этих уравнений дан в главе VI.

(два последних уравнения записаны по аналогии). Первые слагаемые в правых частях системы (1. 28) представляют собой местное ускорение, т. е. изменение скорости по времени в данной точке пространства. Остальные слагаемые определяют конвективное ускорение, т. е. изменение скорости по времени, связанное с перемещением частицы жидкости из одной точки пространства в другую. Если, например, жидкость находится в установившемся движении, то местное ускорение равно нулю, так как в каждой точке пространства скорость по времени не изменяется. Что касается конвективного ускорения, то оно в этом случае может быть отличным от нуля, если при перемещении жидкости в пространстве ее скорость изменяется.

Преобразования Громеки состоят в следующем. Прибавляя и вычитая из правой части первого уравнения (1. 28) величину

$$w_y \frac{\partial w_y}{\partial x} + w_z \frac{\partial w_z}{\partial x},$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{dw_x}{dt} = & \frac{\partial w_x}{\partial t} + w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_x}{\partial z} + \\ & + w_y \frac{\partial w_y}{\partial x} + w_z \frac{\partial w_z}{\partial x} - w_y \frac{\partial w_y}{\partial x} - w_z \frac{\partial w_z}{\partial x} = \frac{\partial w_x}{\partial t} + w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + \\ & + w_y \frac{\partial w_y}{\partial x} + w_z \frac{\partial w_z}{\partial x} + w_z \left(\frac{\partial w_x}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial x} \right) - w_y \left(\frac{\partial w_y}{\partial x} - \frac{\partial w_x}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

или, принимая во внимание формулы (1. 6),

$$\frac{dw_x}{dt} = \frac{\partial w_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2}{2} \right) + w_z \cdot 2 w_y - w_y \cdot 2 w_z,$$

или

$$\frac{dw_x}{dt} = \frac{\partial w_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{w^2}{2} \right) + 2 (w_y w_z - w_z w_y).$$

Аналогичные преобразования можно сделать и для двух других уравнений (1. 28). Тогда, после подстановки значений ускорений в систему уравнений Эйлера (1. 27), последняя приобретает вид:

$$\left. \begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial w_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{w^2}{2} \right) + 2 (w_y w_z - w_z w_y) \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial w_y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{w^2}{2} \right) + 2 (w_z w_x - w_x w_z) \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\partial w_z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{w^2}{2} \right) + 2 (w_x w_y - w_y w_x). \end{aligned} \right\} \quad (1.29)$$

Это есть уравнения Громеки. Удобство их заключается в том, что они содержат величины, определяющие в явном виде поступательное и вращательное движение.

В Англии аналогичные уравнения были получены несколько позднее Лэмбом.

Интегрирование уравнений движения наиболее удобно вести, используя систему уравнений в форме Громеки (1. 29). Рассмотрим интегралы уравнений движения только для случая несжимаемой жидкости.

В большинстве случаев в качестве массовых сил, действующих в жидкости, фигурируют силы тяжести. Эти силы имеют потенциал. Это значит, что существует такая функция, называемая силовой функцией U , частные производные от которой по x , y и z равны соответствующим проекциям ускорений от массовых сил $\frac{\partial U}{\partial x} = X$, $\frac{\partial U}{\partial y} = Y$, $\frac{\partial U}{\partial z} = Z$. Тогда при $\rho = \text{const}$ первое уравнение системы (1. 29) можно записать так:

$$\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\rho} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{w^2}{2} \right) = \frac{\partial w_x}{\partial t} + 2 (\omega_y w_z - \omega_z w_y).$$

Следовательно, вместо системы (1. 29), можно записать такую:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(U - \frac{p}{\rho} - \frac{w^2}{2} \right) &= \frac{\partial w_x}{\partial t} + 2 (\omega_y w_z - \omega_z w_y) \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(U - \frac{p}{\rho} - \frac{w^2}{2} \right) &= \frac{\partial w_y}{\partial t} + 2 (\omega_z w_x - \omega_x w_z) \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(U - \frac{p}{\rho} - \frac{w^2}{2} \right) &= \frac{\partial w_z}{\partial t} + 2 (\omega_x w_y - \omega_y w_x). \end{aligned} \right\} \quad (1.30)$$

В общем случае система уравнений (1. 30) не интегрируется, поэтому рассмотрим частные случаи.

1. Неустановившееся безвихревое движение несжимаемой жидкости $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$

Если умножить уравнения (1. 30) соответственно на dx , dy и dz и сложить, то получится

$$d \left(U - \frac{p}{\rho} - \frac{w^2}{2} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (w_x dx + w_y dy + w_z dz).$$

При $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$, как это следует из формул (1. 6), получается

$$\frac{\partial w_z}{\partial y} = \frac{\partial w_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial w_x}{\partial z} = \frac{\partial w_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial w_y}{\partial x} = \frac{\partial w_x}{\partial y},$$

а это значит, что величина, стоящая в скобках в правой части последнего уравнения, является полным дифференциалом некоторой функции φ^*), следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial t} (w_x dx + w_y dy + w_z dz) = \frac{\partial}{\partial t} (d\varphi) = d \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right),$$

тогда

$$d \left(U - \frac{p}{\rho} - \frac{w^2}{2} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = 0. \quad (1.31)$$

Интегрирование дифференциального уравнения (1.31) дает

$$U - \frac{p}{\rho} - \frac{w^2}{2} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} = F(t), \quad (1.32)$$

где $F(t)$ — произвольная функция времени. Она определяется из начальных условий. Выражение (1.32) называется *интегралом Лагранжа*.

II. Установившееся движение несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial w_x}{\partial t} = \frac{\partial w_y}{\partial t} = \frac{\partial w_z}{\partial t} = 0$$

Умножив уравнения системы (1.30) при указанных условиях на dx , dy и dz и сложив их, получим

$$\begin{aligned} d \left(U - \frac{p}{\rho} - \frac{w^2}{2} \right) &= 2 (\omega_y w_z - \omega_z w_y) dx + 2 (\omega_z w_x - \omega_x w_z) dy + \\ &+ 2 (\omega_x w_y - \omega_y w_x) dz = \\ &= 2 \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Уравнение (1.33) легко интегрируется, когда определитель равен нулю. Тогда получается следующее выражение:

$$U - \frac{p}{\rho} - \frac{w^2}{2} = \text{const}, \quad (1.34)$$

которое называется *интегралом Бернулли*.

*) Функция φ называется потенциалом скорости. Подробнее см. гл. IV.

Рассмотрим, при каких условиях определитель обращается в нуль.

1. Если $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$, т. е. вторая строка состоит из нулей, то определитель равен нулю. Это безвихревое движение жидкости. Постоянная в уравнении Бернулли (1. 34) в этом случае имеет одно и то же значение для всего потока.

2. Если $\frac{dx}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y} = \frac{dz}{\omega_z}$, т. е. члены первой строки пропорциональны членам третьей строки, то определитель равен нулю. Записанное условие представляет собой уравнение линий тока *). Таким образом, в данном случае уравнение Бернулли справедливо для линии тока. Следовательно, в случае вихревого движения константа в уравнении (1. 34) сохраняет свое значение вдоль линии тока, а при переходе от одной линии тока к другой — меняется.

3. Если $\frac{dx}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y} = \frac{dz}{\omega_z}$, то определитель также равен нулю. Это условие представляет собой условие параллельности линии, проведенной в жидкости, вектору угловой скорости ω , т. е. является уравнением вихревых линий. Следовательно, константа в уравнении (1. 34) сохраняет свое значение не только вдоль линии тока, но и вдоль вихревой линии.

4. Определитель равен нулю и при $\frac{\omega_x}{\omega_x} = \frac{\omega_y}{\omega_y} = \frac{\omega_z}{\omega_z}$. Это условие параллельности векторов линейной и угловой скорости: частицы жидкости движутся в этом случае поступательно, одновременно вращаясь в плоскости, перпендикулярной поступательному движению, подобно тому, как перемещается винт или штопор. Впервые на этот случай указал И. С. Громека.

Подводя итог, можно сказать, что интеграл Бернулли в случае безвихревого течения справедлив для всего потока, а в случае вихревого — только для линии тока или для вихревой линии.

Вновь обращаясь к уравнению (1. 34), запишем его в том виде, в котором оно обычно применяется для практических целей. В большинстве случаев массовыми силами, действующими в жидкости, являются силы тяжести. Если ось z направить вертикально вверх, то проекции ускорений от массовых сил запишутся так: $X=0$, $Y=0$, $Z=-gz$, где g — ускорение

*) Напомним, что уравнение линий тока получается как условие параллельности линии тока вектору скорости в данной точке, т. е. проекции отрезка линии тока dx , dy и dz должны быть пропорциональны компонентам вектора скорости ω_x , ω_y и ω_z .

силы тяжести. Подставив это в (1.34), имея в виду, что $U = -gz$, получим

$$gz + \frac{p}{\rho} + \frac{w^2}{2} = \text{const}, \quad (1.35)$$

или

$$z + \frac{p}{g\rho} + \frac{w^2}{2g} = \text{const}. \quad (1.36)$$

Формулы (1.35) и (1.36) представляют разные варианты известного уравнения Даниила Бернулли для идеальной несжимаемой жидкости.

§ 5. ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ И МЕТОДЫ УПРОЩЕНИЯ

При решении задач гидродинамики или газодинамики, поставленных в общем виде, нужно прежде всего установить, какие величины подлежат определению, т. е. являются искомыми. Так, например, в случае прямой задачи для несжимаемой жидкости неизвестными являются четыре величины в каждой точке пространства: три компоненты скорости и давление w_x , w_y , w_z и p . Плотность жидкости считается известной, заранее заданной. Для определения всех искоемых величин нужно составить такую систему, в которой количество уравнений равняется количеству неизвестных, т. е. система должна быть замкнутой. В рассматриваемом примере в систему включают три уравнения движения и уравнение неразрывности

$$\left. \begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{dw_x}{dt} \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{dw_y}{dt} \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{dw_z}{dt} \\ \text{div } w &= \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.37)$$

(Эта система записана для идеальной жидкости. В случае вязкой жидкости нужно вместо уравнений Эйлера брать уравнения движения для вязкой жидкости, называемые уравнениями Навье—Стокса.)

Если решать задачу для сжимаемой жидкости (газа), то количество неизвестных, подлежащих определению, возрастает до семи. Кроме трех компонент скорости и давления, здесь добавляются плотность, температура и количество подведенного тепла: ρ , T , Q . Таким образом, искомыми являются:

$$w_x, w_y, w_z, p, \rho, T, Q.$$

Система уравнений должна теперь содержать семь уравнений. Три уравнения движения остаются без изменения. Уравнение неразрывности также остается, только записывается для сжимаемой жидкости (1. 19). Недостающие три уравнения заимствуются из термодинамики. К ним относятся:

уравнение состояния газа

$$p = \rho RT, \quad (1.38)$$

уравнение первого закона термодинамики

$$dQ = c_v dT + p dv, \quad (1.39)$$

уравнение передачи тепла (форма уравнения может быть различной в зависимости от того, каким способом передается тепло).

Рассмотренные системы уравнений в общем виде не решаются. Поэтому для достижения результата обычно вводят упрощения в самом начале, еще при формулировке задачи. Вполне понятно, что задача в этом случае ставится не в общем виде, а в частном, применительно к конкретным условиям. Сообразно с этими условиями делаются и упрощения. Наиболее употребительны следующие виды упрощений.

1. Формулировка задачи в рамках установившегося движения. При этом во всех уравнениях исчезают частные производные по времени, благодаря чему уравнения значительно упрощаются. Нужно заметить, что в природе и в технике почти всякое течение жидкости или газа является, строго говоря, неустановившимся. Однако во многих случаях отклонения скорости от некоторого среднего значения по времени бывают достаточно малыми по сравнению с величиной скорости, и это дает возможность приближенно считать движение установившимся. Так поступают, например, рассчитывая газовые потоки в турбомашинах.

2. Переход от пространственного к двумерному или одномерному течению. Он дает сокращение количества неизвестных, а следовательно, и количества уравнений системы. Это весьма существенно облегчает решение. Такой переход делается в тех случаях, когда составляющие скорости по одной или двум координатным осям малы по сравнению с составляющей

по третьей координате, ориентированной вдоль основного направления потока. Так, например, при расчете течения в трубах или плавно-расширяющихся (или суживающихся) каналах поток принимается одномерным. В пределах данного поперечного сечения скорость считается постоянной, равной средней скорости. Такое же упрощение допускают и при расчете криволинейных каналов, например межлопаточных каналов турбомашин, когда целью расчета является определение средних значений параметров потока в выходном сечении по известным значениям на входе. Если же ставится задача профилирования лопаток, то пользуются моделью двумерного потока.

3. Переход от реальной жидкости к модели идеальной жидкости. Такое допущение очень сильно упрощает задачу, так как позволяет вместо довольно сложных уравнений движения вязкой жидкости взять более простые — в форме Эйлера или Громеки. Моделью идеальной жидкости пользуются в расчетах и исследованиях, выполняемых в первом приближении, когда влиянием трения пренебрегают, а также при расчетах тех областей течения, которые расположены на значительном расстоянии от обтекаемых поверхностей, где влияние трения незначительно.

4. Переход от сжимаемого газа к несжимаемой жидкости. Это приводит к сокращению неизвестных и количества уравнений с семи до четырех, что весьма облегчает решение задачи. Такое упрощение допустимо при малых скоростях течения, когда изменение плотности настолько незначительно, что ее приближенно можно считать постоянной. Существуют также методы, позволяющие пересчитывать данные, полученные для несжимаемой жидкости, на случай сжимаемого газа. При такой постановке расчет течения несжимаемой жидкости является первым этапом решения задачи, а учет влияния сжимаемости — вторым.

5. Применение модели баротропной жидкости. Как уже указывалось (§ 1), у баротропной жидкости плотность является только функцией давления. Если при расчете потока газа заранее известен термодинамический процесс, т. е. давление и плотность связаны однозначной зависимостью, например уравнение политропного процесса

$$\frac{p}{\rho^n} = \text{const},$$

то газ в этом случае как раз подходит под понятие баротропной жидкости. Количество уравнений в этом случае сокращается. Так например, в теории течения идеального нетепло-

проводного газа заранее известно, что термодинамический процесс в потоке газа является изоэнтропным. Таким образом, в систему уравнений включается уравнение изоэнтропы, но зато исключаются уравнения передачи тепла и первого закона термодинамики.

То обстоятельство, что упрощения вводятся в самом начале, еще при формулировке задачи, является причиной большого разнообразия методов и приемов расчета, которые применяются в практике. В дальнейшем изложении будут рассмотрены наиболее распространенные из этих методов.

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ
ДЛЯ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ СТРУЙКИ

§ 1. УРАВНЕНИЕ ЭНЕРГИИ

Изучение основных уравнений и зависимостей, применяемых в газовой динамике, удобно провести сначала для элементарной струйки или одномерного потока, а затем распространить их на более сложные виды движения.

Большое значение в газовой динамике имеет закон сохранения энергии. Он, как известно, констатирует тот факт, что энергия не возникает и не исчезает, а только превращается из одного вида в другой. Следовательно, составив баланс энергии для какого-нибудь количества газа, например, для единицы массы, можно найти соотношение между различными составляющими энергии. Такая математическая запись энергетического баланса и представляет собой уравнение энергии.

Нужно заметить, что уравнение энергии не входит в систему основных уравнений, рассмотренных в § 5 главы I, но оно может быть получено путем преобразования остальных. Желая вывести это уравнение, можно было бы воспользоваться указанным способом. Однако он лишен наглядности и простоты. Поэтому удобнее сделать вывод, взяв за основу баланс энергии.

Составление баланса энергии рассмотрим на примере газотурбинной установки *). Ее схема изображена на рис. 6.

Через входное сечение I воздух из атмосферы поступает в компрессор, где сжимается и подается в камеру сгорания. Туда же, в камеру сгорания, поступает жидкое топливо, кото-

*) Баланс энергии можно составить для любой схемы течения. Пример с газотурбинной установкой взят потому, что в нем присутствуют все составляющие энергетического баланса, рассматриваемые в газодинамических задачах.

рое, смешавшись с воздухом, сгорает, выделяя большое количество тепла. Таким образом, в турбину из камеры сгорания поступают образовавшиеся там продукты сгорания с высокой температурой и высоким давлением. В турбине они расширяются, производя работу — вращая ротор. Часть работы турбины при помощи вала передается на вращение компрессора,

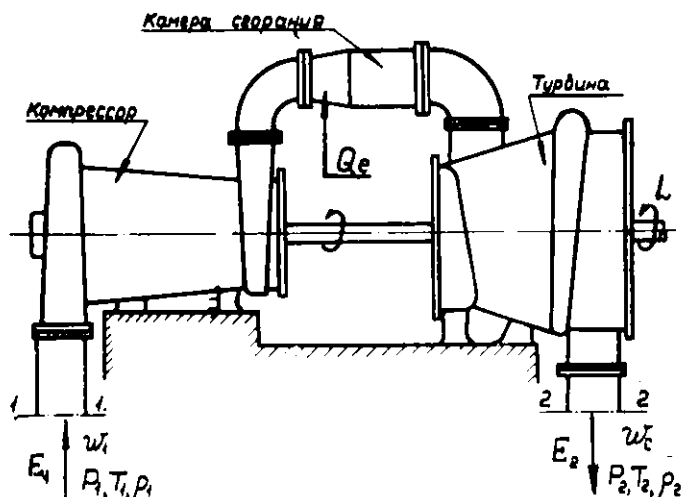


Рис. 6

другая часть отдается потребителю. Отработанные газы покидают турбину, выходя через сечение 2. Энергия поступающего воздуха, отнесенная к единице массы, обозначена E_1 , энергия выходящего газа — E_2 . Подведенное тепло обозначено Q_e . Индекс e означает, что тепло подводилось извне. Здесь нет никакого противоречия: несмотря на то, что сгорание происходило внутри камеры и тепло, подогревающее газ, выделялось именно там, энергия эта была внесена снаружи в скрытом виде, вместе с топливом. Следовательно, поскольку не ставится задача изучения физико-химических процессов горения, а рассматриваются только явления газодинамического характера, то можно считать, что тепло в количестве Q_e было внесено в камеру сгорания снаружи. Работа на валу установки, отданная потребителю, обозначена L . Она также отнесена к единице массы проходящего через установку воздуха.

На рис. 7 изображена упрощенная схема течения. На расчетном участке 1—2, так же как и в предыдущем случае, подводится тепло и отводится механическая работа. Следовательно, для упрощенной схемы баланс энергии будет таким же, как

и для газотурбинной установки, но пользоваться этой схемой проще и удобнее.

Баланс энергии запишется следующим уравнением:

$$E_1 - E_2 + Q_e - L = 0. \quad (2.1)$$

Далее необходимо расшифровать, что подразумевается под полным запасом энергии единицы массы газа E . При этом нужно иметь в виду, что в «полный запас энергии» нет надобности включать все ее составляющие (например, химическую, электрическую, внутриядерную); вполне достаточно принимать в расчет только те ее виды, которые могут превращаться один в другой в пределах изучаемых газодинамических задач. Тогда можно записать, что

$$E = u + \frac{p}{\rho} + \frac{w^2}{2} + gz, \quad (2.2)$$

где u — внутренняя энергия единицы массы газа,

$\frac{p}{\rho}$ — потенциальная энергия давления единицы массы газа,

$\frac{w^2}{2}$ — кинетическая энергия единицы массы газа,

gz — потенциальная энергия уровня (положения) единицы массы газа (z — геометрическая высота, g — ускорение силы тяжести).

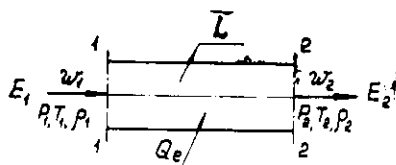


Рис. 7

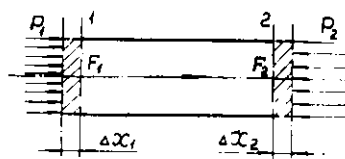


Рис. 8

Все указанные величины измеряются в единицах работы на единицу массы, а именно в $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \kappa z}$ или, что то же самое, в $\frac{\text{м}^2}{\text{сек}^2}$ (в системе СИ).

Подставив в уравнение (2.1) значения E_1 и E_2 , выраженные с помощью уравнения (2.2), получим

$$c_v (T_1 - T_2) + \frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{w_1^2 - w_2^2}{2} + g(z_1 - z_2) + Q_e - L = 0. \quad (2.3)$$

Здесь напомним, что разность внутренних энергий $u_1 - u_2 = c_v (T_1 - T_2)$. Это есть уравнение энергии для одномерного по-

тока или для элементарной струйки. Оно показывает, как происходит изменение внутренней энергии $c_v (T_1 - T_2)$, потенциальной энергии давления $\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2}$, кинетической энергии.

потенциальной энергии уровня $g(z_1 - z_2)$ в результате действия подведенного извне тепла Q_e и работы, отданной газом внешнему потребителю L . Изменение внутренней энергии связано с изменением температуры газа, кинетической энергии — с изменением скорости потока, потенциальной энергии уровня — с изменением высоты положения рассматриваемой массы газа над плоскостью, принятой за начало отсчета. Что касается изменения потенциальной энергии давления, то оно требует специальных разъяснений.

На рис. 8 изображен расчетный участок потока, ограниченный на входе сечением 1 и на выходе — сечением 2. При входе газа через сечение 1 силы внешнего давления $p_1 F_1$, вталкивая в расчетный участок объем газа $F_1 \Delta x_1$, совершают работу $p_1 F_1 \Delta x_1$. При выходе из расчетного участка через сечение 2 объем газа $F_2 \Delta x_2$ совершает работу против сил внешнего давления $p_2 F_2 \Delta x_2$. Поделив эти работы на массу газа в соответствующих объемах, получим

$$L_{\text{вт}} = \frac{p_1 F_1 \Delta x_1}{F_1 \Delta x_1 \rho_1} = \frac{p_1}{\rho_1}, \quad L_{\text{выт}} = \frac{p_2 F_2 \Delta x_2}{F_2 \Delta x_2 \rho_2} = \frac{p_2}{\rho_2},$$

следовательно,

$$\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2}$$

представляет собой разницу работ вталкивания и выталкивания единицы массы газа. Эта величина характеризует накопление (если $\frac{p_1}{\rho_1} > \frac{p_2}{\rho_2}$) потенциальной энергии давления или

расходование ее (если $\frac{p_1}{\rho_1} < \frac{p_2}{\rho_2}$) потоком газа, находящимся внутри расчетного участка.

Изменение потенциальной энергии уровня $g(z_1 - z_2)$ в задачах, связанных с расчетом теплоэнергетических машин или установок, как правило составляет пренебрежимо малую величину по сравнению с другими членами уравнения энергии. Оно обычно не превышает $50-100 \frac{\text{м}^2}{\text{сек}^2}$, тогда как другие члены имеют порядок $10\,000-100\,000 \frac{\text{м}^2}{\text{сек}^2}$. Поэтому во всех даль-

нейших расчетах величина $g(z_1 - z_2)$ будет отброшена. Однако нужно обратить внимание на задачи такого рода, как расчет вентиляционных систем шахт, в которых изменение потенциальной энергии уровня весьма велико и может превышать значения других членов уравнения энергии. В этих случаях величина $g(z_1 - z_2)$ должна учитываться обязательно.

Уравнению энергии придадут еще такую, более удобную для расчетов форму: преобразуя сумму членов

$$c_v (T_1 - T_2) + \frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2} = \left(c_v T_1 + \frac{p_1}{\rho_1} \right) - \left(c_v T_2 + \frac{p_2}{\rho_2} \right) = \\ = (c_v T_1 + RT_1) - (c_v T_2 + RT_2) = (c_v + R) (T_1 - T_2) = c_p (T_1 - T_2),$$

где используется известное из термодинамики соотношение $c_p - c_v = R$, и подставляя найденное значение в уравнение (2.3), получим

$$c_p (T_1 - T_2) + \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2} + Q_e - L = 0, \quad (2.4)$$

или

$$i_1 - i_2 + \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2} + Q_e - L = 0. \quad (2.5)$$

В формуле (2.5) принято обозначение $i = c_p T$. Этот вид уравнения энергии называют еще уравнением энтальпии или тепло-содержания, так как в него входит энтальпия i .

В уравнении энергии принято следующее правило знаков. Подведенное внешнее тепло считается положительным, а отведенное — отрицательным; работа, совершенная газом и отведенная к внешнему потребителю, — положительной, а подведенная к газу извне и затраченная на его сжатие — отрицательной. Таким образом, в нагревателе газа (камере сгорания) тепло считается положительным, в охладителе — отрицательным; работа, получаемая в турбине, — положительной, а затрачиваемая на вращение компрессора — отрицательной. Это правило знаков согласуется с уравнением первого закона термодинамики.

Уравнение энергии часто применяется в дифференциальной форме. Чтобы получить его в этой форме, воспользуемся таким приемом. Будем приближать второе сечение к первому, уменьшая длину расчетного участка до бесконечно малой величины. Тогда в пределе получим вместо Q_e и L соответственно dQ_e и dL ; вместо $T_1 - T_2$ и $\frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2}$ получим $-dT$ и $-d\left(\frac{\omega^2}{2}\right)$. (В последних двух выражениях знак минус появился потому, что

берутся бесконечно малые разности $T_1 - T_2$ и $\frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2}$, а не $T_2 - T_1$ и $\frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2}$.) Подставив это в уравнение энергии (2.4) и поменяв знаки на обратные, получим

$$c_p dT + d\left(\frac{\omega^2}{2}\right) - dQ_e + dL = 0. \quad (2.6)$$

Если сопоставить выражение для полного запаса энергии (2.2) с левой частью уравнения Бернулли (1.35), которая также представляет величину полного запаса энергии единицы массы несжимаемой жидкости, то можно заметить, что в случае газа дополнительно введена величина внутренней энергии u . Это объясняется тем, что при $\rho \neq \text{const}$ тепловые процессы оказывают влияние на плотность газа, и так как его расширение или сжатие связано с работой, то в конечном итоге это влияние распространяется на механические составляющие энергии. Таким образом, в уравнениях энергии (2.4) и (2.5) присутствуют величины, имеющие как механическое, так и тепловое происхождение.

Еще одной разновидностью уравнения энергии является обобщенное уравнение Бернулли для газа *). От уравнений (2.4) или (2.5) оно отличается тем, что все входящие в него слагаемые имеют механическое происхождение. Его можно получить следующим путем.

Пользуясь тем же самым приемом, с помощью которого было получено уравнение (2.6), представим формулу (2.3) в дифференциальном виде:

$$c_v dT + d\left(\frac{p}{\rho}\right) + d\left(\frac{\omega^2}{2}\right) - dQ_e + dL = 0. \quad (2.7)$$

Количество тепла Q , воспринимаемое газом, и количество тепла Q_e , подводимое к нему извне, в общем случае не одинаковы: существует еще тепло трения Q_r , которое выделяется вследствие трения газа о стенки, внутреннего трения (возникающего между слоями, движущимися с разными скоростями), образования вихрей и т. п. Это тепло также воспринимается газом. Поэтому

$$Q = Q_e + Q_r = Q_e + L_r. \quad (2.8)$$

Тогда

$$dQ_e = dQ - dL_r, \quad (2.9)$$

*) Необходимо заметить, что это уравнение было получено в наши дни. Имя Даниила Бернулли ему присвоено потому, что оно является обобщением известного в гидродинамике уравнения Бернулли на случай течения газа.

где L_r — работа трения (в системе единиц СИ $Q_r = L_r$).

Количество тепла, воспринимаемое газом, можно определить с помощью уравнения первого закона термодинамики

$$dQ = c_v dT + p dv. \quad (2.10)$$

Подставив это выражение в формулу (2.9), получим

$$c_v dT = dQ_e + dL_r - p dv. \quad (2.11)$$

Кроме того,

$$d\left(\frac{p}{\rho}\right) = d(pv) = p dv + v dp. \quad (2.12)$$

После подстановки формул (2.11) и (2.12) в уравнение энергии (2.7) и замены удельного объема через плотность $v = \frac{1}{\rho}$, получаем уравнение Бернулли для газа в дифференциальной форме

$$\frac{dp}{\rho} + d\left(\frac{w^2}{2}\right) + dL + dL_r = 0. \quad (2.13)$$

При решении конкретных задач уравнение Бернулли интегрируют в пределах от начального сечения расчетного участка до конечного

$$\int_1^2 \frac{dp}{\rho} + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + L + L_r = 0. \quad (2.14)$$

Если в процессе решения нужно получить параметры потока в каком-нибудь промежуточном сечении расчетного участка, то при интегрировании это сечение принимается за конечное. При решении можно брать и определенный интеграл. Константа интегрирования определяется тогда из граничных условий, в качестве которых обычно берут условия на входе в расчетный участок.

Для того чтобы вычислить $\int_1^2 \frac{dp}{\rho}$, надо знать зависимость

между p и ρ , т. е. иметь уравнение термодинамического процесса, при котором происходит течение газа, например уравнение политропы $\frac{p}{\rho^n} = \text{const}$. Если известен термодинамический процесс, то известен и показатель политропы. При политропном процессе интегрирование дает

$$\int_1^2 \frac{dp}{\rho} = \frac{n}{n-1} \frac{p_1}{\rho_1} \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right] = \frac{n}{n-1} R T_1 \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right], \quad (2.15)$$

при изотермном процессе ($n=1$)

$$\int_1^2 \frac{dp}{\rho} = \frac{p}{\rho} \ln \frac{p_2}{p_1} = R T \ln \frac{p_2}{p_1}. \quad (2.16)$$

Сопоставляя между собой уравнение энергии и уравнение Бернулли, например (2. 4) и (2. 14), можно заметить, что первое учитывает внешнее тепло, но не содержит работы трения в явном виде, тогда как второе не содержит в явном виде внешнего тепла, но учитывает работу трения. Поэтому создается впечатление, что эти уравнения не учитывают всех особенностей течения. В действительности это не так. Хотя работа трения и не входит явно в уравнение энергии, но ее влияние сказывается, прежде всего, на температуре T_2 . Что касается уравнения Бернулли, то в нем внешнее тепло учитывается при вы-

числении $\int_1^2 \frac{dp}{\rho}$, а именно, от количества подведенного тепла

зависит величина показателя политропы.

Рассмотрим уравнения энергии для частных случаев течения газа.

1. Адиабатное течение. Такое течение происходит без внешнего подвода или отвода тепла, т. е. $Q_e = 0$. Относительно внутреннего теплоподвода (тепла трения Q_r) никаких оговорок не делается, т. е. оно либо присутствует, либо равно нулю. Уравнение энергии в этом случае имеет вид:

$$c_p (T_1 - T_2) + \frac{w_1^2 - w_2^2}{2} - L = 0, \quad (2.17)$$

а уравнение Бернулли сохраняет форму (2. 14). Уравнение (2. 17) имеет большое значение в экспериментальной практике. Им пользуются, например, при экспериментальном определении работы турбины или компрессора, когда непосредственное определение мощности по крутящему моменту и числу оборотов затруднительно по техническим причинам. Для этого необходимо только измерить температуры и скорости газа на входе в машину и выходе из нее и произвести вычисление по формуле (2. 17). Заметим, что практически дело обстоит еще

проще. Измеряются не температуры газа и скорости раздельно, а температуры торможения (см. § 2).

2. Энергоизолированное течение. Такое течение происходит без внешнего теплообмена ($Q_e = 0$) и без подвода или отвода внешней механической работы ($L = 0$), т. е. без обмена энергией с внешней средой на участке между входным и выходным сечением. Уравнение энергии для энергоизолированного течения записывается так:

$$c_p (T_1 - T_2) + \frac{w_1^2 - w_2^2}{2} = 0 \quad (2.18)$$

или

$$c_p T_1 + \frac{w_1^2}{2} = c_p T_2 + \frac{w_2^2}{2}. \quad (2.19)$$

Смысл последнего равенства состоит в том, что при энергоизолированном течении полный запас энергии единицы массы газа остается неизменным, так как на расчетном участке энергия извне не подводится и не отводится во внешнюю среду. Уравнение Бернулли для этого вида течения приобретает вид:

$$\int_1^2 \frac{dp}{\rho} + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + L_r = 0. \quad (2.20)$$

Моделью энергоизолированного потока пользуются при расчете диффузоров, неохлаждаемых сопел и других неподвижных каналов, в которых теплообмен с внешней средой пренебрежимо мал.

3. Изэнтропное течение. Такое течение происходит при постоянной энтропии $S = \text{const}$. Для постоянства энтропии необходимо выдержать условие $Q = 0$. Из формулы (2. 8) следует, что это может быть при $Q_e = 0$, $Q_r = 0$ или при $Q_e = -Q_r$. Второй случай предусматривает теплоотвод во внешнюю среду, в точности равный теплоподводу от трения. Такой точный тепловой баланс редко может встречаться в практике, а потому здесь не рассматривается. Таким образом, можно считать, что течение будет изэнтропным в том случае, если отсутствует трение и внешний теплообмен. Для этого вида течения уравнение энергии записывается так же, как и для адиабатного (см. формулу (2. 17)), а уравнение Бернулли имеет вид:

$$\int_1^2 \frac{dp}{\rho} + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + L = 0. \quad (2.21)$$

При вычислении интеграла здесь нужно иметь в виду, что p и ρ связаны уравнением изоэнтропы $\frac{p}{\rho^k} = \text{const}$. Моделью изоэнтропного потока пользуются при теоретических расчетах и исследованиях идеальных компрессоров и турбин.

4. Энергоизолированное изоэнтропное течение. Такое течение происходит без энергетического обмена с внешней средой ($Q_e = 0, L = 0$) и без трения ($L_r = Q_r = 0$). При этом автоматически соблюдаются условия изоэнтропности процесса. Уравнение энергии имеет тот же вид, что и для энергоизолированного течения (2.18) или (2.19), а уравнение Бернулли записывается так:

$$\int_1^2 \frac{dp}{\rho} + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} = 0. \quad (2.22)$$

Здесь также при вычислении интеграла связь между давлением и плотностью устанавливается уравнением изоэнтропы. Этот частный случай применяется довольно широко. Например, в теоретической газодинамике большинство задач рассматривается в предположении именно такого вида течения.

В дифференциальной форме уравнения (2.18) и (2.22) имеют следующий вид:

$$c_p dT + d\left(\frac{w^2}{2}\right) = 0, \quad (2.23)$$

$$\frac{dp}{\rho} + d\left(\frac{w^2}{2}\right) = 0. \quad (2.24)$$

Рассмотрим еще две весьма употребительных формы записи уравнения Бернулли для энергоизолированного изоэнтропного течения. Интегрируя уравнение (2.24), имеем *)

$$\int \frac{dp}{\rho} + \frac{w^2}{2} = \text{const}.$$

Используя уравнение изоэнтропы

$$\frac{p}{\rho^k} = B = \text{const},$$

найдем значение интеграла

*) Берется неопределенный интеграл.

$$\int \frac{dp}{\rho} = B^{\frac{1}{k}} \int \frac{dp}{p^{\frac{1}{k}}} = B^{\frac{1}{k}} \cdot \frac{k}{k-1} p^{-\frac{1}{k}+1} = \frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho}$$

и, подставив его в предыдущее уравнение, получим

$$\frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho} + \frac{w^2}{2} = \text{const.} \quad (2.25)$$

Если сопоставить уравнение (2.25) с уравнением Бернулли для горизонтального течения идеальной несжимаемой жидкости

$$\frac{p}{\rho} + \frac{w^2}{2} = \text{const.},$$

то можно заметить, что они отличаются только первым слагаемым: для газа коэффициент, стоящий перед $\frac{p}{\rho}$ равен $\frac{k}{k-1}$, тогда как для несжимаемой жидкости он равен 1. Таким образом, величина $\frac{k}{k-1}$ учитывает влияние сжимаемости.

Если воспользоваться соотношением, с помощью которого определяется скорость распространения звука $a^2 = k \frac{p}{\rho}$ (о скорости звука подробнее см. § 3), и преобразовать первое слагаемое уравнения (2.25), то последнее приобретает вид:

$$\frac{a^2}{k-1} + \frac{w^2}{2} = \text{const.} \quad (2.26)$$

Эта форма записи уравнения Бернулли широко применяется в теоретической газодинамике.

§ 2. ПАРАМЕТРЫ ТОРМОЖЕНИЯ

Параметры состояния неподвижного газа включают в себя, как известно, давление p , температуру T , плотность ρ или удельный объем v . Это — истинные, или *термодинамические параметры*. Иначе их называют *статическими параметрами*.

Если газ движется в потоке, то перед неподвижно установленными приборами, например перед трубкой 3 или термометром 5 (рис. 9), он тормозится. При торможении происходит сжатие газа, в результате чего местные значения параметров его состояния изменяются по сравнению с их значениями в набегающем потоке. Для того чтобы измерить истинные зна-

чения давления и температуры в потоке, следовало бы измерительные устройства перемещать вдоль течения со скоростью газа так, чтобы относительно потока они оказались неподвижными. Однако вполне понятно, что такой способ практически неосуществим.

Практически для измерения статического давления в потоке применяют отверстие, просверленное строго перпендикулярно стенке канала, вдоль которой течет газ. Так как газ не встречает здесь никаких препятствий, то скорость и давление вдоль потока не меняются, через отверстие 1 (рис. 9) передается истинное давление такое же, как в набегающем потоке. Оно фиксируется манометром 2. Такой метод измерения применим в том случае, когда по сечению трубы или канала давление постоянно. Это наблюдается в прямолинейных трубах при движении потока без вращения, т. е. когда линии тока — прямые. Если же канал образует поворот (закругление) или поток движется по винтовой линии, то давление в поперечном сечении распределено неодинаково, следовательно, его нужно измерять в разных точках по всему сечению. Для этой цели применяют трубку статического давления, которую можно помещать в любое место исследуемого сечения. В этой трубке

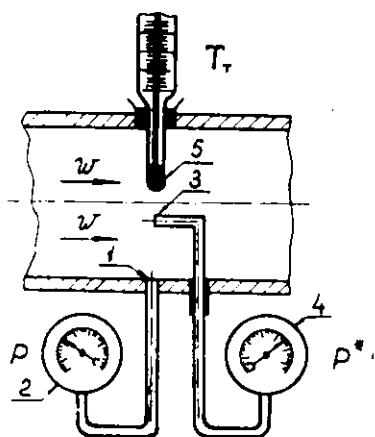


Рис. 9

(рис. 10) отверстие, через которое передается статическое давление, расположено также строго перпендикулярно боковой поверхности, продольно обтекаемой потоком газа.

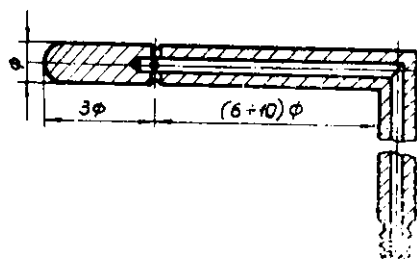


Рис. 10

Что касается трубки 3 (см. рис. 9) с приемным отверстием, расположенным навстречу потоку, и термометра 5, то они будут давать более высокие значения давлений и температуры по сравнению с истинными.

Рассмотрим, какую температуру покажет термометр 5, чувствительный элемент которого обтекается потоком газа. На рис. 11 изображена схема обтекания термометра в поперечном

сечении чувствительного элемента. В невозмущенном потоке (сечение 1) скорость равна w и температура T . На центральной линии тока между сечениями 1 и 2 газ тормозится полностью, так что в точке 2 скорость равна нулю, а температура T^* . Процесс торможения можно считать энергоизолированным^{*}). Применяя уравнение энергии для энергоизолированного течения (2. 19) к данному случаю ($w_1=w$, $T_1=T$, $w_2=0$, $T_2=T^*$), запишем

$$c_p T + \frac{w^2}{2} = c_p T^*,$$

откуда

$$T^* = T + \frac{w^2}{2 c_p} = T + \frac{w^2}{2 \frac{k}{k-1} R}. \quad (2.27)$$

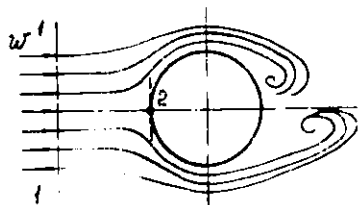


Рис. 11

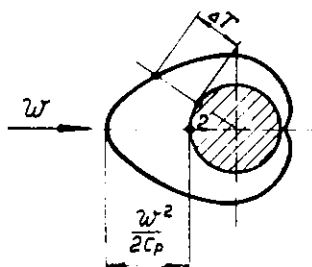


Рис. 12

(Здесь использовано известное термодинамическое соотношение $c_p = \frac{k}{k-1} R$, вытекающее из следующих зависимостей: $\frac{c_p}{c_v} = k$, $c_p - c_v = R$.) Величина T^* называется *температурой торможения*. Иногда употребляются и другие названия: температура заторможенного потока и, не совсем правильные, — заторможенная температура и полная температура. Для воздуха ($c_p = 1005 \frac{\text{дж}}{\text{кг} \cdot \text{град}}$, $k = 1,4$, $R = 287,4 \frac{\text{дж}}{\text{кг} \cdot \text{град}}$) формула (2. 27) принимает такой вид:

$$T^* = T + \frac{w^2}{2010}. \quad (2.28)$$

^{*}) На участке 1—2 нет подвода или отвода механической работы. Кроме того, на центральной линии тока газ движется без подвода и отвода тепла. Это связано с тем, что температура на центральной линии тока незначительно отличается от температуры в окружающих слоях.

Для быстрых прикидочных расчетов часто пользуются приближенной формулой

$$T^* = T + 5 \left(\frac{w}{100} \right)^2. \quad (2.29)$$

Слагаемое $\frac{w^2}{2 \frac{k}{k-1} R}$ в формуле (2. 27) называется *динамической добавкой температуры*. Для иллюстрации ее величины приводится таблица.

Т а б л и ц а

Скорость w м/сек	Динамическая добавка ΔT град	Пример движения
10	0,05	Спортсмен в беге на 100 м.
50	1,25	Парашютист в затяжном прыжке после 13 секунд свободного падения.
100	5	Пассажирский самолет с поршневыми двигателями.
200	20	Самолет-истребитель с поршневым двигателем.
341	58	Скорость распространения звука при нормальной температуре.
700	224	Самолет-истребитель с турбореактивным двигателем.
8000	32000	Первая космическая скорость — скорость спутника Земли *).
11000	60500	Вторая космическая скорость.

Возвращаясь к вопросу о том, что покажет термометр 5 (см. рис. 9), нужно заметить, что это показание T_T будет выше, чем истинная температура, и ниже, чем температура торможения. Дело заключается в том, что на поверхности термометра температура неравномерно распределена по омываемому периметру чувствительного элемента. Это связано с неодинаковой теплоотдачей от стенки термометра (здесь газ имеет

*) То обстоятельство, что спутники Земли, имея такой высокий нагрев вследствие торможения, не сгорают, объясняется весьма малой плотностью атмосферы на высотах полета. Количество тепла, выделившееся при торможении, настолько мало (из-за малой массы обтекающего воздуха), что оно компенсируется теплоотдачей путем излучения в окружающее пространство. При входе в более плотные слои атмосферы спутник может сгореть, если его скорость не будет перед этим уменьшена.

наиболее высокую температуру, так как тормозится в результате трения о стенки) в окружающие слои. На рис. 12 приведена полярная диаграмма распределения динамической добавки температуры по периметру термометра. Из диаграммы видно, что своей полной величины $\frac{\omega^2}{2 \frac{k}{k-1} R}$ эта добавка дости-

гает лишь на фронтовой стороне в точке 2, называемой *передней критической точкой*. Таким образом, чувствительный элемент приобретает температуру T_T , большую T , но меньшую T^* , а именно:

$$T_T = T + r \frac{\omega^2}{2 c_p} = T + r \frac{\omega^2}{2 \frac{k}{k-1} R}, \quad (2.30)$$

где

$$r = \frac{\frac{\Delta T_{cp}}{\omega^2}}{\frac{1}{2 c_p}} = \frac{T_T - T}{\frac{\omega^2}{2 c_p}} \quad (2.31)$$

называется *коэффициентом восстановления температуры*.

Наиболее хорошим был бы термометр, имеющий коэффициент восстановления $r=0$, либо $r=1$. В первом случае он показывал бы истинную температуру газа, во втором — температуру торможения (по которой нетрудно определить истинную). Наиболее просто осуществляется второй случай. Для этого чувствительный элемент термометра помещается в камеру торможения (рис. 13), выполняемую по возможности из материала с низкой теплопроводностью. Через приемное отверстие 1 газ из набегающего потока поступает в камеру торможения, где его скорость уменьшается до величины, близкой к нулю. Таким образом, чувствительный элемент оказывается со всех сторон окруженным газом с температурой, очень близкой к температуре торможения. Поэтому коэффициент r мало отличается от единицы. Для того чтобы уменьшить «инерционность» показаний термометра, на задней поверхности камеры торможения делается вентиляционное отверстие, которое обеспечивает непрерывную смену газа в камере торможения.

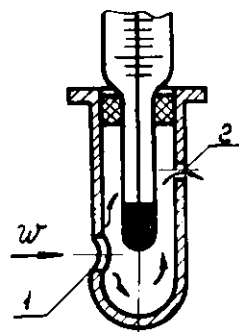


Рис. 13

Рассматривая процесс торможения газа перед приемным отверстием трубки 3 (см. рис. 9), можно определить давление p^* , которое показывает манометр 4. При этом нужно иметь в виду, что трубка 3 вместе с манометром 4 представляют замкнутую систему, в которой нет движения газа, следовательно, в приемном отверстии скорость обязательно равна нулю. Для потока несжимаемой жидкости с помощью уравнения Бернулли (1. 35), записанного для горизонтального течения ($z = \text{const}$), нетрудно получить

$$p^* = p + \rho \frac{w^2}{2}. \quad (2.32)$$

Величина p^* называется *давлением торможения*. Имеются и другие названия: давление заторможенного потока, заторможенное давление, полное давление. Формула (2. 32) получена для несжимаемой жидкости, но ею можно пользоваться и для потока газа, если только его скорость достаточно низка и сжимаемостью можно пренебречь. Если же скорость потока значительна, то связь между p^* и p устанавливается следующим образом.

При торможении потока перед трубкой полного напора 3 (см. рис. 9) течение является не только энергоизолированным, но также изоэнтропным, что хорошо подтверждается экспериментом. Поэтому давления p^* и p можно связать с температурами T^* и T и плотностями ρ^* и ρ уравнением изоэнтропы

$$\frac{p^*}{p} = \left(\frac{T^*}{T} \right)^{\frac{k}{k-1}}, \quad \frac{\rho^*}{\rho} = \left(\frac{T^*}{T} \right)^{\frac{1}{k-1}}. \quad (2.33)$$

Таким образом, с помощью формул (2. 27) и (2. 33) по известным значениям истинных параметров состояния газа и скорости потока определяются параметры торможения — температура торможения, давление торможения и плотность заторможенного потока.

Необходимо подчеркнуть, что при определении температуры торможения достаточно, чтобы процесс торможения был энергоизолированным, причем совершенно безразлично, будет ли он изоэнтропным или не будет. При определении давления и плотности заторможенного потока процесс торможения должен быть не только энергоизолированным, но и изоэнтропным. Желая подчеркнуть это обстоятельство, величины p^* и ρ^* иногда называют *давлением* и *плотностью изоэнтропически заторможенного потока*.

§ 3. СКОРОСТЬ ЗВУКА, МАКСИМАЛЬНАЯ СКОРОСТЬ, КРИТИЧЕСКАЯ СКОРОСТЬ

В газовой динамике широко применяются характерные скорости: скорость распространения звука, максимальная скорость течения газа и критическая скорость. Рассмотрим эти понятия подробнее.

Звук распространяется в виде слабых волн давления в упругой среде. Эти волны являются продольными. От источника слабых возмущений или источника звука они распространяются в неподвижной среде в виде сферических поверхностей. Скорость, с которой перемещается такая волна, называется скоростью распространения звука, или просто скоростью звука.

Скорость звука выражается следующей зависимостью:

$$a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}. \quad (2.34)$$

Эта формула будет получена ниже (гл. V) как частный случай скорости распространения ударной волны, если эту волну рассматривать при бесконечно малом перепаде давлений.

Чтобы рассчитать производную, входящую в выражение (2.34), воспользуемся уравнением политропного процесса

$$\frac{p}{\rho^n} = \text{const.}$$

Логарифмируя и дифференцируя его, получим

$$\frac{dp}{p} - n \frac{d\rho}{\rho} = 0,$$

откуда

$$\frac{dp}{d\rho} = n \frac{p}{\rho}. \quad (2.35)$$

Численное значение показателя политропы зависит от того, какой термодинамический процесс происходит при сжатии и расширении газа внутри слабых волн возмущения.

В 1687 году Ньютон высказал предположение, что производная $\frac{dp}{d\rho} = \frac{p}{\rho}$. С термодинамической точки зрения это условие отвечает изотермному процессу ($n=1$), следовательно, оно равносильно допущению о том, что внутри волн в местах повышенного и пониженного давления («гребнях» и «впадинах») температура одинакова. Такой процесс можно предста-

вить лишь в том случае, если допустить, что волны распространяются настолько медленно, что тепло из области «гребней» успевает отводиться в область «впадин» и температура выравнивается по всему объему. Сравнение формулы Ньютона

$$a = \sqrt{\frac{p}{\rho}}$$

с результатами опытов по измерению скорости звука в воздухе, проведенных много позже, показало, что расчетная скорость звука получается значительно ниже действительной.

В 1810 году Лаплас предположил, что сжатие и расширение газа внутри волн происходит без подвода и отвода тепла, т. е. изэнтропически. Тогда $n=k$ и

$$a = \sqrt{k \frac{p}{\rho}}. \quad (2.36)$$

Эта формула дает очень хорошее совпадение с экспериментом и применяется до настоящего времени. Заменяя в формуле (2.36)

$$\frac{p}{\rho} = RT,$$

можно представить ее в таком виде:

$$a = \sqrt{kRT}. \quad (2.37)$$

Для воздуха $\sqrt{kR} = 20,1$, следовательно,

$$a = 20,1 \sqrt{T}. \quad (2.38)$$

Таким образом, скорость звука однозначно определяется температурой. При нормальной температуре $T = 288^\circ \text{K}$ она равна $a = 341 \text{ м/сек.}$

Рассмотрим понятие максимальной скорости течения газа.

Из уравнения энергии, записанного для движущегося и заторможенного газа в энергоизолированном потоке,

$$c_p T + \frac{w^2}{2} = c_p T^*$$

следует, что при постоянной температуре торможения чем выше скорость потока, тем ниже истинная температура газа. Такое явление имеет место, например, при истечении газа из резервуара через сопло, в котором отсутствует теплообмен с

скружающей средой. Пределом является случай, когда $T=0$. Скорость тогда достигает максимально возможного значения, равного $w_{\max}$. Дальнейшее увеличение скорости невозможно, так как газ уже полностью исчерпал запас энтальпии $i=c_p T$, а внешнего притока энергии нет. Таким образом,

$$\frac{w_{\max}^2}{2} = c_p T^*,$$

откуда

$$w = \sqrt{2 c_p T^*} = \sqrt{2 \frac{k}{k-1} R T^*}. \quad (2.39)$$

Для воздуха

$$\sqrt{2 \frac{k}{k-1} R} = 44,8,$$

тогда

$$w_{\max} = 44,8 \sqrt{T^*} \text{ м/сек.} \quad (2.40)$$

Так например, при $T=288^\circ \text{ К}$, т. е. при нормальной температуре $w_{\max} = 762 \text{ м/сек}$.

Максимальную скорость можно трактовать так же, как скорость истечения в пустоту. Действительно, если из некоторого резервуара (рис. 14), объем которого достаточно велик, происходит идеальное истечение газа через сопло, то скорость истечения легко определяется на основании следующих соображений. Так как объем резервуара велик, то скорость внутри него близка к нулю. Параметры состояния газа в резервуаре поэтому можно считать равными параметрам торможения ρ^* и T^* . Решив уравнение (2.27) относительно скорости

$$\begin{aligned} w &= \sqrt{2 \frac{k}{k-1} R (T^* - T)} = \\ &= \sqrt{2 \frac{k}{k-1} R T^* \left(1 - \frac{T}{T^*}\right)} \end{aligned}$$

и заменив отношение температур с помощью уравнений (2.33), получим формулу скорости истечения *).

$$w = \sqrt{2 \frac{k}{k-1} R T^* \left[1 - \left(\frac{p}{p^*}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]}. \quad (2.41)$$

* Эта формула известна также из термодинамики, где она рассматривается в разделе истечения газов.

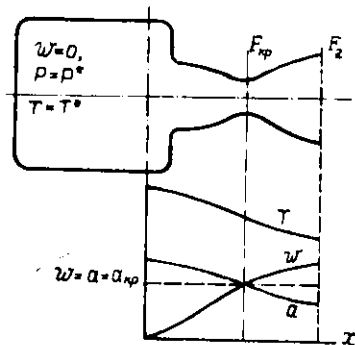


Рис. 14

Из формулы видно, что при понижении давления той среды, в которую происходит истечение p , скорость истечения возрастает. Если давление p упадет до нуля, то скорость достигает максимального значения: формула (2. 41) приобретает вид (2. 39).

Нужно заметить, что поскольку температура, равная абсолютному нулю, недостижима, то практически невозможно получить и максимальную скорость газа. Поэтому ее следует рассматривать как теоретический предел скорости течения газа.

Понятие критической скорости удобно ввести, рассматривая процесс истечения газа из резервуара через сопло в атмосферу, хотя эта величина применяется в самых разнообразных задачах, не обязательно связанных с процессом истечения. На рис. 14 внизу изображены кривые изменения скорости потока, температуры и местной скорости звука по длине сопла, через которое движется газ. Это течение является энергоизолированным, поэтому связь между скоростью и температурой выражается с помощью уравнения энергии в форме (2. 19). По мере нарастания скорости по длине сопла, температура, как это следует из уравнения энергии (2. 19), а следовательно, и скорость звука (2. 37) уменьшаются. Таким образом, в различных сечениях одного и того же потока скорость звука получается разной. В начале сопла скорость потока ниже скорости звука, в конце — превышает ее. Где-то в средней части сопла существует сечение, в котором скорость потока равна местной скорости звука. Это сечение называется критическим, а параметры потока в нем — критическими параметрами. Ниже будет показано, что если газ движется без трения и без обмена энергией с внешней средой, то критическое сечение совпадает с самым узким местом канала — горлом сопла.

Можно так сформулировать понятие критической скорости: *критической скоростью называется такая скорость течения газа, которая равна местной скорости звука*. Можно дать и другую формулировку, принимая во внимание то обстоятельство, что в точке пересечения кривых на рис. 14 проходит как кривая скорости потока, так и кривая скорости звука, а именно: *критической скоростью звука называется такое значение местной скорости звука, которое равно скорости потока газа в данном месте*. Как видим, в обоих случаях численное значение получится одним и тем же, поэтому безразлично, как именовать эту величину — критической скоростью или критической скоростью звука — и как обозначать ее: $w_{кр}$ или $a_{кр}$. Более распространено название «критическая скорость» и обозначение $a_{кр}$.

Рассчитать критическую скорость можно по формуле

$$w_{кр} = a_{кр} = \sqrt{kRT_{кр}}, \quad (2.42)$$

где $T_{кр}$ — температура газа в критическом сечении. Последняя легко определяется с помощью уравнения энергии (2. 19), левая часть которого записывается для сечения внутри резервуара (см. рис. 14), где $w=0$, $T=T^*$, а правая часть — для критического сечения, в котором $w=a_{кр}$, $T=T_{кр}$, а именно:

$$c_p T^* = c_p T_{кр} + \frac{a_{кр}^2}{2}.$$

Заменяя здесь $c_p = \frac{k}{k-1} R$ и $a_{кр}$ по формуле (2. 42), получим после небольших преобразований

$$\frac{T_{кр}}{T^*} = \frac{2}{k+1}. \quad (2.43)$$

Эта величина называется критическим отношением температур. Полутно запишем формулы для критического отношения давлений и для критического отношения плотностей. Так как процесс течения газа через сопло идеальный, то связь между давлениями, плотностями и температурами устанавливается уравнением изоэнтропы (2. 33). Тогда

$$\frac{p_{кр}}{p^*} = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}}, \quad (2.44)$$

$$\frac{\rho_{кр}}{\rho^*} = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{1}{k-1}}. \quad (2.45)$$

Для воздуха эти соотношения имеют следующие значения:

$$\frac{T_{кр}}{T^*} = 0,8333, \quad \frac{p_{кр}}{p^*} = 0,5283, \quad \frac{\rho_{кр}}{\rho^*} = 0,6339.$$

Определив из соотношения (2. 43) температуру $T_{кр}$ и подставив ее значение в формулу (2. 42), приходим к наиболее удобной формуле для расчета критической скорости

$$a_{кр} = \sqrt{2 \frac{k}{k+1} R T^*}. \quad (2.46)$$

Для воздуха $\sqrt{2 \frac{k}{k+1} R} = 18,31$. Следовательно,

$$a_{кр} = 18,31 \sqrt{T^*} \text{ м/сек.} \quad (2.47)$$

Установим связь между характерными скоростями $w_{\max}$,

$a_{кр}$ и a . Взяв отношение квадратов максимальной и критической скорости, получим

$$\frac{\omega_{\max}^2}{a_{кр}^2} = \frac{k+1}{k-1}. \quad (2.48)$$

Записав, далее, квадрат скорости звука

$$a^2 = kRT,$$

выразим здесь температуру T через температуру торможения T^*

$$T = T^* - \frac{\omega^2}{2 \frac{k}{k-1} R},$$

тогда

$$\begin{aligned} a^2 &= kR \left(T^* - \frac{\omega^2}{2 \frac{k}{k-1} R} \right) = kRT^* - \frac{k-1}{2} \omega^2 = \\ &= \frac{k+1}{2} \frac{2}{k+1} kRT^* - \frac{k-1}{2} \omega^2 \end{aligned}$$

или

$$a^2 = \frac{k+1}{2} a_{кр}^2 - \frac{k-1}{2} \omega^2. \quad (2.49)$$

По этим формулам и делается пересчет.

Температура торможения, критическая скорость и максимальная скорость являются величинами, так или иначе характеризующими полный запас энергии, которым обладает рассматриваемая единица массы газа. Если эта масса неподвижна, то ее полный запас энергии равен $i^* = c_p T^*$, а этой величине пропорциональны квадрат критической скорости и квадрат максимальной скорости. Если рассматривается движущаяся масса газа, то ее полный запас энергии $c_p T + \frac{\omega^2}{2}$ путем введения температуры торможения легко приводится к $c_p T^*$.

§ 4. БЕЗРАЗМЕРНЫЕ СКОРОСТИ: ЧИСЛО М, ПРИВЕДЕННЫЕ СКОРОСТИ λ и Λ

Обычно скорость движения измеряется в метрах в секунду, километрах в час или каких-нибудь других единицах, имеющих размерность $\frac{\text{длина}}{\text{время}}$. Если же за единицу измерения

скорости принять какую-либо из характерных скоростей, например скорость звука, то результат измерения будет выражаться безразмерным числом. В дальнейшем изложении будет ясно, что такой способ измерения скоростей является очень удобным.

Наиболее распространены три безразмерные скорости: число M , приведенная скорость λ и приведенная скорость Λ . Приведенные скорости иначе называют коэффициентами скорости.

Числом M называется отношение скорости потока к местной скорости звука

$$M = \frac{w}{a}. \quad (2.50)$$

Впервые эта величина была использована в трудах профессора Петербургской артиллерийской академии Н. В. Маиевского (1868), затем этим отношением пользовался австрийский физик Э. Мах (1887). В связи с этим в советской технической литературе отношение $\frac{w}{a}$ часто называют числом Маиевского,

в немецкой — числом Маха. Иногда в английской литературе эту величину называют числом Бэрстоу.

Приведенной скоростью, или коэффициентом скорости λ называется отношение скорости потока к критической скорости

$$\lambda = \frac{w}{a_{кр}}. \quad (2.51)$$

Числом Λ называется отношение скорости потока к максимальной скорости течения газа

$$\Lambda = \frac{w}{w_{\max}}. \quad (2.52)$$

Заметим, что величиной $\frac{w^2}{w_{\max}^2} = \Lambda^2$ пользовался академик С. А. Чаплыгин еще в первых работах по газовой динамике. Поэтому ее иногда называют числом Чаплыгина.

Численное значение безразмерных скоростей может изменяться в следующем диапазоне:

$$\begin{array}{l|l} \text{число } M & \text{от } 0 \text{ до } \infty \\ \text{число } \lambda & \text{от } 0 \text{ до } \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \\ \text{число } \Lambda & \text{от } 0 \text{ до } 1, \end{array}$$

так как скорость потока может изменяться от 0 до $w_{\max}$, а

местная скорость звука в том сечении, где $w = w_{\max}$, равна нулю (потому что температура равна нулю).

Связь между приведенными скоростями λ и Λ устанавливается следующим путем:

$$\frac{\lambda}{\Lambda} = \frac{w}{a_{\text{кр}}} : \frac{w}{w_{\max}} = \frac{w_{\max}}{a_{\text{кр}}} = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}},$$

следовательно,

$$\lambda = \Lambda \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}. \quad (2.53)$$

Для установления зависимости между приведенной скоростью и числом M возьмем отношение их квадратов

$$\frac{\lambda^2}{M^2} = \frac{w^2}{a_{\text{кр}}^2} : \frac{w^2}{a^2} = \frac{a^2}{a_{\text{кр}}^2} = \frac{\frac{k+1}{2} a_{\text{кр}}^2 - \frac{k-1}{2} w^2}{a_{\text{кр}}^2} = \frac{k+1}{2} - \frac{k-1}{2} \lambda^2,$$

откуда

$$\lambda^2 = \frac{\frac{k+1}{2} M^2}{1 + \frac{k-1}{2} M^2} \quad (2.54)$$

или

$$M^2 = \frac{\frac{2}{k+1} \lambda^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2}. \quad (2.55)$$

График зависимости приведенной скорости от числа M изображен на рис. 15. Из графика видно, что значения M и λ численно совпадают при $M=1$ и $M=0$. Когда $M \rightarrow \infty$, то приведенная скорость λ стремится к вполне определенному пределу

$$\lambda_{\max} = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}.$$

Это значение легко получить, устремив число M к бесконечности. Тогда w стремится к максимальной скорости и λ — к величине $\frac{w_{\max}}{a_{\text{кр}}}$, которая равна $\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}$ (см. формулу (2.48)). Последняя является наибольшей из всех возможных величин λ и называется максимальной приведенной скоростью $\lambda_{\max}$. Для воздуха ($k=1,4$)

$$\lambda_{\max} = 2,449.$$

Числа M , λ и Λ являются критериями подобия для сжимаемой жидкости. Так например, если в двух геометрически подобных каналах числа M на входе будут одинаковы, то отношения скоростей, давлений, температур, плотностей в двух сечениях одного канала будут равны соответствующим отношениям в двух сходственных сечениях другого канала. (Подробнее подобие потоков рассматривается в главе VI.)

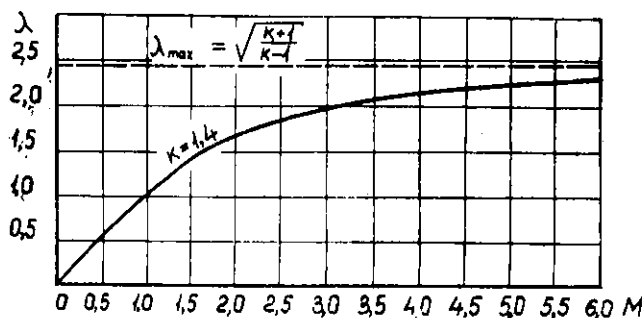


Рис. 15

Поскольку число M связано с приведенными скоростями λ и Λ однозначными зависимостями, то, вместо того, чтобы устанавливать одинаковые числа M на входе в каналы, можно установить одинаковые числа λ или одинаковые числа Λ . В этом случае подобие потоков также будет соблюдаться.

§ 5. ГАЗОДИНАМИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ПАРАМЕТРОВ ТОРМОЖЕНИЯ

$\tau(\lambda)$, $\pi(\lambda)$, $\varepsilon(\lambda)$

Зависимости между истинными параметрами состояния газа и параметрами торможения приобретают особенно удобный для расчетов вид, если их представить с помощью безразмерных скоростей M и λ .

Для того чтобы получить эти зависимости, определим сначала отношения температур $\frac{T^*}{T}$ и $\frac{T}{T^*}$

$$\begin{aligned} T + \frac{w^2}{2 \frac{k}{k-1} R} \\ \frac{T^*}{T} = \frac{T}{T} = 1 + \frac{k-1}{2} \frac{w^2}{kRT} = 1 + \frac{k-1}{2} \frac{w^2}{a^2} = \\ = 1 + \frac{k-1}{2} M^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T^* - \frac{w^2}{2 \frac{k}{k-1} R} \\ \frac{T}{T^*} = \frac{T^* - \frac{w^2}{2 \frac{k}{k-1} R}}{T^*} = 1 - \frac{k-1}{k+1} \frac{w^2}{2 \frac{k}{k+1} R T^*} = \\ = 1 - \frac{k-1}{k+1} \frac{w^2}{a_{\text{кр}}^2} = 1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2. \end{aligned}$$

Отношения давлений и плотностей можно выразить с помощью уравнений изоэнтропного процесса (2.33) через температуры. Тогда

$$\frac{T^*}{T} = 1 + \frac{k-1}{2} M^2, \quad (2.56)$$

$$\frac{p^*}{p} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{\frac{k}{k-1}}, \quad (2.57)$$

$$\frac{\rho^*}{\rho} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{\frac{1}{k-1}} \quad (2.58)$$

$$\frac{T}{T^*} = 1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2 = \tau(\lambda), \quad (2.59)$$

$$\frac{p}{p^*} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2 \right)^{\frac{k}{k-1}} = \pi(\lambda), \quad (2.60)$$

$$\frac{\rho}{\rho^*} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2 \right)^{\frac{1}{k-1}} = \epsilon(\lambda). \quad (2.61)$$

Величины $\tau(\lambda)$, $\pi(\lambda)$ и $\epsilon(\lambda)$ называются *газодинамическими функциями параметров торможения*. Они заранее рассчитываются для всех значений приведенной скорости λ (или числа M) и сводятся в таблицы газодинамических функций. Последние составляются для различных значений показателя изоэнтропы k , соответствующих разным газам.

Для воздуха (при $k=1,4$) формулы, связывающие истинные параметры состояния с параметрами торможения, имеют следующий вид:

$$\frac{T^*}{T} = 1 + 0,2 M^2, \quad (2.62)$$

$$\frac{p^*}{p} = (1 + 0,2 M^2)^{3,5}, \quad (2.63)$$

$$\frac{\rho^*}{\rho} = (1 + 0,2 M^2)^{2,5}, \quad (2.64)$$

$$\frac{T}{T^*} = 1 - 0,167 \lambda^2, \quad (2.65)$$

$$\frac{P}{p^*} = (1 - 0,167 \lambda^2)^{3,5}, \quad (2.66)$$

$$\frac{\rho}{\rho^*} = (1 - 0,167 \lambda^2)^{2,5}. \quad (2.67)$$

Пример расчета с помощью газодинамических функций параметров торможения

В потоке газа измерено: $p = 101300 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$ (нормальное давление)

$$p^* = 143000 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2},$$

$$T^* = 324^\circ \text{ К}.$$

Определить скорость потока w . Показатель $k = 1,4$, $R = 287,4$.

$$1. \text{ Вычисляем } \lambda(\lambda) = \frac{p}{p^*} = \frac{101300}{143000} = 0,7084 \cong 0,7085.$$

2. По таблицам газодинамических функций для $k = 1,4$ по величине $\lambda(\lambda) = 0,7085$ находим $\lambda = 0,75$.

$$3. \text{ Определяем критическую скорость } a_{кр} = 18,31 \sqrt{T^*} = 18,31 \sqrt{324} = 329,6 \text{ м/сек}.$$

$$4. \text{ Определяем скорость } w = \lambda a_{кр} = 0,75 \cdot 329,6 = 247,2 \text{ м/сек}.$$

Как видно из приведенного примера, весь расчет сводится к очень простым операциям.

Таблицы газодинамических функций особенно эффективны при массовых расчетах.

§ 6. ПОСТРОЕНИЕ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ, ПРОИСХОДЯЩИХ В ГАЗОВЫХ ПОТОКАХ, В ДИАГРАММАХ $p-v$, TS И iS

Применение диаграмм $p-v$, TS и iS дает возможность наглядно представить термодинамические процессы, происходящие при течении газа. С их помощью легко выяснить такие вопро-

сы, как влияние трения, подвода или отвода тепла на скорость потока и его энергетические показатели. По диаграммам iS довольно просто определяются параметры потока. Все это делает применение термодинамических диаграмм в газодинамике весьма полезным.

Прежде чем рассматривать построение диаграмм, необходимо установить, как связаны между собой различные виды энергии в газовом потоке. С этой целью возьмем уравнение энергии (2.4) и уравнение Бернулли (2.14), из которых следует, что величина $L + \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2}$ может быть выражена двумя способами:

$$L + \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2} = c_p (T_1 - T_2) + Q_e \quad (2.68)$$

и

$$L + \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2} = \int_2^1 \frac{dp}{\rho} - L_r. \quad (2.69)$$

Правые части уравнений (2.68) и (2.69) могут быть представлены с помощью диаграмм.

Рассмотрим сначала случай энергoизолированного и энтропного течения. В качестве расчетной схемы примем течение газа через идеальное сопло (рис. 16). Поскольку здесь нет внешней механической работы ($L=0$) и нет внешнего теплообмена и трения ($Q_e=Q_r=0$), то уравнение энергии и уравнение Бернулли приобретают вид:

$$\frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2} = c_p (T_1 - T_{2_{ид}}), \quad (2.70)$$

$$\frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2} = \int_2^1 \frac{dp}{\rho}. \quad (2.71)$$

Согласно уравнению (2.71), увеличение кинетической энергии при течении газа через сопло для единицы массы равно

$$\int_2^1 \frac{dp}{\rho} = \int_2^1 v dp. \quad \text{Рассмотрим, как изобразится этот интеграл}$$

в диаграмме pv . Она построена на рис. 17. Точка 1 изображает состояние газа при входе в сопло (параметры p_1, v_1), точка 2_{ид} — на выходе из сопла (параметры $p_2, v_{2_{ид}}$). Так как течение происходит без трения и без внешнего теплообмена ($L_r=Q_r=0, Q_e=0$), то процесс расширения газа изображается изэнтропой $pv^k = \text{const}$. Подынтегральное выражение

Нужно заметить, что в термодинамике при изучении процессов расширения или сжатия неподвижного объема газа работа расширения (или сжатия), отнесенная к единице массы, определяется как

$$\int_1^2 p dv = \text{пл } 12_{\text{нз}} dc.$$

Эта работа связана с деформацией объема газа: расширяясь газ преодолевает силы давления со стороны соседних слоев. Если же рассматривается движущийся объем газа, то он совершает еще работу, связанную с его перемещением, равную разности работ вталкивания и выталкивания (см. стр. 34). Работа вталкивания на рис. 17 изображена площадью a/co , выталкивания — площадью $b2_{нд}$. Из диаграммы видно, что

$$\text{пл } 12_{\text{нд}} \text{ } dc + \text{пл } a1co - \text{пл } b2_{\text{нд}} \text{ } do = \text{пл } a12_{\text{нд}} \text{ } b$$

или в аналитической форме

$$\int_1^2 p dv + p_1 v_1 - p_2 v_2_{\text{н.д.}} = \int_2^1 v dp.$$

Таким образом, работа расширения единицы массы неподвижного газа и работа расширения единицы массы движущегося газа отличаются на величину разности работ вталкивания и выталкивания.

Формальное перестроение диаграммы pv , изображенной на рис. 17, в координаты TS невозможно. Это связано с тем, что фигура на рис. 17 не является замкнутым циклом. На этой фи-

гуре только одна линия — изоэнтропа $1-2_{ид}$ — является термодинамическим процессом. Что касается линий $a-1$ и $2_{ид}-b$, то вдоль каждой из них параметры состояния газа остаются неизменными (например, вдоль $a-1$ меняется не удельный объем, а количество газа, вошедшего в расчетный участок), а линия ab представляет отрезок оси ординат. Поэтому перестроение делается иным путем.

Обращаясь к уравнениям (2. 70) и (2. 71), можно заметить, что поскольку их левые части одинаковы, то равны и правые части

$$c_p (T_1 - T_{2_{ид}}) = \int_2^1 \frac{dp}{\rho}. \quad (2.72)$$

Поэтому, вместо величины $\int_2^1 \frac{dp}{\rho}$ можно пользоваться равной

ей величиной $c_p (T_1 - T_{2_{ид}})$. Последняя легко определяется в диаграмме TS (рис. 18). Для этого под участком изобары p_1 , лежащем в интервале температур $T_1 - T_{2_{ид}}$, строится площадь $gl ef$. По смыслу она представляет количество тепла,

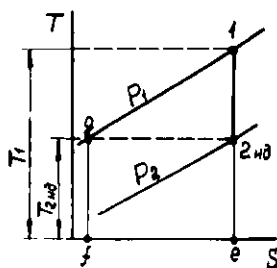


Рис. 18

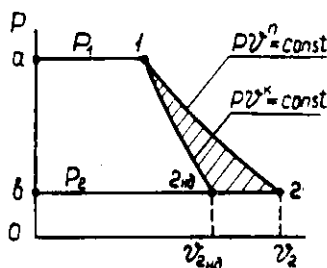


Рис. 19

которое нужно отвести от единицы массы газа, чтобы при постоянном давлении понизить его температуру от T_1 до $T_{2_{ид}}$. Такой процесс, конечно, совершенно не соответствует течению внутри сопла (рис. 16), в котором нет теплообмена и давление переменено. Однако согласно уравнению (2. 72) разность эн-

тальпий $c_p(T_1 - T_{2_{ид}})$ равна работе расширения $\int_2^1 \frac{dp}{\rho}$. Поэтому

величина $c_p (T_1 - T_{2_{ид}})$ может рассматриваться как мера для измерения работы расширения единицы массы движущегося газа.

Рассмотрим теперь энергоизолированное течение через сопло, происходящее с трением. В этом случае $L = Q_e = 0$ и уравнения (2. 68) и (2. 69) принимают такой вид:

$$\frac{w_2^2 - w_1^2}{2} = c_p (T_1 - T_2), \quad (2.73)$$

$$\frac{w_2^2 - w_1^2}{2} = \int_2^1 \frac{dp}{\rho} - L_r. \quad (2.74)$$

Из (2. 74) следует, что для определения прироста кинетической энергии $\frac{w_2^2 - w_1^2}{2}$ надо из работы расширения $\int_2^1 \frac{dp}{\rho}$

вычесть работу трения L_r . При этом надо иметь в виду, что сама работа расширения в этом случае имеет другую величину, так как процесс происходит с подводом тепла от трения. На рис. 19 построены два процесса расширения — изоэнтروпный 1—2_{ид} и политропный 1—2 с подводом тепла. Из диаграм-

мы видно, что во втором случае работа расширения $\int_2^1 \frac{dp}{\rho}$ по-

лучается больше, чем в первом, на величину площади криволинейного треугольника 122_{ид}. Работа трения в p - v -диаграмме не изображается. Поэтому перейдем теперь в координаты TS .

Работу расширения в TS -диаграмме можно получить добавлением к площади 1efg, соответствующей идеальному случаю, площади треугольника 122_{ид}, что сделано на левой фигуре рис. 20. Тепло, воспринимаемое газом, в энергоизолированном потоке равно теплу трения, так как внешний теплообмен отсутствует. Оно изображается в TS -диаграмме площадью, лежащей под политропой расширения 1—2 (пл 12me), и равно работе трения L_r . Вычитая из площади 122_{ид} efg (левая фигура, рис. 20) площадь 12me (средняя фигура), получим площадь 1ehl (правая фигура, площадь обозначена заштрихованным контуром). Полученная результирующая площадь, равная, согласно уравнению (2. 74), приросту кинетической энергии $\frac{w_2^2 - w_1^2}{2}$, расположена под отрезком 11 изо-

бары p_1 . Поэтому она может быть представлена разностью энтальпий $c_p (T_1 - T_2)$. Тот же результат получается из уравнения (2. 73).

Интересной особенностью здесь является следующее обстоятельство. Если перейти от идеального течения к течению

с трением, то можно заметить, что прирост кинетической энергии $\frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2}$ уменьшается не на величину работы трения L_r ,

а на несколько меньшую величину. Это вызвано ростом работы расширения за счет площади $122_{ид}$, происходящим вследствие подвода тепла от трения. Поэтому площадь $122_{ид}$ называется *возвращенным теплом*. Таким образом, не вся энергия,

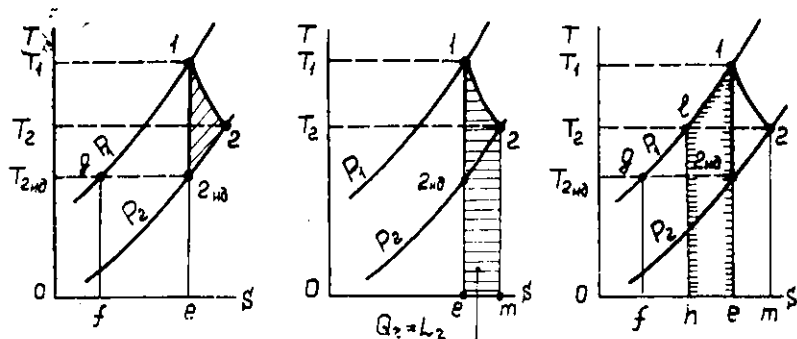


Рис. 20

затраченная на преодоление трения, является безвозвратно потерянной. Часть ее — пл $122_{ид}$ — возвращается в виде полезной работы расширения, и только часть, соответствующая площади $2_{ид}$, превращается в тепло необратимо.

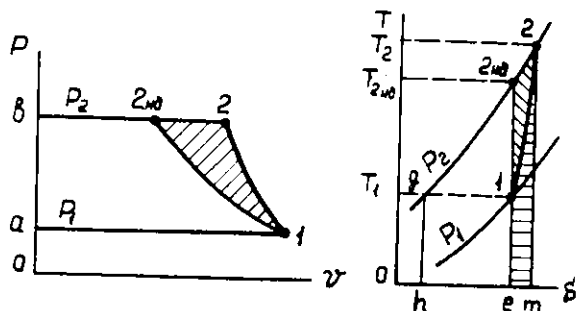


Рис. 21

Рассмотрим далее построение процесса сжатия, соответствующего, например, схеме течения газа через диффузор. На рис. 21 приведены $p-v$ - и $T-s$ -диаграммы для этого вида течения. Работа сжатия единицы массы движущегося газа в идеальном случае изображается в $p-v$ -диаграмме площадью $a12_{ид}b$, а при подводе тепла — площадью $a12b$, большей, чем первая. В диа-

шая параметрам потока на выходе из сопла, получается в месте пересечения политропы расширения газа с изобарой p_2 . Ее положение зависит от того, насколько велики потери при течении газа. Чем меньше потери, тем меньше повышение энтропии и тем левее будет лежать эта точка. В идеальном случае она располагается на изоэнтропе, проведенной вниз из точки 1. Для построения точки 1^* , изображающей состояние газа в заторможенном потоке при входе в сопло, из точки 1 проводится вверх отрезок изоэнтропы, длиной $\frac{\omega_1^2}{2}$. Он соответ-

ствует тому повышению энтальпии, которое происходит при торможении скорости ω_1 . Точка 2^* , характеризующая состояние газа в заторможенном потоке на выходе из сопла, находится аналогичным путем. Через точки 1^* и 2^* проходят изобары давлений торможения p_1^* и p_2^* , а также изоэнтальпа (при $c_p = \text{const}$ она же является изотермой) заторможенного потока i^* . В случае необходимости через эти точки можно также провести изохоры v_1^* и v_2^* . Таким образом, параметры торможения полностью определяются.

То обстоятельство, что в энергоизолированном потоке, пример которого рассматривался, точки 1^* и 2^* в iS -диаграмме лежат на одном уровне, объясняется тем, что в этом течении полный запас энергии единицы массы газа сохраняется постоянным. В этом легко убедиться, сопоставляя уравнение энергии (2.18) с отрезками $\frac{\omega_1^2}{2}$ и $\frac{\omega_2^2}{2}$ на рис. 22.

В практических расчетах полезно иметь в виду условия постоянства температуры и давления заторможенного потока, смысл которых состоит в следующем.

При энергоизолированном течении (и $c_p = \text{const}$) температура торможения сохраняется вдоль всего потока постоянной, независимо от величины потерь на трение.

Если течение не энергоизолированное, то температура торможения меняется: при подводе внешнего тепла Q_e или внешней механической работы L она растет, а при отводе — падает.

Давление торможения в случае энергоизолированного течения с трением, как видно из диаграммы (см. рис. 22), падает. Очевидно, что с уменьшением потерь точка 2 приближается к точке $2_{ид}$, следовательно, сближаются и точки 1^* и 2^* . В идеальном случае они сливаются в одну, т. е. $p_1^* = p_2^*$. На основании этого можно сделать следующий вывод.

В энергоизолированном потоке ($L=0$, $Q_e=0$) давление торможения p^* сохраняется постоянным вдоль всего потока, если потери отсутствуют, т. е. течение является изоэнтропным, либо уменьшается, если имеются потери.

Интенсивность потерь очень удобно характеризовать отношением

$$\sigma = \frac{p_2^*}{p_1^*}, \quad (2.75)$$

называемым *коэффициентом восстановления давления*. Этот коэффициент тем ниже, чем интенсивнее потери. При отсутствии потерь он равен единице.

Определение параметров торможения можно производить и в TS -диаграмме. При этом из точек 1 и 2 вверх откладываются отрезки изоэнтроп, равные соответствующим динамическим добавкам температуры $\Delta T_1 = \frac{w_1^2}{2 c_p}$ и $\Delta T_2 = \frac{w_2^2}{2 c_p}$. В остальном построение аналогично.

§ 7. СВЯЗЬ МЕЖДУ СКОРОСТЬЮ И ПЛОЩАДЬЮ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ В ЭНЕРГОИЗОЛИРОВАННОМ ИЗОЭНТРОПНОМ ПОТОКЕ

При движении несжимаемой жидкости в канале переменного сечения скорость потока изменяется обратно пропорционально площади. Это следует из уравнения неразрывности (1. 26). В случае движения газа по изменению площади сечения еще нельзя судить об изменении скорости, если заранее неизвестно, как меняется плотность. Лишь только при малых скоростях, когда изменение плотности невелико, можно сделать приближенную качественную оценку по аналогии с несжимаемой жидкостью.

Рассмотрим связь между скоростью потока и площадью поперечного сечения для энергоизолированного изоэнтропного течения.

Из условия постоянства массового расхода по длине потока

$$M_{сек} = \rho w F = \text{const}$$

путем логарифмирования и дифференцирования получаем

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dw}{w} + \frac{dF}{F} = 0. \quad (2.76)$$

Здесь, чтобы исключить плотность, нужно сделать следующие преобразования. Поделив числитель и знаменатель первого слагаемого на $d\rho$, заменим $\frac{d\rho}{d\rho} = \frac{1}{a^2}$ согласно (2.34), а $\frac{d\rho}{\rho}$ выразим из уравнения Бернулли для данного вида течения (2.24), а именно:

$$\frac{d\rho}{\rho} = -a \left(\frac{w^2}{2} \right) = -w dw.$$

Тогда

$$-\frac{1}{a^2} \omega d\omega + \frac{d\omega}{\omega} + \frac{dF}{F} = 0.$$

После небольших преобразований получим

$$\frac{d\omega}{\omega} \left(\frac{\omega^2}{a^2} - 1 \right) = \frac{dF}{F}$$

и окончательно

$$\frac{d\omega}{\omega} (M^2 - 1) = \frac{dF}{F}. \quad (2.77)$$

Эта зависимость называется уравнением Гюгонно.

Анализ этого уравнения производится так. Задавая число M ($M < 1$ или $M > 1$) и изменение площади (увеличение $dF > 0$ или уменьшение $dF < 0$), исследуют, при каком знаке — положительном или отрицательном — у $d\omega$ обе части уравнения (2.77) будут находиться в соответствии, т. е. будут иметь одинаковые знаки. Если $d\omega > 0$, то скорость нарастает, если $d\omega < 0$, то она падает. Канал, в котором поток движется с увеличением скорости, называют *конфузором*, или соплом, а при движении потока с уменьшением скорости — *диффузором* *). Анализ уравнения (2.77) дает четыре вида течения:

1. $M < 1$	$dF < 0$	$d\omega > 0$	конфузор
2. $M < 1$	$dF > 0$	$d\omega < 0$	диффузор
3. $M > 1$	$dF < 0$	$d\omega < 0$	диффузор
4. $M > 1$	$dF > 0$	$d\omega > 0$	конфузор

Если дозвуковой поток необходимо перевести в сверхзвуковой или, наоборот, сверхзвуковой перевести непрерывным путем в дозвуковой, то канал должен иметь более сложную форму. Его входная часть должна быть суживающейся, а выходная — расширяющейся. В том месте, где скорость потока переходит через скорость звука, т. е. $M = 1$, $dF = 0$, следовательно, площадь поперечного сечения проходит через минимум и канал образует горло. Таким образом, в энергоизолированном изоэнтропном потоке критическое сечение ($\omega = a$) совпадает с горлом канала.

Каналы с суживающейся входной и расширяющейся выходной частью широко применяются в технике. Если они предназначены для преобразования дозвукового потока в сверх-

*) В некоторых иностранных литературных источниках понятия конфузора и диффузора связывают не с изменением скорости, а с изменением площади: суживающийся канал называют конфузором, а расширяющийся — диффузором.

звуковой, то называются *соплами Лавала*, при обратном действии — преобразовании сверхзвукового потока в дозвуковой — *сверхзвуковыми диффузорами*. Более подробно этот вопрос рассмотрен в § 9 этой главы.

§ 8. ГАЗОДИНАМИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ПОТОКА МАССЫ (РАСХОДА)

В практических расчетах площадь поперечного сечения потока F и плотность тока $\rho\omega$ удобно относить к соответствующим величинам, взятым в критическом сечении. Если, например, рассматривать сопло Лавала, то уравнение неразрывности можно записать, приравняв расход в любом сечении расходу в критическом сечении

$$\rho\omega F = \rho_{кр} a_{кр} F_{кр},$$

в следующем виде:

$$\frac{\rho\omega}{\rho_{кр} a_{кр}} = \frac{F_{кр}}{F}. \quad (2.78)$$

Левая часть этого равенства — безразмерная плотность тока — называется *приведенным расходом* или *коэффициентом расхода*. Она обозначается $q(\lambda)$, т. е.

$$q(\lambda) = \frac{\rho\omega}{\rho_{кр} a_{кр}}. \quad (2.79)$$

Плотность тока $\rho\omega$ характеризует расход газа через единицу поверхности — площади поперечного сечения. *Приведенный расход представляет собой расход через единицу площади, отнесенный к расходу через единицу площади в критическом сечении*. Эта величина является функцией только приведенной скорости λ и показателя изоэнтропы k . Действительно, принимая во внимание формулы (2.61) и (2.45), можно написать

$$\frac{\rho\omega}{\rho_{кр} a_{кр}} = \frac{\rho}{\rho_{кр}} \lambda = \frac{\rho}{\rho^*} \frac{\rho^*}{\rho_{кр}} \lambda = \varepsilon(\lambda) \left(\frac{k+1}{2} \right)^{\frac{1}{k-1}} \lambda$$

или

$$q(\lambda) = \left(\frac{k+1}{2} \right)^{\frac{1}{k-1}} \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2 \right)^{\frac{1}{k-1}} \lambda. \quad (2.80)$$

По формуле (2.80) легко определяются три характерные точки:

$$\lambda = 0 \quad q(\lambda) = 0$$

$$\lambda = 1 \quad q(\lambda) = 1$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \quad q(\lambda) = 0.$$

Промежуточные значения получаются численным расчетом. График зависимости приведенного расхода от приведенной скорости представлен на рис. 23.

Наибольшая величина $q(\lambda) = 1$ получается, как видим, при $\lambda = 1$. Следовательно, наибольшую плотность тока газ имеет в критическом сечении. При $\lambda < 1$ расход уменьшается за счет уменьшения скорости, а при $\lambda > 1$ — за счет уменьшения плотности газа.

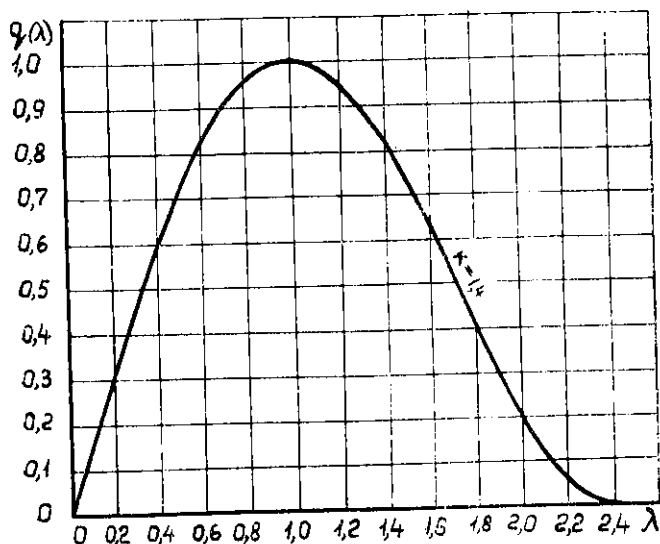


Рис. 23

Рассматривая график на рис. 23 и формулу (2.78), легко уяснить, почему сопло Лавала имеет такую форму. Постоянство расхода требует того, чтобы площадь канала уменьшалась в тех местах, где возрастает плотность тока, и увеличивалась там, где плотность тока падает. В том сечении, где плотность тока проходит через максимум, канал должен иметь горло. Заметим, кстати, что одной из причин невозможности достижения максимальной скорости потока является то обстоятельство, что при $w = w_{\max}$, т. е. $\lambda = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}$, приведенный расход

$q(\lambda) = 0$, следовательно, площадь поперечного сечения должна была бы равняться бесконечности. Поскольку в критическом сечении плотность тока достигает максимума, то максимально возможный расход через сопло Лавала определяется площадью горла.

С помощью функции $q(\lambda)$ удобно вычислять массовый расход в любом сечении потока. Он записывается так:

$$M_{сек} = \rho w F = \frac{\rho w}{\rho_{кр} a_{кр}} \rho_{кр} a_{кр} F = \frac{\rho w}{\rho_{кр} a_{кр}} \frac{\rho_{кр}}{\rho^*} \rho^* a_{кр} F.$$

Принимая во внимание формулы (2. 79), (2. 45), (2. 46), а также уравнение состояния газа (1.38), можно предыдущее выражение представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} M_{сек} &= q(\lambda) \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{1}{k-1}} \frac{\rho^*}{RT^*} \sqrt{2 \frac{k}{k+1} RT^*} \cdot F = \\ &= \sqrt{\left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{k-1}} \frac{k}{R}} \cdot F \frac{\rho^*}{\sqrt{T^*}} q(\lambda). \end{aligned}$$

Величина

$$m = \sqrt{\left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{k-1}} \frac{k}{R}}$$

для данного газа постоянна. Она равна:

$$\text{для воздуха} \left(k=1,4; R=287,4 \frac{\text{дж}}{\text{кг} \cdot \text{град}} \right) m=0,04037,$$

для продуктов сгорания ке-

$$\text{росина в воздухе} \left(k=1,33; R=288,4 \frac{\text{дж}}{\text{кг} \cdot \text{град}} \right) m=0,0396.$$

Окончательно формула расхода приобретает вид

$$M_{сек} = m F \frac{\rho^*}{\sqrt{T^*}} q(\lambda). \quad (2.81)$$

Часто известной величиной бывает не ρ^* , а статическое давление p . Так как

$$\rho^* = \frac{p}{\pi(\lambda)},$$

то

$$M_{сек} = m F \frac{p}{\sqrt{T^*}} \frac{q(\lambda)}{\pi(\lambda)}.$$

Отношение $\frac{q(\lambda)}{\pi(\lambda)}$ для данного газа является функцией только приведенной скорости λ и обозначается $y(\lambda)$. Действительно:

$$\frac{q(\lambda)}{\pi(\lambda)} = \left(\frac{k+1}{2} \right)^{\frac{1}{k-1}} \frac{\left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2 \right)^{\frac{1}{k-1}}}{\left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2 \right)^{\frac{k}{k-1}}} \lambda = \left(\frac{k+1}{2} \right)^{\frac{1}{k-1}} \frac{\lambda}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2},$$

т. е.

$$y(\lambda) = \left(\frac{k+1}{2} \right)^{\frac{1}{k-1}} \frac{\lambda}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2}. \quad (2.82)$$

Тогда

$$M_{сек} = mF \frac{p}{\sqrt{T^*}} y(\lambda). \quad (2.83)$$

При вычислении расхода газа через сопло Лавала или другой канал, в котором имеется критическое сечение, расчет ведется по параметрам в этом сечении. Так как в этом месте $q(\lambda) = 1$, то расчетная формула имеет вид

$$M_{сек} = mF_{кр} \frac{p^*}{\sqrt{T^*}}. \quad (2.84)$$

Пример определения проходных сечений сопла Лавала с помощью таблиц газодинамических функций

Задано:

расход газа $M_{сек} = 10 \text{ кг/сек}$,
физические константы $k = 1,4$.

$$R = 287,4 \frac{\text{дж}}{\text{кг.град}},$$

параметры перед соплом и за ним:

$$p_1^* = 37,24 \cdot 10^5 \text{ н/м}^2,$$

$$p_2 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ н/м}^2,$$

$$T_1^* = 324^\circ \text{ К.}$$

Определить: скорость истечения w_2 ,

площадь поперечного сечения в горле F_r ,

площадь поперечного сечения на выходе F_2 .

Рассчитывается идеальный случай — энергоизолированное изоэнтропное течение, в котором соблюдаются условия постоянства давления и температуры заторможенного потока:

$$T_1^* = T_r^* = T_2^* = T^* = \text{const},$$

$$p_1^* = p_r^* = p_2^* = p^* = \text{const}.$$

$$1. \pi(\lambda_2) = \frac{p_2}{p_2^*} = \frac{p_2}{p_1^*} = \frac{1,013 \cdot 10^5}{37,24 \cdot 10^5} = 0,0272.$$

2. По таблицам газодинамических функций для $k = 1,4$ находим при $\pi(\lambda_2) = 0,0272$, $\lambda_2 = 1,964$.

$$3. a_{кр} = \sqrt{2 \frac{k}{k+1} RT^*} = 18,31 \sqrt{324} = 329,6 \text{ м/сек.}$$

$$4. w_2 = a_{кр} \lambda_2 = 329,6 \cdot 1,964 = 647 \text{ м/сек.}$$

$$5. F_r = \frac{M_{сек} \sqrt{T^*}}{m p_1^*} = \frac{10 \sqrt{324}}{0,04037 \cdot 37,24 \cdot 10^5} = 0,0012 \text{ м}^2 = 12 \text{ см}^2.$$

6. Так как

$$\text{то } M_{сек} = m F_r \frac{p^*}{\sqrt{T^*}} = m F_2 \frac{p^*}{\sqrt{T^*}} q(\lambda_2),$$

$$F_2 = F_r \frac{1}{q(\lambda_2)}.$$

По таблицам газодинамических функций при $\lambda_2 = 1,964$ находим

$$q(\lambda_2) = 0,2362.$$

Тогда

$$F_2 = \frac{0,0012}{0,2362} = 0,00507 \text{ м}^2 = 50,7 \text{ см}^2.$$

Размеры всех промежуточных сечений получаются при профилировании сопла.

§ 9. РЕЖИМЫ ТЕЧЕНИЯ ГАЗА В КАНАЛЕ, ИМЕЮЩЕМ ГОРЛО

Каналы, имеющие сужение между входным и выходным сечениями, или горло, довольно широко применяются в технике. Они используются как сопла Лаваля для получения сверхзвуковых потоков, как диффузоры для преобразования сверхзвуковых потоков в дозвуковые, как трубки Вентури, служащие в качестве датчиков измерительных устройств и систем регулирования. При этом один и тот же канал может быть и соплом Лаваля, и трубкой Вентури, и сверхзвуковым диффузором в зависимости от того, какие условия созданы на входе и выходе. Рассмотрим это более подробно.

На рис. 24 изображена схема такого канала и графики изменения скорости и давления по его длине. Площади поперечного сечения канала на входе и на выходе приняты одинаковыми, течение — энергоизолированным изэнтропным. От входного сечения 1 до горла Г площадь сечения уменьшается, т. е. $dF < 0$, в горле она проходит через минимум $dF = 0$, от горла до сечения 2 — увеличивается, т. е. $dF > 0$. Применяя уравнение Гюгоньо (2.77), можно заключить, что здесь возможны четыре режима течения.

1. Если поток на входе дозвуковой, $M < 1$, то, согласно уравнению (2.77), в суживающейся части скорость должна нарастать ($d\omega > 0$). Если в сечении горла скорость еще не достигла критической, то поток, выйдя в расширяющуюся часть, оставаясь дозвуковым, будет двигаться там с уменьшением скорости и ростом давления, как в обычном дозвуковом диффузоре. Этому режиму отвечают кривые I на рис. 24. В этом случае канал работает как трубка Вентури.

2. Условия на входе те же, но в сечении горла скорость достигает критического значения, т. е. $M = 1$, переходит его и становится сверхзвуковой. Тогда, согласно уравнению (2.77), в расширяющейся части канала при $M > 1$ скорость должна нарастать. Кривые II на рис. 24 показывают, что по всей длине происходит увеличение скорости и уменьшение давления. Поток из дозвукового превращается в сверхзвуковой. На этом режиме канал работает как сопло Лавала.

3. В канал входит сверхзвуковой поток, т. е. $M > 1$. На основании анализа уравнения (2.77) имеем, что в суживающейся части скорость должна уменьшаться. Если в сечении горла она достигнет критического значения ($M = 1$) и перейдет его, то в расширяющуюся часть поступает дозвуковой поток. Следовательно, от

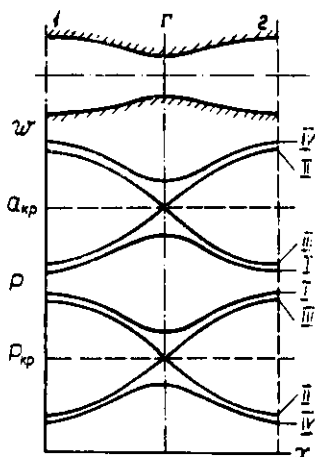


Рис. 24

горла до сечения 2 течение происходит как в обычном дозвуковом диффузоре — с уменьшением скорости и ростом давления. Этому режиму соответствуют кривые III (см. рис. 24), которые показывают, что на всем протяжении потока скорость уменьшается, а давление нарастает. Канал работает как диффузор и называется сверхзвуковым диффузором.

4. Условия на входе такие же, как в предыдущем режиме, но в сечении горла скорость еще не достигает критической, а остается сверхзвуковой — $M > 1$. С этой скоростью поток минует горло и выходит в расширяющуюся часть. В соответствии с уравнением (2.77), при $M > 1$ и $dF > 0$ скорость будет нарастать, а давление — падать. Таким образом, кривые распределения скорости и давления IV получаются симметричными первому случаю. Специального названия этот режим не имеет. В действительных условиях он реализуется лишь частично:

от входного сечения до горла и на некотором расстоянии за горлом течение происходит в соответствии с кривыми IV, но затем возникает ударная волна и движение перестраивается — поток становится дозвуковым.

Если сопоставить между собой первый и второй режимы, то можно заметить, что причина их различия заключается в том, достигнет ли скорость в сечении горла критического значения или не достигнет. Это определяет дальнейшую судьбу потока: станет ли он сверхзвуковым или останется дозвуковым. Анализ уравнения (2.77) не дает ответа на этот вопрос. Ответ можно получить, рассматривая уравнение неразрывности

$$\rho_1 \omega_1 F_1 = \rho_r \omega_r F_r,$$

которое после деления обеих частей на $\rho_{кр}$ $\alpha_{кр}$ и использования формулы (2.78) принимает вид

$$q(\lambda)_r = \frac{F_1}{F_r} q(\lambda_1) \quad (2.85)$$

и выражается графически на рис. 23. Пусть, например, отношение площадей $\frac{F_1}{F_r} = 2$. Если на входе в канал $\lambda_1 = 0,2$, то, как это следует из рис. 23, $q(\lambda) = 0,31$. Согласно уравнению (2.85), имеем $q(\lambda_r) = \frac{F_1}{F_r} q(\lambda_1) = 2 \cdot 0,31 = 0,62$. При этом значении $\lambda_r = 0,44$, т. е. $\lambda_r < 1$, поэтому канал будет работать как трубка Вентури. Если увеличить расход газа через канал, то увеличится и скорость во входном сечении. При $\lambda_1 = 0,34$ приведенный расход получается $q(\lambda_1) = 0,5$. Тогда по формуле (2.85) находим $q(\lambda_r) = 1$, следовательно, $\lambda_r = 1$, т. е. канал может работать как сопло Лавала.

Чтобы уяснить, какие же изменения надо произвести в условиях на входе и выходе канала, чтобы перейти от первого режима ко второму, достаточно посмотреть на кривые давлений I и II. В трубке Вентури разность давлений на входе и выходе равна нулю. (В реальных условиях для преодоления потерь на трения необходим небольшой перепад давлений.) В случае сопла Лавала на концах канала должен быть приложен значительный перепад давлений.

Кривые, построенные на рис. 24, относятся к так называемым расчетным режимам. На этих режимах скорости и давления полностью соответствуют площадям поперечных сечений канала. Так, например, при заданных условиях на входе у сопла Лавала с определенным отношением площадей выходного

сечения и горла может быть лишь одно вполне определенное значение скорости истечения и одно вполне определенное значение давления на выходе. Если давление той среды, в которую происходит истечение, не равно расчетному, то возникает нерасчетный режим. На нерасчетном режиме давление на срезе сопла (т. е. в выходном сечении 2) может оставаться более высоким, чем в окружающей среде. Могут быть и такие нерасчетные режимы, при которых внутри сопла появляется ударная волна, и скорость истечения получается ниже расчетной. Подробнее нерасчетные режимы будут рассмотрены в главе V.

ЗАКОН КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ

§ 1. ТЕОРЕМА ЭЙЛЕРА О КОЛИЧЕСТВЕ ДВИЖЕНИЯ

Закон количества движения имеет большое значение в газовой динамике, особенно в прикладных задачах. С помощью уравнения количества движения, иначе называемого уравнением импульсов, легко определяются такие величины, как, например, сила, действующая на тело, помещенное в потоке жидкости или газа, сила тяги реактивного двигателя и т. п. Уравнение моментов количества движения применяется для вычисления момента сил на рабочих колесах или статорах турбомашин. Силы и моменты, действующие на твердые стенки обтекаемого тела, можно находить и другими методами, например, по распределению давлений на его поверхности. Однако вычисления при этом во многих случаях получаются настолько сложными, что способ становится неприемлемым для практических целей, в то время как метод количества движения позволяет получить результат довольно простым путем.

Уравнения количества движения и моментов количества движения применительно к жидкости были впервые получены Леоном Эйлером в 1754 году, поэтому их называют первым и вторым уравнениями Эйлера.

Как известно, закон количества движения в механике устанавливает, что импульс силы равен изменению количества движения тела за время действия силы, и записывается уравнением

$$\vec{P}dt = m d\vec{w}, \quad (3.1)$$

в котором сила и скорость берутся с учетом направления, т. е. выражаются векторами $\vec{P}$ и $\vec{w}$. Если формулу (3. 1) записать в таком виде:

$$\vec{P} = m \frac{d\vec{w}}{dt}, \quad (3.2)$$

то полученное выражение будет представлять собой математическую форму записи второго закона Ньютона, констатирующего тот факт, что сила, действующая на тело, равна его массе, умноженной на ускорение. Обозначив для сокращения записи $m\vec{w} = \vec{K}$, представим выражение (3.2) в следующем виде:

$$\vec{P} = \frac{d}{dt} (m\vec{w}) = \frac{d\vec{K}}{dt}. \quad (3.3)$$

Первое уравнение Эйлера представляет собой распространение формулы (3.3) на случай движения жидкости или газа. Для вывода этого уравнения в потоке жидкости выделяют жидкий объем и приравнивают производную от его количества

движения по времени сумме действующих на него внешних сил. (Заметим, что жидким объемом называется такой объем, который состоит из одних и тех же частиц жидкости. При своем перемещении он может менять форму, размеры, но заключенная в нем масса вещества остается одной и той же.)

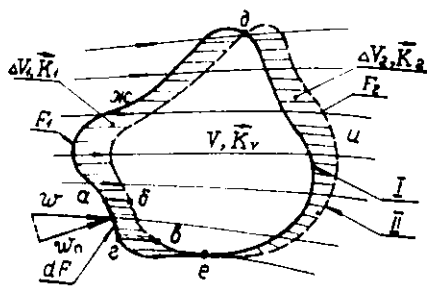


Рис. 25

На рис. 25 такой объем изображен в двух положениях. В первый момент времени $t=0$ он находится в положении I, ограниченном сплошным контуром. Величина объема равна $V_1 = \Delta V_1 + V$, а количество движения заключенной внутри него жидкости $\vec{K}_1 = \vec{K}_1 + \vec{K}_V$. За время Δt этот объем смещается в положение II. Его величина становится равной $V_{II} = V + \Delta V_2$, а количество движения $\vec{K}_{II} = \vec{K}_V + \vec{K}_2$.

При установившемся движении масса жидкости внутри общей для обоих положений части объема V с течением времени не меняется, скорости частиц в каждой точке внутри V также не зависят от времени. Поэтому и количество движения жидкости, находящейся внутри этого объема, остается одним и тем же. Тогда

$$\vec{K}_{II} - \vec{K}_I = (\vec{K}_V + \vec{K}_2) - (\vec{K}_1 + \vec{K}_V) = \vec{K}_2 - \vec{K}_1, \quad (3.4)$$

т. е. изменение количества движения во всем объеме за время Δt равно разности количеств движения в объемах ΔV_2 и ΔV_1 . Заметим, что этот результат справедлив только для установившегося движения. При неустановившемся движении $\vec{K}_V$ меняется по времени, следовательно, в правой части (3.4) появится еще одно слагаемое.

Вывод формулы Эйлера производится здесь только для установившегося движения.

Производную от количества движения по времени можно записать так:

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{K}_{II} - \vec{K}_I}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{K}_2 - \vec{K}_1}{\Delta t}. \quad (3.5)$$

Для определения количеств движения $\vec{K}_2$ и $\vec{K}_1$ нужно разбить объемы ΔV_2 и ΔV_1 на такие элементарные части, чтобы внутри каждой из них плотность и скорость можно было считать постоянными. Затем, подсчитав количества движения для каждой элементарной части, надо просуммировать их по объемам ΔV_2 и ΔV_1 . Суммирование выполняется геометрически — по правилу сложения векторов. Одна из элементарных частей выделена на рис. 25 контуром $ab\vartheta g$. Массу жидкости внутри нее можно определить как произведение массового расхода через площадку dF за время Δt . Действительно, за время Δt участок контура ag перемещается в положение $b\vartheta$, а за ним движется жидкость. Контролируя количество жидкости, протекающей за время Δt через неподвижную площадку dF , которая всеми точками совпадает с участком ag , нетрудно заметить, что оно равно количеству жидкости, заполнившей за то же время объем $ab\vartheta g$. Таким образом, масса жидкости внутри объема $ab\vartheta g$ равна $\rho \omega_n dF \Delta t$, а ее количество движения $\rho \omega_n dF \Delta t \cdot \vec{\omega}$. Тогда

$$\vec{K}_2 - \vec{K}_1 = \left(\int_{F_2} \rho \omega_n \vec{\omega} dF - \int_{F_1} \rho \omega_n \vec{\omega} dF \right) \Delta t. \quad (3.6)$$

Подставляя в формулу (3.5) разность количеств движения $\vec{K}_2 - \vec{K}_1$, найденную из формулы (3.6), получим

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\left(\int_{F_2} \rho \omega_n \vec{\omega} dF - \int_{F_1} \rho \omega_n \vec{\omega} dF \right)}{\Delta t}. \quad (3.7)$$

Рассматривая рис. 25, можно заметить, что нормальная составляющая скорости потока ω_n в точках пересечения линий тока с поверхностью F_1 направлена внутрь объема, а в точках пересечения с поверхностью F_2 — наружу. Согласно правилу

знаков, принятому в теории поля, положительной считается нормальная составляющая скорости, направленная по внешней нормали, а отрицательной — направленная по внутренней нормали к поверхности, ограничивающей рассматриваемый объем. В гидродинамической интерпретации это правило приобретает следующий смысл: *количество движения втекающей жидкости считается отрицательным, а вытекающей — положительным.*

Применяя это правило к формуле (3. 7), нужно перед интегралом, взятым по поверхности F_1 , сменить знак на обратный, так как ω_n , входящая в подынтегральное выражение, отрицательна во всей области интегрирования F_1 . Следовательно,

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\left(\int_{F_2} \rho \omega_n \vec{\omega} dF + \int_{F_1} \rho \omega_n \vec{\omega} dF \right) \Delta t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta t}{\Delta t} \int_{F_1+F_2} \rho \omega_n \vec{\omega} dF. \quad (3.8)$$

При $\Delta t \rightarrow 0$ сумма площадей $F_1 + F_2$ стремится к площади поверхности F , обозначенной на рис. 25 сплошным контуром. Тогда

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \int_F \rho \omega_n \vec{\omega} dF. \quad (3.9)$$

Согласно формуле (3. 3), производная $\frac{d\vec{K}}{dt}$ должна равняться равнодействующей всех внешних сил, действующих на жидкость, которая находится в объеме внутри контура I , т. е.

$$\vec{P} = \int_F \rho \omega_n \vec{\omega} dF. \quad (3.10)$$

Это есть первое уравнение Эйлера в общем виде. Здесь еще не расшифровывается, из каких именно сил складывается главный вектор $\vec{P}$. Это будет зависеть от конкретных условий задачи. Но в общем случае подразумевается, что главный вектор $\vec{P}$ включает в себя все виды сил: поверхностные нормальные (силы давления), поверхностные касательные (силы трения), массовые (силы тяжести).

Поскольку уравнение (3. 10) содержит векторные величины, оно может быть записано в проекциях на координатные оси, а именно:

$$\left. \begin{aligned} P_x &= \int_F \rho \omega_n \omega_x dF, \\ P_y &= \int_F \rho \omega_n \omega_y dF, \\ P_z &= \int_F \rho \omega_n \omega_z dF. \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

В случае применения уравнения Эйлера (3. 10) к движению идеального газа, в котором силы трения отсутствуют, а силами тяжести можно пренебречь, внешними силами являются только силы давления. Тогда

$$\vec{P} = \int_F p d\vec{F} \quad (3.12)$$

и уравнение (3. 10) приобретает следующий вид:

$$\int_F p d\vec{F} = \int_F \rho \omega_n \vec{\omega} dF. \quad (3.13)$$

Эта формула широко применяется в практических расчетах. Для вязкого газа равнодействующая $\vec{P}$ включает также силы от касательных напряжений и определяется так:

$$\vec{P} = \int_F p d\vec{F} + \int_F \vec{\tau} dF, \quad (3.14)$$

где τ — касательное напряжение, $\vec{\tau} = \tau \cdot \vec{s}^\circ$, $\vec{s}^\circ$ — орт касательной. Здесь нужно заметить, что в интеграле от сил давлений величина dF рассматривается как векторная

$$d\vec{F} = \vec{n}^\circ dF,$$

где $\vec{n}^\circ$ — орт нормали, т. е. единичный вектор нормали, внешней по отношению к рассматриваемой площадке.

Необходимо обратить внимание на следующую методическую особенность данного вывода. Сначала был выделен объем жидкости, ограниченный поверхностью I. Предполагалось, что он плывет с жидкостью вместе с ограничивающей поверхностью. Затем поверхность I была остановлена с той целью, чтобы контролировать количество движения проходящей через нее жидкости. Таким образом был совершен переход от поверхности, движущейся вместе с жидкостью, к неподвижной поверхности, мысленно проведенной внутри жидкости. Последняя называется *контрольной поверхностью*.

Пользуясь понятием контрольной поверхности, можно дать такую формулировку *первой теоремы Эйлера*:

Равнодействующая внешних сил, действующих на некоторый объем жидкости, равна количеству движения, протекающему через контрольную поверхность, ограничивающую выделенный объем.

Протекшим количеством движения называют разность между количествами движения вытекающей и втекающей жидкости.

Если массовые силы отсутствуют, то все расчеты по первому уравнению Эйлера производятся только на границах контрольной поверхности; все, что остается внутри нее — выпадает из рассмотрения и не входит в формулы. Это делает первое уравнение Эйлера сильным расчетным средством. Дело в том, что контрольную поверхность можно выбрать так, что все самые трудные и неприятные для исследования участки окажутся внутри нее, и сложная в принципе задача может быть решена путем сравнительно простых вычислений. Нужно иметь в виду, что успех решения задачи во многом зависит от удачного выбора контрольной поверхности.

Теорема Эйлера может быть распространена и на случай, когда внутри потока жидкости имеется твердое тело. Тогда она позволяет определять усилие, действующее на это тело. Таким образом, решается большой круг задач, связанных с обтеканием твердых тел потоком жидкости или газа.

Рассмотрим, как определяется сила $\vec{R}$, действующая на твердое тело, когда оно находится в потоке. На рис. 26 приведен пример обтекания стойки. (Стойка дана в поперечном сечении.) Контрольная поверхность при решении подобных задач выбирается таким образом, чтобы она охватывала некоторый объем, включающий в себя и твердое тело (1, 2, 3, 4, 8).

Однако применить к этому объему формулу Эйлера (3.10) нельзя, так как она была получена для объема жидкости, а в данном случае часть объема занимает твердое тело. Если же дополнить контрольную поверхность внутренним участком 5, 6, 7, «вырезав» ту часть объема, который занят твердым телом, то получается замкнутая поверхность 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, внутри которой содержится только жидкость. К полученному таким путем объему уже можно применять уравнение (3.10). При отсутствии массовых сил и сил вязкости оно может быть записано в форме уравнения (3.13)

$$\int_V \rho d\vec{F} = \int_F \rho \vec{w}_n \vec{w} dF,$$

где $F = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 + F_6 + F_7 + F_8$ — площадь всей контрольной поверхности. Так как интеграл по площади равен

сумме интегралов, взятых по участкам, из которых составляется вся площадь, то

$$\int_F p d\vec{F} = \int_{F_1+F_2+F_3+F_4+F_5} p d\vec{F} + \int_{F_6} p d\vec{F} + \int_{F_8} p d\vec{F} + \int_{F_7} p d\vec{F} \quad (3.15)$$

и

$$\int_F \rho \omega_n \vec{\omega} dF = \int_{F_1+F_2+F_3+F_4+F_5} \rho \omega_n \vec{\omega} dF + \int_{F_6} \rho \omega_n \vec{\omega} dF + \int_{F_8} \rho \omega_n \vec{\omega} dF + \int_{F_7} \rho \omega_n \vec{\omega} dF. \quad (3.16)$$

Здесь интеграл от сил давления по участку контрольной поверхности, охватывающей обтекаемое тело, равен

$$\int_{F_6} p d\vec{F} = -\vec{R}, \quad (3.17)$$

так как равнодействующая сил давления со стороны твердого тела на газ ($\int_{F_6} p d\vec{F}$) равна по величине и обратна по направлению равнодействующей сил давления со стороны газа на тело ($\vec{R}$), что следует из третьего закона Ньютона. Кроме того,

$$\int_{F_5} p d\vec{F} + \int_{F_7} p d\vec{F} = 0, \quad (3.18)$$

поскольку силы давлений, действующие на площади F_5 и F_7 равны по величине и обратны по направлению (на F_5 сила действует слева направо, а на F_7 — справа налево). Что касается количеств движения, то необходимо принять во внимание, что

$$\int_{F_5} \rho \omega_n \vec{\omega} dF + \int_{F_7} \rho \omega_n \vec{\omega} dF = 0 \quad (3.19)$$

и

$$\int_{F_6} \rho \omega_n \vec{\omega} dF = 0. \quad (3.20)$$

Условие (3. 19) объясняется тем, что если участки контрольной поверхности F_5 и F_7 стянуть вместе, то скорости жидкости в сходственных точках обеих поверхностей будут одними и теми же. Следовательно, количество движения жидкости, вытекающей из F_7 , будет равно количеству движения жидкости, втекающей в F_5 , т. е. они взаимно уничтожатся. Условие (3. 20) отражает тот факт, что через твердую стенку жидкость не протекает, следовательно, во всех точках поверхности F_6 будет $\omega_n = 0$.

Учитывая перечисленные выше условия, можно формулу (3. 13) представить в таком виде:

$$\vec{R} = \int_{F_{\text{нар}}} p d\vec{F} - \int_{F_{\text{нар}}} \rho \omega_n \vec{\omega} dF, \quad (3.21)$$

где $F_{\text{нар}} = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_8$ — наружный участок контрольной поверхности.

Таким образом, получена формула (3. 21), с помощью которой определяется сила $\vec{R}$, действующая на твердое тело, находящееся в потоке жидкости или газа. В расчет входит только наружный участок контрольной поверхности. Твердое тело может иметь полость, проток; между телом и газом может происходить какое-либо сложное взаимодействие, например срыв потока, все это никак не усложняет расчета, так как выпадает из расчетных формул. Все вычисления ведутся только на границах контрольной поверхности.

Если газ вязкий, то в формулы должны войти еще силы от касательных напряжений (силы вязкости). Так, например, в правую часть формулы (3. 21) должен войти $\int_{F_{\text{нар}}} \vec{\tau} dF$. Заметим,

что этот интеграл берется только по наружному участку контрольной поверхности, так как аналогичный интеграл по внутренней поверхности составляет часть искомой силы $\vec{R}$.

При удачном выборе контрольной поверхности можно и в случае вязкого газа исключить из расчета силы трения. Для этого ее участки следует расположить так, чтобы они были либо перпендикулярны линиям тока, либо параллельны, но проходили в таких местах, где поперечный градиент скорости (изменение скорости по нормали к контрольной поверхности) равен нулю. В обоих случаях касательные напряжения будут равны нулю, тогда расчет можно вести по формуле (3. 21).

Формула (3. 21) в проекциях на координатные оси имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} R_x &= \left(\int_{F_{\text{нар}}} p d\vec{F} \right)_x - \int_{F_{\text{нар}}} \rho \omega_n \omega_x dF, \\ R_y &= \left(\int_{F_{\text{нар}}} p d\vec{F} \right)_y - \int_{F_{\text{нар}}} \rho \omega_n \omega_y dF, \\ R_z &= \left(\int_{F_{\text{нар}}} p d\vec{F} \right)_z - \int_{F_{\text{нар}}} \rho \omega_n \omega_z dF. \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

В этой форме ее удобно применять для расчетов.

§ 2. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ПЕРВОЙ ТЕОРЕМЫ ЭЙЛЕРА

Рассмотрим несколько примеров приложения первой теоремы Эйлера, в которых показано, каким образом уравнение Эйлера, записанное в общем виде в интегральной форме, доводится до простых расчетных соотношений в различных случаях.

Определение силы, действующей на стенки диффузора и сопла

На рис. 27 приведена схема дозвукового диффузора. Снаружи на боковую стенку действуют силы атмосферного давления, внутри давление по длине канала переменное. Таким образом, стенка нагружена разностью давлений. В каждом месте эта сила направлена по нормали к поверхности F_3 , следовательно, она имеет продольную и поперечную составляющие. Поперечные составляющие — перпендикулярные оси канала — взаимно уравновешиваются. Они воспринимаются материалом стенки. Продольные составляющие суммируются и образуют силу, которая в конечном итоге воспринимается узлами крепления диффузора. Эта сила и является искомой.

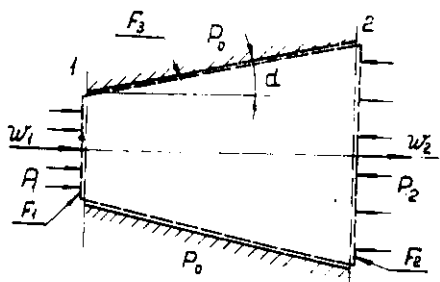


Рис. 27

Контрольная поверхность проводится таким образом, что два ее участка перекрывают входное и выходное сечения канала, а третий вплотную примыкает к боковой стенке. Применительно к этой контрольной поверхности уравнение (3. 13) запишется в проекциях на ось x как

$$\left(\int_F p d\vec{F} \right)_x = \int_F \rho w_n w_x dF,$$

где $F = F_1 + F_2 + F_3$. Интеграл от сил давления можно представить так:

$$\begin{aligned} \left(\int_F p d\vec{F} \right)_x &= \left(\int_{F_1} p d\vec{F} + \int_{F_2} p d\vec{F} + \int_{F_3} p d\vec{F} \right)_x = (p_1 \vec{F}_1 + p_2 \vec{F}_2 + \int_{F_3} p d\vec{F})_x = \\ &= p_1 F_1 - p_2 F_2 - R'_x, \end{aligned}$$

так как

$$\begin{aligned}(p_1 \vec{F}_1)_x &= p_1 F_1, \\ (p_2 \vec{F}_2)_x &= -p_2 F_2, \\ \left(\int_{F_3} p dF \right)_x &= -(\vec{R}')_x = -R'_x.\end{aligned}$$

R'_x — это сила, действующая изнутри на стенку диффузора параллельно оси канала. Интеграл от количества движения преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned}\int_F \rho \omega_n \omega_x dF &= \int_{F_1} \rho \omega_n \omega_x dF + \int_{F_2} \rho \omega_n \omega_x dF + \int_{F_3} \rho \omega_n \omega_x dF = \\ &= -\rho_1 \omega_1 F_1 + \rho_2 \omega_2 F_2 = -M_{cek} (\omega_1 - \omega_2),\end{aligned}$$

так как $\rho_1 \omega_1 F_1 = \rho_2 \omega_2 F_2 = M_{cek}$, а $\int_{F_3} \rho \omega_n \omega_x dF = 0$, потому что F_3 совпадает с твердой стенкой. Подставляя это в исходное уравнение, получим

$$R'_x = p_1 F_1 - p_2 F_2 + M_{cek} (\omega_1 - \omega_2).$$

Так определяется величина внутренней силы, действующей на стенку диффузора. Нужно заметить, что так как $p_1 F_1 < p_2 F_2$ и $\omega_1 > \omega_2$, то невозможно сразу установить, в какую сторону действует сила R'_x . Однако это легко сделать, рассматривая угол наклона боковой стенки α . Вполне очевидно, что в случае расширяющегося канала продольная составляющая силы, действующей изнутри на боковую стенку, будет направлена против потока, а в случае сужающегося — по потоку. В сужающемся канале — дозвуковом сопле — расчет ведется по той же формуле.

Для получения полной силы, действующей на боковую стенку как изнутри, так и снаружи, нужно добавить силу внешнего давления на поверхность F_3 в проекции на горизонтальную ось

$$(p_0 \vec{F}_3)_x = p_0 F_3 \cos \alpha = p_0 (F_2 - F_1).$$

Тогда

$$R_x = (p_1 - p_0) F_1 - (p_2 - p_0) F_2 + M_{cek} (\omega_1 - \omega_2). \quad (3.23)$$

В приведенном выше расчете силы трения не учитывались. При желании учесть их, надо в левую часть исходного уравнения добавить $\left(\int_F \vec{\tau} dF \right)_x$. Однако, разбив этот интеграл на сумму интегралов по площадям F_1 , F_2 и F_3 , можно заметить, что по участкам F_1 и F_2 они равны нулю (так как на этих поверхно-

стях $\tau_x = 0$), а интеграл по поверхности F_3 войдет в искомую силу R'_x как составная часть. Следовательно, окончательный результат будет выражаться той же самой формулой (3. 23).

Нужно заметить, что расчет можно было бы вести и по формуле (3. 21), записав ее в проекции на ось x в виде первого уравнения (3. 22), где под $F_{нар}$ надо подразумевать только наружные участки контрольной поверхности, не соприкасающиеся с твердой стенкой и друг с другом, т. е. $F_1 + F_2$.

Реакция вытекающей и втекающей струи

Формулу (3. 23) можно применить для определения силы реакции вытекающей и втекающей струи на стенки камеры, из которой происходит истечение или в которую происходит втекание. Действительно, если перекрыть входное сечение 1 твердой стенкой (см. рис. 27), то подача газа внутрь камеры из внешнего потока прекратится, а участок стенки F_1 будет воспринимать некоторое усилие, которое войдет как составная часть в искомую силу реакции вытекающей струи. Следовательно, $\omega_1 = 0$, $(p_1 - p_0)F_1$ войдет в R_x и формула (3. 23) примет вид

$$R_x = -(p_2 - p_0)F_2 - M_{сек} \cdot \omega_2.$$

Давление в выходном сечении, через которое вытекает газ, может отличаться от атмосферного внешнего давления p_0 (превышать его), если скорость истечения равна или выше скорости звука, или равняться атмосферному давлению при дозвуковом истечении. В последнем случае

$$R_x = -M_{сек} \omega_2.$$

Сила R_x направлена в сторону, противоположную скорости истечения. В рассматриваемом примере предполагается, что непрерывный массовый расход газа $M_{сек}$ обеспечивается каким-либо источником газа, находящимся внутри камеры, например горячей пороховой шашкой, как это делается в ракетах.

Если перекрыть выходное сечение 2, оставив открытым входное (см. рис. 27), то прекратится истечение газа, а на добавленном участке твердой стенки F_2 появится дополнительная сила, которая войдет в искомую силу реакции втекающей струи. Уравнение (3. 23) в этом случае приобретает вид

$$R_x = (p_1 - p_0)F_1 + M_{сек} \omega_1.$$

При анализе полученного уравнения нужно иметь в виду одну особенность, свойственную только случаю втекания струи.

Если через сечение 1 в камеру поступает газ в виде струи встречного потока (камера находится в полете или в аэродинамической трубе) и скорость ω_1 равна скорости встречного потока, то $\rho_1 = \rho_0$ и

$$R_x = M_{cek} \omega_1.$$

Таким образом, сила реакции втекающей струи направлена в сторону потока, т. е. она является силой сопротивления, в отличие от силы реакции вытекающей струи, создающей тягу. Если же камера находится в неподвижной среде и всасывает газ, притекающий ко входному сечению со всех сторон, то сила реакции равна нулю *) $R_x = 0$. Получается это потому, что при движении газа ко входному отверстию его скорость на наружной поверхности боковых стенок камеры отлична от нуля, следовательно статическое давление не равно давлению окружающей среды, а имеет меньшую величину. В результате понижения давления p_1 и p_3 создается сила, направленная против потока, которая полностью уравнивается силой от входного количества движения $M_{cek} \omega_1$.

Заметим попутно, что в некоторых популярных изданиях можно встретить проекты «двигателей», принцип действия которых заключается в том, что камера всасывает воздух через входное отверстие и внутри этот воздух конденсируется. Не говоря уже о технической непригодности такого проекта, нужно отметить, что такой «двигатель» никогда не разовьет тягу: приведенные выше рассуждения подтверждают, что это невозможно принципиально.

Определение силы тяги воздушно-реактивного двигателя

На рис. 28 приведена расчетная схема, где двигатель изображен сплошными жирными линиями. Воздушно-реактивный двигатель, широко применяемый на современных самолетах, может иметь различное внутреннее устройство в зависимости от типа и назначения. Однако в данном случае можно не интересоваться его конструкцией: теорема о количестве движения позволяет найти силу тяги, не вдаваясь в существо процессов, которые происходят внутри. Необходимо только знать, что через сечение $F_{вх}$ во входное устройство из набегающего встречного потока поступает воздух. Через выходное отверстие F_c реактивного сопла струя горячих газов выбрасывается с большой скоростью ω_c .

Силу тяги можно было бы определить по разности сил реакций вытекающей и втекающей струи, но в данном примере

*) Этот результат был впервые получен Н. Е. Жуковским.

воспользуемся общим методом, чтобы показать его применение.

Расчет начинается с выбора контрольной поверхности. Передний ее участок располагают перпендикулярно набегающему потоку на таком расстоянии от входного отверстия, на котором влияние двигателя практически не сказывается. Это влияние проявляется в том, что перед входным отверстием поток притормаживается, его скорость уменьшается от величины w_0 , равной скорости полета, до несколько меньшей, а давление при этом возрастает и становится выше атмосферного. Площадь сгруги также несколько увеличивается, что можно заме-

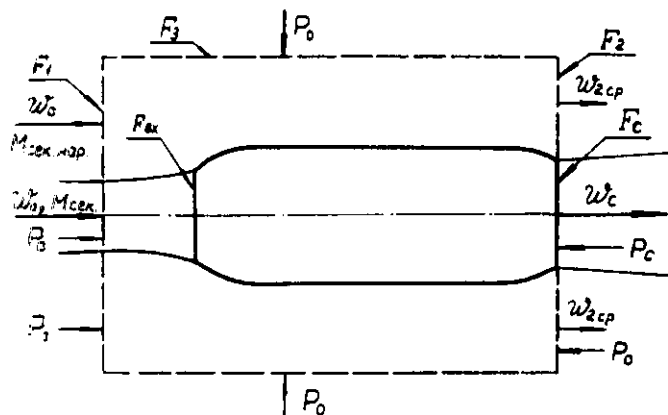


Рис. 28

тить на рис. 28. Теоретически такое возмущение при дозвуковой скорости полета распространяется в бесконечность перед двигателем. Практически заметное влияние прекращается уже на небольшом расстоянии перед входным отверстием. При таком расположении участка контрольной поверхности F_1 касательные напряжения на нем равны нулю, нормальная составляющая скорости $w_n = -w_0$, вектор скорости $\vec{w} = \vec{w}_x = w_0$, векторы силы давления и количества движения проектируются на ось x , в качестве которой принята ось двигателя, в натуральную величину. Боковой участок контрольной поверхности F_3 имеет цилиндрическую форму и отстоит от оси двигателя на таком расстоянии, на котором уже не чувствуется искривления линий тока, вызванного обтеканием внешних поверхностей мотогондолы, в которую помещен двигатель на самолете. Это значит, что линии тока параллельны образующим участка поверхности F_3 . При этом действующие на F_3 силы давления взаимно уравниваются, газ не втекает и не вытекает через

участок F_3 , следовательно не переносит количество движения, касательные напряжения на F_3 отсутствуют, так как на большом расстоянии от двигателя скорость сохраняет постоянное значение в поперечном сечении, т. е. поперечный градиент скорости равен нулю. Замыкающий участок контрольной поверхности расположен перпендикулярно оси двигателя и проходит через срез реактивного сопла. Он состоит из двух частей: F_c — площади выходного отверстия сопла — и F_2 . Проведение контрольной поверхности через срез сопла удобно тем, что в этом сечении потоки газа, выходящего из сопла, и воздуха, обтекающего мотогондолу снаружи, четко разделены. Векторы сил давления и количества движения на поверхности F_c и F_2 проектируются на ось x в натуральную величину.

Равнодействующую всех сил, действующих со стороны газа на стенки двигателя (как снаружи, так и изнутри, включая и стенки всех конструктивных элементов, находящихся в проточной части), можно определить по формуле (3.21), где $F_{нар} = F_1 + F_2 + F_3 + F_c$. Разбив интегралы по $F_{нар}$ на суммы интегралов по участкам контрольной поверхности, надо учесть, что

$$\int_{F_1} p d\vec{F} = \left(\int_{F_1} p d\vec{F} \right)_x = p_0 F_1,$$

$$\int_{F_3} p d\vec{F} = 0,$$

$$\int_{F_2} p d\vec{F} + \int_{F_c} p d\vec{F} = -p_0 F_2 - p_c F_c,$$

$$\int_{F_1} \rho \omega_n \vec{\omega} dF = \int_{F_1} \rho \omega_n \omega_x dF = -\rho_0 \omega_0 \omega_0 F_1 = -(M_{сек} + M_{сек \cdot нар}) \omega_0,$$

$$\int_{F_3} \rho \omega_n \vec{\omega} dF = 0,$$

$$\int_{F_2} \rho \omega_n \vec{\omega} dF = M_{сек \cdot нар} \cdot \omega_{2ср},$$

$$\int_{F_c} \rho \omega_n \vec{\omega} dF = M_{сек \cdot г} \cdot \omega_c,$$

по причинам, изложенным выше *). Тогда формула равнодействующей всех сил приобретает вид

$$R_x = p_0 F_1 - p_0 F_2 - p_c F_c + M_{сек} \omega_0 + M_{сек \cdot нар} \cdot \omega_0 - M_{сек \cdot нар} \omega_{2ср} - M_{сек \cdot г} \omega_c$$

*) Здесь $M_{сек}$ — расход воздуха через двигатель, $M_{сек \cdot нар}$ — расход воздуха в потоке, обтекающем мотогондолу, взятый в пределах контрольной поверхности, $M_{сек \cdot г}$ — расход газа через реактивное сопло.

или, так как $p_0 F_1 - p_0 F_2 - p_c F_c = p_0 (F_1 - F_2) - p_c F_c = p_0 F_c - p_c F_c = (p_0 - p_c) F_c$,

то

$$R_x = -M_{сек} \left(\frac{M_{сек \cdot r}}{M_{сек}} \omega_c - \omega_0 \right) + M_{сек \cdot нар} (\omega_0 - \omega_{2cp}) - (p_c - p_0) F_c.$$

Изменение количества движения потока воздуха, обтекающего мотогондолу снаружи $M_{сек \cdot нар} (\omega_0 - \omega_{2cp})$, получается вследствие того, что между ее наружными стенками и внешним потоком действуют силы трения. Равнодействующая этих сил, приложенных к поверхности мотогондолы, представляет собой силу лобового сопротивления, которая обычно учитывается в аэродинамическом расчете летательного аппарата. Поэтому величина $M_{сек \cdot нар} (\omega_0 - \omega_{2cp})$ не включается в силу тяги двигателя. Последняя запишется тогда

$$R_{г \cdot двиг} = -M_{сек} \left(\frac{M_{сек \cdot r}}{M_{сек}} \omega_c - \omega_0 \right) - (p_c - p_0) F_c. \quad (3.24)$$

Так как $\omega_c > \omega_0$ и $p_c \geq p_0$, то правая часть этого равенства отрицательна, т. е. сила тяги направлена в сторону, противоположную потоку газа. Этот факт хорошо известен и в расчетных формулах специально не подчеркивается, а формула записывается так:

$$R_{двиг} = M_{сек} \left(\frac{M_{сек \cdot r}}{M_{сек}} \omega_c - \omega_0 \right) + (p_c - p_0) F_c. \quad (3.25)$$

Рассматривая формулу (3. 25), легко установить, что сила тяги складывается из двух составляющих: первая из них представляет изменение количества движения проходящего через двигатель воздуха, вторая — статическую добавку тяги. Последняя отсутствует при дозвуковой скорости истечения из сопла или в случае работы сверхзвукового сопла на расчетном режиме, когда $p_c = p_0$.

Различие между расходом воздуха и выходящего газа невелико. Оно объясняется тем, что к массе воздуха добавляется масса сгоревшего топлива. Разница в расходах составляет примерно $1/60$ часть от расхода воздуха. Иногда этим различием пренебрегают, полагая в формулах (3. 24) и (3. 25) отношение $\frac{M_{сек \cdot r}}{M_{сек}}$ равным единице.

Определение усилия, действующего на стенки криволинейного патрубка

При движении жидкости или газа по криволинейному патрубку появляется центробежная сила, поэтому можно заведомо ожидать, что на стенки будет действовать несимметричная боковая сила. Ее можно определить при помощи уравнения Эйлера.

Расчетная схема дана на рис. 29. Контрольную поверхность проведем так, как показано пунктирным контуром. Поток примем плоским, считая размер, перпендикулярный плоскости чертежа, равным единице. Для определения горизонтальной и

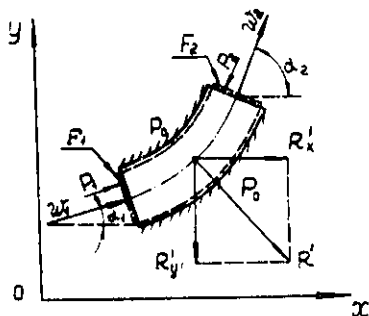


Рис. 29

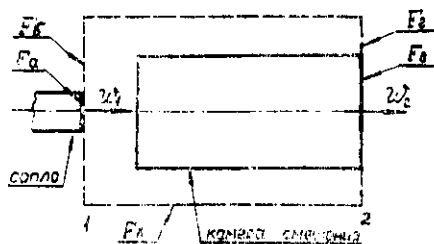


Рис. 30

вертикальной составляющих силы, действующей на внутреннюю стенку канала, воспользуемся первым и вторым уравнениями (3. 22), в которых $F_{нар} = F_1 + F_2$. Входящие в эти уравнения интегралы представим в таком виде:

$$\left(\int_{F_{нар}} p d\vec{F} \right)_x = (p_1 \vec{F}_1 + p_2 \vec{F}_2)_x = p_1 F_1 \cos \alpha_1 - p_2 F_2 \cos \alpha_2,$$

$$\left(\int_{F_{нар}} p d\vec{F} \right)_y = (p_1 \vec{F}_1 + p_2 \vec{F}_2)_y = p_1 F_1 \sin \alpha_1 - p_2 F_2 \sin \alpha_2,$$

$$\int_{F_{нар}} \rho \omega_n \omega_x dF = -\rho \omega_1 \omega_1 \cos \alpha_1 F_1 + \rho \omega_2 \omega_2 \cos \alpha_2 F_2 = M_{cek} (\omega_2 \cos \alpha_2 - \omega_1 \cos \alpha_1),$$

$$\int_{F_{нар}} \rho \omega_n \omega_y dF = -\rho \omega_1 \omega_1 \sin \alpha_1 F_1 + \rho \omega_2 \omega_2 \sin \alpha_2 F_2 = M_{cek} (\omega_2 \sin \alpha_2 - \omega_1 \sin \alpha_1).$$

После подстановки этих значений в уравнения (3. 22) и небольших преобразований получим

$$\left. \begin{aligned} R_x' &= (p_1 F_1 + M_{cek} \omega_1) \cos \alpha_1 - (p_2 F_2 + M_{cek} \omega_2) \cos \alpha_2 \\ R_y' &= (p_1 F_1 + M_{cek} \omega_1) \sin \alpha_1 - (p_2 F_2 + M_{cek} \omega_2) \sin \alpha_2. \end{aligned} \right\} (3.26)$$

Геометрическим суммированием составляющих найдем вектор силы $\vec{R}'$. Чтобы получить полную силу $\vec{R}$, действующую на стенки патрубка, надо прибавить силу, приложенную к наружным поверхностям. Здесь нужно иметь в виду, что по наружному радиусу величина поверхности больше, чем по внутреннему. Поэтому сила от действия атмосферного давления на стенки снаружи не равна нулю, несмотря на то, что p_0 всюду одинаково.

Расчет простейшего эжектора

Рассматривается элементарный расчет простейшего газового эжектора, состоящего из сопла и цилиндрической камеры смешения (рис. 30). Струя активного (эжектирующего) газа выходит из сопла и поступает затем в камеру смешения, где она смешивается с пассивным (эжектируемым) газом и передает ему часть количества движения, увеличивая его скорость. Пассивный газ поступает в камеру смешения через пространство между срезом сопла и входом в камеру. Поскольку камера смешения имеет цилиндрическую форму и равнодействующая сил давления, действующих на ее стенки, равна нулю, то, если принять, что силы трения отсутствуют, камера не будет влиять на изменение суммарного количества движения всего потока, и расчет можно вести по уравнению Эйлера в форме (3.13)

$$\int_F p d\vec{F} = \int_F \rho \omega_n \vec{\omega} dF.$$

Контрольная поверхность проводится, как показано на рис. 30. Так как давление на все ее участки одинаково (равно атмосферному), то

$$\int_F p d\vec{F} = 0,$$

следовательно, и

$$\int_F \rho \omega_n \vec{\omega} dF = 0.$$

Разбив, далее, интеграл по всей контрольной поверхности на сумму интегралов, взятых по ее участкам, можно записать

$$\int_{F_A} \rho \omega_n \vec{\omega} dF + \int_{F_B} \rho \omega_n \vec{\omega} dF + \int_{F_C} \rho \omega_n \vec{\omega} dF + \int_{F_D} \rho \omega_n \vec{\omega} dF + \int_{F_E} \rho \omega_n \vec{\omega} dF = 0.$$

Участок F_B расположен достаточно далеко от стенки камеры

смещения, поэтому можно принять, что скорость газа, пересекающего поверхность $F_6 + F_B + F_r$, весьма мала и

$$\int_{F_6} \rho \omega_n \vec{\omega} dF + \int_{F_B} \rho \omega_n \vec{\omega} dF + \int_{F_r} \rho \omega_n \vec{\omega} dF = 0.$$

Таким образом,

$$\int_{F_a} \rho \omega_n \vec{\omega} dF + \int_{F_6} \rho \omega_n \vec{\omega} dF = -M_{сек.а} \omega_1 + (M_{сек.а} + M_{сек.п}) \omega_2 = 0,$$

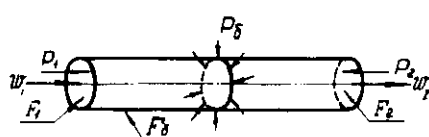
где $M_{сек.а}$ — расход газа в активном, а $M_{сек.п}$ — в пассивном потоке. Следовательно,

$$\frac{M_{сек.а}}{M_{сек.а} + M_{сек.п}} = \frac{\omega_2}{\omega_1}.$$

§ 3. УРАВНЕНИЕ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ СТРУЙКИ. ГАЗОДИНАМИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ПОТОКА ИМПУЛЬСА

Уравнение количества движения для элементарной цилиндрической струйки идеального газа можно получить, применяя уравнение Эйлера (3. 13) к контрольной поверхности, охватывающей участок такой струйки (рис. 31). Контрольная поверхность состоит из цилиндрической поверхности F_6 и двух оснований F_1 и F_2 .

Разбив интегралы, входящие в уравнение (3. 13), на суммы интегралов по участкам контрольной поверхности, имеем



$$\begin{aligned} \int_{F_1} p d\vec{F} + \int_{F_6} p d\vec{F} + \int_{F_2} p d\vec{F} &= \\ &= \int_{F_1} \rho \omega_n \vec{\omega} dF + \int_{F_6} \rho \omega_n \vec{\omega} dF + \\ &+ \int_{F_2} \rho \omega_n \vec{\omega} dF. \end{aligned}$$

Рис. 31

На боковой поверхности

$$\int_{F_6} p d\vec{F} = 0,$$

так как эта поверхность цилиндрическая и силы давления взаимно уравновешиваются. Кроме того,

$$\int_{F_6} \rho \omega_n \vec{\omega} dF = 0,$$

потому что линии тока идут вдоль боковой поверхности, не пересекая ее, следовательно, во всех ее точках $\omega_n = 0$. Оставшиеся участки контрольной поверхности F_1 и F_2 представляют собой поперечные сечения элементарной струйки, в пределах которых давления, плотности и скорости можно считать постоянными. Тогда

$$\int_{F_1} p d\vec{F} + \int_{F_2} p d\vec{F} = p_1 F_1 - p_2 F_2,$$

$$\int_{F_1} \rho \omega_n \vec{\omega} dF + \int_{F_2} \rho \omega_n \vec{\omega} dF = -\rho_1 \omega_1^2 F_1 + \rho_2 \omega_2^2 F_2$$

и уравнение количества движения приобретает вид

$$p_1 F_1 - p_2 F_2 = \rho_2 \omega_2^2 F_2 - \rho_1 \omega_1^2 F_1. \quad (3.27)$$

Принимая во внимание уравнение расхода

$$\rho_1 \omega_1 F_1 = \rho_2 \omega_2 F_2 = M_{сек},$$

можно формулу (3.27) представить еще в таком виде:

$$p_1 F_1 - p_2 F_2 = M_{сек} (\omega_2 - \omega_1) \quad (3.28)$$

или

$$p_1 F_1 + M_{сек} \omega_1 = p_2 F_2 + M_{сек} \omega_2. \quad (3.29)$$

Формула (3.29) называется *уравнением количества движения в полных импульсах*, а величина

$$\Phi = pF + M_{сек} \omega \quad (3.30)$$

— *полным импульсом*.

Для цилиндрической струйки $F_1 = F_2 = F$. Если обе части равенства (3.27) сократить на эту величину, то получим еще одну форму записи уравнения количества движения:

$$p_1 - p_2 = \rho_2 \omega_2^2 - \rho_1 \omega_1^2 \quad (3.31)$$

или с учетом уравнения неразрывности $\rho_1 \omega_1 = \rho_2 \omega_2$,

$$p_1 - p_2 = \rho_1 \omega_1 (\omega_2 - \omega_1) = \rho_2 \omega_2 (\omega_2 - \omega_1). \quad (3.32)$$

Нужно заметить, что в случае конической струйки в уравнение количества движения должна включаться проекция на ось x от сил давления, действующих на боковой участок контрольной поверхности. Если рассматривается цилиндрическая струйка вязкой жидкости или газа, то уравнение должно быть дополнено силой трения, представляющей собой сумму сил от касательных напряжений (сил вязкости), действующих по боковому участку контрольной поверхности. В случае конической струйки вязкого газа в уравнение нужно включать про-

екцию на ось x равнодействующей сил давления и трения, действующих на боковую поверхность.

В связи с этим интересно рассмотреть некоторые особенности уравнения в полных импульсах. Для цилиндрической струйки идеального газа оно записано формулой (3, 29), из которой следует, что при отсутствии каких-либо сил, действующих на струю вдоль потока между сечениями входа и выхода, полный импульс на входе равен полному импульсу на выходе. Если на расчетный участок струи действует сила вдоль потока, то полный импульс на выходе будет больше, чем на входе. Это получается, например, при течении газа в расширяющемся канале. Если же сила действует в направлении, противоположном потоку, то полный импульс вдоль течения уменьшается.

При расчетах полный импульс удобно выражать с помощью газодинамических функций потока импульса. Эти функции, зависящие только от приведенной скорости λ и от рода газа (показателя изэнтропы k) рассчитываются заранее и сводятся в таблицы. Обычно используются три функции, представляющие собой:

$z(\lambda)$ — отношение полного импульса в любом сечении потока к полному импульсу в критическом сечении

$$z(\lambda) = \frac{\Phi}{\Phi_{кр}} = \frac{pF + M_{сек} \omega}{p_{кр} F_{кр} + M_{сек} a_{кр}}, \quad (3.33)$$

$f(\lambda)$ — отношение полного импульса в любом сечении потока к полному импульсу в заторможенном потоке

$$f(\lambda) = \frac{\Phi}{\Phi^*} = \frac{pF + M_{сек} \omega}{p^* F}, \quad (3.34)$$

$r(\lambda)$ — отношение статической части полного импульса к полному импульсу

$$r(\lambda) = \frac{pF}{\Phi} = \frac{pF}{pF + M_{сек} \omega}. \quad (3.35)$$

Полный импульс можно представить в виде следующей зависимости от приведенной скорости:

$$\begin{aligned} \Phi = pF + M_{сек} \omega &= M_{сек} \omega \left(\frac{pF}{M_{сек} \omega} + 1 \right) = M_{сек} \omega \left(\frac{pF}{\rho \omega F \omega} \frac{k}{k} + 1 \right) = \\ &= M_{сек} \omega \left(\frac{1}{k} \frac{a^2}{\omega^2} + 1 \right), \end{aligned}$$

так как

$$k \frac{p}{\rho} = a^2.$$

Используя, далее, формулу (2. 49)

$$a^2 = \frac{k+1}{2} a_{кр}^2 - \frac{k-1}{2} \omega^2,$$

запишем

$$\frac{1}{k} \frac{a^2}{\omega^2} + 1 = \frac{1}{k} \frac{\frac{k+1}{2} a_{кр}^2 - \frac{k-1}{2} \omega^2}{\omega^2} + 1 = \frac{k+1}{2k} \frac{1}{\lambda^2} - \\ - \frac{k-1}{2k} + 1 = \frac{k+1}{2k} \left(\frac{1}{\lambda^2} + 1 \right).$$

Тогда

$$\Phi = \frac{k+1}{k} M_{cek} \omega \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\lambda^2} + 1 \right). \quad (3.36)$$

Для критического сечения $\omega = a_{кр}$, $\lambda = 1$ и

$$\Phi_{кр} = \rho_{кр} F_{кр} + M_{cek} a_{кр} = \frac{k+1}{k} M_{cek} a_{кр}. \quad (3.37)$$

Подставив значения Φ и $\Phi_{кр}$ из (3. 36) и (3. 37) в (3. 33), получим

$$z(\lambda) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\lambda} + \lambda \right). \quad (3.38)$$

Функцию $r(\lambda)$ можно выразить в зависимости от приведенной скорости так:

$$r(\lambda) = \frac{\rho F}{\rho F + M_{cek} \omega} = \frac{1}{1 + M_{cek} \frac{\omega}{\rho F}} = \frac{1}{1 + \rho \omega F \frac{\omega}{\rho F} \frac{k}{k}} = \\ = \frac{1}{1 + k \frac{\omega^2}{a^2}} = \frac{1}{1 + k M^2}.$$

Применив формулу связи числа M с приведенной скоростью λ (2. 55), получим после небольших преобразований

$$r(\lambda) = \frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2}{1 + \lambda^2}. \quad (3.39)$$

Зависимость функции $f(\lambda)$ от приведенной скорости получается просто:

$$f(\lambda) = \frac{pF + M_{сек}\omega}{p^*F} = \frac{pF + M_{сек}\omega}{pF} \frac{p}{p^*} = \frac{1}{r(\lambda)} \pi(\lambda).$$

Подставив сюда значения функций $r(\lambda)$ из (3. 39) и $\pi(\lambda)$ из (2. 60), найдем

$$f(\lambda) = \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}} (1 + \lambda^2). \quad (3.40)$$

Нужно иметь в виду, что функция $z(\lambda)$ не зависит от рода газа, поэтому для нее составляется отдельная таблица, единая для всех газов.

На основании зависимостей (3. 33), (3. 37), (3. 34) и (3. 35) можно получить следующие формулы для расчета полного импульса:

$$\Phi = \Phi_{кр} z(\lambda) = \frac{k+1}{k} M_{сек} a_{кр} z(\lambda), \quad (3.41)$$

$$\Phi = \Phi^* \cdot f(\lambda) = p^* F f(\lambda), \quad (3.42)$$

$$\Phi = pF \frac{1}{r(\lambda)}. \quad (3.43)$$

Выбор той или иной формулы для практического использования зависит от того, какие исходные величины заданы. Если известны расход газа и температура торможения (следовательно, известна и критическая скорость), то удобно вести расчет по формуле (3. 41). Если задана площадь поперечного сечения и давление торможения, то применяется формула (3. 42), а если статическое давление, то удобнее пользоваться выражением (3. 43).

§ 4. ТЕОРЕМА ЭЙЛЕРА О МОМЕНТЕ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ

Вторая теорема Эйлера распространяет теорему о моменте количества движения на случаи жидкости и газа. Связь между моментом количества движения и моментом внешних сил, которая в механике твердого тела имеет вид

$$M = \frac{d}{dt} (mrc_u), \quad (3.44)$$

с помощью этой теоремы устанавливается и для жидкости. В формуле (3. 44) m — масса тела, r — радиус центра тяжести

тела относительно оси вращения, c_u — тангенциальная составляющая абсолютной скорости тела (проекция абсолютной скорости на направление, перпендикулярное радиусу, взятое в плоскости вращения).

Применяя формулу (3.44) к жидкости, нужно выразить производную, записанную в правой части, через параметры потока и приравнять ее моменту внешних сил M . С этой целью рассмотрим участок струи, заключенный между сечениями 1 и 2 (рис. 32). Жидкость здесь находится в сложном движении: во-первых, она движется вдоль оси струи, во-вторых, она вместе со струей вращается относительно неподвижной оси $O-O$. Такое движение наблюдается в межлопаточных каналах турбомашин, например, в рабочих колесах.

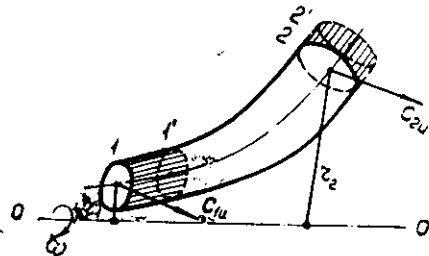


Рис. 32

Рассматриваемая масса жидкости в начальный момент времени $t=0$ занимает положение между сечениями 1—2. Через небольшой промежуток времени, равный Δt , струя повернется вокруг оси $O-O$, а жидкость внутри нее переместится из положения, ограниченного сечениями 1—2, в положение между сечениями 1'—2'. Угловое перемещение струи вокруг оси $O-O$ само по себе не вызывает изменения момента количества движения mrc_u , если радиус и скорость исследуемого элемента жидкости при этом не изменятся*). Перемещение жидкости вдоль струи приводит к изменению радиусов и тангенциальных составляющих абсолютной скорости ее частиц, вследствие чего происходит изменение момента количества движения. Для определения этого изменения вычислим разность моментов количества движения во второй и первый моменты времени. В начальный момент времени $t=0$

$$M_{к.д} = \Delta m_1 r_1 c_{1u} + \sum_{1'}^2 \Delta m r c_u,$$

где $\Delta m_1 r_1 c_{1u}$ — момент количества движения элементарной массы Δm_1 , заключенной между сечениями 1—1'.

*) Это ясно хотя бы из того, что момент количества движения — вектор, равный $m(\vec{r} \times \vec{c}_u)$ и направленный, как это следует из приведенного выражения, вдоль оси $O-O$. При вращении струи угол между $\vec{r}$ и $\vec{c}_u$ не изменяется, поэтому не изменяется и момент количества движения.

$\sum_{1'}^2 \Delta m r c_u$ — суммарный момент количества движения всех элементарных масс, находящихся на участке, ограниченном сечениями $1'$ — 2 . В следующий момент времени $t = \Delta t$

$$M_{к.д II} = \sum_{1'}^2 \Delta m r c_u + \Delta m_2 r_2 c_{2u}.$$

Разность $M_{к.д II} - M_{к.д I}$ при установившемся движении равна

$$M_{к.д II} - M_{к.д I} = \Delta m_2 r_2 c_{2u} - \Delta m_1 r_1 c_{1u} = \Delta m (r_2 c_{2u} - r_1 c_{1u}),$$

так как $\sum_{1'}^2 \Delta m r c_u$ по времени не меняется и при вычитании взаимно уничтожится, а $\Delta m_1 = \Delta m_2 = \Delta m$.

Дальнейшее рассмотрение ограничим только случаем установившегося движения.

Производную момента количества движения по времени можно записать следующим равенством:

$$\frac{dM_{к.д}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{M_{к.д II} - M_{к.д I}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta t} (r_2 c_{2u} - r_1 c_{1u}),$$

но $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta t} = M_{сек}$ — есть массовый расход. Подставляя это в формулу (3.44), получим второе уравнение Эйлера

$$M = M_{сек} (r_2 c_{2u} - r_1 c_{1u}). \quad (3.45)$$

Величина $M_{сек} r c_u$ представляет собой секунднй момент количества движения. Таким образом, *вторую теорему Эйлера* можно сформулировать так:

Момент внешних сил, действующих на участок струи жидкости, равен приращению секундного момента количества движения на данном участке струи.

Вторая теорема Эйлера — уравнение моментов количества движения — имеет наиболее широкое распространение в теории и расчете турбомашин. Рассмотрим некоторые примеры.

Момент на рабочих лопатках турбомашин

Момент на лопатках рабочих колес радиальных и диагональных турбомашин определяется по формуле (3.45)

$$M = M_{сек} (r_2 c_{2u} - r_1 c_{1u}).$$

В этой формуле r_1 и r_2 — радиусы окружностей входного и выходного сечений (если сечение имеет некоторую радиальную

протяженность, то берется средний радиус), c_{1u} и c_{2u} — тангенциальные составляющие абсолютной скорости жидкости на входе и выходе из колеса. В центробежных компрессорах и насосах иногда применяется осевой вход, т. е. жидкость притекает к рабочему колесу, двигаясь только вдоль оси машины, без закрутки. В этом случае $c_{1u} = 0$ и

$$M = M_{сек} r_2 c_{2u}.$$

Из формулы (3.45) следует, что при $r_2 c_{2u} > r_1 c_{1u}$ $M > 0$, а при $r_2 c_{2u} < r_1 c_{1u}$ $M < 0$. Следовательно, в компрессоре или насосе момент на рабочих лопатках положителен, а в турбинах отрицателен. В компрессоре или насосе рабочие лопатки действуют на жидкость, увеличивая ее момент количества движения. В турбине на рабочие лопатки поступает предварительно закрученный поток, имеющий большой момент количества движения. Последний на рабочем колесе уменьшается, в результате чего жидкость действует на лопатки с определенным моментом сил, приводя их во вращение.

С помощью формулы (3.45) можно рассчитывать момент сил и на неподвижных лопатках сопловых или направляющих аппаратов.

Для осевых машин, у которых линии тока на входе и выходе лопаточного венца лежат на одном и том же радиусе, уравнение моментов количества движения имеет более простой вид:

$$M = M_{сек} r (c_{2u} - c_{1u}). \quad (3.46)$$

Нужно заметить, что уравнение моментов количества движения справедливо как для идеальной, так и для вязкой жидкости, как для несжимаемой, так и для сжимаемой жидкости, надо только брать соответствующие этим случаям значения скорости c_u .

Течение в кольцевых безлопаточных каналах

Кольцевые безлопаточные каналы применяются как диффузоры в компрессорах, как входные и выходные устройства в турбомашинах различных типов.

Если в рабочем колесе или неподвижном лопаточном аппарате изменение момента количества движения происходит под действием лопаток, то в безлопаточном канале момент вихревых сил, если не учитывать сил трения о неподвижные стенки, равен нулю. Следовательно,

$$M_{сек} (r_2 c_{2u} - r_1 c_{1u}) = 0,$$

откуда получается, что $r_2 c_{2u} = r_1 c_{1u} = r c_u$ или $r c_u = \text{const.}$ (3.47)

Таким образом, при движении жидкости в кольцевом безлопаточном канале тангенциальная составляющая скорости изменяется обратно пропорционально радиусу. Этому закону подчиняется как несжимаемая, так и сжимаемая жидкость при дозвуковых и сверхзвуковых скоростях. По такому закону распределяются скорости жидкости или газа в пространстве, окружающем вихрь, например воздушный смерч, воронка на поверхности воды и т. п.

Зависимость (3. 47) имеет следующие названия: закон свободного вихря, закон потенциального вихря, закон постоянства момента количества движения, закон постоянства циркуляции, закон площадей.

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПЛОСКОГО ПОТОКА

§ 1. ПОТЕНЦИАЛЬНОЕ И ВИХРЕВОЕ ДВИЖЕНИЕ

Потенциальным движением жидкости называется безвихревое движение, при котором вихрь скорости равен нулю

$$\vec{\Omega} = 2 \vec{\omega} = 0.$$

Приравняв нулю выражения проекций вектора угловой скорости (1.6), можно записать следующие условия незавихренности потока:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \omega_z}{\partial y} &= \frac{\partial \omega_y}{\partial z}, \\ \frac{\partial \omega_x}{\partial z} &= \frac{\partial \omega_z}{\partial x}, \\ \frac{\partial \omega_y}{\partial x} &= \frac{\partial \omega_x}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

Эти условия записаны для общего случая трехмерного потока. Если же течение двумерное, происходящее в плоскости xy , то угловая скорость может иметь только одну компоненту ω_z , и для незавихренности потока требуется только, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{\partial \omega_y}{\partial x} = \frac{\partial \omega_x}{\partial y}. \quad (4.2)$$

Таким образом, в безвихревом потоке частицы жидкости движутся без вращения. Кроме того, условия (4.1) утверждают, что скорость в этом случае имеет потенциал, т. е. такую

функцию, частные производные от которой по координатам равны проекциям скорости на соответствующие координатные оси. Действительно, если взять дифференциальный трехчлен вида

$$\omega_x dx + \omega_y dy + \omega_z dz$$

и сопоставить его с соотношениями (4. 1), то нетрудно заметить, что при соблюдении условий (4. 1) этот трехчлен будет полным дифференциалом некоторой функции $\varphi(x, y, z)$

$$d\varphi = \omega_x dx + \omega_y dy + \omega_z dz. \quad (4.3)$$

Если же $d\varphi$ записать в таком виде:

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz, \quad (4.4)$$

и сравнить между собой (4. 3) и (4. 4), то нетрудно установить, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \omega_x, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \omega_y, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= \omega_z. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Обратимся далее к уравнению неразрывности (1. 23),

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \omega = \frac{d\rho}{dt} + \rho \left(\frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \omega_y}{\partial y} + \frac{\partial \omega_z}{\partial z} \right) = 0.$$

Заменяя в нем проекции скорости ω_x , ω_y и ω_z согласно условиям (4. 5), можно записать его в такой форме:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) = 0. \quad (4.6)$$

Для несжимаемой жидкости $\rho = \text{const}$, тогда

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \quad (4.7)$$

а для плоского потока

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \quad (4.8)$$

Выражения (4. 7) и (4. 8) называются уравнениями Лапласа. Функции, которые удовлетворяют уравнениям Лапласа, называются гармоническими. Следовательно, потенциал скорости есть гармоническая функция.

Другой весьма важной величиной в теории плоского (но не обязательно потенциального) потока является функция тока. Она легко получается из уравнения линий тока

$$\frac{dx}{w_x} = \frac{dy}{w_y}$$

или

$$w_x dy - w_y dx = 0 \quad (4.9)$$

и уравнения неразрывности

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = 0. \quad (4.10)$$

Действительно из уравнения (4. 10) имеем

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} = - \frac{\partial w_y}{\partial y},$$

но это есть как раз то условие, при котором выражение (4. 9) является полным дифференциалом некоторой функции ψ , т. е.

$$d\psi = w_x dy - w_y dx = 0. \quad (4.11)$$

С другой стороны,

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx. \quad (4.12)$$

Сопоставляя (4. 11) и (4. 12), устанавливаем, что

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = w_x, \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -w_y.$$

Если в условия независимости потока — третье равенство (4. 1) — подставить соотношения (4. 13), то получится уравнение Лапласа для функции тока

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0. \quad (4.14)$$

Таким образом функция тока существует в каждом неразрывном течении — как вихревом, так и безвихревом, — но гармонической она является только в безвихревом течении.

Интегрирование дифференциального уравнения функции тока (4.11) дает

$$\psi(x, y) = C. \quad (4.15)$$

Это есть уравнение семейства линий тока. Каждому конкретному значению произвольной постоянной C отвечает вполне определенная линия тока из этого семейства.

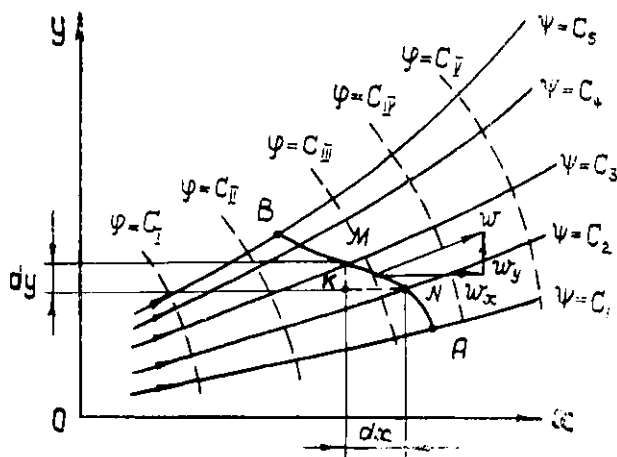


Рис. 33

Рассмотрим, что представляет собой $d\psi$, взятое по любой линии AB , пересекающей линии тока (вдоль линии тока $d\psi=0$). Схема течения изображена на рис. 33. Толщина потока (размер по оси z) предполагается равной единице.

Объемный расход жидкости через NM можно представить как сумму расходов через KM и NK . Длина отрезка KM равна dy , а отрезка NK равна $-dx$. Составляющие скорости $\vec{w}$, нормальные к этим площадкам (на чертеже — к отрезкам), равны w_x и w_y . Следовательно,

$$dV_{сек} = w_x dy - w_y dx = d\psi.$$

Значит изменение величины функции тока при переходе от одной линии тока к другой, равно объемному расходу жидкости в полосе, лежащей между этими линиями тока.

В потоке можно провести такие линии, на которых значения потенциала скорости будут одними и теми же. Они называются *эквипотенциальными линиями*. (В пространственном

потоке рассматриваются эквипотенциальные поверхности, а не линии). Уравнение семейства эквипотенциальных линий имеет вид

$$\varphi(x, y) = C. \quad (4.16)$$

Производная от потенциала скорости, взятая по направлению эквипотенциальной линии, равна нулю. Это значит, что скорость потока направлена нормально эквипотенциальной линии (составляющая вдоль этой линии равна нулю). Поэтому линии тока и линии равного потенциала взаимно ортогональны; это можно видеть на рис. 33, где они изображены соответственно сплошными и пунктирными линиями.

В отличие от потенциального, при вихревом движении жидкости ее частицы не только перемещаются в пространстве, но и вращаются вокруг собственных осей. Это вращение частиц характеризуется вектором угловой скорости $\vec{\omega}$, либо вектором вихря скорости $\vec{\Omega}$.

По аналогии с линиями тока, при изучении вращательного движения вводится понятие *вихревых линий*. В каждой точке вихревой линии вектор $\vec{\omega}$ или $\vec{\Omega}$ направлен по касательной к ней. Объемный пучок вихревых линий представляет собой вихревую трубку или вихревой шнур.

Внутри конечных объемов жидкости различные частицы могут вращаться с разными скоростями и даже в разные стороны. Поэтому, в отличие от твердого тела, во всех точках которого угловая скорость имеет одно и то же значение, в конечных объемах жидкости нельзя характеризовать вращательное движение вектором угловой скорости. Для этой цели вводится специальная величина, называемая *циркуляцией скорости*.

Циркуляцию скорости можно вычислять по любому участку произвольной кривой, проведенной в жидкости, или по замкнутой кривой. В первом случае ее называют циркуляцией скорости по дуге или течением скорости, во втором — циркуляцией по замкнутому контуру. Для элементарного участка она определяется как

$$d\Gamma = \omega_s ds = \omega \cos \alpha ds. \quad (4.17)$$

Обозначения приведены на рис. 34. Для отрезка дуги ACB циркуляция вычисляется как криволинейный интеграл

$$\Gamma_{AB} = \int_{AB} \omega_s ds = \int_{AB} \omega \cos \alpha ds, \quad (4.18)$$

а для замкнутого контура AA — как круговой интеграл

$$\Gamma = \oint_{AA} \omega_s ds = \oint \omega_s ds = \oint \omega \cos \alpha ds. \quad (4.19)$$

Если рассмотреть вращение твердого тела, например диска (рис. 35), то нетрудно установить, что

$$\Gamma = 2\pi r\omega = 2\pi r\Gamma\omega_n = 2\pi r^2\omega_n = 2\sigma\omega_n,$$

откуда

$$\omega_n = \frac{\Gamma}{2\sigma}. \quad (4.20)$$

Для жидкости эта зависимость может применяться только к бесконечно малым объемам, для которых циркуляция по бесконечно малому контуру будет $d\Gamma$, а площадка, охваченная этим контуром $d\sigma$, т. е. формула (4.20) приобретает такой вид

$$\omega_n = \frac{1}{2} \frac{d\Gamma}{d\sigma}. \quad (4.21)$$

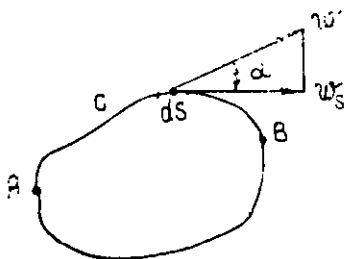


Рис. 34

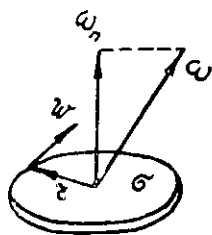


Рис. 35

Можно доказать, что эта зависимость справедлива не только для окружности, но и для контура любой формы^{*)}. Распространение этой формулы на конечные объемы жидкости делается с помощью *теоремы Стокса*, которая формулируется следующим образом:

Циркуляция скорости по замкнутому контуру, проведенному в жидкости, равна полному потоку вихря через площадь, охваченную контуром, если этот контур можно стянуть в точку, не выходя за пределы жидкости.

Вторая часть этой формулировки определяет условия, при которых справедлива теорема: внутри контура не должно быть твердых тел или пустот, только в этом случае контур можно стянуть в точку, не выходя за пределы жидкости. Первая часть — дает связь между циркуляцией и потоком вихря.

^{*)} Такие доказательства можно найти в любом учебнике по аэродинамике.

т. е. величиной $\oint \Omega_n d\sigma = 2 \oint \omega_n d\sigma$. Легко заметить, что по смыслу эта величина имеет аналогию с объемным расходом (1. 16), только вместо вектора скорости, берется вектор угловой скорости или вихря скорости. Таким образом, формула Стокса имеет вид *)

$$\Gamma = 2 \oint \omega_n d\tau. \quad (4.22)$$

Теорема Стокса позволяет по известному распределению угловых скоростей находить циркуляцию скорости, по которой можно судить об интенсивности вращения конечных объемов жидкости.

В практических расчетах и исследованиях имеют большое значение два следствия из теоремы Стокса.

Первое следствие. Если внутри некоторой области движение жидкости является безвихревым, то циркуляция скорости по любому замкнутому контуру, проведенному в этой области, равна нулю. И наоборот, если по любому контуру циркуляция равна нулю, то эта область — безвихревая.

Второе следствие. Если контур охватывает несколько вихревых областей, то циркуляция по этому контуру равна алгебраической сумме циркуляций по контурам, охватывающим каждую вихревую область отдельно.

Вихревое движение не может самопроизвольно возникать или уничтожаться, для этого нужны особые условия. Это свойство накладывает определенный отпечаток на формы вихревых шнуров, которые могут быть в жидкости. Указанные особенности вихревого движения сформулированы в следующих теоремах.

Теорема Гельмгольца. *Циркуляция скорости по всей длине вихревого шнура в идеальной жидкости остается постоянной.*

Согласно этой теореме, по любому контуру, охватывающему вихревую трубку в любом месте, циркуляция скорости одна и та же. Следовательно, вихревые шнуры в жидкости не могут начинаться или кончаться, а могут только либо простирались своими концами в бесконечность, либо замыкаться концами на поверхности раздела или на твердые стенки, либо замыкаться сами на себя, образуя кольца (рис. 36). Вихревые шнуры, сбегающие с концов крыльев самолета и уходящие на большое расстояние назад, водяные смерчи, водяные воронки, сбегающие с концов весел, хорошо известные гребцам, дымо-

*) Доказательства теорем о вихрях — теорем Стокса, Гельмгольца и Томсона — здесь не приводятся. Они достаточно просты. При желании их можно найти в любом учебнике по аэродинамике, см. напр.: Н. С. Аржанников и В. Н. Мальцев. Аэродинамика. М., Оборонгиз, 1956.

вые кольца — все это является хорошими иллюстрациями возможных форм вихревых шнуров. То обстоятельство, что вихревые шнуры от крыла самолета все-таки не уходят в бесконечность, а сохраняются только на конечном, хотя и очень большом расстоянии, объясняется влиянием вязкости (теорема Гельмгольца доказана для идеальной жидкости!), в результате действия которой вихревое движение затухает. Эти явления учитываются в следующей теореме.

Теорема Томсона. Если: 1) силы, действующие в жидкости, имеют потенциал, 2) поле скоростей непрерывно, 3) термодинамический процесс одинаков по всему объему, то циркуляция скорости по любому замкнутому жидкому контуру не изменяется с течением времени, т. е.

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0. \quad (4.23)$$

Здесь, в первой части теоремы, сформулированы условия, при которых она справедлива. Во второй части констатируется, что вихри не могут ни возникать, ни исчезать, для этого нужны определенные условия, а именно факторы, которые бы нарушали положения, высказанные в первой части теоремы. Хорошо известно, что в природе и в технике вихри возникают и уничтожаются. Каждый такой акт связан с нарушением того или иного условия теоремы.

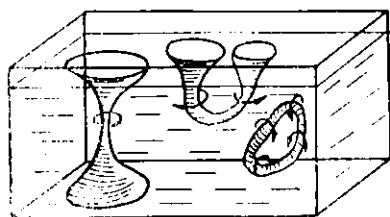


Рис. 36

Например, водовороты, возникающие за кормой катера, появляются в результате действия сил трения — сил, не имеющих потенциала *); вихри за ударными волнами появляются вследствие нарушения непрерывности поля скоростей; вихри, неожиданно возникающие и затем исчезающие, которые можно наблюдать у поверхности земли в жаркие и тихие летние дни, обязаны своим происхождением неравномерному нагреву земли, т. е. неодинаковому термодинамическому процессу по объему. Заметим, что в данной теореме циркуляция скорости рассматривается по жидкому контуру, т. е. по такому, который состоит из одних и тех же частиц жидкости и плывет вместе с ней.

*) О потенциале сил см. гл. I, § 4, где рассматривается интегрирование уравнений движения. О механизме появления вихрей при обтекании тел сведения приводятся в гл. VI, § 7.

С помощью теоремы Стокса легко исследовать, какой характер имеет движение — вихревой или безвихревой — и какова интенсивность вихрей. С помощью теоремы Томсона можно проследить за судьбой движения в данном месте жидкости: перейдет оно из безвихревого в вихревое (или наоборот) или не перейдет.

§ 2. ПЛОСКИЙ ПОТЕНЦИАЛЬНЫЙ ПОТОК НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

В теории плоского потенциального потока применяется *метод потенциальных полей*. Он состоит в том, что сначала устанавливается ряд простейших потенциальных полей, для которых определяются потенциал скорости и функция тока, затем из простейших синтезируются сложные поля, соответствующие изучаемым потокам.

К числу простейших потенциальных полей относятся: плоскопараллельный поток, источник, сток, диполь, потенциальный вихрь, а также некоторые другие, которые здесь не рассматриваются.

Приведем выражения для потенциала скорости и функции тока перечисленных выше простейших потенциальных полей, а также установим, какую форму имеют эквипотенциальные линии и линии тока для каждого из них.

1. Плоскопараллельный поток. Потенциал скорости и функция тока записываются уравнениями прямых линий

$$\varphi = ax + by, \quad (4.24)$$

$$\psi = ay - bx. \quad (4.25)$$

Если положить $\psi = C$, то из (4.25) имеем

$$y = \frac{b}{a}x + \frac{c}{a},$$

откуда следует, что угловой коэффициент линий тока равен

$\frac{b}{a}$, а отрезки, отсекаемые ими на оси y равны $\frac{C}{a}$. Схема потока приведена на рис. 37.

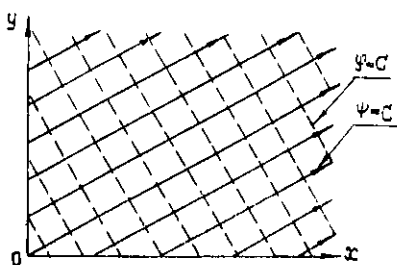


Рис. 37

2. Источник и сток. Источник изображен на рис. 38 слева. Он помещен там в начале координат. Из начала координат (как из источника, вытекающего из под земли) жидкость вы-

ходит на плоскость xy и равномерно растекается во все стороны. Линии тока представляют собой лучи, исходящие из начала координат. Эквипотенциальные линии — окружности, concentричные относительно начала координат. Формулы потенциала скорости и функции тока для источника имеют вид

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{Q}{2\pi} \ln r, \quad (4.26)$$

$$\psi = \frac{Q}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \frac{Q}{2\pi} \theta, \quad (4.27)$$

где r и θ — переменные в полярной системе координат. Величина Q называется мощностью источника и характеризует его интенсивность. По смыслу это — объемный расход жидкости, вытекающий из источника.

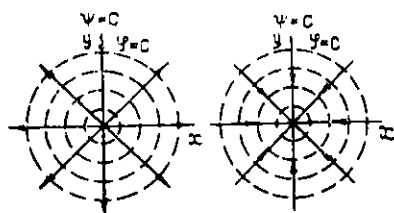


Рис. 38

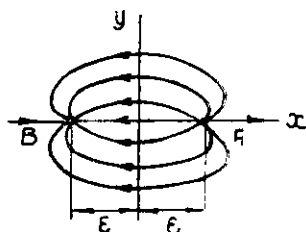


Рис. 39

Убедиться в справедливости формул (4.26) и (4.27) можно, проанализировав их подобно тому, как это было сделано в предыдущем случае.

Сток представляет собой течение, обратное источнику: движение направлено не от центра к периферии, а от периферии к центру (рис. 38 справа).

3. Диполь. Если источник и сток поместить в точках A и B на оси x по обе стороны от начала координат на расстоянии ϵ , то получится течение, линии тока которого изображены на рис. 39. При стягивании источника и стока к началу координат, т. е. при уменьшении ϵ , линии тока будут деформироваться, приближаясь по форме к окружностям. Если $\epsilon \rightarrow 0$, то в пределе получится поток, называемый диполем. Однако, если не принять дополнительных мер, то при $\epsilon = 0$ течение вообще исчезнет, так как вся та жидкость, которая будет вытекать из начала координат — из источника, будет тут же уходить в сток, поскольку и тот и другой расположены в одной точке. Чтобы течение при этом сохранилось, надо увеличить Q до бес-

конечности, т. е. одновременно со стремлением ϵ к нулю нужно Q стремиться к бесконечности. Тогда течение принимает вид, представленный на рис. 40, а формулы потенциала скорости и функции тока —

$$\varphi = \frac{M}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{M}{2\pi} \frac{\cos \theta}{r}, \quad (4.28)$$

$$\psi = -\frac{M}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{M}{2\pi} \frac{\sin \theta}{r}, \quad (4.29)$$

где величина M называется моментом диполя, характеризует его интенсивность и равна

$$M = \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ Q \rightarrow \infty}} 2Q\epsilon. \quad (4.30)$$

Вывод формул (4.28) и (4.29) здесь не приводится.

Из рис. 40 видно, что как линии тока, так и эквипотенциальные линии представляют системы окружностей, имеющих точку касания в начале координат.

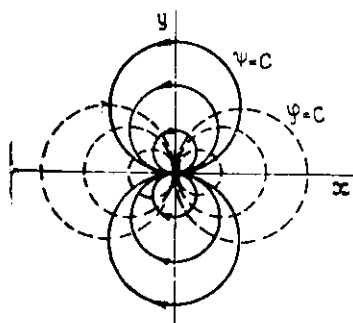


Рис. 40

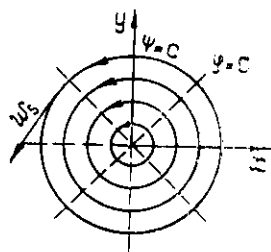


Рис. 41

4. Потенциальный вихрь. Потенциальный вихрь, иначе течение в поле вихря, получается, если координатную плоскость пересечь в начале координат вихревой линией. На плоскости получается вихревая точка, которая индуцирует вокруг себя поле скоростей. Линии тока имеют вид концентрических окружностей с центром в начале координат, а линии равного потенциала — вид лучей, исходящих из начала координат. Схема течения дана на рис. 41. Если сопоставить рис. 38 и рис. 41 по чисто формальным признакам, то нетрудно заме-

тить, что для потенциального вихря линии тока и эквипотенциальные линии можно получить, поменяв местами соответствующие линии в источнике. Очевидно такую «перемену местами» следует произвести и в формулах. Тогда последние принимают такой вид:

$$\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta, \quad (4.31)$$

$$\psi = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r. \quad (4.32)$$

Вместо величины, характеризующей интенсивность источника Q , здесь введена величина, характеризующая интенсивность вихря, а именно, циркуляция скорости Γ .

Данный вид течения обладает той особенностью, что во всех точках, за исключением начала координат, движение является безвихревым и только в начале координат — вихревым. Отдельные частицы жидкости, описывая круговые траектории, сами при этом не вращаются, а перемещаются поступательно (подобно тому, как линейки в чертежной машине перемещаются параллельно самим себе, если головку передвигать по окружности).

Поскольку все линии тока охватывают только одну вихревую линию, т. е. поток вихря остается одним и тем же для любого контура, то и циркуляция скорости по каждой линии тока согласно теореме Стокса будет одной и той же: $\Gamma = \text{const}$. Тогда $\Gamma = 2\pi r\omega_s = \text{const}$ или

$$r\omega_s = \text{const}.$$

Это уравнение было получено другим путем в главе III (3. 47). Сейчас становится вполне ясным, почему оно носит названия: «закон постоянства циркуляции» и «закон потенциального вихря».

Из простейших потенциальных течений можно синтезировать сложные. Это достигается алгебраическим суммированием потенциалов скорости составляющих потоков. Результирующий поток получается также потенциальным. Действительно, если потенциалы скоростей составляющих потоков сложить

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi$$

и от полученной суммы взять частные производные второго порядка и сложить их, то

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} \right) = 0.$$

Следовательно, величина φ удовлетворяет уравнению Лапласа, т. е. полученный поток является потенциальным.

Векторы скорости в каждой точке результирующего потока представляют собой геометрические суммы векторов скорости, взятых в соответствующих точках составляющих потоков. В этом нетрудно убедиться, рассматривая проекции скорости, а именно:

$$w_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (\varphi_1 + \varphi_2) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = w_{x1} + w_{x2},$$

$$w_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (\varphi_1 + \varphi_2) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = w_{y1} + w_{y2}.$$

Аналогичным свойством обладает и функция тока. Для сложного потока она получается алгебраическим суммированием функций тока составляющих потоков.

Применение метода наложения потенциальных полей рассмотрим на примере поперечного обтекания цилиндра плоскопараллельным потоком идеальной несжимаемой жидкости. Конечной целью этой задачи является определение силы, действующей на цилиндр со стороны жидкости. Схема обтекания изображена на рис. 42. Обтекание цилиндра изучается только в одной плоскости xu . Это вполне допустимо для цилиндра бесконечной длины, в каждом поперечном сечении которого картина обтекания идентична. У цилиндра конечной длины наблюдается искажение вблизи концов, но в центральной части течения можно считать плоским. Таким образом, задача сводится к изучению обтекания круга в плоскости xu .

Поток, который получается при обтекании круга, хорошо синтезируется из двух простейших потенциальных полей: плоскопараллельного потока и диполя в начале координат. Если скорость невозмущенного потока w_0 направить по оси x , то формулы потенциала скорости и функции тока для плоскопараллельного течения принимают вид

$$\varphi_1 = ax = w_0 x,$$

$$\psi_1 = ay = w_0 y.$$

Значение коэффициента a найдено здесь следующим путем:

$$a = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, \text{ но } \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = w_x = w_0, \text{ т. е. } a = w_0.$$

Для диполя φ и ψ записываются формулами (4. 28) и (4. 29), в которых значение момента диполя удобно принять равным $M = 2\pi r_0^2 w_0$, тогда

$$\varphi_2 = \frac{M}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} = \omega_0 r_0^2 \frac{x}{x^2 + y^2},$$

$$\psi_2 = -\frac{M}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} = -\omega_0 r_0^2 \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Потенциал скорости и функция тока суммарного течения запишутся так:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \omega_0 \left[x + r_0^2 \frac{x}{x^2 + y^2} \right], \quad (4.33)$$

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = \omega_0 \left[y - r_0^2 \frac{y}{x^2 + y^2} \right]. \quad (4.34)$$

Чтобы показать, что этот поток действительно отвечает обтеканию цилиндра, выделим из семейства линий тока $\psi = C$ одну, для которой $C = 0$, т. е.

$$\psi = \omega_0 \left[y - r_0^2 \frac{y}{x^2 + y^2} \right] = \omega_0 y \left(1 - \frac{r_0^2}{x^2 + y^2} \right) = 0.$$

Этому уравнению отвечают решения:

- 1) $y = 0$ — уравнение оси x ,
- 2) $x^2 + y^2 = r_0^2$ — окружность, радиуса r_0 .

Таким образом, выделенная линия тока полностью воспроизводит контур обтекаемого круга. Придавая константе C другие численные значения, можно найти все остальные линии тока.

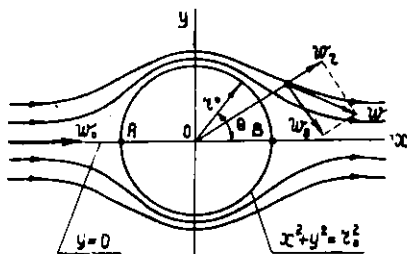


Рис. 42

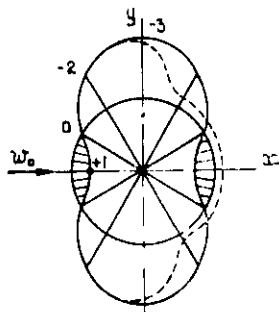


Рис. 43

Найдем распределение скоростей и давлений на поверхности цилиндра и по распределению давлений определим искомую силу. Для этого удобно перейти в полярную систему координат, пользуясь известными соотношениями

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta, \\ y &= r \sin \theta. \end{aligned}$$

Выражение потенциала скорости (4. 33) в полярной системе координат принимает такой вид:

$$\varphi = w_0 \cos \theta \left(r + \frac{r_0^2}{r} \right). \quad (4.35)$$

Взяв производные по r и по θ , найдем

$$w_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = w_0 \cos \theta \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right),$$

$$w_s = \frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -w_0 \sin \theta \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right).$$

При $r=r_0$, т. е. на линии тока, вплотную примыкающей к стенке цилиндра,

$$w_r = 0,$$

$$w_s = -2w_0 \sin \theta. \quad (4.36)$$

В точках A и B , т. е. при $\sin \theta = 0$, $w_s = 0$ и так как здесь и $w_r = 0$, то $w = 0$. Точки A и B называются передней и задней критическими точками, или точками разветвления. В этих точках скорость равна нулю.

Для определения давления на стенке ($r=r_0$) воспользуемся уравнением Бернулли, взятым в форме (1. 35). В плоскости xy , расположенной горизонтально, $z = \text{const}$, следовательно,

$$\frac{p}{\rho} + \frac{w^2}{2} = \frac{p_0}{\rho} + \frac{w_0^2}{2} = \text{const},$$

откуда найдем

$$p - p_0 = \frac{\rho}{2} w_0^2 \left(1 - \frac{w^2}{w_0^2} \right).$$

Для удобства расчетов вводится безразмерная величина

$$\bar{p} = \frac{p - p_0}{\frac{\rho w_0^2}{2}}, \quad (4.37)$$

называемая коэффициентом давления. Используя ее, можно предыдущее равенство привести к следующему виду с учетом выражения (4. 36):

$$\bar{p} = 1 - \frac{w^2}{w_0^2} = 1 - 4 \sin^2 \theta. \quad (4.38)$$

Значения коэффициента давления при различных полярных углах приведем ниже:

θ	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{2}{6}\pi$	$\frac{3}{6}\pi$	$\frac{4}{6}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{6}{6}\pi$	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{8}{6}\pi$	$\frac{9}{6}\pi$	$\frac{10}{6}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	$\frac{12}{6}\pi$
$\bar{p}+1$	0	-2	-3	-2	0	+1	0	-2	-3	-2	0	+1	0

На рис. 43 построена полярная диаграмма распределения $\bar{p}$ по окружности. Принцип построения такой: за нулевую линию принят контур окружности цилиндра, положительные значения $\bar{p}$ откладываются по радиусу внутрь окружности, отрицательные — по радиусу наружу. Полученные точки соединяются плавной кривой. Эта кривая образует симметричную фигуру, которая на чертеже изображена сплошной линией.

Для определения силы, действующей на цилиндр, нужно было бы просуммировать силы давления по окружности и найти их равнодействующую. Однако, пользуясь тем, что эпюра коэффициента давления симметрична относительно обеих координатных осей, можно сразу установить, что все силы давления взаимно уравниваются и равнодействующая будет равна нулю.

Полученный результат (сила, действующая со стороны жидкости на обтекаемый цилиндр, равна нулю) называется *парадоксом Эйлера-Даламбера*. Парадокс состоит в несоответствии теоретического результата и действительности: хорошо известно, что если опустить в поток воды цилиндрический стержень, то силу, действующую на него, можно ощутить и измерить. Попытки объяснить этот парадокс действием сил трения на стенки цилиндра, равнодействующая которых направлена по потоку, были безуспешны: расчетное значение силы получалось во много раз меньше измеренного в опыте. Ответ на вопрос дает эпюра распределения давлений (или коэффициента давления) по окружности цилиндра, полученная экспериментальным путем. На фронтальной части цилиндра она хорошо совпадает с расчетной, но на тыловой — сильно отличается. На рис. 43 экспериментальная кривая изображена пунктирной линией. Легко заметить, что в действительности на тыловой части круга получается не повышенное давление, как в теоретическом случае (см. заштрихованную зону на рис. 43), а, наоборот, пониженное. Таким образом, эпюра давлений сохраняет симметрию только относительно оси x , но относительно оси y последняя нарушается: на фронтальную часть действует большая сила давления, чем на тыловую, поэтому равнодействующая направлена назад, т. е. по потоку. Эта равнодействующая называется силой сопротивления давления. Она

весьма значительна у плохо обтекаемых тел и весьма мала у хорошо обтекаемых тел, имеющих форму капли или фюзеляжа самолета. Причиной появления асимметрии в эпюре давлений является отрыв потока на тыловой стороне тела, который возникает под влиянием сил вязкости.

§ 3. ТЕОРЕМА Н. Е. ЖУКОВСКОГО О ПОДЪЕМНОЙ СИЛЕ

Теорема Н. Е. Жуковского устанавливает связь между подъемной силой, скоростью набегающего потока и циркуляцией скорости. Создателям первых самолетов не были известны причины появления подъемной силы при обтекании крыла, и они строили свои машины без расчета, вслепую. Н. Е. Жуковский объяснил это явление и дал метод расчета подъемной силы, сначала для вращающегося цилиндра, а потом и для крыла. Теорему о подъемной силе он впервые доложил на заседании Московского математического общества в 1905 году, и с тех пор она широко применяется не только при расчете самолетных крыльев, но и при расчетах и исследованиях лопастей гребных винтов, вентиляторов, лопаток турбин и осевых компрессоров. В настоящем параграфе рассматривается эта теорема применительно к вращающемуся цилиндру, а также некоторые методы, с помощью которых можно определять подъемную силу и для более сложных случаев — для обтекания профиля крыла самолета.

Еще до работ Н. Е. Жуковского в физике был известен *эффект Магнуса*. Он выражается в появлении боковой силы, которая действует на вращающееся тело при обтекании его потоком, движущимся поперек оси вращения. Этот эффект хорошо известен спортсменам-волейболистам и теннисистам: при подаче «крученого» мяча его траектория отклоняется от обычной в ту или другую сторону, в зависимости от направления вращения.

В результате своих исследований Н. Е. Жуковский установил, что эффект возникновения подъемной силы при поперечном обтекании вращающихся тел объясняется взаимодействием двух движений жидкости — поступательного от набегающего потока и циркуляционного от вращающегося тела.

Для вывода формулы подъемной силы, рассмотрим схему обтекания на рис. 44. В плоскости xu изображено поперечное сечение цилиндра, т. е. круг, центр которого находится в начале координат. Течение принимается плоским (при тех же допущениях, которые были сделаны в предыдущем параграфе), следовательно, достаточно изучить картину обтекания только в плоскости xu . Круг вращается против часовой стрел-

ки, поэтому на линии тока, примыкающей к наружной стенке, должна быть циркуляция скорости Γ , направленная в ту же сторону. На круг набегают плоскопараллельный поток со скоростью ω_0 , направленной против положительного отсчета координаты x . Жидкость — идеальная несжимаемая.

Такую картину обтекания можно получить, синтезируя течение из трех простейших потенциальных полей: плоскопараллельного потока, диполя в начале координат и потенциального вихря, с центром в начале координат. Потенциал скорости этого сложного потока запишется суммой

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3,$$

где $\varphi_1 + \varphi_2$ можно взять из предыдущей задачи (4.35), изменив знак скорости ω_0 на обратный в связи с тем, что она направлена в сторону, противоположную оси x (в предыдущей задаче ω_0 направлена вдоль оси), т. е.

$$\varphi_1 + \varphi_2 = -\omega_0 \cos \theta \left(r + \frac{r_0^2}{r} \right),$$

а φ_3 согласно формуле (31)

$$\varphi_3 = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta.$$

Следовательно,

$$\varphi = -\omega_0 \cos \theta \left(r + \frac{r_0^2}{r} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi} \theta. \quad (4.39)$$

Взяв частные производные от потенциала скорости, получим радиальную и окружную составляющие скорости

$$w_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\omega_0 \cos \theta \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right), \quad (4.40)$$

$$w_s = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \omega_0 \sin \theta \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi r}. \quad (4.41)$$

Скорость на контуре круга (иначе говоря, на стенке цилиндра), т. е. при $r = r_0$, определится так:

$$w_r = 0, \quad (4.42)$$

$$w_s = 2\omega_0 \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi r_0}. \quad (4.43)$$

В критических точках скорости равны нулю, следовательно их положение можно отыскать, приравняв нулю правую часть (4.43) и решив это уравнение относительно $\sin \theta$, а именно

$$\sin \theta_{кр} = - \frac{\Gamma}{4\pi r_0 \omega_0}. \quad (4.44)$$

Из формулы (4.44) видно, что при отсутствии циркуляции $\sin \theta_{кр} = 0$ и критические точки A и B располагаются на горизонтальном диаметре. Наложение циркуляции смещает критические точки, как это показано на рис. 44, что непосредственно

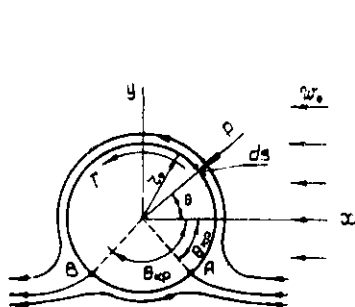


Рис. 44

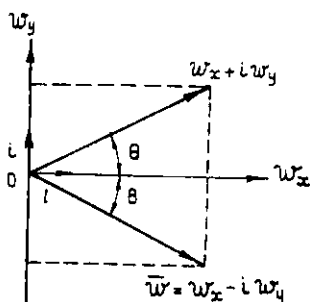


Рис. 45

вытекает из формулы (4.44). При этом нужно заметить, что в случае $\Gamma > 0$ они смещаются вниз ($\sin \theta_{кр} < 0$), а при $\Gamma < 0$ — вверх ($\sin \theta_{кр} > 0$). Это смещение возрастает с ростом Γ или с уменьшением ω_0 .

Если составить функцию тока суммарного течения и приравнять ее постоянной величине C , то, придавая C различные численные значения, можно построить линии тока. Последние имеют вид, изображенный на рис. 44. Линия тока, непосредственно охватывающая круг ($r = r_0$), получается при значении

$$C = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r_0.$$

Для определения силы, действующей на цилиндр, надо просуммировать силы давления по окружности, принимая размер потока по оси z равным единице. Проекции главного вектора сил давления на координатные оси определяются следующим образом:

$$P_x = - \int_0^{2\pi} p ds \cos \theta, \quad (4.45)$$

$$P_y = - \int_0^{2\pi} p ds \sin \theta. \quad (4.46)$$

Давления здесь рассчитываются по уравнению Бернулли (1.35), которое при $z = \text{const}$ можно записать в виде

$$\rho + \rho \frac{w^2}{2} = C$$

или

$$\rho = C - \rho \frac{w^2}{2}. \quad (4.47)$$

Подставив найденное таким образом значение давления в (4.45) и (4.46), получим

$$P_x = - \int_0^{2\pi} \left(C - \frac{\rho w^2}{2} \right) r_0 \cos \theta d\theta, \quad (4.48)$$

$$P_y = - \int_0^{2\pi} \left(C - \frac{\rho w^2}{2} \right) r_0 \sin \theta d\theta. \quad (4.49)$$

Подсчитаем сначала P_y , взяв значения скорости именно в том месте, где определяются давления, т. е. при $r = r_0$. Тогда скорость можно выразить по формуле (4.43). Сделав соответствующую подстановку в (4.49) и проведя небольшие преобразования, приведем это выражение к следующему виду:

$$P_y = -Cr_0 \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta + 2\rho r_0 \omega_0 \int_0^{2\pi} \sin^3 \theta d\theta + \frac{\rho r_0}{2} \frac{2\omega_0}{\pi r_0} \Gamma \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta + \\ + \frac{\rho}{2} r_0 \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 r_0^2} \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta.$$

Так как $\int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta = \int_0^{2\pi} \sin^3 \theta d\theta = 0$, а $\int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \pi$,

то

$$P_y = \rho \omega_0 \Gamma. \quad (4.50)$$

Полученный результат называется *формулой Жуковского для определения подъемной силы*.

Если сделать аналогичный расчет для P_x , преобразуя (4.49), то получим

$$P_x = 0. \quad (4.51)$$

К этому результату можно было прийти и не прибегая к вычислениям, а просто заметив, что картина обтекания круга

симметрична относительно оси y , следовательно, и симметрична эпюра давлений.

Формулы (4. 50) и (4. 51) показывают, что подъемная сила направлена по оси y , а сила сопротивления отсутствует. Итак, можно следующим образом сформулировать *теорему Н. Е. Жуковского*:

При циркуляционном обтекании цилиндра идеальной несжимаемой жидкостью на цилиндр действует подъемная сила, нормальная скорости набегающего потока и равная произведению скорости на плотность жидкости и на циркуляцию.

Для определения направления подъемной силы надо вектор скорости повернуть на прямой угол в сторону, обратную циркуляции.

При определении подъемной силы тел сложной формы, например профиля крыла самолета, возникают два вопроса: во-первых, неясно, какими простейшими полями нужно синтезировать сложный поток, т. е. неизвестно, как отыскать потенциал скорости. Во-вторых, неизвестен способ нахождения циркуляции. Первую трудность удастся значительно уменьшить путем применения метода конформных отображений. Что касается циркуляции скорости, то ее определение стало возможным лишь после появления *постулата Жуковского-Чаплыгина об обтекании заднй кромки крыла*.

Метод конформных отображений построен на теории функций комплексного переменного. Эта теория применима к потенциалу скорости и функции тока. Действительно, сопоставляя между собой формулы (4. 5) и (4. 13), нетрудно заметить, что потенциал скорости и функция тока связаны между собой соотношениями

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= - \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (4.52)$$

Уравнения (4. 52) в теории функций комплексного переменного называются *условиями Коши-Римана*. Поскольку φ и ψ удовлетворяют условиям Коши-Римана, то выражение

$$\varphi + i\psi$$

является аналитической функцией комплексного переменного

$$z = x + iy,$$

т. е.

$$\varphi + i\psi = W(z) = W(x + iy).$$

Функция $W(z)$ называется комплексным потенциалом.

Каждое потенциальное течение может быть записано комплексным потенциалом, например:

плоскопараллельный поток *) $W(z) = az$,

источник $W(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln z$,

диполь $W(z) = \frac{M}{2\pi} \frac{1}{z}$,

потенциальный вихрь $W(z) = -i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln z$.

Убедиться в справедливости этих формул можно непосредственной подстановкой и последующим разделением действительной и мнимой части. Приведем пример только для случая плоскопараллельного потока.

$$W(z) = az = (a_1 - ia_2)(x + iy) = a_1x - ia_2x + ia_1y + a_2y = \\ = a_1x + a_2y + i(a_1y - a_2x) = \varphi + i\psi,$$

так как

$$\varphi = a_1x + a_2y,$$

$$\psi = a_1y - a_2x.$$

(В формулах (4.24) и (4.25) коэффициенты a и b — также постоянные величины, соответствующие a_1 и a_2 .)

Производная от комплексного потенциала по комплексному переменному записывается известной формулой

$$\frac{dW}{dz} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - i \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \quad (4.53)$$

На основании соотношений (4.5) и (4.13) это можно представить еще в таком виде:

$$\frac{dW}{dz} = w_x - iw_y = \bar{w}. \quad (4.54)$$

Полученная величина называется комплексной скоростью $\bar{w}$. Модуль комплексной скорости равен абсолютной величине самой скорости

$$\left| \frac{dW}{dz} \right| = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = w. \quad (4.55)$$

*) Здесь $a = a_1 - ia_2$ (a_1 и a_2 — постоянные).

На рис. 45 дано геометрическое представление комплексной скорости. По оси абсцисс отложена горизонтальная проекция скорости w_x . Эта ось — вещественная, единицей измерения здесь является вещественная единица. По оси ординат отложена величина $i w_y$. Единицей измерения по этой оси является i . Если построить вектор $w_x + i w_y$, то комплексная скорость получается как его зеркальное отображение. Из чертежа видно, что

$$w_x = w \cos \theta,$$

$$w_y = w \sin \theta.$$

Эти соотношения позволяют комплексной скорости (4.54) придать еще такой вид:

$$\overline{w} = \frac{dW}{dz} = w (\cos \theta - i \sin \theta) = w e^{-i\theta}. \quad (4.56)$$

Удобство применения комплексного потенциала состоит в том, что вместо двух функций ϕ и ψ все расчеты ведутся только с одной функцией — комплексным потенциалом. Но дело не только в этом.

При исследовании обтекания тел сложной формы, как уже отмечалось, бывает очень затруднительно найти потенциал скорости и функцию тока, а значит и комплексный потенциал. Но здесь приходит на помощь метод конформных отображений. Он применим, если расчет ведется в комплексных переменных — с использованием комплексного потенциала.

Краткое содержание метода конформных отображений заключается в следующем^{*)}. Если в плоскости z комплексного переменного $z = x + iy$ изобразить какую-нибудь фигуру (круг, эллипс, отрезок прямой), то каждой точке этой фигуры будет отвечать определенное значение переменного z . Зададим некоторую функцию

$$\xi = f(z), \quad (4.57)$$

которая должна быть аналитической, т. е. однозначной и дифференцируемой во всех точках рассматриваемой области. Такое задание означает переход к новому комплексному переменному

$$\xi = \xi + i\eta, \quad (4.58)$$

которое можно отыскать в новых координатных осях $\xi\eta$. Таким образом, каждой точке на контуре фигуры в плоскости z

^{*)} Более подробные сведения о преобразованиях комплексного переменного, применяемых в аэро- и газодинамике, а также о методе конформных отображений можно найти в учебниках по аэродинамике, см. напр.: Н. С. Аржаников и В. Н. Мальцев. Аэродинамика. М., Оборонгиз, 1956.

будет отвечать вполне определенная точка в плоскости ζ (так как z и ζ связаны однозначной зависимостью (4. 57) и по координатам точки в плоскости z всегда можно рассчитать координаты точки в плоскости ζ). Совокупность последних образует свою фигуру в плоскости ζ , которая, вообще говоря, будет отличаться от исходной, построенной в плоскости z . Такое изменение контура исходной фигуры является конформным отображением. Характер изменения зависит от вида функции (4. 57), которая называется отображающей. Одним свойством всех конформных отображений является та особенность, что в процессе преобразования бесконечно малые элементы контура фигуры остаются геометрически подобными, углы между касательными в точке пересечения двух каких-либо кривых остаются одинаковыми, но в целом контур искажается, так как его элементы получают растяжение, сжатие, поворот или смещение. Применяя конформное отображение, можно, например, круг превратить в эллипс или в отрезок прямой. При выборе подходящей отображающей функции удастся круг или отрезок прямой преобразовать в профиль самолетного крыла. Функция, позволяющая получить из круга профиль крыла, была найдена Н. Е. Жуковским и называется его именем. Н. Е. Жуковским и С. А. Чаплыгиным таким способом была получена целая серия авиационных профилей, называемых *теоретическими профилями*.

Преобразование одной фигуры в другую само по себе не представляет большого интереса. Его можно было бы провести и не прибегая к комплексным переменным. Ценность метода конформных отображений состоит в том, что вместе с контуром фигуры отображается и обтекающий ее поток. Так, например, если круг отображается в профиль крыла, то и вся картина обтекания круга — сеть эквипотенциальных линий и линии тока — отображается в картину обтекания профиля. Поэтому, вместо того, чтобы изучать обтекание сложного профиля, испытывая большие затруднения при отыскании потенциала скорости, можно перейти в другую плоскость, где получается профиль простой формы, например круг, и рассчитывать этот менее сложный поток, а затем полученные результаты вновь перенести в исходную плоскость.

Нужно заметить, что только теоретические профили Жуковского — Чаплыгина точно отображаются в круг, другие же дают лишь приближенное отображение: круг получается несколько искаженным. Но и в этих случаях метод оказывается полезным для расчетов первого приближения.

Поскольку для круга теорема Н. Е. Жуковского доказана и получена формула подъемной силы, эти результаты могут быть распространены на профиль крыла. Теоретическое исследование

дование этого вопроса показывает, что циркуляция скорости при переходе из плоскости z в плоскость ζ остается той же самой, поэтому формула подъемной силы сохраняет тот же самый вид (4.50).

Если в плоскости комплексного переменного z построить картину бесциркуляционного обтекания круга при произвольном направлении скорости набегающего потока относительно системы координат, то она будет иметь вид, изображенный на рис. 46 слева. Заметим, что передняя и задняя критические точки A и B располагаются в этом случае диаметрально противоположно. Отобразив это течение на плоскость комплекс-

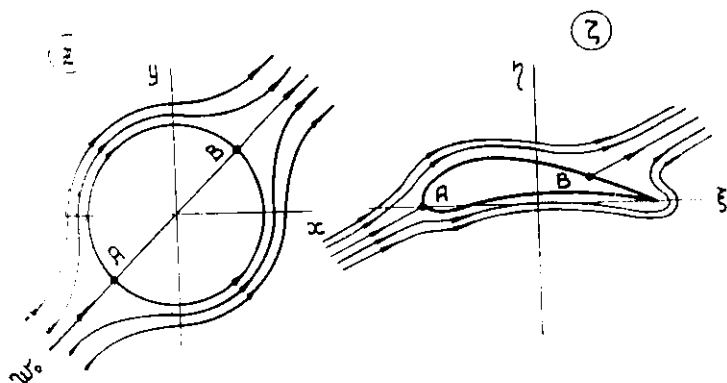


Рис. 46

ного переменного ζ , в которой круг преобразуется в профиль крыла, получим в общем случае картину обтекания, изображенную на рис. 46 справа. Передняя критическая точка располагается в области носка профиля, а задняя — на спинке. Очевидно, что если направление набегающего потока будет изменяться, то будет смещаться и передняя критическая точка A на круге, а следовательно и точка B , поскольку они должны при бесциркуляционном обтекании оставаться диаметрально противоположными друг другу. На профиле также произойдет смещение критических точек A и B , так как при конформном отображении должно соблюдаться их соответствие точкам A и B на круге. При этом обтекание профиля, как и круга, остается бесциркуляционным. Получается абсурд: при любой ориентации профиля относительно набегающего потока крыло не создает подъемной силы, так как нет циркуляции, тогда как из опыта хорошо известно, что подъемная сила существует. Следовательно, бесциркуляционное обтекание профиля невоз-

можно на всех углах атаки ^{*)}, т. е. при любом направлении набегающего потока. Попытка построить картину обтекания профиля с циркуляцией встречает затруднение — невозможность определения циркуляции.

В аэродинамике в течение нескольких лет существовало такое положение, когда в распоряжении конструкторов самолетов имелась формула Н. Е. Жуковского для определения подъемной силы крыла, но они не могли ей пользоваться, потому что не умели находить циркуляцию. В 1909 году С. А. Чаплыгин предложил простой и оригинальный метод определения циркуляции и после обсуждения с Н. Е. Жуковским ввел его в аэродинамику. Метод основан на предположении обоих исследователей о характере обтекания задней кромки крыла. Впоследствии это предположение получило название гипотезы или постулата Жуковского — Чаплыгина.

Сформулировать гипотезу Жуковского — Чаплыгина можно следующим образом:

При безотрывном обтекании крыла стекание струй происходит с задней острой кромки, т. е. задняя критическая точка совпадает с задней острой кромкой.

Отображая круг на профиль и пересчитывая параметры потока, комплексную скорость $\bar{w}_z = \frac{dW}{dz}$ определяют по $\bar{w}_z = \frac{dW}{dz}$ следующим путем:

$$\bar{w}_z = \frac{dW}{dz} = \frac{dW}{dz} \frac{dz}{d\zeta} = \frac{\frac{dW}{d\zeta}}{\frac{dz}{d\zeta}} = \frac{\bar{w}_\zeta}{\frac{dz}{d\zeta}},$$

т. е. связь между ними имеет вид

$$\bar{w}_z = \frac{\bar{w}_\zeta}{\frac{dz}{d\zeta}}.$$

Таким образом, во всех точках на контуре профиля комплексная скорость имеет вполне определенное конечное значение, за исключением задней острой кромки, где она обращается в бесконечность. Математически это получается потому, что именно в этом месте производная $\frac{d\zeta}{dz}$ обращается в нуль. Можно дать

^{*)} Углом атаки называется угол между направлением набегающего потока и направлением хорды — прямой линии, соединяющей носик и заднюю кромку профиля.

следующее физическое объяснение этому явлению. При обтекании закругленной кромки скорости потока распределяются по радиусу по закону свободного вихря (рис. 47): $r\omega = \text{const.}$ Если уменьшать радиус r , стремя его к нулю, то скорость будет неограниченно возрастать, и при $r=0$, когда закругление превращается в острую кромку, она достигает бесконечности.

Вполне понятно, что в действительности скорость не может быть бесконечно большой, следовательно безотрывное обтекание острой кромки невозможно, т. е. картина течения, изображенная на рис. 46 справа, нереальна. Если же, следуя гипотезе Жуковского — Чаплыгина, заднюю критическую точку B , в которой скорость $\bar{\omega}_z = 0$, поместить на профиле в заднюю острую кромку, то

$$\bar{\omega}_z = \frac{\bar{\omega}_z}{d\zeta} = \frac{0}{0},$$

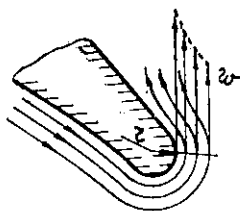


Рис. 47

следовательно, бесконечно больших скоростей не получается.

Сместив заднюю критическую точку на профиле, нужно тоже самое проделать на круге (сравни рис. 46 и 48). Желая сохранить обтекание бесциркуляционным, надо и переднюю критическую точку сместить так, чтобы на круге она располагалась

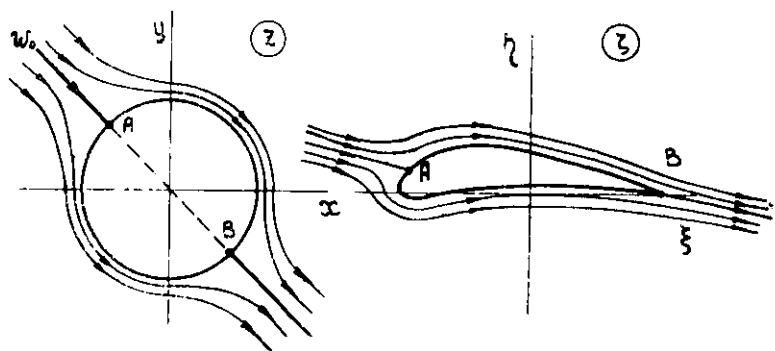


Рис. 48

лась диаметрально противоположно задней. Картина обтекания принимает тогда вид, изображенный на рис. 48. Так как при $\Gamma=0$ подъемная сила не возникает, то этот режим называется режимом нулевой подъемной силы. При выходе на угол атаки нулевой подъемной силы самолет переходит в пикирование. Если увеличить угол атаки крыла, то передняя

критическая точка A будет перемещаться вниз, а задняя B так и останется в задней острой кромке (рис. 49). На круге в этом случае точки A и B разместятся так, что угол между ними будет меньше 2π . Такому расположению критических точек отвечает обтекание цилиндра с циркуляцией, причем при известной величине скорости набегающего потока величина циркуляции получается вполне определенной, что следует из формулы (4. 44). Таким способом, по расположению критиче-

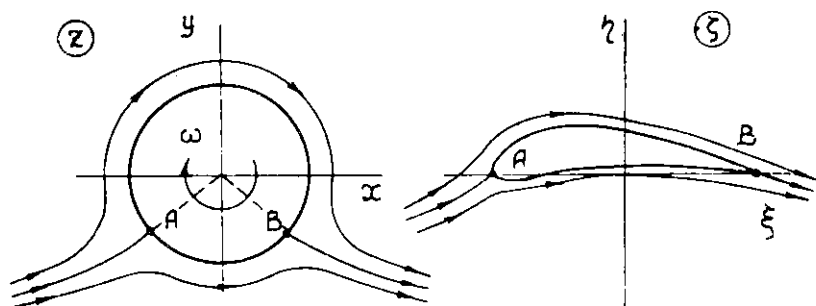


Рис. 49

ских точек на профиле (передняя располагается в зависимости от направления набегающего потока, задняя закрепляется в задней острой кромке), определяется величина циркуляции скорости.

При увеличении угла атаки точка A на профиле перемещается на нижнюю сторону, на круге критические точки сходятся ближе друг к другу, циркуляция возрастает и растет подъемная сила. При отрицательном угле атаки циркуляция получается отрицательной и подъемная сила направлена сверху вниз.

Нужно заметить, что во всех последующих экспериментальных исследованиях гипотеза Жуковского — Чаплыгина очень хорошо подтвердилась.

В заключение рассмотрим, каким образом возникает циркуляция вокруг крыла в начальный период движения — при пуске в ход. Окружив профиль замкнутым контуром (штрихпунктир, рис. 50), определим циркуляцию скорости. При отсутствии движения она равна нулю. Согласно теореме Томсона, циркуляция не должна изменяться со временем, и при начале движения она, казалось бы, появиться не может. Однако внутри контура в это время происходят следующие процессы, если только угол атаки крыла больше угла атаки нулевой подъемной силы. При $\Gamma = 0$ должно происходить обтекание зад-

ней острой кромки. Так как скорость не может достигать бесконечно больших величин, то на задней кромке поток отрывается, образуя вихрь, называемый пусковым, или разгонным вихрем. Циркуляция по контуру, охватывающему пусковой вихрь, не равна нулю, поэтому возникает компенсирующее циркуляционное течение вокруг крыла такой же интенсивности, но направленные в противоположную сторону, так что (см. рис. 50)

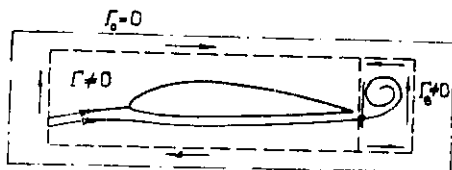


Рис. 50

$$\Gamma_0 = \Gamma + \Gamma_v = 0.$$

По мере развития пускового вихря возрастает и интенсивность циркуляции вокруг профиля Γ . В некоторый момент времени пусковой вихрь отрывается и уплывает вниз по течению, а циркуляция вокруг крыла остается. В этот момент возникает подъемная сила.

§ 4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛА СКОРОСТИ ДЛЯ ГАЗА

Дифференциальное уравнение потенциала скорости несжимаемой жидкости (4. 8) представляет собой уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0.$$

Дифференциальное уравнение потенциала скорости для сжимаемой жидкости имеет более сложный вид. Рассмотрим его для установившегося движения идеального газа. Течение будем считать энергоизолированным изоэнтропным.

Взяв уравнение неразрывности (1. 19), запишем его для двумерного установившегося течения

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho w_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho w_y) = 0$$

или, раскрыв производные

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} w_x + \frac{\partial \rho}{\partial y} w_y + \rho \frac{\partial w_x}{\partial x} + \rho \frac{\partial w_y}{\partial y} = 0. \quad (4.59)$$

Заменим здесь производные $\frac{\partial \rho}{\partial x}$ и $\frac{\partial \rho}{\partial y}$, принимая во внимание, что при изоэнтропном течении $\rho = \rho(p)$ и

$$\frac{\partial \rho}{\partial p} = \frac{d\rho}{dp} = a^2.$$

Тогда

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial p}{\partial x},$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial p}{\partial y}.$$

Частные производные давления заменим их значениями, полученными из уравнений Эйлера (1.27),

$$X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dw_x}{dt},$$

$$Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{dw_y}{dt},$$

в которых пренебрежем ускорениями от массовых сил, положив $X=Y=0$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial x} &= -\frac{1}{a^2} \rho \frac{dw_x}{dt} = -\frac{\rho}{a^2} \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w_x}{\partial y} \frac{dy}{dt} \right) = \\ &= -\frac{\rho}{a^2} \left(w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial y} &= -\frac{1}{a^2} \rho \frac{dw_y}{dt} = -\frac{\rho}{a^2} \left(\frac{\partial w_y}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w_y}{\partial y} \frac{dy}{dt} \right) = \\ &= -\frac{\rho}{a^2} \left(w_x \frac{\partial w_y}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_y}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Подставив эти значения в уравнение (4.59), получим после небольших преобразований и сокращения на ρ следующее уравнение:

$$\begin{aligned} -\frac{w_x^2}{a^2} \frac{\partial w_x}{\partial x} - \frac{w_x w_y}{a^2} \frac{\partial w_x}{\partial y} - \frac{w_x w_y}{a^2} \frac{\partial w_y}{\partial x} - \frac{w_y^2}{a^2} \frac{\partial w_y}{\partial y} + \\ + \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = 0. \end{aligned}$$

Заменим далее проекции скорости w_x и w_y , входящие в производные, их выражениями через потенциал скорости по формулам (4. 5), в результате чего предыдущее уравнение примет такой вид:

$$\left(1 - \frac{w_x^2}{a^2}\right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - 2 \frac{w_x w_y}{a^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \left(1 - \frac{w_y^2}{a^2}\right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0. \quad (4.60)$$

Это есть *дифференциальное уравнение потенциала скорости для установившегося изэнтропного потока газа*. Оно представляет собой уравнение в частных производных второго порядка, нелинейное, с переменными коэффициентами. Иногда его называют квазилинейным, поскольку вторые производные входят в него в линейных сочетаниях.

Если $w_x \ll a$ и $w_y \ll a$, то уравнение (4. 60) приводится к уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0.$$

Следовательно, при малых скоростях движения течение газа можно рассматривать как течение несжимаемой жидкости.

При $w < a$ (4. 60) называется уравнением *эллиптического типа*, при $w = a$ — уравнением *параболического* и при $w > a$ — уравнением *гиперболического типа*. Каждый из типов уравнения имеет свои методы решения. Так, например, для решения уравнения эллиптического типа применяются методы, разработанные С. А. Чаплыгиным, С. А. Христиановичем, Л. Прандтлем и другими учеными. Метод Чаплыгина был предложен в 1896 году и опубликован в его докторской диссертации в 1903 году. В этой работе были заложены основы газовой динамики как самостоятельной науки. Метод Чаплыгина был развит С. А. Христиановичем. Более простой, но менее точный метод был разработан немецким ученым Прандтлем и английским ученым Глауэртом. При решении уравнений гиперболического типа широко используется метод характеристик. Уравнения параболического типа встречаются сравнительно редко — это стык области дозвукового и области сверхзвукового течения, называемый трансзвуковой областью. Для расчета этой области также имеются свои методы.

§ 5. ЛИНЕАРИЗАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПОТЕНЦИАЛА СКОРОСТИ. МЕТОД ПРАНДТЛЯ — ГЛАУЭРТА

Из методов решения уравнения потенциала скорости эллиптического типа рассмотрим наиболее простой, хотя и приближенный, *метод Прандтля — Глауэрта*. Сущность этого ме-

тогда заключается в том, что он устанавливает связь между решениями задач о течении несжимаемой жидкости и газа. Имея такую зависимость, можно широко использовать решения гидродинамических задач, распространяя их на случай течения газа.

Рассматриваемый метод основан на линеаризации дифференциального уравнения потенциала скорости газа. Необходимо сразу же обратить внимание на то, что данный метод пригоден только для расчета обтекания сравнительно тонких тел, когда поперечные составляющие скорости малы по сравнению с продольными и квадратами их можно пренебречь.

На рис. 51 изображены векторы скорости набегающего потока $\vec{w}_0$ и потока в любом месте на поверхности обтекаемого профиля $\vec{w}$. Изменение скорости от $\vec{w}_0$ до $\vec{w}$ условно рассматри-

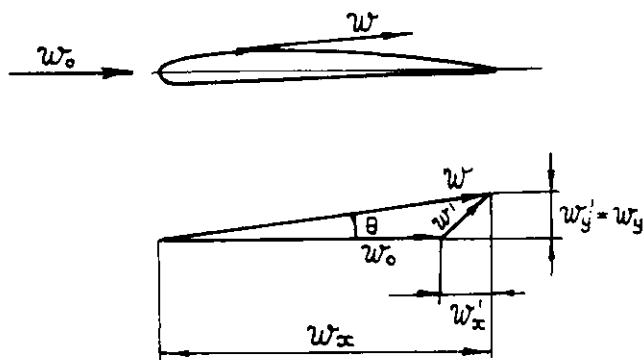


Рис. 51

вается здесь как результат наложения некоторой скорости возмущения $\vec{w}'$ (см. треугольник скоростей на рис. 51). Скорость возмущения имеет проекции w'_x и w'_y . Из треугольника скоростей следует:

$$\left. \begin{aligned} \vec{w} &= \vec{w}_0 + \vec{w}' \\ w_x &= w_0 + w'_x \\ w_y &= w'_y \end{aligned} \right\} \quad (4.61)$$

При малом угле θ (относительно тонкое обтекаемое тело)

$$\frac{w_x'^2}{w_0^2} \cong \frac{w_y'^2}{w_0^2} \cong 0.$$

Исходное уравнение (4. 60) запишем в таком виде:

$$(a^2 - w_x^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - 2w_x w_y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + (a^2 - w_y^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \quad (4.62)$$

Линсаризуем, т. е. приведем к линейному виду, сначала скорость звука a . Из уравнения Бернулли (2. 26), записанного для двух сечений — в набегающем потоке и на поверхности обтекаемого тела,

$$\frac{a_0^2}{k-1} + \frac{w_0^2}{2} = \frac{a^2}{k-1} + \frac{w^2}{2},$$

имеем

$$\begin{aligned} a^2 &= a_0^2 + \frac{k-1}{2} (w_0^2 - w^2) = a_0^2 + \frac{k-1}{2} w_0^2 - \frac{k-1}{2} (w_x^2 + w_y^2) = \\ &= a_0^2 + \frac{k-1}{2} w_0^2 - \frac{k-1}{2} (w_0^2 + 2w_0 w_x' - w_x'^2) - \frac{k-1}{2} w_y'^2, \end{aligned}$$

откуда

$$a^2 = a_0^2 - (k-1) w_0 w_x'. \quad (4.63)$$

После линеаризации вторые производные принимают вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= \frac{\partial w_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (w_0 + w_x') = \frac{\partial w_x'}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} &= \frac{\partial w_y}{\partial y} = \frac{\partial w_y'}{\partial y}. \end{aligned}$$

Линеаризуя далее отдельно первое, второе и третье слагаемые исходного уравнения (4. 62), запишем:

$$\begin{aligned} (a^2 - w_x^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= [a_0^2 - (k-1) w_0 w_x' - w_0^2 - 2w_0 w_x' - w_x'^2] \frac{\partial w_x'}{\partial x} = \\ &= (a_0^2 - w_0^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - (k+1) w_0 w_x' \frac{\partial w_x'}{\partial x} = (a_0^2 - w_0^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \\ 2w_x w_y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} &= 2w_x w_y \frac{\partial w_y}{\partial x} = 2w_x w_y' \frac{\partial w_y'}{\partial x} = 2w_x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{w_y'^2}{2} \right) = 0, \\ (a^2 - w_y^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} &= [a_0^2 - (k-1) w_0 w_x' - w_y'^2] \frac{\partial w_y'}{\partial y} = \\ &= a_0^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - (k-1) w_0 \frac{w_x'}{w_y'} w_y' \frac{\partial w_y'}{\partial y} = a_0^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \end{aligned}$$

так как

$$w_x' \frac{\partial w_x'}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{w_x'^2}{2} \right) = 0,$$

$$w_y' \frac{\partial w_y'}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{w_y'^2}{2} \right) = 0.$$

Подставив эти линеаризованные значения слагаемых в исходное уравнение (4.62), получим

$$(a_0^2 - w_0^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + a_0^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

или после деления всех членов на постоянную величину a_0^2

$$(1 - M_0^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \quad (4.64)$$

Это есть *линеаризованное уравнение потенциала скорости газа*. Действительно, вторые производные входят в него в первой степени, а коэффициент $(1 - M_0^2)$ — это постоянное число. Вполне естественно, что уравнение (4.64) решается легче, чем (4.62). Однако можно решение еще более упростить.

Если перейти в новую систему координат $x_1 y_1$, заменив переменные с помощью следующих соотношений:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x \\ y_1 &= y \sqrt{1 - M_0^2} \end{aligned} \right\}, \quad (4.65)$$

то

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} \frac{dy_1}{dy} = \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} \sqrt{1 - M_0^2},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y_1} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \frac{dy_1}{dy} = \frac{\partial}{\partial y_1} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_1} \sqrt{1 - M_0^2} \right) \sqrt{1 - M_0^2} = \\ &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1^2} (1 - M_0^2). \end{aligned}$$

Подставив эти значения вторых производных в уравнение (4.64), получим после сокращения на $(1 - M_0^2)$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1^2} = 0.$$

Таким образом, с помощью замены переменных удается от потока газа перейти к потоку несжимаемой жидкости, так как полученное после преобразований уравнение является уравнением Лапласа.

Рассмотрим, в чем заключается физический смысл такой замены переменных. Угол между вектором скорости в любой точке на поверхности обтекаемого тела и направлением набегающего потока определяется как

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{w_y}{w_x} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\frac{\partial \varphi}{\partial x}} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y_1}}{\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}} = \frac{w_{y_1}}{w_{x_1}} \sqrt{1-M_0^2} \operatorname{tg} \theta_1 \cdot \sqrt{1-M_0^2},$$

г. е.

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{\operatorname{tg} \theta}{\sqrt{1-M_0^2}}.$$

Этим углом определяется направление касательной к контуру обтекаемого тела. Таким образом, при переходе от течения газа к течению несжимаемой жидкости тангенсы углов касательных к обтекаемому профилю нужно увеличить пропорционально множителю

$$\sqrt{\frac{1}{1-M_0^2}}.$$

Следовательно, продольные размеры обтекаемого тела (по оси x) сохраняются без изменения, а поперечные (по оси y) увеличиваются пропорционально этому множителю. В такой

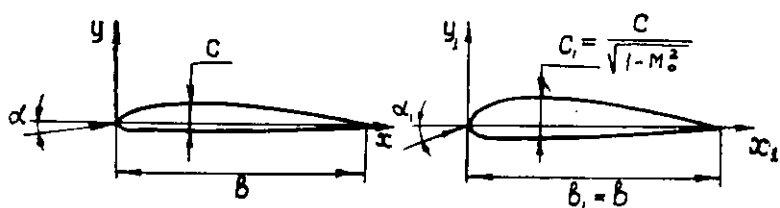


Рис. 52

же пропорции увеличивается и угол атаки. (Ввиду малости углов атаки их величины, выраженные в радианах, обычно приравнивают их тангенсам.)

На рис. 52 изображено такое искажение профиля крыла, связанное с переходом от сжимаемой к несжимаемой жидко-

сти. Хорда профиля сохраняется без изменения $b = b_1$. Толщина пересчитывается по формуле

$$c_1 = \frac{c}{\sqrt{1 - M_0^2}}, \quad (4.66)$$

а угол атаки по такому соотношению:

$$\alpha_1 = \frac{\alpha}{\sqrt{1 - M_0^2}}, \quad (4.67)$$

в соответствии с принятым правилом. При этом оба профиля при одинаковой скорости набегающего потока будут создавать одинаковую подъемную силу. Значит, решив задачу для несжимаемой жидкости, можно с помощью соотношений (4.66) и (4.67) распространить это решение для случая дозвукового обтекания тела газом.

Нужно заметить, что результаты расчета по методу Прандтля — Глауэрта являются приближенными, как это показывает сопоставление с результатами испытаний. Ошибка получается тем больше, чем толще обтекаемое тело и чем выше число M .

§ 6. РАСПРОСТРАНЕНИЕ СЛАБЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ПОТОКЕ ГАЗА

В неподвижном газе слабые возмущения распространяются во все стороны в виде продольных волн давления сферической формы, в центре которых находится источник возмущения. Поскольку звук передается посредством таких волн, они называются звуковыми.

В потоке газа распространение слабых возмущений происходит несколько иначе, в связи с тем, что источник возмущений непрерывно перемещается относительно той среды, в которой распространяются волны. Поскольку это связано с относительным движением, то совершенно безразлично, перемещается ли обтекаемое тело в неподвижной среде или на неподвижный объект набегаает поток газа.

На рис. 53 изображены четыре схемы распространения волн: одна — в неподвижном газе и три — в движущемся с дозвуковой, звуковой и сверхзвуковой скоростью.

Если $\omega < a$, то возмущения распространяются во все стороны, в том числе и вверх по течению. Правда, вниз по течению абсолютная скорость распространения волн получается больше, так как скорость волны складывается со скоростью течения газа.

При обтекании различных тел несжимаемой жидкостью или дозвуковым потоком газа жидкость, как показывают наблюдения, начинает огибать препятствие, еще находясь впереди него на некотором расстоянии. Это отклонение потока вызвано теми возмущениями (волнами давления), которые от носка обтекаемого тела распространяются вверх по течению.

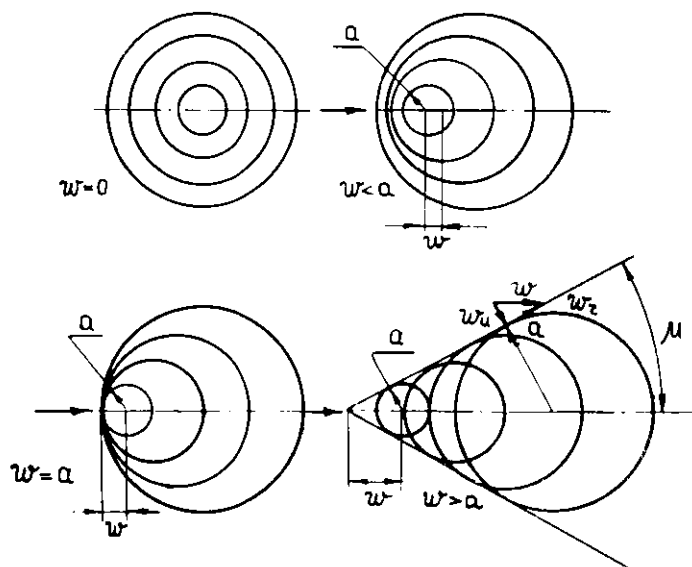


Рис. 53

Если скорость потока равна скорости распространения звука, то центр каждой образовавшейся волны плывет вниз по течению с той же скоростью, с которой волна перемещается относительно газа. Поэтому возмущения распространяются только вниз по течению и вбок, но не проникают выше того места, где образуются волны, а, достигнув его, концентрируются там. Это место называют иногда звуковым барьером, придавая данному названию смысл некоторой преграды, не пропускающей слабые возмущения вверх по течению *).

При $w > a$ слабые волны, скорость которых равна звуковой, сносятся вниз по течению сверхзвуковым потоком, поэтому возмущенная зона ограничена некоторым конусом, за пределами которого поток остается невозмущенным. Этот конус называется конусом слабых возмущений, конусом влияния или

*) Понятие «звуковой барьер» употребляют еще в ином смысле, подразумевая комплекс технических трудностей, которые возникают при попытке перейти скорость звука и достигнуть сверхзвуковой скорости полета.

конусом Маха. Образующие конуса носят название линий слабых возмущений или линий Маха. В плоском потоке вместо конуса рассматривается угол малых возмущений или угол Маха.

Рассматривая угол слабых возмущений на рис. 53, можно сделать такие выводы:

1) синус угла слабых возмущений равен отношению скорости звука к скорости потока, что следует непосредственно из чертежа; иначе говоря,

$$\sin \mu = \frac{1}{M}, \quad (4.68)$$

2) составляющая скорости набегающего потока, перпендикулярная линии слабых возмущений, равна местной скорости распространения звука

$$w_u = a, \quad (4.69)$$

так как только в этом случае линии слабых возмущений будут занимать устойчивое положение, не расходясь и не сближаясь.

Линии слабых возмущений существуют только в сверхзвуковом потоке. Дифференциальное уравнение потенциала скорости для этого потока решается методом характеристик. Характеристиками дифференциального уравнения являются линии, имеющие вполне определенный физический смысл. Это такие линии, проведенные в потоке, у которых касательные в каждой точке совпадают по направлению с линиями слабых возмущений в этих же точках. В общем случае характеристики криволинейны, но могут быть и такие течения, в которых они прямолинейны и, следовательно, полностью совпадают с линиями слабых возмущений. В этом частном случае характеристики и линии слабых возмущений отождествляют.

§ 7. ОБТЕКАНИЕ ВНЕШНЕГО ТУПОГО УГЛА СВЕРХЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ

Наиболее простой задачей о непрерывном сверхзвуковом течении является задача об обтекании внешнего тупого угла. Получающийся при этом вид течения называется в газодинамике течением Прандтля — Майера.

Расчет сверхзвуковых течений в области внешних и внутренних тупых углов имеет определенное практическое значение. Дело в том, что любой криволинейный контур обтекаемого тела можно с некоторым приближением заменить ломаной линией. Тогда расчет обтекания тела сводится всего лишь к двум задачам — к обтеканию внешнего тупого угла и к обтеканию

внутреннего тупого угла. Точность решения будет тем выше, чем на большее число частей разбит контур, т. е. чем меньше отличаются обтекаемые тупые углы от 2π .

Рассмотрим картину обтекания внешнего тупого угла сверхзвуковым потоком идеального газа без теплообмена. Течение в этом случае будет энергоизолированным изэнтропным.

На рис. 54 приведена схема обтекания внешнего тупого угла. Сверхзвуковой набегающий плоскопараллельный поток движется вдоль горизонтальной стенки. В угловой точке A он отклоняется и приобретает направление наклонной стенки. Этот поворот происходит не сразу по всему поперечному сечению: на линиях тока удаленных от стенки, он начинается позднее, чем у расположенных вблизи нее, так как возмущения распространяются со скоростью звука, но сносятя потоком вниз по течению со сверхзвуковой скоростью. Поэтому первая

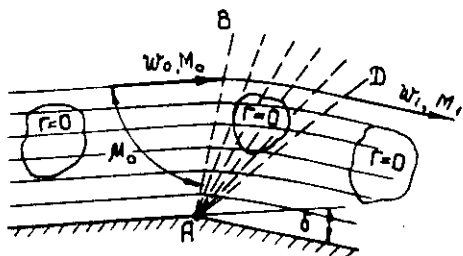


Рис. 54

линия слабых возмущений AB является границей, разделяющей набегающий плоскопараллельный поток и ту зону, где происходит поворот потока. Если бы угол δ был бесконечно мал, то дело ограничилось бы лишь одной линией AB , пересекая которую поток повернулся бы на этот бесконечно малый угол и изменил свои параметры на бесконечно малые величины. Но при конечном δ весь угол поворота складывается из бесконечного количества бесконечно малых поворотов, каждый из которых поток совершает, пересекая очередную линию слабых возмущений в области BAD . Эту область занимает пучок линий слабых возмущений или характеристик, выходящих, наподобие лучей, из точки A . При повороте потока увеличивается скорость и уменьшаются давление, температура и плотность. Это происходит потому, что возрастает расстояние между соседними линиями тока (см. рис. 54), т. е. увеличивается площадь поперечного сечения потока, что, согласно уравнению Гюгонио (2.77), должно при $M > 1$ дать рост скорости. Таким образом $M_1 > M_0$ и $\rho_1 < \rho_0$. Линия AD разделяет область поворота потока и область после поворота, в которой поток вновь становится плоскопараллельным.

Если к характеристике AB приблизиться со стороны набегающего потока, то на всех точках этой линии скорость будет равна w_0 , давление p_0 , температура T_0 , плотность ρ_0 . Следова-

тельно, вдоль этой характеристики параметры потока сохраняют постоянные значения. Они могут изменяться только при пересечении характеристики. Таким же свойством обладают и все другие характеристики *). В частности, на линии AD $M=M_1$, $w=w_1$, $p=p_1$, $T=T_1$, $\rho=\rho_1$. На промежуточных характеристиках параметры потока имеют промежуточные значения. Поскольку в области BAD характеристик бесчисленное множество, то изменение скорости, давления, температуры и плотности газа происходит непрерывным путем, плавно.

При обтекании внешнего тупого угла на всем протяжении поток остается безвихревым. Это подтверждается с помощью теоремы Томсона. Действительно, в рассматриваемом течении все условия теоремы Томсона выполняются, поэтому циркуляция скорости по любому замкнутому жидкому контуру не меняется по времени. Взяв произвольный замкнутый контур в набегающем потоке, где заведомо известно, что поток безвихревой, проследим за изменением циркуляции скорости. В набегающем потоке $\Gamma=0$ (см. рис. 54). Через некоторое время контур, плывущий вместе с жидкостью, окажется в области BAD и, так как циркуляция измениться не может, она остается равной нулю. Следовательно, в области BAD течение сохраняется безвихревым.

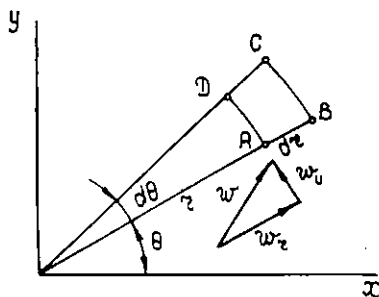


Рис. 55

Все дальнейшие выкладки удобнее вести в полярной системе координат. Поэтому рассмотрим сначала уравнение незавихренности в полярных координатах.

Выделим в плоскости течения газа xu замкнутый контур $ABCD$, образованный отрезками двух радиусов и двух дуг (рис. 55). Если течение безвихревое, то согласно первому следствию теоремы Стокса $\Gamma_{ABCD}=0$. Составим выражение для циркуляции скорости Γ_{ABCD} , считая, что скорость в точке A равна w , а ее радиальная и тангенциальная составляющие равны соответственно w_r и w_θ . Тогда

$$\Gamma_{ABCD} = \Gamma_{AB} + \Gamma_{BC} + \Gamma_{CD} + \Gamma_{DA} = w_r dr + \left(w_\theta + \frac{\partial w_\theta}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta - \left(w_r + \frac{\partial w_r}{\partial \theta} d\theta \right) dr - w_\theta r d\theta = 0.$$

*) Это относится только к прямолинейным характеристикам. Если характеристика криволинейная, то она обязательно пересекается характеристиками другого семейства. Поэтому вдоль криволинейной характеристики число M и другие параметры потока изменяются.

Раскроем скобки, приведем подобные члены, отбросив при этом величину более высокого порядка малости по сравнению с остальными, и после сокращения на $dr d\theta$ получим уравнение неразвихренности потока в полярных координатах $r\theta$

$$r \frac{\partial w_u}{\partial r} + w_u - \frac{\partial w_r}{\partial \theta} = 0. \quad (4.70)$$

Если полюс поместить в точку A , то радиус-вектор будет совпадать с характеристиками, поэтому $\frac{\partial w_u}{\partial r} = 0$, так как скорость вдоль характеристики не меняется. Тогда из уравнения (4.70) получается следующее соотношение между составляющими скорости w_u и w_r ,

$$w_u = \frac{dw_r}{d\theta}. \quad (4.71)$$

Для определения поля скоростей в области поворота потока BAD необходимо вывести формулу приведенной скорости. С этой целью рассмотрим уравнение Бернулли для энергизированного изэнтропного течения, записанное в форме (2.26):

$$\frac{a^2}{k-1} + \frac{w^2}{2} = \text{const},$$

в котором в качестве константы возьмем величину $\frac{w_{\max}^2}{2}$ (напомним, что при $w = w_{\max}$ $a = 0$). Приняв в этом уравнении $a = w_u$ согласно условию (4.69) и $w^2 = w_u^2 + w_r^2$, запишем

$$\frac{w_u^2}{k-1} + \frac{w_u^2}{2} + \frac{w_r^2}{2} = \frac{w_{\max}^2}{2}$$

или

$$\frac{k+1}{k-1} w_u^2 + w_r^2 = w_{\max}^2,$$

но по (4.71) $w_u = \frac{dw_r}{d\theta}$, тогда

$$\frac{k+1}{k-1} \left(\frac{dw_r}{d\theta} \right)^2 + w_r^2 = w_{\max}^2.$$

Поделив обе части последнего равенства на $w_{\max}^2$, получим

$$\frac{k+1}{k-1} \left(\frac{d\Lambda_r}{d\theta} \right)^2 + \Lambda_r^2 = 1$$

или

$$\frac{d\Lambda_r}{\sqrt{1-\Lambda_r^2}} = \sqrt{\frac{k-1}{k+1}} \theta. \quad (4.72)$$

Это дифференциальное уравнение описывает течение газа в области поворота потока при обтекании внешнего тупого угла. Интегрируя его, найдем

$$\begin{aligned} \arcsin \Lambda_r &= \sqrt{\frac{k-1}{k+1}} (\theta + C), \\ \Lambda_r &= \sin \sqrt{\frac{k-1}{k+1}} (\theta + C), \end{aligned} \quad (4.73)$$

где C — произвольная постоянная.

Приведенную скорость Λ_u нетрудно найти, поделив обе части соотношения (4.71) на $w_{\max}$ (напомним, что $w_{\max} = \text{const}$)

$$\Lambda_u = \frac{d\Lambda_r}{d\theta}.$$

Следовательно,

$$\Lambda_u = \sqrt{\frac{k-1}{k+1}} \cdot \cos \sqrt{\frac{k-1}{k+1}} (\theta + C). \quad (4.74)$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} \Lambda^2 &= \Lambda_u^2 + \Lambda_r^2 = \frac{k-1}{k+1} \cos^2 \beta + \sin^2 \beta = \frac{2}{k+1} \sin^2 \beta + \\ &+ \frac{k-1}{k+1} (\cos^2 \beta + \sin^2 \beta) = \frac{2}{k+1} \sin^2 \beta + \frac{k-1}{k+1}, \end{aligned}$$

$$\text{где } \beta = \sqrt{\frac{k-1}{k+1}} (\theta + C).$$

Переходя к приведенной скорости λ с помощью соотношения

$$\Lambda = \sqrt{\frac{k-1}{k+1}} \lambda,$$

получим

$$\lambda^2 = 1 + \frac{2}{k-1} \sin^2 \sqrt{\frac{k-1}{k+1}} (\theta + C). \quad (4.75)$$

В этом уравнении произвольная постоянная C зависит от того, откуда отсчитывается полярный угол θ . Если принять

$C=0$, то получается определенное правило отсчета θ . Действительно, уравнение (4.75) в этом случае принимает вид

$$\lambda^2 = 1 + \frac{2}{k-1} \sin^2 \sqrt{\frac{k-1}{k+1}} \theta. \quad (4.76)$$

Подставив в него $\lambda = \lambda_0$, найдем значение полярного угла θ_0 , отвечающего первой характеристике. Положение первой характеристики известно. Оно определяется по углу слабых возмущений μ_0 , который в свою очередь находится по числу M набегающего потока

$$\sin \mu_0 = \frac{1}{M_0}.$$

Построив таким образом первую характеристику, отложим от нее в сторону набегающего потока полярный угол θ_0 и проведем из угловой точки луч (рис. 56). Этот луч представляет собой линию начала отсчета полярного угла θ для всех характеристик данной области поворота потока.

Дальнейший расчет выполняется просто. Для каждой характеристики в области BAD (см. рис. 54) определяется θ простым измерением угла от линии начала отсчета. По формуле (4.76) находится приведенная скорость λ . Пользуясь газодинамическими функциями параметров торможения (4.59), (4.60), (4.61), нетрудно определить параметры состояния газа на каждой характеристике, помня, что для рассматриваемого течения $T^* = T_0^* = \text{const}$, $p^* = p_0^* = \text{const}$ и $\rho^* = \rho_0^* = \text{const}$.

Чтобы построить линии тока при обтекании внешнего тупого угла, рассмотрим уравнение линий тока

$$\frac{dx}{w_x} = \frac{dy}{w_y},$$

которое в полярной системе координат приобретает вид

$$\frac{dr}{w_r} = r \frac{d\theta}{w_u}. \quad (4.77)$$

Из уравнения (4.77) имеем

$$\frac{dr}{r} = \frac{w_r}{w_u} d\theta.$$

Так как $\frac{w_r}{w_u} = \frac{\Lambda_r}{\Lambda_u}$, то, используя (4.73) и (4.74) при $C=0$,

можно преобразовать предыдущее равенство к следующему виду:

$$\frac{dr}{r} = \frac{\sin \sqrt{\frac{k-1}{k+1}} \theta d\theta}{\sqrt{\frac{k-1}{k+1}} \cos \sqrt{\frac{k-1}{k+1}} \theta}$$

или, умножив числитель и знаменатель правой части на $\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}$, к такому виду:

$$\frac{dr}{r} = \frac{k+1}{k-1} \cdot \frac{\sqrt{\frac{k-1}{k+1}} \sin \sqrt{\frac{k-1}{k+1}} \theta d\theta}{\cos \sqrt{\frac{k-1}{k+1}} \theta}.$$

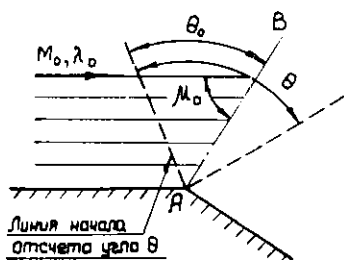


Рис. 56

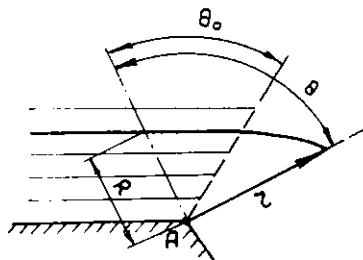


Рис. 57

Интегрируя это дифференциальное уравнение, получим

$$\ln r = -\frac{k+1}{k-1} \ln \cos \sqrt{\frac{k-1}{k+1}} \theta + \ln C_1.$$

Произвольная постоянная определяется из условия, что при $\theta=0$, $r=R$ (рис. 57) и $\ln C_1 = \ln R$, т. е. $C_1=R$. Следовательно,

$$r = R \left[\cos \sqrt{\frac{k-1}{k+1}} \theta \right]^{-\frac{k+1}{k-1}}. \quad (4.78)$$

По этой формуле определяется радиус-вектор линии тока в зависимости от θ . Построение линии тока ясно из рис. 57.

Если построить таким способом серию линий тока и две из них заменить твердыми стенками, то поток, движущийся между этими стенками, будет представлять собой течение Прандтля — Майера. Следовательно, формулу (4.78) можно применять для профилирования стенок криволинейных каналов, в

которых требуется получить сверхзвуковое течение с непрерывным увеличением скорости. В тех случаях, когда контур обтекаемой выпуклой поверхности не соответствует кривой, построенной по уравнению (4.78), данный метод также применим. Только тогда нужно криволинейный контур заменить ломаной линией и для каждого внешнего тупого угла вести свой расчет. Вполне понятно, что решение будет приближенным.

В процессе расчета встречается необходимость определения угла поворота потока при течении Прандтля — Майера. Обычно это бывает при решении обратных задач, когда заданы давления на входе и выходе и нужно спрофилировать стенки канала. Определение угла поворота потока δ (см. рис. 54) рассмотрим для частного случая, когда набегающий поток звуковой, т. е. $M_0 = 1$, а затем распространим это и на сверхзвуковой поток.

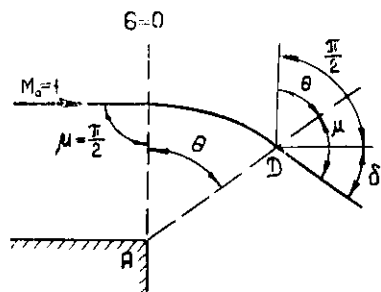


Рис. 58

На рис. 58 дана расчетная схема. Так как $M_0 = 1$, то $\mu = \frac{\pi}{2}$, $\lambda_0 = 1$, $\theta = 0$, следовательно, первая характеристика и линия начала отсчета полярного угла θ перпендикулярны линиям тока и совпадают друг с другом. Желая определить угол поворота потока, соответствующий характеристике AD , нужно установить связь между углами $\theta + \mu = \frac{\pi}{2} + \delta$, откуда получим

$$\delta = \theta + \mu - \frac{\pi}{2}. \quad (4.79)$$

Для сверхзвукового набегающего потока определение угла δ , пожалуй, наиболее удобно вести методом двух расчетов. Этот метод легко уяснить, рассматривая рис. 59. Левая схема соответствует постановке задачи: рассчитывается поток, в котором число M увеличивается от $M_0 > 1$ до M_1 , т. е. поворот происходит от характеристики AB до характеристики AD . Эта задача разбивается на две. Первая задача — определение угла поворота при увеличении скорости от $M = 1$ до M_0 (от AO до AB , средняя схема). Угол δ_1 рассчитывается по формуле (4.79). Вторая задача — определение угла поворота при увеличении скорости от $M = 1$ до M_1 (от AO до AD , правая схема

на рис. 59). Угол δ_{II} также рассчитывается по формуле (4.79). Окончательный результат получается *)

$$\delta = \delta_{II} - \delta_I. \quad (4.80)$$

Течение, изображенное на рис. 59, уже не является обтеканием внешнего тупого угла, это скорее истечение из отверстия или сопла, вделанного в стенку (на чертеже надо достроить верхнюю, симметрично расположенную стенку отверстия или сопла).

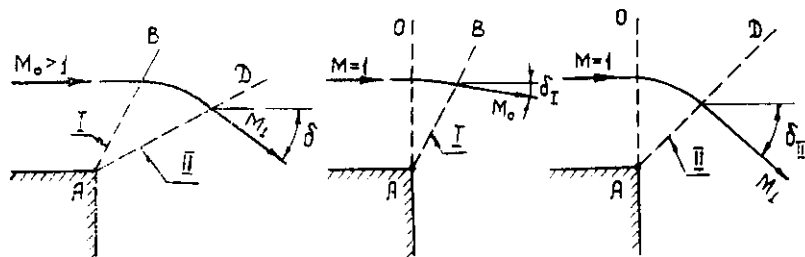


Рис. 59

Течение Прандтля — Майера возникает в этом случае тогда, когда давление в окружающей среде ниже, чем на выходе из отверстия или сопла, и дорасширение газа происходит при пересечении серии характеристик. Если представить себе, что в выходном сечении число $M=1$, а давление в окружающей среде равно нулю, то поворот потока произойдет на вполне определенный предельный угол. Действительно, конечная скорость должна получиться в этом течении максимальной, т. е. $\lambda = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}$. Подставив это значение в формулу (4.76) и решив ее относительно θ , найдем

$$\theta_{\max} = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \cdot \frac{\pi}{2} \quad (4.81)$$

и

$$\delta_{\max} = \left(\sqrt{\frac{k+1}{k-1}} - 1 \right) \frac{\pi}{2}. \quad (4.82)$$

Для воздуха ($k=1,4$) получаются такие значения: $\theta_{\max} = 220^\circ = 3,456 \text{ рад}$, $\delta_{\max} = 130^\circ = 2,042 \text{ рад}$.

*) Здесь не приводится доказательств равенства (4.80). Оно будет совершенно очевидно при рассмотрении диаграммы характеристик в следующем параграфе.

§ 8. ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА СВЕРХЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЙ

Во многих задачах применение графических методов существенно облегчает расчет и построение сверхзвуковых течений. В настоящем параграфе рассматривается два метода — диаграмма эпициклоид и изоэнтропный эллипс.

На рис. 60 слева изображена картина обтекания внешнего тупого угла в плоскости xu , называемой плоскостью течения газа. Здесь построены контуры обтекаемого тела, линии тока, характеристики — линии слабых возмущений. Если в точках пересечения линии тока с каждой из характеристик

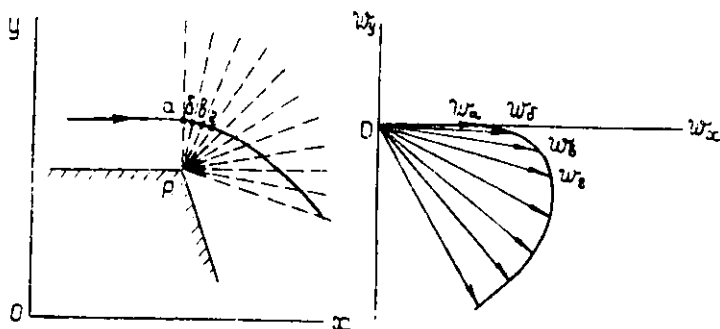


Рис. 60

($a, b, c, \dots$) построить вектор местной скорости и затем собрать все векторы так, чтобы их начала лежали в общей точке, то получится картина обтекания, построенная в плоскости $w_x w_y$, называемой плоскостью годографа (рис. 60, справа). Плавная кривая, соединяющая концы векторов, называется годографом. Годограф вектора скорости, построенный для течения Прандтля — Майера, представляет собой кривую, называемую эпициклоидой. С помощью годографа скорости легко устанавливается зависимость между изменением скорости и углом поворота потока. По заданному углу поворота нетрудно определить изменение скорости по величине или, наоборот, по изменению скорости найти, какой при этом должен получиться угол поворота.

Изменение скорости, которое получается при пересечении потоком характеристики, можно пояснить с помощью треугольников скоростей, изображенных на рис. 61. Переход газа через характеристику AB сопровождается увеличением только составляющей скорости, нормальной к характеристике w_n , радиальная составляющая при этом не изменяется $w_r = \text{const}$.

В результате вектор скорости $\vec{w}$ отклоняется в сторону увели-

чения угла μ^*). Причина такого изменения скорости заключается в следующем. Если часть объема, внутри которого проходит характеристика AB окружить контрольной поверхностью $ab\gamma\gamma$ (рис. 61) и рассмотреть, какие силы действуют на эту поверхность, то, суммируя силы давления, получим, что на участках ag и $b\gamma$ они взаимно уничтожаются, а на участках ab и $\gamma\gamma$ дают равнодействующую, направленную нормально характеристике слева вниз направо. Последняя вызывает увеличение количества движения в этом направлении, т. е. рост w_u . В радиальном направлении силы не действуют и $w_r = w_{r0}$. Таким образом, изменение скорости при пересечении потоком характеристики происходит в направлении, нормальном этой характеристике. Если на рис. 60 провести касательную к эпи-

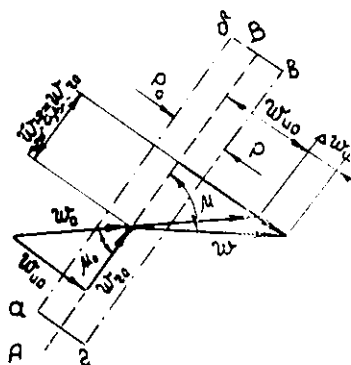


Рис. 61

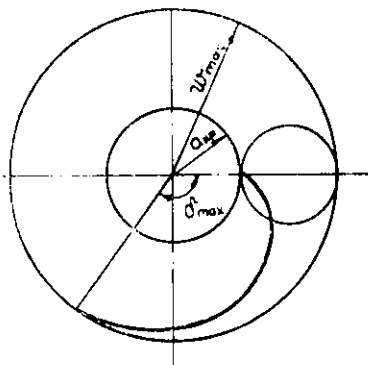


Рис. 62

циклоиде, то она будет указывать направление, в котором происходит изменение вектора скорости в данной точке. Поэтому каждой точке эпициклоиды в плоскости годографа соответствует одна из характеристик в плоскости течения газа xu , а именно, касательная в данной точке эпициклоиды должна

* Необходимо пояснить одно кажущееся противоречие. При пересечении характеристики AB скорость возрастает. Следовательно $M > M_0$ и, согласно формуле (4. 68), $\mu < \mu_0$, в то время как на рис. 61 $\mu > \mu_0$. Противоречие возникло потому, что непрерывный процесс поворота потока с увеличением скорости, состоящий из бесчисленного множества бесконечно малых изменений, на рис. 61 заменен скачкообразным процессом с резким изменением скорости на величину Δw_u . В действительности же, как только произошло пересечение характеристики и поток получил отклонение, он в тот же момент попадает на следующую характеристику, повернутую относительно первой на угол $\Delta\theta$. Угол μ , взятый относительно последней будет меньше μ_0 .

быть перпендикулярна соответствующей характеристике в плоскости xu . В связи с этим эпициклоиды называют характеристиками в плоскости годографа.

Графическое построение эпициклоид делается следующим путем. Поскольку эпициклоид представляет собой линию, которую описывает точка, лежащая на окружности, при обкатывании последней по другой окружности снаружи, то прежде всего надо выбрать их радиусы. В области сверхзвуковых течений газа наименьшей скоростью является критическая, а наибольшей — максимальная. Следовательно, минимальная и максимальная величины радиуса-вектора должны равняться соответственно критической и максимальной скорости. Поэтому радиус окружности, вокруг которой производится обкатывание, берется равным $a_{кр}$, а радиус обкатываемой окружности $\frac{\omega_{max} - a_{кр}}{2}$ (рис. 62). Построенная таким образом эпи-

циклоида располагается между окружностями $a_{кр}$ и ω_{max} в интервале углов $0 - \delta_{max}$.

Для удобства практического применения строят обычно не одну, а целую серию эпициклоид, смещая их относительно друг друга на небольшой постоянный угол, причем проводят их не только вниз, но и вверх. Практика показывает, что в области скоростей, близких к максимальной, расчетов почти не производится, и нет необходимости использовать весь угол δ_{max} , вполне достаточно ограничиться углом $\sim 40^\circ$ в ту и другую сторону. Такая серия характеристик в плоскости годографа называется диаграммой эпициклоид. Она изображена на рис. 63. Такие диаграммы могут быть построены и в безразмерных скоростях, если радиус центральной окружности взять равным 1, а внешней $\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}$.

Применяя диаграмму эпициклоид, можно решать, например, следующие задачи.

Определение изменения скорости по заданному углу поворота потока

Даны начальная скорость потока и угол поворота. Вектор начальной скорости откладывается вдоль нулевой линии AB (рис. 63). От нулевой линии откладывается угол поворота в ту сторону, куда происходит поворот в действительности (в рассматриваемом примере он принят $\delta = 15^\circ$). Если поток поворачивается, обтекая внешний тупой угол или выпуклую стенку, то для того чтобы определить конечную скорость, надо по характеристике, проходящей через конец вектора B ,

переместиться до ее пересечения с лучом (15°) в точке B . Последняя отвечает концу вектора конечной скорости, величина которого получается равной AB . Нужно обратить внимание, что через точку B проходят две характеристики, причем обе

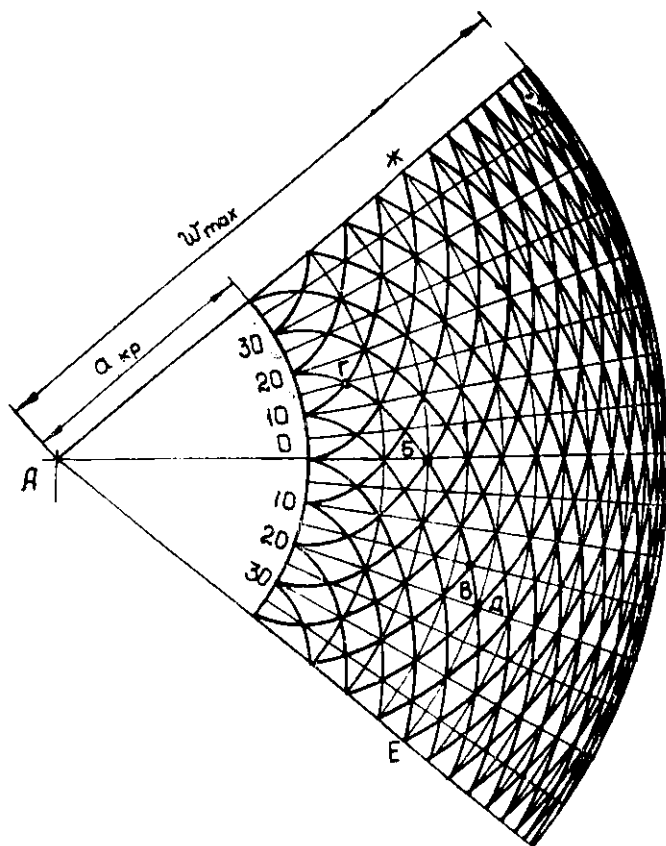


Рис. 63

пересекаются с лучом 15° . Из них нужно выбрать ту, которая дает увеличение скорости.

Если рассматривается обтекание вогнутой криволинейной стенки ^{*}), то скорость потока должна непрерывно уменьшаться. На рис. 63 этот пример рассмотрен следующим образом. Век-

^{*}) Случай непрерывного уменьшения скорости можно рассматривать только при обтекании вогнутой криволинейной стенки, но не внутреннего тупого угла. При обтекании последнего непрерывное течение невозможно — образуется ударная волна.

тор начальной скорости отложен вдоль нулевой линии. Он равен AB . Поток поворачивается против часовой стрелки на угол 15° . Отыскивается точка пересечения характеристики, проходящей через точку B , с лучом 15° (на этот раз выбирается та характеристика, по которой получается уменьшение скорости). Точка Γ определяет положение конца вектора конечной скорости, величина последней равна AG .

Определение угла поворота потока по заданному изменению скорости

Задана начальная скорость (длина вектора равна AB) и конечная скорость (длина вектора равна AD). Радиусом AD (рис. 63) проводится дуга окружности $EЖ$. Ее пересечение с характеристикой, проходящей через точку B , определяет точку D — конец вектора конечной скорости. Проведя в эту точку луч из точки A , найдем угол поворота потока (в данном случае равный 20°).

Другой графический метод, применяемый в расчетах сверхзвуковых течений, представляет собой определение направления характеристик в плоскости течения газа при помощи изотропного эллипса. Изотропный эллипс получается из рассмотрения уравнения связи скорости звука с критической скоростью (2.49)

$$a^2 = \frac{k+1}{2} a_{кр}^2 - \frac{k-1}{2} w^2.$$

Если выбрать прямоугольную систему координат таким образом, чтобы ось x была направлена вдоль одной из характеристик (рис. 64), то составляющая скорости w_y будет равна $w_y = a$, так как скорость, перпендикулярная линии слабых возмущений, равна местной скорости звука. Подставив в предыдущую формулу $w_y = a$ и $w^2 = w_x^2 + w_y^2$, получим

$$w_y^2 = \frac{k+1}{2} a_{кр}^2 - \frac{k-1}{2} w_x^2 - \frac{k-1}{2} w_y^2$$

или

$$\frac{k+1}{2} w_y^2 + \frac{k-1}{2} w_x^2 = \frac{k+1}{2} a_{кр}^2.$$

После деления обеих частей этого равенства на $\frac{k+1}{2} a_{кр}^2$, получается уравнение эллипса

$$\frac{w_x^2}{w_{x\max}^2} + \frac{w_y^2}{a_{кр}^2} = 1. \quad (4.83)$$

Полуоси этого эллипса, называемого *изоэнтропным*, равны $w_{\max}$ и $a_{кр}$. На рис. 64 нетрудно заметить, что если конец вектора скорости в данной точке потока поместить на контур *изоэнтропного эллипса*, а начало вектора — в начало координат, т. е. в центр эллипса, то большая полуось укажет направление характеристики.

Изоэнтропный эллипс, построенный в масштабе и вырезанный из бумаги, целлюлоида или плексигласа, применяется как чертежный инструмент при графическом построении характеристик в сверхзвуковых течениях. Если в какой-то точке потока известен вектор скорости $\vec{w}$ (рис. 65), то для определения направления характеристик в этой точке на нее накладывают *изоэнтропный эллипс*, совместив его центр с началом вектора $\vec{w}$ при помощи иголки. Затем эллипс вращают вокруг центра до тех пор, пока его контур не совпадет с кон-

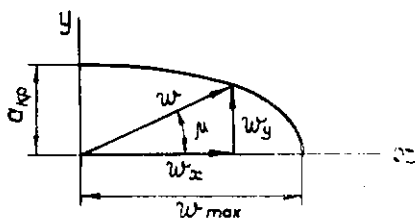


Рис. 64

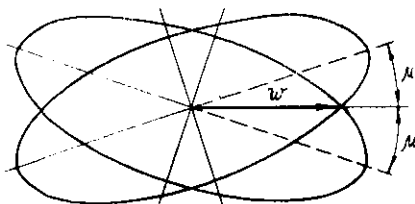


Рис. 65

цом вектора. Большая полуось укажет направление характеристики. При этом возможны два направления (рис. 65), что соответствует физическому смыслу, так как в общем случае через каждую точку в потоке проходят две линии слабых возмущений (см. рис. 53).

Несмотря на то, что определение направления характеристик аналитическим путем, по формуле (4.68), кажется очень простым, применение *изоэнтропного эллипса* очень сильно облегчает работу в тех случаях, когда количество рассчитываемых точек очень велико.

§ 9. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ И ОТРАЖЕНИЕ СЛАБЫХ ВОЛН

Области, в которых давление вдоль линии тока постепенно понижается или повышается, в непрерывных сверхзвуковых течениях называют волнами разрежения или волнами сжатия. Каждая такая волна состоит из бесчисленного множества бесконечно слабых волн или характеристик. Характеристики, в зависимости от вида волны, которую они составляют, делятся

на линии разрежения и линии сжатия. При пересечении линии разрежения потоком угол между вектором скорости и характеристикой, а также величина скорости, возрастают. Давление, температура и плотность при этом уменьшаются. При пересечении линии сжатия изменение параметров происходит в противоположном направлении: угол и скорость уменьшаются, давление, температура и плотность возрастают. Эти качественные зависимости нужно иметь в виду, пользуясь при изучении взаимодействия и отражения характеристик графическими построениями сверхзвуковых течений.

Рассмотрим взаимодействие двух волн разрежения при их пересечении. На рис. 66 изображена упрощенная схема течения газа через расширяющееся сопло, стенки которого образуют два обращенных друг к другу внешних тупых угла. При обтекании этих углов в точках A и A' образуются волны разрежения

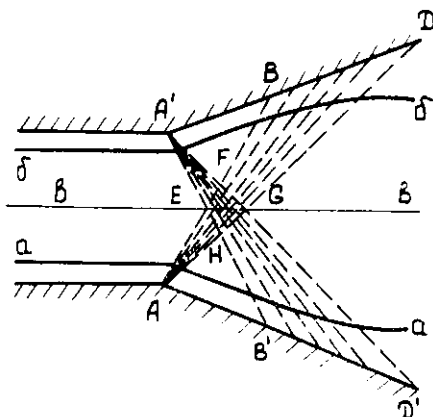


Рис. 66

— серии характеристик. В областях AEH и $A'EF$, где поток пересекает первую по ходу волну разрежения, образуется течение Прандтля — Майера. В областях AHB' и $A'FB$ поток не пересекает никаких волн, и течение там получается плоскопараллельным без изменения параметров состояния. В областях $HGD'B'$ и $FGDB$, где поток пересекает вторую по ходу волну разрежения, также образуется течение Прандтля — Майера. В области $EFGH$ пересекаются две волны разрежения: одна — выходящая из точки A , другая — из точки A' . Принадлежащие им характеристики называют характеристиками первого и второго семейства, причем номер семейства назначается произвольно.

При движении газ вдоль линии тока $a-a$ (рис. 66) дважды пересекает волну разрежения: характеристики первого семейства AEH и второго $HGD'B'$. Следовательно, он дважды повышает скорость, понижает давление и дважды поворачивается, огибая точку A (волна AEH) и огибая точку A' (волна $HGD'B'$). Такой же характер имеет движение газа вдоль линии тока $б-б$, только здесь пересекаются сначала характеристики второго семейства, а затем первого. Посколь-

ку рассматривается плоский поток, и стенки канала симметричны, то центральная линия тока должна совпадать с осью симметрии и быть прямолинейной, так как газ движется симметрично оси канала. На первый взгляд это кажется парадоксальным: поток не получает никакого поворота, а скорость газа при прохождении через зону $EFGH$ возрастает на такую же величину, как вдоль линии тока $a-a$ или $b-b$. Объясняется это явление следующим образом.

В каждой точке области $EFGH$ пересекаются две характеристики. Одна из них — характеристика первого семейства — выходит из точки A , другая — характеристика второго семейства — из точки A' . Следовательно, частица газа, находясь в данной точке, одновременно участвует в обтекании точки A , совершая поворот по часовой стрелке, и в обтекании точки A' , поворачиваясь против часовой стрелки. При каждом повороте скорость нарастает, а давление падает, но повороты происходят одновременно и в одной точке, поэтому они компенсируют друг друга, и суммарное отклонение потока равно нулю. На рис. 67 это хорошо иллюстрируется с помощью диаграммы

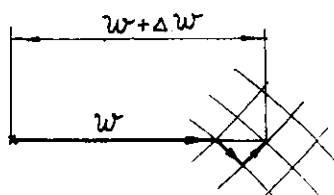


Рис. 67

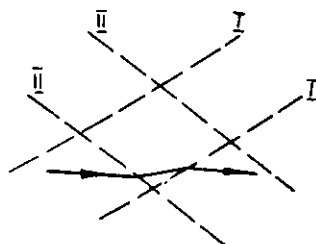


Рис. 68

эпициклонд, из которой видно, что двойной поворот вектора скорости по часовой и против часовой стрелки приводит к удвоенному увеличению скорости при нулевом суммарном отклонении. На рис. 68 показана одна клеточка — ромбик, образованный двумя соседними характеристиками первого семейства I, I и второго семейства II, II . Линия тока, пересекая характеристику II , получает отклонение против часовой стрелки. Вслед за этим она пересекает характеристику I и отклоняется по часовой стрелке. Если расстояние между характеристиками неограниченно уменьшать, то ромбик в пределе вырождается в точку, через которую пройдет по одной характеристике первого и второго семейства. Поток, проходя через эту точку, испытывает двойной поворот и двукратное изменение параметров состояния и скорости.

Суммарное отклонение, которое может получить линия тока, пересекающая область взаимодействия характеристик, бы-

зает различным. Так, например, на линии тока $v-v$ (см. рис. 66) оно равно нулю, а на соседних с ней линиях от-
лично от нуля, причем выше оси симметрии отклонение полу-
чается вверх, а ниже оси — вниз. Это зависит от того, какое
количество характеристик первого и второго семейства пересека-
ется потоком и какова их интенсивность.

Область взаимодействия характеристик называют иногда областью точного решения.

Нужно обратить внимание, что в области взаимодействия слабых волн характеристики искривляются (рис. 69). Если рассмотреть линию EF , то числа M в точках $E, 1, 2, 3, F$ полу-
чаются различными. Так, например, подходя к точке F , поток
предварительно пересекает линии второго семейства, в резуль-
тате чего он повышает скорость. Поэтому $M_F > M_3 > M_2 > M_1 >$

M_E . Так как $\sin \mu = \frac{1}{M}$, то $\mu_F <$

$\mu_3 < \mu_2 < \mu_1 < \mu_E$, следовательно, линия EF искривляется. Аналогич-
ные рассуждения можно провести и
для других участков. В связи с этим,
в области пересечения характери-
стик, последние не совпадают с ли-
ниями слабых возмущений, как это
было в течении Прандтля—Майера.
В каждой точке характеристики ли-
нии слабых возмущений являются
касательными к ней, причем угол μ
меняется от точки к точке.

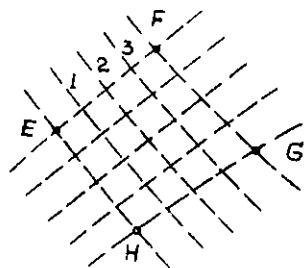


Рис. 69

Рассмотрим отражение характеристик от твердой стенки. Если образовавшаяся в каком-нибудь месте потока характе-
ристика разрежения достигает стенки, то в точке ее падения B
на стенку (рис. 70) возникает отраженная характеристика.
Причина этого состоит в следующем. Пересекая падающую
характеристику разрежения, линия тока получает отклонение
против часовой стрелки и поток начинает удаляться от стенки,
в результате чего между потоком и стенкой должен появиться
вакуум. Вполне понятно, что этого произойти не может, так
как поток будет немедленно прижат к стенке внешним давлени-
ем. Следовательно, поток вынужден совершить еще один по-
ворот — по часовой стрелке. Для этого необходимо, чтобы он
пересек характеристику. Так возникает отраженная характе-
ристика BC . Рассматривая углы μ , видим, что последняя яв-
ляется линией разрежения *). Если в качестве падающей харак-

*) При пересечении BC угол μ возрастает. Это соответствует линии
разрежения.

теристики AB взять линию сжатия, то при ее пересечении линией тока, последняя будет отклоняться в сторону стенки. Вторичный поворот возникает здесь под действием стенки, и опять возникает отраженная характеристика BC , но на этот раз она будет линией сжатия, так как при ее пересечении угол μ меняется в сторону уменьшения.

На основании изложенного можно сформулировать следующее правило.

При отражении слабых волн возмущения от твердой стенки тип возмущения сохраняется: линии разрежения отражаются в виде линий разрежения, а линии сжатия — в виде линий сжатия.

Нужно обратить внимание на то, что при отражении характеристик угол падения не равен углу отражения. Так, например, в случае, изображенном на рис. 70, число M перед падающей линией AB меньше числа M после отраженной линии BC , так как при пересечении линий разрежения скорость возрастает. Вследствие этого угол падения получается больше угла отражения $\mu_0 > \mu$.

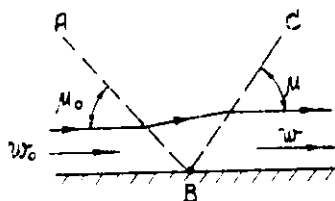


Рис. 70

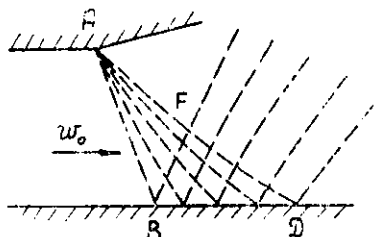


Рис. 71

Если на стенку падает волна разрежения (AB , рис. 71), то она дает отраженную волну разрежения, причем количество характеристик в обеих волнах одинаково. От поверхности BD отраженные характеристики расходятся веером (в случае волны сжатия, наоборот, сходятся), представляя собой как бы продолжение падающей волны. В области BDF происходит взаимодействие падающих и отраженных характеристик, поэтому как те, так и другие искривляются.

Соответствующим профилированием стенки можно добиться того, что падающие линии разрежения или сжатия не будут возбуждать отражения. Очевидно для этого необходимо, чтобы стенка в точке падения слабой волны искривлялась в ту же сторону и на тот же угол, на который отклоняется линия тока, пересекая падающую характеристику. Тогда после пересечения падающей волны поток уже не должен испытывать вторичный поворот, так как он уже приобрел направление дви-

жения вдоль стенки, следовательно, причины появления волн отсутствуют. Такой метод применяется для профилирования стенок сверхзвуковой части сопла Лавала, предназначенного для получения сверхзвукового потока с параллельными линиями тока. Сопла этого типа устанавливаются в аэродинамических трубах. Схема построения сопла изображена в упрощенном виде и без соблюдения масштабов на рис. 72.

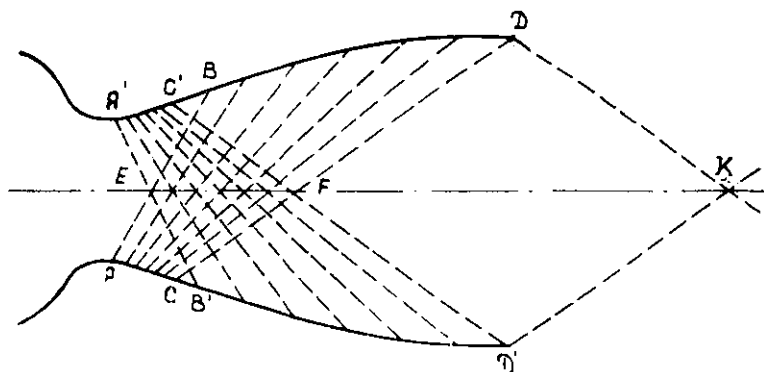


Рис. 72

Сужающаяся часть сопла профилируется таким образом, чтобы в горле поток был однородным. Построение контура стенки на этом участке можно делать, например, по кривой Витошинского *). Обтекание выпуклых криволинейных стенок в области горла сопровождается образованием волн разрежения $ABDC$ и $A'B'D'C'$, которые достигают противоположных стенок BD и $B'D'$. (На рис. 72 искривления характеристик в области взаимодействия для простоты не показаны. При точных построениях искривление необходимо учитывать.) Участки стенки BD и $B'D'$ профилируются, поэтому на них не появляются отраженные волны. После волн линии тока направлены параллельно оси сопла, и в зоне $FDKD'$ поток получается однородным. Эта зона ограничена последними характеристиками FD и FD' волн разрежения сверху по течению и характери-

*) Построение кривой Витошинского делается по формуле

$$r = \frac{r_r}{\sqrt{1 - \left[1 - \left(\frac{r_r}{r_0}\right)^2\right] \left(1 - \frac{3x^2}{m^2}\right)^2 / \left(1 - \frac{x^2}{m^2}\right)^3}},$$

где r — текущий радиус канала, r_r — радиус горла, x — расстояние, отсчитываемое вдоль оси от входного сечения, l — полная длина сужающегося участка, параметр $m = \frac{l}{\sqrt{3}}$.

стиками DK и $D'K$, отходящими от кромок сопла, снизу по течению. Она называется ромбом измерений, так как в аэродинамических трубах исследуемые модели помещают именно в эту зону.

Слабые волны возмущения способны отражаться не только от твердой стенки, но и от границы свободной струи. Границей свободной струи называют линию, разделяющую поток газа, и неподвижную окружающую среду. Нужно заметить, что такая граница возможна только в идеальном газе. В вязком газе вместо нее получается тонкий слой, в котором скорость нарастает от нуля до ее значения в потоке.

На рис. 73 показана волна разрежения, возникающая при обтекании внешнего тупого угла, которая, дойдя до границы струи BD , отражается. Причины появления отраженных характеристик в этом случае можно уяснить, рассматривая рис. 74, где в крупном масштабе выделен участок течения в

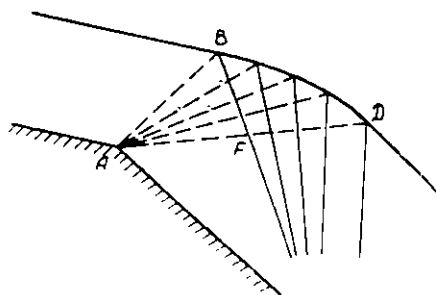


Рис. 73

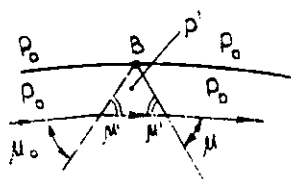


Рис. 74

окрестности точки B . Давление внутри струи набегающего потока (левее характеристики AB , рис. 73) равно давлению в окружающей среде, так как граница струи не может удерживать перепадов давления. После линии разрежения AB давление уменьшается до величины p' . Но вблизи границы струи давление по-прежнему должно быть равно p_0 , следовательно, из точки B должна выйти отраженная характеристика, которая является линией сжатия. При пересечении потоком этой линии давление вновь возрастет от p' до p_0 . Таким образом, по обе стороны границы струи давление сохраняется равным p_0 , но внутри струи оно получается более низким. Эта область низкого давления отделена от окружающей среды линиями сжатия. Рассматривая рис. 74, видим, что $\mu' > \mu_0$ и $\mu < \mu'$, в результате чего линия тока поворачивается, повторяя форму границы струи BD . В области BDF падающие и отраженные характеристики взаимодействуют, поэтому они должны быть ис-

кривлены (на рис. 73 это не показано). Рассмотренные явления позволяют сформулировать такое правило:

При отражении слабых волн возмущения от границы свободной струи тип возмущения изменяется: линии разрежения отражаются в виде линий сжатия, а линии сжатия — в виде линий разрежения.

Вопросы взаимодействия и отражения характеристик имеют большое значение при профилировании сверхзвуковых каналов, сверхзвуковых лопаток турбин и компрессоров, при исследовании спектров потоков, вытекающих из сверхзвуковых сопел на нерасчетных режимах и в некоторых других случаях.

СКАЧКИ УПЛОТНЕНИЯ

§ 1. ПРЯМЫЕ И КОСЫЕ СКАЧКИ УПЛОТНЕНИЯ

В сверхзвуковых течениях газа, происходящих с уменьшением скорости и ростом давления, очень легко образуются так называемые сильные разрывы — ударные волны или скачки уплотнения. При переходе потока через поверхность разрыва давление, температура и плотность возрастают, а скорость падает, причем эти изменения происходят резко, скачком: значения параметров потока в двух бесконечно близких друг к другу точках, разделенных этой поверхностью, отличаются на конечную величину.

Поверхность разрыва, перемещающуюся в пространстве, называют, обычно, ударной волной, а стоячую ударную волну — скачком уплотнения. Так, например, ударная волна, образующаяся в носовой части сверхзвукового самолета, движется в пространстве со скоростью самого самолета. Если ее рассматривать с точки зрения пилота, сидящего в кабине самолета, то она будет представляться неподвижной, зафиксированной в одном положении относительно частей самолета, и ее правильнее назвать скачком уплотнения. Однако в специальной литературе не всегда придерживаются такого четкого разграничения в употреблении терминов.

Образование скачков уплотнения удобно рассмотреть на примере обтекания внутреннего тупого угла сверхзвуковым потоком газа. Если к данному вопросу подойти с позиций непрерывного течения, то получается такая картина обтекания. Газ, подойдя к угловой точке A (рис. 75 слева), должен повернуться, чтобы продолжать движение вдоль наклонной стенки. Начало поворота должно ознаменоваться появлением первой характеристики AB , наклоненной под углом μ_1 , которая отделяет невозмущенный набегающий поток от области поворо-

1а. В конце области поворота характеристика AD отделяет эту область от уходящего потока. Линия AD наклонена под углом μ_2 к наклонной стенке. При таком повороте потока расстояние между соседними линиями тока должно уменьшиться. Тогда, согласно уравнению Гюгоньо (2.77), при $M > 1$ и $dF < 0$ скорость будет уменьшаться, т. е. $\omega_2 < \omega_1$ и $M_2 < M_1$, а значит $\mu_2 > \mu_1$. Такое соотношение углов обязательно приведет к тому, что последняя характеристика области поворота потока (AD)

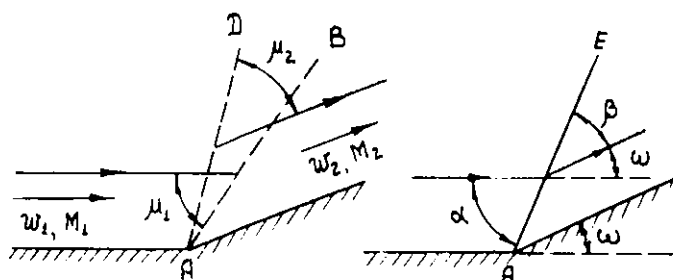


Рис. 75

будет предшествовать первой (AB), как это показано на рис. 75 слева. Естественно, что такого течения быть не может, поэтому в действительности вместо серии характеристик образуется одна поверхность разрыва AE (рис. 75 справа). Она наклонена к набегающему потоку под углом $\alpha > \mu_1$. Эта поверхность представляет собой так называемый *косой скачок уплотнения*.

Скачки уплотнения могут возникать также при обтекании вогнутых криволинейных поверхностей. Пример такого обтекания изображен на рис. 76. При обтекании вогнутой криволинейной стенки возникают характеристики сжатия. Так как число M вдоль течения уменьшается, то угол μ возрастает и линии сжатия сходятся, пересекаясь между собой на некотором удалении от стенки. В каждой точке пересечения двух характеристик должно существовать сразу два давления, две скорости и два значения других параметров потока. Это возможно в том случае, когда через указанные точки проходит поверхность разрыва. Последняя на рис. 76 помечена KL . Приведенный пример иллюстрирует, как непрерывное течение сжатия вблизи стенки переходит в криволинейный скачок уплотнения на некотором расстоянии от нее.

При течении газа в трубах, соплах и других каналах иногда образуются прямые скачки уплотнения. В отличие от косого скачка, фронт которого расположен под косым углом к

набегающему потоку, прямой скачок ориентирован перпендикулярно линиям тока. Кроме того, в косом скачке уплотнения поток отклоняется на угол ω (см. рис. 75 справа), тогда как пересекая прямой скачок, он сохраняет прежнее направление.

В теоретических исследованиях скачки уплотнения принимаются бесконечно тонкими, как математические поверхности. В действительности толщина скачка имеет конечную величину, равную нескольким длинам свободного пробега молекул. По сравнению с другими характерными линейными размерами эта величина весьма мала, поэтому допущение о бесконечно малой толщине скачка почти не вносит никакой ошибки. Ниже приведены значения толщины скачка уплотнения в воздухе при различных числах M набегающего потока.

Число M	2	3	4	5
Толщина скачка, мм	$17,38 \cdot 10^{-5}$	$10,66 \cdot 10^{-5}$	$8,76 \cdot 10^{-5}$	$7,95 \cdot 10^{-5}$

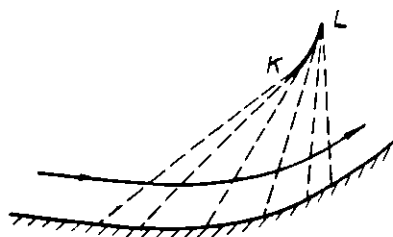


Рис. 76

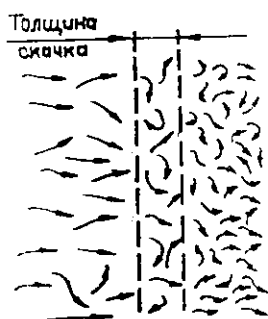


Рис. 77

Эти данные получены Томасом ^{*)} расчетным путем.

Для того чтобы представить физические процессы, происходящие внутри скачка уплотнения, обратимся к микроструктуре сверхзвукового потока. В неподвижном газе молекулы находятся в хаотическом движении, скорость которого тем больше, чем выше температура. Если газ движется в потоке, то на хаотическое движение молекул накладывается еще движение этого потока. Скорость движения молекул складывается тогда из двух скоростей — хаотического и организованного движения. Кинетическая энергия в потоке определяется скоростью организованного движения, а внутренняя энергия — скоростью хаотического движения. Если, например, рассматривать газ

^{*)} См. Современное состояние аэродинамики больших скоростей, т. I, под ред. Л. Хоурта, Изд-во иностр. лит., 1955.

при постоянной температуре торможения, то в заторможенном потоке его энергия хаотического движения (внутренняя энергия) будет максимальна, а энергия организованного движения — равна нулю. При увеличении скорости потока энергия хаотического движения будет уменьшаться (так как падает температура), а энергия организованного движения — возрастать. Когда скорость потока достигает максимального значения, то вся энергия определяется организованным движением, так как при $T=0$ хаотическое движение должно прекратиться. Обращаясь теперь к скачку уплотнения, можно заключить, что последний представляет собой некоторую границу, разделяющую две области, которые отличаются тем, что в одной из них энергия хаотического движения составляет меньшую долю от всей энергии, по сравнению с другой. Условное изображение такого течения приведено на рис. 77. Переход из одного вида движения в другое происходит не внезапно: зона перестройки потока имеет некоторую толщину, порядка нескольких длин свободного пробега молекул.

Ударные волны могут формироваться при распространении волн давления. На рис. 78 изображена схема следующего опыта. В цилиндрическую трубу с одного конца помещен поршень, другой ее конец — открыт. В первоначальный момент времени давление в трубе равно атмосферному. Если поршень резко переместить вправо, то воздух перед ним уплотнится. У самого поршня давление будет наиболее высоким, а по мере приближения к открытому концу трубы оно будет уменьшаться, пока не достигнет атмосферного. Кривая распределения давлений, зафиксированных по длине трубы в один и тот же момент времени, обозначена на рис. 78 цифрами 1, 2, 3, 4. Эта волна давления будет распространяться к открытому концу. Каждый элемент волны можно рассматривать как слабое возмущение. Скорость распространения такого возмущения равна местной скорости звука. Определяя последнюю, надо учесть, что в местах наибольшего сжатия и температура газа будет наиболее высокой, поэтому

$$T_1 > T_2 > T_3 > T_4,$$

следовательно,

$$a_1 > a_2 > a_3 > a_4.$$

Откладывая вправо от точек 1, 2, 3, 4 отрезки, равные a_1 , a_2 , a_3 и a_4 , и соединяя их концы плавной кривой, получим форму фронта волны, которую он будет иметь, спустя одну секунду после ее возникновения. Заметим, что волна получается более крутой, т. е. падение давления происходит теперь уже на меньшей длине трубы. Продолжая такое построение дальше,

получим, что волна превратится в поверхность разрыва, разделяющую области с существенно различными давлениями.

Таким образом, волна давления, распространяясь в пространстве, превращается в ударную волну или скачок уплотнения.

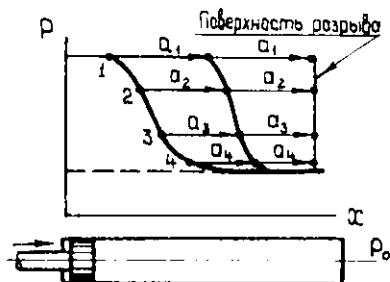


Рис. 78

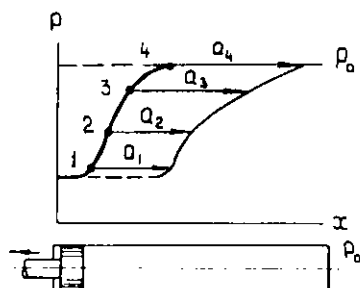


Рис. 79

На рис. 79 изображена схема аналогичного опыта, но с волной разрежения. Поршень получает здесь резкое перемещение влево. В первоначальный момент времени кривая распределения давлений имеет вид линии, отмеченной цифрами 1, 2, 3, 4. Рассуждая аналогично предыдущему случаю, приходим к заключению, что

$$T_1 < T_2 < T_3 < T_4.$$

$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4.$$

Отложив отрезки a_1, a_2, a_3, a_4 из точек 1, 2, 3, 4 вправо, соединив их концы плавной кривой, видим, что волна разрежения получилась более растянутой, чем была вначале.

Следовательно, волна разрежения, распространяясь в пространстве, становится все более и более полой и в конце концов затухает. Поэтому появление скачков разрежения невозможно*).

В качестве иллюстрации рассмотренных явлений интересно привести аналогию с распространением волн на поверхности воды, которая дает наглядное представление о качествен-

*1 Возникновение волны разрежения было бы возможным в том случае, если бы скорость распространения возмущений в ее хвосте превышала бы таковую в ее головной части. Для этого необходимо, чтобы $T_1 > T_2 > T_3 > T_4$. Это можно себе представить лишь при течении с теплообменом. Такие течения, в которых возникают скачки разрежения, в настоящее время известны. Они наблюдаются при конденсации и при течении газа с химическими реакциями, идущими с выделением тепла. Что касается энергизированных потоков газа, то для них невозможность образования скачков разрежения является жестким правилом.

ной стороне явлений. Если скорость распространения возмущений в газе зависит от его температуры, то скорость распространения поверхностных волн на воде зависит от глубины: с увеличением последней она возрастает. Хорошо известно, что волны, подходя к береговой отмели, становятся все более крутыми, затем у них появляется гребень и, наконец, волна рассыпается, выйдя на берег. Такая эволюция формы волны связана с тем, что головная часть раньше выходит на мелкое место, и скорость ее замедляется, в результате чего «хвост» начинает догонять «голову». Если волна выходит на подводную мель, то, пройдя ее, она вновь начинает вытягиваться. Над подводной мелью получают своеобразные «острые» волны, которые часто служат лоцманам хорошим ориентиром.

Увеличение крутизны волн при выходе на берег имеет аналогию с распространением волны давления в газе и вырождением ее в скачок уплотнения, а вытягивание поверхностной волны при выходе на глубокое место — с распространением волны разрежения в газе.

§ 2. КИНЕМАТИЧЕСКОЕ И ДИНАМИЧЕСКОЕ СООТНОШЕНИЯ

При расчете скачков уплотнения применяются обычные уравнения газовой динамики — уравнения неразрывности, количества движения и энергии.

Уравнение неразрывности для прямого скачка записывается в следующем виде:

$$\rho_1 w_1 = \rho_2 w_2. \quad (5.1)$$

Оно получается из уравнения (2. 25) при $F_1 = F_2$. Нужно заметить, что равенство площадей поперечного сечения на входе и на выходе из скачка получается всегда, так как толщина скачка считается бесконечно малой. Поэтому даже в каналах переменного сечения по обе стороны поверхности разрыва сечения одинаковы, поскольку они находятся на бесконечно малом расстоянии друг от друга.

Уравнение количества движения для прямого скачка записывается в форме (3. 32)

$$p_2 - p_1 = \rho_1 w_1 (w_1 - w_2) = \rho_2 w_2 (w_1 - w_2),$$

а уравнение энергии — в форме (2. 19)

$$c_p T_1 + \frac{w_1^2}{2} = c_p T_2 + \frac{w_2^2}{2}.$$

По этому поводу нужно сделать следующие замечания.

Поскольку толщина скачка бесконечно мала, то и путь, проходимый газом при его пересечении, также бесконечно мал. Поэтому внешняя механическая работа и внешнее тепло, если даже они не равны нулю, не оказывают влияния на процессы внутри скачка, так как они бесконечно малы, в то время как параметры потока на входе и выходе отличаются на конечную величину. Следовательно, течение газа при переходе поверхности разрыва можно считать энергоизолированным, и уравнение энергии брать в форме (2.19). Что касается уравнения количества движения, то оно записано в форме, соответствующей такому случаю, в котором на струю между сечениями входа и выхода не действует никаких сил вдоль потока. Это связано с тем, что боковая поверхность струи, пересекающей скачок, бесконечно мала, и если даже на нее и действуют какие-либо силы (например, силы давления или трения), то они получаются бесконечно малыми и не играют никакой роли, так как остальные силы имеют конечные величины.

Из уравнения энергии следует также, что

$$T_1^* = T_2^*.$$

Рассмотрим кинематическое соотношение для прямого скачка уплотнения. Оно устанавливает связь между скоростями до и после скачка. Для его вывода преобразуем уравнение количества движения следующим образом:

$$p_2 - p_1 = \rho_1 \omega_1 \omega_2 \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} - 1 \right) = \rho_1 \omega_1 \omega_2 \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1 \right) = \omega_1 \omega_2 (\rho_2 - \rho_1),$$

откуда получим

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1} = \omega_1 \omega_2. \quad (5.2)$$

Применяя далее формулу связи скорости звука и критической скорости (2.49)

$$\frac{k+1}{2} a_{кр}^2 - \frac{k-1}{2} \omega^2 = a^2 = k \frac{p}{\rho},$$

запишем давления p_2 и p_1 в следующем виде:

$$p_2 = \rho_2 \frac{k+1}{2k} a_{кр}^2 - \rho_2 \frac{k-1}{2k} \omega_2^2, \quad (5.3)$$

$$p_1 = \rho_1 \frac{k+1}{2k} a_{кр}^2 - \rho_1 \frac{k-1}{2k} \omega_1^2. \quad (5.4)$$

Вычитая формулу (5.4) из формулы (5.3), найдем

$$p_2 - p_1 = \frac{k+1}{2k} a^2_{кр} (p_2 - p_1) - \frac{k-1}{2k} (p_2 w_2^2 - p_1 w_1^2).$$

Но

$$p_2 w_2^2 - p_1 w_1^2 = w_1 w_2 \left(p_2 \frac{w_2}{w_1} - p_1 \frac{w_1}{w_2} \right) = w_1 w_2 \left(p_2 \frac{\rho_1}{\rho_2} - p_1 \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) = w_1 w_2 (p_1 - p_2),$$

тогда

$$\frac{p_2 - p_1}{p_2 - p_1} = \frac{k+1}{2k} a^2_{кр} + \frac{k-1}{2k} w_1 w_2.$$

Подставляя значение левой части из формулы (5.2), запишем

$$\frac{k+1}{2k} a^2_{кр} + \frac{k-1}{2k} w_1 w_2 = w_1 w_2.$$

После приведения подобных и сокращения получаем

$$w_1 w_2 = a^2_{кр} \quad (5.5)$$

или в безразмерном виде

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1. \quad (5.6)$$

Формулы (5.5) и (5.6) называются *кинематическими соотношениями для прямого скачка уплотнения*. С их помощью удобно пересчитывать входную скорость на выходную или наоборот.

Кроме того, кинематическое соотношение позволяет произвести следующий анализ. Если $\lambda_1 > 1$, то $\lambda_2 < 1$. Возможно математически и другое соотношение: при $\lambda_1 < 1$ должно быть $\lambda_2 > 1$. Однако второе соотношение не реализуется, так как оно отвечает возрастанию скорости и падению давления, т. е. скачку разрежения, существование которого в энергоизолированном потоке невозможно. Из этого следуют два вывода: 1) скачки уплотнения могут возникать только в сверхзвуковых потоках, 2) в прямом скачке уплотнения сверхзвуковое течение переходит в дозвуковое.

Скорость за прямым скачком уплотнения не может быть ниже определенного минимального значения, так как скорость перед скачком не может превышать максимальную (w_{max}).

Связь между параметрами состояния газа перед и за скачком, а именно, между давлениями и плотностями устанавливается с помощью динамического соотношения.

Для вывода этого соотношения сложим левые и правые части формул (5.3) и (5.4)

$$\rho_2 + p_1 = \frac{k+1}{2k} a_{\text{кр}}^2 (\rho_2 + \rho_1) - \frac{k-1}{2k} (\rho_2 \omega_2^2 + \rho_1 \omega_1^2) =$$

$$- \frac{k+1}{2k} a_{\text{кр}}^2 (\rho_2 + \rho_1) - \frac{k-1}{2k} \omega_1 \omega_2 (\rho_2 + \rho_1)$$

или

$$\frac{\rho_2 + p_1}{\rho_2 + \rho_1} = \frac{k+1}{2k} a_{\text{кр}}^2 - \frac{k-1}{2k} \omega_1 \omega_2 = \frac{k+1}{2k} \omega_1 \omega_2 - \frac{k-1}{2k} \omega_1 \omega_2 =$$

$$= \frac{1}{k} \omega_1 \omega_2 = \frac{1}{k} \frac{\rho_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1}.$$

В процессе преобразований здесь использованы кинематическое соотношение (5.5) и формула (5.2). Таким образом, динамическое соотношение имеет вид

$$\frac{\rho_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1} = k \frac{\rho_2 + p_1}{\rho_2 + \rho_1}. \quad (5.7)$$

Оно одинаково справедливо как для прямых, так и для косых скачков.

Если представить себе, что скачок уплотнения по каким-то причинам ослабевает, т. е. $\rho_2 \rightarrow \rho_1$ и $p_2 \rightarrow p_1$, то из соотношения (5.7) получается, что

$$\frac{dp}{d\rho} = k \frac{p}{\rho}.$$

Разделив здесь переменные и проинтегрировав, получим

$$\ln p - k \ln \rho = \text{const}$$

или

$$\frac{p}{\rho^k} = \text{const}.$$

Из этого следует, что в бесконечно слабом скачке, иначе говоря — в звуковой волне, параметры состояния газа меняются по изэнтропному закону. Что же касается скачка уплотнения конечной интенсивности, то, предполагая его бесконечно тонким, нельзя говорить о термодинамическом процессе, так как последний должен представлять собой непрерывную цепочку бесконечно малых изменений состояния газа, в то время как в скачке параметры потока терпят разрыв. Поэтому уравнение (5.7), называемое динамическим соотношением, не представляет термодинамический процесс, а просто устанавливает связь между параметрами состояния газа по обе стороны поверхности разрыва. Если даже взять реальный скачок конеч-

ной толщины, внутри которого параметры состояния изменяются хотя и весьма интенсивно, но непрерывно, то термодинамический процесс, происходящий в этой области, все равно не соответствует уравнению (5.7). Если бы удалось найти уравнение этого термодинамического процесса и сопоставить данные, полученные с помощью него, с результатами расчета по динамическому соотношению, то при одинаковых начальных параметрах совпадение получилось бы только в параметрах состояния газа за скачком. Тем не менее отсутствие сведений о термодинамическом процессе внутри скачка не приносит каких-либо неприятностей в практических расчетах или исследованиях, так как динамическое соотношение даст вполне исчерпывающее представление об изменении параметров состояния газа, а кинематическое соотношение — об изменении скорости при пересечении скачка уплотнения потоком.

§ 3. УДАРНАЯ АДИАБАТА. ИЗМЕНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ ГАЗА

Для того чтобы получить в явном виде зависимость отношения плотностей от отношения давлений в скачке уплотнения, разрешим динамическое соотношение (5.7) относительно $\frac{\rho_2}{\rho_1}$.

В результате можно получить

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{k+1 + \frac{p_1}{p_2}}{1 + \frac{k+1}{k-1} \frac{p_1}{p_2}}, \quad (5.8)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{1 + \frac{k+1}{2k} \frac{\Delta p}{p_1}}{1 + \frac{k-1}{2k} \frac{\Delta p}{p_1}}, \quad (5.9)$$

где $\Delta p = p_2 - p_1$. Формулы (5.8) и (5.9) называются уравнениями ударной адиабаты или адиабаты Гюгонио.

Учитывая те замечания, которые были сделаны по поводу динамического соотношения, следует еще раз подчеркнуть, что как формула (5.7), так и уравнения ударной адиабаты, не представляют какой-либо термодинамический процесс. Поэтому ударную адиабату нужно рассматривать как геометрическое место точек, изображающих состояния газа за различными скачками уплотнения, начиная от бесконечно слабых и

кончая бесконечно сильными. Если к обычным термодинамическим процессам подходить с тех же позиций, представляя, например, изоэнтропу как геометрическое место точек, изображающих состояния газа за различными идеальными диффузорами, работающими с различными степенями сжатия, то можно сравнивать эти процессы с ударной адиабатой.

Записав уравнение идеальной адиабаты или изоэнтропы в таком виде:

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{k}} = \left(1 + \frac{\Delta p}{p_1} \right)^{\frac{1}{k}}, \quad (5.10)$$

можно по формулам (5.10) и (5.8) построить кривые зависимости $\frac{p_2}{p_1} = f\left(\frac{p_2}{p_1}\right)$ для изоэнтропы и ударной адиабаты в координатах $\frac{p_2}{p_1}$, $\frac{p_2}{p_1}$. При построении нужно обратить внимание на то, что в области малых повышений давления обе кривые проходят очень близко друг от друга, различие между ними становится заметным лишь при больших $\frac{p_2}{p_1}$. Это легко заметить, разложив формулы (5.9) и (5.10) в ряд Маклорена, в результате чего они приобретают следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{p_2}{p_1} = & 1 + \frac{1}{k} \frac{\Delta p}{p_1} + \frac{1}{1 \cdot 2} \frac{1}{k} \left(\frac{1}{k} - 1 \right) \left(\frac{\Delta p}{p_1} \right)^2 + \\ & + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{3}{2} \frac{1}{k} \left(\frac{1}{k} - 1 \right) \left(\frac{1}{k} - 1 \right) \left(\frac{\Delta p}{p_1} \right)^3 + \dots \quad (5.11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{p_2}{p_1} = & 1 + \frac{1}{k} \frac{\Delta p}{p_1} + \frac{1}{1 \cdot 2} \frac{1}{k} \left(\frac{1}{k} - 1 \right) \left(\frac{\Delta p}{p_1} \right)^2 + \\ & + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{1}{k} \left(\frac{1}{k} - 1 \right) \left(\frac{1}{k} - 2 \right) \left(\frac{\Delta p}{p_1} \right)^3 + \dots \quad (5.12) \end{aligned}$$

Рассматривая правые части (5.11) и (5.12), видим, что различие между ними начинается только в третьем члене разложения. Это значит, что в слабых скачках, т. е. при малых Δp , изменение состояния газа очень близко к изоэнтропному. Иначе говоря, при $\Delta p \rightarrow 0$ ударная адиабата асимптотически стремится к изоэнтропе.

С другой стороны, из формулы (5.8) следует, что при $\frac{p_2}{p_1} \rightarrow \infty$ (т. е. при $\frac{p_1}{p_2} \rightarrow 0$) отношение плотностей стремится к вполне определенному пределу:

$$\lim_{p_1/p_2 \rightarrow \infty} \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{k+1}{k-1},$$

в то время как по уравнению изэнтропы (5.10) $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ неограниченно возрастает. Следовательно, в координатах $\frac{\rho_2}{\rho_1}, \frac{p_2}{p_1}$ эти кривые будут иметь вид, представленный на рис. 80. От этого графика нетрудно перейти к диаграммам pv и TS .

В координатах pv выбирается точка I , изображающая начальное состояние газа (рис. 81). Изэнтропа, проходящая через эту точку, имеет ветви, асимптотически приближающиеся к координатным осям, что следует из ее уравнения

$$\frac{v_1}{v_2} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{k}},$$

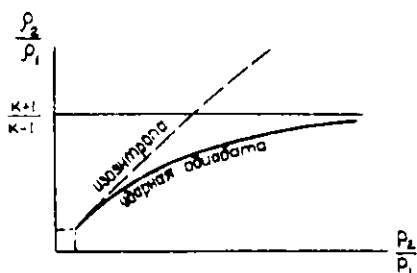


Рис. 80

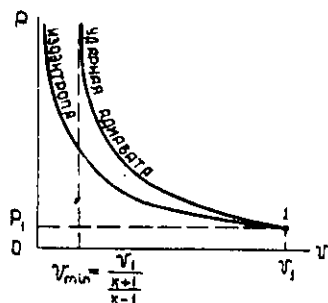


Рис. 81

непосредственно вытекающего из уравнения (5.10). Ударная адиабата, проходящая через точку I , строится по формуле (5.8), которую в данном случае удобно представить так:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\frac{k+1}{k-1} + \frac{p_1}{p_2}}{1 + \frac{k+1}{k-1} \frac{p_1}{p_2}}.$$

Правее точки I в координатах pv ударная адиабата не имеет физического смысла, так как скачки разрежения невозможны. Поэтому строится только ветвь, лежащая левее точки I .

При небольшом отклонении от точки I ударная адиабата мало отличается от изоэнтропы. По мере увеличения давления, удельный объем по ударной адиабате уменьшается, но менее интенсивно, чем по изоэнтропе. При бесконечном увеличении давления удельный объем уменьшается не до нуля, как на изоэнтропе, а до некоторого минимального значения

$$v_{\min} = \frac{v_1}{\frac{k+1}{k-1}}. \quad (5.13)$$

Для воздуха этот объем уменьшается в 6 раз. Таким образом, в бесконечно сильных скачках, т. е. при $\frac{p_2}{p_1} = \infty$, увеличение плотности или уменьшение удельного объема происходит только в $\frac{k+1}{k-1}$ раз. Ударная адиабата при этом асимптотически приближается к изохоре $v_{\min}$.

Сравнение ударной адиабаты с изоэнтропой в диаграмме p - v приводит к мысли о том, что в скачке уплотнения газ ведет себя как более жесткая среда, нежели тот же самый газ, движущийся в непрерывном течении сжатия. Это объясняется тем, что в скачке уплотнения часть кинетической энергии, вследствие резкого снижения скорости — «газового удара» — необратимо переходит в тепло, которое воспринимается газом. В результате повышения давления удельный объем уменьшается, но под влиянием тепла, выделившегося при ударе, он снова несколько возрастает. Поэтому изменение удельного объема по ударной адиабате происходит менее интенсивно, чем по изоэнтропе. Об интенсивности подвода тепла можно судить по увеличению энтропии газа. Последнее наглядно изображается в диаграммах TS или iS .

В TS -диаграмме ударная адиабата имеет такой вид, как показано на рис. 82. При небольших повышениях давления она почти сливается с изоэнтропой. Если давление p_2 стремится к бесконечности, то ударная адиабата неограниченно приближается к изохоре

$$v = v_{\min} = \frac{v_1}{\frac{k+1}{k-1}}.$$

Повышение энтропии, незначительное при малых перепадах давления, достигает больших величин при высоких перепадах, а при $p_2 \rightarrow \infty$ энтропия стремится к бесконечности. Этим объясняется тот факт, что в слабых скачках уплотнения потери невелики, а в сильных — они возрастают весьма существенно.

Нужно заметить, что все рассуждения, касающиеся ударной адиабаты, сделаны для случая идеального газа. Заметные искажения этой зависимости получаются при очень больших скоростях, когда в газе начинают проявляться такие эффекты, как диссоциация молекул и ионизация атомов.

Расчет изменения параметров состояния газа в прямых скачках уплотнения производится следующим путем^{*1}.

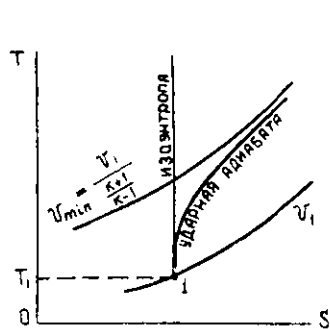


Рис. 82

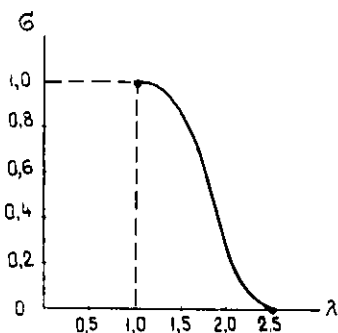


Рис. 83

Изменение плотности подсчитываем, используя формулы (5.1) и (5.5)

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{w_1}{w_2} = \frac{w_1^2}{a_{кр}^2}$$

или

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \lambda_1^2. \quad (5.14)$$

Изменение температуры находится из условия, что $T^* = \text{const}$. Тогда

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\tau(\lambda_2)}{\tau(\lambda_1)} \frac{T_2^*}{T_1^*} = \frac{\tau(\lambda_2)}{\tau(\lambda_1)} = \frac{\tau\left(\frac{1}{\lambda_1}\right)}{\tau(\lambda_1)} = \frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \frac{1}{\lambda_1^2}}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2}. \quad (5.15)$$

Изменение давления легко определить, используя формулу (2.83). Приравняв массовый расход перед скачком и после скачка

$$M_{тек} = mF \frac{p_1}{T^*} y(\lambda_1) = mF \frac{p_2}{T^*} y(\lambda_2),$$

^{*1} Существует несколько методов расчета. Здесь приводится метод, позволяющий использовать таблицы газодинамических функций.

принимая при этом во внимание, что $m = \text{const}$, $F = \text{const}$, $T^* = \text{const}$, получим

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{y(\lambda_1)}{y(\lambda_2)} = \frac{y(\lambda_1)}{y\left(\frac{1}{\lambda_1}\right)} = \frac{\lambda_1^2 - \frac{k-1}{k+1}}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2}. \quad (5.16)$$

Если, пользуясь формулой связи между числом M и приведенной скоростью (2.54), преобразовать формулу (5.16), то она примет вид

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2k}{k+1} (M^2 - 1). \quad (5.17)$$

Коэффициент восстановления давления в прямом скачке уплотнения можно найти, приравняв массовые расходы в сечениях перед и за скачком. Пользуясь формулой (2.81) и учитывая что $m = \text{const}$, $F = \text{const}$ и $T^* = \text{const}$, получим

$$mF \frac{p_1^*}{\sqrt{T^*}} q(\lambda_1) = mF \frac{p_2^*}{\sqrt{T^*}} q(\lambda_2),$$

откуда

$$\sigma = \frac{p_2^*}{p_1^*} = \frac{q(\lambda_1)}{q(\lambda_2)} = \frac{q(\lambda_1)}{q\left(\frac{1}{\lambda_1}\right)} = \lambda_1^2 \left(\frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \frac{1}{\lambda_1^2}} \right)^{\frac{1}{k-1}}. \quad (5.18)$$

Анализ формулы (5.18) показывает, что при $\lambda = 1$ $\sigma = 1$ и при $\lambda = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}$ $\sigma = 0$. Рассчитав промежуточные значения σ , построим график $\sigma = f(\lambda)$ (рис. 83). При этом нужно иметь в виду, что область $\lambda < 1$ рассчитывать не следует, так как при дозвуковых скоростях скачки уплотнения не существуют. Из графика легко сделать вывод, что при небольших сверхзвуковых скоростях потери в прямых скачках уплотнения сравнительно невелики, но с увеличением скорости они интенсивно возрастают. Причины этого явления были изложены выше. Приведенную здесь зависимость следует принимать во внимание при проектировании всевозможных сверхзвуковых устройств, в которых возможно появление прямых скачков.

§ 4. СКОРОСТЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ УДАРНОЙ ВОЛНЫ

Ударная волна появляется при сильных возмущениях, например при взрывах. Представим себе, что в некоторой точке пространства произошел взрыв, в результате чего в ее окрестности сильно повысилось давление. Область повышенного

давления будет отделена от невозмущенной области поверхностью разрыва, имеющей сферическую форму. Эта поверхность, или ударная волна, будет распространяться в пространстве таким образом, что ее радиус будет возрастать, а форма оставаться сферической. Следовательно, каждый элемент ударной волны будет перемещаться вдоль радиуса.

Если обратить движение, связав систему координат с ударной волной, то элемент сферической поверхности разрыва можно представить как прямой скачок уплотнения, так как набегающий поток будет направлен перпендикулярно ее фронту (рис. 84). Набегающий поток появляется в связи с обращением движения: остановив элемент ударной волны, нужно одновременно придать окружающей среде скорость, равную по величине скорости волны и направленную в обратную сторону, т. е. $w_1 = -w_B$. Поскольку, согласно кинематическому соотношению, скорость за скачком уплотнения должна быть меньше, чем перед скачком, то в старой системе координат, где волна движется, а окружающая среда неподвижна, скорость среды за ударной волной будет

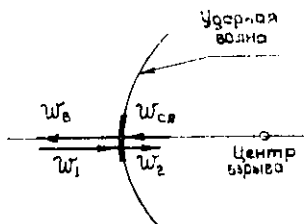


Рис. 84

$$w_{с.п.} = w_B - w_2. \quad (5.19)$$

Иначе говоря, за ударной волной образуется движение газа, направленное в сторону самой волны, но происходящее с меньшей скоростью. Это движение называется следом, а его скорость — скоростью следа.

В связи с тем, что при обращении движения ударную волну можно рассматривать как прямой скачок, к ней можно применять и уравнения, выведенные для прямого скачка. Так, например, используя формулу (5.2)

$$\frac{p_2 - p_1}{p_2 - p_1} = w_1 w_2,$$

а также уравнение неразрывности

$$w_2 = w_1 \frac{\rho_1}{\rho_2} = |w_B| \frac{\rho_1}{\rho_2},$$

получим

$$|w_B| = w_1 = \sqrt{\frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1} \frac{\rho_1}{\rho_2}}. \quad (5.20)$$

По этой формуле вычисляется скорость распространения ударной волны.

Звуковую волну можно рассматривать как бесконечно слабую ударную волну. В этом случае $\frac{p_2 - p_1}{p_2 - p_1} \rightarrow \frac{dp}{dp}$ и $\frac{\rho_2}{\rho_1} \rightarrow 1$.

Тогда $w_B \rightarrow a$ и, следовательно,

$$a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}},$$

т. е. получается формула (2.32), данная ранее без вывода. Она определяет скорость распространения звука. Сопоставляя эту формулу с формулой (5.20), нетрудно заметить, что скорость распространения ударной волны тем больше превышает скорость звука, чем сильнее разрыв, т. е. чем больше разность давлений $p_2 - p_1$. Так, например, при распространении взрывной волны, ее скорость постепенно убывает и в конце концов достигает звуковой. Объясняется это тем, что в первоначальный момент разность давлений в зоне взрыва и в окружающей среде весьма значительна, но по мере увеличения размеров ударной волны, возрастает и объем, который она охватывает, и давление внутри этого объема поэтому уменьшается, следовательно, уменьшается и $p_2 - p_1$.

В качестве иллюстрации можно привести данные, полученные с помощью высокоскоростной киносъемки (7150 кадров в секунду) при взрыве одной из первых атомных бомб, произведенном американцами в штате Нью-Мексико. Огненный шар, который появляется при атомном взрыве, ограничен снаружи ударной волной и по увеличению его диаметра можно судить о скорости распространения последней. В данном случае увеличение диаметра происходило за такие промежутки времени *):

<i>t, сек</i>	<i>d, м</i>
$1,93 \cdot 10^{-3}$	100
$15 \cdot 10^{-3}$	200
$127 \cdot 10^{-3}$	360

§ 5. ТЕОРИЯ КОСОГО СКАЧКА УПЛОТНЕНИЯ

В косых скачках уплотнения скорость изменяется не только по величине, но и по направлению. Поэтому при анализе физических явлений или при составлении расчетных зависимостей

*) Данные заимствованы из книги: Л. И. Седов. Методы подобия и размерности в механике. М., Гостехиздат, 1957.

стей приходится рассматривать треугольники скоростей и оперировать проекциями скорости на нормаль и касательную к фронту скачка.

Треугольники скоростей изображены на рис. 85 слева. Поток газа набегает на фронт косо́го скачка AE со скоростью w_1 . Угол α , образованный вектором скорости w_1 и фронтом скачка, называется *углом фронта*. Пересекая поверхность разрыва, линия тока отклоняется от исходного направления на угол ω ,

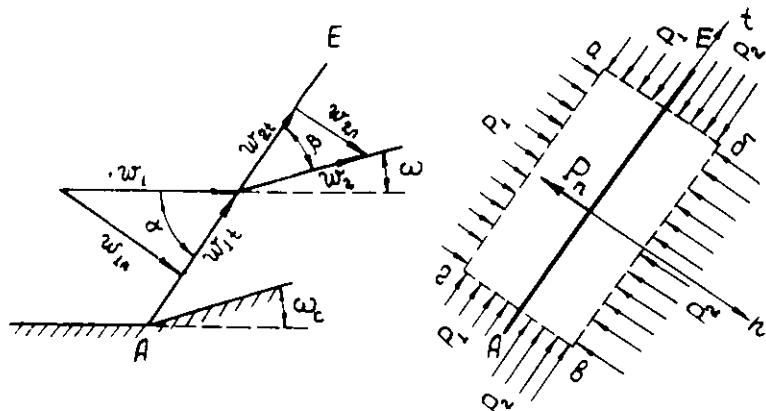


Рис. 85

называемый *углом отклонения* или *углом поворота потока в скачке*. В случае плоского течения угол отклонения потока равен тому углу, на который поворачивается стенка $\omega = \omega_c$. От поверхности разрыва поток уходит со скоростью w_2 , направленной под углом β к фронту.

Рассматривая составляющие скорости, нормальные и тангенциальные фронту скачка, нужно обратить внимание на тот факт, что только первые претерпевают разрыв $w_{2n} < w_{1n}$. Что касается тангенциальных составляющих перед скачком и за ним, то они остаются равными друг другу. Причины такого изменения скорости заключаются в следующем.

Если участок косо́го скачка уплотнения окружить контрольной поверхностью $abcd$ (рис. 85 справа) и рассмотреть силы давлений, действующих на нее, то сумма проекций этих сил на ось t будет равна нулю, так как давления на грани ab и bc взаимно уравновешиваются, а сумма проекций сил на ось n даст равнодействующую, направленную в сторону набегающего потока P_n . Такое направление силы P_n вызывает уменьшение секундного количества движения только в направлении нормали к фронту скачка, в тангенциальном направлении оно

сохраняется неизменным. Поэтому и происходит разрыв только нормальной составляющей скорости, т. е. $w_{2n} < w_{1n}$ и $w_{1t} = w_{2t}$.

Рассмотрим основные уравнения газодинамики применительно к косому скачку уплотнения.

Уравнение неразрывности имеет вид

$$\rho_1 w_{1n} = \rho_2 w_{2n}. \quad (5.21)$$

Его легко получить, приравняв массовые расходы перед и за скачком. В качестве площади проходного сечения в этом случае принимается участок поверхности косого скачка, тогда $F_1 = F_2$.

Уравнение количества движения следовало бы записать в проекциях на координатные оси t и n . Однако поскольку вдоль оси t никаких изменений не происходит, то уравнение количества движения записывается только для одной оси n , а именно

$$p_2 - p_1 = \rho_1 w_{1n} (w_{1n} - w_{2n}) = \rho_2 w_{2n} (w_{1n} - w_{2n}). \quad (5.22)$$

Для косого скачка, так же как и для прямого, уравнение энергии записывается в форме уравнения (2.19). Если квадраты скорости выразить через суммы квадратов составляющих, то оно примет вид

$$c_p T_1 + \frac{w_{1n}^2}{2} + \frac{w_{1t}^2}{2} = c_p T_2 + \frac{w_{2n}^2}{2} + \frac{w_{2t}^2}{2}. \quad (5.23)$$

Принимая во внимание, что

$$w_{1t} = w_{2t}, \quad (5.24)$$

можно записать

$$c_p T_1 + \frac{w_{1n}^2}{2} = c_p T_2 + \frac{w_{2n}^2}{2}. \quad (5.25)$$

Таким образом, для косого скачка уплотнения одинаково справедливы уравнения энергии, записанные как в форме (5.23), так и в форме (5.25). Рассматривая эти формулы, можно сделать выводы, что в косом скачке

$$T_1^* = T_2^*,$$

что следует из уравнения (5.23), и

$$T_{1n}^* = T_{2n}^*,$$

что следует из уравнения (5. 25), где

$$T_n^* = T + \frac{w_n^2}{2 \frac{k}{k-1} R} = T + \frac{w_n^2}{2c_p} \quad (5.26)$$

называется *температурой частичного торможения*.

Температуру частичного торможения можно представить, как такую температуру, которую показал бы термометр, если бы он перемещался вдоль фронта скачка со скоростью w_t . В этом случае он оказался бы неподвижным относительно тангенциального течения, и тормозилась бы только нормальная составляющая скорости.

Температуру частичного торможения можно представить величину, аналогичную критической скорости, а именно

$$a_{кр.н}^2 = \sqrt{2 \frac{k}{k+1} R T_n^*}, \quad (5.27)$$

которая называется критической скоростью косоого скачка. Она связана с обычной критической скоростью следующим образом:

$$\begin{aligned} a_{кр}^2 - a_{кр.н}^2 &= 2 \frac{k}{k+1} R (T^* - T_n^*) = \\ &= 2 \frac{k}{k+1} R \left(T + \frac{w^2}{2 \frac{k}{k-1} R} - T - \frac{w_n^2}{2 \frac{k}{k-1} R} \right) = \\ &= \frac{k-1}{k+1} (w^2 - w_n^2) = \frac{k-1}{k+1} w_t^2 \end{aligned}$$

или

$$a_{кр.н}^2 = a_{кр}^2 - \frac{k-1}{k+1} w_t^2. \quad (5.28)$$

Вывод кинематического соотношения для косоого скачка уплотнения производится так же, как и для прямого, только вместо исходных уравнений (5. 1), (3. 32) берутся уравнения (5. 21) и (5. 22). При сопоставлении формул (5. 1) и (5. 21), а также (3. 32) и (5. 22) видим, что они отличаются только тем, что в случае косоого скачка имеют индексы n , т. е. вместо полных значений скоростей, берутся только их нормальные составляющие. В связи с этим формулы, выражающие окончательные и промежуточные результаты, должны иметь ту же структуру, что и для прямого скачка, но вместо скоростей w_1 и w_2 должны

быть взяты их нормальные составляющие ω_{1n} и ω_{2n} . Так, например, формула (5.2) приобретает такой вид:

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1} = \omega_{1n} \omega_{2n}. \quad (5.29)$$

Для дальнейших преобразований применяется формула связи скорости звука с критической скоростью. Применительно к данному случаю ее можно записать так:

$$\begin{aligned} a^2 &= \frac{k+1}{2} a_{кр}^2 - \frac{k-1}{2} \omega^2 = \frac{k+1}{2} a_{кр}^2 - \frac{k-1}{2} \omega_n^2 - \frac{k-1}{2} \omega_t^2 = \\ &= \frac{k+1}{2} \left(a_{кр}^2 - \frac{k-1}{k+1} \omega_t^2 \right) - \frac{k-1}{2} \omega_n^2 \end{aligned}$$

или

$$a^2 = \frac{k+1}{2} a_{кр.n}^2 - \frac{k-1}{2} \omega_n^2. \quad (5.30)$$

Тогда выражения (5.3) и (5.4) примут следующий вид:

$$p_2 = \rho_2 \frac{k+1}{2k} a_{кр.n}^2 - \rho_2 \frac{k-1}{2k} \omega_{2n}^2, \quad (5.31)$$

$$p_1 = \rho_1 \frac{k+1}{2k} a_{кр.n}^2 - \rho_1 \frac{k-1}{2k} \omega_{1n}^2. \quad (5.32)$$

В результате преобразований, аналогичных выполненным при выводе кинематического соотношения (5.5), получим для косо-го скачка

$$\omega_{1n} \cdot \omega_{2n} = a_{кр.n}^2. \quad (5.33)$$

Если поделить обе части (5.33) на $a_{кр.n}$ и обозначить

$$\lambda_n = \frac{\omega_n}{a_{кр.n}}, \quad (5.34)$$

то получается кинематическое соотношение в безразмерной форме

$$\lambda_{1n} \cdot \lambda_{2n} = 1. \quad (5.35)$$

Сравнивая между собой кинематические соотношения для прямого и косо-го скачка, нетрудно заметить, что величина $a_{кр.n}$ в теории косо-го скачка играет такую же роль, как обычная критическая скорость $a_{кр}$ в теории прямого. Из формул (5.33) или (5.34) нельзя еще сделать вывод о том, какое течение устанавливается за косым скачком — дозвуковое или

сверхзвуковое, так как эти формулы определяют не полные величины скорости, а только их нормальные составляющие и не приведенные скорости λ_1 и λ_2 , а приведенные скорости λ_{1n} и λ_{2n} *). Однако, если обратиться к треугольникам скоростей (см. рис. 85), то легко установить, что при малых углах фронта α , когда величина ω_{1n} также мала по сравнению с ω_1 , изменение нормальной составляющей скорости от ω_{1n} до ω_{2n} не вызывает значительных изменений ее полной величины ω . Скачок в этом случае получается слабым: скорость в нем хотя и уменьшается, но все же остается выше скорости звука. Если же угол фронта α велик, и нормальная составляющая скорости ω_{1n} составляет значительную долю от ω_1 , то ее изменение вносит существенный вклад в изменение скорости ω_1 , поэтому течение за скачком становится дозвуковым, а скачок в этом случае называется сильным. Граница слабых и сильных скачков определяется значением скорости $\omega_2 = a_2$ или $M_2 = \lambda_2 = 1$.

Динамическое соотношение (5.7) не содержит величин, связанных с углом фронта скачка, поэтому оно одинаково справедливо как для прямых, так и для косых скачков.

Для получения других зависимостей можно воспользоваться общим правилом перехода от формул прямого к формулам косого скачка. После рассмотрения основных уравнений газодинамики в приложении к косому скачку, понятий температуры частичного торможения, критической скорости косого скачка, вывода кинематического соотношения сформулировать это правило не представит никаких затруднений. Оно заключается в следующем.

Для того чтобы получить расчетные формулы косого скачка, необходимо в соответствующих формулах прямого скачка заменить:

$$\begin{array}{ll} \omega_1 & \text{на } \omega_{1n} \\ \omega_2 & \text{на } \omega_{2n} \\ a_{кр} & \text{на } a_{кр,n} \\ \lambda_1 & \text{на } \lambda_{1n} \\ \lambda_2 & \text{на } \lambda_{2n} \\ M_1 & \text{на } M_1 \sin \alpha. \end{array}$$

Последняя замена получается так:

$$\frac{\omega_{1n}}{a_1} = \frac{\omega_1 \sin \alpha}{a_1} = M_1 \sin \alpha.$$

*) Нужно заметить, что λ_{1n} и λ_{2n} нельзя рассматривать как проекции векторов λ_1 и λ_2 на нормаль к фронту скачка (такую ошибку довольно часто допускают впервые изучающие газодинамику), так как $a_{кр} \neq a_{кр,n}$.

Приведенная скорость λ_{1n} связана с λ_1 следующей зависимостью

$$\lambda_{1n}^2 = \frac{w_{1n}^2}{a_{кр,n}^2} = \frac{w_{1n}^2}{a_{кр}^2 - \frac{k-1}{k+1} w_1^2} = \frac{w_1^2 \sin^2 \alpha}{a_{кр}^2 - \frac{k-1}{k+1} w_1^2 \cos^2 \alpha},$$

$$\lambda_{1n}^2 = \frac{\lambda_1^2 \sin^2 \alpha}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2 \cos^2 \alpha}. \quad (5.36)$$

Для иллюстрации этого правила приведем формулы для расчета параметров состояния газа за косым скачком уплотнения. Они получены применением указанного правила к соответствующим формулам прямого скачка (5.14), (5.15), (5.16), (5.17) и (5.18):

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{w_{1n}}{w_{2n}} = \lambda_{1n}^2, \quad (5.37)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\tau \left(\frac{1}{\lambda_{1n}} \right)}{\tau(\lambda_{1n})} = \frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \frac{1}{\lambda_{1n}^2}}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_{1n}^2}, \quad (5.38)$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{y(\lambda_{1n})}{y \frac{1}{\lambda_{1n}}} = \frac{\lambda_{1n}^2 - \frac{k-1}{k+1}}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_{1n}^2}, \quad (5.39)$$

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2k}{k+1} (M_1^2 \sin^2 \alpha - 1), \quad (5.40)$$

$$\tau = \frac{p_1^*}{p_2^*} = \frac{q(\lambda_{1n})}{q \left(\frac{1}{\lambda_{1n}} \right)} = \lambda_{1n}^2 \left(\frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_{1n}^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \frac{1}{\lambda_{1n}^2}} \right)^{\frac{1}{k-1}}. \quad (5.41)$$

Из этих формул, особенно из (5.40), легко видеть, что при одинаковых скоростях набегающего потока изменение параметров состояния газа в косом скачке происходит менее интенсивно, чем в прямом. Коэффициент восстановления давления в косом скачке выше, чем в прямом и тем более, чем слабее скачок.

§ 6. ОТКЛОНЕНИЕ ПОТОКА В КОСОМ СКАЧКЕ

Установим зависимость между углами в косом скачке уплотнения. Рассматривая треугольники скоростей на рис. 85, можно записать отношение тангенсов углов

$$\frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\frac{w_{2n}}{w_{1t}}}{\frac{w_{2t}}{w_{1n}}} = \frac{w_{2n}}{w_{1n}} = \frac{a_{\text{кр},n}^2}{w_{1n}^2} = \frac{1}{\lambda_{1n}^2}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{\lambda_{1n}^2} \operatorname{tg} \alpha. \quad (5.42)$$

Если в формуле связи (2.54) применить общее правило перехода от формул прямого к формулам косого скачка, заменив λ_1 через λ_{1n} и M_1 через $M_1 \sin \alpha$

$$\lambda_{1n}^2 = \frac{\frac{k+1}{2} M_1^2 \cdot \sin^2 \alpha}{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2 \cdot \sin^2 \alpha}, \quad (5.43)$$

и подставить это значение λ_{1n}^2 в (5.42), то можно получить такую зависимость между углами α и β

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{k-1}{k+1} \left(1 + \frac{2}{k-1} \frac{1}{M_1^2 \cdot \sin^2 \alpha} \right) \operatorname{tg} \alpha. \quad (5.44)$$

Угол отклонения потока определяется так:

$$\omega = \alpha - \beta. \quad (5.45)$$

Если в формуле (5.44) принять значение $M = \frac{1}{\sin \alpha}$, то получим $\alpha = \beta$ и $\omega = 0$, т. е. косой скачок вырождается в линию слабых возмущений.

Задаваясь определенным значением числа M и рядом углов α , можно по формулам (5.44) и (5.45) рассчитать зависимость $\alpha = f(\omega)$ и построить кривую (рис. 86). Аналогичные кривые строятся и для других чисел M . Полученный график называется диаграммой углов $\alpha\omega$.

На диаграмме $\alpha\omega$ следует обратить внимание на такие характерные точки. Точка a имеет координаты $\omega = 0$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Из нее выходят кривые, соответствующие всем числам M . Этой

точке отвечает прямой скачок уплотнения. Точки b лежат на максимумах кривых. Им отвечают такие косые скачки, которые дают максимально возможный угол отклонения потока $\alpha_{\max}$. Вблизи точек b располагаются точки v , разделяющие сильные и слабые скачки. Область сильных скачков лежит вы-

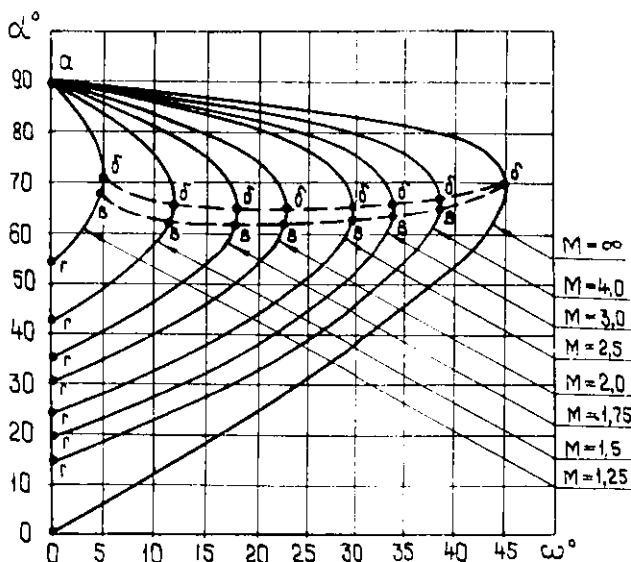


Рис. 86

ше точек v и заканчивается точкой a (наиболее сильный скачок — прямой). Область слабых скачков расположена ниже точек v и заканчивается точками r . Координаты последних

$\omega = 0$, $\alpha = \arcsin \frac{1}{M_1}$. Этим точкам отвечают линии слабых возмущений.

Способы практического применения диаграммы $\alpha\omega$ можно проиллюстрировать на примере обтекания заостренного клиновидного тела плоским сверхзвуковым потоком.

На рис. 87 слева изображен такой клин, а справа — построенные на диаграмме $\alpha\omega$ с целью определения угла фронта скачка. При набегающем сверхзвуковом потоке $M > 1$ на носовую часть клина с углом заострения $\varphi_{\text{кл}}$ на носике сверху и снизу образуются косые скачки с одинаковыми углами фронта, если клин установлен симметрично. Из диаграммы $\alpha\omega$ следует, что в этом случае возможно образование скачков двух типов: слабых с углом фронта α_1 , кото-

рым отвечает точка 1, и сильных с углом фронта α_2 , которым отвечает точка 2. Теория не дает ответа на вопрос, который именно из этих двух типов скачков получится в действительности. Эксперимент показывает, что более устойчивы слабые скачки. Сильные скачки (показанные на рис. 87 штрихпунктирной линией) реализуются только в том случае, когда

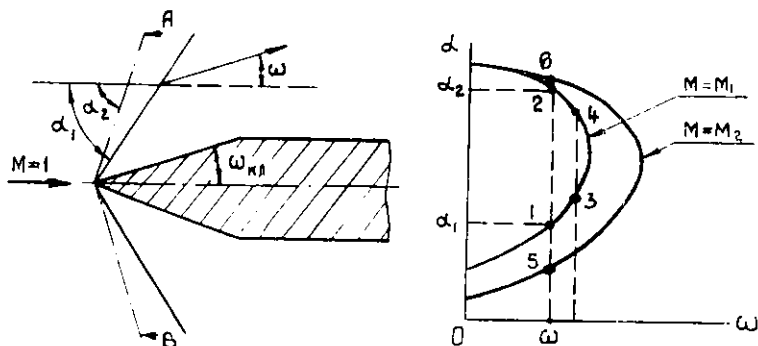


Рис. 87

для этого имеются особые условия, например, в потоке где-то в точках А и В установлены твердые тела, возбуждающие скачки. Если убрать эти тела, то скачок из сильного превращается в слабый, переходя в положение, соответствующее меньшему углу α_1 .

При увеличении угла отклонения потока ω , как это видно из диаграммы, угол фронта слабого скачка возрастает (точка 3), а сильного — уменьшается (точка 4). Заметим, что увеличение угла отклонения потока ω может получаться как в результате увеличения угла заострения тела, так и в результате поворота этого тела на некоторый угол атаки относительно набегающего потока. Возрастание числа M набегающего потока от M_1 до M_2 приводит к уменьшению угла фронта слабого скачка (точка 5) и к росту угла фронта сильного скачка (точка 6).

При определенном сочетании числа M набегающего потока и угла заострения клина $\omega_{кл}$, угол фронта скачка α получается таким, что точки 3 и 4 на диаграмме сливаются вместе, занимая положение точки 6 на рис. 86. Это — максимально возможное отклонение потока в косом скачке ($\omega - \omega_{max}$). Если угол заострения будет больше ω_{max} , т. е. твердое тело будет отклонять поток на угол, больший ω_{max} , то поворот потока на этот угол в косом скачке уплотнения становится невозможным, и скачок перестраивается, образуя отсоединенную криволинейную головную волну (рис. 88).

Элементарные участки головной волны наклонены к набегающему потоку под различными углами, начиная от 90° и кончая углом слабых возмущений μ . Таким образом, каждому элементу головной волны соответствует определенная точка на диаграмме $\omega\omega$. Центральная часть волны представляет собой прямой скачок уплотнения. Участок ab состоит из элементов, представляющих собой сильные косые скачки, за которыми начинается дозвуковой поток. Отклонение дозвукового потока может происходить на любой угол, оно ничем не ограничено. Таким образом, поворот потока на угол $\omega_{кл}$ может произойти только в дозвуковой зоне. Поэтому и возникает дозвуковая зона ave (рис. 88), а головная волна отрывается от носика обтекаемого тела и уходит вверх по потоку, чтобы освободить место, где газ мог бы повернуться на угол $\omega_{кл}$. Элементы волны, лежащие за пределами точек e , являются слабыми скачками. Следовательно, головная волна ослабевает от центра к периферии, приближаясь к линии слабых возмущений.

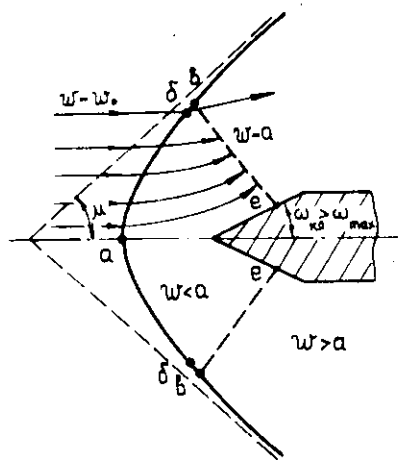


Рис. 88

Течение за сильным участком головной волны ab происходит таким образом, что каждая элементарная струйка суживается, образуя горло на линии ve . В результате этого поток из дозвукового вновь превращается в сверхзвуковой. Линия ve называется звуковой линией.

Область, лежащая перед ней, является дозвуковой, а лежащая после нее — сверхзвуковой.

Головная волна, отсоединенная от передней кромки обтекаемого тела, может появляться не только при обтекании клина с углом раствора, большим ω_{max} . Она возникает также при обтекании тупоносных тел. Она образуется перед входным отверстием воздухозаборника, когда площадь его проходного сечения недостаточна, чтобы пропустить весь воздух, поступающий из струи сверхзвукового набегающего потока, и «лишний» воздух вынужден обтекать воздухозаборник снаружи (рис. 89).

В последнем случае центральная часть головной волны весьма близка по форме к прямому скачку.

Диаграмму углов $\omega\omega$ можно применять и для определения числа M набегающего потока по имеющейся фотографии об-

текания какого-нибудь клиновидного тела сверхзвуковым потоком. Измерив на этой фотографии углы α и ω , легко найти на диаграмме точку, соответствующую этим углам, и по линии, проходящей через эту точку, найти число M .

Рассмотрим, каким образом можно построить картину обтекания ромбовидного профиля плоским сверхзвуковым потоком.

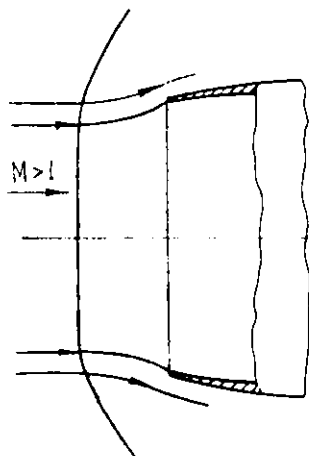


Рис. 89

На рис. 90 изображен симметричный ромбический профиль $ABCD$, установленный под нулевым углом атаки (большая

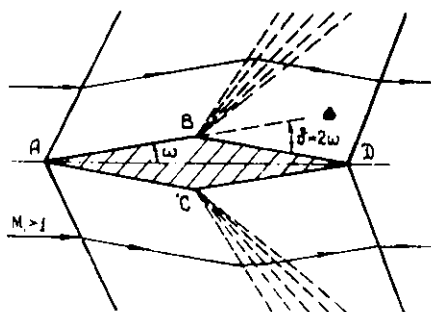


Рис. 90

диагональ ромба параллельна набегающему потоку). При обтекании носика в точке A образуются два симметрично расположенных косых скачка. Пересекая эти скачки, поток приобретает направление, параллельное граням AB и AC , скорость при этом понижается (но остается дозвуковой, так как скачки слабые), а давление возрастает. В точках B и C стенка профиля образует внешние тупые углы, при обтекании которых возникают волны разрежения. Скорость потока при переходе через волну разрежения возрастает, а давление падает, причем настолько, что становится меньше давления в набегающем потоке. Увеличение давления до его значения в окружающей среде происходит в хвостовых скачках, образующихся в точке D . Их появление объясняется тем, что два потока, движущихся вдоль граней BD и CD , должны при слиянии повернуться и принять направление, параллельное набегающему потоку. При таком повороте все явления происходят так же, как и при обтекании внутреннего тупого угла, следствием чего и является возникновение косых скачков уплотнения. Так как давления на грани AB и AC больше, чем на BD и CD , то равнодействующая сил давления, действующих на профиль, не

равна нулю. Следовательно, на тело действует сила, направленная слева направо вдоль большой диагонали ромба, называемая силой волнового сопротивления. Если профиль повернуть на некоторый угол атаки к набегающему потоку (например, по часовой стрелке), то обтекание становится несимметричным, а равнодействующая сил давления будет иметь составляющие как по горизонтальной оси — силу волнового сопротивления, так и по вертикальной — подъемную силу.

Построение картины обтекания несложно. Принимая во внимание, что углы отклонения потока в носовом и хвостовом скачках уплотнения равны половине угла раствора клина ω (а при обтекании профиля под углом атаки они связываются простой зависимостью, в которую входит угол атаки), по диаграмме ω легко найти углы фронта скачков. Для носового скачка берется кривая, соответствующая числу $M = M_1$; для хвостового число M предварительно рассчитывается. Поворот потока в волне разрежения можно рассчитать либо аналитически, либо воспользоваться диаграммой эппиклонд. При этом угол поворота потока $\delta = 2\omega$, если обтекание происходит при нулевом угле атаки.

Нужно заметить, что при больших углах атаки, когда отклонение потока клином превышает максимально возможное, косой скачок вырождается в отсоединенную головную волну.

Расчет и построение косых скачков уплотнения удобно вести графическим методом, применяя диаграмму ударных поляр.

Ударная поляр — это кривая, представляющая геометрическое место точек — концов векторов скорости за косыми скачками различной интенсивности, начиная от линии слабых возмущений и кончая прямым скачком. Каждая ударная поляр строится при определенной заданной скорости набегающего потока.

На рис. 91 изображена векторная диаграмма скоростей на входе и выходе косого скачка. Рассматривая треугольники скоростей и принимая во внимание соотношения (5.33) и (5.28), можно установить следующую зависимость:

$$\omega_{2y}^2 = (\omega_1 - \omega_{2x})^2 \frac{\omega_{2x} - \frac{\alpha_{кр}^2}{\omega_1}}{\frac{\alpha_{кр}^2}{\omega_1} + \frac{2}{k-1} \frac{\omega_1}{\omega_1 - \omega_{2x}}} \quad (5.46)$$

(она приводится без вывода, в окончательном виде).

Кривая, построенная по формуле (5.46), называется гипсиссодой, или строфоидой. В газодинамике ее называют

имеют асимптоту $\omega_{2x} = \frac{a_{\text{кр}}^2}{\omega_1} + \frac{2}{k+1} \omega_1$.

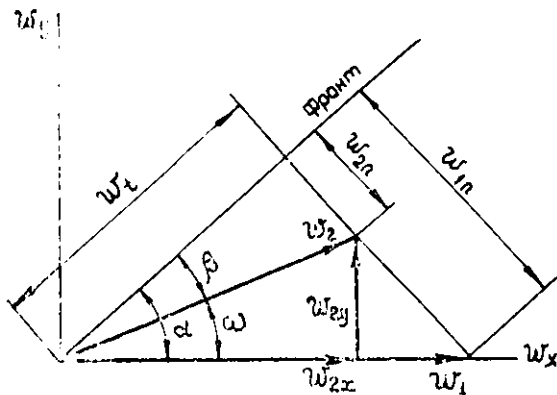


Рис. 91

Вектор скорости набегающего потока изображается на ударной поляре отрезком OB . Если из начала координат провести луч под углом ω к оси абсцисс, то он пересечет ударную поляру в трех точках: C , D , E , т. е. получаются три значения скорости за косым скачком: OC , OD и OE . Отрезок OC соответствует скорости за сильным косым скачком, отрезок OD — за слабым, так как конец первого лежит внутри круга, радиуса $a_{кр}$, а второго — вне этого круга. Отрезок OE больше, чем OB , следовательно, он отвечает скачку разрежения, который физически невозможен. Поэтому ветви гипоциссоиды, лежащие правее точки B отбрасываются и далее не рассматриваются. При увеличении угла ω точки C и D сближаются и секущая OC превращается в касательную OF . Угол ω достигает в этом случае значения $\omega_{\max}$. При уменьшении ω до нуля, точка D приближается к точке B , чему соответствует вырождение косоуго скачка в линию слабых возмущений, а точка C приближается к точке A , чему отвечает вырождение косоуго скачка в прямой. Скорость за прямым скачком изображается отрезком OA .

Направление фронта скачка с помощью ударной поляры определяется следующим образом. Из точки B через конец вектора ω_2 (точка D или C) проводится секущая. К этой секущей из начала координат восстанавливается перпендикуляр.

Он определяет направление фронта скачка. Если угол $\omega=0$, то точка D приближается к точке B , а секущая превращается в касательную к ударной поляре в точке B . Перпендикуляр, опущенный из начала координат на эту касательную, дает направление линии слабых возмущений.

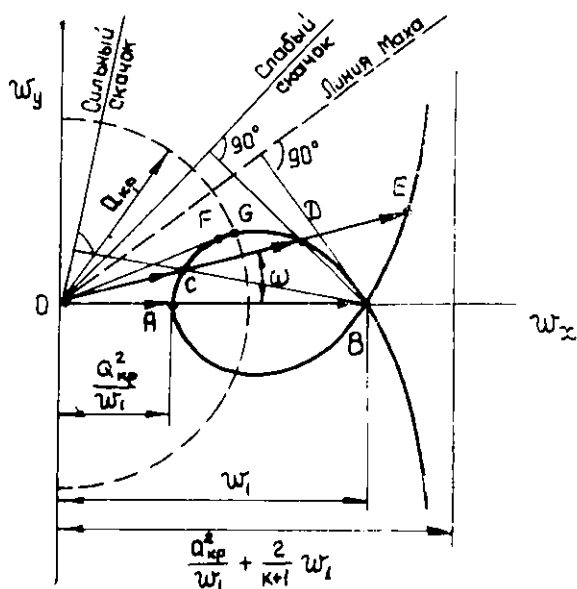


Рис. 92

Если все длины на ударной поляре разделить на критическую скорость, то все отрезки будут иметь смысл приведенных скоростей, например, $OB = \lambda_1$, $OD = \lambda_2$ за слабым скачком, $OC = \lambda_2$ за сильным скачком, $OA = \lambda_2$ за прямым скачком. Тогда ударная поляра становится универсальной. Такие универсальные ударные поляры сводятся в диаграммы (рис. 93), по осям координат которых откладываются проекции λ_x и λ_y приведенной скорости. При использовании такой диаграммы для расчетов скачков сначала по заданной приведенной скорости набегающего потока выбирается соответствующая ударная поляра (расстояние от начала координат до хвостика поляры). Дальнейшие построения ведутся теми способами, которые были рассмотрены выше.

Для усвоения приемов практического пользования диаграммой ударных поляр полезно рассмотреть следующие задачи самостоятельно:

- 1) заданы ω и λ_1 , определить λ_2 ;
- 2) заданы λ_1 и λ_2 , определить ω ;
- 3) заданы ω и λ_1 , определить α ;
- 4) заданы α и λ_1 , определить λ_2 и ω .

Выше рассматривались косые скачки уплотнения в плоском потоке. При обтекании круговых конусов осесимметричным потоком получаются некоторые отличия. Они связаны с тем, что площадь поперечного сечения потока здесь зависит не только от расстояния между ограничивающими поток линиями

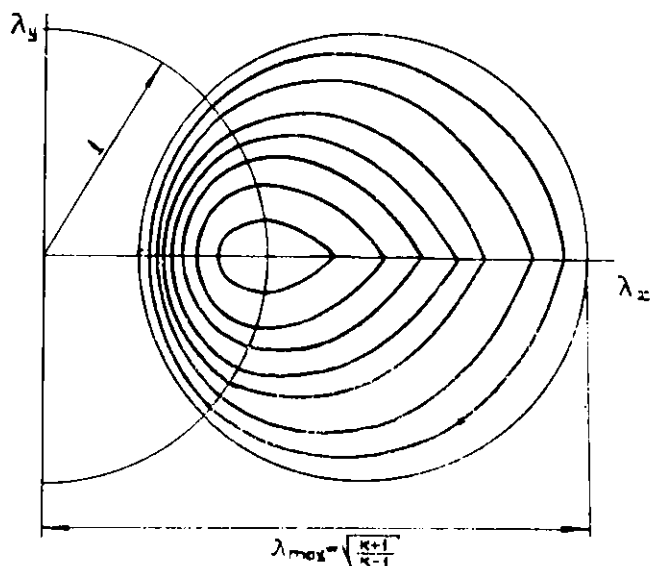


Рис. 93

тока, но и от радиуса, на котором они расположены (от расстояния между линиями тока зависит ширина элементарного кольцевого сечения, а от радиуса — длина окружности этого кольца). Следовательно, при одинаковых углах заострения круговой конус вызывает более слабое уменьшение площади сечения потока, чем плоский клин, поэтому повышение давления и понижение скорости в первом случае получается меньшим. Таким образом, угол отклонения потока в коническом скачке уплотнения ω получается меньше угла между образующей конуса и направлением набегающего потока $\omega_{\text{кон}}$, тогда как в плоском течении угол отклонения потока в скачке равен углу клина $\omega_{\text{кл}}$. Зависимость угла отклонения потока в скач-

ке ω от угла $\omega_{\text{кон}}$ и числа M набегающего потока приведена на рис. 94.

После конического скачка в процессе дальнейшего обтекания конуса линии тока искривляются, постепенно приобретая

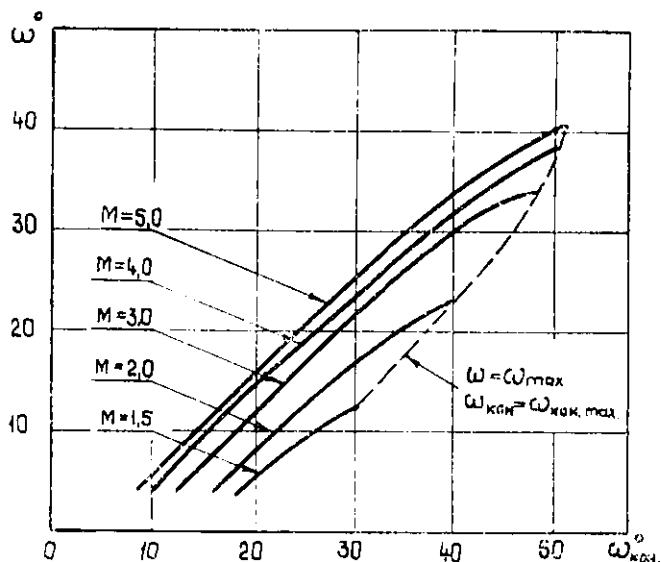


Рис. 94

то направление, которое придают потоку стенки (рис. 95). Такое течение сопровождается уменьшением площади поперечного сечения потока. Если в этой зоне $M > 1$, то движение

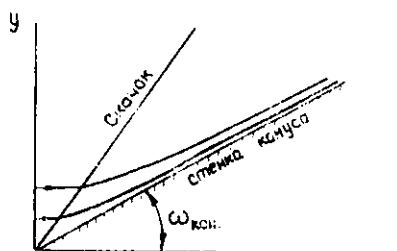


Рис. 95

происходит с понижением скорости и увеличением давления при постоянной энтропии. Таким образом, полный поворот потока при обтекании кругового конуса заключает в себе два этапа: а) отклонение в коническом скачке с изменением скорости по ударной адиабате, а параметров состояния — по

ударной адиабате и б) отклонение в области за скачком, где течение изэнтропное. При обтекании плоского клина весь поворот потока осуществляется в скачке. Поэтому при равных скоростях набегающего потока и равных углах заострения

потери полного давления на круговом конусе будут меньше, чем для плоского клина.

Следствием рассмотренных выше особенностей является также то обстоятельство, что максимальный угол заострения, при котором косой скачок вырождается в отсоединенную головную волну, для кругового конуса имеет большее значение, чем для плоского клина.

При расчете конических скачков уплотнения на круговом конусе также применяются графические методы. Для этой цели применяются, например, «яблоковидные кривые», представляющие собой сочетание ударной поляры и годографа скорости течения сжатия, происходящего при обтекании конуса.

§ 7. СИСТЕМЫ СКАЧКОВ УПЛОТНЕНИЯ

Система скачков уплотнения состоит из нескольких последовательно расположенных косых скачков, которые являются слабыми. Пересекая такую систему, поток испытывает ступенчатое торможение: в каждом скачке скорость падает, а давление возрастает, но течение остается сверхзвуковым. Последний скачок в системе, называемый замыкающим, часто бывает сильным косым или прямым. При переходе через сильный замыкающий скачок течение становится дозвуковым.

При проектировании элементов проточной части сверхзвуковых турбомашин, а также воздухозаборников сверхзвуковых воздушно-реактивных двигателей, обтекаемые тела профилируют таким образом, чтобы специально организовать в потоке систему скачков. Дело в том, что совершенно избежать скачка уплотнения при входе сверхзвукового потока на рабочие лопатки турбокомпрессора или во входное отверстие воздухозаборника невозможно, следовательно, невозможно избавиться от потерь полного давления. Однако, если один скачок уплотнения заменить системой, в которой достигается такое же повышение давления, то потери полного давления получаются значительно меньшими. Иначе говоря, коэффициент восстановления давления системы скачков значительно выше, чем для одного скачка, эквивалентного системе по повышению давления. Это свойство системы скачков можно пояснить с помощью диаграммы TS .

Допустим, что газ, имеющий в невозмущенном сверхзвуковом потоке давление p_1 , сжимается в одном сильном скачке уплотнения до давления p_2 . На рис. 96 точкой 1 изображено состояние газа до сжатия. Состоянию газа за скачком отвечает точка 2, которая получается пересечением ударной адиабаты, проведенной из точки 1, с изобарой p_2 . Повышение энтропии

в скачке происходит от величины s_1 до величины s_2 ; этому соответствует падение давления торможения от p_1^* до p_2^* .

Заменим один сильный скачок эквивалентной системой скачков. Для этого интервал давлений $p_2 - p_1$ на рис. 96 разобьем на более мелкие интервалы, проведя изобары p_a и p_b . Эти интервалы соответствуют повышению давлений в скачках, из которых состоит система. Точка a , которая получается пересечением ударной адиабаты с изобарой p_a , изображает состояние газа за первым скачком.

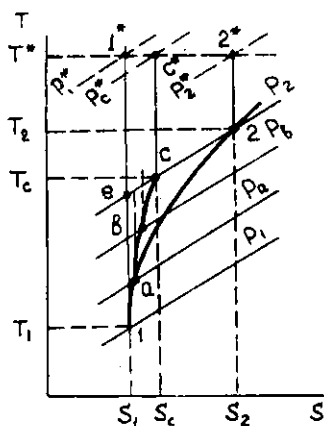


Рис. 96

Чтобы получить точку b , отвечающую состоянию газа за вторым скачком, надо из точки a провести новую ударную адиабату до пересечения с изобарой p_b . Аналогично отыскивается точка c , соответствующая состоянию газа за последним скачком. Нужно заметить, что построенные таким образом отрезки ударных адиабат ab и bc не сливаются с ударной адиабатой для сильного скачка $1-2$, так как они строятся заново. Так, например, вблизи точки a линия ab почти совпадает с изоэнтропой (с вертикалью, проведенной пунктиром), но по мере удаления от этой точки

все более и более отклоняется вправо.

Рассматривая диаграмму, видим, что в системе скачков повышение энтропии $s_c - s_1$ и падение давления торможения получается меньше, чем это было в первоначально взятом одном скачке уплотнения. Следовательно, процесс сжатия газа в системе скачков сопровождается меньшими потерями, чем в одном сильном скачке.

Повышение энтропии связано с количеством скачков в системе. Чем больше это количество, тем меньшим получается повышение энтропии и падение давления торможения. В системе, состоящей из бесконечного количества бесконечно слабых скачков, все ударные адиабаты сливаются с изоэнтропой $1e$, и процесс сжатия протекает без потерь.

Один из способов организации системы скачков в сверхзвуковом потоке представлен на рис. 97. По такой схеме выполняются воздухозаборники сверхзвуковых воздушно-реактивных двигателей. Изображенное на рисунке устройство называется сверхзвуковым входным диффузором со ступенчатым конусом или с центральным телом. Центральное тело круглого поперечного сечения выполнено в виде конуса, образующая

которого ABC имеет излом в точке B . Оно расположено концентрично входному отверстию так, что проходное сечение для воздуха CD получается в форме кольца. Набегающий сверхзвуковой поток встречает вершину конуса (точка A) и отклоняется, принимая то направление, которое придает ему стенка конуса AB . В результате этого возникает слабый косой скачок AD конической формы. Пересекая скачок, поток понижает скорость ($\lambda_2 < \lambda_1$), но остается сверхзвуковым ($\lambda_2 > 1$). При обтекании внутреннего тупого угла в точке B образуется второй скачок системы, также слабый, в котором поток вторично сжимается. Скорость вновь уменьшается ($\lambda_3 < \lambda_2$), но течение остается сверхзвуковым. Вблизи самого узкого сечения (CD) устанавливается замыкающий прямой скачок уплотнения, при его пересечении поток становится дозвуковым $\lambda_4 < 1$. Дальнейшее движение дозвуковой поток совершает в расширяющемся канале с уменьшением скорости и повышением давления. Таким способом организуется трехскачковая система.

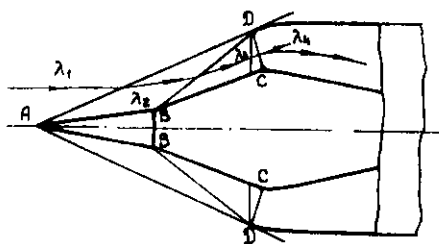


Рис. 97

Если образующую конуса выполнить без излома в точке B , то получится двухскачковая система, состоящая из одного косого и замыкающего прямого скачка. Для получения трех косых и одного прямого скачка образующая центрального тела должна иметь две точки излома. Во всех случаях ступенчатый конус профилируется так, чтобы косые скачки пересекались на передней кромке обечайки в точке D . Тогда в потоке, обтекающем двигатель снаружи, получается только один косой скачок, являющийся продолжением AD .

Системы скачков уплотнения подробно исследованы Г. И. Петровым и Е. П. Уховым. В этих исследованиях было установлено, что выигрыш в коэффициенте восстановления давления, который получается от применения системы, по сравнению с одним скачком уплотнения бывает различным в зависимости от того, из какого количества скачков состоит система и как распределено повышение давления между скачками. Было найдено оптимальное распределение интенсивности скачков, при котором система обладает наименьшими потерями. При таком оптимальном распределении давления между скачками коэффициент восстановления давления возрастает с увеличением количества скачков в системе. Если, например,

количество угловых точек на образующей центрального тела AC увеличить до бесконечности, превратив тем самым ступенчатый конус в тело вращения с криволинейной образующей, то количество скачков также увеличится до бесконечности, а сами скачки вырождаются в слабые линии сжатия. Процесс сжатия станет изоэнтальпическим, т. е. коэффициент восстановления давления возрастет до единицы. Однако практически такие системы не применяются по двум причинам: во-первых, на нерасчетных режимах, т. е. при $M \neq M_{расч}$, такая система работает несколько не лучше двух- или трехскачковой; во-вторых, выполнение конуса с криволинейной образующей технологически сложнее, чем ступенчатого. Если поставить условие, что система скачков должна обеспечивать коэффициент восстановления давления не ниже 0,97, то оказывается вполне достаточным следующее количество скачков в системе:

$M=1,0-1,5$	1 прямой скачок (система не нужна);
$M=1,5-1,8$	1 косой + 1 прямой;
$M=1,8-2,0$	2 косых + 1 прямой;
$M=2,0-2,3$	3 косых + 1 прямой.

Если взять более низкое значение коэффициента восстановления давления, то числа M , соответствующие различным системам, соответственно возрастают.

§ 8. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ И ОТРАЖЕНИЕ СКАЧКОВ УПЛОТНЕНИЯ

В сверхзвуковых потоках скачки уплотнения могут взаимодействовать между собой, если они пересекаются, взаимодействовать с волной разрежения, а также с границами твердых стенок или с границами свободной струи. Ниже рассмотрены явления, которыми сопровождаются такие взаимодействия.

Пересечение двух косых скачков

На рис. 98 изображена картина обтекания плоской стенки ABF , образующей два внутренних тупых угла в точках A и B , сверхзвуковым потоком газа. Косые скачки, возникающие в точках A и B , пересекаются в точке C . Выше этой точки образуется один косой скачок CD , более сильный, чем AC и BC , способный повернуть поток на угол $\omega_1 + \omega_2$. Иначе говоря, направление потока за скачком CD должно получиться таким же, как при последовательном отклонении в скачках AC и BC . Это является основным условием, определяющим интенсивность и углы фронта α_1 , α_2 и α_1' скачков. Последние легко определяются с помощью диаграммы $\alpha\omega$ или диаграммы ударных поляр. Угол α_1 отыскивается по заданному числу M_1 на-

бегающего потока и углу отклонения ω_1 , угол α_2 — по числу M_2 за первым скачком (которое является числом M набегающего потока для второго скачка BC) и углу отклонения потока ω_2 , угол α'_1 — по числу M_1 и углу отклонения $\omega_1 + \omega_2$. В области BCE и в области DCE (за скачками) статические давления должны быть одинаковы $p_3 = p'_3$. Давление торможения в области BCE получается более высоким, чем в области DCE , так как в первом случае поток пересекает систему скачков, обладающую более высоким коэффициентом восстановления давления, чем один скачок CD . Поэтому $M_3 > M'_3$, т. е. ниже линии CE поток движется с большей скоростью, чем выше

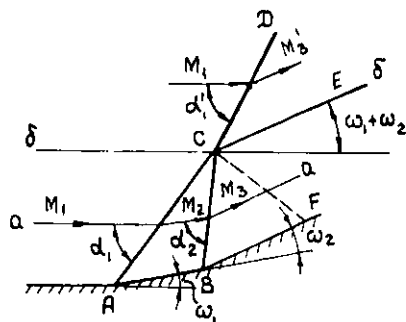


Рис. 98

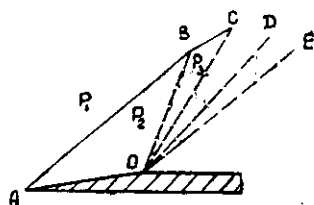


Рис. 99

этой линии. Таким образом, линия CE разделяет потоки, движущиеся с различными скоростями. Она называется линией тангенциального разрыва. Нужно заметить, что линия тангенциального разрыва может быть четко выражена только в случае идеального (невязкого) газа. В потоке вязкого газа вместо нее образуется тонкий вихревой слой вдоль CE . Этот вихревой слой является причиной дополнительного роста энтропии и, следовательно, увеличения потерь.

При расчете параметров состояния выше и ниже линии CE может получиться, что статические давления в этих зонах будут неодинаковы. В этом случае по линии CF возникает слабый косой скачок уплотнения или волна разрежения, в зависимости от того, в какую сторону должно измениться статическое давление ниже линии CE для достижения баланса. Однако этот скачок или волна разрежения получаются очень слабыми и в приближенных расчетах могут не учитываться.

Взаимодействие скачка с волной разрежения

Этот случай взаимодействия представлен на рис. 99. Волна разрежения OBE , возникшая за скачком ABC , попадая на скачок, не пересекает его, так как линии Маха OB , OC и т. д.

представляют собой бесконечно слабые возмущения, тогда как при переходе через скачок давление меняется на конечную величину. Тем не менее, линии Маха, попадая на скачок, изменяют угол фронта последнего. Обращаясь к рис. 99, видим, что в области OBC давление p_3 ниже, чем за косым скачком AB , т. е. в области AOB , так как эти зоны разделены между собой линией разрежения OB . Поэтому участок косого скачка BC должен быть слабее, чем участок AB , и, следовательно, угол его фронта должен быть меньше.

Таким образом, взаимодействуя с волной разрежения, лежащей за косым скачком, скачок постепенно ослабевает и на значительном удалении от обтекаемого тела вырождается в линию слабых возмущений.

Рассмотренное явление принимается во внимание при проектировании датчиков для измерения статического давления в сверхзвуковом потоке. Если, например, отверстие для отбора статического давления выполнить на поверхности AO обтекаемого заостренного тела, то измеряемое давление будет равно p_2 , т. е. будет выше статического давления в потоке p_1 . Поэтому отверстие отбора должно быть отнесено назад, далеко после волны разрежения. В этой зоне давление практически равно p_1 , так как она отделена от набегающего потока очень слабой волной — скачком, выродившимся в линию слабого возмущения.

Отражение косого скачка от твердой стенки

Различают правильное отражение косого скачка от твердой стенки и неправильное, или маховское отражение.

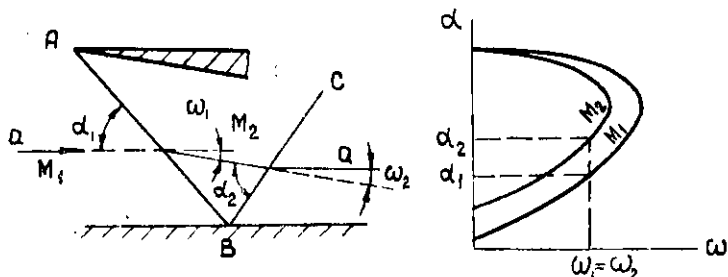


Рис. 100

Схема потока при правильном отражении изображена на рис. 100. Косой скачок, возникший в точке A , достигает противоположной стенки в точке B . Пересекая этот скачок, поток отклоняется по часовой стрелке на угол ω_1 и движется далее

наклонно по направлению к нижней плоской стенке. Длительное движение в этом направлении невозможно, так как сквозь твердую стенку газ пройти не может, и стенка непременно вызовет вторичный поворот потока на угол $\omega_2 = -\omega_1$. Если, например, рассмотреть линию тока вблизи нижней плоской стенки, то этот вторичный поворот должен произойти сразу после выхода потока из скачка AB , т. е. в точке B . Поэтому из точки B выходит отраженный косою скачок уплотнения, в котором и осуществляется вторичный поворот на угол $\omega_2 = -\omega_1$. За скачком BC линии тока направлены параллельно нижней плоской стенке.

Падающий AB и отраженный BC скачки наклонены к стенке не под одинаковыми углами: отраженный располагается круче. Последнее связано с тем, что число M_2 перед отраженным скачком меньше, чем M_1 — перед падающим, поэтому при одинаковой абсолютной величине ω получаются разные углы фронта, а именно $\alpha_2 > \alpha_1$ (см. рис. 100 справа).

При некоторых сочетаниях M_1 и α_1 может получиться, что вертикаль $\omega_1 = \text{const}$, проведенная на диаграмме $\alpha\omega$, не пересечется с кривой M_2 , т. е. решения для отраженного скачка не существует. Физически это значит, что при $M = M_2$ не существует ни одного косою скачка, который был бы способен повернуть поток на угол ω_1 : даже максимальный угол поворота ω_{max} получается меньше, чем требуемый $\omega_2 = \omega_1$. В этом случае правильное отражение невозможно, и возникает отражение по Маху.

Скачок при маховском отражении приобретает V-образную форму. Точка B , в которой происходит отражение, отрывается от стенки и перемещается внутрь потока, а между этой точкой и стенкой образуется сильный скачок, весьма близкий к прямому (см. BD , рис. 101 слева). Отраженный скачок BC поворачивает поток на предельный угол ω_{max} , но этот угол по абсолютной величине получается все же меньше, чем угол отклонения потока ω_1 в падающем скачке AB . Таким образом, поток не приобретает направление, параллельное стенке, а движется наклонно под углом $\Delta\omega$ к последней. Величина остаточного угла $\Delta\omega$ легко определяется по диаграмме $\alpha\omega$ (рис. 101 справа). Окончательное выравнивание направления течения (параллельно стенке) происходит за скачками в дозвуковой зоне DBE , так как при $M < 1$ поток способен поворачиваться на любой угол, без образования каких-либо волн. Отрыв точки отражения B от стенки происходит вследствие необходимости появления дозвуковой зоны, в которой мог бы закончиться поворот потока на остаточный угол $\Delta\omega$.

Отраженный скачок BC в действительности получается несколько искривленным, однако это искривление незначитель-

но и в приближенных расчетах и построениях им пренебрегают.

Поток, движущийся выше точки B , пересекает систему скачков AB и BC , а ниже точки B — один сильный скачок BD . Поэтому давление торможения в зоне CBE получается более высоким, чем в зоне DBE ; статические давления в этих зонах — одинаковы. В связи с этим скорость над линией BE

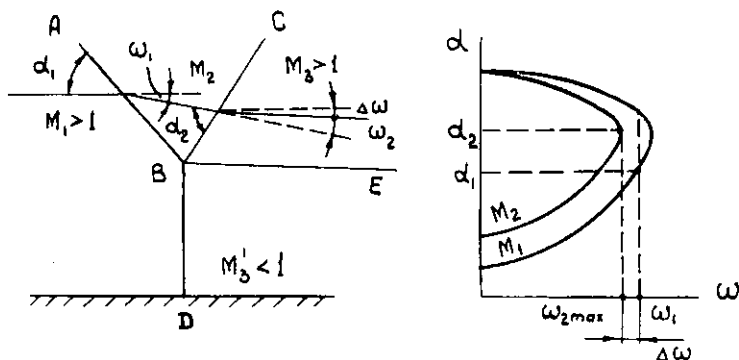


Рис. 101

значительно выше ($M_3 > 1$), чем под этой линией ($M_3 < 1$). Таким образом, BE представляет собой линию тангенциального разрыва. В случае вязкого газа вдоль BE образуется вихревой слой.

Потери при маховском отражении получаются большими, чем при правильном. Это связано с образованием сильного скачка BD , а также с появлением вихревого слоя на линии BE .

Отражение косо́го скачка от границы свободной струи

На рис. 102 изображена схема течения, в котором сверхзвуковая струя конечной толщины обтекает внутренний тупой угол. Таким образом, снизу это течение ограничено твердой стенкой, а сверху — границей свободной струи.

Косой скачок AB , образовавшийся в угловой точке, попадает на границу струи в точке B . В этой точке появляется отраженная волна разрежения BCD , возникновение которой объясняется следующим. В набегающем потоке, в области FBA , статическое давление p_1 такое же, как и в окружающей среде, т. е. за границей струи FBN , так как граница свободной струи не способна удерживать разность давлений. За скачком AB давление p_2 становится выше, чем p_1 . Следовательно, по-

является область повышенного давления ABC . Но в зоне HBD давление вновь должно быть равно p_1 , так как эта зона отделена от внешней среды лишь границей струи BH . Поэтому между областями ABC и HBD образуется волна разрежения BCD , при прохождении через которую давление снижается от p_2 до p_1 . Излом внешней границы струи FBH в точке отражения происходит так, что ее направление изменяется на угол, равный сумме углов отклонения потока в скачке AB и в волне разрежения BCD .

В качестве примеров взаимодействия скачков уплотнения рассмотрим спектры потока, выходящего из сопла Лавала на нерасчетных режимах.

Для каждого сопла Лавала существует вполне определенное расчетное значение приведенной скорости истечения λ_{2p} и соответствующее ему отношение давлений на выходе и входе * . Эти величины определяются отношением площадей выходного сечения и горла (см. пример в конце § 8, гл. II). Таким образом, при изменении отношения давлений следовало бы изменить и отношение проходных сечений сопла, но в обычных соплах эти сечения не регулируются, поэтому режим получается нерасчетным.

Нерасчетные режимы подразделяются на две группы. К первой группе относятся такие, которые получаются при отношении давлений на выходе и входе меньшем расчетного, ко второй — при отношении давлений большем расчетного. Если работу сопла рассматривать при постоянных значениях давления на входе и температуры торможения, то вместо приведенной скорости можно брать обычную размерную скорость, а вместо отношения давлений — давление на выходе. Тогда первая группа нерасчетных режимов получится при понижении давления той среды, в которую происходит истечение, а вторая группа — при повышении.

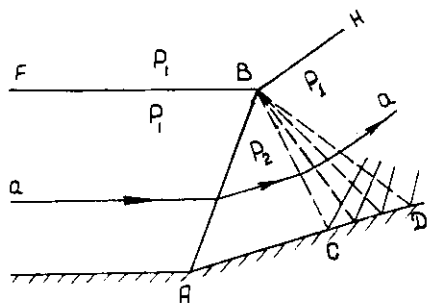


Рис. 102

$^*)$ Строго говоря, нужно рассматривать отношение статического давления к давлению торможения на выходе из сопла. Но так как при отсутствии потерь давление торможения на выходе и входе сопла одинаково, а разница между p_1 и p_1^* мала вследствие малой скорости, то часто оценку режима ведут по отношению статических давлений на выходе и входе.

На рис. 103 приведены графики распределения скорости и давления по длине сопла. Расчетному режиму соответствует кривая АГБ. Газ, проходя через сопло, получает в этом случае полное расширение: давление в выходном сечении 2—2 понижается до давления окружающей среды. Из сопла он выходит

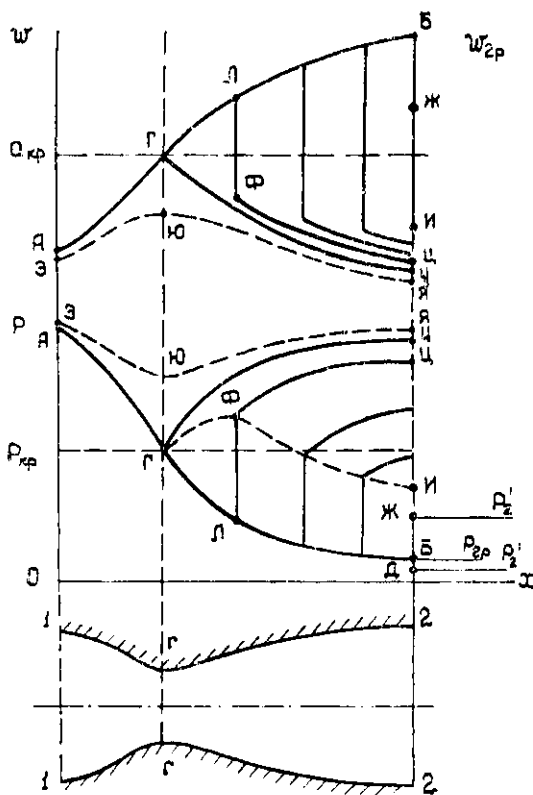


Рис. 103

в виде струи постоянного сечения, во всех точках которой давление равно p_{2p} (рис. 104). Кромки выходного отверстия создают в потоке бесконечно слабые возмущения, изображенные на рисунке в виде двух пересекающихся характеристик.

При понижении противодавления на выходе из сопла $p_2' < p_{2p}$ (точка Д, см. рис. 103) никаких изменений параметров потока на срезе, т. е. в сечении 2—2, а также внутри канала не происходит. Действительно, если предположить про-

тивное, допуская, что понижение давления должно вызвать увеличение скорости в сечении 2—2, то нужно согласиться с тем, что и во всех других сечениях внутри канала должен наблюдаться рост скорости. Однако скорость в горле сопла не может быть больше критической, следовательно, и во всех последующих сечениях она должна сохранять значения, соответствующие кривой ГВ. Недоиспользованный перепад давлений (от точки В до точки Д) реализуется уже за пределами сопла.

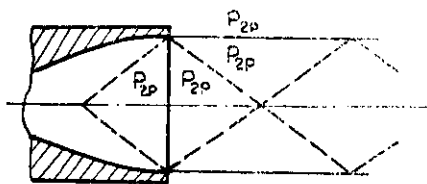


Рис. 104

Спектр потока, отвечающий нерасчетным режимам первой группы, изображен на рис. 105. При обтекании выходных кромок на срезе сопла А и А₁ образуется течение Прандтля — Майера с возникновением волн разрежения АВС и А₁В₁С₁. Пересекая волны А₁ЕF и АЕН, поток отклоняется таким образом, что границы струи расширяются, т. е. ее поперечное сечение возрастает. Давление при этом понижается от расчет-

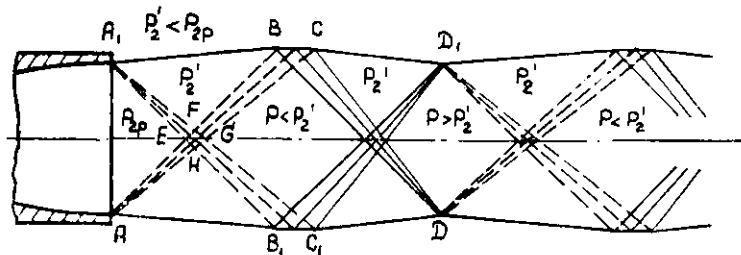


Рис. 105

ного значения p_{2p} , которое оно имеет в области АА₁Е, до давления внешней среды p_2' в области А₁FB. (Область А₁FB отделена от внешней среды только границей свободной струи А₁В, по обе стороны которой давление не может быть разным.) При дальнейшем течении поток вторично пересекает волну разрежения BCGF, и давление становится ниже, чем в окружающей среде. В точках В,С и В₁,С₁ линии разрежения, отражаясь от границы свободной струи, образуют линии сжатия, составляющие волны сжатия BCD и В₁С₁Д₁. При пересечении такой волны давление газа вновь возрастает до p_2' . Далее поток еще раз пересекает волну сжатия, в результате чего дав-

ление становится выше, чем в окружающей среде. В точках D_1 и D волны сжатия отражаются от границы свободной струи и образуют волны разрежения, а процесс изменения давления повторяется. Заметим, что течение идеального газа в волнах разрежения или сжатия происходит без потерь, поэтому периодические расширения и сжатия струи с соответствующими изменениями давления должны повторяться до бесконечности. Однако в действительности, вследствие влияния вязкости газа, этот процесс сравнительно быстро затухает.

Рассмотрим вторую группу нерасчетных режимов, возникающих при повышении противодавления выше расчетного $p_2' > p_{2p}$. Можно было бы предполагать, что если давление окружающей среды, в которую происходит истечение, выше расчетного $p_2' > p_{2p}$, то расширение газа должно было бы идти

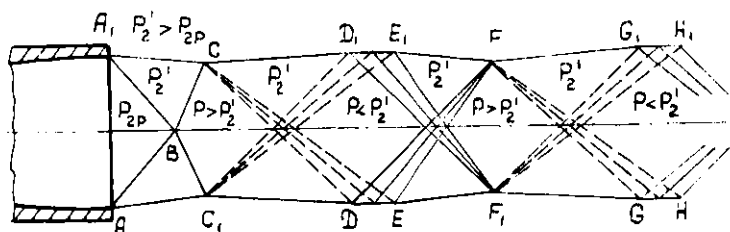


Рис. 106

лишь до некоторого промежуточного сечения, в котором $p = p_2'$, а затем струя, оторвавшись от стенок, должна двигаться с постоянной скоростью и давлением, сохраняя постоянное поперечное сечение. Но в действительности процесс идет несколько иначе.

Если противодавление немного превышает p_{2p} , то это возмущение не способно проникнуть в канал, так как газ вытекает из сопла с большой сверхзвуковой скоростью. Поэтому за горлом, в расширяющейся части, течение будет происходить так же, как на расчетном режиме, в соответствии с кривой $АГВ$ (см. рис. 103). Газ расширяется в этом случае до давления более низкого, чем снаружи. Несоответствие давлений обнаруживается лишь при выходе из сопла, где образуется слабый косой скачок уплотнения, в котором давление повышается до p_2' , а скорость понижается, но остается сверхзвуковой (см. точку $Ж$, рис. 103). Схема течения в струе газа за соплом на этом режиме показана на рис. 106.

В скачках уплотнения AB и A_1B происходит повышение давления от p_{2p} до p_2' , соответствующее переходу от точки $Б$ к точке $Ж$ (см. рис. 103). (Заметим, что область A_1BC отде-

лена от внешней среды границей свободной струи, поэтому давления в них одинаковы.) Потоки, движущиеся выше оси струи и ниже ее, пересекая скачки A_1B и AB , поворачиваются по направлению друг к другу, и при слиянии должны повернуться вторично, в обратную сторону. Этот поворот осуществляется во вторичных скачках BC и BC_1 . Струя на этом участке (A_1C , AC_1) имеет суживающуюся форму, так как в первых косых скачках линии тока получают отклонение в направлении оси струи. Пересекая вторичные скачки, газ вторично сжимается и давление становится выше, чем в окружающей среде. В точках C и C_1 скачки, отражаясь от границы свободной струи, образуют волны разрежения CDE и $C_1D_1E_1$, в которых давление уменьшается при первом пересечении до p'_2 , а при втором до $p < p'_2$. Далее спектр потока имеет точно такой же вид, как и на режиме неполного расширения (см. рис. 105).

При повышении давления окружающей среды p_2' скачки AB и A_1B усиливаются, их углы фронта и углы отклонения потока возрастают. При достижении некоторого значения p_2' вторичные скачки BC и BC_1 уже не могут повернуть поток на тот угол, который требуется, поэтому система косых скачков перестраивается и образует мостообразный скачок (рис. 107). Причины образования мостообразного скачка и его природа имеют очень много общего с маховским отражением. Если центральную линию тока условно принять за твердую стенку, то половину мостообразного скачка можно построить как маховское отражение. Особенностью струи за мостообразным скачком уплотнения является то, что ее центральное ядро движется с дозвуковой скоростью, тогда как на периферии течение сверхзвуковое. В точках B и B_1 образуются линии тангенциального разрыва, а в случае вязкого газа — вихревые слои. Сильный скачок BB_1 и вихревые слои являются причиной существенного увеличения потерь в мостообразном скачке по сравнению с косым.

По мере дальнейшего увеличения p_2' сильный скачок BB_1 занимает все большую и большую часть площади сечения струи, следовательно, дозвуковое течение развивается, а сверхзвуковое сокращается. Мостообразный скачок постепенно переходит в прямой и проникает внутрь канала сопла *).

На рис. 103 прямому скачку на срезе сопла отвечает точка H . Скорость в этом случае получается дозвуковой. С ростом противодавления p_2' прямой скачок все глубже проникает

*) Скорость распространения сильного скачка или ударной волны значительно превышает скорость звука. Поэтому сильные возмущения способны распространяться против течения в сверхзвуковом потоке, если только скорость их распространения превысит скорость потока.

внутри канала, перемещаясь к горлу. Изменение скорости и давления по длине сопла изображается кривой типа АГЛФЦ. Когда p'_2 достигает значения, соответствующего точке Ч, скачок входит в узкое сечение канала и вырождается в слабую звуковую волну, а вся расширяющаяся часть сопла работает при дозвуковой скорости, как обычный дозвуковой диффузор. Дальнейшее возрастание противодавления p'_2 приводит к тому, что канал начинает работать как трубка Вентури (см. кривую ЭЮЯ, рис. 103).

Нужно заметить, что нерасчетные режимы первой группы называют режимами неполного расширения или недорасширения, а сопло, работающее в таких условиях — коротким соплом.

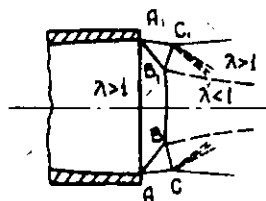


Рис. 107

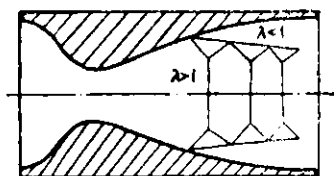


Рис. 108

лом. Нерасчетные режимы второй группы — это режимы перерасширения. Сопло, работающее на режиме перерасширения называют длинным.

При экспериментальных исследованиях распределения давления вдоль оси сопла было установлено, что в некоторых случаях повышение давления на участке кривой ЛФ (см. рис. 103) происходит не по вертикали, а несколько растянуто по длине. Более подробный анализ этого вопроса показал, что в этих местах образуются так называемые псевдоскачки, представляющие собой последовательно расположенные косые или мостообразные скачки*) в центральной части потока и сильно развитую зону отрыва — на периферии (рис. 108). Потери в зоне отрыва соизмеримы, а иногда и превышают потери в скачках. Такая последовательность скачков занимает некоторое расстояние по длине, поэтому на экспериментальных графиках и наблюдаются участки типа ЛФ, но расположенные наклонно. На некоторых режимах псевдоскачки вырождаются

*) В промежутках между сильными участками соседних мостообразных скачков происходит разгон потока (вследствие уменьшения площади сечения струи) с переходом через скорость звука и образованием сверхзвуковой зоны (за счет некоторого увеличения площади струи), поэтому возможно появление следующего скачка.

в прямой или мостообразный скачок, на других — в косой скачок с последующим сильным отрывом потока. Образование той или иной конфигурации связано с характером взаимодействия скачков с пограничным слоем — областью вблизи стенки, где наблюдается интенсивное уменьшение скорости от ее значения в ядре потока до нуля на стенке. Вопрос о характере взаимодействия находится в настоящее время в стадии изучения.

ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ.
ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ

§ 1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Уравнения движения идеальной жидкости рассматривались в § 4 главы I, где они были представлены в форме Эйлера и в форме Громеки. В настоящем параграфе изучается движение вязкой жидкости. Это более сложное явление. В отличие от идеальной жидкости, где поверхностными силами являются только силы нормального давления (нормальные напряжения сжатия), в вязкой жидкости эти силы получают несколько иными, а именно: появляются касательные напряжения, приложенные к поверхностям, которые ограничивают рассматриваемый объем, нормальные напряжения зависят не только от давления, но и от сил вязкости.

Уравнения движения вязкой жидкости выводятся тем же методом, что и уравнения Эйлера, только расширяется комплект действующих сил — добавляются касательные напряжения, а нормальные напряжения вычисляются более сложно. Поэтому, прежде чем приступить к выводу, необходимо познакомиться с тем, как определяются напряжения.

В элементарном объеме, изображенном на рис. 5, полагая, что жидкость вязкая, векторы поверхностных сил будут направлены не перпендикулярно к площадкам (например, $ADEF$, $BCKL$), а под косыми углами к ним. Это связано с тем, что векторы напряжений поверхностных сил имеют не только нормальные компоненты, но и касательные. Заметим также, что в теории вязкой жидкости положительными нормальными напряжениями считаются напряжения растяжения. Поэтому на схемах, подобных рис. 5, напряжения от поверхностных сил изображают векторами, направленными не внутрь рассматриваемого объема, а наружу.

Для обозначения проекций вектора напряжения поверхностной силы применяется двойная индексация. Первый индекс указывает ту площадку, на которой рассматриваются напряжения. Этому индексу дается наименование той координатной оси, которая нормальна к заданной площадке. Так, например, для площадки, параллельной координатной плоскости xoy , при обозначении любых напряжений первым индексом будет x . Второй индекс указывает ту ось, на которую проектируется вектор напряжения. Таким образом, на каждой площадке рассматриваются два касательных и одно нормальное напряжение. Касательные имеют разноименные индексы, нормальные — одноименные (рис. 109).

Поскольку частицу жидкости можно представить как элементарный объем кубической формы, то вполне очевидно, что для характеристики ее напряженного состояния нужно задать следующие девять величин:

$$\begin{aligned} p_{xx} \quad \tau_{yx} \quad \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \quad p_{yy} \quad \tau_{zy} \\ \tau_{xz} \quad \tau_{yz} \quad p_{zz} \end{aligned}$$

Если составить моменты сил, вызываемые касательными напряжениями, приложенными к граням кубика, и рассмотреть условия их равновесия относительно координатных осей *), то нетрудно доказать, что

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \tau_{yx}, \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy}, \\ \tau_{zx} &= \tau_{xz}, \end{aligned}$$

т. е. касательные напряжения, приложенные к смежным граням и действующие в одной плоскости, численно равны. Это дает значительное упрощение, так как позволяет сократить число рассматриваемых напряжений с девяти до шести.

Для дальнейших рассуждений необходимо связать напряжения со скоростью движения жидкости.

*) Условия равновесия — равенство нулю сумм моментов от касательных напряжений, взятых относительно соответствующих координатных осей. Если предположить, что элементарный объем жидкости имеет еще вращательное движение с угловым ускорением не равным нулю, то в уравнение моментов следовало бы ввести еще, согласно второй теореме Эйлера, производные от моментов количества движения. Однако при стремлении объема к нулю момент количества движения получается величиной высшего порядка малости по сравнению с моментами поверхностных сил, так как объем стремится к нулю быстрее, чем поверхность.

Наиболее простую зависимость касательных напряжений от скорости дает закон жидкостного трения Ньютона

$$\tau = \mu \frac{\partial w}{\partial n}. \quad (6.1)$$

Здесь τ — касательное напряжение, $\frac{\partial w}{\partial n}$ — изменение скорости по нормали к линии тока, или поперечный градиент скорости. Коэффициент пропорциональности в этой формуле μ — называется *динамическим коэффициентом вязкости*, или *динамической вязкостью*. Он зависит от рода жидкости и характеризует вязкость. Кроме того, он зависит от температуры. Для капельных жидкостей с ростом температуры μ уменьшается, следуя зависимости

$$\mu = \mu_0 \frac{1}{1 + at + bt^2}, \quad (6.2)$$

где a и b — постоянные для данного рода жидкости коэффициенты, t — температура в градусах Цельсия, μ_0 — динамический коэффициент вязкости при $t = 0^\circ$. Для газов μ возрастает с увеличением температуры. Эта зависимость хорошо описывается формулой Сатерленда

$$\mu = \mu_0 \frac{1 + \frac{c}{T_0}}{1 + \frac{c}{T}} \cdot \sqrt{\frac{T}{T_0}}, \quad (6.3)$$

в которой c — коэффициент, зависящий только от рода газа, T — абсолютная температура в градусах Кельвина, μ_0 — коэффициент вязкости при $T = T_0$. Для воздуха можно пользоваться также приближенной зависимостью

$$\mu = \mu_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{3}{4}}. \quad (6.4)$$

Наряду с динамическим коэффициентом вязкости применяется еще кинематический коэффициент вязкости

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}. \quad (6.5)$$

Его размерность $\left[\frac{м^2}{сек} \right]$ не содержит динамических величин, а только кинематические, откуда он и получил свое название.

Единицы измерения для μ и ν в различных системах следующие:

	СИ	СГС	МКГС (техническая)
μ	$1 \frac{\text{н} \cdot \text{сек}}{\text{м}^2}$	$1 \frac{\text{дин} \cdot \text{сек}}{\text{см}^2}$	$1 \frac{\text{кг} \cdot \text{сек}}{\text{м}^2}$
ν	$1 \frac{\text{м}^2}{\text{сек}}$	$1 \frac{\text{см}^2}{\text{сек}}$	$1 \frac{\text{м}^2}{\text{сек}}$

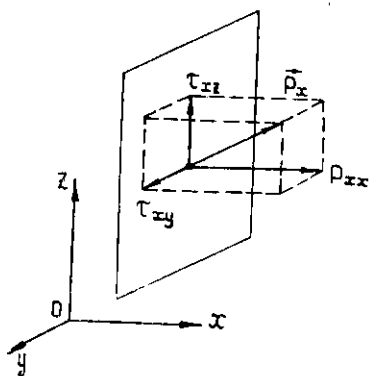


Рис. 109

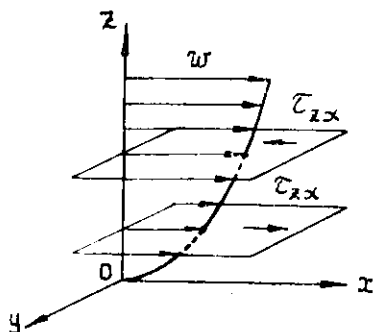


Рис. 110

В системе СГС эти единицы имеют специальные названия: $1 \frac{\text{дин} \cdot \text{сек}}{\text{см}^2} = 1 \text{ пуаз}$; $1 \frac{\text{см}^2}{\text{сек}} = 1 \text{ стокс}$. Соотношение между единицами в различных системах такое:

$$1 \frac{\text{н} \cdot \text{сек}}{\text{м}^2} = 10 \text{ пз} = 0,102 \frac{\text{кг} \cdot \text{сек}}{\text{м}^2}$$

$$1 \frac{\text{м}^2}{\text{сек}} = 10^4 \text{ ст.}$$

Применяя формулу Ньютона (6.1) к потоку, движущемуся параллельно плоскости xoy (рис. 110), можно записать

$$\tau_{zx} = \mu \frac{\partial w_x}{\partial z}. \quad (6.6)$$

Если рассмотреть два бесконечно близко расположенных слоя, которые на рис. 110 изображены параллельными плоскостями, то можно заметить, что касательные напряжения на верхний слой со стороны нижнего действуют против движения, а на нижний со стороны верхнего — по движению. Иначе

говоря, верхний слой стремится увлечь за собой нижний, а нижний слой тормозит верхний. Объем жидкости, находящийся между такими слоями, деформируется, получая деформацию сдвига (рис. 111). Согласно формуле (1.5), скорость угловой деформации определится как

$$\theta_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_x}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial x} \right),$$

что при $\frac{\partial w_z}{\partial x} = 0$ (так как $w_z = 0$) даст

$$\theta_y = \frac{1}{2} \frac{\partial w_x}{\partial z}.$$

Тогда

$$\tau_{zx} = 2\mu \tau_y. \quad (6.7)$$

Таким образом, между касательным напряжением и скоростью угловой деформации существует линейная зависимость с коэффициентом пропорциональности 2μ .

В более общем виде связь между напряжениями и скоростями жидкости устанавливается *законом трения Стокса*. Этот закон имеет формальную аналогию с законом Гука для твердого тела, применяемом в теории упругости или в сопротивлении материалов. По закону Гука напряжения, возникающие в твердом теле, пропорциональны деформациям: нормальные напряжения пропорциональны линейным относительным деформациям, а касательные — угловым. Согласно закону Стокса *напряжения пропорциональны не деформациям, а скоростям деформации*: нормальные — скорости линейной деформации, а касательные — скорости угловой деформации. Коэффициент пропорциональности, как это следует из рассмотренного выше частного примера, равен 2μ *).

Обращаясь к теореме Коши-Гельмгольца (1.7) видим, что при движении жидкого объема в общем случае имеют место следующие скорости деформации:

скорости линейной деформации $\frac{\partial w_x}{\partial x}, \frac{\partial w_y}{\partial y}, \frac{\partial w_z}{\partial z},$

скорости угловой деформации $\theta_x, \theta_y, \theta_z.$

*) Вполне понятно, что ссылка на частный пример не является строгим доказательством. Последнее можно найти в фундаментальных курсах по гидромеханике, напр.: Л. Г. Лойцянский. Механика жидкости и газа. М., Гостехиздат, 1957. Г. Шлихтинг. Теория пограничного слоя. М., Изд-во иностр. лит., 1956.

Тогда, принимая во внимание формулы (1.5), можно записать касательные напряжения в таком виде:

$$\begin{aligned}\tau_{xy} = \tau_{yx} &= 2\mu \theta_z = \mu \left(\frac{\partial w_y}{\partial x} + \frac{\partial w_x}{\partial y} \right), \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} &= 2\mu \theta_x = \mu \left(\frac{\partial w_z}{\partial y} + \frac{\partial w_y}{\partial z} \right), \\ \tau_{zx} = \tau_{xz} &= 2\mu \theta_y = \mu \left(\frac{\partial w_x}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial x} \right),\end{aligned}\quad (6.8)$$

а нормальные напряжения, возникающие только от действия сил вязкости, представить так:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= 2\mu \frac{\partial w_x}{\partial x}, \\ \sigma_{yy} &= 2\mu \frac{\partial w_y}{\partial y}, \\ \sigma_{zz} &= 2\mu \frac{\partial w_z}{\partial z}.\end{aligned}\quad (6.9)$$

Нужно обратить внимание, что полные величины нормальных напряжений p_{xx} , p_{yy} , p_{zz} отличаются от записанных формулой (6.9) на величину давления в газе p_0 , которое определяется молекулярно-кинетическими процессами. (Давление в газе или жидкости существует и тогда, когда влияние вязкости отсутствует, например, в идеальной жидкости или в неподвижной реальной жидкости). Таким образом,

$$\begin{aligned}p_{xx} &= -p_0 + \sigma_{xx} = -p_0 + 2\mu \frac{\partial w_x}{\partial x}, \\ p_{yy} &= -p_0 + \sigma_{yy} = -p_0 + 2\mu \frac{\partial w_y}{\partial y}, \\ p_{zz} &= -p_0 + \sigma_{zz} = -p_0 + 2\mu \frac{\partial w_z}{\partial z}.\end{aligned}\quad (6.10)$$

Знак минус перед величиной p_0 связан с тем, что давление создает напряжения сжатия, в то время как положительными считаются нормальные напряжения растяжения.

Вычитая из утросенной величины p_{xx} сумму напряжений, можно записать

$$3p_{xx} - (p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}) = -3p_0 + 3 \cdot 2\mu \frac{\partial w_x}{\partial x} - \left[-3p_0 + \right. \\ \left. + 2\mu \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) \right] = 3 \cdot 2\mu \frac{\partial w_x}{\partial x} - 2\mu \operatorname{div} w,$$

откуда

$$p_{xx} = \frac{p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}}{3} + 2\mu \frac{\partial w_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} w. \quad (6.11)$$

Теперь следует ввести понятие о том, что такое давление в вязкой жидкости.

Если за величину давления принять нормальные напряжения p_{xx} , p_{yy} , p_{zz} , то возникает неудобство, так как в одной и той же точке эти напряжения различны по величине. В этом случае пришлось бы в каждом направлении рассматривать

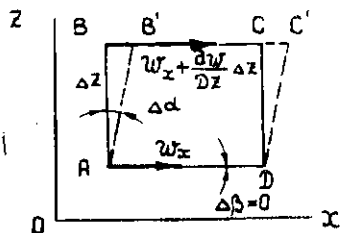


Рис. 111

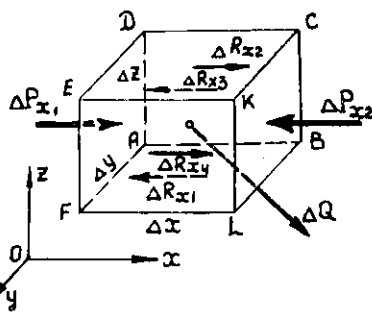


Рис. 112

свою величину давления. Для того чтобы понятия давления в вязкой жидкости и в идеальной жидкости сохранились идентичными, надо отыскать такую комбинацию, составленную из трех напряжений p_{xx} , p_{yy} и p_{zz} , которая не зависела бы от ориентации системы координат, иначе говоря, которая не зависела бы от ориентации площадки, проведенной внутри жидкости для подсчета действующих на нее сил давления. Таким свойством обладает средняя арифметическая величина

$$p = - \frac{p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}}{3}. \quad (6.12)$$

Она и принимается в качестве давления в вязкой жидкости.

Пользуясь таким представлением о давлении, можно записать выражение (6.12) для p_{xx} и аналогичные ему для p_{yy} и p_{zz} в следующем виде:

$$\begin{aligned} p_{xx} &= -p + 2\mu \frac{\partial w_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} w, \\ p_{yy} &= -p + 2\mu \frac{\partial w_y}{\partial y} - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} w, \\ p_{zz} &= -p + 2\mu \frac{\partial w_z}{\partial z} - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} w. \end{aligned} \quad (6.13)$$

В случае несжимаемой жидкости, согласно уравнению неразрывности $\operatorname{div} w = 0$, тогда последние слагаемые в правой части обращаются в нуль и уравнения (6.13) упрощаются. Сопоставляя их с формулами (6.10), нетрудно заметить, что в этом случае $p = p_0$.

Для вывода уравнений движения вязкой жидкости рассмотрим элементарный объем $ABCDEFKL$ (рис. 112), движущийся под действием сил: поверхностных нормальных $\Delta \vec{P}$, поверхностных касательных $\Delta \vec{R}$ и массовых $\Delta \vec{Q}$. Равнодействующая этих сил, в соответствии со вторым законом Ньютона, должна равняться массе жидкого объема, умноженной на ускорение. Запишем это уравнение сначала в проекциях на ось x , подсчитав предварительно проекции действующих сил

$$\Delta P_{x1} = -p_{xx} \Delta y \cdot \Delta z,$$

$$\Delta P_{x2} = \left(p_{xx} + \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y \cdot \Delta z,$$

$$\Delta R_{x1} = \tau_{zx} \Delta x \cdot \Delta y,$$

$$\Delta R_{x2} = \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \Delta z \right) \Delta x \cdot \Delta y,$$

$$\Delta R_{x3} = \tau_{yx} \Delta x \cdot \Delta z,$$

$$\Delta R_{x4} = \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \Delta y \right) \Delta x \cdot \Delta z,$$

$$\Delta Q_x = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot \rho X,$$

где X — проекция на ось x ускорения от массовых сил. Получим

$$\begin{aligned} \Delta P_{x1} - \Delta P_{x2} - \Delta R_{x1} + \Delta R_{x2} - \Delta R_{x3} + \Delta R_{x4} + \Delta Q_x = \\ = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot \rho \frac{dw_x}{dt}, \end{aligned}$$

здесь $\Delta x \Delta y \Delta z \cdot \rho$ — масса, а $\frac{dw_x}{dt}$ — проекция ускорения на ось x . После подстановки сюда вычисленных значений проекций сил, приведения подобных и сокращения на $\Delta x \Delta y \Delta z$, это уравнение приобретает вид:

$$\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \rho X = \rho \frac{dw_x}{dt}. \quad (6.14)$$

Подставим теперь вместо напряжений их выражения через скорости деформаций, пользуясь формулами (6.13) и (6.8) и считая $\mu = \text{const}$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[-p + 2\mu \frac{\partial w_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) \right] = \\ &= -\frac{\partial p}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial^2 w_y}{\partial y \partial x} - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial^2 w_z}{\partial z \partial x}, \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial w_x}{\partial z} + \mu \frac{\partial w_z}{\partial x} \right) = \mu \frac{\partial^2 w_x}{\partial z^2} + \mu \frac{\partial^2 w_z}{\partial x \partial z}, \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial w_y}{\partial x} + \mu \frac{\partial w_x}{\partial y} \right) = \mu \frac{\partial^2 w_y}{\partial x \partial y} + \mu \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} \end{aligned}$$

и уравнение (6.14) после небольших преобразований принимает такой вид:

$$\begin{aligned} \rho X - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial z^2} \right) + \frac{\mu}{3} \left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_y}{\partial x \partial y} + \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 w_z}{\partial x \partial z} \right) = \rho \frac{dw_x}{dt}. \end{aligned}$$

Применяя здесь операторы Δ и div

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial z^2} &= \Delta w_x, \\ \frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \text{div } w, \end{aligned}$$

запишем

$$\rho X - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \Delta w_x + \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} w = \rho \frac{dw_x}{dt}.$$

Поделив обе части равенства на ρ и приняв во внимание, что $\frac{\mu}{\rho} = \nu$, представим уравнение движения в проекциях на ось x и аналогичные ему в проекциях на оси y и z в окончательном виде

$$\begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta w_x + \frac{\nu}{3} \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} w &= \frac{dw_x}{dt}, \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta w_y + \frac{\nu}{3} \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{div} w &= \frac{dw_y}{dt}, \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta w_z + \frac{\nu}{3} \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{div} w &= \frac{dw_z}{dt}. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Они называются *уравнениями Навье-Стокса* *).

В заключение нужно отметить, что существует кроме зависимости (6.12) еще одна, которая может представлять давление в вязкой жидкости, а именно

$$p = - \frac{p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}}{3} - \mu' \operatorname{div} w. \quad (6.16)$$

Эта величина также не зависит от ориентации площадки, на которую рассматривается действие сил давления. Коэффициент μ' называется второй вязкостью.

На формальную возможность такого представления давления указывали еще Стокс и Кирхгоф, однако физическое истолкование явление второй вязкости получило в 1937 году в работах Л. И. Мандельштама и М. А. Леонтовича. Вторая вязкость связана с явлениями неравновесности и проявляется в быстроте протекающих процессах. Если в движущемся газе происходит очень быстрое изменение плотности, то наблюдается некоторое отставание в изменении других величин. Восстановление равновесия протекает с диссипацией энергии, т. е. с необратимым преобразованием части энергии в тепло. Таким образом, этот эффект аналогичен вязкости.

*) Впервые эти уравнения были получены Навье в 1827 г., затем Пуассоном в 1831 г., Сен-Венаном в 1843 г. и Стоксом в 1845 г. При выводе уравнений авторы пользовались различными гипотезами.

Если провести вывод уравнений Навье — Стокса, воспользовавшись формулой (6.16) вместо (6.12), то они принимают такой вид:

$$\begin{aligned}\rho X - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \Delta w_x + \left(\frac{\mu}{3} - \mu' \right) \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} w &= \rho \frac{dw_x}{dt}, \\ \rho Y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \Delta w_y + \left(\frac{\mu}{3} - \mu' \right) \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{div} w &= \rho \frac{dw_y}{dt}, \\ \rho Z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \Delta w_z + \left(\frac{\mu}{3} - \mu' \right) \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{div} w &= \rho \frac{dw_z}{dt}.\end{aligned}\quad (6.17)$$

Нужно заметить, что в несжимаемой жидкости вторая вязкость не проявляется ($\operatorname{div} w = 0$), а в газах при сравнительно медленных процессах последний член в формуле (6.16) мал, поэтому в обычных случаях давление в вязкой жидкости определяют по формуле (6.12), а уравнения Навье — Стокса берут в форме (6.15).

§ 2. ПОДОБИЕ ПОТОКОВ ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ

Решение многих задач газодинамики встречает серьезные, а иногда и непреодолимые математические трудности. Поэтому для быстрого получения надежных результатов, часто прибегают к эксперименту. Постановка экспериментальных исследований требует больших затрат труда, времени и материальных средств, и проводить такие исследования на больших натуральных объектах ради получения одного частного результата нерентабельно. Большую помощь здесь оказывает применение методов теории подобия. Эти методы устанавливают условия, при которых физические процессы оказываются подобными, а также регламентируют определенные правила проведения эксперимента и использования полученных результатов. Благодаря применению теории подобия удастся:

заменить испытания натуральных объектов испытанием моделей уменьшенных размеров, например моделей самолетов в аэродинамических трубах, моделей кораблей в гидроканалах и т. п.;

имитировать условия испытания другими, более легкими и удобными для проведения эксперимента, например, проводить испытания газовой турбины на холодном воздухе;

распространять результаты опытов с одной моделью на целый класс машин или аппаратов.

Такие практические приложения теории подобия носят общее название — моделирование. Законы моделирования час-

то используются при проектировании новых машин, когда за образец принимается старая, но хорошо зарекомендовавшая себя конструкция.

Простейшим видом подобия является геометрическое подобие. Известно, например, что для соблюдения подобия треугольников нужно, чтобы сходственные стороны были пропорциональны ^{*)}, причем коэффициент пропорциональности одинаков для каждой пары сравниваемых сторон.

Условия подобия физических явлений более сложны, так как в этом случае сравнению подвергаются не только линейные размеры, но и другие физические величины: скорости, силы, времена, массы, температуры и т. п. У каждой пары сравниваемых величин в общем случае будет свой коэффициент пропорциональности.

Так, например, рассматривая движения двух механических систем, можно к каждой движущейся точке применить второй закон Ньютона. Для точек одной системы это запишется

$$f' = m' \frac{d\omega'}{dt'}, \quad (6.18)$$

для второй

$$f'' = m'' \frac{d\omega''}{dt''}. \quad (6.19)$$

Одноименные величины в этих системах связаны следующими коэффициентами пропорциональности:

$$f'' = c_f f'; \quad m'' = c_m m'; \quad \omega'' = c_\omega \omega'; \quad t'' = c_t t' \quad (6.20)$$

Если движения в рассматриваемых системах подобны, то коэффициенты пропорциональности c_f , c_m , c_ω , c_t называются *константами подобия*. Они должны быть связаны между собой определенной зависимостью. Последняя получается на основании следующих рассуждений.

Если в формуле (6.19) все величины выразить через соответствующие величины первой системы, пользуясь соотношениями (6.20), то получим

$$c_f f' = c_m m' \frac{c_\omega d\omega'}{c_t dt'}$$

$$\text{или} \quad \frac{c_f \cdot c_t}{c_m c_\omega} \cdot f' = \frac{d\omega'}{dt'}. \quad (6.21)$$

^{*)} Сходственные углы в этом случае получаются равными. Пример заимствован из кн.: М. В. Кирпичев. Теория подобия. Изд-во АН СССР, 1953.

Формула (6.21) должна быть тождественна формуле (6.18), так как при соблюдении подобия уравнение, описывающее физический закон, в частности второй закон Ньютона, должно сохраняться без изменения. Поэтому

$$\frac{c_f \cdot c_t}{c_m \cdot c_w} = 1. \quad (6.22)$$

Условие (6.22), налагающее определенную связь на константы подобия, называется *условием подобия*, а его левая часть — индикатором подобия. Условие подобия можно записать несколько иначе, если подставить в формулу (6.22) значения констант подобия, выраженные с помощью соотношений (6.20), а именно:

$$\frac{f' \cdot t'}{m' \cdot \omega'} = \frac{f'' \cdot t''}{m'' \cdot \omega''}$$

или

$$\frac{f \cdot t}{m \cdot \omega} = \text{idem}, \quad (6.23)$$

где *idem* — означает «одно и то же». Левая часть условия (6.23) называется *критерием подобия*. Если в этом критерии заменить время через длину и скорость, то получим

$$N\omega = \frac{f \cdot l}{m \omega^2} = \text{idem}. \quad (6.24)$$

Величина $N\omega$ называется критерием Ньютона.

Нужно заметить, что условие (6.23) или (6.24) можно выполнить двумя способами. Первый способ, рассмотренный выше, состоит в том, что физические величины в двух рассматриваемых движениях связываются константами подобия, удовлетворяющими условию (6.22). Второй способ заключается в следующем. Если физические величины одного движения измерять в одних единицах, а второго — в других, то основное уравнение (6.18) останется одинаковым для обеих систем как в буквенном, так и в численном выражении. Масштабы увеличения или уменьшения величин при переходе от одного движения к другому будут равны соотношениям между принятыми единицами измерения^{*)}. Первый способ относится к теории

*) На примере подобия треугольников это можно проиллюстрировать так. Первый способ: стороны одного треугольника равны 2, 3 и 4 см, второго — в 2,54 раза больше, т. е. 5,08; 7,62; 10,16 см; константа подобия равна 2,54. Второй способ: стороны одного треугольника 2, 3 и 4 см; для второго выбирается новая единица длины — 1 дюйм = 2,54 см, численные значения сторон второго треугольника остаются теми же — 2, 3 и 4, но измеряются в дюймах.

подобия, второй — к анализу размерностей. Методы анализа размерностей также широко применяются при изучении подобия физических процессов.

Обращаясь к уравнениям Навье — Стокса (6.15), предварительно умножив их на ρ , можно заметить, что их правые части $\rho \frac{dw_x}{dt}$, $\rho \frac{dw_y}{dt}$ и $\rho \frac{dw_z}{dt}$ представляют собой проекции на координатные оси величины (масса $\times$ ускорение), отнесенной к единице объема (так как $\rho = \frac{m}{V}$), а левые части — проекции всех сил, действующих на единицу объема. Следовательно, к уравнениям Навье — Стокса применимы все рассуждения, сделанные выше. Однако суммарная сила, представленная левой частью уравнения (15), складывается из различных по своему происхождению сил, а именно: из массовых сил, сил давления и сил вязкости. Для каждой из этих сил может быть найден свой индикатор подобия и получен свой критерий подобия. Если к уравнениям Навье — Стокса добавить еще уравнения неразрывности и энергии, то можно получить следующие критерии подобия:

$$\text{критерий Струхала} \quad Sh = \frac{\omega}{nl}, \quad (6.25)$$

$$\text{критерий Фруда} \quad Fr = \frac{\omega^2}{gl}, \quad (6.26)$$

$$\text{критерий Эйлера} \quad Eu = \frac{\Delta p}{\rho \omega^2}, \quad (6.27)$$

$$\text{критерий Рейнольдса} \quad Re = \frac{\omega l}{\nu}, \quad (6.28)$$

$$\text{критерий Маиевского — Маха} \quad M = \frac{\omega}{a}. \quad (6.29)$$

Если проанализировать еще явление передачи тепла, которое часто приходится учитывать в задачах газодинамики, то получается дополнительно

$$\text{критерий Прандтля} \quad Pr = \frac{\mu c_p}{\lambda}. \quad (6.30)$$

(В приведенных формулах n — частота явления, $\bar{\lambda}$ — коэффициент теплопроводности, остальные обозначения — принятые выше.)

Путем подстановки размерностей величин, входящих в формулы критериев подобия, легко убедиться, что все критерии являются безразмерными величинами.

Если в двух потоках газа будет соблюдаться:

1) геометрическое подобие твердых стенок,

2) численное равенство одноименных критериев, то такие потоки являются подобными. В этом состоит содержание *первой теоремы подобия* *).

Рассмотренные выше критерии имеют определенный физический смысл. Так, например, критерий Фруда пропорционален отношению сил инерции жидкости к силам тяжести

$$Fr = \frac{w^2}{gl} \sim \frac{\rho \frac{w^2}{2}}{\gamma l}$$

(здесь $\rho \frac{w^2}{2}$ — скоростной напор — сила, возникающая при

полном торможении несжимаемой жидкости, отнесенная к единице площади, γl — гидростатическое давление столба жидкости высотой l , иначе говоря, — сила тяжести этого столба жидкости, приходящаяся на единицу площади). Аналогично рассуждая, нетрудно показать, что критерий Эйлера пропорционален отношению сил приложенного перепада давлений к силам инерции, критерий Рейнольдса — отношению сил инерции к силам вязкости, критерий Маиевского—Маха — квадратному корню из отношения сил инерции к силам упругости газа.

Критерий Струхала учитывает периодичность явлений и характеризует кинематическое подобие. На рис. 113 изображены две поперечно обтекаемые пластины. С их кромок срываются вихри, образуя так называемые вихревые дорожки Кармана. Очевидно, что потоки будут кинематически подобны, если

$$\frac{l'}{l''} = \frac{A'}{A''}.$$

Но расстояние между соседними вихрями A можно представить как

$$A = w\tau = \frac{w}{n},$$

*) Существуют три теоремы подобия. Первая, применительно к механическому движению, была доказана в 1848 г. Бертраном, вторая — в 1911 г. А. Федерманом. Применительно ко всем явлениям природы обе теоремы доказаны в 1925 г. Т. А. Афанасьевой-Эренфест. Третья теорема сформулирована акад. М. В. Кирпичевым и А. А. Гухманом и доказана М. В. Кирпичевым в 1930 г.

где τ — период, а $n = \frac{1}{\tau}$ — частота образования вихрей. Тогда

$$\frac{l'}{l''} = \frac{w'}{n'} \cdot \frac{n''}{w''}$$

или

$$\frac{w'}{n'l'} = \frac{w''}{n''l''},$$

т. е.

$$\frac{w}{nl} = Sh = \text{idem}.$$

Заметим, что здесь частота является неуправляемым фактором, но может быть и другой случай, когда ее можно устанавливать по нашему желанию. На рис. 114 изображены геометрически подобные рабочие колеса двух центробежных компрессоров.

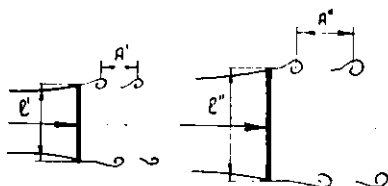


Рис. 113

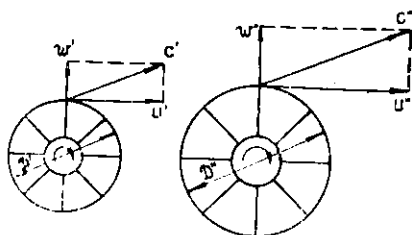


Рис. 114

Для того чтобы потоки газа при выходе из этих колес были кинематически подобны, надо чтобы были подобны треугольники скоростей. Следовательно,

$$\frac{w'}{u'} = \frac{w''}{u''}.$$

Но окружная скорость $u = \pi D n \sim l \cdot n$, где роль частоты играет число оборотов в секунду. Тогда

$$\frac{w'}{n'l'} = \frac{w''}{n''l''}$$

или

$$Sh = \text{idem}.$$

Критерий Прандтля характеризует подобие температурных полей и скоростных полей *).

*) Более подробно этот вопрос рассматривается в курсе теплопередачи.

Вторая теорема подобия утверждает, что уравнения связи, записанные в обычной размерной форме, могут быть преобразованы в критериальные уравнения. Уравнения связи — это такие уравнения, которые устанавливают общую зависимость между физическими величинами в рассматриваемом явлении. Приведенные к безразмерному виду, они выражают однозначную связь между критериями подобия. Так, например, рассматривая задачу об установившемся течении вязкой несжимаемой жидкости в гладкой цилиндрической трубе, можно получить следующую функциональную зависимость между критериями:

$$Eu = f(Re). \quad (6.31)$$

Здесь физические величины, характеризующие данное явление, — искомый перепад давлений Δp (сопротивление трубы), скорость w , плотность ρ и вязкость жидкости — входят в состав критериев в виде комплексов $\frac{\Delta p}{\rho w^2} = Eu$ и $\frac{wd}{\nu} = Re$. Таким

образом, уравнение (6.31) справедливо не только для одной конкретной трубы, но для целого класса физических явлений, а именно, для течения любой вязкой несжимаемой жидкости с любой скоростью в гладкой цилиндрической трубе любого диаметра. Теория подобия устанавливает только сам факт существования однозначной зависимости между критериями. Вид функции f определяется из эксперимента.

Таким образом, вторая теорема подобия дает экспериментаторам очень сильное средство для исследований: результаты одного частного исследования зависимости между критериями можно использовать для расчетов физических параметров внутри целого класса явлений.

При составлении критериальных уравнений обычно возникает вопрос, какие именно из критериев должны входить в правую часть, т. е. рассматриваться как аргументы, и какие в левую. Этот вопрос является очень существенным и при постановке эксперимента, так как не все параметры экспериментатор может регулировать по своему усмотрению. Ответ на него дает третья теорема подобия.

Третья теорема подобия формулирует те условия, которые нужно соблюсти, чтобы два явления оказались подобными. Она утверждает, что для этого необходимо и достаточно, чтобы определяющие критерии в обеих системах были численно равны. Следовательно, определяющие критерии и должны рассматриваться как аргументы, а неопределяющие — входить в состав функции (левой части).

Таким образом, в критериальных уравнениях имеются критерии двух сортов — определяющие и неопределяющие. Они

отличаются тем, что определяющие критерии составлены из величин, входящих в условия однозначности. *Условиями однозначности* называют такие условия, которые надо добавить к уравнениям связи, чтобы из целого класса физических явлений выделить одно конкретное явление. Например, если задать плотность ρ , скорость w и вязкость ν жидкости, а также диаметр трубы d , то из общей задачи мы выделим конкретную задачу о течении данной жидкости (ρ, ν) с данной скоростью (w) по данной трубе (d). Обращаясь к критериям Eu и Re ,

видим, что второй из них составлен из величин $w, d, \nu \left(\nu = \frac{\mu}{\rho} \right)$, входящих в условия однозначности. Следовательно, он и является определяющим критерием.

При проведении экспериментов на моделях уменьшенных размеров выбор параметров потока связан с масштабами модели. Так, например, если в аэродинамической трубе продувается модель с целью определения сопротивления при малых скоростях (когда сжимаемость не оказывает существенного влияния), то для соблюдения подобия при обтекании модели и натурального объекта надо, чтобы $Re = idem$, т. е.

$$\frac{w_M \cdot l_M}{\nu_M} = \frac{w \cdot l}{\nu},$$

где индекс «М» относится к модели. Тогда

$$\frac{w_M}{w} \cdot \frac{\nu}{\nu_M} = \frac{l}{l_M}. \quad (6.32)$$

Значит при одинаковой вязкости $\nu = \nu_M$ скорость потока, обтекающего модель, должна быть установлена большей, чем при обтекании натурального объекта, во столько раз, во сколько натурала больше модели. Если это невозможно, то продувку следует проводить при другой вязкости рабочего тела. Принимая во внимание, что для воздуха $\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{3}{4}}$, а $\frac{\rho}{\rho_M} = \frac{\rho}{\rho_M} \frac{T_M}{T}$, можно записать

$$\frac{\nu}{\nu_M} = \frac{\mu}{\mu_M} \frac{\rho_M}{\rho} = \left(\frac{T}{T_M} \right)^{\frac{3}{4}} \cdot \frac{\rho_M}{\rho} \frac{T}{T_M} = \frac{\rho_M}{\rho} \left(\frac{T}{T_M} \right)^{\frac{7}{4}},$$

тогда условие (6.32) примет вид

$$\frac{w_M}{w} \cdot \frac{\rho_M}{\rho} \left(\frac{T}{T_M} \right)^{\frac{7}{4}} = \frac{l}{l_M}. \quad (6.33)$$

Если аэродинамическая труба герметична и в ней можно менять давление и температуру, то нужные параметры потока следует устанавливать, исходя из формулы (6.33).

При испытании лопаточных решеток турбин на холодном воздухе с целью исследования тех явлений, которые зависят от сжимаемости газа (например, усилия на лопатках), для обеспечения подобия необходимо выполнить $M = \text{idem}$, т. е.

$$\frac{w_M}{a_M} = \frac{w}{a}$$

или

$$\frac{w_M}{\sqrt{k_M R_M T_M}} = \frac{w}{\sqrt{k R T}}.$$

Тогда

$$\frac{w_M}{w} = \sqrt{\frac{k_M R_M}{k R}} \cdot \sqrt{\frac{T}{T_M}}. \quad (6.34)$$

Величина $\sqrt{\frac{k_M R_M}{k R}}$ мало отличается от единицы. Следовательно, скорость потока на модели должна быть меньше, чем в натуральной турбине, пропорционально квадратному корню из отношения соответствующих температур.

Если необходимо обеспечить подобие с учетом вязкости и сжимаемости одновременно, то нужно выполнить $Re = \text{idem}$, и $M = \text{idem}$. Рассмотрим это для случая, когда рабочим телом модели и натуре является воздух ($k_M = k$, $R_M = R$). Записав уравнение (6.33) в таком виде

$$\frac{w_M}{w} \sqrt{\frac{T}{T_M}} \cdot \frac{\rho_M}{\rho} \left(\frac{T}{T_M} \right)^{\frac{5}{4}} \cdot \frac{l_M}{l} = 1, \quad (6.35)$$

нетрудно заметить, что для выполнения $M = \text{idem}$, нужно, чтобы

$$\frac{w_M}{w} \sqrt{\frac{T}{T_M}} = 1.$$

Тогда давления, температуры, линейные размеры и скорости связываются следующими условиями:

$$\frac{\rho_M}{\rho} \cdot \left(\frac{T}{T_M} \right)^{\frac{5}{4}} \cdot \frac{l}{l_M}, \quad (6.36)$$

$$\frac{w_M}{w} = \sqrt{\frac{T_M}{T}}. \quad (6.37)$$

В приведенных примерах рассмотрены случаи частичного подобия. Для полного подобия необходимо выполнить равенство всех определяющих критериев в обеих системах. Исследование этого вопроса показывает, что одновременное равенство всех критериев подобия возможно лишь в том случае, когда все сходственные физические величины в обоих потоках будут соответственно равны, т. е. получается уже не подобие, а равенство потоков. Таким образом, метод теории подобия практически позволяет реализовать лишь частичное подобие. Казалось бы, что это обстоятельство снижает его ценность. Однако нужно обратить внимание на тот факт, что влияние каждого критерия во всем исследуемом диапазоне существенно, в других почти незаметно. Такие области, в которых влияние данного критерия незначительно, называются *автомодельными*. Например, при малых числах M влияние сжимаемости газа на распределение давления по лопатке турбины весьма мало и им можно пренебречь. При очень больших числах Рейнольдса гидравлическое сопротивление трубы перестает зависеть от этого критерия. В воздушных потоках силы тяжести очень малы, по сравнению с другими, и могут не учитываться. В связи с этим в проблеме моделирования не ставится обязательным условием полное подобие. Если исследуются такие области, которые по некоторым из критериев являются автомодельными, то эти критерии могут быть отброшены без ущерба для точности. Поэтому правила моделирования становятся менее жесткими: рассматривается частичное подобие с учетом лишь тех критериев, которые оказывают существенное влияние.

§ 3. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

При движении реальной жидкости или газа действие сил вязкости в разных областях течения проявляется неодинаково. Оно наиболее интенсивно там, где изменение скорости по нормали к линиям тока, иначе называемое поперечным градиентом скорости, достаточно велико, и касательные напряжения имеют значительную величину (см. формулу (6.8)). Такие области существуют вблизи границ обтекаемых твердых поверхностей или границ двух потоков жидкости, движущихся с разными скоростями. Они называются пограничными слоями.

Если поперечные градиенты скорости равны нулю и, к тому же, вторые частные производные от проекций скорости по

одноименным координатам также равны нулю ^{*}), то вязкостные члены $\nu \Delta w_x$, $\nu \Delta w_y$, $\nu \Delta w_z$, $\frac{\nu}{3} \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} w$, $\frac{\nu}{3} \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{div} w$, $\frac{\nu}{3} \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{div} w$

в уравнениях Навье — Стокса (6.15) исчезают, и последние вырождаются в уравнения Эйлера (1.27). Уравнения Эйлера описывают движение идеальной жидкости, следовательно, в той области, где выполняются отмеченные выше условия, течение происходит в соответствии с законом движения идеальной жидкости, несмотря на то, что $\nu \neq 0$. При отсутствии поперечных градиентов скорости поток является безвихревым (см. формулу (1.6)) или потенциальным. Поэтому данную область называют областью потенциального течения.

Таким образом, при расчете того или иного течения можно всю область разбить на две: пограничный слой и потенциальный поток. Пограничный слой рассчитывается методами теории движения вязкой жидкости, а потенциальное течение — известными методами теории потенциального потока. Это дает значительное упрощение задачи.

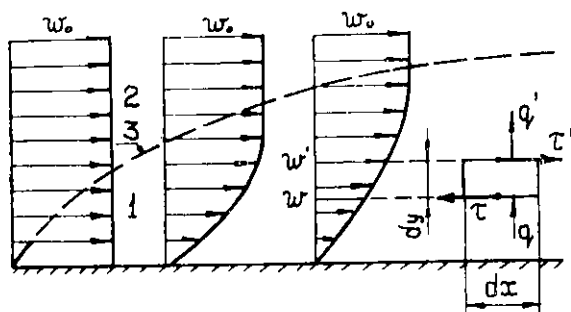


Рис. 115

На рис. 115 показана схема образования пограничного слоя при обтекании плоской стенки. Здесь цифрой 1 обозначена область пограничного слоя, цифрой 2 — область внешнего потенциального потока, 3 — внешняя граница пограничного слоя (внутренней границей является сама твердая стенка). Многочисленные опыты показывают, что скорость частиц жидкости относительно обтекаемого твердого тела на самой стен-

^{*}) Это может быть, когда первые производные скоростей по одноименным координатам постоянны, т. е. продольный градиент скорости постоянный. При слабом изменении продольного градиента скорости можно считать, что это условие выполняется приближенно.

ке равна нулю^{*)}, а по мере удаления от последней очень быстро нарастает, приближаясь к скорости внешнего потока w_0 . Толщина пограничного слоя в носовой точке тела равна нулю и по длине обтекаемой поверхности постепенно нарастает.

В условиях внутренней задачи, например, в трубах или каналах, формирование пограничного слоя имеет некоторые особенности. Схема такого течения приведена на рис. 116. По-

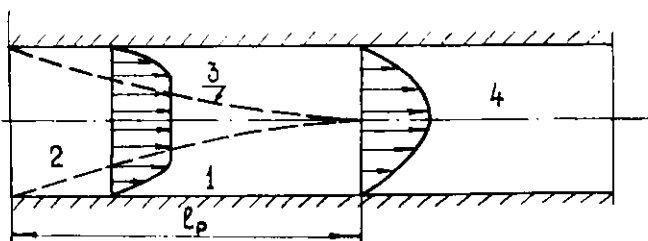


Рис. 116

граничные слои, образующиеся на противоположных стенках, утолщаясь по длине трубы, в конце концов смыкаются. Таким образом, структура потока по длине трубы получается различной. На начальном или разгонном участке l_p поток состоит из пограничного слоя 1 и ядра 2. В пограничном слое скорость меняется по нормали к стенке, в ядре — она постоянна (см. эпюру скорости на рис. 116). После смыкания пограничных слоев ядро исчезает и эпюра скорости приобретает параболическую форму. Длина разгонного участка в трубах составляет 150—300 диаметров при ламинарном течении и 30—50 диаметров — при турбулентном.

Пограничный слой возникает также на границах струи, вытекающей из насадка в неподвижную жидкость, при слиянии двух струй, движущихся с разными скоростями, а также за точками разветвления разветвленных скачков уплотнения, например, при маховском отражении или при взаимном пересечении косых скачков, за которыми в идеальном газе должны были бы получиться линии тангенциального разрыва.

В рассмотренных примерах толщина пограничного слоя принималась как такое расстояние от стенки, на протяжении которого скорость меняется от нуля до скорости во внешнем потоке w_0 или в ядре потока. Наиболее просто толщина погра-

^{*)} Это предположение хорошо подтверждается в обычных условиях течения. В сильно разреженных газах, где длина свободного пробега молекул становится соизмеримой с характерным размером твердого тела, скорость на стенке не равна нулю.

ничного слоя определяется в трубе, в зоне 4 (см. рис. 116). Здесь она равна радиусу трубы. Если рассмотреть эпюру скоростей, снятую при внешнем обтекании тела, то очень легко можно убедиться в том, что определить четко внешнюю границу пограничного слоя невозможно. Теоретическое рассмотрение этого вопроса показывает, что процесс приближения скорости w к скорости внешнего потока w_0 является асимптотическим, т. е. равенство $w = w_0$ наступает лишь на бесконечном расстоянии от стенки. Однако уже на сравнительно малых расстояниях от стенки разность $w_0 - w$ весьма мала по сравнению с w_0 . Поэтому для четкого определения границы пограничного слоя вводят такую условность: границу проводят там, где местная скорость отличается от скорости w_0 на 1% (рис. 117). Тогда толщиной пограничного слоя δ следует называть такое расстояние от стенки, отсчитанное по нормали, на котором скорость потока составляет 99% от скорости внешнего течения, т. е.

$$\delta = y_{w=0,99w_0}. \quad (6.38)$$

Движение жидкости в пограничном слое является вихревым. В этом легко убедиться, применив теорему Стокса к произвольному замкнутому контуру, например 1 2 3 4 (рис. 117).

$$\Gamma = 2 \int_a \omega_n d\sigma.$$

Здесь $\Gamma_{1234} = \Gamma_{12} + \Gamma_{23} + \Gamma_{34} + \Gamma_{41} > 0$, так как $\Gamma_{12} = \Gamma_{34} = 0$ (участок контура 1—2, а также 3—4, перпендикулярен скорости), $\Gamma_{41} = 0$ (скорость на стенке равна нулю), а $\Gamma_{23} = w_{23} \cdot l_{23} > 0$.

Следовательно и $\omega_n > 0$. Заметим, что вращение частиц жидкости получилось в том же направлении, что и выбранное направление обхода контура, т. е. по направлению к стенке. Этим объясняется тот факт, что вращение в вихревых течениях, образующихся, например, при обтекании кормы катера, или в пылевых вихрях—при обтекании кузова автомобиля, всегда направлено внутрь—в сторону обтекаемого тела, но не наружу.

Линии тока в пограничном слое очень слабо наклонены относительно обтекаемой стенки, и составляющие скорости по нормали к стенке, а, следовательно, и количества движения в этом направлении, весьма малы. Поэтому с достаточной степенью точности можно считать, что изменение

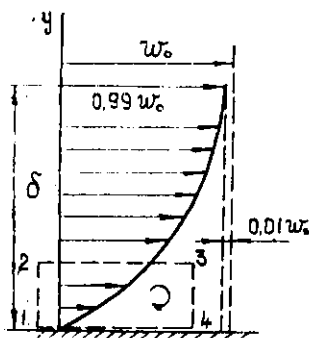


Рис. 117

давления поперек пограничного слоя ничтожно мало, т. е. $\frac{\partial p}{\partial y} \approx 0$. Это условие хорошо подтверждается экспериментом.

Сопротивление, которое оказывает твердая стенка движению потока — сопротивление трения — определяется потерей количества движения жидкости. Потеря количества движения наблюдается в пограничном слое, где действие сил вязкости проявляется наиболее интенсивно. Поэтому в расчетах принимают, что все гидравлические потери сконцентрированы в пограничном слое. За его пределами потери отсутствуют, т. е. жидкость движется как идеальная.

Поскольку статическое давление поперек пограничного слоя постоянно, а скорость по мере приближения к стенке уменьшается до нуля, то давление торможения переменное по сечению: у стенки $p^* = p$, а на внешней границе p^* достигает той величины, которую оно имеет во внешнем потоке.

Распределение температур в пограничном слое зависит от того, каковы направление и интенсивность теплообмена между стенкой и газом. Наиболее простым является случай, когда обтекаемая твердая поверхность теплоизолирована, т. е. теплообмен между стенкой и газом отсутствует. В этом случае тепло, выделяющееся внутри пограничного слоя вследствие вязкой диссипации (внутреннего трения), нагревает газ, следовательно, образуется градиент температуры, направленный от внешнего потока к стенке. Так как газ обладает теплопроводностью, то под действием разности температур возникает тепловой поток в пограничном слое, направленный от стенки к внешней границе. Процесс выделения тепла определяется вязкостью газа, процесс теплоотдачи во внешний поток — теплопроводностью. В зависимости от соотношения между этими величинами температура стенки может получиться либо ниже температуры торможения внешнего потока, либо равной ей, либо выше нее.

Нагревание обтекаемого тела в результате торможения газа в пограничном слое называется *аэродинамическим нагревом* *).

*) При высоких скоростях движения летательных аппаратов в воздухе аэродинамический нагрев становится настолько значительным, что прочность и жаростойкость обтекаемой стенки вызывает опасения, а создание нормальных условий для экипажа и приборов, находящихся на борту, превращается в серьезную проблему. Комплекс всех этих возникающих трудностей в авиации условно называют тепловым барьером. В отличие от звукового, тепловой барьер не представляет резко выраженной границы, связанной с определенной скоростью.

Из уравнения энергии (2.6), которое с учетом формулы (2.27), может быть записано как

$$c_p dT^* = dQ_e - dL, \quad (6.39)$$

следует, что изменение температуры торможения в потоке зависит от внешнего теплообмена dQ_e и внешней механической работы. Если внутри пограничного слоя выделить элементарный объем (см. рис. 115), то нетрудно установить, что при своем движении он совершает работу против сил от вязких напряжений τ и τ' . По отношению к элементарному объему эта работа является внешней. В единицу времени она равна *)

$$\begin{aligned} \tau dx \cdot \omega - \tau' dx \cdot \omega' &= \tau dx \omega - \left(\tau + \frac{\partial \tau}{\partial y} dy \right) dx \left(\omega + \frac{\partial \omega}{\partial y} dy \right) = \\ &= - \frac{\partial \tau}{\partial y} dy dx \cdot \omega - \tau \frac{\partial \omega}{\partial y} dy dx = - \frac{\partial}{\partial y} (\tau \omega) dy dx. \end{aligned}$$

Отнеся ее к единице массы, т. е. поделив на $\rho dx dy \cdot 1$, получим

$$\frac{dL}{dt} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} (\tau \omega). \quad (6.40)$$

Тепло, подведенное к элементарному объему в единицу времени, определится как разность тепловых потоков: входящего снизу $q dx$ и выходящего сверху $q' dx$ **)

$$q dx - q' dx = q dx - \left(q + \frac{\partial q}{\partial y} dy \right) dx = - \frac{\partial q}{\partial y} dy \cdot dx.$$

Подведенное тепло, отнесенное к единице массы, будет

$$\frac{dQ_e}{dt} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial q}{\partial y}. \quad (6.41)$$

Из уравнения (6.39) следует, что если $dQ_e = dL$, то температура торможения будет постоянная во всем потоке. В противном случае она будет меняться. Рассмотрим условия, при которых $T^* = \text{const}$ во всем потоке. Приравнявая правые части формул (6.40) и (6.41), получим

$$- \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} (\tau \omega) = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial q}{\partial y}$$

или

$$\tau \omega - q = \text{const.}$$

*) Размер, перпендикулярный чертежу, принят равным единице.

**) q — удельный тепловой поток, т. е. количество тепла, проходящее в единицу времени через единицу площади.

Постоянная интегрирования легко определяется из граничных условий: на стенке $w=0$ и $q=0$, т. е. $\text{const}=0$. Выразив здесь касательное напряжение τ по закону трения Ньютона (6.1), а удельный тепловой поток по закону теплопроводности Фурье

$$q = -\bar{\lambda} \frac{\partial T}{\partial y}, \quad (6.42)$$

где $\bar{\lambda}$ — коэффициент теплопроводности газа, получим

$$\mu w \frac{\partial w}{\partial y} = -\bar{\lambda} \frac{\partial T}{\partial y},$$

что можно записать, как

$$\mu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{w^2}{2} \right) + \bar{\lambda} \frac{\partial T}{\partial y} = 0,$$

или, приняв $c_p = \text{const}$, в таком виде:

$$\begin{aligned} \frac{\mu c_p}{\bar{\lambda}} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{w^2}{2c_p} \right) + \frac{\partial T}{\partial y} = Pr \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{w^2}{2c_p} \right) + \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(T + \frac{w^2}{2c_p} \right) + \\ + (Pr - 1) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{w^2}{2c_p} \right) = 0, \end{aligned}$$

или

$$\frac{\partial T^*}{\partial y} + (Pr - 1) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{w^2}{2c_p} \right) = 0. \quad (6.43)$$

Из уравнения (6.43) очевидно, что постоянство температуры торможения поперек пограничного слоя, иначе говоря, $\frac{\partial T^*}{\partial y} = 0$, будет соблюдаться при $Pr = 1$.

Таким образом, при отсутствии теплового потока через стенку и при $Pr = 1$ температура торможения постоянна во всем потоке: $T^* = T_0^* = T_c^* = T_c = \text{const}$.

Так как $T = T^* - \frac{w^2}{2c_p}$, то изменение термодинамической температуры T в пограничном слое связано только с изменением скорости. Следовательно, толщина температурного пограничного слоя равна толщине динамического пограничного слоя.

При $Pr < 1$ температура торможения падает по направлению к стенке, т. е. $T_c < T_0^*$, и динамический пограничный слой тоньше температурного. При $Pr > 1$ температура тормо-

жения возрастает от внешнего потока к стенке, т. е. $T_c > T_0^*$, и динамический пограничный слой тоньше температурного *).

Если рассмотреть энергоизолированное течение в канале при $Pr < 1$ или $Pr > 1$, то можно установить, что температура торможения в различных сечениях потока неодинакова. Однако, согласно закону сохранения энергии для одномерного потока, она должна оставаться постоянной во всем потоке. Это кажущееся противоречие разрешается просто. Действительно, средняя по сечению температура торможения в энергоизолированном течении остается постоянной по длине всего потока, но внутри каждого поперечного сечения она распределена неравномерно, так как происходит перераспределение энергии между слоями: полный запас энергии одних слоев газа увеличивается за счет других, но в сумме по всему поперечному сечению остается одним и тем же.

Число Pr зависит от физических констант рабочего тела. Для многоатомных газов $Pr \approx 1$, для жидких металлов $Pr \ll 1$, для масел $Pr \gg 1$. Для воздуха, например, среднее значение $Pr = 0,72$. В приближенных расчетах принимают $Pr = 1$, но в тех случаях, когда требуется значительная точность, например при измерении температур потока, следует Pr определять точно.

В § 2 главы второй при рассмотрении метода измерения температур в газовом потоке был введен коэффициент восстановления температуры

$$r = \frac{T_T - T_0}{\frac{w^2}{2c_p}} = \frac{T_c - T_0}{T_0^* - T_0}$$

(здесь $T_T = T_c$ — температура стенки термометра). Очевидно, что так как для воздуха $Pr < 1$, то и коэффициент восстановления температуры должен получиться меньше единицы. Подробные исследования показывают, что для ламинарного пограничного слоя на стенке

$$r = \sqrt{Pr},$$

для турбулентного пограничного слоя

$$r = \sqrt[3]{Pr}.$$

В заключение нужно отметить, что большие поперечные градиенты температур наблюдаются только внутри температурного пограничного слоя. За его пределами поток вполне допустимо считать изоэнтропным.

*) Более сложные случаи, когда тепловой поток через стенку не равен нулю, рассматриваются в курсах теплопередачи.

§ 4. УРАВНЕНИЯ ПОГРАНИЧНОГО ПОЛЯ

Дифференциальные уравнения для пограничного слоя выводятся из уравнений Навье — Стокса. Впервые они были получены Л. Прандтлем в 1904 году для течений, происходящих с большими числами Рейнольдса.

В уравнениях Навье — Стокса (6.15), записанных для плоского потока несжимаемой жидкости при отсутствии массовых сил ($X=Y=0$),

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial w_x}{\partial t} + w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y}, \quad (6.44)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial w_y}{\partial t} + w_x \frac{\partial w_y}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_y}{\partial y}, \quad (6.45)$$

а также в уравнении неразрывности

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = 0 \quad (6.46)$$

Прандтлем была сделана оценка порядка величин входящих в них членов. Было установлено ^{*)}, что при достаточно высоких числах Рейнольдса величины

$$\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2}, \frac{\partial w_y}{\partial t}, w_x \frac{\partial w_y}{\partial x}, w_y \frac{\partial w_y}{\partial y}$$

в пограничном слое имеют высший порядок малости, по сравнению с остальными. Поэтому они могут быть отброшены.

Уравнение (6.45) приобретает вид $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$, из него вытекает

уже упоминавшееся свойство неизменности статического давления в направлении поперек пограничного слоя. Уравнение (6.44) несколько упрощается, а (6.46) остается в том же виде. В результате система уравнений пограничного слоя принимает вид

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} &= \frac{\partial w_x}{\partial t} + w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} \\ \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.47)$$

Формулы (6.47) называют *уравнениями Прандтля*.

^{*)} Подробности можно найти, например, в книге: Г. Шлихтинг. Теория пограничного слоя. М., Изд-во иностр. лит., 1956.

В качестве граничных условий при решении системы (6.47) берут следующие

$$\omega_x = \omega_y = 0 \quad \text{при } y=0 \quad (\text{на стенке}),$$

$$\omega_x = \omega_0(x, t) \quad \text{при } y=\infty \quad (\text{за пределами пограничного слоя}).$$

Метод расчета пограничного слоя путем решения уравнений Прандтля является строгим. Однако для многих практических задач он оказывается настолько сложным и трудоемким, что для быстрого получения результата приходится пользоваться приближенными методами.

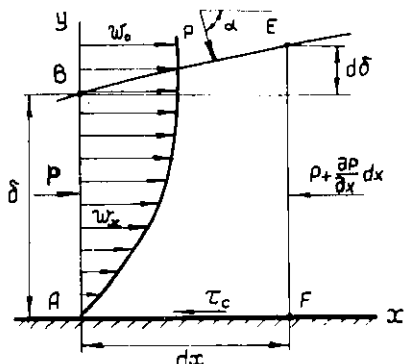


Рис. 118

Эффективным приближенным методом расчета является, в частности, метод, в котором используется интегральное уравнение импульсов, называемое также интегральным соотношением Кармана. Это соотношение рассмотрим более подробно.

На рис. 118 изображен участок потока, длиной dx , в котором контрольной поверхностью $ABEF$ ограничен объем, находящийся в пограничном слое.

Размер объема, измеренный перпендикулярно плоскости чертежа, принят равным единице.

Согласно теореме Эйлера о количестве движения, равнодействующая всех сил, действующих на выделенный объем, должна равняться изменению количества движения жидкости, протекающей через контрольную поверхность, которая ограничивает этот объем. В проекции на ось x это запишется так:

$$P_x = \int_{(ABEF)} \rho w_n w_x dF. \quad (6.48)$$

По двум другим осям изменения давления и количества движения не происходит.

Если положить, что массовые силы отсутствуют, то в число действующих сил, которые дают проекции на ось x , надо включить силы давления на поверхности AB , BE , EF и силы трения на поверхность AF *). Тогда

*) Проекция на ось x от силы давления на поверхность AF равна нулю. Касательные напряжения на поверхностях AB и EF равны нулю, так как эти поверхности перпендикулярны линиям тока; на поверхности BE они также равны нулю, так как BE проходит по внешней границе пограничного слоя.

$$P_x = p\delta + p(BE) \cdot \cos \alpha - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) (\delta + d\delta) - \tau_c dx.$$

Раскрывая скобки, пренебрегая членами высших порядков малости и принимая во внимание, что $(BE) \cdot \cos \alpha = d\delta$, получим

$$P_x = - \frac{\partial p}{\partial x} dx \cdot \delta - \tau_c dx. \quad (6.49)$$

Интеграл количества движения можно разбить по участкам, из которых составляется контрольная поверхность

$$\int_{(ABEF)} \rho \omega_n \omega_x dF = K_{x(ABEF)} = K_{x(AB)} + K_{x(BE)} + K_{x(EF)} + K_{x(FA)}. \quad (6.50)$$

(Здесь индекс в скобках обозначает участок поверхности, через который протекает жидкость с соответствующим количеством движения.) Очевидно, что $K_{x(FA)} = 0$, так как через твердую стенку жидкость не протекает ($\omega_n = 0$). Остальные количества движения можно представить так:

$$K_{x(AB)} = \int_{(AB)} \rho \omega_n \omega_x dF = - \int_0^{\delta} \rho \omega_x^2 dy, \quad (6.51)$$

так как $\omega_n = -\omega_x$,

$$K_{x(BE)} = -\omega_0 M_{cek(BE)},$$

потому что скорость потока, входящего через BE , постоянна и равна ω_0 . Но

$$\begin{aligned} M_{cek(BE)} &= M_{cek(EF)} - M_{cek(AB)} = \left(M_{cek(AB)} + \frac{\partial}{\partial x} M_{cek(AB)} \cdot dx \right) - \\ &- M_{cek(AB)} = \frac{\partial}{\partial x} M_{cek(AB)} \cdot dx = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} \rho \omega_x dy \cdot dx, \end{aligned}$$

следовательно,

$$K_{x(BE)} = -\omega_0 \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} \rho \omega_x dy \cdot dx. \quad (6.52)$$

Аналогично рассуждая, нетрудно установить, что

$$K_{x(EF)} = \int_0^{\delta} \rho \omega_x^2 dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} \rho \omega_x^2 dy \cdot dx. \quad (6.53)$$

Подставив величины, найденные из выражений (6.51), (6.52), (6.53) в формулу (6.50), а затем (6.50) и (6.49) в формулу (6.48), получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} \rho w_x^2 dy - w_0 \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} \rho w_x dy = -\delta \frac{\partial p}{\partial x} - \tau_c, \quad (6.54)$$

называемое интегральным соотношением для пограничного слоя. Для несжимаемой жидкости плотность ρ выходит из под знаков интеграла и производной. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} w_x^2 dy - w_0 \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} w_x dy = -\delta \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\tau_c}{\rho}. \quad (6.55)$$

Уравнения (6.54) и (6.55) пригодны для случаев обтекания как плоской, так и криволинейной поверхности.

§ 5. РАСЧЕТ ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ НА ПЛОСКОЙ СТЕНКЕ

Расчет толщины пограничного слоя и сопротивления трения в наиболее простом случае — при внешнем обтекании плоской пластины ламинарным потоком несжимаемой жидкости удобно провести с помощью интегрального соотношения. Характерными условиями этого течения являются: 1) постоянство скорости во внешнем потоке по длине пластины, т. е. $w_0(x) = \text{const}$, 2) отсутствие продольного градиента давления, т. е. $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ (вытекает из п. 1). Интегральное соотношение (6.55) приобретает тогда следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} w_x^2 dy - w_0 \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} w_x dy = -\frac{\tau_c}{\rho}. \quad (6.56)$$

Для того чтобы проинтегрировать это уравнение, нужно знать дополнительно:

а) закон скорости, т. е. аналитическую зависимость скорости от расстояния от стенки $w_x = f(y)$,

б) закон трения — связь касательных напряжений со скоростью. Для ламинарного пограничного слоя профиль скорости хорошо аппроксимируется уравнением полинома

$$w_x = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + \dots \quad (6.57)$$

Коэффициенты полинома определяются с помощью граничных условий: на стенке, т. е. при $y=0$, $w_x=0$, на внешней границе пограничного слоя, т. е. при $y=\delta$, $w_x = w_0$ и $\frac{\partial w_x}{\partial y} = 0$,

а также $\frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} = 0$, $\frac{\partial^3 w_x}{\partial x^3} = 0 \dots\dots$

Ограничимся тремя членами полинома

$$w_x = a_0 + a_1 y + a_2 y^2. \quad (6.58)$$

Подставляя сюда $y=0$, $w_x=0$, найдем $a_0=0$,

$$y=\delta, \quad w_x = w_0 \quad a_1\delta + a_2\delta^2 = w_0,$$

$$y=\delta, \quad \frac{\partial w_x}{\partial y} = 0 \quad a_1 + 2a_2\delta = 0,$$

откуда $a_1 = 2 \frac{w_0}{\delta}$, $a_2 = -\frac{w_0}{\delta^2}$. Тогда закон скорости запишется следующей формулой:

$$w_x = 2 \frac{w_0}{\delta} y - \frac{w_0}{\delta^2} y^2. \quad (6.59)$$

Вычислим интегралы

$$\int_0^\delta w_x dy = \int_0^\delta \left(2 \frac{w_0}{\delta} y - \frac{w_0}{\delta^2} y^2 \right) dy = \frac{2}{3} w_0 \delta, \quad (6.60)$$

$$\int_0^\delta w_x^2 dy = \int_0^\delta \left(2 \frac{w_0}{\delta} y - \frac{w_0}{\delta^2} y^2 \right)^2 dy = \frac{8}{15} w_0^2 \delta. \quad (6.61)$$

Связь между касательными напряжениями и скоростью устанавливается законом трения Ньютона. Касательное напряжение на стенке

$$\tau_c = \mu \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} \right)_{y=0}. \quad (6.62)$$

Выразив скорость w_x по формуле (6.59), найдем

$$\tau_c = \mu \left(2 \frac{w_0}{\delta} - 2 \frac{w_0}{\delta^2} y \right)_{y=0} = 2\mu \frac{w_0}{\delta}. \quad (6.63)$$

После подстановки значений интегралов (6.60), (6.61) и касательного напряжения (6.63) в интегральное соотношение (6.56), получается обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{8}{15} w_0^2 \delta \right) - w_0 \frac{d}{dx} \left(\frac{2}{3} w_0 \delta \right) = - \frac{2\mu w_0}{\rho \delta}$$

или

$$\frac{1}{15} w_0 \delta d\delta = \nu dx. \quad (6.64)$$

Интегрируя уравнение (6.64) в пределах от 0 до δ и от 0 до x , получим

$$\frac{1}{30} \omega_0 \delta^2 = \nu x, \quad (6.65)$$

откуда толщина пограничного слоя находится как

$$\delta = \sqrt{30 \frac{\nu x}{\omega_0}}. \quad (6.66)$$

Относительная толщина пограничного слоя $\frac{\delta}{x}$ запишется так:

$$\frac{\delta}{x} = \sqrt{30 \frac{\nu}{\omega_0 x}} = \sqrt{\frac{30}{Re_x}}, \quad (6.67)$$

где

$$Re_x = \frac{\omega_0 x}{\nu} \quad (6.68)$$

это число Рейнольдса, в котором за характерный линейный размер принята длина пограничного слоя от начала его образования до заданного сечения.

Для определения касательного напряжения на стенке надо в формулу (6.63) подставить значение δ из формулы (6.66), после чего она принимает вид

$$\tau_c = \sqrt{\frac{4}{30} \frac{\mu \rho \omega_0^3}{x}}. \quad (6.69)$$

Сила трения, действующая на поверхность пластины, длиной x и шириной b , может быть найдена как

$$R_f = b \int_0^x \tau_c dx. \quad (6.70)$$

Если эту силу отнести к площади пластины $b x$ и к скоростному напору набегающего потока $\frac{\rho \omega_0^2}{2}$, то полученная безразмерная величина, называемая коэффициентом сопротивления трения, запишется в следующем виде:

$$C_f = \frac{R_f}{b \cdot x \cdot \frac{\rho \omega_0^2}{2}} = \frac{2}{x \rho \omega_0^2} \int_0^x \tau_c \cdot dx.$$

Подставив сюда τ_c из формулы (6.69) и выполнив интегрирование, найдем

$$C_f = \sqrt{\frac{64}{30}} \frac{1}{\sqrt{\frac{\omega_0 \cdot x}{\nu}}}$$

или

$$C_f = \sqrt{\frac{64}{30}} \frac{1}{\sqrt{Re_x}}. \quad (6.71)$$

Если в полиноме (6.57) взять не три, а большее количество членов, и повторить все выкладки, то формулы (6.66), (6.67), (6.69) и (6.71) будут иметь ту же структуру, но численные коэффициенты в них получатся другими. Это свойство указанных формул дает возможность корректировать численные значения коэффициентов по результатам экспериментов. С учетом такой коррекции они принимают следующий вид:

$$\delta = 5,83 \sqrt{\frac{\nu x}{\omega_0}}, \quad (6.72)$$

$$\frac{\delta}{x} = \frac{5,83}{\sqrt{Re_x}}, \quad (6.73)$$

$$\tau_c = 0,332 \sqrt{\frac{\mu \omega_0^3}{x}}, \quad (6.74)$$

$$C_f = \frac{1,328}{\sqrt{Re_x}}. \quad (6.75)$$

Рассматривая эти формулы, следует обратить внимание, что толщина ламинарного пограничного слоя увеличивается

по длине обтекаемой стенки пропорционально $x^{\frac{1}{2}}$. Относительная толщина пограничного слоя уменьшается с ростом Re_x . Если, например, при испытании модели уменьшенных размеров не соблюдается равенство чисел Рейнольдса, а продувка ведется на той же скорости, на которой работает натурный объект, то пограничный слой на модели получается относительно толще. Касательное напряжение по длине обтекаемой стенки уменьшается. Коэффициент сопротивления трения падает с ростом числа Рейнольдса.

§ 6. УСЛОВНЫЕ ТОЛЩИНЫ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Во многих случаях неудобно пользоваться толщиной пограничного слоя, так как это понятие в самом определении содержит некоторую условность: внешняя граница проводится там, где скорость составляет 99% от скорости внешнего потока. Поэтому в расчетах часто применяют условные толщины пограничного слоя. Обычно используются три условных толщины:

- δ^* — толщина вытеснения или толщина вытесненной массы;
- δ^{**} — толщина потери импульса;
- δ^{***} — толщина потери энергии.

Рассмотрим толщину вытеснения. На рис. 119 слева изображена деформация эпюры скоростей в пограничном слое. При перемещении вдоль потока, начиная от точки образова-

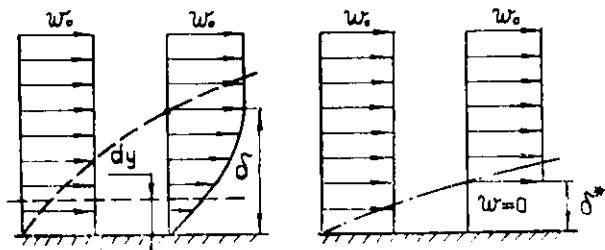


Рис. 119

ния пограничного слоя, эпюра скоростей из прямоугольной превращается в криволинейную. Если вблизи стенки выделить тонкий слой, толщиной dy , и определить массовый расход через площадку $dy \times 1$ (размер, перпендикулярный чертежу, равен единице) при входе на стенку и в данном сечении, то нетрудно убедиться, что расход в этом слое уменьшается. Действительно, при входе он равен $\rho_0 w_0 dy$, в заданном сечении внутри пограничного слоя он будет $\rho w dy$. Разница в расходах составляет

$$(\rho_0 w_0 - \rho w) dy.$$

Эта величина называется секундной вытесненной массой. Нужно обратить внимание, что разница в расходах получается потому, что часть жидкости непрерывно вытесняется в сторону внешнего потока. Вытеснение происходит из-за того, что жидкость теряет скорость за счет трения и не может пройти через заданное сечение в том количестве, в котором она поступила в пограничный слой из набегающего потока.

Для всей толщины пограничного слоя вытесненная масса равна

$$\int_0^{\delta} (\rho_0 \omega_0 - \rho \omega) dy.$$

На рис. 120 она изображена косо заштрихованной площадью. Поделив ее на основание $\rho_0 \omega_0$, получим высоту равновеликого прямоугольника (на рис. вертикально заштрихованного), которая и является толщиной вытеснения δ^* . Очевидно, что

$$\delta^* = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{\rho \omega}{\rho_0 \omega_0} \right) dy, \quad (6.76)$$

а для несжимаемой жидкости ($\rho = \text{const}$)

$$\delta^* = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{\omega}{\omega_0} \right) dy. \quad (6.77)$$

Нетрудно заметить, что площади OEA и ABC на рис. 120 равновелики. Поэтому, если убрать часть эпюры OEA , но добавить ABC , то расход через пограничный слой не изменится. Тогда условно поток можно представить так: вблизи стенки в слое, толщиной δ^* , течение отсутствует ($\omega = 0$), зато во всем остальном потоке скорости распределены равномерно по сечению. Такой условный поток показан на рис. 119 справа. Удобство такого представления заключается в том, что определив толщину вытеснения δ^* , можно сместить на эту величину контур обтекаемого тела и рассматривать обтекание этого нового более толстого тела потоком уже не вязкой, а идеальной жидкости. Так, например, обтекание плоской стенки вязкой жидкостью (рис. 119 слева) заменяется обтеканием другой поверхности, контур которой изображен штрихпунктиром (рис. 119 справа), но уже потоком идеальной жидкости.

Рассматривая рис. 120, нетрудно убедиться в том, что величина вытесненной массы — косо заштрихованной площади — почти не изменится, если ее определять в интервале изменения ординаты y не от 0 до δ , а от 0 до ∞ . Поэтому в формулах (6.76) и (6.77) в качестве верхних пределов у интегралов часто берут ∞ . В этом случае толщина вытеснения определяется точно, и произвол, связанный с толкованием внешней границы пограничного слоя, исключается.

Подводя итог, дадим такую формулировку величине δ^* .

Графическая интерпретация толщины потери импульса аналогична той, которая рассматривалась на рис. 120 для толщины вытеснения. Только вместо величин ρw по оси абсцисс следует откладывать величины ρw^2 и $\rho w w_0$.

Величине δ^{**} можно дать такую формулировку.

Толщиной потери импульса в данном сечении (δ^{**}) называется толщина такого слоя, взятого в невозмущенном потоке, который несет в себе секундное количество движения, равное секунднему количеству движения, потерянного на участке пути от внешней границы пограничного слоя до заданного сечения.

Если в каком-то сечении известна толщина потери импульса, то потерянное количество движения жидкости, достигшей этого места, определяется очень просто:

$$\Delta K = \delta^{**} \rho_0 w_0^2.$$

Рассмотрим толщину потери энергии. Ее определение аналогично определению толщины потери импульса, только вместо секундного количества движения здесь рассматривается секундная кинетическая энергия жидкости. Формула для толщины потери энергии имеет вид

$$\delta^{***} = \int_0^{\delta} \frac{\rho w}{\rho_0 w_0} \left(1 - \frac{w^2}{w_0^2}\right) dy, \quad (6.80)$$

и для несжимаемой жидкости

$$\delta^{***} = \int_0^{\delta} \frac{w}{w_0} \left(1 - \frac{w^2}{w_0^2}\right) dy. \quad (6.81)$$

В теории пограничного слоя часто пользуются интегральным соотношением, записанным в условных толщинах. Оно получается следующим образом. Заменим частные производные в интегральном соотношении (6.54) на обыкновенные *)

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \rho w_x^2 dy - w_0 \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \rho w_x dy = -\delta \frac{dp}{dx} - \tau_c. \quad (6.82)$$

Поскольку статическое давление в направлении нормали к стенке сохраняется постоянным, то продольный градиент дав-

*) Это вполне возможно, так как интегралы, входящие под знаки производных, могут изменяться только по длине потока, т. е. являются функциями только x , а давление может меняться также только вдоль пограничного слоя.

ления в пограничном слое и за его пределами получается одинаковым. Поэтому его определение можно провести во внешнем потоке, пользуясь уравнением Бернулли для энергизированного изохронного течения

$$\frac{dp}{\rho_0} + d\left(\frac{w_0^2}{2}\right) = 0,$$

откуда

$$\frac{dp}{dx} = -\rho_0 w_0 \frac{dw_0}{dx}.$$

Тогда

$$\delta \frac{dp}{dx} = -\rho_0 w_0 \frac{dw_0}{dx} \int_0^\delta dy = -\frac{dw_0}{dx} \int_0^\delta \rho_0 w_0 \cdot dy. \quad (6.83)$$

Применяя далее формулу производной произведения двух переменных, сделаем следующее преобразование:

$$w_0 \frac{d}{dx} \int_0^\delta \rho w_x dy = \frac{d}{dx} \int_0^\delta w_0 \rho w_x dy - \frac{dw_0}{dx} \int_0^\delta \rho w_x dy. \quad (6.84)$$

После подстановки величин, найденных из уравнений (6.83) и (6.84), в формулу (6.82), последняя приобретает вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_0^\delta \rho w_x^2 dy - \frac{d}{dx} \int_0^\delta \rho w_0 w_x dy + \frac{dw_0}{dx} \int_0^\delta \rho w_x dy - \\ - \frac{dw_0}{dx} \int_0^\delta \rho_0 w_0 dy = -\tau_c. \end{aligned}$$

Сгруппировав здесь первое слагаемое со вторым и третье с четвертым

$$\begin{aligned} \int_0^\delta (\rho w_x^2 - \rho_0 w_0 w_x) dy &= -\rho_0 w_0^2 \int_0^\delta \frac{\rho w_x}{\rho_0 w_0} \left(1 - \frac{w_x}{w_0}\right) dy = \\ &= -\rho_0 w_0^2 \delta^{**}, \\ \int_0^\delta (\rho w_x - \rho_0 w_0) dy &= -\rho_0 w_0 \cdot \delta^*, \end{aligned}$$

получим интегральное соотношение в условных толщинах, ина-

че называемое уравнением количества движения для пограничного слоя в условных толщинах:

$$\frac{d}{dx} (\rho_0 w_0^2 \cdot \delta^{**}) + \frac{dw_0}{dx} \rho_0 w_0 \delta^* = \tau_c. \quad (6.85)$$

Для несжимаемой жидкости это уравнение приобретает вид:

$$\frac{d}{dx} (w_0^2 \delta^{**}) + \frac{dw_0}{dx} w_0 \delta^* = \frac{\tau_c}{\rho},$$

или

$$w_0^2 \frac{d\delta^{**}}{dx} + \delta^{**} \cdot 2 w_0 \frac{dw_0}{dx} + \frac{dw_0}{dx} w_0 \delta^* = \frac{\tau_c}{\rho}.$$

Если разделить обе части на w_0^2 и обозначить

$$\frac{\delta^*}{\delta^{**}} = H^*, \quad (6.86)$$

то интегральное соотношение в условных толщинах записывают так:

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} + \frac{\frac{dw_0}{dx}}{w_0} \delta^{**} (2 + H^*) = \frac{\tau_c}{\rho w_0^2}. \quad (6.87)$$

Заметим, что в ламинарном пограничном слое условные толщины находятся в таком соотношении:

$$\delta^* \approx 0,3\delta,$$

$$\delta^{**} \approx 0,4\delta^*,$$

а в турбулентном

$$\delta^* \approx 0,125\delta,$$

$$\delta^{**} \approx (0,7 \div 0,8) \delta^*,$$

при этом

$$H^* = 1,3 - 1,4.$$

Интегральным соотношением в условных толщинах пользуются при расчетах турбулентного пограничного слоя, при расчете пограничного слоя с продольным градиентом давления и при решении специальных задач.

§ 7. ТУРБУЛЕНТНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ

Эпюры скоростей в поперечном сечении цилиндрической трубы, полученные экспериментально, имеют различные формы в зависимости от режима течения. На рис. 122 построены такие эпюры в безразмерных координатах; по оси абсцисс отложено расстояние от стенки, выраженное в долях радиуса, по оси ординат — скорость, выраженная в долях максимальной

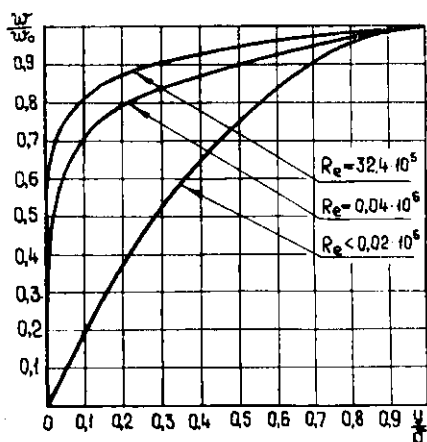


Рис. 122

часть координатной плоскости, или, как говорят исследователи, профиль скорости становится более выполненным. При этом нужно особо отметить, что при сравнительно небольшом изменении числа Рейнольдса в области его значений около 2000, т. е. при повышении Re от $0,02 \cdot 10^5$ до $0,04 \cdot 10^5$ — всего в два раза — форма профиля скорости меняется резко, тогда как дальнейшее увеличение Re от $0,04 \cdot 10^5$ до $32,4 \cdot 10^5$ — в восемьдесят один раз — приводит к незначительному искажению эпюры.

Сопоставление этих фактов с результатами визуальных наблюдений за потоком жидкости в трубе показывает, что при $Re=2000$ происходит перестройка течения: ламинарный поток, струйки которого движутся параллельно друг другу, не смешиваясь, переходит в турбулентный, для которого характерно беспорядочное вихреобразное движение конечных объемов — «комков» жидкости *).

*) Напомним, что существование двух режимов течения было установлено английским физиком Осборном Рейнольдсом в 1883 г.

Таким образом, профиль скорости в турбулентном пограничном слое получается более полным, чем в ламинарном. Чтобы объяснить это отличие, нужно сначала установить, какова природа касательных напряжений в турбулентном пограничном слое.

На рис. 123 изображены два слоя A и B , движущиеся с различными скоростями w_{xA} и w_{xB} . Если в результате хаотического движения некоторый «комочек» жидкости переместится из слоя A , где он имел скорость w_{xA} , в слой B , то он окажется там более медленно движущимся, по сравнению с окружающей его жидкостью. Он будет уменьшать количество движения других частиц, замедляя их, но сам будет приобретать количество движения. С течением времени скорость этого «комка» выровняется и уже не будет отличаться от скорости окружающей жидкости. Такой процесс турбулентного обмена импульсами происходит с диссипацией энергии, т. е. часть кинетической энергии необратимо переходит в тепло. Следовательно, в результате турбулентного перемешивания возникают потери. Из приведенного примера видно, что касательные напряжения, действующие между слоями A и B , имеют в этом случае иное происхождение по сравнению с ламинарным потоком, в котором они возникают в результате вязкости. В турбулентном пограничном слое вязкие напряжения также существуют, но главную роль здесь играют касательные напряжения, возникающие вследствие обмена количествами движения «комков» с окружающей жидкостью.

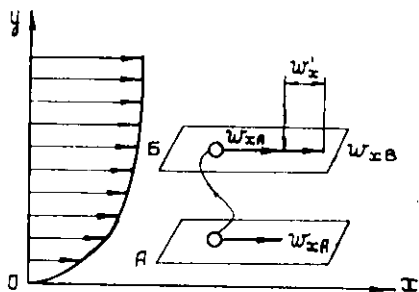


Рис. 123

Если проследить за судьбой другого «комка», перемещающегося из слоя B в слой A , то нетрудно заметить, что в слое A он будет двигаться быстрее окружающей среды, ускоряя ее и уменьшая свою скорость. Результатом множества таких взаимодействий является некоторое увеличение скорости в пристеночных слоях за счет ее снижения в слоях, удаленных от стенки. Этим объясняется более «полная» форма профиля скорости турбулентного пограничного слоя по сравнению с ламинарным.

Измерения скоростей в турбулентном потоке, выполненные с помощью безынерционных анемометров с записью показаний

ний на ленте осциллографа, показывают, что скорость в данной точке колеблется по времени. Такие колебания называют турбулентными пульсациями. Происхождение последних нетрудно уяснить, рассматривая рис. 123. Переходя из слоя A в слой B , «комки» жидкости стремятся сохранить скорость w_{xA} , в результате чего в слое B возникает пульсация скорости w_x . Пульсации наблюдаются не только в продольном, но и в поперечных (вертикальном и горизонтальном) направлениях. При рассмотрении скорости турбулентного течения, например, при построении эпюры или выполнении каких-либо расчетов, подразумевают ее усредненное по времени значение.

При течении жидкости в трубах на основном участке, где пограничный слой уже сформировался и толщина его равна радиусу трубы, переход ламинарного течения в турбулентное происходит при числе Рейнольдса, равном приблизительно 2000. В качестве характерного линейного размера для определения Re берется диаметр трубы. Можно за характерный линейный размер принимать и какую-нибудь из условных толщин пограничного слоя, например, толщину потери импульса δ^{**} . Тогда

$$Re^{**} = \frac{w_0 \delta^{**}}{\nu_0}. \quad (6.88)$$

Определенное таким способом число Рейнольдса может характеризовать состояние пограничного слоя не только в трубах, но и во всех других случаях, например, при внешнем обтекании крыла, турбинной лопатки и т. п. Опытами установлено, что потеря устойчивости ламинарного течения в пограничном слое и переход его в турбулентное происходит при $Re_{кр}^{**} = 600—1300$, причем нижнее значение относится к диффузорным течениям и большой начальной турбулентности потока, а верхнее — к конфузорным течениям и малой степени турбулентности набегающего потока. Более точно $Re_{кр}^{**}$ может быть найдено по формуле А. П. Мельникова *)

$$Re_{кр}^{**} = \frac{0,055}{E_0^{5/3}} \left(1 - \frac{f}{f_s} \right)^2 + 225, \quad (6.89)$$

где E_0 — начальная степень турбулентности (в набегающем потоке),

f — формпараметр — величина, характеризующая деформацию профиля скорости, происходящую вследствие торможения внешнего потока (в диффузорном течении) или его разгона (в конфузорном течении),

*) См., напр.: М. Е. Дельч. Техническая газодинамика, изд. 2, М.—Л., Госэнергоиздат, 1961.

f_s — значение формпараметра в точке отрыва ^{*)}, которое принимают равным —0,085.
Степень турбулентности определяется по формуле

$$E = \frac{\overline{w'}}{w}, \quad (6.90)$$

в которой $\overline{w'}$ — осредненная скорость турбулентной пульсации; ее среднее квадратичное значение определяется как

$$\overline{w'^2} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} (w - \overline{w})^2 \cdot dt, \quad (6.91)$$

здесь w — мгновенное значение скорости, а $\overline{w}$ — осредненная скорость турбулентного течения

$$\overline{w} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} w \cdot dt. \quad (6.92)$$

Формпараметр вычисляется следующим образом:

$$f = \frac{\frac{dw_0}{dx} \delta^{**2}}{v_0}. \quad (6.93)$$

При внешнем обтекании тел, например, поверхности крыла самолета (рис. 124), пограничный слой образуется в передней критической точке 1. Его толщина, по мере удаления от точки 1 вниз по течению, возрастает, следовательно, возрастают δ^{**} и Re^{**} . В носовой части $Re^{**} < Re_{кр}^{**}$, поэтому пограничный слой получается ламинарным (область 2, рис. 124). Когда Re^{**} достигает критического значения, ламинарный пограничный слой теряет устойчивость и переходит в турбулентный. Толщина пограничного слоя при этом резко возрастает (см. область 4). Если произвести тщательное исследование характера течения после перехода, то можно обнаружить, что в зоне 4 поток турбулентный, но вблизи стенки, в зоне 5, течение сохраняется ламинарным. Эта зона небольшой толщины называется *ламинарным подслоем*. Ее существование объясняется близостью твердой стенки, которая препятствует возникновению турбулентных пульсаций поперек потока и, следовательно, не дает развиваться продольным пульсациям. Турбулентный слой 4 и ламинарный подслой 5 не имеют четко выраженной границы. Их разделяет так называемый переход-

^{*)} Отрыв пограничного слоя рассматривается в § 8 данной главы.

ный слой 6, в котором характер течения меняется по времени, становясь то ламинарным, то турбулентным. Аналогичное явление наблюдается и в переходной области 3, в результате чего последняя получается расплывчатой. Однако для простоты теоретических расчетов принимают, что переход ламинарного слоя в турбулентный происходит в точке 7, называемой *точкой перехода*. Ее местоположение определяется по $Re^{**} = Re_{кр}^{**}$.

Когда рассчитывают смешанный пограничный слой, состоящий из ламинарного и турбулентного, то сначала ведут расчет ламинарного слоя, определяют в нем Re^{**} , находят то место, где $Re^{**} = Re_{кр}^{**}$, и принимают его за точку перехода. Начиная с этой точки, рассчитывают турбулентный погранич-

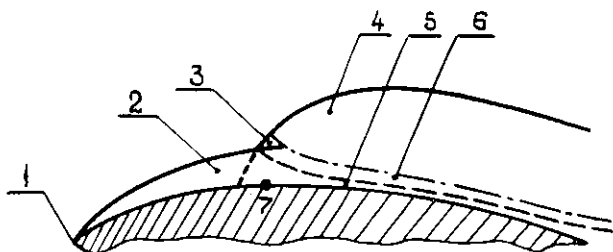


Рис. 124

ный слой, но в этом месте он уже имеет толщину, отличную от нуля и не равную толщине ламинарного слоя. «Стыковку» этих двух слоев производят, исходя из условия, что в точке перехода толщина потери импульса у ламинарного и у турбулентного слоев должна быть одинакова *), т. е. $\delta_t^{**} = \delta_l^{**}$.

Расчет турбулентного пограничного слоя обычно ведется с помощью интегрального соотношения в условных толщинах. Для его решения необходимо задать закон скорости и закон трения.

Закон скорости может быть представлен одним из двух уравнений: степенным

$$\frac{w}{w_0} = \left(\frac{y}{\delta} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (6.94)$$

*) В более точных расчетах определяется не точка перехода, а длина переходной области. По толщине потери импульса в начале переходной области находится ее величина в конце этой области. Последняя по сравнению с начальной возрастает на 20—40%. (См., напр.: М. Е. Дейч. Техническая газодинамика, изд. 2, М.—Л., Госэнергоиздат, 1961.)

или логарифмическим

$$\frac{\omega}{\omega_0} = 1 + \frac{1}{x\xi} \ln \frac{y}{\delta}. \quad (6.95)$$

Показатель степени в уравнении (6.94) зависит от числа Рейнольдса, малым значениям которого соответствует $n=6$, а большим — $n=10$. В расчетах, не требующих особенно высокой точности принимают постоянное значение $n=7$. В логарифмическом уравнении (6.95) величина x , называемая коэффициентом пути смещения, принимается равной 0,4. Величина ξ определяется как

$$\xi = \frac{\omega_0}{V \sqrt{\frac{\tau_c}{\rho}}}.$$

Она имеет размерность скорости и называется динамической скоростью.

Преимущество степенного закона — в простоте, недостаток — в зависимости показателя степени от числа Рейнольдса. Логарифмический закон универсален. Он справедлив для всех чисел Рейнольдса. Однако вблизи стенки, т. е. при $y \rightarrow 0$, он дает $\omega \rightarrow -\infty$, а значит не отражает физического смысла. Последнее объясняется тем, что у стенки существует ламинарный подслей, для которого формула (6.95) непригодна. Таким образом применение логарифмического закона обязательно требует учета ламинарного подслоя, а это сильно усложняет расчет.

Закон трения задается эмпирическими формулами, полученными на основании статистической обработки большого количества экспериментальных данных. Часто применяются формулы вида

$$\tau_c = K \rho \omega_0^2 Re^{**m}, \quad (6.96)$$

где K и m постоянные величины.

Принцип расчета турбулентного пограничного слоя рассмотрим на примере обтекания плоской стенки несжимаемой жидкостью.

Как и в § 5, здесь остаются справедливыми условия:

1) $\omega_0 = \text{const}$, 2) $\frac{dp}{dx} = 0$. Тогда интегральное соотношение (6.87) принимает вид:

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} = \frac{\tau_c}{\rho \omega_0^2}. \quad (6.97)$$

Умножив числитель и знаменатель левой части на $\frac{\omega_0}{v_0}$, принимая при этом во внимание формулы (6.68) и (6.88), можем записать

$$\frac{dRe^{**}}{dRe_x} = K Re^{**m}.$$

Полученное дифференциальное уравнение после разделения переменных легко интегрируется. Полагая, что вся стенка обтекается турбулентным пограничным слоем, проинтегрируем это уравнение в пределах от 0 до Re^{**} и от 0 до Re_x . После небольших преобразований получим

$$Re^{**} = [(1-m) K \cdot Re_x]^{\frac{1}{1-m}}. \quad (6.98)$$

Для случая обтекания плоской стенки без градиента давления коэффициент и показатель степени в формуле (6.96) могут быть приняты равными $K=0,00655$ и $m=\frac{1}{6}$. Тогда получаем

$$Re^{**} = 0,0153 Re_x^{6/7}. \quad (6.99)$$

Расшифровав в этой формуле значения чисел Рейнольдса в соответствии с соотношениями (6.68) и (6.88), легко получить формулу для определения толщины потери импульса

$$\delta^{**} = 0,0153 \left(\frac{v_0}{\omega_0} \right)^{\frac{1}{7}} x^{6/7} \quad (6.100)$$

или

$$\delta^{**} = 0,0153 x Re_x^{-\frac{1}{7}}. \quad (6.101)$$

Связь между толщиной потери импульса и толщиной пограничного слоя устанавливается с помощью формулы (6.79), в которой отношение скоростей заменяется из уравнения принятого закона скорости, в данном случае из уравнения (6.94). Аналогичным образом, используя формулу (6.77), можно найти и толщину вытеснения. Для рассматриваемой задачи эти величины получаются: $\delta^{**} = \frac{7}{72} \delta$, $\delta^* = \frac{1}{8} \delta$.

Касательное напряжение на стенке находится по формуле (6.96); зная его, нетрудно получить и коэффициент сопротивления трения.

Сопоставление параметров ламинарного и турбулентного пограничного слоя, рассчитанных для одинаковых условий (обтекание плоской стенки несжимаемой жидкостью без градиента давления), показывает следующее:

1. Толщина турбулентного пограничного слоя больше, чем ламинарного.

2. Коэффициент сопротивления трения C_f получается большим в случае турбулентного пограничного слоя.

3. С ростом числа Re_x коэффициент сопротивления трения C_f уменьшается, причем в ламинарном пограничном слое более интенсивно, чем в турбулентном.

В связи с этим при проектировании крыльев самолета стремятся к тому, чтобы отодвинуть точку перехода вниз по потоку.

§ 8. ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ С ПРОДОЛЬНОМ ГРАДИЕНТОМ ДАВЛЕНИЯ. ОТРЫВ. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СО СКАЧКАМИ УПЛОТНЕНИЯ

Продольный градиент давления $\frac{dp}{dx}$, действующий в пограничном слое, имеет ту же величину, что и за его пределами, так как статическое давление в направлении, перпендикулярном стенке, сохраняет одно и то же значение. Поэтому величина $\frac{dp}{dx}$ определяется обычно во внешнем потоке. Так, например, при расчете пограничного слоя на крыле, турбинной лопатке и т. п. продольный градиент давления отыскивается в результате решения задачи о внешнем потенциальном обтекании, а в диффузорах или соплах, т. е. в условиях внутренней задачи, — в результате определения параметров течения в ядре потока.

Продольный градиент давления оказывает влияние на профиль скоростей, вызывая его деформацию. Отрицательный градиент давления, существующий в конфузорах и соплах, а также в области спинки носовой части профиля крыла, соответствует увеличению скорости потока. При $\frac{dp}{dx} < 0$ пограничный слой устойчив. Положительный градиент давления, свойственный диффузорам, а также течению в области спинки хвостовой части профиля крыла, соответствует уменьшению скорости потока. Профиль скорости деформируется в этом случае таким образом, что при определенных условиях может появиться отрыв потока.

Рассмотрим явление отрыва более подробно.

На рис. 125 изображена схема обтекания стенки в области положительного градиента давления. Заметим, что здесь безразлично, принадлежит ли стенка каналу диффузора или хвостовой части крыла, важно, что $\frac{dp}{dx} > 0$. Рассматривая какой-либо элементарный объем жидкости, можно заметить, что он движется из области меньших давлений в область больших. Уменьшение его количества движения, а следовательно, и скорости, происходит вследствие двух причин: 1) действия сил

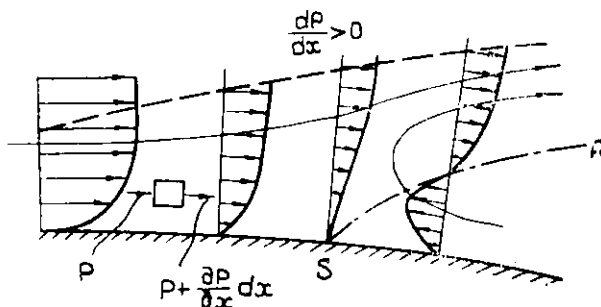


Рис 125

вязкости, 2) действия разности давлений спереди и сзади. На различных расстояниях от стенки это уменьшение происходит не пропорционально самой скорости, в результате чего эпюра деформируется, становясь все более остроконечной. Нужно заметить, что при $\frac{dp}{dx} = 0$ профили скорости в различных поперечных сечениях по длине пограничного слоя остаются подобными друг другу. Значит причиной их деформации является именно градиент давления $\frac{dp}{dx} \neq 0$.

В некоторой точке S эпюра скоростей принимает такую форму, что угол между касательной к эпюре и нормалью к стенке в этой точке равен нулю, т. е.

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=0} = 0. \quad (6.102)$$

Это значит, что в точке S скорость уже не нарастает по мере удаления от стенки. Элементарный жидкий объем, находящийся в этой точке, полностью утратил кинетическую энергию, на

него не действуют касательные напряжения, так как $\frac{\partial w}{\partial y} = 0$, но он подвержен действию положительного градиента давлений. Под действием последнего он начинает двигаться в обратную сторону, в результате чего возникает обратный ток. Эпюры, построенные правее точки S , имеют зону отрицательных скоростей. Линия SA на рис. 125 разделяет зоны прямого и обратного токов. Появление обратного тока вызывает отрыв основного потока. Точку S поэтому называют *точкой отрыва*. Она находится в том месте, где выполняется условие отрыва (6.102).

При отрыве потока от стенки восстановление скорости в давлении происходит в значительно меньшей степени, чем при безотрывном течении. Кинетическая энергия образовавшихся вихрей при дальнейшем течении не преобразуется в давление, а переходит в тепло, увеличивая энтропию газа. Изучение эпюр распределения статических давлений по контуру обтекаемого тела показывает, что за точкой отрыва давления получаются ниже, чем в тех же местах при безотрывном обтекании, тогда как в носовой части тела различия почти не наблюдаются. Поэтому при обтекании с отрывом равнодействующая сил давления всегда имеет составляющую, направленную назад, т. е. по направлению потока. Эта составляющая называется *сопротивлением давления* *).

Таким образом, сопротивление обтекаемого тела складывается из сопротивления трения и сопротивления давления. У хорошо обтекаемых тел отрыв пограничного слоя незначителен, поэтому преобладает первая составляющая. У плохо обтекаемых тел отрыв весьма интенсивен, и поэтому главной составляющей является сопротивление давления.

Особенно большие продольные положительные градиенты давления возникают в области взаимодействия скачков уплотнения с пограничным слоем. Рассмотрим это явление более подробно.

В сверхзвуковом потоке пограничный слой обладает той особенностью, что он имеет две зоны — дозвуковую, примыкающую к стенке, и сверхзвуковую, переходящую во внешний поток. Такие явления, как образование скачков, слабых волн возмущения, могут происходить только в сверхзвуковой зоне. Поэтому, если в потоке идеального газа прямой скачок начинается у самой стенки (рис. 126 слева), то в пограничном слое его начало расположено на линии $w=a$, отстоящей от обтекаемой поверхности на некотором расстоянии (рис. 126 справа). Скорость перед скачком в сверхзвуковой зоне погранич-

*) См. также парадокс Эйлера — Даламбера, гл. IV, § 2

ного слоя меняется от $\omega = \omega_0 > a$ до $\omega = a$, поэтому повышение давления в разных элементах скачка различно. В результате этого за скачком создаются поперечные градиенты давления. В связи с тем, что скачок не доходит до стенки, а между ними

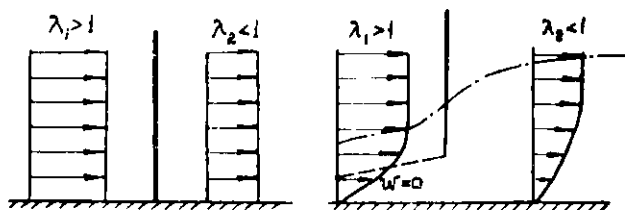


Рис. 126

остается дозвуковой слой, повышенное давление, господствующее за скачком, может проникать через этот слой против течения в область, расположенную перед скачком. В результате этого уже перед скачком появляется большой положительный продольный градиент давления, который служит причиной интенсивного увеличения толщины пограничного слоя, а в некоторых случаях и возникновения отрыва.

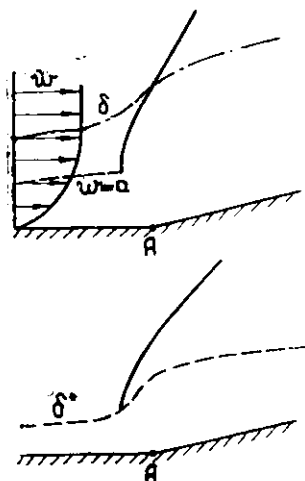


Рис. 127

Резкое увеличение толщины пограничного слоя перед скачком может вносить и качественные искажения в картину течения. Так, например, при обтекании внутреннего тупого угла скачок не выходит из точки А, как в случае идеального газа, а смещается несколько вперед, причем в сверхзвуковой зоне пограничного слоя его фронт искривляется (рис. 127 сверху). Причину смещения скачка легко понять, если построить толщину вытеснения δ^* . Приняв эту линию за контур обтекаемого тела, можно заметить, что

впереди точки А получается обтекание сильно вогнутой стенки, где должна получиться серия характеристик сжатия, переходящих в скачок *).

*) Нужно заметить, что, обращаясь к толщине вытеснения, нельзя объяснить всех особенностей взаимодействия скачка с пограничным слоем, например, кривизну скачка в сверхзвуковой зоне пограничного слоя.

Профиль скорости в пограничном слое может оказывать влияние на форму скачка уплотнения. Это влияние наблюдается, например, при обтекании профиля крыла потоком с большой дозвуковой скоростью. Когда число M_0 набегающего потока (меньшее единицы) достигает некоторого критического значения $M_0 = M_{0\text{кр}}$, то на поверхности профиля появляется местная сверхзвуковая зона, так как при обтекании его носовой части, особенно в области спинки, происходит нарастание скорости. При обтекании хвостовой части профиля скорость должна вновь уменьшиться и стать дозвуковой. Торможение сверхзвукового потока происходит в скачках уплотнения. В случае ламинарного пограничного слоя образуется система скачков, состоящая из нескольких косых и замыкающего прямого. Ее называют лямбдаобразным скачком. Если же пограничный слой турбулентный, то косые скачки не возникают, а замыкающий криволинейный скачок имеет форму весьма близкую к прямому (рис. 128).

Отражение косого скачка от твердой стенки, на которой образовался пограничный слой, также имеет некоторые особенности. Падающий скачок $АВВ$, взаимодействуя с погранич-

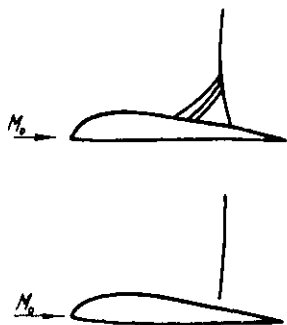


Рис. 128

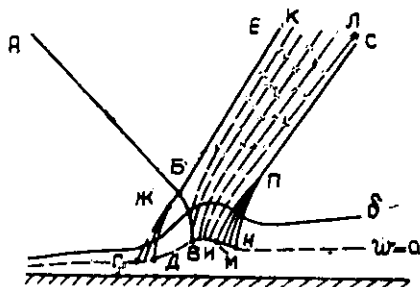


Рис 129

ным слоем, вызывает местное увеличение его толщины (рис. 129). В результате в зоне $ГДЖ$, где линии тока искривляются так же, как и при обтекании вогнутой стенки, возникают слабые волны сжатия, переходящие в косой скачок $ЖБЕ$. Это — первый отраженный скачок. За падающим скачком искривление линий тока в пограничном слое происходит так, как при обтекании выпуклой стенки. Это сопровождается появлением линий разрежения в зоне $КВИЛ$. Затем при выравнивании потока вновь образуются линии сжатия в зоне $МПН$, переходящие во второй отраженный косой скачок $ПС$.

Таким образом, в отличие от случая идеального газа, где падающий на стенку скачок порождает один отраженный, при взаимодействии с пограничным слоем падающий скачок порождает два отраженных, отделенных друг от друга волной разрежения.

Поскольку в волне разрежения скорость повышается, то второй отраженный скачок получается достаточно интенсивным. Поэтому изображенная на рис. 129 конфигурация скачков обладает большими потерями, чем система «падающий — отраженный скачок».

§ 9. ТУРБУЛЕНТНЫЕ СТРУИ

Одним из видов течения, в котором также возникают пограничные слои, являются *турбулентные свободные струи*.

Свободная затопленная струя образуется при истечении жидкости в объем, заполненный жидкостью той же природы. Например, затопленной можно назвать струю воды, выходящую из насадка, расположенную ниже свободной поверхности, струю воздуха, истекающего из баллона, или даже струю выхлопных газов, выбрасываемых в атмосферу из двигательной установки, но не струю воды в фонтане. Свободная струя не ограничена стенками, поэтому статическое давление на ее внешних границах равно давлению в окружающей среде.

Схема свободной струи изображена на рис. 130. Струя начинается у выходного сечения сопла *AB*. Профиль скорости здесь принимается прямоугольным. Затопленная струя взаимодействует с окружающей средой. Это взаимодействие выражается в виде турбулентного обмена импульсами: «комки» жидкости, попадая из струи в окружающую среду, сообщают ей количество движения, сами при этом теряя его. На место этих «комков» из окружающей среды поступают новые массы, не имеющие продольной составляющей скорости. Они уменьшают количество движения в струе.

Таким образом, по мере удаления от среза сопла в движение вовлекаются все большие и большие массы жидкости. Поэтому массовый расход по длине струи непрерывно возрастает, а ее границы расширяются. Суммарное количество движения в каждом сечении остается постоянным, но так как возрастает масса жидкости, то скорость ее по длине потока уменьшается.

Турбулентный обмен импульсами происходит в пределах пограничного слоя, который образуется сразу на выходных кромках сопла (точки *A* и *B*). В пограничном слое скорость нарастает от нуля до ее значения в центральной части струи. Внешней границей пограничного слоя является граница струи

(линии AD и BE). Она проходит в том месте, где продольные составляющие скорости $w_x = 0$. Поперечные составляющие скорости, строго говоря, не равны нулю, так как струя непрерывно пополняется жидкостью из окружающего пространства, однако они настолько малы, что могут в расчет не приниматься. Внутренняя граница пограничного слоя проходит там, где прямоугольная часть профиля скорости переходит в криволи-

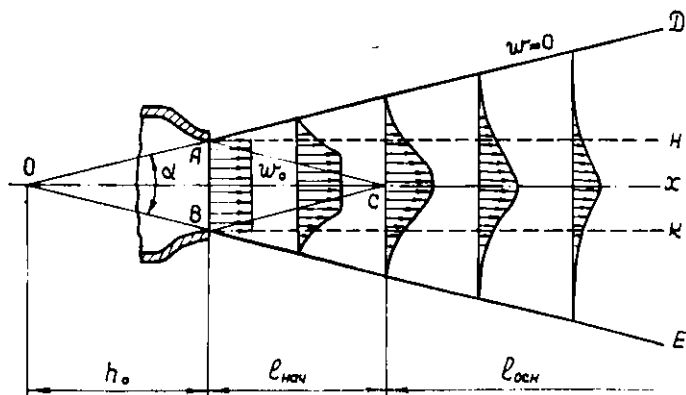


Рис. 130

нейную (линии AC и BC). Она отделяет пограничный слой от ядра потока ABC . В точке C противолежащие пограничные слои смыкаются, и ниже по потоку пограничный слой охватывает все поперечное сечение струи.

Таким образом, турбулентная свободная струя имеет два характерных участка: начальный участок, длиной $l_{нач}$, в котором течение подразделяется на ядро и пограничный слой, и основной участок, лежащий после переходного сечения, т. е. после точки C , который целиком состоит из пограничного слоя.

Границы струи AD и BE представляют собой прямые линии. Точка их пересечения O называется *полюсом струи*.

Не излагая подробно содержания теории турбулентных струй*), рассмотрим лишь ее основные результаты для случая несжимаемой жидкости. Они с некоторым приближением применимы и к газовым струям при дозвуковых течениях.

Изучение эпюр, построенных по экспериментальным данным для основного участка в виде зависимости скорости от расстояния данной точки от оси струи, показывает, что полу-

*) Подробности можно найти в кн.: Г. Н. Абрамович. Теория турбулентных струй. М., Физматгиз, 1960. В сокращенном виде — в кн.: Г. Н. Абрамович. Прикладная газовая динамика. Изд. 2, М., ГИТТЛ, 1953.

ченные в разных сечениях профили скорости не подобны друг другу. Однако они становятся подобными, если перейти от размерных координат к безразмерным. Так, например, если вместо скорости w откладывать отношение $\frac{w}{w_m}$, где w_m — максимальное значение скорости в данном сечении (на оси струи), а вместо расстояния y , отмеренного от оси, — отношение

$$\bar{y} = \frac{y}{y_{w=0,5 w_m}},$$

где $y_{w=0,5 w_m}$ есть такое расстояние от оси, на котором скорость составляет 0,5 от максимальной, то экспериментальные точки для всех сечений основного участка образуют одну кривую — обобщенный профиль скорости. Это хорошо подтверждается как для струй круглого, так и плоского поперечного сечения.

Для начального участка струи можно получить такое же обобщение путем перехода к безразмерным координатам $\frac{w}{w_m}$ и $\frac{y}{x}$, где y — расстояние рассматриваемой точки от линии AN (или, для точек ниже оси, от линии BK), а x — расстояние от среза сопла.

Обобщенные профили скорости для начального и для основного участков имеют разную форму. С помощью их перестроения в другую систему координат удастся получить обобщенный профиль, справедливый как для начального, так и для основного участка. Для этого в качестве абсциссы берется величина $\eta = \frac{y}{R_{гр}}$, а за ординату по-прежнему принимается $\frac{w}{w_m}$.

Для начального участка под $R_{гр}$ подразумевается ширина пограничного слоя, для основного — полуширина струи. Для круглой струи, например, $R_{гр}$ — это радиус внешней границы. Величина y — это расстояние между данной точкой и точкой, где $w = w_m$. Для основного участка это расстояние от оси, а для начального — от внутренней границы пограничного слоя.

Обобщенный профиль скорости представлен следующей таблицей:

η	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\frac{w}{w_m}$	1	0,907	0,753	0,596	0,443	0,300	0,186	0,098	0,044	0,13	0

По этой таблице можно построить профиль скорости в любом сечении струи. Но для этого надо знать:

- 1) положение внешней границы струи;
- 2) положение переходного сечения ($l_{\text{нач}}$), чтобы построить внутреннюю границу пограничного слоя;
- 3) значения максимальных скоростей w_m во всех сечениях основного участка (на начальном участке w_m известна, она равна скорости истечения из сопла w_0).

В теории струи рассматривается безразмерная ордината, определяющая ее внешнюю границу

$$\varphi_{\text{гр}} = \frac{R_{\text{гр}}}{a(x + h_0)},$$

где h_0 — расстояние среза сопла от полюса, a — коэффициент, различный для разных струй. Экспериментальные исследования показывают, что величина коэффициента a находится в узких пределах (0,066—0,076) и в среднем может быть принята $a=0,07$. Для этого значения a центральный угол струи составляет $\alpha=14^\circ$. Значение $\varphi_{\text{гр}}$ для всех осесимметричных струй примерно одинаково и равно $\varphi_{\text{гр}}=3,4$. Следовательно, радиус внешней границы струи, отнесенный к радиусу выходного сечения сопла R_0 , может быть представлен как

$$\frac{R_{\text{гр}}}{R_0} = \frac{3,4a(x + h_0)}{R_0}. \quad (6.103)$$

Безразмерный радиус внешней границы в переходном сечении имеет постоянную для всех струй величину $\left(\frac{R_{\text{гр}}}{R_0}\right)_{\text{п}} = 3,3$. Из этих формул легко получается абсцисса переходного сечения

$$x_{\text{п}} = 0,67 \frac{R_0}{a} \quad (6.104)$$

и расстояние среза сопла от полюса

$$h_0 = \frac{R_0}{3,4a}. \quad (6.105)$$

Для основного участка скорость в центре струи связывается с безразмерным радиусом ее внешней границы следующим соотношением:

$$\frac{R_{\text{гр}}}{R_0} = 3,3 \frac{w_0}{w_m},$$

которое с учетом предыдущих формул преобразуется к виду

$$\frac{w_m}{w_0} = 0,96 \frac{R}{a(x + h_0)}. \quad (6.106)$$

Формулы (6.103), (6.104), (6.105), (6.106) и таблица обобщенного профиля скорости позволяют рассчитать и построить свободную струю.

Рассмотренная теория Г. Н. Абрамовича позволяет также рассчитывать распределение температур в турбулентных струях и распределение концентраций тяжелых примесей.

ТЕЧЕНИЕ ГАЗА В ЭЛЕМЕНТАХ ПРОТОЧНОЙ ЧАСТИ ТЕПЛОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ УСТАНОВОК

§ 1. ПРИНЦИПЫ РАСЧЕТА ГАЗОВЫХ ПОТОКОВ В ЭЛЕМЕНТАХ ПРОТОЧНОЙ ЧАСТИ. УРАВНЕНИЕ ОБРАЩЕНИЯ ВОЗДЕЙСТВИЙ

Проточной частью машин или установок называют систему устройств, по которым движется газ, воздух или пар. Отдельные элементы, составляющие проточную часть, у разных машин бывают одинаковыми по форме, в связи с чем их расчеты удастся унифицировать.

При небольших скоростях движения газа такие элементы, как поворотные колена, внезапные расширения и сужения потока, задвижки, краны, вентили и т. п. могут рассчитываться как местные сопротивления по формулам гидравлики. Вводить уточнения с целью учета сжимаемости газа обычно не требуется, так как скорости газа в перечисленных элементах не бывают большими.

Расчет других элементов проточной части, рассмотренных ниже, часто требуется проводить с учетом сжимаемости газа, подвода или отвода тепла, работы, отдаваемой газом движущимся частям машины, присоединения к потоку дополнительных масс газа, трения. Поскольку учет этих факторов чрезвычайно усложняет задачу, то с целью ее упрощения во многих случаях переходят к одномерному потоку и оперируют усредненной по сечению скоростью. В некоторых задачах, например таких, как расчет течений в трубах, каналах, соплах, диффузорах, одномерная теория дает результаты, удовлетворяющие техническим требованиям. В других, связанных с профилированием лопаток, межлопаточных каналов турбомашин, сопел Лаваля, одномерная теория пригодна лишь для получения результатов первого приближения. Более точные результаты получаются в процессе расчета по двумерной или даже по трехмерной теории.

Таким образом, модель одномерного потока газа довольно широко применяется в практических расчетах, и ее следует рассмотреть подробнее.

Внешние факторы, изменяющие скорость течения газа, называют *физическими воздействиями*. В пределах тех задач, которые изучаются в обычной газодинамике, рассчитываются следующие пять физических воздействий.

1. Геометрическое воздействие — изменение площади поперечного сечения потока по его длине.

2. Расходное воздействие — присоединение дополнительной массы газа или ее отбор по длине потока.

3. Механическое воздействие — подвод или отвод механической работы.

4. Воздействие трением — изменение скорости потока под влиянием трения.

5. Тепловое воздействие — нагрев движущегося газа подводом тепла извне или его охлаждение путем отвода тепла.

Заметим, что все физические воздействия, за исключением четвертого, могут быть как положительными, так и отрицательными. Что касается воздействия трением, то оно является односторонним: преодолевая трение, газ может только отдавать работу, но не получать ее.

Связь между скоростью потока и физическими воздействиями устанавливается с помощью *уравнения обращения воздействий*. Для его вывода в качестве исходных берутся следующие уравнения:

уравнение Бернулли (см. 2. 13)

$$\frac{dp}{\rho} + w dw + dL + dL_r = 0, \quad (7.1)$$

уравнение состояния газа (1. 38), которое в дифференциальной форме имеет вид:

$$dp = R\rho dt + RT d\rho, \quad (7.2)$$

уравнение энергии (2. 6), которое после замены $c_p = \frac{k}{k-1} R$

может быть записано как

$$\frac{k}{k-1} R dT + w dw - dQe + dL = 0, \quad (7.3)$$

уравнение массового расхода (1. 15), которое после логарифмирования и дифференцирования приобретает вид

$$\frac{dM_{сек}}{M_{сек}} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dw}{w} + \frac{dF}{F}, \quad (7.4)$$

а также формула скорости звука

$$a = \sqrt{kRT}. \quad (7.5)$$

Существо вывода состоит в том, что в уравнении (7.1) делаются замены величин, в результате которых в нем остаются только скорость, скорость звука и физические воздействия dF , dM_{cek} , dL , dL_r , dQ_c . Это достигается путем замены $\frac{dp}{\rho}$ в уравнении (7.1) его значением, найденным из уравнения (7.2), причем в последнем RdT находится из уравнения (7.3), $\frac{dp}{\rho}$ из уравнения (7.4), а RT из уравнения (7.5). Тогда уравнение (7.1) приобретает вид

$$\frac{k-1}{k} \omega d\omega + \frac{k-1}{k} dQ_c - \frac{k-1}{k} dL + \frac{a^2}{k} \frac{dM_{cek}}{M_{cek}} - \frac{a^2}{k} \frac{d\omega}{\omega} - \\ - \frac{a^2}{k} \frac{dF}{F} + \omega d\omega + dL + dL_r = 0.$$

Приведя подобные члены, соберем в левую часть все величины, содержащие скорость, а в правую — физические воздействия. После сокращения обеих частей на $\frac{a^2}{k}$ и замены $\frac{\omega}{a} = M$, получим

$$\frac{d\omega}{\omega} (M^2 - 1) = \frac{dF}{F} - \frac{dM_{cek}}{M_{cek}} - \frac{1}{a^2} dL - \frac{k}{a^2} dL_r - \frac{k-1}{a^2} dQ_c. \quad (7.6)$$

Формула (7.6) называется *уравнением обращения воздействий*. Оно выражает так называемый *закон обращения воздействий*. Согласно этому закону, для непрерывного изменения скорости газа в одну сторону за счет только одного физического воздействия необходимо, чтобы знак этого воздействия менялся на обратный в момент перехода через скорость звука. Если в процессе участвуют сразу несколько физических воздействий, то в момент перехода через скорость звука знак их суммы должен измениться на обратный.

Из уравнения обращения воздействий (7.6) легко получить пять частных случаев изменения скорости потока под влиянием какого-нибудь одного физического воздействия. Для этого в уравнении (7.6) все остальные воздействия надо положить равными нулю.

Так, например, если геометрическое воздействие $dF \neq 0$, а $dM_{сек} = dL = dL_r = dQ_e = 0$, то получается уравнение Гюгоню

$$\frac{d\omega}{\omega} (M^2 - 1) = \frac{dF}{F},$$

которое было подробно рассмотрено в главе II, § 7.

Если взять только одно расходное воздействие $dM_{сек} \neq 0$, то уравнение (7.6) приобретает такой вид:

$$\frac{d\omega}{\omega} (M^2 - 1) = - \frac{dM_{сек}}{M_{сек}}. \quad (7.7)$$

Течение, отвечающее этому уравнению, реализуется внутри расходного сопла. Его схема дана на рис. 131. Оно представляет собой трубу или канал постоянного сечения, имеющий на боковых стенках систему отверстий, через которые подводятся в основной поток дополнительные массы газа или отводятся из него.

Если на входе $\omega_1 < a$ ($M_1 < 1$) и к потоку подводится дополнительная масса газа (следовательно, расход увеличивается вдоль потока, $dM_{сек} > 0$), то для согласования знаков левой и правой части уравнения (7.7) необходимо, чтобы $d\omega > 0$. Таким образом, от входа до критического сечения скорость будет нарастать. В критическом сечении $M = 1$, значит $\frac{dM_{сек}}{M_{сек}} = 0$,

т. е. расход в этом сечении проходит через максимум. За критическим сечением газ отбирается, расход уменьшается вдоль потока, т. е. $dM_{сек} < 0$. Так как здесь $M > 1$, то из уравнения (7.7) получается, что $d\omega > 0$.

Рассматривая рис. 131, можно заметить, что основной поток, т. е. масса газа, которая поступает в канал через входное сечение F_1 , имеет форму, напоминающую сопло Лавалья: сначала поток поджимается, в горле его сечение минимально, за горлом он расширяется. В отличие от геометрического сопла, в расходном поджатие основного потока происходит за счет дополнительной массы газа, которая оказывает вытеснительное действие. «Стенкой» для основного потока является в этом случае граница струи дополнительной массы газа. Изменение параметров основного потока, движущегося через расходное сопло, происходит по тем же законам, что и в случае обычного геометрического сопла.

Расходное сопло в том виде, как оно изображено на рис. 131, в технике не применяется, но его отдельные элементы встречаются довольно часто. При течении газа в смесителях, при подмешивании воздуха в зону горения в камерах сго-

рания, при отборе газа через отверстия в стенках канала и во многих других случаях наблюдается *эффект расходного воздействия*. Для получения сверхзвуковых потоков в небольших аэродинамических трубах, предназначенных для тарирования пневмометрических насадок и приборов, иногда применяют комбинированное сопло. Его дозвуковая часть представляет собой суживающееся геометрическое сопло, а сверхзвуковая — расходное сопло с отбором воздуха. Изменяя количество отбираемого воздуха, можно регулировать число M на выходе, сохраняя поток «чистым», без скачков.

Не следует смешивать расходное сопло и сопло с аэродинамическим поджатием потока. Схема последнего изображена на рис. 132.

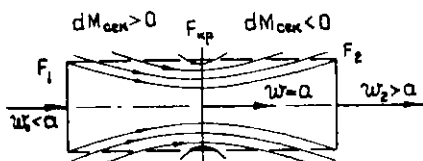


Рис. 131

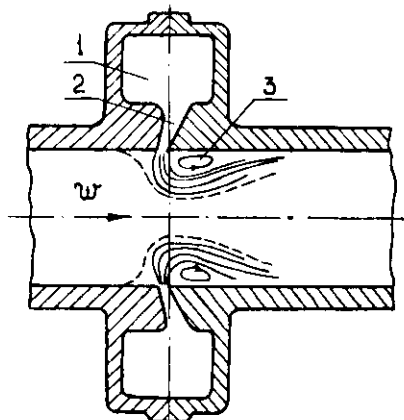


Рис. 132

Из ресивера 1 через щелевые сопла 2 газ высокого давления вдувается в основной канал, где поджимает основной поток, в котором образуется «горло». Поджатие здесь получается не за счет вытеснительного действия вдуваемого газа, а за счет его кинетической энергии. Между вдуваемой струей и стенкой образуется замкнутая вихревая зона 3. Количество вдуваемого газа в этом случае получается меньше, чем дополнительная масса, подаваемая в расходное сопло, поэтому «аэродинамическое» сопло экономичнее «расходного».

С помощью уравнения обращения воздействий (7.6) можно аналогичным способом проанализировать и другие виды воздействий. Они будут рассмотрены в следующих параграфах. Здесь же только отметим еще одну особенность закона обращения воздействий.

Во всех случаях, когда физическое воздействие обратимо (т. е. может менять знак на обратный), замена дозвукового входящего потока на сверхзвуковой приводит к тому, что сверхзвуковое сопло обращается в сверхзвуковой диффузор (см. например, для случая геометрического воздействия гл. вторая § 9).

§ 2. ТЕЧЕНИЕ ГАЗА ПО ТРУБАМ

Трубы и каналы постоянного поперечного сечения, как круглой, так и фасонной формы, весьма часто применяются в теплоэнергетических установках. Если такой канал неподвижен и теплообмен через стенки отсутствует, то задача его расчета сводится к определению параметров потока газа, движущегося в цилиндрической трубе с трением без внешнего теплообмена. В уравнении (7.6) в этом случае нужно учитывать только воздействие трением. Тогда

$$\frac{dw}{w} (M^2 - 1) = - \frac{k}{a^2} dL_r. \quad (7.8)$$

Из уравнения (7.8) легко устанавливается влияние трения на скорость потока. Поскольку всегда $dL_r > 0$, то при $M < 1$ получается $dw > 0$, а при $M > 1$ $dw < 0$, т. е. в дозвуковом потоке скорость за счет трения возрастает, а в сверхзвуковом — уменьшается *).

Для выполнения расчетов формула (7.8) неудобна. Ее следует преобразовать, сделав следующие замены. Число M нужно выразить через приведенную скорость λ по формуле (2.55)

$$M^2 = \frac{\frac{2}{k+1} \lambda^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2},$$

отношение $\frac{dw}{w}$ представить как $\frac{dw}{w} = \frac{d\lambda}{\lambda}$, поделив числитель и знаменатель на критическую скорость $a_{кр}$, а работу гидравлических потерь dL_r выразить с помощью известной в гидравлике формулы путевых потерь

$$dL_r = \frac{w^2}{2} \frac{dx}{D}.$$

Заметим, что в энергоизолированном течении, к которому относится рассматриваемая задача, в силу постоянства температуры торможения критическая скорость сохраняет постоянное значение вдоль всего потока (поэтому ее можно вносить под знак производной). Величины dx и D , входящие в формулу

*) Увеличение скорости за счет трения, кажущееся на первый взгляд парадоксальным, объясняется довольно просто. В результате преодоления сил трения уменьшается давление. В сжимаемой жидкости это приводит к падению плотности, следовательно, при постоянной площади сечения скорость должна возрастать. В несжимаемой жидкости скорость будет сохраняться постоянной.

работы трения, представляют элементарную длину трубы и ее диаметр. В случае некруглого поперечного сечения вместо геометрического берется гидравлический диаметр, равный отношению учетверенной площади поперечного сечения к смоченному периметру. Коэффициент путевых потерь, иначе называемый коэффициентом сопротивления трубы, зависит от числа Рейнольдса $Re = \frac{wD}{\nu}$ и относительной шероховатости $\frac{D}{k_s}$, где k_s — средняя высота бугорков на обтекаемой поверхности.

Сделав соответствующие подстановки в формулу (7.8), получим дифференциальное уравнение с разделенными переменными

$$\frac{d\lambda}{\lambda} - \frac{d\lambda}{\lambda^3} = - \frac{k}{k+1} \frac{\zeta}{D} dx. \quad (7.9)$$

Это уравнение легко интегрируется при $\zeta = \text{const}$. В противном случае решение приходится вести численным методом, так как зависимость $\zeta = \zeta(x)$ не выражается в аналитическом виде. Обратимся к экспериментальным данным.

На рис. 133 приведены результаты испытаний большого количества труб с различной относительной шероховатостью, проведенных во Всесоюзном теплотехническом институте Г. А. Муриным. Кривые представляют зависимость коэффициента сопротивления круглой трубы от числа Рейнольдса при заданной шероховатости. Из графиков видно, что для одной и той же трубы (т. е. при одной и той же шероховатости) с ростом числа Рейнольдса коэффициент сопротивления падает, но, начиная с некоторого значения $Re = Re_{кр}$, он сохраняется постоянным. Правее линии, обозначенной $Re_{кр}$, лежит так называемая автомодельная область. В этой области число Рейнольдса уже не влияет на коэффициент сопротивления, и он зависит только от относительной шероховатости. Как показывают подсчеты чисел Рейнольдса, в большинстве задач, встречающихся в теплоэнергетической практике, значения Re превышают предельные, что дает право считать $\zeta = \text{const}$ для данного канала. Тогда, интегрируя уравнение (7.9) в пределах от λ_1 до λ_2 и от 0 до x , получим

$$\frac{1}{\lambda_1^2} - \frac{1}{\lambda_2^2} + \ln \lambda_1^2 - \ln \lambda_2^2 = \frac{2k}{k+1} \frac{\zeta}{D} x.$$

Сгруппируем в левой части величины с одинаковыми индексами, а в правой обозначим

$$\frac{2k}{k+1} \frac{\zeta}{D} x = \gamma. \quad (7.10)$$

Величина χ называется *приведенной длиной трубы*. Она включает в себя, кроме физической длины и диаметра, еще коэффициент сопротивления и показатель изэнтропы газа, следова-

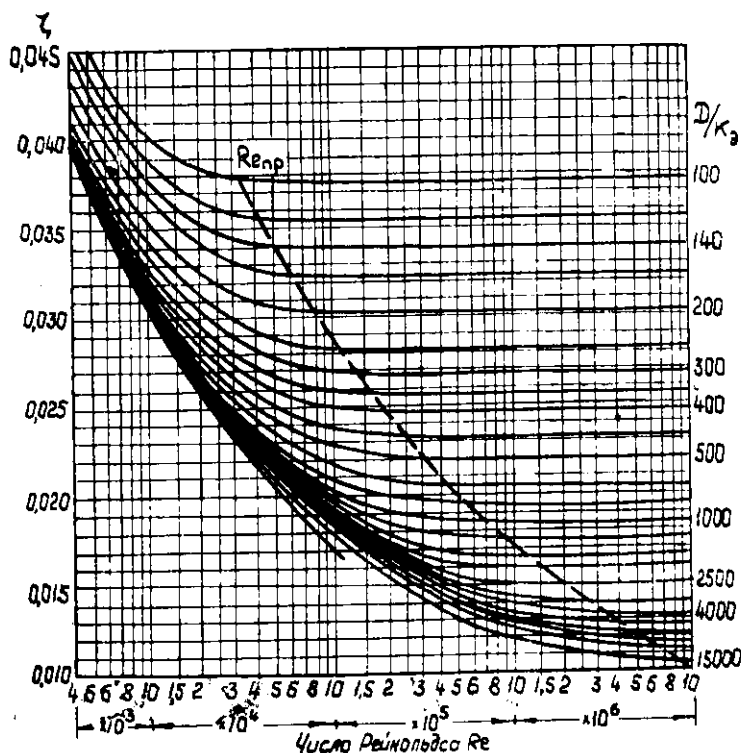


Рис. 133

тельно, обобщает все индивидуальные особенности течения. После небольших преобразований уравнение движения газа в трубе приобретает следующий вид:

$$\left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \ln \lambda_1^2 \right) - \left(\frac{1}{\lambda_2^2} + \ln \lambda_2^2 \right) = \chi. \quad (7.11)$$

Функции $\left(\frac{1}{\lambda^2} + \ln \lambda^2 \right)$ вычисляются для всех значений λ и сводятся в таблицы. С применением таких таблиц уравнение (7.11) решается очень просто.

На рис. 134 построены графики, рассчитанные по формуле (7.11). Пользуясь такими графиками, можно по заданной

приведенной скорости на входе в трубу легко найти λ в любом сечении, для которого известна приведенная длина. Следует обратить внимание, что кривые имеют максимум по χ . Проверив функцию (7.11) на экстремум, нетрудно убедиться, что максимум получается именно при $\chi=1$. Существование этого максимума говорит о том, что заданные условия течения могут реализоваться в трубе не более определенной конечной длины, при достижении которой наступает так называемый кризис течения.

Кризисом течения называется такой режим, при котором на выходе из трубы устанавливается скорость течения, равная критической. Длина трубы, соответствующая кризису те-

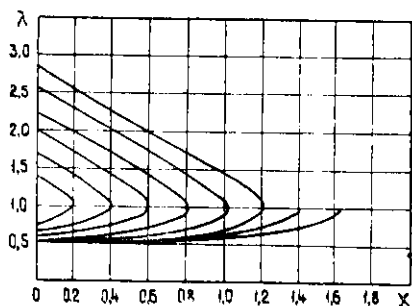


Рис. 134

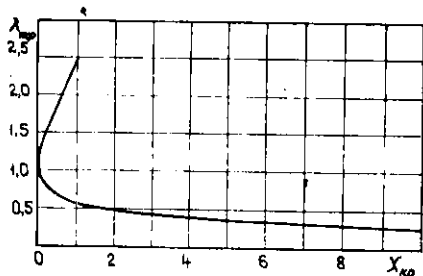


Рис. 135

чения, называется критической длиной трубы. Ее приведенная величина $\chi_{кр}$ получается из уравнения (7.11), после подстановки $\lambda_2=1$, а именно:

$$\chi_{кр} = \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \ln \lambda_1^2 \right) - 1. \quad (7.12)$$

При кризисе течения расход газа через трубу достигает наибольшего возможного значения, а скорость на входе (при дозвуковом течении) не может быть больше той, которая получается на этом режиме. Из рассмотрения кривых на рис. 134 следует, что чем короче труба, тем большую величину имеет $\lambda_{1кр}$; при $\chi=0$, т. е. когда труба превращается в отверстие, $\lambda_{1кр} = 1$. Соответствующий график изображен на рис. 135.

Рассмотрим возможные режимы течения газа по трубе. Если по трубе длиной x пропускать газ с небольшой начальной скоростью, то установится докритический режим течения, которому на рис. 136 отвечает кривая 1. Скорость на этом режиме возрастает по длине трубы, а давление — падает. Увеличивая расход через трубу, можно повысить скорости во всех

ее сечениях. Это повышение возможно лишь до тех пор, пока скорость на выходе не достигнет критической, т. е. не установится кризис течения. Кривая, соответствующая критическому режиму при дозвуковом течении в трубе, обозначена на рис. 136 цифрой II. Здесь также скорость по длине трубы возрастает. Дальнейшее увеличение расхода через трубу невозможно. Если предположить, что каким-то путем удалось это сделать, то кривая приведенной скорости поднимется и займет положение III. Рассматривая эту линию, видим, что уже где-то в середине трубы $\lambda=1$, т. е. скорость должна перейти через скорость звука. Такой переход невозможен, так как согласно уравнению (7.8) работа трения должна была бы изменить свой знак на обратный. Следовательно, если бы режим III даже и возник, то он не мог бы существовать сколь-либо продолжительное время: расход через трубу, а значит и скорости во всех ее сечениях стали бы уменьшаться до тех пор, пока критическое сечение не переместилось в выходное сечение трубы, т. е. кривая не заняла бы положение II.

Представим себе теперь, что в трубу подается сверхзвуковой поток газа со скоростью, соответствующей начальной точке кривой IV. Согласно уравнению (7.8), скорость по длине трубы будет уменьшаться, а давление поэтому будет возрастать. Это — сверхкритический режим течения. Уменьшая скорость на входе, можно этот режим перевести в сверхзвуковой критический, изображенный кривой V. Дальнейшее уменьшение входной скорости (начало кривой VI) приводит к такому режиму, на котором непрерывное течение становится невозможным, так как опять критическое сечение должно получиться в середине трубы. Поэтому возникает скачок уплотнения. Таким образом, поток проходит начальный участок трубы со сверхзвуковой скоростью. В некотором сечении появляется прямой скачок уплотнения ab , за которым течение становится дозвуковым. Оставшийся участок пути дозвуковой поток проходит с увеличением скорости до критического значения на выходе, т. е. по кривой II. Скачок сам выбирает себе место: он располагается в том сечении, где выполняется кинематическое соотношение $\lambda_a \lambda_b = 1$.

Опыты, проведенные с трубами, показывают, что в реальных условиях вместо прямого скачка возникают сложные конфигурации косых скачков, растянутые по длине потока. Однако, если не интересоваться их протяженностью, то расчеты можно вести, основываясь на модели прямого скачка.

Термодинамический процесс, соответствующий непрерывному течению газа в трубе, является довольно сложным. Он не описывается ни одним из обычно применяемых уравнений термодинамики. Условно его можно записать уравнением поли-

тропы, считая, однако, показатель политропы величиной переменной. Если обычное уравнение политропы

$$\frac{p}{\rho^n} = \text{const} \quad \text{или} \quad \frac{T}{\rho^{n-1}} = \text{const},$$

записать в дифференциальной форме

$$\frac{dT}{T} = (n-1) \frac{d\rho}{\rho}, \quad (7.13)$$

то, считая далее показатель политропы n величиной переменной, можно найти закон его изменения по длине трубы в зависимости от местного числа M . Для этого дополнительно используются уравнение неразрывности $\rho w = \text{const}$ и формула

температуры торможения $T^* = T + \frac{w^2}{2 \frac{k}{k-1} R}$. После дифферен-

цирования при $T^* = \text{const}$ (так как течение энергоизолированное) эти формулы приобретают вид

$$\frac{d\rho}{\rho} = - \frac{dw}{w}, \quad (7.14)$$

$$dT = (k-1) \frac{w dw}{kR}. \quad (7.15)$$

Подставив в уравнение (7.13) значения $\frac{d\rho}{\rho}$ и dT , найденные из формул (7.14) и (7.15), учитывая, что $kRT = a^2$, получим следующую зависимость показателя политропы от числа M :

$$n = 1 + (k-1) M^2. \quad (7.16)$$

Анализируя зависимость (7.16), нетрудно установить, как изобразится этот процесс в диаграмме TS . Действительно, если представить дозвуковое течение в начале очень длинной трубы, где скорость весьма мала, т. е. $M \approx 0$, то из уравнения (7.16) получаем, что $n \approx 1$. Это соответствует процессу $T = \text{const}$. Таким образом, при очень малых скоростях течение очень близко к изотермному (см. участок политропы вблизи точки 1 на рис. 137). По мере увеличения скорости, политропа все более отклоняется от изотермы. Когда скорость достигает критической и $M = 1$, то $n = k$. Следовательно, касательная, проведенная к политропе, будет в этой точке вертикальной (точка 2 на рис. 137), а процесс в критическом сечении (на выходе из трубы) будет изоэнтропным. При сверхзвуковом те-

чении в трубе с очень большой скоростью процесс близок к изохорному ($v = \text{const}$), так как если $M \rightarrow \infty$, то $n \rightarrow \infty$. Нижняя ветвь кривой на рис. 137 относится к сверхзвуковому течению. Направления, в которых может идти процесс, указаны стрел-

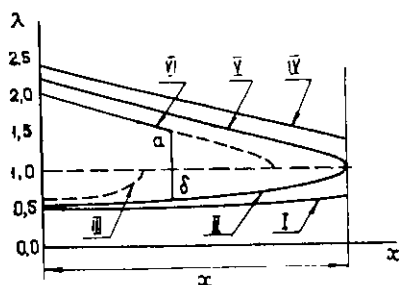


Рис. 136

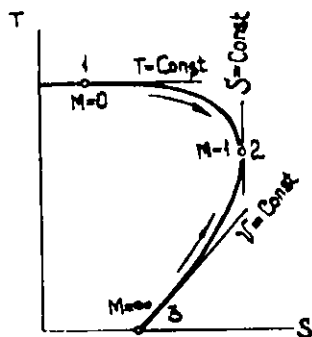


Рис. 137

ками. Непрерывный переход через скорость звука внутри трубы, т. е. переход через точку 2 на диаграмме, невозможен, так как при этом энтропия должна перейти через максимум и в

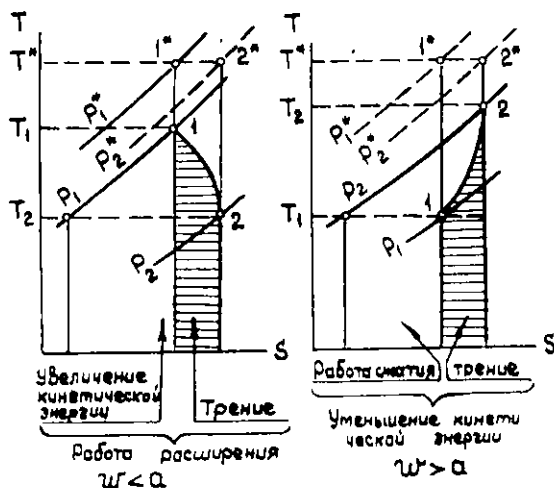


Рис. 138

дальнейшем уменьшаться, что противоречит второму закону термодинамики.

На рис. 138 построены TS -диаграммы для дозвукового (слева) и сверхзвукового (справа) течения в трубе. Они дают на-

глядное представление о том, как в этих случаях распределяется энергия и как изменяется давление торможения.

При $M < 1$ скорость по длине трубы за счет трения возрастает. При этом падает статическое давление, т. е. газ расширяется. Работа расширения газа (вся площадь диаграммы) идет, во-первых, на увеличение кинетической энергии потока (незаштрихованная часть) и, во-вторых, на преодоление тре-

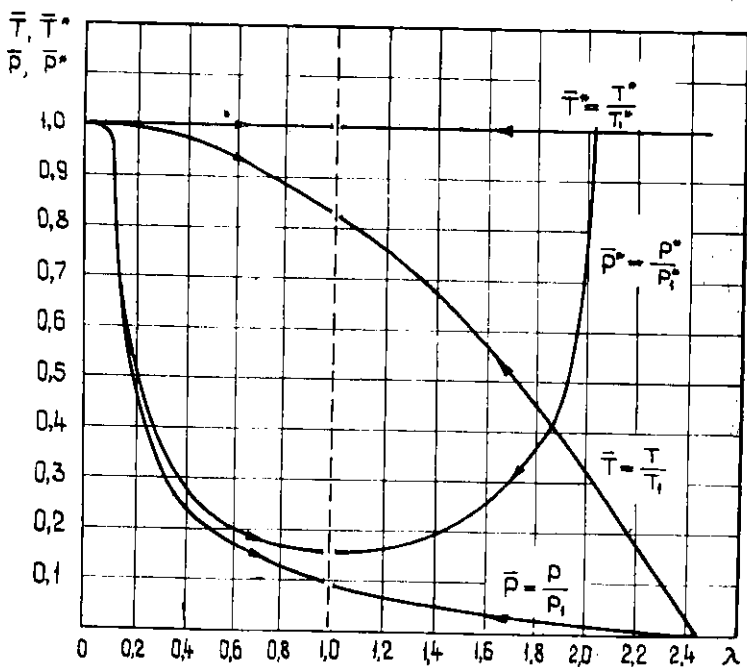


Рис. 139

ния (горизонтально-заштрихованная часть). Давление торможения, как это следует из диаграммы, уменьшается по длине трубы, $p_2^* < p_1^*$.

При $M > 1$ скорость потока по длине трубы за счет трения падает, т. е. уменьшается кинетическая энергия. Эта «освободившаяся» энергия изображается на рис. 138 справа всей площадью фигуры. Часть ее (незаштрихованная площадь) идет на сжатие газа, другая часть (горизонтально-заштрихованная площадка) — на преодоление трения. Давление торможения по длине трубы падает, $p_2^* < p_1^*$, несмотря на то, что статическое давление увеличивается.

Если приведенные скорости во всех сечениях трубы рассчитаны, то определение параметров состояния газа произво-

дится просто. Так как температура торможения постоянна, то истинная температура легко находится с помощью газодинамической функции $\tau(\lambda)$, а именно

$$T = T^* \cdot \tau(\lambda). \quad (7.17)$$

Давление торможения и статическое давление рассчитываются по формулам

$$p^* = p_1^* \frac{q(\lambda_1)}{q(\lambda)}, \quad (7.18)$$

$$p = p_1 \frac{y(\lambda_1)}{y(\lambda)}. \quad (7.19)$$

Эти формулы получаются путем приравнивания массового расхода на входе и выходе из трубы, записанного по формулам (2.81) и (2.83), при условии $T^* = \text{const}$, $m = \text{const}$, $F = \text{const}$.

Графики зависимости параметров состояния газа от приведенной скорости, рассчитанные по этим формулам, приведены на рис. 139. Разрыв кривых при $\lambda = 1$ имеет не математический, а физический смысл: процесс не допускает непрерывный переход через $\lambda = 1$, а идет только в направлении, указанном стрелками.

§ 3. ТЕЧЕНИЕ ГАЗА С ПОДВОДОМ И ОТВОДОМ ТЕПЛА

Течение газа с подводом тепла извне или с отводом тепла во внешнюю охлаждающую среду довольно часто встречается в теплоэнергетических установках. В качестве примеров можно привести течение газа в теплообменниках, в камерах сгорания, в испарителях и т. п. В теплообменниках охлаждающий и охлаждаемый (или нагревающий и нагреваемый) агенты находятся по разные стороны от разделяющей твердой поверхности — стенки трубы или канала, следовательно, тепло подводится или отводится через стенку. В камерах сгорания подводимое к газу тепло вносится в поток в скрытом виде — в форме химической энергии впрыскиваемого топлива. Поэтому, несмотря на то, что процесс выделения тепла происходит в самом потоке, это тепло, по отношению к поступающему в камеру газу, является внешним. В испарительных устройствах, где в поток газа впрыскивается вода или другая жидкость (например, для понижения температуры газов), тепло, затрачиваемое на испарение, берется от самого газа. Следовательно, оно может рассматриваться, как тепло, отведенное во внешнюю среду.

Все эти виды течения можно схематизировать в виде движения газа по трубе с внешним теплообменом. Желая изучить особенности данного течения в чистом виде, нужно отбросить все другие воздействия, кроме теплового, т. е. положить, что труба цилиндрическая, неподвижная и что трение отсутствует. Обращаясь к уравнению обращения воздействий (7.6), можно записать его для этого частного случая в следующем виде:

$$\frac{dw}{w} (M^2 - 1) = - \frac{k-1}{a^2} dQ_e. \quad (7.20)$$

Из формулы (7.20) следует, что в дозвуковом потоке ($M < 1$) подвод тепла ($dQ_e > 0$) вызывает рост скорости ($dw > 0$), а в сверхзвуковом ($M > 1$) — ее падение ($dw < 0$). Отвод тепла ($dQ_e < 0$) в дозвуковом потоке ($M < 1$) приводит к уменьшению скорости ($dw < 0$), а в сверхзвуковом ($M > 1$) — к ее увеличению ($dw > 0$).

Если в начальном участке трубы подводить тепло, а затем отводить, то можно получить так называемое *тепловое сопло*. Его схема изображена на рис. 140. Это сопло преобразует до-

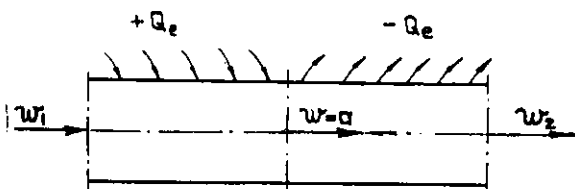


Рис. 140

звуковой поток в сверхзвуковой. Критическое сечение получается в том месте, где меняется направление теплового потока (в самом критическом сечении тепловой поток равен нулю). Если в такой канал подать сверхзвуковой поток, то его скорость будет понижаться, т. е. канал будет работать как сверхзвуковой диффузор.

Термодинамический процесс, происходящий в газе, протекающем по тепловому соплу, обладает такими же особенностями, как и в случае течения по цилиндрической трубе с трением, — он непрерывно изменяется при переходе от сечения к сечению.

Взяв уравнение политропы $\frac{p}{\rho^n} = \text{const}$ и записав его в дифференциальной форме

$$\frac{dp}{p} = n \frac{d\rho}{\rho}, \quad (7.21)$$

можно применить его к исследованию данного процесса, полагив, что показатель политропы n — величина переменная. Для установления зависимости $n=f(M)$, используем еще уравнение неразрывности (7.14)

$$\frac{d\rho}{\rho} = - \frac{dw}{w}$$

и уравнение Бернулли. Последнее для данного вида течения ($L=0, L_r=0$) записывается формулой (2.24), которую можно представить так:

$$dp = -\rho w dw. \quad (7.22)$$

Подставляя значения dp и $\frac{d\rho}{\rho}$, найденные из формул (7.22)

и (7.14), в уравнение (7.21), учитывая при этом, что $\frac{p}{\rho} = \frac{a^2}{k}$, получим после небольших преобразований

$$n = kM^2. \quad (7.23)$$

Рассмотрим характерные точки этого термодинамического процесса. Если скорость потока очень мала, т. е. $M \rightarrow 0$, то $n \rightarrow 0$. Процесс близок к изобарному (в точке $M=0$ изобара и линия термодинамического процесса теплового сопла имеют общую касательную). На рис. 141 этому соответствует точка 1.

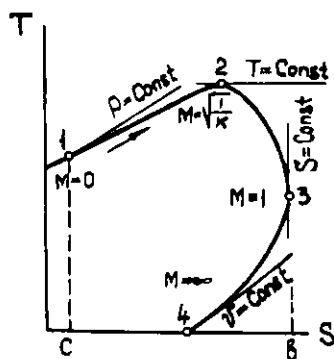


Рис. 141

Если $M = \sqrt{\frac{1}{k}}$, то $n=1$. В

данной точке 2 (рис. 141) получается элементарный изотермический процесс. Если скорость потока равна критической, т. е. $M=1$, то $n=k$, т. е. в критическом сечении получается элементарный изоэнтропный процесс (точка 3, рис. 141). При $M \rightarrow \infty$ показатель политропы также стремится к бесконечности, следовательно, процесс приближается к изохорному. На рис. 141 верхняя ветвь кривой 1—2—3 отвечает

дозвуковому участку сопла, а нижняя — 3—4 — сверхзвуковому. Рост энтропии на дозвуковой ветви кривой связан с внешним теплопроводом; количество подведенного тепла определяется площадью $a123b$. Уменьшение эн-

тропии на сверхзвуковой ветви кривой связано с отводом тепла. Количество отведенного тепла изображается площадью $b34$.

Изменение температуры на дозвуковом участке теплового сопла носит довольно своеобразный характер. При малых скоростях ($M < \sqrt{\frac{1}{k}}$) подвод тепла к газу сопровождается ростом температуры, но при больших дозвуковых скоростях ($M > \sqrt{\frac{1}{k}}$) — падением температуры. Этот, кажущийся парадоксальным, факт объясняется тем, что на участке сопла, где $\sqrt{\frac{1}{k}} < M < 1$, нарастание скорости происходит настолько интенсивно, что рост кинетической энергии уже не компенсируется внешним теплоподводом, в результате чего энтальпия газа начинает уменьшаться, следовательно, уменьшается и температура.

Из уравнения энергии, записанного для рассматриваемого течения ($dL=0$)

$$c_p dT + d\left(\frac{w^2}{2}\right) - dQ_e = 0$$

или

$$c_p dT^* = dQ_e, \quad (7.24)$$

следует, что подвод тепла ($dQ_e > 0$) вызывает рост температуры торможения, а отвод ($dQ_e < 0$) — уменьшение. Таким образом, на дозвуковом участке теплового сопла температура торможения возрастает, в критическом сечении достигает максимума, на сверхзвуковом участке — уменьшается. Максимумы температуры торможения и термодинамической температуры не совпадают: они получаются при разных числах M . Графики изменения T^* и T в зависимости от числа M для теплового сопла приведены на рис. 142.

Статическое давление по длине теплового сопла уменьшается. Это связано с ростом скорости: для увеличения количества движения газа необходимо, чтобы вдоль потока действовала сила, а причиной ее появления в цилиндрической трубе может быть только разность давлений на входе и выходе. Давление торможения по длине сопла также изменяется. На дозвуковом участке оно падает, на сверхзвуковом — возрастает. Зависимость статического давления и давления торможения от числа M в произвольном сечении теплового сопла при $M_1=0,1$ и $k=1,4$ показана на рис. 143.

Падение давления торможения в результате подвода тепла называется *тепловым сопротивлением*. Рассмотрим тепловое

сопротивление при малых скоростях движения газа в цилиндрической трубе с внешним подводом тепла. Для этого запишем разность давлений торможения на входе и выходе и определим ее знак. При малых числах M связь между полным и

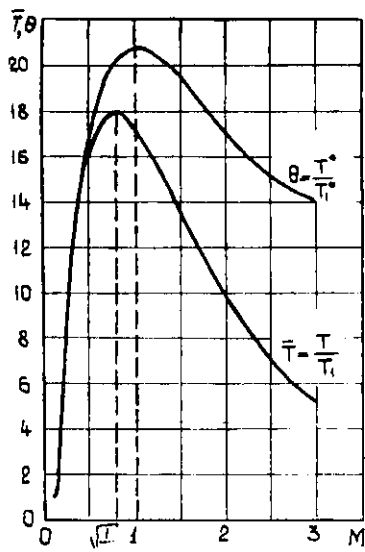


Рис. 142

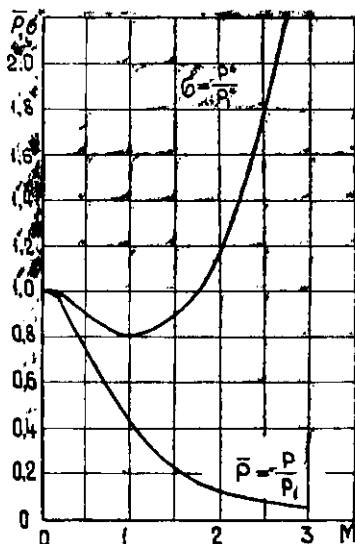


Рис. 143

статическим давлением можно брать по уравнению Бернулли для несжимаемой жидкости

$$p_1^* = p_1 + \rho_1 \frac{w_1^2}{2},$$

$$p_2^* = p_2 + \rho_2 \frac{w_2^2}{2},$$

так как плотность очень слабо зависит от скорости. Однако нужно заметить, что считать плотность постоянной для всего потока от входа до выхода нельзя, потому что она сильно изменяется вследствие подвода тепла (в связи с этим в предыдущих формулах плотности на входе и выходе помечены разными индексами). Произведя вычитание

$$p_1^* - p_2^* = p_1 - p_2 + \rho_1 \frac{w_1^2}{2} - \rho_2 \frac{w_2^2}{2},$$

подставим вместо разности статических давлений ее выражение из уравнения количества движения (3.31)

$$p_1 - p_2 = \rho_2 w_2^2 - \rho_1 w_1^2.$$

Тогда после небольших преобразований получим

$$p_1^* - p_2^* = \frac{\rho_2 w_2^2}{2} - \frac{\rho_1 w_1^2}{2}. \quad (7.25)$$

Из формулы (7.25) видно, что если к газу подводится тепло, т. е. скорость его возрастает, то $\rho_2 w_2^2 > \rho_1 w_1^2$, следовательно, $p_2^* < p_1^*$, значит в этом случае существует тепловое сопротивление. При отводе тепла $\rho_2 w_2^2 < \rho_1 w_1^2$, $p_2^* > p_1^*$, т. е. получается отрицательное тепловое сопротивление. Таким образом, в отличие от гидравлического, тепловое сопротивление может быть как положительным, так и отрицательным.

При больших скоростях газа тепловое сопротивление, а также изменение статического давления рассчитывается следующим образом. Уравнение количества движения в полных импульсах для массы газа, движущегося в цилиндрической трубе без трения, запишется, как

$$\Phi_1 = \Phi_2,$$

потому что между входным и выходным сечением на поток в направлении движения не действует никаких сил. Записав это с помощью газодинамических функций потока импульса $r(\lambda)$ и $f(\lambda)$

$$p_1 F \frac{1}{r(\lambda_1)} = p_2 F \frac{1}{r(\lambda_2)},$$

$$p_1^* F f(\lambda_1) = p_2^* F f(\lambda_2),$$

нетрудно получить формулы для расчета статического и полного давлений на выходе из трубы или в ее произвольном сечении

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{r(\lambda_2)}{r(\lambda_1)}, \quad (7.26)$$

$$\sigma = \frac{p_2^*}{p_1^*} = \frac{f(\lambda_1)}{f(\lambda_2)}. \quad (7.27)$$

Температуры газа в любом сечении трубы рассчитываются по известной зависимости

$$T = T^* \cdot \tau(\lambda),$$

причем температура торможения должна быть задана. Обычно задают величину

$$0 = \sqrt{\frac{T^*}{T_1^*}}, \quad (7.28)$$

называемую *степенью повышения температуры*.

Для расчета по этим формулам необходимо знать приведенную скорость в расчетном сечении. Она определяется следующим путем. Записав отношение приведенных скоростей в произвольном сечении и в сечении входа

$$\frac{\lambda}{\lambda_1} = \frac{w}{w_1} \frac{a_{кр1}}{a_{кр}},$$

заменяем в нем отношение скоростей с помощью уравнений неразрывности, состояния и формулы (7.26)

$$\frac{w}{w_1} = \frac{\rho_1}{\rho} = \frac{\rho_1}{\rho} \frac{T}{T_1} = \frac{\rho_1}{\rho} \frac{T^* \tau(\lambda)}{T_1^* \tau(\lambda_1)} = \frac{\rho_1}{\rho} \theta \frac{\tau(\lambda)}{\tau(\lambda_1)} = \frac{r(\lambda_1)}{r(\lambda)} \theta \frac{\tau(\lambda)}{\tau(\lambda_1)},$$

а отношение критических скоростей представим так:

$$\frac{a_{кр1}}{a_{кр}} = \sqrt{\frac{T_1^*}{T^*}} = \sqrt{\frac{1}{\theta}}.$$

Тогда

$$\frac{\lambda}{\lambda_1} = \frac{r(\lambda_1)}{r(\lambda)} \frac{\tau(\lambda)}{\tau(\lambda_1)} \cdot \sqrt{\theta}.$$

Используя формулы (2.59) и (3.39), преобразуем отношение $\frac{r(\lambda)}{\tau(\lambda)}$

$$\frac{r(\lambda)}{\tau(\lambda)} = \frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2}{1 + \lambda^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2} = \frac{1}{1 + \lambda^2}.$$

Подставив это в предыдущее равенство, получим

$$\frac{\lambda}{\lambda_1} = \sqrt{\theta} \frac{1 + \lambda^2}{1 + \lambda_1^2}. \quad (7.29)$$

Формула (7.29) представляет относительно λ квадратное уравнение. При его решении знак минус перед квадратным корнем относится к случаю дозвукового течения, а знак плюс — к случаю сверхзвукового. По уравнению (7.29) определяется λ в любом сечении цилиндрической трубы в зависимости от степени подогрева θ и λ_1 на входе.

При определенных условиях течения газа по цилиндрической трубе с внешним подогревом наступает тепловой кризис. *Тепловым кризисом* называется такой режим течения, при котором скорость на выходе из трубы достигается критической.

При тепловом кризисе невозможно: 1) увеличение расхода газа выше критического значения, 2) увеличение скорости газа на выходе, 3) увеличение подогрева газа при сохранении постоянной начальной скорости. Таким образом, при тепловом кризисе $\lambda_2 = 1$, $\lambda_1 = \lambda_{1\text{кр}}$, $\theta = \theta_{\text{кр}}$.

Заметим, что дозвуковая часть теплового сопла работает на режиме теплового кризиса, и увеличение скорости после критического сечения происходит лишь потому, что изменяется знак теплового воздействия: теплоподвод сменяется теплоотводом.

Если в уравнении (7.29) положить $\lambda_2 = 1$, то оно принимает вид

$$\lambda_{1\text{кр}}^2 - 2\sqrt{\theta} \lambda_{1\text{кр}} + 1 = 0,$$

откуда легко получить

$$\lambda_{1\text{кр}} = \sqrt{\theta} \pm \sqrt{\theta - 1}. \quad (7.30)$$

По этой формуле определяется критическое значение приведенной скорости при входе в трубу, при котором наступает тепловой кризис. Для тех камер сгорания, которые работают с очень высокой степенью повышения температуры, с помощью такого проверочного расчета устанавливают, способна ли камера пропустить расчетное количество газа.

Отношение статических давлений и коэффициент восстановления давления при тепловом кризисе зависят от степени подогрева. С ее увеличением $\frac{p_2}{p_1}$ и $\sigma = \frac{p_2^*}{p_1^*}$ уменьшаются, стремясь к определенному пределу. Так, например, при $k=1,4$ при $\theta \rightarrow \infty$, $\frac{p_2}{p_1} \rightarrow \frac{1}{2,4}$, $\sigma = \frac{p_2^*}{p_1^*} \rightarrow 0,79$.

В заключение нужно заметить, что в чистом виде тепловое сопло в технике не применяется, но в комбинации с геометрическим соплом встречается часто. Комбинация геометрического и теплового воздействия встречается, например, при догорании топлива в суживающейся части реактивных сопел, при охлаждении стенок сопел реактивных двигателей. С тепловым сопротивлением приходится встречаться при расчетах и исследованиях устройств, в которых газ движется с подводом или отводом тепла, — камер сгорания, воздухоподогревателей, воздухоохладителей и т. п.

§ 4. ТЕЧЕНИЕ В СУЖИВАЮЩИХСЯ И РАСШИРЯЮЩИХСЯ КАНАЛАХ

В теплоэнергетических машинах и установках широко применяются трубы и каналы переменного по длине сечения — конфузоры, сопла и диффузоры. Так, например, конические и профилированные сопла используются для получения газовых струй, для создания силы тяги в реактивных двигателях. В турбинах сопла имеют более сложную форму; их криволинейные каналы образованы стенками соседних лопаток. В некоторых случаях конфузорные каналы устанавливаются для выравнивания поля скоростей при входе воздуха в компрессор или в сопло аэродинамической трубы. Конические диффузоры находят применение в качестве устройств для снижения скорости после рабочей части аэродинамических труб, после турбин. Диффузоры более сложной формы — с криволинейными межлопаточными каналами, а также щелевые (в виде кольцевой щели) встречаются в осевых и центробежных компрессорах и насосах.

Решая задачу в рамках одномерной теории, можно схематизировать течение, представив его, как движение газа в суживающемся или расширяющемся канале с прямолинейной осью.

Рассмотрим течение в соплах.

Потери в дозвуковых суживающихся соплах представляют собой потери на трение ^{*)}. На сверхзвуковых участках сопел Лаваля к ним следует также отнести потери в скачках уплотнения и потери на отрыв потока от стенок.

Потери на трение можно определять, применяя методы расчета пограничного слоя. Однако расчеты в этом случае получаются весьма громоздкими. Что касается потерь на отрыв потока, то методы их расчета еще не разработаны. Поэтому в практике применяют метод суммарной оценки потерь в соплах с помощью одного из трех коэффициентов, определяемых экспериментально. К ним относятся следующие.

Скоростной коэффициент представляющий отношение среднерасходной скорости на выходе из реального сопла ω_2 к скорости истечения из идеального сопла ω_{2i} при том же отношении давлений

$$\varphi = \frac{\omega_2}{\omega_{2i}}. \quad (7.31)$$

^{*)} Отрыв потока наблюдается лишь в соплах с криволинейными каналами, применяемыми в турбинах. Он возникает при обтекании диффузорных участков профиля лопатки. Потери, связанные с образованием вихрей, включаются в этом случае в общий баланс потерь.

$p_2^* = \frac{p_2}{\pi(\lambda_2)}$, так как отрезок изоэнтропы 2—2* равен $\frac{w_2^2}{2}$, а

$\lambda_2 = \frac{w_2}{a_{кр}}$, $p_1^* = \frac{p_2}{\pi(\lambda_{2t})}$, так как отрезок изоэнтропы 2_{ид}—1*

равен $\frac{w_{2t}^2}{2}$, а $\lambda_{2t} = \frac{w_{2t}}{a_{кр}}$. Подставив эти значения p_2^* и p_1^*

в выражение для коэффициента восстановления давления, получим

$$\sigma = \frac{\pi(\lambda_{2t})}{\pi(\lambda_2)} = \frac{\pi(\lambda_{2t})}{\pi(\lambda_{2t} \cdot \varphi)} = \frac{\pi\left(\frac{\lambda_2}{\varphi}\right)}{\pi(\lambda_2)} \quad (7.36)$$

или

$$\begin{aligned} \sigma &= \left(\frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_{2t}^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_2^2} \right)^{\frac{k}{k-1}} = \left(\frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_{2t}^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_{2t}^2 \varphi^2} \right)^{\frac{k}{k-1}} = \\ &= \left(\frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_2^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_2^2} \right)^{\frac{k}{k-1}}. \end{aligned} \quad (7.37)$$

По формулам (7.36) и (7.37) по известным значениям λ_{2t} и φ определяется величина σ . Необходимо заметить, что при постоянном скоростном коэффициенте φ величина σ сильно зависит от λ_{2t} . С ростом λ_{2t} происходит уменьшение σ . Скоростной коэффициент по режимам изменяется слабо, и в расчетах для данного сопла может приниматься постоянным. Его значения лежат в довольно узких пределах *): $\varphi = 0,92-0,99$, а для хорошо выполненных профилированных сопел $\varphi = 0,98-0,99$.

Для оценки пропускной способности сопла часто пользуются коэффициентом расхода, представляющим собой отношение действительного расхода к теоретическому

$$\mu_c = \frac{M_{сек}}{M_{сек\cdot t}}. \quad (7.38)$$

*) Поскольку φ определяется по среднерасходной скорости, то в энергетических соотношениях, например в формулах (7.35), (7.36), (7.37) следовало бы брать величину, определяемую из соотношения $\varphi'^2 = \alpha \varphi^2$, где

α — поправочный коэффициент к величине $\frac{w^2}{2}$, который учитывает в уравнении Бернулли и уравнении энергии отличие действительной кинетической энергии от вычисленной по среднерасходной скорости. Однако в соплах α близко к единице и отличие φ' от φ незначительно.

Если представить $M_{cek} = \int_{F_2} \rho \omega dF = \rho_2 \omega_2 F_2$ и $M_{cek.t} = \rho_{2t} \omega_{2t} F_2$,

то*)

$$\mu_c = \frac{\rho_2}{\rho_{2t}} \frac{\omega_2}{\omega_{2t}} = \frac{\rho_2}{\rho_{2t}} \cdot \varphi. \quad (7.39)$$

Между скоростным коэффициентом φ , коэффициентом расхода μ_c и толщиной вытеснения пограничного слоя на стенке сопла довольно легко устанавливается связь. Если поток внутри сопла разбить на ядро течения и на зону толщины вытеснения, то процесс изменения состояния газа в области ядра можно считать изоэнтропным. Тогда $\omega_{2я.дра} = \omega_{2t}$ и $\rho_{2я.дра} = \rho_{2t}$. Расход через сопло можно записать так:

$$\rho_2 \omega_2 F_2 = \rho_{2t} \omega_{2t} (F_2 - F_{\delta*}),$$

где $F_{\delta*}$ — площадь сечения, занятая вытесненной массой. Следовательно,

$$\mu_c = \frac{\rho_2 \omega_2}{\rho_{2t} \omega_{2t}} = \frac{F_2 - F_{\delta*}}{F_2} = 1 - \frac{F_{\delta*}}{F_2} \quad (7.40)$$

и, с учетом формулы (7.39),

$$\varphi = \frac{\rho_{2t}}{\rho_2} \left(1 - \frac{F_{\delta*}}{F_2} \right). \quad (7.41)$$

Для плоского сопла

$$1 - \frac{F_{\delta*}}{F_2} = 1 - \frac{\delta^*}{R}, \quad (7.42)$$

для осесимметричного

$$1 - \frac{F_{\delta*}}{F_2} \approx 1 - \frac{2\delta^*}{R}. \quad (7.43)$$

Рассмотрим, в чем заключаются особенности истечения газа из суживающегося сопла при сверхкритических перепадах давления. В идеальном случае, когда потери отсутствуют, при достижении $\frac{p_2}{p_1^*} = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}}$ скорость в выходном сечении становится равной критической, т. е. срез сопла становится критическим сечением. Поэтому дальнейшее уменьшение $\frac{p_2}{p_1^*}$,

*) Для несжимаемой жидкости на выходе происходит внутреннее сжатие струи, т. е. $F_{2\text{струи}} = \varepsilon F_2$, где $\varepsilon < 1$. Для газов можно считать, что $F_{2\text{струи}} = F_2$.

иначе говоря, переход в область сверхкритических перепадов давления, не вызывает увеличения скорости: для этого потребовалось бы надставить сопло расширяющимся участком канала. Таким образом, скорость и давление на срезе сопла остаются равными $a_{кр}$ и $p_{кр}$, а недоиспользованный перепад давлений реализуется за пределами сопла, где поток пересекает характеристики разрежения, отходящие от выходных кромок. (Аналогичное явление в соплах Лавала рассмотрено в гл. V, § 8.) Волны разрежения не могут проникнуть против течения в канал, так как навстречу им движется поток со скоростью звука — скоростью распространения самих волн. Поэтому на срезе сопла давление удерживается более высоким, чем в окружающей среде.

При течении с трением скорость истечения казалось бы должна уменьшиться и стать дозвуковой, так как в идеальном случае она была равна скорости звука. Но если давление в окружающей среде ниже, чем на срезе сопла, то волна разрежения проникнет в канал, т. к. $\omega_2 < a_{кр}$, давление в нем понизится и газ получит дополнительное ускорение. Скорость ω_2 будет повышаться до тех пор, пока не достигнет $\omega_2 = a_{кр}$. Следовательно, и в случае реального сопла скорость истечения при сверхкритических перепадах давления равна критической *).

Кризис течения ($\lambda_2 = 1$) должен устанавливаться при условии $\frac{p_2}{p_2^*} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}}$, справедливым как для идеального, так и для реального случая, или, так как $p_2^* = \sigma p_1^*$,

$$\frac{p_2}{p_1^*} \leq \sigma \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}}. \quad (7.44)$$

Если $\frac{p_2}{p_1^*} > \sigma \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}}$, скорость истечения будет дозвуковой.

Рассмотренное явление можно объяснить и с точки зрения теории пограничного слоя. Если поток в канале разбить на ядро и область толщины вытеснения и полагать течение в ядре изэнтропным, то можно прийти к выводу, что уже при $\frac{p_2}{p_1^*} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}}$ скорость в ядре на выходе из сопла будет

*) Подходя к этому вопросу формально, в газодинамических расчетах часто допускают ошибку, полагая, что $\omega_2 = \varphi \omega_{2t} = \varphi a_{кр}$ при $\frac{p_2}{p_1^*} < \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}}$. Приведенное рассуждение показывает, что это противоречит физическому смыслу.

$\omega_{2\text{ядра}} = a_{\text{кр}}$. Среднерасходная скорость тогда получится меньше ($\omega_2 < a_{\text{кр}}$), т. к. при ее определении массовый расход относится к большей площади $F_2 > F_{2\text{ядра}}$. При уменьшении давления окружающей среды ($p_2 < p_{\text{кр}}$) волна разрежения проникает через дозвуковую зону пограничного слоя внутрь канала. Поэтому вблизи выходного сечения создаются большие отрицательные продольные градиенты давления, под их влиянием резко уменьшается толщина вытеснения. В результате этого ядро потока образует «горло» и небольшой расширяющийся участок *). Скорость $\omega_{2\text{ядра}}$ получается сверхзвуковой, а среднерасходная скорость приблизительно равной звуковой. (Она может незначительно отклоняться от скорости звука.)

При расчете суживающегося сопла теоретическая приведенная скорость истечения определяется по функции $\pi(\lambda_{2t}) = \frac{p_2}{p_1^*}$, действительная — по соотношению $\lambda_2 = \phi \lambda_{2t}$, если $\frac{p_2}{p_1^*} > \sigma \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}}$, или $\lambda_2 = 1$, если $\frac{p_2}{p_1^*} < \sigma \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}}$. Расход газа вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} M_{\text{сек}} &= m F_2 \frac{p_2^*}{\sqrt{T_1^*}} q(\lambda_2) = m (F_2 - F_{i*}) \frac{p_1^*}{\sqrt{T_1^*}} q(\lambda_{2t}) = \\ &= m F_2 \psi_c \frac{p_1^*}{\sqrt{T_1^*}} q(\lambda_{2t}). \end{aligned} \quad (7.45)$$

По этой же формуле можно определять площадь выходного сечения сопла по заданному расходу.

Рассмотрим, как влияют потери на течение газа через сопло Лаваля. Записав уравнение обращения воздействий (7.6) для этого случая ($dF \neq 0$, $dL_r \neq 0$, $dM_{\text{сек}} = dL = dQ_e = 0$)

$$\frac{dw}{w} (M^2 - 1) = \frac{dF}{F} - \frac{k}{a^2} dL_r, \quad (7.46)$$

установим, где должно располагаться критическое сечение. Положив в уравнении (7.46) $M=1$, получим

$$\frac{dF}{F} = \frac{k}{a^2} dL_r.$$

*) Длина расширяющегося участка зависит от формы канала сопла на выходе. Если, например, сопло закончить цилиндрическим насадком, то «горло», образованное толщиной вытеснения, располагается на расстоянии одного-полутора диаметров канала от среза. Чем сильнее суживается канал, тем ближе к срезу располагается «горло».

Так как $dL_r > 0$, то $dF > 0$, следовательно, критическое сечение располагается в расширяющейся части канала. Таким образом, поток переходит через скорость звука в сечении $k'-k'$ (рис. 145), а в минимальном сечении канала $k-k$, т. е. в горле, скорость остается дозвуковой.

Это находится в полном согласии и с теорией пограничного слоя. Если контур стенок сместить внутрь на величину толщины вытеснения (см. пунктирный контур на рис. 145), то вновь образовавшееся «горло» оказывается в сечении $k'-k'$.

Расход газа через сопло Лавая, работающее с потерями по сравнению с идеальным, уменьшается пропорционально $\frac{F_{гэ}}{F_r}$,

где $F_{гэ}$ — эффективная площадь сечения горла. Так как смещение критического сечения $k'-k'$ относительно $k-k$ невелико, то приближенно можно считать (см. рис. 145), что

$$\mu_c = \frac{F_{гэ}}{F_r} \approx \frac{F_r - F_{\delta^*r}}{F_r} = 1 - \left(\frac{F_{\delta^*}}{F} \right)_r. \quad (7.47)$$

В ядре дозвуковой части потока течение сохраняется изэнтропным, поэтому расход газа через сопло Лавая равен

$$M_{сек} = m F_{гэ} \frac{p_1^*}{\sqrt{T_1^*}} = m \mu_c F_r \frac{p_1^*}{\sqrt{T_1^*}}. \quad (7.48)$$

Записав уравнения неразрывности для критического и выходного сечений в идеальном случае ($p_2^* = p_r^*$)

$$m F_r \frac{p_r^*}{\sqrt{T_1^*}} = m F_2 \frac{p_r^*}{\sqrt{T_1^*}} q(\lambda_{2l})$$

и в реальном случае применительно к ядру течения

$$m F_{гэ} \frac{p_r^*}{\sqrt{T_1^*}} = m F_{2э} \frac{\sigma_{ск} p_r^*}{\sqrt{T_1^*}} q(\lambda_2), \quad (7.49)$$

где $\sigma_{ск} = \frac{p_2^*}{p_r^*}$ — коэффициент восстановления давления в системе скачков уплотнения, если таковая имеет место в сверхзвуковом участке канала, нетрудно получить из них

$$q(\lambda_{2l}) = \frac{F_r}{F_2}, \quad q(\lambda_2) = \sigma_{ск} \left(\frac{F_r}{F_2} \right),$$

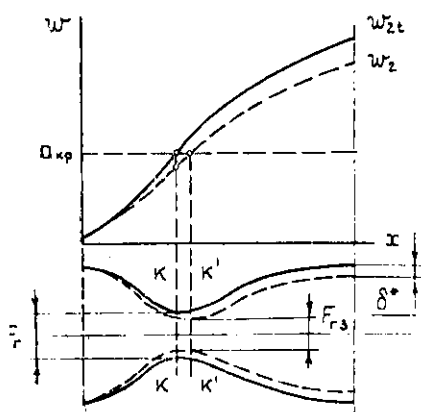


Рис. 145

откуда

$$\frac{q(\lambda_2)}{q(\lambda_{2f})} = \frac{q(\lambda_{2f} \cdot \varphi)}{q(\lambda_{2f})} = \frac{F_{гэ}}{F_{2э} \sigma_{ск}} \cdot \frac{F_2}{F_r} = \frac{\left(\frac{F_9}{F}\right)_r}{\left(\frac{F_9}{F}\right)_2} \cdot \frac{1}{\sigma_{ск}}$$

или, учитывая, что $\mu_c = \left(\frac{F_9}{F}\right)_r$ и $\left(\frac{F_9}{F}\right)_2 = 1 - \left(\frac{F_{б*}}{F}\right)_2$,

$$\frac{q(\lambda_{2f} \cdot \varphi)}{q(\lambda_2)} = \frac{\mu_c}{\sigma_{ск}} \frac{1}{1 - \left(\frac{F_{б*}}{F}\right)_2}. \quad (7.50)$$

Эта формула связывает скоростной коэффициент φ и коэффициент расхода μ_c для сопла Лавала.

При проверочных расчетах сопел Лавала расход газа вычисляется по формуле (7.48), а приведенная скорость истечения определяется по расходу

$$q(\lambda_2) = \frac{M_{сек} \sqrt{T_1^*}}{m F_2 \rho_2^*} = \frac{M_{сек} \sqrt{T_1^*}}{m F_2 \rho_1^* \sigma_c} \quad (7.51)$$

с помощью таблиц газодинамических функций. Коэффициент восстановления давления σ_c для всего сопла находится по формуле (7.36) или (7.37).

При расчете нового сопла сначала определяют размеры поперечных сечений канала в идеальном случае методом, изложенным в гл. II, § 8. Требуемые значения перепада давления и приведенной скорости истечения увязываются по формуле

$$\frac{p_2}{p_1^*} = \pi(\lambda_{2f}) = \pi\left(\frac{\lambda_2}{\varphi}\right).$$

Дозвуковая часть сопла выполняется либо конически-суживающейся с плавным сужением в области горла, либо специально профилируется, например, методом С. А. Христиановича. Этот метод дает хорошие результаты, но довольно сложен и громоздок. Достаточно хорошие результаты получаются при профилировании суживающейся части по Витошинскому (см., например, гл. IV, § 9). Указанные методы применимы также для построения контура стенок суживающихся дозвуковых сопел.

Контур сверхзвуковой части сопла Лавала строится методом характеристик.

После построения профиля идеального сопла, определяют толщину вытеснения в области горла δ_r^* и на выходе δ_2^*

по формулам (7.47), (7.42), (7.43) и (7.50). Контур идеального сопла сдвигается наружу на величину δ^* . Распределение δ^* по длине канала в первом приближении можно принять линейным.

По сравнению с движением газа в соплах, течение в диффузорных каналах менее устойчиво и имеет тенденцию к отрыву потока от стенок с образованием вихревых зон. Это связано с влиянием больших продольных положительных градиентов давления, присущих диффузорам. Поэтому определение сопротивления диффузоров методами теории пограничного слоя весьма затруднительно, и оценка потерь обычно ведется с помощью экспериментальных коэффициентов по формулам местных сопротивлений, хорошо известных в гидравлике.

Работу гидравлических потерь в диффузоре записывают одной из следующих формул:

$$L_r = \xi \frac{w_1^2}{2}, \quad (7.52)$$

$$L_r = \xi_1 \frac{w_2^2}{2}, \quad (7.53)$$

$$L_r = \xi_2 \frac{w_1^2 - w_2^2}{2}. \quad (7.54)$$

Наиболее употребительна из них первая. Величина L_r включает как потери на трение, так и на отрыв потока. Последние являются преобладающими.

При сравнении сопротивлений различных диффузоров величину L_r принято сравнивать с потерями при внезапном расширении потока, иначе называемыми «ударными». Они легко рассчитываются по известной *теореме Борда — Карно*, согласно которой потерянный напор равен скоростному напору потерянной скорости*)

$$L_{yx} = \frac{\rho_1^* - \rho_2^*}{\rho} = \frac{(w_1 - w_2)^2}{2}. \quad (7.55)$$

Таким образом, сопротивление диффузора рассматривается как «смягченные» потери на удар

$$L_r = \psi \frac{(w_1 - w_2)^2}{2}, \quad (7.56)$$

где ψ — называется коэффициентом смягчения удара.

*) Теорему Борда — Карно можно найти в любом учебнике гидравлики.

Опытами, проведенным Г. Н. Абрамовичем, установлено, что коэффициент смягчения удара зависит от угла раскрытия диффузора θ (рис. 146). В первом приближении можно считать, что другие параметры (отношение площадей на входе и выходе, форма поперечного сечения, скорость на входе) не оказывают на ψ заметного влияния. Рассматривая кривую на рис. 146, следует обратить внимание на такие особенности. При $\theta=40^\circ$ $\psi=1$, т. е. потери в диффузоре и при внезапном расширении получаются одинаковыми. При $\theta=60^\circ$ $\psi=1,2$, следовательно, сопротивление диффузора превышает на 20% потери при внезапном расширении. Дальнейшее увеличение θ вызывает плавное уменьшение ψ до $\psi=1$ при $\theta=180^\circ$.

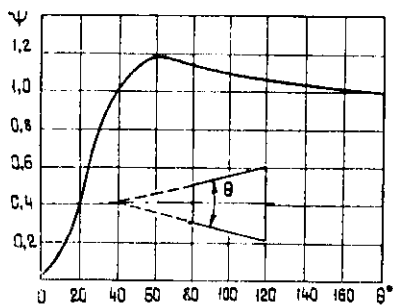


Рис. 146

Значения ψ , большие единицы, объясняются следующим. При внезапном расширении вихревые зоны, образующиеся вследствие отрыва потока, локализуются в углах канала (см. рис. 147 справа). На поддержание вихревого движения затрачивается часть энергии основного потока, которая в результате диссипации переходит в тепло. Именно этим коли-

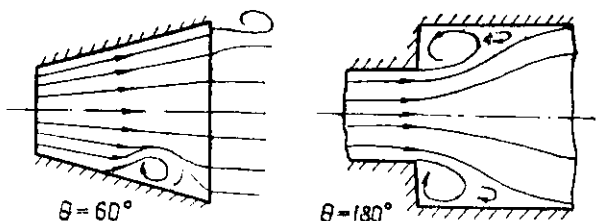


Рис. 147

чеством энергии и определяются потери при внезапном расширении. При углах раскрытия диффузора, близких к 60° , вихревые зоны получаются достаточно мощными. Они не способны удержаться на стенке. Они отрываются и уплывают вниз по течению, унося с собой ту энергию, которая была затрачена на их образование. При отрыве такого вихря основной поток отклоняется в его сторону, занимая освободившееся место. На противоположной стенке тогда появляется отрыв, воз-

никает новый вихрь, и весь процесс повторяется снова. Вполне понятно, что потери энергии на образование новых вихрей получаются больше, чем на поддержание вихревого движения.

Подставив значение L , найденное по формуле (7.56), в формулу (7.52), получим

$$\xi = \psi \left(1 - \frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 = \psi \left(1 - \frac{F_1}{F_2} \frac{\rho_1}{\rho_2} \right). \quad (7.57)$$

Поскольку ψ зависит от θ , а отношение плоскостей $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ — от сте-

пени расширения диффузора $\frac{F_2}{F_1}$, его сопротивления и числа

M на входе, то коэффициент сопротивления диффузора ξ является функцией

$$\xi = f \left(\theta, \frac{F_2}{F_1}, M_1 \right), \quad (7.58)$$

а в случае несжимаемой жидкости ($\rho = \text{const}$)

$$\xi = f \left(\theta, \frac{F_2}{F_1} \right). \quad (7.59)$$

Наиболее существенное влияние на ξ оказывают угол раствора θ и число M_1 на входе. На рис. 148 приведены соответствующие зависимости $\xi = f(M_1, \theta)$, построенные по опытным данным К. С. Сцилларда для конических диффузоров.

Уменьшить сопротивление диффузора можно несколькими способами. Простое уменьшение угла раствора приводит к возрастанию длины. При этом увеличиваются потери на трение, а конструкция становится громоздкой, поэтому цель не достигается. (Наивыгоднейшим углом раскрытия считается $\theta = 7-8^\circ$; при уменьшении θ растут потери на трение, при увеличении θ растут потери на отрыв). Если же угол θ выполнить переменным по длине, спрофилировав канал на постоянный градиент давления $\frac{dp}{dx} = \text{const}$, то потери удастся снизить на

15—40%. Канал получается с криволинейными стенками с возрастающим по длине углом θ . Другим эффективным способом является отсос пограничного слоя со стенок в области возможного отрыва. Применение отсоса дает очень хорошие результаты, однако конструкция получается более сложной.

Для оценки сопротивления диффузора в газодинамических расчетах удобно пользоваться коэффициентом восстановления давления. Установим связь коэффициента восстановления дав-

ления σ с коэффициентом сопротивления ξ . Для этого воспользуемся диаграммой TS , изображенной на рис. 149. Рассматривая участок изотермы $T^* = \text{const}$ ($1^* - 2^*$), можно записать изменение энтропии в этом процессе как

$$\Delta S = R \ln \frac{p_1^*}{p_2^*} = R \ln \frac{1}{\sigma}, \quad (7.60)$$

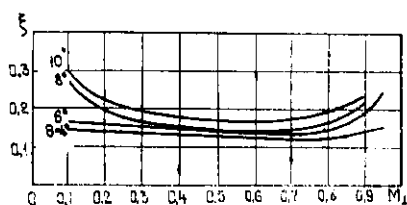


Рис. 148

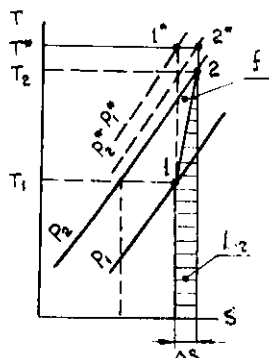


Рис. 149

так как $\sigma = \frac{p_2^*}{p_1^*}$. С другой стороны, ΔS является основанием прямоугольника, площадь которого равна $L_r + f$, т. е.

$$\Delta S = \frac{L_r + f}{T_*} \quad (7.61)$$

Приравнявая уравнения (7.60) и (7.61), найдем

$$\ln \frac{1}{\sigma} = \frac{L_r + f}{RT^*},$$

откуда

$$\sigma = e^{-\frac{L_f + f}{RT^*}} \quad (7.62)$$

Формула (7.62) является точной, но она неудобна для расчетов. Более удобна приближенная формула, которая получается из формулы (7.62) следующим путем. Разложим правую часть формулы (7.62) в ряд

$$z = 1 - \frac{L_r + f}{RT^*} + \frac{1}{2!} \left(\frac{L_r + f}{RT^*} \right)^2 - \frac{1}{3!} \left(\frac{L_r + f}{RT^*} \right)^3 + \dots$$

Отбросим все члены разложения выше первой степени и одновременно отбросим величину $\dot{f}$. (Ошибки, возникающие при

отбрасывании членов разложения и при отбрасывании величины f , частично компенсируют друг друга.) Тогда

$$\sigma = 1 - \frac{L_r}{RT^*}.$$

Подставив сюда значение L_r по формуле (7.52), учитывая при этом, что

$$\frac{w_1^2}{2RT^*} = \frac{k}{k+1} \frac{w_1^2}{a_{kp}^2} = \frac{k}{k+1} \lambda_1^2,$$

получим

$$\sigma = 1 - \frac{k}{k+1} \xi \lambda_1^2. \quad (7.63)$$

Эта формула дает достаточно точные результаты при дозвуковых скоростях.

Нужно заметить, что коэффициент восстановления давления одного и того же диффузора сильно меняется по режимам, тогда как коэффициент сопротивления слабо зависит от числа M . Поэтому в расчетах для данного диффузора правильнее принимать $\xi = \text{const}$, а не $\sigma = \text{const}$.

Что касается сверхзвуковых диффузоров, то особенности их работы составляют специальный вопрос и здесь не рассматриваются.

§ 5. ТЕЧЕНИЕ ГАЗА В РЕШЕТКАХ ТУРБОМАШИН

Системы лопаток, установленных в направляющих аппаратах, сопловых аппаратах, рабочих колесах компрессоров, насосов или турбин объединены общим названием — *гидродинамические решетки*.

Гидродинамическая решетка составлена из одинаковых по форме и размерам лопаток, установленных на цилиндрической, конической или плоской поверхности на одинаковом расстоянии друг от друга и под одинаковыми углами к линии фронта. Линия фронта — это линия, проходящая через носики всех лопаток.

В осевых турбинах и компрессорах лопатки располагаются на цилиндрической или конической поверхности вращения и образуют так называемую *кольцевую решетку* (рис. 150). В радиальных турбомашинах — центробежных компрессорах и насосах, центростремительных турбинах — лопатки укреплены на диске. Образующими поверхностями, относительно которых координируется установка лопаток, являются условные цилин-

дрические поверхности на входе и выходе, concentричные оси машины. Составленная таким образом решетка называется *круговой* (рис. 151). Если лопатки установлены между двумя

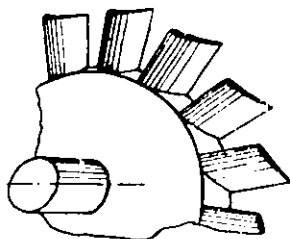


Рис. 150

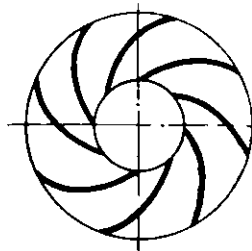


Рис. 151

плоскостями (рис. 152), то они образуют *прямолинейную* решетку. Прямолинейные решетки применяются для проведения экспериментальных исследований. Они продуваются на специальных газодинамических стендах. Полученные результаты переносятся на кольцевые решетки с некоторыми поправками.

Теоретический расчет течения жидкости в решетках делается в предположении плоского потока. Это вполне допустимо, так как в кольцевых, например, решетках (см. рис. 150) изменение скоростей происходит, в основном, вдоль оси машины и по окружности колеса; в радиальном же направлении скорости

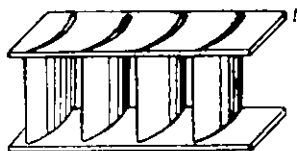


Рис. 152

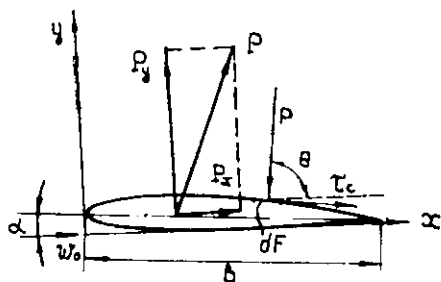


Рис. 153

незначительны. В качестве расчетной схемы принимается *плоская решетка*. Она получается так: кольцевую решетку условно рассекают цилиндрической поверхностью, concentричной оси машины, и разворачивают эту поверхность на плоскость. Следы, которые получаются от пересечения поверхности лопатками, образуют плоскую решетку

В поперечном сечении лопатки имеют профиль крыла или изогнутой пластины. Последний применяется главным обра-

зом в центробежных машинах. Расчет обтекания лопатки имеет очень много общего с расчетом крыла самолета, поэтому следует познакомиться с основными величинами и зависимостями, применяемыми в теории крыла.

При обтекании крыла потоком жидкости или газа, на него действует полная гидродинамическая сила P (рис. 153). Если систему координат выбрать так, чтобы скорость набегающего потока w_0 была направлена вдоль оси x , то проекции силы P на оси y и x дадут соответственно подъемную силу P_y и силу лобового сопротивления P_x . Последняя включает в себя все виды сопротивлений, которыми обладает крыло. Эти силы можно определить следующим путем.

Взяв размах крыла (размер по оси z) равным единице, запишем усилие, действующее на площадку dF в проекциях на оси x и y

$$dp_x = -p \cos \theta dF + \tau_c \sin \theta dF = -p \cos \theta dF \left(1 - \frac{\tau_c}{p} \operatorname{tg} \theta \right),$$

$$dp_y = -p \sin \theta dF - \tau_c \sin \theta dF = -p \sin \theta dF \left(1 + \frac{\tau_c}{p} \operatorname{tg} \theta \right).$$

Сила, действующая на всю поверхность крыла единичного размаха, определится интегрированием предыдущих выражений по замкнутому контуру профиля. При этом, из величины абсолютного давления можно исключить давление в окружающей среде (на бесконечности) p_0 , оставив только избыточное $\Delta p = p - p_0$, так как суммарное усилие от постоянного давления p_0 на замкнутую поверхность крыла равно нулю:

$$\int p_0 \cos \theta dF = 0, \quad \int p_0 \sin \theta dF = 0.$$

Тогда, представив избыточное давление Δp с помощью коэффициента давления

$$\Delta p = \bar{p} \cdot \frac{\rho w_0^2}{2},$$

получим для P_x

$$\begin{aligned} P_x &= - \int p \cos \theta \left(1 - \frac{\tau_c}{p} \operatorname{tg} \theta \right) dF = - \frac{\rho w_0^2}{2} \int \bar{p} \cos \theta \left(1 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\tau_c}{\bar{p} \frac{\rho w_0^2}{2}} \operatorname{tg} \theta \right) dF = \int \bar{p} \cos \theta \left(1 - \frac{\tau_c}{\bar{p} \frac{\rho w_0^2}{2}} \operatorname{tg} \theta \right) \cdot \frac{dF}{S} \cdot S \frac{\rho w_0^2}{2} = \\ &= C_x S \frac{\rho w_0^2}{2}, \end{aligned}$$

и окончательно формулы подъемной силы и лобового сопротивления принимают вид:

$$P_x = C_x S \frac{\rho \omega_0^2}{2}, \quad (7.64)$$

$$P_y = C_y S \cdot \frac{\rho \omega_0^2}{2}, \quad (7.65)$$

где

$$C_x = - \int \bar{p} \cos \theta \left(1 - \frac{\tau_c}{\rho \omega_0^2} \frac{1}{p} \operatorname{tg} \theta \right) \frac{dF}{S}, \quad (7.66)$$

$$C_y = - \int \bar{p} \sin \theta \left(1 + \frac{\tau_c}{\rho \omega_0^2} \frac{1}{p} \operatorname{tg} \theta \right) \frac{dF}{S}, \quad (7.67)$$

а S — площадь крыла в плане (для крыла единичного размаха $S = b \cdot 1$).

Величины C_x и C_y называются коэффициентами лобового сопротивления и подъемной силы. Для идеальной несжимаемой жидкости $\tau_c = 0$, коэффициенты давления $\bar{p}$ в сходственных точках геометрически подобных профилей, установленных под одинаковыми углами атаки α к набегающему потоку, а также углы θ и отношения $\frac{dx}{S}$ имеют одни и те же значения. Поэтому

$C_y = \int \bar{p} \sin \theta \cdot \frac{dF}{S}$ зависит только от формы профиля и угла атаки. Для идеальной сжимаемой жидкости коэффициент давления зависит еще от числа M набегающего потока. Для вязкой жидкости на C_y оказывает влияние также

$$\frac{\tau_c}{\rho \omega_0^2} = \frac{\nu \frac{\partial \omega}{\partial n}}{\frac{\rho \omega_0^2}{2}} \sim \frac{\nu}{\omega_0 b} = \frac{1}{Re}.$$

Следовательно, в общем случае C_y и C_x являются функциями формы профиля, угла атаки, чисел M и Re .

Лобовое сопротивление крыла складывается из профильного сопротивления P_{xp} , индуктивного сопротивления P_{xl} и волнового сопротивления $P_{xв}$:

$$P_x = P_{xp} + P_{xl} + P_{xв}$$

или

$$C_x = C_{xp} + C_{xl} + C_{xв}. \quad (7.68)$$

В свою очередь, профильное сопротивление состоит из сопротивления трения и сопротивления давления

$$C_{xp} = C_f + C_{x \text{ давл.}} \quad (7.69)$$

На малых углах атаки, когда отрыв потока почти незаметен, сопротивление давления крыла составляет всего лишь 10—12% от общего, т. е. преобладающим является трение.

Индуктивное сопротивление присуще только крылу конечного размаха и вызвано влиянием его концов на картину течения.

Циркуляция скорости вокруг крыла, существующая вдоль всего размаха, не может исчезнуть на концах, поэтому с концов сбегает вихревые шнуры, простирающиеся назад на очень большое расстояние (рис. 154). Они индуцируют за крылом

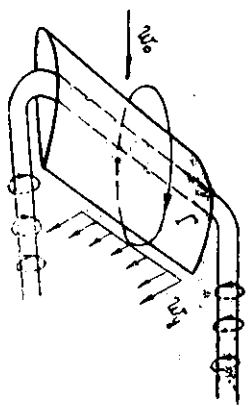


Рис. 154

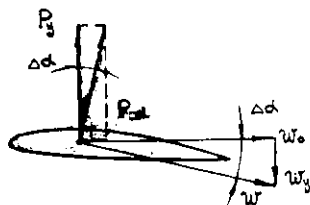


Рис. 155

вертикальные скорости w_y , направленные вниз, благодаря чему весь обтекающий крыло поток получает скос на угол $\Delta\alpha$ (рис. 155). На этот же угол поворачивается и вектор подъемной силы. Его проекция на ось x дает силу индуктивного сопротивления. Последняя существует только тогда, когда $\Gamma \neq 0$, т. е. когда есть подъемная сила. Таким образом, коэффициент индуктивного сопротивления C_{xi} связан с коэффициентом подъемной силы. Опуская вывод, приведем эту зависимость в окончательном виде

$$C_{xi} = \frac{C_y^2}{\frac{\pi l^2}{S}}, \quad (7.70)$$

где l — размах крыла. (При $l \rightarrow \infty$ $C_{xi} \rightarrow 0$.) Величина $\frac{l^2}{S}$ называется относительным удлинением.

Волновое сопротивление появляется при обтекании крыла сжимаемой жидкостью на больших дозвуковых скоростях. Когда число M набегающего потока достигает критического значения $M_0 = M_{кр}$, то на поверхности профиля возникают

местные сверхзвуковые зоны, завершающиеся скачками уплотнения (см. гл. VII, § 8). В результате перераспределения давлений появляется дополнительная составляющая силы вдоль оси x , называемая *волновым сопротивлением*.

Коэффициенты C_y и C_x определяются экспериментальным путем — продувкой модели крыла в аэродинамической трубе. Результаты таких продувок представляют двумя способами: в виде характеристик крыла — зависимостей C_y , C_x и аэродинамического качества $K = \frac{C_y}{C_x}$ от угла атаки α (рис. 156) или

в виде поляры крыла (рис. 157). На поляре крыла — кривой, изображающей зависимость C_y от C_x , наносится разметка углов атаки. Кроме того, в этих же координатах строится парабола индуктивного сопротивления (см. рис. 157), рассчитанная по формуле (7.70) для того относительного удлинения $\frac{l^2}{S}$, которое имела модель. Эта парабола позволяет выделить

в чистом виде коэффициент профильного сопротивления C_{xp} и использовать его для расчета крыла с другим удлинением.

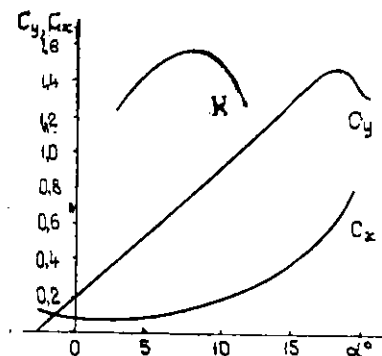


Рис. 156

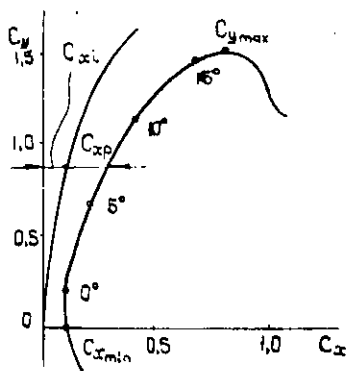


Рис. 157

Характеристики крыла применяются при расчете лопаточных венцов турбомашин по теории подъемных сил. Метод подъемных сил применим для «редких» решеток, в которых лопатки отстоят друг от друга на значительных расстояниях. Такие решетки встречаются, главным образом, в осевых вентиляторах и осевых гидронасосах. Осевые компрессоры и турбины имеют «густые» решетки, в которых соседние лопатки расположены близко друг от друга, а профиль сильно изогнут. В этом случае существенно сказывается взаимное влияние соседних профилей. Лопатку уже нельзя рассматривать как

одиноким изолированным профилем, потому что она находится в поле скоростей, возмущенном соседними лопатками. Расчет «густых» решеток представляет самостоятельную гидродинамическую задачу.

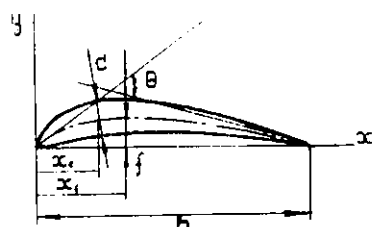
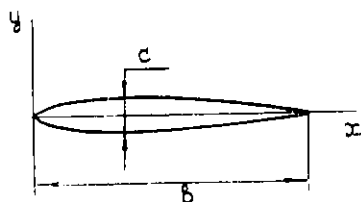


Рис. 158

Рассмотрим основные геометрические параметры решетки.

Для построения решеток осевых турбомашин используют симметричный аэродинамический профиль (рис. 158 сверху). Его среднюю линию изгибают под углом θ (рис. 158 внизу) по дуге окружности, по двум дугам окружности или по параболе. Это делается с той целью, чтобы обеспечить нужные входные φ_1 и выходные φ_2 углы при установке профиля в решетке (рис. 159).

Плоская решетка строится в прямоугольной системе координат u — a . Направление u называется *фронтом решетки*,

направление a — *осью решетки* *). Изогнутый аэродинамический профиль ориентируется относительно фронта под установочным углом $\beta_{уст}$. Этот угол отсчитывается между хордой и направлением фронта. Расстояние между соседними лопатками, измеренное по фронту, называется *шагом решетки* t . В плоских решетках шаг на входе и на выходе одинаков, в круговых — различен. Расстояние между носиками соседних лопаток, измеренное вдоль хорды b , называется *выносом решетки* a . Угол атаки в решетке определяется как угол между вектором скорости набегающего потока и касательной к средней линии профиля на входе. Он равен

$$\alpha = \varphi_1 - \beta_1, \quad (7.71)$$

где β_1 — входной угол потока. При выходе из решетки направление потока не совпадает с направлением средней линии лопатки. Разность

$$\theta = \varphi_2 - \beta_2 \quad (7.72)$$

называется *углом отставания потока*. Безразмерное расстояние между соседними лопатками характеризуется относительно-

*) Иногда осью решетки называют направление u . Здесь же принята такая терминология, в которой считается, что ось решетки и ось машины совпадают по направлению.

ным шагом $\bar{t} = \frac{t}{s}$ или обратной величиной $\frac{s}{t}$, называемой густотой решетки.

По характеру воздействия на поток, решетки делятся на диффузорные, активные и конфузорные.

В *диффузорных решетках* поток поворачивается таким образом, что его направление приближается к осевому $\beta_2 > \beta_1$ (рис. 159). Скорость газа при этом падает, а давление возрастает, так как площадь проходного сечения, нормальная к средней линии межлопаточного канала, увеличивается от входа к выходу. Диффузорные решетки применяются в осевых компрессорах.

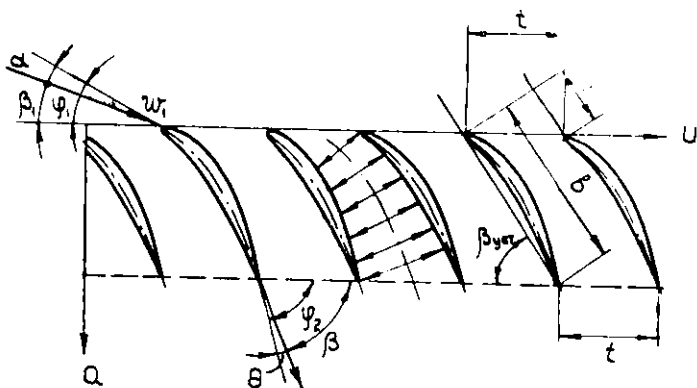


Рис. 159

В *активных решетках* $\beta_2 = \pi - \beta_1$, т. е. составляющие скорости вдоль фронта w_u и вдоль оси w_a на входе и выходе получаются соответственно равными по величине. Таким образом, активная решетка только разворачивает поток, не изменяя его скорости и давления.

В *конфузорных решетках* (рис. 163) фронтальная составляющая скорости w_u от входа к выходу возрастает, в связи с чем уменьшается давление. Площадь проходного сечения межлопаточного канала уменьшается по его длине.

Активные решетки применяются в турбинах, а конфузорные — в турбинах и в компрессорах (в последних — в качестве входных направляющих аппаратов).

Рассмотрим теорему Н. Е. Жуковского применительно к решетке, обтекаемой вязким сжимаемым газом. Она определяет равнодействующую всех сил, приложенных к лопатке единичной длины, помещенной в решетку. Поскольку эта задача относится к случаю плоского течения, то она сводится к

расчету обтекания плоской решетки, схема которой изображена на рис. 160, а совмещенные треугольники скоростей на входе и на выходе — на рис. 161.

Вывод формулы Н. Е. Жуковского можно сделать с помощью первой теоремы Эйлера о количестве движения. Контрольную поверхность надо провести таким образом, чтобы внутри нее оказалась одна из лопаток решетки. При этом, два участка контрольной поверхности ab и $вг$ располагаются на таких

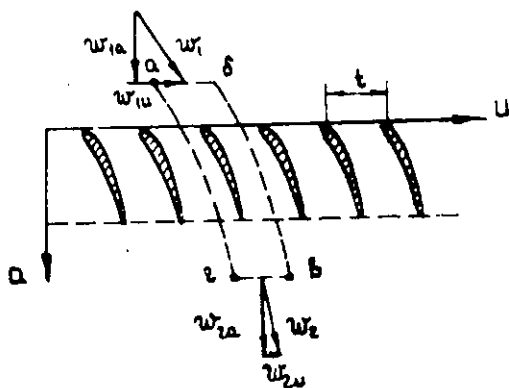


Рис. 160

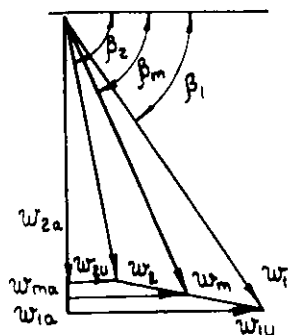


Рис. 161

расстояниях от входного и выходного сечений решетки, где распределение параметров потока (скоростей, давлений, плотностей) по сечению можно считать равномерным. Два другие участка — ag и $бв$ — проводятся по конгруэнтным линиям тока в двух соседних каналах.

Найдем сначала циркуляцию скорости вокруг лопатки. Принимая во внимание, что круговой интеграл по замкнутому контуру равен сумме криволинейных интегралов, взятых по участкам, из которых состоит этот контур, можно записать

$$\Gamma = \Gamma_{abвгa} = \Gamma_{ab} + \Gamma_{бв} + \Gamma_{вг} + \Gamma_{га}.$$

Здесь $\Gamma_{бв} = -\Gamma_{га}$, так как в сходственных точках линий $га$ и $бв$ скорости и элементарные длины пути соответственно одинаковы, но направление обхода на участке $бв$ совпадает с направлением скорости, а на участке $га$ — противоположно ему;

$$\Gamma_{ab} = w_{1a} \cdot t,$$

$$\Gamma_{вг} = -w_{2a} \cdot t,$$

так как расстояния между конгруэнтными линиями тока, измеренные вдоль фронта, равны шагу решетки. Тогда

$$\Gamma = t(w_{1a} - w_{2a}). \quad (7.73)$$

Проекции равнодействующей всех сил, приложенных к лопатке, на координатные оси u и a можно определить с помощью формул (3.22), которые применительно к данному случаю запишутся так:

$$R_u = \left(\int_{F_{\text{нар}}} p d\vec{F} \right)_u - \int_{F_{\text{нар}}} \rho \omega_n \cdot \omega_u dF, \quad (7.74)$$

$$R_a = \left(\int_{F_{\text{нар}}} p d\vec{F} \right)_a - \int_{F_{\text{нар}}} \rho \omega_n \omega_a dF. \quad (7.75)$$

Подсчитаем их правые части, принимая во внимание, что

$$F_{\text{нар}} = F_{ab} + F_{ba} + F_{az} + F_{za},$$

и что $\left(\int_{ab} p d\vec{F} \right)_u = \left(\int_{az} p d\vec{F} \right)_u = 0$, так как сила проектируется на перпендикулярную ей ось, и $\left(\int_{ba} p d\vec{F} \right)_u + \left(\int_{za} p d\vec{F} \right)_u = 0$, так как в сходственных точках конгруэнтных линий тока давления одинаковы, следовательно, силы давлений, действующие снаружи на сходственные элементы участков контрольной поверхности ab и ba , будут попарно равны и противоположно направлены, поэтому при суммировании взаимно уничтожатся. Тогда

$$\left(\int_{F_{\text{нар}}} p d\vec{F} \right)_u = 0.$$

Учитывая также, что по причинам, изложенным выше,

$$\left(\int_{ba} p d\vec{F} \right)_a + \left(\int_{za} p d\vec{F} \right)_a = 0,$$

получим

$$\left(\int_{F_{\text{нар}}} p d\vec{F} \right)_a = \left(\int_{ab} p d\vec{F} \right)_a + \left(\int_{az} p d\vec{F} \right)_a = 0.$$

Подсчитаем интегралы количества движения, имея в виду, что скорости направлены по касательным к линиям тока, следовательно, на участках ba и za $\omega_n = 0$.

$$\begin{aligned} \int_{F_{\text{нар}}} \rho \omega_n \omega_u dF &= \int_{ab} \rho \omega_n \omega_u dF + \int_{az} \rho \omega_n \omega_u dF = -\rho_1 \omega_{1a} \omega_{1u} t + \\ &\quad + \rho_2 \omega_{2a} \omega_{2u} t, \\ \int_{F_{\text{нар}}} \rho \omega_n \omega_a dF &= \int_{ab} \rho \omega_n \omega_a dF + \int_{az} \rho \omega_n \omega_a dF = -\rho_1 \omega_{1a} \omega_{1a} t + \\ &\quad + \rho_2 \omega_{2a} \omega_{2a} t, \end{aligned}$$

так как в сечениях ab и az параметры потока распределены равномерно, а в соответствии с правилом знаков $\omega_{1n} = -\omega_{1a}$,

$\omega_{2a} = \omega_{2a}$. Подставляя полученные значения интегралов в формулы (7.74) и (7.75) и учитывая при этом формулу (7.73), можем записать

$$R_u = \rho_1 \omega_{1a} \Gamma, \quad (7.76)$$

$$R_a = t(\rho_1 - \rho_2) + \rho_1 \omega_{1a} t (\omega_{1a} - \omega_{2a}). \quad (7.77)$$

В теории решеток вводится понятие средней эквивалентной скорости обтекания, которая играет такую же роль, как скорость набегающего потока (на бесконечности) при изучении обтекания изолированного профиля. Она определяется как геометрическая полусумма векторов скорости $\vec{\omega}_1$ (перед решеткой) и $\vec{\omega}_2$ (за решеткой)

$$\vec{\omega}_m = \frac{\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2}{2} \quad (7.78)$$

(см. рис. 161). Из уравнения неразрывности

$$\rho_1 \omega_{1a} = \rho_m \omega_{ma} = \rho_2 \omega_{2a}$$

легко определяется средняя плотность газа в решетке

$$\rho_m = \frac{\rho_1 \omega_{1a}}{\omega_{ma}} = \frac{\rho_1 \omega_{1a}}{\frac{\omega_{1a} + \omega_{2a}}{2}} = \frac{2 \rho_1 \omega_{1a}}{\omega_{1a} \left(1 + \frac{\omega_{2a}}{\omega_{1a}}\right)}$$

или

$$\rho_m = 2 \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}. \quad (7.79)$$

Пользуясь величинами ρ_m и ω_m , нетрудно получить соотношения (7.76) и (7.77) в следующем виде:

$$R_u = \rho_m \omega_{ma} \Gamma, \quad (7.80)$$

$$R_a = t(\rho_1 - \rho_2) + \rho_m \omega_{ma} t (\omega_{1a} - \omega_{2a}). \quad (7.81)$$

Чтобы привести второе слагаемое правой части (7.81) к виду, подобному правой части (7.80), используем уравнение Бернулли, которое для неподвижной решетки ($L=0$) запишется так:

$$\frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2} = \int_1^2 \frac{dp}{\rho} + L_r.$$

Заменим

$$\frac{w_1^2 - w_2^2}{2} = \frac{w_{1a}^2 + w_{1u}^2 - w_{2a}^2 - w_{2u}^2}{2} = \frac{w_{1a} + w_{2a}}{2} (w_{1a} - w_{2a}) + \\ + \frac{w_{1u} + w_{2u}}{2} (w_{1u} - w_{2u}) = w_{ma} (w_{1a} - w_{2a}) + w_{mu} \frac{\Gamma}{t}.$$

Тогда

$$w_{ma} (w_{1a} - w_{2a}) = \int_1^2 \frac{dp}{\rho} + L_r - w_{mu} \frac{\Gamma}{t}.$$

После подстановки этого выражения в формулу (7.81), последняя приобретает вид:

$$R_a = \Delta P_a - \rho_m w_{mu} \Gamma, \quad (7.82)$$

где

$$\Delta P_a = t \left[p_1 - p_2 + \rho_m \left(\int_1^2 \frac{dp}{\rho} + L_r \right) \right] \quad (7.83)$$

называется *добавочной осевой силой*. Чтобы выяснить ее происхождение, рассмотрим сначала случай несжимаемой жидкости. Здесь

$$\int_1^2 \frac{dp}{\rho} = \frac{p_2 - p_1}{\rho}$$

и

$$\Delta P_a = t \left[p_1 - p_2 + \rho \left(\frac{p_2 - p_1}{\rho} + L_r \right) \right] = t \cdot \rho \cdot L_r,$$

откуда следует, что причиной появления добавочной осевой силы ΔP_a является работа трения L_r . В случае сжимаемого газа ΔP_a зависит не только от сил трения, но и от того, что распределение давлений по периметру профиля становится иным.

Геометрическая сумма

$$G = \sqrt{(\rho_m w_{ma} \Gamma)^2 + (-\rho_m w_{mu} \Gamma)^2} = \rho_m w_m \Gamma \quad (7.84)$$

называется *силой Жуковского*, а

$$R = \sqrt{\bar{R}_u^2 + R_a^2} \quad (7.85)$$

представляет собой *полную гидродинамическую силу*, действующую на профиль в решетке. Рассматривая треугольники

сил на рис. 162 для диффузорной решетки и на рис. 163 для конфузорной, нетрудно установить, что полная гидродинамическая сила связана с силой Жуковского следующим соотношением:

$$\vec{R} = \vec{G} + \Delta \vec{P}_a. \quad (7.86)$$

Для диффузорной решетки $R > G$, для конфузорной $R < G$.

Подъемная сила P_y (рис. 162 и 163) и сила лобового сопротивления решетки P_x отличаются от аналогичных величин

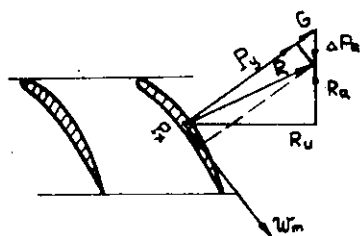


Рис. 162

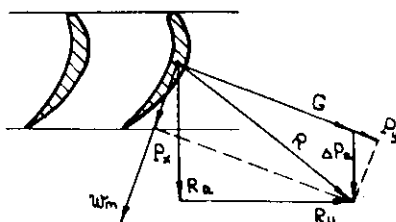


Рис. 163

в случае обтекания изолированного профиля. Так, например, если для изолированного профиля

$$P_{yи} = G_{и} = \rho w_m \Gamma,$$

то для диффузорной решетки $P_y < G$, а для конфузорной $P_y > G$. В связи с этим получаются иными и коэффициенты подъемной силы и лобового сопротивления профиля в решетке по сравнению с изолированным.

Формулировка теоремы Н. Е. Жуковского для плоской гидродинамической решетки состоит в следующем: *при плоскопараллельном обтекании решетки профилей потоком газа равнодействующая всех сил, приложенных к единице длины лопатки, равна геометрической сумме силы Жуковского*

$$G = \rho_m w_m \Gamma,$$

направленной по нормали к средней эквивалентной скорости обтекания w_m , и добавочной осевой силы ΔP_a .

При расчетах и исследованиях гидродинамических решеток, обтекаемых газом с большой скоростью, необходимо учитывать волновой кризис и явление запирания каналов. Наступление волнового кризиса, так же как и на изолированном профиле, определяется критическим числом M . При $M_0 = M_{кр}$ на спинке лопатки появляются местные сверхзвуковые зоны и скачки уплотнения, но ни те, ни другие не перекрывают меж-

лопаточных каналов полностью. Сопротивление решетки возрастает, но она еще допускает увеличение расхода. При большем числе M , равном $M_{\max}$, решетка запирается: скорость течения в горле каждого межлопаточного канала достигает критической, и дальнейшее увеличение расхода становится невозможным. Величина $M_{\max}$ меньше единицы и переменна по режимам. Это зависит от отношения площадей поперечного сечения потока перед входом в решетку F_0 и площади горла.

При $\frac{F_0}{F_r} > 1$ входной участок межлопаточного канала имеет конфузурную форму (рис. 164), следовательно, скорость в нем увеличивается и $M_r > M_0$. Когда $M_r = 1$, то $M_0 = M_{\max}$. Чем меньше $\frac{F_0}{F_r}$, тем выше $M_{\max}$. При $\frac{F_0}{F_r} = 1$ $M_{\max} = 1$.

Теоретический расчет плоских решеток ведется в несколько этапов. Вначале рассчитывается потенциальное обтекание идеальной несжимаемой жидкостью, затем вводятся поправки на сжимаемость, далее рассчитывается пограничный слой, корректируется течение в ядре, отыскивается распределение давлений по профилю и вычисляются силы, действующие на лопатку, и их коэффициенты.

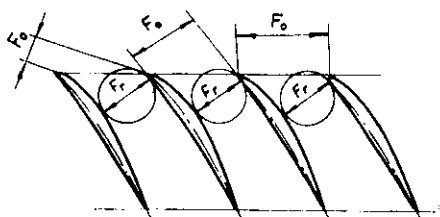


Рис. 164

Расчет потенциального обтекания решетки делается методом конформного отображения. Этот метод весьма громоздок и трудоемок. Иногда применяют более быстрый способ — метод электрогидродинамической аналогии ЭГДА. Здесь используется формальная аналогия между уравнениями гидродинамики идеальной несжимаемой жидкости и уравнениями электрического поля. Экспериментально исследуется электрическое поле на электропроводящей бумаге. Наложённые на нее проводники, подводящие ток, а также контуры вырезанных отверстий имитируют граничные условия гидродинамического течения. По полученным линиям равных электрических потенциалов отыскиваются линии равного потенциала скорости и линии тока.

Теоретический расчет решеток подробно рассматривается в специальной литературе по газодинамике и теории турбомашин *).

*) См., напр.: М. Е. Дейч, Г. С. Самойлович. Основы аэродинамики осевых турбомашин. М., Машиз, 1959.

Экспериментальные исследования решеток на газодинамических стендах сводятся к их продувке с целью получения характеристик. Определение усилий, действующих на лопатку, производится по измеренному распределению давлений по периметру профиля, либо непосредственным измерением с помощью динамометров. Кроме того, тщательно измеряются параметры потока на входе и на выходе из решетки, по которым определяются потери.

Экспериментальные исследования сложны и дороги, но они дают наиболее надежные сведения, необходимые конструктору.

§ 6. ТЕЧЕНИЕ ГАЗА С ПОДВОДОМ И ОТВОДОМ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ. ПАРАМЕТРЫ ПОТОКА В ОТНОСИТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ

Подвод и отвод механической энергии оказывает воздействие на газовый поток. Это легко установить с помощью уравнения обращения воздействий (7.6), которое для случая только одного механического воздействия имеет вид:

$$\frac{dw}{w} (M^2 - 1) = - \frac{1}{\alpha^2} dL. \quad (7.87)$$

Из этого уравнения следует, что в дозвуковом потоке ($M < 1$) внешняя механическая работа, отданная газом ($dL > 0$), вызывает рост скорости ($dw > 0$), а подведенная к газу ($dL < 0$) — падение скорости ($dw < 0$). В сверхзвуковом потоке — наоборот: при $dL > 0$ скорость уменьшается ($dw < 0$), а при $dL < 0$ — растет ($dw > 0$).

В теории одномерных потоков *) рассматривается так называемое «механическое сопло», состоящее из последовательно расположенных турбины ($dL > 0$) и компрессора ($dL < 0$), между которыми находится критическое сечение ($M = 1$). Теоретически такая система способна преобразовать дозвуковой поток в сверхзвуковой, но практического значения она не имеет, ввиду трудности сохранения бескачкового течения в сверхзвуковом компрессоре и сложности всего устройства. Тем не менее, общие выводы, вытекающие из уравнения (7.87), полезны при анализе условий перехода через скорость звука в межлопаточных каналах сверхзвуковых рабочих колес турбомашин.

Если сравнить механическое воздействие с тепловым, рассматривая формулу (7.6) и уравнение энергии (2.6), то мож-

*) См., напр.: Л. А. Вулис. Термодинамика газовых потоков, Энергоиздат, 1950.

но обратить внимание на то, что в эти уравнения величины dL и dQ_e входят в различных сочетаниях (с разными коэффициентами и с разными знаками), поэтому их влияние на различные параметры потока не может быть одинаковым. Действительно, анализ показывает, что при подводе механической работы ($dL < 0$) в дозвуковой области ($M < 1$) параметры ρ , T , ρ , ρ^* , T^* , ρ^* — возрастают, а скорость уменьшается, тогда как при подводе тепла ($dQ_e > 0$) T^* — также возрастает, T — имеет максимум при $M = \sqrt{\frac{1}{k}}$ но, ρ , ρ , ρ^* , ρ^* — уменьшаются, а скорость возрастает.

Передача механической энергии в газовый поток извне или отвод ее наружу связан с воздействием поля массовых сил на частицы движущейся жидкости. Этим полем может быть либо внешнее поле немеханического происхождения (например, электрическое или электромагнитное), либо поле инерционных сил, возникающее в сложном движении. Первый случай относится к движению заряженных частиц жидкости и составляет предмет изучения специальной отрасли гидродинамики — магнитной газодинамики *). Второй случай связан с движением обычной жидкости или газа в рабочих колесах турбомашин.

Расчет газовых потоков в каналах рабочих колес часто приходится вести в относительном движении. Подвод и отвод механической работы оказывает влияние на параметры относительного движения. Рассмотрим, в чем заключается это влияние.

Газ, движущийся в межлопаточном канале рабочего колеса, участвует в сложном движении. Он движется относительно лопаток со скоростью $\vec{w}$ и перемещается вместе с каналами колеса с переносной скоростью $\vec{u}$. Следуя терминологии, принятой в теории турбомашин, будем обозначать абсолютную скорость через $\vec{c}$, относительную — через $\vec{w}$ и переносную — через $\vec{u}$. Тогда

$$\vec{c} = \vec{w} + \vec{u}. \quad (7.88)$$

На рис. 165 треугольник скоростей $\vec{c}$, $\vec{w}$ и $\vec{u}$ изображен в абсолютной системе координат, неподвижно зафиксированной относительно корпуса машины. В ней оси r , u , a направлены соответственно по радиусу, по окружности колеса и по оси машины. Применяя к этому треугольнику теорему косинусов, можно записать

$$w^2 = c^2 + u^2 - 2cu \cos \alpha,$$

*) В магнитной газодинамике работа сил электростатического или электромагнитного поля не называется работой внешней механической и учитывается специальными членами, входящими в уравнения.

откуда

$$c^2 = \omega^2 - u^2 + 2c_u u. \quad (7.89)$$

так как $c \cdot \cos \alpha = c_u$.

Уравнение энергии в абсолютном движении запишем в форме (2.4), переименовав обозначение скорости с ω на c , а именно

$$c_p (T_1 - T_2) + \frac{c_1^2 - c_2^2}{2} + Q_e - L = 0. \quad (7.90)$$

Входящая в него внешняя механическая работа L может быть найдена следующим образом. По второй теореме Эйлера о моменте количества движения (3.45) момент внешних сил, действующих на струю, равен

$$M = M_{\text{сек}} (r_2 c_{2u} - r_1 c_{1u}).$$

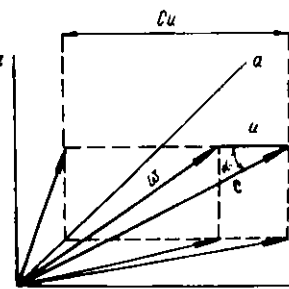


Рис. 165

Представив работу L , совершенную единицей массы газа, как мощность, приходящуюся на единицу массового расхода, нетрудно получить *)

$$L = - \frac{M \cdot \omega}{M_{\text{сек}}} = - \omega (r_2 c_{2u} - r_1 c_{1u}).$$

Так как $\omega r = u$, то

$$L = c_{1u} u_1 - c_{2u} u_2. \quad (7.91)$$

После подстановки значений абсолютной скорости c , найденных из зависимости (7.89), и работы L , найденной из формулы (7.91), в уравнение энергии (7.90), последнее приобретает вид:

$$c_p (T_1 - T_2) + \frac{\omega_1^2 - u_1^2}{2} - \frac{\omega_2^2 - u_2^2}{2} + Q_e = 0. \quad (7.92)$$

В дифференциальной форме это будет

$$c_p \cdot dT + d\left(\frac{\omega^2}{2}\right) - d\left(\frac{u^2}{2}\right) - dQ_e = 0. \quad (7.93)$$

Аналогичным путем можно получить и уравнение Бернулли. Оно имеет вид:

$$\frac{dp}{\rho} + d\left(\frac{\omega^2}{2}\right) - d\left(\frac{u^2}{2}\right) + dL_r = 0. \quad (7.94)$$

*) Знак минус появился в связи с тем, что, вычисляя работу, совершенную газом, надо брать момент, с которым струя действует на лопатки, тогда как уравнение (3.45) определяет момент, с которым лопатки действуют на струю.

Расчет лопаточных решеток или межлопаточных каналов вращающихся рабочих колес удобно производить в относительном движении, так как появляется возможность использовать богатые материалы по исследованию неподвижных решеток и каналов. Но при этом возникает вопрос, насколько правомерен переход из неподвижной системы координат во вращающуюся, т. е. переход от абсолютного движения к относительному. Ответ на этот вопрос вытекает из формул (7.93) и (7.94).

Если, например, в осевой турбомашине течение происходит по цилиндрическим поверхностям, т. е. радиус линии тока на входе и выходе одинаков, то $u = \text{const}$, $du = 0$, следовательно, формулы (7.93) и (7.94) принимают такой же вид, как обычное уравнение энергии и уравнение Бернулли для абсолютного движения. Тогда все расчеты можно вести по обычным формулам, заменяя в них абсолютную скорость c на относительную w . Если же радиус линии тока на входе и выходе неодинаков, т. е. $u \neq \text{const}$, то в уравнениях необходимо учитывать изменение величины $\frac{u^2}{2}$. При $Q_e = 0$ и $u = \text{const}$ уравнения энергии (7.92) и (7.93) приобретают вид, соответствующий энергоизолированному потоку, следовательно, относительное движение является энергоизолированным, несмотря на то, что абсолютное происходит с подводом или отводом механической работы. Если ввести понятие температуры торможения в относительном движении*)

$$\tilde{T}^* = T + \frac{w^2}{2c_p} = T + \frac{w^2}{2 \frac{k}{k-1} R}, \quad (7.95)$$

то, преобразовав формулу (7.92) к виду

$$c_p (T_1^* - T_2^*) - \frac{u_1^2 - u_2^2}{2} = 0,$$

нетрудно заметить, что для рассматриваемого случая ($u = \text{const}$, $Q_e = 0$) $\tilde{T}^* = \text{const}$. Это объясняется тем, что при $u = \text{const}$ на поток в межлопаточном канале не действуют никакие массовые силы, кроме сил тяжести, которыми обычно пренебрегают. Если $u \neq \text{const}$, то $\tilde{T}^*$ изменяется, т. е. в относительном движении к газу подводится или отводится механическая работа, равная $\frac{u_1^2 - u_2^2}{2}$. Это есть работа центробежных сил.

*) В теории косых скачков уплотнения применялась аналогичная величина — температура частичного торможения T^* .

Значения термодинамических параметров состояния газа p , ρ , T , а следовательно, и скорости звука $a = \sqrt{kRT}$, не зависят от того, в каком движении — абсолютном или относительном — они рассматриваются. Этим свойством можно воспользоваться при установлении зависимости между T^* и $\tilde{T}^*$. Действительно

$$T^* - \frac{c^2}{2c_p} = T = \tilde{T}^* - \frac{w^2}{2c_p},$$

откуда

$$T^* = \tilde{T}^* + \frac{c^2 - w^2}{2c_p}$$

или, с учетом выражения (7.89),

$$T^* = \tilde{T}^* + \frac{2c_u u - u^2}{2c_p}. \quad (7.96)$$

Относительная скорость w , достигшая в каком-либо сечении величины местной скорости звука, называется критической скоростью в относительном движении. Она обозначается $\tilde{a}_{кр}$. Положив в (7.95) $w = \tilde{a}_{кр}$ и $T = \tilde{T}_{кр}$, получим

$$\frac{\tilde{T}_{кр}}{\tilde{T}^*} = \frac{2}{k+1}. \quad (7.97)$$

Эта формула имеет такой же вид, как и для абсолютного движения. Заметим, что не изменяется также вид формул для критических отношений давлений и плотностей

$$\frac{\tilde{p}_{кр}}{\tilde{p}^*} = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}}, \quad (7.98)$$

$$\frac{\tilde{\rho}_{кр}}{\tilde{\rho}^*} = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{1}{k-1}}. \quad (7.99)$$

Из формулы (7.97) и формулы скорости звука $a = \sqrt{kRT}$ легко получается выражение для $\tilde{a}_{кр}$, имеющее тот же вид, что и для $a_{кр}$, а именно:

$$\tilde{a}_{кр} = \sqrt{2 \frac{k}{k+1} R \tilde{T}^*}. \quad (7.100)$$

Вполне понятно тогда, что не должен изменяться и вид формул связи критической скорости, максимальной скорости в от-

носителем движения и скорости звука. Простой проверкой нетрудно убедиться, что

$$\frac{\tilde{w}_{\max}}{\tilde{a}_{\text{кр}}} = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \quad (7.101)$$

и

$$a^2 = \frac{k+1}{2} \tilde{a}_{\text{кр}}^2 - \frac{k-1}{2} w^2. \quad (7.102)$$

В относительном движении, так же как и в абсолютном, удобно пользоваться безразмерными скоростями — числом $\tilde{M}$

$$\tilde{M} = \frac{w}{a} \quad (7.103)$$

и приведенной скоростью $\tilde{\lambda}$

$$\tilde{\lambda} = \frac{w}{\tilde{a}_{\text{кр}}}. \quad (7.104)$$

Они связаны между собой такой же зависимостью, как и в абсолютном движении (см. формулы (2.54) и (2.55)).

Параметры торможения в относительном движении $\tilde{p}^*$, $\tilde{T}^*$ и $\tilde{\rho}^*$ при помощи газодинамических функций торможения $\tilde{\pi}(\tilde{\lambda})$, $\tilde{\tau}(\tilde{\lambda})$ и $\tilde{\epsilon}(\tilde{\lambda})$ (см. формулы (2.59), (2.60) и (2.61)) связываются с термодинамическими параметрами p , T , ρ , только в качестве аргумента в газодинамических функциях нужно брать приведенную скорость в относительном движении $\tilde{\lambda}$. Это же можно сделать и при помощи формул (2.56), (2.57), (2.58), в которых число M берется в относительном движении $\tilde{M}$.

Нужно заметить, что параметры торможения в относительном движении имеют вполне определенный физический смысл. Если датчики давления торможения и температуры торможения укрепить непосредственно в межлопаточном канале вращающегося колеса, то соединенные с ними приборы покажут величины $\tilde{p}^*$ и $\tilde{T}^*$.

Формулу массового расхода

$$M_{\text{сек}} = \rho w F$$

путем преобразований, которые были сделаны в § 8 главы II, нетрудно привести к следующему виду:

$$M_{\text{сек}} = mF \frac{\tilde{p}^*}{\sqrt{\tilde{T}^*}} q(\tilde{\lambda}) \quad (7.105)$$

или

$$M_{сек} = mF \frac{p}{V \tilde{T}^*} y(\tilde{\lambda}). \quad (7.106)$$

Следовательно, и расходные функции $q(\tilde{\lambda})$ и $y(\tilde{\lambda})$ могут быть использованы в расчетах относительного движения так же, как и абсолютного.

Из всего изложенного следует, что пользуясь критической скоростью $\tilde{a}_{кр}$, приведенной скоростью $\tilde{\lambda}$, параметрами торможения $\tilde{p}^*$, $\tilde{T}^*$, $\tilde{\rho}^*$, можно рассчитывать газовый поток во вращающейся системе координат теми же методами, что и в абсолютном движении. При этом, если $Q_e = 0$ и $u = \text{const}$, то поток рассчитывается как энергоизолированный: $\tilde{T}^* = \text{const}$, $\tilde{p}^* = \text{const}$, для идеального газа или $\tilde{p}_2^* = \sigma \cdot \tilde{p}_1^*$ для течения с потерями.

Чтобы этим методом можно было пользоваться практически, надо дать еще формулы связи между параметрами абсолютного и относительного движения. Для температур торможения такая связь была установлена формулой (7.96). Для критических скоростей ее можно получить из соотношения

$$\frac{k+1}{2} a_{кр}^2 - \frac{k-1}{2} c^2 = a^2 = \frac{k+1}{2} \tilde{a}_{кр}^2 - \frac{k-1}{2} w^2,$$

откуда

$$\tilde{a}_{кр}^2 = a_{кр}^2 - \frac{k-1}{k+1} (2c_u u - u^2). \quad (7.107)$$

Введя обозначения

$$\left. \begin{aligned} \lambda_u &= \frac{c_u}{a_{кр}} \\ \tilde{\lambda}_u &= \frac{c_u}{\tilde{a}_{кр}} \\ \mu &= \frac{u}{a_{кр}} \\ \tilde{\mu} &= \frac{u}{\tilde{a}_{кр}} \end{aligned} \right\} \quad (7.108)$$

и

$$\nu = \frac{\tilde{a}_{кр}}{a_{кр}}, \quad (7.109)$$

преобразуем формулы (7.96) и (7.107) к следующему виду:

$$\frac{\tilde{T}^*}{T^*} = 1 - \frac{k-1}{k+1} (2\lambda_u \mu - \mu^2), \quad (7.110)$$

$$\frac{T^*}{\tilde{T}^*} = 1 + \frac{k-1}{k+1} (2\tilde{\lambda}_u \tilde{\mu} - \tilde{\mu}^2), \quad (7.111)$$

$$v = \frac{\tilde{a}_{кр}}{a_{кр}} = \sqrt{1 - \frac{k-1}{k+1} (2\lambda_u \mu - \mu^2)}, \quad (7.112)$$

$$\frac{1}{v} = \frac{a_{кр}}{\tilde{a}_{кр}} = \sqrt{1 + \frac{k-1}{k+1} (2\tilde{\lambda}_u \tilde{\mu} - \tilde{\mu}^2)}. \quad (7.113)$$

Поделив обе части выражения (7.89) на $a_{кр}^2$, представим его в виде

$$\frac{c^2}{a_{кр}^2} = \frac{\omega^2}{\tilde{a}_{кр}^2} \frac{\tilde{a}_{кр}^2}{a_{кр}^2} - \frac{u^2}{a_{кр}^2} + 2 \frac{c_u}{a_{кр}} \frac{u}{a_{кр}}$$

или

$$\lambda^2 = \tilde{\lambda}^2 v^2 - \mu^2 + 2\lambda_u \mu = \tilde{\lambda}^2 v^2 + \frac{k+1}{k-1} (1 - v^2),$$

откуда

$$\tilde{\lambda}^2 = \frac{k+1}{k-1} - \frac{\frac{k+1}{k-1} - \lambda^2}{v^2} \quad (7.114)$$

и

$$\lambda^2 = \frac{k+1}{k-1} (1 - v^2) + \tilde{\lambda}^2 v^2. \quad (7.115)$$

Связь между числами M и $\tilde{M}$ приведем в таком виде:

$$\frac{\tilde{M}}{M} = \frac{\frac{\omega}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{\omega}{c}. \quad (7.116)$$

Пересчет давлений и плотностей заторможенного потока из абсолютного движения в относительное и обратно удобно производить с помощью газодинамических функций, основываясь на том, что p и ρ сохраняют свои значения независимо от системы координат, а именно:

$$p^* \cdot \pi(\lambda) = p = \tilde{p}^* \cdot \pi(\tilde{\lambda}), \quad (7.117)$$

$$\rho^* \cdot \varepsilon(\lambda) = \rho = \tilde{\rho}^* \cdot \varepsilon(\tilde{\lambda}). \quad (7.118)$$

Рассмотрим связь относительной скорости w с площадью поперечного сечения потока для изоэнтропного относительного движения, когда трение и теплообмен отсутствуют.

В уравнении неразрывности $\rho w F = \text{const}$, записанном в дифференциальном виде

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dw}{w} + \frac{dF}{F} = 0.$$

представим $\frac{d\rho}{\rho}$ так:

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{d\rho}{\frac{\rho}{a^2}} = \frac{1}{a^2} \frac{d\rho}{\frac{\rho}{d\rho^2}},$$

помня, что $\frac{d\rho}{d\rho} = a^2$. Величину $\frac{d\rho}{\rho}$ найдем из уравнения Бернулли (7.94), которое для изоэнтропного течения примет вид

$$\frac{d\rho}{\rho} + d\left(\frac{w^2}{2}\right) - d\left(\frac{u^2}{2}\right) = 0.$$

Тогда

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{a^2} (udu - wdw).$$

Подставив это в уравнение неразрывности, получим

$$\frac{udu}{a^2} - \frac{wdw}{a^2} + \frac{dw}{w} + \frac{dF}{F} = 0,$$

или

$$\frac{dw}{w} (\tilde{M}^2 - 1) = \frac{dF}{F} + \frac{1}{a^2} d\left(\frac{u^2}{2}\right). \quad (7.119)$$

Из этого уравнения видно, что изменение относительной скорости в каналах рабочего колеса связано не только с формой канала, но и с его расстоянием от оси вращения. Если это расстояние постоянно, т. е. $u = \text{const}$, то уравнение (7.119) превращается в уравнение Гюгонио, следовательно, закон изменения скорости ничем не отличается от такового для неподвижных каналов. Увеличение u вдоль потока действует в ту же сторону, что и расширение канала — замедляет дозвуковой поток и разгоняет сверхзвуковой.

Если канал имеет форму сопла Лаваля, то критическое сечение может получиться в различных местах, в зависимости от закона изменения переносной скорости u . Положив в урав-

нении (7.119) $M=1$, имеем условие, определяющее местоположение критического сечения

$$\frac{dF}{F} = -\frac{1}{a^2} d\left(\frac{u^2}{2}\right).$$

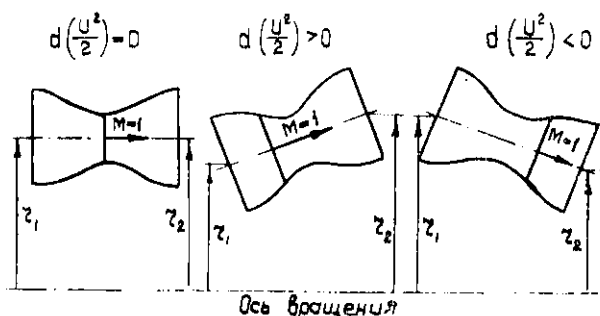


Рис. 166

При $u = \text{const}$ $dF = 0$, т. е. критическое сечение находится в горле. При $d\left(\frac{u^2}{2}\right) > 0$ $dF < 0$, следовательно, оно располагается в суживающейся части, а при $d\left(\frac{u^2}{2}\right) < 0$ — в расширяющейся, так как $dF > 0$ (рис. 166). Этим трем случаям соответствует такой характер изменения параметров торможения в относительном движении:

1. $\tilde{T}^* = \text{const}$, $\tilde{p}^* = \text{const}$, $\tilde{\rho}^* = \text{const}$.
2. $\tilde{T}_2^* > \tilde{T}_1^*$, $\tilde{p}_2^* > \tilde{p}_1^*$, $\tilde{\rho}_2^* > \tilde{\rho}_1^*$.
3. $\tilde{T}_2^* < \tilde{T}_1^*$, $\tilde{p}_2^* < \tilde{p}_1^*$, $\tilde{\rho}_2^* < \tilde{\rho}_1^*$.

РУССКО-АНГЛИЙСКИЙ СЛОВАРЬ

А

абсолютная скорость absolute velocity
абсолютное движение absolute motion
адиабата adiabatic line, adiabat

адиабатный коэффициент полезного действия adiabatic coefficient of performance

Б

бароклиная жидкость baroclinic liquid
баротропная жидкость barotropic liquid

безвихревое движение vortex-free motion
безлопаточный vaneless

В

вес weight
взаимодействие interaction (reciprocal action)
вихрь eddy
вихрь скорости speed eddy
вихревое движение eddy motion; vortex motion
вихревая линия eddy line
внезапное расширение sudden expansion
внешняя механическая работа external mechanical work
внешнее тепло external heat
внутренняя энергия internal energy

возвращенное тепло returned heat
воздействие influence (on, upon)
воздушно - реактивный двигатель air-feed jet engine
возмущение disturbance
волновое сопротивление wave resistance
время time
втекающий flowing into, entering
вход inlet; admission; inflow
входное сечение inlet section
входной угол inlet angle

вытекающий flowing out
вытесненная масса displaced mass
выход outlet

выходное сечение outlet
section
выходной угол outlet
angle
вязкость viscosity, visco-
sity

Г

газ gas
газовая постоянная gas
constant
газодинамическая функ-
ция gas-dynamic func-
tion

горло throat
граница струи jet boun-
dary
граничные условия boun-
dary conditions

Д

давление pressure
давление торможения to-
tal pressure; stagnation
pressure
двумерный поток two-di-
mensional flow
динамическая добавка
температуры dynamic
temperature increment
динамическая скорость
dynamic velocity

динамический коэффици-
ент вязкости dynamic
coefficient of viscosity
диполь dipole
длина length
длина свободного пробе-
га молекул free length
of molecules
дуга arc

Ж

жидкость fluid; liquid

жидкая частица fluid par-
ticle

И

идеальная жидкость per-
fect fluid
идеальный газ ideal gas
изоэнтропный эллипс
isentropic ellipse

индуктивное сопротивление induced drag
источник source

К

касательная tangent

касательное напряжение
tangential stress

кинематический коэффициент вязкости kinematic coefficient of viscosity
 количество движения momentum
 кольцевой канал annular (canal) channel
 комок lump
 комплексная скорость complex velocity
 комплексное переменное complex variable
 комплексный потенциал complex potential
 конвективное ускорение convective acceleration
 контрольная поверхность control surface
 косой скачок уплотнения diagonal shock, oblique shock
 коэффициент восстановления давления pressure recovery factor
 коэффициент восстановления температуры temperature recovery factor
 коэффициент подъемной силы lift coefficient
 коэффициент потери энер-

гии coefficient of energy loss
 коэффициент путевых потерь coefficient of passage friction; coefficient of tube friction
 коэффициент пути смешения mixing length factor
 коэффициент расхода flow coefficient; discharge coefficient
 коэффициент смягчения удара coefficient of chock smoothing
 коэффициент сопротивления drag coefficient
 коэффициент лобового сопротивления drag coefficient
 коэффициент сопротивления трения friction coefficient
 криволинейный curvilinear
 кризис течения crisis of flow
 критерий criterion
 критическая скорость critical sound velocity

Л

линеаризация linearization
 линия тока stream-line

локальное ускорение local acceleration
 лопатка blade; vane

М

максимальная скорость течения газа maximum gas velocity
 масса mass

массовый расход mass flow; mass flux
 массовая сила mass force
 межлопаточный канал vane canal

местный local
 местная скорость local velocity
 местное ускорение local acceleration
 момент moment
 момент количества движе-

ния moment of momentum; angular momentum
 мостообразный скачок уплотнения swallowed shock wave; tunnel shock wave

Н

начальный участок initial phase
 невесомая жидкость weightless liquid
 невязкий газ inviscid gas; non-viscous gas
 неразрывность continuity
 несжимаемая жидкость incompressible liquid
 нетеплопроводный газ

non-heat-conducting gas
 неустановившееся движение non-steady motion
 нормаль normal
 нормальная компонента normal component
 нормальная составляющая normal component
 нормальное напряжение normal stress

О

обобщенный generalized
 обращение reversion (of numbers)
 обращенный reversed
 обтекание flow
 обтекаемый streamlined
 объем volume
 объемный расход volume flow
 одномерный поток one-dimensional flow
 окружная составляющая tangential component
 оператор operator
 операция operation
 определитель determinant
 осевая составляющая axial component
 осесимметричный поток axis-symmetrical flow

основной участок main area
 ось решетки lattice axis; cascade axis
 отвод rejection; escape; outflow
 относительная скорость relative velocity
 относительное движение relative motion
 отражение reflection
 отрыв пограничного слоя boundary layer separation
 отрыв потока separation of flow
 отсоединенная головная волна detached leading shock wave; detached bow wave

параметры торможения	полный импульс
stagnation conditions	total impulse
патрубок	полярная диаграмма
pipe; manifold	polar chart
переносная скорость	полярные координаты
transient velocity	polar coordinates
переносное движение	полярный угол
transient motion	polar angle
плоский поток	потенциал
two-dimensional flow	potential
плоскопараллельный поток	поток импульса
two-dimensional parallel flow	flow of impulse
плотность	поток массы
density	flow of mass
плотность заторможенного потока	приведенная длина трубы
density of stagnant flow	reduced pipe-length (tube length)
плотность тока	приведенная скорость
density of flow	reduced velocity
площадь поперечного сечения	приведенный расход
cross-sectional area	reduced discharge
площадь живого сечения	прикладной
useful jet area; useful flow area; area of passage	applied
поверхность разрыва	приращение
discontinuity of surface	increment
пограничный слой	продольный градиент давления
boundary layer	longitudinal gradient of pressure
подвод (жидкости)	проекция
supply, admission; inflow input	projection
подобие	производная
similarity	derivative
показатель изоэнтропы	пространственный поток
isentropic exponent	three-dimensional flow
показатель политропы	проток (канал)
polytropic exponent	canal
показатель степени exponent	проточная часть (машины)
	flow passage
полное давление	профильное сопротивление
total pressure	profile drag; profile resistance
полный запас энергии	прямой скачок уплотнения
total energy	normal shock wave; direct shock wave
	псевдоскачок
	pseudoshock
	путь смешения
	mixing length

Р

работа work
работа вталкивания work of forcing in
работа выталкивания work of forcing out
работа расширения expansion work
работа трения friction work
равновесие balance; equilibrium

размах крыла span
разрежение suction; vacuum
разреженный thin
разрыв discontinuity
распространение propagation
расстояние distance
решетка cascade; lattice

С

самолет aircraft; airplane
сжатие compression
сила force
сила трения friction; friction force
скачок уплотнения pressure shock
скоростной коэффициент velocity coefficient
скорость внешнего потока external stream velocity
скорость возмущения disturbance velocity
скорость звука acoustic velocity; speed of sound
слабое возмущение weak disturbance
совершенный газ (идеальный газ) perfect gas; non-viscous gas

соизмеримый commensurate
сопло nozzle
составляющая (силы, скорости) component
сплошная среда continuous medium
сплошность continuity
среднерасходная скорость average discharge velocity
средняя эквивалентная скорость обтекания решетки average equivalent velocity of cascade flow
стенка wall
степень подогрева degree of heating
сток sink flow
струя jet; stream

Т

тангенциальная составляющая (компонента) tangential component
тангенциальный разрыв tangential discontinuity
текущее значение current value

температура торможения temperature impact, temperature stagnation
температура частичного торможения temperature of partial stagnation

тепловой кризис heat crisis
 тепловой поток heat flow;
 thermal flow; heat flux
 теплоперепад head; thermal head
 теплопроводность thermal conductivity; heat conductivity
 тепло трения friction heat
 термодинамическая температура thermodynamic temperature
 толщина thickness

толщина вытеснения displacement thickness
 толщина пограничного слоя boundary layer thickness
 толщина потери импульса momentum thickness
 толщина потери энергии energy thickness
 трехмерный поток three-dimensional flow
 турбомашина turbo-machine

У

угол атаки angle of attack
 угол изгиба профиля camber; blade-camber angle
 угол отставания потока flow-delay angle; deviation
 угол поворота потока fluid deflection angle
 угол раскрытия диффузора cone angle; convergence angle
 угол слабых возмущений (угол Маха) Mach angle
 угловая деформация angular deformation
 угловая скорость angular velocity
 ударная адиабата percussive adiabat; shock adiabat
 ударная волна shock wave

ударная поляра shock polar
 удельный specific
 удельная теплоемкость specific heat
 удельный объем specific volume
 удельный тепловой поток specific flow of heat
 уравнение неразрывности equation of continuity
 уравнение обращения воздействий influence reduction equation
 ускорение acceleration
 ускорение силы тяжести acceleration due to gravity
 установившееся движение steady motion
 установка setting; plant; stand
 установочный угол incidence angle
 участок area

Ф

фронт волны	wave front	фронтальная составляющая
фронт решетки	lattice front	front component
фронт скачка уплотнения	front of shock wave	функция тока stream function

Х

характеристика	characteristics	хорда chord

Ц

циркуляция скорости	circulation of speed

Ч

частная производная	partial derivative

Ш

шаг решетки	cascade pitch

Э

элементарный	elementary	энергоизолированное течение
элементарный объем	elementary volume	isoenergetic flow
элементарная струйка	elementary stream	энтальпия enthalpy
		энтропия entropy
		эпициклоида epicycloid

Я

яблочковидная кривая	apple-shaped curve	ядро потока main stream

РУССКО-ФРАНЦУЗСКИЙ СЛОВАРЬ

А

абсолютная скорость vitesse absolu
абсолютное движение mouvement absolu
адиабата ligne adiabatique

адиабатный коэффициент полезного действия coefficient adiabatique du rendement

Б

бароклинная жидкость liquide baroclinique
баротропная жидкость liquide barotropique

безвихревое движение mouvement sans tourbillon
безлопаточный sans vanes

В

вес poids
взаимодействие interaction
вихрь tourbillon
вихрь скорости remontée de la vitesse
вихревое движение mouvement en tourbillon
вихревая линия ligne de tourbillon
внезапное расширение expansion subite
внешняя механическая работа travail mécanique extérieur

внешнее тепло chaleur extérieure
внутренняя энергия énergie intérieure
возвращенное тепло chaleur rendue
воздействие action (sur)
воздушно-реактивный двигатель aéromoteur de propulsion par réaction
возмущение perturbation
волновое сопротивление résistance des ondes
время temps
втекающий entrant
вход entrée

входное сечение section d'entrée
входной угол angle d'entrée
вытекающий sortant
вытесненная масса mass déplacée

выход sortie
выходное сечение section de sortie
выходной угол angle de sortie
вязкость viscosité

Г

газ gaz
газовая постоянная constante de gaz
газодинамическая функция fonction de la dynamique de gaz

горло gorge, conduit, bouche
граница струи limite de jet
граничные условия conditions de limite

Д

давление pression
давление торможения pression du frein
двумерный поток courant de deux dimensions
динамическая добавка температуры incrément dynamique de la température
динамическая скорость vitesse dynamique

динамический коэффициент вязкости coefficient dynamique de viscosité
диполь dipole
длина longueur
длина свободного пробега молекул longueur du parcours libre des molécules
дуга arc

Ж

жидкость liquide

жидкая частица particule liquide

И

идеальная жидкость liquide idéal
идеальный газ gaz idéal
изозентронный эллипс ellipse isentropique

индуктивное сопротивление résistance inductive
источник source

К

касательная tangente
касательное напряжение
tension tangentielle
кинематический коэффициент
вязкости coefficient
cinématique de la viscosité
количество движения
quantité de mouvement
кольцевой канал canal annulaire
комок grumeau
комплексная скорость vitesse
complexe
комплексное переменное
complexe variable
комплексный потенциал
potentiel complexe
конвективное ускорение
accélération convective
контрольная поверхность
superficie de contrôle
косой скачок уплотнения
onde de choc oblique
коэффициент восстановления
давления coefficient
de rétablissement
de la pression
коэффициент восстановления
температуры coefficient
de rétablissement
de la température
коэффициент подъемной

силы coefficient de portance
коэффициент потери энергии
coefficient de perte d'énergie
коэффициент путевых потерь
coefficient de friction de tube
коэффициент пути смешения
facteur de la longueur du mélange
коэффициент расхода
facteur de décharge
коэффициент смягчения
удара facteur de choc modéré
коэффициент сопротивления
coefficient de résistance
коэффициент лобового сопротивления
coefficient de résistance frontale
коэффициент сопротивления
трения coefficient de résistance à la friction
криволинейный curviligne
кризис течения crise de courant
критерий critère
критическая скорость vitesse
critique

Л

линеаризация linéarization
линия тока ligne de courant

локальное ускорение accélération locale
лопатка vanne

М

максимальная скорость
течения газа vitesse maximum
de gaz

масса masse
массовый расход fluxion
de masse

массовая сила force de
masse
межлопаточный канал ca-
nal de vanne
местный local
местная скорость vitesse
locale

местное ускорение accélé-
ration locale
момент moment
момент количества движе-
ния moment angulaire
мостообразный скачок уп-
лотнения onde de choc
de tube

Н

начальный участок phase
initiale
невесомая жидкость li-
quide inpondérable
невязкий газ gaz sans vi-
scosité
неразрывность continuité
несжимаемая жидкость
liquide incompressible
нетеплопроводный газ gaz
non conduisant la cha-

leur; gaz antithermique
неустановившееся движе-
ние mouvement instable
нормаль normale
нормальная компонента
composante normale
нормальная составляю-
щая composante nor-
male
нормальное напряжение
effort normal

О

обобщенный généralisé
обращение reversion
обращенный reversible
обтекание contournement
обтекаемый fuselé
объем volume
объемный расход consom-
mation de volume
одномерный поток cou-
rant d'une dimension
окружная составляющая
composante tangenciale
оператор opérateur
операция opération
определить déterminer
осевая составляющая com-
posante axiale
осесимметричный поток

courant axial symé-
trique
основной участок super-
ficie principale
ось решетки axe de lattis
отвод repulsion
относительная скорость
vitesse relative
относительное движение
mouvement relatif
отражение réflexion
отрыв пограничного слоя
séparation de la couche-
limite
отрыв потока séparation
du courant
отсоединенная головная
волна onde de tête sé-
parée

параметры торможения
 conditions de freinage
 патрубок tube
 переносная скорость vi-
 tesse transitoire
 переносное движение
 mouvement transitoire
 плоский поток courant de
 deux dimensions
 плоскопараллельный по-
 ток courant paralel de
 deux dimensions
 плотность densité
 плотность заторможен-
 ного потока densité du
 courant freiné
 плотность тока densité de
 courant
 площадь поперечного се-
 чения aire de section
 transversale
 площадь живого сечения
 aire de section de cour-
 rent
 поверхность разрыва su-
 perficie de discontinuité
 пограничный слой couche
 limite
 подвод (жидкости) en-
 trée
 подобие simulacre
 показатель изоэнтропы
 exponente isentropique
 показатель политропы ex-
 ponente polytropique
 показатель степени expo-
 nente
 полное давление pression
 totale
 полный запас энергии
 énergie totale

полный импульс impulse
 total
 полярная диаграмма di-
 agramme polaire
 полярные координаты co-
 ordinées polaires
 полярный угол angle po-
 laire
 потенциал potentiel
 поток импульса courant
 d'impulse
 поток массы courant de
 masse
 приведенная длина трубы
 longueur réduite de tube
 приведенная скорость vi-
 tesse réduite
 приведенный расход dé-
 charge réduite
 прикладной appliqué
 приращение accroissent
 продольный градиент дав-
 ления gradiente longitu-
 dinale de pression
 проекция projection
 производная dérivé
 пространственный поток
 courant de trois diman-
 sions
 проток (канал) canal
 проточная часть (маши-
 ны) pas de courant
 профильное сопротивле-
 ние résistance de profil
 прямой скачок уплотне-
 ния onde de choc di-
 recte
 псевдоскачок pseudochoch
 путь смешения parcours
 de mélange

Р

работа	travail	равновесие	équilibre
работа вталкивания	travail d'introduction	разрежение	vacuum
работа выталкивания	travail d'expulsion	разреженный	raréfié
работа расширения	travail d'expansion	размах крыла	ampleur des ailes
работа трения	travail de frottement	разрыв	discontinuité
		распространение	propagation
		расстояние	distance
		решетка	lattis

С

самолет	avion	сопло	buse
сжатие	compression	составляющая (силы, скорости)	composante
сила	force	сплошная среда	medium dense
сила трения	force de friction	сплошность	continuité
скачок уплотнения	onde de choc	среднерасходная скорость	vitesse de décharge moyenne
скоростной коэффициент	coefficient de vitesse	средняя эквивалентная скорость обтекания решетки	vitesse moyenne équivalente du flot de lattis
скорость внешнего потока	vitesse du courant	стенка	mûr
скорость возмущения	vitesse de perturbation	степень подогрева	degré de chauffage
скорость звука	vitesse du son	сток	déversoir
слабое возмущение	perturbation débile	струи	jet
совершенный газ (идеальный газ)	gaz idéal		
соизмеримый	conmesurable		

Т

тангенциальная составляющая (компонента)	composante tangenciale	текущее значение	valeur courante
тангенциальный разрыв	discontinuité tangenciale	температура торможения	température de freinage
		температура частичного торможения	température de freinage parcial

тепловой кризис crise thermique
 тепловой поток flot de chaleur
 теплореперпад différence thermique
 теплопроводность conductibilité de chaleur
 тепло трения chaleur de friction
 термодинамическая температура temperature thermodynamique
 толщина épaisseur

толщина вытеснения épaisseur de déplacement
 толщина пограничного слоя épaisseur de la couche limite
 толщина потери импульса épaisseur de la perte d'impulse
 толщина потери энергии épaisseur de la perte d'énergie
 трехмерный поток courant de trois dimensions
 турбомашина turbo-machine

у

угол атаки angle d'attaque
 угол изгиба профиля angle de flexion du profil
 угол отставания потока angle du retard de courant
 угол поворота потока angle de déflexion du courant
 угол раскрытия диффузора angle conique
 угол слабых возмущений (угол Маха) angle de perturbations débiles (angle de Mach)
 угловая деформация déformation angulaire
 угловая скорость vitesse angulaire
 ударная адиабата courbe adiabatique de choc
 ударная волна onde de choc

ударная поляра polaire de choc
 удельный spécifique
 удельная теплоемкость chaleur spécifique
 удельный объем volume spécifique
 удельный тепловой поток courant de chaleur spécifique
 уравнение неразрывности équation de continuité
 уравнение обращения воз- действий équation de la réduction d'influences
 ускорение accélération
 ускорение силы тяжести accélération de gravité
 установившееся движение mouvement établi
 установка installation
 установочный угол angle d'incidence
 участок aire

ф

фронт волны front de l'onde

фронт решетки front de lattis

РУССКО-ИСПАНСКИЙ СЛОВАРЬ

А

абсолютная скорость ve-
locidad absoluta
абсолютное движение
movimiento absoluto

адиабата línea adiabáti-
ca; adiabática
адиабатный коэффициент
полезного действия ren-
dimiento adiabático

Б

бароклинная жидкость
líquido baroclínico
баротропная жидкость lí-
quido barotrópico

безвихревое движение mo-
vimiento sin torbellinos
безлопаточный sin aletas,
sin paletas

В

вес peso
взаимодействие interac-
ción
вихрь torbellino, remolino
вихрь скорости remolino
de velocidad
вихревое движение tor-
bellino
вихревая линия línea de
torbellino
внезапное расширение
expansión brusca
внешняя механическая
работа trabajo mecáni-
co exterior
внешнее тепло calor ex-
terior

внутренняя энергия ener-
gía interna
возвращенное тепло calor
devuelto
воздействие influencia
воздушно-реактивный дви-
гатель motor de propul-
sión por reacción de ai-
re, motor pulsorreactor
возмущение perturbación,
disturbio
волновое сопротивление
resistencia de las ondas
время tiempo
втекающий que entra
вход entrada, toma, admi-
sión, boca de entrada

фронт скачка уплотнения front de l'onde de choc	функция тока fonction du courant
фронтальная составляющая composante frontale	

Х

характеристика caractéristique	хорда corde

Ц

циркуляция скорости	circulation de vitesse

Ч

частная производная	dérivée partiale

Ш

шаг решетки pas de lattis	

Э

элементарный élémentaire	энергоизолированное течение courant isoénergétique
элементарный объем volume élémentaire	энтальпия entalpie
элементарная струйка jet élémentaire	энтропия entropie
	эпициклоида épicycloide

Я

яблоковидная кривая courbe en forme de pomme	ядро потока noyau du courant

входное сечение sección
de entrada

входной угол ángulo de
entrada

вытекающий que sale

вытесненная масса massa
desplazada

выход salida, boca de sa-
lida

выходное сечение sección
de salida

выходной угол ángulo de
salida

вязкость viscosidad, du-
ctilidad

Г

газ gaz

газовая постоянная con-
stante del gas

газодинамическая функ-
ция función de la diná-
mica de los gases

горло garganta, boca, con-
ducto

граница струи límite del
chorro

граничные условия condi-
ciones de contorno

Д

давление presión

давление торможения pre-
sión de reposo, presión
total

двумерный поток corrien-
te de dos dimensiones

динамическая добавка
температуры incremento
dinámico de la tempera-
tura

динамическая скорость ve-
locidad dinámica

динамический коэффици-
ент вязкости coeficiente
dinámico de viscosidad

диполь dipolo

длина longitud

длина свободного пробега
молекул longitud del
alcance libre de las mo-
léculas

дуга arco

Ж

жидкость líquido

жидкая частица partícula
líquida

И

идеальная жидкость líqui-
do ideal, fluido ideal

идеальный газ gas ideal

изоэнтропный эллипс élip-
se isentrópico

индуктивное сопротивле-
ние resistencia inductiva

источник fuente

К

касательная tangente
касательное напряжение esfuerzo (tensión) tangencial

кинематический коэффициент вязкости coeficiente cinemático de viscosidad

количество движения fuerza viva, impulso motor, impulso adquirido

кольцевой канал canal anular

комковатый grumoso

комплексная скорость velocidad compleja

комплексное переменное variable compleja

комплексный потенциал potencial complejo

конвективное ускорение aceleración convectiva

контрольная поверхность superficie de control

косой скачок уплотнения onda de choque diagonal

коэффициент восстановления давления coeficiente de restablecimiento de presión

коэффициент восстановления температуры coeficiente de restablecimiento de la temperatura

коэффициент подъемной силы coeficiente de levantamiento; coeficiente de sustentación; coeficiente de arrastre

коэффициент потери энергии coeficiente de pérdida de energía

коэффициент путевых потерь coeficiente de fricción de paso; coeficiente de fricción de tubo

коэффициент пути смешения factor de longitud de la mezcla

коэффициент расхода factor de descarga (de escape, de salida)

коэффициент смягчения удара factor de alivio de choque

коэффициент сопротивления coeficiente de resistencia

коэффициент лобового сопротивления coeficiente de resistencia frontal

коэффициент сопротивления трения coeficiente de resistencia de fricción

криволинейный curvilíneo

кризис течения crisis de la corriente

критерий criterio

критическая скорость velocidad crítica

Л

линеаризация linearización

линия тока línea de corriente

локальное ускорение aceleración local

лопатка pala, paleta, aleta

М

максимальная скорость
течения газа velocidad
máxima del gas
масса masa
массовый расход flujo de
masa; fluxión de masa;
gasto de masa
массовая сила fuerza de
masa
межлопаточный канал ca-
nal entre palas
местный local

местная скорость veloci-
dad local
местное ускорение acele-
ración local
момент momento
момент количества дви-
жения momento angu-
lar
мостообразный скачок
уплотнения onda de cho-
que de garganta; onda
de choque de tubo

Н

начальный участок fase
inicial
невесомая жидкость líquido
imponderable
невязкий газ gas sin vi-
scosidad
неразрывность continui-
dad
несжимаемая жидкость
líquido incomprensible
нетеплопроводный газ gas
no conductor de calor;
gas antitérmico

неустановившееся движе-
ние movimiento sin re-
gularidad; movimiento
sin uniformidad
нормаль normal, perpen-
dicular
нормальная компонента
componente normal
нормальная составляю-
щая componente nor-
mal
нормальное напряжение
tensión normal

О

обобщенный generalizado
обращение reversión de
números, circulación
обращенный reversible
обтекание flujo
обтекаемый currentilíneo
объем volumen
объемный расход consu-
mo volumétrico, flujo
volumétrico
одномерный поток flujo
de una dimensión

окружная составляющая
componente tangencial
оператор operador
операция operación
определить determinar
осевая составляющая
componente axial
осесимметричный поток
flujo axial-simétrico
основной участок superfi-
cie principal, área prin-
cipal

ось решетки eje de celosia,
eje
отвод evacuación, escape,
repulsión, derrame
относительная скорость
velocidad relativa
относительное движение
movimiento relativo

отражение reflexión
отрыв пограничного слоя
separación de la capa
límite
отрыв потока separación
de corriente
отсоединенная головная
волна onda de choque
de cabeza apartada

П

параметры торможения
parámetros de frenado
патрубок conducto, tubo,
tubuladura
переносная скорость velo-
cidad transitoria
переносное движение mo-
vimiento transitorio
плоский поток corriente
de dos dimensiones
плоскопараллельный по-
ток corriente paralela de
dos dimensiones
плотность densidad
плотность заторможенно-
го потока densidad de
corriente frenada
плотность тока densidad
de corriente
площадь поперечного се-
чения área de sección
transversal
площадь живого сечения
área de paso; área de
sección de corriente
поверхность разрыва su-
perficie de discontinui-
dad
пограничный слой capa lí-
mite
подвод (жидкости) sumi-
nistro, admisión, entra-
da

подобие semejanza
показатель изоэнтропии
exponente isentrópico
показатель политропы ex-
ponente politrópico
показатель степени expo-
nente
полное давление presión
total
полный запас энергии
energía total
полный импульс impulso
total
полярная диаграмма di-
agrama polar, esquema
polar
полярные координаты co-
ordenadas polares
полярный угол ángulo po-
lar
потенциал potencial
поток импульса corriente
de impulso
поток массы corriente de
masa
приведенная длина трубы
longitud reducida de tu-
bo
приведенная скорость ve-
locidad reducida
приведенный расход de-
scarga reducida

прикладной aplicado
 приращение incremento
 продольный градиент давления gradiente longitudinal de presión
 проекция proyección
 производная derivada
 пространственный поток corriente de tres dimensiones

проток (канал) canal
 проточная часть (машины) paso de corriente
 профильное сопротивление resistencia de perfil
 прямой скачок уплотнения onda de choque directa
 псевдоскачок pseudochoque
 путь смещения trayectoria de la mezcla

Р

работа trabajo
 работа вталкивания trabajo de introducción
 работа выталкивания trabajo de expulsión
 работа расширения trabajo de expansión
 работа трения trabajo de frotamiento (de rozamiento)
 равновесие equilibrio, balance

разрежение depresión, vacío
 разреженный rarificado, engracido, evacuado
 размах крыла longitud de ala
 разрыв discontinuidad, ruptura
 распространение difusión, propagación
 расстояние distancia, alcance
 решетка celosía, rejilla

С

самолет avión
 сжатие compresión
 сила fuerza
 сила трения fuerza de rozamiento o de fricción
 скачок уплотнения onda de choque
 скоростной коэффициент coeficiente de velocidad
 скорость внешнего потока velocidad de la corriente exterior
 скорость возмущения velocidad de perturbación

скорость звука velocidad acústica; velocidad de sonido
 слабое возмущение perturbación débil
 совершенный газ (идеальный газ) gas ideal
 соизмеримый conmesurable
 сопло tobera, sople
 составляющая (силы, скорости) componente
 сплошная среда medio, sólido, medio continuo
 сплошность continuidad

среднерасходная скорость
 velocidad de descarga
 media
средняя эквивалентная
скорость обтекания ре-
шетки velocidad media

equivalente de flujo de
 celosia
 стенка pared
 степень подогрева grado
 de calentamiento
 сток desague; derrame
 струя chorro, corriente

Т

тангенциальная составля-
ющая (компонента)
 componente tangencial
тангенциальный разрыв
 discontinuidad tangen-
 cial
текущее значение valor
 corriente
температура торможения
 temperatura de frenado
температура частичного
торможения temperatura
 de frenado parcial
тепловой кризис crisis
 térmico
тепловой поток corriente
 de calor
теплоперепад diferencia de
 calor; diferencia térmica
теплопроводность condu-
 ctibilidad de calor, con-
 ductibilidad térmica

тепло трения calor de ro-
 zamiento
термодинамическая тем-
пература temperatura
 termodinámica
толщина espesor, grueso,
 espesura
толщина вытеснения es-
 pesura de desplazamien-
 to
толщина пограничного
слоя espesura de la capa
 límite
толщина потери импульса
 espesor de la pérdida de
 impulso
толщина потери энергии
 espesor de la pérdida de
 energía
трехмерный поток corri-
 ente de tres dimensiones
турбомашина turbo-má-
 quina

У

угол атаки ángulo de ata-
 que
угол изгиба профиля án-
 gulo de flexión de per-
 fil
угол отставания потока
 ángulo de retardo de la
 corriente
угол поворота потока án-

gulo de deflección de la
 corriente
угол раскрытия диффузо-
ра ángulo cónico; ángu-
 lo de convergencia
угол слабых возмущений
(угол Маха) ángulo de
 perturbaciones débiles
 (ángulo de Mach)

угловая деформация de-
 formación angular
 угловая скорость veloci-
 dad angular
 ударная адиабата curva
 adiabática de choque
 ударная волна onda de
 choque (de percusión)
 ударная поляра polar (f)
 de choque
 удельный específico
 удельная теплоемкость ca-
 lor específico
 удельный объем volumen
 específico
 удельный тепловой поток
 corriente de calor espe-
 cífico

уравнение неразрывности
 ecuación de continuidad
 уравнение обращения воз-
 действий ecuación de la
 reducción de influencias
 ускорение aceleración
 ускорение силы тяжести
 aceleración de gravedad
 установившееся движение
 movimiento uniforme
 (continuo)
 установка instalación, má-
 quina, planta, aparato
 установочный угол ángulo
 de incidencia
 участок área, superficie,
 parte

Ф

фронт волны frente de on-
 da
 фронт решетки frende de
 celosía o de la orejilla
 фронт скачка уплотнения
 frente de onda de choque

фронтовая составляющая
 componente frontal
 функция тока función de
 corriente

Х

характеристика caracte-
 rística

хорда cuerda; cuerda de
 arco

Ц

циркуляция скорости circulación de la velocidad

Ч

частная производная derivada parcial

Ш

шаг решетки paso de celosía o de la rejilla

Э

элементарный elemental
 элементарный объем volumen elemental
 элементарная струйка chorro elemental
 энергоизолированное те-

чение corriente isoenergético
 энтальпия entalpia
 энтропия entropía
 эпициклоида epicicloide

Я

яблоковидная кривая curva en forma de manzana

ядро потока corriente principal; núcleo de corriente

ОГЛАВЛЕНИЕ

Принятые обозначения	3
Введение	7

Глава первая. Основные сведения из гидродинамики

§ 1. Основные понятия	9
§ 2. Скорость движения жидкой частицы	12
§ 3. Уравнение неразрывности	16
§ 4. Уравнение движения	21
§ 5. Общая постановка задач газовой динамики и методы упрощений	27

Глава вторая. Основные уравнения газовой динамики для элементарной струйки

§ 1. Уравнение энергии	31
§ 2. Параметры торможения	41
§ 3. Скорость звука, максимальная скорость, критическая скорость	47
§ 4. Безразмерные скорости: число M , приведенные скорости λ и Λ	52
§ 5. Газодинамические функции параметров торможения $\tau(\lambda)$, $\pi(\lambda)$, $e(\lambda)$	55
§ 6. Построение термодинамических процессов, происходящих в газовых потоках, в диаграммах pv , TS , iS	57
§ 7. Связь между скоростью и площадью поперечного сечения в энергонезолированном изэнтропном потоке	65
§ 8. Газодинамические функции потока массы (расхода)	67
§ 9. Режимы течения газа в канале, имеющем горло	71

Глава третья. Закон количества движения

§ 1. Теорема Эйлера о количестве движения	75
§ 2. Некоторые приложения первой теоремы Эйлера	83
§ 3. Уравнение количества движения для элементарной струйки. Газодинамические функции потока импульса	92
§ 4. Теорема Эйлера о моменте количества движения	96

Глава четвертая. Основы теории плоского потока

§ 1. Потенциальное и вихревое движение	101
§ 2. Плоский потенциальный поток несжимаемой жидкости	109
§ 3. Теорема Н. Е. Жуковского о подъемной силе	117
§ 4. Дифференциальное уравнение потенциала скорости для газа	129
§ 5. Линеаризация дифференциального уравнения потенциала скорости. Метод Прандтля — Глауэрта	131

§ 6. Распространение слабых возмущений в потоке газа	136
§ 7. Обтекание внешнего тупого угла сверхзвуковым потоком	138
§ 8. Графические методы расчета сверхзвуковых течений	147
§ 9. Пересечение и отражение слабых волн	152

Глава пятая. Скачки уплотнения

§ 1. Прямые и косые скачки уплотнения	160
§ 2. Кинематическое и динамическое соотношения	165
§ 3. Ударная адиабата. Изменение состояния газа	169
§ 4. Скорость распространения ударной волны	174
§ 5. Теория косоого скачка уплотнения	176
§ 6. Отклонение потока в косом скачке	183
§ 7. Системы скачков уплотнения	193
§ 8. Взаимодействие и отражение скачков уплотнения	196

Глава шестая. Движение вязкой жидкости. Пограничный слой

§ 1. Уравнения движения вязкой жидкости	208
§ 2. Подобие потоков жидкостей и газов	218
§ 3. Основные понятия теории пограничного слоя	227
§ 4. Уравнения пограничного поля	235
§ 5. Расчет ламинарного пограничного слоя несжимаемой жидкости на плоской стенке	238
§ 6. Условные толщины пограничного слоя	242
§ 7. Турбулентный пограничный слой	248
§ 8. Пограничный слой с продольным градиентом давления. Отрыв. Взаимодействие со скачками уплотнения	255
§ 9. Турбулентные струи	260

Глава седьмая. Течение газа в элементах проточной части теплоэнергетических установок

§ 1. Принципы расчета газовых потоков в элементах проточной части. Уравнение обращения воздействий	265
§ 2. Течение газа по трубам	270
§ 3. Течение газа с подводом и отводом тепла	278
§ 4. Течение в суживающихся и расширяющихся каналах	286
§ 5. Течение газа в решетках турбомашин	298
§ 6. Течение газа с подводом и отводом механической энергии. Параметры потока в относительном движении	312
Русско-английский словарь	322
Русско-французский словарь	330
Русско-испанский словарь	338