

В. Е. КРАСКЕВИЧ, К. Х. ЗЕЛЕНСКИЙ, В. И. ГРЕЧКО

# ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ В ИНЖЕНЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ

Допущено Министерством высшего и среднего  
специального образования УССР  
в качестве учебного пособия  
для студентов вузов,  
обучающихся по специальности  
«Автоматизированные системы управления»

КИЕВ  
ГОЛОВНОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО ИЗДАТЕЛЬСКОГО ОБЪЕДИНЕНИЯ  
«ВИЩА ШКОЛА»  
1986

22.193я73

К78

УДК 518.12(07)

**Численные методы в инженерных исследованиях** / В. Е. Краскевич, К. Х. Зеленский, В. И. Гречко.— К.: Вища шк. Головное изд-во, 1986.— 263 с.

Излагаются теоретические сведения по основным разделам численных методов анализа: линейной и нелинейной алгебре, обработке результатов экспериментов (интерполяции и аппроксимации функций), численному интегрированию, решению задачи Коши и краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, решению интегральных уравнений, задач математической физики, отысканию экстремума функций нескольких переменных, задач теории вероятности и математической статистики.

Основное внимание уделено практической реализации численных методов, в частности с использованием ЭВМ. В приложении приведен комплекс программ, разработанных авторами на языке ФОРТРАН.

Для студентов вузов, обучающихся по специальности «Автоматизированные системы управления».

Ил. 10. Табл. 18. Библиогр.: 31 назв.

Рецензенты: кафедра прикладной математики Киевского инженерно-строительного института (зав. кафедрой доктор технических наук, профессор *В. М. Михайленко*), доктор технических наук, профессор Московского высшего технического училища им. Н. Э. Баумана *В. Ф. Бирюков*.

Редакция учебной и научной литературы по информатике, вычислительной технике, кибернетике и АСУ

В основных направлениях экономического и социального развития СССР на 1986—1990 годы и на период до 2000 года большая роль в развитии различных отраслей промышленности отводится повышению технического уровня вычислительной техники, приборов и средств автоматизации. Это предусматривает развитие производства и широкое применение промышленных роботов, систем автоматического управления с использованием микропроцессоров и микро-ЭВМ, создание гибких автоматизированных производств. Решение этих задач требует широкого внедрения в инженерную практику методов вычислительной математики.

Вычислительная математика основана на численных методах, пригодных к применению при расчетах на ЭВМ. Современные ЭВМ позволили исследователям значительно повысить эффективность математического моделирования сложных задач науки и техники. Ныне количественные методы исследования проникают практически во все сферы человеческой деятельности, а математические модели становятся средством познания.

Значение математических моделей непрерывно возрастает в связи с тенденцией к оптимизации технических устройств и технологических схем планирования эксперимента. Реализация моделей на ЭВМ осуществляется с помощью различных методов вычислительной математики, которая непрерывно совершенствуется. Поэтому специалист, знакомый с численными методами лишь в пределах курса, читаемого в вузе, не всегда может выбрать наиболее подходящий метод для решения конкретной задачи.

При выборе метода решения конкретной задачи любое пособие играет лишь роль общего руководства, с помощью которого исследователь рассматривает свои проблемы. Настоящее учебное пособие написано в соответствии с программой курса «Численные методы».

Основная цель пособия — привить студентам практические навыки в использовании численных методов при решении прикладных задач. Поэтому в пособии теоретический материал излагается кратко, в доступной форме, без строгого вывода излагаемых в соответствующих разделах методов, практическая же реализация этих методов с использованием вычислительной техники освещается достаточно подробно.

В пособии рассмотрены основные положения теории, относящейся к задачам алгебры, приближению функций, интегрированию, решению обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнениям в частных производных, задачам оптимизации, упрощению дифференциальных уравнений и задачам теории вероятностей.

Каждый изложенный в теоретическом разделе метод снабжен вычислительной схемой (порядок действий при его реализации), подробно разобранным примером и заданием для самостоятельной работы. В приложении приведены тексты программ, реализующих изложенные методы на алгоритмическом языке ФОРТРАН, с инструкцией к пользованию ими, а также контрольными примерами.

Главы 1, 2, 3, 5, 9 написаны Краскевичем В. Е., главы 4, 11, 12 и приложение — Зеленским К. Х., главы 7, 10, 13 — Гречко В. И., главы 6 и 8 — Краскевичем В. Е. и Зеленским К. Х.

# Глава 1. АЛГОРИТМИЗАЦИЯ И ТОЧНОСТЬ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ

---

## 1.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА

Численные методы анализа необходимы в случаях, когда точное решение задачи или не может быть получено, или его использование затруднительно.

Пусть  $X$  — условие задачи;  $Y$  — решение;  $F$  — отображение, ставящее соответствие между решением и условием задачи:

$$F: X \rightarrow Y \quad \text{или} \quad Y = FX. \quad (1.1)$$

Обозначим  $\tilde{Y}$  — приближенный образ;  $\tilde{X}$  — приближенное условие задачи. Тогда можно записать:

$$\tilde{Y} = \tilde{F}\tilde{X}. \quad (1.2)$$

Процедура отыскания некоторого отображения  $F$ , которое устанавливает соответствие между (1.1) и (1.2) и средствами получения данного  $F$  совместно с приемами, сводящими задачу к численным алгоритмам последовательного выполнения операций, выполняемых цифровыми вычислительными машинами (ЦВМ), и составляет основу вычислительных методов математики.

Алгоритмизация этих методов — важнейшая задача вычислительной математики.

## 1.2. ВИДЫ ПОГРЕШНОСТЕЙ

Поскольку численные методы представляют собой приближенные методы решения задач анализа, при решении их необходимо учитывать следующие погрешности решения:

1)  $\delta^{(1)}$  — алгоритмические погрешности — погрешности описания моделей задачи;

2)  $\delta^{(2)}$  — трансформированные погрешности — погрешности, которые накапливаются в ходе процесса решения задачи и обуславливаются погрешностями исходных данных;

3)  $\delta^{(3)}$  — вычислительные погрешности, обуславливающиеся погрешностями выполнения арифметических действий.

## 1.3. АБСОЛЮТНАЯ И ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ПОГРЕШНОСТИ

Если  $A$  — точное значение некоторой величины, а  $a$  — известное приближение к нему, то абсолютной погрешностью приближения  $a$  числа  $A$  называют некоторую величину  $\Delta(a)$  такую, что

$$|A - a| \leq \Delta(a).$$

Относительной погрешностью, обычно выражаемой в процентах, называют величину  $\delta(a)$  такую, что

$$\left| \frac{a - A}{a} \right| \leq \delta(a).$$

Значащими цифрами числа называют все цифры в его записи, начиная с первой ненулевой слева.

Значащую цифру называют верной, если абсолютная погрешность числа не превышает  $1/2$  единицы разряда, соответствующего этой цифре.

**Пример 1.1.**  $a = 9348$ ;  $\Delta(a) = 15$ ;

$$9348 = 9 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0.$$

Имеем  $\Delta(a) = 15 > 5$  и  $\Delta(a) = 15 < 50$ ;  
следовательно, верные цифры 9, 3 и 4.

В общем случае

$$\Delta(a) \leq 1/2 \cdot 10^{m-n+1},$$

где  $m$  — порядок старшей цифры;  $n$  — число верных значащих цифр.

Относительная погрешность связана с количеством верных цифр приближенного числа соотношением

$$\delta(a) \leq \frac{\Delta(a)}{\alpha_m} 10^{-m} \leq \frac{10^{m-n+1}}{\alpha_m 10^m} \leq \frac{1}{\alpha_m 10^{n-1}},$$

где  $\alpha_m$  — старшая значащая цифра.

Информацию о том, что  $a$  является приближенным значением числа  $A$  с абсолютной погрешностью  $\Delta(a)$ , принято записывать в виде

$$A = a \pm \Delta(a),$$

числа  $a$  и  $\Delta(a)$  записываются с одинаковым количеством знаков после запятой.

Например,

$$A = 1,125 \pm 0,005 \text{ или } A = 1,125 \pm 5 \cdot 10^{-3}$$

означает, что

$$1,125 - 0,005 \leq A \leq 1,125 + 0,005.$$

Информацию о том, что  $a$  является приближенным значением числа  $A$  с относительной погрешностью  $\delta(a)$ , записывают в виде

$$A = a(1 \pm \delta(a)).$$

Например, запись

$$\begin{aligned} A &= 1,125 (1 \pm 0,005), \text{ или} \\ A &= 1,125 (1 \pm 5 \cdot 10^{-3}), \text{ или} \\ A &= 1,125 (1 \pm 0,5 \%) \end{aligned}$$

означает, что

$$(1 - 0,005) \cdot 1,125 \leq A \leq (1 + 0,005) \cdot 1,125.$$

#### 1.4. ПОГРЕШНОСТЬ ФУНКЦИИ

Пусть искомая величина  $Y$  является функцией параметров  $a_1, a_2, \dots, a_n$ ; т. е.  $Y = Y(a)$ , и известна область  $G$  в пространстве переменных  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , которой принадлежат параметры. Необходимо получить приближение  $y$  к  $Y$  и оценить его погрешность.

Предельной абсолютной погрешностью  $A(y)$  называют наилучшую при имеющейся информации оценку погрешности величины  $y$ :

$$A(y) = \sup_{a \in G} |Y(a_1, a_2, \dots, a_n)|. \quad (1.3)$$

Предельной относительной погрешностью  $\delta(y)$  называют величину

$$\delta(y) = \frac{A(y)}{|y|}.$$

Получим формулы погрешностей для случая функции двух переменных:

$$\begin{aligned} Y &= Y(A_1, A_2); \\ A_1 &= a_1 + \Delta a_1; \quad A_2 = a_2 + \Delta a_2; \\ |\Delta(y)| &= |Y(a_1 + \Delta a_1, a_2 + \Delta a_2) - Y(a_1, a_2)|. \\ |\Delta(y)| &\approx dy = \frac{\partial y}{\partial a_1} \Delta a_1 + \frac{\partial y}{\partial a_2} \Delta a_2 \leq \left| \frac{\partial y}{\partial a_1} \right| |\Delta a_1| + \left| \frac{\partial y}{\partial a_2} \right| |\Delta a_2|; \\ |\Delta a_1| &\leq \Delta(a_1); \quad |\Delta a_2| \leq \Delta(a_2); \\ |\Delta(y)| &\leq \left| \frac{\partial y}{\partial a_1} \right| \Delta(a_1) + \left| \frac{\partial y}{\partial a_2} \right| \Delta(a_2). \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\delta(y) = \frac{\Delta y}{y} \leq \frac{\left| \frac{\partial y}{\partial a_1} \right|}{\left| \frac{\partial y}{\partial a_1} \right| y} \Delta(a_1) + \frac{\left| \frac{\partial y}{\partial a_2} \right|}{\left| \frac{\partial y}{\partial a_2} \right| y} \Delta(a_2) = \left| \frac{\partial \ln y}{\partial a_1} \right| \Delta(a_1) + \left| \frac{\partial \ln y}{\partial a_2} \right| \Delta(a_2). \quad (1.5)$$

В общем случае

$$\Delta(y) = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial y}{\partial a_i} \right| \Delta(a_i); \quad (1.6)$$

$$\delta(y) = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial \ln y}{\partial a_i} \right| \Delta(a_i); \quad (\Delta(a_i) \leq \frac{1}{2} 10^{m-n+1}). \quad (1.7)$$

Например, если  $y = a_1 \pm a_2$ , то

$$\begin{aligned} \Delta(y) &= \Delta(a_1) + \Delta(a_2); \\ \delta(y) &= \frac{\Delta(a_1) + \Delta(a_2)}{a_1 \pm a_2}. \end{aligned}$$

Погрешность произведения  $y = a_1 a_2$ .

$$\begin{aligned} \delta(y) &\leq \left| \frac{\partial \ln y}{\partial a_1} \right| |\Delta a_1| + \left| \frac{\partial \ln y}{\partial a_2} \right| |\Delta a_2| = \left| \frac{1}{a_1} \right| |\Delta a_1| + \left| \frac{1}{a_2} \right| |\Delta a_2| = \\ &= \left| \frac{\Delta(a_1)}{a_1} \right| + \left| \frac{\Delta(a_2)}{a_2} \right| = \delta(a_1) + \delta(a_2), \end{aligned}$$

или

$$\Delta(y) = |y| \delta(y).$$

## Погрешность частного

$$y = a_1 / a_2;$$

$$\delta(y) = \delta(a_1) + \delta(a_2^*); \Delta(y) = |y| \delta(y).$$

Таким образом, предельная абсолютная погрешность суммы или разности равна сумме предельных абсолютных погрешностей слагаемых.

Предельная относительная погрешность произведения или частного равна сумме предельных относительных погрешностей.

**Пример 1.2.** Найти сумму чисел  $a_1 = 5,23$ ,  $\Delta(a_1) = 0,04$ ;  $a_2 = 1,015$ ,  $\Delta(a_2) = 0,002$ ;  $a_3 = 9,4$ ;  $\Delta(a_3) = 0,1$  и определить абсолютную погрешность результата.

Имеем:

$$\begin{array}{r} 5,23 \pm 0,04 \\ + 1,015 \pm 0,002 \\ + 9,4 \pm 0,1 \\ \hline 15,645 \pm 0,142. \end{array}$$

Поскольку абсолютная погрешность превышает 0,1, в результате сохраняем только верные значащие цифры

$$|15,645 - 15,6| = 0,045.$$

Абсолютная погрешность результата составляет

$$0,142 + 0,045 = 0,187.$$

Округляя полученный результат до второго десятичного знака, получаем

$$\Delta(y) = 0,19.$$

Таким образом,

$$y = 15,6 \pm 0,19.$$

Если число слагаемых велико (например,  $n > 10$ ), то оценка погрешности производится по формуле Чеботарева

$$\Delta(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = \sqrt{3n} \Delta(a),$$

где  $\Delta(a)$  — погрешность слагаемых.

**Пример 1.3.** Найти произведение числа  $a_1 = 1,45 \pm 0,01$ ,  $a_2 = 2,28 \pm 0,02$  и  $a_3 = 1,12 \pm 0,01$  и оценить абсолютную и относительную погрешности результата.

$$(1,45 \cdot 2,28 \cdot 1,12) = \frac{0,01}{1,45} + \frac{0,02}{2,28} + \frac{0,01}{1,12} \approx 0,015.$$

Следовательно, произведение

$$y = 1,45 \cdot 2,28 \cdot 1,12 \approx 3,71$$

вычислено с погрешностью  $\delta(y) \leq 1,5\%$ .

$$\Delta(y) = \Delta(3,71) = 0,015 \cdot 3,71 < 0,06.$$

Сложнее решить задачу оценок погрешности функции, заданной неявно уравнением

$$f(y, a_1, a_2, \dots, a_n) = 0. \quad (1.8)$$

Продифференцировав (1.8) по  $a_i$ , получим

$$\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial a_i} + \frac{\partial f}{\partial a_i} = 0,$$

откуда

$$\frac{\partial y}{\partial a_i} = - \left( \frac{\partial f}{\partial a_i} \right) \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^{-1}. \quad (1.9)$$

При заданных  $A_1, A_2, \dots, A_n$  ( $a_i = A_i + \Delta a_i$ ) можно найти  $Y$  ( $y = Y + \Delta y$ ) как решение (1.9), а затем значения

$$b_i(0) = - \left( \frac{\partial f}{\partial a_i} \right) \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^{-1} \Big|_{(Y, A_1, \dots, A_n)}. \quad (1.10)$$

Вследствие зависимости производных  $\partial y / \partial a_i$ ,  $i = \overline{1, n}$  получение строгой оценки (1.3) от значения  $y$  довольно трудоемкое.

Оценим, например, погрешности корней квадратного уравнения  $f(y, a_1, a_2) = y^2 + a_1 y + a_2 = 0$  при заданных приближенных значениях коэффициентов  $A_1, A_2$  и их погрешностях  $\Delta a_1, \Delta a_2$ .

Пусть  $Y$  — решение уравнения

$$Y^2 + A_1 Y + A_2 = 0.$$

Согласно (1.10),

$$b_1(0) = \frac{\partial y}{\partial a_1} \Big|_{(Y, A_1, A_2)} = - \frac{Y}{2Y + a_1};$$

$$b_2(0) = \frac{\partial y}{\partial a_2} \Big|_{(Y, A_1, A_2)} = - \frac{1}{2Y + a_1}.$$

Следовательно,

$$A^0(Y) = \frac{|Y \Delta a_1 + \Delta a_2|}{2Y + A_1}.$$

Рассмотрим некоторую область  $|a_1| \leq b_1, |a_2| \leq b_2$  изменения коэффициентов  $a_1, a_2$ . Из явного выражения корней

$$y = -a_1/2 \pm \sqrt{a_1^2/4 - a_2}$$

следует, что корни являются непрерывными функциями коэффициентов, поэтому

$$|y(a_1, a_2) - y(A_1, A_2)| \leq \omega(|a_1 - A_1|, |a_2 - A_2|)$$

при  $(a_1, a_2), (A_1, A_2)$  из этой области.  $\omega(\lambda_1, \lambda_2) \rightarrow 0$  при  $\lambda_1, \lambda_2 \rightarrow 0$ .

### 1.5. КРИТЕРИИ ТОЧНОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Погрешности, как правило, неизвестны и для их оценки необходимы численные критерии.

*Определение 1.* Вещественное линейное пространство. Совокупность элементов  $\{x\} = X$  образует *вещественное линейное пространство*, если для любых элементов  $x \in X$  введены понятия: суммы со свойствами

$$x_1 + x_2 = x_2 + x_1;$$

$$x_1 + 0 = x_1;$$

$$x_1 + (-x_1) = 0;$$

произведения на любое вещественное число  $\alpha$  со свойствами

$$\alpha(x_1 + x_2) = \alpha x_1 + \alpha x_2;$$

$$(\alpha_1 + \alpha_2)x = \alpha_1 x + \alpha_2 x;$$

$$\alpha_1(\alpha_2 x) = (\alpha_1 \alpha_2)x.$$

*Определение 2.* Вещественное линейное пространство называется *метрическим*, если в нем введено определенным образом понятие расстояния между его элементами — *метрика*.

**Определение 3.** Скалярную неотрицательную величину  $\rho(x, y)$  называют *метрикой* пространства  $X$ , если для любых  $x, y \in X$  выполняется:

$$\begin{aligned} \rho(x, y) &= \rho(y, x) \text{ для } x \neq y; \\ \rho(x, x) &= 0; \\ \rho(x, y) &\leq \rho(x, z) + \rho(z, y); \quad x < z < y. \end{aligned}$$

**Определение 4.** Вещественное линейное пространство называется *нормированным*, если каждому элементу  $x \in X$  поставлено в соответствие неотрицательное число  $\|x\|$  и называемое *нормой*, удовлетворяющее условиям:

$$\begin{aligned} \|x\| &\geq 0, \\ \|\alpha x\| &= |\alpha| \cdot \|x\|, \\ \|x + y\| &\leq \|x\| + \|y\|. \end{aligned} \quad (1.11)$$

В линейном нормированном пространстве метрику вводят как норму разности между элементами

$$\rho(x, y) = \|x - y\|.$$

Наиболее употребительны следующие виды норм:

$L^1$ -норма — среднее значение на интервале  $[0, T]$ :

$$\|f(x)\|_{L^1} = \frac{1}{T} \left| \int_0^T f(x) dx \right|. \quad (1.12)$$

$L^2$ -норма — эффективное значение погрешности на  $[0, T]$ :

$$\|f(x)\|_{L^2} = \frac{1}{T} \left| \int_0^T f^2(x) dx \right|. \quad (1.13)$$

$M$ -норма — мажоранта для всех значений абсолютной погрешности:

$$\|f(x)\|_M = \max_x |f(x)|. \quad (1.14)$$

Последовательность  $\{x_n\}$  элементов пространства  $X$  называется сходящейся к элементу  $x_0 \in X$ , если из того, что  $\|x_m - x_n\| \rightarrow 0$ ,  $m, n \rightarrow \infty$  следует существование такого  $x_0 \in X$ , что

$$x_n \rightarrow x_0.$$

Нормированное пространство  $X$  называется *полным*, если каждая последовательность  $\{x_n\}$  сходится.

Полное нормированное пространство называется *Банаховым* или *B-пространством*.

## 1.6. ТОЧНЫЙ И ПРИБЛИЖЕННЫЙ АЛГОРИТМЫ

Пусть имеем задачу

$$y = A(x).$$

Обозначим  $A^*(x)$  — приближенный алгоритм;  $\tilde{x}$  — приближенные значения исходных данных ( $\tilde{x} = x \pm \Delta$ );  $\hat{A}^*(x)$  — приближенный алго-

ритм с учетом вычислительных погрешностей и погрешностей исходных данных. Тогда в общем виде вычислим погрешности:

$$\begin{aligned}\delta^{(1)} &= A(x) - A^*(x); \\ \delta^{(2)} &= A^*(x) - A^*(\tilde{x}); \\ \delta^{(3)} &= A^*(\tilde{x}) - A^*(\hat{x}).\end{aligned}$$

Полная погрешность может быть выражена в виде

$$\delta = A(x) - \hat{A}^*(x),$$

отсюда

$$\|\delta\| \leq \|\delta^{(1)}\| + \|\delta^{(2)}\| + \|\delta^{(3)}\|.$$

Практический интерес представляют лишь те приближенные алгоритмы, которые обладают свойством *сходимости*.

Алгоритм обладает свойством сходимости, если существуют параметры, надлежащий выбор которых (при условии точного задания входных данных и точного выполнения элементарных операций) позволяет сделать погрешность  $\delta$  сколь угодно малой для входных функций из заданного класса.

Система параметров называется минимальной для приближенного алгоритма, если отказ от любого из них нарушает свойство сходимости.

### 1.7. ТРЕБОВАНИЯ К ОЦЕНКАМ ПОГРЕШНОСТЕЙ

С целью правильной организации процесса его результирующая погрешность должна оцениваться априорно.

Точность алгоритмов представляется зависимостью нормы результирующей погрешности  $\delta$  от: нормы входных погрешностей

$$\|\delta_x\| = \{\|\delta_{x_1}\|, \|\delta_{x_2}\|, \dots, \|\delta_{x_n}\|\};$$

параметров минимальной системы  $\gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s\}$ ; норм (или их мажорант) погрешностей операций  $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_l\}$ . То есть  $\|\delta\| = g(\|\delta_x\|, \gamma, \sigma) < \delta_{\text{доп}}$ , где  $\delta_{\text{доп}}$  — допустимая погрешность.

Нормы входных погрешностей, как правило, известны редко, чаще известны их мажоранты  $\hat{\delta}_{x_i}$ ,  $i = 1, n$ .

Поэтому целесообразно точность алгоритма характеризовать следующим образом:

$$r(\hat{\delta}_x, \gamma, \sigma) = \sup_{\delta_x} g(\|\delta_x\|, \gamma, \sigma),$$

тогда  $\|\delta\| \leq r(\hat{\delta}_x, \gamma, \sigma) \leq \delta_{\text{доп}}$  — оценка погрешности решения задачи.

### 1.8. ПОЛУЧЕНИЕ ОЦЕНОК ПОГРЕШНОСТЕЙ

Рассмотрим некоторую линейную ограниченную операцию  $A(x_1, x_2, \dots, x_k)$  над входами  $(x_1, \dots, x_k)$  ( $A^*$  — приближенная операция, определяющаяся вычислительным процессом).

Пусть схема алгоритма имеет вид:

$$\mathbf{y}^* = \begin{bmatrix} y_1^* \\ y_2^* \\ \vdots \\ y_n^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^*(y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*; x_1, x_2, \dots, x_k) \\ A_2^*(y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*; x_1, x_2, \dots, x_k) \\ \vdots \\ A_n^*(y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*; x_1, x_2, \dots, x_k) \end{bmatrix}. \quad (1.15)$$

Пусть известна оценка для разности операций

$$\|A(x_1, x_2, \dots, x_k) - A^*(x_1, x_2, \dots, x_k)\| \leq c(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s),$$

если входные данные точные.

В случае неточных значений входных данных имеем вместо системы (1.15) следующую:

$$\tilde{\mathbf{y}}^* = \begin{bmatrix} \tilde{y}_1^* \\ \tilde{y}_2^* \\ \vdots \\ \tilde{y}_n^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_1^*(\tilde{y}_1^*, \tilde{y}_2^*, \dots, \tilde{y}_n^*; x_1, x_2, \dots, x_k) \\ \tilde{A}_2^*(\tilde{y}_1^*, \tilde{y}_2^*, \dots, \tilde{y}_n^*; x_1, x_2, \dots, x_k) \\ \vdots \\ \tilde{A}_n^*(\tilde{y}_1^*, \tilde{y}_2^*, \dots, \tilde{y}_n^*; x_1, x_2, \dots, x_k) \end{bmatrix}. \quad (1.16)$$

Оценка операции  $\|A_i - \tilde{A}_i^*\|$  представляет собой линейную комбинацию мажорант входных переменных, выходных переменных и некоторых констант:

$$\alpha_i + \sum_{j=1}^n \beta_{ij} \hat{\delta}_{y_j} + \sum_{j=1}^k \xi_{ij} \hat{\delta}_{x_j}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Вычтем из (1.15) (1.16):

$$\|y_i^* - \tilde{y}_i^*\| \leq \alpha_i + \sum_{j=1}^n \beta_{ij} \hat{\delta}_{y_j} + \sum_{j=1}^k \xi_{ij} \hat{\delta}_{x_j}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Для мажорант выходных переменных получаем

$$\hat{\delta}_{y_i^*} = \alpha_i + \sum_{j=1}^n \beta_{ij} \hat{\delta}_{y_j} + \sum_{j=1}^k \xi_{ij} \hat{\delta}_{x_j}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (1.17)$$

Выражение (1.17) является алгоритмом для получения мажорант погрешностей. Используя его и задаваясь допустимыми значениями выходных переменных, можно определить допустимые погрешности входных переменных.

### Задания для самостоятельной работы

1. Округлить сомнительные цифры чисел, оставив верные значащие цифры.  
2. Найти предельные абсолютные и относительные погрешности результата указанных операций  $y = y(a_1, a_2)$ .

1)  $a_1 = 0,235 \pm 0,002$ ;  $a_2 = 2,751 \pm 0,025$ ;  $y = a_1 + a_2$ ;  $y = a_2/a_1$ .

2)  $a_1 = 11,44 \pm 0,01$ ;  $a_2 = 2,036 \pm 0,015$ ;  $y = a_1 - a_2$ ;  $y = a_1 \cdot a_2$ .

3)  $a_1 = \pi \pm 0,001$ ;  $a_2 = \cos 25^\circ \pm 0,001$ ;  $y = a_1 - a_2$ ;  $y = a_1 \cdot a_2$ .

4)  $a_1 = 2,8 \pm 0,3$ ;  $a_2 = 25,8 \pm 0,05$ ;  $y = a_1 + a_2$ ;  $y = a_1/a_2$ .

5)  $a_1 = 2,56 \pm 0,005$ ;  $a_2 = 1,2 \pm 0,05$ ;  $y = a_1 - a_2$ ;  $y = a_1 \cdot a_2$ .

6)  $a_1 = 3,85 \pm 0,01$ ;  $a_2 = 2,043 \pm 0,0004$ ;  $a_3 = 962,6 \pm 01$ ;  $y = a_1 \cdot a_2/a_3$

- 7)  $a_1 = 7,27 \pm 0,01$ ;  $a_2 = 5,205 \pm 0,002$ ;  $a_3 = 87,32 \pm 0,03$ ;  $y = a_1/(a_1 + a_3)$ ;  
 $y = a_1/a_2 \cdot a_3$ .  
 8)  $a_1 = 228,6 \pm 0,06$ ;  $a_2 = 86,4 \pm 0,2$ ;  $a_3 = 68,7 \pm 0,05$ ;  $y = a_1 a_2 \sqrt{a_3}$ .  
 9)  $a_1 = 315,6 \pm 0,5$ ;  $a_2 = 72,5 \pm 0,3$ ;  $a_3 = 53,8 \pm 0,04$ ;  $y = a_1/(a_2 a_3)$ .  
 10)  $a_1 = 186,7 \pm 0,4$ ;  $a_2 = 66,6 \pm 0,2$ ;  $a_3 = 72,3 \pm 0,3$ ;  $y = a_1/a_2 \cdot a_3$ .  
 11)  $\pi = 3,14$ ;  $D = 54 \pm 0,5$ ;  $d = 8,235 \pm 0,001$ ;  $y = \pi^2/4 \cdot Dd^2$ .  
 12)  $\pi = 3,14$ ;  $D = 72 \pm 0,3$ ;  $d = 3,274 \pm 0,002$ ;  $y = \pi/4 \cdot Dd^2$ .  
 13)  $\pi = 3,14$ ;  $D = 35 \pm 0,1$ ;  $d = 7,345 \pm 0,001$ ;  $y = \pi/4 \cdot Dd^2$ .  
 14)  $\pi = 3,141$ ;  $D = 38 \pm 0,2$ ;  $d = 6,362 \pm 0,004$ ;  $y = \pi/4 \cdot Dd^2$ .

## Глава 2. ЭЛЕМЕНТЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕННЫХ МЕТОДОВ

### 2.1. АППРОКСИМАЦИЯ И СХОДИМОСТЬ

Пусть даны метрические пространства  $X$ ,  $Y$  и функция  $f$ , определенная на  $D(f) \subset X$ . Требуется решить уравнение

$$f(x) = y^*, \quad y^* \in Y. \quad (2.1)$$

Будем считать, что решение  $y^*$  (2.1) существует и оно единственно.

Необходимо отыскать приближенный элемент  $x^*$ . Для этого разрабатывается алгоритм, который выдает последовательность  $\{x^{(k)}\}$  приближенных решений,  $\{x^{(k)}, k = 1, 2, \dots\} \in X$ , причем так, что есть основания надеяться на сходимость:  $x^{(k)} \rightarrow x^*$ .

Возникают следующие задачи:

1. Проверка, что действительно

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x^*. \quad (2.2)$$

2. Получение оценки для

$$\sigma_k = r_x(x^{(k)}, x^*).$$

3. Оценка порядка стремления к нулю последовательности  $\{\sigma_k\}$ . То есть, указывается такая последовательность  $\{\beta_k\} \rightarrow 0$ , что

$$\sigma_k < c\beta_k,$$

где  $c$  — некоторая постоянная.

Такая задача представляет интерес, если сходимость установлена, но нахождение оценки для  $\sigma_k$  затруднительно.

Для построения последовательности  $\{x^{(k)}\}$  применяется много методов, большинство из которых можно разбить на две группы: итерационные методы и методы сведения к более простым уравнениям.

Общая схема большинства итерационных методов состоит в следующем.

Уравнение (2.1) преобразуется к виду

$$x = Q(x). \quad (2.3)$$

$Q: X \rightarrow X$ , причем  $Q$  — такая функция, что  $x^*$  есть единственное решение уравнения (2.3).

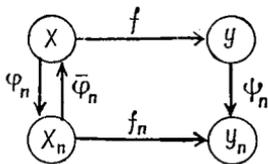


Рис. 1.

Произвольно полагают  $x^{(0)}$ , тогда

$$x^{(k+1)} = Q(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Вводим пространства  $X_n$  и  $Y_n$ , аппроксимирующие в каком-то смысле пространства  $X$  и  $Y$ . Обычно  $X_n$  и  $Y_n$  — конечномерные пространства.

Связь между парами  $X$  и  $X_n$ , и  $Y$  и  $Y_n$  будем считать заданной операторами (рис. 1).

$$\varphi_n: X \rightarrow X_n; \quad \bar{\varphi}_n: X_n \rightarrow X;$$

$$\psi_n: Y \rightarrow Y_n; \quad f_n: X_n \rightarrow Y_n.$$

Уравнение (2.1) заменяется на приближенное:

$$f_n(x_n) = \psi_n(y^*). \quad (2.4)$$

Оператор  $\bar{\varphi}_n$  — не обратный  $\varphi_n$ . Обозначим решение (единственное) уравнения (2.4) при каждом  $n$   $x_n^* \in X_n$ .

Приближенным решением уравнения (2.1) будем называть элемент

$$x^{(n)} = \bar{\varphi}_n(x_n^*) \in X.$$

Заметим, что  $x^{(n)}$  может не принадлежать области  $D(f)$ , так как действует из  $X_n$  в  $X$ , а не в  $D(f) \subset X$ .

Близость приближенного решения  $x^{(n)}$  к точному  $x^*$  измеряется величиной  $\sigma_n = r_x(x^{(n)}, x^*)$ .

Наблюдается сходимость приближенных решений, если  $\sigma_n \rightarrow 0$ .

Введем обозначения:  $D(C)$  — область задания,  $R(C)$  — область значений;  $C$  — оператор ( $C: U \rightarrow V$ ).

Предположим, что  $X$  и  $Y$  — вещественные линейные нормированные пространства и уравнение (2.1) имеет вид

$$Ax = y^*, \quad (2.6)$$

$A$  — линейный оператор из  $X$  в  $Y$ .

Единственность решения уравнения (2.6) равносильна существованию линейного оператора  $A^{-1}$ , определенного на  $D(A^{-1}) = R(A)$  и с областью значений  $R(A^{-1}) = D(A)$ .

Предположим также, что уравнение (2.4) линейное, поэтому вместо  $f_n$  будем писать  $A_n$ :

$$A_n: X_n \rightarrow Y_n.$$

В дальнейшем считаем, что соблюдены условия:

а) пространства  $X_n$  и  $Y_n$  — конечномерные;

б)  $D(A_n) = X_n$ ;  $R(A_n) = Y_n$ ;

в) существует  $A_n^{-1}$ ;

г)  $D(\psi_n) = Y_n$ ;

д)  $D(\varphi_n) = X_n$ ;

Из а) — в) следует, что размерности  $X_n$  и  $Y_n$  совпадают и что  $A_n$  и  $A_n^{-1}$  — ограниченные операторы.

Приближенное уравнение (2.4) запишется в виде

$$A_n x_n = \psi_n y^*. \quad (2.7)$$

Будем считать, что уравнение (2.7) аппроксимирует уравнение (2.6) (или оператор  $A_n$  аппроксимирует оператор  $A$ ) на элементе  $x \in D(A)$ , если мера аппроксимации

$$\gamma_n(x) = \|A_n \varphi_n x - \psi_n A x\|_{Y_n} \rightarrow 0. \quad (2.8)$$

Условие аппроксимации:  $\gamma_n(x) \rightarrow 0$ .

На рис. 2 представлена схема аппроксимации уравнения (2.6) уравнением (2.7).

Значительная часть результатов, относящихся к сходимости приближенных решений, может быть получена с помощью следующей теоремы.

*Теорема.* Если  $v_n \equiv \|A_n^{-1}\| \gamma_n(x^*)$ ;  $\omega_n \equiv \|\bar{\varphi}_n\| v_n \rightarrow 0$  и  $\bar{\varphi}_n \varphi_n x^* \rightarrow x^*$ , то имеет место сходимость приближенных решений. Точнее,

$$\sigma_n = \|x^{(n)} - x^*\| \leq \omega_n + \|\bar{\varphi}_n \varphi_n x^* - x^*\|.$$

Действительно, имеем  $\|x^{(n)} - x^*\| = \|\bar{\varphi}_n x_n^* - x^*\| \leq \|\bar{\varphi}_n x_n^* - \bar{\varphi}_n \varphi_n x^*\| + \|\bar{\varphi}_n \varphi_n x^* - x^*\| \leq \|\bar{\varphi}_n\| \cdot \|x_n^* - \varphi_n x^*\| + \|\bar{\varphi}_n \varphi_n x^* - x^*\|.$

$$A_n x_n^* = \psi_n y^* = \varphi_n A x^*.$$

$$\|\varphi_n x^* - x_n^*\| \leq \|A_n^{-1}\| \|A_n \varphi_n x^* - A_n x_n^*\| \leq \|A_n^{-1}\| \gamma_n(x^*).$$

$$\|x^{(n)} - x^*\| \leq \|\bar{\varphi}_n\| \cdot v_n + \|\bar{\varphi}_n \varphi_n x^* - x^*\|.$$

*Следствие.* Если  $A_n$  аппроксимируют  $A$  на  $x^*$ , и операторы  $A_n^{-1}$  и  $\varphi_n$  ограничены в совокупности, и  $\bar{\varphi}_n \varphi_n x^* \rightarrow x^*$ , то наблюдается сходимость приближенных решений.

## 2.2. КОРРЕКТНОСТЬ

Пусть  $X, Y$  — линейные нормированные пространства,  $A$  — линейный оператор из  $X$  в  $Y$  с областью задания  $D(A) \subset X$ , кроме того,  $X$  и  $Y$  — полные пространства.

Предполагается, что существуют оператор  $A^{-1}$  и элемент  $y^* \in R(A)$  такие, что

$$Ax = y^*$$

имеет единственное решение  $x^*$ .

При решении (2.6) необходимо считаться с погрешностями разного происхождения.

Погрешности *первого рода* обусловлены возможными искажениями как в  $y^*$ , так и в  $A$ .

Тогда вместо (2.6) решается уравнение

$$(A + B)x = y^* + \eta. \quad (2.9)$$

Погрешности *второго рода* появляются в процессе решения (2.6). Их можно разделить на две группы: погрешности метода; вычислительные погрешности.

Оператор  $A$  называется корректным, если  $R(A) = Y$  и существует ограниченный оператор  $A^{-1}$ .

Уравнение (2.6) называется *корректным*, если корректный оператор  $A$ .

Рассмотрим сначала уравнение

$$Ax = y^* + \eta. \quad (2.10)$$

Если  $A$  — корректный оператор, то (2.10) имеет единственное решение, которое обозначим  $x^* + \xi$ , причем  $\xi$  удовлетворяет уравнению

$$A\xi = \eta$$

так, что  $\xi = A^{-1}\eta$ . Поэтому

$$\|\xi\| \leq A^{-1} \cdot \|\eta\|. \quad (2.11)$$

Теперь рассмотрим уравнение

$$(A + B)x = y^*. \quad (2.12)$$

Если оператор  $B$  — ограниченный и малый по норме, справедлива *лемма*:

Пусть  $X$  полно,  $C$  — ограниченный оператор из  $X$  в  $X$  и  $\|C\| < 1$ . Тогда существует оператор  $[E + C]^{-1}$  и

$$\|[E + C]^{-1} - E\| \leq \frac{\|C\|}{1 - \|C\|}, \quad \|[E + C]^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|C\|}$$

( $E$  — тождественный оператор в  $X$ ).

Пусть  $\|A^{-1}B\| \leq \rho < 1$ .

Пусть уравнения (2.6), (2.10) и (2.9) имеют соответственно решения  $x^*$ ,  $x^{**}$ ,  $x^{***}$ .

Обозначим:

$$\mu(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|.$$

Поскольку  $\|y^*\| \leq \|A\| \cdot \|x^*\|$ , то

$$\frac{\|x^{***} - x^*\|}{\|x^*\|} \leq \frac{\mu(A)}{1 - \mu(A) \cdot \|B\|/\|A\|} \left[ \frac{\|B\|}{\|A\|} + \frac{\|\eta\|}{\|y^*\|} \right]. \quad (2.13)$$

Это неравенство позволяет оценить относительную погрешность при определении  $x^*$  через относительные погрешности в правой части и в операторе.

Рассмотрим вычислительные погрешности и ограничимся апостериорными оценками, реализация которых не зависит от происхождения погрешности.

Пусть  $x \in D(A)$  — приближенное решение (2.6) и мы умеем возможно точно или с пренебрежимо малой погрешностью вычислить  $A\tilde{x}$ . Элемент

$$\delta = A\tilde{x} - y^*$$

называется невязкой в (2.6), отвечающей приближенному решению  $\tilde{x}$ . Если оператор  $A$  — корректный, то с учетом (2.11)

$$\|\tilde{x} - x^*\| \ll \|A^{-1}\| \cdot \|\delta\|.$$

Рассмотрим (2.9). Невязка

$$\delta = (A + B)\tilde{x} - (y^* + \eta).$$

Очевидно, что  $\tilde{x}$  удовлетворяет уравнению

$$(A + B)x = y^* + \eta + \delta.$$

Тогда

$$\frac{\|\tilde{x} - x^*\|}{\|x^*\|} \leq \frac{\mu(A)}{1 - \mu(A)\|B\|/\|A\|} \cdot \left[ \frac{\|B\|}{\|A\|} + \frac{\|\eta\| + \|\delta\|}{\|y^*\|} \right].$$

Пример 2.1. Пусть  $X = Y = C[0; 1]$ ,  $D(A) = X$  и

$$y = Ax$$

означает, что  $y(s) = \int_0^s x(t) dt$ .  $R(A)$  — множество функций, аннулирующихся в нуле и непрерывных вместе с первой производной. Оператор  $A$  имеет  $A^{-1}$ , определенный в области  $R(A)$ .

$$\begin{aligned} x &= A^{-1}y; \\ x(s) &= dy/ds. \end{aligned}$$

Однако оператор  $A^{-1}$  — не ограниченный оператор из пространства  $C$  в  $C$  и  $R(A) \neq C$ .

Для искажения  $\eta$  в правой части уравнения нельзя выбирать в качестве  $Y$  пространство с метрикой, более сильной, чем метрика  $C[0; 1]$ . Иначе не будет обеспечено включение  $\eta \in Y$ .

### 2.3. УСТОЙЧИВОСТЬ

Уравнение

$$A_n x_n = \psi_n y_n$$

ухудшается с увеличением  $n$  за счет относительно небольших искажений в исходных данных и погрешностей второго рода, что приводит к грубым погрешностям при определении приближенного решения.

Обратимся к уравнению (2.6)

$$Ax = y^*.$$

Алгоритм приближенного решения этого уравнения разбивается на два этапа: нахождение  $x_n^*$  с помощью решения (2.7)

$$A_n x_n = y_n^*, \quad y_n^* = \psi_n y^*,$$

и вычисление  $x^{(n)}$  по формуле

$$x^{(n)} = \bar{\varphi}_n x_n^*.$$

При составлении (2.7) обычно допускается искажение, в результате чего решается уравнение

$$(A_n + \Delta A_n) x_n = y_n^* + \Delta y_n^*$$

где  $A$  — операторы из  $X_n$  в  $Y_n$ ,  $\Delta y_n^* \in Y_n$ .

Искажения  $\Delta A_n$  и  $\Delta y_n^*$  называются погрешностями в данных задачи (для уравнения (2.7)).

Наличие погрешностей второго рода ведет к тому, что найденное значение каркаса приближенного решения  $x_n^* + \Delta x_n^*$  удовлетворяет лишь тождеству

$$(A_n + \Delta A_n)(x_n^* + \Delta x_n^*) = y_n^* + \Delta y_n^* + \delta_n,$$

где  $\delta_n$  — невязка.

Как правило, невязку включают в искажение правой части (2.7) и поэтому в дальнейшем ее не учитывают.

Назовем разностную схему (2.7) устойчивой, если при любом  $y_n \in Y_n$  уравнение

$$A_n(x_n + \Delta x_n) = y_n + \Delta y_n$$

имеет единственное решение  $x_n + \Delta x_n$ , причем отклонение  $\Delta x_n$  от решения  $x_n$  удовлетворяет неравенству

$$\|\Delta x_n\|_{X_n} \leq c \|\Delta y_n\|_{Y_n},$$

где  $c$  — некоторая постоянная.

### Глава 3. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим систему  $n$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными  $x_1, x_2, \dots, x_n$ :

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= d_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= d_2; \\ \dots & \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= d_n, \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

где коэффициенты  $a_{ij}$ ,  $i, j = \overline{1, n}$  — действительные числа.

Запишем (3.1) в матричном виде

$$Ax = d, \quad (3.2)$$

где  $A = [a_{ij}]_1^n$ ,  $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ ,  $T$  — символ транспонирования.

Решение систем линейных уравнений является одной из важных вычислительных задач, часто встречающихся в прикладной математике. (К решению систем линейных уравнений сводится ряд задач анализа, связанных с приближением функций, решением систем дифференциальных и интегральных уравнений и т. д.)

При формальном подходе решение систем линейных уравнений несложно, если раскрыть определители в формуле Крамера. Однако, при непосредственном раскрытии определителей решение системы с  $n$

неизвестными требует  $n!$  арифметических операций; уже при  $n = 30$  такое число операций недоступно современным ЭВМ.

Другой причиной, по которой этот классический способ неприменим даже при малых  $n$ , является сильное влияние округлений на окончательный результат.

Решением системы линейных уравнений (3.2) называется любая совокупность чисел  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , которая при подстановке в (3.2) вместо  $x_1, x_2, \dots, x_n$  превращает систему уравнений в тождества.

Система уравнений (3.2) называется *совместной*, если она имеет решение. Если же решения нет, система называется *несовместной* или противоречивой. Если система (3.2) имеет единственное решение, то она называется определенной, и неопределенной — если она имеет более одного решения.

Для существования единственного решения должно выполняться условие  $\det [A] \neq 0$ .

Методы решения систем линейных уравнений бывают точные и приближенные. Метод решения задачи относится к классу точных, если в предположении отсутствия округлений он дает точное решение задачи после конечного числа арифметических и логических операций.

### 3.1. МЕТОД ГАУССА

Из точных методов решения систем линейных уравнений рассмотрим известный из курса линейной алгебры метод Гаусса, реализация которого по схеме единственного деления требует выполнения  $n(4n^2 - 3n - 4)/6$  арифметических операций. Рассмотрим решение систем линейных уравнений методом Гаусса по схеме Халецкого, для реализации которой необходимо  $n(2n - 1)$  арифметических операций.

Матрица коэффициентов  $A$  представляется в виде произведения двух треугольных матриц, т. е.

$$A = CB. \quad (3.3)$$

Матрица  $C$  — нижняя треугольная;  $B$  — верхняя треугольная, причем диагональные коэффициенты матрицы  $B$  равны единице.

Подставим (3.3) в (3.2):

$$CBx = d. \quad (3.4)$$

Обозначим

$$Bx = y$$

и перепишем (3.4) в виде

$$Cy = d. \quad (3.5)$$

Решение (3.5) называется прямым ходом метода Гаусса, решение (3.4) — обратным ходом метода Гаусса.

Таким образом, первым шагом при решении поставленной задачи является разбиение матрицы  $A$  на две треугольные матрицы  $C$  и  $B$ .

Коэффициенты матриц  $C$  и  $B$  вычисляются последовательно. Сначала вычисляется первый столбец матрицы  $C$ :  $c_{i1} = a_{i1}$ ,  $i = \overline{1, n}$ , затем вычисляется первая строка матрицы  $B$ :  $b_{1i} = a_{1i}/a_{11}$ ,  $i = \overline{2, n}$ , и эле-

мент  $y_1 = d_1/a_{11}$ ; затем — элементы второго столбца матрицы  $C$ :  $c_{i2} = a_{i2} - c_{i1}b_{12}$ ,  $i = 2, n$ , после этого вычисляются элементы второй строки матрицы  $B$ :  $b_{2i} = (a_{2i} - c_{21}b_{1i})/c_{22}$  и элемент  $y_2 = (d_2 - c_{21}y_1)/c_{22}$  и т. д.

После того как будут вычислены элементы матриц  $C$  и  $B$ , а также вектор  $y$ , находятся искомые неизвестные  $x_i$ :

$$x_n = y_n;$$

$$x_{n-i} = y_{n-i} - \sum_{j=n-i+1}^n b_{n-i, j} x_j.$$

Алгоритм вычисления элементов матрицы  $C$  и  $B$ , а также элементов векторов  $y$  и  $x$  удобно представлять в виде таблицы, например, для  $n = 5$ .

I	III	V	VII	IX		
$c_{11}$	$b_{12}$	$b_{13}$	$b_{14}$	$b_{15}$	$y_1$	II
$c_{21}$	$c_{22}$	$b_{23}$	$b_{24}$	$b_{25}$	$y_2$	IV
$c_{31}$	$c_{32}$	$c_{33}$	$b_{34}$	$b_{35}$	$y_3$	VI
$c_{41}$	$c_{42}$	$c_{43}$	$c_{44}$	$b_{45}$	$y_4$	VIII
$c_{51}$	$c_{52}$	$c_{53}$	$c_{54}$	$c_{55}$	$y_5$	X
$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	—	XI

Последовательность вычисления элементов обозначена римскими цифрами. Для определения  $c_{ij}$  необходимо умножить элемент таблицы  $c_{ik}$ , который находится слева от  $c_{ii}$  в строке  $i$ , на соответствующий элемент таблицы  $b_{kj}$ , расположенный сверху от  $c_{ii}$  в столбце  $j$ , и получаемые результаты сложить. Например, для вычисления  $c_{4,4}$  нужно определить

$$c_{4,1}b_{1,4} + c_{4,2}b_{2,4} + c_{4,3}b_{3,4} = c'_{4,4}.$$

Полученный результат вычитают из соответствующего элемента матрицы  $A$ :

$$c_{4,4} = a_{4,4} - c'_{4,4}.$$

Для вычисления элементов матрицы  $B$  и вектора  $y$  результат, полученный по аналогии с вычислением  $c_{ij}$ , делят на  $c_{ii}$ . Например,

$$b_{4,5} = c_{4,1}b_{1,5} + c_{4,2}b_{2,5} + c_{4,3}b_{3,5}; \quad b_{4,5} = (a_{4,5} - b'_{4,5})/c_{4,4}.$$

Таким же образом вычисляют и  $y_i$ :

$$y'_4 = c_{4,1}y_1 + c_{4,2}y_2 + c_{4,3}y_3; \quad y_4 = (d_4 - y'_4)/c_{4,4}.$$

Обратный ход — нахождение  $x_i$  — осуществляется так:  $x_5 = y_5$ . Для вычисления  $x_4$  перемножают четвертую строку матрицы  $B$  на вектор  $x$  и вычитают полученное значение из  $y_4$ :

$$x_4 = y_4 - x_5 b_{4,5}; \quad x'_3 = x_5 b_{3,5} + x_4 b_{3,4}; \quad x_3 = y_3 - x'_3.$$

В компактном виде алгоритм имеет вид

$$b_{i,i} = 1; \quad b_{1,i} = a_{1,i}/a_{1,1}; \quad c_{i,1} = a_{i,1}; \quad i = \overline{1, n};$$

$$y_1 = d_1/a_{1,1}; \quad c_{k,i} = a_{k,i} - \sum_{j=1}^{i-1} c_{k,j}b_{j,i}; \quad k = \overline{i, n}; \quad i = \overline{2, n};$$

$$b_{i,k} = (a_{i,k} - \sum_{j=1}^{i-1} c_{i,j}b_{j,k})/c_{i,i}; \quad k = \overline{i+1, n};$$

$$y_i = (d_i - \sum_{j=1}^{i-1} c_{i,j}y_j)/c_{i,i}; \quad x_{n,n} = y_n;$$

$$x_{n-i} = y_{n-i} - \sum_{j=n-i+1}^n b_{n-i,j}x_j.$$

Пример 3.1.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 6 \end{bmatrix}; \quad d = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Составим таблицу из матриц  $C$ ,  $B$ , векторов  $y$  и  $x$ :

$2 \setminus 1$	1,5	3	0,5	1	$y$
4	$-4 \setminus 1$	2,75	0	B	0,25
C 1	1,5	$-6,125 \setminus 1$	-0,082		0,39
3	-3,5	1,625	$4,633 \setminus 1$		0,27
0,95	-0,877	0,41	0,268	$x$	

I.  $c_{i,1} = a_{i,1}; \quad i = \overline{1,4};$

II.  $b_{1,i} = a_{1,i}/a_{1,1}; \quad y_1 = d_1/a_{1,1};$

III.  $c_{2,2} = a_{2,2} - c_{2,1}b_{1,2} = 2 - 4 \cdot 1,5 = -4; \quad c_{3,2} = 3 - 1 \cdot 1,5 = 1,5.$

IV.  $b_{2,3} = (a_{2,3} - c_{2,1}b_{1,3})/c_{2,2} = -\frac{1}{4}(1 - 4 \cdot 3) = 2,75; \quad b_{2,4} = -\frac{1}{4}(2 - 2) = 0;$   
 $y_2 = (d_2 - c_{2,1}y_1)/c_{2,2} = -1/4(3 - 4 \cdot 1) = 0,25.$

V.  $c_{3,3} = a_{3,3} - (c_{3,1}b_{1,3} + c_{3,2}b_{2,3}) = 1 - (1 \cdot 3 + 1,5 \cdot 2,75) = -6,125, \quad c_{4,3} =$   
 $= a_{4,3} - (c_{4,1}b_{1,3} + c_{4,2}b_{2,3}) = 1 - (3 \cdot 3 - 3,5 \cdot 2,75) = 1,625.$

VI.  $b_{3,4} = (a_{3,4} - c_{3,1}b_{1,4} - c_{3,2}b_{2,4})/c_{3,3} = -\frac{1}{6,125}(1 - 1 \cdot 0,5 - 1,5 \cdot 0) = -0,08.$

VII.  $y_3 = -\frac{1}{6,125}(-1 - 1 \cdot 1 - 1,5 \cdot 0,25) = 0,39; \quad c_{4,4} = 6 - (0,5 \cdot 3 - 3,5 \cdot 0 - 1,625 \cdot 0,082) = 4,633.$

VIII.  $y_4 = x_4 = (6 - 3 \cdot 1 + 3,5 \cdot 0,25 + 1,625 \cdot 0,39)/4,633 = 0,27.$

Обратный ход метода Гаусса:

$$x_3 = y_3 - x_4b_{3,4} = 0,39 - 0,27 \cdot 0,082 = 0,41;$$

$$x_2 = y_2 - x_3b_{2,3} - x_4b_{2,4} = 0,25 - 0,41 \cdot 2,75 - 0,27 \cdot 0 = -0,877;$$

$$x_1 = y_1 - x_2b_{1,2} - x_3b_{1,3} - x_4b_{1,4} = 1 + 0,877 \cdot 1,5 - 0,41 \cdot 3 - 0,27 \cdot 0,5 = 0,95.$$

Проверим полученное решение:

$$2 \cdot 0,95 - 3 \cdot 0,88 + 60,41 + 1 \cdot 0,268 = 1,997.$$

Погрешность в третьем знаке после запятой возникла за счет округлений при вычислении вручную.

### 3.2. МЕТОД ПРОСТОЙ ИТЕРАЦИИ

Приведем определения основных норм в пространствах векторов и матриц. Если в пространстве векторов  $x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$  введена норма  $\|x\|$ , то согласованной с ней нормой в пространстве матриц  $A$  называют норму

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Рассмотрим нормы вектора  $x$ :

$$\|x\|_1 = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|;$$

$$\|x\|_2 = \sum_{j=1}^n |x_j|;$$

$$\|x\|_3 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} = \sqrt{(x, x)},$$

где  $(x, x)$  — скалярное произведение вектора  $x$  на  $x$ .

Согласованные с ними нормы в пространстве матриц следующие:

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|, \quad (3.7)$$

$$\|A\|_2 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|, \quad (3.8)$$

$$\|A\|_3 = \sqrt{\max_{1 \leq i \leq n} \lambda_D^i},$$

где  $D = A^*A$ ,  $\lambda_D^i$  — собственные значения матрицы  $D$ ;  $A^*$  — матрица, сопряженная с матрицей  $A$ .

Простейшим итерационным методом решения систем линейных уравнений (3.2) является метод простой итерации. Система уравнений (3.2) преобразуется к виду

$$x = Bx + e, \quad (3.9)$$

где

$$B = [b_{ij}]_n^n; \quad b_{ij} = -a_{ij}/a_{ii}; \quad i, j = \overline{1, n}; \quad (3.10)$$

$$b_{ii} = 0; \quad e_i = d_i/a_{ii}.$$

Итерационный процесс записывается в виде

$$x^{k+1} = Bx^k + e, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.11)$$

Для сходимости метода простых итераций при любом начальном приближении  $x^0$  итерационного процесса (3.11) необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения матрицы  $B$  были по модулю меньше единицы.

Поскольку это условие связано с необходимостью решения уравнения

$$|B - \lambda E| = 0,$$

что в общем случае приводит к громоздким вычислениям (гл. 5), на практике применяется более удобный достаточный признак сходимости, связанный с понятием нормы матрицы.

**Теорема** (о достаточном условии сходимости метода простой итерации). Если  $\|B\| < 1$ , то система уравнений (3.9) имеет единственное решение и итерационный процесс (3.11) сходится к решению со скоростью геометрической прогрессии.

**Доказательство.** Применяя к системе уравнений (3.9) неравенство треугольника (2.3), получим:  $\|x\| \leq \|B\| \cdot \|x\| + \|e\|$ , откуда  $\|x\|(1 - \|B\|) \leq \|e\|$ , или  $\|x\| \leq (1 - \|B\|)^{-1} \|e\|$ . Следовательно, система уравнений (3.9) имеет единственное решение. Обозначим его  $x^*$ . Введем обозначение  $r^k = x^k - x^*$ . Вычтем из (3.9) (3.11):

$$r^{k+1} = B'r^k.$$

Поскольку  $r^1 = Br^0$ ,  $r^2 = Br^1 = B^2r^0$ , очевидно, равенство  $r^k = B^k r^0$ . По неравенству треугольника (1.11)

$$\|r^k\| \leq \|B^k\| \cdot \|r^0\| = \|B\|^k \cdot \|r^0\|. \quad (3.12)$$

По условию теоремы  $\|B\| < 1$ , следовательно,  $\|r^k\| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$ . Теорема доказана.

Для оценки требуемого количества итераций с целью достижения заданной точности  $\Delta$  решения можно воспользоваться неравенством (3.12):

$$\|x^k - x^*\| \leq \frac{\|B\|^k}{1 - \|B\|} \|x^1 - x^0\|.$$

Если в качестве начального приближения выбирается правая часть, то

$$\|x^k - x^*\| \leq \frac{\|B\|^{k+1}}{1 - \|B\|} \|e\|. \quad (3.13)$$

Вычислительная схема метода простой итерации.

1. Вычисляем элементы матрицы  $B$  и вектора  $e$  по (3.10).
2. Вычисляем  $\|B\|_1$ . Обозначим

$$c_i = \sum_{j=1}^n |b_{ij}|, \quad i = \overline{1, n};$$

$$\|B\| = C = \max_{1 \leq i < n} c_i.$$

Если  $C < 1$ , то итерационный процесс сходится.

3. В качестве начального приближения  $x^0$  выбираем вектор  $e$ :  $x^0 = e$ . Обозначим  $\delta^k = x^k - e$ .

Решаем систему уравнений

$$\delta^k = Bx^k.$$

Тогда

$$x^{k+1} = \delta^k + x^0.$$

4. Вычисляем необходимое количество итераций для достижения требуемой точности  $\Delta$  решения:

$$\frac{\|B\|_1^{k+1}}{1 - \|B\|_1} \|e\|_1 = \frac{C^{k+1}}{1-C} \|e_1\| \leq \Delta,$$

отсюда

$$\begin{aligned} (k+1) \lg C &\leq \lg \Delta - \lg \|e\|_1 + \lg(1-C); \\ K &> \frac{1}{\lg C} [\lg \|e\|_1 - \lg(\Delta(1-C))] - 1. \end{aligned} \quad (3.16)$$

5. Реализуем, согласно вычисленному значению  $K$ , требуемое число итераций.

**Пример 3.2.** Решим систему уравнений

$$Ax = d,$$

методом простой итерации с точностью  $\Delta = 0,05$ , где

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -1 & 2 \\ 1 & 9 & 3 \\ 2 & -3 & 10 \end{bmatrix}; \quad d = \begin{bmatrix} 8 \\ 18 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Вычисляем элементы матрицы  $B$  и вектора  $e$  по (3.10):

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1/8 & -2/8 \\ -1/9 & 0 & -3/9 \\ -0,2 & 0,3 & 0 \end{bmatrix}; \quad e = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -0,5 \end{bmatrix}.$$

Проверяем условие сходимости

$$\|B\|_1 = C = \max_{1 \leq i < n} c_i; \quad c_1 = 0,375; \quad c_2 = 0,444; \quad c_3 = 0,5,$$

т. е.  $\|B\|_1 = 0,5$ .

Выбираем начальное приближение  $x^0 = e$ .

$$x_1^0 = 1; \quad x_2^0 = 2; \quad x_3^0 = -0,5.$$

Вычисляем  $K$  по (3.16):

$$\|e\|_1 = \max_{1 \leq i \leq 3} |e_i| = 2;$$

$$K \geq \frac{1}{\lg 0,5} [\lg 2 - \lg \Delta - \lg(1 - 0,5)] - 1 = 6,1 - 1; \quad K = 6.$$

Вычисляем  $\vartheta^i = Bx^i$ ;  $i = \overline{0,5}$ ;  $x^{i+1} = \vartheta^i + x^0$ :

$$i = 1. \quad \delta_1^0 = b_{1,2}x_2^0 + b_{1,3}x_3^0 = 1/8(2 + 0,5 \cdot 2) = 0,375; \quad x_1^1 = 1 + 0,375 = 1,375;$$

$$\delta_2^0 = b_{2,1}x_1^0 + b_{2,3}x_3^0 = 1/9(-1 + 1,5) = 0,056; \quad x_2^1 = 2,056;$$

$$\delta_3^0 = b_{3,1}x_1^0 + b_{3,2}x_2^0 = -0,2 + 0,6 = 0,4; \quad x_3^1 = -0,5 + 0,4 = -0,1.$$

$$i = 2. \quad \delta_1^1 = b_{1,2}x_2^1 + b_{1,3}x_3^1 = 1/8(2,056 + 0,2) = 0,275; \quad x_1^2 = 1 + 0,275 = 1,275;$$

$$\delta_2^1 = b_{2,1}x_1^1 + b_{2,3}x_3^1 = 1/9(-1,375 + 0,3) = -0,120; \quad x_2^2 = 2 - 0,120 = 1,880;$$

$$\delta_3^1 = b_{3,1}x_1^1 + b_{3,2}x_2^1 = -0,275 + 0,61100,336; \quad x_3^2 = -0,5 + 0,336 = -0,164.$$

$$i = 3. \quad \delta_1^2 = 1/8(1,880 + 0,328) = 0,276; \quad x_1^3 = 1 + 0,276 = 1,276;$$

$$\delta_2^2 = 1/9(-1,275 + 0,492) = -0,087; \quad x_2^3 = 2 - 0,087 = 1,913;$$

$$\delta_3^2 = -0,255 + 0,492 = 0,237; \quad x_3^3 = -0,5 + 0,237 = -0,263.$$

$$\begin{aligned}
 i = 4. \quad & \delta_1^3 = 1/8 (1,913 + 0,526) = 0,305; \quad x_1^4 = 1 + 0,305 = 1,305; \\
 & \delta_2^3 = 1/9 (-1,276 + 0,789) = -0,054; \quad x_2^4 = 2 - 0,054 = 1,946; \\
 & \delta_3^3 = -0,255 + 0,574 = 0,319; \quad x_3^4 = -0,5 + 0,319 = -0,181. \\
 i = 5. \quad & \delta_1^4 = 1/8 (1,946 + 0,362) = 0,288; \quad x_1^5 = 1 + 0,288 = 1,288; \\
 & \delta_2^4 = 1/9 (-1,305 + 0,544) = -0,084; \quad x_2^5 = 2 - 0,084 = 1,916; \\
 & \delta_3^4 = -0,261 + 0,584 = 0,323; \quad x_3^5 = -0,5 + 0,323 = -0,177. \\
 i = 6. \quad & \delta_1^5 = 1/8 (1,916 + 0,354) = 0,284; \quad x_1^6 = 1 + 0,284 = 1,284; \\
 & \delta_2^5 = 1/9 (-1,288 + 0,531) = -0,084; \quad x_2^6 = 2 - 0,084 = 1,916; \\
 & \delta_3^5 = -0,258 + 0,578 = 0,320; \quad x_3^6 = -0,5 + 0,320 = -0,180.
 \end{aligned}$$

Полученные значения  $x_i^6$  принимаем за решение системы линейных уравнений с точностью  $\Delta = 0,05$ :

$$x_1^* \approx 1,28; \quad x_2^* \approx 1,92; \quad x_3^* \approx -0,18.$$

### 3.3. МЕТОД ЗЕЙДЕЛЯ

Итерационный метод Зейделя отличается от метода простой итерации тем, что на  $(k + 1)$ -й итерации при вычислении  $i$ -й компоненты вектора  $x^k$  используются значения  $x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, \dots, x_{i-1}^{k+1}$ , вычисленные на этой итерации. Итерационный процесс Зейделя имеет вид

$$\left. \begin{aligned}
 x_1^{k+1} &= \sum_{j=2}^n b_{1,j} x_j^k + e_1; \\
 x_2^{k+1} &= b_{2,1} x_1^{k+1} + \sum_{j=3}^n b_{2,j} x_j^k + e_2; \\
 &\dots \\
 x_n^{k+1} &= \sum_{j=1}^{n-1} b_{n,j} x_j^{k+1} + e_n.
 \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

В матричном виде система уравнений (3.17) имеет вид

$$x^{k+1} = Cx^{k+1} + Dx^k + e, \quad (3.18)$$

где

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_{2,1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_{3,1} & b_{3,2} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \dots & b_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix};$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & b_{1,2} & b_{1,3} & \dots & b_{1,n-1} & b_{1,n} \\ 0 & 0 & b_{2,3} & \dots & b_{2,n-1} & b_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Для сходимости метода Зейделя необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения матрицы  $[D + (C - E)\lambda]$  были по модулю меньше единицы.

Уравнение  $|D + (C - E)\lambda| = 0$  эквивалентно уравнению

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}\lambda & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1}\lambda & a_{2,2}\lambda & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1}\lambda & a_{n,2}\lambda & a_{n,3}\lambda & \dots & a_{n,n}\lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (3.19)$$

Поскольку условия сходимости метода простой итерации связаны с решением уравнения  $|B - \lambda E| = 0$ , а условия сходимости метода Зейделя — с решением (3.19), области сходимости метода простой итерации и метода Зейделя различны, т. е. может оказаться, что для некоторых систем метод Зейделя сходится, а метод простой итерации расходится, и наоборот.

Для того чтобы избежать необходимости решения (3.19), проще пользоваться достаточными условиями сходимости метода Зейделя.

*Теорема.* Пусть при всех  $i$  выполняется условие

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{i,j}| \leq q |a_{i,i}|, \quad i = \overline{1, n}, \quad q < 1. \quad (3.20)$$

Тогда

$$\|x^{k+1} - x^*\|_1 \leq q \|x^k - x^*\|_1.$$

Для определения требуемого количества итераций можно пользоваться (3.13).

*Вычислительная схема* метода Зейделя.

Для реализации метода Зейделя необходимо следующее:

1. Проверить выполнение (3.20). Если оно выполняется для всех  $i$ , то вычисляем элементы матрицы  $B$  по (3.10):

$$b_{i,j} = -a_{i,j}/a_{i,i}; \quad i, j = \overline{1, n}; \quad b_{i,i} = 0; \quad e_i = d_i/a_{i,i}$$

2. Вычислить норму матрицы  $B$

$$\|B\|_1 = \max_{1 \leq i \leq n} |c_i| = C; \quad c_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |b_{i,j}|.$$

3. Выбрать в качестве начального приближения  $x^0 = e$ .

Определить необходимое для достижения требуемой точности количество  $K$  итераций по (3.16).

4. Представить итерационный процесс (3.18) в виде

$$\delta_i^k = \sum_{j=1}^{i-1} b_{i,j} x_j^{k+1} + \sum_{j=i+1}^n b_{i,j} x_j^k; \quad i = \overline{2, n}; \quad x_i^{k+1} = \delta_i^k + e_i;$$

$$\delta_1^k = \sum_{j=2}^n b_{1,j} x_j^k; \quad x_1^{k+1} = \delta_1^k + e_1$$

и реализовать его  $K$  раз.

**Пример 3.3.** Решим систему линейных уравнений  $Ax = d$  методом Зейделя с точностью  $\Delta = 0,01$ , где

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -1 & 1,5 \\ 1 & -8 & 0,5 \\ 3 & -1 & 15 \end{bmatrix}; \quad d = \begin{bmatrix} -3 \\ -1,5 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Проверяем достаточное условие сходимости:

$$c_1 = (|a_{1,2}| + |a_{1,3}|) / |a_{1,1}| = 2,5/6 \approx 0,417;$$

$$c_2 = (|a_{2,1}| + |a_{2,3}|) / |a_{2,2}| = 1,5/8 \approx 0,19;$$

$$c_3 = (|a_{3,1}| + |a_{3,2}|) / |a_{3,3}| = 4/15 \approx 0,27; \quad C = 0,417.$$

Условие сходимости выполняется.

Вычисляем элементы матрицы  $B$  и вектора  $e$ :

$$B = \begin{bmatrix} 0 & +1/6 & -1,5/6 \\ 1/8 & 0 & 1/16 \\ -1/5 & +1/15 & 0 \end{bmatrix}; \quad e = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1,5/8 \\ -4/15 \end{bmatrix};$$

$$\|B\|_1 = \max_{1 \leq i \leq n} c_i = 0,417.$$

Выбираем начальное приближение  $x^0 = e$ :

$$x_1^0 = -0,5; \quad x_2^0 = 0,188; \quad x_3^0 = -0,267.$$

Найдем требуемое количество итераций для достижения точности решения  $\Delta = 0,01$ :

$$\|e\|_1 = 0,5; \quad \frac{\|B\|_1^{k+1}}{1 - \|B\|_1} \|e\|_1 < \Delta; \quad (3.21)$$

$$K \geq -1 + \frac{1}{\lg C} [\lg \Delta - \lg (\|e\|_1) + \lg (1 - C)];$$

$$K + 1 \geq [\lg 0,01 - \lg 0,5 + \lg 0,583] / \lg 0,417 = 4,9; \quad K = 4.$$

$k = 0$ .

$$\text{Вычисляем } \delta_1^0 = b_{1,2}x_2^0 + b_{1,3}x_3^0 = 1/6 \left( 0,19 + \frac{1,5}{6} \cdot \frac{4}{15} \right) = 0,043;$$

$$x_1^1 = -0,5 + 0,043 = -0,457;$$

$$\delta_2^0 = b_{2,1}x_1^1 + b_{2,3}x_3^0 = 1/8 (-0,457 - 2/15) = -0,074;$$

$$x_2^1 = 0,199 - 0,074 = 0,114;$$

$$\delta_3^0 = b_{3,1}x_1^1 + b_{3,2}x_2^1 = 1/5 (+0,457 + 0,038) = 0,099;$$

$$x_3^1 = -0,267 + 0,099 = -0,168.$$

$$k = 1. \quad \delta_1^1 = 1/6 (0,114 + 0,252) = 0,061; \quad x_1^2 = -0,5 + 0,061 = -0,439;$$

$$\delta_2^1 = 1/8 (-0,439 - 0,084) = -0,065; \quad x_2^2 = 0,188 - 0,065 = 0,123;$$

$$\delta_3^1 = 1/5 (0,439 + 0,04) = 0,096; \quad x_3^2 = -0,267 + 0,096 = -0,171;$$

$$k = 2. \quad \delta_1^2 = 1/6 (+0,123 + 0,256) = 0,063; \quad x_1^3 = -0,5 + 0,063 = -0,437;$$

$$\delta_2^2 = 1/8 (-0,437 - 0,086) = -0,065; \quad x_2^3 = 0,188 - 0,065 = 0,123;$$

$$\delta_3^2 = 1/5 (0,437 + 0,041) = 0,0956; \quad x_3^3 = -0,267 + 0,096 = -0,171.$$

Таким образом, после трех итераций получено решение с точностью  $\Delta = 0,001$ :

$$x^* \approx [-0,437; 0,123; -0,171]^T.$$

Полученный результат показывает, что метод Зейделя сходится быстрее, чем метод простой итерации. Так, при решении этой задачи методом простой итерации

для достижения точности решения  $\Delta = 0,001$  потребовалось бы семь итераций вместо трех по методу Зейделя.

В приложении приведены программы, реализующие схему Халецкого (программа XALS) и метод Зейделя (программа ZEID).

### Задания для самостоятельной работы

1. Решить систему линейных уравнений (3.1) методом Гаусса по схеме Халецкого. Вычисления проводить с точностью  $\Delta = 0,0001$ :

$$1. A = \begin{bmatrix} 2 & 1,2 & -2 & 2,1 & 1 \\ 1,2 & 2 & 1 & 2,8 & 4 \\ 3 & 1,2 & 1 & 1,6 & 1 \\ 1,5 & 2 & 4 & 1,4 & 1,25 \\ 1 & 1 & 2,1 & 1,5 & 8 \end{bmatrix}; \quad d = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \\ -8 \end{bmatrix}.$$

$$2. A = \begin{bmatrix} 3 & 1,2 & -1 & 2,2 & 1 \\ 1,4 & 3 & 1 & 2,6 & 4 \\ 3 & 1,4 & 1 & 1,6 & 1 \\ -2,5 & 2 & 4 & 1,8 & 1,5 \\ -3 & 1 & 2,2 & 1 & 8 \end{bmatrix}; \quad d = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 1,5 \\ 5 \\ -8 \end{bmatrix}.$$

$$3. A = \begin{bmatrix} 4 & 1,2 & 0 & 2,3 & 1 \\ 1,6 & 4 & 1 & 2,4 & 4 \\ 3 & 1,6 & 1 & 1,6 & 1 \\ 3,5 & 2 & 4 & 2,2 & 1,75 \\ 5 & 1 & 2,3 & 0,5 & 8 \end{bmatrix}; \quad d = \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ 2 \\ 7 \\ -8 \end{bmatrix}.$$

$$4. A = \begin{bmatrix} 2 & 1,2 & -2 & 2,1 & 0 \\ 1,2 & 3 & 2 & 2,8 & 4 \\ 3 & 2,2 & 1 & 1,6 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 2,4 & 1,25 \\ 0 & 1 & 2,1 & 1,5 & 8 \end{bmatrix}; \quad d = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 1,5 \\ 4 \\ -8 \end{bmatrix}.$$

$$5. A = \begin{bmatrix} 3 & 1,2 & -1 & 2,2 & 0 \\ 1,2 & 4 & 2 & 2,6 & 4 \\ 3 & 2,4 & 1 & 1,6 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 2,8 & 1,5 \\ 2 & 1 & 2,2 & 1 & 8 \end{bmatrix}; \quad d = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 2 \\ 6 \\ -8 \end{bmatrix}.$$

$$6. A = \begin{bmatrix} 4 & 1,2 & 0 & 2,3 & 0 \\ 1,6 & 5 & 2 & 2,4 & 4 \\ 3 & 2,6 & 1 & 1,6 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & 3,2 & 1,75 \\ 6 & 1 & 2,3 & 0,5 & 8 \end{bmatrix}; \quad d = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \\ 2,5 \\ 8 \\ -8 \end{bmatrix}.$$

$$7. A = \begin{bmatrix} 2 & 1,2 & -2 & 2,1 & -1 \\ 1,2 & 4 & 3 & 2,8 & 4 \\ 3 & 3,2 & 1 & 1,6 & 1 \\ 2,5 & 2 & 4 & 3,4 & 1,25 \\ -1 & 1 & 2,1 & 1,5 & 8 \end{bmatrix}; \quad d = \begin{bmatrix} 3 \\ 10 \\ 2 \\ 5 \\ -8 \end{bmatrix}.$$

$$8. A = \begin{bmatrix} 3 & 1,2 & -1 & 2,2 & -1 \\ 1,4 & 5 & 3 & 2,6 & 4 \\ 3 & 3,4 & 1 & 1,6 & 1 \\ 3,5 & 2 & 4 & 3,8 & 1,5 \\ 1 & 1 & 2,2 & 1 & 8 \end{bmatrix}; \quad d = \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \\ 2,5 \\ 7 \\ -8 \end{bmatrix}.$$

$$9. A = \begin{bmatrix} 4 & 1,2 & 0 & 2,3 & -1 \\ 1,6 & 6 & 3 & 2,4 & 4 \\ 3 & 3,6 & 1 & 1,6 & 1 \\ 4,5 & 2 & 4 & 4,2 & 1,75 \\ 3 & 1 & 2,3 & 0,5 & 8 \end{bmatrix}; \quad d = \begin{bmatrix} 7 \\ 12 \\ 3 \\ 9 \\ -8 \end{bmatrix}.$$

$$10. A = \begin{bmatrix} 5 & 1,2 & -2 & 2,4 & 1 \\ 1,8 & 5 & 1 & 2,2 & 4 \\ 3 & 1,8 & 1 & 1,6 & 1 \\ 4,5 & 2 & 4 & 2,6 & 2 \\ 7 & 1 & 2,4 & 0 & 9 \end{bmatrix}; \quad d = \begin{bmatrix} 9 \\ 7 \\ 2,5 \\ 9 \\ -8 \end{bmatrix}.$$

$$11. A = \begin{bmatrix} 2 & 1,2 & -2 & 2,1 & -2 \\ 1,2 & 5 & 4 & 2,8 & 4 \\ 3 & 4,2 & 1 & 1,6 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 4,4 & 1,25 \\ -2 & 1 & 2,1 & 1,5 & 8 \end{bmatrix}; \quad d = \begin{bmatrix} 3 \\ 13 \\ 2,5 \\ 6 \\ -8 \end{bmatrix}.$$

$$12. A = \begin{bmatrix} 5 & 1,2 & 1 & 2,4 & 0 \\ 1,8 & 6 & 2 & 2,2 & 4 \\ 3 & 2,8 & 1 & 1,6 & 1 \\ 5 & 2 & 4 & 3,6 & 2 \\ 6 & 1 & 2,4 & 0 & 8 \end{bmatrix}; \quad d = \begin{bmatrix} 9 \\ 10 \\ 3 \\ 10 \\ -8 \end{bmatrix}.$$

$$13. A = \begin{bmatrix} 3 & 1,2 & -1 & 2,2 & -2 \\ 1,4 & 6 & 4 & 2,6 & 4 \\ 3 & 4,4 & 1 & 1,6 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & 4,8 & 1,5 \\ 0 & 1 & 2,2 & 1 & 8 \end{bmatrix}; \quad d = \begin{bmatrix} 5 \\ 14 \\ 3 \\ 8 \\ -8 \end{bmatrix}.$$

$$14. A = \begin{bmatrix} 5 & 1,2 & 1 & 2,4 & -1 \\ 1,8 & 7 & 3 & 2,2 & 4 \\ 3 & 3,8 & 1 & 1,6 & 1 \\ 5,5 & 2 & 4 & 4,6 & 2 \\ 5 & 1 & 2,4 & 0 & 8 \end{bmatrix}; \quad d = \begin{bmatrix} 9 \\ 13 \\ 3,5 \\ 11 \\ -8 \end{bmatrix}.$$

$$15. A = \begin{bmatrix} 4 & 1,2 & 0 & 2,3 & -2 \\ 1,6 & 7 & 4 & 2,4 & 4 \\ 3 & 4,6 & 1 & 1,6 & 1 \\ 5 & 2 & 4 & 5,2 & 1,75 \\ 2 & 1 & 2,3 & 0,5 & 8 \end{bmatrix}; \quad d = \begin{bmatrix} 7 \\ 15 \\ 3,5 \\ 10 \\ -8 \end{bmatrix}.$$

$$16. A = \begin{bmatrix} 5 & 1,2 & 1 & 2,4 & -2 \\ 1,8 & 8 & 4 & 2,2 & 4 \\ 3 & 4,8 & 1 & 1,6 & 1 \\ 6 & 2 & 4 & 5,6 & 2 \\ 4 & 1 & 2,4 & 0 & 8 \end{bmatrix}; \quad d = \begin{bmatrix} 9 \\ 16 \\ 4 \\ 12 \\ -8 \end{bmatrix}.$$

$$17. A = \begin{bmatrix} 2 & 1,2 & -2 & 2,1 & -3 \\ 1,2 & 6 & 5 & 2,8 & 4 \\ 3 & 5,2 & 1 & 1,6 & 1 \\ 3,5 & 2 & 4 & 5,4 & 1,25 \\ -3 & 1 & 2,1 & 1,5 & 8 \end{bmatrix}; \quad d = \begin{bmatrix} 3 \\ 16 \\ 3 \\ 7 \\ -8 \end{bmatrix}.$$

$$18. A = \begin{bmatrix} 6 & 1,2 & 2 & 2,5 & -3 \\ 2 & 10 & 5 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 1 & 1,6 & 1 \\ 7,5 & 2 & 4 & 7 & 2,25 \\ 5 & 1 & 2,5 & -0,5 & 5 \end{bmatrix}; \quad d = \begin{bmatrix} 11 \\ 20 \\ 5 \\ 15 \\ -8 \end{bmatrix}.$$

$$19. A = \begin{bmatrix} 4 & 1,2 & 0 & 2,3 & -3 \\ 1,6 & 8 & 5 & 2,4 & 4 \\ 3 & 5,6 & 1 & 1,6 & 1 \\ 5,5 & 4 & 6,2 & 1,75 & 1 \\ 1 & 1 & 2,3 & 0,5 & 8 \end{bmatrix}; \quad d = \begin{bmatrix} 7 \\ 18 \\ 4 \\ 11 \\ -8 \end{bmatrix}.$$

$$20. A = \begin{bmatrix} 3 & 1,2 & -1 & 2,2 & -3 \\ 1,4 & 7 & 5 & 2,6 & 4 \\ 3 & 5,4 & 1 & 1,6 & 1 \\ 4,5 & 2 & 4 & 5,8 & 1,5 \\ -3 & 1 & 2,2 & 1 & 8 \end{bmatrix}; \quad d = \begin{bmatrix} 5 \\ 17 \\ 2,5 \\ 9 \\ -8 \end{bmatrix}.$$

2. Используя метод Зейделя, найти решение (3.1) с точностью  $\Delta_1 = 0,0001$  и  $\Delta_2 = 0,001$ . Сравнить погрешность полученных решений.

$$1. A = \begin{bmatrix} 3 & 0,7 & 0,2 & 0,2 \\ 0,6 & 5 & 0,5 & 0,5 \\ 1,3 & 0,3 & 3,5 & 0,4 \\ 0,3 & 0,3 & 0,4 & 4 \end{bmatrix}; \quad d = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -5 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

$$2. A = \begin{bmatrix} 5 & 0,9 & 0,3 & 0,2 \\ 0,2 & 8 & 0,7 & 0,5 \\ 1,0 & 0,3 & 5,5 & 0,4 \\ 0,2 & 0,5 & 0,7 & 6 \end{bmatrix}; \quad d = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

$$3. A = \begin{bmatrix} 4 & 0,7 & 0,3 & 0,4 \\ 0,6 & 7 & 0,8 & 0,7 \\ 1,3 & 0,6 & 4 & 0,3 \\ 0,7 & 0,3 & 0,5 & 6 \end{bmatrix}; \quad d = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -7 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

$$4. A = \begin{bmatrix} 14 & 1,5 & 0,9 & 0,8 \\ -1 & 23 & 2,2 & 1,7 \\ 0,4 & 1,2 & 13 & 0,7 \\ 1,1 & 1,1 & 1,9 & 18 \end{bmatrix}; \quad d = \begin{bmatrix} 16 \\ 24 \\ -11 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

$$5. A = \begin{bmatrix} 9 & 1,3 & 0,5 & 0,2 \\ -0,6 & 14 & 1,1 & 0,7 \\ 0,4 & 0,3 & 9,5 & 0,6 \\ 0 & 0,9 & 1,3 & 10 \end{bmatrix}; \quad d = \begin{bmatrix} 13 \\ 17 \\ -5 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

$$6. A = \begin{bmatrix} 6 & 0,7 & 0,5 & 0,8 \\ 0,6 & 11 & 3,4 & 1,3 \\ 1,5 & 1,2 & 5 & 0,3 \\ 1,5 & 0,3 & 0,7 & 10 \end{bmatrix}; \quad d = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ -11 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

$$7. A = \begin{bmatrix} 12 & 1,5 & 0,7 & 0,4 \\ -1 & 19 & 1,6 & 1,1 \\ 0,2 & 0,6 & 12 & 0,7 \\ 0,3 & 1,1 & 1,7 & 14 \end{bmatrix}; \quad d = \begin{bmatrix} 16 \\ 22 \\ -7 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

$$8. A = \begin{bmatrix} 7 & 1,1 & 0,4 & 0,2 \\ -0,2 & 11 & 0,9 & 0,6 \\ 0,7 & 0,3 & 7,5 & 0,5 \\ 0,1 & 0,7 & 1 & 12 \end{bmatrix}; \quad d = \begin{bmatrix} 10 \\ 13 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

$$9. A = \begin{bmatrix} 11 & 1,3 & 0,7 & 0,6 \\ -0,6 & 18 & 1,7 & 1,3 \\ 0,6 & 0,9 & 10,5 & 0,6 \\ 0,8 & 0,9 & 1,5 & 14 \end{bmatrix}; \quad d = \begin{bmatrix} 13 \\ 19 \\ -9 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
10. \quad A &= \begin{bmatrix} 6 & 0,9 & 0,4 & 0,4 \\ 0,2 & 10 & 1,2 & 0,8 \\ 1,1 & 0,6 & 6 & 0,4 \\ 0,6 & 0,5 & 0,8 & 8 \end{bmatrix}; & d &= \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \\ -7 \\ 7 \end{bmatrix}. \\
11. \quad A &= \begin{bmatrix} 9 & 1,1 & 0,6 & 0,6 \\ -0,2 & 15 & 1,5 & 1,2 \\ 0,9 & 0,9 & 8,5 & 0,5 \\ 0,9 & 0,7 & 1,2 & 12 \end{bmatrix}; & d &= \begin{bmatrix} 10 \\ 15 \\ -9 \\ 9 \end{bmatrix}. \\
12. \quad A &= \begin{bmatrix} 11 & 1,5 & 0,6 & 0,2 \\ -1 & 17 & 1,3 & 0,8 \\ 0,1 & 0,3 & 11,5 & 0,7 \\ -0,1 & 1,1 & 1,6 & 12 \end{bmatrix}; & d &= \begin{bmatrix} 16 \\ 21 \\ -5 \\ 9 \end{bmatrix}. \\
13. \quad A &= \begin{bmatrix} 10 & 1,1 & 0,7 & 0,8 \\ -0,2 & 17 & -0,6 & 1,5 \\ 1 & 1,2 & 9 & 0,5 \\ 1,3 & 0,7 & 1,3 & 14 \end{bmatrix}; & d &= \begin{bmatrix} 10 \\ 18 \\ -11 \\ 10 \end{bmatrix}. \\
14. \quad A &= \begin{bmatrix} 10 & 1,3 & 0,6 & 0,4 \\ -0,6 & 16 & 1,4 & 1 \\ 0,5 & 0,6 & 10 & 0,6 \\ 0,4 & 0,9 & 1,4 & 12 \end{bmatrix}; & d &= \begin{bmatrix} 13 \\ 18 \\ -7 \\ 9 \end{bmatrix}. \\
15. \quad A &= \begin{bmatrix} 12 & 1,3 & 0,8 & 0,8 \\ -0,2 & 20 & 2 & 1,6 \\ 0,7 & 1,2 & 11 & 0,6 \\ 1,2 & 0,9 & 1,6 & 16 \end{bmatrix}; & d &= \begin{bmatrix} 13 \\ 20 \\ -11 \\ 11 \end{bmatrix}. \\
16. \quad A &= \begin{bmatrix} 8 & 1,1 & 0,5 & 0,4 \\ -0,2 & 10 & 1,8 & 0,9 \\ 0,8 & 0,6 & 8 & 0,5 \\ 0,5 & 0,7 & 1,1 & 10 \end{bmatrix}; & d &= \begin{bmatrix} 10 \\ 14 \\ -7 \\ 8 \end{bmatrix}. \\
17. \quad A &= \begin{bmatrix} 13 & 1,5 & 0,8 & 0,6 \\ -1 & 21 & 1,9 & 1,4 \\ 0,3 & 0,9 & 12,5 & 0,7 \\ 0,7 & 1,1 & 1,8 & 16 \end{bmatrix}; & d &= \begin{bmatrix} 16 \\ 23 \\ -9 \\ 11 \end{bmatrix}. \\
18. \quad A &= \begin{bmatrix} 8 & 0,9 & 0,6 & 0,8 \\ 0,2 & 14 & 1,8 & 1,4 \\ 1,3 & 1,2 & 7 & 0,4 \\ 1,4 & 0,5 & 1 & 16 \end{bmatrix}; & d &= \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \\ -11 \\ 9 \end{bmatrix}. \\
19. \quad A &= \begin{bmatrix} 5 & 0,7 & 0,4 & 0,6 \\ 0,6 & 9 & 1,1 & 1 \\ 1,5 & 0,9 & 4,5 & 0,3 \\ 1,1 & 0,3 & 0,6 & 8 \end{bmatrix}; & d &= \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ -9 \\ 7 \end{bmatrix}. \\
20. \quad A &= \begin{bmatrix} 7 & 0,9 & 0,5 & 0,6 \\ 0,2 & 12 & 1,3 & 1,1 \\ 1,2 & 0,9 & 6,5 & 0,4 \\ 1 & 0,5 & 0,9 & 10 \end{bmatrix}; & d &= \begin{bmatrix} 7 \\ 11 \\ -9 \\ 8 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

## Глава 4. РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим векторное уравнение

$$F(x) = 0, \quad (4.1)$$

где  $F$  — вектор-функция,  $x$  — вектор.

$$F = [F_1, F_2, \dots, F_n]^T.$$

### 4.1. МЕТОД ПРОСТОЙ ИТЕРАЦИИ

Преобразуем (4.1) к виду

$$x = g(x), \quad (4.2)$$

где  $g = [g_1, g_2, \dots, g_n]^T$ .

Итерационный процесс, который решает (4.2), запишем в виде

$$x^{k+1} = g(x^k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.3)$$

Отображение  $g: X \rightarrow X$ , где  $X$  — банахово пространство, называется сжатым, если для любых  $x^1, x^2 \in X$  выполняется неравенство

$$\|g(x^1) - g(x^2)\| \leq q \|x^1 - x^2\|; \quad q < 1. \quad (4.4)$$

Если отображение  $g: X \rightarrow X$  — сжатое, то (4.2) имеет единственное решение  $x^*$ :

$$\|x^* - x^m\| \leq \frac{q^m}{1-q} \|x^1 - x^0\|. \quad (4.5)$$

В достаточно малой окрестности решения  $x^*$  уравнения (4.2) для приближений методом простой итерации

$$x^{m+1} - x^* = g(x^m) - g(x^*) \approx B(x^m - x^*), \quad (4.6)$$

где

$$B = \left[ \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right] \Big|_{x^*}; \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Таким образом, условие сходимости метода простой итерации имеет вид

$$\|B\| = q < 1. \quad (4.7)$$

В этом случае отображение  $g$  будет сжатым, а приближения  $x^k$  будут сходиться к решению  $x^*$  со скоростью геометрической прогрессии.

Аналогом метода Зейделя при решении нелинейных систем уравнений является итерационный процесс, согласно которому последовательные приближения определяются из соотношений

$$\left. \begin{aligned} x_1^{k+1} &= g_1(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k); \\ x_2^{k+1} &= g_2(x_1^{k+1}, x_2^k, \dots, x_n^k); \\ &\vdots \\ x_i^{k+1} &= g_i(x_1^{k+1}, \dots, x_{i-1}^{k+1}, x_i^k, \dots, x_n^k); \\ &\vdots \\ x_n^{k+1} &= g_n(x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, \dots, x_{n-1}^{k+1}, x_n^k). \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

Метод простой итерации является методом первого порядка, т. е.

$$\|x^{k+1} - x^*\| < C \|x^k - x^*\|,$$

где  $C$  — постоянная величина.

При решении систем нелинейных уравнений необходимо определять приемлемое начальное приближение. Для случая двух уравнений с двумя неизвестными начальное приближение (отделение корней) находят графически. Для случаев систем уравнений с большим числом уравнений отделение корней может быть выполнено другими методами (аналитическими, методом проб).

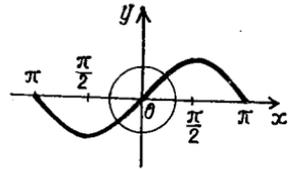


Рис. 3

Пример 4.1. Рассмотрим систему уравнений (рис. 3)

$$\left. \begin{aligned} \sin(x+1) - y &= 0,5; \\ x^2 + y^2 &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

Найдем решение этой системы методом Зейделя (4.8).

Представим (4.9) в виде (4.2):

$$\left. \begin{aligned} x &= g_1(x, y) = \sqrt{1 - y^2}; \\ y &= g_2(x, y) = \sin(x+1) - 0,5. \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

Для определения начального приближения  $x^0, y^0$ , принадлежащего области сходимости

$$D = \{a < x < b, c < y < d\},$$

построим графики функций:

$$\begin{aligned} \text{при } x = 1 \quad y &= \sin 2 - 0,5 = 0,41; \\ \text{при } x = 0,8 \quad y &= \sin 1,9 - 0,5 = 0,47. \end{aligned}$$

Решение задачи будем искать в области

$$D = \{0,8 < x < 1; 0,41 < y < 0,47\}.$$

Определим матрицу  $B$ :

$$\frac{\partial g_1}{\partial x} = \cos(x+1); \quad \frac{\partial g_2}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}; \quad \frac{\partial g_1}{\partial y} = \frac{\partial g_2}{\partial x} = 0;$$

$$B = \begin{bmatrix} \cos(x+1) & 0 \\ 0 & -\frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \end{bmatrix};$$

$$\begin{aligned} \|B\|_1 &= \max_{x, y \in D} \left\{ \cos(x+1); \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \right\} = \\ &= \max \left\{ \cos 1,14; \frac{0,41}{\sqrt{1-0,41^2}} \right\} = q_1 = 0,45 < 1. \end{aligned}$$

Таким образом, итерационный процесс (4.8) сходится в области  $D$ .  
Переходим к реализации процесса

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= g_1(x^k, y^k) = \sqrt{1 - (y^k)^2}; \\ y^{k+1} &= g_2(x^{k+1}, y^k) = \sin(x^{k+1} + 1) - 0,5. \end{aligned}$$

Выбираем  $x^0 = 0,85; y^0 = 0,46;$

$$x^1 = \sqrt{1 - (y^0)^2} = 0,887; \quad y^1 = \sin(x^1 + 1) - 0,5 = 0,450;$$

$$x^2 = \sqrt{0,7975} = 0,893; y^2 = \sin 1,893 - 0,5 = 0,448;$$

$$x^3 = \sqrt[3]{0,7973} = 0,894; y^3 = 0,448.$$

Проверка:  $x_1^3 + y_1^3 = 0,2007 + 0,7992 = 0,9999$ .

Таким образом, с точностью до  $\Delta = 0,001$  решение задачи (4.9) в области  $D$  имеет вид:  $x^* = 0,895; y^* = 0,448$ .

## 4.2. МЕТОД НЬЮТОНА

Рассмотрим нелинейный оператор  $F: X \rightarrow X$ ,  $X$  — банахово пространство и линейный оператор  $G: X \rightarrow X$ .

*Определение.* Оператор  $G$  назовем производной оператора  $F(x)$  в точке  $x \in X$ , если

$$\lim_{\substack{\|h\| \rightarrow 0 \\ h \in X}} \frac{\|F(x+h) - F(x) - Gh\|_X}{\|h\|_X} = 0. \quad (4.11)$$

Обозначим производную оператора  $F(x)$  через  $F'(x) = G$ .

Пусть  $x^*$  — решение уравнения (4.1),  $x^k$  — некоторое приближение к решению  $x^*$ .

Если значение  $\|x^* - x^k\|_X$  мало, то в предположении существования  $F'(x)$  с учетом (4.11) напишем:

$$F(x^k) + F'(x^k)(x^* - x^k) \approx F(x^*),$$

или

$$F(x^k) + F'(x^k)(x^* - x^k) \approx 0.$$

В предположении существования  $[F'(x)]^{-1}$

$$x^{k+1} = x^k - [F'(x^k)]^{-1}F(x^k). \quad (4.12)$$

Итерационный процесс (4.12) называется методом Ньютона.

Обозначим область  $D \subset X$ :  $D = \{x: \|x - x^*\| < a\}$ .

Пусть выполняются следующие условия:

$F'(x)$  — оператор сжатия, т. е.

$$\|F'(x^*) - F'(y)\|_X < q \|x - y\|_X, \quad x, y \in D; \quad (4.13)$$

$$\|F'(x)\|_X < b, \quad x \in D; \quad (4.14)$$

$$\|[F'(x_0)]^{-1}F(x_0)\|_X \leq c_0. \quad (4.15)$$

Тогда итерационный процесс (4.12) сходится к решению  $x^*$  с оценкой погрешности

$$\|x^k - x^*\|_X \leq 1/d (d \|x^0 - x^*\|_X)^2,$$

где  $d = bq$ .

При этом

$$\|x^* - x^0\|_X \leq 1/d (1 - \sqrt{1 - 2dc_0}) = a_0 \leq a. \quad (4.16)$$

Отсюда, вычислив  $a_0$ , оцениваем необходимое количество  $N$  итераций для достижения заданной точности  $\Delta$  решения  $x^*$  (4.1):

$$a_0^{2^N} < d\Delta,$$

или

$$N < \log_2 p; \quad p = \frac{\lg(d\Delta)}{\lg a_0}. \quad (4.17)$$

*Вычислительная схема.* Для реализации метода Ньютона (4.12) необходимо:

1. Определить  $F'(x)$ ;
2. Определить область  $D = \{x : \|x - x^*\|_x < a\}$  либо графически, либо аналитически при  $n > 2$ ;
3. Для выбранного начального приближения  $x^0 \in D$  вычислить

$$\|F'(x_0)\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial f_i(x^0)}{\partial x_j^0} \right| = b_0. \quad (4.18)$$

4. Определить

$$[F'(x^0)]^{-1} = [\varphi_{ij}(x^0)]_1^n. \quad (4.19)$$

5. Найти

$$\|[F'(x^0)]^{-1}F(x^0)\|_x = \max_{1 \leq i \leq n} |m_i(x^0)| = c_0. \quad (4.20)$$

6. Вычислить первое приближение:

$$x_i^1 = x_i^0 - \sum_{j=1}^n \varphi_{ij}(x^0) f_j(x^0); \quad i = \overline{1, n}. \quad (4.21)$$

7. Найти из (4.13):

$$q_1 = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i^1 - x_i^0|; \quad (4.22)$$

$$q_2 = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sum_{j=1}^n |f'_{ij}(x^1) - f'_{ij}(x^0)| \right\}; \quad (4.23)$$

$$q = q_2/q_1. \quad (4.24)$$

8. Вычислить коэффициент  $a_0$  по формуле (4.16)

$$a_0 = (1 - \sqrt{1 - 2b_0q c_0})/b_0q.$$

9. Оценить количество итераций  $N$ :

$$p = \lg \frac{(b_0q\Delta)}{\lg a_0}; \quad N = \lceil \log_2 p \rceil.$$

10. Реализовать итерационный процесс (4.12) для  $k = 1, 2, \dots, N$ .

**Пример 4.1.** Найти решение системы уравнений

$$\begin{cases} f_1(x, y) = x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0; \\ f_2(x, y) = x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0 \end{cases} \quad (4.25)$$

методом Ньютона, при этом добиться точности  $\Delta = 0,001$ .

Определим  $F'(x, y)$ :

$$F'(x, y) = \begin{bmatrix} 2(x+1) & 2y \\ 2x & 2(y-2) \end{bmatrix}.$$

Определим область  $D$ .

Поскольку графики функций  $f_1(x, y)$ ,  $f_2(x, y)$  окружности радиуса 2 и 3 соответственно с центрами в точках  $(-1; 0)$  и  $(0; 2)$ , область  $D$  имеет вид

$$D = \{0,8 < x < 0,9; -0,9 > y > -1\}.$$

Выберем начальное приближение  $x^0 = 0,8$ ;  $y^0 = -0,9$ .

Определим матрицу  $[F'(x)]^{-1}$ :

$$[F'(x, y)]^{-1} = \frac{1}{\Delta(x, y)} \begin{bmatrix} y-2 & -y \\ -x & x+1 \end{bmatrix};$$

$$\Delta(x, y) = 2(y-2x) - 4.$$

Для системы (4.25) итерационный процесс (4.12) имеет вид:

$$x^{k+1} = x^k + \frac{1}{\Delta(x^k, y^k)} [y^k f_2(x^k, y^k) - (y^k - 2) f_1(x^k, y^k)];$$

$$y^{k+1} = y^k + \frac{1}{\Delta(x^k, y^k)} [x^k f_1(x^k, y^k) - (x^k + 1) f_2(x^k, y^k)].$$

Вычислим  $b_0: \|F'(x^0)\|_1 = \max\{5, 4; 7, 4\} = 7, 4 = b_0$ .  
Найдем  $c_0$ :

$$[F'(x^0)]^{-1} F(x^0) = \begin{bmatrix} 0,011 \\ -0,006 \end{bmatrix}; c_0 = 0,011.$$

Определим  $x^1$  и  $y^1$ :

$$x^1 = 0,8 + 1/9 (-0,9 \cdot 0,05 + 2,9 \cdot 0,5) = 0,8 + 0,0111 = 0,8111;$$

$$y^1 = -0,9 + 1/9 (0,8 \cdot 0,05 - 1,8 \cdot 0,05) = -0,9 - 0,0056 = -0,9056.$$

Найдем  $q: q_1 = \max\{0,0334; 0,0334\}; q_1 = 0,0334; q_2 = \max\{0,0111; 0,0056\} =$   
 $= 0,0111; q = \frac{0,0111}{0,0334} = 0,332;$

Вычисляем радиус сходимости  $a_0$ :

$$d = b_0 q = 2,4568; a_0 = 1/2,4568 (1 - \sqrt{1 - 0,0545}) = 0,0113;$$

$$N \geq (-\lg \Delta - \lg d) / \lg a_0 = 1,4; N = 2.$$

Реализуем итерационный процесс (4.26):

$$f_1(x^1, y^1) = 1,479 + 1,6222 - 3 = 0,1012;$$

$$f_2(x^1, y^1) = 1,479 + 3,6224 - 5 = 0,1014;$$

$$\Delta(x^1, y^1) = -4 - 2 \cdot 2,5278 = -9,0556;$$

$$x^2 = 0,8111 - 1/9,0556 (-0,9056 \cdot 0,1014 + 2,9056 \cdot 0,1012) = 0,7889;$$

$$y^2 = -0,9056 - 1/9,0556 (0,8111 \cdot 0,1012 - 1,8111 \cdot 0,1014) = -0,8845.$$

Решение (одно) системы с точностью  $\Delta = 0,001$  следующее:

$$x^* = 0,789; y^* = -0,894.$$

Применим рассмотренные методы простой итерации и метод Ньютона для уточнения изолированного корня скалярного уравнения

$$f(x) = 0. \quad (4.27)$$

Уравнение (4.2) приобретает вид

$$x = g(x). \quad (4.28)$$

Запишем итерационный процесс (4.3):

$$x^{k+1} = g(x^k). \quad (4.29)$$

Условие сходимости:

$$|g'(x)| < 1, x \in D. \quad (4.30)$$

Итерационный процесс Ньютона (4.12) в случае, если найдено достаточно хорошее начальное приближение, следующий:

$$x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)}. \quad (4.31)$$

### 4.3. ОТДЕЛЕНИЕ КОРНЕЙ

Для отыскания начального приближения к корню (изолированному) уравнения (4.27) необходимо отделить корни, т. е. найти отрезок  $[a, b] \in R$ , внутри которого имеется единственный корень.

В случае трансцендентного уравнения (4.27) корни отделяются графически. Если функция  $\checkmark$

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^{n-i}, \quad (4.32)$$

то для отделения корня необходимо, чтобы выполнялись условия

$$f(a)f(b) < 0; \quad (4.33)$$

$$f'(a)f'(b) > 0, \quad (4.34)$$

т. е. на концах отрезка  $[a, b]$  функция должна менять знак и быть монотонной внутри  $[a, b]$ .

Для определения начальных концов отрезка  $[b_0, b_1]$ , в котором могут выполняться условия (4.33), (4.34), можно воспользоваться равенствами

$$b_1 = 1 + \frac{1}{|a_0|} \max_{1 \leq i < n} \{|a_i|\}; \quad (4.35)$$

$$b_0 = 1 / (1 + \frac{1}{|a_n|} \max_{0 \leq i < n-1} \{|a_i|\}).$$

Если  $f(b_0)f(b_1) > 0$ , то отрезок точкой  $b_2 = (b_1 - b_0)/2$  делится пополам и рассматривается либо  $[b_0, b_2]$ , либо  $[b_2, b_1]$ , в зависимости от того, на концах какого из них выполняется (4.33). После этого также половинным делением добиваемся выполнения (4.34).

Далее для уточнения изолированного корня применяем либо итерационный процесс (4.29), либо (4.31).

Для выбора начального приближения в методе Ньютона необходимо проверить выполнение условия

$$f(c)f''(c) > 0, \quad c = b \text{ или } c = a. \quad (4.36)$$

(Касательная к точке  $c$  проводится со стороны выпуклости функции.)

За начальное приближение итерационного процесса (4.31) выбирается тот из концов отрезка  $[a, b]$ , в котором выполняется условие (4.36).

**Пример 4.2.** Найдем изолированный корень уравнения с точностью  $\Delta = 0,05$  методом простой итерации:

$$f(x) = x^5 + 2x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 4x - 3 = 0. \quad (4.37)$$

Отделим корень (изолированный)

$$b_0 = 1 / (1 + 6/3) = 1/3; \quad b_1 = 1 + 6 = 7.$$

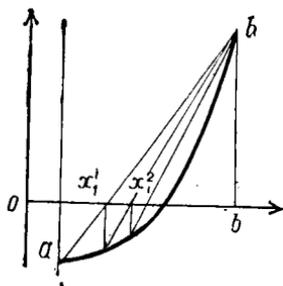


Рис. 4

Для удобства вычислений с целью проверки условий (4.33), (4.34) запишем  $f(x)$  и  $f'(x)$  по схеме Горнера:

$$f(x) = (((x+2)x-5)x+6)x-4; \\ f'(x) = (((5x+8)x-15)x+12)x-4. \\ f(b_1) = f(7) > 0; f(b_0) = f(1/3) < 0; \\ f'(1/3) < 0; f'(7) > 0.$$

Делим отрезок  $[1/3, 7]$  точкой  $b_2 = 3$  на два ( $|f(7)| \gg |f(1/3)|$ );  $f(3) > 0$ ;  $f'(3) > 0$ . Условие (4.34) на отрезке  $[1/3, 3]$  не выполняется,  $b_3 = 2$ ;  $f(2) = 37 > 0$ ;  $f'(2) > 0$ .

Еще раз делим отрезок  $[0,3; 2]$  на два:  $b_4 = 1$ ,  $f(1) = -3 < 0$ ;  $f'(1) = 6 > 0$ .

Таким образом, на отрезке  $[1; 2]$  отделен изолированный корень.

Поскольку  $|f(2)| = 37$  больше, чем  $|f(1)| = 3$ , разделим  $[1; 2]$  точкой  $b_5 = 1,5$  на два:  $[1; 1,5]$ ,  $[1,5; 2]$ .

$f(1,5) = 5,4 > 0$ ;  $f'(1,5) = 30,7 > 0$ .

Получаем отрезок  $[1; 1,5]$ .

Уточним значение корня на этом отрезке методом простой итерации.

Преобразуем уравнение (4.37) к виду

$$x = g(x) = \sqrt{(3+4x+5x^3-2x^4-x^5)/6}; \\ g'(x) = \frac{5x^4+8x^3-15x^2-4}{\sqrt{24(3+4x+5x^3-2x^4-x^5)}}; \\ |g'(1)| = 0,4 = q_0; |g'(1,5)| = 0,98.$$

Условие сходимости выполняется.

Выбираем начальное приближение  $x^0 = 1$ .

$$x^1 = g(x^0) = \sqrt{3/2} = 1,22; \\ x^2 = g(x^1) = \sqrt{1,6417} = 1,26; \\ x^3 = g(x^2) = \sqrt{1,6833} = 1,27. \\ x^* \approx 1,27.$$

#### 4.4. МЕТОД ХОРД

Если имеется хорошее начальное приближение к корню  $x^*$  уравнения (4.27), т. е. корень отделен на отрезке  $[a, b]$ , то для уточнения значения корня может быть применен метод хорд. Концы отрезка  $[a, b]$  соединяются хордой и за следующие приближения принимаются значения абсцисс точки пересечения хорды с осью  $Ox$  (рис. 4).

За начальное приближение  $x^0$  выбирается тот из концов отрезка  $[a, b]$ , для которого выполняется неравенство

$$f(a)f''(c) < 0; c = a \text{ или } c = b. \quad (4.38)$$

Для получения формулы метода хорд воспользуемся формулой Лагранжа.

Если функция  $f(x)$  дифференцируема в  $[a, b]$ , то

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Отсюда получаем итерационную формулу

$$x^{k+1} = x^k - \frac{(x^k - \bar{x}) f(x^k)}{f(x^k) - f(\bar{x})}, \quad (4.39)$$

где  $\bar{x}$  равен тому из концов отрезка  $[a, b]$ , в котором выполняется условие (4.38).

#### 4.5. КОМБИНИРОВАННЫЙ МЕТОД

Суть этого метода заключается в том, что приближения для искомого значения корня уравнения (4.27) вычисляются с двух сторон внутри  $[a, b]$ . С одной стороны вычисления производятся по методу Ньютона, выбирая в качестве начального приближения  $x^0$  точку, в которой выполняется неравенство (4.36), с другой — по методу хорд, выбирая в качестве  $x^0$  точку, в которой выполняется неравенство (4.38).

Этот метод применим, когда  $f''(x)$  на  $[a, b]$  сохраняет знак, т. е. при выполнении условия  $f''(a)f''(b) > 0$ .

Начинаем вычисления по (4.31) и находим  $x^1$ . Пусть  $f(b)f''(b) > 0$ , тогда  $x^0 = b$ ;

$$x^1 = x^0 - \frac{f(x^0)}{f'(x^0)} = b - \frac{f(b)}{f'(b)}.$$

По методу хорд находим  $x^2$ :  $a^0 = a$ ;  $b^1 = x^1$ .

$$x^2 = a^1 = a^0 - \frac{(a^0 - b^1) f(a^0)}{f(a^0) - f(b^1)}.$$

Для  $k$ -го приближения получаем формулы

$$b^{k+1} = b^k - \frac{f(b^k)}{f'(b^k)} \quad \text{и} \quad a^{k+1} = a^k - \frac{(a^k - b^{k+1}) f(a^k)}{f(a^k) - f(b^{k+1})}, \quad (4.40)$$

$$\text{или} \quad a^{k+1} = a^k - \frac{f(a^k)}{f'(a^k)} \quad \text{и} \quad b^{k+1} = b^k - \frac{(b^k - a^{k+1}) f(b^k)}{f(b^k) - f(a^{k+1})}. \quad (4.41)$$

Получаем вложенные отрезки  $[a_k, b_k] \subset [a_{k-1}, b_{k-1}] \subset \dots \subset [a, b]$ .

Оценка погрешности может быть произведена по формуле  $|b_k - a_k| \leq 2\Delta$ , тогда

$$x^k \approx (a^k + b^k)/2,$$

где  $\Delta$  — требуемая точность вычислений.

*Вычислительная схема.*

1. Отделение корня (определение  $[a, b]$ ) методом половинного деления, т. е. проверка условий:

$$\begin{aligned} f(a)f(b) &< 0; \\ f'(a)f'(b) &> 0. \end{aligned}$$

2. Проверка условия  $f''(a)f''(b) > 0$ .

3. Если условие п. 2 выполняется, то проверяются условия (4.36), (4.38) для выбора формул метода (либо (4.40), либо (4.41)).

4. Вычисление очередных приближений по формулам (4.40) или (4.41).

5. Оценка точности:  $|a_k - b_k| \leq 2\Delta$ .

6. Если это условие не выполняется, повторяем вычисления по п. 4.

**Пример 4.3.** Вычислить с точностью  $\Delta = 0,01$  корень уравнения

$$f(x) = x^5 + 2x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 4x - 3 = 0.$$

Отделим корень. Для этого запишем  $f(x)$ ,  $f'(x)$ ,  $f''(x)$  по схеме Горнера:

$$f(x) = (((x + 2)x - 5)x + 6)x - 4 - 3;$$

$$f'(x) = ((5x + 8)x - 15)x + 12 - 4;$$

$$f''(x) = (20x + 24)x - 30 - 4.$$

Определим отрезок, на концах которого  $f(x)$  меняет знак.

$$f(1/3) < 0; f(7) \gg 0; f(2) = 37 > 0.$$

Проверим знак  $f'(x)$  на  $[0; 2]$ .

$$f'(1/3) < 0; f'(2) > 0.$$

Делим отрезок пополам:  $f(1) = -3; f'(1) = 6 > 0$ .

Таким образом, внутри отрезка  $[1; 2]$  расположен один изолированный корень. Вычислим  $f''(1) = 26; f''(2) > 0$ ;

$$f''(1)f''(2) > 0; f(1)f''(1) < 0; f(2)f''(2) > 0.$$

По методу Ньютона начинаем вычисления с  $b^0 = 2$ , по методу хорд с  $a^0 = 1$ , т. е. по формулам (4.40):

$$b^1 = b^0 - f(b^0)/f'(b^0) = 2 - 37/104 \approx 1,64; f(b^1) = 15,2;$$

$$a^1 = a^0 - (a^0 - b^1)f(a^0)/[f(a^0) - f(b^1)] = 1 + 3 \cdot 0,64/18,2;$$

$$a^1 = 1,11; f(a^1) = -2,25; f'(b^1) = 46.$$

Оценим погрешность:  $|b^1 - a^1| = 0,53 > 2\Delta$ .

Вычислим  $b^2$  и  $a^2$ :

$$b^2 = 1,64 - 15,2/46 \approx 1,31; f(b^2) = 0,86; f'(b^2) = 18;$$

$$a^2 = 1,11 + 0,2 \cdot 2,25/3,11 = 1,255;$$

$$|b^2 - a^2| = |1,310 - 1,255| = 0,055 > 2\Delta.$$

Вычислим  $b^3$ :  $b^3 = 1,31 - 0,86/18 = 1,260$ ;

$$|b^3 - a^2| = |1,260 - 1,255| = 0,005 < 0,02 = 2\Delta.$$

Таким образом, с точностью до  $\Delta = 0,01$  значение корня составляет  $x^* = 1,255$ .

#### 4.6. РЕШЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ВЫДЕЛЕНИЯ КОРНЕЙ

Рассмотрим уравнение

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n+1} a_i x^{n-i+1} = 0, \quad (4.42)$$

где коэффициенты  $a_i$  — действительные числа.

Требуется найти все корни уравнения (4.42).

Если представить  $f(x)$  в виде (при условии, что  $n$  — четное, множитель  $x + c_{n+1}$  отсутствует)

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n+1} a_i x^{n-i+1} = \prod_{i=1}^{[n/2]} (x^2 + c_{2i}x + c_{2i-1}) \cdot (x + c_{n+1}), \quad (4.43)$$

то задача нахождения всех корней уравнения (4.42) сводится к нахождению корней уравнений вида

$$x^2 + c_{2i}x + c_{2i-1} = 0.$$

Для представления  $f(x)$  в виде (4.43) поступаем следующим образом. В уравнении (4.42) отбираем три первых члена  $x^2 + a_2x + a_3$ , если вычисление корней начинаем с наибольших по абсолютной величине, или три последних члена  $a_{n-1}x + a_nx + a_{n+1}$ , если вычисление корней начинаем с наименьших по абсолютной величине.

Разделим  $f(x)$  на трехчлен  $x^2 + px + q$ , обозначив  $p = a_2$ ;  $q = a_3$  или  $p = a_n/a_{n-1}$ ;  $q = a_{n+1}/a_{n-1}$ . Если бы значения  $x_{1,2} = -p/2 \pm \sqrt{p^2/4 - q}$  были корнями уравнения (4.42), то  $f(x)$  разделилось бы без остатка на  $x^2 + px + q$ . В противном случае в остатке получаем  $b_nx + (a_{n+1} - qb_{n-1})$ . Значение остатка характеризует степень отклонения  $x_1$  и  $x_2$  от истинных значений корней.

Внося поправку в значения  $p$  и  $q$ , снова делим  $f(x)$  на трехчлен  $x^2 + px + q$  и т. д., пока с заданной точностью не получим значения корней.

Далее поступаем таким же образом с полученным полиномом  $n-2$  степени и т. д.

Деление  $f(x)$  на трехчлен  $x^2 + px + q$  будем проводить по схеме Горнера. Коэффициенты  $b_i$  полинома  $g(x)$  как частного от деления  $f(x)$  на  $x^2 + px + q$ :

$$f(x) = g(x)(x^2 + px + q) + R(x) \quad (4.44)$$

вычисляются по алгоритму

$$b_1 = a_1; \quad b_2 = a_2 - pb_1; \quad b_i = a_i - pb_{i-1} - qb_{i-2}; \quad i = \overline{3, n+1}. \quad (4.45)$$

Для обеспечения быстрой сходимости итерационного процесса прежде, чем вычислять поправки  $\Delta p$  и  $\Delta q$  ( $p = p + \Delta p$ ,  $q = q + \Delta q$ ), проведем еще раз деление полученного полинома  $g(x)$  на трехчлен  $x^2 + px + q$ :

$$c_1 = b_1; \quad c_2 = b_2 - pc_1; \quad c_i = b_i - pc_{i-1} - qc_{i-2}; \quad i = \overline{3, n-1}.$$

Таким образом, алгоритм вычисления двух корней уравнения (4.42) имеет вид:  $p = a_2$ ;  $q = a_3$ ;

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1; \quad b_2 = a_2 - pb_1; \quad b_i = a_i - pb_{i-1} - qb_{i-2}; \quad i = \overline{3, n+1}; \\ c_1 &= b_1; \quad c_2 = b_2 - pc_1; \quad c_i = b_i - pc_{i-1} - qc_{i-2}; \quad i = \overline{3, n-1}; \\ c_n &= -pc_{n-1} - qc_{n-2}; \quad d = c_{n-1}^2 - c_n c_{n-2}; \\ \Delta p &= (b_n c_{n-1} - b_{n+1} c_{n-2})/d; \\ \Delta q &= (b_{n+1} c_{n-1} - b_n c_n)/d. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Оценка точности производится по соотношениям

$$|\Delta q| \leq \varepsilon; \quad |\Delta p| \leq \varepsilon. \quad (4.47)$$

Вычисления по алгоритму (4.46) производятся до тех пор, пока не удовлетворяются неравенства (4.47). При этом

$$g(x) = x^{n-2} + b_2 x^{n-3} + b_3 x^{n-4} + \dots + b_{n-2} x + b_{n-1}.$$

$$f(x) = g(x)(x^2 + px + q) = 0.$$

Далее решаем уравнение  $(n-2)$ -й степени

$$g(x) = 0.$$

В итоге получаем

$$f(x) = \prod_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} (x^2 + e_{2i}x + e_{2i-1}) = 0;$$

$$e_{2i} = p_i; \quad e_{2i-1} = q_i.$$

Корни уравнения (4.42)

$$x_{2i, 2i-1} = -e_{2i}/2 \pm \sqrt{e_{2i}^2/4 - e_{2i-1}}.$$

*Вычислительная схема.* При нахождении всех корней алгебраического уравнения (4.42) с действительными коэффициентами необходимо выполнить следующие действия.

1. В полиноме  $x^n + a_2 x^{n-1} + a_3 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x^2 + a_n x + a_{n+1}$  выделить либо трехчлен  $a_{n-1} x^2 + a_n x + a_{n+1}$ , либо  $x^2 + a_2 x + a_3$ . Обозначим  $p = a_n/a_{n-1}$ ;  $q = a_{n+1}/a_{n-1}$  или  $p = a_2$ ;  $q = a_3$ .

2. Используя схему Горнера, разделить полином  $f(x)$  на  $x^2 + px + q$  и вычислить коэффициенты  $b_i, c_i$  по алгоритму (4.46).

3. Вычислить поправки, вносимые в  $p$  и  $q$  для первого приближения:  $p = p + \Delta p$ ;  $q = q + \Delta q$ .

4. Если  $|\Delta q| \leq \varepsilon$  и  $|\Delta p| \leq \varepsilon$ , то считаем, что два корня  $x_{1,2} = -p/2 \pm \sqrt{p^2/4 - q}$  найдены с точностью  $\varepsilon$ , если (4.47) не выполняется, то повторяем вычисления по пп. 2, 3, пока условия (4.47) не удовлетворятся.

б. В полученном полиноме

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n-1} b_i x^{i-1}$$

вводим обозначения  $a_i = b_i$  и повторяем вычисления по пп. 1...4, пока  $n > 2$ .

**Пример 4.4.** Найдем корни уравнения

$$x^4 - 3x^3 + 20x^2 + 44x + 54 = 0; \quad \Delta = 0,05. \quad (4.48)$$

1. Выделим трехчлен  $20x^2 + 44x + 54$ ;  $p = 2,2$ ;  $q = 2,7$ .

2. Вычислим коэффициенты  $b_i, c_i$ :

$$b_1 = 1; \quad b_2 = -3 - 2,2 \cdot 1 = -5,2; \quad b_3 = 20 + 2,2 \cdot 5,2 - 2,7 = 28,74;$$

$$b_4 = 44 - 2,2 \cdot 28,74 + 2,7 \cdot 5,2 = -5,19; \quad b_5 = 54 + 2,2 \cdot 5,19 - 2,7 \cdot 28,74 =$$

$$= -14,84; \quad c_1 = 1; \quad c_2 = -5,2 - 2,2 \cdot 1 = -7,4; \quad c_3 = 28,74 + 2,2 \cdot 7,4 - 2,7 =$$

$$= 41,32; \quad c_4 = -2,2 \cdot 41,32 + 2,7 \cdot 7,4 = -70,92.$$

3. Вычислим  $\Delta p$  и  $\Delta q$ :

$$d = c_3^2 - c_2 c_4 = 41,32^2 - 7,4 \cdot 70,92 \approx 1182;$$

$$\Delta p = (b_4 c_3 - b_3 c_2)/d = (-5,2 \cdot 41,32 - 14,84 \cdot 7,4)/1182;$$

$$\Delta p \approx -0,7; \quad \Delta q = (b_5 c_3 - b_4 c_4)/d = (-14,84 \cdot 41,32 + 5,2 \cdot 70,92)/1182 \approx -0,8;$$

$$p = 2,2 - 0,7 = 1,5; \quad q = 2,7 - 0,8 = 1,9.$$

4.  $|\Delta p| > \Delta$ ;  $|\Delta q| > \Delta$ , поэтому повторяем пп. 2, 3.  
2.

$$b_2 = -3 - 1,5 = -4,5; \quad b_3 = 20 \mp 1,5 \cdot 4,5 - 1,9 = 24,85;$$

$$b_4 = 44 - 1,5 \cdot 24,85 + 1,9 \cdot 4,5 = 15,28; \quad b_5 = -16; \quad c_2 = -6;$$

$$c_3 = 32; \quad c_4 = -36;$$

3.  $d = 32^2 - 36 \cdot 6 = 808;$

$$\Delta p = (32 \cdot 15,28 - 16 \cdot 6)/808 \approx 0,47; \quad p = 1,5 + 0,47 = 1,97;$$

$$\Delta q = (-32 \cdot 16 + 36 \cdot 15,28)/808 \approx 0,05; \quad q = 1,9 + 0,05 = 1,95.$$

2. Снова вычислим  $b_i, c_i$ :

$$b_2 = -4,97; \quad b_3 = 28; \quad b_4 = -2; \quad b_5 = 2;$$

$$c_2 = -6,9; \quad c_3 = 39,7; \quad c_4 = -64,7.$$

3.  $d = 39,7^2 - 64,7 \cdot 6,94 = 1145; \quad \Delta p = -0,06; \quad \Delta q = -0,04;$

4.  $p = 1,97 - 0,06 = 1,91; \quad q = 1,95 - 0,04 = 1,91.$

2.  $b_2 = -4,9; \quad b_3 = 27,5; \quad b_4 = 1,3; \quad b_5 = -0,9; \quad c_2 = -6,8; \quad c_3 = 38,7;$

$c_4 = -63,0.$

3.  $d = 1064; \quad \Delta p = 0,041; \quad \Delta q = 0,045;$

4.  $p = 1,951; \quad q = 1,955; \quad |\Delta p| < 0,05; \quad |\Delta q| < 0,05.$

Таким образом, за три итерации получены корни уравнения (4.48) с точностью  $\Delta = 0,05.$

$$x^4 - 3x^3 + 20x^2 + 44x + 54 \approx (x^2 + 1,95x + 1,96)(x^2 - 4,91x + 27,5);$$

$$x_{1,2} = -0,98 \pm j \cdot 0,99; \quad x_{3,4} = 2,46 \pm j \cdot 4,33.$$

Программы, реализующие алгоритм, и правила пользования ими, приведены в приложении:

а) вычисление изолированного корня комбинированным методом (программа SROOT);

б) вычисление всех корней алгебраического уравнения методом выделения корней (программа GORN).

### Задания для самостоятельной работы

I. Вычислить изолированный корень уравнения. Проанализировать результаты вычислений с учетом различной требуемой точности.

II. Вычислить все корни уравнения с точностью  $\Delta_1 = 0,001$ ;  $\Delta_2 = 0,0001$ . Проанализировать результаты с учетом требуемой точности.

1.  $x^6 + 2,5x^5 - 10x^4 + 10x^3 - 9x^2 + 15x - 17,5 = 0.$

2.  $x^5 - 2,8x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 4,4x - 5 = 0.$

3.  $x^6 + 6,5x^5 - 14x^4 + 14x^3 - 17x^2 + 21x - 22,5 = 0.$

4.  $x^6 + 10,5x^5 - 24x^4 + 28x^3 - 29x^2 + 39x - 45 = 0.$

5.  $x^5 - 1,8x^4 + 1,9x^3 - 2,3x^2 + 2,8x - 3 = 0.$

6.  $x^6 + 10,5x^5 - 18x^4 + 22x^3 - 17x^2 + 31x - 37,5 = 0.$

7.  $x^5 - 3x^4 + 3,2x^3 - 3,5x^2 + 4,6x - 5 = 0.$

8.  $x^6 + 7,5x^5 - 18x^4 + 20x^3 - 11x^2 + 19x - 22,5 = 0.$

9.  $x^5 - 2x^4 + 2,9x^3 - 2,44x^2 + 4,2x - 5 = 0.$

10.  $x^6 + 9x^5 - 18x^4 + 19x^3 - 19x^2 + 30x - 35 = 0.$

11.  $x^5 - 2,6x^4 + 2,82x^3 - 3,41x^2 + 4,12x - 3,23 = 0.$

12.  $x^6 + 6,5x^5 - 20x^4 + 21x^3 - 21x^2 + 31x - 32,5 = 0.$

13.  $x^5 - 4x^4 + 4x^3 - 4,33x^2 + 6x - 6,67 = 0.$

14.  $x^6 + 3,5x^5 - 14x^4 + 14x^3 - 17x^2 + 21x - 22,5 = 0.$

15.  $x^5 - 1,6x^4 + 2,5x^3 - 2,7x^2 + 3,6x - 4 = 0.$

$$16. x^6 + 8,5x^5 - 16x^4 + 19x^3 - 15x^2 + 27x - 32,5 = 0.$$

$$17. x^6 + 4,5x^5 - 18x^4 + 22x^3 - 17x^2 + 31x - 37,5 = 0.$$

$$18. x^5 - 2x^4 + 2,09x^3 - 2,52x^2 + 3x - 3,26 = 0.$$

$$19. x^6 + 9,5x^5 - 20x^4 + 22x^3 - 25x^2 + 32x - 35 = 0.$$

$$20. x^5 - 2x^4 + 2,25x^3 - 2,58x^2 + 3,25x - 3,54 = 0.$$

III. Найдти решение системы уравнений, при этом достичь точности  $\Delta = 0,01$ .

$$1. \begin{cases} \cos(x-1) + y = 0,5; \\ x - \cos y = 3. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \cos x + 2y = 1; \\ 2x - \sin(x-0,5) = 1. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \sin(x-1) + y = 1,5; \\ x - \sin(y+1) = 1. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \sin(x+2) - y = 1,5; \\ x - \cos(y-2) = 0,5. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} \sin y + 2x = 2; \\ \cos(x-1) + y^2 = 1. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} \cos(y+0,5) + x = 0,8; \\ \sin x - 2y = 1,6. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} \sin(x-y) = 1+y; \\ \cos(x-1) = 0,5-y. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} \lg(x+2) = y+1; \\ x^2 + 2y^2 = 0,9. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} y + e^x = 0,5; \\ \sin y - x = 1,5. \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} \sin y + 2x = 1; \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

## Глава 5. МЕТОДЫ НАХОЖДЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И ВЕКТОРОВ МАТРИЦ

Пусть имеются квадратная матрица  $A = [a_{ij}]_1^n$  и вектор  $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ . Обозначим  $y = Ax$ .

Если окажется, что элементы  $y_i = \lambda x_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , т. е.  $x_i$  пропорциональны  $y_i$  с коэффициентом пропорциональности  $\lambda$ , то вектор  $x$  называется собственным вектором матрицы  $A$ , а  $\lambda$  — собственным значением, или характеристическим числом.

$$Ax - \lambda x = 0,$$

или

$$(A - \lambda E)x = 0.$$

Отсюда получаем определитель

$$|A - \lambda E| = 0. \quad (5.1)$$

Если раскрыть его, то получим полином по степеням

$$(-1)^n \lambda^n + \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} A_i \lambda^{n-i} = 0, \quad (5.2)$$

где  $A_i$  — суммы всех диагональных миноров  $i$ -го порядка.

Известна теорема Гамильтона — Кэли:

Всякая квадратная матрица  $A$  удовлетворяет своему характеристическому уравнению

$$\Delta(A) = |A - \lambda E| = 0. \quad (5.3)$$

Введем в рассмотрение некоторый скалярный многочлен

$$g(\mu) = a_0 \prod_{i=1}^n (\mu - \mu_i).$$

*Теорема.* Если  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  — собственные значения матрицы  $A$ , а  $g(\mu)$  — некоторый скалярный многочлен, то  $g(\lambda_1), g(\lambda_2), \dots, g(\lambda_n)$  — все характеристические числа матрицы  $g(A)$ :

$$g(A) = a_0 \prod_{i=1}^n (A - \mu_i E).$$

Из нескольких известных методов раскрытия определителя (5.3) рассмотрим два: методы Леверье и Крылова.

### 5.1. МЕТОД ЛЕВЕРЬЕ

Метод Леверье основан на вычислении следов степеней матрицы  $A$ .

Следом матрицы называется сумма ее диагональных элементов и обозначается  $\text{Sp } A$ .

Пусть

$$\begin{aligned} S_1 &= \text{Sp } A = \sum_{i=1}^n a_{ii}; \\ S_2 &= \text{Sp } A^2 = \sum_{i=1}^n a_{ii}^{(2)}; \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ S_n &= \text{Sp } A^n = \sum_{i=1}^n a_{ii}^{(n)}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Поскольку матрица  $A^k$  имеет своими характеристическими числами  $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k$ ,  $k = \overline{1, n}$ :

$$\text{Sp } A^k = S_k = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k, \quad k = \overline{1, n}.$$

Суммы  $S_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ , степеней корней многочлена

$$\Delta(\lambda) = \lambda^n - \sum_{i=1}^n p_i \lambda^{n-i} \quad (5.5)$$

связаны с коэффициентами этого уравнения формулами Ньютона

$$k p_k = S_k - \sum_{i=1}^{k-1} p_i S_{k-i}, \quad k = \overline{1, n}. \quad (5.6)$$

Если вычислить следы  $S_1, S_2, \dots, S_n$  матриц  $A, A^2, \dots, A^n$ , то затем из (5.6) можно последовательно вычислить коэффициенты в (5.2):

$$\begin{aligned} A_0 &= 1; \\ A_1 &= A_0 S_1; \\ &\dots \dots \dots \\ A_k &= 1/k \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} A_{k-i} S_i; \quad k = \overline{2, n}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

**Пример 5.1.** Найдем собственные значения матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Вычислим  $A^2$ :

$$A^2 = AA = \begin{bmatrix} 32 & 16 & 26 \\ 26 & 16 & 20 \\ 12 & 9 & 9 \end{bmatrix},$$

$$A^3 = A^2A = \begin{bmatrix} 234 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 114 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 75 \end{bmatrix}.$$

Вычислим коэффициенты  $S_1, S_2, S_3$  — следы степеней матрицы  $A$ :

$$\begin{aligned} S_1 &= 5 + 3 + 1 = 9, \quad S_2 = 32 + 16 + 9 = 57; \\ S_3 &= 234 + 114 + 75 = 423. \end{aligned}$$

Вычислим коэффициенты  $A_i$  согласно (5.7):

$$\begin{aligned} A_0 &= 1; \quad A_1 = S_1 = 9; \quad A_2 = 1/2(A_1 S_1 - A_0 S_2) = 12; \\ A_3 &= 1/3(A_2 S_1 - A_1 S_2 - A_0 S_3) = 6. \end{aligned}$$

Подставим полученные значения в (5.2) при  $n = 3$ :

$$\lambda^3 - 9\lambda^2 + 12\lambda - 6 = 0.$$

Применяя метод Ньютона для этого уравнения, вычислим значение  $\lambda_1 = 7,505$ :

$$(\lambda^2 - 1,495\lambda + 0,78)(\lambda - 7,505) = 0.$$

Таким образом, получены собственные значения матрицы  $A$ :

$$\lambda_1 = 7,505; \quad \lambda_{2,3} = 0,7425 \pm j \cdot 0,438.$$

## 5.2. МЕТОД КРЫЛОВА

Выберем произвольно вектор  $x$  размерности  $n$ .

Составим ряд векторов  $Ax, A^2x, \dots, A^{n-1}x$ .

Пусть они линейно независимы, а вектор

$$A^n x = -p_n x - p_{n-1} Ax - \dots - p_1 A^{n-1} x, \quad (5.8)$$

или

$$\begin{aligned} \Delta(A)x &= 0; \\ \Delta(\lambda) &= \lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \dots + p_{n-1} \lambda + p_n = 0, \end{aligned} \quad (5.9)$$



вектор  $x$ , например  $x = [1, 1, 0, \dots, 0]^T$  и снова вычисляем  $y^{(k)}$ ,  $k = \overline{1, n}$  по п. 2.

4. Находим собственные значения уравнения (5.9), например, методом выделения корней.

5. Вычисляем коэффициенты  $q_{ji}$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{1, n-1}$  по (5.14).

6. Находим собственные векторы по (5.13).

**Пример 5.2.** Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Выбираем  $x = [1, 0, 0]^T$ .

$$y^{(0)} = [1, 0, 0]^T; \quad y^{(1)} = [-3, 1, 1]^T;$$

$$y^{(2)} = [11, 0, -3]^T;$$

$$y^{(3)} = [-36, 14, 17]^T.$$

Составляем систему линейных уравнений для нахождения коэффициентов  $p_1, p_2, p_3$  уравнения (5.9):

$$\left. \begin{aligned} 11p_1 - 3p_2 + p_3 &= 36; \\ p_2 &= -14; \\ -3p_1 + p_2 &= -17. \end{aligned} \right\}$$

Решаем систему по схеме Халецкого:

B

	11	$\frac{-3}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{36}{11}$
C	0	1	0	-14
	-3	$\frac{2}{11}$	$\frac{3}{11}$	-17
	1	-14	-17	

↓ y.

←  
p

Таким образом,  $p_1 = 1$ ;  $p_2 = -14$ ;  $p_3 = -17$ .  
Получено характеристическое уравнение

$$\lambda^3 + \lambda^2 - 14\lambda - 17 = 0.$$

Отделим изолированный корень

$$f(\lambda) = ((\lambda + 1)\lambda - 14)\lambda - 17;$$

$$f'(\lambda) = (3\lambda + 2)\lambda - 14; \quad f''(\lambda) = 6\lambda + 2;$$

$$f(17/31) < 0; \quad f(15) > 0; \quad f'(17/31) < 0; \quad f'(15) > 0;$$

$$f(3) = -23 < 0; \quad f(4) = 7 > 0; \quad f''(3) = 2 > 0; \quad f''(4) = 42 > 0.$$

Корень находится в промежутке  $[3; 4]$ .

Уточним его значение методом Ньютона.

Так как  $f''(\lambda)$  в промежутке [3; 4] положительна, то  $\lambda^0 = 4$ ;

$$\lambda^1 = 4 - f(4)/f'(4) = 4 - 1/6 = 23/6;$$

$$f(23/6) = 0,36; \quad f'(23/6) = 38;$$

$$\lambda^2 = 23/6 - 0,36/38 = 3,823.$$

С точностью до 0,01  $\lambda_1 = 3,823$ .

Разделив  $\lambda^3 + \lambda^2 - 14\lambda - 17$  на  $(\lambda - 3,823)$ , получим:

$$\lambda^2 + 4,82\lambda + 4,41 = 0; \quad \lambda_{2,3} = -2,41 \pm 1,18;$$

$$\lambda_1 \approx 3,82; \quad \lambda_2 \approx -1,23; \quad \lambda_3 \approx -3,59.$$

Вычисляем коэффициенты  $q_{ji}$ ;  $i = \overline{1,3}$ ;  $j = \overline{1,2}$ :

$$q_{1,1} = \lambda_1 q_{0,1} + p_1 = 4,82;$$

$$q_{2,1} = \lambda_1 q_{1,1} + p_2 = 4,41;$$

$$q_{1,2} = \lambda_2 q_{0,2} + p_1 = -0,23;$$

$$q_{2,2} = \lambda_2 q_{1,2} + p_2 = -13,72;$$

$$q_{1,3} = \lambda_3 q_{0,3} + p_1 = -2,59;$$

$$q_{2,3} = \lambda_3 q_{1,3} + p_2 = -4,65.$$

По формулам (5.13) вычисляем собственные векторы  $x^{(k)}$ :

$$x_1^{(1)} = y_1^{(2)} + q_{1,1}y_1^{(1)} + q_{2,1}y_1^{(0)} = 0,95;$$

$$x_2^{(1)} = y_2^{(2)} + q_{1,1}y_2^{(1)} + q_{2,1}y_2^{(0)} = 4,82;$$

$$x_3^{(1)} = y_3^{(2)} + q_{1,1}y_3^{(1)} + q_{2,1}y_3^{(0)} = 1,82;$$

$$x_1^{(2)} = y_1^{(2)} + q_{1,2}y_1^{(1)} + q_{2,2}y_1^{(0)} = -2,03;$$

$$x_2^{(2)} = y_2^{(2)} + q_{1,2}y_2^{(1)} + q_{2,2}y_2^{(0)} = -0,23;$$

$$x_3^{(2)} = y_3^{(2)} + q_{1,2}y_3^{(1)} + q_{2,2}y_3^{(0)} = -3,23;$$

$$x_1^{(3)} = y_1^{(2)} + q_{1,3}y_1^{(1)} + q_{2,3}y_1^{(0)} = 14,12;$$

$$x_2^{(3)} = y_2^{(2)} + q_{1,3}y_2^{(1)} + q_{2,3}y_2^{(0)} = -2,59;$$

$$x_3^{(3)} = y_3^{(2)} + q_{1,3}y_3^{(1)} + q_{2,3}y_3^{(0)} = -5,59.$$

Таким образом, собственные значения и собственные векторы матрицы  $A$  следующие:

$$\lambda_1 = 3,82; \quad \lambda_2 = -1,23; \quad \lambda_3 = -3,59;$$

$$x = \begin{bmatrix} 0,95 & -2,03 & 14,12 \\ 4,82 & -0,23 & -2,59 \\ 1,82 & -3,23 & -5,59 \end{bmatrix}.$$

### Задания для самостоятельной работы

Найти собственные значения и собственные векторы, соответствующие этим значениям матриц ( $\Delta = 0,01$ ):

$$1. \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1,5 & 3 & 4 \\ 1,5 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 1,5 \\ 4 & 2 & 1,5 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$2. \quad A = \begin{bmatrix} 1,5 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0,5 & 1,5 \\ 2 & 0,5 & 2 & 1,5 \\ 0,5 & 1 & 1,5 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$3. \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1,5 & 0,5 \\ 1 & 2 & 0,5 & 1 \\ 1,5 & 1 & 2 & 1,5 \\ 0,5 & 1 & 2 & 0,5 \end{bmatrix}.$$

$$4. \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1,5 & 2 & 2 & 1,5 \\ 3,5 & 2 & 1 & 1,5 \\ 4 & 1,5 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$5. A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0,5 & 2 & -1 & 0 \\ 1,5 & 0 & -1 & 1,5 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$6. A = \begin{bmatrix} 2 & 0,5 & 1 & 2 \\ 0,5 & 1 & 0,8 & 1 \\ 2 & 0,8 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$7. A = \begin{bmatrix} 0,5 & 1,5 & 1 & -0,8 \\ 1,2 & 2 & 0,5 & 1,4 \\ 1 & 0,5 & 1 & 2 \\ 0,5 & 1,2 & 1 & 2,2 \end{bmatrix}.$$

$$8. A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0,5 & -1 \\ -1 & 2 & 1,5 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$9. A = \begin{bmatrix} 1 & 1,2 & 0,8 & -1 \\ 1,5 & 2 & -1,5 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$10. A = \begin{bmatrix} 2,5 & 0,5 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0,5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$11. A = \begin{bmatrix} 1,2 & 0,5 & 2 & 1 \\ 0,5 & 1 & 0,6 & 2 \\ 2 & 0,6 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$12. A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2,5 & 0,5 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0,5 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$13. A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 2,5 & 0,6 & 0,8 \\ 1,2 & 2,2 & -1,2 & 1 \\ 1 & 0,8 & 1,4 & 2,5 \end{bmatrix}.$$

$$14. A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1,5 & 2,1 \\ 2,5 & 1,6 & 0,8 & 0,9 \\ 1 & 2,2 & 0,6 & 0 \\ 2 & 0,8 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$15. A = \begin{bmatrix} 0,8 & 1,6 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2,2 & 0,8 \\ 2 & 2,5 & 0 & -1 \\ 0 & 0,5 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$16. A = \begin{bmatrix} 2,4 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 2,5 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$17. A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1,5 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$18. A = \begin{bmatrix} 1,5 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1,5 & 1 & 2 \\ 1 & 1,5 & 2,5 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$19. A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0,5 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1,5 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$20. A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & 0,5 & 2 & 1,5 \\ -1 & 1,5 & -1 & 0 \\ 0,5 & 1 & 1,5 & 2 \end{bmatrix}.$$

## Глава 6. ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ

Задача приближения функций возникает при решении многих задач (интегрирования и дифференцирования функций, решения дифференциальных и интегральных уравнений, обработки экспериментальных данных).

Простейшая задача, приводящая к приближению функций, заключается в следующем.

В дискретные моменты  $x_1, x_2, \dots, x_n$  наблюдаются значения функции  $y = f(x)$ ; требуется восстановить ее значения при других  $x$ .

Иногда известно, что приближающую функцию целесообразно искать в виде

$$f(x) \approx g(x; a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Если параметры  $a_1, a_2, \dots, a_n$  определяются из условия совпадения  $f(x)$  и приближающей функции  $g(x)$  в точках  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ;

$g(x_i) = f(x_i)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , то такой способ приближения называется *интерполяцией*.

Часто бывает известно, что функция хорошо приближается функциями определенного вида, например, многочленами, но неясно, как лучше всего выбрать степень приближенного многочлена.

В задачах планирования экспериментов возникает следующая проблема. Известен вид хорошего приближения функции, например, функция хорошо приближается многочленом второй степени. В то же время измеряемые значения функции содержат большие ошибки. Требуется получить наилучшее в определенной норме приближения при минимальном количестве измерительных значений функций.

## 6.1. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

### Интерполяционный многочлен Лагранжа

Среди способов интерполяции наиболее распространен случай линейной интерполяции

$$g(x; a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x),$$

где  $\varphi_i(x)$  — фиксированные функции.

Значения коэффициентов  $a_i$  определяются из условия совпадения с приближаемой функцией в узлах *интерполяции*  $x_i$ :

$$f(x_i) = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x_i), \quad i = \overline{1, n}. \quad (6.1)$$

В частном случае  $\varphi_k(x) = x^{k-1}$ ,  $k = \overline{1, n}$ , имеем

$$\sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x) = \sum_{k=1}^n a_k x^{k-1} \quad (6.2)$$

и

$$\sum_{k=1}^n a_k x_i^{k-1} = f(x_i), \quad i = \overline{1, n}. \quad (6.3)$$

$\text{Det} [x_i^{k-1}]_1^n \neq 0$  (определитель Вандермонда), следовательно, система (6.3) имеет единственное решение.

Интерполяционный многочлен (6.2), записанный в форме

$$g_n(x) = L_n(x) = \sum_{i=1}^n f(x_i) \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad (6.4)$$

называется *интерполяционным полиномом Лагранжа*.

Введем обозначения:  $\omega_n(x) = \prod_{j=1}^n (x - x_j)$ . Очевидно

$$\omega'_n(x) = \sum_{k=1}^n \prod_{j \neq k} (x - x_j); \quad \omega'_n(x_i) = \prod_{j \neq i} (x_i - x_j).$$

Поэтому (6.4) можно записать в виде

$$L_n(x) = \sum_{i=1}^n f(x_i) \frac{\omega_n(x)}{\omega_n'(x_i)(x-x_i)}. \quad (6.5)$$

### Оценка остаточного члена интерполяционного полинома Лагранжа

Положим

$$\varphi(x) = f(x) - g_n(x) - K\omega_n(x).$$

Выберем  $K$  из условия  $\varphi(x^*) = 0$ ,  $x^*$  — точка, в которой оценивается погрешность. Тогда

$$K = \frac{f(x^*) - g_n(x^*)}{\omega_n(x^*)}.$$

При таком выборе  $K$   $\varphi(x)$  обращается в нуль в  $(n+1)$  точке  $x_1, x_2, \dots, x_n, x^*$ . На основании теоремы Ролля ее производная  $\varphi'(x)$  обращается в нуль, по крайней мере, в  $n$  точках,  $\dots$ ,  $\varphi^{(n)}(x)$  обращается в нуль, по крайней мере, в одной точке  $\xi \in [y_1, y_2]$ :  $y_1 = \min(x_1, x_2, \dots, x_n, x^*)$ ;  $y_2 = \max(x_1, x_2, \dots, x_n, x^*)$ . Так как  $\varphi^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - nK$ , то из условия  $\varphi^{(n)}(\xi) = 0$  следует  $K = f^{(n)}(\xi)/n!$  и

$$f(x^*) - g_n(x^*) = \frac{f^{(n)}(\xi)\omega_n(x^*)}{n!}, \quad \xi \in [y_1, y_2] \quad (6.6)$$

остаточный член интерполяционной формулы Лагранжа (6.4).

*Вычислительная схема Эйткена.* Схема Эйткена позволяет свести вычисления коэффициентов  $a_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , полинома (6.2) с учетом (6.4) к вычислению функциональных определителей второго порядка.

Введем обозначения

$$P_{i, i+1}(x) = \frac{1}{x_{i+1} - x_i} \begin{vmatrix} x - x_i & y_i = f(x_i) \\ x - x_{i+1} & y_{i+1} = f(x_{i+1}) \end{vmatrix}, \quad i = \overline{1, n-1}; \quad (6.7)$$

$$P_{i-1, i, i+1}(x) = \frac{1}{x_{i+1} - x_{i-1}} \begin{vmatrix} x - x_{i-1} & P_{i-1, i}(x) \\ x - x_{i+1} & P_{i, i+1}(x) \end{vmatrix}, \quad i = \overline{2, n-1}; \quad (6.8)$$

и т. д.

$$P_{1, 2, \dots, k}(x) = \frac{1}{x_k - x_1} \begin{vmatrix} x - x_1 & P_{1, 2, \dots, k-1}(x) \\ x - x_k & P_{2, 3, \dots, k}(x) \end{vmatrix}. \quad (6.9)$$

Тогда, вычислив функциональный определитель  $P_{1, 2, \dots, n}(x)$ , получим (6.4) в виде (6.2), т. е. найдем значения коэффициентов  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .

Особенно большую экономию дает описанная схема при вычислении значений полинома Лагранжа в фиксированных точках  $\xi \in [x_i, x_{i+1}]$ . Для вычисления определителей (6.7) имеем

$$P_{i, i+1}(x) = a_{1, i} + a_{2, i}x; \quad i = \overline{1, n-1}, \quad (6.10)$$

$$r_i = 1/(x_{i+1} - x_i); \quad a_{1, i} = r_i(x_{i+1}y_i - x_i y_{i+1}); \quad a_{2, i} = r_i(y_{i+1} - y_i).$$

Коэффициенты  $b_{k, i}$ ,  $k = \overline{1, 3}$  вычисляем по формулам:

$$\begin{aligned} r_i &= 1/(x_{i+1} - x_{i-1}); \quad b_{1, i} = r_i(a_{1, i}x_{i+1} - a_{1, i+1}x_i); \\ b_{2, i} &= r_i(a_{2, i-1}x_{i+1} - a_{2, i}x_{i-1} + a_{2, i+1} - a_{1, i+1}); \\ b_{3, i} &= r_i(a_{2, i} - a_{2, i-1}); \end{aligned} \quad (6.11)$$

$$P_{i-1, i, 1, i}(x) = b_{1, i} + b_{2, i}x + b_{3, i}x^2; \quad i = \overline{2, n-1}.$$

Переобозначив  $a_{k, i} = b_{k, i}$ ,  $k = \overline{1, 3}$ , возможно по формулам вида (6.11) вычислить коэффициенты полинома общего вида (6.9):

$$\begin{aligned} r_i &= 1/(x_{i+k+1} - x_i); \quad b_{1, i} = r_i(a_{1, i}x_{i+k+1} - a_{1, i+1}x_i); \\ b_{j+1, i} &= r_i(a_{j+1, i}x_{i+k+1} - a_{j+1, i+1}x_i - a_{j, i} + a_{j+1, i+1}), \\ k &= \overline{1, n-2}; \quad i = \overline{1, k+1}; \quad j = \overline{1, n-k-1}. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Пример 6.1.

$x_i$	-1	0	2	5	6
$y_i$	-3	1	4	3,5	6

$$P_{1, 2}(x) = \frac{1}{1} \begin{vmatrix} x+1 & -3 \\ x & 1 \end{vmatrix} = 1 + 4x; \quad P_{2, 3}(x) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x & 1 \\ x-2 & 4 \end{vmatrix} = 1 + 1,5x;$$

$$P_{3, 4}(x) = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} x-2 & 4 \\ x-5 & 3,5 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}(26-x); \quad P_{4, 5}(x) = \frac{1}{1} \begin{vmatrix} x-5 & 3,5 \\ x-6 & 6 \end{vmatrix} = -9 + 2,5x;$$

$$P_{1, 2, 3}(x) = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} x+1 & 4x+1 \\ x-2 & 1,5x+1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}(6 + 19x - 5x^2);$$

$$P_{2, 3, 4}(x) = \frac{1}{5} \begin{vmatrix} x & 1,5x+1 \\ x-5 & 1/6(26-x) \end{vmatrix} = \frac{1}{6}(6 + 13x - 2x^2);$$

$$P_{3, 4, 5}(x) = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} x-2 & 1/6(26-x) \\ x-6 & 2,5x-9 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}(66 - 29x + 4x^2);$$

$$P_{1, 2, 3, 4}(x) = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x+1 & 1/6(6 + 19x - 5x^2) \\ x-5 & 1/6(6 + 13x - 2x^2) \end{vmatrix} = \frac{1}{12}(12 + 36x - 11x^2 + x^3);$$

$$P_{2, 3, 4, 5}(x) = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x & 1/6(6 + 13x - 2x^2) \\ x-6 & 1/6(66 - 29x + 4x^2) \end{vmatrix} = \frac{1}{6}(6 + 23x - 9x^2 + x^3);$$

$$P_{1, 2, 3, 4, 5}(x) = \frac{1}{7} \begin{vmatrix} x+1 & 1/12(12 + 36x - 11x^2 + x^3) \\ x-6 & 1/6(6 + 23x - 9x^2 + x^3) \end{vmatrix}.$$

Таким образом,

$$L_4(x) = P_{1, 2, 3, 4, 5}(x) = 1 + 3,119x - 0,881x^2 + 0,0119x^3(1+x).$$

Для проверки правильности вычислений найдем

$$L_4(0) = 1; \quad L_4(2) = 4; \quad L_4(3) = 3,5.$$

### Интерполяционный полином Ньютона

Разделенные и конечные разности. Обобщением понятия производной является понятие *разделенной разности*. Разделенные разности первого порядка определяются равенством

$$f(x_i; x_j) = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i};$$

разности второго порядка

$$f(x_i; x_j; x_k) = \frac{f(x_j; x_k) - f(x_i; x_j)}{x_k - x_i};$$

разности  $k$ -го порядка

$$f(x_1; x_2; \dots; x_{k+1}) = \frac{f(x_2; x_3; \dots; x_{k+1}) - f(x_1; x_2; \dots; x_k)}{x_{k+1} - x_1}. \quad (6.12)$$

Справедливо равенство

$$f(x_1; x_2; \dots; x_k) = \prod_{l=1}^k \left[ \frac{f(x_l)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^k (x_l - x_j)} \right]. \quad (6.13)$$

Разделенная разность есть симметричная функция своих аргументов.

Если узлы таблицы  $x_i$  расположены на равных расстояниях  $x_i = x_0 + ih$ ;  $i = \overline{1, n}$ ;  $f_i = f(x_i)$  — соответствующие значения функции, то разделенные разности вида (6.12) называются *конечными разностями  $k$ -го порядка*:

$$\begin{aligned} \Delta f_i &= f_{i+1} - f_i; \\ \Delta^k f_i &= \Delta^{k-1} f_{i+1} - \Delta^{k-1} f_i \end{aligned} \quad (6.14)$$

конечные разности вперед;

$$\begin{aligned} \nabla f_i &= f_i - f_{i-1}; \\ \nabla^k f_i &= \nabla^{k-1} f_i - \nabla^{k-1} f_{i-1} \end{aligned} \quad (6.15)$$

конечные разности назад  $k$ -го порядка.

Конечные разности  $k$ -го порядка выражаются через значения функции по формуле

$$\Delta^k f_i = \sum_{j=0}^k (-1)^j C_k^j f_{i+k-j}. \quad (6.16)$$

При  $x_i = x_0 + ih$  справедливо равенство

$$f(x_i; \dots; x_{i+k}) = \frac{\Delta^k f_{i+k}}{h^k \cdot k!}. \quad (6.17)$$

**Интерполяционные формулы Ньютона.** Для интерполяционного полинома Лагранжа справедливо равенство (с учетом (6.13) разделенных разностей):

$$f(x) - L_n(x) = f(x; x_1; \dots; x_n) \omega_n(x). \quad (6.18)$$

Представим  $L_n(x)$  в виде

$$L_n(x) = L_1(x) + (L_2(x) - L_1(x)) + \dots + (L_n(x) - L_{n-1}(x)). \quad (6.19)$$

Так как

$$L_m(x_j) = L_{m-1}(x_j) = f_j \text{ при } j = \overline{1, m-1},$$

то

$$L_m(x) - L_{m-1}(x) = A_{m-1} \omega_{m-1}(x).$$

Полагая  $x = x_m$ , получим

$$f(x_m) - L_{m-1}(x_m) = A_{m-1} \omega_{m-1}(x_m).$$

Полагая в (6.18)  $n = m - 1$  и  $x = x_m$ , имеем

$$f(x_m) - L_{m-1}(x_m) = f(x_m; x_1; \dots; x_{m-1}) \omega_{m-1}(x_m).$$

Следовательно,

$$A_{m-1} = f(x_m; x_1; \dots; x_{m-1}) = f(x_1; x_2; \dots; x_m)$$

и

$$L_m(x) - L_{m-1}(x) = f(x_1; x_2; \dots; x_m) \omega_{m-1}(x).$$

Подставим эти величины в (6.19):

$$L_n(x) = f(x_1) + f(x_1; x_2)(x - x_1) + \dots + f(x_1; x_2; \dots; x_n) \omega_{n-1}(x). \quad (6.20)$$

Интерполяционный полином, записанный в такой форме, называется интерполяционным полиномом Ньютона с разделенными разностями.

Сделав в (6.20) замену переменных  $x = x_0 + hq$ , получим интерполяционную формулу Ньютона для интерполирования вперед (для начала таблицы):

$$P_n(x) = y_0 + \Delta y_0 q + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} q(q-1) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!} q(q-1) \dots (q-n+1) \quad (6.21)$$

или

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{\Delta^i y_0}{i!} q^{[i]},$$

где  $y_i = f(x_i)$ ,  $q^{[i]}$  — обобщенные степени:  $q^{[i]} = q(q-1) \dots (q-i+1)$ ;  $i = 1, 2, \dots$

Для узлов  $x_n, x_{n-1}, \dots, x_0$  при  $x = x_n + hq$  получаем:

$$P_n(x) = y_n + \Delta y_{n-1} q + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!} q(q+1) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!} q(q+1) \dots (q+n-1). \quad (6.22)$$

— интерполяционная формула Ньютона для интерполирования назад, дающая большую точность в конце таблицы.

*Вычислительная схема.* Чтобы получить  $P_n(x)$  в виде

$$P_n(x) = \sum_{i=1}^{n+1} a_i x^{i-1}, \quad (6.23)$$

необходимо выполнить следующие действия.

1. Вычислить значения конечных разностей:

$$\Delta^i f(x_0) = \Delta^i y_0 = \sum_{j=0}^i (-1)^j C_i^j y_{i-j}; \quad i = \overline{1, n} \quad (6.24)$$

$$\text{и } z_i = \frac{\Delta^i y_0}{i! h^i}; \quad i = \overline{2, n}; \quad z_1 = y_0.$$

2. Вычислить коэффициенты  $b_{ij}$  при степенях  $x$  в (6.21) обобщенных степеней  $q^{[i]}$

$$q^{[i]} = \sum_{j=1}^{i+1} b_{i+1, j} x^{j-1}; \quad (6.25)$$

$$q = (x - x_0)/h.$$

При этом  $b_{k, k} = 1; k = \overline{1, n+1}; b_{2, 1} = -x_0;$

$$r_k = -x_0 - (k-2)h; \quad b_{k, 1} = r_k b_{k-1, 1}; \quad k = \overline{3, n+1};$$

$$b_{k, i} = b_{k-1, i-1} + r_k b_{k-1, i}, \quad i = \overline{2, k-1}. \quad (6.26)$$

3. Вычислить коэффициенты  $a_i$ :

$$a_i = \sum_{j=2}^{n-i+2} b_{j, i} z_j. \quad (6.27)$$

Пример 6.2. Функция  $f(x)$  задана таблицей:

$x$	2	3	4	5
$f(x)$	0,693	1,1	1,386	1,603

1. Вычислим  $\Delta^i y_0, i = 1, 3; \Delta y_0 = 0,406; \Delta^2 y_0 = -0,12; h = 1; \Delta^3 y_0 = 0,049; z_1 = 0,693; z_2 = \Delta y_0/h = 0,406; z_3 = \Delta^2 y_0/2h^2 = -0,06; z_4 = \Delta^3 y_0/6h^3 = 0,0081.$

2. Вычислим коэффициенты  $b_{i, j}$  по (6,26):  $b_{k, k} = 1; k = \overline{1, 4}; b_{2, 1} = -2; r_3 = 3; b_{3, 1} = +2r_3 = 6; r_4 = -4; b_{4, 1} = r_4 b_{3, 1} = -24; b_{3, 2} = b_{2, 1} + r_3 b_{2, 2} = -5; b_{4, 2} = b_{3, 1} - r_4 b_{3, 2} = 6 - 4(-5) = 26; b_{4, 3} = b_{3, 2} - r_4 b_{3, 3} = -5 - 4 \cdot 1 = -9.$

3. Вычислим коэффициенты  $a_i$ :

$$a_1 = b_{1, 1} z_1 + b_{2, 1} z_2 + b_{3, 1} z_3 + b_{4, 1} z_4 = -0,6704;$$

$$a_2 = b_{2, 2} z_2 + b_{3, 2} z_3 + b_{4, 2} z_4 = 0,914;$$

$$a_3 = z_3 + b_{4, 3} z_4 = -0,1324; a_4 = z_4 = 0,0081;$$

$$P_3(x) = -0,6704 + 0,914x - 0,1324x^2 + 0,0081x^3.$$

Сделаем проверку:

$$P_3(2) = -0,6704 + 0,914 \cdot 2 - 0,1324 \cdot 4 + 0,0081 \cdot 8 = 0,693;$$

$$P_3(3) = -0,6704 + 0,914 \cdot 3 - 0,1324 \cdot 9 + 0,0081 \cdot 27 = 1,099.$$

### Интерполяция периодических функций

Если интерполируемая функция  $f(x)$  — периодическая с периодом  $b - a$ , т. е.  $f(a) = f(b)$ , то естественно потребовать, чтобы базисные функции  $\varphi_i(x)$  интерполяционного полинома

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n+1} a_k \varphi_k(x)$$

удовлетворяли тому же условию  $\varphi_i(a) = \varphi_i(b), i = \overline{1, n+1}.$

Системой базисных функций, периодической на  $[0, 2\pi]$ , являются системы функций Чебышева. В частности, такую систему образуют при  $x = 0$ ,  $x = 2\pi$  функции

$$1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \dots, \sin nx, \cos nx.$$

Поскольку два тригонометрических многочлена вида

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

совпадающие в  $2n + 1$  попарно различных точках из промежутка  $[0, 2\pi]$  тождественно равны между собой, для любой периодической функции  $f(x)$  с периодом  $T = 2\pi$  при любом наборе из  $2n + 1$  попарно различных узлов  $x_0, x_1, \dots, x_{2n}$  существует единственный тригонометрический многочлен  $T_n(x)$ , являющийся интерполяционным многочленом для  $f(x)$  по данной системе узлов  $x_0, x_1, \dots, x_n$  интерполяции, т. е.

$$T_n(x_j) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx_j + b_k \sin kx_j) = f(x_j), \quad j = \overline{0, 2n}. \quad (6.29)$$

Так как любой отрезок  $[a, b]$  линейной заменой переменной можно привести к  $[0, 2\pi]$ , то в дальнейшем будем рассматривать  $f(x)$  как  $2\pi$  — периодическую функцию.

По аналогии с интерполяционным полиномом Лагранжа (6.4) с учетом (6.28) и (6.29) тригонометрический интерполяционный полином для  $f(x)$  по системе узлов  $\{x_i, i = \overline{0, 2n}\} \in [0, 2\pi]$ ,  $x_i \neq x_j$  при  $i \neq j$  представим в виде

$$T_n(x) = \sum_{i=0}^{2n} f(x_i) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{2n} \frac{\sin\left(\frac{x - x_j}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x_i - x_j}{2}\right)}. \quad (6.30)$$

Если  $f(x)$  — четная на отрезке  $[-\pi, \pi]$  функция, то по значениям в  $n + 1$  точке  $x_0, x_1, \dots, x_n$  ( $x_i \in [0, \pi]$ ) можно построить четный тригонометрический многочлен:

$$T_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{\cos x - \cos x_j}{\cos x_i - \cos x_j}. \quad (6.31)$$

Для нечетной функции  $f(x)$  на  $[-\pi, \pi]$

$$T_n(x) = \sum_{i=1}^n f(x_i) \frac{\sin x}{\sin x_i} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{\cos x - \cos x_j}{\cos x_i - \cos x_j}. \quad (6.32)$$

Практическое построение тригонометрических многочленов громоздко, поэтому обычно эта задача решается для случая равноотстоящих узлов

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = \overline{0, 2n}; \quad h = \frac{2\pi}{2n+1}; \quad x_0 \in \left(0, \frac{2\pi}{2n+1}\right).$$

С учетом (6.30):

$$T_n(x) = \sum_{i=0}^{2n} f(x_i) \frac{1}{2n+1} \frac{\sin \left[ (2n+1) \frac{x-x_i}{2} \right]}{\sin \left( \frac{x-x_i}{2} \right)}. \quad (6.33)$$

Тогда (6.31) приобретает вид

$$T_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \frac{\cos [(n+1)x] - \cos [(n+1)x_i]}{\cos x - \cos x_i},$$

а (6.32) —

$$T_n(x) = \sum_{i=1}^n f(x_i) \frac{\sin x}{\sin x_i} \cdot \frac{\cos [(n+1)x] - \cos [(n+1)x_i]}{\cos x - \cos x_i}.$$

### Интерполяционные сплайны

Основным недостатком интерполяционных полиномов, приближающих функции, является то, что их поведение в окрестности какой-либо точки определяет их поведение в целом. Аппаратом приближения, свободным от этих недостатков, являются сплайны. Сплайнами называются функции, которые склеены из различных кусков многочленов по фиксированной системе. Среди сплайнов важнейшую роль играют полиномиальные сплайны.

Обозначим сетку на отрезке  $[a, b]$ ,  $a, b \in R$ ,  $a < b$ :

$$\Delta_n: a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b. \quad (6.34)$$

Пусть  $P_m$  — множество многочленов степени не выше  $m$ ,  $m \geq 0$ ,  $C_{[a, b]}^{(k)}$  — множество непрерывных на  $[a, b]$  функций, имеющих непрерывные  $k$ -е производные,  $k > 0$ .

Функцию  $S_m(x) = S_m^k(x, \Delta_n)$  называют полиномиальным сплайном степени  $m$  дефекта  $k$  ( $k = \overline{1, m}$ ) с узлами (6.34), если

$$S_m(x) \in P_m \text{ на } [x_i, x_{i+1}], \quad i = \overline{0, n}; \quad S_m(x) \in C_{[a, b]}^{(m-k)}.$$

Точки  $x_i$  называются узлами сплайна.

Далее будем рассматривать полиномиальные сплайны дефекта 1.

Введем обозначение:

$$B_{m-1}(t) = B_{m-1}(x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+m}, t) = m \sum_{i=k}^{k+m} \frac{(x_i - t)^{m-1}}{\omega'(x_i)}. \quad (6.35)$$

Функцию  $B_{m-1}(t)$  называют В-сплайном степени  $m-1$  относительно узлов  $x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+m}$ .

В-сплайны удобно применять в качестве базисных функций для представления сплайнов. В приложениях наиболее часто употребляют сплайны невысокой степени, в частности параболические и кубические. Процесс построения таких сплайнов значительно проще, чем построения сплайнов более высокой степени. Матрица системы уравнений, определяющей параметры сплайна, является трехдиагональной с доминирующей главной диагональю.

При достаточной гладкости функции и хороших узлах можно приближенно восстанавливать производные высоких порядков.

*Параболические сплайны.* Пусть  $f(x) \in C[a, b]$ ,  $a, b \in R$ ,  $a < b$  и заданы два множества узлов:  $\Delta_n, \Delta'_n$ :

$$\Delta'_n: \bar{x}_0 = a < \bar{x}_1 < \bar{x}_2 < \dots < \bar{x}_n < b = \bar{x}_{n+1}. \quad (6.36)$$

Предположим, что  $x_{i-1} < \bar{x}_i < x_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

Функция  $S_2(x; f)$  называется интерполяционным параболическим сплайном для функции  $f(x)$ , если

$$S_2(x) \in P_2; \quad x \in (\bar{x}_i, \bar{x}_{i+1}), \quad i = \overline{0, n};$$

$$S_2(x) \in C_{[a, b]}^{(1)};$$

$$S_2(x) = f(x_i), \quad i = \overline{0, n}.$$

Числа  $\bar{x}_i$  называются узлами сплайна, а числа  $x_i$  — узлами интерполяции.

Узлы сплайна — это точки возможного разрыва старшей производной, в данном случае — второй производной.

Сплайн  $S_2(x)$  зависит от  $n+3$  параметров и, следовательно, имеет два свободных параметра. Поэтому на интерполяционный параболический сплайн налагают два дополнительных условия (краевых):

$$S'_2(a) = a_n; \quad S'_2(b) = b_n; \quad (6.37)$$

$$S''_2(a) = A_n; \quad S''_2(b) = B_n, \quad (6.38)$$

где  $a_n, b_n, A_n, B_n$  — заданные действительные числа. Конкретный выбор таких чисел зависит от рассматриваемой задачи. Например, если функция  $f(x)$  имеет соответствующие производные, то можно положить  $a_n = f'(a)$ ,  $b_n = f'(b)$ ,  $A_n = f''(a)$ ,  $B_n = f''(b)$ . Если выбор краевых условий затруднителен, то можно потребовать, чтобы в точках  $\bar{x}_1$  и  $\bar{x}_n$  сплайн  $S_2(x)$  имел непрерывную вторую производную.

Это эквивалентно условию

$$S''_2(z-0) = S''_2(z+0), \quad z = \bar{x}_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (6.39)$$

Положим

$$m_i = S'_2(x_i), \quad i = \overline{0, n}; \quad (6.40)$$

$$M_i = S''_2(x_i), \quad i = \overline{0, n}. \quad (6.41)$$

Поскольку  $S''_2(x)$  — кусочно-постоянная функция, то

$$S''(x) = M_i, \quad \bar{x}_i \leq x < \bar{x}_{i+1}, \quad i = \overline{0, n}.$$

Обозначим  $h_i = x_{i+1} - x_i$ ;  $\bar{h}_i = x_{i+1} - \bar{x}_{i+1}$ .  
Учитывая (6.40), можно  $S_2(x)$  записать в виде

$$S_2(x) = f(x_i) + m_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - \bar{x}_{i+1})^2; \\ (x - \bar{x}_{i+1})_+^2 = [\max(0, x - \bar{x}_{i+1})]^2. \quad (6.42)$$

Исходя из

$$S(x_{i+1}) = f(x_{i+1}) \text{ и } S'(x_{i+1}) = m_{i+1}, \quad i = \overline{0, n-2},$$

найдем константы  $d_i$  и  $c_i$ :

$$d_i = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{\bar{h}_i(\bar{h}_i - h_i)} - \frac{m_i + m_{i+1}}{2} \frac{h_i}{\bar{h}_i(\bar{h}_i - h_i)}; \quad (6.43)$$

$$c_i = \frac{m_{i+1} - m_i}{2h_i} - \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h_i(\bar{h}_i - h_i)} + \frac{m_i + m_{i+1}}{2(\bar{h}_i - h_i)}. \quad (6.44)$$

Учитывая, что в точке  $x_{i+1}$  должно выполняться равенство  $S''(x_{i+1} - 0) = S''(x_{i+1} + 0)$ , находим

$$c_{i+1} = c_i + d_i, \quad i = \overline{0, n-2}. \quad (6.45)$$

В случае граничных условий (6.37)  $m_0$ ,  $m_n$  известны и система (6.45) содержит  $n-1$  уравнение с  $n-1$  неизвестными. Для краевых условий (6.38), с учетом (6.42), имеем

$$2c_0 = A_n; \quad 2(c_{n+1} + d_{n-1}) = B_n,$$

или

$$m_0(2h_0 - \bar{h}_0) + m_1\bar{h}_0 = 2(f(x_1) - f(x_0)) - A_n h_0(h_0 - \bar{h}_0); \quad (6.46)$$

$$m_{n-1}(h_{n-1} - \bar{h}_{n-1}) + m_n(\bar{h}_{n-1} + h_{n-1}) = \\ = 2(f(x_n) - f(x_{n-1})) + B_n h_{n-1}\bar{h}_{n-1}. \quad (6.47)$$

Для краевых условий (6.39) и (6.42)  $d_0 = 0$ ,  $d_{n-1} = 0$  и из (6.42)

$$m_1 = m_0 + 2c_0 h_0; \\ f(x_1) - f(x_0) = m_0 h_0 + c_0 h_0^2; \\ f(x_n) - f(x_{n-1}) = m_{n-1} h_{n-1} + c_{n-1} h_{n-1}^2; \\ m_n = m_{n-1} + 2c_{n-1} h_{n-1}.$$

Отсюда

$$m_0 + m_1 = 2[f(x_1) - f(x_0)]/h_0; \\ m_{n-1} + m_n = 2[f(x_n) - f(x_{n-1})]/h_{n-1}. \quad (6.48)$$

Для краевых условий (6.37):

$$Am = \bar{g}, \quad (6.49)$$

где

$$m = [m_1, m_2, \dots, m_{n-1}]^T; \\ \bar{g} = [g_1 - \lambda'_1 a_n, g_2, g_3, \dots, g_{n-2}, g_{n-1} - \beta'_{n-1} b_n]^T; \\ \lambda'_{i+1} = \frac{h_{i+1}(h_i - \bar{h}_i)}{\bar{h}_i(h_i + h_{i+1})}; \quad \lambda_{i+1} = \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}};$$

$$\beta'_{i+1} = \frac{\bar{h}_i \bar{h}_{i+1}}{(h_{i+1} - \bar{h}_{i+1})(h_i + h_{i+1})}; \quad \beta_{i+1} = \frac{h_i}{h_i + h_{i+1}};$$

$$g_i = 2\lambda'_i \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\bar{h}_{i-1}} + 2\beta'_i \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h_i - \bar{h}_i}.$$

Первое уравнение (6.49) имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \lambda'_1 a_n + (\lambda'_1 + \beta'_1 + 2) m_1 + \beta'_1 m_2 &= g_1; \\ \lambda'_i m_{i-1} + (\lambda'_i + \beta'_i + 2) m_i + \beta'_i m_{i+1} &= g_i, \quad i = \overline{2, n-2}; \\ \lambda'_{n-1} m_{n-2} + (\lambda'_{n-1} + \beta'_{n-1} + 2) m_{n-1} + \beta'_{n-1} b_n &= g_{n-1}; \\ \lambda'_n m_{n-1} + (\lambda'_n + \beta'_n + 2) b_n &= g_n. \end{aligned} \right\} \quad (6.50)$$

Для краевых условий (6.38) система для определения параметров  $m_i$ ,  $i = \overline{0, n}$ , имеет вид

$$\left. \begin{aligned} (2 - \bar{h}_0/h_0) m_0 + \bar{h}_0/h_0 m_1 &= 2/h_0 (f(x_1) - f(x_0)) - A_n (h_0 - \bar{h}_0), \\ \lambda'_i m_{i-1} + (2 + \lambda'_i + \beta'_i) m_i + \beta'_i m_{i+1} &= g_i, \quad i = \overline{1, n-1}; \\ (h_{n-1} - \bar{h}_{n-1}) m_{n-1} + (h_{n-1} + \bar{h}_{n-1}) m_n &= 2 [f(x_n) - f(x_{n-1})] + \\ + B_n h_{n-1} \bar{h}_{n-1}. \end{aligned} \right\} \quad (6.51)$$

Поскольку  $\bar{h}_0/h_0 < 1$ , а  $\bar{h}_{n-1} > 0$ , то (6.51) имеет доминирующую главную диагональ.

Для краевых условий (6.39) система для определения параметров  $m_1, \dots, m_{n-1}$  следующая:

$$\left. \begin{aligned} (2 + \beta'_1) m_1 + \beta'_1 m_2 &= g_1 - 2\lambda'_1/h_0 [f(x_1) - f(x_0)]; \\ \lambda'_i m_{i-1} + (2 + \lambda'_i + \beta'_i) m_i + \beta'_i m_{i+1} &= g_i, \quad i = \overline{2, n-2}; \\ \lambda'_{n-1} m_{n-2} + (2 + \lambda'_{n-1}) m_{n-1} &= g_{n-1} - 2\beta'_{n-1}/h_{n-1} [f(x_n) - f(x_{n-1})]. \end{aligned} \right\} \quad (6.52)$$

После того, как  $m_i$  найдены, при расчетах можно пользоваться представлением сплайна в форме (6.42). При этом требуется запоминать  $\{x_i\}$ ,  $\{f(x_i)\}$ ,  $\{\bar{x}_i\}$  и  $\{m_i\}$ . Из (6.42) получим  $S''(x_i) = 2c_i$ ,  $i = \overline{0, n}$ , поэтому на  $[\bar{x}_i, \bar{x}_{i+1}]$ ,  $i = \overline{0, n}$ , можно пользоваться представлением

$$S_2(x) = f(x_i) + m_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2, \quad (6.53)$$

где  $c_i$  определяется равенством (6.44).

Для  $x \in (\bar{x}_i, \bar{x}_{i+1})$ ,  $i = \overline{0, n}$ , можно вычислять сплайн  $S_2(x)$ :

$$S_2(x) = f(x_0) + m_0(x - x_0) + c_0(x - x_0)^2 + \sum_{i=1}^n \alpha_i (x - \bar{x}_i)^2,$$

где  $\alpha_i = c_i - c_{i-1}$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $c_i$  вычисляются по (6.44).

В дальнейшем будут рассматриваться случаи, когда узлы сплайна  $\bar{x}_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , расположены посередине между узлами интерполяции  $x_i$ ,  $i = \overline{0, n}$ :

$$\bar{x}_i = 1/2(x_{i-1} + x_i), \quad i = \overline{1, n}.$$

При этих условиях

$$\lambda'_i = \lambda_i; \beta'_i = \beta_i; \lambda_i + \beta_i = 1; \bar{h}_i = h_i/2.$$

Тогда система (6.50) приобретает вид

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 a_n + 3m_1 + \beta_1 m_2 &= g_1; \\ \lambda_i m_{i-1} + 3m_i + \beta_i m_{i+1} &= g_i; \quad i = \overline{2, n-2}; \\ \lambda_{n-1} m_{n-2} + 3m_{n-1} + \beta_{n-1} b_n &= g_{n-1}; \\ \lambda_n m_{n-1} + 3b_n &= g_n, \end{aligned} \right\} \quad (6.54)$$

система (6.51) —

$$\left. \begin{aligned} 3m_0 + m_1 &= 4/h_0 [f(x_1) - f(x_0)] - A_n h_0; \\ \lambda_i m_{i-1} + 3m_i + \beta_i m_{i+1} &= g_i; \quad i = \overline{1, n-1}; \\ m_{n-1} + 3m_n &= 4/h_{n-1} [f(x_n) - f(x_{n-1})] + B_n h_{n-1}, \end{aligned} \right\} \quad (6.55)$$

система (6.52) —

$$\left. \begin{aligned} (2 + \beta_1) m_1 + \beta_1 m_2 &= g_2 - 2\lambda_1/h_0 [f(x_1) - f(x_0)], \\ \lambda_i m_{i-1} + 3m_i + \beta_i m_{i+1} &= g_i, \quad i = \overline{2, n-2}; \\ \lambda_{n-1} m_{n-2} + (2 + \lambda_{n-1}) m_{n-1} &= g_{n-1} - 2\beta_{n-1}/h_{n-1} [f(x_n) - f(x_{n-1})]. \end{aligned} \right\} \quad (6.56)$$

Решение задачи интерполяции функции  $f(x)$  сводится к построению интерполяционного полинома Лагранжа, а в случае равноотстоящих узлов — построению интерполяционного полинома Ньютона.

*Кубические сплайны.* Функцию  $S_3(x; f)$  называют интерполяционным кубическим сплайном относительно сетки (6.36) для функции  $f(x)$ , если

$$S_3(x; f) \in P_3, \quad x \in (x_i, x_{i+1}), \quad i = \overline{0, n-1};$$

$$S_3(x; f) \in C_{[a, b]}^{(2)};$$

$$S_2(x; f) = f(x_i), \quad i = \overline{0, n}; \quad n \geq 2,$$

с краевыми условиями

$$S_3^{(i)}(a) = S_3^{(i)}(b); \quad i = 1, 2; \quad (6.57)$$

$$S_3'(a) = a_n; \quad S_3'(b) = b_n; \quad (6.58)$$

$$S_3''(a) = A_n; \quad S_3''(b) = B_n. \quad (6.59)$$

Положим  $M_i = S_3''(x_i)$ ;  $m_i = S_3'(x_i)$ ;  $i = \overline{0, n}$ .

Тогда

$$\begin{aligned} S_3(x; f) &= f(x_i) + c_1^{(i)}(x - x_i) + c_2^{(i)}(x - x_i)^2 + c_3^{(i)}/6(x - x_i)^3, \\ x_i < x < x_{i+1}, \quad i &= \overline{0, n-1}. \end{aligned} \quad (6.60)$$

Коэффициенты  $c_k^{(i)}$  определяют по формулам:

$$\left. \begin{aligned} c_1^{(i-1)} &= f(x_{i-1}; x_i) - h_{i-1}/6(2M_{i-1} + M_i), \quad i = \overline{1, n}; \\ c_2^{(i)} &= M_i, \quad i = \overline{0, n-1}; \\ c_3^{(i)} &= (M_{i+1} - M_i)/h_i, \quad i = \overline{0, n-1}. \end{aligned} \right\} \quad (6.61)$$

Параметры  $M_i$  находят с учетом краевых условий как решение следующих систем уравнений: периодических краевых условий (6.57):

$$\left. \begin{aligned} \beta_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} &= d_i, \quad i = \overline{1, n}; \\ M_0 &= M_n, \quad M_{n+1} = M_1; \quad h_n = h_0; \end{aligned} \right\} \quad (6.62)$$

и

$$c_1^{(n-1)} = c_1^{(0)} - M_0 h_{n-1}; \quad (6.63)$$

условия (6.58):

$$\left. \begin{aligned} 2M_0 + M_1 &= 6/h_0^2 (y_1 - y_0 - h_0 a_n); \\ \beta_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} &= d_i, \quad i = \overline{1, n-1}; \\ M_{n-1} + 2M_n &= 6/h_{n-1}^2 (h_{n-1} b_n - y_n + y_{n-1}) \end{aligned} \right\} \quad (6.64)$$

$$c_1^{(n-1)} = b_n - h_{n-1}/2 (M_n + M_{n-1}); \quad (6.65)$$

условий (6.59):

$$\left. \begin{aligned} 2M_1 + \lambda_1 M_2 &= d_1 - \beta_1 A_n; \\ \beta_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} &= d_i; \quad i = \overline{2, n-2}; \\ \beta_{n-1} M_{n-2} + 2M_{n-1} &= d_{n-1} - \lambda_{n-1} B_n; \\ M_0 &= A_n; \quad M_n = B_n; \end{aligned} \right\} \quad (6.66)$$

$$c_1^{(n-1)} = f(x_{n-1}; x_n) - 1/3 M_{n-1} h_{n-1} - 1/6 B_n h_{n-1}. \quad (6.67)$$

Если узлы равностоящие  $x_i = a + ih$ , то кубический сплайн имеет вид

$$S_3(x) = \sum_{k=-1}^{n+1} c_k B_3(x - kh), \quad (6.68)$$

где

$$B_3(x) = \frac{1}{6h^3} \sum_{i=0}^4 (-1)^i c_i^4 (x - a + 2h - kh)_+^3.$$

Интерполяционные условия приводят к системе уравнений

$$c_{i-1} + 4c_i + c_{i+1} = 6f(x_i), \quad i = \overline{0, n}. \quad (6.69)$$

Программы, реализующие алгоритмы вычисления коэффициентов интерполяционных полиномов Лагранжа (программа PLLG) и Ньютона (программа IPNT), приведены в приложении.

## 6.2. АППРОКСИМАЦИЯ И СГЛАЖИВАНИЕ ФУНКЦИЙ

При обработке результатов измерений часто возникает необходимость построения эмпирической формулы, более простой, чем интерполяционный полином, хорошо отражающей физические свойства исследуемого процесса.

В этом случае необходимо решить задачу отыскания оптимального в некотором смысле оценок параметров системы.

При решении задачи интерполяции функции требовалось, чтобы значения интерполяционного полинома в узлах интерполяции  $x_i$  совпадали со значениями  $f(x_i)$ . При этом полином  $Q_n(x)$  содержал  $n + 1$  параметр, и он мог сильно отличаться от  $f(x)$  вне узлов  $x_i$ .

Для повышения качества приближения функции полиномом можно наложить различные условия с целью уменьшения отличий  $Q_m(x)$  от  $f(x)$  вне узлов  $x_i$ , при  $m < n$ .

**Задача аппроксимации.** Требуется так подобрать коэффициенты  $a_i$ ,  $i = \overline{0, m}$ , полинома

$$Q_m(a, x) = \sum_{i=0}^m a_i \varphi_i(x), \quad m < n, \quad (6.70)$$

чтобы отклонения  $Q_m(a, x_i) - y_i = v_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , оказались в каком-то смысле наименьшими.

### Метод наименьших квадратов

Потребуем, чтобы для  $Q_m(a, x)$  достигался минимум

$$S(a) = \sum_{i=1}^n [Q_m(a, x_i) - y_i]^2, \quad y_i = f(x_i), \quad i = \overline{1, n}. \quad (6.71)$$

Обозначим

$$\begin{aligned} Q &= [Q(a, x_1), \dots, Q(a, x_n)]^T; \quad y = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T; \\ F &= [\varphi_k(x_i)]_1^n; \quad a = [a_0, a_1, \dots, a_m]^T. \end{aligned}$$

Тогда (6.70) можно записать в виде

$$Q_m(a, x) = Fa; \quad v = y - Q. \quad (6.72)$$

Пусть для отклонений  $v$  выполнены условия: 1.  $M(v) = 0$ . 2.  $M(v_i v_j) = 0$ ,  $i \neq j$ ; 3.  $D(y_i) = \sigma^2$ ;  $D(v_i) = \sigma^2$ .  $M$  — операция математического ожидания.

Условия 2, 3 выполняются, если  $M(vv^T) = \sigma^2 E$ .

Обозначим  $\hat{a}$  — оценка вектора искоемых параметров  $a$ . Она должна быть несмещенной  $M(\hat{a}) = a$  и минимальной:

$$\sigma_{a_i}^2 = M[\hat{a}_i - a_i]^2 = \min_{a_i} \quad (6.73)$$

Теоретическую основу метода наименьших квадратов составляют следующие утверждения:

Оценка  $\hat{a}$  параметров  $a$  удовлетворяет (6.73), если

$$S(a) = (Y - Q)^T (Y - Q)$$

минимальна, т. е.  $S(a) = \min_a S(a)$ ;

$$a = (F^T F)^{-1} F^T Y = CF^T Y; \quad C = B^{-1} = (F^T F)^{-1}. \quad (6.74)$$

Если матрица  $F$  имеет ранг  $m$ , то сумма  $S$  достигает минимума при

$$a = CF^T Y. \quad (6.75)$$

Обозначим  $d = F^T Y$ .  
 Выберем  $\varphi_i(x)$  в виде

$$\varphi_i(x) = x^{i-1}, \quad i = \overline{1, m+1}. \quad (6.76)$$

Тогда

$$F = [x_i^{i-1}]; \quad i = \overline{1, n}; \quad k = \overline{1, m+1}; \quad Q_m(x) = \sum_{i=0}^m \hat{a}_i x^{i-1}.$$

Перепишем (6.75)

$$B\hat{a} = d. \quad (6.77)$$

Коэффициенты  $b_{i,j}$  и  $d_i$  с учетом (6.76) вычисляются по формулам:

$$b_{1,1} = n; \quad b_{i,k} = \sum_{j=1}^n x_j^{i+k-2}; \quad b_{i+1,k} = b_{i,k+1};$$

$$d_i = \sum_{j=1}^n x_j^{i-1} y_j; \quad i = \overline{1, m+1}; \quad k = \overline{1, m+1}. \quad (6.78)$$

Система (6.77) — система линейных уравнений относительно оценок  $\hat{a}_i$ ,  $i = \overline{0, m}$ , которую можно решить, например, по схеме Халлецкого (гл. 3).

Таким образом, вычислительная схема метода наименьших квадратов для  $\varphi_i(x) = x^{i-1}$ ,  $i = \overline{1, m+1}$ , сводится к следующему:

выбирается степень  $m$  аппроксимирующего полинома (6.70): если мало отличаются друг от друга разделенные разности  $m$ -го порядка (с учетом заданной точности  $\Delta$ ), то (6.70) степени  $m$  оказывается пригодной:

вычисляются коэффициенты  $b_{i,j}$  матрицы  $B$  и вектор  $d$  правой части системы (6.77);

решается система линейных уравнений (6.77) одним из известных методов решения линейных систем уравнений.

**Пример 6.3.** Функция задачи в точках  $x_i$ :

$x_i$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$y_i$	3,230	3,253	3,261	3,252	3,228	3,181	3,127	3,059

1. Вычисление разделенных разностей позволяет судить о том, что с точностью  $\Delta = 0,001$  достаточно аппроксимировать  $f(x)$  полиномом  $Q_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ .

2. Вычисляем  $b_{i,j}$  и  $d_i$ :  $b_{1,1} = 8$ ;  $b_{1,2} = b_{2,1} = 3,6$ ;

$$d_1 = 25,6; \quad b_{2,2} = b_{1,3} = b_{3,1} = 2,04; \quad d_2 = 11,4;$$

$$b_{2,3} = b_{3,2} = 1,3; \quad b_{3,3} = 0,88; \quad d_3 = 6,42.$$

3. Запишем систему линейных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} 8a_0 + 3,6a_1 + 2,04a_2 &= 25,6; \\ 3,6a_0 + 2,04a_1 + 1,3a_2 &= 11,4; \\ 2,04a_0 + 1,3a_1 + 0,88a_2 &= 6,42. \end{aligned} \right\}$$

Ее решение имеет вид

$$a = [+3,19; 0,458; -0,786]^T.$$

Получаем аппроксимирующий полином

$$Q_2(a; x) = 3,19 + 0,458x - 0,786x^2.$$

Вычислим отклонения  $Q_2(a; x_i) - y_i = v_i; i = 1, 8$ .

$$v_1 = 0,0009; v_2 = 0,0003; v_3 = -0,0012; v_4 = -0,0013; \\ v_5 = -0,0023; v_6 = 0,0041; v_7 = 0,0018; v_8 = -0,0023.$$

$$\sum_{i=1}^8 v_i^2 = 0,000036.$$

### Аппроксимация функций ортогональными полиномами.

Система полиномов  $P_0(x), P_1(x), \dots, P_m(x)$  называется ортогональной на множестве  $X$ , если

$$\sum_{i=1}^n P_j(x_i) P_k(x_i) = 0, j \neq k$$

и

$$\|P_k\|_X^2 = \sum_{i=1}^n P_k^2(x_i) > 0.$$

Тогда аппроксимирующий полином

$$Q_m(x) = \sum_{k=0}^m a_k P_k(x). \quad (6.79)$$

Найдем коэффициенты  $a_k$ :

$$a_k = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{f(x_i) P_k(x_i)}{\sum_{i=1}^n P_k^2(x_i)}}, \quad k = \overline{0, m}. \quad (6.80)$$

Если значения  $x_1, \dots, x_n$  узлов интерполяции функции  $f(x)$  равномерные на  $[a, b]$ :  $2N + 1 = n + 1$ ,

$$x_k = (b + a)/2 + k\Delta x; \Delta x = (b - a)/2N; \\ k = -N, -N + 1, \dots, -1, 0, 1, 2, \dots, N,$$

то полиномы, ортогональные на множестве  $X$ , имеют вид

$$P_k(x) = p_k\left(\frac{2x - a - b}{b - a} N, 2N\right); \quad t = \frac{2x - a - b}{b - a} N;$$

$$p_k(t, 2N) = \sum_{i=1}^k (-1)^{k+i} \frac{(k+i)^{[2k]} (N+t)^{[k]}}{(k!) (2N)^{[k]}};$$

$$\sum_{k=-N}^N p_i^2(k, 2N) = \frac{(2N+i+1)! (2N-1)!}{(2i+1)! [(2N)!]^2}.$$

Если значения  $x_0, x_1, \dots, x_n$  узлов интерполирования функции  $f(x)$  можно свободно выбирать, например, на отрезке  $[-1, 1]$ , то для аппроксимации  $f(x)$  полиномом (6.79) на отрезке  $[-1, 1]$  можно выбрать систему ортогональных полиномов Чебышева или Лежандра.

Многочлены Чебышева и Лежандра получают как частный случай *многочленов Якоби*:

$$P_n^{\alpha, \beta}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n}], \quad (6.81)$$

заданные на отрезке  $[-1, 1]$  с весовой функцией

$$\rho(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta; \quad \alpha, \beta > -1. \quad (6.82)$$

Система функций называется ортогональной с весом  $\rho(x)$  на  $[a, b]$ , если

$$\int_a^b \rho(x) \varphi_k(x) \varphi_l(x) dx = 0, \quad k \neq l. \quad (6.83)$$

При значениях  $\alpha = \beta = 0$  и  $\rho(x) = 1$  получаем *многочлены Лежандра*

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n] \quad (6.84)$$

с нормой

$$\|L_n(x)\|_x = \sqrt{2/(2n+1)}. \quad (6.85)$$

Многочлены  $L_n(x)$  вычисляются по рекуррентным соотношениям

$$(n+1)L_{n+1}(x) - (2n+1)xL_n(x) + nL_{n-1}(x) = 0; \quad (6.86)$$

$$L_0(x) = 1; \quad L_1(x) = x; \quad L_2(x) = 1/2(3x^2 - 1); \quad (6.87)$$

$$L_3(x) = 1/2(5x^3 - 3x); \quad L_4(x) = 1/8(35x^4 - 30x^2 + 3), \dots$$

При значениях  $\alpha = \beta = -1/2$  в (6.81) и  $\rho(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$  получаем *многочлены Чебышева первого рода*:

$$T_n(x) = 1/2 [(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n]. \quad (6.88)$$

Рекуррентные соотношения для  $T_n(x)$ :

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x); \quad (6.89)$$

$$T_0(x) = 1; \quad T_1(x) = x; \quad T_2(x) = 2x^2 - 1; \quad T_3(x) = 4x^3 - 3x, \dots$$

Многочлены  $T_n(x)$  можно записать в эквивалентной (6.88) форме

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x). \quad (6.90)$$

При значениях параметров  $\alpha = \beta = 1/2$ ,  $\rho(x) = \sqrt{1-x^2}$  получим из (6.81) *многочлены Чебышева второго рода*:

$$U_n(x) = \frac{\sin[(n+1) \arccos x]}{\sqrt{1-x^2}} = T_{n+1}'(x) \cdot \frac{1}{n+1}; \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

$$\|U\|_x = \pi/2.$$

В качестве узлов для аппроксимации  $f(x)$  выбираем корни многочленов Лежандра  $m$ -го порядка или корни многочленов Чебышева при аппроксимации  $f(x)$  на системе многочленов Чебышева. Для  $T_{k+1}(x)$

$$x_i = \cos\left(\frac{2i+1}{2(k+1)}\pi\right); \quad i = \overline{0, k}. \quad (6.91)$$

Тогда

$$Q_m(x) = \sum_{i=0}^m a_i L_i(x);$$

$$a_k = \frac{\sum_{i=0}^n f(x_i) L_k(x_i)}{\sum_{i=0}^n L_k^2(x_i)}, \quad k = \overline{0, m} \quad (6.92)$$

или

$$Q_m(x) = \sum_{k=0}^m a_k T_k(x),$$

где

$$a_k = \frac{2}{k+1} \sum_{i=0}^n f(x_i) \cos\left[\frac{2i+1}{2(k+1)}\pi\right], \quad k = \overline{0, m}. \quad (6.93)$$

Если функция задана на отрезке  $[a, b]$ , то

$$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\left[\frac{2i+1}{2(k+1)}\pi\right], \quad k = \overline{0, m}; \quad i = \overline{0, k}. \quad (6.94)$$

Коэффициенты  $a_k$ ,  $k = \overline{0, m}$  определяются из условия минимума отклонения  $S_m$ :

$$S_m^2 = \sum_{i=0}^n \left[ f(x_i) - \sum_{k=0}^m a_k P_k(x_i) \right]^2. \quad (6.95)$$

Для функции, заданной на  $[a, b]$  в аналитическом виде, коэффициенты  $a_k$ ,  $k = \overline{0, m}$  вычисляются по формуле

$$a_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) L_k(x) dx -$$

в случае использования полиномов Лежандра;

$$a_k = \frac{\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} T_k(x) dx}{\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_k^2(x) dx} -$$

в случае использования полиномов Чебышева.

Вычислительные схемы методов аппроксимации функций ортогональными полиномами.

Равноотстоящие узлы интерполяции для  $f(x_i)$ :

1.  $N = n/2$ ;  $x_0 = x_N$ ; определить значение  $m$ .
2. Вычислить коэффициенты  $d_{k,i}$  полиномов  $p_k(t, 2N)$ .  
Представим  $p_k(t, 2N)$  в виде

$$p_k(x) = \sum_{i=1}^{k+1} d_{k,i} x^{i-1}; \quad k = \overline{1, m}; \quad p_0(x) = 1.$$

Коэффициенты  $d_{k,i}$  вычисляем по следующему алгоритму:

$$\begin{aligned} b_{11} &= N(b-a); \quad b_{12} = a+b; \quad b_1 = b_{11}b_{12}; \\ b_2 &= 2b_{11}; \quad b_{13} = N+1; \quad b_4 = 4b_1b_{11}; \\ b_8 &= b_4^2 + 2b_3b_5; \quad b_{2i+1} = b_i^2; \\ b_{4i+2} &= b_{2i+1}^2; \quad b_{2i+5} = 2b_{i+2}b_{i+3}; \quad i = 1, 2; \\ c_{1,2} &= 1/N; \quad c_{3,2} = 5; \quad c_{2,1} = (N+1)/2; \quad c_{4,3} = 3,5; \\ c_{k,k+1} &= c_{k-1,k}/(2N-k+1); \quad k = \overline{2, 5}; \\ c_{4,1} &= 3(N+2)b_{13}; \quad c_{3,1} = 1-3Nb_{13}; \quad c_{5,3} = 63; \\ c_{4,2} &= -2,5(6N+1); \quad c_{2,2} = 1,5c_{2,3}; \quad c_{k,k} = 0; \\ c_{5,1} &= 5N[3N^2(N+2)-7b_{13}-3]+12; \\ c_{5,2} &= 35(3-2Nb_{13}); \quad c_{k,i} = c_{k,i}c_{k,k+1}; \quad k = \overline{2, 5}; \\ d_{1,2} &= b_2/N; \quad d_{1,1} = -b_1/N; \quad d_{k,5} = b_{10}c_{k,3}; \\ d_{k,1} &= d_{k,1} + c_{k,1}; \quad d_{k,i} = c_{k,2}b_{i+2} + c_{k,3}b_{i+5}; \\ & \quad k = \overline{2, 5}; \quad i = \overline{1, 4}. \end{aligned}$$

3. Вычислить нормы  $\|P_k\|_k^2$ :

$$\begin{aligned} \sum_{i=-N}^N p_k(i, 2N) &= g_{k+1}; \quad k = \overline{0, m}; \\ g_k &= \frac{2k-3}{2k-1} g_{k-1} \frac{2N+k}{2N-k+2}; \quad k = \overline{2, 6}; \quad g_1 = 2N+1 \end{aligned}$$

4. Представить аппроксимирующий полином в виде

$$Q_m(x) = \sum_{i=1}^{m+1} A_i x^{i-1}.$$

Коэффициенты  $A_i$  вычисляем по алгоритму:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1/g_1 \sum_{i=-N}^N y_i; \\ a_k &= 1/g_k \left[ \sum_{i=-N}^N y_i \sum_{j=1}^k (d_{k,j} x_i^{j-1}) \right]; \quad k = \overline{2, 5}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} A_k &= \sum_{i=1}^m a_{i+1} d_{i,k}; \quad k = \overline{1, m}; \\ A_1 &= A_1 + a_1. \end{aligned}$$

5. Оценить погрешность аппроксимации по (6.95).

Если  $S_m < \epsilon$ , то уменьшаем  $m$  (или увеличиваем  $m$ , если  $S_m > \epsilon$ ) и повторяем пп. 4, 5.

Аппроксимация по системе полиномов Чебышева:

1. Зададимся числом  $m$  и точностью аппроксимации  $\Delta$ .

2. Определяем полиномы  $T_i(x)$  Чебышева либо по рекуррентной формуле, либо путем задания коэффициентов полинома согласно (6.89).

3. Вычисляем корни полиномов  $T_k(x)$ :

$$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{2i+1}{2(k+1)} \pi\right).$$

4. Вычисляем коэффициенты  $a_i$ :

$$a_i = \frac{2}{i+1} \sum_{j=1}^r f(x_j) \cos\left(\frac{2j+1}{2(i+1)} \pi\right).$$

5. Получаем аппроксимирующий полином:

$$Q_m(x) = \sum_{i=1}^{m+1} a_i T_{i-1}(x) = \sum_{i=1}^{m+1} A_i x^{i-1},$$

где

$$A_1 = a_1 - a_3 + a_5; \quad A_2 = a_2 - 3a_4 + 5a_6; \\ A_3 = 2a_3 - 8a_5; \quad A_4 = 4a_4 - 20a_6; \quad A_5 = 8a_5; \quad A_6 = 16a_6.$$

6. Оцениваем погрешность метода по (6.95).

### Сглаживание сплайнами

Пусть в результате наблюдений для значений аргумента  $x(x_0, x_1, \dots, x_n)$  получена таблица значений функции  $f(x)$ . С целью уменьшения случайных ошибок и получения более плавной функции  $f(x)$  применяют процесс сглаживания, состоящий в том, что полученные в результате наблюдений значения  $f(x_i)$  заменяют значениями  $\tilde{f}(x_i)$ , которые дает выбранный способ сглаживания.

Задача сглаживания формулируется следующим образом.

Найти функцию  $f^*(x) \in L_2^m[a, b]$ , на которой достигается минимум выражения

$$\Phi(f) = \sqrt{\sum_{i=0}^n p_i [y_i - f(x_i)]^2 + p \int_a^b [f^{(m)}(t)]^2 dt}, \quad (6.96)$$

где  $p \geq 0$  — вспомогательный параметр;  $p_i$  — заданные числа.

При  $p = 0$  задача является приближением по критерию минимума среднего квадрата отклонений (метод наименьших квадратов).

Задачу сглаживания будем решать по критерию (6.96) с помощью кубических сплайнов.

Получим уравнение для сглаживающего кубического сплайна из условия

$$\min \sqrt{\sum_{i=0}^n [y_i - f(x_i)]^2 + p \int_a^b [f''(t)]^2 dt}. \quad (6.97)$$

Известно, что для сплайна  $S_{2m-1}(x) \in S_{2m-1, \Delta n}$  минимизирующего (6.96), выполняются соотношения

$$y_i - S_i + (-1)^{m-1} p [S_{2m-1}^{(2m-1)}(\bar{x}_i) - S_{2m-1}^{(2m-1)}(\bar{x}_{i-1})] = 0, \quad (6.98)$$

где

$$S_i = S_{2m-1}(x_i); \quad i = \overline{0, n}; \quad S_{2m-1}^{(2m-1)}(\bar{x}_i) = 0, \quad i = \overline{0, N}.$$

Из (6.98) (при  $m = 2$ )

$$S_i = y_i - p \left( \frac{S_{i+1}'' - S_i''}{\Delta x_i} - \frac{S_i'' - S_{i-1}''}{\Delta x_{i-1}} \right), \quad i = \overline{0, n},$$

где  $S_0'' = S_n'' = 0$ ;  $S_{n-1}'' = S_{n+1}'' = 0$ ,  $y_i$  — измеренные значения функции в точках  $x_i$ ,  $i = \overline{0, n}$ .

Тогда для определения величин  $S_i''$ ,  $i = \overline{0, n}$ , система уравнений приобретает вид

$$\left. \begin{aligned} S_0'' &= 0; \quad S_n'' = 0; \\ \alpha_{1,1} S_1'' + \alpha_{1,2} S_2'' + \alpha_{1,3} S_3'' &= c_0; \\ \sum_{j=-2}^2 \alpha_{i,i+j} S_{i+j}'' &= c_i, \quad i = \overline{2, n-2}; \\ \sum_{j=0}^2 \alpha_{n-1, n+j-3} S_{n+j-3}'' &= c_{n-1}. \end{aligned} \right\} \quad (6.99)$$

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}; \quad \alpha_{1,-1} = \alpha_{n-1, n+1} = 0;$$

$$c_i = \frac{6}{x_i - x_{i-2}} \left( \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x_{i-1}} \right);$$

$$\alpha_{i,i+1} = \frac{\Delta x_i}{x_i - x_{i-2}} + \frac{6p(x_i - x_{i-2})}{\Delta x_{i-1} (\Delta x_i)^3};$$

$$\alpha_{i,i} = 2 + \frac{12p}{x_i - x_{i-2}} \left[ \frac{\Delta x_i^2 + \Delta x_{i-1}^2 + \Delta x_i \Delta x_{i-1}}{(\Delta x_i \Delta x_{i-1})^2} \right];$$

$$\alpha_{i,i-1} = \frac{\Delta x_i}{x_i - x_{i-2}} + \frac{6p(x_i - x_{i-2})}{(\Delta x_{i-1})^3 \Delta x_i};$$

$$\alpha_{i,i+2} = \frac{6p}{(x_i - x_{i-2}) \Delta x_{i-1} \Delta x_i};$$

$$\alpha_{i,i-2} = \frac{6p}{(x_i - x_{i-2}) \Delta x_{i-1} \Delta x_{i-2}}.$$

Определив  $S_i''$  из (6.99), получим

$$S_3''(x) = \frac{1}{\Delta x_{i+1}} [(x_{i+1} - x) S_i'' + (x - x_i) S_{i+1}''], \quad x_i < x < x_{i+1},$$

и

$$S_3(x) = \alpha + \beta x \int_a^x (x-t) S_3''(t) dt. \quad (6.100)$$

Из (6.98) определяем  $S_0, S_1$ , и  $\alpha$  и  $\beta$  находим из

$$S_3(x_i) = S_i, \quad i = 0, 1.$$

Как следует из систем уравнений для вычисления коэффициентов  $M_i, S_i'', i = 0, n$ , (системы (6.62), (6.64), (6.66), (6.69)), матрицы этих систем представляют собой трехдиагональные матрицы с доминирующей главной диагональю.

### Задания для самостоятельной работы

1. Найти коэффициенты интерполяционного полинома для функции  $f(x)$ , заданной в узлах интерполяции  $x_i$ :

$x$	1	2	3	4	5	Оценить погрешность интерполяции в точке $x = 2,2$	Вычислить значение функции в точке $x = 1,2$
0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0		
0,25	1,6	2,6	3,6	4,6	5,6		
1,25	2,325	3,70	4,575	5,7	6,875		
2,125	2,017	3,017	4,017	5,017	6,017		
3,25	2,833	3,333	3,833	4,333	4,833		

$x$	6	7	8	9	10	$x = 2,4$	$x = 1,4$
0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0		
0,5	1,7	2,7	3,7	4,7	5,7		
1,4	2,325	3,70	4,575	5,7	6,875		
2,25	2,333	3,333	4,333	5,333	6,333		
3,5	3,167	3,667	4,167	4,667	5,167		

$x$	11	12	13	14	15	$x = 2,6$	$x = 1,6$
0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0		
0,75	1,8	2,8	3,8	4,8	5,8		
1,6	2,325	3,7	4,575	5,7	6,875		
2,375	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5		
3,75	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5		

$x$	16	17	18	19	20	$x = 2,8$	$x = 1,8$
0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0		
1	1,9	2,9	3,9	4,9	5,9		
1,8	2,325	3,7	4,575	5,7	6,875		
2,5	2,667	3,667	4,667	5,667	6,667		
4	3,5	4,333	4,833	5,333	5,833		

2. Найти коэффициенты интерполяционного полинома для функции  $f(x)$ , заданной в узлах интерполяции  $x_i = x_0 + ih$ ,  $h = 0,5$ .

Оценить погрешность в точке  $\bar{x}$ .

$$\bar{x} = 1,25; x_0 = 0,5$$

$n \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	0,5	0,7	1,0	1,2	0,875	0,75
2	0,5	1,2	1,333	1,4	0,75	1,25
3	0,5	1,7	1,667	1,6	0,625	1,75
4	0,5	2,2	2,0	1,8	0,5	2,25
5	0,5	2,7	2,333	2,0	0,25	2,75

$$\bar{x} = 1,0; x_0 = 2,25$$

$n \backslash i$	1	2	3	4	5	6
6	1,5	1,4	1,667	1,45	1,875	1,0
7	1,5	1,9	2,0	1,65	1,75	1,5
8	1,5	2,9	2,333	1,85	1,625	2,0
9	1,5	2,9	2,667	2,0	1,5	2,5
10	1,5	3,4	3,0	2,25	1,25	3,0

$$\bar{x} = 2,75; x_0 = 1,5$$

$n \backslash i$	1	2	3	4	5	6
11	2,5	2,1	2,333	1,7	2,875	1,25
12	2,5	2,6	2,667	1,2	2,75	1,75
13	2,5	3,1	3,0	2,1	2,625	2,25
14	2,5	3,6	3,333	2,3	2,5	2,75
15	2,5	4,1	3,667	2,5	2,25	3,25

$$\bar{x} = 3,75; x_0 = 2$$

$n \backslash i$	1	2	3	4	5	6
16	3,0	2,8	3,0	1,95	3,875	2,5
17	3,0	3,3	3,333	2,15	3,75	3,0
18	3,0	3,8	3,667	2,35	3,625	3,5
19	3,0	4,3	4,0	2,55	3,5	4,0
20	3,0	4,8	4,333	2,75	3,25	4,5

## Глава 7. ЧИСЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

### 7.1. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

Простейшие формулы численного дифференцирования получают в результате дифференцирования интерполяционных формул

$$f^{(k)}(x) \approx L_n^{(k)}(x).$$

Погрешность формул оценивается неравенством

$$|f^{(k)}(x) - L_n^{(k)}(x)| \leq \sum_{j=0}^k \frac{k!}{(k-j)!(n+j)!} \max_{x \in [y_1, y_2]} |f^{(n+j)}(x)| \omega_n^{(k-j)}(x),$$

где

$$y_1 = \min_i \{x_i\}; \quad y_2 = \max_i \{x_i\}.$$

В частности,

$$f'(x) \approx \frac{1}{n} \left[ \Delta y_0 + \frac{2q-1}{2} \Delta^2 y_0 + \frac{3q^2-6q+2}{6} \Delta^3 y_0 + \dots + \frac{nq^{n-1} - (n-1)S_{n-1}^{(1)}q^{n-2} + \dots + (-1)S_{n-1}^{(n-1)}}{n!} \Delta^n y_0 \right],$$

где  $S_k^{(i)}$  — сумма всех  $j = \overline{1, k}$  по  $i$  сомножителей. Например,  $S_3^{(1)} = 1 + 2 + 3 = 6$ ;  $S_3^{(2)} = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3 = 11$ ;  $S_3^{(3)} = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ .

$$|f'(x) - L_n^{(1)}(x)| \leq \max_{x \in [y_1, y_2]} |f^{(n)}(x)| \frac{1}{n!} \omega_n(x),$$

$$\omega_n(x) = (-1)^e (e!)^2 h^{n-1}; \quad e = (n-1)/2.$$

### 7.2. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

#### Формула прямоугольников

Простейшая формула основана на определении интеграла.

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i, \quad \xi_i \in [a, b].$$

Выбрав  $\Delta x_i = (b-a)/n$ ,  $\xi = x_i$ ,  $i = \overline{0, n-1}$ , получим

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} y_i, \quad y_i = f(x_i).$$

Интегрирование, основанное на интерполяции

Пусть вычисляется интеграл

$$I = \int_a^b f(x) p(x) dx.$$

Зададимся некоторыми точками  $a_i \in [-1; 1]$  и построим интерполяционный полином  $L_m(x)$ , совпадающий с  $f(x)$  в узлах

$$x_i = (b+a)/2 + a_i(b-a)/2. \quad (7.1)$$

Положим

$$\int_a^b f(x) p(x) dx \approx \int_a^b L_m(x) p(x) dx.$$

Погрешность этой формулы

$$R_m(f) = \int_a^b p(x) [f(x) - L_m(x)] dx;$$

$$|R_m(f)| \leq \max_{x \in [a, b]} |f^{(m)}(x)| \int_a^b \frac{1}{m!} |\omega_m(x)| |p(x)| dx.$$

Пусть все  $a_i$  различны, тогда после замены переменных  $x = (b+a)z/2 + (b-a)z/2$  получаем

$$\int_a^b p(x) L_m(x) dx = \frac{b-a}{2} \sum_{j=1}^m A_j f(x_j); \quad (7.2)$$

$$A_j = \int_{-1}^1 p^0(z) \prod_{i \neq j} \frac{z - a_i}{a_i - a_j} dz. \quad (7.3)$$

Тогда

$$\int_a^b f(x) p(x) dx \approx \frac{b-a}{2} \sum_{j=1}^m A_j f(x_j); \quad (7.4)$$

$$|R_m(f)| \leq A(a_1, \dots, a_m) \max_{x \in [a, b]} |f^{(m)}(x)| \left[ \frac{b-a}{2} \right]^{m+1}.$$

$$A = \int_{-1}^1 \frac{1}{m!} |\omega_m^0(z)| p^0(z) dz; \quad \omega_m^0(z) = \prod_{i=1}^m (z - a_i); \quad (7.5)$$

$$p^0(z) = p[(a+b)/2 + (b-a)z/2].$$

Формула трапеций. При  $m=2$  и  $a_1 = -1$ ,  $a_2 = 1$ :

$$A = \int_{-1}^1 \frac{|z^2 - 1|}{2} dz = \frac{2}{3}; \quad A_1 = \int_{-1}^1 \frac{1-z}{2} dz = 1;$$

$$A_2 = \int_{-1}^1 \frac{1+z}{2} dz = 1.$$

Получаем

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2} [y_a + y_b]; \quad (7.6)$$

$$|R_2(f)| < \frac{(b-a)^3}{12} \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|.$$

Разделив  $[a, b]$  на  $m$  подынтервалов и пользуясь (7.6), имеем формулу трапеций

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6n} \left[ \sum_{i=1}^n (4y_{2i-1} + 2y_{2i}) + y_{2n} + y_0 \right];$$

$$|R_2(f)| < (b-a)^3/12 \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|.$$

**Формула Симпсона.** Для  $m = 4$  и  $a_1 = -1$ ;  $a_2 = a_3 = 0$ ;  $a_4 = 1$ , получаем следующие значения коэффициентов  $A, A_i, i = 1, 3$ ;

$$\int_a^b L_4(x) dx = \int_a^b L_3(x) dx; \quad A_2 = \int_{-1}^1 (z^2 - 1) dz = 4/3;$$

$$A = \int_{-1}^1 \frac{z^2(z^2 - 1)}{4!} dz = \frac{1}{90}; \quad A_1 = \int_{-1}^1 \frac{z(z-1)}{-2} dz = \frac{1}{3}; \quad A_3 = 1/3.$$

Тогда

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} (y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Разбив  $[a, b]$  на  $2n$  подынтервалов, имеем формулу Симпсона

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6n} \left[ y_0 - y_{2n} + 2 \sum_{i=1}^n (2y_{2i-1} + y_{2i}) \right]. \quad (7.8)$$

Погрешность этой формулы

$$|R_4(f)| < \frac{(b-a)^5}{180(2n)^4} \max_{x \in [a,b]} |f^{(IV)}(x)|. \quad (7.9)$$

**Пример 7.1.** Функция задана в девяти точках:  
 $y = [1; 0,995; 0,9801; 0,9553; 0,9211; 0,8776; 0,8256; 0,7648; 0,6967]$ ,

с шагом  $h = 0,1$  на отрезке  $[0; 0,8]$ . Здесь  $2n + 1 = 9$ ;  $n = 4$ .  $\int_a^b f(x) dx \approx$   
 $\approx 1/30 [1 + 0,6967 + 4(0,995 + 0,9553 + 0,8776 + 0,7648) + 2(0,9801 + 0,9211 +$   
 $+ 0,8256)] = 0,7174.$

$$R_4 = \frac{0,8 \cdot 0,00005}{180} = 0,3 \cdot 10^{-5},$$

### 7.3. КВАДРАТУРНАЯ ФОРМУЛА ГАУССА

Необходимо построить квадратурную формулу

$$I = \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^m A_i f(x_i), \quad (7.10)$$

точную для многочленов наиболее высокой степени. Коэффициенты  $A_i$  и узлы  $x_i$  найдем из условия, чтобы формула была точной для  $2m$  функций вида  $x^{k-1}$ ,  $k = \overline{1, 2m}$ .

Это условие дает следующие  $2m$  уравнений:

$$\int_0^1 x^{k-1} dx = \sum_{i=1}^m A_i x_i^{k-1}, \quad k = \overline{1, 2m}. \quad (7.11)$$

Решив эту систему уравнений и подставив найденные значения  $A_i$  и  $x_i$  в (7.10), получим квадратурную формулу Гаусса, точную для многочленов степени  $< 2m - 1$ .

Пусть

$$y(x) = \sum_{i=1}^{2m} \beta_i x^{i-1}.$$

$$\int_0^1 y(x) dx = \sum_{k=1}^{2m} \beta_k \int_0^1 x^{k-1} dx = \sum_{i=1}^m A_i \sum_{k=1}^{2m} \beta_k x_i^{k-1} = \sum_{i=1}^m A_i y(x_i).$$

Для решения системы уравнений (7.11) применим многочлены Лежандра. С этой целью умножим первое и последующие  $m$  уравнений на  $(-1)^k C_m^k C_{m+k}^k$ ,  $k = \overline{0, m}$ , и сложим полученные  $m+1$  уравнения:

$$\int_0^1 \sum_{k=0}^m (-1)^k C_m^k C_{m+k}^k x^k dx = \sum_{i=1}^m A_i \sum_{k=0}^m (-1)^k C_m^k C_{m+k}^k x_i^k.$$

По определению многочленов Лежандра

$$\int_0^1 L_m(x) dx = \sum_{i=1}^m A_i L_m(x_i).$$

Далее, проделав то же самое со вторым, третьим и т. д.  $m+1$  уравнениями, получим

$$\int_0^1 x L_m(x) dx = \sum_{i=1}^m A_i x_i L_m(x_i).$$

В итоге

$$\int_0^1 x^{k-1} L_m(x) dx = \sum_{i=1}^m A_i x_i^{k-1} L_m(x_i), \quad k = \overline{1, m}.$$

Поскольку

$$\int_0^1 x^{k-1} L_m(x) dx = 0, \quad k = \overline{1, m},$$



3. Система уравнений (7.12) имеет вид

$$\left. \begin{aligned} A_1 + A_2 &= 1; \\ (3 - \sqrt{3}) A_1 + (3 + \sqrt{3}) A_2 &= 3; \\ A_1 &= A_2 = 1/2. \end{aligned} \right\}$$

4.

$$\int_0^1 y(x) dx \approx \frac{1}{2} f\left(\frac{3 - \sqrt{3}}{6}\right) + \frac{1}{2} f\left(\frac{3 + \sqrt{3}}{6}\right).$$

Программа, реализующая алгоритм квадратурной формулы Гаусса, приведена в приложении (программа QFGS).

#### Задания для самостоятельной работы

Вычислить значения интегралов ( $k = \overline{1, 4}$ ):

$N$	$I(x)$	$a$	$b$	$\Delta_1$	$\Delta_2$
1	$\frac{\cos \pi x^2}{\sqrt{k/8 + 2x^3}}$	$k/10$	$k/2$	0,005	0,0001
2	$\frac{(\pi - x^2) \sin \sqrt{3/k + x}}{\sqrt{k/3 - x/10 \lg [k/10 (\pi + x)]}}$	$k/5$	$k$	0,005	0,0001
3	$\frac{(k/2 - x) \operatorname{tg}(x^2/\pi)}{e^{-kx^2/10} \sqrt{\pi + x}}$	$[k/2]$	$[k]$	0,01	0,005
4		$k/10$	$k/5$	0,001	0,00005
5		$k/15$	$k/5$	0,001	0,0005

1) по формуле Симпсона с точностью  $\Delta_1$ ;

2) по формуле Гаусса с  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$ ;

3) сравнить результаты, проанализировать влияние точности на порядок квадратурных формул.

## Глава 8. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пусть для приближенного решения дифференциальной задачи

$$Lu = f, \quad (8.1)$$

где оператор  $L$  — дифференциальный оператор с учетом начальных или краевых условий;  $f$  — правая часть уравнения и начальных или краевых условий, составлена разностная схема

$$L_h u^{(h)} = f^{(h)}, \quad (8.2)$$

которая аппроксимирует задачу (8.1) на решении  $u$  с некоторым порядком аппроксимации  $h^k$ . Это значит, что невязка  $\delta f^{(h)}$

$$L_h [u]_h = f^{(h)} + \delta f^{(h)},$$

возникающая при подстановке таблицы  $[u]_h$  решения  $u$  в уравнение (8.2), удовлетворяет оценке

$$\|\delta f^{(h)}\|_{F_h} \leq c_1 h^k, \quad c_1 = \text{const}. \quad (8.3)$$

Пусть оператор  $L_h: U_h \rightarrow F_h$  — линейный.

Разностная схема (8.2) называется устойчивой, если при любом  $f^{(h)} \in F_h$  уравнение  $L_h u^{(h)} = f^{(h)}$  имеет единственное решение  $u^{(h)} \in U_h$ , причем

$$\|U^{(h)}\|_{U_h} \leq C \|f^{(h)}\|_{F_h}, \quad C = \text{const.}$$

**Теорема.** Пусть разностная схема (8.2) аппроксимирует задачу (8.1) на решении  $u$  с порядком  $h^k$  и устойчива. Тогда решение  $u^{(h)}$  разностной задачи (8.2) сходится к  $[u]_h$ , причем

$$\|[u]_h - u^{(h)}\|_{U_h} \leq C C_1 h^k.$$

**Численное решение задачи Коши.** Задача Коши формулируется следующим образом. Найти такую непрерывную функцию  $y = y(x)$  в области  $[x_0, x_N]$ , которая удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$y' = f(x, y), \quad x > x_0, \quad (8.4)$$

и начальному условию

$$y(x_0) = y_0. \quad (8.5)$$

Разобьем  $[x_0, x_N]$  на отрезки  $[x_{j-1}, x_j]$ ,  $j = \overline{1, N}$ ,  $h = (x_N - x_0)/N$  и последовательно получим приближения  $y_j$  к значениям решения  $y(x_j)$  по следующему правилу.

Пусть значение  $y_j$  уже найдено, вычислим значения производных  $y_j^{(i)}$  в точке  $x_j$  решения уравнения (8.4), проходящего через точку  $(x_j, y_j)$  на отрезке  $[x_j, x_{j+1}]$ .

Раскладывая решение  $y(x_j)$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $x_j$ , получаем

$$y(x) \approx z_j(x) = \sum_{i=0}^n \frac{y_j^{(i)}}{i!} (x - x_j)^i, \quad (8.6)$$

и соответственно

$$y_{j+1} = z_j(x_{j+1}).$$

Вычислим производные  $y^{(i)}(x)$  в окрестности точки  $x_j$ :

$$y^{II}(x) = f_x(x, y) + f_y(x, y) y';$$

$$y^{III}(x) = f_{xx}(x, y) + 2f_{xy}(x, y) y' + f_{yy}(x, y) y'^2 + f_y(x, y) y^{II} \text{ и т. д.}$$

Подставим  $x = x_j$ ,  $y = y_j$  в полученные выражения:

$$y^I(x_j), y^{II}(x_j), \dots, y^{(n)}(x_j),$$

и далее эти значения в ряд (8.6), находим  $z_j(x)$ .

Заметим, что если  $|x - x_j|$  больше радиуса сходимости ряда

$$\sum_i \frac{y^{(i)}(x_j)}{i!} (x - x_j)^i, \quad j = \overline{0, n},$$

то погрешность ряда (8.6) не стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ . Это ограничивает использование данного метода.

**Пример 8.1.** Найти решение уравнения

$$y^{II} + y^{I^2} = xy$$

с начальными условиями

$$y(0) = 2; y^I(0) = 1.$$

Вычислим производные

$$y^{III} = 2y^I y^{II} + xy^I + y;$$

$$y^{IV} = 2y^I y^{III} + 2y^{II^2} + xy^{II} + 2y^I; \dots$$

Вычислим  $y^{II}(0)$ ,  $y^{III}(0)$ ,  $y^{IV}(0)$ , ...

$$y_0^{II} = 1; y_0^{III} = 4; y_0^{IV} = 12.$$

Решение задачи в окрестности 0 имеет вид

$$y \approx 2 + x + x^2/2 + 2/3 x^3 + 1/2 x^4 + \dots$$

### 8.1. МЕТОД ЭЙЛЕРА — КОШИ

Из (8.6) при  $n = 1$  получаем

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i); h = x_{i+1} - x_i. \quad (8.7)$$

Погрешность формулы — порядка  $o(h^2)$ .

Для уменьшения погрешности с тем же  $h$  применяется модифицированный метод Эйлера — метод Эйлера с итерациями.

Пусть известно  $y(x)$ , требуется вычислить

$$y(x+h) = y(x) + \int_0^h y'(x+t) dt. \quad (8.8)$$

Для вычисления интеграла в правой части (8.8) воспользуемся формулой трапеций

$$\begin{aligned} y(x+h) &= y(x) + h/2 [y'(x) + y'(x+h)] + o(h^3) = \\ &= y(x) + h/2 [f(x, y(x)) + f(x+h, y(x+h))] + o(h^3). \end{aligned}$$

Обозначим  $x = x_i$ ,  $x+h = x_{i+1}$ . Тогда

$$y_{i+1} = y_i + h/2 [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})].$$

Таким образом,

$$y_{j+1}^{(a)} = y_j + hf(x_j, y_j); \quad (8.9)$$

$$\begin{aligned} y_{j+1}^{(k)} &= y_j + h/2 [f(x_j, y_j) + f(x_{j+1}, y_{j+1}^{(k-1)})], \\ k &= 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (8.10)$$

Итерации по (8.10) проводим до тех пор, пока выполнится неравенство

$$|y_{j+1}^{(k)} - y_{j+1}^{(k-1)}| \leq \Delta, \quad (8.11)$$

и полагаем

$$y_{i+1} = y_{j+1}^{(k)}.$$

Если при  $k = 3, 4$  неравенство (8.11) не выполняется, то полагаем  $h = h/2$  и снова вычисляем  $y_{j+1}$  по (8.9), (8.10).

Исследуем устойчивость метода Эйлера. Для этого предположим, что  $f(x, y)$  удовлетворяет условию Липшица:

$$|f(x, \bar{y}) - f(x, \underline{y})| \leq q |\bar{y} - \underline{y}|.$$

Пусть в процессе счета вместо  $y_k$  получено  $\tilde{y}_k$ .

$$\begin{aligned} |\tilde{y}_{k+1} - y_{k+1}| &= |\tilde{y}_k - y_k| + h |f(x_k, \tilde{y}_k) - f(x_k, y_k)| \leq \\ &\leq |\tilde{y}_k - y_k| + hq |\tilde{y}_k - y_k| = (1 + hq) |\tilde{y}_k - y_k|. \end{aligned}$$

Положим  $k + 1 = N$ :  $|\tilde{y}_N - y_N| \leq (1 + hq)^{N-k} |\tilde{y}_k - y_k| = e^{hq(N-k)} \times$   
 $\times |\tilde{y}_k - y_k|.$

Тогда

$$|\tilde{y}_N - y_N| \leq e^{q(x_N - x_k)} |\tilde{y}_k - y_k|, \quad N \rightarrow \infty.$$

Отсюда следует, что для  $x_k$  и  $x_N$  погрешность  $|\tilde{y}_N - y_N|$  в точке  $x_N$ , вызванная погрешностью  $|\tilde{y}_k - y_k|$  в начальной точке  $x_k$  при  $N \rightarrow \infty$ , является величиной того же порядка малости, что и  $\tilde{y}_k - y_k$ . Таким образом, метод Эйлера-Коши обладает численной устойчивостью.

В случае решения задачи Коши для системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} y'_i &= f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \quad i = \overline{1, n}; \\ y_i(x_0) &= y_{i0} \end{aligned}$$

вместо (8.9), (8.10) будем иметь

$$\begin{aligned} y_{i, j+1}^{(0)} &= y_{i, j} + hf(x_j, y_{1j}, \dots, y_{nj}), \quad i = \overline{1, n}; \quad j = \overline{0, N-1}; \\ y_{i, j+1}^{(k)} &= y_{i, j} + h/2 [f(x_j, y_{1j}, \dots, y_{nj}) + \\ &+ f(x_{j+1}, y_{1j+1}^{(k-1)}, \dots, y_{nj+1}^{(k-1)})]. \end{aligned}$$

Вместо (8.11) получим

$$\|y_{i+1}^{(k)} - y_{i+1}^{(k-1)}\| \leq \Delta.$$

*Вычислительная схема метода Эйлера с итерациями.*

1. Разбиваем отрезок  $[a, b]$  на  $N$  отрезков  $[x_{j-1}, x_j]$ ,  $j = \overline{1, N}$ .  
 Вычисляем  $h = (b - a)/N$ , зададимся точностью  $\Delta$ .

2. Вычисляем  $y_1^{(0)}$  по (8.9):  $y_1^{(0)} = y_0 + hf(x_0, y_0)$ .

3. Вычисляем  $y_1^{(1)}$  по (8.10):

$$y_1^{(1)} = y_0 + h/2 [f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^{(0)})]; \quad x_1 = x_0 + h.$$

4. Проверяем выполнение неравенства

$$|y_1^{(1)} - y_1^{(0)}| \leq \Delta.$$

5. Если оно выполняется, то полагаем  $y_1 = y_1^{(1)}$ , если нет — то вычисляем

$$y_1^{(k)} = y_0 + h/2 [f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^{(k-1)})], \quad k = 2.$$

6. Проверяем  $|y_1^{(k)} - y_1^{(k-1)}| \leq \Delta$ . Если неравенство выполняется, то полагаем  $y_1 = y_1^{(2)}$ , если нет — повторяем вычисления по п. 5,  $k = 3$ .

7. Вычисляем

$$y_2^{(0)} = y_1 + hf(x_1, y_1).$$

8. Вычисляем

$$y_2^{\prime(0)} = f(x_2, y_2^{(0)});$$

$$y_2^{(1)} = y_1 + h/2 [f(x_1, y_1) + y_2^{\prime(0)}].$$

9. Проверяем выполнение неравенства  $|y_2^{(1)} - y_2^{(0)}| \leq \Delta$ .

Если оно не выполняется, то вычисляем  $y_2^{(2)}$  по п. 8.

Если неравенство  $|y_2^{(1)} - y_2^{(0)}| > \Delta$ , то полагаем  $h/2 = h$  и переходим к вычислениям по пп. 3, 4.

**Пример 8.2.** Пусть задача Коши имеет вид

$$y' = 2x - y; \quad y(1) = 1. \quad (*)$$

Решим эту задачу на отрезке  $[1; 2]$  методом Эйлера с итерациями с точностью  $\Delta = 0,005$ .

Выбираем  $h = 0,2$ ;  $N = 5$ ;  $x_0 = 1$ ;  $x_i = 1 + 0,2i$ ;  $i = \overline{1, 5}$ .

$$y_0' = 1; \quad y_1^{(0)} = y_0 + hy_0' = 1,2; \quad y_1^{\prime(0)} = 2 \cdot 1,2 - 1,2 = 1,2;$$

$$y_1^{(1)} = y_0 + h/2 (y_0' + y_1^{\prime(0)}) = 1,22; \quad y_1^{\prime(1)} = 1,16.$$

Проверяем условие (8.11):  $|y_1^{(1)} - y_1^{(0)}| = 0,02 > \Delta$ .

$$y_1^{(2)} = y_0 + h/2 (y_0' + y_1^{\prime(1)}) = 1,216; \quad y_1^{\prime(2)} = 1,184;$$

$$|y_1^{(2)} - y_1^{(1)}| = 0,004 < \Delta; \quad y_1 = 1,216.$$

Вычисляем

$$y_2^{(0)} = y_1 + h y_1' = 1,216 + 0,2 \cdot 1,184 = 1,453;$$

$$y_2^{\prime(0)} = 2 \cdot 1,4 - 1,453 = 1,347;$$

$$y_2^{(1)} = 1,216 + 0,1 (1,184 + 1,347) = 1,469.$$

$$|y_2^{(1)} - y_2^{(0)}| = 0,016 > \Delta; \quad y_2^{\prime(1)} = 1,341;$$

$$y_2^{(2)} = 1,216 + 0,1 (1,184 + 1,341) = 1,468; \quad y_2^{\prime(2)} = 1,332.$$

$$|y_2^{(2)} - y_2^{(1)}| = 0,01 > \Delta; \quad y_2^{(3)} = 1,467; \quad y_2^{\prime(3)} = 1,332.$$

Определяем

$$y_3^{(0)} = y_2 + hf(x_2, y_2) = y_2 + h(2x_2 - y_2) = 1,732;$$

$$y_3^{\prime(0)} = 1,468; \quad y_3^{(1)} = 1,468 + 0,1 (1,332 + 1,468) = 1,748;$$

$$y_3^{\prime(1)} = 1,452; \quad y_3^{(2)} = 1,468 + 0,1 (1,332 + 1,452) = 1,746;$$

$$|y_3^{(2)} - y_3^{(1)}| = 0,002 < \Delta; \quad y_3 = 1,746; \quad y_3' = 1,454;$$

$$y_4^{(0)} = y_3 + hf(x_3, y_3) = 1,746 + 0,2 \cdot 1,454 = 2,037;$$

$$y_4^{\prime(0)} = 1,563; \quad y_4^{(1)} = 2,048; \quad y_4^{\prime(1)} = 1,552;$$

$$y_4^{(2)} = 2,052; \quad |y_4^{(2)} - y_4^{(1)}| = 0,004 < \Delta;$$

$$y_4 = 2,052; \quad y_4' = 1,548.$$

Вычисляем  $y_5$ :

$$\begin{aligned} y_5^{(0)} &= y_4 + hf(x_4, y_4) = 2,152; \quad y_5^{\prime(0)} = 1,848; \\ y_5^{(1)} &= 2,052 + 0,1(1,548 + 1,848) = 2,392; \quad y_5^{\prime(1)} = 1,610; \\ y_5^{(2)} &= 2,368; \quad |y_5^{(2)} - y_5^{(1)}| = 0,024 > \Delta; \\ y_5^{\prime(2)} &= 1,632; \quad y_5^{(3)} = 2,370; \quad |y_5^{(3)} - y_5^{(2)}| = 0,002 < \Delta. \end{aligned}$$

Таким образом, решение задачи Коши (Ж) с точностью  $\Delta = 0,005$  имеет вид  $\underline{y} = [1; 1,216; 1,468; 1,746; 2,052; 2,370]$ .

## 8.2. МЕТОД РУНГЕ — КУТТА

Метод Рунге—Кутта основан на замене интеграла в (8.8) по формуле прямоугольников с кратным узлом

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x+h/2) + o(h^3),$$

или

$$y(x+h) = y(x) + hf[x+h/2, y(x+h/2)] + o(h^3).$$

Если обозначить  $y^* = y(x+h/2)$ , то

$$y(x+h) = y(x) + hf(x+h/2, y^*) + o(h^3).$$

Вычислим  $y^*$  по формуле Эйлера с шагом  $h = h/2$ :

$$y^* = y(x) + h/2f(x, y(x)).$$

Тогда при  $y_{j+1} = y(x+h)$

$$y_{j+1} = y_j + hf(x_{j+1/2}, y_{j+1/2}); \quad y_{j+1/2} = y_j + h/2f(x_j, y_j). \quad (8.12)$$

Полученный метод относится к семейству методов Рунге—Кутта. В процессе вычислений фиксированы некоторые числа  $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_q, \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_q, \beta_{ij}, i, j = \overline{1, q-1}$ .

Последовательно получаем

$$\begin{aligned} k_1(h) &= hf(x, y); \\ k_m(h) &= hf[x + \alpha_m h, y + \sum_{j=1}^{m-1} \beta_{mj} k_j(h)], \quad m = \overline{2, q}. \end{aligned}$$

Полагаем

$$y(x+h) \approx z(h) = y(x) + \sum_{i=1}^q \rho_i k_i(h). \quad (8.13)$$

Обозначим  $\varphi(h) = y(x+h) - y(x)$ . Пусть  $\varphi(0) = \varphi'(0) = \dots = \varphi^{(s)}(0) = 0$ , а  $\varphi^{(s+1)}(0) \neq 0$  для некоторой гладкой функции  $f(x, y)$ .

$$\varphi(h) = \sum_{i=0}^s \frac{\varphi^{(i)}(0)}{i!} h^i + \frac{\varphi^{(s+1)}(\theta h)}{(s+1)!} h^{s+1}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Величина  $\varphi(h)$  называется погрешностью метода на шаге, а  $s$  — порядком погрешности метода.

а)  $q = 2, s = 2$  имеем

$$\varphi(h) = y(x+h) - y(x) - p_1 hf(x, y) - p_2 hf[x + \alpha_2 h, y + \beta_{21} hf(x, y)].$$

Обозначим  $\bar{x} = x + \alpha_2 h, \bar{y} = y + \beta_{21} hf(x, y)$ .

Вычислим  $\varphi^I(h), \varphi^{II}(h), \varphi^{III}(h)$ .

$$\begin{aligned} \varphi'(h) &= y'(x+h) - p_1 f(x, y) - p_2 f(\bar{x}, y) - \\ &\quad - p_2 h [\alpha_2 f_x(\bar{x}, \bar{y}) + \beta_{21} f_y(\bar{x}, \bar{y}) f]; \\ y^I &= f; y^{II} = f_x + f f_y; \varphi(0) = y - y = 0; \\ y^{III} &= f_{xx} + 2f f_{xy} + f^2 f_{yy} + f_y y^{II}; \varphi^I(0) = (1 - p_1 - p_2) f; \\ \varphi^{II}(0) &= (1 - 2 p_2 \alpha_2) f_x + (1 - 2 \beta_{21} p_2) f_y f; \\ \varphi^{III}(0) &= (1 - 3 p_2 \alpha_2^2) f_{xx} + 2(1 - 3 p_2 \alpha_2 \beta_{21}) f \cdot f_{xy} + \\ &\quad + (1 - 3 p_2 \beta_{21}^2) f_{yy} \cdot f^2 + f_y y^{II}. \end{aligned}$$

Соотношение  $\varphi'(0) = 0$  выполняется при всех  $f(x, y)$ , если  $1 - p_1 - p_2 = 0$ . (8.14)  $\varphi^{II}(0) = 0$ , если  $1 - 2 p_2 \alpha_2 = 0$  и  $1 - 2 p_2 \beta_{21} = 0$ . (8.15)

Таким образом,  $\varphi(0) = \varphi^I(0) = \varphi^{II}(0) = 0$  при всех  $f(x, y)$ , если выполняются (8.14), (8.15) относительно  $p_1, p_2, \alpha_2, \beta_{21}$ .

Задавая один из этих параметров произвольно, получаем различные методы Рунге—Кутты с погрешностью порядка  $o(h^2)$ .

Формулы с  $p_1 = 0, p_2 = 1, \alpha_2 = \beta_{21} = 1/2$  соответствуют модифицированному методу Эйлера.

Для  $p_1 = 1/4$

$$\begin{aligned} p_2 &= 3/4; \alpha_2 = \beta_{21} = 2/3; \varphi^{III}(0) = f_y(x, y) y^{II}(x); \\ k_1 &= hf(x, y); k_2 = hf(x + 2/3 h, y + 2/3 k_1); \\ \Delta y &= z(h) - y = 1/4(k_1 + 3 k_2). \end{aligned}$$

б)  $q = 3, s = 3$ .

Для того чтобы  $s = 3$ , необходимо, чтобы выполнялись соотношения

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \beta_{21}; \alpha_3 = \beta_{31} + \beta_{32}; \alpha_3(\alpha_3 - \alpha_2) - \beta_{32} \alpha_2(2 - 3 \alpha_2) = 0; \\ p_3 \beta_{32} \alpha_2 &= 1/6; p_2 \alpha_2 + p_3 \alpha_3 = 1/2; p_1 + p_2 + p_3 = 1. \end{aligned}$$

Наиболее употребительна совокупность формул

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x, y); k_2 = hf(x + h/2, y + k_1/2); \\ k_3 &= hf(x + h, y + 2 k_2 - k_1); \\ \Delta y &= 1/6(k_1 + 4 k_2 + k_3). \end{aligned}$$

Погрешность этой совокупности порядка  $o(h^3)$ , а при малых значениях  $f_y(x, y)$  — порядка  $o(h^5)$ , т. е. при  $f_y \equiv 0$  формула превращается в формулу Симпсона.

в) для  $q = s = 4$  наиболее употребительна совокупность формул

$$k_1 = hf(x, y); k_2 = hf(x + h/2, y + k_1/2); \quad (8.15)$$

$$k_3 = hf(x + h/2, y + k_2/2); k_4 = hf(x + h, y + k_3); \quad (8.16)$$

$$\Delta y = 1/6(k_1 + 2 k_2 + 2 k_3 + k_4).$$

Вычислительная схема метода Рунге—Кутты (8.15), (8.16).

1. Выбираем шаг  $h$  на отрезке  $[a, b]$ ,  $N = (b - a)/h$ , задаем  $\Delta$ .

$$2. r_1 = \rho_1 = 0; r_4 = 1; r_2 = r_3 = 1/2; \rho_2 = 1/2; \rho_3 = 1/2; \rho_4 = 0; \\ k_0 = 0; \quad (8.17)$$

$$k_i = hf(x + r_i h, y + \rho_i k_{i-1}); i = 1, 4. \quad (8.18)$$

3. Вычисляем

$$y_{i+1} = y_i + 1/6(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4); i = \overline{0, N-1}. \quad (8.19)$$

4. При нечетных значениях  $i$  вычисляем  $\tilde{y}_{i+1}$  с удвоенным шагом

$$\tilde{y}_{i+1} = y_{i-1} + 1/6(\tilde{k}_1 + 2\tilde{k}_2 + 2\tilde{k}_3 + \tilde{k}_4); \\ \tilde{k}_j = 2hf(x + r_j 2h, y + \rho_j \tilde{k}_{j-1}); j = \overline{1, 4}.$$

5. Оцениваем неравенство

$$|\tilde{y}_{i+1} - y_{i+1}| \leq \Delta.$$

Если неравенство выполняется, то продолжаем вычисления  $y_{i+2}$  с прежним шагом, если нет, то делим шаг  $h = h/2$  и вычисляем снова  $y_i, y_{i+1}$ .

Пример 8.3. Задача Коши имеет вид

$$y' = x^2 - 2y^2; y(-1) = 1.$$

Найдем решение с точностью  $\Delta = 0,005$  на отрезке  $[-1, -0,4]$  методом Рунге—Кутты (8.17) — (8.19).

Выбираем шаг  $h = 0,2$ ;  $N = 3$ .

Вычисляем  $k_i$  по (8.18) с учетом (8.17):

$$k_1 = 0,2(1 - 2 \cdot 1) = -0,2; k_2 = 0,2[0,9^2 - 2(1 - 0,1)^2] = -0,162; \\ k_3 = 0,2[0,81 - 2(1 - 0,081)^2] = -0,176; k_4 = 0,2[0,64 - 2(1 - 0,08)^2] = -0,205; \\ y_1 = 1 + 1/6(-0,2 - 0,205 - 2(0,162 + 0,176)) = 0,820; \\ x_1 = -0,8; k_1 = -0,045; k_2 = -0,154; k_3 = -0,122; k_4 = -0,123; \\ y_2 = 0,820 - 0,120 = 0,700.$$

Проверим шаг:  $H = 2h = 0,4$ .

$$\tilde{k}_1 = 0,4(1 - 2 \cdot 1) = -0,4; \tilde{k}_2 = 0,4(0,64 - 2 \cdot 0,64) = -0,256; \\ \tilde{k}_3 = 0,4[0,64 - 2(1 - 0,128)^2] = -0,350; \tilde{k}_4 = 0,4[0,36 - 2(1 - 0,35)^2] = -0,182; \\ \tilde{y}_2 = 1 - 1,794/6 = 0,701; \\ |\tilde{y}_2 - y_2| = 0,001 < \Delta.$$

Продолжаем вычисления с шагом 0,2.

$$x_2 = -0,6; k_1 = 0,2(0,36 - 0,98) = -0,124; \\ k_2 = 0,2[0,25 - 2(0,7 - 0,062)^2] = -0,110; \\ k_3 = 0,2[0,25 - 2(0,7 - 0,055)^2] = -0,116; \\ k_4 = 0,2[0,16 - 2(0,7 - 0,116)^2] = -0,103; \\ y_3 = 0,7 - 0,779/6 = 0,570; \\ x_3 = -0,4; k_1 = 0,2(0,16 - 2 \cdot 0,57^2) = -0,097; \\ k_2 = 0,2[0,09 - 2(0,57 - 0,048)^2] = -0,090; \\ k_3 = 0,2[0,09 - 2(0,57 - 0,045)^2] = -0,072; \\ k_4 = 0,2[0,04 - 2(0,57 - 0,072)^2] = y_4 = 0,57 - 0,412/6 = 0,501,$$

Таким образом, с точностью до 0,005 получаем решение

$$y = [1; 0,820; 0,700; 0,570; 0,500].$$

### 8.3. МЕТОД АДАМСА

Метод Адамса относится к числу  $k$ -шаговых методов, или к числу конечноразностных методов.

Наиболее употребительны методы вида

$$\sum_{i=0}^k a_{-i} y_{j-i} = h \sum_{i=0}^k b_{-i} f(x_{j-i}, y_{j-i}), \quad (8.20)$$

на сетке с постоянным шагом  $h = x_j - x_{j-1} = \text{const}$ ,  $a_{-i}$ ,  $b_{-i}$  — постоянные коэффициенты.

Формулы Адамса основаны на замене производной интерполяционной формулой Ньютона назад (см. (6.22)).

Заменим на участке  $[x_0, x_2]$  производную интерполяционным полиномом Ньютона:

$$y' \approx P_1(x) = y'_1 + \frac{\Delta y'_0}{h} (x - x_1).$$

Обозначим  $q_k = h y'_k = h f(x_k, y_k)$ ;  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Тогда для любой конечной разности порядка  $m$

$$\Delta^m q_k = h \Delta^m y'_k.$$

Отсюда

$$y' \approx P_1(x) = \frac{q_1}{h} + \frac{\Delta q_0}{h} (x - x_1).$$

Интегрируя эту формулу на  $[x_1, x_2]$ , получаем

$$y_2 - y_1 = \int_{x_1}^{x_2} y' (x) dx = q_1 + 1/2 \Delta q_0.$$

Тогда

$$y_2 = y_1 + q_1 + 1/2 \Delta q_0.$$

В общем случае

$$y_{i+1} = y_i + q_i + 1/2 \Delta q_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (8.21)$$

Для участка  $[x_0, x_3]$   $y'$  заменяем на  $P_2(x)$ :

$$y' \approx P_2(x) = y'_2 + \frac{\Delta y_1}{h} (x - x_2) + \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2} (x - x_2)(x - x_1);$$

$$y' \approx P_2(x) = \frac{q_2}{h} + \frac{\Delta q_1}{h^2} (x - x_2) + \frac{\Delta^2 q_0}{2h^3} (x - x_2)(x - x_1).$$

Поскольку

$$(x - x_2)(x - x_1) = (x - x_1)^2 - (x - x_1)h,$$

то

$$y' \approx P_2(x) = \frac{q_2}{h} + \frac{\Delta q_1}{h^2} (x - x_2) + \frac{\Delta^2 q_0}{2h^3} [(x - x_1)^2 - (x - x_1)h].$$

Интегрируем это выражение по промежутку  $[x_2, x_3]$ :

$$y_3 - y_2 = \int_{x_2}^{x_3} y' (x) dx = q_2 + 1/2 \Delta q_1 + 5/12 \Delta^2 q_0.$$

Отсюда

$$y_3 = y_2 + q_2 + 1/2 \Delta q_1 + 5/12 \Delta^2 q_0.$$

В общем случае

$$y_{i+1} = y_i + q_i + 1/2 \Delta q_{i-1} + 5/12 \Delta^2 q_{i-2}, \quad i = 2, 3, \dots \quad (8.22)$$

Точно так же можно получить формулы Адамса с третьими и более высокими разностями.

$$y_{i+1} = y_i + q_i + 1/2 \Delta q_{i-1} + 5/12 \Delta^2 q_{i-2} + 3/8 \Delta^3 q_{i-3}, \quad i = 3, 4, \dots \quad (8.23)$$

и

$$y_{i+1} = y_i + q_i + 1/2 \Delta q_{i-1} + 5/12 \Delta^2 q_{i-2} + 3/8 \Delta^3 q_{i-3} + 251/750 \Delta^4 q_{i-4}, \quad i = 4, 5, \dots \quad (8.24)$$

Формулы (8.21) — (8.24) позволяют решать задачу Коши, если получены каким-либо другим методом значения  $y_1, y_2; y_1, y_2, y_3; y_1, y_2, y_3, y_4$  соответственно.

На каждом шаге для определения  $y_{i+1}$  по этим формулам необходимо вычислять  $q_i, \Delta q_{i-1}, \Delta^2 q_{i-2}, \dots$ .

Преобразуем эти формулы так, чтобы вычислять только  $q_i$ :

$$y_{i+1} = y_i + q_i + 1/2 \Delta q_{i-1} = y_i + 1/2 (3q_i - q_{i-1}); \quad (8.21')$$

$$y_{i+1} = y_i + q_i + 1/2 \Delta q_{i-1} + 5/12 \Delta^2 q_{i-2} = y_i + 1/12 (23q_i - 16q_{i-1} + 5q_{i-2}); \quad (8.22')$$

$$y_{i+1} = y_i + q_i + 1/2 \Delta q_{i-1} + 5/12 \Delta^2 q_{i-2} + 3/8 \Delta^3 q_{i-3} = y_i + 1/24 (55q_i - 59q_{i-1} + 37q_{i-2} - 9q_{i-3}); \quad (8.23')$$

$$y_{i+1} = y_i + q_i + 1/2 \Delta q_{i-1} + 5/12 \Delta^2 q_{i-2} + 3/8 \Delta^3 q_{i-3} + 251/750 \Delta^4 q_{i-4} = y_i + 1/3 (7,88q_i - 11,39q_{i-1} + 10,65q_{i-2} - 5,14q_{i-3} + 1,00q_{i-4}). \quad (8.24')$$

Для выбора шага можно пользоваться неравенствами

$$\Delta^2 q_{i-2} \leq 12 \varepsilon; \quad \Delta^3 q_{i-3} \leq 24 \varepsilon. \quad (8.25)$$

Поскольку при вычислении  $y_{i+1}$  по формулам (8.21') — (8.24') на  $k$ -м шаге  $q_{i-1}, \dots$ , известны, то достаточно вычислить  $q_i = h y'_i$ , чтобы получить значение  $y_{i+1}$ .

**Пример 8.4.** Продолжим решение задачи (\*) на отрезке  $[-0,4; 0,2]$  по формуле Адамса (8.23').

Выпишем полученные при решении задачи методом Рунге—Кутты значения  $y_4, y'_4, y_2, y'_2$ :

$$y_4 = 0,480; \quad q_3 = h y'_3 = -0,097; \quad q_2 = h y'_2 = -0,124; \quad q_1 = h y'_1 = -0,045; \quad q_4 = h y'_4 = -0,030.$$

Вычислим  $y_5, y_6$ :

$$y_5 = y_4 + 1/24 (55q_4 - 59q_3 + 37q_2 - 9q_1) = 0,476;$$

$$q_5 = h y'_5 = 0,2 (0 - 2 \cdot 0,476^2) = -0,090;$$

$$y_6 = y_5 + 1/24 (55q_5 - 59q_4 + 37q_3 - 9q_2) = 0,471.$$

Оценим погрешность:  $q_6 = h y'_6 = 0,2 [0,04 - 2 (0,241)^2] = -0,081;$

$$\Delta^3 q_3 = 0,196 > 24 \cdot 0,005 = 0,12.$$

Следовательно, необходимо вычислять  $y_6$  с шагом 0,1.

#### 8.4. МЕТОД КРЫЛОВА — АДАМСА

Поскольку метод Адамса является не самоначинающимся, для вычисления начальных значений решения  $y_1, y_2, y_3$  необходимо использовать метод Эйлера—Коши, либо Рунге—Кутта, что создает определенные трудности при решении задачи Коши. Академик А. Н. Крылов предложил формулу для вычислений начала таблицы решения задачи, полученную из формулы Ньютона для интерполирования вперед аналогично тому, как были получены формулы Адамса:

$$y_{i+1} = y_i + q_i + 1/2 \Delta q_i - 1/12 \Delta^2 q_i. \quad (8.26)$$

При  $i = 0$

$$y_1 = y_0 + q_0 + 1/2 \Delta q_0 - 1/12 \Delta^2 q_0.$$

При  $i = 1$

$$y_2 = y_1 + q_1 + 1/2 \Delta q_1 - 1/12 \Delta^2 q_1.$$

Так как  $\Delta q_1 = \Delta q_0 + \Delta^2 q_0$  и, если для начала таблицы положить  $\Delta^2 q_1 = \Delta^2 q_0$ , то

$$y_2 = y_1 + q_1 + 1/2 \Delta q_0 + 5/12 \Delta^2 q_0.$$

Если дальнейшие вычисления выполнять по (8.23), то необходимо определить

$$y_3 = y_2 + q_2 + 1/2 \Delta q_1 + 5/12 \Delta^2 q_1.$$

Считая  $\Delta^2 q_1 = \Delta^2 q_0$ , получаем:

$$y_1 = y_0 + q_0 + 1/2 \Delta q_0 - 1/12 \Delta^2 q_0 = y_0 + 5/12 q_0 + 2/3 q_1 - 1/12 q_2; \quad (8.27)$$

$$y_2 = y_1 + q_1 + 1/2 \Delta q_0 + 1/12 \Delta^2 q_0 = y_1 + 2/3 q_1 - 1/12 q_0 + 5/12 q_2; \quad (8.28)$$

$$y_3 = y_2 + q_2 + 1/2 \Delta q_1 + 5/12 \Delta^2 q_1 = y_2 + 2/3 q_2 - 1/12 q_1 + 5/12 q_3. \quad (8.29)$$

Поскольку при вычислении по (8.27), (8.28), (8.29) значений  $y_1, y_2, y_3$  в эти формулы входят неизвестные  $q_1, q_2, q_3$ , метод является итерационным, когда в (8.27) — (8.29) неизвестные вводятся по мере их определения.

Для контроля точности вычислений по методу Эйлера

$$y_{i+1} = y_i + h/2 (y'_i + y'_{i+1}),$$

отсюда получаем

$$\Delta y_i = (q_i + q_{i+1})/2 \quad (8.30)$$

и

$$|\Delta y_i - (q_i + q_{i+1})/2| < \varepsilon.$$

*Вычислительная схема метода Крылова—Адамса.*

1. Выбираем шаг на  $[a, b]$ .
2. Вычисляем  $q_0 = hf(x_0, y_0)$ ;  $y_1^{(1)} = y_0 + 5/12 q_0$ .
3. Вычисляем  $q_1^{(1)} = hf(x_1, y_1^{(1)})$ , и  $y_1^{(2)} = y_0 + 5/12 q_0 + 2/3 q_1^{(1)}$ ;  
 $q_1^{(2)} = hf(x_1, y_1^{(2)})$ .

4. Вычисляем  $y_2^{(2)}$  и  $q_2^{(2)}$ :

$$y_2^{(2)} = y_1^{(2)} + 2/3q_1^{(2)} - 1/12q_0; \quad q_2^{(2)} = hf(x_2, y_2^{(2)}).$$

5. Вычисляем  $y_2^{(3)}$ ,  $q_2^{(3)}$ :

$$y_2^{(3)} = y_1^{(2)} + 2/3q_1^{(2)} - 1/12q_0 + 5/12q_2^{(2)}$$

и

$$q_2^{(3)} = hf(x_2, y_2^{(3)}).$$

6. Вычисляем  $y_1^{(3)}$  по полной формуле

$$y_1 = y_1^{(3)} = y_0 + 5/12q_0 + 2/3q_1^{(2)} - 1/12q_2^{(3)}; \quad q_1 = q_1^{(3)} hf(x_1, y_1).$$

7. Вычисляем  $y_2^{(4)}$  по полной формуле

$$y_2 = y_2^{(4)} = y_1 + 2/3q_1 - 1/12q_0 + 5/12q_2^{(3)}; \quad q_2 = hf(x_2, y_2).$$

8. Вычисляем

$$y_3^{(4)} = y_2 + 2/3q_2 - 1/12q_1; \quad q_3^{(4)} = hf(x_3, y_3^{(4)}).$$

9. Находим  $y_3^{(5)}$  по полной формуле

$$y_3 = y_3^{(5)} = y_2 + 2/3q_2 + 5/12q_3^{(4)} - 1/12q_1; \quad q_3 = hf(x_3, y_3).$$

10. Оцениваем точность по формуле

$$|y_3 - y_2 - (q_3 + q_2)/2| \leq \varepsilon.$$

11. Если неравенство выполняется, то переходим к вычислениям по (8.23'), если нет, то делим шаг пополам и начинаем вычисления с п. 2.

12. Проводим дальнейшие вычисления

$$y_{k+1} = y_k + 1/24 (55q_k - 59q_{k-1} + 37q_{k-2} - 9q_{k-3}).$$

**Пример 8.5.** Необходимо найти решение задач

$$y' = x^2 + y^2 + 1; \quad y(0) = 0,$$

на отрезке  $[0; 1]$  методом Крылова—Адамса с точностью  $\Delta = 0,05$ .

1. Выбираем  $h = 0,2$ .

2. Вычисляем  $q_0 = 0,2(0 + 0 + 1) = 0,2$ .

3. Вычисляем  $y_i^{(k)}$  и  $q_i^{(k)}$  согласно пп. 2—10 вычислительной схемы.

$$y_1^{(1)} = y_0 + 5/12q_0 = 0,083; \quad q_1^{(1)} = 0,209; \quad y_1^{(2)} = y_0 + 5/12q_0 + 2/3q_1^{(1)} = 0,223;$$

$$q_1^{(2)} = 0,2(0,04 + 0,05 + 1) = 0,218; \quad y_2^{(2)} = y_1^{(2)} + 2/3q_1^{(2)} - 1/12q_0 = 0,351;$$

$$q_2^{(2)} = 0,2(0,16 + 0,123 + 1) = 0,257; \quad y_2^{(3)} = y_1^{(2)} + 2/3q_1^{(2)} - 1/12q_0 + 5/12q_2^{(2)} = 0,457; \quad q_2^{(3)} = 0,2(0,16 + 0,209 + 1) = 0,274.$$

Вычисляем  $y_1 = y_1^{(3)}$ ,  $y_2 = y_2^{(4)}$ :

$$y_1 = y_0 + 5/12q_0 + 2/3q_1^{(2)} - 1/12q_2^{(3)} = 0,206; \quad q_1 = q_1^{(3)} = 0,2(0,04 + 0,04 + 1) =$$

$$= 0,216; \quad y_2 = y_1 + 5/12q_2^{(3)} + 2/3q_1 - 1/12q_0 = 0,417;$$

$$q_2 = 0,2(0,16 + 0,174 + 1) = 0,267.$$

Переходим к вычислению  $y_3$ :

$$y_3^{(4)} = y_2^{(4)} + 2/3q_2^{(4)} - 1/12q_1^{(3)} = 0,577; \quad q_3^{(4)} = 0,2(0,36 + 0,333 + 1) = 0,338;$$

$$y_3 = y_3^{(5)} = y_2 + 5/12q_3^{(4)} + 2/3q_2^{(4)} - 1/12q_1^{(3)} = 0,718;$$

$$q_3 = 0,2(0,36 + 0,516 + 1) = 0,375.$$

Таким образом, начало таблицы искомого решения получено в виде  
 $y_0 = 0; y_1 = 0,206; y_2 = 0,417; y_3 = 0,718; q_0 = 0,2; q_1 = 0,216; q_2 = 0,267;$   
 $q_3 = 0,375.$

Оценим точность полученного решения

$$|y_3 - y_2 - 1/2(q_3 + q_2)| = 0,02 < \varepsilon.$$

Продолжаем решение задачи по формуле (8.23'):  $x_4 = 0,8;$

$$y_4 = y_3 + 1/24(55q_3 - 59q_2 + 37q_1 - 9q_0) = 1,179; \quad q_4 = 0,2(0,64 + 1,382 + 1) = 0,604,$$

Оценим точность

$$\Delta^3 q_1 = q_4 - 3(q_3 - q_2) - q_1 = 0,064 < 24 \cdot 0,05 = 1,2.$$

Вычисляем  $y_5$ :

$$y_5 = 1,179 + (55 \cdot 0,604 - 59 \cdot 0,375 + 37 \cdot 0,267 - 9 \cdot 0,216)/24 = 1,972.$$

Итак, решение задачи Коши на отрезке  $[0; 1]$  получено в виде ( $\Delta = 0,05$ ):

$$y = [0; 0,21; 0,42; 0,72; 1,18; 1,97].$$

Программы, реализующие методы Эйлера с итерациями, Рунге—Кутты и Крылова—Адамса, приведены в приложении.

### Численное решение краевых задач

Краевая задача — это задача отыскания частного решения уравнений

$$\frac{dy_k(x)}{dx} = f_k(x, y_1, y_2, \dots, y_p), \quad k = \overline{1, p} \quad (8.31)$$

на отрезке  $[a, b]$ , в которой дополнительные условия налагаются на значения функций  $y_k(x)$  более чем в одной точке отрезка. Дополнительные условия могут связывать между собой значения нескольких функций в разных точках

$$\varphi_k[y_1(\xi_k), y_2(\xi_k), \dots, y_p(\xi_k)] = \eta_k, \quad k = \overline{1, p}, \quad \xi_k \in [a, b]. \quad (8.32)$$

В простейшем случае дополнительные условия задаются на концах отрезка  $[a, b]$ :

$$\varphi_k[y_1(a), y_2(a), \dots, y_p(a)] = 0, \quad k = \overline{1, m};$$

$$\varphi_k[y_1(b), y_2(b), \dots, y_p(b)] = 0, \quad k = \overline{m+1, p}, \quad m \geq p/2.$$

В отличие от задачи Коши краевая задача может иметь единственное решение, не единственное решение и решение может не существовать.

### 8.5. МЕТОД КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

Разобьем область интегрирования на достаточно большое число равных частей

$$x_k = x_0 + kh; \quad k = \overline{1, N}; \quad h = (b - a)/N; \quad x_0 = a; \quad x_{N+1} = b.$$

Рассмотрим для простоты уравнения второго порядка

$$y'' = f(x, y, y'); \quad (8.33)$$

$$y(a) = y_a; \quad y(b) = y_b. \quad (8.34)$$

Аппроксимируем  $y'(x)$  и  $y''(x)$  конечными разностями

$$y'(x_k) \approx \frac{y(x_k + h) - y(x_k)}{h};$$

$$y''(x_k) \approx \frac{y(x_k + h) - 2y(x_k) + y(x_k - h))}{h^2};$$

$$R_2 = h^2/12y^{IV}(\xi_k); \quad \xi_k \in [x_{k-1}, x_{k+1}]; \quad y_k = y(x_k).$$

Вместо (8.33) получим следующее разностное уравнение:

$$\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} = f\left[x_k, y_k, \frac{y_{k+1} - y_k}{h}\right]; \quad k = \overline{1, N}; \quad (8.35)$$

$$y(x_0) = y_a; \quad y(x_{N+1}) = y_b.$$

Если решение задачи (8.33), (8.34) существует и оно единственно, то при  $N \rightarrow \infty$  решение (8.35) стремится к решению задачи (8.33), (8.34).

В случае линейного уравнения

$$y'' - p(x)y = f(x), \quad p(x) \geq 0,$$

получаем:

$$y_{k+1} - (2 + h^2 p_k) y_k + y_{k-1} = h^2 f(x_k), \quad k = \overline{1, N};$$

$$y_0 = y_a; \quad y_{N+1} = y_b; \quad p_k = p(x_k); \quad f_k = f(x_k).$$

Система (8.36) — система  $N$  линейных алгебраических уравнений, которую удобно решать, например, методом Зейделя.

**Пример 8.6.** Пусть есть следующая краевая задача:

$$y'' + y = 1; \quad y(0) = 0; \quad y(\pi/2) = 1. \quad (*)$$

Вычислим  $h$  при  $N = 2$ :

$$h = \pi/6; \quad x_1 = \pi/6; \quad x_2 = \pi/3; \quad x_3 = \pi/2.$$

Аппроксимируем уравнение (\*) конечноразностным уравнением. Получаем систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} (\pi^2/36 - 2) y_1 + y_2 &= \pi^2/36; \\ y_1 + (\pi^2/36 - 2) y_2 &= \pi^2/36 - 1; \end{aligned} \right\}$$

$$y_0 = 0; \quad y_3 = 1.$$

Решая ее, находим

$$y_1 = 0,128; \quad y_2 = 0,495. \quad \text{Известно } y(x_1) = 0,137.$$

Оценим погрешность в точке  $\pi/6$ :

$$|y_1 - y(\pi/6)| = |0,128 - 0,137| = 0,009.$$

## 8.6. МЕТОД ПРОГОНКИ

Рассмотрим линейную краевую задачу

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x); \quad (8.37)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) &= A, \\ \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) &= B \end{aligned} \right\} \quad (8.38)$$

при  $|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0$ ;  $|\beta_0| + |\beta_1| \neq 0$ .

Построим следующую разностную схему.

Уравнение (8.37) аппроксимируем уравнением

$$y_{k+1} + m_k y_k + n_k y_{k-1} = \hat{f}_k, \quad k = \overline{1, N}. \quad (8.39)$$

Здесь

$$\begin{aligned} m_k &= r_k(q_k h^2 - 2); \quad n_k = r_k(1 - h/2p_k); \\ r_k &= 1/(1 + h/2p_k); \quad \hat{f}_k = h^2 r_k f(x_k); \quad p_k = p(x_k); \quad q_k = q(x_k). \end{aligned} \quad (8.40)$$

Краевые условия (8.38) приобретают вид

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 y_0 + \alpha_1/h (y_1 - y_0) &= A, \\ \beta_0 y_{N+1} + \beta_1/h (y_N - y_{N+1}) &= B. \end{aligned} \right\} \quad (8.41)$$

Обозначим

$$c_0 = \alpha_1/(\alpha_0 h - \alpha_1); \quad d_0 = hA/\alpha_1. \quad (8.42)$$

Решая (8.39) относительно  $y_k$  и исключая из него  $y_{k-1}$ , получим

$$y_k = c_k (d_k - y_{k+1}); \quad k = N, N-1, \dots, 1, \quad (8.43)$$

где

$$c_k = 1/(m_k - n_k c_{k-1}); \quad k = \overline{1, N}, \quad (8.44)$$

$$d_k = \hat{f}_k - n_k c_{k-1} d_{k-1}, \quad k = 1, N. \quad (8.45)$$

Коэффициенты  $c_k$ ,  $d_k$  определяем по (8.44), (8.45) с учетом (8.42) — прямой ход метода прогонки.

Из (8.41) и (8.43) для  $k = N$

$$y_{N+1} = \frac{Bh + \beta_1 c_{N-1} d_N}{\beta_0 h + \beta_1 (c_N + 1)}. \quad (8.46)$$

Остальные значения  $y_k$ ,  $k = N, N-1, \dots, 1$ , находим, решая уравнение (8.43) — обратный ход метода прогонки.

## 8.7. МЕТОД ОРТОГОНАЛЬНОЙ ПРОГОНКИ

Представим граничные условия (8.40) в виде

$$\left. \begin{aligned} \sigma_0 y_0 + \sigma_1 y_1 &= A, \\ \tau_0 y_N + \tau_1 y_{N+1} &= B, \end{aligned} \right\} \quad (8.47)$$

где  $\sigma_0 = \alpha_0 - \alpha_1/h$ ;  $\sigma_1 = \alpha_1/h$ ;  $\tau_0 = \beta_1/h$ ;  $\tau_1 = \beta_0 - \tau_0$ , при условии, что  $\sigma_0^2 + \sigma_1^2 = 1$ ,  $\tau_0^2 + \tau_1^2 = 1$ , т. е.  $\alpha_1 = (\alpha_0 \pm 1)h$ ;  $\tau_1 = (\tau_0 \pm 1)h$ .

Введем в рассмотрение новые неизвестные величины  $u_k$ ,  $v_k$ ,  $\gamma_k$ , определяемые соотношениями

$$\left. \begin{aligned} u_k &= y_k \sin \gamma_k + y_{k-1} \cos \gamma_k, \\ v_k &= y_k \cos \gamma_k - y_{k-1} \sin \gamma_k \end{aligned} \right\} \quad (8.48)$$

и (8.39). Из (8.48) получаем

$$\left. \begin{aligned} y_k &= u_k \sin \gamma_k + v_k \cos \gamma_k, \\ y_{k-1} &= u_k \cos \gamma_k - v_k \sin \gamma_k. \end{aligned} \right\} \quad (8.49)$$

Подставим (8.49) в (8.39):

$$u_k = 1/\rho_k \{u_{k+1} + [\sin \gamma_k \sin \gamma_{k+1} + \cos \gamma_{k+1} (n_k \cos \gamma_k + m_k \sin \gamma_k)] u_k - \cos \gamma_{k+1} \hat{f}_k\}; \quad (8.50)$$

$$u_{k+1} = 1/\rho_k n_k u_k + \hat{f}_k \sin \gamma_{k+1} + v_k/\rho_k [\cos \gamma_k \cos \gamma_{k+1} + \sin \gamma_{k+1} (n_k \sin \gamma_k - m_k \cos \gamma_k)], \quad (8.51)$$

где

$$\rho_k = \sqrt{\cos^2 \gamma_k + (n_k \sin \gamma_k - m_k \cos \gamma_k)^2}.$$

Потребуем, чтобы в (8.51) не содержались  $v_k$ . Тогда имеем:

$$\cos \gamma_k \cos \gamma_{k+1} + \sin \gamma_{k+1} (n_k \sin \gamma_k - m_k \cos \gamma_k) = 0.$$

Отсюда находим  $\sin \gamma_{k+1}$  и  $\cos \gamma_{k+1}$ :

$$\left. \begin{aligned} \sin \gamma_{k+1} &= -\cos \gamma_k / \rho_k, \\ \cos \gamma_{k+1} &= (n_k \sin \gamma_k - m_k \cos \gamma_k) / \rho_k, \end{aligned} \right\} \quad (8.52)$$

$$u_{k+1} = n_k u_k / \rho_k + \hat{f}_k \sin \gamma_{k+1}. \quad (8.53)$$

Для вычисления по (8.50), (8.52), (8.53) необходимо определить  $\sin \gamma_1$ ,  $\cos \gamma_1$ ,  $u_1$ ,  $v_{N+1}$ . Используем краевые условия (8.47) и (8.48). Из (8.49) при  $k=1$  получаем

$$y_1 = u_1 \sin \gamma_1 + v_1 \cos \gamma_1;$$

$$y_0 = u_1 \cos \gamma_1 - v_1 \sin \gamma_1.$$

Из (8.47):  $(\sigma_0 \sin \gamma_1 + \sigma_1 \cos \gamma_1) + (\sigma_0 \cos \gamma_1 - \sigma_1 \sin \gamma_1) v_1 = A$ .  
Для определения  $v_{N+1}$  и  $u_1$  в этом выражении положим

$$\sigma_0 \cos \gamma_1 - \sigma_1 \sin \gamma_1 = 0. \quad (8.54)$$

Тогда

$$\sin \gamma_1 = \sigma_0; \quad \cos \gamma_1 = \sigma_1.$$

Отсюда  $u_1 = A$ , поскольку  $\sigma_0^2 + \sigma_1^2 = 1$ .

Положим теперь в (8.48)  $k = N + 1$ :

$$u_{N+1} = y_{N+1} \sin \gamma_{N+1} + y_N \cos \gamma_{N+1}.$$

Кроме того, из (8.48') имеем

$$\tau_0 y_N + \tau_1 y_{N+1} = B.$$

Если  $\Delta = \tau_0 \sin \gamma_{N+1} - \tau_1 \cos \gamma_{N+1} \neq 0$ , то эти уравнения имеют решение

$$y_N = 1/\Delta (B \sin \gamma_{N+1} - u_{N+1} \tau_1);$$

$$y_{N+1} = 1/\Delta (u_{N+1} \tau_0 - B \cos \gamma_{N+1}).$$

Представим полученные выражения в (8.48') при  $k = N + 1$ .

$$v_{N+1} = 1/\Delta [-B + (\tau_0 \cos \gamma_{N+1} + \tau_1 \sin \gamma_{N+1}) u_{N+1}]. \quad (8.55)$$

Тогда остальные  $v_N, v_{N-1}, \dots, v_1$  могут быть определены по (8.50),  $k = \overline{1, N}$ . Коэффициенты  $u_k$  вычисляем по (8.53),  $k = \overline{1, N}$ . Это — прямой ход метода ортогональной прогонки.

Значения  $y_k$  вычисляем по любой из формул (8.49).

Свойства ортогональной прогонки:

1. Поскольку  $|\sin\gamma_k| \ll 1$  и  $|\cos\gamma_k| \ll 1$ , при вычислении коэффициентов  $v_k, u_k$  с погрешностью, вычислительная погрешность растёт медленно.

2. Так как  $u_k^2 + v_k^2 \equiv y_k^2 + y_{k-1}^2$ , то следует, что погрешности при вычислении  $y_k, y_{k-1}$  такие же, что и  $u_k, v_k$ .

Вычислительная схема метода прогонки.

1. Вычисляем  $h = (b - a)/N$ ;  $k = \overline{1, N}$ .

2. Вычисляем  $p_k = p(x_k)$ ;  $q_k = q_k(x_k)$ ;  $f_k = f(x_k)$ .

3. Вычисляем  $r_k = 1/(1 + h/2p_k)$ ;  $m_k = r_k(h^2q_k - 2)$ ;  $n_k = r_k(1 - h/2p_k)$ ;  $\hat{f}_k = r_k h^2 f_k$ ;  $k = \overline{1, N}$ .

4. Вычисляем  $c_0, d_0$  по формулам (8.41) или  $\sin\gamma_1 = \sigma_0$ ,  $\cos\gamma_1 = \sigma_1$ ,  $u_1 = A$ .

5. Вычисляем  $c_k, d_k$  по формулам (8.43), (8.44) или  $\sin\gamma_k, \cos\gamma_k$  по формулам (8.52),  $u_k$  — (8.53),  $v_k$  — (8.50), (8.55).

6. Вычисляем  $y_k$  по формулам (8.45), (8.42),  $k = N, N - 1, \dots, 1$ , или по формулам (8.49).

Пример 8.7. Пусть дана следующая краевая задача:

$$y'' + (x^2 + 1)y = x$$

с краевыми условиями

$$\left. \begin{aligned} y(-2) + 2y'(-2) &= 0, \\ y(2) + 2y'(2) &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Найдем решение этой задачи методом прогонки.

1. Выберем  $h = 1$ ;  $x_1 = -1$ ;  $x_2 = 0$ ;  $x_3 = 1$ ;  $x_4 = 2$ ;  $N = 3$ .

2. Вычислим  $p_k, q_k, f_k$ ;  $k = \overline{1, 3}$ :

$$p_1 = p_2 = p_3 = 0; q_1 = 2; q_2 = 1; q_3 = 1; f_1 = -1; f_2 = 0;$$

3.  $f_3 = 1$ .

$$r_1 = 1; r_2 = 1; r_3 = 1; m_1 = 0; m_2 = -1; m_3 = 0; n_1 = 1; n_2 = 1; n_3 = 1; \hat{f}_1 = -1; \hat{f}_2 = 0; \hat{f}_3 = 1.$$

4. Вычисляем прогоночные коэффициенты

$$c_0 = \frac{\alpha_1}{\alpha_0 h - \alpha_1} = -2; d_0 = \frac{hA}{\alpha_1} = 0.$$

5.  $c_k = 1/(m_k - n_k c_{k-1})$ ;  $c_1 = 1/2$ ;  $c_2 = -2/3$ ;  $c_3 = 3/2$ ;  $d_k = \hat{f}_k - n_k c_{k-1} d_{k-1}$ ;  $d_1 = -1$ ;  $d_2 = 1/2$ ;  $d_3 = 3/4$ .

$$6. y_{N+1} = y_4 = \frac{2 \cdot 1 + 2(-2/3) \cdot 3/4}{1 \cdot 1 + 2(3/2 + 1)} = 1/6;$$

$$y_3 = c_3(d_3 - y_4) = 3/2(3/4 - 1/6) = 7/8; y_2 = -2/3(1/2 - 7/8) = 1/4; y_1 = 1/2 \times (-1 - 1/4) = -5/8; y_0 = -2(0 + 5/8) = -5/4.$$

Таким образом, решение краевой задачи с шагом  $h = 1$  имеет вид

$$y = [-1,25; -0,625; 0,25; 0,875; 0,167].$$

## 8.8. ПРИБЛИЖЕННЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ .

В отличие от метода сеток использование данных методов позволяет находить решение задач в аналитической форме. К аналитическим относятся проекционно-вариационные методы. Почти все они являются частными случаями метода моментов (метода Галеркина—Петрова).

Пусть при  $a \leq x \leq b$  задано дифференциальное уравнение

$$F(x, y, y', y'') = 0 \quad (8.56)$$

с граничными условиями

$$l_a(y) \equiv \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A, \quad (8.57)$$

$$l_b(y) \equiv \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B. \quad (8.58)$$

Считаем, что краевая задача (8.56)—(8.58) имеет единственное решение на  $[a, b]$ , и оно непрерывно дифференцируемо до второго порядка включительно.

Зададим две системы функций:

1) система функций  $\{v_k(x)\}$  удовлетворяет условиям:

$$v_k(x) \in C_{[a, b]}; \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Функции  $v_k(x)$  образуют замкнутую на  $[a, b]$  систему;

2) система функций  $\{u_k(x)\}$ , удовлетворяющая условиям:

$$u_k(x) \in C^2_{[a, b]}; \quad k = 0, 1, 2, \dots;$$

при любом конечном  $n$  функции  $u_i(x)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , линейно независимы на  $[a, b]$ ;

функция  $u_0(x)$  удовлетворяет граничным условиям (8.57), (8.58), а функции  $u_k(x)$  удовлетворяют требованиям

$$l_a(u_k) = 0, \quad l_b(u_k) = 0, \quad k = \overline{1, n};$$

функции  $u_k(x)$  образуют в классе функций  $C^2_{[a, b]}$ , удовлетворяющих условиям (8.57), (8.58), полную систему.

Систему функций  $\{v_k(x)\}$  называют замкнутой на множестве интегрируемых на  $[a, b]$  функций, если не существует такой непрерывной функции, кроме тождественного нуля, которая была бы ортогональной на  $[a, b]$  ко всем функциям  $v_k(x)$ . Таким образом, если система функций  $\{v_k(x)\}$  замкнута, то из условия

$$\int_a^b f(x) v_k(x) dx = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где  $f(x)$  — непрерывная на  $[a, b]$  функция, следует, что  $f(x) \equiv 0$ .

Обозначим  $G$  класс функций  $y(x) \in C^2_{[a, b]}$ , удовлетворяющий граничным условиям (8.57), (8.58).

Считаем, что система функций  $\{u_k(x)\}$  полна в классе  $G$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  и любой функции  $y(x) \in G$  можно указать такое  $n$  и такие параметры  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , что

$$|y^{(i)}(x) - y_n^{(i)}(x)| < \varepsilon, \quad i = 0, 1, 2; \\ a \leq x \leq b,$$

где

$$y_n(x) = u_0(x) + \sum_{i=1}^n a_i u_i(x). \quad (8.59)$$

Это означает, что для любой допустимой функции  $y(x) \in G$  найдется такая функция  $y_n(x)$ , которая будет сколь угодно точно приближать функцию  $y(x)$  на  $[a, b]$  вместе с ее производными  $y'(x)$ ,  $y''(x)$ .

Система функций  $\{v_k(x)\}$  называется координатной,  $\{u_k(x)\}$  — проекционной системой.

По методу Галеркина обе системы функций  $\{v_k(x)\}$  и  $\{u_k(x)\}$  совпадают.

Рассмотрим уравнение

$$F(x, y, y', y'') \equiv L(y) - f(x) = 0,$$

где

$$L(y) = \frac{d}{dx}(p(x)y') - q(x)y, \\ p(x) \geq p_0 > 0, \quad p(x) \in C^1[a, b], \quad q(x) \geq 0, \\ a \leq x \leq b, \quad (8.60)$$

с граничными условиями

$$y(a) = A; \quad y(b) = B. \quad (8.61)$$

Подставим (8.59) в уравнение (8.60). Получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^m c_{ki} a_k - d_i = 0, \quad i = \overline{0, m-1}. \quad (8.62)$$

Коэффициенты  $c_{ki}$  и  $d_i$  вычисляются следующим образом. Выберем  $u_k(x)$  так, чтобы

$$\int_a^b [L(u) - f(x)] u_k(x) dx = 0, \quad k = \overline{1, m}.$$

Тогда

$$c_{ki} = \int_a^b [L(u_k(x)) u_i(x) dx, \quad i = \overline{0, m-1}, \quad k = \overline{1, m};$$

$$d_i = \int_a^b [f(x) - L(u_0)] u_i(x) dx, \quad i = \overline{0, m-1}.$$

Для (8.37)

$$L(y) = y'' - p(x)y' - q(x)y.$$

Поэтому

$$c_{ki} = - \int_a^b [p(x) u_k'(x) u_i'(x) + q(x) u_k(x) u_i(x)] dx, \\ k = \overline{1, m}; i = \overline{0, m-1}. \quad (8.63)$$

$$c_{ik} = c_{ki}$$

$$d_i = \int_a^b [p(x) u_0'(x) u_i'(x) + q(x) u_0(x) u_i(x) + f(x) u_i(x)] dx, \\ i = \overline{0, m-1}. \quad (8.64)$$

Система уравнений (8.62) однозначно разрешима. Функцию  $u_0(x)$  можно выбрать линейной:  $u_0(x) = \alpha + \beta x$ , так как  $u_0(a) = A$ ,  $u_0(b) = B$ . Тогда из (8.38) находим

$$\beta = \frac{A\beta_0 - B\alpha_0}{\alpha_0\beta_0(a-b) + \beta_0\alpha_1 - \alpha_0\beta_1}; \quad \alpha = A - a\beta. \quad (8.65)$$

Остальные функции  $u_k(x)$  можно вычислить по одному из правил:

$$u_k(x) = (x-a)^k(x-b), \quad k = \overline{1, m}; \quad (8.66)$$

$$u_k(x) = (x-a)(x-b)^k, \quad k = \overline{1, m}. \quad (8.66')$$

Можно, выбрав  $u_k(x)$  по правилу (8.66), записать выражения для  $u_k'(x) u_i'(x)$  и  $u_k(x) u_i(x)$ :

$$u_k'(x) = (x-a)^{k-1} [(k+1)x - (a+kb)]; \\ u_k'(x) u_0'(x) = \beta u_k'(x); \\ u_k'(x) u_i'(x) = (x-a)^{k+i-2} [e_1 + e_2 x + e_3 x^2]; \quad (8.67)$$

$$e_1 = (a+kb)(a+ib); \\ e_2 = -(i+1)(a+kb) - (k+1)(a+ib);$$

$$e_3 = (k+1)(i-1).$$

$$u_k(x) u_i(x) = (x-a)^{k+i} (x-b)^2. \quad (8.68)$$

Тогда вместо (8.63) получаем

$$c_{k0} = - \int_a^b [p(x) (x-a)^{k-1} \beta [(k+1)x - (a+kb)]] dx - \\ - \int_a^b q(x) (\alpha + \beta x) (x-a)^k (x-b) dx; \quad (8.69)$$

$$c_{ki} = - \int_a^b (x-a)^{k+i-2} [p(x) (e_1 + e_2 x + e_3 x^2) + \\ + q(x) (x-a)^2 (x-b)^2] dx, \quad i = \overline{1, m-1}; k = \overline{1, m}, \quad (8.70)$$

а вместо (8.64) —

$$d_0 = \beta^2 \int_a^b [p(x) + [q(x) (\alpha + \beta x) + f(x)] (\alpha + \beta x)] dx, \quad (8.71)$$

$$d_i = \int_a^b (x-a)^{i-1} [p(x) \beta [(i+1)x - (a+ib)] + \\ + (x-a)(x-b) [(\alpha + \beta x)q(x) + f(x)]] dx, \quad i = \overline{1, m-1}. \quad (8.72)$$

Таким образом, реализация метода Галеркина сводится к вычислению интегралов (8.69) — (8.72) и решению системы линейных уравнений (8.62).

Метод Галеркина используется и для решения нелинейных краевых задач. Действительно, поскольку решение задачи ищется в виде (8.59), то включив все нелинейные члены уравнения в функции  $p(x)$ ,  $q(x)$  и  $f(x)$  (с учетом (8.59)), можно вычислять интегралы (8.69) — (8.72) как функции  $x$ .

**Пример 8.8.** Краевая задача задана в виде

$$y'' + xy' + 5y = 0; \\ y(-1) = 0; \\ y(1) = 0.$$

Будем искать решение этой задачи в виде

$$\hat{y}_2(x) = u_0(x) + a_1 u_1(x) + a_2 u_2(x).$$

Найдем  $\alpha$  и  $\beta$  согласно (8.61):  $A = 0$ ;  $B = -1$ .

$$\beta = 1/2; \quad \alpha = 0 - (-1) \cdot 1/2 = 1/2; \\ u_0(x) = 1/2(x+1); \quad p(x) = x; \quad q(x) = 5; \quad f(x) = 0.$$

Вычислим интегралы (8.69) — (8.72):

$$c_{10} = - \int_{-1}^1 [x^2 + 5/2(x^2 - 1)(x+1)] dx = -1/3; \\ c_{20} = - \int_{-1}^1 [x(x+1) 1/2(3x-1) + 5/2(x^2-1)(x+1)^2] dx = -14/3; \\ c_{11} = - \int_{-1}^1 [x(4x^2 - 0) + 5(x^2 - 1)^2] dx = -4; \\ c_{21} = - \int_{-1}^1 [x(6x^2 - 5x) + 5(x^2 - 1)^2(x+1)] dx = -2; \\ d_0 = 1/4 \int_{-1}^1 [x + 5(x+1)^2] dx = 10/3; \\ d_1 = 1/2 \int_{-1}^1 [x \cdot 2x + 5(x^2 - 1)(x+1)] dx = -8/3.$$

Составляем систему уравнений для вычисления коэффициентов

$$\left. \begin{aligned} a_1 + 14a_2 &= -10; \\ 12a_1 + 6a_2 &= 8. \end{aligned} \right\}$$

Решаем эту систему:

$$a_1 = 86/81; a_2 = -64/81.$$

$$\hat{y}_2(x) = 1/2(x+1) + (x^2-1)/81(22-64x) = 0,23 - 0,55x + 0,27x^2 + 1,05x^3.$$

Программы, реализующие методы прогонки (программа BPORTR) и метод Галеркина (программа CRPGL), представлены в приложении.

### Задания для самостоятельной работы

Решить задачу Коши  $y' = f(x, y)$  с начальными условиями  $y(x_0) = y_0$  на отрезке  $[a, b]$  с точностью  $\Delta$  одним из указанных методов:

$n$	$f(x, y)$	$y(a)$	$[a, b]$	$\Delta$
1	$(2-y)x$	$N$	$N, 2N$	0,005
2	$2x + y^2$	$N/3$	$0, N$	0,01
3	$x - 2y^2$	$-1$	$-N/2, N/2$	0,01
4	$\cos x + y$	$0$	$-N, 0$	0,005
5	$Nx^2 + y^2$	$1,5$	$N/2, 2N/3$	0,003
6	$x + e^y$	$1$	$N, 2N$	0,005
7	$\ln(x+y)$	$1,3$	$0, N$	0,001
8	$\sqrt{2x+y}$	$3/4$	$N, 3N/2$	0,001

Решить краевые задачи методом прогонки и методом ортогональной прогонки. Сравнить полученные решения:  $n = 8; h = (b-a)/n$ .

$m$	Дифференциальное уравнение	Краевые условия
1	$y'' + xy' - (kx+1)y = kx+2$	$(1+N)y(0) + y'(0) = 1; \}$ $ky(4) - 2y'(4) = 3 \}$
2	$y'' + (x+1)y' - Nxy = kx^2+1$	$k/2y(0) + ky'(0) = 3; \}$ $3y(2) - 2y'(2) = 1 \}$
3	$y'' + (kx-1)y' + (x-N)y = x^2$	$y(0) + 2y'(0) = 3; \}$ $k/2y(2) - ky'(2) = 5 \}$
4	$y'' + \frac{x^2+1}{x+k}y = N + \frac{x}{x+k}$	$y(-2) + 2y'(-2) = 0; \}$ $k/2y(2) + y'(2) = k/2 \}$

## Глава 9. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим для случая неизвестной функции от одного аргумента идеи методов численного решения интегральных уравнений. Эти уравнения в общем виде можно записать в виде

$$F(x, u(x), z) = 0, \quad (9.1)$$

где  $u(x)$  — искомая функция, а

$$z = \int_a^b f(x, t, u(t)) dt \quad (9.2)$$

или

$$z = \int_a^x f(x, t, u(t)) dt. \quad (9.3)$$

Формально интеграл (9.3) является частным случаем (9.2), когда  $f(x, t, u) \equiv 0$  при  $t > x$  и любом  $u(t)$ . Но теория уравнений с интегралом (9.2) и (9.3) принципиально различны.

Уравнения, содержащие интегралы (9.2), называются *уравнениями типа Фредгольма*.

Уравнения с интегралами вида (9.3) называются *уравнениями типа Вольтерра*.

Ограничимся линейными уравнениями. Линейные уравнения Фредгольма имеют вид:

$$A(x)u(x) + \int_a^b K(x, t)u(t) dt = F(x). \quad (9.4)$$

Уравнения Вольтерра —

$$A(x)u(x) + \int_a^x K(x, t)u(t) dt = F(x). \quad (9.5)$$

Когда коэффициент  $A(x) = 0$ , уравнения называются уравнениями первого рода. Когда  $A(x) \neq 0$  всюду на  $[a, b]$ , уравнения (9.4) и (9.5) называются уравнениями Фредгольма и Вольтерра второго рода. Уравнения второго рода могут быть приведены к каноническому виду

$$u(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)u(t) dt = f(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (9.6)$$

и

$$u(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)u(t) dt = f(x), \quad a \leq x \leq b. \quad (9.7)$$

Функции  $f(x)$  и  $K(x, t)$  предполагаются непрерывными в области, соответственно  $a \leq x \leq b$ ;  $a \leq t, x \leq b$ ; для уравнения (9.7) и  $a \leq x \leq b$ ;  $a \leq x \leq b$  — для (9.6).

Функции  $K(x, t)$  называются ядрами уравнений.

В дальнейшем будем рассматривать только уравнения второго рода (9.6) и (9.7), так как для уравнений первого рода

$$\int_a^b K(x, t)u(t) dt = F(x) \quad (9.8)$$

задача является некорректной.

По существу (9.8) дает интегральное преобразование  $u(t)$  в  $F(x)$  с ядром  $K(x, t)$ . Может оказаться, что множество  $\Phi(x)$  изображений  $F(x)$  составляет только часть множества  $\Psi$ , в которое отображается множество  $U$  функций  $u(t)$ . В эту часть  $F(x)$  может и не попасть и уравнение (9.8) не будет иметь решения.

## 9.1. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА ВТОРОГО РОДА

$$u(x) + \int_a^x K(x, t) u(t) dt = f(x). \quad (9.7)$$

Построим для этого уравнения сетку с шагом  $h$ :

$$x_i = a + ih; \quad i = \overline{0, N}; \quad a + Nh \leq b < a + (N + 1)h.$$

Положим в уравнении (9.7)  $x = x_i$  и рассмотрим систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} u(x_0) &= f(a); \\ u(x_i) &= \int_a^{x_i} K(x_i, t) u(t) dt = f(x_i), \quad i = \overline{1, N}. \end{aligned} \right\} \quad (9.9)$$

Пусть для вычисления интеграла в (9.9) выбрана квадратурная формула с узлами в точках  $x_0, x_1, \dots, x_i$ :

$$\int_a^{x_i} K(x_i, t) u(t) dt = h \sum_{j=0}^i A_{ij} K_{ij} u(x_j) + r_i, \quad (9.10)$$

где  $K_{ij} = K(x_i, x_j)$ ,  $r_i$  — остаток квадратурного правила.

Подставив (9.10) в (9.9), получим систему

$$\left. \begin{aligned} u(x_0) &= f_0; \\ u(x_i) + h \sum_{j=0}^i A_{ij} K_{ij} u(x_j) + r_i &= f_i, \quad i = \overline{1, N}. \end{aligned} \right\} \quad (9.11)$$

Решая (9.11) относительно  $u(x_i) = u_i$ , найдем значения  $u_i$ .

Поскольку вычисления при решении системы (9.11) проводятся с погрешностями, то вместо (9.11) получаем

$$u_i + h \sum_{j=0}^i A_{ij} K_{ij} u_j = f_i + \delta_i, \quad i = \overline{1, N}, \quad (9.12)$$

где  $\delta_i$  — погрешность вычислений.

Обозначим

$$\varepsilon_i = u_i - u(x_i), \quad i = 0, 1, \dots$$

Вычтем из (9.12) уравнение (9.11):

$$\varepsilon_i + h \sum_{j=0}^i A_{ij} K_{ij} \varepsilon_j = r_i + \delta_i, \quad i = \overline{1, N}.$$

Обозначим  $A = \max_{i,j} |A_{ij}|$ ;  $K = \max_{(x,t)} |K(x, t)|$ .

Предположим, что при всех достаточно малых  $h$  выполняется неравенство

$$h |A_{ii} K_{ii}| \leq q < 1, \quad i = \overline{1, N}.$$

Тогда можно получить следующую оценку погрешности

$$|\varepsilon_i| \leq \frac{1}{1-q} e^{(b-a)AK/(1-q)} [r + \delta + AK|\varepsilon_0| h], \quad (9.13)$$

где  $|r_i| \leq r = r(h)$ ;  $|\delta_i| \leq \delta = \delta(h)$ .

Полученная оценка позволяет судить о сходимости приближенного решения  $u_i$  к точному решению  $u(x)$ .

Рассмотрим частные случаи квадратурной формулы (9.10):

$$k = 1; \\ \int_a^{a+h} K(x, t) u(t) dt = h \sum_{i=0}^1 A_{ki} K_{1i} u(x_i) + r_k.$$

Эта формула точна для линейных функций при  $A_{10} = A_{11} = 1/2$  — формула трапеций.

$$r_1 = -1/12 h^3 \left[ \frac{\partial^2 (K(x, t) u(t))}{\partial t^2} \right]_{t=\eta}; \quad a \leq \eta \leq a + h.$$

Используя формулу

$$\int_a^{a+h} K(x, t) u(t) dt = h/2 [K_{10} u(a) + K_{11} u(a+h)] + r_1, \quad (9.14)$$

получаем  $u_1 = u(a+h)$ .

Для вычисления  $u_2$  положим в (9.10)  $k = 2$ .

Наивысшая степень алгебраической точности, которую можно достичь с помощью выбора коэффициентов  $A_{20}$ ,  $A_{21}$ ,  $A_{22}$ , соответствует трем при  $A_{20} = 1/3$ ,  $A_{22} = 1/3$ ;  $A_{21} = 4/3$ :

$$\int_a^{a+2h} K(x_2, t) u(t) dt = h/3 [K_{20} u(a) + 4K_{21} u(a+h) + K_{22} u(a+2h)] + r_2; \quad (9.15) \\ r_2 = -h^5/90 \left[ \frac{\partial^4 (K(x, t) u(t))}{\partial t^4} \right]_{t=\eta}, \quad a \leq \eta \leq a + 2h.$$

Это — формула парабол. Используя (9.15), находим  $u_2$  и т. д.

## 9.2. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА ВТОРОГО РОДА. МЕТОД КВАДРАТУР

Запишем уравнение (9.6) в виде

$$u(x) = \lambda \int_a^b K(x, t) u(t) dt + f(x). \quad (9.16)$$

На отрезке  $[a, b]$  возьмем произвольно  $n$  точек  $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b$ .

Применим какое-либо правило приближенного интегрирования уравнения (9.16).

Интеграл в (9.16) зависит от  $x$  как от параметра, поэтому коэффициенты квадратурной формулы будут зависеть от  $x$ .

$$\int_a^b K(x, t) u(t) dt = \sum_{k=1}^n c_k(x) u(x_k) + \rho(x). \quad (9.17)$$

Подставив (9.17) в (9.16) и положив последовательно  $x = x_1, x_2, \dots, x_n$ , получим для точных значений  $u(x)$  систему уравнений

$$u(x_i) = f_i + \lambda \sum_{j=1}^n c_j(x_i) u(x_j) + \lambda \rho(x_i), \quad i = \overline{1, n}. \quad (9.18)$$

С учетом погрешностей вычислений вместо (9.18) получаем:

$$u_i - \lambda \sum_{j=1}^n c_j(x_i) u_j = f_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (9.19)$$

Определитель системы имеет вид

$$\Delta(\lambda) = \|E - \lambda C\|. \quad (9.20)$$

Если  $\lambda$  не является собственным значением задачи (9.16), то  $\Delta(\lambda) \neq 0$  и уравнение (9.16) имеет единственное решение. Это условие необходимо проверить.

Выберем для (9.16), например, квадратурную формулу Симпсона

$$\int_a^b K(x, t) u(t) dt = h/3 \{c_{i0} + c_{in} + 2 \sum_{j=1}^{n/2} (2c_{i, 2j} + c_{i, 2j-1})\} + S(c_i);$$

$$c_{ij} = K(x_i, x_j) u(x_j), \quad i = \overline{0, n}.$$

*Теорема.* Пусть уравнение (9.16) решается с использованием формулы Симпсона, причем:

1.

$$y = (b - a) \max_{a < x, t < b} |K(x, t)| < 1.$$

2. Функции  $f(x)$  четырежды непрерывно дифференцируемы, ядро  $K(x, t)$  — четырежды непрерывно дифференцируемо по каждому из аргументов.

Тогда наблюдается сходимость приближенных решений и справедлива оценка

$$\|u_n - u^*\| \leq \frac{(b-a)^5}{1-y} \frac{M}{180n^4} + \frac{(b-a)^2}{8n^2} M_2 [u^*],$$

где

$$M_2 [u^*] = \max_{a < t < b} \left| \frac{d^2 u^*(t)}{dt^2} \right|,$$

и процесс нахождения приближенных решений устойчив.

*Вычислительная схема* метода квадратур. 1. Делим отрезок интегрирования  $[a, b]$  на  $n$  частей с шагом  $h$ .

2. Вычисляем в точках  $x_i = a + ih, i = \overline{0, n}$  значения функции  $f(x_i)$  и ядра  $K(x_i, t)$ :

$$c_{ij} = K(x_i, x_j) u_i.$$

3. Составляем систему уравнений для определения  $u_1, u_2, \dots, u_n$

$$u_i - \lambda h/3 [K_{i0}u_0 + K_{in}u_n + 2 \sum_{j=1}^{n/2} (2K_{i2j-1}u_{2j-1} + K_{i,2j}u_{2j})] = f_i, \\ i = \overline{0, n}.$$

4. Решаем систему линейных уравнений методом Гаусса по схеме Халецкого.

Пример 9.1. Решим методом квадратур следующее уравнение:

$$u(x) = 0,75x - 0,2 + 0,25 \int_0^{0,8} (3xt^2 + 2t) u(t) dt.$$

Задаем  $h$  и  $n$ :  $h=0,2$ ;  $n=4$ .

Вычислим  $f(x_i)$ ,  $i = \overline{1, 5}$ ;  $f(x) = 0,75x - 0,2$ .

$$f = [-0,2; -0,05; 0,1; 0,25; 0,4]^T$$

Вычисляем  $K(x_j, x_i)$ :

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0,4 & -0,8 & 1,2 & 1,6 \\ 0 & 0,424 & 0,896 & 1,356 & 1,984 \\ 0 & 0,448 & 0,992 & 1,512 & 2,368 \\ 0 & 0,472 & 1,088 & 1,668 & 2,752 \\ 0 & 0,496 & 1,184 & 1,824 & 3,136 \end{bmatrix}.$$

Составляем систему уравнений для нахождения  $u_i$ ,  $i = \overline{1, 5}$ :

$$u_i - \lambda h/3 [K_{i1}u_1 + K_{i5}u_5 + 2 \sum_{j=1}^2 (2K_{i,2j-1}u_{2j-1} + K_{i,2j}u_{2j})] = f_i; \\ i = \overline{1, 5}.$$

$$Au = d.$$

$$\begin{bmatrix} -30 & 3,2 & 3,2 & 9,6 & 3,2 \\ 0 & -256 & 35,8 & 108,5 & 39,7 \\ 0 & 35,8 & -262 & 121 & 47,3 \\ 0 & 37,8 & 43,5 & -166,6 & 55 \\ 0 & 397 & 4,74 & 14,6 & -23,73 \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \\ -30 \\ -75 \\ -12 \end{bmatrix}.$$

Решаем систему линейных уравнений методом Гаусса по схеме Халецкого:

		$b_{ij}$					
		-30	-0,11	-0,11	-0,32	-0,21	-0,2
0		-256	-0,14	-0,424	-0,155	-0,06	
$c_{ij}$	0	35,8	-257	-0,53	-0,206	0,108	
	0	37,8	48,8	-124,7	-0,568	0,569	$y_i$
	0	367	60,3	215	169,4	-0,679	
-0,182		-0,078	0,065	0,183	-0,679		
		$\leftarrow u_i$					

Получаем:  $u_0 = -0,2$ ;  $u_1 = -0,182$ ;  $u_2 = -0,078$ ;  $u_3 = 0,065$ ;  $u_4 = 0,183$ ;  $u_5 = -0,679$ .

В приложении приведена программа, реализующая метод квадратур (программа INEF).

### Задания для самостоятельной работы

Методом квадратур решить уравнение

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) u(t) dt.$$

$N$	$f(x)$	$K(x, t)$	$\lambda$	$a$	$b$	$h_1$	$h_2$
1	$x^2/3 - 5$	$x^2t/5 + 3t^2$	0,3	0	1	0,1	0,2
2	$\ln x + 2x$	$8x\sqrt{t} + 4t^3$	0,2	0	2	0,2	0,4
3	$\sin x + x^2$	$x^2t^2 + t/4$	0,25	0	2	0,2	0,4
4	$e^{-x} + 2x$	$x^3\sqrt{t} + t^2$	0,2	0	1	0,1	0,2
5	$\sqrt{x/3} + 1$	$x^2t/4 + 1/(t^2 + 1)$	0,3	0	2	0,2	0,4
6	$x^3/2 - 4$	$(x^2 - 3t^2)t$	0,4	1	3	0,2	0,4
7	$x^2 + 2$	$x^2\sqrt{t} - 2t^2$	0,2	1	3	0,2	0,4
8	$\sin x + x^2$	$te^{-x} + x^2$	0,2	0	1	0,1	0,2
9	$\sqrt{x/2} + x$	$\sqrt{xt} + t^2$	0,4	0	1	0,1	0,2
10	$x + 2$	$\sin x + t^2$	0,3	1	3	0,2	0,4
11	$x^2 + 1/2$	$x^3t - 3\sqrt{t}$	0,25	1	3	0,2	0,4
12	$x + 4$	$x^2\sqrt{t} + e^{-x}$	0,2	0	2	0,2	0,4
13	$2\sqrt{x^3} + 1$	$\cos 2x - t^2$	0,25	0	2	0,2	0,4
14	$\cos x - x$	$e^{-t-x} + 2x$	0,4	0	1	0,1	0,2
15	$\sin(x+1) + x$	$\ln(tx) + t^2$	0,3	1	3	0,2	0,4
16	$2\ln x + 1$	$x^2t^2 - 3\sqrt{x}$	0,25	1	2	0,1	0,2
17	$\sqrt{x} + 2x$	$\sin(xt + \pi/2)$	0,25	1	2	0,1	0,2
18	$x^2 + 1/2$	$\cos(x+t) + x/2$	0,2	0	1	0,1	0,2
19	$\operatorname{tg} x + 1$	$\operatorname{tg}(x+t) + t^2$	0,2	0	2	0,2	0,4
20	$2x^2 - 1$	$\cos(t^2) + x^2$	0,25	0	2	0,2	0,4

## Глава 10. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ НАХОЖДЕНИЯ ЭКСТРЕМУМА ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Пусть функция  $f(x)$ ,  $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]$  определена в  $n$ -мерной области  $G \subset R^n$ . Точкой относительного минимума функции  $f(x)$  называется внутренняя точка  $x^* \in G$ , в которой  $f(x^*) \leq f(x)$ , т. е. существует  $\rho > 0$  такое, что

$$f(x^*) \leq f(x)$$

при условии, что  $\|x - x^*\| < \rho$ . Если переменные  $x_1, x_2, \dots, x_n$  связаны дополнительными условиями вида  $\varphi_i(x) = 0, i = \overline{1, m}$ , то точка  $x^*$  называется точкой условного экстремума  $f(x)$ .

Рассмотрим задачу нахождения точек относительного экстремума (минимума).

Пусть  $M(x^*)$  — точка относительного минимума функции и в некоторой ее окрестности существуют производные  $\partial f(x)/\partial x_i, i = \overline{1, n}$ , и пусть  $M_0(x^0)$  — некоторая точка, достаточно близкая к точке  $M$ .

Обозначим через  $x_i = x_i(t), i = \overline{1, n}$ , параметрическое уравнение траектории, проходящей в момент  $t = 0$  через точку  $x^0$ , вдоль которой при увеличении  $t$  функция  $f(x(t))$  убывает и притом наиболее быстро. Тогда, поскольку вектор

$$\text{grad } f = \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right]^T$$

направлен в сторону наиболее сильного возрастания функции  $f(x)$ , можно записать:

$$\frac{dx}{dt} = -\text{grad } f(x). \quad (10.1)$$

Отсюда следует, что траектория  $x = x(t)$  наиболее быстрого изменения функции  $f(x)$  ортогональна к соответствующим поверхностям уровня  $f(x) = \text{const}$ .

В скалярной форме (10.1) имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -\frac{\partial f}{\partial x_1}; \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{dx_n}{dt} &= -\frac{\partial f}{\partial x_n}. \end{aligned} \right\} \quad (10.2)$$

Система уравнений (10.2) — система  $n$  обыкновенных дифференциальных уравнений с  $n$  неизвестными функциями  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ .

Для отыскания ее частного решения дополним ее начальными условиями

$$x_i(0) = x_{i0}, i = \overline{1, n}. \quad (10.3)$$

Задача (10.2), (10.3) — задача Коши.

Практически эту задачу решают приближенно, аппроксимируя  $dx_i/dt$  по формуле Эйлера:

$$x_i^{j+1} = x_i^j - h \frac{\partial f_j}{\partial x_i}, i = \overline{1, n}, \quad (10.4)$$

где

$$f_j = f(x_1^j, x_2^j, \dots, x_n^j); x_i^j = x_i(t_j), t_j = jh.$$

Шаг  $h$  выбирают из условия  $f_{j+1} < f_j$ .

Таким образом, если точка  $x^j$  уже найдена, то, вычислив  $\partial f_j / \partial x_1, \dots, \partial f_j / \partial x_n$ , по (10.4) можно найти точку  $x^{j+1}$  с меньшим значением функции  $f(x)$ .

Рассмотрим некоторые приближенные методы нахождения точек экстремума функции  $f(x)$ , не требующих решения системы уравнений (10.2).

Для решения задачи построим итерационный процесс

$$x^{j+1} = x^j + \alpha^j p^j, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad (10.5)$$

где  $p^j$  — вектор, определяющий направление движения из точки  $x^j$ ,  $\alpha^j$  — числовой множитель, величина которого определяет длину шага в направлении  $p^j$ .

Процесс (10.5) можно определить, если будут указаны способы построения вектора  $p^j$  и вычисления величины  $\alpha^j$  на каждой итерации.

Для приближения к точке  $x^*$  необходимо двигаться из точки  $x^j$  в направлении убывания функции, т. е. в направлении спуска. При этом вектор  $p^j$  должен удовлетворять условию

$$(f'(x^j), p^j) < 0.$$

#### 10.1. МЕТОД НАИСКОРЕЙШЕГО СПУСКА

Полагая  $p^j = -f'(x^j)$ , получаем итерационный процесс

$$x^{j+1} = x^j - \alpha^j f'(x^j), \quad \alpha^j > 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots. \quad (10.6)$$

В координатной форме процесс (10.6) записывается в виде

$$x_i^{j+1} = x_i^j - \alpha^j \frac{\partial f(x^j)}{\partial x_i}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (10.6')$$

Для реализации процесса (10.6) необходимо выбрать начальное приближение  $x^0$  и параметр  $\alpha^0$ .

Параметр  $\alpha^0$  выбираем следующим образом.

Для произвольного значения  $\alpha$  определяем точку

$$x^1 = x^0 - \alpha f'(x^0).$$

Далее проверяем неравенство

$$f(x^1) - f(x^0) \leq -\varepsilon \alpha \|f'(x^0)\|^2, \quad (10.7)$$

где  $0 < \varepsilon < 1$  — произвольно выбранная постоянная, одна и та же при всех  $j = 0, 1, \dots$ .

Если (10.7) выполняется, то  $\alpha^j = \alpha$ . Если оно не выполняется, то дробим  $\alpha$  до тех пор, пока неравенство (10.7) не окажется справедливым.

Обоснование такого способа выбора  $\alpha$  дается теоремой:

Если функция  $f(x)$  ограничена снизу,  $\text{grad } f(x)$  удовлетворяет условию Липшица

$$\|f'(x) - f'(y)\| \leq q \|x - y\| \quad (10.8)$$

при любых  $x, y \in R^n$ , а выбор значения  $\alpha^j$  производится по описанному способу, то для процесса (10.6) будет  $\|f'(x^j)\| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$ , какова бы ни была начальная точка.

Условие (10.7) выполняется при  $\alpha \leq (1 - \varepsilon)/q$ .

Таким образом, если (10.7) выполняется, то определив  $q$  из (10.8), можно выбирать  $\alpha = (1 - \varepsilon)/q$ .

Описанный выбор шага  $\alpha$  характеризует градиентный метод спуска.

Если выбирать  $\alpha^j$  из условия минимума функции в направлении движения, т. е. выбранное значение  $\alpha^j$  должно обеспечивать выполнение условия

$$\min_{\alpha > 0} \Phi_j(\alpha) \equiv f(x^j - \alpha f'(x^j)) = \min_{\alpha > 0} f(x^j - \alpha f'(x^j)),$$

то градиентный метод поиска экстремума называется методом наименьшего спуска.

Условие для определения  $\alpha^j$  должно иметь вид

$$\min_{\alpha > 0} f(x^j - \alpha f'(x^j)) = \frac{d\Phi_j(\alpha)}{d\alpha} = 0. \quad (10.9)$$

В частности, если

$$f(x) = (Ax, x) - 2(b, x) -$$

квадратичная форма, соответствующая системе нелинейных уравнений с матрицей  $A$ , то

$$f'(x) = 2(Ax - b); \quad x^{j+1} = x^j - \alpha^j (Ax^j - b);$$

$$\frac{d\Phi_j(\alpha)}{d\alpha^j} = 2 \left( Ax^{j+1} - b, \frac{dx^{j+1}}{d\alpha^j} \right) = -2(Ax^{j+1} - b, Ax^j - b) = 0.$$

Отсюда

$$\alpha^j = \frac{(Ax^j - b, Ax^j - b)}{A(Ax^j - b, Ax^j - b)},$$

где  $(a, b) = \sum_{i=1}^n a_i b_i$  — скалярное произведение векторов  $a, b$ .

В общем случае решается уравнение

$$\frac{d\Phi_j(\alpha)}{d\alpha^j} = 0.$$

В качестве  $\alpha^j$  выбирается минимальное положительное действительное значение корня этого уравнения.

## 10.2. ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД НЬЮТОНА

В градиентных методах для определения направления движения используется лишь линейный член из разложения функции в ряд Тейлора, т. е. используется наиболее грубая аппроксимация минимизируемой функции.

Пусть функция  $f(x)$  является строго выпуклой и достаточно гладкой.

Рассмотрим функцию

$$\psi(x) = f'(y) + (f'(y), x - y) + 1/2 (f''(y)(x - y), (x - y)),$$

которая представляет собой уже квадратичную аппроксимацию  $f(x)$  в окрестности некоторой точки  $y$ .

Вектор  $p$ , минимизирующий функцию  $\psi(x)$ , находим по формуле

$$p = - [f''(y)]^{-1} f'(y). \quad (10.1)$$

Направление, определяемое вектором  $p$ , является направлением спуска  $f(x)$ , так как

$$(f'(y), p) = - (f''(y) p, p) < 0$$

в силу выпуклости  $f(x)$ .

Итерационный процесс для построения последовательных приближений к решению задачи минимизации  $f(x)$  имеет вид:

$$x^{k+1} = x^k - \alpha^k (f''_k)^{-1} f'_k, \quad \alpha^k > 0, \quad k = 0, 1, \dots \quad (10.11)$$

Метод (10.11) называется обобщенным методом Ньютона. Обычный метод Ньютона соответствует случаю  $\alpha^k = 1$ .

Обозначив  $(f''_k)^{-1} = [\varphi_{ij}(x^k)]_1^n$ , запишем (10.11) в координатной форме

$$x_i^{k+1} = x_i^k - \alpha^k \sum_{j=1}^n \varphi_{ij} \frac{\partial f(x^k)}{\partial x_j}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Представим (10.11) в виде

$$x^{k+1} = x^k + \alpha^k p^k; \quad f''(x^k) p^k = - f'(x^k), \quad (10.12)$$

или в координатной форме

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f(x^k)}{\partial x_i \partial x_j} p_j^k = - \frac{\partial f(x^k)}{\partial x_i}, \quad i = \overline{1, n};$$

$$x_i^{k+1} = x_i^k + \alpha^k p_i^k, \quad i = \overline{1, n}. \quad (10.13)$$

Следовательно, для определения вектора  $p^k$  можно не обращать матрицу  $f''(x^k)$ , а решать систему линейных уравнений (10.13).

Выбирать параметр  $\alpha$  будем следующим образом:

- 1) полагаем  $\alpha = 1$  и вычисляем точку  $x = x^k + \alpha p^k$ ;
- 2) вычисляем  $f(x) = f(x^k + \alpha p^k)$ ;
- 3) проверяем неравенство

$$f(x) - f(x^k) \leq \varepsilon \alpha (f'_k, p^k), \quad 0 < \varepsilon < 1/2. \quad (10.14)$$

4) если (10.14) выполняется, то  $\alpha = 1$ , иначе производим дробление  $\alpha$  до тех пор, пока неравенство не выполнится.

Значение  $\alpha^k$  можно выбирать и из условия

$$f(x^k + \alpha^k p^k) = \min_{\alpha > 0} f(x^k + \alpha p^k), \quad (10.15)$$

т. е. из уравнения

$$\frac{d\Phi_k(\alpha)}{d\alpha} = 0.$$

Основную сложность при реализации метода Ньютона представляет собой вычисление матрицы вторых производных функции  $f(x)$ .

### 10.3. МЕТОД НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ МНОЖИТЕЛЕЙ ЛАГРАНЖА

Пусть необходимо найти вектор  $x$ , доставляющий экстремальное значение целевой функции  $f(x)$  и удовлетворяющий системе ограничений в форме равенства

$$g(x) = 0, \quad (10.16)$$

где  $g = [g_1, g_2, \dots, g_m]^T$ .

Сформируем функцию Лагранжа  $H(x)$ :

$$H(x, \lambda) = f(x) - \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x), \quad (10.17)$$

где  $\lambda_i, i = \overline{1, m}$  — неопределенные множители Лагранжа.

Теперь исходная задача отыскания условного экстремума функции  $f(x)$  с условиями (10.16) заменяется задачей отыскания безусловного экстремума функции Лагранжа  $H(x, \lambda)$ , которая может быть решена описанными ранее методами.

Действительно, получаем систему из  $n + m$  дифференциальных уравнений с  $n + m$  неизвестными:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H(x, \lambda)}{\partial x_i} &= \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial g_j(x)}{\partial x_i} = 0, \quad i = \overline{1, n}; \\ \frac{\partial H(x, \lambda)}{\partial \lambda_k} &= -g_k(x) = 0, \quad k = \overline{1, m}. \end{aligned} \right\} \quad (10.18)$$

Пусть область  $S$  состоит из всех  $x$ , для которых выполняются ограничения (10.27). Тогда для любого  $x \in S$

$$H(x, \lambda) = f(x). \quad (10.19)$$

С другой стороны, экстремальная точка функции Лагранжа  $x^* \in S$ , так как соотношения (10.16) входят в (10.18). Отсюда, с учетом (10.19) получаем требуемое: экстремальная точка функции Лагранжа  $H(x, \lambda)$ , найденная в результате решения системы уравнений (10.18), определяет набор  $\{\lambda_i^0\}$ , удовлетворяющий ограничениям (10.16) и доставляющий экстремальное значение целевой функции  $f(x)$ .

Метод неопределенных множителей Лагранжа может быть реализован, если количество ограничений не велико и их представление позволяет решить систему уравнений (10.18). В противном случае этот метод может быть реализован в сочетании с градиентным.

**Вычислительные схемы. Метод наискорейшего спуска.** 1. Выбираем начальное приближение  $x^0$  и начальное значение параметра  $\alpha$ .

$$2. \text{ Вычисляем } f(x^0) = y_0 \text{ и } f'(x^0) = \left[ \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i} \right]_1^n.$$

$$3. \text{ Вычисляем } x_i^1 = x_i^0 - \alpha f'_i(x^0) \text{ и } f(x^1).$$

4. Проверяем выполнение неравенства

$$f(x^1) - f(x^0) \leq -\varepsilon \alpha \|f'(x^0)\|^2.$$

5. Если это неравенство не выполняется, то дробим  $\alpha$  путем умножения на  $\lambda < 1$  до тех пор, пока неравенство не выполнится, повторяя пп. 3 и 4.

6. Формируем функцию

$$\Phi_k(\alpha) = f(x^k - \alpha f'(x^k)), \quad k = 1, 2, \dots$$

и вычисляем производную от  $\Phi_k(\alpha)$  по  $\alpha$

$$\frac{d\Phi_k(\alpha)}{d\alpha} = 0.$$

7. Решаем последнее уравнение относительно  $\alpha$  и в качестве  $\alpha^k$  выбираем минимальное положительное действительное значение корня.

8. Реализуем итерационный процесс

$$x_i^{k+1} = x_i^k - \alpha^k \frac{\partial f(x^k)}{\partial x_i}, \quad i = \overline{1, n}.$$

9. Если  $\alpha^k \|p^k\|^2 \leq \Delta$ , то принимаем  $x^* = x^{k+1}$  за точку относительно минимума  $f(x)$ .

Если неравенство не выполняется, то повторяем пп. 6, 7, 8 для вычисления  $k$ -х итераций.

**Обобщенный метод Ньютона.** 1. Выбираем начальное приближение  $x^0$  и параметра  $\alpha^0 = 1$ .

$$2. \text{ Вычисляем матрицу } F = \left[ \frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_i \partial x_j} \right]_1^n \text{ и } d_i = \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i}, \quad i = \overline{1, n}.$$

3. Решаем систему линейных уравнений

$$Fp^0 = -d.$$

$$4. \text{ Вычисляем точку } x = x^0 + \alpha p^0.$$

$$5. \text{ Вычисляем } f(x) \text{ и } f(x^0).$$

6. Проверяем выполнение неравенства

$$f(x) - f(x^0) \leq -\varepsilon \alpha \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i} p_i^0, \quad (10.20)$$

где  $0 < \varepsilon < 1/2$ .

7. Если неравенство (10.20) не выполняется, то производим дробление  $\alpha$  умножением на  $\lambda < 1$  до тех пор, пока неравенство не выполнится.

8. Формируем функцию

$$\Phi_k(\alpha) = f(x^k + \alpha^k p^k).$$

9. Решаем уравнение  $d\Phi_k(\alpha)/d\alpha = 0$  относительно  $\alpha$  и в качестве  $\alpha^k$  выбираем минимальное действительное положительное значение  $\alpha_l$ .

10. Реализуем итерационный процесс

$$x^{k+1} = x^k + \alpha^k p^k.$$

11. Если  $\|p^k\|^2 < \varepsilon/\alpha^k$ , то значение  $x^* = x^{k+1}$  считаем с точностью  $\varepsilon$  за точку относительного экстремума, если неравенство не выполняется, то повторяем пп. 2, 3, 4, 8, 9, 10.

Для определенности будем рассматривать алгебраическую функцию трех переменных вида

$$f(x) = a_1 + a_5 x_1 x_2 x_3 + \sum_{i=1}^3 \{a_{i+1} + d_{i, 4} x_1 x_2 x_3 + \\ + \sum_{j=1}^3 x_j [b_{ij} + (c_{ij} + (d_{ij} + e_{ij} x_i x_j) x_i) x_i]\} x_i. \quad (10.21)$$

Тогда производные  $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$  имеют вид

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_k} = a_{k+1} + \left( a_5 + d_{k, 4} x_k + \sum_{i=1}^3 d_{i, 4} x_i \right) \prod_{i \neq k} x_i + \\ + b_{k, k} x_k + \sum_{i=1}^3 \{ [b_{k, i} + (c_{i, k} + 2d_{i, k} x_k) x_i + (2c_{k, i} + 3d_{k, i} x_k) x_k + \\ + d_{i, k} x_i^2 + 2(2e_{k, i} x_k^2 + e_{i, k} x_i^2) x_k x_i] x_i \}. \quad (10.23)$$

Вычислим и вторые производные, которые нам понадобятся для реализации метода Ньютона

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_k^2} = 2 \{ b_{k, k} + (2c_{k, k} + 3d_{k, k} x_k) x_k + 8e_{k, k} x_k^4 + \\ + d_{4, k} \prod_{j \neq k} x_j + \sum_{i \neq k} d_{i, 4} x_i^2 + \sum_{i=1}^3 (c_{i, k} + 3d_{k, i} x_k + \\ + (6e_{k, i} x_k^2 + e_{i, k} x_i^2) x_i) x_i \}; \quad k = \overline{1, 3}; \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_k \partial x_l} = b_{k, l} + 2(c_{k, l} x_k + c_{l, k} x_l) + 3(d_{k, l} x_k^2 + d_{l, k} x_l^2) + \\ + 4d_{l, 4} x_k x_l + x_n (a_5 + 2 \sum_{i=1}^3 d_{4, i} x_i - d_{4, n} x_n) + 8e_{k, l} x_k^2 + e_{l, k} x_k^2 x_l x_k; \\ k \neq l, \quad l = \overline{1, 3}; \quad n = \overline{1, 3}; \quad n \neq k, \quad n \neq l.$$

Согласно вычислительной схеме метода наискорейшего спуска необходимо сформировать функцию

$$f(x^k - \alpha p^k) = f(x^k - \alpha f'(x^k)) = \sum_{j=1}^N g_j (-1)^{j-1} \alpha^{j-1}.$$

Коэффициенты  $g_j$ ,  $j = \overline{1, N}$ , где  $N$  — наивысшая степень аргументов  $x_i$  в функции  $f(x)$ , вычисляются по следующему алгоритму.

Для  $i, j = \overline{1, 3}$  имеем

$$\begin{aligned} r_1 &= x_i x_j; & r_2 &= \varphi_j x_i + \varphi_i x_j; & r_3 &= \varphi_i \varphi_j; \\ (x_i - \alpha \varphi_i)(x_j - \alpha \varphi_j) &= r_1 - \alpha r_2 + \alpha^2 r_3; \\ \prod_{i=1}^3 (x_i - \alpha \varphi_i) &= q_1 - \alpha q_2 + \alpha^2 q_3 - \alpha^3 q_4; \\ q_1 &= x_1 x_2 x_3; & q_2 &= x_2 (x_3 \varphi_1 + x_1 \varphi_3) + x_1 x_3 \varphi_2; \\ q_3 &= \varphi_2 (\varphi_1 x_3 + \varphi_3 x_1) + \varphi_1 \varphi_3 x_2; & q_4 &= \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3. \end{aligned}$$

Далее

$$c_{i,j} + (d_{i,j} + e_{i,j} x_i x_j) x_i = \sum_{i=1}^4 s_i (-1)^{i-1} \alpha^{i-1};$$

где  $s_1 = r_4 x_i + c_{i,j}$ ;  $s_{m+2} = \varphi_i r_{m+4} + x_i r_{m+5}$ ;  $m = \overline{1, 2}$ ;  $s_4 = r_6 \varphi_i$ ;

$$r_4 = d_{i,j} + e_{i,j} r_1; \quad r_5 = r_2 e_{i,j}; \quad r_6 = r_3 e_{i,j}.$$

$$\sum_{i=1}^3 x_j [b_{i,j} + (c_{i,j} + (d_{i,j} + e_{i,j} x_i x_j) x_i) x_i] = \sum_{i=1}^6 v_i (-1)^{i-1} \alpha^{i-1};$$

$$u_1 = s_1 x_1 + b_{i,j}; \quad u_{m+1} = \varphi_i s_{m+1} + x_i s_m; \quad m = \overline{1, 3};$$

$$u_5 = s_4 \varphi_i; \quad v_1 = u_1 x_j; \quad v_{m+1} = \varphi_j u_m + x_j u_{m+1};$$

$$m = \overline{1, 4}; \quad v_6 = u_5 \varphi_j; \quad s_m = a_{i+1} + q_m d_{i,4} + v_m; \quad m = \overline{1, 4};$$

$$s_5 = v_5; \quad s_6 = v_6.$$

Наконец,

$$\sum [a_{i+1} + d_{i,4} x_1 x_2 x_3 + \sum_{j=1}^6 v_j (-1)^{j-1} \alpha^{j-1}] = \sum_{j=1}^6 s_i (-1)^j \alpha^{j-1};$$

$$g_1 = a_1 + a_5 g_1 + s_1 x_i; \quad g_7 = s_6 \varphi_i; \quad (10.23)$$

$$g_{m+1} = x_i s_{m+1} + \varphi_i s_m + a_5 q_{m+1}; \quad m = \overline{1, 3};$$

$$g_{m+4} = s_{m+4} x_i + s_{m+3} \varphi_i; \quad m = \overline{1, 2}.$$

В описанном алгоритме  $\varphi_i = \partial f(x^k) / \partial x_i$ , вычисляемые по (10.22) в точке  $x^k$ .

Отметим, что значение функции в точке  $x^k$  равно коэффициенту  $g_1$  в (10.23):  $f(x^k) = g_1$ .

Коэффициенты  $a_i$  в (10.21) — коэффициенты при линейных членах;  $a_1$  — свободный коэффициент;  $a_5$  — коэффициент при  $x_1 x_2 x_3$ .

Коэффициенты  $b_{i,j}$ ,  $i, j = \overline{1, 3}$  — коэффициенты при квадратичных членах  $x_i x_j$ , при этом  $b_{i,i} = b_{j,i}$ ;  $c_{i,j}$  — коэффициенты при  $x_i^2 x_j$ ;

$d_{i,j}$  — при  $x_i^3 x_j$ ;  $d_{i,4}$  —  $x_i^2 x_j^2$  — соответственно,  $d_{4,i}$  — коэффициенты при членах  $\prod_{j=1}^3 x_j x_i$ ;  $e_{i,j}$  — коэффициенты при  $x_i^4 x_j^2$ ;  $i, j = \overline{1, 3}$ .

Для функций описанного вида несложно реализовать метод наискорейшего спуска и обобщенный метод Ньютона на цифровых ЭВМ. Программы, реализующие эти алгоритмы, приведены в приложении (программа GRSP).

**Пример 10.1.** Найти минимум функции

$$f(x, y) = 2x^2 + xy + y^2 + 2x + y + 1$$

методом наискорейшего спуска.

Выберем начальную точку  $x^0 = 0$ ;  $y^0 = -1$ ;  $\alpha = 0,5$ . Вычислим  $f(x^0, y^0)$  и  $\varphi_i(x^0, y^0)$ :

$$f(0; -1) = x(2x + y + 2) + y(1 + y) + 1 = 1;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \varphi_1 = 4x + y + 2;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \varphi_2 = 2y + x + 1;$$

$$\varphi_1(0; -1) = 1; \quad \varphi_2(0; -1) = -1.$$

Вычисляем  $x^1, y^1$ :

$$x^1 = 0 - 0,5 \cdot 1 = -0,5; \quad y^1 = -1 - 0,5(-1) = -0,5; \quad f(x^1, y^1) = 0,5.$$

Проверяем выполнение неравенства (10.5) при  $\varepsilon = 0,5$ :

$$f(x^1) - f(x^0) = 0,5 - 1 = -0,5;$$

$$\|f'(x^0)\|^2 = 1;$$

$$-0,5 \leq -0,5 \cdot 0,5 \cdot 1 = -0,25.$$

Неравенство выполняется.

Для выбора  $\alpha$  на следующих приближениях воспользуемся равенством (10.9)

$$\Phi_k(\alpha) = g_1 - \alpha g_2 + \alpha^2 g_3;$$

$$r_1 = x + y + 1; \quad r_2 = \varphi_1 + \varphi_2; \quad r_3 = 1 + x.$$

Вычислим  $g_i, i = \overline{1, 3}$  в точке  $(x^1, y^1)$ :

$$g_1 = 0,5; \quad g_2 = -0,25; \quad g_3 = 1;$$

$$\varphi_1 = -0,5; \quad \varphi_2 = -0,5;$$

$$\Phi_1(\alpha) = 0,5 - 0,25\alpha + \alpha^2;$$

$$\frac{d\Phi_1(\alpha)}{d\alpha} = 2\alpha - 0,25 = 0; \quad \alpha_1 = 0,125.$$

Вычисляем  $x^2, y^2$ :

$$x^2 = x^1 - \alpha^1 \varphi_1 = -0,438;$$

$$y^2 = y^1 - \alpha^1 \varphi_2 = -0,438;$$

$$g_1 = f(x^2, y^2) = 0,35; \quad g_2 = 0,052; \quad g_3 = 0,23;$$

$$\varphi_1 = -0,19; \quad \varphi_2 = -0,314;$$

$$\Phi_2(\alpha) = 0,35 - 0,052\alpha + 0,23\alpha^2;$$

$$\frac{d\Phi_2(\alpha)}{d\alpha} = 0,46\alpha - 0,052; \quad \alpha^2 = 0,114;$$

$$x^3 = -0,415; \quad y^3 = -0,403;$$

$$g_1 = f(x^3, y^3) = 0,834;$$

$$f(x^3, y^3) > f(x^2, y^2).$$

Таким образом, точка относительного минимума

$$x^* = -0,438; \quad y^* = -0,438.$$

**Пример 10.2.** Найдем точку относительного минимума обобщенным методом Ньютона для функции

$$f(x, y) = x^4 - 4x^2y + x^2 + 4y^2 - 6x + 2.$$

Выбираем начальную точку  $x^0 = 0; y^0 = 0; \alpha = 0,2; \varepsilon = 0,1$ .

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 8xy + 2x - 6; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -4x^2 + 8y;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 - 8y + 2; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -8x;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 8.$$

Вычисляем  $f(x^0, y^0) = 2$ :

$$\frac{\partial f(x^0, y^0)}{\partial x} = \varphi_1 = -6; \quad \frac{\partial f(x^0, y^0)}{\partial y} = \varphi_2 = 0.$$

Система уравнений (10.13) для вычисления  $p^0$  имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} p_1^k + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} p_2^k &= -\varphi_1^k; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} p_1^k + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} p_2^k &= -\varphi_2^k. \end{aligned} \right\}$$

С учетом полученных выражений для вторых производных система имеет вид

$$\left. \begin{aligned} (12x^2 - 8y + 2) p_1^k - 8x p_2^k &= -\varphi_1^k; \\ -8x p_1^k + 8 p_2^k &= -\varphi_2^k. \end{aligned} \right\}$$

Отсюда

$$p_1^k = \frac{\varphi_1^k + x^k \varphi_2^k}{8y^k - 4(x^k)^2 - 2}; \quad p_2^k = x^k p_1^k - \varphi_2^k / 2. \quad (*)$$

Тогда

$$p_1^0 = 3; \quad p_2^0 = 0.$$

Вычисляем

$$\begin{aligned} x^1 &= 0 + 0,2 \cdot 3 = 0,6; \quad y^1 = 0 + 0,2 \cdot 0 = 0; \\ f(x^1, y^1) &= -1,1; \\ (f'_0, p^0) &= -18; \quad \varepsilon \alpha (f'_0, p^0) = -0,36; \\ -1,1 - 2 &= -3,1 < -0,36. \end{aligned}$$

Вычисляем  $p_1^1$  и  $p_2^1$  по формулам (\*):

$$\varphi_1^1 = -4; \quad \varphi_2^1 = -0,86; \quad p_1^1 = 1,4; \quad p_2^1 = 0,66.$$

Вычисляем  $x^2, y^2, f(x^2, y^2)$  и  $\varphi_1^2, \varphi_2^2$ :

$$\begin{aligned} x^2 &= 0,6 + 0,2 \cdot 1,4 = 0,88; \quad y^2 = 0 + 0,2 \cdot 0,66 = 0,13; \\ f(x^2, y^2) &= -1,8; \quad \varphi_1^2 = -3,7; \quad \varphi_2^2 = -2,2; \\ p_1^2 &= 1,3; \quad p_2^2 = 3,92. \end{aligned}$$

Вычислим третье приближение

$$x^3 = 0,88 + 0,2 \cdot 1,3 = 1,14; \quad y^3 = 0,13 + 0,2 \cdot 3,92 = 0,91;$$

$$f(x^3, y^3) = -3,5; \quad f_3 < f_2; \quad \varphi_1^3 = -6; \quad \varphi_2^3 = 2;$$

$$p_1^3 = \frac{-6 + 2,28}{7,28 - 2 - 5,2} \gg p_1^2.$$

Поскольку  $p_1^3 \gg p_1^2$ , то либо принимаем  $(x^2, y^2)$  за точку относительного минимума, либо изменяем  $\alpha$ . Выберем  $\alpha = 0,1$ .

Вычислим  $x^3, y^3, f(x^3, y^3)$ :

$$x^3 = 0,88 + 0,1 \cdot 1,3 = 1,01; \quad y^3 = 0,13 + 0,1 \cdot 3,9 = 0,52;$$

$$f(x^3, y^3) = 0; \quad f(x^3, y^3) > f(x^2, y^2).$$

Таким образом, принимаем за точку относительного минимума точку  $x^* = 0,88; y^* = 0,13$ .

Пример 10.3. Найти набор  $\{x_j; j = \overline{1, n}\}$ , максимизирующий функцию

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j \sqrt{x_j}$$

и удовлетворяющий ограничению

$$\sum_{j=1}^n x_j = a.$$

Формируем функцию Лагранжа

$$H(x, \lambda) = \sum_{j=1}^n c_j \sqrt{x_j} - \lambda \left( \sum_{j=1}^n x_j - a \right).$$

$$\left. \frac{\partial H(x, \lambda)}{\partial x_j} = \frac{1}{2} c_j / \sqrt{x_j} - \lambda = 0; \quad j = \overline{1, n}; \right\}$$

$$\frac{\partial H(x, \lambda)}{\partial \lambda} = \sum_{j=1}^n x_j - a = 0.$$

Получаем

$$x_j = c_j^2 / 4\lambda^2; \quad j = \overline{1, n};$$

$$\lambda = \sqrt{\sum_{j=1}^n c_j^2 / 4a}.$$

Отсюда

$$x_j = a c_j^2 / \sum_{j=1}^n c_j^2, \quad j = \overline{1, n}.$$

## Глава 11. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

### 11.1. КЛАССИФИКАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение второго порядка относительно неизвестной функции  $u(x)$ :

$$\sum_{i,j=1}^n a_{i,j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu + f = 0, \quad (11.1)$$

где  $a_{i,j}, b_i, c, f, i, j = \overline{1, n}$  — вещественные функции независимых переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Уравнение (11.1) может быть приведено к каноническому виду в точке  $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$

$$\sum_{k,i=1}^n \bar{a}_{k,i} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k \partial \xi_i} + \sum_{k=1}^n \bar{b}_k \frac{\partial u}{\partial \xi_k} + cu + f = 0, \quad (11.2)$$

где  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  — новые переменные;  $\bar{a}_{k,i}, \bar{b}_k$  — новые коэффициенты

$$\begin{aligned} \bar{a}_{k,i}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) &= \pm 1, \quad k = l \leq m, \\ \bar{a}_{k,i}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) &= 0, \quad k \neq l \text{ или } k = l > m; \quad m \leq n. \end{aligned}$$

Согласно общей классификации (11.1) в точке  $x^0$  называется уравнением эллиптического типа, если в (11.2) все  $n$  коэффициентов  $\bar{a}_{k,i}(x_1^0, \dots, x_n^0)$  отличны от нуля и имеют один знак гиперболического типа, когда  $n-1$  коэффициентов  $\bar{a}_{k,i}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  имеют один и тот же знак, а один коэффициент противоположен им по знаку, и, наконец, параболического типа, если только один из коэффициентов  $\bar{a}_{k,i}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) = 0$ , а все другие коэффициенты имеют одинаковые знаки.

Уравнение (11.1) называется уравнением эллиптического, гиперболического или параболического типов в области  $D$ , если оно эллиптического, гиперболического или параболического типов в каждой точке  $x$  области  $D$ .

Нестационарные процессы описываются прежде всего уравнениями параболического или гиперболического типов, стационарные — уравнениями эллиптического типа.

Линейное дифференциальное уравнение второго порядка относительно неизвестной функции  $u(x, t)$ , зависящей от двух пространственных координат  $x_1, x_2$  и времени  $t$

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left( p \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) - qu + f(x, t), \quad (11.3)$$

описывает процессы колебаний (гиперболический тип), уравнение

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left( p \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) - qu + f(x, t) \quad (11.4)$$

— процессы диффузии (параболический тип), уравнение

$$\sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left( p \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) - qu = -f(x) \quad (11.5)$$

— стационарные процессы (эллиптический тип).

Коэффициенты  $\rho$ ,  $p$ ,  $q$  определяются свойствами среды.  
Уравнение вида (11.4)

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left( k \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + f(x, t) \quad (11.6)$$

описывает распространение тепла в изотропной среде. Здесь  $\rho(x)$  — плотность среды;  $c(x)$  — удельная теплоемкость;  $k(x)$  — коэффициент теплопроводности в точке  $x$ .

Если среда однородна, т. е.  $c$ ,  $\rho$ ,  $k$  — постоянные, то (10.6) принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) + f_1(x, t), \quad (11.7)$$

где  $a^2 = \frac{k}{c\rho}$ ;  $f_1 = \frac{f}{c\rho}$ , и называется уравнением теплопроводности.

Уравнение вида (11.3) малых поперечных колебаний мембраны

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) + f_1(x, t), \quad (11.8)$$

где  $T_0$  — натяжение;  $\rho$  — плотность.

Если плотность  $\rho$  постоянна, то уравнение колебаний мембраны:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) + f_1(x, t),$$

где  $a^2 = T_0/\rho$ ;  $f_1 = f/\rho$ , и называется двумерным волновым уравнением.

Уравнение вида (11.5)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + f_1(x) = 0, \quad (11.9)$$

где  $\rho = \text{const}$ ;  $\rho$  — коэффициент диффузии, и называется уравнением Пуассона при  $f_1 \neq 0$ ,  $f_1 = f/\rho$ .

Пусть  $G \subset R^n$  — область, где происходит процесс,  $S$  — ее граница (кусочногладкая поверхность). Областью определения уравнений (11.3) и (11.4) будем считать цилиндр  $G \times [0, T]$  высоты  $T$  с основанием  $G$ . Его граница состоит из боковой поверхности  $S \times [0, T]$  и двух оснований.  $G$  — область определения уравнения (10.5). Далее будем считать, что функции  $\rho$ ,  $p$ ,  $q$  не зависят от  $t$  и являются достаточно гладкими.

Задача Коши для уравнения (11.3) ставится следующим образом: найти функцию  $u(x, t)$ , достаточно гладкую и удовлетворяющую уравнению (11.3) при  $t > 0$  и начальным условиям при  $t = 0$ :

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = u_1(x), \quad (11.10)$$

где  $u_0(x)$ ,  $u_1(x)$  — заданные гладкие функции.

Задача Коши для уравнения (11.4): требуется найти функцию  $u(x, t)$ , достаточно гладкую, удовлетворяющую уравнению (11.4) при  $t > 0$  и начальному условию при  $t = 0$ :

$$u|_{t=0} = u_0(x). \quad (11.11)$$

Краевая задача для уравнения (11.5) заключается в нахождении функции  $u(x)$ , определенной в области  $G$ , обладающей достаточной гладкостью и удовлетворяющей в области  $G$  уравнению (11.5) и граничному условию на  $S$ :

$$\left[ \alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} \right]_S = v, \quad (11.12)$$

где  $\alpha, \beta, v$  — заданные гладкие функции на  $S$ .

Рассмотрим три основных типа краевых (граничных) условий (11.12):

граничное условие первого рода

$$u|_S = \mu_0; \quad (11.13)$$

граничное условие второго рода

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_S = \mu_1; \quad (11.14)$$

граничное условие третьего рода

$$\left[ \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u \right]_S = \mu_2, \quad (11.15)$$

где  $\mu_0, \mu_1, \mu_2$  — заданные гладкие функции,  $n$  — внешняя нормаль к  $S$ .

Соответствующие краевые задачи называются краевыми задачами первого, второго и третьего родов.

Смешанная задача для уравнений (11.3) и (11.4) соответственно ставится следующим образом. Требуется найти функцию  $u(x, t)$ , определенную в области  $G \times [0, T]$ , обладающую в ней достаточной гладкостью и удовлетворяющую в цилиндре  $G \times [0, T]$  уравнениям (11.3) или (11.4) соответственно, начальным условиям (11.10) или (11.11) соответственно при  $t = 0$  и одному из граничных условий (11.13) — (11.15) при  $x \in S, 0 \leq t \leq T$ .

Необходимо, чтобы выполнялось условие согласованности (11.12) при  $u = u_0$ :

$$\left( \alpha u_0 + \beta_0 \frac{\partial u_0}{\partial n} \right) \Big|_S = v|_{t=0}. \quad (11.16)$$

## 11.2. АППРОКСИМАЦИЯ, УСТОЙЧИВОСТЬ И СХОДИМОСТЬ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

Рассмотрим некоторое множество  $Dh = \{M_h\}$  называемое сеткой, которое состоит из изолированных точек  $M_h$ , принадлежащих области  $\bar{D} = D + S$  и называемых узлами сетки. Функция, определенная в

узлах сетки, называется сеточной и обозначается  $u_h(x, y)$ , ( $h$  — шаг сетки).

Обозначим  $U$  пространство непрерывных в  $D$  функций  $u(x, y)$ ,  $U_h$  — пространство сеточных функций  $u_h(x, y)$ , определенных на  $D_h$ .

Пусть  $u(x, y)$  — точное решение уравнения

$$Lu = f. \quad (11.17)$$

Обозначим  $u^{(h)}$  приближенное сеточное значение решения  $u(x, y)$ . Вместо (11.17) рассмотрим

$$L_h(u^{(h)}) = f^{(h)}, \quad (11.18)$$

где  $L_h$  — разностный оператор, соответствующий оператору  $L$ ,  $f^{(h)} \in F_h$ , под  $F_h$  понимается пространство сеточных функций,  $f^{(h)} \in F_h$ , если  $f(x, y) \in F$ .

Такая приближенная замена оператора  $L$  на  $L_h$ , называется разностной аппроксимацией оператора  $L$ , а (11.18) аппроксимирующим уравнением (11.17), или разностной схемой.

Пусть в линейных пространствах  $U_h$  и  $F_h$  введены соответственно нормы  $\|\cdot\|_{U_h}$  и  $\|\cdot\|_{F_h}$ , являющиеся сеточными аналогами норм  $\|\cdot\|_U$  и  $\|\cdot\|_F$  в пространствах  $U$  и  $F$ .

При переходе к разностному уравнению необходимо указать множество соседних с узлом  $h$  узлов, в которых значения сеточной функции  $u_h(x, y)$  могут быть использованы для замены оператора  $L$ , т. е. необходимо выбрать шаблон.

Разностная схема (11.18) аппроксимирует задачу (11.17) на решении  $u(x, y)$ , если

$$L_h(u_h(x, y)) = f^{(h)} + \delta f^{(h)} \quad (11.19)$$

и

$$\|\delta f^{(h)}\|_{F_h} \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0.$$

Величина  $\delta f^{(h)}$  называется погрешностью аппроксимации.

Если  $\|\delta f^{(h)}\|_{F_h} \leq Mh^s$ , где  $M$  — постоянная, не зависящая от  $h$ ,  $s > 0$ , то считают, что разностная схема (11.18) аппроксимирует задачу (11.17) на решении  $u(x, y)$  с погрешностью порядка  $s$  относительно  $h$ .

Разностная схема (11.18) называется устойчивой, если существует такое  $h_0 > 0$ , что для всех  $h < h_0$  и любых  $f^{(h)} \in F_h$  выполняются условия:

разностная схема (10.18) имеет единственное решение;

$$\|u^{(h)}\|_{U_h} \leq M \|f^{(h)}\|_{F_h},$$

где  $M$  — постоянная, не зависящая от  $h$  и  $f^{(h)}$ .

Разностная схема (11.18) называется сходящейся, если при  $h \rightarrow 0$

$$\|u_h(x, y) - u^{(h)}(x, y)\|_{U_h} \rightarrow 0.$$

Если же выполняется условие

$$\|u_h(x, y) - u^{(h)}(x, y)\|_{U_h} \leq Ch^s,$$

где  $C$  — постоянная, не зависящая от  $h$ , то считают, что сходимость наблюдается со скоростью порядка  $s$  относительно  $h$ .

*Теорема.* Пусть разностная схема (11.18) аппроксимирует задачу (11.17) на решении  $u(x, y)$  с порядком  $s > 0$  относительно  $h$  и устойчива. Тогда эта схема будет сходящейся и порядок ее сходимости совпадает с порядком аппроксимации, т. е.

$$\|u_h(x, y) - u^{(h)}(x, y)\|_{U_h} \leq Kh^s, \quad (11.20)$$

где  $K$  — постоянная, не зависящая от  $h$ .

Рассмотрим некоторые разностные аналоги частных производных от функции  $u$  по переменным  $x, y, t$ . Заменяем производные  $\partial u / \partial t$  и  $\partial^2 u / \partial t^2$  формулами численного дифференцирования, используя интерполяционные формулы Ньютона вперед и назад в случае  $u(x, t)$ .

$$\frac{\partial u(x_k, t_i)}{\partial t} = \frac{u(x_k, t_{i+1}) - u(x_k, t_i)}{\tau} - \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u(x_k, t_i^{(1)})}{\partial t^2}, \quad (11.21)$$

где  $t_i < t_i^{(1)} < t_{i+1}$ ,  $\tau > 0$ ,  $t_i = i\tau$ ,  $x_k = kh$ , или

$$\frac{\partial u(x_k, t_i)}{\partial t} = \frac{u(x_k, t_i) - u(x_k, t_{i-1})}{\tau} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u(x_k, t_i^{(2)})}{\partial t^2}, \quad (11.21')$$

где  $t_{i-1} < t_i^{(2)} < t_i$ ;

$$\frac{\partial^2 u(x_k, t_i)}{\partial t^2} = \frac{u(x_k, t_{i+1}) - 2u(x_k, t_i) + u(x_k, t_{i-1}))}{\tau^2} - \frac{\tau^2}{6} \frac{\partial^4 u(x_k, t_i^{(4)})}{\partial t^4}, \quad (11.22)$$

где  $t_{i-1} < t_i^{(4)} < t_{i+1}$ ;

$$\frac{\partial^2 u(x_k, t_i)}{\partial x^2} = \frac{u(x_{k+1}, t_i) - 2u(x_k, t_i) + u(x_{k-1}, t_i))}{h^2} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u(x_k^{(1)}, t_i)}{\partial x^4}; \quad (11.23)$$

где  $x_{k-1} < x_k^{(1)} < x_{k+1}$ , или

$$\frac{\partial u(x_k, t_i)}{\partial t} = \frac{u(x_k, t_{i+1}) - u(x_k, t_{i-1}))}{2\tau} - \frac{\tau^2}{6} \frac{\partial^3 u(x_k, t_i^0)}{\partial t^3}, \quad (11.22'')$$

где  $t_{i-1} < t_i^0 < t_{i+1}$ .

В зависимости от выбора одной из формул (11.21), (11.22) для аппроксимации частных производных разностные схемы, аппроксимирующие соответствующие задачи, называются явными или неявными.

### 11.3. РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

**Задача Коши.** Рассмотрим решение задачи Коши для одномерного уравнения теплопроводности. Заключается она в отыскании решения  $u(x, t)$  уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varphi(x, t) \quad (11.24)$$

с условием на прямой  $t = 0$

$$u(x, t)|_{t=0} = \psi(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0. \quad (11.25)$$

Будем считать, что задачи (11.24), (11.25) имеют единственное решение  $u(x, t)$ , непрерывное вместе со своими производными  $\partial u/\partial t$ ,  $\partial^2 u/\partial t^2$  и  $\partial^k u/\partial x^k$ ,  $k = \overline{1, 4}$ ,  $t \in [0, T]$ .

Тогда область  $D = \{-\infty < x < \infty, 0 < t \leq T\}$ . Контур  $\Gamma$  — объединение прямых  $t = 0$  и  $t = T$ .

Введем в области  $D \times D_t$  прямоугольную равномерную сетку с шагами  $h$  и  $\tau$ :

$$D_h = \{x_k = kh, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; h > 0, t_i = i\tau, i = \overline{0, N}, \tau > 0\}.$$

Обозначим  $u(x_k, t_i)$  — точное значение функции  $u(x, t)$  в узле  $(x_k, t_i)$ ,  $u_k^i$  — соответствующее ему приближенное значение сеточной функции  $u(x_k, t_i)$ .

*Явная схема.* Выберем двухслойный шаблон для вычисления значения  $u_k^i$  (рис. 5).

Подставив вместо  $\partial u/\partial t$  и  $\partial^2 u/\partial x^2$  их разностные аналоги (11.21) и (11.23), получим следующую разностную схему:

$$\left. \begin{aligned} \frac{u_k^{i+1} - u_k^i}{\tau} - \frac{u_{k+1}^i - 2u_k^i + u_{k-1}^i}{h^2} &= f_k^i, \\ u_k^0 &= \psi_k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; i = \overline{0, N-1}. \end{aligned} \right\} \quad (11.26)$$

Обозначая через  $r_{ki}(h)$  погрешность аппроксимации задач (11.24), (11.25) разностной схемой, имеем

$$r_{ki}(h) = -\frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u(x_k, t_i^{(1)})}{\partial t^2} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u(x_k^{(1)}, t_i)}{\partial x^4}.$$

Обозначив

$$M_2 = \max_{(x, t) \in D} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|, \quad M_4 = \max_{(x, t) \in D} \left| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right|,$$

получим для оценки погрешности аппроксимации следующее неравенство:

$$\|\delta f_h\|_{F_h} = \max_{k, i} |r_{ki}(h)| \leq \left( \frac{\tau}{2} M_2 + \frac{h^2}{12} M_4 \right).$$

Разностная схема (11.26) позволяет по значениям решения на нулевом слое, т. е. по значениям  $u_k^0$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , вычислить значения  $u_k^1$  на первом слое, для этого нужно положить  $i = 0$  в (11.26) и т. д.

Таким образом,

$$\begin{aligned} u_k^{i+1} &= \tau/h^2 (u_{k+1}^i + u_{k-1}^i) + (1 - 2\tau/h^2) u_k^i + \tau f_k^i, \\ k &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots; i = \overline{0, N-1}. \end{aligned} \quad (11.27)$$

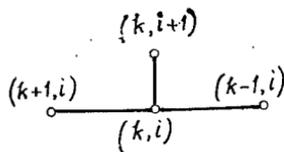


Рис. 5

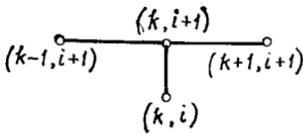


Рис. 6

Формула (11.27) позволяет в явном виде получить решение  $u_k^i$ , поэтому разностная схема (11.26) называется явной. Разностная схема устойчива при выполнении условия

$$\tau/h^2 \leq 1/2.$$

*Неявная схема.* Заменяем  $\partial u/\partial t$  по формуле (11.21), а  $\partial^2 u/\partial x^2$  — по формуле (11.23). Выберем двухслойный четырехточечный шаблон (рис. 6).

Получаем разностную схему, аппроксимирующую задачи (11.24), (11.25), в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{u_k^{i+1} - u_k^i}{\tau} - \frac{u_{k-1}^{i+1} - 2u_k^{i+1} + u_{k+1}^{i+1}}{h^2} &= f_k^i, \\ u_k^0 &= \psi_k \end{aligned} \right\} \\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; i = \overline{0, N-1}. \quad (11.29)$$

Эта схема называется неявной, так как на  $i$ -м слое в левой части (11.29) содержатся значения  $u_{k-1}^{i+1}, u_k^{i+1}, u_{k+1}^{i+1}, u_k^i$ , а в правой части —  $f_k^i, \psi_k$ . Для вычисления значений  $\dots u_{-2}^{i+1}, u_{-1}^{i+1}, u_0^{i+1}, u_1^{i+1}, \dots$  необходимо решать бесконечную систему линейных алгебраических уравнений.

Если определить норму в пространстве  $U_h$  по правилу

$$\|u_h\|_{U_h} = \max_{k, i} |u_k^i|,$$

то явная разностная схема (11.26) устойчива при выполнении условия

$$\tau/h^2 \leq 1/2.$$

При решении уравнения теплопроводности с переменным коэффициентом

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varphi(x, t), \quad a(x, t) > 0,$$

условие устойчивости выполняется, если

$$\tau/h^2 \leq 1/[2 \max_{(x, t) \in D} |a(x, t)|].$$

Согласно (11.27), погрешность явной разностной схемы порядка  $o(\tau + h^2)$ .

Неявные разностные схемы в общем случае очень громоздки. Однако, если отрезок оси  $Ox$ , на котором рассматривается задача Коши, конечен  $x \in [a, b]$ ,  $b - a \leq K$ , а на прямых  $x = a$  и  $x = b$

заданы граничные условия, то разностные схемы вида (11.29) оказываются весьма эффективными.

*Краевые задачи.* Рассмотрим краевые условия первого рода (11.23) для задач (11.24), (11.25) при  $x \in [a, b]$ .

$$u(a, t) = \eta_0(t); \quad u(b, t) = \eta_1(t). \quad (11.30)$$

Неявная разностная схема (11.26) в этом случае принимает вид

$$\left. \begin{aligned} -r(u_{k+1}^{i+1} + u_{k-1}^{i+1}) + (1 + 2r)u_k^{i+1} &= u_k^i + \tau\varphi_k^i, \\ i = \overline{0, N-1}; \quad k = \overline{1, M-1}; \\ u_k^a &= \psi_k; \quad k = \overline{1, M}; \\ u_0^i &= \eta_0^i; \quad i = \overline{0, N}; \\ u_M^i &= \eta_1^i; \quad i = \overline{0, N}, \end{aligned} \right\} \quad (11.31)$$

где  $r = \tau/h^2$ ;  $h = (b-a)/M$ ;  $\psi_k = \psi(x_k)$ ;  $\eta_0^i = \eta_0(t_i)$ ;  $\eta_1^i = \eta_1(t_i)$ .

Система (11.31) представляет собой систему  $M+1$  линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей коэффициентов на  $(i+1)$ -м слое. Эту систему удобно решать методом прогонки (см. гл. 8).

*Решение смешанных граничных задач.* Найдем функцию  $u(x, t)$ , которая в области  $D = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varphi(x, t) \quad (11.32)$$

с начальными условиями

$$u(x, t)|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (11.33)$$

и граничным условием

$$\left[ \alpha_0(t) \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_0(t) u \right]_{x=0} = \eta_0(t); \quad (11.34)$$

$$\left[ \alpha_1(t) \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_1(t) u \right]_{x=1} = \eta_1(t). \quad (11.34')$$

Функции  $\varphi(x, t)$ ,  $\psi(x)$ ,  $\eta_i(t)$ ,  $\alpha_i(t)$ ,  $\beta_i(t)$  — известны, причем  $\alpha_i^2 + \beta_i^2 > 0$ ,  $i = 0, 1$ .

Будем считать, что задачи (11.32), (11.33), (11.34) имеют единственное решение, непрерывное в  $D$  вместе со своими производными  $\partial^i u / \partial t^i$ ,  $i = 1, 2$ ;  $\partial^k u / \partial x^k$ ,  $k = 1, 4$ .

Заменим область  $D$  сеточной областью

$$D_h = \{x_k = kh, \quad k = \overline{0, M}; \quad h = 1/M; \quad t_i = i\tau; \quad i = \overline{0, N}; \quad \tau = T/N\}.$$

Аппроксимируем граничные условия (11.34) так, чтобы обеспечить порядок аппроксимации  $o(\tau + h^2)$ :

$$\alpha_0^i \frac{u(x_1, t_i) - u(x_0, t_i)}{h} + \beta_0^i u(x_0, t_i) = \eta_0^i + \alpha_0^i \frac{h}{2} \frac{\partial^2 u(x_0, t_i)}{\partial x^2};$$

$$\alpha_1^i \frac{u(x_M, t_i) - u(x_{M-1}, t_i)}{h} + \beta_1^i u(x_M, t_i) = \eta_1^i + \alpha_1^i \frac{h}{2} \frac{\partial^2 u(x_M, t_i)}{\partial x^2},$$

где  $\alpha_j^i = \alpha_j(t_i)$ ,  $\beta_j^i = \beta_j(t_i)$ ,  $\eta_j^i = \eta_j(t_i)$ ,  $j = 0, 1$ .

Отбрасывая в правой части члены, имеющие первый порядок относительно  $h$ , получаем

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0^i \frac{u_1^i - u_0^i}{h} + \beta_0^i u_0^i &= \eta_0^i; \\ \alpha_1^i \frac{u_M^i - u_{M-1}^i}{h} + \beta_1^i u_M^i &= \eta_1^i, \end{aligned} \right\}$$

или

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0^i/h u_1^i + (\beta_0^i - \alpha_0^i/h) u_0^i &= \eta_0^i; \\ (\alpha_1^i/h + \beta_1^i) u_M^i - \alpha_1^i/h u_{M-1}^i &= \eta_1^i. \end{aligned} \right\} \quad (11.35)$$

Получаем следующие разностные схемы, аппроксимирующие задачи (11.32), (11.33), (11.34).

Явная разностная схема:

$$\left. \begin{aligned} u_k^{i+1} &= r(u_{k+1}^i + u_{k-1}^i) + (1 - 2r)u_k^i + \tau \varphi_k^i; \\ & \quad k = \overline{1, M-1}; \quad i = \overline{0, N-1}; \\ u_k^0 &= \psi_k, \quad k = \overline{0, M}; \\ u_1^{i+1} &= (1 - h\beta_0^{i+1}/\alpha_0^{i+1})u_0^{i+1} + h\eta_0^{i+1}/\alpha_0^{i+1}, \\ & \quad i = \overline{0, N-1}; \\ u_{M-1}^i &= (1 + h\beta_1^{i+1}/\alpha_1^{i+1})u_M^{i+1} - h\eta_1^{i+1}/\alpha_1^{i+1}; \\ & \quad i = \overline{0, N-1}. \end{aligned} \right\} \quad (11.36)$$

Неявная разностная схема:

$$\left. \begin{aligned} \tau u_{k-1}^{i+1} - (h^2 + 2\tau)u_k^{i+1} + \tau u_{k+1}^{i+1} &= -h^2(\tau \varphi_k^i + u_k^i); \\ & \quad k = \overline{1, M-1}; \quad i = \overline{0, N-1}; \\ u_k^0 &= \psi_k, \quad k = \overline{0, M}; \\ u_1^{i+1} &= (1 - h\beta_0^{i+1}/\alpha_0^{i+1})u_0^{i+1} + h\eta_0^{i+1}/\alpha_0^{i+1}; \\ & \quad i = \overline{0, N-1}; \\ u_{M-1}^{i+1} &= (1 + h\beta_1^{i+1}/\alpha_1^{i+1})u_M^{i+1} - h\eta_1^{i+1}/\alpha_1^{i+1}; \\ & \quad i = \overline{0, N-1}. \end{aligned} \right\} \quad (11.37)$$

**Пример 11.1.** Пусть задача Коши имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x + t$$

с условием при  $t = 0$

$$u(x, t)|_{t=0} = \sin x.$$

Для решения задачи используем разностную схему (11.26) и рекуррентную формулу (11.28).

Вычислим значения  $\varphi_k^i = x_k + t_i$ ;  $t_i = i\tau$ ;  $x_k = kh$ ;  $u_k^0 = \sin x_k = \sin(kh)$ ;  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ;  $i = \overline{0, N}$ . Ограничимся промежутком  $(0, T]$ ;  $T = 1$ ;  $x \in [-3; 3]$ .

Выберем  $h = 0,5$ . Тогда для обеспечения устойчивости разностной схемы  $\tau \leq h^2/2 = 1/8$ ;  $\tau = 0,1$ .

С учетом выбранного  $h$  и вычисленного значения  $\tau$  имеем  $k = -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, \dots, 5$ ;  $x_k = k/2$ ;  $t_i = 0, 1i$ ;  $i = \overline{0, 10}$ .

Значения  $\varphi_k^i$  для  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 10$ ;  $i = \overline{0, 10}$  вычислим по формуле  $\varphi_k^i = k/2 + 0,1i$ ;  $u_k^0 = \sin(k/2)$ .

$$u^0 = [0,705; 0,958; 0,978; 0,763; 0,350; -0,140; -0,584; -0,910; -0,997; -0,841; -0,479; 0; 0,479; 0,841; 0,997; 0,910; 0,584; 0,140; -0,350; -0,763; -0,978].$$

Согласно рекуррентной формуле (11.25),

$$u_k^1 = 1/h^2 [\tau (u_{k+1}^0 + u_{k-1}^0) + (h^2 - 2\tau) u_k^0] + \tau \varphi_k^0,$$

или

$$u_k^1 = 0,4 (u_{k+1}^0 + u_{k-1}^0) + 0,2u_k^0 + 0,05k.$$

Тогда

$$\begin{aligned} u_0^1 &= 0,4 (u_1^0 + u_{-1}^0) = 0; & u_1^1 &= 0,4 (u_2^0 + u_0^0) + 0,2u_1^0 + 0,05 \cdot 1 = -u_{-1}^1 = 0,482; \\ u_2^1 &= -u_{-2}^1 = 0,859; & u_3^1 &= -u_{-3}^1 = 1,050; \\ u_4^1 &= -u_{-4}^1 = 1,014; & u_5^1 &= -u_{-5}^1 = 0,787; \\ u_6^1 &= -u_{-6}^1 = 0,422; & u_7^1 &= -u_{-7}^1 = 0,031; \\ u_8^1 &= -u_{-8}^1 = -0,284; & u_9^1 &= -u_{-9}^1 = -0,434. \end{aligned}$$

Вычисляем решение на втором слое:

$$\begin{aligned} u_k^2 &= 0,4 (u_{k+1}^1 + u_{k-1}^1) + 0,2u_k^1 + 0,1 (k/2 + 0,1); \\ u_0^2 &= 0,4 (u_1^1 + u_{-1}^1) + 0,2 \cdot 0 + 0,1 (0 + 0,1) = 0,010; \\ u_1^2 &= 0,4 (u_2^1 + u_0^1) + 0,2u_1^1 + 0,1 (1/2 + 0,1) = 0,500; \\ u_{-1}^2 &= 0,4 (u_0^1 + u_{-2}^1) + 0,2u_{-1}^1 + 0,1 (-1/2 + 0,1) = -0,480; \\ u_2^2 &= 0,894; & u_{-2}^2 &= -0,874; \\ u_3^2 &= 1,119; & u_4^2 &= 1,148; & u_5^2 &= 0,992; \\ u_6^2 &= 0,722; & u_7^2 &= 0,421; & u_8^2 &= 0,192; \\ u_9^2 &= 0,104; & u_{-k}^2 &= 0,02 - u_k^2; & k &= \overline{3, 9}. \end{aligned}$$

Решение на третьем, четвертом и т. д. слоях найдем по формулам

$$\begin{aligned} u_k^{i+1} &= 0,4 (u_{k+1}^i + u_{k-1}^i) + 0,2u_k^i + 0,1 (k/2 + 0,1i); \\ u_{-k}^{i+1} &= 0,4 (u_{-k-1}^i + u_{1-k}^i) + 0,2u_{-k}^i + 0,1 (-k/2 + 0,1i). \end{aligned}$$

Запишем найденное решение задачи Коши в виде следующей таблицы:

$k \backslash i$	1	2	3	4	5	6	7	8
-10	0,36	—	—	—	—	—	—	—
-9	0,43	-0,08	—	—	—	—	—	—
-8	0,28	-0,17	-0,62	—	—	—	—	—
-7	-0,03	-0,40	-0,76	-1,11	—	—	—	—
-6	-0,43	-0,70	-0,97	-1,23	-1,46	—	—	—
-5	-0,79	-0,97	-1,16	-1,33	-1,50	-1,66	—	—
-4	-1,01	-1,13	-1,23	-1,34	-1,44	-1,54	-1,63	-1,39
-3	-1,05	-1,10	-1,15	-1,20	-1,24	-1,28	-1,32	-1,39
-2	-0,86	-0,87	-0,88	-0,90	-0,90	-0,90	-0,90	-0,91
-1	-0,48	-0,48	-0,47	-0,46	-0,44	-0,41	-0,37	-0,37
0	0	0,01	0,03	0,06	0,10	0,15	0,21	0,32
1	0,48	0,50	0,53	0,58	0,64	0,71	0,79	0,92
2	0,86	0,89	0,95	1,02	1,10	1,20	1,40	1,46
3	1,05	1,12	1,21	1,32	1,44	1,58	1,74	1,94
4	1,01	1,15	1,29	1,46	1,64	1,83	2,05	—
5	0,79	0,99	1,22	1,45	1,70	1,97	—	—
6	0,42	0,72	1,03	1,35	1,68	—	—	—
7	0,03	0,42	0,82	1,23	—	—	—	—
8	-0,28	0,19	0,69	—	—	—	—	—
9	-0,43	0,10	—	—	—	—	—	—
10	-0,36	—	—	—	—	—	—	—

Погрешность полученного решения порядка

$$O(\tau + h^2) = O(0,1 + 0,25) = O(0,35).$$

Пример 11.2. Найдем решение следующей краевой задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + t \sin x$$

с начальным условием  $u(x, 0) = (x + 1)e^{-x}$  и краевыми условиями

$$u(x, t)|_{x=0} = 2 - t; \quad u(x, t)|_{x=1} = 2t,$$

используя неявную разностную схему (11.37).

В рассматриваемой задаче  $\alpha_0(t) = \alpha_1(t) = 0$ ;  $\beta_0(t) = \beta_1(t) = 1$ ;  $\varphi(x, t) = t \sin x$ ;  $\psi(x) = (x + 1)e^{-x}$ ;  $\eta_0(t) = 2 - t$ ;  $\eta_1(t) = 2t$ . Выберем  $h = 0,2$ ;  $\tau = 0,1$ ;  $M = 5$ ;  $N = 10$ . Тогда  $\varphi_k^i = i \cdot 0,1 \sin(k/5)$ ;  $k = \overline{0,4}$ ;  $i = \overline{0,9}$ ;  $\psi_k = (1 + 0,2k) \times e^{-0,2k}$ ;  $\eta_0^i = 2 - 0,1i$ ;  $\eta_1^i = 0,2i$ .

Система уравнений (11.37) приобретает вид

$$\left. \begin{aligned} u_{k+1}^{i+1} - (2 + h^2/\tau) u_k^{i+1} + u_{k-1}^{i+1} &= -h^2 \varphi_k^i - h^2/\tau u_k^i, \\ k &= \overline{1,4}; \quad i = \overline{0,9}; \\ u_k^0 &= \psi_k, \quad k = \overline{0,5}; \\ u_0^{i+1} &= \eta_0^{i+1}, \quad i = \overline{0,9}; \\ u_5^{i+1} &= \eta_1^{i+1}, \quad i = \overline{0,9}. \end{aligned} \right\}$$

Запишем полученную систему в виде

$$\left. \begin{aligned} u_2^{i+1} - (2 + h^2/\tau) u_1^{i+1} &= -\eta_0^{i+1} - h^2\varphi_1^i - h^2/\tau u_1^i, \\ u_3^{i+1} - (2 + h^2/\tau) u_2^{i+1} + u_1^{i+1} &= -h^2\varphi_2^i - h^2/\tau u_2^i, \\ u_4^{i+1} - (2 + h^2/\tau) u_3^{i+1} + u_2^{i+1} &= -h^2\varphi_3^i - h^2/\tau u_3^i, \\ -(2 + h^2/\tau) u_4^{i+1} + u_3^{i+1} &= -\eta_1^{i+1} - h^2\varphi_4^i - h^2/\tau u_4^i; \quad i = \overline{0, 9}. \end{aligned} \right\}$$

При  $i = 0$ :

$$\left. \begin{aligned} u_2^1 - r_1 u_1^1 &= -\eta_0^1 - h^2\varphi_1^0 - r_2\psi_1; \\ u_3^1 - r_1 u_2^1 + u_1^1 &= -h^2\varphi_2^0 - r_2\psi_2; \\ u_4^1 - r_1 u_3^1 + u_2^1 &= -h^2\varphi_3^0 - r_2\psi_3; \\ -r_1 u_4^1 + u_3^1 &= -\eta_1^1 - h^2\varphi_4^0 - r_2\psi_4, \end{aligned} \right\}$$

где  $r_1 = 2 + h^2/\tau$ ;  $r_2 = h^2/\tau$ .

Решив эту систему, найдем  $u_1^1, u_2^1, u_3^1, u_4^1$ . Далее, подставив полученные значения для  $u_k^1, k = \overline{1, 4}$  в предыдущую систему при  $i = 1$ , найдем  $u_k^2, k = \overline{1, 4}$  и т. д.

Системы уравнений (\*) можно решить для каждого  $i$ , например, методом Гаусса. Предпочтительно искать решение системы (\*) методом прогонки.

Перейдем к рассмотрению двумерного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( a^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( a^2 \frac{\partial u}{\partial y} \right) + f(x, y, t) \quad (11.38)$$

с начальным условием

$$u(x, y, 0) = g(x, y) \quad (11.39)$$

и граничным условием первого рода

$$u(x, y, t)|_{\Gamma} = \mu(t). \quad (11.40)$$

Будем искать решение  $u(x, y, t)$ , непрерывное вместе со своими производными  $\partial u/\partial t, \partial^2 u/\partial t^2$  и  $\partial^k u/\partial x^k, \partial^k u/\partial y^k$  в области  $D = \{a < x < b, c < y < d, 0 < t < T\}$ ,  $\Gamma$  — контур, ограничивающий область  $D$ .  $\bar{D} = D + \Gamma$ .

*Разностная схема расщепления.* Аппроксимируем оператор

$$Lu = \frac{\partial}{\partial x} \left( a^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( a^2 \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

Разностным аналогом оператора  $Lu$  будет оператор

$$Au = A_1 u + A_2 u,$$

где

$$\begin{aligned} A_1 u &= 1/h_1^2 [u(x + h_1, y) - 2u(x, y) + u(x - h_1, y)]; \\ A_2 u &= 1/h_2^2 [u(x, y + h_2) - 2u(x, y) + u(x, y - h_2)]. \end{aligned} \quad (11.41)$$

Оператор  $Au$  определен на пятиточечном шаблоне, состоящем из узлов  $(x \pm h_1, y), (x, y), (x, y \pm h_2)$ .

Поскольку

$$Au - Lu = \frac{h_1^2 L_1^2 u}{12} + \frac{h_2^2 L_2^2 u}{12} + o(h_1^4 + h_2^4),$$

то

$$Au - Lu = o(|h|^2), \quad |h|^2 = h_1^2 + h_2^2.$$

Рассмотрим однородное уравнение для (11.34):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( a^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( a^2 \frac{\partial u}{\partial y} \right) = Lu. \quad (11.42)$$

Запишем разностное уравнение, соответствующее уравнению (11.42),

$$\left. \begin{aligned} \frac{u^{j+1} - u^j}{\tau} + L \left( \frac{u^{j+1} + u^j}{2} \right) &= 0; \\ u^0 &= g. \end{aligned} \right\} \quad (11.43)$$

Разностная схема (11.39) называется схемой Кранка — Никольсона. Она имеет второй порядок аппроксимации по  $\tau$ .

Схема (11.39) является результатом попеременного применения схем первого порядка точности, явной и неявной, записанных для интервалов  $t_j \leq t \leq t_{j+1/2}$ ,  $t_{j+1/2} \leq t \leq t_{j+1}$  соответственно.

Аппроксимируя оператор  $L$  разностным аналогом (11.37), получаем следующую задачу:

$$\left. \begin{aligned} \frac{u^{j+1/2} - u^j}{\tau} &= A_1 u^{j+1/2}; \\ \frac{u^{j+1} - u^{j+1/2}}{\tau} &= A_2 u^{j+1} \end{aligned} \right\} \quad (11.44)$$

$$u(x, y, 0) = g(x, y).$$

Аппроксимируя область  $D$  сеточной областью с шагом  $h$ ,  $x_k = kh$ ,  $y_l = lh$ , получаем следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{u_{k,l}^{j+1/2} - u_{k,l}^j}{\tau} &= \frac{1}{h^2} [a_{k+1,l}^2 u_{k+1,l}^{j+1/2} + (a_{k,l}^2 - a_{k+1,l}^2) u_{k,l}^{j+1/2} + \\ &\quad + a_{k,l}^2 u_{k-1,l}^{j+1/2}]; \\ \frac{u_{k,l}^{j+1} - u_{k,l}^{j+1/2}}{\tau} &= \frac{1}{h^2} [a_{k,l+1}^2 u_{k,l+1}^{j+1} + (a_{k,l}^2 - a_{k,l+1}^2) u_{k,l}^{j+1} + \\ &\quad + a_{k,l}^2 u_{k,l-1}^{j+1}]; \\ u_{k,l}^0 &= g_{k,l}; \\ u_{0,l}^{j+1/2} &= 0; \quad u_{M,l}^{j+1/2} = 0; \quad l = \overline{1, M-1}; \quad j = \overline{0, N-1}; \\ u_{k,0}^{j+1} &= 0; \quad u_{k,M}^{j+1} = 0; \quad k = \overline{1, M-1}; \quad j = \overline{0, N-1}. \end{aligned} \right\} \quad (11.45)$$

Для уравнения (11.38) разностная схема принимает вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{u_{k,l}^{j+1/2} - u_{k,l}^j}{\tau} &= \frac{1}{h^2} [a_{k+1}^2 u_{k+1,l}^{j+1/2} + (a_{k,l}^2 - a_{k+1,l}^2) u_{k,l}^{j+1/2} + \\ &\quad + a_{k,l}^2 u_{k-1,l}^{j+1/2}]; \\ \frac{u_{k,l}^{j+1} - u_{k,l}^{j+1/2}}{\tau} &= \frac{1}{h^2} [a_{k,l+1}^2 u_{k,l+1}^{j+1} + (a_{k,l}^2 - a_{k,l+1}^2) u_{k,l}^{j+1} + \\ &\quad + a_{k,l}^2 u_{k,l-1}^{j+1}] + f_{k,l}^{j+1/2}; \\ u_{k,l}^0 &= g_{k,l}; \quad k, l = \overline{1, M-1}; \quad j = \overline{0, N-1}; \\ u_{0,l}^{j+1/2} &= 0; \quad u_{M,l}^{j+1/2} = 0; \\ u_{k,0}^{j+1} &= 0; \quad u_{k,M}^{j+1} = 0. \end{aligned} \right\} (11.46)$$

Разностные схемы (11.45) и (11.46) устойчивы, так как

$$\|u^{j+1}\| \ll \|u^j\|.$$

*Метод матричной прогонки.* Рассмотрим систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} -A_k Y_{k-1} + C_k Y_k - B_k Y_{k+1} &= F_k, \quad k = \overline{1, M-1}; \\ C_0 Y_0 - B_0 Y_1 &= F_0; \\ -A_M Y_{M-1} + C_M Y_M &= F_M, \end{aligned} \right\} (11.47)$$

где  $Y_k, F_k$  — векторы размерности  $N$ ;  $A_k, B_k, C_k$  — квадратные матрицы размерности  $N \times N$ .

Будем искать решение задачи (11.47) в виде

$$Y_k = Q_{k+1} Y_{k+1} + \beta_{k+1}; \quad k = \overline{M-1, M-2, \dots, 1, 0}, \quad (11.48)$$

где  $Q_k$  — квадратная матрица размерности  $N \times N$ ;  $\beta_k$  — вектор размерности  $N$ .

Из (11.47) и (11.48) получаем рекуррентные формулы для определения  $Q_k, \beta_k$ :

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= C_0^{-1} B_0; \quad \beta_1 = C_0^{-1} F_0; \\ Q_{k+1} &= (C_k - A_k Q_k)^{-1} B_k; \\ \beta_{k+1} &= (C_k - A_k Q_k)^{-1} (F_k + A_k \beta_k); \\ &\quad k = \overline{1, M-1}. \end{aligned} \right\} (11.49)$$

$$Y_M = [C_M - A_M Q_M]^{-1} [A_M \beta_M + F_M] = \beta_{M+1}. \quad (11.50)$$

Если матрицы  $C_k, B_k, A_k$  удовлетворяют условиям:

$$\|C_0^{-1} B_0\| \ll 1; \quad \|C_M^{-1} B_M\| \ll 1; \quad (11.51)$$

$$\|C_k^{-1} A_k\| \ll 1 - \|C_k^{-1} B_k\|, \quad k = \overline{1, M-1}, \quad (11.52)$$

то

$$\|Q_k\| \ll 1, \quad k = \overline{1, M},$$

т. е. метод матричной прогонки устойчив по отношению к случайной ошибке, если выполняются условия (11.51), (11.52), причем хотя бы для одного из них должно выполняться строгое неравенство.

Приведем разностные схемы (11.45) к виду (11.47). Обозначим

$$u(x_k, y_l, t_{j+1/2}) = v_{k,l}^{j+1}; \quad f(x_k, y_l, t_{j+1/2}) = f_{k,l}^{j+1/2}.$$

С учетом первого выражения (11.41)

$$-ra_{k,l}^2 v_{k-1,l}^{j+1/2} + [r(a_{k,l}^2 - a_{k+1,l}^2) - 1] u_{k,l}^{j+1} = u_{k,l}^j. \quad (11.53)$$

В данном случае коэффициенты матриц  $A_k, B_k, C_k$  не зависят от  $t_j$ , поэтому вместо векторно-матричного уравнения (11.48) будем решать уравнение

$$v_{k,l}^{j+1} = q_{k,l} v_{k+1,l}^{j+1} + \beta_{k,l}; \quad k = M-1, M-2, \dots, 1, 0. \quad (11.54)$$

Получим выражения для  $q_{k,l}$  и  $\beta_{k,l}$ . Из уравнения (11.53) имеем

$$\begin{aligned} [1 + r(a_{k+1,l}^2 - a_{k,l}^2) - ra_{k,l}^2 q_{k-1,l}] v_{k,l}^j = \\ = ra_{k+1,l}^2 v_{k+1,l}^j + u_{k,l}^j + ra_{k+1,l}^2 \beta_{k-1,l}, \end{aligned}$$

где

$$q_{k,l} = \frac{ra_{k+1,l}^2}{1 + ra_{k+1,l}^2 - ra_{k,l}^2 (q_{k-1,l} + 1)}; \quad r = \tau/h^2; \quad k = \overline{1, M}; \quad (11.55)$$

$$\beta_{k,l} = \frac{u_{k,l}^j + ra_{k+1,l}^2 \beta_{k-1,l}}{1 + ra_{k+1,l}^2 - ra_{k,l}^2 (q_{k-1,l} + 1)}; \quad k = \overline{1, M}; \quad (11.56)$$

$$q_{0,l} = 0; \quad \beta_{0,l} = 0; \quad u_{k,l}^0 = g_{k,l}; \quad v_{M,l}^j = 0; \quad v_{0,l}^j = 0.$$

Аналогично получаем систему относительно  $u_{k,l}^{j+1}$ :

$$u_{k,l}^{j+1} = p_{k,l} u_{k+1,l}^{j+1} + \gamma_{k,l}; \quad l = M-1, M-2, \dots, 1, 0, \quad (11.57)$$

где

$$p_{k,l} = \frac{ra_{k,l+1}^2}{1 + r(a_{k,l+1}^2 - a_{k,l}^2 (1 + p_{k,l-1}))}; \quad (11.58)$$

$$l = \overline{1, M-1}; \quad k = \overline{0, M-1};$$

$$\gamma_{k,l} = \frac{v_{k,l}^{j+1} + f_{k,l}^{j+1} + ra_{k,l+1}^2 \gamma_{k,l-1}}{1 + ra_{k,l+1}^2 - ra_{k,l}^2 (1 + p_{k,l-1})}; \quad (11.59)$$

$$p_{k,0} = 0; \quad \gamma_{k,0} = 0; \quad u_{k,M}^{j+1} = 0; \quad u_{k,0}^{j+1} = 0.$$

По формулам (11.55), (11.56) и (11.58), (11.59) вычисляем прогоночные коэффициенты — прямой ход прогонки, по (11.54) и (11.57) вычисляем значения  $v_{k,l}^{j+1}, u_{k,l}^{j+1}$  — обратный ход метода прогонки.

**Пример 11.3.** Пусть дано уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

с начальным условием

$$u(x, y, 0) = 0$$

и граничным условием

$$u(0, t) = 0; \quad u(1, t) = 0.$$

Найдем решение этой задачи в прямоугольнике

$$D \times D_t = \{0 \leq x \leq 1; 0 < t \leq 1\}.$$

Поскольку для рассматриваемого уравнения коэффициент  $a$  — постоянная величина, то коэффициенты  $q_{k,l}$  и  $p_{k,l}$  не зависят от  $x$  и  $y$ .

Запишем выражения для прогоночных коэффициентов:

$$\begin{aligned} c_{k,l} &= 1 + ra^2 q_{k-1,l}; \quad q_{k,l} = \frac{ra^2}{c_{k,l}}; \\ \beta_{k,l} &= \frac{1}{c_{k,l}} (u_{k,l}^t + ra^2 \beta_{k-1,l}); \quad k, l = \overline{1,4}; \quad j = \overline{0,19}; \\ p_{k,l} &= q_{k,l}; \\ \gamma_{k,l} &= \frac{1}{c_{k,l}} (v_{k,l}^{t+1} + ra^2 \gamma_{k,l-1}); \quad l, k = \overline{1,4}; \quad j = \overline{0,19}; \\ q_{0,l} &= \beta_{0,l} = p_{k,0} = \gamma_{k,0} = 0. \end{aligned}$$

Решение на  $(j+1)$ -м слое будем искать по формулам:

$$\begin{aligned} v_{k,l}^{t+1} &= q_{k,l} v_{k+1,l}^{t+1} + \beta_{k,l}; \quad k = 4, 3, 2, 1; \quad l = \overline{1,4}; \quad j = \overline{0,19}; \\ v_{5,l}^{t+1} &= v_{0,l}^{t+1} = 0; \\ u_{k,l}^{t+1} &= p_{k,l} u_{k,l+1}^{t+1} + \gamma_{k,l}; \quad l = 4, 3, 2, 1; \quad k = \overline{1,4}; \quad j = \overline{0,19}; \\ u_{k,5}^{t+1} &= u_{k,0}^{t+1} = 0; \quad c_{1,l} = 1; \\ q_{1,l} &= 0,310; \quad c_{2,l} = 0,904; \\ q_{2,l} &= 0,354; \quad c_{3,l} = 0,890; \\ q_{3,l} &= 0,348; \quad c_{4,l} = 0,890; \\ q_{4,l} &= 0,360. \end{aligned}$$

Для  $i=0$  прогоночные коэффициенты  $\beta_{k,l}$  имеют вид

$$\beta = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,6 & 0,8 & 1,0 \\ 0,8 & 1,09 & 1,38 & 1,67 \\ 1,18 & 1,51 & 1,84 & 2,17 \\ 1,54 & 1,88 & 2,22 & 2,56 \end{bmatrix};$$

$$v^1 = \begin{bmatrix} 0,50 & 0,74 & 0,98 & 1,22 & 1,46 \\ 0,96 & 1,41 & 1,86 & 2,27 & 2,72 \\ 1,27 & 1,72 & 2,17 & 2,62 & 3,07 \\ 1,2 & 1,54 & 1,88 & 2,22 & 2,56 \end{bmatrix}.$$

Прогоночные коэффициенты  $\gamma_{k,l}$  и решение на первом слое:

$$\gamma = \begin{bmatrix} 0,74 & 1,21 & 1,60 & 1,96 \\ 1,56 & 2,59 & 3,40 & 4,17 \\ 1,93 & 3,11 & 4,03 & 4,85 \\ 1,73 & 2,71 & 3,43 & 4,12 \end{bmatrix};$$

$$u^1 = \begin{bmatrix} 1,33 & 1,90 & 2,21 & 1,96 \\ 3,09 & 4,32 & 4,88 & 4,17 \\ 3,70 & 5,10 & 5,72 & 4,85 \\ 3,33 & 4,47 & 4,91 & 4,12 \end{bmatrix}.$$

Вычисляем по приведенным выше формулам решение на втором слое для  $i = 2$ :

$$\beta = \begin{bmatrix} 1,33 & 1,90 & 2,21 & 1,96 \\ 3,87 & 5,52 & 7,40 & 6,46 \\ 5,62 & 7,67 & 9,09 & 7,67 \\ 5,61 & 7,00 & 7,90 & 7,38 \end{bmatrix};$$

$$v^2 = \begin{bmatrix} 3,24 & 5,13 & 5,29 & 5,45 \\ 6,15 & 9,11 & 11,52 & 9,69 \\ 7,36 & 10,15 & 11,84 & 8,94 \\ 5,61 & 7,00 & 7,90 & 7,38 \end{bmatrix};$$

$$\gamma = \begin{bmatrix} 3,24 & 6,13 & 7,19 & 7,68 \\ 6,80 & 12,41 & 17,00 & 16,55 \\ 8,27 & 14,28 & 18,28 & 16,40 \\ 6,29 & 10,33 & 12,33 & 12,55 \end{bmatrix};$$

$$u^2 = \begin{bmatrix} 6,06 & 9,10 & 9,57 & 7,68 \\ 14,06 & 20,50 & 22,86 & 16,55 \\ 16,14 & 22,63 & 24,00 & 16,40 \\ 12,06 & 16,03 & 15,84 & 12,55 \end{bmatrix}.$$

Получим решение на третьем слое:

$$\beta = \begin{bmatrix} 6,06 & 9,10 & 9,57 & 7,68 \\ 17,63 & 28,71 & 35,13 & 30,35 \\ 24,28 & 31,64 & 41,35 & 32,83 \\ 23,10 & 32,40 & 43,30 & 25,54 \end{bmatrix};$$

$$v^3 = \begin{bmatrix} 14,94 & 22,71 & 26,75 & 21,66 \\ 28,65 & 43,90 & 55,10 & 45,11 \\ 31,13 & 42,92 & 56,42 & 41,72 \\ 23,10 & 32,40 & 43,30 & 25,54 \end{bmatrix};$$

$$\gamma = \begin{bmatrix} 14,94 & 27,34 & 35,23 & 35,58 \\ 31,83 & 49,37 & 78,26 & 77,00 \\ 34,60 & 59,60 & 83,24 & 75,02 \\ 25,91 & 45,82 & 63,90 & 50,40 \end{bmatrix};$$

$$u^3 = \begin{bmatrix} 28,06 & 42,00 & 47,2 & 38,6 \\ 62,0 & 86,2 & 105,2 & 77,0 \\ 63,0 & 98,0 & 110,0 & 75,0 \\ 50,7 & 70,8 & 71,5 & 50,4 \end{bmatrix}.$$

Аналогичным образом могут быть найдены значения  $u_k^{i+1}$  для  $i = 3, 4, \dots$

#### 11.4. РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

Требуется найти решение  $u(x, y)$  уравнения Пуассона в области  $D$ :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -f(x, y), \quad (11.60)$$

удовлетворяющее одному из краевых условий (11.13)—(11.15), в которых функции  $\mu_1(x, y)$ ,  $\mu_2(x, y)$ ,  $\mu_3(x, y)$  гладкие при  $(x, y) \in \Gamma$ .

Заменим область  $D$  сеточной областью

$$D_h = \{x_k = kh; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; y_i = il; i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}.$$

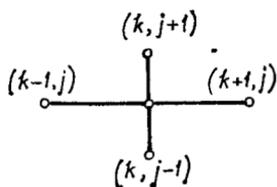


Рис. 7

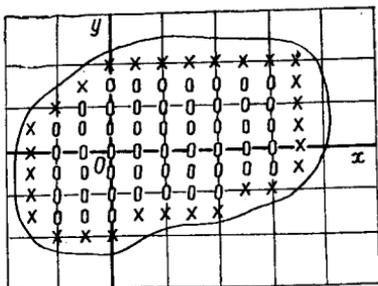


Рис. 8

Для аппроксимации производных выбираем пятиточечный трехслойный шаблон (рис. 7).

Назовем узел  $(x_k, y_i)$  внутренним, если он сам и четыре соседних узла шаблона принадлежат области  $D_h$ . Эту область обозначим  $D_h^0$ . Остальные узлы назовем граничными. Множество граничных узлов обозначим  $\Gamma_h$ . Таким образом,  $D_h = D_h^0 + \Gamma_h$ .

На рис. 8 знаком  $\circ$  помечены внутренние узлы, знаком  $\times$  — граничные узлы.

Аппроксимируем производные  $\partial^2 u / \partial x^2$ ,  $\partial^2 u / \partial y^2$  во внутренних узлах конечно-разностными формулами вида (11.22). Получаем разностную схему

$$\frac{u_{k+1, i} - 2u_{k, i} + u_{k-1, i}}{h^2} + \frac{u_{k, i+1} - 2u_{k, i} + u_{k, i-1}}{l^2} = -f_{k, i}; \quad (11.61)$$

$$k, i = \overline{1, N-1},$$

где

$$u_{k, i} = u(x_k, y_i); \quad f_{k, i} = f(x_k, y_i).$$

Погрешность аппроксимации

$$\delta f_h = \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Big|_{(x_k, y_i)} + \frac{l^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \Big|_{(x_k, y_i)}; \quad (x_k, y_i) \in D_h^0.$$

Причем  $\|\delta f_h\|_{F_h} \leq Mh^2$ , где  $M$  — постоянная величина.

Следовательно, разностная схема (11.61) аппроксимирует уравнение (11.60) с погрешностью порядка  $o(h^2)$ , если  $h = \alpha l$ ,  $1 > \alpha > 0$ , и с погрешностью порядка  $o(l^2)$ , если  $l = \alpha h$ .

Рассмотрим вопросы аппроксимации граничных условий (11.13) — (11.15).

Пусть область  $D$  — прямоугольник  $\{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ .

Будем считать, что функция  $\mu_1(x, y)$  на границе области  $D$  (первая краевая задача) является гладкой функцией. Кроме того, считаем, что в угловых точках прямоугольника граничные условия и правая часть уравнения (11.60) согласованы, тогда граничное условие (11.61) аппроксимируется следующим условием:

$$\begin{aligned} u_{0, i} &= \mu_1(0, i); & u_{N, i} &= \mu_1(N, i); \\ u_{k, 0} &= \mu_1(k, 0); & u_{k, N} &= \mu_1(k, N). \end{aligned} \quad (11.62)$$

Получаем следующую разностную схему:

$$\left. \begin{aligned} u_{k+1, i} - 2(1 + \alpha^2) u_{k, i} + u_{k-1, i} + \alpha^2 (u_{k, i+1} + u_{k, i-1}) = \\ = -h^2 f_{k, i}; \quad k = \overline{1, N-1}; \quad i = \overline{1, N-1}; \\ u_{0, i} = a_i; \quad u_{N, i} = b_i; \quad i = \overline{1, N-1}; \\ u_{k, 0} = c_k; \quad u_{k, N} = d_k; \quad k = \overline{1, N-1}, \end{aligned} \right\} \quad (11.63)$$

где

$$\begin{aligned} a_i &= \mu_1(x_0, y_i); & b_i &= \mu_1(x_N, y_i); \\ c_k &= \mu_1(x_k, y_0); & d_k &= \mu_1(x_k, y_N). \end{aligned}$$

Из разностной схемы (11.63) исключим граничные условия путем внесения их в правую часть уравнения. Полагая в первом уравнении (11.63)  $k = 1$ ,  $k = N - 1$  и  $i = 1$ ,  $i = N - 1$ , получаем:

$$\left. \begin{aligned} 2(1 + \alpha^2) u_{1, i} - u_{2, i} - \alpha^2 (u_{1, i+1} + u_{1, i-1}) &= h^2 f_{1, i} + a_i; \\ 2(1 + \alpha^2) u_{N-1, i} - u_{N-2, i} - \alpha^2 (u_{N-1, i+1} + u_{N-1, i-1}) &= \\ &= h^2 f_{N-1, i} + b_i; \\ -u_{k+1, 1} + 2(1 + \alpha^2) u_{k, 1} - u_{k-1, 1} - \alpha^2 u_{k, 2} &= h^2 f_{k, 1} + \alpha^2 c_k; \\ 2(1 + \alpha^2) u_{k, N-1} - u_{k+1, N-1} - u_{k-1, N-1} - \alpha^2 u_{k, N-2} &= \\ &= h^2 f_{k, N-1} + \alpha^2 d_k; \\ 2(1 + \alpha^2) u_{k, i} - u_{k+1, i} - u_{k-1, i} - \alpha^2 (u_{k, i+1} + u_{k, i-1}) &= \\ &= h^2 f_{k, i}; \quad k, i = \overline{2, N-2}. \end{aligned} \right\}$$

Обозначив

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i &= [u_{1, i}, u_{2, i}, \dots, u_{N-1, i}]^T; \\ \mathbf{f}_i &= [h^2 f_{1, i} + a_i, h^2 f_{2, i}, \dots, h^2 f_{N-2, i}, h^2 f_{N-1, i} + b_i]^T; \\ \mathbf{f}_0 &= \mathbf{c}; \quad \mathbf{f}_N = \mathbf{d}, \end{aligned}$$

получим следующее матричное уравнение:

$$\left. \begin{aligned} -A u_{i+1} + C u_i - B u_{i-1} &= \mathbf{f}_i; \quad j = \overline{1, N-1}; \\ \mathbf{u}_0 &= \mathbf{f}_0; \quad \mathbf{u}_N = \mathbf{f}_N, \end{aligned} \right\} \quad (11.64)$$

где матрицы  $A$ ,  $B$ ,  $C$  имеют вид

$$\begin{aligned} A &= \alpha^2 E; \quad B = \alpha^2 E; \\ C &= \begin{bmatrix} 2(1 + \alpha^2) & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2(1 + \alpha^2) & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2(1 + \alpha^2) & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2(1 + \alpha^2) & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2(1 + \alpha^2) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (11.65)$$

Если граница  $\Gamma$  области  $D$  — произвольная, то, выбрав ближайший к границе  $\Gamma$  узел  $B \in \Gamma_h$  и точку  $M \in \Gamma$ , получим координаты точки  $M$ :  $(x_k - \delta, y_i)$ ,  $0 < \delta < h$ ,  $B(x_k, y_i)$ . По условию (11.61) для узлов  $(k, i) \in \Gamma_h$

$$\begin{aligned} \mu_1(M) &= u(x_k - \delta, y_i) = u(x_k, y_i) - \delta \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(x_k, y_i)}. \end{aligned}$$

Погрешность этой формулы имеет первый порядок относительно  $h$ ,  
 $(\delta = \alpha h, 0 < \alpha < 1)$ .

Поскольку погрешность формулы (11.61) имеет второй порядок, необходимо повысить точность аппроксимации условия (11.63) до второго порядка. Для этого разложим  $u(A)$  и  $u(B)$  в ряд Тейлора с тремя членами:

$$u(B) = \frac{hu(M) + \delta u(A)}{h + \delta} + o(h^2).$$

Отбросим величину  $o(h^2)$ :

$$u_{k,i} = \frac{h\mu_1(M) + \delta u_{k-1,i}}{h + \delta}. \quad (11.66)$$

Аппроксимируем граничное условие (11.14). Обозначим угол между внешней нормалью к границе  $\Gamma$  в точке  $M$  и осью  $Ox$  через  $\gamma$ . По определению

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \gamma + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \gamma. \quad (11.67)$$

Аппроксимируем производные в (11.67) по формуле (11.23):

$$\frac{u_{k+1,i} - u_{k-1,i}}{2h} \cos \gamma + \frac{u_{k,i+1} - u_{k,i-1}}{2l} \sin \gamma = \mu(M), \quad (k, i) \in \Gamma_h. \quad (11.68)$$

Погрешность такой аппроксимации второго порядка относительно  $h$ .

Если область  $D$  ограничена прямоугольником  $\{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ , то угол  $\gamma$  принимает значения либо 0 для прямых  $y = 0$  и  $y = d$ , либо  $\pi/2$  для прямых  $x = 0$ ,  $x = b$ , т. е. граничные условия (11.68) приобретают вид

$$\left. \begin{aligned} u_{1,i} - u_{-1,i} &= 2ha; \quad u_{N+1,i} - u_{N-1,i} = 2hb; \quad j = \overline{0, N}; \\ u_{k,1} - u_{k,-1} &= 2lc; \quad u_{k,N+1} - u_{k,N-1} = 2ld; \quad k = \overline{0, N}. \end{aligned} \right\} (11.69)$$

Исключая из (11.69) значения  $u_{-1,i}$ ,  $u_{N+1,i}$ ,  $u_{k,-1}$ ,  $u_{k,N+1}$  путем подстановки в систему (11.61) значения  $k = 1$ ,  $k = N$  и  $i = 1$ ,  $i = N$ , получаем следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} -\alpha^2 u_{0,i+1} + 2(1 + \alpha^2) u_{0,i} - \alpha^2 u_{0,i-1} - 2u_{1,i} &= h^2 f_{0,i} + 2ha; \\ -\alpha^2 u_{N,i+1} + 2(1 + \alpha^2) u_{N,i} - \alpha^2 u_{N,i-1} - 2u_{N-1,i} &= \\ &= h^2 f_{N,i} + 2hb; \\ -u_{k+1,0} + 2(1 + \alpha^2) u_{k,0} - u_{k-1,0} - 2\alpha^2 u_{k,1} &= h^2 f_{k,0} + 2\alpha hc; \\ -u_{k+1,N} + 2(1 + \alpha^2) u_{k,N} - u_{k-1,N} - 2\alpha^2 u_{k,N-1} &= \\ &= h^2 f_{k,N} + 2\alpha hd; \\ -\alpha^2 u_{k,i+1} + 2(1 + \alpha^2) u_{k,i} - \alpha^2 u_{k,i-1} - u_{k+1,i} - u_{k-1,i} &= \\ &= h^2 f_{k,i}; \quad k, i = \overline{1, N-1}. \end{aligned} \right\}$$

Запишем полученную систему в матричном виде

$$-A_i u_{i+1} + C_i u_i - B_i u_{i-1} = f_i; \quad i = \overline{1, N-1}; \quad (11.70)$$

$$\left. \begin{aligned} C_0 u_0 - B_0 u_1 &= f_0; \\ C_N u_N - B_N u_{N-1} &= f_N. \end{aligned} \right\} \quad (11.71)$$

Матрицы  $A_i$ ,  $C_i$ ,  $B_i$  и векторы  $u_i$ ,  $f_i$  имеют вид:

$$C_i = \begin{bmatrix} 2(1+\alpha^2) & -2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2(1+\alpha^2) & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2(1+\alpha^2) & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2(1+\alpha^2) & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -2 & 2(1+\alpha^2) \end{bmatrix}; \quad (11.72)$$

$$A_i = B_i = \alpha^2 E;$$

$$C_0 = C_N = \begin{bmatrix} -1 & 2(1+\alpha^2) & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2(1+\alpha^2) & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2(1+\alpha^2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{bmatrix};$$

$$B_0 = B_N = 2\alpha^2 E;$$

$$f_i = [h^2 f_{0,i} + 2ha; h^2 f_{1,i}, \dots, h^2 f_{N-1,i}, h^2 f_{N,i} + 2hb]^T;$$

$$f_0 = [h^2 f_{1,0} + 2\alpha hc, h^2 f_{2,0}, \dots, h^2 f_{N-1,0}, h^2 f_{N,0} + 2\alpha hc]^T.$$

Матричное уравнение (11.70) с краевыми условиями может быть решено методом прогонки.

Решение таких уравнений было проиллюстрировано на примере 11.3 решения двумерного уравнения теплопроводности: для каждого из слоев  $i$  это уравнение — стационарное и может быть сведено к уравнению вида (11.70).

### 11.5. РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Рассмотрим сначала одномерное уравнение гиперболического типа, описывающее поперечные колебания однородной струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad 0 < x < b, \quad t > 0, \quad (11.73)$$

где  $f(x, t)$  — известная дважды непрерывно дифференцируемая в области  $D = \{0 \leq x \leq l, 0 < t < T\}$  функция.

В начальный момент  $t = 0$  заданы условия

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = u_1(x) \quad (11.74)$$

Концы струны движутся по заданным законам

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t). \quad (11.75)$$

Функции  $u_0(x)$ ,  $u_1(x)$ ,  $\mu_1(t)$ ,  $\mu_2(t)$  — заданные функции.

Введем в области  $D$  прямоугольную сетку  
 $x_k = kh$ ;  $k = \overline{0, M}$ ;  $h > 0$ ;  $t_j = j\tau$ ;  $j = \overline{0, N}$ ;  
 $\tau > 0$ .

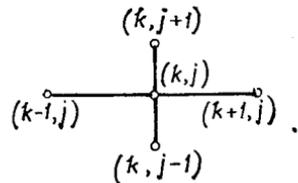


Рис. 9

Рассмотрим трехслойный пятиточечный шаблон (рис. 9).

Заменяем производные, входящие в уравнение (11.73) по формулам (11.22), (11.23). Получаем следующее разностное уравнение

$$\frac{u_k^{i+1} - 2u_k^i + u_k^{i-1}}{\tau^2} - a^2 \frac{u_{k+1}^i - 2u_k^i + u_{k-1}^i}{h^2} = f_k^i, \quad (11.76)$$

$$i = \overline{1, N-1}; \quad k = \overline{1, M-1}.$$

Первое начальное условие (11.74) и краевые условия (11.75) на выбранной сетке удовлетворяются точно. Разностное уравнение (11.76) аппроксимирует уравнение (11.73) со вторым порядком по  $\tau$  и  $h$ . Для того чтобы не нарушать второго порядка аппроксимации задачи (11.73), (11.75), аппроксимируем  $\partial u(x, 0)/\partial t$  по (11.18):

$$u_k^1 - u_k^{-1} = 2\tau\psi_k, \quad k = \overline{0, M}. \quad (11.77)$$

Значение  $u_k^{-1}$  исключим с помощью разностного уравнения (11.76) при  $i = 0$ :

$$u_k^1 - 2(1 - a^2\alpha^2)u_k^0 + u_k^{-1} - a^2\alpha^2(u_{k+1}^0 + u_{k-1}^0) = f_k^0;$$

$$u_k^{-1} = u_k^1 - 2\tau\psi_k, \quad k = \overline{0, M}.$$

Отсюда

$$2u_k^1 + 2(\alpha^2 a^2 - 1)u_k^0 - \alpha^2 a^2(u_{k+1}^0 + u_{k-1}^0) = \tau^2 f_k^0 + 2\tau\psi_k.$$

Поскольку

$$u_k^0 = \varphi_k, \quad k = \overline{0, M},$$

получим:

$$\left. \begin{aligned} u_k^1 &= \tau^2/2 f_k^0 + \tau\psi_k + (1 - \alpha^2 a^2)\varphi_k + a^2\alpha^2/2(\varphi_{k+1} + \varphi_{k-1}); \\ u_k^{i+1} + 2(\alpha^2 a^2 - 1)u_k^i + u_k^{i-1} - \alpha^2 a^2(u_{k+1}^i + u_{k-1}^i) &= \tau^2 f_k^i \\ k &= \overline{1, M-1}; \quad i = \overline{1, N-1}; \\ u_k^0 &= \varphi_k; \quad k = \overline{0, M}; \quad u_0^i = \mu_i; \quad u_M^i = \nu_i; \quad i = \overline{0, N}. \end{aligned} \right\} \quad (11.78)$$

Разностная схема (11.78) аппроксимирует задачу (11.73)—(11.75) со вторым порядком по  $\tau$  и  $h$ . Для обеспечения устойчивости этой схемы, а, значит, сходимости ее решения к точному решению задачи должно выполняться условие

$$r = \tau^2/h^2 < 1/2.$$

Разностная схема (11.78) может быть представлена в виде

$$\left. \begin{aligned} u_k^{i+1} &= 2(1 - \alpha^2 a^2) u_k^i + \alpha^2 a^2 (u_{k+1}^i + u_{k-1}^i) - u_k^{i-1} + \tau^2 f_k^i; \\ & i = \overline{1, N-1}; \quad k = \overline{1, M-1}; \\ & u_k^0 = \varphi_k, \quad k = \overline{0, M}; \\ u_0^1 &= \tau^2 / 2 f_0^0 + \tau \varphi_0 + (1 - \alpha^2 a^2) \varphi_0 + \alpha^2 a^2 / 2 (\varphi_{k+1} + \varphi_{k-1}); \\ & u_0^i = \mu^i; \quad u_M^i = \nu^i; \quad i = \overline{0, N}. \end{aligned} \right\} \quad (11.79)$$

$$(11.80)$$

Разностная схема (11.79), (11.80) позволяет последовательно найти  $u_k^2, u_k^3, \dots, u_k^N$  через значения  $u_k^0, u_k^1$  с учетом краевых условий  $u_0^i = \mu^i, u_M^i = \nu^i$ .

Неявная разностная схема для решения задачи (11.73)—(11.75) может быть получена аналогично схеме, полученной для уравнения теплопроводности.

Рассмотрим уравнение колебаний струны (11.73) с начальными условиями (11.74) и краевыми условиями третьего рода

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} &= \beta_1 u(0, t) - \mu(t); \\ \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} &= \beta_2 u(l, t) - \nu(t). \end{aligned} \right\} \quad (11.81)$$

Для аппроксимации  $\partial u(x, 0) / \partial t$  воспользуемся формулой (11.78).

Аппроксимируем краевые условия следующими разностными уравнениями со вторым порядком относительно  $h$ :

$$\frac{u_1^i - u_{-1}^i}{2h} = \beta_1 u_0^i - \mu^i; \quad \frac{u_{M+1}^i - u_{M-1}^i}{2h} = \beta_2 u_M^i - \nu^i,$$

где

$$\mu^i = \mu(t_i), \quad \nu^i = \nu(t_i).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} u_{-1}^i &= u_1^i - 2h\beta_1 u_0^i + 2h\mu^i; \\ u_{M+1}^i &= u_{M-1}^i + 2h\beta_2 u_M^i - 2h\nu^i, \quad i = \overline{0, N}. \end{aligned} \quad (11.82)$$

Рассмотрим неявный трехслойный шаблон (рис. 10). С учетом выбранного шаблона уравнение (11.73) аппроксимируем схемой Кранка—Никольсона:

$$\frac{u_k^{i+1} - 2u_k^i + u_k^{i-1}}{\tau^2} + A \left( \frac{u_k^{i+1} + u_k^{i-1}}{2} \right) = f_k^i. \quad (11.83)$$

Начальные условия аппроксимируем по (11.78). Уравнение (11.74) заменяем следующим разностным уравнением:

$$\begin{aligned} \frac{u_k^{i+1} - 2u_k^i + u_k^{i-1}}{\tau^2} - \frac{a^2}{2h^2} (u_{k-1}^{i+1} - 2u_k^{i+1} + u_{k+1}^{i+1} + u_{k-1}^{i-1} - \\ - 2u_k^{i-1} + u_{k+1}^{i-1}) = f_k^i. \end{aligned} \quad (11.84)$$

Исключим из (11.82)  $u_{-1}^i$ , а из (11.82') —  $u_{M+1}^i$ , подставив (11.82) в (11.84) при  $k = 0$  и  $k = M$  соответственно  $k = 0$ :

$$\begin{aligned} & u_0^{i+1} (1 + a^2 \gamma^2) + (1 + a^2 \gamma^2) u_0^{i-1} - \\ & - 2u_0^i - a^2 \gamma^2 / 2 (u_{-1}^{i+1} + u_{-1}^{i-1}) - \\ & - a^2 \gamma^2 / 2 (u_1^{i+1} + u_1^{i-1}) = \tau^2 f_0^i; \end{aligned}$$

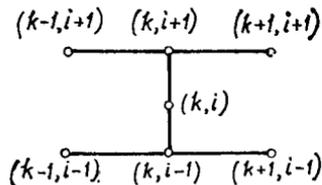


Рис. 10

или

$$\begin{aligned} & [1 + a^2 \gamma^2 (1 + h\beta_1)] u_0^{i+1} + [1 + a^2 \gamma^2 (1 - h\beta_1)] u_0^{i-1} - 2u_0^i = \\ & = \tau^2 f_0^i + a^2 \gamma^2 (u_1^{i+1} + u_1^{i-1}) + a^2 \tau^2 / h (\mu^{i+1} + \mu^{i-1}). \end{aligned}$$

Для  $k = M$ :

$$\begin{aligned} & (1 + a^2 \gamma^2) (u_M^{i+1} + u_M^{i-1}) - 2u_M^i - a^2 \gamma^2 / 2 (u_{M-1}^{i+1} + u_{M-1}^{i-1}) - \\ & - a^2 \gamma^2 / 2 (u_{M+1}^{i+1} + u_{M+1}^{i-1}) = \tau^2 f_M^i. \end{aligned}$$

Подставив (11.82) в это уравнение, получим

$$\begin{aligned} & [1 + a^2 \gamma^2 (1 - h\beta_2)] u_M^{i+1} + [1 + a^2 \gamma^2 (1 + h\beta_2)] u_M^{i-1} - 2u_M^i = \\ & = \tau^2 f_M^i - a^2 \tau^2 / h (\nu^{i+1} + \nu^{i-1}) + a^2 \gamma^2 (u_{M-1}^{i+1} + u_{M-1}^{i-1}). \end{aligned}$$

С учетом полученных уравнений разностная схема, аппроксимирующая задачу (11.75), (11.74), (11.81) со вторым порядком точности по  $\tau$  и  $h$ , приобретает вид  $r_1 = 1 + a^2 \gamma^2$ ;  $r_2 = a^2 \gamma^2 / 2$ :

$$\begin{aligned} & r_1 (u_k^{i+1} + u_k^{i-1}) - r_2 (u_{k-1}^{i+1} + u_{k+1}^{i+1}) - r_2 (u_{k-1}^{i-1} + u_{k+1}^{i-1}) - 2u_k^i = \\ & = \tau^2 f_k^i; \quad i = \overline{1, N-1}; \quad k = \overline{1, M-1}; \end{aligned} \quad (11.85)$$

$$u_k^0 = \varphi_k, \quad k = \overline{0, M}; \quad (11.86)$$

$$\begin{aligned} & [1 + r_2 (1 - h\beta_1)] u_0^{i-1} - 2u_0^i + [1 + r_2 (1 + h\beta_1)] u_0^{i+1} - \\ & - r_2 (u_1^{i+1} + u_1^{i-1}) = \tau^2 f_0^i + a^2 \tau^2 / h (\mu^{i+1} + \mu^{i-1}); \end{aligned} \quad (11.87)$$

$$\begin{aligned} & [1 + r_2 (1 + h\beta_2)] u_M^{i-1} - 2u_M^i + [1 + r_2 (1 - h\beta_2)] u_M^{i+1} - \\ & - r_2 (u_{M-1}^{i+1} + u_{M-1}^{i-1}) = \tau^2 f_M^i - a^2 \tau^2 / h (\nu^{i+1} + \nu^{i-1}); \quad i = \overline{1, N-1}; \end{aligned} \quad (11.88)$$

$$\begin{aligned} & -r_2 u_{k-1}^1 + r_1 u_k^1 - r_2 u_{k+1}^1 = \tau^2 / 2 f_k^0 - \varphi_k + \tau r_1 \varphi_k - \\ & \tau_2^2 a^2 / 2h (\psi_{k-1} + \psi_{k+1}); \quad k = \overline{1, M-1}. \end{aligned} \quad (11.89)$$

Представим систему уравнений (11.85)–(11.89) в матричном виде

$$-A_k \mathbf{u}_{k-1} + C_k \mathbf{u}_k - B_k \mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{F}_k; \quad k = \overline{0, M}, \quad (11.90)$$

где

$$\mathbf{F}_k = [-\tau^2 f_k^1, -\tau^2 f_k^2, \dots, -\tau^2 f_k^{N-1}]^T; \quad \mathbf{u}_k = [u_k^1, u_k^2, \dots, u_k^{N-1}]^T;$$

$$A_k = B_k = \frac{a^2 \gamma^2}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad k = \overline{0, M};$$

$$C_k = \begin{bmatrix} -2 & r_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ r_1 & -2 & r_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_1 & -2 & r_1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & r_1 & -2 & r_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & r_1 & -2 \end{bmatrix};$$

$$C_0 = \begin{bmatrix} r_1 = 1 + a^2\gamma^2; \\ 2 & \sigma_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \delta_1 & 2 & \sigma_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \delta_1 & 2 & \sigma_1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \delta_1 & 2 \end{bmatrix};$$

$$C_M = \begin{bmatrix} 2 & \delta_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \sigma_2 & 2 & \delta_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 2 & \delta_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \sigma_2 & 2 \end{bmatrix};$$

$$\sigma_i = 1 + a^2\gamma^2(1 + h\beta_i); \quad \delta_i = 1 + a^2\gamma^2(1 - h\beta_i); \quad i = \overline{1, 2}.$$

$$F_0 = [-\tau^2 f_0^i - a^2\gamma^2 h(\mu^{i+1} + \mu^{i-1})]_1^{N-1};$$

$$F_M = [-\tau^2 f_M^i + a^2\gamma^2(\nu^{i+1} + \nu^{i-1})]_1^{N-1}.$$

Уравнение (11.90) решается методом прогонки.

Решение двумерных уравнений гиперболического типа рассмотрим на примере задачи о колебании мембраны с периодическими относительно области  $D = \{0 < x < 1, 0 < y < 1\}$  начальными условиями:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( a^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( a^2 \frac{\partial u}{\partial y} \right); \quad (11.91)$$

$$u(x, y, 0) = p(x, y); \quad \frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} = q(x, y), \quad (11.92)$$

где  $a^2 = a^2(x, y)$  — квадрат скорости распространения возмущений;  $p(x, y)$ ,  $q(x, y)$  — заданные функции.

Представим уравнение (11.91) к симметрической системе уравнений первого порядка:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} - a \frac{\partial u}{\partial x} &= 0; \\ \frac{\partial w}{\partial t} - a \frac{\partial u}{\partial y} &= 0; \\ \frac{\partial u}{\partial t} - \left( \frac{\partial (av)}{\partial x} + \frac{\partial (aw)}{\partial y} \right) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (11.93)$$

Выбираем следующие начальные условия:

$$v^0 = v^0(x, y); \quad w^0 = w^0(x, y); \quad u^0 = p(x, y).$$

Функции  $v^0$  и  $w^0$  выбираются с учетом второго условия (11.92):

$$\frac{\partial (av^0)}{\partial x} + \frac{\partial (aw^0)}{\partial y} = q(x, y). \quad (11.94)$$

Например,

$$\begin{aligned} \omega^0(x, y, 0) &= 0; \\ \frac{\partial (av^0)}{\partial x} &= q(x, y) + C. \end{aligned}$$

Запишем систему в матричном виде

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{g}, \quad (11.95)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & -a \frac{\partial}{\partial y} \\ -\frac{\partial}{\partial x} a & -\frac{\partial}{\partial y} a & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{u} = [v \ w \ u]^T; \quad \mathbf{g} = [0 \ 0 \ g]^T;$$

$$\mathbf{u}^0 = [v^0 \ w^0 \ p]^T. \quad (11.96)$$

Сформулированная задача имеет единственное решение, поскольку  $(\mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0$ .

Рассмотрим матрицы

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\partial}{\partial x} a & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial y} a \\ 0 & -\frac{\partial}{\partial y} a & 0 \end{bmatrix}.$$

Очевидно,  $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$ .

Кроме того,  $(\mathbf{A}_1\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0$ ;  $(\mathbf{A}_2\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0$ .

Для решения задачи (11.95), (11.96) применим метод покомпонентного расщепления, который приводит к абсолютно устойчивым схемам второго порядка точности.

Аппроксимируем задачу (11.95) на каждом слое  $t_i \leq t \leq t_{i+1}$  по схеме Кранка — Никольсона:

$$\left. \begin{aligned} \frac{u^{i+1/2} - u^i}{\tau} + \mathbf{A}_1 \left( \frac{u^{i+1/2} + u^i}{2} \right) &= 0; \\ \frac{u^{i+1} - u^{i+1/2}}{\tau} + \mathbf{A}_2 \left( \frac{u^{i+1} + u^{i+1/2}}{2} \right) &= g^i. \end{aligned} \right\} \quad (11.97)$$

Записав эти уравнения в скалярной форме, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{v^{i+1/2} - v^i}{\tau} &= a \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u^{i+1/2} + u^i}{2} \right); \\ \frac{w^{i+1/2} - w^i}{\tau} &= 0; \end{aligned}$$

$$\frac{v^{i+1} - v^{i+1/2}}{\tau} = 0;$$

$$\frac{w^{i+1} - w^{i+1/2}}{\tau} = a \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{u^{i+1} + u^{i+1/2}}{2} \right);$$

$$\frac{u^{i+1/2} - u^i}{\tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left( a \frac{v^{i+1/2} + v^i}{2} \right);$$

$$\frac{u^{i+1} - u^{i+1/2}}{\tau} = \frac{\partial}{\partial y} \left( a \frac{w^{i+1} + w^{i+1/2}}{2} \right) + g^i.$$

Так как  $w^{i+1/2} = w^i$  и  $v^{i+1} = v^{i+1/2}$ , то получаем

$$\frac{v^{i+1} - v^i}{\tau} = a \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u^{i+1/2} + u^i}{2} \right);$$

$$\frac{u^{i+1/2} - u^i}{\tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left( a \frac{v^{i+1} + v^{i+1/2}}{2} \right);$$

$$\frac{w^{i+1} - w^i}{\tau} = a \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{u^{i+1} + u^{i+1/2}}{2} \right);$$

$$\frac{u^{i+1} - u^{i+1/2}}{\tau} = \frac{\partial}{\partial y} \left( a \frac{w^{i+1} + w^i}{2} \right) + g^{i+1/2}.$$

Аппроксимируя производные по  $x$  и  $y$  конечно-разностными формулами вида (11.22) и (11.23), получим следующую систему разностных уравнений:

$$\frac{v_{k,l}^{i+1} - v_{k,l}^i}{\tau} = \frac{a_{k,l}}{2h} (u_{k,l}^{i+1/2} + u_{k,l}^i - u_{k-1,l}^{i+1/2} - u_{k-1,l}^i);$$

$$\frac{u_{k,l}^{i+1} - u_{k,l}^i}{\tau} = \frac{1}{2h} [a_{k+1,l} (v_{k+1,l}^{i+1} + v_{k+1,l}^i) - a_{k,l} (v_{k,l}^{i+1} + v_{k,l}^i)];$$

$$\frac{w_{k,l}^{i+1} - w_{k,l}^i}{\tau} = \frac{a_{k,l}}{2h} (u_{k,l}^{i+1} - u_{k-1,l}^{i+1} + u_{k,l}^{i+1/2} - u_{k-1,l}^{i+1/2});$$

$$\frac{u_{k,l}^{i+1} - u_{k,l}^{i+1/2}}{\tau} = \frac{1}{2h} [a_{k,l+1} (w_{k,l+1}^{i+1} + w_{k,l+1}^i) - a_{k,l} (w_{k,l}^{i+1} + w_{k,l}^i)] + g_{k,l}^{i+1/2}.$$

Исключим из этой системы неизвестные величины  $v_{k,l}^{i+1}$  и  $w_{k,l}^{i+1}$ :

$$u_{k,l}^{i+1/2} - u_{k,l}^i = \frac{\tau^2}{4h^2} [a_{k+1,l}^2 (u_{k+1,l}^{i+1/2} + u_{k+1,l}^i) - (a_{k+1,l}^2 + a_{k,l}^2) (u_{k,l}^{i+1/2} + u_{k,l}^i) + a_{k,l}^2 (u_{k-1,l}^{i+1/2} + u_{k-1,l}^i)] + \frac{\tau}{h} (a_{k+1,l} v_{k+1,l}^i - a_{k,l} v_{k,l}^i); \quad (11.98)$$

$$u_{k,l}^{i+1} - u_{k,l}^{i+1/2} = \frac{\tau^2}{4h^2} [a_{k,l+1}^2 (u_{k,l+1}^{i+1} + u_{k,l+1}^{i+1/2}) - (a_{k,l+1}^2 + a_{k,l}^2) (u_{k,l}^{i+1} + u_{k,l}^{i+1/2}) + a_{k,l}^2 (u_{k,l-1}^{i+1} + u_{k,l-1}^{i+1/2})] + \tau g_{k,l}^{i+1/2} + \frac{\tau}{h} (a_{k,l+1} w_{k,l+1}^i - a_{k,l} w_{k,l}^i). \quad (11.99)$$

Рассмотрим случай, когда на границе области  $D$  задано условие

$$u(x, y, t)|_{\Gamma} = 0. \quad (11.100)$$

Тогда при проектировании на сеточную область  $\partial D_h \times D_\tau$

$$u_{0, l}^i = u_{N, l}^i, \quad l = 0; \quad u_{k, 0}^i = u_{k, N}^i = 0.$$

В результате абсолютно устойчивая (использование схемы Кранка — Никольсона) разностная схема, аппроксимирующая задачи (11.91), (11.92), (11.100), приобретает вид:

$$(b_{k+1, l}^2 + b_{k, l}^2) \varphi_{k, l}^{i+1/2} - b_{k+1, l}^2 \varphi_{k+1, l}^{i+1/2} - b_{k, l}^2 \varphi_{k-1, l}^{i+1/2} = \\ = 2u_{k, l}^i + 2b_{k+1, l} v_{k+1, l}^i - 2b_{k, l} v_{k, l}^i, \quad (11.101)$$

$$(b_{k, l+1}^2 + b_{k, l}^2) \varphi_{k, l}^{i+1} - b_{k, l+1}^2 \varphi_{k, l+1}^{i+1} - b_{k, l}^2 \varphi_{k, l-1}^{i+1} = \tau g_{k, l}^{i+1/2} + \\ + 2u_{k, l}^{i+1/2} + 2b_{k, l+1} \omega_{k, l+1}^i - 2b_{k, l} \omega_{k, l}^i, \quad l = \overline{1, M-1}; \quad (11.102)$$

$$v_{k, l}^{i+1} = v_{k, l}^i + b_{k, l} (\varphi_{k, l}^{i+1/2} - \varphi_{k-1, l}^{i+1/2}); \quad (11.103)$$

$$\omega_{k, l}^{i+1} = \omega_{k, l}^i + b_{k, l} (\varphi_{k, l}^{i+1} - \varphi_{k-1, l}^{i+1}); \quad (11.104)$$

$$\omega_{k, l}^0 = 0; \quad v_{k, l}^0 = \frac{1}{a_{k, l}} \int q(x, y_l) dx; \quad (11.105)$$

$$u_{k, l}^0 = p_{k, l}; \quad k, l = \overline{0, M}, \quad (11.106)$$

где

$$b_{k, l} = \frac{\tau}{2h} a_{k, l}; \quad (11.107)$$

$$\varphi_{k, l}^{i+1/2} = u_{k, l}^{i+1/2} + u_{k, l}^i; \\ \varphi_{k, l}^{i+1} = u_{k, l}^{i+1} + u_{k, l}^{i+1/2}. \quad (11.108)$$

Вычислив начальные значения по (11.105), (11.106), найдем значения  $\varphi_{k, l}^{i+1/2}$  на  $i$ -м слое, затем по (11.103) значения  $v_{k, l}^{i+1}$  по (11.102) —  $\varphi_{k, l}^{i+1}$  и  $\omega_{k, l}^{i+1}$  — по (11.104).

Системы уравнений (11.101), (11.102) решаем методом прогонки. Для этого представим их в виде

$$\varphi_{k, l}^{i+1/2} = c_{k, l}^{i+1/2} \varphi_{k+1, l}^{i+1/2} + d_{k, l}^{i+1/2}; \quad k = N-1, N-2, \dots, 1; \quad (11.109)$$

и

$$\varphi_{k, l}^{i+1} = c_{k, l}^{i+1} \varphi_{k, l+1}^{i+1} + d_{k, l}^{i+1}; \quad l = N-1, N-2, \dots, 1, \quad (11.110)$$

где

$$c_{k, l}^{i+1/2} = r_{k, l}^{i+1/2} b_{k+1, l}^2; \\ r_{k, l}^{i+1/2} = 1/[1 + b_{k+1, l}^2 + b_{k, l}^2(1 - c_{k-1, l}^{i+1/2})]; \\ d_{k, l}^{i+1/2} = r_{k, l}^{i+1/2} [b_{k, l}^2 d_{k-1, l}^{i+1/2} - 2b_{k, l} v_{k, l}^i + \\ + 2u_{k, l}^i + 2b_{k+1, l} v_{k+1, l}^i], \quad l, k = \overline{1, M}, \quad (11.111)$$

при

$$c_{0, l}^{i+1/2} = 0; \quad d_{0, l}^{i+1/2} = 0; \quad c_{k, 0}^{i+1} = 0; \quad d_{k, 0}^{i+1} = 0; \\ c_{k, l}^{i+1} = r_{k, l}^{i+1} b_{k, l+1}^2; \quad r_{k, l}^{i+1} = 1/[1 + b_{k, l+1}^2 + b_{k, l}^2(1 - c_{k, l-1}^{i+1})]; \\ d_{k, l}^{i+1} = r_{k, l}^{i+1} [b_{k, l}^2 d_{k, l-1}^{i+1} + \tau g_{k, l}^{i+1/2} - 2b_{k, l} \omega_{k, l}^i + \\ + 2u_{k, l}^{i+1/2} + 2b_{k, l+1} \omega_{k, l+1}^i]; \quad l, k = \overline{1, M-1}. \quad (11.112)$$

Таким образом, численное решение задач (11.91), (11.92), (11.100) сводится к реализации систем уравнений (11.109), (11.110), (11.103), (11.104), в которой коэффициенты  $c_{k, l}$ ,  $d_{k, l}$  вычисляются по (11.111) — (11.112).

Ввиду громоздкости формул рассмотрим лишь решение конкретной задачи в приложении.

### 11.6. МЕТОД ГАЛЕРКИНА

Рассмотрим линейное уравнение

$$Lu = a(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2d(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + 2e(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + g(x, y)u = f(x, y), \quad (11.113)$$

где  $a, b, c, d, e, f, g$  — функции, непрерывные в области  $D$ , ограниченной контуром  $\Gamma$ .

Для определенности будем считать, что уравнение (11.113) имеет эллиптический вид.

Рассмотрим первую краевую задачу (задачу Дирихле):

$$u|_{\Gamma} = \varphi(Q), \quad Q \in \Gamma. \quad (11.114)$$

Поставим задачу нахождения функции  $u(x, y)$ , удовлетворяющей в  $D$  уравнению (11.113), а на контуре  $\Gamma$  — граничному условию (11.114).

Введем в рассмотрение две системы функций:

$$\{\varphi_k(x, y)\}; \quad \{\psi_k(x, y)\}; \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Выбор функций  $\varphi_k(x, y)$ ,  $\psi_k(x, y)$  связывается с видом уравнения (11.113) и граничного условия.

На функции  $\varphi_k(x, y)$ ,  $\psi_k(x, y)$  накладываются следующие условия:

- 1) функции  $\psi_k(x, y)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , непрерывны в  $D$ ;
- 2) функции  $\psi_k(x, y)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , образуют на классе непрерывных в  $D$  функций замкнутую систему функций, т. е. из выполнения условия

$$\iint_D F(x, y) \psi_k(x, y) dx dy = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где  $F(x, y)$  — некоторая непрерывная в  $D$  функция, следует, что  $F(x, y) \equiv 0$ ;

- 3) функции  $\varphi_k(x, y)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , дважды дифференцируемы в  $D$ ;

4) при любом конечном  $n$  функции  $\varphi_1(x, y)$ ,  $\varphi_2(x, y)$ ,  $\dots$ ,  $\varphi_n(x, y)$  линейно независимы в  $D$ ;

5) функция  $\varphi_0(x, y)$  удовлетворяет граничному условию (11.114):

$$\varphi_0(x, y)|_{\Gamma} = \mu(Q), \text{ а } \varphi_k|_{\Gamma} = 0, \quad k = \overline{1, n}.$$

Будем искать приближенное решение задачи (11.113), (11.114) в виде

$$u_n(x, y) = \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(x, y), \quad a_0 = 1, \quad (11.115)$$

где  $a_k$  — неизвестные числовые параметры.

Поставим в  $Lu$  вместо  $u$  приближенное решение  $u_n$ , определяемое по (11.115). Тогда

$$L(u_n) = f.$$

Это равносильно условию

$$\iint_D [L(u_n) - f] \psi_k(x, y) dx dy = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (11.116)$$

Определим коэффициенты  $a_k, k = \overline{1, n}$ , из условий ортогональности  $L(u_n) - f$  к первым  $n$  функциям  $\psi_k(x, y), k = \overline{0, n-1}$ .

Запишем (11.116) в виде

$$\sum_{i=1}^n A_{ki} a_i + d_k = 0, \quad k = \overline{0, n-1}, \quad (11.117)$$

где

$$A_{ki} = \iint_D L(\varphi_i) \psi_k dx dy; \quad (11.118)$$

$$d_k = \iint_D [L(\varphi_0) - f] \psi_k dx dy. \quad (11.119)$$

Описанный метод приближенного решения задач (11.113), (11.114) в виде (11.115) называется методом моментов.

Метод Галеркина является частным случаем метода моментов. В нем система функций  $\{\varphi_k(x, y)\}$  выбирается так же, как в методе моментов, а функции  $\psi_k(x, y)$  определяются по правилу

$$\psi_k(x, y) = \varphi_{k+1}(x, y), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (11.120)$$

#### Задания для самостоятельной работы

1. Найти решение смешанной задачи для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 < t \leq T$$

при заданных начальных условиях

$$u(x, 0) = \varphi(x)$$

и граничных условиях

$$u(0, t) = \mu_1(t); \quad u(1, t) = \mu_2(t).$$

При этом добиться точности  $\Delta$ .

$N$	$\varphi(x)$	$\mu_1(t)$	$\mu_2(t)$	$h$	$\Delta$
1	$x(x+1)$	0	$2t+1$	0,1	0,01
2	$1 + \lg(x+1/2)$	$1+t$	1	1	0,01
3	$\sin 2x$	$2t$	1	1	0,005
4	$\sin(0,1(5x+1))$	$t+0,1$	0,5	1	0,01
5	$2x(1-x)+0,5$	$2t$	0,8	1	0,01
6	$\cos(2x+0,2)$	1	$0,2t$	1	0,005
7	$\lg(2,7-x)$	$-3t$	0,4	1	0,01
8	$\lg(1,5+2x)$	0,2	$3(t+0,2)$	1	0,005
9	$(x+1)^2$	$2t$	0	1	0,01
10	$1+2x(1-x)$	$-6t+1$	1,5	1	0,01
11	$2\cos(x+0,5)$	0,8	$0,9+3t$	2	0,01
12	$x \sin \pi x$	$2t$	0	2	0,01
13	$x(1-x)+0,5$	$3t-1$	0,6	2	0,01
14	$x(1-x)+0,5$	0,2	$2(t+0,2)$	2	0,01
15	$x(0,8-x)+0,5$	$3t-1,5$	$t$	2	0,01
16	$\cos(x+0,8)$	$6t+0,9$	0,5	1	0,005
17	$\cos(\pi x+0,3)$	$t-0,5$	$t$	1	0,01
18	$(x+1) \ln x$	0	$2t$	2	0,01
19	$\sqrt{x^2+1}$	$t+1$	0	2	0,01
20	$x^2-2x+0,5$	$2t$	1	3	0,05

2. Найти решение смешанной задачи для уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -f(x, y)$$

в области

$$D = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\},$$

удовлетворяющее краевому условию

$$\left[ \frac{\partial u}{\partial n} + u \right]_{\Gamma} = \mu(x, y) = |x| + |y|,$$

с точностью  $\Delta = 0,05$

$$\Gamma = \frac{x^2}{k^2} + \frac{y^2}{2} = 1.$$

$N$	1	2	3	4	5
$f(x, y)$	1	$xy$	$\sin x$	0	$x^2 + y^2$
$N$	6	7	8	9	10
$f(x, y)$	$x+y$	$2x-y$	0	$\cos y + x$	0
$N$	11	12	13	14	15
$f(x, y)$	$\ln(x+y+2)$	$2xy$	$\cos y + x$	0	$x^2 + y^2$
$N$	16	17	18	19	20
$f(x, y)$	0	$e^{-x}$	2	0	$e^{-xy}$

3. Найти решение смешанной задачи для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t)$$

в области

$$D = \{0 \leq x \leq 1; 0 < t \leq T\}$$

с начальными условиями

$$u(x, 0) = \varphi_0(x); \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \varphi_1(x)$$

и граничными условиями

$$u(0, t) = \mu_1(t); \quad u(1, t) = \mu_2(t).$$

При этом добиться точности  $\Delta$ .

$N$	$f(x, t)$	$\varphi_0(x)$	$\varphi_1(x)$	$\mu_1(t)$	$\mu_2(t)$	$\tau$	$\Delta$
1	$x(x+t)$	$x+1$	$\cos \pi x$	$2t$	$-1$	0,5	0,05
2	$\cos(x+t)$	$\cos \pi x/2$	$1+2x$	0	$2t+1$	0,5	0,05
3	$\cos(\pi x/2+t)$	$2x(x+1)$	$2 \sin x$	0,3	$4+t$	1	0,05
4	$t + \sin x$	$\ln x$	0	$t$	0	1	0,10
5	$e^{-t} \sin x$	$x \sin \pi x$	$(x+1)^2$	$2t$	0	1	0,10
6	$e^{-t} \cos x$	$3x(1-x)$	$\cos x$	0	$2t$	0,5	0,05
7	$x^2 \sin t$	$2x^2$	$\cos 2x$	$t^2$	1	0,5	0,05
8	$\ln(x+t+1)$	$(1-x) \cos x$	$2x+1$	$t+1/2$	0	0,5	0,01
9	$xt + e^{-x}$	$x^2+1$	$\sin 2x$	0	$2t+1$	0,5	0,05
10	$te^{-x}$	$x^2 \cos \pi x$	$x^2+1$	$t^2+0,5$	$t$	1	0,10

## Глава 12. УПРОЩЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

### 12.1. ПРИВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

Пусть имеется система дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + f(t), \quad (12.1)$$

где  $x(t)$  — вектор-столбец переменных состояния;  $A = [a_{ij}]_1^n$  — матрица коэффициентов;  $f(t)$  — вектор-столбец возмущений.

Приведение (12.1) к каноническому виду значительно упрощает ее решение.

Для всякой квадратной матрицы существует матрица преобразования  $T$  с не равным нулю определителем такая, что

$$A = TIT^{-1}, \quad (12.2)$$

где

$$I = [I_{\rho_1}(\lambda_1), I_{\rho_2}(\lambda_2), \dots, I_{\rho_m}(\lambda_m)].$$

$$I_{\rho_i}(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_i & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda_i \end{bmatrix},$$

где  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m, m \leq n$  — характеристические числа матрицы  $A$ , удовлетворяющие уравнению

$$|A - \lambda E| = 0, \quad (12.3)$$

где  $\rho_i$  — кратность чисел  $\lambda_i$ , причем

$$\rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_m = n.$$

Для нахождения матрицы  $I$  необходимо определить характеристические числа  $\lambda_i$ , решив уравнение (12.3).

Матрица  $I$  является в общем случае квазидиагональной с клетками Жордана, стоящими на главной диагонали матрицы  $I$ , соответствующими корням  $\lambda_i$  кратности  $\rho_i$ . Если все корни (12.3) различны, то матрица  $I$  превращается в диагональную матрицу размерности  $n \times n$ .

Введем новые неизвестные  $y_i$  матрицей преобразования

$$\begin{aligned} T &= [t_{ik}]; \\ x &= Ty; \\ y &= \sum_{i=1}^n t_{ki} x_i. \end{aligned} \quad (12.4)$$

Рассмотрим однородное матричное уравнение

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t). \quad (12.5)$$

Подставим преобразование (12.4) в (12.5)

$$\begin{aligned} T \frac{dy(t)}{dt} &= ATy(t); \\ T^{-1} T \frac{dy(t)}{dt} &= T^{-1} ATy(t) \end{aligned}$$

и

$$\frac{dy(t)}{dt} = T^{-1} ATy(t) = Iy(t). \quad (12.6)$$

Для возврата к старым переменным после решения уравнения (12.6) найдем матрицу преобразования

$$\begin{aligned} I &= T^{-1} AT; \\ AT &= TI. \end{aligned} \quad (12.7)$$

Решив матричное уравнение (12.7), найдем элементы  $t_{ik}$  матрицы  $T$ . Если характеристические числа — простые, т. е. матрица  $A$  — симметричная, то столбцами матрицы  $T$  являются собственные векторы, соответствующие  $\lambda_i, i = 1, n$  (см. гл. 5).

При наличии кратных корней матрица преобразования может быть найдена с помощью процедуры ортогонализации Грама—Шмидта.

В случае комплекснозначных корней  $\lambda_i = a_i \pm jb_i, i = 1, [n/2]$  матрица  $I$  может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= [I_{\rho_1}(a_1), I_{\rho_2}(a_2), \dots, I_{\rho_m}(a_m)] + j [b_1 E_{\rho_1}, b_2 E_{\rho_2}, \dots, b_m E_{\rho_m}] = \\ &= I(a) + jB, \end{aligned}$$

где

$$E_{\rho t} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}^{\rho t}.$$

Поскольку матрица  $A$  вещественная,  $\lambda_i$  попарно сопряжены, то

$$\begin{aligned} I_p(a) b E_p &\doteq b E_p I_p(a); \\ I(a) B &= B I(a). \end{aligned}$$

Для преобразования в канонический вид (12.1) необходимо умножить вектор возмущающих воздействий на матрицу  $T^{-1}$ :

$$\begin{aligned} \frac{d(Ty)}{dt} &= ATy + f(t); \\ \frac{dy}{dt} &= I(a)y + T^{-1}f(t). \end{aligned}$$

Так как

$$\frac{dT}{dt} = TA - I(a)T,$$

то

$$I(a) = T^{-1}AT - T^{-1}\frac{dT}{dt}$$

и

$$I(a) = T^{-1}AT - T^{-1}AT + T^{-1}TI(a).$$

## 12.2. УПРОЩЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПУТЕМ ПОНИЖЕНИЯ ИХ ПОРЯДКА

Основными требованиями, предъявляемыми к методам упрощения дифференциальных уравнений, являются требования простоты и универсальности к аппарату, осуществляющему приближения к исходному дифференциальному уравнению с наперед заданной точностью. Этим требованиям более всего удовлетворяет аппарат цепных дробей. Требованию точности аппарат цепных дробей удовлетворяет в высокой степени: в определенном смысле приближенные значения функций, получаемые с применением этого аппарата, обладают свойствами наилучших приближений.

Простейшей цепной дробью называется выражение вида

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \dots}}. \quad (12.8)$$

При наиболее общем подходе  $a_i, b_i, i = 0, 1, \dots$  означают независимые переменные. Будем считать  $a_i, b_i, i = 1, 2, \dots$  — положительными числами;  $b_0$  — любое вещественное число. Если количество этих элементов конечно, то дробь (12.8) называется конечной, или  $n$ -членной цепной дробью.

Запишем (12.8) в более компактной форме

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n} + \dots, \quad (12.9)$$

а конечную цепную дробь в виде

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n}. \quad (12.10)$$

Всякая конечная цепная дробь вида (12.10) как результат конечного числа рациональных действий над ее элементами есть рациональная функция этих элементов и может быть представлена как отношение двух многочленов:

$$\frac{P_n(a_1, a_2, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_n)}{Q_n(a_1, a_2, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_n)},$$

которая называется  $n$ -й подходящей дробью цепной дроби (12.9).

Числитель и знаменатель подходящей дроби определяются по рекуррентным соотношениям

$$P_n = b_n P_{n-1} + a_n P_{n-2}; \quad (12.11)$$

$$Q_n = b_n Q_{n-1} + a_n Q_{n-2}, \quad n = 1, 2, \dots. \quad (12.12)$$

При этом полагают

$$\frac{P_0}{Q_0} = \frac{1}{0}; \quad \frac{P_1}{Q_1} = \frac{b_0}{1}. \quad (12.13)$$

Разность между соседними подходящими дробями

$$\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = (-1)^{n+1} \frac{\prod_{i=1}^n a_i}{Q_{n-1} Q_n}, \quad n = 1, 2, \dots. \quad (12.14)$$

Приведем некоторые свойства цепных дробей.

Умножение элементов  $a_k, b_k, a_{k+1}$  на любое конечное число  $p_k, k = 1, 2, \dots$ , отличное от нуля, не меняет значения цепной дроби

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \dots + \frac{a_k}{b_k} + \dots + \frac{a_n}{b_n} = b_0 + \frac{P_1 a_1}{P_1 b_1} + \frac{P_1 P_2 a_2}{P_2 b_2} + \dots + \frac{P_{n-1} P_n a_n}{P_n b_n} + \dots.$$

Положим  $P_n = \frac{1}{a_n}$ . Тогда

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \dots + \frac{a_n}{b_n} + \dots = \frac{c_1}{1} + \frac{c_2}{1} + \dots + \frac{c_n}{1} + \dots, \quad (12.15)$$

где

$$c_1 = \frac{a_1}{b_1}, \quad c_k = \frac{a_k}{b_{k-1} b_k}, \quad k = 2, 3, \dots.$$

*Операция сжатия.*

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \dots + \frac{a_n}{b_n} = b_0 + \frac{a_1 b_2}{b_1 b_2 + a_2} - \frac{a_2 a_3 b_4}{(b_2 b_3 + a_3) b_4 + b_2 a_4} - \dots - \frac{a_{2n-2} a_{2n-1} b_{2n-4} b_{2n}}{(b_{2n-2} b_{2n-1} + a_{2n-1}) b_{2n} + b_{2n-2} a_{2n}}.$$

Сжатая дробь для (12.15) имеет вид

$$\frac{c_1}{1} + \frac{c_2}{1} + \dots + \frac{c_n}{1} = \frac{c_1}{1+c_3+c_4} - \dots - \frac{c_{2n-2}c_{2n-1}}{1+c_{2n-1}+c_{2n}} - \dots \quad (12.16)$$

Рассмотрим разложение дробно-рациональной функции в цепную дробь:

$$f(x) = \frac{\alpha_{10} + \alpha_{11}x + \alpha_{12}x^2 + \dots}{\alpha_{00} + \alpha_{01}x + \alpha_{02}x^2 + \dots} = \frac{\alpha_{10}}{\alpha_{00}} + \frac{\alpha_{20}x}{\alpha_{10}} + \frac{\alpha_{30}x}{\alpha_{20}} + \dots, \quad (12.17)$$

где

$$\alpha_{ik} = \alpha_{i-1,0} \alpha_{i-2,k+1} - \alpha_{i-2,0} \alpha_{i-1,k+1};$$

$$i = \overline{1, 2n}; \quad k = \overline{1, n}, \quad (12.18)$$

при условии  $\alpha_{k,0} \neq 0$ ;  $\alpha_{00} = 1$ .

Если какой-либо из коэффициентов  $\alpha_{k0} = 0$ , то

$$f(x) = \frac{\alpha_{10}}{1} + \frac{\alpha_{20}x}{\alpha_{10}} + \dots + \frac{\alpha_{k-1,0}x}{\alpha_{k-2,0}} + \frac{\alpha_{k,1}x}{\alpha_{k-1,0}} + \frac{\alpha_{k+1,1}x}{\alpha_{k,1}} + \dots \quad (12.19)$$

Рассмотрим вместо дроби (12.18) соответствующую ей подходящую дробь

$$f_1(x) = \frac{P_n(x)}{Q_n(x)}. \quad (12.20)$$

Подходящая дробь (12.20) аппроксимирует цепную дробь (12.17) с погрешностью

$$|f(x) - f_1(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{s} Q_n^2(x)}; \quad (12.21)$$

$$f_1(x) = \frac{\sum_{i=0}^s d_i x^i}{\sum_{i=0}^r c_i x^i}, \quad s < r, \quad c_0 = 1. \quad (12.22)$$

Алгоритм для вычисления коэффициентов  $d_i$ ,  $c_i$  выражения (12.22) с учетом формул (12.11) — (12.13) и (12.18) имеет вид:

$$d_0 = b_0; \quad c_0 = a_0 = 1; \quad b_{2,2} = 0; \quad b_{3,2} = b_{2,1}e_3; \quad b_{i,1} = e_1; \quad a_{i,1} = 1;$$

$$i = \overline{1, n}; \quad a_{2,2} = e_3; \quad a_{3,2} = e_2 + e_3;$$

$$e_1 = \frac{\alpha_{1,0}}{\alpha_{0,0}}; \quad e_{i+1} = \frac{\alpha_{i+1,0}}{\alpha_{i-1,0} \alpha_{i,0}}; \quad i = \overline{1, n-1}; \quad (12.23)$$

$$b_{k,i} = e_k b_{k-2,i-1} + b_{k-1,i}; \quad i = \overline{2, [k/2]}; \quad k = \overline{3, m};$$

$$a_{k,i} = e_k a_{k-2,i-1} + a_{k-1,i}; \quad i = \overline{2, [k/2 + 1]}; \quad k = \overline{3, n-1};$$

$$d_i = b_{m,i}; \quad c_i = a_{n,i}; \quad i = \overline{1, n-1}.$$

Алгоритм позволяет понизить степень дробно-рациональной функции  $f(x)$  вида (12.17) на единицу.

Приведенный алгоритм понижения степени дробно-рациональной функции применим для понижения порядка дифференциального уравнения

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx}{dt} + x = f(t) \quad (12.24)$$

с соответствующими начальными условиями.

Запишем это уравнение в операторной форме

$$\sum_{i=0}^n a_i p^i x(p) = F(p), \quad (12.25)$$

где  $p$  — оператор Лапласа.

Тогда

$$x(p) = \frac{F(p)}{D(p)}, \quad (12.26)$$

$$D(p) = \sum_{i=1}^n a_i p^i. \quad (12.27)$$

Применяя к (12.26) как дробно-рациональной функции аргумента  $p$  алгоритм понижения порядка (12.23), можно с учетом требуемой точности понижения порядка и оценкой погрешности (12.21) понизить порядок дифференциального уравнения (12.24).

**Пример 12.1.** Рассмотрим понижение порядка дифференциального уравнения

$$a_4 \frac{d^4 x}{dt^4} + a_3 \frac{d^3 x}{dt^3} + a_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + x = b_0 f(x)$$

до второго порядка

$$c_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + c_1 \frac{dx}{dt} + x = d_0 f(t).$$

Согласно алгоритму (12.23),

$$c_1 = \frac{a_1(a_1 a_3 + a_4 - a_2) + a_2^2 a_3}{a_1 a_3 - a_2^2};$$

$$c_2 = \frac{a_2(a_4 - a_2^2 + 2a_1 a_3) - a_1^2 a_4 - a_3}{a_1 a_3 - a_2^3}; \quad d_0 = b_0.$$

**Пример 12.2.** Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^3 x}{dt^3} + 3,5 \frac{d^2 x}{dt^2} + 3,5 \frac{dx}{dt} + x = f(t) \quad (12.28)$$

с начальными условиями

$$x(0) = 0; \quad x'(0) = 1; \quad x''(0) = 0.$$

Найдем коэффициенты упрощенного уравнения

$$c_2 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + c_1 \frac{dx_1}{dt} + x_1 = f(t) \quad (12.29)$$

при

$$x_1(0) = x_{10}; \quad x_1'(0) = x_{10}'$$

Согласно (12.23),

$$c_2 = a_2 - \frac{a_1 a_3}{a_2}; \quad c_1 = a_1 - \frac{a_3}{a_2}. \quad (12.30)$$

Для отыскания новых начальных условий запишем уравнение в операторной форме

$$\begin{aligned} D(p) &= 1 + 3,5p(1+p) + p^3; \\ X(p) &= \frac{F(p)}{D(p)} + \frac{l_0 + l_1 p + l_2 p^2}{D(p)}; \\ l_0 &= a_3 x_0'' + a_2 x_0' + a_1 x_0; \quad l_1 = a_3 x_0' + a_2 x_0; \quad l_2 = a_3 x_0. \end{aligned} \quad (12.31)$$

В операторной форме уравнение (12.29) имеет вид

$$X_1(p) = \frac{F(p)}{c_2 p^2 + c_1 p + 1} + \frac{m_0 + m_1 p}{c_2 p^2 + c_1 p + 1}; \quad (12.32)$$

$$m_0 = c_2 x_{10}' + c_1 x_{10}; \quad m_1 = c_2 x_{10}. \quad (12.33)$$

Коэффициенты  $m_0$  и  $m_1$  в (12.33) определяем согласно (12.23) по формулам:

$$\begin{aligned} m_0 &= l_0; \quad m_1 = l_1 - l_0 g_4 / g_3; \quad g_4 = l_2 (l_0 a_2 - l_2) - l_0^2 a_3; \\ g_3 &= l_1 (a_1 l_0 - l_1) - l_0 (l_0 a_2 - l_2). \end{aligned}$$

Тогда с учетом (12.33)

$$x_{10} = \frac{m_1}{c_2}; \quad x_{10}' = \frac{m_0 c_2 - m_1 c_1}{c_2^2}.$$

Для уравнения (12.28) имеем

$$\begin{aligned} X(p) &= \frac{F(p)}{p^2 + 3,5p(p+1) + 1} + \frac{3,5 + p}{p^2 + 3,5(p+1)p + 1}; \\ c_1 &= 3,2; \quad c_2 = 2,5; \quad x_1(0) = -0,14; \quad x_1'(0) = 1,58; \\ X_1(p) &= \frac{0,4 F(p)}{p^2 + 1,28p + 0,4} + \frac{1,4 - 0,14p}{p^2 + 1,28p + 0,4}. \end{aligned}$$

Точное решение уравнения (12.28) с учетом (12.28) при  $f(t) = 1(t)$  следующее:

$$\begin{aligned} x(t) &= 1 + 1/3 (4e^{-t/2} - 9e^{-t} + 2e^{-2t}); \\ x_1(t) &= 1 - 5,31e^{-0,73t} + 4,17e^{-0,55t}. \end{aligned}$$

Таким образом, (12.28) заменяем на уравнение

$$2,5 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + 3,2 \frac{dx_1}{dt} + x_1 = f(t)$$

с начальными условиями

$$x_1(0) = x_{10} = -0,14; \quad x_1'(0) = 1,58.$$

## Глава 13. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

### 13.1. НАХОЖДЕНИЕ ДОВЕРИТЕЛЬНЫХ ИНТЕРВАЛОВ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ И ДИСПЕРСИИ

Пусть случайная величина  $\bar{a}$  является оценкой некоторой неизвестной величины  $a$ . Обозначим  $P$  вероятность того, что допущенная при этом ошибка не превзойдет заданной величины

$$P = P(|\bar{a} - a| < \epsilon) = F(\epsilon) - F(-\epsilon),$$

где  $F(x)$  — функция распределения величины  $a$ . Вероятность  $P$  называется доверительной вероятностью, интервал  $(\bar{a} - \epsilon, \bar{a} + \epsilon)$  — доверительным интервалом.

Пусть над случайной величиной  $x$ , распределенной по некоторому закону, с математическим ожиданием  $\mu = M[x]$  и дисперсией  $\sigma^2$  произведено  $n$  независимых испытаний  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Построение доверительного интервала для математического ожидания  $\mu$  нормально распределенной случайной величины  $x$  с известной дисперсией  $\sigma^2$ . Предположим, что случайная величина  $x$  распределена нормально и среднее квадратическое отклонение  $\sigma$  этого распределения известно. В качестве оценки  $\bar{x}$  неизвестного математического ожидания  $\mu$  примем среднее арифметическое  $n$  независимых испытаний

$$\bar{x} = 1/n \sum_{i=1}^n x_i. \quad (13.1)$$

Величина  $\bar{x}$  распределена по нормальному закону с математическим ожиданием  $\mu$  и дисперсией  $\sigma^2/n$ . Следовательно, величина  $(\bar{x} - \mu) / (\sigma/\sqrt{n})$  имеет нормированное нормальное распределение, поэтому имеем

$$P(|\bar{x} - \mu| < \epsilon) = \Phi(\epsilon) - \Phi(-\epsilon) = p, \quad (13.2)$$

или

$$P(|\bar{x} - \mu| < \epsilon) = 2\Phi(\epsilon) = \sqrt{2/\pi} \int_0^{\epsilon} e^{-z^2/2} dz = p, \quad (13.3)$$

где  $\Phi(\epsilon)$  — функция Лапласа.

Запишем (13.3) в виде

$$P(\bar{x} - \epsilon\sigma/\sqrt{n} < \mu < \bar{x} + \epsilon\sigma/\sqrt{n}) = 2\Phi(\epsilon) = p. \quad (13.4)$$

Для заданной доверительной вероятности  $p = 2\Phi(\epsilon)$  из табл. П. 1 можно определить значение  $\epsilon = \epsilon(p)$  и получить для математического ожидания  $\mu$  доверительный интервал.

$$(\bar{x} - \epsilon\sigma/\sqrt{n}, \bar{x} + \epsilon\sigma/\sqrt{n}).$$

**Пример 13.1.** Выборка из достаточно большой партии ламп содержит 100 ламп. Средняя продолжительность горения лампы в выборке  $\bar{x} = 800$  ч и среднее квадратическое отклонение продолжительности горения лампы  $\sigma = 20$  ч. Считая, что продолжительность горения каждой лампы является нормальной случайной величиной, определить доверительный интервал для математического ожидания  $\mu$  при доверительной вероятности  $p = 0,45$ .

При  $p = 0,45$ ,  $\Phi(\epsilon) = 0,47$  из табл. П.1 находим значение  $\epsilon = 1,96$ . Используя (13.4), получим

$$800 - 1,96 \cdot 2 < \mu < 800 + 1,96 \cdot 2,$$

или

$$796,08 < \mu < 803,92.$$

Построение доверительного интервала для математического ожидания  $\mu$  нормально распределенной случайной величины  $x$  с неизвестной дисперсией  $\sigma^2$ . Пусть случайная величина распределена нор-

мально. Для оценки математического ожидания используем величину  $\bar{x}$ , определенную (13.1), а для оценки неизвестной дисперсии  $\sigma^2$  — исправленную выборочную дисперсию

$$\bar{s}^2 = 1/(n-1) \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2. \quad (13.5)$$

Случайная величина

$$T = \frac{\bar{x} - \mu}{\bar{s}/\sqrt{n}}$$

имеет  $t$  — распределение Стьюдента с  $k = n - 1$  степенями свободы. Поэтому

$$P(|T| < \epsilon) = 2 \int_0^{\epsilon} S_{n-1}(z) dz = \bar{p},$$

где  $S_{n-1}(x)$  — плотность распределения по закону Стьюдента. По известной доверительной вероятности  $p$  и числу степеней свободы  $k = n - 1$  из табл. П.2 можно определить значение  $\epsilon = \epsilon(p)$ . Таким образом,

$$P\left(\bar{x} - \epsilon \frac{\bar{s}}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + \epsilon \frac{\bar{s}}{\sqrt{n}}\right) = p.$$

**Пример 13.2.** Результаты 11 измерений величины вязкости жидкости даны в табл. 13.1.

Таблица 13.1

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$x_i$ (мН/м <sup>2</sup> · с)	0,99	1,25	6,0	1,09	1,03	0,92	1,03	1,16	1,18	0,98	1,4

Считая, что ошибки измерений распределены нормально, а систематические ошибки отсутствуют, определить:

— оценки математического ожидания  $\mu$  величины вязкости и среднего квадратического отклонения  $\sigma$  величины вязкости;

— доверительный интервал для истинного значения величины вязкости при доверительной вероятности  $p = 0,95$ .

Оценки математического ожидания и среднего квадратического отклонения найдем, используя соответственно формулы (13.1) и (13.2):

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{11} x_i / 11 = 1,057;$$

$$\bar{s} = \sqrt{\sum_{i=1}^{11} (x_i - 1,057)^2 / 10} \approx 0,20.$$

При  $p = 0,95$  и числе степеней свободы  $k = n - 1 = 10$  находим из табл. П.2 значение  $\epsilon = 2,23$ , следовательно,

$$\epsilon \frac{\bar{s}}{\sqrt{11}} = \frac{0,2 \cdot 2,23}{\sqrt{11}} \approx 0,13.$$

Таким образом, доверительный интервал определяется следующим образом:

$$1,06 - 0,13 < \mu < 1,06 + 0,13,$$

или

$$0,93 < \mu < 1,19.$$

**Построение доверительного интервала для дисперсии нормально распределенной случайной величины  $x$  при неизвестном математическом ожидании.** Пусть случайная величина  $x$  распределена нормально. Для оценки математического ожидания используем величину  $\bar{x}$ , а для оценки неизвестной дисперсии  $\sigma^2$  выберем исправленную выборочную дисперсию, определенную (13.5).

Случайная величина  $\bar{x}^2 = (n - 1) \bar{s}^2 / \sigma^2$  имеет распределение  $\chi^2$  с  $k = n - 1$  степенями свободы. Далее используем более общее понятие доверительного интервала.

Интервал  $(\epsilon_1, \epsilon_2)$  называют доверительным интервалом для неизвестной величины  $a$ , соответствующим доверительной вероятности  $p$ , если существуют величины  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$  такие, что

$$P(\epsilon_1 < a < \epsilon_2) = p.$$

Пусть дана доверительная вероятность  $p$ . Из табл. П.3 найдем два числа  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$ :

$$P(\bar{\chi}^2 < \epsilon_1) = P(\bar{\chi}^2 > \epsilon_2) = \frac{1 - p}{2}.$$

Тогда

$$P(\epsilon_1 < \bar{\chi}^2 < \epsilon_2) = p,$$

или

$$P\left(\frac{n\bar{s}^2}{\epsilon_2} < \sigma^2 < \frac{n\bar{s}^2}{\epsilon_1}\right) = p.$$

Таким образом, доверительным интервалом для дисперсии  $\sigma^2$  является интервал вида

$$\left(\frac{n\bar{s}^2}{\epsilon_2}, \frac{n\bar{s}^2}{\epsilon_1}\right).$$

**Пример 13.3.** Построить доверительный интервал с вероятностью  $p = 0,95$  для дисперсии  $\sigma^2$  случайной величины, распределенной нормально, если  $\bar{s}^2 = 10$ ;  $n = 20$ .

Имеем

$$P(\bar{\chi}^2 < \epsilon_1) = P(\bar{\chi}^2 > \epsilon_2) = 0,025.$$

При  $k = n - 1 = 19$  (табл. 13.2) получим  $\epsilon_2 = 32,9$ .

Таблица 13.2

XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI	XVII	XVIII	XIX	XX
6 12	10 16	8 20	7 16	8 25	9 20	9 25	7 25	7 50	20

Поскольку

$$P(\bar{\chi}^2 < \epsilon_1) = 1 - P(\bar{\chi}^2 > \epsilon_1),$$

$$P(\bar{\chi}^2 > \varepsilon_1) = 0,975,$$

из табл. П.3 при  $k = 19$  находим  $\varepsilon_1 = 8,91$ . Тогда доверительный интервал для дисперсии определяется следующим образом:

$$\frac{20 \cdot 10}{32,9} < \sigma^2 < \frac{20 \cdot 10}{8,91}; \quad 6,07 < \sigma^2 < 22,45.$$

### 13.2. НАХОЖДЕНИЕ ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Под гипотезой будем понимать некоторое предположение о случайной величине  $x$ , например о виде функции распределения, параметрах распределения. С помощью статистической проверки установим принять или отвергнуть выдвинутую гипотезу. При решении этого вопроса могут быть допущены ошибки. Ошибка первого рода состоит в том, что будет отвергнута гипотеза, которая на самом деле верна. Ошибка второго рода состоит в том, что принята гипотеза, которая на самом деле неверна.

Обозначим через  $\alpha$  вероятность ошибки первого рода. Эту вероятность называют также уровнем значимости проверки гипотезы.

Для того чтобы принять или отвергнуть выдвинутую гипотезу, в каждом конкретном случае используют специально подобранную случайную величину  $K$ , которую называют критерием и распределение которой известно заранее.

Критической областью называют совокупность значений критерия, при которых выдвинутую гипотезу отвергают. Областью принятия гипотезы называют совокупность значений критерия, при которых гипотезу принимают.

Если наблюдаемое значение критерия  $K_{\text{набл}}$  принадлежит критической области — гипотезу отвергают, в противном случае, если  $K_{\text{набл}}$  принадлежит области принятия гипотезы — гипотезу принимают. Критическими точками  $K_{\text{кр}}$  называют точки, отделяющие критическую область от области принятия гипотезы. Правосторонней называют критическую область, определяемую неравенством  $K > K_{\text{кр}}$ , где число  $K_{\text{кр}} > 0$ . Левосторонней называют критическую область, определяемую неравенством  $K < K_{\text{кр}}$ , где число  $K_{\text{кр}} < 0$ .

Двухсторонней называют критическую область, определяемую неравенствами

$$K < K_1, \quad K > K_2 \quad (K_2 > K_1).$$

Для отыскания, например, правосторонней области необходимо определить критическую точку. Задав уровень значимости  $\alpha$ , требуется, чтобы при условии справедливости предполагаемой гипотезы выполнялось соотношение

$$P(K > K_{\text{кр}}) = \alpha.$$

Для каждого критерия имеются таблицы, по которым определяют критическую точку  $K_{\text{кр}}$ .

Пусть экспериментально при независимых испытаниях получены значения  $x_1, x_2, \dots, x_n$  случайной величины  $x$ , закон распределения которой не известен. Для его выяснения применяют так называемые критерии согласия. Имеется несколько критериев согласия Колмогорова, Пирсона и др.

В каждом критерии согласия используется определенная мера расхождения между эмпирической функцией распределения  $F^*(x)$  и гипотетической функцией  $F(x)$ .

**Критерий Колмогорова.** Пусть  $n_x$  — число наблюдений, при котором наблюдалось значение случайной величины  $X$  меньше  $x$ ,  $n$  — общее число наблюдений. Относительная частота события  $X < x$  составляет  $p^* = n_x/n$ . Эмпирической функцией распределения  $F^*(x)$  называется функция, определяющая для каждого значения  $x$  относительную частоту события  $X < x$ :

$$F^*(x) = P^*(X < x) = p^*.$$

Гипотетическая функция распределения  $F(x)$  определяет для данного значения  $x$  вероятность того же события  $X < x$ .

График функции  $F^*(x)$  представляет собой разрывную ступенчатую линию, имеющую в точках разрыва скачки, равные относительным частотам соответствующих значений случайной величины. Согласно теореме Бернулли, при достаточно большом числе наблюдений вероятность относительной частоты события стремится к вероятности этого события. Этот график с увеличением числа наблюдений неограниченно приближается к кривой, являющейся графиком непрерывной функции  $F(x)$ .

Мера  $D$  является случайной величиной, распределенной по некоторому закону.

Согласно критерию согласия Колмогорова, мера отклонения  $D$  эмпирической функции распределения  $F^*(x)$  от гипотетической функции  $F(x)$  вычисляется по формуле

$$D = \max_x |F^*(x) - F(x)|.$$

Доказано, что для непрерывной функции  $F(x)$  при  $n \rightarrow \infty$

$$P(D\sqrt{n} \geq \lambda) \rightarrow P(\lambda),$$

где

$$P(\lambda) = \begin{cases} 1 - \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k\lambda}, & \lambda > 0; \\ 0, & \lambda \leq 0. \end{cases} \quad (13.6)$$

Практически значения вероятности  $P(\lambda)$ , вычисленные по (13.6), исходят из таблиц.

Пусть число  $\alpha > 0$  настолько мало, что практически невозможно осуществление события с вероятностью  $\alpha$  в единичном опыте.

Зная закон распределения случайной величины  $x$ ,  $D\sqrt{n}$  и задавая уровень значимости  $\alpha$ , можно найти такое критическое значение, что

$$P(\lambda) = D\sqrt{n} > \lambda_0 = \alpha.$$

В табл. 13.3 приведены критические значения  $\lambda_0$  в зависимости от уровня значимости.

Таблица 13.3

$\alpha$	0,50	0,40	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
$\lambda_0$	0,828	0,895	0,974	1,073	1,224	1,358	1,520	1,627	1,950

Если вычисленное значение  $\lambda = D\sqrt{n}$  больше  $\lambda_0$ , это значит, что произошло практически невозможное событие и гипотеза отвергается, если же значение  $\lambda$  меньше  $\lambda_0$ , то гипотеза как непротиворечивая опыту принимается. Для использования критерия Колмогорова необходимо знать гипотетическую функцию распределения и входящие в нее параметры.

Пример 13.4. С помощью критерия Колмогорова выяснить, подчиняется ли случайная величина  $X$  при уровне значимости  $\alpha = 0,1$  закону нормального распределения с параметрами  $\mu = 10, 1$ ;  $\sigma = 1$ . В табл. 13.4 приведены результаты 100 наблюдений случайной величины  $X$ ;  $m_i$  — количество наблюдений, при которых  $X = X_i$ ,  $i = \overline{1, 10}$ ;  $n = \sum_{i=1}^{10} m_i = 100$ .

Таблица 13.4

$i$	$X_i$	$m_i$	$i$	$X_i$	$m_i$
1	8,0	2	6	10,5	20
2	8,5	4	7	11,0	12
3	9,0	9	8	11,5	10
4	9,5	18	9	12,0	4
5	10,0	19	10	12,5	2

Эмпирическая функция распределения  $F^*(x)$ :

$$F^*(x_i) = \sum_{k=1}^{i-1} p_k^* + 0,5 p_i^*$$

где

$$p_i^* = \frac{m_i}{100}$$

Гипотетическая функция распределения:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}} dz = 0,5 + \Phi\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)$$

С учетом последней формулы при  $x = x_i$ ,  $\mu = 10,1$ ;  $\sigma = 1$ , определяя значения функции Лапласа  $\Phi(x)$  из табл. П. 1, получим значения  $F(x_i)$ . Вычисления запишем в табл. 13.5.

Таблица 13.5

$i$	$x_i$	$p_i^*$	$F^*(x_i)$	$F(x_i)$	$F^*(x_i) - F(x_i)$
1	8,0	0,02	0,01	0,0179	0,0079
2	8,5	0,04	0,04	0,0548	0,0148
3	9,0	0,09	0,105	0,1357	0,0307
4	9,5	0,18	0,240	0,2743	0,0343
5	10,0	0,19	0,425	0,4602	0,0352
6	10,5	0,2	0,620	0,6554	0,0354
7	11,0	0,12	0,780	0,8159	0,0359
8	11,5	0,1	0,890	0,9192	0,0292
9	12,0	0,04	0,960	0,9713	0,0113
10	12,5	0,02	0,990	0,9918	0,0018

Из табл. 13.5 определяем  $D = 0,0359$ . Значение  $\lambda = D \sqrt{n} = 0,0359 \sqrt{100} = 0,359$ . При заданном уровне значимости  $\alpha = 0,1$  из табл. 13.3 находим  $\lambda_0 = 1,224$ . Поскольку вычисленное значение  $\lambda$  меньше  $\lambda_0$ , гипотеза принимается.

**Критерий Пирсона.** Согласно критерию согласия Пирсона, мера отклонения  $D$  эмпирической функции распределения  $F^*(x)$  от гипотетической функции  $F(x)$

$$D = \chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}, \quad (13.7)$$

где  $k$  — число разрядов;  $m_i$  — частота  $i$ -го порядка;  $n$  — число наблюдений;  $p_i$  — вероятность попадания исследуемой случайной величины  $X$  в  $i$ -й разряд, найденная с помощью гипотетического закона распределения.

Показано, что для любой функции распределения  $F(x)$  случайной величины  $X$  при  $n \rightarrow \infty$  распределение величины  $X$  стремится в каждой точке  $x$  к  $\chi^2$  распределению с  $r$  степенями свободы, т. е.

$$P(\chi^2 < x) \rightarrow \int_{-\infty}^x K_r(t) dt,$$

где  $K_r(x)$  — плотность распределения  $\chi^2$  с  $r$  степенями свободы. При применении критерия Пирсона используют табл. П. 3 распределения  $\chi^2$  с  $r$  степенями свободы. Причем  $r = k - l - 1$ , где  $l$  — число входящих в закон распределения параметров. Так, если предполагаемое распределение нормальное, то оценивают два параметра ( $\mu, \sigma$ ), поэтому  $r = k - 3$ , если же необходимо проверить согласованность с распределением Пуассона, то оценивают один параметр  $\lambda$ , тогда число степеней свободы  $r = k - 2$ .

При заданном уровне значимости  $\alpha$  построим правостороннюю критическую область в предположении справедливости предполагаемой гипотезы, потребовав

$$P(\chi^2 > \chi_{кр}^2(\alpha, r)) = \alpha.$$

Обозначим  $\chi^2_{\text{набл}}$  значение критерия, вычисленное по данным наблюдениям. Критическое значение  $\chi^2_{\text{кр}}(\alpha, r)$  определяем по табл. П. 3. Если  $\chi^2_{\text{набл}} < \chi^2_{\text{кр}}$ , то нет оснований отвергать предполагаемую гипотезу, если же  $\chi^2_{\text{набл}} > \chi^2_{\text{кр}}$ , то гипотезу отвергают.

Пример 13.5. В течение 400 мин регистрировалось число обрывов нити ткацкого станка. В первых двух столбцах табл. 13.6 приведены числа  $m_i$  минут, в течение которых наблюдалось  $i$  обрывов. Проверить, используя критерий Пирсона, гипотезу о согласии данных наблюдений с законом распределения Пуассона

$$P(i, \lambda) = \frac{1}{i!} e^{-\lambda} \lambda^i,$$

приняв уровень значимости  $\alpha = 0,05$ .

Таблица 13.6

$i$	$m_i$	$p_i$	$np_i$	$m_i - np_i$	$(m_i - np_i)^2$	$\frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}$
0	90	0,252	100,8	-10,8	116,64	1,15
1	130	0,319	127,6	2,4	5,76	0,05
2	100	0,227	90,8	9,2	84,64	0,93
3	60	0,121	48,4	11,6	134,56	2,78
4	15	0,053	21,2	-6,2	38,44	1,81
5	4	0,019	7,6	-3,6	12,96	1,70
6	1	0,006	2,4	-1,4	1,96	0,79

$$n = \sum_{i=0}^6 m_i = 400;$$

$$\chi^2_{\text{набл}} = 9,21.$$

На основании данных наблюдений вычислим оценку параметра  $\lambda$  закона распределения Пуассона:

$$\bar{\lambda} = 1/n \sum_{i=0}^6 im_i = \frac{652}{400} \approx 1,63.$$

Обозначив  $p_i = P(i, \bar{\lambda})$ , определим теоретические вероятности  $p_i$ , наличия  $i$  обрывов в минуту при справедливости закона Пуассона (табл. П. 4). Произведем интерполяцию по  $\lambda$  между  $\lambda = 1$  и  $\lambda = 2$  и получим значения  $p_i$  и  $np_i$ , приведенные в табл. 13.6. Затем найдем

$$\chi^2_{\text{набл}} = \sum_{i=0}^6 \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i} = 9,21.$$

Число степеней свободы  $r = 7 - 2 = 5$ . По табл. П. 2 определим  $\chi^2_{\text{кр}}(0,05; 5) = 11,1$ . Поскольку  $\chi^2_{\text{набл}} < \chi^2_{\text{кр}}$ , гипотеза принимается.

Пример 13.6. В табл. 13.7 приведены результаты 200 измерений отклонений диаметров труб от номинального значения. Проверяемый размер деталей измерен с точностью до 1 мкм. Результаты измерений разбиты на 10 разрядов;  $m_i$  — численность  $i$ -го разряда,  $i = 1, 10$ ;  $n = \sum_{i=1}^{10} m_i = 200$ .

Таблица 13.7

$i$	Границы интервала $x_i - x_{i+1}$	$m_i$	$i$	Границы интервала $x_i - x_{i+1}$	$m_i$
1	(-16-12)	5	6	(4,8)	45
2	(-12, -8)	10	7	(8,12)	25
3	(-8, -4)	16	8	(12,16)	15
4	(-4,0)	28	9	(16,20)	5
5	(0,4)	48	10	(20,24)	3

Оценить с помощью критерия Пирсона гипотезу о согласии данных наблюдений с законом нормального распределения при уровне значимости  $\alpha = 0,05$ .

Определяя частоты  $p_i^* = \frac{m_i}{200}$ , а также значения  $x_i^*$  середин интервалов, находим оценки математического ожидания и дисперсии по формулам:

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= \sum_{i=1}^{10} x_i^* p_i^* = 3,30; \\ \tilde{\sigma}^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{10} (x_i - x^*)^2 = 56,07; \\ \tilde{\sigma} &= 7,49.\end{aligned}$$

Вычисления приведены в табл. 13.8

Таблица 13.8

$i$	$p_i^*$	$x_i^*$	$z_i$	$\Phi(z_i)$	$p_i$	$np_i$	$\frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}$
1	0,025	-14	-0	0,5000	0,0207	4,14	0,17
2	0,05	-10	-2,04	-0,4793	0,0461	9,22	0,06
3	0,08	-6	-1,50	-0,4332	0,0992	19,84	0,76
4	0,14	-2	0,97	-0,3340	0,1640	32,80	0,70
5	0,24	2	-0,44	-0,1700	0,2059	41,18	1,10
6	0,225	6	0,09	0,0359	0,1998	39,96	0,64
7	0,125	10	0,63	0,2357	0,1433	28,66	0,25
8	0,075	14	1,17	0,3790	0,0577	15,10	0,00
9	0,025	18	1,69	0,4545	0,0326	6,52	0,47
10	0,015	22	2,23	0,4871	0,0129	2,58	0,42
11	—	—	—	0,5000	—	—	—

Теоретические вероятности  $p_i$  попадания отклонений в интервалы  $(x_i, x_{i+1})$  вычисляем по формуле:

$$p_i = \Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i),$$

где  $z_i$  — левая единица  $i$ -го интервала относительно  $\tilde{x}$  в единицах  $\tilde{\sigma}$

$$z_i = \frac{x_i - \tilde{x}}{\tilde{\sigma}}.$$

При этом наименьшее значение  $z_1$  заменено на  $-\infty$ , а наибольшее  $-z_{11}$  на  $+\infty$ .

Значения функции Лапласа  $\Phi(z)$  находим по табл. П. 1. Далее определяем

$$\chi^2_{\text{набл}} = \sum_{i=1}^{10} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i} = 4,57.$$

Число разрядов равно 10, число степеней свободы  $k = 10 - 2 - 1 = 7$ . По табл. П. 3 находим критическое значение:

$$\chi^2_{\text{кр}}(0,05; 7) = 14,1.$$

Поскольку  $\chi^2_{\text{набл}} < \chi^2_{\text{кр}}$ , нет оснований отвергать гипотезу о том, что данные наблюдений согласуются с законом нормального распределения.

### 13.3. ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Пусть модель представляется уравнением вида

$$y = f^T(x) a, \quad (13.8)$$

где

$$a = [a_0, a_1, \dots, a_m]^T$$

— вектор неизвестных параметров модели,

$$x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$$

— вектор значений неизвестных переменных,

$$f(x) = [f_0(x), f_1(x), \dots, f_m(x)]^T$$

— вектор заданных функций.

Уравнение (13.8) запишем в виде

$$y(a, x) = a_0 f_0(x) + a_1 f_1(x) + \dots + a_m f_m(x).$$

Для истинных значений вектора  $a$  по результатам эксперимента требуется найти оценку  $\hat{a}$ . Оценка  $\hat{y}$  для функции  $y$  вычисляется по формуле

$$\hat{y} = f^T(x) \hat{a}. \quad (13.9)$$

Пусть эксперимент проводится в  $N$  точках

$$x^1, x^2, \dots, x^N$$

с координатами

$$x^i = [x_1^i, x_2^i, \dots, x_n^i]^T, \quad i = \overline{1, N}.$$

Обозначим  $\tilde{y}$  вектор, координатами которого являются результаты наблюдений  $\tilde{y}$  в точках  $x^i$ :

$$\tilde{y} = [\tilde{y}^1, \tilde{y}^2, \dots, \tilde{y}^N]^T.$$

В общем случае в каждой точке  $x^i$  может быть поставлено  $\nu$  опытов, результатами которых будут

$$\tilde{y}^{i_1}, \tilde{y}^{i_2}, \dots, \tilde{y}^{i_\nu}, \quad i = \overline{1, N}.$$

В этом случае  $\tilde{y}^i$  определяется следующим образом:

$$\tilde{y}^i = \frac{1}{v} (\tilde{y}^{i_1} + \tilde{y}^{i_2} + \dots + \tilde{y}^{i_v}), \quad i = \overline{1, N}.$$

Задача заключается в том, чтобы на основании результатов наблюдений  $\tilde{y}^i$  найти наилучшие в некотором смысле оценки  $\hat{a}$  и  $\hat{y}$ .

**Теоретические основы метода.** Будем считать, что модель соответствует действительности, т. е. она является адекватной.

Обозначим

$$\hat{y} = [\hat{y}^1, \hat{y}^2, \dots, \hat{y}^N]^T$$

— вектор значений, вычисленных с помощью  $\hat{a}$  по (13.9). Таким образом,

$$\hat{y}^i = f^T(x^i) \hat{a}, \quad i = \overline{1, N}, \quad (13.10)$$

или в матричном виде

$$\hat{y} = F \hat{a},$$

где матрица  $F$  определяется следующим образом:

$$F = [f_j(x^i)] = \begin{bmatrix} f_0(x^1) & f_1(x^1) & \dots & f_m(x^1) \\ f_0(x^2) & f_1(x^2) & \dots & f_m(x^2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_0(x^N) & f_1(x^N) & \dots & f_m(x^N) \end{bmatrix},$$

$$f = \overline{0, m}; \quad i = \overline{1, N}.$$

Будем считать, что результаты эксперимента  $\tilde{y}^i$  распределены нормально, являются исследуемыми случайными величинами, т. е. математическое ожидание величины  $\tilde{y}^i$  соответствует действительному значению

$$M[\tilde{y}] = y = Fa.$$

Далее, пусть результат наблюдений в точке  $x^i$  не зависит от результата в точке  $x^j$  и дисперсия результатов наблюдений  $\tilde{y}^i$  во всех точках  $x^i$  одинакова. Последние два условия выполняются, если

$$M[(\tilde{y} - y)(\tilde{y} - y)^T] = \sigma^2 E,$$

где  $E$  — единичная матрица.

Кроме того, предположим, что оценка  $\hat{a}$ , представляющая собой случайный вектор, является несмещенной, т. е.  $M[\hat{a}] = a$ , а дисперсия  $\sigma_i^2$  оценки  $\hat{a}_i$  эффективной, т. е. дисперсия  $\sigma_i^2$  оценки  $\hat{a}_i$  должна быть минимальной:

$$\sigma_i^2 = M[(\hat{a}_i - a_i)^2], \quad i = \overline{0, m}.$$

Оценка  $\hat{a}$  удовлетворяет этим условиям, если сумма

$$S = \sum_{i=1}^N (\tilde{y}^i - y^i)^2 = |\tilde{y} - y|^2 \quad (13.11)$$

— минимальна.

С учетом (13.10)

$$S = S(\mathbf{a}) = \tilde{\mathbf{y}}^T \mathbf{y} + \mathbf{a}^T F^T F \mathbf{a} - 2\tilde{\mathbf{y}}^T F \mathbf{a}.$$

Если матрица  $F^T F$  невырождена, т. е. если матрица  $F$  имеет ранг  $m+1$ , то сумма квадратов (13.11) имеет единственный минимум при

$$\tilde{\mathbf{a}} = C F^T \tilde{\mathbf{y}}. \quad (13.12)$$

Матрица  $C = [F^T F]^{-1}$  с элементами  $c_{ij}$ ;  $i, j = \overline{0, m}$  — и размера  $(m+1) \times (m+1)$  называется дисперсионной.

**Статистический анализ точности.** Ошибка оценки  $\hat{a}_i$ , вычисленной согласно методу наименьших квадратов по (13.12), тем больше, чем больше дисперсия ошибок наблюдений. Точность оценок  $\hat{a}_i$  и величины  $\hat{\mathbf{y}}$  характеризуют соответственно дисперсии  $\sigma_i^2$  и  $\sigma_y^2$ , зависящие от матрицы  $F$ . Для определения этой зависимости необходимо найти выражение для ковариационной матрицы  $X(\hat{\mathbf{a}})$ :

$$\begin{aligned} V(\hat{\mathbf{a}}) &= M [(\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{a})(\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{a})^T]; \\ V(\hat{\mathbf{a}}) &= C \sigma^2. \end{aligned}$$

Отсюда для дисперсии  $\sigma_i^2$  оценки  $\hat{a}_i$

$$\sigma_i^2 = c_{ii} \sigma^2,$$

а также легко получить выражение дисперсии  $\sigma_y^2$  для величины

$$\sigma_y^2 = \mathbf{f}^T(\mathbf{x}) C \mathbf{f}(\mathbf{x}) \sigma^2.$$

По имеющейся оценке  $\hat{\mathbf{a}}$ , выраженной (13.12), находим оценку  $\hat{\mathbf{y}}$  по (13.10).

1. В каждой точке проводится один эксперимент, дисперсия наблюдений  $\sigma^2$  известна.

Величина

$$x = (\hat{a}_i - a_i) / \sigma$$

распределена нормально и имеет место соотношение

$$P(|x| < \epsilon) = 2\Phi(\epsilon) = \bar{p},$$

где  $\Phi(x)$  — функция Лапласа. При заданной доверительной вероятности  $p$ , используя табл. П. 1, можно определить значение  $\epsilon = \epsilon(p)$  и таким образом построить доверительный интервал для истинного значения  $a_i$ :

$$\hat{a}_i - \epsilon \sqrt{c_{ii}} \sigma < a_i < \hat{a}_i + \epsilon \sqrt{c_{ii}} \sigma.$$

2. В каждой точке проводится один эксперимент, дисперсия ошибки наблюдений  $\sigma^2$  не известна.

Оценка дисперсии ошибок наблюдений  $S_1$  вычисляется следующим образом:

$$S_1 = \sum_{i=1}^N (\tilde{y}^i - \hat{y}^i)^2 = (\tilde{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{y}})^T (\tilde{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{y}})$$

с числом степеней свободы  $k_1 = N - m - 1$ .

Величина

$$s^2 = \frac{S_1}{k_1} \quad (13.13)$$

является несмещенной оценкой дисперсии ошибок наблюдений  $\sigma^2$ . Оценка  $s_i^2$  для дисперсии  $\sigma_i^2$  может быть вычислена по формуле

$$s_i^2 = c_{ii} s^2, \quad i = \overline{0, m}. \quad (13.14)$$

Величина  $t = (\hat{a}_i - a_i)/s_i$  подчиняется  $t$ -распределению Стьюдента с  $k_1$  степенями свободы.

При этом

$$P(|t| < \varepsilon) = p.$$

При заданной доверительной вероятности  $p$  и числу степеней свободы  $k_1$  величина  $\varepsilon = \varepsilon(p)$  находится по табл. П. 2. Доверительный интервал для истинного значения  $a_i$  при известной оценке  $s^2$  дисперсии наблюдений определяется следующим образом:

$$\hat{a}_i - \varepsilon \sqrt{c_{ii} s} < a_i < \hat{a}_i + \varepsilon \sqrt{c_{ii} s}, \quad i = \overline{0, m}. \quad (13.15)$$

3. В каждой точке проводится  $\nu$  экспериментов, дисперсия ошибки наблюдений  $\sigma^2$  не известна.

Оценка дисперсии ошибок наблюдений  $S_2$  вычисляется следующим образом:

$$S_2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{\nu} (\tilde{y}^{ij} - \tilde{y}^i)^2 \quad (13.16)$$

и имеет  $k_2 = N(\nu - 1)$  степеней свободы.

В качестве оценки  $s^2$  для дисперсии ошибок наблюдений  $\sigma^2$  используется выражение

$$s^2 = S_2 / (\nu k_2), \quad (13.17)$$

определяющее величину дисперсий среднего наблюдения  $\tilde{y}$ , вычисленного по  $\nu$  наблюдениям.

В этом случае также по заданной доверительной вероятности  $p$  и числу степеней свободы  $k_2$  по табл. П. 2 определяется величина  $\varepsilon = \varepsilon(p)$ . Доверительный интервал для истинного значения определяется следующим образом:

$$\hat{a}_i - \varepsilon \sqrt{c_{ii} s} < a_i < \hat{a}_i + \varepsilon \sqrt{c_{ii} s}, \quad i = \overline{0, m}.$$

**Проверка адекватности модели.** Рассмотрим величину  $S_3$ , характеризующую неадекватность модели

$$S_3 = \sum_{i=1}^N v (\tilde{y}^i - \hat{y}^i)^2 = v S_1 \quad (13.18)$$

и имеющую  $k_3 = N - m - 1$  степеней свободы.

Частное от деления оценки дисперсии неадекватности на оценку дисперсии ошибки единичного наблюдения

$$F = \frac{S_3/k_3}{S_2/k_2} \quad (13.19)$$

в случае, когда модель адекватна, является случайной величиной, подчиненной  $F$ -распределению Фишера с числом степеней свободы  $k_3$  и  $k_2$ . Можно определить значение  $F_{кр}$ , соответствующее условию

$$P(F > F_{кр}) = \alpha = 1 - p, \quad (13.20)$$

где  $\alpha$  — заданный уровень значимости проверки гипотезы об адекватности. Если для значения, вычисленного по (13.19), выполняется неравенство  $F < F_{кр}$ , то гипотеза об адекватности принимается, если же  $F > F_{кр}$ , то гипотеза об адекватности отклоняется.

Вычислительная схема. 1. Выбор модели

$$y(x) = a_0 f_0(x) + a_1 f_1(x) + \dots + a_m f_m(x).$$

2. Для  $N > m + 1$  точек

$$x^i = [x_1^i, x_2^i, \dots, x_n^i]^T, \quad i = \overline{1, N},$$

вычисляется матрица

$$F = [f_j(x^i)] = \begin{bmatrix} f_0(x^1) & f_1(x^1) & \dots & f_m(x^1) \\ f_0(x^2) & f_1(x^2) & \dots & f_m(x^2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_0(x^N) & f_1(x^N) & \dots & f_m(x^N) \end{bmatrix}.$$

3. Вычисляется дисперсионная матрица

$$C = [F^T F]^{-1}.$$

4. В каждой точке  $x^i$  проводятся  $v$  опытов, по результатам которых  $\tilde{y}^i, \tilde{y}^{i_1}, \dots, \tilde{y}^{i_v}$  рассчитывается среднее значение

$$\tilde{y}^i = 1/v \sum_{l=1}^v \tilde{y}^{i_l},$$

с дисперсией  $\sigma^2$ .

5. Рассчитываются оценки  $\hat{a}$  коэффициентов модели по методу наименьших квадратов

$$\hat{a} = C F^T \tilde{y}.$$

6. Вычисляются дисперсии оценок

$$\sigma_i^2 = c_{ii}\sigma^2.$$

7. Определяется оценка функции  $y$ :

$$\begin{aligned}\hat{y} &= \hat{\mathbf{a}}^T \mathbf{f}(\mathbf{x}); \\ \hat{y}^i &= \hat{\mathbf{a}}^T \mathbf{f}(\mathbf{x}^i); \\ \hat{\mathbf{y}} &= [\hat{y}^1, \hat{y}^2, \dots, \hat{y}^N]^T.\end{aligned}$$

8. Вычисляется оценка дисперсии ошибок наблюдений  $s$ :

$$\begin{aligned}s^2 &= S_2 / (vk_2); \\ k_2 &= N(v-1); \\ S_2 &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^v (\tilde{y}^{ij} - \tilde{y}^i)^2; \\ s_i^2 &= c_{ii}s^2, \quad i = \overline{0, m}.\end{aligned}$$

9. Рассчитывается сумма квадратов  $S_3$ :

$$S_3 = \sum_{i=1}^N v(\tilde{y}^i - \hat{y}^i)^2.$$

10. Оценивается адекватность модели

$$F = \frac{S_3/k_3}{S_2/k_2},$$

где

$$k_3 = N - m - 1.$$

Для заданной надежности  $P(F < F_{кр}) = p$  определяется  $F_{кр}$ . Если  $F < F_{кр}$ , то модель принимается адекватной процессу.

11. Если дисперсия наблюдений  $\sigma^2$  известна и модель адекватна, то доверительный интервал с доверительной вероятностью  $p$  определяется по неравенству

$$|\hat{a}_i - a_i| < \sigma_i \varepsilon.$$

Значение  $\varepsilon$  находим по табл. П. 1 при условии

$$\Phi(\varepsilon) = p/2.$$

Если дисперсия наблюдений  $\sigma^2$  не известна и в каждой точке плана проводится один эксперимент, то

$$\begin{aligned}|\hat{a}_i - a_i| &< s_i \varepsilon; \\ s_i &= \sqrt{c_{ii}s}, \quad i = \overline{0, m}; \\ s^2 &= S_1/k_1 = \sum_{i=1}^N (\tilde{y}^i - \hat{y}^i)^2/k_1.\end{aligned}$$

и находим по табл. П. 2 при  $k_1 = N - m - 1$  степенях свободы и заданной доверительной вероятности  $p$ .

12. Проверяются коэффициенты  $a_i$  на значимость. Если

$$|\hat{a}_i| > t_{кр} S_{t_i},$$

то коэффициент  $a_i$  считается значимым;  $t_{кр}$  — критическое значение распределения Стьюдента для заданного уровня значимости  $\alpha$  и  $k_1$  степеней свободы.  $t_{кр}$  — находим по табл. 13.2 из условия

$$P(|t| > t_{кр}) = \alpha.$$

Незначимые коэффициенты из модели выбрасываются.

Пример 13.7. Рассмотрим процесс, выход которого зависит от двух переменных  $x_1, x_2$ . Проводятся в четырех точках по  $\nu = 2$  опыта (табл. 13.9).

Таблица 13.9

$i$	$x_1^i$	$x_2^i$	Результаты опытов		
			$y^{i1}$	$y^{i2}$	$\tilde{y}^i = (\tilde{y}^{i1} + \tilde{y}^{i2})/2$
1	1	1	45,4	46,1	45,75
2	1	-1	38,0	38,4	38,2
3	-1	-1	84,5	34,8	34,65
4	-1	1	42,1	42,7	42,4

Построим линейную модель

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2.$$

Вычислим матрицу

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix};$$

$$F^T F = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = 4E_3;$$

$$C = [F^T F]^{-1} = 1/4 E_3;$$

$$\hat{a} = CF^T \hat{y} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 45,75 \\ 38,20 \\ 34,65 \\ 42,4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40,25 \\ 1,725 \\ 3,825 \end{bmatrix};$$

$$\hat{y} = 40,25 + 1,725x_1 + 3,825x_2;$$

$$\hat{y} = F\hat{a} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 40,25 \\ 1,725 \\ 3,825 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45,80 \\ 38,15 \\ 34,70 \\ 42,35 \end{bmatrix}.$$

Поскольку дисперсия наблюдений  $\sigma^2$  не известна, то рассчитываем  $S_2$  и  $S_3$ :

$$S_3 = \sum_{i=1}^4 2(\tilde{y}^i - \hat{y}^i)^2 = 0,004;$$

$$S_2 = (45,4 - 45,75)^2 + (46,1 - 45,75)^2 + (38,0 - 38,2)^2 + (38,4 - 38,2)^2 + (34,5 - 34,65)^2 + (34,8 - 34,65)^2 + (42,1 - 42,4)^2 + (42,7 - 42,4)^2 = 0,55;$$

$$k_2 = 4(2 - 1) = 4;$$

$$s^2 = \frac{0,55}{2 \cdot 4} = 0,069;$$

$$s_t = \sqrt{1/4}s = 0,131.$$

Для 95 % надежности из табл. П. 2 при  $N = 4$  получаем  $\varepsilon = 2,776$  и

$$|\hat{a}_t - a_t| < 0,131 \cdot 2,776 = 0,363.$$

Для оценок адекватности вычислим

$$F = \frac{S_3/k_3}{S_2/k_2};$$

$$k_2 = 4; \quad k_3 = 4 - 2 - 1 = 1;$$

$$F = \frac{0,004}{0,55/4} = 0,03.$$

По табл. 13.4 для 99 % надежности

$$F_{кр} = 21,2; \quad F = 0,03 < F_{кр}.$$

Следовательно, модель адекватна процессу. Оценим значимость коэффициентов модели. Для выбранного уровня значимости  $p = 0,99$  по табл. П. 3 находим  $\varepsilon = 13,277$ ,

$$|\hat{a}_0| = 40,25 > 13,277 \cdot 0,131 = 1,74;$$

$$|\hat{a}_1| = 1,725 < 1,74;$$

$$|\hat{a}_2| = 3,825 > 1,74.$$

$$\hat{y} = 40,25 + 3,825x_2.$$

Таким образом, модель, адекватная процессу, имеет вид

$$\hat{y} = 40,25 + 3,825x_2.$$

**Пример 13.8.** Построим квадратичную модель для процесса, выход которого  $y$  зависит от двух переменных  $x_1, x_2$ :

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_1^2 + a_4x_2^2 + a_5x_1x_2.$$

Пусть в результате проведенного в девяти точках эксперимента получены следующие значения  $y^{iv}$ ,  $v = 2$  (табл. 13.10):

Таблица 13.10

$i$	$x_1^i$	$x_2^i$	Результаты наблюдений		
			$y^{i1}$	$y^{i2}$	$\tilde{y}^i$
1	0	0	97,9	98,1	98,0
2	1	0	99,05	99,15	99,1
3	0	1	92,4	92,2	92,3
4	-1	0	93,8	93,6	93,7
5	0	-1	96,25	96,35	96,3
6	1	1	92,8	92,4	92,6
7	1	-1	98,8	98,5	98,6
8	-1	-1	91,95	92,05	92,0
9	-1	1	89,3	89,1	89,2

Выберем 95 % надежности для  $t$ -критерия и 99 % достоверности для  $F$ -критерия. По табл. П. 2 находим

$$\varepsilon = 2,26; \quad F_{кр} = 6,99.$$

Составляем матрицу  $F$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Вычислим информационную матрицу  $M$ :

$$M = F^T F = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & 6 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 6 & 4 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Вычислим дисперсионную матрицу

$$C = M^{-1} = \begin{bmatrix} 5/9 & 0 & 0 & -1/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 & 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ -1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$$

$$CF^T = \begin{bmatrix} 5/9 & 2/9 & 4/9 & 2/9 & 2/9 & -1/9 & -1/9 & -1/9 & -1/9 \\ 0 & 1/6 & 0 & -1/6 & 0 & 1/6 & 1/6 & -1/6 & -1/6 \\ 0 & 0 & 1/6 & 0 & -1/6 & 1/6 & -1/6 & -1/6 & -1/6 \\ -1/3 & 1/6 & -1/3 & 1/6 & 1/3 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ -1/3 & -1/3 & 1/6 & -1/3 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & -1/4 & 1/4 & -1/4 \end{bmatrix}$$

Вычислим коэффициенты модели:

$$\hat{a} = CF^T \tilde{y} = [97,82; 2,567; -2,1; -1,333; -3,433; -0,8];$$

$$\hat{y} = 97,82 + 2,567x_1 - 2,1x_2 - 1,333x_1^2 - 3,433x_2^2 - 0,8x_1x_2.$$

Вычислим значения  $\hat{y}^i$ ;  $S_2$ ;  $S_3$ ;  $F$ :

$$\hat{y} = F\hat{a} = [97,82; 99,05; 92,99; 93,92; 95,50; 92,72; 98,52; 91,80; 81,19]^T.$$

$$S_2 = \sum_{i=1}^9 \sum_{j=1}^2 (y^{ij} - \hat{y}^i)^2 = 0,195;$$

$$S_3 = 2 \sum_{j=1}^2 (\tilde{y}^j - \hat{y}^j)^2 = 0,383;$$

$$F = \frac{S_3/k_3}{S_2/k_2} = \frac{0,383/3}{0,195/9} \approx 5,9 < F_{кр} = 6,99.$$

Таким образом, модель адекватна процессу. Для дисперсий оценок коэффициентов, согласно

$$s_i^2 = c_{ii}s^2,$$

получим

$$\begin{aligned} s^2 &= S_2/(vk_2) = 0,014; \\ s_0^2 &= 5/9s^2 = 0,008; \quad s_0 = 0,09; \\ s_1^2 &= s_2^2 = 1/6s^2 = 0,0024; \quad s_1 = s_2 = 0,047; \\ s_3^2 &= s_4^2 = 1/2s^2 = 0,0071; \quad s_3 = s_4 = 0,084; \\ s_5^2 &= 1/4s^2 = 0,00354; \quad s_5 = 0,060. \end{aligned}$$

С 95 % надежности доверительные интервалы для  $a_i$  имеют вид

$$\begin{aligned} |\hat{a}_0 - a_0| &< s_0\varepsilon = 0,203; \\ |\hat{a}_1 - a_1| &< s_1\varepsilon = 0,116; \\ |\hat{a}_2 - a_2| &< s_2\varepsilon = 0,116; \\ |\hat{a}_3 - a_3| &< s_3\varepsilon = 0,189; \\ |\hat{a}_4 - a_4| &< s_4\varepsilon = 0,189; \\ |\hat{a}_5 - a_5| &< s_5\varepsilon = 0,136. \end{aligned}$$

Оценим значимость коэффициентов  $\hat{a}_i$ . Коэффициент  $\hat{a}_i$  считается значимо отличным от нуля, если

$$|\hat{a}_i| > t_{кр} s_i, \quad i = \overline{0,5}$$

( $t_{кр}$  находим по табл. П. 3 для  $\chi^2$ -распределения)

$$\begin{aligned} k_2 &= 9; \quad t_{кр} = \varepsilon = 16,92. \\ |\hat{a}_0| &= 97,82 > t_{кр} s_0 = 1,524; \\ |\hat{a}_1| &= 2,567 > t_{кр} s_1 = 0,850; \\ |\hat{a}_2| &= 2,1 > t_{кр} s_2 = 0,850; \\ |\hat{a}_3| &= 1,333 < t_{кр} s_3 = 1,350; \\ |\hat{a}_4| &= 3,433 > t_{кр} s_4 = 1,350; \\ |\hat{a}_5| &= 0,8 < t_{кр} s_5 = 1,015. \end{aligned}$$

Таким образом, коэффициенты  $\hat{a}_3$  и  $\hat{a}_5$  являются незначимыми и их можно в модели опустить. Тогда

$$\hat{y}(x) = 97,82 + 2,567x_1 - 2,1x_2 - 3,433x_2^2.$$

### Задания для самостоятельной работы

В табл. 13.11 приведены десять вариантов (I—X) результатов 20 наблюдений нормально распределенной случайной величины  $x$ . Определить оценки математического ожидания и среднего квадратического отклонения случайной величины  $x$ , доверительный интервал для математического ожидания случайной величины  $x$  при доверительной вероятности.

Таблица 13.11

<i>i</i>	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
1	6	8	7	10	2	12	10	8	12	18
2	4	5	6	12	4	11	8	10	8	16
3	4	8	7	4	6	8	7	13	11	12
4	7	7	9	4	4	11	9	13	9	13
5	5	5	5	8	5	8	12	13	11	18
6	7	8	8	4	4	11	13	10	13	15
7	4	3	7	8	6	10	11	10	10	17
8	6	9	5	7	5	9	6	15	15	14
9	5	8	7	9	2	5	13	13	14	13
10	3	6	8	8	3	9	14	16	9	14
11	5	7	7	12	4	7	13	10	15	14
12	7	4	8	10	5	6	8	9	8	12
13	6	6	9	8	5	9	13	8	10	16
14	7	7	4	5	4	8	18	13	16	16
15	5	3	6	9	3	11	8	11	12	10
16	2	5	5	11	2	7	7	11	13	15
17	3	5	7	9	3	10	9	8	14	11
18	5	7	11	11	4	12	8	8	12	11
19	6	4	5	4	4	6	14	9	16	10
20	3	5	9	7	5	10	6	12	12	15

В течение 300 мин фиксировалось число вызовов на заводской АТС. В табл. 13.12 приведены десять вариантов (I—X) числа  $m_i$ , в течение которых наблюдалось  $i$  вызовов. Используя критерий Пирсона; проверить гипотезу о согласии данных наблюдений с законом распределения Пуассона, приняв уровень значимости  $\alpha = 0,05$ .

Таблица 13.12

<i>i</i>	$m_i$									
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
0	60	40	50	65	50	60	55	60	50	50
1	100	98	95	100	70	75	100	80	65	105
2	80	92	75	75	100	75	75	95	100	60
3	50	50	35	50	60	60	55	40	65	55
4	7	10	30	7	10	25	7	15	12	20
5	3	3	10	2	7	3	2	8	5	7
6	2	2	5	1	3	2	1	2	3	3

В табл. 13.13 приведены десять вариантов (XI—XX) результатов 250 измерений отклонений диаметров труб от номинального значения.

Проверяемый размер деталей измерен с точностью до 1 мкм. Результаты измерений разбиты на пять разрядов;  $m_i$  — численность  $i$ -го разряда;  $i = 1, 5$ ;

$\sum_{i=1}^5 m_i = 250$ . Используя критерий Пирсона, проверить гипотезу о согласии наблюдений с законом нормального распределения при уровне значимости  $\alpha = 0,05$ .

В табл. 13.14 приведены пять вариантов (XXI—XXV) результатов 100 наблюдений случайной величины  $X$ . С помощью критерия Колмогорова выяснить, подчиняется ли случайная величина  $X$  на уровне значимости  $\alpha = 0,01$  закону нормального распределения с параметрами  $\mu$  и  $\sigma$ .

Таблица 13.13

i	Границы интервала, мкм	$m_i$									
		XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI	XVII	XVIII	XIX	XX
1	0—3	10	10	15	5	10	20	15	10	20	10
2	3—6	65	80	75	60	50	85	80	70	80	60
3	6—9	105	85	100	110	100	95	100	100	90	105
4	9—12	55	70	50	70	75	40	45	60	50	60
5	12—15	15	5	10	5	25	10	10	10	10	15

Таблица 13.14

i	XXI		XXII		XXIII		XXIV		XXV		
	$x_i$	$m_i$									
1	3,0	2	60	3	0,1	1	10,0	3	16,0	3	
2	3,5	4	61	6	0,15	2	10,2	4	16,5	4	
3	4,0	9	62	10	0,2	9	10,4	8	17,0	5	
4	4,5	15	63	16	0,25	14	10,6	16	17,5	14	
5	5,0	18	64	20	0,3	19	10,8	20	18,0	21	
6	5,5	22	65	18	0,35	21	11,0	20	18,5	22	
7	6,0	15	66	12	0,4	16	11,2	14	19,0	17	
8	6,5	7	67	10	0,45	11	11,4	7	19,5	6	
9	7,0	5	68	3	0,5	4	11,6	6	20,0	5	
10	7,5	3	69	2	0,55	3	11,8	2	20,5	3	
$\mu$		53		64,5		0,33		10,9		18,3	
$\sigma$		1		3		0,1		0,5		2	

**АЛГОРИТМЫ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ АНАЛИЗА  
И РЕАЛИЗУЮЩИЕ ИХ ПРОГРАММЫ**

I. Решение системы линейных уравнений.  
Метод Гаусса (схема Халецкого). Алгоритм:

$$Ax = d.$$

$$b_{i,i} = 1; b_{1,i} = a_{1,i}/a_{1,1}; c_{i,1} = a_{i,1}; i = \overline{1, n}; y_1 = d_1/a_{1,1};$$

$$c_{k,i} = a_{k,i} - \sum_{j=1}^{i-1} c_{k,j} b_{j,i}; k = \overline{i, n};$$

$$b_{i,k} = 1/c_{i,i} [a_{i,k} - \sum_{j=1}^{i-1} c_{i,j} b_{j,k}]; k = \overline{i+1, n};$$

$$y_i = 1/c_{i,i} [d_i - \sum_{j=1}^{i-1} c_{i,j} y_j]; x_n = y_n;$$

$$x_{n-i} = y_{n-i} - \sum_{j=n-i+1}^n b_{n-i,j} x_j; i = \overline{1, n-1}.$$

Обращение матриц:

$$A^{-1} = [\alpha_{i,j}]_1^n.$$

$$\alpha_{i,i} = 1/c_{i,i} [1 - \sum_{k=i+1}^n \alpha_{i,k} c_{k,i}];$$

$$\alpha_{i,j} = -1/c_{i,j} \sum_{k=j+1}^n \alpha_{i,k} c_{k,j}; i > j; i = n, n-1, \dots, 1;$$

$$\alpha_{i,j} = - \sum_{k=i+1}^n b_{i,k} \alpha_{k,j}; i < j.$$

Программа XALS — решение систем линейных уравнений и обращение матриц по схеме Халецкого.

Обращение: CALL XALS (A, D, X, N, M). Описание параметров: A — матрица коэффициентов системы уравнений размерности  $n \times n$ ; D — правая часть системы — вектор размерности n; X — решение системы уравнений — вектор размерности n; M — константа; при M=0 решается система линейных уравнений; при M=1 вычисляется  $A^{-1} = [\alpha_{i,j}]_1^n$ .

Требуемые функции и подпрограммы — нет.

Входные данные: матрица A размерности  $n \times n$ , вектор d размерности n, n — порядок системы, m = 0 или m = 1.

Выходные данные: вектор x — решение системы уравнений или массив размерности  $n \times n$  — обратная матрица  $A^{-1}$ . В случае вырожденности матрицы выводится соответствующее сообщение.

SUBROUTINE XALS(AH, DX, HA, XX, NX, MR)

C       СХЕМА ХАЛЕЦКОГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ  
C       XX- ВЕКТОР РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ  
C       AH-ИСХОДНАЯ МАТРИЦА, ЗАДАВАЕМАЯ ПО СТРОКАМ  
C       DX-ПРАВАЯ ЧАСТЬ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ  
C       NX- РАЗМЕРНОСТЬ МАТРИЦЫ AH  
C       MR=1- РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ И ОБРАЩЕНИЕ МАТРИЦЫ  
C       MR=0- РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ  
C

      DIMENSION AH(NX, NX), DX(NX), XX(NX)

      DIMENSION HA(NX, NX)

23 FORMAT(1H1, 20X, 'МАССИВ XX(1, NX) - РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ'///)

24 FORMAT(4(2X, E11. 4))

29 FORMAT(1H1, 20X, 'СИСТЕМА ВЫРОЖДЕНА'  
\*20X, 'МАССИВ AH'//4(2X, E11. 4))

47 FORMAT(1H1, 'ОБРАТНАЯ МАТРИЦА A(-1)'  
-//20X, 'МАССИВ HA(NX, NX)'///)

      DO 11 I=2, NX

11 AH(1, I)=AH(1, I)/AH(1, 1)

      IF (MR. EQ. 0) DX(1)=DX(1)/AH(1, 1)

      DO 12 I=2, NX

      I1=I-1

      DO 13 K=I, NX

      DO 13 J=1, I1

13 AH(K, I)=AH(K, I)-AH(K, J)\*AH(J, I)

      IF (ABS(AH(I, I)). LT. 1E-7) GOTO 27

      IF (I. EQ. NX) GO TO 20

      K1=I+1

      DO 15 K=K1, NX

      R=0.

      DO 16 J=1, I1

16 R=R+AH(I, J)\*AH(J, K)

15 AH(I, K)=(AH(I, K)-R)/AH(I, I)

20 R=0.

      IF (MR. NE. 0) GO TO 12

      DO 17 J=1, I1

17 R=R+AH(I, J)\*DX(J)

      DX(I)=(DX(I)-R)/AH(I, I)

      ▽

```

12 CONTINUE
   XX(NX)=DX(NX)
   DO 18 I=1, NX1
     R=0.
     NXI=NX+1-I
     DO 19 J=NXI, NX
19  R=R+AX(NX-I, J)*XX(J)
18  XX(NX-I)=DX(NX-I)-R
     PRINT 23
     PRINT 24, (XX(II), II=1, NX)
14  IF (MR. EQ. 0) RETURN
     XA(NX, NX)=1./AX(NX, NX)
     DO 1 I=1, NX1
       DO 2 J=I, NX1
         RI=0.
         RJ=0.
         JJ=NX-J+1
         DO 3 L=JJ, NX
           RI=RI+XA(NX-I+1, L)*AX(L, NX-J)
3          RJ=RJ+AX(NX-J, L)*XA(L, NX-I+1)
           XA(NX-I+1, NX-J)=-RI/AX(NX-J, NX-J)
2          XA(NX-J, NX-I+1)=-RJ
         R=0.
         JJ=NX-I+1
         DO 4 L=JJ, NX
4          R=R+XA(NX-I, L)*AX(L, NX-I)
1          XA(NX-I, NX-I)=(1.-R)/AX(NX-I, NX-I)
     PRINT 47
     PRINT 24, ((XA(II, JJ), JJ=1, NX), II=1, NX)
     RETURN
27  PRINT 29, ((AX(II, JJ), JJ=1, NX), II=1, I)
     RETURN
END _____
SUBROUTINE GAUS(AX, XX, NX, MX)
  DIMENSION AX(64), XX(8), B(220)
23  FORMAT(/, 15X, 10H 'ARRAY XX, /, 4(2X, E11. 4))
29  FORMAT(20X, 14HSISTEMA OSOBAJ, /, 4(2X, E11. 4))
  N1=NX+1
  DO 8 K=1, 20
    ▽

```

```

8 B(K)=0.
  DO 10 I=1, NX
    KN=I*N1-NX
    B(I+1)=AX(I+1)/AX(1)
10 B(KN)=AX(KN)
  DO 12 L=2, NX
    L1=L-1
    LN=L1*N1
    LL1=LN+1
    LL2=LN+5
    LNL=LN+L
    DO 12 K=L, NX
      KN=K*N1-N1
      LNK=LN+K+1
      KNL=KN+L
      R1=0.
      R2=0.
      DO 15 J=1, L1
        KNJ=KN+J
        LJN=J*N1+L-N1
        LNJ=LN+J
        JNK=J*N1+K-NX
        R1=R1+B(KNJ)*B(LJN)
        R2=R2+B(LNJ)*B(JNK)
15 CONTINUE
    B(KNL)=AX(KNL)-R1
    IF (ABS(B(LNL)), LT. 1. E-5) GO TO 30
    B(LNK)=(AX(LNK)-R2)/B(LNL)
12 CONTINUE
  N2=NX-1
  KN=NX*N1
  XX(NX)=B(KN)
  DO 13 L=1, N2
    LX=NX-L
    LX1=LX+1
    R1=0.
    LL=KN-L*N1
    DO 14 J=LX1, NX
      LLJ=KN-(L+1)*N1+J

```

▽

```

14 R1=R1+XX(J)*B(LLJ)
13 XX(LX)=B(LL)-R1
    PRINT 23, (XX(KK), KK=1, NX)
    RETURN
30 PRINT 29, (B(KK), KK=1, LNL)
    RETURN
END _____

```

```

SUBROUTINE DETM(BD, DET, DD, ND, EPSD)

```

```

C      _ОБОЗНАЧЕНИЯ_

```

```

C      BD_МАТРИЦА РАЗМЕРНОСТИ ND*ND

```

```

C      DET_ЗНАЧЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ

```

```

    DIMENSION BD(ND, ND), DD(ND, ND)

```

```

10 FORMAT(1H1, 20X, 'ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ', /)

```

```

15 FORMAT(1H1, 20X, 'ИСХОДНАЯ МАТРИЦА', /)

```

```

20 FORMAT(1H1, 20X, 'ND=', I3, 10X, 'DET=', E12. 6, /)

```

```

30 FORMAT(5(5X, E11. 5))

```

```

    PRINT 15

```

```

    PRINT 30, ((BD(II, JJ), JJ=1, ND), II=1, ND)
    RR=1.

```

```

    IF((ND/2. ). GT. INT(ND/2. )) RR=-1.

```

```

75 IF (ABS(BD(1, 1)). GT. EPSD) GO TO 40

```

```

    DO 45 I=1, ND

```

```

        N1=ND-1

```

```

        DO 50 J=1, N1

```

```

50 DD(I, J)=BD(I, J+1)

```

```

45 DD(I, ND)=BD(I, 1)

```

```

        DO 70 I=1, ND

```

```

            DO 70 J=1, ND

```

```

70 BD(I, J)=DD(I, J)

```

```

            RR=-RR

```

```

        GO TO 75

```

```

40 M=ND

```

```

83 RD=1.

```

```

    M1=M-1

```

```

    M2=M-2

```

```

    DO 80 I=1, M2

```

```

        DO 81 I=1, M1

```

```

            DO 81 J=1, M1

```

```

    ▽

```

```

81 DD(I, J)=BD(1, 1)*BD(I+1, J+1)-BD(I+1, 1)*BD(1, J+1)
  I1=M1+1
  DD(I, M)=0.
  DD(M, I)=0.
80 RD=BD(1, 1)*RD
  RR=RR*RD
  DO 82 I=1, M1
  DO 82 J=1, M1
82 BD(I, J)=DD(I, J)
  M=M-1
  IF(M-3) 84, 83, 83
84 DET=(BD(1, 1)*BD(2, 2)-BD(2, 1)*BD(1, 2))/RR
  DET=-DET
  PRINT 10
  PRINT 20, ND, DET
  RETURN
  END

```

Метод Зейделя. Алгоритм

$$Ax = d.$$

$$b_{i,j} = -a_{i,j}/a_{i,i}; \quad b_{i,i} = 0; \quad e_i = d_i/a_{i,i}; \quad i, j = \overline{1, n};$$

$$c_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |b_{i,j}|; \quad C = \max_{1 \leq i \leq n} |c_i|.$$

$$K = [\lg \|e\|_1 - \lg \Delta - \lg(1 - C)].$$

$$\delta_i^k = \sum_{j=1}^{i-1} b_{i,j} x_j^{k+1} + \sum_{j=i+1}^n b_{i,j} x_j^k; \quad i = \overline{2, n};$$

$$x_i^{k+1} = \delta_i^k + e_i,$$

где  $\Delta$  — требуемая точность решения.

Программа ZEID — решение системы линейных уравнений методом Зейделя.

Обращение: CALL ZEID (A, B, X, N, EPS). Описание параметров: A — матрица коэффициентов системы уравнений ÷ размерность ÷  $n \times n$ ; B — правая часть системы уравнений — вектор размерности  $n$ ; X — решение системы уравнений — вектор размерности  $n$ ; EPS — требуемая точность решения системы уравнений.

Требуемые функции и подпрограммы: ALOG — вычисление десятичного логарифма; AINT — выделение целой части числа.

Входные данные: матрица A, вектор B, n — порядок системы, EPS — требуемая точность решения системы.

Выходные данные: вектор X — значение решения системы на каждой итерации; M — требуемое количество итераций для достижения заданной точности EPS решения.

## II. Решение нелинейных функциональных уравнений

Отыскание изолированного действительного корня уравнения

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^{n-i} = 0.$$

```

SUBROUTINE ZEID(A, B, X, N, DLT)
  DIMENSION A(N, N), B(N), X(N), C(10)
20 FORMAT(1H1, 10X,
  'РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ', 20X, /20X,
  *20X, 'МЕТОД ЗЕЙДЕЛЯ')
21 FORMAT(15X, 'ВЕКТОР РЕШЕНИЯ X(N)', /10X, 5(2X, E10. 4))
22 FORMAT (15X, 'КОЛИЧЕСТВО ИТЕРАЦИЙ K=', I2)
  DO 1 I=1, N
    R=1. /A(I, I)
    B(I)=B(I)*R
    C(I)=-1.
    DO 2 J=1, N
      A(I, J)=-A(I, J)*R
2 C(I)=C(I)+ABS(A(I, J))
    X(I)=B(I)
1 A(I, I)=0.
    Q=ABS(B(1))
    C1=C(1)
    DO 3 I=2, N
      IF (C(I). GT. C1) C1=C(I)
      IF (ABS(B(I)). GT. Q) Q=ABS(B(I))
3 CONTINUE
    R=DLT/Q*(1. -C1)
    R3=ALOG(R)/ALOG(C1)
    M=AINT(R3)
    PRINT 20
    PRINT 22, M
    DO 4 K=1, M
      DO 5 I=1, N
        R=0.
        DO 6 J=1, N
          R=A(I, J)*X(J)+R
6 X(I)=R+B(I)
5 PRINT 21, (X(II), II=1, N)
  ▽

```

## 4 CONTINUE

RETURN

END \_\_\_\_\_

МЕТОД НЬТОНА

DIMENSION X0(2), X1(2), F(2), DF(2, 2), F1(2, 2)

DATA X0, X1/1.9, .43, 2., 0. /

CALL ZEID(C, B, D, 4., 05)

CALL NEUTS(X0, X1, F, DF, F1, 2., .43, .001)

STOP

END \_\_\_\_\_

## МЕТОД ЗЕЙДЕЛЯ

КОЛИЧЕСТВО ИТЕРАЦИЙ K=14

ВЕКТОР РЕШЕНИЯ X(N)

-. 2321E 00 0. 1660E 00 -. 8346E-01 -. 1852E-02

ВЕКТОР РЕШЕНИЯ X(N)

-. 2358E 00 0. 1646E 00 -. 8375E-01 -. 1118E-02

ВЕКТОР РЕШЕНИЯ X(N)

-. 2359E 00 0. 1644E 00 -. 8379E-01 -. 1061E-02

ВЕКТОР РЕШЕНИЯ X(N)

-. 2359E 00 0. 1644E 00 -. 8380E-01 -. 1058E-02

ВЕКТОР РЕШЕНИЯ X(N)

-. 2359E 00 0. 1644E 00 -. 8380E-01 -. 1057E-02

ВЕКТОР РЕШЕНИЯ X(N)

-. 2359E 00 0. 1644E 00 -. 8380E-01 -. 1057E-02

ВЕКТОР РЕШЕНИЯ X(N)

-. 2359E 00 0. 1644E 00 -. 8380E-01 -. 1057E-02

ВЕКТОР РЕШЕНИЯ X(N),

-. 2359E 00 0. 1644E 00 -. 8380E-01 -. 1057E-02

ВЕКТОР РЕШЕНИЯ X(N)

-. 2359E 00 0. 1644E 00 -. 8380E-01 -. 1057E-02

ВЕКТОР РЕШЕНИЯ X(N)

-. 2359E 00 0. 1644E 00 -. 8380E-01 -. 1057E-02

ВЕКТОР РЕШЕНИЯ X(N)

-. 2359E 00 0. 1644E 00 -. 8380E-01 -. 1057E-02

ВЕКТОР РЕШЕНИЯ X(N)

-. 2359E 00 0. 1644E 00 -. 8380E-01 -. 1057E-02

ВЕКТОР РЕШЕНИЯ X(N)

-. 2359E 00 0. 1644E 00 -. 8380E-01 -. 1057E-02

ВЕКТОР РЕШЕНИЯ X(N)

-. 2359E 00 0. 1644E 00 -. 8380E-01 -. 1057E-02

```

SUBROUTINE SROOT(A, X, N, E)
DIMENSION A(N), R(3), B(9)
C   X-ЗНАЧЕНИЕ ИЗОЛИРОВАННОГО КОРНЯ
60  FORMAT(1H1, 10X, 'ВЫЧИСЛЕНИЕ ИЗОЛИРОВАННОГО КОРНЯ',
, /13X, 'АЛГЕБРАИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ', /)
65  FORMAT(10X, 'КОЭФФИЦИЕНТЫ УРАВНЕНИЯ-МАССИВ A(N)', /
, 10X, 10(2X, F8. 3), /)
70  FORMAT(10X, 'ЗНАЧЕНИЕ КОРНЯ=', E11. 4,
/15X, 'ТОЧНОСТЬ=', F8. 4)
S2=1.
PRINT 60
C   ОТДЕЛЕНИЕ КОРНЕЙ
9   RM=0.
RR=0.
R1=0.
PRINT65, (A(II), II=1, N)
DO 10 I=2, N
IF (ABS(A(I)). GT. RM)RM=ABS(A(I))
IF (A(I). LT. R1) R1=A(I)
IF (ABS(A(I-1)). GT. RR) RR=A(I-1).
10  CONTINUE
IF (N. EQ. 2*(N/2)) R2=-1.
IF(R1. GT. 0. ) GO TO 1
15  R(2)=1 +RM/A(1)
R(1)=A(N)/(RR+A(N))
GO TO 2
1   S2=-S2
R2=1.
R3=1.
DO 12 I=2, N
A(I)=R3*R2+A(I)
12  R3=-R3
GO TO 9
2   DO 3 I=1, 2
I1=3*I-3
DO 3 J=1, 2
3   B(I1+J)=F(R(J), A, N, I-1)
17  IF (B(1)*B(2). GT. 0. ) GO TO 14
IF (B(4)*B(5). GT. 0. ) GO TO 25
▽

```

```

24 R(3)= 5*(R(1)+R(2))
   B(3)=F(R(3), A, N, 0)
   B(6)=F(R(3), A, N, 1)
   II=1
   IF (B(1)*B(3), LT, 0.) II=2
   B(II)=B(3)
   B(II+3)=B(6)
   GO TO 17
25 DO 20 I=1, 2
26 B(I+6)=F(R(I), A, N, 2)
   IF (B(7)*B(8), LT, 0.) GO TO 30

```

КОМБИНИРОВАННЫЙ МЕТОД

```

DO 21 I=1, 2
X=R(I)
Y=R(3-I)
B(3*I)=B(4*I-3)
B(5)=B(6-I)
21 CONTINUE
22 X=X-B(3)/B(6)
   B(3)=F(X, A, N, 0)
   B(6)=F(X, A, N, 1)
   IF (ABS(B(6)), LT, 1E-6) GO TO 32
   Y=Y-((Y-X)*B(2))/(B(2)-B(3))
   B(2)=F(Y, A, N, 0)
   IF (ABS((Y-X)*.5), GT, E) GO TO 22
   X=(X+Y)/2. *52
   GO TO 35

```

МЕТОД НЬЮТОНА

```

30 II=1
   IF (B(1)* B(7), LT, 0.) II=2
   X=R(II)
   B(6)=B(II+3)
   B(3)=B(II)
34 DX=-B(3)/B(6)
   X=X+DX
   DO 36 I=1, 2
36 B(3*I)=F(X, A, N, I-1)
   IF (ABS(DX), GT, E) GO TO 34
   GO TO 37

```

```

32 B(9)=F(X, A, N, 2)
   DX=SQRT(-2. *B(3)/B(9))
   X=X+DX
   B(3)=F(X, A, N, 0)
   IF (ABS(DX). GT. E) GO TO 31
37 X=X*S2
35 PRINT 70, X, EPS
   RETURN
   END

FUNCTION F(Z, A, N, L)
DIMENSION A(N)
R1=1.
IF (L. EQ. 1) R1=N-1.
IF (L. EQ. 2) R1=(N-1. )*(N-2. )
N2=N-L-1
F=R1*A(1)
DO 1 I=1, N2
IF(L. EQ. 1) R1=(N-I-1. )
IF(L. EQ. 2) R1=(N-I-1. )*(N-2. -I)
F=F*Z+R1*A(I+1)
1 CONTINUE
RETURN
END _____

```

Алгоритм: а) отделение корня на  $[a, b]$

$$a = 1 + \max_{1 \leq i < n} \{|a_i|/|a_0|\};$$

$$b = 1/[1 + \max_{0 \leq i < n-1} \{|a_i|/|a_n|\}];$$

$$f(x) = a_0; f(x) = f(x)x + a_i; i = \overline{1, n};$$

$$f'(x) = na_0; f'(x) = xf'(x) + (n-i)a_i; i = \overline{1, n-1}.$$

Проверка условий

$$f(a)f(b) < 0; f'(a)f'(b) > 0.$$

Если одно из этих условий не выполняется, то  $[a, b]$  делим пополам и снова проверяем выполнение этих условий.

б) отыскание изолированного корня на отрезке комбинированным методом.

Если выполняется на  $[a, b]$  условие

$$f''(a)f''(b) > 0,$$

то в качестве начального приближения для метода Ньютона выбираем тот из концов отрезка  $[a, b]$ , в котором

$$f(c)f''(c) > 0, c = a \text{ или } c = b.$$

Пусть  $c = b = x^0$ .

$$b^1 = x^1 = x^0 - f(x^0)/f'(x^0),$$

АЛГЕБРА

```
DIMENSION A(4, 4), C(4, 4), B(6), D(6), E(6), G(6), F(4, 4), F1(4, 4)
DATA A/3., 2., -1., 5., 1., 2., -1., 1., -1., 3., 2., 2., 3., 1., 4. /
DATA C/6., 1., 0., 1., 0., 5., -1., 2., 1., 1., 5., 0., 1., 2., 0., 9. /
DATA G/1., -15., 85., -225., 274., -120. /
CALL SROOT(G, D, 4., 001)
CALL GORN(G, B, D, E, 5., 0001)
STOP
END
```

по методу хорд вычисляем

$$a^1 = a^0 - \frac{(a^0 - b^1) f(a^0)}{f'(a^0) - f'(b^1)}$$

Если

$$|b^i - a^i| \leq 2\Delta, \text{ то} \\ x^* \approx (b^i + a^i)/2.$$

Программа SROOT.

Обращение: CALL SROOT (A, X, N, EPS). Описание параметров: A — коэффициенты уравнения — массив размерности  $n+1$  в порядке убывания степеней при  $x$ ;  $x$  — значение корня;  $N$  — степень полинома; EPS — требуемая точность вычисления изолированного корня. Требуемые функции и подпрограммы: функция  $F(Z, A, N, L)$  — назначение — вычисление значения функции  $f(x)$  в точке  $z$  или  $f'(z)$  или  $f''(z)$ : при  $L=0$  вычисляется  $f(z)$ ,  $L=1$  —  $f'(z)$ ,  $L=2$  —  $f''(z)$ .

Пример. Вычислить изолированный корень уравнения

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0.$$

Вычисление всех корней алгебраического уравнения методом выделения корней.

Алгоритм:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n+1} a_i x^{n-i+1}. \\ p = a_n/a_{n-1}; q = a_{n+1}/a_{n-1}; \\ b_1 = a_1; b_2 = a_2 - pb_1; \\ b_i = a_i - pb_{i-1} - qb_{i-2}; i = \overline{3, n+1}; \\ c_1 = b_1; c_2 = b_2 - pc_1; \\ c_i = b_i - pc_{i-1} - qc_{i-2}; i = \overline{3, n-1}; \\ c_n = -pc_{n-1} - qc_{n-2}; d = c_{n-1}^2 - c_n c_{n-2}; \\ \Delta p = (b_n c_{n-1} - b_{n+1} c_{n-2})/d; \\ \Delta q = (b_{n+1} c_{n-1} - b_n c_n)/d;$$

ВЫЧИСЛЕНИЕ ИЗОЛИРОВАННОГО КОРНЯ  
АЛГЕБРАИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ  
КОЭФФИЦИЕНТЫ УРАВНЕНИЯ—МАССИВ A(N)

1. 000 -15. 000 85. 000 -225. 000

ЗНАЧЕНИЕ КОРНЯ= 0. 7801E 01

ТОЧНОСТЬ= 0. 0000

$$|\Delta q| \leq \varepsilon; |\Delta p| \leq \varepsilon;$$

$$T_{2i} = p; T_{2i-1} = q;$$

$$x_{2i, 2i-1} = -T_{2i}/2 \pm \sqrt{T_{2i}^2/4 - T_{2i-1}}$$

Программа GORN.

Обращение: CALL GORN (A, T, B, C, L, EPS). Описание параметров: A — коэффициенты полинома — массив размерности L + 1; T, B, C — массивы размерности L + 1; L — степень полинома f(x); EPS — требуемая точность решения уравнения f(x) = 0.

Требуемые функции и подпрограммы — нет.

Входные данные: массив A; степень полинома — L, требуемая точность — EPS.

Выходные данные: массив T — коэффициенты трехчленов вида  $x^2 + T_{2i}x + T_{2i-1}$ . Массивы B и C — действительные и мнимые части корней соответственно.

```

SUBROUTINE GORN(AG, TG, BG, CG, LG1, EPSG)
DIMENSION AG(5), BG(5), CG(5), TG(5)
C      AG(1, LG1+1) — КОЭФФИЦИЕНТЫ ПОЛИНОМА
C      BG(1, LG1), CG(1, LG1) — ДЕЙСТВИТ.
      И МНИМЫЕ ЧАСТИ КОРНЕЙ
350 FORMAT(1H1, 20X)
      'COEFFICIENTS OF POLINOM TG(LG)', /)
355 FORMAT(5(5X, E11. 5))
360 FORMAT(1H1, 18X, 'ROOTS OF POLINOM AG(LG+1)', /)
365 FORMAT(15X, I3, 5X, E11. 5, '+J<<', E11. 5, ')', /)
      LG=LG1
305 LG2=LG+1
      QG=AG(LG2)/AG(LG-1)
      BG(1)=AG(1)
      CG(1)=BG(1)
      PG=AG(LG)/AG(LG-1)
      KG=2
      KK=0
310 BG(2)=AG(2)-PG*CG(1)
      CG(2)=BG(2)-PG*CG(1)
      DO 315 I=3, LG2
      BG(I)=AG(I)-PG*BG(I-1)-QG*BG(I-2)
315 CG(I)=BG(I)-PG*CG(I-1)-QG*CG(I-2)
      CG(LG)=-PG*CG(LG-1)-QG*CG(LG-2)
      DQG=CG(LG-1)*CG(LG-1)-CG(LG-2)*CG(LG)
      DPG=(BG(LG)*CG(LG-1)-BG(LG+1)*CG(LG-2))/DQG
      DQG=(CG(LG-1)*BG(LG+1)-BG(LG)*CG(LG))/DQG

```

```

R1=ABS(DPG)-EPSG
IF (ABS(DPG). LT. ABS(DQG)) R1=ABS(DQG)-EPSG
IF (R1. LE. 0. ) GO TO 320
PG=PG+DPG
QG=QG+DQG
KK=KK+1
IF (KK. LT. 50) GO TO 310
KG=KG+1
DO 10 I=1, LG2
10 CG(I)=AG(LG2+1-I)
DO 11 I=1, LG2
11 AG(I)=CG(I)
GO TO 305
320 TG(LG1-LG+2)=1./QG
TG(LG1-LG+1)=PG/QG
IF (KG. EQ. 2*(KG/2)) GO TO 12
TG(LG1-LG+2)=QG
TG(LG1-LG+1)=PG
12 DO 330 I=1, LG
330 AG(I)=BG(I)
LG=LG-2
IF (LG-2) 335, 340, 305
340 TG(LG1-1)=AG(2)/AG(3)
335 TG(LG1)=AG(1)/AG(LG+1)
IF (KG. EQ. 2*(KG/2)) GO TO 13
TG(LG1-1)=AG(3)/AG(2)
TG(LG1)=AG(LG+1)
IF (LG1. GT. 2*(LG1/2)) TG(LG1+1)=0.
13 PRINT 350
PRINT 355, (TG(I), I=1, LG1)
LG4=LG1/2
DO 370 I=1, LG4
R1=-TG(2*I-1)/(2.*TG(2*I))
R2=R1*R1-1/TG(2*I)
R3=SQRT(ABS(R2))
I3=1
IF (R2. LT. 0. ) I3=0
DO 120 J=1, 2
BG(2*I+J-2)=R1*(-1)**J*I3*R3
120 CG(2*I+J-2)=(-1)**J*(1-I3)*R3

```

```

370 CONTINUE
      IF (LG1.EQ.2*LG4) GO TO 395
      BG(LG1)=-1/TG(LG1)
      CG(LG1)=0.
395 PRINT 360
      DO 425 I=1, LG1
425 PRINT 365, I, BG(I), CG(I)
      RETURN
      END _____

```

Пример. Найти корни уравнения

$$x^5 - 15x^4 + 85x^3 - 225x^2 + 274x - 120 = 0$$

с точностью  $\Delta = 0,001$ .

```

-.150000E 01   0.500000E 00   -.503333E 00
0.833333E-01 -.200000E 00

1  0.100000E 01 + J < 0.0   >
2  0.200000E 01 + J < 0.0   >
3  0.300000E 01 + J < 0.0   >
4  0.400000E 01 + J < 0.0   >
5  -.500000E 01 + J < 0.0   >

```

Метод Ньютона. Программа NEUTS.

Обращение: CALL NEUTS(X0, X1, F, DF, F1, N, A, EPS). Описание параметров: X0(N), X1(N) — массивы размерности N — граница области D сходимости решения; F(N) — правая часть системы уравнений — вектор размерности N; F1(N, N) — матрица размерности N × N — обратная матрица для матрицы DF; X1(N) — вектор размерности N решения системы; A — радиус сходимости решения системы; EPS — требуемая точность решения.

Требуемые подпрограммы: FX(A, X, N) — левая часть системы уравнений; DFDX — частные производные  $\partial f_i / \partial x_j$ ; MAXFM(F, A, N) — подпрограмма вычисления максимума функций в D; XALS — решение системы линейных уравнений и обращение матрицы.

Входные данные: X0(N), X1(N) — векторы начального приближения в области D; A — радиус сходимости решения; EPS — требуемая точность решения.

Выходные данные: X1(N) — вектор приближенного решения системы.

```

SUBROUTINE NEUTS(X0, X1, F, DF, F1, N, A, DLT)
  DIMENSION X0(N), X1(N), F(N), DF(N, N), F1(N, N)
  CALL FX(F, X0, N)
  CALL DFDX(DF, X0, N)
  CALL MAXFM(DF, B0, N)
  CALL DFDX(F1, X1, N)
  DO 1 I=1, N
  DO 1 J=1, N
  ▽

```

```

1 F1(I, J)=DF(I, J)-F1(I, J)
  CALL MAXFM(F1, Q1, N)
  Q=Q1/A
  DO 2 I=1, N
  DO 2 J=1, N
2 F1(I, J)=DF(I, J)
  CALL XALS(F1, F, DF, X1, N, 1)
  C0=0.
  DO 3 I=1, N
  C1=0.
  DO 4 J=1, N
4 C1=C1+ABS(DF(I, J)*F(J))
  IF (C1. GT. C0) C0=C1
3 CONTINUE
  PRINT 20
  D=B0*Q
  IF (C0. GE. (0. 5/D)) GO TO 10
  A0=(1. -SQRT(1. -2. *D*C0))/D
  P=ALOG(D*DLT)/ALOG(A0)
  M=AINT(ALOG(P)/ALOG(2. ))+1
  PRINT 21, A0, C0, D, Q, DLT, M
  DO 5 K=1, M
  CALL XALS(DF, F, F1, X1, N, 0)
  DO 6 I=1, N
6 X1(I)=X1(I)+X0(I)
  PRINT 22, K, (X1(II), II=1, N), ((DF(I, J), J=1, N), I=1, N)
  CALL FX(F, X1, N)
  CALL DFDX(DF, X1, N)
  DO 7 I=1, N
7 X0(I)=X1(I)
5 CONTINUE
10 PRINT 23, C0
20 FORMAT (1H1, 10X, 'РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ N НЕЛИНЕЙНЫХ',
  *12X, 'УРАВНЕНИЙ-МЕТОД НЬЮТОНА')
21 FORMAT (10X, 'A0=', F7. 4, 'B0=', F7. 4,
  C0=', F7. 4, ' D=', F7. 4,
  *15X, ' Q=', F8. 4, ' DLT=', F7. 4, ' M=', I2)
22 FORMAT(15X, 'K=', I2, 2X, 'ВЕКТОР X', 4(F8. 3),
  *13X, 'МАТРИЦА DF', 4(4F9. 4, /))

```

▽

23 FORMAT (1H1, 15X, 'C0=', G13. 6)

RETURN

END \_\_\_\_\_

SUBROUTINE FX(A, X, N)

DIMENSION A(N), X(N)

A(1)=SIN(X(1)+1.)-X(2)

A(2)=X(1)\*X(1)+X(2)\*X(2)-4.

RETURN

END \_\_\_\_\_

SUBROUTINE MAXFM(F, A, N)

DIMENSION F(N, N)

A=0.

DO 1 I=1, N

A1=0.

DO 2 J=1, N

2 A1=A1+ABS(F(I, J))

IF (A1. GT. A) A=A1

1 CONTINUE

RETURN

END \_\_\_\_\_

Пример. Найти решение системы уравнений с точностью  $\Delta = 0,01$  в области  $D = \{x : \|x_0 - x\| < a\}$ :

$$\left. \begin{aligned} \sin(x+1) &= y; \\ x^2 + y^2 &= 4. \end{aligned} \right\}$$

$x_0 = [1,9; 2]; x_1 = [0, 43; 0]; A = 0,43.$

ОБРАТНАЯ МАТРИЦА A(-1)

МАСШЕВ ХА(NX, NX)

0,2901E 00 0,3373E 00 -0,1282E 01 -0,3275E 00

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ N НЕЛИНЕЙНЫХ

УРАВНЕНИЙ-МЕТОД НЬЮТОНА

C0= 9,311637

III. Решение проблемы собственных значений и векторов матриц.  
Метод Лавреньева. Алгоритм:

$$|A - \lambda E| = 0.$$

$$a_{i,j}^{(0)} = a_{i,j}; \quad a_{i,j}^{(k+1)} = \sum_{l=1}^n a_{i,l}^{(k)} a_{l,j}^{(0)};$$

$$S_{i+1} = \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(i)}; \quad i = \overline{0, n-1}; \quad A_1 = 1.$$

$$A_k = 1/k \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} A_{k-i} S_i; \quad k = \overline{2, n}$$

Программа SLVRE.

Обращение: CALL SLVRE (A, B, C, R, Q, N, EPS). Описание параметров: A — исходная матрица размерности  $n \times n$ ; B, C — матрицы (рабочие) размерности  $n \times n$ ; R, Q — действительные и мнимые значения характеристических чисел матрицы A — массивы размерности  $n$ ; EPS — требуемая точность вычисления характеристических чисел.

Требуемые функции и подпрограммы — подпрограмма GORN.

Входные данные: A — исходная матрица; n — размерность матрицы A; EPS — требуемая точность решения характеристического уравнения.

Выходные данные: R, Q — действительные и мнимые значения характеристических чисел.

```

SUBROUTINE SLVRE(ALR, BR, CR, RLR, QLR, NL, EPSL)
  DIMENSION ALR(NL, NL), BR(NL, NL), CR(NL, NL), RLR(5),
  1SLR(5), QLR(5), AL(6)
  76 FORMAT(1H1, 25X, 'ВЫЧИСЛЕНИЕ СОБСТВ.
  ЗНАЧЕНИЙ _ МЕТОД ЛЕВЕРЬЕ', /)
  81 FORMAT(1H1, 25X, 'ИСХОДНАЯ МАТРИЦА', /)
  86 FORMAT(1H1, 20X, 'КОЭФ. ХАРАКТЕР. ПОЛИНОМА', /)
  121 FORMAT(7(5X, E11. 5))
  DO 16 I=1, NL
    AL(I+1)=0.
    SLR(I)=0.
    SLR(1)=SLR(1)+ALR(I, I)
  DO 16 J=1, NL
    CR(I, J)=0.
  16 BR(I, J)=ALR(I, J)
  PRINT 81
  PRINT 121, ((ALR(II, JJ), JJ=1, NL), II=1, NL)
  DO 21 L=2, NL
  DO 22 I=1, NL
  DO 31 J=1, NL
  DO 31 K=1, NL
  31 CR(I, J)=CR(I, J)+BR(I, K)*ALR(K, J)
  ▽
  22 SLR(L)=SLR(L)+CR(I, I)
  DO 36 I=1, NL
  DO 36 J=1, NL
  BR(I, J)=CR(I, J)
  36 CR(I, J)=0.
  21 CONTINUE
  PRINT 76
  PRINT 121, (SLR(I), I=1, NL)
  NL1=NL+1

```

```

AL(1)=1.
DO 26 I=1, NL
DO 41 J=1, I
41 AL(I+1)=AL(I+1)+(-1)**(J+1)*AL(I-J+1)*SLR(J)
26 AL(I+1)=AL(I+1)/(1. *I)
DO 17 I=1, NL
17 AL(I+1)=AL(I+1)*(-1)**I
PRINT 86
PRINT 121, (AL(II), II=1, NL1)
CALL GORN(AL, SLR, RLR, QLR, NL, EPSL)
RETURN
END _____

```

```

DIMENSION A(3, 3), B(3, 3), C(3, 3), R(5), Q(5)
DATA A/1., 3., -1., -1., 2., 1., 2., -1., 3. /
CALL SLVRE(A, B, C, R, Q, 3., 001)
STOP
END

```

#### ИСХОДНАЯ МАТРИЦА

```

0. 10000E 01      -. 10000E 01      0. 20000E 01      0. 30000E 01
0. 20000E 01      -. 10000E 01      -. 10000E 01
0. 10000E 01      0. 30000E 01

```

#### ВЫЧИСЛЕНИЕ СОБСТВ. ЗНАЧЕНИЙ

```

0. 60000E 01      0. 20000E 01      -. 15000E 02

```

Пример. Найти собственные значения матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 10 \end{bmatrix},$$

#### КОЭФ. ХАРАКТЕР. ПОЛИНОМА

```

0. 10000E 01      -. 60000E 01      0. 17000E 02      -. 25000E 02
-. 35943E 00      0. 12478E 00      -. 32057E 00
1      0. 14403E 01 + J < -. 24372E 01 >
2      0. 14403E 01 + J < 0. 24372E 01 >
3      -. 31194E 01 + J < 0. 0 >

```

Метод Крылова. Алгоритм:

$$y^{(0)} = x = [1, 1, 0, \dots, 0]^T;$$

$$y_i^{(k)} = \sum_{j=1}^n a_{i,j} y_j^{(k-1)}; \quad k = \overline{1, n};$$

$$p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \dots + p_n y^{(0)} = -y^{(n)};$$

$$\lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \dots + p_{n-1} \lambda + p_n = 0.$$

Вычисление собственных векторов:

$$x^{(k)} = \sum_{j=0}^{n-1} q_{j,k} y^{(n-j-1)};$$

$$q_{0,i} = 1; i = \overline{1, n}; q_{j,i} = \lambda_i q_{j-1,i} + p_j; i = \overline{1, n}; j = \overline{1, n-1}.$$

Программа SLCR.

Обращение: CALL SLCR (A, B, C, D, N, R, Q). Описание параметров: A — исходная матрица размерности  $n \times n$ ; B, C, D — рабочие матрицы размерности  $n \times n$ ; R, Q — массивы размерности  $n$  — действительные и мнимые части собственных значений.

Требуемые функции и подпрограммы: XALS, GORN.

Входные данные: A — исходная матрица размерности  $n \times n$ ; n — размерность A.

Выходные данные: R, Q — действительные и мнимые части собственных значений матрицы A; D — матрица размерности  $n \times n$  — собственные векторы — столбцы матрицы A.

```

SUBROUTINE SLCR(A, B, C, D, N, RX, QX)
DIMENSION A(N, N), B(N, N), C(N, N), D(N, N), AX(5),
  RX(5), QX(5), T(5)
C      SELF VALUE PROBLEM_A. Н. КРЫЛОВ_МЕТНОД
C      =ОБОЗНАЧЕНИЯ=
C      A_ ИСХОДНАЯ МАТРИЦА РАЗМЕРНОСТИ N*N
C      B, C_ РАБОЧИЕ МАТРИЦЫ
C      D_ МАТРИЦА СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ
C      AX_ КОЭФФИЦИЕНТЫ ХАРАКТЕРИСТ. УРАВНЕНИЯ
C      RX, QX_ ДЕЙСТВИТ.
C      И МНИМЫЕ ЧАСТИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ
C      ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ПОДПРОГРАММЫ ; XALS, GORN

```

```

11 FORMAT(1H1, 10X,
  'ВЫЧИСЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И ', /
  '*10X, ' ВЕКТОРОВ-МЕТОД КРЫЛОВА', /)
12 FORMAT(20X, 'ИСХОДНАЯ МАТРИЦА', /)
13 FORMAT(20X, 'МАТРИЦА КРЫЛОВА B(N, N)', /)
14 FORMAT(15X, 'СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ МАТРИЦЫ A', /)
15 FORMAT(15X, 'КО ЭФФИЦИЕНТУ ХАРАКТ.
  УРАВНЕНИЯ', 7(5X, E10. 5), /)
16 FORMAT(5(3X, E11. 4))
N1=N+1
DO 1 L=1, N
  RX(L)=0.
DO 1 I=1, N
  B(L, I)=0.

```

```

1 D(L, I)=0.
  B(1, N)=1,
  DO 2 L=2, N
  DO 2 I=1, N
  DO 2 J=1, N
2 B(I, N1-L)=B(I, N1-L)+A(I, J)*B(J, N1-L+1)
  DO 3 L=1, N
  DO 3 J=1, N
3 RX(L)=RX(L)-A(L, J)*B(J, 1)
  PRINT 11
  PRINT 12
  PRINT 16, ((A(II, JJ), JJ=1, N), II=1, N)
  PRINT 13
  PRINT 16, ((B(II, JJ), JJ=1, N), II=1, N)
  CALL XALS(B, RX, QX, N, 0)
  AX(1)=1.
  DO 4 I=1, N
4 AX(I+1)=QX(I)
  PRINT 15, (AX(II), II=1, N1)
  CALL GORN(AX, T, RX, QX, N, 1E-3)
  DO 5 L=1, N
5 C(L, 1)=1.
  DO 6 L=2, N
  DO 6 I=1, N
  ▽

6 C(L, I)=RX(I)*C(L-1, I)+AX(L)
  DO 7 L=1, N
  DO 7 I=1, N
  DO 7 J=1, N
7 D(I, L)=D(I, L)+B(I, J)*C(J, L)
  PRINT 14
  PRINT 16, ((D(II, JJ), JJ=1, N), II=1, N)
  RETURN
  END _____

```

**Пример.** Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 10 \end{bmatrix}.$$

```

DIMENSION A(3, 3), B(3, 3), C(3, 3), D(3, 3), R(5), Q(5)
2 FORMAT(20X, 'MATRIX A' / 3(5X, 3F4. 1))
DATA A/5., 1., 4., 3., 3., 2., 6., 2., 10. /
PRINT 2, A
CALL SLCR(A, B, C, D, 3, R, Q)
STOP
END

```

IV. Вычисление коэффициентов интерполяционных полиномов  
Интерполяционный полином Лагранжа. Алгоритм:

$$L_n(x) = \sum_{i=1}^n a_i x^{i-1}.$$

$$r_i = 1/(x_{i+1} - x_i); \quad a_{1,i} = r_i(x_{i+1}y_i - x_i y_{i+1});$$

$$a_{2,i} = r_i(y_{i+1} - y_i); \quad i = \overline{1, n-1};$$

$$r_i = 1/(x_{i+1} - x_{i-1}); \quad b_{1,i} = r_i(a_{1,i}x_{i+1} - a_{1,i+1}x_i);$$

$$b_{2,i} = r_i(a_{2,i-1}x_{i+1} - a_{2,i}x_{i-1} - a_{1,i+1} + a_{2,i+1});$$

$$b_{3,i} = r_i(a_{2,i} - a_{2,i-1}); \quad i = \overline{2, n-1};$$

$$a_{k,i} = b_{k,i}; \quad k = \overline{1, 3}; \quad i = \overline{2, n-1};$$

$$r_i = 1/(x_{k+i+1} - x_i);$$

$$b_{1,i} = r_i(a_{1,i}x_{k+i+1} - a_{1,i+1}x_i);$$

$$b_{j+1,i} = r_i(a_{j+1,i}x_{k+i+1} - a_{j+1,i+1}x_i - a_{j,i+1} + a_{j+1,i+1});$$

$$k = \overline{3, n-1}; \quad j = \overline{1, k+1}; \quad i = \overline{1, n-k-1}.$$

Программа PLLG.

Обращение: CALL PLLG(X, Y, A, B, C, XI, YI, N). Описание параметров: X — узлы интерполяции, массив размерности n; A — коэффициенты интерполяционного полинома  $L_n(x)$ , массив размерности n; B, C — рабочие массивы, матрицы размерности  $n \times n$ ; XI — точка, в которой вычисляется значение функции —  $f(x)$ ; YI — значение функции в точке XI; n — количество узлов интерполяции.

Требуемые функции и подпрограммы — нет.

Входные данные: x — узлы интерполяции; y — значения функции в узлах интерполяции; n — количество узлов интерполяции.

Выходные данные: A — коэффициенты интерполяционного полинома; YI — значение  $L_n(x)$  в точке XI.

```

SUBROUTINE PLLG(XG, YG, AG, BG, CG, XI, YI, NG, NG1)
C      ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЙ ПОЛИНОМ ЛАГРАНЖА
C      _ОБОЗНАЧЕНИЯ_
C      YG_ ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИИ В УЗЛАХ_NG
C      XG_ УЗЛЫ ИНТЕРПОЛЯЦИИ_NG
C      AG_ КОЭФФИЦИЕНТЫ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО ПОЛИНОМА
C      NG_ СТЕПЕНЬ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО ПОЛИНОМА_1
C      BG, CG_ РАБОЧИЕ МАССИВЫ
C      XI_ УЗЕЛ, В КОТОРОМ ВЫЧИСЛЯЮТСЯ ЗНАЧЕНИЯ ПОЛИНОМА
DIMENSION XG(NG), YG(NG), AG(NG), BG(NG, NG), CG(NG, NG)

```

```

48 FORMAT(1H1, 20X,
  'ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЙ ПОЛИНОМ ЛАГРАНЖА', /)
53 FORMAT(1H1, 25X, 'УЗЛЫ ИНТЕРПОЛЯЦИИ', /)
58 FORMAT(1H1, 20X, 'ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ В УЗЛАХ', /)
63 FORMAT(1H1, 15X, 'КОЭФФИЦИЕНТЫ ИНТЕРПОЛ. ПОЛИНОМА', /)
68 FORMAT(1H1, 20X, 'ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИИ_ YI(XI(NG1))',
  /30X, 'YI=', E11. 5, /)
73 FORMAT(5(5X) E11. 5))
  DO 13 I=1, NG
  DO 13 J=1, NG
  BG(I, J)=0.
13 CG(I, J)=0.
  PRINT 53
  PRINT 73, (XG(II), II=1, NG)
  PRINT 58
  PRINT 73, (YG(II), II=1, NG)
  N1=NG-1
  DO 18 I=1, N1
  I1=I+1
  R=XG(I1)-XG(I)
  BG(1, I)=(YG(I)*XG(I1)-YG(I1)*XG(I))/R
  ▽

18 BG(2, I)=(YG(I1)-YG(I))/R
  N2=NG-2
  DO 23 K=1, N2
  N3=NG-K-1
  DO 28 I=1, N3
  I2=I+K+1
  R=XG(I2)-XG(I)
  I1=I+1
  CG(1, I)=(BG(1, I)*XG(I2)-BG(1, I1)*XG(I))/R
  K1=K+1
  DO 33 J=1, K1
  J1=J+1
33 CG(J1, I)=(BG(J1, I)*XG(I2)-BG(J1, I1)*
  *XG(I)-BG(J, I)+BG(J, I1))/R
28 CONTINUE
  K2=K+2
  DO 38 I=1, K2
  N4=NG-K

```

```

DO 38 J=1, N4
  BG(I, J)=CG(I, J)
38 CG(I, J)=0.
23 CONTINUE
  DO 43 I=1, NG
43 AG(I)=BG(I, 1)
  XI=XG(NG1)
  YI=AG(NG)
  DO 78 I=1, N1
78 YI=XI*YI+AG(NG-I)
  PRINT 48
  PRINT 63
  PRINT 73, (AG(II), II=1, NG)
  PRINT 68, YI
  RETURN
END _____

```

**Пример.** Построить интерполяционный полином для функции, заданной в узлах:

$x$	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$y = f(x)$	2,7	2,9	3,6	3,4	3,9	3,5	3

Интерполяционный полином Ньютона. Алгоритм:

$$P_n(x) = \sum_{i=1}^{n+1} a_i x^{i-1}.$$

$$b_1 = 1; c_1 = 1; dy_1 = y_1; b_2 = 1;$$

$$dy_k = dy_k + \sum_{i=1}^k (-1)^i b_i y_{k-i+1};$$

$$c_{i+1} = b_{i+1} + b_i; i = \overline{1, k};$$

$$b_i = c_i; i = \overline{1, k+1}; k = \overline{2, n};$$

$$a_1 = dy_n; r_2 = 1/(h(n-k));$$

$$r_1 = r_2(x_0 + h(n-1-k));$$

$$a_{k-i+2} = r_2 a_{k-i+1} - r_1 a_{k-i+2}; k = \overline{1, n-1}; i = \overline{1, k};$$

$$a_1 = dy_{n-k} - r_1 a_1.$$

Программа IPNT.

Обращение: CALL IPNT (A, Y, X0, H, XT, YT, N). Описание параметров: A — массив коэффициентов интерполяционного полинома размерности n; Y — значение функции в узлах интерполяции, массив размерности n + 1; X0 — начальный узел интерполяции; H — шаг интерполяции; XT — точка, в которой вычисляется значение интерполяционного полинома; YT — значение  $P_n(x)$  в точке XT; n — количество узлов интерполяции.

Требуемые функции и подпрограммы — нет.

### C INTERPOLATION

```

DIMENSION X(7), Y(7), A(7), B(7, 7), C(7, 7), D(3, 3)
DATA X/ 0., 5. 1., 1. 5, 2., 2. 5, 3./
DATA Y/2. 7, 2. 9, 3. 6, 3. 4, 3. 9, 3. 5, 3. /
CALL PLLG(X, Y, A, B, C, 1., YT, 7, 3)
CALL IPNT(A, Y, C, 0., 5. 1. 0, YT, 7)
STOP
END

```

#### УЗЛЫ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

```

0. 0          0. 50000E 00      0. 10000E 01
0. 15000E 01  0. 20000E 01
0. 25000E 01  0. 30000E 01
                ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ В УЗЛАХ
0. 27000E 01  0. 29000E 01      0. 36000E 01
0. 34000E 01  0. 39000E 01
0. 35000E 01  0. 30000E 01

```

#### ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЙ ПОЛИНОМ ЛАГРАНЖА

##### КОЭФФИЦИЕНТЫ ИНТЕРПОЛ. ПОЛИНОМА

```

0. 27000E 01  - 89466E 01      0. 37595E 02
- 51833E 02   0. 32555E 02
- 95200E 01   0. 10489E 01

```

##### ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИИ YI(XI(NG1))

YI=0. 36000E 01

Входные данные:  $Y$  — значение функции в узлах интерполяции, массив размерности  $n$ ;  $X_0$  — начальный узел интерполяции;  $H$  — шаг интерполяции;  $n$  — количество узлов интерполяции;  $X_T$  — точка, в которой вычисляется значение интерполяционного полинома.

Выходные данные:  $A$  — коэффициенты интерполяционного полинома — массив размерности  $n$ ;  $YT$  — значение  $P_n(x)$  в точке  $X_T$ .

```
SUBROUTINE IPNT(ANT, YNT, X0, H, XNT, YN0, NN)
```

```
C     ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЙ ПОЛИНОМ НЬЮТОНА
```

```
C     _ОБОЗНАЧЕНИЯ_
```

```
C     YNT_ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ В УЗЛАХ
```

```
C     X0_ НАЧАЛЬНАЯ ТОЧКА
```

```
C     NNT_ ЧИСЛО УЗЛОВ
```

```
C     HNT_ ШАГ ИНТЕРПОЛЯЦИИ
```

```
C     XNT_ УЗЕЛ В КОТОРОМ ВЫЧИСЛЯЕТСЯ ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИИ
```

```
C     YN0_ ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ XNT
```

```
DIMENSION ANT(NN), YNT(NN), DY(10), B(10), C(10)
```

```

19 FORMAT(1H1, 15X,
  'ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЙ ПОЛИНОМ НЬЮТОНА', /)
24 FORMAT(20X, ' КОЭФФИЦИЕНТЫ ПОЛИНОМА', /
  /8(3X, E11. 4), /)
26 FORMAT(10X, 'NNT=', 13, 4X, 'XNT=',
  F10. 4, 4X, 'YNO=', E12. 5)
DO 1 I=1, NN
  DY(I)=0.
1  B(1)=0.
   B(1)=1.
   C(1)=1.
   DY(1)=YNT(1)
   B(2)=1.
   N1=NN-1
   DO 2 K=2, NN
     R=1. ▽

     DO 3 I=1, K
       DY(K)=DY(K)+R*B(I)*YNT(K-I+1)
       C(I+1)=B(I+1)+B(I)
3    R=-R
     K1=K+1
     DO 4 I=1, K1
       B(I)=C(I)
2    CONTINUE
     PRINT24, (DY(KK), KK=1, NN)
     ANT(1)=DY(NN)
     DO 5 K=1, N1
       ANT(K+1)=0.
       R2=1. / (H*(NN-K))
       R1=R2*(X0+(N1-K)*H)
     DO 6 I=1, K
       K1=K-I+2
6    ANT(K 1)=R2*ANT(K1 -1)-R1*ANT(K 1)
     ANT(1)=DY(NN-K) -R1*ANT(1)
5    CONTINUE
     YNO=ANT(NN)
     R=XNT
     DO 18 I=1, NNT

```

```

18 YNO=YNO*R+ANT(NN-I)
PRINT 24, (ANT(II), II=1, NN)
PRINT 26, NN, XNT, YNO
RETURN
END _____

```

Пример.

$$x_0 = 0; h = 0,5;$$

$$y = [2,7; 2,9; 3,6; 3,4; 3,9; 3,5; 3].$$

IV. Аппроксимация функций.

```

                КОЭФФИЦИЕНТЫ ПОЛИНОМА
0. 2700E 01    0. 2000E 00    0. 5000E 00    -0. 1400E 01
0. 3000E 01   -0. 6200E 01    0. 1180E 02
                КОЭФФИЦИЕНТЫ ПОЛИНОМА
0. 2700E 01   -0. 8947E 01    0. 3760E 02    -0. 5183E 02
0. 3256E 02   -0. 9520E 01    0. 1049E 01
NNT= 7      XNT= 2. 0000      YNO=-0. 74222E 01

```

Метод наименьших квадратов. Алгоритм:

$$Q_m(x) = \sum_{i=1}^{m+1} a_i x^{i-1}.$$

$$b_{1,1} = n; \quad b_{i,k} = \sum_{j=1}^n x_j^{k+i-2}; \quad b_{i+1,k} = b_{i,k+1}; \quad k = \overline{1, m+1}; \quad i = \overline{k+1, m};$$

$$d_i = \sum_{j=1}^n x_j^{i-1} y_j; \quad i = \overline{1, m+1};$$

$$Ba = d.$$

```

SUBROUTINE AMNQ(A, U, Z, X, N, M1, EPS)
DIMENSION A(M1, M1), U(N), Z(N), X(M1), G(15), D(15)
21 FORMAT(1H1, 25X, 'АППРОКСИМАЦИЯ ПО М Н К', //)
22 FORMAT(20X, 'УЗЛЫ ИНТЕРПОЛЯЦИИ U(I)', /8(2X, F8.3), //)
23 FORMAT(20X, 'УЗЛЫ ИНТЕРПОЛЯЦИИ Z(I)', /8(2X, F8.3), //)
24 FORMAT(6X, 'КОЭФ. АППРОКСИМИРУЮЩЕГО ПОЛИНОМА', /
16(3X, E11.4), //)
25 FORMAT(10X, 'M=', I2, 5X, 'N=', I2, 5X, 'S=',
E11.5, 5X, 'EPS=', F8.5, //)
26 FORMAT(15X, 'КОЭФ-ТЫ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ',
/9(2X, E11.4), //)
M=M1-1
DO 1 L=1, 15
G(L)=0.
▽

```

```

1 D(L)=0.
  MM=2*M+1
  DO 2 L=1, MM
  DO 2 J=1, N
  R=1.
  IF (L.EQ.1) GO TO 5
  DO 4 I=2, L
4 R=R*U(J)
5 G(L)=G(L)+R
  IF (L.LE.M1) D(L)=D(L)+R*Z(J)
2 CONTINUE
  DO 6 L=1, M1
  DO 6 I=1, M1
6 A(L, I)=G(L+I-1)
  CALL XALS(A, D, X, M1, 0)
  S=0.
  DO 7 I=1, N
  Q=X(M1)
  DO 8 J=1, M
8 Q=Q*U(I)+X(M1-J)
7 S=S+(Q-Z(I))* (Q-Z(I))
  S=SQRT(S)/(N-1.)
  PRINT 21
  PRINT 22, (U(II), II=1, N)
  PRINT 23, (Z(II), II=1, N)
  PRINT 26, (G(II), II=1, MM)
  PRINT 24, (X(II), II=1, M1)
  PRINT 25, M, N, S, EPS
  RETURN
  END _____

```

### Программа AMNQ.

Обращение: CALL AMNQ (A, U, Z, X, N, M1, EPS). Описание параметров: X — коэффициенты аппроксимирующего полинома; U — узлы интерполяции, массив размерности n; Z — значение функции в узлах интерполяции, массив размерности n; N — количество узлов интерполяции; M1 — 1 — степень аппроксимирующего полинома; EPS — требуемая точность аппроксимации; A — матрица (рабочая) размерности  $n \times n$ . Требуемые функции и подпрограммы — подпрограмма XALS.

Входные данные: U — массив узлов интерполяции размерности n; Z — массив значений функции в узлах интерполяции размерности n; n — количество узлов интерполяции; M — степень аппроксимирующего полинома; M1 = M + 1; EPS — требуемая точность аппроксимации.

Выходные данные: X — коэффициенты аппроксимирующего полинома, массив размерности M1.

Пример. Аппроксимировать квадратичной функцией функцию, заданную в узлах интерполяции:

U	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Z	3	5	12	17	28	37	52	65	84

```

DIMENSION X(7), Y(7), A(9), B(7)
D(3,3), Z(9), Y1(4), Y2(8), X2(8)
DATA X/_0., 5, 1., 1.5, 2., 2.5, 3./
DATA Y/2.7, 2.9, 3.6, 3.4, 3.9, 3.5, 3./
DATA Y1/.6931, 1.0986, 1.3863, 1.6094/
DATA Y2/3.23, 3.253, 3.261, 3.252, 3.228, 3.181, 3.127, 3.059/
DATA X2/.1., .2., .3., .4., .5., .6., .7., .8/
CALL IPNT(A, Y, 0., .5, 2., Y1, 7)
CALL AMNQ(D, X2, Y2, A, 8, 3., 91)
STOP
END

```

АППРОКСИМАЦИЯ ПО МНК

УЗЛЫ ИНТЕРПОЛЯЦИИ U(I)

0.100      0.200      0.300      0.400  
0.500      0.600      0.700      0.800

УЗЛЫ ИНТЕРПОЛЯЦИИ Z(I)

3.230      3.253      3.261      3.252  
3.228      3.181      3.127      3.059

КОЭФ-ТЫ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

0.8000E 01    0.3600E 01    0.2040E 01  
0.1296E 01    0.8772E 00

КОЭФ. АППРОКСИМИРУЮЩЕГО ПОЛИНОМА

0.3193E 01    0.4602E 00    -0.7878E 00

M= 2      N= 8      S=0.84234E-03      EPS= 0.01000

Аппроксимация ортогональными полиномами. Алгоритм:

$$b_{11} = n(b - a); \quad b_{12} = a + b; \quad b_1 = b_{11}b_{12}; \quad b_2 = 2b_{11}; \quad b_{13} = n + 1; \quad b_4 = 4b_1b_{11};$$

$$b_8 = b_4^2 + 2b_3b_5; \quad b_{2i+1} = b_i^2; \quad b_{4i+2} = b_{2i+1}^2; \quad b_{2i+5} = 2b_{i+2}b_{i+3}; \quad i = \overline{1, 2};$$

$$c_{1,2} = 1/n; \quad c_{2,1} = b_{13}/2; \quad c_{4,3} = 3,5; \quad c_{3,2} = 5; \quad c_{3,1} = 1 - 3nb_{13}; \quad c_{2,2} = 1,5c_{2,3};$$

$$c_{5,3} = 63; \quad c_{5,1} = 5n(3n^2(n+2) - 7n - 10) + 12; \quad c_{5,2} = 35(3 - 2nb_{13});$$

$$c_{k,k} = 0; \quad c_{k,k+1} = c_{k-1,k}/(2n - k + 1); \quad k = \overline{2, 5};$$

$$c_{k,i} = c_{k,k+1} c_{k,i}; \quad i = \overline{1, k-1};$$

$$d_{1,1} = -b_1/n; \quad d_{1,2} = b_2/n; \quad d_{k,1} = c_{k,1} + d_{k,1}; \quad d_{k,5} = c_{k,3} b_{10};$$

$$d_{k,i} = c_{k,2} b_{2+i} + c_{k,3} b_{5+i}; \quad k = \overline{2, 5}; \quad i = \overline{1, 4};$$

$$g_1 = 2n + 1; \quad g_k = \frac{2k-3}{2k-1} \frac{2n+k}{2n-k+2} g_{k-1}; \quad k = \overline{2, 6};$$

$$a_1 = 1/g_1 \sum_{i=-n}^n y_i;$$

$$a_k = 1/g_k \left[ \sum_{i=-N}^N \sum_{j=1}^k y_i d_{k,j} x_i^{j-1} \right]; \quad k = \overline{2, 5};$$

$$A_k = \sum_{i=1}^m a_{i+1} d_{i,k}; \quad k = \overline{1, m+1}; \quad A_1 = A_1 + a_1;$$

$$Q_m(x) = \sum_{i=1}^{m+1} A_i x^{i-1}.$$

Программа APORP.

Обращение: CALL APORP (Y, N, A, M, A1, B1, X0, H, EPS). Описание параметров: Y — значения функции в узлах интерполяции — массив размерности  $2n+1$ ; X0 — центральный узел интерполяции; H — шаг интерполяции; M — степень аппроксимирующего полинома; (a1, b1) — отрезок, на котором задана функция  $f(x)$ ; A — коэффициенты аппроксимирующего полинома, массив размерности  $m+1$ ; EPS — требуемая точность аппроксимации.

Требуемые функции и подпрограммы — нет.

Входные данные: Y — массив значений функций в узлах интерполяции размерности  $2n+1$ ;  $2n+1$  — количество узлов интерполяции; m — степень аппроксимирующего полинома; X0 — центральный узел интерполяции; h — шаг интерполяции; (a1, b1) — отрезок, на котором задана аппроксимируемая функция; EPS — требуемая точность аппроксимации.

Выходные данные: A — массив коэффициентов аппроксимирующего полинома размерности  $m+1$ .

Пример. Аппроксимировать функцию, заданную на  $[-2; +2]$  в узлах с шагом  $h=0,5$  значениями  $y = [0; 1,8; 2,1; 1,7; -0,05; -1,85; -2,2]$  полиномом

$$Q_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3.$$

```

SUBROUTINE APORP(Y, NN, A, M, AT, BT, X0, H, DELT)
DIMENSION Y(NN), C(6, 6), D(6, 6), B(12),
G(6), A1(6), A(6)
30 FORMAT(1H1, 15X, 'ТОЧЕЧНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИЙ'
*'F(XI)', /15X, 'НК ОТРЕЗКЕ BA, B9 ОРТОГ.
ПОЛИНОМАМИ', /)
31 FORMAT(15X, 'КОЭФ-ТЫ A(I) ПОЛИНОМА QM(X)', /
*5X, I2, 6(3X, E11. 4), /)
34 FORMAT(10X, 'ARRAY G(6) НОРМЫ ПОЛИНОМОВ F(X)',
/6(3X, E11. 4), /)

```

▽

```

35 FORMAT(15X,
/COEFFICIENTS OF POLINOM PK(X)-ARRAY A1
*6(3X, E11. 4), /)
DO 3 I=1, 6
A1(I)=0.
DO 3 J=1, 6
D(I, J)=0.
3 C(I, J)=0.
N=(NN-1)/2
B1=N*(N+1. )
B(1)=1.
B2=(BT+AT)/(AT-BT)*N
B3=2. +N/(BT-AT)
DO 2 J=1, 5
C(J+1, J+1)=2. +J-1.
2 B(J+1)=B(J)/(NN-J)
C(3, 1)=-B1
C(4, 2)=-3. *B1+1.
C(5, 1)=3. *B1*(N-1. )*(N+2. )
C(5, 3)=-30. *B1+25.
C(5, 5)=35.
C(6, 6)=126.
C(6, 2)=10. *N*N*(N*(3. *N-1. )-10. )+24. 9
C(6, 4)=210. -140. *B1
DO 1 I=1, 6
DO 1 J=1, 6
1 C(I, J)=C(I, J)*B(I)
D(1, 1)=1.
D(2, 1)=B2*C(2, 2)
D(2, 2)=C(2, 2)*B3
G(1)=B2*B2
G(2)=B2+B3
G(3)=B3*B3
DO 4 L=1, 4
DO 5 I=1, 2
5 C(L+2, I+L)=C(L+2, L+2)*G(I+1)
4 C(L+2, L)=C(L+2, L)+C(L+2, L+2)*G(1)
DO 6 L=1, 2
C(L+4, 1)=C(L+4, L)+C(L+4, L+2)*G(1)
▽

```

```

C(L+4, 2)=C(L+4, L+2)*G(2)+C(L+4, L+3)*G(1)
C(L+4, 3)=C(L+4, L+2)*
*G(3)+C(L+4, L+3)*G(2)+C(L+4, L+4)*G(1)
C(L+4, 4)=C(L+4, L+3)*G(3)+C(L+4, L+4)*G(2)
C(L+4, 5)=C(L+4, L+4)*G(3)
6 D(2*L+2, 1)=B2*C(2*L+2, 1)
DO 37 L=1, 2
DO 37 I=2, 5
D(2*L+2, I)=C(2*L+2, I-1)*B3+B2*C(2*L+2, I)
37 D(2*L+1, I)=C(2*L+1, I)*B3
G(1)=2. *N
DO 7 I=2, 6
7 G(I)=(2. *I-3)/(2. *I-1. )*G(I-1)*(2. *N+I)/NN
PRINT 34, (G(II), II=1, 6)
DO 8 I=1, NN
8 A1(1)=A1(1)+Y(I)
A1(1)=A1(1)/G(1)
DO 9 L=2, 6
DO 10 I=1, NN
S=D(L, 1)
DO 11 J=2, L
R=1.
DO 12 JJ=2, J
12 R=R*(X0+(I-1 -N)*H)
11 S=S+D(L, J)*R
10 A1(L)=A1(L)+S*Y(I)
9 A1(L)=A1(L)/G(L)
PRINT 35, (A1(II), II=1, 5)
M1=M+1
DO 13 L=1, M1
A(L)=0.
DO 14 I=L, M1
14 A(L)=A(L)+A1(I)*D(I, L)
13 CONTINUE
A(1)=A1(1)+A(1)
PRINT 31, M, (A(II), II=1, M1)
RETURN
END_____

```

```

АППРОКСИМАЦИЯ ОРТОГОНАЛЬНЫМИ ПОЛИНОМАМИ
DIMENSION Y(9), A(9)
DATA Y/0., 1. 8, 2. 1, 1. 7, -. 05, -1. 85, -2. 2, -1. 7, . 25/
CALL APORP(Y, 9, A, 3, -2., 2., 0., 5., 01)
STOP
END_____

```

```

      ARRAY B(6) НОРМЫ ПОЛИНОМОВ Pk(X)
0. 8000E 01      0. 2963E 01      0. 2173E 01
0. 2069E 01      0. 2325E 01      0. 2959E 01
      COEFFICIENTS OF POLINOM Pk(X)-ARRAY A1
0. 6250E-02      -0. 2740E 01      -0. 1678E 01
-0. 1030E 01      -0. 1274E 01
      КОЭФ-ТЫ A(I) ПОЛИНОМА QM(X)
3      0. 1250E-01      -0. 2864E 01      -0. 1884E 01      -0. 1104E 00

```

#### V. Численное интегрирование функций.

Квадратурная формула Гаусса. Алгоритм:

$$z = [2x - (b + a)] / (b - a);$$

$$(n + 1) L_{n+1}(x) - (2n + 1) x L_n(x) + n L_{n-1}(x) = 0.$$

$$d_i = 1/i; p_{i,j} = \bar{x}_j^{i-1};$$

$$Pa = d;$$

$$I = \sum_{i=1}^m a_i f(\bar{x}_i).$$

Программа QFGS.

Обращение: CALL QFGS (Y, P, A0, B0, M). Описание параметров: Y — значение интеграла; (A0, B0) — интервал интегрирования; M — порядок квадратурной формулы; P — рабочая матрица размерности M × M. Требуемые функции и подпрограммы — f(x) и XALS.

Входные данные: (a0, b0) — интервал интегрирования; m — порядок квадратурной формулы.

Выходные данные: Y — значение интеграла f(x) на [a, b].

```

SUBROUTINE QFGS(YNTG, P, A0, B0, M)
DIMENSION P(M, M)
DIMENSION B(6, 6), A(9), C(9), D(9), X(9), Z(9)

```

```

C      ОБОЗНАЧЕНИЯ
C      YNTG=INT(F(X), A0, B0)=SUM(A(I)*F(Z(I)), I=1, M)
C      (A0, B0)-ОТРЕЗОК ИНТЕГРИРОВАНИЯ
C      M-ПОРЯДОК КВАДРАТУРНОЙ ФОРМУЛЫ
C      Z(I)-КОРНИ ПОЛИНОМА ЛЕЖАНДРА LM(Z)
C      X(I)-УЗЛЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

```

```

45 FORMAT(1H1, 20X, 'КВАДРАТУРНАЯ ФОРМУЛА ГАУССА', /)
23 FORMAT(20X, 'УЗЛЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ X(I)', /6(5X, E11. 4), /)

```

```

24 FORMAT(20X, 'ЗНАЧЕНИЕ ИНТЕГРАЛА YNTG=', F10. 5)
22 FORMAT(20X, 'КОЭФ. ПОЛИНОМА', /10X, I2, 6(5X, F8. 4), /)
  M1=M+1
  DATA B/1., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 1., 0., 0., 0., 0., 0., 0.,
10., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.,
20., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0. /
  PRINT 45
  DO 2 J=2, M
    B(J+1, 1)=(1. -J)/J*B(J-1, 1)
  DO 2 I=1, J
2  B(J+1, I+1)=((2. *J-1. )*B(J, I)-(J-1. )*B(J-1, I+1))/J
  PRINT 22, M, (B(M1, II), II=1, M1)
  M2=M/2
  M21=M2+1
  DO 3 I1=1, M21
    I=I1-1
3  A(I+1)=B(M1, M1-2*I)/B(M1, M1)
  Z(1)=-A(2)
  IF (M. LE. 3) GO TO 8
  IF (M. GT. 3) GO TO 7
  R=SQRT(A(2)*A(2)-4. *A(3))
  Z(1)=(A(2)+R)/2.
  Z(2)=(R-A(2))/2.
7  CALL GORN(A, X, Z, C, M2, . 0001)
8  R1=(B0+A0)*. 5
  DO 4 I=1, M2
    X(I)=R1-(B0-A0)*. 5*SQRT(Z(I))
    X(M1-I)=R1+(B0-A0)*. 5*SQRT(Z(I))
    IF (M. NE. 2*M2) X(2*M2)=R1
  ▽
4  CONTINUE
  PRINT 23, (X(II), II=1, M)
  DO 5 I=1, M
    P(1, I)=1.
    D(I)=1. /I
  DO 5 J=2, M
5  P(J, I)=P(J-1, I)*X(I)
  CALL XALS(P, D, C, M, 0)
  YNTG=0.
  DO 6 I=1, M

```

```

6 YNTG=YNTG+C(I)*F(X(I))
YNTG=(B0-A0)*.5*YNTG
PRINT 24, YNTG
RETURN
END
FUNCTION F(X)
F=EXP(-X)*COS(X)
RETURN
END_____

```

Пример. Вычислить интеграл

$$I = \int_0^4 e^{-x} \cos x dx.$$

```

C      КВАДРАТНАЯ ФОРМУЛА ГАУССА
DIMENSION P(3,3)
CALL QFGS(YNT,P,.0,4.,3)
STOP
END

```

```

      КВАДРАТУРНАЯ ФОРМУЛА ГАУССА
      КОЭФ. ПОЛИНОМА

```

3	0.0	-1.5000	0.0	2.5000
---	-----	---------	-----	--------

```

      УЗЛЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ X(I)

```

0.4508E 00	0.2090E 01	0.3549E 01
------------	------------	------------

```

      МАСШБ XX(1,NX) - РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ

```

0.9702E 00	0.2778E-01	0.1980E-02
------------	------------	------------

```

      ЗНАЧЕНИЕ ИНТЕГРАЛА YNTG= 1.10955

```

VI. Численное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений

```

SUBROUTINE PCEIS(Y0,X0,XL,M,Y,H,DELTA)
DIMENSION Y0(M),Y(M),Y1(10),Y2(10),D(10),D1(10)

```

```

C      DECISION OF SYSTEM OF EQUATIONS BY EILER

```

```

C      Y0-INITIAL CONDISION

```

```

C      M-ORDER OF D SYSTEM

```

```

C      Y-ARRAY OF DESITION

```

```

C      H-INITIAL STEP

```

```

C      DELTA-ACCURACY

```

```

40 FORMAT(20X,'DESITION OF SYSTEM OF DIF. EQUATIONS',/,
125X,'BY EILER COUSHI METHOD',//)

```

▽

```

41 FORMAT(5X, 'N', 8X, 'H', 7X, 'X', 10X, 'РЕШЕНИЕ-МАССИВ Y', /)
42 FORMAT(7X, I2, 3X, F9. 4, 3X, F9. 4, 3X, 4(2X, E11. 4, 2X), /)
  N=0
  PRINT 40
  PRINT 41
  DO 1 I=1, M
1 Y1(I)=Y0(I)
5 CALL IECH(Y1, Y, M, X0, N, H, DELT)
  X=X0+H*N
  PRINT 42, N, H, X, (Y(I), II=1, M)
  DO 2 I=1, M
2 Y1(I)=Y(I)
  IF (X. LT. XL) GO TO 5
  RETURN
  END_____
  SUBROUTINE RPE(Z, M, X0, N, D, H)
  DIMENSION Z(M), D(10)
  D(1)=2. *(X0+H*N)-Z(1)
  DO 1 I=1, M
1 D(I)=H*D(I)
  RETURN
  END_____

  SUBROUTINE IECH(Y1, Y2, M, X0, N, H, DELT)
  DIMENSION Y1(M), Y2(M), Y3(10), D(10), D1(10)
  C  CAL&ULATION BY FORMULAS Y1(0)=Y0+H*DY(0)/DX
  C  Y3(J)=Y1+H/2*(DY(1)/DX+DY(J-1)/DX)
  J=0
5 CALL RPE(Y1, M, X0, N, D, H)
  DO 2 I=1, M
2 Y2(I)=Y1(I)+D(I)
  N=N+1
15 CALL RPE(Y2, M, X0, N, D1, H)
  DO 3 I=1, M
3 Y3(I)=(Y1(I)+D(I)+D1(I))/2.
  J=J+1
  S1=0.
  DO 4 I=1, M
  S1=S1+(Y3(I)-Y2(I))*(Y3(I)-Y2(I))
  
```

```

4 Y2(I)=Y3(I)
S1=SQR(S1)
IF (S1.LT.DELT) GO TO 20
IF (J.LT.3) GO TO 15
J=0.
N=N-1
H=H/2.
GO TO 3
20 RETURN
END

```

Метод Эйлера с итерациями. Алгоритм:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y); y(x_0) = y_0.$$

$$y_{i+1}^{(0)} = y_i + hf(x_i, y_i);$$

$$y_{i+1}^{(k)} = y_i + h/2 [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(k-1)})]; k = \overline{1, 4}; i = \overline{0, n}.$$

$$|y_{i+1}^{(k)} - y_{i+1}^{(k-1)}| \leq \Delta;$$

Программа PCEIS.

Обращение: CALL PCEIS(Y0, X0, XL, M, Y, H, EPS). Описание параметров: Y0 — вектор начальных значений в точке  $x_0$  — размерности  $m$ ; (X0, XL) — отрезок интегрирования; M — порядок системы дифференциальных уравнений; Y — вектор решения системы уравнений в точке  $x_i$ ; H — начальный шаг интегрирования; EPS — требуемая точность решения.

Требуемые функции и подпрограммы — подпрограмма RPE — назначение: вычисление правой части системы уравнений в точке  $x_i$ ; D — вектор правой части размерности  $m$ .

Подпрограмма IECH — назначение: вычисление  $y_{i+1}^{(k)}$  в точке  $x_{i+1}$ ;  $k = \overline{0, 4}$ .

Входные данные: Y0 — вектор начальных данных в точке  $x_0$ ; XL — конечная точка интегрирования; M — порядок системы дифференциальных уравнений; H — начальный шаг интегрирования; EPS — требуемая точность решения задачи Коши.

Выходные данные: Y — вектор решения задачи Коши в точках  $x_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ ;  $N = (xl - x_0)/h$ .

Пример. Найдём решение задачи Коши

$$\frac{dy}{dx} = 2(x - y)$$

на отрезке [1; 2].

```

МЕТОД ЭЙЛЕРА_КОШИ
DIMENSION Y(1), Y0(1)
DATA Y0/1. /
CALL PCEIS(Y0, 1., 2., 1, Y, .2., .005)
STOP
END

```

DESITION OF SYSTEM OF DIF. EQUATIONS  
BY EILER COUSHI METHOD

N	H	X	РЕШЕНИЕ-МАССИВ Y	
1	0.2000	1.2000	0.1218E 01	
2	0.2000	1.4000	0.1469E 01	
3	0.2000	1.6000	0.1747E 01	
4	0.2000	1.8000	0.2048E 01	
5	0.2000	2.0000	0.2366E 01	
6	0.2000	2.2000	0.2700E 01	

Метод Рунге — Кутга. Алгоритм:

$$\rho_1 = \sigma_1 = 0; \quad \rho_2 = \rho_3 = \sigma_2 = \sigma_3 = 1/2; \quad \rho_4 = \sigma_4 = 1;$$

$$k_i = hf(x + h\rho_i, y + k_{i-1}\sigma_i); \quad i = \overline{1, 4}; \quad k_0 = 1;$$

$$y_{j+1} = y_j + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6; \quad j = \overline{0, N}.$$

SUBROUTINE KUTAM(N, X, Y, AC, SNS, H, ST, SOL)

DIMENSION Y(N), YO(10), Y1(10), Y2(10), DY0(10), DY1(10)

1, DY2(10), SOL(N)

LOGICAL ST, DB

IF (.NOT. ST) GO TO 1

DO 2 I=1, N

2 YO(I)=Y(I)

H=SNS

NSR=1

ST=.FALSE.

GO TO 3

1 H=SNS/FLOAT(NSR)

3 NSD=0

10 CALL DYDX(X, YO, DY0, N)

DO 4 I=1, N

4 Y1(I)=YO(I)+H/2. +DY0(I)

CALL DYDX(X+H/3., Y1, DY1, N)

DO 6 I=1, N

6 Y1(I)=YO(I)+H/6. \*(DY0(I)+3. \*DY1(I))

CALL DYDX(X+H/2., Y1, DY1, N)

DO 7 I=1, N

7 Y1(I)=YO(I)+H/2. \*(DY0(I)+DY2(I)\*4. -3. \*DY1(I))

CALL DYDX(X+H, Y1, DY1, N)

DO 8 I=1, N

8 Y2(I)=YO(I)+H/6. \*(DY0(I)+2. \*DY2(I)+DY1(I))

DB=.TRUE.

DO 9 I=1, N

▽

```

ER=ABS(.2*(Y1(I)-Y2(I)))
IF (ER. LE. AC) GO TO 11
H=H/2.
NSR=2*NSR
NSD=2*NSD
GO TO 10
11 IF (ER*64. 0. GT. AC) DB=. FALSE.
9 CONTINUE
X=X+H
DO 12 I=1, N
12 Y0(I)=Y2(I)
NSD=NSD+1
IF (NSD. GE. NSR) GO TO 13
T=FLOAT(NSD)/2.
NDS=T
IF (. NOT. (DB. AND. NSD. EQ. NDS*2. AND. NSR. GT. 1)) GO TO 10
H=2. *H
NSD=NDS
NSR=NSR/2
GO TO 10
13 DO 14 I=1, N
14 SOL(I)=Y0(I)
RETURN
END_____

```

Программа KUTAM.

Обращение: CALL KUTAM (N, X, Y, AC, SNS, H, ST, SOL). Описание параметров: Y — вектор начальных значений размерности N; (X, XL) — промежуток интегрирования; SNS — начальный шаг интегрирования; H — шаг интегрирования; SOL — вектор решения на i-м шаге размерности N; N — порядок системы дифференциальных уравнений; AC — требуемая точность решения задачи Коши.

Требуемые функции и подпрограммы — подпрограмма DYDX — назначение: вычисление правой части системы дифференциальных уравнений в точке  $x_i$ .

Входные данные: (X, XL) — промежуток интегрирования; Y — вектор начальных значений; SNS — начальный шаг интегрирования; N — порядок системы дифференциальных уравнений; AC — требуемая точность.

Выходные данные: SOL — вектор решения на i-м шаге; H — шаг интегрирования.

Пример. Найдем решение задачи Коши

$$\frac{dy}{dx} = -2xy; \quad y(1) = 1;$$

```

C      MAIN PROGR KUT-MERSON
      DIMENSION Y(1), SOL(1)
      LOGICAL ST
      DATA X, XL, SNS, AC, N/1., 2., .2., .005, 1/

```

```

DATA Y/1. /
ST= TRUE.
3 CALL KUTAM(N, X, Y, AC, SNS, H, ST, SOL)
X=X+H
PRINT 2, (SOL(II), II=1, N)
IF (X.LT.XL) GO TO 3
▽

2 FORMAT(1H1, 'VALUES OF Y', 10F10.5)
STOP
END _____
SUBROUTINE DYDX(X, Y, DY, N)
DIMENSION Y(10), DY(10)
DO 1 I=1, N
1 DY(I)=-2. *X*Y(I)
RETURN
END _____

SUBROUTINE DFDX(F, X, N)
DIMENSION F(N, N), X(N)
F(1, 1)=COS(X(1)+1. )
F(1, 2)=-1.
F(2, 1)=2. *X(1)
F(2, 2)=2. *X(2)
RETURN
END _____

VALUES OF Y    0. 86240
VALUES OF Y    0. 72315
VALUES OF Y    0. 58955
VALUES OF Y    0. 46723
VALUES OF Y    0. 35992

```

Метод Крылова — Адамса. Алгоритм:

$$\begin{aligned}
 y_1^{(1)} &= y_0 + 5/12q_0; & q_i^{(k)} &= hf(x_i, y_i^{(k)}); \\
 y_1^{(2)} &= y_0 + 5/12q_0 + 2/3q_1^{(1)}; \\
 y_2^{(2)} &= y_1^{(2)} + 2/3q_1^{(2)} - 1/12q_0; \\
 y_2^{(3)} &= y_1^{(2)} + 2/3q_1^{(2)} - 1/12q_0 + 5/12q_2^{(2)}; \\
 y_2 &= y_2^{(4)} = y_1^{(3)} + 2/3q_1^{(3)} - 1/12q_0 + 5/12q_2^{(3)}; \\
 y_3^{(4)} &= y_2 + 2/3q_2 - 1/12q_1; \\
 y_3 &= y_2 + 5/12q_3^{(4)} + 2/3q_2 - 1/12q_1;
 \end{aligned}$$

$$|y_3 - y_2 - 1/2 (q_3 + q_2)| \leq \varepsilon;$$

$$y_{k+1} = y_k + 1/24 (55q_k - 59q_{k-1} + 37q_{k-2} - 9q_{k-3});$$

$$|\Delta^3 q_{k-3}| \leq 24\varepsilon.$$

Программа KRADM.

Обращение: CALL KRADM (Y0, X0, XK, Y, H0, Q, N, EPS). Описание параметров: Y0 — вектор начальных условий размерности N; (X0, XK) — промежуток интегрирования; H0 — начальный шаг интегрирования; Y — вектор решения задачи Коши на i-м шаге размерности N; Q — матрица размерности 4 × N; EPS — требуемая точность решения.

Требуемые функции и подпрограммы: подпрограмма DERF. Назначение — вычисление правой части системы дифференциальных уравнений; подпрограмма ACSRS. Назначение — вычисление погрешности решения на i-м шаге.

Входные данные: Y0 — вектор начальных значений в точке x0; (X0, XK) — промежуток интегрирования; H0 — начальный шаг интегрирования; EPS — требуемая точность решения задачи.

Выходные данные: Y — вектор решения задачи на i-м шаге.

SUBROUTINE KRADM(XOK, XOK, XKK, NK, YK, Q, NK, EPSK)

C                   -ОБОЗНАЧЕНИЯ-

C           (XOK, XKK-) ИНТЕРВАЛ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

C           YOK(XOK)-НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ

C           UK, YK, VK-ВЕКТОРЫ РЕШЕНИЯ, Q-МАТРИЦА ПРОИЗВОДНЫХ

DIMENSION YOK(NK), YK(4, NK), Q(4, NK), AK(4, 4)

1, UK(4), VK(4), DK(4)

210 FORMAT(15X, 'X', 25X, 'Y(X)', /10X, 6(2X, F11: 5))

226 FORMAT(25X, 'ТЕКУЩЕЕ РЕШЕНИЕ', /)

DATA AK/8., 22., -8., 2., -1., 13., 13., -1., 1., -

-5., 19., 9., -9., 37.,

3-59., 55. /

5 XT=XOK

DO 10 I=1, NK

YK(1, I)=YOK(I)

VK(I)=YOK(I)

DO 10 J=2, 4

Q(J, I)=0.

10 YK(J, I)=0.

11 DO 20 M=2, 4

M1=M

I. (M. EQ. 4) M1=3

DO 20 K=1, M1

K1=K-1

CALL DERF(DK, XT, YK, NK, K1, NK)

DO 22 I=1, NK

▽

```

22 Q(K, I)=DK(I)*HK
   DO 23 I=1, NK
     R=0.
     DO 24 J=1, 4
24  R=R+AK(K, J)*Q(J, I)
     YK(K+1, I)=YK(K, I)+R/24.
23  YK(I)=YK(K+1, I)
     IF (K. EQ. 1. OR. M LT. 4) GO TO 20
     CALL ACRS(YK, Q, DS, NK, K)
     IF (DS. LE. EPSK) GO TO 20
     HK=HK/2.
     GO TO 11
20  CONTINUE
115 DO 120 I=1, NK
120 UK(I)=YK(4, I)
     PRINT 226
     DO 12 I=1, 4
       X1=XT+(I-1.)*HK
12  PRINT 210, X1, HK, (YK(I, JJ), JJ=1, NK)
     K=3
41  CALL DERF(DK, XT, YK, NK, K, HK)
     DO 32 I=1, NK
       DO 34 J=1, 3
34  Q(J, I)=Q(J+1, I)
       Q(4, I)=DK(I)*HK
32  UK(I)=YK(I)
     DO 31 I=1, NK
       R=0.
       DO 33 J=1, 4
33  R=R+AK(4, J)*Q(J, I)
31  YK(I)=UK(I)+R/24.
     R2=0.
     DO 35 I=1, NK
       R=Q(4, I)-Q(1, I)+3. *(Q(2, I)-Q(3, I))
35  R2=R2+R*R
     IF (SQRT(R2). LE. EPSK) GO TO 38
     HK=HK/2.
     GO TO 41

```

▽

```

38 X1=XT+K*HK
   K=K+1
   PRINT 210, X1, HK, (UK(II), II=1, NK)
   IF (X1. LE. XKK) GO TO 41
   RETURN
END _____
SUBROUTINE ACRS(Y, Z, DTS, NK, I)
DIMENSION Y(4, NK), Z(4, NK)
DY=0.
DQ=0.
DO 1 J=1, NK.
DY=DY+Y(I+1, J)*Y(I+1, J)-Y(I, J)*Y(I, J)
1 DQ=DQ+Z(I+1, J)*Z(I+1, J)+Z(I, J)*Z(I, J)
DTS=SQRT(ABS(DY-DQ/2. ))/NK.
RETURN
END _____

```

Пример. Найти решение задачи Коши на промежутке [0; 1];  $\varepsilon = 0,01$ .

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{dy_1}{dx} &= \cos x + y_1 - y_2 + y_4; \\
 \frac{dy_2}{dx} &= e^{-x} + y_2 + y_3 - y_4; \\
 \frac{dy_3}{dx} &= x + y_1 + y_2 - y_3 + y_4; \\
 \frac{dy_4}{dx} &= x + y_2 + y_4.
 \end{aligned} \right\}$$

$$y_i(0) = 0; \quad i = \overline{1, 4}.$$

VII. Численное решение краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Метод ортогональной прогонки.

$$\left. \begin{aligned}
 y'' + p(x)y' + q(x)y &= f(x); \\
 \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) &= A; \\
 \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) &= B.
 \end{aligned} \right\}$$

$$\sin \gamma_1 = \sigma_0; \quad \cos \gamma_1 = \sigma_1;$$

C

```

      КРЫЛОВ_АДАМС
      DIMENSION Y0(4), Y(4, 4), Q(4, 4), A(4)
      DO 1 I=1, 4
1  Y0(I)=0
      CALL KRADM(Y0, 0., 1., .1, Y, Q, 4., 1)
      STOP
      END _____

```

SUBROUTINE DERF(DK, X, Z, N, KD, HD)

DIMENSION DK(N), Z(N)

XX=X+KD\*HD

DK(1)=COS(XX)+Z(1)-Z(2)+Z(4)

DK(2)=EXP(-XX)+Z(2)+Z(3)-Z(4)

DK(3)=XX+Z(1)+Z(2)-Z(3)+Z(4)

DK(4)=XX+Z(2)+Z(4)

RETURN

END

ТЕКУЩЕЕ РЕШЕНИЕ

X	Y(X)					
0.0	0.10000	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
X	Y(X)					
0.10000	0.10000	0.03503	0.04423	0.01949	0.01297	
X	Y(X)					
0.20000	0.10000	0.16485	0.19503	0.06654	0.04505	
X	Y(X)					
0.30000	0.10000	0.26267	0.28489	0.10066	0.07662	
X	Y(X)					
0.03750	0.01250	0.77242	0.86715	0.54997	0.44182	
X	Y(X)					
0.05000	0.01250	0.82906	0.94493	0.61264	0.49506	
X	Y(X)					
0.06250	0.01250	0.87844	1.01591	0.67206	0.54661	
X	Y(X)					
0.07500	0.01250	0.92720	1.08762	0.73463	0.60189	
X	Y(X)					
0.08750	0.01250	0.97570	1.15988	0.80003	0.66068	
X	Y(X)					
0.10000	0.01250	1.02533	1.23442	0.86971	0.72432	
X	Y(X)					
0.11250	0.01250	1.07621	1.31130	0.94380	0.79301	
X	Y(X)					
0.12500	0.01250	1.12846	1.39057	1.02243	0.86701	
X	Y(X)					
0.13750	0.01250	1.18223	1.47230	1.10575	0.94657	
X	Y(X)					
0.15000	0.01250	1.23767	1.55654	1.19391	1.03195	
X	Y(X)					



	0.16250	0.01250	1.29492	1.64334	1.28711	1.12345
X			Y(X)			
	0.17500	0.01250	1.35417	1.73277	1.38550	1.22135
X			Y(X)			
	0.18750	0.01250	1.41561	1.82487	1.48930	1.32595
X			Y(X)			
	0.20000	0.01250	1.47944	1.91970	1.59871	1.43757
X			Y(X)			
	0.21250	0.01250	1.54587	2.01731	1.71394	1.55654
X			Y(X)			
	0.22500	0.01250	1.61513	2.11775	1.83523	1.68320
X			Y(X)			
	0.23750	0.01250	1.68749	2.22105	1.96282	1.81790
X			Y(X)			
	0.25000	0.01250	1.76321	2.32726	2.09698	1.96101
X			Y(X)			
	0.26250	0.01250	1.84259	2.43643	2.23796	2.11290
X			Y(X)			
	0.27500	0.01250	1.92593	2.54858	2.38606	2.27398
X			Y(X)			
	0.28750	0.01250	2.01356	2.66377	2.54158	2.44465
X			Y(X)			
	0.30000	0.01250	2.10586	2.78201	2.70485	2.62534
X			Y(X)			
	0.31250	0.01250	2.20320	2.90335	2.87618	2.81648
X			Y(X)			
	0.32500	0.01250	2.30598	3.02781	3.05594	3.01853
X			Y(X)			
	0.33750	0.01250	2.41465	3.15541	3.24450	3.23197
X			Y(X)			
	0.35000	0.01250	2.52968	3.28618	3.44225	3.45720
X			Y(X)			
	0.36250	0.01250	2.65156	3.42014	3.64960	3.69496
X			Y(X)			
	0.37500	0.01250	2.78083	3.55731	3.86697	3.94555
X			Y(X)			
	0.38750	0.01250	2.91805	3.69770	4.09481	4.20958
X			Y(X)			

▽

0.40000	0.01250	3.06382	3.84133	4.33362	4.48761
X		Y(X)			
0.41250	0.01250	3.21879	3.98821	4.58387	4.78823
X		Y(X)			
0.42500	0.01250	3.38363	4.13834	4.84609	5.08802
X		Y(X)			
0.43750	0.01250	3.55908	4.29173	5.12083	5.41162
X		Y(X)			
0.45000	0.01250	3.74590	4.44838	5.40867	5.75167
X		Y(X)			
0.46250	0.01250	3.94491	4.60830	5.71021	6.10882
X		Y(X)			
0.47500	0.01250	4.15698	4.77148	6.02608	6.48376
X		Y(X)			
0.48750	0.01250	4.38302	4.93792	6.35695	6.87720
X		Y(X)			
0.50000	0.01250	4.62401	5.10762	6.70350	7.28988
X		Y(X)			
0.51250	0.01250	4.88098	5.28056	7.06648	7.72254
X		Y(X)			
0.52500	0.01250	5.15503	5.45675	7.44664	8.17597
X		Y(X)			
0.53750	0.01250	5.44729	5.63617	7.84479	8.65099
X		Y(X)			
0.55000	0.01250	5.75901	5.81882	8.26176	9.14841
X		Y(X)			
0.56250	0.01250	6.09146	6.00468	8.69845	9.66911
X		Y(X)			
0.57500	0.01250	6.44600	6.19375	9.15576	10.21397
X		Y(X)			
0.58750	0.01250	6.82408	6.38602	9.63468	10.78392
X		Y(X)			
0.60000	0.01250	7.22721	6.58148	10.13620	11.37991
X		Y(X)			
0.61250	0.01250	7.65700	6.78013	10.66141	12.00294
X		Y(X)			
0.62500	0.01250	8.11513	6.98196	11.21140	12.65397
X		Y(X)			
0.63750	0.01250	8.60337	7.18697	11.78734	13.33411
X		Y(X)			

0. 65000	0. 01250	9. 12361	7. 39517	12. 39047	14. 04442
X		Y(X)			
0. 66250	0. 01250	9. 67782	7. 60657	13. 02205	14. 78603
X		Y(X)			
0. 67500	0. 01250	10. 26807	7. 82118	13. 68343	15. 56009
X		Y(X)			
0. 68750	0. 01250	10. 89654	8. 03902	14. 37602	16. 36780
X		Y(X)			
0. 70000	0. 01250	11. 56554	8. 26011	15. 10129	17. 21040
X		Y(X)			
0. 71250	0. 01250	12. 27748	8. 48450	15. 86078	18. 08919
X		Y(X)			
0. 72500	0. 01250	13. 03490	8. 71224	16. 65610	19. 00548
X		Y(X)			
0. 73750	0. 01250	13. 84046	8. 94336	17. 48895	19. 96065
X		Y(X)			
0. 75000	0. 01250	14. 69696	9. 17796	18. 36111	20. 95612
X		Y(X)			
0. 76250	0. 01250	15. 60736	9. 41610	19. 27444	21. 99336
X		Y(X)			
0. 77500	0. 01250	16. 57471	9. 65789	20. 23090	23. 07390
X		Y(X)			
0. 78750	0. 01250	17. 60226	9. 90345	21. 23250	24. 19931
X		Y(X)			
0. 80000	0. 01250	18. 69344	10. 15291	22. 20139	25. 37125
X		Y(X)			
0. 81250	0. 01250	19. 85176	10. 40643	23. 37591	26. 59138
X		Y(X)			
0. 82500	0. 01250	21. 08098	10. 66419	24. 53011	27. 06148
X		Y(X)			
0. 83750	0. 01250	22. 38501	10. 92639	25. 73474	29. 18336
X		Y(X)			
0. 85000	0. 01250	23. 76793	11. 19326	26. 99628	30. 55893
X		Y(X)			
0. 86250	0. 01250	25. 23404	11. 46508	28. 31741	31. 99013
X		Y(X)			
0. 87500	0. 01250	26. 78781	11. 74214	29. 70097	33. 47900
X		Y(X)			
0. 88750	0. 01250	28. 43396	12. 02477	31. 14992	35. 02766
X		Y(X)			

0. 90000	0. 01250	30. 17740	12. 31334	32. 66734	36. 63831
X		Y(X)			
0. 91250	0. 01250	32. 02327	12. 60827	34. 25650	38. 31322
X		Y(X)			
0. 92500	0. 01250	33. 97694	12. 91002	35. 92078	40. 05476
X		Y(X)			
0. 93750	0. 01250	36. 04405	13. 21910	37. 66374	41. 86542
X		Y(X)			
0. 95000	0. 01250	38. 23047	13. 53608	39. 48914	43. 74774
X		Y(X)			
0. 96250	0. 01250	40. 54234	13. 86157	41. 40085	45. 70442
X		Y(X)			
0. 97500	0. 01250	42. 98608	14. 19626	43. 40298	47. 73824
X		Y(X)			
0. 98750	0. 01250	45. 56839	14. 54090	45. 49983	49. 85208
X		Y(X)			
1. 00000	0. 01250	48. 29628	14. 89631	47. 69588	52. 04898
X		Y(X)			
1. 01250	0. 01250	51. 17705	15. 26340	49. 99582	54. 33208

$$\sigma_0 = \alpha_0 - \alpha_1/h; \quad \sigma_1 = \alpha_1/h;$$

$$\tau_0 = \beta_1/h; \quad \tau_1 = \beta_0 - \tau_0;$$

$$y_k = u_k \sin \gamma_k + v_k \cos \gamma_k;$$

$$\sin \gamma_{k+1} = -\cos \gamma_k/\rho_k;$$

$$\cos \gamma_{k+1} = (n_k \sin \gamma_k - m_k \cos \gamma_k)/\rho_k;$$

$$\rho_k = \sqrt{\cos^2 \gamma_k + (n_k \sin \gamma_k - m_k \cos \gamma_k)^2};$$

$$\dot{u}_{k+1} = n_k u_k/\rho_k + \hat{f}_k \sin \gamma_{k+1}; \quad u_1 = A;$$

$$v_k = 1/\rho_k \{v_{k+1} + [\sin \gamma_k \sin \gamma_{k+1} + \cos \gamma_{k+1} (n_k \cos \gamma_k + m_k \sin \gamma_k)] u_k - \cos \gamma_{k+1} \hat{f}_k\};$$

$$v_{N+1} = 1/\Delta [(\tau_0 \cos \gamma_{N+1} + \tau_1 \sin \gamma_{N+1}) u_{N+1} - B];$$

$$n_k = r_k (1 - h/2\rho_k); \quad m_k = r_k (q_k h^2 - 2);$$

$$r_k = 1/(1 + h/2\rho_k); \quad \hat{f}_k = h^2 r_k f(x_k);$$

$$\rho_k = \rho(x_k); \quad q_k = q(x_k).$$

Программа BPORTR.

Обращение: CALL BPORTR (Y, N, A, B, X0, XL). Описание параметров: Y — вектор решения размерности N; N — количество узлов интегрирования; (X0, XL) — промежуток интегрирования; A, B — коэффициенты в крайевых условиях в точках X0, XL соответственно — массивы размерности 3.

Требуемые функции и подпрограмма — функции  $p(x)$ ,  $q(x)$ ,  $f(x)$ .

Входные данные: A, B — коэффициенты в граничных условиях в точках X0, XL; N1 = N + 1; N — количество узлов интегрирования.

Выходные данные: Y — вектор решения краевой задачи.

```

SUBROUTINE BPORTR(Y, N1, A, B, X0, XL)
DIMENSION Y(N1), A(3), B(3)
1, P1(20), Q1(20), F1(20), SG(20), CG(20), R0(20), U(20), V(20)
C   МЕТОД ОРТОГОНАЛЬНОЙ ПРОГОНКИ
C   УРАВНЕНИЕ-D2Y/DX2+P(X)*DY/DX+Q(X)*Y=F(X)
C   SG(L)=SIN(ГL)   CG(L)=COS(ГL)
C   R(L)=1./((1+H/2*P(XI)))   P1(L)=R(L)*(Q(X1)*H*H-2)
C   Q1(L)=R(L)*(1-H/2*P(XI))   F1(L)=R(L)*F(X1)*H*H
C   U(L), V(L)-ПРОГНОЗНЫЕ КОЭФИЦИЕНТЫ
C   Y(L)-МАССИВ РЕШЕНИЯ
C   N1-ЧИСЛО УЗЛОВ ИНТЕГРИРОВАНИЯ
11 FORMAT(1H1, 20X, 'РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ', /16X,
1'МЕТОДОМ ОРТОГОНАЛЬНОЙ ПРОГОНКИ', /)
12 FORMAT(15X, 'X0=', F6. 3, 2X, 'XL=', F6. 3, 2X, 'H=', F7. 4, /
125X, 'КРАЕВЫЕ УСЛОВИЯ', /20X, F6. 3, '*Y(X0)+', F6. 3,
2'*DY(X0)/DX=', F6. 3, /20X, F6. 3, '*Y(XL)=', F6. 3,
3'*DY(XL)/DX=', F6. 3, /)
16 FORMAT(15X, 'ПРОГНОЗНЫЕ КОЭФ-ТЫ: МАССИВ U', /
110(2X, E10. 3), /)
17 FORMAT(25X, 'МАССИВ V', /10(2X, E10. 3), /)
18 FORMAT(15X, 'РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ',
12X, 'МАССИВ Y', /10(2X, E11. 4), /)
19 FORMAT(15X, 'DETERMINANT=', E11. 5)
N=N1-1
H=(XL-X0)/N
S1=A(2)/H
▽
S0=A(1)-S1
T0=-B(2)/H
T1=B(1)-T0
C=S0*S0+S1*S1
U(1)=A(3)/C
SG(1)=S0
CG(1)=S1
DO 1 L=1, N
XI=X0+L*H
R=1./((1.+H/2.*P(XI)))
P1(L)=R*(Q(XI)*H*H-2.)
Q1(L)=R*(1.-H/2.*P(XI))
F1(L)=R*H*H*F(XI)

```

```

D=Q1(L)*SG(L)-P1(L)*CG(L)
RO(L)=1./SQRT(CG(L)*CG(L)+D*D)
SG(L+1)=-CG(L)*RO(L)
CG(L+1)=RO(L)*D
U(L+1)=RO(L)*U(L)*Q1(L)+F1(L)*SG(L+1)
1 CONTINUE
D=TO*SG(N1)-T1*CG(N1)
IF (ABS(D) LT. 0.001) GO TO 13
V(N1)=1./D*(U(N1)*(TO*CG(N1)+T1*SG(N1))-B(3))
DO 2 L=1, N
L1=N1-L
V(L1)=RO(L1)*(V(L1+1)+U(L1)*(SG(L1)*SG(L1+1)+CG(L1+1)*
*(Q1(L1)*CG(L1)+P1(L1)*SG(L1)))-F1(L1)*CG(L1+1))
2 CONTINUE
DO 3 L=1, N1
3 Y(L)=U(3)*SG(L)+V(L)*CG(L)
PRINT 11
PRINT 12, X0, XL, H, (A(II), II=1, 3), (B(II), II=1, 3)
13 PRINT 19, D
PRINT 16, (U(II), II=1, N1)
PRINT 17, (V(II), II=1, N1)
PRINT 18, (Y(II), II=1, N1)
RETURN
END

```

Пример. Найдем решение краевой задачи

$$\begin{cases}
 y'' + (x^2 + 1)y' + (x - 1)y = x + 2; \\
 y(-2) + 2y'(-2) = 0; \\
 y(2) + 2y'(2) = 2.
 \end{cases}$$

МЕТОДОМ ОРТОГОНАЛЬНОЙ ПРОГОНКИ

X0=-2.000 XL= 2.000 H= 1.0000

КРАЕВЫЕ УСЛОВИЯ

$$1.000*Y(X0) + 2.000*DY(X0)/DX = 0.0$$

$$1.000*Y(XL) = 2.000 + DY(XL)/DX = 2.000$$

DETERMINANT=0.78216E 00

ПРОГНОЗНЫЕ КОЭФ-ТЫ: МАССИВ U

0.0 -0.275E 00 -0.790E 00 -0.201E 01 -0.593E 01

МАССИВ V

0.269E 00 0.292E 01 0.105E 02 0.226E 02 0.241E 02

РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ МАССИВ Y

0.5385E 00 0.2885E 01 0.1012E 02 0.2035E 02 0.1423E 02

```

DIMENSION Y(5), A(3), B(3)
DATA A/1., 2., 0. /
DATA B/1., 2., 2. /
CALL BPORTR(Y, 5, A, B, -2., 2.)
STOP
END _____
FUNCTION P(X)
P=X*X+1.
RETURN
END _____

```

Метод Галеркина. Алгоритм:

$$\begin{aligned}
 y_m(x) &= \sum_{i=0}^m a_i u_i(x); \quad a_0 = 1; \\
 u_0(x) &= \alpha + \beta x; \quad u_i(x) = (x - a)_+^i (x - b); \\
 \beta &= \frac{A\beta_0 - B\alpha_0}{\alpha_0\beta_0(a - b) + \beta_0\alpha_1 - \alpha_0\beta_1}; \quad \alpha = A - a\beta; \\
 \sum_{i=1}^m c_{ki} a_i &= d_k; \quad k = \overline{0, m-1}; \\
 c_{ki} &= - \int_a^b [p(x) u_k'(x) u_i'(x) + q(x) u_k(x) u_i(x)] dx; \\
 k &= \overline{1, m}; \quad i = \overline{0, m-1}; \\
 d_i &= \int_a^b [p(x) u_0'(x) u_i'(x) + q(x) u_0(x) u_i(x) + \\
 &+ f(x) u_i(x)] dx; \quad i = \overline{0, m-1}.
 \end{aligned}$$

Программа CRPGL.

Обращение: CALL CRPGL (A, C, D, P, Q, F, G, M, MP, MQ, MF, AT, BT).

Описание параметров: A — вектор коэффициентов решения размерности N; C — матрица коэффициентов системы уравнений размерности M × M; D — вектор правой части системы уравнений размерности M; P — вектор коэффициентов размерности MP для функции

$$p(x) = \sum_i p_i x^{i-1};$$

```

SUBROUTINE CRPGL(A, C, D, P, Q, F, GR, M, MP, MQ, MF, AT, BT)
DIMENSION C(M, M), D(M), P(MP), Q(MQ), F(MF), GR(4), A(M)
*, R(15), GC(15), GD(15), FD(15), S(15), B(4), C2(5), C3(3)
20 FORMAT(1H1, 15X, 'РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ', /
*18X, 'МЕТОДОМ GALERKINA', /)
21 FORMAT(15X, 'КОЭФФИЦИЕНТЫ C(I, J) СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ', /
*/4(5X, E11. 4), /)

```

▽

```

22 FORMAT(20X, 'COEFFICIENTS D(I)', /4(5X, E11. 4), /)
23 FORMAT(10X, 'YM(X)=', E11. 4, '+', E11. 4, '*X*', E11. 4,
  *'*X2+', E11. 4, '*X3+', E11. 4, '*X4+', E11. 4)
  RR=1. /(<AT-BT+GR(1)-GR(3)>)
  BET=RR*(GR(2)-GR(4))
  AL=GR(2)-AT*BET
  A3=RR*(BT*BT-AT*AT+2. *(BT*GR(3)-AT*GR(1)))
  A4=AT*(2. *GR(1)+AT)+A3*(GR(1)-AT)
  RR=SQRT(A3*A3+4. *A4)
  A1=. 5*(A3-RR)
  A2=. 5*(A3+RR)
  C2(1)=A4*A4
  C2(2)=2. *A3*A4
  C2(3)=A3*A3-A4-A4
  C2(4)=-A3-A3
  C2(5)=1.
  G3(1)=A4
  C3(2)=-A3
  C3(3)=1.
  B(1)=AL*A1*A1
  B(2)=A1*(BET*A1-2. *AL)
  B(3)=-A1*BET
  B(4)=1.
  PRINT 20
  DO 11 I=1, M
  D(I)=0.
  DO 11 J=1, M
11 C(I, J)=0.
  DO 12 I=1, 15
  GD(I)=0.
  GC(I)=0.
  FD(I)=0.
12 R(I)=0.
  CALL SPP(GC, C2, Q, MQ+4, 5, MQ)
  CALL SPP(GD, Q, B, MQ+3, MQ, 4)
  CALL SPP(FD, F, C3, MF+3, MF, 3)
  MD=MF+2
  IF (MQ+3, GT, MD) MD=MQ+3
  DO 1 J=1, MD
  ▽

```

```

1 GD(J)=GD(J)+FD(J)
  C3(1)=-A2*BET
  C3(2)=BET
  CALL SPP(FD, P, C3, MP+1, MP, 2)
  IF (MD, LT, MP+1) MD=MP+1
  DO 2 L=1, M
  DO 3 J=1, MD
3 GD(J)=GD(J)+L*FD(J)
  CALL SMI(-A1, 1, L, S)
  ND=MD+L-1
  R4=BT
  R3=AT
  CALL SPP(R, GD, S, ND, MD, L)
  DO 4 J=1, ND
  D(L)=D(L)+R(J)/J*(R3-R4)
  R3=R3*AT
4 R4=R4*BT
  DO 5 I=1, M
  B(1)=(L*A2+A1)*(I*A2+A1)
  B(2)=-A2*(2.*L*I+L+I)-A1*(2.*L+I)
  B(3)=(L+1.)*(I+1.)
  CALL SPP(GD, P, B, MP+2, MP, 3)
  MC=MP+2
  IF (MC, LT, MQ+4) MC=MQ+4
  DO 6 J=1, MC
6 GC(J)=GC(J)+GD(J)
  CALL SMI(-A1, 1, L+1-1, S)
  NC=MC+L+I-2
  CALL SPP(R, GC, S, NC, MC, L+I-1)
  R3=AT
  R4=BT
  DO 7 J=1, NC
  C(I, L)=C(I, L)+R(J)/J*(R3-R4)
  R3=R3*AT
7 R4=R4*BT
5 CONTINUE
2 CONTINUE
  PRINT 21, ((C(II, JJ), JJ=1, M), II=1, M)
  PRINT 22, (D(II), II=1, M)
  ▽

```

```

CALL XALS(C, D, A, M, 0)
C3(1)=A4
C3(2)=-A3
C2(1)=-A1
C2(2)=1
M2=M-2
B(1)=A(M-1)-A1*A(M)
B(2)=A(M)
M1=2
IF (M2.EQ.0) GO TO 14
DO 15 I=1, M2
CALL SPP(GC, B, C2, M1+1, M1, 2)
M1=M1+1
DO 16 J=1, M1
16 B(J)=GC(J)
15 B(1)=B(1)+A(M-I-1)
14 CALL SPP(A, B, C3, M+2, M, 3)
A(1)=A(1)+AL
A(2)=A(2)+BET
M1=M+2
PRINT 23, (A(II)), II=1, M1)
RETURN
END_____

```

```

SUBROUTINE SPP(R, P1, P2, N, M, L)
DIMENSION R(15), P1(15), P2(15)
DO 1 I=1, N
1 R(I)=0.
DO 2 I=1, L
DO 2 J=1, I
2 R(I)=R(I)+P1(J)*P2(I-J+1)
L2=M-L
IF (M.LT.L) L2=-L2
IF (L2.EQ.0) GO TO 7
DO 3 I=1, L2
DO 3 J=1, L
3 R(L+I)=R(L+I)+P1(I+J)*P2(L-J+1)
7 L3=L-1
DO 4 I=1, L3
L1=L-I
DO 4 J=1, L1
▽

```

```

4 R(M+I)=R(M+I)+P1(L2+I+J)*P2(L-J+1)
RETURN
END _____

SUBROUTINE SMI(R1, R2, M1, S)
DIMENSION C(15, 15), S(M1)
DO 1 I=1, M1
DO 2 J=1, M1
2 C(I, J)=0.
S(I)=0.
C(I, 1)=1.
1 C(I, I)=1.
DO 3 I=3, M1
I1=I-2
DO 3 J=1, I1
3 C(I, J+1)=C(I-1, J)+C(I-1, J+1)
S1=1.
DO 4 I=1, M1
S2=1.
M2=M1-I
DO 5 J=1, M2
5 S2=S2*R1
S(I)=S1+S2*C(M1, I)
4 S1=S1*R2
RETURN
END _____

```

$Q$  — вектор коэффициентов размерности  $MQ$  для функции

$$q(x) = \sum_i q_i x^{i-1};$$

$F$  — вектор коэффициентов размерности  $MF$  для функции

$$f(x) = \sum_i f_i x^{i-1};$$

$G$  — вектор коэффициентов при граничных условиях:

$$\left. \begin{aligned} y(a) + g_1 y'(a) &= g_2; \\ y(b) + g_3 y'(b) &= g_4. \end{aligned} \right\}$$

Требуемые функции и подпрограммы: подпрограмма XALS, подпрограмма SMI. Назначение: вычисление коэффициентов бинома Ньютона; подпрограмма SPP. Назначение: вычисление коэффициентов произведения двух полиномов.

Входные данные:  $P$ ,  $Q$ ,  $F$  — векторы размерности  $MP$ ,  $MQ$ ,  $MF$  соответственно;  $M$  — степень полинома  $y_m(x)$ ;  $(AL, BL)$  — промежуток интегрирования. Выходные данные:  $A$  — вектор коэффициентов решения задачи.



```

N3=N+1
PRINT 31
30 DO 2 L=1, N
    FI(L)=B(1, L+1)
    DO 3 I=1, N
3    FI(L)=FI(L)+(R(L, I)+R(1, L)+2. *C(L, I)*X(L)+X(I)*(C(I, L)
1+2. *D(L, I)*X(L)))*X(I)
    FI(L)=FI(L)+X(L)*X(L)*X(L)*(4. *D(L, L)+6. *E(L))*X(L)*X(L)
    DO 4 J=1, N1
    IF (J. EQ. L) GO TO 4
    DO 5 I=J, N1
    JJ=(N-2)*(J-1)+I
5    FI(L)=FI(L)+X(J)*B(J, JJ)*X(I+1)
4    CONTINUE
2    CONTINUE
    PRINT 32, (FI(I), I=1, N)
    DO 6 I=1, 11
    S(I)=0
6    Q(I)=0
    N2=N-2
    IF (N. LE. 2) GO TO 25
    DO 7 L=1, N2
    DO 8 I=L, N2
    DO 9 J=I, N2
    JJ=N2*(I-1)+J
    S(1)=S(1)+X(J+I+1)*B(L+1, JJ)
9    S(2)=S(2)+FI(I+J+1)*B(L+1, JJ)
    S(3)=S(3)+X(I+1)+S(1)
    S(4)=S(4)+S(2)*X(I+1)+S(1)*FI(I+1)
    S(5)=S(5)+FI(I+1)*S(2)
    S(1)=0.
8    S(2)=0.
    DO 10 J=1, 4
10   R(J)=X(L)*S(J+2)+FI(L)*S(J+1)
    DO 11 I=1, N3
    Q(I)=Q(I)+R(I)
11   S(I+1)=0.
7    CONTINUE

```

▽

```

25 DO 12 L=1, N
    DO 18 I=1, 5
18 S(I)=0
    DO 13 I=1, N
        R1=X(I)*D(L, I)+C(L, I)
        R2=D(L, I)*FI(L)
        R(1)=X(L)*R1+A(L, I)
        R(2)=FI(L)*R1+X(L)*R2
        R(3)=FI(L)*R2
        S(1)=S(1)+X(I)*R(1)
        S(2)=S(2)+X(I)*R(2)+FI(L)*R(1)
        S(3)=S(3)+X(I)*R(3)+FI(I)*R(2)
13 S(4)=S(4)+FI(I)*R(3)
        S(1)=S(1)+B(1, L+1)
        Q(1)=Q(1)+S(1)*X(L)
        DO 14 I=1, 3
14 Q(I+1)=Q(I+1)+S(I+1)*X(L)+S(I)*FI(L)
12 Q(5)=Q(3)+S(4)*FI(L)
        Q(1)=Q(1)+B(1, 1)
        NN1=NN+1
        DO 15 L=1, N
            CALL SMI(X(L), FI(L), NN1, S)
            DO 16 I=1, NN1
16 Q(I)=Q(I)+S(I)
15 CONTINUE
        RR=1.
        DO 17 I=1, NN
            A1(I)=Q(NN-I+2)*(NN1-I)/(NN+Q(NN1))*RR
17 RR=-RR
        PRINT 34, (A1(II), II=1, NN)
        IF (NN.LT.3) GO TO 21
        CALL GORN(A1, Q, R, S, NN-1, .0001)
        IF (R(NN-1).GT.0.) RR=R(NN-1)
        DO 22 I=1, NN
            IF (ABS(S(I)).GT.0.01) GO TO 22
            IF (R(I).GT.RR) RR=R(I)
22 CONTINUE
        GO TO 24

```

▽

```

21 R3=SQRT(A1(2)*A1(2)-4.*A1(3))
   RR=(R3-A1(2))* .5
   IF (NN.EQ.1) RR=-A1(2)
24 DO 23 L=1,N
23 X(L)=X(L)-RR*FI(L)
   PRINT 35, RR, (X(II), II=1,N)
   F1(MI)=Q(1)
   MI=MI+1
   IF (MI.EQ.2) GO TO 30
   PRINT 36, (F1(II), II=1,MI)
   IF (F1(MI-1).GT.F1(MI)) GO TO 30
   RETURN
END _____

```

Обращение: CALL GRSP (A, B, C, D, E, X, N, NN, EPS).

Описание параметров: A — матрица размерности  $N \times N$  коэффициентов при  $x_i x_j$  функции; B — матрица коэффициентов при смешанных произведениях аргументов  $x_i x_j$ ; C — матрица размерности  $N \times N$  коэффициентов при переменных  $x_i^2 x_j$ ; D — матрица размерности  $N \times N$  коэффициентов при  $x_i^2 x_j^2$ ; E — вектор коэффициентов при  $x_i^6$ ; FI — значения grad f в точках x; NN — максимальная степень переменных x; XO — вектор размерности N — начальная точка движения к экстремуму; EPS — требуемая точность отыскания экстремума.

Требуемые подпрограммы и функции — подпрограммы SMI, GORN.

Пример. Найти минимум функции

$$f(x, y, z) = y^4 + z^4 + 2x^3 + y^3 + 3z^3 - x^2(z + 1,5y) - 1,5xy^2 - xz^2 + 3x^2 + 2xy + 2xz + 2y^2 + 3z^2 + 2yz + z = 0.$$

```

DIMENSION A(3,3), B(2,4), C(3,3), D(3,3), FI(3), X(3), XO(3), E(3)
DATA X/0.,0.,1./
DATA A/3.,1.,1.,1.,2.,1.,1.,1.,3./
DATA B/2.,1.,-2.,-1.,0.,0.,0.,0./
DATA C/2.,-1.5,-1.,-1.5,1.,0.,-1./
DATA D/0.,0.,0.,0.,1.,0.,0.,0.,1./
DATA E/0.,0.,0./
CALL GRSP(A,B,C,D,E,X,3,4,.01)
STOP
END _____

```

МЕТОД НАИСКОРЕЙШЕГО СПУСКА

GRAD(F(X))

0.0                    0.2000E 01        0.1950E 02

КОЭФФИЦИЕНТЫ DF(H)/DX

0.4000E 01        -0.6005E 00        0.5148E-01        -0.1310E-02

COEFFICIENTS OF POLINOM TG(LG)

- .13024E 02        0.11622E 03        - .26273E 02

## ROOTS OF POLINOM AG(LG+1)

1 0.39999E 01+J(0.39999E 01)  
 2 0.0 +J(0.73925E-01)  
 3 0.38062E-01+J(0.0 )

ШАГ= 0.3806E-01 0.0 -0.7612E-01 0.2578E 00

## GRAD(F(X))

-0.7119E 00 0.2258E 00 0.5954E 00

## КОЭФФИЦИЕНТЫ DF(H)/DX

0.2413E 01 -0.1380E 00 0.1336E 01 -0.1223E 00

## COEFFICIENTS OF POLINOM TG(LG)

0.60769E-01 0.17959E 01 -10903E 02

## ROOTS OF POLINOM AG(LG+1)

1 0.24126E 01+J(0.24126E 01)  
 2 0.0 +J(0.74601E 00)  
 3 0.91049E-01+J(0.0 )

ШАГ= 0.9105E-01 0.6481E-01 -0.9668E-01 0.2036E 00

## ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИЙ В ТОЧКЕ БМИ=F(XMI)

-0.1302E 02 0.6077E-01 -0.3459E-07

## GRAD(F(X))

-0.4352E 00 0.1594E 00 0.2506E-01

## КОЭФФИЦИЕНТЫ DF(H)/DX

0.9669E 00 -0.2339E 00 0.6113E 00 0.2621E-01

## COEFFICIENTS OF POLINOM TG(LG)

-0.44082E 00 0.15524E 01 0.23766E 02

## ROOTS OF POLINOM AG(LG+1)

1 0.96689E 00+J(0.96689E 00)  
 2 0.0 +J(0.78994E 00)  
 3 -42077E-01+J(0.0 )

ШАГ= 0.1000E 01 0.5000E 00 -0.2561E 00 0.1785E 00

## ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИЙ В ТОЧКЕ БМИ=F(XMI)

-0.1302E 02 0.6077E-01 -0.4408E 00 -0.3487E 00

IX. Решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода  
 Подпрограмма INEF2.

Обращение: CALL INEF2 (A, B, Y, D, N, TL, A0, B0).

Описание параметров: (A0, B0) — отрезок интегрирования; N — количество точек разбиения отрезка; TL — параметр  $\lambda$  уравнения; B — матрица размерности  $N \times N$  — рабочий массив; A — вектор размерности N — коэффициентов интегральной формулы; D — вектор размерности N — правая часть системы уравнений; Y — вектор размерности N — решение интегрального уравнения.

Требуемые подпрограммы и функции — подпрограмма XALS; функция  $F(x)$  — правая часть интегрального уравнения; функция  $C(x, s)$  — ядро интегрального уравнения.

```

SUBROUTINE INEF2(A, B, Y, D, N, TL, A0, B0)
DIMENSION B(N, N), A(N), D(N), Y(N)
C   РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ. ФРЕДГОЛЬМА
C    $Y(X) = F(X) + L * \int_{A0}^{B0} -C(X, S) * Y(S) * DS$ 
C   N1_ЧИСЛО ТОЧЕК РАЗБИТИЯ. (A0, B0)
N1=N-1
N2=N1/2
H=(B0-A0)/N1
A(1)=H/6.
DO 1 I=1, N2
A(2*I)=6.*H/6.
1 A(2*I+1)=H/3.
A(N1)=H/6.
X=A0
DO 2 I=1, N
R=A0
DO 3 J=1, N
B(I, J)=-TL*A(J)*C(X, R)
3 R=R+H
B(I, I)=1. +B(I, I)
D(I)=F(X)
2 X=X+H
CALL XALS(B, D, Y, N, 0)
PRINT 5, TL
PRINT 6, (Y(II), II=1, N)
5 FORMAT(1H1, 10X, 'РЕШЕНИЕ ИНТЕГР. УРАВНЕНИЯ. ',
*1X, 'ФРЕДГОЛЬМА ИЛИ РОДА', /30X, 'TL='F8. 5, /)
6 FORMAT(8(2X, E12. 5))
RETURN
END _____
DIMENSION A(9), Y(9), D(9), B(9, 9)
CALL INEF2(A, B, Y, D, 9, . 25, 0, . 1. )
STOP
END ▽ _____

```

```

FUNCTION C(X, S)
C=S*(3. *X+S+2. )
RETURN
END
FUNCTION F(X)
F=. 75*X-. 2
RETURN
END _____

```

Пример. Найти решение интегрального уравнения

$$u(x) = \lambda \int_0^1 s(3sx + 2) u(s) ds + 3/4x - 0, 2.$$

```

DIMENSION B(5, 5), A(5), D(5), Y(5)
CALL INEF2(A, B, Y, D, 5, 0. 25, 0. , 0. 8)
STOP
END _____

```

МАССИВ XX(1, NX) - РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ

```

-0. 1848E 00  -0. 3142E-01  0. 1220E 00  0. 2754E 00
0. 4288E 00

```

РЕШЕНИЕ ИНТЕГР. УРАВНЕНИИ. ФРЕДГОЛЬМА ИЛИ РОДА

TL= 0. 25000

```

-0. 18481E 00  -0. 31417E-01  0. 12198E 00  0. 27538E 00  0. 42877E 00

```

X. Решение краевых задач математической физики. Уравнения параболического типа

Подпрограмма PEPTSP.

Обращение: CALL PEPTSP (U, X0, XT, M1, Y0, YT, M2, T0, TT, N1).

Описание параметров: U — матрица решения размерности M1 × M2; (X0, XT) — отрезок интегрирования по оси Ox; M1 — количество точек; (Y0, YT) — отрезок интегрирования по оси Oy; M2 — количество точек; (T0, TT) — отрезок интегрирования по t; N1 — количество слоев по t.

Требуемая подпрограмма и функции — функции: P(X, Y) — начальные условия; C(T) — граничное условие; F(X, Y, T) — правая часть уравнения.

```

SUBROUTINE PEPTSP(U, X0, XT, M1, Y0, YT, M2, T0, TT, N1)

```

```

DIMENSION U(M1, M2), Y(10, 10), A(10, 10), B(10, 10)

```

```

C СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ

```

```

C ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

```

```

C DU/DT=D/DX(A1(X, Y)*DU/DX)+D/DX(A1(X, Y)*DU/DY)+F(X, Y, T)

```

```

C U(X, Y, 0)=G(X, Y) U(X, Y, T)/Г=C(T)

```

```

C X0<X<XT, Y0<Y<YT, T0<T<TT

```

```

C H-ШАГ ПО X И Y, TH-ШАГ ПО T

```

```

C M=MAX(M1, M2)

```

```

C   A(M, M), B(N, M) - МАТРИЦЫ ПРОГНОЗНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ
C   U(M1, M2) - МАТРИЦА РЕШЕНИЯ НА J-ТОМ СЛОЕ ПО T
C   M1, M2 - КОЛИЧЕСТВО УЗЛОВ ПО ОСЯМ OX, OY
C           =ОБОЗНАЧЕНИЯ=
20  FORMAT(1H1, 20X, 'РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ', /
      118X, 'ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ', //)
21  FORMAT(25X, 'НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ', /)
22  FORMAT(5X, F7. 4, 8(2X, E11. 4), /)
23  FORMAT(15X, 'РЕШЕНИЕ НА J=', I2, ' ВРЕМЕННОМ СЛОЕ T=', E11. 4, //)
      M=M1-1
      H=(XT-X0)/M
      TH=(TT-T0)/N1
      N=N1-1
      R=TH/(H*N)
      PRINT 20
      PRINT 21
      DO 1 L=1, M1
      X1=X0+(L-1)*H
      DO 31 I=1, M1
31  U(L, I)=G(X1, Y0+(I-1)*H)
      PRINT 22, X1, (U(L, II), II=1, M1)
1  CONTINUE
      DO2 J=1, 20
      T1=T0+J*TH
      PRINT 23, J, T1
      DO 3 I=1, M1
      A(1, I)=C(T0+(J-1)*TH)
      B(1, I)=C(T0+(J-1)*TH)
      V(1, I)=C(T0+(J-1)*TH)
      ▽
3  V(M1, I)=C(T0+(J-1)*TH)
      DO 4 I=2, M
      DO 5 L=2, M
      R1=R*A1(X0+L*H, Y0+I*H)*A1(X0+L*H, Y0+I*H)
      RR=R*A1(X0+(L+1)*H, Y0+I*H)*A1(X0+(L+1)*H, Y0+I*H)
      S=1. +RR-R1*(A(L-1, I)+1. )
      A(L, I)=RR/S
5  B(L, I)=(U(L, I)+RR*B(L-1, I))/S
      M3=M-1

```

```

DO 6 L=1, M3
L1=M1-L
6 V(L1, I)=A(L1, I)*V(L1+1, I)+B(L1, I)
4 CONTINUE
DO 7 L=1, M2
A(L, 1)=C(T0+(J-1)*TH)
B(L, 1)=C(T0+(J-1)*TH)
U(L, 1)=C(T0+(J-1)*TH)
7 U(L, M1)=C(T0+(J-1)*TH)
DO 8 L=2, M
DO 9 I=2, M
RR=R*A1(X0+L*H, Y0+(I+1)*H)*A1(X0+L*H, Y0+(I+1)*H)
R1=R*A1(X0+L*H, Y0+I*H)*A1(X0+L*H, Y0+I*H)
S=1. +RR-R1*(A(L, I-1)+1.)
A(L, I)=RR/S
9 B(L, I)=(V(L, I)+F(X0+L*H, Y0+I*H, T0+(J+0.5)*TH)+RR*B(L, I-1))/S
M3=M-1
DO 10 I=1, M3
10 U(L, M1-I)=A(L, M1-I)*U(L, M1-I+1)+B(L, M1-I)
X1=X0+(L-1)*H
PRINT 22, X1, (U(L, II), II=2, M)
8 CONTINUE
2 CONTINUE
RETURN
END

```

Пример. Найти решение краевой задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x + ty,$$

$$0 < x < 1; \quad 0 < y < 1; \quad 0 < t < 10$$

с начальным условием

$$g(x, y) = x + y + 1$$

и граничными условиями

$$C(x, y, t)|_{(x,y) \in \Gamma} = 0.$$

```

C .DU/DT=.0.25*(D2U/DX2+D2U/DY2)
C G(X, Y)=X+Y
C C(T)=0
C F(X, Y, T)=0
C A1(X, Y)=0.25
C 0<X<=1

```

```

C      0<Y<=1
C      0<T<=1
      DIMENSION U(6,6)
      CALL PEPTSP(U,0.,1.,6,0.,1.,6,0.,1.,20)
      STOP_____
      END
      FUNCTION G(X,Y)
      G=X+Y
      RETURN
      END_____
      FUNCTION C(T)
      C=0.
      RETURN
      END_____
      FUNCTION F(X,Y,T)
      F=0
      RETURN
      END_____

```

РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ  
 ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ

0. 0	0. 0	0. 2000E 00	0. 4000E 00	0. 6000E 00
0. 2000	0. 2000E 00	0. 4000E 00	0. 6000E 00	0. 8000E 00
0. 4000	0. 4000E 00	0. 6000E 00	0. 8000E 00	0. 1000E 01
0. 6000	0. 6000E 00	0. 8000E 00	0. 1000E 01	0. 1200E 01
0. 8000	0. 8000E 00	0. 1000E 01	0. 1200E 01	0. 1400E 01
1. 0000	0. 1000E 01	0. 1200E 01	0. 1400E 01	0. 1600E 01

РЕШЕНИЕ НА J= 1 ВРЕМЕННОМ СЛОЕ T= 0. 5000E-01

0. 2000	0. 5176E 00	0. 7961E 00	0. 1048E 01	0. 1192E 01
0. 4000	0. 7961E 00	0. 1115E 01	0. 1386E 01	0. 1524E 01
0. 6000	0. 1048E 01	0. 1386E 01	0. 1657E 01	0. 1775E 01
0. 8000	0. 1192E 01	0. 1524E 01	0. 1775E 01	0. 1867E 01

РЕШЕНИЕ НА J= 2 ВРЕМЕННОМ СЛОЕ T= 0. 1000E 00

0. 2000	0. 6735E 00	0. 1058E 01	0. 1370E 01	0. 1439E 01
0. 4000	0. 1058E 01	0. 1543E 01	0. 1901E 01	0. 1938E 01
0. 6000	0. 1370E 01	0. 1901E 01	0. 2259E 01	0. 2250E 01
0. 8000	0. 1439E 01	0. 1938E 01	0. 2250E 01	0. 2205E 01

РЕШЕНИЕ НА J= 3 ВРЕМЕННОМ СЛОЕ T= 0.1500E 00

0.2000	0.8806E 00	0.1408E 01	0.1791E 01	0.1756E 01
0.4000	0.1408E 01	0.2121E 01	0.2585E 01	0.2471E 01
0.6000	0.1791E 01	0.2585E 01	0.3050E 01	0.2854E 01
0.8000	0.1756E 01	0.2471E 01	0.2854E 01	0.2632E 01

РЕШЕНИЕ НА J= 4 ВРЕМЕННОМ СЛОЕ T= 0.2000E 00

0.2000	0.1156E 01	0.1875E 01	0.2343E 01	0.2165E 01
0.4000	0.1875E 01	0.2899E 01	0.3492E 01	0.3157E 01
0.6000	0.2343E 01	0.3492E 01	0.4086E 01	0.3624E 01
0.8000	0.2165E 01	0.3157E 01	0.3624E 01	0.3174E 01

РЕШЕНИЕ НА J= 5 ВРЕМЕННОМ СЛОЕ T= 0.2500E 00

0.2000	0.1522E 01	0.2498E 01	0.3066E 01	0.2691E 01
0.4000	0.2498E 01	0.3942E 01	0.4693E 01	0.4042E 01
0.6000	0.3066E 01	0.4693E 01	0.5443E 01	0.4610E 01
0.8000	0.2691E 01	0.4042E 01	0.4610E 01	0.3861E 01

РЕШЕНИЕ НА J= 6 ВРЕМЕННОМ СЛОЕ T= 0.3000E 00

0.2000	0.2009E 01	0.3327E 01	0.4015E 01	0.3372E 01
0.4000	0.3327E 01	0.5338E 01	0.6277E 01	0.5186E 01
0.6000	0.4015E 01	0.6277E 01	0.7217E 01	0.5874E 01
0.8000	0.3372E 01	0.5186E 01	0.5874E 01	0.4734E 01

▽

РЕШЕНИЕ НА J= 7 ВРЕМЕННОМ СЛОЕ T= 0.3500E 00

0.2000	0.2658E 01	0.4430E 01	0.5263E 01	0.4253E 01
0.4000	0.4430E 01	0.7198E 01	0.8367E 01	0.6667E 01
0.6000	0.5263E 01	0.8367E 01	0.9535E 01	0.7500E 01
0.8000	0.4253E 01	0.6667E 01	0.7500E 01	0.5848E 01

РЕШЕНИЕ НА J= 8 ВРЕМЕННОМ СЛОЕ T= 0.4000E 00

0.2000	0.3520E 01	0.5896E 01	0.6902E 01	0.5395E 01
0.4000	0.5896E 01	0.9675E 01	0.1112E 02	0.8588E 01
0.6000	0.6902E 01	0.1112E 02	0.1256E 02	0.9594E 01
0.8000	0.5395E 01	0.8588E 01	0.9594E 01	0.7271E 01

РЕШЕНИЕ НА J= 9 ВРЕМЕННОМ СЛОЕ T= 0.4500E 00

0.2000	0.4666E 01	0.7843E 01	0.9057E 01	0.6879E 01
0.4000	0.7843E 01	0.1296E 02	0.1474E 02	0.1108E 02
0.6000	0.9057E 01	0.1474E 02	0.1652E 02	0.1230E 02
0.8000	0.6879E 01	0.1108E 02	0.1230E 02	0.9091E 01

РЕШЕНИЕ НА J=10 ВРЕМЕННОМ СЛОЕ T= 0.5000E 00

0.2000	0.6190E 01	0.1043E 02	0.1189E 02	0.8807E 01
0.4000	0.1043E 02	0.1732E 02	0.1950E 02	0.1432E 02

0. 6000	0. 1189E 02	0. 1950E 02	0. 2168E 02	0. 1579E 02
0. 8000	0. 8807E 01	0. 1432E 02	0. 1579E 02	0. 1143E 02
РЕШЕНИЕ НА J=11 ВРЕМЕННОМ СЛОЕ T= 0. 5500E 00				
0. 2000	0. 8213E 01	0. 1385E 02	0. 1561E 02	0. 1132E 02
0. 4000	0. 1385E 02	0. 2310E 02	0. 2576E 02	0. 1854E 02
0. 6000	0. 1561E 02	0. 2576E 02	0. 2842E 02	0. 2030E 02
0. 8000	0. 1132E 02	0. 1854E 02	0. 2030E 02	0. 1442E 02
РЕШЕНИЕ НА J=12 ВРЕМЕННОМ СЛОЕ T= 0. 6000E 00				
0. 2000	0. 1090E 02	0. 1839E 02	0. 2051E 02	0. 1459E 02
0. 4000	0. 1839E 02	0. 3074E 02	0. 3398E 02	0. 2402E 02
0. 6000	0. 2051E 02	0. 3398E 02	0. 3723E 02	0. 2615E 02
0. 8000	0. 1459E 02	0. 2402E 02	0. 2615E 02	0. 1828E 02
РЕШЕНИЕ НА J=13 ВРЕМЕННОМ СЛОЕ T= 0. 6500E 00				
0. 2000	0. 1446E 02	0. 2439E 02	0. 2695E 02	0. 1886E 02
0. 4000	0. 2439E 02	0. 4083E 02	0. 4477E 02	0. 3116E 02
0. 6000	0. 2695E 02	0. 4477E 02	0. 4872E 02	0. 3372E 02
0. 8000	0. 1886E 02	0. 3116E 02	0. 3372E 02	0. 2325E 02
РЕШЕНИЕ НА J=14 ВРЕМЕННОМ СЛОЕ T= 0. 7000E 00				
0. 2000	0. 1918E 02	0. 3233E 02	0. 3541E 02	0. 2443E 02
0. 4000	0. 3233E 02	0. 5415E 02	0. 5894E 02	0. 4048E 02
0. 6000	0. 3541E 02	0. 5894E 02	0. 6373E 02	0. 4356E 02
0. 8000	0. 2443E 02	0. 4048E 02	0. 4356E 02	0. 2967E 02

РЕШЕНИЕ НА J=15 ВРЕМЕННОМ СЛОЕ T= 0. 7500E 00

0. 2000	0. 2543E 02	0. 4282E 02	0. 4653E 02	0. 3170E 02
0. 4000	0. 4282E 02	0. 7172E 02	0. 7753E 02	0. 5262E 02
0. 6000	0. 4653E 02	0. 7753E 02	0. 8333E 02	0. 5633E 02
0. 8000	0. 3170E 02	0. 5262E 02	0. 5633E 02	0. 3796E 02

РЕШЕНИЕ НА J=16 ВРЕМЕННОМ СЛОЕ T= 0. 8000E 00

0. 2000	0. 3371E 02	0. 5667E 02	0. 6114E 02	0. 4120E 02
0. 4000	0. 5667E 02	0. 9489E 02	0. 1019E 03	0. 6846E 02
0. 6000	0. 6114E 02	0. 1019E 03	0. 1089E 03	0. 7292E 02
0. 8000	0. 4120E 02	0. 6846E 02	0. 7292E 02	0. 4869E 02

РЕШЕНИЕ НА J=17 ВРЕМЕННОМ СЛОЕ T= 0. 8500E 00

0. 2000	0. 4466E 02	0. 7496E 02	0. 8034E 02	0. 5362E 02
0. 4000	0. 7496E 02	0. 1254E 03	0. 1339E 03	0. 8913E 02
0. 6000	0. 8034E 02	0. 1339E 03	0. 1424E 03	0. 9451E 02
0. 8000	0. 5362E 02	0. 8913E 02	0. 9451E 02	0. 6259E 02

РЕШЕНИЕ НА J=18 ВРЕМЕННОМ СЛОЕ T= 0.9000E 00

0.2000	0.5913E 02	0.9908E 02	0.1056E 03	0.6987E 02
0.4000	0.9908E 02	0.1656E 03	0.1758E 03	0.1161E 03
0.6000	0.1056E 03	0.1758E 03	0.1861E 03	0.1226E 03
0.8000	0.6987E 02	0.1161E 03	0.1226E 03	0.8061E 02

РЕШЕНИЕ НА J=19 ВРЕМЕННОМ СЛОЕ T= 0.9500E 00

0.2000	0.7825E 02	0.1309E 03	0.1387E 03	0.9112E 02
0.4000	0.1309E 03	0.2184E 03	0.2308E 03	0.1514E 03
0.6000	0.1387E 03	0.2308E 03	0.2432E 03	0.1592E 03
0.8000	0.9112E 02	0.1514E 03	0.1592E 03	0.1040E 03

РЕШЕНИЕ НА J=20 ВРЕМЕННОМ СЛОЕ T= 0.1000E 01

0.2000	0.1035E 03	0.1728E 03	0.1822E 03	0.1189E 03
0.4000	0.1728E 03	0.2880E 03	0.3029E 03	0.1974E 03
0.6000	0.1822E 03	0.3029E 03	0.3179E 03	0.2068E 03
0.8000	0.1189E 03	0.1974E 03	0.2068E 03	0.1344E 03

Уравнения эллиптического типа. Подпрограмма PUASI.

Обращение CALL PUASI (U, V, P, Q, N1, M1, MN, X0, X1, Y0, Y1, EPS).

Описание параметров: U — матрица решения размерности  $N1 \times M1$ ; V — матрица прогоночных коэффициентов размерности  $N1 \times M1$ ; (X0, X1) — отрезок интегрирования по оси Ox; N1 — количество узлов; (Y0, Y1) — отрезок интегрирования по оси Oy; M1 — количество узлов.

Требуемые подпрограммы и функции — G(x, y).

SUBROUTINE PUASI(U, V, P, Q, N1, M1, MN, X0, X1, Y0, Y1, EPS)

C

```

    ПЕРВАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУССОНА
    DIMENSION U(N1, M1), V(N1, M1), P(MN), Q(MN), E(20)
    DATA PI, D1, S, L2, L3/3.14159, .277, .3, 0, 0/
    N=N1-1
    M=M1-1
    HX=(X1-X0)/N
    HY=(Y1-Y0)/M
    F1=HX*HX
    F2=HY*HY
    G1=1./(D1*D1)
    D1=2.*D1/S
    R=6.+F1*F1
    X=X0
    Y=Y0
    CX=X0+HX*N
    CY=Y0+HY*M
    A=2.*(1.-COS(PI/N))/F1
    B=4./F1-A

```

```

C=2. *(1. -COS(PI/M))/FI
D=4. /FI-C
DO 1 I=1, N1
U(I, 1)=G(X, Y)
U(I, M1)=G(X, CY)
X=X+HX
V(I, 1)=0
1 V(I, M1)=0.
DO 2 J=2, M
Y=Y+HY
U(1, J)=G(X0, Y)
U(N1, J)=G(CX, Y)
V(N1, J)=0.
2 V(1, J)=0.
A=A+C
R1=A
F2=D+D
B=(5. *FI-F1)/R
C=(5. *F1-FI)/R
D=(F1*FI)/(2. *R)
▽
DO 3 I=2, N
DO 3 J=2, M
U(I, J)=0.
3 V(I, J)=0.
5 T=D1/R1
P(1)=0.
Q(1)=0.
R=S*T
Y=Y0
DO 6 I=2, N
6 P(I)=R/(F1+R*(2. -P(I-1)))
DO 7 J=2, M
Y=Y+HY
X=X0
DO 8 I=2, N
X=X+HX
DO 16 J21=1, 3
J2=J21-1

```

```

DO 16 J12=1, 3
J1=J12-1
R3=X+(J1-1)*HX
R4=Y+(J2-1)*HY
E(3*J2+1+J1)=U(I*J12-1, J*J21-1)
16 E(3*J2+10+J1)=F(R3, R4)
Q(I)=(R/R1*Q(I-1)+(B*(E(4)+E(6))+B*
(E(2)+E(8))+D*(E(1)+E(3))*
*(E(7)+E(9)-20. *E(5)))+(E(13)+E(15))*
E(11)*E(17))/12. +2. /3. *E(14)))
*/(1. +R*(2. -P(1-1))/F1)
8 CONTINUE
DO 9 I=2, N
9 V(N1-I+1, J)=P(N1-I+1)+V(N1-I+2, J)+Q(N1-I+1)
7 CONTINUE
DO 10 J=2, M
10 P(J)=R/(F1+R*(2. -P(J-1)))
R=R/F1
DO 11 I=2, N
DO 12 J=2, M
12 Q(J)=(R*Q(J-1)+V(I, J))/(1. +R*(2. -P(J-1)))
▽
11 CONTINUE
L1=0
DO 14 I=2, N
DO 14 J=2, M
U(I, J)=U(I, J)+T*V(I, J)
IF (ABS(T*V(I, J)). GE. EPS) L1=1
14 CONTINUE
L3=L3+1
R1=R1*G1
IF (L1. EQ. 0) GO TO 15
IF (R1. LT. R2) GO TO 5
R1=A
L2=L2+1
GO TO 5
15 PRINT 21
PRINT 22, L2, L3
DO 17 I=1, M4

```

```

17 PRINT 23, (U(I, JJ), JJ=1, N1)
21 FORMAT(1N1, 15X, 'РЕШЕНИЕ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ', /
  *15X, 'ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА В ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ', /)
22 FORMAT(30X, 'L2=', I3, 'L3=', I3, /20X, 'МАССИВ РЕШЕНИЯ', /)
23 FORMAT(8<4X, E11. 4)
RETURN
END

```

Уравнения гиперболического типа  
Подпрограмма PEGTSP.

Обращение: CALL PEGTSP (U, M1, X0, XT, Y0, YT, M2, T0, TC, N1).

Описание параметров: U — матрица решения размерности  $M1 \times M2$ ; (X0, XT) — отрезок интегрирования по оси Ox; M1 — количество узлов; (Y0, YT) — отрезок интегрирования по оси Oy; M2 — количество узлов; (T0, TC) — отрезок интегрирования по t; N1 — количество слоев.

Требуемые подпрограммы и функции — функции: P(x, y), V0(x, y) — начальные условия; A1(T) — граничное условие; G(x, y, t) — правая часть уравнения.

```

SUBROUTINE PEGTSP(U, M1, X0, XT, Y0, YT, M2, T0, TC, N1)
DIMENSION U(M1, M2)
DIMENSION U1(50, 50), V(50, 50), W(50, 50), A(50, 50), B(50, 50)
C D2U/DT2=D/DX(A2(X, Y)*DU/DX)+D/DY(A2(X, Y)*DU/DY)+F(X, Y, T)
C U(X, Y, 0)=P(X, Y)
C DU/DT(X, Y, 0)=Q(X, Y)
C U(X, Y, T)/Г=G(T)
C D=/(X0, XT), (Y0, YT), (T0, TC)/
C M1, M2, N1_ ЧИСЛО УЗЛОВ ПО ОСЯМ OX, OY, OT
C MM=MAX(M1, M2)
C A(MM, MM), B(MM, MM)_МАТРИЦЫ ПРОГНОЗНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ
MX=M1-1
N=N1-1
MY=M2-1
H=(XT-X0)/M1
TH=(TC-T0)/N1
R=TH/(2. *H)
DO 1 I=1, M1
DO 1 L=1, M2
V(I, L)=V0(X0+(I-1)*H, Y0+(L-1)*H)
W(I, L)=0.
1 U(I, L)=P(X0+(I-1)*H, Y0+(L-1)*H)
PRINT 20
DO 2 JJ=1, N1
J=JJ-1

```

```

T1=T0+(J+1)*H
PRINT 21, J, T1
DO 3 L=1, M2
A(1, L)=0.
B(1, L)=0.
DO 4 I=2, MX
RR=R*A1(X0+(I+1)*H, Y0+L*H)
RR1=R*A1(X0+I*H, Y0+L*H)
S=RR1+RR1*(1. -A(I-1, L))+RR*RR1.
A(I, L)=RR*RR/S
S1=2. *(U(I, L)+RR*V(I+1, L)-RR1*V(I, L))
4 B(I, L)=(RR1*RR1*B(I-1, L)-S1)/S
U1(M1, L)=0.
DO 5 I=1, MX
▽

5 U1(M1-I, L)=A(M1-I, L)*U1(M1-I+1, L)+B(M1-I, L)
DO 6 I=1, M1
6 U1(I, L)=2. *U1(I, L)-U(I, L)
DO 12 I=2, M1
12 V(I, L)=V(I, L)+R*A1(X0+I*H, Y0+L*H)*(U1(I, L)+U(I, L)
1-U1(I-1, L)-U(I-1, L))
PRINT 22, (U1(II, L), II=1, M1)
3 CONTINUE
DO 7 I=1, M1
A(I, 1)=0
B(I, 1)=U1(I, 1)
DO 8 L=2, MY
RR=R*A1(X0+I*H, Y0+L*H)
RR1=R*A1(X0+I*H, Y0+(L+1)*H)
S=RR*RR*(1. -A(I, L-1))+RR1*RR1+1.
S1=2. *(U1(I, L)+RR1*W(I, L+1)-RR*W(I, L))
1-TH*G(X0+I*H, Y0+L*H, T0+(J+. 5)*TH)
A(I, L)=RR1*RR1/S
8 B(I, L)=(RR*RR*B(I, L-1)-S1)/S
U(I, M2)=U1(I, M2)
DO 9 L=1, MY
9 U(I, M2-L)=A(I, M2-L)*U(I, M2-L+1)+B(I, M2-L)
DO 10 L=1, M2

```

```

10 U(I, L)=2. *U(I, L)-U1(I, L)
   DO 11 L=2, M2
   W(I, L)=W(I, L)+R*A1(X0+I*H, Y0+(L-1)*H)*
   *(U(I, L)+U1(I, L)-U(I, L-1)-U1(I, L-1))
11 CONTINUE
   PRINT 22, (U(I, LL), LL=1, M2)
7 CONTINUE
2 CONTINUE
20 FORMAT(1N1, 15X, 'РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ' /
   *15X, 'ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА', /)
21 FORMAT(15X, 'РЕШЕНИЕ НА СЛОЕ J=', I2, 5X, 'TAU=', E11. 4, /),
22 FORMAT(10(2X, E11. 4), /)
   RETURN
   END

```

Пример. Найти решение краевой задачи:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ (x+y) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ (x+y) \frac{\partial u}{\partial y} \right] + x + y + t;$$

$$0 < x < 1; \quad 0 < y < 1; \quad 0 < t < 2$$

с начальными условиями

$$u(x, y, 0) = x^2 + y^2;$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = x^2 - y^2$$

и граничными условиями

$$u(x, y, t)|_{\Gamma} = 0$$

```

C   D2U/DT2=D/DX((X+Y)2*DU/DX)+D/DY((X+Y)2*DU/DY)+X+Y+T
C   DIMENSION U(5, 5)
C   U(X, Y, 0)=X*X+Y*Y
C   DU(X, Y, 0)/DX=X*X-Y*Y
C   CALL PEGTSP(U, 5, 0., 1., 0., 1., 5, 0., 2., 5)
C   U(X, Y, T, )/Г=0.
STOP
END
FUNCTION A1(X, Y)
A1=2.
RETURN
END
FUNCTION V0(X, Y)
V0=COS(Y-X)/2.

```

```

RETURN
END _____
FUNCTION P(X, Y)
P=COS(X+Y)
RETURN
END _____
FUNCTION G(X, Y, T)
G=EXP(-X-Y)*X*Y+COS(T)
RETURN
END _____

```

РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ

ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

РЕШЕНИЕ НА СЛОЕ J= 0      TAU= 0. 2000E 00

-0. 1000E 01	-0. 1894E 01	-0. 2056E 01	-0. 1639E 01	-0. 6967E 00
-0. 9801E 00	-0. 1790E 01	-0. 1879E 01	-0. 1432E 01	-0. 5403E 00
-0. 9211E 00	-0. 1615E 01	-0. 1627E 01	-0. 1168E 01	-0. 3624E 00
-0. 8253E 00	-0. 1375E 01	-0. 1310E 01	-0. 8568E 00	-0. 1700E 00
-0. 6967E 00	-0. 1080E 01	-0. 9416E 00	-0. 5118E 00	0. 2920E-01
-0. 1000E 01	0. 8155E 00	0. 1366E 01	0. 8629E 00	-0. 6967E 00
-0. 1894E 01	0. 1250E 01	0. 2188E 01	0. 1376E 01	-0. 1080E 01
-0. 2056E 01	0. 1240E 01	0. 2208E 01	0. 1412E 01	-0. 9416E 00
-0. 1639E 01	0. 9314E 00	0. 1672E 01	0. 1106E 01	-0. 5118E 00
-0. 6967E 00	0. 4202E 00	0. 7295E 00	0. 5335E 00	0. 2920E-01

РЕШЕНИЕ НА СЛОЕ J= 1      TAU= 0. 4000E 00

0. 1000E 01	0. 1377E 01	0. 1710E 01	0. 1395E 01	0. 6967E 00
-0. 8155E 00	-0. 4994E 01	-0. 5698E 01	-0. 4026E 01	-0. 4202E 00
-0. 1366E 01	-0. 6734E 01	-0. 7639E 01	-0. 5380E 01	-0. 7295E 00
-0. 8629E 00	-0. 4837E 01	-0. 5419E 01	-0. 3758E 01	-0. 5335E 00
0. 6967E 00	0. 4173E 00	0. 4687E 00	0. 3346E 00	-0. 2920E-01
0. 1000E 01	0. 8248E 01	0. 1020E 02	0. 7688E 01	0. 6967E 00
0. 1377E 01	0. 2094E 02	0. 2613E 02	0. 1889E 02	0. 4173E 00
0. 1710E 01	0. 2309E 02	0. 2846E 02	0. 2026E 02	0. 4687E 00
0. 1395E 01	0. 1706E 02	0. 2061E 02	0. 1439E 02	0. 3346E 00
0. 6967E 00	0. 4665E 01	0. 5138E 01	0. 3325E 01	-0. 2920E-01

РЕШЕНИЕ НА СЛОЕ J= 2      TAU= 0. 6000E 00

-0. 1000E 01	-0. 7107E 01	-0. 7760E 01	-0. 5779E 01	-0. 6967E 00
-0. 8248E 01	-0. 5663E 02	-0. 6762E 02	-0. 4821E 02	-0. 4665E 01
-0. 1020E 02	-0. 6932E 02	-0. 8223E 02	-0. 5775E 02	-0. 5138E 01

-0. 7688E 01	-0. 5086E 02	-0. 5925E 02	-0. 4080E 02	-0. 3325E 01
-0. 6967E 00	-0. 4628E 01	-0. 4013E 01	-0. 2042E 01	0. 2920E-01
-0. 1000E 01	0. 3706E 02	0. 4762E 02	0. 3509E 02	-0. 6967E 00
-0. 7107E 01	0. 1576E 03	0. 2065E 03	0. 1472E 03	-0. 4628E 01
-0. 7760E 01	0. 1829E 03	0. 2382E 03	0. 1682E 03	-0. 4013E 01
-0. 5779E 01	0. 1315E 03	0. 1692E 03	0. 1180E 03	-0. 2042E 01
-0. 6967E 00	0. 2095E 02	0. 2448E 02	0. 1622E 02	0. 2920E-01

РЕШЕНИЕ НА СЛОЕ J= 3      TAU= 0. 8000E 00

0. 1000E 01	-0. 6418E 01	-0. 2670E 01	-0. 2197E 01	0. 6967E 00
-0. 3706E 02	-0. 4453E 03	-0. 5505E 03	-0. 3887E 03	-0. 2095E 02
-0. 4762E 02	-0. 5705E 03	-0. 7029E 03	-0. 4914E 03	-0. 2448E 02
-0. 3509E 02	-0. 4107E 03	-0. 4998E 03	-0. 3452E 03	-0. 1622E 02
0. 6967E 00	-0. 7756E 01	-0. 3455E 01	-0. 1244E 00	-0. 2920E-01
0. 1000E 01	0. 1893E 03	0. 2413E 03	0. 1787E 03	0. 6967E 00
-0. 6418E 01	0. 1316E 04	0. 1733E 04	0. 1235E 04	-0. 7756E 01
-0. 2670E 01	0. 1591E 04	0. 2087E 04	0. 1475E 04	-0. 3455E 01
-0. 2197E 01	0. 1129E 04	0. 1467E 04	0. 1027E 04	-0. 1244E 00
0. 6967E 00	0. 1072E 03	0. 1237E 03	0. 8160E 02	-0. 2920E-01

РЕШЕНИЕ НА СЛОЕ J= 4      TAU= 0. 1000E 01

-0. 1000E 01	-0. 5126E 02	-0. 3993E 02	-0. 3148E 02	-0. 6967E 00
-0. 1893E 03	-0. 3715E 04	-0. 4719E 04	-0. 3318E 04	-0. 1072E 03
-0. 2413E 03	-0. 4831E 04	-0. 6125E 04	-0. 4274E 04	-0. 1237E 03
-0. 1787E 03	-0. 3455E 04	-0. 4342E 04	-0. 3003E 04	-0. 8160E 02
-0. 6967E 00	-0. 4273E 02	-0. 2366E 02	-0. 6056E 01	0. 2920E-01
-0. 1000E 01	0. 9423E 03	0. 1203E 04	0. 8898E 03	-0. 6967E 00
-0. 5126E 02	0. 1079E 05	0. 1441E 05	0. 1023E 05	-0. 4273E 02
-0. 3993E 02	0. 1347E 05	0. 1795E 05	0. 1266E 05	-0. 2366E 02
-0. 3148E 02	0. 9489E 04	0. 1256E 05	0. 8801E 04	-0. 6056E 01
-0. 6967E 00	0. 5333E 03	0. 6172E 03	0. 4074E 03	0. 2920E-01

## XII. Упрощение дифференциальных уравнений.

Программа YPRV (AI, BI, N, B, I, W, T)

Обращение: CALL YPRV (A, B, N, BY, I, 1., 1.)

Описание параметров:

AI — вектор коэффициентов в левой части уравнения размерности N;

BI — вектор коэффициентов в правой части уравнения;

I — заданный порядок упрощения уравнения.

Требуемые подпрограммы и функции — нет.

```
SUBROUTINE YPRV(AI, BI, NH, AV, BV, JQ, WI, TI)
```

```
  DIMENSION AI(9), BI(9), AV(9)
```

```
  .. A1(2, 20), A2(2, 20),
```

```
  BV(9),
```

```

250 FORMAT(/, 20X, 27H SIMPLYFING OF TRANSFER FUNCTION V(P))
310 FORMAT(/, 25X, 15H ARRAY BY(1, J0), /, 7(3X, F10. 4))
315 FORMAT(/, 25X, 17H ARRAY AY(1, J0+1), /, 8(3X, F10. 4))
340 FORMAT(/, 25X, 21H COEFFICIENTS OF V(P))
350 FORMAT(/, 2X, 1H: , I2, 4H BV: , 12(F8. 3, 1H:), /, 2X, 115(1H-))
355 FORMAT(/, 2X, 1H: 2X, 4H AV: , 12(F8. 3, 1H:), /, 2X, 115(1H=))
356 FORMAT(/, 8(2X, E11. 4))

```

NI=NH-1

MM=200



```

      MG=1
      DO 1 J=1, 20
        DV(J)=0.
        TT(J)=0.
        DO 1 I=1, 2
          A2(I, J)=0.
1      AT(I, J)=0.
        PRINT 310, (BI(KK), KK=1, NH)
        PRINT 315, (AI(KK), KK=1, NH)
        BS=BI(1)
        RM=ABS(AI(NH))
        RC=ABS(BI(1))
        BM1= .1
        DO 2 I=1, NH
          AT(1, I)=AI(I)
          AT(2, I)=BI(I)
          IF(RM. LT. ABS(AI(I))) RM=ABS(AI(I))
          IF(RC. LT. ABS(BI(I))) RC=ABS(BI(I))
2      CONTINUE
        IF(RM. LT. RC) RM=RC
        PRINT 250
        PRINT 340
50      LN=NI+NI
60      DO 25 I=1, NH
          T2(I)=AT(2, I)/BS
25      T1(I)=AT(1, I)
        IF(MG. GT. MM) GOTO 51
        MG=MG+1
        TY(1)=T1(1)

```

```

TY(2)=T2(1)
DO 10 K=3, LN
IF (K. GT. 12) BM1=10. **((1-K)/4)
DO 11 I=1, NI
11 TT(I)=T2(1)*T1(I+1)-T1(1)*T2(I+1)
DO 12 I=1, NI
T1(I)=T2(I)
12 T2(I)=TT(I)
TY(K)=TT(1)
IF (NI. LT. 2.) GO TO 40
▽

40 IF (ABS(T2(1)). GE. RM) BS=BS*(1. +BM1)
IF (ABS(T2(1)). LT. 1. E-4) BS=BS*(1. -BM1)
IF ((ABS(T2(1)). GT. RM). OR. (ABS(T2(1)). LT. 1. E-4)) GO
10 CONTINUE
NI=NI-1
DO 6 I=1, 2
A1(I, 1)=1.
6 A2(I, 1)=1.
LN=2*NI
TT(1)=TY(2)
DO 5 I=1, LN
5 TT(I+1)=TY(I+2)/(TY(I)*TY(I+1))
A2(1, 2)=TT(2)
DO 16 L=3, LN
LL=L/2
DO 17 M=1, 2
AT(M, 1)=1.
DO 17 I=1, LL
17 AT(M, I+1)=TT(L)*A1(M, I)+A2(M, I+1)
IF (L. EQ. 2*(L/2)) AT(1, LL+1)=TT(L)*A1(1, LL)
IF (L. EQ. 2*(L/2)) AT(2, LL+1)=0.
DO 18 I=1, NH
DO 18 M=1, 2
A1(M, I)=A2(M, I)
18 A2(M, I)=AT(M, I)
16 CONTINUE
AT(1, NI+2)=0.
DO 20 I=1, NH

```

```

20 AT(2, I)=AT(2, I)*BS*TT(1)
   PRINT 350, NI, (AT(2, II), II=1, 12)
   PRINT 355, (AT(1, II), II=1, 12)
   IF (NI. GT. JQ) GO TO 50
   JQ1=JQ+1
   DO 21 I=1, JQ1
   AY(I)=AT(1, I)
21 BY(I)=AT(2, I)
   PRINT 310, (BY(II), II=1, JQ1)
   PRINT 315, (AY(II), II=1, JQ1)
   ▽
51 MG=MG
   RETURN
   END _____
SUBROUTINE SPPI(RP, P1, P2, NS, MM, LS)
DIMENSION RP(1), P1(1), P2(1)
DO 74 I=1, NS
74 RP(I)=0.
   DO 75 I=1, LS
   DO 75 J=1, I
   I1=I-J+1
75 RP(I)=RP(I)+P1(J)*P2(I1)
   L2=MM-LS
   IF(L2.EQ. 0) GO TO 177
   DO 78 I=1, L2
   DO 78 J=1, LS
   I2=LS+I
   I3=I+J
   I4=LS-J+1
78 RP(I2)=RP(I2)+P1(I3)*P2(I4)
177 L5=LS-1
   DO 70 I=1, L5
   L1=LS-I
   I2=MM+I
   DO 70 J=1, L1
   I3=L2+I+J
   I4=LS-J+1
70 RP(I2)=RP(I2)+P1(I3)*P2(I4)
   RETURN
   END _____

```

```

SUBROUTINE FCHX(A1, B1, NK, WT, FX, U)
DIMENSION A1(7), B1(7), U(6)
NK1=NK/2
DO 14 I=1, 4
14 U(I)=0.
IF(NK. EQ. 2*NK1) U(1)=A1(NK+1)
I8=0
IF (NK. GT. 2*NK1) I8=1
R7=-WT*WT
DO 7 K=1, 2
▽
DO 7 I=1, NK, 2
I3=NK+K+I8-I-1
U(K)=U(K)*R7+A1(I3)
7 U(K+2)=U(K+2)*R7+B1(I3)
U(2)=U(2)*WT
U(4)=U(4)*WT
R8=U(1)*U(1)+U(2)*U(2)
U(5)=(U(1)*U(3)+U(2)*U(4))/R8
U(6)=(U(1)*U(4)-U(2)*U(3))/R8
FX=ATAN(U(6)/U(5))
RETURN
END _____

```

Пример. Упростить дифференциальное уравнение

$$\frac{d^4 y}{dt^4} - 0,3 \frac{d^3 y}{dt^3} + 0,5 \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y = 3 \frac{d^2 x}{dt^2} + 2 \frac{ax}{dt} + x.$$

```

DIMENSION A(5), B(5), AI(4), BI(4)
DATA A/1., .5, -.3, 1., .1/
DATA B/1., 2., .3, 0., 0./
CALL YPRV(A, B, 5, AI, BI, 3, 0.5, 1.)
STOP
END _____

```

		ARRAY BY(1, J0)		
1. 0000	2. 0000	3. 0000	0. 0	0. 0
		ARRAY AY(1, J0+1)		
1. 0000	0. 5000	-0. 3000	1. 0000	0. 1000

## SIMPLYFING OF TRANSFER FUNCTION V(P)

## COEFFICIENTS OF V(P)

3 BY: 1.000: 1.980: 2.919: 0.0 : 0.0 : 0.0

AY: 1.000: 0.480: -0.350: 1.128: 0.0 : 0.0

## ARRAY BY(1, JQ)

1.0000 1.9796 2.9190 -0.0

## ARRAY AY(1, JQ+1)

1.0000 0.4796 -0.3504 1.1276

Таблица П.1

Значения функции  $\varphi_{\tau}(t) = 1/\sqrt{2\pi} e^{-t^2/2}$ .

$t$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	0,3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	5332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1434	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	0,1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0389	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0,0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0076	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0,0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Таблица П.2

Значения  $v$  для доверительного интервала  $-\varepsilon < t < \varepsilon$ ,  
 где величина  $t$  имеет распределение Стьюдента в зависимости  
 от доверительной вероятности  $p$  и числа степеней свободы  $k$

$k$	$p = 0,90$	$p = 0,95$	$p = 0,99$
1	6,31	12,71	63,7
2	2,92	4,30	9,92
3	2,35	3,18	5,84
4	2,13	2,77	4,60
5	2,02	2,57	4,03
6	1,943	2,45	3,71
7	1,895	2,36	3,50
8	1,860	2,31	3,36
9	1,833	2,26	3,25
10	1,812	2,23	3,17
11	1,796	2,20	3,11
12	1,782	2,18	3,06
13	1,771	2,16	3,01
14	1,761	2,14	2,98
15	1,753	2,13	2,95
16	1,746	2,12	2,92
17	1,740	2,11	2,90
18	1,734	2,10	2,86
19	1,729	2,09	2,86
20	1,725	2,08	2,84
22	1,717	2,07	2,82
24	1,711	2,06	2,80
26	1,706	2,06	2,78
28	1,701	2,05	2,76
30	1,697	2,04	2,75
40	1,684	2,02	2,70
60	1,671	2,00	2,66
120	1,658	1,98	2,62
	1,645	1,96	2,58

## Критические точки распределения

$x$  — случайная величина, распределенная по закону  $\chi^2$  с  $k$  степенями свободы.  
Таблица содержит значения  $\alpha$ , полученные из условия  $P(X) \leq \alpha$ .

Число степеней свободы	$\alpha = 0,01$	$\alpha = 0; 0,025$	$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,95$	$\alpha = 0,975$	$\alpha = 0,99$
1	6,6	6,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0



## Список использованной литературы

1. Бахвалов Н. С. Численные методы. — М.: Наука, 1973. — Т. 1. — 632 с.
2. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. — М.: Физматгиз, 1962—1966. — Т. 1—2.
3. Вазов В., Форсайт Дж. Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных. — М.: Изд-во иностр. лит., 1963. — 472 с.
4. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. — М.: Наука, 1967. — 576 с.
5. Годунов С. К., Рябенский В. С. Введение в теорию разностных схем. — М.: Физматгиз, 1962. — 400 с.
6. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. — М.: Наука, 1970. — 572 с.
7. Зеленский К. Х., Игнатенко В. Н., Краскевич В. Е. Введение в программные средства вычислительной математики. — К.: КПИ, 1979. — 119 с.
8. Зеленский К. Х., Краскевич В. Е., Гречко В. И. Методические указания к практическим занятиям по дисциплине «Численные методы». — К.: КПИ, 1978. — Ч. 1—2.
9. Калиткин Н. Н. Численные методы. — М.: Наука, 1978. — 512 с.
10. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. — М.: Наука, 1968. — 398 с.
11. Каплан И. А. Практические занятия по высшей математике. — Х.: Вища шк. Изд-во при Харьк. ун-те, 1972. — Ч. 5. — 412 с.
12. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1968. — 496 с.
13. Крамер Г. Математические методы статистики. — М.: Мир, 1975. — 692 с.
14. Крылов А. Н. Лекции о приближенных вычислениях. — М.; Л.: Гостехиздат, 1950. — 396 с.
15. Крылов А. И. Приближенное вычисление интегралов. — М.: Наука, 1967. — 312 с.
16. Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырский П. И. Вычислительные методы. — М.: Наука, 1977. — Т. 1—2.
17. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. — М.: Физматгиз, 1961. — 426 с.
18. Ляшко И. И. и др. Методы вычислений. — К.: Вища школа. (Головное изд-во), 1977. — 402 с.
19. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. — М.: Наука, 1977. — 456 с.
20. Марчук Г. И., Аюшков В. И. Введение в проекционно-сеточные методы. — М.: Наука, 1981. — 416 с.
21. Милн Б. Э. Численное решение дифференциальных уравнений. — М.: Изд-во иностр. лит., 1955. — 372 с.
22. Михлин С. Г. Численная реализация вариационных методов. — М.: Наука, 1966. — 298 с.
23. Моисеев Н. Н. Численные методы в теории оптимальных систем. — М.: Наука, 1971. — 426 с.
24. Налимов В. В., Чернова Н. А. Статистические методы планирования экстремальных экспериментов. — М.: Наука, 1965. — 288 с.
25. Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. — М.: Мир, 1972. — 418 с.
26. Самарский А. А. Теория разностных схем. — М.: Наука, 1977. — 656 с.
27. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. — М.: Наука, 1978. — 592 с.
28. Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н. Сплайки в вычислительной математике. — М.: Наука, 1976. — 248 с.
29. Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. — М.: Физматгиз, 1960. — 656 с.
30. Хинчик А. Я. Цепные дроби. — М.: Наука, 1978. — 112 с.
31. Черкасова М. П. Сборник задач по численным методам. — Минск: Высш. шк., 1967. — 316 с.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	3
Глава 1. Алгоритмизация и точность вычислительных процессов . . . . .	5
1.1. Постановка задачи численного анализа . . . . .	5
1.2. Виды погрешностей . . . . .	5
1.3. Абсолютная и относительная погрешности . . . . .	5
1.4. Погрешность функций . . . . .	7
1.5. Критерии точности вычислений . . . . .	9
1.6. Точный и приближенный алгоритмы . . . . .	10
1.7. Требования к оценкам погрешностей . . . . .	11
1.8. Получение оценок погрешностей . . . . .	11
<i>Задания для самостоятельной работы</i> . . . . .	12
Глава 2. Элементы общей теории приближенных методов . . . . .	13
2.1. Аппроксимация и сходимость . . . . .	13
2.2. Корректность . . . . .	15
2.3. Устойчивость . . . . .	17
Глава 3. Решение систем линейных уравнений . . . . .	18
3.1. Метод Гаусса . . . . .	19
3.2. Метод простой итерации . . . . .	22
3.3. Метод Зейделя . . . . .	23
<i>Задания для самостоятельной работы</i> . . . . .	28
Глава 4. Решение нелинейных функциональных уравнений . . . . .	32
4.1. Метод простой итерации . . . . .	32
4.2. Метод Ньютона . . . . .	34
4.3. Отделение корней . . . . .	37
4.4. Метод Хорд . . . . .	38
4.5. Комбинированный метод . . . . .	39
4.6. Решение алгебраических уравнений методом выделения корней . . . . .	40
<i>Задания для самостоятельной работы</i> . . . . .	43
Глава 5. Методы нахождения собственных значений и векторов матриц . . . . .	44
5.1. Метод Леверье . . . . .	45
5.2. Метод Крылова . . . . .	46
5.3. Вычисление собственных векторов . . . . .	47
<i>Задания для самостоятельной работы</i> . . . . .	49
Глава 6. Приближение функций . . . . .	50
6.1. Интерполяция . . . . .	51
6.2. Аппроксимация и сглаживание функций . . . . .	63
<i>Задания для самостоятельной работы</i> . . . . .	72

Глава 7. Численное дифференцирование и интегрирование функций . . . . .	74
7.1. Дифференцирование функций . . . . .	74
7.2. Численное интегрирование . . . . .	74
7.3. Крадатурная формула Гаусса . . . . .	77
<i>Задания для самостоятельной работы</i> . . . . .	79
Глава 8. Численное интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений . . . . .	79
8.1. Метод Эйлера—Коши . . . . .	81
8.2. Метод Рунге-Кутты . . . . .	84
8.3. Метод Адамса . . . . .	87
8.4. Метод Крылова-Адамса . . . . .	89
8.5. Метод конечных разностей . . . . .	92
8.6. Метод прогонки . . . . .	93
8.7. Метод ортогональной прогонки . . . . .	93
8.8. Приближенные аналитические методы решения краевой задачи . . . . .	96
<i>Задания для самостоятельной работы</i> . . . . .	100
Глава 9. Численное решение интегральных уравнений . . . . .	100
9.1. Решение уравнений Вольтерра второго рода . . . . .	102
9.2. Решение уравнений Фредгольма второго рода. Метод квадратур . . . . .	103
<i>Задания для самостоятельной работы</i> . . . . .	106
Глава 10. Численные методы нахождения экстремума функции многих переменных . . . . .	106
10.1. Метод наискорейшего спуска . . . . .	108
10.2. Обобщенный метод Ньютона . . . . .	109
10.3. Метод неопределенных множителей Лагранжа . . . . .	111
Глава 11. Численные методы математической физики . . . . .	117
11.1. Классификация дифференциальных уравнений в частных производных . . . . .	117
11.2. Аппроксимация, устойчивость и сходимость разностных схем . . . . .	120
11.3. Разностные схемы для уравнений параболического типа . . . . .	122
11.4. Разностные схемы для уравнений эллиптического типа . . . . .	134
11.5. Разностные схемы для уравнений гиперболического типа . . . . .	138
11.6. Метод Галеркина . . . . .	146
<i>Задания для самостоятельной работы</i> . . . . .	147
Глава 12. Упрощение дифференциальных уравнений . . . . .	149
12.1. Приведение системы обыкновенных дифференциальных уравнений к каноническому виду . . . . .	149
12.2. Упрощение дифференциальных уравнений путем понижения их порядка . . . . .	151
Глава 13. Численные методы в задачах теории вероятностей и математической статистики . . . . .	155
13.1. Нахождение доверительных интервалов для математического ожидания и дисперсии . . . . .	155
13.2. Нахождение закона распределения вероятностей случайной величины . . . . .	159
13.3. Построение математической модели с помощью метода наименьших квадратов . . . . .	165
<i>Задания для самостоятельной работы</i> . . . . .	174
Приложение . . . . .	177
Список использованной литературы . . . . .	261

ВАЛЕРИЙ ЕВГЕНЬЕВИЧ КРАСКЕВИЧ  
КИРИЛЛ ХАРИТОНОВИЧ ЗЕЛЕНСКИЙ  
ВАЛЕНТИНА ИЛЬИНИЧНА ГРЕЧКО

**ЧИСЛЕННЫЕ  
МЕТОДЫ  
В ИНЖЕНЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЯХ**

Редактор Л. Н. Чмиль  
Обложка художника В. А. Гурлева  
Художественный редактор С. П. Духленко  
Технический редактор Г. Б. Верник  
Корректор Л. М. Байбородина

Информ. бланк № 11352

Сдано в набор 21.09.84. Подп. в печать 24.01.86.  
БФ 02017. Формат 60×90<sup>1/8</sup>. Бумага типогр. № 3. Лит.  
гарн. Выс. печать: Печ. л. 16,5. Кр.-отт. 16,81. Уч.-  
изд. л. 15,03. Тираж 14 000 экз. Изд. № 6694. Зак.  
№ 5-1458. Цена 70 к.

Головное издательство издательского объединения  
„Вища школа“, 252054, Киев-54, ул. Гоголевская, 7  
Книжная фабрика им. М. В. Фрунзе, 310057, Харьков,  
Донец-Захаржевского, 6/8.