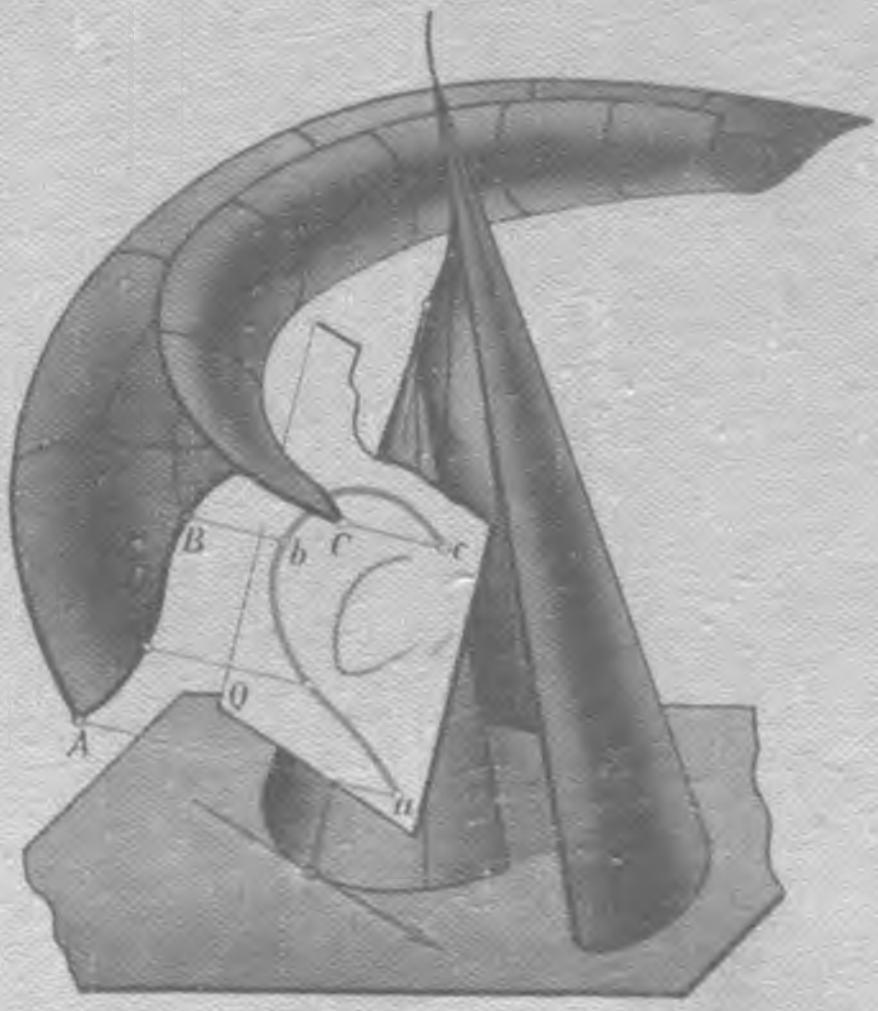
515
Б90

А.В.БУБЕННИКОВ
М.Я.ГРОМОВ

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ



ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ,
ПЕРЕРАБОТАННОЕ
И ДОПОЛНЕННОЕ

Допущено
Министерством высшего
и среднего специального
образования СССР
в качестве учебника
для студентов вузов
всех специальностей,
кроме строительных



МОСКВА
«ВЫСШАЯ ШКОЛА»
1 9 7 3

515
Б90

А.В.БУБЕННИКОВ
М.Я.ГРОМОВ

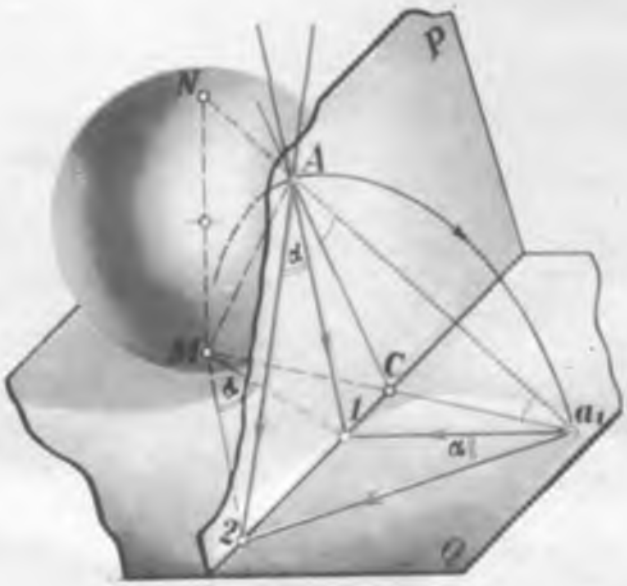
НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

БИБЛИОТЕКА
Бух. ИИ
№ У/132

У/132 - 2 экз.

БИБЛИОТЕКА
ПИ
№ У/449
Вып. Комсомольск-на-Амуре

Описано



515
690
УДК 515(075.8)

690 *Бубенников А. В и Громов М. Я.* Начертательная геометрия. Изд. 2-е. Учебник для вузов. М., «Высшая школа», 1973.

416 стр. с илл.

Предлагаемый учебник по курсу «Начертательная геометрия» в основном соответствует программе МВ и ССО СССР для высших технических учебных заведений.

В учебнике изложены вопросы построения чертежей простейших геометрических образов — точек, прямых, плоскостей. Даны общие схемы решения позиционных задач основным способом и способами преобразования эпюра Монжа.

Здесь также рассмотрены некоторые виды многогранников, плоские и пространственные кривые линии, поверхности основных видов и сложных форм.

Указаны графические методы определения площадей кинематических поверхностей и методы определения объемов тел, ограниченных поверхностями; даны понятия о кривизне поверхностей.

Предназначается для студентов технических вузов всех специальностей, кроме строительных.

0313—255
Б ——————— 74—72
001(01)—73

515

Рецензенты:

Заслуженный деятель науки и техники доктор техн. наук, проф. *И. И. Котов*

Кафедра Начертательной геометрии и графики Ленинградского института водного транспорта

Бубенников Александр Васильевич
Громов Михаил Яковлевич

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Редактор
З. Г. Овсянникова

Иллюстрации художника-графика
Д. С. Котлова

Переплет художника
Н. А. Седельникова

Художественный редактор
Н. К. Гуторов

Макетирование и техническое редактирование
Э. М. Чижевского

Корректор
В. В. Кожуткина

Сдано в набор 18/IX-72 г. Подп. к печати 28/IV-73 г. Формат 70 × 90¼₆. Объем 26 п. л. Усл. п. л. 30,42. Уч.-изд. л. 28,79. Изд. № ОТ-163/70. Тираж 70 000 экз. Цена 1 р. 18 к. Зак. 718.

План выпуска литературы для вузов и техникумов издательства «Высшая школа» на 1972 г. Позиция № 74.

Москва, К-51, Неглинная ул., д. 29/14, издательство «Высшая школа».

Ярославский полиграфкомбинат «Союзполиграфпрома» при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Ярославль, ул. Свободы, 97.

© Издательство «Высшая школа» 1973

ПРЕДИСЛОВИЕ

Графические способы исследований предметов окружающего нас мира, присущие начертательной геометрии, широко используются в ряде технических и других наук, обогащая их наглядностью и простотой решений. Особенно большое практическое применение начертательная геометрия находит в конструкторской практике. Учитывая это и возрастающую в последнее время роль математических наук во втузах, начертательная геометрия как прикладная математическая дисциплина рассматривает уже значительно больший комплекс задач, чем те, которые включались раньше в курсы начертательной геометрии. В настоящее время появилась необходимость создания (в пределах существующей программы) учебника, содержащего более полные сведения.

В этом учебнике в доступной и строгой форме представлены и некоторые исследования, направленные на сближение при помощи графических методов теории геометрии с инженерной практикой, что будет способствовать повышению уровня геометрической и конструкторской подготовки инженеров.

В учебник включен материал, имеющий исключительное практическое значение, как например: определение площадей поверхностей и объемов тел, ограниченных поверхностями; приведены начальные сведения об эталонах и кривизне кривых линий и поверхностей.

Для облегчения изучения курса начертательной геометрии, особенно студентами заочных втузов, в конце каждой главы даны вопросы для самопроверки. Это поможет студентам обратить внимание на основные положения учебной программы курса и контролировать изучение пройденного материала.

После первого издания книги (1965 г.) получено много советов и пожеланий читателей как по объему и распределению материала, так и по содержанию отдельных разделов курса.

При переработке учебника сокращены некоторые разделы, а также включен новый материал, необходимый для более полного изложения и обоснования важнейших вопросов прикладной геометрии.

При подготовке второго издания учебника учтены критические замечания профессоров В. О. Гордона, Н. Н. Иванова, В. С. Левицкого, Н. Н. Рыжова, Н. Ф. Четверухина и особенно И. И. Котова. Большую помощь при подготовке рукописи к печати оказал также коллектив кафедры начертательной геометрии и графики Всесоюзного заочного политехнического института, которым авторы выражают глубокую признательность.

Пожелания и замечания, направленные на улучшение этого издания, просим направлять в издательство «Высшая школа» по адресу: Москва, К-51, Неглинная ул., д. 29/14.

Начертательная геометрия является одним из разделов геометрии, в котором пространственные формы (совокупности точек, линий и поверхностей) с их геометрическими закономерностями изучаются в виде их изображений на плоскости.

Основной целью начертательной геометрии является умение изображать всевозможные сочетания геометрических форм на плоскости, а также умение производить исследования и их измерения, допуская преобразования изображений.

Начертательная геометрия по своему содержанию и методам занимает особое положение среди других наук. Обогащая точные науки наглядностью и простотой решения многих задач, начертательная геометрия в то же время является могучим орудием для работников изобразительного искусства (художников, архитекторов, скульпторов) в создании их произведений. Она как бы является и грамматикой «языка техники» (чертежа).

Невозможно достаточно полно представить себе предмет по его даже самому подробному описанию. Описание не может заменить чертежа, построенного по определенным геометрическим правилам. Начертательная геометрия является наилучшим средством развития у человека пространственного воображения, без которого немыслимо никакое творчество.

Инженер в своей практической деятельности не может обойтись без знания этой науки. Она нужна ему при проектировании и при создании по выполненному проекту того или иного сооружения, машины и т. п.

Художнику и архитектору она нужна для построения перспективы предметов, т. е. для изображения предметов такими, какими они представляются в действительности нашему глазу. Скульптору она нужна для определения очертаний произведений ваяния, которые создаются из бесформенного куска камня, дерева, глины и т. п.

Математические науки достигают еще большего расцвета, когда изучаемые вопросы геометрических форм и их сочетаний сопровождаются реальным и конкретным их представлением. Разрешая математические задачи в их графической интерпретации, начертательная геометрия находит применение в физике, астрономии, химии, механике, кристаллографии и многих других науках. Тесно примыкая своими проблемами к запросам практической жизни, начертательная геометрия все же остается по форме и методам прикладной математической наукой.

Потребность изображать на плоскости трехмерные (пространственные) образы появилась уже у человека первобытного общества. Позднее, когда начали создавать крепостные укрепления и другие сооружения и машины, возникла потребность предварительного составления их изображения.

Хотя изображение, как бы оно совершенно ни было, не может заменить (с точки зрения представления) самого сооружения, машины и т. п., пользование изображениями, во многих случаях представляет бо́льшие преимущества по сравнению с использованием самих оригиналов.

Изображения дают возможность представить не только существующие, но и воображаемые объекты, представить впечатления, которые воспринимаются от внешнего мира, передать их органам чувств и сохранить их в памяти.

Такой запас представлений служит материалом для созидательной работы воображения. С помощью изображений можно видеть и изучать не только внешние формы существующих, переставших существовать и воображаемых предметов, но и такие их детали, для рассмотрения которых потребовалось бы полное разрушение данного предмета, можно непосредственно сравнивать оригиналы, далеко расположенные один от другого, и т. п.

Однако не всякое изображение отражает геометрические свойства оригинала и может быть принято для всестороннего его исследования. Изображение, которое позволяет определять взаимосвязь (взаимопринадлежность) элементов объекта, называют *полным*.

Изображения, по которым можно определить размеры объекта, называют *метрически определенными*.

Изображения бывают рельефные и поверхностные (плоскостные).

К рельефным изображениям можно отнести всякого рода модели и предметы ваяния.

К поверхностным изображениям можно отнести панорамы, картины, фотографии, рисунки, чертежи. Из поверхностных изображений наименее совершенными являются линейные — рисунки и чертежи, однако эти изображения наиболее употребительны в практике.

Рисунком называют изображение предмета от руки и на глаз с кажущимися относительными размерами и положениями отдельных его элементов.

Чертежом называют изображение предмета, построенное по особым правилам при помощи чертежных инструментов, в точной зависимости от размеров и положения в пространстве соответствующих линий предмета.

Чертеж является более точным выразителем наших представлений о каком-либо предмете, чем рисунок. В чертеже отражаются геометрические свойства изображаемого объекта. В технике чертежи являются единственным и незаменимым средством выражения человеческих идей. Чертежи необходимы в самых разнообразных проявлениях многосторонней деятельности человека. Они должны не только определять форму и размеры предметов, но и быть достаточно простыми и точными в графическом исполнении, решать вопросы всестороннего исследования отдельных частей предмета.

Эти требования к чертежам привели к созданию теории изображений, составляющей основу начертательной геометрии.

Правила построений изображений, излагаемые в начертательной геометрии, основаны на методе проекций. Поэтому проекционный метод построения изображений является основным методом начертательной геометрии.

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$Oxyz$ — натуральная система координат;

O — начало координат;

Ox, Oy, Oz — оси проекций;

S — центр проецирования; произвольно выбранное направление проецирования показывают отрезком прямой или стрелкой;

H — горизонтальная плоскость проекций;

V — фронтальная плоскость проекций;

W — профильная плоскость проекций;

A, B, C, D, ... 1, II, III, ... — точки, расположенные в пространстве;

a, b, c, d, ... 1, 2, 3, ... — проекции точек на плоскости H;

a', b', c', d', ... $1'$, $2'$, $3'$, ... — проекции точек на плоскости V;

a'', b'', c'', d'', ... $1''$, $2''$, $3''$ ... — проекции точек на плоскости W;

AB, CD, EF, ... — прямые линии в пространстве, задаваемые отрезками;

ab, $a'b'$; cd, $c'd'$; ... — проекции отрезков прямых линий;

P, Q, T, R, ... — плоскости, произвольно расположенные в пространстве;

ABC ... или (в проекциях) abc, $a'b'c'$; ... — плоскость, заданная тремя точками, двумя пересекающимися прямыми, треугольником;

P_H, P_V; Q_H, Q_V; ... — плоскость, заданная следами;

N_H, M_V, S_V, ... — плоскости, перпендикулярные к плоскостям проекций (проецирующие);

α, β, γ, δ, ... — углы;

$\frac{V}{H}$ — оси (при замене плоскостей проекций) в основной системе плоскостей проекций;

$\frac{V_1}{H}$; $\frac{V_1}{H_1}$; $\frac{V_2}{H_1}$; ... $\frac{V}{H_1}$; $\frac{V_1}{H_1}$; $\frac{V_1}{H_2}$; ... — оси в дополнительной системе плоскостей проекций последовательно;

$\angle$ — прямой угол, обозначаемый в случае необходимости дугой с точкой внутри полученного сектора;

$\equiv$ — совпадение (тождественность) двух геометрических элементов или их проекций, например,

$$A \equiv B, \quad M \equiv m, \quad a' \equiv b', \ldots$$

или

$$AB \equiv CD, \quad AB \equiv ab, \quad a'b' \equiv c'd', \ldots$$

Латинский алфавит

$A\,a$ — а	$N\,n$ — эн
$B\,b$ — бэ	$O\,o$ — о
$C\,c$ — цэ	$P\,p$ — пэ
$D\,d$ — дэ	$Q\,q$ — ку
$E\,e$ — е	$R\,r$ — эр
$F\,f$ — эф	$S\,s$ — эс
$G\,g$ — ге (же)	$T\,t$ — тэ
$H\,h$ — ха (аш)	$U\,u$ — у
$I\,i$ — и	$V\,v$ — вэ
$J\,j$ — йот (жи)	$W\,w$ — дубль-вэ
$K\,k$ — ка	$X\,x$ — икс
$L\,l$ — эль	$Y\,y$ — игрек
$M\,m$ — эм	$Z\,z$ — зет

Греческий алфавит

$A\,\alpha$ — альфа	$N\,\nu$ — ни
$B\,\beta$ — бэта	$\Xi\,\xi$ — кси
$\Gamma\,\gamma$ — гамма	$O\,o$ — омикрон
$\Delta\,\delta$ — дельта	$\Pi\,\pi$ — пи
$E\,\varepsilon$ — эпсилон	$P\,\rho$ — ро
$Z\,\zeta$ — дзета	$\Sigma\,\sigma$ — сигма
$H\,\eta$ — эта	$T\,\tau$ — тау
$\Theta\,\theta$ — тэта	$\Upsilon\,\upsilon$ — ипсилон
$I\,i$ — йота	$\Phi\,\phi$ — фи
$K\,\chi$ — каппа	$X\,\chi$ — хи
$\Lambda\,\lambda$ — лямбда	$\Psi\,\psi$ — пси
$M\,\mu$ — ми	$\Omega\,\omega$ — омега

Арабские цифры

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Римские цифры

I II III IV V VI VII VIII IX X

ГЛАВА I

ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ПРОЕЦИРОВАНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФОРМ НА ПЛОСКОСТИ

§1 ЦЕНТРАЛЬНОЕ (КОНИЧЕСКОЕ) ПРОЕЦИРОВАНИЕ

Центральное проецирование* представляет собой один из общих случаев проецирования геометрических форм (геометрических образов) на плоскости.

Центральное проецирование называют также *коническим*, *полярным проецированием*, или *перспективой***.

Сущность метода центрального проецирования можно рассмотреть на следующем примере. Вообразим в пространстве какой-либо геометрический образ (например, кривую линию *ACB*), который спроецируем из заданного центра (полюса) *S* на выбранную плоскость проекций *Q* (рис. 1).

Центр *S* расположен на некотором конечном расстоянии от геометрического образа (оригинала) и плоскости проекций. Чтобы спроецировать точку *A* кривой *ACB* на плоскость *Q*, надо из заданного центра *S* провести прямую линию (проецирующий луч) через точку *A* до пересечения с плоскостью проекций.

Точку *a* пересечения проецирующей прямой *AS* с плоскостью *Q* называют *центральной* (конической, полярной, перспективной) проекцией точки *A*.

Аналогично находят центральные проекции и других точек заданной кривой линии *ACB*. По таким точкам определяют кривую *acb* — центральную проекцию кривой *ACB*.

Совокупность проецирующих прямых представляет собой коническую поверхность

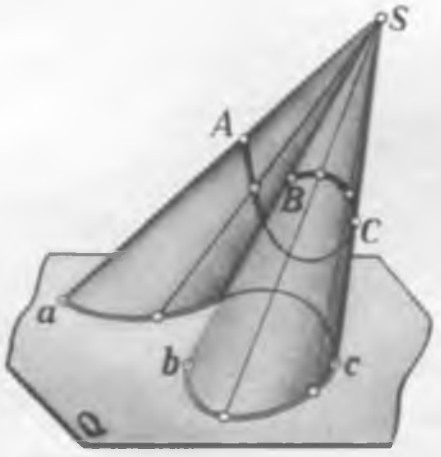


Рис. 1

* Проецирование — построение проекций (изображения), от лат. projicere.

** От лат. perspicere — смотреть сквозь.

(проецирующий конус) с вершиной в центре S. Поэтому такой метод проецирования называют также *коническим*. Коническая проекция представляет собой линию пересечения проецирующей конической поверхности с плоскостью проекций. Эта линия изменяет свой вид и размеры в зависимости от направления плоскости проекций и положения ее относительно центра и оригинала. *Направлением плоскости* называют направление прямой линии, перпендикулярной к этой плоскости. Действительно, кривая линия acb пересечения конической поверхности плоскостью Q хотя и сохранит свой вид, но изменится в размерах по закону подобия, если плоскость Q проекций приближать параллельно ей самой к оригиналу или удалять от него. Эта линия с изменением направления плоскости проекций изменяется по виду и по размерам.

Центральной проекцией кривой линии в общем случае является кривая.

Если геометрический образ представить прямой линией, то все проецирующие лучи точек этой прямой расположатся в одной плоскости. Такую плоскость называют *проецирующей*.

Две плоскости пересекаются по прямой линии. Поэтому проекцией прямой линии AB в общем случае является прямая линия ab (рис. 2).

Если точка M прямой AB принадлежит плоскости проекций Q, то точка M и ее проекция m тождественны (совпадают), т. е. $M \equiv m$.

Если прямая CE проходит через центр проекций, т. е. является проецирующим лучом, то она проецируется на плоскость Q в виде точки ($c \equiv e$).

Если проецирующий луч некоторой точки D параллелен плоскости проекций, то он пересекается с плоскостью проекций в бесконечно удаленной точке d_∞. Эту точку называют *несобственной*. Каждая прямая пространства имеет единственную принадлежащую ей несобственную точку. Все параллельные между собой прямые пересекаются в одной несобственной точке.

Пучок (связка) прямых пространства может иметь собственный и несобственный центры. Связку с несобственным центром образуют все прямые, параллельные какой-либо прямой пространства. Если данная прямая DK лежит в плоскости центра S, параллельной плоскости проекций Q, она проецируется на плоскость Q в виде несобственной прямой.

Две параллельные плоскости пересекаются по несобственной прямой линии. Пучок плоскостей пространства может иметь собственную и несобственную оси. Пучок с несобственной осью образуют все параллельные плоскости. Геометрическое место несобственных точек пространства принято считать несобственной плоскостью.

Собственные и несобственные элементы пространства взаимосвязаны обычными свойствами принадлежности. Метрические понятия на несобственные элементы не распространяются. Дополнение пространства несобственными элементами дает возможность более полно, без всяких ограничений, осуществлять проецирование.

Центральное проецирование обладает большой наглядностью. Его используют в построениях перспективы различных сооружений. Перспективные изображения, полученные при помощи центрального проецирования, очень близки зрительным представлениям о предмете. Это объясняется устройством зрительного органа, работающего по принципу центрального проецирования. Оп-

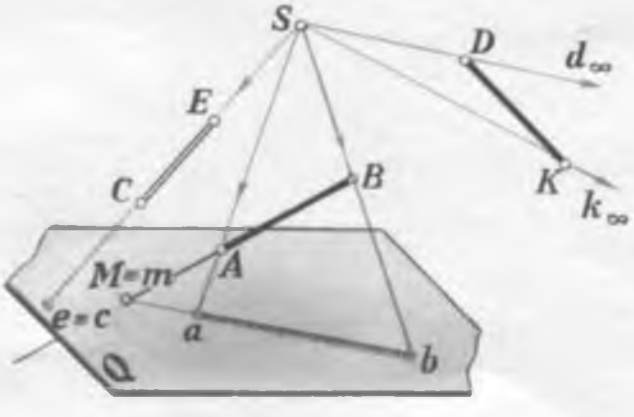


Рис. 2

тический центр хрусталика глаза можно считать центром проецирования, сетчатку глаза (заднюю стенку около глазного нерва) — плоскостью проекций, лучи зрения — проецирующими прямыми.

По этому же принципу устроен фотоаппарат. Фотографические снимки дают весьма наглядное представление об изображаемом предмете или их группе, причем изображения здесь получаются в обратном, перевернутом, виде.

Перспективные проекции, обладая таким большим достоинством как наглядность, неудобоизмеримы. Поэтому их применение ограничено в технике преимущественно изображением общих видов крупных сооружений.

На практике при построении проекционных чертежей большое значение имеет простота построений и обратимость чертежей, т. е. чтобы каждое изображение было бы определенным и полным. По такому изображению можно воспроизводить формы и размеры предметов и их взаимосвязь. Центральное проецирование не отвечает этим требованиям: центральные проекции не определяют формы и размеры предметов. Здесь любой точке пространства соответствует единственная ее проекция, но проекция точки не определяет однозначно ее положения в пространстве: на проецирующем луче (конусе) можно выбрать множество точек (линий), имеющих одну и ту же проекцию.

Между предметом (оригиналом) и его изображением (проекцией) существует геометрическая связь, называемая *проекционной*. Главнейшие свойства этой связи рассматриваются в проективной геометрии.

Чтобы по изображению представить форму предмета, геометрическое соответствие (связь) должно быть взаимно однозначным, т. е. таким, при котором точке пространства однозначно соответствуют ее проекции, а проекциям однозначно соответствует данная точка.

Центральные проекции необратимы — невозможно по изображению полностью представить геометрические формы предметов.

ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ (ЦИЛИНДРИЧЕСКОЕ) ПРОЕЦИРОВАНИЕ

§ 2

Параллельное (цилиндрическое) проецирование можно рассматривать как частный случай центрального проецирования с несобственным центром. Здесь предмет рассматривают с бесконечно удаленной точки зрения.

Вообразим в пространстве какой-либо геометрический образ (например, кривую линию AB), который спроецируем на заданную плоскость проекций Q (рис. 3). Направление проецирования указывает стрелка. В этом направлении удалена в бесконечность точка S — центр конического проецирования.

Чтобы спроецировать точку A кривой AB на плоскость Q, надо провести через эту точку параллельно направлению проецирования прямую линию (проецирующий луч) до пересечения с плоскостью проекций.

Точку a пересечения проецирующего луча точки A с плоскостью Q называют *парал-*

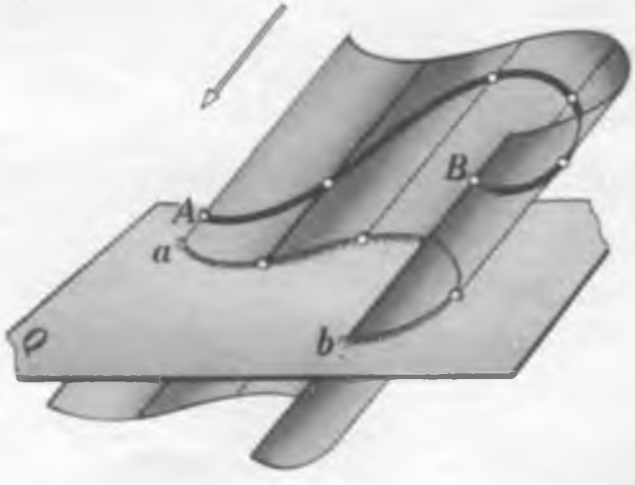


Рис. 3

лельной (*цилиндрической*) проекцией данной точки *A*. Аналогично находят параллельные проекции и других точек заданной кривой линии *AB*. По таким точкам определяют кривую *ab* — параллельную проекцию кривой *AB*.

Совокупность проецирующих лучей представляет собой цилиндрическую поверхность (проецирующий цилиндр). Поэтому такой метод проецирования и называют *цилиндрическим*.

Параллельной (*цилиндрической*) *проекцией кривой линии в общем случае является кривая линия*.

Если геометрический образ представить прямой линией, то все проецирующие лучи точек этой прямой расположатся в одной плоскости. Такую плоскость называют *проецирующей*.

Проецирующая плоскость пересекает плоскость проекций по прямой линии. Эту линию называют *следом проецирующей плоскости*.

Если точка *M* прямой *AB* принадлежит плоскости проекций (рис. 4), то точка *M* и ее проекция *m* взаимно тождественны — совпадают ($M \equiv m$).

Прямая линия *CE*, параллельная направлению проецирования, имеет своей параллельной проекцией точку ($c \equiv e$), т. е. проецируется на плоскость проекцией в виде точки.

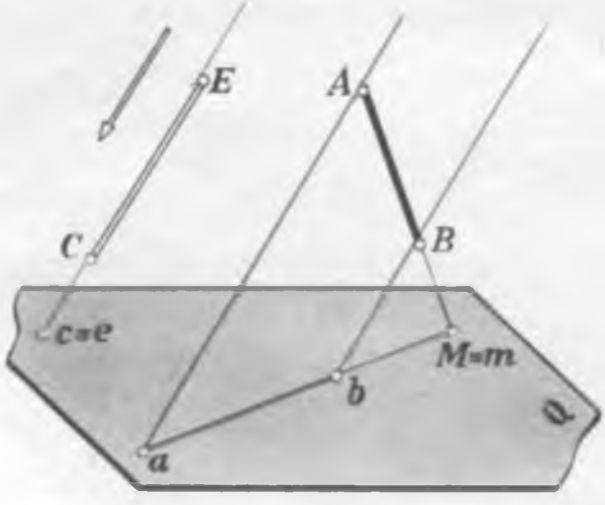


Рис. 4

Совокупность проецирующих лучей может иметь вид проецирующего цилиндра, призмы или плоскости в зависимости от формы и положения изображаемого предмета.

Проецирующий цилиндр называют также *цилиндром видимости*. Цилиндр видимости касается изображаемого предмета — обертывает его по линии, называемой *контуром* (рис. 5).

Параллельная проекция представляет собой линию пересечения цилиндрической поверхности (цилиндра видимости) плоскостью проекций *Q*.

Поэтому *контуром проекции изображаемого предмета является проекция контура самого предмета*.

Цилиндрическая проекция данного направления проецирования изменяется по виду и размерам только в зависимости от направления плоскости проекций.

Предметы при неизменном направлении проецирования имеют одну и ту же параллельную проекцию на все плоскости данного направления. В зависимости от направления проецирования по отношению к плоскости проекций параллельное проецирование разделяют на косоугольное и прямоугольное (ортогональное). Параллельное проецирование называют *косоугольным*, если направление проецирования составляет произвольный угол с плоскостью проекций. Примером косоугольного проецирования может служить тень, падающая от предмета, освещенного лучами Солнца. Здесь вследствие значительного удаления Солнца от Земли можно допустить, что его лучи параллельны. Параллельное проецирование называют *прямоугольным*, или *ортогональным*, если направление проецирования совпадает с направлением плоскости проекций, т. е. составляет с плоскостью проекций прямой угол. Примерами ортогональных проекций могут быть различные технические чертежи, изображения зданий в плане и фасадах и пр.

В параллельных проекциях предмет изображается таким, каким его можно видеть, находясь в бесконечном удалении от него (это условие невыполнимо). Практически эту условность легко принимают и по изображению правильно представляют предмет в натуре.

Параллельные проекции в сравнении с центральными менее наглядны, но удобоизмеряемы.

Одна проекция без каких-либо дополнительных условий является недостаточной, чтобы судить о форме и размерах рассматриваемого предмета.

Существует несколько способов установления взаимно однозначных соответствий между оригиналом и его проекциями. Эти свойства изложены ниже.

Предварительно рассмотрим основные свойства параллельного проецирования.

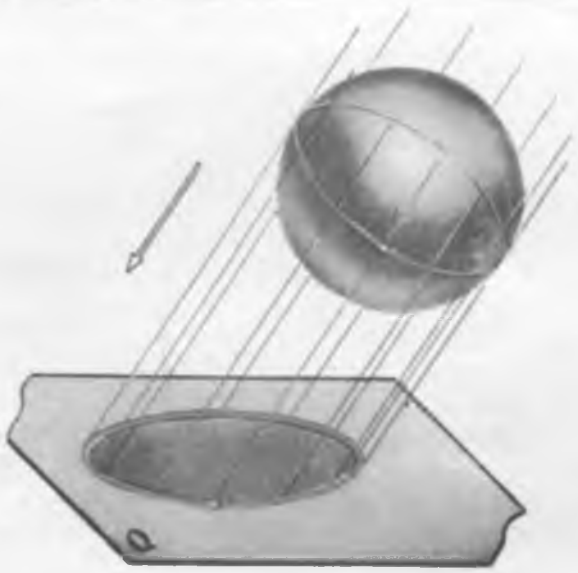


Рис. 5

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ПАРАЛЛЕЛЬНОГО ПРОЕЦИРОВАНИЯ

§3

Все геометрические образы — плоские (двумерные) и пространственные (трехмерные) изображаются на плоскости проекций в общем случае искаженно, независимо от способа проецирования.

При проецировании устанавливается геометрическая (проективная) связь между оригиналом и проекцией. Геометрические образы (формы) содержат в себе свойства, сохраняющиеся в проекциях при любых их преобразованиях. Эти свойства в данном преобразовании называют *проективными*, или *инвариантными*.

Рассмотрим основные свойства параллельного проецирования.

Свойство 1. *Если отрезок прямой делится точкой в каком-либо отношении, то и проекция отрезка делится проекцией точки в том же отношении.*

Представим, что отрезок AB прямой линии делится точкой C в некотором отношении $AC : CB = m : n$ (рис. 6).

Спроецируем отрезок AB на плоскость Q при заданном направлении проецирования. Параллельная проекция ab отрезка AB является линией пересечения проецирующей плоскости отрезка с плоскостью проекций Q. Точке C соответствует ее проекция c.

В проецирующей плоскости отрезка AB проведем через точки A и C прямые AK и CE, параллельные проекции ab данного отрезка. Замечаем, что $AK = ac$ и $CE = cb$ как параллельные отрезки между параллельными прямыми. Треугольники ACK и CBE подобны. Из подобия треугольников следует: $AC : CB = AK : CE$, а отсюда $AC : CB = ac : cb$.

Это подтверждает, что проекция отрезка делится проекцией точки в таком же отношении, в каком точка делит данный отрезок.

Свойство 2. *Точка пересечения проекций пересекающихся прямых линий является проекцией точки пересечения этих прямых линий.*

На рис. 7 даны две пересекающиеся в точке E прямые линии — AB и CD. Построим при заданном направлении проецирования

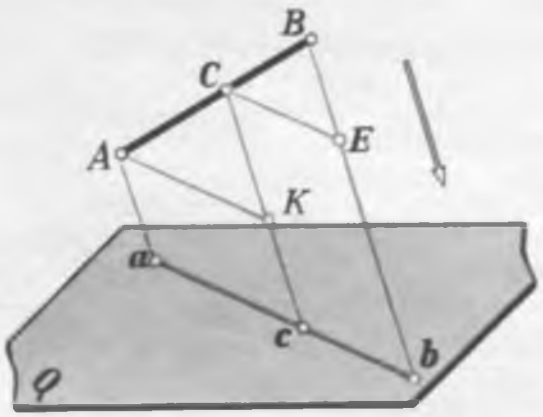


Рис. 6

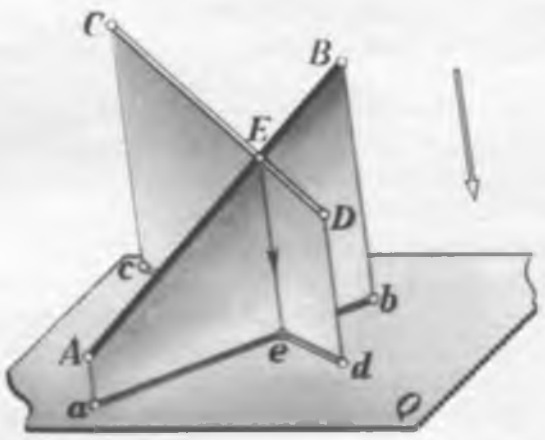


Рис. 7

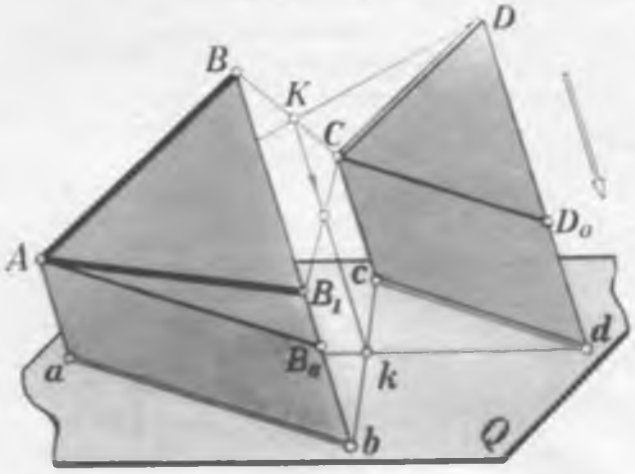


Рис. 8

параллельные проекции *ab* и *cd* этих прямых на плоскости *Q*.

Проецирующие плоскости данных прямых пересекаются по прямой *Ee*, параллельной направлению проецирования. Прямая *Ee* является проецирующим лучом точки *E*. Проекции *ab* и *cd* прямых *AB* и *CD* являются линиями пересечения проецирующих плоскостей с плоскостью проекций *Q*. Поэтому точка *e* пересечения проекций данных прямых является в то же время и проекцией точки пересечения этих прямых.

Можно рассуждать и таким образом. Если точка *E* принадлежит отрезку *AB*, то проекция *e* этой точки принадлежит проекции *ab* данного отрезка (свойство 1 параллельного проецирования).

Точка *E* согласно условию принадлежит и отрезку *CD*. Следовательно, проекция *e* этой точки будет принадлежать проекции *cd* отрезка *CD*.

Проекция *e* точки *E* является точкой пересечения проекций *ab* и *cd* пересекающихся прямых *AB* и *CD*.

Свойство 3. *Проекции отрезков параллельных прямых линий параллельны и имеют одно направление, а длины их находятся в таком же отношении, как и длины самих отрезков.*

Пусть две параллельные прямые линии представлены отрезками *AB* и *CD* (рис. 8). Спроецируем эти отрезки на плоскость проекций *Q*. Направление проецирования известно. Проецирующие плоскости параллельных между собой отрезков взаимно параллельны. Линиями пересечения их плоскостью являются параллельные прямые.

Итак, параллельные прямые линии проецируются на плоскости проекций в виде параллельных прямых независимо от выбора направления проецирования. У параллельных отрезков односторонние крайние точки проекций являются проекциями или наиболее удаленных, или наиболее близких точек этих отрезков от плоскости проекций. Такие проекции называют *однонаправленными*.

Параллельные проекции на одной плоскости проекций не определяют параллельность отрезков в пространстве. Проведем

через точки A и C данных прямых AB и CD отрезки AB_0 и CD_0, параллельные проекциям ab и cd.

Имеем подобные треугольники ABB_0 и CDD_0. Из подобия этих треугольников следует: $AB_0 : CD_0 = AB : CD$, но так как $AB_0 = ab$ и $CD_0 = cd$, то $ab : cd = AB : CD$, т. е. длины проекций отрезков двух параллельных прямых находятся между собой в таком же отношении, как и длины самих отрезков.

Проекции прямых могут быть параллельными, и их длины могут находиться в том же отношении, как и длины самих отрезков, но этого недостаточно, чтобы утверждать параллельность отрезков в пространстве. Так, непараллельные отрезки $AB_1 (AB_1 = AB)$ и CD проецирующих параллельных плоскостей проецируются на плоскость Q параллельными отрезками ab и cd. Соединим концы (точки A и D, B и C) параллельных отрезков прямыми AD и BC, пересекающимися в точке K. Проекции ad и bc этих прямых пересекаются в точке k, являющейся проекцией точки K. Любая другая прямая линия, пересекающая данные отрезки и проходящая через точку K, имеет своими проекциями также прямые, проходящие через проекции этой точки. Отсюда следует, что точки пересечения проекций любых прямых, пересекающих данные параллельные отрезки, являются проекциями точек пересечения этих прямых линий.

Свойство 4. *Проекции отрезков двух скрещивающихся прямых линий в зависимости от направления проецирования могут или пересекаться, или быть параллельными.*

Прямые линии, не пересекающиеся и не параллельные между собой в пространстве, называются *скрещивающимися*.

Две скрещивающиеся в пространстве прямые линии AB и CD проецируются на плоскость Q в виде параллельных прямых ab и cd при большом числе направлений проецирования (рис. 9). В этом случае необходимо, чтобы проецирующие плоскости таких прямых линий были взаимно параллельны.

Через точку B прямой AB проведем прямую BE, параллельную другой данной прямой CD. Двумя прямыми определяется плоскость ABE. Через точку D прямой CD проведем прямую DG, параллельную прямой AB. Двумя такими прямыми определяется плоскость CDG. Как видно, две плоскости ABE и CDG взаимно параллельны. Они пересекаются плоскостью проекций Q по параллельным прямым линиям.

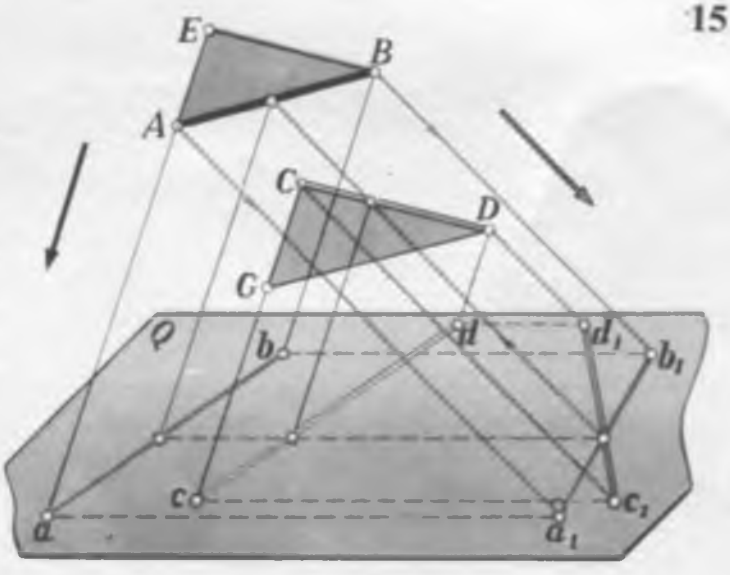


Рис. 9

Следовательно, проекциями двух скрещивающихся прямых линий являются параллельные прямые линии. Они получаются только при единственном направлении проецирующих плоскостей данных отрезков. Направления проецирования (их может быть бесчисленное множество) должны быть параллельны этим плоскостям.

Две скрещивающиеся в пространстве прямые линии AB и CD проецируются на плоскость Q в виде пересекающихся прямых a_1b_1 и c_1d_1. В этом случае необходимо, чтобы проецирующие плоскости прямых пересекались. Достаточно, чтобы они не были взаимно параллельны, т. е. чтобы направление проецирования не лежало в плоскости, параллельной данным прямым AB и CD. Таких направлений проецирования может быть бесчисленное множество.

Очевидно, по параллельности или пересекаемости проекций на одной какой-либо плоскости нельзя судить о параллельности и пересекаемости прямых в пространстве.

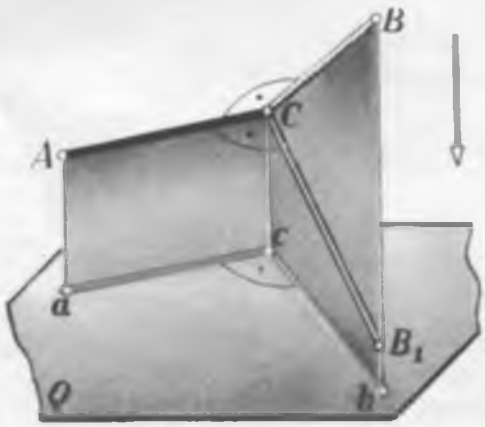


Рис. 10

Свойство 5. *При прямоугольном проецировании прямой угол между отрезками прямых проецируется без искажения (прямым углом), если одна из его сторон параллельна плоскости проекций, а другая не перпендикулярна к ней.*

Пусть угол между прямыми *AC* и *CB* при вершине *C* в пространстве будет прямым. Одна из сторон этого угла, например *AC*, параллельна плоскости проекций (рис. 10). Проецирующие плоскости данных прямых *AC* и *CB* перпендикулярны к плоскости *Q*.

Угол между проецирующими плоскостями определяется здесь углом между линиями их пересечений плоскостью проекций. Такие линии являются проекциями любых прямых, лежащих в тех же проецирующих плоскостях.

Две проецирующие плоскости данных прямых *AC* и *CB* взаимно перпендикулярны. Так, отрезок *AC* перпендикулярен к данному отрезку *CB* и к проецирующему лучу *Cc* точки *C*, т. е. отрезок *AC* перпендикулярен к проецирующей плоскости отрезка *CB*.

Поэтому проецирующие плоскости данных отрезков *AC* и *CB* взаимно перпендикулярны. Они пересекаются плоскостью проекций по взаимно перпендикулярным прямым линиям. Из этого следует, что ортогональной проекцией прямого угла *ACB* является прямой угол *acb*.

В виде прямого угла проецируется и любой угол (острый или тупой), если стороны его лежат соответственно во взаимно перпендикулярных проецирующих плоскостях. Заметим также, что прямой угол может проецироваться в виде острого или тупого угла, если ни одна из его сторон не параллельна плоскости проекций.

§ 4 ВОСПРИЯТИЕ (ПРЕДСТАВЛЕНИЕ) ПРЕДМЕТА ПО ЕГО ИЗОБРАЖЕНИЮ В ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРОЕКЦИЯХ

В технике важно не только уметь строить изображения (проекции) геометрических образов, но и уметь мысленно логически воспринять (представить) в пространстве вид предмета по его изображениям. Различные машины, сооружения и пр. строят по их проекционным изображениям (чертежам), по которым определяют их форму и размеры.

Одна параллельная проекция без каких-либо дополнительных условий недостаточна для представления предмета в натуре: по такому изображению нельзя определить не только форму и размеры предмета, но и его положение в пространстве. Параллельная проекция не обладает свойством обратимости.

Рассмотрим некоторые способы восполнения изображений геометрических образов при параллельном проецировании.

1. Прямоугольные (ортогональные) проекции

Метод ортогональных проекций* был впервые систематически изложен Гаспаром Монжем, поэтому его иногда называют *методом Монжа*. Метод ортогональных проекций является наиболее распространенным для технических целей; хотя он и не дает наибольшей наглядности изображения, но

* Ортогональная — означает прямоугольная, от греч. ὀρθος — прямой и γωνία — угол.

является простым в графических построениях и обеспечивает высокую точность и удобоизмеримость изображений предметов на плоскости. Он является основным при составлении технических чертежей.

Ортогональное проецирование представляет собой частный случай параллельного проецирования, когда направление проецирования совпадает с направлением плоскости проекций.

Здесь все точки геометрического образа проецируют параллельными лучами на плоскость, перпендикулярную к ним. Однако такого изображения недостаточно для представления самого предмета. Но при ортогональном проецировании неопределенность изображения какого-либо предмета на одной плоскости можно восполнить путем изображения его на другой плоскости, перпендикулярной к первой. Такие два изображения (комплекс двух ортогональных проекций) определяют положение предмета в пространстве.

Чтобы создать представление о геометрическом образе по двум его проекциям, необходима некоторая работа воображения, тем большая, чем сложнее форма предмета. Для этого предметы располагают относительно плоскостей наивыгоднейшим для их удобоизмеримости образом, т. е. основные их измерения представляют параллельно плоскостям проекций.

На рис. 11 показан в двух проекциях ортогональный чертеж технической детали, выполненной из угольника. Здесь по двум проекциям можно определить все размеры детали и представить ее форму. Такие изображения в черчении называются *видами*: вид спереди (на фронтальной плоскости проекций) и вид сверху (на горизонтальной плоскости проекций).

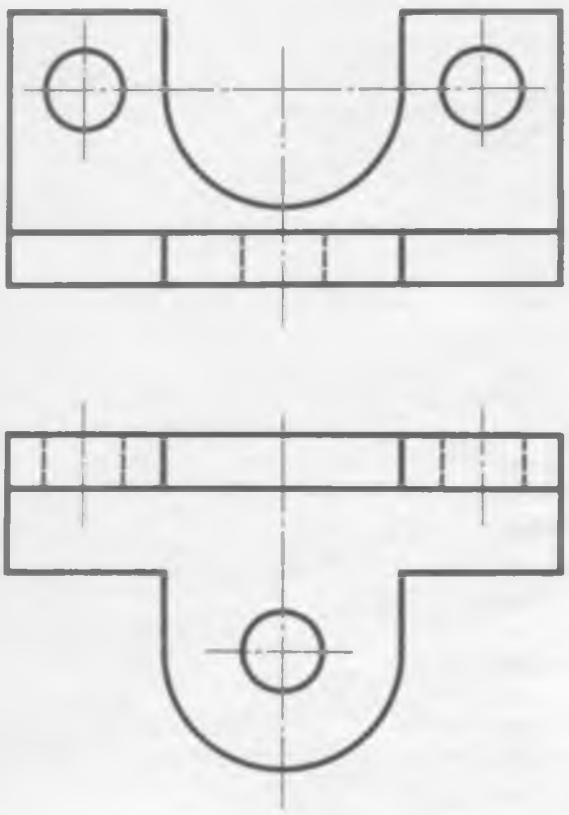


Рис. 11

2. Аксонометрические проекции

Аксонометрические изображения* часто используют для пояснения сложных чертежей машин и механизмов и их отдельных деталей; пространственных кинематических схем; схем водоснабжения, отопления и вентиляции; в проектах зданий, монтажных работ и т. д.

При аксонометрическом проецировании предмет связывают с пространственной системой трех взаимно перпендикулярных координатных осей. Предмет и оси координат проецируют на одну плоскость — плоскость аксонометрических проекций.

Равные масштабные отрезки, взятые на осях координат, при проецировании искажаются. Между этими отрезками и их проекциями, лежащими на аксонометрических осях, устанавливаются некоторые соотно-

* От лат. axon — ось и metrio — измеряю, что означает измерение по осям. Аксонометрические проекции бывают параллельные и центральные. Здесь рассматривается только параллельная аксонометрия.

шения (аксонометрические оси являются проекциями осей координат).

Зная соотношения (коэффициенты искажения) для координатных осей, можно построить проекции отрезков, расположенных на этих осях, или на осях, параллельных им (умножая их на соответствующие коэффициенты искажения), и получить аксонометрическую проекцию предмета.

Аксонометрические проекции бывают *прямоугольные* — полученные путем прямоугольного проецирования предмета вместе с координатными осями на плоскость, и *косоугольные* — полученные путем косоугольного проецирования.

В зависимости от отношений показателей искажения координат аксонометрические проекции делят на три группы: изометрические, диметрические и триметрические. По соотношению общих размеров проецируемого предмета и его изображения аксонометрические проекции делят на точные и увеличенные.

На рис. 12 показано изображение технической детали в аксонометрии.

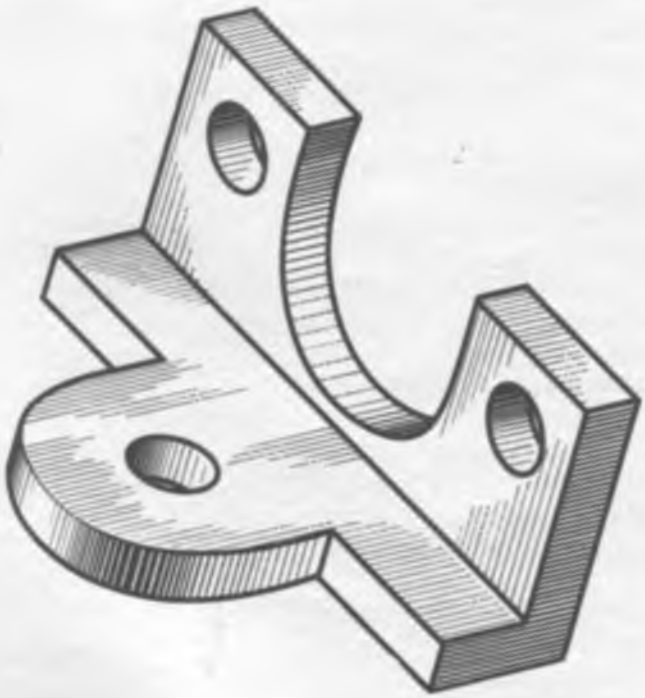


Рис. 12

3. Проекции с числовыми отметками

Метод ортогональных проекций является весьма распространенным, но его применение не всегда целесообразно, особенно при составлении чертежей пространственных форм, у которых одно измерение (в вертикальном направлении) очень мало по сравнению с измерениями в двух других направлениях (в горизонтальных). В этом случае наглядность и удобоизмеримость чертежа не удовлетворяют требованиям практики, а построение одной из проекций (фронтальной) довольно сложно.

Более рационально здесь применять метод проекций с числовыми отметками, основанный на том, что все точки геометрического образа в пространстве ортогонально проецируют на горизонтальную плоскость проекций — плоскость нулевого уровня. Удаление точек от горизонтальной плоскости проекций на чертеже указывают числовыми отметками, расположенными возле проекций точек внизу справа. Если точка расположена выше плоскости проекций, то ее отметка положительна, если ниже — отрицательна и при отметке ставят знак (—) минус.

Составленный таким образом чертеж геометрического образа позволяет брать его измерения в направлении, параллельном плоскости проекций, непосредственно из чертежа, а измерения в вертикальном направлении определять путем подсчета, пользуясь отметками.

На рис. 13 дано построение чертежа точек в проекциях с числовыми отметками. Здесь H — плоскость проекций (плоскость нулевого уровня), A, B и C — заданные точки (вершины треугольника ABC).

Отрезки Aa, Bb и Cc предполагаются перпендикулярными к плоскости проекций H.

Согласно числовым отметкам, поставленным около проекций точек, точка A расположена над горизонтальной плоскостью проекций H на расстоянии 2 единиц принятого масштаба измерения, точка B — на расстоянии 6,5 единиц, точка C — ниже плоскости проекций на расстоянии 4,5 единиц. Заданный геометрический образ (тре-

угольник ABC) пересекается с плоскостью проекций H по прямой линии MN — линии нулевого уровня.

На рис. 14 показан чертеж этого геометрического образа в проекциях с числовыми отметками. Каждый чертеж в проекциях с числовыми отметками сопровождается масштабом. Масштаб чертежа обычно принимают порядка $\frac{1}{10^n}$, $\frac{1}{5^n}$, $\frac{1}{2^n}$, где n — целое число.

Для удобства выполнения чертежей и решения метрических задач плоскость проекций лучше выбирать таким образом, чтобы отметки всех изображаемых точек были положительными. В этом случае плоскость проекций опускают ниже точки, имеющей наибольшую отрицательную отметку. Неудобными являются также отметки, выраженные крупными числами, например, трехили четырехзначными,— в случае, когда среди сравнительно спокойного рельефа имеется значительно возвышение.

Поднимая или опуская плоскость проекций (плоскость нулевых отметок), ей можно придать такое положение, при котором или все точки рассматриваемого предмета будут иметь отметки одного знака, или отметки их будут уменьшены на одну и ту же величину.

При изображении поверхности Земли за плоскость проекций удобно принять уровень моря*. Все точки с положительными отметками будут тогда надводными, а с отрицательными — подводными. Иногда для упрощения чертежа знаки (+) и (—) перед отметкой не ставят, а применяют различный цвет точек, лежащих выше и ниже плоскости проекций.

Изображения геометрических форм в проекциях с числовыми отметками не обладают наглядностью. Однако эти изображения являются обратимыми. Пользуясь изображением, можно восстановить в пространстве точное взаиморасположение всех точек геометрического образа, определить по имеющимся проекциям форму и размеры самого оригинала.

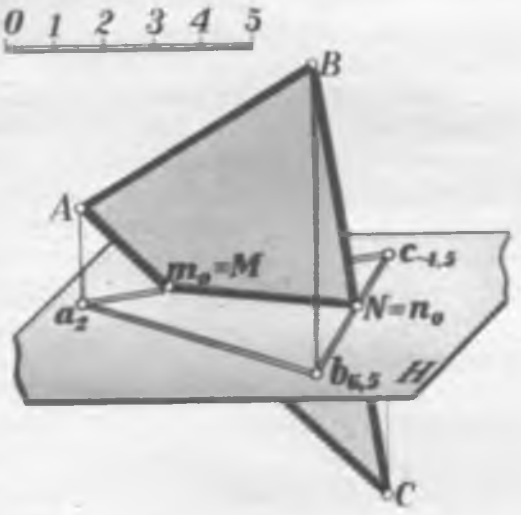


Рис. 13

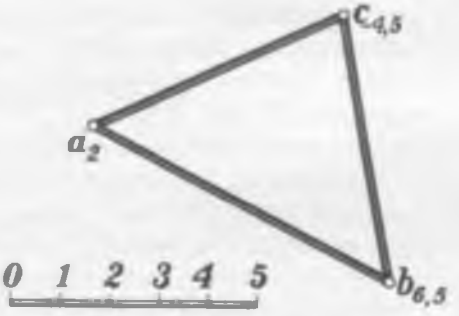


Рис. 14

Метод проекций с числовыми отметками широко применяют при изображении топографических поверхностей в горизонталях, при проектировании гидротехнических и дорожных сооружений.

4. Векториальные (федоровские) проекции

Федоровские* проекции представляют собой изображение геометрических образов на одной плоскости проекций. Удаление то-

* В Советском Союзе за нулевую плоскость принята поверхность Балтийского моря. За эталон «начало высоты» у нас в стране принят нуль Кронштадтского футштока. От него вычисляются все высоты.

* Названы по имени академика Е. С. Федорова (1853—1919) — основоположника теоретической кристаллографии.

чек от плоскости проекций здесь определяют путем произвольно направленных параллельных отрезков (векторов), исходящих из проекций этих точек.

Для точек, расположенных выше плоскости проекций (плоскость предполагается горизонтальной), высотные отрезки считают положительными, для расположенных ниже — отрицательными. Отрицательные высотные отрезки имеют противоположные направления.

Длины высотных отрезков равны величинам удаления соответствующих точек от плоскости проекций. Концы этих отрезков можно рассматривать как параллельные проекции точек пространства, когда направление проецирования составляет с плоскостью проекций угол 45°.

Чертежи в федоровских проекциях обладают свойством обратимости. Их применяют в геологии и горном деле, в топографических, земляных и других работах.

§5 ПРОСТРАНСТВЕННАЯ МОДЕЛЬ КООРДИНАТНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ ПРОЕКЦИЙ

Пространственные геометрические образы вследствие их трехмерности ориентируют относительно общепринятой прямоугольной декартовой системы координат* — системы трех взаимно перпендикулярных координатных плоскостей (рис. 15).

Координатные плоскости образуют в пространстве прямоугольный трехгранник. Ребра этого трехгранника (линии пересечения плоскостей) называют *осями координат* и их обозначают x, y, z; точка их пересечения — начало координат — обозначается O (начальная буква латинского слова Origo — начало).

Ось x называют *осью абсцисс* (от лат. abscissa — отсеченная, отделенная), ось y — *осью ординат* (от лат. ordinata — подряд проведенная), ось z — *осью аппликат* (от лат. applicata — приложенная). Из координатных плоскостей одна располагается горизонтально, две другие — вертикально.

Горизонтальную координатную плоскость xOy трехгранника называют *горизонтальной плоскостью проекций* (плоскость H).

Первую вертикальную координатную плоскость xOz трехгранника называют *фронтальной плоскостью проекций* (плоскость V).

Вторую вертикальную координатную плоскость yOz трехгранника называют *профильной плоскостью проекций* (плоскость W).

Координатные оси могут иметь положительные и отрицательные направления.

В Советском Союзе, как и в большинстве европейских стран, принята правая, или европейская, система расположения проекций. Ось x направлена от начала координат влево, y — вперед (к зрителю), z — вверх.

Обратные направления координатных осей считаются отрицательными.

Координатами некоторой точки A являются числа: они выражают длины отрезков

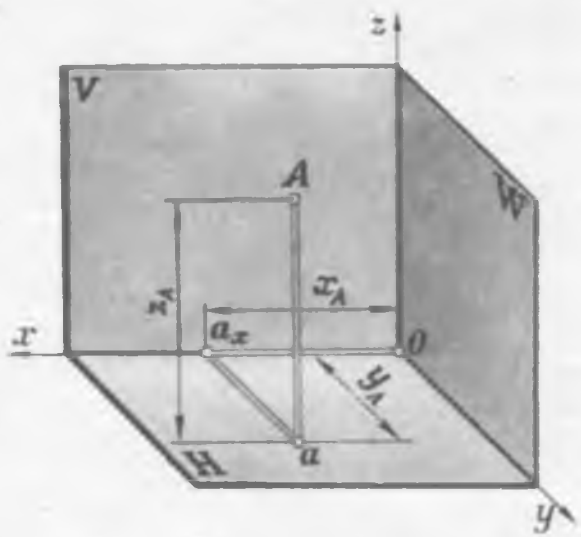


Рис. 15

* Декарт (1596—1650) — французский математик и философ, предложивший систему координат для определения положений систем точек в пространстве.

координатных осей, измеренные некоторой установленной единицей длины e.

$x_A = \frac{Oa_x}{e}$ — абсцисса точки A;

$y_A = \frac{a_x a}{e}$ — ордината точки A;

$z_A = \frac{aA}{e}$ — аппликата точки A.

Координаты точки можно получить и по расстояниям точки от координатных плоскостей (плоскостей проекций).

Например, x_A — абсцисса точки A определяет удаление точки A от профильной плоскости проекций W; y_A — ордината точки A — удаление точки A от фронтальной плоскости проекций V; z_A — аппликата точки A — удаление точки A от горизонтальной плоскости проекций H.

Числовые величины, выражающие координаты точки A, например, $x=15$, $y=10$, $z=12$, записывают так: $A(15, 10, 12)$.

Давая от точки O противоположные направления координатным осям, получим полную систему координатных осей. Здесь координатные плоскости образуют восемь прямоугольных трехгранников, деля пространство на восемь частей — восемь октантов*.

§ 6

ПОСТРОЕНИЕ ЧЕРТЕЖЕЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБРАЗОВ В ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПРОЕКЦИЯХ

Чертежи геометрических образов в ортогональных проекциях широко применяются в начертательной геометрии. Они просты в построениях, дают возможность легко производить различные измерения геометрических образов и определять взаимоположение отдельных их элементов. Пользуясь такими чертежами, можно решать различные задачи, относящиеся к этим геометрическим образам.

Пусть даны в пространстве точка A и система двух взаимно перпендикулярных плоскостей проекций H и V (рис. 16). Плоскость проекций V обычно располагается вертикально и за проецируемым предметом, горизонтальная плоскость проекций H — ниже заданного предмета.

Эти плоскости пересекаются по прямой линии, которую называют *осью проекций*.

Проводя из точки A проецирующие лучи перпендикулярно к плоскостям H и V, определим ортогональные проекции этой точки. Так, проекцию a точки A на плоскости H называют *горизонтальной* проекцией точки; проекцию a' точки A на плоскости V — *фронтальной* проекцией точки.

Прямые линии, связывающие точки пространства с их проекциями, называют *проецирующими линиями, или проецирующими лучами*. Прямая Aa, проецирующая точку A

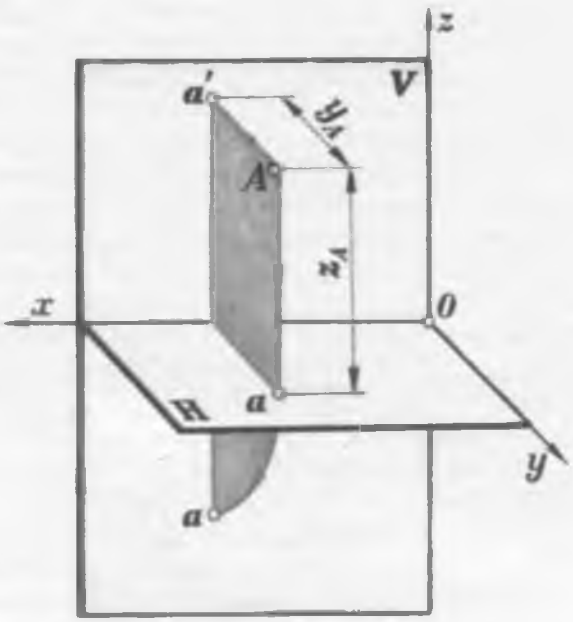


Рис. 16

* От лат. octo — восемь.

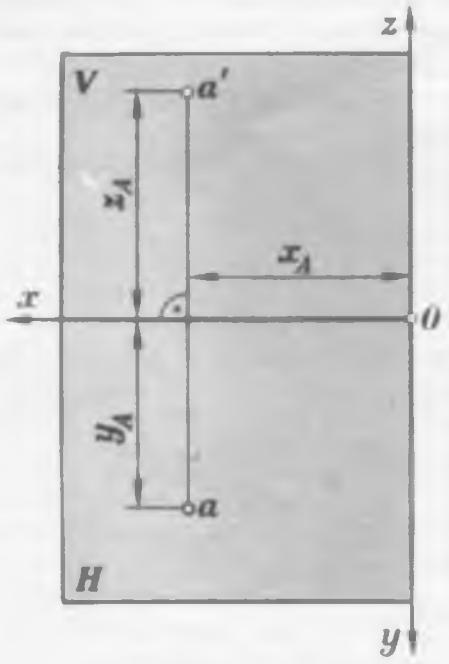


Рис. 17

на плоскость проекций H, называется *горизонтально-проецирующей прямой*, или *горизонтально-проецирующим лучом*. Эта прямая без искажения проецируется на фронтальную плоскость проекций V.

Прямая Aa', проецирующая точку A на плоскость проекций V, называется *фронтально-проецирующей прямой*, или *фронтально-проецирующим лучом*. Эта прямая без искажения проецируется на горизонтальную плоскость проекций H. Проекции проецирующих лучей на соответствующих плоскостях проекций показывают тонкими сплошными или штриховыми линиями.

Два проецирующих луча Aa и Aa', исходящих из какой-то точки геометрического образа, представляют собой задание некоторой плоскости. Эту плоскость называют *плоскостью проецирующих лучей* или *проецирующей плоскостью*; она перпендикулярна к плоскостям проекций H и V и к оси проекций Ox.

Отметим, что удаление точки от горизонтальной плоскости проекций H равно удалению фронтальной проекции этой точки от оси проекций. Удаление точки от фронтальной плоскости проекций V равно удалению горизонтальной проекции той же точки от оси проекций. Отсюда вытекают следующие теоремы:

Теорема. *Точка в пространстве удалена от плоскостей проекций H и V на величины удаления от оси ее фронтальной и горизонтальной проекций.*

По двум проекциям точки можно представить положение этой точки в пространстве: восставляя перпендикуляры в точках a и a' соответственно к плоскостям H и V, на их пересечении можно определить искомую точку A пространства.

Теорема. *Положение точки в пространстве вполне определяется ее ортогональными проекциями на две плоскости.*

Геометрические образы в пространстве ориентируются также и относительно системы трех взаимно перпендикулярных координатных плоскостей. Линии пересечения этих плоскостей — координатные оси — показаны на рис. 16.

Для построения чертежа точки основные плоскости проекций H и V совмещают, поворачивая вниз вокруг оси x плоскость H до совмещения ее с плоскостью проекций V.

Таким образом, все построения, выполненные в двух плоскостях, располагаются соответствующим образом в одной плоскости, принятой за плоскость чертежа. В результате получим ортогональный чертеж, или эпюр* точки A (рис. 17), состоящий из двух проекций a и a'. Проекции a и a' точки A располагаются на одном перпендикуляре к оси проекций. Прямую, соединяющую на чертеже разноименные проекции a и a' точки A, называют *линией связи*.

Обычно на чертеже контуры полей совмещенных плоскостей проекций не показывают.

Теорема. *Горизонтальная и фронтальная проекции любой точки геометрического образа располагаются на одной линии связи.*

---

* От франц. epure — чертеж, проект.

Рассматриваемый чертеж (рис. 17) точки A является метрически определенным. Совместное использование двух ортогональных проекций на двух взаимно перпендикулярных плоскостях проекций положено в основу метода Монжа.

Две проекции (горизонтальная и фронтальная) рассматриваемого геометрического образа, соединенные линиями связи соответствующих его точек, служат основой для различных исследований этого геометрического образа.

При решении многих задач в начертательной геометрии геометрические образы часто не связывают с плоскостями проекций, а пользуются разностью удалений их точек от соответствующих плоскостей проекций.

На рис. 18 представлен ортогональный чертеж треугольника ABC — построены его горизонтальная abc и фронтальная $a'b'c'$ проекции.

Как уже известно, при параллельном проецировании проекции геометрического образа на плоскостях одного направления остаются неизменными, т. е. сохраняют и вид, и размеры. Учитывая это, плоскости проекций можно приближать к геометрическому образу или удалять от него. Изображения на этих плоскостях остаются постоянными. По изображениям можно определять разности удалений точек геометрического образа от плоскостей проекций.

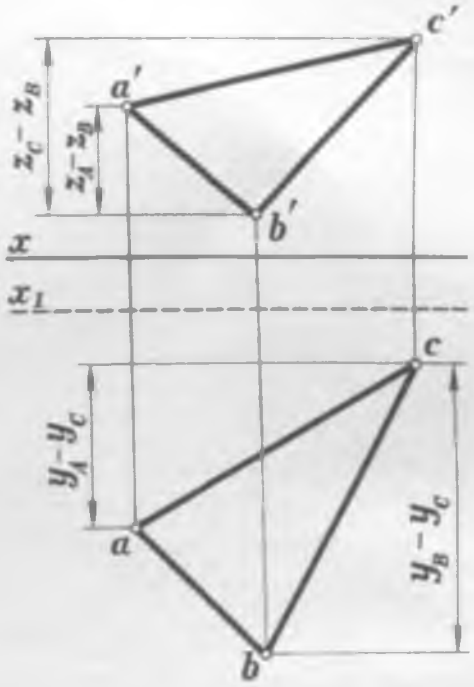


Рис. 18

На чертеже разноименные проекции геометрического образа можно раздвигать по линиям связи, сближая их или удаляя одну от другой. Поэтому здесь ось проекций как прямую, фиксирующую положение плоскостей проекций H и V, можно исключить. В этом случае будем иметь безосный чертеж геометрического образа. Такими чертежами в основном и будем пользоваться.

Вопросы для самопроверки

1. Какие изображения называют рисунками, какие — чертежами?
2. Какие известны вам основные методы проецирования геометрических форм на плоскости?
3. Сформулируйте и докажите основные свойства параллельного проецирования.
4. Что называют несобственными элементами пространства?
5. Что называют обратимостью чертежа?
6. Сформулируйте и покажите на чертежах особенности методов ортогональных и аксонометрических проекций, проекций с числовыми отметками и федоровских проекций.
7. Что называют координатами точки пространства в декартовой системе координат?
8. Укажите основные свойства чертежей геометрических образов.
9. Укажите особенности осных и безосных чертежей.

ГЛАВА II

ТОЧКА И ОТРЕЗКИ ПРЯМЫХ ЛИНИЙ НА ЭПЮРЕ МОНЖА

§7 ЧЕРТЕЖИ ТОЧЕК, РАСПОЛОЖЕННЫХ В РАЗЛИЧНЫХ УГЛАХ ПРОСТРАНСТВА

Две плоскости проекций — H и V при их пересечении разделяют пространство на четыре части (четыре двугранных угла). Такие двугранные углы пространства называют также *квадрантами*, или *четвертями*.

На рис. 19 показана пространственная модель системы двух плоскостей проекций H и V и точек A, B, C и D, расположенных в различных углах пространства. Указаны проекции этих точек на плоскостях H и V.

Точка A расположена в первом углу пространства, точка B — во втором, C — в третьем и D — в четвертом.

Чертежи точек, расположенных в различных углах пространства, представлены на рис. 20. Точка A находится в первом углу пространства. Она удалена от плоскости проекцией H на величину $a_x a'$, равную расстоянию от ее фронтальной проекции a до оси проекций, и удалена от плоскости V на величину $a_x a$, равную расстоянию от ее горизонтальной проекции a до оси проекций.

Точка B находится во втором углу. Обе проекции этой точки (горизонтальная b и фронтальная b') на чертеже располагаются на одной линии связи выше оси проекций.

В зависимости от расстояний проекций b и b' точки B от оси устанавливаем, что точка B располагается ближе к плоскости проекций V, чем к плоскости H.

Точка C находится в третьем углу. Здесь горизонтальная проекция c располагается выше оси проекций, а фронтальная проекция c' — ниже оси проекций. Поскольку фронтальная проекция точки C ближе к оси проекций, чем ее горизонтальная проекция c, утверждаем, что точка C пространства располагается ближе к горизонтальной плоскости проекций H.

Точка D находится в четвертом углу. Обе проекции этой точки располагаются ниже оси проекций.

Таким образом, по расположению проекций точек относительно оси проекций можно судить о положении точек в пространстве, т. е. можно установить, на каких расстояниях от плоскостей проекций и в каких углах пространства они находятся.

Точки A, B, C, ... пространства на чертеже часто называют их проекциями, т. е. aa'; bb'; cc'; ...

На рис. 20 представлены также и чертежи точек, занимающих некоторые частные (осо-

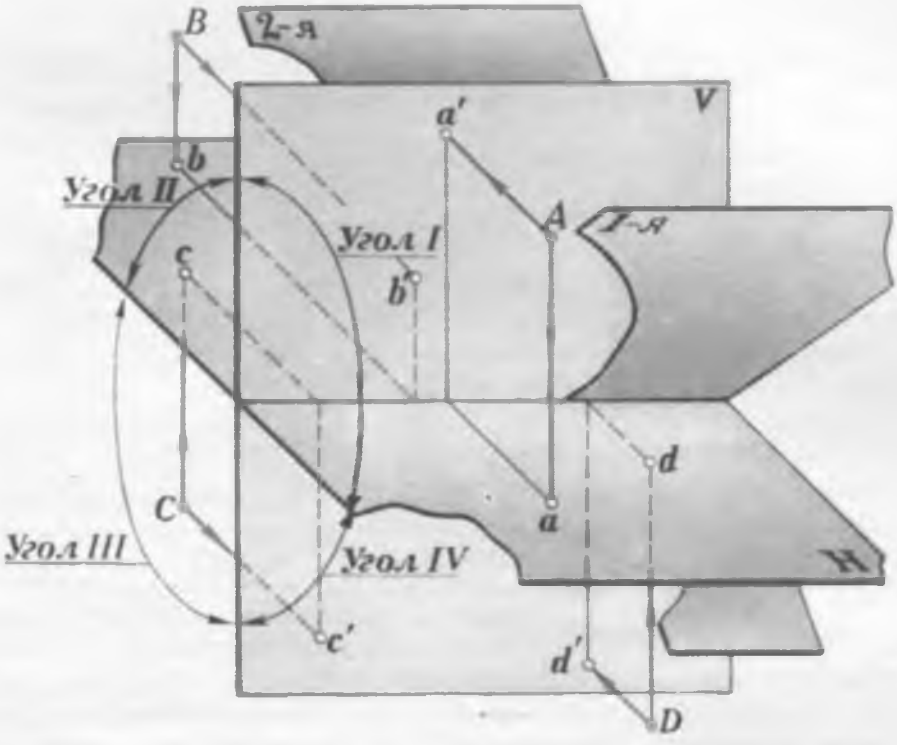


Рис. 19

бые) положения. Так, точки *11'*; *22'*; *33'* и *44'* находятся в плоскостях проекций.

Точка *11'* находится на передней поле плоскости *H*; горизонтальная проекция *1* точки *11'* располагается под осью и совпадает с точкой *1* пространства (*1*≡*1*), а фронтальная — *1'* находится на оси проекций.

Точка *22'* находится на задней поле плоскости *H*; горизонтальная проекция *2* точки *22'* расположена над осью и совпадает с самой точкой *II* пространства (*II*≡*2*), а фронтальная — *2'* находится на оси проекций.

Точка *33'* находится на нижней поле плоскости *V*; фронтальная проекция *3'* точки *33'* расположена под осью и совпадает с точкой *III* пространства (*III*≡*3'*), а горизонтальная — *3* находится на оси проекций.

Точка *44'* находится на верхней поле плоскости *V*; фронтальная проекция *4'* точки *44'* расположена над осью и совпадает с точкой *IV* пространства (*IV*≡*4'*), а горизонтальная — *4* находится на оси проекций.

Теорема. *Если точка принадлежит плоскости проекций, то одна из ее проекций находится на оси, а другая совпадает с точкой.*

Точка *55'* (рис. 20) принадлежит оси проекций. Обе ее проекции — *5* и *5'* совпадают и принадлежат оси.

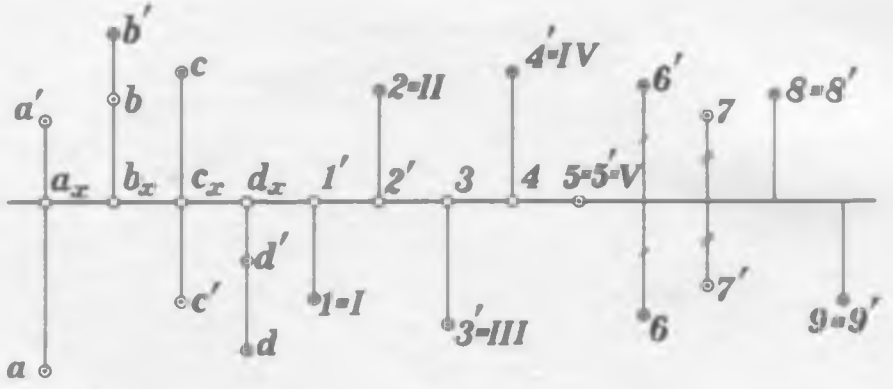
Точки *66'*, *77'*, *88'* и *99'* принадлежат биссекторным плоскостям — плоскостям, делящим углы пространства пополам. Здесь горизонтальные и фронтальные проекции точек равноудалены от оси проекций.

Плоскость, делящую первый и третий углы пространства пополам, называют *первой биссекторной плоскостью.*

Плоскость, делящую второй и четвертый углы пространства пополам, называют *второй биссекторной плоскостью.*

Точки *66'* и *77'* принадлежат первой биссекторной плоскости, точки *88'* и *99'* — второй биссекторной плоскости.

26

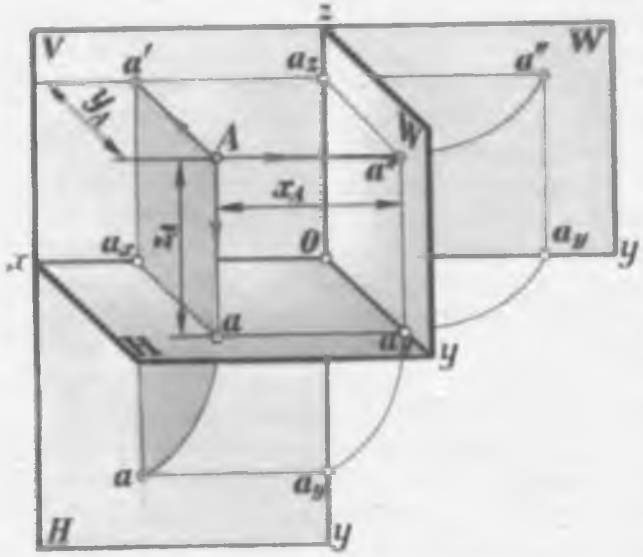


Р и с. 20

Т е о р е м а. *Если точка пространства принадлежит биссекторной плоскости, то ее горизонтальная и фронтальная проекции равноудалены от оси.*

§8 ЧЕРТЕЖИ ТОЧЕК В ТРЕХ ПРОЕКЦИЯХ

Чертежи фигур в двух проекциях определяют форму и размеры рассматриваемого предмета и его положение в пространстве. Такие чертежи являются метрически определенными (полными). Однако в ряде случаев применяют изображения фигур на трех плоскостях проекций.



Р и с. 21

В результате того, что пространственные формы являются трехмерными, чертежи их в трех проекциях являются более ясными, более удобопредставляемыми. В этом случае вводят третью плоскость проекций W, перпендикулярную к плоскостям H и V, т. е. получаем известный прямоугольный трехгранник координатных плоскостей проекций.

На рис. 21 представлена система трех взаимно перпендикулярных плоскостей проекций H, V и W и точка A. Положение точки A относительно плоскостей проекций определяется расстояниями от этой точки до соответствующих плоскостей проекций.

Опуская перпендикуляры из точки A на плоскости H, V и W найдем соответствующие проекции точки A: горизонтальную a, фронтальную a' и профильную a''.

Совмещая плоскости H и W проекций вместе с изображениями на них данной точки с плоскостью V поворотом их вокруг осей x и z в направлениях, указанных на рис. 21 стрелками, получим чертеж точки A в трех проекциях. По чертежу точки можно легко представить ее положение в пространстве.

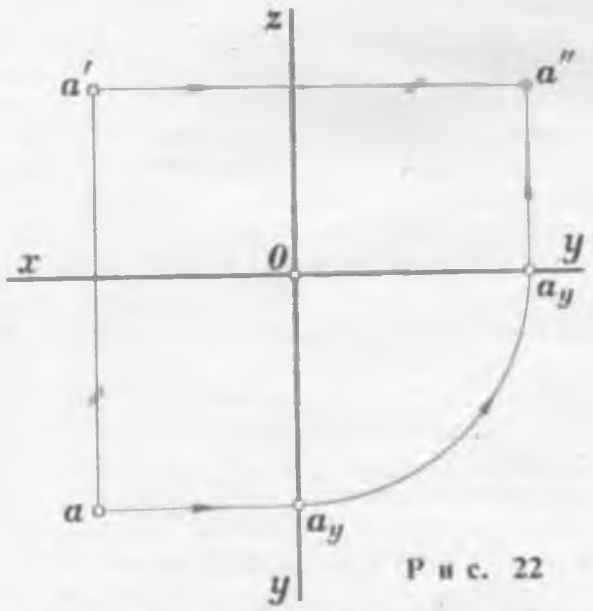


Рис. 22

Чертеж плоскостей проекций представляется положением осей проекций. Здесь ось y имеет два положения (рис. 22).

Построение на чертеже третьей (профильной) проекции точки A производим следующим образом. Из горизонтальной проекции a проводим горизонтальную прямую линию aa_y до пересечения ее с осью y ординат. Отрезок Oa_y переносим на второе положение оси ординат (обычно вращением вокруг точки O).

В точке a_y восставляем перпендикуляр к оси y до пересечения его с горизонтальной прямой, проведенной из фронтальной проекции a' данной точки. Точка пересечения является искомой профильной проекцией a'' точки A.

Отметим, что профильная и фронтальная проекции точки на чертеже всегда располагаются на одной горизонтальной линии связи. Профильная проекция a'' точки удалена от оси z на величину, равную расстоянию горизонтальной проекции a точки до оси x, т. е. на чертеже удаление профильной проекции a'' точки от оси z определяет удаление точки A от фронтальной плоскости проекций V.

На рис. 23 показана пространственная модель трех взаимно перпендикулярных плоскостей проекций, делящих пространство на восемь частей — восемь октантов. Совмещая плоскости H и W с плоскостью проекций V вращением в заданных (условно)

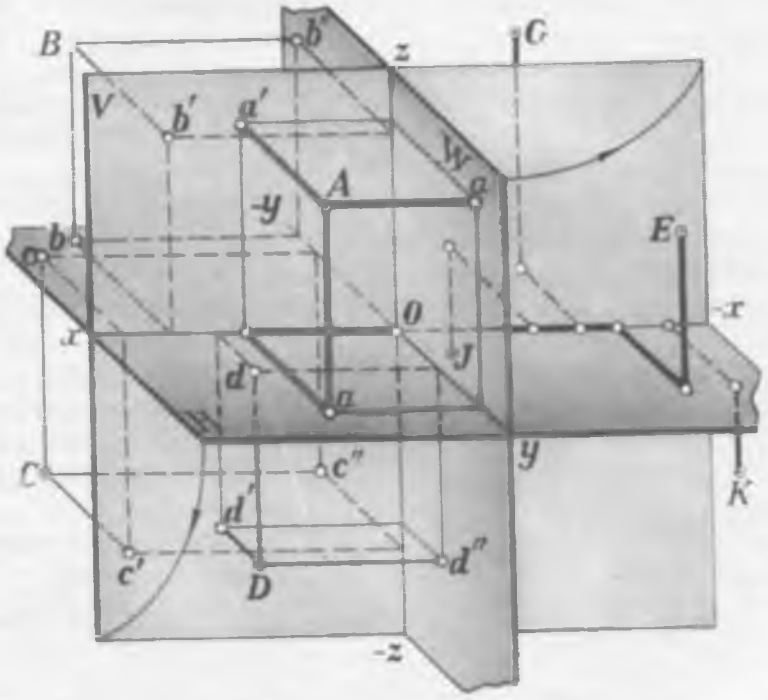


Рис. 23

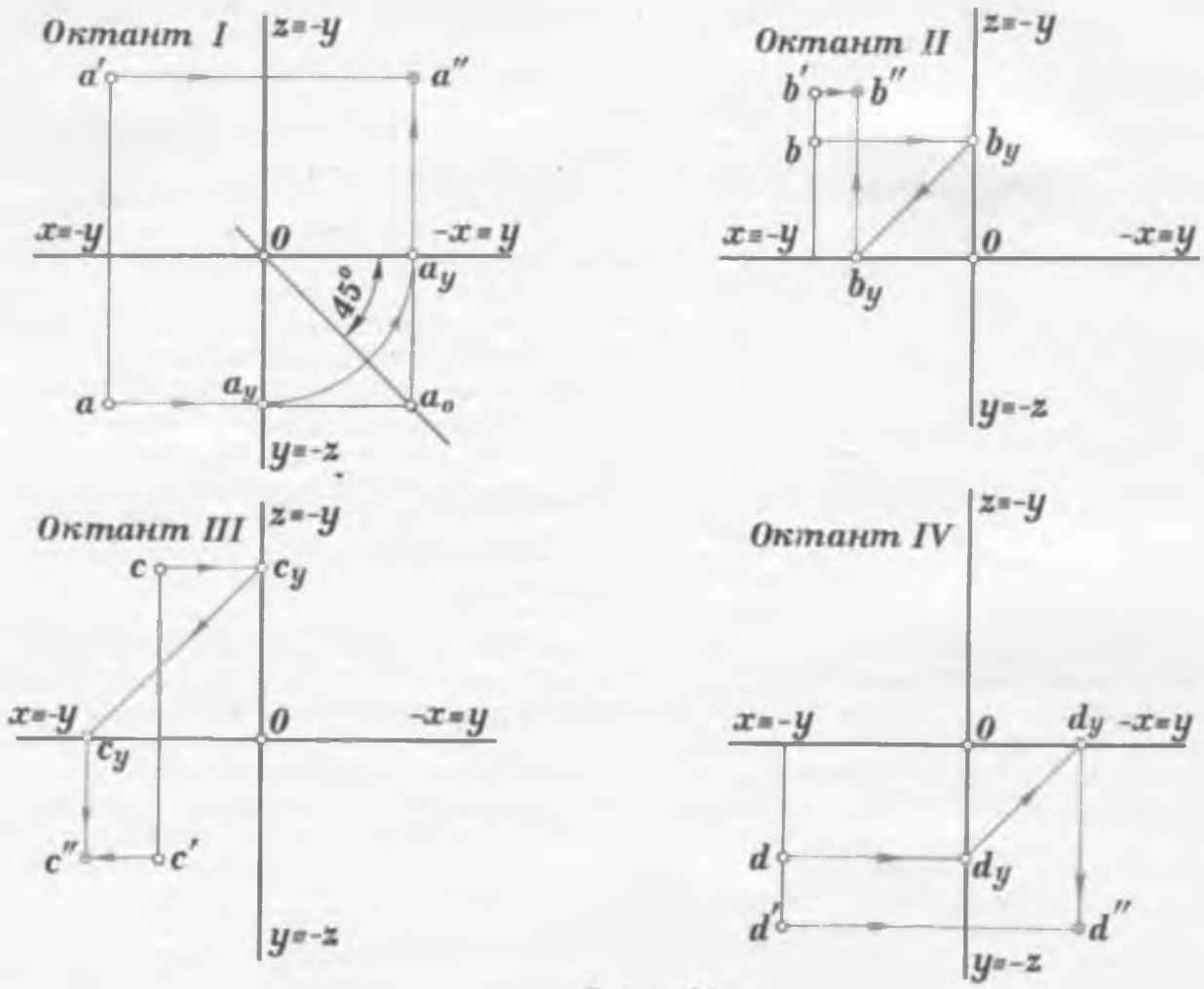


Рис. 24

направлениях вокруг осей абсцисс и аппликат, получим эпюр (чертеж) этой модели, представленный положениями осей проекций.

В плоскости проекций V оси проекций x и z остаются неизменными. При совмещении плоскости H с плоскостью V положительное направление оси y совпадает с отрицательным направлением оси $-z$, а отрицательное направление оси $-y$ — с положительным направлением оси z.

При совмещении плоскости W с плоскостью V положительное направление оси y совпадает с отрицательным направлением оси $-x$, а отрицательное направление оси $-y$ — с положительным направлением оси x.

Если обозначить на рис. 22 противоположные направления координатных осей на чертеже соответствующими знаками, то получим обозначения осей проекций для восьми октантов (рис. 24).

Построение профильных проекций точек, расположенных в других октантах, можно производить в том же порядке, как и для точек октанта *I*.

На рис. 24 показаны построения профильных проекций точек *A*, *B*, *C* и *D*, расположенных в октантах *I*, *II*, *III* и *IV*. Так, профильная проекция b'' точки *B*, расположенной в октанте *II*, на чертеже определяется следующим образом. Из горизонтальной проекции b точки *B* проводят горизонталь-

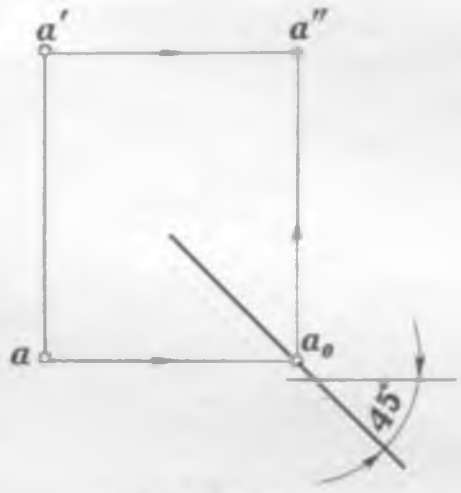
ную прямую линию bb_y до пересечения с осью y ординат (отрицательное направление оси $-y$) в точке b_y. Затем точку b_1 переносят на второе положение оси y ординат (тоже отрицательное направление оси $-y$). В точке b_y восставляют перпендикуляр к оси y до пересечения его в искомой точке b'' с горизонтальной прямой, проведенной из фронтальной проекции b' данной точки.

На пространственной модели (рис. 23) нетрудно убедиться, что профильная проекция b'' точки B, расположенной в октанте II, при совмещении плоскостей проекций располагается слева от оси z.

Аналогично определяются профильные проекции и других точек C и D. Можно, например, построить профильные проекции точек, расположенных и в других октантах.

При рассмотрении чертежа точки A (рис. 24) устанавливаем, что горизонтальная a и фронтальная a' проекции точки A находятся на одном перпендикуляре к оси абсцисс x (на одной линии связи).

Фронтальная a' и профильная a'' проекции точки находятся на одном перпендикуляре (на одной линии связи) к оси аппликат z. Линия, связывающая горизонтальную и профильную проекции точки A, представляется двумя отрезками. Это aa_y — горизонтальная прямая и a_1a'' — вертикальная прямая, соединенные дугой окружности или равно наклоненной к осям прямой линией. Из точки O пересечения осей проекций можно провести прямую под углом 45° к направлениям осей ординат. Она будет постоянной прямой чертежа. Ломаную линию aa_0a'' называют *горизонтально-вертикальной линией связи*.



Р и с. 25

Таким образом, на чертеже в трех проекциях линиями связи являются: aa' — вертикальная линия; $a'a''$ — горизонтальная линия; aa'' — горизонтально-вертикальная линия.

Пользуясь постоянной прямой чертежа, легко определить профильную проекцию точки на пересечении горизонтальной линии связи с горизонтально-вертикальной.

На технических чертежах обычно оси проекций не показывают. Это означает, что плоскости проекций могут перемещаться параллельно самим себе. Однако в случае отсутствия осей проекций по известным двум проекциям некоторой точки и постоянной прямой линии чертежа можно определить третью проекцию точки (рис. 25).

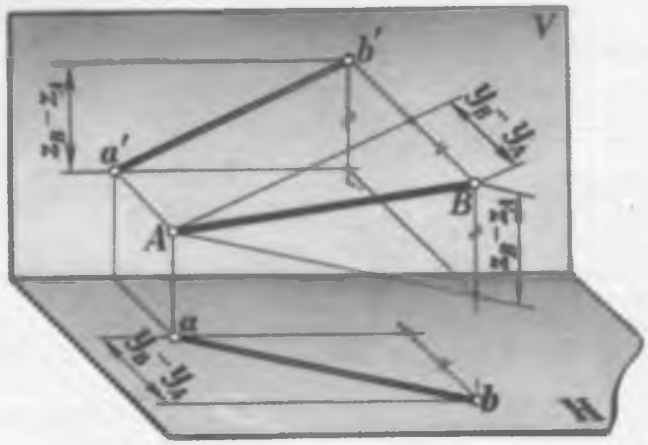
ЧЕРТЕЖИ ОТРЕЗКОВ ПРЯМЫХ ЛИНИЙ

§9

1. Прямые линии общего положения

Прямая линия пространства в системе плоскостей проекций занимает некоторое определенное положение. Она может быть расположена произвольно относительно плоскостей проекций или занимать некоторые частные положения — быть параллельной плоскости проекций или перпендикулярной к ней, принадлежать плоскости проекций и пр.

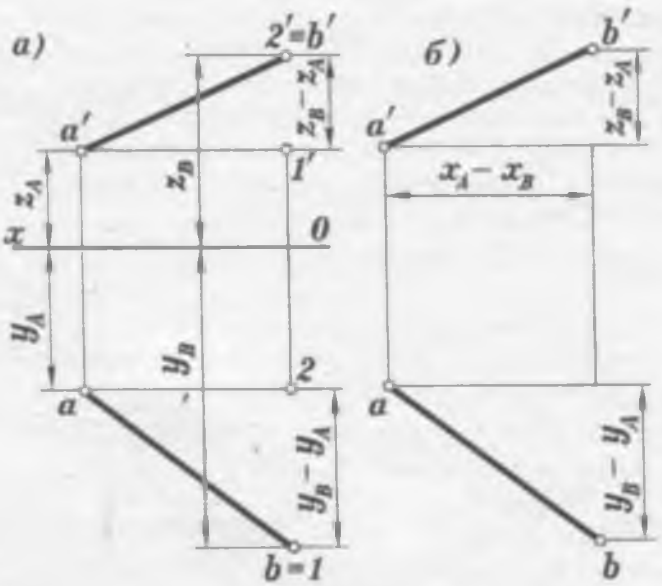
Прямая линия, занимающая в системе плоскостей проекций произвольное (общее) положение, называется *прямой общего положения*.



Р и с. 26

На рис. 26 представлена модель плоскостей проекций и прямой AB общего положения. Здесь построены проекции ab и $a'b'$ отрезка AB на плоскостях H и V, помечены разности расстояний ($y_B - y_A$ и $z_B - z_A$) от концов отрезка (точек B и A) до плоскостей проекций.

Разность расстояний от концов отрезка до горизонтальной плоскости проекций H определяется здесь величиной $z_B - z_A$, равной разности аппликат точек B и A отрезка AB.



Р и с. 27

Разность удалений концов отрезка от фронтальной плоскости проекций V определяется величиной $y_B - y_A$, равной разности ординат точек B и A отрезка AB.

На рис. 27 представлены осный и безосный чертежи отрезка прямой линии, указаны построения величин разностей удалений концов отрезка от соответствующих плоскостей проекций.

На осных чертежах геометрические образы неизменно связывают с плоскостями проекций; на безосных положение плоскостей проекций точно не фиксируют, но их направления считают известными.

Осные чертежи применяют только в тех случаях, где плоскости проекций при решении поставленных задач используют как вспомогательные плоскости, упрощающие решение этих задач.

На чертеже величина разности удалений точек геометрического образа от плоскостей проекций не изменяется, если разноименные проекции этого образа сближать или удалять в направлении линий связи его точек.

В начертательной геометрии многие задачи, связанные с изображениями и исследованиями геометрических образов, решают, пользуясь разностями удалений их точек от плоскостей проекций.

Для прямой линии AB общего положения

$$z_B - z_A \neq 0;$$

$$y_B - y_A \neq 0;$$

$$x_A - x_B \neq 0;$$

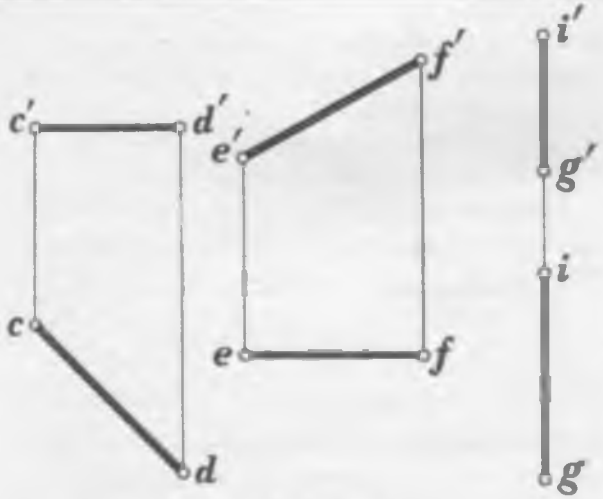
$$z_B - z_A \neq y_B - y_A.$$

Отрезки прямых линий на чертеже называют их проекциями. Так, на рис. 27 показан чертеж отрезка ab, $a'b'$.

Рассмотрим отрезки прямых линий, занимающих некоторые частные положения относительно плоскостей проекций.

2. Прямые, параллельные плоскостям проекций

Прямые линии, параллельные плоскостям проекций, называют соответственно *го-*



Р и с. 28

ризонтальной, *фронтальной* и *профильной прямыми*. Их также называют *линиями уровня*.

На рис. 28 показаны прямые линии, параллельные плоскостям проекций.

Прямая линия *cd*, *c'd'* параллельна горизонтальной плоскости проекций. Для этой прямой $z_D - z_C = 0$.

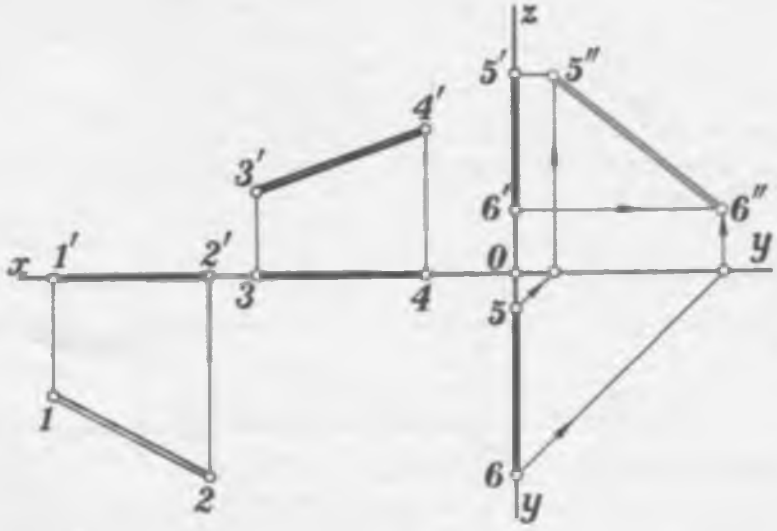
Здесь фронтальная проекция *c'd'* параллельна направлению оси проекций; горизонтальная проекция *cd* определяет натуральную величину отрезка прямой.

Прямая *ef*, *e'f'* параллельна фронтальной плоскости проекций. Для этой прямой $y_F - y_E = 0$. Здесь горизонтальная проекция *ef* параллельна направлению оси проекций, фронтальная проекция *e'f'* определяет натуральную величину отрезка прямой *ef*, *e'f'*.

Прямая *ig*, *i'g'* параллельна профильной плоскости проекций. Она проецируется без искажения на профильную плоскость проекций. Для этой прямой $x_G - x_J = 0$. Здесь все точки этой прямой имеют общую плоскость проецирующих лучей. Проекции прямой располагаются на одном направлении проецирования, т. е. они совпадают с направлением линий связи.

К прямым, параллельным плоскостям проекций, следует отнести также и некоторые прямые, лежащие в плоскостях проекций (рис. 29).

Так, прямая *12*, *1'2'* лежит в горизонтальной плоскости проекций; прямая *34*, *3'4'* — во фронтальной плоскости проекций; прямая *56*, *5'6'*, лежащая в профильной плоскости проекций, представлена чертежом в трех проекциях.



Р и с. 29

3. Проецирующие прямые

Прямая линия, параллельная направлению проецирования, называется *проецирующей.*

При прямоугольном проецировании проецирующая прямая совпадает с направлением плоскости проекций и проецируется на эту плоскость в точку. Прямая линия, направление которой совпадает с направлением горизонтальной плоскости проекций, т. е. прямая линия, перпендикулярная к горизонтальной плоскости проекций H, называется *горизонтально-проецирующей.*

Прямая линия, перпендикулярная к фронтальной плоскости проекций V, называется *фронтально-проецирующей.*

Прямая линия, перпендикулярная к профильной плоскости проекций W, называется *профильно-проецирующей.*

Проецирующие прямые являются в то же время и прямыми, дважды параллельными плоскостям проекций. Они перпендикулярны к одной плоскости проекций и параллельны двум другим плоскостям проекций.

На рис. 30 показаны чертежи прямых, перпендикулярных к плоскостям проекций H, V и W. Прямая kj, $k'j'$ перпендикулярна к горизонтальной плоскости проекций H. Для этой прямой

$$y_J - y_K = 0;$$

$$x_J - x_K = 0.$$

Здесь горизонтальная и фронтальная проекции прямой располагаются на одной линии связи, причем фронтальная проекция $k'j'$ определяет натуральную величину отрезка, а горизонтальная проекция kj преобразуется в точку. Эта прямая одновременно является профильной и фронтальной прямой.

Прямая mn, $m'n'$ перпендикулярна к фронтальной плоскости проекций V. Для этой прямой

$$z_M - z_N = 0,$$

$$x_M - x_N = 0.$$

Здесь горизонтальная и фронтальная проекции прямой располагаются на одной линии связи, причем горизонтальная проекция mn определяет натуральную величину отрезка, а фронтальная проекция $m'n'$ преобразуется в точку. Эта прямая одновременно является горизонтальной и профильной прямой.

Прямая pq, $p'q'$ перпендикулярна к профильной плоскости проекций W. Для этой прямой

$$z_P - z_Q = 0.$$

$$y_P - y_Q = 0.$$

Здесь горизонтальная и фронтальная проекции прямой совпадают с направлением оси проекций (перпендикулярны к линиям связи) и каждая из них определяет натуральную величину отрезка. Эта прямая одновременно является горизонтальной и фронтальной прямой.

Профильно-проецирующие прямые на-

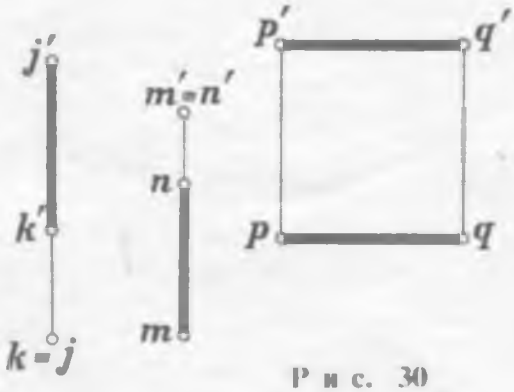


Рис. 30

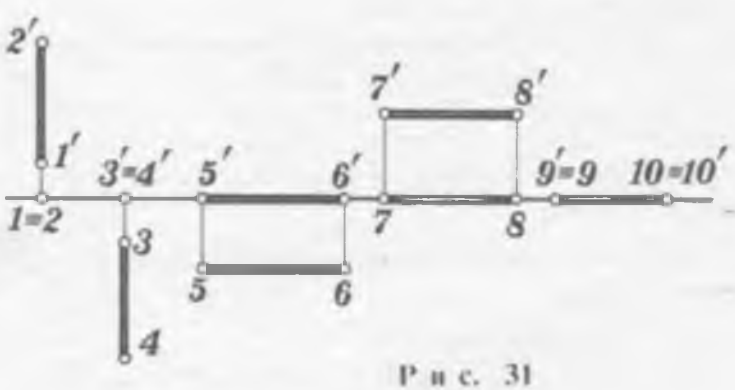


Рис. 31

зывают также прямыми, параллельными направлению оси проекций.

На рис. 31 показаны осные чертежи отрезков прямых линий, лежащих в плоскостях проекций.

4. Прямые, параллельные биссекторным плоскостям

Как уже известно, все точки геометрических образов, лежащих в биссекторных плоскостях, равно удалены от плоскостей проекций H и V.

На рис. 32 показаны чертежи отрезков прямых, лежащих в биссекторных плоскостях. Прямая rs, $r's'$ лежит в первой биссекторной плоскости — плоскости, делящей первый и третий углы пространства пополам. Прямая tu, $t'u'$ лежит во второй биссекторной плоскости — плоскости, делящей второй и четвертый углы пространства пополам.

Если одну из проекций (например, фронтальную) перемещать параллельно ей самой в направлении линий связи, то горизонтальная и смещенная фронтальная проекции представят чертеж отрезка прямой, лежащей в плоскости, параллельной биссекторной плоскости. Так, отрезок rs, $r's'$ прямой принадлежит плоскости, параллельной первой биссекторной плоскости. Отрезок tu, $t'u'$ принадлежит плоскости, параллельной второй биссекторной плоскости.

На рис. 33 показаны безосные чертежи этих прямых линий. Для прямой rs, $r's'$, параллельной первой биссекторной плоскости, $z_S - z_R = y_S - y_R$. Проекция rs и $r's'$ с направлением оси проекций составляют равные углы δ.

Для прямой tu, $t'u'$, параллельной второй биссекторной плоскости, $z_U - z_T = y_T - y_U$.

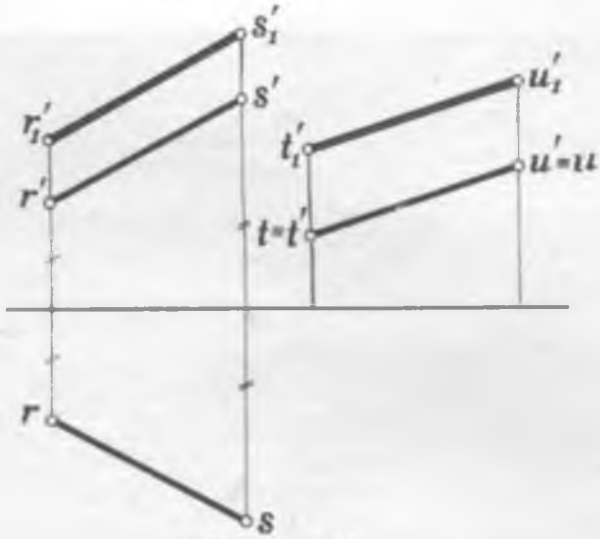


Рис. 32

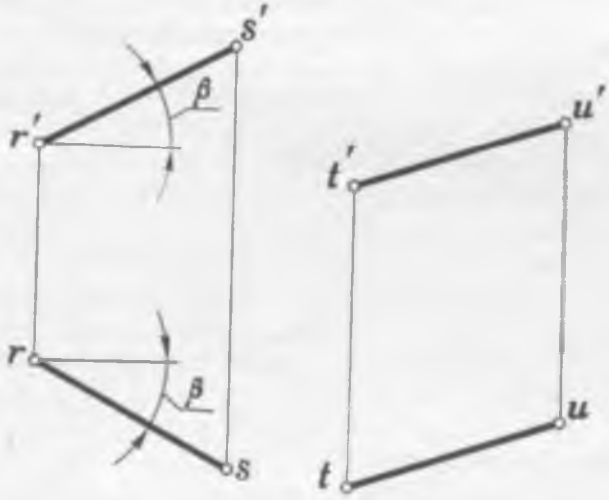


Рис. 33

Здесь разноименные проекции tu и $t'u'$ прямой взаимно параллельны.

ДЕЛЕНИЕ ОТРЕЗКА ПРЯМОЙ ЛИНИИ В ЗАДАННОМ ОТНОШЕНИИ

§ 10

Отрезок прямой можно разделить точкой в любом заданном отношении. Точка может располагаться как на самом отрезке, так и вне его, т. е. на продолжении этого отрезка.

Если точка принадлежит отрезку прямой, то она делит этот отрезок в каком-то определенном отношении. Такое деление называют *внутренним*. Если точка принадлежит прямой данного отрезка, но лежит не на отрезке, а на его продолжении, то она также делит отрезок в каком-то определенном отношении. Такое деление называют *внешним*.

БИБЛИОТЕКА
ТашГПИ
№ У/449

34

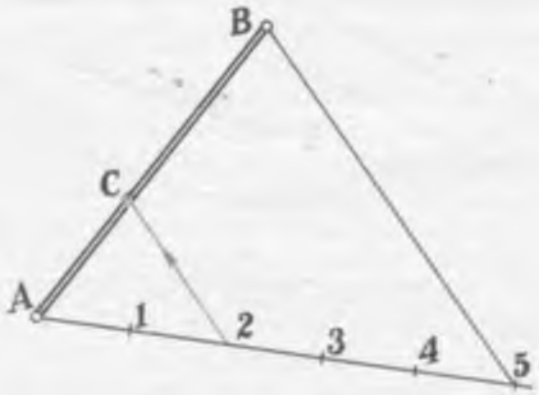


Рис. 34

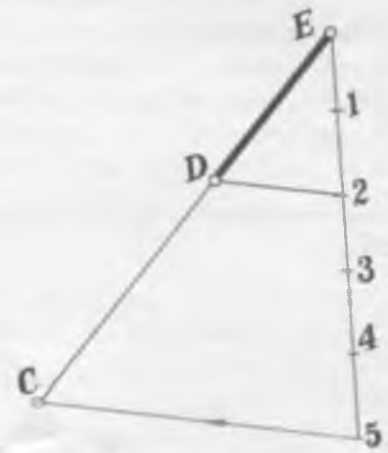


Рис. 35

На рис. 34 показано деление отрезка AB точкой C в заданном отношении $CA : CB = 2 : 3$ (внутреннее деление). Из точки A проведена в произвольном направлении вспомогательная прямая и на ней отложено пять $(2+3)$ равных масштабных отрезков любой длины.

При внутреннем делении данному отрезку AB соответствует отрезок $A5$ произвольной прямой, равный сумме $(2+3)$ величин, составляющих данное отношение.

Соединяя точки 5 и B прямой и проводя через точку 2 прямую, параллельную $5B$, в пересечении этой прямой с отрезком AB получим искомую точку C. Отрезку AC соответствуют два масштабных отрезка на произвольной прямой, а отрезку CB — три таких отрезка. Точка C делит отрезок AB в отношении $CA : CB = 2 : 3$.

На рис. 35 показано деление отрезка DE точкой C в заданном отношении $CD : CE = 3 : 5$ (внешнее деление).

Точка C располагается на продолжении отрезка DE ближе к точке D.

Из точки E в произвольном направлении проведена вспомогательная прямая линия и на ней отложено пять (наибольшее число из величин, составляющих заданное отношение) равных отрезков любой длины.

При внешнем делении заданному отрезку DE соответствует отрезок $E2$ произвольной прямой, равный разности величин, составляющих заданное отношение (5—3) .

Соединяя точки 2 и D прямой и проводя через точку 5 прямую, параллельную $2D$, в пересечении этой прямой с прямой отрезка DE получим искомую точку C.

Отрезку CD соответствуют три отрезка произвольной прямой, а отрезку CE — пять таких отрезков. Точка C делит отрезок DE в отношении $CD : CE = 3 : 5$.

При рассмотрении свойств параллельного проецирования установлено, что отношение отрезков прямой равно отношению их проекций. Чтобы разделить отрезок прямой в каком-то заданном отношении, достаточно разделить в том же отношении проекции отрезка.

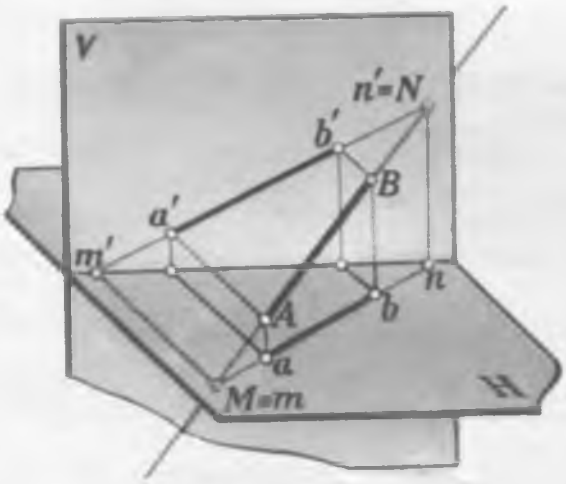
§ 11 СЛЕДЫ ПРЯМОЙ ЛИНИИ

Точки пересечения прямой линии с плоскостями проекций называют *следами прямой линии*.

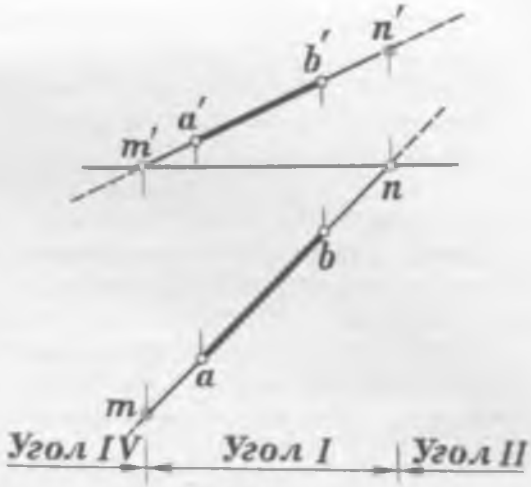
Точку пересечения прямой линии с горизонтальной плоскостью проекций H называют *горизонтальным следом*.

Точку пересечения прямой линии с фронтальной плоскостью проекций V называют *фронтальным следом*.

На рис. 36 показана пространственная модель построения следов отрезка AB прямой линии. Здесь прямая пересекает гори-



Р и с. 36



Р и с. 37

зонтальную плоскость проекций H в точке M и фронтальную плоскость проекций V в точке N.

Горизонтальный след (точка M) имеет здесь и горизонтальную проекцию m, т. е. $M \equiv m$; фронтальная проекция m' будет на оси проекций. Точка M имеет аппликату, равную нулю ($z_M = 0$).

Фронтальный след (точка N) и его фронтальная проекция n' совпадают, т. е. $N \equiv n'$; горизонтальная проекция n будет на оси проекций. Точка N имеет ординату, равную нулю ($y_N = 0$).

Прямая, пересекая в точках M и N плоскости проекций H и V, проходит через четвертый, первый и второй углы пространства.

На рис. 37 показано построение следов отрезка ab, $a'b'$ на чертеже.

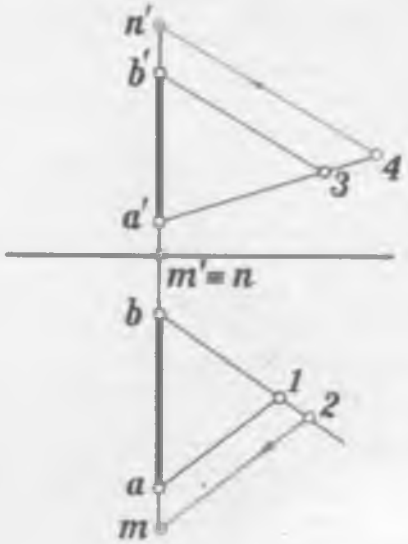
Чтобы определить горизонтальный след прямой, необходимо сначала найти на пересечении фронтальной проекции прямой с осью его фронтальную m' проекцию; недостающая горизонтальная проекция m точки mm' прямой тождественна искомому горизонтальному следу.

Чтобы определить фронтальный след прямой, сначала необходимо найти его горизонтальную проекцию n как точку пересечения горизонтальной проекции прямой с осью; недостающая фронтальная проекция n' точки nn' прямой тождественна искомому фронтальному следу.

Как видно, прямая линия между точками mm' и nn' находится в первом углу и проходит через четвертый и второй углы пространства.

Если прямая параллельна плоскости проекций, то следом ее на этой плоскости является несобственная точка.

Если прямая пересекает ось проекций, то оба ее следа (горизонтальный и фронтальный) совпадают и находятся в точке пересечения прямой с осью проекций.



Р и с. 38

36 Следы профильной прямой можно построить, используя деление отрезка в данном отношении. Пусть профильная прямая задана отрезком ab, $a'b'$. Определим следы этой прямой (рис. 38).

Фронтальная проекция m' горизонтального следа прямой лежит на оси проекций и делит фронтальную проекцию $a'b'$ отрезка внешним делением в отношении $m'a' : m'b'$.

Очевидно, горизонтальная проекция m горизонтального следа прямой должна делить горизонтальную проекцию отрезка внешним делением в том же отношении ($ma : mb = m'a' : m'b'$).

Из точки b проведем в произвольном направлении прямую линию и отложим на ней отрезки $b1 = a'b'$ и $12 = a'm'$. Точки 1 и a соединим прямой, а через точку 2 параллельно прямой $1a$ проведем прямую $2m$ до пересечения ее в точке m с прямой ab.

Точка m является горизонтальной проекцией горизонтального следа. Здесь же находится горизонтальный след прямой линии.

Горизонтальная проекция n фронтального следа прямой линии находится на оси проекций и делит горизонтальную проекцию ab отрезка внешним делением в отношении $na : nb$. В таком же отношении фронтальная проекция $a'b'$ отрезка делится фронтальной проекцией n' точки nn'.

Из точки a' в произвольном направлении проведем прямую и от точки a' отложим на ней отрезки $a'3 = ab$ и $34 = bn$. Соединяя прямой точку 3 с точкой b' и проводя через точку 4 прямую, параллельную прямой $3b'$, находим на пересечении ее с прямой $a'b'$ точку n'. Точка n' является фронтальной проекцией фронтального следа; здесь же находится фронтальный след прямой.

§12 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЛИНЫ ОТРЕЗКА ПРЯМОЙ И УГЛОВ ЕГО НАКЛОНА К ПЛОСКОСТЯМ ПРОЕКЦИЙ

Прямая линия, занимая в пространстве общее положение, наклонена к плоскостям проекций под некоторыми произвольными углами. Угол между прямой и плоскостью определяется углом, составленным прямой и ее ортогональной проекцией на эту плоскость. Этот же угол можно определить как дополнительный до 90° острого угла между прямой и направлением плоскости.

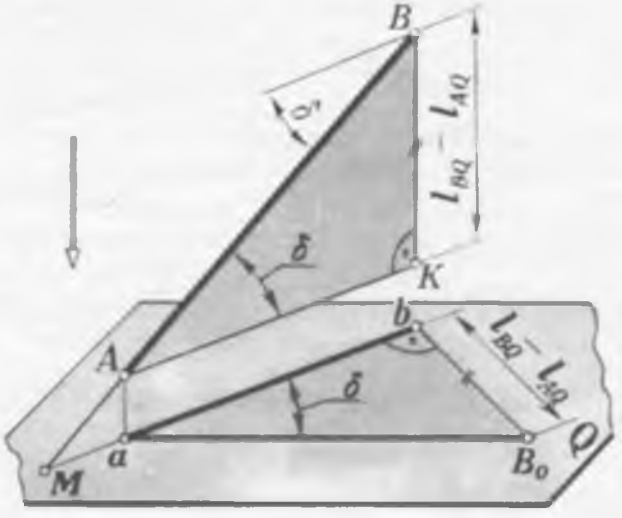


Рис. 39

Длину отрезка прямой и угол его наклона к плоскости проекций можно определить, пользуясь построением прямоугольного треугольника.

Рассмотрим схему решения поставленной задачи. Пусть заданы отрезок AB прямой и плоскость проекций Q (рис. 39).

Построим ортогональную проекцию ab отрезка AB на плоскости Q. Через точку A в плоскости проецирующих лучей точек A и B параллельно плоскости Q проведем прямую линию AK.

В прямоугольном треугольнике ABK один из катетов равен проекции отрезка на плоскости Q ($AK = ab$), а другой — разности удалений точек B и A концов отрезка AB от плоскости Q ($BK = Bb - Aa$). Гипотенуза AB прямоугольного треугольника наклонена к катету AK под углом δ, равным углу наклона отрезка к плоскости Q.

Построением в плоскости Q прямоугольного треугольника abB_0 определяют натуральную величину прямой линии и угол δ наклона прямой к плоскости проекций.

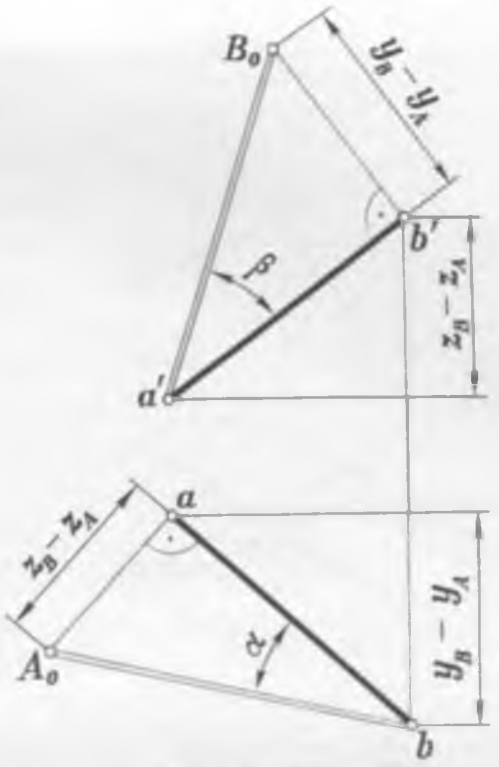
Решим эту задачу на чертеже (рис. 40). Принимая плоскость Q, согласно описанной схеме, за горизонтальную плоскость проекций H, на горизонтальной проекции отрезка как на катете строим прямоугольный треугольник. Вторым катетом является разность удалений концов отрезка от горизонтальной плоскости проекций. Эта разность на чертеже определяется величиной $z_B - z_A$.

Выбрав направление второго катета и откладывая на нем отрезок, равный величине этого катета ($z_B - z_A$), получим прямоугольный треугольник, гипотенуза A_0b которого равна натуральной величине данного отрезка ab, $a'b'$. Угол α наклона гипотенузы к горизонтальной проекции ab отрезка есть угол наклона данного отрезка к горизонтальной плоскости проекций.

Принимаем плоскость Q, согласно схеме, за фронтальную плоскость проекций V. На фронтальной проекции отрезка, как на катете, строим прямоугольный треугольник. Вторым катетом является разность удалений концов отрезка от фронтальной плоскости проекций. Эта разность на чертеже представляется величиной $y_B - y_A$.

Выбрав направление второго катета и откладывая на нем отрезок, равный его величине ($y_B - y_A$), получим прямоугольный треугольник $a'b'B_0$. Гипотенуза $a'B_0$ этого треугольника равна натуральной величине отрезка ab, $a'b'$. Угол β наклона гипотенузы к фронтальной проекции $a'b'$ отрезка есть угол наклона данного отрезка к фронтальной плоскости проекций.

Если координаты, определяющие удаление концов отрезка от плоскости проекций, имеют разные знаки, надо иметь в виду алгебраическую разность. Это относится к осным чертежам.



Р и с. 40

Отрезки прямых линий, параллельных одной из плоскостей проекций, проецируются на эту плоскость в натуральную величину. Угол наклона к другой плоскости определяется непосредственно из чертежа.

Отрезки прямых, параллельных биссекторным плоскостям, составляют равные между собой углы наклона к плоскостям проекций ($\alpha = \beta$). Для профильных прямых сумма углов $\alpha + \beta = 90°$. Для прямых, параллельных оси проекций, $\alpha + \beta = 0$. Для прямых, перпендикулярных к одной из плоскостей проекций, $\alpha + \beta = 90°$. Для произвольно расположенной прямой $\alpha + \beta < 90°$.

§13

ВЗАИМНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ ЛИНИЙ

Прямые линии в пространстве могут занимать различные положения: они могут быть взаимно параллельны, пересекаться и быть скрещивающимися.

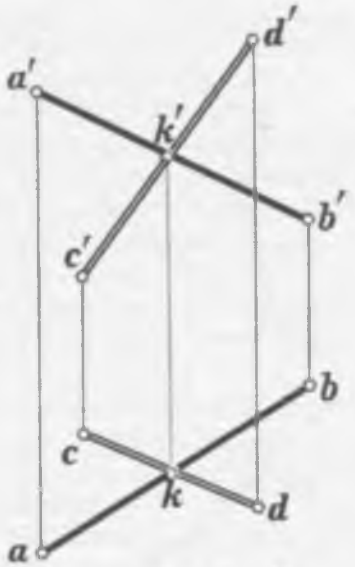


Рис. 41

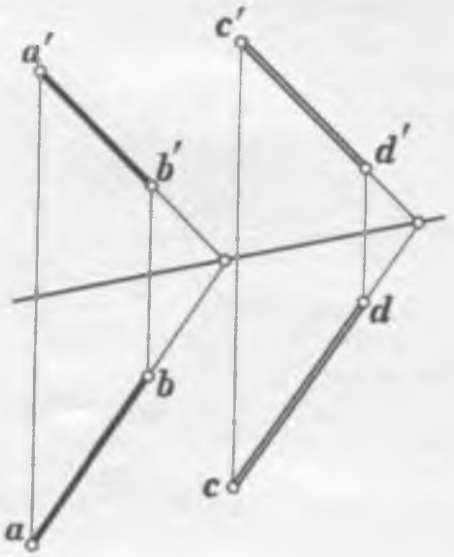


Рис. 42

1. Пересекающиеся прямые

Прямые линии, имеющие общую точку, называют *пересекающимися*.

Прямые ab, $a'b'$ и cd, $c'd'$ пересекаются в точке kk' (рис. 41).

Согласно второму свойству параллельного проецирования, одноименные проекции этих прямых пересекаются и точки их пересечения являются проекциями одной точки пространства, т. е. принадлежат одной линии связи.

2. Параллельные прямые

Прямые линии, пересекающиеся в несобственной точке, называют *параллельными*.

Согласно третьему свойству параллельного проецирования одноименные проекции двух параллельных прямых линий параллельны, находятся в таком же отношении, как и длины самих отрезков, и являются проекциями одного направления.

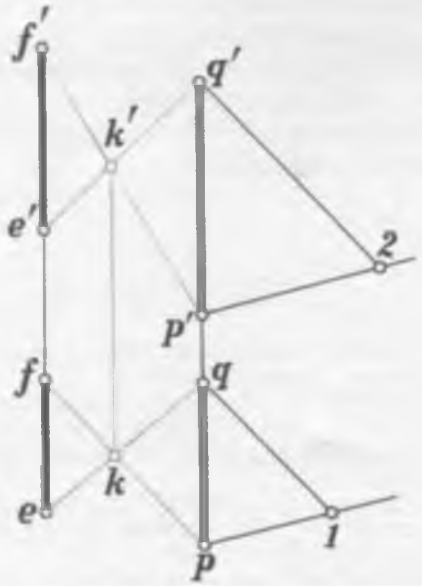
На рис. 42 показан чертеж отрезков двух параллельных прямых — ab, $a'b'$ и cd, $c'd'$, занимающих в пространстве общее положение. Если на чертеже одноименные проекции прямых параллельны, то в общем случае этого достаточно, чтобы установить параллельность прямых в пространстве. Исключением являются некоторые частные положения прямых линий. Так, по параллельности одноименных проекций двух профильных прямых нельзя утверждать, что прямые в пространстве параллельны.

На рис. 43 представлен чертеж двух профильных прямых линий — ef, $e'f'$ и pq, $p'q'$. Одноименные проекции прямых параллельны, т. е. $ef \parallel pq$ и $e'f' \parallel p'q'$. Каждая из пар проекций прямых имеет одно направление.

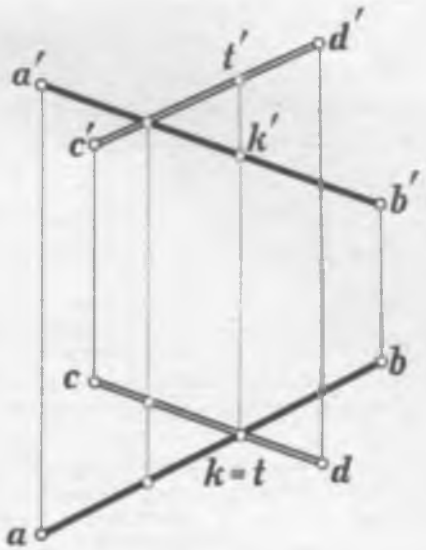
Проверим равенство отношений одноименных проекций отрезков. Через точки p и p' проведем параллельные прямые и отложим на них отрезки $p1 = ef$ и $p'2 = e'f'$. Соединим точку 1 с точкой q и 2 с q'. Получаем два подобных треугольника: $\Delta\, pq1$ и $\Delta\, p'q'2$. Из подобия треугольников следует:

$$\frac{p1}{pq} = \frac{p'2}{p'q'} \quad \text{или} \quad \frac{ef}{pq} = \frac{e'f'}{p'q'}.$$

Путем проверки всех трех признаков параллельности прямых устанавливаем, что прямые pq, $p'q'$ и ef, $e'f'$ взаимно параллельны.



Р и с. 43



Р и с. 44

Такие прямые параллельны и в случае, если точки пересечения одноименных проекций прямых линий, соединяющих концы данных отрезков, являются проекциями точки пересечения этих прямых линий.

Соединим прямыми линиями соответственно проекции концов отрезков. Точка k пересечения горизонтальных проекций этих прямых располагается на одной линии связи с точкой k' пересечения фронтальных проекций прямых.

Следовательно, концы отрезков прямых — точки ee', ff', pp' и qq' — лежат в одной плоскости. Прямые ef, $e'f'$ и pq, $p'q'$ в пространстве параллельны.

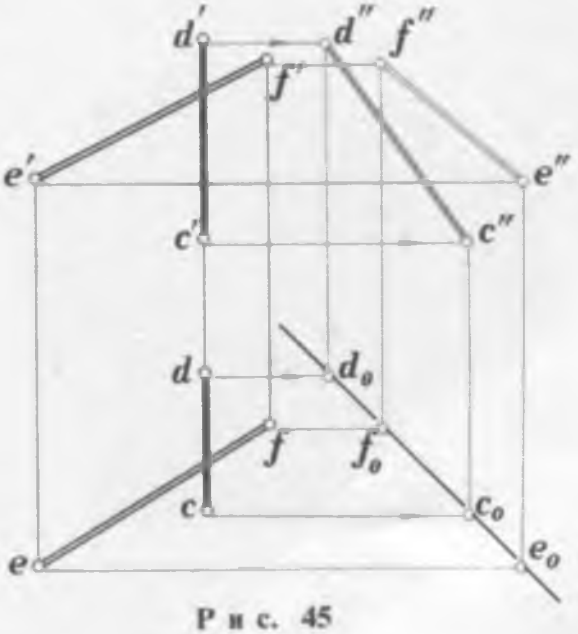
3. Скрещивающиеся прямые

Прямые, не пересекающиеся и не параллельные между собой, называют *скрещивающимися*.

Если пересекающиеся и параллельные прямые лежат в одной плоскости, то скрещивающиеся прямые лежат в двух параллельных плоскостях.

На рис. 44 показан пример задания двух скрещивающихся прямых — ab, $a'b'$ и cd, $c'd'$.

Проекции двух скрещивающихся прямых могут пересекаться, точки их пересечения не лежат на одной линии связи, т. е. каждая из точек пересечения проекций прямых является проекцией двух точек пространства этих прямых. Точка пересечения горизонтальных проекций ab и cd прямых является



Р и с. 45

горизонтальной проекцией k и t двух точек kk' и tt', принадлежащих прямым ab, $a'b'$ и cd, $c'd'$. Эти точки не совпадают. Они принадлежат одному горизонтально-проецирующему лучу и имеют разные аппликаты.

Если одна из прямых является профильной, то взаимное положение такой линии с любой другой линией можно установить по их профильным проекциям (рис. 45). Прямые линии ef, $e'f'$ и cd, $c'd'$ являются скрещивающимися.

Вопросы для самопроверки

1. Постройте чертежи точек, расположенных в различных углах пространства.

2. Покажите построения чертежей точек, расположенных в различных октантах, в трех проекциях.

3. Что называют постоянной прямой чертежа? Как с помощью постоянной прямой чертежа построить третью проекцию точки?

4. Постройте чертежи отрезков прямых линий, расположенных в различных углах пространства. Укажите частные положения отрезков прямых линий.

5. Какие прямые называют линиями уровня, проецирующими прямыми линиями?

6. Дайте определение внутреннего и внешнего деления отрезка прямой.

7. Что называют следом прямой линии? Постройте следы прямых частного положения.

8. Укажите правило построения следов прямой линии.

9. Для какой прямой на чертеже следы будут: а) совпадать; б) равно удалены от оси проекций; в) лежать на оси проекций?

10. Как изображаются на чертеже пересекающиеся, параллельные и скрещивающиеся прямые линии?

11. Могут ли скрещивающиеся прямые линии иметь параллельные проекции на плоскостях H и V?

ГЛАВА III

ПЛОСКОСТЬ НА ЭПЮРЕ МОНЖА. ОСНОВНЫЕ ПОЗИЦИОННЫЕ И МЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

§14 ЗАДАНИЕ ПЛОСКОСТИ

В геометрии плоскость представляют как предельное понятие ровности или как бесконечную поверхность, имеющую на всем своем протяжении одинаковое направление.

Плоскость можно представить как бесконечное множество прямых, проходящих через неподвижную точку и пересекающих вне ее неподвижную прямую линию.

Плоскость определяют три точки, не лежащие на одной прямой.

Она делит пространство на две части.

Плоскость безгранична и бесконечна.

Рассмотрим задания плоскости на чертеже в ортогональных проекциях, т. е. на эпюре Монжа.

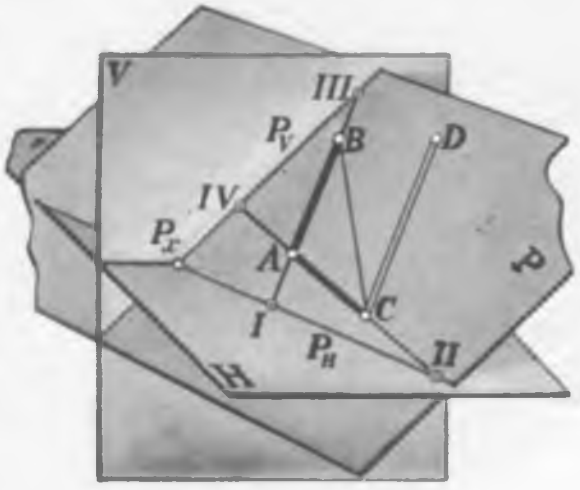
1. Плоскость общего положения

Положение плоскости в пространстве определяется положениями задающих ее элементов. Три точки, не лежащие на одной прямой, определяют задание плоскости. Поскольку плоскость безгранична, то, естественно, предметы плоскости (точки, прямые, плоские фигуры) могут находиться в пределах отсека или за его пределами.

Отсеком плоскости называют часть плоскости, ограниченную каким-либо контуром.

На рис. 46 показана пространственная модель плоскостей проекций и отсека плоскости. Плоскость можно представить множеством точек. Однако достаточно только трех из них для ее задания: точки *A*, *B* и *C* определяют задание и положение плоскости.

Эту плоскость можно представить: прямой линией *AB* и точкой *C* вне прямой; двумя



Р и с. 46

пересекающимися прямыми линиями AB и AC; двумя параллельными прямыми линиями AB и CD; плоским геометрическим образом (треугольником ABC); следами P_H и P_V — линиями пересечения плоскости плоскостями проекций H и V. При этом от одного вида задания плоскости можно перейти к другому виду. Задание плоскости наглядно представляется ее следами.

На рис. 47 показано построение таких прямых (следов) на чертеже, когда плоскость задана двумя пересекающимися прямыми ab, $a'b'$ и ac, $a'c'$.

Для построения горизонтального следа P_H плоскости достаточно определить горизонтальные следы двух любых прямых этой плоскости. Такими следами являются точки $11'$ и $22'$ — горизонтальные следы прямых ab, $a'b'$ и ac, $a'c'$.

Проводя через точки $11'$ и $22'$ прямую, получим горизонтальный след P_H — линию пересечения плоскости P горизонтальной плоскостью проекций.

Линия пересечения плоскости P фронтальной плоскостью проекций V определяется точками $33'$ и $44'$ — фронтальными следами прямых ab, $a'b'$ и ac, $a'c'$.

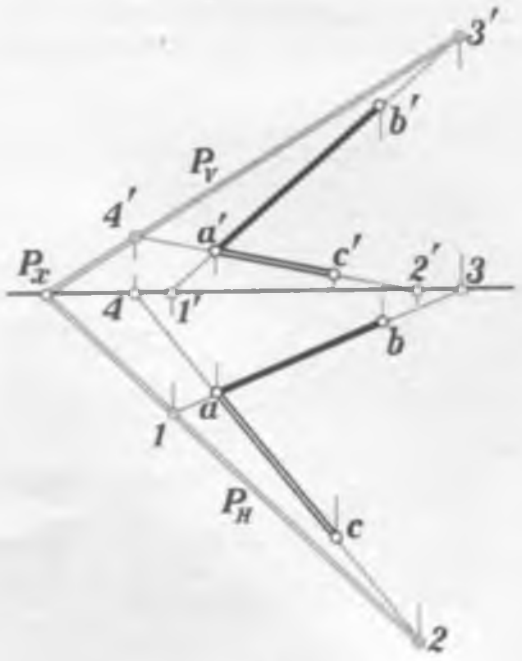


Рис. 47

Следы плоскости пересекаются на оси проекций. Угол между следами P_H и P_V плоскости P на чертеже всегда больше угла между этими следами в пространстве. Сумма двух плоских углов трехгранного угла больше третьего плоского угла.

В системе плоскостей проекций плоскость может иметь множество различных положений.

2. Проецирующие плоскости

Плоскости, перпендикулярные к плоскостям проекций, называют *проецирующими*.

Любые геометрические образы, расположенные в таких плоскостях, проецируются на перпендикулярные к ним плоскости проекций в виде прямых линий.

На чертеже проецирующие плоскости обычно задают линиями их пересечения плоскостями проекций — следами.

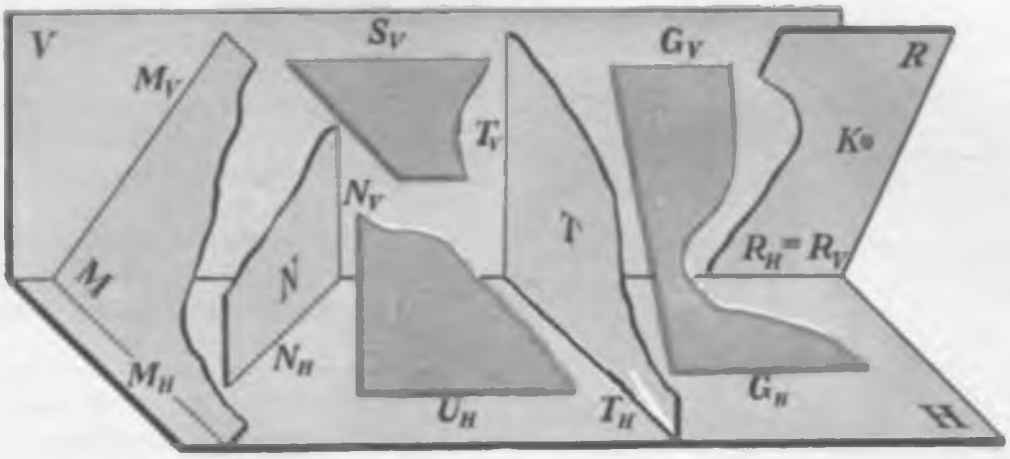
На безосных чертежах проецирующие плоскости представляются одной прямой линией — линией пересечения только той плоскостью проекций, к которой они перпендикулярны.

На рис. 48 показана модель проецирующих плоскостей в системе плоскостей проекций H и V, а на рис. 49 — осный и безосный чертежи этих плоскостей.

Фронтально-проецирующая плоскость M. Плоскость, перпендикулярную к фронтальной плоскости проекций V, называют *фронтально-проецирующей*. Эту плоскость можно задать двумя следами M_H и M_V на осном чертеже и одним M_V — на безосном чертеже.

Угол наклона фронтального следа к направлению оси проекций равен углу α наклона плоскости M к горизонтальной плоскости проекций H (рис. 49).

Горизонтально-проецирующая плоскость N. Плоскость, перпендикулярную к горизонтальной плоскости проекций H, называют *горизонтально-проецирующей*. Эту плоскость можно задать двумя следами N_H и N_V на осном чертеже и одним N_H — на безосном чертеже.



Р и с. 48

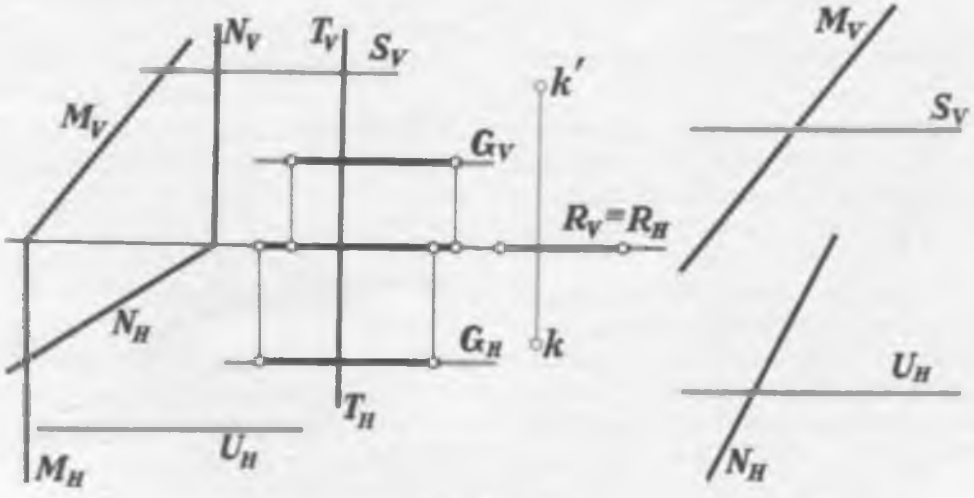
Угол наклона горизонтального следа к оси проекций равен углу β наклона плоскости N к фронтальной плоскости проекций V.

Профильно-проецирующие плоскости G и R. Плоскости, перпендикулярные к профильной плоскости проекций W, называют *профильно-проецирующими*.

Плоскость G параллельна оси проекций, плоскость R проходит через ось проекций.

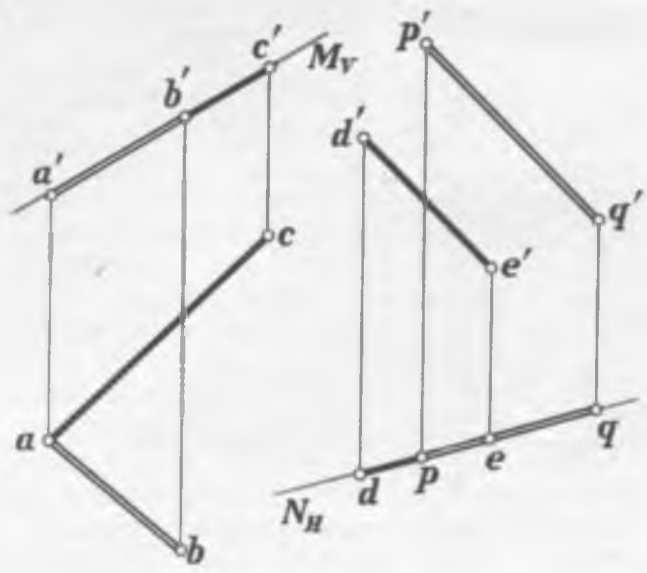
В системе двух плоскостей проекций H и V профильно-проецирующие плоскости можно задать следами только на осном чертеже; безосные чертежи таких плоскостей следами не задаются. Плоскость G задана на осном чертеже следами G_H и G_V.

Следы R_H и R_V плоскости R совпадают с осью проекций. Задание плоскости следами на осном чертеже в двух проекциях является неполным: при таком задании плоскость может занимать множество положений. Плоскость R будет занимать определенное, единственное положение, если дополнительно к условию совпадения ее следов с осью проекций зададим еще любую из точек K этой плоскости. Геометрические образы рассматриваемых плоскостей проецируются с ис-



Р и с. 49

44



Р и с. 50

кажением на плоскости H и V и в виде отрезков прямой линии на плоскость проекций W.

Горизонтальная плоскость S. Плоскость, параллельную горизонтальной плоскости проекций H, называют *горизонтальной*. Эта плоскость перпендикулярна к фронтальной плоскости проекций V. Ее задают на осном и безосном чертежах одной прямой линией — фронтальным следом S_V.

Геометрический образ горизонтальной плоскости проецируется без искажения на горизонтальную плоскость проекций.

Фронтальная плоскость U. Плоскость, параллельную фронтальной плоскости проекций V, называют *фронтальной*. Она перпендикулярна к горизонтальной плоскости проекций H. Ее задают на осном и безосном чертежах одной прямой линией — горизонтальным следом U_H.

Геометрический образ, расположенный во фронтальной плоскости, проецируется без искажения на фронтальную плоскость проекций.

Профильная плоскость T. Плоскость, параллельную профильной плоскости проекций W, называют *профильной*. Она перпендикулярна к горизонтальной плоскости проекций H и фронтальной плоскости проекций V. Ее задают на осном и безосном чертежах одной прямой линией, перпендикулярной к направлению оси проекций, которая и представляет собой сливающиеся горизонтальный T_H и фронтальный T_V следы.

Геометрический образ, расположенный в профильной плоскости, проецируется без искажения на профильную плоскость проекций.

На рис. 50 показаны примеры положений геометрических образов в проецирующих плоскостях.

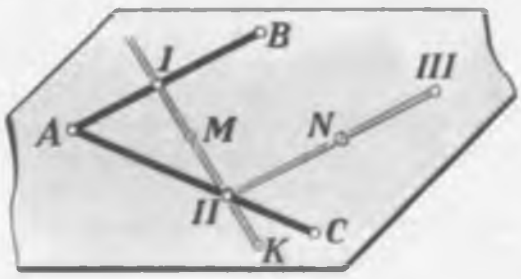
Во фронтально-проецирующей плоскости M_V находятся две пересекающиеся прямые — ab, $a'b'$ и ac, $a'c'$; в горизонтально-проецирующей плоскости N_H — две параллельные прямые de, $d'e'$ и pq, $p'q'$.

§15 ПРЯМЫЕ ЛИНИИ И ТОЧКИ ПЛОСКОСТИ

Прямая линия принадлежит плоскости при условии, если она проходит: а) через две точки этой плоскости; б) через точку плоскости параллельно любой прямой этой плоскости.

На рис. 51 показана схема задания плоскости двумя пересекающимися прямыми — AB и AC. Прямая I II принадлежит плоскости ABC, поскольку она проходит через точки I и II этой плоскости; прямая II III также принадлежит плоскости ABC. Она проходит через точку II плоскости и параллельна прямой AB этой плоскости.

Выбрать точку в плоскости, т. е. задать чертеж точки, принадлежащей данной плос-



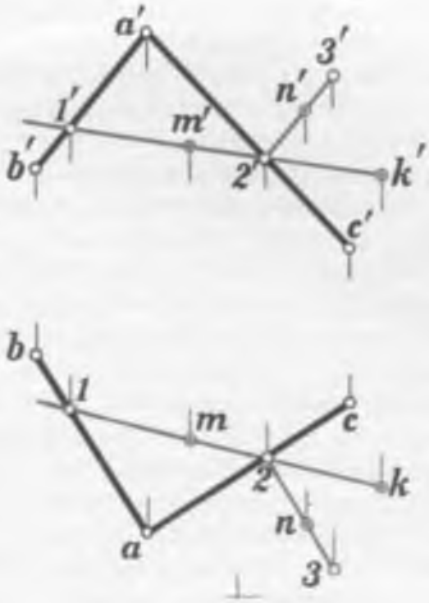
Р и с. 51

кости, произвольно, не связывая с элементами плоскости, невозможно. Точка в плоскости выбирается по условию, что она находится на прямой линии этой плоскости. Точки M и K принадлежат плоскости как точки прямой $I\,III$ этой плоскости. Принадлежит плоскости и точка N как точка прямой $II\,III$ плоскости.

На рис. 52 представлен чертеж плоскости abc, $a'b'c'$. Чтобы провести прямую, принадлежащую данной плоскости, необходимо выполнить условия, при которых она будет лежать в плоскости.

На прямых ab, $a'b'$ и ac, $a'c'$, которыми задается плоскость, намечаем точки $11'$ и $22'$. Прямая линия 12, $1'2'$ принадлежит данной плоскости. Точки kk' и mm' этой прямой принадлежат плоскости.

Через точку $22'$ можно провести прямую 23, $2'3'$, параллельную прямой ab, $a'b'$. Эта прямая, согласно условию, будет принадлежать плоскости abc, $a'b'c'$. Точка nn', намеченная на прямой 23, $2'3'$, принадлежит плоскости.



Р и с. 52

В плоскости, кроме прямых произвольного (общего) положения, можно наметить и линии, занимающие особое положение по отношению к плоскостям проекций. К таким линиям относятся:

1) прямые линии, параллельные плоскости проекций — *горизонтали* и *фронтали*;

2) *линии наибольшего наклона плоскости* к плоскостям проекций H и V.

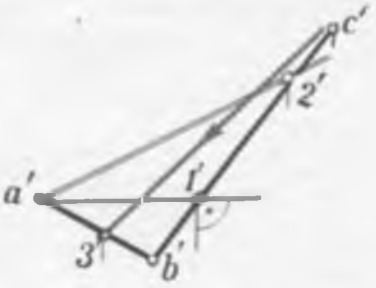
Линию наибольшего наклона плоскости к горизонтальной плоскости проекций называют линией *наибольшего ската*.

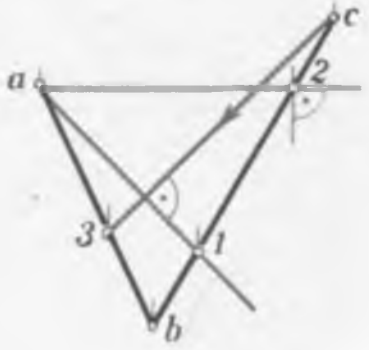
Пусть плоскость задана двумя пересекающимися прямыми линиями ab, $a'b'$ и bc, $b'c'$ (рис. 53). Построим сначала горизонталь плоскости — прямую, параллельную горизонтальной плоскости проекций.

Фронтальная проекция горизонтали параллельна направлению оси проекций или, что то же самое, перпендикулярна к направлению линии связи.

Сначала проводим фронтальную проекцию $a'1'$ горизонтали. Намечаем точку $1'$ пересечения ее с фронтальной проекцией $b'c'$ прямой bc, $b'c'$ плоскости. Определяем горизонтальную проекцию 1 точки $11'$.

Горизонтальную проекцию $a1$ горизонтали определяют как недостающую проекцию прямой плоскости.





Р и с. 53

Построим в этой же плоскости *фронталь* — прямую линию, параллельную фронтальной плоскости проекций. Горизонтальная проекция фронтали параллельна направлению оси проекций.

Проведем горизонтальную проекцию *a2* фронтали. Намечаем точку *2* пересечения ее с горизонтальной проекцией *bc* прямой *bc*, *b′c′* плоскости. Определяем фронтальную проекцию *2′* точки *22′*. Прямая *a′2′* является недостающей фронтальной проекцией фронтали *a2*, *a′2′*.

Линией наибольшего наклона плоскости к плоскости проекций *H* или *V* называют прямую, лежащую в плоскости и перпендикулярную соответственно или к горизонталям или фронталям этой плоскости. На основании свойства параллельного проецирования о взаимной перпендикулярности прямых линий устанавливаем, что прямой угол, составленный горизонталью с линией наибольшего наклона, проецируется на эту плоскость без искажения. Проводим горизонтальную проекцию *c3* линии наибольшего наклона перпендикулярно к горизонтальной проекции *a1* горизонтали. Фронтальная проекция *c′3′* искомой линии определяется по условию взаимопринадлежности прямой и плоскости.

Пример. В заданной плоскости *abc*, *a′b′c′* построить прямую. Фронтальная проекция *e′f′* прямой известна (рис. 54).

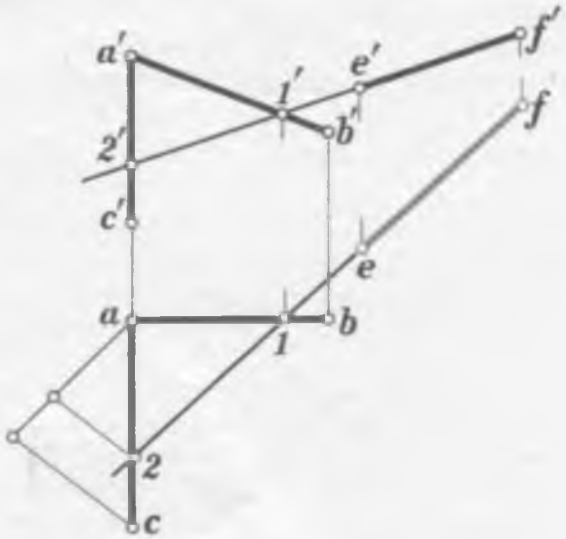
Р е ш е н и е. Фронтальная проекция *e′f′* прямой в точках *1′* и *2′* пересекается фронтальными проекциями *a′b′* и *a′c′* прямых *ab*, *a′b′* и *ac*, *a′c′* данной плоскости. Определяем недостающие горизонтальные проекции *1* и *2* этих точек.

Прямая *ac*, *a′c′* плоскости — профильная. Здесь недостающую горизонтальную проекцию *2* точки *22′* можно определить по условию, что точка *22′* делит отрезок *ac*, *a′c′* внутренним делением в заданном отношении.

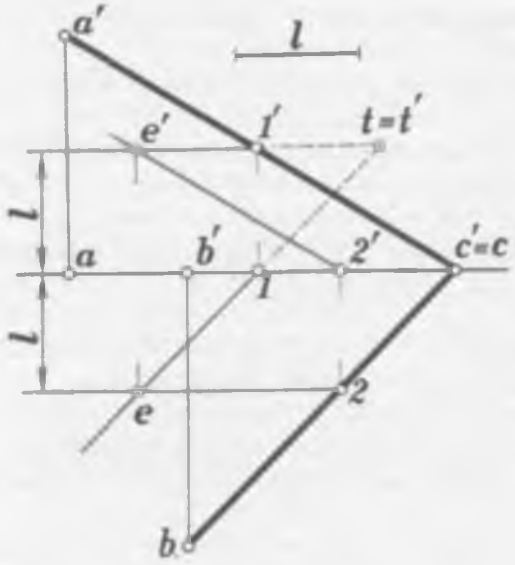
Из точки *a* в произвольном направлении проводим прямую линию и на ней от точки *a* откладываем отрезки, равные *a′2′* и *2′c′*. Конец последнего отрезка соединяем прямой линией с точкой *c*, а из конца первого проводим прямую, параллельную этой линии до пересечения ее в точке *2* с проекцией *ac*.

Точка *2* делит горизонтальную проекцию *ac* прямой *ac*, *a′c′* в том же отношении, как и точка *2′* делит фронтальную проекцию *a′c′* этой прямой.

На прямой *12* находится недостающая горизонтальная проекция *ef* отрезка *ef*, *e′f′*.



Р и с. 54



Р и с. 55

Пример. В плоскости *abc*, *a′b′c′* построить точки *ee′* и *tt′*, удаленные на заданном расстоянии *l* от плоскостей проекций *H* и *V*. Точка *ee′* принадлежит первой биссекторной плоскости; точка *tt′*— второй биссекторной плоскости (рис. 55).

Р е ш е н и е. В плоскости *abc*, *a′b′c′* на расстояниях от плоскостей *H* и *V*, равных *l*, проводим горизонталь и фронталь. Точка *ee′* пересечения горизонтали и фронтали принадлежит плоскости; она равноудалена от плоскостей проекций и располагается в первом углу пространства. Продолжим разноименные проекции горизонтали до пересечения в точке *tt′*.

Точка *tt′* принадлежит плоскости, равноудалена от плоскостей проекций и расположена во втором углу пространства.

В плоскости *abc*, *a′b′c′* есть еще две точки, отвечающие условию задачи и расположенные в третьем и четвертом углах пространства. Предлагаем читателю найти их самостоятельно.

Пример. В заданной плоскости *abc*, *a′b′c′* построить прямые, параллельные биссекторным плоскостям (рис. 56).

Р е ш е н и е. Разноименные проекции прямых данной плоскости продолжим до их пересечения. Так, проекции *ab* и *a′b′* прямой *ab*, *a′b′* пересекаются в точке *11′*; проекции *bc* и *b′c′* прямой *bc*, *b′c′* пересекаются в точке *22′*. Прямая *12*, *1′2′* принадлежит данной плоскости. Ее проекции совпадают.

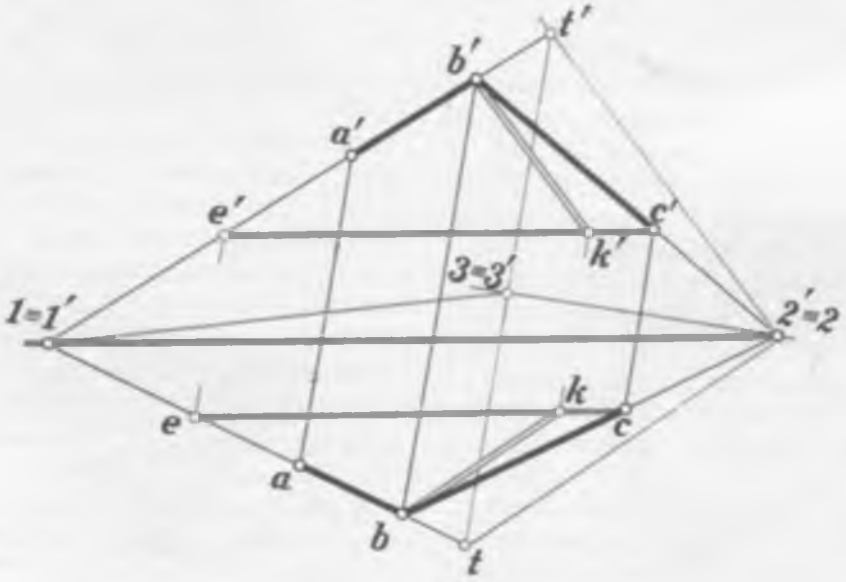
Проведем, например, через точку *cc′* плоскости прямую *ce*, *c′e′*, проекции *ce* и *c′e′* которой будут параллельны проекциям *12* и *1′2′* прямой *12*, *1′2′*. Построенная прямая *ce*, *c′e′* принадлежит плоскости и параллельна второй биссекторной плоскости.

Проекции прямой линии, параллельной первой биссекторной плоскости, составляют равные углы наклона с направлением оси проекций и не параллельны.

Проведем через точку *22′* горизонтальную прямую линию, а через точку *11′*— прямую, делящую линии связи точек прямой *ab*, *a′b′* пополам. Эти прямые пересекаются в точке *33′*. Через точку *33′* проведем линию связи и на прямой *ab*, *a′b′* наметим точку *tt′*. Проекции прямой *t2*, *t′2′* составляют с направлением оси проекций равные углы.

Любая прямая плоскости, параллельная прямой *t2*, *t′2′*, параллельна первой биссекторной плоскости.

Итак, прямая *bk*, *b′k′* принадлежит плоскости *abc*, *a′b′c′* и параллельна первой биссекторной плоскости.



Р и с. 56

§16 ПРОЕКЦИИ ПЛОСКИХ ФИГУР

Любая из точек плоской фигуры (треугольника, квадрата, окружности, эллипса и т. п.) принадлежит плоскости этой фигуры. Поэтому проекции плоской фигуры строят по условию принадлежности точек фигуры ее плоскости.

На рис. 57 показано построение недостающей горизонтальной проекции многоугольника. Здесь плоскость многоугольника представлена двумя его сторонами ab, $a'b'$ и bc, $b'c'$. Соединим точки aa' и cc' прямой линией. Фронтальные проекции $b'e'$ и $b'd'$ прямых пересекаются фронтальной проекцией $a'c'$ прямой в точках $1'$ и $2'$. Определяем горизонтальные проекции 1 и 2 этих точек.

Прямые $b1$ и $b2$, пересекаясь соответствующими линиями связи, определяют точки e и d — недостающие горизонтальные проекции вершин ee' и dd' многоугольника.

По проекциям можно судить о положении фигуры относительно плоскостей проекций. На рис. 58 каждая из проекций треугольника изображает как бы разные его стороны — лицевую и оборотную. Здесь построена одна из основных точек плоской фигуры — центр тяжести треугольника — точка пересечения медиан. Эта точка на чертеже во всех случаях определяется непосредственно, т. е. если точка делит отрезок прямой в пространстве пополам, то и проекции точки делят проекции отрезка также пополам. В этом случае достаточно провести медианы на каждой из проекций треугольника. Для построения центра тяжести можно также использовать и известное из геометрии свойство этой точки — она делит каждую из медиан в отношении 2 : 1.

На рис. 59 каждая из проекций изображает одну и ту же сторону треугольника. Это легко представить по чертежу путем воображения. Признаком этого может также служить и порядок обхода вершин. В первом случае (см. рис. 58) обход вершин для обеих проекций производят в разных направлениях: например, для фронтальной проекции — по ходу часовой стрелки, а для горизонталь-

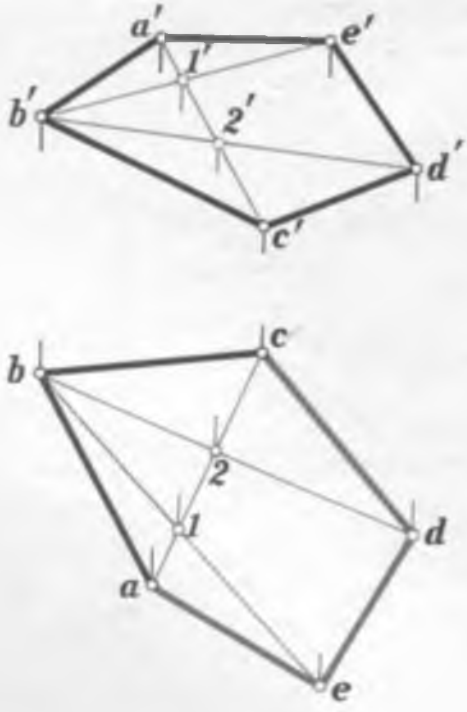


Рис. 57

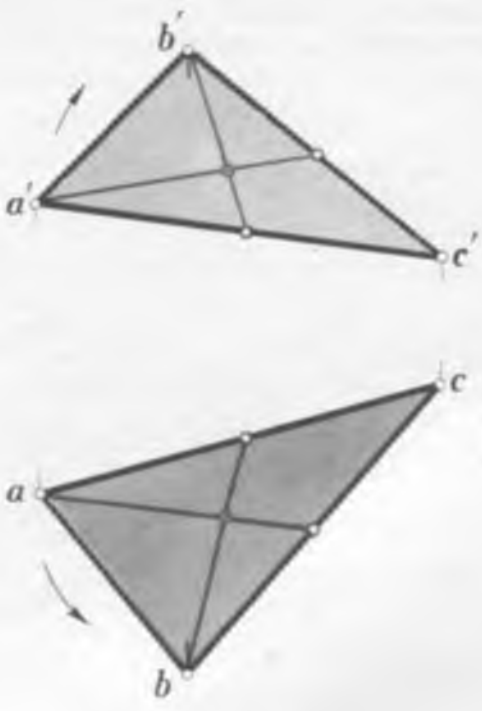


Рис. 58

ной — против хода часовой стрелки. В данном случае обход вершин для обеих проекций производят в одном направлении.

С проведением взаимно перпендикулярных прямых связано построение ортоцентра — точки пересечения трех высот треугольника и центра описанной окружности — точки пересечения перпендикуляров, восставленных из середин сторон треугольника.

На рис. 59 построены взаимно перпендикулярные прямые в плоскости треугольника для частного случая, когда две стороны треугольника параллельны плоскостям проекций: одна параллельна плоскости проекций H, другая — плоскости V. Ниже изложены приемы построения взаимно перпендикулярных прямых в произвольном их положении.

Построение центра вписанной в треугольник окружности — точки пересечения биссектрис треугольника — можно выполнить на чертеже непосредственно (без других дополнительных приемов) только для частного случая расположения треугольника относительно плоскостей проекций.

Биссектриса проекции угла является проекцией биссектрисы этого угла в том случае, если стороны его одинаково наклонены к плоскости проекций.

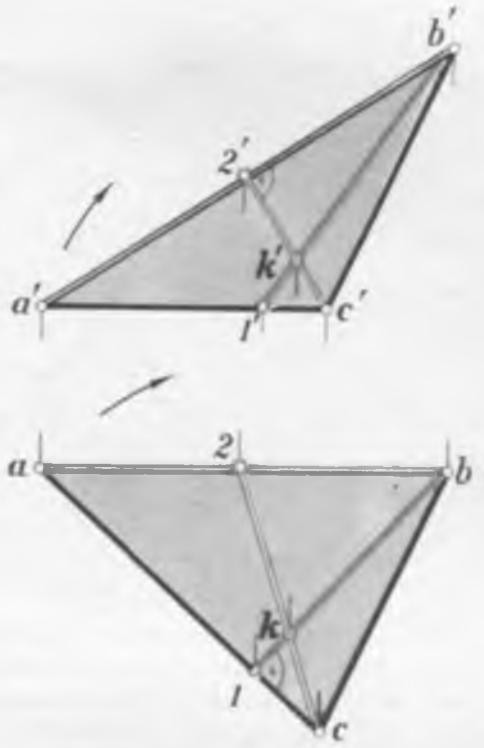


Рис. 59

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПРЯМЫХ ЛИНИЙ И ПЛОСКОСТЕЙ ПРОЕЦИРУЮЩИМИ ПЛОСКОСТЯМИ

§17

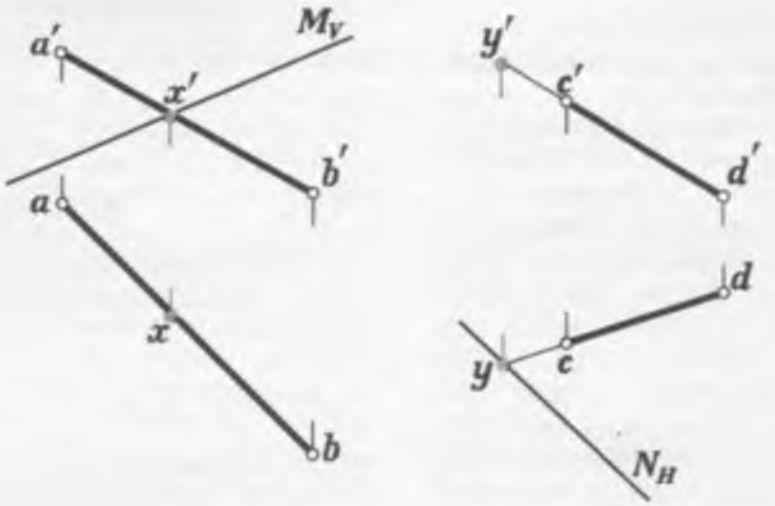
При рассмотрении проецирующих плоскостей установлена важная для них особенность. Любой геометрический образ, лежащий в проецирующей плоскости, имеет одну из своих проекций на соответствующем следе этой плоскости. Это свойство проецирующих плоскостей дает возможность легко решать задачи на построение точек пересечения прямых линий проецирующими плоскостями и линий пересечения плоскостей общего положения проецирующими плоскостями.

Точка пересечения прямой линии ab, $a'b'$ фронтально-проецирующей плоскостью M_V (рис. 60, слева) определяется следующим образом. На фронтальном следе плоскости находим фронтальную проекцию x' точки xx', принадлежащей данной прямой. Горизонтальная проекция x определяется как недостающая проекция точки xx', принадлежащей прямой ab, $a'b'$.

На рис. 60 справа показано построение точки пересечения прямой cd, $c'd$ горизонтально-проецирующей плоскостью N_H. Для этого сначала находим горизонтальную проекцию y точки yy' на пересечении горизонтальной проекции cd прямой cd, $c'd'$ с горизонтальным следом N_H плоскости.

Фронтальная проекция y' точки yy' определяется на пересечении линии связи с фронтальной проекцией $c'd'$ прямой cd, $c'd'$.

Линия пересечения плоскости общего положения проецирующей плоскостью определяется по точкам пересечения двух любых прямых линий плоскости общего положения проецирующей плоскостью.

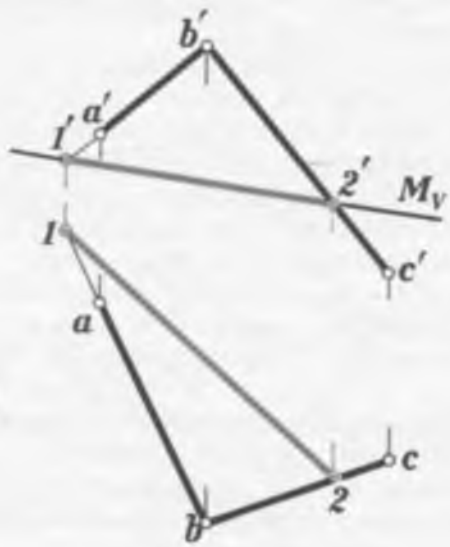


Р и с. 60

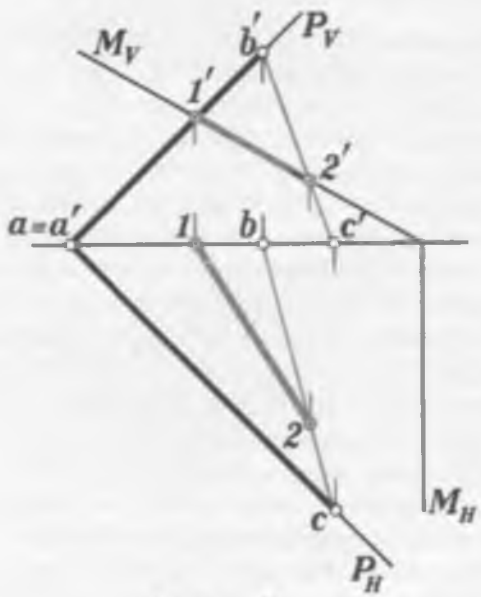
Пусть произвольно расположенная плоскость, заданная двумя пересекающимися прямыми *ab*, *a′b′* и *bc*, *b′c′*, пересекается фронтально-проецирующей плоскостью M_V (рис. 61). Находим точки *11′* и *22′* пересечения прямых *ab*, *a′b′* и *bc*, *b′c′* плоскости *abc*, *a′b′c′* с проецирующей плоскостью M_V. Прямая линия *12*, *1′2′* является линией пересечения плоскостей.

На рис. 62 показан пример построения на осном чертеже линии пересечения плоскостей, заданных следами. Следы плоскости, как известно, представляют собой прямые линии пересечения этой плоскости плоскостями проекций. Линию пересечения двух плоскостей, заданных следами, строят по точкам пересечения их одноименных следов, если они пересекаются в пределах чертежа.

Если следы плоскостей в пределах чертежа не пересекаются, то линию пересечения этих плоскостей строят по точкам пересечения любых других (пересекающихся в пределах чертежа) прямых плоскости общего положения с проецирующей плоскостью.



Р и с. 61



Р и с. 62

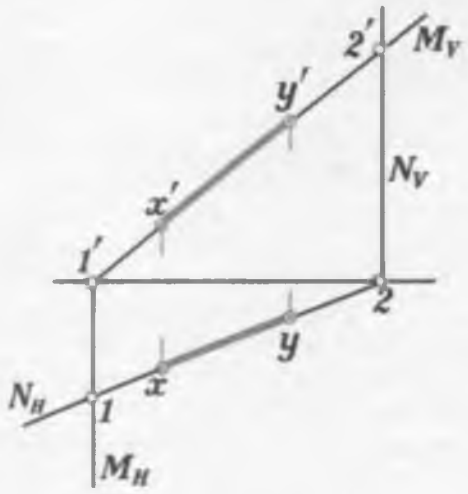


Рис. 63

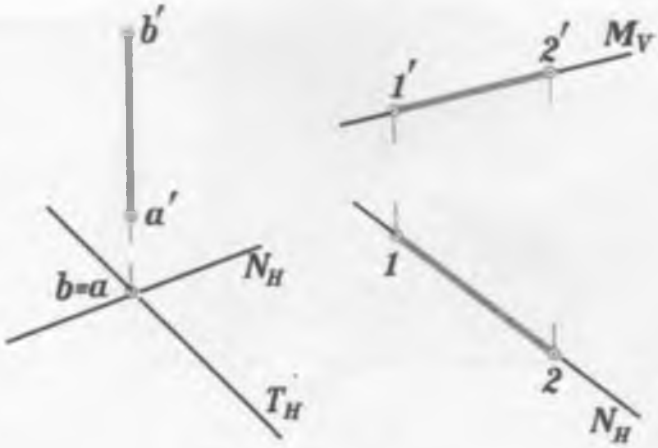


Рис. 64

Здесь прямая ab, $a'b'$ плоскости общего положения (фронтальный след P_V) пересекается в точке $11'$ с проецирующей плоскостью. Прямая ac, $a'c'$ плоскости общего положения (горизонтальный след P_H) не пересекается в пределах чертежа с проецирующей плоскостью. В этом случае в плоскости abc, $a'b'c'$ намечаем дополнительную прямую, например, bc, $b'c'$. Она пересекает проецирующую плоскость в точке $22'$.

Прямая 12, $1'2'$ является линией пересечения заданных плоскостей.

На чертеже показано, что горизонтальная проекция 12 прямой 12, $1'2'$ направлена в точку пересечения горизонтальных следов данных плоскостей.

На рис. 63 построена линия пересечения горизонтально-проецирующей плоскости N_H, N_V фронтально-проецирующей плоскостью M_H, M_V.

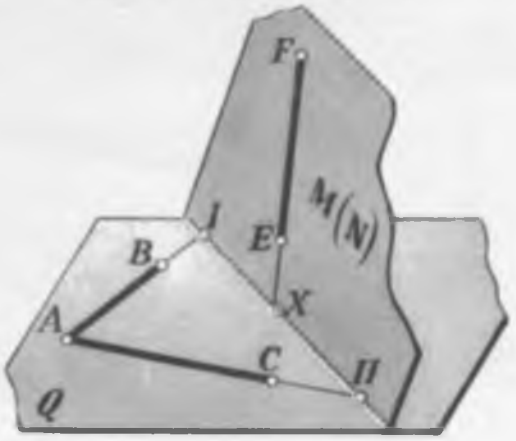
Линию xy, $x'y'$ пересечения двух проецирующих плоскостей определяют, исходя из основного свойства этих плоскостей: горизонтальная проекция xy прямой xy, $x'y'$ должна принадлежать горизонтальному следу N_H плоскости, а фронтальная проекция $x'y'$ этой прямой — фронтальному следу M_V плоскости.

На рис. 64 показано построение на безосных чертежах линий пересечения проецирующих плоскостей. Две горизонтально-проецирующие плоскости N_H и T_H пересекаются по прямой линии ab, $a'b'$, перпендикулярной к горизонтальной плоскости проекций H. Горизонтально- и фронтально-проецирующая плоскости (N_H и M_V) пересекаются по прямой линии 12, $1'2'$. Здесь проекции 12 и $1'2'$ линии пересечения плоскостей принадлежат их соответствующим следам.

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПРЯМЫХ ЛИНИЙ ПЛОСКОСТЯМИ ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ. УСТАНОВЛЕНИЕ ВИДИМОСТИ ПРЯМОЙ

§ 18

Схема решения задачи на построение точки пересечения прямой линии с плоскостью является весьма важной среди других позиционных задач курса начертательной геометрии. Эта схема используется и для решения задач на построение точек пересечения прямых с поверхностью, на пересечение поверхности плоскостью, построение линий пересечения поверхностей линейчатыми поверхностями и т. п. Здесь в реше-

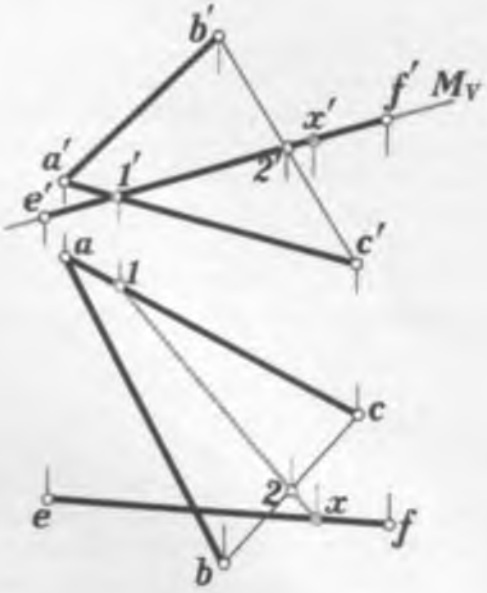


Р и с. 65

нии задачи используют проецирующую плоскость как вспомогательную.

Рассмотрим схему решения задачи на построение точки пересечения прямой с плоскостью. Пусть плоскость Q, заданная двумя прямыми — AB и AC, пересекается прямой EF (рис. 65).

Решаем задачу в определенной последовательности: через прямую EF проводим одну из проецирующих плоскостей (плоскость M или N);



Р и с. 66

определяем линию $I\,II$ пересечения заданной плоскости Q вспомогательной проецирующей плоскостью M (N);

определяем точку X пересечения данной прямой EF с линией $I\,II$ пересечения плоскостей Q и M (N). Эта точка, общая для прямой EF и плоскости Q, является искомой точкой пересечения прямой с плоскостью.

По этой схеме решим задачу на чертеже. Пусть даны плоскость abc, $a'b'c'$ и прямая ef, $e'f'$. Определим точку пересечения прямой с плоскостью (рис. 66).

Придерживаясь схемы, задачу решаем в такой последовательности:

прямую ef, $e'f'$ заключаем во фронтально-проецирующую плоскость M_V (для этого через фронтальную проекцию прямой следует провести фронтальный след M_V плоскости);

определяем линию пересечения заданной плоскости вспомогательной проецирующей плоскостью; прямая 12, $1'2'$ пересечения плоскостей определяется по точкам $11'$ и $22'$ пересечения прямых ac, $a'c'$ и bc, $b'c'$ данной плоскости проецирующей плоскостью;

определяем точку xx' пересечения прямой ef, $e'f'$ с прямой линией 12, $1'2'$ пересечения плоскостей.

Точка xx' является искомой точкой пересечения прямой ef, $e'f'$ с плоскостью abc, $a'b'c'$.

На рис. 67 показано решение аналогичной задачи на осном чертеже. Здесь плоскость abc, $a'b'c'$ задана следами.

Пусть прямая ef, $e'f'$ пересекает плоскость abc, $a'b'c'$, заданную непрозрачным треугольником (рис. 68). Определим точку пересечения прямой с треугольником и укажем видимые и невидимые отрезки прямой относительно плоскостей проекций. Через прямую ef, $e'f'$ проводим горизонтально-проецирующую плоскость N_H. Строим линию 12, $1'2'$ пересечения треугольника плоскостью N_H по точкам пересечения сторон ac, $a'c'$ и ab, $a'b'$ треугольника с этой вспомогательной проецирующей плоскостью. Определим точку xx' пересечения прямой ef, $e'f'$ с линией 12, $1'2'$. Она и будет искомой точкой пересечения прямой с треугольником. Ука-

жем видимые и невидимые (относительно плоскостей проекций) отрезки прямой линии, применяя способ так называемых конкурирующих точек.

Конкурирующими называют точки, лежащие на одном проецирующем луче.

Если смотреть по направлению проецирующего луча, то можно увидеть ту из конкурирующих точек, которая наиболее удалена от плоскости проекций (или, что то же самое, наиболее близко расположена к нам).

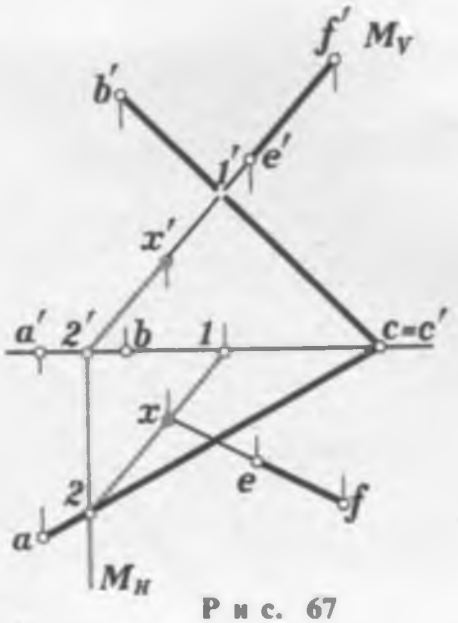
Так, на горизонтально-проецирующем луче *13*, *1′3′* находятся точки *11′* и *33′*, принадлежащие прямым *ac*, *a′c′* и *ef*, *e′f′*. Точка *11′* принадлежит стороне *ac*, *a′c′* треугольника, точка *33′* принадлежит прямой *ef*, *e′f′*. По фронтальным проекциям *1′* и *3′* этих точек устанавливаем, что одна из них (точка *11′*) расположена выше другой (точка *33′*) относительно плоскости проекций *H*. Следовательно, на участке *x3*, *x′3′* прямая линия *ef*, *e′f′* (если смотреть на горизонтальную плоскость проекций *H*) находится под плоскостью треугольника, т. е. закрыта этим треугольником. Условно горизонтальную проекцию прямой на участке *x3* покажем штриховой линией.

Чтобы определить видимость прямой относительно фронтальной плоскости проекций, воспользуемся фронтально-проецирующим лучом *45*, *4′5′*. Здесь точка *55′* принадлежит стороне *ac*, , *a′c′* треугольника, а точка *44′* — прямой *ef*, *e′f′*. По местоположению горизонтальных проекций этих точек устанавливаем, что точка *55′* ближе к нам, чем точка *44′*.

Поэтому на участке *4x*, *4′x′* (если смотреть на фронтальную плоскость проекций *V*) прямая *ef*, *e′f* закрыта треугольником и является невидимой. Условно на участке *4′x′* фронтальную проекцию *e′f′* прямой покажем штриховой линией.

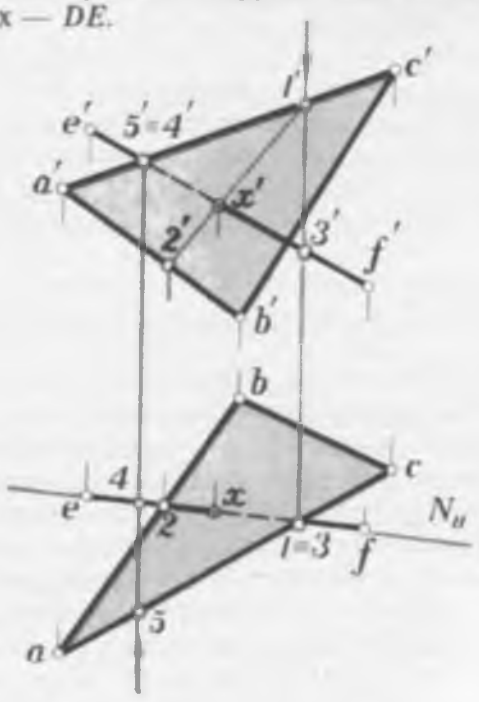
В начертательной геометрии проецирующие плоскости часто используют как вспомогательные для решения очень многих геометрических задач.

Пример. Через точку *aa′* провести прямую, пересекающую данные скрещивающиеся прямые *bc*, *b′c′* и *de*, *d′e′* (рис. 69).



Р и с. 67

Р е ш е н и е. Рассмотрим схему решения этой задачи в пространстве. Любую из данных прямых, например, *BC* и точку *A* принимаем за плоскость. Эту плоскость в точке *X* пересекает другая из данных прямых — *DE*.



Р и с. 68

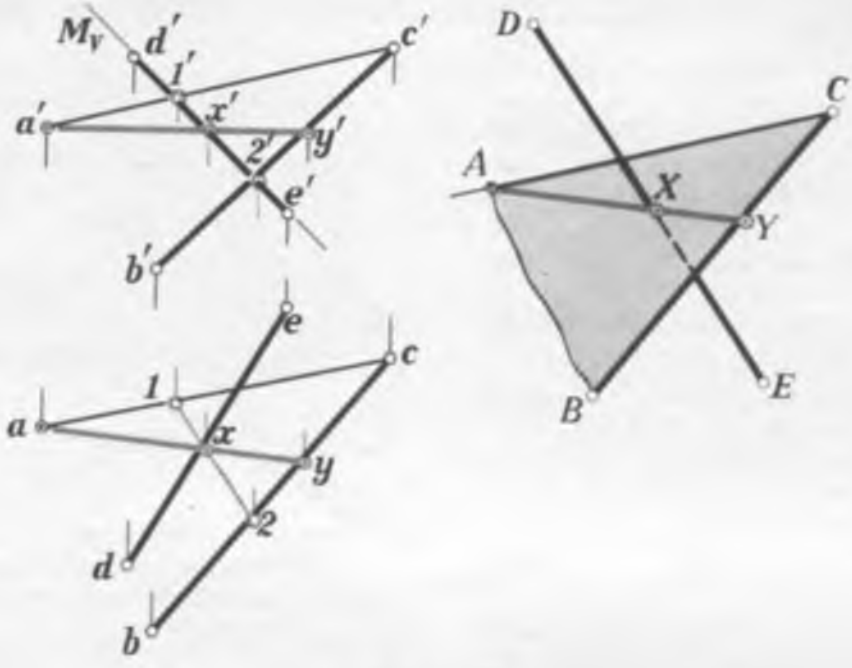


Рис. 69

Прямая линия AX пересекает прямую BC в точке Y. Решим задачу на чертеже по указанной схеме. Пусть точка aa' и прямая bc, $b'c'$ представляют плоскость.

Определим точку xx' пересечения с этой плоскостью второй из данных прямых — de, $d'e'$. Чтобы найти эту точку, через прямую de, $d'e'$ проводим вспомогательную фронтально-проецирующую плоскость M_V и находим линию 12, $1'2'$ ее пересечения с плоскостью abc, $a'b'c'$. На пересечении прямых 12, $1'2'$ и de, $d'e'$ находится точка xx'.

Искомая прямая линия проходит через точки aa' и xx' и пересекается в точке yy' с прямой bc, $b'c'$.

§19 ВЗАИМНО ПЕРЕСЕКАЮЩИЕСЯ ПЛОСКОСТИ

Две плоскости пересекаются по прямой линии. Прямую линию пересечения плоскостей можно определить по точкам пересечения двух любых прямых линий одной плоскости с другой плоскостью или по точкам пересечения прямых каждой из плоскостей — пересечения прямой первой плоскости со второй плоскостью и пересечения прямой второй плоскости с первой плоскостью.

Следовательно, для построения линии пересечения плоскостей необходимо найти две общие для них точки.

Линию пересечения плоскостей можно построить, применяя к решению задачи и вспомогательные секущие плоскости. Обычно выбирают проецирующие плоскости, часто — горизонтальные или фронтальные.

На рис. 70 решение аналогичной задачи представлено на чертеже. Здесь произвольно выбранная секущая вспомогательная плоскость S_V пересекает заданные плоскости по прямым линиям — горизонталям 12, $1'2'$ и 34, $3'4'$. Горизонтали пересекаются в точке xx'.

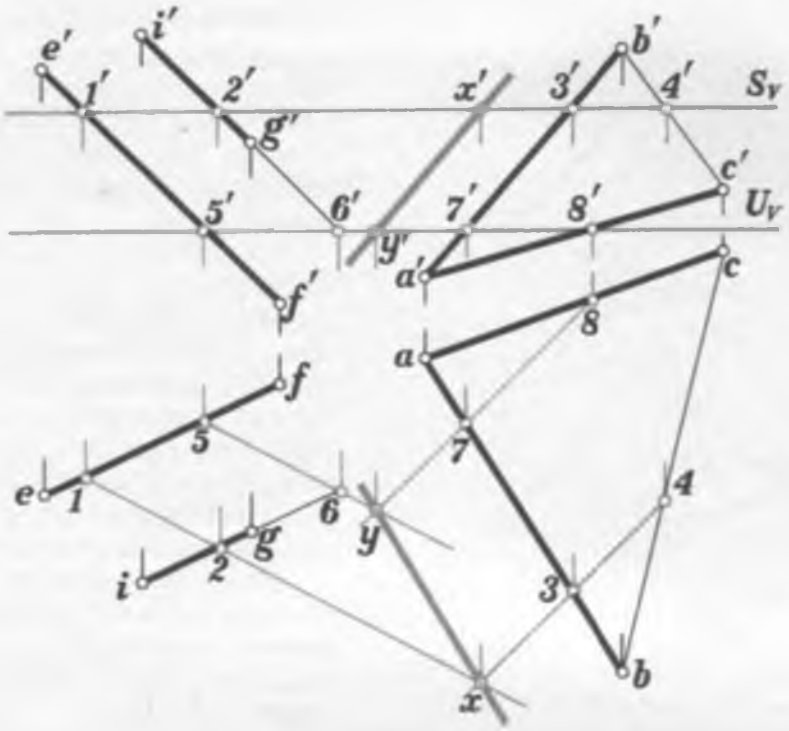


Рис. 70

Вторая секущая горизонтальная плоскость U_V пересекает заданные плоскости по горизонталям *56*, *5′6′* и *78*, *7′8′*, которые, в свою очередь, пересекаются в точке *yy′*. Прямая *xy*, *x′y′* является линией пересечения заданных плоскостей.

На рис. 71 дано построение линии пересечения двух треугольников и указана видимость этих треугольников относительно плоскостей проекций.

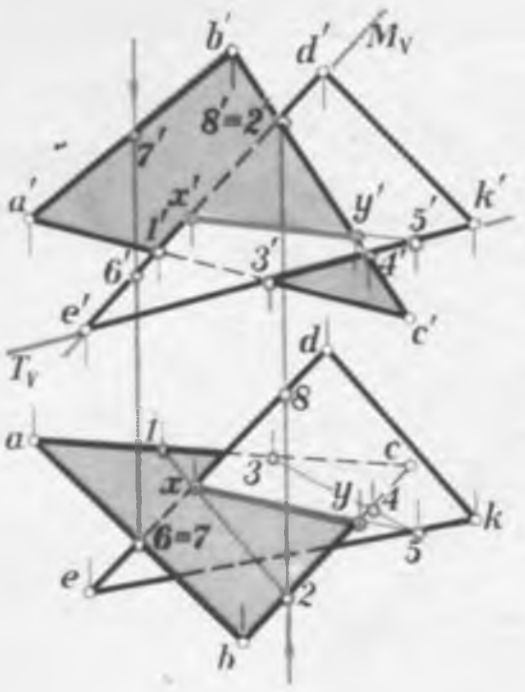
Линия пересечения *xy*, *x′y′* двух данных треугольников построена по точкам пересечения двух сторон одного треугольника с плоскостью другого треугольника. Построение точки *xx′* пересечения стороны *ed*, *e′d′* треугольника *edk*, *e′d′k′* с плоскостью треугольника *abc*, *a′b′c′* производим по общей схеме.

Через прямую *ed*, *e′d′* проводим проецирующую плоскость M_V. Определяем линию *12*, *1′2′* пересечения этой плоскости с плоскостью треугольника *abc*, *a′b′c′*. Точка *xx′* пересечения найденной линии *12*, *1′2′* со стороной *ed*, *e′d′* треугольника является точкой пересечения стороны одного треугольника с плоскостью другого треугольника, т. е. она принадлежит линии пересечения заданных треугольников.

Аналогично определяем вторую общую для двух треугольников точку — *yy′*. Прямая линия *xy*, *x′y′* является линией пересечения двух треугольников *abc*, *a′b′c′* и *edk*, *e′d′k′*. Видимость треугольников относительно плоскостей проекций *H* и *V* определена с помощью конкурирующих точек.

Видимость треугольников относительно горизонтальной плоскости проекций определим следующим образом. Проведем горизонтально-проецирующую прямую *67*, *6′7′*, пересекающую стороны *ed*, *e′d′* и *ab*, *a′b′* треугольников в точках *66′* и *77′*. По фронтальным проекциям *6′* и *7′* устанавливаем, что точка *77′* прямой *ab*, *a′b′* ближе к нам — она дальше отстоит от плоскости проекций *H*, чем точка *66′* прямой линии *ea*, *e′d′*.

56



Р и с. 71

Следовательно, прямая ed, $e'd'$ на участке dx, $d'x'$ (от точки dd' до пересечения ее с плоскостью треугольника abc, $a'b'c'$) является видимой. Этого достаточно, чтобы определить видимую и невидимую части треугольника edk, $e'd'k'$ относительно горизонтальной плоскости проекций H. Соответственно определяем видимость относительно той же плоскости проекций H и другого треугольника.

Аналогичными построениями определяем видимость треугольников относительно фронтальной плоскости проекций. Проводим фронтально-проецирующую прямую 28, $2'8'$, пересекающую стороны bc, $b'c'$ и ed, $e'd'$ заданных треугольников в точках $2'$ и $8'$. При этом устанавливаем, что точка $2'$ конкурирует с точкой $8'$, т. е. она наиболее удалена от плоскости проекций V и находится ближе к нам, чем точка $8'$.

Поэтому прямая bc, $b'c'$ на участке by, $b'y'$ (от точки bb' до пересечения ее с плоскостью треугольника edk, $e'd'k'$) является видимой. Этого достаточно, чтобы определить видимую и невидимую части треугольника abc, $a'b'c'$ относительно фронтальной плоскости проекций V. Соответственно определяем видимость относительно плоскости проекций V и другого треугольника.

§ 20 ПРЯМЫЕ ЛИНИИ И ПЛОСКОСТИ, ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПЛОСКОСТИ

1. Прямые линии, параллельные плоскости

Прямая параллельна плоскости, если она параллельна любой прямой этой плоскости. Через каждую точку пространства можно провести бесчисленное множество прямых, параллельных данной плоскости.

Пусть плоскость Q представлена двумя пересекающимися прямыми линиями AB и AC (рис. 72). Прямая FG параллельна плоскости Q, так как она параллельна прямой $I\,II$ этой плоскости.

На рис. 73 показан чертеж взаимно параллельных прямой линии и плоскости. Плоскость задана двумя параллельными прямыми — ab, $a'b'$ и cd, $c'd'$. Прямая fg, $f'g'$ параллельна плоскости, так как она параллельна прямой 12, $1'2'$ этой плоскости.

2. Взаимно параллельные плоскости

Если две пересекающиеся прямые линии одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

Через точку пространства можно провести бесчисленное множество прямых, параллельных данной плоскости. Пучок этих прямых представляет плоскость, параллельную данной. Для задания плоскости из этого множества прямых достаточно выделить две любые прямые. Для этого проведем из точки F вне плоскости Q (рис. 72) прямые FD и FK, параллельные прямым AB и AC этой плоскости.

Прямые определяют плоскость, параллельную плоскости Q.

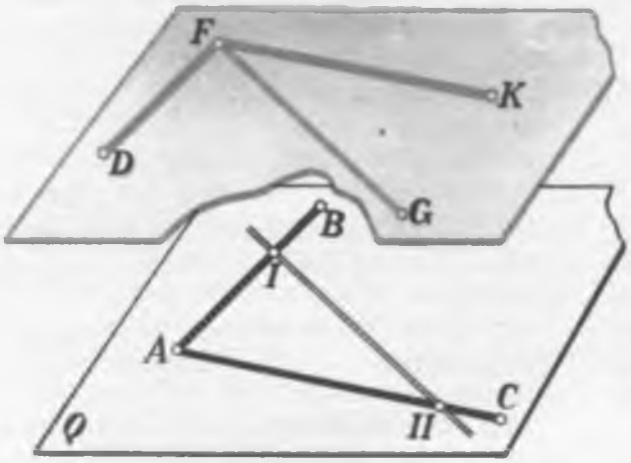


Рис. 72

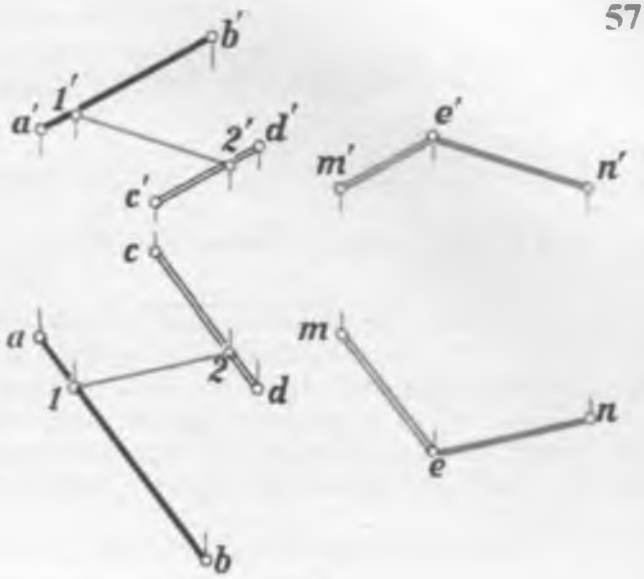


Рис. 74

На рис. 74 представлен чертеж плоскости, заданной двумя параллельными прямыми *ab*, *a′b′* и *cd*, *c′d′*. Проведем через точку *ee′* плоскость, параллельную заданной.

Прямые *em*, *e′m′* и *en*, *e′n′*, параллельные прямым *cd*, *c′d′* и *12*, *1′2′* данной плоскости, определяют плоскость, параллельную заданной.

Если плоскости заданы следами или главными линиями (горизонталью и фронталью), то для условия параллельности плоскостей достаточно, чтобы их следы, или главные линии, были между собой параллельны.

Проведем через точку *kk′* плоскость, параллельную данной плоскости *abc*, *a′b′c′*. Плоскость *abc*, *a′b′c′* задана следами (рис. 75). Проведем через точку *kk′* одну из главных линий искомой плоскости, например, горизонталь. Через след горизонтали, точку *11′* проходит фронтальный след *nn*, *n′e′*

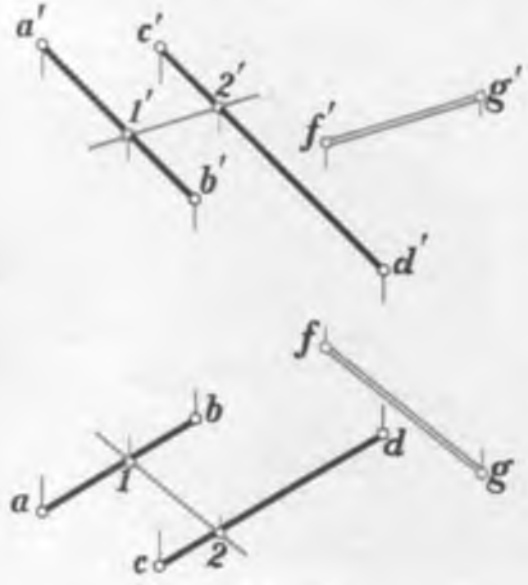


Рис. 73

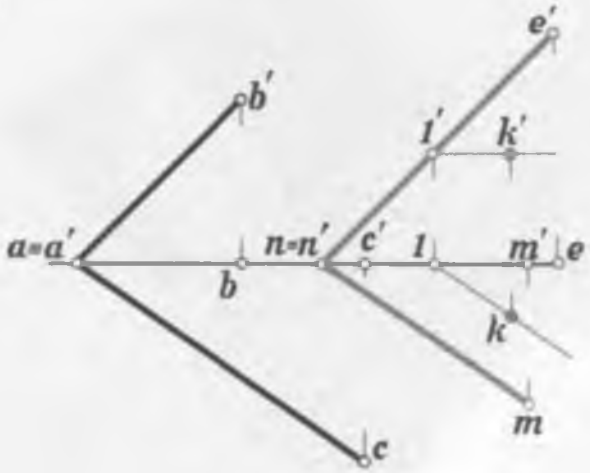


Рис. 75

58

искомой плоскости, параллельно одноименному следу ab, $a'b'$ заданной плоскости.

Горизонтальный след mn, $m'n'$ параллелен следу ac, $a'c'$ данной плоскости и проходит через точку пересечения фронтального следа искомой плоскости с осью проекций.

§21 ПРЯМЫЕ ЛИНИИ И ПЛОСКОСТИ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ К ПЛОСКОСТИ

1. Прямые линии, перпендикулярные к плоскости

Прямая перпендикулярна к плоскости, если она перпендикулярна к любым двум пересекающимся прямым этой плоскости. Если прямая перпендикулярна к двум таким прямым плоскости, то она перпендикулярна к любому множеству прямых этой плоскости.

Через каждую точку пространства можно провести только одну прямую, перпендикулярную к данной плоскости. Такая прямая, как известно, определяет направление плоскости.

На схеме (рис. 76) показано, что прямая EF перпендикулярна к плоскости Q, так как она одновременно перпендикулярна к двум прямым AB и AC этой плоскости.

Для построения чертежа прямой, перпендикулярной к плоскости, воспользуемся условием проецирования прямого угла. Рассмотрим рисунок пространственной модели плоскости Q и прямой EF, перпендикулярной к ней (рис. 77).

В плоскости Q из точки A проведем две прямые AB и AC, параллельные плоскостям проекций, — фронталь и горизонталь.

Прямой угол FAC проецируется на горизонтальную плоскость проекций H без искажения, в виде прямого угла fac. Здесь одна из сторон AC угла FAC параллельна горизонтальной плоскости проекций H.

Прямой угол FAB проецируется на фронтальную плоскость проекций V также в виде прямого угла $f'a'b'$ (на модели не показано). Отсюда вытекает следующая теорема:

Теорема. *Прямая линия перпендикулярна к плоскости, если ее проекции перпендикулярны к одноименным проекциям на-*

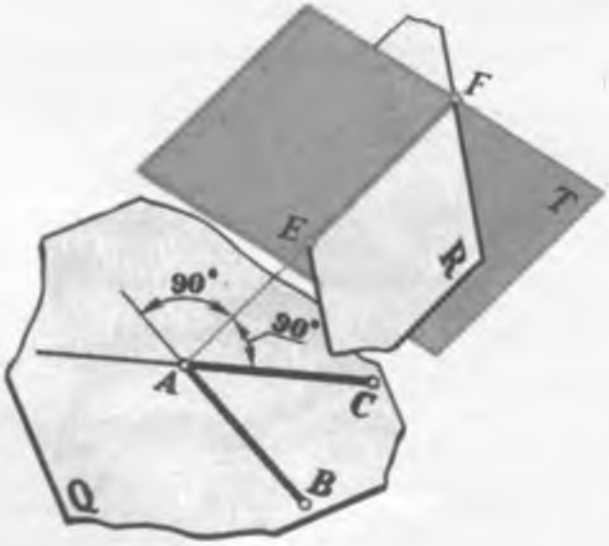


Рис. 76

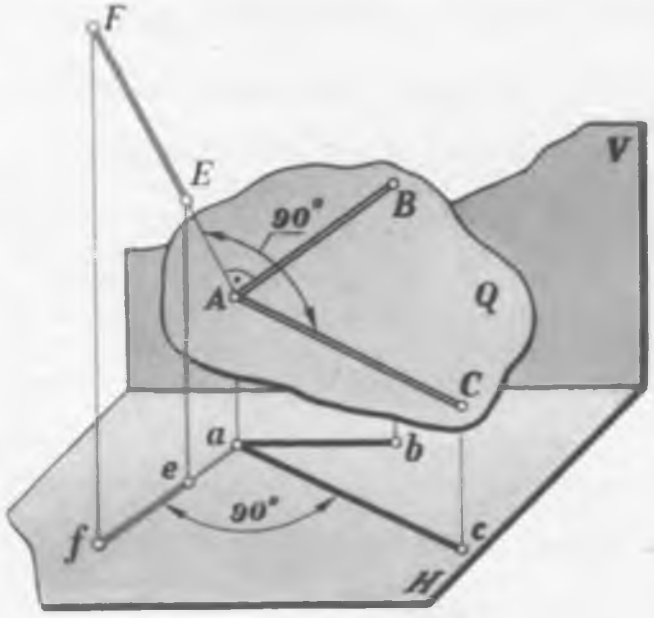


Рис. 77

правлений горизонтали и фронтали плоскости.

Имея направления проекций горизонтали и фронтали, согласно этой теореме, определяем проекции прямой линии, перпендикулярной к плоскости.

Горизонтальная проекция перпендикуляра составляет прямой угол с горизонтальной проекцией горизонтали плоскости. Фронтальная проекция перпендикуляра составляет прямой угол с фронтальной проекцией фронтали плоскости. На основании этой теоремы можно определить и построить направления заданных плоскостей и плоскости заданных направлений.

На рис. 78 даны построения по определению направления плоскости abc, $a'b'c'$. В этой плоскости проведены горизонталь $a1$, $a'1'$ и фронталь $c2$, $c'2'$.

Проекции прямой ek, $e'k'$ перпендикулярны соответственно к одноименным проекциям направлений горизонтали и фронтали плоскости, т. е. $ek \perp a1$ и $e'k' \perp c'2'$.

Прямая линия ek, $e'k'$ перпендикулярна к плоскости abc, $a'b'c'$ и является направлением этой плоскости.

Если плоскости проецирующие, то направления этих плоскостей определяют прямые, параллельные плоскостям проекций (рис. 79).

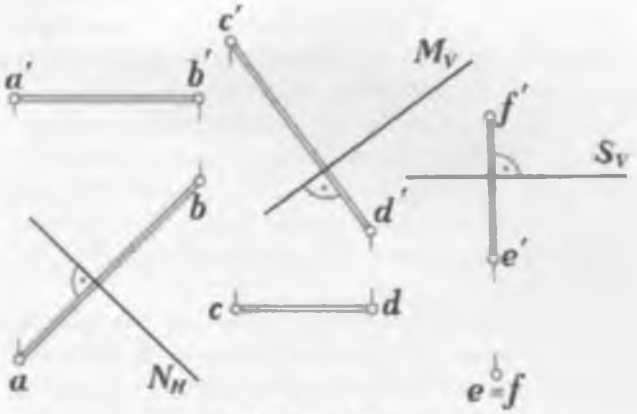


Рис. 79

Так, горизонтальная прямая ab, $a'b'$ является направлением горизонтально-проецирующей плоскости N_H. Фронтальная прямая cd, $c'd'$ является направлением фронтально-проецирующей плоскости M_V. Горизонтально-проецирующая прямая ef, $e'f'$ является направлением горизонтальной плоскости S_V.

Пример. Через точку aa' провести плоскость данного направления ek, $e'k'$ (рис. 80).

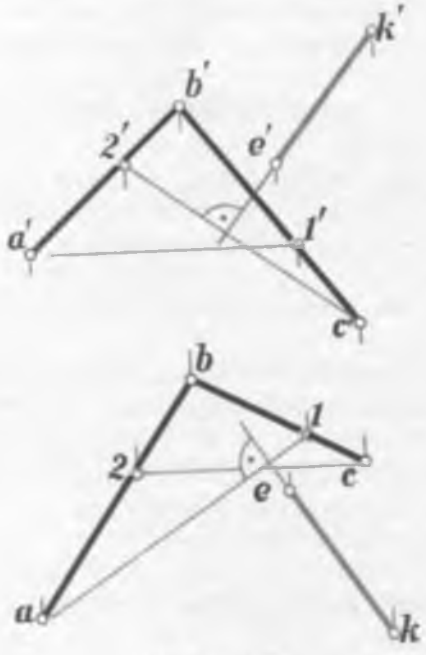


Рис. 78

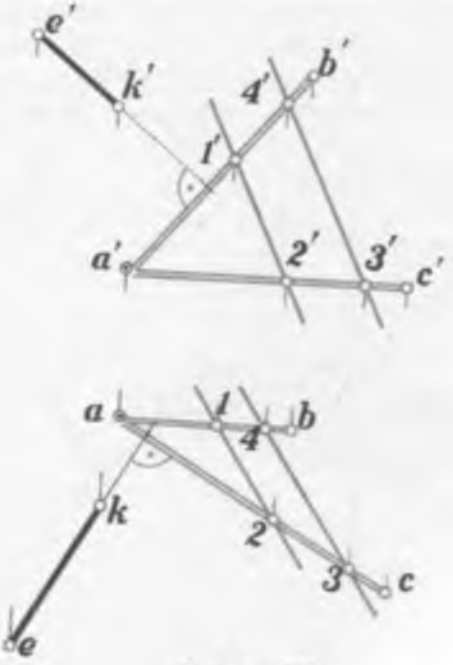
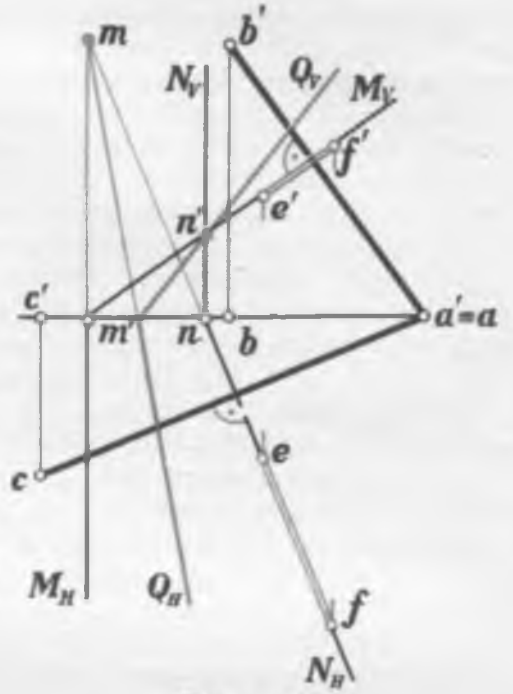


Рис. 80

60 Р е ш е н и е. Через точку aa' проведем главные линии (горизонталь и фронталь) искомой плоскости, перпендикулярные к прямой ek, $e'k'$. Здесь фронтальная проекция $a'c'$ горизонтали параллельна направлению оси проекций; горизонтальная ее проекция составляет прямой угол с горизонтальной проекцией ek направления ek, $e'k'$ плоскости.

Горизонтальная проекция ab фронтали параллельна направлению оси проекций; фронтальная ее проекция составляет прямой угол с фронтальной проекцией $e'k'$ направления ek, $e'k'$ плоскости.

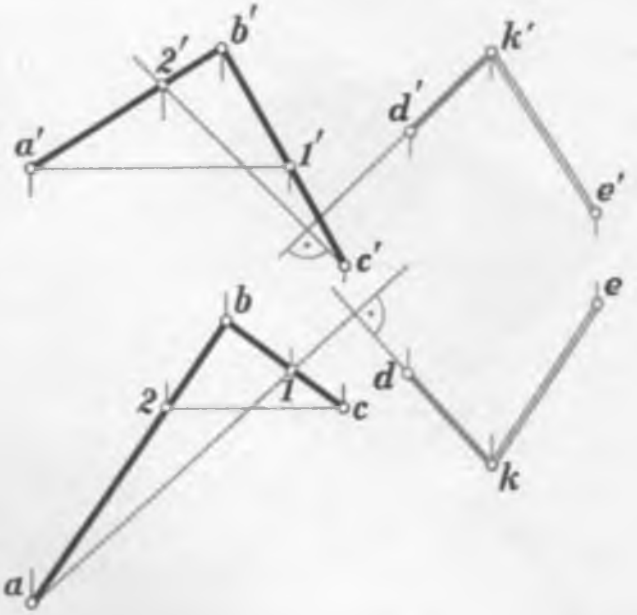
Направлением плоскости, заданной главными линиями — горизонталью ac, $a'c'$ и фронталью ab, $a'b'$, является прямая ek, $e'k'$. Эта плоскость может быть заданной, например двумя параллельными прямыми линиями (12, $1'2'$ и 34, $3'4'$).



Р и с. 82

2. Взаимно перпендикулярные плоскости

Две плоскости взаимно перпендикулярны, если одна из плоскостей имеет прямую линию, перпендикулярную к другой плоскости.



Р и с. 81

Для построения плоскости, перпендикулярной к другой плоскости, достаточно определить прямую, перпендикулярную к этой плоскости. Через эту прямую можно провести множество плоскостей, перпендикулярных к данной плоскости.

На модели (рис. 76) прямая EF перпендикулярна к плоскости Q. Любая плоскость T, R... прямой KE перпендикулярна к плоскости Q.

На рис. 81 представлен чертеж двух взаимно перпендикулярных плоскостей. Плоскость dek, $d'e'k'$ перпендикулярна к плоскости abc, $a'b'c'$, так как прямая dk, $d'k'$ этой плоскости перпендикулярна к плоскости abc, $a'b'c'$.

Установлено, что через прямую, перпендикулярную к плоскости, можно провести бесконечно большое число плоскостей, перпендикулярных к заданной плоскости. Одноименные следы этих плоскостей, однако, не взаимно перпендикулярны.

Пусть плоскость abc, $a'b'c'$ задана следами (рис. 82). Построим плоскости, перпендикулярные к плоскости abc, $a'b'c'$ и зададим их следами. Проведем прямую ef, $e'f'$, пер-

пендикулярную к плоскости abc, $a'b'c'$. Проекции прямой, как известно, составляют прямые углы с соответствующими следами плоскости. Определим следы mm' и nn' прямой линии ef, $e'f'$. Через точку mm' проходят горизонтальные, а через точку nn' — фронтальные следы плоскостей, перпендикулярных к заданной плоскости. Следы их, как видим, не перпендикулярны к соответствующим следам заданной плоскости. Плоскости Q_H, Q_V; M_H, M_V и N_H, N_V перпендикулярны к плоскости abc, $a'b'c'$.

Если одноименные следы двух плоскостей взаимно перпендикулярны, то плоскости не перпендикулярны между собой (рис. 83). Это легко доказать на примере (рис. 82). Если горизонтальный след N_H плоскости N_H , N_V , проходя через след прямой — точку mm', перпендикулярен к горизонтальному следу ac, $a'c'$ заданной плоскости, то фронтальный след N_V искомой плоскости (он должен пройти через фронтальный след nn' прямой) не может быть

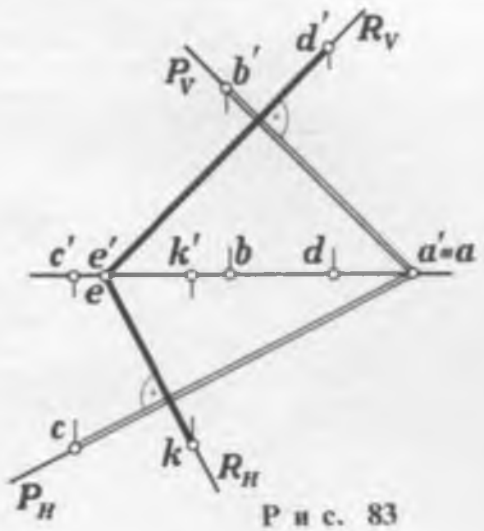


Рис. 83

перпендикулярен к фронтальному следу $a'b'$ заданной плоскости.

Если одноименные следы двух плоскостей взаимно перпендикулярны, то в плоскости нет прямой, перпендикулярной к другой плоскости, т. е. условие перпендикулярности двух плоскостей не соблюдается.

ВЗАИМНО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ ПРЯМЫЕ ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ

§22

Две прямые взаимно перпендикулярны, если каждая из них является направлением одной из плоскостей другой прямой.

Через точку можно провести бесконечное множество прямых, перпендикулярных к данной прямой, но только одна из них будет пересекать другую под прямым углом. Все эти прямые принадлежат одной плоскости. Поэтому для построения чертежа прямой линии, перпендикулярной к другой прямой, необходимо прежде всего построить плоскость, перпендикулярную к этой прямой.

На схеме (рис. 84) через точку A проведена плоскость Q перпендикулярно к заданной прямой CD и определена точка K пересечения прямой CD с этой плоскостью. Прямая AK пересекает заданную прямую CD под прямым углом.

Пример. Через данную точку xx' прямой ab, $a'b'$ перпендикулярно к ней провести прямую, пересекающую данную прямую cd, $c'd'$ (рис. 85).

Р е ш е н и е. Через точку xx' прямой ab, $a'b'$ проведем плоскость $x12$, $x'1'2'$, перпендикулярную к ней. Эта плоскость в точке yy' пересекает прямую линию cd, $c'd'$. Через прямую cd, $c'd'$ проводим секущую вспомогательную проецирующую плоскость N_H.



Рис. 84

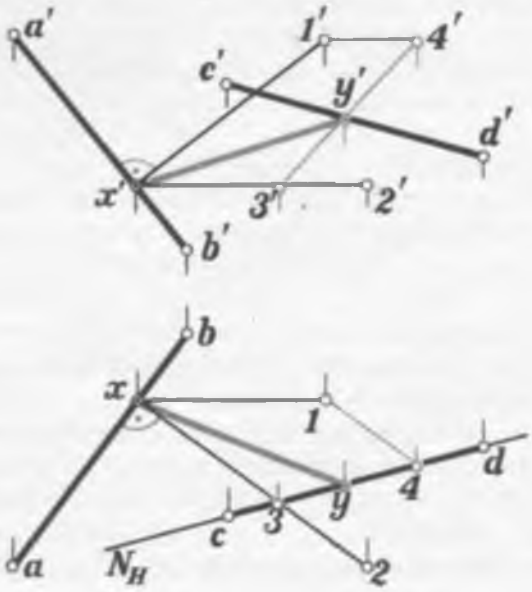


Рис. 85

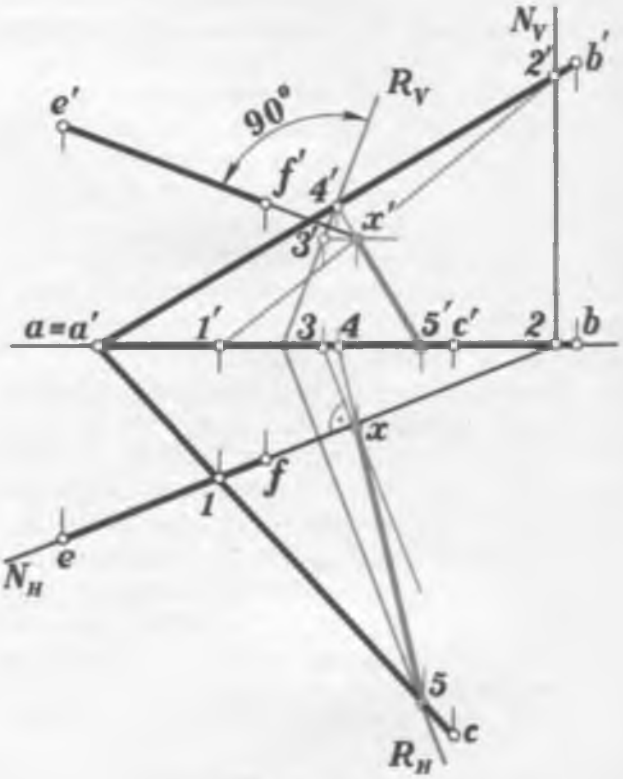


Рис. 86

Определяем линию *34*, *3′4′* пересечения этой плоскости с плоскостью *x12*, *x′1′2′*.

На пересечении двух прямых *34*, *3′4′* и *cd*, *c′d′* определяем точку *yy′*. Прямая *xy*, *x′y′* является искомой, удовлетворяющей заданному условию.

Пример. В плоскости *abc*, *a′b′c′* построить прямую, пересекающую данную прямую *ef*, *e′f′* под прямым углом (рис. 86).

Р е ш е н и е. Определяем точку *xx′* пересечения прямой *ef*, *e′f′* с плоскостью. Для этого через прямую проводим проецирующую плоскость N_H, N_V и строим линию *12*, *1′2′* ее пересечения с данной плоскостью. Эта линия пересекает прямую *ef*, *e′f′* в точке *xx′*.

Через точку *xx′* проводим плоскость R_H, R_1 перпендикулярно к прямой *ef*, *e′f′*. Любая прямая такой плоскости составляет с данной прямой линией угол, равный 90°.

Очевидно, искомой является прямая линия *x5*, *x′5′* пересечения плоскости R_H, R_V с данной плоскостью *abc*, *a′b′c′*. Она определяется по точкам *44′* и *55′* пересечения одноименных следов этих плоскостей.

Итак, прямая *x5*, *x′5′* принадлежит данной плоскости и составляет с прямой *ef*, *e′f′* прямой угол.

Вопросы для самопроверки

1. Покажите способы задания плоскости общего положения и проецирующих плоскостей.
2. Как строят прямые линии и точки в плоскости?
3. Изложите особенности проецирующих плоскостей.
4. Покажите способы построения горизонтали, фронтали и линии наибольшего наклона

плоскости общего положения и проецирующих плоскостей.

5. Как определяют в треугольнике центр его тяжести, центры описанной и вписанной окружности?

6. Покажите на примерах как определяют, точки пересечения проецирующих плоскостей прямыми линиями, линии пересечения проецирующих плоскостей плоскостями общего положения и проецирующими плоскостями.

7. Изобразите схему и укажите последовательность решения задачи на построение точки пересечения прямой с плоскостью общего положения

8. Как определяют видимость элементов геометрических образов относительно плоскостей проекций?

9. Изобразите схему и укажите последовательность построения линии пересечения двух плоскостей.

10. Изобразите схему и приведите примеры построений прямых линий, параллельных и перпендикулярных к плоскостям.

11. Сформулируйте условие параллельности и условие перпендикулярности двух плоскостей.

12. Сформулируйте условие перпендикулярности двух прямых общего положения. Изобразите схему.

13. Как определяются на чертеже расстояния от точки до проецирующей плоскости, плоскости общего положения?

14. Как определяются на чертеже расстояния от точки до прямой частного и общего положения?

ГЛАВА IV

ОБОБЩЕННЫЕ ЧЕРТЕЖИ ПЛОСКИХ ФИГУР

§ 23 ДВОЙНОЕ ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ПРОЕЦИРОВАНИЕ ПЛОСКИХ ФИГУР НА ОДНУ ПЛОСКОСТЬ

При построении ортогональных чертежей предметов необходимо предусмотреть систему двух взаимно перпендикулярных плоскостей проекций. Очевидно, что можно построить два изображения оригинала и на одну плоскость, выбрав два различных направления проецирования. Так, например, треугольник ABC (рис. 87) можно представить на плоскости Q двумя параллельными проекциями (изображениями) $a_1b_1c_1$ и $a_2b_2c_2$, выбрав при этом соответственно два различных направления проецирования. Отметим, что:

линии a_1a_2; b_1b_2; ..., связывающие разноименные проекции точек оригинала (линии связи), параллельны между собой как следы параллельных плоскостей проецирующих лучей точек A, B, ...;

разноименные проекции a_1b_1 и a_2b_2, b_1c_1 и b_2c_2, ... любых прямых линий некоторого заданного плоского геометрического образа ABC пересекаются между собой на одной общей прямой линии O_1O_2 — линии пересечения плоскости этого геометрического образа с плоскостью Q проекций. В этих же точках прямые линии AB, BC, ... пересекаются с плоскостью проекций Q;

прямая линия O_1O_2 делит линии связи в одном и том же отношении.

Соответствие, установленное в результате двойного параллельного проецирования, называют *родственным*, или *перспективно-аффинным**.

Описанные свойства чертежа плоского геометрического образа в двойных параллельных проекциях на одну плоскость дают возможность по одной известной проекции оригинала и при некоторых других условиях определять вторую его проекцию.

Укажем построение второй проекции треугольника ABC, если известны проекция $a_1b_1c_1$ треугольника, линия пересечения O_1O_2 его плоскости с плоскостью проекций и проекция a_2 точки A вершины (рис. 88).

Проекция a_2b_2 прямой AB должна проходить через известную проекцию a_2 точки A и точку $l_1 \equiv l_2$, в которой a_1b_1 пересекает прямую O_1O_2. Прямая a_2b_2, пересекаясь линией связи, определяет положение точки b_2.

Аналогично путем последовательных построений определим проекцию $a_2b_2c_2$ треугольника ABC. При фиксированных направлениях проецирования чертежу $a_1b_1c_1$,

* Это соответствие впервые рассмотрел Эйлер, но в аналитической форме. В начертательной геометрии оно рассматривалось многими геометрами, в том числе и русскими учеными — Н. М. Душиным, Н. А. Глаголевым, Н. Ф. Четверухиным и др.

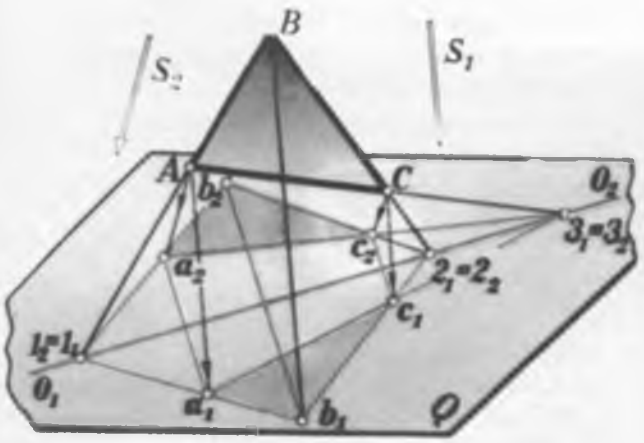


Рис. 87

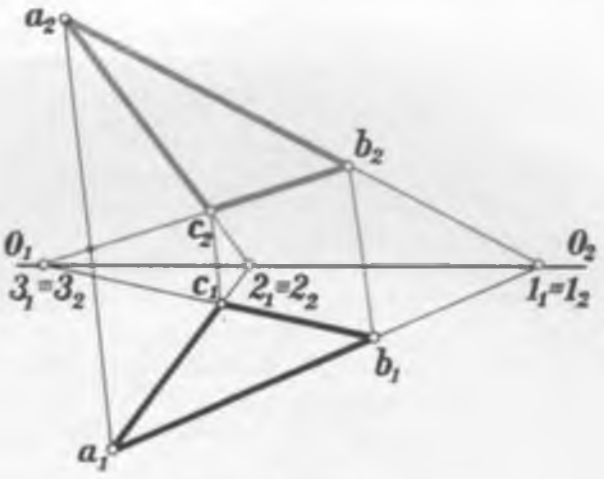


Рис. 88

$a_2b_2c_2$ треугольника соответствует в пространстве только один треугольник ABC. Такому чертежу может соответствовать бесконечное множество других треугольников его же плоскости, если изменять направления проецирования так, чтобы плоскости проецирующих лучей точек проходили через прежние линии связи, а новые проецирующие лучи исходили бы из тех же проекций точек, пересекаясь в точках плоскости рассматриваемого треугольника.

Очевидно, бесконечному ряду указанных плоскостей проецирующих лучей в пространстве соответствует пучок параллельных плоскостей, осью которого является прямая, параллельная линиям связи точек чертежа. Этому же чертежу соответствует бесконечно большое число треугольников, расположенных в любой из плоскостей пучка с осью O_1O_2 (при тех же условиях выбора направления проецирования). Для таких чертежей существует два пучка плоскостей: пучок плоскостей расположения геометрических образов (первый пучок) и пучок плоскостей, параллельных плоскостям направлений проецирования (второй пучок).

Таким образом, каждому чертежу плоского геометрического образа в двойных параллельных проекциях соответствует бесконечно большое число различных плоских геометрических образов, различно расположенных в пространстве. Такие чертежи называют *обобщенными*. Линию O_1O_2 пересечения плоскости геометрического образа плоскостью проекций называют *основной линией обобщенного чертежа*, или *основной линией обобщения*.

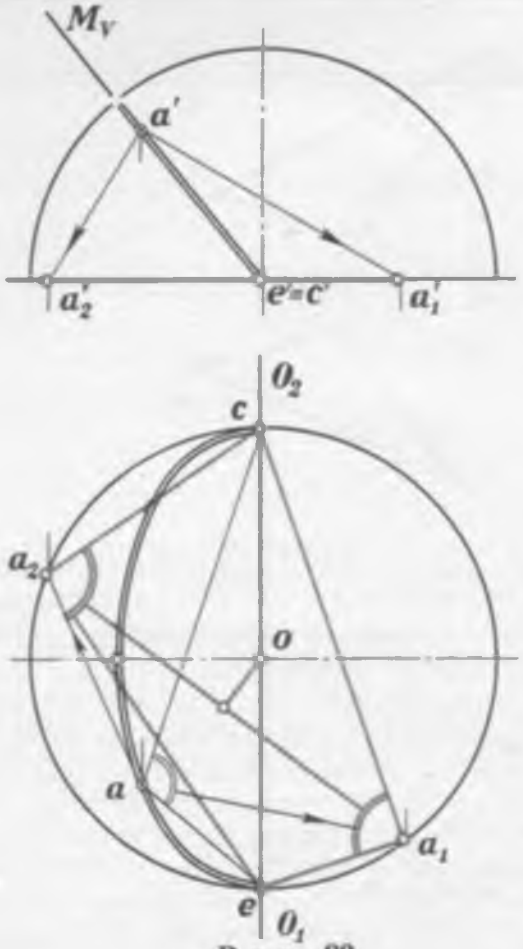
Отношение, в котором основная линия обобщения делит (внутренним или внешним делением) расстояния между разноименными проекциями точек (линии связи), называют внутренним или внешним *показателями обобщения*.

Основой чертежа плоского геометрического образа в двойном параллельном проецировании являются: основная линия обобщения, направление проецирования и показатель обобщения.

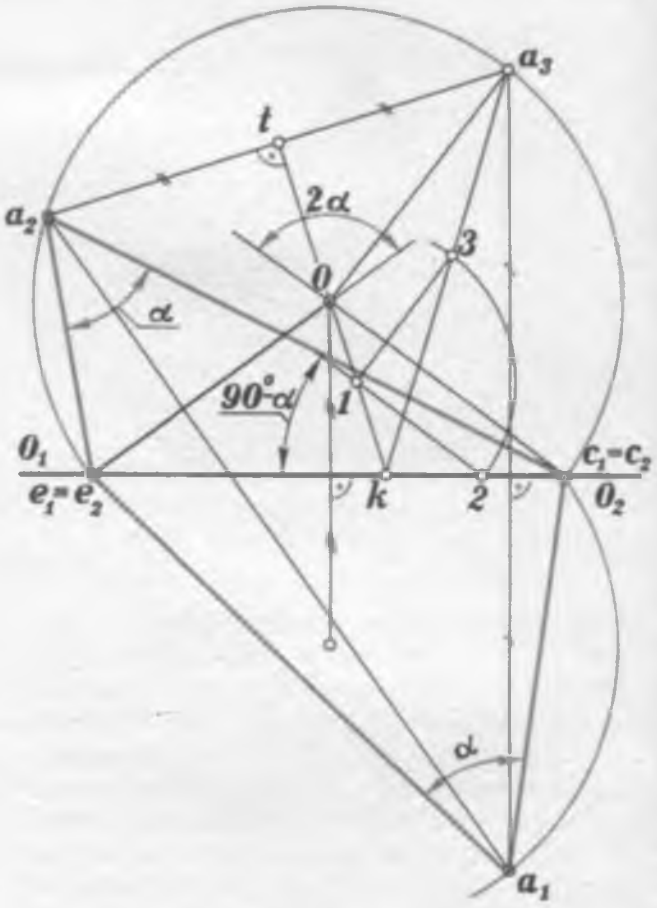
ПРЯМЫЕ УГЛЫ ОБОБЩЕНИЯ

Наличие бесконечно большого числа геометрических образов, соответствующих обобщенному чертежу, позволяет построить на таком чертеже два равных угла, которые являются разноименными параллельными проекциями равных им углов. Покажем эти построения сначала для прямых углов.

Представим в ортогональных проекциях полусферу с секущей ее плоскостью M_V



Р и с. 89



Р и с. 90

(рис. 89), проходящей через диаметр. Линией сечения сферы плоскостью M_V является круг. Наметим на этом круге точку aa' и соединим ее прямыми линиями с произвольно выбранными точками a_1a_1' и a_2a_2', а также с точками cc' и ee' большого круга (основания) сферы. Прямые линии aa_1, $a'a_1'$ и aa_2, $a'a_2'$ примем на направления проецирования.

Треугольники с общей гипотенузой ec, $e'c'$ прямоугольные. Прямые углы ca_1e, $c'a_1'e'$ и ca_2e', $c'a_2'e'$ — параллельные (цилиндрические) проекции прямого угла cae, $c'a'e'$. Горизонтальные проекции чертежа в ортогональных проекциях можно принять за проекции обобщенного чертежа, в котором прямая линия O_1O_2 является основной линией обобщения, прямая a_1a_2 — направлением обобщения, а точки a_1 и a_2 — первой и второй проекциями точки aa'. Проекции прямого угла плоскости M_V представляются также прямыми углами только при определенных направлениях проецирования. Если в той же плоскости проецирующих лучей выбрать другую пару направлений проецирования, то прямые углы ca_1e и ca_2e обобщенного чертежа будут проекциями или острого или тупого угла.

При сохранении положения плоскости M_V и вращении плоскости направлений проецирования вокруг прямой a_1a_2 прямые углы представляются проекциями прямых же углов пространства плоскости M_V.

Таким образом, можно сделать вывод, что в каждом обобщенном чертеже существуют два прямых угла, являющихся разноименными проекциями прямых углов, расположенных в плоскостях первого пучка.

На рис. 89 показано также, что прямые углы ca_1e и ca_2e можно получить как углы, опирающиеся на диаметр окружности, центр которой определяется на пересечении основной линии O_1O_2 с перпендикуляром из середины отрезка a_1a_2. Такие углы называют *прямыми углами обобщения*.

На рис. 90 приведены построения обобщенного чертежа заданного угла α, имеющего равновеликие проекции с вершинами в точках a_1 и a_2, при данной основной линии O_1O_2.

Сначала наметим точку a_3, симметричную точке a_1 относительно основной линии. Отрезок a_2a_3 точкой t разделим пополам. Прямая tk, перпендикулярная к a_2a_3 в точке k, пересекает основную линию O_1O_2.

Построим отрезок a_3k. Из какой-либо точки *1* отрезка tk проводим прямую *12* под углом $90^\circ - \alpha$ к основной линии до точки *2* пересечения ее с основной линией. Из точки *1* радиусом *12* опишем дугу окружности до точки *3* пересечения ее с прямой a_3k. Построим радиус *13*.

Из точки a_3 проведем прямую параллельно прямой *13* до точки O пересечения ее с прямой tk. Из точки O радиусом Oa_3 опишем окружность, которая пройдет через точку a_2 и на основной линии отметим точки $c_1 \equiv c_2$ и $e_1 \equiv e_2$. На хорду e_1c_1 будет опираться центральный угол, равный 2α. Точки c_1 и e_1 соединим с точками a_1 и a_2. Углы $c_1a_1e_1$ и $c_2a_2e_2$ будут искомыми.

ПОЗИЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ НА ОБОБЩЕННЫХ ЧЕРТЕЖАХ

§25

При рассмотрении основных свойств ортогонального чертежа и чертежа в двойном параллельном проецировании на одну плоскость отмечено единство их. Ортогональный

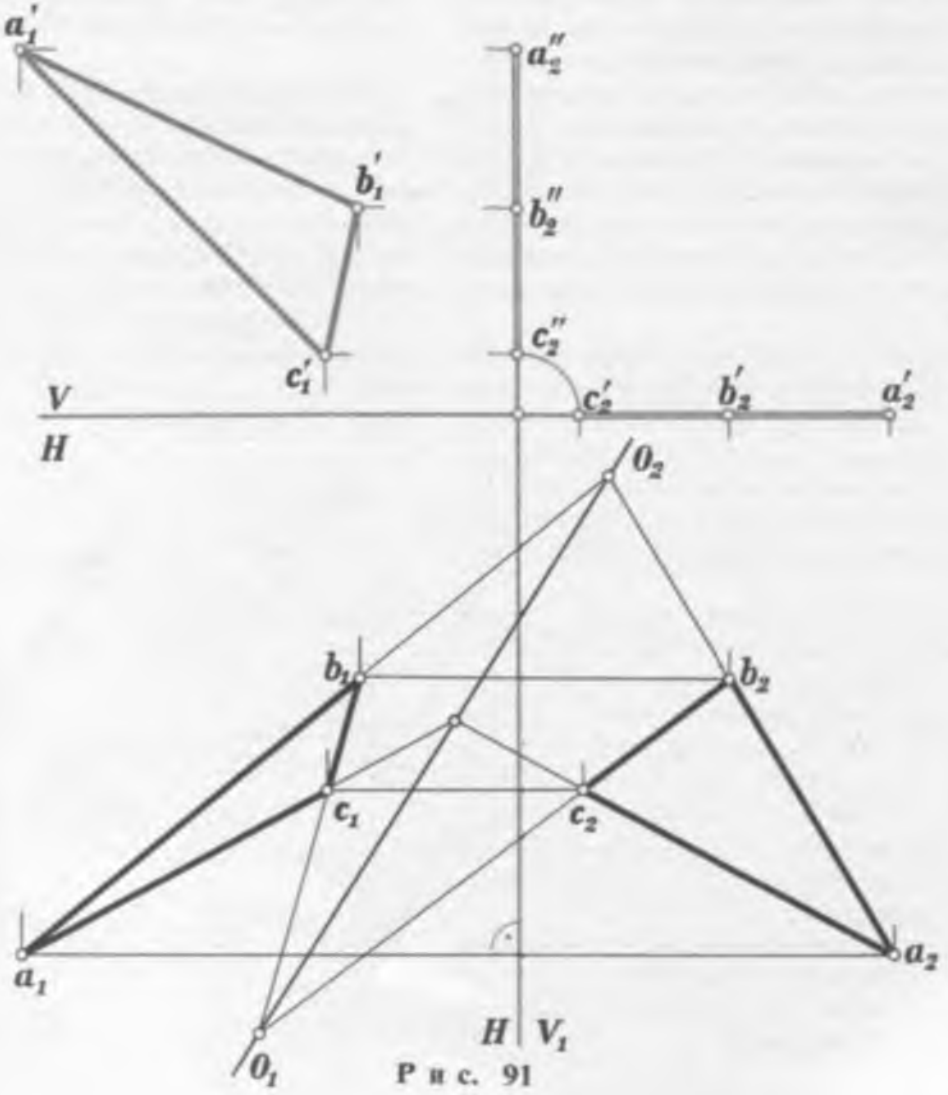


Рис. 91

чертеж — частный случай обобщенного чертежа. Покажем на примерах возможности применения свойств обобщенных чертежей к решению позиционных задач.

На рис. 91 обобщенный чертеж треугольника $a_1b_1c_1$, $a_2b_2c_2$ преобразован в ортогональный $a_1b_1c_1$, $a_1'b_1'c_1'$. За плоскость проекций обобщенного чертежа здесь принята плоскость H. Вводим две новые плоскости проекций: плоскость V_1, перпендикулярную к направлению обобщения, и плоскость V, перпендикулярную к плоскости H и параллельную направлению обобщения. Путем вращения вокруг следа $\frac{V_1}{H}$ совместим проекцию $a_2b_2c_2$ треугольника с плоскостью V_1. В совмещенном положении треугольник представляется проекцией $a_2''b_2''c_2''$.

Из вершин этого треугольника и треугольника $a_1b_1c_1$ восставляем перпендикуляры к их плоскостям. Определим некоторый треугольник пространства, проекцией которого на плоскости V является треугольник $a_1'b_1'c_1'$. Из этих построений видно, что обобщенный чертеж треугольника $a_1b_1c_1$, $a_2b_2c_2$ можно рассматривать как ортогональный осный чертеж в системе плоскостей проекций H и V_1.

Обозначения точек геометрических образов на обобщенном чертеже примем такие же, как и на ортогональных. При переходе от ортогонального чертежа к обобщенному построим основную линию обобщения — геометрическое место точек пересечения разноименных проекций прямых линий плоскости.

На рис. 92 построена основная линия обобщения чертежа плоскости abc, $a'b'c'$, заданной главными линиями. На пересечении разноименных проекций прямых (горизонтали и фронтали) найдены точки $11'$ и $22'$. Эти точки определяют искомую прямую — основную линию O_1O_2 обобщения чертежа. Для проецирующих плоскостей основной линией обобщения является соответствующий след плоскости.

На обобщенных чертежах прямые линии и точки в плоскости выбирают по тем же условиям и теми же приемами, как для ортогональных чертежей:

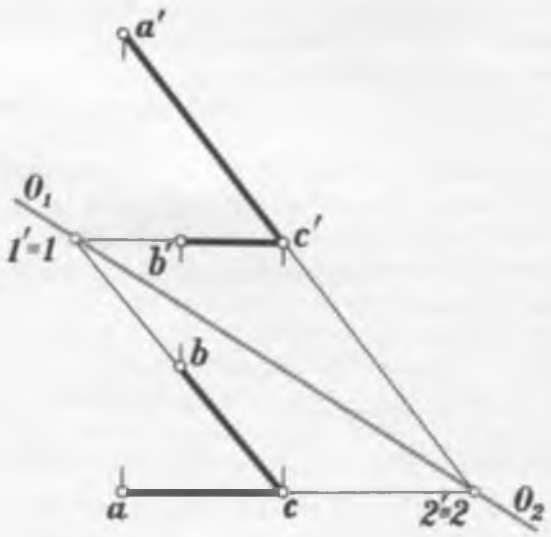


Рис. 92

На рис. 93 прямые de, $d'e'$ и rt, $r't'$ принадлежат плоскости abc, $a'b'c'$. Прямая de, $d'e'$ принадлежит плоскости по условию что она параллельна прямой bc, $b'c'$ плоскости и пересекается в точке $33'$ с основной линией O_1O_2 обобщения чертежа. Прямая линия rt, $r't'$ также принадлежит плоскости abc, $a'b'c'$. Она проходит через две точки плоскости: пересекается в точке tt' с прямой линией bc, $b'c'$, а в точке $44'$ с основной линией O_1O_2 чертежа.

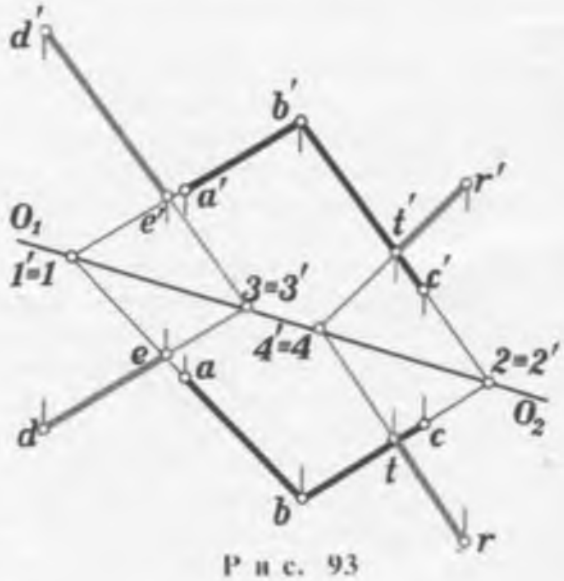


Рис. 93

При решении позиционных задач на обобщенных чертежах, как и на чертежах ортогональных, можно применять метод вспомогательных проецирующих плоскостей.

На обобщенном чертеже каждую из проекций прямой линии можно рассматривать как линию пересечения плоскости чертежа проецирующей плоскостью. Обозначим M и N следы проецирующих плоскостей обобщенного чертежа, причем след M проецирующей плоскости относится к проекциям точек чертежа со штрихом ($'$). След N проецирующей плоскости относится к проекциям точек чертежа без штриха.

На рис. 94 показано построение линии пересечения двух плоскостей — abc, $a'b'c'$ и edk, $e'd'k'$. Основные линии чертежей заданных плоскостей пересекаются в точке xx'. Точка xx' принадлежит линии пересечения плоскостей.

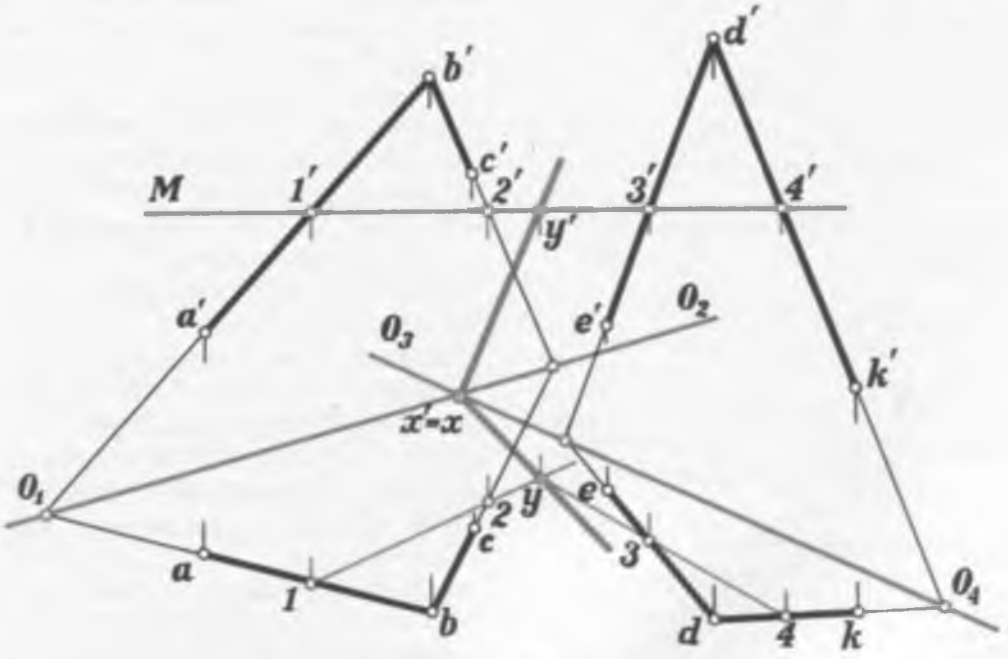
Другую общую для двух плоскостей точку yy' найдем, если введем вспомогательную секущую плоскость. Секущая проецирующая плоскость M пересекает плоскость abc, $a'b'c'$ по прямой 12, $1'2'$, а плоскость dek, $d'e'k'$ — по прямой 34, $3'4'$. Эти прямые плоскости M пересекаются в точке yy'. Прямая линия xy, $x'y'$ является искомой линией пересечения плоскостей.

Если основные линии заданных плоскостей взаимно параллельны, то и линия пересечения плоскостей параллельна им.

Пусть плоскости abc, $a'b'c'$ и edk, $e'd'k'$ имеют параллельные основные их линии O_1O_2 и O_3O_4 (рис. 95). Для построения линии пересечения заданных плоскостей достаточно определить одну общую для них точку, так как направление искомой линии известно. Введем вспомогательную секущую плоскость M. Она пересекает заданные плоскости по прямым 12, $1'2'$ и 34, $3'4'$, которые пересекаются в точке xx'. Проводя через точку xx' прямую xy, $x'y'$, параллельную направлению основных линий, получаем искомую линию пересечения заданных плоскостей.

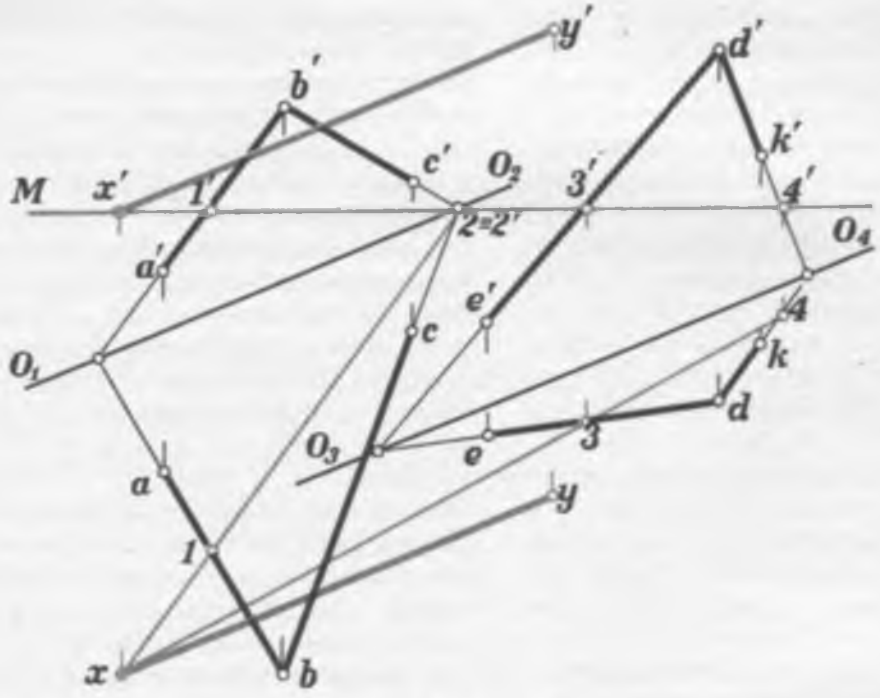
Две плоскости взаимно параллельны, если параллельны их основные линии и если чертежи этих плоскостей имеют общий показатель обобщения.

Рассмотрим примеры построения недостающих проекций треугольников, удовлетворяющих определенным заданным условиям. Предварительно на прямой линии



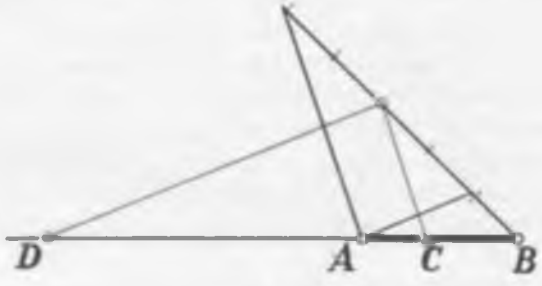
Р и с. 94

70

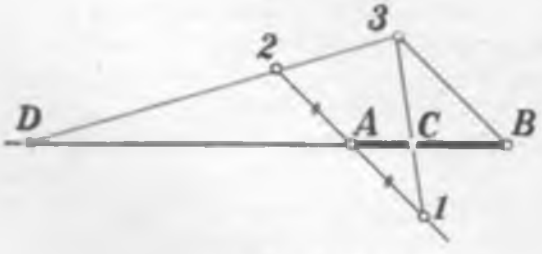


Р и с. 95

построим гармонически расположенные точки и на обобщенном чертеже прямые углы.



Р и с. 96



Р и с. 97

Пусть отрезок AB (рис. 96) прямой линии разделен точками C и D внутренним и внешним делением в отношении:

$$\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB} = \frac{2}{3}.$$

Точки A, B, C и D в этом случае называют *гармонически расположенными*, а точки C и D — *гармонически сопряженными* относительно отрезка AB*.

На рис. 97 точка D, гармонически сопряженная с точкой C относительно отрезка AB, найдена следующим образом. Через концы A и B прямой линии AB проведем параллельные прямые $A1$ и $B3$. На прямой $A1$ отложим равные отрезки $A1$ и $A2$. Находим точку 3 на пересечении прямых $C1$ и $B3$. Прямая 32 пересекается прямой AB в искомой точке D.

* От греч. ἁρμονία — связь. Расположение четырех точек прямой, при котором две точки делят отрезок, составленный двумя другими точками, внутренне или внешне, в одном и том же отношении.

Точки, гармонически сопряженные с точками относительно некоторого отрезка, можно найти, основываясь на известной теореме:

Т е о р е м а. *Биссектрисы внутреннего и внешнего углов треугольника делят противолежащую сторону на части, пропорциональные прилегающим к ним сторонам* (рис. 98).

Через точки A и B проведем дугу окружности произвольного радиуса и разделим ее точкой 1 пополам. Находим точку 2 пересечения прямой $1C$ с окружностью. Как видно, $\angle A2C = \angle B2C$.

В точке 2 восставляем перпендикуляр к прямой $2C$ и отмечаем точку D его пересечения с прямой AB.

По теореме имеем:

$$AC : CB = A2 : B2$$

или

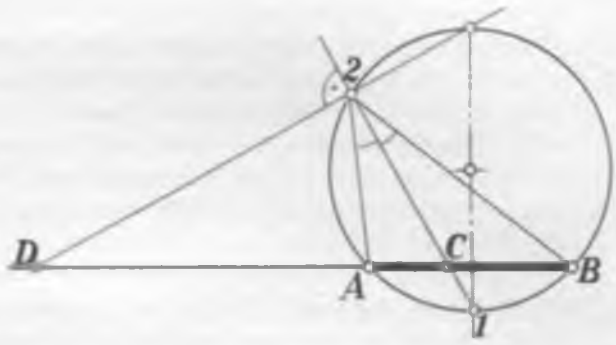
$$AC : CB = AD : DB.$$

Таким образом, точка D является гармонически сопряженной с точкой C относительно отрезка AB.

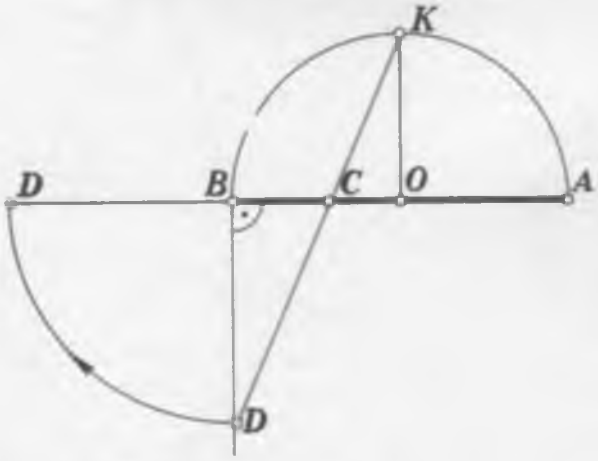
На рис. 99 показан также прием построения точки D, сопряженной с точкой C относительно отрезка AB. На отрезке AB, как на диаметре, строим дугу окружности и определяем точку K пересечения окружности с перпендикуляром к AB в центре O этой окружности. Проводим прямую KC до пересечения ее в точке D с перпендикуляром BD, восставленным к прямой AB в точке B. Точку D по дуге окружности радиусом BD переносим на прямую AB. Эта точка является искомой.

Приведенные выше построения дают возможность определить геометрическое место вершин углов, биссектрисы которых проходят через точку C, а стороны — через точки A и B (рис. 100). Строим точку D, гармонически сопряженную с точкой C по отношению отрезка AB.

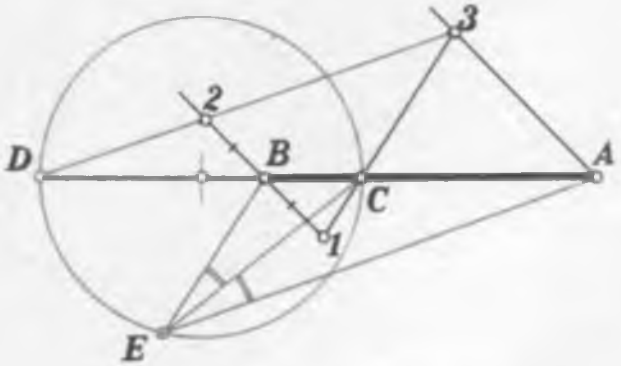
На отрезке CD, как на диаметре, строим окружность. Любая точка E этой окружности является вершиной угла, для которого прямая CE — биссектриса.



Р и с. 98

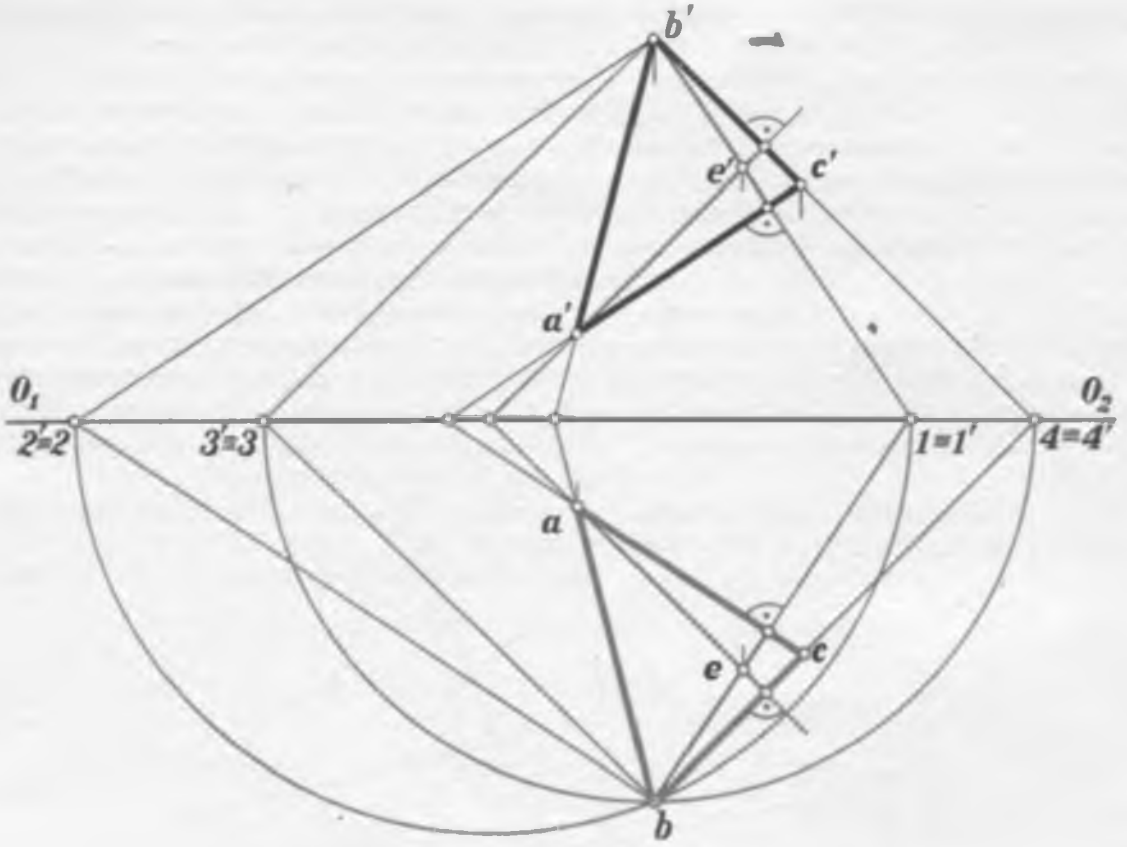


Р и с. 99



Р и с. 100

74



Р и с. 103

ствовали две высоты треугольника *abc* (рис. 103).

Р е ш е н и е. Построим высоты треугольника *a'b'c'* при вершинах *b'* и *a'*; продолжим их и стороны этого треугольника до пересечения с основной линией обобщения. Через точку *b'* проводим также прямые, параллельные стороне *a'c'* и высоте *a'e'*. На отрезках *12* и *34*, как на диаметрах, строим окружности.

Углы *2'b'1'* и *2b1*, а также *3'b'4'* и *3b4* — прямые. Поэтому точка *b* находится в точке пересечения построенных окружностей. По точке *b* определяют направление обобщения и остальные вершины треугольника.

Вопросы для самопроверки

1. В чем состоит принцип двойного параллельного проецирования на одну плоскость?
2. Какое соответствие называют родственным?
3. Какие чертежи называют обобщенными?
4. Что называют основной линией обобщенного чертежа и как ее определяют?
5. Что называют показателем обобщения?
6. Можно ли ортогональные чертежи рассматривать как обобщенные? Если можно, то почему?
7. Какие точки прямой называют гармонически расположенными и какие гармонически сопряженными?

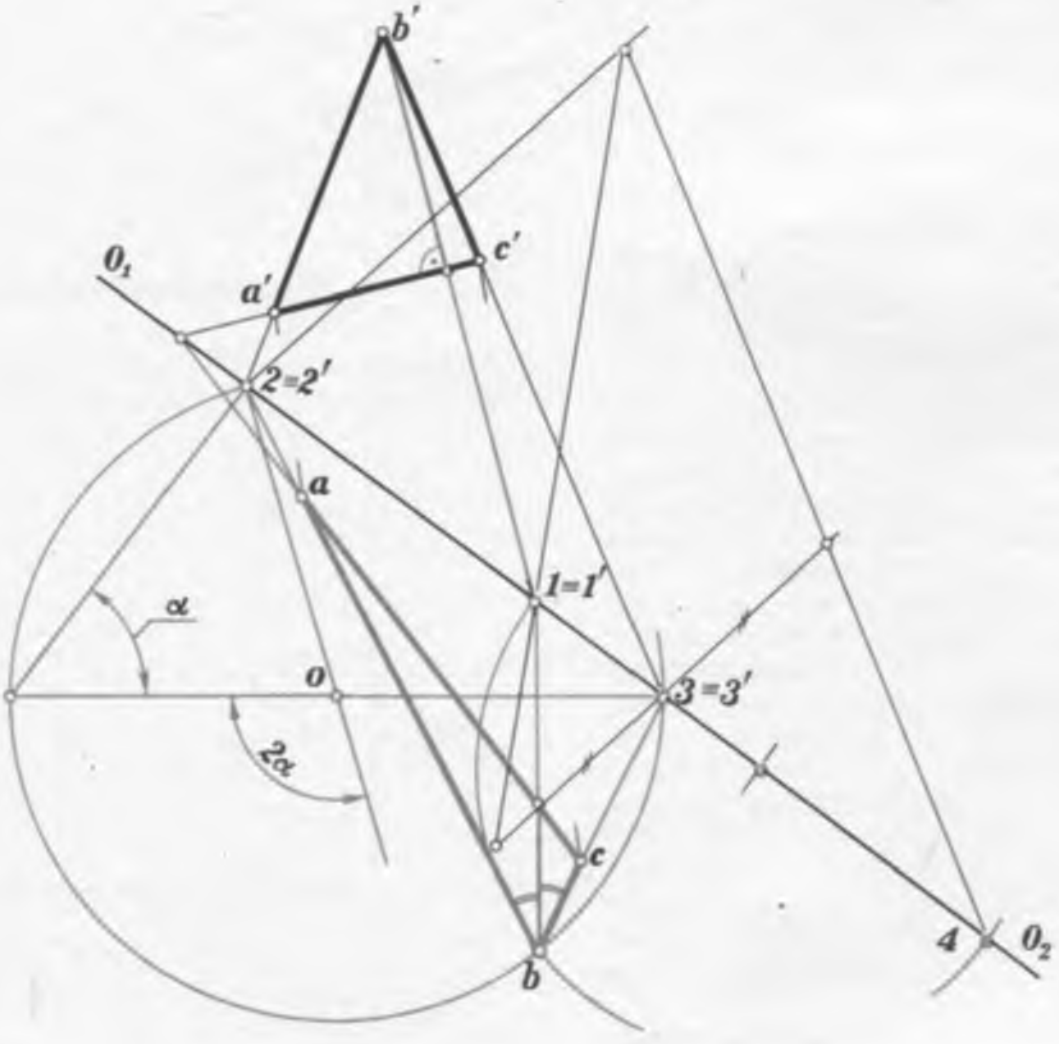
72

Рассмотрим несколько примеров.

Пример. По известной линии обобщения построить недостающую проекцию *abc* треугольника *abc*, *a′b′c′* при условии, чтобы угол при вершине *b* равнялся заданному углу α, а биссектриса этого угла соответствовала высоте треугольника *a′b′c′* при вершине *b′* (рис. 101).

Р е ш е н и е. Высоту при вершине *b′* и стороны треугольника *a′b′c′* продолжим до пересечения их с основной линией обобщения. Проекции *ab* и *bc* сторон, а также биссектриса угла при вершине *b* пройдут через полученные точки *22′*, *33′* и *11′*.

На отрезке *23* строим равнобедренный треугольник *2o3*, имеющий угол 2α при вершине *o*. Из точки *o*, как из центра, радиусом *o2* описываем окружность. Эта окружность является геометрическим местом вершин всех треугольников, имеющих углы α и общую сторону *23*. Определяем точку *4*, гармонически сопряженную с точкой *1* относительно отрезка *23*, и на отрезке *14*, как на диаметре, строим окружность углов.



Р и с. 101

ГЛАВА V

СПОСОБЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОЕКЦИОННОГО ЧЕРТЕЖА

Две ортогональные проекции геометрического образа определяют его положение в пространстве. Однако произвольное положение такого геометрического образа относительно плоскости проекций не всегда удобно для решения ряда позиционных и метрических задач. Здесь происходит искажение в проекциях проецируемых форм, отсутствует необходимая наглядность как объекта в целом, так и отдельных его элементов.

Во многих случаях решение задач значительно упрощается, если прямые линии и плоскости геометрического образа являются проецирующими относительно плоскостей проекций.

Различные требования к чертежу, а также необходимые условия для упрощения решения ряда позиционных и метрических задач требуют построения новых, дополнительных проекций, исходя из двух заданных. Дополнительные проекции позволяют получить либо вырожденные проекции отдельных элементов, либо их натуральные величины. Построение новых, дополнительных проекций называют *преобразованием* чертежа. Такое преобразование может быть выполнено следующими способами:

переменой (заменой) плоскостей проекций с условием, что рассматриваемый объект или его элементы займут одно из частных положений относительно новой плоскости проекций;

перемещением (вращением) геометрического образа в пространстве так, чтобы он занимал, согласно условию поставленной задачи, какое-то частное положение относительно плоскости проекций;

переменой направления проецирования как с оставлением существующей системы плоскостей проекций, так и с одновременным введением новой плоскости проекций.

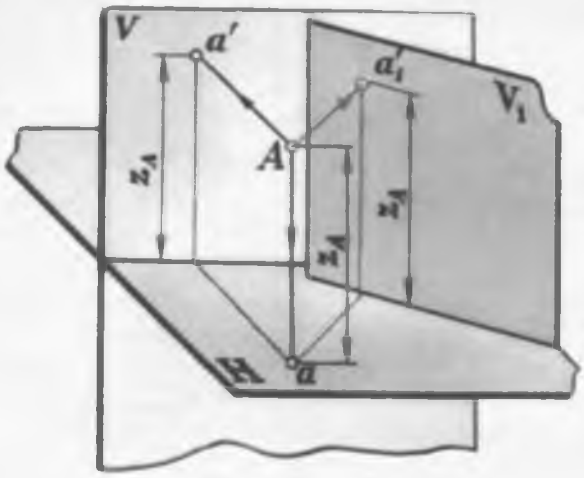
Рассмотрим эти способы преобразования чертежей геометрических образов и покажем их практическое применение.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПРОЕКЦИОННОГО ЧЕРТЕЖА СПОСОБОМ ЗАМЕНЫ ПЛОСКОСТЕЙ ПРОЕКЦИЙ

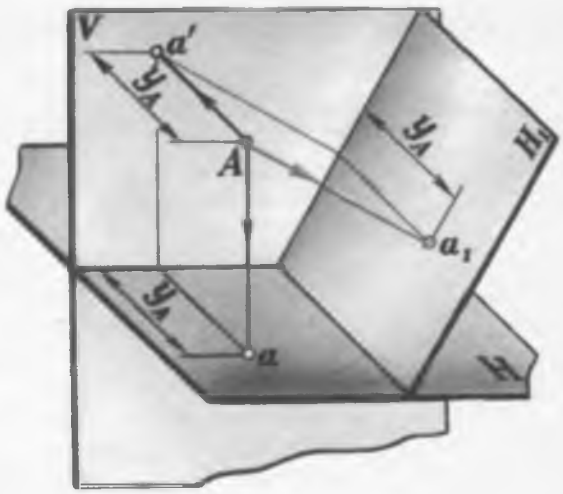
§ 26

Ортогональные проекции на две взаимно перпендикулярные основные (горизонтальную и фронтальную) плоскости проекций позволяют видеть предмет сверху и спереди. Однако в некоторых случаях предмет необходимо видеть и с других сторон.

При решении геометрических задач заданный чертеж не всегда может быть удоб-



Р и с. 104



Р и с. 105

ным. Иногда необходимо строить дополнительные чертежи, которые могут быть или результатом решения поставленной задачи, или результатом ее упрощения. Такие чертежи предмета могут быть построены способом перемены (замены) плоскостей проекций. При этом предмет в пространстве остается неизменным. Изменяют положения плоскости проекций; при этом всегда сохраняется взаимная перпендикулярность двух плоскостей проекций.

Одна из плоскостей проекций является общей для двух систем плоскостей проекций. Пользуясь данными чертежа геометрического образа в основной системе плоскостей проекций, легко построить его чертеж в дополнительной системе. Все свойства геометрического образа, отнесенные к основной системе, справедливы и для дополнительной системы плоскостей проекций.

Пусть заданы точка A и система двух взаимно перпендикулярных плоскостей проекций H и V (рис. 104). Ортогональными проекциями точки A на плоскостях H и V являются a и a'.

Возьмем дополнительную плоскость проекций V_1, перпендикулярную к плоскости H, и спроецируем точку A на эту плоскость; проекцией будет a_1'. Получаем две системы плоскостей проекций: основную H и V и дополнительную H и V_1.

Положение точки A в пространстве определяется двумя ее проекциями a и a' в основной системе плоскостей проекций и a и a_1' — в дополнительной системе плоскостей проекций. При переходе от одной системы плоскостей проекций к другой системе видим, что аппликата z_A точки A и ее горизонтальная проекция a остаются инвариантными (неизменными). Это связано с условием, что плоскость проекций H остается неподвижной, т. е. не изменяет своего положения. Эта плоскость является общей для двух систем плоскостей проекций.

На рис. 105 дополнительную систему плоскостей проекций определяют две взаимно перпендикулярные плоскости V и H_1.

Переход от одной системы плоскостей проекций к другой легко проследить и на ортогональном чертеже (рис. 106). Точка aa' задана проекциями a и a' в системе плоскостей проекций $\frac{V}{H}$. Дополнительно построенная ось проекций определяет положение горизонтально-проецирующей плоскости V_1 и определяет на чертеже дополнительную систему плоскостей проекций $\frac{V_1}{H}$.

Проекция a_1' точки A на плоскости V_1 определяется на перпендикуляре к дополнительной оси и отстоит от нее на величину z_A, равную расстоянию от точки A до горизонтальной плоскости проекций H. Величину z_A легко определить из основного чертежа.

Замена одной из плоскостей проекций не всегда может разрешить поставленную задачу. Иногда приходится менять две и более плоскостей.

Пример. Определить расстояние от точки kk' до прямой ab, $a'b'$ (рис. 107).

Р е ш е н и е. Расстояние от точки до прямой определяем отрезком перпендикуляра, опущенного из точки на прямую. Выбираем систему плоскостей проекций, где отрезок ab, $a'b'$ является проецирующим относительно какой-то плоскости проекций. Перпендикуляр, опущенный из точки на такую прямую, параллелен плоскости проекций и проецируется на эту плоскость в натуральную величину.

Чтобы выбрать плоскость проекций перпендикулярно к отрезку прямой произвольного положения, необходимо произвести две замены плоскостей проекций.

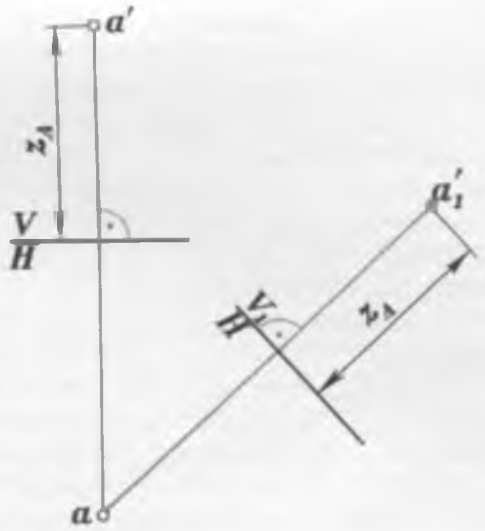
В системе плоскостей проекций $\frac{V_1}{H}$ прямая параллельна плоскости проекций V_1 и проецируется на нее в натуральную величину $(a_1'b_1')$.

В системе плоскостей проекций $\frac{V_1}{H_1}$ прямая перпендикулярна к плоскости проекций H_1 и проецируется на нее в виде точки $a_1 \equiv b_1$.

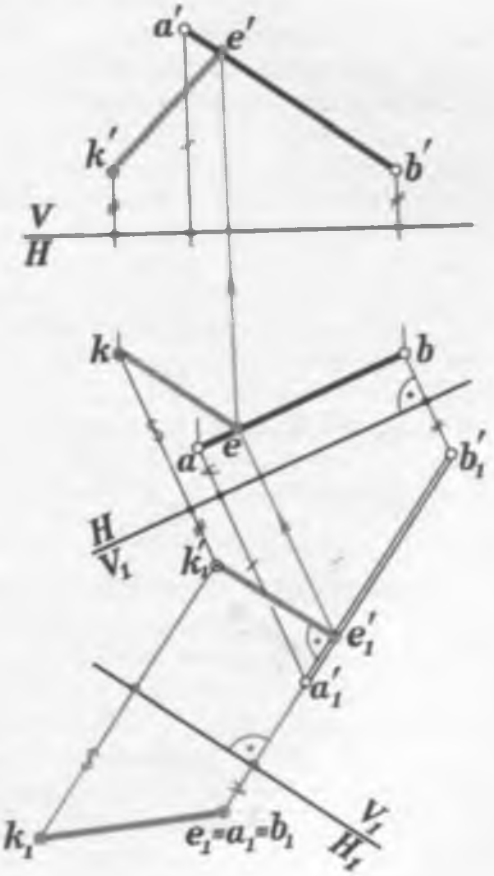
На этой же плоскости проекций соответствующими построениями определяем проекцию k_1 заданной точки kk'.

Проекция k_1e_1 является натуральной величиной расстояния от точки kk' до прямой ab, $a'b'$.

Проекции ke и $k'e'$ перпендикуляра ke, $k'e'$ в основной системе плоскостей проекций определяем соответствующими построениями, переходя от конечной системы плоскостей проекций к начальной.



Р и с. 106



Р и с. 107

78

Пример. Определить расстояние между параллельными прямыми ab, $a'b'$ и cd, $c'd'$ (рис. 108).

Р е ш е н и е. Задачу решаем способом двойной замены плоскостей проекций. Одну из плоскостей проекций выбираем перпендикулярно к данным прямым. Проекции прямых на плоскость, им перпендикулярную, преобразуются в точки. Расстояние между ними определяет расстояние между прямыми.

Выбирая плоскость V_1 параллельно прямым ab, $a'b'$ и cd, $c'd'$, определяем их дополнительные проекции $a_1'b_1'$ и $c_1'd_1'$.

Выбирая плоскость H_1 перпендикулярно к прямым, определяем их проекции a_1b_1 и c_1d_1.

На плоскость H_1 прямые проецируются в точки.

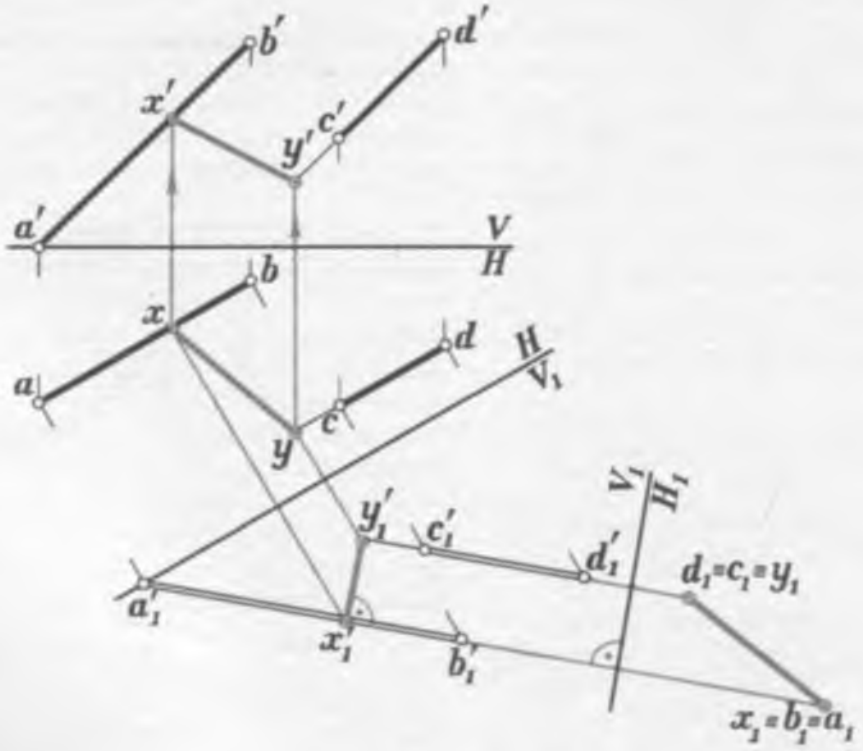
Перпендикуляр, опущенный из любой точки одной прямой на другую, проецируется на плоскость проекций H_1 без искажения. Он и определяет расстояние между прямыми. Намечая новую проекцию x_1y_1 перпендикуляра, обратными построениями находим его основные проекции xy, $x'y'$.

Способом замены плоскостей проекций определим натуральную величину плоского геометрического образа, заданного треугольником abc, $a'b'c'$ в горизонтально-проецирующей плоскости N_H (рис. 109).

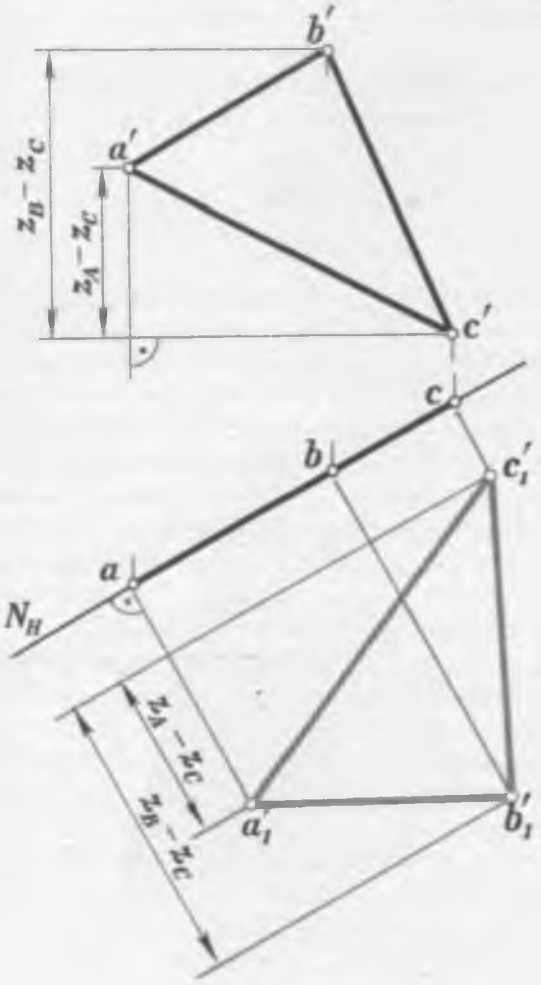
Выбираем дополнительную горизонтально-проецирующую плоскость проекций V_1 параллельно плоскости геометрического образа. Направления проецирования (линии связи) точек геометрического образа на чертеже составляют прямой угол со следом N_H его плоскости.

Пусть горизонтальная базовая плоскость отсчета проходит через точку cc'. Проведем линию отсчета и отметим величины $z_A - z_C$ и $z_B - z_C$ разностей аппликат вершин треугольника.

На новом (дополнительном) направлении проецирования точки cc' произвольно



Р и с. 108



Р и с. 109

намечаем точку c_1' — проекцию точки cc' на выбранную плоскость проекций. Перпендикулярно к линиям связи проводим линию отсчета.

На направлениях проецирования других точек aa' и bb' заданного геометрического образа от линии отсчета откладываем соответствующие им величины $z_A - z_C$ и $z_B - z_C$ разностей аппликат. Определяем точки a_1' и b_1'. Проекция $a_1'b_1'c_1'$ представляет собой натуральную величину треугольника abc, $a'b'c'$.

Если отсек плоскости занимает произвольное положение относительно плоскостей проекций, то натуральная величина определяется с помощью замен двух плоскостей проекций. Дополнительно к основному чертежу последовательно строятся два чертежа отсека плоскости.

Первый дополнительный чертеж представляет собой положение отсека плоскости в проецирующей плоскости; второй (с помощью известных построений) определяет натуральную величину отсека плоскости.

Рассмотрим построение первого дополнительного чертежа.

Пусть отсек произвольно расположенной плоскости представляется треугольником abc, $a'b'c'$ (рис. 110). В плоскости треугольника строим горизонталь $b1$, $b'1'$ или фронталь $b2$, $b'2'$.

Если дополнительная плоскость проекций перпендикулярна к горизонтали, то треугольник перпендикулярен к этой плоскости проекций, т. е. он занимает положение проецирующей плоскости.

Если дополнительная плоскость проекций перпендикулярна к фронтали, то треугольник перпендикулярен к этой плоскости проекций и занимает также относительно ее положение проецирующей плоскости.

При перезадании плоскости из общего положения в проецирующую горизонталь и фронталь плоскости указывают направления дополнительных плоскостей проекций.

На чертеже горизонтальная проекция $b1$ горизонтали $b1$, $b'1'$ определяет направление проецирования в дополнительной системе плоскостей проекций $\frac{V_1}{H}$. На соответствующем направлении проецирования (линии связи) намечаем проекцию c_1' точки cc'. Перпендикулярно к линиям связи строим линию отсчета. Пользуясь разностью $z_B - z_C$ аппликат точек bb' и cc', строим дополнительную проекцию b_1' точки bb'.

Проекции c_1' и b_1' точек cc' и bb' определяют положение следа M_{V1} плоскости, которая является проецирующей относительно плоскости проекций V_1. Угол α наклона следа M_{V1} плоскости к направлению оси проекций $\left(\frac{V_1}{H}\right)$ является углом наклона плоскости

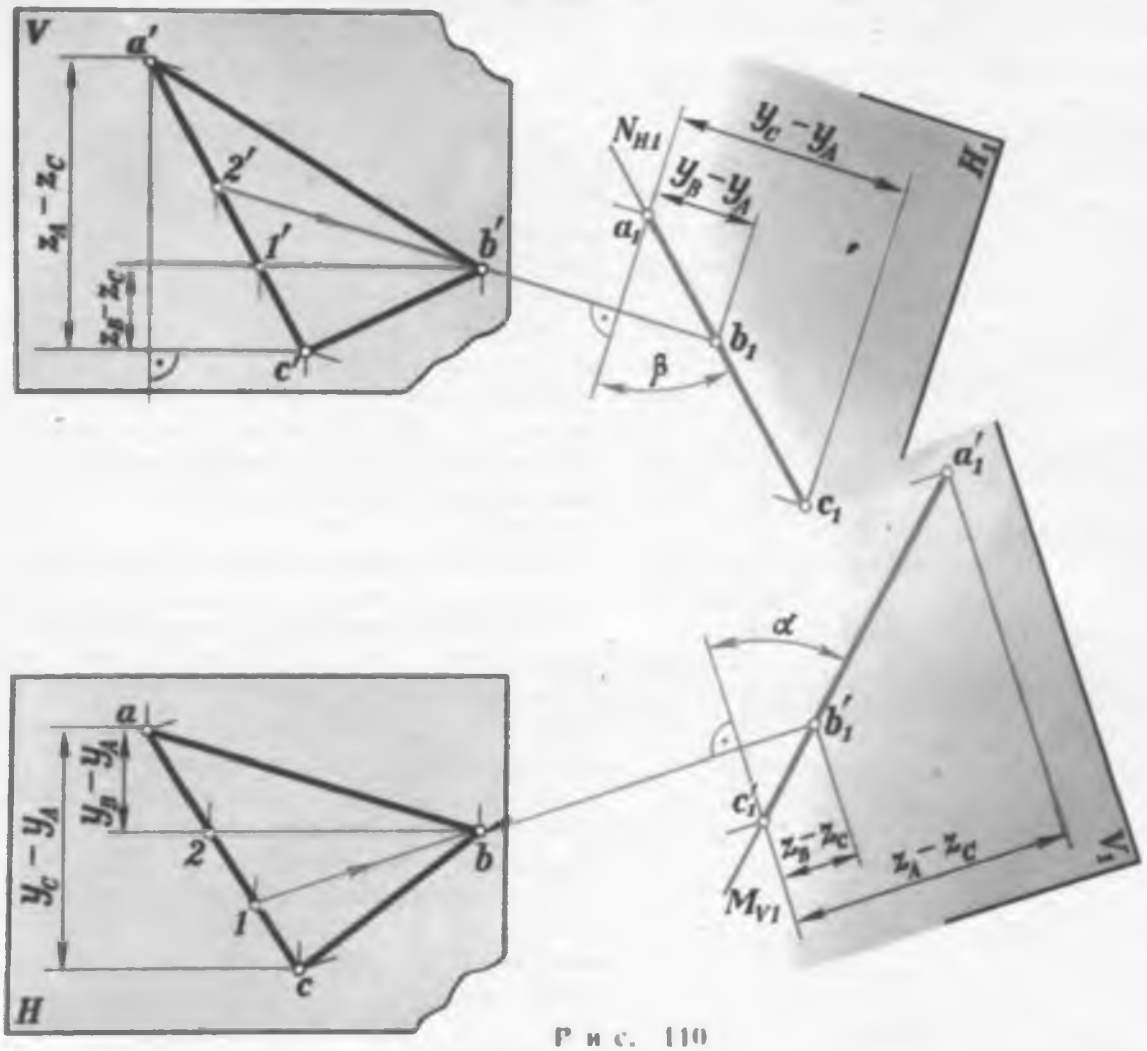


Рис. 110

данного отсека к горизонтальной плоскости проекций H.

На чертеже фронтальная проекция $b'2'$ фронтали $b2$, $b'2'$ определяет направление проецирования в системе плоскостей проекций $\frac{V}{H_1}$.

На соответствующей линии связи намечаем проекцию a_1 точки aa'. Строим линию отсчета. Пользуясь разностью ординат $y_B - y_A$ — разностью удалений вершин треугольника от фронтальной плоскости проекций V, — строим проекцию b_1 точки bb'.

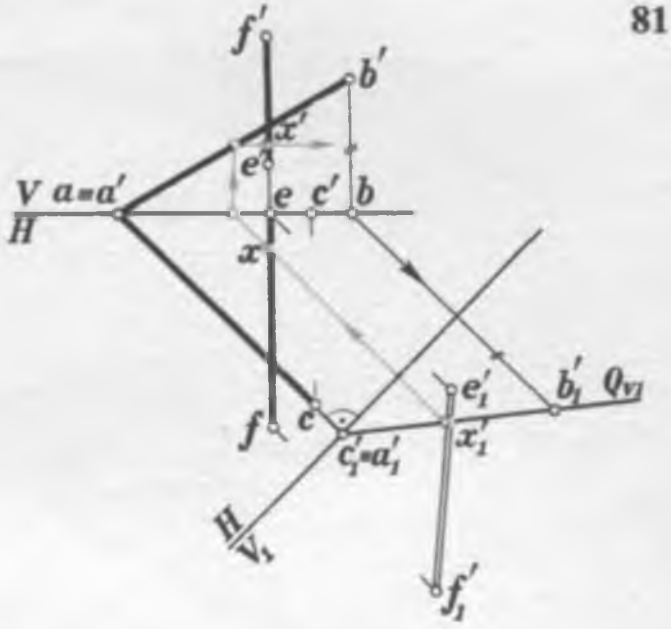
Проекции a_1 и b_1 точек aa' и bb' определяют положение следа N_{H1} плоскости. Получаем чертеж плоскости, проецирующей относительно плоскости проекций H_1. Угол β наклона следа N_{H1} плоскости к направлению оси проекций $\left(\frac{V}{H_1}\right)$ является углом наклона плоскости данного отсека к фронтальной плоскости проекций V.

Таким образом, для того *чтобы произвольно расположенную плоскость представить проецирующей плоскостью, за направление плоскости проекций следует принять*

направление горизонтали или фронтали данной плоскости.

Пример. Определить точку пересечения прямой *ef*, *e'f'* с плоскостью *abc*, *a'b'c'* (рис. 111).

Р е ш е н и е. Выберем дополнительную систему плоскостей проекций, например $\frac{V_1}{H}$, где заданная плоскость является проецирующей относительно плоскости V_1. За направление плоскости проекций V_1 выбираем горизонталь *ac*, *a'c'* данной плоскости. Намечаем ось проекций. Она проходит под прямым углом к горизонтали *ac*, *a'c'*. Строим недостающие проекции точек в дополнительной системе плоскостей проекций. Они принадлежат одной прямой — следу Q_{V1} плоскости.



Р и с. 111

Построенная проекция $e_1'f_1'$ прямой *ef*, *e'f'* пересекается следом Q_{V1} плоскости в точке x_1'. Определяем основные проекции *x* и *x'* точки пересечения прямой с плоскостью. Горизонтальная проекция *x* точки пересечения определяется на дополнительной линии связи и горизонтальной проекции *ef* прямой. Фронтальная проекция *x'* принадлежит фронтальной проекции соответствующей горизонтали плоскости.

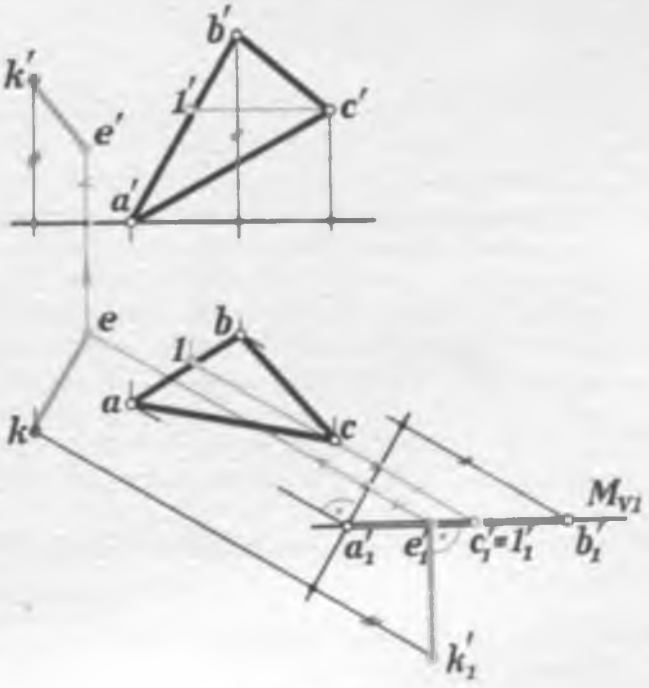
Пример. Определить расстояние от точки *kk'* до плоскости *abc*, *a'b'c'* (рис. 112).

Р е ш е н и е. Расстояние от точки до плоскости определяется отрезком перпендикуляра, опущенного из точки на эту плоскость. Выбираем плоскость проекций V_1 перпендикулярно к плоскости проекций *H* и плоскости *abc*, *a'b'c'*. Известными построениями определяем новую проекцию $a_1'b_1'c_1'$ треугольника и проекцию k_1' точки *kk'*.

Опуская из точки k_1' перпендикуляр на след M_{V1} плоскости, находим отрезок $k_1'e_1'$, равный натуральной величине искомого расстояния от точки *kk'* до плоскости.

Построениями в обратном порядке определяем проекции *ke* и *k'e'* искомого расстояния *ke*, *k'e'* в основной системе плоскостей проекций.

Пример. Построить линию пересечения отсеков плоскостей, заданных треугольни-



Р и с. 112

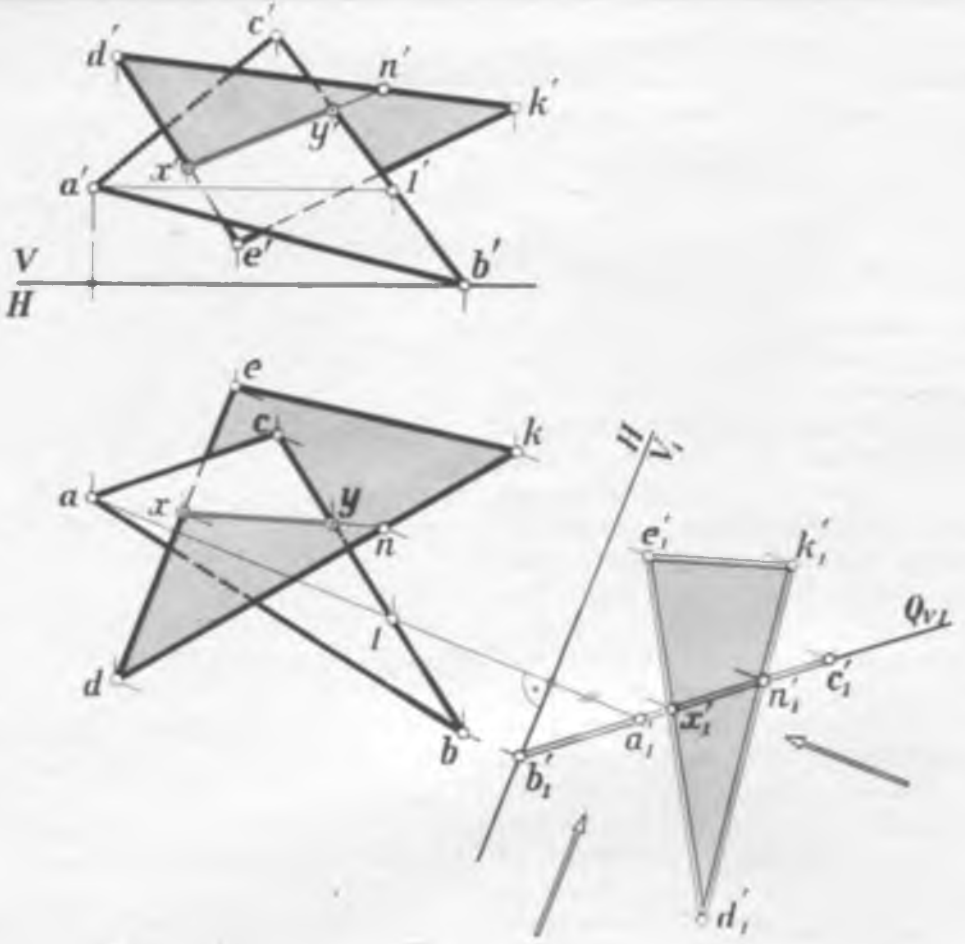


Рис. 113

ками abc, $a'b'c'$ и dek, $d'e'k'$. Определить видимость сторон треугольников (рис. 113).

Решение. Способом замены плоскостей проекций строим дополнительный чертеж треугольников так, чтобы один из треугольников, например abc, $a'b'c'$, являлся бы проецирующим. Направление горизонтали $a1$, $a'1'$ указывает направление плоскости проекций. Определяем новые проекции $a_1'b_1'c_1'$ и $d_1'e_1'k_1'$ треугольников, причем проекция $a_1'b_1'c_1'$ представляется в виде прямой линии. Это будет след плоскости треугольника на перпендикулярной к нему плоскости проекций. Плоскости двух треугольников пересекаются по прямой линии. Одна из проекций этой линии принадлежит следу Q_{V_1} плоскости треугольника abc, $a'b'c'$. Основные проекции xy, $x'y'$ линии пересечения треугольников определяются построениями в обратном порядке, т. е. восстановлением плоскости. Видимость сторон треугольников относительно плоскостей проекций H и V определяем по направлению стрелок методом конкурирующих точек.

§27 ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПРОЕКЦИОННОГО ЧЕРТЕЖА СПОСОБОМ ВРАЩЕНИЯ

1. Вращение вокруг проецирующих прямых линий

Для одного и того же геометрического образа способом замены плоскостей проекций можно построить множество чертежей, выбирая для каждого из них соответствующую систему плоскостей проекций. Способ вращения вокруг проецирующих прямых линий дает возможность строить такое же множество чертежей в одной системе плоскостей проекций. При этом плоскости про-

екций остаются неизменными. Рассматриваемый предмет путем вращения вокруг осей, перпендикулярных к плоскостям проекций, приводится в новое положение. В этом новом положении строят его ортогональные проекции, т. е. строят чертеж предмета.

Геометрически оба способа равноценны, но они выполняются на чертеже различными способами. Способ вращения применяется не только для преобразования проекций. Он широко используется в технике при рассмотрении и исследовании различных вращающихся форм конструкций механизмов и машин.

Весьма важным в инженерной практике является исследование траекторий точек вращающихся элементов конструкций.

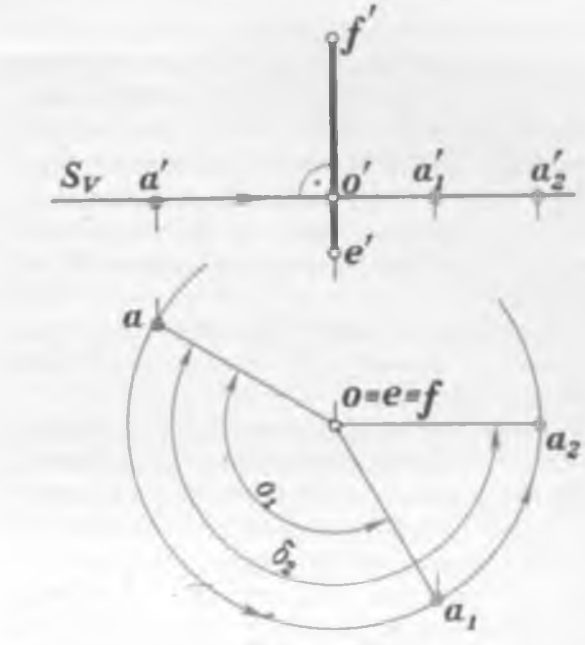
Вращение точки вокруг оси рассмотрим на ортогональном чертеже, когда ось вращения перпендикулярна к плоскости проекций. Если ось занимает произвольное положение относительно плоскостей проекций, задача значительно усложняется.

Пусть точка aa' (рис. 114) вращается вокруг горизонтально-проецирующей прямой ef, $e'f'$. Траекторией точки является окружность, плоскость S_V которой называют *плоскостью перемещения точки*. Плоскость движения точки aa' горизонтальная и перпендикулярна к оси вращения.

Центром вращения точки aa' является точка oo' пересечения плоскости S_V движения осью вращения. Радиус вращения точки aa' определяется отрезком ao, $a'o'$, равным расстоянию от этой точки до оси.

Радиус вращения — горизонтальная прямая линия — проецируется в натуральную величину на горизонтальную плоскость проекций. Зная натуральную величину радиуса вращения точки aa', можно построить ее смещенные проекции a_1a_1', a_2a_2'. Горизонтальные проекции a_1 и a_2 точки aa' перемещаются по дуге окружности, а фронтальные a_1' и a_2' — по горизонтальной прямой — следу S_V плоскости перемещения точки aa'.

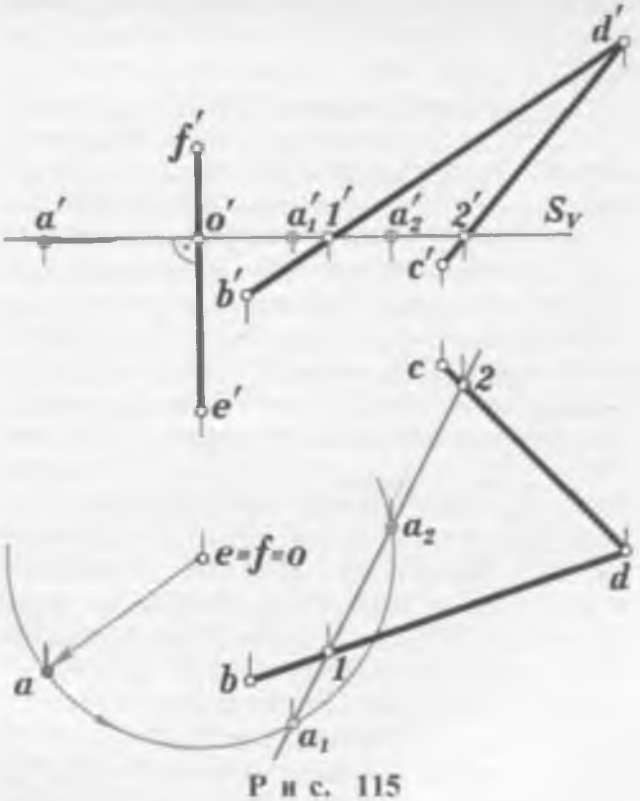
Точка a_1a_1' получается вращением точки aa' вокруг оси против часовой стрелки на угол δ_1. Точка a_2a_2' получается поворотом в том же направлении на угол δ_2.



Р и с. 114

Пример. Вращением вокруг прямой ef, $e'f'$ точку aa' ввести в плоскость bcd, $b'c'd'$ (рис. 115).

Р е ш е н и е. Точка aa' вращается вокруг оси в горизонтальной плоскости S_V; центром



Р и с. 115

вращения является точка oo', радиусом вращения — ao, $a'o'$.

Плоскость S_V пересекает данную плоскость bcd, $b'c'd'$ по горизонтали 12, $1'2'$. Дугу окружности точки aa' пересекает горизонталь 12, $1'2'$ данной плоскости в двух точках a_1a_1' и a_2a_2'. Эти точки определяют искомые положения вращающейся вокруг оси точки aa'.

Вращение какой-либо фигуры вокруг проецирующих прямых сводится к вращению точек этой фигуры.

На рис. 116 методом вращения определена натуральная величина треугольника abc, $a'b'c'$, принадлежащего горизонтально-проецирующей плоскости N_H. Здесь ось вращения — горизонтально-проецирующая прямая, проходящая через вершину aa' треугольника.

Треугольник вращением вокруг оси на угол β доводим до положения, параллельного фронтальной плоскости проекций V.

Все вершины треугольника перемещаем по дугам окружностей, которыми определяются горизонтальные плоскости движения этих точек. След N_{1H} может быть смещенным следом плоскости N_H. За точку наблюдения принята точка cc'. Следом плоскости движения этой точки является S_{CV}; центром вращения является точка oo'; радиус вращения oc, $o'c'$. Натуральная величина радиуса вращения представляется горизонтальной его проекцией oc.

Вращением вокруг оси определяем смещенные проекции c_1 и c_1' точки cc'. Аналогично определяем и смещенные проекции b_1 и b_1' вершины bb' данного треугольника. Треугольник abc, $a'b'c'$ в смещенном положении представляется проекциями ab_1c_1 и $a'b_1'c_1'$; фронтальная проекция $a'b_1'c_1'$ определяет его натуральную величину. Наметим в смещенном положении треугольника точку k_1k_1'. Чтобы определить основные (начальные) проекции этой точки, плоскость треугольника необходимо привести в исходное его положение. Намечаем след S_{KV} плоскости перемещения точки. Фронтальная проекция k' точки kk' находится на этом следе плоскости. Горизонтальная проекция точки перемещается по дуге окружности вокруг центра на угол β до совмещения со следом N_H плоскости треугольника. Имея горизонтальную проекцию k, определяем недостающую фронтальную проекцию k' точки kk'.

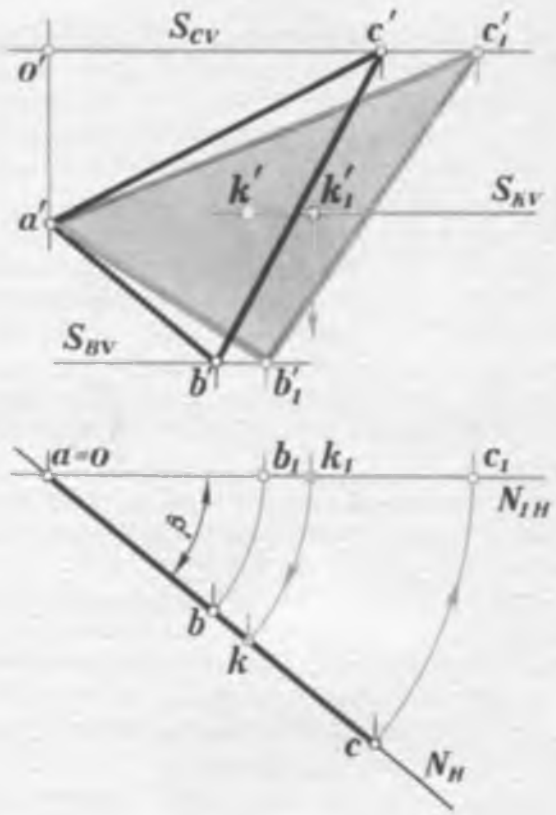
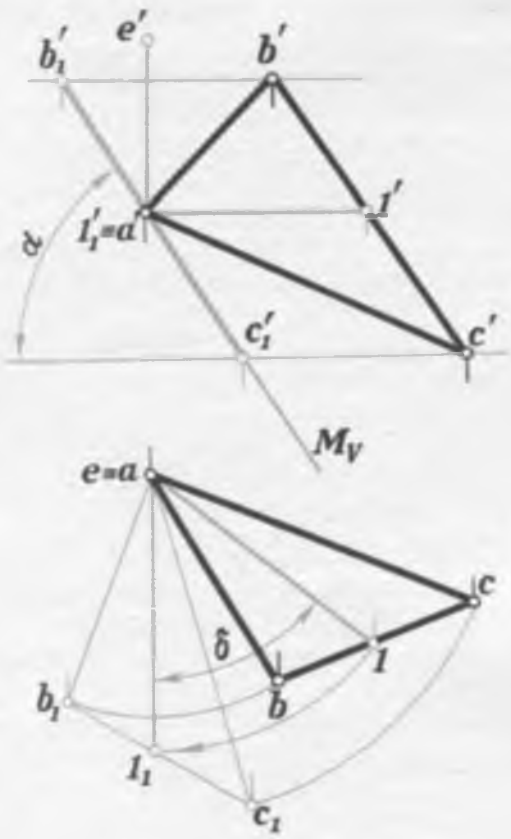


Рис. 116

Покажем прием перевода произвольно расположенной плоскости в горизонтально- или фронтально-проецирующую плоскость. Вращая отсек произвольно расположенной плоскости вокруг проецирующей прямой, можно заметить, что плоскость данного отсека может быть и перпендикулярна к плоскости проекций.

Известно, что две плоскости взаимно перпендикулярны, если прямая линия одной плоскости перпендикулярна к другой плоскости. Учитывая это, можно определить одно из положений вращающейся плоскости, когда она перпендикулярна к плоскости проекций. Выбирая, например, в плоскости отсека горизонталь и вращая отсек вокруг



Р и с. 117

горизонтально-проецирующей прямой, устанавливаем, что угол наклона плоскости к горизонтальной плоскости проекций остается постоянным, а угол наклона к фронтальной плоскости проекций изменяется. Плоскость отсека перпендикулярна к фронтальной плоскости проекций, если горизонталь данного отсека перпендикулярна к фронтальной плоскости проекций.

Угол поворота плоскости вокруг оси определяется углом между начальным и конечным положениями горизонтали этой плоскости. Отсек произвольно расположенной плоскости можно перевести в горизонтально-проецирующую плоскость, вращая вокруг оси, перпендикулярной к фронтальной плоскости проекций.

Выбираем в плоскости отсека фронталь. Вращаем плоскость вокруг фронтально-проецирующей прямой до положения, когда фронталь будет перпендикулярна к горизонтальной плоскости проекций. Устанавливаем, что плоскость данного отсека перпендикулярна к горизонтальной плоскости проекций. Угол поворота плоскости вокруг оси определяется углом между начальным и конечным положениями фронтали плоскости.

Таким образом, для того *чтобы произвольно расположенную плоскость перевести во фронтально-проецирующую, за ось вращения следует принять прямую, перпендикулярную к горизонтальной плоскости проекций H.*

Чтобы перевести произвольно расположенную плоскость в горизонтально-проецирующую плоскость, за ось вращения следует принять прямую, перпендикулярную к фронтальной плоскости проекций V.

На рис. 117 показан пример перевода способом вращения произвольно расположенной плоскости *abc*, *a′b′c′* во фронтально-проецирующую плоскость. За ось вращения принята прямая *ae*, *a′e′*, перпендикулярная к горизонтальной плоскости проекций *H*. Ось проходит через вершину *aa′* треугольника *abc*, *a′b′c′*. Намечена горизонталь *a1*, *a′1′* данной плоскости. Угол поворота плоскости определяется углом *δ* между начальным и конечным положениями горизонтали.

Плоскость отсека перпендикулярна к фронтальной плоскости проекций, если горизонталь ее перпендикулярна к этой плоскости проекций. На чертеже необходимый угол поворота плоскости определяется углом *δ* между горизонтальной проекцией *a1* горизонтали *a1*, *a′1′* и линией связи. На этот угол поворачиваются горизонтальные проекции *b* и *c* вершин *bb′* и *cc′* данного треугольника. Фронтальные проекции *b′* и *c′* перемещаются по горизонтальным прямым линиям — следам плоскостей движения точек *bb′* и *cc′*.

Указанными построениями определяются смещенные горизонтальные b_1 и c_1 и фронтальные b_1' и c_1' проекции вершин треугольника, т. е. данный треугольник представляется проекциями ab_1c_1, $a'b_1'c_1'$ в смещенном положении. В этом новом положении плоскость треугольника является фронтально-проецирующей плоскостью M_V.

Угол наклона отсека плоскости к горизонтальной плоскости проекций определяется

углом α наклона следа M_V плоскости к направлению оси проекций.

2. Плоскопараллельные перемещения

Плоскопараллельное перемещение можно рассматривать как вращение вокруг невыявленных проецирующих прямых. Здесь все точки геометрического образа перемещаются во взаимно параллельных плоскостях.

Теорема. *При плоскопараллельном перемещении геометрического образа одна из его проекций, оставаясь равной самой себе, перемещается в плоскости проекций; другие проекции точек геометрического образа перемещаются по прямым, параллельным направлению оси проекций.*

Пользуясь этой теоремой, можно применить известный способ вращения, не задаваясь изображением оси вращения и не устанавливая величины радиусов вращения точек геометрического образа.

На рис. 118 показано применение способа плоскопараллельного перемещения для определения натуральной величины отсека плоскости, заданного треугольником *abc*, *a′b′c′*. Для этого намечаем в плоскости треугольника горизонталь *a1*, *a′1′*. Горизонтальную проекцию *abc* треугольника перемещаем в положение $a_1b_1c_1$ так, чтобы горизонтальная проекция горизонтали совпала с направлением проецирования. В этом случае гори-

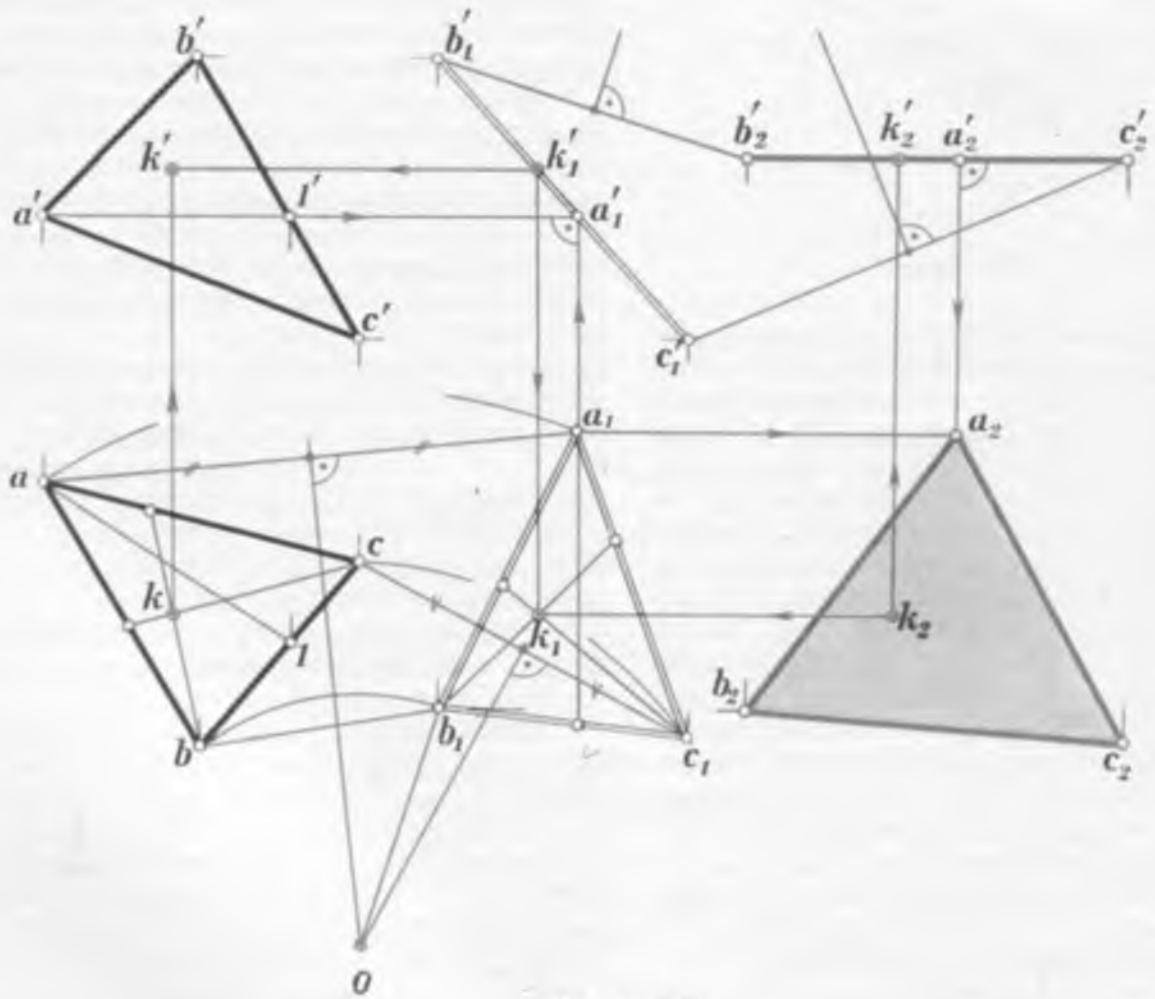


Рис. 118

зонталь перпендикулярна фронтальной плоскости проекций V, а треугольник представляется во фронтально-проецирующей плоскости.

Фронтальной проекцией треугольника в новом положении является прямая $a_1'b_1'c_1'$. Затем перемещаем треугольник в положение, параллельное плоскости проекций H, т. е. перемещаем фронтальную проекцию $a_1'b_1'c_1'$ в положение $a_2'b_2'c_2'$, параллельное направлению оси проекций. Это соответствует тому, что в пространстве треугольник параллелен горизонтальной плоскости проекций H. Проекция $a_2b_2c_2$ представляет собой натуральную величину данного треугольника.

Горизонтальную проекцию $a_1b_1c_1$ треугольника можно получить и поворотом на некоторый угол вокруг центра. Этот центр (точка o) получается на пересечении перпендикуляров, восставленных из середин отрезков aa_1, bb_1 и cc_1.

Фронтальную проекцию $a_2'b_2'c_2'$ (отрезок прямой) можно получить поворотом на некоторый угол вокруг центра o_1' (на чертеже не показано). При этом углы поворота проекций вершин треугольника равны между собой.

Проводя через точку o горизонтально-проецирующую прямую, а через точку o_1' — фронтально-проецирующую прямую и принимая их за оси вращения, можно получить конечное перемещение плоской фигуры, когда она будет параллельна плоскости проекций. На чертеже показаны построения основных проекций k и k' точки kk' плоскости треугольника по заданным ее проекциям k_2 и k_2'.

Плоскопараллельное перемещение имеет перед вращением некоторое преимущество: оно позволяет более свободно располагать проекции геометрических форм, исключать оси вращения и вспомогательные дуги; однако чертеж занимает бо́льшую площадь.

3. Вращение вокруг прямых, параллельных плоскостям проекций

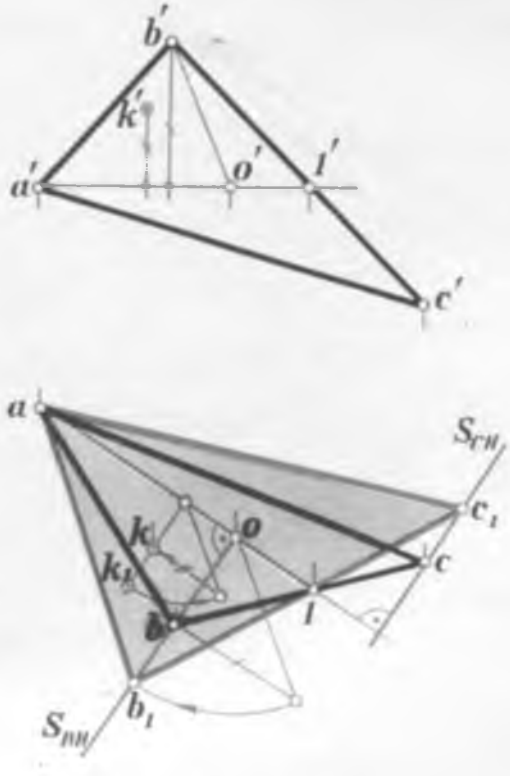
Натуральную величину плоского геометрического образа можно определить вращением вокруг оси, параллельной плоскости проекций. В этом случае геометрический образ одним поворотом вокруг оси можно привести в положение, параллельное плоскости проекций.

На рис. 119 показано определение натуральной величины треугольника abc, $a'b'c'$ вращением вокруг горизонтальной прямой линии этого треугольника — горизонтали. При этом все точки геометрического образа вращаются вокруг оси по окружностям в плоскостях, перпендикулярных к оси.

Когда треугольник занимает положение, параллельное горизонтальной плоскости проекций, радиусы вращения его точек параллельны этой плоскости, т. е. проецируются на плоскость проекций в натуральную величину.

Намечаем ось вращения — горизонталь $a1$, $a'1'$. Вершины bb' и cc' треугольника перемещаются в плоскостях S_{BH} и S_{CH} движения этих точек.

Центром вращения точки bb' является точка oo' пересечения оси вращения плос-



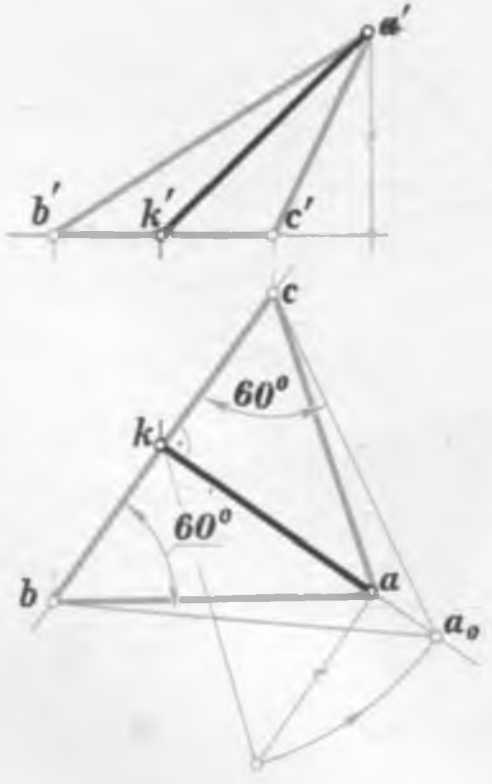
Р и с. 119

костью S_{BH}. Радиус вращения определяется отрезком ob, $o'b'$ — линией наибольшего наклона плоскости к горизонтальной плоскости проекций.

Натуральная величина радиуса вращения определена способом построения прямоугольного треугольника.

От центра oo' вращения точки bb' по направлению следа плоскости ее движения откладываем натуральную величину радиуса вращения. Отмечаем горизонтальную проекцию b_1 точки bb', смещенной до плоскости уровня. Точка aa' находится на оси вращения. Она не изменяет своего положения при вращении треугольника. Смещенную проекцию c_1 точки cc' определяем аналогичными построениями. Однако можно исходить и из условия, что точка c_1 принадлежит прямой $b_1 l$ и следу плоскости S_{CH} движения этой точки.

Смещенная горизонтальная проекция ab_1c_1 определяет на чертеже натуральную величину треугольника abc, $a'b'c'$.



Р и с. 120

Пользуясь указанными построениями, но в обратном порядке, определяем основные проекции k и k' точки kk', произвольно помеченной в смещенном положении треугольника.

Пример. Построить равносторонний треугольник, если отрезок ak, $a'k'$ является линией наибольшего наклона плоскости к горизонтальной плоскости проекций и высотой треугольника (рис. 120).

Р е ш е н и е. Отрезок ak, $a'k'$, как линия наибольшего ската плоскости, составляет прямой угол с горизонталью плоскости. Проводим горизонталь через точку kk'. Вращением вокруг горизонтали определяем истинную величину данного отрезка.

Из точки a_0a_0' проводим две прямые под углом 60° к горизонтали. Они пересекают горизонталь в точках bb' и cc' и являются сторонами равностороннего треугольника. Строим основные проекции ac, $a'c'$ и ab, $a'b'$ сторон искомого равностороннего треугольника abc, $a'b'c'$.

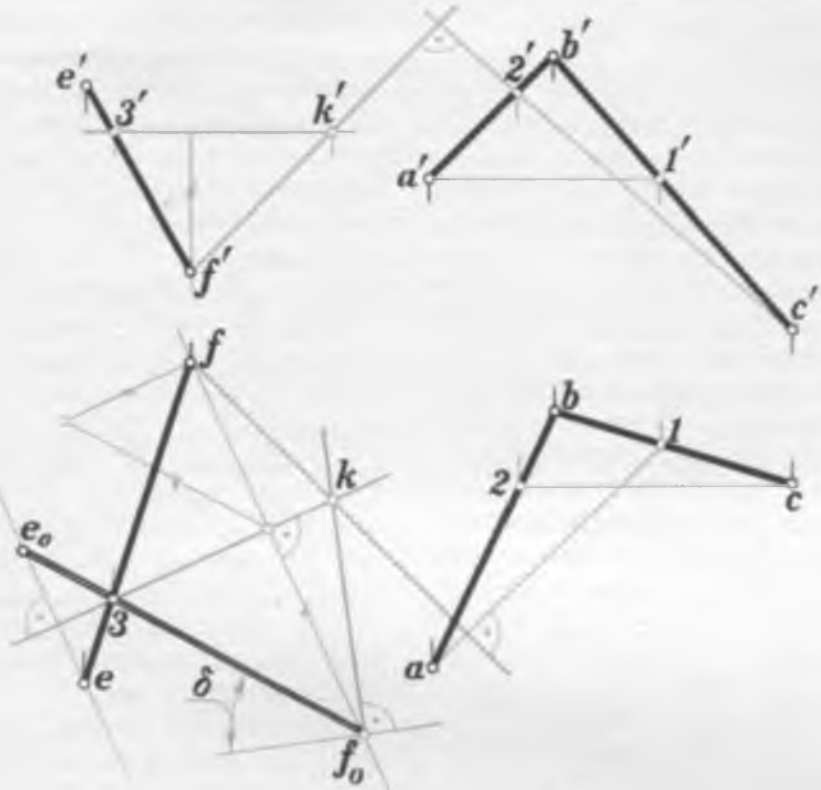
Пример. Определить величину угла наклона прямой ef, $e'f'$ к данной плоскости abc, $a'b'c'$ (рис. 121).

Р е ш е н и е. Угол между прямой и плоскостью можно определить как дополнительный до 90° острого угла между прямой и направлением плоскости. Через точку ff' проводим перпендикуляр fk, $f'k'$ к плоскости abc, $a'b'c'$, который определяет направление этой плоскости.

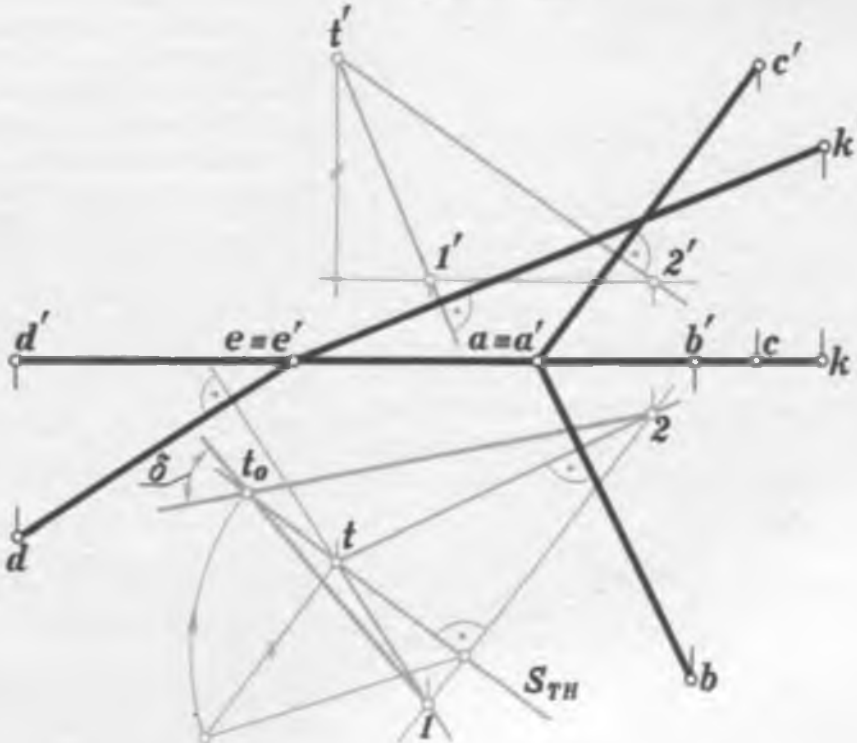
Вращением вокруг горизонтали $3k$, $3'k'$ определяем величину угла при вершине ff' между прямыми ef, $e'f'$ и fk, $f'k'$. Угол δ, дополнительный до 90° острого угла e_0f_0k, определяет угол наклона прямой ef, $e'f'$ к плоскости abc, $a'b'c'$.

Пример. Определить величину угла между двумя данными плоскостями (рис. 122).

Р е ш е н и е. Угол между двумя плоскостями определяется острым углом между направлениями этих плоскостей. Через произвольно выбранную точку tt' проводим прямые, перпендикулярные к данным плоскостям. Они определяют направления этих плоскостей. Вращением вокруг горизонтали 12, $1'2'$ определяем истинную величину угла δ при вершине tt' между прямыми.



Р и с. 121



Р и с. 122

4. Вращение вокруг прямых общего положения

При проектировании инженерных сооружений, конструировании машин и механизмов обычно стремятся к частному расположению их основных элементов относительно плоскостей проекций. Плоскости сооружений, корпусов машин, станин, рам и т. д. берут взаимно перпендикулярными. Плоскости проекций выбирают параллельно этим плоскостям. Оси поверхностей вращения и вращающихся элементов берут перпендикулярными к плоскостям проекций или параллельными им.

Однако нередко оси вращающихся точек механизмов для некоторых станков необходимо задавать прямыми общего положения. В этом случае определяют траектории точек вращающихся деталей механизма и вычерчивают детали в нужном положении. Если ось вращения некоторой точки является прямой общего положения, то плоскостью движения этой точки является плоскость общего положения.

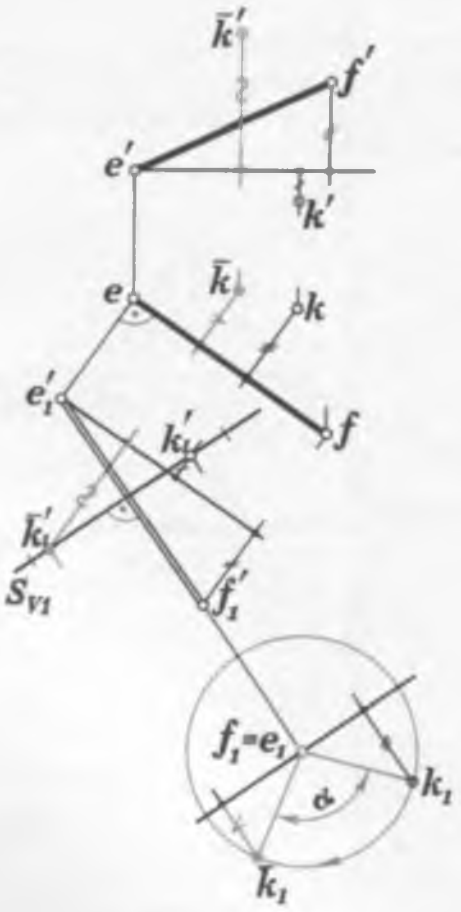


Рис. 123

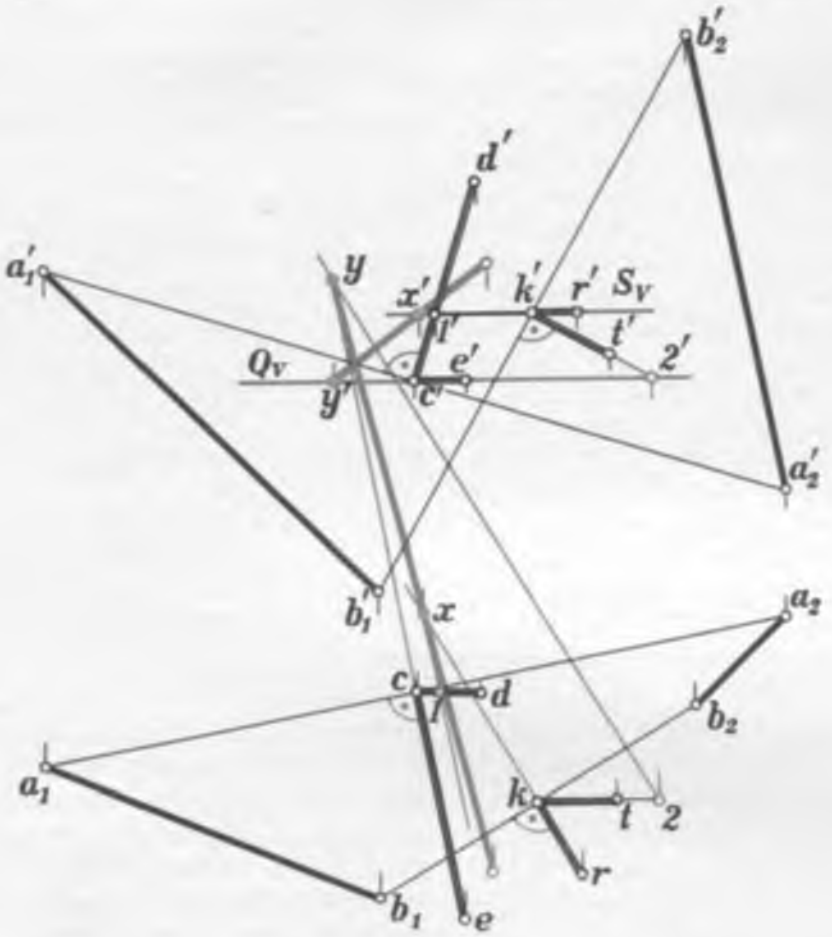
Траектория точки — окружность — проецируется на плоскости проекций эллипсами. Чтобы избежать построений эллипсов, для определения конечного положения движущейся точки пользуются преобразованием чертежа.

Пусть точку kk' требуется повернуть вокруг оси — прямой ef, $e'f'$ на угол α по часовой стрелке (если смотреть по направлению оси от точки ee' к точке ff' концов прямой) (рис. 123). Выберем систему плоскостей проекций таким образом, чтобы одна из плоскостей была перпендикулярна к прямой ef, $e'f'$ — оси вращения точки kk'.

Этот чертеж точки и прямой необходимо преобразовать дважды. При первом преобразовании прямая ef, $e'f'$ представляется параллельной плоскости проекций V_1. При втором преобразовании она перпендикулярна к плоскости проекций H_1. На плоскость H_1 эту прямую (ось вращения) проецируем в точку $e_1 \equiv f_1$. Проекция k_1 точки kk' на плоскости H_1 перемещается по дуге окружности. Проекция k_1' перемещается по следу плоскости S_{V1} — прямой, перпендикулярной к направлению проецирования. Поворачивая точку k_1 на заданный угол вокруг центра ($e_1 \equiv f_1$) в заданном направлении, находим ее смещенную проекцию $\bar{k}_1$.

Основные проекции $\bar{k}$ и $\bar{k}'$ точки kk' в смещенном положении определяем, пользуясь восстановлением плоскостей проекций. Определяя не одно, а ряд положений вращающейся точки вокруг данной оси, можно построить ее траекторию (окружность) в основной системе плоскостей проекций, которая проецируется на плоскости проекций эллипсами.

Рассмотрим задачу на определение оси вращения заданного в пространстве перемещения отрезка прямой из одного его положения в другое. Согласно теореме о перемещении плоской фигуры в ее плоскости пере-



Р и с. 124

ход плоской фигуры из одного положения в другое можно осуществить путем ее поворота около центра. Центр поворота находится на пересечении перпендикуляров, восставленных из середин отрезков, соединяющих начальное и конечное положения каких-либо двух точек фигуры.

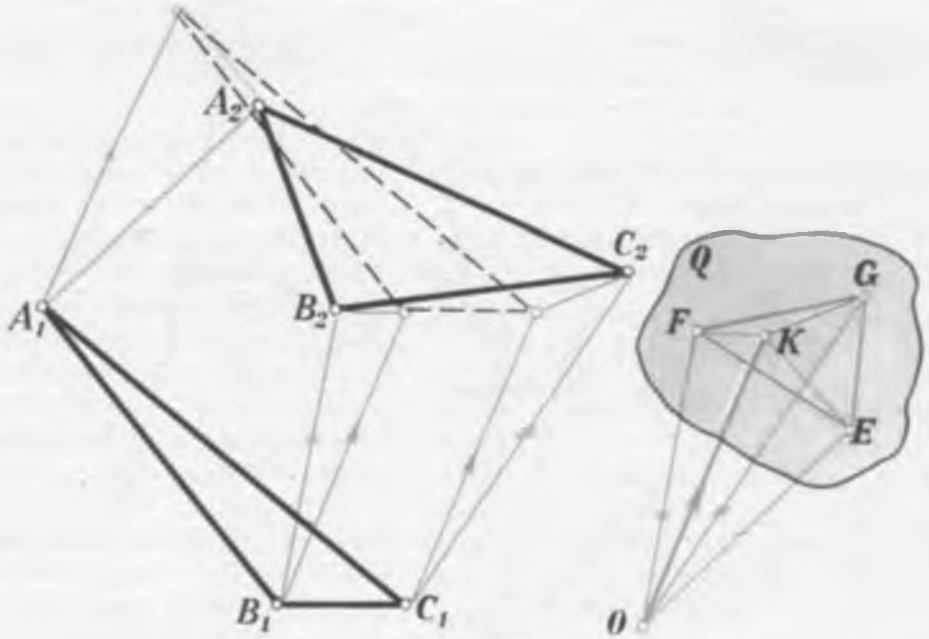
Рассмотрим решение задачи на ортогональном чертеже в общем виде. Пусть в пространстве заданы два положения a_1b_1, $a_1'b_1'$ и a_2b_2, $a_2'b_2'$ данного отрезка ab, $a'b'$ (рис. 124). Соединим точки a_1a_1' и a_2a_2', b_1b_1' и b_2b_2' прямыми. Из середин отрезков a_1a_2, $a_1'a_2'$ и b_1b_2, $b_1'b_2'$ проведем плоскости, перпендикулярные к ним. Линия пересечения плоскостей является осью вращательного перемещения отрезка ab, $a'b'$ из положения a_1b_1, $a_1'b_1'$ в положение a_2b_2, $a_2'b_2'$.

§ 28 ВИНТОВЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ

Любое перемещение неизменяемой системы точек можно рассматривать как ее винтовое перемещение. Частными случаями винтового перемещения являются поступательное и вращательное перемещения.

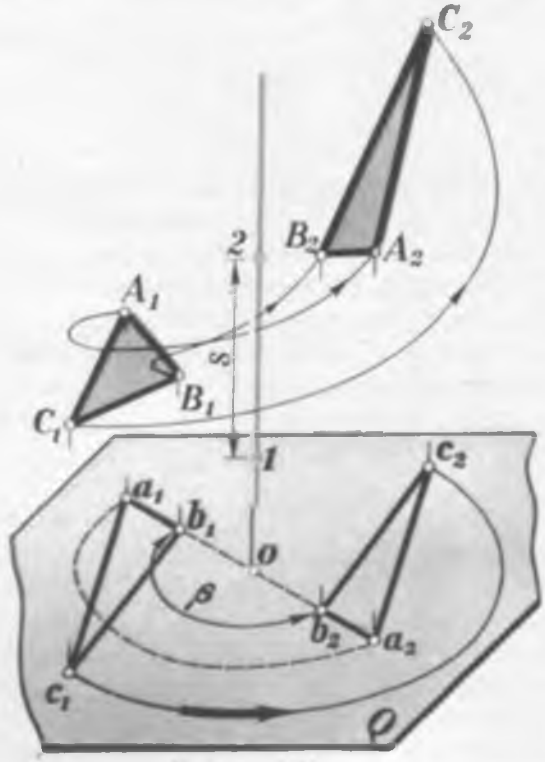
Перемещение любой геометрической фигуры называют *поступательным*, если оно удовлетворяет условию равенства и параллельности всех положений этой фигуры в процессе ее перемещения.

Перемещение фигуры (твердого тела) называют *вращательным*, если конечное положение фигуры можно получить из ее начального положения путем поворота на некоторый угол вокруг неподвижной оси.



Р и с. 125

Перемещение фигуры (твердого тела) называют *винтовым*, если ее конечное положение можно получить двумя последовательными перемещениями: поступательным и вращательным. Порядок последовательности этих перемещений может быть произвольным, а направление поступательного перемещения должно быть параллельным оси вращательного перемещения. В этом случае ось вращательного перемещения называют *винтовой осью перемещения*.



Р и с. 126

Параметром p винтового перемещения называют отношение $p = \frac{s}{\beta}$,

где s — величина поступательного перемещения;

β — величина угла поворота вокруг винтовой оси, измеряемая в радианах.

Опишем схему построений для определения винтовой оси заданного перемещения неизменяемой системы и величин угловых и осевых перемещений точек системы. Предположим, что треугольник переместился из положения $A_1B_1C_1$ в положение $A_2B_2C_2$ (рис. 125). Возьмем в пространстве некоторую точку O и проведем три отрезка OE, OF и OG, соответственно равные по величине и направлению отрезкам A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2. Полученные три точки E, F и G принадлежат некоторой плоскости Q, на которую из точки O опустим перпендикуляр OK. Точка K есть основание этого перпендикуляра на

плоскости Q. Отрезок OK определяет направление винтовой оси и дает величину осевых перемещений точек системы.

Таким образом, чтобы определить положение винтовой оси, а также угловые и осевые перемещения точек неизменяемой системы необходимо выполнить следующее:

построить плоскость, перпендикулярную к направлению винтовой оси;

спроецировать на эту плоскость две какие-либо (не лежащие на одном перпендикуляре к плоскости) точки неизменяемой системы;

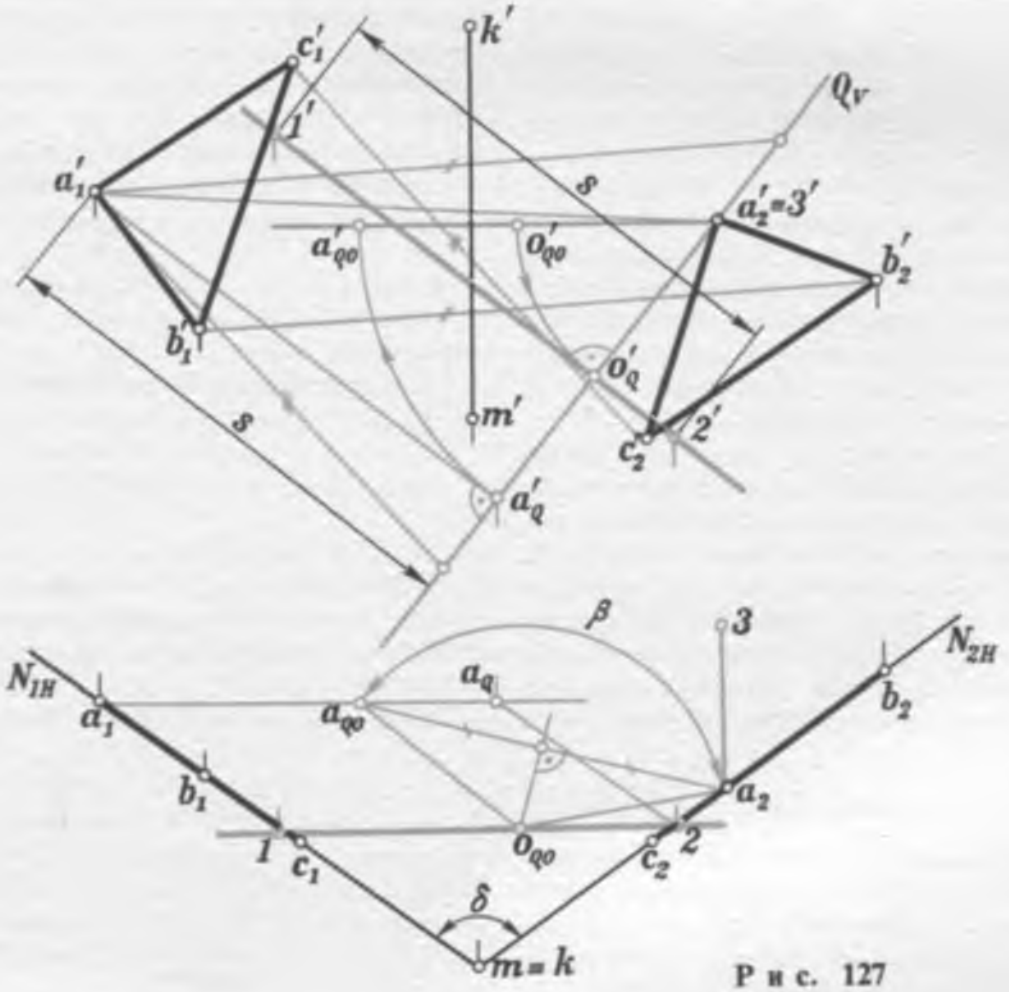
найти центр и угол поворота проекций этих точек.

Пусть известны начальное $A_1B_1C_1$ и конечное $A_2B_2C_2$ положения треугольника ABC. Для определения винтовой оси и параметра заданного перемещения применим следующую схему.

Сначала построим плоскость Q, на которую треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ можно спроецировать равными треугольниками $a_1b_1c_1$ и $a_2b_2c_2$ (рис. 126). На плоскости Q найдем центр o поворота для перемещения проекции треугольника из положения $a_1b_1c_1$ в положение $a_2b_2c_2$ и найдем необходимый при выбранном направлении поворота угол поворота β. В точке o восставим перпендикуляр к плоскости Q и найдем точки его пересечения 1 и 2 с плоскостями треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$. Построенный перпендикуляр определяет положение винтовой оси. Величина отрезка перпендикуляра между точками 1 и 2 равна величине s осевых перемещений точек неизменяемой системы.

Величина угловых перемещений точек системы равна углу β.

На рис. 127 показан чертеж перемещения треугольника, который из начального поло-



Р и с. 127

жения $a_1b_1c_1$, $a_1'b_1'c_1'$ перемещен в положение $a_2b_2c_2$, $a_2'b_2'c_2'$. Плоскости проекций выбраны таким образом, что плоскость H перпендикулярна к линии mk, $m'k'$ пересечения плоскостей N_{1H} и N_{2H} треугольников.

Фронтальная плоскость проекций V параллельна второй биссекторной плоскости плоскостей N_{1H} и N_{2H}. За первую биссекторную плоскость принята плоскость, делящая пополам угол между полуплоскостями, в которых расположены треугольники $a_1b_1c_1$, $a_1'b_1'c_1'$ и $a_2b_2c_2$, $a_2'b_2'c_2'$.

Расположение треугольников после совмещения плоскостей N_{1H} и N_{2H} предусмотрено такое, что один из них можно получить путем поворота другого. Все плоскости, направления которых параллельны какой-либо из указанных биссекторных плоскостей, составляют с плоскостями N_{1H} и N_{2H} равные углы, а линии их пересечения образуют равные углы с линией mk, $m'k'$ пересечения плоскостей N_{1H} и N_{2H}. Это следует из того, что угол между двумя плоскостями равен углу между направлениями этих плоскостей.

Таким образом

Два равных треугольника проецируются на одну и ту же плоскость равными треугольниками в том случае, если их плоскости составляют с плоскостью проекций одинаковые углы, а стороны треугольников соответственно составляют одинаковые углы со следами плоскостей треугольников.

Фронтальный след Q_V плоскости, на которую эти треугольники проецируются равными, можно определить следующими построениями (рис. 127). Из какой-либо точки, например a_1', проведем отрезки прямых линий соответственно равные и параллельные отрезкам, соединяющим одноименные фронтальные проекции вершин треугольников. Концы этих отрезков располагаются на прямой линии, параллельной следу Q_V. Эта прямая линия принята за фронтальный след Q_V плоскости. Из точки a_1 a_1' опустим перпендикуляр a_1a_Q, $a_1'a_Q'$ на плоскость Q_V и найдем точку его пересечения a_Q, a_Q' с плоскостью Q_V. Направление перпендикуляра определяет направление винтовой оси перемещения, а его величина равна величине осевого перемещения s.

Из точки a_Q проводим прямую $a_Q 2$, параллельную N_{1H}, а затем прямую 21, параллельную a_1a_Q. Прямая 12 является горизонтальной проекцией оси перемещения. Плоскость Q_V вращением вокруг оси a_23, $a_2'3'$ переводим в положение, параллельное плоскости H. Точки a_{Q_0} и a_{Q_0}' являются смещенными проекциями точки a_Qa_Q'.

Делим отрезок $a_{Q_0}a_2$ пополам и из его середины восставляем перпендикуляр. Точка o_{Q_0} пересечения перпендикуляра с прямой 12 является смещенной проекцией центра поворота. Находим основную фронтальную проекцию o_Q' центра и проводим фронтальную проекцию $1'2'$ винтовой оси параллельно перпендикуляру $a_1'a_Q'$.

Величина осевого перемещения

$$s = 1'2' = a_1'a_Q'.$$

Угол $a_{Q_0}o_{Q_0}a_2 = \beta$ соответствует угловым смещениям точек.

Параметрами перемещения будут:

$$p_1 = \frac{s}{\beta} \quad \text{и} \quad p_2 = \frac{s}{2\pi - \beta}.$$

Если начальное и конечное положения треугольника заданы находящимися в произвольно расположенных плоскостях, чертеж необходимо перестроить таким образом, чтобы эти плоскости стали проецирующими.

§29 ВСПОМОГАТЕЛЬНОЕ ПРОЕЦИРОВАНИЕ

Построение новых, дополнительных проекций в ходе решения геометрической задачи можно осуществить путем вспомогательного проецирования на заранее выбранную плоскость проекций. Вспомогательное проецирование может быть центральным и косоугольным. Плоскость проекций и направление проецирования (ортогональное, косо-

угольное) или центр проекций (центральное проецирование) выбирают в зависимости от условий поставленной задачи.

Вспомогательным проецированием целесообразно пользоваться при решении ряда позиционных задач. Метрические задачи решаются в большинстве случаев сложнее. Применяют вспомогательное проецирование на одну из плоскостей проекций H или V или на вторую биссекторную плоскость*.

1. Центральное вспомогательное проецирование

Центральной проекцией точки на плоскость является след прямой, проведенной через точку и центр (полюс) проецирования.

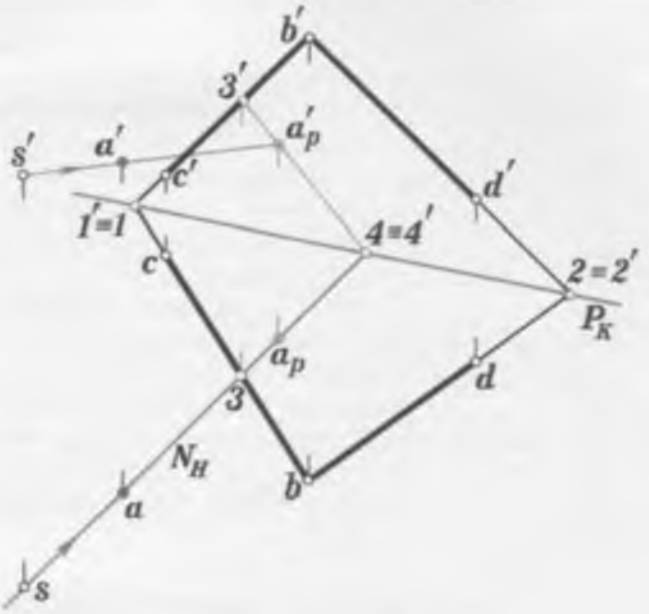
Пусть точка aa' проецируется из центра ss' на некоторую плоскость общего положения, заданную двумя пересекающимися прямыми bc, $b'c'$ и bd, $b'd'$ (рис. 128). Определяем точки $11'$ и $22'$ пересечения разноименных проекций отрезков bc, $b'c'$ и bd, $b'd'$. Прямая P_K является следом соответствия. Через луч sa, $s'a'$ проводим горизонтально-проецирующую плоскость N_H. Эта плоскость пересекается с плоскостью bcd, $b'c'd'$ по прямой 34, $3'4'$.

Проецирующий луч sa, $s'a'$ точки aa' пересекается линией 34, $3'4'$ в точке $a_P\,a_P'$. Точка $a_P\,a_P'$ является следом луча на плоскости и центральной проекцией точки aa' на данной плоскости проекций bcd, $b'c'd'$.

Фронтальную проекцию $3'4'$ прямой 34, $3'4'$ называют *носителем следа луча*, или *носителем*.

Плоскость проекций удобно задавать следом соответствия и точкой. Направление носителя определим, если проведем через точку проецирующую плоскость параллельно лучу.

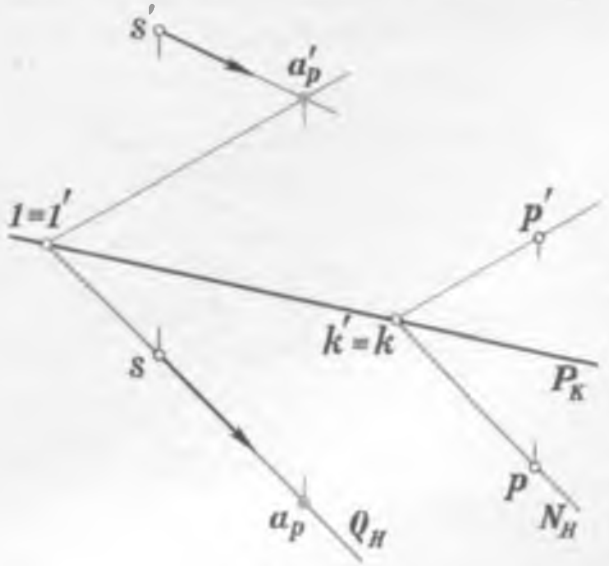
На рис. 129 показано определение следа $a_P a_P'$ луча точки ss' на плоскости, заданной следом соответствия P_K и точкой pp'. Горизонтально-проецирующая плоскость N_H,



Р и с. 128

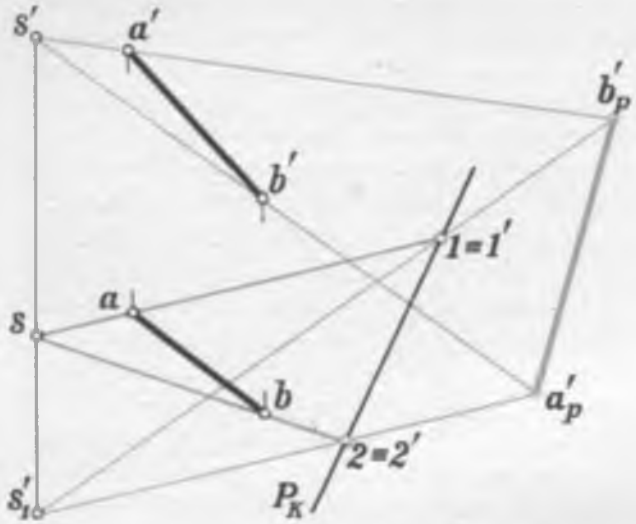
проходящая через точку pp' параллельно данному лучу, пересекает заданную плоскость по прямой pk, $p'k'$. Она определяет направление носителя. Проводя горизонтально-проецирующую плоскость Q_H, проходящую через луч точки ss', определяем носитель $1a_P$, $1'a_P'$ и искомую точку $a_P a_P'$ — след луча точки ss' на данной плоскости.

При центральном вспомогательном проецировании вертикальные плоскости про-



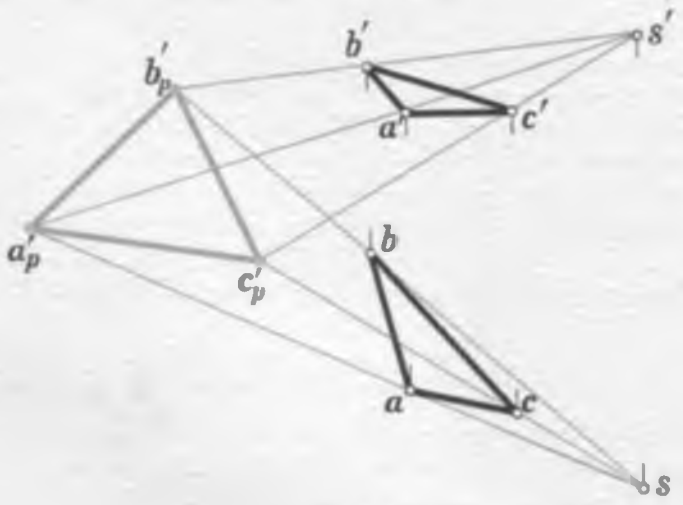
Р и с. 129

* Вторая биссекторная плоскость обеспечивает получение двух проекций точек пространства на одной плоскости проекций. Эту плоскость называют *плоскостью соответствия*.



Р и с. 130

ецирующих лучей образуют пучок с общей вертикальной прямой центра проецирования. Этим пучком плоскостей пересекаются плоскость соответствия и плоскость проекций. Центры пучка линий пересечения находятся на общей вертикальной прямой. Пучок прямых плоскостей соответствия вторично проецируется пучком горизонтальных проекций лучей, а пучок прямых данной плоскости проекций проецируется пучком носителей вспомогательных проекций точек пространства.



Р и с. 131

Фронтальные и вспомогательные проекции точек пространства, образуя центральное соответствие, соединяются пучком фронтальных проекций лучей.

На рис. 130 дан пример общего случая проецирования отрезка ab, $a'b'$ прямой из центра ss' на плоскость. Плоскость здесь задана следом соответствия P_K и точкой ss_1' пересечения плоскости с вертикальной прямой центра проецирования.

Проводим через проецирующие лучи sa, $s'a'$ и sb, $s'b'$ точек aa' и bb' концов данной прямой горизонтально-проецирующие плоскости; они определяют носители. Фронтальные проекции $s_1'1'$ и $s_1'2'$ носителей пересекаются фронтальными проекциями $s'a'$ и $s'b'$ лучей в точках a_P' и b_P'. Прямая $a_P'b_P'$ является вспомогательной центральной проекцией отрезка ab, $a'b'$ на данную плоскость.

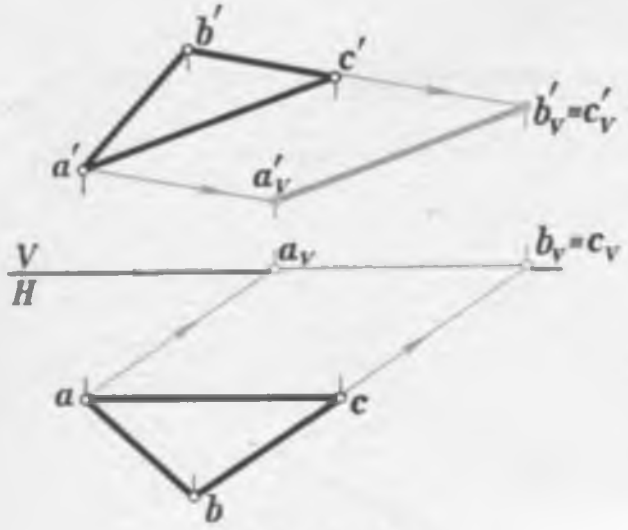
В случае, если дополнительная плоскость вертикальная, то точка ss_1' пересечения ее с вертикальной прямой центра проецирования является бесконечно удаленной (несобственной). В этом случае носители представятся вертикальными прямыми линиями.

На рис. 131 дано построение вспомогательной центральной проекции отсека плоскости abc, $a'b'c'$ на плоскость соответствия.

2. Косоугольное вспомогательное проецирование

Во вспомогательном проецировании при решении позиционных задач наибольшее значение имеет косоугольное проецирование. Здесь центр проецирования в заданном направлении удален в бесконечность. Направление проецирования выбирают в зависимости от преобразования чертежа в большинстве случаев, когда на дополнительную плоскость проекций прямые проецируются в точки, плоскости — в прямые линии, т. е. прямые линии и плоские фигуры представляются вырожденными проекциями.

При построении вспомогательной косоугольной проекции отсека плоскости достаточно спроецировать три ее точки. Если направление проецирования параллельно плоскости отсека, то проекцией плоскости является прямая линия.



Р и с. 132

На рис. 132 построена вспомогательная косоугольная проекция отсека *abc*, *a′b′c′* плоскости на фронтальную плоскость проекций *V* по направлению, параллельному плоскости *abc*, *a′b′c′*.

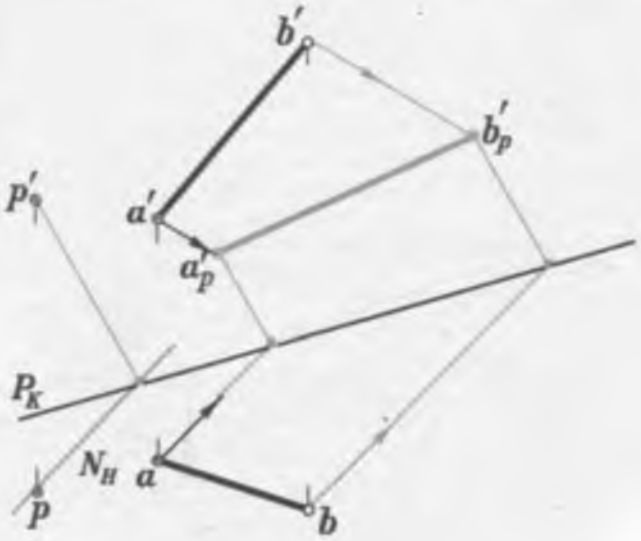
При косоугольном проецировании лучевые плоскости взаимно параллельны. Параллельными прямыми линиями являются и носители.

На рис. 133 показан пример построения вспомогательной косоугольной проекции отрезка *ab*, *a′b′* на плоскость, заданную следом соответствия P_K и точкой *pp′*. Направление проецирования указывает стрелка точки *aa′*. Через точку *pp′* параллельно направлению проецирования проводим горизонтально-проецирующую плоскость. Определяем направление носителя. Проводим лучевые вертикальные плоскости через точки *aa′* и *bb′* отрезка прямой.

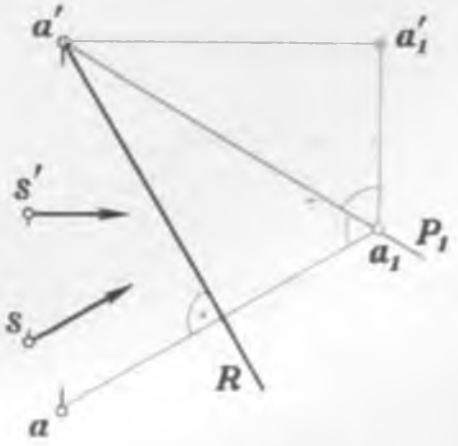
На пересечении носителей и фронтальных проекций лучей определяем вспомогательные косоугольные проекции a_P' и b_P' точек *aa′* и *bb′* концов прямой *ab*, *a′b′*. Так определяем вспомогательную косоугольную проекцию $a_P'b_P'$ данной прямой.

3. Прямоугольное вспомогательное проецирование

Позиционные задачи в прямоугольном вспомогательном проецировании решаются так же, как и в косоугольном проецировании. Построения при решении метрических задач несколько усложняются, так как искомые размеры на дополнительной плоскости при вторичном проецировании искажаются. При решении этих задач дополнительную проекцию необходимо перенести на плоскость чертежа без искажений. Это можно осуществить или путем вращения дополнительной плоскости вокруг ее фронтали, или заменой до-



Р и с. 133



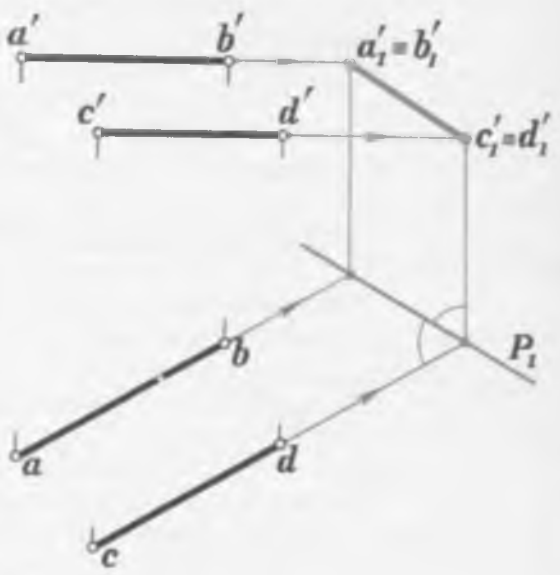
Р и с. 134

полнительной плоскости другой плоскостью, биссекторной относительно направлений дополнительного и основного проецирования.

Перенесение дополнительной проекции на плоскость чертежа в неискаженном виде производят по следующей схеме. Пусть точка aa' проецируется на вертикальную плоскость R по направлению горизонтального луча (рис. 134). Биссекторной плоскостью P_1 угол между направлениями дополнительного и основного проецирования разделим пополам. Изображение сохраняет свой вид на любой плоскости, параллельной плоскости P_1. Вспомогательную прямоугольную проекцию a_1' точки aa' определяем на пересечении фронтальной проекции луча с линией соответствия, являющейся носителем этой проекции.

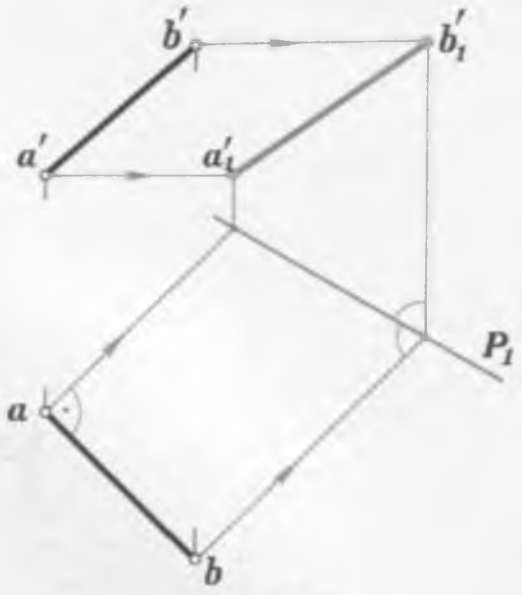
Если направление проецирования параллельно направлению оси проекций, то угол между проецирующими лучами дополнительного и основного проецирования является прямым. Плоскость P_1 делит этот угол пополам.

На рис. 135 дано построение натуральной величины отрезка ab, $a'b'$. Принимаем направление горизонтально-проецирующей

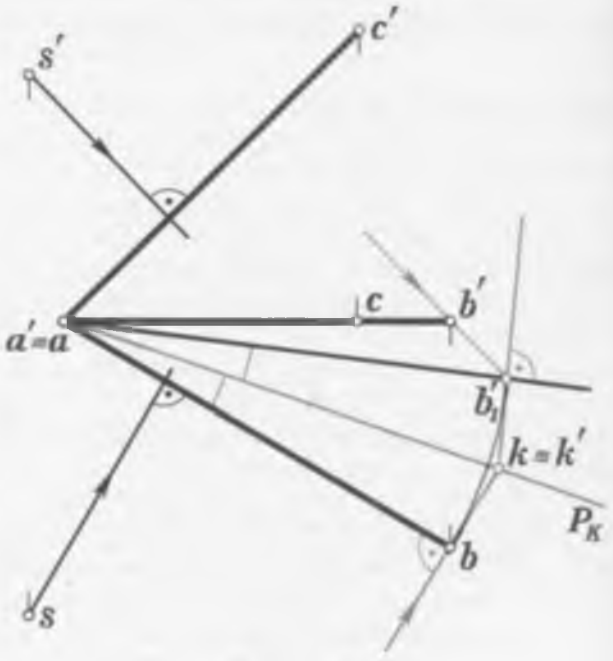


Р и с. 136

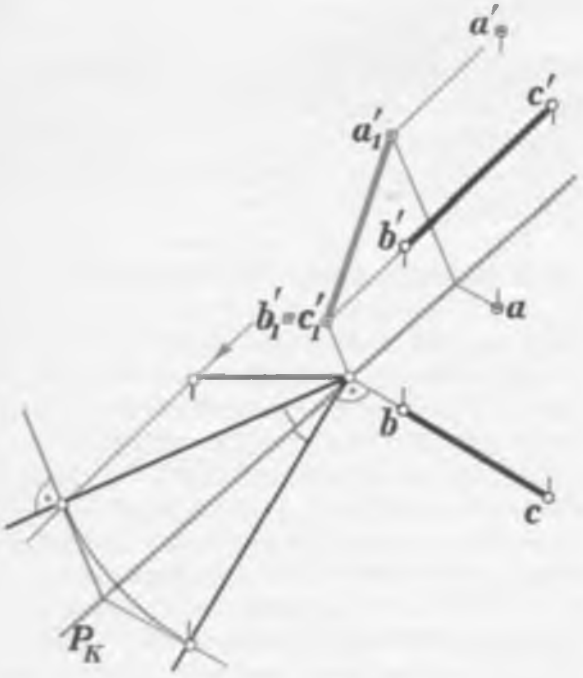
плоскости отрезка ab, $a'b'$ за направление проецирования на дополнительную плоскость проекций. Плоскость P_1 делит угол между проецирующими лучами дополнительного и основного проецирования пополам. Вспомогательная прямоугольная про-



Р и с. 135



Р и с. 137



Р и с. 138

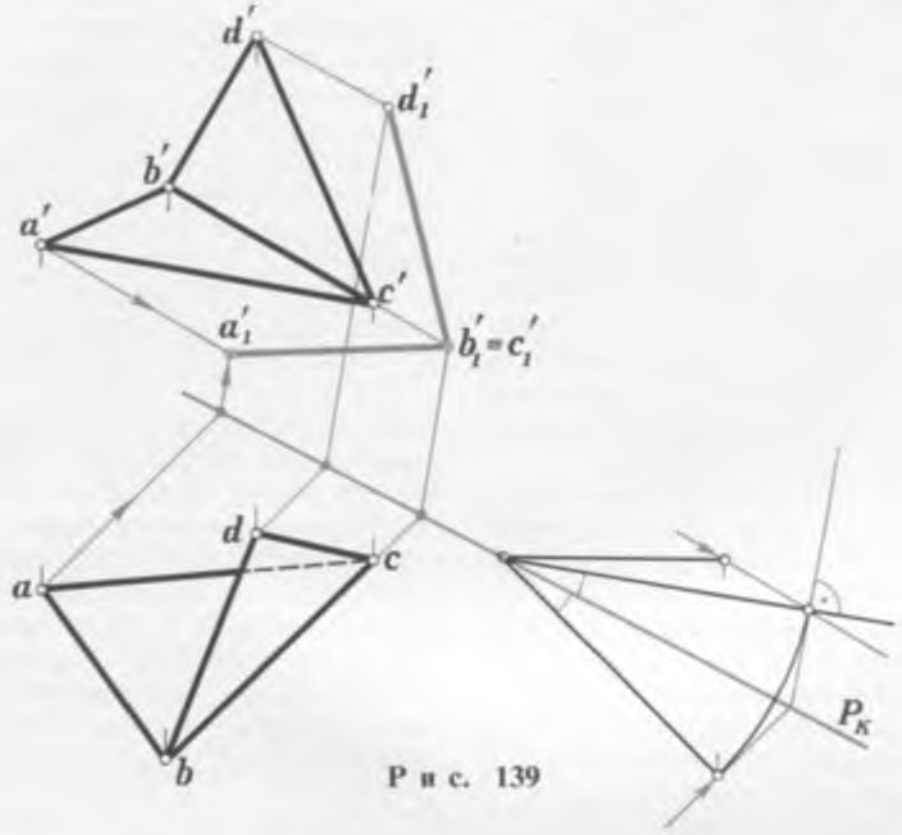
екция $a_1'b_1'$ отрезка равна натуральной величине данного отрезка ab, $a'b'$.

На рис. 136 рассмотрен пример определения расстояния между двумя горизонтальными параллельными прямыми ab, $a'b'$ и cd, $c'd'$.

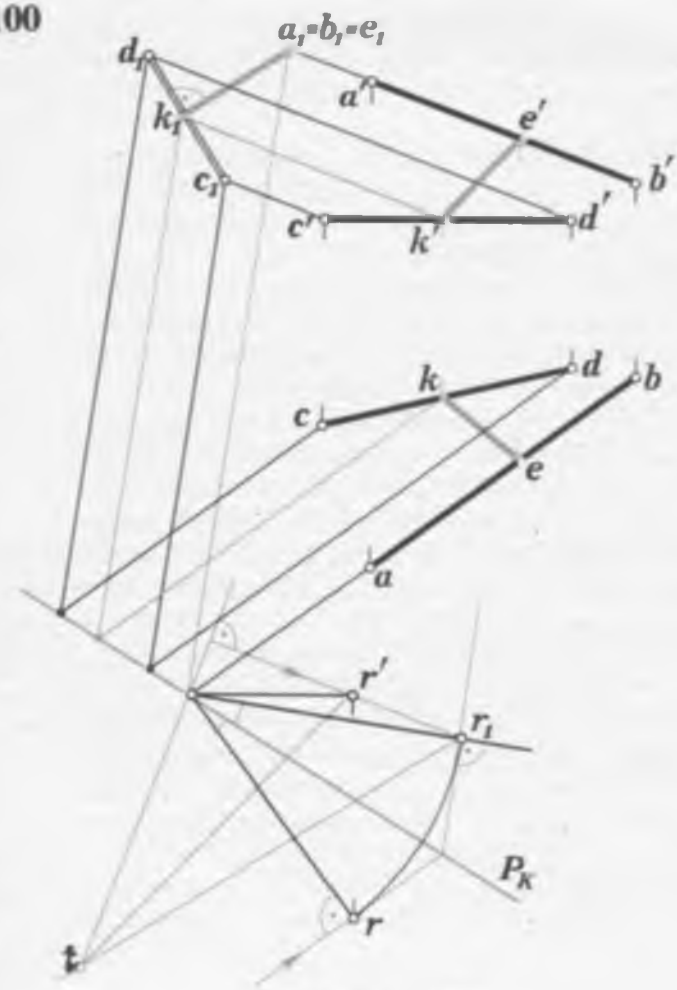
Укажем схему вспомогательного прямоугольного проецирования при произвольном направлении луча (рис. 137). Плоскость, перпендикулярную к лучу, можно задать главными линиями — горизонталью ab, $a'b'$ и фронталью ac, $a'c'$. Пусть точка aa' принадлежит плоскости соответствия. Ее разноименные проекции совпадают.

Плоскость, биссекторная относительно дополнительного и основного лучей, является биссекторной относительно дополнительной и основной (фронтальной) плоскостей. Любой луч, например, проходящий через точку bb' горизонтали, пересекает биссекторную плоскость P_K.

Носителем вспомогательной прямоугольной проекции точки bb' является линия наибольшего уклона (линия ската). Она составляет прямой угол с горизонталью. Проекции носителя и горизонтали на биссекторную плоскость при принятом направле-



Р и с. 139



Р и с. 140

нии проецирования составляют между собой также прямой угол на фронтальной грани двугранного угла. На этой грани определяем след луча. Точку b' определяем на фронтальной проекции луча и на расстоянии от точки aa', равном отрезку горизонтальной проекции ab горизонтали ab, $a'b'$.

Проекция $a'b_1'$ симметрична проекции ab горизонтали относительно следа P_K плоскости соответствия. Перпендикуляр к проекции $a'b_1'$ в точке b_1' является носителем точки b_1' и симметричен носителю дополнительной проекции точки bb'. Разноименные проекции носителя пересекаются в точке kk' биссекторной плоскости. Прямая P_K является следом соответствия плоскости P и осью построения вспомогательной прямоугольной проекции b_1' точки bb'.

Описанные построения могут явиться диаграммой для определения следа соответствия и носителя. На рис. 137 показаны необходимые данные для построения этой диаграммы.

Способ вспомогательного прямоугольного проецирования при произвольно выбранном направлении луча можно применить к решению ряда задач.

Пример. Определить величину расстояния от точки aa' до прямой bc, $b'c'$ (рис. 138).

Р е ш е н и е: Строим диаграмму для определения оси соответствия и носителя. Пользуясь диаграммой, определим прямоугольную вспомогательную проекцию $b_1' \equiv c_1$ прямой bc, $b'c'$ и проекцию a_1' точки aa'. Расстояние между вспомогательными прямоугольными проекциями прямой и точки равно истинной величине расстояния от данной точки aa' до прямой bc, $b'c'$.

Пример. Определить величину линейного угла, заданного проекциями двугранного угла (рис. 139).

Р е ш е н и е. Грани abc, $a'b'c'$ и bcd, $b'c'd'$ спроецируем на плоскость, перпендикулярную к ребру bc, $b'c'$. Для определения следа плоскости соответствия и направления носителя построим диаграмму, по которой построим вспомогательные прямоугольные проекции граней. Угол между проекциями этих граней равен искомой величине двугранного угла.

Пример. Построить отрезок прямой, соединяющей ближайшие точки между двумя скрещивающимися прямыми (рис. 140).

Р е ш е н и е. Строим вспомогательные прямоугольные проекции данных скрещивающихся прямых по направлению одной из них, например прямой ab, $a'b'$. Пользуясь диаграммой для определения следа соответствия и носителя, находим вспомогательную прямоугольную проекцию e_1k_1 искомого кратчайшего расстояния между данными прямыми и основные его проекции. Искомый отрезок и его дополнительная проекция находятся в плоскостях, образующих двугранный угол со сторонами, параллельными

этому двугранному углу. На диаграмме он представляется двумя плоскостями, пересекающимися по фронтали. Одна плоскость перпендикулярна к направлению проецирования, другая — биссекторная. Через точку r_1 проводим прямую r_1t параллельно вспомогательной проекции e_1k_1 искомого отрезка, и из точки t пересечения ее с фронталью проводим прямую tr', которая указывает направление фронтальной проекции $e'k'$ искомого отрезка ek, $e'k'$.

§ 30

СТЕРЕОГРАФИЧЕСКОЕ ПРОЕЦИРОВАНИЕ

Часто при проецировании геометрических образов, расположенных на сфере, пользуются стереографическим проецированием* — частным видом центрального проецирования. Здесь за полюс проекции выбирается некоторая точка N сферы, а плоскостью проекций служит плоскость, касательная к сфере в точке M, лежащей на одном диаметре с полюсом (рис. 141).

Стереографическое проецирование устанавливает соответствие между точками сферы и плоскости.

Из точки N (центра проецирования) другие точки сферы проецируются лучами на плоскость проекций Q. При этом каждая точка сферы, отличная от точки N, переходит в некоторую определенную точку плоскости. Такое соответствие является взаимно однозначным.

На рис. 141 показаны построения стереографической проекции ab кривой линии AB, расположенной на сфере радиусом R. Рассматривая касательную к кривой линии как предельное положение секущей, можно легко

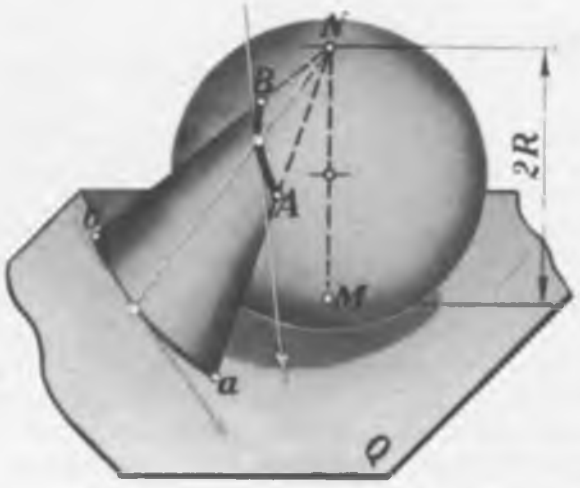


Рис. 141

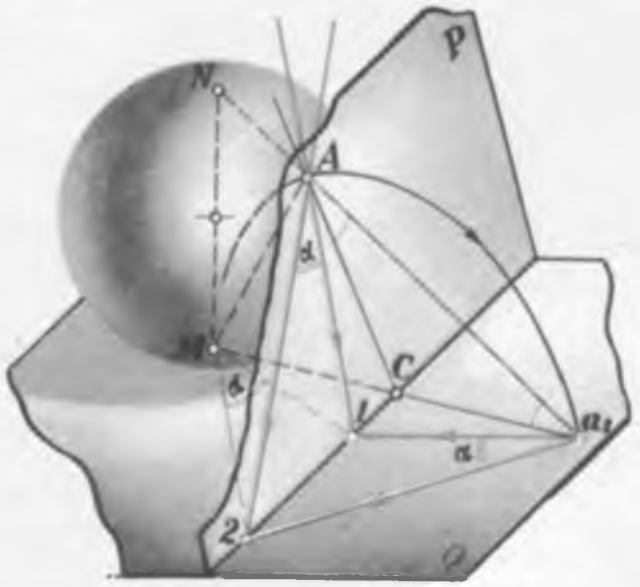
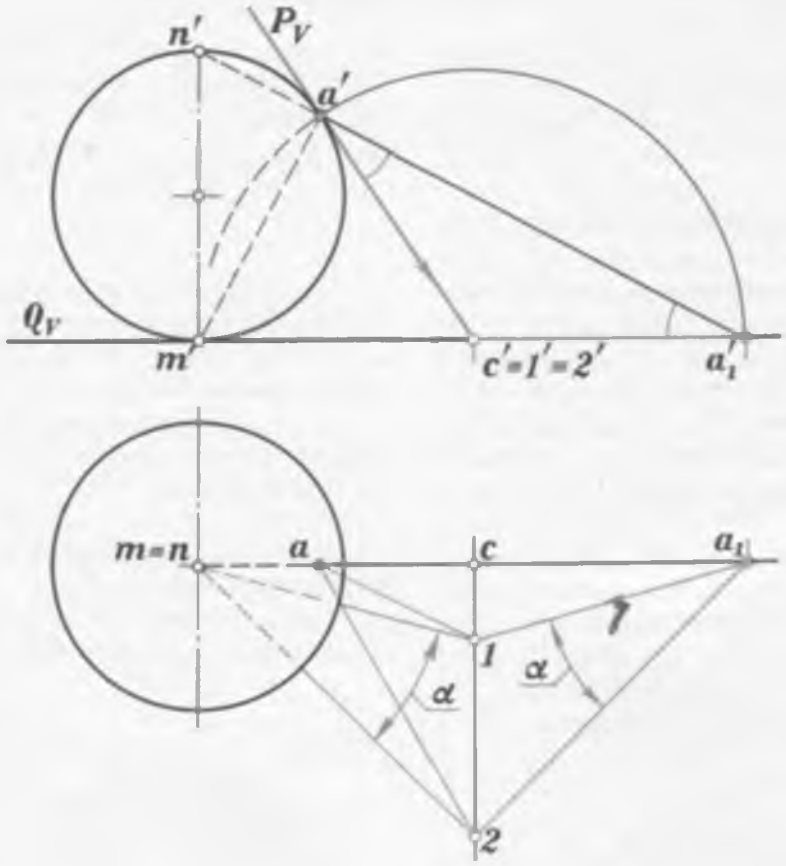


Рис. 142

показать, что стереографической проекцией касательной к сферической кривой линии является касательная к стереографической проекции этой кривой.

На рис. 142 показаны касательные к сфере в точке A прямые линии $A1$ и $A2$. Они на-

* От греч. στερεός — пространственный и γραφω — пишу. Метод стереографического проецирования предложен знаменитым астрономом Гиппархом (2 в. до н. э.). Эти проекции широко применяются в кристаллографии, в картографии и астрономии, а также в теории аналитических функций (при изучении дробно-линейных отображений).



Р и с. 143

ходятся в касательной к сфере плоскости P, которая пересекается плоскостью стереографических проекций Q по прямой линии 12.

Совместим плоскость P вращением вокруг оси 12 с плоскостью Q. Этим методом определится истинная величина угла α между касательными к сфере прямыми линиями. При этом точка a_1 является стереографической проекцией точки A, а прямые $1a_1$ и $2a_1$ — стереографическими проекциями заданных касательных. Поэтому угол между пересекающимися сферическими кривыми линиями равен углу между стереографическими проекциями этих кривых линий.

Соответствие, устанавливаемое стереографическими проекциями, является конформным*.

Установлено, что окружностям на сфере соответствуют окружности на плоскости, причем окружностям, проходящим через центр стереографического проецирования, соответствуют на плоскости прямые линии — окружности бесконечно большого радиуса.

На рис. 143 показаны построения стереографических проекций заданных касательных на чертеже.

* Конформное преобразование — отображение одной фигуры на другую, при котором две любые кривые первой фигуры, пересекающиеся под углом, преобразуются в кривые второй фигуры, пересекающиеся под тем же углом.

Вопросы для самопроверки

1. В чем состоит принцип преобразования чертежа способом замены плоскостей проекций?

2. Что определяет направление новой плоскости проекций при переводе плоскости общего положения в проецирующие плоскости?

3. Укажите схему решения задачи по определению углов наклона плоскости к плоскостям проекций способом замены плоскостей проекций.

4. Укажите схему решения задачи по определению натуральной величины отсека произвольно расположенной плоскости способом замены плоскостей проекций.

5. В чем состоит принцип преобразования чертежа способом вращения вокруг проецирующих прямых?

6. Какую прямую принимают за ось вращения при переводе отсека плоскости из общего положения во фронтально-проецирующую плоскость?

7. Какую прямую принимают за ось вращения при переводе отсека плоскости из общего положения в горизонтально-проецирующую плоскость?

8. Можно ли считать плоскопараллельное перемещение вращением вокруг невыявленных осей (проецирующих прямых) и почему?

9. Определите ось вращения фигуры при плоскопараллельном перемещении.

10. Укажите последовательность приемов определения натуральной величины отсека плоскости способом плоскопараллельного перемещения.

11. Укажите последовательность приемов определения натуральной величины отсека плоскости способом вращения вокруг прямых, параллельных плоскости проекций.

12. Приведите технические примеры решения задач способом вращения вокруг осей общего положения.

13. Что называют параметром винтового перемещения?

14. Объясните принцип вспомогательного проецирования.

15. Что называют носителем во вспомогательном проецировании?

16. Какое вспомогательное проецирование называют центральным, косоугольным, прямоугольным?

17. Какое проецирование называют стереографическим?

ГЛАВА VI

МНОГОГРАННИКИ

§31 ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О МНОГОГРАННИКАХ. ВИДЫ МНОГОГРАННИКОВ

Одним из видов пространственных форм являются *многогранники* — замкнутые пространственные фигуры, ограниченные плоскими многоугольниками. Вершины и стороны многоугольников являются вершинами и ребрами многогранника. Они образуют пространственную сетку. Если вершины и ребра многогранника находятся по одну сторону плоскости любой из его граней, то многогранник называют *выпуклым*; все его грани — выпуклые многоугольники.

Многогранники как простейшие пространственные формы с древнейших времен преобладают в техническом творчестве человека. Многие инженерные сооружения древности, дошедшие до наших дней как замечательные памятники архитектуры, представляют собой форму многогранников. Например, хорошо известные египетские пирамиды, многие башни и здания, храмы и замки, построенные за многие тысячелетия до наших дней.

В русском национальном зодчестве имеется огромное количество примеров неповторимого сочетания многогранных форм, создающих незабываемое художественное впечатление.

Многогранные формы предметов применялись не только в древние и средние века. Они дошли и до наших дней, находя исключительно широкое применение в архитектуре и технике.

Многогранные формы часто применяются в конструкциях современных зданий и различных инженерных сооружений. Например, крыши жилых, общественных и промышленных зданий часто представляют собой пересекающиеся призмы и пирамиды.

Многогранные формы имеют также детали машин и механизмов, станков и инструмента. При конструировании многих инженерных сооружений, имеющих кривые поверхности, их часто заменяют (аппроксимируют) близкими по форме гранными поверхностями.

Многогранники в виде оптических призм используют и в технической оптике. Здесь также приходится решать инженерные задачи, связанные как с проектированием оптических приборов, так и с учетом физических явлений преломления и отражения лучей при их падении на границу раздела двух сред.

В природе очень многие вещества имеют кристаллическое строение в виде многогранников. Это не только большинство веществ, слагающих горные породы, но и почву; все металлы и металлические сплавы; огромное большинство твердых химических реакти-

вов, аспирин, сульфонамид, пенициллин; кости и зубы; волосы и перья, шелк и хлопок, нейлон и его разновидности и даже растянутая резина. Поэтому важно не только изучать различные формы многогранников, чтобы понять принципы строения кристаллов, важно еще больше узнать природу пространства и мир, который заполнен предметами сложнейших форм.

Наибольший практический интерес представляют призмы, пирамиды, призматоиды и правильные выпуклые многогранники — тела Платона (тетраэдр, гексаэдр, октаэдр, додекаэдр и икосаэдр). а также многие многогранники, имеющие произвольную форму. Хотя пирамиды, призмы, а также некоторые правильные многогранники хорошо известны, кратко охарактеризуем геометрические тела каждой из перечисленных групп.

1. Пирамиды

Многогранник, одна грань которого — многоугольник со сколь угодно большим числом сторон (не менее трех), а остальные грани являются треугольниками с общей вершиной, называют *пирамидой*.

Если в основании пирамиды лежит правильный многоугольник и ее высота (перпендикуляр, опущенный из вершины на основание) проходит через центр этого многоугольника, пирамиду называют *правильной*. Пирамида общего вида может быть получена также пересечением многогранного угла произвольной плоскостью. Отсеченная часть многогранного угла вместе с фигурой сечения образует пирамиду.

Если плоскостью, пересекающей все боковые ребра, отсечь вершину пирамиды, получим *усеченную* пирамиду.

2. Призмы

Многогранник, две грани которого представляют собой равные многоугольники с взаимно параллельными сторонами — *основаниями*, называют *призмой*. Ребра, не принадлежащие основаниям и параллельные между собой, называют *боковыми ребрами*. Основания образуются одно из другого путем параллельного переноса. Соответствующие вершины соединяются между собой прямыми, которые образуют параллелограммы, являющиеся боковыми гранями призмы. Призма может быть получена как результат взаимного пересечения плоскостей.

На рис. 144 показано построение призмы, ограниченной тремя горизонтально-проецирующими плоскостями N_1, N_2 и N_3, горизонтальной плоскостью Q и плоскостью P

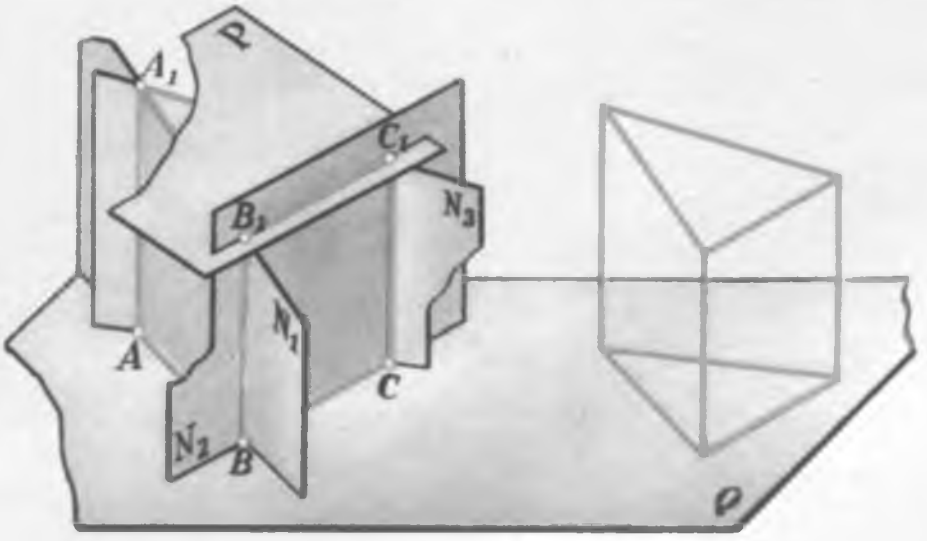


Рис. 144

106 произвольного положения. Каркас призмы составлен линиями пересечения плоскостей.

Вертикальные грани призмы называют ее *боковыми гранями*.

Грань $A_1B_1C_1$, принадлежащая плоскости P, произвольным образом расположенной относительно плоскости Q основания ABC, представляет собой сечение призмы. Такую призму называют *усеченной*.

Призму, ребра которой перпендикулярны к основанию, называют *прямой*. Если в основании призмы имеется прямоугольник, призму называют *параллелепипедом*.

3. Призматоиды

На рис. 145 дано наглядное изображение призматоида — многогранника, ограниченного двумя многоугольниками, расположенными в параллельных плоскостях. Они являются его основаниями. Боковые грани призматоида представляют собой треугольники и трапеции, вершины которых являются и вершинами оснований. В данном случае нижнее основание призматоида — прямоугольник, верхнее — правильный шестиугольник. Две боковые грани — трапеции, а остальные — треугольники.



Рис. 145

Призматоид называют *антипризмой*, если основаниями его являются равные правильные многоугольники, центры которых принадлежат общей нормали к ним, но один многоугольник повернут относительно другого вокруг нормали на угол $\alpha = \frac{180^\circ}{n}$ (n — число сторон многоугольника).

Боковые грани антипризмы — правильные треугольники, вершины которых являются и вершинами многоугольников оснований.

На рис. 146 изображена антипризма с четырехугольными основаниями. Угол поворота одного основания относительно другого равен $\phi = 180^\circ : 4 = 45^\circ$.



Рис. 146

4. Правильные выпуклые многогранники (тела Платона)

Многогранник называют *правильным*, если его грани представляют собой правильные и равные многоугольники. Многогранные углы такого многогранника равны между собой. Существует пять типов правильных многогранников. Эти многогранники и некоторые их свойства были описаны более двух тысяч лет назад Платоном*. Их называют *правильными телами Платона*.

Правильный четырехгранник (*правильный тетраэдр*)**. Он ограничен четырьмя равносторонними, а следовательно, равными треугольниками (рис. 147). Правильный тетра-

---

* Платон (прозвище; от греч. πλατύς — широкий; настоящее имя — Аристокл; 427—347 гг. до н. э.) — древнегреческий философ-идеалист.

** От греч. τετράεδρον, , от τετρα- — четыре и ἕδρα — основание, грань.

эдр — это правильная трехгранная пирамида. При этом каждая из четырех граней может быть выбрана в качестве ее основания. Перпендикуляр, опущенный из любой вершины тетраэдра на противолежащую грань, проходит через ее центр. Центры граней правильного тетраэдра являются вершинами вписанного в него правильного тетраэдра.

Правильный шестигранник (*гексаэдр*)*. (рис. 148). Он состоит из шести равных квадратов, которые по три соединены около каждой вершины — это куб. Куб представляет собой частный случай призмы. Если последовательно соединить центры всех смежных граней, получится многогранник. Расстояния между центрами любых смежных граней куба равны между собой. Значит, получен многогранник, все ребра которого равны между собой, — правильный восьмигранник.

Правильный восьмигранник (*октаэдр*)**. Он состоит из восьми равносторонних и равных между собой треугольников, соединенных по четыре у каждой вершины. Каждая из диагональных плоскостей делит октаэдр на две пирамиды с основаниями, имеющими вид квадрата. В октаэдр, опираясь вершинами в центры его граней, вписывается многогранник — куб. Поэтому куб и октаэдр можно назвать *взаимно соответствующими* (дуальными) многогранниками.

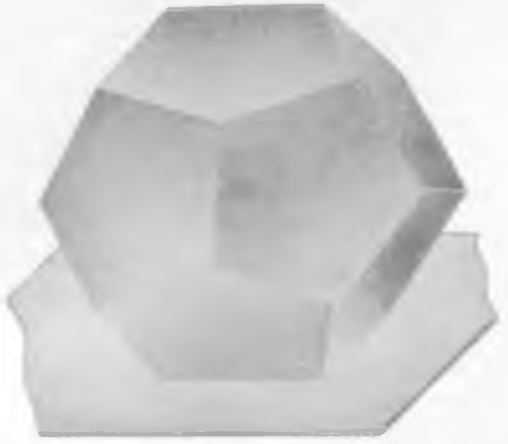
Правильный двенадцатигранник (*додекаэдр*)*** (рис. 149). Додекаэдр состоит из 12 правильных и равных пятиугольников, соединенных по три около каждой вершины. Два из пятиугольников можно принять за основания додекаэдра. Они принадлежат двум параллельным плоскостям. Центры этих пятиугольников принадлежат общей нормали к этим плоскостям. Один пятиугольник повернут относительно другого вокруг нормали на угол $\frac{180^\circ}{n}$, где n — число



Р и с. 147



Р и с. 148



Р и с. 149

* От греч. ἕξ — шесть и ἕδρα — основание, грань.

** От греч. ὀκτάεδρον, от ὀκτώ — восемь и ἕδρα — основание, грань.

*** От греч. δώδεκα — двенадцать и ἕδρα — основание, грань.

108



Рис. 150

вершин многоугольника, т. е. на угол $\frac{180°}{5}=36°$. Остальные десять пятиугольников образуют боковую поверхность додекаэдра. Додекаэдру соответствует правильный двадцатигранник.

Правильный двадцатигранник (*икосаэдр*)*. Он состоит из двадцати равносторонних и равных треугольников, соединенных по пяти около каждой вершины (рис. 150). Икосаэдр можно расчленить на две правильные пятиугольные пирамиды и антипризму с пятиугольными основаниями.

Боковую поверхность этой антипризмы, состоящую из десяти правильных треугольников, можно назвать боковой поверхностью рассматриваемого икосаэдра. Основания пирамид (антипризмы) являются пятиугольниками, центры которых лежат на общей высоте, и поэтому один многоугольник повернут относительно другого на 36°. В икосаэдр можно вписать додекаэдр, имеющий двенадцать пятиугольных граней. Додекаэдр и икосаэдр являются взаимно соответствующими многогранниками.

Теорему о свойствах многогранников доказал Эйлер**; она получила название *теоремы Эйлера.*

Т е о р е м а. *У всякого выпуклого многогранника число граней плюс число вершин минус число ребер равно двум*, т. е.

$$Г+В-Р=2.$$

Проверив это соотношение, результаты можно свести в табл. 1.

	$Г$	$В$	$Р$	$Г+В-Р$
Тетраэдр	4	4	6	4 + 4 — 6 = 2
Куб (гексаэдр) . . .	6	8	12	6 + 8 — 12 = 2
Октаэдр	8	6	12	8 + 6 — 12 = 2
Додекаэдр	12	20	30	12 + 20 — 30 = 2
Икосаэдр	20	12	30	20 + 12 — 30 = 2
Пятиугольная пирамида	6	6	10	6 + 6 — 10 = 2
Треугольная призма	5	6	9	5 + 6 — 9 = 2

Это свойство выпуклых многогранников можно использовать при построении изображений многогранников, так как построение проекций многогранников сводится к построению проекций вершин и ребер, т. е. к построению сетки многогранника. Чертеж выпуклого многогранника можно проверить по формуле Эйлера.

Кроме правильных выпуклых многогранников существуют и правильные выпукловогнутые многогранники. Их называют *звездчатыми* (самопересекающимися). Каждая грань звездчатого многогранника разделена на две области: в н е ш н ю ю — видимую и в н у т р е н н ю ю — невидимую.

Два правильных звездчатых многогранника описал Кеплер*.

В 1810 г. Пуансо** открыл еще два правильных звездчатых многогранника.

В 1812 г. Коши*** доказал, что из всех возможных многогранников только девять являются правильными многогранниками: платоновых тел — пять и правильных звезд-

* От греч. εἴκοσι — двадцать и ἕδρα — основание, грань.

** Эйлер (Euler) Леонард (1707—1783) — великий математик.

* Кеплер Иоганн (1571—1630) — выдающийся немецкий астроном и математик.

** Пуансо Луи (1777—1859) — французский механик и математик.

*** Коши Огюстен Луи (1789—1857) — выдающийся французский математик.

чатых многогранников (тел Пуансо) — четыре.

5. Правильные звездчатые многогранники

Звездчатый додекаэдр первого продолжения (*малый звездчатый додекаэдр*). Он образован путем продолжения граней правильного выпуклого додекаэдра до их первого пересечения. Каждая грань выпуклого додекаэдра при продолжении сторон образует правильный звездчатый пятиугольник (рис. 151). Звездчатый додекаэдр первого продолжения имеет 12 граней, являющихся правильными звездчатыми пятиугольниками, 30 ребер и 12 вершин, являющихся вершинами правильных пятигранных выпуклых углов. Для изготовления правильного звездчатого додекаэдра первого продолжения можно рекомендовать сначала изготовить правильный выпуклый додекаэдр. Далее нужно изготовить 12 правильных пятиугольных пирамид и поставить их основаниями на грани додекаэдра.



Р и с. 152

Звездчатый додекаэдр второго продолжения (*средний звездчатый додекаэдр*). Он образован путем продолжения граней звездчатого додекаэдра первого продолжения до их нового пересечения (рис. 152). Имеет 12 граней в виде правильных выпуклых пятиугольников, 30 ребер и 12 вершин, являющихся звездчатыми правильными пятигранными углами.

Звездчатый додекаэдр третьего продолжения (*большой звездчатый додекаэдр*). Он образован путем продолжения граней звездчатого додекаэдра второго продолжения до их нового пересечения (рис. 153). У него 12 граней в виде правильных звездчатых пятиугольников, 30 ребер и 20 вершин, являющихся вершинами звездчатых правильных трехгранных углов.



Р и с. 151



Р и с. 153



Рис. 154



Рис. 155

Звездчатый икосаэдр (*большой звездчатый икосаэдр*) (рис. 154). Образован путем пересечения и продолжения граней правильного икосаэдра. У него 20 граней в виде правильных треугольников, 30 ребер и 12 вершин, являющихся вершинами звездчатых правильных пятигранных углов.

К правильным звездчатым многогранникам можно отнести и восьмигранник, распадающийся на два тетраэдра (рис. 155).

Многогранники называются *полуправильными*, если их грани — правильные многоугольники различных видов и все многогранные углы равны. Простейшими примерами таких многогранников являются прямые призмы, у которых основания — правильные многоугольники, а боковые грани — квадраты и антипризмы — скошенные призмы.

Еще Архимед* доказал, что кроме двух серий призм и антипризм, существует 13 типов полуправильных многогранников (тела Архимеда). В существующей более 2000 лет теории полуправильных многогранников был дефект, замеченный советским математиком В. Г. Ашкинузе. Оказывается, имеется 14-й полуправильный многогранник Архимеда — *скошенный ромбокубооктаэдр*.

Имеются также и звездчатые полуправильные многогранники; их насчитывается 51 вид. Возможно, что есть и другие виды этих многогранников.

§32 ЧЕРТЕЖИ МНОГОГРАННИКОВ И МНОГОГРАННЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Чертежи многогранников, как и чертежи любых пространственных фигур, должны быть обратимыми, т. е. такими, чтобы по ним можно было бы точно воспроизвести форму и размеры изображаемого предмета.

Для получения обратимого чертежа многогранника необходимо соблюдение определенных условий расположения ребер каркаса в проекциях, а также наложения на чертеж и ряда других дополнительных условий.

На рис. 156 дан чертеж призмы, ребра которой произвольно наклонены к плоскостям проекций H и V. Как показано на чертеже, кроме параллельности боковых ребер, параллельны также и основания призмы.

На чертеже показано определение горизонтальной проекции k точки kk' по извест-

* Архимед (ок. 287—212 гг. до н. э.) — величайший математик и механик Древней Греции.

ной ее фронтальной проекции k' при условии, что точка kk' принадлежит грани abb_1a_1, $a'b'b_1'a_1'$.

Выбираем в грани любую из прямых, проходящих через заданную точку. Такой прямой может быть произвольного положения прямая 12, $1'2'$, пересекающая ребра aa_1, $a'a_1'$ и bb_1, $b'b_1'$ в точках $11'$ и $22'$ или, например, прямая $k3$, $k'3'$, параллельная боковым ребрам и пересекающая в точке $33'$ ребро ab, $a'b'$. Фронтальные проекции $1'2'$ и $k'3'$ этих прямых проходят через фронтальную проекцию k' искомой точки. Горизонтальные проекции 12 и $k3$ определяются по условию принадлежности прямых соответствующей грани.

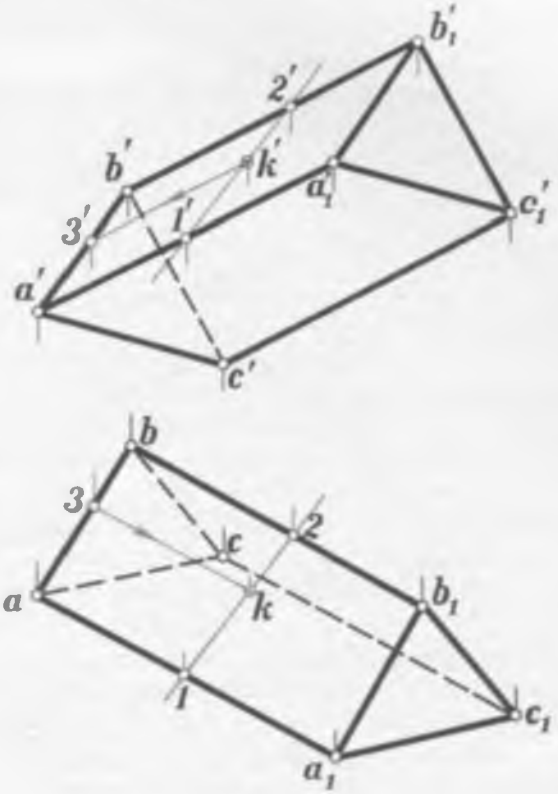
На пересечении линии связи с горизонтальной проекцией любой из вспомогательных прямых определяется недостающая горизонтальная проекция k точки kk'.

Построим горизонтальную проекцию многогранника (рис. 157), если известны его фронтальная проекция и три ребра ab, $a'b'$; ac, $a'c'$ и ae, $a'e'$. Горизонтальные проекции вершин и ребер многогранника определяют с учетом условия, что они принадлежат или параллельны плоскостям (граням) каждой из пары заданных ребер. Так, горизонтальная проекция 1 вершины $11'$ определена как недостающая проекция точки, принадлежащей плоскости abc, $a'b'c'$. Плоскости abc, $a'b'c'$ принадлежат точки $22'$ и $33'$; плоскости ace, $a'c'e'$ принадлежат точки $44'$, $55'$ и $66'$; плоскости abe, $a'b'e'$ — точка $77'$. В плоскости $4e7$, $4'e'7'$ будут точки $88'$, $99'$ и 10, $10'$, а в плоскости 329, $3'2'9'$ определяются остальные вершины многогранника.

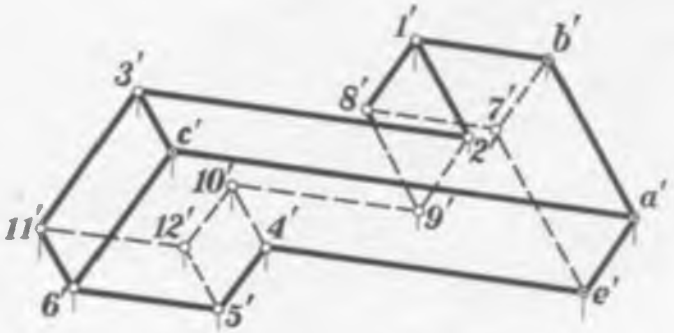
Однозначное определение многогранной поверхности или многогранника позволяет получить вполне законченный чертеж рассматриваемого предмета.

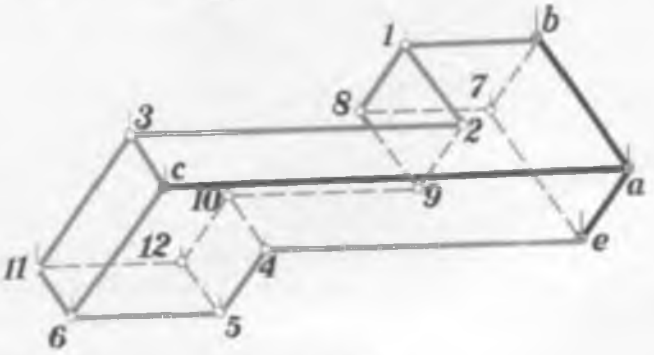
Пусть будет задано одно изображение некоторой многогранной поверхности, образованной частями пересекающихся плоскостей (рис. 158).

Установим, для какого минимального числа ее точек надо задать вторые проекции, чтобы оригинал был полностью определен.



Р и с. 156





Р и с. 157

112

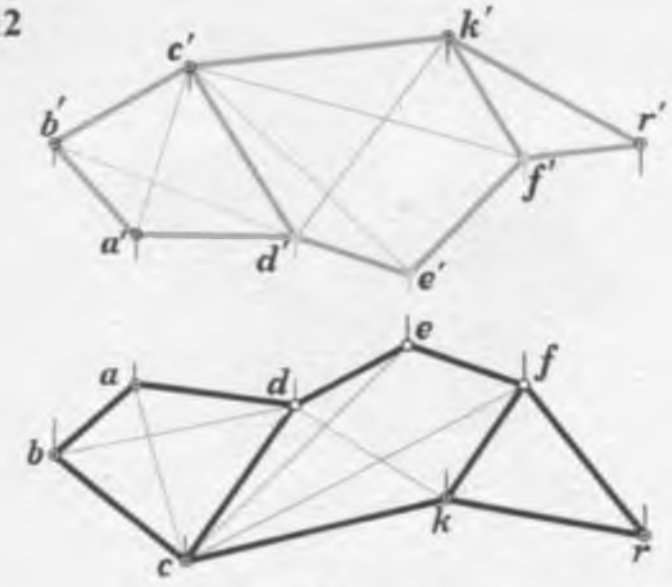
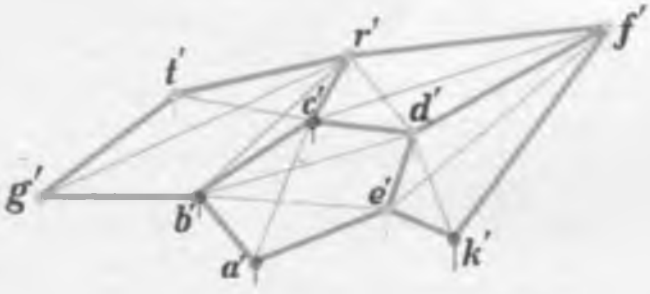


Рис. 158



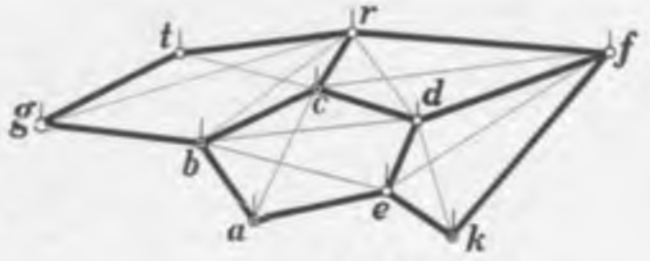


Рис. 159

Известно, что прямая линия вполне определяется двумя точками. Точечный базис* прямой состоит из двух точек. Плоскость определяется тремя точками, не лежащими на одной прямой линии.

Точечный базис плоскости состоит из трех независимых точек. Установим точечный базис для многогранной поверхности. Определим, для скольких точек этой поверхности надо задать еще и фронтальные их проекции, чтобы оказалось возможным построение единственной фронтальной проекции поверхности. Три точки первой грани, заданные проекциями aa', bb' и cc', однозначно определяют фронтальную проекцию $a'b'c'd'$ многоугольника.

Точки cc' и dd' принадлежат линии пересечения двух граней. Для построения фронтальной проекции второй грани многоугольника $cdefk$, $c'd'e'f'k'$ достаточно задать любую точку этого многоугольника, например kk'. Построим фронтальную проекцию $c'd'e'f'k'$ многоугольника.

Точки kk' и ff' принадлежат двум граням многогранной поверхности. Для построения фронтальной проекции третьего многоугольника достаточно задать проекции еще какой-либо точки, например, rr', принадлежащей этому многоугольнику.

Отметим, что для построения фронтальной проекции рассматриваемой многогранной поверхности достаточно было задать проекции трех точек aa', bb' и cc' одной из ее граней и по одной точке ee' и rr' в каждой последующей грани. Следовательно, точечный базис этой поверхности равен пяти.

Точечный базис многогранной поверхности, у которой все углы двугранные, можно выразить формулой

$$Б = Г + 2,$$

где $Г$ — число граней.

Определим точечный базис поверхности, горизонтальная проекция которой показана на рис. 159. Задав три точки aa', bb' и cc', определяем грань $abcde$, $a'b'c'd'e'$. Определив сторону de, $d'e'$, общую для двух граней, и задав точку kk', можно построить грань $edfk$, $e'd'f'k'$.

* Учение о точечном базисе пространственных фигур разработано Н. Ф. Четверухиным.

По точкам cc', dd' и ff' определяем фронтальную проекцию $c'd'f'r'$ грани $cdfr$, $c'd'f'r'$. По точкам bb', cc' и rr' определяем следующую грань и т. д. Как видно, точечный базис такой поверхности равен четырем.

Точечный базис многогранной поверхности, у которой все углы при вершинах трехгранные, равен четырем. Этому условию всегда удовлетворяют пирамиды и призмы. Для любой пирамиды или призмы точечный базис равен четырем.

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ МНОГОГРАННИКОВ ПЛОСКОСТЬЮ И ПРЯМОЙ ЛИНИЕЙ

§33

Линией пересечения многогранника плоскостью в общем случае является плоский многоугольник. Такой многоугольник можно построить или по точкам пересечения с плоскостью ребер многогранника, или по линиям пересечения граней многогранника с плоскостью. Задача сводится к определению точек пересечения прямой с плоскостью или к определению линий пересечения плоскостей.

Плоскую фигуру, полученную от пересечения многогранника плоскостью, называют *сечением*. Проекции многоугольника сечения могут преобразовываться (вырождаться) в прямые и точки.

Вершины многоугольника сечения являются вершинами усеченного многогранника, а стороны многоугольника являются ребрами усеченного многогранника. Число сторон многоугольника сечения равно числу граней многогранника, пересекаемых секущей плоскостью. В зависимости от направления и положения секущей плоскости, сечением куба, например, может быть треугольник, четырехугольник, пятиугольник и шестиугольник (рис. 160).

Если секущая плоскость параллельна плоскости проекций, то фигура сечения проецируется на эту плоскость проекцией без искажения — в натуральную величину.

На рис. 161 показано построение линии пересечения пирамиды фронтально-проеци-

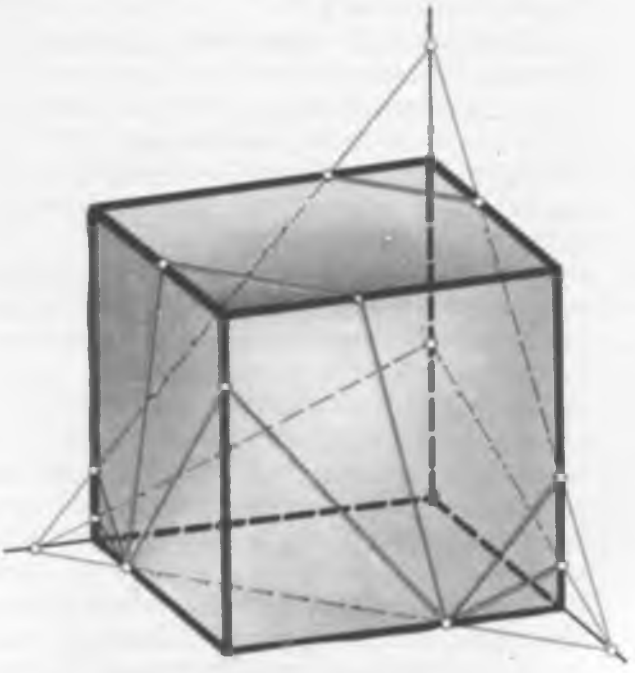


Рис. 160

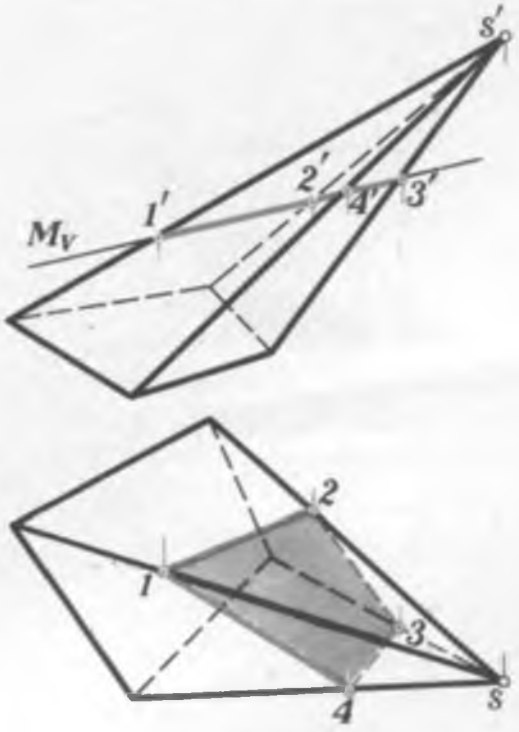
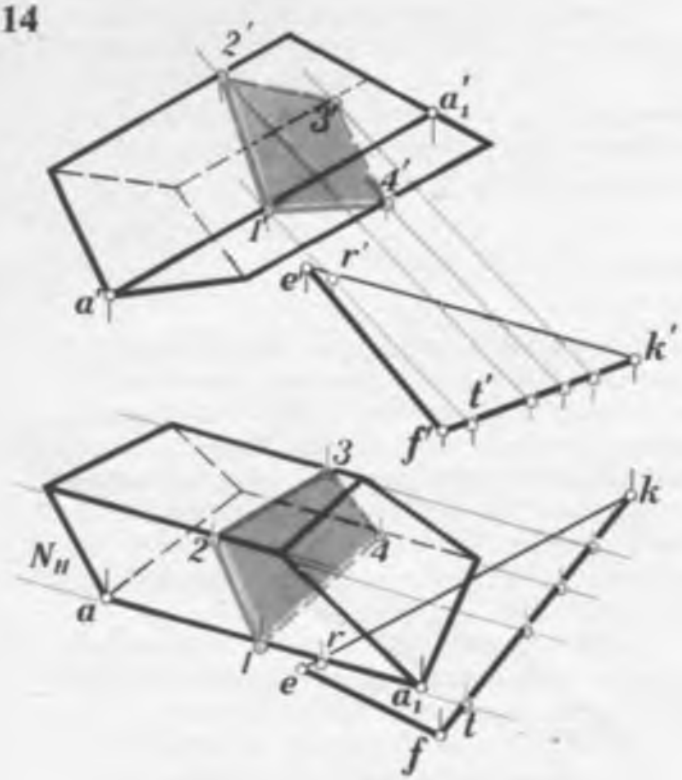
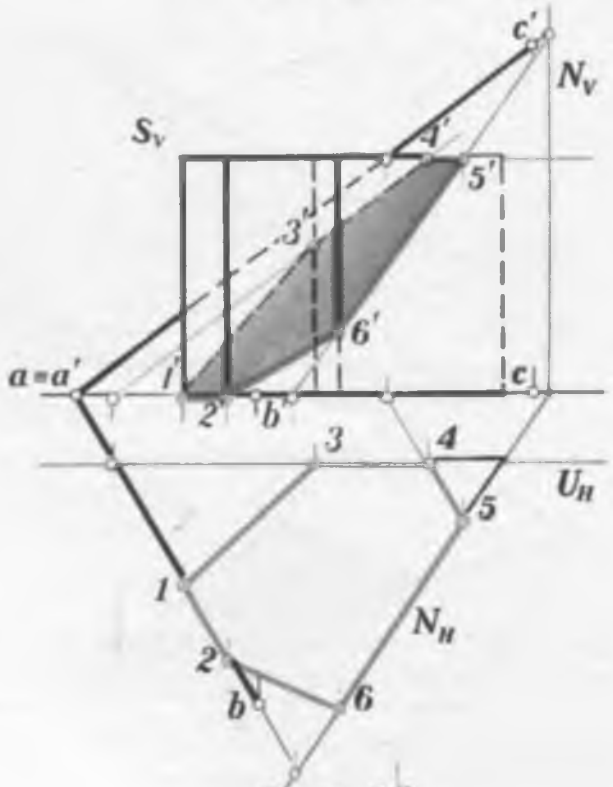


Рис. 161



Р и с. 162



Р и с. 163

рующей плоскостью M_V. Здесь многоугольник сечения определяется по точкам пересечения ребер пирамиды с плоскостью.

Фронтальная проекция $1'2'3'4'$ сечения преобразуется в прямую, совпадающую со следом M_V проецирующей плоскости. Она получается по точкам пересечения со следом плоскости фронтальных проекций ребер пирамиды. Горизонтальные проекции вершин многоугольника сечения находят по их фронтальным проекциям на пересечении линий связи с соответствующими проекциями ребер пирамиды. Фигурой сечения является выпуклый многоугольник 1234, $1'2'3'4'$.

Если многогранник пересекает плоскость произвольного положения, то для определения линии пересечения необходимо воспользоваться некоторыми дополнительными вспомогательными построениями.

Так, на рис. 162 показаны необходимые построения для определения сечения призмы плоскостью efk, $e'f'k'$. Определяем точки пересечения ребер призмы с плоскостью. Находим точку пересечения ребра aa_1, $a'a_1'$ плоскостью. Проводим через это ребро вспомогательную проецирующую плоскость N_H и определяем линию rt, $r't'$ пересечения ее секущей плоскостью.

Прямая rt, $r't'$ пересекает ребро aa_1, $a'a_1'$ в точке $11'$.

Аналогичными построениями определяются точки $33'$ и $44'$ пересечения остальных ребер призмы с секущей плоскостью. Точки $11'$, $22'$, $33'$ и $44'$ являются вершинами искомого многоугольника сечения.

Фигура сечения с искажением проецируется на плоскости проекций H и V. Штриховыми линиями изображены невидимые стороны многоугольника сечения; они принадлежат невидимым граням призмы.

На рис. 163 показан другой пример, когда прямую призму, поставленную основанием на плоскость проекций H, пересекает плоскость abc, $a'b'c'$, заданная главными линиями — следами. Секущая плоскость проходит через ребро 12, $1'2'$ основания призмы. Следовательно, ребро 12, $1'2'$ является одной из сторон многоугольника сечения. Боковые грани призмы являются отсеками горизон-

тально-проецирующих плоскостей. Поэтому линии сечения можно определить как линии пересечения проецирующих плоскостей граней призмы с заданной секущей плоскостью.

Проецирующая плоскость U_H фронтальной грани призмы пересекает плоскость *abc*, *a′b′c′* по фронтали, которая и определяет прямую *34*, *3′4′* пересечения фронтальной грани секущей плоскостью — сторону искомого многоугольника сечения.

Путем построения прямых *12*, *1′2′* и *34*, *3′4′* двух смежных граней определяется прямая *13*, *1′3′*.

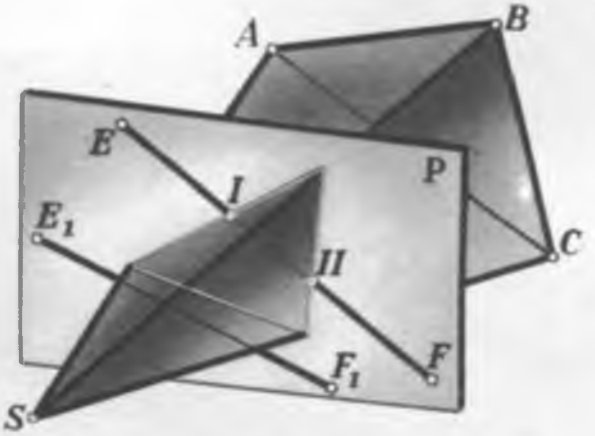
Горизонтальная плоскость S_V верхней грани призмы пересекает секущую плоскость *abc*, *a′b′c′* по горизонтали. Прямая *45*, *4′5′* этой горизонтали является линией пересечения грани призмы (верхнего основания) секущей плоскостью.

Вертикальная грань горизонтально-проецирующей плоскости N_H, N_V пересекает секущую плоскость по прямой *56*, *5′6′*, являющейся стороной искомого многоугольника. Замыкающей стороной многоугольника сечения является отрезок *26*, *2′6′*.

Многоугольником сечения является шестиугольник *134562*, *1′3′4′5′6′2′*. Для построения линии пересечения многогранника плоскостью вспомогательные секущие плоскости можно выбирать каждую через одну грань многогранника.

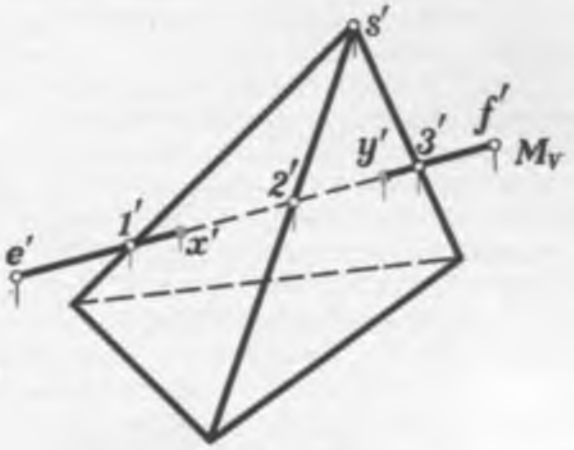
Прямая линия может пересекать поверхность многогранника в одной, двух и более точках. Если многогранник выпуклый — не более чем в двух точках. Прием решения этой задачи основан на схеме определения точки пересечения прямой с плоскостью.

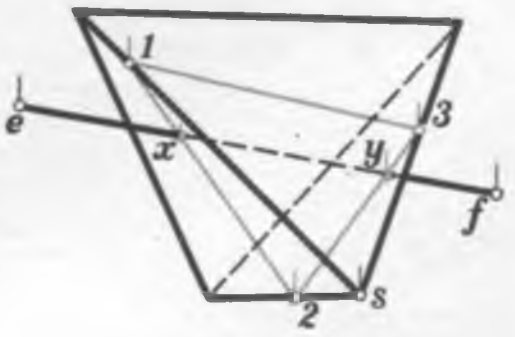
Задачу решаем в такой последовательности (рис. 164). Через прямую *EF* проводим вспомогательную плоскость *P*, обычно проецирующую. Строим фигуру сечения многогранника этой вспомогательной плоскостью. Точки пересечения сторон многоугольника сечения с прямой являются точками пересечения прямой с многогранником. Если прямая E_1F_1 не пересекает многоугольник сечения, то она не пересекает и многогранник.



Р и с. 164

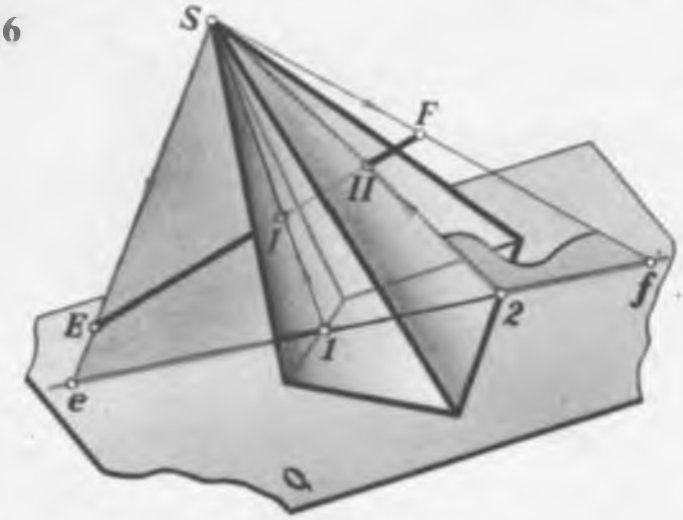
На рис. 165 решена задача на построение точек пересечения прямой *ef*, *e′f′* с тетраэдром. Через прямую *ef*, *e′f′* проведена фронтально-проецирующая плоскость M_V. По-





Р и с. 165

116

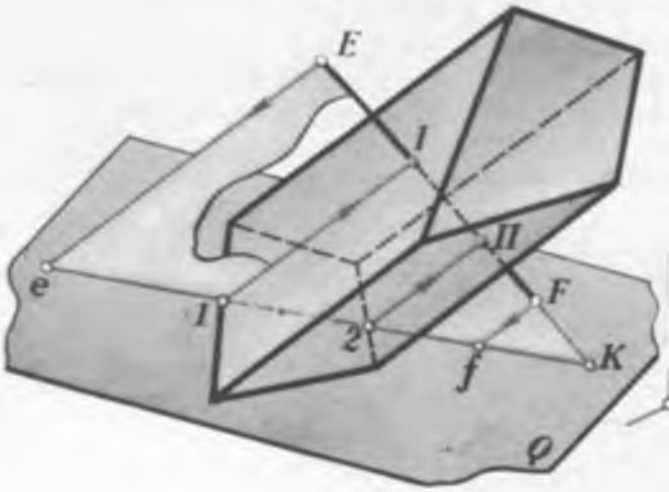


Р и с. 166

строена линия *123*, *1′2′3′* пересечения этой плоскости тетраэдром. Точки *xx′* и *yy′* пересечения сторон треугольника сечения прямой *ef*, *e′f′* являются точками пересечения этой прямой с многогранником.

На чертеже указана видимость прямой в горизонтальной и фронтальной проекциях.

Иногда более целесообразно использовать не проецирующую плоскость прямой, а какую-либо другую плоскость. Например, чтобы построить точки пересечения прямой с пирамидой, прямую можно заключить в плоскость, проходящую через вершину пирамиды (рис. 166).

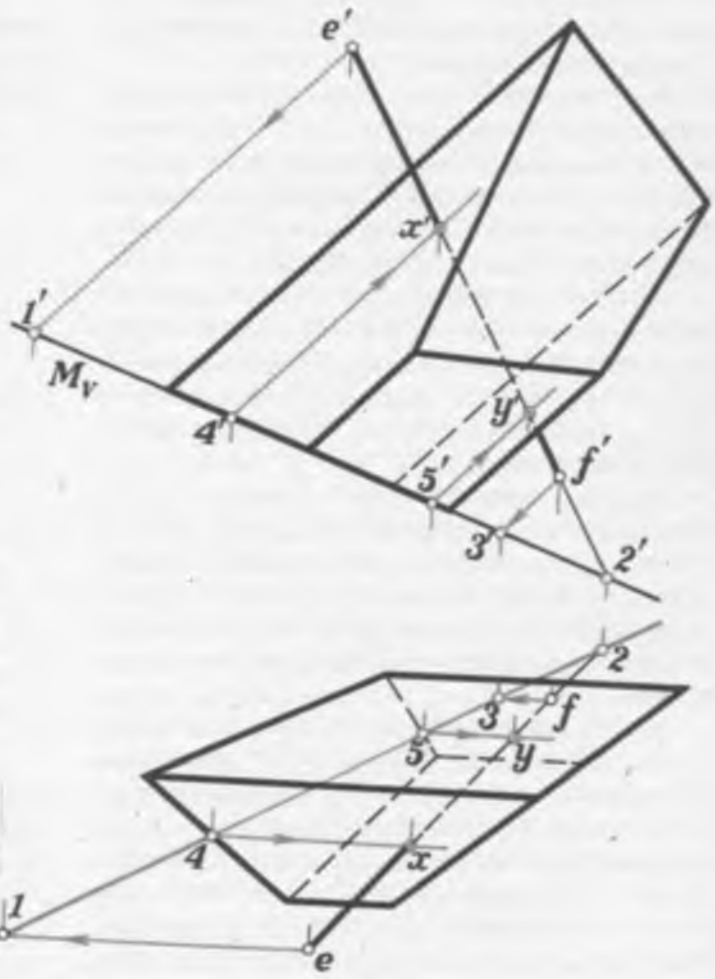


Р и с. 167

Для призмы такая вершина находится в бесконечности.

Секущая плоскость представлена данной прямой и прямой, параллельной ребрам призмы (рис. 167).

На рис. 168 показаны построения на эпюре Монжа точек пересечения прямой линии с призмой. Через прямую *ef*, *e′f′* проводим вспомогательную секущую плоскость, параллельную ребрам призмы, и определяем линию *12*, *1′2′* пересечения этой плоскости с плоскостью M_V основания призмы. Линия *12*, *1′2′* пересечения плоскостей определяется по точкам *11′* и *22′* пересечения прямых *e1*, *e′1′* и *ef*, *e′f′* вспомогательной секу-



Р и с. 168

щей плоскости с плоскостью M_V основания призмы.

Если след $2'2'$ прямой ef, $e'f'$ на плоскости M_V выходит за пределы чертежа, то секущую плоскость задают двумя параллельными прямыми $e1$, $e'1'$ и $f3$, $f'3'$ и определяют следы $1'1'$ и $3'3'$ этих прямых.

След секущей плоскости пересекается сторонами основания призмы в точках $4'4'$ и $5'5'$. Через эти точки параллельно ребрам проходят стороны многоугольника сечения, которые пересекают прямую ef, $e'f'$ в точках xx' и yy'. В этих же точках прямая ef, $e'f'$ пересекает многогранник. На чертеже показана видимость прямой в горизонтальной и фронтальной проекциях.

Если грани призмы перпендикулярны к какой-либо плоскости проекций, то задача на построение точек пересечения прямой такой призмой значительно упрощается.

ВЗАИМНОЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ МНОГОГРАННИКОВ

§ 34

Линию пересечения двух многогранников можно построить двумя способами.

Первый способ позволяет определить линию пересечения многогранников по точкам пересечения ребер одного многогранника с гранями другого и наоборот. Это известная задача на определение точки пересечения прямой с плоскостью.

Второй способ позволяет определить линию пересечения многогранников как линию пересечения граней многогранников. Это — задача на построение линии пересечения двух плоскостей.

Преимущество отдается тому из способов, который в зависимости от условия задания дает наипростейшее и наиболее точное решение. Эти два способа построения линии пересечения двух многогранников часто комбинируют. Линиями пересечения двух многогранников в общем случае являются пространственные замкнутые многоугольники. В зависимости от вида многогранников и их взаимного расположения линиями пересечения могут быть один, два и более пространственных многоугольников.

Линиями пересечения двух выпуклых многогранников является один или два многоугольника.

Если один многогранник частично пересекается, как бы неполностью врезается в поверхность другого, то имеем одну замкнутую ломаную линию их взаимного пересечения. Такое взаимное пересечение выпуклых многогранников называют *неполным проницанием* или *врезкой*.

Если один многогранник полностью пересекается вторым многогранником, получаем две линии их пересечения — линию входа одного многогранника в другой и линию выхода. Такое взаимное пересечение геометрических тел называют *полным проницанием*.

Линии пересечения — многоугольники — представляют собой совокупности отрезков прямых, по которым пересекаются грани двух многогранников.

Вершины многоугольников являются точками пересечения ребер одного многогранника с гранями другого и ребер второго с гранями первого. Стороны многоугольников строятся как отрезки прямых, соединяющих только те пары вершин, которые принадлежат одной и той же грани первого многогранника, а также и одной грани второго многогранника.

При определении сторон многоугольника строго соблюдается последовательность соединения его вершин. Иногда в трудных случаях используются даже диаграммы или таблицы. Проекции линии пересечения двух многогранников располагаются внутри контура наложения одноименных проекций многогранников.

Если проекция какого-либо ребра одного из многогранников не пересекает общий контур — контур проекций, то ребро не пересекает другой многогранник. Однако, если проекция ребра одного из многогранников пересекает даже и две проекции контура наложения, это еще не означает, что это ребро пересекает второй многогранник.

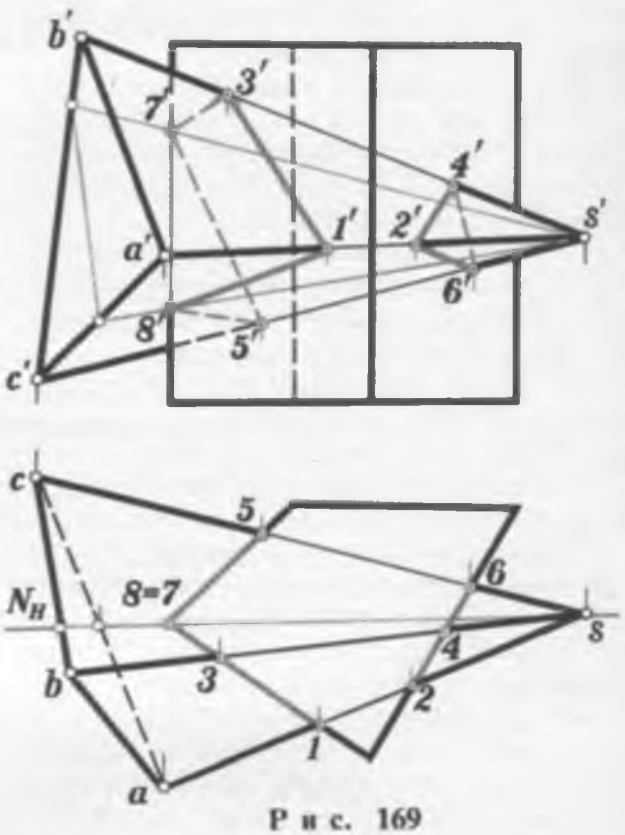
118 Покажем на ортогональном чертеже (рис. 169) построение линии пересечения прямой четырехугольной призмы с тетраэдром (пирамидой). Рассмотрим случай полного проницания одного многогранника другим.

Призма своим основанием стоит на горизонтальной плоскости проекций H. Горизонтальные проекции ее вертикальных ребер преобразуются в точки. Грани боковой поверхности призмы представляют собой отсеки горизонтально-проецирующих плоскостей. Линия пересечения многогранников определяется по точкам пересечения ребер каждого из них с гранями другого многогранника. Так, ребро sa, $s'a'$ тетраэдра пересекает две вертикальные грани призмы: одну — в точке $11'$ и вторую — в точке $22'$. Ребро sb, $s'b'$ тетраэдра пересекает две вертикальные грани призмы в точках $33'$ и $44'$; ребро sc, $s'c'$ — в точках $55'$ и $66'$.

Из четырех вертикальных ребер призмы только одно ребро пересекает тетраэдр. Находим точки его пересечения с гранями тетраэдра. Через это ребро и вершину ss' тетраэдра проводим вспомогательную горизонтально-проецирующую плоскость N_H. Она пересекает тетраэдр по прямым, которые пересекают ребро призмы в точках $77'$ и $88'$ — в точках пересечения ребра призмы с гранями тетраэдра. Соединяя каждые пары таких точек одних и тех же граней отрезками прямых, получаем две линии пересечения многогранников. Одна из них представляет собой пространственный многоугольник 137581, $1'3'7'5'8'1'$, другая — треугольник 246, $2'4'6'$.

Видимыми являются только те из отрезков многоугольников пересечения, которые принадлежат видимым граням многогранников; невидимые обозначаем на чертеже штриховыми линиями.

Отрезки 24, $2'4'$ и 26, $2'6'$ линии пересечения 246, $2'4'6'$ видимы во фронтальной проекции. Они принадлежат видимым граням призмы и тетраэдра. Отрезок 46, $4'6'$ является невидимым во фронтальной проекции. Этот отрезок принадлежит видимой в этой проекции грани призмы и невидимой



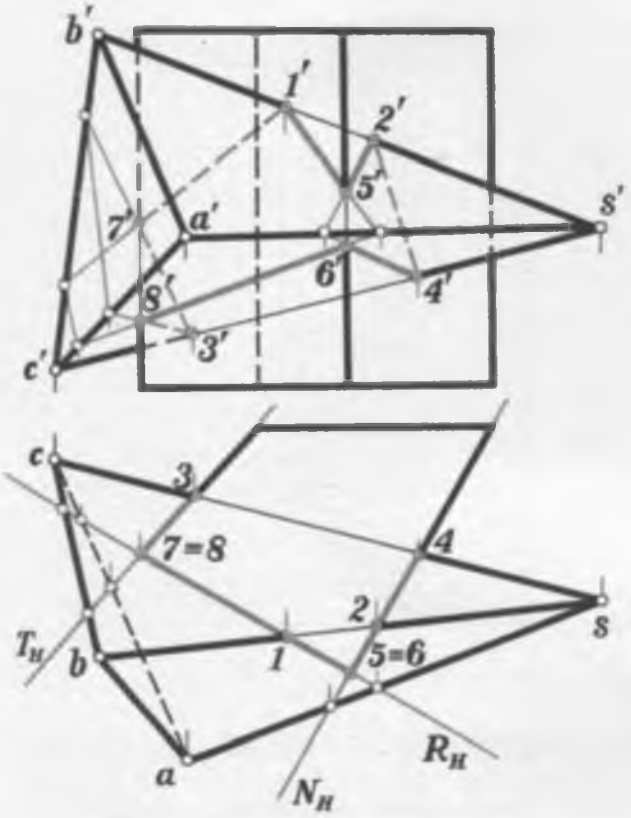
Р и с. 169

грани тетраэдра. Во фронтальной проекции видимы отрезки 13, $1'3'$ и 18, $1'8'$ второй линии пересечения, а отрезки 37, $3'7'$, 75, $7'5'$ и 58, $5'8'$ этой линии — невидимы.

Рассмотрим пример неполного проницания многогранников, когда каждый из многогранников неполностью пересекается другим многогранником. Здесь имеется одна замкнутая ломаная линия их взаимного пересечения. Воспользуемся теми же многогранниками, но в ином их взаимном расположении (рис. 170).

На рисунке показано, что не все ребра боковой поверхности пирамиды пересекают призму. Стороны многоугольника пересечения будем определять как линии пересечения между собой граней многогранников. Выбираем одну из вертикальных граней призмы и определяем линию пересечения ее с гранями тетраэдра.

Горизонтально-проецирующая плоскость N_H грани призмы пересекается с гранями тетраэдра по треугольнику. Отрез-



Р и с. 170

ки *52*, *5'2'*; *24*, *2'4'* и *46*, *4'6'* сторон этого треугольника, принадлежащие граням призмы, являются сторонами искомого многоугольника пересечения.

Затем определяем линию пересечения второй вертикальной грани призмы с тетраэдром. Горизонтально-проецирующая плоскость R_H этой грани пересекает тетраэдр по четырехугольнику. Отрезки *15*, *1'5'*; *17*, *1'7'* и *68*, *6'8'* принадлежат соответственно каждый двум граням многогранников — граням призмы и граням пирамиды. Они являются сторонами линии пересечения многогранников.

Проецирующая плоскость T_H третьей вертикальной грани призмы пересекается с тетраэдром по треугольнику. Отрезки *38*, *3'8'* и *37*, *3'7'* сторон этого треугольника также представляют стороны пространственного многоугольника пересечения заданных многогранников. Определим видимость этого многоугольника в проекциях. Отрезки *52*, *5'2'*; *15*, *1'5'*; *68*, *6'8'* и *46*, *4'6'* видимы во фронтальной проекции. Каждый из них принадлежит двум видимым граням многогранников. Отрезки *24*, *2'4'*; *17*, *1'7'*; *38*, *3'8'* и *37*, *3'7'* невидимы во фронтальной проекции. Покажем их условно штриховыми линиями. Теперь легко определить и видимость участвующих в пересечении ребер многогранников — видимость двух ребер тетраэдра, пересекающих призму, а также видимость двух ребер призмы, пересекающих грани тетраэдра. Выделяя видимые грани, чертежу можно придать бóльшую наглядность.

Покажем схемы построения линий пересечения пирамид и призм, основания которых лежат в проецирующих плоскостях. Пусть даны пересекающиеся между собой пирамиды с вершинами S и S_1. Основания пирамид лежат в одной плоскости Q. Вспомогательные секущие плоскости, которые проводят через ребра одной пирамиды при определении точек пересечения их с другой пирамидой, выбирают проходящими через вершины обеих пирамид (рис. 171).

Проведем через вершины S и S_1 пирамид прямую и построим ее след K на плоскости Q. Эта прямая и ребро пирамиды, которое пересечет вторую пирамиду, определяют вспомогательную секущую плоскость. Пусть такая плоскость проходит через ребро S_1F пирамиды с вершиной S_1.

След секущей плоскости пересекает основание пирамиды с вершиной S в двух точках, а сама секущая плоскость пересекает грани этой пирамиды по двум прямым. Прямые пересекают ребро S_1F в двух точках, которые принадлежат линии пересечения многогранников.

Выбирая секущую плоскость, проходящую через ребро S_1E второй пирамиды, определяем точки пересечения ребра S_1E с первой пирамидой.

Секущая плоскость ребра S_1D второй пирамиды дает возможность определить две точки его пересечения с первой пирамидой — точки, общие для заданных многогранников.

120

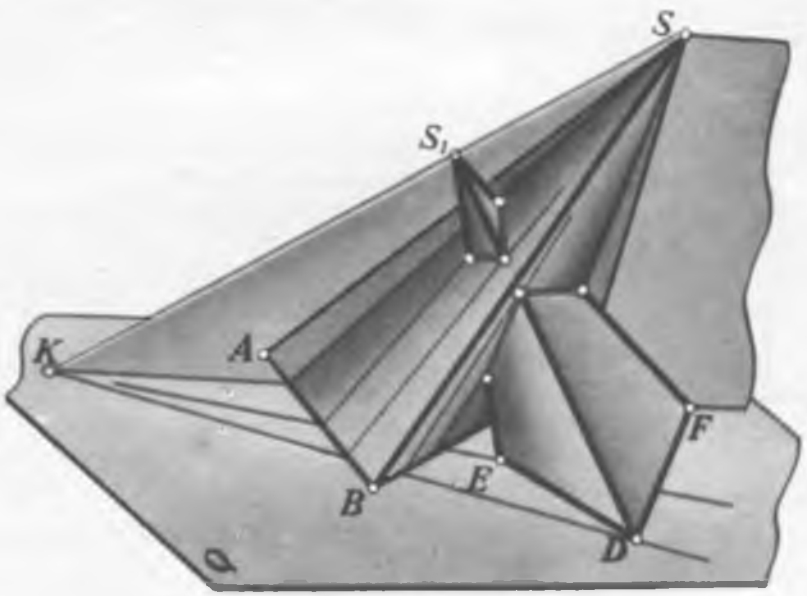


Рис. 171

Найденные точки одних и тех же граней пирамид последовательно соединяем прямыми. Видимость отрезков ломаной линии пересечения можно определить с помощью одновременного обхода многоугольников оснований пирамид.

Указанное на схеме взаимное расположение пирамид определяет случай полного проницания одной пирамиды в другую. Если удалить вершину одной из пирамид в бесконечность, то эта пирамида обратится в призму, и прямая вершин многогранников расположится параллельно ребрам призмы.

Рассмотрим схему построения линии пересечения призмы с пирамидой, когда их основания принадлежат одной плоскости (рис. 172).

Через вершину пирамиды проводим прямую параллельно ребрам призмы и находим точку K — след этой прямой на плоскости Q оснований многогранников.

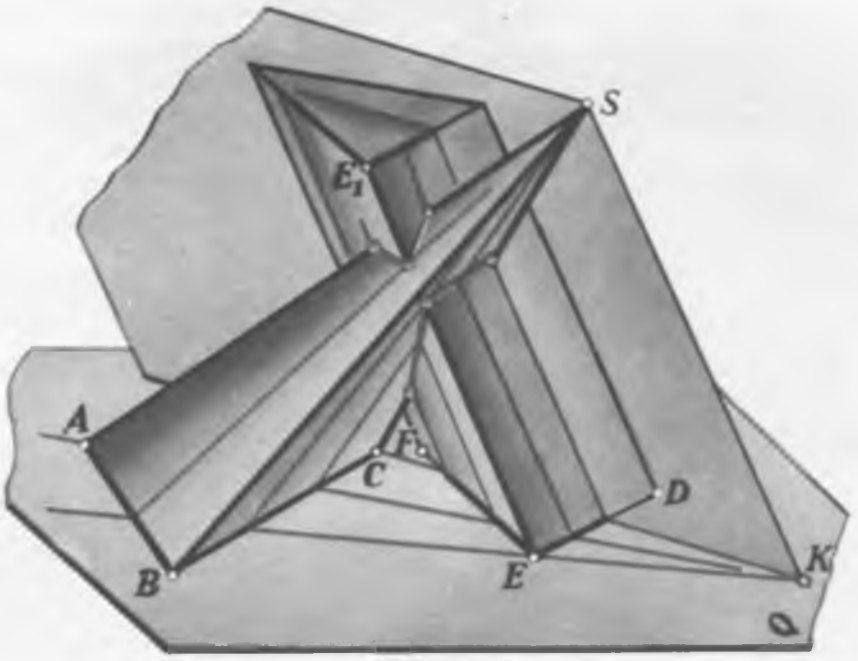
Вспомогательные секущие плоскости ребер многогранников проходят через прямую SK. С помощью секущей плоскости, проходящей через ребро SC пирамиды, определяем две точки его пересечения с гранями призмы. Аналогично определяем две точки пересечения ребра SA пирамиды с призмой и ребра EE_1 призмы с пирамидой. Строим линии пересечения граней пирамиды с гранями призмы и указываем их видимость.

В рассматриваемом случае имеется неполное проницание заданных многогранников. Последовательность соединения найденных точек линии пересечения и ее видимость определяется методом одновременного обхода многоугольников оснований пирамиды и призмы.

При удалении двух вершин пирамид в бесконечность прямая, проходящая через них, преобразуется в несобственную прямую. Положения бесконечно удаленных вершин определяются направлениями боковых ребер призмы соответственно.

Покажем схему построения линии пересечения двух призм с основаниями, лежащими в одной плоскости (рис. 173).

Через какую-либо точку K, лежащую вне плоскости Q, проведем прямые линии KM и KN, параллельные соответственно ребрам призм. Этими прямыми линиями определяется плоскость KMN. Любая плоскость, параллельная плоскости KMN, след которой пересекает основания призм, пересекает

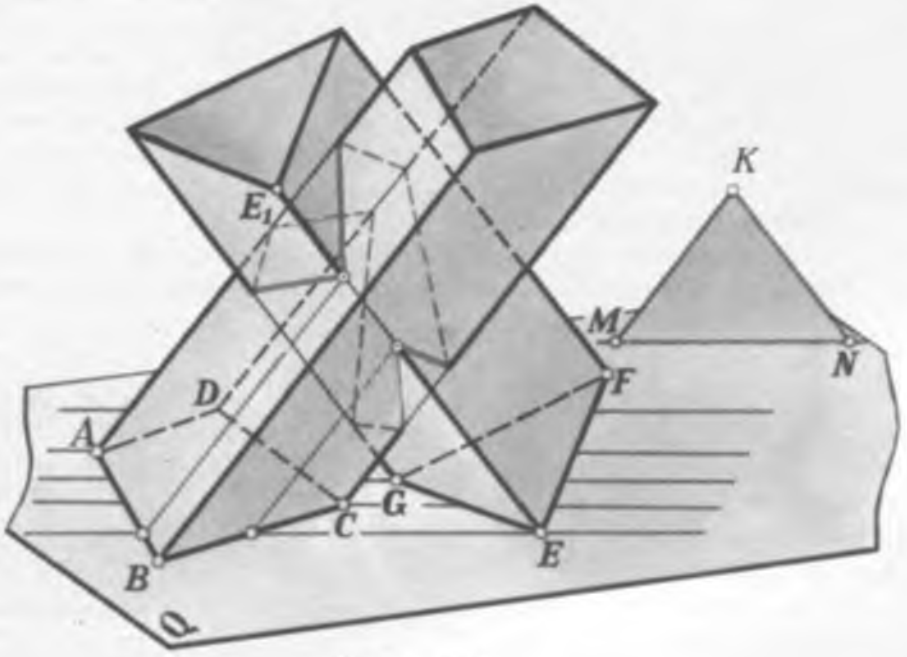


Р и с. 172

призмы по прямым, параллельным ребрам.

Секущая плоскость, параллельная плоскости KMN и проходящая через боковое ребро EE_1 призмы, пересекает грани другой призмы по двум прямым, которые пересекаются ребром EE_1 в двух точках. Эти точки принадлежат линии пересечения многогранников.

Аналогично находим точки пересечения ребер каждой из призм с гранями другой призмы.



Р и с. 173

122

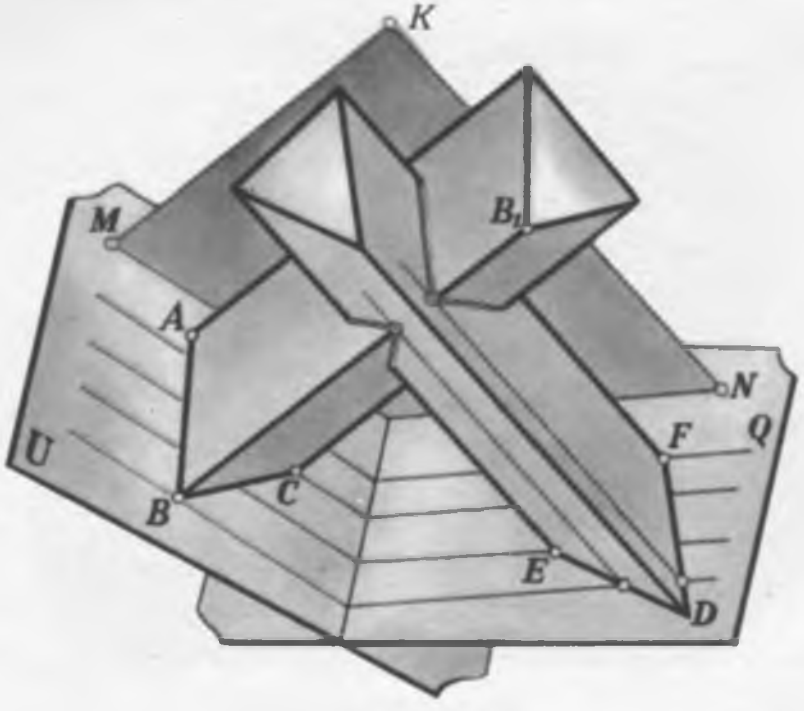


Рис. 174

Найденные точки одних и тех же граней последовательно соединяем прямыми и определяем видимость отрезков ломаной линии пересечения многогранников. Получаем случай неполного проницания многогранников.

Описанные схемы построения линии пересечения многогранников справедливы и для случаев, когда основания многогранников лежат в разных плоскостях.

Рассмотрим схему построения линии взаимного пересечения двух призм, когда их основания лежат в пересекающихся плоскостях Q и U (рис. 174). Строим плоскость KMN, параллельную ребрам призмы. Секущая плоскость, параллельная плоскости KMN и проходящая через ребро BB_1 призмы, дает возможность определить точки пересечения этого ребра с другой призмой. С помощью секущих плоскостей, проходящих через ребра каждой из призм, определяем точки их пересечения с гранями другой призмы. Соединяя последовательно найденные точки одних и тех же граней, определяем линию пересечения двух призм и ее видимость.

Таким образом, получен случай неполного проницания многогранников.

§35 РАЗВЕРТКИ МНОГОГРАННИКОВ

Совмещение всех граней многогранника с одной плоскостью путем последовательного вращения их вокруг ребер называют *разверткой* многогранника.

Все грани многогранника на развертке представляются в натуральную величину. Поэтому построение развертки сводится к построению натуральных величин граней

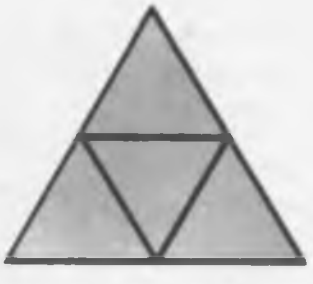


Рис. 175

многогранника. Их расположение и последовательность могут быть различными, однако развертку надо делать такой, чтобы наивыгоднейшим образом использовать площадь листового материала, из которого создается многогранник. При построении разверток следует также учитывать и общую длину шва.

Каждый многогранник имеет несколько вариантов развертки.

На рис. 175 представлен один из трех возможных вариантов развертки тетраэдра.

На рис. 176 представлен один из двадцати возможных вариантов развертки куба.

На рис. 177 представлен один из двадцати возможных вариантов развертки октаэдра.

На рис. 178 представлен вариант развертки додекаэдра.

На рис. 179 представлен вариант развертки икосаэдра.

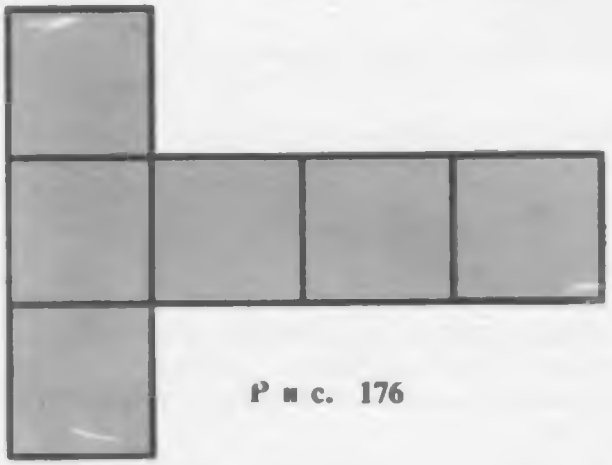


Рис. 176

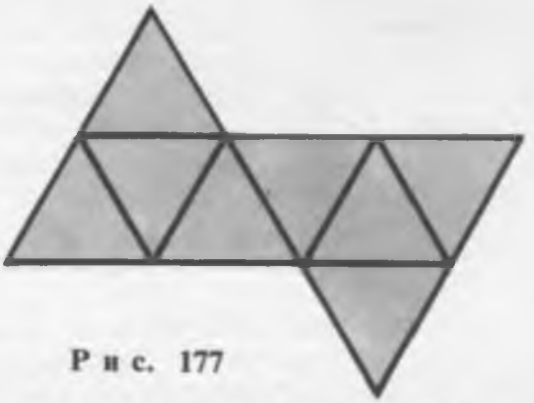


Рис. 177

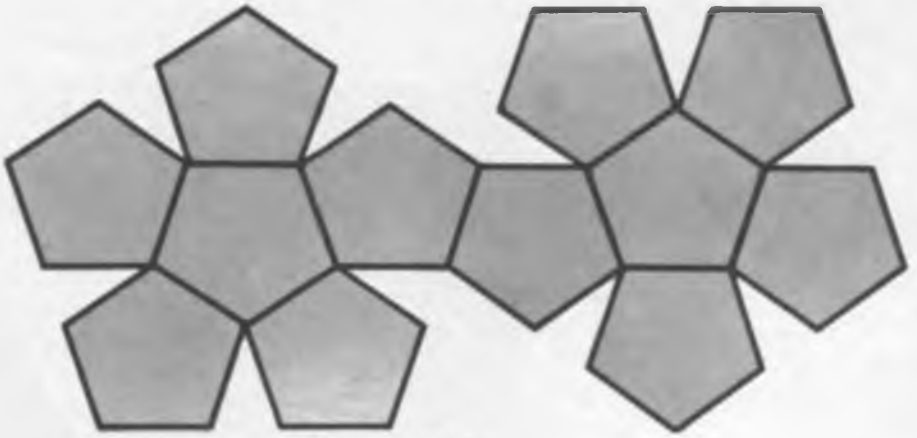


Рис. 178

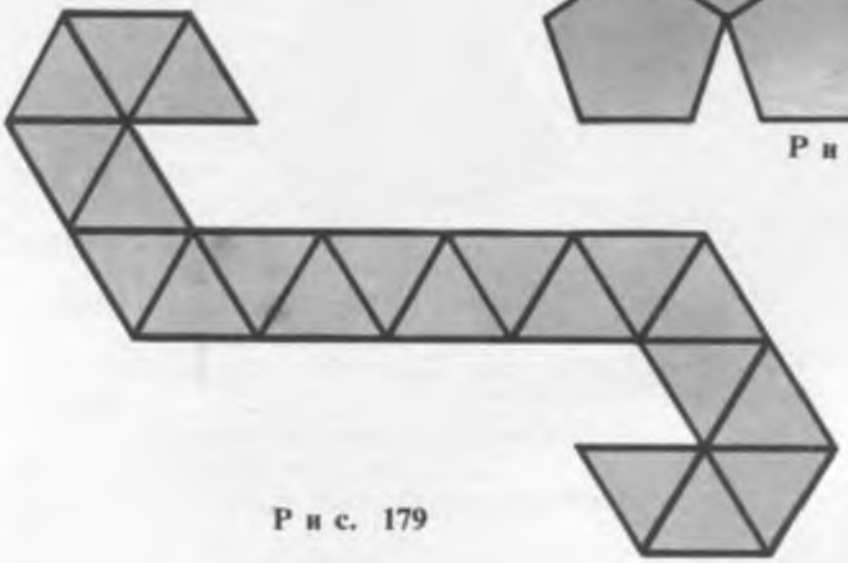


Рис. 179

124 Чтобы получить развертку выпуклого многогранника, нужно на его поверхности провести линию разреза — шов. Шов должен удовлетворять трем основным условиям:

проходить через все вершины выпуклого многогранника;

не быть замкнутым;

состоять из связанных между собой участков (линия шва должна быть одна).

Обычно шов проводят по ребрам, но это не всегда бывает рационально. Иногда шов проводят и вне ребер многогранника, придерживаясь, однако, описанных условий. Это дает возможность уменьшить не только длину шва, но и более экономно раскроить материал — придать развертке форму, наиболее близкую к форме листового материала.

Рассмотрим это на конкретном примере.

На рис. 180 показана развертка правильного тетраэдра $SABC$ со швом вне его ребра. Для любого из вариантов развертки тетраэдра со швом по ребрам общая длина шва равна $3a$, где a — длина ребра. Такие развертки могут быть выполнены без отходов только из полос шириной, кратной $\frac{\sqrt{3}}{2}a$.

Длину шва можно уменьшить, если развертке тетраэдра придать форму, например прямоугольника (точка K — середина ребра SB). Для этого случая общая длина шва

$$l = SB + AK + KC,$$

или

$$l = a + 2\frac{\sqrt{3}}{2}a = a(1 + \sqrt{3}) \approx 2{,}73a,$$

т. е. на 9% меньше, чем для шва по ребрам. Такой наиболее рациональный раскрой материала при построении разверток многогранников имеет большое практическое значение.

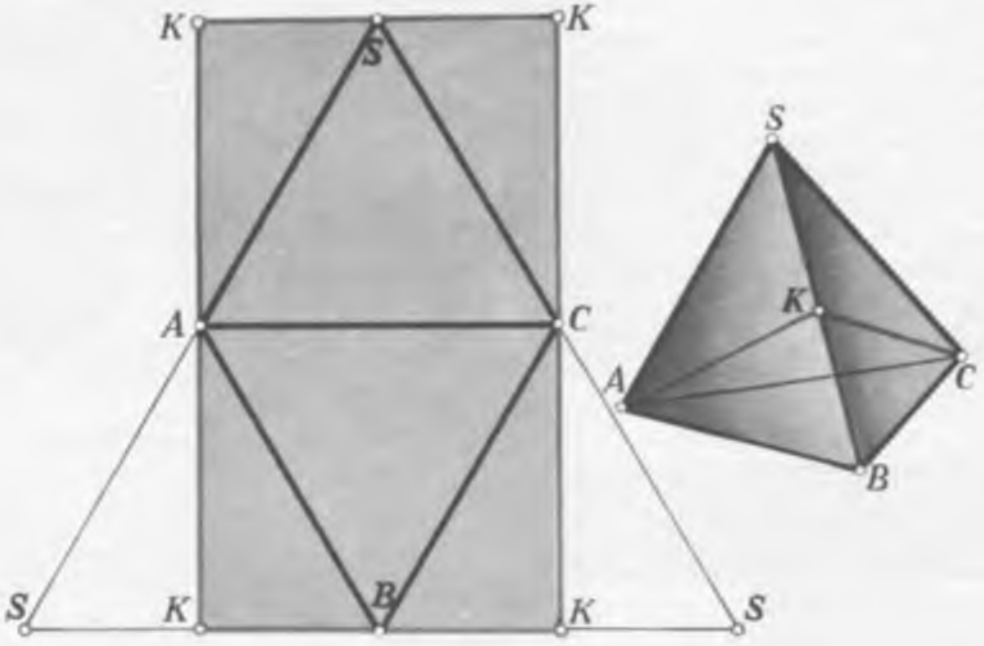


Рис. 180

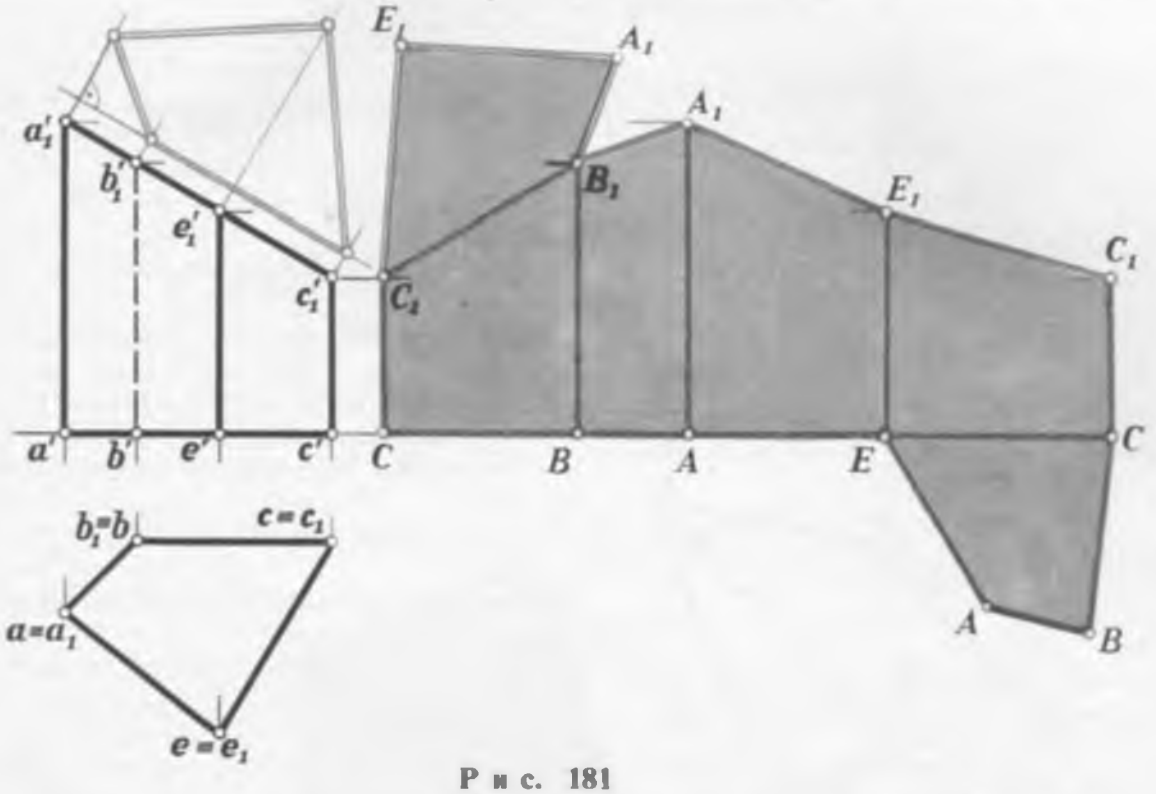


Рис. 181

На рис. 181 показано построение развертки прямой четырехугольной усеченной призмы, стоящей своим основанием на плоскости H. В стороне выбрана горизонтальная прямая линия, и на ней помечены отрезки $CB = cb$, $BA = ba$, $AE = ae$, $EC = ec$ кратчайших расстояний между ребрами. На перпендикулярах к этим отрезкам откладываются величины соответствующих ребер: $CC_1 = c'c_1'$, $BB_1 = b'b_1'$, ... Многоугольник $CC_1B_1A_1E_1C_1C$ представляет собой развертку боковой поверхности призмы.

Нижнее основание призмы на чертеже представлено в натуральную величину. Этот многоугольник $ABCE$ основания построен на стороне EC развертки боковой поверхности призмы.

Определена натуральная величина верхнего основания. Многоугольник верхнего основания построен на стороне B_1C_1 развертки боковой поверхности призмы.

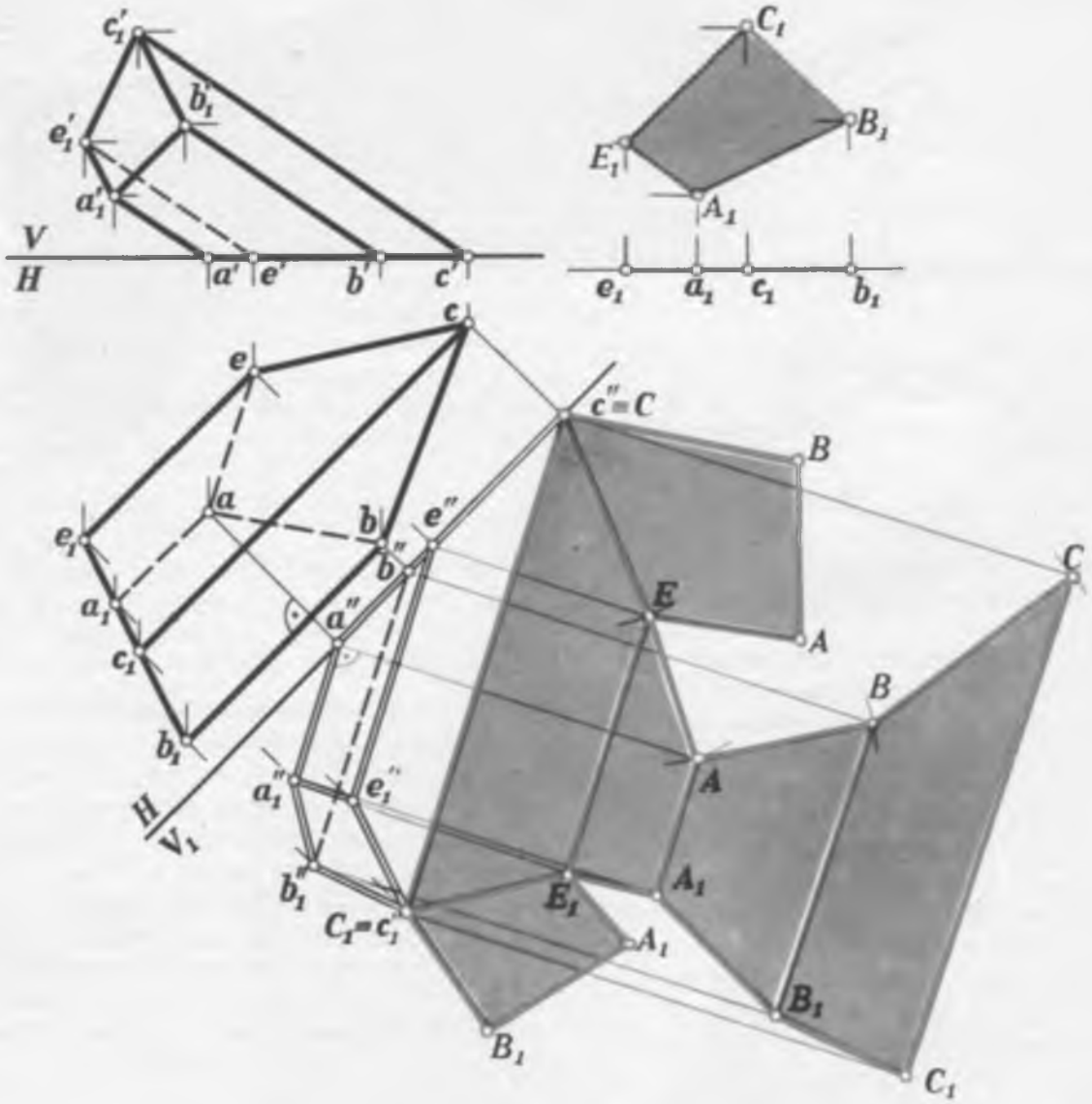
На рис. 182 показаны построения развертки наклонной призмы.

Построим дополнительный чертеж в системе плоскостей проекций $\frac{V_1}{H}$. Определим натуральные величины параллельных ребер боковой поверхности. Натуральные величины граней строят последовательно путем вращения каждой из них вокруг ребра до совмещения с плоскостью V_1. Вращаем грань c_1cee_1, $c_1''c''e''e_1''$ вокруг ребра c_1c, $c_1''c''$. Строим плоскости вращения точек e_1e_1'' и ee''. Их следы проходят через проекции e'' и e_1'' перпендикулярно к проекции оси вращения — $c''c_1''$, а из точки $c''\equiv C$, как из центра, проведена дуга окружности $CE = ce$ до пересечения в точке E с прямой $e''E$.

Проведя из точки E прямую параллельно $c''c_1''$ до пересечения ее в точке E_1 со следом плоскости вращения точки e_1e_1'', получаем натуральную величину ребра EE_1 призмы на развертке.

Аналогично строят натуральные величины и других граней призмы. К развертке боковой поверхности пристроены основания призмы. Одно из оснований $abce$, $a'b'c'e'$ на чертеже представлено в натуральную величину. Натуральная величина другого осно-

126


c_1'
b_1'
e_1'
a_1'
V
H
a'
e'
b'
c'
C_1
B_1
E_1
A_1
e_1
a_1
c_1
b_1
c
e
a
b
e''
b''
a''
e_1
a_1
c_1
b_1
H
V_1
a_1''
e_1''
b_1''
$C_1 = c_1'$
c'' = C
B
C
E
A
B
A
A_1
E_1
A_1
B_1
B_1
C_1

Р и с. 182

вания $a_1b_1c_1e_1$, $a_1'b_1'c_1'e_1'$ определена способом плоскопараллельного перемещения.

Развертку пирамиды обычно строят, придерживаясь следующей схемы: определяют длины ребер пирамиды; последовательно в плоскости чертежа строят грани пирамиды — треугольники.

На рис. 183 показано построение развертки треугольной пирамиды. Методом вращения определена натуральная величина каждого из ребер. На ребре sc, $s'c'$ построен треугольник SCB по трем известным сторонам; на стороне SB построен треугольник SBA и на стороне SA — треугольник SAC.

Основание ABC пирамиды равно горизонтальной проекции abc.

В результате получена полная развертка пирамиды.

Построение разверток представляет собой весьма важную задачу в проектировании технических форм из листового материала.

Многогранная поверхность и ее развертка на плоскости есть такое геометрическое преобразование поверхности в плоскую фигуру, которое является взаимно однозначным.

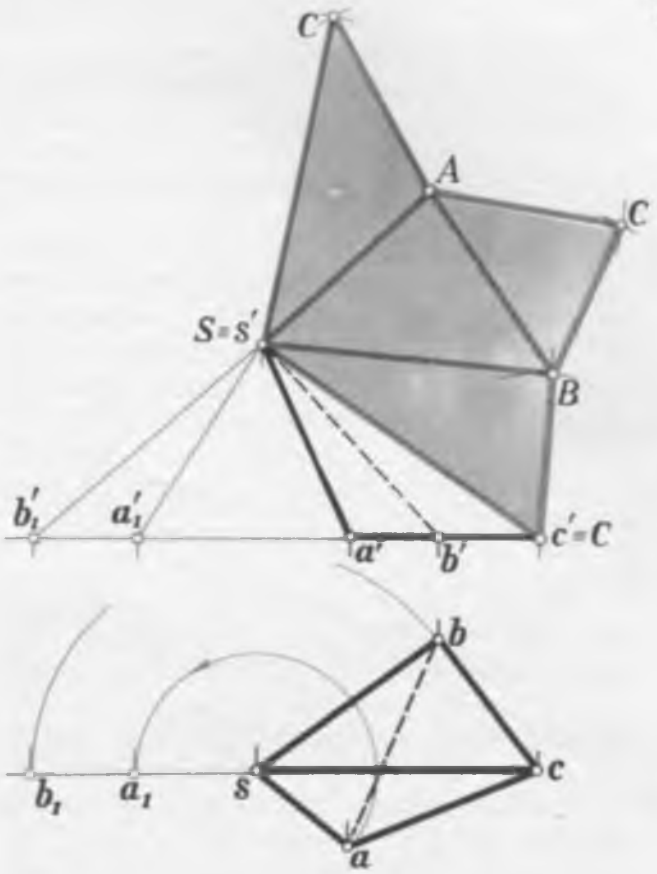


Рис. 183

Вопросы для самопроверки

1. Какие многогранники называют выпуклыми и выпукло-вогнутыми?
2. Какие многогранники называют правильными?
3. Назовите правильные выпуклые многогранники.
4. Что называют числом Эйлера многогранника?
5. Назовите правильные звездчатые многогранники.
6. Что называют точечным базисом многогранника?
7. Изложите сущность способов построения линии пересечения многогранников.
8. Что называют разверткой многогранной поверхности?

ГЛАВА VII

КРИВЫЕ ЛИНИИ

Кривые линии используют в различных областях техники и науки. Они находят широкое применение в практике моделирования, в разметочном деле, при построении равносильных многокомпонентных систем и др.

Кривые линии — это очертания многих инженерных конструкций и сооружений, деталей машин и механизмов, траектории движущихся объектов.

Развитие технологии изготовления поверхностей многих технических форм требует в настоящее время более детального развития вопросов конструирования плотных каркасов линий. Кривыми линиями составляются каркасы и сети поверхностей.

В начертательной геометрии кривые линии представляют большой интерес как производящие (образующие) кинематических поверхностей.

Рассмотрим некоторые вопросы образования и задания плоских и пространственных кривых линий и их основные проекционные свойства.

Кривую линию можно рассматривать как *след* движущейся точки.

Кривые линии можно рассматривать также как границы поверхности или как результат взаимного пересечения поверхностей.

Способы образования кривых линий могут быть различны. Одни кривые линии образуются по определенному закону (закономерные кривые); образование других носит эмпирический (опытный) характер (незакономерные кривые линии).

Закономерные кривые линии могут быть заданы графически и аналитически, т. е. уравнением. Незакономерные кривые линии задаются только графически на чертеже.

Уравнением кривой линии называют такое уравнение между переменными, которому удовлетворяют координаты любой точки, принадлежащей этой линии.

Закономерные кривые линии разделяют на *алгебраические* (определяемые в декартовых координатах алгебраическими уравнениями) и *трансцендентные* (определяемые неалгебраическими уравнениями).

Порядком алгебраической кривой линии называют степень ее уравнения.

Геометрически порядок плоской алгебраической кривой линии характеризуется наибольшим числом точек ее пересечения прямой линией. Порядок пространственной алгебраической кривой линии характеризуется наибольшим числом точек ее пересечения плоскостью общего положения.

Проекции кривых в общем случае представляются кривыми того же или более низкого порядка. Каждая из кривых линий

обладает большей или меньшей степенью искривленности. Эта искривленность характеризуется некоторым числом и называется *кривизной* линии.

В общем случае для любой точки кривизна различна и характеризует ее локальное (местное) свойство, т. е. характеризует кривую на бесконечно малом участке, составляющем окрестность этой точки.

Рассматривая кривую линию как траекторию движущейся точки, устанавливаем, что она должна быть непрерывной. Движущаяся точка в любом из положений должна иметь определенное направление движения. Прямая, проходящая через рассматриваемую точку и указывающая это направление, есть *касательная* к кривой.

Из кривых линий особый интерес представляют окружность и цилиндрическая винтовая линия, каждая из которых является соответственно эталоном плоских или пространственных кривых линий.

Кривые линии на чертеже задают обычно проекциями ряда их точек. Длина отрезка кривой (плоской или пространственной) определяется в общем случае приближенно путем замены кривой линии вписанной в нее ломаной линией с максимально большим числом ее сторон, достаточно хорошо передающей форму кривой.

ПЛОСКИЕ КРИВЫЕ ЛИНИИ

§36

Кривые линии, все точки которых принадлежат плоскости, называют *плоскими*. Так, кривая линия AB является плоской. Она построена в плоскости Q (рис. 184). На кривой AB возьмем точку C и проведем через нее секущие CE и CF.

При приближении точки E к точке C секущая CE поворачивается вокруг точки C. Когда точка E совпадет с точкой C, секущая CE достигнет своего предельного положения t. В этом предельном положении секущая называется *полукасательной* к кривой AB в точке C. При приближении точки E к точке C секущая CF в предельном положении занимает положение полукасательной t.

Кривая линия в точке C имеет две разносторонне направленные полукасательные. В точке C разносторонне направленные полукасательные к кривой AB определяют одну прямую линию — *касательную**. В этом случае кривая линия в точке C называется *плавной*.

Кривая, плавная во всех ее точках, называется *плавной кривой линией*.

Прямая n, проведенная в плоскости кривой через точку C и перпендикулярная к касательной, называется *нормалью*. На кривой могут быть точки, где разносторонне направленные полукасательные не принадлежат одной прямой линии, а составляют между собой некоторый угол. Так, на кривой линии A_1B_1 в точке C_1 угол δ между разносторонне направленными полукасательными не равен 180° (рис. 184). Здесь кривая линия в точке C_1 имеет излом. Точка C_1 называется *точкой излома*, или *выходящей точкой*.

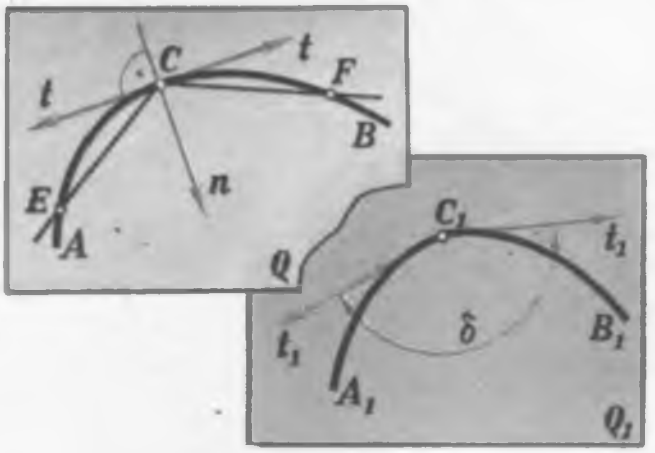
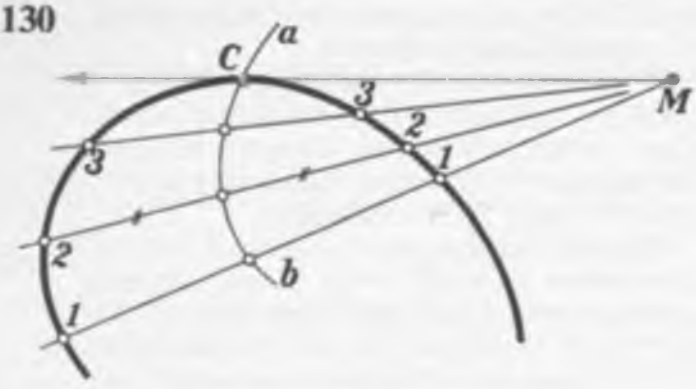


Рис. 184

* Касательная — прямая, соединяющая две бесконечно близкие точки кривой.

130

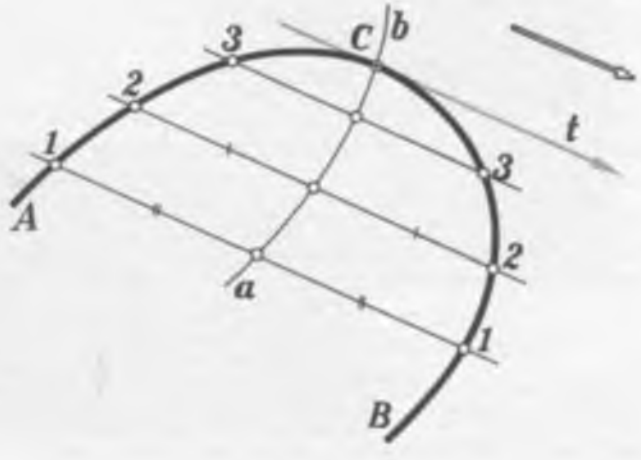


Р и с. 185

Касательные и нормали к кривым линиям строят или графически, или пользуясь специальными приборами.

На рис. 185 показано построение касательной к кривой линии, проходящей через заданную вне кривой точку *M*. Здесь через точку *M* проведен пучок прямых, пересекающих кривую *AB*. Помечены хорды *11*, *22*, *33*... Через середины хорд проведена кривая *ab* — *кривая ошибок*. Эта вспомогательная кривая пересекает данную кривую *AB* в точке *C*. Прямая *CM* является касательной.

На рис. 186 построена касательная к кривой, параллельная заданному стрелкой направлению. Для определения точки касания проведен ряд секущих параллельно направлению стрелки.



Р и с. 186

Хорды *11*, *22*, *33*, ... разделены пополам. Кривая ошибок *ab*, проходящая через середины хорд, пересекает данную кривую *AB* в точке *C*. Через точку *C* параллельно заданному направлению проходит искомая касательная.

На рис. 187 построена касательная к кривой линии *AB*, проходящая через точку *C* этой кривой. Прямая линия *EF* проведена перпендикулярно к предполагаемому направлению касательной. Через точку *C* проведен ряд секущих, пересекающих прямую *EF*. От точек пересечения секущих прямой отложены отрезки, равные соответствующим длинам хорд, образованных секущими. Концами этих отрезков намечается кривая ошибок *ab*. Она пересекает прямую *EF* в точке *K*. Прямая линия *CK* есть искомая касательная.

Покажем прием построения нормали к кривой линии, проходящей через заданную точку *K* вне кривой (рис. 188). Принимая точку *K* за центр, проводим ряд окружностей произвольных радиусов и пересекающих кривую *AB*. Намечаем ряд хорд *11*, *22*, *33*, ... Строим из концов хорд разносторонне направленные перпендикуляры к ним и откладываем на них отрезки, соответственно равные длинам этих хорд. Концами отрезков таких перпендикуляров намечается кривая линия *ab* ошибок. Она пересекает данную кривую *AB* в точке *C*. Прямая *n* является искомой нормалью к кривой *AB*, проходящей через точку *K*. Практически при решении таких задач пользуются соответствующими приборами. Наиболее распространенными из таких приборов являются: зеркальная линейка, призматический дериватор (стеклянная трехгранная призма) и пр.

Проекции кривых линий при параллельном (цилиндрическом) проецировании сохраняют многие свойства их оригиналов.

На рис. 189 представлена плоская кривая линия *ACB*. При заданном (стрелкой) направлении проецирования эта кривая проецируется на плоскость *Q* в виде кривой *acb*. Секущая *I—IV* кривой *ACB* проецируется в виде секущей *1—4* проекции *acb* кривой.

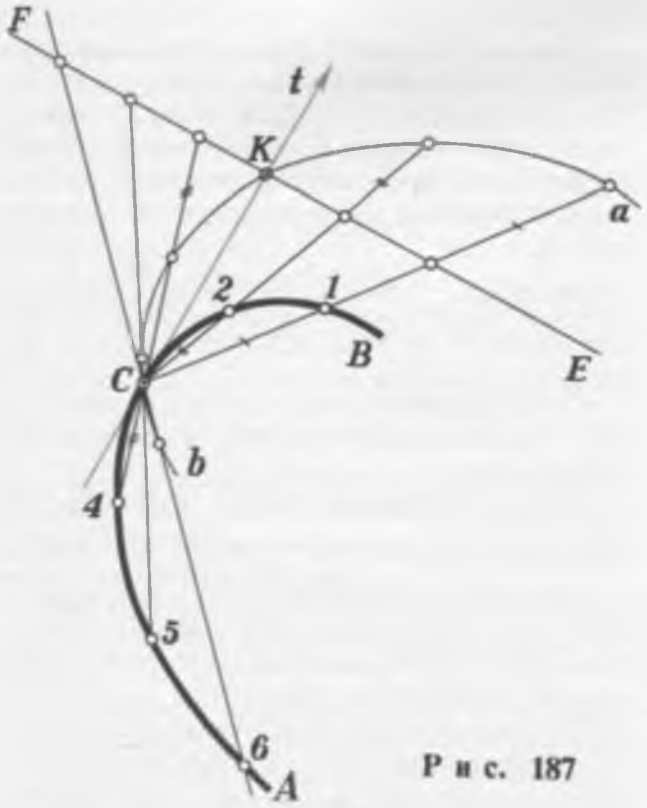


Рис. 187

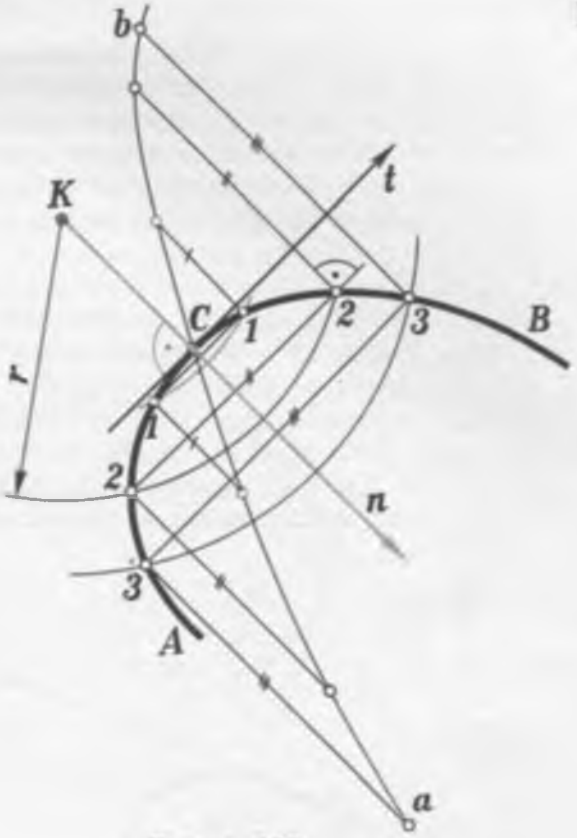


Рис. 188

Точки *1*, *2*, *3*, *4* пересечения проекции секущей с проекцией кривой являются проекциями точек пересечения кривой *ACB* секущей. Число точек ее пересечения прямой линией равно числу точек пересечения их проекций.

При параллельном проецировании порядок плоской алгебраической кривой не изменяется. Если движущаяся по кривой линии точка стремится в бесконечность, то и проекция этой точки также стремится в бесконечность, т. е. несобственные точки кривой проецируются в несобственные точки проекции кривой.

Касательная t_C к кривой *ACB* в точке *C* есть предельное положение секущей *CE*. Проекция t_c касательной в точке *c* к проекции кривой есть предельное положение проекции *ce* секущей.

Итак, *касательная к кривой проецируется в касательную к проекции кривой.*

В частном случае, когда плоскость кривой параллельна плоскости проекций, кривая и ее проекция конгруэнтны.

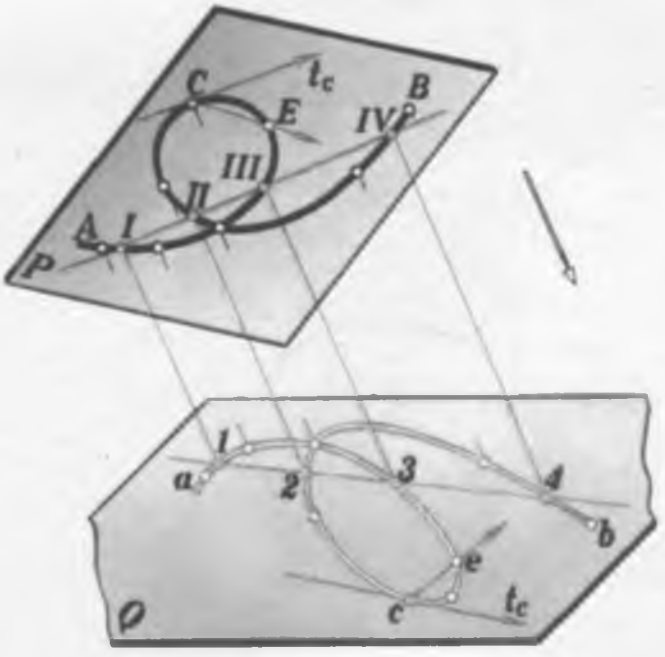


Рис. 189

§ 37 ПОНЯТИЯ О КРИВИЗНЕ ПЛОСКОЙ КРИВОЙ ЛИНИИ

Плоскую кривую линию рассматриваем как траекторию точки, движущейся в плоскости. Можно полагать, что точка движется по касательной к кривой линии, а касательная без скольжения перекатывается по кривой. Касательная указывает направление движения точки.

Движение точки связано с непрерывным изменением двух величин: расстояния s, на которое удаляется точка от начального своего положения, и угла α — поворота касательной относительно начального положения (рис. 190). Кривые линии называются *простыми*, если с увеличением длины s угол α тоже непрерывно увеличивается.

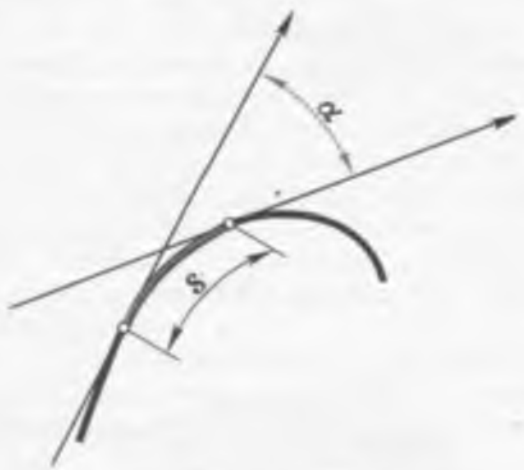


Рис. 190

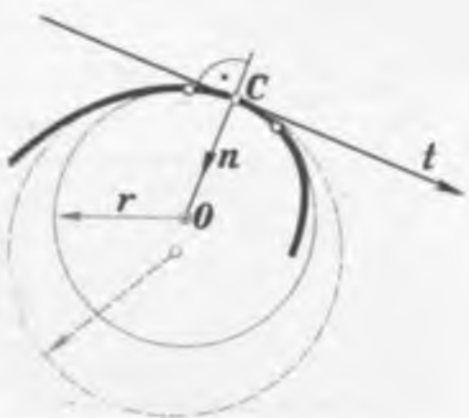


Рис. 191

Угол α смежности между полукасательными в двух бесконечно близких точках кривой, отнесенный к единице длины дуги, определяет *степень искривленности кривой* линии. Чем больше угол α смежности между полукасательными, тем больше кривизна кривой.

Величина, равная $\lim \frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$ при $\Delta s \to 0$, принимается за меру кривизны кривой линии*.

Итак, *кривизна — это предел отношения угла смежности касательных к соответствующей дуге.*

Кривизну кривой линии обозначим k. Согласно определению $k = \lim \frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$ при $\Delta s \to 0$.

Кривизна в каждой из точек плоской кривой линии различна. Она определяется с помощью соприкасающейся в этой точке кривой окружности (рис. 191).

Соприкасающейся окружностью, или кругом кривизны кривой в данной точке, называют предельное положение окружности, когда она проходит через данную точку и две другие бесконечно близкие к ней точки кривой.

Центр соприкасающейся окружности называют *центром кривизны* кривой линии в данной точке.

Радиус r такой окружности называют *радиусом кривизны*. Кривизна k кривой линии в данной точке равна $\frac{1}{r}$, т. е. величине, обратной радиусу соприкасающейся в этой точке окружности.

В рассматриваемой точке кривая линия и соприкасающаяся окружность имеют общие касательную и нормаль.

На рис. 192 показаны построения центра кривизны кривой линии AB в заданной точке C.

На кривой линии AB помечаем ряд точек и проводим из них полукасательные. От этих точек по направлению полукасатель-

* Символ lim означает несобственный предел.

ных отложим произвольной длины равные отрезки. Концами отрезков намечается кривая линия A_1B_1, *эквитангенциальная* относительно кривой AB*. Точке C кривой AB соответствует точка C_1 кривой A_1B_1.

Нормали n и n_1 в точках C и C_1 данной кривой AB и вспомогательной A_1B_1 пересекаются в точке O.

Точка O является искомым центром кривизны кривой AB в точке C. Радиус кривизны r_C.

Кривизна кривой AB в точке C равна:

$$k=\frac{1}{r_C}.$$

Геометрическим местом центров кривизны кривой линии AB является кривая a_0b_0 (рис. 193). Такую кривую называют *эволютой* данной кривой AB.

Рассматриваемая кривая линия по отношению к своей эволюте называется *эвольвентой*.

Эвольвенты образуются точками касательной прямой, катящейся без скольжения по кривой линии. Касательную можно представить как нерастяжимую гибкую нить, один конец которой закреплен на кривой.

Изменим направление натянутой нити так, чтобы она оставалась касательной к кривой a_0b_0. Каждая точка нити опишет при этом эвольвенту данной кривой a_0b_0.

Отметим основные свойства эволют и эвольвент.

1. *Всякая плоская кривая линия имеет бесчисленное множество эвольвент.*

2. *Через каждую точку касательной к эволюте проходит одна и только одна эвольвента.*

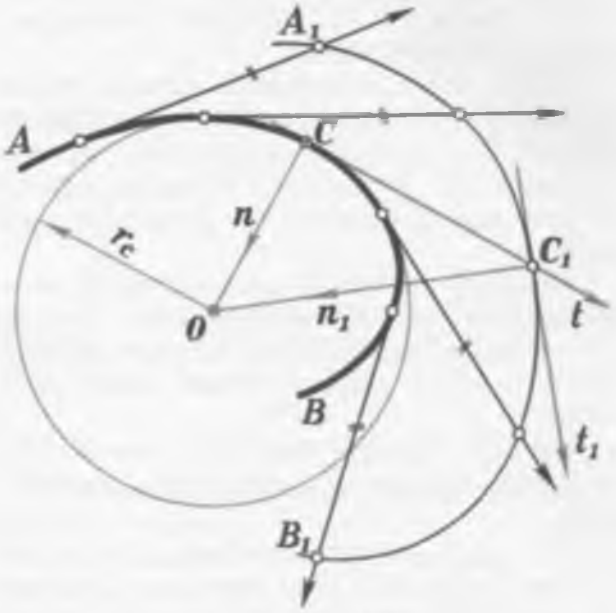
3. *Касательные эволюты являются нормалями эвольвенты.*

4. *Длина дуги эволюты равна абсолютному значению разности радиусов кривизны эвольвенты в концах ее дуги.*

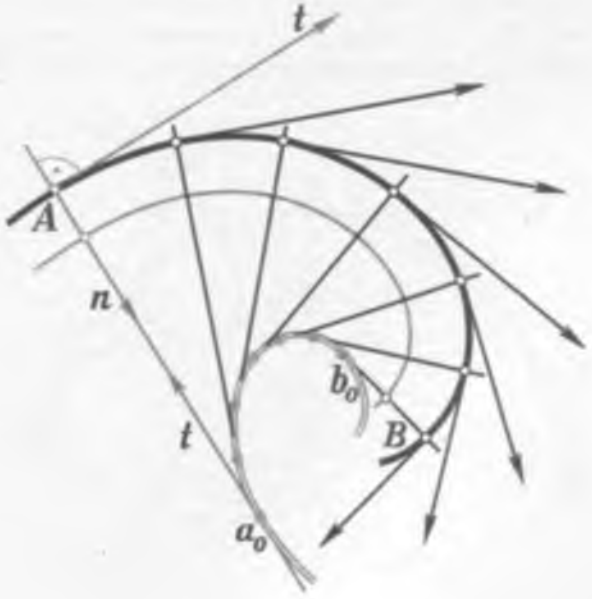
5. *Всякая плоская кривая есть геометрическое место центров кривизны своей эвольвенты.*

Широкое применение в различных технических расчетах имеет эвольвента окружности или развертка круга.

Вид эвольвенты круга имеет, например, профиль зубьев цилиндрической зубчатой передачи — так называемое *эвольвентное зацепление*. Эвольвентный профиль встречается также в червячных зубчатых передачах.



Р и с. 192



Р и с. 193

* Кривая AB относительно кривой A_1B_1 называется *трактрисой или влекомой*.

Трактриса (от лат. tracto — тащу, влеку) — трансцендентная плоская кривая линия.

§38 МОНОТОННЫЕ И СОСТАВНЫЕ ПЛОСКИЕ КРИВЫЕ ЛИНИИ. ВЕРШИНЫ КРИВЫХ ЛИНИЙ

Простые кривые линии, у которых радиусы кривизны для последовательного ряда их точек непрерывно увеличиваются или уменьшаются, называют *монотонными*.

Кривые линии, составленные из последовательного ряда дуг монотонных кривых линий, называют *составными*. Они могут быть различных видов.

Точки стыка монотонных кривых линий называют *вершинами*, а сами монотонные кривые — сторонами составной кривой линии. В вершинах полукасательные сторон располагаются на одной прямой линии.

Вершину называют *регулярной*, если в ней полукасательные сторон имеют противоположные направления и если в этой точке стороны имеют общий центр кривизны.

Кривые линии, имеющие только регулярные вершины, называют *регулярными*.

На рис. 194 представлена регулярная кривая линия ACB. Она составлена из двух монотонных кривых линий AC и CB. Точка C стыка монотонных кривых линий является регулярной вершиной составной кривой линии. В этой точке полукасательные направлены разносторонне и стороны имеют общий центр кривизны. Радиусы кривизны кривой линии в разных направлениях от точки C увеличиваются.

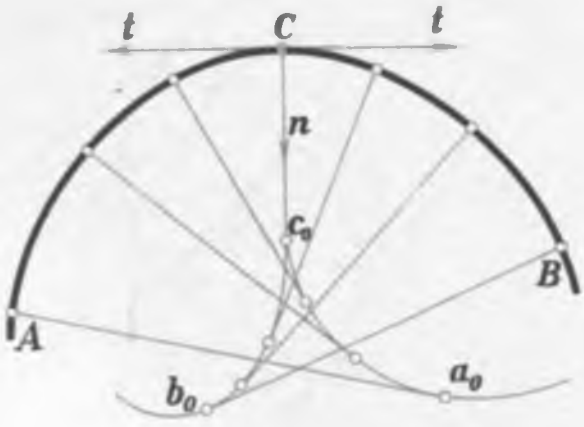


Рис. 194

Кривая $a_0c_0b_0$ является эволютой кривой линии ACB.

Вершины, отличные от регулярных вершин, называют *иррегулярными*.

Вершина составной кривой линии называется *двойной*, если в ней полукасательные сторон имеют противоположные направления, нормали направлены в одну сторону и радиусы кривизны не равны.

Двойные вершины имеют коробовые кривые линии. На рис. 195 точка A является двойной вершиной.

Точки стыка сторон монотонных кривых линий называют *вершинами острия* (точка B), если в них полукасательные сторон имеют одинаковое направление, а нормали имеют противоположные направления.

Вершину острия называют также точкой *возврата первого рода* или *точкой заострения*.

Точку стыка сторон монотонных кривых линий называют *вершиной перегиба* (точка C), если в ней полукасательные сторон и нормали сторон имеют противоположные направления. Вершину перегиба называют также *поворотной*, или *инфлекционной*, точкой кривой.

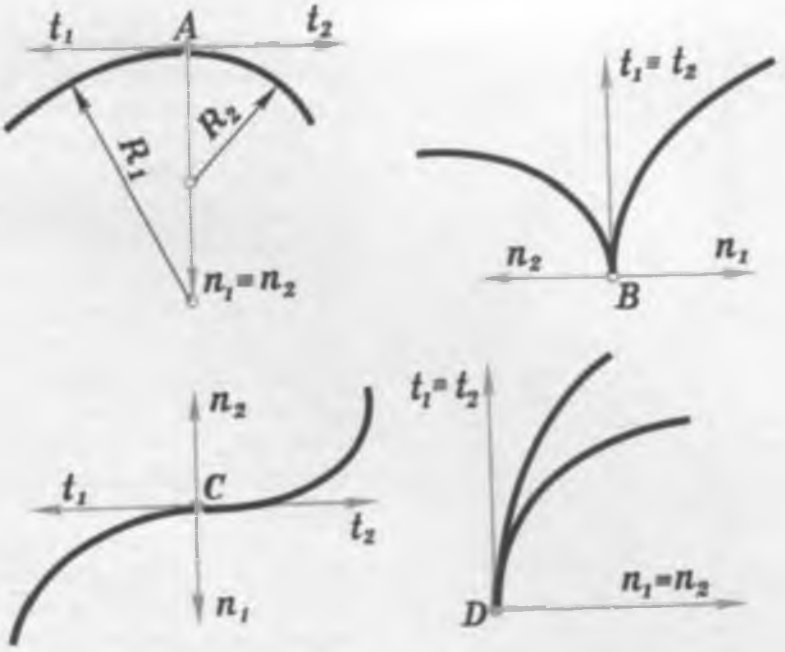
Точку стыка сторон монотонных кривых линий называют *вершиной клюва* (точка D), если в ней полукасательные сторон и нормали сторон имеют одинаковые направления.

Вершину клюва называют также *точкой возврата второго рода*.

К особым точкам плоской кривой линии следует отнести также:

а) *точку излома* — A (рис. 196), где полукасательные не принадлежат одной прямой линии, а кривая в этой точке имеет две касательные;

б) *узел* (двойной — точки B и C, тройной — точка D и т. д.), где кривая многократно пересекает самое себя.

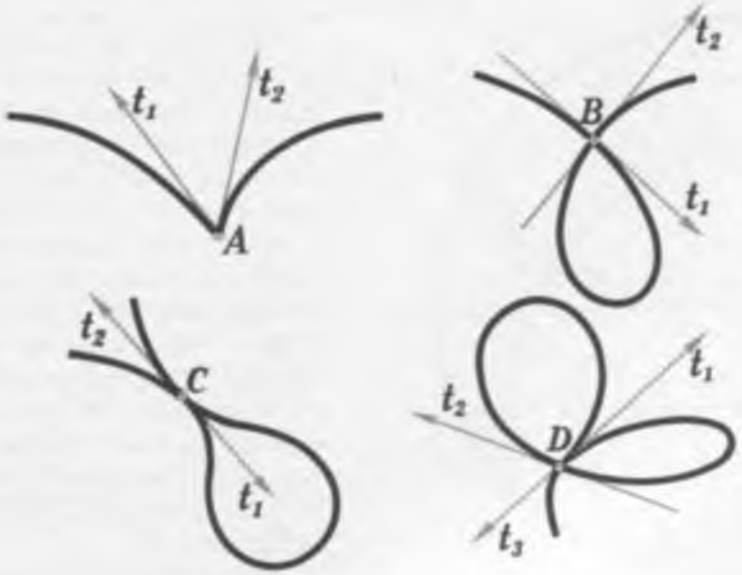


Р и с. 195

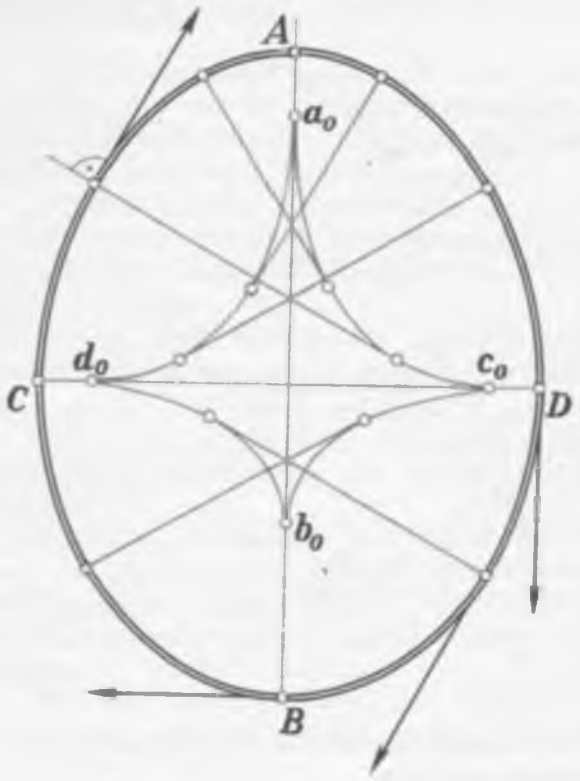
Составные кривые линии, у которых хотя бы одна из вершин иррегулярная (двойная, острия, перегиба, клюва), называют *иррегулярными*. Эволюты регулярных кривых линий являются иррегулярными кривыми с вершинами острия.

Регулярные замкнутые кривые линии называются *овалами*.

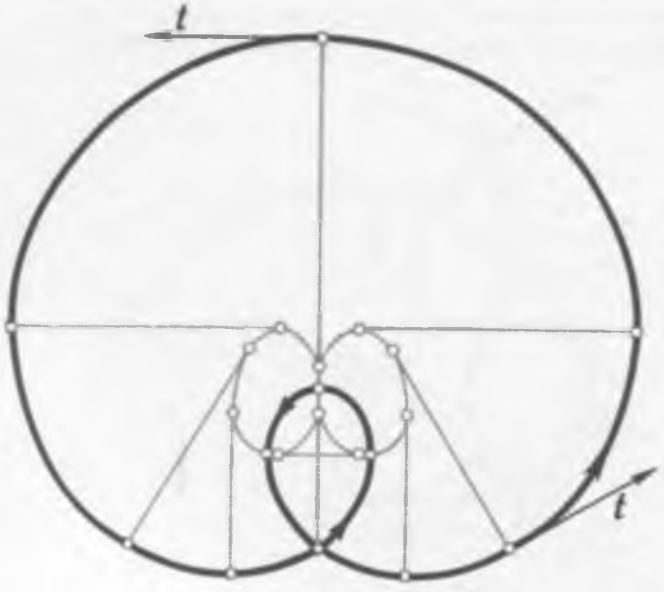
В зависимости от угла поворота касательной к овалу симметричные овалы называют *простыми* (360°), *двойными* (720°), *тройными* (1080°) и т. д.



Р и с. 196



Р и с. 197



Р и с. 198

На рис. 197 показан *односимметричный простой овал*. Эволютой овала является односимметричная кривая линия. Осью симметрии является прямая линия *AB*.

На рис. 198 показан *двухвершинный двойной овал*. Эволютой овала служит симметричная иррегулярная кривая линия с двумя вершинами острия. Прямая вершин является осью симметрии овала и его эволюты.

На рис. 199 показан *четырехвершинный тройной овал* с двумя осями симметрии. Эволютой овала является двухсимметричная иррегулярная кривая линия с четырьмя вершинами острия. Прямые, соединяющие противоположные вершины, являются осями симметрии овала и его эволюты.

В технике находят применение овальные зубчатые колеса, например, в ротационных газовых счетчиках и счетчиках расхода жидкости, в ротационных насосах. Овалы используют при конструировании механизмов, преобразующих непрерывное вращение в ступенчатое.

Плавные кривые линии, составленные дугами окружностей различных радиусов, называют *коробовыми кривыми линиями*.

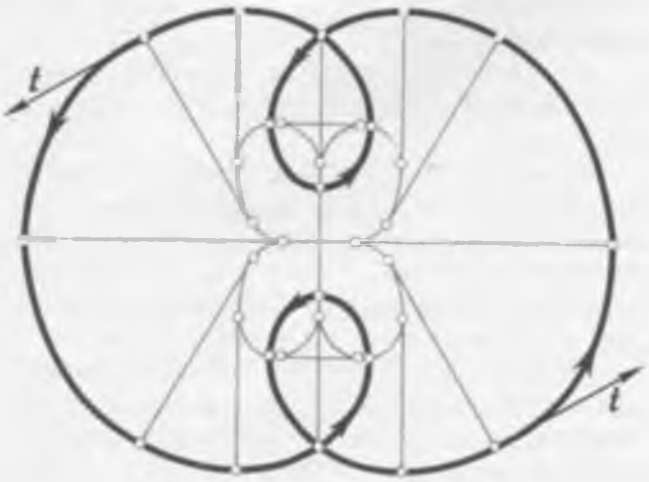
Коробовые кривые линии находят широкое применение при построении очертаний сводов дверных и оконных проемов, сквозных арочных проходов через здание, арочных мостов, кулачков механизмов и пр.

На рис. 200 построен *коробовый овал*, заданный размерами его осей симметрии *AB* и *CD*. Концы полуосей — точки *A* и *C* — соединяем прямой линией *AC* и на этой прямой от точки *C* откладываем отрезок *C2*, равный *A1* разности полуосей (*A1* = *AO*—*CO*).

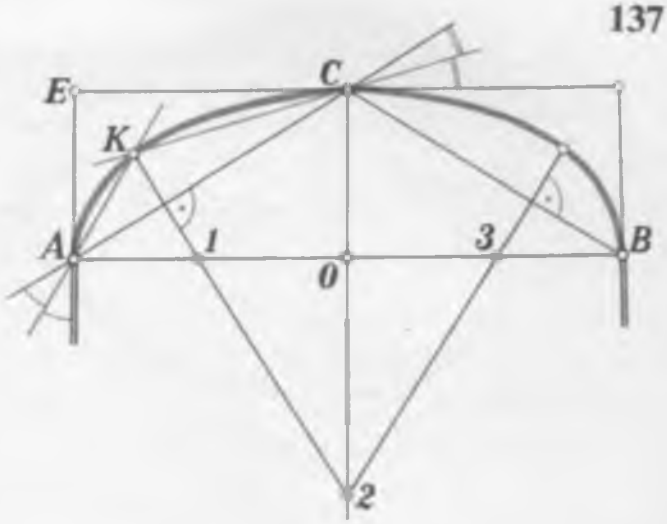
Из точки *3* середины отрезка *A2* восставляем перпендикуляр и находим точки *4* и *5* пересечения его с большой и малой полуосями. Эти точки являются центрами слагаемых дуг окружностей.

Учитывая, что овал является замкнутой кривой линией, симметричной относительно осей, находим соответственно другие точки как центры остальных слагаемых дуг окружностей.

Покажем построение коробовой кривой очертания пологого свода (рис. 201). Кривая задана пролетом *AB* и подъемом *CO* свода.



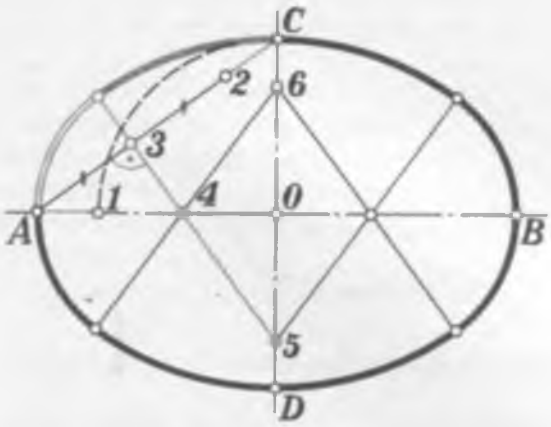
Р и с. 199



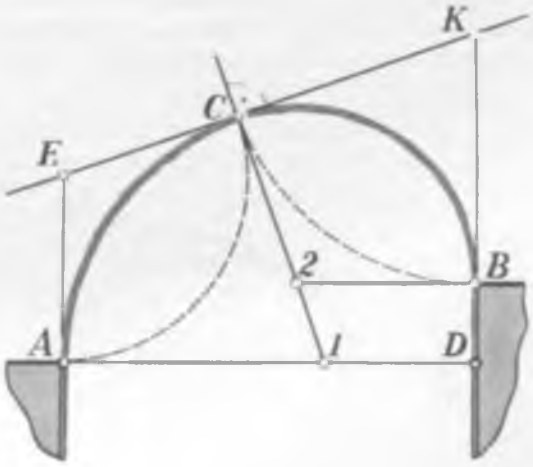
Р и с. 201

На стороне AO пролета свода строим прямоугольник $AECO$. Высота его определяется подъемом CO свода. Из точки K пересечения биссектрис углов EAC и ECA опускаем перпендикуляр на диагональ AC прямоугольника и определяем точки 1 и 2 пересечения его с пролетом AB и линией CO подъема. Точки 1 и 2 являются центрами слагаемых дуг окружностей. Из условия симметрии определяем точку 3 — центр дополнительной слагаемой дуги окружности.

На рис. 202 показаны построения очертания ползучего свода, если его пяты не лежат в одной горизонтальной плоскости. Очертание свода можно построить, если известны: точка A пяты, пролет AD и касательная EK в ключе.

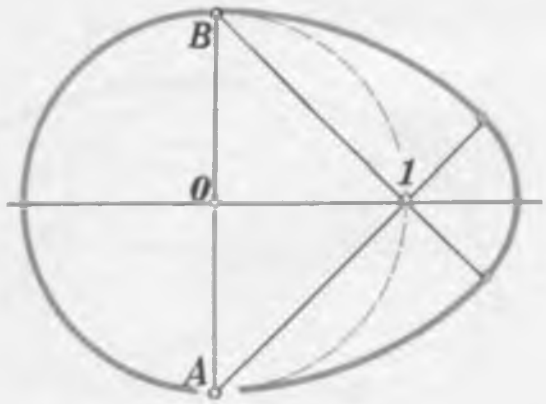


Р и с. 200



Р и с. 202

138



Р и с. 203

Строим трапецию *AEKD*. Из вершины *E* трапеции радиусом *EA* делаем засечку на касательной *EK*. Определяем точку *C* — ключ свода.

Засечкой радиуса *CK* из центра *K* вершины трапеции определяем точку *B* — вторую пяту свода.

Из точки *C* проводим перпендикуляр к касательной *EK* свода и определяем точки *1* и *2* пересечения его с прямой *AD* и *B2*, параллельной *AD*. Точки *1* и *2* являются центрами слагаемых дуг окружностей кривой *ACB* очертания заданного свода.

На рис. 203 построен контур кулачка, имеющий заданный размер *AB*. Отрезок *AB* принимаем за диаметр окружности. Второй диаметр проводим перпендикулярно к *AB*. Он является осью симметрии кривой линии. Центрами слагаемых дуг окружностей кулачка являются точки *O*, *A*, *B* и *1*.

§39 СОПРИКАСАНИЕ ПЛОСКИХ КРИВЫХ ЛИНИЙ

Кривые линии называются *соприкасающимися*, если в общей их точке они имеют общую касательную. Нормали кривых линий в точке соприкасания принадлежат одной прямой линии.

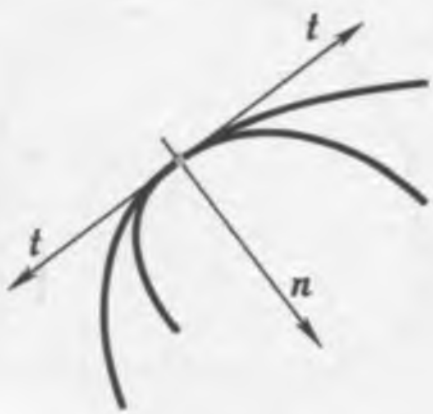
В точке соприкасания нормали могут быть направлены в одну сторону. В этом случае кривые линии имеют *внутреннее соприкасание* (рис. 204).

Если нормали в точке соприкасания направлены в разные стороны, кривые линии имеют *внешнее соприкасание* (рис. 205).

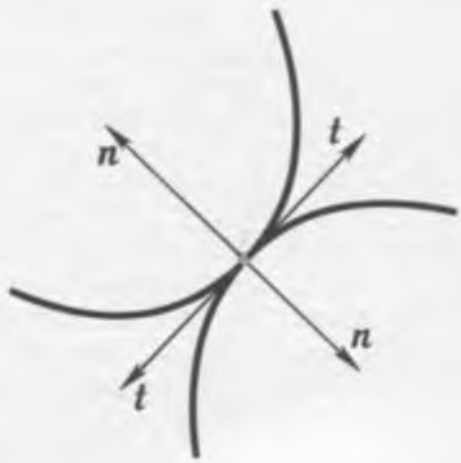
Соприкасание монотонных кривых линий имеет *первый порядок*, если в точке соприкасания радиусы их кривизны не равны между собой.

На рис. 206 монотонные кривые линии *AB*, *CD* и *EF* соприкасаются в точке *K*.

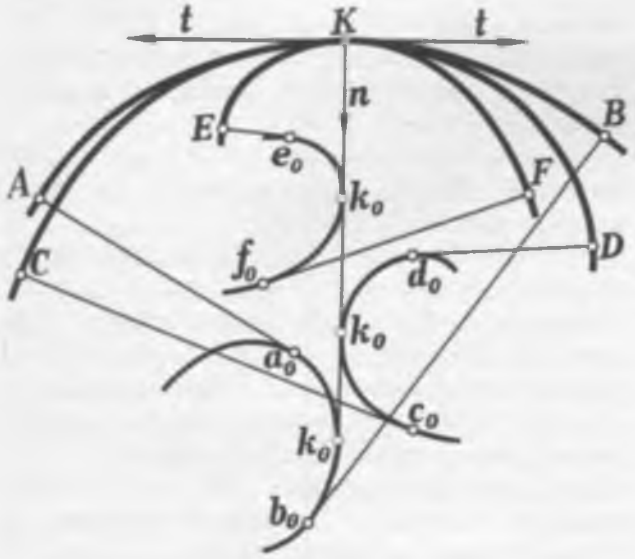
Центры k_0 кривизны этих кривых линий в точке *K* соприкасания не совпадают,



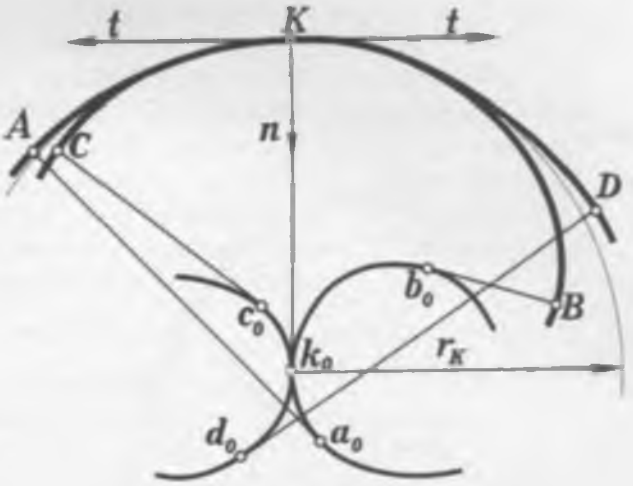
Р и с. 204



Р и с. 205



Р и с. 206



Р и с. 207

т. е. радиусы кривизны не равны. Будем иметь соприкасание первого порядка. Эволюты a_0b_0, c_0d_0 и e_0f_0 соприкасающихся кривых линий AB, CD и EF не соприкасаются, и каждая из соприкасающихся монотонных кривых линий располагается всеми своими точками по одну сторону другой кривой. Такой вид соприкасания называется *объемлющим*.

Соприкасание монотонных кривых линий имеет *второй порядок*, если в точке соприкасания они имеют общий центр кривизны, а их эволюты имеют соприкасание первого порядка.

На рис. 207 монотонные кривые линии AB и CD соприкасаются и пересекаются в точке K. Центры k_0 кривизны этих кривых линий совпадают, т. е. радиусы кривизны равны. Получаем *пересекающееся соприкасание второго порядка*.

Здесь эволюты a_0b_0 и c_0d_0 соприкасающихся кривых линий AB и CD имеют внешнее соприкасание.

Эволюты соприкасающихся кривых линий могут иметь внутреннее соприкасание как пересекающееся, так и объемлющее. Монотонные кривые линии, эволюты которых находятся в пересекающемся соприкасании, имеют объемлющее соприкасание второго порядка.

Монотонные кривые линии, эволюты которых находятся в объемлющем соприкасании, имеют пересекающееся соприкасание второго порядка. Порядок соприкасания можно повышать. Монотонные кривые линии имеют соприкасание третьего порядка и т. д., если их эволюты имеют соприкасание второго порядка и т. д.

Таким образом, *порядок соприкасания монотонных кривых линий на единицу больше порядка соприкасания их эволют — монотонных кривых линий.*

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПЛОСКИХ КРИВЫХ ЛИНИЙ

§ 40

Кривые линии можно построить путем преобразования других линий.

Линии, принятые для преобразования, называют *исходными*, или *базовыми*. Они могут быть кривыми или прямыми линиями.

Рассмотрим некоторые виды преобразований кривых линий.

140 1. Конхоидальное преобразование

Конхоидальным называют такое преобразование кривой линии, при котором радиусы-векторы ее точек, исходящие из заданного полюса, увеличиваются и уменьшаются на одну и ту же величину. Кривые линии, являющиеся конхоидальным преобразованием других линий, называют *конхоидами**.



Рис. 208

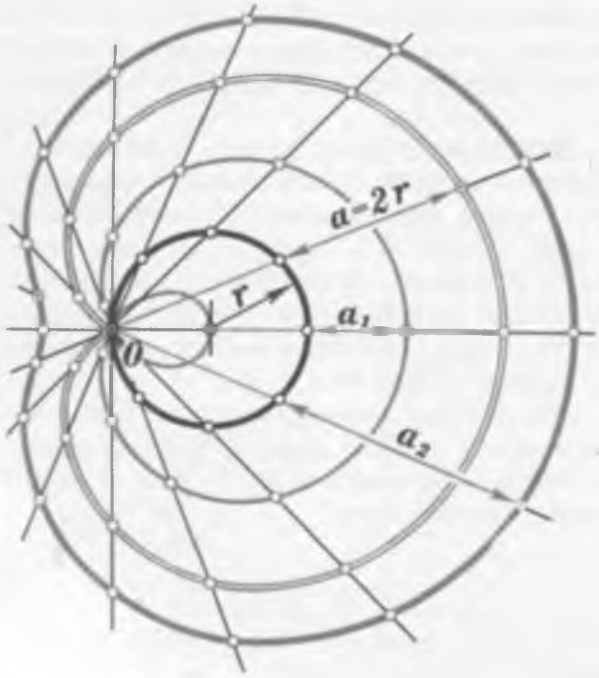


Рис. 209

Любая конхоида состоит из двух ветвей, которые иногда преобразуются в одну кривую линию.

На рис. 208 показаны построения конхоиды кривой линии AB. Через точку O (полюс) проведем пучок лучей, пересекающих кривую AB. На каждом луче от точки базовой кривой откладываем в обе стороны равные отрезки. Геометрическим местом концов этих отрезков является кривая линия — конхоида исходной кривой AB относительно данного полюса O. Конхоидой окружности относительно ее центра является пара окружностей, концентрических базовой окружности.

На рис. 209 представлены конхоиды окружности относительно полюса, лежащего на окружности. Такого рода конхоиды называют *улитками Паскаля***.

Пометим на базовой окружности радиусом r точку O и примем ее за полюс. На радиусах-векторах от точек базовой окружности откладываем отрезки, равные $a=2r$. Концами этих отрезков наметится кривая линия — *кардиоида****.

Задаваясь отрезками a_1 или a_2, меньшими или большими $2r$, получим конхоиды окружности — *укороченные* или *удлиненные* кардиоиды.

Улитку Паскаля применяют в технике при конструировании эксцентриков, кулачков у машин, ряда зубчатых колес. Их также широко используют и в оптической технике.

Конхоиды прямой называют *конхоидами Никомеда*****.

---

* От греч. κογχοειδής — похожий на раковину.

** Паскаль, Блез (1623—1662) — выдающийся французский математик и физик; философ.

*** От греч. καρδια — сердце и ειδος — вид.

**** Никомед (3—2 вв. до н. э.) — древнегреческий геометр. Впервые рассмотрел и применил конхоиду для нахождения двух средних пропорциональных между заданными величинами, а также для решения задач о трисекции угла и удвоении куба.



Р и с. 210

На рис. 210 показаны различные конхоиды Никомеда одной и той же прямой линии.

2. Преобразование инверсии

*Инверсией** кривой линии относительно окружности радиусом R называют такое преобразование, при котором произведение радиусов-векторов соответствующих точек данной (базовой) кривой и точек строящейся кривой постоянно и равно R^2.

Число R^2 называют *коэффициентом* (*степенью*) *инверсии*. Центр окружности радиусом R называют *центром* (*полюсом*) *инверсии*.

На рис. 211 показаны построения инверсии кривой линии AB при заданном полюсе O и радиусе R. Из точки O, как из центра, проводим пучок прямых, пересекающих базовую кривую AB, и описываем окружность радиусом R. Помечаем точки пересечения этих прямых с кривой AB и окружностью. Точка A_1 строящейся кривой линии A_1B_1 является инверсией точки A базовой кривой AB, если соблюдается условие:

$$OA \cdot OA_1 = R^2.$$

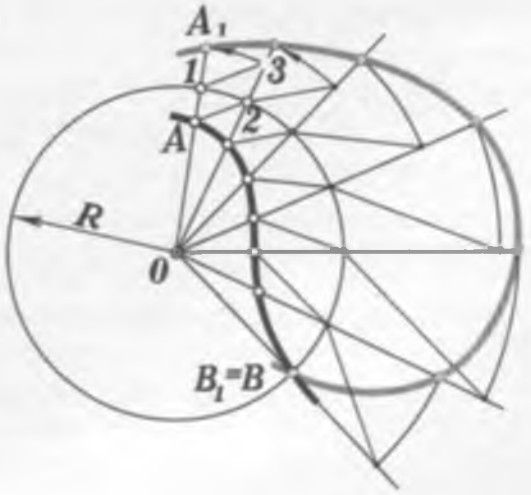
Положение точки A_1 на прямой пучка можно определить графически. Луч OA и соседний с ним луч пересекают окружность в точках *1* и *2*. Проведем из точки *1* прямую *13*, параллельную прямой *A2*. Отрезок *O3* равен по величине отрезку OA_1, что легко доказать. Так как $\Delta OA2 \sim \Delta O13$, то $OA:O1 = O2:O3$ или $OA:R = R:O3$, тогда

$$OA \cdot O3 = R^2,$$

или

$$OA \cdot OA_1 = R^2.$$

Путем подобных построений можно определить ряд точек, удовлетворяющих заданному условию.



Р и с. 211

* От лат. inversio — превращение, преобразование.

142

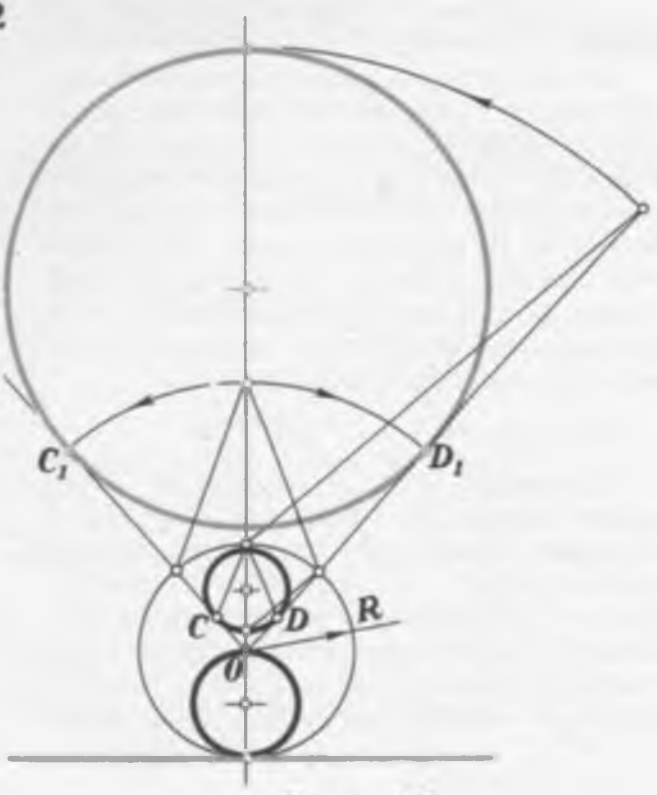


Рис. 212

Геометрическим местом таких точек является кривая линия A_1B_1, являющаяся инверсией кривой AB.

Инверсией любой окружности радиусом R_1, концентрической с окружностью радиусом R относительно данного полюса, является также концентрическая окружность радиусом $R_2 = \frac{R^2}{R_1}$.

Если $R_1 = R$, то $R_2 = R$, т. е. инверсией окружности радиусом R является окружность таким же радиусом R.

Если $R_1 = nR$, то $R_2 = \frac{R^2}{nR} = \frac{R}{n}$, т. е. инверсией окружности радиусом nR является окружность радиусом $\frac{R}{n}$. Здесь n — целое число.

Укажем основные свойства инверсии:

1. *Инверсия есть взаимно однозначное преобразование всех точек плоскости, за исключением одной — полюса (центра) O инверсии. Полюс инверсии преобразуется в несобственные точки.*

2. *Инверсия есть преобразование, двукратное применение которого дает тождественное преобразование, т. е. инверсия есть инволюционное преобразование.*

3. *Прямая, проходящая через полюс, преобразуется в ту же прямую линию.*

4. *Окружность, не проходящая через полюс инверсии, преобразуется в окружность, также не проходящую через полюс инверсии* (рис. 212).

5. *Окружность, проходящая через полюс инверсии, преобразуется в прямую, не проходящую через полюс инверсии и обратно.*

6. *Окружность диаметром R, соприкасающаяся внутри с окружностью радиусом R, преобразуется в прямую линию, касательную к ним в этой же точке* (рис. 212).

3. Конформное преобразование

Кривые линии называют *конформными**, если они заполняются последовательным рядом их парных точек.

Парными точками конформных кривых линий называют такие точки, в которых полукасательные или параллельны, или составляют между собой равные углы.

Кривые линии AB и A_1B_1 (рис. 213) — конформные, а точки *0* и *0,1* и *1*, *2* и *2* — парные. В этих точках полукасательные параллельны между собой.

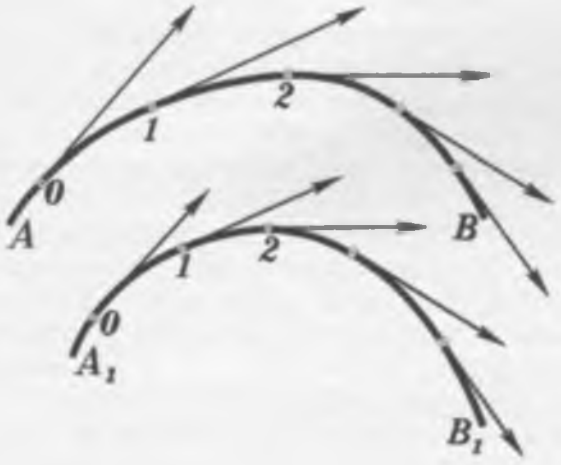
На рис. 214 кривые CD и C_1D_1 также являются конформными. Они имеют парные точки, в которых полукасательные составляют между собой углы δ.

Конформные кривые линии называют *равными*, если они при наложении совпадают. Парные точки равных кривых линий совпадают.

Равные конформные кривые линии называют *параллельными*, если полукасательные в их парных точках параллельны. Построение кривой линии, конформной данной кривой, называют *конформным преобразованием* этой кривой линии.

Чтобы построить кривую, конформную заданной кривой линии, т. е. чтобы преобра-

* От позднелат. conformis — соответствующий.



Р и с. 213

зовать заданную кривую в конформную ей кривую, необходимо знать зависимость, которая должна соблюдаться при замене длин дуг s данной кривой линии AB длинами дуг s_1 конформной ей кривой линии A_1B_1. Эту зависимость называют *функцией конформного преобразования*, которая имеет вид:

$$m = \lim \frac{\Delta s_1}{\Delta s} = F(s).$$

Здесь Δs и Δs_1 — бесконечно малые дуги кривых линий AB и A_1B_1.

На рис. 215 дан пример преобразования кривой линии AB в конформную ей кривую A_1B_1. График функции конформного преобразования задан зависимостью $m = F(s)$.

На кривой линии AB от начальной точки O помечается ряд точек $1, 2, 3, \ldots$ и измеряются длины дуг $s_1, s_2, s_3, \ldots$, ограниченные начальной и выбранной точками.

Для каждой из точек по заданному графику зависимости $m = F(s)$ определяются величины значений $m_1, m_2, m_3, \ldots$ Из точек $1, 2, 3, \ldots$ кривой AB опустим перпендикуляры на нормаль n и касательную t. От точек пересечения их с касательной и нормалью по направлению перпендикуляров откладываем отрезки, равные величинам $m_1, m_2, m_3, \ldots$ Концами таких отрезков наметятся кривые ef и uk.

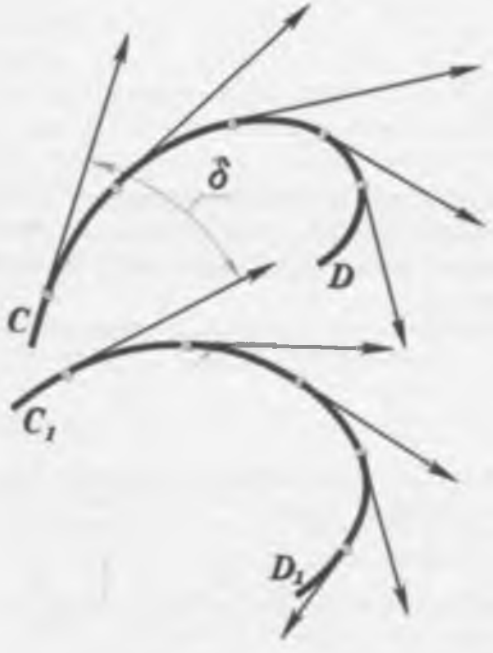
Бесконечно малая дуга Δs кривой AB проецируется на нормаль n отрезком, равным $\Delta s \cdot \sin\alpha$, а на касательную t — отрезком

$$\Delta s \cdot \cos\alpha.$$

Площадь бесконечно малого отсека, ограниченного кривой ef, нормалью n и бесконечно близкими перпендикулярами к n, равна $m \cdot \Delta s \sin\alpha = \Delta s_1 \cdot \sin\alpha$, т. е. величине проекции бесконечно малой дуги искомой конформной кривой линии A_1B_1 на первую нормаль n.

Площадь бесконечно малого отсека, ограниченного кривой ku, касательной t и бесконечно близкими перпендикулярами к t, равна $m \cdot \Delta s \cdot \cos\alpha = \Delta s_1 \cdot \cos\alpha$, т. е. величине проекции бесконечно малой дуги искомой конформной кривой линии A_1B_1 на первую касательную.

Подсчетом указанных площадей могут быть определены проекции ряда точек конформной кривой линии A_1B_1 на нормаль n и касательную t. По этим проекциям определяются точки искомой конформной кривой



Р и с. 214

жением ab, $a'b'$ производящей линии, неподвижной осью, шагом и ходом. Расположение оси примем, как и для поверхности вращения, перпендикулярным к плоскости проекции H.

Ходами всех точек производящей линии являются цилиндрические винтовые линии, имеющие одинаковые с винтовой поверхностью шаг и ход. Эти винтовые ходы точек производящей линии имеют, очевидно, и общий так называемый *единичный шаг* $s_0=\frac{S}{2\pi}$, который называется *параметром* винтовой поверхности $p=s_0=\frac{S}{2\pi}$. Горизонтальными проекциями ходов точек производящей линии являются окружности с общим центром в точке, являющейся вырожденной проекцией винтовой оси.

Наметим путем поворота вокруг этой точки ряд положений горизонтальной проекции движущейся производящей линии. При повороте производящей линии вокруг оси на угол β она получает осевое перемещение на величину:

$$s=\beta\cdot\frac{S}{2\pi}=\beta\cdot p,$$

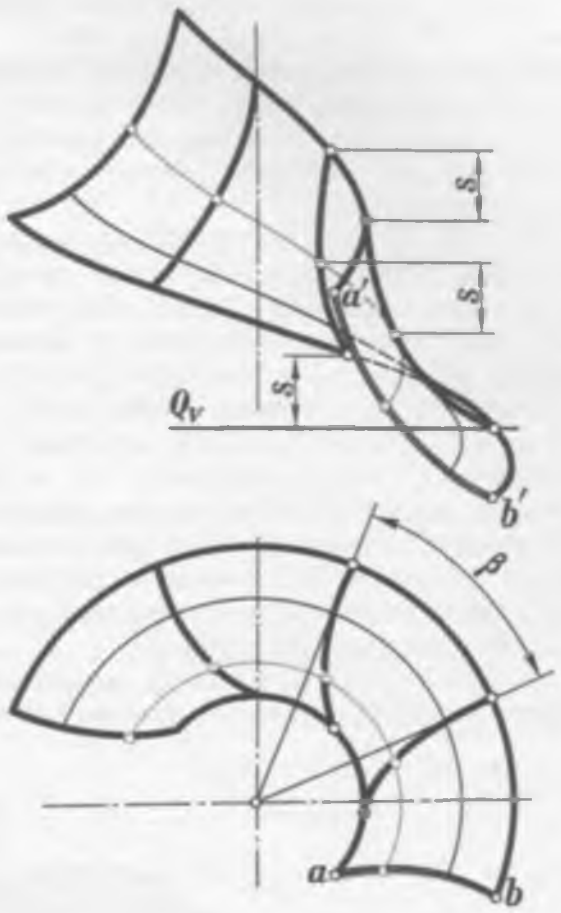
$$s_n=\beta_n\cdot p,$$

где угол β измеряется в радианах.

Фронтальные проекции ряда положений производящей линии, соответствующие их горизонтальным проекциям, определяют исходя из условия, что фронтальные проекции точек производящей выше на величины s фронтальных проекций одноименных точек производящей линии в начальном ее положении. Соединив фронтальные проекции одноименных точек производящей линии при различных ее положениях плавными кривыми, получим фронтальные проекции ходов ряда точек производящей линии, представляющие собой синусоиды.

Путем приведенных выше построений наметится сеть винтовой поверхности, состоящая из ряда положений производящей линии и винтовых ходов ряда точек производящей линии.

Здесь горизонтальный очерк винтовой поверхности представлен контуром, ограниченным горизонтальными проекциями ходов точек производящей линии и горизонтальными проекциями производящей линии в начальном и конечном ее положениях.



Р и с. 261

Фронтальный очерк поверхности представлен контуром, ограниченным фронтальными проекциями начального и конечного положений производящей линии, а также фронтальными проекциями ходов крайних точек производящей линии и кривыми линиями, огибающими ходы точек производящей линии или ряд ее положений.

Плоскости, проходящие через ось винтовой поверхности, называют *меридиональными*. Меридиональную плоскость, параллельную плоскости проекций V, называют фронтальной или *главной меридиональной плоскостью*.

178 *Каркас* винтовой поверхности можно представить двумя семействами линий: семейством производящей в разных положениях и семейством ходов точек производящей — семейством винтовых параллелей.

На рис. 262 показана линейчатая винтовая поверхность.

На рис. 263 показан другой вид задания винтовой поверхности. Винтовая поверхность здесь задана начальным положением a_0b_0, $a'_0b'_0$ производящей линии и базовой линией. Базовой линией поверхности служит цилиндрическая винтовая линия (гелиса), соосная с заданной винтовой поверхностью и имеющая с ней одинаковые шаг и ход. Базовой линией пользуются при определении угловых смещений точек производящей линии по известным их осевым смещениям и при определении осевых смещений по известным угловым смещениям.

Кроме того, здесь показано определение недостающих фронтальных проекций e' и c' точек ee' и cc' винтовой поверхности. Окружности, построенные из центра o и проходящие через заданные точки e и c, показывают, что точки ee' и cc' лежат на винтовых ходах точек $e_0e'_0$ и $c_0c'_0$ производящей линии.

По горизонтальной проекции чертежа видно, что точки ee' и cc', следуя по винтовым ходам, перемещаются в положения e_0e_0 и c_0c_0. При этом имеем соответствующие угловые смещения α_E и α_C.

Пользуясь базовой линией, находим, что угловому смещению α_E соответствует осевое смещение s_E, равное осевому расстоянию между точками $2'$ и $1'$. Проводим линию связи точки ee' и строим искомую фронтальную проекцию e', которая располагается в осевом направлении выше фронтальной проекции e'_0 на найденную величину s_E.

Для определения осевого смещения s_C, соответствующего указанному угловому смещению α_C, определяем величину $S - s_C$

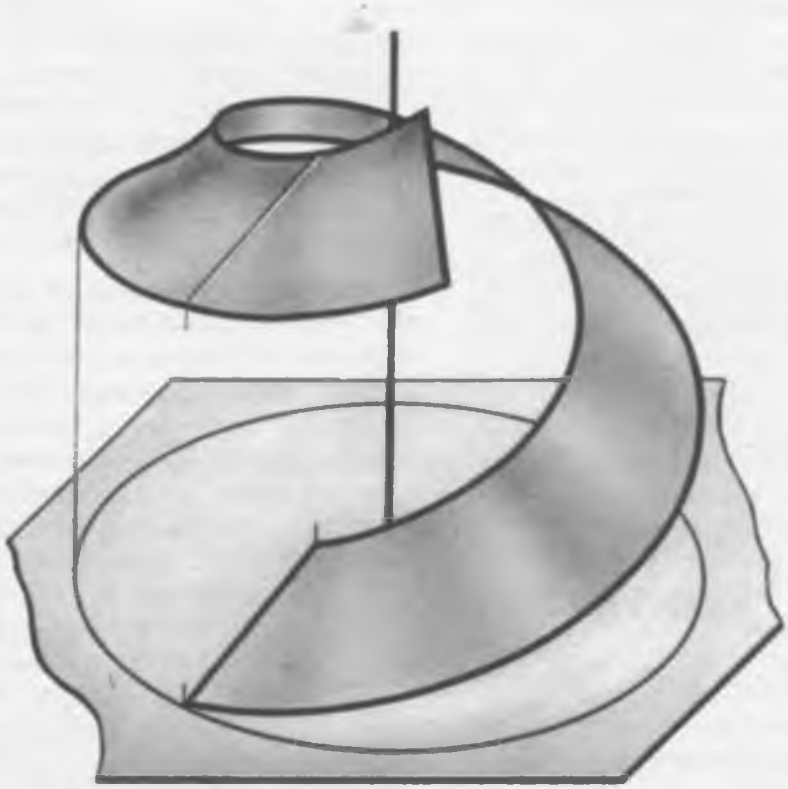
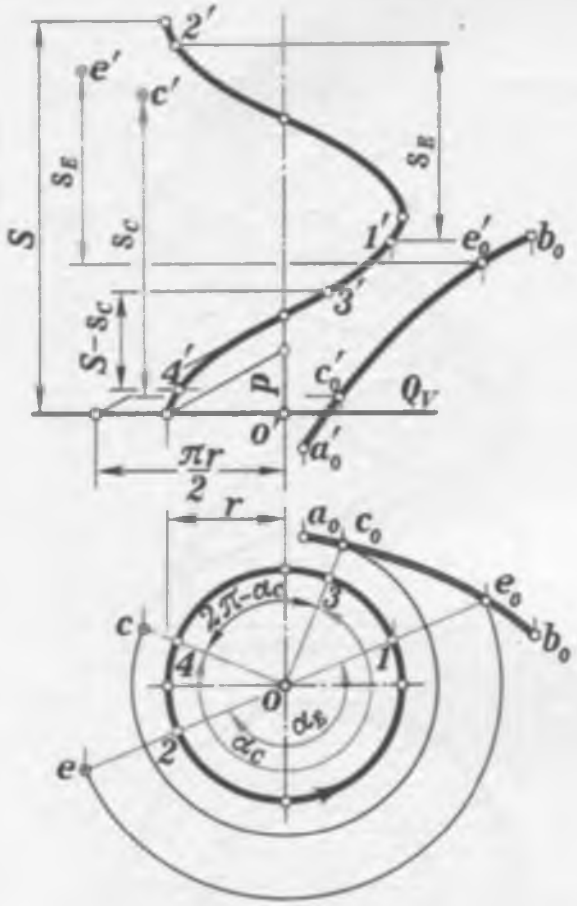
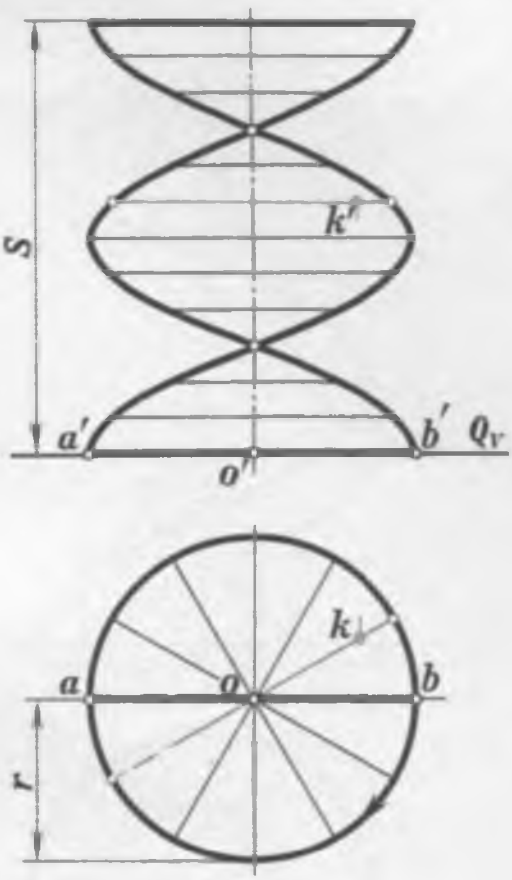


Рис. 262



Р и с. 263



Р и с. 264

осевого смещения для углового смещения $2\pi-\alpha_C$. Угловому смещению $2\pi-\alpha_C$ в направлении поднимающейся точки соответствует осевое смещение $S-s_C$, равное осевому расстоянию между фронтальными проекциями *3′* и *4′* точек *33′* и *44′*.

Проводим линию связи точки *cc′* и строим искомую фронтальную проекцию *c′*, которая в осевом направлении располагается выше фронтальной проекции c_0' на величину s_C.

Винтовые поверхности, у которых производящими являются прямые линии, называют *геликоидами*.

Геликоид называют *прямым*, если производящая прямая линия составляет с осью поверхности прямой угол; во всех других случаях геликоид называют *косым*.

Если производящая прямая линия пересекается с осью поверхности, геликоид называется *закрытым*; если не пересекается — геликоид называется *открытым*.

Наименьшее расстояние между производящей прямой линией и осью называют *эксцентриситетом* (плечом) геликоида.

Геликоиды, подобно однополостным гиперболоидам вращения, можно рассматривать как геометрические места скрещивающихся прямых линий.

На рис. 264 показан чертеж прямого закрытого геликоида правого хода и шага *S*. Здесь поверхность задана базовой гелисой и производящей линией *ab*, *a′b′*. Базовая линия рассматриваемой поверхности является винтовым ходом точки *aa′* производящей линии. Линией сужения поверхности

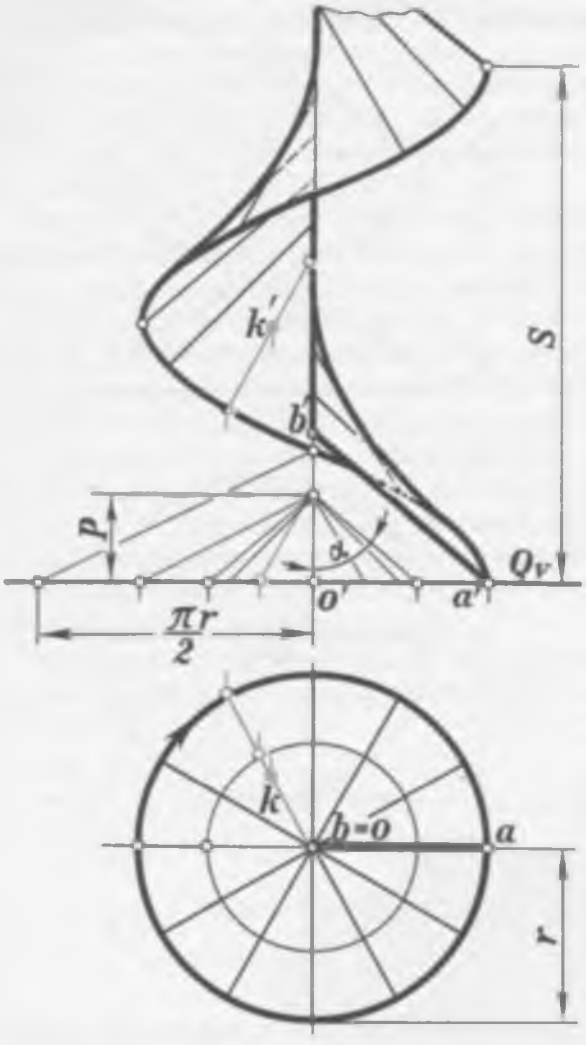


Рис. 265

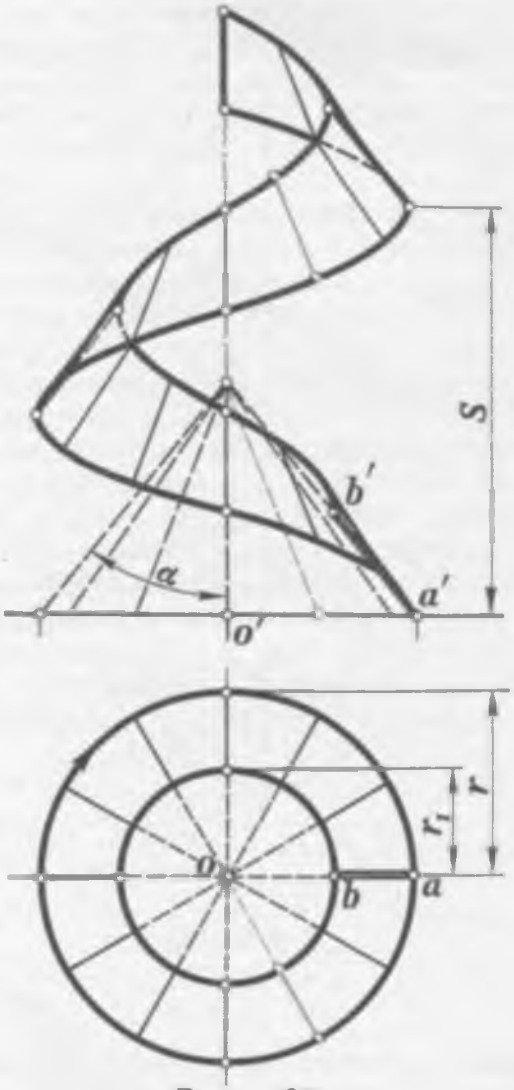


Рис. 266

является ось поверхности. Фронтальные проекции производящей линии во всех ее положениях параллельны следу Q_V, а горизонтальные проекции производящей линии располагаются лучами, исходящими из точки — горизонтальной проекции оси поверхности.

Поверхность закрытого косого геликоида правого хода представлена на рис. 265. Горизонтальная проекция производящей линии поверхности во всех ее положениях исходит из точки o — вырожденной проекции винтовой оси.

Для определения фронтальных проекций положений производящей линии построен направляющий конус поверхности, образующие которого составляют с винтовой осью один и тот же угол α, что и производящая прямая заданной поверхности.

Горизонтальным очерком поверхности является окружность. Фронтальный очерк представляется фронтальной проекцией винтового хода начальной точки производящей и кривыми, огибающими ряд положений производящей линии. Эти гиперболоидные линии являются трансцендентными кривыми линиями, мало отличающимися от прямых линий. Линией сужения поверхности является ось. Параметр p_K перекрещивания производящей линии с осью является постоянным вследствие однообразия ее движения.

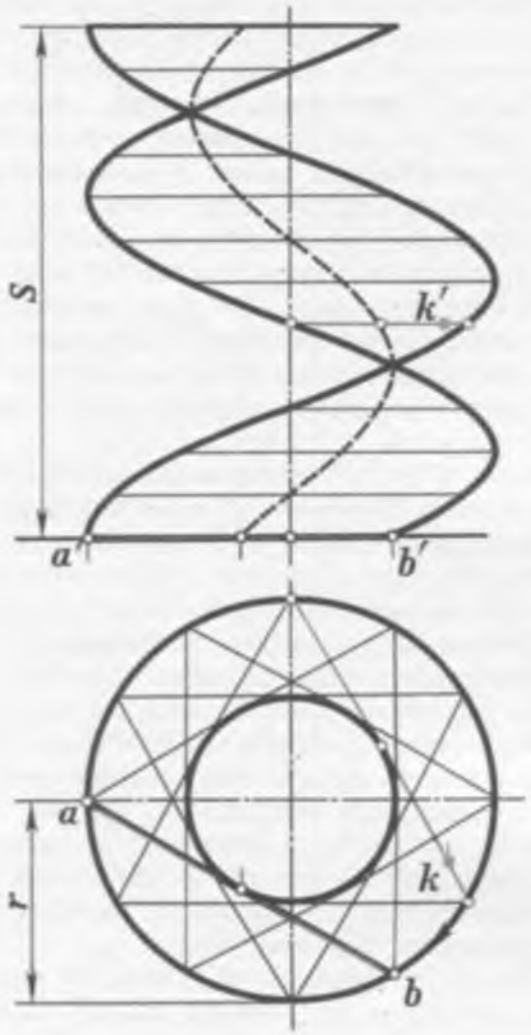


Рис. 267

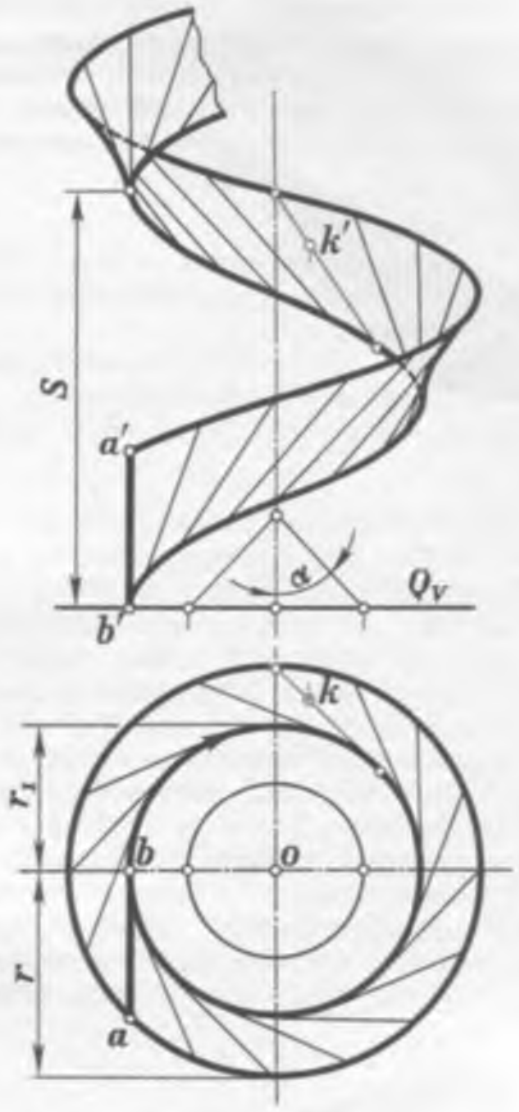


Рис. 268

После полного оборота производящей линии величина параметра перекрещивания равна

$$p_K = \frac{S \cdot \sin\alpha}{\beta},$$

где β — угол сектора развертки направляющего конуса.

$$\beta = 2\pi \cdot \sin\alpha,$$

отсюда:

$$p_K = \frac{S \cdot \sin\alpha}{2\pi \cdot \sin\alpha} = \frac{S}{2\pi} = s_0,$$

где s_0 — единичный шаг базовой линии поверхности.

На рис. 266 показан кольцевой закрытый косой геликоид правого хода. Поверхность косого закрытого геликоида пересекается соосным с ним цилиндром радиусом r_1. Линией пересечения цилиндра геликоидом является цилиндрическая винтовая линия.

На рис. 267 представлен прямой открытый геликоид. Поверхность задана начальным положением ab, $a'b'$ производящей линии, шагом S и ходом (указан стрелкой). Эксцентриситет геликоида по величине равен отрезку расстояния производящей линии от оси.

182 Линия сужения представляет собой винтовой ход точки производящей линии, наиболее близко отстоящей от оси. Параметр перекрещивания производящей линии постоянен вследствие однообразия ее движения:

$$p_K = \frac{l \cdot \cos\delta}{2\pi},$$

где l — длина дуги линии сужения, соответствующая углу поворота производящей линии;

δ — угол между касательной к линии сужения и осью поверхности.

Ввиду того что $S = l \cdot \cos\delta$, имеем $p_K = \frac{S}{2\pi}$.

Чертеж открытого косого геликоида показан на рис. 268. Геликоид правого хода задан производящей линией ab, $a'b'$ и базовой линией — гелисой, которая одновременно является винтовым ходом точки bb' производящей линии. Окружность радиусом ob является окружностью эксцентриситетов для положений производящей линии, а цилиндрическая винтовая линия точки bb' производящей линии, наиболее близкой к оси, является линией сужения поверхности.

Для определения фронтальных проекций положений производящей линии построен направляющий конус поверхности, образующие которого составляют с осью поверхности угол α, равный углу между производящей прямой и осью.

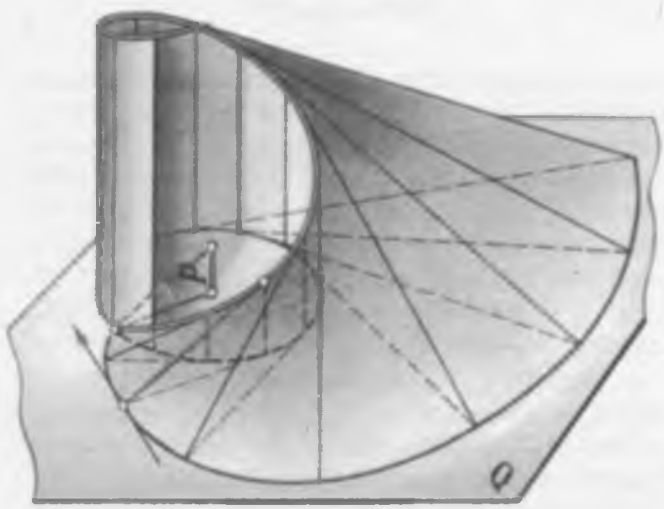


Рис. 269

Меридиональные плоскости вспомогательного конуса поверхности, параллельные горизонтально-проецирующим плоскостям положений производящей линии, пересекают конус по его образующим, параллельным производящей линии. Горизонтальные же проекции производящей линии во всех ее положениях направлены по касательным к окружности эксцентриситетов. По намеченным горизонтальным проекциям производящей линии можно определить соответствующие им фронтальные проекции. Такую поверхность называют *конволютным геликоидом*.

Если производящая прямая во всех своих положениях является касательной к базовой винтовой линии, образуется винтовая поверхность, которую называют *торсом-геликоидом*, или *эвольвентным геликоидом* (рис. 269).

Винтовую поверхность, являющуюся геометрическим местом главных нормалей гелисы, называют *минимальным геликоидом*.

Винтовую поверхность называют *винтовым тором*, если ее меридиональным сечением являются окружности. На рис. 270 показан винтовой тор правого хода и шага S. Винтовым ходом центра производящей окружности заданного диаметра является цилиндрическая винтовая линия.

Винтовую поверхность называют *винтовым столбом*, если линией пересечения ее плоскостью, перпендикулярной к ее оси, является окружность.

Винтовую поверхность называют *нормальным геликоидальным круглым цилиндром*, если производящая линия — окружность находится в нормальной плоскости винтового хода ее центра. Этот винтовой ход можно принять за базовую линию поверхности.

На рис. 271 показана поверхность нормального геликоидального круглого цилиндра левого хода и шага S. Эту поверхность можно образовать движением шара заданного радиуса, центр которого перемещается по винтовой линии радиусом r. Горизонтальный и фронтальный очерки по-

182 Линия сужения представляет собой винтовой ход точки производящей линии, наиболее близко отстоящей от оси. Параметр перекрещивания производящей линии постоянен вследствие однообразия ее движения:

$$p_K = \frac{l \cdot \cos\delta}{2\pi},$$

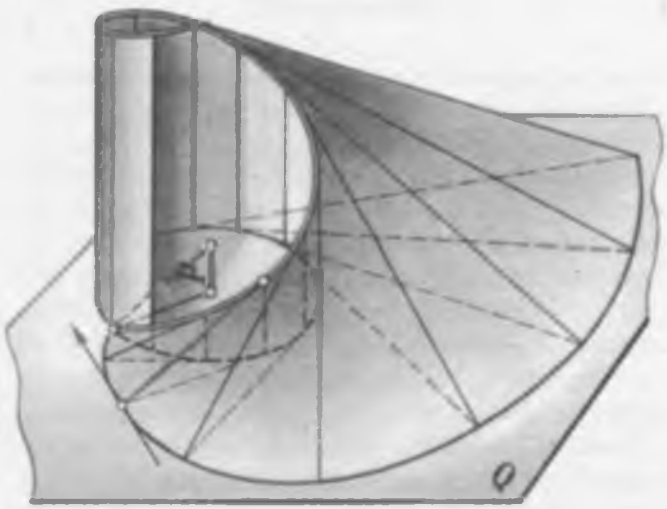
где l — длина дуги линии сужения, соответствующая углу поворота производящей линии;

δ — угол между касательной к линии сужения и осью поверхности.

Ввиду того что $S = l \cdot \cos\delta$, имеем $p_K = \frac{S}{2\pi}$.

Чертеж открытого косого геликоида показан на рис. 268. Геликоид правого хода задан производящей линией ab, $a'b'$ и базовой линией — гелисой, которая одновременно является винтовым ходом точки bb' производящей линии. Окружность радиусом ob является окружностью эксцентриситетов для положений производящей линии, а цилиндрическая винтовая линия точки bb' производящей линии, наиболее близкой к оси, является линией сужения поверхности.

Для определения фронтальных проекций положений производящей линии построен направляющий конус поверхности, образующие которого составляют с осью поверхности угол α, равный углу между производящей прямой и осью.



Р и с. 269

Меридиональные плоскости вспомогательного конуса поверхности, параллельные горизонтально-проецирующим плоскостям положений производящей линии, пересекают конус по его образующим, параллельным производящей линии. Горизонтальные же проекции производящей линии во всех ее положениях направлены по касательным к окружности эксцентриситетов. По намеченным горизонтальным проекциям производящей линии можно определить соответствующие им фронтальные проекции. Такую поверхность называют *конволютным геликоидом*.

Если производящая прямая во всех своих положениях является касательной к базовой винтовой линии, образуется винтовая поверхность, которую называют *торсом-геликоидом*, или *эвольвентным геликоидом* (рис. 269).

Винтовую поверхность, являющуюся геометрическим местом главных нормалей гелисы, называют *минимальным геликоидом*.

Винтовую поверхность называют *винтовым тором*, если ее меридиональным сечением являются окружности. На рис. 270 показан винтовой тор правого хода и шага S. Винтовым ходом центра производящей окружности заданного диаметра является цилиндрическая винтовая линия.

Винтовую поверхность называют *винтовым столбом*, если линией пересечения ее плоскостью, перпендикулярной к ее оси, является окружность.

Винтовую поверхность называют *нормальным геликоидальным круглым цилиндром*, если производящая линия — окружность находится в нормальной плоскости винтового хода ее центра. Этот винтовой ход можно принять за базовую линию поверхности.

На рис. 271 показана поверхность нормального геликоидального круглого цилиндра левого хода и шага S. Эту поверхность можно образовать движением шара заданного радиуса, центр которого перемещается по винтовой линии радиусом r. Горизонтальный и фронтальный очерки по-

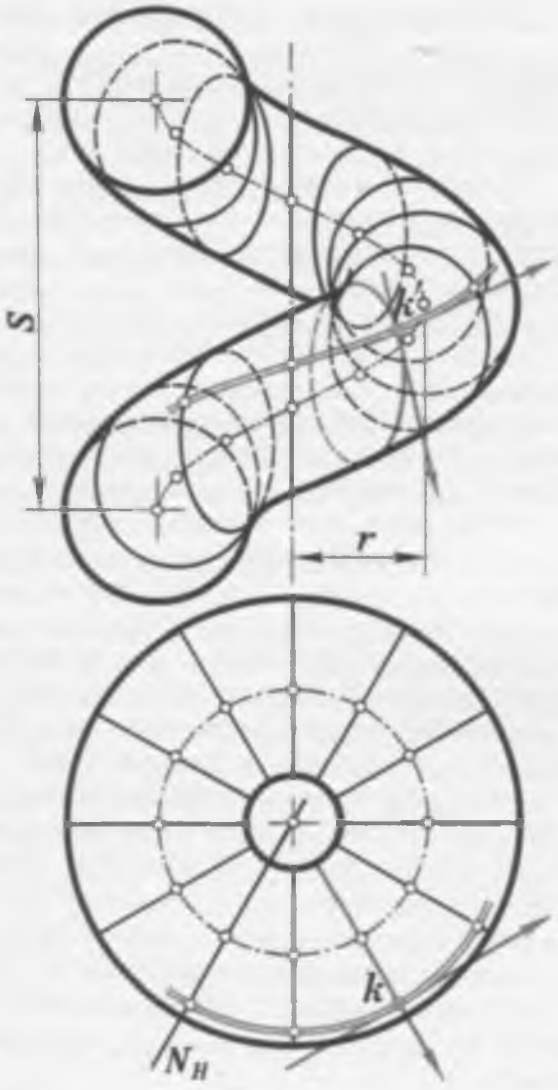


Рис. 270

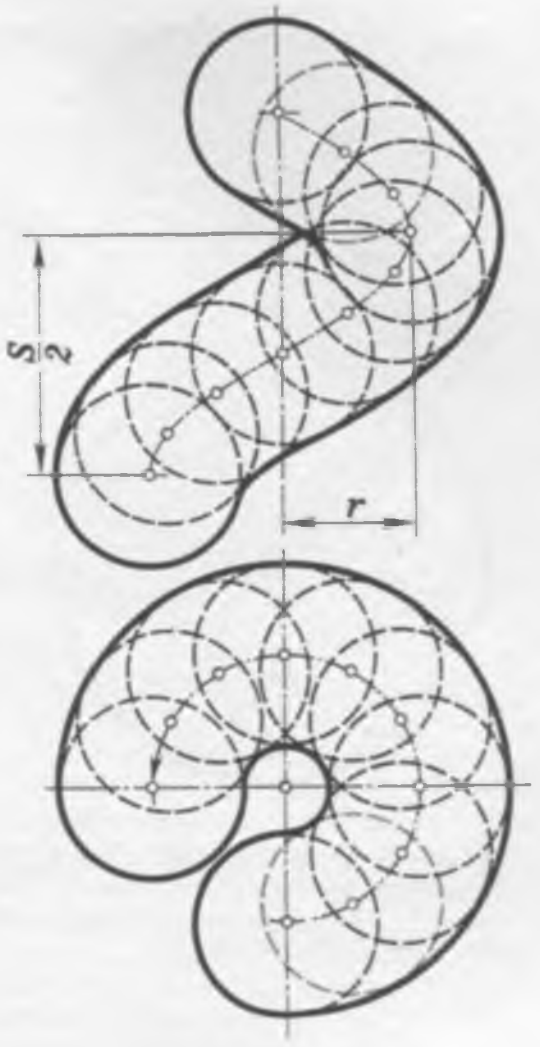


Рис. 271

верхности представляются кривыми линиями, огибающими семейство окружностей, центры которых находятся в точках на соответствующих проекциях базовой линии.

На рис. 272 показана поверхность винтового столба, которая имеет производящую окружность, лежащую в плоскости, перпендикулярной к оси.

Винтовые поверхности, и особенно геликоиды, широко используются в технике. Винты разных видов, сверла, пружины, шнеки, винтовые лестницы, устройства наклонных винтовых въездов для автомобилей и т. д. имеют в своей основе геликоиды. Поверхность закрытого кольцевого геликоида используется при конструировании Архимедова винта — простейшего механизма для подъема воды и других жидкостей, а также в винтовых транспортерах, грейдер-элеваторах, бурильно-крановых машинах для транспортировки мелкокусковых и сыпучих материалов.

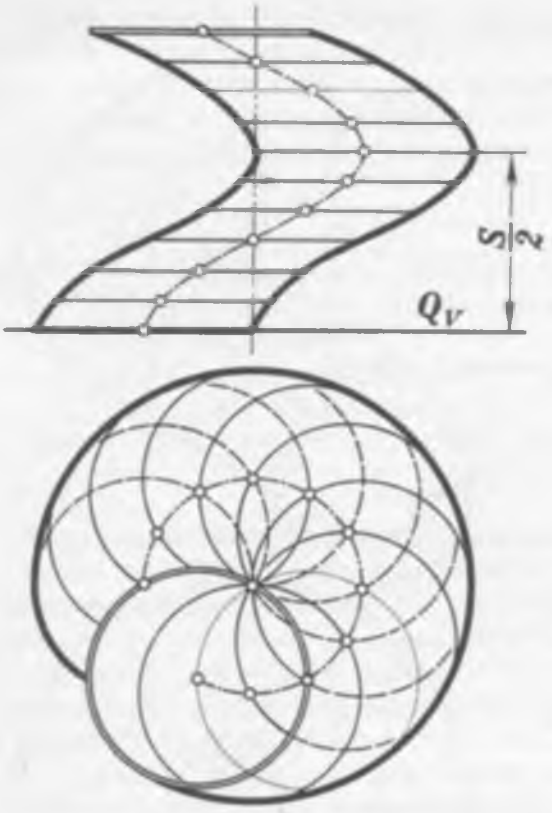


Рис. 272

Геликоидальную форму имеют даже и некоторые белковые молекулы. Модель структуры деоксирибонуклеата (ДНК) — носителя наследственности клетки — представляет собой двухзаходный геликоид.

Примером практического применения циклических винтовых поверхностей могут служить цилиндрические винтовые рессоры круглого сечения.

Они находят применение в конструкциях воздуховодов промышленных зданий, особенно фабрик и заводов пищевой и химической промышленности, в конструкциях змеевиков, служащих для поверхностного теплообмена, где теплообмен совершается между газообразными или жидкими веществами, движущимися по трубам и находящимися или протекающими вне труб. Такие змеевики устанавливают в варочных котлах, теплообменниках, холодильниках, конденсаторах, выпарных аппаратах, перегонных кубах и т. п.

Свойства винтовых поверхностей используются в воздушных и гребных винтах для создания тяги, приводящей в движение самолеты, суда и др., в осевых вентиляторах и пропеллерных насосах, в винтовых спусках и пр.

§48 ТОРСОВЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

Поверхность, образованную движущейся в пространстве производящей прямой, называют *линейчатой*.

Линейчатые поверхности делят на две группы: развертывающиеся — торсы и неразвертывающиеся (косые) поверхности.

Торсом называют линейчатую поверхность, которую можно (путем последовательных ее изгибов по образующим) всеми точками совместить с плоскостью без складок и разрывов. У такой поверхности два бесконечно близких положения образующей или параллельны между собой, или пересекаются.

При развертке поверхности на плоскость бесконечно малые плоские ее отсеки, ограниченные бесконечно близкими образующими, последовательными изгибами поверхности по образующим укладываются в плоскости, на которой производится развертывание.

Рассмотрим ломаную пространственную линию. Продолжим все стороны такой ломаной линии в одном направлении. Получим последовательный ряд плоских отсеков, составляющих гранную поверхность, которая называется *гранным торсом*.

Если продолжить стороны ломаной линии в направлении, противоположном принятому, то получится другая половина (пола) гранного торса. Обе полы торса отделяются друг от друга ломаной линией. Теперь бесконечно увеличим число сторон пространственной ломаной линии. В соответствии с этим увеличится и число ребер гранного торса.

В пределе ломаная линия превратится в кривую линию, гранный торс — в плавный

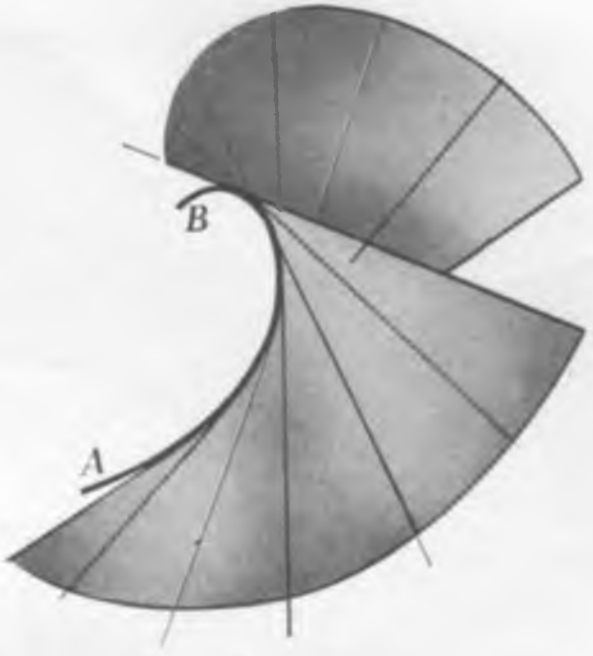
торс, а ребра торса займут положения касательных к кривой линии AB (рис. 273). Эта кривая линия называется *ребром возврата торса*. Односторонне направленные полукасательные к кривой AB определяют одну полу поверхности торса.

Поверхность торса образуется движением прямой линии (образующей), которая во всех положениях остается касательной к пространственной кривой линии — ребру возврата торса.

Касательную плоскость к поверхности торса можно определить как предельное положение плоскости, проходящей через образующие в двух бесконечно близких точках ребра возврата.

Если ребро возврата (пространственная кривая AB) поверхности торса преобразуется в точку, имеем коническую поверхность с вершиной в этой точке. Здесь вершина конуса не определяет задание поверхности. Если вершина конической поверхности удалена в бесконечность в заданном направлении, имеем цилиндрическую поверхность.

Определителем поверхности с ребром возврата является пространственная кривая — ребро возврата поверхности; конической поверхности — направляющая кривая и вершина; цилиндрической поверхности — направляющая кривая и направление образующих.



Р и с. 273

Если направляющей конической или цилиндрической поверхности является кривая 2-го порядка, то образуется коническая или цилиндрическая поверхность 2-го порядка.

Каркас торса можно составить из семейства прямолинейных образующих.

ЛИНЕЙЧАТЫЕ КОСЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

§49

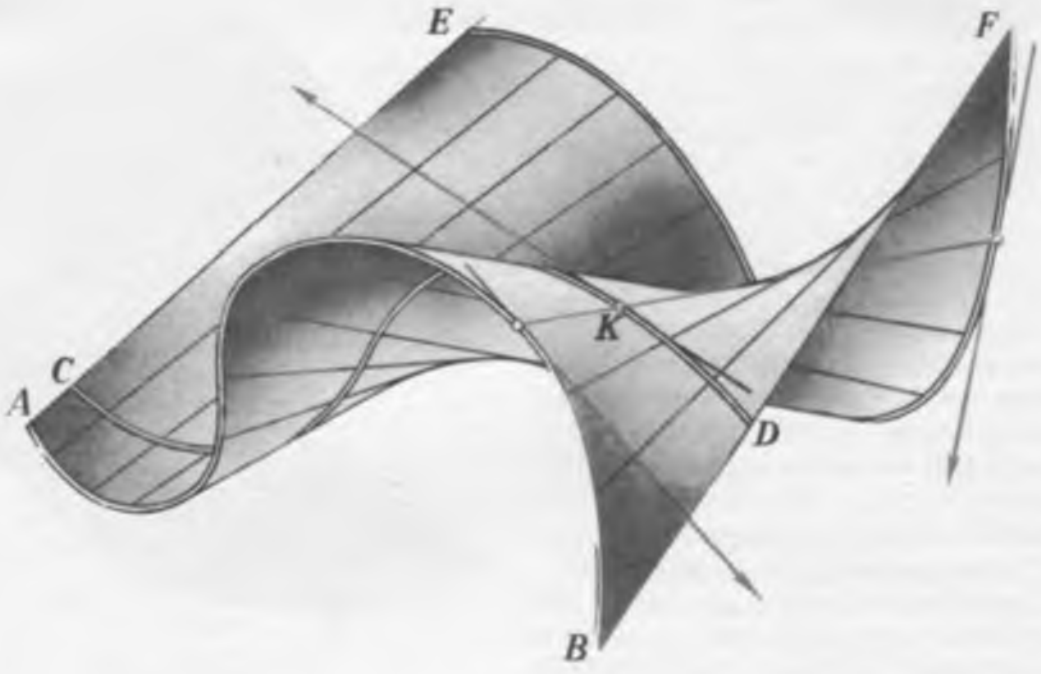
Линейчатая неразвертываемая (косая) поверхность может быть образована перемещением в пространстве прямой по некоторым направляющим линиям. Для определения закона движения производящей, т. е. для определения полноты задания поверхности, необходимо иметь три направляющие линии. Ими и определяется характер движения производящей косой линейчатой поверхности (рис. 274).

Направляющими линиями косых поверхностей могут быть кривые и прямые линии.

Если все три направляющие линии — прямые произвольного положения, то движением по ним производящей прямой линии образуется поверхность, которую называют *однополостным гиперболоидом*.

Если же направляющие прямые параллельны одной плоскости, то движением по этим прямым производящей прямой линии образуется поверхность — *косая плоскость* (*гиперболический параболоид*).

Одним из видов косых поверхностей являются линейчатые поверхности с направляющей плоскостью и линейчатые поверхности с плоскостью параллелизма. Введением в задание поверхности направляющей плоскости исключается одна из направляющих кривых линий косой поверхности.



Р и с. 274

Поверхностью с направляющей плоскостью называют линейчатую поверхность, у которой движущаяся производящая прямая линия не изменяет угла наклона к неподвижной плоскости, которая является направляющей плоскостью поверхности.

Производящая прямая линия, образуя поверхность, скользит по двум направляющим линиям, сохраняя постоянным угол наклона к направляющей плоскости.

Поверхности с направляющей плоскостью называют *прямыми*, если угол α равен нулю. В этом случае производящая прямая параллельна направляющей плоскости, которую называют *плоскостью параллелизма*. В других случаях поверхности с направляющей плоскостью называют *косыми* поверхностями.

Поверхности с направляющей плоскостью называют *косыми* или *прямыми цилиндроидами*, если обе направляющие являются кривыми линиями. Если одна из направляющих линий прямая, то поверхность называют *косым* или *прямым коноидом*. Если обе направляющие линии — прямые (очевидно, скрещивающиеся прямые линии), то поверхность называют *дважды косой плоскостью* или *косой плоскостью*.

Прямые цилиндроиды, прямые коноиды и косые плоскости называют поверхностями *Каталана* или *поверхностями с плоскостью параллелизма*.

1. Линейчатые поверхности с плоскостью параллелизма (поверхности Каталана)

Из общего числа косых поверхностей рассмотрим обширную их группу — поверхности с плоскостью параллелизма. Косые поверхности с плоскостью параллелизма впервые были рассмотрены Монжем. Такие поверхности Монж считал образованными движением производящей прямой линии по двум направляющим линиям или по двум поверхностям, которая во всех своих положениях параллельна некоторой плоскости.

Дальнейшее углубленное исследование поверхностей с плоскостью параллелизма дано бельгийским ученым Каталаном, имя которого и носят эти поверхности.

Поверхности с плоскостью параллелизма по их образованию направляющими линиями делят на три группы:

первая группа — цилиндроиды, когда обе направляющие являются кривыми линиями;

вторая группа — коноиды, когда одна из направляющих является прямой линией;

третья группа — косые плоскости (*гиперболические параболоиды*), когда обе направляющие являются прямыми линиями.

ЦИЛИНДРОИДЫ

На рис. 275 показана поверхность цилиндроида.

В задание этой поверхности входят направляющие кривые линии AB и CD и плоскость параллелизма P. Поверхность образована движущейся прямой линией, параллельной плоскости P.

Рассмотрим образование цилиндроида. Возьмем цилиндр (рис. 276), образующими которого являются горизонтальные прямые линии. В данном случае они взяты параллельно и плоскости V. Цилиндр пересечем двумя горизонтально-проецирующими плоскостями N_{1H} и N_{2H}. Эти плоскости между собой пересекаются по вертикальной прямой линии fg, $f'g'$. Сечениями цилиндра являются кривые линии ab, $a'b'$ и cd, $c'd'$.

Оставляя одно из сечений неподвижным, например cd, $c'd'$, перемещаем другое сечение ab, $a'b'$ в направлении проецирующих лучей в плоскости N_{1H} на величину z. Это сечение занимает новое положение a_1b_1, $a_1'b_1'$.

При таком перемещении образующие поверхности остаются параллельными фронтальной плоскости проекций, но они не параллельны между собой. Образуется новая линейчатая поверхность — *цилиндроид*.

Любая из плоскостей, проходящих через линию fg, $f'g'$, пересекает основной цилиндр и цилиндроид по равным и параллельным кривым линиям.

Фронтальная плоскость проекций для рассматриваемой поверхности является плоскостью параллелизма. Фронтальный очерк цилиндроида представляет собой проекцию на плоскость параллелизма линии сужения.

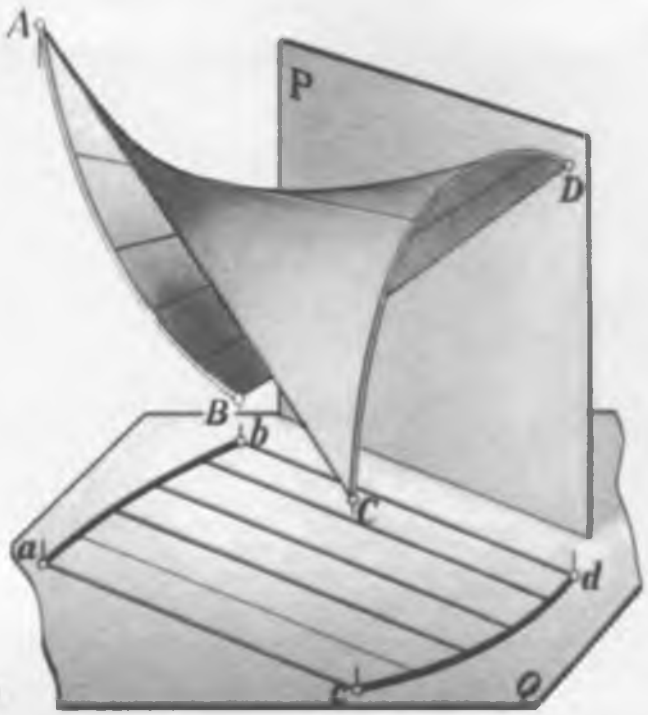


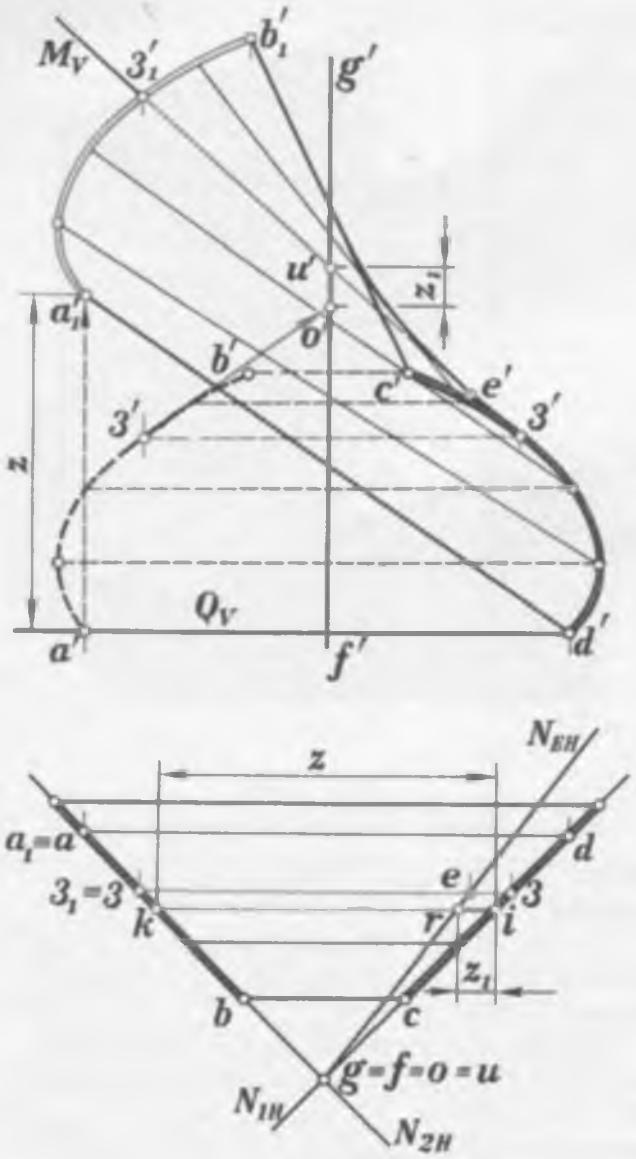
Рис. 275

Точки линии сужения строятся с помощью касательных плоскостей к рассматриваемой поверхности.

Покажем построение точки линии сужения, принадлежащей, например, образующей 33_1, $3'3_1'$. В точке $3'$ кривой линии ab, $a'b'$ проведем касательную и отметим точку oo' пересечения ее с прямой линией fg, $f'g'$.

Отметим также точку uu' пересечения фронтально проецирующей плоскости M_V прямой линии 33_1, $3'3_1'$ с прямой fg, $f'g'$. Отрезок ik равен величине z смещения в плоскости N_{1H} точек кривой линии ab, $a'b'$.

Отложим на прямой ik от точки i отрезок ri, равный отрезку $z_1 = o'u'$, и проведем через точку r след N_{EH} секущей плоскости. Образующая 33_1, $3'3_1'$ пересекается с этой плоскостью в точке ee', которая и является искомой точкой линии сужения. Повторяя подобные построения для других образующих цилиндроида, можно построить линию сужения этой поверхности.



Р и с. 276

Цилиндроиды находят применение в инженерном деле: в строительстве гидроэнергетических сооружений, в машиностроении, кораблестроении и т. п. Они используются также в сельскохозяйственном машиностроении.

КОНОИДЫ

У коноидов одна из направляющих является прямой линией. Рассмотрим коноиды, у которых направляющая прямая перпендикулярна к плоскости параллелизма. Чертеж такого коноида легко строится, если дана зависимость между расстоянием производящей линии от плоскости параллелизма и углом β поворота производящей вокруг оси.

Прямой закрытый геликоид может рассматриваться как коноид, для которого между величинами z и β существует линейная зависимость

$$z = p \cdot \beta,$$

где $p = \dfrac{\Delta z}{\Delta \beta} = \text{const}$ винтовой параметр геликоида.

На рис. 277 показан коноид, поверхность которого задана направляющими линиями: кривой, вертикальной прямой (ось коноида) и плоскостью параллелизма $Q_V \parallel H$.

Коноид пересечен соосным с ним цилиндром радиуса r. Линией их пересечения является кривая a_1b_1, $a_1'b_1'$. Развернем цилиндр в плоскости V. Преобразованием линии пересечения является кривая A_1B_1. Построим оси координат для этой линии.

На оси ординат отложены величины z подъема производящей прямой линии над плоскостью параллелизма Q_V. На оси абсцисс отложены величины r, β, где β — угол поворота производящей линии.

Винтовой параметр коноида в любой точке поверхности может быть определен из графика $z = f(\beta)$. В соответствующей точке кривой линии A_1B_1 графика проводим к ней касательную. Тангенс угла наклона касательной к оси абсцисс при $r = 1$ показывает величину винтового параметра, т. е.

$$p = \operatorname{tg} \delta = \frac{\Delta z}{\Delta \beta}.$$

Определяя винтовые параметры коноида для различных положений производящей линии, можно построить кривую зависимости $p = \varphi(\beta)$ второго графика, выявляющую характер изменения формы поверхности в зависимости от угла поворота β производящей линии.

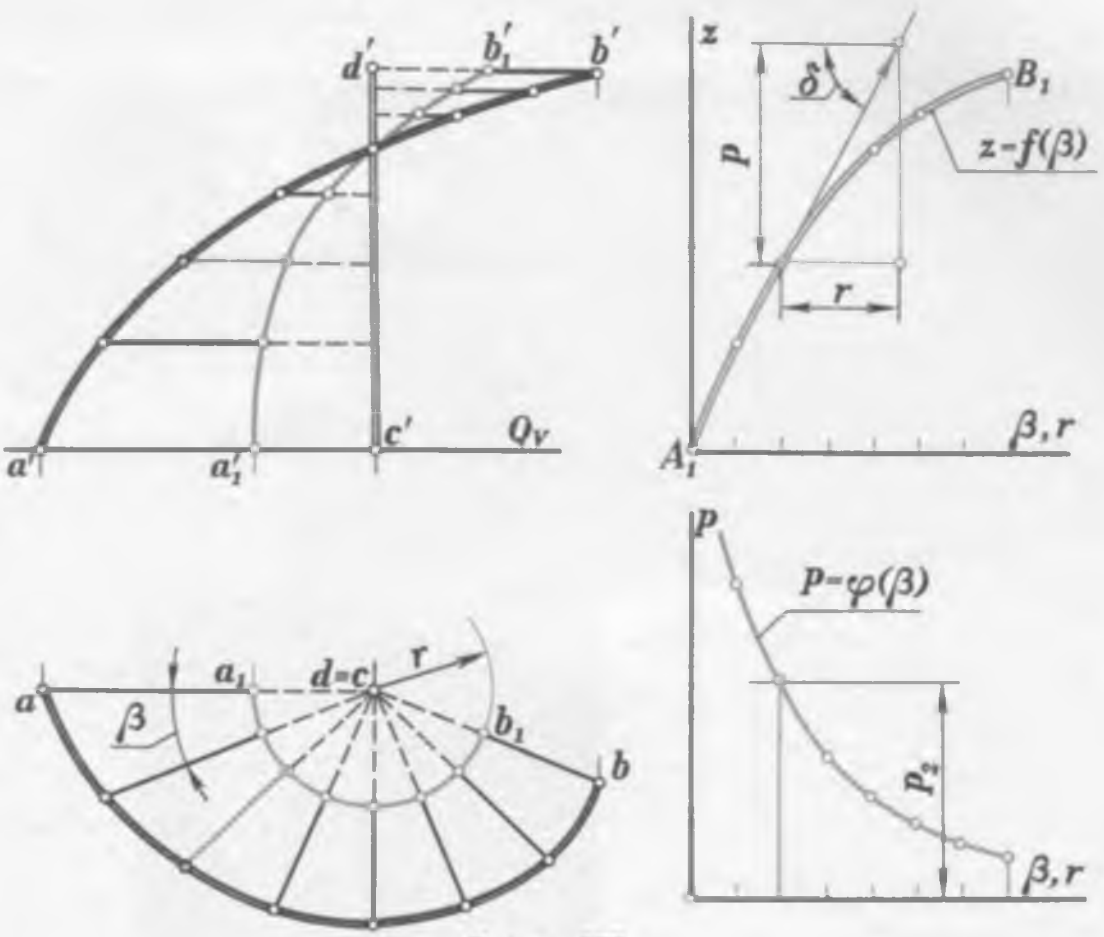


Рис. 277

Поверхность, у которой между величинами z и β имеется зависимость $z = k \cdot \sin 2\beta$, называют *коноидом Плюккера**.

На рис. 278 показан коноид Плюккера, ограниченный одноосным с ним цилиндром радиусом r. Коноид с цилиндром пересекается по кривой линии, которая в развертке представляется синусоидальной кривой линией, построенной в координатах $k \cdot \sin 2\beta$ и r, β. Эту кривую линию легко построить по заданным величинам k и r.

Винтовой параметр коноида Плюккера определяется уравнением

$$p = \lim \frac{\Delta z}{\Delta \beta} = 2k \cdot \cos 2\beta.$$

Из этого уравнения следует, что винтовой параметр коноида равен нулю для положений bd, $b'd'$ и ac, $a'c'$ производящей линии. Эти прямые линии называют *линиями торса коноида*.

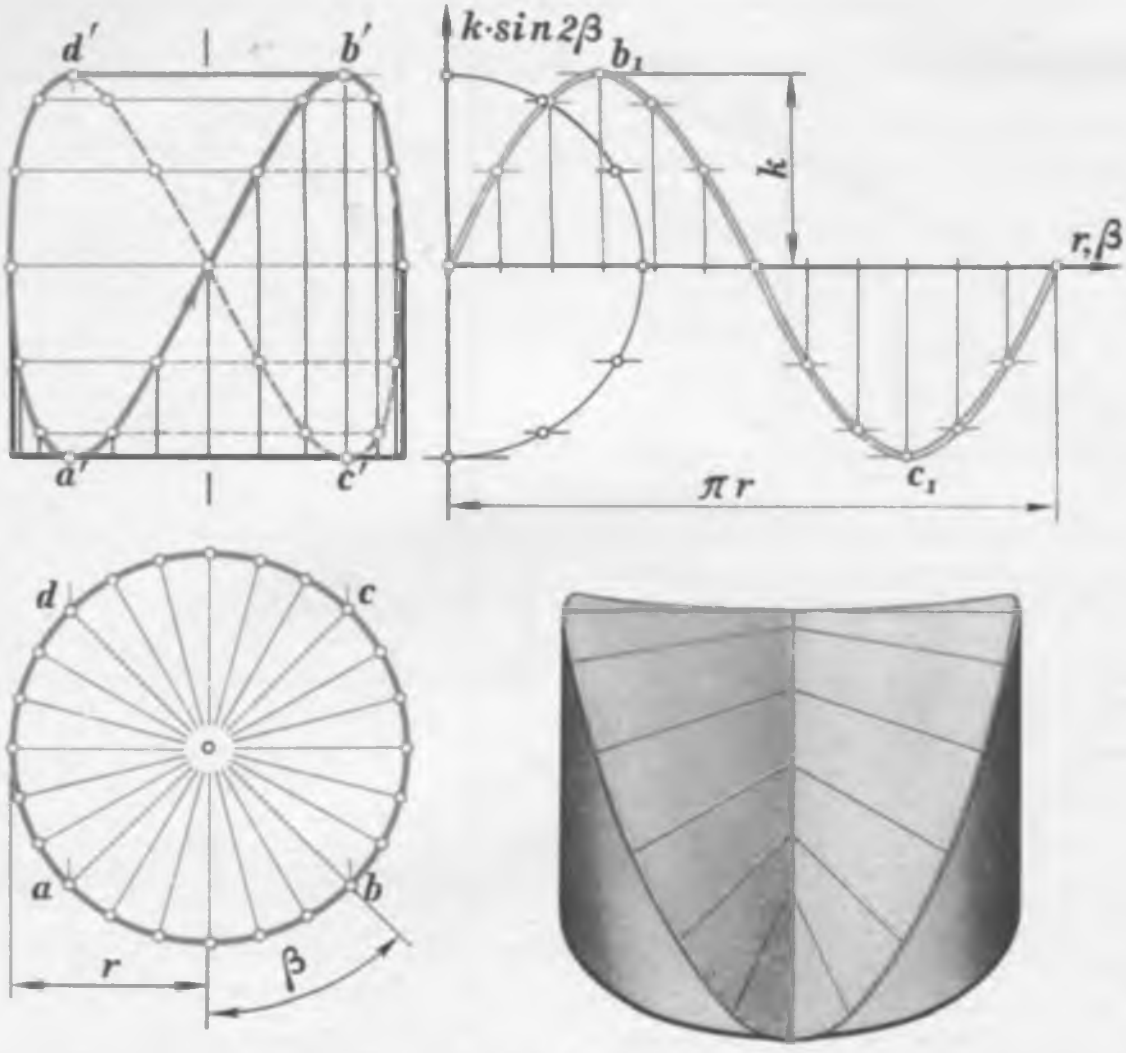
Построив развертку цилиндра, соосного с коноидом Плюккера, можно определить винтовой параметр в любой точке этой поверхности.

На рис. 278 (внизу справа) дано изображение поверхности коноида Плюккера в аксонометрии.

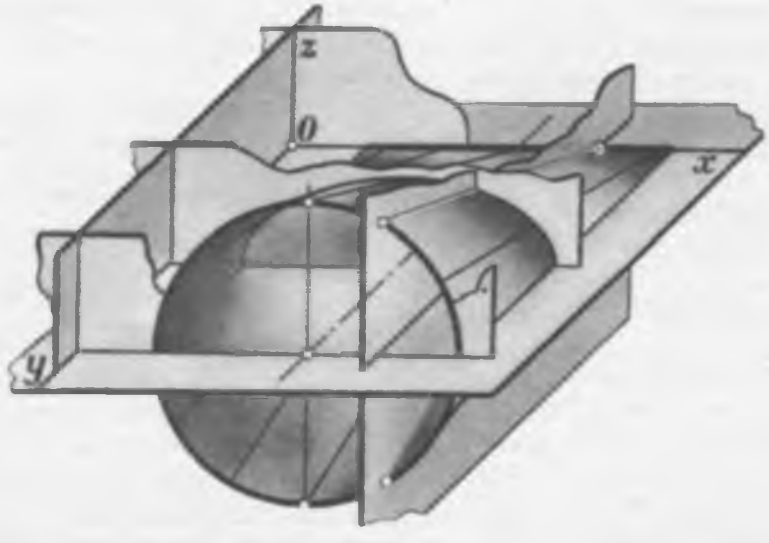
Частный вид коноида представлен и на рис. 279. Здесь направляющие линии поверхности ориентируются относительно пространственной прямоугольной декартовой системы координат следующим образом. Плоскость направляющей кривой (окружности) параллельна координатной плоскос-

* Plücker Iulius (1801—1868), немецкий математик.

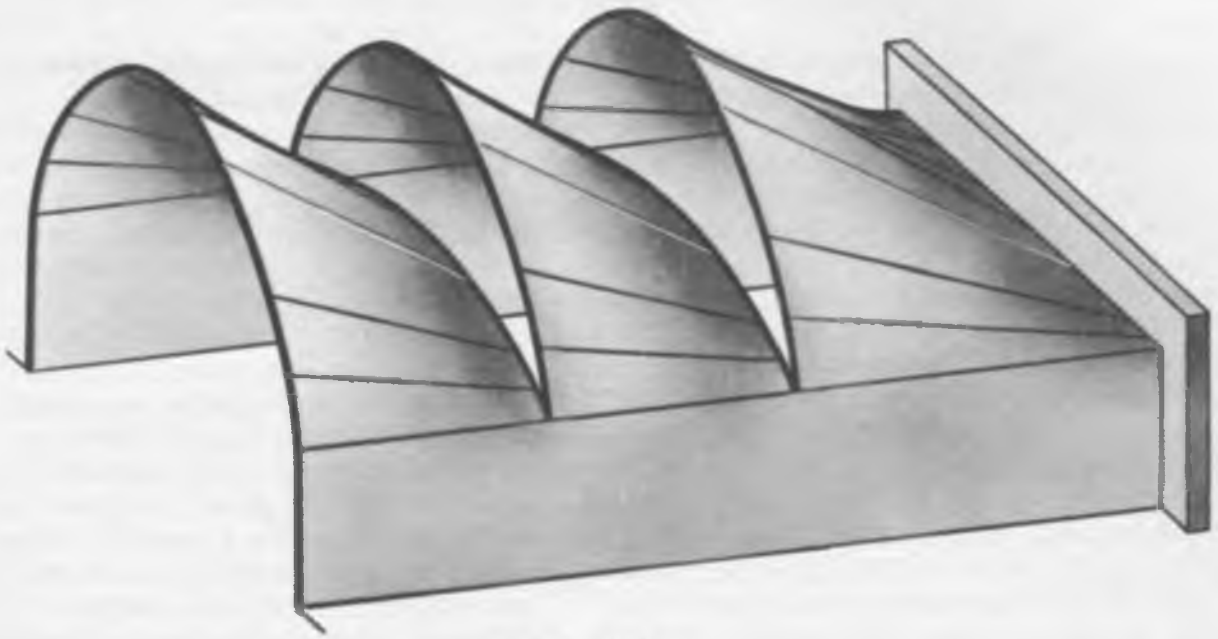
190



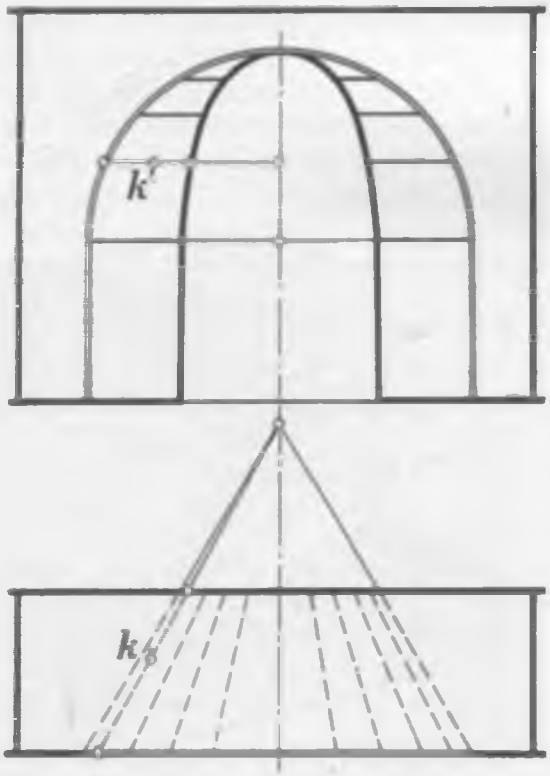
Р и с. 278



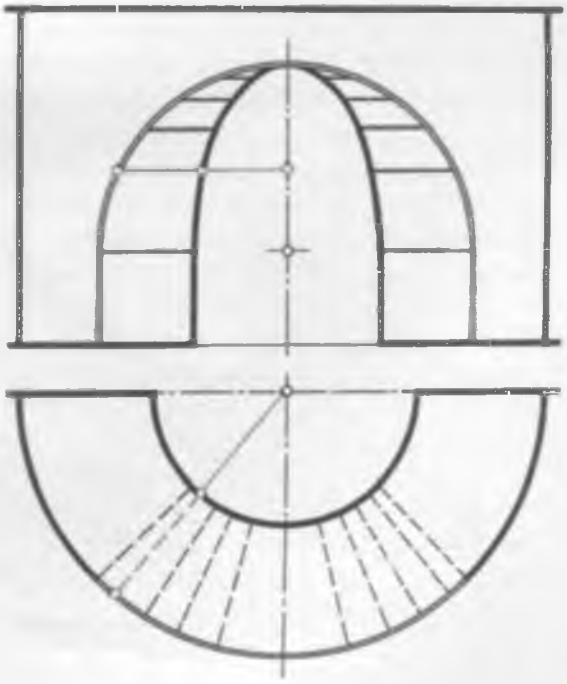
Р и с. 279



Р и с. 280



Р и с. 281



Р и с. 282

ти xOz. Координатная плоскость xOy пересекает окружность по диаметру. Направляющая прямая находится на оси Ox. Третья координатная плоскость yOz является плоскостью параллелизма.

Такой вид поверхности используется в строительной технике при конструировании оболочек покрытий промышленных и общественных зданий (рис. 280), при конструировании устоев мостов и других несущих гидротехнических сооружений. Поверхностями коноидов оформляются арки для окон и дверей в прямых стенах зданий (рис. 281), проемы в цилиндрических башнях водозаборных сооружений (рис. 282). В кораблестроении коноиды используются при конструировании носа ледореза, носа быстроходного теплохода или катера на подводных крыльях; в авиационной промышленности — при конструировании летательных аппаратов. В сельскохозяйственном машиностроении коноидами представляются: отвалы плугов, шнеки, конические прямоугольные пружины и т. д.

КОСАЯ ПЛОСКОСТЬ

На рис. 283 и 284 показаны модели образования косой плоскости. Направляющими линиями поверхности являются скрещивающиеся прямые линии AB и CD. Производящая прямая линия скользит по направляющим, оставаясь во всех положениях параллельной плоскости параллелизма. Покажем, что косую плоскость можно образовать также движением прямой линии, пересекающей всегда три скрещивающиеся направляющие прямые, параллельные одной плоскости.

На рис. 285 построены скрещивающиеся прямые линии ab, $a'b'$; cd, $c'd'$ и ef, $e'f'$, параллельные плоскости Q_H. Производящая прямая линия, перемещаясь в каждое из последующих положений, пересекается указанными направляющими прямыми линиями. Через каждую точку любой из направляющих прямых линий проходит производящая прямая линия в одном из своих положений. Ее можно построить как линию пересечения двух плоскостей, каждая из которых проходит через выбранную на направляющей прямой линии точку и через одну из двух других направляющих прямых.

Докажем, что три произвольно выбранных положения производящей линии параллельны некоторой плоскости. Тогда все положения производящей линии также параллельны этой плоскости. Проще и удобнее взять положения производящей линии, для которых плоскости M_{1V}, M_{2V}, M_{3V} — фрон-

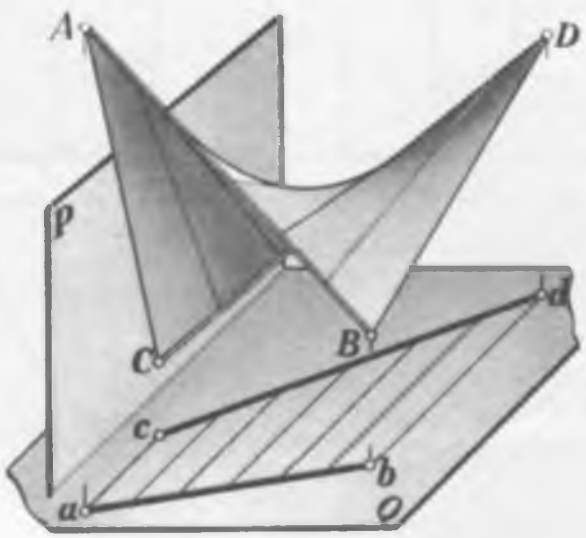


Рис. 283

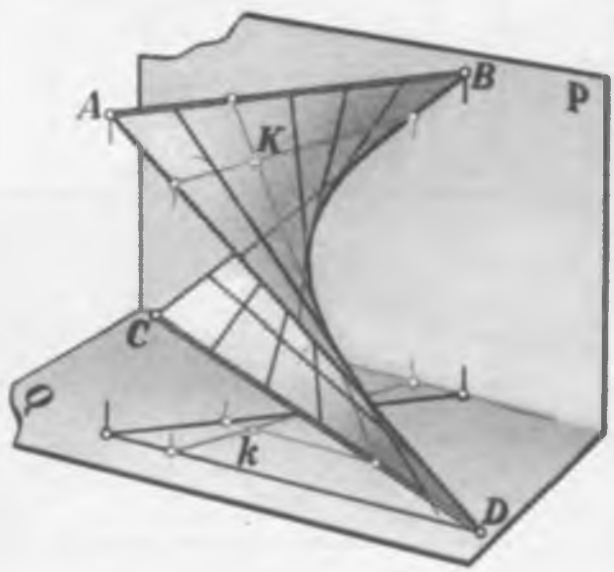
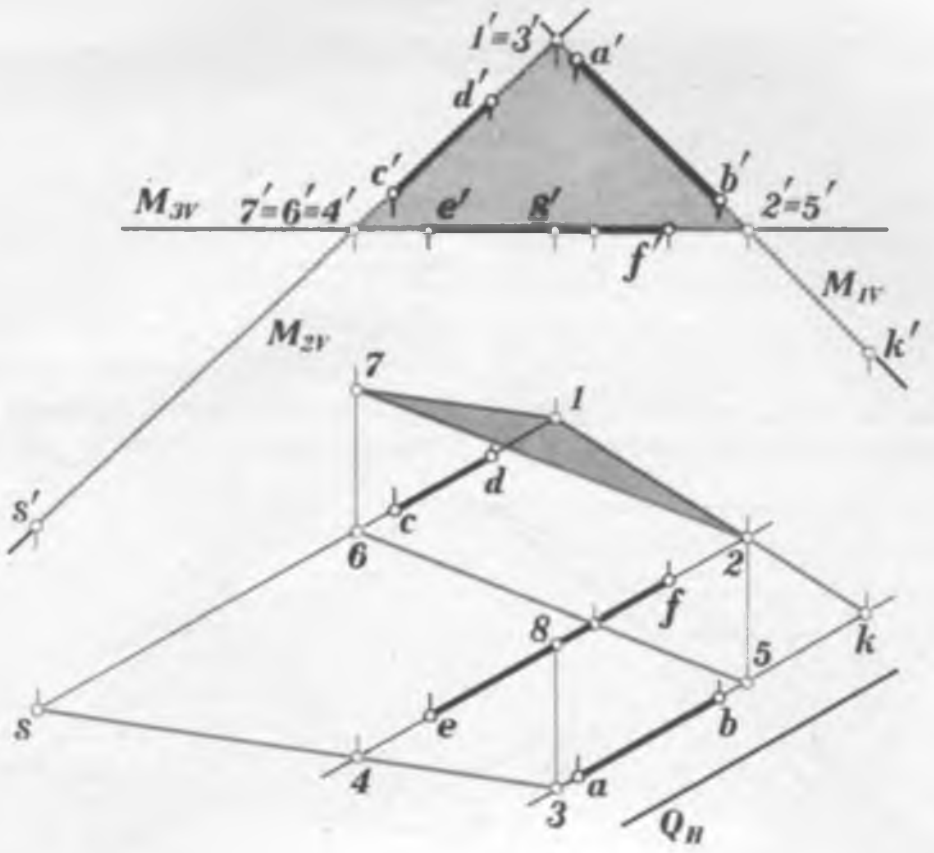


Рис. 284



Р и с. 285

тально-проецирующие. При принятых условиях прямые линии *12*, *1′2′*; *34*, *3′4′* и *56*, *5′6′* представляют положения производящей линии.

Построим отрезок *17*, параллельный и равный отрезку *34*, и проведем прямую *27*.

Из чертежа следует, что $\Delta 167 = \Delta 348$ и $67 = 38 = 52$, поэтому отрезки *27* и *56* равны и параллельны. Прямые *34*, *3′4′* и *56*, *5′6′*, как параллельные соответствующим сторонам треугольника *127*, *1′2′7′*, параллельны его плоскости; прямая *k1*, *k′1′* находится в плоскости этого треугольника.

Таким образом, плоскость *127*, *1′2′7′* является плоскостью, которая остается параллельной движущейся производящей прямой линии. Плоскость *127*, *1′2′7′* является, следовательно, плоскостью параллелизма, а производящая прямая линия образует поверхность — косую плоскость (гиперболический параболоид).

Из изложенного следует, что косую плоскость можно задать или двумя направляющими прямыми и плоскостью параллелизма, или тремя направляющими прямыми линиями, параллельными некоторой плоскости. Примем прямые линии *k1*, *k′1′*; *34*, *3′4′* и *56*, *5′6′*, параллельные плоскости *127*, *1′2′7′*, за направляющие прямые линии. Прямая линия — новая производящая, которая при движении пересекает эти направляющие линии, образует, согласно изложенному, косую плоскость. Прямые линии *ab*, *a′b′*; *cd*, *c′d′* и *ef*, *e′f′* представляют собой теперь три положения новой производящей, а плоскость Q_H является плоскостью параллелизма. Таким образом, косая плоскость имеет две плоскости параллелизма, две системы направляющих и две производящие прямые линии. Каждое из положений одной производящей прямой линии пересекается всеми положениями другой производящей.

194 На рис. 286 косая плоскость задана двумя направляющими прямыми линиями ab, $a'b'$ и cd, $c'd'$, а также плоскостью параллелизма — горизонтальной плоскостью H.

Концы отрезков направляющих линий находятся в параллельных горизонтальных плоскостях. Точки aa' и cc' располагаются на одном проецирующем луче. Они имеют общую проекцию на плоскости параллелизма.

Разделим отрезки ab, $a'b'$ и cd, $c'd'$ направляющих линий на одинаковое число частей и обозначим точки деления. Соединяя прямыми линиями соответствующие точки, получим ряд положений производящей линии поверхности.

Огибающая горизонтальные проекции положений производящей линии представляется параболой, которая является горизонтальной проекцией линии сужения поверхности. Производящая линия в любом положении является касательной к параболе. Эту параболу можно считать заданной двумя ее точками d и b и касательными в этих точках — ab и cd.

Известными построениями найдены фокус F параболы и ее вершина k. Рассматриваемая косая плоскость спроецирована на

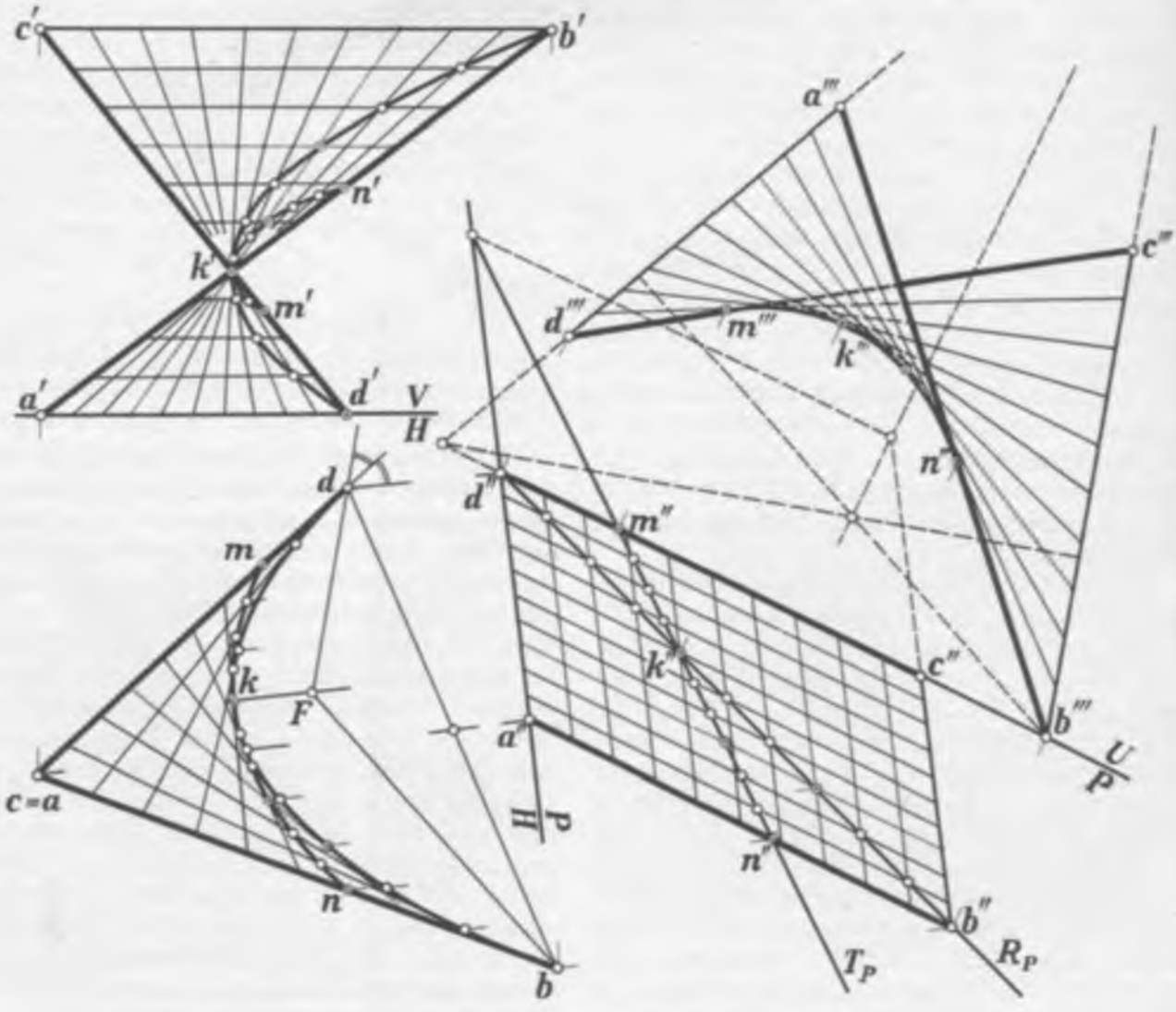


Рис. 286

плоскость P, перпендикулярную к оси параболы. Линия сужения в новой системе плоскостей проекций H и P проходит через точки направляющих линий и лежит в проецирующей плоскости R_P. Новые вертикальные проекции $a''b''$ и $c''d''$ направляющих линий взаимно параллельны.

Из основного свойства этой поверхности следует, что на ней находится система прямых линий, параллельных плоскости U — вторая система образующих, для которых направляющими являются линии ad, $a''d''$ и bc, $b''c''$.

Из этого следует, что плоскость U можно рассматривать как вторую плоскость параллелизма косой плоскости, для которой каждая заданная направляющая линия является положением производящей, а два любых положения производящей линии — направляющие. Задавая чертеж в системе плоскостей проекций P и U, можно определить вторую линию сужения — параболу $m''n''$, $m'''n'''$, относящуюся к положениям второй производящей линии и лежащую в плоскости T_P, перпендикулярной к плоскости проекций P.

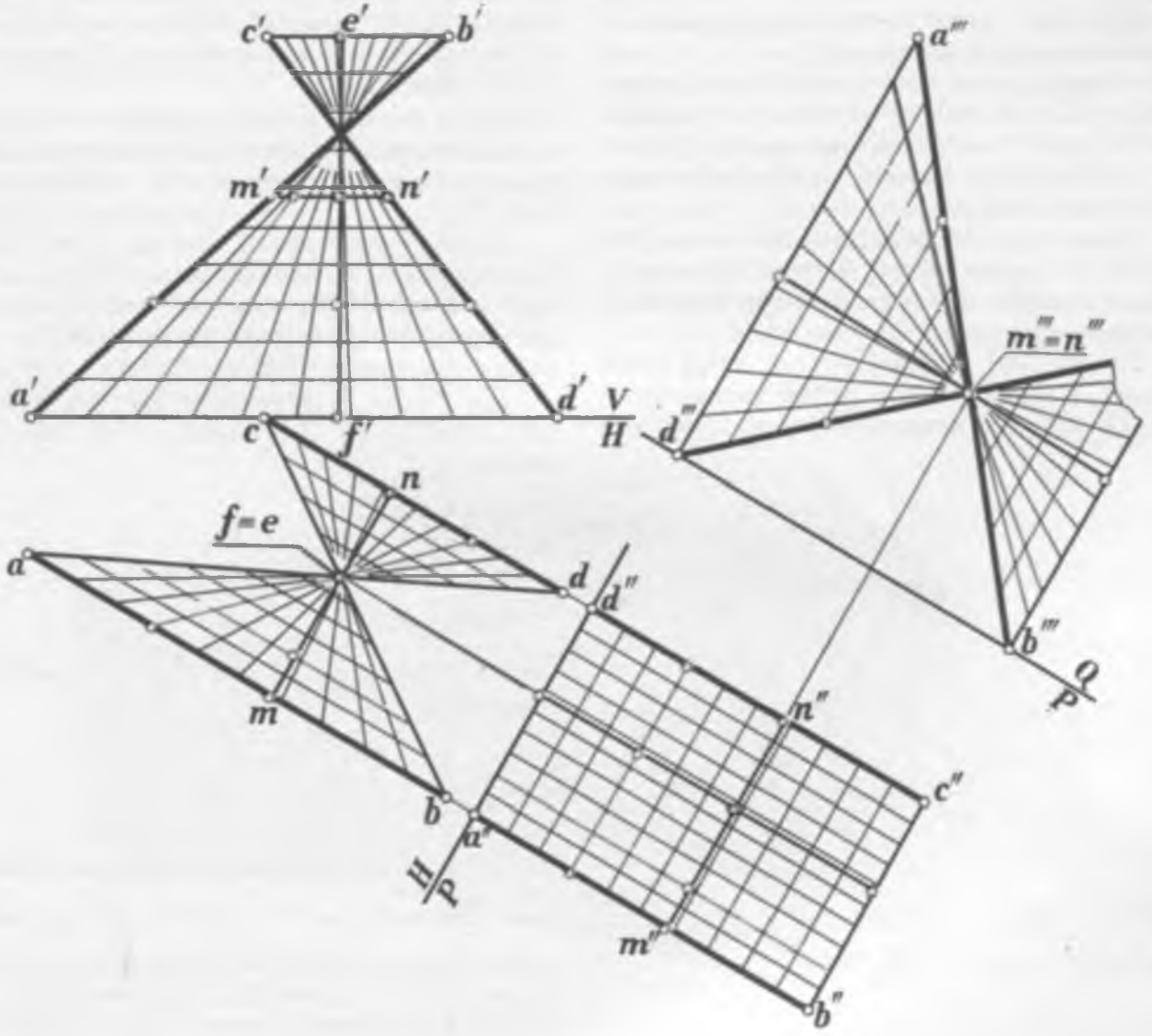


Рис. 287

196 Плоскость T_P второй линии сужения — параболы $m''n''$, $m'''n'''$ определяется построениями, аналогичными построениям плоскости R_P линии сужения db, $d'b'$.

В новой системе плоскостей проекций P и U, где плоскость U является второй плоскостью параллелизма, прямые $a''d''$, $a'''d'''$ и $b''c''$, $b'''c'''$ представятся направляющими линиями косой плоскости.

Проекции $b'''c'''$ и $a'''d'''$ этих направляющих линий являются касательными параболы $m'''n'''$ — проекции искомой линии сужения. Точки их касания определяются построениями.

Парабола $m''n''$, $m'''n'''$ располагается в проецирующей плоскости T_P.

В основной системе плоскостей проекций эта линия сужения представляется параболой mn, $m'n'$. Плоскости R и T линий сужения пересекаются по прямой, являющейся осью для обеих парабол.

Линии сужения пересекаются между собой в их вершинах kk'. Эту общую точку линий сужения косой плоскости называют *центром сужения*.

На рис. 287 показан чертеж *косой плоскости*. Направляющие линии поверхности ab, $a'b'$ и cd, $c'd'$ проецируются на плоскость параллелизма параллельными прямыми линиями ab и cd. В этом случае линии сужения — взаимно перпендикулярные прямые mn, $m'n'$ и ef, $e'f'$, пересекающиеся в центре сужения. Плоскости параллелизма H и Q тоже взаимно перпендикулярны.

Косую плоскость можно рассматривать как поверхность прямого коноида, для которого между величинами z и β существует зависимость $z = k \cdot tg\,\beta$, где β — угол поворота производящей линии, а z — величина ее поступательного перемещения.

Пусть направляющими линиями косой плоскости являются две скрещивающиеся прямые линии AB и CD, одна из которых — AB перпендикулярна к плоскости Q параллелизма (рис. 288).

Здесь показаны оси координат Ox, Oy и Oz. Ось Oz совпадает с направляющей AB. Ось Ox проходит через след направляющей CD.

Можно представить, что производящая прямая линия в начальном положении сливается с осью Ox, а затем, повернувшись на угол β и поднявшись на величину z, занимает положение EF.

Для точки F производящей линии EF, находящейся на расстоянии r от оси Oz, имеем:

$$x = r \cdot \cos\beta;$$

$$y = r \cdot \sin\beta;$$

$$z = k \cdot \operatorname{tg}\beta.$$

Из этих зависимостей имеем уравнение поверхности:

$$x = \frac{k \cdot y}{z}.$$

Полагая x постоянным, получим линейную зависимость $z = \frac{k}{x} \cdot y$, которой соответствует прямая линия CD, параллельная плоскости zOy. Эта линия перпендикулярна к оси Ox и составляет с осью z угол ν. Отсюда следует, что если пересекать рассматриваемую поверхность плоскостями, параллель-

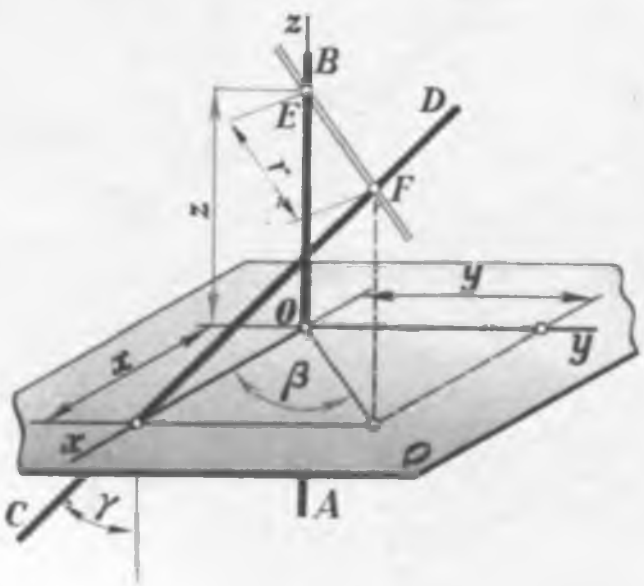


Рис. 288

ными плоскости zOy, то в сечении получим прямые линии.

Это значит, что поверхность имеет две взаимно перпендикулярные плоскости параллелизма xOy и zOy, две производящие линии и две взаимно перпендикулярные линии сужения.

Винтовой параметр поверхности в любой ее точке, учитывая винтовую ось Oz, можно определить из выражения:

$$p = \frac{\Delta z}{\Delta \beta} = \frac{k}{\cos^2 \beta}.$$

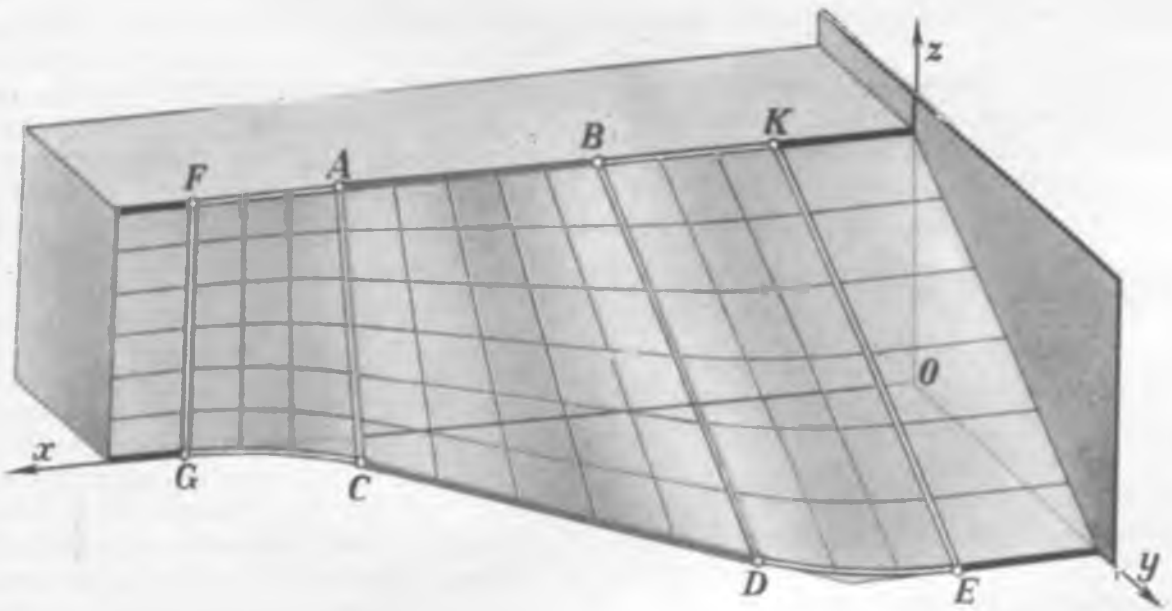
Как видно из уравнения поверхности $x = \frac{k \cdot y}{z}$, координаты x и z ее точек являются взаимозаменяемыми, поэтому, учитывая винтовую ось Ox, винтовой параметр поверхности в любой ее точке можно определить уравнением:

$$p = \frac{\Delta x}{\Delta \gamma} = \frac{k}{\cos^2 \gamma}.$$

Косые плоскости имеют применение, особенно в инженерно-строительном деле. Этими поверхностями образованы покрытия различных зданий (например, скаты крыши, имеющей в плане вид трапеции, когда конек крыши горизонтальный); образованы крылья ветряков, боковые стенки набережной при переходе от наклонной стенки к вертикальной и т. д.

На рис. 289 показан пример плавного перехода от вертикальной стенки набережной к наклонной, при строительстве шлюзовых сооружений и каналов. Здесь переходная поверхность стыкуется по прямой FG с вертикальной стенкой и по прямой KE с наклонной стенкой.

Эта поверхность состоит из двух поверхностей коноидов и одной поверхности косой плоскости. Направляющими линиями косой плоскости являются прямые AB и CD; плоскостями параллелизма — координатная плоскость xOz и плоскость yOz. Направляющими линиями первой поверхности коноида являются прямая AF и кривая GC, у второй поверхности коноида — прямая BK и кривая DE. Плоскостью параллелизма этих коноидов является координатная плоскость yOz.



Р и с. 289

198 2. Линейчатые поверхности с направляющей плоскостью

Линейчатой поверхностью с направляющей плоскостью называют поверхность, образованную движущейся производящей прямой линией, которая остается всегда наклоненной под определенным постоянным углом к неподвижной плоскости. Эта неподвижная плоскость называется *направляющей плоскостью поверхности.*

Поверхности с направляющей плоскостью в общем случае являются неразвертывающимися (косыми) поверхностями.

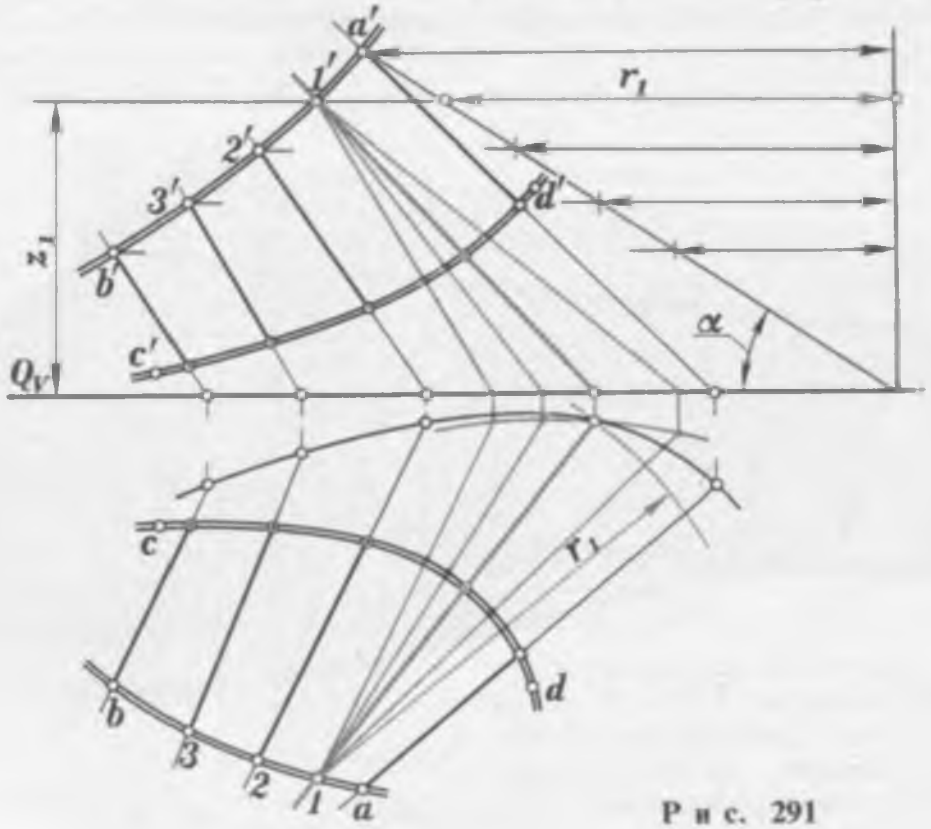


Р и с. 290

КОСЫЕ ЦИЛИНДРОИДЫ

Поверхности, образованные производящей прямой линией, которая скользит по двум направляющим кривым линиям и составляет с направляющей плоскостью постоянный угол α, называют *косыми цилиндроидами.*

Покажем схему построения положений производящей линии этой поверхности. Пусть косой цилиндроид задается двумя кривыми линиями AB и CD и углом α наклона производящей прямой линии к направляющей плоскости Q (рис. 290). Построим



Р и с. 291

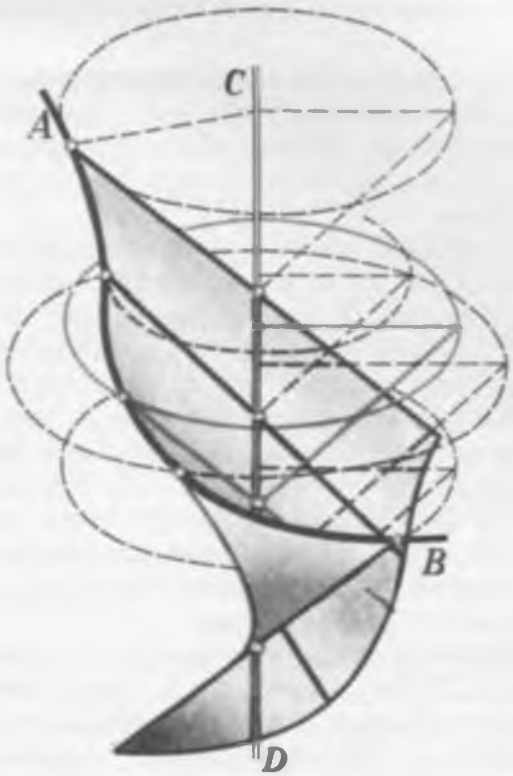
одно из положений производящей линии поверхности, когда она проходит через точку S направляющей линии AB. Примем точку S за вершины двух конусов.

Направляющей линией одного конуса является заданная линия CD поверхности. Другой конус является конусом вращения, ось которого перпендикулярна к плоскости Q, а образующие конуса наклонены к плоскости Q под углом α. Линия пересечения KS этих конусов — одно из положений производящей линии косого цилиндроида.

Выполняя аналогичные построения, можно наметить достаточный ряд положений производящей линии и определить вид и положение поверхности.

На рис. 291 косой цилиндроид задан кривыми линиями ab, $a'b'$ и cd, $c'd'$ и углом α наклона производящей прямой линии к направляющей плоскости $Q_V \parallel H$.

Положения производящей линии построены по рассмотренной выше схеме. Точки $11'$, $22'$, $33'$ кривой линии ab, $a'b'$ приняты каждая за вершины двух вспомогательных конусов. Так, например, точка $11'$ является одновременно вершиной конуса вращения, образующие которого наклонены к направляющей плоскости под углом α, а также является и вершиной конуса с направляющей линией cd, $c'd'$. Эти два вспомогательных конуса пересекаются по прямой линии, которая представляется одним из положений производящей линии заданной поверхности косого цилиндроида. Такими построениями намечены и другие положения производящей линии.



Р и с. 292

КОСЫЕ КОНОИДЫ

Поверхность, образованную производящей прямой линией, которая скользит по двум направляющим линиям (одна из них является прямой) и составляет во всех положениях постоянный угол α с направляющей плоскостью, называют *косым коноидом*.

Схема построения положений производящей линии косого коноида в том же задании аналогична схеме построения положений производящей линии цилиндроида. Если вершины вспомогательных конусов выбирать на направляющей кривой линии коноида, один из вспомогательных конусов преобразуется в плоскость.

Построение положений производящей линии поверхности также упрощается, если направляющая прямая линия косого коноида перпендикулярна к направляющей плоскости (рис. 292).

ДВАЖДЫ КОСАЯ ПЛОСКОСТЬ (КОСОЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЙ ПАРАБОЛОИД)

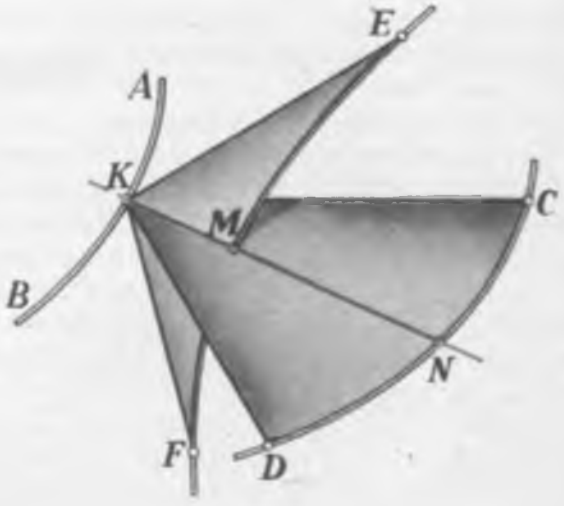
Поверхность, образованную производящей прямой линией, которая скользит по двум направляющим прямым линиям и составляет с направляющей плоскостью постоянный угол α, называют *дважды косой плоскостью* или *косым гиперболическим параболоидом*.

Положения производящей линии дважды косой плоскости строятся по той же схеме, что и для косых цилиндроидов и коноидов.

200 3. Косые цилиндры с тремя направляющими

Линейчатую поверхность можно задать тремя направляющими линиями. Линейчатые поверхности такого рода образования называют *косыми цилиндрами с тремя направляющими.*

Покажем для такой поверхности схему построения какого-либо положения производящей линии. Пусть кривые линии AB, EF и CD (рис. 293) будут направляющими линиями поверхности. На направляющей линии AB выбираем одну из точек K, которую принимаем за вершину конусов с направляющими линиями EF и CD. Прямая линия KM пересечения вспомогательных конусов пересекает все заданные направляющие и, следовательно, является положением производящей прямой линии.



Р и с. 293

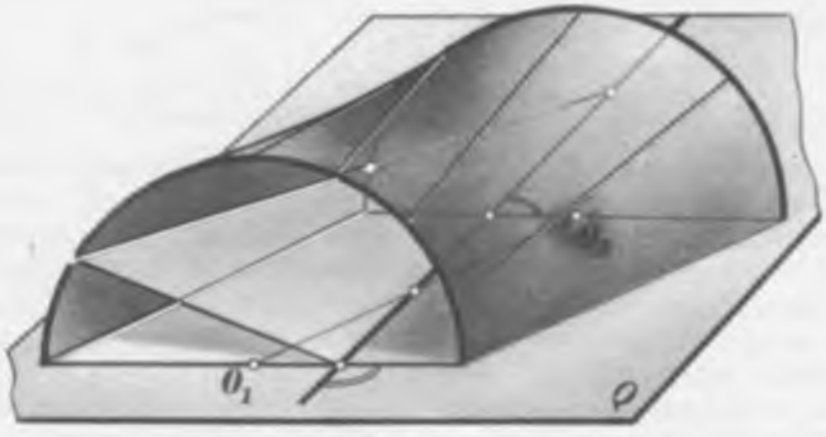
Поверхность косого цилиндра с тремя направляющими можно задать также двумя направляющими линиями и направляющим конусом. Направляющими линиями могут быть и прямые линии.

Если все три направляющие линии прямые, которые все параллельны одной плоскости, то движением производящей линии образуется, как уже известно, поверхность — косая плоскость. Если же направляющие прямые линии взяты произвольно, то движением производящей линии образуется поверхность, которую называют *однополостным гиперболоидом*. Эта поверхность имеет так же, как и косая плоскость, две системы направляющих и две системы образующих.

Рассмотрим некоторые виды косых цилиндров с тремя направляющими. *Косым переходом* называют косой цилиндр с тремя направляющими, которыми являются две окружности одинаковых радиусов, лежащие в параллельных плоскостях, а направляющая прямая линия перпендикулярна к плоскостям направляющих окружностей и проходит через середину отрезка, соединяющего центры направляющих окружностей.

На рис. 294 показана поверхность косого перехода.

На рис. 295 построена параллельная (цилиндрическая) проекция такой поверхности



Р и с. 294

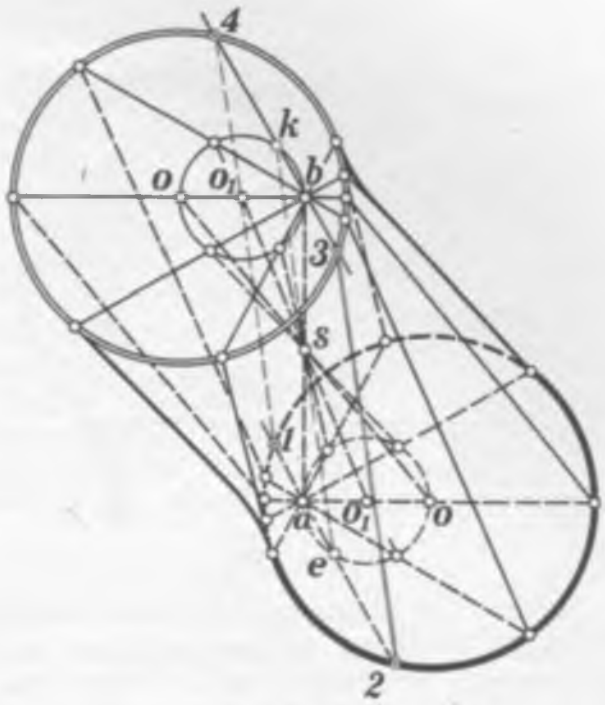
на плоскость, параллельную плоскостям направляющих окружностей. Здесь показаны проекции направляющих окружностей и проекция *ab* направляющей прямой линии, которая проходит через точку *s* — середину отрезка *oo*, соединяющего проекции центров направляющих окружностей.

Для построения положений производящей линии проведем через прямую *ab* какую-либо вспомогательную плоскость. Пусть последняя пересекает плоскость первой окружности по прямой линии *12*, а плоскость второй окружности — по прямой линии *34*. Прямые *12* и *34* параллельны между собой, а отрезки *12* и *34* — хорды окружностей — равны, как наклоненные под равными углами к параллельным диаметрам *ao* и *bo* окружностей. Прямые линии *14* и *23* являются положениями производящей линии. Отрезок *ek*, соединяющий середины хорд *12* и *34*, равен и параллелен отрезкам *14* и *23* и проходит через середину отрезка *ab*.

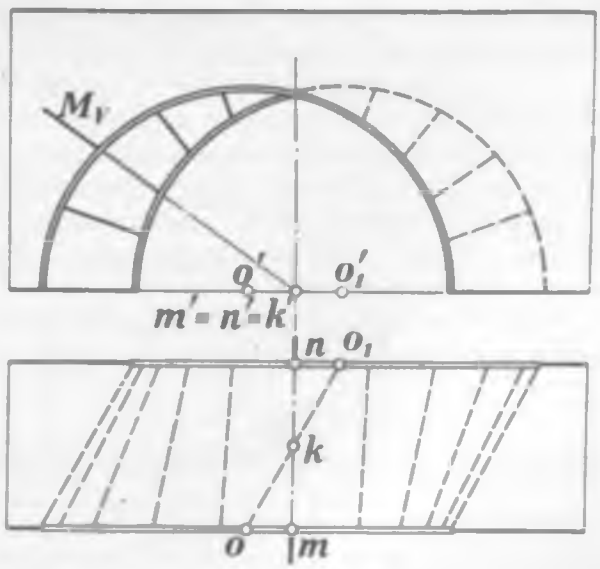
Для построения других положений производящей прямой линии надо вращать вспомогательную плоскость и соединять указанным способом прямыми линиями точки пересечения ею направляющих окружностей. При вращении вспомогательной плоскости точки *e* и *k* описывают окружности равных диаметров. Поэтому вспомогательным конусом рассматриваемой поверхности является круговой конус с вершиной в точке *s* и направляющими окружностями с центрами в точках o_1 и o_1.

На рис. 296 показаны построения положений производящей прямой линии поверхности косого перехода при образовании косого отверстия в плоской стене. Направляющими линиями в этом случае являются полуокружности, лежащие в параллельных плоскостях стены, а направляющей прямой линией служит прямая линия *mn*, *m′n′*, перпендикулярная к плоскостям стены и проходящая через точку *kk′* — середину отрезка oo_1, $o'o_1'$.

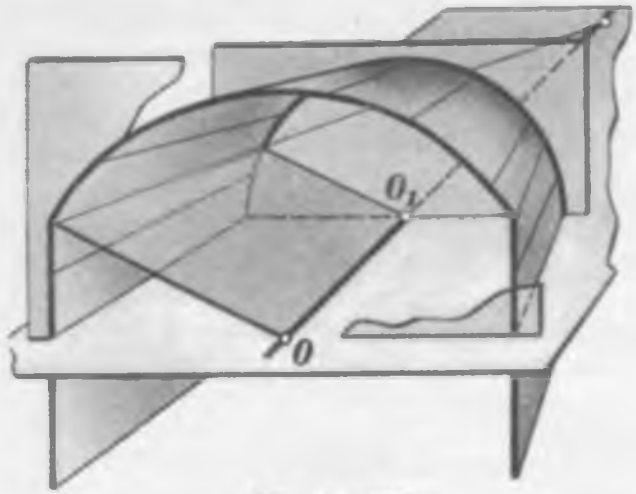
При определении положений производящей линии поверхности сначала строят фронтальные их проекции, они находятся на следах фронтально-проецирующих плоскостей M_V производящей линии. Следы M_V плоскостей проходят через точку $m' \equiv n'$ — преобразованную проекцию направляющей прямой *mn*, *m′n′*. По известным фронтальным проекциям положений производящей определяются их горизонтальные проекции.



Р и с. 295



Р и с. 296

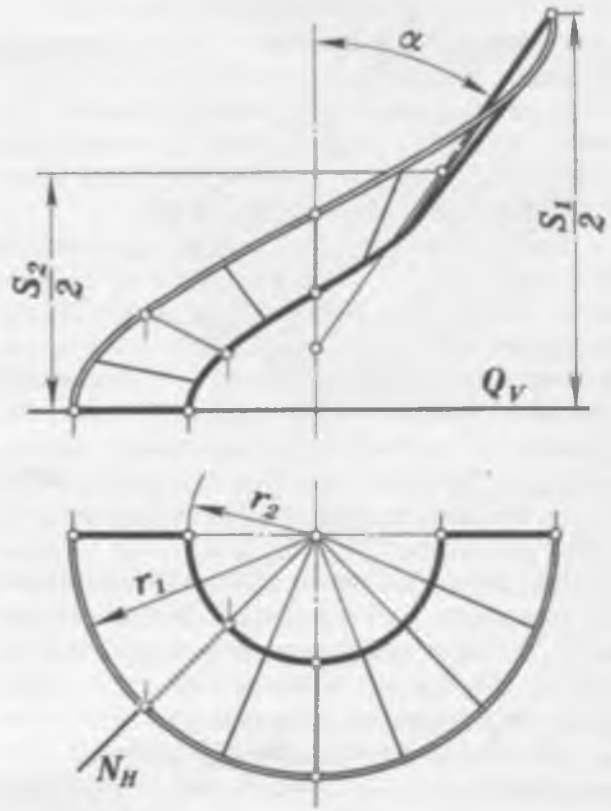


Р и с. 297

На рис. 297 показано применение косого цилиндра с тремя направляющими при оформлении поверхности марсельского свода. Направляющими линиями здесь являются лежащие в параллельных плоскостях полуокружность и дуга окружности с отрезками параллельных прямых. Направляющая прямая OO_1 перпендикулярна к плоскостям окружностей и проходит через центр O_1 окружности. Положение производящей прямой линии определяем, применяя вспомогательные плоскости производящей в ряде ее положений.

Поверхности косых цилиндров с тремя направляющими применяют при конструировании гребных винтов судов и пропеллеров самолетов. В этом случае за направляющие кривые линии принимают соосные цилиндрические винтовые линии различных диаметров и шагов, а за направляющую прямую линию — ось цилиндрических винтовых линий (рис. 298).

Положения производящей прямой линии определяют, применяя вспомогательные горизонтально-проецирующие плоскости производящей линии в ряде ее положений. Как это следует из чертежа, производящая прямая линия непрерывно изменяет угол наклона к оси цилиндрических винтовых линий.



Р и с. 298

В строительной технике широко применяются поверхности двоякой кривизны — тонкостенные покрытия при возведении ангаров для самолетов, крытых стадионов, рынков, вокзалов, зданий цирка, актовых залов общественных зданий и дворцов культуры и т. д. Такие поверхности имеют значительно бо́льшую жесткость, чем другие поверхности.

§50 ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА ОБЩЕГО ВИДА

Поверхностью второго порядка называют такую поверхность, которую можно выразить алгебраическим уравнением второй степени в пространственной прямоугольной декартовой системе координат, имеющем вид:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fzx + Gx + Hy + Jz + K = 0.$$

Это уравнение при некоторых частных значениях коэффициентов A, B, C, ..., можно привести к одному из следующих видов:
для эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1;$$

для однополостного гиперболоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1;$$

для двуполостного гиперболоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1;$$

для эллиптического параболоида

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z;$$

для гиперболического параболоида

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z.$$

Если поверхность второго порядка общего вида имеет центр симметрии, ее называют *центральной поверхностью второго порядка*. К таким поверхностям относятся поверхности эллипсоида, однополостного гиперболоида, двухполостного гиперболоида, конус второго порядка, эллиптический и гиперболический цилиндры. Эти поверхности имеют три плоскости симметрии, т. е. каждая из координатных плоскостей является плоскостью симметрии. Начало координат является центром симметрии поверхности.

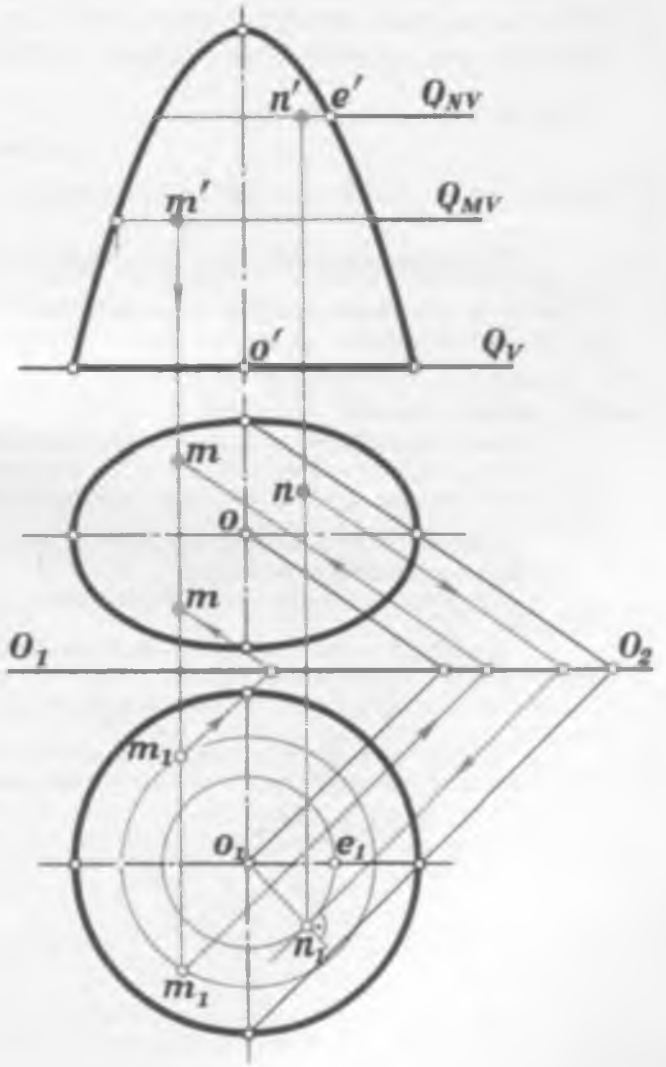
Эллиптический и гиперболический параболоиды, параболический цилиндр являются нецентрально симметричными поверхностями второго порядка и имеют две плоскости симметрии.

Поверхности второго порядка (за исключением параболического и гиперболического цилиндров, а также гиперболического параболоида) имеют сечения в виде окружностей.

Любая поверхность второго порядка общего вида может быть задана тремя ее очерками. Если плоскостями проекций являются плоскости симметрии, то для задания поверхности достаточно иметь два ее очертания.

Покажем определение недостающих проекций точек, расположенных на рассматриваемых поверхностях.

На рис. 299 показан эллиптический параболоид. Требуется построить недостающие горизонтальную проекцию m точки mm' и фронтальную проекцию n' точки nn'.



Р и с. 299

Принимаем горизонтальную проекцию параболоида за одну из проекций обобщенного чертежа и строим вторую недостающую его проекцию, наметив основную линию O_1O_2, параллельную большой оси эллипса основания. Направление линий связи ортогонального чертежа сливается здесь с направлением обобщения.

У горизонтальных проекций всех эллипсов, полученных от пересечения параболоида плоскостями, параллельными плоскости Q_V, недостающими проекциями обобщенного чертежа являются окружности с общим центром o_1, диаметры которых равны большим осям эллипсов.

Сечению параболоида плоскостью Q_{MV}, проходящей через заданную точку mm', соответствует на обобщенном чертеже окружность, на которой определяем две проекции m_1 точки mm'.

Пользуясь известными построениями, определяем две горизонтальные проекции m заданной точки mm'.

По заданной горизонтальной проекции n точки строим на обобщенном чертеже ее недостающую проекцию n_1. Данной проекцией n_1 определяется окружность, соответствующая эллипсу сечения параболоида той плоскостью Q_{NV}, в которой находится точка nn'.

Точке e_1 этой окружности соответствует на фронтальной проекции параболоида точка e', которой определяется положение следа Q_{NV} плоскости. Построив линию связи точки nn', определяем фронтальную проекцию n' заданной точки.

Вопросы для самопроверки

1. Укажите основные способы задания поверхностей?
2. Что называют каркасом поверхности?
3. Что называют определителем поверхности?
4. Назовите основные виды перемещений производящей линии.
5. Как образуются и задаются на чертеже поверхности переноса прямолинейного направления, поверхности вращения, винтовые поверхности?
6. Какие поверхности вращения называют поверхностями второго порядка?
7. Укажите основные свойства поверхностей вращения.
8. Какие винтовые поверхности называют геликоидами? Укажите их виды.
9. Что представляет собой эксцентриситет геликоида?
10. Какую винтовую поверхность называют конволютным геликоидом, торсом-геликоидом, винтовым столбом, нормальным геликоидальным круглым цилиндром, винтовым тором?
11. Какие поверхности называют торсами?
12. Назовите известные Вам поверхности Каталана.
13. Укажите возможные примеры практического применения поверхностей Каталана.
14. Какую поверхность называют коноидом Плюккера?
15. Что представляет собой линия сужения (стрикционная линия) поверхности Каталана?
16. Какие косые поверхности называют линейчатыми поверхностями с направляющей плоскостью? Укажите схему построения положений производящей линии таких поверхностей.
17. Какие поверхности называют косыми цилиндрами с тремя направляющими?
18. Какую поверхность называют косым переходом? Где она применяется?
19. Дайте определение поверхности второго порядка общего вида.

ГЛАВА IX

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПЛОСКОСТЯМИ И ПРЯМЫМИ ЛИНИЯМИ

§51 ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ОСНОВНЫХ ВИДОВ ПРОЕЦИРУЮЩИМИ ПЛОСКОСТЯМИ

Плоскость пересекает поверхность по плоской кривой линии. Линию пересечения поверхности проецирующей плоскостью строят по точкам пересечения с плоскостью ходов ряда точек производящей линии и самой производящей линии в ряде ее положений.

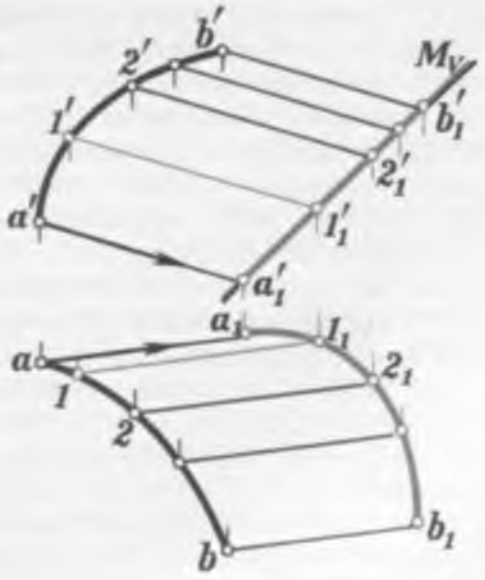
Рассмотрим построение линий пересечения кинематических поверхностей основных видов проецирующими плоскостями.

На рис. 300 поверхность переноса задана начальным положением ab, $a'b'$ производящей линии и направлением прямолинейного переноса — стрелкой. Поверхность пересекает фронтально-проецирующая плоскость M_V.

Для построения линии пересечения, согласно указанной выше схеме решения задачи, возьмем на производящей линии ab, $a'b'$ ряд точек aa', $11'$, $22'$, ..., bb' и построим их ходы — прямые линии, параллельные данному направлению переноса. Ходы этих точек пересекаются с плоскостью M_V в точках a_1a_1', $1_11_1'$, $2_12_1'$, ..., b_1b_1', которые принадлежат искомой линии пересечения a_1b_1, $a_1'b_1'$.

При построении линии пересечения поверхности вращения плоскостью сначала строят главные точки линии пересечения, а потом ряд промежуточных ее точек.

Главными точками кривой линии пересечения поверхности вращения плоскостью



Р и с. 300

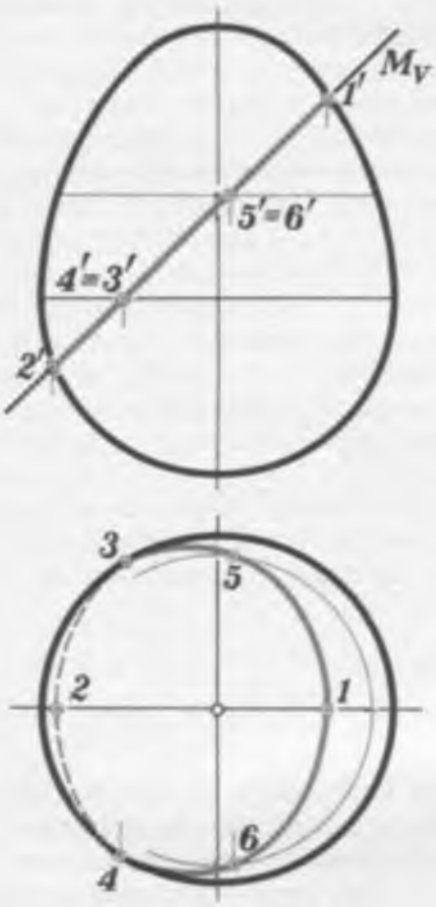


Рис. 301

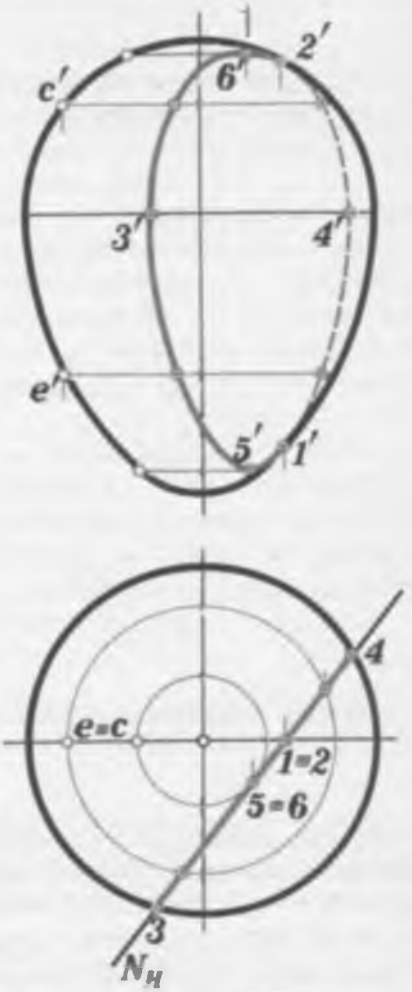


Рис. 302

называют точки пересечения этой плоскостью главного меридионального сечения поверхности, экватора поверхности, а также высшую и низшую точки линии пересечения относительно плоскости проекций H.

Промежуточными точками линии пересечения являются точки пересечения плоскостью параллелей поверхности.

На рис. 301 построена линия пересечения поверхности вращения, заданной очерками, фроитально-проецирующей плоскостью M_V. Главными точками искомой линии пересечения являются точки *11′* и *22′*, в которых главный меридиан поверхности пересекается плоскостью M_V, а также точки *33′* и *44′*, в которых заданная плоскость пересекает экватор поверхности. Точки *11′* и *22′* являются одновременно высшей и низшей точками искомой линии пересечения.

Точки *55′* и *66′* являются промежуточными точками линии пересечения. Соединив горизонтальные проекции найденных точек линии пересечения плавной кривой, получим горизонтальную проекцию искомой линии пересечения. Фронтальная ее проекция совпадает со следом M_V плоскости.

На горизонтальной проекции видимую часть этой кривой линии от невидимой отделяют точки *3* и *4* проекции экватора. Та часть линии пересечения, которая расположена выше экватора, является видимой на горизонтальной плоскости проекций.

Построение линии пересечения поверхности вращения, заданной очерками, горизонтально-проецирующей плоскостью N_H показано на рис. 302.

Точки *11′* и *22′* главного меридиана и точки *33′* и *44′* экватора определяются на

чертеже непосредственно. Для определения высшей и низшей точек проведем параллели поверхности, касающиеся плоскости N_H. Горизонтальные проекции этих двух параллелей представляются одной окружностью, для которой заданный след N_H является касательной.

На рис. 302 построена окружность, касательная к следу N_H. Точка касания $5 \equiv 6$ является горизонтальной проекцией точек $55'$ и $66'$ касания параллелей поверхности вращения плоскости N_H. Эти параллели являются ходами точек производящей линии. Строим фронтальные проекции параллелей и фронтальные проекции $5'$ и $6'$ высшей и низшей точек $55'$ и $66'$ искомой линии пересечения.

Параллели точек cc' и ee' производящей кривой линии (горизонтальные проекции совпадают) пересекаются проецирующей плоскостью N_H в точках, являющихся промежуточными точками линии пересечения. Соединив найденные точки плавной кривой линией, получим фронтальную проекцию искомой линии пересечения.

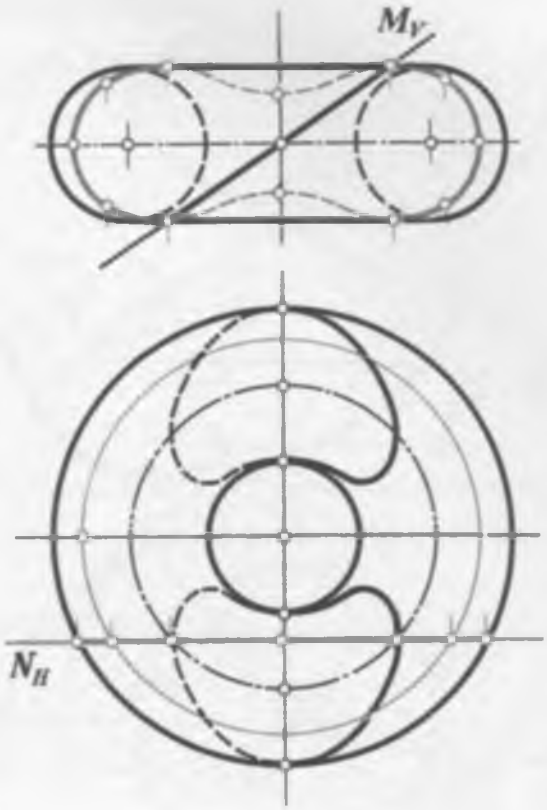
Фронтальную проекцию видимой части линии пересечения от невидимой ее части отделяют точки $1'$ и $2'$, лежащие на проекции главного меридиана. Та часть кривой линии пересечения, которая расположена на половине поверхности вращения, обращенной к плоскости V, очевидно, является и е в и д и м о й на фронтальной плоскости проекций.

На рис. 303 показаны построения линий пересечения поверхности вращения (тора) проецирующими плоскостями. Тор пересекает фронтальная плоскость N_H и фронтально-проецирующая плоскость M_V.

На рис. 304 показано построение линии пересечения винтовой поверхности горизонтально-проецирующей плоскостью N_H.

Винтовая поверхность задана начальным положением ab, $a'b'$ производящей линии и базовой гелисой. Базовая линия показывает, что винтовая поверхность имеет шаг S и левый ход.

На производящей линии взят ряд точек aa', ..., bb' и определены горизонтальные проекции a_1, ..., b_1 и a_2, ..., b_2 точек пересечения их винтовых ходов заданной плоскостью N_H. Этими построениями определены

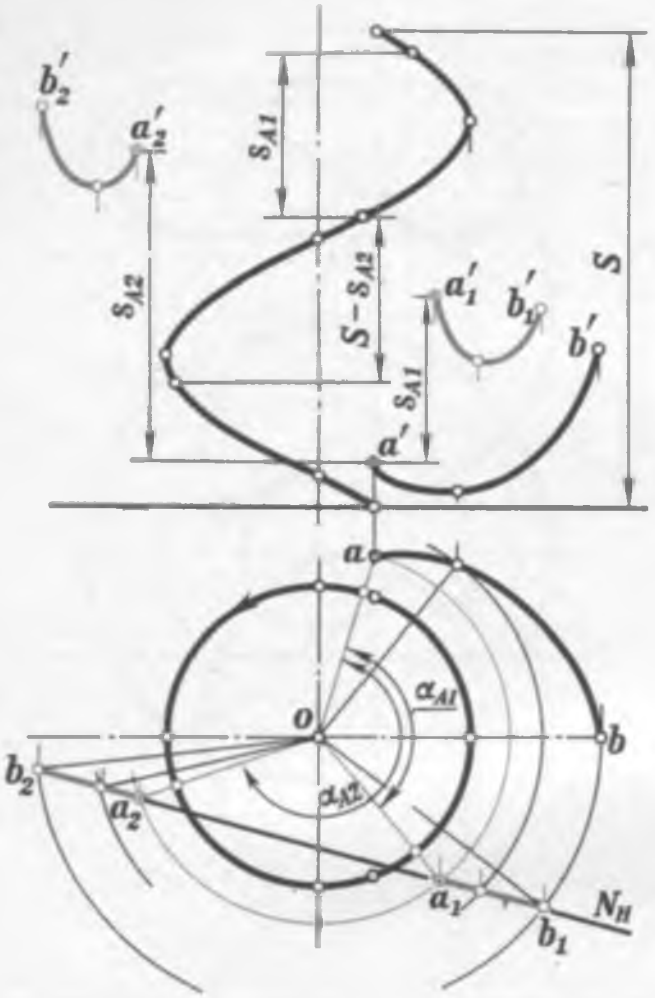


Р и с. 303

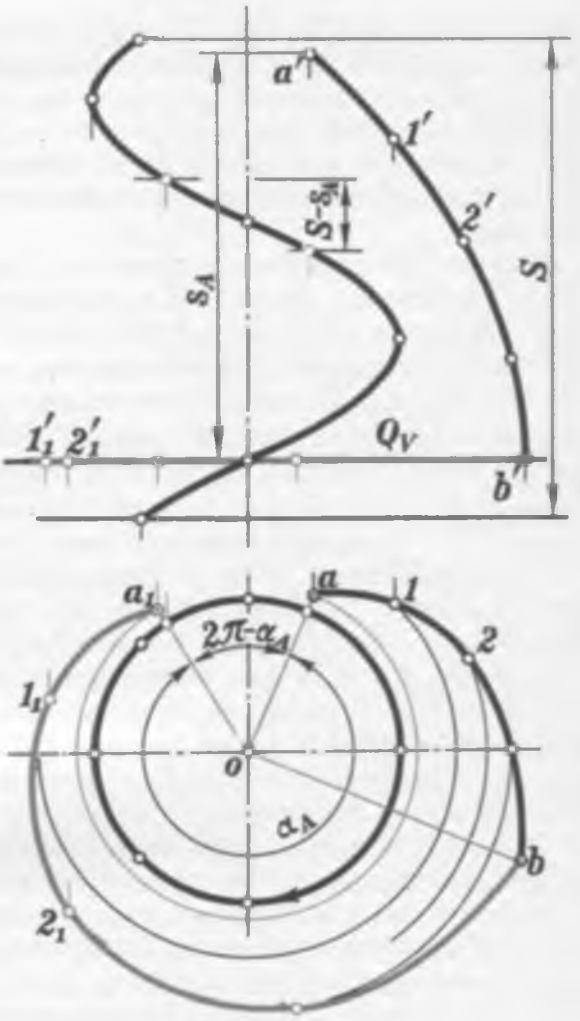
необходимые углы поворота точек при переходе из начальных их положений aa', bb', ... в положения a_1a_1', b_1b_1', ..., a_2a_2', b_2b_2', ... Точки производящей линии при переходе их из начальных положений до совмещения с плоскостью N_H совершают винтовое перемещение вверх.

Осевые перемещения точек производящей линии, соответствующие их угловым перемещениям, определяют по базовой линии. Так, например, угловому перемещению $\alpha_{A1} = \angle a_1oa$ соответствует осевое перемещение s_{A1}, а осевому перемещению s_{A2} соответствует угловое смещение α_{A2}.

Проведем через горизонтальные проекции a_1, b_1 ... и a_2, b_2 ... точек линии связи. Пользуясь найденными значениями величин s_{A1}, s_{A2}, ..., получим ряд точек, определяющих фронтальные проекции $a_1'b_1'$ и $a_2'b_2'$ искомых линий пересечения a_1b_1, $a_1'b_1'$ и a_2b_2, $a_2'b_2'$.



Р и с. 304



Р и с. 305

На рис. 305 показано построение линии пересечения винтовой поверхности горизонтальной плоскостью Q_V. Винтовая поверхность задана начальным положением производящей линии ab, $a'b'$ и базовой линией — гелисой. Поверхность имеет шаг S и правый ход.

На производящей линии наметим ряд точек aa', $11'$, $22'$, ..., bb'. Горизонтальными проекциями их винтовых ходов являются окружности, проходящие через горизонтальные проекции a, 1, 2, ... точек. По чертежу определяем величины s_A, s_1, s_2, ... осевых перемещений точек производящей линии, когда они из начальных положений, перемещаясь по винтовым ходам, попадают на заданную плоскость Q_V. Пользуясь базовой линией, определяем угловые перемещения точек, соответствующие найденным осевым перемещениям. Так, например, осевому перемещению s_A соответствует угловое перемещение $\alpha_A = \angle aoa_1$.

Определив таким образом угловые смещения ряда точек производящей линии, поворачиваем горизонтальные проекции точек на соответствующие им углы поворота α_A, α_1, α_2, ... и намечаем горизонтальные проекции a_1, 1_1, ... точек искомой линии пересечения a_1b, $a_1'b'$.

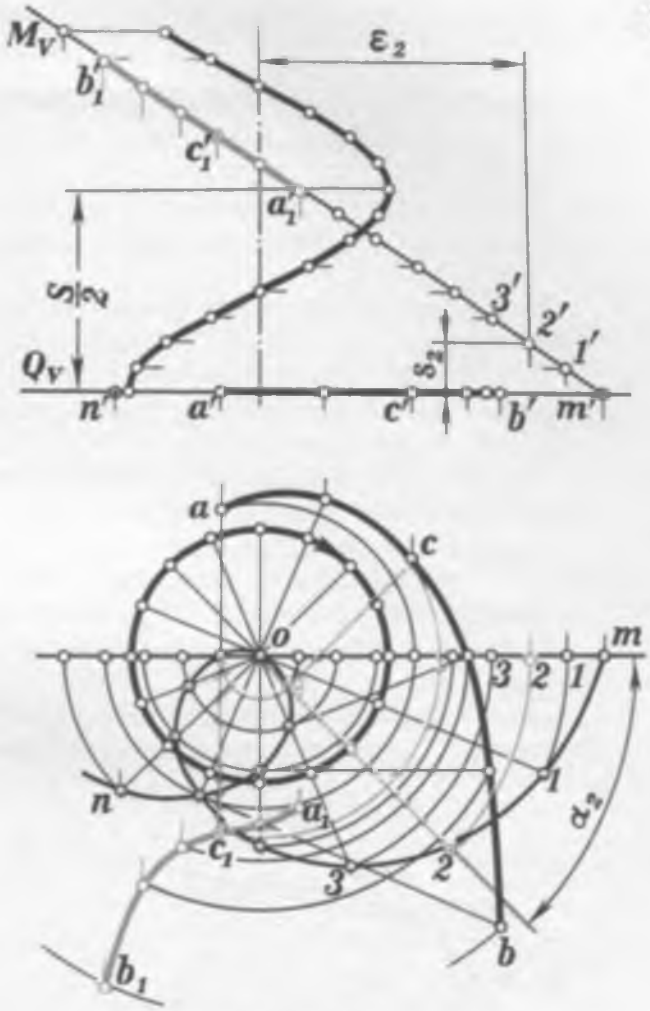
Если винтовую поверхность пересекает фронтально-проецирующая плоскость, для построения линии пересечения можно воспользоваться вспомогательными прямыми геликоидами.

На рис. 306 показано применение вспомогательных прямых геликоидов при построении линии пересечения винтовой поверхности фронтально-проецирующей плоскостью M_V. Винтовая поверхность правого хода задана здесь базовой линией (гелисой) и производящей линией ab, $a'b'$, лежащей в плоскости Q_V.

Рассмотрим семейство вспомогательных геликоидов. Геликоиды этого семейства имеют общую базовую линию с заданной винтовой поверхностью, а за производящие их линии примем горизонтали заданной плоскости M_V. В пересечении плоскостью Q_V эти геликоиды образуют семейство прямых линий. Последние представляют собой положения производящих линий геликоидов, которые винтовыми движениями опустятся на плоскость Q_V производящей линии заданной поверхности.

Величины перпендикуляров, опущенных из точки o на горизонтальные проекции указанных положений производящих, равны величинам эксцентриситетов вспомогательных геликоидов, а геометрическим местом оснований этих перпендикуляров является лежащая в плоскости Q_V кривая линия mn, $m'n'$ — спираль Архимеда. Для построения спирали величины ее радиусов-векторов, равные эксцентриситетам ε_0, ε_1, ..., можно взять из фронтальной проекции чертежа. Величины углов α_1, α_2, ... поворота радиусов-векторов спирали можно определить, пользуясь базовой линией, как углы поворота производящих линий вспомогательных геликоидов при их опускании винтовым движением на плоскость Q_V. Осевыми перемещениями этих производящих линий являются s_1, s_2, s_3, ...

Для ряда точек спирали Архимеда построим соответствующие положения производящих линий вспомогательных геликоидов (прямые линии, перпендикулярные к радиусам-векторам спирали) и отметим точки aa', cc', ... их пересечения с горизонтальной проекцией ab производящей линии данной винтовой поверхности. Винтовые ходы, проходящие через эти точки, являются линиями пересечения заданной



Р и с. 306

винтовой поверхности вспомогательными геликоидами. Точки пересечения этих винтовых ходов плоскостью M_V, лежащие на производящих линиях вспомогательных геликоидов (горизонталях плоскости M_V), принадлежат искомой линии пересечения.

Находящиеся в плоскости Q_V производящие линии вспомогательных геликоидов с отмеченными на них точками aa', cc', ... приводим в начальные их положения горизонталей плоскости. Эти точки занимают положения a_1a_1', c_1c_1', ..., горизонтальными проекциями которых являются точки a_1, c_1, ... Геометрическим местом этих точек является искомая кривая линия $a_1c_1b_1$, $a_1'c_1'b_1'$ пересечения заданной винтовой поверхности фронтально-проецирующей плоскостью M_V.

§52 ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ОСНОВНЫХ ВИДОВ ПРЯМЫМИ ЛИНИЯМИ

Точки пересечения прямой линии с поверхностью обычно определяют по следующей схеме:

1) через прямую линию проводят вспомогательную секущую плоскость (часто проецирующую);

2) строят линию пересечения этой вспомогательной плоскости с поверхностью;

3) находят точки пересечения прямой линии с линией пересечения поверхности вспомогательной плоскостью.

На рис. 307 показано построение точки пересечения xx' прямой линии ef, $e'f'$ с поверхностью переноса прямолинейного направления, заданной начальным положением ab, $a'b'$ производящей линии и направлением переноса — стрелкой точки bb'.

Через заданную прямую линию ef, $e'f'$ проводим фронтально-проецирующую плоскость M_V и строим линию a_1b_1, $a_1'b_1'$ пересечения поверхности переноса этой плоскостью. Прямая линия ef, $e'f'$ пересекается с линией a_1b_1, $a_1'b_1'$ в точке xx', которая и является искомой точкой.

Построение точек пересечения прямой линии ef, $e'f'$ с поверхностью вращения, заданной очерками, показано на рис. 308. Здесь через данную прямую линию проведена фронтально-проецирующая плоскость M_V и построена линия пересечения ею поверхности вращения. Прямая линия пересекается с построенной кривой линией в точках xx' и yy', которые и являются искомыми точками входа прямой ef, $e'f'$ в поверхность и выхода ее из поверхности.

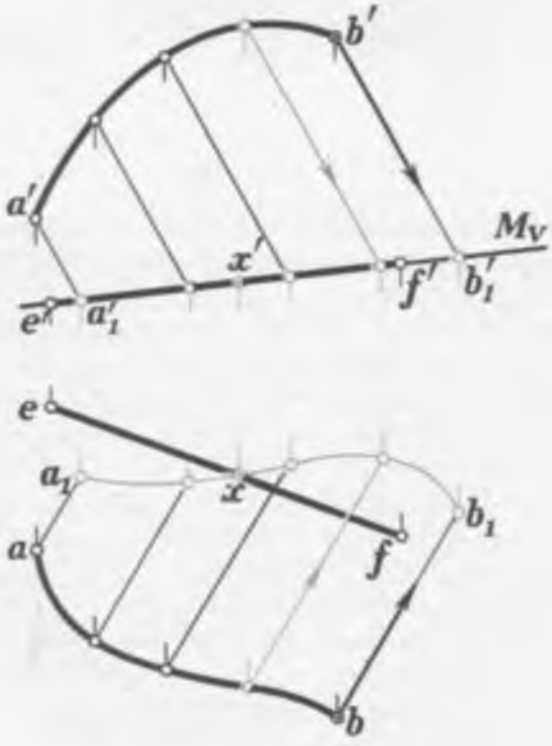


Рис. 307

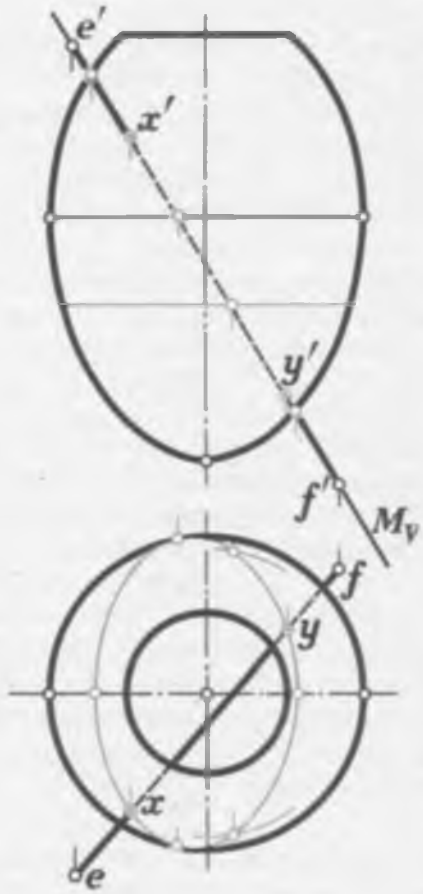


Рис. 308

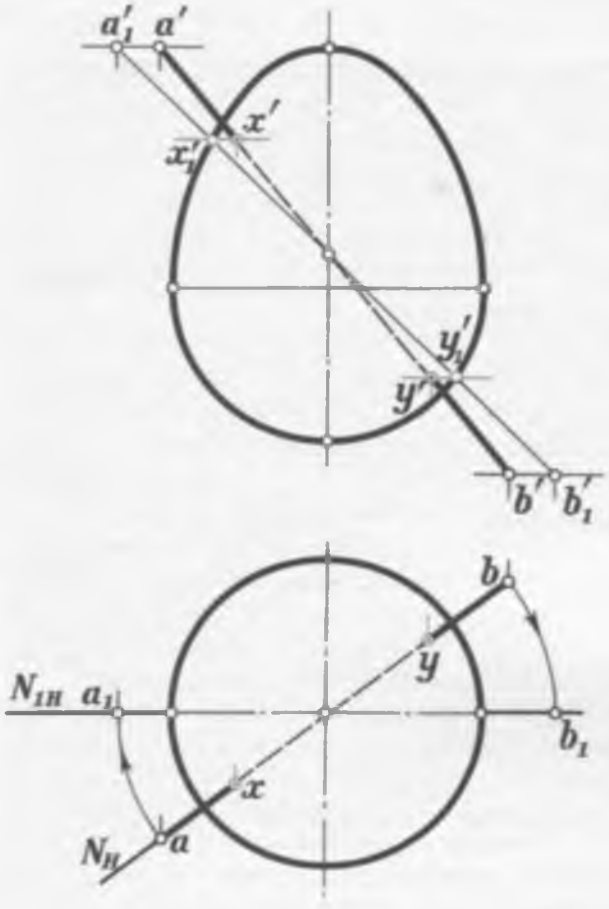


Рис. 309

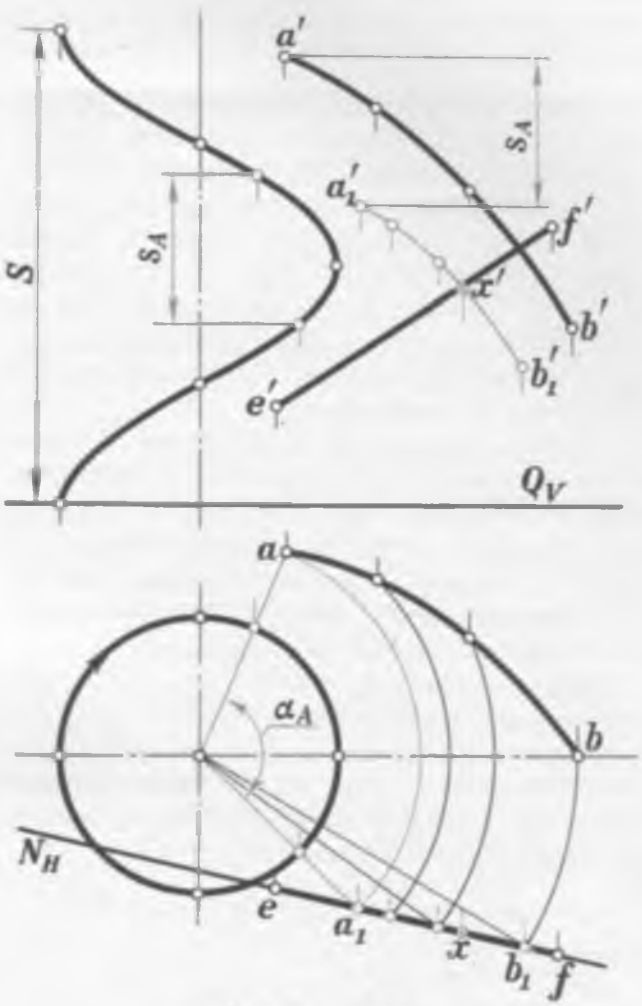


Рис. 310

На рис. 309 показан другой пример построения точек пересечения прямой линии ab, $a'b'$ с поверхностью вращения. Прямая линия здесь пересекается с осью поверхности вращения. Проводим горизонтально-проецирующую плоскость N_H данной прямой линии. Эта плоскость является меридиональной плоскостью поверхности вращения. Она пересекает поверхность вращения по меридиану.

Для определения точек пересечения прямой линии ab, $a'b'$ с этим меридианом плоскость N_H поворачиваем вокруг оси поверхности до совмещения ее с главной меридиональной плоскостью N_{1H}. Указанное меридиональное сечение совпадает с главным меридиональным сечением, а прямая линия ab, $a'b'$ занимает положение a_1b_1, $a_1'b_1'$ и в точках x_1x_1' и y_1y_1' пересекается с главным меридиональным сечением.

Методом восстановления плоскости путем обратного вращения определяем искомые основные проекции точек xx' и yy' входа прямой в поверхность и выхода ее из поверхности.

На рис. 310 показаны построения точки пересечения прямой ef, $e'f'$ с винтовой поверхностью правого хода, заданной производящей линией ab, $a'b'$ и базовой гелисой. Через заданную прямую линию проведена горизонтально-проецирующая плоскость N_H и построена линия пересечения a_1b_1, $a_1'b_1'$ этой плоскости с винтовой поверхностью. С построенной линией пересечения прямая линия ef, $e'f'$ пересекается в искомой точке xx'.

§53 ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ОСНОВНЫХ ВИДОВ ПЛОСКОСТЯМИ ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ

Линию пересечения поверхности произвольно расположенной плоскостью строят как и для проецирующей плоскости, по точкам пересечения с этой плоскостью ходов ряда точек производящей линии и самой производящей линии в ряде ее положений.

В тех случаях, когда на поверхности не показаны положения производящей и ходов точек, применяют вспомогательные плоскости и поверхности.

Построение линии пересечения поверхности переноса прямолинейного направления произвольно расположенной плоскостью показано на рис. 311. Здесь поверхность переноса задана начальным положением *ab*, *a′b′* производящей линии и направлением переноса — стрелкой точки *bb′*.

Искомая кривая линия a_1b_1, $a_1'b_1'$ построена по точкам пересечения с плоскостью *cde*, *c′d′e′* ходов ряда точек *aa′*, *11′*, ... производящей линии. Ходы представлены прямыми линиями, параллельными данному направлению переноса.

Для определения точки a_1a_1' пересечения хода точки *aa′* с данной плоскостью проведена фронтально-проецирующая плоскость M_{AV} и построена линия *34*, *3′4′* пересечения ее с заданной плоскостью. Точка a_1a_1' пересечения этой прямой линии ходом точки принадлежит искомой кривой линии пересечения.

Другие точки линии пересечения определены путем таких же построений. Заметим, что прямые линии пересечения данной плоскости фронтально-проецирующими плоскостями ходов точек *11′*, *22′*, ... производящей линии параллельны прямой линии *34*, *3′4′*.

Плоскость произвольного положения в ряде случаев удобно использовать как вспомогательную секущую для построения точек пересечения прямой с поверхностью переноса прямолинейного направления.

Пусть поверхность задана плоской направляющей линией *ab*, *a′b′* и направлением переноса — стрелкой точки *bb′*. Прямая *ef*, *e′f′* пересекает поверхность (рис. 312).

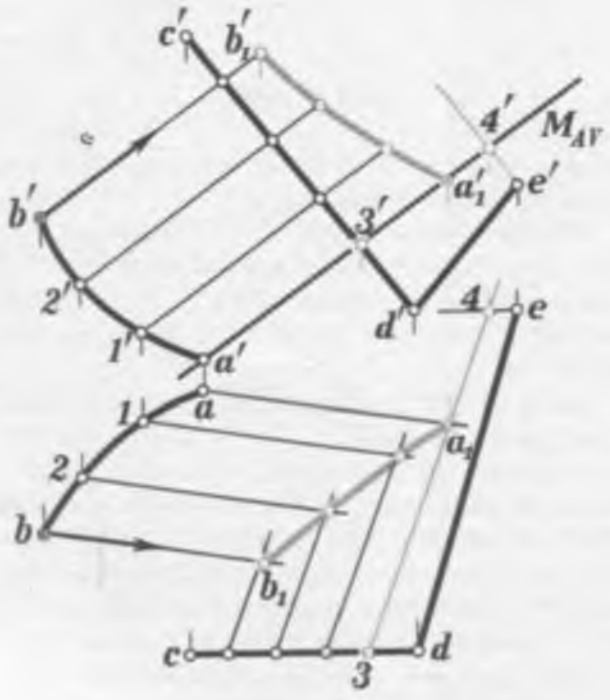


Рис. 311

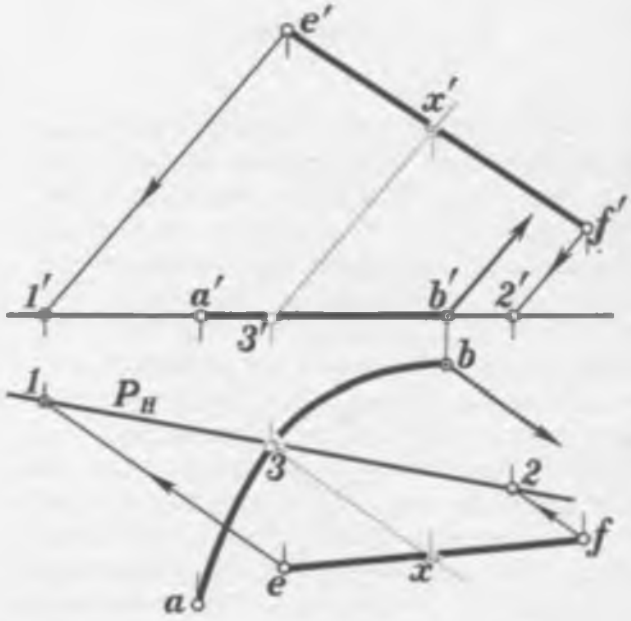


Рис. 312

Через прямую ef, $e'f'$ проводим плоскость, параллельную направлению переноса, и строим горизонтальный след P_H этой плоскости. Для этого из концов прямой, точек ee' и ff', проводим прямые $e1$, $e'1'$ и $f2$, $f'2'$, параллельные направлению переноса — стрелке, и определяем следы $11'$ и $22'$ этих прямых на плоскости направляющей линии заданной поверхности.

Прямая 12, $1'2'$ является горизонтальным следом P_H секущей плоскости. След плоскости пересекает в точке $33'$ направляющую ab, $a'b'$. Ход точки $33'$ пересекает заданную прямую ef, $e'f'$ в искомой точке xx'.

При построении линии пересечения поверхности вращения произвольно расположенной плоскостью, как и в случае проецирующей плоскости, сначала определяют главные точки кривой линии пересечения.

На рис. 313 построена линия пересечения поверхности вращения, заданной очерками, плоскостью mnf, $m'n'f'$. Плоскость Q_V экватора поверхности вращения пересекает заданную плоскость по горизонтали ab, $a'b'$, которая пересекает экватор в главных точках $11'$ и $22'$ линии пересечения. Главная меридиональная плоскость N_{1H} поверхности вращения пересекает заданную плоскость по фронтали cd, $c'd'$. Фронталь пересекается с главным меридианом в точках $33'$ и $44'$. Эти точки также являются главными точками линии пересечения. Заметим, что фронталь cd, $c'd'$ пересекается с осью поверхности вращения в точке kk' и, следовательно, точка kk' является точкой пересечения оси поверхности вращения заданной плоскостью.

Высшая и низшая точки линии пересечения поверхности вращения плоскостью особенно просто определяются для случая фронтально-проецирующей плоскости. Повернем заданную плоскость, вращая ее вокруг оси, в положение фронтально-проецирующей плоскости. Ее фронтальный след пройдет через точку k'. При указанном стрелкой направлении поворота углом поворота является угол δ. Повернув на этот угол в принятом направлении точку mm' плоскости, найдем ее смещенное положение m_1m_1'.

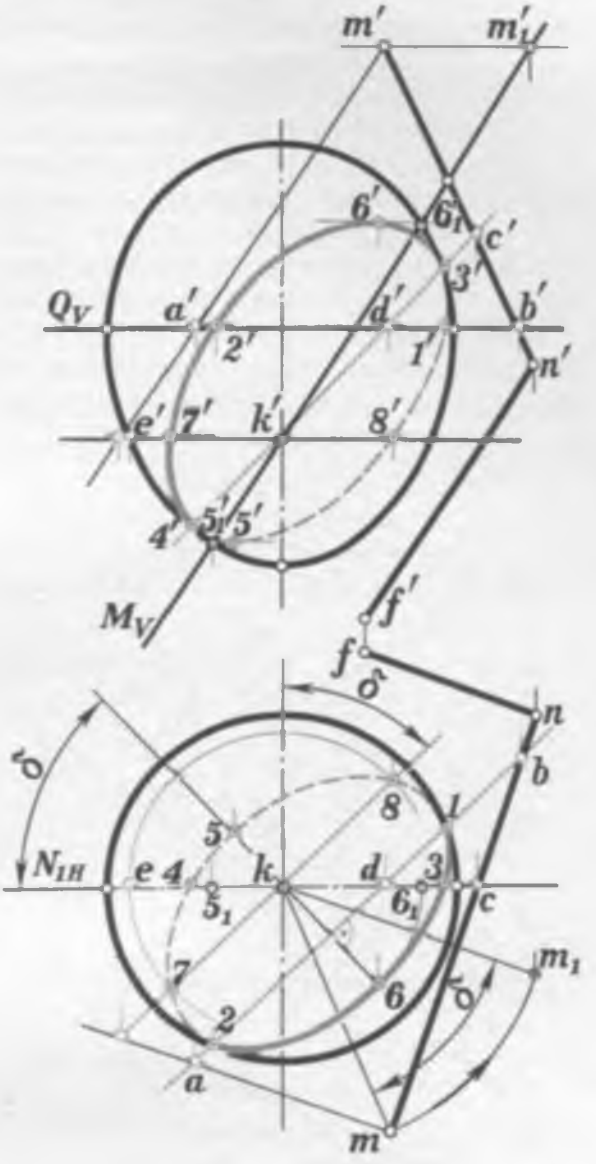


Рис. 313

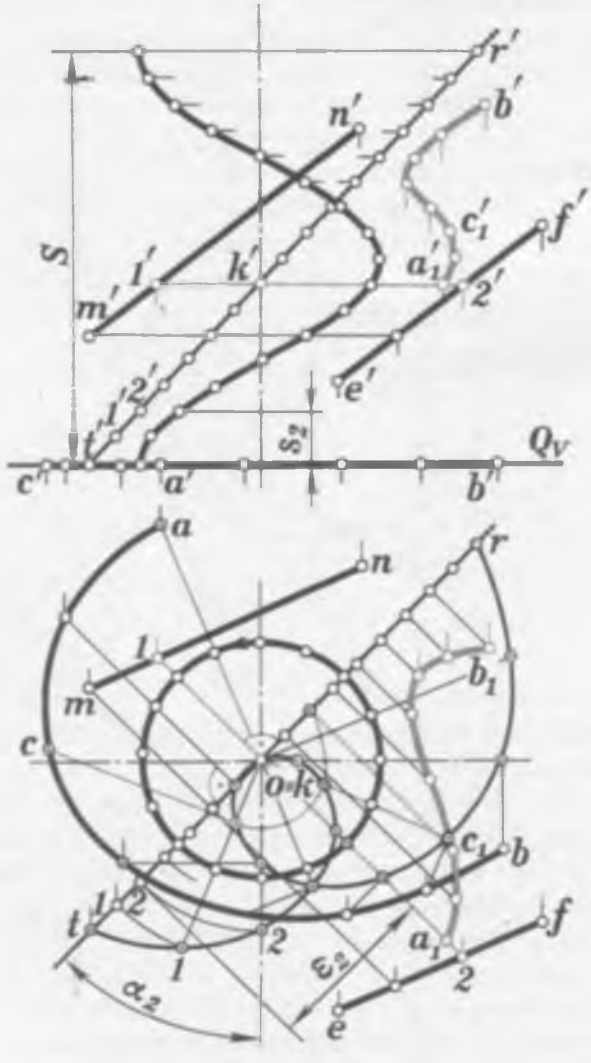
Искомый фронтальный след M_V плоскости определится точками m_1' и k'.

Из рассмотрения чертежа следует, что точки $6_16_1'$ и $5_15_1'$ являются высшей и низшей точками линии пересечения при смещенном положении заданной плоскости.

Для восстановления заданной плоскости необходимо ее повернуть в обратном направлении на угол δ. При обратном повороте точки $6_16_1'$ и $5_15_1'$ перемещаются в горизонтальных плоскостях и занимают искомые положения $66'$ и $55'$ высшей и низшей точек линии пересечения.

214 Промежуточными точками линии пересечения являются точки пересечения любой из параллелей поверхности вращения заданной плоскостью. Возьмем, например, параллель точки *ee'* главного меридионального сечения. Ее плоскость пересечет заданную плоскость по горизонтали. Точки *77'* и *88'* пересечения этой горизонтали с параллелью являются промежуточными точками искомой линии пересечения.

Видимую часть линии пересечения от невидимой в горизонтальной проекции отделяют точки *1* и *2* проекции экватора, а во фронтальной проекции — точки *3'* и *4'* проекции главного меридиана. Точка *66'*, расположенная выше экватора, видна в горизонтальной проекции, а значит видна и дуга *1362* проекции линии пересечения. Точка *66'* видна и во фронтальной проекции, так как она лежит перед главной меридиональной плоскостью. Отсюда следует, что видимой является вся дуга *3'6'2'4'* проекции линии пересечения.



Р и с. 314

Линии пересечения винтовых поверхностей произвольно расположенными плоскостями, как и фронтально-проецирующими плоскостями, наиболее просто строить, пользуясь вспомогательными геликоидами.

На рис. 314 показано применение вспомогательных прямых геликоидов для построения линии пересечения винтовой поверхности произвольно расположенной плоскостью *mnef*, *m'n'e'f'*. Винтовая поверхность левого хода задана базовой линией — гелисой и производящей линией *ab*, *a'b'*, лежащей в плоскости Q_V.

Рассмотрим ряд вспомогательных геликоидов, производящими линиями которых являются горизонтали данной плоскости. Углы поворота α_1, α_2, ... производящих линий вспомогательных геликоидов при опускании их винтовым движением на плоскость Q_V зависят от осевых смещений s_1, s_2, ... соответствующих производящих линий.

Ось винтовой поверхности пересекается заданной плоскостью в точке *kk'*, через которую проходит горизонталь *12*, *1'2'* плоскости. Эксцентриситеты ε_0, ε_1, ... вспомогательных геликоидов проецируются на горизонтальную плоскость проекций в натуральную величину и могут быть определены по горизонтальной проекции линии наибольшего уклона *tr*, *t'r'* заданной плоскости *mnef*, *m'n'e'f'*. Пользуясь величинами эксцентриситетов ε и углов поворота α, строим кривую линию (спираль Архимеда) как геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из точки *o* на расположенные в плоскости Q_V проекции производящих прямых линий вспомогательных геликоидов. Через точки спирали перпендикулярно к ее радиусам-векторам проводим ряд располо-

женных в плоскости Q_V производящих линий вспомогательных геликоидов и отмечаем точки aa', cc', ..., bb' их пересечения с заданной производящей линией ab, $a'b'$ винтовой поверхности.

Расположенные в плоскости Q_V производящие линии вспомогательных геликоидов вместе с отмеченными на них точками aa', cc', ..., bb' приводим в начальные их положения горизонталей плоскости $mnef$, $m'n'e'f'$. Указанные точки занимают тогда положения a_1a_1', c_1c_1', ..., b_1b_1', геометрическим местом которых является искомая кривая линия a_1b_1, $a_1'b_1'$ пересечения винтовой поверхности заданной плоскостью $mnef$, $m'n'e'f'$.

КОНИЧЕСКИЕ СЕЧЕНИЯ

§54

При пересечении конуса вращения плоскостью могут получаться пересекающиеся прямые, окружность, эллипс, гипербола и парабола. Плоскость, проходящая через вершину конуса, пересекает его по прямым линиям. Сечением конуса вращения плоскостью, перпендикулярной к его оси, является окружность.

Если секущая плоскость пересекает все образующие конуса и не перпендикулярна к его оси, то в сечении получается эллипс.

Если секущая плоскость пересекает обе полы конуса вращения и, следовательно, параллельна двум образующим конуса, то в сечении получается гипербола. Если же плоскость пересекает только одну полу конуса и параллельна одной образующей (угол ее наклона к оси конуса равен углу, который составляют образующие конуса с его осью), то в сечении получается парабола.

При построении линии пересечения конуса вращения плоскостью удобно использовать следующую теорему.

Теорема: *Ортогональная проекция плоского сечения конуса вращения на плоскость, перпендикулярную к его оси, представляет собой кривую второго порядка и имеет одним из своих фокусов ортогональную проекцию на эту плоскость вершины конуса.*

На рис. 315 показано построение линии пересечения конуса вращения фронтально-проецирующей плоскостью M_V. Линией пересечения является эллипс. Точки $1'1'$ и $2'2'$ — высшая и низшая точки линии пересечения. Отрезок $1'2'$ равен величине большой оси эллипса ($1'2' = 2a$), а отрезок 12 равен большой оси эллипса горизонтальной проекции линии пересечения ($12 = 2a\cos\alpha$).

Определив большую ось 12 эллипса горизонтальной проекции и его фокус s, найдем малую ось эллипса. Для этого из фокуса s

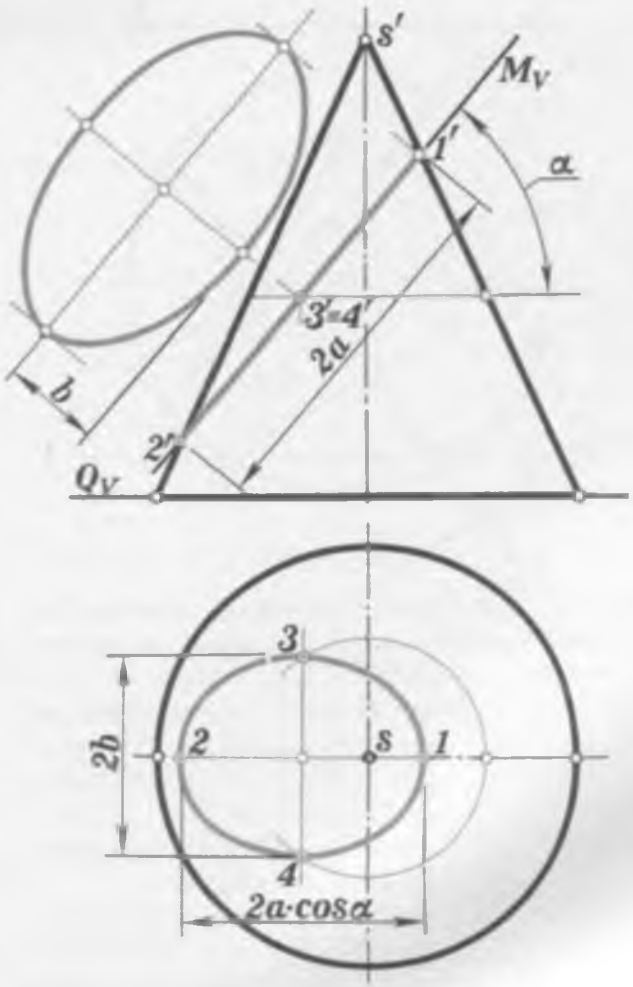


Рис. 315

216

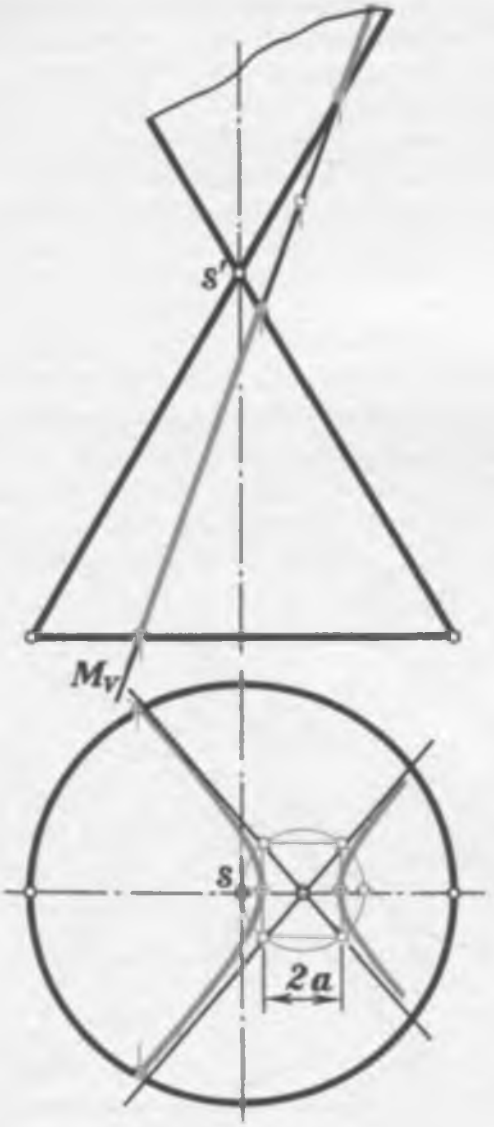


Рис. 316

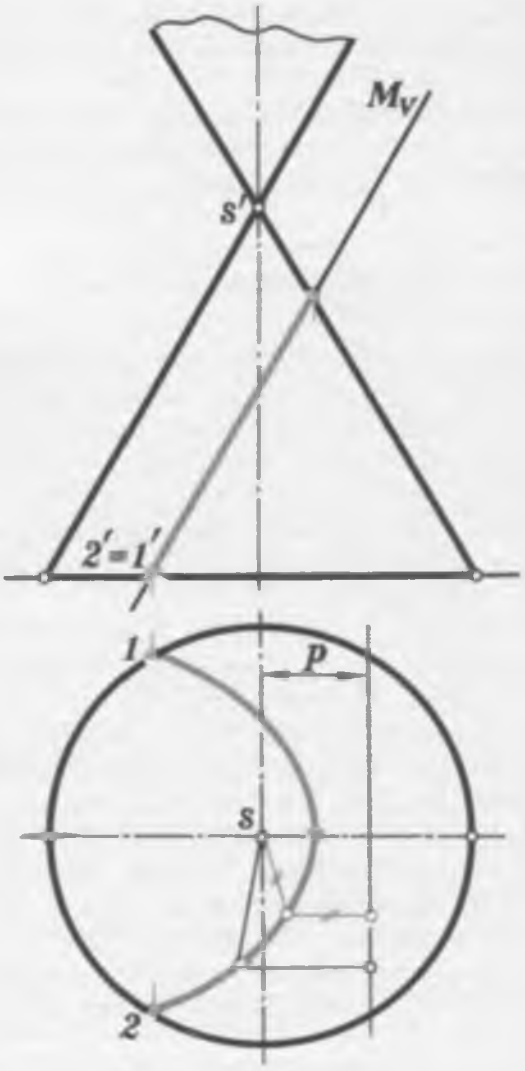


Рис. 317

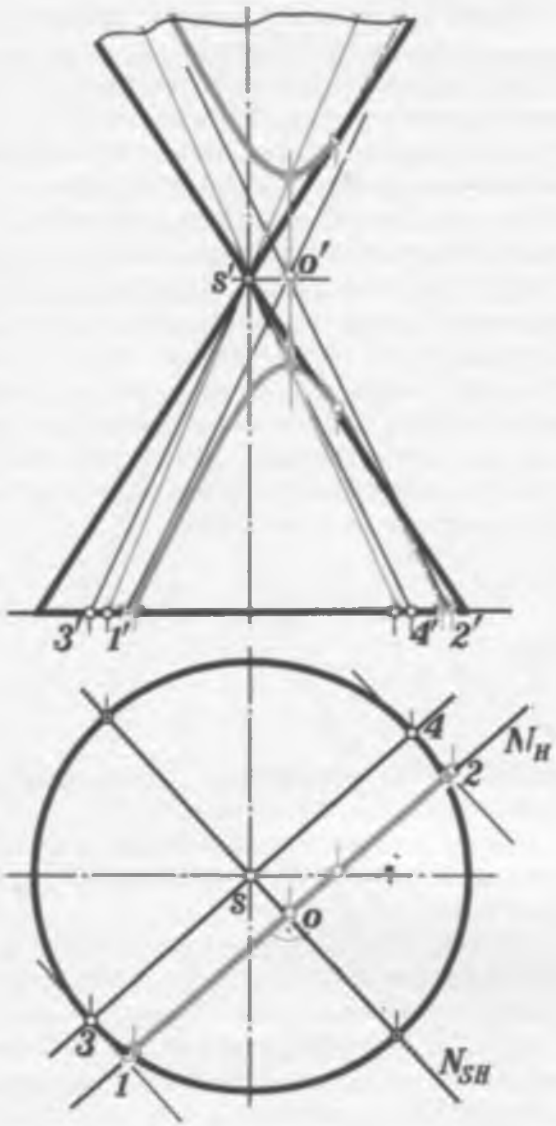
проведем окружность радиусом, равным половине большой оси *12*, и засечем на перпендикуляре, проведенном к большой оси в ее середине, точки *3* и *4*, принадлежащие малой оси. Отрезок *34* равен величине 2*b* малой оси эллипса, полученного от пересечения заданного конуса плоскостью M_V. По известным осям строим эллипс — проекцию рассматриваемого сечения конуса.

На рис. 316 показан случай, когда секущая фронтально-проецирующая плоскость пересекает обе полы конуса вращения. Здесь линией пересечения является гипербола.

Определяем без каких-либо вспомогательных построений вершины гиперболы и ее центр.

Для построения горизонтальной проекции ветвей гиперболы воспользуемся горизонтальной проекцией *s* точки *ss'*, которая является одним из фокусов гиперболы-проекции. Пользуясь этой точкой и действительной осью 2*a*, находим асимптоты гиперболы-проекции, а затем известным способом строим необходимое количество ее точек.

На рис. 317 показано построение линии пересечения конуса вращения фронтально-проецирующей плоскостью M_V. Плоскость составляет с осью конуса угол, равный углу



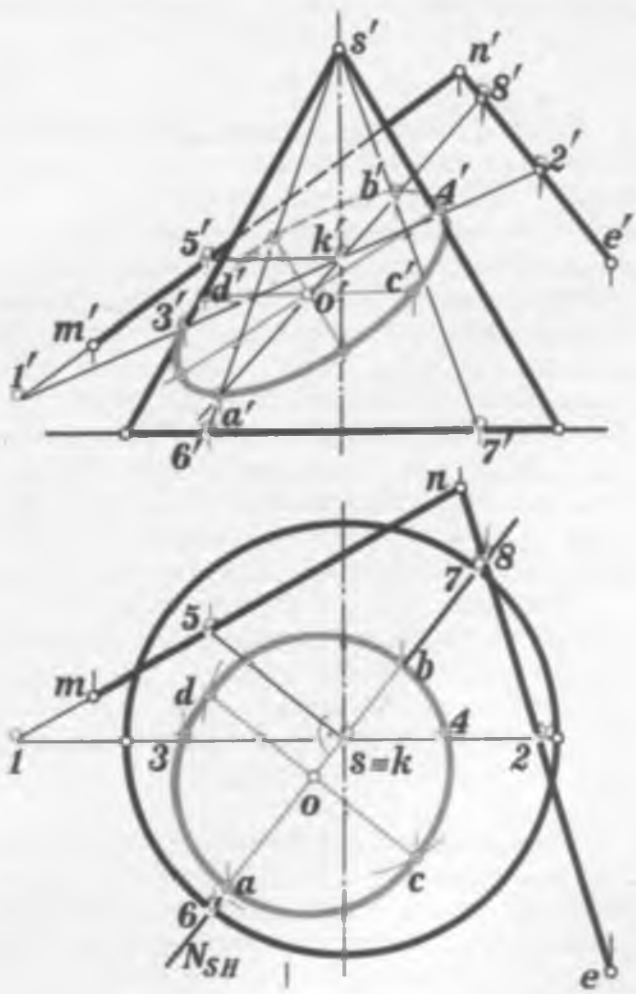
Р и с. 318

наклона к оси конуса его образующих. Здесь линией пересечения является парабола. На чертеже определены вершина, фокус и точки *11'* и *22'* параболы. Имея вершину и фокус, строим директрису параболы, а затем обычным способом находим необходимый ряд точек параболы — горизонтальной проекции линии пересечения.

На рис. 318 показаны построения линии пересечения конуса вращения горизонтально-проецирующей плоскостью N_H. Линией пересечения здесь является гипербола.

Пересечем конус меридиональной плоскостью N_{SH}, перпендикулярной к плоскости N_H. На образующих конуса и прямой пересечения плоскостей N_{SH} и N_H находятся вершины гиперболы. Определяем центр oo' гиперболы. Асимптоты гиперболы параллельны образующим *3s*, *3's'* и *4s*, *4's'* конуса. Они получены как линии пересечения конуса меридиональной плоскостью, параллельной плоскости N_H. Проведем в точках *3* и *4* касательные к окружности основания конуса и отметим точки *11'* и *22'* их пересечения со следом N_H. Прямые линии *o1*, *o'1'* и *o2*, *o'2'* являются асимптотами гиперболы. Имея вершины и асимптоты для фронтальной проекции гиперболы, определяем известным способом ряд точек гиперболы.

Построение линии пересечения конуса вращения произвольно расположенной плоскостью *mne*, *m'n'e'* показано на рис. 319.



Р и с. 319

218 Здесь сначала определены точки линии пересечения, расположенные на главном меридиане. Фронталь *12*, *1′2′*, расположенная в главной меридиональной плоскости, пересекает образующие фронтального очерка в точках *33′* и *44′*, а ось конуса — в точке *kk′*. Затем построена горизонталь *5k*, *5′k′* плоскости и намечен след N_{5H} меридиональной плоскости, перпендикулярной к горизонтали. В плоскости N_{5H} находятся высшая и низшая точки линии пересечения. Эти точки *bb′* и *aa′* определены как точки пересечения прямой *k8*, *k′8′* плоскости N_{5H} и заданной плоскости с образующими *6s*, *6′s′* и *7s*, *7′s′*, расположенными в меридиональной плоскости N_{5H}.

Отрезок *ab* является большой осью эллипса горизонтальной проекции, а точка *s* — одним из фокусов этого эллипса. Засекая из фокуса *s* точки *d* и *c* радиусом, равным половине отрезка *ab*, на перпендикуляре, восставленном к отрезку *ab* в его середине *o*, определим малую ось *dc* эллипса. Взаимно перпендикулярные диаметры *ab*, *a′b′* и *dc*, *d′c′* представляются, как и всякие сопряженные диаметры в их фронтальных проекциях, сопряженными диаметрами фронтальной проекции линии пересечения конуса вращения заданной плоскостью. Известным методом по сопряженным диаметрам определяем большую и малую оси эллипса и строим необходимый ряд его точек.

§55 ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПЛОСКОСТЯМИ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА ОБЩЕГО ВИДА

Рассмотрим построение линий пересечения поверхностей второго порядка общего вида проецирующими плоскостями. На рис. 320 показан конус второго порядка, который пересекает горизонтально-проецирующая плоскость N_H. Построим линию пересечения. Для этого намечаем горизонтальные проекции *1*, *2*, ... ряда точек этой поверхности, находящихся на различных параллелях — эллипсах конуса. Принимаем горизонтальную проекцию основания конуса за одну из проекций обобщенного чертежа. Намечаем основную линию O_1O_2 параллельно большой оси эллипса основания.

Для точек *1*, *2*, ... горизонтальных проекций на обобщенном чертеже недостающими проекциями являются точки 1_1, 2_1, ... Окружностям, проходящим через точки 1_1, 2_1, ..., соответствуют эллипсы тех параллелей, на которых располагаются точки *11′*, *22′*, ...

Пользуясь построенными окружностями, отмечаем точки 1_2, 2_2, ..., которым на фронтальном очерке конуса соответствуют точки $1_2'$, $2_2'$, ... Через эти точки проходят следы плоскостей параллелей-эллипсов, на которых находятся выбранные точки. Проведя линии связи намеченных точек, получаем их фронтальные проекции *1′*, *2′*, ...

Таким образом, определяем достаточный ряд точек искомой линии пересечения — гиперболы.

На рис. 321 показано пересечение эллиптического параболоида фронтально-проецирующей плоскостью M_V. Здесь большая ось эллипса-основания не параллельна направлению оси проекций. Параболоид задан его высотой *h* и полуосями *a* и *b* эллипса-основания. Рассмотрим построение фронтального очерка параболоида. Принимаем горизонтальную проекцию основания параболоида за проекцию обобщенного чертежа, наметив основную линию O_1O параллельно большой оси эллипса и направление обобщения перпендикулярно к ней.

Определим точки *e* и *k*, в которых линии связи основного чертежа касаются эллипса-основания параболоида. Для этого через центр эллипса проводим вертикальную прямую *o1* и находим ее вторую проекцию $o_1 1_1$ на обобщенном чертеже.

Диаметру e_1k_1, перпендикулярному к прямой $1_1 o_1$, соответствует диаметр эллипса *ek*.

Пользуясь точками e' и k' параболоида заданной высоты, строим параболу фронтального очерка поверхности. Намечаем ряд секущих горизонтальных плоскостей Q_V, которые пересекут поверхность по эллипсам. Горизонтальные проекции диаметров этих эллипсов, параллельных диаметру ek, $e'k'$ эллипса-основания, находятся на прямой ek, а их величины определяются линиями связи по точкам параболы фронтального очерка. Построением подобных треугольников ee_0o, 22_0o, ... определяем горизонтальные проекции больших осей этих эллипсов. На обобщенном чертеже указанным эллипсам соответствуют окружности с центром в точке o_1.

Проводим далее ряд горизонталей плоскости M_V, расположенных в плоскостях Q_V, и находим их недостающие проекции на обобщенном чертеже. Эти проекции парал-

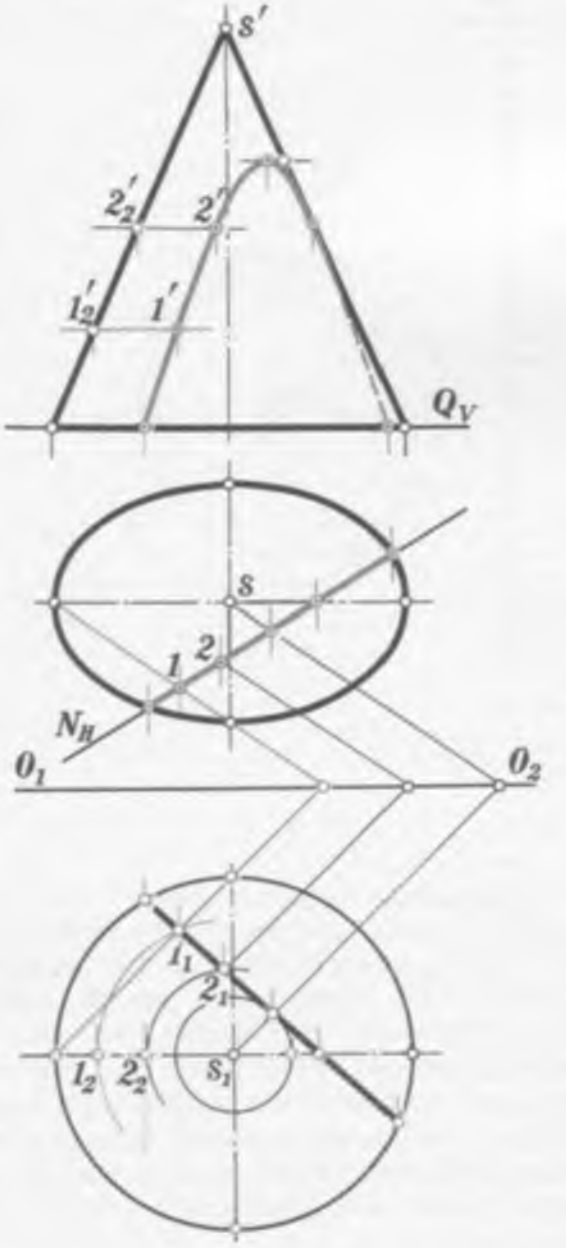


Рис. 320

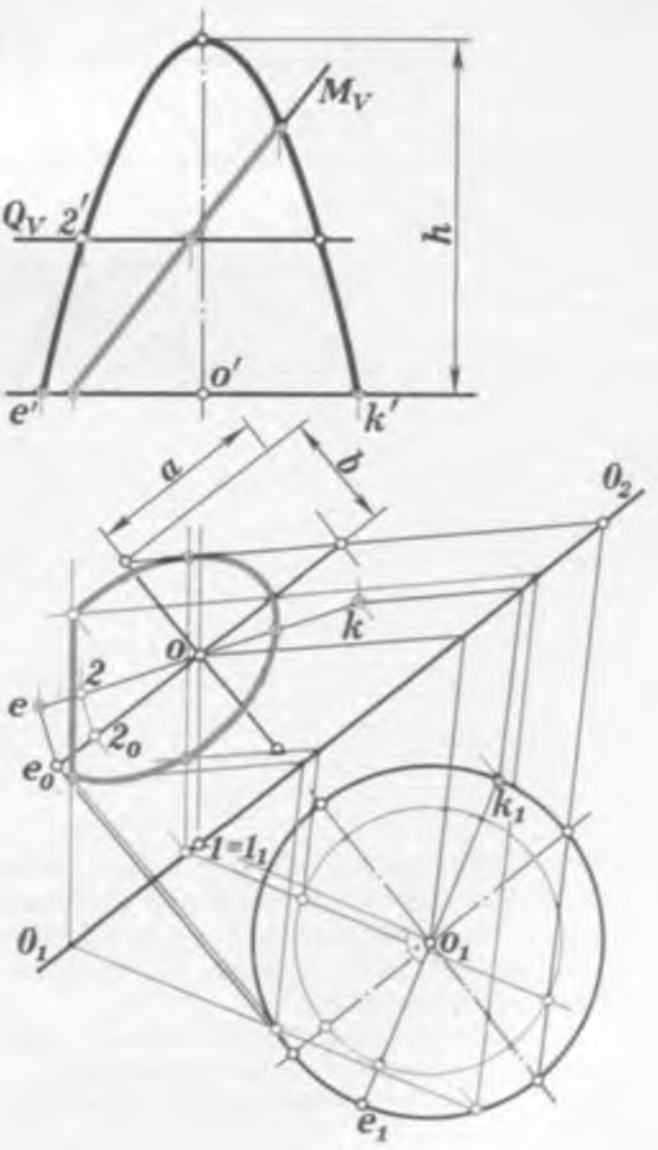
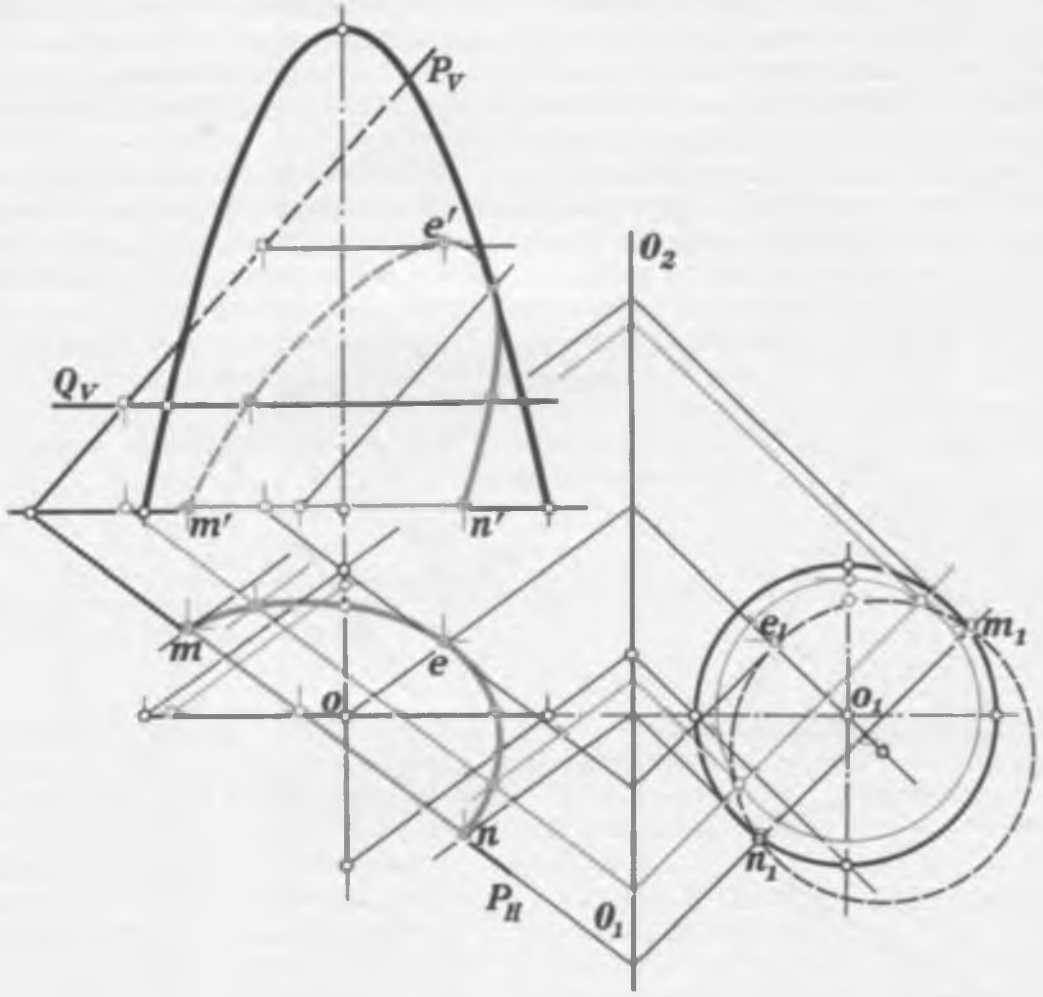


Рис. 321



Р и с. 322

лельны построенной прямой $o_1 l_1$. Точки пересечения указанных проекций горизонталей с соответствующими окружностями являются проекциями точек пересечения горизонталей эллипсами.

На обобщенном чертеже находим горизонтальные проекции точек пересечения и строим искомую горизонтальную проекцию линии пересечения.

На рис. 322 построена линия пересечения эллиптического параболоида произвольно расположенной плоскостью, заданной следами.

Принимаем горизонтальную проекцию основания параболоида за одну из проекций обобщенного чертежа, наметив основную линию O_1O_2 параллельно малой оси эллипса-основания. Проводим ряд секущих горизонтальных плоскостей Q_V, которые пересекают параболоид по эллипсам, а плоскость — по горизонталям. Недостающими проекциями эллипсов обобщенного чертежа являются окружности с общим центром o_1.

Строим окружности, соответствующие намеченным эллипсам-параллелям и не-

достающие на обобщенном чертеже проекции горизонталей. Точки mm_1, ee_1, nn_1, ... являются на обобщенном чертеже точками пересечения эллипсов соответствующими горизонталями. На основном чертеже найдем точки mm', nn', ee', ..., определяющие искомую линию пересечения параболоида заданной плоскостью.

Вопросы для самопроверки

1. Укажите общую схему определения точек линии пересечения поверхности плоскостью.
2. Какие точки линии пересечения поверхности плоскостью называют главными (опорными)?
3. Укажите последовательность графических построений при определении точек пересечения прямой с поверхностью.
4. Укажите условия, при которых в сечении конуса вращения плоскостью получается окружность, эллипс, гипербола, парабола, пересекающиеся прямые.
5. Укажите последовательность графических построений при определении линий пересечения плоскостями поверхностей второго порядка общего вида.

ГЛАВА X

ВЗАИМНОЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ

§56 ОБЩАЯ СХЕМА ПОСТРОЕНИЯ ЛИНИИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Две поверхности пересекаются по кривой линии, которую можно определить по точкам пересечения линий одной поверхности с другой или по точкам пересечения линий каждой из поверхностей — линий первой поверхности со второй и линий второй поверхности с первой. Такими линиями могут быть производящая в ряде ее положений, ходы точек производящей линии и вообще любые линии на поверхности.

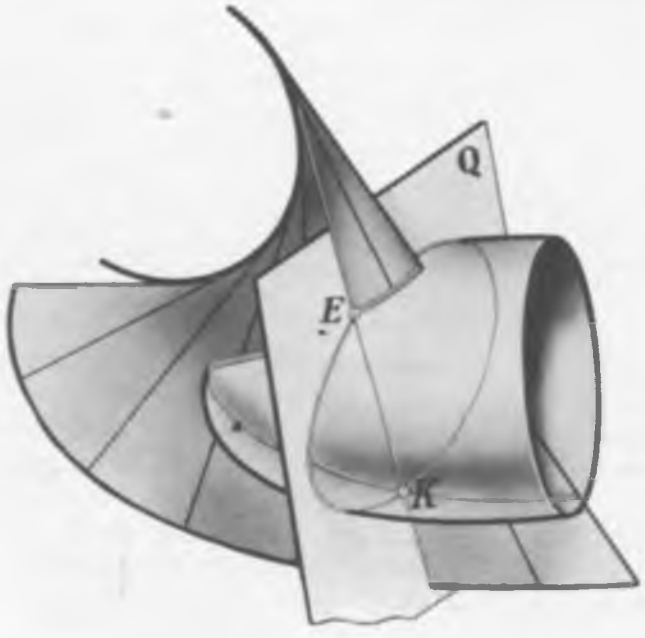


Рис. 323

Следовательно, для построения линии пересечения поверхностей необходимо найти общие точки для данных поверхностей.

Линию пересечения поверхностей можно построить, применяя вспомогательные секущие поверхности (посредники), пересекающие данные поверхности по каким-либо линиям. Точки пересечения этих линий принадлежат одновременно двум данным поверхностям, т. е. линии их пересечения. Взяв достаточное количество вспомогательных поверхностей, можно найти достаточное количество точек искомой линии.

На рис. 323 показана схема определения линии пересечения поверхности торса с поверхностью вращения. В качестве вспомогательной поверхности (посредника) выбрана плоскость Q, пересекающая торс по его образующей — прямой линии, а поверхность вращения — по кривой линии. Точки K и E искомой линии пересечения поверхностей определены как точки пересечения этих линий. Аналогичными построениями определяется ряд точек линии пересечения поверхностей.

Таким образом, задача на построение линии пересечения поверхностей сводится здесь к ряду задач на определение точек пересечения линий с поверхностью.

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ КРИВЫМИ ЛИНИЯМИ

§57

Точки пересечения поверхностей кривыми линиями можно определять, применяя вспомогательные поверхности, проходящие через данные кривые линии.

Рассмотрим построение точек пересечения кинематических поверхностей основных видов кривыми линиями. Здесь при выборе вспомогательной поверхности используется то обстоятельство, что кинематические поверхности основных видов одного и того же закона образования пересекаются между собой по общим ходам точек.

На рис. 324 представлена схема, а на рис. 325 ортогональный чертеж построения точки пересечения цилиндра кривой линией. Цилиндр задан плоской направляющей линией AB и направлением образующих — стрелкой точки B.

Построим точку пересечения этой поверхности кривой линией CD. Кривую линию CD принимаем за направляющую линию вспомогательного цилиндра, образующие которого параллельны образующим заданного цилиндра, т. е. параллельны стрелке точки B. Строим линию C_1D_1 пересечения этого цилиндра плоскостью Q. Кривые линии C_1D_1 и AB, принадлежащие плоскости Q, пересекаются в точке K_1.

Образующая, проходящая через эту точку, принадлежит заданному и вспомогательному цилиндрам, а точка K ее пересечения с кривой линией CD является искомой.

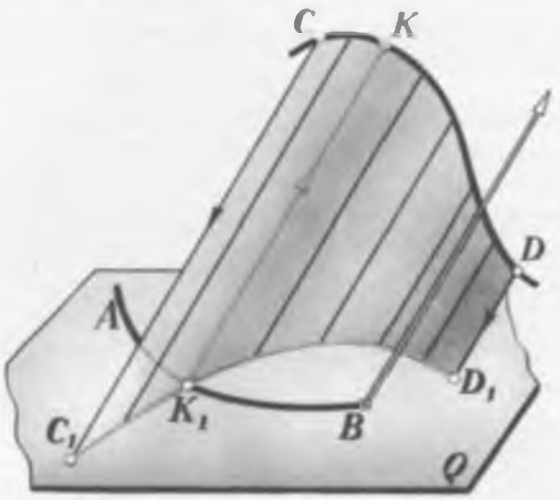


Рис. 324

Определим точку пересечения кривой линии ab, $a'b'$ с поверхностью вращения, заданной очерками (рис. 326).

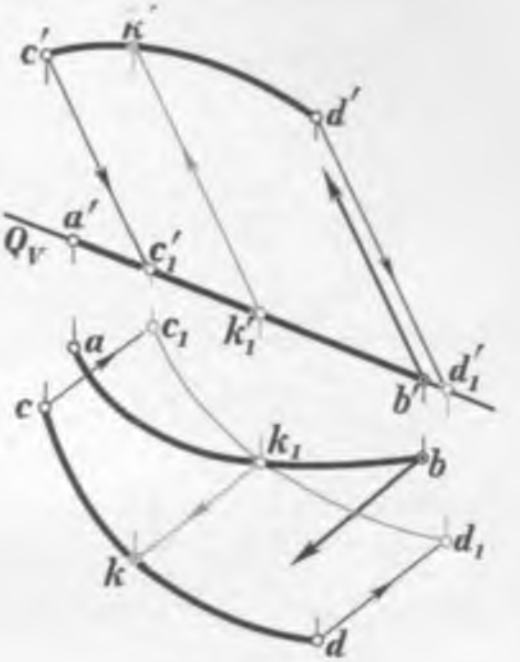


Рис. 325

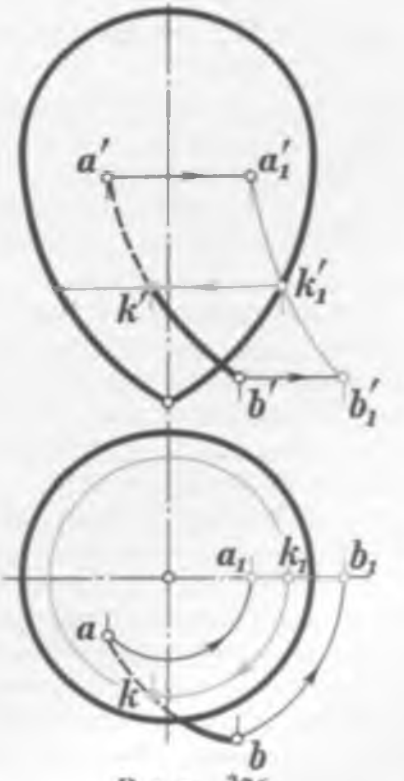


Рис. 326

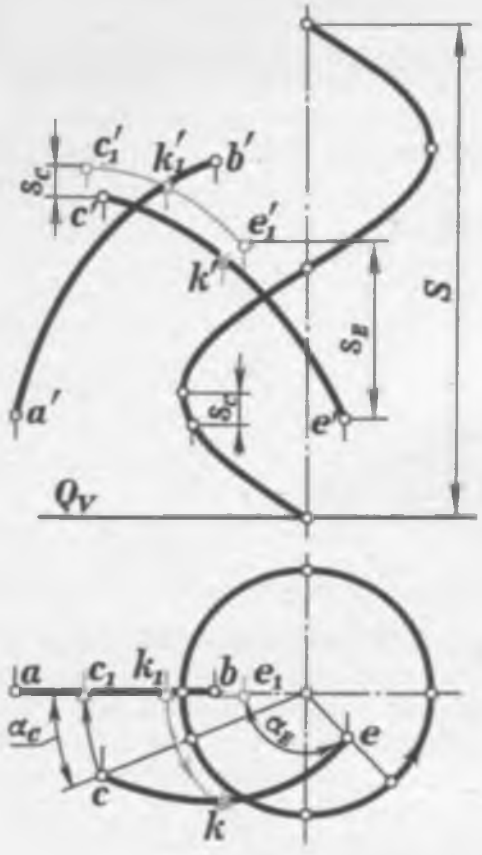


Рис. 327

Кривую линию ab, $a'b'$ принимаем за производящую линию вспомогательной поверхности вращения, соосной с заданной поверхностью, и строим фронтальный меридиан a_1b_1, $a_1'b_1'$ этой вспомогательной поверхности.

Фронтальные меридианы данной и вспомогательной поверхностей вращения пересекаются в точке k_1k_1', через которую проходит общая параллель этих поверхностей. Точка kk' пересечения этой параллели с кривой ab, $a'b'$ является искомой.

На рис. 327 показаны построения точки пересечения винтовой поверхности кривой линией ce, $c'e'$. Винтовая поверхность задана базовой линией (гелисой) и производящей кривой (фронтальным меридианом) ab, $a'b'$.

Кривую линию ce, $c'e'$ принимаем за производящую линию вспомогательной винтовой поверхности одинакового хода и шага с заданной винтовой поверхностью и строим фронтальный меридиан c_1e_1, $c_1'e_1'$ вспомогательной винтовой поверхности.

Фронтальные меридианы ab, $a'b'$ и c_1e_1, $c_1'e_1'$ пересекаются в точке k_1k_1', через которую проходит общий винтовой ход заданной и вспомогательной поверхностей (на чертеже показана лишь горизонтальная его проекция). Точка kk' пересечения этого винтового хода с данной кривой ce, $c'e'$ является искомой.

На рис. 328 показана схема построения точки пересечения кривой линии CD с конусом, заданным вершиной S и направляющей линией AB, лежащей в плоскости Q.

Заданная кривая CD принята за направляющую линию вспомогательного конуса, вершиной которого является точка S. Построена линия пересечения C_1D_1 вспомогательного конуса с плоскостью Q.

Кривые линии AB и C_1D_1 пересекаются в точке K_1, через которую проходит общая образующая K_1S данного и вспомогательного конусов. Эта образующая пересекается с кривой CD в искомой точке K.

На рис. 329 решена аналогичная задача. Здесь кривая линия cd, $c'd'$ пересекает конус, заданный вершиной ss' и направляющей ab, $a'b'$ в точке kk'.

Точки пересечения кривых линий с кинематическими поверхностями других ви-

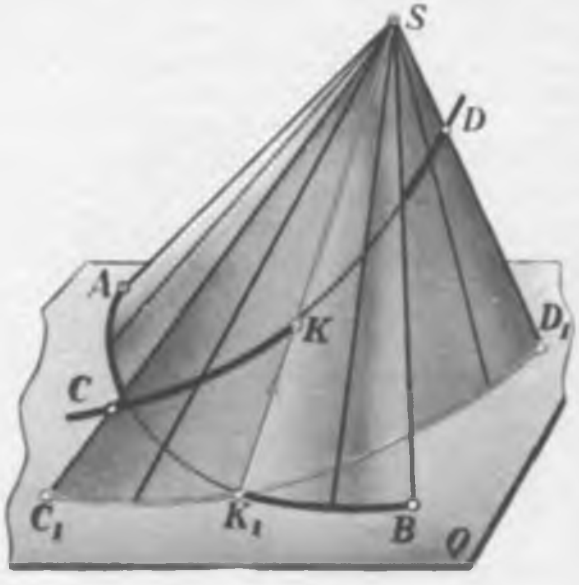


Рис. 328

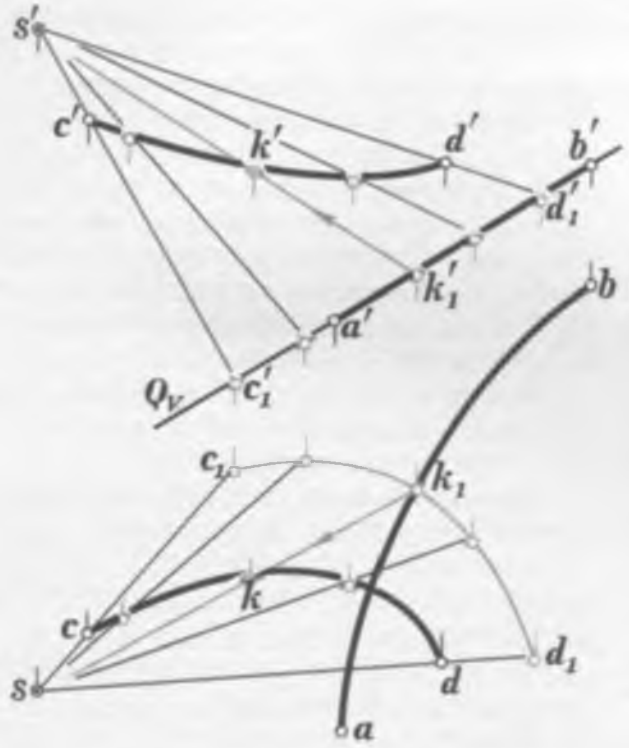


Рис. 329

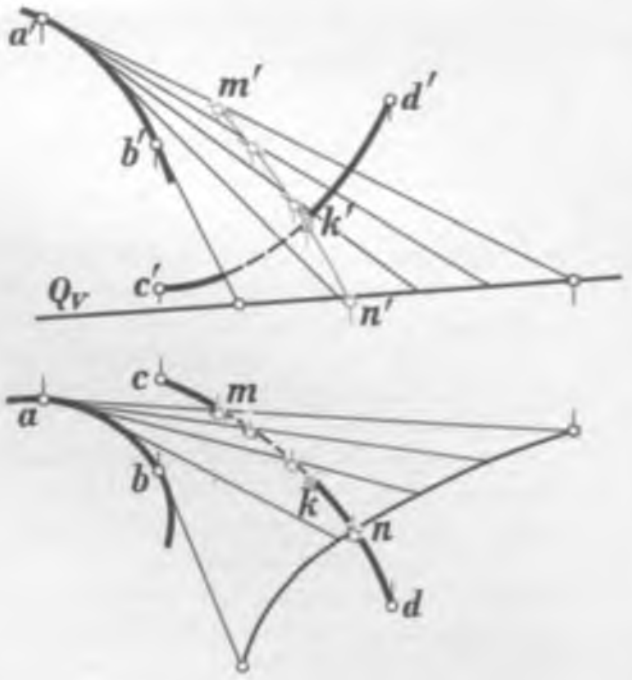


Рис. 330

дов определяют, применяя вспомогательные проецирующие цилиндры кривых линий.

На рис. 330 показаны построения точки пересечения кривой линии cd, $c'd'$ с торсом, заданным ребром возврата ab, $a'b'$. Горизонтально-проецирующий цилиндр данной кривой cd, $c'd'$ пересекает торс по кривой линии mn, $m'n'$. Точка kk' пересечения кривых линий mn, $m'n'$ и cd, $c'd'$ является искомой точкой пересечения заданной кривой cd, $c'd'$ с поверхностью торса.

ОСНОВНЫЕ СПОСОБЫ ПОСТРОЕНИЯ ЛИНИЙ ВЗАИМНОГО ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ

§ 58

При построении линии пересечения двух поверхностей вспомогательные секущие поверхности (посредники) выбирают такими, чтобы они, пересекаясь с данной поверхностью, давали бы простые для построения линии (например, прямые или окружности).

Часто за вспомогательные секущие поверхности принимают либо плоскости, либо сферы.

В ряде случаев при решении задач применяют комбинацию вспомогательных секущих поверхностей. Из общей схемы построения линии пересечения поверхностей можно выделить два основных способа — способ вспомогательных секущих плоскостей и способ сфер.

Линия пересечения двух поверхностей, также как и линия пересечения поверхности плоскостью, имеет характерные (опорные, главные) точки, с которых и следует начинать построение линии пересечения. Они позволяют видеть, в каких границах можно изменять положения вспомогательных секущих поверхностей (плоскостей) для определения произвольных точек.

Иногда при общем расположении двух взаимно пересекающихся поверхностей целе-

сообразно произвести преобразование чертежа.

Рассмотрим указанные способы построения линий пересечения поверхностей.

1. Способ вспомогательных секущих плоских посредников

При решении задач на построение линии пересечения поверхностей вспомогательные секущие плоскости обычно выбирают проецирующие (часто параллельные) или вращающиеся вокруг прямой (собственной или несобственной).

Вспомогательные секущие проецирующие плоские посредники. Такие плоские посредники применяют в случае, когда они, пересекаясь с каждой из данных поверхностей, дают прямые линии или окружности. Часто проецирующие плоскости выбираются в виде плоскостей уровня — плоскостей, параллельных плоскостям проекций.

На рис. 331 показана модель пересекающихся поверхностей. Здесь линию пересечения поверхностей можно построить, применяя вспомогательные секущие плоскости уровня.

Одна и та же секущая плоскость уровня P пересекает цилиндр по образующим (прямым линиям), а поверхность вращения — по окружности. Прямая линия поверхности цилиндра пересекается с окружностью поверхности вращения в точках *1* и *2*. Эти точки принадлежат искомой линии пересечения поверхностей.

Выбирая ряд секущих плоскостей, можно построить последовательный ряд точек линии пересечения поверхностей.

Вспомогательные секущие вращающиеся плоские посредники. Вращающиеся плоскости-посредники применяют для построения линии пересечения конических и цилиндрических поверхностей.

Пусть даны две конические поверхности с вершинами S_1 и S_2 (рис. 332).

Известно, что плоскость, проходящая через вершину конической поверхности, пересекает ее по образующим — прямым линиям. Очевидно, любая плоскость, проходя-

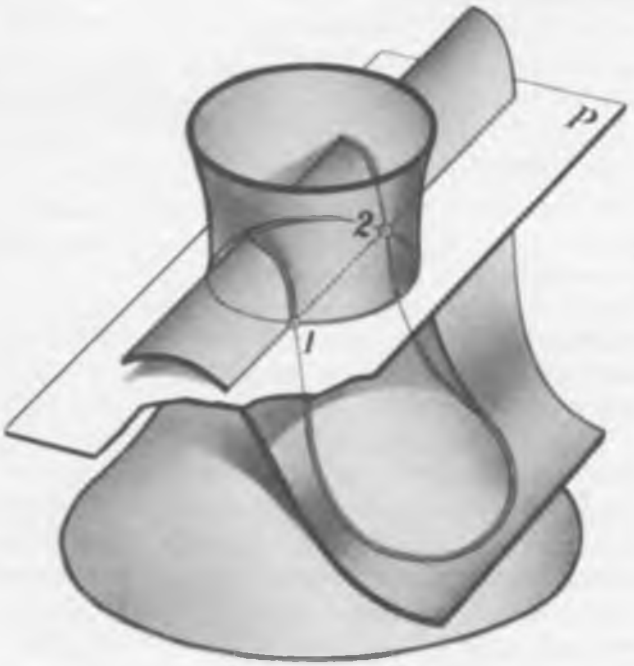


Рис. 331

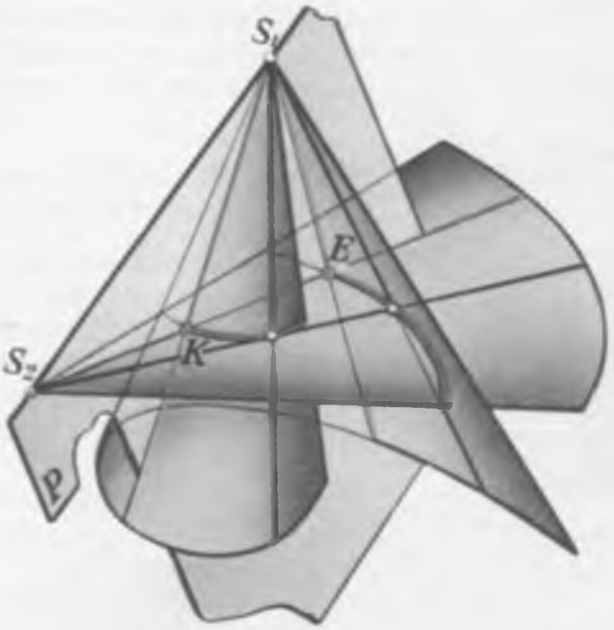
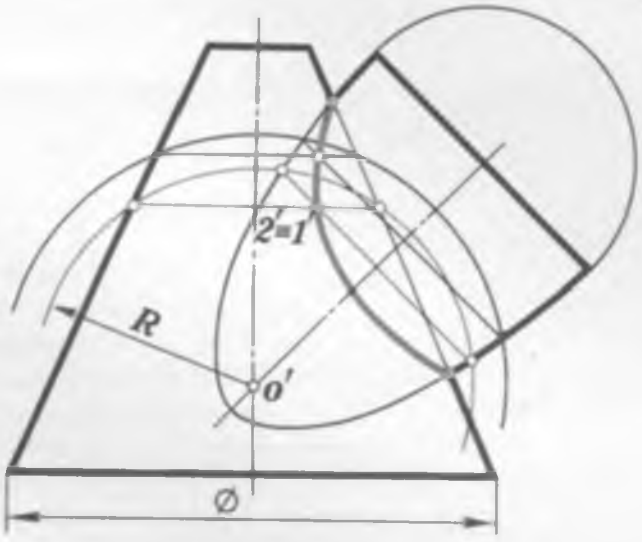


Рис. 332

щая через вершины S_1 и S_2 пересекающихся конических поверхностей, пересекает каждую из поверхностей по образующим.

Точки K и E пересечения образующих, находящихся в одной секущей плоскости P, принадлежат искомой линии пересечения конических поверхностей.

Выбирая ряд вращающихся вокруг прямой S_1S_2 вспомогательных секущих плоскостей, получим ряд точек искомой линии пересечения поверхностей.



Р и с. 333

2. Способ вспомогательных секущих сферических посредников

При построении линии пересечения некоторых поверхностей, а также при их особом взаимном расположении не всегда рационально применять вспомогательные секущие плоскости. В некоторых случаях применяют способ вспомогательных секущих сфер.

Вспомогательные секущие концентрические сферические посредники*. Этот способ применяют для построения линии пересечения двух поверхностей вращения общего вида с пересекающимися осями (с общей плоскостью симметрии). Каждая из этих поверхностей имеет семейство окружностей, по которым она пересекается концентрическими сферами.

Пусть две поверхности вращения с пересекающимися осями и общей фронтальной плоскостью симметрии заданы одной фронтальной их проекцией (рис. 333). Точки пересечения меридианов поверхностей вращения принадлежат искомой линии пересечения поверхностей. Их определяем непосредственно (без каких-либо дополнительных построений) на чертеже.

Другие точки линии пересечения можно построить следующим образом. Из центра oo' пересечения осей проведем сферу радиусом R. Фронтальной проекцией сферы является окружность радиусом R, проведенная из центра o'. Эта вспомогательная сфера пересекает заданные поверхности вращения по окружностям. Окружности на чертеже изображаются отрезками прямых. Они пересекаются в точках $1'1'$ и $2'2'$. Проекции этих точек есть точки пересечения проекций окружностей. Точки $1'$ и $2'$ принадлежат фронтальной проекции искомой линии пересечения поверхностей вращения. Изменяя радиус R вспомогательной секущей сферы, можно получить последовательный ряд точек линии пересечения.

Вспомогательные секущие эксцентрические сферические посредники*. Вспомогательные секущие эксцентрические сферы применяют при построении линии пересечения двух поверхностей вращения, имеющих общую плоскость симметрии. Оси поверхностей вращения не пересекаются. Каждая из таких поверхностей имеет семейство окружностей, по которым пересекаются эксцентрические сферы.

* Сферы с общим центром называются *концентрическими*.

* Сферы с различными положениями центров называются *эксцентрическими*.

перпендикуляре, восставленном из центра окружности к плоскости Mv.

Для пересечения конуса (поверхности вращения) вспомогательной секущей сферой по окружности надо, чтобы центр такой сферы находился бы на оси конуса вращения (поверхности вращения).

Точка oo' пересечения перпендикуляра с осью конуса вращения (поверхности вращения) является центром вспомогательной секущей сферы соответствующего радиуса R. Такая вспомогательная секущая сфера пересекает кольцо и данную поверхность по окружностям, фронтальные проекции которых — отрезки прямых. Точки пересечения окружностей принадлежат искомой линии пересечения поверхностей.

Аналогично можно определить последовательный ряд точек линии пересечения поверхностей. Вспомогательные сферы имеют различные центры на оси конуса (поверхности вращения).

На чертеже построены фронтальные проекции линии пересечения. Горизонтальные проекции строят, пользуясь параллелями поверхностей, которые проецируются на горизонтальную плоскость проекций в виде окружностей.

Способ эксцентрических сфер можно применить и для построения линии пересечения, когда одна из пересекающихся поверхностей не является поверхностью вращения. Необходимо, чтобы только такая поверхность имела семейство круговых сечений, центры которых и ось поверхности вращения имели бы одну плоскость симметрии.

На рис. 336 показаны пересекающиеся конус вращения и эллиптический конус с круговым основанием. Покажем построения линии пересечения поверхностей.

Возьмем произвольно круговое сечение плоскости Mv эллиптического конуса, проецирующееся на фронтальную плоскость проекций в отрезок $1'2'$. Из его центра восставляем перпендикуляр к плоскости до пересечения в точке oo' с осью конуса вращения.

Сфера соответствующего радиуса R, проведенная из центра oo', пересекает конус вращения по окружности, проецирующейся на фронтальную плоскость V отрезком $3'4'$, и пересекает эллиптическую поверхность по второй окружности, проецирующейся на плоскость V в отрезок $5'6'$. Точки a' и b' пересечения проекций окружностей являются проекциями точек aa' и bb' искомой линии пересечения поверхностей (каждая из точек a' и b' представляет собой проекции двух точек).

Возьмем другое круговое сечение эллиптического конуса плоскостью M_1v и повторим построения. Линия пересечения поверхностей проходит через точки пересечения очерковых образующих.

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПРОЕЦИРУЮЩИМИ ЦИЛИНДРАМИ (ПРИЗМАМИ) § 59

Рассмотрим наиболее простые случаи взаимного пересечения поверхностей цилиндров и конусов (призм и пирамид), когда образующие одной из поверхностей (цилиндра, призмы) перпендикулярны к какой-либо плоскости проекций. Проекция искомой линии на эту плоскость определяется непосредственно из чертежа.

На рис. 337 показано построение линии пересечения пятигранной пирамиды с цилиндром, образующие которого перпендикулярны к горизонтальной плоскости проекций.

Линия пересечения состоит из пяти равных между собой дуг эллипсов. Эллипсы могут быть построены по точкам пересечения ребер и других произвольных прямых пирамиды с поверхностью цилиндра или с помощью вспомогательных горизонтальных плоскостей, пересекающих цилиндр по окружностям, а пирамиду — по правильным пятиугольникам.

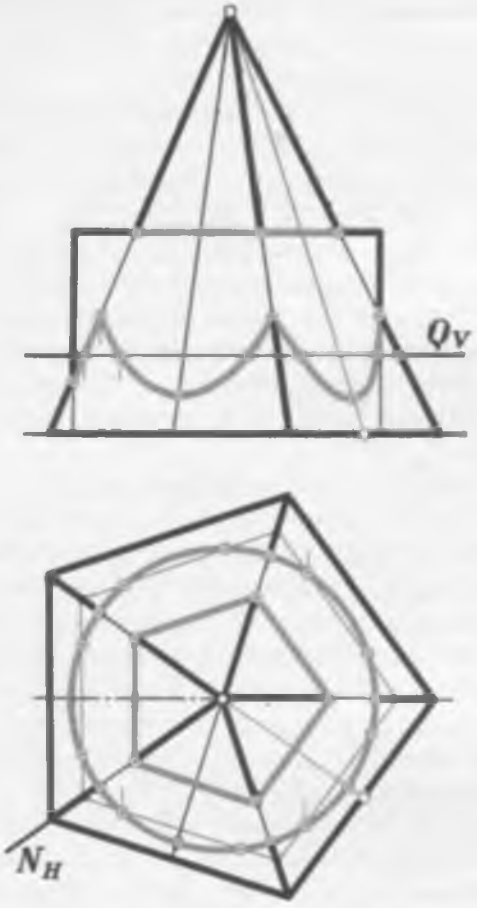


Рис. 337

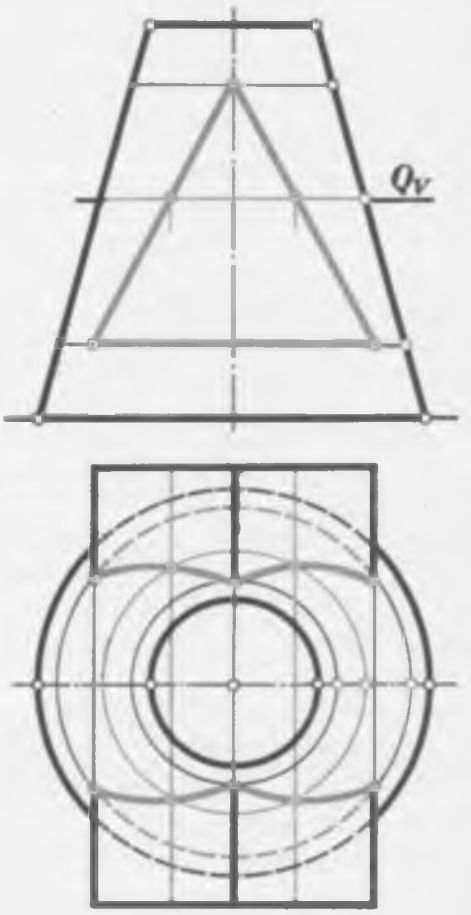


Рис. 338

На рис. 338 построена линия пересечения трехгранной призмы, ребра которой перпендикулярны к фронтальной плоскости проекций, с усеченным конусом вращения, ось которого перпендикулярна к горизонтальной плоскости проекций. Проекции точек линии пересечения определяются при помощи вспомогательных горизонтальных плоскостей.

На рис. 339 построена линия пересечения фронтально-проецирующего цилиндра с конусом вращения.

С помощью вспомогательных секущих плоскостей определены точки пересечения очерковых образующих одной поверхности с другой и промежуточные точки линии пересечения поверхностей.

Проводя вспомогательную секущую фронтальную меридиональную плоскость конуса вращения, определяем точки пересечения главного меридиана конуса вращения с параллелью (окружностью) проецирующего цилиндра.

Выбирая горизонтальную секущую плоскость, проходящую через ось цилиндра вращения, определяем две точки пересечения очерковой образующей цилиндра с поверхностью конуса.

Промежуточные точки, а также высшая и низшая точки линии пересечения поверхностей, находятся с помощью вспомогательных горизонтальных плоскостей — плоскостей уровня.

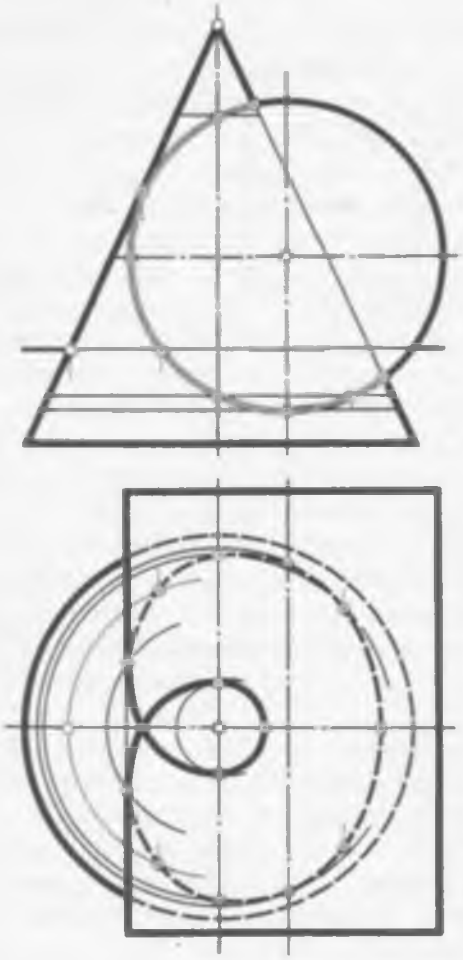


Рис. 339

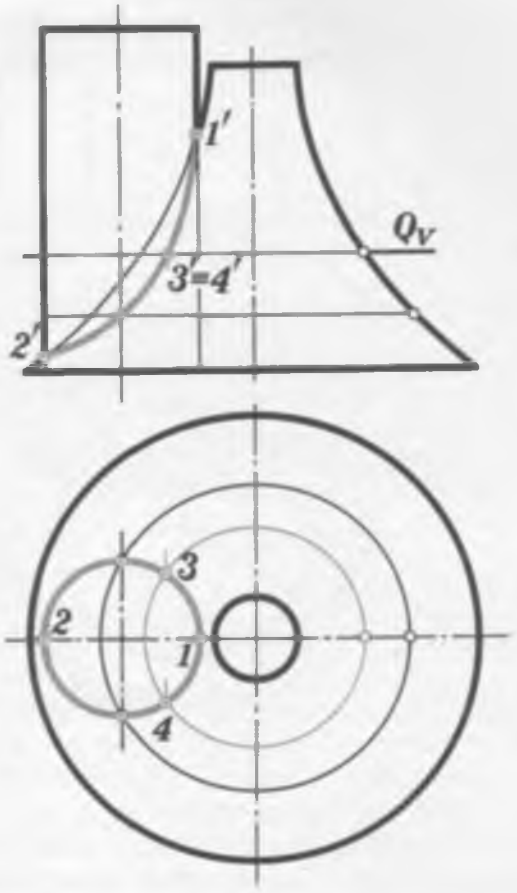


Рис. 340

На рис. 340 построена линия пересечения горизонтально-проецирующего цилиндра вращения с поверхностью вращения.

Фронтальные меридиональные сечения поверхностей пересекаются в точках *11′* и *22′*. Точки *33′* и *44′* линии пересечения построены с помощью горизонтальных плоскостей, пересекающих обе заданные поверхности по окружностям.

На рис. 341 построена линия пересечения правильной шестигранной призмы с соосным с ней конусом вращения. Такой случай возможен при снятии конической фаски на шестигранной гайке.

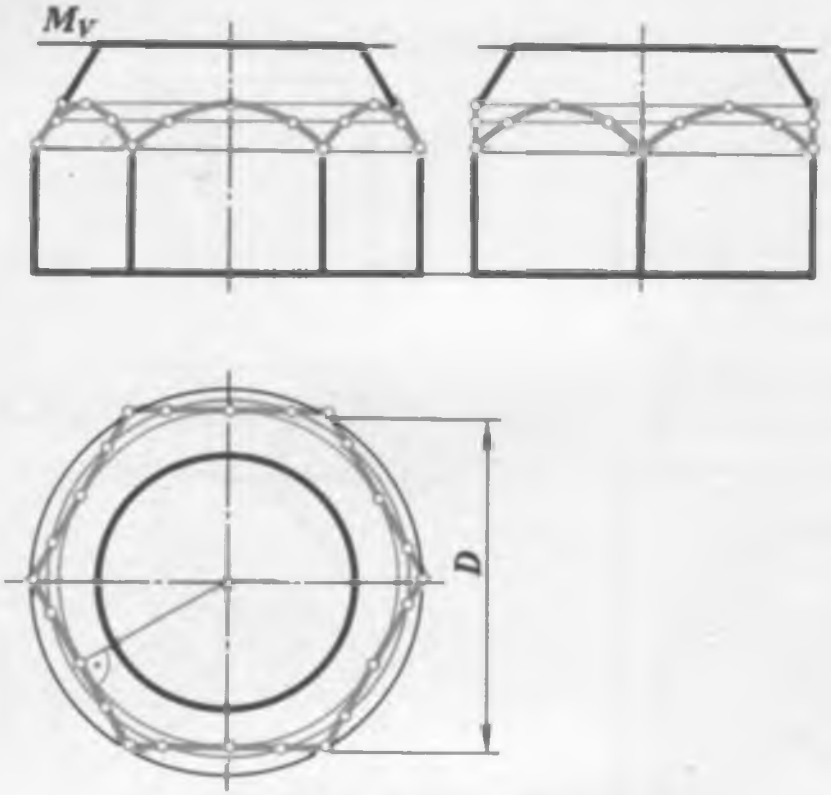
Величина *D*, равная диаметру вписанной окружности направляющего шестиугольника призмы, определяет размер гаечного ключа. Конус вращения задают вершиной и углом при его вершине. Верхняя плоскость M_V гайки пересекает конус вращения по параллели — окружности. Такую параллель называют *окружностью обточки гайки*.

Искомая линия пересечения состоит из шести одинаковых частей.

Для определения наивысших точек линии пересечения строим параллель конуса, касающуюся граней призмы.

Параллель конуса, пересекающаяся ребрами призмы, определяет низшие точки линии пересечения.

Для построения промежуточных точек линии пересечения берем какую-либо из



Р и с. 341

промежуточных параллелей. Эта параллель каждую из граней пересекает в двух точках, которые принадлежат линиям пересечения граней призмы с конусом. Грани призмы, плоскости которых параллельны оси конуса вращения, пересекают конус вращения по гиперболам.

На рис. 341 построена также профильная проекция заданных поверхностей и их линии пересечения.

§60 ВЗАИМНОЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ЛИНЕЙЧАТЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

1. Взаимное пересечение конических поверхностей

Линии пересечения конических поверхностей (пирамид) удобно строить, если эти поверхности имеют плоские направляющие линии. Если направляющие линии поверхностей пространственные, то их можно заменить плоскими, пересекая каждую из поверхностей плоскостью. Направляющие линии конических поверхностей могут лежать или в одной, или в разных плоскостях.

При решении задачи на построение линии взаимного пересечения конических поверхностей (пирамид) на чертеже построения в значительной мере упрощаются, если направляющие линии поверхностей лежат в проецирующих плоскостях

На рис. 342 показана схема построения линии пересечения конических поверхностей, направляющие линии которых лежат в одной плоскости Q.

Следуя основной схеме построения линии пересечения кинематических поверхностей, определяем точки пересечения образующих одной поверхности с другой.

Вспомогательные секущие плоскости, которые проводят через образующие одной поверхности при определении точек их пересечения с другой поверхностью, выбирают проходящими через вершины обеих конических поверхностей. Следы этих плоскостей

на плоскости Q проходят через точку K пересечения с плоскостью Q прямой линии, соединяющей вершины S и S_1 заданных конических поверхностей.

Следы секущих плоскостей пересекают направляющие линии поверхностей в точках, через которые проводят образующие заданных поверхностей. Точки пересечения построенных образующих принадлежат линии пересечения конических поверхностей.

На рис. 343 показана схема построения линии пересечения двух конических поверхностей, направляющие линии которых лежат в разных плоскостях. Одна коническая поверхность задана направляющей кривой в плоскости Q и вершиной S, другая — направляющей кривой в плоскости U и вершиной S_1.

Прямая линия, проходящая через вершины S и S_1 конических поверхностей, пересекается с плоскостью Q в точке K, а с плоскостью U — в точке T.

Следы вспомогательных секущих плоскостей на плоскости Q проходят через точку K, а на плоскости U — через точку T. Кроме того, следы пересекаются между собой в точках, находящихся на прямой пересечения плоскостей Q и U.

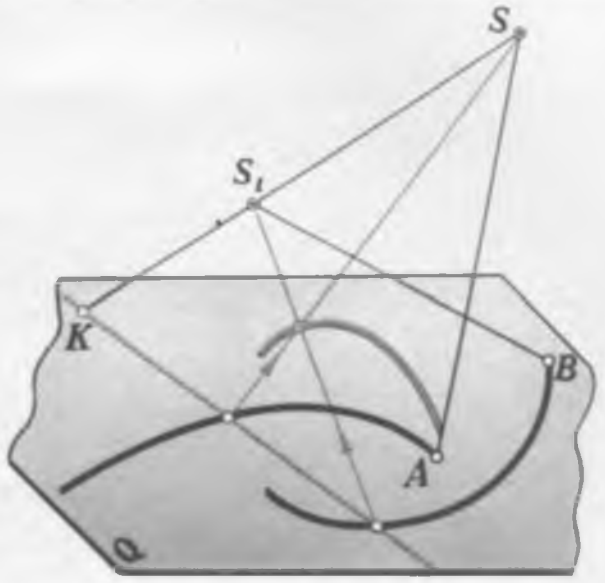
Проводим ряд вспомогательных секущих плоскостей и строим линии их пересечения с заданными поверхностями. По точкам пересечения таких линий (образующих) строим линию взаимного пересечения конических поверхностей.

Для определения последовательности соединения найденных точек линии пересечения применяют метод одновременного обхода направляющих линий заданных поверхностей.

Приведем примеры применения указанных схем к решению задач на чертеже.

На рис. 344 построена линия пересечения конуса с пирамидой для случая, когда их направляющие линии лежат в одной проецирующей плоскости Q_V.

Прямая линия, проходящая через вершины ss' и s_1s_1' заданных поверхностей, пересекается с плоскостью направляющих линий в точке tt' (точка tt' находится за пределами чертежа), через которую проходят

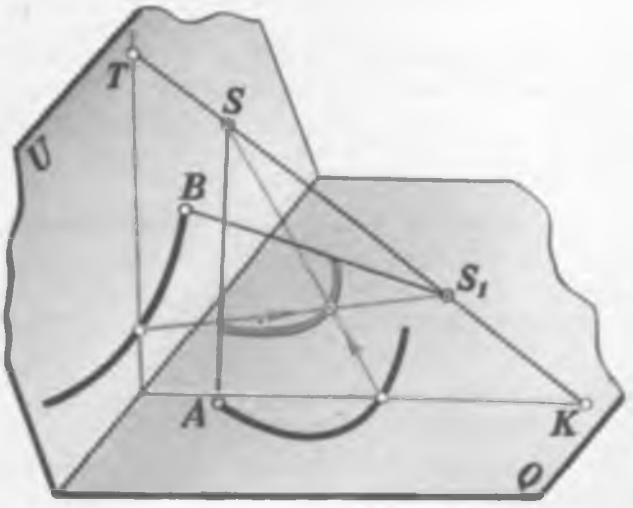


Р и с. 342

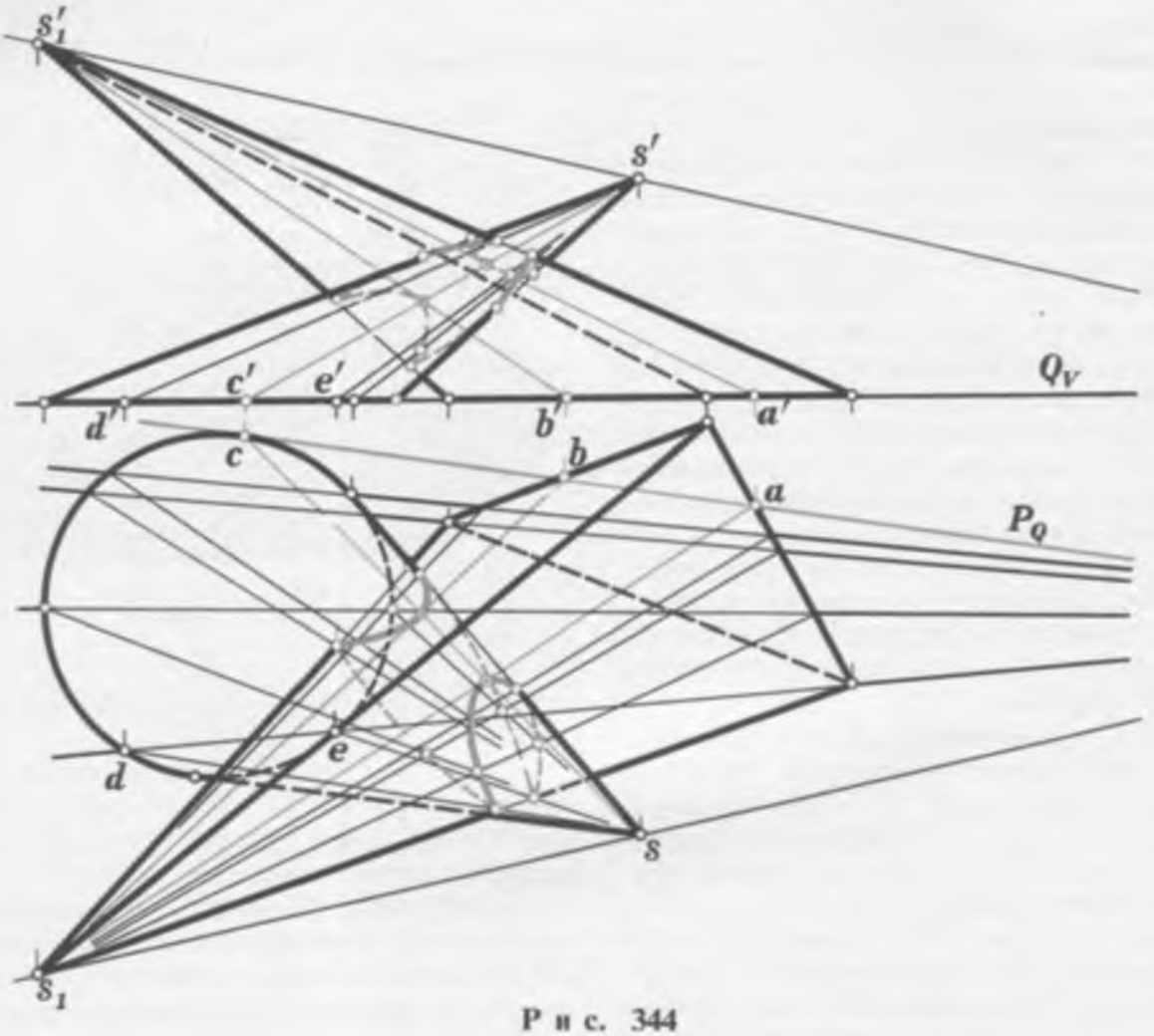
следы всех вспомогательных секущих плоскостей.

Следы P_Q вспомогательных плоскостей, каждая из которых касается одной поверхности и пересекает другую, показывают, что заданное пересечение имеет вид врезки.

Для построения линии пересечения заданных поверхностей сначала выбираем следы вспомогательных плоскостей, проходящие через вершины направляющего много-



Р и с. 343



Р и с. 344

угольника пирамиды и через точки направляющей линии конуса, принадлежащие очерковым его образующим. Затем намечаем следы ряда промежуточных вспомогательных плоскостей.

Образующие заданных поверхностей, проходящие через точки пересечения следов вспомогательных плоскостей с направляющими линиями, пересекаются между собой в точках, принадлежащих искомой линии пересечения.

Для определения последовательности соединения точек линии пересечения применим метод одновременного обхода направляющих линий. Соединяем последовательно плавной кривой точки образующих конуса, совершая обход по направляющей линии в направлении против хода часовой стрелки от точки cc' к точке dd', а затем обратно к точке cc' в направлении хода часовой стрелки.

Одновременно делаем обход направляющей линии пирамиды в направлении против хода часовой стрелки от точки bb' до точки aa'. Такими обходами устанавливается порядок соединения точек пересечения образующих поверхностей, которые принадлежат части линии их пересечения.

Для установления последовательности соединения точек остальной части линии пересечения совершаем обход по направляющей линии конуса в направлении хода

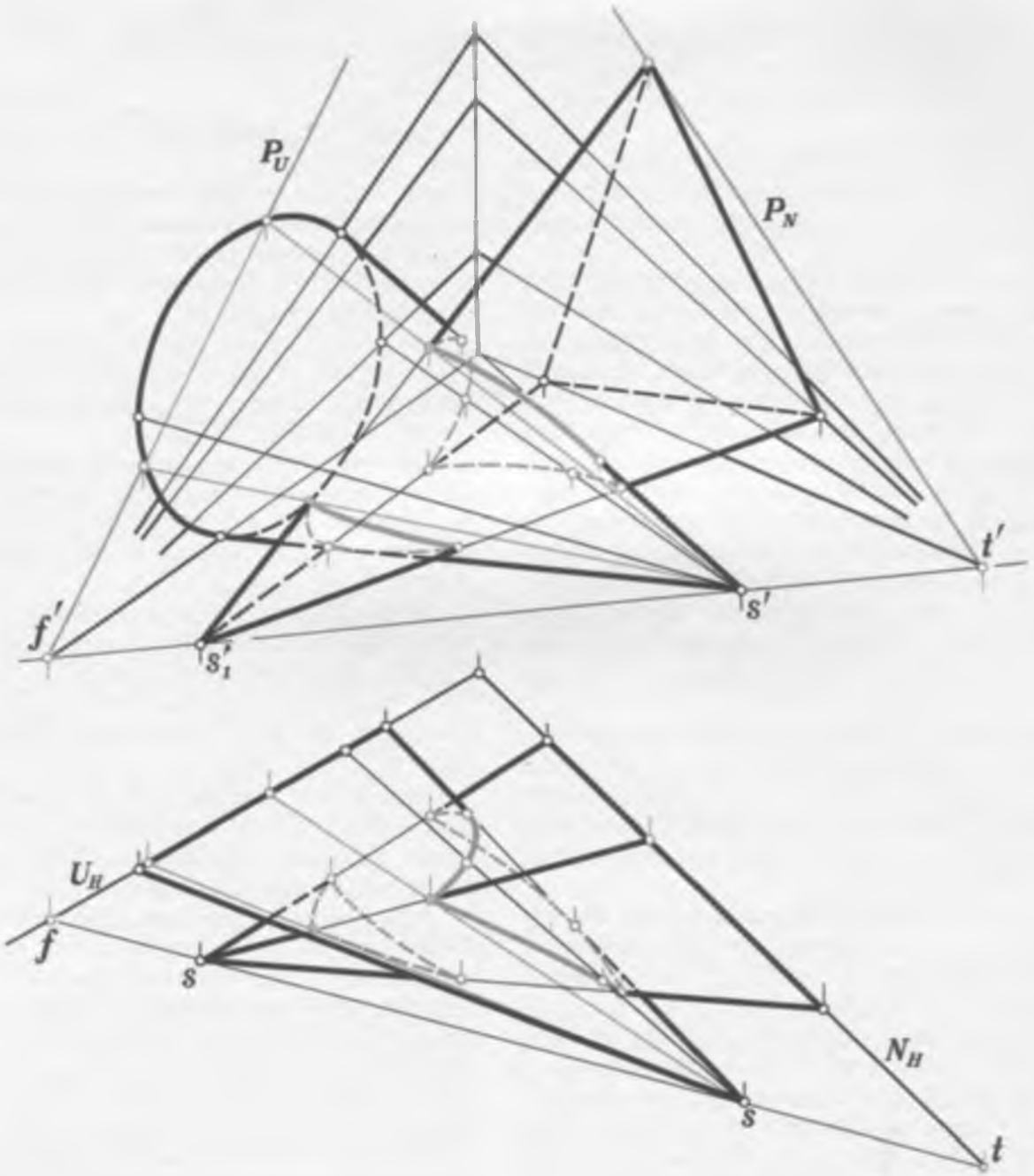


Рис. 345

часовой стрелки от точки cc' до точки ee' и обратно к точке cc' в направлении против хода часовой стрелки. Одновременно делаем обход направляющей линии пирамиды в направлении хода часовой стрелки от точки aa' до точки bb'.

Указанными одновременными обходами установится порядок последовательного соединения точек оставшейся части линии пересечения поверхностей.

При определении фронтальных проекций точек линии пересечения более точные результаты получаются, если их строить как точки пересечения фронтальных проекций соответствующих образующих, а затем проверять путем построения линий связи. При построении линий пересечения поверхностей достигается бóльшая наглядность изображения, если видимые линии на проекциях поверхностей обводить сплошными линиями, а невидимые — штриховыми. Следует иметь в виду, что видимые точки линии пересечения в проекции получаются только при пересечении двух видимых образующих заданных поверхностей.

На рис. 345 построена линия пересечения конуса с пирамидой для случая, когда их направляющие линии лежат в разных одноименных проецирующих плоскостях, в данном случае в горизонтально-проецирующих плоскостях N_H и U_H.

Прямая линия, проходящая через вершины заданных поверхностей, пересекается с плоскостью N_H в точке tt', а с плоскостью U_H — в точке ff'.

Фронтальные проекции следов каждой вспомогательной секущей плоскости на плоскостях N_H и U_H проходят соответственно через точки t' и f' и пересекаются между собой в точке, лежащей на вертикальной прямой линии — фронтальной проекции линии пересечения плоскостей N_H и U_H.

Крайние парные следы секущих плоскостей показывают, что при заданном расположении поверхностей пересечение является полным, т. е. имеет вид входа и выхода.

Вспомогательные секущие плоскости выбираем таким образом, чтобы их следы проходили через вершины направляющего многоугольника пирамиды и точки направляющей линии конуса, принадлежащие его очерковым образующим; затем строим следы промежуточных вспомогательных плоскостей.

Точки взаимного пересечения образующих, проходящих через соответствующие точки направляющих линий, принадлежат искомой линии пересечения. Последовательность соединения точек линии пересечения устанавливается одновременными обходами направляющих линий.

На рис. 346 показано пересечение конуса с пирамидой, когда направляющие их линии лежат в разноименных проецирующих плоскостях N_H и M_V.

Прямая линия, проходящая через вершины заданных поверхностей, пересекается с плоскостью M_V в точке ff', а с плоскостью N_H — в точке tt' (точка tt' на чертеже не показана).

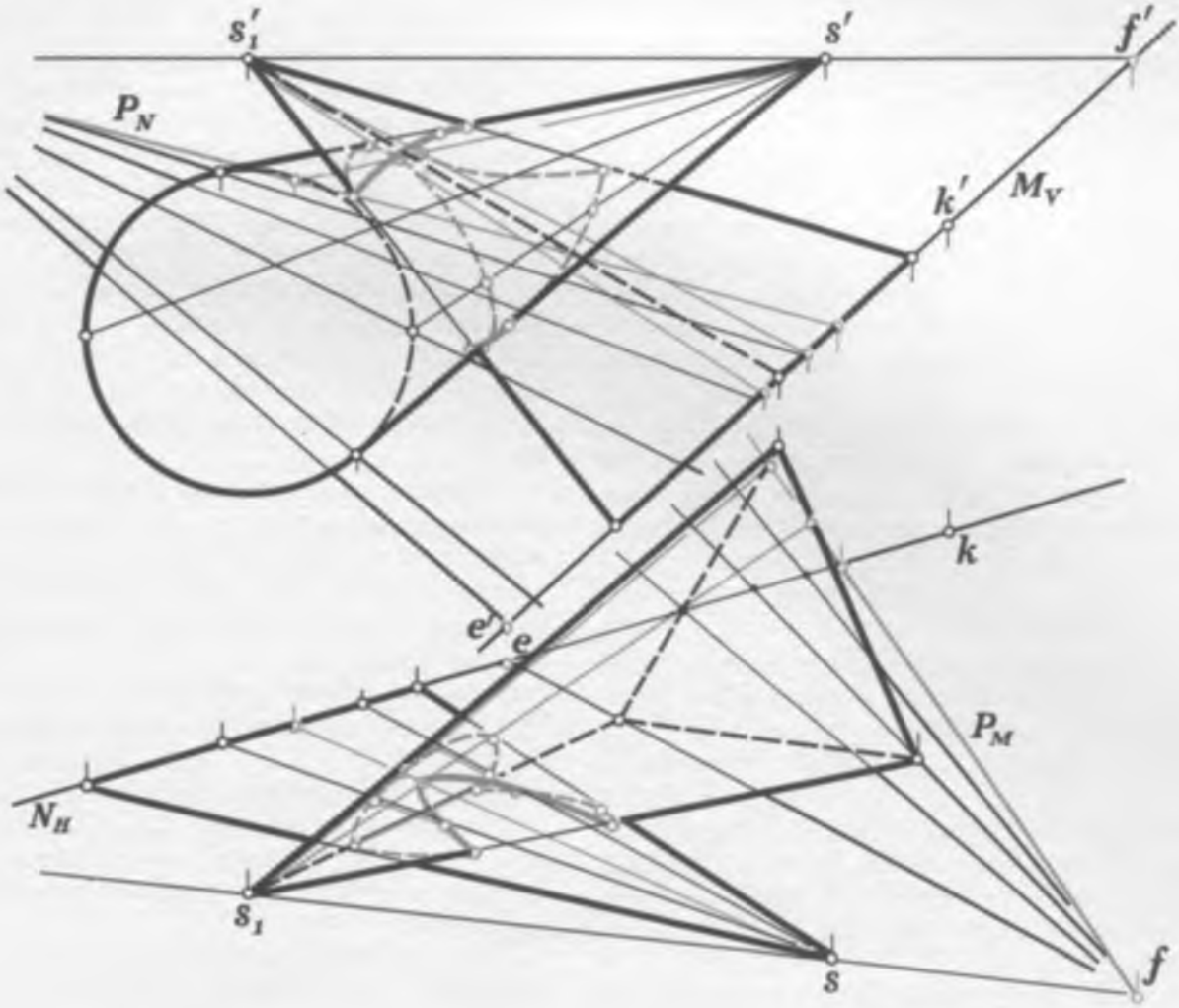
След каждой вспомогательной секущей плоскости на плоскости N_H проходит через точку tt', а ее след на плоскости M_V — через точку ff'. Следы пересекаются между собой на линии ek, $e'k'$ пересечения плоскостей N_H и M_V.

Следы вспомогательных плоскостей, касательных к одной поверхности и пересекающих другую, показывают, что заданное пересечение является неполным.

Для построения линии пересечения проводим следы вспомогательных секущих плоскостей через вершины направляющего многоугольника пирамиды и точки направляющей линии конуса, принадлежащие его очерковым образующим, а затем проводим ряд промежуточных следов. Образующие заданных поверхностей, проходящие через точки пересечения следов вспомогательных плоскостей с направляющими линиями, пересекаются между собой в точках, принадлежащих искомой линии пересечения.

Для определения последовательности соединения найденных точек пересечения применяем правило одновременных обходов направляющих линий.

Если вершины пересекающихся конических поверхностей находятся на равных рас-



Р и с. 346

стояниях от плоскости их направляющих линий, то следы прямой, проходящей через вершины поверхностей, представляются несобственными точками, т. е. каждая из таких точек (следов прямой) находится в бесконечности.

В этих случаях следы вспомогательных секущих плоскостей, проходящие через образующие каждой из заданных поверхностей, параллельны прямой линии вершин конических поверхностей.

Если же направляющие линии конических поверхностей лежат в одной проецирующей плоскости, но линия, соединяющая вершины поверхностей, не пересекается в пределах чертежа с плоскостью направляющих линий, часто пользуются дополнительными сечениями.

Достаточно простые построения искомой линии пересечения получаются, если обе заданные поверхности пересечь проецирующей плоскостью, параллельной прямой линии, соединяющей вершины поверхностей и построенные линии пересечения принять за направляющие линии. При этих условиях следы вспомогательных секущих плоскостей на плоскости дополнительных направляющих параллельны соответствующей проекции прямой линии, соединяющей вершины поверхностей.

238 2. Пересечение конической поверхности цилиндрической

Построим линию пересечения конической поверхности с цилиндрической (рис. 347). Коническая поверхность задана направляющей кривой линией в плоскости Q и вершиной S. Цилиндрическая поверхность задана направляющей кривой в этой же плоскости Q и направлением образующих — стрелкой точки B. Построение такой линии аналогично случаю определения линии пересечения двух конических поверхностей, из которых одна имеет несобственную вершину.

В качестве вспомогательных секущих плоскостей, которые проводим через образующие, принимаем плоскости, проходящие через вершину конической поверхности параллельно направлению образующих цилиндрической поверхности.

Такие секущие плоскости пересекают каждую из поверхностей по образующим. Вспомогательные плоскости пересекают плоскость направляющих линий по прямым, проходящим через точку K. Точку K можно построить как точку пересечения с плоскостью Q прямой линии SK, параллельной образующим цилиндрической поверхности и проходящей через вершину S конической поверхности.

Следы секущих плоскостей пересекают направляющие линии заданных поверхностей в точках, через которые проходят образующие поверхностей. Точки пересечения образующих определяют линию взаимного пересечения поверхностей.

Рассмотрим схему построения линии пересечения конической поверхности с цилиндрической для случая, когда плоские направляющие линии поверхностей лежат в разных пересекающихся между собой плоскостях Q и U (рис. 348).

Коническая поверхность задана направляющей кривой в плоскости Q и вершиной S. Цилиндрическая поверхность задана направляющей кривой в плоскости U и направлением образующих — стрелкой точки B.

Прямая, параллельная направлению образующих цилиндра и проходящая через вершину S конической поверхности, пересекается с плоскостями направляющих линий в точках K и T. Через эти точки проходят парные следы P_U и P_Q вспомогательных плоскостей. Следы пересекаются между собой в точках, лежащих на линии пересечения плоскостей Q и U. Следы пересекают направляющие линии поверхностей в точках, через которые проходят образующие этих поверхностей. Точками пересечения образующих определяется линия пересечения поверхностей.

На рис. 349 построена линия пересечения цилиндра трехгранной пирамидой для случая, когда направляющие линии поверхностей лежат в одной плоскости Q_V.

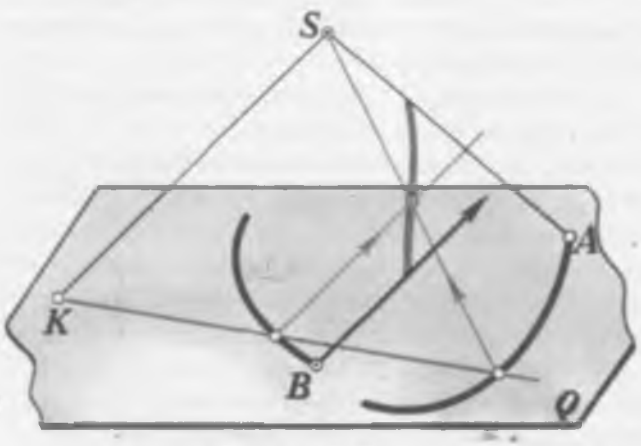


Рис. 347

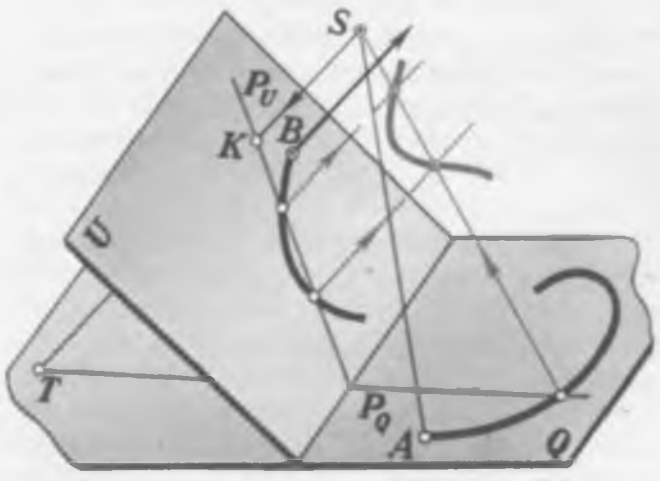
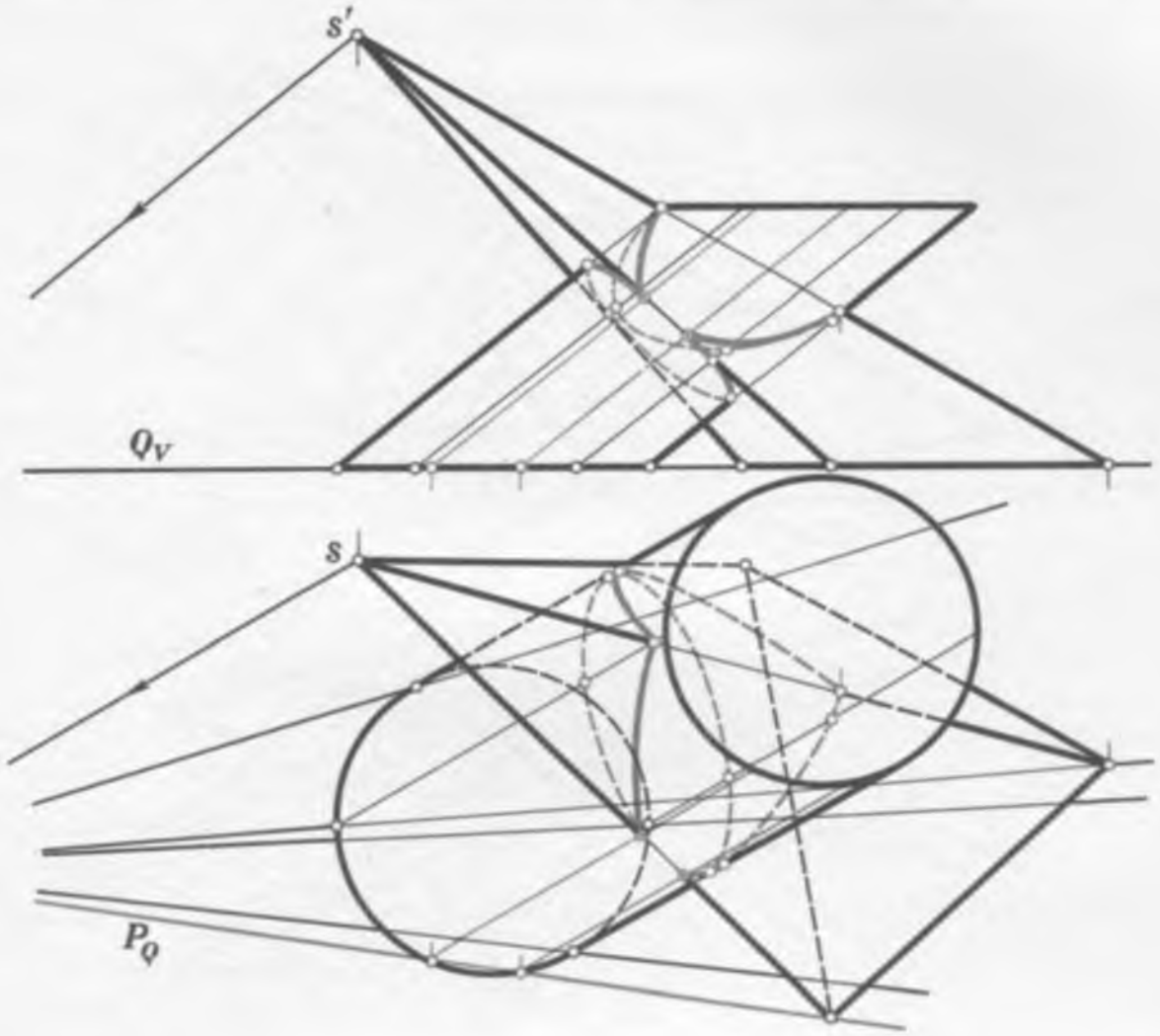


Рис. 348



Р и с. 349

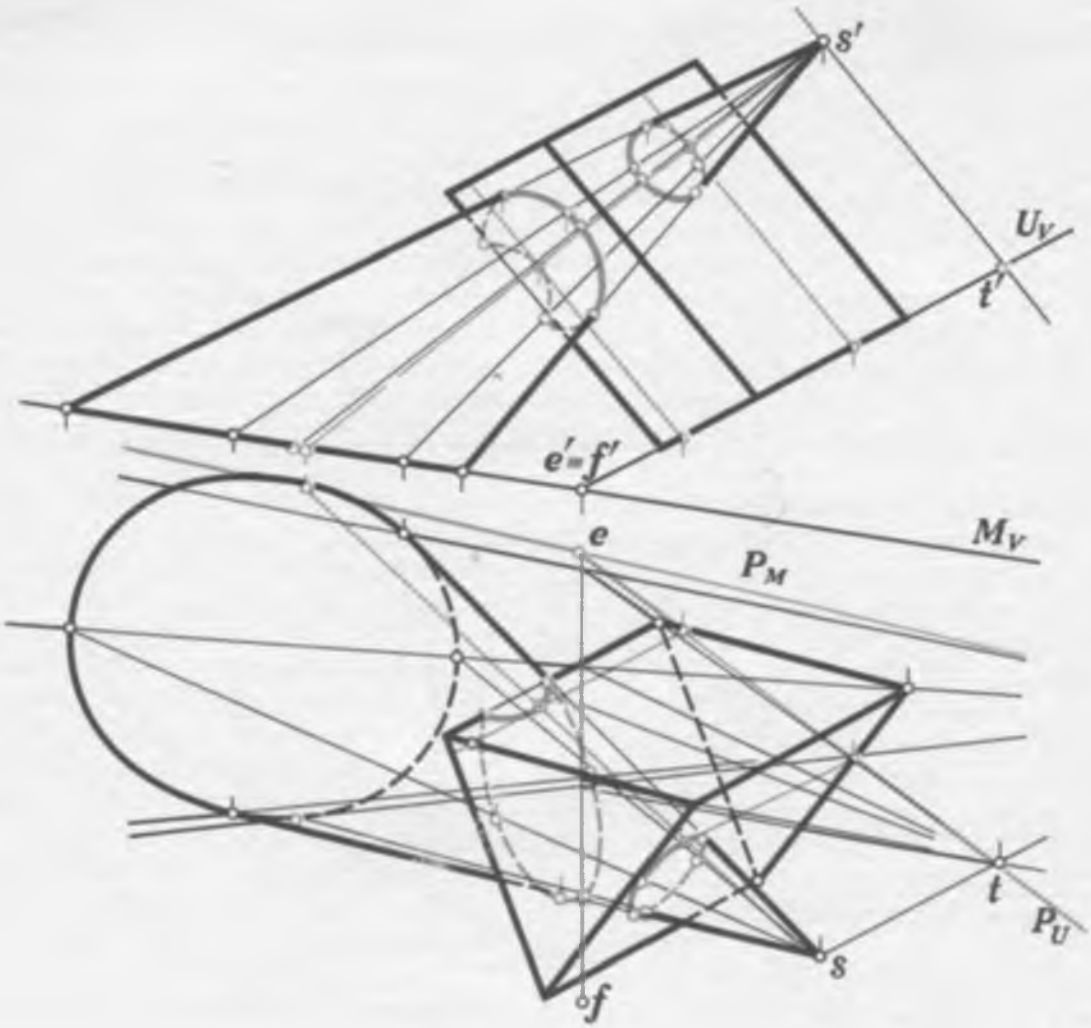
Согласно указанной схеме построения линии пересечения поверхностей проводим прямую линию, параллельную образующим цилиндра и находим точку tt' ее пересечения с плоскостью Q_V (точка tt' на чертеже не показана).

Следы P_Q секущих плоскостей (касательных к поверхностям) показывают, что поверхности цилиндра и пирамиды не полностью участвуют в пересечении и, следовательно, пересечение неполное, т. е. получается одна замкнутая линия пересечения.

Проводим следы вспомогательных плоскостей через вершины направляющего многоугольника пирамиды и через точки очерковых образующих направляющей линии цилиндра. Точки взаимного пересечения образующих, проходящих через намеченные следами точки на направляющих линиях, принадлежат искомой линии пересечения. Последовательность соединения точек линий пересечения устанавливается методом одновременного обхода направляющих линий.

На рис. 350 построена линия пересечения конуса призмой, когда направляющие линии поверхностей находятся в разных одноименных проецирующих плоскостях — во фронтально-проецирующих плоскостях M_V и U_V.

Прямая линия, проходящая через вершину конуса и параллельная ребрам призмы, пересекается с плоскостью U_V в точке tt', а с плоскостью M_V — в точке kk' (точка kk'



Р и с. 350

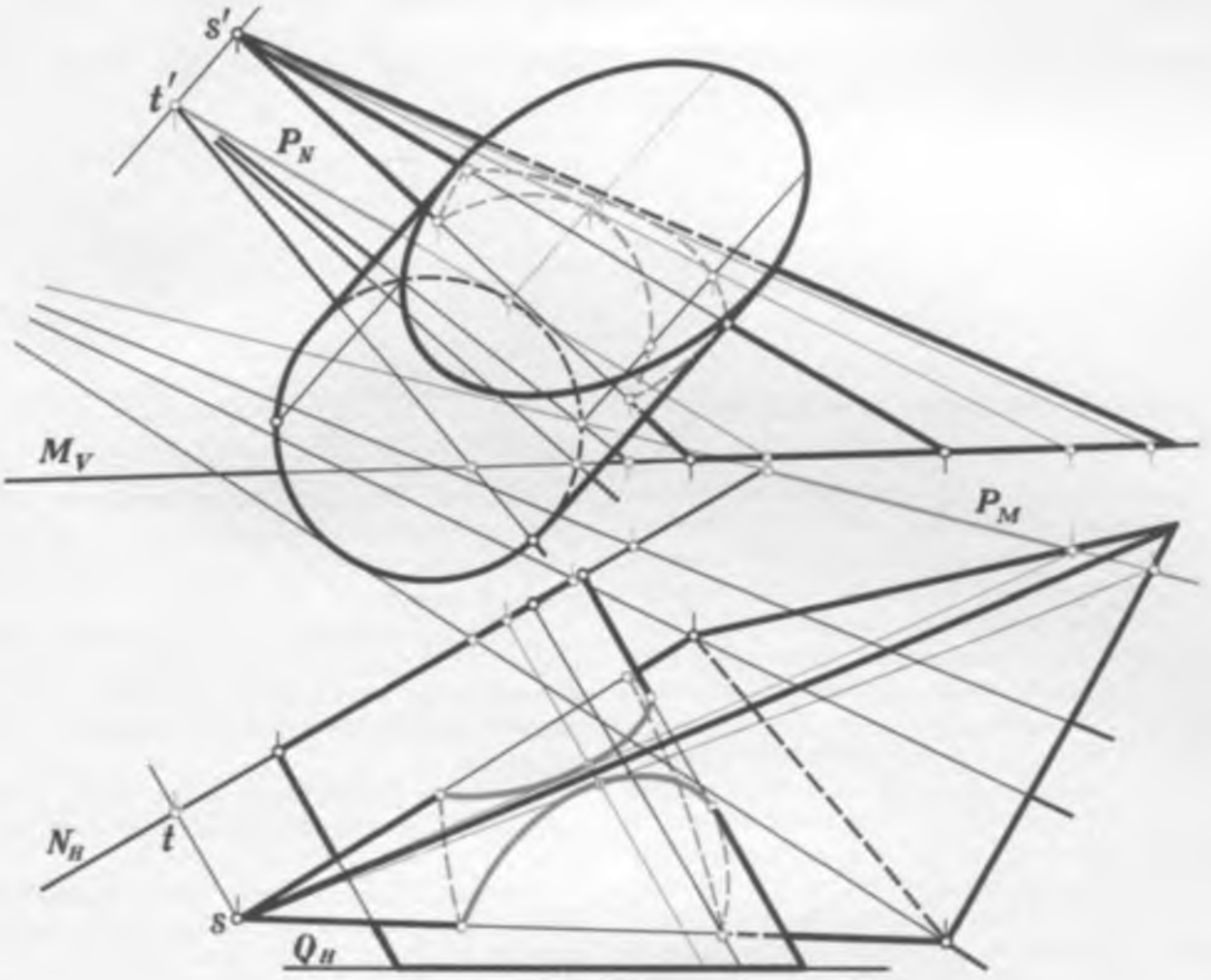
на чертеже не показана). Следы вспомогательных плоскостей на плоскостях M_V и U_V проходят через эти точки. Их горизонтальные проекции P_M и P_U проходят соответственно через точки k и t. Кроме того, следы P_M и P_U пересекаются между собой на линии ef — горизонтальной проекции линии пересечения плоскостей M_K и U_V.

Следы вспомогательных крайних двух секущих плоскостей показывают, что пересечение является полным, т. е. имеет вид входа и выхода.

Следы вспомогательных плоскостей сначала проводим через вершины направляющего многоугольника призмы и через точки направляющей линии конуса, принадлежащие очерковым его образующим. Затем проводим следы промежуточных вспомогательных плоскостей. Точки взаимного пересечения образующих, проходящих через намеченные следами точки на направляющих линиях, принадлежат искомой линии пересечения.

Для определения последовательности соединения точек искомой линии пересечения воспользуемся методом одновременных обходов направляющих линий поверхностей.

На рис. 351 построена линия пересечения цилиндра пирамидой для случая, когда направляющие линии поверхностей лежат в



Р и с. 351

разных разноименных проецирующих плоскостях N_H и M_V.

Проводим, согласно приведенной выше схеме, через вершину ss' пирамиды прямую линию, параллельную образующим цилиндра и находим точки tt' и kk' (точка kk' на чертеже не показана) ее пересечения с плоскостями N_H и M_V направляющих линий.

Горизонтальные проекции P_M следов вспомогательных плоскостей на плоскости M_V проходят через точку k — горизонтальную проекцию точки kk', а фронтальные проекции парных им следов P_N вспомогательных плоскостей на плоскости N_H — через точку t' — фронтальную проекцию точки tt'. Кроме того, парные следы P_M и P_N пересекаются между собой в точках, находящихся на прямой линии пересечения плоскостей N_H и M_V.

Следы вспомогательных крайних двух секущих плоскостей показывают, что поверхности цилиндра и призмы пересекаются не полностью, и, следовательно заданное пересечение имеет вид врезки.

Следы вспомогательных плоскостей проводим через вершины направляющего многоугольника пирамиды и через точки направляющей линии цилиндра, принадлежащие очерковым его образующим. Затем

проводим следы промежуточных вспомогательных плоскостей.

Определяем точки пересечения образующих, проходящих через намеченные следами точки на направляющих линиях. Они принадлежат искомой линии пересечения.

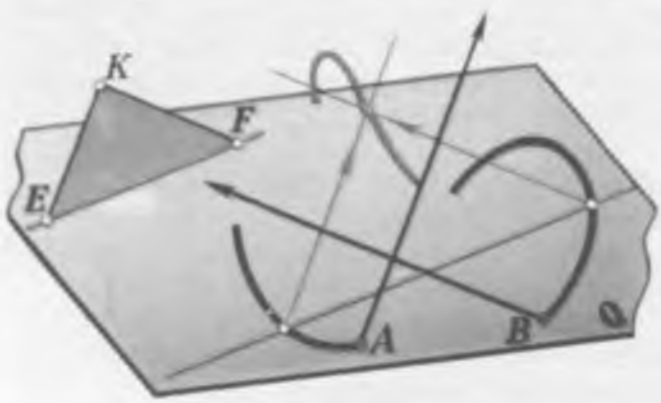
Последовательность соединения точек линии пересечения определяем методом одновременных обходов направляющих линий поверхностей. Поверхность цилиндра ограничена плоскостью Q_H.

3. Взаимное пересечение цилиндрических поверхностей

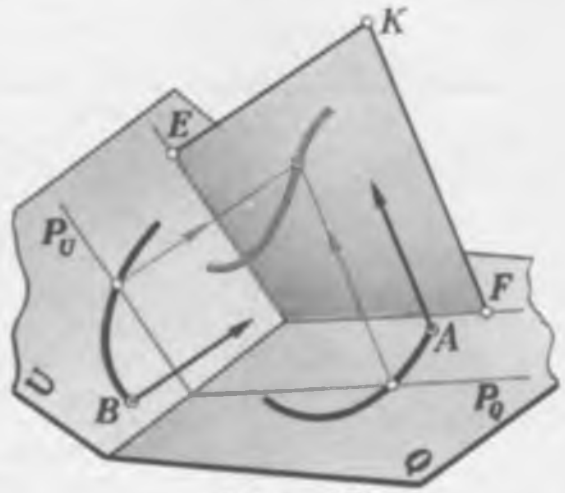
Если вершины пересекающихся конических поверхностей в заданных направлениях удалять в бесконечность, получим конические поверхности с несобственными вершинами — цилиндрические поверхности. Прямая линия, соединяющая несобственные вершины, является также несобственной, т. е. бесконечно удаленной.

Все плоскости, проходящие через такую прямую, взаимно параллельны. Они параллельны и направлениям удаления вершин в бесконечность, а значит, и образующим цилиндрических поверхностей.

На рис. 352 показана схема построения линии пересечения цилиндрических поверхностей, направляющие линии которых лежат в одной плоскости Q. Через какую-либо точку K, лежащую вне плоскости Q, проведем прямые KE и KF, параллельные соответственно образующим цилиндрических поверхностей. Этими прямыми линиями определится плоскость, которая пересечется плоскостью направляющих линий цилиндров по прямой линии.



Р и с. 352



Р и с. 353

Любая плоскость, параллельная плоскости KEF, след которой пересекает обе направляющие линии цилиндрических поверхностей, пересекает эти поверхности по образующим.

Точками пересечения таких образующих определяется линия пересечения поверхностей.

На рис. 353 показана схема построения линии пересечения цилиндрических поверхностей для случая, когда их направляющие линии лежат в разных пересекающихся плоскостях Q и U.

Одна цилиндрическая поверхность задана направляющей кривой в плоскости Q и направлением образующих — стрелкой точки A. Вторая цилиндрическая поверхность задана направляющей кривой в плоскости U и направлением образующих — стрелкой точки B.

Вспомогательные плоскости, параллельные направлениям образующих поверхностей, пересекают цилиндрические поверхности по образующим, а плоскости Q и U их направляющих линий — по прямым P_Q и P_V, которые пересекаются между собой на прямой пересечения плоскостей Q и U.

Точки пересечения образующих определяют линию пересечения цилиндрических поверхностей.

На рис. 354 построена линия пересечения двух цилиндров, направляющие линии которых лежат в одной горизонтальной плоскости Q_V.

Для определения направления следов вспомогательных плоскостей с целью нахождения точек пересечения образующих одной поверхности с другой поверхностью проведем через произвольно выбранную точку kk' прямые линии, параллельные образующим заданных поверхностей.

Точки пересечения ee' и ff' этих прямых линий с плоскостью определяют прямую линию ef, $e'f'$, параллельно которой проводят следы вспомогательных секущих плоскостей.

Следы P_Q, касательные к направляющим линиям цилиндров, показывают, что не все образующие цилиндров участвуют в пере-

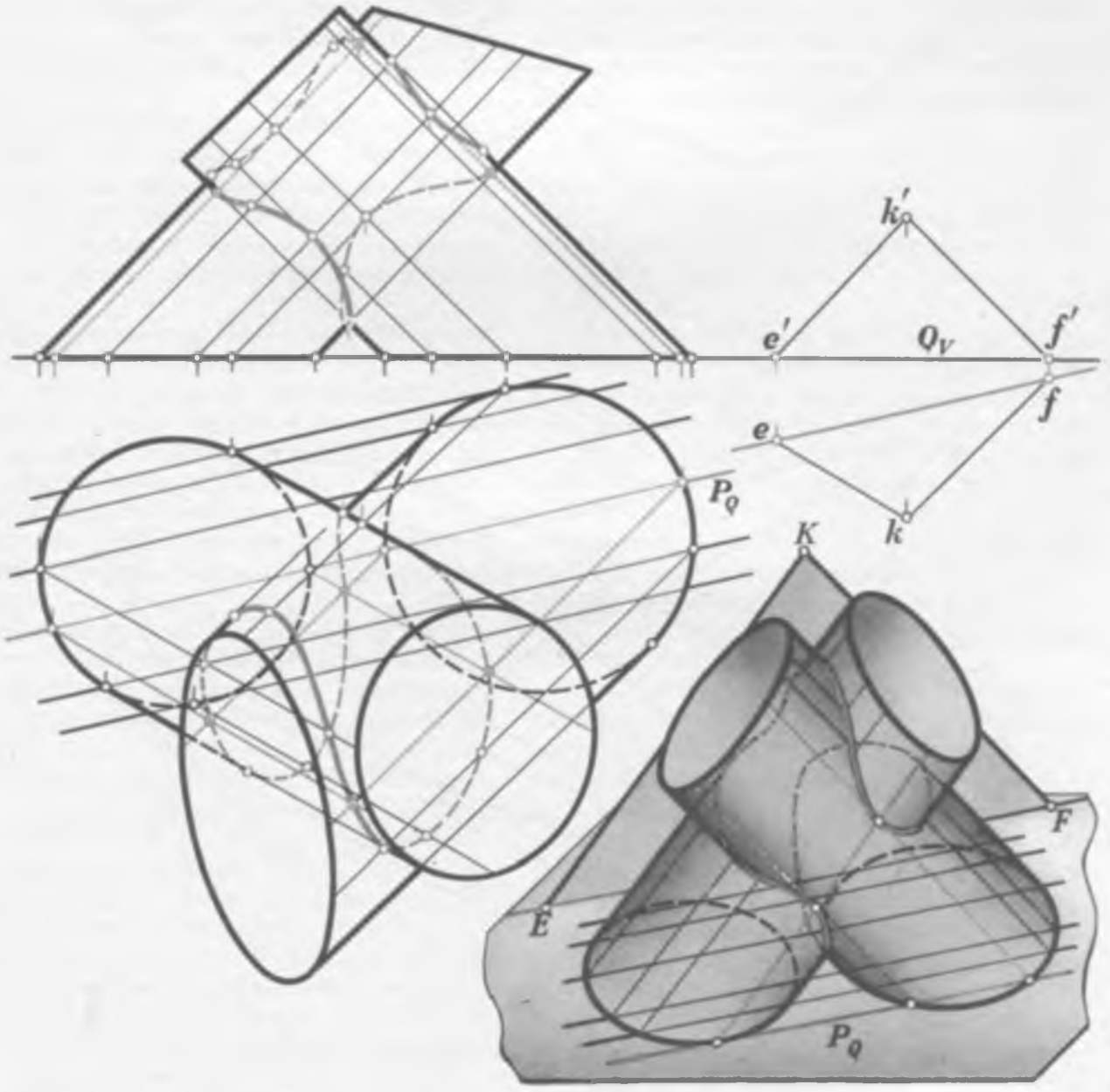
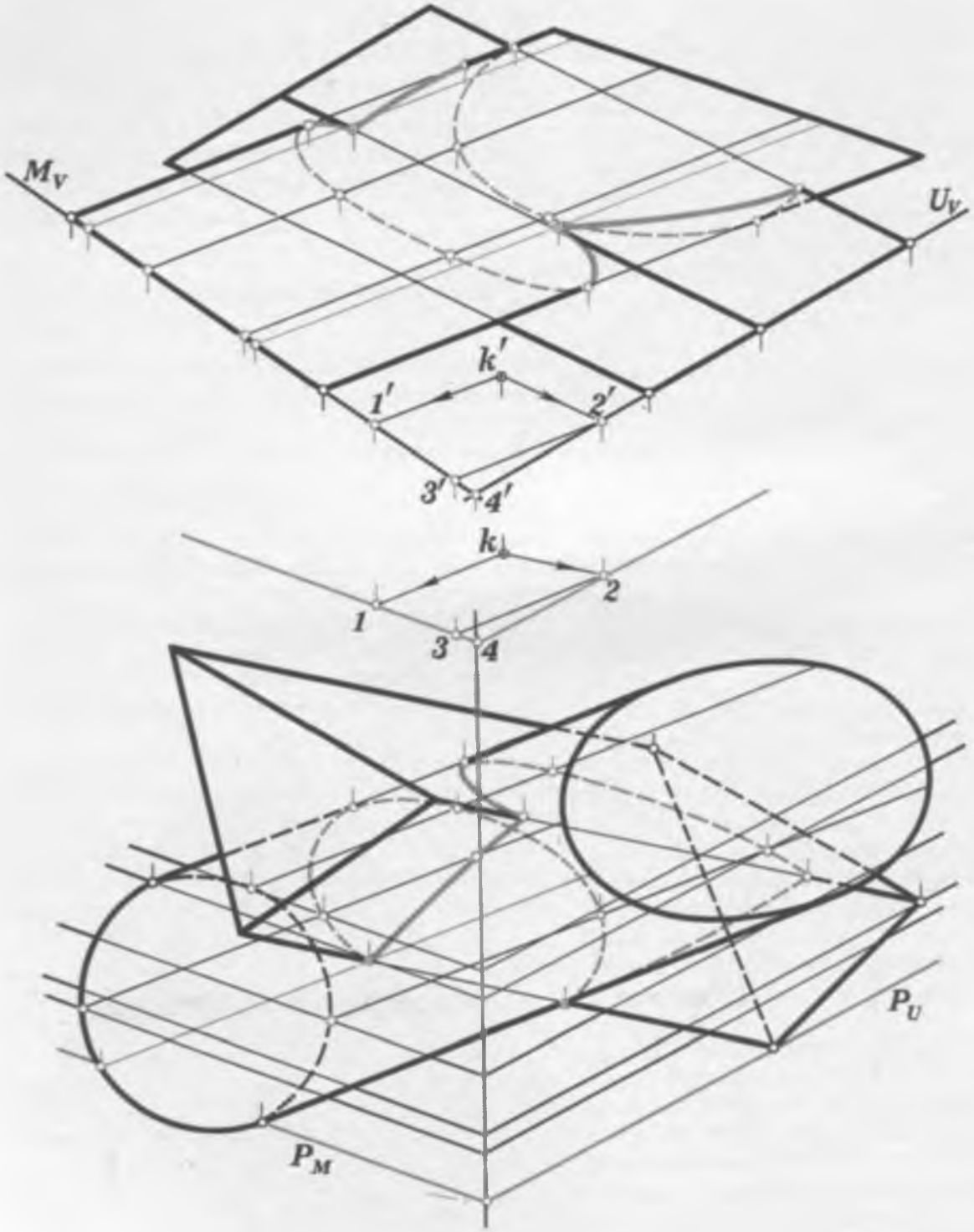


Рис. 354



Р и с. 355

сечении. Рассматриваемый случай дает одну замкнутую линию пересечения — линию врезки одной поверхности в другую.

Проводим следы вспомогательных секущих плоскостей через точки направляющих линий цилиндров, принадлежащих очерковым образующим.

Через точки пересечения следов вспомогательных плоскостей с направляющими линиями поверхностей проводим образующие и отмечаем точки их взаимного пересечения. Полученные точки принадлежат искомой линии пересечения заданных поверхностей.

Для определения последовательности соединения точек пересечения образующих применим метод одновременного обхода направляющих линий. Соединив найденные точки пересечения образующих, получаем одну замкнутую пространственную кривую линию.

Внизу справа (рис. 354) показана модель пересекающихся цилиндров.

На рис. 355 построена линия пересечения поверхностей цилиндра и призмы, направляющие линии которых расположены в разных одноименных проецирующих плоскостях — во фронтально-проецирующих плоскостях Mv и Uv, пересекающихся между собой по фронтально-проецирующей прямой линии.

Для определения на плоскостях направляющих линий направлений следов вспомогательных плоскостей через произвольно выбранную точку kk' проводим прямые линии $k1$, $k'1'$ и $k2$, $k'2'$, параллельные образующим поверхностей. Точки $11'$ и $22'$ являются точками пересечения этих прямых линий с плоскостями Mv и Uv. Через точку $22'$ проводим прямую линию 23, $2'3'$, параллельную прямой $k1$, $k'1'$, и находим точку $33'$ ее пересечения с плоскостью Mv.

Плоскость $k132$, $k'1'3'2'$ параллельна образующим обеих поверхностей и пересекается с плоскостью Mv по прямой линии 31, $3'1'$, которая в точке $44'$ пересекается линией пересечения плоскостей M_V и U_V. Плоскость $k132$, $k'1'3'2'$ пересекается с плоскостью Uv по прямой линии 24, $2'4'$.

Таким образом, на плоскостях Mv и Uv направляющих линий следы вспомогательных плоскостей параллельны соответственно прямым линиям 14, $1'4'$ и 42, $4'2'$.

Строим вспомогательные секущие плоскости, следы которых проходят через вершины направляющего многоугольника призмы и через точки направляющей линии цилиндра, принадлежащие очерковым его образующим.

Следы вспомогательных секущих плоскостей показывают, что цилиндр и призма полностью не пересекаются. Поэтому пересечение поверхностей является неполным, т. е. имеет вид врезки.

Образующие поверхностей, проходящие через точки пересечения парных следов P_M и P_U с направляющими линиями, пересекаются между собой в точках, принадлежащих искомой линии пересечения заданных поверхностей.

Для определения последовательности соединения точек линии пересечения поверхностей применяют метод одновременного обхода направляющих линий поверхностей.

На рис. 356 построена линия пересечения двух цилиндров. Направляющая линия одного цилиндра лежит в горизонтально-проецирующей плоскости N_H. Направляющая линия другого цилиндра находится во фронтально-проецирующей плоскости M_V.

Имеем две пересекающиеся поверхности второго порядка.

Для построения линии их взаимного пересечения воспользуемся вспомогательными секущими плоскостями параллельными образующим заданных поверхностей.

Определим направления следов вспомогательных плоскостей на плоскостях N_H и M_V направляющих линий. Выбираем горизонтально-проецирующую плоскость N_{1H} параллельно плоскости N_H и точку kk' вне этой плоскости. Через точку kk' проводим прямые линии $k1$, $k'1'$ и $k2$, $k'2'$, параллельные направлениям образующих заданных поверхностей, и строим точки их пересечения $11'$ и $22'$ с плоскостью N_{1H}. Таким образом, вспомогательные плоскости имеют следы на плоскости N_H, параллельной плос-

246

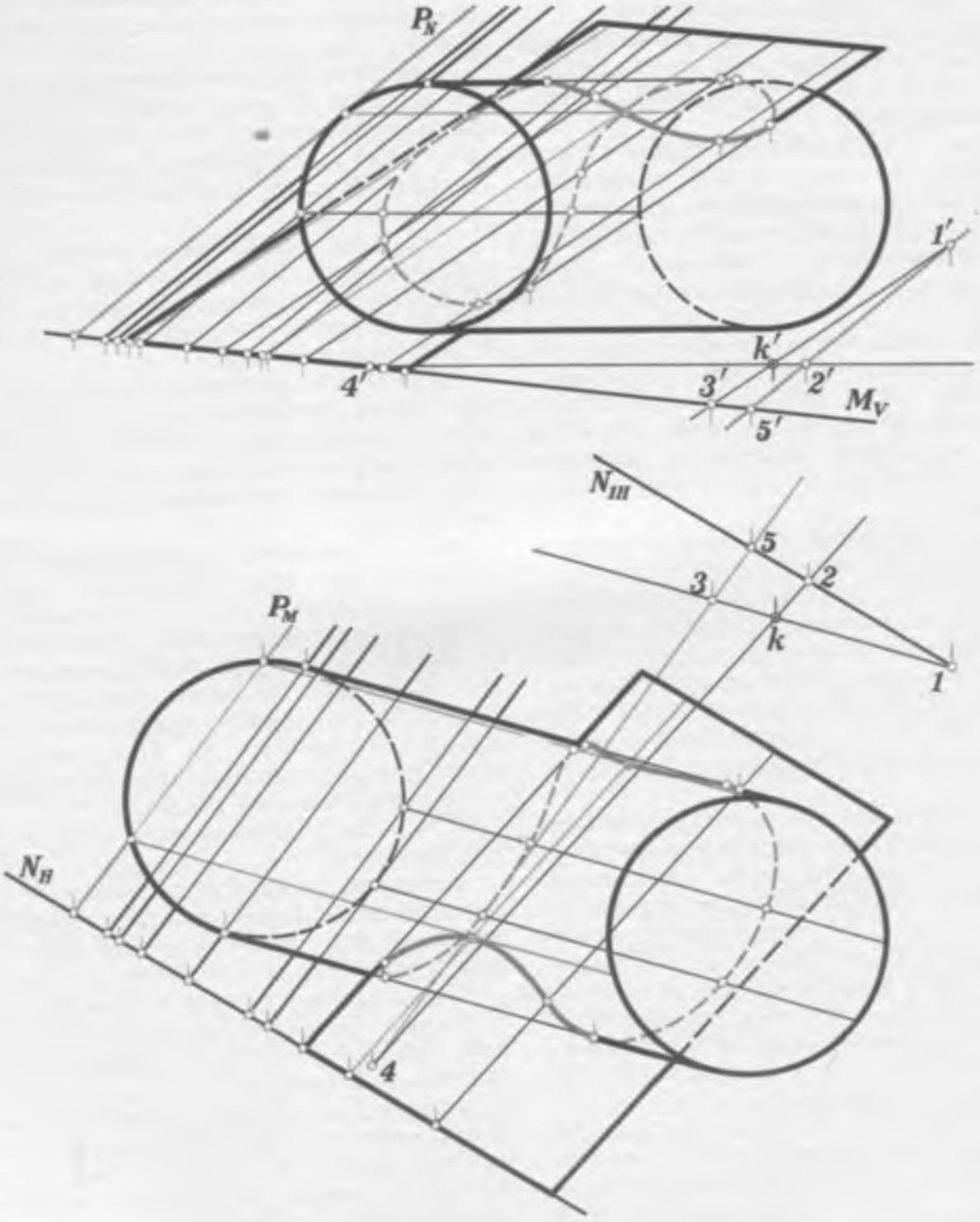


Рис. 356

кости N_{1H}, параллельные прямой линии *12*, *1'2'*.

Прямые *k1*, *k'1'* и *k2*, *k'2'* пересекаются с плоскостью M_V в точках *33'* и *44'*. Прямая линия *34*, *3'4'*, следовательно, указывает направление следов вспомогательных плоскостей на плоскости M_V.

Вспомогательная секущая плоскость, которая на плоскости N_H имеет след P_N ($P_N \parallel 1'2'$), на плоскости M_V имеет след P_M ($P_M \parallel 34$).

Построим на плоскостях N_H и M_V следы других вспомогательных секущих плоскостей. Через точки пересечения парных следов P_N и P_M с направляющими линиями проводим образующие и отмечаем точки их взаимного пересечения. Эти точки принадлежат искомой линии пересечения поверхностей.

Путем одновременных обходов направляющих линий устанавливается последовательность соединения точек искомой линии пересечения поверхностей.

Сначала определяются характерные (опорные) точки кривой линии пересечения поверхностей — точки, проекции которых находятся на проекциях контурных линий одной из поверхностей, крайние правые и крайние левые, наивысшие и наинизшие точки линии пересечения. Для определения таких точек выбираются соответственно и вспомогательные секущие плоскости. Следы этих плоскостей касаются направляющих линий поверхностей, проходят через точки очерковых образующих, через крайнюю правую и крайнюю левую точки направляющей линии.

По горизонтальной проекции чертежа определяем, что образующие поверхности цилиндра с направляющей линией в плоскости N_H не все участвуют в пересечении. По фронтальной проекции чертежа определяем, что образующие цилиндра с направляющей линией в плоскости M_H также не все участвуют в пересечении. Таким образом, у обеих поверхностей имеются образующие, не участвующие в пересечении, и, следовательно, имеем случай врезки поверхностей.

Каждая из поверхностей здесь не полностью пересекает другую поверхность.

Видимость в проекциях точек линии пересечения поверхностей определяется по условию, что видимой будет только та из точек кривой, которая принадлежит двум видимым образующим.

Точки пересечения в проекциях видимой образующей одной поверхности с невидимой образующей другой поверхности — невидимые точки; невидимыми будут и точки пересечения двух невидимых образующих.

Выделяя видимые точки кривой от невидимых ее точек получаем более наглядный чертеж искомой линии пересечения двух заданных поверхностей и видимость самих поверхностей в проекциях.

4. Пересечение линейчатой поверхности с плоскостью параллелизма (поверхности Каталана) цилиндрами и конусами

На рис. 357 построена линия пересечения цилиндроида, заданного направляющими линиями *kt*, *k't'* и *ef*, *e'f'* и плоскостью параллелизма M_V с цилиндром.

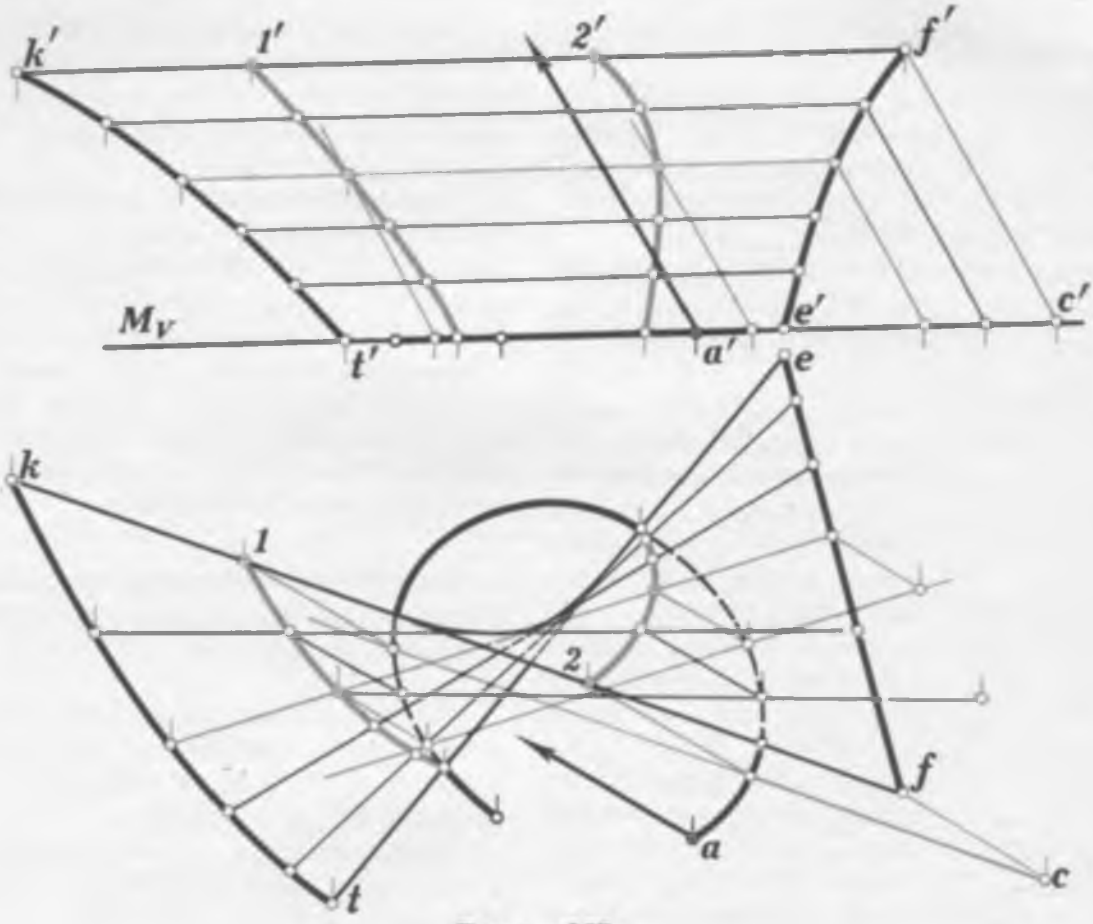
Направляющая линия цилиндра лежит в плоскости M_V, направление образующих указывает стрелка точки *aa'*.

Линию пересечения заданных поверхностей строим по точкам пересечения с цилиндром производящей линии цилиндроида в ряде ее положений. Эти точки находим с помощью вспомогательных плоскостей производящей линии, параллельных образующим цилиндра.

Вспомогательную плоскость, проведенную через производящую *fk*, *f'k'*, определяем прямыми линиями *fk*, *f'k'* и *fc*, *f'c'*; при этом прямая линия *fc*, *f'c'* параллельна образующим цилиндра.

Плоскость *cfk*, *c'f'k'* пересекает плоскость M_V по прямой линии, параллельной прямой *fk*, *f'k'*, а цилиндр — по его образующим. Точки *11'* и *22'* пересечения этих образующих цилиндра с производящей линией *kf*, *k'f'* цилиндроида принадлежат искомой линии пересечения рассматриваемых поверхностей. Подобным же методом строим и другие точки кривых линий пересечения заданных поверхностей.

248



Р и с. 357

На рис. 358 построена линия пересечения коноида с конусом. Коноид задан направляющими линиями ab, $a'b'$ и cd, $c'd'$ и плоскостью параллелизма N_H, а конус — направляющей линией, лежащей в плоскости M_V, и вершиной ss'.

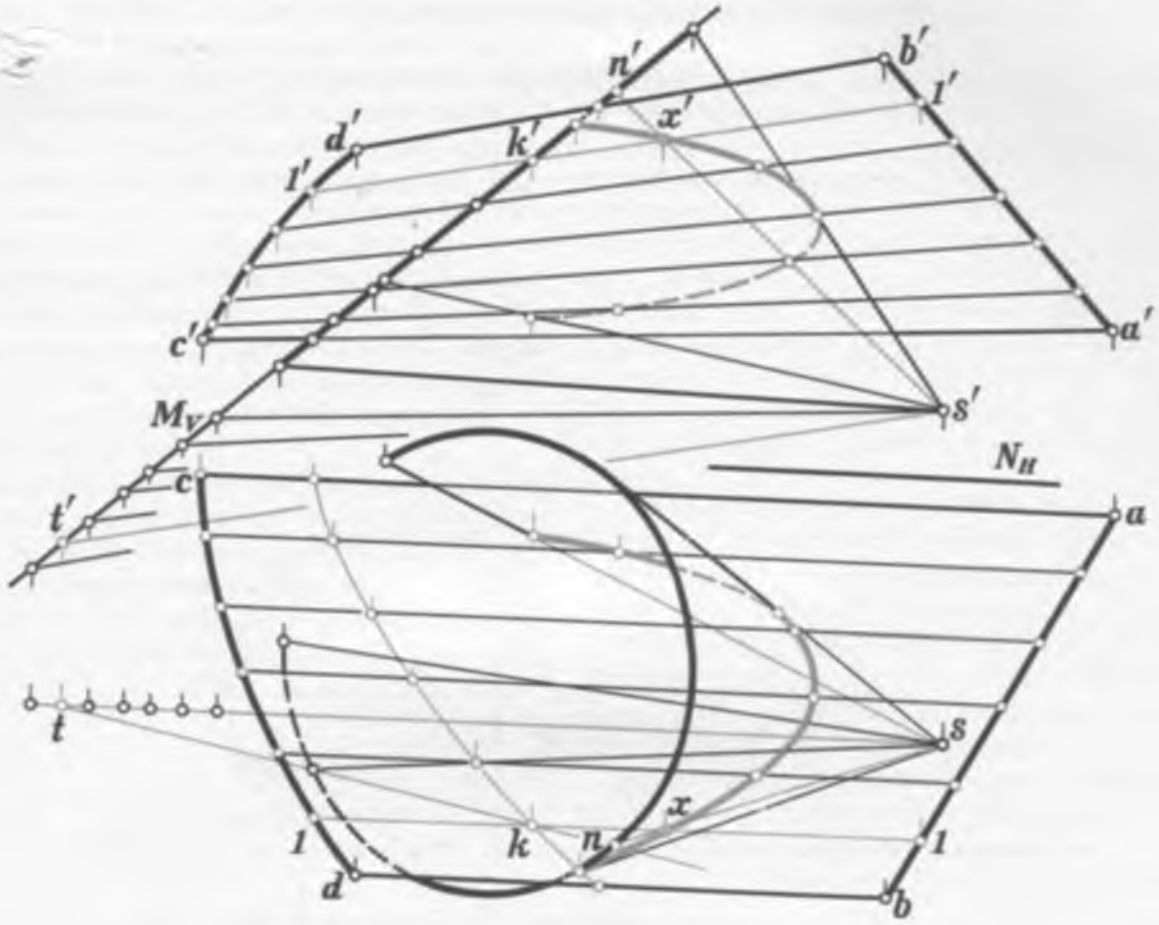
Линию пересечения заданных поверхностей строим по точкам пересечения с конусом производящей линии коноида в ряде ее положений.

Точки пересечения производящей линии коноида с конусом определяются с помощью вспомогательной плоскости производящей, проходящей через вершину ss' заданного конуса. Для построения точки пересечения, например, производящей линии 11, $1'1'$ коноида с конусом, проводим через вершину конуса прямую линию, параллельную положению 11, $1'1'$ производящей линии, и находим точку ее пересечения tt' с плоскостью M_V направляющей линии конуса. Производящая линия 11, $1'1'$ коноида пересекается с плоскостью M_V в точке kk'.

Вспомогательная плоскость, проведенная через указанную производящую и проходящая через вершину конуса, таким образом, пересекает плоскость M_V по прямой линии tk, $t'k'$, а конус — по образующей sn, $s'n'$, проходящей через точку nn' пересечения прямой линии tk, $t'k'$ с направляющей линией конуса.

Точка xx' пересечения образующей sn, $s'n'$ конуса с производящей линией 11, $1'1'$ коноида принадлежит линии пересечения заданных поверхностей. Указанным методом построен ряд точек, принадлежащих искомой линии пересечения.

Плоскость M_V направляющей линии конуса пересекает поверхность коноида по кривой линии.



Р и с. 358

5. Пересечение поверхности одинакового ската цилиндром

Построим линию пересечения поверхности одинакового ската цилиндром.

На рис. 359 показаны поверхность одинакового ската, образующие которой составляют с плоскостью уровня Q_V угол δ, и цилиндр. Образующие цилиндра параллельны плоскости Q_V, а его направляющая линия лежит в плоскости N_H.

Кривая линия ef, $e'f'$ является ребром возврата заданной поверхности одинакового ската. Направление образующих цилиндра указывает стрелка точки aa' направляющей его линии.

Плоскости, параллельные плоскости O_V, пересекают поверхность одинакового ската по линиям уровня, горизонтальные проекции которых — эвольвенты проекции ef ребра возврата ef, $e'f'$.

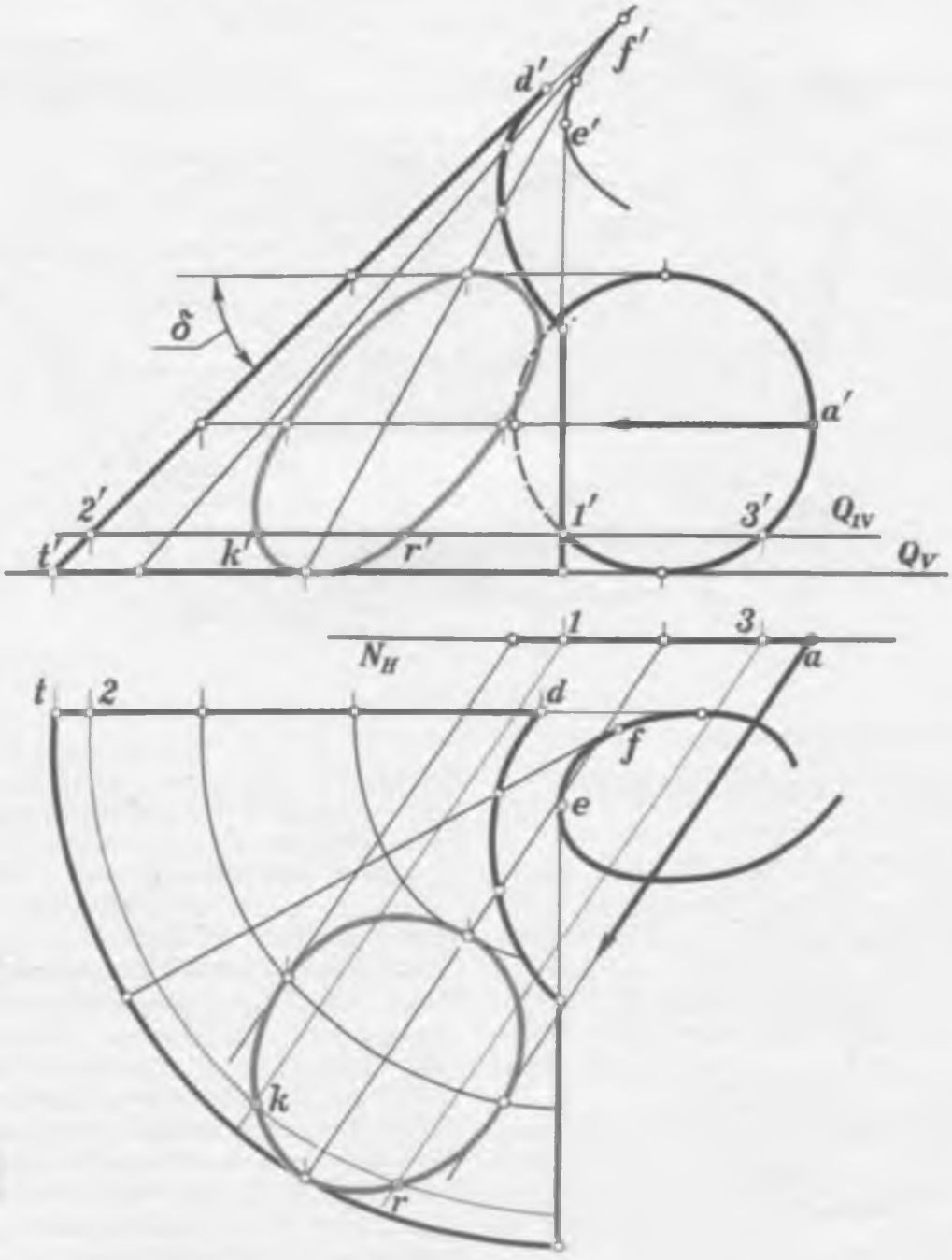
Линии уровня являются одновременно ходами точек производящей линии поверхности одинакового ската.

Определим точки пересечения указанных ходов точек производящей прямой линии поверхности одинакового ската с цилиндром. Плоскость Q_{1V}, параллельная плоскости Q_V, пересекает цилиндр по образующим, которые проходят через точки $11'$ и $33'$ направляющей его линии. В этой же плоскости находится ход точки $22'$ производящей линии dt, $d't'$ поверхности одинакового ската. Точки rr' и kk' пересечения построенного хода точки $22'$ производящей линии поверхности одинакового ската с образующими ци-

линдра принадлежат искомой линии пересечения заданных поверхностей.

Строя ходы ряда точек производящей линии поверхности одинакового ската и определяя точки их пересечения с соответствующими образующими цилиндра, намечаем достаточное число точек, определяющих вид и положение искомой линии пересечения поверхностей.

Можно также воспользоваться способами преобразования эпюра, представляя цилиндр проецирующей поверхностью.



Р и с. 359

ВЗАИМНОЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ

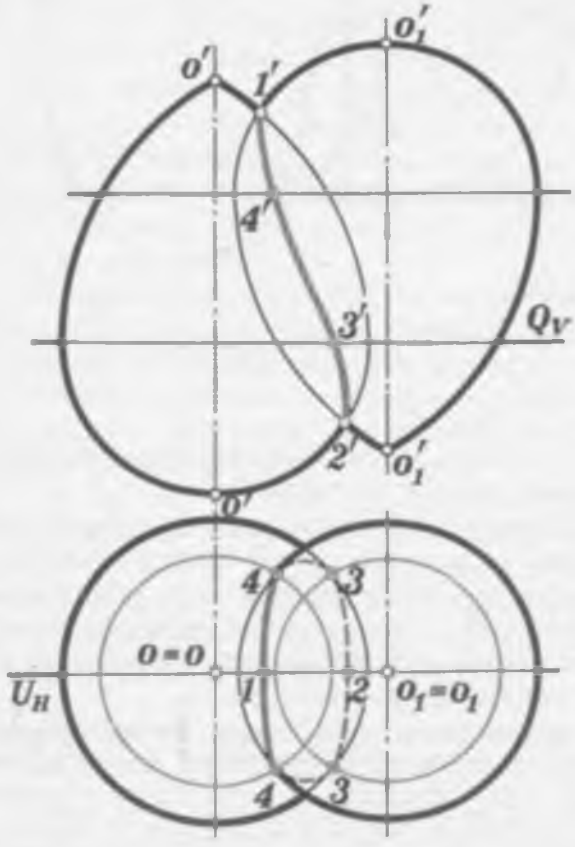
§61

Ходами точек производящей линии поверхности вращения являются, как известно, окружности. При построении линии взаимного пересечения поверхностей вращения определяют прежде всего главные точки линии пересечения — точки, лежащие на главном меридиане, на экваторе, высшую и низшую точки относительно плоскости, перпендикулярной оси поверхности вращения.

Рассмотрим построение линии взаимного пересечения поверхностей вращения с параллельными осями.

На рис. 360 показаны две пересекающиеся поверхности вращения, оси которых параллельны и лежат в одной фронтальной (главной) меридиональной плоскости.

Точки *11'* и *22'* пересечения главных меридиональных сечений поверхностей одновременно являются высшей и низшей точками линии пересечения.



Р и с. 360

В плоскости Q_V экватора поверхности вращения с осью *oo*, *o'o'* находится параллель поверхности вращения с осью o_1o_1, $o_1'o_1'$. Экватор пересекается этой параллелью в двух точках *33'*, которые являются главными точками линии пересечения. Точки (две) *44'* пересечения экватора поверхности вращения с осью o_1o_1, $o_1'o_1'$ параллелью другой поверхности вращения следует рассматривать так же, как главные точки линии пересечения.

Для построения промежуточных точек линии пересечения выбираем любую горизонтальную плоскость, расположенную где-либо между высшей и низшей точками. В этой плоскости находятся параллели обеих поверхностей. Точки (две) пересечения этих параллелей являются промежуточными точками линии пересечения поверхностей.

Построенная указанным методом линия пересечения симметрична относительно общей фронтальной меридиональной плоскости U_H заданных поверхностей вращения.

На рис. 361 построена линия пересечения поверхностей вращения, оси которых и главные меридиональные плоскости параллельны.

Для определения высшей и низшей точек линии пересечения проводим меридиональную плоскость N_H поверхностей, проходящую через оси обеих поверхностей. Поворачиваем ее вокруг оси *oo* , *o'o'* в положение, параллельное фронтальной плоскости проекций. Ось o_1o_1, $o_1'o_1'$ занимает положение o_2o_2, $o_2'o_2'$.

Повернутая вместе с осью поверхность вращения имеет очерк, показанный на чертеже тонкой линией, который можно построить как прежний очерк, сдвинутый вправо на величину, равную фронтальной проекции расстояния между осями o_1o_1, $o_1'o_1'$ и o_2o_2, $o_2'o_2'$.

Точки $1_1 1_1'$ и $2_1 2_1'$ пересечения построенного (тонкой линией) очерка с очерком поверхности вращения с осью *oo*, *o'o'* являются

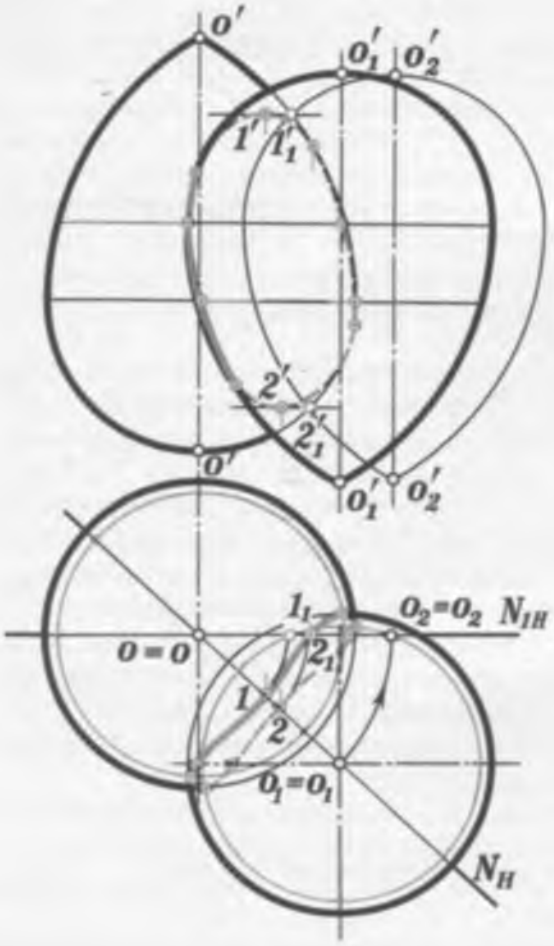


Рис. 361

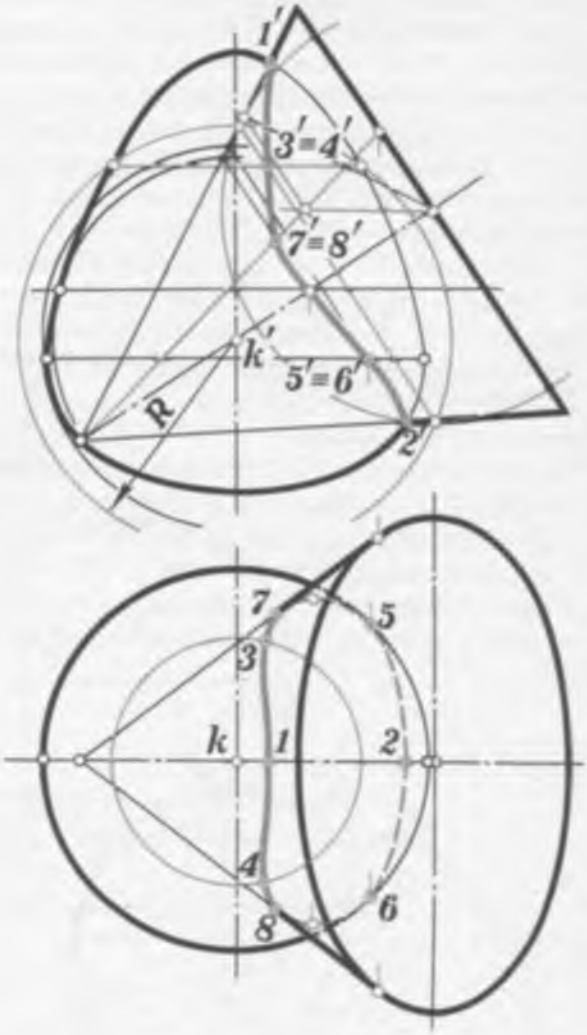


Рис. 362

смещенными проекциями высшей и низшей точек линии пересечения поверхностей.

Восстановлением плоскости N_H определяем проекции *11'* и *22'* высшей и низшей точек.

Точки линии пересечения, находящиеся на экваторах заданных поверхностей, определяем как точки пересечения экватора одной поверхности с соответствующей параллелью другой поверхности.

Точки линии пересечения, лежащие на главных меридианах, можно определить как точки пересечения фронтального меридиана одной поверхности с линией пересечения этой фронтальной меридиональной плоскостью другой поверхности.

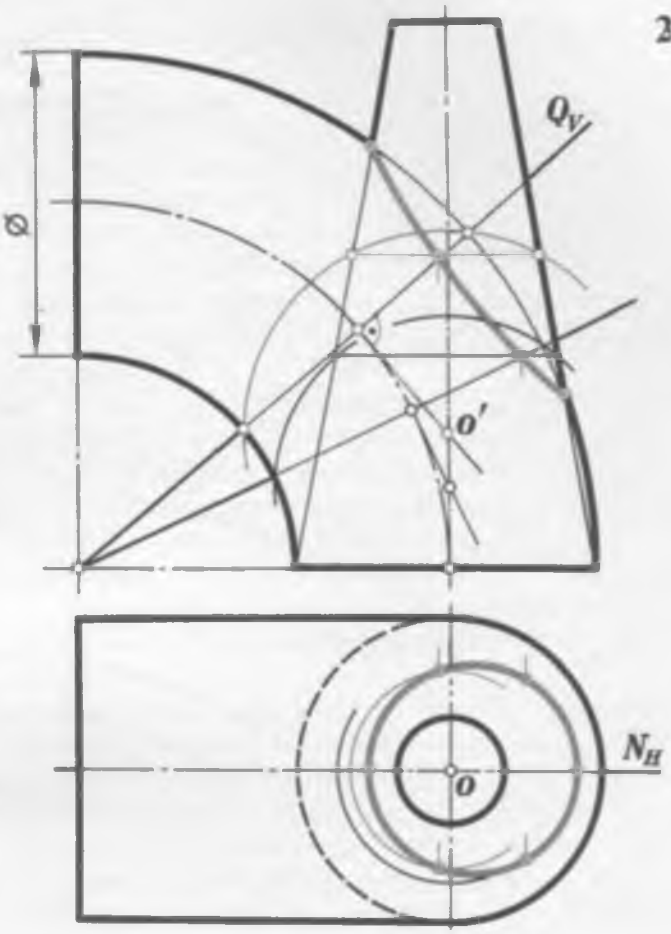
Заметим, что горизонтальная проекция линии пересечения имеет точки касания с горизонтальными проекциями экваторов поверхностей, а фронтальная проекция линии пересечения — точки касания с фронтальными очерками поверхностей.

Рассмотрим построение линии пересечения поверхностей вращения, оси которых (рис. 362) пересекаются и имеют общую фронтальную меридиональную плоскость. При таком расположении осей можно, применяя метод вспомогательных сфер, выби-

рать на заданных поверхностях их пересекающиеся между собой параллели. Сферы с центром в точке пересечения осей заданных поверхностей вращения пересекаются по их параллелям.

Примем точку kk' пересечения осей заданных поверхностей вращения за центр вспомогательных сфер. Можно наметить ряд сфер, которые пересекут обе поверхности по их параллелям. Например, сфера радиусом R пересекает поверхность вращения с вертикальной осью и поверхность вращения (конус) с наклонной осью по параллелям. Полученные параллели пересекаются между собой в точках $33'$ и $44'$, принадлежащих искомой линии пересечения заданных поверхностей. Горизонтальные проекции этих точек найдем на горизонтальной проекции параллели, проведя линию связи.

Точки $11'$ и $22'$ пересечения фронтальных меридианов являются одновременно высшей и низшей точками линии пересечения. Точки $55'$ и $66'$ линии пересечения, лежащие на экваторе, определяются с помощью вспомогательной сферы соответствующим радиусом. Точки $77'$ и $88'$ линии пересечения, лежащие на горизонтальном очерке поверхности вращения с наклонной осью (конус вращения), строим при помощи сферы, вписанной в поверхность вращения с криволинейной образующей.



Р и с. 363

На рис. 363 изображены пересекающиеся прямой круговой усеченный конус, ось которого перпендикулярна к горизонтальной плоскости проекций, и четверть кругового кольца, ось которого перпендикулярна к фронтальной плоскости проекций.

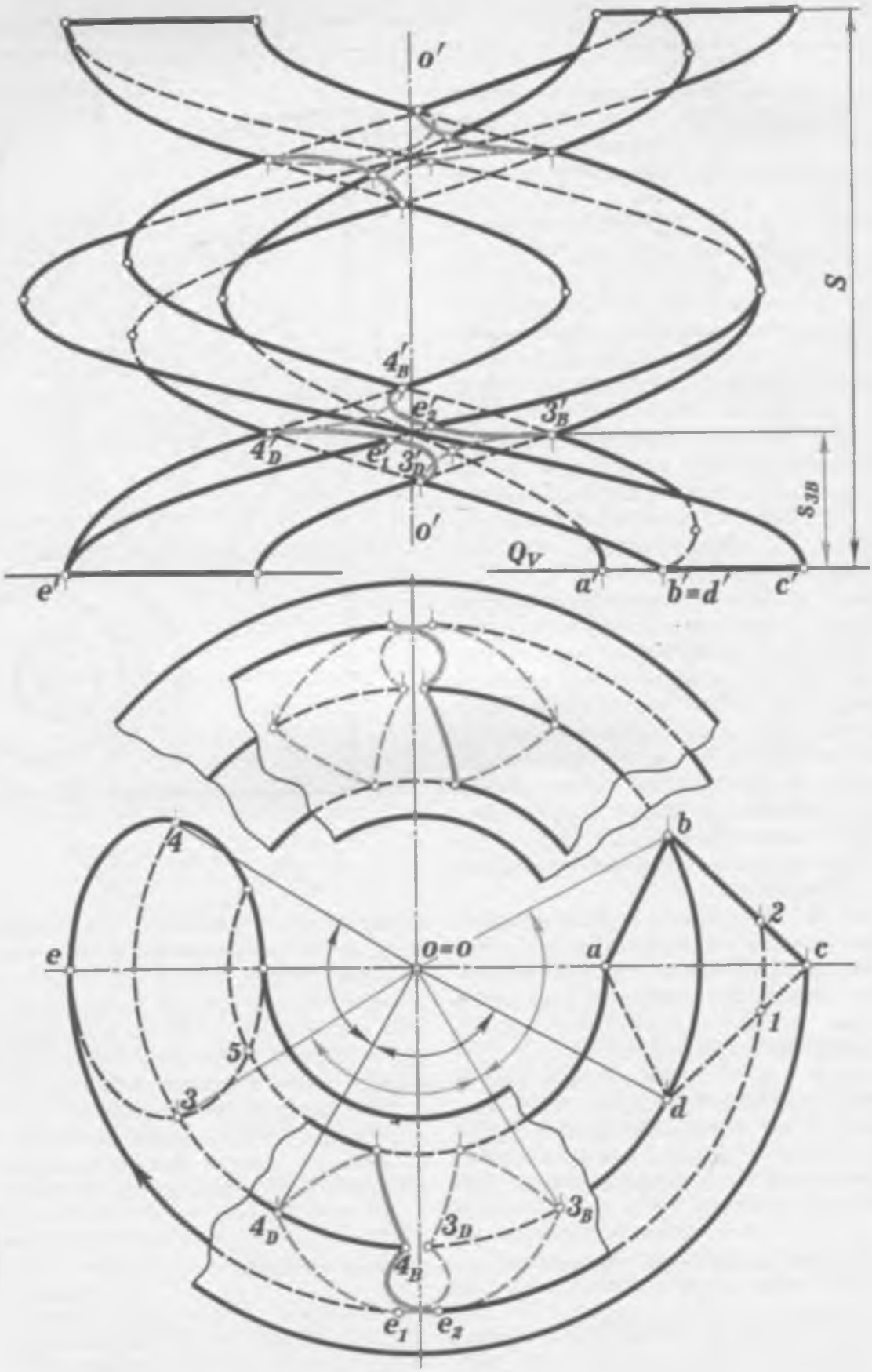
Плоскость, в которой перемещается центр производящей окружности тора, совпадает с главной меридиональной плоскостью $Nн$ конуса. Учитывая это, производящую окружность тора, например, если она расположена в плоскости Q_V, можно принять за линию пересечения тора вспомогательной сферой. Центр oo' сферы следует выбрать на оси конуса; тогда сфера с конусом пересечется также по окружности. Окружности пересекаются в точках, принадлежащих искомой линии пересечения.

Метод, которым решена эта задача, известен как метод эксцентрических сфер в отличие от метода концентрических сфер, которым решена предыдущая задача.

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ВИНТОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ МЕЖДУ СОБОЙ И ДРУГИМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

§ 62

При построении линий пересечения винтовых поверхностей между собой и другими поверхностями за производящие линии винтовых поверхностей принимают линии пересечения их плоскостями, перпендикулярными к осям винтовых поверхностей.



Р и с. 364

На рис. 364 показаны построения линии взаимного пересечения двух винтовых поверхностей одинакового шага с общей осью. Производящие линии (кривая и многоугольник) поверхностей расположены в плоскости Q_V, перпендикулярной к оси oo, $o'o'$. Одна винтовая поверхность с производящей кривой линией имеет правое направление, другая — левое направление.

Ходы (цилиндрические винтовые линии) точек, расположенных на производящих линиях поверхностей и находящихся на одинаковых расстояниях от оси oo, $o'o'$, пересекаются между собой, и точки их пересечения принадлежат искомой линии пересечения. Например, ходы точек $33'$ и $44'$ производящей кривой линии пересекаются ходами точек bb' и dd' производящей линии $abcd$, $a'b'c'd'$.

Заданные поверхности имеют одинаковый шаг, а производящие их линии лежат в одной плоскости. В соответствии с этим горизонтальные проекции точек пересечения ходов находят на биссектрисах углов, вершины которых расположены в точке o, а стороны проходят через горизонтальные проекции 3 и 4, b и d указанных выше точек. Точка 3_B, например, является горизонтальной проекцией точки пересечения хода точки $33'$ производящей кривой линии с ходом точки bb' производящей линии $abcd$, $a'b'c'd'$. Фронтальная проекция $3'_B$ точки пересечения этих ходов находится на пересечении фронтальных проекций ходов точек bb' и $33'$. Эту проекцию можно построить, используя угловое смещение точки bb' или $33'$. Определив соответствующее ему осевое перемещение s_{3B}, строим фронтальную проекцию $3'_B$ точки пересечения рассматриваемых ходов.

Ход точки ee' производящей кривой линии пересекается ходами точек $11'$ и $22'$ производящей линии $abcd$, $a'b'c'd'$ в точках, горизонтальными проекциями которых являются точки e_1 и e_2, расположенные на биссектрисах углов $eo1$ и $eo2$. Фронтальные проекции e_1' и e_2' этих точек находятся на фронтальной проекции хода точки ee'. Построениями, аналогичными указанным, определяем необходимый ряд точек, принадлежащих искомой линии пересечения заданных поверхностей.

Последовательность соединения точек линии пересечения определяем методом одновременного обхода производящих линий заданных поверхностей. Этот метод подобен методу, примененному выше при построении линии пересечения цилиндров и конусов, имеющих плоские направляющие линии.

Точка aa' производящей линии $abcd$, $a'b'c'd'$ и точка $55'$ производящей кривой линии приняты за начальные точки одновременных обходов. Рассмотренное пересечение винтовых поверхностей относится к случаю врезки.

На рис. 365 показаны построения линии пересечения винтовой поверхности с цилиндром.

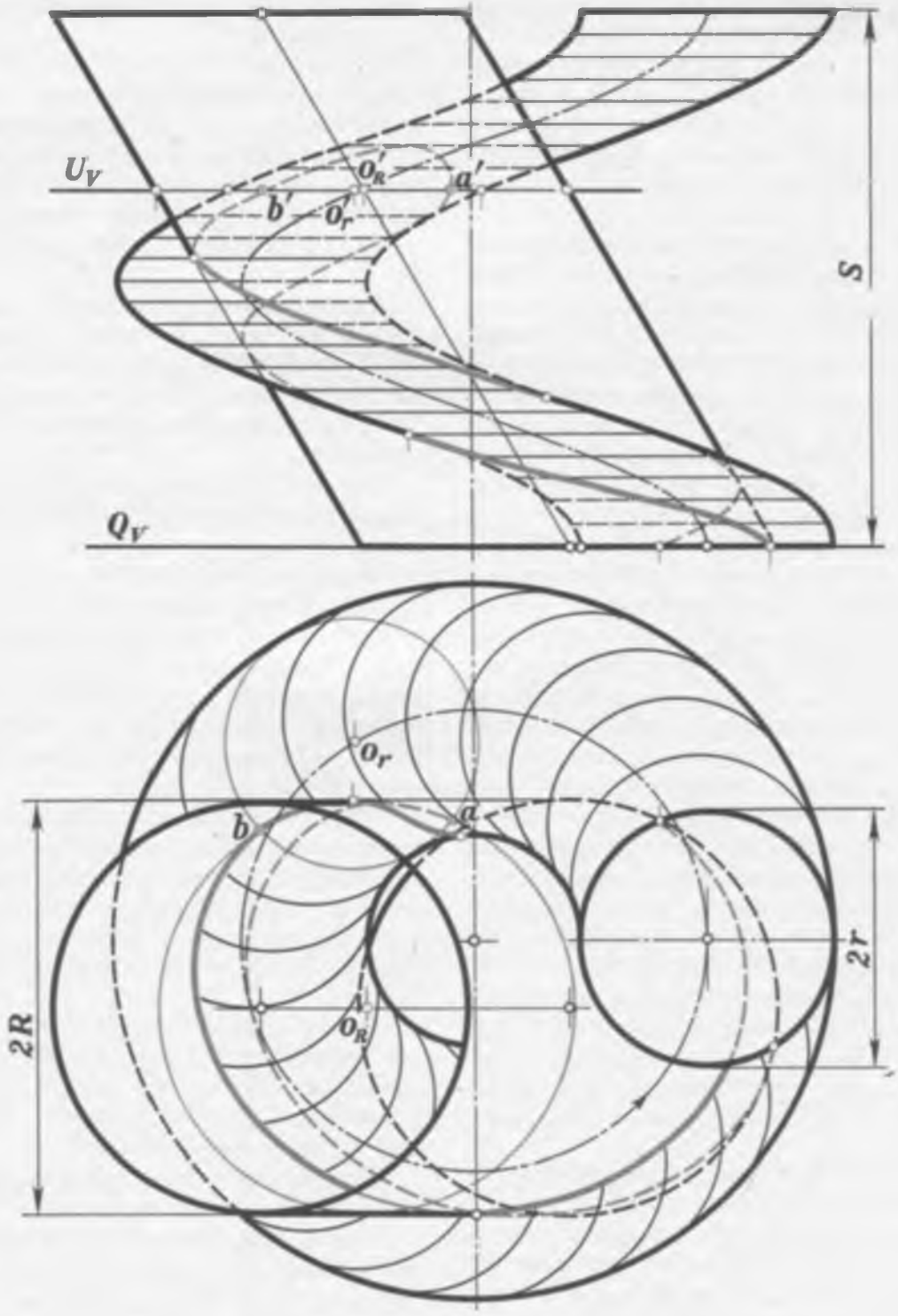
Винтовая поверхность задана базовой гелисой левого направления и производящей линией — окружностью радиусом r, лежащей в горизонтальной плоскости Q_V, перпендикулярной к оси винтовой поверхности. Цилиндр задан очерками. Направляющая линия — окружность радиусом R — лежит в плоскости Q_V.

Линия пересечения построена по точкам пересечения цилиндра производящей линией винтовой поверхности в различных ее положениях. Горизонтальные плоскости производящей линии винтовой поверхности пересекают цилиндр по окружностям радиусом R.

Линии пересечения винтовых поверхностей соосными с ними поверхностями вращения мы часто встречаем при обточках на поверхность вращения винтов с прямоугольной и треугольной резьбой.

На рис. 366 винт с квадратной нарезкой обточен на поверхность вращения.

Линии пересечения поверхности вращения кольцевыми винтовыми коноидами, которыми представлены верхняя и нижняя полки нарезки, строят по точкам пересечения кольцевых коноидов параллелями ряда точек производящей линии поверхности вращения. Плоскости этих параллелей пересе-



Р и с. 365



Рис. 366



Рис. 367

кают каждый из коноидов по образующим. Следовательно, линии пересечения заданных поверхностей построены по точкам пересечения параллелей поверхности вращения соответствующими образующими коноидов.

Построение захода нарезки показано на рисунке в предположении, что полный заход на станке совершается равномерно при повороте винта на 360°. В этих условиях проекцией захода на плоскость, перпендикулярную винтовой оси, является спираль Архимеда, а проекции нарезки захода на плоскость, параллельную винтовой оси определяются как линии пересечения винтовых коноидов полок со спиральным цилиндром.

На рис. 367 показана обточка винта правого хода с треугольной нарезкой на поверхность вращения.

Треугольная нарезка, как уже указывалось выше, образуется двумя кольцевыми геликоидами, производящие прямые линии которых пересекаются осью винта и наклонены к ней под равными углами.

Линии пересечения строят по точкам пересечения поверхности вращения образующими кольцевых косых геликоидов полок нарезки. Эти точки определяют методом вращения, как при нахождении точек пересечения поверхности вращения прямой линией, пересекающейся с осью поверхности вращения.

На рисунке показано также построение захода нарезки, который предполагается равномерным и полным при обороте винта на 360°.

Проекцией линии впадины нарезки на плоскость, перпендикулярную к винтовой оси в этих условиях является спираль Архимеда. Проекцию нарезки захода на плоскости, параллельные винтовой оси, строят при помощи направляющего конуса.

§ 63 ВЗАИМНОЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА. ОСОБЫЕ СЛУЧАИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ

При пересечении между собой поверхностей второго порядка линиями пересечения в общем случае являются пространственные кривые линии. В некоторых частных случаях взаимного расположения поверхностей рассматриваемой группы линиями их пересечения могут быть кривые второго порядка. Известно, что поверхность второго порядка пересекается плоскостью по кривой второго порядка.

Если плоскость пересекает две пересекающиеся поверхности второго порядка, линиями сечения являются две кривые второго порядка, пересекающиеся в четырех точках. Через эти точки проходит линия пересечения поверхностей. Она является кривой четвертого порядка; ее называют *биквадратной кривой*.

Так как порядок линии пересечения равен произведению порядков поверхностей, линией пересечения поверхностей второго порядка всегда является алгебраическая, в общем случае пространственная, кривая четвертого порядка.

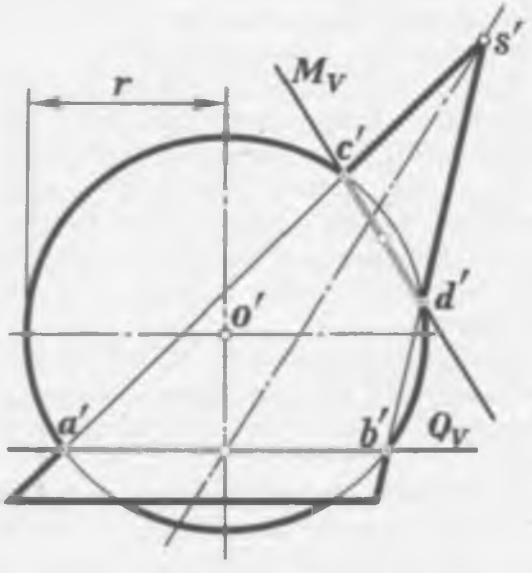


Рис. 368

Кривая четвертого порядка может распадаться на более простые кривые низших порядков. Например, линией пересечения двух цилиндров с параллельными осями является биквадратная кривая, которая распадается на четыре прямые — общие образующие цилиндров. Имеются случаи распадения биквадратной кривой на две кривые второго порядка.

Большое разнообразие форм биквадратной кривой и ее свойства описываются рядом теорем.

Теорема 1. *Если две поверхности второго порядка пересекаются по одной плоской кривой линии, то они имеют и вторую плоскую кривую линию пересечения.*

Известно, что любая плоская кривая на поверхности второго порядка является кривой второго порядка.

Вторая кривая линия пересечения тоже является кривой второго порядка, поскольку порядок этой линии определяется как разность порядков биквадратной кривой — кривой четвертого порядка и порядка первой линии.

Следствие 1. *Если сфера пересекает какую-либо поверхность второго порядка по одной окружности, то она пересекает эту поверхность и по другой окружности.*

Указанная теорема и следствие из нее включают в себя и такие случаи, когда одна из распавшихся кривых пересечения поверхностей второго порядка является мнимой.

На рис. 368 построена линия пересечения сферы с конусом, направляющей линией которого служит параллель ab, $a'b'$ сферы, а вершина ss' находится во фронтальной меридиональной плоскости сферы. Эти поверхности заданы фронтальными очерками.

Окружность ab, $a'b'$ является первой линией пересечения заданных поверхностей. Второй линией пересечения является окружность cd, $c'd'$, расположенная во фронтально-проецирующей плоскости.

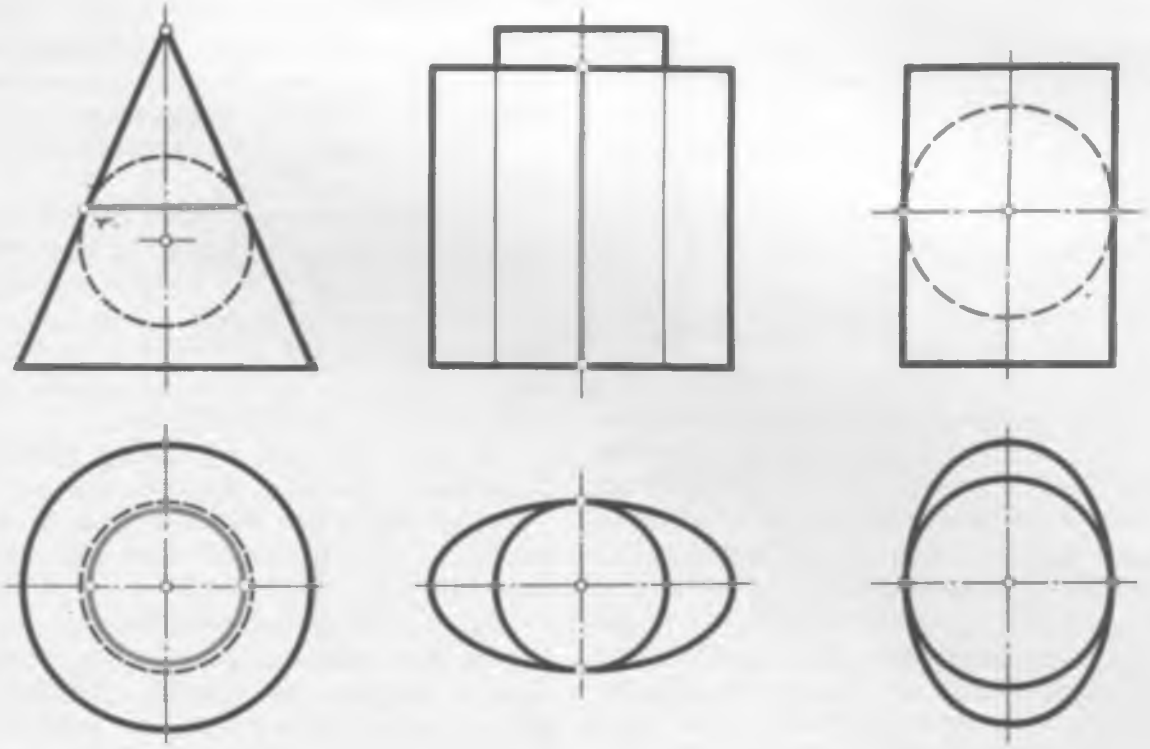


Рис. 369 Рис. 370 Рис. 371

Следствие 2. *Если биквадратная кривая распадается на пару совпавших кривых второго порядка или на четыре совпавшие прямые, то имеется касание поверхностей вдоль линии второго или первого порядка соответственно.*

Например, сфера, вписанная в конус вращения, касается его по окружности (рис. 369); или два цилиндра второго порядка касаются друг друга по прямой линии (рис. 370).

Возможен частный случай, когда биквадратная кривая вырождается в точку. Здесь две поверхности касаются друг друга в точке. Например, сфера касается цилиндра второго порядка в точке (рис. 371).

Теорема 2 (о двойном соприкосновении). *Две поверхности второго порядка, имеющие в двух их общих точках общие касательные плоскости, пересекаются между собой по двум кривым линиям второго порядка.*

На рис. 372 показан пример такого пересечения поверхностей второго порядка. Здесь эллиптический цилиндр пересекается с цилиндром вращения. Оси поверхностей пересекаются и взаимно перпендикулярны. Поверхности имеют двойное прикосновение в точках $11'$ и $22'$. В этих точках они имеют

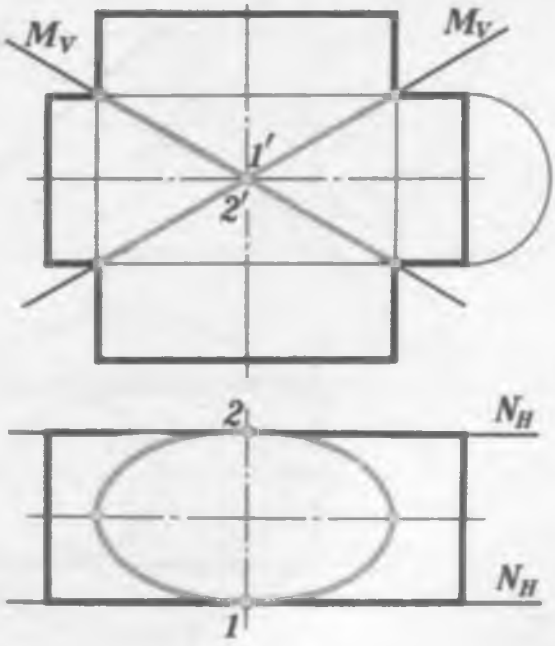


Рис. 372

общие касательные плоскости. Линия пересечения поверхностей распадается на две кривые второго порядка, которые проходят через точки прикосновения *11'* и *22'* и через точки пересечения образующих их фронтальной плоскости симметрии.

На рис. 373 показан пример пересечения поверхностей второго порядка. Здесь цилиндр вращения, ось которого перпендикулярна к профильной плоскости проекций, пересекается с конусом.

Заданные поверхности в их общих точках *aa'* и *bb'* имеют общие касательные плоскости R_{AW} и R_{BW}, перпендикулярные к профильной плоскости проекций. Линиями пересечения рассматриваемых поверхностей являются эллипсы, расположенные во фронтально-проецирующих плоскостях M_V и M_{IV}.

Теорема о двойном соприкосновении применяется и для решения задач на построение круговых сечений тех поверхностей второго порядка, которые их имеют. При этом пользуются сферой, имеющей двойное соприкосновение с данной поверхностью.

Например, чтобы определить круговые сечения эллиптического цилиндра, следует выбрать сферу с центром на оси цилиндра и соприкасающуюся с цилиндром (рис. 374).

Образующие цилиндра касаются сферы в точках *11'* и *22'*.

Согласно теореме, линия пересечения цилиндра сферой распадается на пару плоских кривых, лежащих во фронтально-проецирующих плоскостях M_V. Такими кривыми линиями являются окружности. Любая плоскость, параллельная плоскости M_V, пересекает цилиндр по окружности.

На рис. 375 показан пример применения теоремы о двойном прикосновении к определению круговых сечений конуса второго порядка с нормальным эллиптическим сечением.

Вспомогательную сферу выбираем с центром на оси конуса так, чтобы она соприкасалась с конусом. Например, сфера с центром *oo'* касается конуса в двух точках *11'* и *22'*. В этих точках у конуса и сферы имеются общие касательные плоскости T_W.

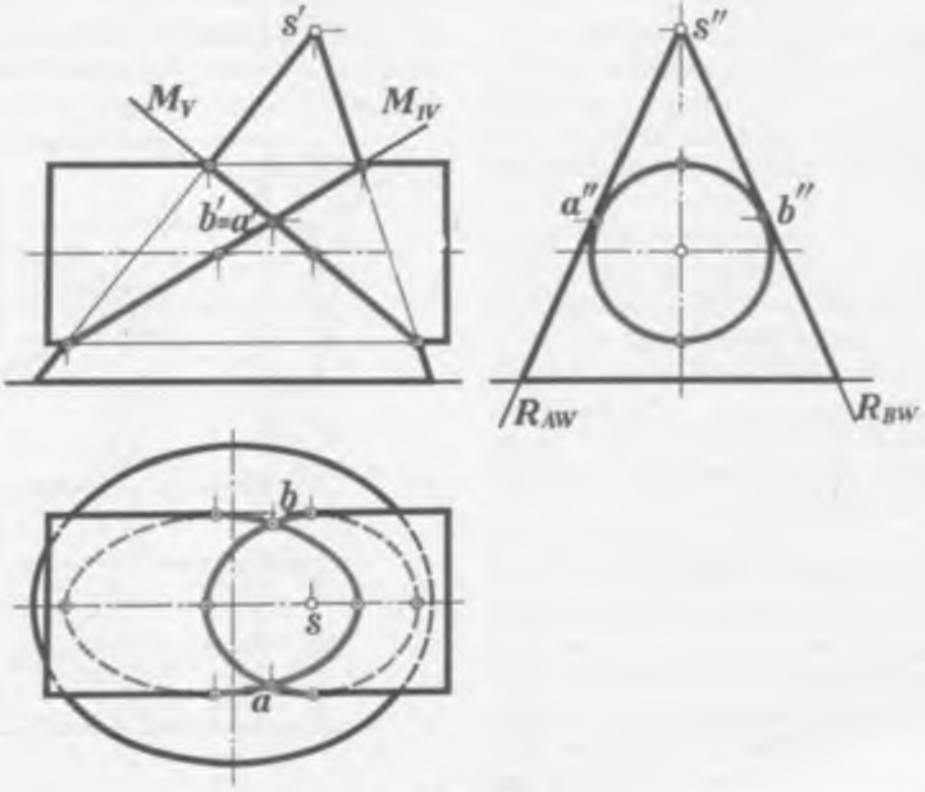


Рис. 373

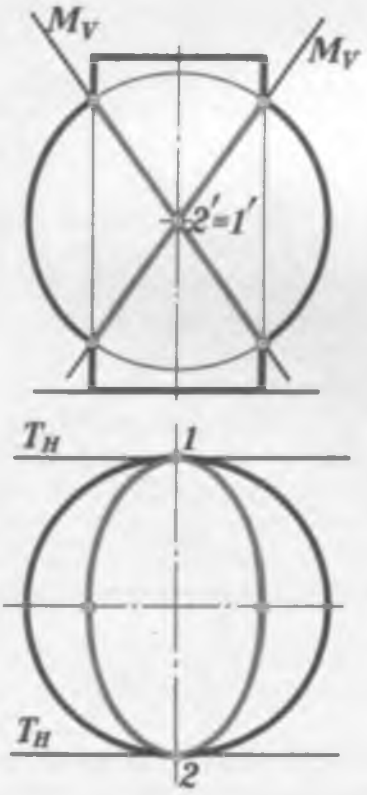


Рис. 374

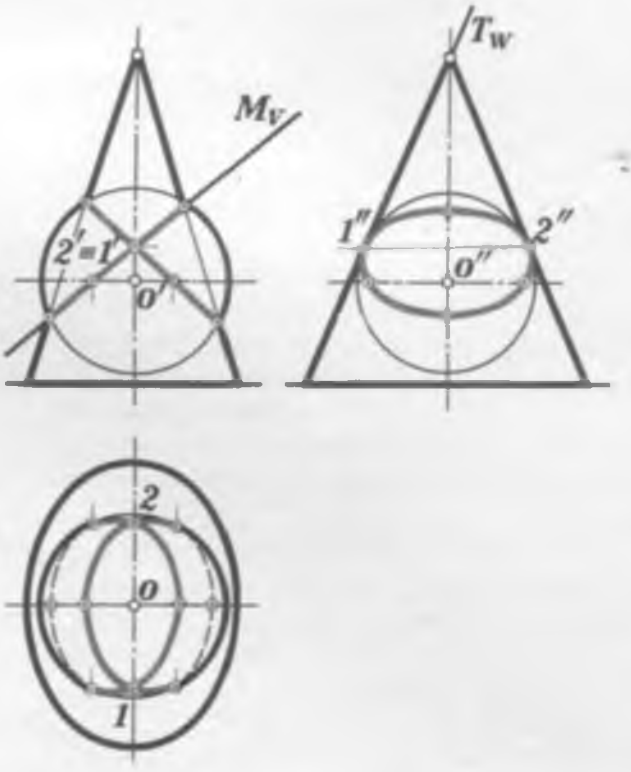


Рис. 375

Плоскости M_V круговых сечений проходят через прямую 12, $1'2'$. Они пересекают конус по окружностям. Любая плоскость, параллельная плоскости M_V, пересекает конус по окружности. Такие сечения эллиптического цилиндра или конуса второго порядка называют *антипараллельными* сечениями.

Теорема 3. *Если две пересекающиеся поверхности второго порядка касаются в трех точках, то они соприкасаются вдоль кривой второго порядка.*

Следствие. *Если две поверхности второго порядка касаются друг друга по кривой линии, то эта линия является кривой второго порядка.*

Теорема 4 (теорема Монжа). *Если две поверхности второго порядка описаны около третьей поверхности второго порядка (или вписаны в нее), то они пересекаются по линии, распадающейся на две кривые второго порядка.*



Рис. 376

262 На рис. 376 пересекающиеся конусы описаны около сферы. Они касаются сферы по окружностям с диаметрами *12* и *34*. Здесь линиями пересечения двух конических поверхностей являются эллипс и парабола — кривые второго порядка, плоскости которых перпендикулярны к плоскости, определяемой осями конусов.

Теорема Монжа является частным случаем теоремы о двойном соприкосновении. Ею обычно пользуются, когда имеется пересечение поверхностей вращения второго порядка, описанных около общей сферы или вписанных в сферу, например, при конструировании трубопроводов из листового материала.

Теорема 5. *Если пересекающиеся поверхности второго порядка имеют общую плоскость симметрии, то линия их пересечения проецируется на эту плоскость в виде кривой второго порядка.*

Проекцией пространственной кривой линии пересечения двух цилиндров вращения с пересекающимися осями (рис. 377) на плоскость, параллельную плоскости симметрии поверхностей, является гипербола.

На рис. 378 методом вспомогательных сфер построена линия пересечения двух конусов вращения, оси которых пересекаются и параллельны фронтальной плоскости проекций.

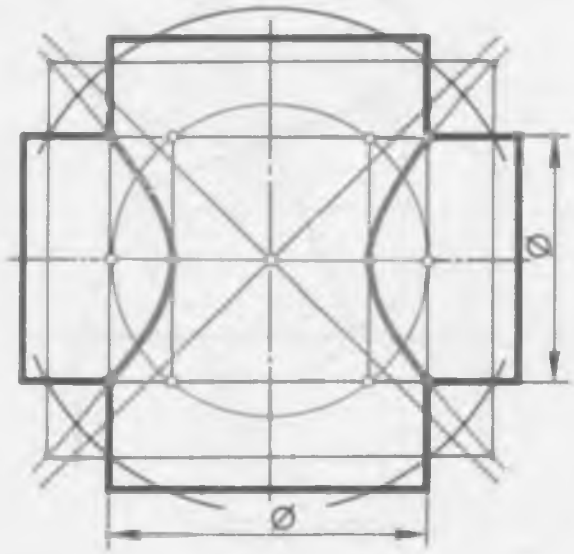


Рис. 377

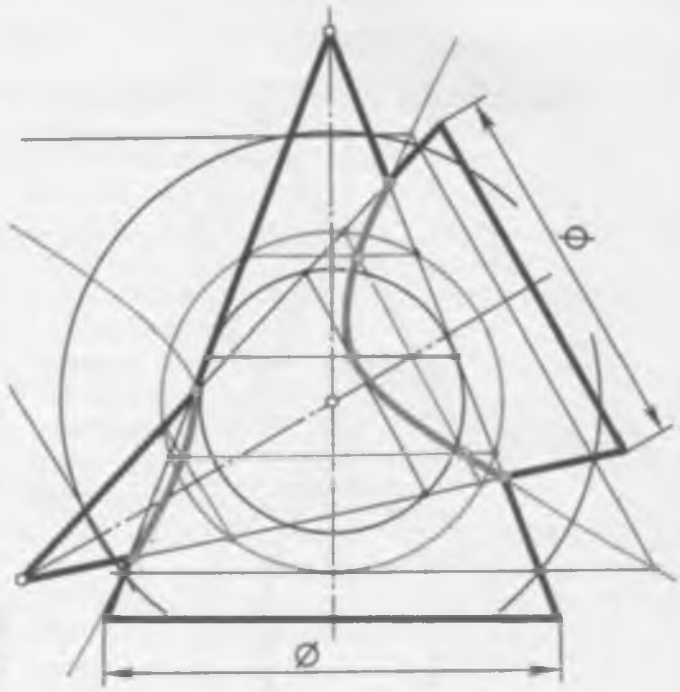


Рис. 378

Проекцией линии пересечения конусов на фронтальную плоскость проекций является гипербола.

Пространственная кривая линия пересечения поверхностей конуса и цилиндра вра-

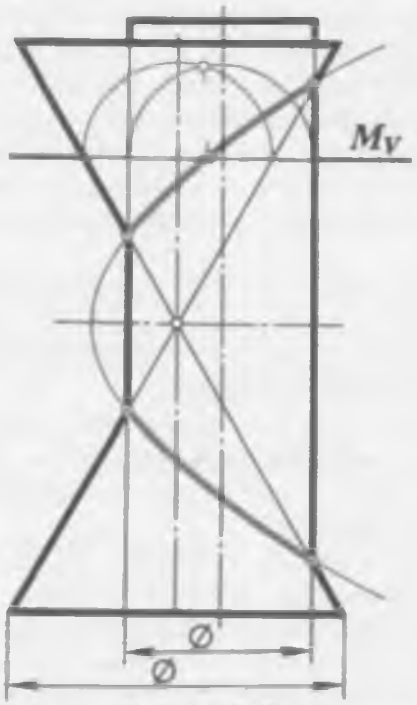


Рис. 379

щения с параллельными осями (рис. 379) проецируется на плоскость, параллельную плоскости симметрии поверхностей, в виде параболы.

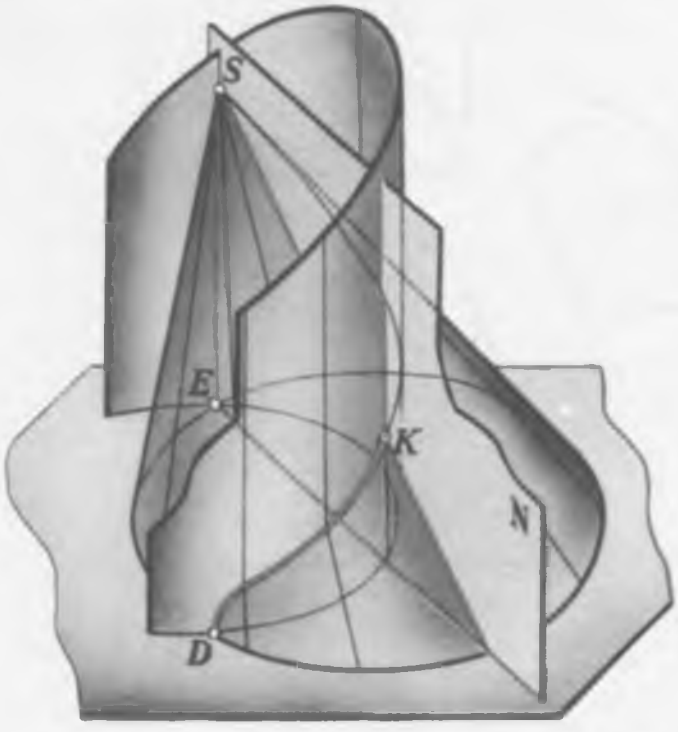
Линия пересечения двух поверхностей второго порядка может распадаться на прямую и пространственную кривую третьего порядка.

На рис. 380 заданы пересекающиеся цилиндр вращения и эллиптический конус с круговым основанием. Прямолинейная образующая SE конуса совпадает с прямолинейной образующей цилиндра.

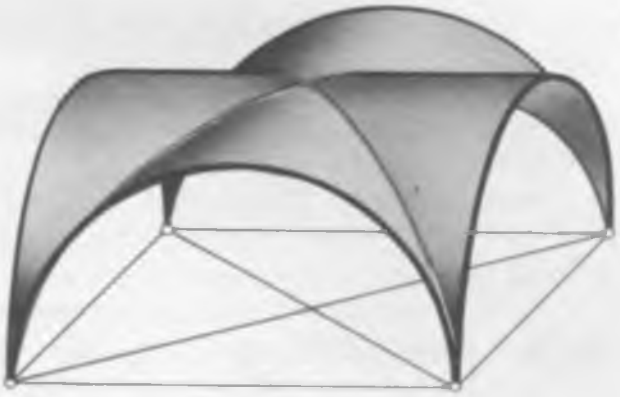
Здесь биквадратная кривая линия пересечения поверхностей найдена с помощью вращающихся проецирующих вспомогательных секущих плоскостей N. Она представлена прямой SE и кривой третьего порядка SKD.

Любая плоскость, пересекающая линию пересечения поверхностей, пересекает ее в четырех точках.

Одна из них находится на прямолинейной части линии пересечения поверхностей. Три остальные точки принадлежат криволинейной части этой линии.



Р и с. 380

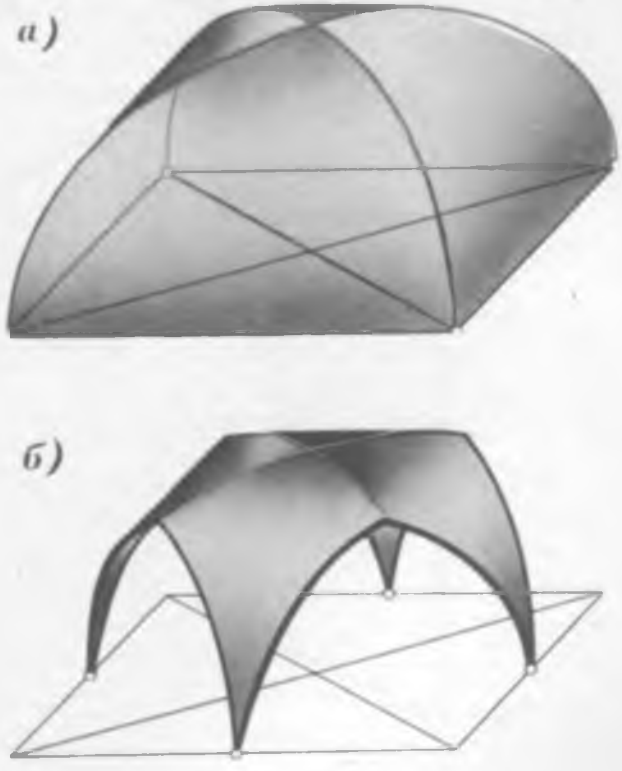


Р и с. 381

Покрытия ряда общественных зданий и инженерных сооружений часто осуществляются в виде сводов.

На рис. 381 показан римский *крестовый свод* с четырьмя колпаками. Он представляет собой два пересекающихся полуцилиндра, описанных около эллипсоида вращения. Линиями пересечения полуцилиндров являются плоские кривые.

Лотковый свод образуется двумя цилиндрами одинакового диаметра, описанными



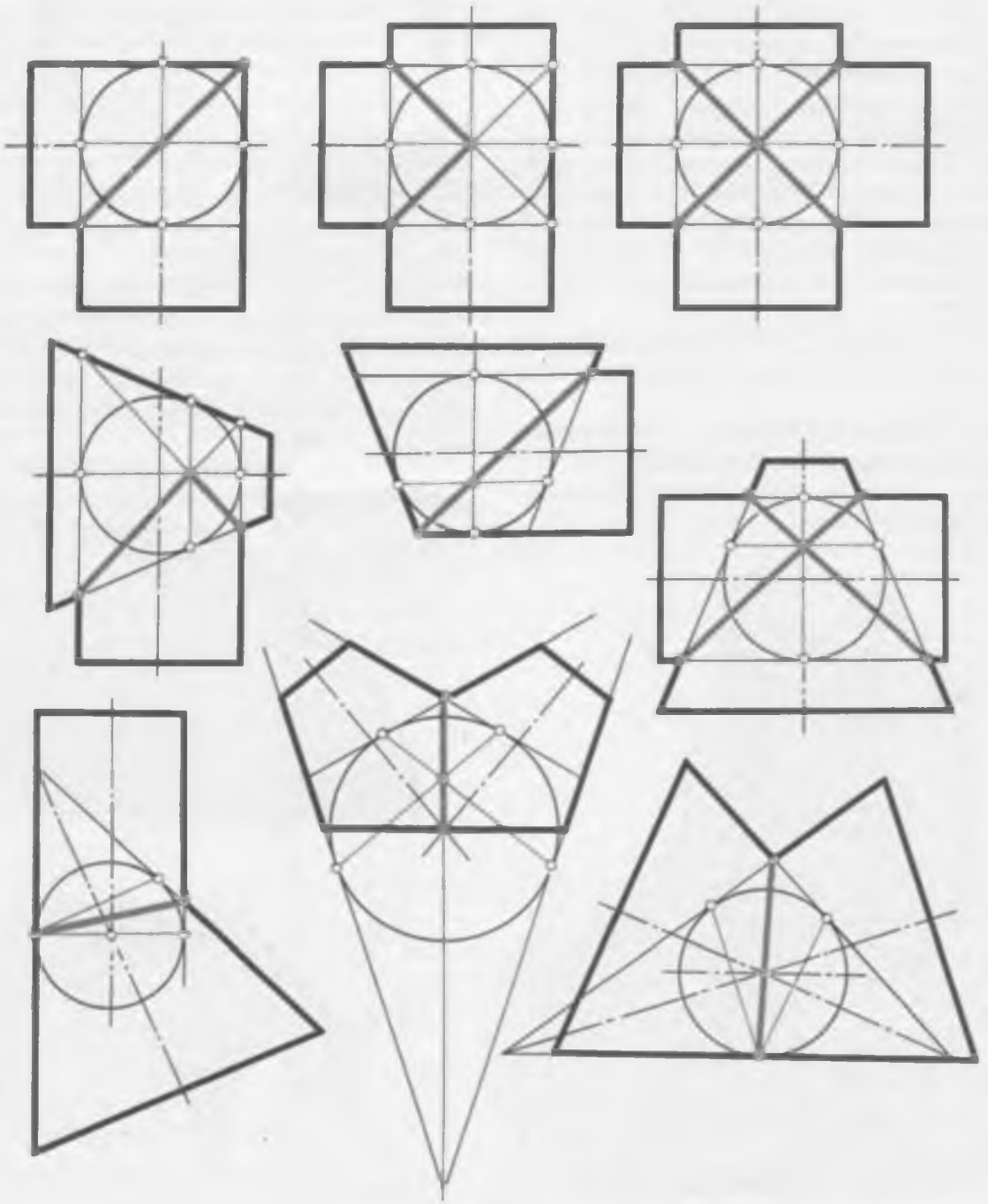
Р и с. 382

около сферы. Лотки пересекаются по двум плоским кривым.

На рис. 382, *а* показан лотковый свод с четырьмя щеками. На рис. 382, *б* показан открытый лотковый свод.

Плоские кривые пересечения поверхностей второго порядка применяются и при конструировании поверхностей ледорезов. Такая поверхность может быть образована поверхностями трех конусов, попарно описанных около одной и той же сферы.

На рис. 383 показаны различные примеры конструирования переходов труб с пересекающимися осями.



Р и с. 383

2. Уравнение $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, представляет кривую *гиперболического* типа. Это гипербола или пара пересекающихся прямых.

3. Уравнение $y^2 = 2px$ характеризует кривую линию *параболического* типа — параболу, пару параллельных прямых (в частном случае совпадающих) или мнимое место точек.

Изучение кривых линий второго порядка представляет значительный интерес ввиду широкого применения их в ряде разделов физики, в астрономии, механике, архитектуре и др.

Известно, например, что планеты движутся по эллипсам. Траекториями движения твердого тела могут быть эллипс и парабола. Направленные под углом к горизонту камень, снаряд, неуправляемые баллистические ракеты движутся по параболам.

Кривые линии второго порядка называют *кониками* или *линиями конических сечений*. Они получаются, например, при пересечении конуса вращения плоскостями.

Рассмотрим кривые второго порядка и их некоторые свойства.

1. Эллипс

Эллипс представляет собой геометрическое место точек, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек (фокусов) есть величина постоянная.

Пусть в плоскости даны две точки F_1 и F_2 (фокусы эллипса) на расстоянии $2c$ друг от друга (рис. 216).

Любая точка E плоскости принадлежит эллипсу, если соблюдается условие:

$$EF_1 + EF_2 = 2a,$$

где $2a$ — данная длина.

Если фокусы F_1 и F_2 совпадают, то

$$EF_1 = EF_2 = a.$$

Получаем геометрическое место точек, равноудаленных от одной данной точки, т. е. окружность. Поэтому *окружность есть частный вид эллипса.*

Уравнение эллипса имеет следующий вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где $b^2 = a^2 - c^2$.

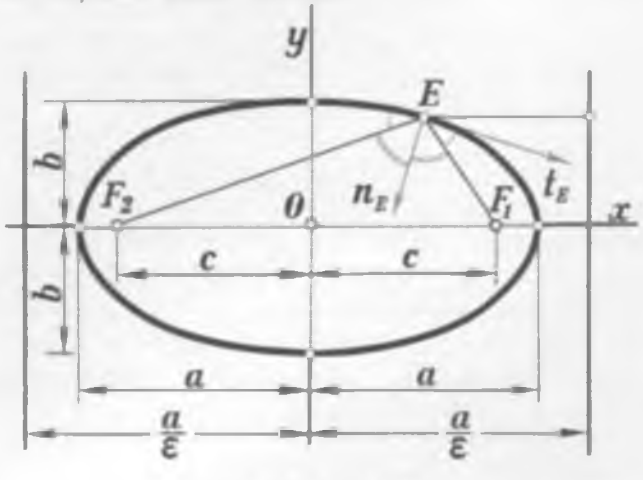
Такое простейшее уравнение эллипса называют *каноническим*. Оси координат являются осями симметрии эллипса. Точку пересечения осей симметрии называют *центром эллипса*; точки пересечения эллипса осями симметрии — *вершинами эллипса*. Отрезки, соединяющие противоположные вершины эллипса, равные $2a$ и $2b$, называют соответственно *большой* и *малой* осями эллипса.

Диаметры эллипса — отрезки прямых, проходящих через центр эллипса. Два таких диаметра, каждый из которых делит пополам хорды, параллельные другому, называют *сопряженными*. Большая и малая оси эллипса являются сопряженными взаимно перпендикулярными диаметрами.

Касательные, проведенные к эллипсу в концах какого-либо диаметра, параллельны другому диаметру, сопряженному с первым.

Касательная к эллипсу составляет равные углы с фокальными радиусами-векторами точки касания.

Нормаль эллипса в заданной точке делит пополам угол между фокальными радиусами-векторами этой точки.



Р и с. 216

146 Величину $\frac{2c}{2a}=\varepsilon$ — отношение фокусного расстояния к длине большой оси называют *эксцентриситетом эллипса*. Для эллипса $\varepsilon<1$.

Две прямые, перпендикулярные к фокальной оси эллипса и удаленные от центра на величину $\frac{a}{\varepsilon}$, называют *директрисами** *эллипса*. Директрисы обладают следующим свойством.

Отношение расстояний от любой точки эллипса до фокуса и соответствующей директрисы есть величина постоянная, равная ε.

Укажем способ построения эллипса по точкам, исходя из его определения и канонического уравнения.

Из уравнения определяем величины a и b, представляя их в заданном масштабе отрезками на осях координат (рис. 217). Из точки C, как из центра, радиусом a проводим дугу, которая пересекает прямую AB в точках F_1 и F_2. Точки F_1 и F_2 являются фокусами эллипса, так как соблюдается зависимость $c^2=a^2-b^2$. Из фокусов F_1 и F_2, как из центров, проводим дуги окружностей соответственно радиусами r и $2a-r$, где r — произвольной длины. Точки пересечения окружностей являются точками эллипса, так как сумма расстояний от каждой из них до фокусов равна $2a$ и есть величина постоянная. Изменяя радиус r и повторяя построения, получаем новые точки эллипса.

При параллельном проецировании окружность проецируется на плоскости или в виде окружности (частный случай), или в виде эллипса (общий случай).

Окружность проецируется на плоскость проекций без искажения, если ее плоскость параллельна плоскости проекций. Если же окружность принадлежит проецирующей плоскости, то одна из проекций представляется в виде отрезка прямой, равного диаметру окружности, а другая в виде эллипса. Если окружность принадлежит плоскости произвольного положения, то ортогональ-

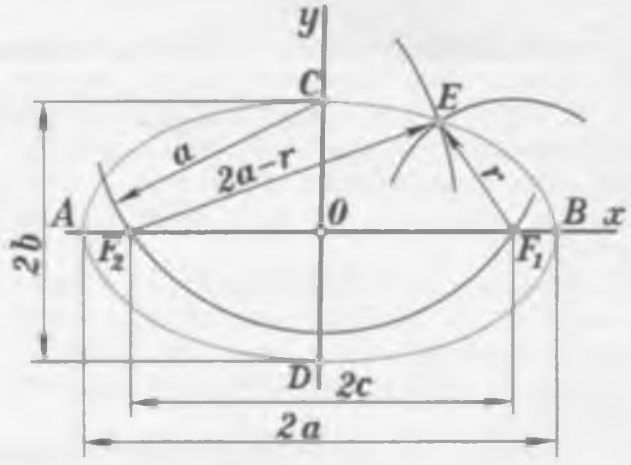


Рис. 217

ными проекциями ее являются эллипсы. *Эллипс есть кривая, родственная окружности.*

Параллельной проекцией эллипса может быть эллипс или окружность.

На рис. 218 показано построение параллельной проекции окружности на плос-

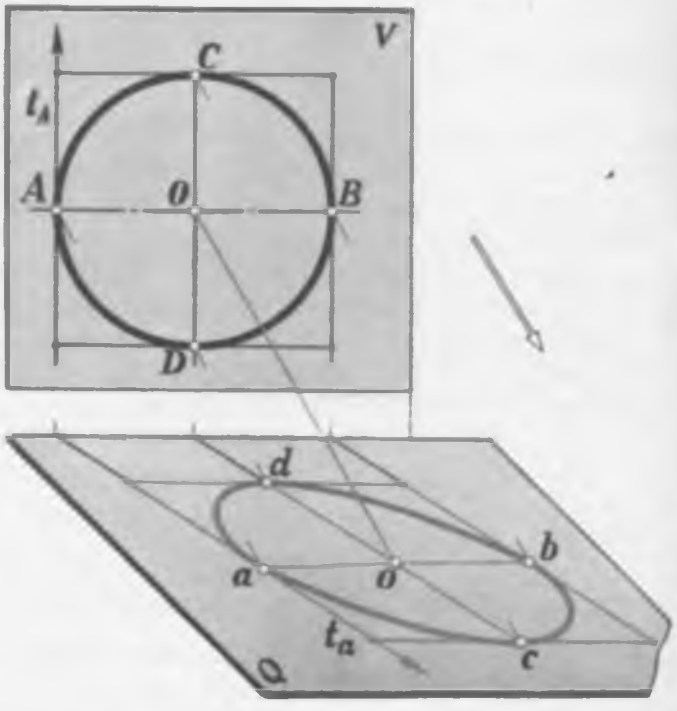
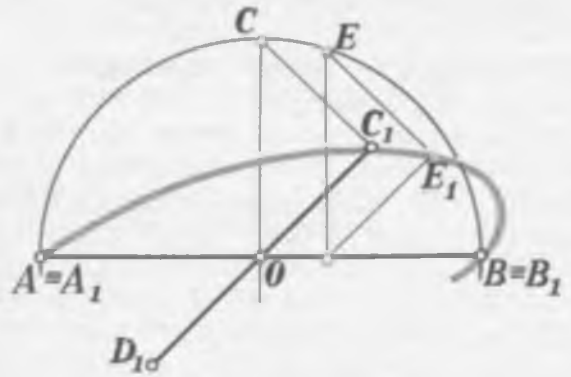


Рис. 218

* От позднелат. directrix — направляющая.



Р и с. 219

кости Q при заданном направлении проецирования. Проекцией окружности на плоскости Q является эллипс. Окружность и эллипс являются *центральносимметричными кривыми*. Каждый из диаметров окружности и эллипса в середине пересекает любой другой их диаметр. Точки O и o пересечения диаметров окружности и эллипса являются центрами их симметрии.

Двум взаимно перпендикулярным диаметрам AB и CD окружности соответствуют два взаимно сопряженных диаметра ab и cd эллипса.

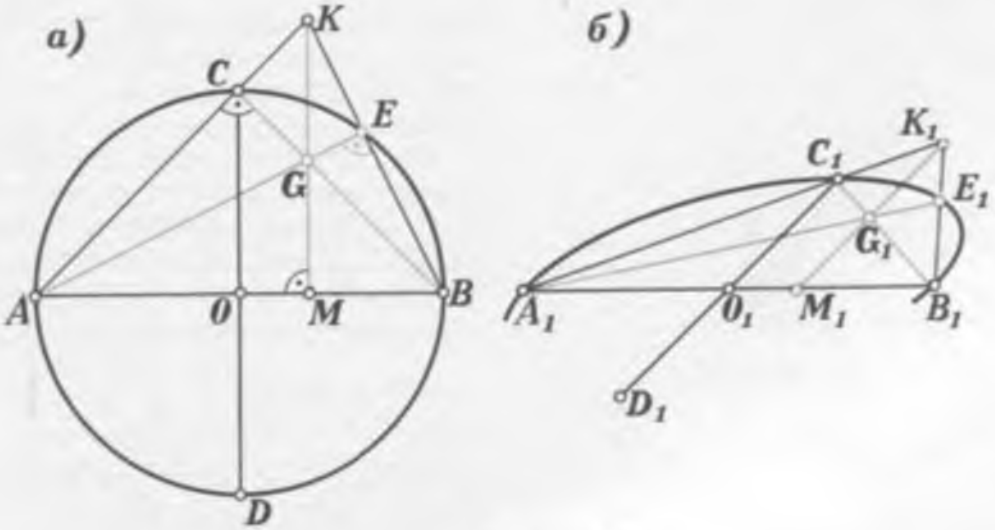
Касательной t_A, проведенной к окружности в точке A и параллельной диаметру CD, соответствует касательная t_a, параллельная сопряженному диаметру cd эллипса.

Описанному около окружности квадрату соответствует описанный около эллипса параллелограмм. Такое родство двух фигур позволяет показать ряд способов их построения.

На рис. 219 представлены два произвольно выбранных и делящихся пополам отрезка — A_1B_1 и C_1D_1. Рассмотрим эти отрезки как сопряженные диаметры эллипса. Один из отрезков, например A_1B_1, примем за диаметр окружности, родственной эллипсу. Здесь соответственные диаметры эллипса и окружности совпадают ($AB \equiv A_1B_1$).

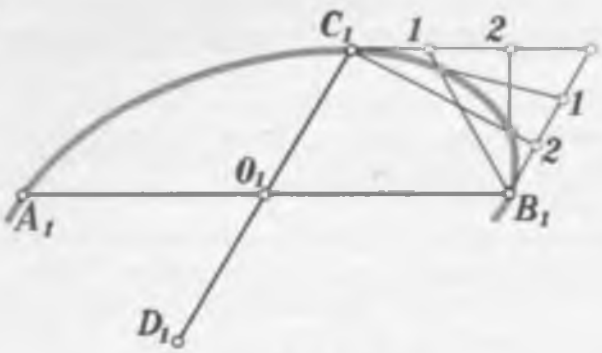
Диаметры AB и CD родственной эллипсу окружности являются взаимно сопряженными, т. е. взаимно перпендикулярны. Построив окружность и наметив на ней ряд точек E, можем определить соответствующий им ряд точек E_1 эллипса.

Укажем другие способы построения эллипса как линии, родственной окружности, если даны два его сопряженных диаметра. Пусть сопряженным диаметрам AB и CD окружности соответствуют сопряженные диаметры A_1B_1 и C_1D_1 родственного ей эллипса (рис. 220). Докажем, что точке E (рис. 220, *а*) окружности соответствует точка E_1 эллипса (рис. 220, *б*). Через точку E окружности проведем прямую BE до пере-



Р и с. 220

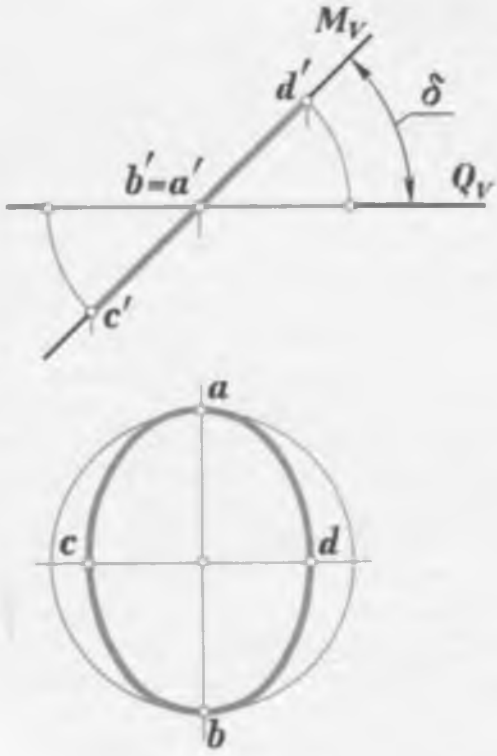
148



Р и с. 221

сечения ее в точке K с прямой AC. В треугольнике ABK прямые AE, BC и KM являются его высотами. Они пересекаются в точке G.

Исходя из соответствия двух родственных фигур — окружности и эллипса — устанавливаем, что треугольнику ABK с его высотами AE, BC и KM соответствует треугольник $A_1B_1K_1$ с прямыми A_1E_1, B_1C_1 и K_1M_1. Точка E окружности соответствует точке E_1 эллипса.



Р и с. 222

Пусть эллипс задан сопряженными диаметрами A_1B_1 и C_1D_1 (рис. 220, *б*).

Точки эллипса можно определить следующими построениями. На прямой A_1C_1 намечаем произвольную точку K_1. Через точку K_1 проводим прямую, параллельную диаметру C_1D_1, и находим точку G_1 пересечения ее с прямой C_1B_1. Точка E_1 эллипса определяется на пересечении прямых A_1G_1 и K_1B_1. Повторяя такие построения, найдем целый ряд точек эллипса.

На рис. 221 показан другой способ построения эллипса по его сопряженным диаметрам. На полудиаметрах O_1C_1 и O_1B_1 строим параллелограмм. Стороны параллелограмма делят соответственно на одинаковое число равных отрезков.

Лучи, проведенные из точек C_1 и B_1 концов полудиаметров через одинаково нумерованные точки сторон параллелограмма, пересекаются в точках эллипса.

Рассмотрим случай построения эллипса как ортогональной проекции окружности (рис. 222).

Пусть окружность данного диаметра принадлежит плоскости M_V. Плоскость Q_V, параллельная горизонтальной плоскости проекций H, пересекает плоскость окружности по диаметру ab, $a'b'$. Здесь двум взаимно перпендикулярным диаметрам ab, $a'b'$ и cd, $c'd'$ окружности соответствуют сопряженные взаимно перпендикулярные диаметры ab и cd эллипса — горизонтальной проекции окружности. Такие сопряженные диаметры эллипса называют его осями. Диаметр ab, $a'b'$ окружности и ось ab эллипса равны.

При ортогональном проецировании окружности на плоскость H диаметр ab, $a'b'$ этой окружности является большой осью эллипса. Малой осью эллипса cd является ортогональная проекция диаметра cd, $c'd'$ окружности на плоскость H, т. е.

$$cd = CD \cdot \cos\delta .$$

Направление малой оси эллипса на плоскости H совпадает с проекцией направления плоскости окружности.

Т е о р е м а. *Ортогональной проекцией окружности, плоскость которой не перпендикулярна к плоскости проекций, является эллипс.*

Большая ось эллипса равна и параллельна тому диаметру окружности, которому параллельна плоскость проекций.

Малая ось эллипса параллельна проекции направления плоскости окружности и равна проекции диаметра окружности, являющегося линией наибольшего ската плоскости этой окружности.

На рис. 223 показан способ построения эллипса по заданным его осям. Он основан на параллельном проецировании окружности. Для построения точек эллипса из центра O проводим две окружности, диаметрами которых являются большая и малая оси эллипса. Из центра O окружностей произвольно проводим луч и помечаем точки E и K пересечения его с окружностями. Из точек E и K проводим прямые, параллельные соответственно осям A_1B_1 и C_1D_1 эллипса. Точка K_1 их пересечения является точкой эллипса, что легко доказать.

Рассмотрим треугольник OKK_0.

Здесь

$$OK = \frac{A_1B_1}{2}, \qquad OE = \frac{C_1D_1}{2}, \quad EK_1 \parallel OK_0.$$

Очевидно

$$\frac{K_1K_0}{KK_0} = \frac{OE}{OK} = \frac{C_1D_1}{A_1B_1} = \text{const}.$$

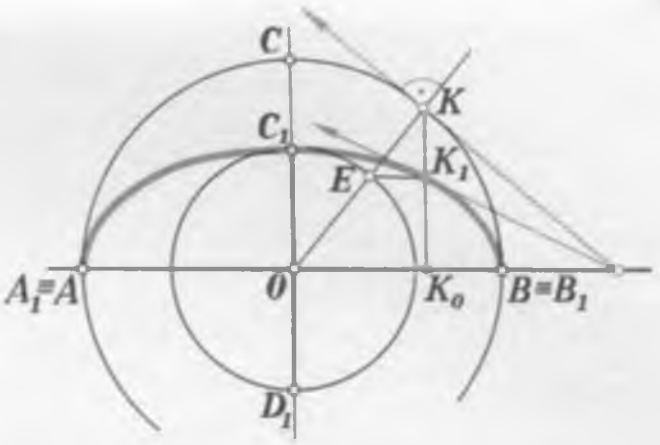
Выбирая другие лучи и помечая точки на окружностях, построим ряд соответствующих точек эллипса.

На рис. 223 показано построение прямой, касательной к эллипсу в точке K_1.

Пусть эллипс задан его осями. Проведем две окружности на большой и малой осях эллипса, как на диаметрах, и построим эллипс по точкам (рис. 224).

Известно, что двум взаимно перпендикулярным полудиаметрам OK и OE окружности соответствуют два сопряженных полудиаметра OK_1 и OE_1 эллипса.

Совместим радиус OK вращением по часовой стрелке вокруг центра O с радиусом OE. Треугольник OKK_1, построенный на радиусе OK, в совмещенном положении представляется треугольником OEK_1.

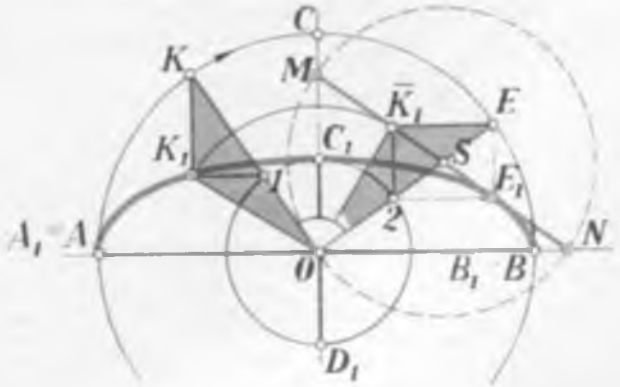


Р и с. 223

Отрезок $K_1 1$, параллельный горизонтальному диаметру AB окружности, занимает положение $\bar{K}_1 2$. В этом смещенном положении он перпендикулярен к диаметру AB. Получаем прямоугольник $K_1EE_1 2$, стороны которого параллельны осям эллипса. Диагонали $2E$ и E_1K_1 этого прямоугольника пересекаются в точке S, а на продолжении пересекаются с осями эллипса в точках O, M и N.

Точка S является центром окружности, проходящей через точки O, M и N. Треугольники OSN и OSM — равнобедренные, т. е. $OS = SN = SM$.

Отрезок $E_1N = O2 = b$, отрезок $E_1M = OE = a$.



Р и с. 224

150

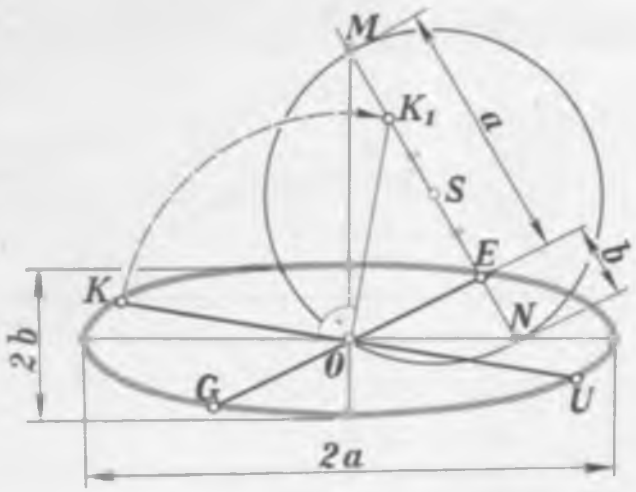


Рис. 225

Длина отрезка $MN = E_1N + E_1M$ равна сумме полуосей эллипса. Она постоянна для любого положения точек E и E_1. Поэтому, если взять отрезок определенной длины и передвигать его двумя закрепленными точками M и N по двум взаимно перпендикулярным прямым, то любая точка E_1 этого отрезка опишет эллипс.

Полуосями эллипса являются расстояния от точки E_1 до точек M и N.

На этом принципе основан так называемый *эллиптический циркуль* — прибор для вычерчивания эллипсов.

Укажем способ построения осей эллипса по заданной паре его сопряженных диаметров.

На рис. 225 пересекающиеся в точке O отрезки KU и GE являются сопряженными диаметрами эллипса. Один из полудиаметров, например OK, повернем на 90° вокруг центра O по часовой стрелке. Получим отрезок OK_1. Через точки K_1 и E проводим прямую и из середины S отрезка K_1E, как из центра, описываем дугу радиусом OS. Прямая K_1E пересекает дугу окружности в точках M и N. Отрезок MN определяет сумму полуосей эллипса.

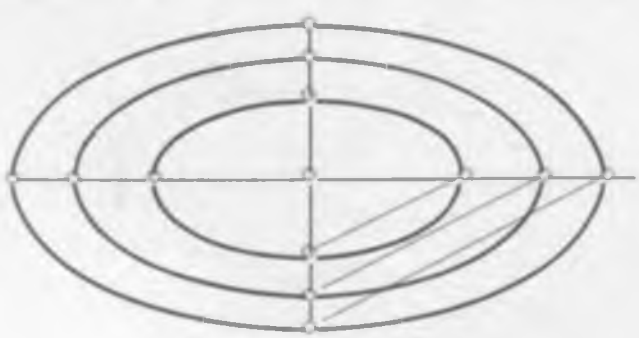


Рис. 226

Прямые OM и ON указывают направления малой и большой полуосей эллипса, а величины этих полуосей соответственно равны отрезкам $EN = b$ и $EM = a$.

Эллипсы называют *подобными*, если отношения их осей равны между собой. На рис. 226 построены три подобных концентрических эллипса. Их оси совпадают.

Прямые, соединяющие концы осей каждого эллипса, параллельны между собой. Они являются гипотенузами подобных прямоугольных треугольников. Подобные концентрические эллипсы не являются *эквидистантными** кривыми. Расстояние между этими кривыми не одинаково для разных точек кривых.

Кривая линия, все точки которой равноудалены от ближайших точек эллипса, не является эллипсом.

На рис. 227 показано построение ортогональных проекций окружности заданного радиуса R, лежащей в плоскости общего положения abc, $a'b'c'$. Плоскость задана главными линиями.

Пусть центром окружности является точка aa'. На плоскости H и V проекций окружность проецируется эллипсами.

На горизонтальной плоскости проекций H большая ось эллипса совпадает с направлением горизонтали плоскости и равна диаметру *12* окружности. На фронтальной плоскости проекций V большая ось эллипса совпадает с направлением фронтали плоскости и равна диаметру *3'4'* окружности. Малая ось определяется указанными ниже построениями.

Отметим в горизонтальной плоскости проекций соответственно полухорды *35* и *56*

* *Эквидистантными* называют кривые линии, отстоящие одна от другой на одном и том же расстоянии на всем своем протяжении (от лат. aequidistans — равноудаленный, от aequus — равный и от disto — отстою, нахожусь на расстоянии).

эллипса и окружности. Полухорду *56* вращением вокруг точки *5* совместим с большой осью. В совмещенном положении она равна отрезку *57*. Точки *3* и *7* соединим прямой линией.

Из точки *2* проведем прямую, параллельную прямой *37*, до пересечения в точке *8* с направлением малой оси эллипса. Отрезок *a8* определяет величину малой полуоси эллипса — горизонтальной проекции окружности.

Малая ось эллипса на фронтальной плоскости *V* проекций определяется построением, аналогичным выполненному в горизонтальной плоскости проекций.

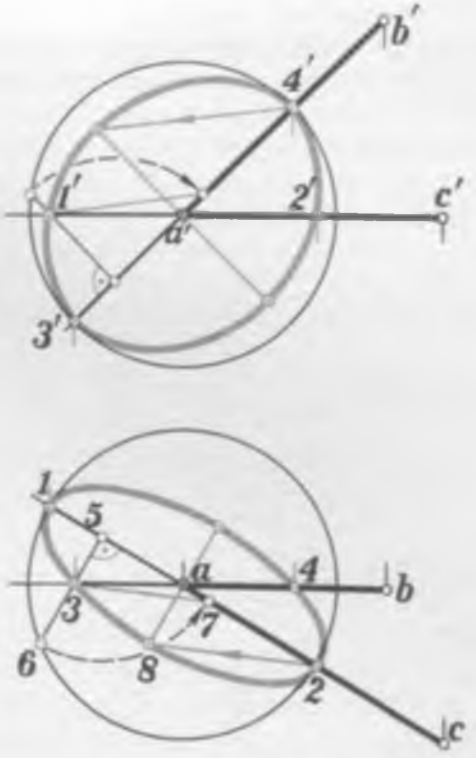
Параллельной проекцией эллипса может быть или эллипс, или окружность. В первом случае сопряженные диаметры эллипса проецируются сопряженными диаметрами эллипса-проекции. Во втором случае сопряженные диаметры эллипса проецируются взаимно перпендикулярными диаметрами окружности-проекции.

Покажем построение недостающей горизонтальной проекции эллипса с центром cc', лежащего в плоскости abc, $a'b'c'$. Фронтальной проекцией эллипса является окружность заданного диаметра (рис. 228).

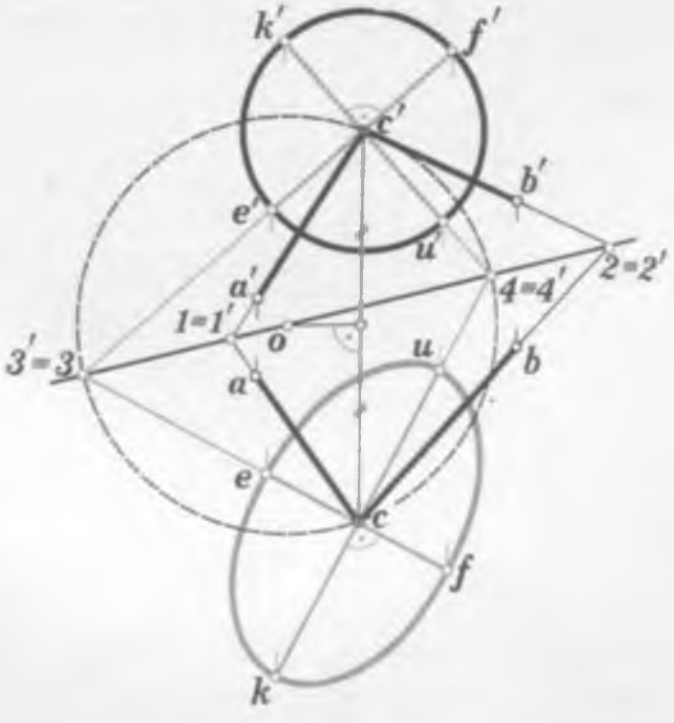
Рассмотрим эллипс как фигуру, родственную окружности. Построим прямую линию *12*, *1′2′* пересечения разноименных проекций прямых линий плоскости. В плоскости *abc*, *a′b′c′* построим прямые линии *3c*, *3′c′* и *4c*, *4′c′*, одноименные проекции которых взаимно перпендикулярны. Они строятся следующим образом.

Из середины линии связи точки cc' проводим прямую, перпендикулярную к ней. Определим точку *o* пересечения перпендикуляра с прямой *12*, *1′2′*. Из точки *o*, как из центра, проводим окружность, проходящую через точки *c* и *c′*. Она пересекает прямую *12*, *1′2′* в точках *33′* и *44′*.

Прямые линии *3c*, *3′c′* и *4c*, *4′c′* называют *линиями главных направлений* плоскости. Они находятся в данной плоскости и их одноименные проекции, как опирающиеся на диаметр окружности, взаимно перпендикулярны.



Р и с. 227



Р и с. 228

152 Двум взаимно перпендикулярным диаметрам $e'f'$ и $k'u'$ окружности соответствуют родственные им взаимно перпендикулярные диаметры ef и ku эллипса — малая и большая оси эллипса. Дополнительные точки эллипса определяются известными построениями. В случае, если эллипс проецируется на плоскости проекций в виде эллипсов, эллипсы-проекции могут быть определены по проекциям его двух сопряженных диаметров.

2. Гипербола

Гипербола — геометрическое место точек, разность расстояний от которых до двух данных точек (фокусов) есть величина постоянная.

Пусть в плоскости даны точки F_1 и F_2 — фокусы гиперболы. Расстояние между ними $2c$ (рис. 229). Любая точка M плоскости принадлежит гиперболе, если соблюдается условие:

$$MF_2 - MF_1 = 2a.$$

Уравнение гиперболы имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где

$$b^2 = c^2 - a^2.$$

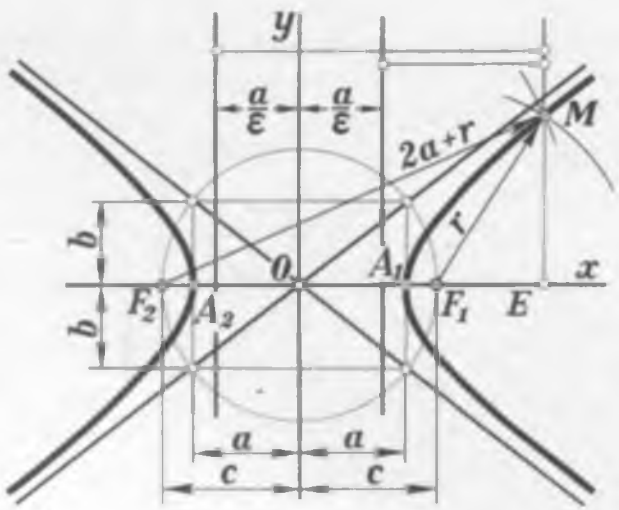


Рис. 229

Уравнение гиперболы отличается от уравнения эллипса лишь знаком при втором члене левой части. Очевидно, многие из выводов, относящихся к эллипсу, справедливы и для гиперболы.

Оси координат являются *осями симметрии* гиперболы.

Точка пересечения координатных осей является *центром симметрии*.

Вершинами гиперболы являются точки ее пересечения осью симметрии. Полагая в уравнении гиперболы $y = 0$, имеем

$$\frac{x^2}{a^2} = 1,$$

откуда

$$x^2 = a^2$$

или

$$x = \pm a.$$

Следовательно, точки $A_1(a, 0)$ и $A_2(-a, 0)$ являются вершинами гиперболы. Расстояние между ними $2a$.

Ось симметрии, пересекающую гиперболу, называют *действительной осью симметрии* (фокальной осью).

Полагая $x = 0$, получаем

$$-\frac{y^2}{b^2} = 1$$

или

$$y^2 = -b^2,$$

откуда

$$y = \pm\sqrt{-b^2} = \pm b\sqrt{-1},$$

т. е. ординаты точек пересечения гиперболы осью Oy — мнимые числа. Это означает, что ось Oy не пересекает ветви гиперболы. Ось симметрии, которая не пересекает гиперболу, называют *мнимой осью симметрии*.

Величины a и b называют соответственно *действительной* и *мнимой полуосями гиперболы*.

Из канонического уравнения гиперболы следует, что $\frac{x^2}{a^2} \geqslant 1$. Это означает, что величина $|x|$ изменяется от $+a$ до $+\infty$ (правая ветвь гиперболы) и от $-a$ до $-\infty$ (левая ветвь гиперболы), а величина y изменяется от $-\infty$ до $+\infty$. По мере удаления в бесконечность ветви гиперболы неограниченно приближаются к прямым линиям.

Две прямые линии, проходящие через центр гиперболы и касающиеся гиперболы в несобственных точках, называют *асимптотами гиперболы*. Асимптоты гиперболы направлены по диагоналям прямоугольника со сторонами $2a$ и $2b$.

В случае, если $a = b$, гиперболу называют *равносторонней*.

Диаметрами гиперболы называют прямые, проходящие через ее центр. Два диаметра гиперболы, каждый из которых делит пополам хорды, параллельные другому диаметру, называют *сопряженными*. Оси симметрии (действительная и мнимая) гиперболы являются сопряженными и взаимно перпендикулярными диаметрами.

Величину $\frac{2c}{2a}$ отношения фокусного расстояния к длине действительной оси называют *эксцентриситетом гиперболы*. Для гиперболы $\varepsilon > 1$.

Две прямые, перпендикулярные к фокальной оси гиперболы и удаленные от центра на величину $\frac{a}{\varepsilon}$, называют *директрисами* гиперболы.

Отношение расстояний от любой точки гиперболы до фокуса и соответствующей директрисы есть величина постоянная, равная ε.

Касательная к гиперболе одинаково наклонена к фокальным радиусам-векторам точки касания.

Нормаль гиперболы в любой ее точке делит угол между фокальными радиусами-векторами этой точки пополам.

Укажем способ построения гиперболы по точкам, исходя из ее определения и канонического уравнения. В заданном масштабе величины a и b полуосей гиперболы представим отрезками на осях координат (рис. 229). Из точки O, как из центра, радиусом a проведем дугу окружности до пересечения ее в точках F_1 и F_2 с осью Ox. Точки F_1 и F_2 являются фокусами гиперболы, так как соблюдается зависимость

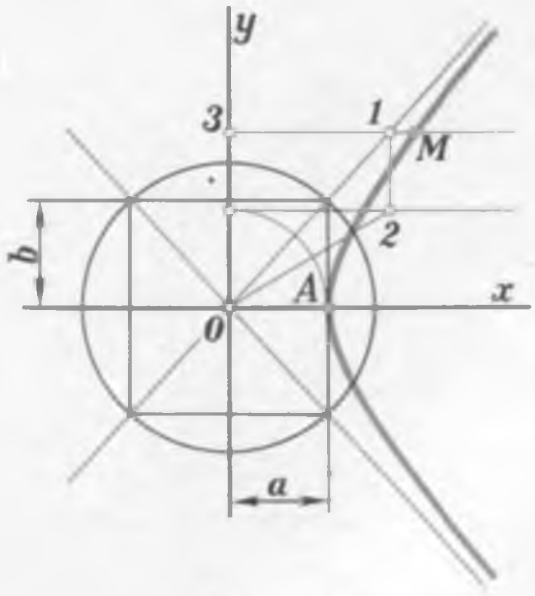
$$c^2 = a^2 + b^2$$

Из фокусов, как из центров, проводим дуги окружностей соответственно радиусами r и $2a + r$. Точки их пересечения являются точками гиперболы, так как разность расстояний от каждой точки до фокусов равна $2a$ и есть величина постоянная. Изменяя r и повторяя построения, получаем новые точки гиперболы.

Укажем другой способ построения точек гиперболы. Пусть гипербола задана своими полуосями a и b (рис. 230). По заданным полуосям строим асимптоты гиперболы и определяем ее вершины.

Проводим прямую параллельно действительной оси Ox на расстоянии от нее, равном величине a действительной полуоси. Параллельно действительной оси на произвольном расстоянии от нее проводим другую прямую и определяем на ней точку M гиперболы.

Из точки 1 пересечения этой прямой с асимптотой опускаем перпендикуляр на первую вспомогательную прямую до пересече-



Р и с. 230

ния его в точке 2. Отрезок $O2$ равен отрезку $3M$, концом которого определяется точка M гиперболы.

Аналогичным образом определяем необходимый ряд точек гиперболы.

3. Парабола

Парабола представляет собой геометрическое место точек, равноудаленных от заданной точки (фокуса) и прямой.

Параболу можно построить по точкам, если заданы фокус и прямая — директриса.

На рис. 231 точка M принадлежит параболе, если принять точку F за фокус, а прямую AB — за директрису параболы. Здесь $MF = MG$. Расстояние FD от фокуса F до директрисы AB называют *параметром* параболы.

Прямая FD является осью симметрии параболы. Ее называют *осью параболы*.

Точку O — точку пересечения параболы осью — называют *вершиной*, которая делит пополам расстояние между фокусом и директрисой.

Эксцентриситет параболы, вследствие равноудаленности любой ее точки от фокуса и директрисы, равен единице, т. е. $\varepsilon = 1$.

Уравнение параболы имеет вид:

$$y^2 = 2px,$$

где

$$p = FD.$$

По заданному уравнению параболы можно определить вид и свойства кривой. Из уравнения следует, что для каждого заданного значения x имеется два значения y, равные по абсолютной величине, но противоположные по знаку:

$$y = \pm\sqrt{2px}.$$

Из этого следует, что парабола симметрична относительно оси Ox (фокальной оси). При $x = 0$ два значения ординаты совпадают, т. е. парабола касается оси Oy в начале координат.

Если значения x неограниченно возрастают, то соответствующие им значения y также неограниченно возрастают, т. е. ветви параболы простираются в бесконечность и в одном направлении, так как значения x не могут быть отрицательными.

Из канонического уравнения параболы следует, что ее ордината y есть среднее про-

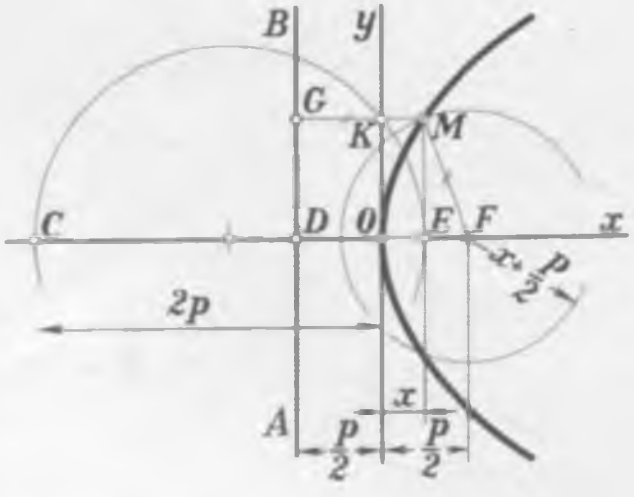


Рис. 231

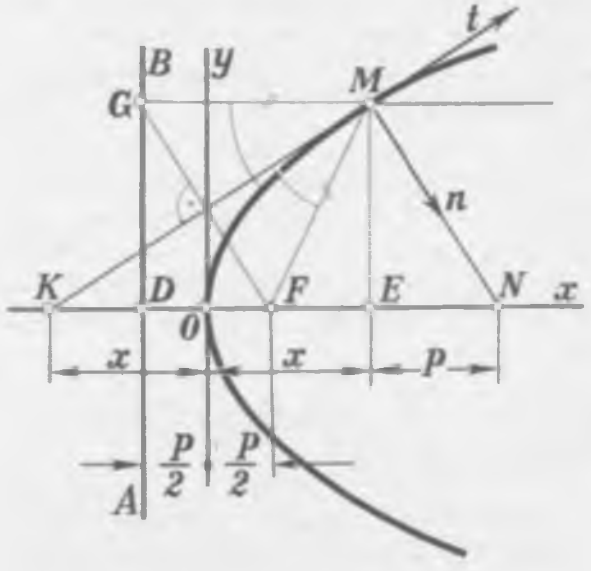


Рис. 232

порциональное между удвоенным параметром $2p$ и абсциссой x. Пользуясь этим свойством, можно определить любое число точек параболы. Для этого намечаем систему координат Oxy (рис. 231). По оси Ox от начала координат в противоположном направлении откладываем отрезок $OC = 2p$. Задаемся абсциссой OE. На отрезке CE, как на диаметре, строим окружность. Она пересекает ось Oy в точке K, поэтому $(OK)^2 = OC \cdot OE$, что соответствует каноническому уравнению параболы. Отрезок OK равен ординате той точки M параболы, для которой абсциссой является отрезок OE.

Точки параболы можно определить и другим путем. По оси Ox от точки O начала координат откладываем по разные стороны отрезки OD и OF, равные $\frac{p}{2}$. Через точку D проводим прямую, перпендикулярную к оси Ox — директрису параболы. Проводим прямую параллельно директрисе на расстоянии $x + \frac{p}{2}$ от нее. Радиусом $(x + \frac{p}{2})$ проводим дугу, центром которой является фокус F. Пересечением дуги с этой прямой определяется точка M параболы.

Задавая различные значения x, можно определить ряд точек параболы. Прямую линию, проходящую через середины параллельных хорд параболы, называют *диаметром параболы*. Все диаметры параболы параллельны оси Ox (оси симметрии), поэтому центром параболы является несобственная точка.

Ось симметрии называют *главным диаметром* параболы.

Касательная в любой точке параболы пересекает ось в точке, абсцисса которой равна по величине и противоположна по знаку абсциссе точки касания. Это легко доказать.

Касательная в любой точке кривой второго порядка имеет равные углы с фокальными радиусами-векторами.

Проведем касательную к параболе в точке M (рис. 232). Найдем точку K пересечения касательной с осью Ox. Треугольник MKF равнобедренный, в котором $MF = FK$.

Для параболы

$$MF = x + \frac{p}{2},$$

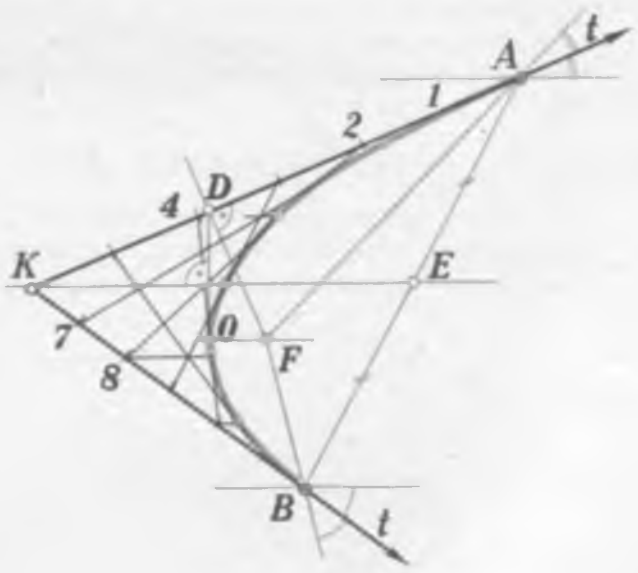
$$FK = MF = OK + OF,$$

откуда

$$OK = KF - OF = x + \frac{p}{2} - \frac{p}{2} = x.$$

Проекция EK отрезка KM на ось (подкасательная) в вершине O параболы делится пополам. Проекция EN отрезка MN на ось (поднормаль) есть величина постоянная, равная p для любой нормали параболы.

Укажем способ построения параболы, если даны две ее точки A и B и касательные к параболе в этих точках (рис. 233). Касательные пересекаются в точке K. Хорду AB параболы точка E делит пополам. Прямая KE является диаметром, сопряженным с хордой AB. Отрезки AK и BK касательных делим каждый на одинаковое четное число n частей. Эти отрезки нумеруем последовательно от A до B, т. е. до $2n$. Соединяем прямыми линиями точки 1 и $n+1$, 2 и $n+2$, ... Через четные точки деления (2, 4, 6, 8, ...) проводим диаметры параболы и отмечаем



Р и с. 233

156

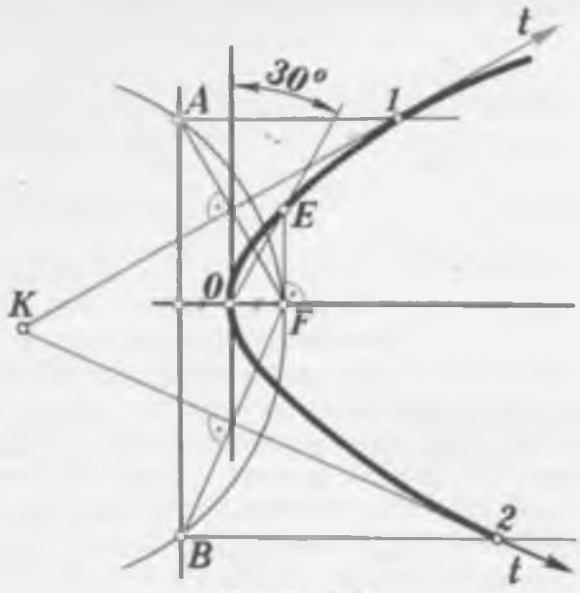


Рис. 234

точки их пересечения с построенными прямыми линиями. Построенные таким образом точки принадлежат параболе.

Ось и вершину O параболы определяем следующим образом.

Известно, что касательные KA и KB составляют равные углы с фокальными радиусами-векторами. Один из фокусов параболы несобственный. В точках A и B проводим фокальные радиусы-векторы параболы. Точка F пересечения радиусов-векторов FA и FB является фокусом параболы. Второй фокус в бесконечности. Ось параболы проходит через фокус F параллельно диаметру. Она пересекает параболу в точке O, которая является вершиной параболы. Эту точку можно определить, если ветвь параболы еще не построена. Из точки F (фокуса) опускаем перпендикуляр на одну из касательных, например KB, до пересечения в точке D. Основание перпендикуляра, опущенного из точки D на ось параболы, является вершиной O параболы.

На рис. 234 показан способ определения фокуса данной параболы. Из вершины параболы (точки O) под углом 30° к касательной в вершине проводим прямую до пересечения ее с параболой в точке E. Перпендикуляр, опущенный из точки E на ось, проходит через фокус F параболы. Это легко доказывается, исходя из основного определения параболы.

Покажем на этом же чертеже построение касательных к параболе, проходящих через данную точку K. Из точки K, как из центра, описываем окружность, проходящую через фокус F и пересекающую директрису параболы в точках A и B.

Параллели к оси в этих точках пересекают перпендикуляры, опущенные из точки K на прямые AF и BF в точках 1 и 2. Они являются точками касания касательных к параболе, проведенных из точки K.

§42 ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ КРИВЫЕ ЛИНИИ

Кривые линии, все точки которых не принадлежат одной плоскости, называют *пространственными*, или линиями *двоякой* кривизны (рис. 235).

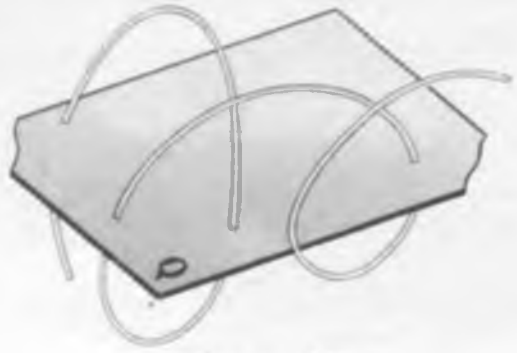


Рис. 235

Пространственную кривую линию на чертеже задают последовательным рядом ее точек (рис. 236). Чтобы установить особые точки такой кривой линии, необходимо сопоставить две ее проекции*.

Наличие двойного узла 2 горизонтальной и $3'$ фронтальной проекций данной

* При соответствующем выборе направления проецирования любую из точек пространственной кривой линии можно изобразить в виде особой ее точки.

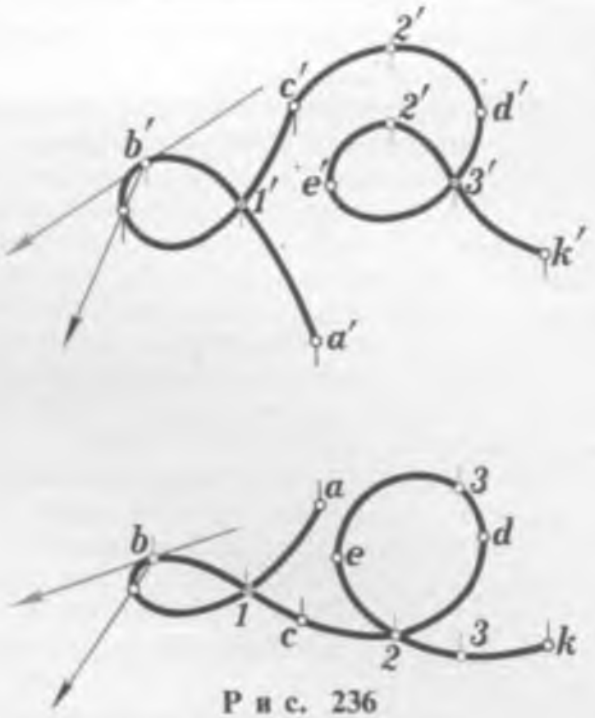
кривой линии еще не определяет наличия двойного узла на самой кривой линии.

Точка $11'$ самопересечения кривой линии является двойным узлом заданной пространственной кривой линии. Касательная как предельное положение секущей к пространственной кривой проецируется в касательную к проекции кривой.

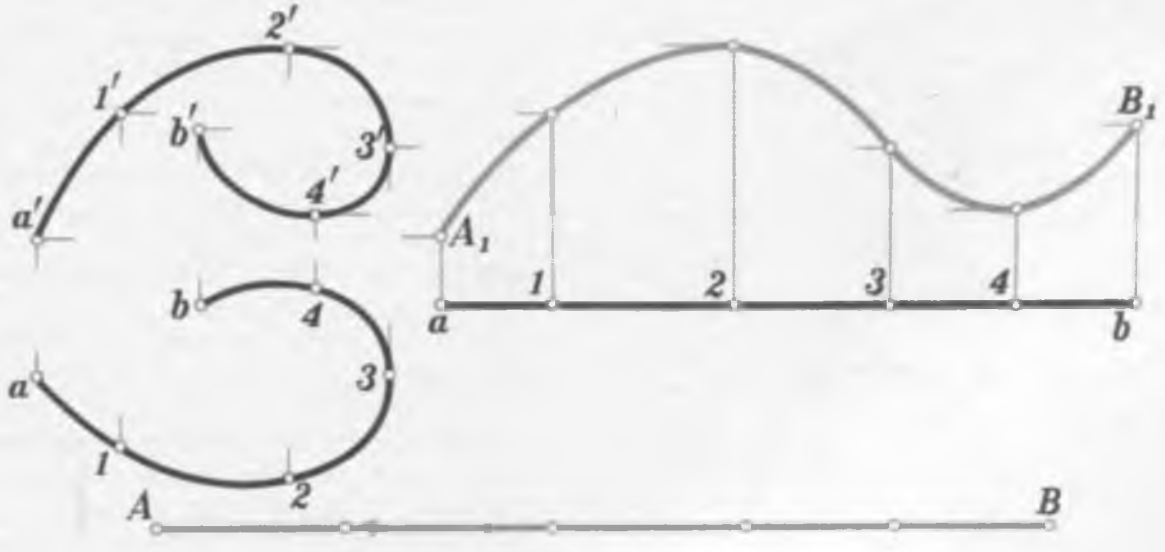
Часто приходится решать задачу на определение длины пространственной кривой линии, заданной ее ортогональными проекциями. Графически эта задача решается приближенно, заменой дуги кривой отрезками прямых.

На рис. 237 представлен чертеж пространственной кривой линии. Для определения ее длины на этой кривой намечаем ряд точек $00'$, $11'$, $22'$, ..., так, чтобы дуги кривой были близки к отрезкам прямых.

Одну из проекций кривой (например, горизонтальную) со всеми помеченными точками преобразуем в прямую, параллельную направлению оси проекций. Из точек фронтальной проекции кривой проводим горизонтальные линии до пересечения их соответствующими линиями связи точек горизонтальной проекции кривой в преобразовании. Эти точки пересечения наметят кривую линию A_1B_1. Действительная длина заданной пространственной кривой линии представится отрезком AB прямой линии, равным длине кривой линии A_1B_1.



Р и с. 236



Р и с. 237

§43 ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ВИНТОВЫЕ ЛИНИИ

Из пространственных кривых линий в технике широко применяются цилиндрические винтовые линии и особенно цилиндрические винтовые линии одинакового уклона — *гелисы*. Они используются в некоторых механизмах машин и приборов для преобразования вращательного движения в возвратно-поступательное. Нарезанная на одном валу в виде гелисы левая и правая резьба применяется в некоторых поворотных механизмах.

Известно, например, что в молекуле пенициллина отрицательно заряженные атомы кислорода и положительно заряженные атомы натрия группируются вокруг винтовых линий. Вокруг винтовых линий группируются также и незаряженные углеводородные части молекулы.

Осью гелисы называют ось цилиндра вращения, на котором она лежит. Диаметр цилиндра вращения является диаметром цилиндрической винтовой линии.

Моделью винтовой линии может служить цилиндрическая пружина.

Цилиндрическую винтовую линию — гелису — будем рассматривать как траекторию движения точки, равномерно вращающейся вокруг оси и одновременно равномерно перемещающейся в направлении этой оси.

Величину S перемещения точки в направлении оси, соответствующую одному полному обороту вокруг оси, называют *шагом* винтовой линии.

Величину $s_0 = \frac{S}{2\pi}$ называют *единичным шагом* цилиндрической винтовой линии. Это — величина перемещения точки в направлении оси при повороте ее вокруг оси на угол, равный одному радиану.

Такое равномерное перемещение точки вдоль оси и равномерное перемещение его вокруг оси может быть использовано при построении чертежа цилиндрической винтовой линии.

На рис. 238 построена цилиндрическая винтовая линия (гелиса) заданного радиуса r и шага S. Окружность радиусом r (горизонтальная проекция гелисы) разделена

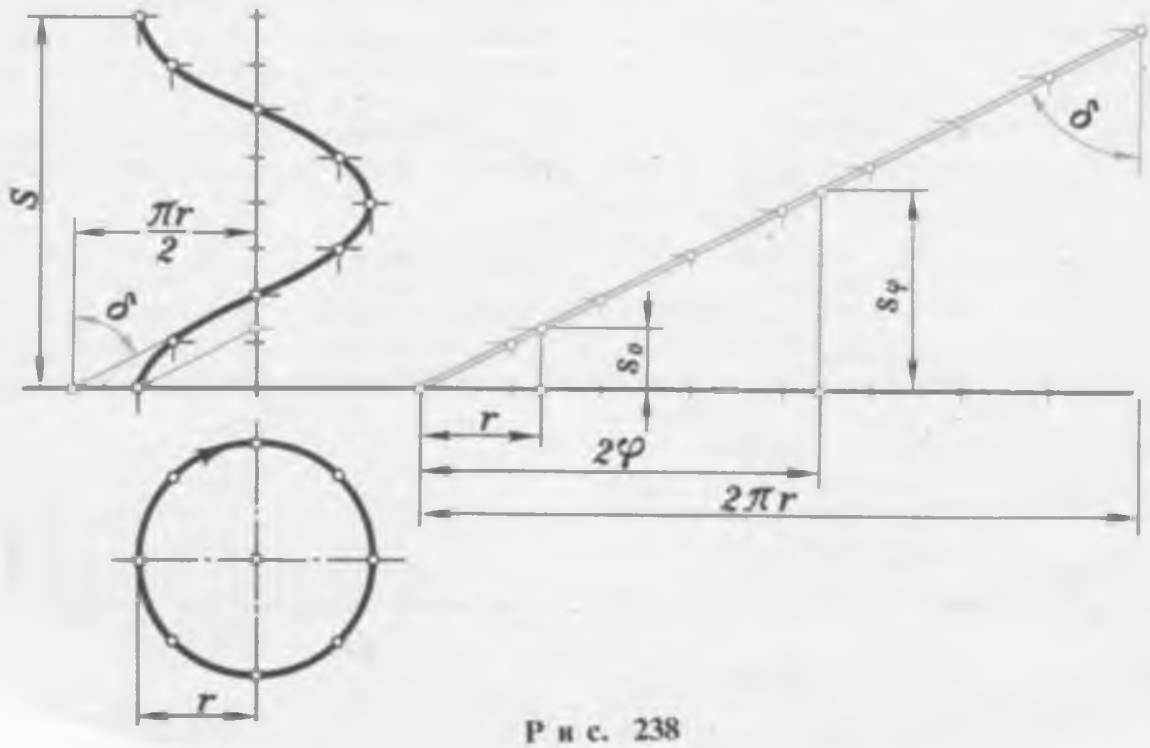
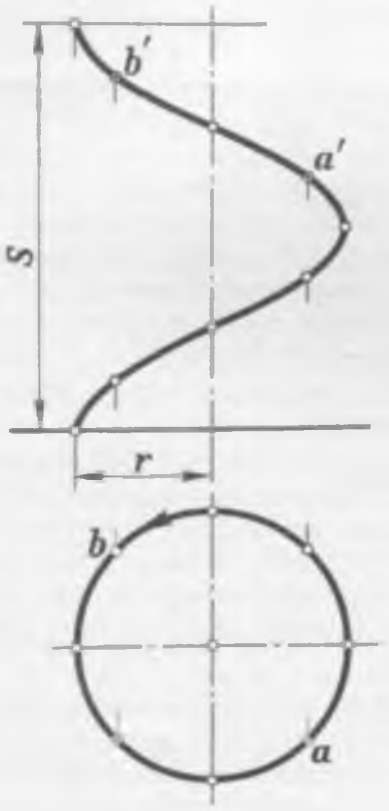


Рис. 238



Р и с. 239

на восемь равных частей. На такое же число равных частей делится и ее шаг. Через точки деления окружности проводят вертикальные линии (линии связи). Через соответствующие точки деления шага проводят горизонтальные прямые. Точки пересечения этих прямых линий определяют фронтальную проекцию цилиндрической винтовой линии.

Построенная гелиса имеет правый ход (направление). На чертеже ход цилиндрической винтовой линии определяет стрелка, поставленная на горизонтальной проекции.

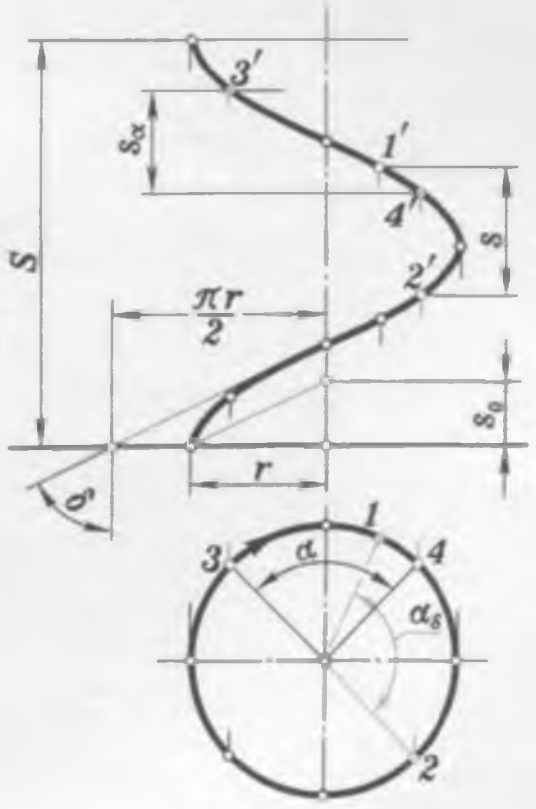
Принято считать, что точка опускается по траектории к плоскости, перпендикулярной к оси. Если стрелка совпадает с направлением часовой стрелки, то эта цилиндрическая винтовая линия *правого* хода. Если стрелка указывает направление, обратное ходу часовой стрелки, то цилиндрическая винтовая линия *левого* хода.

Преобразованием гелисы на развертке ее проецирующего цилиндра является прямая линия. Она составляет угол δ с вертикальной прямой. Цилиндрическая винтовая линия, как прямая и окружность, обладает свойством сдвигаемости. Любой отрезок такой кривой линии можно сдвигать вдоль самой кривой.

Гелиса используется как эталон при сравнении с ней других пространственных кривых линий на бесконечно малых их участках. Она используется как базовая линия при задании винтовых поверхностей, а также при решении ряда задач, относящихся к винтовым поверхностям. Цилиндрическая винтовая линия обычно задается диаметром, шагом и ходом.

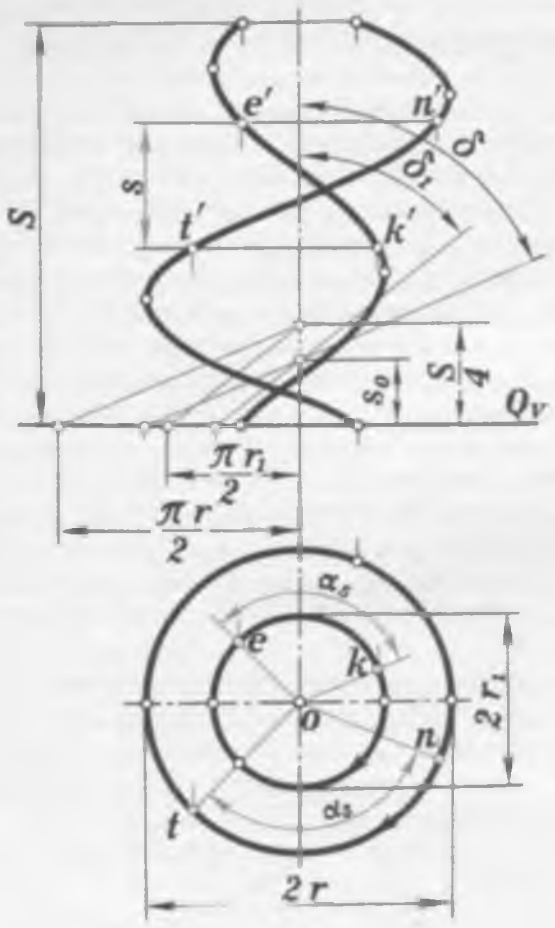
На рис. 239 показано построение недостающей проекции a точки aa', принадлежащей заданной цилиндрической винтовой линии левого хода. Точка bb' не принадлежит гелисе.

На рис. 240 для гелисы правого хода показано определение величины углового



Р и с. 240

160



Р и с. 241

смещения точки по заданному ее осевому смещению и величины осевого смещения точки по заданному ее угловому смещению.

Осевому смещению s точки, движущейся по гелисе из положения 11^1 в положение $22'$, соответствует определенное угловое смещение α. Угловому смещению α точки, движущейся из положения $33'$ в положение $44'$, соответствует определенное осевое ее смещение s_α. На чертеже показано построение единичного шага s_0 цилиндрической винтовой линии.

На рис. 241 показаны соосные цилиндрические винтовые линии одинакового шага S и хода, но различных радиусов (r и r_1). Эти кривые линии имеют одинаковый единичный шаг s_0, но разные углы наклона $(90^\circ - \delta)$ и $(90^\circ - \delta_1)$ к горизонтальной плоскости Q_V.

Замечаем, что осевому смещению s точки, движущейся по траектории гелисы радиусом r из положения nn' в положение tt', соответствует определенное угловое перемещение α_s

Такому же осевому перемещению s точки, движущейся по траектории гелисы радиусом r_1 из положения ee' в положение kk', соответствует определенное (как и для первой гелисы) угловое перемещение α_s.

§44 КОНИЧЕСКИЕ ВИНТОВЫЕ ЛИНИИ

Траекторию точки, движущейся по образующей вращающегося вокруг своей оси прямого кругового конуса, называют *конической винтовой линией*. Если и вращательное и прямолинейное движения равномерны, имеем коническую винтовую линию с постоянным шагом S (рис. 242).

Шагом конической винтовой линии называют величину прямолинейного перемещения точки в направлении оси конуса при полном ее обороте вокруг оси.

Коническая винтовая линия с постоянным шагом проецируется на плоскость, перпендикулярную к оси конуса, в виде *спирали Архимеда**, полюсом которой является проекция вершины конуса.

Проекция конической винтовой линии на плоскость, параллельную оси конуса,— *синусоида* с уменьшающейся высотой волны (угасающая синусоида).

---

* Спираль Архимеда — плоская кривая линия, которая образуется при равномерном движении точки по радиусу-вектору, вращающемуся с постоянной угловой скоростью вокруг неподвижной точки (полюса).

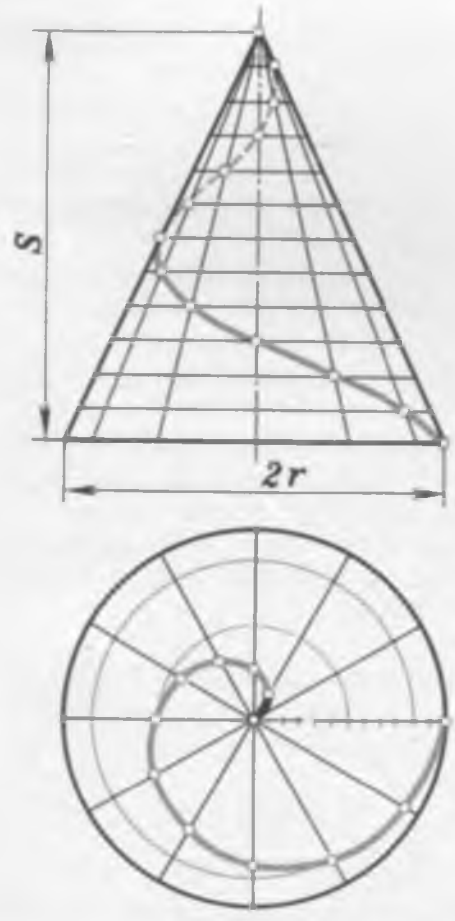


Рис. 242

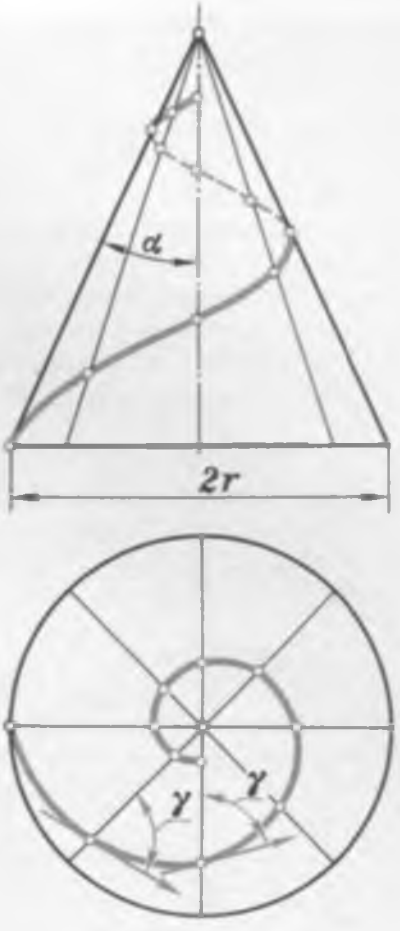


Рис. 243

На рис. 243 представлена коническая винтовая линия одинакового ската. Горизонтальной проекцией этой винтовой линии является логарифмическая спираль* с полюсом в точке — горизонтальной проекции вершины конуса вращения. Касательная к логарифмической спирали составляет постоянный угол γ с радиусом-вектором. Из этого следует, что касательная к винтовой линии составляет постоянный угол с соответствующей образующей конуса; значит она составляет постоянный угол и с направлением оси конуса вращения.

Две винтовые линии на конусе вращения, одинаково наклоненные к образующей, конгруентны, если они направлены в одну сторону (обе право- или левовинтовые).

Рассмотренные конические винтовые линии являются монотонными (простыми) пространственными кривыми линиями.

* Логарифмическая спираль — плоская кривая линия, образуемая движением точки по вращающемуся вокруг полюса радиусу-вектору, если угол поворота увеличивается в арифметической прогрессии, а расстояние точки до полюса при этом возрастает в геометрической прогрессии.

§45 КРИВЫЕ ЛИНИИ НА СФЕРЕ

Плоские кривые линии на сфере (шаре) имеют только одну геометрическую форму — окружность. При неизменной ориентации сферы в пространстве различают линии, занимающие частное положение относительно плоскостей проекций.

Параллели или линии *широт*, — окружности, полученные от пересечения сферы горизонтальными плоскостями. Наибольшую параллель, полученную от пересечения сферы горизонтальной плоскостью, проходящей через ее центр, называют *экватором*.

Меридианы — окружности, полученные от пересечения сферы горизонтально-проецирующими плоскостями, проходящими через центр сферы. Окружность, полученная от пересечения сферы любой плоскостью, проходящей через центр сферы, является *геодезической линией*. Эта линия кратчайшим путем соединяет любые две точки на сфере. Ее также называют *брахистодой**, или *ортодромией*** (рис. 244).



Рис. 244

Из пространственных кривых линий на сфере рассмотрим линию одинакового ската и локсодромию.

На рис. 245 изображена сферическая линия одинакового ската. Касательные к такой линии в любой ее точке имеют постоянный угол наклона к горизонтальной плоскости проекций.

Горизонтальной проекцией линии наибольшего ската на поверхности сферы радиусом R_0 является *эпициклоида*, полученная перемещением точки круга радиусом r, катящегося по внешней стороне круга радиусом R. Здесь:

$$R + 2r = R_0 \quad \text{и} \quad 3 \cdot 2\pi r = 2\pi R;$$

откуда

$$r = \frac{R}{3}; \quad R = \frac{3}{5} R_0 \qquad r = \frac{1}{5} R_0.$$

Фронтальная проекция рассматриваемой пространственной кривой линии определяется по точкам пересечения линий связи фронтальными проекциями соответствующих параллелей.

Из пространственных кривых линий на сфере особый интерес представляет *сферическая локсодромия**** — кривая, пересекающая все меридианы сферы под одним и тем же углом. Она имеет большое значение в мореплавании и авиации. Корабль, например, следуя на дальние расстояния, держится постоянного курса (постоянного угла между меридианом и направлением движения ко-

---

* От греч. βραχιστος — кратчайший.

** От греч. ὀρθός — прямой и δρόμος — бег.

*** От греч. λοξός — косой и δρόμος — бег. Название предложено голланд. ученым В. Снеллиусом, впервые исследовавшим локсодромию в 1624 г.

рабля). Траекторией движения корабля между пунктами отправления и прибытия является локсодромия. Она прокладывается на шаре по спирали, делая бесконечно большое число оборотов, стремясь к полюсам.

Локсодромия имеет уравнение вида:

$$\lambda = \operatorname{tg}\alpha \cdot \ln \operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\phi}{2}\right),$$

где ϕ — широта точки на сфере (считая от экватора);

λ — долгота точки на сфере (считая от какого-либо начального меридиана);

α — заданный угол между локсодромией и меридианами.

На рис. 246 построена локсодромия в ортогональных проекциях. Обе ее проекции можно построить, определяя соответствующие долготы по вышеприведенной формуле, задаваясь для данного α последовательно широтами ϕ.

Построение локсодромии можно начать с построения горизонтальной ее проекции, представляющей собой логарифмическую спираль вида:

$$\lambda = \operatorname{tg}\alpha \cdot \ln \rho,$$

где ρ — радиус-вектор спирали;

λ — долгота.

Сферическую локсодромию очень удобно строить, применяя стереографические проекции. Из способа образования локсодромии следует, что касательные к ее стереографической проекции должны составлять постоян-

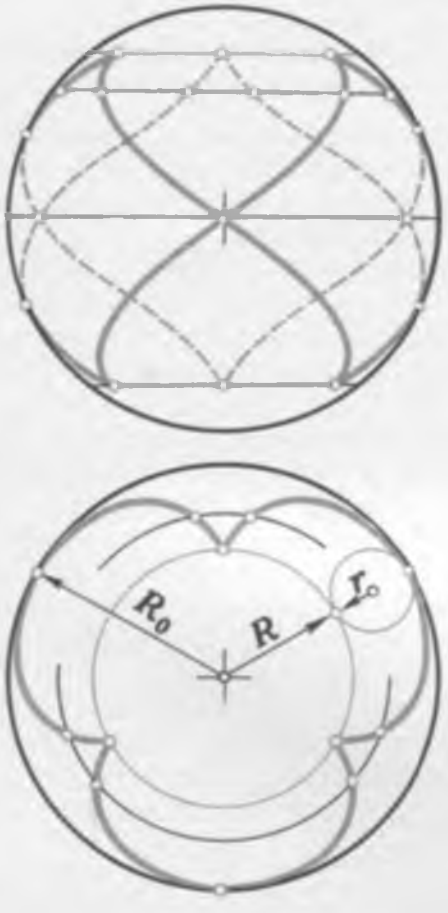


Рис. 245

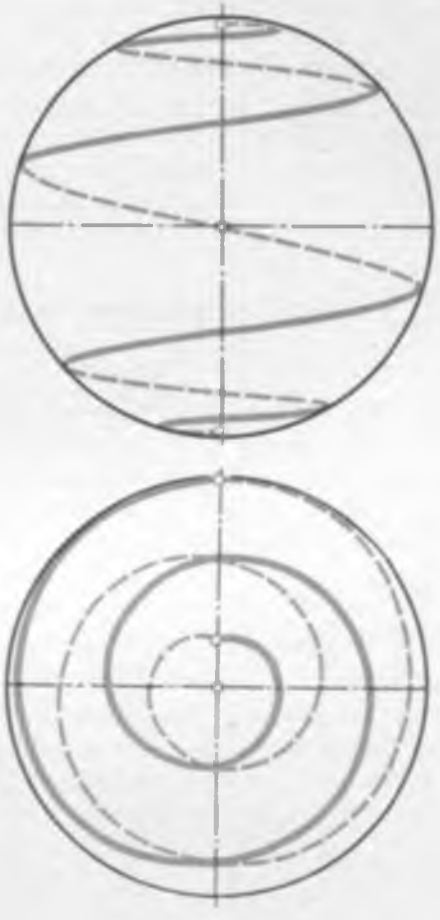


Рис. 246

ный угол α с проекциями касательных к меридиональным сечениям или составлять постоянные углы с радиусами-векторами, соединяющими точки стереографической проекции кривой линии с точкой касания сферы плоскостью стереографических проекций.

Кривой линией, удовлетворяющей этому условию, является, как уже известно, логарифмическая спираль. Она должна находиться в плоскости проекций и составлять с радиусами-векторами, исходящими из точки касания, заданный угол α.

Соединяя точки спирали с полюсом прямыми линиями и находя точки пересечения этих прямых линий со сферой, наметим ряд точек, которые принадлежат локсодромии.

Вопросы для самопроверки

1. Какие кривые линии называют алгебраическими и какие трансцендентными?
2. Что называют порядком алгебраической кривой?
3. Что называют кривизной плоской кривой и как ее определяют графически?
4. Дайте определение эволюты и эвольвенты плоской кривой
5. Укажите основные свойства эволют их эвольвент.
6. Какие кривые линии называют монотонными?
7. Расскажите об иррегулярных вершинах кривых линий.
8. Какие кривые называют овалами? Покажите примеры овалов.
9. Какие кривые называются соприкасающимися?
10. Какое преобразование плоских кривых называют конхоидальным, инверсией, конформным?
11. Какие кривые называют кривыми линиями второго порядка? Расскажите о каждой из них.
12. Какие кривые линии называют эквидистантными?
13. Какие пространственные кривые называют гелисами, и как их задают на эпюре Монжа?
14. Как определяют на чертеже направление (ход) цилиндрической винтовой линии?
15. Расскажите о конических винтовых линиях.
16. Расскажите о кривых линиях на сфере

ГЛАВА VIII

ПОВЕРХНОСТИ. ИХ ОБРАЗОВАНИЕ И ЗАДАНИЕ НА ЭПЮРЕ МОНЖА

ОБРАЗОВАНИЕ И ЗАДАНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ. СЕТИ И ОЧЕРКИ ПОВЕРХНОСТЕЙ §46

1. Аналитический способ задания поверхностей

Поверхности (алгебраические или трансцендентные) можно рассматривать как геометрическое место точек или линий. Координаты точек этого геометрического места удовлетворяют некоторому заданному уравнению вида $F(x, y, z) = 0$.

Поверхность называется *трансцендентной*, если ее уравнение — трансцендентная функция* относительно x, y, z.

Алгебраической поверхностью n-го порядка называют поверхность, уравнение которой — алгебраическое уравнение степени n. Плоскость, как известно, выражается уравнением первой степени. Ее называют поверхностью первого порядка. Любая произвольная плоскость пересекает поверхность n-го порядка по кривой линии того же порядка (иногда распадающейся или мнимой). Любая произвольная прямая пересекает поверхность n-го порядка в n точках (действительных или мнимых).

Аналитический способ задания поверхности находит широкое применение в практике, особенно если требуется исследовать свойства поверхности, инвариантные относительно ее изгибания — внутренние свойства поверхности.

2. Задание поверхности каркасом

Поверхности, к которым нельзя применить математические закономерности, обычно задают достаточно плотной сетью линий, принадлежащих этим поверхностям. Совокупность таких линий называют *дискретной** *сетью*, или *дискретным каркасом* поверхности.

Одним из распространенных в промышленности методов конструирования поверхностей является метод конструирования поверхностей с помощью непрерывного каркаса. Каркас поверхности может состоять и из пространственных кривых линий. Однако

* Простейшими примерами трансцендентной функции являются: показательная, тригонометрическая, логарифмическая функции.

* Дискретный — означает состоящий из отдельных элементов

чаще всего поверхности задают каркасом их плоских сечений.

Каркасы поверхностей могут состоять из одного, двух и трех семейств плоских сечений. Во всех случаях любое плоское сечение из этого семейства может быть исходным; другие семейства сечений строятся как дополнительные на основе первого.

В основе теории каркаса лежит следующее положение: *непрерывное однопараметрическое множество линий в пространстве задает поверхность и, обратно, всякая поверхность может быть представлена однопараметрическим множеством линий, свойства которых и закон их распределения в пространстве определяют свойства поверхности.*

Каркасы поверхностей делят на точечные и лекальные. *Точечным каркасом* называют совокупность точек на поверхности, выбранных таким образом, что, ориентируясь по ним, можно достаточно полно представить вид и форму поверхности во всех ее частях. Точки можно выбрать или изолированными друг от друга, или же соединить их между собой прямыми линиями.

Рассмотрим опирающуюся на поверхность сеть из треугольников — *триангуляционную сеть* (рис. 247).

Если принять прямые линии триангуляционной сети, опирающейся на рассматриваемую поверхность, за ребра многогранника, то неполной, полученной на основе точечного каркаса, моделью поверхности будет вписанный в поверхность многогранник с треугольными гранями. Вершины и ребра такого многогранника дают общее представление о форме поверхности. Чем полнее и равномернее представлен точками (вершинами многогранника) каркас поверхности, тем точнее представляется и поверхность.

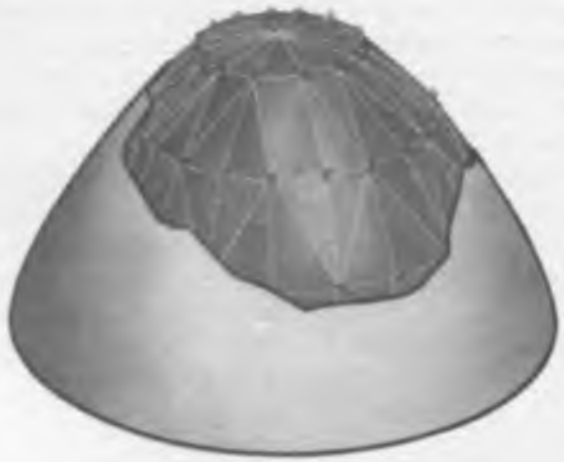


Рис. 247

Лекальным каркасом называют совокупность намеченных на поверхности линий (рис. 248). Здесь поверхность пересекается рядом параллельных, находящихся на одинаковом расстоянии друг от друга плоскостей P. Кривые линии ABC, $A_1B_1C_1$,... являются линиями пересечения поверхности этими плоскостями.

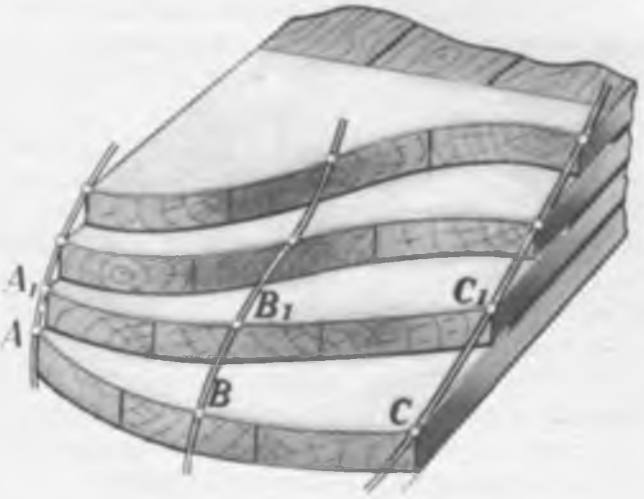
Для построения лекального каркаса поверхности обычно берут доски. Их ограничивают цилиндрическими поверхностями, направляющие линии которых ABC, $A_1B_1C_1$,..., а направления образующих перпендикулярны к плоскостям. Эти доски разделяют тонкими металлическими пластинками. Криволинейные кромки пластинок совпадают с кривыми линиями ABC, $A_1B_1C_1$,... — сечениями поверхности плоскостями. Они и определяют лекальный каркас поверхности.

Этот метод применим для выполнения штампов при изготовлении поверхностей из листового материала.

Пользуясь точечными и лекальными каркасами поверхностей, можно построить сначала неполные, а затем и полные модели поверхностей. Модель будет тем полнее, чем точнее она дает представление о поверхности. Из неполной модели можно получить полную модель поверхности путем заполнения ее каким-либо материалом. Это заполнение контролируется поверочными линейками.

На рис. 249 показана модель каркаса поверхности, заданного двумя семействами линий. Модель представлена продольными и поперечными *стрингерами**, имеющими пазы для их соединения при сборке. Обтягивая собранный каркас каким-либо листо-

* От голланд. stringer — плоский криволинейный брус.



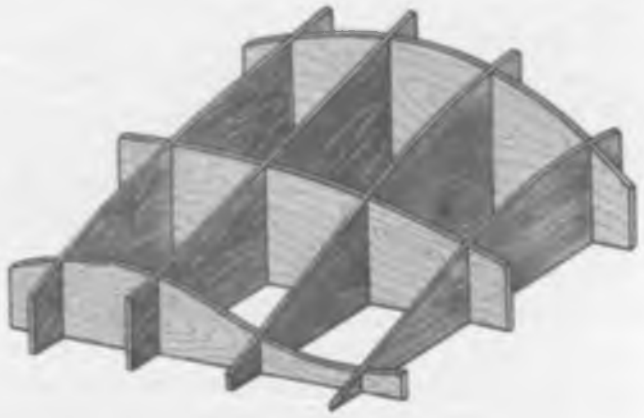
Р и с. 248

вым материалом, получим соответствующую этому каркасу поверхность.

Такой способ находит применение при изготовлении кузовов автомобилей, в самолето- и судостроении и т. п.

Способ задания поверхности лекальным каркасом, например, с помощью линий пересечения поверхности плоскостями уровня, применяется в топографии, горном и дорожном деле. Проекции линии уровня на плоскость проекций с соответствующей отметкой представляют собой карту рельефа местности.

Задание поверхностей каркасом не является вполне определенным. Можно при одном и том же каркасе получить поверхности, несколько отличающиеся одна от другой.



Р и с. 249

3. Кинематический способ задания поверхностей

В начертательной геометрии поверхности можно рассматривать как *кинематические*, т. е. образованные непрерывным перемещением в пространстве какой-либо линии или поверхности. Эти линии и поверхности называют *производящими* (образующими) кинематической поверхности. Поверхность, образованная перемещением линии, представляет собой геометрическое место различных положений производящей линии.

Поверхность, образованная непрерывным перемещением производящей поверхности, рассматривается как огибающая различных положений производящей поверхности. Образованная таким образом кинематическая поверхность соприкасается с производящей поверхностью в различных ее положениях, т. е. имеет некоторые общие линии. Эти линии называют *характеристиками* поверхности.

Производящая (образующая) кинематической поверхности перемещается в пространстве по определенному закону. Она может в процессе движения сохранять свою форму (иметь неизменный вид), а также в процессе движения и непрерывно изменять свою форму. От вида образующей и закона ее перемещения зависит форма (вид) кинематической поверхности. Закон перемещения в пространстве образующей удобно задавать неподвижными кривыми, которые называют *направляющими линиями кинематической поверхности*.

На любой кинематической поверхности можно выделить два семейства кривых линий: семейство образующих и семейство направляющих. Из этого семейства линий можно составить каркас кинематической поверхности.

Совокупность основных параметров поверхности, которые определяют ее задание, называют *определителем поверхности*. Например, определителем конуса вращения могут быть ось и образующая или вершина и направляющая линия. Определителем цилиндра вращения может быть ось и образую-

щая (прямая или кривая) или ось и направляющая (окружность). Окружность может быть и направляющей линией цилиндра и его образующей.

Цилиндр вращения можно также представить как поверхность, огибающую однопараметрическое семейство сфер с центрами, расположенными на прямой (оси цилиндра). Поэтому определителем цилиндра вращения может быть ось и радиус образующей сферы.

Задание поверхности на чертеже проекциями ее определителя обеспечивает обратимость чертежа, его метрическую определенность, но не дает наглядности изображения. Для бóльшей наглядности изображения поверхности в ряде случаев используют ее очерки — границы видимости на плоскостях проекций.

Очерком данной поверхности называют линию пересечения с плоскостью проекций проецирующей поверхности (цилиндрической или конической, в зависимости от вида проецирования), обертывающей данную поверхность.

Обертывающие проецирующие цилиндр или конус касаются данной поверхности по кривой линии, которую называют *контурной* линией. Очевидно, очерк поверхности является проекцией контурной линии.

§ 47 КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ ОСНОВНЫХ ВИДОВ

Производящая (образующая) линия при движении в пространстве из начального положения в некоторое конечное занимает ряд последовательных положений, т. е. совершает ряд перемещений. Под перемещением понимается переход производящей линии из одного ее положения в какое-либо другое. Такая производящая образует кинематическую поверхность. Каждая точка производящей описывает линию, которую называют *ходом* данной точки.

Рассмотрим основные виды перемещений производящей линии.

Поступательным перемещением производящей кривой линии называют такое ее перемещение, при котором начальное и конечное положения производящей представляют собой равные и параллельные кривые линии.

На рис. 250 показан чертеж поступательного перемещения кривой линии, которая из начального положения ab, $a'b'$ переходит в положение a_1b_1, $a'_1b'_1$. Прямолинейные отрезки, ходы точек производящей линии, равны и параллельны между собой. Они определяют величину и направление поступательного перемещения кривой линии.

Вращательным перемещением производящей линии называют такое ее перемещение, при котором все положения производящей получаются путем поворота ее вокруг некоторой неподвижной оси.

На рис. 251 показаны положения ab, $a'b'$ и a_1b_1, $a'_1b'_1$ кривой линии, совершившей вращательное перемещение на угол β вокруг неподвижной вертикальной оси. В этом случае горизонтальные проекции ab и a_1b_1 производящей линии имеют одинаковый

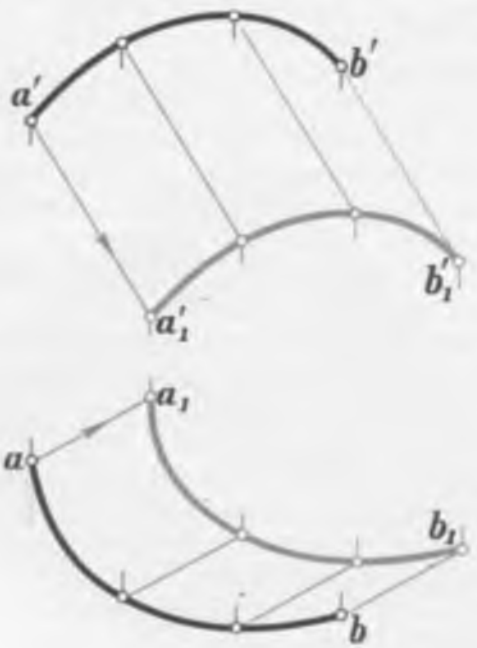


Рис. 250

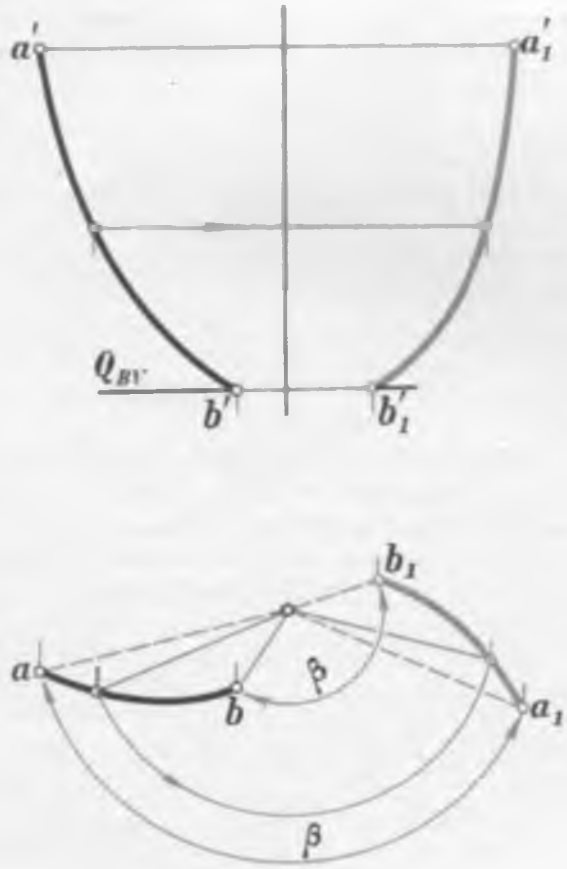


Рис. 251

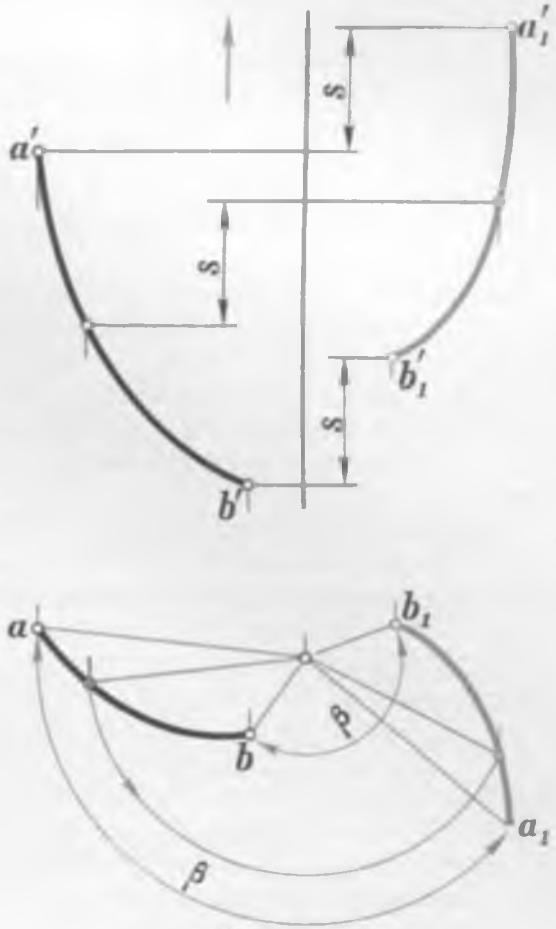


Рис. 252

вид, а угол поворота кривой линии проецируется на плоскость H в натуральную величину.

Винтовым перемещением производящей линии называют такое ее перемещение, при котором все последующие положения производящей получаются при помощи двух перемещений: поступательного и вращательного. Последовательность этих перемещений — произвольная, а направление поступательного перемещения параллельно оси вращательного перемещения. Эту ось называют *винтовой осью* перемещения.

На рис. 252 показан пример винтового перемещения кривой, которая из начального положения ab, $a'b'$ переходит в положение a_1b_1, $a_1'b_1'$. Кривая совершила поворот вокруг вертикальной оси в заданном направлении на угол β, и поступательное перемещение вдоль винтовой оси на величину s в указанном направлении.

Величину $p=\frac{s}{\beta}$, где угол β измеряется в радианах, называют *параметром* винтового перемещения. Поступательное и вращательное перемещения можно рассматривать как частные случаи винтового.

Поступательное перемещение можно представить винтовым перемещением с параметром $p=\frac{s}{\beta}=\frac{s}{0}=\infty$, так как в этом случае $\beta=0$.

Вращательное перемещение можно представить винтовым перемещением с параметром $p=\frac{s}{\beta}=\frac{0}{\beta}=0$, так как в этом случае $s=0$.

Полное перемещение производящей линии при образовании ею поверхности рассматривают как предельное *суммарное*, состоящее из бесконечно большого числа бес-

конечно малых слагаемых перемещений. Это дает возможность рассматривать и кинематическую поверхность предельно суммарной, состоящей из бесконечно большого числа бесконечно малых (по площади) поверхностей, из которых каждая ограничена бесконечно близкими положениями производящей линии.

Наибольшая наглядность изображения поверхности на чертеже получается построением сети поверхности, т. е. построением последовательного ряда положений производящей линии и ходов ряда точек производящей, а также построением очерков поверхности.

Рассмотрим кинематические поверхности, у которых бесконечно малые перемещения производящей линии сохраняют свой вид.

Поверхности, у которых бесконечно малые перемещения производящей линии являются поступательными перемещениями одного направления, называют *поверхностями переноса прямолинейного направления*.

Поверхности, у которых бесконечно малые перемещения производящей линии являются перемещениями вращения с общей неподвижной осью, называют *поверхностями вращения*.

Поверхности, у которых бесконечно малые перемещения производящей линии являются винтовыми перемещениями одного параметра с общей винтовой осью, называют *винтовыми поверхностями*.

Отметим следующие важные свойства кинематических поверхностей основных видов.

Свойство 1. *Любую кривую линию поверхности, пересекающую ходы всех точек производящей линии, можно рассматривать как производящую линию поверхности.*

Поверхность переноса может быть образована поступательным перемещением любой кривой линии, принадлежащей поверхности, по тому же направлению. Поверхность вращения может быть образована вращением любой ее кривой вокруг той же оси. Аналогичное положение характерно и для винтовых поверхностей; их производящими могут быть различные по форме кривые, лишь бы они пересекали все ходы точек.

Свойство 2. *Две поверхности, имеющие общий закон образования и отличающиеся друг от друга лишь производящими линиями, могут пересекаться между собой только по общим ходам точек производящих линий.*

Свойство 3. *Строение кинематической поверхности основного вида не изменяется в точках данного хода.*

При перемещении точки по ходу кусок вырезанной вокруг нее поверхности совмещается с поверхностью всеми своими точками.

Свойство 4. *Каждая кинематическая поверхность основного вида может без деформаций сдвигаться вдоль самой себя.*

При изучении кинематических поверхностей основных видов прежде всего рассматривают вопросы задания поверхности на чертеже, способы построения на основе этих заданий ряда положений движущейся производящей линии и очерков.

Через каждую точку кинематической поверхности основного вида проходит производящая линия и ход рассматриваемой точки. Сообразно с этим, точку на заданной кинематической поверхности намечают или исходя из условия, что через нее проходит ход соответствующей точки производящей линии, или из условия, что через нее проходит производящая линия поверхности. В тех случаях, когда на чертеже трудно получить производящую линию в соответствующем ее положении и указанные ходы ее точек, применяют вспомогательные проецирующие секущие плоскости и строят линию сечения поверхности плоскостью.

1. Поверхности переноса прямолинейного направления

Поверхность переноса прямолинейного направления образуется непрерывным поступательным перемещением производящей кривой линии. Поверхность можно задать (рис. 253) начальным положением ABC производящей линии и направлением переноса (стрелкой). Ходами точек производящей ли-

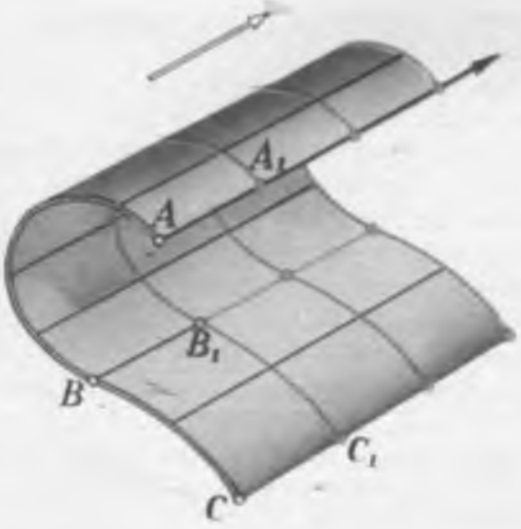


Рис. 253

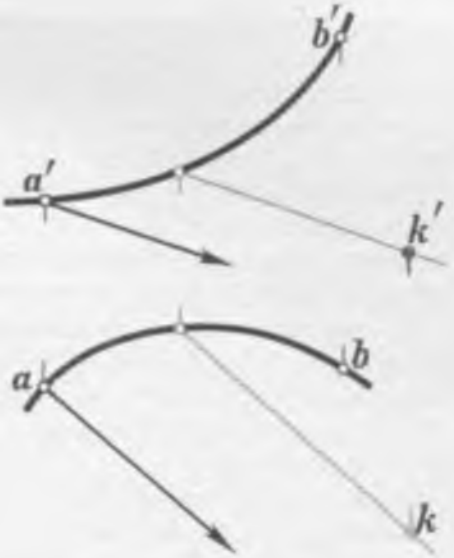


Рис. 254

нии являются прямые, параллельные направлению переноса.

Кривые линии ABC, $A_1B_1C_1$,..., представляющие собой ряд положений производящей линии, определяют сеть поверхности переноса прямолинейного направления. Ячейки этой сети обладают тем свойством, что их противолежащие стороны являются равными и параллельными линиями.

Поверхность переноса прямолинейного направления можно рассматривать и как поверхность, образованную движением прямой линии (образующей), которая все время параллельна данному направлению и скользит по кривой линии ABC. Эту же поверхность называют *цилиндрической* поверхностью. Здесь кривая ABC — *направляющая линия*, а прямая (направление переноса) — *производящая* (образующая) линия поверхности.

На рис. 254 показано построение недостающей горизонтальной проекции k точки kk' поверхности переноса прямолинейного направления, заданной производящей линией ab, $a'b'$ и направлением переноса — стрелкой точки aa'.

Проведем через данную проекцию k' точки kk' фронтальную проекцию хода, параллельного направлению переноса. Очевидно, что этот ход принадлежит точке $11'$ производящей линии. Построим горизонтальную проекцию хода, на которой, проведя линию связи, найдем искомую горизонтальную проекцию k точки.

2. Поверхности вращения

Поверхность вращения образуется вращательным перемещением производящей линии вокруг неподвижной оси (рис. 255). При

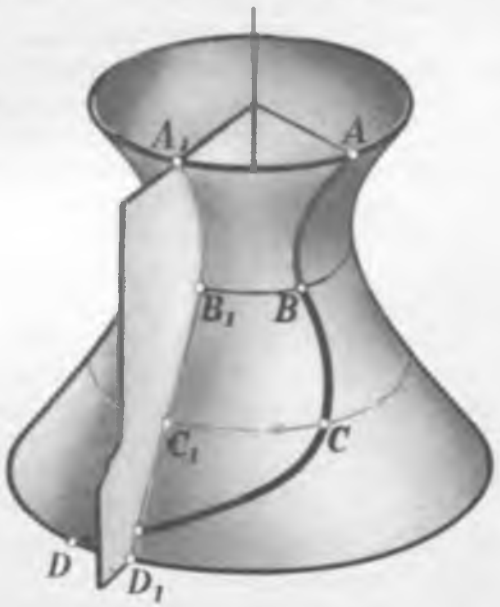


Рис. 255

изучении таких поверхностей обычно за ось вращения принимается вертикальная прямая.

Ходом каждой точки производящей линии является окружность, которую называют *параллелью* поверхности вращения. Плоскости параллелей перпендикулярны к оси поверхности.

Таким образом, параллели без искажения проецируются на плоскость, перпендикулярную к оси, окружностями с общим центром.

Наибольшую из параллелей (окружностей) поверхности вращения называют *экватором* поверхности, а наименьшую — *шейкой* (*горлом*) поверхности.

Плоскости, проходящие через ось поверхности вращения, называют *меридиональными*, а линии, по которым они пересекают поверхность — *меридианами*.

Поверхность вращения называют *закрытой*, если меридиональное сечение поверхности является замкнутой кривой линией, пересекающей ось поверхности в двух точках.

Каркас поверхности вращения можно представить параллелями или меридианами поверхности, а также сетью, состоящей из параллелей и меридианов.

Отметим некоторые важные свойства поверхностей вращения:

1. *Поверхности вращения обладают свойством сдвигаемости, т. е. вращаясь вокруг своей оси, поверхность может сдвигаться без деформации вдоль самой себя.*

2. *Если меридиан поверхности вращения проходит через две точки поверхности, то он является кратчайшей линией между этими точками (геодезической линией) и все меридианы равны между собой.*

3. *Каждая из параллелей поверхности вращения пересекает меридианы под прямым углом, т. е. параллели и меридианы образуют прямоугольную сеть на поверхности вращения.*

4. *Поверхность вращения можно задать любой кривой, если эта кривая пересекает все ходы точек производящей линии.*

5. *Каждая из нормалей к поверхности вращения пересекает ось поверхности.*

Это означает, что для любой поверхности вращения можно строить вписанные или описанные сферы.

При вращении вокруг оси плоской или пространственной алгебраической кривой n-го порядка образуется алгебраическая поверхность вращения в общем случае $2n$-го порядка. Если кривая второго порядка вращается вокруг своей оси, то она образует поверхность второго порядка.

По виду кривых линий второго порядка в главном меридиональном сечении поверхности вращения имеют следующие названия:

сфера (шар), если производящая кривая линия является окружностью, а ось совпадает с ее диаметром;

*тор**, если производящая окружность вращается вокруг оси, лежащей в плоскости окружности и не проходящей через ее центр.

Если ось вращения пересекает производящую окружность или касается ее, получается *закрытый тор*.

Если ось вращения не пересекает производящую окружность и не касается ее, получается *открытый тор* (кольцо);

эллипсоид вращения образуется вращением эллипса вокруг его оси.

Если за ось вращения принята большая ось эллипса, имеем *вытянутый эллипсоид вращения*, если малая — *сжатый эллипсоид вращения*;

параболоид вращения образуется вращением параболы вокруг ее оси;

однополостный гиперболоид вращения образуется вращением гиперболы вокруг ее мнимой оси;

двуполостный гиперболоид вращения образуется вращением гиперболы вокруг ее действительной оси;

конус вращения образуется вращением вокруг оси кривой 2-го порядка, распадающейся на две пересекающиеся прямые линии;

цилиндр вращения образуется вращением вокруг оси кривой 2-го порядка, распадающейся на две параллельные прямые линии.

---

* Тор является поверхностью четвертого порядка.

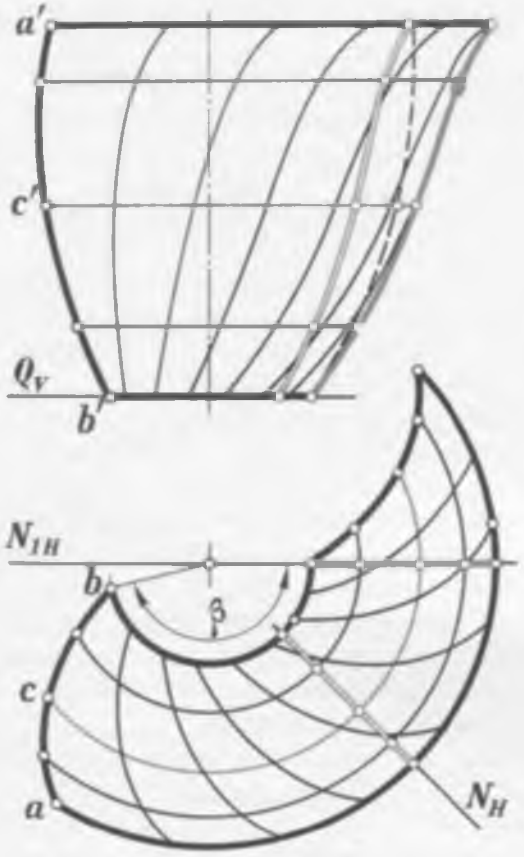


Рис. 256

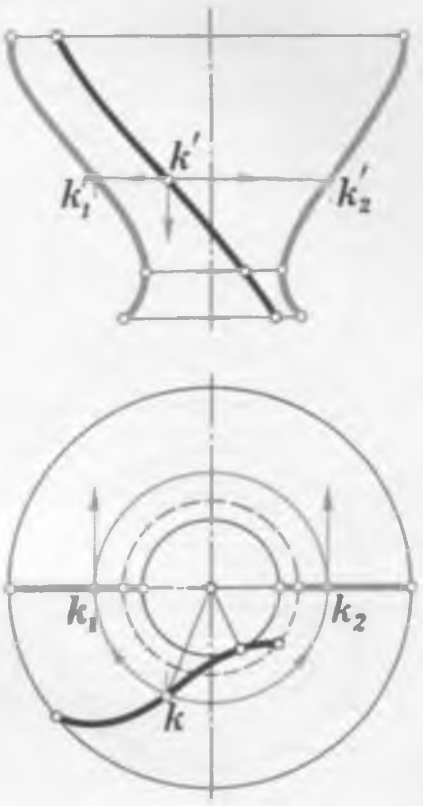


Рис. 257

Конус и цилиндр вращения являются линейчатыми поверхностями. Линейчатой поверхностью является и однополостный гиперболоид вращения. Здесь производящая прямая и ось вращения представляют собой две скрещивающиеся прямые линии.

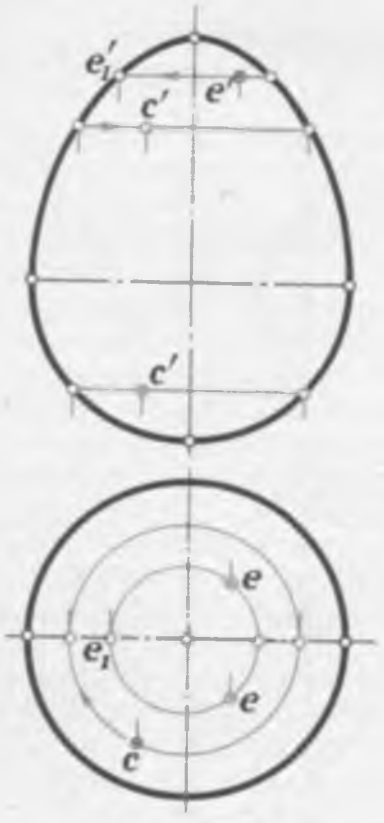
Поверхность вращения на чертеже можно задать проекциями производящей линии и проекциями неподвижной оси (рис. 256).

При принятом расположении оси поверхности вращения горизонтальная проекция производящей линии не изменяет своего вида при всех положениях производящей линии, а углы поворота точек производящей линии проецируются на горизонтальную плоскость в натуральную величину.

Путем поворота вокруг центра (проекции оси вращения) построим ряд положений горизонтальной проекции производящей линии. Имея горизонтальные проекции производящей линии и параллели, можно построить фронтальные проекции параллелей, а затем и фронтальные проекции ряда положений производящей линии. Эти построения наметят сеть заданной поверхности вращения.

Поверхность вращения, заданную неподвижной осью и производящей произвольного вида кривой, можно представить и заданной очерками (рис. 257). Здесь фронтальным очерком является фронтальная проекция фронтального меридиана, а горизонтальным — горизонтальная проекция наибольшей параллели.

На рис. 258 показано построение недостающей горизонтальной проекции *e* точки *ee'* и недостающей фронтальной проекции *c'* точки *cc'* поверхности вращения. Ходами точек производящей линии поверхности вращения являются ее параллели. Производящей линией является фронтальный меридиан. Параллель точки *ee'* пересекается с про-



Р и с. 258

изводящей линией в точке $e_1e'_1$. Через горизонтальную проекцию e_1 этой точки проходит горизонтальная проекция указанной параллели. Линия связи точки ee' пересекает параллель в искомой точке. Замечаем, что заданной фронтальной проекции e' точки ee' соответствуют две горизонтальные проекции.

Таким образом, поставленная задача имеет два решения, так как фронтально-проецирующий луч, общий для обеих найденных точек, дважды пересекает поверхность вращения.

Для определения недостающей фронтальной проекции c' точки cc' строим горизонтальную проекцию параллели (окружность) этой точки. Этой окружности соответствуют в нашем случае фронтальные проекции двух параллелей. Линия связи точки c пересекает их в точках c'.

Таким образом, и эта задача имеет два решения, так как горизонтально-проецирующий луч, общий для обеих полученных точек, дважды пересекает заданную поверхность вращения.

На рис. 259 показано образование поверхности однополостного гиперболоида вращения. Такая поверхность на чертеже (рис. 260) изображена очерками. Осью поверхности вращения является горизонтально-проецирующая прямая, а производящей линией — прямолинейный отрезок ab, $a'b'$.

Наименьшей параллелью (шейкой) поверхности является окружность, радиус r которой равен наименьшему расстоянию между осью и производящей линией. Параллели, плоскости которых находятся на одинаковых расстояниях от плоскости шейки поверхности, имеют одинаковые радиусы. Поэтому плоскость шейки является плоскостью симметрии, а центр kk' параллели шейки — центром симметрии поверхности. Поверхность вращения ограничена здесь двумя равными параллелями.

Какое-либо другое положение a_1b_1, $a_1'b_1'$ производящей линии найдем, если на горизонтальной проекции параллели отложим от точек a и b равные дуги $aa_1 = bb_1$. Точки a_1 и b_1 будут тогда горизонтальными проекциями точек, принадлежащих производящей линии. Проведя через эти точки линии связи, получим фронтальную проекцию $a'_1b'_1$ производящей a_1b_1, $a'_1b'_1$.

Каждая из меридиональных плоскостей поверхности вращения служит плоскостью симметрии поверхности. Поэтому на рассматриваемой поверхности, если принять плоскость N_H за плоскость симметрии, имеем прямую линию cd, $c'd'$, симметричную прямой линии ab, $a'b'$. Прямая линия cd, $c'd'$ пересекается всеми параллелями поверхности и, следовательно, ее можно принять за производящую линию поверхности вращения.

Таким образом, однополостный гиперболоид вращения имеет две производящие прямые линии. Производящие линии ab, $a'b'$ и cd, $c'd'$ составляют с осью поверхности угол δ, величина которого не изменяется при вращении производящих линий вокруг оси. Через центр kk' проведем прямые линии, параллельные различным положениям

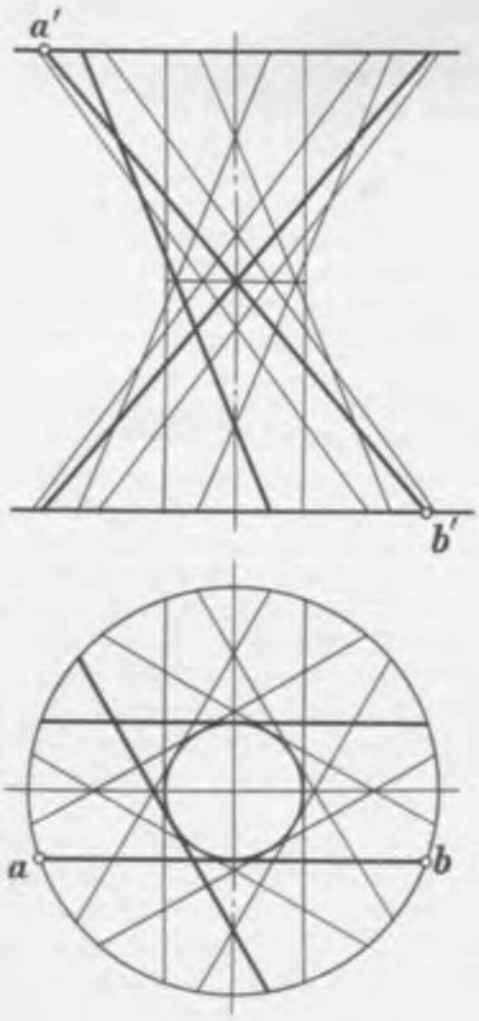


Рис. 259

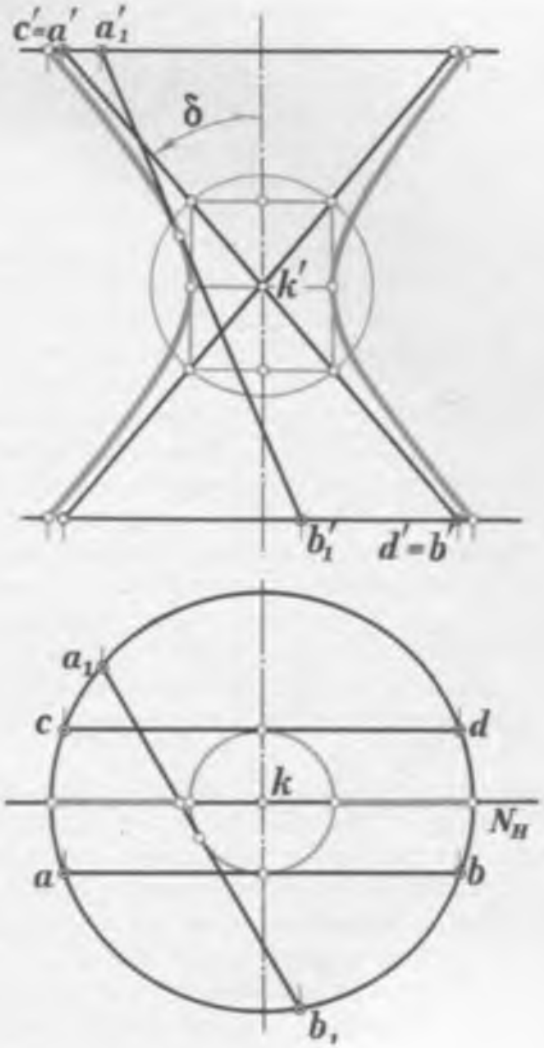


Рис. 260

производящих линий ab, $a'b'$ и cd, $c'd'$. Геометрическим местом этих прямых линий является поверхность конуса вращения с вершиной в точке kk', состоящая из двух полостей (половин), направленных каждая в сторону расширения поверхности. Этот конус вращения называют *асимптотическим конусом поверхности*.

Две скрещивающиеся прямые определяют задание гелисы, если одну из них принять за ось гелисы, а другую — за касательную к ней. Если при этом гелиса имеет правый ход, то прямые имеют *правое скрещивание*, если левый ход — *левое скрещивание*. Поэтому, аналогично, производящую прямую линию однополостного гиперболоида вращения называют *правой* или *левой* производящей линией, в зависимости от того, в каком скрещивании она находится с осью поверхности. Согласно чертежу, производящая линия ab, $a'b'$ является левой, а производящая линия cd, $c'd'$ — правой производящей линией.

Параметром скрещивания прямых линий называют отношение величины наименьшего расстояния между этими прямыми линиями к величине угла между ними. Точки на прямых линиях, расстояние между ко-

торыми равно наименьшему расстоянию между прямыми, называют *центрами скрещивающихся прямых линий*.

Два смежных положения производящей правой и левой линий представляют собой две скрещивающиеся прямые линии. Следовательно, поверхность однополостного гиперболоида вращения можно рассматривать как два семейства скрещивающихся прямых линий. При этом каждая прямая одного семейства пересекает все прямые другого семейства, кроме одной, ей параллельной.

На каждой поверхности, представляющей собой семейство скрещивающихся прямых линий, можно провести кривую линию, являющуюся геометрическим местом центров скрещивающихся бесконечно близких положений производящей линии. Эту кривую называют *линией сужения* (стрикционной линией) поверхности. Она представляет собой самую короткую из кривых линий на поверхности, пересекающих все положения производящей линии.

Для однополостного гиперболоида вращения линией сужения является параллель радиусом r, его шейка, так как она, очевидно, является самой короткой кривой линией на поверхности, пересекающей все положения правой и левой производящих линий.

Параметр скрещивания двух бесконечно близких положений производящей линии равен:

$$p_K = \lim \frac{\Delta s}{\Delta \beta},$$

где Δs и $\Delta\beta$ — бесконечно малые расстояния и углы между смежными положениями производящей линии. Наименьшее расстояние между бесконечно близкими положениями производящей линии равно:

$$\Delta s = \Delta s_1 \cdot \cos \delta,$$

где Δs_1 — бесконечно малая дуга линии сужения.

Вследствие однообразия движения производящей линии величину p_K надо считать постоянной. Следовательно,

$$p_K = \lim \frac{\Delta s}{\Delta \beta} = \frac{\Delta s_1}{\Delta \beta} \cdot \cos \delta = \frac{s_1}{\beta} \cdot \cos \delta.$$

При полном обороте производящей линии $s_1 = 2\pi R$, а величина β равна углу сектора, получающегося от развертки асимптотического конуса.

Возьмем на асимптотическом конусе вращения его параллель радиусом r. Длина образующей конуса $\frac{r}{\sin \delta}$, а угол сектора при развертке конуса

$$\beta = \frac{2\pi r}{r} \cdot \sin \delta = 2\pi \cdot \sin \delta.$$

Величина параметра скрещивания после подстановки

$$p_K = \frac{s_1 \cdot \cos \delta}{\beta} = \frac{r}{\operatorname{tg} \delta}$$

Рассматриваемую поверхность называют *однополостным гиперболоидом вращения*, потому что она меридиональными плоскостями пересекается по гиперболам.

Лежащие в меридиональной плоскости образующие асимптотического конуса являются асимптотами для гиперболы меридионального сечения.

На рис. 260 построена гипербола, которая является фронтальным очерком поверхности однополостного гиперболоида вращения, и указаны ее действительная и мнимая оси.

Поверхности вращения второго порядка широко используются в машиностроении и строительной технике. Различные детали машин и механизмов, конструкции различных опор и башен и т. п. ограничены именно такими поверхностями. Широко известная радиомачта В. Г. Шухова (1853—1939) представляет собой семейство однополостных гиперболоидов с двумя сериями прямолинейных образующих. Такая конструкция обладает высокой прочностью и легкостью.

И теперь конструкция Шухова с успехом применяется, например, в качестве лесов (опалубки) железобетонных градирен, водонапорных башен, морских маяков и др.

3. Винтовые поверхности

Винтовая поверхность образуется винтовым перемещением производящей линии. Ее можно задать (рис. 261) начальным поло-

Поверхности второго порядка очень часто задаются на чертеже их очерками. Большое значение имеет следующая теорема.

Теорема 6. *Очертание поверхности второго порядка есть кривая второго порядка.*

Доказательство этой теоремы простое.

Проведем из некоторой точки вне поверхности три произвольные касательные к поверхности. Точки касания определяют плоскость, которая пересекает поверхность по кривой второго порядка.

Представим, что выбранная точка является вершиной конуса второго порядка, а линия сечения — направляющей линией этого конуса.

Замечаем, что у поверхности и у конуса имеются общие касательные плоскости.

Данная поверхность и конус имеют тройное прикосновение.

Здесь проецирующий конус пересекается любой плоскостью по кривой второго порядка и дает очерк поверхности на этой плоскости.

Вопросы для самопроверки

1. Изобразите общую схему построения линии пересечения поверхностей.
2. Изложите принципы построения точек пересечения кривых линий с поверхностями.
3. Назовите основные способы построения линий пересечения поверхностей.
4. Опишите способы секущих плоскостей и сферических посредников при определении линии пересечения поверхностей.
5. Какое пересечение поверхностей называют полным и неполным?
6. Отметьте преимущество решения задач на построение линии пересечения поверхностей проецирующими цилиндрами и проецирующими призмами?
7. Покажите схемы построения линий пересечения двух конических (с собственной и несобственной вершинами) поверхностей, имеющих плоские направляющие линии.
8. В какой последовательности соединяются точки искомой линии пересечения поверхностей и как определяется ее видимость в проекциях?
9. Какие точки линии пересечения поверхностей называют главными (опорными)?
10. Изложите принципы построения линий пересечения поверхностей вращения и винтовых поверхностей между собой.
11. Назовите основные теоремы, применяемые при построении линии пересечения поверхностей второго порядка.

ГЛАВА XI

ПЛОСКОСТИ, КАСАТЕЛЬНЫЕ К ПОВЕРХНОСТЯМ

§64 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ. ВИДЫ КАСАНИЯ

Плоскость может касаться поверхности в точке, по прямой линии или плоской кривой. Она может в одном месте касаться поверхности, а в другом пересекать ее. Линия касания может быть одновременно и линией пересечения поверхности плоскостью.

На рис. 384 показан отсек некоторой кинематической поверхности, ограниченной положениями производящей линии и ходами точек производящей линии.

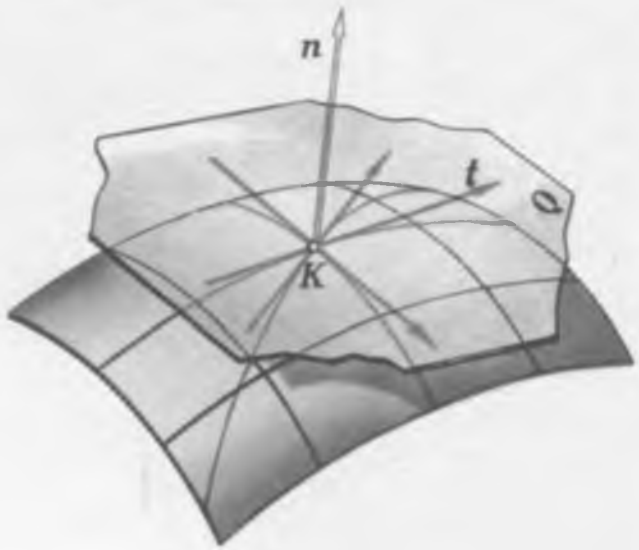


Рис. 384

Плоскость, образованную касательными, проведенными в точке K поверхности к производящей линии и к ходу, называют *касательной* плоскостью поверхности в данной ее точке. Плоскость Q является, таким образом, касательной плоскостью к рассматриваемой поверхности в точке K.

Плоскость, касательная к поверхности в данной точке, содержит касательные прямые, построенные к любой из кривых линий, намеченных на кинематической поверхности и проходящих через данную точку. Из этого следует, что касательную плоскость в данной точке поверхности можно определить как плоскость, образованную касательными к двум любым линиям, построенным на поверхности и пересекающимся в заданной на поверхности точке.

При исследовании формы поверхности в окрестности рассматриваемой точки касательная плоскость играет весьма важную роль. Однако не в каждой точке поверхности можно провести касательную плоскость. В некоторых точках касательная плоскость или неопределенная, или не единственная. Такие точки называют *особыми* точками кинематических поверхностей. Например, точки ребра возврата поверхности торса, вершина конической поверхности, точки оси

поверхности вращения, где меридиан и ось пересекаются не под прямым углом, и др.

Прямую линию, проходящую через точку касания и перпендикулярную к касательной плоскости, называют *нормалью поверхности* в данной точке. Нормаль поверхности в данной точке определяет, следовательно, направление плоскости, касательной к поверхности в этой точке.

Касательная плоскость может иметь с поверхностью одну общую точку. В этом случае все линии поверхности, пересекающиеся в рассматриваемой точке, находятся по одну сторону касательной плоскости. Такие точки поверхности называют *эллиптическими*.

Поверхности, у которых все точки эллиптические, являются выпуклыми криволинейными поверхностями. К ним относятся сфера, эллипсоид вращения, параболоид вращения и др.

Касательная плоскость, как известно, касается торса вдоль его производящей прямой линии. Она является, следовательно, касательной плоскостью этой поверхности для всех ее точек, расположенных на производящей прямой линии. Точки поверхности, удовлетворяющие этому условию, называют *параболическими*. Параболическими, например, являются точки на цилиндрах, конусах и поверхностях с ребром возврата.

Касательная плоскость к поверхности в данной ее точке может пересекать эту поверхность. В пересечении получаются: или две пересекающиеся в данной точке кривые линии, или две пересекающиеся прямые линии, или пересекающиеся в данной точке прямая и кривая линии.

Две пересекающиеся прямые линии получаются в том случае, когда поверхность линейчатая и имеет две производящие прямые линии, например, однополостный гиперболоид вращения.

Пересекающиеся прямая и кривая линии получаются в случае линейчатой неразвертывающейся поверхности, имеющей одну производящую прямую линию. К таким поверхностям относятся все геликоиды, кроме торса-геликоида.

Касательные плоскости неразвертывающейся линейчатой поверхности (однополостный гиперболоид вращения, геликоид и др.), в отличие от торса, в различных точках производящей линии имеют различные направления.

Точку поверхности, касательная плоскость в которой пересекает поверхность, называют *гиперболической*. Каждый отсек поверхности, все точки которой являются гиперболическими, имеет седлообразную форму.

Прямые линии, касательные к кривым линиям пересечения поверхности касательной плоскостью, называют *главными касательными поверхностями* в данной точке.

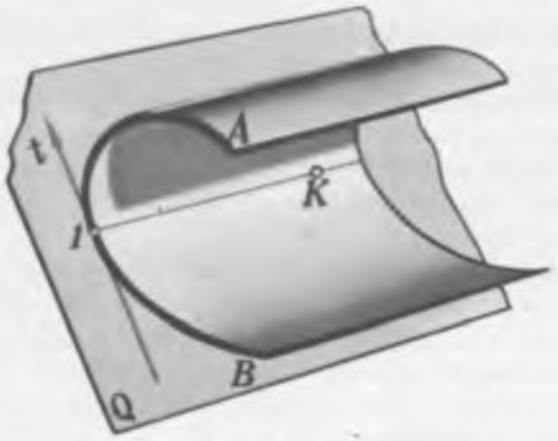
Касательную плоскость к заданной поверхности можно построить в соответствии с видом поверхности, если она: касается поверхности в данной ее точке; проходит через данную точку, лежащую вне поверхности; параллельна заданной прямой линии; имеет заданное направление; проходит через данную прямую линию.

ПЛОСКОСТИ, КАСАТЕЛЬНЫЕ К ПОВЕРХНОСТЯМ С ПАРАБОЛИЧЕСКИМИ ТОЧКАМИ

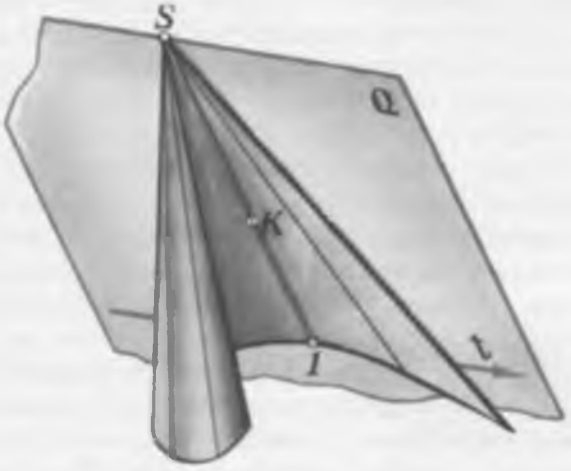
§65

Рассмотрим построение касательных плоскостей к торсам — поверхностям с параболическими точками. Касательные плоскости касаются этих поверхностей вдоль их образующих.

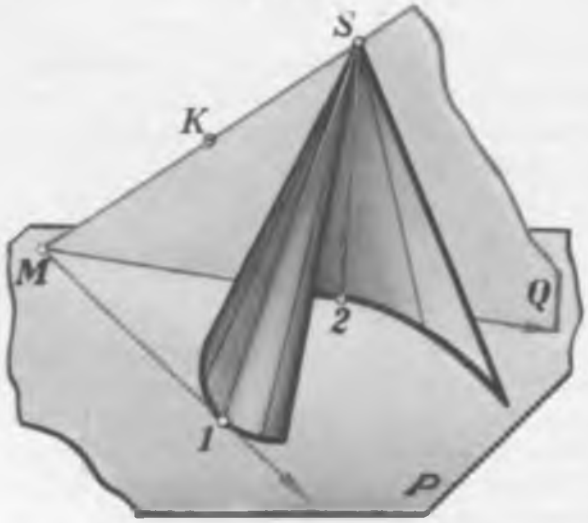
Как указывалось выше, касательную плоскость к поверхности в заданной ее точке определяют двумя прямыми, касательными к двум пересекающимся в этой точке кривым линиям поверхности. Поэтому касательную плоскость в заданной точке поверхности с параболическими точками можно определить двумя пересекающимися прямыми, из которых одна является образующей, проходящей через заданную точку, а другая прямая может быть касательной к любой



Р и с. 385



Р и с. 386



Р и с. 387

построенной на поверхности кривой линии в точке ее пересечения этой образующей (за исключением тех, которые касаются ее). Этими кривыми линиями могут быть, например, направляющие линии, входящие в задания поверхностей.

На рис. 385 построена касательная плоскость в точке K к цилиндру.

Здесь касательная плоскость Q определена образующей цилиндра, проходящей через заданную точку K, и касательной к направляющей линии AB в точке 1 пересечения образующей с направляющей линией.

На рис. 386 построена касательная плоскость в точке K к конусу.

Касательная плоскость определена образующей KS, проходящей через точку K, и касательной к направляющей линии конуса в точке 1 пересечения ее этой образующей.

Покажем построение касательной плоскости к рассматриваемой поверхности, проходящей через точку, расположенную вне заданной поверхности.

На рис. 387 построена касательная плоскость, проходящая через данную точку K, к конусу, заданному плоской направляющей линией и вершиной S. Точка K лежит вне поверхности конуса. Касательные плоскости к конусу проходят через его вершину.

Через данную точку K и вершину S конуса проведем прямую SK и определим точку M пересечения ее с плоскостью P направляющей линии конуса. Из точки M проводим касательные $M1$ и $M2$ к направляющей линии и через полученные точки касания проводим образующие $S1$ и $S2$.

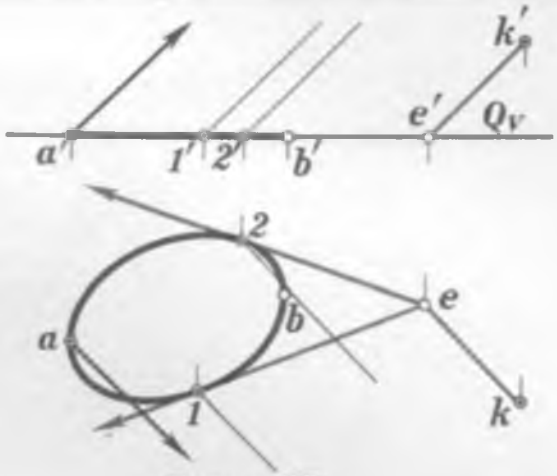
Плоскости $S1M$ и $S2M$ являются искомыми касательными плоскостями к конусу, проходящими через заданную точку K, а прямая SM является линией пересечения этих плоскостей.

Построение касательной плоскости, проходящей через заданную точку kk' к цилиндру, когда точка лежит вне поверхности цилиндра, показано на чертеже (рис. 388). Цилиндр задан направляющей линией ab, $a'b'$ и направлением образующих — стрелкой точки aa'.

Через точку kk' проводим прямую линию ke, $k'e'$, параллельную направлению

образующих цилиндра, и находим точку ee' ее пересечения с плоскостью Q_V направляющей линии. Из точки ee' проводим касательные $e1$, $e'1'$ и $e2$, $e'2'$ к направляющей линии, а через точки касания $11'$ и $22'$ — образующие цилиндра. Плоскости $ke1$, $k'e'1'$ и $ke2$, $k'e'2'$ являются искомыми касательными плоскостями.

Касательную плоскость к торсу, проходящую через точку, лежащую вне поверхности торса, определяют следующим образом. Через точку проводят плоскость, пересекающую торс по кривой линии. Затем через данную точку проводят касательную к построенной кривой. Образующая торса, проходящая через точку касания, и касательная определяют положение искомой касательной плоскости.

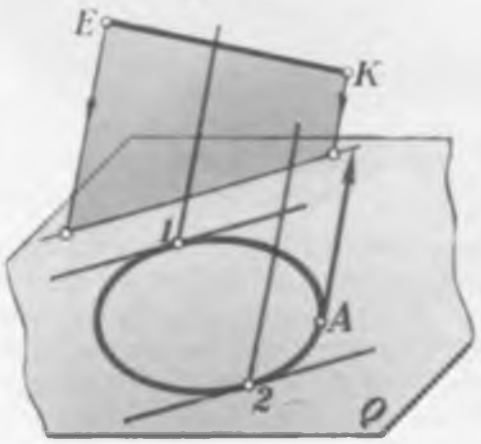


Р и с. 388

Применение вспомогательных секущих плоскостей можно использовать и для случаев построения при аналогичных условиях касательных плоскостей к конусам и цилиндрам, когда их направляющие линии не являются плоскими кривыми линиями.

Рассмотрим построение касательных плоскостей к поверхностям с параболическими точками, когда касательные плоскости параллельны заданной прямой линии.

Общая схема построения плоскости, касательной к цилиндру и параллельной заданной прямой, показана на рис. 389.



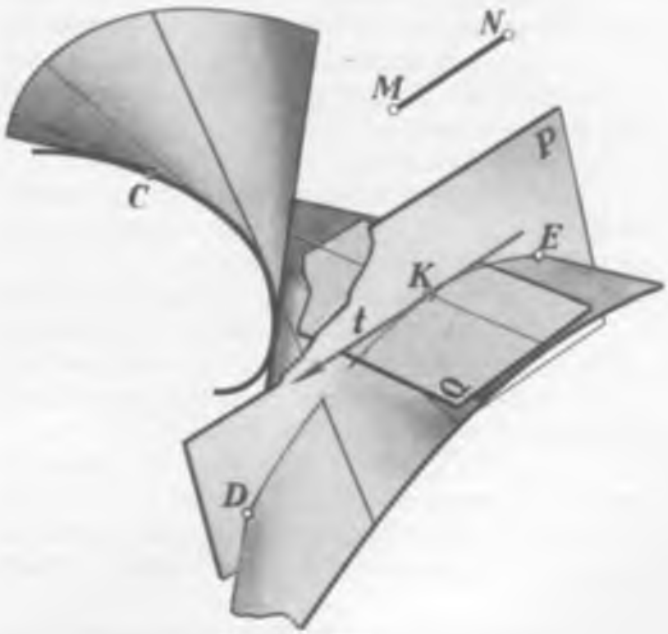
Р и с. 389

Цилиндр задан направляющей плоской кривой линией и направлением образующих — стрелкой точки A.

Через заданную прямую EK проводим вспомогательную плоскость-посредник, параллельную направлению образующих цилиндра. К направляющей линии цилиндра проводим касательные, параллельные следу плоскости-посредника, а через точки касания 1 и 2 проводим образующие цилиндра. Плоскости, представленные такими касательными и образующими, являются искомыми касательными плоскостями.

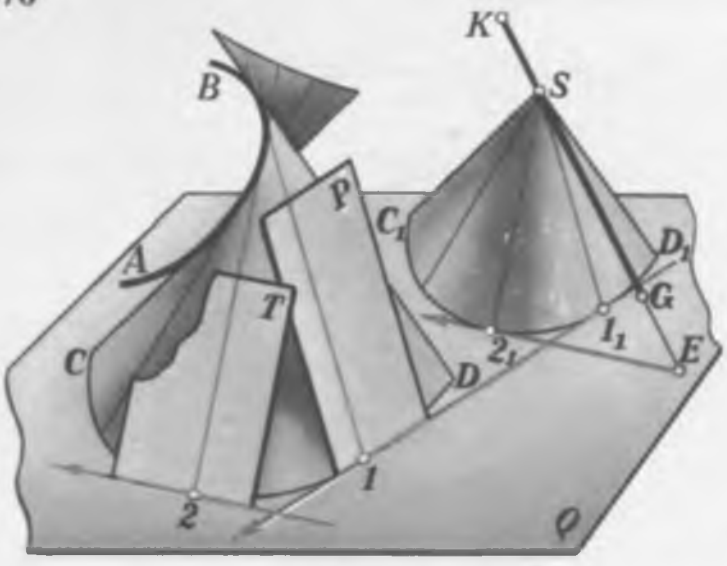
На рис. 390 построена касательная к торсу плоскость Q, параллельная заданной прямой MN.

Для построения такой плоскости выбираем какую-либо вспомогательную секущую плоскость P, параллельную прямой MN,



Р и с. 390

270



Р и с. 391

и находим линию ED пересечения плоскости с торсом. К построенной линии пересечения ED проводим касательную параллельно прямой MN, и через точку касания K проводим образующую KC торса. Касательная t и образующая KC определяют искомую касательную плоскость.

При построении плоскостей, касательных к торсам и проходящих через точки, лежащие вне поверхности торса, а также плоскостей, параллельных данной прямой линии, можно пользоваться и другой схемой, основанной на применении вспомогательного (направляющего) конуса торса.

Пусть требуется провести к торсу, заданному ребром возврата AB, касательную плоскость, проходящую через точку S, лежащую вне поверхности торса (рис. 391).

Построим, принимая точку S за вершину, направляющий конус торса и пересечем торс и его направляющий конус какой-либо плоскостью Q. Кривые линии CD и C_1D_1 пересечения торса и конуса плоскостью являются конформными кривыми линиями. К этим кривым линиям проводим общую касательную, которая касается их в парных точках 1 и 1_1.

Через точки касания 1 и 1_1 проводим взаимно параллельные образующие торса и его направляющего конуса. Этой касательной и образующими определяется искомая касательная плоскость P.

Если необходимо провести касательную плоскость к торсу, параллельную заданному направлению GK, то направляющий конус торса следует построить, принимая за его вершину одну из точек прямой линии GK, например точку S. Затем надо построить касательную плоскость к направляющему конусу, проходящую через прямую GK. Для этого проводим из точки E пересечения прямой линии GK с плоскостью Q касательную $E2_1$ к кривой линии C_1D_1. Эта касательная и образующая конуса, проходящая через точку касания 2_1, определяют касательную плоскость $SE2_1$ к конусу, проходящую через данную прямую GK.

Построим теперь касательную к кривой линии CD, параллельную касательной $E2_1$.

Касательная к направляющей линии торса и образующая торса, проходящие через точку касания 2, образуют искомую касательную к торсу плоскость T.

Метод построения касательных плоскостей к торсам при помощи их вспомогательных конусов достаточно простой в том случае, когда эти поверхности являются поверхностями одинакового ската, так как при этих условиях вспомогательными их конусами являются конусы вращения.

В рассматриваемых кинематических поверхностях с параболическими точками имеются особые точки, к которым принадлежат вершины конусов и точки ребра возврата торсов.

Вершина конуса является особой точкой, как точка, не имеющая хода, а точки ребра возврата — как точки, ходы которых имеют направления производящей линии в различных ее положениях.

Плоскость, касательная к поверхности конуса, как известно, касается конуса вдоль производящей (образующей) его линии. Вершина конуса при всяком положении производящей находится в касательной плоскости. Через вершину конуса проходит бесконечно большое число касательных плоскостей, так как производящая прямая занимает на конусе бесчисленное множество положений.

При пересечении поверхности торса плоскостью, перпендикулярной к касательной ребра возврата, получается кривая линия с вершиной острия, касательная в которой является главной нормалью ребра возврата поверхности. Соприкасающаяся плоскость ребра возврата является касательной плоскостью торса. Это необходимо учитывать при исследовании пространственных кривых.

Таким образом, касательная плоскость к торсу в точке его ребра возврата определяется касательной к ребру возврата и касательной в вершине острия к линии пересечения торса плоскостью, перпендикулярной к первой касательной в рассматриваемой точке. Следовательно, в каждой точке ребра возврата торса можно построить только одну касательную к торсу плоскость.

ПЛОСКОСТИ, КАСАТЕЛЬНЫЕ К ПОВЕРХНОСТЯМ С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМИ ТОЧКАМИ

§ 66

Для построения касательной плоскости в заданной точке поверхности вращения прежде всего на поверхности необходимо построить любые две кривые линии, проходящие через заданную точку. За такие линии обычно принимают параллель и меридиан поверхности.

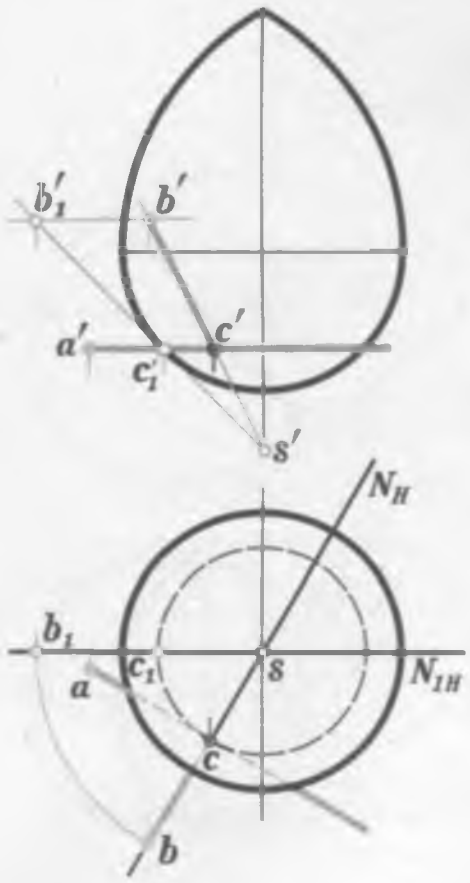
На рис. 392 построена касательная плоскость к поверхности вращения, заданной очерками, в намеченной на ней точке cc'. Касательная плоскость определяется касательной прямой ac, $a'c'$ к параллели точки cc' и касательной прямой cb, $c'b'$ к меридиану этой точки.

Для определения фронтальной проекции $c'b'$ касательной прямой меридиональную плоскость N_H путем вращения вокруг оси поверхности совмещаем с фронтальной меридиональной плоскостью N_{1H}. Касательная cb, $c'b'$ занимает положение c_1b_1, $c_1'b_1'$, в котором определяется точка ss' пересечения ее с осью поверхности вращения.

При восстановлении плоскости точка ss' не изменяет своего положения, и, следовательно, искомой фронтальной проекцией касательной является прямая линия $s'c'$. Плоскость, заданная двумя пересекающимися в точке cc' касательными (одна — параллели, другая меридиана), является касательной плоскостью к заданной поверхности вращения в точке cc'.

При вращении меридиональной плоскости вокруг оси поверхности вращения касательная sc, $s'c'$ образует поверхность конуса вращения, которая касается заданной поверхности вращения по параллели точки cc'. Построенная плоскость acb, $a'c'b'$, очевидно, касается указанного конуса вращения по его образующей sc, $s'c'$.

Для случаев, когда к поверхности вращения проводятся касательные плоскости, про-



Р и с. 392

ходящие через точку, лежащую вне поверхности, или касательные плоскости, параллельные заданному направлению, имеется множество решений.

Через точку вне поверхности вращения можно провести множество плоскостей, касательных к поверхности. Поверхностью, огибающей это семейство плоскостей, является некоторая взаимокасательная с поверхностью вращения коническая поверхность.

Кривую линию соприкасания поверхностей следует рассматривать как геометрическое место точек касания поверхности вращения касательными плоскостями, проходящими через заданную точку. Касательных к поверхности вращения плоскостей, параллельных заданному направлению, можно провести также множество. Это семейство плоскостей огибает цилиндрическая поверхность, взаимокасательная с рассматриваемой поверхностью вращения, для которой заданное направление служит направлением образующих. Кривая линия взаимокасания является геометрическим местом точек касания поверхности плоскостями.

Рассмотрим построение взаимокасательных конических и цилиндрических поверхностей с поверхностью вращения — со сферой.

На рис. 393 построена взаимокасательная со сферой коническая поверхность, вершиной которой является точка ss', лежащая во фронтальной меридиональной плоскости сферы.

Линией взаимокасания поверхностей является окружность, плоскость T_V которой перпендикулярна к прямой линии os, $o's'$, соединяющей точку ss' с центром oo' сферы.

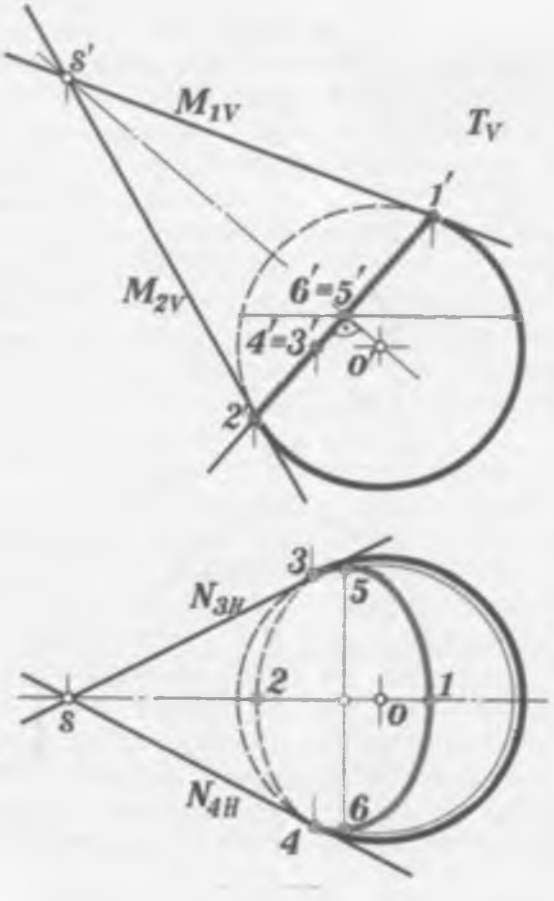


Рис. 393

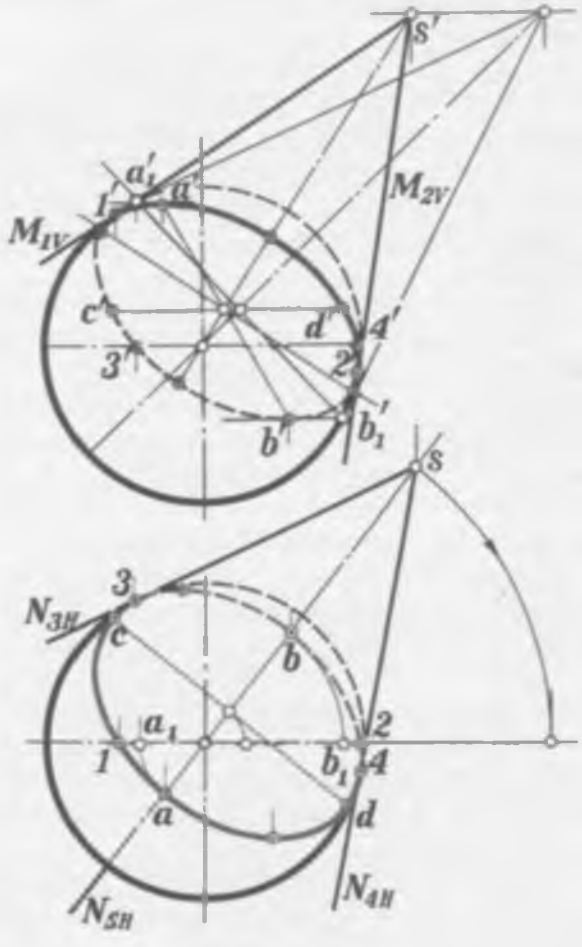


Рис. 394

По касательным к сфере фронтально-проецирующим плоскостям M_{1V} и M_{2V}, проходящим через вершину ss', определяем высшую и низшую точки $11'$ и $22'$ линии взаимокасания. Эти точки являются одновременно точками, расположенными на фронтальном меридиане сферы.

По касательным к сфере горизонтально-проецирующим плоскостям N_{3H} и N_{4H} определяем точки касания $33'$ и $44'$, расположенные на экваторе сферы.

Горизонтальной проекцией окружности взаимокасания является эллипс, малая ось которого — отрезок 12, а большая ось — горизонтальная проекция 56 диаметра 56, $5'6'$ окружности, параллельного горизонтальной плоскости проекций H.

Любую из промежуточных точек линии взаимокасания определяем по условию их расположения на соответствующей параллели сферы.

Случай, когда вершина ss' касательного к сфере конуса не находится во фронтальной меридиональной плоскости сферы, показан на рис. 394.

Фронтально-проецирующие плоскости M_{1V} и M_{2V}, проходящие через вершину ss' и касательные к сфере, определяют точки $11'$ и $22'$ линии взаимокасания, лежащие на фронтальном меридиане сферы.

Горизонтально-проецирующие плоскости N_{3H} и N_{4H}, касательные к сфере, определяют точки $33'$ и $44'$ линии взаимокасания, лежащие на экваторе.

Для определения горизонтальной проекции окружности взаимокасания совместим путем вращения вокруг вертикальной оси сферы меридиональную плоскость N_{5H} с фронтальной меридиональной плоскостью. Определяем смещенные проекции $a_1a'_1$ и $b_1b'_1$ высшей и низшей точек, а также истинную величину $a'_1\,b'_1$ диаметра окружности взаимокасания и смещенную проекцию центра этой окружности. Путем восстановления плоскости находим малую и большую оси ab и cd ($cd=a'_1\,b'_1$) эллипса горизонтальной проекции окружности взаимокасания и сопряженные диаметры $a'b'$ и $c'd'$ эллипса фронтальной проекции окружности взаимокасания. По сопряженным диаметрам $a'b'$ и $c'd'$ строим эллипс фронтальной проекции окружности соприкасания.

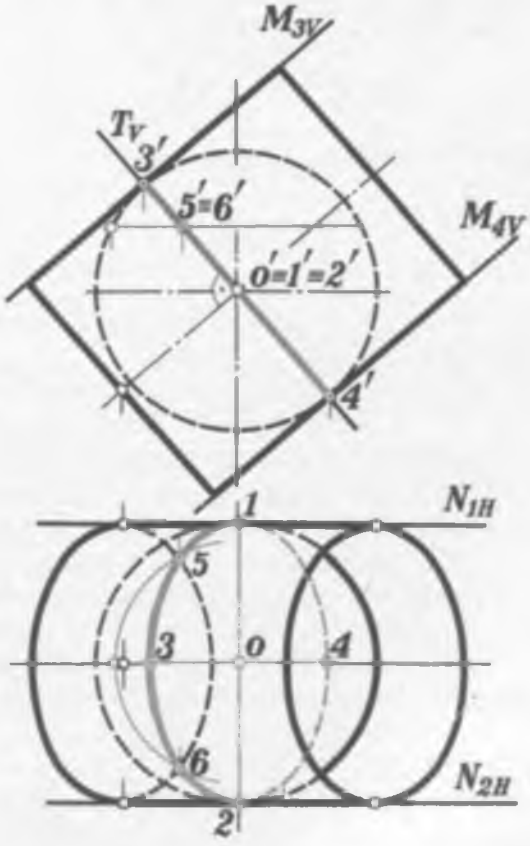
Любую из промежуточных точек окружности соприкасания определяем по условию их принадлежности соответствующей параллели сферы.

На рис. 395 построена линия взаимокасания сферы с цилиндром вращения, ось которого параллельна фронтальной плоскости проекций V.

Окружность соприкасания находится в плоскости T_V, перпендикулярной к оси цилиндра и проходящей через центр oo' сферы. Плоскость T_V пересекает сферу по окружности, диаметр которой равен диаметру сферы.

Горизонтальной проекцией окружности соприкасания является эллипс, в котором отрезок 12 — большая ось и отрезок 34 — малая ось.

Недостающие горизонтальные проекции точек $55'$ и $66'$ линии взаимокасания опреде-



Р и с. 395

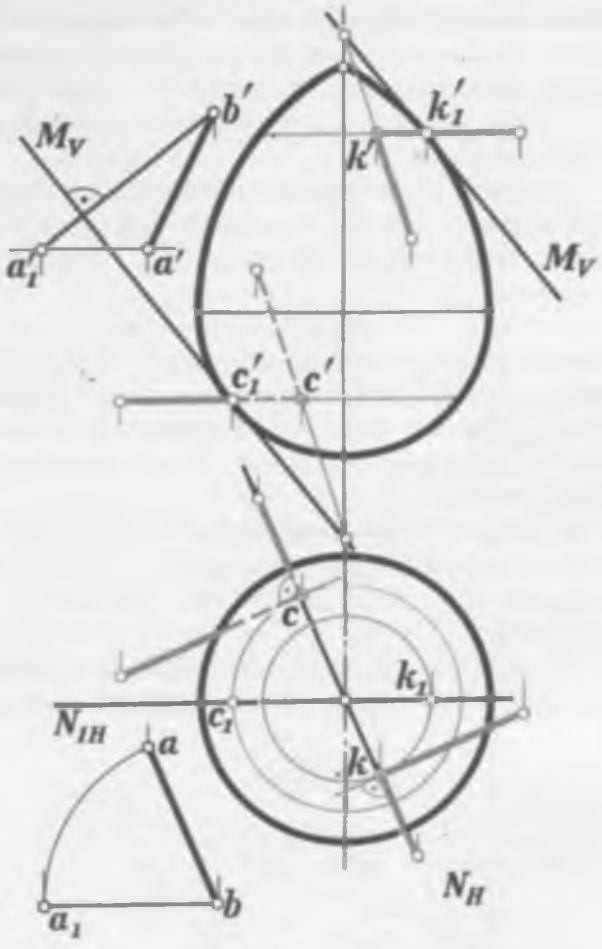


Рис. 396

ляем по условию их расположения на соответствующей параллели сферы.

При построении линий соприкасания конических и цилиндрических поверхностей с поверхностями вращения непосредственно, без каких-либо дополнительных построений, определяются лишь точки линии взаимокасания, расположенные на фронтальном меридиане и на экваторе поверхности вращения.

Для определения промежуточных точек линии взаимокасания применяют обычно (смотря по случаю) вспомогательные поверхности: конусы, цилиндры и сферы.

Сущность метода вспомогательных поверхностей состоит в том, что удовлетворяющие поставленным условиям касательные плоскости к поверхностям вращения, проходящие через точку, расположенную вне поверхности вращения, или параллельные заданному направлению, строят как плоскости, касательные не к поверхностям вращения, а к вспомогательным (взаимокасательным с поверхностями вращения) поверхностям.

За вспомогательные конические поверхности принимают соосные с поверхностью конусы вращения, касающиеся поверхности вращения по общей их параллели. Вершины таких конусов расположены на оси поверхности вращения.

Каждая плоскость, касающаяся конуса вдоль его образующей, касается поверхности вращения в точке пересечения образующей касания с параллелью. Таким образом, касательная к конусу вращения плоскость является касательной плоскостью и к поверхности вращения в заданной точке.

За вспомогательные цилиндрические поверхности принимают цилиндры, направляющими кривыми линиями которых служат меридиональные сечения поверхности вращения. Направления образующих цилиндров перпендикулярны к плоскостям их направляющих линий, т. е. перпендикулярны к плоскостям меридиональных сечений поверхности вращения.

Плоскость, касающаяся этого цилиндра по его образующей, касается поверхности вращения в точке пересечения образующей цилиндра с меридиональным сечением поверхности. Как видно, и здесь касательная плоскость к вспомогательному цилиндру является касательной плоскостью к поверхности вращения в ее точке.

На рис. 396 показаны построения касательных плоскостей заданного направления ab, $a'b'$ к поверхности вращения. Поверхность вращения задана очерками.

Для поверхности вращения указанного на чертеже вида можно построить две такие плоскости.

Построим меридиональную плоскость N_H, параллельную прямой ab, $a'b'$. Искомые касательные плоскости перпендикулярны к плоскости N_H. Вращением вокруг оси поверхности вращения совместим плоскость N_H с фронтальной меридиональной плоскостью. Прямые линии, лежащие в этой плоскости и параллельные заданной прямой

линии ab, $a'b'$, после поворота плоскости имеют проекции, параллельные проекциям прямой линии a_1b, a'_1b'.

Прямые, перпендикулярные к прямой a'_1b' и касательные к фронтальному очерку поверхности, являются следами Mv смещенных касательных к поверхности вращения плоскостей, а точки $c_1c'_1$ и $k_1k'_1$ — смещенными проекциями точек касания поверхности вращения этими плоскостями.

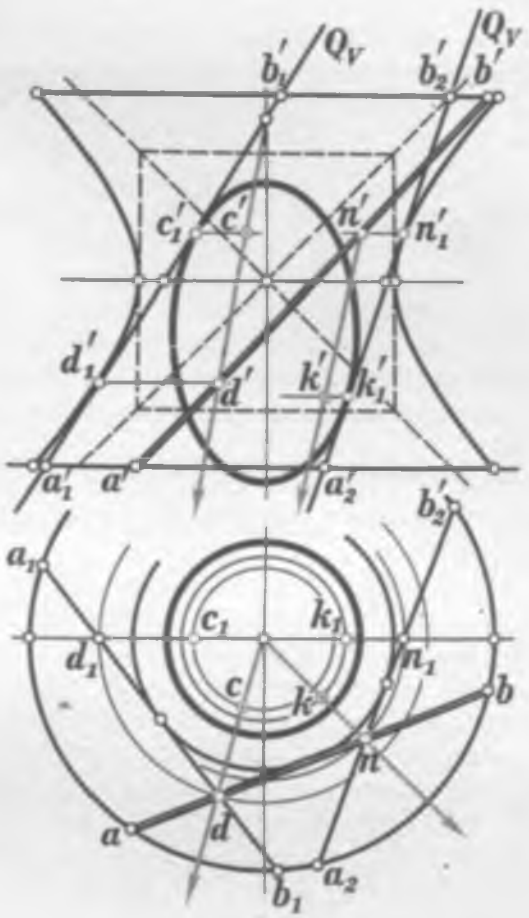
Определяем основные проекции точек касания cc' и kk'. Искомые касательные плоскости определены прямыми линиями, касательными в найденных точках к параллелям и меридианам поверхности вращения.

Построение проходящих через данную прямую линию касательных плоскостей к поверхности вращения производят при помощи вспомогательного однополостного гиперболоида вращения.

На рис. 397 показано решение такой задачи для поверхности вращения, заданной очерками. Касательная к поверхности вращения плоскость проходит через прямую линию ab, $a'b'$.

Построим соосный с заданной поверхностью вращения вспомогательный гиперболоид вращения, производящей линией которого является данная прямая линия ab, $a'b'$. Прямые линии, касательные к фронтальным очеркам данной и вспомогательной поверхностей, являются фронтальными следами Q_V плоскостей, касательных одновременно к обеим поверхностям. В этих плоскостях находятся соответствующие положения a_1b_1, $a'_1b'_1$ и a_2b_2, $a'_2b'_2$ производящей линии гиперболоида, а также и искомые точки касания.

При вращении плоскостей Q_V вокруг оси поверхности вращения они все время остаются касательными плоскостями к обеим поверхностям, а точки $c_1c'_1$ и $k_1k'_1$ их касания поверхности вращения и точки $d_1d'_1$ и $n_1n'_1$ касания гиперболоида перемещаются по соответствующим параллелям этих поверхностей. Когда при вращении производящие a_1b_1, $a'_1b'_1$ и a_2b_2, $a'_2b'_2$ занимают положения производящей линии ab, $a'b'$, точки касания $c_1c'_1$ и $k_1k'_1$ вращающихся плоскостей занимают, повернувшись на соответствующие углы, положения cc' и kk'.



Р и с. 397

Искомыми касательными плоскостями являются плоскости cab, $c'a'b'$ и kab, $k'a'b'$.

У поверхностей вращения особыми точками являются точки пересечения меридиана с осью вращения. Эти точки не имеют ходов. Касательные плоскости в точках меридиана, как известно, перпендикулярны к соответствующим меридиональным плоскостям. В каждой из указанных особых точек можно построить к поверхности вращения касательную плоскость, пользуясь лишь касательной к тому меридиану, к которому отнесена эта особая точка.

Поверхности вращения имеют бесконечно много меридиональных плоскостей и, следовательно, в особой точке поверхности вращения можно построить бесконечное мно-

жество ее касательных плоскостей. Если меридиан поверхности вращения пересекает ось под прямым углом, то все касательные плоскости в этой особой точке сливаются в одну касательную плоскость, перпендикулярную к оси поверхности вращения.

§67 ПЛОСКОСТИ, КАСАТЕЛЬНЫЕ К ПОВЕРХНОСТЯМ С ГИПЕРБОЛИЧЕСКИМИ ТОЧКАМИ

Гиперболические точки имеют многие поверхности: линейчатые неразвертывающиеся (косые) поверхности, вогнутые поверхности вращения, винтовые поверхности и др.

Рассмотрим, как изменяются направления касательных плоскостей в точках косой поверхности.

Пусть производящая прямая линия некоторой косой поверхности, совершив бесконечно малое перемещение, переходит из положения AB в положение A_1B_1 (рис. 398).

Расстояние между наиболее близкими точками прямых AB и A_1B_1 обозначим Δz. Проведем прямую M_1K, параллельную прямой AB. При переходе из положения AB в положение A_1B_1 производящая прямая линия совершает перемещение, состоящее из поступательного перемещения в направлении MM_1, на величину Δz и вращательного перемещения вокруг прямой линии MM_1 на угол $\Delta\beta$.

Через точку E прямой линии AB проведем плоскость, перпендикулярную к прямой линии A_1B_1. В пересечении этой плоскости прямыми линиями намечается прямоугольный треугольник EKE_1, из которого имеем:

$$E_1K = x \cdot \operatorname{tg} \Delta\beta = \Delta z \cdot \operatorname{tg}\phi .$$

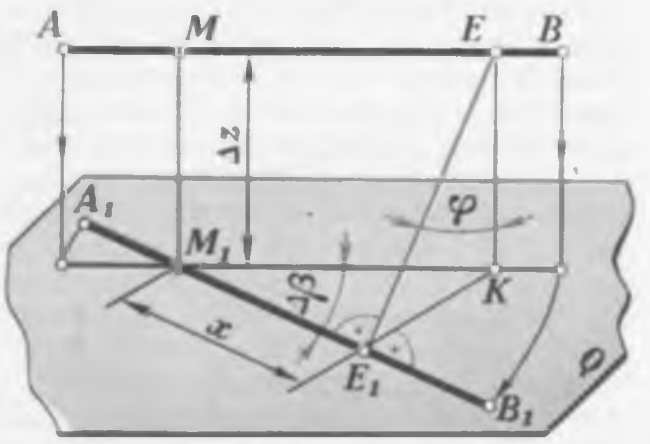


Рис. 398

Приблизим прямую AB, одновременно и поворачивая ее, до совпадения с прямой A_1B_1. При этом приближении секущие EE_1 и MM_1 косой поверхности занимают положения перпендикулярных к прямой A_1B_1 касательных прямых линий к этой поверхности в ее точках E_1 и M_1. Эти касательные и производящая линия A_1B_1 определяют как положения, так и направления касательных плоскостей к косой поверхности в точке E_1 и в центральной точке M_1 производящей линии A_1B_1.

Касательную плоскость к косой поверхности в центральной точке производящей линии называют *центральной касательной плоскостью*.

Величина угла ϕ треугольника E_1KE в пределе равна величине угла между направлениями касательных плоскостей в центральной точке производящей линии и в точке, отстоящей на расстоянии x от центральной точки.

После подстановки полученная выше зависимость имеет вид

$$\operatorname{tg}\phi = \frac{x}{p_K},$$

где $p_K = \lim \frac{\Delta z}{\Delta\beta}$ — параметр перекрещивания.

Эта зависимость дает закон изменения направлений касательной плоскости — направлений нормалей вдоль производящей линии косой поверхности. Приведенной зависимости удовлетворяют образующие прямого гиперболического параболоида (прямой косой плоскости). Поэтому нормали

косой поверхности вдоль ее производящей линии образуют поверхность прямого гиперболического параболоида. Эту поверхность называют *параболоидом нормалей*. Его плоскостью параллелизма является плоскость, перпендикулярная к производящей линии поверхности.

При движении точки касания по производящей линии, начиная от центральной точки, касательная плоскость вращается вокруг производящей линии, и ее угол поворота $\phi = 45°$ при $x = p_K$ и $\phi = 90°$ при $x = \infty$.

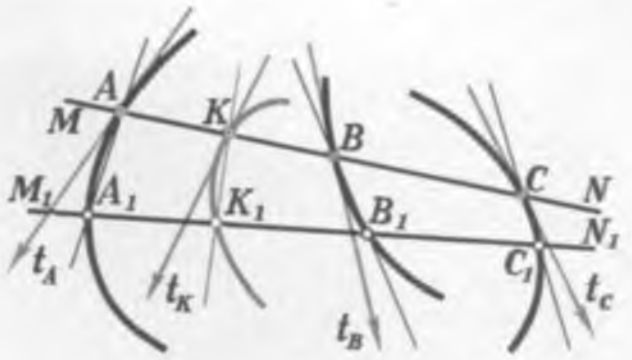
Задачи на построение касательных плоскостей к косым поверхностям можно решать, применяя однополостные гиперболоиды, соприкасающиеся с этими поверхностями вдоль образующих.

Общим видом задания косой поверхности является задание ее тремя направляющими кривыми линиями (рис. 399). Рассмотрим на этой поверхности два бесконечно близких положения MN и M_1N_1 производящей линии. Касательные t_A, t_B и t_C, проведенные к направляющим линиям в точках A, B и C прямой MN, являются предельными положениями секущих, проходящих через точки A_1, B_1 и C_1 производящей линии M_1N_1.

Если провести на поверхности какую-либо кривую линию, то касательная к ней t_K является также предельным положением секущей, проходящей через точки пересечения K и K_1 этой кривой линии с бесконечно близкими положениями MN и M_1N_1 производящей линии. Поэтому *всякая прямая линия, которая пересекает бесконечно близкие положения производящей линии, в пределе переходит в касательную к поверхности.*

Примем три секущие AA_1, BB_1 и CC_1 за направляющие линии однополостного гиперболоида. Когда эти секущие при сближении положений MN и M_1N_1 производящей займут положения касательных t_A, t_B, t_C, однополостный гиперболоид, деформируясь, займет свое предельное положение, в котором он с заданной поверхностью имеет общую производящую MN соприкасания.

В каждой точке этой производящей линии можно провести к поверхности касательную прямую линию, которая может входить в систему направляющих линий соприкасающегося однополостного гиперболоида. Этот гиперболоид называют *соприкасающимся гиперболоидом* с данной косой поверхностью.



Р и с. 399

Очевидно, что произвольно можно наметить сколь угодно много соприкасающихся гиперболоидов косой поверхности по заданной ее производящей линии.

Если за направляющие линии соприкасающегося однополостного гиперболоида принять три касательные, параллельные какой-либо плоскости, то он будет иметь вид гиперболического параболоида. Эти поверхности называют *соприкасающимися гиперболическими параболоидами.*

Рассмотрим построение касательной плоскости к косому цилиндру с тремя направляющими в заданной его точке.

На рис. 400 поверхность задана тремя направляющими: двумя дугами окружностей, лежащих в плоскостях, параллельных фронтальной плоскости проекций V, и прямой ef, $e'f'$, перпендикулярной к плоскости V.

На поверхности (левая половина чертежа) взята производящая прямая 12, $1'2'$ и на ней точка kk'. Для построения в этой точке касательной плоскости к поверхности проводим в точках $11'$ и $22'$ направляющих линий касательные к ним и принимаем эти касательные и прямую линию ef, $e'f'$ за направляющие линии вспомогательного соприкасающегося гиперболоида.

278

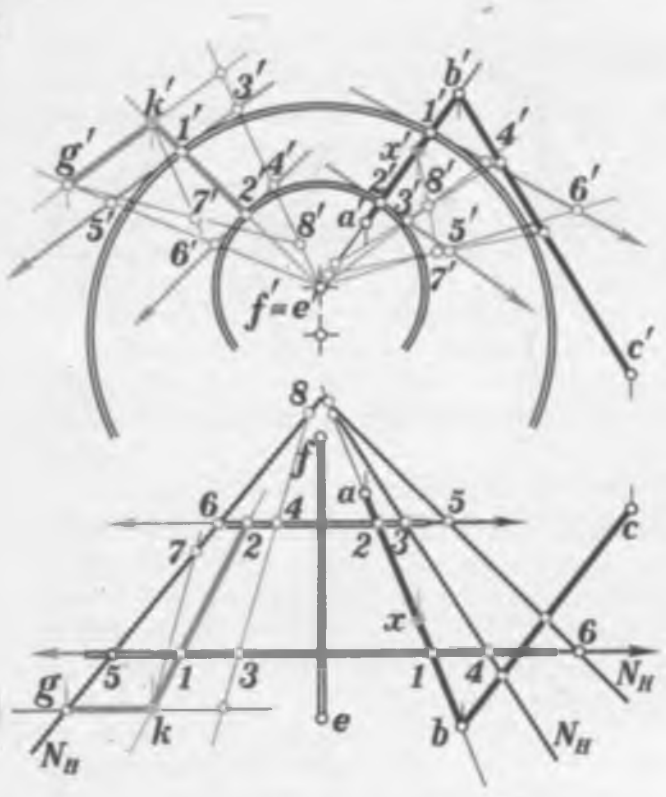


Рис. 400

Затем строим два каких-либо положения *34*, *3′4′* и *56*, *5′6′* производящей этого гиперболоида. Положения производящей строим (сначала фронтальные проекции) по условию, что они пересекаются с направляющими линиями гиперболоида. Касательная плоскость к заданной поверхности в точке *kk′* по ее принадлежности к системе направляющих гиперболоида пересекается образующими *34*, *3′4′* и *56*, *5′6′*, которые являются скрещивающимися прямыми линиями.

Таким образом, нужно решить следующую задачу: через данную точку провести прямую, пересекающую две заданные скрещивающиеся прямые линии. Через точку *kk′* проводим прямую линию, параллельную прямой *34*, *3′4′*. Находим точку *gg′* пересечения прямой *56*, *5′6′* с плоскостью указанных параллельных прямых линий.

Чтобы найти точку *gg′*, проводим горизонтально-проецирующую плоскость прямой *56*, *5′6′*. Эта плоскость пересекается с плоскостью параллельных прямых по прямой линии *78*, *7′8′*, которая в пересечении с прямой *56*, *5′6′* дает искомую точку *gg′*.

Прямая линия, проходящая через точки *gg′* и *kk′*, является касательной к косой поверхности в точке *kk′*, а плоскость *2kg*, *2′k′g′*, составленная этой касательной и производящей линией *12*, *1′2′*,— искомой касательной плоскостью.

На правой половине чертежа (см. рис. 400) показано решение задачи по определению точки *xx′* касания заданной поверхности с плоскостью *abc*, *a′b′c′*, где *ab*, *a′b′*— заданная производящая линия поверхности.

Строим касательные в точках *11′* и *22′* к направляющим линиям и принимаем их и прямую линию *ef*, *e′f* за направляющие прямые линии вспомогательного соприкасающегося гиперболоида. Строим две образующие линии *34*, *3′4′* и *56*, *5′6′* этого гиперболоида и определяем точки пересечения *77′* и *88′* (на чертеже показаны только их фронтальные проекции) этих образующих с заданной плоскостью *abc*, *a′b′c′*.

Прямая линия *78*, *7′8′*, как пересекающаяся образующими гиперболоида, отнесена к направляющим его линиям и потому является одной из касательных прямых линий к заданной косой поверхности. Точка пересечения *xx′* этой касательной с производящей прямой *ab*, *a′b′* является искомой точкой касания заданной поверхности плоскостью *abc*, *a′b′c′*.

Рассмотрим построение касательных плоскостей к вогнутым поверхностям вращения.

На рис. 401 показана обращенная к оси вращения часть тора, в точке *cc′* которого построена касательная к нему плоскость. Точка *cc′* находится во фронтальной меридиональной плоскости. Касательная плоскость Q_V является фронтально-проецирующей и определяется касательными $t_1t'_1$ и $t_2t'_2$, проведенными к фронтальному меридиану и соответствующей параллели. Касательная плоскость Q_V пересекает поверхность тора по кривым линиям, которые между собой пересекаются в точке *cc′*. Касательные *tt′* к этим кривым линиям в точке их пересечения *cc′* являются главными касательными поверхности тора в точке *cc′*.

Винтовые поверхности, кроме торса-геликоида, являются поверхностями с гиперболическими точками.

На рис. 402 построена касательная плоскость в точке cc' винтовой поверхности правого хода, заданной базовой линией и производящей ab, $a'b'$.

Искомую касательную плоскость определяем касательной mc, $m'c'$ к производящей линии в точке cc' и касательной cd, $c'd'$ к винтовому ходу точки cc'. Окружность радиусом r_C является горизонтальной проекцией этого винтового хода.

Для определения фронтальной проекции $c'd'$ касательной строим вспомогательный конус торса-геликоида этой цилиндрической винтовой линии. Вершиной конуса вращения является точка kk', а окружностью основания — окружность радиусом r_C.

Прямая $k1$, параллельная прямой линии cd, является горизонтальной проекцией образующей конуса, параллельной касательной cd, $c'd'$, а прямая линия $k'1'$ — фронтальной проекцией этой образующей. Таким образом, фронтальная проекция $c'd'$ касательной к винтовому ходу точки cc' параллельна прямой линии $k'1'$. Искомой касательной плоскостью, следовательно, является плоскость cdm, $c'd'm'$.

Через точку kk' проведем плоскость, параллельную плоскости cdm, $c'd'm'$, и найдем линию 12, $1'2'$ пересечения ее с плоскостью Q_V. Для этого, кроме прямой линии $k1$, $k'1'$, параллельной касательной cd, $c'd'$, строим

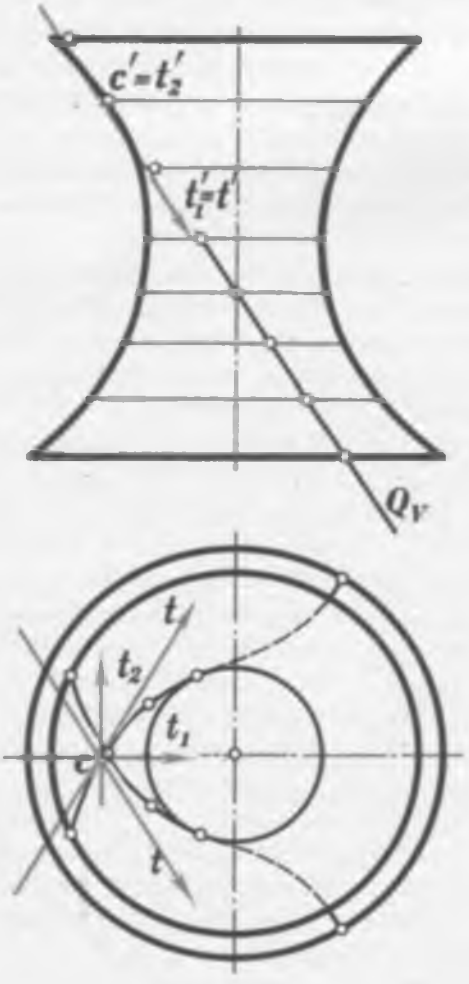


Рис. 401

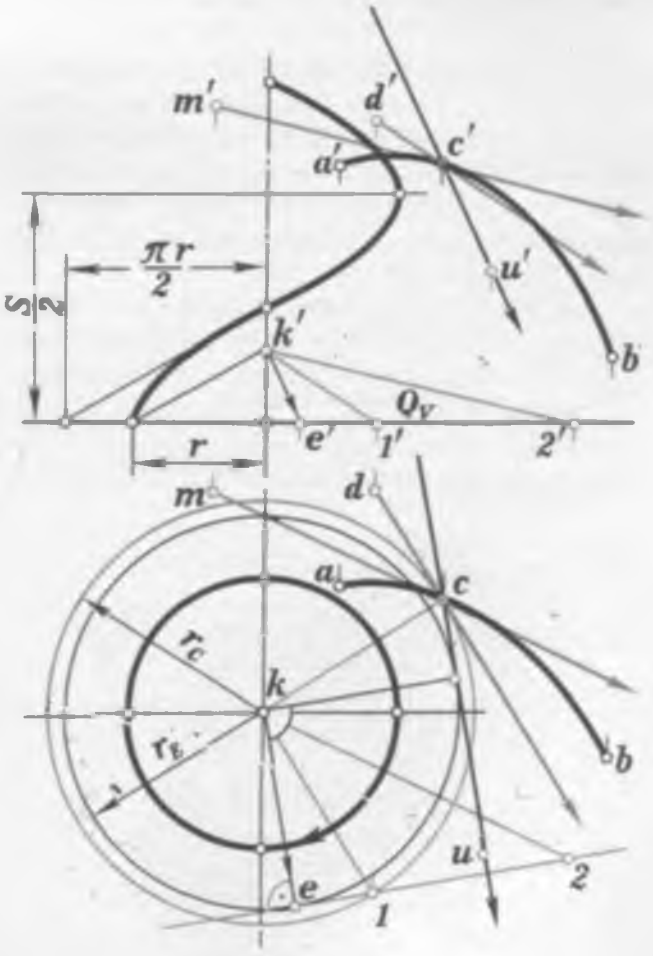


Рис. 402

280 еще прямую линию $k2$, $k'2'$, параллельную касательной cm, $c'm'$, и находим их следы. Прямая линия 12, $1'2'$ является искомой линией пересечения, а прямая линия ke, $k'e'$, перпендикулярная к прямой линии 12, $1'2'$, — линией наибольшего уклона плоскости.

При движении точки cc' вдоль ее винтового хода касательная плоскость поверхности совершает винтовое движение одинаковых шага и хода с базовой линией, а параллельная ей плоскость, проходящая через точку kk', вращается вокруг оси.

Поверхностью, огибающей положения указанных касательных плоскостей, является поверхность торса-геликоида, а поверхностью, огибающей параллельные им плоскости, проходящие через точку kk',— поверхность конуса вращения. Этот конус вращения является, очевидно, вспомогательным конусом торса-геликоида, а окружность радиуса r_E — горизонтальной проекцией винтовой линии — ребра возврата торса-геликоида.

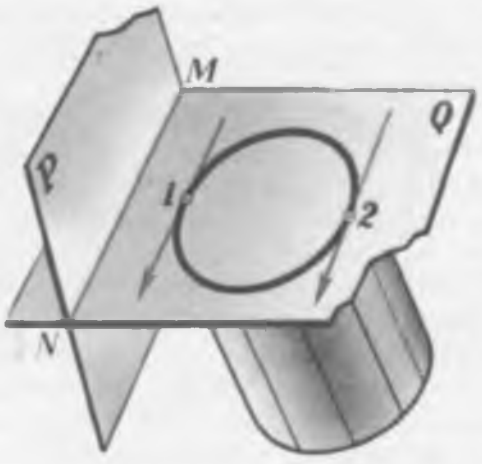
Прямая cu, $c'u'$, параллельная прямой линии ke, $k'e'$, является производящей прямой линией указанного торса-геликоида. Такой вспомогательный торс-геликоид применяют при решении многих задач на винтовые поверхности.

§68 ПРИМЕНЕНИЕ КАСАТЕЛЬНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ ПРИ РЕШЕНИИ ПОЗИЦИОННЫХ ЗАДАЧ НА ПОВЕРХНОСТИ

Построение касательных плоскостей к поверхностям является основой теории теней.

При построении теней на поверхностях касательные плоскости к поверхностям строят или проходящими через точку, лежащую вне поверхности, или параллельными заданному направлению.

Касательными плоскостями к поверхностям пользуются и при решении ряда других задач. Касательными плоскостями, например, к конусам и цилиндрам, параллельными заданному направлению, пользуются для определения наиболее близких и наиболее удаленных от плоскостей проекций точек кривых линий пересечения этих поверхностей плоскостями, не строя эти кривые. Покажем сначала схему решения этой задачи.



Р и с. 403

Пусть поверхность цилиндра (рис. 403) пересекается плоскостью Q по кривой линии; требуется определить наиболее близкую и наиболее удаленную точки этой кривой линии от заданной плоскости P.

Прямая линия MN является линией пересечения плоскостей P и Q. Проведем к кривой линии касательные, параллельные прямой линии MN. Точки касания 1 и 2 являются наиболее близкой и наиболее удаленной точками кривой линии от плоскости P. Эти же точки 1 и 2 можно получить и как точки пересечения с плоскостью Q образующих цилиндра, вдоль которых касаются его касательные плоскости, параллельные линии пересечения MN плоскостей P и Q.

Таким образом, точки 1 и 2 можно определить, не прибегая к построению кривой линии, как точки пересечения прямых линий — соответствующих образующих цилиндра — с плоскостью Q.

На рис. 404 показаны построения для определения наиболее близкой точки xx' и наиболее удаленной точки yy' от плоскости

проекций V кривой линии пересечения цилиндра плоскостью mne, $m'n'e'$. Цилиндр задан плоской направляющей кривой линией ab, $a'b'$ и направлением образующих — стрелкой точки aa'.

Строим касательные плоскости к заданному цилиндру, параллельные линии пересечения данной плоскости mne, $m'n'e'$ с плоскостью проекций V или, что равнозначно, параллельные фронтали mk, $m'k'$ плоскости.

Касательными являются плоскости, которые касаются цилиндра вдоль его образующих, проходящих через точки касания $11'$ и $22'$ направляющей линии ab, $a'b'$ с прямыми, параллельными следу cd, $c'd'$ плоскости cmk, $c'm'k'$. Точки xx' и yy' пересечения этих образующих данной плоскостью mne, $m'n'e'$ являются наиболее близкой и наиболее удаленной от плоскости V точками кривой линии пересечения цилиндра заданной плоскостью.

При определении точек пересечения образующих цилиндра плоскостью через образующие проведены их горизонтально-проецирующие плоскости.

На рис. 405 по приведенной схеме определены наиболее близкая и наиболее удаленная от профильной плоскости точки кривой линии пересечения конуса плоскостью mne, $m'n'e'$. Конус задан вершиной ss' и направляющей плоской замкнутой кривой линией. В рассматриваемом случае задача решена путем построения точек пересечения образующих $1s$, $1's'$ и $2s$, $2's'$ конуса заданной плоскостью. Вдоль таких образующих конуса касаются плоскости, параллельные линии пересечения cd, $c'd'$ плоскости mne, $m'n'e'$ с выбранной профильной плоскостью U_H, U_V.

По схеме построения к конусам касательных плоскостей, параллельных заданному направлению, через вершину ss' конуса про-

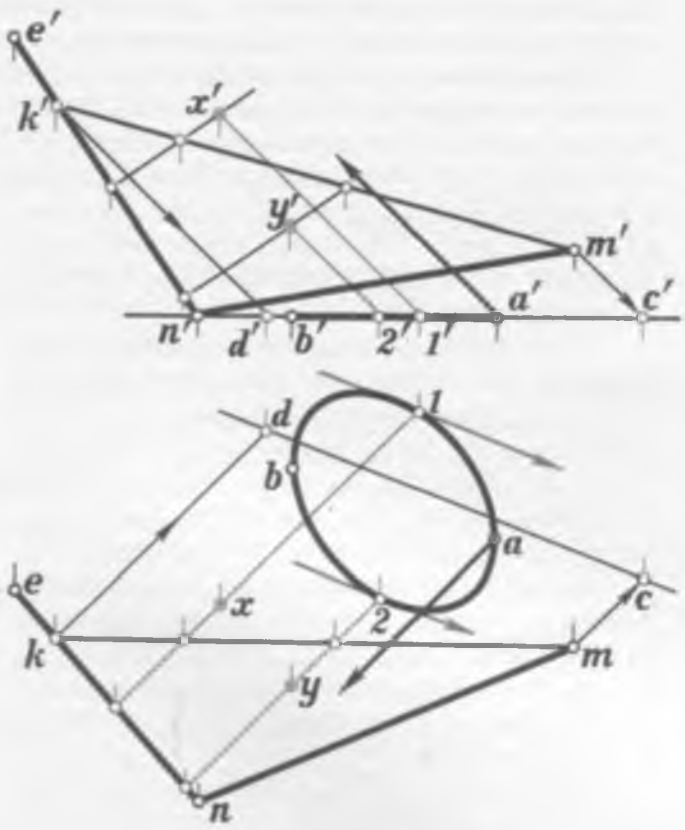


Рис. 404

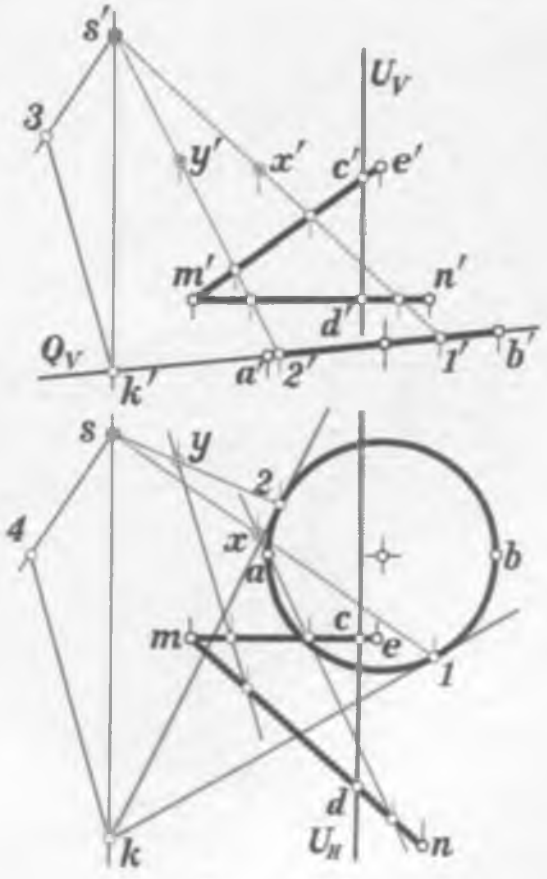


Рис. 405

водим прямую линию, параллельную прямой cd, $c'd'$, и находим точку kk' ее пересечения с плоскостью Q_v направляющей линии конуса. Через точку kk' проводим прямые линии $k1$, $k'1'$ и $k2$, $k'2'$, касательные к направляющей линии ab, $a'b'$ конуса.

Касательные плоскости, параллельные прямой cd, $c'd'$, касаются конуса вдоль образующих $s1$, $s'1'$ и $s2$, $s'2'$, проходящих через точки касания $11'$ и $22'$. Точки xx' и yy' пересечения этих образующих данной плоскостью mne, $m'n'e'$ являются искомыми. Точка kk' пересечения прямой sk, $s'k'$ с плоскостью направляющей линии конуса построена при помощи подобных треугольников $s'3k'$ и $s4k$, в которых $s'3 = c'd'$ и $s4 = cd$.

Рассмотрим построение линии пересечения наклонного кругового цилиндра плоскостью.

На рис. 406 цилиндр задан направляющей линией в плоскости Q_v — окружностью и направлением образующих — стрелкой точки aa' и дана фронтально-проецирующая плоскость M_v. Найдем наиболее близкие и наиболее удаленные точки эллипса пересечения цилиндра плоскостью M_v по отношению к плоскостям проекций H и V. Эти точки можно определить как точки пересечения с плоскостью M_v образующих цилиндра, вдоль которых касаются плоскости, параллельные соответственно горизонталям или фронталям заданной плоскости M_v.

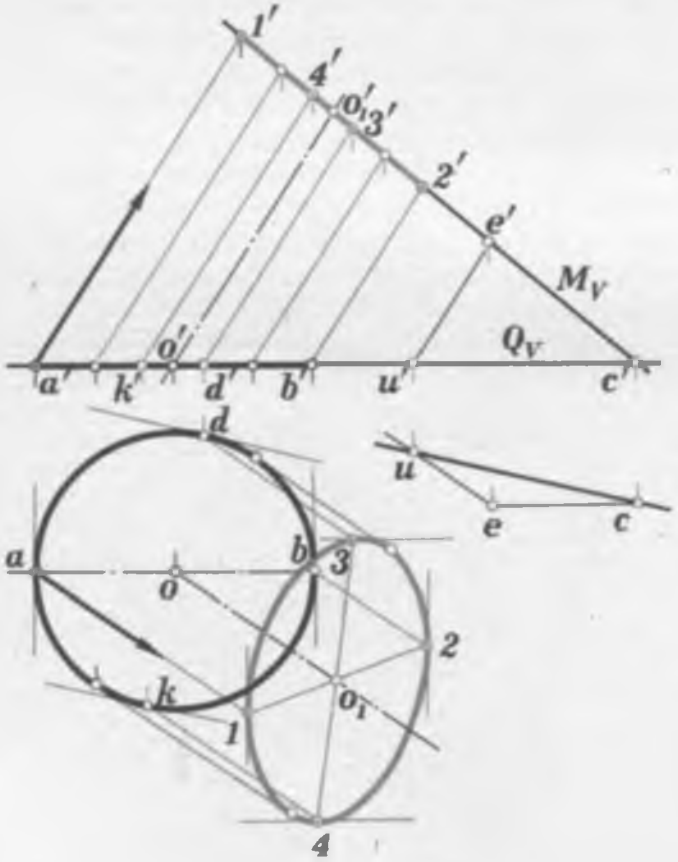


Рис. 406

Касательные плоскости, параллельные горизонталям плоскости M_v, касаются цилиндра вдоль его образующих, проходящих через точки aa' и bb' направляющей линии. Эти образующие пересекаются плоскостью M_v в точках $11'$ и $22'$, в которых касательные к эллипсу пересечения параллельны горизонталям плоскости. Точки $11'$ и $22'$ являются соответственно наиболее удаленной и наиболее близкой от плоскости H точками линии пересечения. Точки 1 и 2 касания параллельных касательных находятся на диаметре эллипса горизонтальной проекции.

Параллельно прямой линии uc, $u'c'$ проводим касательные к направляющей линии цилиндра, а через точки dd' и kk' — образующие $d3$, $d'3'$ и $k4$, $k'4'$ цилиндра. Эти образующие пересекаются с плоскостью M_v в точках $33'$ и $44'$. Через эти точки проводим касательные, которые являются фронталями плоскости M_v.

Точки 3 и 4 касания параллельных касательных находятся на диаметре эллипса горизонтальной проекции, а точка o_1 — середина отрезка 34 — центр этого эллипса. Точка $44'$ является наиболее удаленной от плоскости V, а $33'$ — наиболее близкая к плоскости V точка линии пересечения.

Построенные диаметры 34 и 12 эллипса горизонтальной проекции линии пересечения не являются сопряженными. Остальные точки линии пересечения построены как точки пересечения ряда образующих цилиндра с проецирующей плоскостью.

Рассмотрим применение касательных плоскостей к построению соприкасающихся однополостных гиперболоидов вращения при проектировании гиперболических зубчатых колес.

Две косые поверхности могут, очевидно, соприкасаться вдоль их общей производящей линии только тогда, когда центры производящих линий соприкасания совпадают и когда параметры перекрещивания p_K этих производящих линий для обеих поверхностей равны.

В гиперболических зубчатых колесах, применяемых в передачах с перекрещивающимися валами, имеется соприкасание двух гиперболоидов вращения, катящихся один по другому.

На рис. 407 определены асимптотические конусы этих гиперболоидов и фокусы гипербол меридиональных сечений соприкасающихся гиперболоидов, когда заданы вертикальная и наклонная оси передачи и радиусы r_1 и r_2 окружностей шеек гиперболоидов. Здесь угол между осями δ.

Углы δ_1 и δ_2 асимптотических конусов гиперболоидов, а следовательно, и углы между асимптотами гипербол фронтальных меридиональных сечений определяем при взятом расположении осей путем построения фронтальной проекции производящей линии uk, $u'k'$ соприкасания гиперболоидов.

Как известно, параметр перекрещивания производящей линии гиперболоида вращения $p_K = \frac{r}{\operatorname{tg}\delta}$. Учитывая равенство параметров перекрещивания производящих линий соприкасающихся гиперболоидов, имеем

$$\frac{r_1}{\operatorname{tg}\delta_1} = \frac{r_2}{\operatorname{tg}\delta_2}.$$

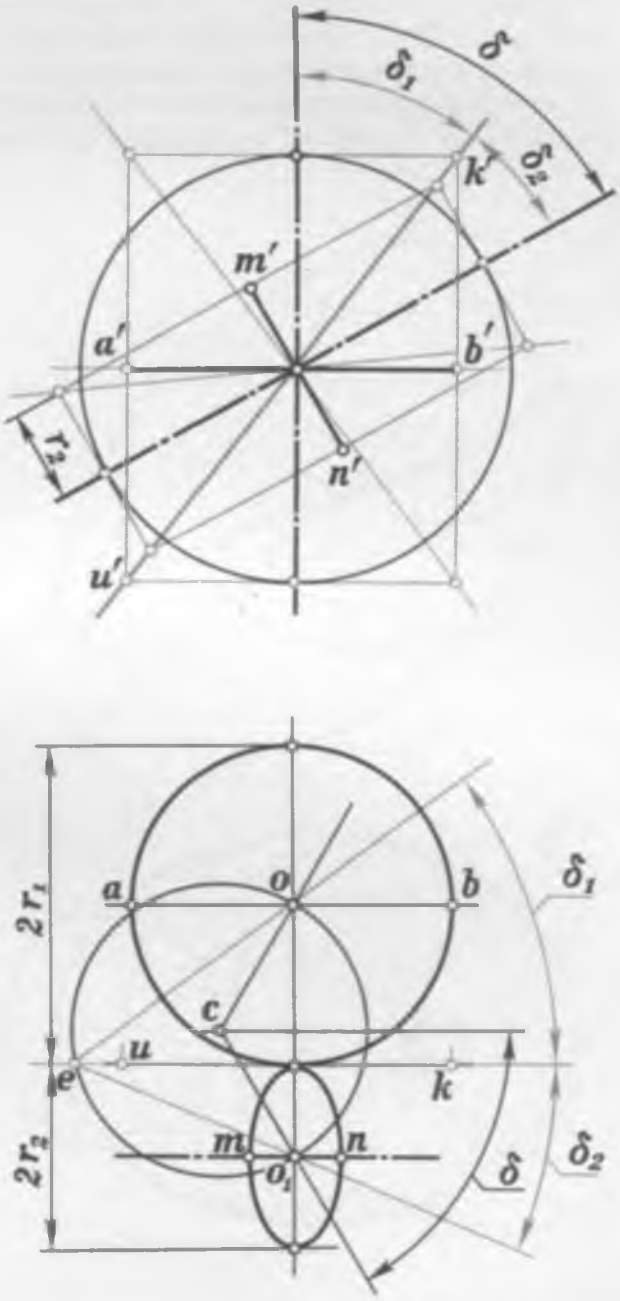
Из чертежа имеем также, что $\delta = \delta_1 + \delta_2$.

Горизонтальная проекция uk производящей линии соприкасания параллельна горизонтальной проекции оси гиперболоида.

Для определения величин углов δ_1 и δ_2 строим равнобедренный треугольник oco_1 с углом при вершине c, равным 2δ. Приняв вершину c за центр, опишем окружность радиусом $oc = o_1c$. Точку e пересечения окружности прямой линией uk соединяем с точками o и o_1. Полученные углы $\angle oek = \delta_1$ и $\angle o_1ek = \delta_2$ являются искомыми, так как удовлетворяются следующие условия:

$$\delta_1 + \delta_2 = \delta \quad \text{и} \quad \frac{r_1}{\operatorname{tg}\delta_1} = \frac{r_2}{\operatorname{tg}\delta_2}.$$

Деля (на фронтальной проекции чертежа) угол δ на части δ_1 и δ_2, получаем прямую $u'k'$ — фронтальную проекцию производящей линии uk, $u'k'$ соприкасания гиперболоидов. Имея величины действительных осей гипербол $ab = 2r_1$ и $m'n' = 2r_2$ и асимптоты, можно построить фронтальные меридиональные сечения соприкасающихся гиперболоидов (на чертеже они не показаны).



Р и с. 407

284 Величины мнимых полуосей гипербол меридиональных сечений, как это следует из чертежа, имеют выражения:

$$\frac{r_1}{\operatorname{tg}\delta_1} \text{ и } \frac{r_2}{\operatorname{tg}\delta_2}.$$

Мнимые полуоси гипербол меридиональных сечений соприкасающихся однополостных гиперболоидов вращения, как видно, являются равными.

§69 ПОСТРОЕНИЕ ОЧЕРТАНИЙ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Касательные плоскости применяют также при построении очертаний поверхностей. Очерк поверхности следует рассматривать как линию пересечения соответствующей плоскостью проекций цилиндра, который огибает касательные к поверхности плоскости, перпендикулярные к плоскости проекций.

Эта линия пересечения является, очевидно, геометрическим местом ортогональных проекций точек касания поверхности указанными касательными плоскостями.

Покажем применение касательных плоскостей к построению очертаний поверхностей вращения, оси которых параллельны одной из плоскостей проекций.

На рис. 408 построен горизонтальный очерк детали, ось которой параллельна плоскости проекций V и наклонена к плоскости проекций H. Поверхность детали состоит из цилиндра вращения и поверхности вращения, производящей линией которой является дуга окружности радиусом R с центром в точке kk'. Для построения кривой линии горизонтального очерка заданной поверхности применяем метод вспомогательных сфер. Вспомогательные сферы выбирают касающимися заданной поверхности вращения вдоль ее параллелей. Плоскости, перпендикулярные к плоскости проекций H и касательные к заданной поверхности, являются касательными плоскостями и вспомогательных сфер. Эти плоскости касаются сфер в точках пересечения экваторов сфер параллелями их соприкасания.

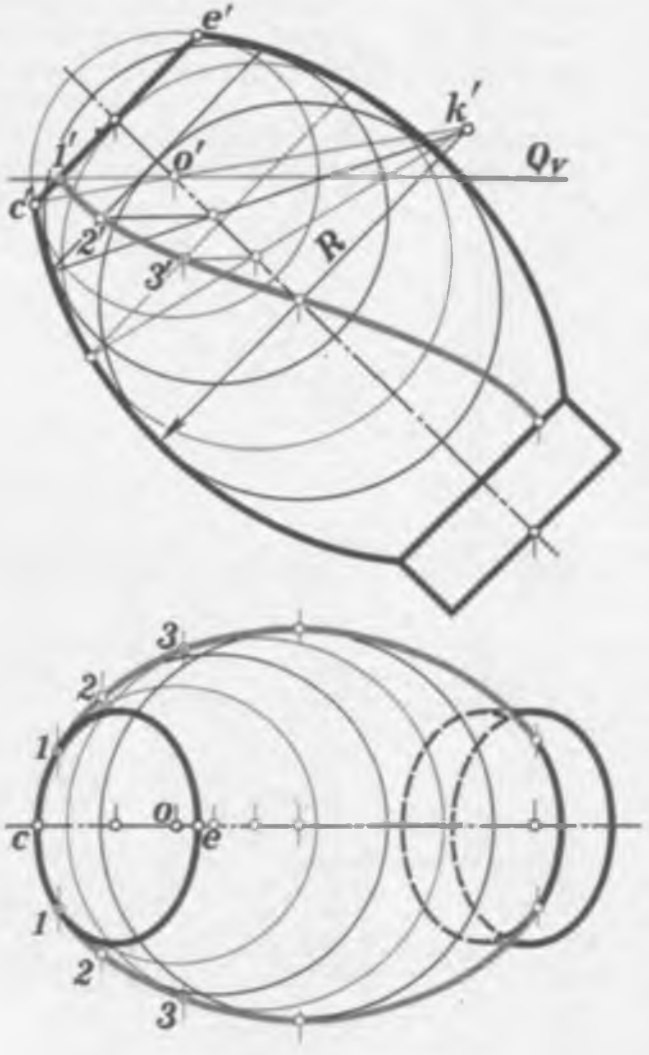


Рис. 408

Возьмем сферу, касающуюся заданной поверхности по параллели ce, $c'e'$.

Центром этой сферы является точка oo', лежащая на оси заданной поверхности вращения.

Плоскость Q_V является плоскостью экватора сферы, который пересекается параллелью ce, $c'e'$ поверхности вращения в двух точках $11'$. Горизонтальные проекции 1 этих точек определяются точками пересечения

линии связи с горизонтальной проекцией экватора — с окружностью, радиус которой $o1$ равен отрезку $o'c'$.

Подобными построениями определен ряд точек $2'$, $3'$, ... искомой кривой линии горизонтального очерка поверхности.

Вопросы для самопроверки

1. Какую плоскость называют касательной к поверхности в данной точке?
2. Что называют нормалью поверхности в данной точке?
3. Какие точки поверхности называют эллиптическими, параболическими, гиперболическими?
4. Приведите примеры поверхностей, имеющих эллиптические, параболические или гиперболические точки.
5. На какой поверхности имеются и эллиптические, и параболические, и гиперболические точки?
6. Докажите, что плоскость, касательная к поверхности вращения в точке, расположенной на главном меридиане, является проецирующей.

ГЛАВА XII

РАЗВЕРТКИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Обычно поверхность рассматривают как гибкую нерастяжимую оболочку.

Некоторые поверхности, если их постепенно деформировать, можно совместить с плоскостью без разрывов и складок. Такие поверхности называют *развертывающимися*. Фигуру, полученную при совмещении развертывающейся поверхности с плоскостью, называют *разверткой*. Построение разверток поверхностей представляет большой интерес, особенно при конструировании из листового материала моделей различных сооружений, форм для металлических отливок, сосудов, трубопроводов, резервуаров и т. п.

§70 РАЗВЕРТКИ ПОВЕРХНОСТЕЙ ТОРСОВ

К развертывающимся поверхностям относятся торсы — поверхности с ребром возврата (поверхности, образованные касательными к пространственной кривой линии), в частности, конические и цилиндрические поверхности.

Плоскость, касательная к торсу, при качении по торсу без скольжения получает на себе отпечаток с изображением всех геометрических образов, намеченных на торсе. Такие же изображения получаются и на касательной к торсу плоскости при развертывании его на эту плоскость, т. е. при совмещении поверхности торса с плоскостью путем изгибания торса по ряду последовательных положений его производящей прямой линии.

Таким образом, торсы обладают общим свойством — развертываться на касательных к ним плоскостях.

Любая фигура, начерченная на поверхности торса, преобразуется в плоское изображение на развертке. Можно рассматривать торс и его развертку как точечные множества, между которыми устанавливается взаимно однозначное соответствие. Это соответствие обладает рядом важных свойств.

Свойство 1. *Каждой точке поверхности торса соответствует единственная точка на его развертке.*

Свойство 2. *Каждой кривой линии на торсе в общем случае соответствует кривая линия на его развертке; длина кривой линии на торсе равна длине ее преобразования.*

Свойство 3. *Угол между кривыми линиями (угол между касательными к кривым в точке их пересечения) на поверхности торса равен углу между преобразованиями этих кривых линий на развертке.*

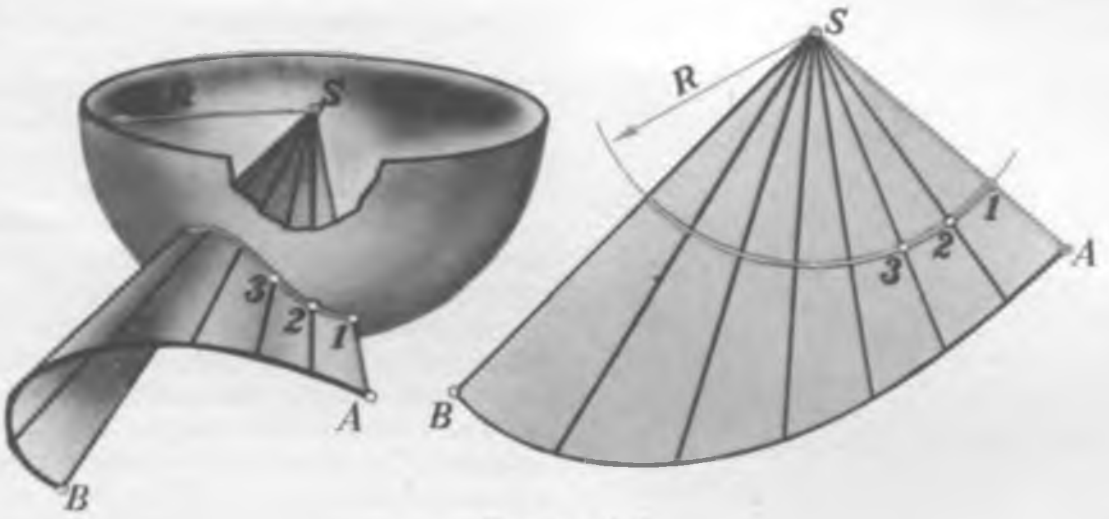


Рис. 409

Из этого свойства можно сделать вывод, что поверхность и ее развертка конформны, т. е. имеется такое геометрическое преобразование, которое переводит поверхность в развертку с сохранением постоянства углов.

Свойство 4. *Замкнутая линия на поверхности торса и соответствующая ей линия на развертке ограничивают одинаковую площадь.*

Из этого следует, что площадь развертки торса равна площади самой поверхности торса.

Развертки поверхностей торсов можно строить при помощи сферической индикатрисы положений производящей линии (образующей) торса.

Сферическую индикатрису образующих какой-либо линейчатой поверхности можно получить следующим образом. Из любой точки пространства, принятой за центр сферы радиуса R, равного произвольно выбранной единице масштаба, проведем прямые, параллельные образующим линейчатой поверхности. Геометрическим местом таких прямых линий является некоторая коническая поверхность. Линия пересечения этого конуса указанной сферой и называется *сферической индикатрисой* образующих* линейчатой поверхности. Любая касательная к сферической кривой составляет прямой угол с радиусом сферы, проведенным в точку касания.

Таким образом, сферическая индикатриса образующих линейчатой поверхности является одной из кривых линий на вспомогательном конусе поверхности. Эта кривая составляет с соответствующими образующими конуса прямые углы.

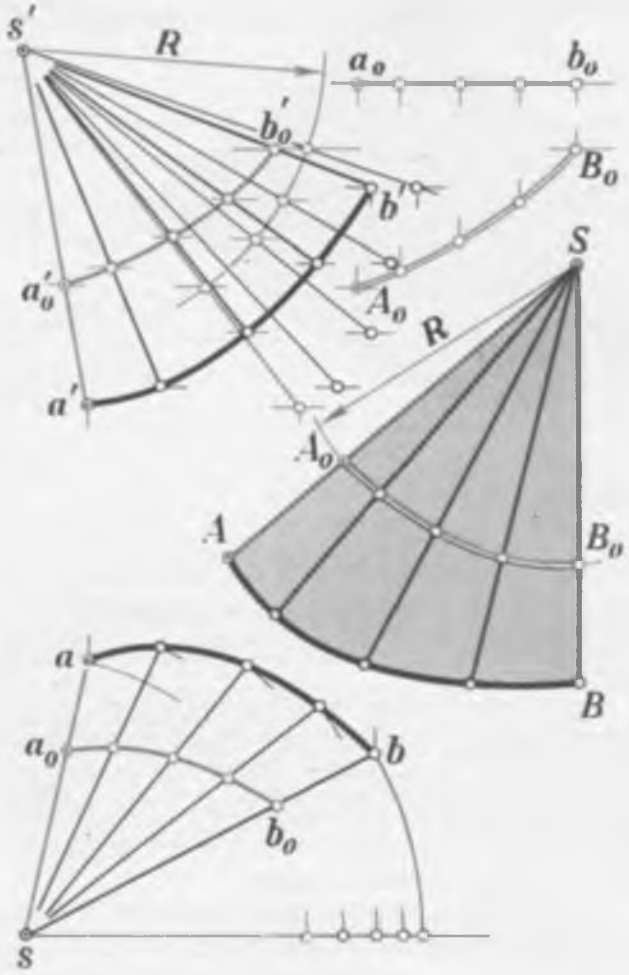
Для конических и цилиндрических поверхностей сферические индикатрисы их образующих строят на самих поверхностях как кривые линии, перпендикулярные образующим.

Сферической индикатрисой образующих цилиндра является плоская кривая линия. Здесь сфера имеет бесконечно большой радиус. Она преобразуется в плоскость, перпендикулярную к направлению образующих цилиндра.

При развертке конической поверхности сферическая индикатриса его образующих преобразуется в дугу окружности радиусом R, где R — радиус сферы. При развертке цилиндрической поверхности сферическая индикатриса его образующих преобразуется в прямую линию (дугу окружности бесконечно большого радиуса).

Рассмотрим схему решения задачи на построение развертки конуса. Пусть конус задан направляющей линией AB и вершиной S (рис. 409).

* От франц. indicatrice — указывающая (линия или поверхность), наглядно характеризующая какое-нибудь свойство изучаемого объекта.



Р и с. 410

Из вершины S конуса, как из центра, проводим сферу радиусом R. Определяем линию *1 2 3* ... пересечения конуса сферой. Эта линия строится по точкам пересечения образующих конуса (выбранных произвольно) со сферой. Затем строим сферическую индикатрису образующих в преобразовании и намечаем положения преобразований выбранных на конусе образующих. Для этого из произвольно выбранной точки S проводим дугу окружности радиусом R. На дуге окружности откладываем отрезки *1 2*, *2 3*, ..., равные соответствующим отрезкам сферической кривой. Через вершину S и через точки *1*, *2*, *3*, ... проводим прямые *S1*, *S2*, *S3*, ..., равные отрезкам соответствующих образующих конуса.

Кривой AB концов этих образующих и двумя крайними образующими определяется контур развертки поверхности конуса.

На рис. 410 показаны построения развертки конуса. Конус задан направляющей линией ab, $a'b'$ и вершиной ss'.

Намечаем произвольно образующие конической поверхности. Из вершины ss' проводим сферу радиусом R и строим линию пересечения сферы с конусом — сферическую индикатрису образующих конуса.

Вращением вокруг вертикальной оси, проходящей через вершину ss', определяются натуральные величины образующих. От точки s' откладываем отрезки, равные принятому радиусу R сферы. Концами этих отрезков в исходном их положении определяется сферическая индикатриса a_0b_0, $a_0'b_0'$ образующих конуса.

Определяем натуральную величину сферической индикатрисы методом развертывания ее горизонтально-проецирующего цилиндра — кривую линию A_0B_0, на которой отмечаем ряд точек, соответствующих точкам, намеченным на индикатрисе.

Проводим из точки S дугу окружности радиусом R и откладываем на ней кривую, длина которой равна длине дуги найденной кривой линии A_0B_0. На кривой линии A_0B_0 отмечаем ряд точек, соответствующих точкам пересечения сферической кривой ряда образующих конуса.

Через указанные точки проводим радиусы, направления которых указывают направления преобразований образующих конуса, и откладываем от вершины S натуральные величины соответствующих образующих. Геометрическим местом концов образующих конуса в преобразовании является кривая линия AB. Данная кривая и крайние образующие SA и SB представляют собой контур искомой развертки заданного конуса. Здесь кривая линия AB является конформным преобразованием направляющей линии конуса ab, $a'b'$.

На рис. 411 построена развертка конической поверхности с применением способа треугольников (триангуляции)*.

Такой способ можно применять для построения разверток всех линейчатых поверхностей. Сущность этого способа состоит в том, что заданную линейчатую поверхность заменяют (аппроксимируют) вписанной многогранной поверхностью с треугольными гранями.

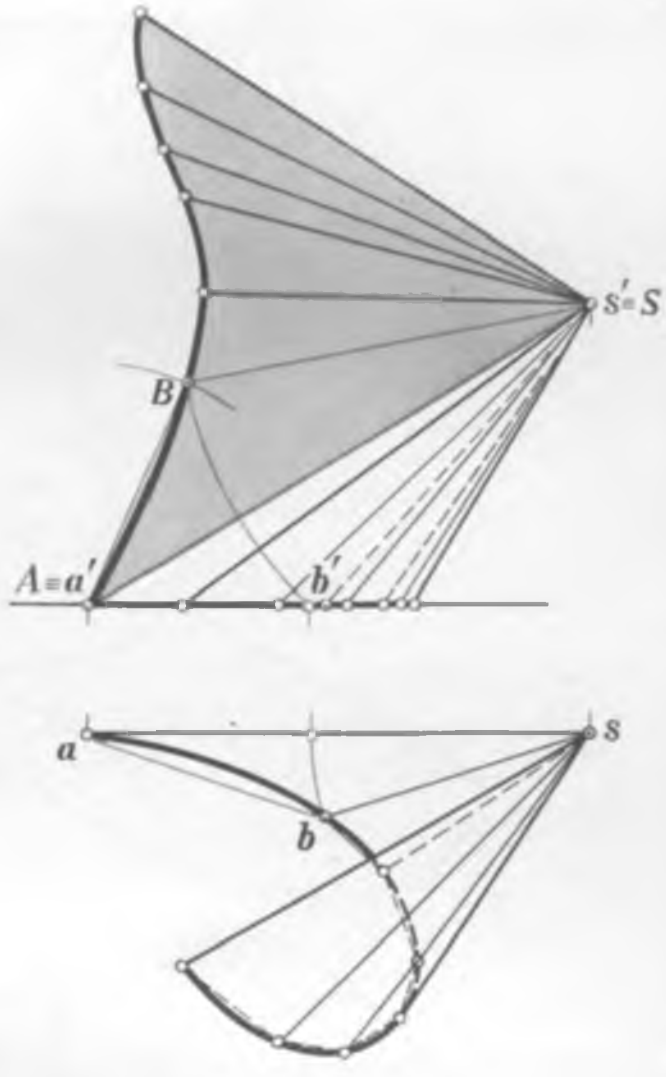
Впишем в данную коническую поверхность пирамиду с возможно большим числом граней. Отсек пирамиды ограничен направляющей ломаной и вершиной ss'. Развертка представляет собой последовательный ряд треугольников — граней пирамиды. Величины ребер вписанной в конус пирамиды определяем методом вращения их вокруг вертикальной оси, проходящей через точку ss' в положение, параллельное фронтальной плоскости проекций V. Горизонтальная проекция направляющей ломаной линии равна длине направляющей линии пирамиды.

Натуральные величины треугольных граней пирамиды находим методом построения треугольников по трем его сторонам.

Треугольник SAB представляет собой натуральную величину соответствующей грани sab, $s'a'b'$ пирамиды. Здесь натуральные величины двух сторон треугольника определены непосредственно из чертежа ($AB = ab$ и $SA = s'a'$); натуральная величина третьей стороны SB треугольника определена с помощью дополнительных построений. Аналогично строим и остальные грани пирамиды.

Рассмотрим схему решения задачи на построение развертки цилиндра (рис. 412).

Проводим плоскость (сферу бесконечно большого радиуса) перпендикулярно к образующим цилиндра.



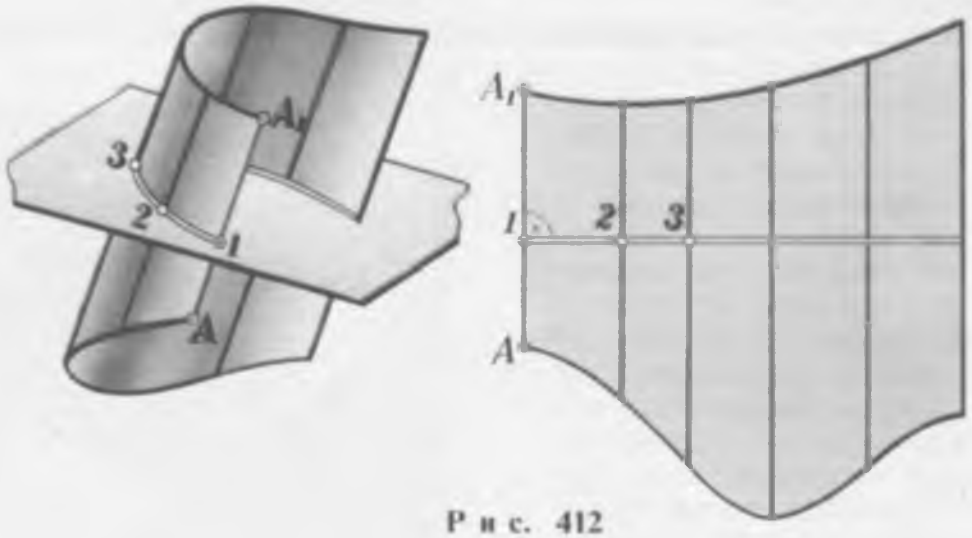
Р и с. 411

Определяем кривую линию *1 2 3* ... пересечения цилиндра плоскостью. На произвольно выбранной прямой откладываем спрямленные отрезки кривой линии. Из точек *1*, *2*, *3*,... концов этих отрезков перпендикулярно к ним проводим прямые линии — преобразования соответствующих образующих.

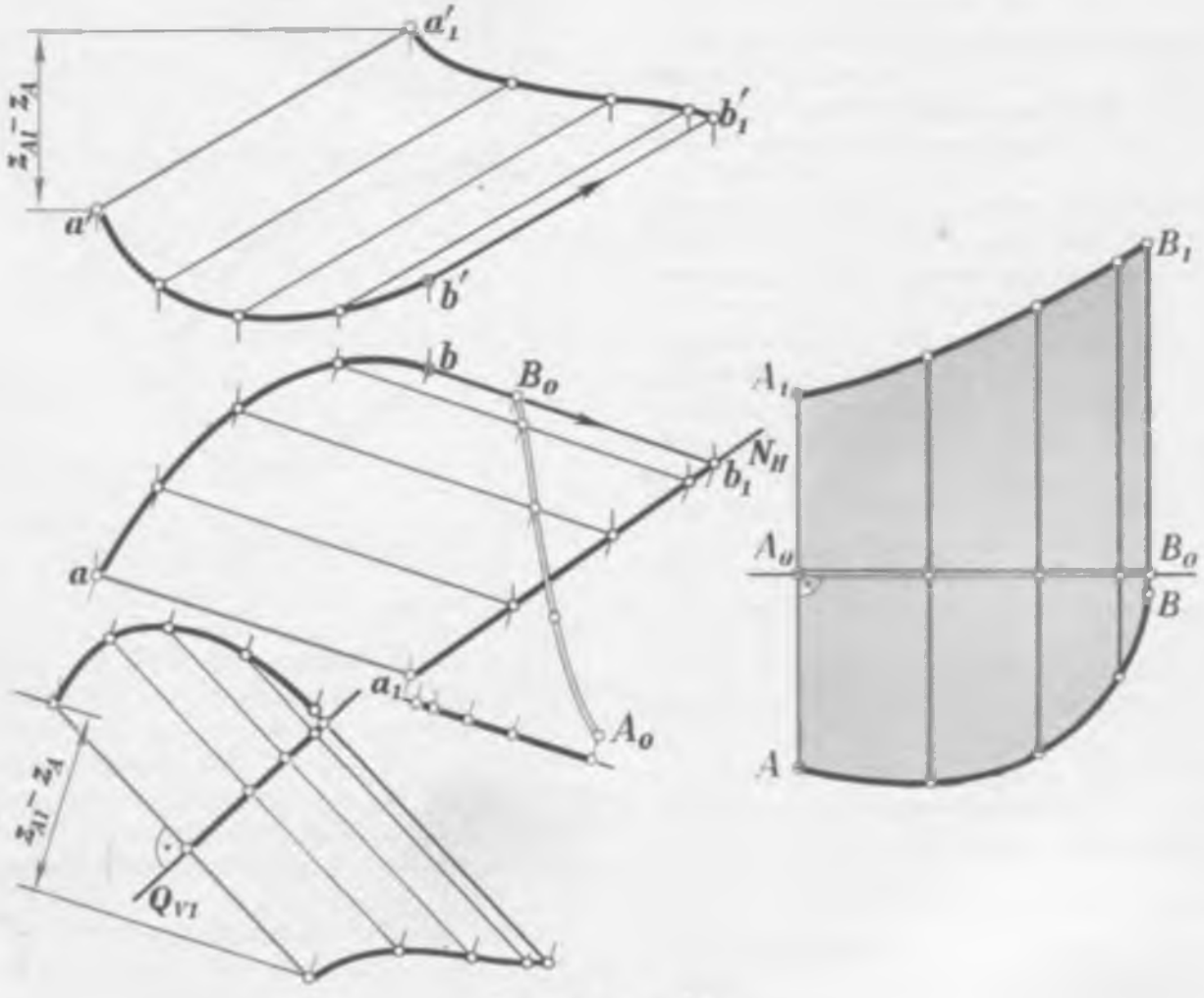
Крайними образующими и кривыми линиями концов образующих в преобразовании определяется контур развертки поверхности цилиндра.

* Триангуляция — от лат. triangulum — треугольник (tres — три и angulus — угол) — разбиение поверхности на треугольники (криволинейные).

290



Р и с. 412



Р и с. 413

На рис. 413 построена в соответствии с намеченной схемой развертка цилиндра, заданного направляющей линией ab, $a'b'$ и направлением образующих — стрелкой точки bb'.

Развертку строим для отсека цилиндра, ограниченного крайними его образующими, направляющей линией и линией пересечения цилиндра плоскостью N_H.

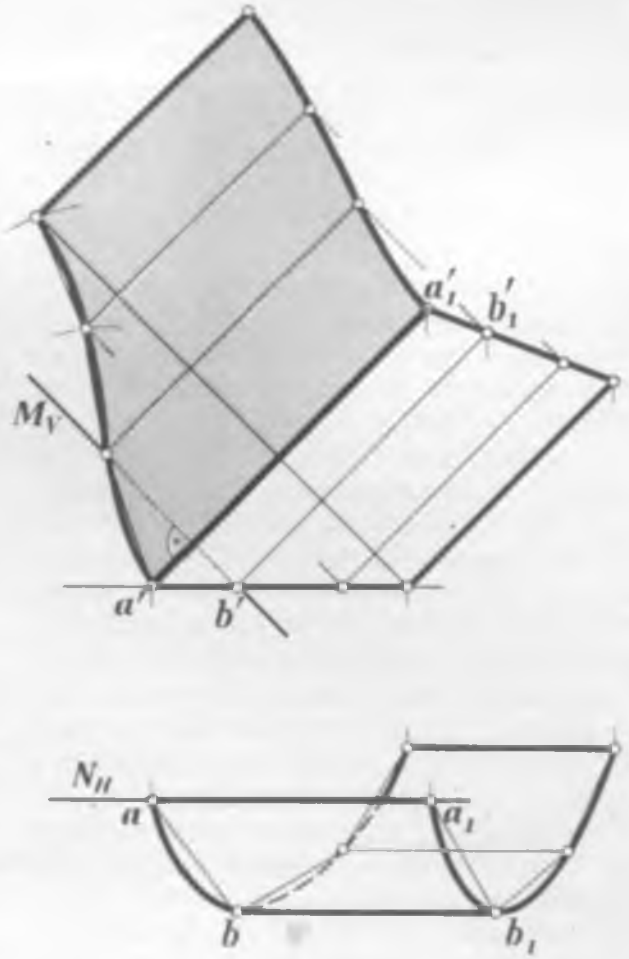
Выбираем новую систему плоскостей проекций с условием, чтобы образующие цилиндра были параллельны новой плоскости проекций, т. е. чтобы они проецировались на эту плоскость в натуральную величину.

Строим нормальное сечение цилиндра плоскостью Q_{V1} и определяем натуральную величину линии сечения.

По данным чертежа строим контур развертки. Здесь отрезок A_0B_0 прямой является преобразованием кривой A_0B_0 сечения. Проведя через соответствующие точки прямой A_0B_0 прямые линии, перпендикулярные к ней, получим намеченные на цилиндре образующие в преобразовании. Отложим на преобразованиях образующих величины их отрезков, ограниченных плоскостью N_H и направляющей линией. Кривые концов преобразований образующих и крайние образующие определяют контур развертки заданного цилиндра.

На рис. 414 построена развертка цилиндра способом раскатки. Крайняя образующая aa_1, $a'a'_1$ цилиндра лежит во фронтальной плоскости N_H. С этой плоскостью совместим остальные образующие цилиндра, являющиеся в то же время ребрами вписанной в цилиндр призматической поверхности.

Вращаем грань abb_1a_1, $a'b'b'_1a'_1$ вокруг ребра aa_1, $a'a'_1$ до совмещения с плоскостью N_H. В этом случае точка bb' вращается во фронтально-проецирующей плоскости M_V, перпендикулярной к ребру aa_1, aa'_1. После совмещения этой грани с плоскостью N_H точка bb' находится от точки aa' на расстоянии, равном действительной длине отрезка ab, $a'b'$. Чтобы построить совмещенное положение точки bb' на чертеже, достаточно сделать на следе плоскости M_V засечку из



Р и с. 414

точки aa' радиусом, равным ab, $a'b'$. Аналогично определяют совмещенные с плоскостью N_H и другие точки направляющей линии цилиндра. Чем точнее направляющая ломаная призмы вписывается в направляющую кривую цилиндра, тем точнее строится развертка цилиндрической поверхности.

Совмещенные с плоскостью N_H точки $b_1b'_1$, ... образующих цилиндра определяются на пересечении перпендикуляра к образующей. Фигура развертки получается здесь как отпечаток на фронтальной плоскости цилиндра, катящегося по этой плоскости без скольжения.

Рассмотрим задачу на построение развертки поверхности с ребром возврата.

На рис. 415 торс задан ребром возврата ab, $a'b'$. Построим вспомогательный конус торса с вершиной ss'.

Пересечем обе поверхности плоскостью Q_V. Она пересекает торс и конус по кривым линиям cd, $c'd'$ и c_1d_1, $c'_1\,d'_1$.

Плоскости, касающиеся торса и вспомогательного конуса вдоль параллельных образующих, взаимно параллельны и, следовательно, пересекают плоскость Q_V по параллельным прямым линиям. Эти прямые линии являются касательными в соответствующих точках к линиям cd, $c'd'$ и c_1d_1, $c'_1d'_1$ пересечения торса и его вспомогательного (направляющего) конуса плоскостью Q_V. Кривые линии cd, $c'd'$ и c_1d_1, $c'_1d'_1$ конформны между-собой. Такие кривые и в преобразовании являются также конформными. Это следует из подобия треугольников, основаниями которых являются параллельные между собой бесконечно малые хорды кривых, а сторонами — парные образующие торса и его направляющего конуса.

Строим развертку вспомогательного конуса и строим преобразование линии c_1d_1, $c'_1\,d'_1$ пересечения конуса плоскостью Q_V.

Полученную линию C_1D_1 конформно преобразуем в кривую линию CD — преобразование линии пересечения торса плоскостью Q_V.

Имея преобразование линии пересечения CD торса плоскостью, строим преобразования образующих торса как прямые линии, параллельные соответствующим им преобразованиям парных образующих вспомогательного конуса. Откладывая на преобразованиях образующих торса их истинные величины, получаем ряд точек, геометрическим местом которых является преобразование ребра возврата торса.

Для построения вспомогательных графиков можно, очевидно, вместо касательной и нормали в начальной точке кривой выбрать два любых взаимно перпендикулярных направления. За такие направления выберем прямые линии $I—I$ и $II—II$, из которых прямая линия $II—II$ совпадает по направлению с преобразованием начальной образующей направляющего конуса.

Развертка заданного торса представляется контуром $ABDCA$, где AB — преобразование ребра возврата, а CD — преобразование линии пересечения cd, $c'd'$ торса плоскостью Q_V. Контуры разверток торса и его вспомогательного конуса можно представить заполненными подобными бесконечно малыми треугольниками, основаниями которых являются параллельные между собой бесконечно малые хорды Δs_1 и Δs конформных кривых линий C_1D_1 и CD, а боковыми сторонами — параллельные между собой преобразования парных образующих конуса и торса.

Отношение $m=\lim \frac{\Delta s}{\Delta s_1}$ бесконечно малых дуг кривых линий CD и C_1D_1, ограниченных парными точками, равно отношению величин парных образующих торса и конуса, или отношению любых проекций этих парных образующих. Таким образом построены вспомогательные графики, ординатами которых являются величины m (в заданном масштабе), найденные для ряда проекций парных образующих торса и вспомогательного конуса.

Числовые величины площадей вспомогательных графиков (измеренные в единицах принятого масштаба), ограниченных кривыми линиями, ординатами начальных их точек, осями абсцисс и текущими их ординатами, соответствуют величинам расстояний от проекций точек кривой линии CD до проекций ее начальной точки.

Путем подсчета площадей графиков определяем достаточный ряд точек для построения кривой линии CD — преобразования линии пересечения cd, $c'd'$ торса плоскостью Q_V.

Проведем через ряд точек кривой линии CD образующие преобразования торса параллельно преобразованиям парных им образующих вспомогательного конуса. Отложив истинные их величины, получаем точки, которыми наметится кривая линия AB — преобразование ребра возврата ab, $a'b'$ заданного торса.

Истинные величины образующих торса можно определить из преобразований образующих конуса путем увеличения последних

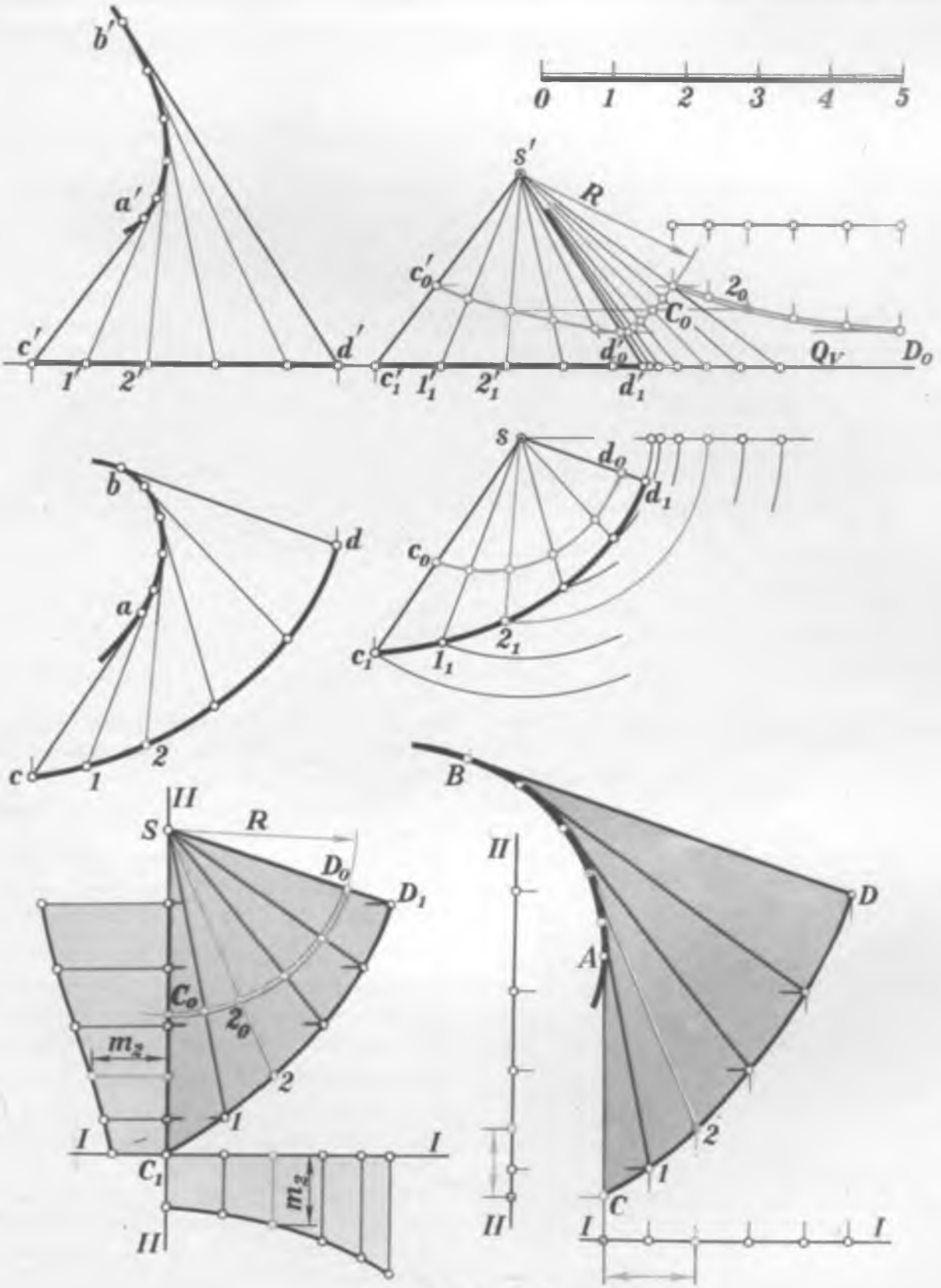
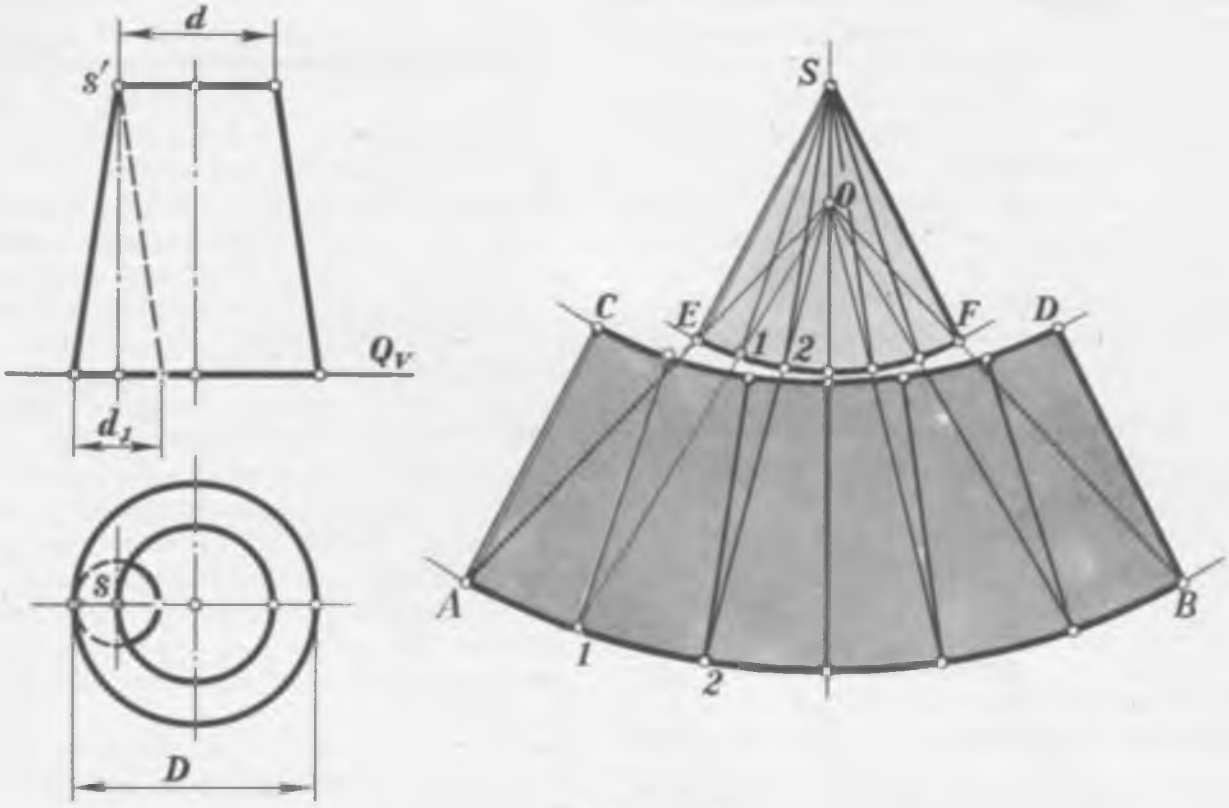

b'
a'
c'
1'
2'
d'
0 1 2 3 4 5
s'
R
c'0
2'0
C'0
d'0
Q'V
D'0
c'1 1'1 2'1 d'1
b
a
c
1
2
d
s
d0
d1
c0
2 1
c1 1 1
II
S
R
D0
D1
C0
2 0
m2
2
1
I
I
C1
m2
II
B
II
D
A
2
1
C
I
I

Рис. 415

294



Р и с. 416

в число раз, соответствующее величинам ординат графиков.

При развертывании торса в преобразовании сохраняются длины дуг его ребра возврата и величины бесконечно малых углов между его образующими, а следовательно, сохраняются величины радиусов кривизны ребра возврата торса. Пользуясь этим, легко построить развертку торса-геликоида, заданного его ребром возврата — цилиндрической винтовой линией.

На рис. 416 построена развертка усеченного конуса вращения, вершина которого находится за пределами чертежа.

Обозначим D и d диаметры окружностей нижнего и верхнего сечений конуса.

Примем точку ss' за вершину конуса, подобного заданному. Такой конус пересекается плоскостью Q_V основания данного конуса по окружности, диаметр которой $d_1 = D - d$.

Построим развертку этого вспомогательного конуса. В развертке получим круговой сектор, в котором дуга EF является преобразованием окружности диаметром d_1 основания вспомогательного конуса.

При развертывании заданного усеченного конуса преобразованиями окружностей диаметрами D и d являются дуги AB и CD окружностей, пропорциональные дуге EF с коэффициентами пропорциональности, равными $k_1 = \frac{D}{D-d}$ и $k_2 = \frac{d}{D-d}$.

Через некоторую точку O проводим лучи и строим кривую линию AB, пропорциональную кривой линии EF при коэффициенте пропорциональности $k_1 = \frac{D}{D-d}$. Эта кривая линия является преобразованием окружности диаметром D основания заданного конуса при его развертывании.

Через точки 0, 1, 2, ... кривой линии AB проводим прямые линии, параллельные преобразованиям $S0$, $S1$, $S2$, ... образующих вспомогательного конуса, и на них откладываем отрезки, равные длине образующей

заданного усеченного конуса. Таким образом, намечается ряд точек дуги CD окружности, которая является преобразованием окружности диаметром d. Контур $ACDBA$ является искомым контуром развертки заданного усеченного конуса.

УСЛОВНЫЕ РАЗВЕРТКИ НЕРАЗВЕРТЫВАЮЩИХСЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ

§71

При конструировании часто необходимо решать задачи, используя методы начертательной геометрии, на построение разверток неразвертывающихся поверхностей.

Теоретически неразвертывающаяся поверхность не может иметь развертку. Однако в практике для получения нужной поверхности из листового материала строят так называемые *условные* развертки неразвертывающихся поверхностей, где, кроме изгибания, производят растяжение и сжатие листа.

На рис. 417 построена условная развертка цилиндроида, представляющего собой конструкцию части трубопровода. Цилиндроид задан двумя одинаковыми направляющими окружностями. Плоскостью параллелизма является фронтальная плоскость проекций V.

Развертку цилиндроида строят способом триангуляции. Цилиндроид заменяют вписанной многогранной поверхностью с треугольными гранями. На плоскости последовательно строят все треугольники многогранной поверхности. Точки разогнутых по способу хорд окружностей соединяют плавной лекальной кривой линией.

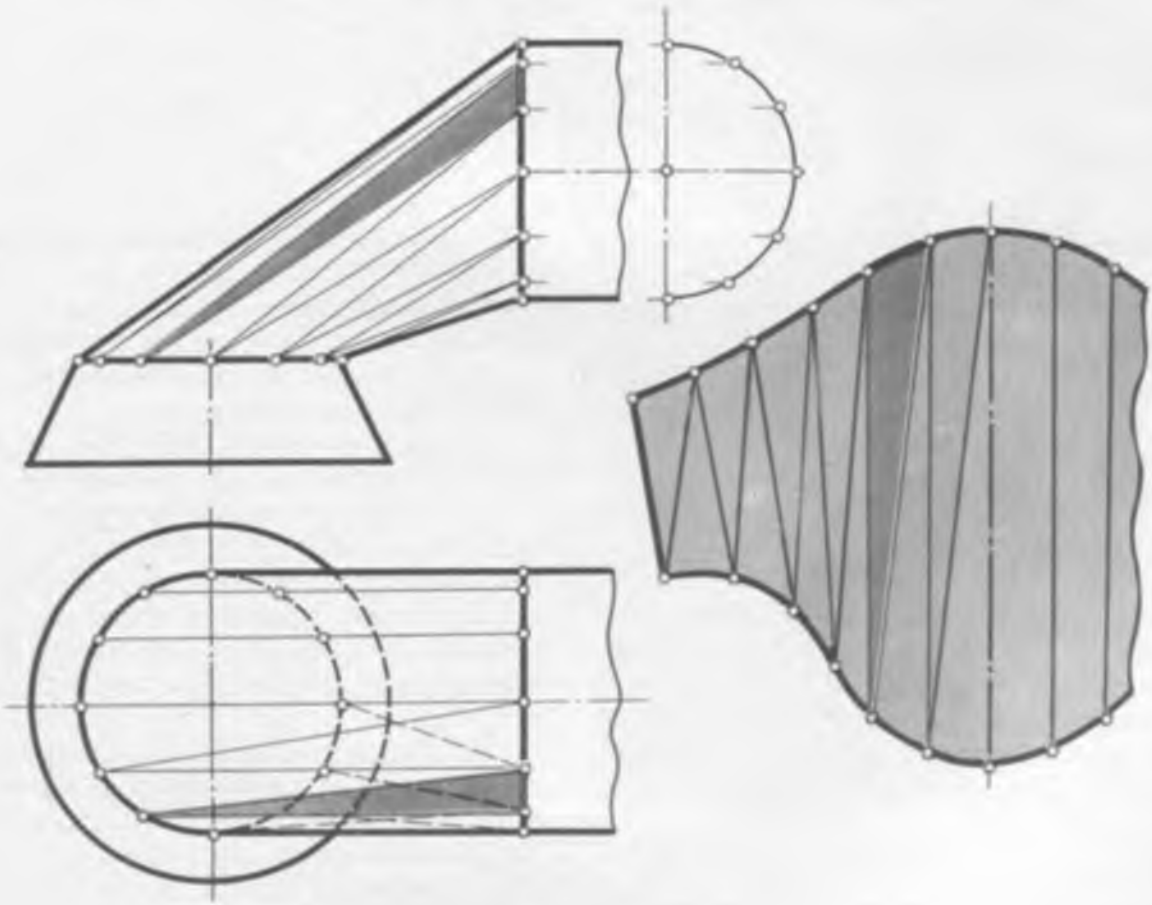


Рис. 417

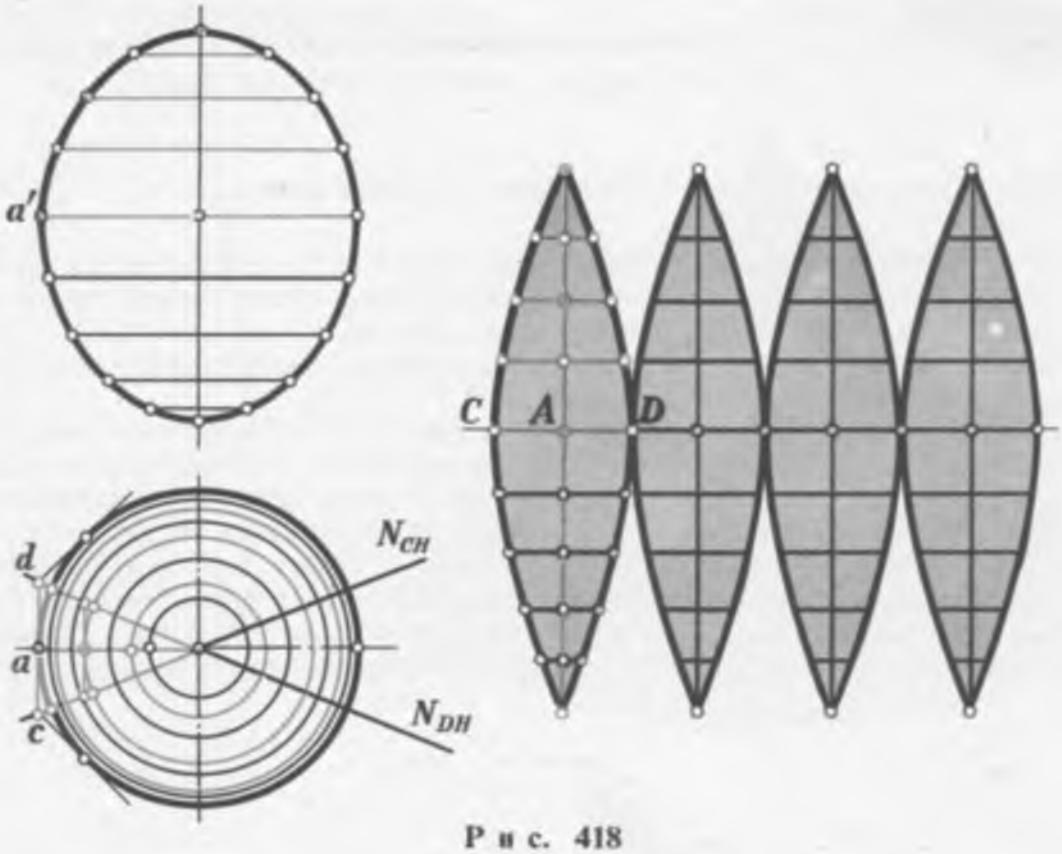


Рис. 418

Для построения условных разверток неразвертывающихся поверхностей вращения за аппроксимирующие поверхности принимают цилиндры и конусы.

На рис. 418 показана аппроксимация поверхности вращения, заданной очерками. Предполагаем, что неполная модель* поверхности вращения получена из ее лекального каркаса. За лекальные кривые линии приняты меридиональные сечения поверхности. Угол между плоскостями меридиональных сечений принят равным 45°.

Неполная модель ограничивается цилиндрическими поверхностями, для которых направляющими линиями служат указанные выше меридиональные сечения поверхности вращения, а образующие перпендикулярны к плоскостям средних меридиональных сечений.

Для построения такой модели строим на поверхности вращения ряд ее параллелей и отмечаем точки их пересечения направляющими линиями цилиндров.

Отрезок проекции экватора, ограниченный меридиональными плоскостями N_{CH} и N_{DH}, заменяем отрезком прямой cd, касательной в точке a к проекции экватора. На горизонтальной прямой линии откладываем отрезки, равные отрезку cd, и через середины этих отрезков проводим прямые линии, перпендикулярные к горизонтальной прямой.

На перпендикулярах отложим спрямленные меридиональные сечения, на которых отметим точки их пересечения параллелями. Через отмеченные точки проводим горизонтальные прямые линии и на них откладываем в обе стороны отрезки, равные соответственно половине длин касательных к параллелям,

* *Неполной* моделью называют модель поверхности, приближенно заменяющую данную кривую поверхность.

ограниченных плоскостями направляющих линий цилиндров. Эти отрезки можно получить путем построения касательных к горизонтальным проекциям соответствующих параллелей поверхности вращения.

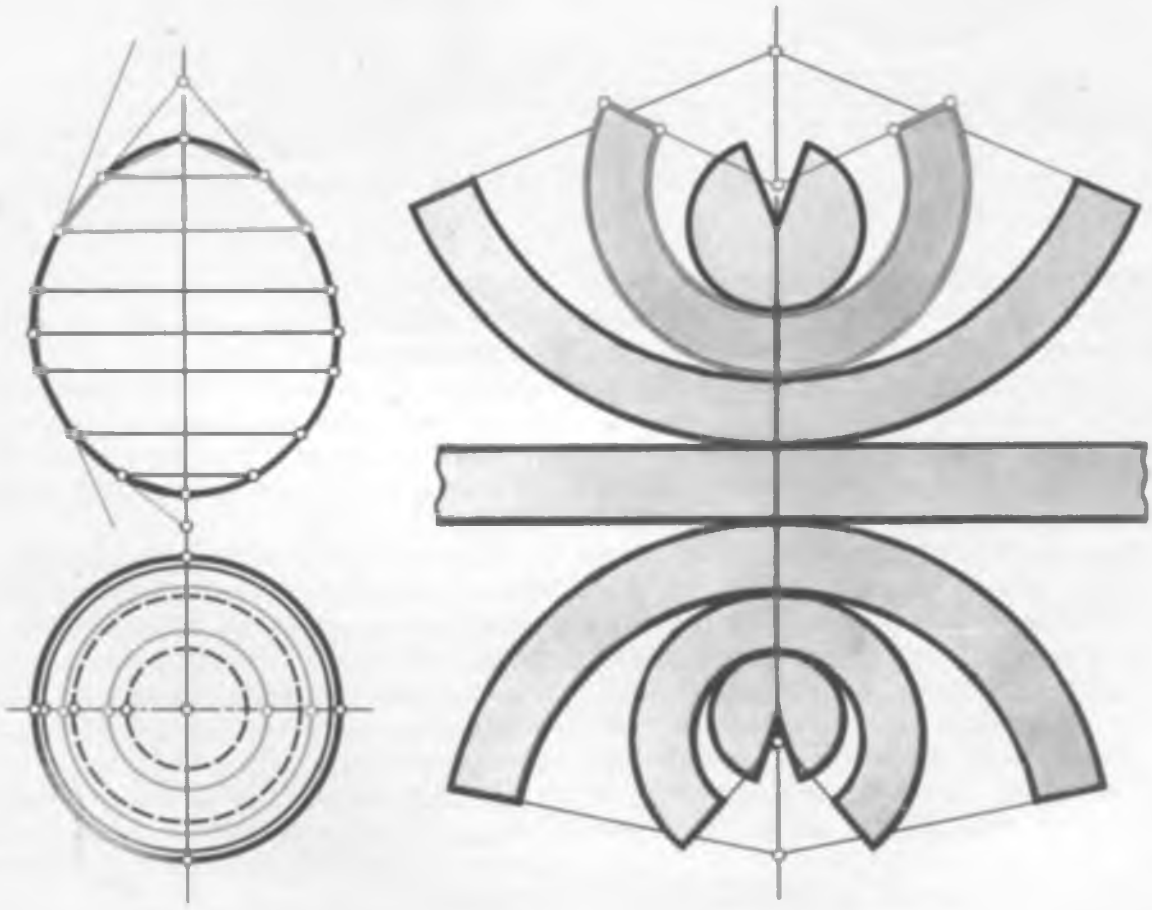
Соединяя крайние точки построенных отрезков плавными кривыми линиями, получаем очерк одного звена (лепестка) развертки неполной модели заданной поверхности вращения. На рис. 418 построено четыре таких звена.

Полная выкройка одежды поверхности состоит из восьми таких звеньев.

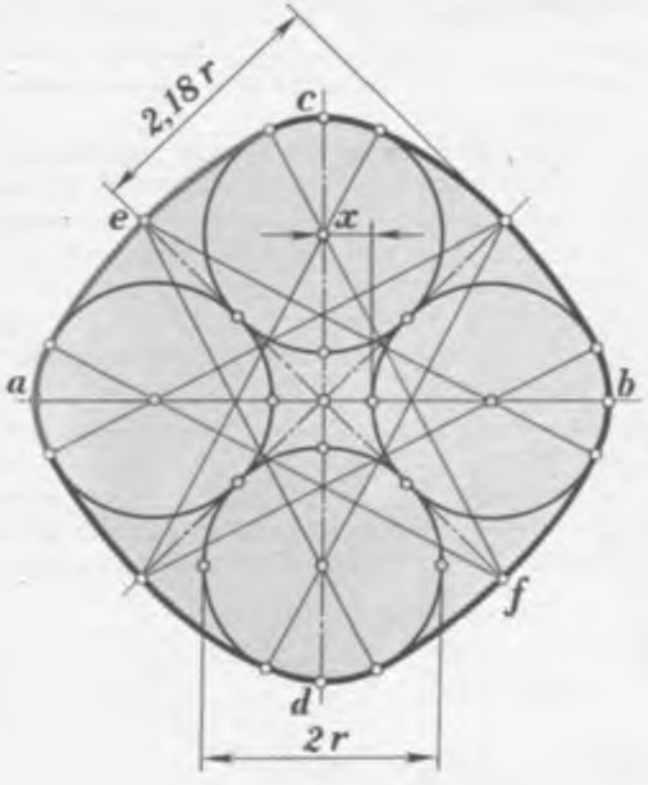
На рис. 419 приведен другой прием аппроксимации неполной моделью поверхности вращения. Принято, что каркас поверхности состоит из ее параллелей, а модель ограничивается поверхностями усеченных конусов, опирающихся на эти параллели. Здесь задача сводится к построению ряда разверток конических поверхностей и одной развертки цилиндрической поверхности (средний пояс).

При аппроксимации неразвертывающихся поверхностей следует учитывать, что аппроксимирующие поверхности этих поверхностей нельзя получить так, как для торсов — голько путем последовательного ряда изгибов разверток. В этих случаях материал развертки после превращения ее в одежду модели должен иметь соответствующие остаточные деформации (растяжение, сжатие и др.).

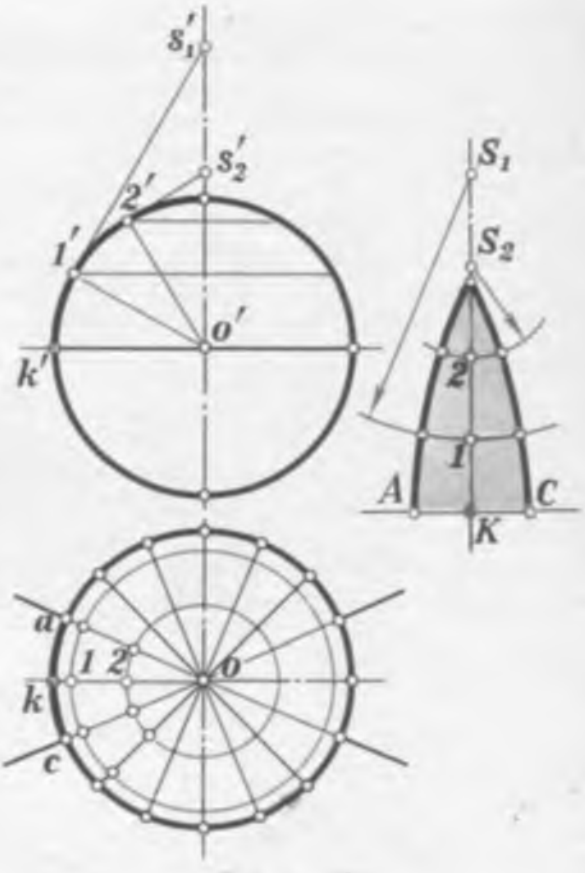
Решение задачи построения разверток одежды неразвертывающихся поверхностей зависит от структуры и свойств материала



Р и с. 419



Р и с. 420



Р и с. 421

развертки и от выбранных способов его обработки при получении формы одежды модели поверхности. Задача эта не может, очевидно, иметь общего решения и не является только геометрической задачей.

Академик П. Л. Чебышев (1821—1894) дал общее решение задачи по аппроксимации поверхностей (уравнения которых известны) для случая, когда материалом выкроек служит ткань. Эту задачу он назвал задачей построения *выкроек* одежды. Предполагается, что ткань выполнена из тонкой пряжи с некрупными клетками, образованными основой и утком. При покрывании ею какой-либо поверхности, нити ткани, изгибаясь, изменяют лишь углы между основой и утком, тогда как длина нитей не изменяется.

На рис. 420 показана выкройка одежды полусферы радиусом R, исполненная способом Чебышева. Она представляется коробовым четырехсимметричным овалом. Овал составляют дуги четырех касающихся друг друга окружностей радиусом $r = 0{,}65\,R$ и дуги окружностей радиусом $ef = 4{,}36r = 2{,}84R$. Величина $2x$ равна $0{,}27R$. Материал располагается при выкройке таким образом, чтобы точки c и d находились на одной нити основы, а точки a и b — на одной нити утка, или наоборот.

Для получения одежды сферы радиусом R нужно приготовить указанным способом две выкройки и, поместив между ними сферу, сшить между собой выкройки в точках a, b, c и d. Сшивая выкройки по их соответствующим дугам, получаем одежду сферы, плотно прилегающую во всех ее частях.

Построения методом Чебышева выкроек поверхностей, отличных от сферы, представляются очень интересной и еще не решенной задачей.

На рис. 421 показано построение приближенной развертки сферы путем применения касательных к сфере конусов. Сфера разделе-

на меридиональными плоскостями на некоторое число равных частей и построена приближенная развертка каждой части.

На прямой линии откладываем длину экватора и отмечаем точки A, C, ... пересечения экватора меридиональными плоскостями. Из середины полученных отрезков проводим перпендикуляры к ним и на перпендикулярах откладываем спрямленные меридиональные сечения, отметив точки их пересечения с параллелями. На чертеже делим меридиан на некоторое число равных частей и строим параллели, проходящие через точки деления. Затем определяем величины $1's'_1$, $2's'_2$, ... образующих конусов, касающихся по намеченным параллелям сферы.

На развертке через точки 1, 2, ... деления меридиана проводим окружности с центрами на прямой KS_1 радиусами, равными $1S_1$, $2S_2$, ..., и на этих окружностях от точек 1, 2, ... откладываем в обе стороны длины дуг, равные половинам отрезков параллелей, заключенных между меридиональными плоскостями. Соединяя построенные точки плавными кривыми линиями, получаем очерк одного лепестка развертки.

Описанную приближенную развертку сферы можно использовать как «одежду» сферы лишь при условии изготовления ее из достаточно пластичного материала, позволяющего компенсировать дефекты построенного контура одежды сферы при его деформациях.

Вопросы для самопроверки

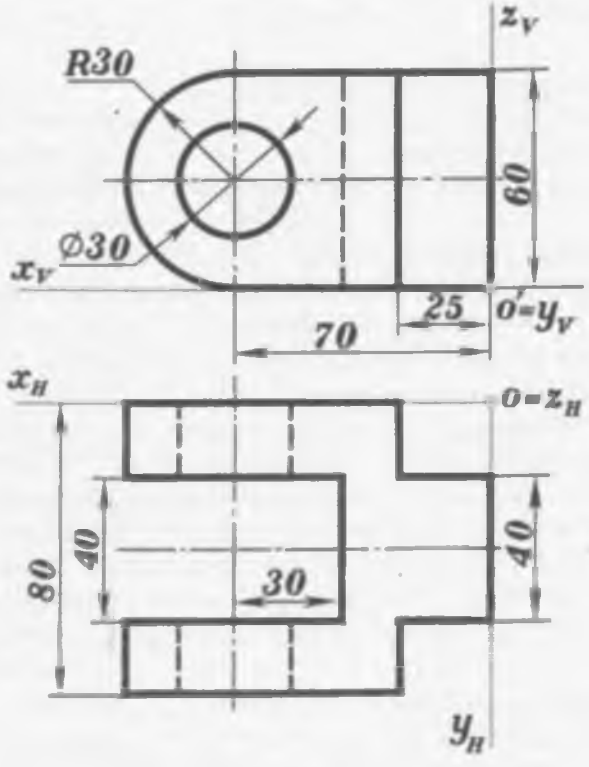
1. Что называют разверткой поверхности?
2. Какие поверхности называют развертывающимися и какие неразвертывающимися?
3. Укажите основные свойства разверток.
4. Дайте определение сферической индикатрисы образующих торса.
5. Укажите последовательность графических построений разверток поверхностей конуса и цилиндра с помощью сферической индикатрисы их образующих.
6. Что называют аппроксимацией поверхности?

ГЛАВА XIII

АКСОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

§72 ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ. ВИДЫ АКСОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ

Для большинства поверхностей можно наметить три главных взаимно перпендикулярных направления (высота, длина, ширина) и параллельно им вести измерения поверхности. Результаты измерений можно представить на чертеже поверхности.



Р и с. 422

При ортогональном проецировании поверхность целесообразно представить таким образом, чтобы ее главные направления измерений были параллельными основным плоскостям проекций — горизонтальной *H* и фронтальной *V*. В этом случае измерения поверхности, параллельные их направлениям, проецируются на соответствующие плоскости проекций без искажения. Они могут быть нанесены на чертеж и взяты с него.

На рис. 422 показан чертеж машиностроительной детали — вилки. Грани вилки размещены параллельно основным плоскостям проекций. Направления главных измерений поверхности здесь могут быть представлены в виде трех взаимно перпендикулярных осей: *Ox*, *Oy* и *Oz*, пересекающихся в точке *O*.

Однако этот чертеж не дает полной наглядности детали, так как каждая из проекций содержит только два измерения.

Чтобы получить наглядное изображение рассматриваемого предмета (плоского или пространственного) на какой-либо плоскости, необходимо или ввести косоугольное проецирование, или, сохранив ортогональное проецирование, заменить одну из основ-

ных плоскостей проекций произвольно расположенной плоскостью.

Пусть заданы (рис. 423) плоскость Π, прямая AB и направление проецирования, показанное стрелкой. Очевидно, косоугольная проекция A_1B_1 отрезка AB не определяет положения заданной прямой в пространстве, так как всякая другая прямая, ограниченная проецирующими лучами AA_1 и BB_1, имеет ту же проекцию A_1B_1.

Чтобы получить при косоугольном проецировании на плоскость Π проекции, по которым можно точно определить расположение заданной фигуры в пространстве, берут какую-либо плоскость Q и находят на ней ортогональную проекцию заданной фигуры. Затем по заданному стрелкой направлению проецируют на плоскость Π одновременно и фигуру, и ее ортогональную проекцию. При таком проецировании каждой точке пространства соответствуют две ее проекции на плоскости Π. Полученный в плоскости Π чертеж называют *аксонометрическим*. Плоскость Π называют *плоскостью аксонометрических проекций*, а плоскость Q — *основной плоскостью проекций*.

Аксонометрическая проекция, или *аксонометрия*, представляет собой один из методов построения наглядных изображений предметов в одной плоскости.

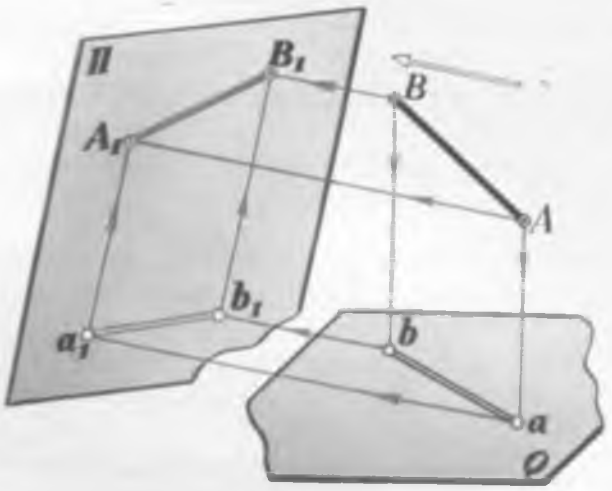
Аксонометрические чертежи обладают свойством наглядности и одновременно свойством обратимости — по таким чертежам легко представить общую форму предметов и их положение в пространстве.

Изображение предмета в аксонометрии получается параллельным проецированием его на плоскость проекций.

Чтобы получить такое изображение, предмет жестко связывают с системой трех взаимно перпендикулярных координатных осей $Oxyz$ (натуральной системой координат в пространстве).

Представим себе в пространстве точку A. Отнесем ее к системе прямоугольных (декартовых) координат $Oxyz$ (рис. 424).

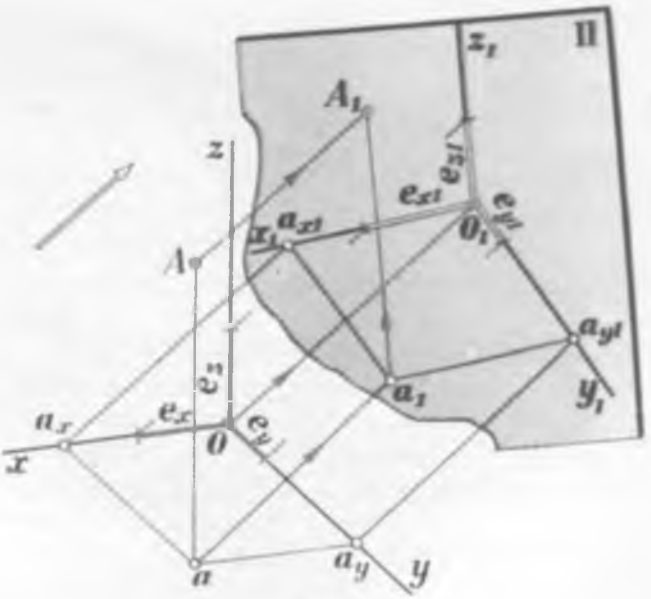
За единицу измерения, общую для всех координатных осей, примем отрезок e — натуральный масштаб.



Р и с. 423

Отложим эти отрезки от точки O на каждой из осей ($e_x = e_y = e_z = e$). Проецируем точку A на некоторую произвольно выбранную плоскость Π, принятую за плоскость аксонометрических проекций. Выбранное направление проецирования указано стрелкой.

Натуральные оси Ox, Oy, Oz проецируются на аксонометрическую плоскость проекций Π в общем случае искаженно. Их проекции (O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1) называют *аксоно-*



Р и с. 424

метрическими осями координат. Проекции e_{x1}, e_{y1}, e_{z1} натуральных масштабов называют *аксонометрическими масштабами*. В общем случае они не равны e и не равны между собой. Отрезки e_{x1}, e_{y1}, e_{z1} принимают за единицы измерения по аксонометрическим осям.

При проецировании точки A на плоскость Π координатные ее отрезки Oa_x, a_xa, aA (пространственная ломаная линия Oa_xaA) соответственно проецируются отрезками O_1a_{x1}, $a_{x1}a_1$, a_1A_1 (плоская ломаная линия $O_1a_{x1}a_1A_1$).

Точки A_1 и a_1 называют *аксонометрическими проекциями* точек A и a; при этом точку A_1 называют *аксонометрической проекцией* точки A, а точку a_1 — *вторичной проекцией* точки A (или основанием точки A_1). Указанными построениями можно получить наглядное изображение любого геометрического образа.

Натуральные оси координат Ox, Oy, Oz в общем случае имеют различные углы наклона к плоскости Π аксонометрических проекций. Поэтому отрезки натуральной координатной ломаной Oa_xaA проецируются на плоскость Π с различным искажением.

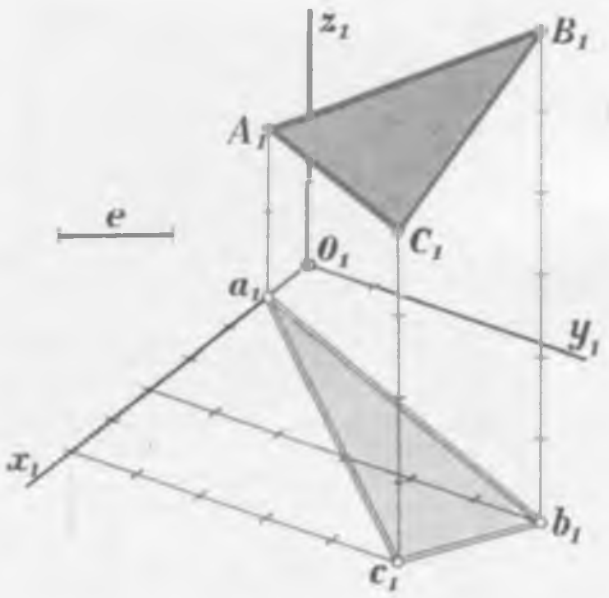


Рис. 425

При косоугольном проецировании длина проекции любого из этих отрезков может быть меньше, равна или больше, а при прямоугольном — равна или меньше его натуральной длины. Так как при параллельном проецировании отношение длин отрезков параллельных прямых сохраняется, то аксонометрические масштабы откладываются на каждой из соответствующих сторон ломаной $O_1a_{x1}a_1A_1$ столько раз, сколько раз натуральный масштаб e откладывается на каждой из сторон координатной ломаной Oa_xaA. Например, если натуральная абсцисса x_A точки A равна $x_A = \frac{Oa_x}{e_x} = 3{,}5$, то и аксонометрическая абсцисса точки A_1 равна

$$x_{A1} = \frac{O_1a_{x1}}{e_{x1}} = 3{,}5.$$

Следовательно, аксонометрические координаты, измеренные аксонометрическими масштабами, численно всегда равны натуральным.

Отношения $\frac{e_{x1}}{e}$, $\frac{e_{y1}}{e}$, $\frac{e_{z1}}{e}$ называют *коэффициентами* или *показателями* искажения по аксонометрическим осям.

Таким образом, метод построения аксонометрического чертежа является координатным методом построения чертежа в одной проекции. Такой чертеж обладает свойством обратимости.

Построим аксонометрический чертеж треугольника ABC по заданным натуральным координатам его вершин A (1, 0, 2), B (4, 6, 6) и C (6, 5, 4). Направления аксонометрических осей O_1x_1, O_1y_1 и O_1z_1 и аксонометрические масштабы e_{x1}, e_{y1} и e_{z1} известны (рис. 425).

Строим координатные ломаные вершин аксонометрической проекции треугольника с учетом, что аксонометрические координаты, измеренные аксонометрическими масштабами, численно равны натуральным. Так, аксонометрическая абсцисса точки A_1 численно равна единице, т. е. величине e_{x1}; аксонометрическая ордината равна нулю,

аксонометрическая аппликата — двум аксонометрическим масштабным отрезкам e_{z1}.

Аналогично строим координатные ломаные точек C_1 и B_1. Соединив прямыми аксонометрические проекции A_1, B_1 и C_1 точек, получим аксонометрическую проекцию $A_1B_1C_1$ треугольника ABC.

Аксонометрическую координатную ломаную любой точки можно построить, если известны аксонометрическая проекция точки, ее основание (вторичная проекция) и аксонометрические проекции натуральных осей. Из этого следует, что аксонометрический чертеж при заданных аксонометрических масштабах является обратимым, если можно построить основание (вторичную проекцию) любой из точек изображенного на чертеже геометрического образа. Основания точек используют в процессе построения аксонометрии, но на готовом аксонометрическом чертеже объекта их сохраняют только в исключительных случаях.

Наглядность изображений на аксонометрических чертежах зависит от выбора направления проецирования. Эта наглядность теряется, если направление проецирования параллельно одной из координатных плоскостей.

Наглядность теряется в еще большей степени, если направление проецирования параллельно какой-либо оси координат, т. е. параллельно двум координатным плоскостям. В этом случае проекция координатной оси преобразуется в точку; в точки преобразуются и проекции прямых линий изображаемой фигуры, параллельных этой оси.

В зависимости от направления проецирования относительно плоскости аксонометрических проекций аксонометрия может быть косоугольной или прямоугольной. Прямоугольную аксонометрию называют также *ортогональной* или *нормальной*.

В зависимости от отношений показателей искажения координат аксонометрические проекции делят на три группы:

триметрические — все три масштаба неодинаковы:

$$e_{x1} \neq e_{y1} \neq e_{z1};$$

диметрические — два масштаба одинаковы:

$$e_{x1} = e_{z1} \neq e_{y1};$$

изометрические — все три масштаба одинаковы:

$$e_{x1} = e_{y1} = e_{z1}.$$

По соотношению размеров проецируемого предмета и его изображения аксонометрические проекции разделяют на точные и подобно увеличенные — приведенные.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АКСОНОМЕТРИИ (ТЕОРЕМА ПОЛЬКЕ) §73

Рассмотрев общие сведения об аксонометрических проекциях, можно сделать следующий вывод:

1) аксонометрические чертежи обратимы;

2) аксонометрическая и вторичная проекции точки вполне определяют ее положение в пространстве.

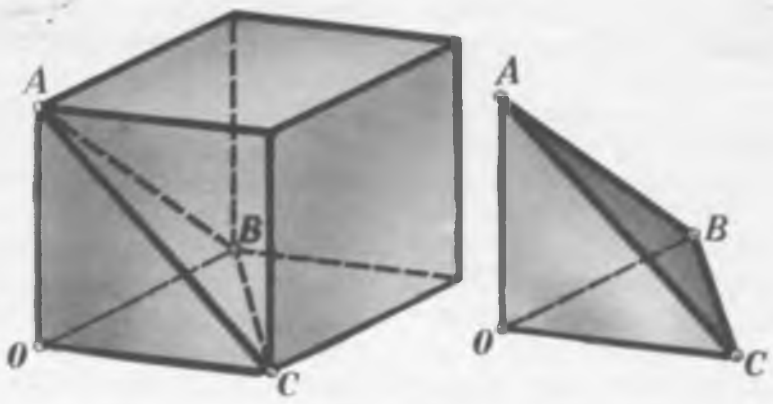
Аксонометрические проекции обратимы только при наличии аксонометрии трех главных направлений измерений фигуры и коэффициентов искажения по этим направлениям.

Аксонометрическую проекцию фигуры можно считать ее проекцией на плоскость произвольного положения при некотором выбранном направлении проецирования.

Очевидно, возможно и обратное. На плоскости можно выбрать произвольную аксонометрическую систему осей с произвольными аксонометрическими масштабами.

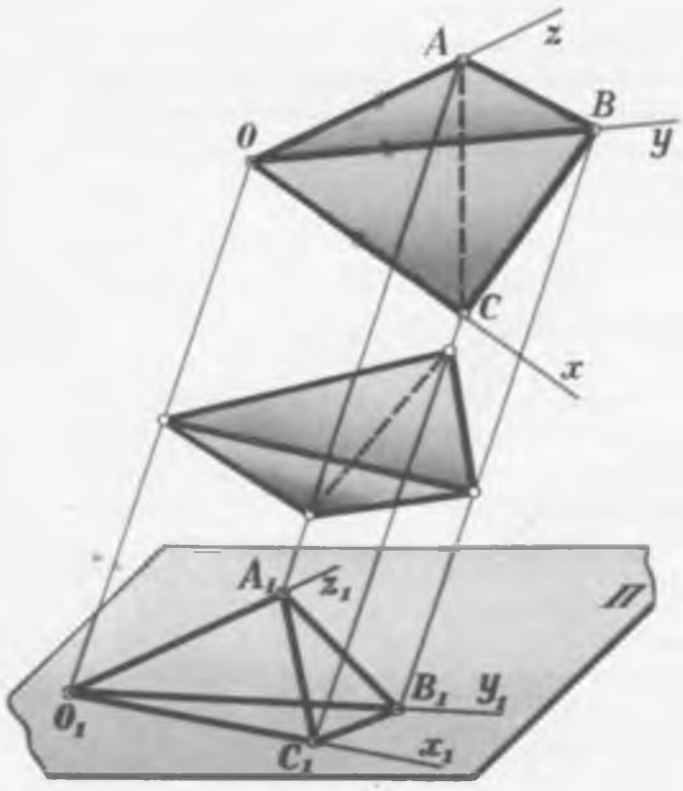
В пространстве возможно (всегда будет) такое положение натуральной системы прямоугольных координат и такой размер натурального масштаба по осям, параллельной проекцией которых является аксонометрическая система.

При построении аксонометрических чертежей необходимо знать степень произвола выбора аксонометрических осей и аксонометрических масштабов.



Р и с. 426

Выделим из куба (рис. 426) пирамиду с вершиной O и основанием ABC. Три плоских угла при вершине O — прямые; ребра, исходящие из вершины O, равны между собой и равны единице. Такую треугольную пирамиду называют *масштабным тетраэдром*.



Р и с. 427

Рассмотрим теперь другую, уже плоскую фигуру.

Пометим в плоскости $П$ четыре точки O_1, A_1, B_1 и C_1 (рис. 427). Они выбраны произвольно (не лежат на одной прямой и не совпадают). Соединим точки прямыми линиями. Полученная из шести отрезков фигура $O_1A_1B_1C_1$ — четырехугольник с диагоналями — называется *полным четырехугольником*. Между масштабным тетраэдром и любым полным четырехугольником существует очень важная геометрическая связь, которая устанавливается основной теоремой аксонометрии.

Эта теорема впервые была высказана немецким геометром К. Польке в 1853 г. в следующем изложении:

Т е о р е м а. *Три произвольной длины отрезка прямых, лежащих в одной плоскости и выходящих из одной точки под произвольными углами друг к другу, представляют параллельную проекцию трех равных отрезков, отложенных на прямоугольных координатных осях от начала**.

Проведем из точек O_1, A_1, B_1 и C_1 параллельные прямые произвольного направления и на них произвольно пометим точки O, A, B и C; получим пространственную

* Более подробно см.: Е. А. Глазунов и Н. Ф. Четверухин. Аксонометрия, М., Гостехиздат, 1953.

фигуру — *тетраэдр*. Параллельной проекцией такого тетраэдра является полный четырехугольник $O_1A_1B_1C_1$.

Можно построить бесчисленное множество тетраэдров произвольной формы и найти такое направление проецирования, при котором их проекцией является полный четырехугольник $O_1A_1B_1C_1$. Среди этого множества, очевидно, имеется и тетраэдр с прямым трехгранным углом при вершине O и с равными ребрами OA, OB и OC — *масштабный тетраэдр*. Три равных и взаимно перпендикулярных ребра этого тетраэдра служат масштабами осей координат в пространстве.

Итак, любой *невырождающийся** *полный четырехугольник можно рассматривать как параллельную проекцию масштабного тетраэдра.*

Согласно основной теореме, любые три прямые в плоскости, исходящие из одной точки и не совпадающие между собой, можно принять за аксонометрические оси. Любые произвольной длины отрезки на этих прямых, отложенные от точки их пересечения, можно принять за аксонометрические масштабы.

Эта система аксонометрических осей и масштабов является параллельной проекцией некоторой прямоугольной системы координатных осей и натуральных масштабов.

В практике построения наглядных изображений обычно применяют лишь некоторые определенные комбинации направлений аксонометрических осей и аксонометрических масштабов.

ТРЕУГОЛЬНИК СЛЕДОВ И ПОКАЗАТЕЛИ ИСКАЖЕНИЯ

§74

Допустим, что при рассмотрении какой-либо заданной в пространстве фигуры установлены оси координат — направления Ox, Oy и Oz главных ее измерений, проходящие через точку O. Координатную плоскость xOy примем за основную плоскость проекций H. За аксонометрическую плоскость проекций $П$ примем некоторую плоскость, заданную горизонталью ab, $a'b'$ и фронталью ac, $a'c'$ (рис. 428).

Зададим произвольно направление проецирования стрелкой точки ss'. Определим проекции точки oo' на плоскости $П$ по заданному направлению. Для этого проведем через точку oo' прямую ok, $o'k'$, параллельную направлению стрелки, и найдем точку o_1o_1' пересечения ее с плоскостью $П$.

Повернем аксонометрическую плоскость $П$ вокруг горизонтали ab, $a'b'$ до совмещения ее с плоскостью проекций H. Точку O_1 плоскости $П$ в совмещенном с плоскостью H ее положении соединим с точками A, B и C_1. Отрезки O_1A, O_1B и O_1C_1 являются проекциями отрезков осей координат направлений главных измерений Ox, Oy и Oz на аксонометрической плоскости проекций.

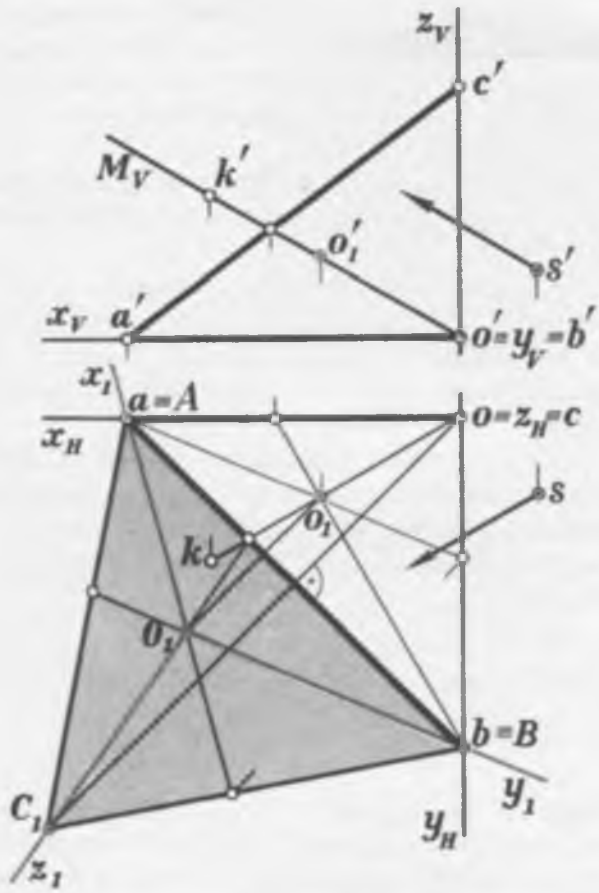
На плоскости аксонометрических проекций имеются проекции всех трех направлений главных измерений. Единицы измерения по осям координат проецируются на плоскость $П$ при этом не в натуральную величину, а искаженно.

Отношение длины проекции отрезка к его натуральной длине называют *коэффициентом* или *показателем искажения*. В рассматриваемом случае коэффициенты искажения по осям различны.

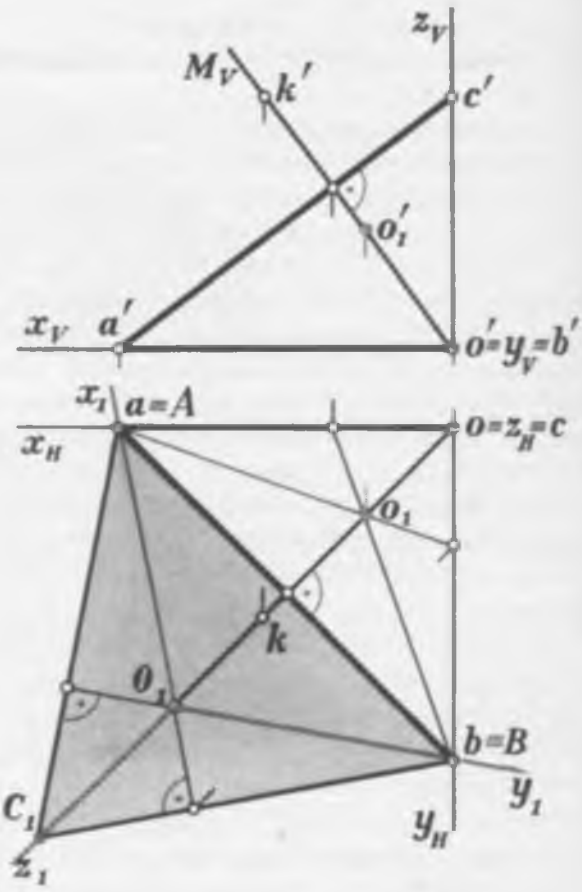
В прямоугольной аксонометрии проецирование и на основную, и на аксонометрическую плоскости проекций должно быть прямоугольным.

Пусть (рис. 429) главные направления измерений фигуры устанавливаются осями координат Ox, Oy и Oz. За основную плоскость чертежа H принимаем плоскость xOy. Аксонометрическая плоскость проекций $П$ представлена главными линиями: горизонталью ab, $a'b'$ и фронталью ac, $a'c'$.

* Четырехугольник называется *невырождающимся*, если его вершины не принадлежат одной прямой.



Р и с. 428



Р и с. 429

Начало координат — точку oo' ортогонально проецируем на плоскость $П$. Проекции направления проецирующего луча определяем из условия перпендикулярности прямой к плоскости. Проекцией точки oo' на плоскости $П$ является точка o_1o_1' .

Совмещая плоскость $П$ с основной плоскостью проекций H вращением вокруг горизонтали ab, $a'b'$, определим смещенную проекцию O_1 точки o_1o_1' и точку C_1 — смещенную проекцию точки cc'. Отрезки O_1A, O_1B и O_1C_1 являются аксонометрическими проекциями отрезков OA, OB и OC.

Стороны AC, AB и BC треугольника ABC являются линиями пересечения (следами) плоскостей xOz, xOy и yOz с плоскостью аксонометрических проекций $П$.

Из условия перпендикулярности прямой к плоскости следует, что отрезки O_1A, O_1B и O_1C_1, как проекции отрезков OA, OB и OC, перпендикулярных к плоскостям yOz, xOz и xOy, составляют прямые углы с отрезками BC_1, AC_1 и AB. Треугольник ABC является треугольником следов; аксонометрические оси являются его высотами.

Таким образом, точка O_1 является точкой пересечения высот треугольника следов. Точка O_1 всегда (независимо от выбора плоскости $П$) располагается внутри треугольника следов. Отсюда следует, что аксонометрические проекции направлений главных измерений составляют между собой тупые углы.

Таким образом, по заданным направлениям аксонометрических проекций главных направлений можно определить треугольники пересечения плоскостей, проходящих через главные направления измерений, с

плоскостями, параллельными плоскости $П$ — плоскости аксонометрических проекций.

На рис. 430 намечены произвольные направления O_1A_1, O_1B_1 и O_1C_1 аксонометрических проекций главных направлений измерений и построен один из треугольников следов $A_1B_1C_1$, для которого эти проекции являются высотами. Треугольники $A_1O_1B_1$, $B_1O_1C_1$ и $C_1O_1A_1$ являются проекциями прямоугольных треугольников A_1OB_1, B_1OC_1 и C_1OA_1, гипотенузы которых — отрезки A_1B_1, B_1C_1 и C_1A_1; они имеют общую точку O пересечения катетов. Истинные величины этих треугольников, катетами которых являются отрезки главных направлений измерений, можно построить показанным на чертеже способом.

Откладывая на катетах этих треугольников отрезки равной длины e, можно найти проекции этих отрезков e_{x1}, e_{y1} и e_{z1} на прямых O_1x_1, O_1y_1 и O_1z_1. Это позволит определить коэффициенты искажений по осям

$$\frac{e_{x1}}{e} = p, \quad \frac{e_{y1}}{e} = q \qquad \frac{e_{z1}}{e} = r.$$

Обозначим α, β, γ углы наклона натуральных осей Ox, Oy, Oz к плоскости $П$. Тогда

$$\frac{e_{x1}}{e} = \cos\alpha;$$

$$\frac{e_{y1}}{e} = \cos\beta;$$

$$\frac{e_{z1}}{e} = \cos\gamma.$$

Коэффициенты искажений главных направлений измерений равны косинусам углов наклона этих направлений к плоскости аксонометрических проекций.

Если все три коэффициента искажений различны ($p \neq q \neq r$), то аксонометрическая

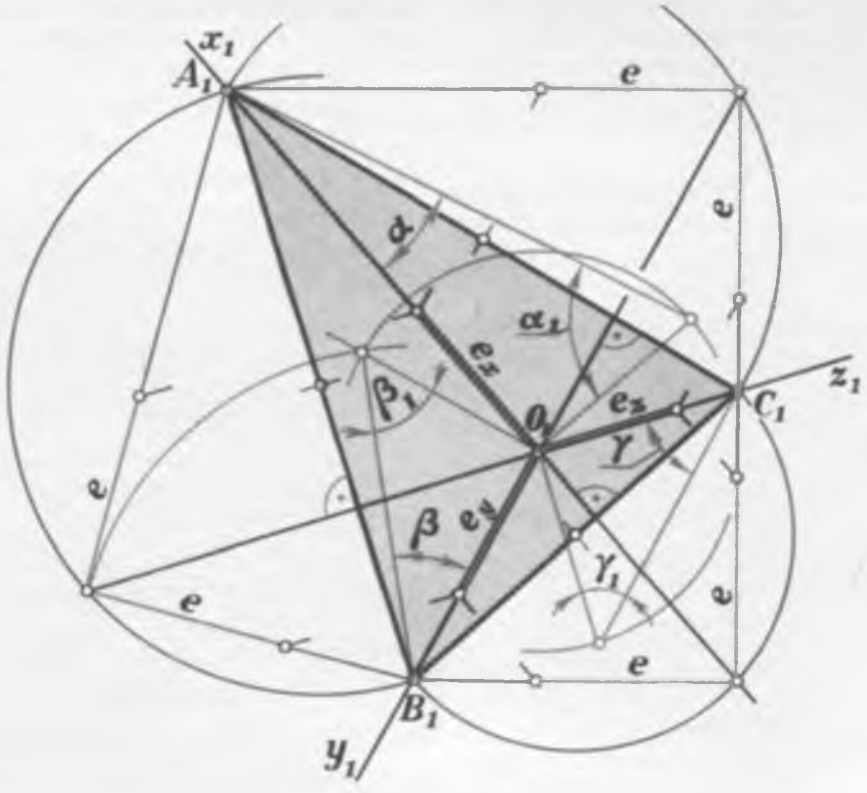


Рис. 430

308 проекция является триметрической. При равенстве двух коэффициентов искажений ($p=r\neq q$) она является диметрической, а при равенстве трех коэффициентов искажений ($p=r=q$) — изометрической.

Для диметрической проекции характерно равенство двух углов, например $\alpha=\beta$. Это соответствует равенству отрезков O_1A_1 и и O_1B_1. Поэтому треугольник $A_1B_1C_1$ в этом случае является равнобедренным, и прямая O_1C_1 составляет равные углы с прямыми O_1A_1 и O_1B_1.

Таким образом, в нормальной аксонометрии коэффициенты искажений по двум главным направлениям измерений равны только в том случае, если проекции этих направлений составляют равные углы с проекцией третьего направления измерений.

Для изометрической проекции $\alpha=\beta=\gamma$. В этом случае проекции главных направлений измерений расположены под углами, равными 120°.

Отрезок OO_1 составляет с главными направлениями измерений углы α_1, β_1, γ_1, которые являются дополнительными до 90° углов α, β и γ.

Для углов α_1, β_1 и γ_1 существует известная из тригонометрии зависимость:

$$\cos^2\alpha_1+\cos^2\beta_1+\cos^2\gamma_1=1$$

или

$$(1-\sin^2\alpha_1)+(1-\sin^2\beta_1)+(1-\sin^2\gamma_1)=1.$$

Заменяя в последнем выражении углы α_1, β_1 и γ_1 дополнительными, получим

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=2$$

или

$$p^2+q^2+r^2=2,$$

т. е. *в нормальной аксонометрии сумма квадратов коэффициентов искажений равна двум.* Поэтому выбором двух коэффициентов искажений предопределяется величина третьего.

§ 75 ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ ИЗОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

В прямоугольных изометрических проекциях коэффициенты искажений по трем осям одинаковы, т. е.

$$p=q=r.$$

Здесь плоскость аксонометрических проекций равно наклонена к координатным осям, т. е. плоскость отсекает на всех трех осях равные отрезки $Ox=Oy=Oz$. В этом случае треугольник следов равносторонний (рис. 431).

Подставляя в уравнение $p^2+q^2+r^2=2$ вместо q и r равную им величину p, имеем

$$3p^2=2;$$

откуда

$$p=\sqrt{\frac{2}{3}}\approx 0{,}82,$$

т. е. изометрическая единица измерения равна 0,82 натуральной.

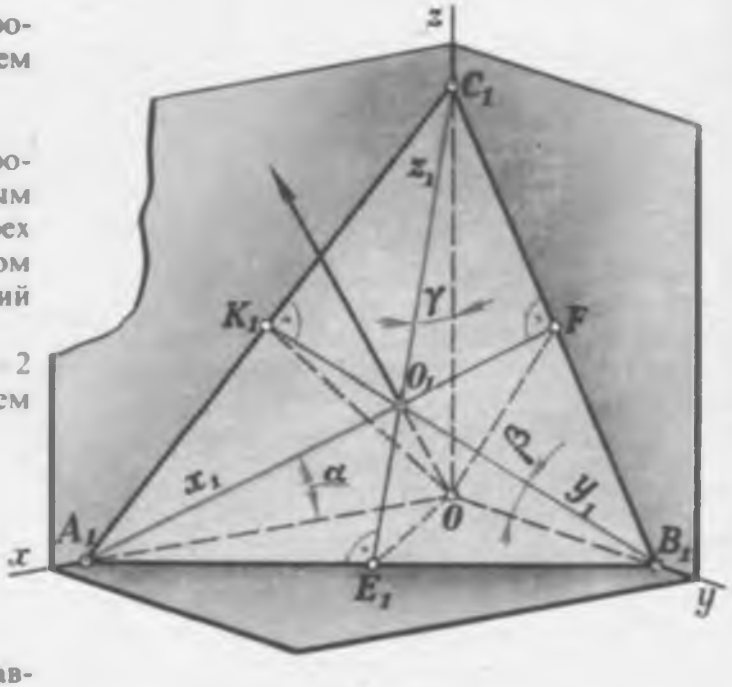
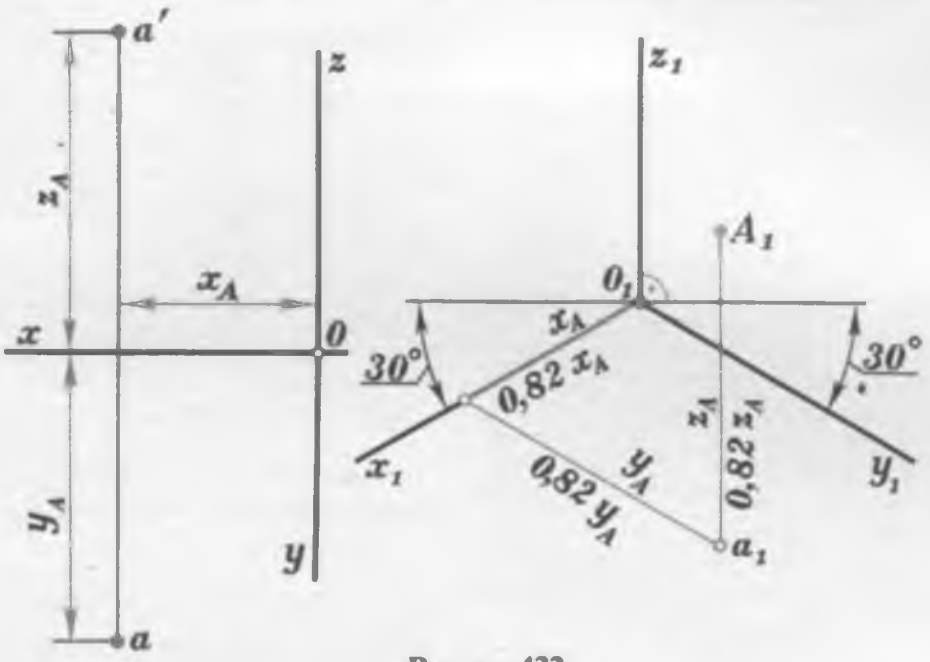


Рис. 431



Р и с. 432

В изометрии ось O_1z_1 располагают вертикально, оси O_1x_1 и O_1y_1 составляют с осью O_1z_1 углы по 120°. Координаты любой из точек пространства при построении ее изометрической проекции умножают на коэффициент 0,82, а соответствующие этим числам отрезки откладывают по направлениям аксонометрических осей.

Практически для построения изометрических изображений не пользуются коэффициентом искажения, равным 0,82, а заменяют его единицей. В этом случае получаются изображения, увеличенные в $\frac{1}{0,82} \approx 1,22$ раза.

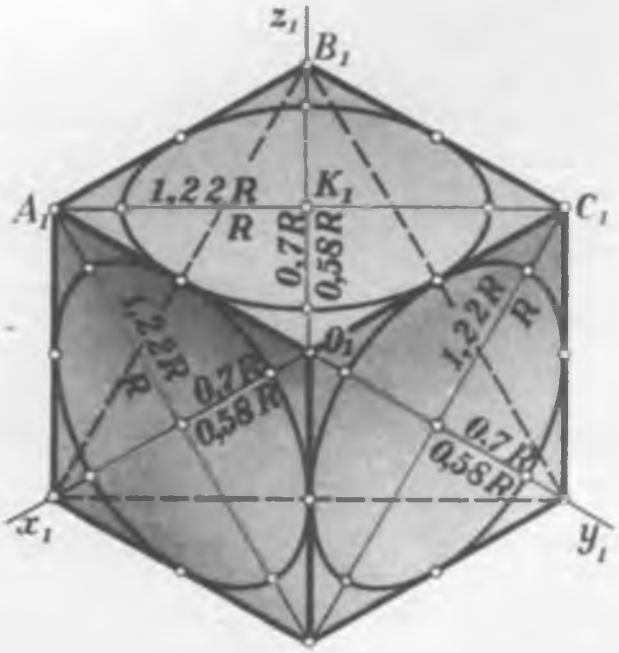
На рис. 432 показано построение изометрической проекции A_1 точки A, заданной в ортогональных проекциях.

Построим изометрическую проекцию куба с окружностями, вписанными в его грани (рис. 433).

Аксонометрические оси O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1 совпадают с направлениями ребер куба. Очевидно, грани куба (квадраты) изобразятся ромбами, а окружности — эллипсами.

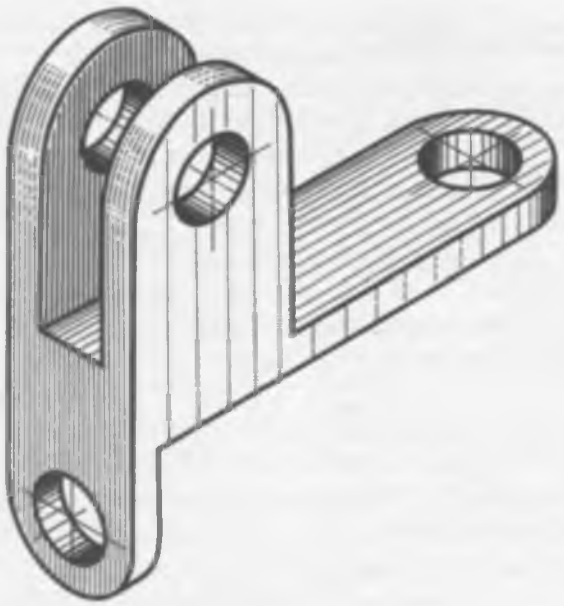
Центры квадратов (окружностей) в изометрии являются центрами ромбов (эллипсов). Диаметры окружностей, параллельные координатным осям, изображаются сопряженными диаметрами эллипсов. Каждый из диаметров окружности равен по величине стороне квадрата. Следовательно, такие сопряженные диаметры эллипсов сократятся в отношении 0,82 : 1.

Оси эллипсов совпадают с диагоналями ромбов. Малые оси эллипсов совпадают с направлениями соответствующих аксономет-



Р и с. 433

310



Р и с. 434

рических осей, большие перпендикулярны к ним. Верхняя грань куба (квадрат), перпендикулярная к оси Oz, ортогонально проецируется на аксонометрическую плоскость проекций в виде ромба. Окружность, вписанная в квадрат, проецируется эллипсом.

Большая ось эллипса равна и параллельна тому диаметру окружности, который параллелен плоскости аксонометрических проекций. Каждый из диаметров окружности составляет прямой угол с осью Oz. Поэтому большая ось эллипса перпендикулярна к аксонометрической оси O_1z_1; малая ось эллипса совпадает с направлением оси O_1z_1. Это справедливо и для построения эллипсов — проекций окружностей других граней куба.

Определим соотношение между диагоналями ромба. Одна из диагоналей квадрата — AC — параллельна плоскости аксонометрических проекций. Она проецируется на эту плоскость в натуральную величину A_1C_1.

Из прямоугольного треугольника $A_1B_1K_1$ имеем

$$\frac{B_1K_1}{A_1K_1} = \operatorname{tg} 30^\circ = 0{,}58 \ (\operatorname{tg} 30^\circ = 0{,}58)$$

или

$$B_1K_1 = 0{,}58A_1K_1.$$

Очевидно, что соотношение между полуосями эллипса, вписанного в ромб, равно:

$$\frac{b}{a} = 0{,}58,$$

где $b = 0{,}58a$ или $2b \approx 0{,}58d$.

Здесь большая ось эллипса равна диаметру окружности, т. е. $2a = d$.

Итак, в изометрии большая ось эллипса равна диаметру d проецируемой окружности, малая ось равна $0{,}58d$.

Пользуясь приведенными коэффициентами искажения, получаем увеличение всех размеров изображения в 1,22 раза. В таком отношении увеличиваются большая и малая оси эллипсов:

$$2a = 1{,}22\ d,$$

$$2b = 1{,}22 \cdot 0.58\ d = 0{,}7\ d.$$

Изометрические проекции применяются в тех случаях, когда элементы предмета по трем основным взаимно перпендикулярным направлениям представляются одинаково важными.

На рис. 434 дано изображение кронштейна в изометрии.

§76 ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ ДИМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

В прямоугольных диметрических проекциях коэффициенты искажений одинаковы по двум осям; третий коэффициент искажения не равен первым двум, т. е.

$$p = r \neq q.$$

Здесь плоскость аксонометрических проекций равно наклонена к двум координатным осям. В этом случае треугольник следов равнобедренный.

Пусть $q = \frac{p}{2}$ — наиболее употребительное соотношение коэффициентов искажения. При этих условиях определим числовые величины коэффициентов искажения по на-

правлению аксонометрических осей и расположение осей в плоскости аксонометрических проекций.

Подставляя в уравнение $p^2+q^2+r^2=2$ вместо q и r равные им величины $\frac{p}{2}$ и p, имеем

$$p^2+p^2+\frac{p^2}{4}=2$$

или

$$9p^2=8.$$

Отсюда

$$p=\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\approx 0{,}94.$$

Тогда

$$q=\frac{p}{2}\approx 0{,}47.$$

Итак, диметрическая единица измерения по двум осям O_1x_1 и O_1z_1 равна 0,94, а по оси O_1y_1 равна 0,47 натуральной.

Рассмотрим равнобедренный треугольник $A_1B_1C_1$ следов плоскости аксонометрических проекций Π (рис. 435).

Пусть $OA_1=OC_1=1$. Основание ($A_1C_1=\sqrt{2}$) равнобедренного треугольника следов делится пополам прямой O_1B_1 в точке K_1 (B_1K_1 — высота треугольника $A_1B_1C_1$).

Здесь

$$K_1A_1=K_1C_1=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Поскольку

$$O_1A_1=O_1C_1=\frac{2\sqrt{2}}{3},$$

то

$$\sin\delta=\frac{\sqrt{2}}{2}:\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{3}{4}=0{,}75,$$

где

$$\delta=\sphericalangle A_1O_1K_1=\sphericalangle C_1O_1K_1.$$

Отсюда

$$\delta=48^\circ35';$$
$$2\delta=97^\circ10'.$$

Следовательно, угол между осями O_1C_1 и O_1A_1 равен $97^\circ10'$.

Ось O_1B_1 составляет с осями O_1A_1 и O_1C_1 углы, равные

$$\frac{360^\circ-97^\circ10'}{2}=131^\circ25'.$$

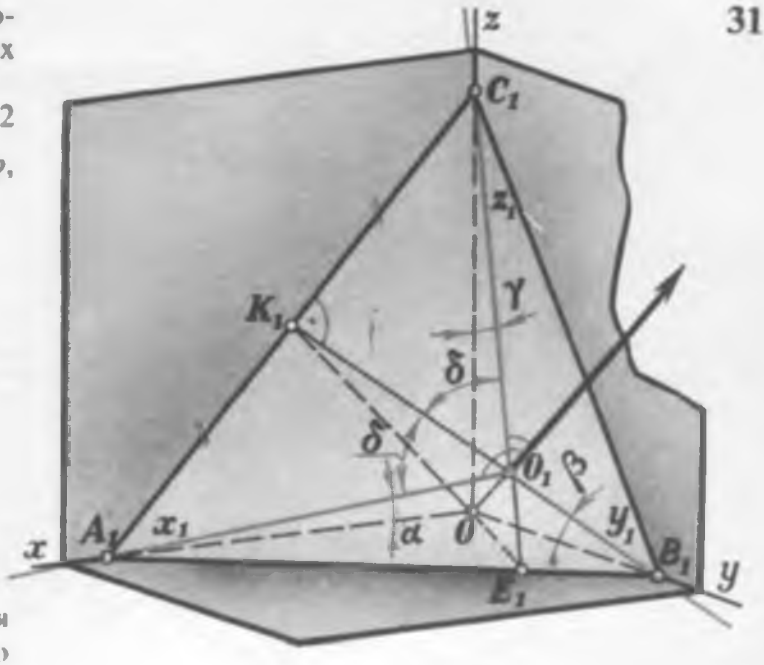


Рис. 435

В прямоугольной диметрии принято ось O_1z_1 располагать вертикально; ось O_1x_1 составляет с горизонтальной линией угол $7^\circ10'$, а ось O_1y_1 — угол $41^\circ25'$.

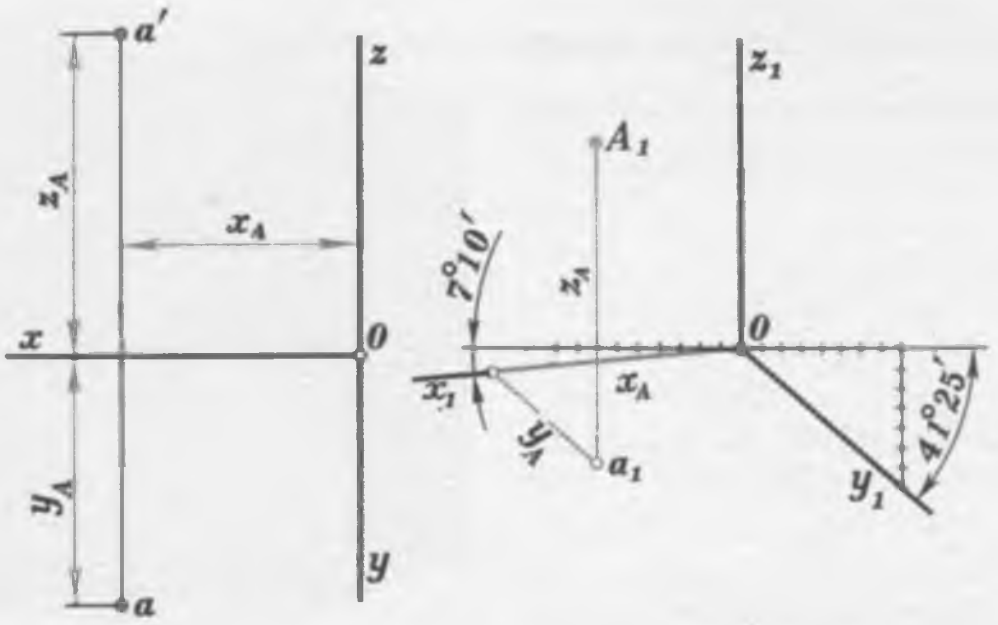
При построении аксонометрических осей O_1x_1 и O_1y_1 можно не измерять углы, а воспользоваться соотношением катетов прямоугольных треугольников, гипотенузы которых указывают направление осей O_1x_1 и O_1y_1.

Так,

$$\operatorname{tg}7^\circ10'=0{,}1257\approx\frac{1}{8};$$

$$\operatorname{tg}41^\circ25'=0{,}8821\approx\frac{7}{8}.$$

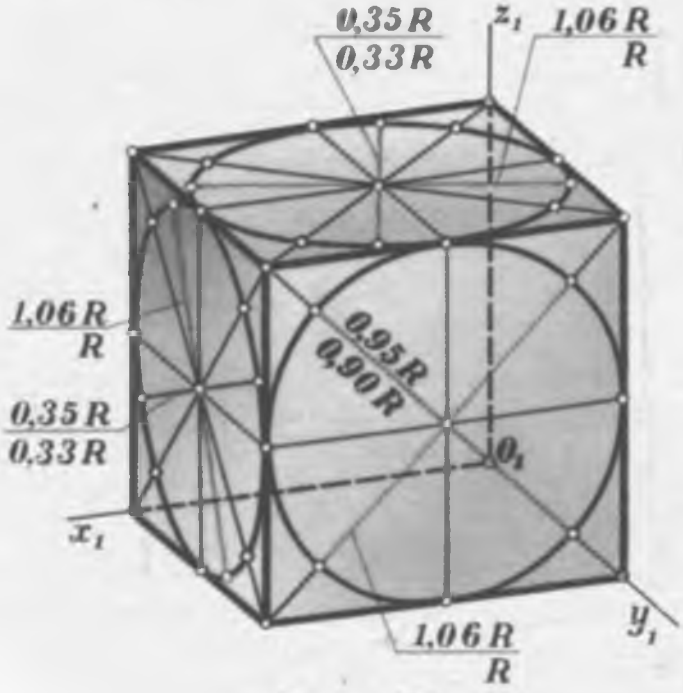
При построении точной диметрической прямоугольной проекции координаты любой из точек пространства умножают на соответствующие коэффициенты искажений: по направлению осей O_1x_1 и O_1z_1 на 0,94, а по оси O_1y_1 — на 0,47. Практически пользуются приведенными коэффициентами искажений, равными 1 и 0,5. Получается несколько увеличенное изображение. Все элементы изображения увеличиваются в $\frac{1}{0{,}94}\approx 1{,}06$ раза.



Р и с. 436

На рис. 436 построена диметрическая проекция A_1 точки A, заданной координатами в ортогональных проекциях.

Построим в масштабе 1,06 : 1 диметрическую проекцию куба с вписанными в его грани окружностями (рис. 437).



Р и с. 437

Две грани куба (квадраты), параллельные плоскости xOz, изображаются в виде ромбов; другие же грани, параллельные плоскостям xOy и yOz, изображаются параллелограммами.

Окружности, вписанные в квадраты, проецируются эллипсами, вписанными в ромбы и параллелограммы.

Центры окружностей и точки соприкасания их с квадратами в серединах сторон являются, очевидно, и в диметрической проекции также центрами эллипсов и точками соприкасания эллипсов с ромбами и параллелограммами в серединах их сторон. Диаметры окружностей, параллельные осям, являются сопряженными диаметрами эллипсов.

В диметрии, так же как в изометрии, малые оси эллипсов имеют направления аксонометрических осей, а большие перпендикулярны к ним. В натуральной диметрии большие оси эллипсов равны d — диаметру окружности, в приведенной — 1,06 d.

Определим величину малой оси эллипса — проекции окружности, принадлежащей грани куба, параллельной плоскости xOz. Рассмотрим прямоугольный треугольник OB_1K_1 (рис. 435).

Здесь

$$\frac{OK_1}{K_1B_1} = \frac{O_1K_1}{K_1O} = \sin\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta}.$$

Известно, что

$$\cos\beta = q = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Тогда

$$\frac{O_1K_1}{K_1O} = 0{,}895, \qquad K_1O = K_1C_1$$

поэтому

$$\frac{O_1K_1}{K_1C_1} = 0{,}895.$$

Отношение малой оси эллипса к большой такое же, как и отношение соответствующих диагоналей ромба, в который вписывается эллипс, т. е. $\frac{b}{a} = 0{,}895$.

Итак, в натуральной диметрии малая ось эллипса имеет направление оси O_1y_1 и равна 0,895 d, в приведенной — $0{,}895 \cdot 1{,}06\,d$ или $0{,}95\,d$.

Определим величины малых осей эллипсов — проекций окружностей, вписанных в грани куба, параллельные плоскостям xOy и yOz.

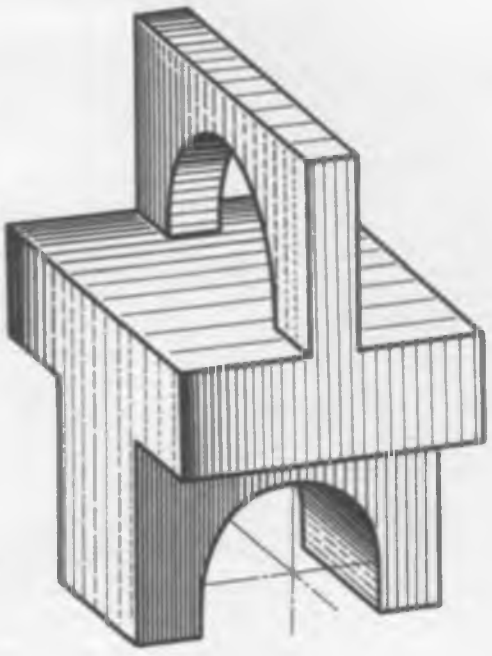
В проекции верхней грани куба малая ось имеет направление аксонометрической оси O_1z_1.

Большая ось перпендикулярна к малой и проецируется на плоскость аксонометрических проекций в натуральную величину.

Рассмотрим на рис. 435 прямоугольный треугольник OC_1E_1.

Здесь

$$\frac{OE_1}{E_1C_1} = \frac{O_1E_1}{OE_1} = \sin\gamma = \sqrt{1-\cos^2\gamma},$$



Р и с. 438

но

$$\cos\gamma = r, \qquad r = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Имеем:

$$\frac{O_1E_1}{OE_1} = \sqrt{1-\frac{8}{9}} = 0{,}33.$$

Малая ось эллипса, параллельная O_1E_1, является проекцией диаметра окружности, параллельного OE_1. Поэтому справедливым является и отношение $\frac{b}{a} = 0{,}33$.

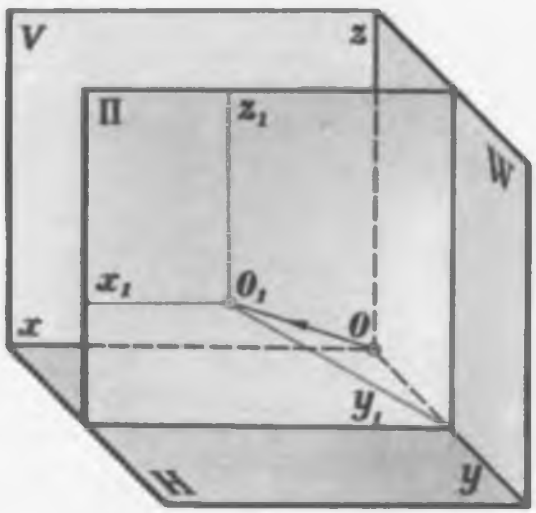
Итак, в натуральной диметрии для плоскостей xOy и yOz малая ось эллипса равна 0,33 d, в приведенной — $0{,}33 \cdot 1{,}06d = 0{,}35d$.

На рис. 438 дано изображение детали в прямоугольной диметрии.

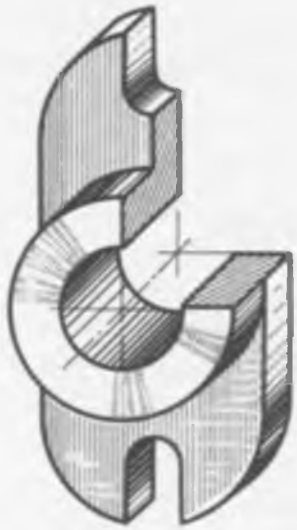
КОСОУГОЛЬНЫЕ АКСОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

§77

Рассмотрим косоугольные аксонометрические проекции на плоскости, параллельные плоскостям проекций. В этом случае две аксонометрические оси и все прямые, параллельные им, а также углы этой плоскости проецируются без искажения.



Р и с. 439

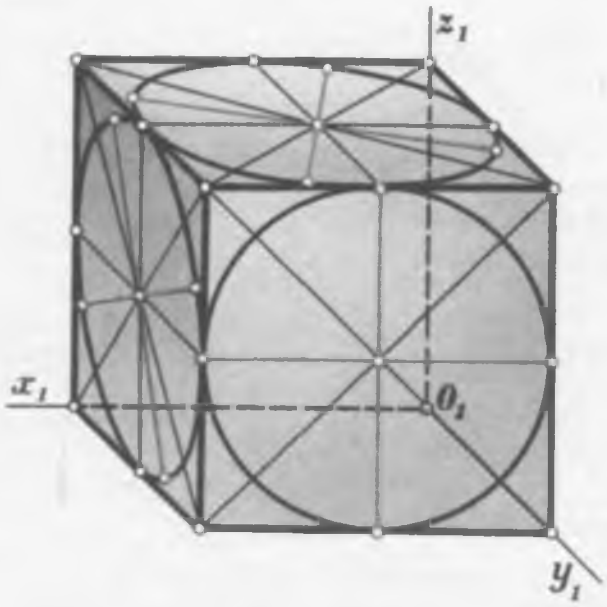


Р и с. 441

Пусть плоскость $П$ аксонометрических проекций фронтальная (рис. 439).

Выбираем направление проецирования OO_1. Коэффициенты искажения по осям O_1x_1 и O_1z_1 равны единице.

Коэффициент искажения по направлению оси O_1y_1 в общем случае отличен от единицы. Получаем *косоугольную диметрическую проекцию*.



Р и с. 440

Если направление проецирования выбрано таким образом, что и коэффициент искажения по оси O_1y_1 тоже равен единице, имеем *косоугольную изометрическую проекцию*.

Косоугольную аксонометрическую проекцию называют еще *фронтальной* проекцией, а также *кавальерной* проекцией, или *кавальерной перспективой*.

Часто в косоугольной диметрии коэффициент искажения по оси O_1y_1 принимают равным 0,5, а углы наклона этой оси к горизонтальной линии равными 45°, 40°, 60°. Такие проекции называют *кабинетными*.

На рис. 440 дано изображение куба в кабинетной проекции, а также построены эллипсы — проекции окружностей, вписанных в грани куба.

Фронтальную диметрию целесообразно применять в тех случаях, когда криволинейные очертания фигуры (поверхности) расположены во фронтальной плоскости. Они проецируются на плоскость $П$ аксонометрических проекций без искажения — в натуральную величину.

На рис. 441 дано изображение крышки сальника во фронтальной косоугольной диметрии.

ПОЗИЦИОННЫЕ И МЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ В АКСОНОМЕТРИИ §78

Если на ортогональном чертеже направление аксонометрического проецирования задано проекциями, можно построить проекции треугольника следов прямоугольной аксонометрической системы, определяемой заданным направлением. И, наоборот, при заданных на ортогональном чертеже проекциях треугольника следов некоторой аксонометрической плоскости можно построить проекции направления проецирования на эту аксонометрическую плоскость. Такие построения позволяют решать позиционные и метрические задачи, переходя от ортогонального чертежа к аксонометрическому, и наоборот.

Покажем на аксонометрическом чертеже решение основной позиционной задачи — определение точки пересечения прямой плоскостью.

На рис. 442 плоскость, заданную следами, пересекает прямая, которая задана аксонометрической проекцией AB и вторичной проекцией ab.

Чтобы определить точку пересечения прямой с плоскостью, необходимо через прямую провести вспомогательную секущую плоскость. Она пересекает заданную плоскость по прямой *12*. Прямая *12* пересекает прямую AB в искомой точке K.

Аналогично решается задача на построение линии пересечения двух плоскостей. В этом случае определяются точки пересечения любых двух прямых одной плоскости с другой плоскостью или точки пересечения одной их прямых первой плоскости со второй и наоборот.

На рис. 443 показаны построения в аксонометрии линии пересечения плоскости, заданной треугольником, с тетраэдром. При помощи вспомогательных проецирующих плоскостей найдены точки A и B пересечения стороны треугольника с гранями пирамиды и точка C пересечения ребра пирамиды с плоскостью треугольника. Прямые линии AC и CB определяют линию пересечения пирамиды плоскостью.

Решение метрических задач в аксонометрии представляет некоторые трудности. Здесь применяют вспомогательные приемы, дающие возможность решать подобные задачи.

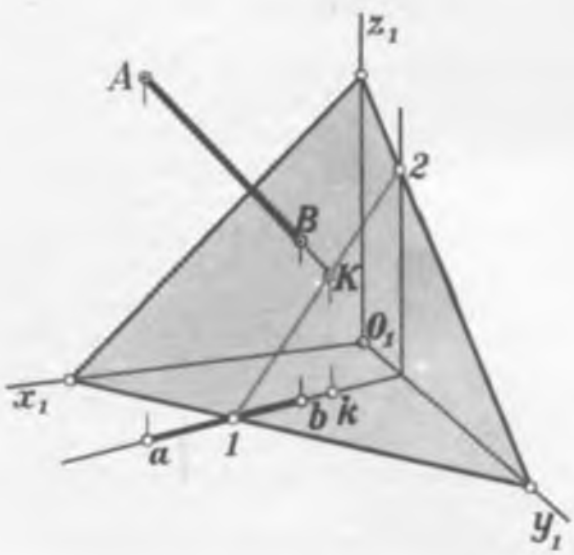


Рис. 442

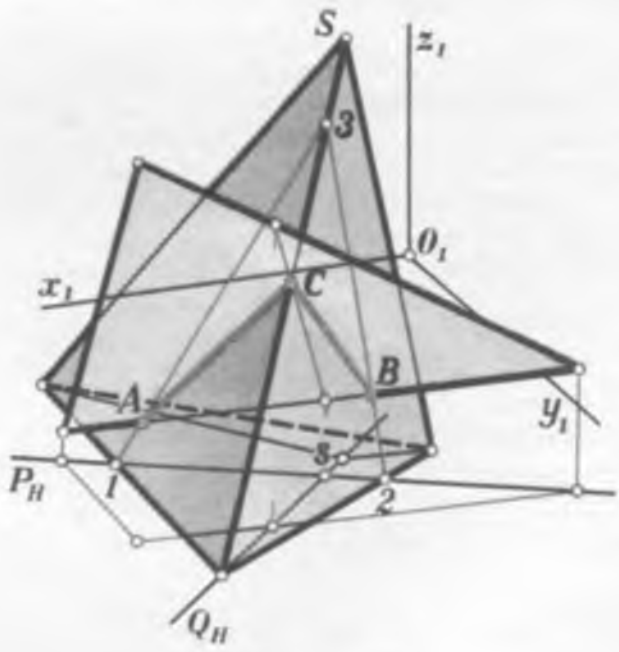


Рис. 443

Часто пользуются совмещением плоской фигуры с плоскостью чертежа с последующим восстановлением фигуры в первоначальное положение, или строят дополнительную фигуру, подобную заданной и находящуюся с аксонометрической проекцией в родственном соответствии.

Выбор приема решения задачи и методы решения зависят от вида аксонометрических проекций.

Вопросы для самопроверки

1. Какие проекции называют аксонометрическими? Назовите их виды.
2. Что называют коэффициентом (показателем) искажения?
3. Сформулируйте основную теорему аксонометрии — теорему Польке.
4. Что представляет собой треугольник следов?
5. Укажите коэффициенты искажений по направлениям осей в прямоугольной изометрии, в диметрии.
6. Укажите направления и величины осей эллипсов как изометрических и диметрических проекций окружностей, вписанных в квадраты граней куба, ребра которого параллельны координатным осям.

ГЛАВА XIV

КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ПЛОСКИЕ И ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ КРИВЫЕ ЛИНИИ И ИХ ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА

ЗАДАНИЕ ПЛОСКИХ КРИВЫХ ЛИНИЙ В ЕСТЕСТВЕННЫХ КООРДИНАТАХ

§ 79

Плоскую кривую линию можно рассматривать как траекторию (путь) движущейся точки в плоскости. Предположим, что точка перемещается по касательной к кривой линии. Касательная без скольжения обкатывает кривую, а движущаяся точка всегда совпадает с точкой касания. Направление движения точки указывает полукасательная. На рис. 444 представлена плавная кривая AB.

Положения движущейся точки обозначены 0, 1, 2, ... Полукасательные t_0, t_1, t_2,... указывают направление движения точки в соответствующих положениях.

Движение по траектории точки можно рассматривать как непрерывную зависимость двух величин: расстояния s, на которое точка удаляется от своего начального положения, и угла α поворота полукасательной (угла смежности).

Каждому участку пути s, пройденного точкой, соответствует определенный угол α поворота касательной относительно начального положения.

В прямоугольной системе координат, придерживаясь заданного масштаба измерений, строим график зависимости $\alpha=f(s)$. По оси абсцисс откладываем величины s длин дуг отрезков кривой линии, а по оси ординат — величины углов α в радианах*.

Величины s и α (в радианах) называют *естественными координатами*. Построенная по этим координатам кривая является графиком уравнения кривой линии AB в естественных координатах.

Кривые линии называют *простыми*, если их уравнения $\alpha=f(s)$ являются непрерывными функциями такого вида, где величины s и α изменяются односторонне, т. е. все время увеличиваются при движении точки.

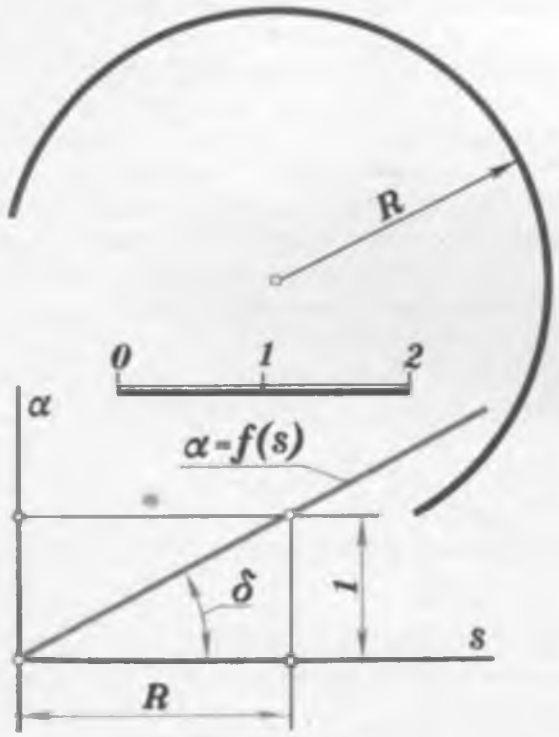
Если график уравнения $\alpha=f(s)$ кривой линии в естественных координатах прямолинейный, то $\alpha=s\cdot\operatorname{tg}\delta$, а

$$s=\alpha\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}\delta}=\alpha\cdot\operatorname{ctg}\delta.$$

Здесь δ — угол наклона прямой линии графика к оси абсцисс.

Известно, что длина дуги окружности равна произведению радиуса на радианную

* Длина дуги есть предел, к которому стремится периметр вписанной ломаной линии, когда число звеньев неограниченно возрастает так, что длина наибольшего из звеньев стремится к нулю.



Р и с. 445

этих углов определяют радиусы этих окружностей.

Проекции *01*, *12*, ... отрезков прямых линий графика на ось абсцисс определяют длины дуг окружностей соответствующих радиусов.

Пользуясь графиком, определяем радиусы R_0, R_1, ... дуг окружностей на участках *01*, *12*, ... кривой линии.

$$R_0 = \operatorname{ctg}\delta_0, \qquad R_1 = \operatorname{ctg}\delta_1, \quad \ldots$$

Величины R_0, R_1, ... определяем как горизонтальные катеты прямоугольных треугольников с углами δ_0, δ_1, ... при этих катетах. Противолежащие углам δ катеты равны единице масштаба.

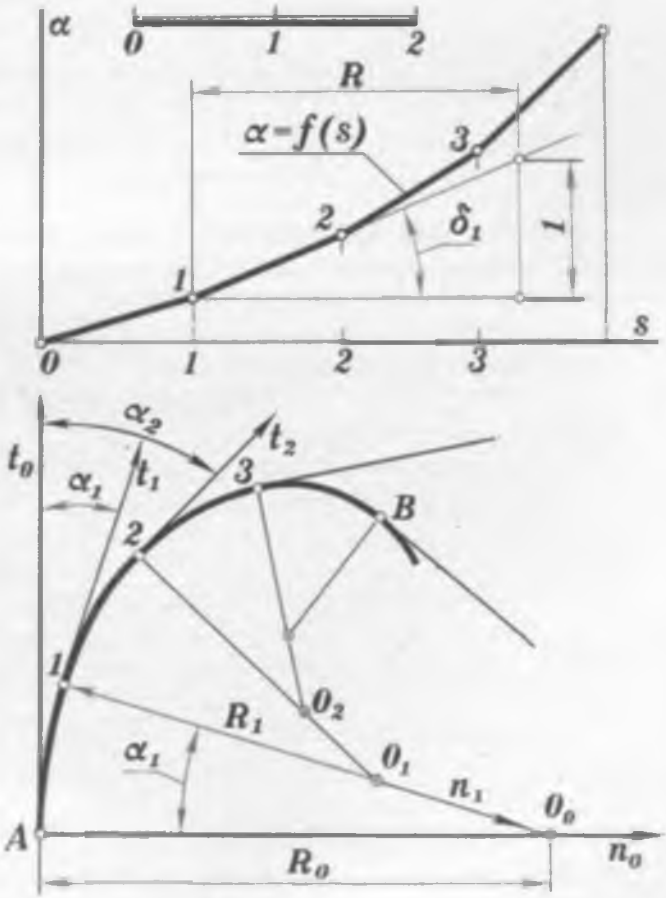
Чтобы построить кривую по заданному ее графику уравнения $\alpha = f(s)$ в естественных координатах, проводим в намеченной начальной точке A начальные направления касательной t_0 и нормали n_0 строящейся кривой AB.

На направлении n_0 начальной нормали от точки A откладываем отрезок, равный R_0. Помечаем точку O_0 — центр окружности радиусом R_0.

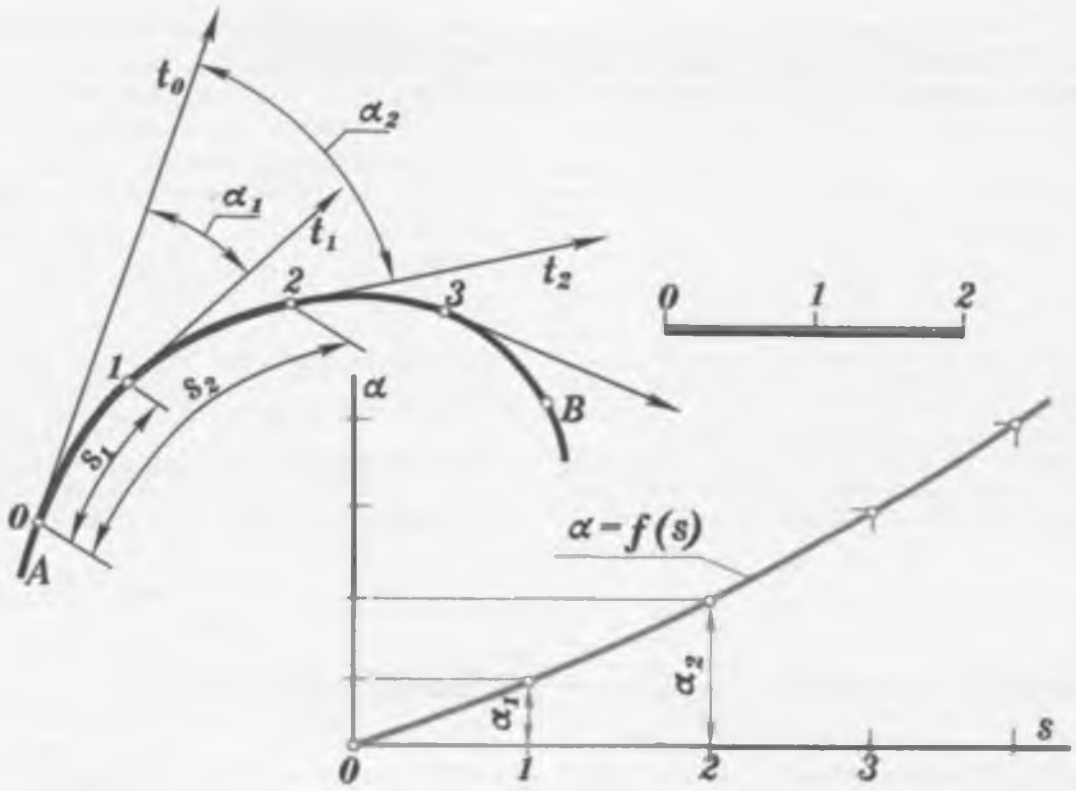
Из точки O_0, как из центра, проводим дугу окружности радиусом R_0. Длина дуги окружности равна *01*. Из точки *1* дуги проводим направления полукасательной t_1 и нормали n_1. Углы α смежности между полукасательными равны углам α между направлениями соответствующих нормалей.

На направлении нормали n_1 от точки O_0 откладываем отрезок O_0O_1, равный $R_0 - R_1$. Намечаем точку O_1 — центр окружности радиусом R_1. Длина дуги этой окружности равна *12*. Указанными построениями определяется кривая линия AB.

Кривизну кривой линии в любой из ее точек можно определить, пользуясь графиком ее уравнения в естественных координатах.



Р и с. 446



Р и с. 444

меру соответствующего ей центрального угла, т. е.

$$s = \alpha \cdot R. \qquad (2)$$

Сравнивая формулы (1) и (2), замечаем, что прямолинейный график уравнения кривой линии в естественных координатах соответствует окружности (рис. 445). Радиус R этой окружности равен

$$\frac{1}{\operatorname{tg}\delta} \text{ или } R = \operatorname{ctg}\delta$$

В зависимости от угла δ наклона прямой графика к оси абсцисс имеем окружность с большим или меньшим радиусом. Так, если прямая графика совпадает с осью абсцисс, имеем окружность с бесконечно большим радиусом ($R = \infty$), т. е. имеем прямую.

Если прямая графика совпадает с осью ординат, имеем окружность с бесконечно малым радиусом ($R = 0$); это точка.

Величина $k = \frac{1}{R}$, обратная радиусу дуги окружности, называется *кривизной окружности.*

Из графика уравнения окружности в естественных координатах имеем

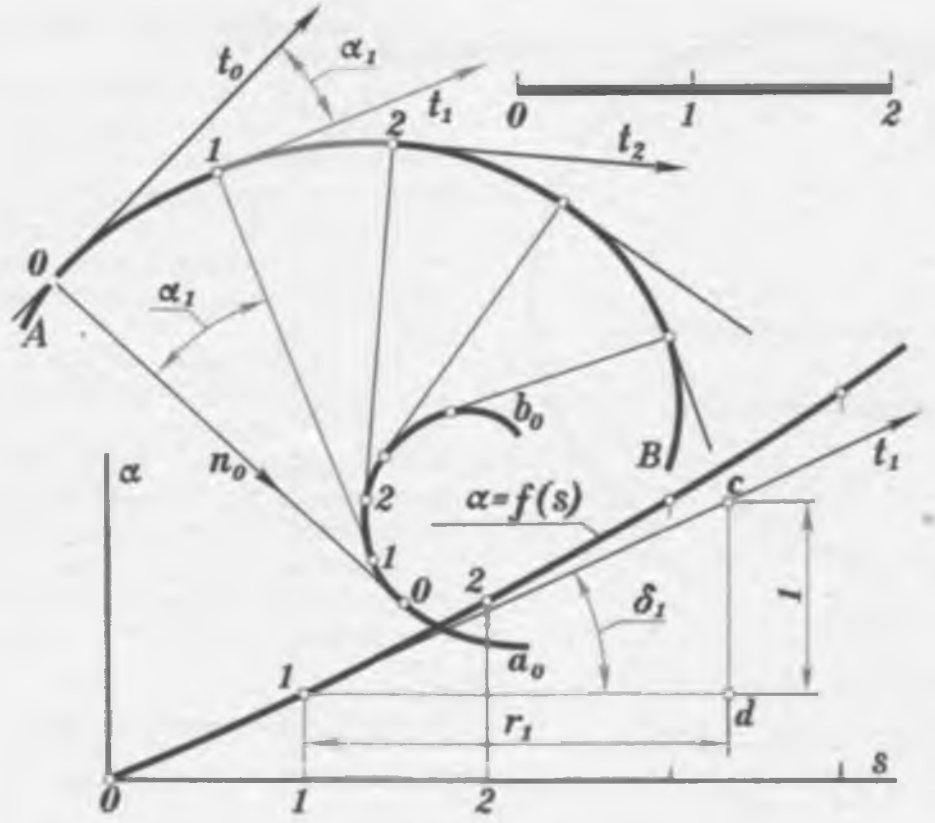
$$k = \frac{1}{R} = \frac{\alpha}{s} = \operatorname{tg}\delta.$$

Кривизна окружности равна тангенсу угла δ наклона прямой линии графика к оси абсцисс. Кривизна окружности во всех точках одинакова. Чем больше радиус окружности, тем меньше ее кривизна.

График уравнения $\alpha = f(s)$ кривой линии в естественных координатах может быть представлен в виде ломаной линии — линии, состоящей из отрезков прямых, под разными углами δ наклоненных к оси абсцисс (рис. 446).

Кривую линию, составленную из дуг окружностей различных радиусов, называют *коробовой кривой.*

Тангенсы углов δ наклона отрезков прямых линий графика к оси абсцисс определяют кривизны дуг окружностей, а котангенсы



Р и с. 447

На рис. 447 представлена кривая линия AB. Построен график $\alpha=f(s)$ уравнения этой кривой в естественных координатах.

Допустим, что кривая линия AB является коробовой кривой с бесконечно большим числом бесконечно малых дуг окружностей различных радиусов.

Если в кривую графика вписать ломаную линию с вершинами в точках $0, 1, 2, \ldots$, то этой линии графика соответствуют некоторая коробовая кривая линия A_1B_1 и ломаная линия a_1b_1 (на чертеже не показаны). Вершины ломаной линии a_1b_1 являются центрами дуг окружностей, составляющих коробовую кривую A_1B_1.

Бесконечно увеличим число сторон ломаной линии графика, оставляя ее вписанной в кривую графика.

В пределе, когда ломаная линия представляется кривой, коробовая кривая A_1B_1 перестраивается в кривую AB. Ломаная линия a_1b_1 центров представляется кривой линией a_0b_0, которая является геометрическим местом центров бесконечно большого числа бесконечно малых дуг окружностей, составляющих кривую линию AB.

В пределе перехода к графику $\alpha=f(s)$ можно определить величину радиуса r кривизны кривой в любой из ее точек, равную

$$\lim \frac{\Delta s}{\Delta \alpha}$$

Здесь Δs — длина проекции бесконечно малого отрезка кривой линии графика на горизонтальную ось s;

$\Delta\alpha$ — длина проекции бесконечно малого отрезка кривой графика на вертикальную ось α.

Кривая линия a_0b_0 является геометрическим местом центров кривизны кривой линии — эволютой кривой AB.

Эволюта a_0b_0 кривой линии AB представляет собой огибающую нормалей данной кривой.

На рис. 447 показано также построение радиуса r_1 кривизны кривой AB в данной точке 1 при помощи графика $\alpha = f(s)$ ее уравнения в естественных координатах.

Из точки 1 графика проводим касательную t_1 и прямую, параллельную оси s. Строим прямоугольный треугольник $1cd$. Противолежащий точке 1 катет cd равен принятой единице масштаба чертежа.

Касательная t_1 является предельным положением хорды, проходящей через точку 1 кривой линии графика. Углы δ_1 наклона к оси абсцисс касательной и хорды в пределе равны.

Замечаем, что

$$\frac{cd}{1d} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} = \operatorname{tg} \delta_1 .$$

Здесь $cd = 1$, $\lim\limits_{\Delta s \to 0} \dfrac{\Delta \alpha}{\Delta s} = k$.

Отсюда $\dfrac{1}{1d} = k_1$, или $1d = \dfrac{1}{k_1} = r_1$.

Итак, пользуясь графиком уравнения кривой линии в естественных координатах, можно определить радиус кривизны и кривизну в любой точке кривой.

КРИВИЗНА ОРТОГОНАЛЬНОЙ ПРОЕКЦИИ ПЛОСКОЙ КРИВОЙ ЛИНИИ

§80

Определим соотношение между кривизной плоской кривой линии ACB в данной точке C и кривизной ее ортогональной проекции acb в точке c — проекции точки C (рис. 448).

Кривую ACB ортогонально спроецируем на плоскость H. Пусть точки A, B и C кривой являются вершинами треугольника ABC, проекцией которого является треугольник abc. Опишем около треугольника ABC окружность.

Из геометрии известно, что радиус этой окружности

$$R = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4F},$$

где AB, AC и BC — стороны треугольника ABC;
F — площадь треугольника ABC.

Очевидно, радиус окружности, описанной около проекции abc треугольника ABC,

$$r = \frac{ab \cdot ac \cdot bc}{4f}.$$

Здесь ab, ac, bc — стороны треугольника abc;
f — площадь треугольника abc.

Пусть угол между плоскостями Q и H равен ϕ. Тогда $f = F \cdot \cos \phi$

Имеем:

$$\frac{r}{R} = \frac{ab \cdot ac \cdot bc \cdot 4F}{AB \cdot AC \cdot BC \cdot 4f} = \frac{\cos \alpha_1 \cdot \cos \alpha_2 \cdot \cos \alpha_3}{\cos \phi},$$

где α_1, α_2, α_3 — углы наклона сторон AB, AC и BC треугольника ABC к плоскости проекций H.

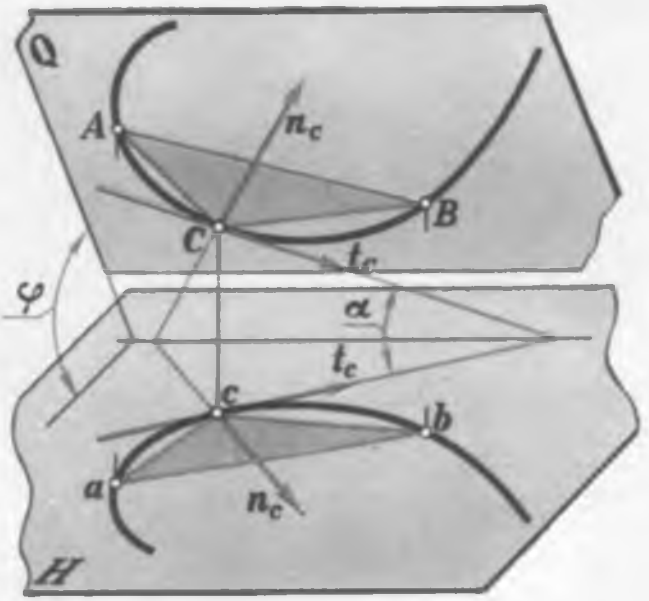


Рис. 448

322 Если точки A и B кривой неограниченно сближать с точкой C, то в пределе описанная около треугольника ABC окружность представится кругом кривизны кривой в точке C, а направления сторон треугольника преобразуются в направление касательной к кривой в точке C. Такие же преобразования происходят в проекции.

Углы α_1, α_2, α_3 преобразуются в угол α наклона касательной к плоскости проекций H. Радиусы R и r дуг окружностей в этом случае представляют собой радиусы R_k и r_k кривизны кривой AB и ее проекции ab в точках C и c.

Здесь имеем отношение:

$$\frac{r_k}{R_k} = \frac{\cos^3\alpha}{\cos\phi}.$$

Если касательные t_C и t_c параллельны, то $\alpha = 0$, и это уравнение принимает вид:

$$\frac{r_k}{R_k} = \frac{1}{\cos\phi}.$$

Определение кривизны кривой в рассматриваемой точке и кривизны ее проекции необходимо при исследовании локальных свойств кривой.

§81 Эволюты кривых линий второго порядка

Эволюта, как известно, является геометрическим местом центров кривизны кривой линии. Покажем построение центров кривизны для точек эллипса (рис. 449).

Исходя из условий симметрии эллипса относительно осей, устанавливаем, что центры кривизны для вершин A_1 и B_1 эллипса находятся на его большой оси, а для вершин C_1 и D_1 — на прямой линии малой оси.

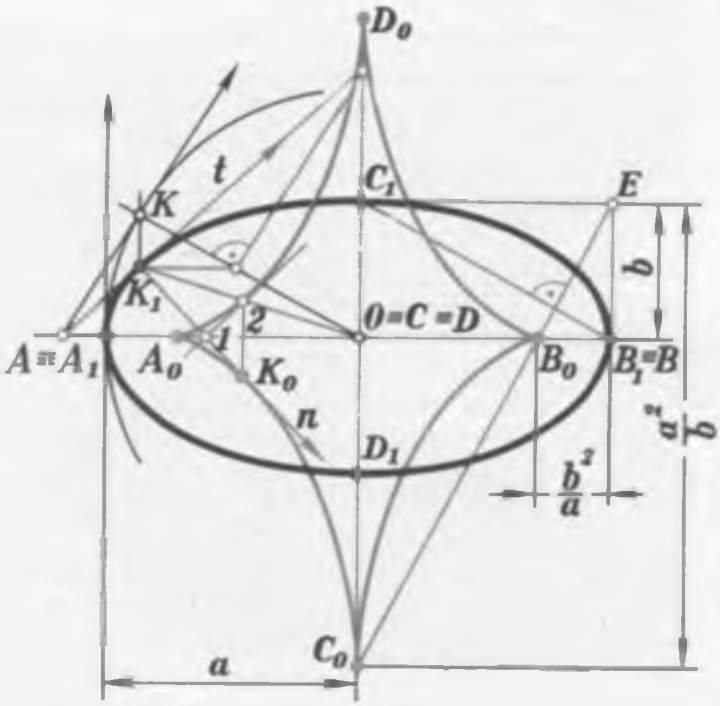


Рис. 449

Радиусы кривизны для вершин A_1 и B_1 одинаковы. Одинаковы также радиусы кривизны для вершин C_1 и D_1 эллипса.

В вершинах эллипса радиусы кривизны можно определить, представляя эллипс как ортогональную проекцию окружности.

Угол между плоскостью окружности и плоскостью чертежа

$$\phi = \arccos\frac{b}{a}.$$

Здесь a и b — полуоси эллипса.

Радиус окружности $R = R_k = a$.

Касательные в точках C и C_1, D и D_1 окружности и эллипса взаимно параллельны, поэтому $\alpha_C = \alpha_D = 0$.

Касательные в точках A и A_1, B и B_1 окружности и эллипса составляют между собой углы $\alpha_A = \alpha_B = \phi$.

Пользуясь формулой соотношений радиусов кривизны плоской кривой в данной точке и ее ортогональной проекции, определяем величины радиусов кривизны для вершин эллипса.

Для вершин C_1 и D_1

$$r_k = R_k \cdot \frac{\cos^3\alpha}{\cos\phi} = a \cdot \frac{1 \cdot a}{b} = \frac{a^2}{b}.$$

Для вершин A_1 и B_1

$$r_к = R_к \cdot \frac{\cos^3\alpha}{\cos\phi} = a \cdot \frac{\cos^3\phi}{\cos\phi} = a \cdot \cos^2\phi = \frac{b^2}{a}.$$

Графически центры кривизны в вершинах эллипса определяем следующим образом. Строим прямоугольник OC_1EB_1, стороны которого равны полуосям эллипса. Перпендикуляр, опущенный из вершины E прямоугольника на его диагональ B_1C_1, пересекает большую ось эллипса в точке B_0— центре кривизны эллипса в вершине B_1, а малую ось эллипса в точке C_0— центре кривизны эллипса в точке C_1. Докажем это.

Замечаем, что

$$\Delta C_1C_0E \sim \Delta OC_1B_1 \sim \Delta EB_1B_0.$$

Из подобия треугольников имеем:

$$\frac{B_1B_0}{B_1E} = \frac{C_1E}{C_1C_0} = \frac{OC_1}{OB_1},$$

но $B_1E = C_1O = b$ и $C_1E = OB_1 = a$.

Тогда $B_1B_0 = r_к = \frac{b^2}{a}$; $C_1C_0 = r_к = \frac{a^2}{b}$.

Это соответствует результатам вычислений, полученных из формулы.

Для построения центра кривизны эллипса в произвольно выбранной точке K_1 проводим нормаль n и из точки 1 ее пересечения с большой осью проводим к ней перпендикуляр. Через точку 2 пересечения перпендикуляра прямой K_1O проводим прямую, параллельную малой оси эллипса, и отмечаем точку K_0 ее пересечения с нормалью. Точка K_0 — центр кривизны эллипса в точке K_1.

На рис. 449 показано построение касательной к эллипсу в точке K_1. Здесь эллипс рассматривается как фигура, родственная окружности.

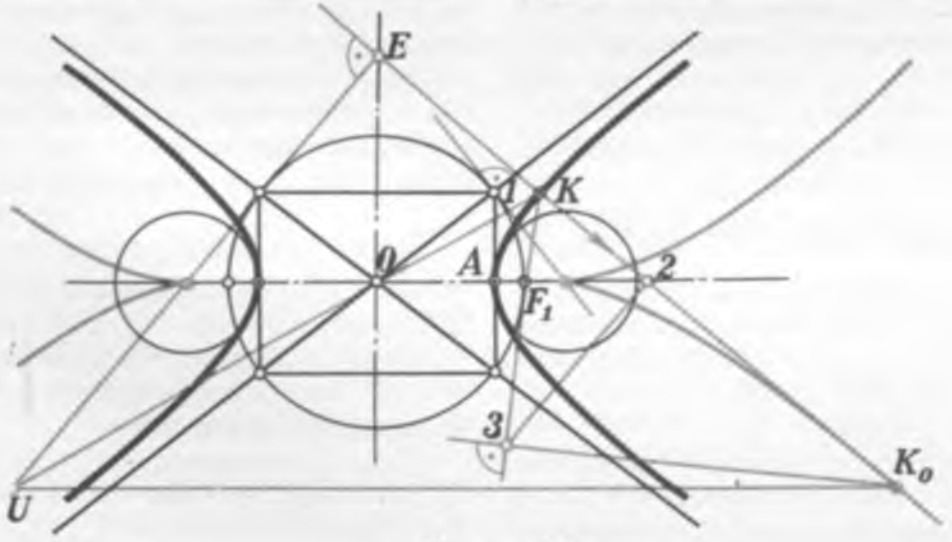
Если за ось родства взять большую ось эллипса, то эллипс можно рассматривать как преобразование окружности диаметром AB. Точка K окружности преобразуется в точку K_1 эллипса, а касательная в точке K к окружности преобразуется в касательную в точке K_1 эллипса. Эту касательную можно легко построить.

Эллипс, как указывалось выше, является двусимметричным четырехвершинным овалом. Его эволютой является замкнутая иррегулярная кривая линия, имеющая четыре вершины острия.

С построением эволют решаются некоторые практические задачи, например, задачи по конструированию эллиптических зубчатых колес.

Ползун, приводимый в движение при помощи такой зубчатой передачи, может перемещаться (определенную часть цикла) с почти постоянной скоростью. Так перемещается резец в малых строгальных станках.

На рис. 450 показано построение центров кривизны гиперболы в заданных ее точках.



Р и с. 450

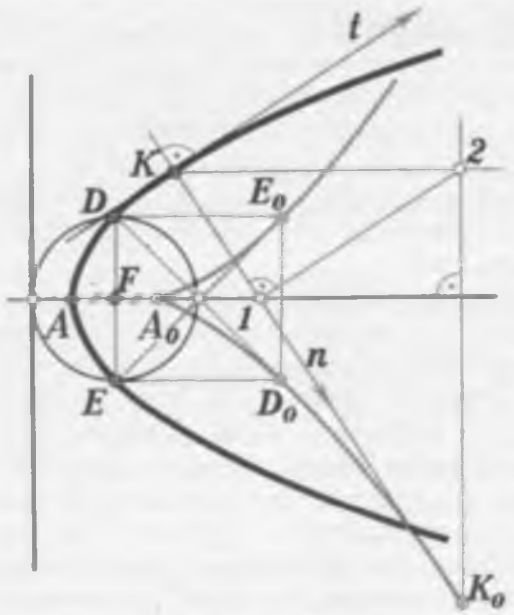


Рис. 451

Центр кривизны гиперболы в ее вершине A определяется как точка пересечения с действительной осью перпендикуляра, восставленного в точке *1* к диагонали $O1$ прямоугольника, построенного на осях гиперболы (к асимптоте).

Для определения центра кривизны гиперболы в точке K построим нормаль в этой точке и отметим точку *2* пересечения ее с действительной осью гиперболы. В точке *2* восставим перпендикуляр к нормали и найдем точку *3* пересечения его с прямой линией KF_1, проходящей через данную точку и фокус гиперболы.

В точке *3* восставим перпендикуляр к прямой линии KF_1 и отметим точку K_0 его пересечения с нормалью. Точка K_0 является искомым центром кривизны гиперболы в точке K.

На рис. 450 показан также и второй способ построения центра кривизны K_0. Для этого строится прямоугольный треугольник EUK_0, гипотенуза которого параллельна действительной оси гиперболы, а катет EU пересекается в точке U с диаметром OK.

На рис. 451 построены центры кривизны параболы в заданных точках. Центр кривизны A_0 в вершине A параболы находится от этой вершины на расстоянии, равном двойному расстоянию от фокуса F до вершины A.

Для определения центра кривизны параболы в точке K построим нормаль и диаметр, проходящие через точку K. В точке *1* пересечения нормали с осью восставим к нормали перпендикуляр и отметим точку *2* его пересечения с диаметром параболы. В точке *2* восставим перпендикуляр к диаметру и найдем точку K_0 его пересечения с нормалью.

Точка K_0 является искомым центром кривизны параболы в точке K.

Рассмотрим центры кривизны для точек D и E, расположенных на хорде, перпендикулярной к оси параболы и проходящей через ее фокус. Центры кривизны D_0 и E_0 лежат в вершинах квадрата, построенного на стороне $ED = 2p$. Радиусами кривизны являются диагонали квадрата.

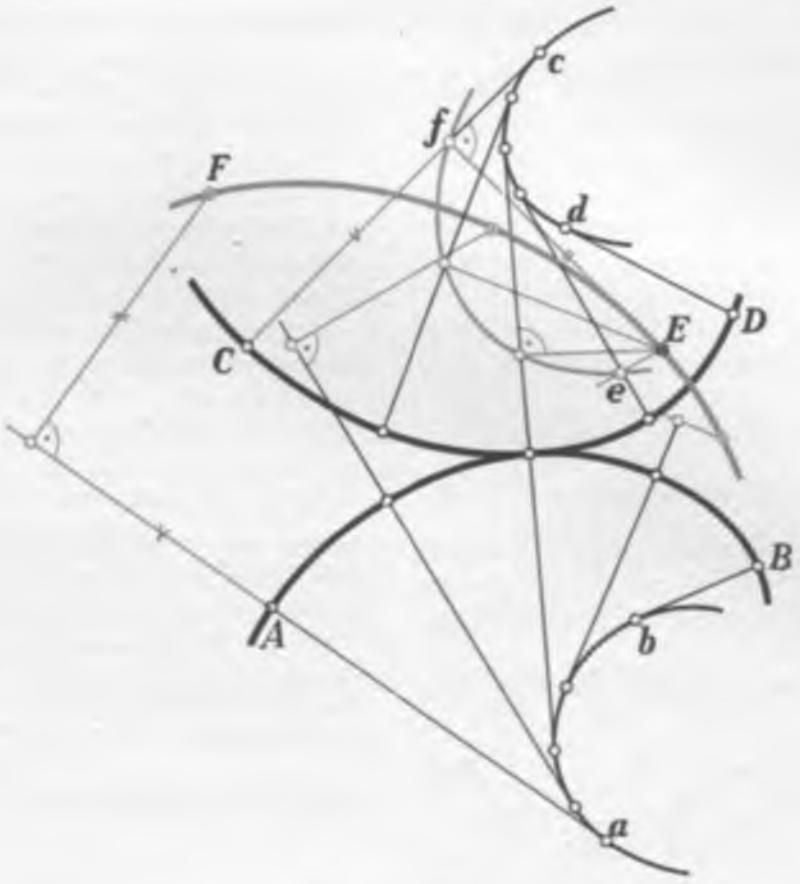
Эволютой параболы является кривая линия с вершиной острия. Ее называют *полукубической* параболой.

§82 КИНЕМАТИЧЕСКИЕ КРИВЫЕ ЛИНИИ. РУЛЕТТЫ

Плоскую кривую линию называют *кинематической*, если она образована движением линии в ее плоскости или движением точки, неизменно связанной с этой движущейся кривой линией.

Если кривая или плоская фигура перемещаются в своей плоскости по определенному закону, то траекторией точки, неизменно с ними связанной, является некоторая кривая линия. Такую кривую можно определить как траекторию точки, неизменно связанной с какой-либо подвижной кривой линией, которая без скольжения катится по другой неподвижной кривой линии.

Согласно теореме, изложенной в разделе «Плоскопараллельные перемещения», любое перемещение плоской фигуры в ее плоскости из начального положения в некоторое



Р и с. 452

конечное можно получить путем поворота ее на соответствующий угол вокруг некоторого центра (см. рис. 118). Эта теорема, очевидно, справедлива и для бесконечно малых перемещений плоской фигуры в ее плоскости. При бесконечно малом перемещении дуги также являются бесконечно малыми и в пределе принимают направления касательных к траекториям соответствующих точек, а перпендикуляры к ним имеют положения нормалей.

Точку пересечения нормалей называют *мгновенным* центром вращения плоской фигуры. Геометрическим местом мгновенных центров вращения непрерывно движущейся плоской фигуры является кривая линия. Ее называют *неподвижной центроидой* движения фигуры.

Если каждый из мгновенных центров вращения жестко связать с движущейся плоской фигурой, то их геометрическим местом является некоторая кривая линия, неизменно связанная с фигурой. Такую кривую линию называют *подвижной центроидой* движения фигуры.

Траекторией точки, неизменно связанной с движущейся плоской фигурой, является кривая линия, которую можно рассматривать как траекторию точки, неизменно связанной с подвижной центроидой, обкатывающей без скольжения неподвижную центроиду. Подвижная центроида может соприкасаться с неподвижной как с внутренней, так и с внешней ее стороны.

Кривые линии, построенные при помощи центроид, называют *рулеттами**. Рулетту можно задать подвижной и неподвижной центроидами и производящей точкой.

На рис. 452 рулетта задана неподвижной центроидой AB, подвижной центроидой CD

* От франц. roulette, от rouler — катать.

и производящей точкой E. Эволютами центроид являются кривые линии соответственно ab и cd.

Из точки E проводим прямые линии, перпендикулярные к ряду нормалей подвижной центроиды CD. Геометрическим местом точек их пересечения является кривая линия ef. Ее называют *подёрой** эволюты cd центроиды CD относительно точки E.

Кривая cd по отношению к своей подере ef называется *антиподерой* относительно точки E.

На продолжении нормалей неподвижной центроиды от точек кривой линии AB отложим отрезки, равные соответствующим отрезкам нормалей, ограниченных кривыми CD и ef. В концах этих отрезков восставим перпендикуляры к ним и отложим отрезки, равные расстояниям от точки E до соответствующих нормалей подвижной центроиды.

Геометрическим местом концов перпендикуляров является кривая линия — рулетта EF.

§83 РАДИУСЫ КРИВИЗНЫ РУЛЕТТ

Пусть рулетта образуется движением некоторой точки E, жестко связанной с подвижной центроидой CD, катящейся без скольжения по неподвижной центроиде AB (рис. 453). Эволютами центроид являются соответственно кривые cd и ab.

Точке E рулетты соответствует точка O соприкасания центроид.

* От франц. podaire, от греч. ποδάς — нога.

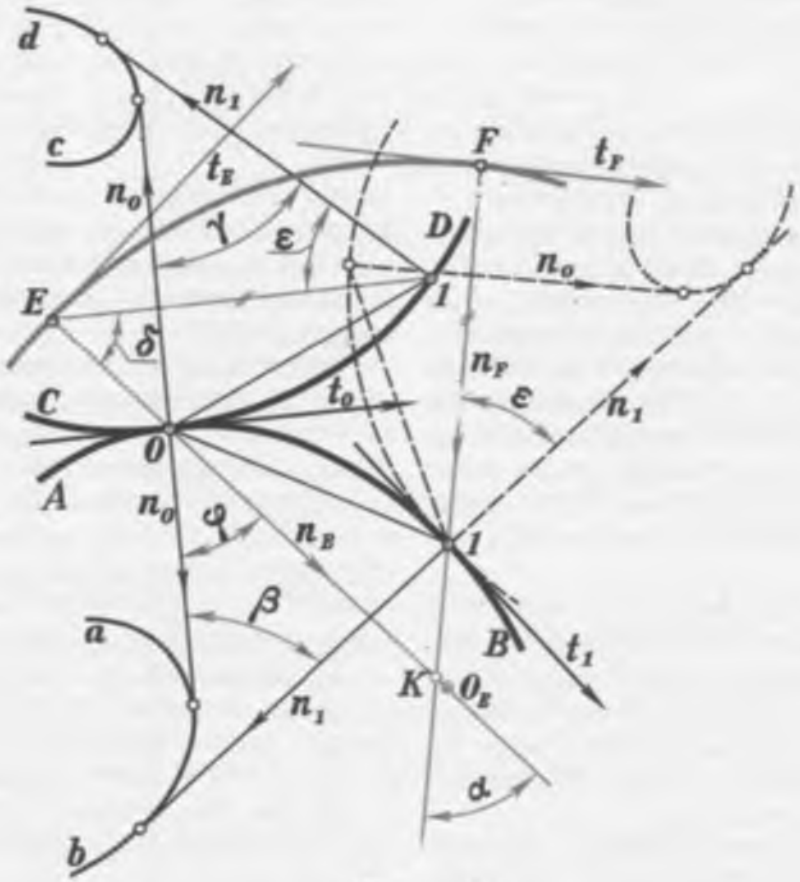


Рис. 453

Покажем построение радиуса кривизны рулетты в точке E. Как известно, центр кривизны кривой линии в заданной точке определяется на пересечении нормалей, построенных в данной точке кривой и в точке, бесконечно близкой к ней. Принимаем, что точка F бесконечно близка к рассматриваемой точке E, и точке F соответствует точка 1 соприкасания центроид, бесконечно близкая к точке O.

Обозначим α угол между нормалями n_E и n_F рулетты в точках E и F; β — угол между нормалями n_0 и n_1 неподвижной центроиды в точке O и 1 и γ — угол между нормалями n_0 и n_1 подвижной центроиды в точках O и 1 соприкасания центроид.

При соприкасании центроид в точке 1 отрезок $E1$ занимает положение $F1$. Поэтому отрезки $E1$ и $F1$ равны. Прямая $E1$ составляет угол δ с нормалью n_E рулетты в точке E и угол ε с нормалью n_1 подвижной центроиды в точке 1. Угол между нормалями n_E и n_0 обозначим ϕ.

При принятых обозначениях углов имеем:

$$\alpha + \varepsilon = \beta + \phi;$$

$$\delta + \phi = \gamma + \varepsilon.$$

Сложим два равенства и произведем сокращение:

$$\alpha + \delta = \beta + \gamma.$$

Обозначим Δs равные между собой бесконечно малые дуги центроид, ограниченные точками O и 1 их соприкасания. Разделим полученные выражения на величину Δs и перейдем к пределу:

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\alpha}{\Delta s} + \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\delta}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\beta}{\Delta s} + \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\gamma}{\Delta s} = \frac{1}{r_n} + \frac{1}{r_n}.$$

Здесь r_n и r_n — радиусы кривизны неподвижной и подвижной центроид в точке O их соприкасания.

Бесконечно малые дуги $O1$ центроид можно заменить их хордами. Рассмотрим треугольник $EO1$. Заменяем величины углов значениями их синусов:

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\delta}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\sin \delta}{\Delta s} = \frac{\sin \angle EO1}{E1}$$

или

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\delta}{\Delta s} = \frac{\cos \phi}{EO}.$$

Рассматриваем треугольник $KO1$ аналогично предыдущему:

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\alpha}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\sin \alpha}{\Delta s} = \frac{\sin \angle KO1}{K1},$$

или

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\alpha}{\Delta s} = \frac{\cos \phi}{OO_E}$$

O_E — предельное положение точки K, которая и определяет центр кривизны рулетты EF в ее точке E.

Указанная выше зависимость получит вид:

$$\frac{\cos \phi}{EO} + \frac{\cos \phi}{OO_E} = \frac{1}{r_n} + \frac{1}{r_n},$$

или

$$\cos \phi \left(\frac{1}{EO} + \frac{1}{OO_E} \right) = \frac{1}{r_n} + \frac{1}{r_n}. \qquad (1)$$

Величина искомого радиуса кривизны r_E рулетты EF в точке E равна:

$$r_E = EO + OO_E.$$

Определим радиус кривизны рулетты (на чертеже рулетта не построена) в точке E_1, которая совпадает с центром кривизны подвижной центроиды в начальный момент соприкасания центроид.

В этом случае

$$\phi = 0,$$

$$\cos \phi = 1;$$

$$OE = OE_1 = r_n.$$

Подставляя эти значения в формулу (1), получаем

$$1 \cdot \left(\frac{1}{r_n} + \frac{1}{OO_E} \right) = \frac{1}{r_n} + \frac{1}{r_n}$$

или

$$\frac{1}{OO_E} = \frac{1}{r_n}.$$

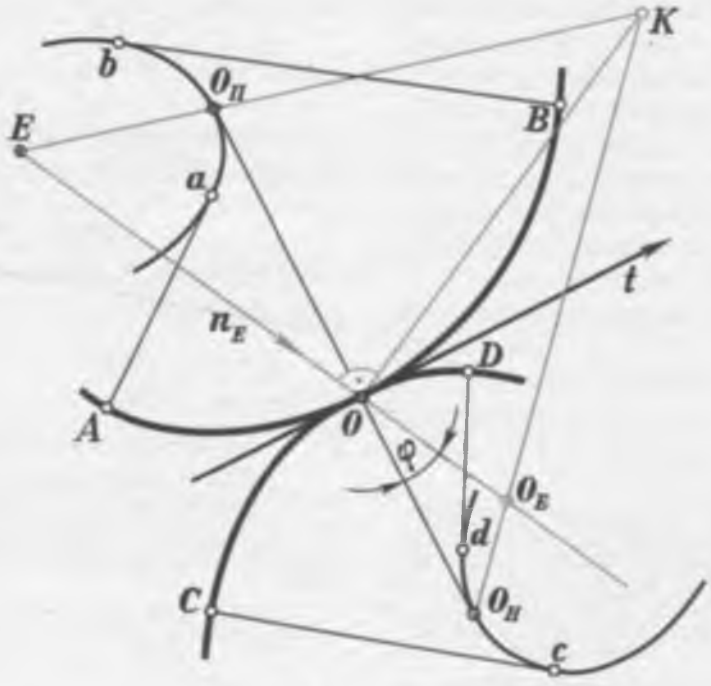


Рис. 454

Из этого следует, что центр кривизны рулетты в точке E_1 совпадает с центром кривизны неподвижной центроиды.

Рассмотрим теперь построение центра кривизны рулетты в заданной точке E (рис. 454). Точке E рулетты соответствует точка O соприкасания центроид. Центрами кривизны подвижной и неподвижной центроид в точке их соприкасания являются $O_П$ и $O_И$. Прямая линия EO является нормалью рулетты в точке E.

В точке O восставим перпендикуляр к нормали n_E, определим точку K пересечения нормали с прямой $EO_П$. Прямая линия $KO_И$, проходящая через центр кривизны $O_И$ неподвижной центроиды и точку K, пересекается нормалью n_E в точке O_E

Приведенный способ построения центров кривизны рулетты впервые был открыт Эйлером.

Нетрудно заметить, что для каждого положения соприкасающихся центроид имеется совокупность точек, неизменно связанных с подвижной центроидой, в которых описываемые ими рулетты имеют бесконечно большие радиусы кривизны. Для таких точек

$$OO_E = \infty$$

Основная формула (1) примет вид:

$$\frac{1}{EO} \cdot \cos\phi = \frac{1}{r_И} + \frac{1}{r_П}$$

или

$$EO = \frac{r_И \cdot r_П}{r_И + r_П} \cdot \cos\phi .$$

Из этого выражения следует, что геометрическим местом таких точек является окружность диаметром

$$d = \frac{r_И \cdot r_П}{r_И + r_П}.$$

Эту окружность называют *кругом поворота*, или *кругом Лагира*. В точках этой окружности их рулетты имеют вершины перегиба с бесконечно большими радиусами кривизны.

ЦИКЛИЧЕСКИЕ (ЦИКЛОИДАЛЬНЫЕ) РУЛЕТТЫ

§84

Рулетту называют *циклической* или *циклоидальной*, если центроидами ее являются дуги окружностей. Циклоидальные кривые применяют при многих технических расчетах. Профили зубьев шестерен, очертания многих типов эксцентриков, кулачков и иных деталей машин имеют форму циклоидальных кривых линий.

Циклоидальный профиль зуба применяется в зацеплениях точных механизмов, особенно в часовых.

Рассмотрим кривую линию как траекторию точки окружности, катящейся без скольжения по прямой линии. Такая кривая называется *циклоидой**.

Прямую линию (неподвижную центроиду) рассматриваем как дугу окружности с бесконечно большим радиусом.

На рис. 455 построена циклоида как траектория точки E, принадлежащей окружности радиусом r, катящейся без скольжения по прямой линии.

Для построения циклоиды на горизонтальной прямой линии (неподвижной центроиде) от точки E_0 соприкасания центроид отложим отрезок, равный $2\pi r$ — длине окружности с радиусом r подвижной центроиды. Этот отрезок и окружность делим на одинаковое число равных частей.

Отметим ряд положений подвижной центроиды (окружности), когда она соприкасается в точках $0, 1, 2, \ldots, 8$ с неподвижной центроидой (прямой линией).

В момент соприкасания центроид в точке 1 производящая точка E занимает положение E_1, а центр O окружности перемещается в O_1; радиус OE_0 поворачивается на угол, равный $\phi_1 = 360° : 8 = 45°$, и занимает положение O_1E_1. В момент соприкасания центроид в точке 2 производящая точка E занимает положение E_2, а центр O окружности перемещается в O_2; радиус OE_0 поворачивается на угол, равный $\phi_2 = 360° : 4 = 90°$, и занимает положение O_2E_2. Путем анало-

* От греч. κυκλοειδής — кругообразный, от κύκλος — круг и εἶδος — вид.

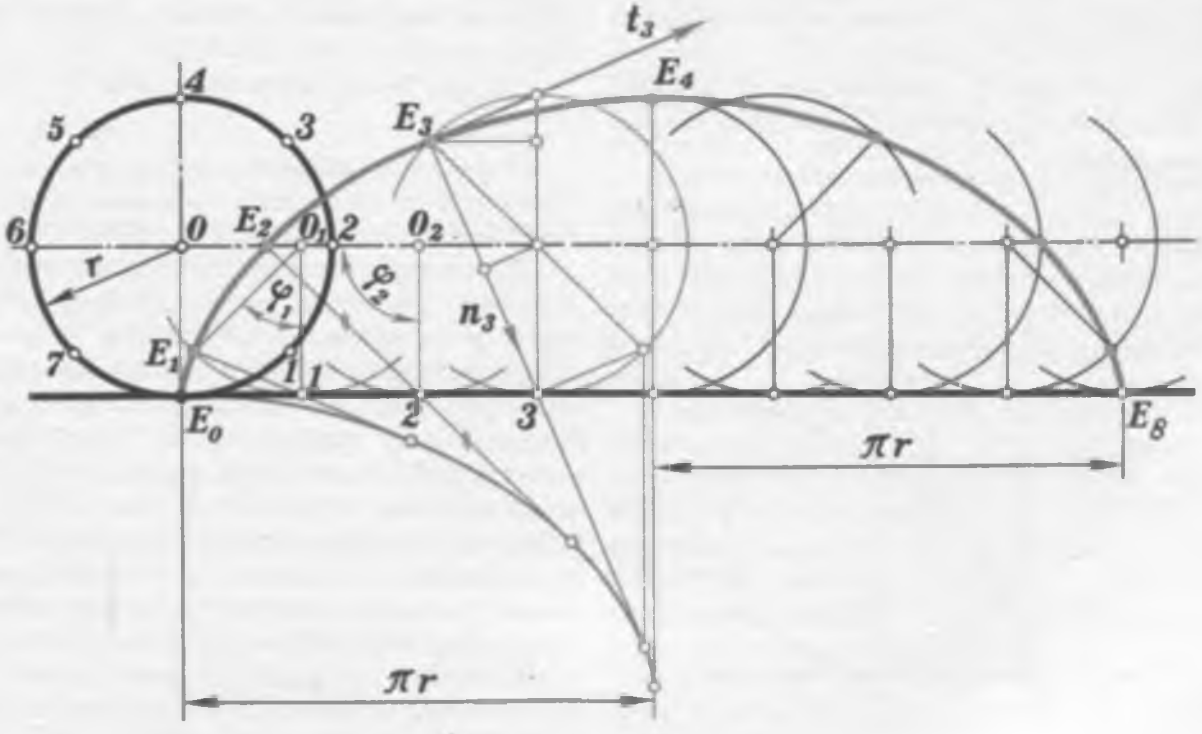


Рис. 455

гичных построений определяем положения $E_3, E_4, \ldots, E_8$ производящей точки E.

Геометрическим местом этих точек является кривая линия — циклоида.

Предполагая, что подвижная центроида (производящая окружность) неограниченно долго катится по прямой (направляющей прямой) линии, получим кривую, состоящую из бесконечного ряда арок. Арки соединяются в наинизших точках $E_0, E_8, \ldots$ циклоиды — в точках возврата (вершинах острия). Здесь арки имеют общую касательную.

Наивысшую точку циклоиды называют ее *регулярной вершиной*.

Отрезок E_0E_8 прямой между двумя ближними вершинами острия называют *основанием* циклоиды.

Отметим некоторые основные свойства циклоиды.

Свойство 1. *Нормаль к циклоиде проходит через нижнюю точку производящего круга — точку соприкасания центроид в соответствующем положении.*

Прямой угол между касательной и нормалью в заданной точке циклоиды вписан в окружность производящего круга. Он опирается на диаметр производящего круга.

Свойство 2. *Касательная к циклоиде проходит через верхнюю точку производящего круга.*

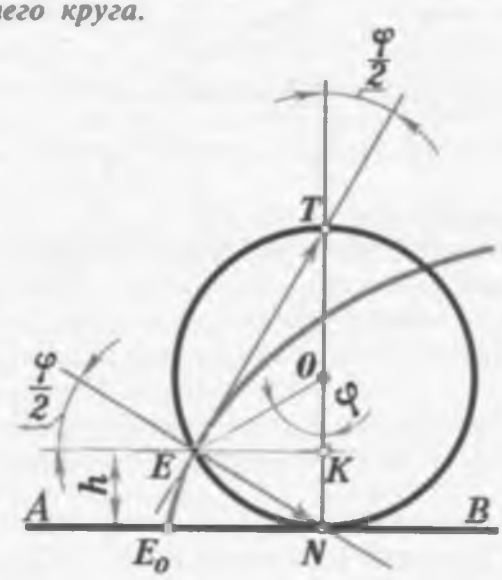


Рис. 456

Пользуясь способом Эйлера, определим в помеченных точках радиусы и центры кривизны циклоиды. Центр кривизны циклоиды в любой из ее точек находится на нормали к циклоиде на таком же расстоянии от нижней точки производящего круга, что и точка циклоиды.

Свойство 3. *Величина радиуса кривизны циклоиды в данной точке равна двойному расстоянию от этой точки до мгновенного центра вращения.*

Эволюта циклоиды представляет собой по виду такую же циклоиду, что и данная, только сдвинутую вниз на величину $2r$ и вправо на величину πr.

Точки возврата (вершины острия) циклоиды тождественны регулярным вершинам циклоиды-эволюты, а регулярные вершины циклоиды симметричны относительно направляющей прямой (неподвижной центроиды) вершинам острия циклоиды-эволюты.

Это свойство впервые было установлено голландским ученым Гюйгенсом и носит название теоремы Гюйгенса.

Свойство 4. *Радиус кривизны циклоиды в ее регулярной вершине равен $4r$, т. е. длине половины арки циклоиды.*

Длина L всей арки циклоиды

$$L=8r.$$

Определим величины углов наклона касательной и нормали к циклоиде в любой из ее точек к направляющей прямой.

Циклоиду можно рассматривать как траекторию движения точки производящего круга по направляющей прямой. В момент соприкасания центроид в точке N производящая точка занимает положение E (рис. 456). Вертикальный радиус круга, проходящий в начальный момент соприкасания центроид через вершину острия циклоиды, поворачивается на угол ϕ и занимает положение OE. Касательная ET к циклоиде в точке E проходит через верхнюю точку производящего круга, а нормаль EN — через нижнюю.

Проводим прямую EK параллельно направляющей прямой AB. Получаем два прямоугольных треугольника ETK и EKN. Гипотенузы этих прямоугольных треугольни-

ков определяют направления касательной и нормали к циклоиде в точке E.

Из треугольника ETK следует:

$$\angle TEK = 90^\circ - \angle ETK.$$

Угол ETK определяем из равнобедренного треугольника OTE; он равен $\frac{\phi}{2}$. Отсюда

$$\angle TEK = 90^\circ - \frac{\phi}{2}.$$

Свойство 5. *Угол между касательной к циклоиде в данной точке и направляющей прямой равен дополнительному до 90° половины ее основного угла*.*

Угол наклона нормали EN к направляющей прямой AB определяем, придерживаясь следующих рассуждений.

Из чертежа (рис. 456) следует, что

$$\angle NEK = 90^\circ - \angle TEK,$$

т. е.

$$\angle NEK = 90^\circ - \left(90^\circ - \frac{\phi}{2}\right) = \frac{\phi}{2}.$$

Свойство 6. *Угол между нормалью к циклоиде в данной точке и направляющей прямой равен половине ее основного угла.*

Обозначим h расстояние от точки E до направляющей прямой. Это расстояние соответствует высоте точки E циклоиды.

Из ΔENT имеем:

$$EN = 2r \cdot \sin\frac{\phi}{2},$$

а из ΔNEK

$$KN = EN \cdot \sin\frac{\phi}{2}.$$

Сопоставляя два выражения и замечая, что $KN = h$, получаем

$$h = 2r \cdot \sin\frac{\phi}{2} \cdot \sin\frac{\phi}{2},$$

т. е. $h = 2r \cdot \sin^2\frac{\phi}{2}$,

отсюда

$$\sin\frac{\phi}{2} = \sqrt{\frac{h}{2r}} = k\sqrt{h},$$

где k — постоянная для данной циклоиды величина.

Свойство 7. *Синус угла между касательной к циклоиде в данной точке и вертикальной прямой пропорционален квадратному корню из высоты этой точки.*

* Угол ϕ поворота радиуса производящего круга называют *основным углом*.

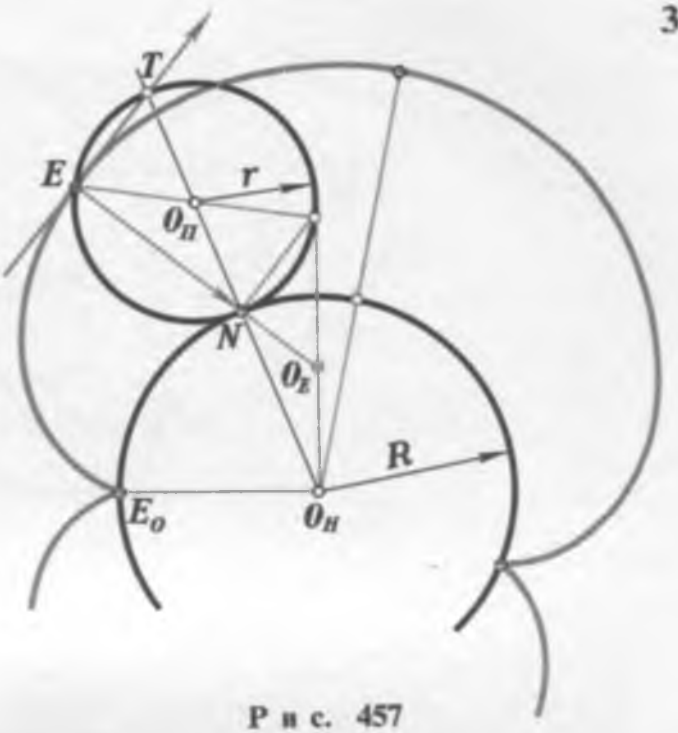


Рис. 457

Циклоиды бывают удлиненные и укороченные. Если производящая точка находится вне производящего круга (подвижной центроиды), который катится без скольжения по направляющей прямой (неподвижной центроиде), то ее траекторией является кривая линия — *удлиненная циклоида*.

Если производящая точка находится внутри производящего круга, то она при движении без скольжения круга по прямой описывает кривую линию, которую называют *укороченной циклоидой*. Удлиненные и укороченные циклоиды называют также *трохоидами**.

Циклическую рулетту называют *эпициклоидой* (надциклоидой), если центроиды ее (окружности данных радиусов) находятся во внешнем соприкасании. Если соприкасание центроид (окружностей) внутреннее, рулетту называют *гипоциклоидой* (подциклоидой). Построение эпициклоиды и гипоциклоиды аналогично построению циклоиды.

На рис. 457 построена эпициклоида. Ее неподвижной центроидой является окруж-

* От греч. τροχοειδής — колесообразный, круглый от τροχός — колесо, круг и εἶδος — вид.

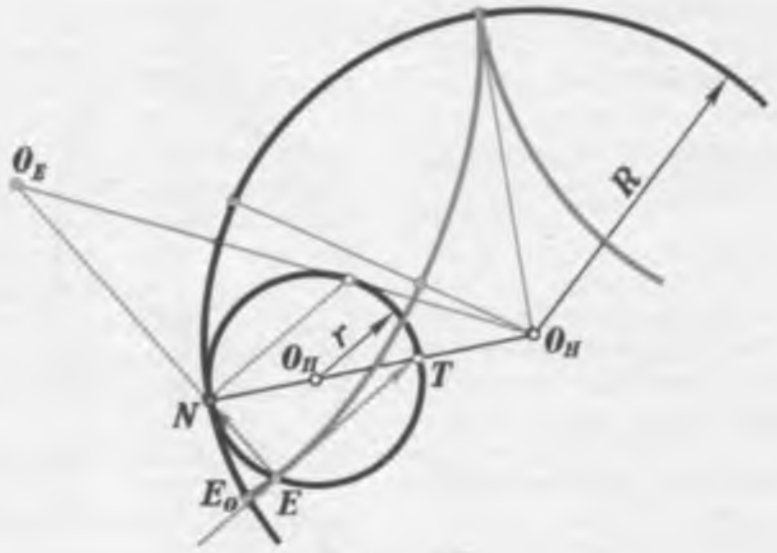


Рис. 458

ность радиусом R, подвижной — окружность радиусом r. Нормаль EN в точке E эпициклоиды проходит через точку N соприкасания центроид (мгновенный центр вращения).

Способом Эйлера определен центр O_E и радиус EO_E кривизны эпициклоиды в данной точке E. Радиус кривизны эпициклоиды в вершине острия — начальной точке E_0 — равен нулю.

Радиус кривизны в регулярной вершине эпициклоиды:

$$r_к = 4r\frac{R+r}{R+2r}.$$

В зависимости от соотношения между радиусами окружностей подвижной и неподвижной центроид получаем эпициклоиды с соответствующим числом вершин острия.

Если $r=\frac{R}{2}$, эпициклоида имеет две вершины острия.

Если $r=\frac{R}{3}$, эпициклоида имеет три вершины острия и т. д.

Эпициклоиду называют *кардиоидой*, если $r=R$. Выше отмечено, что кардиоида является также и конхоидой окружности относительно точки, лежащей на окружности. Эволютой эпициклоиды (аналогично циклоиде) является эпициклоида, подобная данной, с тем же центром направляющей окружности (неподвижной центроиды), но повернутая на угол $\frac{\pi}{n}$ радианов (т. е. $\frac{180}{n}$ градусов). Здесь $n=\frac{R}{r}$.

Отношение подобия равно $\frac{n}{n+2}$. Если $n=3$, то линейные размеры эволюты составляют $\frac{3}{3+2}=\frac{3}{5}$ соответствующих размеров самой эпициклоиды.

Подобные траектории описывают точки подвижных колес планетарных редукторов с внешним зацеплением.

На рис. 458 построена гипоциклоида. Нормаль EN гипоциклоиды в точке E проходит через точку N соприкасания центроид. Касательная ET проходит через точку, диаметрально противоположную точке соприкасания центроид.

Способом Эйлера определяем центр O_E и радиус EO_E кривизны гипоциклоиды в данной точке E.

Радиус кривизны гипоциклоиды в вершине острия равен нулю, а радиус кривизны в регулярной вершине

$$r_к = 4r\cdot\frac{R-r}{R-2r}.$$

В зависимости от величины $n=\frac{R}{r}$ отношения радиусов окружностей неподвижной

и подвижной центроид гипоциклоиды имеют n вершин острия.

Гипоциклоиду называют *астроидой**, если $n=4$, т. е. $r=\frac{R}{4}$, где радиус r подвижной центроиды в четыре раза меньше радиуса R неподвижной центроиды. Астроида имеет четыре вершины острия.

Гипоциклоиду называют *перициклоидой*, если $r>R$.

Гипоциклоида преобразуется в отрезок прямой, если $n=2$, т. е. $r=\frac{R}{2}$.

Теорема. *Точка окружности радиусом r, катящейся без скольжения по внутренней стороне окружности радиусом $R=2r$, движется по диаметру неподвижной окружности.*

Это свойство используют для преобразования вращательного движения в возвратно-поступательное. Например, такая схема применяется в некоторых конструкциях типографских машин.

Эволютой гипоциклоиды является гипоциклоида, подобная данной, с тем же центром направляющей окружности (неподвижной центроиды), но повернутая на угол, равный $\frac{\pi}{n}$ радианов. Отношение подобия равно $\frac{n}{n-2}$.

Эволюты гипоциклоиды по длине больше самой кривой.

Рассмотрим рулетту, для которой неподвижной центроидой является окружность радиусом r, а подвижной — прямая линия (рис. 459). Здесь прямая линия AB катится без скольжения по окружности, а точка E, неизменно связанная с прямой, занимает ряд положений E_0, E_1, E_2, ...

Геометрическим местом этих точек является кривая линия — рулетта, называемая эвольвентой или разверткой круга (окружности). Данная же окружность является эволютой. Каждое из положений прямой AB является нормалью рулетты. Длина отрезка $E_3 3$ равна длине дуги $E_0 3$ неподвижного круга.

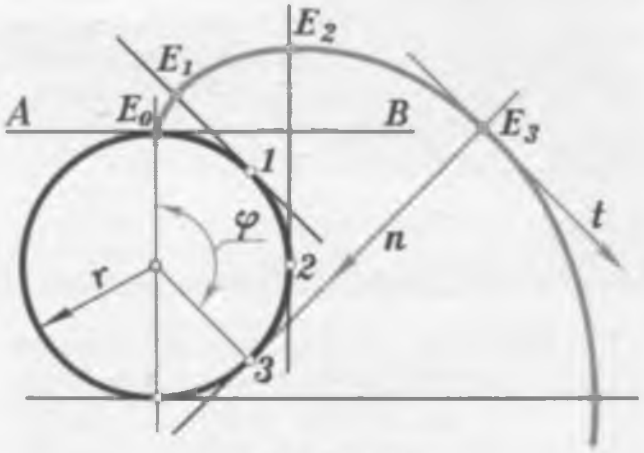


Рис. 459

Таким образом, при построении точек развертки круга необходимо определять длины дуг окружности. Длина эвольвенты на участке E_0E

$$L=\frac{r}{2}\,\phi^2.$$

Угол ϕ выражен в радианах.

Учение об эволютах впервые разработал выдающийся голландский механик, физик и математик XVII в. Христиан Гюйгенс (1629—1695) и применил его к исследованию циклоиды. Он установил таутохронность* движения по циклоиде. Гюйгенсу принадлежит изобретение часов с циклоидальным маятником. Он доказал, что часы с обыкновенным маятником (круговым) не могут идти точно, и поставил перед собой задачу: определить, по какой кривой должна двигаться точка, чтобы период ее колебаний не зависел от амплитуды (т. е. чтобы время качания не зависело от величины размаха). Такой «таутохронной» кривой оказалась циклоида.

Не менее интересной задачей является «задача о брахистохроне»** (кривой бы-

* От греч. ἄστρου — звезда.

* От греч. ταὐτός — тот же самый и χρόνος — время.

** От греч. βράχιστος — кратчайший и χρόνος — время.

стрейшего спуска). Ее поставил в 1696 г. Иоганн Бернулли (1667—1748). Это задача об определении линии, по которой в наикратчайшее время тяжелый шарик перемещается из одного его положения в другое (относительно уровня земли) под действием силы тяжести. Такой линией также оказалась циклоида.

Решение этой задачи сыграло выдающуюся роль в истории математики. Оно привело к созданию новой ветви математики — вариационного исчисления.

§85 ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ КРИВЫЕ ЛИНИИ. ТРЕХГРАННИК ФРЕНЕ*

В отличие от плоских, пространственные кривые линии не лежат всеми своими точками в плоскости. Пространственную кривую линию рассматриваем как траекторию (путь) движущейся точки в пространстве. Плоскости, проходящие через любые три точки пространственной кривой линии, в общем случае имеют различные направления и положения.

На рис. 460 представлена модель пространственной кривой линии AB.

На кривой AB выберем некоторую точку C. Проведем секущие CE и CF. При приближении точек E и F к точке C секущие изменяют свои направления и в пределе принимают направления полукасательных t_C.

Если кривая линия AB в рассматриваемой точке C плавная, то прежде всего необходимо, чтобы разносторонне направленные полукасательные принадлежали одной прямой линии. Эту прямую называют *касательной* к кривой линии в данной точке.

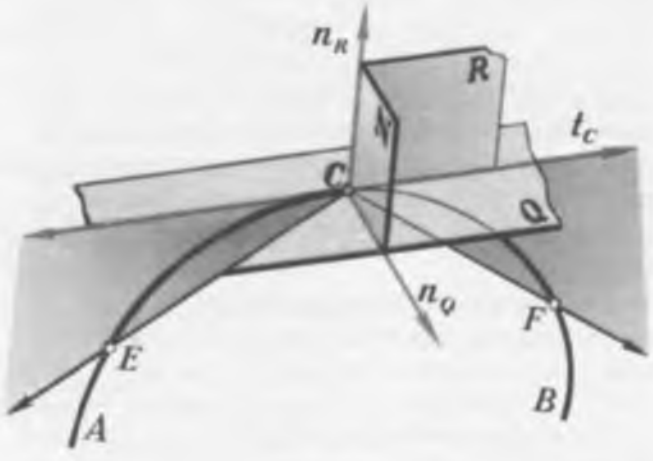


Рис. 460

Через касательную можно провести бесчисленное множество плоскостей. Все они являются касательными к пространственной кривой линии в данной ее точке. Некоторые из них могут и пересечь кривую линию.

Рассмотрим плоскости, определяемые полукасательными t_C и секущими CE и CF. Они имеют различные направления. Их называют *плоскостями полукасательных* к кривой линии в данной точке.

Если точка F секущей CF приближается к точке C, то плоскость поворачивается вокруг полукасательной. В пределе, когда секущая занимает положение полукасательной, плоскость занимает предельное положение.

Плоскость полукасательной в ее предельном положении называют *соприкасающейся полуплоскостью* кривой линии в данной точке.

Если точка F секущей CF приближается к точке C, то плоскость поворачивается вокруг полукасательной и в пределе занимает положение соприкасающейся полуплоскости.

Для того чтобы пространственная кривая линия была плавной в данной точке C, необходимо, чтобы соприкасающиеся полуплоскости имели одинаковое направление, т. е. чтобы они принадлежали одной плоскости. Такую плоскость называют *соприкасающейся плоскостью* пространственной кривой линии в данной точке.

Определению соприкасающейся плоскости можно дать и другое толкование. Секущими CE и CF определяется некоторая

* Френе (Frenet) Жан Фредерик (1816—1900) — французский математик. С его именем связаны фундаментальные для теории пространственных кривых формулы.

плоскость. С изменением направлений секущих изменяются и направления плоскости, определяемой секущими.

Плоскость занимает некоторое предельное положение при условии, если пределом секущих является касательная.

Соприкасающаяся плоскость определяется как предельное положение плоскости, проходящей через три бесконечно близкие точки пространственной кривой линии. Ее можно рассматривать так же, как плоскость, проходящую через касательную к кривой линии в данной точке и бесконечно близкую к ней точку кривой.

Соприкасающаяся плоскость самым наилучшим образом (по сравнению с другими плоскостями) приближается в данной точке к пространственной кривой линии. Это дает возможность рассматривать пространственную кривую линию вблизи этой точки как кривую, лежащую в соприкасающейся плоскости.

Соприкасающаяся плоскость неизменно связана с движущейся точкой. Эта плоскость скользит вдоль касательной и вращается вокруг нее, т. е. совершает винтовое движение. Касательная к пространственной кривой линии служит осью винтового движения соприкасающейся плоскости.

Для пространственной кривой линии в данной ее точке можно построить множество нормалей. Их геометрическим местом является плоскость. Ее называют *нормальной плоскостью*. Одна из множества нормалей лежит в соприкасающейся плоскости. Ее называют *главной нормалью*.

Другая нормаль перпендикулярна к соприкасающейся плоскости. Ее называют *бинормалью*. Плоскость, составленная бинормалью и касательной, называют *спрямляющей*, или *ректифицирующей* плоскостью кривой линии в данной точке.

Такая плоскость определяет возможность кривой линии приближаться вблизи рассматриваемой точки к прямой (спрямляться).

На рис. 460 показаны также нормальная N и спрямляющая R плоскости кривой линии AB в точке C.

Три взаимно перпендикулярные плоскости (соприкасающаяся, нормальная, спрямляющая) образуют трехгранник (триедр). Его называют *трехгранником Френе* (Frenet) по имени французского ученого, впервые предложившего его в 1847 г. Трехгранник Френе называют также *сопутствующим триедром* или *основным* (подвижным) трехгранником.

При рассмотрении пространственной кривой линии каждую точку кривой относят к сопровождающему ее трехграннику.

Кривую линию можно спроецировать в окрестности рассматриваемой точки на плоскости трехгранника Френе. Соприкасающуюся плоскость принимаем за горизонтальную, а спрямляющую — за фронтальную плоскости проекций (рис. 461).

Проекцией пространственной кривой AB на соприкасающуюся плоскость Q является кривая ab (вид сверху). Точка c — обыкновенная точка кривой ab. Это следует также и из того, что пространственная кривая линия вблизи точки C лежит в соприкасающейся плоскости по одну сторону от касательной. Кривая линия проходит из первого октанта в восьмой.

Проекцией пространственной кривой линии AB на спрямляющую плоскость R является кривая $a'b'$ (вид спереди). Она дает точку перегиба c'. Проекцией кривой AB

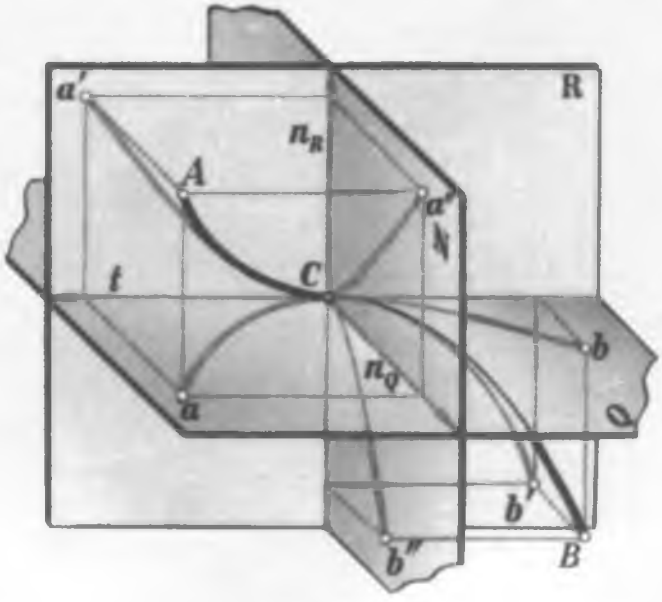


Рис. 461

на нормальную плоскость N является кривая $a''b''$ (вид слева). Она дает точку острия c'' (точку возврата первого рода).

Кривая линия проходит по одну сторону спрямляющей плоскости R и по разные стороны соприкасающейся плоскости Q.

Если точкой C пространственной кривой линии является особая точка, то ее проекциями на плоскости основного трехгранника являются точки иного вида. При построении проекций пространственных кривых линий, а также плоскостей сопутствующего триедра большое значение имеет следующая теорема.

Теорема. *Проекция касательной к пространственной кривой линии является в общем случае касательной к проекции кривой линии.*

На рис. 462 показана пространственная кривая линия AB и ее ортогональная проекция ab на плоскость P. Секущая CE кривой линии AB в общем случае проецируется также секущей ce проекции кривой ab.

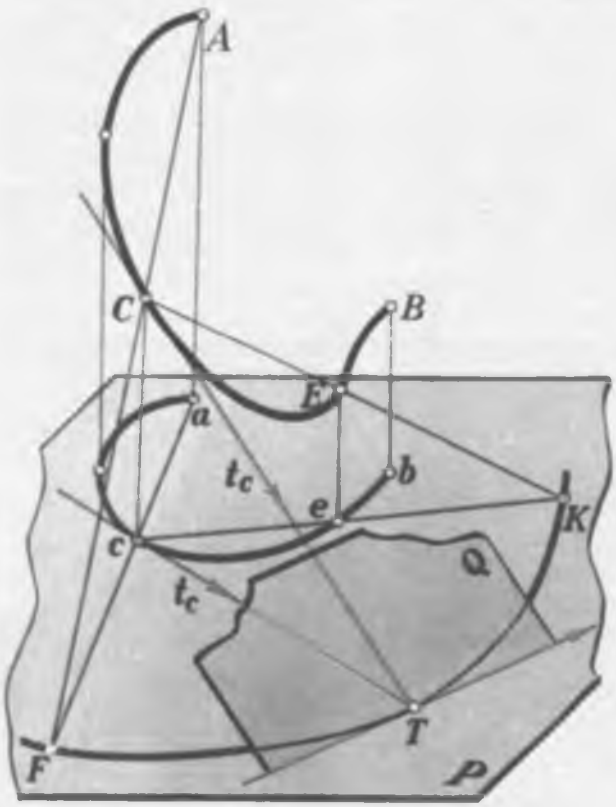


Рис. 462

Если точку E приближать к точке C, то проекция e точки приближается к проекции c. Когда секущая CE занимает предельное положение t_C полукасательной, то и проекция ce преобразуется в полукасательную t_c к проекции ab.

Соприкасающуюся в точке C пространственной кривой линии AB плоскость можно построить следующим образом. Определим следы K, T, F, ... секущих CE, ..., CA на плоскости P.

Геометрическим местом этих следов является кривая линия KF. Соприкасающаяся в точке C кривой AB плоскость определяется двумя прямыми линиями; одна из них является касательной в точке C к кривой AB, другая — касательной в точке T к кривой KF.

Соприкасающуюся плоскость рассматриваем как предельную секущую плоскость, вращающуюся вокруг касательной t_C. Пространственные кривые линии как это следует из определения, имеют двоякую кривизну.

Три бесконечно близкие точки кривой определяют соприкасающуюся плоскость. Очевидно, эти же точки определяют и соприкасающуюся окружность с центром на главной нормали кривой линии в данной точке. Такая соприкасающаяся окружность определяет первую кривизну пространственной кривой линии в данной точке.

Вторая кривизна определяется величиной кручения кривой на бесконечно малом участке, т. е. отношением угла поворота соприкасающейся плоскости на бесконечно малом участке дуги кривой линии к длине этой дуги.

Предел этого отношения называют *кручением* кривой линии в данной точке. Чем «быстрее» кривая отходит от соприкасающейся плоскости, тем больше абсолютная величина кручения. Для плоской кривой линии кручение равно нулю, поскольку все точки кривой линии лежат в одной соприкасающейся плоскости.

ЗАДАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КРИВЫХ ЛИНИЙ В ЕСТЕСТВЕННЫХ КООРДИНАТАХ

§86

Пространственную кривую линию, так же как и плоскую, будем рассматривать как след движущейся точки.

На рис. 463 представлена пространственная кривая линия AB.

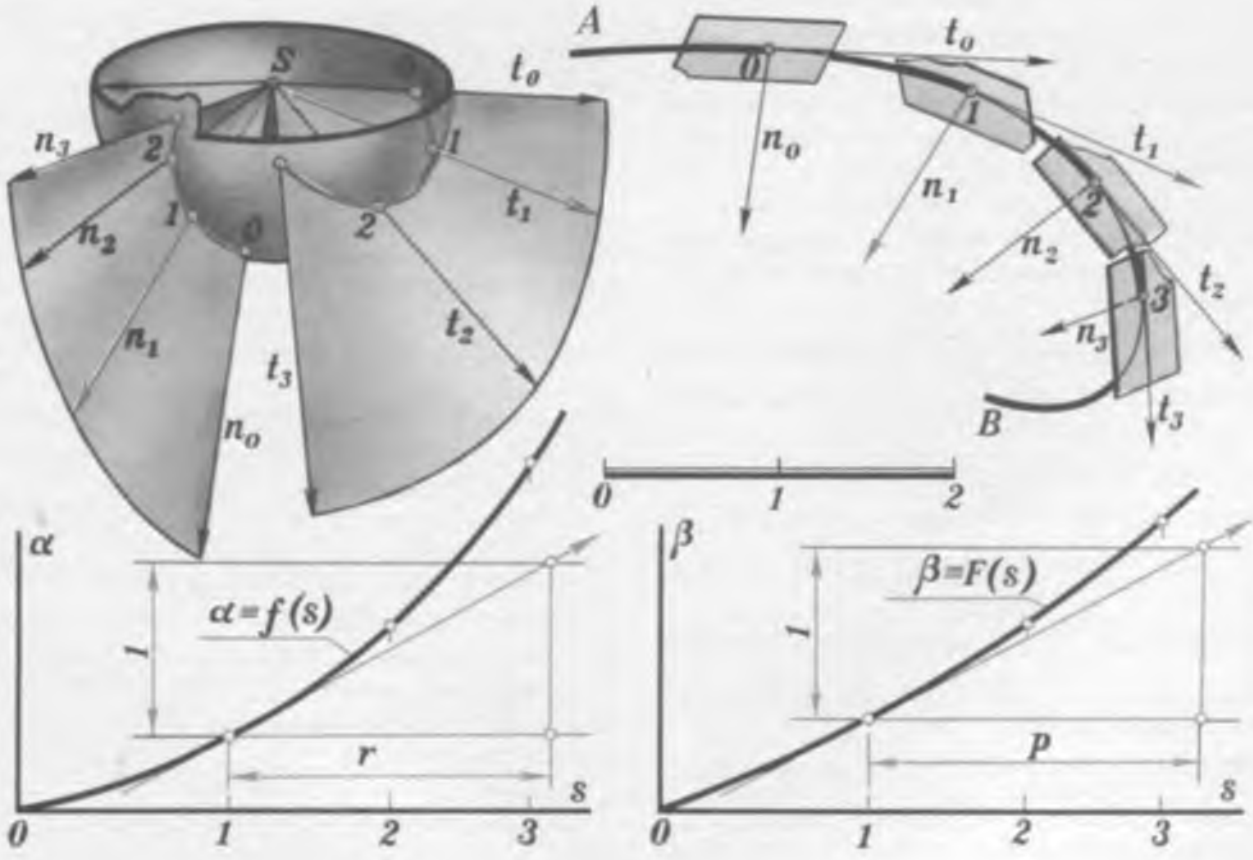
Для соответствующих положений $0,1,2,...$ движущейся точки построены ее полукасательные $t_0, t_1, t_2, ...$ и внутренние нормали (бинормали) $n_0, n_1, n_2, ...$

Движущаяся по пространственной кривой линии точка связана с непрерывными изменениями трех следующих величин: расстояния s, на которое она удаляется от начального своего положения; угла α поворота полукасательной и угла β поворота соприкасающейся плоскости при переходе точки из начального положения в рассматриваемое.

Угол α между полукасательными называют *углом смежности*, а угол β между бинормалями — *углом кручения*. Величины s, α и β называют *естественными координатами* пространственной кривой линии.

Величины углов α смежности и β кручения можно определить следующим образом. Проведем через произвольно выбранную точку S прямые линии, соответственно параллельные полукасательным и бинормалям заданной пространственной кривой линии. Геометрическим местом этих прямых являются конические поверхности — *направляющий конус полукасательных и направляющий конус бинормалей*.

Точку S примем за центр сферы радиусом R. Сфера пересекает направляющие ко-



Р и с. 463

нусы по кривым линиям — *сферическим индикатрисам полукасательных и бинормалей* пространственной кривой линии.

Длины дуг индикатрис определяют в соответствующем масштабе величины (в радианах) углов α поворота полукасательной и углов β поворота соприкасающейся плоскости.

Измеряя длины дуг s заданной пространственной кривой линии и соответствующие им углы α смежности и β кручения, построим графики зависимостей $\alpha = f(s)$ и $\beta = F(s)$. Такие зависимости называют *уравнениями пространственной кривой линии в естественных координатах*.

Из графика зависимости $\alpha = f(s)$ можно определить величины отношений $\frac{\Delta s}{\Delta \alpha}$ для ряда точек пространственной кривой линии.

Величину $r = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta \alpha}$ называют *радиусом кривизны* пространственной кривой линии в данной точке. Это — радиус соприкасающейся с пространственной кривой линией окружности, проходящей через три бесконечно близкие точки кривой.

Центр дуги этим радиусом лежит на главной нормали и является центром кривизны пространственной кривой линии в данной точке.

Величину $k_1 = \frac{1}{r} = \frac{\Delta \alpha}{\Delta s}$ называют *первой кривизной* пространственной кривой линии в данной точке.

Из графика зависимости $\beta = F(s)$ можно определить величины отношений $\frac{\Delta s}{\Delta \beta}$ для ряда точек пространственной кривой линии.

Величину $p = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta \beta}$ называют *винтовым параметром* пространственной кривой линии в данной точке.

Величину $k_2 = \frac{1}{p} = \frac{\Delta \beta}{\Delta s}$ называют *кривизной кручения* (второй кривизной) пространственной кривой линии в данной точке.

Кривизна кручения дает возможность определять «быстроту» отхода кривой от соприкасающейся плоскости.

Пространственные кривые линии разделяют на кривые линии п р а в о г о и л е в о г о х о д а.

Если смотреть по направлению полукасательной прямой, будем видеть, что соприкасающаяся плоскость поворачивается по ходу часовой стрелки, а пространственная кривая является линией правого хода (положительного винтового параметра).

Если плоскость поворачивается против хода часовой стрелки, то кривая линия будет л е в о г о хода (отрицательного винтового параметра).

Итак, вид и положение пространственной кривой линии определяются однозначно, если она задана уравнениями $\alpha = f(s)$ и $\beta = F(s)$ в естественных координатах при наличии некоторых начальных условий: положения начальной точки кривой, направления начальных полукасательной и главной нормали и хода кривой линии. Эти условия определяют начальное положение трехгранника Френе пространственной кривой линии.

При движении трехгранника Френе плоскость каждой его грани занимает последовательный ряд положений, которыми намечаются три семейства плоскостей.

Обертывающей поверхностью семейства соприкасающихся плоскостей пространственной кривой линии является ее к а с а т е л ь н ы й торс, его образующие — касательные к кривой линии, которая служит ребром возврата торса.

Обертывающей поверхностью семейства спрямляющих плоскостей является с п р я м л я ю щ и й торс кривой линии.

Пространственная кривая линия лежит на спрямляющем ее торсе, так как с каждой спрямляющей плоскостью семейства она имеет общую точку и каждая спрямляющая плоскость содержит в себе касательную к кривой.

Обертывающей поверхностью семейства нормальных плоскостей кривой линии является ее п о л я р н ы й торс.

КРИВИЗНА ОРТОГОНАЛЬНОЙ ПРОЕКЦИИ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КРИВОЙ ЛИНИИ

§87

Степень искривленности пространственной кривой линии в рассматриваемой точке определяется кривизной кривой в этой точке. Можно установить зависимость между радиусом R кривизны пространственной кривой линии в заданной точке и радиусом r кривизны ортогональной проекции этой кривой на плоскость.

Пусть некоторая пространственная кривая линия AB в точке C имеет радиус кривизны R (рис. 464). Построим для этой точки соприкасающуюся плоскость Q и укажем направление касательной, главной нормали и бинормали.

Кривую линию ортогонально проецируем на плоскость проекций H. Угол между соприкасающейся плоскостью и плоскостью проекций обозначим ε; угол между касательной t_C и плоскостью H будет ϕ.

Проведем касательную t_E к данной кривой под бесконечно малым углом $\Delta\alpha$ к касательной t_C. Проекциями этих касательных являются касательные к проекции кривой; угол $\Delta\alpha_1$ между ними бесконечно малый.

Проведем прямую KD параллельно плоскости H и пересекающую две касательные. Проекцией ее является kd. Треугольники CKD и ckd в пределе рассматриваем как равнобедренные.

Площади их соответственно равны:

$$F = \frac{1}{2}(CD)^2 \cdot \Delta\alpha, \qquad f = \frac{1}{2}(cd)^2 \cdot \Delta\alpha_1.$$

Между площадями F и f треугольников существует зависимость:

$$f = F \cdot \cos\varepsilon$$

Подставляя данные для f и F, имеем

$$\frac{1}{2}(cd)^2 \cdot \Delta\alpha_1 = \frac{1}{2}(CD)^2 \cdot \Delta\alpha \cdot \cos\varepsilon.$$

Учитывая, что $cd = CD \cdot \cos\phi$, получаем

$$\frac{1}{2}(CD)^2 \cdot \cos^2\phi \cdot \Delta\alpha_1 = \frac{1}{2}(CD)^2 \cdot \Delta\alpha \cdot \cos\varepsilon$$

или

$$\cos^2\phi \cdot \Delta\alpha_1 = \Delta\alpha \cdot \cos\varepsilon,$$

откуда

$$\Delta\alpha_1 = \frac{\cos\varepsilon}{\cos^2\phi} \cdot \Delta\alpha.$$

Бесконечно малые хорды Δs кривой AB и Δs_1 ее проекции ab можно выразить зависимостью:

$$\Delta s_1 = \Delta s \cdot \cos\phi.$$

Величина отношения:

$$\frac{\Delta s_1}{\Delta\alpha_1} = \frac{\Delta s \cdot \cos\phi \cdot \cos^2\phi}{\Delta\alpha \cdot \cos\varepsilon}$$

Переходя к пределу, имеем

$$r_k = R_k \cdot \frac{\cos^3\phi}{\cos\varepsilon}.$$

Полученная зависимость показывает, что радиус кривизны в какой-либо точке проекции пространственной кривой линии равен радиусу кривизны в соответствующей точке самой кривой линии, умноженному на куб косинуса угла наклона касательной кривой линии к плоскости проекций и деленному на косинус угла между плоскостью проекций и соприкасающейся плоскостью кривой линии.

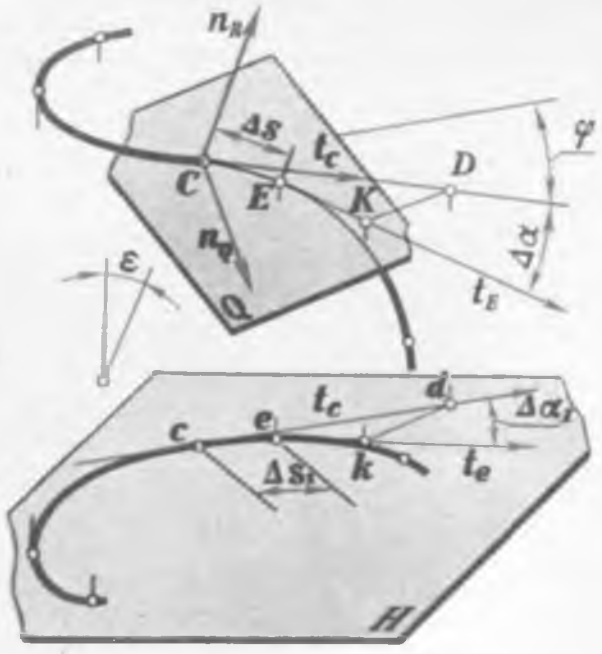


Рис. 464

§88 КОНИЧЕСКАЯ И ПОЛНАЯ КРИВИЗНА ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КРИВОЙ ЛИНИИ

Установим зависимость, которая существует между бесконечно малыми углами между образующими, нормалями и радиусами направляющей окружности конуса вращения.

На рис. 465 показан конус вращения, образующие которого составляют с осью угол δ. Здесь SC, SD, ... — образующие конуса, CM, DM, ... — нормали (внутренние) конуса и OC и OD — радиусы направляющей окружности.

Обозначим: α — угол между образующими конуса, β — угол между его нормалями и γ — угол поворота образующей вокруг оси конуса. Тогда, учитывая бесконечно малые углы, получаем зависимости:

$$\Delta s = R \cdot \Delta\alpha = \rho \cdot \Delta\beta = r \cdot \Delta\gamma.$$

Имея $\rho = R \cdot \operatorname{tg}\delta$ и $r = R \cdot \sin\delta$, после подстановок получаем

$$\Delta s = R \cdot \Delta\alpha = R \cdot \operatorname{tg}\delta \cdot \Delta\beta = R \cdot \sin\delta \cdot \Delta\gamma.$$

Откуда

$$\frac{\Delta\beta}{\Delta\alpha} = \operatorname{ctg}\delta \quad \text{и} \quad \frac{\Delta\gamma}{\Delta\alpha} = \operatorname{cosec}\delta.$$

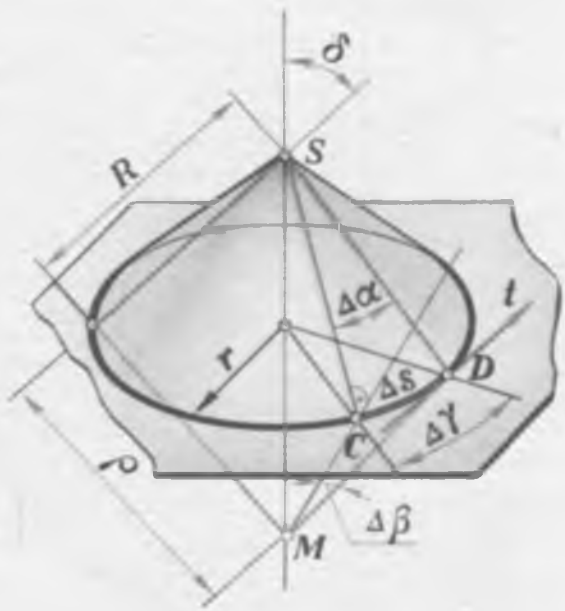


Рис. 465

Отношение $\frac{\Delta\beta}{\Delta\alpha} = \operatorname{ctg}\delta = k_3$ называют *конической кривизной* конуса вращения, которая равна котангенсу угла наклона образующей конуса к оси вращения.

Пользуясь выражениями величин $\frac{\Delta\beta}{\Delta\alpha}$ и $\frac{\Delta\gamma}{\Delta\alpha}$ и учитывая, что $\operatorname{ctg}^2\delta + 1 = \operatorname{cosec}^2\delta$, получаем

$$\left(\frac{\Delta\gamma}{\Delta\alpha}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\Delta\beta}{\Delta\alpha}\right)^2, \text{ или } \Delta\gamma^2 = \Delta\alpha^2 + \Delta\beta^2.$$

Определим кривизну преобразования пространственной кривой линии при развертке ее спрямляющего торса. Используем полученную зависимость $r = R \cdot \frac{\cos^3\phi}{\cos\varepsilon}$, считая, что в общей точке пространственной кривой линии и ее преобразования (при развертке спрямляющего ее торса на касательную его плоскость) кривизна преобразования равна кривизне проекции пространственной кривой линии на эту касательную плоскость.

Для этого случая $\phi = 0$ и $\varepsilon = 90°$, откуда после подстановки $r = \infty$. Последнее показывает, что преобразованием кривой линии при развертке ее спрямляющего торса является прямая линия.

Кривые линии на торсе, имеющие при его развертке преобразованиями прямые линии, называют *геодезическими линиями торса*.

Очевидно, кратчайшее расстояние между двумя точками, взятыми на торсе, и измеряемое по поверхности торса, надо измерять по соответствующей геодезической линии.

Пространственная кривая линия, таким образом, является геодезической линией ее спрямляющего торса.

Рассмотрим взаимное расположение вспомогательных конусов, сопровождающих кривую линию торсов — касательного, спрямляющего и полярного.

Предположим, что при вершине S построен вспомогательный конус касательного

торса некоторой пространственной кривой линии (рис. 466). Этот конус пересекается по кривой линии AB произвольно расположенной плоскостью Q. Рассмотрим конус как поверхность, огибающую семейство плоскостей, из которого каждая проходит через вершину конуса и параллельна соответствующей соприкасающейся плоскости кривой линии. Образующие этого конуса параллельны полукасательным кривой линии.

Плоскости, проходящие через образующие конуса и нормальные к его поверхности, параллельны соответствующим спрямляющим плоскостям кривой линии и проходят через вершину конуса. Для этого семейства плоскостей огибающей поверхностью является некоторая коническая поверхность с вершиной S. Она должна служить вспомогательным конусом спрямляющего торса кривой линии, а образующие этого конуса будут параллельны образующим спрямляющего торса. Как показано на рис. 466, вспомогательный конус спрямляющего торса пересекается плоскостью Q по некоторой кривой линии EF.

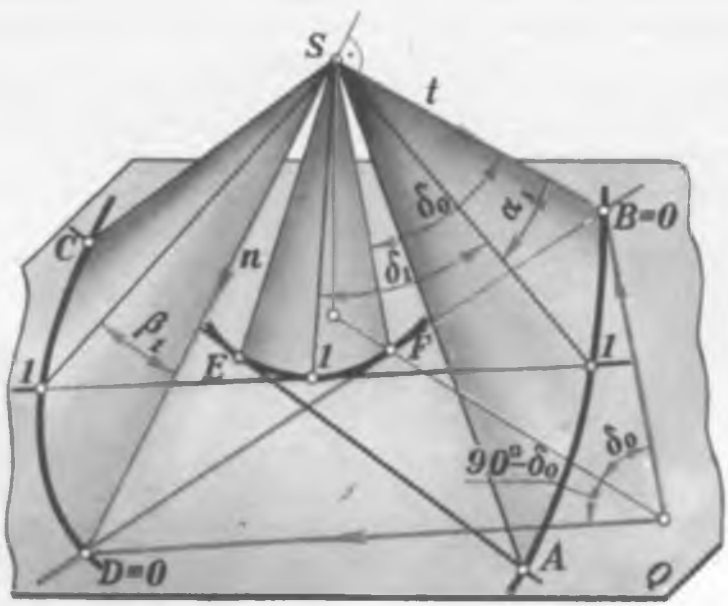
Выше указано, что бинормали пространственной кривой линии имеют направления внутренних нормалей направляющего конуса кривой линии. Геометрическим местом прямых линий, проведенных через вершину конуса S параллельно бинормалям кривой линии, является коническая поверхность, которая служит вспомогательным конусом полярного торса кривой линии.

Вспомогательный конус полярного торса пересекается плоскостью Q по кривой линии CD. Его образующие перпендикулярны к соответствующим образующим вспомогательного конуса касательного торса и лежат в касательных плоскостях к вспомогательному конусу спрямляющего торса кривой линии.

Пространственная кривая линия не лежит на ее полярном торсе.

Так как касательные к пространственной кривой линии всегда направлены перпендикулярно к нормальным плоскостям, пространственную кривую линию можно рассматривать как траекторию точки нормальной плоскости, когда эта нормальная плоскость обкатывает без скольжения полярный торс кривой линии.

При спироидальном движении трехгранника Френе неизменно с ним связанная нормальная плоскость катится по полярному торсу со скольжением, одновременно



Р и с. 466

вращаясь на углы β вокруг образующих полярного торса и вокруг полукасательной.

Образующую полярного торса, вокруг которой при качении поворачивается нормальная плоскость, называют *осью кривизны* кривой линии в данной ее точке.

Полярный торс, таким образом, является геометрическим местом осей кривизны пространственной кривой линии. Оси кривизны, вокруг которых поворачивается нормальная плоскость, проходят через центры кривизны кривой линии.

Образующие полярного торса параллельны бинормалям кривой линии и проходят через центры кривизны.

Для осуществления спироидального движения трехгранника Френе можно использовать или касательный торс пространственной кривой линии, или ее полярный торс. Это движение трехгранника можно получить, пользуясь спрямляющим торсом кривой линии. В этом случае спрямляющая плоскость кривой линии должна скользить по спрямляющему торсу.

При скольжении прямая линия касания спрямляющей плоскости спрямляющего торса или занимает положения, параллельные самой себе (если спрямляющим торсом пространственной кривой линии является цилиндр), или получает повороты вокруг точек, находящихся на ребре возврата спрямляющего торса. Во всех случаях спрямляющая плоскость скользит также и вдоль этой прямой линии.

Рассмотрим образование вспомогательных конусов касательного и полярного торсов. Предположим, что вспомогательный конус спрямляющего торса уже построен (рис. 466). В касательной его плоскости BSD, параллельной спрямляющей плоскости кривой линии в начальной ее точке, проведем из вершины S линии SB и SD, параллельные начальным полукасательной и бинормали.

Угол, который составляет прямая линия SB, параллельная начальной полукасательной, с начальной образующей вспомогательного конуса спрямляющего торса, обозначим δ_0. Касательную плоскость BSD перемещаем по вспомогательному конусу спрямляющего торса. Намеченные в этой плоскости прямые линии занимают положения, параллельные полукасательным и бинормалям кривой линии, и геометрическими местами их являются вспомогательные конусы касательного и полярного торсов.

Такой возможный способ образования вспомогательных конусов касательного и полярного торсов позволяет рассматривать вспомогательный конус касательного торса как составной, состоящий из бесконечно большого числа бесконечно малых частей конусов вращения. Оси конусов вращения совпадают с образующими вспомогательного конуса спрямляющего торса, а углы δ наклона их образующих к осям вращения равны углам между соответствующими образующими вспомогательных конусов касательного и спрямляющего торсов.

Бесконечно малые углы поворота образующих этих слагаемых конусов вокруг их осей равны бесконечно малым углам между спрямляющими плоскостями в двух бесконечно близких точках кривой линии. Углы между спрямляющими плоскостями измеряются углами между главными нормалями. Обозначим эти углы γ.

Угол $\Delta\gamma$ между смежными главными нормалями называют *углом полной кривизны*.

Для каждого из слагаемых конусов вращения можно применить полученные выше зависимости, относящиеся к конусу вращения:

$$\Delta\gamma^2 = \Delta\alpha^2 + \Delta\beta^2$$

Эту зависимость называют уравнением *Ланкрэ*. Она может быть сформулирована в виде следующей теоремы: *квадрат угла полной кривизны равен сумме квадратов углов смежности и кручения*.

Делим обе части приведенного уравнения на $(\Delta s)^2$:

$$\left(\frac{\Delta\gamma}{\Delta s}\right)^2 = \left(\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\beta}{\Delta s}\right)^2$$

или $k^2 = k_1^2 + k_2^2$.

Это равенство, где $\frac{\Delta\gamma}{\Delta s} = k$ называют *полной кривизной* кривой в данной точке, выражает собою теорему: *квадрат полной*

кривизны кривой в данной точке равен сумме квадратов ее первой кривизны и кривизны кручения в этой точке.

Коническая и полная кривизны имеют большое значение при исследовании пространственных кривых линий.

РАЗВЕРТКИ ПОВЕРХНОСТЕЙ ТОРСОВ, СОПРОВОЖДАЮЩИХ ПРОСТРАНСТВЕННУЮ КРИВУЮ ЛИНИЮ

§89

Пространственная кривая линия, как уже известно, может быть образована точкой нормальной плоскости, когда эта плоскость катится без скольжения по полярному торсу. Перпендикуляры, опущенные из этой точки на образующие, вокруг которых происходят повороты нормальной плоскости, пересекают образующие в центрах кривизны.

Когда нормальная плоскость обкатывает весь полярный торс, на этой плоскости получается отпечаток торса в виде его развертки и отпечаток перпендикуляров, опущенных из точки на образующие полярного торса. Геометрическим местом точек пересечения перпендикуляров образующими (центров кривизны) является некоторая кривая линия — подера преобразования в развертке ребра возврата полярного торса.

Подёрой кривой линии, как известно, называют геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из какой-либо точки (полюса) на касательные к взятой кривой линии. Нормали подеры делят пополам отрезки, соединяющие полюс с соответствующей точкой кривой линии.

Построим развертку полярного торса пространственной кривой линии (рис. 467).

Пусть кривая задана уравнениями $\alpha = f(s)$ и $\beta = F(s)$ в естественных координатах и некоторыми начальными условиями, определяющими вид и положение кривой, а также характер движения ее подвижного трехгранника.

Из точки O (полюса) проводим пучок прямых линий, составляющих с начальной прямой углы $\beta_1, \beta_2, \ldots$, и на этих прямых откладываем соответствующие величины радиусов кривизны ряда точек кривой линии.

Величины R радиусов кривизны можно получить построениями из заданного графика $\alpha = f(s)$ уравнения кривой линии в естественных координатах по зависимости $R = \frac{\Delta s}{\Delta \alpha}$. Эти построения намечают кривую линию EF — подеру преобразования MN ребра возврата полярного торса.

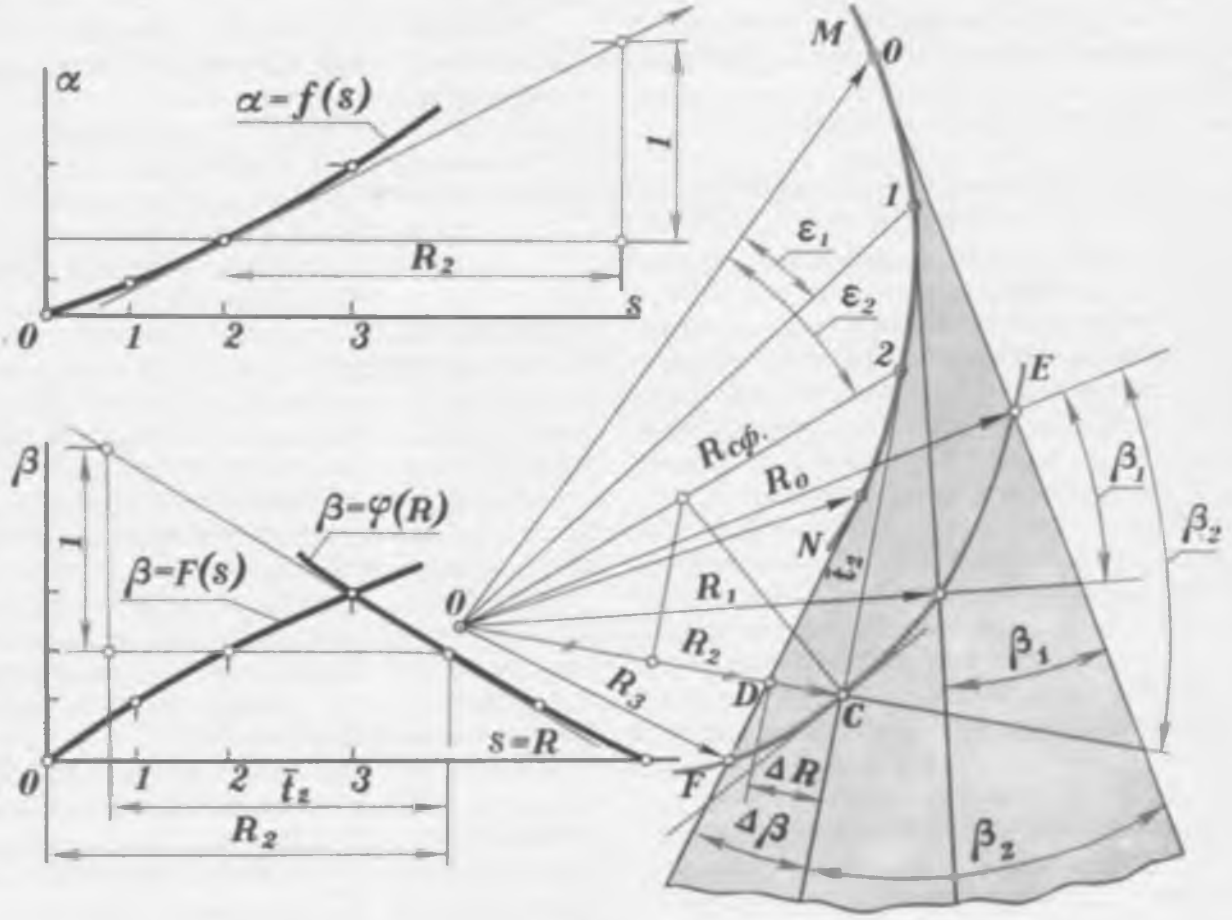
Точки, определяющие кривую линию MN, можно получить двумя способами. Первый из них основан на указанном выше свойстве подеры.

Построим нормали подеры и найдем точки их пересечения соответствующими перпендикулярами, восставленными к радиусам кривизны из их середин. Прямые линии, проходящие через полюс и найденные точки, пересекают преобразования образующих полярного торса в точках, принадлежащих искомой кривой линии MN.

Для второго способа рассмотрим треугольник $2CD$, у которого угол $\Delta\beta$ бесконечно малый. Этот треугольник прямоугольный с катетом $CD = \Delta R$. Из этого треугольника в пределе имеем: $\bar{t}_2 = 2C = \frac{\Delta R}{\Delta \beta}$.

На рис. 467 имеется график второго уравнения в естественных координатах $\beta = F(s)$ кривой линии. По оси абсцисс откладываем вместо величин s величины соответствующих им радиусов кривизны, а ординаты оставим прежними. Таким построением намечается график зависимости $\beta = \phi(R)$. Пользуясь этим графиком, путем построения касательных можно определить ряд величин $\bar{t} = \frac{\Delta R}{\Delta \beta}$, равных расстояниям от точек подеры EF до соответствующих им точек преобразования ребра возврата полярного торса кривой линии MN.

Точки, лежащие на ребре возврата полярного торса, называют *центрами сферической кривизны* кривой линии в соответствующих ее точках, а отрезки, соединяющие точки пространственной кривой линии с центрами сферической кривизны, — *радиусами сферической кривизны* кривой линии в данных ее точках. Величина радиуса $R_{c\phi}$ сфе-



Р и с. 467

рической кривизны определяется, как это следует из чертежа, выражением

$$R_{c\phi} = \sqrt{R^2 + \bar{t}^2} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{\Delta R}{\Delta \beta}\right)^2}.$$

Угол поворота нормальной плоскости определяется углом α между полукасательными. Для бесконечно малого угла поворота $\Delta\alpha$ нормальной плоскости имеем в пределе $\Delta s = R \cdot \Delta\alpha = R_{c\phi} \cdot \Delta\varepsilon$, где ε — угол между радиусами сферической кривизны.

Отношение $\frac{\Delta\varepsilon}{\Delta s} = \frac{1}{R_{c\phi}} = k_4$ называют *сферической кривизной* пространственной кривой линии в данной ее точке.

Пространственную кривую линию можно рассматривать состоящей из бесконечно большого числа бесконечно малых дуг, описанных из центров сферической кривизны ее радиусами.

Сферу с центром и радиусом сферической кривизны называют *соприкасающейся сферой* пространственной кривой линии в данной ее точке.

Рассмотрим теперь построение развертки спрямляющего торса. Как уже известно, при развертке спрямляющего торса пространственной кривой линии ее преобразованием является прямая линия.

На рис. 468 показано построение развертки спрямляющего торса пространственной кривой линии. Здесь прямая линия AB является преобразованием заданной кривой линии.

Пользуясь сферическими индикатрисами образующих вспомогательных конусов касательного и спрямляющего торсов, определяем для ряда точек кривой линии величины углов α и δ. Тогда на основе графика урав-

нения $\alpha = f(s)$, входящего в задание, можно построить график зависимости $\delta = \Phi(s)$.

Откладывая на прямой AB от точки 0 длины дуг s и проводя из концов этих отрезков прямые линии под соответствующими углами δ к прямой AB, получаем ряд прямых линий, которые являются преобразованиями образующих спрямляющего торса.

Покажем, как можно построить точки, принадлежащие преобразованию ребра возврата спрямляющего торса. Рассмотрим бесконечно малый прямоугольный треугольник 124, сторона 42 которого равна $\bar{t}\Delta\delta$, где $\bar{t}$ — отрезок преобразования образующей торса, заключенный между точками ребра возврата и прямой AB, а угол 142 прямой.

Из этого треугольника имеем:

$$\bar{t} \cdot \Delta\delta = \Delta s \cdot \sin\delta,$$

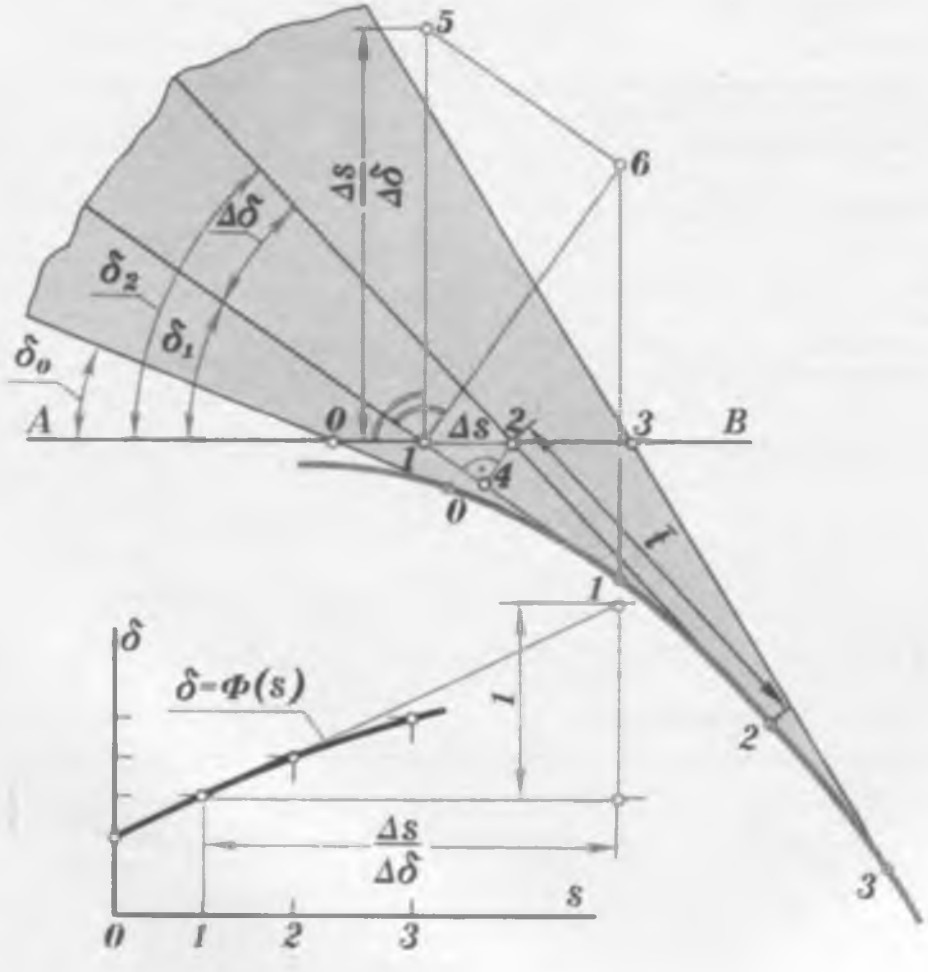
откуда, переходя к пределу, получим

$$\frac{\Delta s}{\Delta\delta} = \frac{\bar{t}}{\sin\delta},$$

где

$$\bar{t} = \frac{\Delta s}{\Delta\delta} \cdot \sin\delta$$

Полученное выражение показывает, что точку 1, принадлежащую преобразованию ребра возврата спрямляющего торса, можно построить как вершину параллелограмма 1561, одной диагональю которого служит



Р и с. 468

346 прямая *16*, перпендикулярная к преобразованию образующей торса, и одна сторона которого, перпендикулярная к преобразованию кривой линии, равна $\frac{\Delta s}{\Delta \beta}$.

Значения величин $\frac{\Delta s}{\Delta \beta}$ можно определить, как это показано, построениями, пользуясь графиком зависимости

$$\delta = \Phi(s).$$

§90 Виды пространственных кривых линий

Рассмотрим пространственные кривые линии особых видов — кривые, которые имеют или все три графика прямолинейными или часть их является прямолинеиными графиками в естественных координатах.

1. Цилиндрические винтовые линии — гелисы

У цилиндрической винтовой линии (гелисы) графики (рис. 469) ее уравнений в естественных координатах $\alpha = f(s)$ и $\beta = F(s)$ прямолинейные. Из этих графиков имеем:

$$\frac{\Delta \alpha}{\Delta s} = \operatorname{tg} \phi = k_1 = \text{const}$$

и

$$\frac{\Delta \beta}{\Delta s} = \operatorname{tg} \psi = k_2 = \text{const}.$$

Таким образом, для этой кривой линии кривизна k_1 и кривизна кручения k_2 постоянны для всех ее точек.

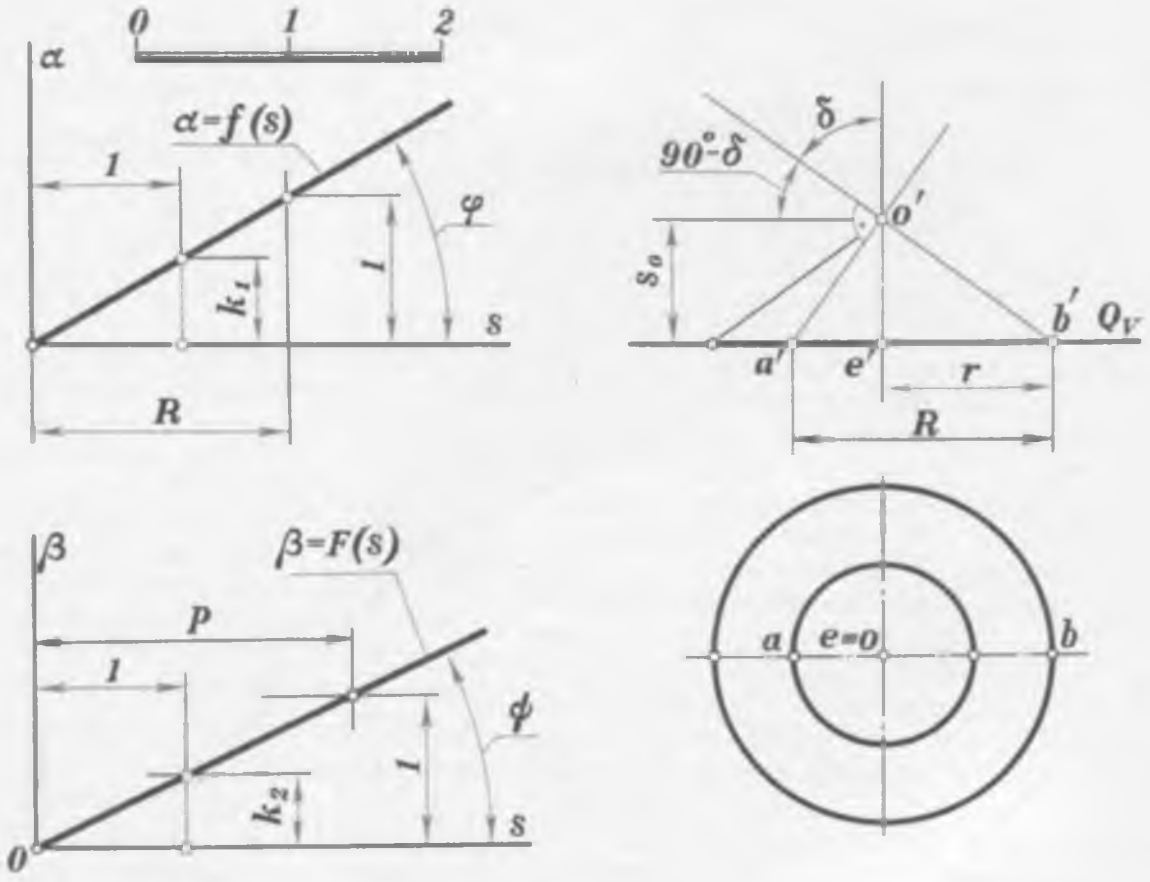


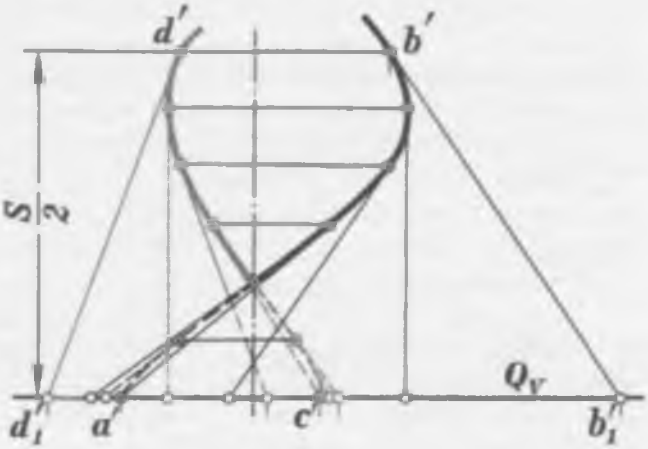
Рис. 469

перемещениям точки всегда соответствуют равные осевые перемещения, и наоборот.

Точка при ее движении по цилиндрической винтовой линии равномерно вращается вокруг ее оси и одновременно равномерно перемещается в направлении этой оси.

Выражение $S=\gamma r\operatorname{ctg}\delta$ после подстановки в него значений $r=\frac{k_1}{k^2}$ и $\operatorname{ctg}\delta=\frac{k_2}{k_1}$ принимает вид

$$S=\gamma\frac{k_1\cdot k_2}{k^2\cdot k_1}=\gamma\frac{k_2}{k^2}.$$



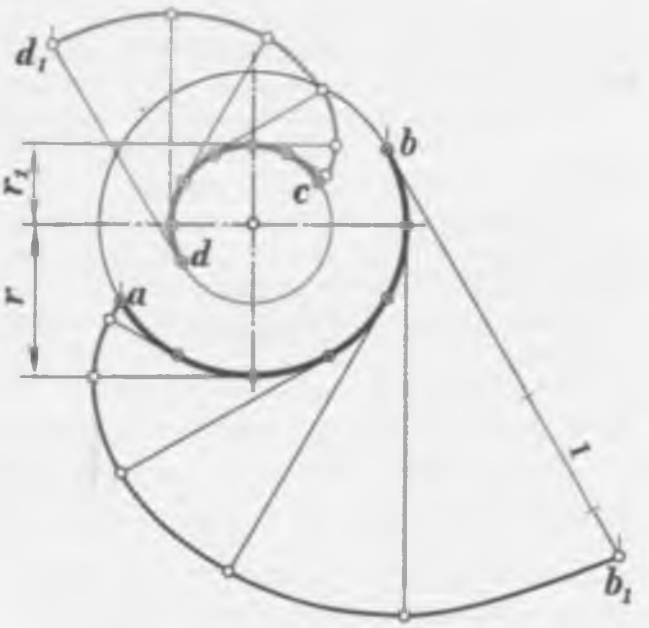


Рис. 470

Осевое перемещение, соответствующее угловому перемещению $\gamma=2\pi$, обозначим S. В этом случае $S=2\pi\frac{k_2}{k^2}$.

Величину S, как уже известно, называют *шагом* цилиндрической винтовой линии. Величину $\frac{S}{2\pi}=\frac{k_2}{k^2}=s_0$ называют *единичным шагом* цилиндрической винтовой линии.

Касательный торс гелисы (рис. 470) пересекается плоскостью Q_V по кривой линии ab_1, $a'b'_1$, горизонтальная проекция которой является эвольвентой окружности радиусом r.

Главные нормали поверхности, как прямые линии, перпендикулярные к соответствующим спрямляющим плоскостям, пересекаются осью винтовой линии и перпендикулярны к ней.

Откладывая на главных нормалях величины радиусов кривизны, получаем геометрическое место центров кривизны строящейся кривой линии тоже в виде цилиндрической винтовой линии, радиус спрямляющего цилиндра которой $r_1=R-r$.

После подстановки значений R и r величина r_1 получает выражение $r_1=\frac{k_2^2}{k_1\cdot k^2}$.

Покажем, что образующие торса-геликоида, ребром возврата которого служит кривая линия cd, $c'd'$, параллельны соответствующим бинормалям рассматриваемой цилиндрической винтовой линии.

Бинормали кривой линии ab, $a'b'$ наклонены, как указывалось, к плоскости Q_V под углом δ.

Для гелисы радиусом r имеем $S=2\pi r\cdot\operatorname{ctg}\delta$, аналогично для гелисы радиусом r_1 имеем $S=2\pi r_1\operatorname{ctg}\delta_1$, где δ_1 — угол наклона касательных гелисы к оси.

Из указанных зависимостей получаем

$$r\operatorname{ctg}\delta=r_1\operatorname{ctg}\delta_1,$$

откуда после подстановок значений

$$r=\frac{k_1}{k^2},\qquad r_1=\frac{k_2^2}{k_1\cdot k^2}\quad\text{и}\quad\operatorname{ctg}\delta=\frac{k_2}{k_1}$$

получаем

$$\frac{k_1}{k^2}\operatorname{ctg}\delta=\frac{k_2^2}{k_1\cdot k^2}\operatorname{ctg}\delta_1,$$

$$\operatorname{tg}\delta=\operatorname{ctg}\delta_1\quad\text{и}\quad\delta_1=90^\circ-\delta.$$

Из этого следует, что образующие торса-геликоида с ребром возврата cd, $c'd'$ наклонены так же, как и бинормали кривой ab, $a'b'$ к плоскости Q_V под углом δ. Поэтому нормальная плоскость кривой линии ab, $a'b'$ всегда содержит в себе соответствующую касательную к кривой линии cd, $c'd'$ и является, следовательно, касательной плоскостью кривой линии cd, $c'd'$. Таким образом, полярным торсом строящейся кривой линии является торс-геликоид.

Полярный торс пересекается плоскостью Q_V по кривой линии cd_1, $c'd'_1$, горизонтальная проекция которой является эвольвентой окружности cd.

Радиус кривизны R_1 цилиндрической винтовой линии cd, $c'd'$ равен радиусу кривизны кривой линии ab, $a'b'$.

Для определения радиуса кривизны кривой линии cd, $c'd'$ имеем выражение

$$r_1 = R_1 \cos^2(90^\circ - \delta_1) = R_1 \cos^2 \delta,$$

откуда

$$R_1 = \frac{r_1}{\cos^2 \delta}.$$

Подставляя в эту формулу значения

$$r_1 = \frac{k_2^2}{k_1 \cdot k^2}, \quad \cos^2 \delta = \frac{\operatorname{ctg}^2 \delta}{1 + \operatorname{ctg}^2 \delta} \text{ и } \operatorname{ctg} \delta = \frac{k_2}{k_1},$$

получаем

$$R_1 = \frac{1}{k_1} = R$$

Нормальная плоскость кривой линии cd, $c'd'$, перпендикулярная к касательной, наклонена к плоскости Q_V под углом $90^\circ - \delta$ и содержит бинормаль кривой линии.

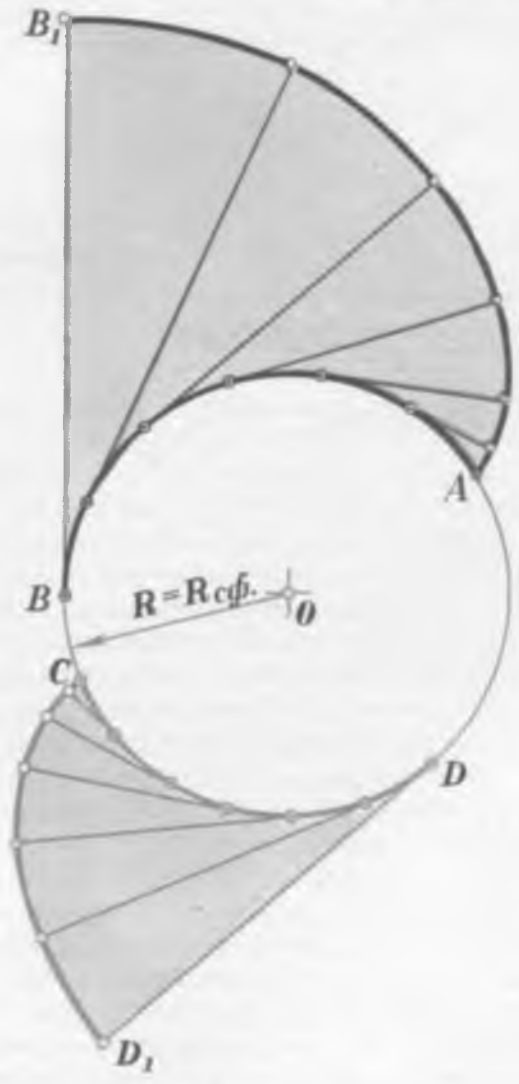
Бинормали кривой линии cd, $c'd'$ параллельны соответствующим касательным кривой линии ab, $a'b'$ и, следовательно, нормальные плоскости кривой линии cd, $c'd'$ являются касательными плоскостями кривой линии ab, $a'b'$.

Известно, что пространственная кривая линия может быть образована точкой нормальной ее плоскости, когда эта плоскость катится без скольжения по полярному торсу.

В рассматриваемом случае искомую гелису можно образовать точкой касательной плоскости ее полярного торса-геликоида, когда касательная плоскость катится по торсу без скольжения. Эта движущаяся точка всегда является центром кривизны кривой линии cd, $c'd'$. Касательный торс-геликоид кривой линии ab, $a'b'$ является, таким образом, полярным торсом-геликоидом кривой линии cd, $c'd'$.

Цилиндрические кривые линии, касательные торсы-геликоиды которых—взаимно полярные торсы-геликоиды, называют *взаимными гелисами*.

На рис. 471 показаны развертки касательного и полярного торсов-геликоидов. Преобразованиями их ребер возврата является окружность радиусом R, а преобразования-



Р и с. 471

ми кривых линий ab, $a'b'$ и cd, $c'd'$ пересечения этих торсов плоскостью Qv — кривые линии AB_1 и CD_1.

При построении кривых линий AB_1 и CD_1 на касательных к окружности радиусом R откладываются истинные величины отрезков образующих касательного и полярного торсов, ограниченных плоскостью Qv и ребрами возврата торсов.

В выражении для радиуса сферической кривизны

$$R_{c\phi} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{\Delta R}{\Delta \beta}\right)^2}$$

имеем $\frac{\Delta R}{\Delta \beta} = 0$, откуда радиус сферической кривизны $R_{c\phi}$ равен радиусу кривизны R. Следовательно, геометрическим местом центров сферической кривизны является ребро возврата cd, $c'd'$ полярного торса. Таким образом, у цилиндрической винтовой линии центры кривизны совпадают с центрами сферической кривизны.

2. Унополярные кривые линии. Эволюты пространственной кривой линии

Пространственные кривые линии, имеющие общий полярный торс, называют *унополярными*. Каждая точка нормальной плоскости пространственной кривой линии, катящейся без скольжения по полярному торсу, опишет одну из унополярных кривых линий.

На рис. 472 показана развертка полярного торса пространственной кривой линии на нормальную ее плоскость, точка C которой образует эту кривую линию. Точка C является центром подеры EF преобразования AB ребра возврата полярного торса.

Какая-либо точка нормальной плоскости, например, точка C_1, лежащая при данном положении нормальной плоскости на одной главной нормали с точкой C, описывает пространственную кривую линию, радиусы кривизны R_1 которой определяются расстояниями от точки C_1 до преобразований соответствующих образующих полярного торса. Главные нормали, бинормали и касательные унополярных кривых линий соответственно параллельны между собой.

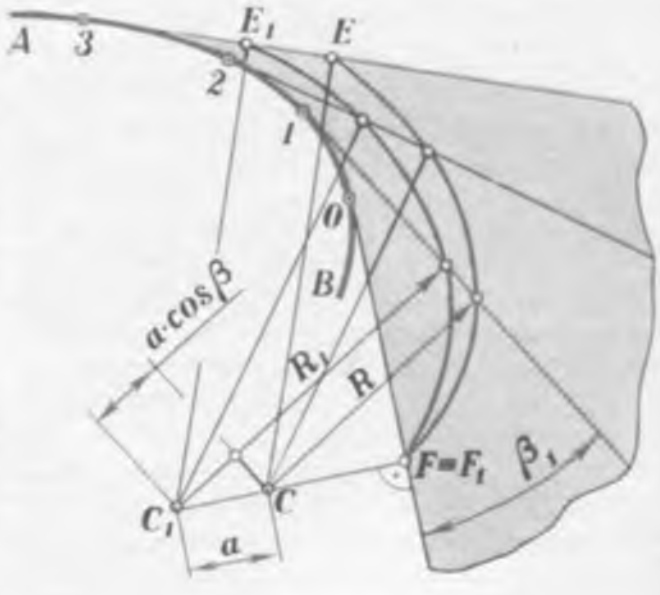
Унополярные кривые линии, таким образом, имеют всегда взаимно параллельные соответствующие ребра подвижных их трехгранников и, следовательно, одинаковые направляющие конуса сопровождающих их торсов.

Если построить по определенному заданию некоторую пространственную кривую линию, можно построить и кривую линию, с ней унополярную.

Из развертки полярного торса заданной кривой линии определим необходимые для построения расстояния между главными нормалями в соответствующих точках этих кривых линий, расстояния между центрами кривизны и величины радиусов кривизны.

Между радиусами кривизны заданной и унополярной кривых линий существует при взятом положении точки C_1 зависимость $R_1 = R + a \cdot \cos\beta$.

Пространственные кривые линии так же, как и плоские кривые линии, имеют эволюты. Каждая из пространственных кривых линий имеет бесконечно-большое число эволют, но они не являются геометрическими местами центров кривизны, как это имеет место для плоских кривых линий.



Р и с. 472

В нормальной плоскости, на которую произведена развертка полярного торса, через точку C, описывающую при качении этой плоскости рассматриваемую кривую линию, проведем прямую и будем ее считать преобразованием геодезической линии, взятой на полярном торсе.

При качении нормальной плоскости точка C описывает заданную кривую линию, а прямая катится без скольжения по геодезической линии полярного торса. Таким образом, эта геодезическая кривая линия полярного торса является эволютой рассматриваемой пространственной кривой линии. Таких эволют пространственной кривой линии, очевидно, можно наметить на полярном ее торсе произвольно много.

3. Линии одинакового ската

Линиями одинакового ската называют пространственные кривые, у которых все касательные составляют одинаковые углы с плоскостью. Касательными торсами этих кривых линий являются поверхности одинакового ската.

Цилиндрическая винтовая линия является линией одинакового ската. Линии одинакового ската, как и цилиндрические винтовые линии, имеют вспомогательные конусы касательного и полярного торсов в виде конусов вращения, а вспомогательный конус спрямляющего торса в виде прямой линии, являющейся осью указанных конусов вращения.

В отличие от цилиндрической винтовой линии, для линии одинакового ската графики уравнений $\alpha = f(s)$ и $\beta = F(s)$ не прямолинейные.

4. Сферические кривые линии

Геометрическим местом центров сферической кривизны пространственной кривой линии является, как известно, ребро возврата ее полярного торса. Рассматривая (рис. 467) развертку полярного торса пространственной кривой линии, устанавливаем, что у кривых линий, имеющих постоянный радиус сферической кривизны, ребром возврата полярного торса является или окружность, или точка. Для цилиндрической винтовой линии преобразованием ребра возврата ее полярного торса при его развертке является окружность радиусом $R = R_{c\phi}$.

Точки пространственной кривой линии, у которой полярным торсом является конус вращения, располагаются на сфере, радиус которой $R_{c\phi}$.

Сферическую пространственную кривую линию можно построить, если известны: радиус $R_{c\phi}$ сферической кривизны ее точек, вспомогательный конус спрямляющего ее торса, положение начальной точки, радиус кривизны R в начальной точке, ход и направление полукасательной в начальной точке.

Имея задание кривой линии и график ее уравнения $\alpha = f(s)$ в естественных координатах, применяя известные методы, можно построить в проекциях заданную сферическую кривую линию и все сопровождающие ее поверхности.

5. Косые круги

Косым кругом называется пространственная кривая линия, у которой уравнение $\alpha = f(s)$ в естественных координатах является линейным.

Предположим, что косой круг задан вспомогательным конусом его спрямляющего торса, ходом, начальным углом δ и графиком его уравнения в естественных координатах $\alpha = f(s)$. Из графика известным построением определяют величину радиуса кривизны R рассматриваемой кривой линии, которая сохраняется неизменной для всех точек кривой линии.

Преобразованием ребра возврата касательного торса строящейся кривой линии является (так как кривизна ребра возврата торса при его развертке не изменяется) окружность радиусом R, касательные которой являются преобразованиями образующих касательного торса. Расстояния от точки, описывающей кривую линию, до преобра-

зований образующих полярного торса равны соответствующим радиусам кривизны.

Таким образом, преобразованиями образующих полярного торса являются касательные прямые к окружности указанным радиусом R, которая служит преобразованием ребра возврата полярного торса.

Следовательно, кривая линия, являясь линией постоянной кривизны, имеет ребром возврата полярного ее торса также линию постоянной кривизны.

В рассматриваемой кривой линии радиус сферической кривизны остается для всех точек ее постоянным и равным радиусу R кривизны кривой линии и, следовательно, центр кривизны кривой всегда совпадает с центром сферической кривизны.

Имея в задании рассматриваемой кривой линии вспомогательный конус ее спрямляющего торса, ход, начальный угол δ_0 и линейный график уравнения $\alpha = f(s)$ в естественных координатах, можно известными методами построить в проекциях заданную кривую линию и сопровождающие ее поверхности.

6. Кривые линии постоянного винтового параметра

Рассмотрим пространственные кривые линии, у которых графики уравнений $\beta = F(s)$ в естественных координатах прямолинейные. Из графика зависимости $\beta = F(s)$ построением определяем величину p винтового параметра, которая остается постоянной для всех точек кривой линии.

Кривую линию постоянного винтового параметра удобно строить, когда в ее задание входят вспомогательный конус ее спрямляющего торса, ход, начальный угол δ_0 и линейный график $\beta = F(s)$ ее уравнения в естественных координатах.

Пользуясь вспомогательным конусом ее спрямляющего торса, строят вспомогательные конусы касательного и полярного торсов и построением сферических индикатрис образующих этих конусов определяют ряд соответствующих друг другу величин углов α и β. Дальнейшие построения кривой линии постоянного винтового параметра производятся обычным методом.

7. Соприкасающиеся гелисы

Рассмотренные пространственные кривые линии имеют прямолинейными некоторые из графиков зависимостей: $\alpha = f(s)$, $\beta = F(s)$, $\delta = \phi(s)$.

Кривые линии общего вида имеют графики указанных зависимостей криволинейными. Рассмотрим криволинейные графики уравнений $\alpha = f(s)$ и $\beta = F(s)$ пространственной кривой линии произвольного вида как предельные, состоящие из бесконечно большого числа бесконечно малых их хорд, а соответствующий им криволинейный график уравнения $\delta = \phi(s)$ как предельный, состоящий из бесконечно большого числа бесконечно малых ступеней.

Приведенные соображения позволяют рассматривать пространственную кривую линию как предельную кривую линию, состоящую из бесконечно большого числа бесконечно малых дуг цилиндрических винтовых линий.

Имея для заданной точки пространственной кривой линии известными величины кривизн k_1 и k_2, можно определить радиус $r = \frac{k_1}{k^2}$ и винтовой параметр $p = \frac{1}{k_2}$ гелисы, которая в данной точке кривой линии входит слагаемой бесконечно малой дугой.

Такие цилиндрические винтовые линии называют *соприкасающимися гелисами* пространственной кривой линии в данной ее точке. Ось соприкасающейся гелисы называют винтовой осью пространственной кривой линии в данной ее точке.

Откладывая на радиусах кривизны от точек кривой линии отрезки, равные радиусам соприкасающихся гелис, получаем геометрическое место точек — кривую линию. Через точки этой кривой линии проходят оси соприкасающихся гелис, параллельные соответствующим образующим спрямляющего торса кривой линии.

Геометрическим местом винтовых осей пространственной кривой линии, а также геометрическими местами ее бинормалей и главных нормалей являются некоторые линейчатые неразвертывающиеся (косые) поверхности.

8. Кривые линии Бертрана

Пространственные кривые линии называют *эквидистантными*, если они имеют общие главные нормали и расстояния между их соответствующими точками, измеряемые по главным нормалям, остаются постоянными.

Некоторые из пространственных кривых линий допускают построения эквидистант. Пространственные кривые линии этой группы называют *кривыми линиями Бертрана**.

Эквидистантные кривые линии имеют общие главные нормали и, следовательно, общий направляющий конус спрямляющих их торсов.

Кривая линия, представляющая собой геометрическое место центров кривизны пространственной кривой линии, располагается на полярном торсе и является в развертке подерой ребра возврата полярного торса.

Две эквидистантные пространственные кривые линии имеют общим геометрическое место их центров кривизны. Отсюда можно сделать вывод, что полярные торсы эквидистант пересекаются между собой по кривой линии — геометрическому месту центров их кривизн.

Нормальные плоскости эквидистант катятся по соответствующему полярному торсу, пересекаясь все время между собой по главным нормалям кривых линий.

Линию центров эквидистант, учитывая ротативный метод образования пространственных кривых линий, можно получить качением без скольжения касательной плоскости по указанному выше торсу с ребром возврата полярных торсов эквидистант.

Аналитические исследования пространственных эквидистант позволяют установить, что для кривой линии, имеющей эквидистанту при $\phi = \text{const}$ и $a = \text{const}$, справедлива зависимость

$$k_1 \cdot \sin\phi + k_2 \cos\phi = \frac{\sin\phi}{a},$$

которую представим в виде

$$a + a \cdot \operatorname{ctg}\phi k_3 = R,$$

где k_3 — коническая кривизна кривой линии;

R — радиус кривизны;

a — величина скольжения.

Кроме этого, установлено, что:

произведение винтовых параметров эквидистант в соответствующих точках является постоянной величиной, равной $\frac{\sin^2\phi}{a^2}$;

отношение длины дуги Δs одной эквидистанты к длине дуги $\Delta\sigma$ сферической индикатрисы бинормалей другой эквидистанты постоянно и равно

$$\frac{\Delta s}{\Delta\sigma} = \frac{a}{\sin\phi}.$$

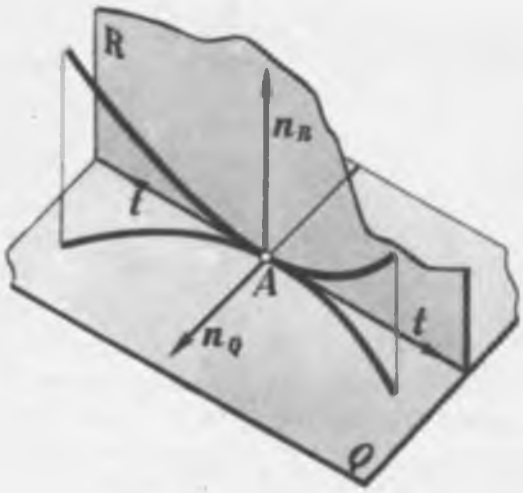
При построении эквидистанты для заданной пространственной кривой линии сначала следует проверить справедливость указанной выше линейной зависимости при намеченных значениях величин ϕ и a.

У цилиндрических винтовых линий величины k_3 и a являются постоянными и, следовательно, эти линейные зависимости для них всегда выполняются. Поэтому цилиндрические винтовые линии имеют неограниченное число эквидистант.

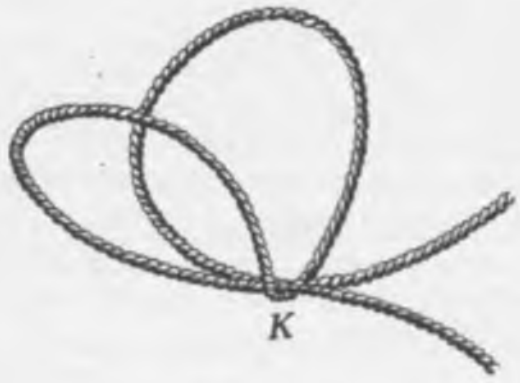
§91 МОНОТОННЫЕ И СОСТАВНЫЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ КРИВЫЕ ЛИНИИ. ВЕРШИНЫ КРИВЫХ ЛИНИЙ

Пространственные кривые линии, у которых величины s, α и β непрерывно возрастают, называют *монотонными*. Монотонная пространственная кривая линия не может содержать в себе точек, для которых величина угла δ является кратной $\frac{\pi}{2}$. Это следует учитывать при построении составных пространственных кривых линий, состоящих из последовательного ряда дуг

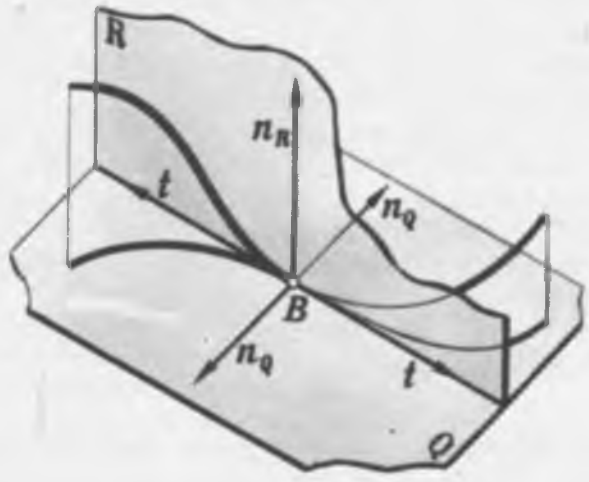
* Бертран, Жозеф Луи Франсуа (1822—1900) — французский математик.



Р и с. 473



Р и с. 474



Р и с. 475

монотонных пространственных кривых линий. Слагаемые монотонные кривые линии в этом случае называют *сторонами* составной пространственной кривой линии, а точки стыка сторон — *вершинами* пространственной кривой.

Принимаем, что в вершине — точке стыка сторон — полукасательные сторон располагаются на одной прямой линии, а соприкасающиеся плоскости сторон в общей их точке совпадают. Точки стыка являются начальными точками сторон.

Вершину называют *регулярной*, если в точке стыка полукасательные сторон имеют противоположные направления, центры кривизны сторон совпадают и винтовые параметры сторон равны.

Составную пространственную кривую линию, имеющую только регулярные вершины, называют *регулярной пространственной кривой линией*.

Вершины составных пространственных кривых линий, отличные от регулярных, называют *иррегулярными вершинами* пространственной кривой линии.

Вершину составной пространственной кривой называют *двойной*, если в точке стыка сторон полукасательные сторон имеют противоположные направления, главные нормали имеют одно направление, а радиусы кривизны не равны; также не равны и величины винтовых параметров.

На рис. 473 показана пространственная кривая линия, которая в точке *A* имеет двойную вершину.

Полукасательные сторон в точке *A* располагаются на одной прямой и направлены в разные стороны. Главные нормали сторон в точке стыка направлены односторонне. Центры кривизны сторон в точке их стыка не совпадают.

При образовании пространственных кривых линий могут быть и характерные точки в виде вершины петли.

Пространственная кривая линия с вершиной петли в точке *K* показана на рис. 474.

На рис. 475 показана пространственная кривая линия, имеющая иррегулярную вер-

шину в точке B. Полукасательные сторон в точке их стыка, а также главные нормали направлены в разные стороны. Положение главных нормалей в точке стыка показывает, что полукасательные сторон получают приращения углов их поворота α различных знаков.

Обе стороны пространственной кривой линии в точке стыка располагаются выше соприкасающейся плоскости, но по разные стороны их общей спрямляющей плоскости.

Вершину B называют *вершиной перегиба первого рода*.

На рис. 476 показана пространственная кривая линия с иррегулярной вершиной в точке C. Полукасательные сторон в точке стыка направлены так же, как и главные нормали — в разные стороны. Дуги кривой линии в окрестности точки стыка расположены по разные стороны соприкасающейся и спрямляющей плоскостей. Положение главных нормалей в точке стыка сторон показывает, что полукасательные сторон получают приращения углов их поворота α с различными знаками.

Таким образом, в рассматриваемом случае координаты α и β пространственной кривой линии AB в точке C получают отрицательные приращения.

Вершину C называют *вершиной перегиба второго рода*.

Рассмотрим вершины, у которых полукасательные в точке стыка сторон имеют одно направление.

На рис. 477 показана пространственная кривая линия с иррегулярной вершиной в точке D. Полукасательные сторон имеют одно направление, а главные нормали сторон в точке стыка — разные направления.

Дуги кривой линии расположены по разные стороны соприкасающейся и спрямляющей плоскостей. Положение главных нормалей показывает, что полукасательные сторон получают приращения углов их поворота α одного знака.

Вершину D называют *вершиной острия первого рода*.

На рис. 478 показана кривая линия, имеющая в точке E иррегулярную вершину.

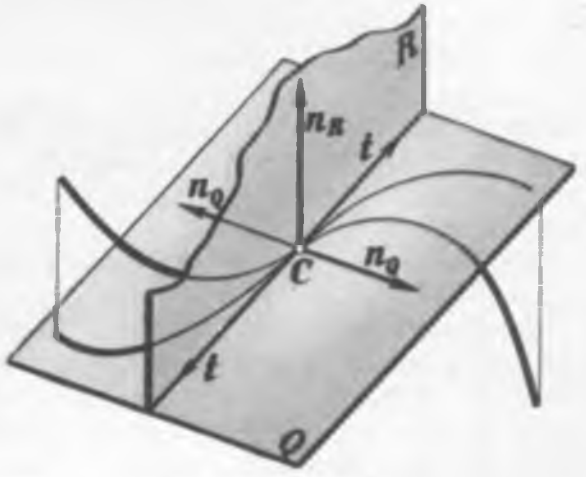


Рис. 476

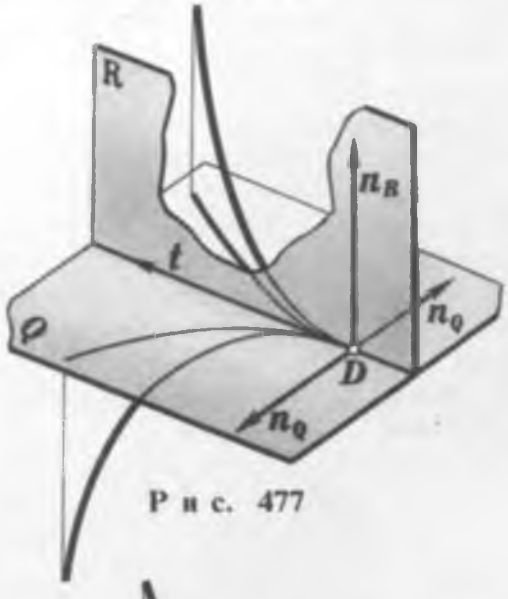


Рис. 477

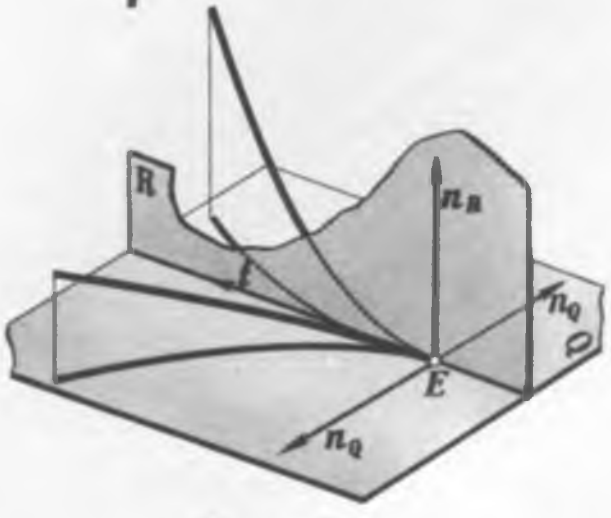


Рис. 478

356 Полукасательные сторон в точке E имеют одно направление, а главные нормали — разные направления. Дуги кривой в окрестности точки стыка располагаются по одну сторону соприкасающейся плоскости, но по разные стороны спрямляющей плоскости.

Вершину E называют *вершиной острия второго рода*.

На рис. 479 показана пространственная кривая линия с иррегулярной вершиной в точке F. Полукасательные и главные нормали сторон в точке стыка направлены в одну сторону. Здесь дуги кривой в окрестности точки E располагаются по одну сторону соприкасающейся плоскости и по одну сторону спрямляющей плоскости.

Вершину F называют *вершиной клюва первого рода*.

На рис. 480 показана пространственная кривая линия с иррегулярной вершиной в точке G. Полукасательные и главные нормали сторон в начальной их точке имеют одинаковые направления. Дуги кривой в точке стыка располагаются по разные стороны соприкасающейся плоскости и по одну сторону спрямляющей плоскости.

Вершину G называют *вершиной клюва второго рода*.

Составные пространственные кривые линии, имеющие иррегулярные вершины, называют *иррегулярными пространственными кривыми линиями*.

Иррегулярные пространственные кривые линии могут быть замкнутыми и незамкнутыми.

Пространственные кривые линии, как линии пересечения поверхностей, обычно содержат в себе иррегулярные вершины. Рассмотрим некоторые пространственные кривые линии пересечения поверхностей. Заметим, что прямую линию, касательную к кривой линии пересечения поверхностей, можно построить как линию пересечения плоскостей, касательных к поверхностям в выбранной на кривой линии точке, а положение нормальной плоскости кривой линии пересечения поверхностей в намеченной на ней точке определяется нормалями поверхностей, построенными в данной точке кривой линии.

На рис. 481 показаны два пересекающихся цилиндра вращения, оси которых пересекаются и взаимно перпендикулярны, а радиусы r_1 и r_2 окружностей (оснований цилиндров) не равны между собой.

Линию пересечения цилиндров можно построить или методом вспомогательных

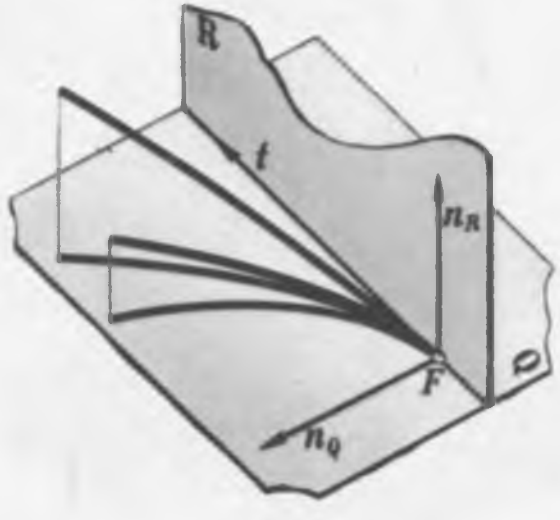


Рис. 479

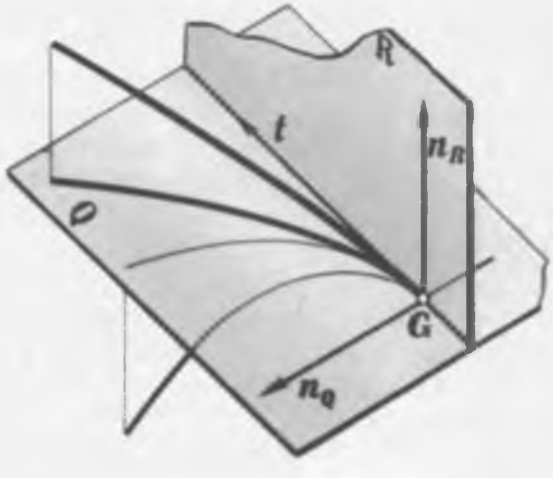


Рис. 480

секущих плоскостей, или методом вспомогательных сфер. Фронтальная проекция линии пересечения представляется частями ветвей равнобочной гиперболы с центром в точке o' — фронтальной проекции точки пересечения осей цилиндров.

Рассмотрим сторону cb, $c'b'$ кривой линии пересечения цилиндров, принимая точку cc' за вершину.

Нормальная плоскость стороны cb, $c'b'$ в точке kk' определяется нормалями цилиндров. Фронтальными проекциями нормалей являются отрезки $k'n'$ и $k'm'$, а прямая линия mn, $m'n'$ — линией пересечения нормальной плоскости с плоскостью N_H пересечения осей цилиндров.

Фронтальной проекцией касательной к стороне cb, $c'b'$ в точке kk' является прямая $k'f'$, перпендикулярная к прямой $n'm'$, а горизонтальной проекцией этой касательной — прямая kf.

Наметим проекции касательных для ряда точек стороны cb, $c'b'$ и построим кривую линию ef, $e'f'$ — геометрическое место точек пересечения касательных плоскостью N_H. Эта кривая линия является линией пересечения с плоскостью N_H касательного торса стороны cb, $c'b'$.

Приняв точку oo' за вершину, построим направляющий конус стороны cb, $c'b'$ и определим линию e_1f_1, $e_1'f_1'$ его пересечения с плоскостью $U_H \parallel V$.

Кривая линия $e_1'f_1'$ конформна кривой линии $e'f'$. Эти кривые линии имеют бесконечно удаленные точки в направлении $o'n'$ — направлении фронтальной проекции касательной в точке cc'. Из рассмотрения направляющего конуса следует, что кривая линия cb, $c'b'$ имеет положительный винтовой параметр.

Повторяя приведенные рассуждения для стороны cd, $c'd'$, получим, что она имеет отрицательный винтовой параметр. Стороны cb, $c'b'$ и cd, $c'd'$ в точке cc', как это показывают горизонтальные их проекции, имеют общую соприкасающуюся плоскость и располагаются обе по одну ее сторону. Отсюда следует, что точка cc' является вершиной петли кривой линии bcd, $b'c'd'$, точки bb', aa', dd' также являются вершинами петли.

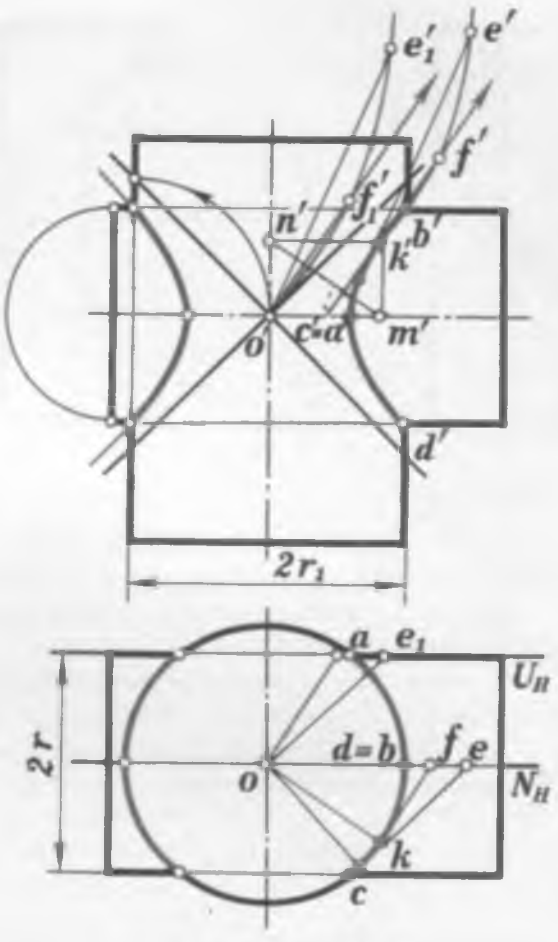


Рис. 481

Таким образом, рассматриваемые линии пересечения цилиндров являются иррегулярными кривыми линиями, содержащими каждая по четыре вершины петли.

На рис. 482 показана пространственная кривая линия, которая получается при пересечении сферы радиусом R с цилиндром вращения радиусом $r = \frac{R}{2}$, когда ось цилиндра находится на расстоянии r от центра сферы. Эта кривая линия называется *окном Вивиани*.

При заданном расположении поверхностей кривую линию пересечения можно построить, пользуясь вспомогательными горизонтальными секущими плоскостями.

358

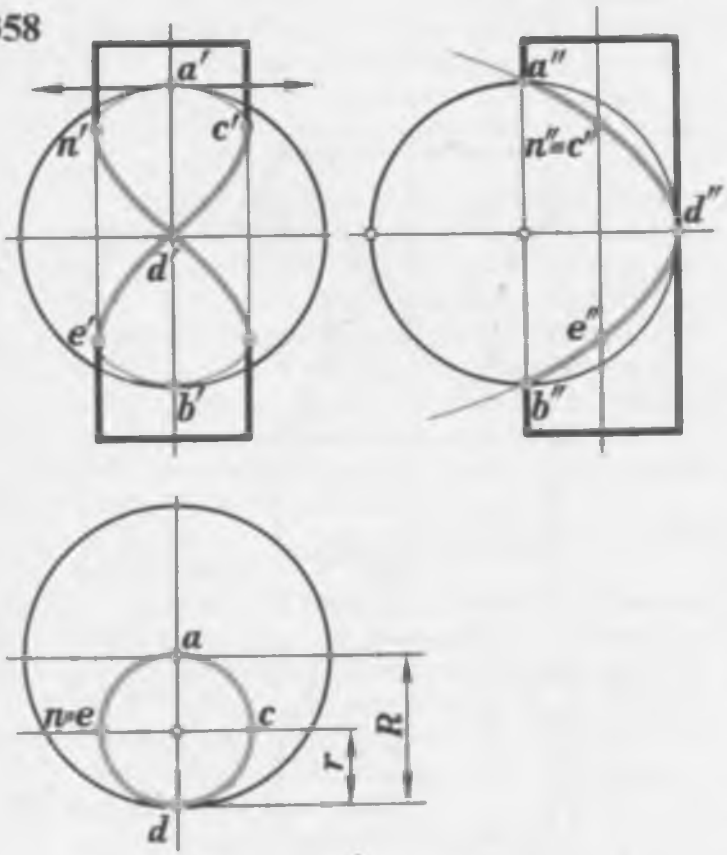


Рис. 482

Фронтальная проекция кривой пересечения имеет вид восьмерки, профильная ее проекция является параболой с вершиной в точке d'' и с параметром, равным r.

Точки aa' и bb' следует рассматривать как вершины пространственной кривой линии, в которых происходят изменения знаков параметров сторон.

Из рассмотрения профильной проекции кривой линии следует, что точки aa', bb' являются вершинами петли. Окно Вивиани, таким образом, представляет собой иррегулярную пространственную кривую линию с двумя вершинами петли. Кроме этого, рассматриваемая кривая линия имеет точку dd', общую для сторон anb, $a'n'b'$ и acb, $a'c'b'$, которая называется *двойной* точкой кривой линии.

В точке dd' стороны имеют наибольшие радиусы кривизны. Точку dd' поэтому следует рассматривать как общую регулярную вершину сторон anb, $a'n'b'$ и acb, $a'c'b'$.

Таким образом, окно Вивиани имеет две вершины петли и две совпавшие регулярные вершины и состоит из четырех сторон.

Вопросы для самопроверки

1. Что называют естественными координатами плоской кривой линии?
2. Какие кривые линии называют простыми?
3. Какие кривые называют коробовыми?
4. Какие кинематические кривые линии называют рулеттами?
5. Дайте определение неподвижной и подвижной центроид рулетты.
6. В чем заключается способ Эйлера при определении радиусов кривизны рулетт?
7. Что называют кругом Лагира рулетты?
8. Какие рулетты называют циклическими?
9. Назовите основные свойства циклоиды.
10. Что называют сопутствующим триедром пространственной кривой линии?
11. Что представляет собой первая и вторая кривизна пространственной кривой линии?
12. Что называют естественными координатами пространственной кривой линии?
13. Что называют винтовым параметром пространственных кривых линий?
14. Как определяется ход (направление) пространственной кривой линии?
15. Расскажите об образовании торсов, сопровождающих пространственную кривую.
16. Что представляет собой коническая и полная кривизна пространственной кривой линии?
17. Какие кривые линии торса называют геодезическими?
18. Какие вершины пространственной кривой называют иррегулярными?
19. Укажите общую схему проецирования пространственной кривой линии.
20. Что называют подерой кривой линии?
21. Что называют сферической кривизной пространственной кривой линии в данной точке?
22. Что называют соприкасающейся сферой пространственной кривой?
23. Какие кривые линии называют унополярными?
24. Какие пространственные кривые линии называют кривыми линиями Бертрана?
25. Какие пространственные кривые линии называют монотонными?
26. Расскажите о вершинах составных пространственных кривых линий.
27. Какие пространственные кривые линии называют иррегулярными?
28. Укажите примеры иррегулярных пространственных кривых линий.

ГЛАВА XV

КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ ОБЩЕГО ВИДА

Производящая кинематической поверхности общего вида, перемещаясь в каждое последующее положение, может сохранять определенный характер движения, но параметры перемещений, положения осей и направления бесконечно малых слагаемых перемещений производящей линии непрерывно изменяются. Эти перемещения имеют следующие виды:

поступательное перемещение переменного направления;

вращательное — с непрерывно изменяющимися в пространстве положением и направлением оси вращения;

винтовое — с непрерывно изменяющимися положением и направлением винтовой оси и непрерывно изменяющимся параметром.

Указанными перемещениями производящей линии образуются *кинематические поверхности общего вида*. Их называют: поверхности переноса, ротативные поверхности и спироидальные поверхности.

§92 ПОВЕРХНОСТИ ПЕРЕНОСА

Движение производящей линии называют *поступательным общего вида*, если бесконечно малые ее перемещения Δs являются поступательными перемещениями, а угол между направлениями последовательных двух таких перемещений — бесконечно малая величина.

Поверхности, образованные непрерывным общего вида поступательным перемещением производящей линии, называют *поверхностями переноса*.

Поверхность переноса может быть задана производящей линией AB в начальном ее положении и некоторой плоской или пространственной кривой линией MN, определяющей направление переноса (рис. 483).

Любая из точек производящей линии при ее движении в заданном направлении определяет ход производящей линии — кривой линии, равной и параллельной кривой MN.

На рисунке заданная поверхность представляется сетью, состоящей из ряда последовательных положений производящей ли-

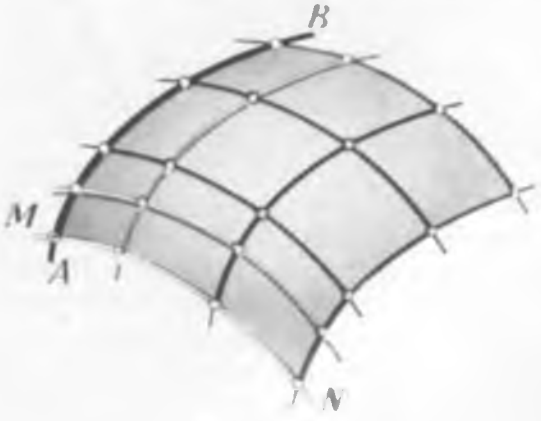


Рис. 483

нии и из ходов ее точек. Каждая ячейка такой сети имеет попарно не только равные, но и параллельные криволинейные стороны. Такую сеть называют *предельной чебышевской сетью*.

Пусть даны две плоские кривые линии AB и CD, лежащие в одной плоскости (рис. 484). Эти кривые считаем опорными. Пометим на каждой из них некоторое одинаковое число точек. Через каждую точку кривой AB проведем пучок прямых, пересекающих в помеченных точках кривую CD. Отрезки прямых пучка, ограниченные центром, например точкой A, и точками кривой CD, разделим в заданном отношении $m:n$. Геометрическим местом точек деления является кривая линия C_0D_0, параллельная и пропорциональная кривой CD.

Коэффициент пропорциональности

$$k = \frac{m}{m+n}.$$

Здесь m — расстояние от любой точки кривой C_0D_0 до центра пучка;

n — расстояние от этой же точки кривой C_0D_0 до соответствующей точки опорной кривой.

Выбрав за центры пучков другие точки опорной кривой AB и повторив указанные построения, можно найти кривые линии, тоже параллельные и пропорциональные кривой CD, с коэффициентом пропорциональности $k_1 = \frac{n}{m+n}$. Построенные указанным способом кривые линии не только параллельны между собой, но и равны.

Предельную чебышевскую сеть можно построить и для произвольно заданных опорных кривых и при любых заданных коэффициентах $\frac{k}{k_1} = \frac{m}{n}$.

Сеть поверхности можно рассматривать и как геометрическое место середин отрез-

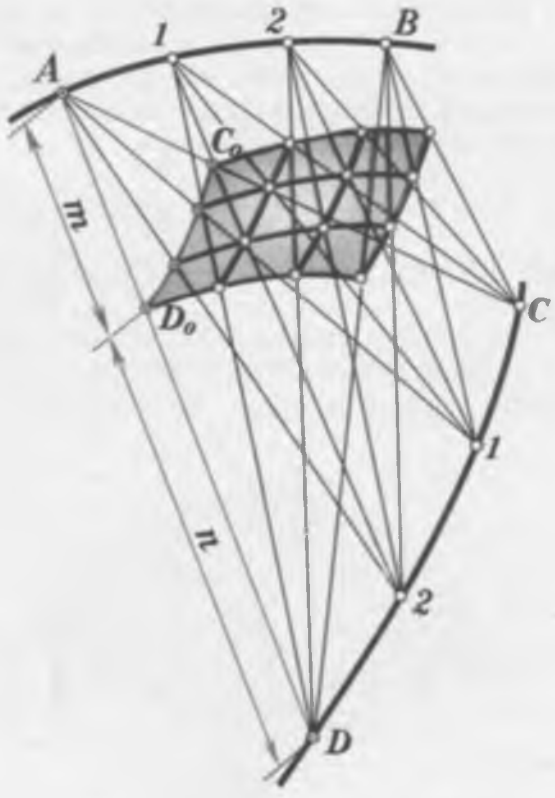


Рис. 484

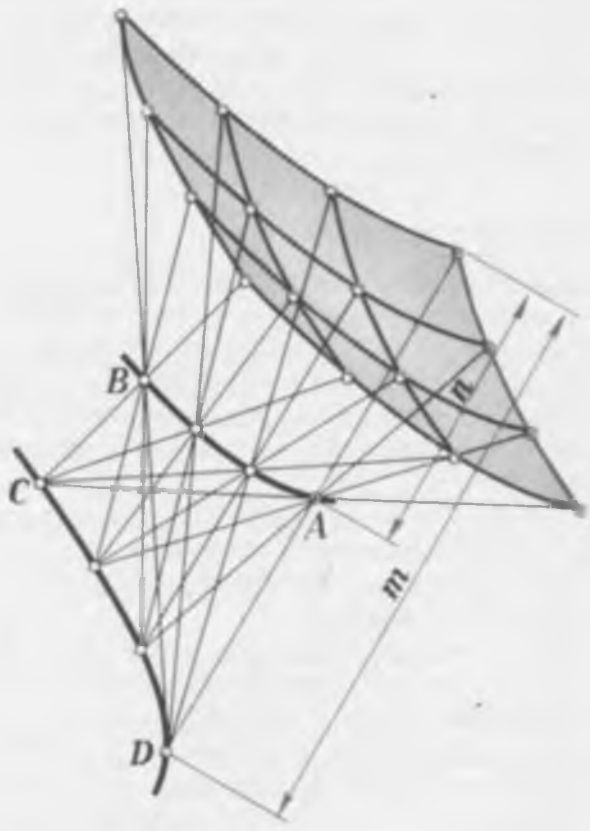


Рис. 485

ков, ограниченных опорными кривыми линиями — отрезков, соединяющих точки одной из опорных кривых линий с точками другой опорной кривой. Указанная схема построения поверхности переноса предложена *Софусом Ли*, а образуемая поверхность называется *поверхностью Ли*.

Рассмотренная поверхность отличается от многих других поверхностей переноса тем, что кривые линии семейств, образующих предельную чебышевскую сеть, имеют равные коэффициенты пропорциональности относительно их опорных кривых линий.

Если коэффициенты пропорциональности не равны, можно построить две поверхности, удовлетворяющие одному и тому же заданию. Для этого необходимо знать, к какой именно из опорных кривых относятся коэффициенты k и k_1. Такие две поверхности называют *сопряженными* поверхностями переноса.

Поверхность Ли называют *изолированной поверхностью*. Она не имеет второй сопряженной с ней поверхности.

Если одна из опорных линий прямая, поверхность переноса имеет вид цилиндра — поверхности переноса прямолинейного направления.

Если опорными линиями являются две скрещивающиеся прямые, поверхность преобразуется в плоскость, параллельную опорным прямым линиям.

Предельную чебышевскую сеть можно получить, если отрезки пучков прямых, ограниченных опорными кривыми линиями, делить в заданном отношении не внутренним, а внешним образом. В этих случаях предельная чебышевская сеть расположится не между опорными кривыми, а с любой одной стороны опорных кривых (рис. 485). И здесь каждая из кривых линий первого семейства сети поверхности пропорциональна одной из опорных кривых с коэффициентом пропорциональности $k = \frac{m}{m-n}$; каждая из кривых второго семейства сети пропорциональна второй опорной кривой с коэффициентом пропорциональности $k_1 = \frac{n}{m-n}$. Такие поверхности переноса называют *внешними*. Внешняя поверхность переноса имеет и сопряженную с ней внешнюю поверхность переноса, расположенную по другую сторону опорных кривых линий.

Сеть поверхности переноса можно построить и по одной заданной опорной кривой линии. Такая сеть может располагаться как внутри опорной кривой линии, так и вне ее. Опорная же кривая линия в этих случаях называется *ребром возврата сети поверхности*.

Если поверхность переноса находится внутри опорной линии, ее называют *поверхностью переноса с внешним ребром возврата сети*. Если поверхность переноса располагается вне опорной кривой, ее называют *поверхностью переноса с внутренним ребром возврата сети*.

РОТАТИВНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

§ 93

Движение производящей линии называют *ротативным*, если ее бесконечно малые последовательные перемещения являются вращательными вокруг осей, пересекающихся под бесконечно малыми углами. Пространственные кривые линии как ребра возврата торсов в преобразовании (при развертке их касательных торсов) являются плоскими кривыми. Если кривые равны, то касательный торс первой кривой линии можно обкатывать без скольжения по касательному торсу второй кривой. Очевидно, ребро возврата подвижного торса всегда касается ребра возврата неподвижного торса, а образующие торсов в точках касания кривых совпадают.

С подвижным торсом можно неизменно связать производящую линию. При качении такого торса без скольжения по неподвижному торсу имеем общий случай ротативного движения производящей линии. Поверхность, образованную ротативным движением производящей линии, называют *ротативной*.

362 Торсы, с помощью которых образуются указанные кинематические поверхности, называют *аксоидами* ротативного движения производящей линии. Аксоиды (подвижный и неподвижный), соприкасаясь один с другим по прямой, проходящей через точку касания их ребер возврата, могут находиться по разные стороны общей для них касательной плоскости или по одну сторону этой плоскости.

Подвижный аксоид может обкатывать неподвижный, находясь или с внутренней, или с внешней его стороны.

Ротативную поверхность можно задать двумя соприкасающимися аксоидами и производящей линией, неизменно связанной с подвижным аксоидом в начальном его положении.

Торсы, представляющие собой аксоиды заданной ротативной поверхности, могут преобразовываться в конические и цилиндрические поверхности, в плоскости и прямые.

Ротативную поверхность называют *регулярной*, если подвижным аксоидом ее является плоскость. Регулярная ротативная поверхность образуется производящей линией, жестко связанной с плоскостью (подвижным аксоидом), которая является соприкасающейся плоскостью ребра возврата неподвижного аксоида и которая обкатывает без

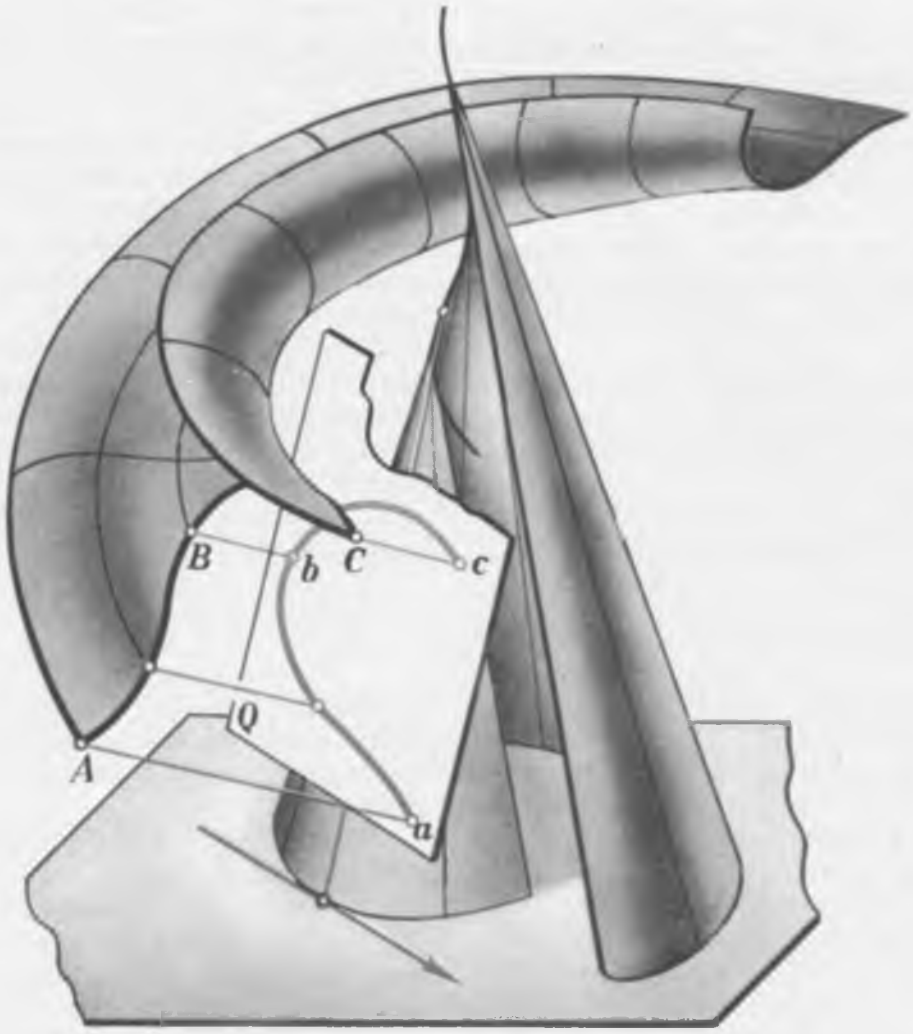


Рис. 486

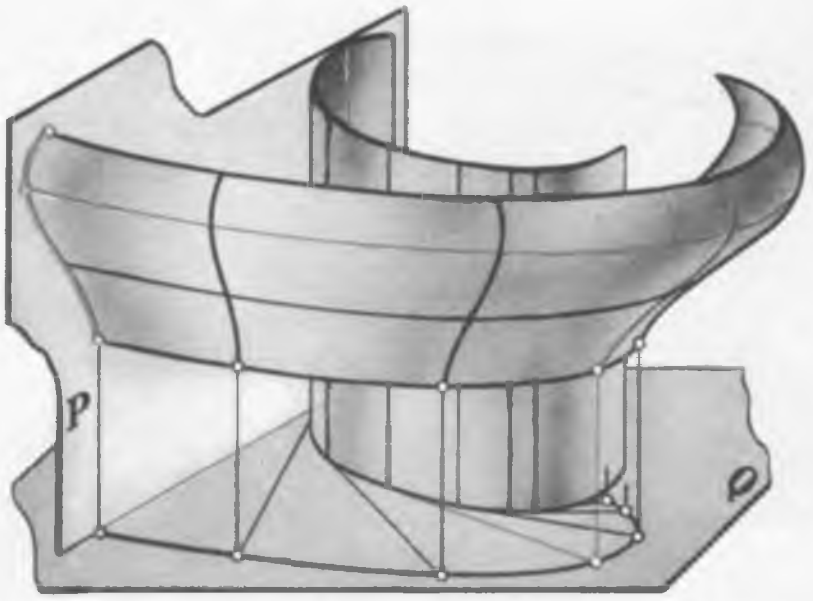


Рис. 487

скольжения касательный торс ребра возврата (неподвижный аксоид).

Регулярную ротативную поверхность называют *улиткой вращения**, если производящая ее линия принадлежит плоскости (подвижному аксоиду). Улитки вращения называют *цилиндрическими*, или *коническими*, если неподвижными аксоидами их являются соответственно цилиндрические или конические поверхности.

Улитки вращения называют *линейчатыми* или *циклическими*, если производящими линиями их являются соответственно прямая или окружность.

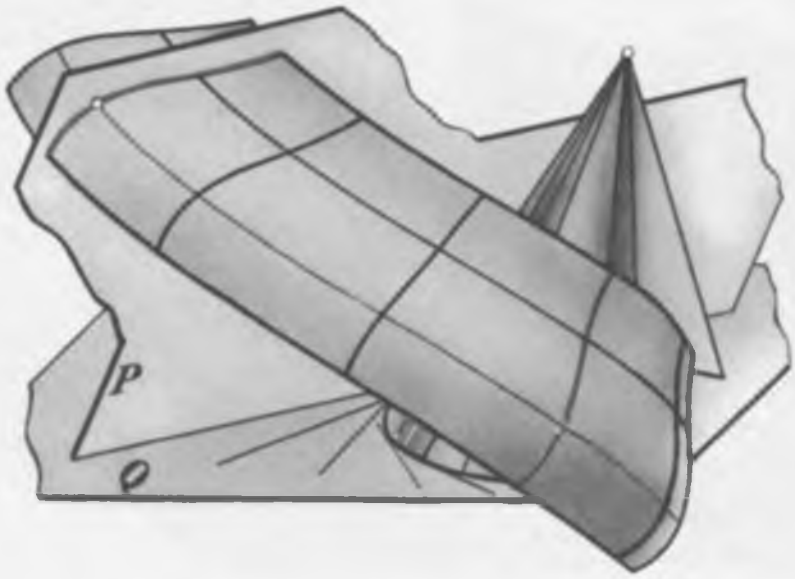
Регулярная ротативная поверхность может быть задана неподвижным аксоидом-торсом и производящей линией в начальном ее положении, неизменно связанной с плоскостью, касательной к торсу-аксоиду.

На рис. 486 показано образование такой поверхности. Касательная к торсу-аксоиду плоскость Q обкатывает его без скольжения. Производящая линия ABC и ее ортогональная проекция abc на плоскость Q вращаются вокруг последовательного ряда образующих торса-аксоида, по которым касается плоскость Q. Положения производящей линии ротативной поверхности определяют вначале построением положений ее проекций на касательные плоскости. Затем в точках полученных проекций восставляют перпендикуляры к касательным плоскостям и на них откладывают отрезки, равные удалениям соответствующих точек производящей линии от касательных плоскостей. Концами таких перпендикуляров определяется ряд положений производящей линии проецируемой регулярной ротативной поверхности.

Определение положений производящей линии улиток значительно упрощается, поскольку здесь отпадает необходимость построений указанных перпендикуляров.

На рис. 487 представлена цилиндрическая улитка вращения. Улитка образована производящей линией, находящейся в касательной к аксоиду-цилиндру плоскости P. Касательная к проецирующему аксоиду-цилиндру плоскость при ее качении по аксоиду без скольжения занимает ряд последовательных положений. Находящаяся в касательной

* Улитки вращения называют также *резными поверхностями Монжи*, surfaces moulures и Lesimsflächen.



Р и с. 488

плоскости производящая линия определяет ряд ее положений.

Все точки производящей перемещаются в плоскостях, перпендикулярных к образующим аксоида-цилиндра. Ходами их точек являются кривые линии, являющиеся эвольвентами линий сечения цилиндра-аксоида этими плоскостями. Проекции таких линий на плоскость Q имеют общую эволюту — направляющую линию цилиндра-аксоида.

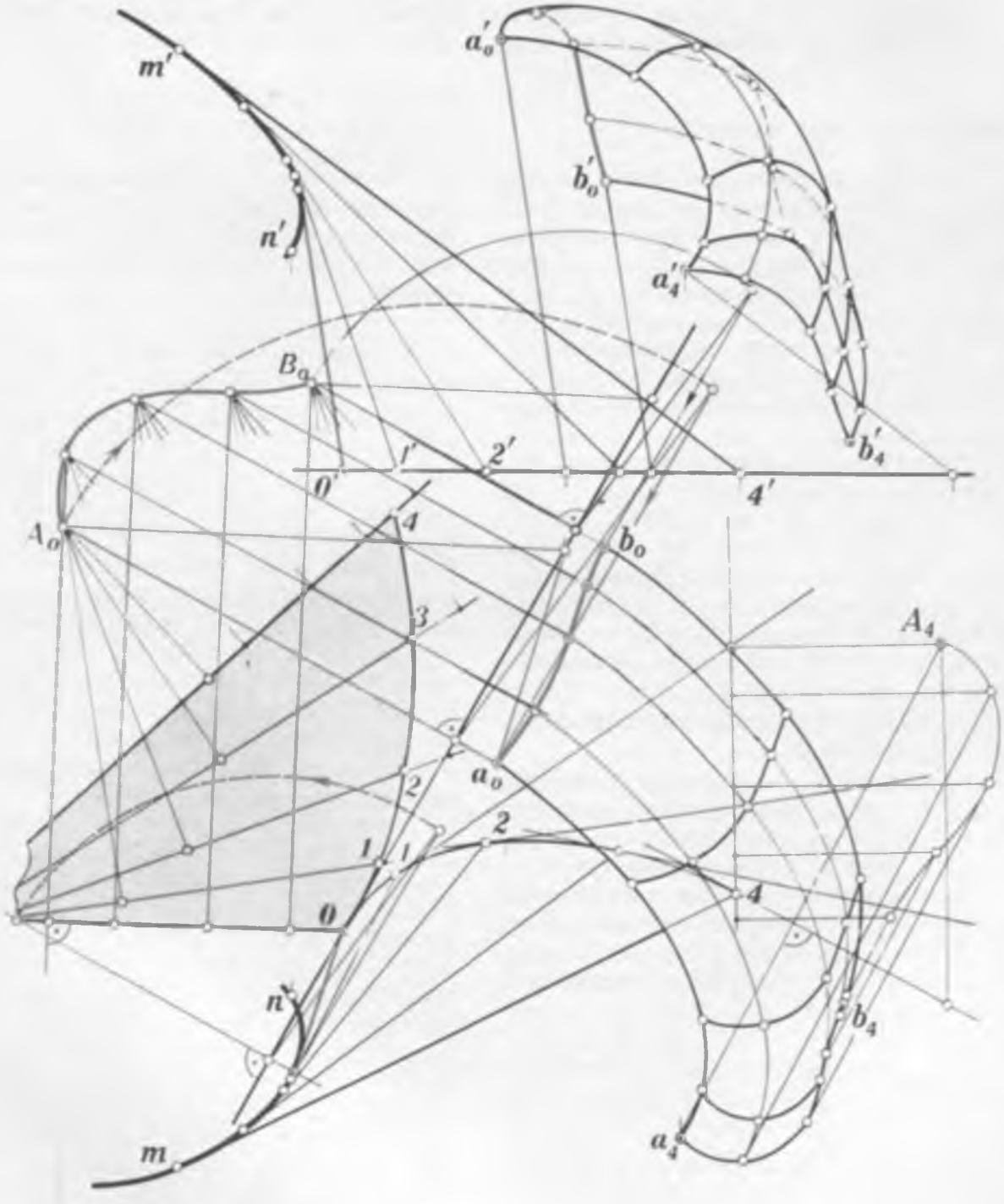
На рис. 488 представлена схема образования поверхности конической улитки вращения.

Последовательный ряд положений производящей линии такой поверхности определяется следующим образом. В плоскости (подвижном аксоиде) начального положения производящей линии улитки строится развертка неподвижного аксоида-конуса как его отпечаток на эту плоскость, обкатывающую аксоид. Пользуясь чертежом развертки, производящую линию улитки можно ориентировать относительно соответствующих образующих конуса, вокруг которых будет поворачиваться касательная плоскость при ее качении без скольжения по конусу — аксоиду.

Совмещая касательные плоскости Q с плоскостью P направляющей линии аксоида-конуса, можно построить совмещенные положения производящей линии и последующим восстановлением этих плоскостей, т. е. введением плоскости в первоначальное положение, можно определить ряд положений производящей линии поверхности улитки вращения. Сеть поверхности определяется положением производящей и ходами точек ее.

На рис. 489 на эпюре Монжа показаны построения ряда положений производящей линии улитки вращения общего вида. Неподвижным аксоидом здесь является торс с ребром возврата mn, $m'n'$. На чертеже слева построена развертка торса на касательной его плоскости в начальном положении и показана заданная в той же плоскости производящая линия.

Это дает возможность на развертке получить неизменными величины радиусов вращения точек производящей линии вокруг соответствующих образующих торса, вокруг которых и поворачивается касательная плоскость при ее качении без скольжения по аксоиду-торсу.



Р и с. 489

366 Совмещая касательные плоскости с горизонтальной плоскостью, строим совмещенные положения производящей линии и, восстанавливая эти плоскости, определяем горизонтальную и фронтальную проекции производящей линии в заданном положении. Рядом положений производящей линии и ходами точек ее определяется сеть поверхности регулярной ротативной улитки вращения.

§94 СПИРОИДАЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

Движение производящей линии называют *спироидальным*, если ее бесконечно малые последовательные перемещения являются винтовыми перемещениями, а оси ее двух последовательных бесконечно малых перемещений пересекаются и составляют между собой бесконечно малые углы. Параметры последовательных винтовых перемещений могут непрерывно изменяться или оставаться постоянными.

Представим две пространственные кривые линии и их касательные торсы. Такие кривые, как ребра возврата торсов, в преобразовании (при развертке их касательных торсов) являются плоскими кривыми.

Рассмотрим случай, когда такие кривые являются конформными. В этом случае касательный торс первой кривой можно прокатывать по касательному торсу второй кривой со скольжением вдоль соприкасающихся образующих.

Пусть Δs и Δs_1 — величины бесконечно малых дуг конформных кривых, при одинаковых значениях их углов смежности; $\Delta s - \Delta s_1$ (здесь $s > s_1$) — величина скольжения подвижного торса на бесконечно малом участке его ребра возврата. Коэффициентом скольжения подвижного торса по неподвижному вдоль образующей их соприкасания является величина

$$m = \lim_{\substack{\Delta s \to 0 \\ \Delta s_1 \to 0}} \frac{\Delta s - \Delta s_1}{\Delta s};$$

Соприкасающиеся торсы могут располагаться по одну и по разные стороны их общей касательной плоскости. Предположим, что такие торсы, соприкасаясь по общей их образующей, располагаются по разные стороны их общей касательной плоскости.

Прокатываем со скольжением вдоль общих образующих подвижный торс по неподвижному. Он совершает винтовое движение. Параметром такого винтового движения является величина

$$p = \lim \frac{\Delta s - \Delta s_1}{\Delta \beta_1 + \Delta \beta_2}.$$

Если с подвижным торсом неизменно связать производящую линию, то при прокатывании его со скольжением по неподвижному торсу будем иметь общий случай винтового (спироидального) движения производящей линии. Поверхность, образованную спироидальным движением производящей линии, называют *спироидальной* поверхностью. Спироидальная поверхность может быть задана двумя соприкасающимися по общей образующей неподвижным и подвижным аксоидами, и неизменно связанной с подвижным аксоидом производящей линией в начальном ее положении.

Спироидальным движением практически можно получить любую желаемую форму поверхности. Спироидальные поверхности называют *регулярными*, если подвижным аксоидом является плоскость. Производящая линия регулярной спироидальной поверхности неизменно связана с подвижным трехгранником (трехгранником Френе) ребра возврата неподвижного аксоида-торса, который совершает, как известно, винтовые движения. Вместе с трехгранником винтовые перемещения совершает и производящая линия. Параметры этого перемещения равны параметрам ребра возврата неподвижного аксоида.

Спироидальную поверхность называют *винтовой улиткой* в случае, если производящая линия лежит в плоскости (подвижном

аксоиде), катящейся со скольжением по неподвижному торсу-аксоиду. Представим себе, что винтовая улитка задана неподвижным аксоидом-торсом, начальным положением производящей линии и графиком зависимости $h=\phi(\beta)$,

где β — угол кручения ребра возврата неподвижного торса-аксоида, или угол поворота производящей линии;

h — величина скольжения плоскости производящей линии вдоль образующих торса.

Пусть также известны графики уравнений $\alpha=f(s)$ и $\beta=f(s)$ в естественных координатах ребра возврата неподвижного торса-аксоида. Имея указанные выше графики, можно построить и график зависимости $s_1=s\pm h=f(\alpha)$, который является графиком уравнения в естественных координатах ребра возврата подвижной плоскости. Очевидно, можно построить в этой плоскости и ребро возврата подвижного аксоида-плоскости.

Если неподвижным аксоидом является конус и известны графики зависимостей $h=\phi(\beta)$ и $\alpha=F(\beta)$, можно получить график зависимости $\alpha=f(h)=f(s)$, который является графиком уравнения в естественных координатах ребра возврата подвижного аксоида-плоскости.

Если неподвижным аксоидом винтовой улитки является цилиндрическая поверхность, ребро возврата подвижной плоскости представляется несобственной прямой (точкой).

Построение чертежа сети регулярной спироидальной поверхности аналогично регулярной ротативной поверхности. Здесь касательная плоскость-аксоид обкатывает неподвижный аксоид-торс со скольжением вдоль его образующих. Проекция производящей линии на касательную плоскость не изменяет своего положения относительно находящейся в этой же плоскости прямой линии скольжения, т. е. расстояния от точек этой кривой в направлении линии скольжения до точек ребра возврата этой же прямой остаются неизменными. Не изменяются и расстояния от точек проекции производящей на касательную плоскость до линии скольжения.

Совершенно очевидно, что параметры слагаемых бесконечно малых винтовых перемещений производящей линии здесь равны:

$$p=\lim_{\substack{\Delta s\to 0\\ \Delta\beta\to 0}}\frac{\Delta s}{\Delta\beta};$$

График такой зависимости можно получить как производный от графика $\beta=F(s)$. Он устанавливает закон изменения винтового параметра спироидальной поверхности с изменением длины дуги ребра возврата аксоида поверхности.

Полученные параметры рассматриваем как винтовые параметры спироидальной поверхности для любой ее точки. Поверхность винтовой улитки можно задать ее неподвижным аксоидом-торсом производящей линии в касательной к аксоиду плоскости (в начальном ее положении) и графиком зависимости $h=\phi(\beta)$.

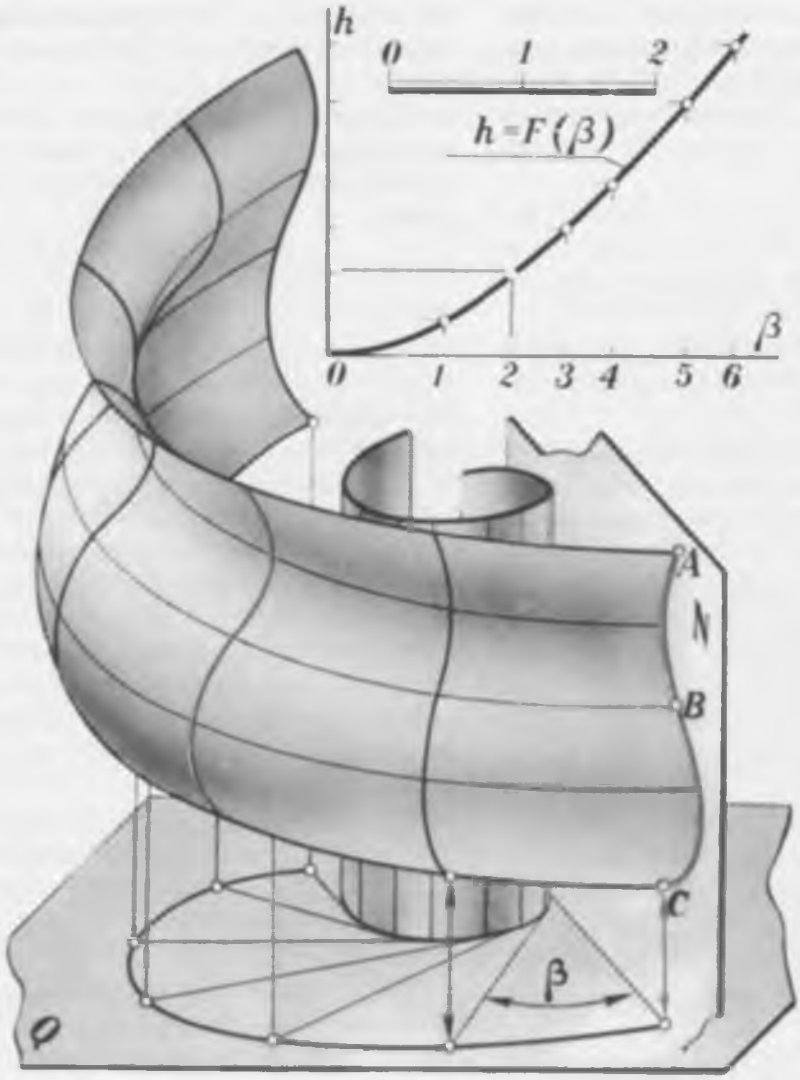
Здесь h — величина скольжения плоскости производящей линии вдоль образующих неподвижного аксоида-торса.

β — угол кручения ребра возврата неподвижного аксоида-торса в радианах.

На рис. 490 показана сеть поверхности винтовой улитки левого хода. Поверхность задана неподвижным аксоидом — проецирующим относительно плоскости Q цилиндром, касательной к цилиндру плоскостью N с производящей линией ABC в начальном их положении и графиком зависимости $h=F(\beta)$.

Угол β поворота касательной плоскости вокруг образующих цилиндра проецируется на плоскость Q без искажения. На эту же плоскость ходы точек производящей линии проецируются в виде эквидистантных кривых. Их общей эволютой является кривая линия — преобразованная проекция цилиндра на плоскости Q.

Перекатывая плоскость производящей линии по цилиндру, можно определить уг-



Р и с. 490

лы β поворота этой плоскости вокруг образующих цилиндра и проекции на плоскость Q производящей линии в ряде ее положений. По проекциям ряда положений производящей линии и величинам скольжения h, которые берут из графика $h = F(\beta)$, можно определить и соответствующие им положения производящей линии.

График зависимости $h = F(\beta)$ можно перестроить и в производный график зависимости $p = f(\beta)$ между углом поворота касательной плоскости-аксоида и винтовым параметром поверхности.

На рис. 491 построена сеть поверхности конической винтовой улитки на эпюре Монжа. Здесь поверхность задана: неподвижным аксоидом-конусом с вершиной ss' и направляющей кривой, лежащей в плоскости Q_V; производящей линией AB, принадлежащей касательной плоскости аксоида в начальном ее положении и графиком зависимости $h = F(\beta)$ величины скольжения касательной плоскости вдоль образующих аксоида от углов поворота этой плоскости.

Построением сферической индикатрисы нормалей неподвижного аксоида-конуса (на

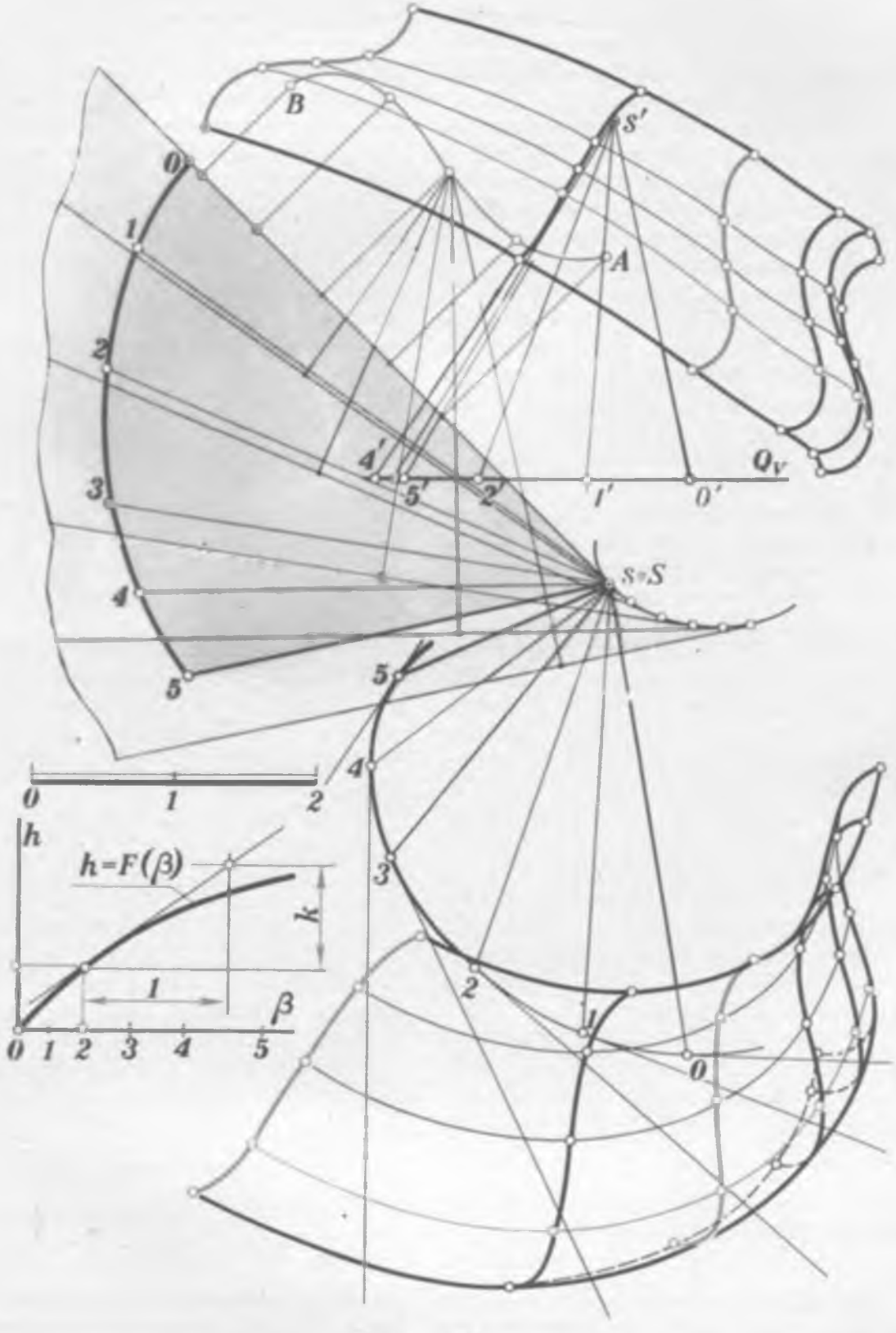


Рис. 491

чертеже не показано) определяются значения величин углов β поворота касательной плоскости при ее качении со скольжением по неподвижному аксоиду-конусу.

Для определения положения производящей линии поверхности в касательной к конусу-аксоиду плоскости в начальном ее положении строим развертку конуса. Имея развертку, можно получить величины углов α между образующими аксоида-конуса, соответствующие найденным углам β.

Имея график $h = F(\beta)$, устанавливаем зависимость $\alpha = f(h) = \phi(s)$. Эта зависимость в естественных координатах представляет собой уравнение кривой ребра возврата касательной плоскости аксоида-конуса. Построение такой кривой по графику не вызывает затруднений (см. гл. XIV). В касательной плоскости выбирается и заданная производящая кривая линия AB. Касательная плоскость производящей кривой при ее качении со скольжением по аксоиду-конусу занимает ряд положений. Она скользит вдоль образующих конуса с условием, что последовательный ряд точек ее ребра возврата всегда совпадает с вершиной конуса.

Таким образом, можно точно ориентировать касательную плоскость и ее производящую линию относительно тех образующих аксоида-конуса, которые соответствуют углам поворота касательной плоскости. Совмещая касательную плоскость с плоскостью Q_V и намечая соответствующее положение производящей линии, а затем восстанавливая эту плоскость, можно определить положение производящей линии поверхности винтовой улитки.

Построение чертежа поверхности винтовой улитки общего вида, где неподвижным аксоидом является торс — поверхность с ребром возврата, аналогично построению улитки вращения, но с учетом скольжения плоскости производящей вдоль образующих торса-аксоида. И здесь с помощью сферической индикатрисы нормалей аксоида-торса определяют углы поворота β касательной плоскости вокруг соответствующих его образующих, а затем развертку аксоида-торса на касательную плоскость в начальном ее положении.

Заметим, что если длина дуги кривой линии преобразования ребра возврата торса-аксоида s, то длина дуги ребра возврата касательной плоскости аксоида $s_1 = s - h$.

По графику зависимости $h = f(\beta)$ и длинам дуг s ребра возврата торса в преобразовании можно построить и график $s_1 = F(\beta)$ зависимости длины дуги s_1 ребра возврата касательной плоскости аксоида от угла β поворота касательной плоскости. Такой график можно перестроить в график зависимости $s_1 = f(\alpha)$. Он дает возможность построить ребро возврата касательной плоскости-аксоида.

Соответствующие точки ребер возврата касательной плоскости-аксоида и торса-аксоида, как точки конформных кривых, являются парными точками. При качении со скольжением касательной плоскости эти точки ребер возврата совпадают.

Очевидно, для каждой образующей аксоида-торса можно определить соответствующее положение ребра возврата его касательной плоскости и положение находящейся в этой плоскости производящей линии. Вращая касательную плоскость до совмещения с плоскостью уровня и намечая соответствующее положение производящей линии, а затем, восстанавливая эту же плоскость, определяем последовательный ряд положений производящей линии поверхности винтовой улитки общего вида.

§95 ЛИНЕЙЧАТЫЕ РОТАТИВНЫЕ И СПИРОИДАЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ С НАПРАВЛЯЮЩЕЙ ПЛОСКОСТЬЮ

При задании поверхностей с направляющей плоскостью направляющими линиями и углом α наклона производящей прямой линии к направляющей плоскости нельзя знать, к какой именно группе поверхностей (цилиндроидам, коноидам, косым плоско-

стям) следует отнести проектируемую поверхность. Нельзя также заранее предвидеть, будет ли эта поверхность ротативной или спироидальной.

Однако можно более рационально подойти к конструированию поверхностей с направляющей плоскостью, рассматривая их как образованные при помощи аксоидов. За неподвижный аксоид принимается цилиндр, образующие которого перпендикулярны к направляющей плоскости. За подвижный аксоид выбирается плоскость, касательная к неподвижному аксоиду.

Производящая прямая линия такой поверхности неизменно связана с подвижным аксоидом и находится в плоскости, которая одновременно перпендикулярна к направляющей плоскости поверхности и касательной плоскости неподвижного аксоида-цилиндра.

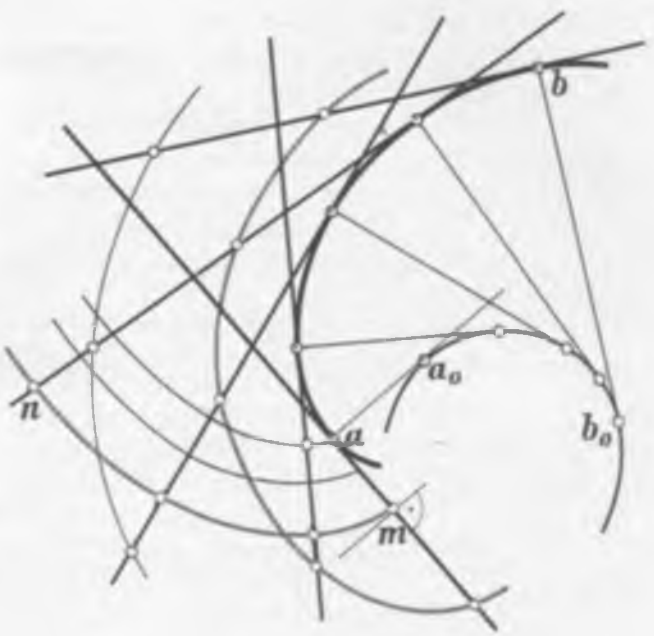
Пусть ортогональной проекцией огибающей положений производящей прямой линии линейчатой поверхности на направляющую плоскость является кривая линия *ab* (рис. 492). Она является прямоугольной проекцией линии сужения поверхности, так как представляет собой проекцию самой короткой линии на поверхности, которая имеет общие точки с производящей линией во всех ее положениях.

По кривой *ab* построена ее эволюта a_0b_0.

Для линейчатой поверхности за ход точки производящей линии можно принять любую проходящую через нее кривую линию, пересекающую все положения производящей линии.

Если за проекцию хода точки выбрать кривую линию, эквитангенциальную проекции линии сужения, то проекцию линии сужения следует рассматривать как трактрису к проекциям ходов точек производящей прямой линии. Неподвижной центроидой в этом случае является кривая a_0b_0 — эволюта проекции *ab* линии сужения; подвижной центроидой — прямая линия — нормаль кривой *ab*.

Если за проекцию траектории ходов точек движущейся производящей прямой линии принять кривую *mn*, перпендикулярную



Р и с. 492

к проекциям ряда ее положений, то эта кривая будет эвольвентой линии *ab* — огибающей проекции ряда положений производящей линии.

Траекториями других точек производящей прямой линии являются кривые линии, эквидистантные между собой и с кривой линией *mn*.

Кривая линия *ab* является одновременно и неподвижной центроидой движения проекции производящей прямой линии. В этом случае имеем качение без скольжения проекции производящей линии по проекции линии сужения.

Рассматривая поверхности с направляющей плоскостью при известных проекциях их линий сужения, можно выбирать проекции ходов точек произвольно, а также в виде эвольвент проекции линии сужения и в виде эквитангенциальных кривых линий к проекции линии сужения.

1. Ротативные линейчатые поверхности с направляющей плоскостью

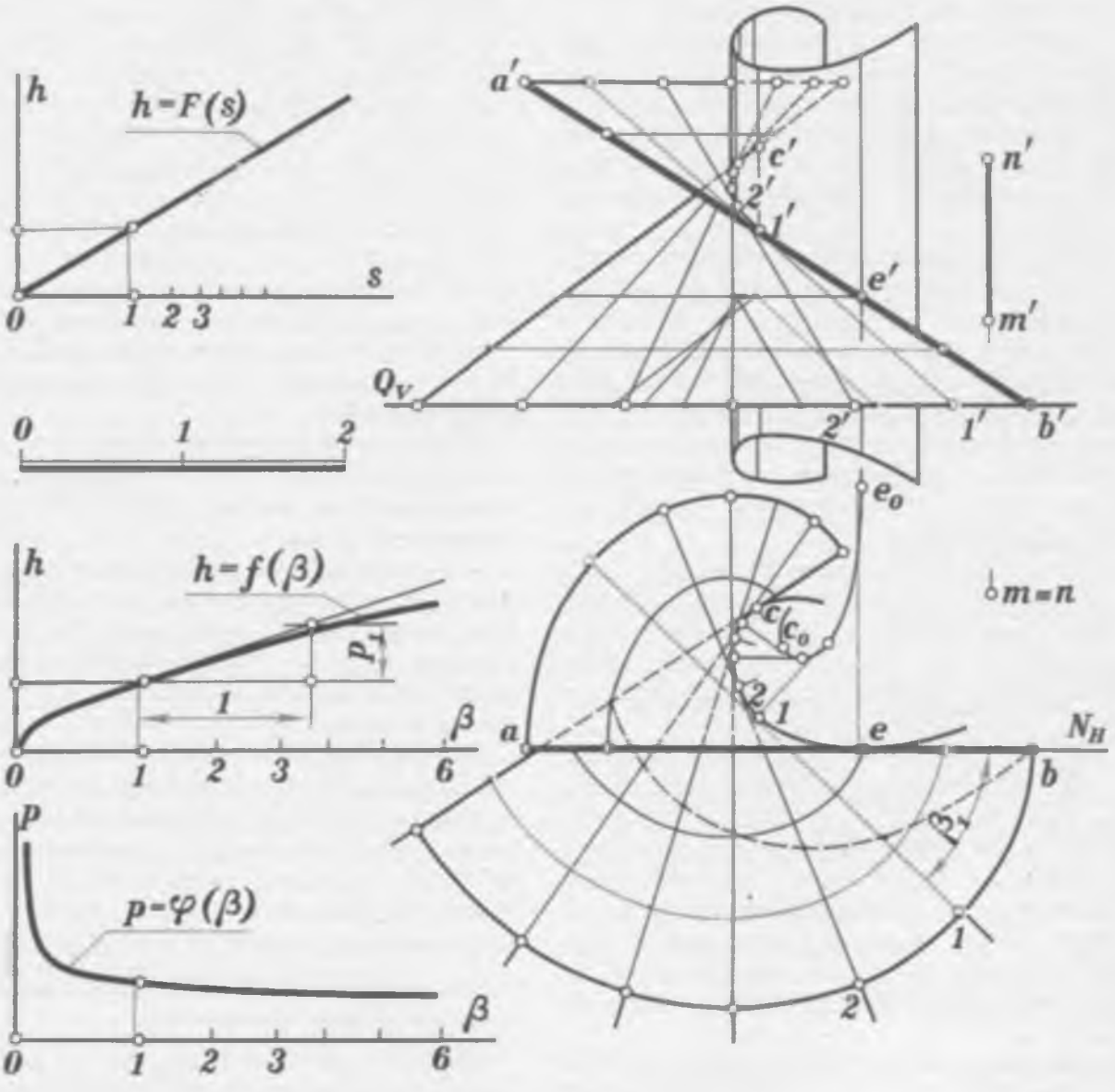
Рассмотрим образование линейчатой улитки вращения — ротативной поверхности с направляющей плоскостью, когда про-

изводящая прямая линия лежит в касательной плоскости неподвижного аксоида-цилиндра этой поверхности.

На рис. 493 показана линейчатая цилиндрическая улитка. Неподвижным аксоидом является горизонтально-проецирующий цилиндр. Подвижным аксоидом служит плоскость, касательная к неподвижному аксоиду (цилиндру).

Производящая прямая линия ab, $a'b'$ находится в начальном положении касательной к аксоиду-цилиндру плоскости. Касательная плоскость (подвижный аксоид) N_H катится вместе с производящей линией ab, $a'b'$ по неподвижному аксоиду без скольжения и занимает ряд положений N_{0H}, N_{1H}, ... Производящая прямая занимает различные положения.

Горизонтальные проекции ходов точек производящей линии представляются эвольвентами, для которых общей эволютой является кривая линия — горизонтальная про-



Р и с. 493

екция направляющей линии цилиндра-аксоида. Фронтальные проекции этих ходов представляются прямыми линиями, параллельными оси проекций.

Производящая прямая линия все время остается касательной к неподвижному аксоиду-цилиндру. Геометрическим местом точек касания прямой с цилиндром является пространственная кривая линия ce, $c'e'$, которая является, очевидно, ребром возврата рассматриваемой развертывающейся поверхности одинакового ската.

Известно, что среди линейчатых винтовых поверхностей (геликоидов) имеется одна поверхность (торс-геликоид), которая является развертывающейся поверхностью (торсом) и одновременно поверхностью одинакового ската. Покажем, что поверхность одинакового ската можно рассматривать как поверхность, составленную из бесконечно большого числа бесконечно малых отсеков поверхностей торсов-геликоидов.

Примем эволюту c_0e_0 кривой ce за проекцию направляющей линии цилиндра-аксоида, направлением образующих которого будет прямая mn, $m'n'$. Построим к этому цилиндру какую-либо касательную плоскость и неизменно свяжем с ней производящую прямую линию, горизонтально-проецирующая плоскость которой перпендикулярна к этой касательной плоскости.

Будем катить касательную плоскость по цилиндру с направляющей линией c_0e_0, $c_0'e_0'$, давая ей одновременно такое скольжение вдоль образующих цилиндра, чтобы производящая прямая заняла положение образующих рассматриваемой поверхности одинакового ската.

Ребра возврата — цилиндрические винтовые линии слагаемых торсов-геликоидов являются соприкасающимися гелисами ребра возврата рассматриваемой поверхности одинакового ската в соответствующих его точках.

Можно установить зависимость $h = F(s)$ и представить ее в виде графика. Величина скольжения h плоскости, катящейся вдоль образующих цилиндра с направляющей линией c_0e_0, $c_0'e_0'$, зависит от длины кривой.

На рис. 493 построены графики: $h = f(\beta)$ и $p = \phi(\beta)$.

Можно сделать вывод, что поверхность одинакового ската может быть образована и как ротативная, и как спироидальная поверхность.

На рис. 494 ротативная поверхность задана горизонтально-проецирующим аксоидом-цилиндром, начальным положением производящей прямой линии ab, $a'b'$ и направляющей плоскостью Q_V.

Производящая прямая линия составляет с направляющей плоскостью угол $\alpha \neq 0$ и лежит в плоскости, перпендикулярной к направляющей плоскости Q_V и плоскости подвижного аксоида.

Подвижным аксоидом является плоскость, касательная к неподвижному аксоиду-цилиндру. Горизонтальной проекцией линии сужения поверхности является кривая линия ac — эвольвента горизонтальной проекции направляющей линии цилиндра-аксоида. Горизонтальные проекции положений производящей прямой линии совпадают с касательными кривой линии ac. Соответствующими построениями определены фронтальные проекции ряда положений производящей прямой линии.

Для рассматриваемой поверхности построены две сети, которые определяются положениями производящей линии и ходами ее точек.

Горизонтальные проекции ходов точек производящей прямой линии первой сети представлены эвольвентами кривой линии ac. Горизонтальные проекции ходов точек производящей прямой линии второй сети представлены кривыми линиями, эквитангенциальными кривой линии ac. Горизонтальные проекции сети поверхности являются получебышевскими сетями.

Ротативную поверхность с направляющей плоскостью можно рассматривать как составную поверхность, состоящую из бесконечно большого числа бесконечно малых отсеков поверхностей однополостных гиперболоидов вращения, осями которых являются соответствующие образующие неподвижного аксоида-цилиндра.

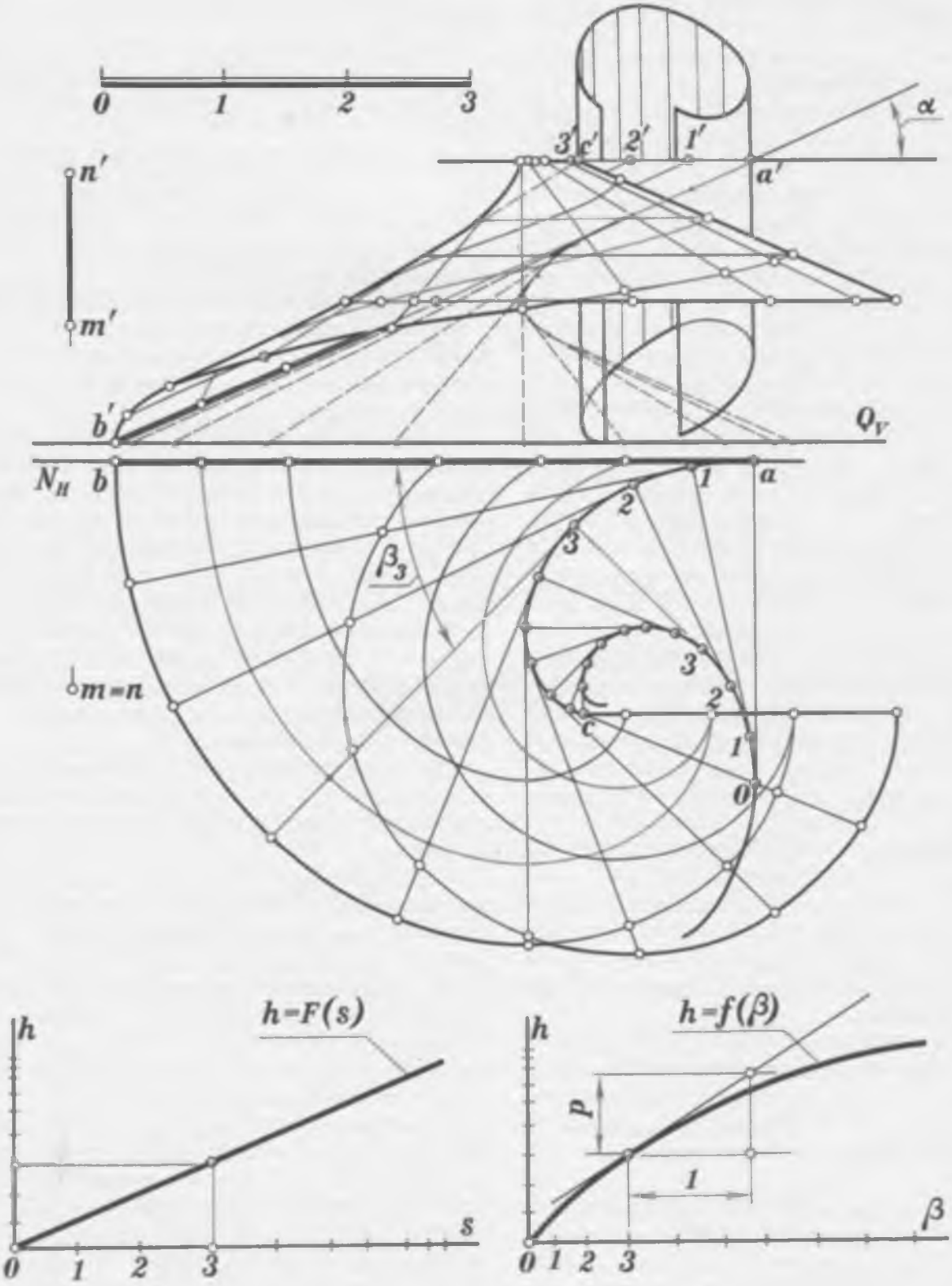

0
1
2
3
α
3'
c'
2'
1'
n'
a'
m'
b'
Q_V
N_H
b
1
a
2
3
β_3
3
2
m=n
c
1'
0
h
h=F(s)
s
0
1
2
3
h
h=f(β)
p
1
β
0 1 2 3

Рис. 494

Радиусы шеек слагаемых гиперболоидов вращения равны радиусам кривизны линии сужения ротативной поверхности. Ротативная поверхность по своему образованию отличается от поверхностей одинакового ската тем, что касательная плоскость, катящаяся по цилиндру-аксоиду, не имеет скольжения.

Ротативную поверхность с направляющей плоскостью можно рассматривать как линейчатую винтовую улитку. В этом случае касательная плоскость, содержащая производящую прямую линию и катящаяся по цилиндру с направляющей линией ac, $a'c'$, получает соответствующие осевые перемещения в направлении образующих цилиндра. Зависимость между осевыми перемещениями и углами β поворота касательной плоскости, а также между осевыми перемещениями и длиной линии ac можно определить построениями соответствующих графиков: $h = F(s)$ и $h = f(\beta)$.

2. Спироидальные линейчатые поверхности с направляющей плоскостью

Покажем построение спироидальных поверхностей с направляющей плоскостью, сохраняя, как и для ротативных поверхностей, в задании неподвижный аксоид-цилиндр и производящую прямую линию в ее начальном положении. Производящая прямая линия поверхности располагается в плоскости, перпендикулярной одновременно к направляющей плоскости и плоскости, касательной к аксоиду-цилиндру.

Подвижным аксоидом является плоскость, касательная к неподвижному аксоиду-цилиндру. При обкатывании неподвижного аксоида она скользит вдоль его образующих.

На рис. 495 показан чертеж спироидальной поверхности с направляющей плоскостью Q_V, параллельной горизонтальной плоскости проекций H.

Неподвижным аксоидом является горизонтально-проецирующий цилиндр. Производящая прямая линия ab, $a'b'$ (начальное ее положение) поверхности составляет с направляющей плоскостью Q_V угол α. Она лежит в плоскости, которая перпендикулярна одновременно к двум плоскостям: направляющей плоскости Q_V и плоскости N_H, касательной к неподвижному аксоиду-цилиндру.

Зависимость величины скольжения h от угла β поворота касательной плоскости задается графиком. Горизонтальной проекцией линии сужения является эвольвента eu горизонтальной проекции направляющей линии неподвижного аксоида-цилиндра. Имея горизонтальную проекцию eu линии сужения и ее начальную точку ee', можно, пользуясь графиком, построить фронтальную проекцию $e'u'$ линии сужения eu, $e'u'$.

Горизонтальные проекции траектории намеченных концов производящей прямой линии поверхности представляются кривыми линиями, эквитангенциальными кривой линии eu.

Фронтальные проекции этих линий можно построить по известным горизонтальным проекциям положений производящей линии и заданному углу α наклона производящей линии к направляющей плоскости.

На чертеже с помощью методов вращения и восстановления показано построение фронтальной проекции положения производящей линии, проходящей через точку ee' линии сужения.

Повторяя построения для ряда других положений производящей линии, найдем недостающие фронтальные проекции положений производящей и ходов ее точек. Положениями производящей прямой линии и ходами ее точек на поверхности наметится сеть, которая будет получебышевской сетью.

Винтовой параметр $p = \frac{\Delta h}{\Delta \beta}$ спироидальной поверхности изменяется при переходе производящей прямой линии из одного ее положения в другое. Величина винтового параметра поверхности для намеченного положения производящей прямой линии определяется тангенсом угла наклона к оси абсцисс касательной к кривой линии графика $h = f(\beta)$. График $p = \phi(\beta)$ показывает изменение винтового параметра поверхности в зависимости от угла β поворота касательной плоскости N_H.

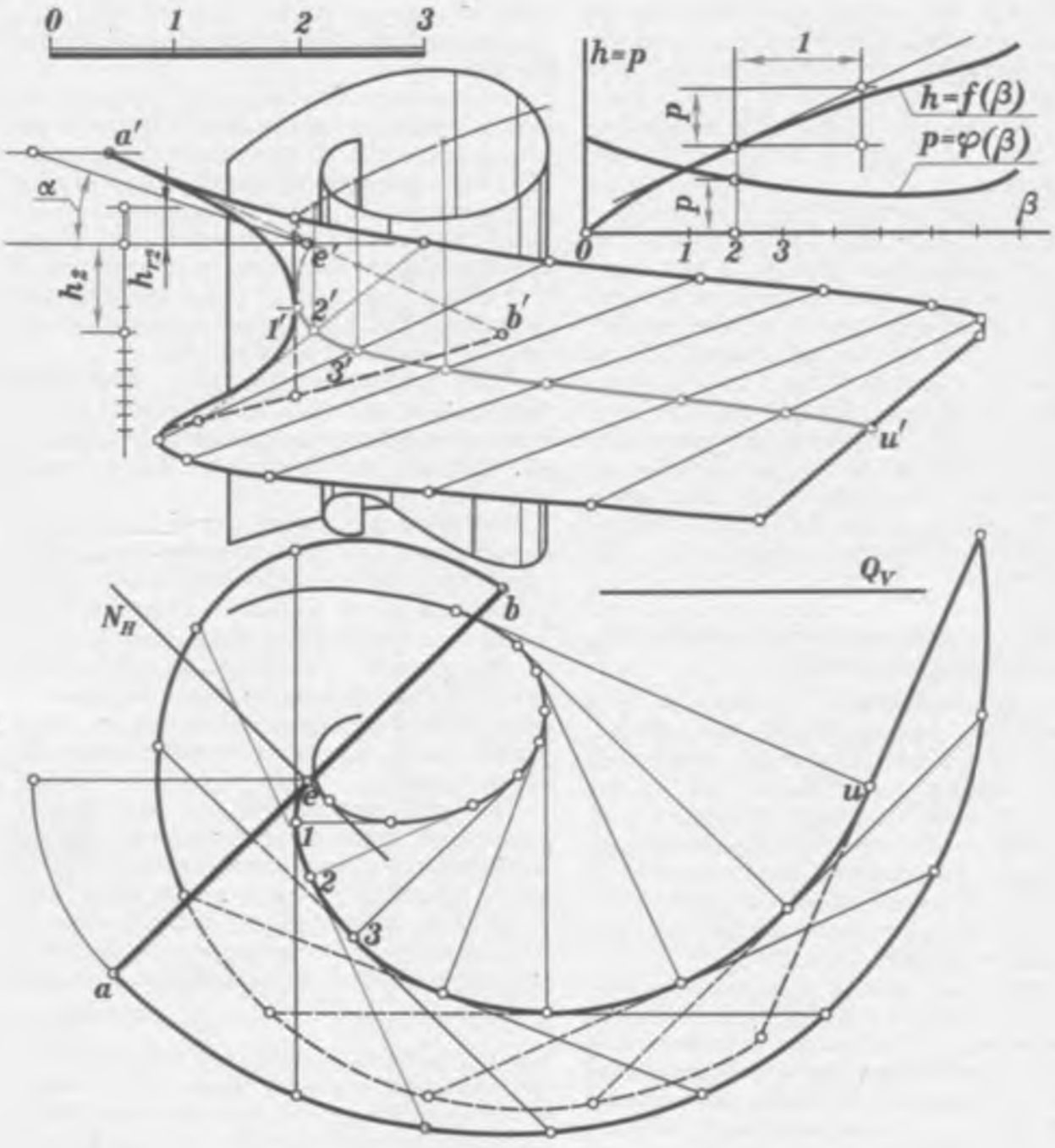


Рис. 495

Спироидальную поверхность с направляющей плоскостью можно рассматривать как составную, состоящую из бесконечно большого числа бесконечно малых отсеков поверхностей косых геликоидов. Осями этих геликоидов служат соответствующие образующие неподвижного аксоида, а их винтовые параметры равны для соответствующего положения производящей линии параметрам спироидальной поверхности.

Эксцентриситеты слагаемых геликоидов равны радиусам кривизны проекции на направляющую плоскость линии сужения спироидальной поверхности.

Положения производящей линии рассматриваемой поверхности можно получить при качении со скольжением касательной плоскости вдоль образующих цилиндра, направляющей линией которого служит линия сужения eu, $e'u'$, а направлением образующих — вертикальная прямая.

Величину скольжения h_s можно определить как суммарную:

$$h_s = h \pm h_r,$$

где h — соответствующая ордината графика $h = f(\beta)$;

h_r — соответствующая величина смещения в направлении образующих цилиндра с направляющей линией eu, $e'u'$ точек ребра возврата поверхности одинакового ската с этим же цилиндром-аксоидом и с начальным положением образующей ab, $a'b'$.

На рис. 496 показан другой метод построения цилиндрической линейчатой спироидальной улитки. Производящая прямая линия поверхности находится в касательной плоскости к цилиндру с направляющей линией eu, $e'u'$ и направлением образующих mn, $m'n'$; она имеет постоянный угол наклона α к горизонтальной направляющей плоскости Q_V.

Плоскость производящей линии обкатывает цилиндр со скольжением. Зависимость величины скольжения h_s от угла β поворота плоскости задана графиком $h_s = f(\beta)$. Построен также график $p = \phi(\beta)$ зависимости параметра p от угла β.

Положения производящей линии поверхности строим следующим образом. Сначала строим вспомогательную поверхность одинакового ската. Горизонтальной проекцией линии ее пересечения плоскостью Q_V является кривая ab — эвольвента линии eu.

Для ряда положений производящей линии вспомогательной поверхности одинакового ската по известным их горизонтальным проекциям построены фронтальные проекции аналогично тому, как это выполнялось выше для ротативных поверхностей.

Кривая линия eu, $e'u'$ является ребром возврата вспомогательной поверхности одинакового ската. Спироидальная поверхность пересекается плоскостью Q_V по кривой линии cb, $c'b'$.

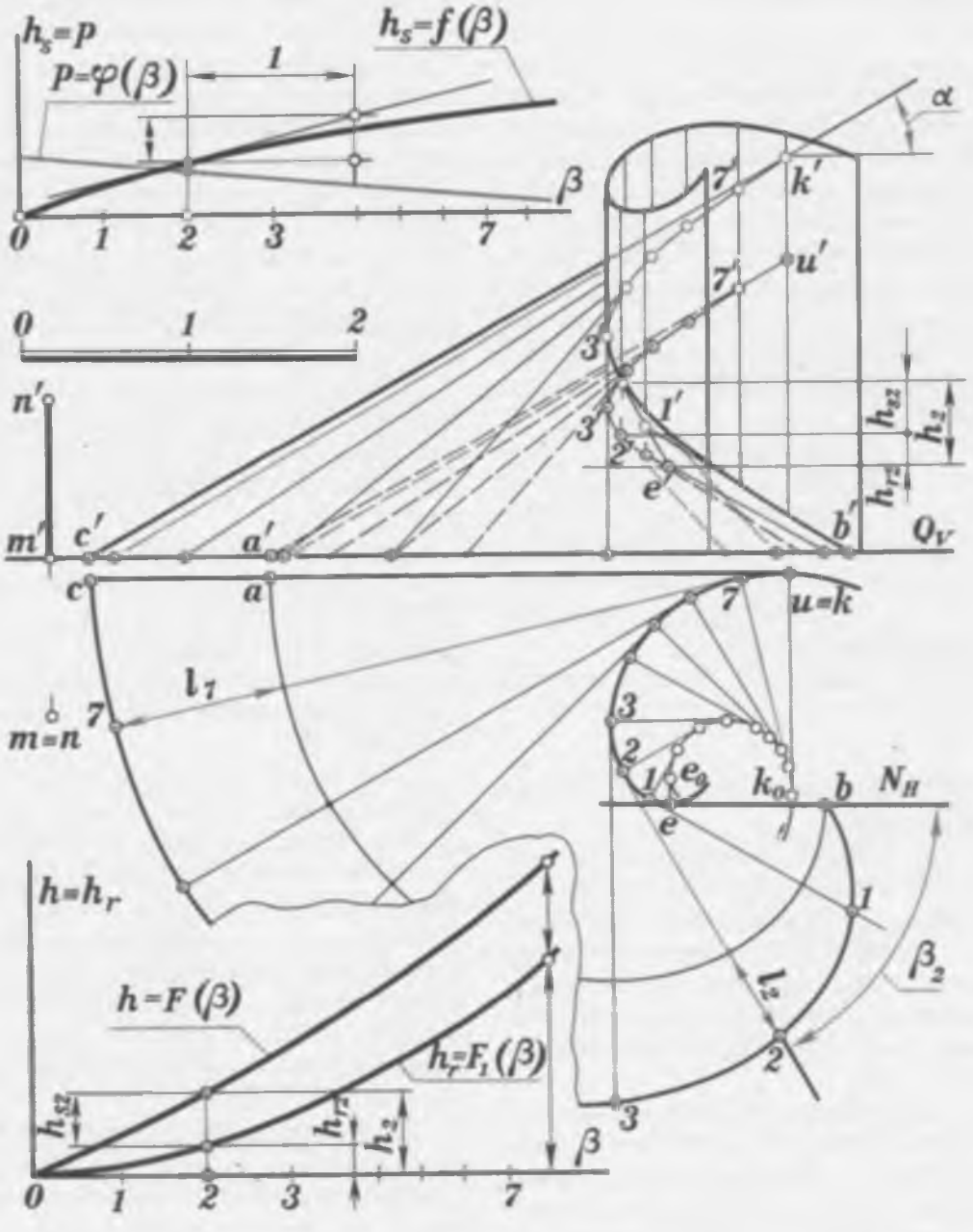
Расстояния l между горизонтальными проекциями соответствующих точек кривых линий ab, $a'b'$ и cb, $c'b'$ можно получить из формулы $l = h_s \cdot \operatorname{ctg} \alpha$, где h_s — величина скольжения для рассматриваемого положения производящей линии, заданная графиком $h_s = f(\beta)$.

Фронтальные проекции ряда положений производящей линии определяются по условию параллельности их проекциям ряда соответствующих положений производящей линии вспомогательной поверхности одинакового ската. Геометрическим местом точек пересечения различных положений производящей линии с образующими аксоида-цилиндра является кривая линия ek, $e'k'$ — линия сужения линейчатой спироидальной улитки.

Спироидальную поверхность можно образовать также, если за неподвижный аксоид принять цилиндр с направляющей линией e_0k_0 — эволютой кривой линии ek, а за направление образующих — вертикальную прямую mn, $m'n'$.

С касательной плоскостью этого цилиндра неизменно связывается производящая прямая линия. Касательная плоскость катится по цилиндру со скольжением. Величину скольжения h_s можно определить из отношения $h_s = h - h_r$.

При таком образовании поверхности рассматриваем ее как составную, состоящую из



Р и с. 496

бесконечно малых отсеков бесконечно большого числа слагаемых косых геликоидов, эксцентриситеты которых равны радиусам кривизны кривой линии.

Рассмотрены два вида задания поверхностей с направляющей плоскостью. В первом случае поверхности с направляющей плоскостью заданы двумя направляющими линиями, направляющей плоскостью и углом α наклона производящей прямой линии к направляющей плоскости.

Во втором случае поверхности с направляющей плоскостью общего вида заданы неподвижным аксоидом-цилиндром; началь-

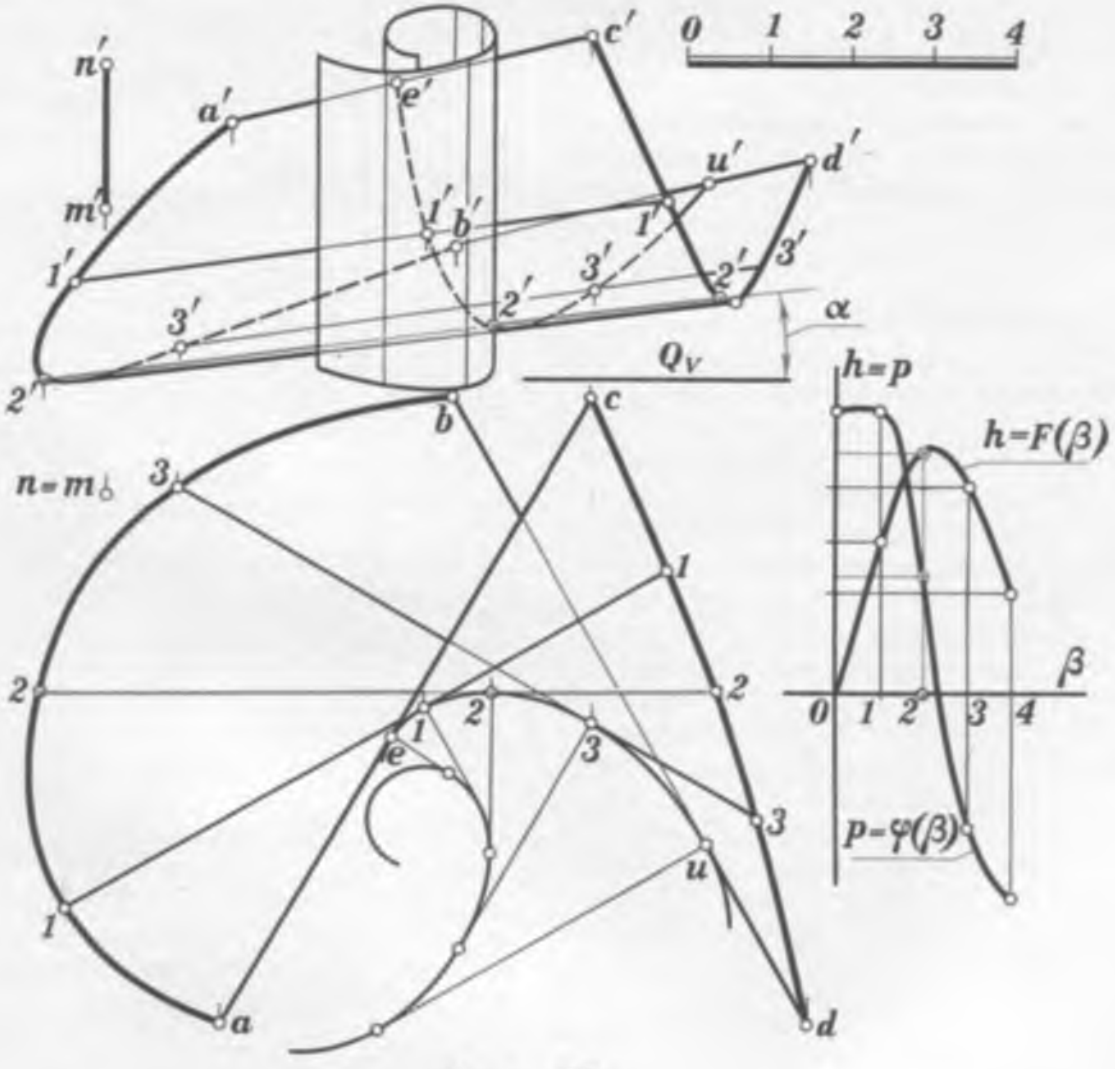
ным положением производящей прямой линии, лежащей в плоскости, перпендикулярной к направляющей плоскости и плоскости, касательной к цилиндру-аксоиду графиком зависимости $h = F(\beta)$.

Покажем для поверхностей с направляющей плоскостью пример перехода от одного вида их задания к другому.

На рис. 497 поверхность с направляющей плоскостью задана двумя направляющими кривыми линиями ab, $a'b'$ и cd, $c'd'$, направляющей плоскостью Q_V и углом α наклона производящей прямой линии к направляющей плоскости.

При этом задании можно построить линию сужения eu, $e'u'$. Эволюту e_0u_0 горизонтальной проекции eu линии сужения можно представить, согласно второму способу задания, проекцией направляющей линии неподвижного аксоида-цилиндра, направлением образующих которого является прямая mn, $m'n'$, перпендикулярная к направляющей плоскости Q_V.

Величину скольжения h можно определить, пользуясь фронтальной проекцией линии сужения. Ее можно выразить графиком $h = F(\beta)$ зависимости ее от угла β поворота касательной плоскости вокруг неподвижного аксоида. Таким образом, исходя из первого задания поверхности, можно получить все данные для второго задания этой же поверхности.



Р и с. 497

§96 КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ ОБЩЕГО ВИДА ОБРАЗОВАНИЯ С ПЕРЕМЕННОЙ ОБРАЗУЮЩЕЙ*

Кинематическую поверхность можно образовать движением производящей линии или поверхности, непрерывно изменяющихся (деформирующихся) в процессе их движения.

Поверхность общего вида можно задать образующей, законом изменения ее формы в процессе движения и законом перемещения образующей в пространстве. Ее можно задать образующей, перемещающейся по линиям данного каркаса.

Последовательные положения образующей, постепенно изменяющей форму, можно принять за направляющий каркас, а произвольно выбранную линию каркаса, наоборот, использовать в качестве образующей. И в этом случае образуется та же самая поверхность.

Рассмотрим кинематическую поверхность общего вида. Поверхность задается образующей в исходном ее положении и элементами, определяющими закон изменения ее формы в процессе перемещения.

Движение переменной образующей в пространстве однозначно определяется тремя направляющими линиями DE, MN, FK (рис. 498). Одну из направляющих DE примем за линию хода точки A образующей ABC. Эту направляющую назовем осью поверхности.

Вторая направляющая MN определяет положение плоскости P, содержащей образующую ABC, в каждый момент ее перемещения в пространстве. Плоскость P во всех ее положениях является нормальной к направляющей MN.

* Этот способ задания поверхности общего вида предложен И. И. Котовым и описан в кинотелелекции Н. А. Соболева.

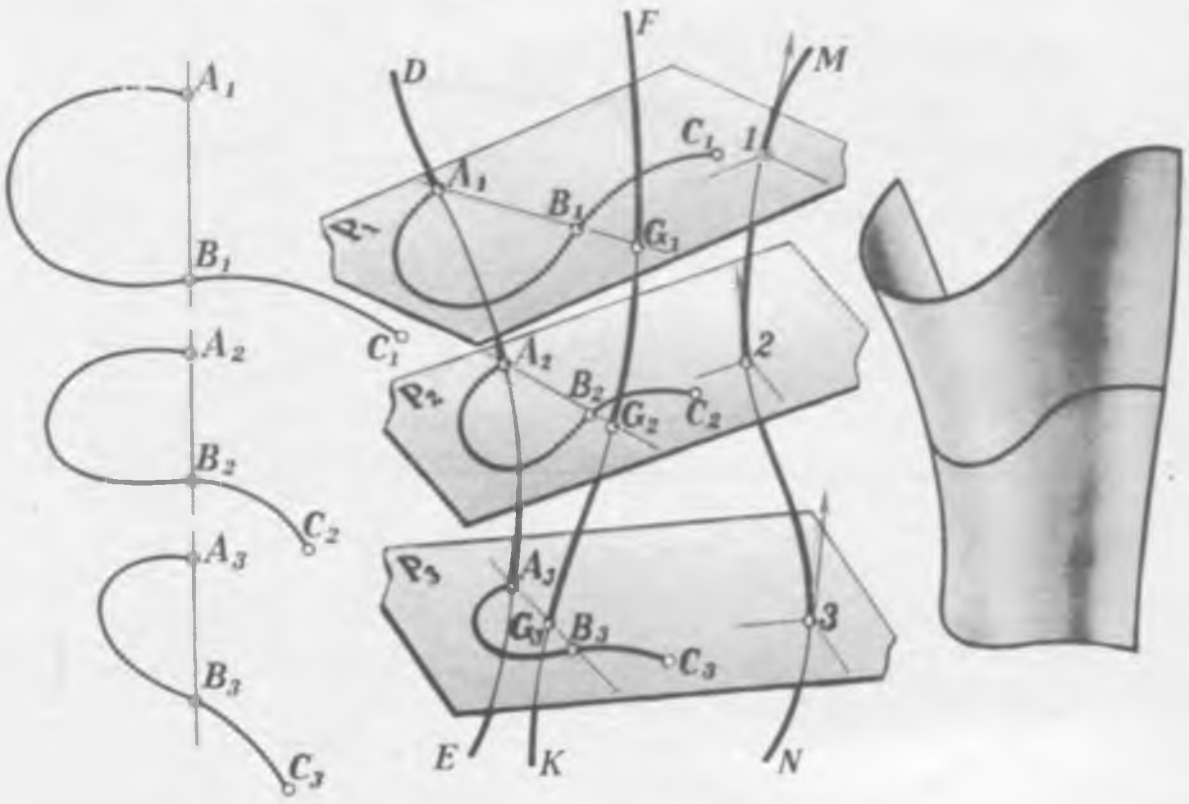


Рис. 498

Третья направляющая FK определяет направление директрисы AB, ориентирующей образующую ABC в плоскости P и изменение ее величины.

Укажем последовательность образования поверхности общего вида:

задаемся образующей ABC, привязанной к директрисе AB, в плоскости P;

устанавливаем закон изменения формы образующей и показываем последовательные формы образующей, которые она принимает при единичном перемещении по оси DE;

задаемся осью DE поверхности;

намечаем последовательные положения точки A на оси DE, расположенные на единичных интервалах;

задаемся кривой MN, ориентирующей плоскость P;

задаемся направляющей кривой KF;

через точку A_1 проводим плоскость P_1, нормальную к направляющей кривой MN;

находим точку G_1 пересечения кривой FK плоскостью P_1;

через точки A_1 и G_1 проводим директрису;

строим образующую $A_1B_1C_1$ в заданном положении;

повторяем построения для точки A_2 и строим остальные положения образующей.

Указанными построениями определяется поверхность.

К плоскости P_1, содержащей директрису, можно привязать не только плоскую, но и пространственную кривую, а также и любую поверхность.

Накладывая дополнительные условия на элементы общего задания поверхностей, можно получить различные конкретные виды поверхностей.

Рассмотренный способ образования поверхности общего вида как следа плоской или пространственной кривой, а также как огибающей перемещающейся в пространстве образующей поверхности, находит широкое применение в практике конструирования поверхностей.

Циклическая поверхность с переменной производящей окружностью, центр которой перемещается по направляющей кривой, называется *каналовой*. Она образуется движением по направляющей кривой окружности или сферы переменным радиусом, причем плоскость производящей окружности перпендикулярна к кривой. Каналовая поверхность может быть представлена как огибающая семейство сфер переменных радиусов, центры которых находятся на направляющей кривой линии.

Каркас каналовых поверхностей состоит из последовательного ряда окружностей переменных радиусов.

На рис. 499 показана спироидальная улитка с производящей окружностью переменного радиуса.

Зависимости $r = f(\beta)$ и $h = F(\beta)$ представлены графиками. Кинематической поверхностью с переменной производящей будет, например, трехосный эллипсоид. Здесь эллипс, вращаясь вокруг одной из осей, непрерывно сжимается или растягивается, причем соблюдается условие, что экваториальным сечением поверхности является не окружность, а эллипс.

Примером каналовой поверхности может быть рабочий резервуар пескоструйной машины, применяемой в металлургии — в литейном производстве.

Кинематические поверхности с переменными производящими применяются в газопроводах, в гидротурбинах, в центробежных насосах. Большое число различных форм, выполненных из пластмассы, керамики, являются именно такого вида поверхностями.

Произвольную поверхность, для которой не найден простой закон ее образования, называют *графической*. Такие поверхности имеют часто очень сложную форму. Это поверхности гребного винта, крыльчатки, колеса водяной турбины, кулачков и т. п. Они задаются на чертеже рядом сечений параллельными плоскостями, отстоящими друг от друга на единицу длины. К графическим поверхностям относится и рельеф земной (топографической) поверхности. Этот рельеф характеризуется линиями — горизонталями, полученными при пересечении поверхности

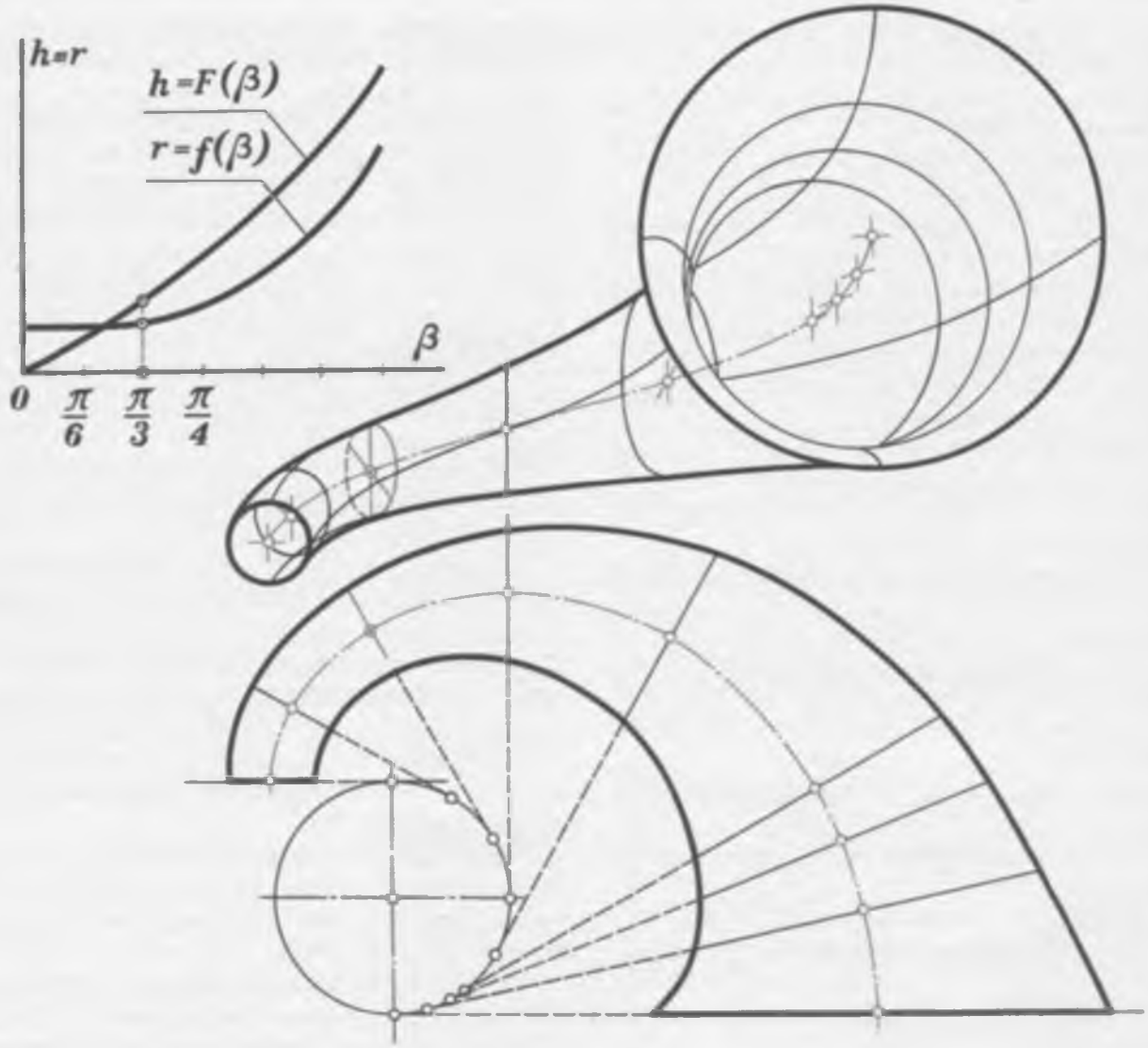


Рис. 499

горизонтальными плоскостями, равноотстоящими друг от друга.

Топографическую поверхность можно представить также параллельным перемещением деформирующейся в пространстве плоской фигуры.

Вопросы для самопроверки

1. Какие поверхности называют поверхностями переноса общего вида?
2. Какую сеть поверхности называют предельной чебышевской сетью?
3. Какие поверхности переноса называют сопряженными и какие изолированными?
4. Укажите построение поверхности переноса, пользуясь одной опорной кривой.
5. Какие поверхности называют ротативными, регулярными ротативными, улитками вращения?
6. Какие поверхности называют спироидальными, регулярными спироидальными, винтовыми улитками?
7. Расскажите, как образуются ротативные и спироидальные линейчатые поверхности с направляющей плоскостью.
8. В чем заключается способ задания кинематической поверхности общего вида с переменной образующей?
9. Какие поверхности называют каналовыми, графическими?

ГЛАВА XVI

ПЛОЩАДИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

В инженерной практике часто приходится решать задачи по определению площадей торсовых поверхностей, вращения, винтовых, переноса и многих других кинематических поверхностей. Покажем графические и графо-аналитические способы определения площадей отсеков некоторых кинематических поверхностей.

ПЛОЩАДЬ ТОРСОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ. ПРИМЕНЕНИЕ ТОРСОВ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПЛОЩАДЕЙ ДРУГИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

§ 97

Площадь поверхности торса можно определить, пользуясь разверткой этой поверхности. Такую задачу можно решить и без построения развертки поверхности торса. Пусть требуется определить площадь торса, заданного ребром возврата mn, $m'n'$ (рис. 500). Торс пересекается плоскостью Qv по кривой линии ab, $a'b'$. На поверхности торса имеется вырезанный контур. Строим сначала вспомогательный конус торса. Применяя сферическую индикатрису образующих вспомогательного конуса, строим его развертку. Развертка вспомогательного конуса торса представлена контуром $SCDS$.

Поверхность торса можно рассматривать состоящей из бесконечно большого числа треугольников с вершинами, расположенными на ребре возврата торса и с бесконечно малыми углами при этих вершинах. Для определения площади торса суммируем эти бесконечно малые площади треугольников, принимая точку S за их вершину. В этом случае образующие торса совпадают с преобразованиями парных им образующих вспомогательного конуса. Откладывая на преобразованиях образующих торса их истинные величины, получаем контур $SABS$, площадь которого равна площади поверхности заданного торса.

Отмечаем на преобразованиях образующих торса точки пересечения образующих с заданным на торсе контуром. Соединяя эти точки плавной кривой линией, получаем контур, площадь которого равна площади заданного на торсе контура.

При определении площадей неразвертывающихся поверхностей следует применять вспомогательные развертывающиеся поверхности-торсы.

Допустим, что на рассматриваемой поверхности построено бесконечно большое число кривых линий, которые взаимно не

384

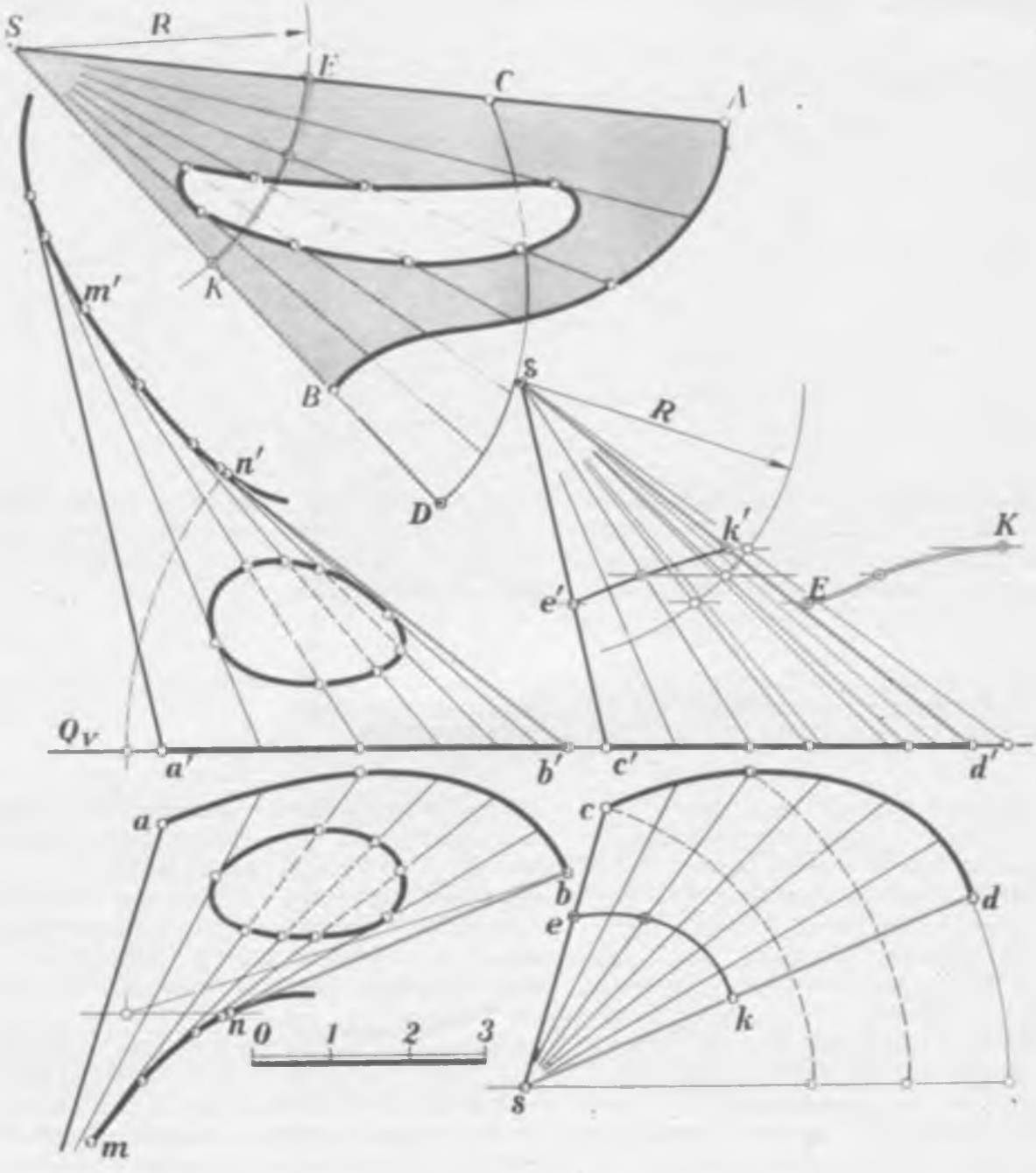


Рис. 500

пересекаются, а расстояния между каждыми соседними кривыми линиями бесконечно малы. Строя для этих кривых линий касательные к поверхности торсы, получаем рассматриваемую поверхность заполненной бесконечно большим числом бесконечно узких полосок. Суммируя бесконечно малые площади бесконечно большого числа этих полосок, получаем в пределе искомую площадь заданной поверхности.

ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

§ 98

Площадь поверхности вращения легко определяется методом интегрирования при условии, что производящая кривая задается уравнением и является плоской меридиональной кривой. Если производящая кривая линия задается графически, то площадь поверхности вращения, образованной такой кривой, можно определить графо-аналитическим способом Паппа — Гюльдена* или способом Громова.

Способ Паппа — Гюльдена основан на положениях графической статики и ограничивается условием, что производящая кривая линия поверхности вращения является меридиональной и не пересекает ось вращения. Площадь поверхности вращения, описанной такой кривой, равна произведению длины этой кривой на длину окружности, описанной центром тяжести производящей линии

$$F = 2\pi R_C L,$$

где R_C — радиус окружности, описываемой центром тяжести производящей кривой;

L — длина производящей кривой.

Центр тяжести производящей кривой определяют путем построения силовых и веревочных многоугольников.

Способ Паппа — Гюльдена дает приближенные, но практически пригодные решения, однако определение центра тяжести производящей линии весьма трудоемко. Построения силовых и веревочных многоугольников при определении центра тяжести очень громоздки и не дают большой точности.

Способ Громова основан на графической интерпретации суммирования бесконечно малых. Графические операции здесь значительно сокращены и точность результатов в основном зависит от точности построения касательных и нормалей к кривым, где для этой цели часто используются дериваторы (приборы для построения касательных и нормалей).

Пусть требуется определить площадь поверхности вращения, заданной кривой AB в меридиональной плоскости и осью (рис. 501). Площадь поверхности вращения рассматриваем как предел суммы бесконечно большого числа боковых поверхностей усеченных конусов вращения бесконечно малой высоты Δh, образующие которых имеют направления касательных к главному меридиональному сечению.

Площадь боковой поверхности усеченного конуса вращения равна произведению полусуммы длин окружностей на образующую:

$$F_к = \frac{(2\pi r_1 + 2\pi r_2)}{2} \cdot L,$$

или

$$F_к = \pi (r_1 + r_2) L,$$

где r_1 и r_2 — радиусы оснований усеченного конуса;

L — длина образующей конуса.

Величину площади боковой поверхности усеченного конуса вращения можно представить увеличенной в 2π раз площадью прямоугольника со сторонами L и $\frac{r_1 + r_2}{2}$. Здесь $\frac{r_1 + r_2}{2}$ представляет величину среднего радиуса по высоте конуса сечения.

Площадь боковой поверхности вписанного элементарного усеченного конуса можно определить по формуле

$$\Delta F_к = 2\pi \Delta L \left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right).$$

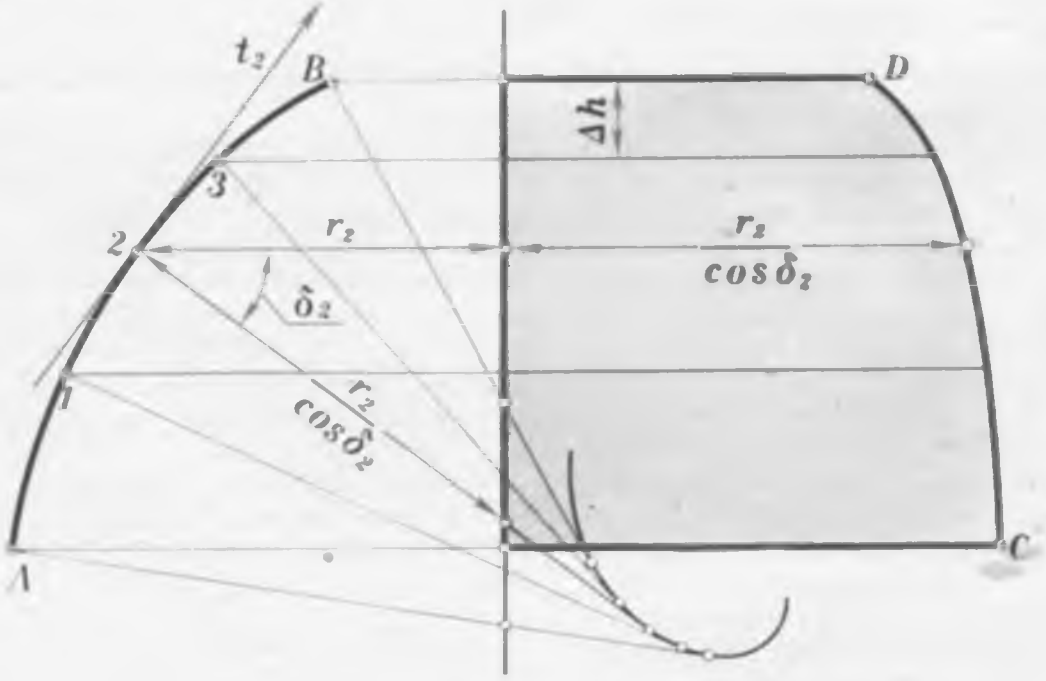
Вписывая усеченные конусы в поверхность вращения и суммируя боковые площади, в пределе получаем площадь поверхности вращения.

Длины образующих конусов уменьшаются, стремясь к пределу, равному нулю, но число их бесконечно возрастает. Величина $\frac{r_1+r_2}{2}$, равная полусумме радиусов верх-

---

* Папп Александрийский — древнегреческий математик 2-й половины 3 в. н. э.

Гюльден Пауль (1577—1643) — швейцарский математик.



Р и с. 501

него и нижнего оснований усеченного конуса вращения, стремится к своему пределу, равному r.

$$F_{\text{п в}} = \lim_{\substack{\Delta L \to 0 \\ n \to \infty}} \sum^{n} 2\pi r \, \Delta L.$$

Обозначая Δh высоту элементарного усеченного конуса вращения и δ угол между образующей и осью, имеем

$$\Delta r = (r_1 - r_2) = \Delta L \sin\delta \quad \text{и} \quad \Delta h = \Delta L \cos\delta,$$

откуда

$$\Delta r = \Delta h \operatorname{tg}\delta.$$

Учитывая эти зависимости, получаем:

$$F_{\text{в}} = \frac{2\pi r}{\sin\delta}\Delta r \quad \text{и} \quad F_{\text{г}} = \frac{2\pi r}{\cos\delta}\Delta h.$$

Площадь поверхности вращения

$$F_{\text{п в}} = \sum_{\substack{\Delta r \to 0 \\ n \to \infty}}^{n} 2\pi \frac{r}{\sin\delta}\Delta r \text{ и } F_{\text{п в}} = \sum_{\substack{\Delta h \to 0 \\ n \to \infty}}^{n} 2\pi \frac{r}{\cos\delta}\Delta h.$$

Из рассмотрения рис. 501 следует, что отрезок, равный $\frac{r}{\cos\delta}$, равен отрезку радиуса кривизны меридионального сечения AB, заключенному между кривой AB и осью поверхности.

Отложим от оси по направлению радиусов параллелей соответствующие им величины $\frac{r}{\cos\delta}$. Таким построением наметится кривая линия CD.

Бесконечно малый отсек площади, заключенный между кривой линией CD, осью вращения и двумя бесконечно близкими радиусами параллелей,

$$\Delta F = \frac{r}{\cos\delta}\Delta h.$$

Величина площади, ограниченной кривой линией CD, осью и радиусами крайних параллелей,

$$F = \sum_{\substack{\Delta h \to 0 \\ n \to \infty}}^{n} \frac{r}{\cos\delta}\Delta h.$$

Величина полученной площади равна $\frac{1}{2\pi}$ части площади заданной поверхности вращения.

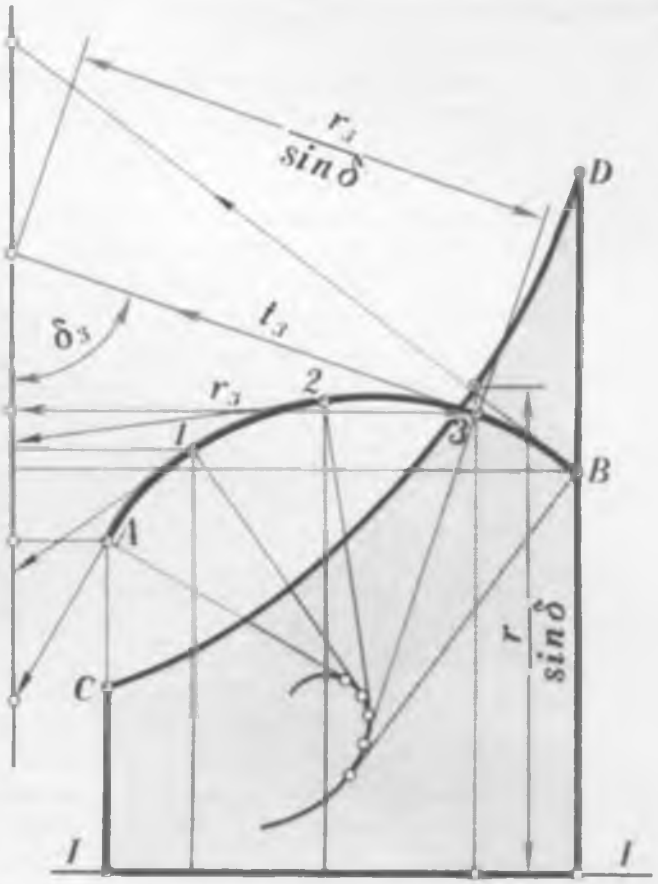
Определение площади поверхности вращения способом Громова удобно в тех случаях, когда величины углов δ незначительны. Если углы δ имеют большие значения, то для определения площади поверхности вращения (рис. 502) удобнее воспользоваться зависимостью:

$$F_{\text{п. в}} = \sum_{\substack{\Delta r \to 0 \\ n \to \infty}}^{n} 2\pi \frac{r}{\sin \delta} \Delta r .$$

Величины отрезков касательных к меридиональному сечению, заключенных между точками касания и осью поверхности вращения, равны отношению $\frac{r}{\sin \delta}$.

Проведем перпендикулярно к оси вращения прямую $1-1$, которую примем за ось абсцисс. На эту прямую линию спроецируем ортогонально ряд точек меридионального сечения и на проецирующих лучах отложим, как ординаты, отрезки, равные величинам $\frac{r}{\sin \delta}$. Таким построением наметится кривая линия CD. Площадь отсека, ограниченного этой кривой, осью абсцисс и бесконечно близкими ординатами, расстояние между которыми Δr, равна $\frac{r}{\sin \delta} \Delta r$.

Величина площади, ограниченной этой кривой линией CD, осью абсцисс и крайними



Р и с. 502

ординатами указанной кривой, равна:

$$F = \sum_{\substack{\Delta r \to 0 \\ n \to \infty}}^{n} \frac{r}{\sin \delta} \Delta r ,$$

т. е. она равна $\frac{1}{2\pi}$ части площади заданной поверхности вращения.

ПЛОЩАДЬ ВИНТОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

§99

Площадь винтовой поверхности рассмотрим как предел суммы площадей бесконечно узких лент, по которым винтовой поверхности касаются (по винтовым ходам точек производящей линии) торсы-геликоиды.

На рис. 503 винтовая поверхность задана базовой линией — гелисой и главным меридиональным сечением ab, $a'b'$. Определим площадь отсека этой поверхности, ограниченного ходами точек aa' и bb', кривыми линиями cd, $c'd'$ и mn, $m'n'$. Фронтальные проекции этих кривых линий на чертеже не показаны. Построим величины углов α наклона к плоскости Q_V, перпендикулярной к оси винтовой поверхности, образующих торсов-геликоидов, касающихся винтовой

388

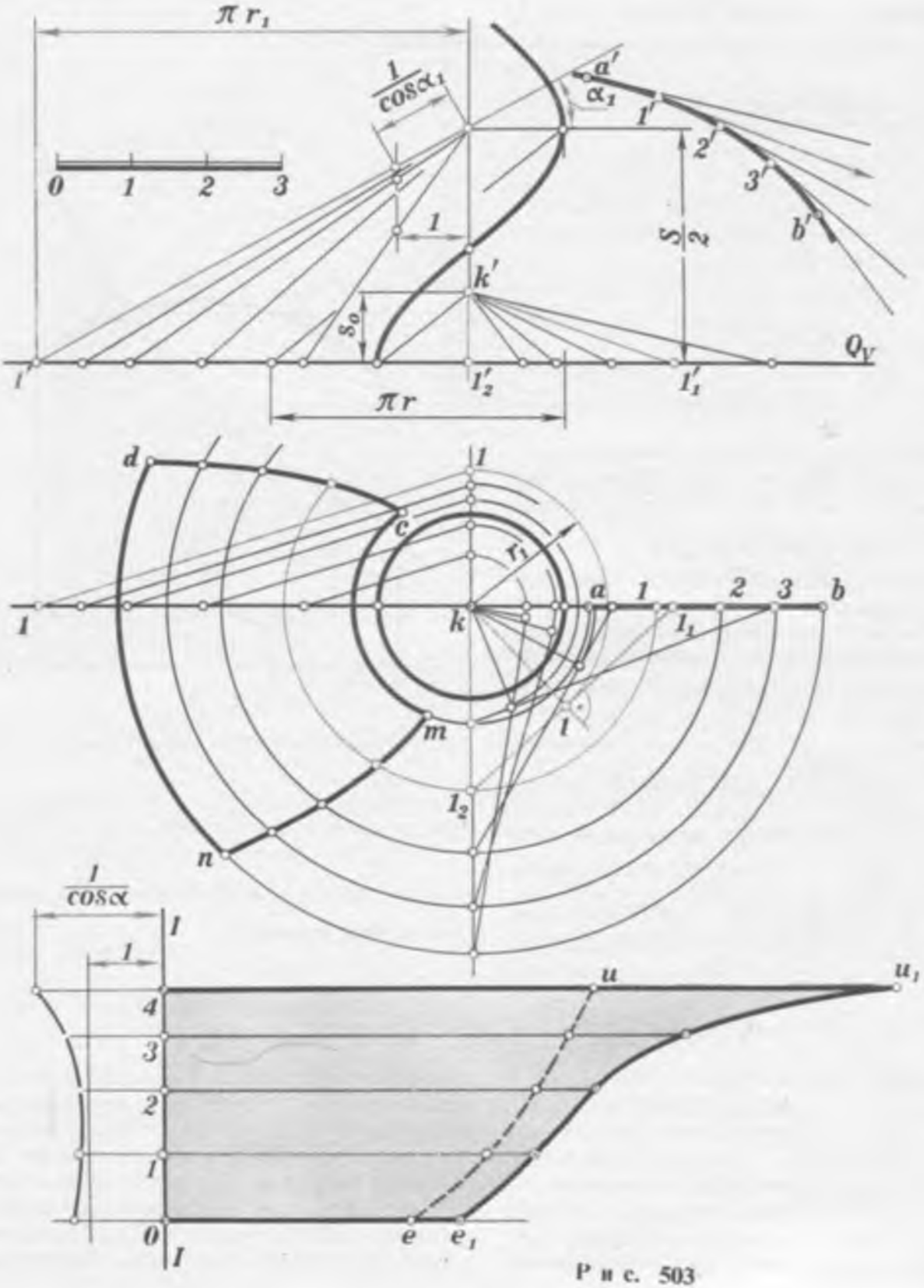

πr₁
1/cosα₁
a′
α₁
1′
2′
3′
b′
0 1 2 3
1
s₂
k′
s₀
Q_V
1
1′₂
1′₁
πr
d
1
c
r₁
a 1 2 3 b
1
k
1₁
m
l
1₂
n
l/cosα
l
1
u
u₁
4
3
2
1
0
I
e
e₁

Рис. 503

поверхности по ходам точек производящей линии.

Цилиндрические винтовые линии — ходы точек производящей линии ab, $a'b'$ — имеют направляющие конусы их торсов-геликоидов с общей вершиной kk'.

Касательную плоскость в точке $11'$ винтовой поверхности определяем касательной к производящей линии и касательной к ходу точки $11'$. Касательную к винтовому ходу точки определяем, пользуясь направляющим конусом. Искомая касательная параллельна образующей $k1_2$, $k'1_2'$ этого направляющего конуса.

Из вершины kk' конуса проводим прямую $k1_1$, $k'1_1'$, параллельную касательной в точке $11'$ производящей линии ab, $a'b'$. Прямые линии $k1_2$, $k'1_2'$ и $k1_1$, $k'1_1'$ определят плоскость, параллельную касательной плоскости к винтовой поверхности в точке $11'$. С плоскостью Q_V эта плоскость пересекается по прямой линии 1_11_2, $1_1'1_2'$. Плоскость $k1_11_2$, $k'1_1'1_2'$ является касательной плоскостью вспомогательного конуса торса-геликоида, касающегося заданной винтовой поверхности по винтовому ходу точки $11'$. Радиус r_1 окружности основания этого вспомогательного конуса равен отрезку $k1$ перпендикуляра, опущенного из точки k на прямую 1_11_2. Цилиндрическая винтовая линия радиусом r_1 и шагом, одинаковым с шагом базовой линии, является ребром возврата торса-геликоида, касающегося винтовой поверхности по ходу точки $11'$.

Угол α_1 наклона к плоскости Q_V касательной плоскости $k1_11_2$, $k'1_1'1_2'$ равен углу α наклона к плоскости Q_V, образующих вспомогательного конуса торса-геликоида. Угол α_1 определен из прямоугольного треугольника (левая сторона фронтальной проекции), у которой один катет равен $0{,}5S$, а другой — πr_1.

На рис. 503 путем построений определены радиусы r_0, r_1, r_2, ... цилиндрических винтовых линий — ребер возврата торсов-геликоидов, касающихся винтовой поверхности по ходам точек $00'$, $11'$, $22'$, ... и определены углы α_0, α_1, α_2, ... наклона к плоскости Q_V касательных плоскостей торсов-геликоидов.

Можно принять, что каждый торс-геликоид имеет с заданной винтовой поверхностью общую бесконечно узкую винтовую ленту площадью ΔF, которая на плоскость проекций H проецируется бесконечно узкой кольцевой лентой площадью Δf.

Между этими площадями имеется следующая зависимость:

$$\Delta f = \Delta F \cos\alpha.$$

Воспользуемся этой зависимостью. Проведем внизу чертежа вертикальную прямую $1—1$ и, отложив на ней горизонтальную проекцию главного меридионального сечения, отметим проекции точек 0, 1, 2, ... производящей линии. Через эти точки проведем прямые линии, перпендикулярные к прямой $1—1$, и отложим на них отрезки, равные соответственно длинам дуг горизонтальных проекций ходов точек 0, 1, 2, ..., ограниченных данными кривыми линиями mn и cd. Концы этих отрезков наметят кривую линию eu. Площадь контура $04ue0$ равна площади контура $mndcm$.

Затем строим кривую линию, абсциссы которой (если прямую $1—1$ принять за ось ординат) равны соответственно величинам $\frac{1}{\cos\alpha}$. Каждую из абсцисс кривой линии увеличиваем в число раз, равное числовой величине соответствующей абсциссы кривой линии eu. Таким путем наметим кривую линию e_1u_1. Площадь контура $04u_1e_10$ равна площади заданного отсека рассматриваемой винтовой поверхности.

ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ ПЕРЕНОСА

§ 100

Поверхность переноса можно рассматривать как составную поверхность, представленную бесконечно большим числом бесконечно малых поверхностей цилиндров. Направляющими линиями таких цилиндрических поверхностей являются различные положения производящей линии, а направления образующих цилиндров определяются

направлениями соответствующих касательных к траекториям точек производящей линии.

На рис. 504 поверхность переноса задана производящей линией ab, $a'b'$ и направлением переноса — кривой ak, $a'k'$. Определим площадь поверхности, ограниченную начальным и конечным положениями производящей линии и ходами крайних ее точек. Пусть поступательные бесконечно малые перемещения производящей линии ab, $a'b'$ равны ΔL, где L — длина кривой ak, $a'k'$ — направления траектории точек производящей линии. Определим кривые линии пересечения слагаемых цилиндров плоскостями, перпендикулярными к образующим этих цилиндров. Они определяются как проекции производящей линии ab, $a'b'$ на плоскости, перпендикулярные к образующим таких цилиндрических поверхностей. Направления образующих цилиндров указывают касательные к кривой линии ak, $a'k'$.

На рис. 504 показаны построения натуральной величины проекции производящей

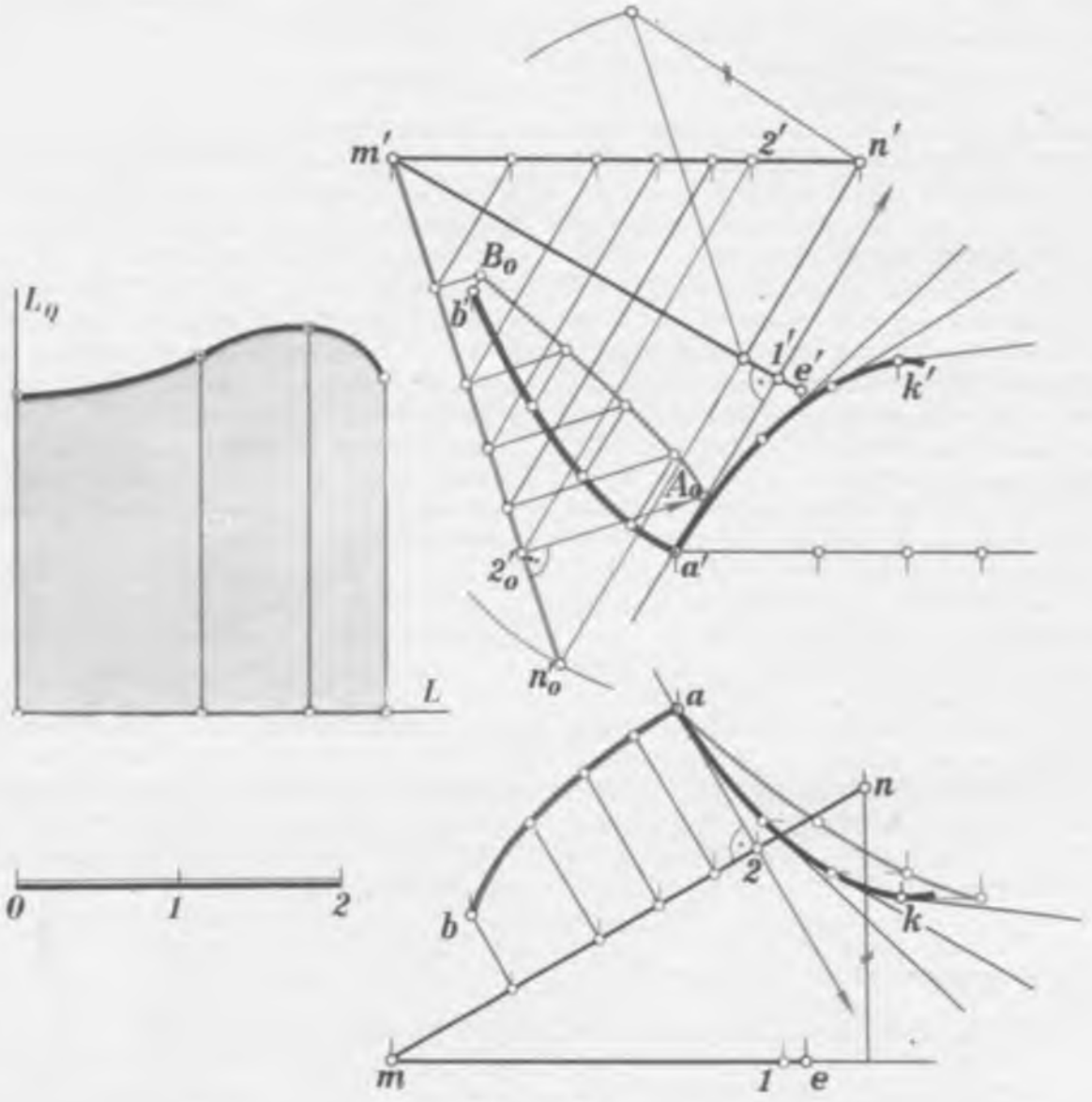


Рис. 504

линии на плоскость, перпендикулярную к касательной кривой ak, $a'k'$ в начальной ее точке aa'.

На производящей кривой ab, $a'b'$ пометим ряд точек и проведем через них прямые, параллельные касательной к кривой ak, $a'k'$ в точке aa'. Выберем некоторую плоскость mne, $m'n'e'$, перпендикулярную к этой касательной. Вращением вокруг фронтали me, $m'e'$ эту плоскость приведем в положение, параллельное фронтальной плоскости проекций V.

Фронтально-проецирующая плоскость образующей цилиндра, проходящей через точку aa' перпендикулярно к плоскости mne, $m'n'e'$, пересекает фронталь плоскости в точке $11'$, а горизонтально-проецирующая плоскость этой образующей пересекает горизонталь плоскости в точке $22'$.

Определяем смещенную фронтальную проекцию $2_0'$ точки $22'$. Из точки $2_0'$ перпендикулярно к смещенной горизонтали плоскости проведем прямую линию до пересечения ее в точке A_0 прямой $a'1'$. Точка A_0 является смещенной фронтальной проекцией точки пересечения с плоскостью mne, $m'n'e'$ образующей цилиндра, проходящей через точку aa' его направляющей линии ab, $a'b'$.

Аналогичными построениями определяются и другие точки пересечения соответствующих образующих цилиндра плоскостью. Геометрическим местом этих точек в смещенном положении плоскости является кривая линия A_0B_0, которая представляет собой натуральную величину проекции производящей кривой ab, $a'b'$ поверхности переноса на плоскость mne, $m'n'e'$.

Повторяя такие же построения, находим проекции производящей линии поверхности переноса на плоскостях, перпендикулярных к касательным в соответствующих точках кривой ak, $a'k'$ — направлении переноса.

Выбираем две взаимно перпендикулярные прямые и принимаем их за оси координат. По оси абсцисс откладываем длины L дуг кривой ak, $a'k'$ направления переноса поверхности, а по оси ординат длины L_Q кривых линий, полученных от пересечения соответствующих слагаемых цилиндров плоскостями, перпендикулярными к их образующим.

Площадь, ограниченная осями координат, крайней ординатой и кривой линией концов спрямленных кривых L_Q, равна площади заданной поверхности переноса.

ПЛОЩАДЬ КОНИЧЕСКОЙ УЛИТКИ ВРАЩЕНИЯ §101

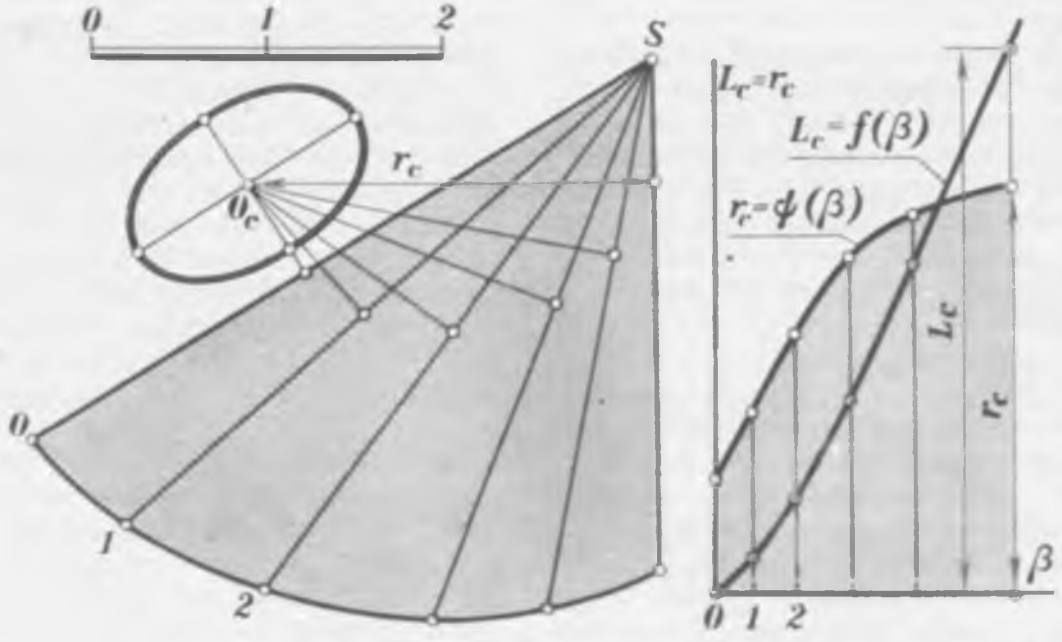
Пусть коническая улитка вращения задана аксоидом-конусом и производящей замкнутой плоской фигурой, составленной из двух ветвей циклоиды.

На рис. 505 производящая конической улитки вращения представлена в касательной к аксоиду-конусу плоскости в начальном ее положении. В этой же плоскости представлена и развертка аксоида-конуса как отпечаток поверхности, которую обкатывает без скольжения плоскость заданной производящей линии улитки вращения. Аксоид-конус показан на рис. 491. Определим площадь поверхности, ограниченной начальным и конечным положениями производящей ее линии.

Воспользуемся, как и для поверхностей вращения, теоремой Паппа — Гюльдена. Эта площадь, согласно теореме, равна длине дуги производящей линии, умноженной на длину дуги, описанной центром тяжести производящей линии.

Длина одной арки циклоиды равна $8r$. Центром тяжести периметра производящего контура является точка O_C — центр симметрии фигуры.

Примечание. Если производящей линией является асимметричная кривая или



Р и с. 505

ломаная, то ее центр тяжести можно определить с помощью формул:

$$x_C = \frac{\Sigma L \cdot x}{\Sigma L} = \frac{L_1 \cdot x_1 + L_2 \cdot x_2 + L_3 \cdot x_3 + \ldots}{L_1 + L_2 + L_3 + \ldots}$$

$$y_C = \frac{\Sigma L \cdot y}{\Sigma L} = \frac{L_1 \cdot y_1 + L_2 \cdot y_2 + L_3 \cdot y_3 + \ldots}{L_1 + L_2 + L_3 + \ldots}$$

Здесь L_1, L_2, L_3, ... — длины отрезков линий;

x_1, x_2, x_3, ... и y_1, y_2, y_3, ... — координаты центров тяжести отрезков линий, относительно выбранных осей координат.

Определим величины r_C расстояний от центра тяжести фигуры до образующих аксоида-конуса, вокруг которых последовательно вращается плоскость производящей линии.

Углы β поворота катящейся по аксоиду-конусу плоскости можно определить с помощью сферической индикатрисы нормалей конуса. Радиус сферы равен единице масштаба.

Зная величины углов β (из рис. 491) и соответствующие им величины радиусов r_C вращения центра тяжести фигуры вокруг образующих конуса, можно построить график зависимости $r_C = \psi(\beta)$.

Площадь, ограниченная кривой $r_C = \psi(\beta)$, крайними ординатами и осью абсцисс, равна длине L_C кривой линии, описанной центром тяжести производящего контура, т. е.

$$L_C = \Sigma r_C \, \Delta\beta.$$

Кривая линия $L_C = f(\beta)$ представляет собой зависимость длины траектории центра тяжести производящего контура от угла поворота касательной плоскости.

Площадь заданной поверхности конической улитки вращения

$$F = L_C p.$$

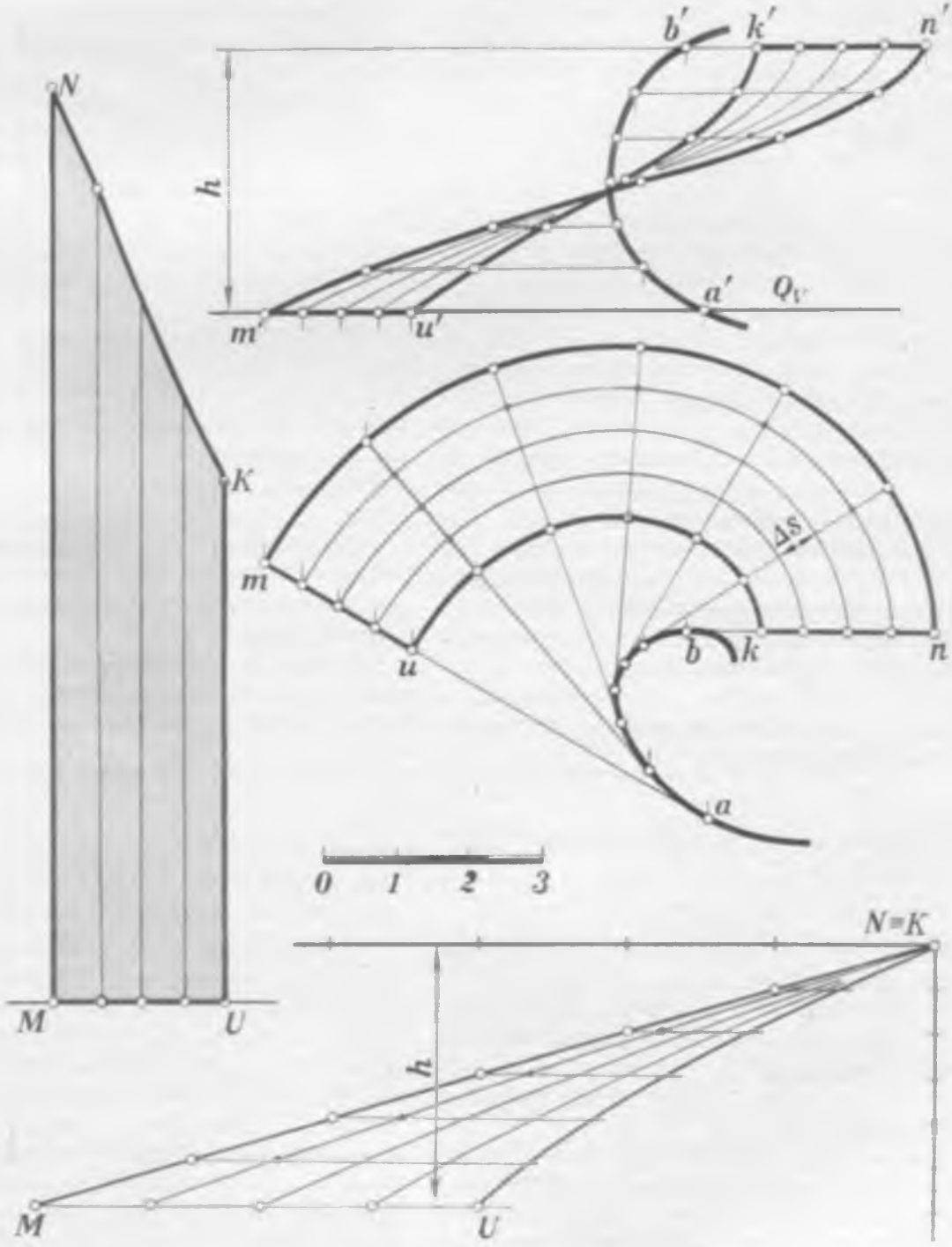
Здесь p — длина производящего контура.

ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ КАТАЛАНА

§102

Определим площадь поверхности Каталана — поверхности с плоскостью параллелизма.

На рис. 506 поверхность с плоскостью параллелизма задана ее линией сужения *ab*, *a′b′* и горизонтальной плоскостью паралле-



Р и с. 506

лизма Q_V. При принятом направлении плоскости параллелизма, как указывалось выше, горизонтальные проекции образующих поверхности являются касательными к горизонтальной проекции линии сужения.

На заданной поверхности намечаем ряд кривых линий, горизонтальные проекции которых — эвольвенты горизонтальной проекции ab линии сужения. Касательные к этим кривым линиям составляют прямые углы с соответствующими образующими поверхности.

Определим площадь отсека поверхности, ограниченного кривыми линиями mn, $m'n'$ и uk, $u'k'$ и образующими — начальной mn, $m'n'$ и конечной kn, $k'n'$. Заданную поверхность рассматриваем состоящей из бесконечно большого числа бесконечно узких лент, ограниченных каждая двумя бесконечно близкими кривыми линиями, горизонтальные проекции которых — эвольвенты кривой ab.

Каждую бесконечно узкую ленту можно рассматривать принадлежащей торсу, который огибает касательные плоскости к поверхности, проведенные в точках построенной на поверхности кривой линии. Касательные плоскости определяются образующими поверхности, проходящими через точки касания, и касательными, проведенными в точках касания к кривым линиям, построенным на поверхности.

Каждую бесконечно узкую ленту можно представить прямоугольником, площадь которого $\Delta f = L\Delta s$, где L — длина кривой линии, построенной на поверхности, а Δs — бесконечно малая ширина ленты. Отрезки Δs лежат на образующих поверхности и проецируются на плоскость проекций H без искажения.

Для определения площади заданного отсека поверхности сначала найдем натуральные длины ряда построенных на поверхности кривых линий uk, $u'k'$, ..., mn, $m'n'$. Длины этих кривых линий определены методом развертывания их горизонтально-проецирующих цилиндров. Они представляются кривыми линиями UK, ..., MN.

Проведем горизонтальную прямую линию MU, которую примем за образующую поверхности и отметим на ней точки ее пересечения кривыми линиями, построенными на поверхности.

Примем эту прямую линию за ось абсцисс.

Ординатами являются длины соответствующих кривых линий, проведенных на поверхности. Таким построением наметится кривая линия NK.

Площадь, ограниченная этой кривой линией, осью абсцисс и крайними ординатами, равна площади заданного отсека поверхности.

§103 ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ ОДИНАКОВОГО (РАВНОГО) СКАТА

На рис. 507 показана поверхность одинакового ската, образующие которой наклонены под углом α к плоскости Q. Поверхность ограничена крайними образующими, кривой линией AB, лежащей в плоскости Q, и кривой линией CD. Определим площадь этой поверхности.

Поверхность одинакового ската представлена как улитка вращения, образованная производящей прямой, находящейся в плоскости (подвижном аксоиде), касательной к проецирующему цилиндру (неподвижному аксоиду).

Поверхность одинакового ската, как и поверхность каждого из торсов, можно рассматривать как предельную суммарную поверхность, составленную из бесконечно большого числа бесконечно малых треугольников. На поверхности одинакового ската слагаемые — бесконечно малые треугольники — составляют один и тот же угол α с плоскостью Q, по которому определяется скат поверхности. Ортогональные проекции таких треугольников на плоскости Q определяют ортогональную проекцию поверхности на эту плоскость.

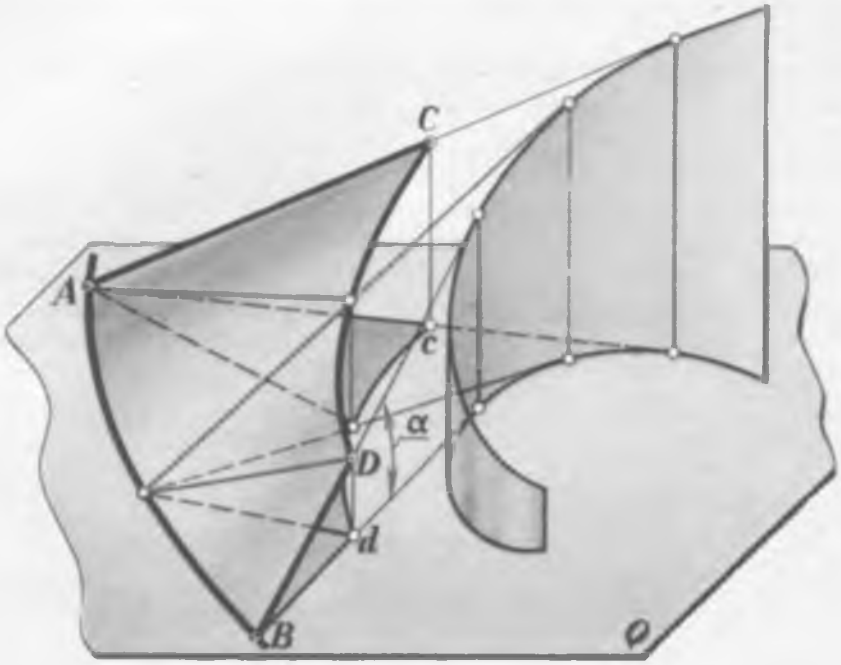


Рис. 507

Площадь F поверхности одинакового ската можно определить по формуле

$$F = \frac{f}{\cos\alpha},$$

где f — площадь проекции поверхности на плоскости Q;

α — угол наклона образующих поверхности к плоскости Q.

ПЛОЩАДЬ ЛИНЕЙЧАТОЙ ПОВЕРХНОСТИ С НАПРАВЛЯЮЩЕЙ ПЛОСКОСТЬЮ §104

Определим площадь отсека поверхности с направляющей плоскостью, заданной неподвижным аксоидом — проецирующим цилиндром с направляющей линией cd, $c'd'$, производящей прямой линией ab, $a'b'$ в начальном ее положении, графиком $h = f(\beta)$ зависимости величины скольжения h касательной плоскости от угла β ее поворота вокруг образующих цилиндра-аксоида (рис. 508).

Горизонтальные проекции всех положений производящей линии при $Q_V \parallel H$ являются касательными к горизонтальной проекции eu линии сужения eu, $e'u'$. Поверхность рассматриваем состоящей из бесконечно большого числа лент, горизонтальные проекции которых ограничены эвольвентами проекции eu линии сужения.

Определим площадь отсека поверхности, ограниченного контуром в виде замкнутой кривой линии.

Площадь заданного отсека поверхности можно представить как предел бесконечно большого числа бесконечно малых площадок ΔF, каждая из которых проецируется на горизонтальную плоскость проекций бесконечно малой площадкой:

$$\Delta f = \Delta s \cdot \Delta L,$$

где Δs — бесконечно малая ширина ленты в проекции;

ΔL — бесконечно малая дуга соответствующей эвольвенты.

396

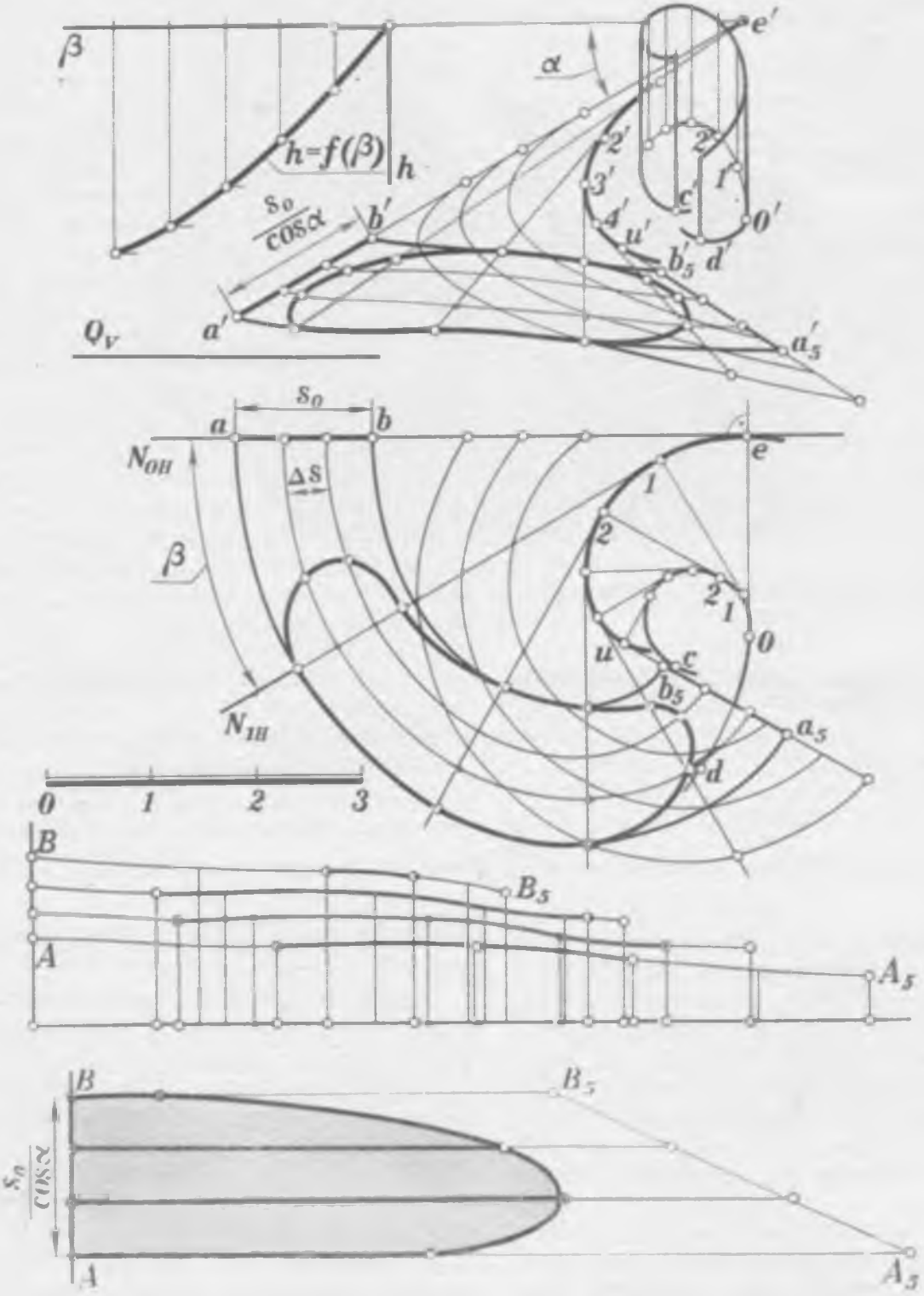

β
h=f(β)
h
α
e′
2′
3′
4′
u′
b′
b′5
d′
c′
1′
0′
a′
a′5
Q_V
s₀/cosα
s₀
a
b
e
N_OH
Δs
β
1
2
2₁
0
u
c
b5
a5
d
N_1H
0
1
2
3
B
B5
A
A5
B
B5
sn/cosα
A
A5

Рис. 508

Производящая прямая линия во всех своих положениях наклонена к плоскости Q_V под углом α. Как приближение считаем, что прямоугольник площадью Δf является проекцией бесконечно малой площадки ΔF отсека, ограниченного соответствующими частями производящей линии в смежных ее положениях и ходами бесконечно близких точек производящей линии.

В этом случае площадь отсека поверхности можно рассматривать как предел суммы площадей, состоящих из лент, ширина которых определяется бесконечно близкими точками производящей линии, а длина — ходами этих точек.

На рис. 508 построены развертки горизонтально-проецирующих цилиндров ходов точек производящей линии ab, $a'b'$ и определены длины этих ходов AA_5, ..., BB_5.

На вертикальной прямой линии взят отрезок AB, равный длине отрезка производящей линии, и в соответствующих его точках восставлены перпендикуляры (проведены горизонтальные линии), равные длинам ходов точек производящей линии. Площадь полученного контура, ограниченного прямыми и кривой линией, равна с некоторым приближением площади заданного контура отсека поверхности с направляющей плоскостью.

Вопросы для самопроверки

1. Как определяют площадь торсовой поверхности?
2. В чем состоят принципы метода Паппа — Гюльдена и метода Громова при определении площадей поверхностей вращения?
3. Как определяют площадь винтовой поверхности и площадь поверхности переноса?
4. На каком принципе основан метод определения площади улиток вращения? Дайте общую схему решения этой задачи.
5. Расскажите, как определяют площади поверхностей Каталана, поверхностей равного ската, площади линейчатых поверхностей с направляющей плоскостью.

ГЛАВА XVII

ОБЪЕМЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ТЕЛ, ОГРАНИЧЕННЫХ ПОВЕРХНОСТЯМИ

Определение объемов геометрических тел, ограниченных кривыми поверхностями, большое значение имеет в конструировании различных резервуаров, воздуховодов, насосов, ряда агрегатов машин и механизмов, форм поверхностей гидротехнических и других инженерных сооружений.

В начертательной геометрии методы определения объемов тел, ограниченных поверхностями, являются новыми. Они могут найти широкое применение в различных областях техники. Покажем графические методы определения объемов пространства, ограниченного кинематическими поверхностями.

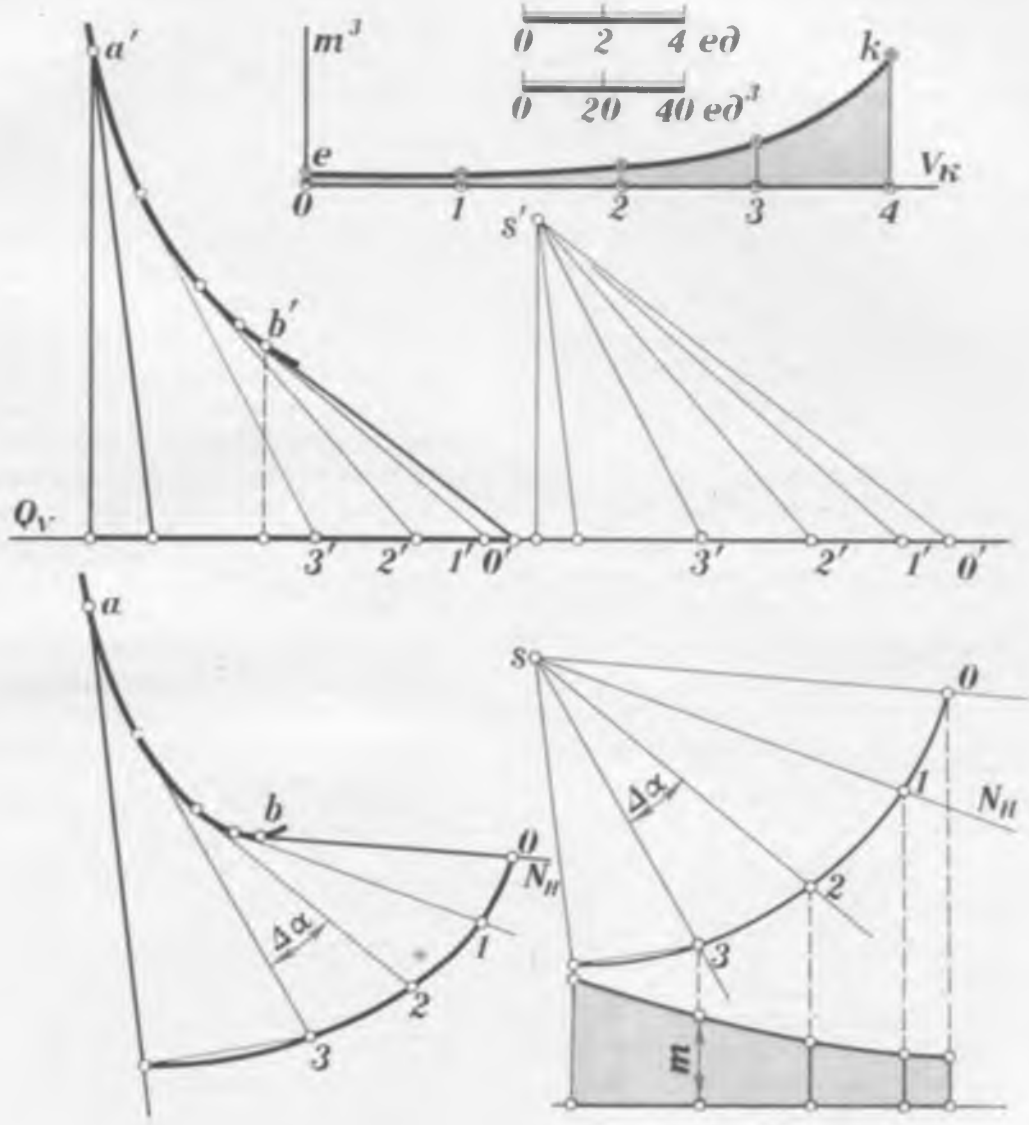
§105 ОБЪЕМ ТЕЛА, ОГРАНИЧЕННОГО ТОРСОВОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Пусть поверхность торса задана его ребром возврата ab, $a'b'$ (рис. 509). Определим объем тела, ограниченного этой поверхностью, плоскостью Q_V, горизонтально-проецирующим цилиндром ребра возврата ab, $a'b'$ торса и горизонтально-проецирующими плоскостями крайних образующих торсовой поверхности.

Построим направляющий конус торса. Эту поверхность ограничим плоскостью Q_V и крайними образующими. Построим кривую отношений длин парных образующих торса и его направляющего конуса. Через парные образующие торса и направляющего конуса проведем их горизонтально-проецирующие плоскости N_H. Этими плоскостями торс и конус рассекаются на бесконечно большое число пирамид бесконечно малых объемов. Пирамиды, ребрами которых являются парные образующие торса и направляющего конуса, подобны. Линейные размеры пирамид, принадлежащих торсу, в m раз больше линейных размеров соответствующих пирамид, принадлежащих направляющему конусу торса.

Очевидно, объем каждой из пирамид, принадлежащих торсу, в m^3 раз больше объема соответствующей пирамиды, принадлежащей направляющему конусу.

Выбираем две взаимно перпендикулярные прямые и принимаем их за оси координат. По оси абсцисс в заданном масштабе откладываем величины объемов пирамид, ограниченных направляющим конусом, а по оси ординат — соответствующие образующим конуса величины m^3.


a′
m³
0 2 4 ед
k
0 20 40 ед³
e
V_K
0 1 2 3 4
s′
b′
Q_V
3′ 2′ 1′ 0′
3′ 2′ 1′ 0′
a
b
0
N_II
Δα
1
2
3
s
0
1
N_II
Δα
2
3
m

Р и с. 509

400 Так можно построить кривую линию ek, представляющую собой график указанной зависимости. Площадь, ограниченная кривой ek, осью абсцисс и двумя бесконечно близкими ординатами, расстояние между которыми ΔV, равна $\Delta V \cdot m^3$. По числовой величине эта площадь равна бесконечно малому объему трехгранной пирамиды, ребрами которой являются образующие торса.

Площадь, ограниченная кривой ek, осью абсцисс и крайними ординатами, по числовой величине равна объему заданного тела с торсовой поверхностью.

§106 Объем тела, ограниченного поверхностью вращения

Определим объем тела, ограниченного поверхностью вращения. На рис. 510 поверхность вращения задана производящей кривой линией AB в меридиональной плоскости и вертикальной осью. Объем поверхности ограничен плоскостями крайних параллелей.

Рассматриваемый объем можно считать составленным из бесконечно большого числа бесконечно малых объемов цилиндров, площади основания которых равны площадям кругов параллелей, а высоты Δh бесконечно малы. Объем такого слагаемого цилиндра равен $\pi r^2 \Delta h$.

Во фронтальной меридиональной плоскости отложим от оси поверхности вращения, придерживаясь масштаба измерения, по направлениям радиусов параллелей величины πr^2. Таким построением наметится кривая CD, для которой вертикальная ось поверхности является осью ординат. Отсек площади, ограниченный этой кривой линией, осью ординат и абсциссами, расстояние между которыми бесконечно мало, по числовой величине равен $\pi r^2 \Delta h$, т. е. бесконечно малому объему слагаемого цилиндра.

Площадь, ограниченная кривой линией CD, осью ординат и крайними абсциссами, равна (в принятых единицах измерения) объему заданной поверхности, ограниченной плоскостями крайних ее параллелей.

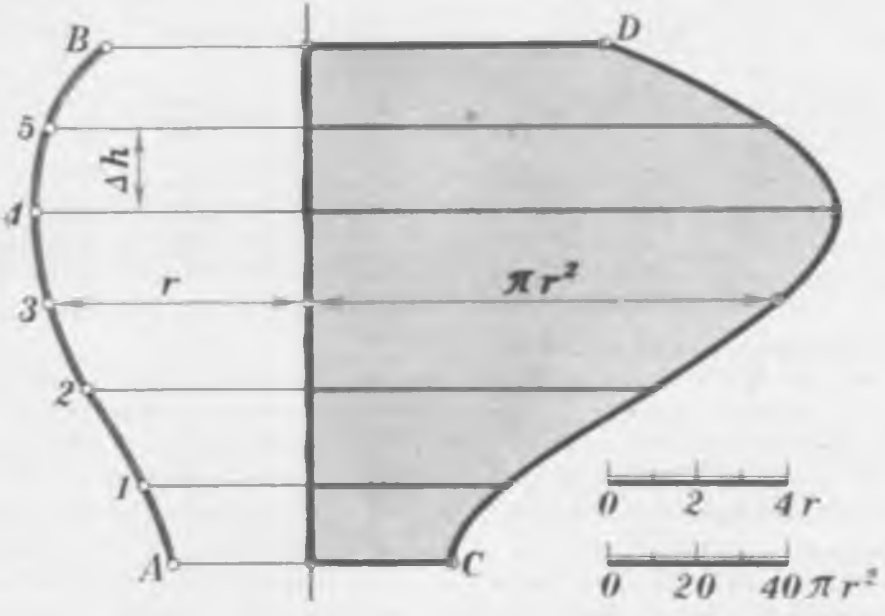


Рис. 510

ОБЪЕМ ТЕЛА, ОГРАНИЧЕННОГО ВИНТОВОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ §107

Определим объем тела, имеющего винтовую поверхность. Пусть винтовая поверхность задается производящей линией ab, $a'b'$, находящейся во фронтальной меридиональной плоскости и базовой линией — гелисой правого хода с шагом S и радиусом r (рис. 511).

Определим объем тела, ограниченного винтовой поверхностью, двумя цилиндрическими поверхностями винтовых ходов крайних точек aa' и bb' производящей линии, двумя меридиональными плоскостями с углом 60° между ними и горизонтальной плоскостью Q_V.

Указанный объем геометрического тела рассматриваем как сумму бесконечно малых объемов цилиндрических колец толщиной Δr. Здесь Δr — бесконечно малое приращение радиуса винтовых линий.

На рисунке вверху справа построены также развертки ряда цилиндрических сечений представленного тела. Бесконечно малый объем цилиндрического кольца равен $F\Delta r$, где F — площадь развертки цилиндрической поверхности.

Выбираем оси координат. По оси абсцисс от начала откладываем отрезок, равный длине ab горизонтальной проекции производящей линии, а по оси ординат — значения величин измеренных площадей (в заданном масштабе) разверток соответствующих цилиндров.

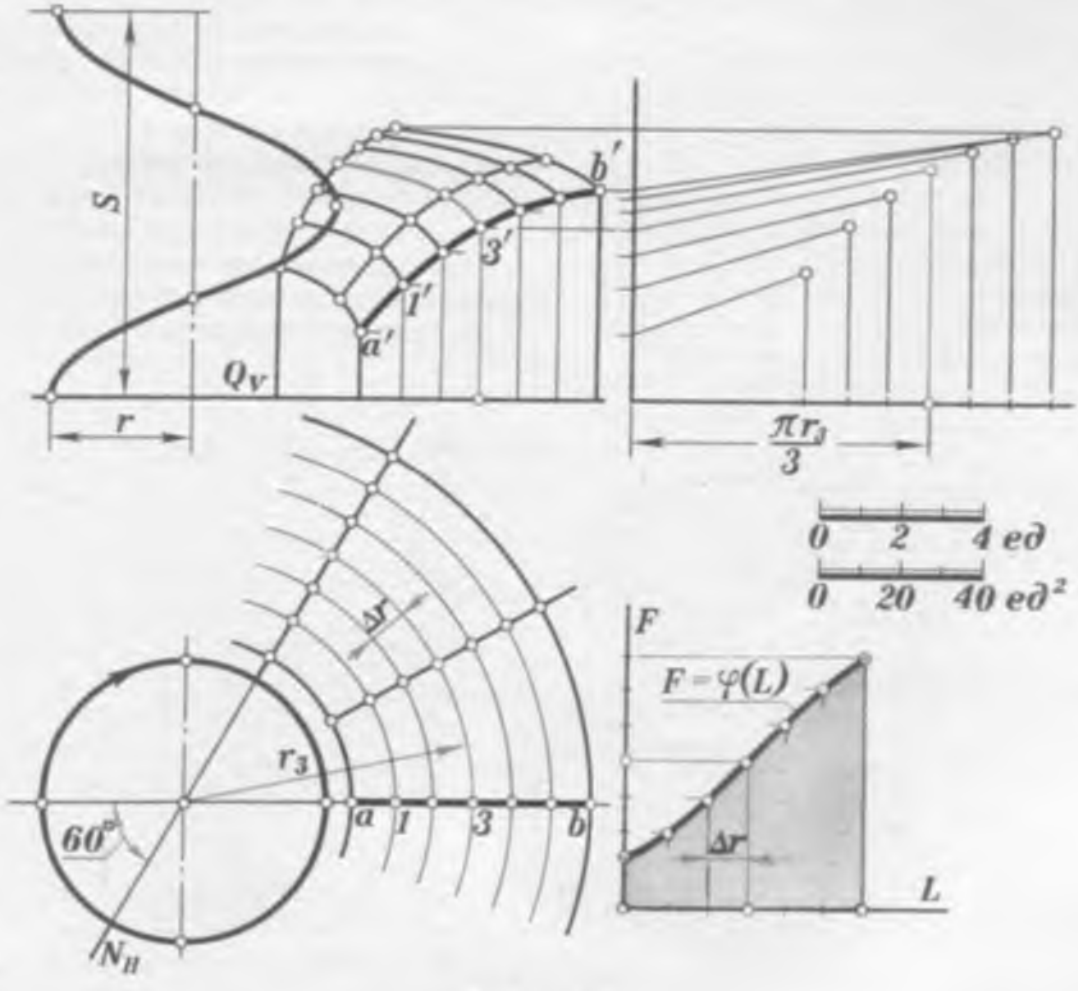


Рис. 511

402 Указанными построениями определяется кривая линия — график зависимости $F = \phi(L)$. Площадь, ограниченная этой кривой линией, осью абсцисс и двумя бесконечно близкими ординатами, расстояние между которыми Δr, равна $F\Delta r$, т. е. численно она равна величине бесконечно малого объема составляющего цилиндрического кольца.

Площадь, ограниченная кривой графика, осью абсцисс и крайними ординатами, численно равна величине объема рассматриваемого геометрического тела с винтовой поверхностью.

§108 Объем тела, ограниченного поверхностью переноса

Рассмотрим схему решения задачи на определение объема тела, ограниченного поверхностью переноса общего вида.

На рис. 512 представлена схема задания поверхности переноса. Поверхность переноса задана производящей плоской замкнутой кривой линией в начальном ее положении и направлением переноса — траекторией AK точки производящей линии.

Определим объем пространства, ограниченного перемещающимся в направлении AK от точки A на длину L контуром из начального его положения в заданное конечное положение. Объем такой поверхности можно рассматривать как предельный, состоящий из суммы бесконечно большого числа бесконечно малых объемов слагаемых цилиндров. Различные положения производящей являются направляющими линиями цилиндров, а направлениями образующих — соответствующие касательные к траектории точек производящей линии.

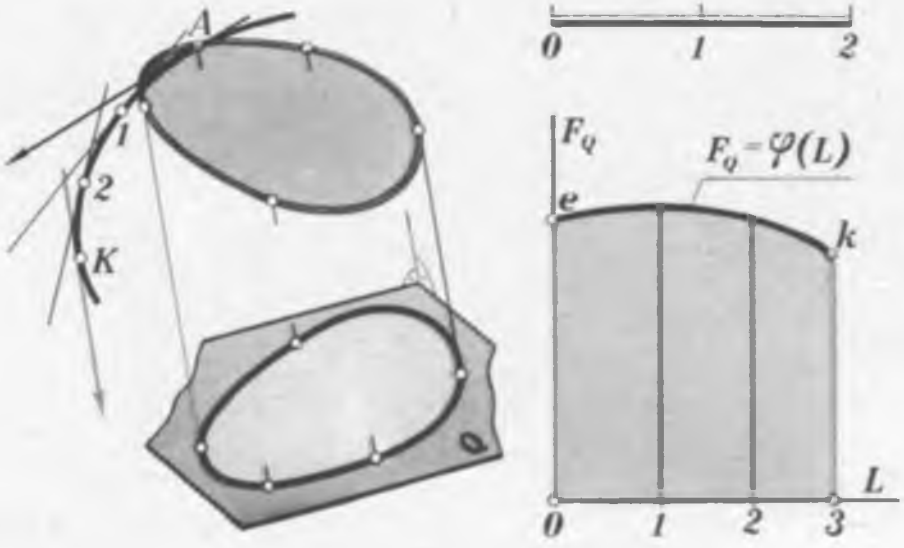
Бесконечно малый объем слагаемого цилиндра

$$\Delta V = F \cdot \Delta L,$$

где F — площадь проекции производящего контура на плоскость, перпендикулярную к соответствующей касательной к траектории AK точки производящей линии;

ΔL — бесконечно малая дуга траектории AK точки производящей линии.

Определим натуральные величины проекций производящего контура на плоскости Q, перпендикулярные к касательным в



Р и с. 512

соответствующих точках траектории AK. Выбираем оси координат. По оси абсцисс откладываем длины дуг траектории AK, а по оси ординат — площади F_Q найденных проекций производящего контура на плоскости Q, перпендикулярные к касательным в соответствующих точках траектории AK. Здесь единица площади F_Q представляется отрезком, равным принятой единице измерения.

Строим график $F_Q = \phi(L)$ указанной зависимости. Площадь, ограниченная кривой графика, осью абсцисс и крайними ординатами, численно равна искомому объему заданного геометрического тела с поверхностью переноса.

ОБЪЕМ ТЕЛА, ОГРАНИЧЕННОГО КОНИЧЕСКОЙ УЛИТКОЙ ВРАЩЕНИЯ §109

Рассмотрим задачу на определение объема конической улитки вращения.

Пусть улитка вращения задана неподвижным аксоидом-конусом и производящей замкнутой плоской фигурой, составленной из двух ветвей циклоиды, находящейся в касательной к конусу плоскости.

На рис. 505 представлена развертка конуса и производящая линия поверхности в начальном ее положении в плоскости, касательной к аксоиду-конусу; определен центр тяжести O_C площади производящего контура, который является в рассматриваемом случае и центром симметрии фигуры.

Если фигура сложная и асимметричная, то центр тяжести площади фигуры определяется по формулам:

$$x_C = \frac{\Sigma F \cdot x}{\Sigma F} = \frac{F_1 \cdot x_1 + F_2 \cdot x_2 + F_3 \cdot x_3 + \ldots}{F_1 + F_2 + F_3 + \ldots};$$

$$y_C = \frac{\Sigma F \cdot y}{\Sigma F} = \frac{F_1 \cdot y_1 + F_2 \cdot y_2 + F_3 \cdot y_3 + \ldots}{F_1 + F_2 + F_3 + \ldots}.$$

Здесь $F_1, F_2, F_3, \ldots$ — площади простейших фигур (треугольников, прямоугольников и т. д.), вписанных в контур;
$x_1, x_2, x_3, \ldots, y_1, y_2, y_3, \ldots$ — координаты центров тяжести простейших фигур контура относительно выбранных осей координат.

Определив центр тяжести, измеряем расстояния от центра тяжести площади фигуры до ряда образующих конуса-аксоида, вокруг которых вращается плоскость производящей линии. Определяя сферическую индикатрису нормалей, находим величины углов β поворота касательной плоскости. Строим график зависимости $r_C = \phi(\beta)$. Этот график дает возможность определить длину дуги траектории центра тяжести площади производящего контура.

Объем конической улитки вращения равен произведению площади производящего контура на длину траектории центра тяжести площади этого контура, т. е. $V = F \cdot L_C$.

Известно, что согласно теореме Галилея, *площадь, ограниченная аркой циклоиды и ее основанием, равна утроенной площади производящего круга.*

Площадь производящего контура

$$F = 2 \cdot 3\pi r^2$$

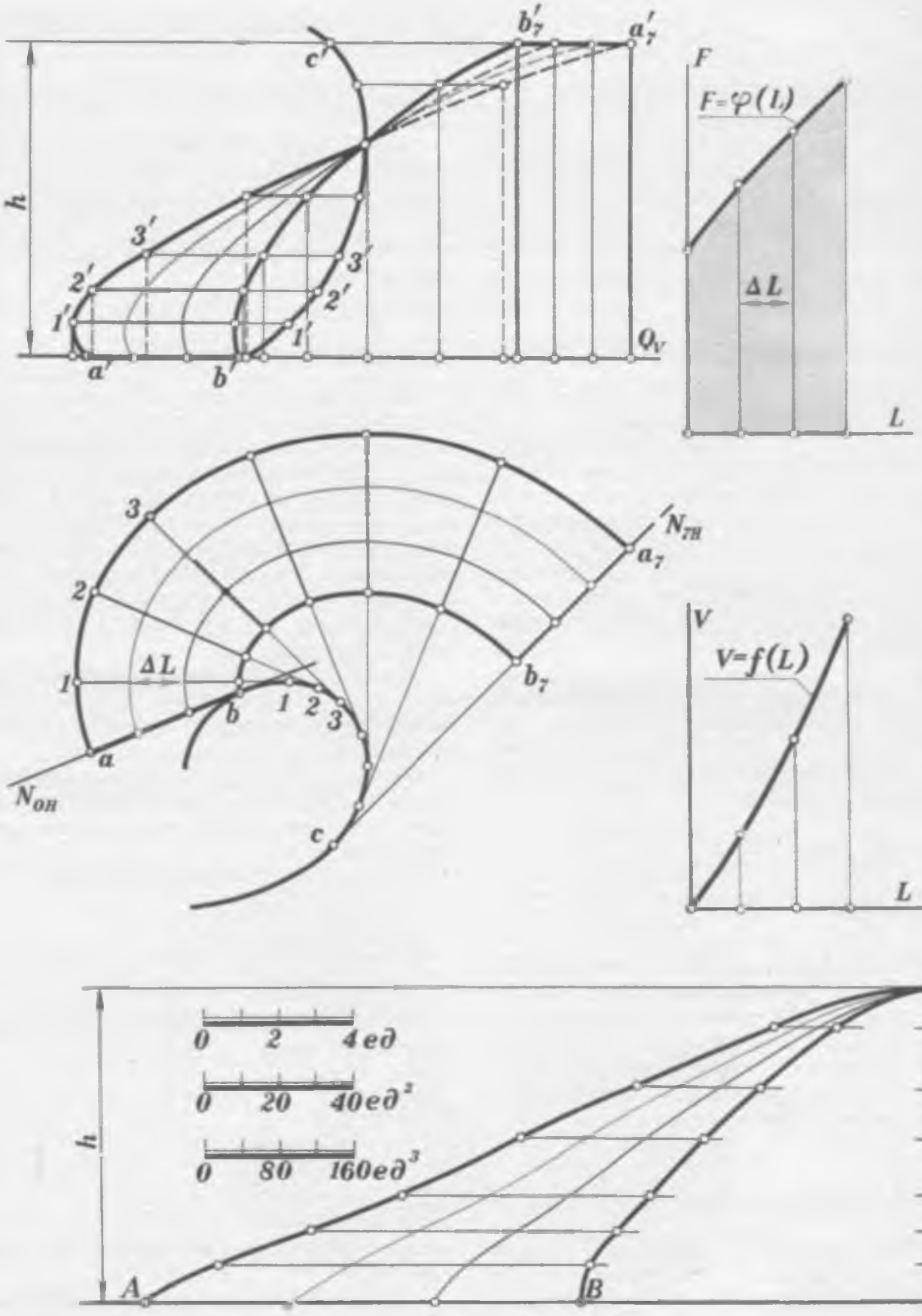
Объем тела, ограниченного заданной поверхностью, равен

$$V = F \cdot L_C.$$

ОБЪЕМ ТЕЛА, ОГРАНИЧЕННОГО ПОВЕРХНОСТЬЮ КАТАЛАНА §110

Пусть поверхность Каталана — поверхность с плоскостью параллелизма — задана линией сужения bc, $b'c'$, плоскостью параллелизма $Q_1 \parallel H$ и начальным положением производящей прямой линии ab, $a'b'$ (рис. 513).

Определим объем, ограниченный заданной поверхностью, направляющей плоско-


h
c'
b'_7
a'_7
3'
2'
1'
Q_V
a'
b
F
$F=\varphi(l)$
ΔL
L
3
2
1
ΔL
$N_{ГИ}$
a_7
b_7
b
1 2 3
a
$N_{ОИ}$
c
V
$V=f(L)$
L
0 2 4ед
0 20 40ед²
0 80 160ед³
h
A
B

Р и с. 513

стью Q_V, горизонтально-проецирующими плоскостями N_{0H} и N_{1H} крайних положений производящей линии и горизонтально-проецирующими цилиндрами кривых линий aa_1, $a'a_1'$ и bb_1, $b'b_1'$. Горизонтальная проекция bc линии сужения bc, $b'c'$ является эволютой горизонтальных проекций ходов точек производящей линии.

На данной поверхности можно наметить бесконечно большое число линий с расстоянием ΔL друг от друга. Проводя через эти линии горизонтально-проецирующие цилиндры, рассечем заданный объем тела с поверхностью Каталана на бесконечно большое число цилиндрических колец бесконечно малых объемов.

Объем ΔV каждого цилиндрического кольца равен $\Delta V = F\Delta L$, где F — площадь боковой поверхности цилиндра.

Развертки поверхностей проецирующих цилиндров представлены на чертеже (рис. 513) внизу. Вверху справа показано построение графика зависимости $F = \phi(L)$, где по оси абсцисс отложены расстояния между точками производящей линии, а по оси ординат — соответствующие значения величин площадей поверхностей цилиндров, измеренных по построенным их разверткам.

Отсек площади, ограниченный кривой линией графика, осью абсцисс и ординатами, расстояние между которыми ΔL, равен $F \cdot \Delta L$, т. е. по величине он равен бесконечно малому объему указанного выше цилиндрического кольца.

Площадь, ограниченная кривой линией, осью абсцисс и крайними ординатами, равна по величине в заданном масштабе искомому объему.

График зависимости $V = f(L)$ показывает характер нарастания объема при переходе от одной цилиндрической кольцевой поверхности к следующей.

ОБЪЕМ ТЕЛА, ОГРАНИЧЕННОГО ПОВЕРХНОСТЬЮ ОДИНАКОВОГО СКАТА

§111

Определим объем пространства, ограниченного поверхностью одинакового ската, горизонтальной плоскостью Q_V, двумя горизонтально-проецирующими плоскостями начальной и конечной образующих поверхности и горизонтально-проецирующим цилиндром кривой bc, $b'c'$ (рис. 514).

Воспользуемся теоремой Паппа — Гюльдена. Объем тела с поверхностью одинакового ската рассмотрим как предельный суммарный, состоящий из бесконечно большого числа бесконечно малых объемов составляющих геометрических тел. Такие составляющие тела представляются образованными вращением вокруг соответствующих осей (образующих аксоида-цилиндра) прямоугольного проецирующего треугольника с непрерывно изменяющейся высотой.

Их бесконечно малые объемы

$$\Delta V = F \cdot \Delta L_C,$$

где F — площадь производящего треугольника;

ΔL_C — бесконечно малая дуга кривой центра тяжести треугольника.

Центр тяжести площади треугольника находится в точке пересечения его медиан.

Координаты центра тяжести площади треугольника можно определить по формулам:

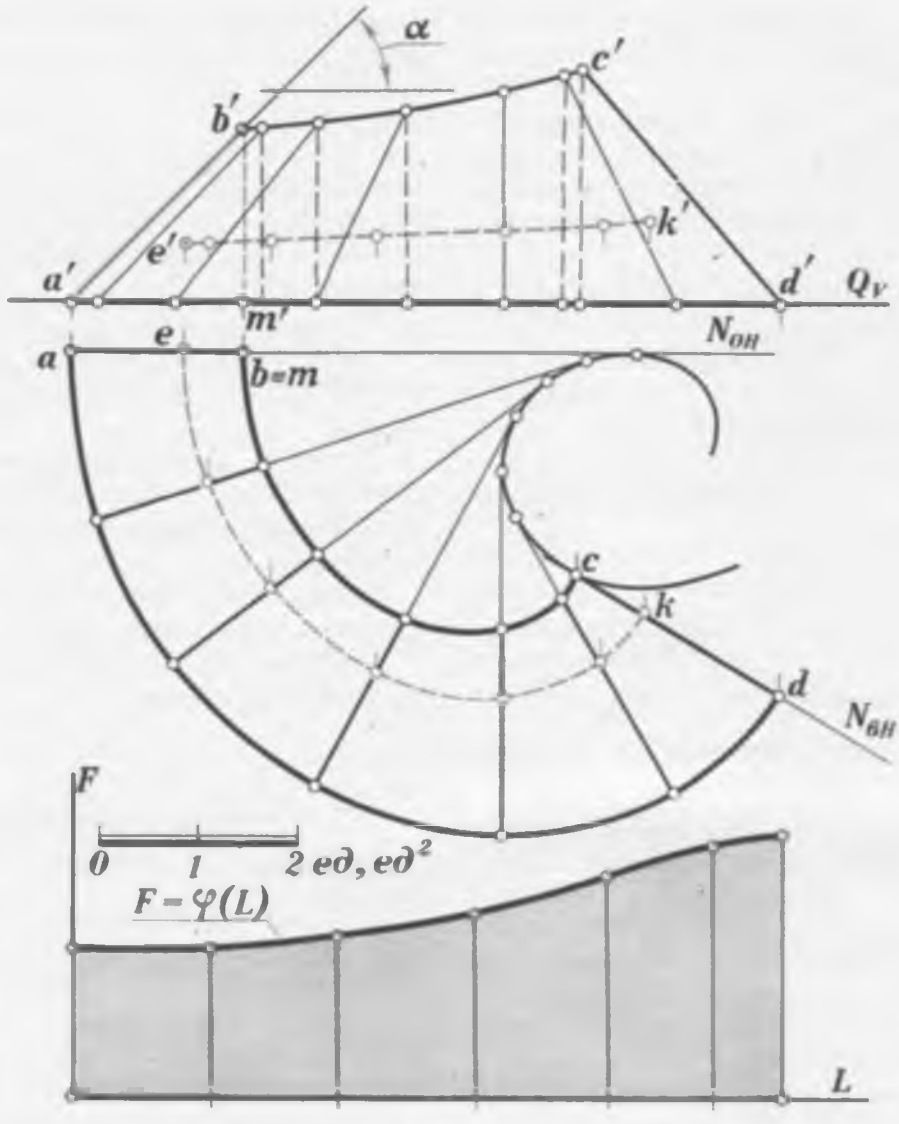
$$x_C = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}; \quad y_C = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

Здесь x_1, x_2, x_3 и y_1, y_2, y_3 — координаты вершин треугольника относительно выбранной декартовой системы координат.

Траекторией центра тяжести площади производящего непрерывно изменяющегося треугольника является кривая линия ek, $e'k'$. Горизонтальная проекция ek этой линии является геометрическим местом точек одной трети (начиная от вершины прямого угла) перемещающегося горизонтального катета.

Точки фронтальной проекции $e'k'$ траектории центра тяжести находятся на соответствующих линиях связи и на одной трети расстояния от горизонтального катета, равного одной трети высот соответствующих прямоугольных треугольников.

Внизу (рис. 514) построен график зависимости $F = \phi(L)$. По оси абсцисс отложены



Р и с. 514

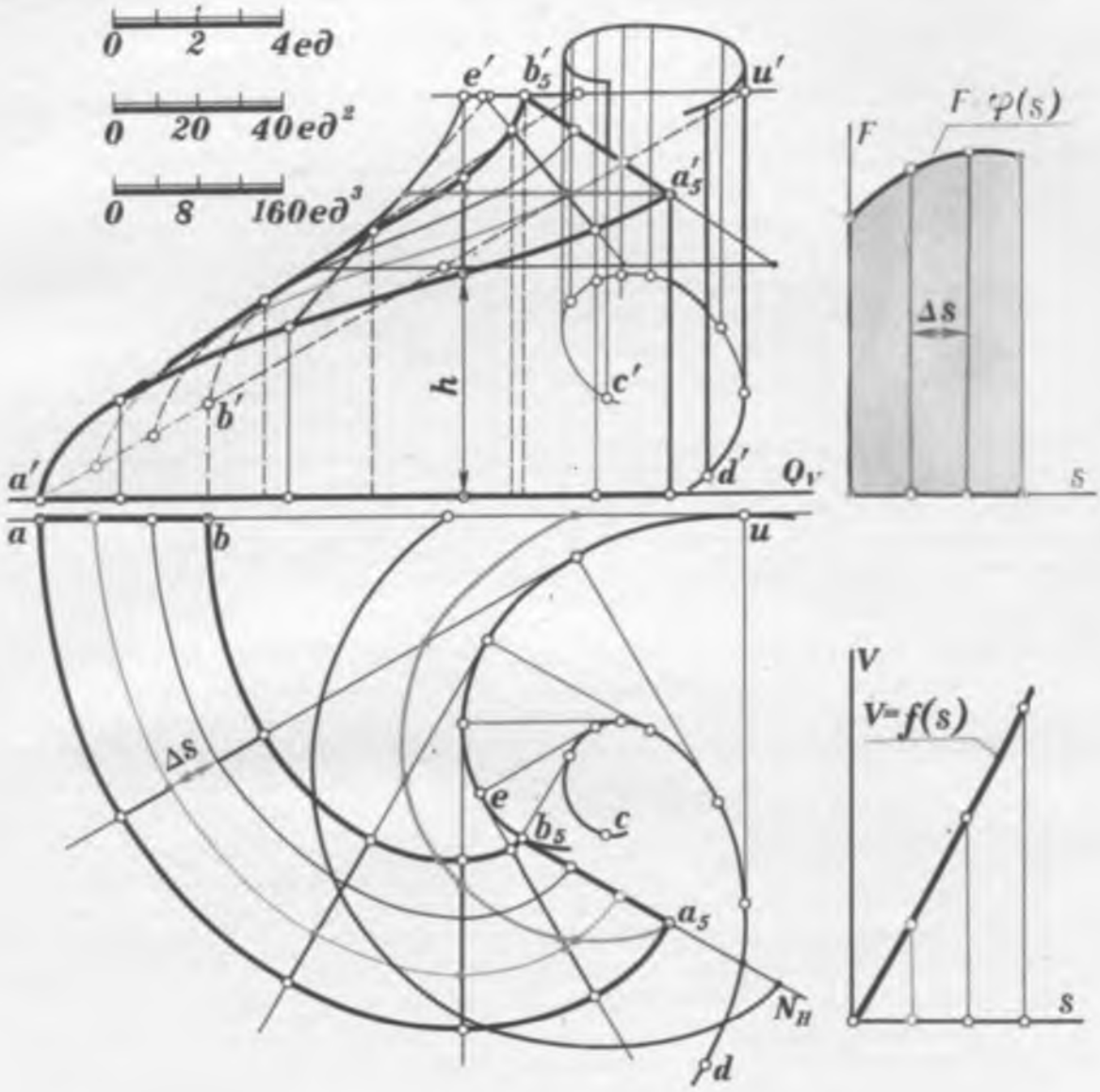
длины дуг кривой линии ek — горизонтальной проекции траектории ek, $e'k'$, по оси ординат — площади соответствующих треугольников.

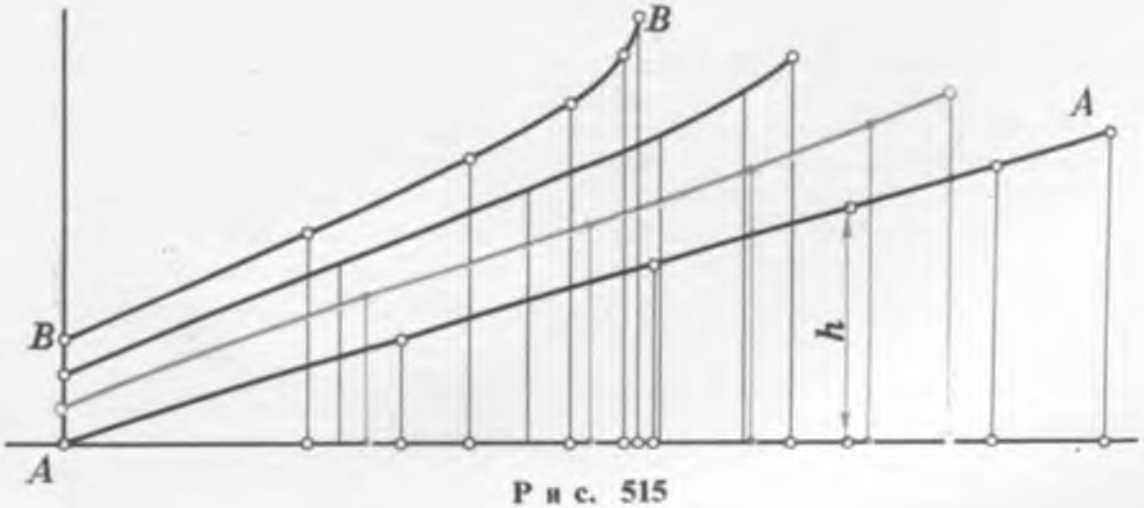
Объем заданного тела с поверхностью одинакового ската численно равен площади, ограниченной кривой линией $F = \phi(L)$, осью абсцисс и крайними ординатами.

В случае, если поверхность одинакового ската пересекают две секущие горизонтальные плоскости, то траекторией центра тяжести площади производящего прямоугольного треугольника является эвольвента горизонтальной проекции линии сужения поверхности, а линией графика $F = \phi(L)$ — прямая линия, параллельная оси абсцисс.

§112 ОБЪЕМ ТЕЛА, ОГРАНИЧЕННОГО ЛИНЕЙЧАТОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ С НАПРАВЛЯЮЩЕЙ ПЛОСКОСТЬЮ

На рис. 515 представлена ротативная поверхность с направляющей плоскостью. Поверхность задана неподвижным аксоидом — проецирующим цилиндром с направляющей линией cd, $c'd'$, начальным положением производящей линии ab, $a'b'$, лежащей в плос-


0 2 4ед
0 20 40ед²
0 8 160ед³
e′
b′5
u′
a′5
h
c′
b′
a′
d′
Qv
a
b
u
Δs
e
b5
c
a5
Nн
d
F=φ(s)
F
Δs
s
V
V=f(s)
s


B
A
B
h
A

Р и с. 515

кости, перпендикулярной к направляющей плоскости Q_V и плоскости, касательной к неподвижному аксоиду-цилиндру. Построена линия сужения eu, $e'u'$ поверхности.

Определим объем, ограниченный заданной поверхностью, направляющей плоскостью Q_V, горизонтально-проецирующими плоскостями N_H крайних положений производящей линии и горизонтально-проецирующими цилиндрами кривых линий aa_5, $a'a_5'$ и bb_5, $b'b_5'$, горизонтальные проекции которых являются эвольвентами проекции eu линии сужения eu, $e'u'$.

Наметим бесконечно большое число горизонтально-проецирующих цилиндров с расстоянием Δs друг от друга. Получим бесконечно большое число цилиндрических колец бесконечно малых объемов.

Объем ΔV каждого кольца равен

$$\Delta V = F \cdot \Delta s,$$

где F — площадь поверхности горизонтально-проецирующего цилиндра.

Построим развертки поверхностей секущих проецирующих цилиндров. Построим график зависимости $F = \phi(s)$, на котором по оси абсцисс отложим проекции расстояний между точками производящей линии, а по оси ординат — соответствующие значения величин площадей поверхностей цилиндров, измеренных по построенным их развертками.

Площадь, ограниченная кривой линией графика, осью абсцисс и ординатами, равна по величине в принятых единицах измерения объему тела с рассматриваемой поверхностью.

Кривая линия зависимости $V = f(s)$ второго графика показывает характер нарастания объема при переходе от одной цилиндрической поверхности к следующей.

Вопросы для самопроверки

1. Как определяют объем тела, ограниченного конической и торсовой поверхностью?
2. Как определяют объем тела, ограниченного поверхностью вращения?
3. Укажите последовательность решения задачи по определению объема тела, ограниченного винтовой поверхностью.
4. Дайте общую схему определения объема тела, ограниченного поверхностями Каталана, одинакового ската, линейчатой поверхностью с направляющей плоскостью.
5. На каком принципе основан метод определения объемов тел, ограниченных улитками вращения? Дайте общую схему решения этой задачи.

ГЛАВА XVIII

КРИВИЗНА ПОВЕРХНОСТИ

§113 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ О КРИВИЗНЕ ПОВЕРХНОСТИ. ИНДИКАТРИСА ДЮПЕНА*

Представление о кривизне поверхности в какой-либо ее точке можно получить путем исследования кривизны в этих точках ряда проходящих через нее намеченных на поверхности кривых линий. Обычно рассматривают кривизну нормальных сечений поверхности.

Линию пересечения поверхности плоскостью, проходящей через нормаль, называют *нормальным сечением поверхности*.

Нормальная плоскость в общем случае пересекает поверхность по кривой линии, а касательную плоскость — по прямой линии, которая является касательной к кривой линии сечения поверхности.

Нормальные плоскости, построенные в какой-либо точке поверхности, пересекают ее по кривым линиям, которые имеют в этой точке различные радиусы кривизны, направленные по нормалям поверхности.

Если в касательной плоскости откладывать от рассматриваемой точки по разные стороны в направлении касательных к нормальным сечениям отрезки, равные корням квадратным из величин соответствующих радиусов кривизны, то концами этих отрезков наметится кривая линия — *индикатриса Дюпена*, которая показывает распределение кривизны нормальных сечений.

Величина радиуса кривизны любого нормального сечения поверхности при этих условиях пропорциональна квадрату соответствующего полудиаметра индикатрисы.

В зависимости от вида поверхности, индикатриса Дюпена может иметь вид эллипса, гиперболы или двух параллельных прямых линий. Если индикатриса Дюпена касается поверхности только в одной точке, то она является эллипсом. В этом случае все точки поверхности, достаточно близкие к рассматриваемой точке, находятся по одну сторону касательной плоскости. Такие точки поверхности, как известно, называются эллиптическими.

Некоторые поверхности имеют точки, в которых индикатриса Дюпена является окружностью, т. е. кривизна всех нормальных сечений поверхности в этой точке одинакова. Такие точки поверхности называют *омбилическими**. Все точки поверхности сферы омбилические.

---

* Линия, которая дает наглядное представление о характере искривления поверхности в данной ее точке, названа по имени французского математика Дюпена, Франсуа Пьера Шарля (1784—1873).

* От франц. ombilic, от лат. umbilicus — округленная точка.

410 Индикатриса Дюпена имеет вид сопряженных* гипербол, если касательная плоскость в рассматриваемой точке пересекает поверхность. Такую точку называют *гиперболической*. Касательная плоскость к линейчатой поверхности проходит через ее производящую прямую линию.

Если она остается касательной плоскостью для всех точек этой прямой, то индикатриса Дюпена такой поверхности в точках производящей линии представляется двумя параллельными прямыми линиями. Точки, расположенные на этой производящей линии, называют *параболическими*.

Описанные выше возможные виды индикатрисы Дюпена показывают, что в каждой точке поверхности величины кривизны $k = \frac{1}{R}$ нормальных сечений поверхности достигают двух крайних значений.

Направления, в которых кривизны нормальных сечений имеют минимум и максимум, взаимно перпендикулярны и совпадают с главными диаметрами индикатрисы Дюпена. Их называют *главными направлениями* на поверхности в рассматриваемой точке.

Нормальные сечения N_1 и N_2, проведенные в главных направлениях, называют *главными сечениями*.

Величины $k_1 = \frac{1}{R_1}$ и $k_2 = \frac{1}{R_2}$ главных сечений называют *главными кривизнами* поверхности в рассматриваемой точке. Соответствующие этим кривизнам радиусы R_1 и R_2 называют *главными радиусами кривизны* поверхности в рассматриваемой точке, а их центры — *центрами кривизны* поверхности в данной ее точке.

В эллиптической точке главные кривизны имеют одинаковые знаки, а в гиперболической — противоположные. В параболической точке одна из главных кривизн равна нулю.

В гиперболической точке поверхности можно отметить два асимптотических направления (асимптоты гиперболы) с нулевой кривизной нормального сечения, т. е. можно построить прямые, к которым ветви гиперболы неограниченно приближаются при удалении в бесконечность. Здесь радиусы кривизны бесконечно большие.

Радиус кривизны $R = \frac{1}{k}$ любого нормального сечения N выражается через главные радиусы кривизны формулой Эйлера*:

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\phi}{R_1} + \frac{\sin^2\phi}{R_2}$$

или

$$k = k_1 \cdot \cos^2\phi + k_2 \cdot \sin^2\phi,$$

где ϕ — угол между плоскостями N и N_1 нормальных сечений;

N_1 — главное нормальное сечение, соответствующее главному радиусу кривизны R_1.

Для параболических точек $\frac{1}{R_2} = 0$. Формула Эйлера принимает вид $\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\phi}{R_1}$ или $k = k_1 \cdot \cos^2\phi$. Если индикатрисой Дюпена является равнобочная (равносторонняя) гипербола, то главные радиусы кривизны равны по величине и противоположны по знаку: $R_2 = -R_1$. Формула Эйлера принимает вид:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1}(\cos^2\phi - \sin^2\phi) = \frac{\cos 2\phi}{R_1}$$

В этом случае асимптотические направления взаимно перпендикулярны ($\phi = \pm 45°$).

Величину, равную полусумме главных кривизн, называют *средней кривизной* поверхности в рассматриваемой точке.

Поверхности, во всех точках которых средняя кривизна равна нулю, называют *минимальными*.

Минимальные поверхности с гиперболическими точками имеют индикатрисами Дюпена равнобочные гиперболы.

Из поверхностей вращения минимальной поверхностью является *катеноид* — поверхность, которая получается при вращении цепной линии вокруг своей оси. *Цепной*

---

* *Сопряженными* называют гиперболы, имеющие общие асимптоты. Действительная ось каждой из них равна мнимой оси другой и наоборот.

* Эйлер в 1760 г. вывел следующую формулу:

$$R = \frac{2R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2 - (R_1 - R_2) \cdot \cos 2\phi}.$$

линией называется линия провеса однородной нити (цепи), подвешенной за оба ее конца. Из линейчатых поверхностей минимальной поверхностью является поверхность винтового коноида.

Произведение $\frac{1}{R_1 \cdot R_2}$ главных кривизн называют *гауссовой** *кривизной* поверхности в данной точке.

Индикатриса Дюпена в рассматриваемой точке поверхности дает возможность определить кривизну любого нормального сечения поверхности, а также главные направления кривизн, главную и среднюю кривизны.

При исследовании кривизн поверхностей воспользуемся аппаратом дифференциальной геометрии, придерживаясь преимущественно графических методов решения намеченных задач.

Индикатрису Дюпена можно построить по известному из дифференциальной геометрии уравнению:

$$\frac{L}{E}x^2 + \frac{2M}{\sqrt{EG}} \cdot xy + \frac{N}{G} \cdot y^2 = \pm 1.$$

Здесь постоянные величины E, L, G, M, N называют *коэффициентами Гаусса*; их можно определить из аналитических выражений рассматриваемой поверхности (ее уравнений).

В правой части уравнения положительный знак относится к эллиптическим точкам поверхности, отрицательный — к гиперболическим.

Уравнение показывает, что это кривая линия второго порядка, центром которой является рассматриваемая точка поверхности.

Пользуясь коэффициентами Гаусса, можно определить главные радиусы кривизны из квадратного уравнения $(LN - M^2)R^2 - (EN - 2FM + GL)R + (EG - F^2) = 0$, вытекающего из характеристического уравнения индикатрисы.

Это уравнение можно привести к виду:

$$AR^2 - BR + C = 0.$$

Его применяют для определения главных радиусов кривизны и построения индикатрисы Дюпена рассматриваемой поверхности.

СОПРИКАСАЮЩИЕСЯ ЭТАЛОНЫ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

§ 114

В начертательной геометрии при исследовании кривизны поверхностей не представляется возможным широко пользоваться построением индикатрисы Дюпена, так как во многих случаях здесь рассматриваются поверхности, не имеющие аналитических выражений. Для этого используют методы дифференциальной геометрии.

Соприкасающимся эталоном поверхности данного закона образования называют такую поверхность, которая при соответствующем ее размещении может иметь с рассматриваемой кинематической поверхностью общие касательную плоскость, заданную точку касания и индикатрису Дюпена для этой точки касания.

Аналогично определению соприкасающейся окружности плоских и пространственных кривых линий можно определить соприкасающийся эталон в заданной точке кинематической поверхности основного вида.

Соприкасающимся эталоном кинематической поверхности основного вида в заданной ее точке называют предельное положение винтового тора, который с заданной кинематической поверхностью основного вида имеет три общих бесконечно близких хода.

Кинематическая поверхность основного вида имеет в заданной на поверхности точке ту же самую индикатрису Дюпена, что и соприкасающийся в этой точке ее эталон.

* По имени крупнейшего немецкого математика Гаусса, Карла Фридриха (1777—1855).

Это следует из того, что соприкасающиеся окружности нормальных сечений поверхности и кривые линии сечения ее соприкасающегося эталона совпадают как предельные положения окружностей, проходящих через три точки на трех общих бесконечно близких ходах.

Если окружность заменена производящей прямой линией, то соприкасающийся винтовой тор имеет вид прямого или косого закрытого геликоида, конуса вращения, цилиндра вращения или плоскости. Эти поверхности сами являются эталонами.

У линейчатых ротативных и спироидальных улиток соприкасающимися эталонами соответственно являются конусы вращения и геликоиды с эксцентриситетом, равным нулю.

Однополостные гиперболоиды вращения и геликоиды с неравными нулю эксцентриситетами являются соприкасающимися эталонами ротативных и спироидальных линейчатых поверхностей с направляющей плоскостью.

Очевидно кривизну в заданных точках кинематических поверхностей основных видов с плоскими производящими линиями можно определить, например, построив индикатрису Дюпена для точек винтового тора, вводя в расчетные уравнения соответствующие параметры:

r — радиус производящей окружности,

R — радиус гелисы центра производящей окружности,

p — винтовой параметр винтового тора,

ϕ — угол наклона к оси винтового тора касательной, построенной в данной точке производящей окружности.

Давая соответствующие значения величинам этих параметров, можно получить расчетные уравнения к построениям индикатрис Дюпена для винтового тора общего вида и для его частных случаев: закрытых геликоидов ($R = \infty$), торов ($p = 0$), конусов вращения ($p = 0$, $R = \infty$) и цилиндров вращения ($p = \infty$).

Полученные таким путем расчетные уравнения позволяют строить индикатрису Дюпена кинематических поверхностей основных видов при общем способе их задания базовой линией и производящей кривой линией произвольного вида.

Отметим, что для поверхностей вращения базовая линия преобразуется в ось поверхности, а для поверхности переноса — в направление переноса. В этих случаях необходимо лишь построить соответствующее плоское сечение рассматриваемой поверхности и, пользуясь им, по чертежу определить параметры r, R и ϕ соприкасающегося винтового тора, который имеет общую с заданной поверхностью индикатрису Дюпена.

Прямые и косые геликоиды наиболее точно характеризуют строение линейчатых поверхностей с плоскостью параллелизма и направляющей плоскостью в их бесконечно малых отсеках, поэтому их можно рассматривать как соприкасающиеся эталоны этих поверхностей.

Таким образом, построение индикатрисы Дюпена различного вида геликоидов дает возможность решить все вопросы о кривизне линейчатых поверхностей с плоскостью параллелизма и направляющей плоскостью.

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение индикатрисы Дюпена.
2. Какие поверхности называют минимальными?
3. Что называют гауссовой кривизной поверхности в данной точке?
4. Напишите общее уравнение индикатрисы Дюпена.
5. Какие поверхности называют соприкасающимися эталонами рассматриваемых кинематических поверхностей?

ЛИТЕРАТУРА

Бубенников А. В., Громов М. Я. Начертательная геометрия. М., «Высшая школа» 1965.

Выгодский М. Я. Дифференциальная геометрия. М.—Л., ГИТТЛ, 1949.

Глаголев Н. А. Начертательная геометрия. М., ГИТТЛ, 1953.

Глазунов Е. А. и Четверухин Н. Ф. Аксонометрия. М., ГИТТЛ, 1953.

Гордон В. О. и Семенцов-Огиевский М. А. Курс начертательной геометрии. М., Физматгиз, 1971.

Громов М. Я. Начертательная геометрия. Ч. II, М., ВЗПИ, 1954.

Громов М. Я. Пространственные кривые линии в ортогональных проекциях. М., ВЗПИ, 1956.

Добряков А. И. Курс начертательной геометрии, М.—Л., Госстройиздат, 1952.

Иерусалимский А. М. Начертательная геометрия. М., Росвузиздат, 1963.

Колотов С. М., Дольский Е. Е., Михайленко В. Е., Гусев Н. А., Горяенко Б. С. Курс начертательной геометрии. Киев, Госстройиздат УССР, 1958.

Котов И. И. Начертательная геометрия. М., «Высшая школа». 1970.

Крылов Н. Н., Лобандиевский П. И., Мэн С. А. Начертательная геометрия. М., «Высшая школа», 1963.

Кузнецов Н. С. Начертательная геометрия. М., «Высшая школа», 1969.

Куликов А. С. Начертательная геометрия в применении к черчению, конструированию и проектированию. М., Машгиз, 1959.

Курдюмов В. И. Курс начертательной геометрии. СПб., 1893-97.

Макаров Н. И. Курс начертательной геометрии. СПб., 1870.

Монж Г. Начертательная геометрия. М., изд. АН СССР, 1947.

Попов Н. А. Курс начертательной геометрии. М., Гостехиздат, 1947.

Посвянский А. Д., Краткий курс начертательной геометрии. М., «Высшая школа», 1970.

Русскевич Н. Л. Начертательная геометрия. Киев, «Будівельник», 1970.

Рынин Н. А. Начертательная геометрия. Л., Госстройиздат, 1939.

Севастьянов Я. А. Основания начертательной геометрии. СПб., 1821.

Траутман Н. Ф. Сборник задач по начертательной геометрии в применении к различным областям науки и техники. М., Машгиз, 1954.

Фролов С. А. Преобразование проекций. М., «Машиностроение», 1970.

Четверухин Н. Ф., Левицкий В. С., Прянишникова З. И., Тевлин А. М., Федотов Г. И. Начертательная геометрия. М., «Высшая школа», 1963.

Четверухин Н. Ф. и др. Курс начертательной геометрии. М., «Высшая школа», 1968.

Чувиков Н. Г. Преобразование проекций. М., «Советская наука», 1957.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 5
Введение 6
Условные обозначения 7

Глава I. **Основные методы проецирования геометрических форм на плоскости**

§ 1. Центральное (коническое) проецирование 9
§ 2. Параллельное (цилиндрическое) проецирование 11
§ 3. Основные свойства параллельного проецирования 13
§ 4. Восприятие (представление) предмета по его изображению в параллельных проекциях 16
1. Прямоугольные (ортогональные) проекции 16
2. Аксонометрические проекции . . . 17
3. Проекции с числовыми отметками 18
4. Векториальные (федоровские) проекции 19
§ 5. Пространственная модель координатных плоскостей проекций 20
§ 6. Построение чертежей геометрических образов в ортогональных проекциях . . 21
Вопросы для самопроверки 23

Глава II. **Точка и отрезки прямых линий на эпюре Монжа**

§ 7. Чертежи точек, расположенных в различных углах пространства 24
§ 8. Чертежи точек в трех проекциях . . 26
§ 9. Чертежи отрезков прямых линий . 29
1. Прямые линии общего положения . 29
2. Прямые, параллельные плоскостям проекций 30
3. Проецирующие прямые 32
4. Прямые, параллельные биссекторным плоскостям 33
§ 10. Деление отрезка прямой линии в заданном отношении 33
§ 11. Следы прямой линии 34
§ 12. Определение длины отрезка прямой и углов его наклона к плоскостям проекций 36
§ 13. Взаимное положение прямых линий 37
1. Пересекающиеся прямые 38
2. Параллельные прямые 38
3. Скрещивающиеся прямые 39
Вопросы для самопроверки 40

Глава III. **Плоскость на эпюре Монжа. Основные позиционные и метрические задачи**

§ 14. Задание плоскости 41
1. Плоскость общего положения . . . 41
2. Проецирующие плоскости 42
§ 15. Прямые линии и точки плоскости 44
§ 16. Проекции плоских фигур 48
§ 17. Пересечение прямых линий и плоскостей проецирующими плоскостями . . 49
§ 18. Пересечение прямых линий плоскостями общего положения. Установление видимости прямой 51
§ 19. Взаимно пересекающиеся плоскости 54
§ 20. Прямые линии и плоскости, параллельные плоскости 56
1. Прямые линии, параллельные плоскости 56
2. Взаимно параллельные плоскости . 56
§ 21. Прямые линии и плоскости, перпендикулярные к плоскости 58
1. Прямые линии, перпендикулярные к плоскости 58
2. Взаимно перпендикулярные плоскости 60
§ 22. Взаимно перпендикулярные прямые общего положения 61
Вопросы для самопроверки 62

Глава IV. **Обобщенные чертежи плоских фигур**

§ 23. Двойное параллельное проецирование плоских фигур на одну плоскость . 64
§ 24. Прямые углы обобщения 65
§ 25. Позиционные задачи на обобщенных чертежах 67
Вопросы для самопроверки 74

Глава V. **Способы преобразования проекционного чертежа**

§ 26. Преобразование проекционного чертежа способом замены плоскостей проекций 75
§ 27. Преобразование проекционного чертежа способом вращения 82
1. Вращение вокруг проецирующих прямых линий 82
2. Плоскопараллельные перемещения . 86
3. Вращение вокруг прямых, параллельных плоскостям проекций 87
4. Вращение вокруг прямых общего положения 90
§ 28. Винтовые перемещения 91
§ 29. Вспомогательное проецирование . 94
1. Центральное вспомогательное проецирование 95
2. Косоугольное вспомогательное проецирование 96
3. Прямоугольное вспомогательное проецирование 97
§ 30. Стереографическое проецирование. 101
Вопросы для самопроверки 103

Глава VI. **Многогранники**

§ 31. Общие сведения о многогранниках Виды многогранников 104
1. Пирамиды 105
2. Призмы 105
3. Призматоиды 106
4. Правильные выпуклые многогранники (тела Платона) 106
5. Правильные звездчатые многогранники 109

§ 32. Чертежи многогранников и многогранных поверхностей 110
§ 33. Пересечение многогранников плоскостью и прямой линией 113
§ 34. Взаимное пересечение многогранников 117
§ 35. Развертки многогранников 122
Вопросы для самопроверки 127

Глава VII. **Кривые линии**

§ 36. Плоские кривые линии 129
§ 37. Понятия о кривизне плоской кривой линии 132
§ 38. Монотонные и составные плоские кривые линии. Вершины кривых линий . 134
§ 39. Соприкасание плоских кривых линий 138
§ 40. Преобразование плоских кривых линий 139
1. Конхоидальное преобразование . . 140
2. Преобразование инверсии 141
3. Конформное преобразование . . . 142
§ 41. Кривые линии второго порядка . 144
1. Эллипс 145
2. Гипербола 152
3. Парабола 154
§ 42. Пространственные кривые линии . 156
§ 43. Цилиндрические винтовые линии . 158
§ 44. Конические винтовые линии . . . 160
§ 45. Кривые линии на сфере 162
Вопросы для самопроверки 164

Глава VIII. **Поверхности. Их образование и задание на эпюре Монжа**

§ 46. Образование и задание поверхностей. Сети и очерки поверхностей 165
1. Аналитический способ задания поверхностей 165
2. Задание поверхности каркасом . . . 165
3. Кинематический способ задания поверхностей 167
§ 47. Кинематические поверхности основных видов 168
1. Поверхности переноса прямолинейного направления 170
2. Поверхности вращения 171
3. Винтовые поверхности 176
§ 48. Торсовые поверхности 184
§ 49. Линейчатые косые поверхности . . 185
1. Линейчатые поверхности с плоскостью параллелизма (поверхности Каталана) 186
Цилиндроиды 187
Коноиды 188
Косая плоскость 192
2. Линейчатые поверхности с направляющей плоскостью 198
Косые цилиндроиды 198
Косые коноиды 199
Дважды косая плоскость (косой гиперболический параболоид) 199
3. Косые цилиндры с тремя направляющими 200
§ 50. Поверхности второго порядка общего вида 202
Вопросы для самопроверки 204

Глава IX. **Пересечение поверхностей плоскостями и прямыми линиями**

§ 51. Пересечение поверхностей основных видов проецирующими плоскостями . . 205
§ 52. Пересечение поверхностей основных видов прямыми линиями 210
§ 53. Пересечение поверхностей основных видов плоскостями общего положения . 212
§ 54. Конические сечения 215
§ 55. Пересечение плоскостями поверхностей второго порядка общего вида . . . 218
Вопросы для самопроверки 221

Глава X. **Взаимное пересечение поверхностей**

§ 56. Общая схема построения линии пересечения поверхностей 222
§ 57. Пересечение поверхностей кривыми линиями 223
§ 58. Основные способы построения линий взаимного пересечения поверхностей . . 225
1. Способ вспомогательных секущих плоских посредников 226
2. Способ вспомогательных секущих сферических посредников 227
§ 59. Пересечение поверхностей проецирующими цилиндрами (призмами) 229
§ 60. Взаимное пересечение линейчатых поверхностей 232
1. Взаимное пересечение конических поверхностей 232
2. Пересечение конической поверхности цилиндрической 238
3. Взаимное пересечение цилиндрических поверхностей 242
4. Пересечение линейчатой поверхности с плоскостью параллелизма (поверхности Каталана) цилиндрами и конусами. 247
5. Пересечение поверхности одинакового ската цилиндром 249
§ 61. Взаимное пересечение поверхностей вращения 251
§ 62. Пересечение винтовых поверхностей между собой и другими поверхностями 253
§ 63. Взаимное пересечение поверхностей второго порядка. Особые случаи пересечения 258
Вопросы для самопроверки 265

Глава XI. **Плоскости, касательные к поверхностям**

§ 64. Основные понятия. Виды касания . 266
§ 65. Плоскости, касательные к поверхностям с параболическими точками 267
§ 66. Плоскости, касательные к поверхностям с эллиптическими точками 271
§ 67. Плоскости, касательные к поверхностям с гиперболическими точками . . . 276
§ 68. Применение касательных плоскостей при решении позиционных задач на поверхности 280
§ 69. Построение очертаний поверхностей 284
Вопросы для самопроверки 285

Глава XII. Развертка поверхностей

§ 70. Развертки поверхностей торсов . . 286
§ 71. Условные развертки неразвертывающихся поверхностей 295
Вопросы для самопроверки 299

Глава XIII. Аксонометрические проекции

§ 72. Общие сведения. Виды аксонометрических проекций 300
§ 73. Основная теорема аксонометрии (теорема Польке) 303
§ 74. Треугольник следов и показатели искажения 305
§ 75. Прямоугольные изометрические проекции 308
§ 76. Прямоугольные диметрические проекции 310
§ 77. Косоугольные аксонометрические проекции 313
§ 78. Позиционные и метрические задачи в аксонометрии 315
Вопросы для самопроверки 316

Глава XIV. Кинематические плоские и пространственные кривые линии и их основные свойства

§ 79. Задание плоских кривых линий в естественных координатах 317
§ 80. Кривизна ортогональной проекции плоской кривой линии 321
§ 81. Эволюты кривых линий второго порядка 322
§ 82. Кинематические кривые линии. Рулетты 324
§ 83. Радиусы кривизны рулетт 326
§ 84. Циклические (циклоидальные) рулетты 329
§ 85. Пространственные кривые линии. Трехгранник Френе 334
§ 86. Задание пространственных кривых линий в естественных координатах . . . 337
§ 87. Кривизна ортогональной проекции пространственной кривой линии 339
§ 88. Коническая и полная кривизна пространственной кривой линии 340
§ 89. Развертки поверхностей торсов, сопровождающих пространственную кривую линию 343
§ 90. Виды пространственных кривых линий 346
1. Цилиндрические винтовые линии — гелисы 346
2. Унополярные кривые линии. Эволюты пространственной кривой линии . 350
3. Линии одинакового ската 351
4. Сферические кривые линии 351
5. Косые круги 351
6. Кривые линии постоянного винтового параметра 352
7. Соприкасающиеся гелисы 352
8. Кривые линии Бертрана 353
§ 91. Монотонные и составные пространственные кривые линии. Вершины кривых линий 353
Вопросы для самопроверки 358

Глава XV. Кинематические поверхности общего вида

§ 92. Поверхности переноса 359
§ 93. Ротативные поверхности 361
§ 94. Спироидальные поверхности . . . 366
§ 95. Линейчатые ротативные и спироидальные поверхности с направляющей плоскостью 370
1. Ротативные линейчатые поверхности с направляющей плоскостью 371
2. Спироидальные линейчатые поверхности с направляющей плоскостью . . 375
§ 96. Кинематические поверхности общего вида образования с переменной образующей 380
Вопросы для самопроверки 382

Глава XVI. Площади поверхностей

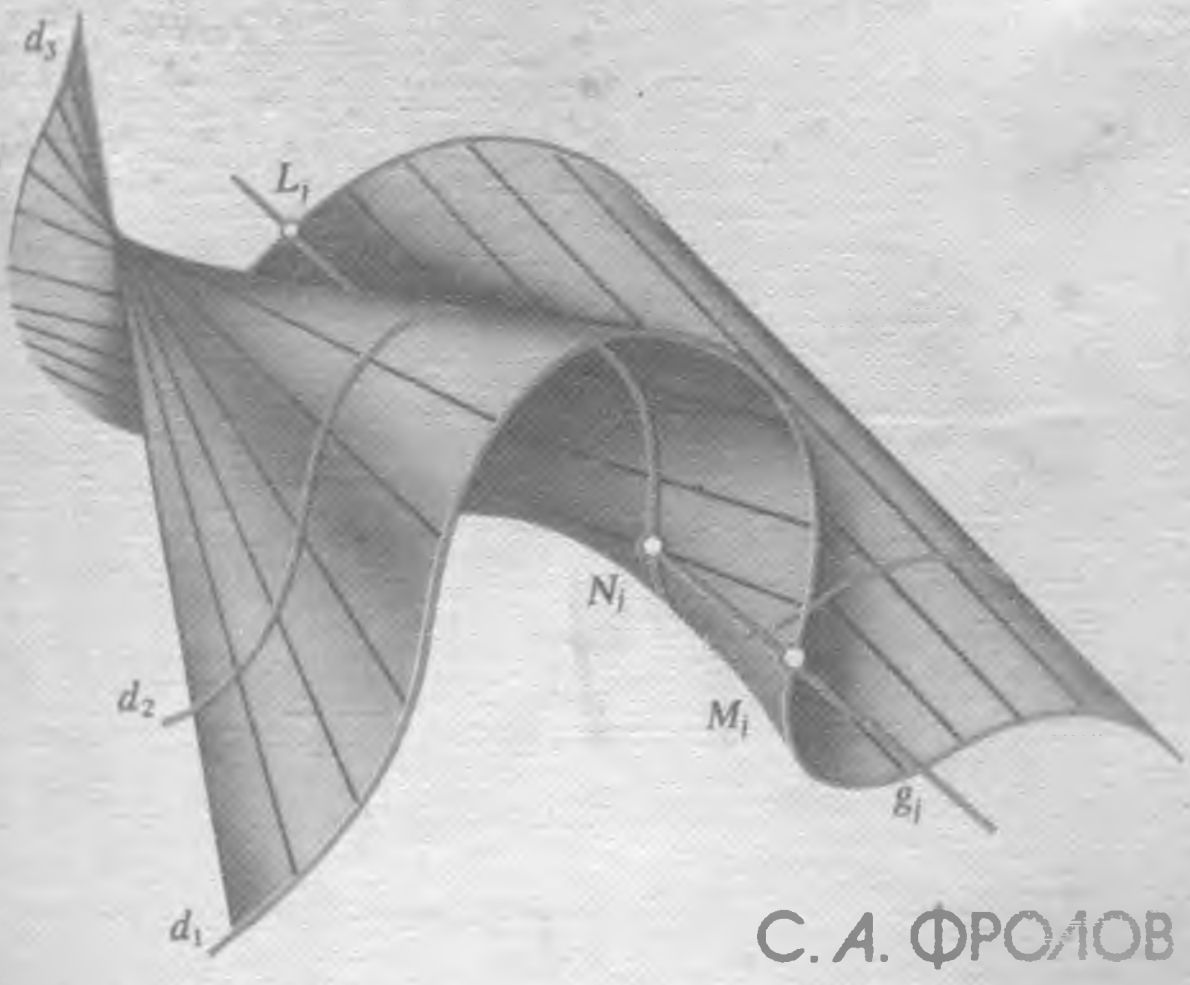
§ 97. Площадь торсовой поверхности. Применение торсов при определении площадей других поверхностей 383
§ 98. Площадь поверхности вращения . 385
§ 99. Площадь винтовой поверхности . 387
§ 100. Площадь поверхности переноса . 389
§ 101. Площадь конической улитки вращения 391
§ 102. Площадь поверхности Каталана . 393
§ 103. Площадь поверхности одинакового (равного) ската 394
§ 104. Площадь линейчатой поверхности с направляющей плоскостью 395
Вопросы для самопроверки 397

Глава XVII. Объемы геометрических тел, ограниченных поверхностями

§ 105. Объем тела, ограниченного торсовой поверхностью 398
§ 106. Объем тела, ограниченного поверхностью вращения 400
§ 107. Объем тела, ограниченного винтовой поверхностью 401
§ 108. Объем тела, ограниченного поверхностью переноса 402
§ 109. Объем тела, ограниченного конической улиткой вращения 403
§ 110. Объем тела, ограниченного поверхностью Каталана 403
§ 111. Объем тела, ограниченного поверхностью одинакового ската 405
§ 112. Объем тела, ограниченного линейчатой поверхностью с направляющей плоскостью 406
Вопросы для самопроверки 408

Глава XVIII. Кривизна поверхности

§ 113. Основные понятия о кривизне поверхности. Индикатриса Дюпена 409
§ 114. Соприкасающиеся эталоны кинематических поверхностей 411
Вопросы для самопроверки 412
Литература 413



С. А. ФРОЛОВ

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

«МАШИНОСТРОЕНИЕ»

ББК 22.151.3я73
Ф91
УДК 515(075)

РЕЦЕНЗЕНТ:

кафедра начертательной геометрии и черчения
Московского автомеханического института

Фролов С. А.
Ф91 НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ: Учебник для втузов. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Машиностроение, 1983. — 240 с., ил.
В пер.: 1 р. 20 к.

Учебник полностью соответствует новой программе Министерства высшего и среднего специального образования СССР по начертательной геометрии для втузов (кроме архитектурных и строительных специальностей). Во втором издании учебника (1-е изд. 1978 г.) подчеркнута роль инвариантных свойств ортогонального проецирования в создании теоретической базы курса. Особое внимание уделено способам образования поверхностей и их заданию на эпюре Монжа. Материал по использованию ЭЦВМ для решения задач, исходные данные которых представлены в графической форме, оставлен в прежнем объеме. Иллюстрации выполнены в многокрасочном исполнении, что способствует лучшему восприятию и усвоению материала студентами.

Ф $\frac{1702040000\text{-}030}{038(01)\text{-}83}$ 30-83

ББК 22.151.3я73
515

ИБ 3961

Сергей Аркадьевич Фролов

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Редактор И. Г. Калашникова
Художественный редактор
А. С. Вершинкин
Макет художника Е. И. Подмарьковой
Технические редакторы Л. П. Гордеева,
Н. Н. Чистякова
Корректор Н. В. Давыдова

Переплет художника А. Г. Антоновой

Графики-иллюстраторы:
В. Л. Богатырев, В. П. Новиков,
В. Г. Целищев

Операторы Л. А. Яковлева,
Л. В. Данилова

Подписано в печать 14.09.83. Формат 70×108/1/16
Бумага типографская № 1 Гарнитура Сенчури Печать офсетная Усл. печ. л. 21,0
Усл. кр.-отт. 83,48. Уч.-изд. л. 21,47. Тираж 140 000 экз. Заказ 1957. Цена 1 р. 20 к.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство "Машиностроение",
107076 Москва Б-76, Стромынский пер., 4

© Издательство "Машиностроение", 1978 г.
© Издательство "Машиностроение", 1983 г., с изменениями

С.А. ФРОЛОВ

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Издание второе, переработанное и дополненное

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебника для студентов машиностроительных специальностей вузов

БИБЛИОТЕКА
Бух ИИ
№ И43731

МОСКВА «МАШИНОСТРОЕНИЕ» 1983

ББК 22.151.3я73
Ф91
УДК 515(075)

РЕЦЕНЗЕНТ:

кафедра начертательной геометрии и черчения
Московского автомеханического института

Фролов С. А.
Ф91 НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ: Учебник для втузов. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Машиностроение, 1983. — 240 с., ил.
В пер.: 1 р. 20 к.

Учебник полностью соответствует новой программе Министерства высшего и среднего специального образования СССР по начертательной геометрии для втузов (кроме архитектурных и строительных специальностей). Во втором издании учебника (1-е изд. 1978 г.) подчеркнута роль инвариантных свойств ортогонального проецирования в создании теоретической базы курса. Особое внимание уделено способам образования поверхностей и их заданию на эпюре Монжа. Материал по использованию ЭЦВМ для решения задач, исходные данные которых представлены в графической форме, оставлен в прежнем объеме. Иллюстрации выполнены в многокрасочном исполнении, что способствует лучшему восприятию и усвоению материала студентами.

Ф $\frac{1702040000\text{-}030}{038(01)\text{-}83}$ 30-83

ББК 22.151.3я73
515

ИБ 3961

Сергей Аркадьевич Фролов

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Редактор И. Г. Калашникова
Художественный редактор
А. С. Вершинкин
Макет художника Е. И. Подмарьковой
Технические редакторы Л. П. Гордеева,
Н. Н. Чистякова
Корректор Н. В. Давыдова

Переплет художника А. Г. Антоновой

Графики-иллюстраторы:
В. Л. Богатырев, В. П. Новиков,
В. Г. Целищев

Операторы Л. А. Яковлева,
Л. В. Данилова

Подписано в печать 14.09.83. Формат 70×108/1/16
Бумага типографская № 1 Гарнитура Сенчури Печать офсетная Усл. печ. л. 21,0
Усл. кр.-отт. 83,48. Уч.-изд. л. 21,47. Тираж 140 000 экз. Заказ 1957. Цена 1 р. 20 к.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство "Машиностроение",
107076 Москва Б-76, Стромынский пер., 4

© Издательство "Машиностроение", 1978 г.
© Издательство "Машиностроение", 1983 г., с изменениями

ОГЛАВЛЕНИЕ

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ 5

ПРЕДИСЛОВИЕ 6

ВВЕДЕНИЕ 7

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СИМВОЛИКА 8

Глава I. МЕТОД ПРОЕКЦИЙ

§ 1. Некоторые свойства евклидова пространства 13
§ 2. Реконструкция евклидова пространства 14
§ 3. Центральное проецирование 17
§ 4. Параллельное проецирование 18
§ 5. Ортогональное проецирование 19
§ 6. Инвариантные свойства ортогонального проецирования 21
§ 7. Эпюр Монжа 26
§ 8. Неопределяемые понятия геометрии, ортогональные проекции точки, прямой, плоскости 29
Вопросы для самопроверки 45

Глава II. СПОСОБЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПРОЕКЦИЙ

ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ 46

I. СПОСОБ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕЩЕНИЯ 48

§ 9. Способ параллельного перемещения 48
§ 10. Способ вращения вокруг оси, перпендикулярной к плоскости проекции 52
§ 11. Способ вращения вокруг оси, параллельной плоскости проекции (вращение вокруг линии уровня) 55
§ 12. Способ вращения вокруг оси, принадлежащей плоскости проекции (совмещение) 57

II. СПОСОБ ЗАМЕНЫ ПЛОСКОСТЕЙ ПРОЕКЦИЙ 59

§ 13. Замена одной плоскости проекции 59
§ 14. Замена двух плоскостей проекций 61
§ 15. Сочетание способа плоскопараллельного перемещения со способом замены плоскостей проекции 62
§ 16. Другие способы преобразования ортогональных проекций 65
Вопросы для самопроверки 68

Глава III. ЛИНИЯ

ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ 69

I. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ КРИВЫЕ ЛИНИИ

§ 17. Касательные и нормали к пространственной кривой 70

II. ПЛОСКИЕ КРИВЫЕ ЛИНИИ

§ 18. Приближенные способы построения касательной и нормали к плоской кривой 73
§ 19. Кривизна плоской кривой 74
§ 20. Приближенный способ построения центра кривизны кривой в заданной точке 75
§ 21. Эволюта и эвольвента 75
§ 22. Классификация точек плоской кривой 76
§ 23. Ортогональные проекции линии 78
§ 24. Определение длины пространственной кривой по ее ортогональным проекциям 81
Вопросы для самопроверки 81

Глава IV. ПОВЕРХНОСТЬ

ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ 82

§ 25. Образование поверхности и ее задание на эпюре Монжа 83
§ 26. Определитель поверхности 84
§ 27. Ортогональные проекции поверхности 86
§ 28. Классификация поверхностей 88

КЛАСС I

§ 29. Нелинейчатые поверхности с образующей переменного вида (группа $А_{I}$) 91
§ 30. Нелинейчатые поверхности с образующей постоянного вида (группа $Б_{I}$) 93

КЛАСС II

§ 31. Линейчатые поверхности 94
§ 32. Линейчатые поверхности с тремя направляющими (группа $А_{II}$) . . 96
§ 33. Линейчатые поверхности с двумя направляющими (группа $Б_{II}$) . . 101
§ 34. Линейчатые поверхности с двумя направляющими и плоскостью параллелизма (поверхности Каталана) 102
§ 35. Линейчатые поверхности с одной направляющей — торсы (группа $В_{II}$) 106
§ 36. Поверхности параллельного переноса (подкласс 1) 109
§ 37. Поверхности вращения (подкласс 2) 111
§ 38. Винтовые поверхности (подкласс 3) 114
Вопросы для самопроверки 117

Глава V. ПОЗИЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ

ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ 118

§ 39. Принадлежность точки линии ($A \in l$) 119
§ 40. Принадлежность точки поверхности ($A \in \alpha$) 120
§ 41. Принадлежность линии поверхности ($l \subset \alpha$) 124
§ 42. Пересечение линии с линией ($l \cap m$) 125
§ 43. Пересечение поверхности с поверхностью ($\alpha \cap \beta$) 126
§ 44. Пересечение плоскостей 128
§ 45. Пересечение поверхности плоскостью (построение сечения) 131
§ 46. Плоскость, касательная к поверхности 140
§ 47. Построение линии пересечения поверхностей (общий случай) . . . 147
§ 48. Построение линии пересечения поверхностей с помощью вспомогательных секущих плоскостей 148
§ 49. Построение линии пересечения поверхностей с помощью вспомогательных цилиндрических поверхностей 154
§ 50. Построение линии пересечения поверхностей с помощью вспомогательных конических поверхностей 156
§ 51. Построение линии пересечения поверхностей с помощью семейства вспомогательных сферических поверхностей 158
§ 52. Построение линии пересечения поверхностей второго порядка (частные случаи) 163
§ 53. Определение точек пересечения линии с поверхностью 165
Вопросы для самопроверки 172

Глава VI. МЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ 173

§ 54. Построение взаимно перпендикулярных прямых, прямой и плоскости, плоскостей 174
§ 55. Определение расстояния между двумя точками 180
§ 56. Определение расстояния между точкой и прямой, между параллельными прямыми 181
§ 57. Определение расстояния между точкой и плоскостью, прямой и плоскостью, между плоскостями и скрещивающимися прямыми 183
§ 58. О проекциях плоских углов 187
§ 59. Определение величины плоского угла по его ортогональным проекциям 189

§ 60. Определение угла между прямой и плоскостью 190
§ 61. Определение угла между плоскостями 192
§ 62. Определение угла между скрещивающимися прямыми 194
Вопросы для самопроверки 195

Глава VII. РАЗВЕРТКА ПОВЕРХНОСТЕЙ

ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ 196

§ 63. Основные свойства развертки поверхностей 197
§ 64. Развертка поверхности многогранников 198
§ 65. Построение приближенных разверток развертывающихся поверхностей 201
§ 66. Условная развертка поверхностей 206
Вопросы для самопроверки 209

Глава VIII. АКСОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ 210

§ 67. Стандартные аксонометрические проекции 212
§ 68. Примеры построения аксонометрических проекций геометрических фигур 215
§ 69. Решение позиционных задач на аксонометрических проекциях . . . 219
§ 70. Решение метрических задач на аксонометрических проекциях . . . 221
Вопросы для самопроверки 222

Глава IX. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЭЦВМ ДЛЯ ГРАФИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ 223

§ 71. О возможности использования ЭЦВМ для графического решения задач 223
§ 72. Основные вопросы проблемы автоматизации процесса графического решения задач 226
§ 73. Машинное чтение чертежа 227
§ 74. Метод машинного решения задач 228
§ 75. Составление машинных алгоритмов решения задач 231
§ 76. Определение рационального машинного алгоритма 239
Вопросы для самопроверки 240

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бубенников А. В., Громов М. Я. Начертательная геометрия. М.: Высшая школа, 1973. 416 с.

2. Добряков А. И. Курс начертательной геометрии. М. — Л.: Госстройиздат, 1952. 484 с.

3. Климухин А. Г. Начертательная геометрия. М.: Стройиздат, 1973. 368 с.

4. Котов И. И. Начертательная геометрия. М.: Высшая школа, 1970. 382 с.

5. Крылов Н. Н., Лобандиевский П. И., Мэн С. А. Начертательная геометрия. М.: Высшая школа, 1977. 231 с.

6. Кузнецов Н. С. Начертательная геометрия. М.: Высшая школа, 1969. 496 с.

7. Начертательная геометрия/ Н. Ф. Четверухин, В. С. Левицкий, З. И. Прянишникова и др. М.: Высшая школа, 1963. 420 с.

8. Начертательная геометрия/ С. М. Колотов, М. Ф. Евстифеев, В. Е. Михайленко и др. Киев: Вища школа, 1975. 262 с.

9. Фролов С. А. Автоматизация процесса графического решения задач. Минск: Вышейшая школа, 1980. 255 с.

10. Фролов С. А. Сборник задач по начертательной геометрии. М.: Машиностроение, 1980. 141 с.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебник предназначен для студентов технических вузов (кроме архитектурных и строительных специальностей).

Содержание учебника полностью соответствует новой (1979 г.) программе по начертательной геометрии.

Второе издание подверглось значительной переработке. При подготовке рукописи к изданию были учтены отзывы и предложения, полученные автором от читателей и относящиеся как к содержанию, так и объему некоторых разделов учебника, в частности: внесены изменения в систему обозначений проекций геометрических фигур; строже изложен вопрос, касающийся инвариантных свойств ортогонального проецирования, и более четко подчеркнута их роль в создании теоретической базы курса начертательной геометрии; подробнее изложен материал, связанный с определителем поверхностей, и уточнена построенная на его базе систематизация наиболее распространенных видов поверхностей; внесены уточнения в классификацию позиционных и метрических задач; включен новый материал, связанный с построением плоскости, касательной к поверхности; изложение способов преобразования ортогональных проекций дано в первой главе непосредственно за методом Монжа. Более раннее знакомство со способами преобразования ортогональных проекций позволяет использовать эти способы на всех этапах изложения курса.

Во втором издании полностью сохранен дидактический принцип изложения материала — от общего к частному, а не наоборот, как это имеет место в большинстве курсов начертательной геометрии.

Для облегчения чтения чертежей они выполнены линиями разных цветов. Кроме того, чтобы легче представить "игру" геометрических образов в пространстве, многие чертежи, построенные по правилам ортогонального проецирования, иллюстрируются наглядными изображениями.

Автор приносит искреннюю благодарность всем читателям, приславшим пожелания, направленные на улучшение содержания учебника.

определять объемы выполняемых при этом земляных работ.

Естественные науки достигают еще большего расцвета в тех случаях, когда изучаемые свойства сопровождаются доступными для человеческого восприятия наглядными геометрическими моделями.

Методы начертательной геометрии, позволяющие решать математические задачи в их графической интерпретации, находят широкое применение в физике, химии, механике, кристаллографии и многих других науках. Как и другие отрасли математики, начертательная геометрия развивает логическое мышление.

Приведенный далеко не полный перечень вопросов, которые составляют предмет исследования в начертательной геометрии, не оставляет сомнения, что начертательная геометрия входит в число фундаментальных дисциплин, составляющих основу инженерного образования.

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СИМВОЛИКА

Для обозначения геометрических фигур и их проекций, для отображения отношения между ними, а также для краткости записей геометрических предложений, алгоритмов решения задач и доказательства теорем в курсе используется *геометрический язык*, составленный из обозначений и символов, принятых в курсе математики (в частности, в новом курсе геометрии в средней школе).

Все многообразие обозначений и символов, а также связи между ними могут быть подразделены на две группы:

группа I — обозначения геометрических фигур и отношений между ними;

группа II — обозначения логических операций, составляющие синтаксическую основу геометрического языка.

Ниже приводится полный список математических символов, используемых в данном курсе. Особое внимание уделяется символам, которые применяются для обозначения проекций геометрических фигур.

Группа I

СИМВОЛЫ, ОБОЗНАЧАЮЩИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФИГУРЫ И ОТНОШЕНИЯ МЕЖДУ НИМИ

А. Обозначение геометрических фигур

1. Геометрическая фигура обозначается — Ф.

2. Точки обозначаются прописными буквами латинского алфавита или арабскими цифрами:

$A, B, C, D, \ldots, L, M, N, \ldots$
$1, 2, 3, 4, \ldots, 12, 13, 14, \ldots$

3. Линии, произвольно расположенные по отношению к плоскостям проекций, обозначаются строчными буквами латинского алфавита:

$a, b, c, d, \ldots, l, m, n, \ldots$

Линии уровня обозначаются: h — горизонталь; f — фронталь.

Для прямых используются также следующие обозначения:

(AB) — прямая, проходящая через точки A и B;

$[AB)$ — луч с началом в точке A;

$[AB]$ — отрезок прямой, ограниченный точками A и B.

ВВЕДЕНИЕ

Начертательная геометрия является одним из разделов геометрии, в котором пространственные фигуры, представляющие собой совокупность точек, линий, поверхностей, изучаются по их проекционным изображениям на плоскости (или какой-либо другой поверхности).

Основными задачами начертательной геометрии являются: а) создание метода изображения геометрических фигур на плоскости (поверхности), б) разработка способов решения позиционных и метрических задач, связанных с этими фигурами, при помощи их изображений на плоскости (поверхности).

Начертательная геометрия по своему содержанию занимает особое положение среди других наук: она является лучшим средством развития у человека пространственного воображения, без которого немыслимо никакое инженерное творчество.

Начертательная геометрия является теоретической базой для составления чертежа — гениального изобретения человеческой мысли.

Чертеж — это своеобразный язык, с помощью которого, используя всего лишь точки, линии и ограниченное число геометрических знаков, букв и цифр, человек имеет возможность изобразить на поверхности, в частности на плоскости, геометрические фигуры или их сочетания (машины, приборы, инженерные сооружения и т. д.). Причем этот графический язык является интернациональным, он понятен любому технически грамотному человеку независимо от того, на каком языке он говорит.

Решение задач способами начертательной геометрии осуществляется графическим путем. Простейшей геометрической операцией, которую приходится выполнять в процессе решения, является определение точки пересечения двух линий. Вследствие того, что все геометрические построения осуществляются с помощью только линейки и циркуля, линиями, точку пересечения которых следует определять, являются прямые и окружности. Иными словами, путем проведения отрезков прямых и дуг окружностей (в редких случаях участков лекальных кривых) в определенной последовательности, устанавливаемой теоремами и правилами начертательной геометрии, можно решать сложные задачи из различных областей науки и техники.

Возможность расчленения процесса решения задач на выполнение элементарных, однотипных операций позволяет получить итерационные способы решения задач, которые легко и естественно могут быть автоматизированы с помощью вычислительной техники.

Использование начертательной геометрии является рациональным при конструировании сложных поверхностей технических форм с наперед заданными параметрами, применяемых в авиационной и автомобильной промышленности, при создании корпусов судов и судовых движителей и во многих других областях техники.

Достижения многомерной начертательной геометрии находят применение при исследовании диаграмм состояния многокомпонентных систем и сплавов в тех случаях, когда другие способы исследования оказываются чрезвычайно сложными и не обеспечивают требуемой точности.

Известна роль начертательной геометрии в архитектуре, строительстве, изобразительном искусстве. Проекционные способы, разработанные в начертательной геометрии, дают возможность получать наглядные изображения проектируемых объектов и целых комплексов.

Благодаря начертательной геометрии появилась возможность изображать на плоскости рельеф земной поверхности и решать простыми графическими способами задачи, связанные с проектированием дорог, каналов, тоннелей, а также

4. Поверхности обозначаются строчными буквами греческого алфавита:

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots, \zeta, \eta, \nu, \ldots$

Чтобы подчеркнуть способ задания поверхности, следует указывать геометрические элементы, которыми она определяется, например:

$\alpha\,(a \parallel b)$ — плоскость α определяется параллельными прямыми a и b;

$\beta\,(d_1 d_2 g\alpha)$ — поверхность β определяется направляющими d_1 и d_2, образующей g и плоскостью параллелизма α.

5. Углы обозначаются:

$\angle ABC$ — угол с вершиной в точке B, а также $\angle\alpha^\circ, \angle\beta^\circ, \ldots, \angle\varphi^\circ, \ldots$

6. Угловая величина (градусная мера) обозначается знаком $\frown$, который ставится над углом:

$\overset{\frown}{ABC}$ — величина угла ABC;

$\overset{\frown}{\varphi}^\circ$ — величина угла φ.

Прямой угол отмечается квадратом с точкой внутри ⊡.

7. Расстояния между геометрическими фигурами обозначаются двумя вертикальными отрезками — $|\ |$.

Например:

$|AB|$ — расстояние между точками A и B (длина отрезка AB);

$|Aa|$ — расстояние от точки A до линии a;

$|A\alpha|$ — расстояние от точки A до поверхности α;

$|ab|$ — расстояние между линиями a и b;

$|\alpha\beta|$ расстояние между поверхностями α и β.

8. Для плоскостей проекций приняты обозначения: π_1 и π_2,

где π_1 — горизонтальная плоскость проекций;

π_2 — фронтальная плоскость проекций.

При замене плоскостей проекций или введении новых плоскостей последние обозначают π_3, π_4 и т. д.

9. Оси проекций обозначаются: x, y, z, где x — ось абсцисс; y — ось ординат; z — ось аппликат.

Постоянную прямую эпюра Монжа обозначают k.

10. Проекции точек, линий, поверхностей, любой геометрической фигуры обозначаются теми же буквами (или цифрами), что и оригинал, с добавлением верхнего индекса, соответствующего плоскости проекции, на которой они получены:

$A', B', C', D', \ldots, L', M', N', \ldots$ — горизонтальные проекции точек;

$A'', B'', C'', D'', \ldots, L'', M'', N'', \ldots$ — фронтальные проекции точек;

$a', b', c', d', \ldots, l', m', n', \ldots$ — горизонтальные проекции линий;

$a'', b'', c'', d'', \ldots, l'', m'', n'', \ldots$ — фронтальные проекции линий;

$\alpha', \beta', \gamma', \delta', \ldots, \zeta', \eta', \nu', \ldots$ — горизонтальные проекции поверхностей;

$\alpha'', \beta'', \gamma'', \delta'', \ldots, \zeta'', \eta'', \nu'', \ldots$ — фронтальные проекции поверхностей.

11. Следы плоскостей (поверхностей) обозначаются теми же буквами, что и горизонталь или фронталь, с добавлением подстрочного индекса $_{0\alpha}$, подчеркивающего, что эти линии лежат в плоскости проекции и принадлежат плоскости (поверхности) α.

Так: $h_{0\alpha}$ — горизонтальный след плоскости (поверхности) α;

$f_{0\alpha}$ — фронтальный след плоскости (поверхности) α.

12. Следы прямых (линий) обозначаются заглавными буквами, с которых начинаются слова, определяющие название (в латинской транскрипции) плоскости проекции, которую пересекает линия, с подстрочным индексом, указывающим принадлежность к линии.

Например: H_a — горизонтальный след прямой (линии) a;

F_a — фронтальный след прямой (линии) a.

13. Последовательность точек, линий (любой фигуры) отмечается подстрочными индексами $_{1, 2, 3, \ldots, n}$:

$$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n;$$
$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n;$$
$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n;$$
$$\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \ldots, \Phi_n \text{ и т. д.}$$

Вспомогательная проекция точки, полученная в результате преобразования для получения действительной величины геометрической фигуры, обозначается той же буквой с подстрочным индексом $_0$:

$$A_0, B_0, C_0, D_0, \ldots$$

Аксонометрические проекции

14. Аксонометрические проекции точек, линий, поверхностей обозначаются теми же буквами, что и натура с добавлением верхнего индекса ^{0}:

$$A^0, B^0, C^0, D^0, \ldots$$
$$1^0, 2^0, 3^0, 4^0, \ldots$$
$$a^0, b^0, c^0, d^0, \ldots$$
$$\alpha^0, \beta^0, \gamma^0, \delta^0, \ldots$$

15. Вторичные проекции обозначаются путем добавления верхнего индекса[1]:

$$A^{10}, B^{10}, C^{10}, D^{10}, \ldots$$
$$1^{10}, 2^{10}, 3^{10}, 4^{10}, \ldots$$
$$a^{10}, b^{10}, c^{10}, d^{10}, \ldots$$
$$\alpha^{10}, \beta^{10}, \gamma^{10}, \delta^{10}, \ldots$$

Для облегчения чтения чертежей в учебнике при оформлении иллюстративного материала использованы несколько цветов, каждый из которых имеет определенное смысловое значение: линиями (точками) черного цвета обозначены исходные данные; зеленый цвет использован для линий вспомогательных графических построений; красными линиями (точками) показаны результаты построений или те геометрические элементы, на которые следует обратить особое внимание.

Б. Символы, обозначающие отношения между геометрическими фигурами

№ по пор.	Обозначение	Содержание	Пример символической записи
1	$\equiv$	Совпадают	$(AB) \equiv (CD)$ — прямая, проходящая через точки A и B, совпадает с прямой, проходящей через точки C и D
2	$\cong$	Конгруентны	$\angle ABC \overset{\cong}{} \angle MNK$ — угол ABC конгруентен углу MNK
3	$\sim$	Подобны	$\Delta ABC \sim \Delta MNK$ — треугольники ABC и MNK подобны
4	$\parallel$	Параллельны	$\alpha \parallel \beta$ — плоскость α параллельна плоскости β
5	$\perp$	Перпендикулярны	$a \perp b$ — прямые a и b перпендикулярны
6	$\overset{\cdot}{-}$	Скрещиваются	$c \overset{\cdot}{-} d$ — прямые c и d скрещиваются
7	$\curlywedge$	Касательные	$t \curlywedge l$ — прямая t является касательной к линии l. $\beta \curlywedge \alpha$ — плоскость β касательная к поверхности α
8	$\rightarrow$	Отображаются	$\Phi_1 \rightarrow \Phi_2$ — фигура Φ_1 отображается на фигуру Φ_2

Продолжение табл.

№ по пор.	Обозначение	Содержание	Пример символической записи
9	S	Центр проецирования. Если центр проецирования несобственная точка, то его положение обозначается стрелкой, указывающей направление проецирования	—
10	s	Направление проецирования	—
11	P	Параллельное проецирование	P_s^α — параллельное проецирование на плоскость α в направлении s

В. Обозначения теоретико-множественные

№ по пор	Обозначение	Содержание	Пример символической записи	Пример символической записи в геометрии
1	M, N	Множества	—	—
2	$A, B, C, \ldots$	Элементы множества	—	—
3	$\{\ldots\}$	Состоит из ...	$\Phi\{A, B, C, \ldots\}$	$\Phi\{A, B, C, \ldots\}$ — фигура Φ состоит из точек A, B, C, ...
4	$\varnothing$	Пустое множество	$L = \varnothing$ — множество L пустое (не содержит элементов)	—
5	$\in$	Принадлежит, является элементом	$2 \in N$ (где N — множество натуральных чисел) — число 2 принадлежит множеству N	$A \in a$ — точка A принадлежит прямой a (точка A лежит на прямой a)
6	$\subset$	Включает, содержит	$N \subset M$ — множество N является частью (подмножеством) множества M всех рациональных чисел	$a \subset \alpha$ — прямая a принадлежит плоскости α (понимается в смысле: множество точек прямой a является подмножеством точек плоскости α)
7	$\cup$	Объединение	$C = A \cup B$ — множество C есть объединение множеств A и B; $\{1, 2, 3, 4, 5\} = \{1, 2, 3\} \cup \{4, 5\}$	$ABCD = [AB] \cup [BC] \cup [CD]$ — ломаная линия, $ABCD$ есть объединение отрезков $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$
8	$\cap$	Пересечение множеств	$M = K \cap L$ — множество M есть пересечение множеств K и L (содержит в себе элементы, принадлежащие как множеству K, так и множеству L). $M \cap N = \varnothing$ — пересечение множеств M и N есть пустое множество (множества M и N не имеют общих элементов)	$a = \alpha \cap \beta$ — прямая a есть пересечение плоскостей α и β $a \cap b = \varnothing$ — прямые a и b не пересекаются (не имеют общих точек)

Группа II
СИМВОЛЫ, ОБОЗНАЧАЮЩИЕ ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

№ по пор.	Обозначение	Содержание	Пример символической записи
1	$\wedge$	Конъюнкция предложений; соответствует союзу "и". Предложение $(p \wedge q)$ истинно тогда и только тогда, когда p и q оба истинны	$\alpha \cap \beta = \{K : K \in \alpha \wedge K \in \beta\}$ Пересечение поверхностей α и β есть множество точек (линия), состоящее из всех тех и только тех точек K, которые принадлежат как поверхности α, так и поверхности β
2	$\vee$	Дизъюнкция предложений; соответствует союзу "или". Предложение $(p \vee q)$ истинно, когда истинно хотя бы одно из предложений p или q (т. е. или p, или q, или оба).	—
3	$\Rightarrow$	Импликация — логическое следствие. Предложение $p \Rightarrow q$ означает: "если p, то и q"	$(a \parallel c \wedge b \parallel c) \Rightarrow a \parallel b$ Если две прямые параллельны третьей, то они параллельны между собой
4	$\Leftrightarrow$	Эквивалентность. Предложение $(p \Leftrightarrow q)$ понимается в смысле: "если p, то и q; если q, то и p"	$A \in \alpha \Leftrightarrow A \in l \subset \alpha$. Точка принадлежит плоскости, если она принадлежит некоторой линии, принадлежащей этой плоскости. Справедливо также и обратное утверждение: если точка принадлежит некоторой линии, принадлежащей плоскости, то она принадлежит и самой плоскости
5	$\forall$	Квантор общности, читается: для всякого, для всех, для любого. Выражение $\forall(x)\, P(x)$ означает: "для всякого x имеет место свойство $P(x)$"	$\forall (\Delta ABC)(\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ)$. Для всякого (для любого) треугольника сумма величин его углов при вершинах равна 180°
6	$\exists$	Квантор существования, читается: существует. Выражение $\exists\,(x)\, P(x)$ означает: "существует x, обладающее свойством $P(x)$"	$(\forall \alpha)(\exists a)[a \not\subset \alpha \wedge a \parallel \alpha]$. Для любой плоскости α существует прямая a, не принадлежащая плоскости α и параллельная плоскости α
7	$\exists 1$	Квантор единственности существования, читается: существует единственное (-я, -й)... Выражение $(\exists 1 x)(Px)$ означает: "существует единственное (только одно) x, обладающее свойством Px"	$(\forall A, B)(A \neq B)(\exists 1 a)(a \ni A, B)$ Для любых двух различных точек A и B существует единственная прямая a, проходящая через эти точки
8	$(\bar{P}x)$	Отрицание высказывания (Px)	$a \overset{*}{-} b \Rightarrow (\overline{\exists \alpha})(\alpha \supset a, b)$. Если прямые a и b скрещиваются, то не существует плоскости α, которая содержит их
9	$\backslash$	Отрицание знака	$[AB] \neq [CD]$ — отрезок $[AB]$ не равен отрезку $[CD]$. $a \nparallel b$ — линия a не параллельна линии b

ГЛАВА I

МЕТОД ПРОЕКЦИЙ

§ 1. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

С позиции теории множеств любую геометрическую фигуру следует рассматривать как множество всех принадлежащих ей точек. Говоря иначе, всякая геометрическая фигура есть не пустое множество.

Отображение геометрической фигуры на плоскость (или какую-либо другую поверхность) можно получить путем проецирования ее точек на эту плоскость (поверхность).

Прежде чем говорить о сущности метода проецирования, целесообразно рассмотреть некоторые свойства евклидова пространства*.

Известно, что эти свойства могут быть выражены при помощи системы аксиом и предложений, которые устанавливают зависимости и отношения между элементами пространства. Точки, прямые и плоскости евклидова пространства находятся в определенном взаимоотношении, которое может быть обозначено словом *принадлежность* или *инцидентность*. Термин инцидентность заменяет такие понятия, как "лежать на", "проходить через". Вместо выражений "точка A лежит на плоскости α", "прямая a проходит через точку B" можно употреблять выражения "точка A инцидентна (принадлежит) плоскости α", "точка B инцидентна (принадлежит) прямой a". В символической форме эти выражения можно записать $A \in \alpha$; $B \in a$.

Отношения принадлежности между элементами евклидова пространства могут быть выражены следующими предложениями:

1. Если точка A принадлежит прямой a, а прямая a принадлежит плоскости α, то точка A принадлежит плоскости α:

$$A \in a \subset \alpha \Rightarrow A \in \alpha.$$

2. Две различные точки A и B всегда принадлежат одной и той же и только одной прямой a или каждой прямой a принадлежат, по крайней мере, две точки A и B:

$$(\forall A, B)(A \neq B) \Rightarrow (\exists\, 1a)(a \ni A, B).$$

3. Три различные точки A, B и C, не принадлежащие одной прямой, принадлежат одной и той же и только одной плоскости:

$$(\forall A, B, C)(A \neq B \neq C) \wedge (A, B, C \notin a) \Rightarrow (\exists\, 1\alpha)(\alpha \ni A, B, C).$$

4. Если две точки A и B, принадлежащие прямой a, принадлежат плоскости α, то прямая a принадлежит плоскости α:

$$(\forall A, B)(A \neq B)(A, B \in a) \wedge (A, B \in \alpha) \Rightarrow (a \subset \alpha).$$

---

* Основные свойства трехмерного пространства, в котором мы живем, были изучены до нашей эры греческими геометрами.

Наиболее существенный вклад имели труды по геометрии трехмерного пространства великого геометра древности Евклида, изложенные им в "Началах" (III в. до нашей эры). По имени автора "Начал" геометрическому пространству, изучаемому в элементарной геометрии, присвоено название евклидова пространства.

Кроме приведенных выше, могут быть сформулированы и другие предложения принадлежности для элементов евклидова пространства. К таким предложениям, в частности, относятся:

5. Две прямые, принадлежащие одной плоскости, могут принадлежать одной точке, но этого может и не быть.

6. Две плоскости могут принадлежать одной и той же прямой, но этого может и не быть.

7. Плоскость и не принадлежащая ей прямая могут принадлежать одной точке, но этого может и не быть.

Последние три предложения по существу перефразируют аксиому о параллельности. В самом деле, предложение 5 утверждает, что в евклидовой плоскости две прямые либо пересекаются (принадлежат одной точке), либо не имеют общей точки — в этом случае они называются параллельными. Аналогично, предложение 6 говорит о том, что в евклидовом пространстве две плоскости либо пересекаются (принадлежат одной прямой), либо они параллельны, а предложение 7 — о том, что прямая, не принадлежащая плоскости, либо пересекает ее (прямая и плоскость принадлежат одной точке), либо они параллельны.

§ 2. РЕКОНСТРУКЦИЯ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

Принятие аксиомы Евклида о параллельности при последующем изложении приводит к определенным трудностям, вызванным тем, что, рассматривая метод проекций, составляющий основу для изображения на плоскости геометрических фигур, расположенных в пространстве, мы обнаруживаем "неоднородность" евклидова пространства и погруженных в него геометрических фигур.

Действительно, пусть даны две прямые a и b, определяющие плоскость α (рис. 1). Возьмем в плоскости α произвольную точку S ($S \notin a \wedge b$). Через точку S проведем произвольную прямую l, которая пересечет прямую a в точке A^a, а прямую b в точке A^b. Проведем через точку S прямую l_1, пересекающую прямую a в точке B^a, а прямую b в точке B^b. Аналогично, прямые l_2, l_3, проведенные через точку S, пересекают прямые a и b соответственно в точках C^a и C^b, D^a и D^b.

Выполненные построения показывают, что мы каждый раз получаем две точки — одну на прямой a и одну, однозначно соответствующую ей точку, на прямой b. Так будет продолжаться до тех пор, пока в пучке

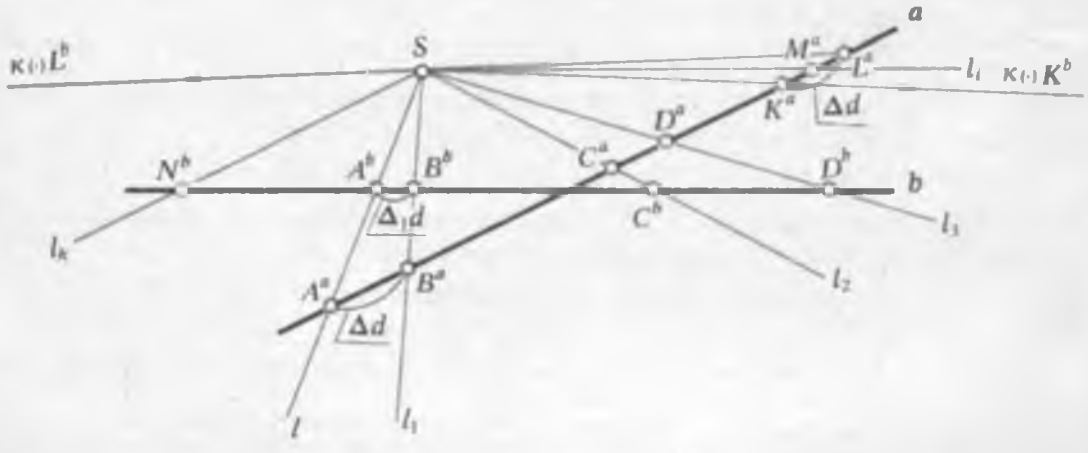


Рис. 1

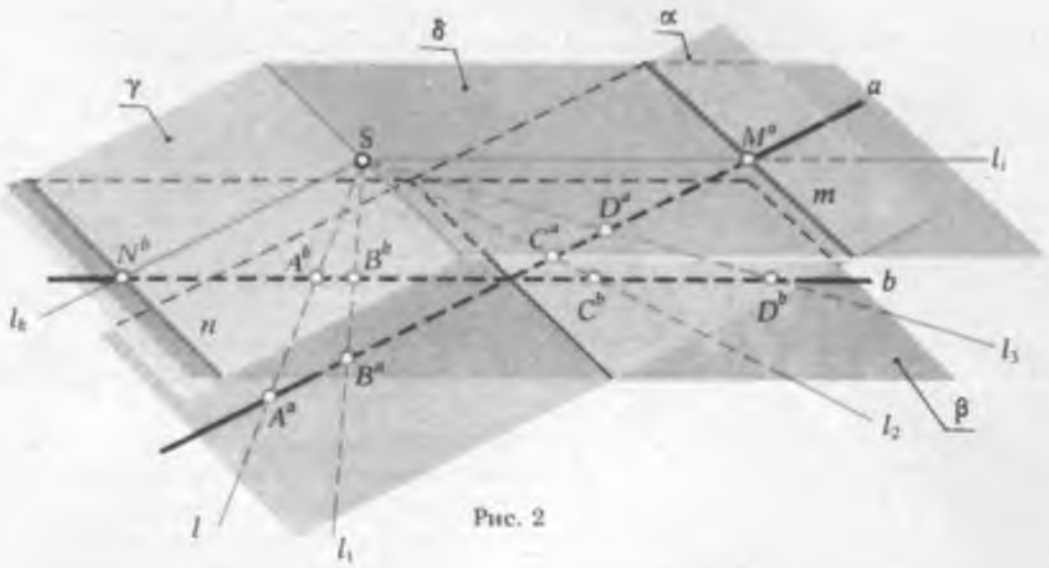


Рис. 2

прямых с центром в точке S не появится прямая l_i, параллельная прямой b. Эта прямая пересекает прямую a в точке M^a. Ввиду параллельности прямых l_i и b они не будут пересекаться, следовательно, не будет и точки M^b на прямой b, однозначно соответствующей точке M^a, т. е. выявленная ранее закономерность, состоящая в том, что каждой точке прямой a соответствует точка прямой b и наоборот, нарушается с появлением параллельной прямой. Кроме точки M^a появится еще одна точка N^b ($N^b \in b$), которая также будет отличаться от всех остальных точек прямой b (так как $l_k \parallel a$). Рис. 1 показывает, что мы оказываемся перед фактом, что прямые a и b (из-за аксиомы о параллельности) не являются однородными: каждая из них содержит точку (M^a и N^b соответственно), отличную от всех других точек, объединенных в прямые a и b.

Свойства евклидовой плоскости обнаруживают еще одно несоответствие, которое влечет за собой нарушение принципа взаимной непрерывности.

Действительно, если расстояние Δd между точками A^a и B^a прямой a — величина бесконечно малая (см. рис. 1), то и расстояние $\Delta_1 d$ между соответствующими этим точкам точками A^b и B^b прямой b будет также бесконечно малым.

Приведенные рассуждения будут справедливы и для другой пары соответственных точек (например, C^aD^a и C^bD^b).

Но если мы возьмем на прямой a две бесконечно близкие точки K^a и L^a, разделенные точкой M^a, то, как видно из чертежа, им будут соответствовать две бесконечно удаленные точки K^b и L^b прямой b.

Если мы обратимся к трехмерному евклидову пространству, то в нем появится множество точек, принадлежащих прямым m и n, по которым пересекаются плоскости α и β с плоскостями δ и γ, определяемыми пучками прямых, параллельных плоскостям α и β и принадлежащих точке S (рис. 2).

Становится очевидным, что евклидово пространство, свойства которого определяются, в частности, и аксиомой о параллельности, не может быть использовано для разработки метода центрального проецирования. Более того, мы оказываемся перед альтернативой: или принять на веру существование аксиомы о параллельности и, как следствие, признать неоднородность окружающего нас пространства, или считать, что пространство однородно, подвергнув сомнению существование аксиомы о параллельности.

Для того чтобы освободиться от указанных недостатков, необходимо трехмерное евклидово пространство подвергнуть реконструкции.

Из рис. 1 видно, что для того чтобы точка M^a не отличалась от остальных точек (A^a, B^a, C^a, D^a) прямой a, достаточно потребовать, чтобы параллельные прямые l_1 и b пересекались; при этом точку их пересечения M^b будем считать бесконечно удаленной — несобственной точкой (в отличие от точек евклидова пространства, которые считаются собственными).

Таким образом, дополнение прямой несобственной точкой, в которой прямая пересекается с параллельной прямой, позволяет устранить недостаток, являющийся следствием аксиомы о параллельности.

Теперь мы можем утверждать, что любая точка прямой a будет иметь соответствующую ей точку на прямой b. Эта точка может быть как собственной, так и несобственной.

Наличие на прямой несобственной точки позволяет установить не только взаимно-однозначное соответствие между точками прямых a и b, но и ликвидирует и второе несоответствие, связанное с нарушением непрерывности в расположении точек, принадлежащих прямой. Точки K^b и L^b прямой b, соответствующие бесконечно близким точкам K^a и L^a прямой a, удалены в бесконечность, и расстояние между ними бесконечно большое.

В то же время расстояние между точками K^aM^a и L^aM^a прямой a бесконечно мало. Для того чтобы избежать разрыва прямой b, достаточно предположить, что расстояние между точками K^bM^b и L^bM^b так же бесконечно мало, как и между двумя другими бесконечно близкими точками K^bL^b. Это может произойти лишь в том случае, если прямая b будет замкнутой. Условная модель такой прямой показана на рис. 3.

На плоскости можно провести бесчисленное множество прямых, каждая из которых имеет несобственную точку. Что же представляет из себя множество этих точек плоскости?

Так как каждая прямая плоскости имеет только одну несобственную точку, то она может пересекать множество этих несобственных точек только в одной точке, поэтому естественно считать множество несобственных точек плоскости несобственной прямой. Выясним также, что представляет собой множество несобственных точек пространства.

Представим две параллельные плоскости α и β (рис. 4). Проведем в каждой из них по одной прямой a и b так, чтобы $a \parallel b$. Эти прямые пересекутся в несобственной точке A_∞. Проведем в плоскости α прямую c, а в плоскости β прямую d, причем $c \parallel d$. Эти прямые пересекутся также в несобственной точке B_∞. Несобственные точки A_∞ и B_∞ определяют несобственную прямую l_∞. Так как точки A_∞ и B_∞ принадлежат как плоскости α, так и плоскости β, то несобственная прямая также принадлежит этим плоскостям. Следовательно, в евклидовом пространстве, дополненном несобственными точками, две параллельные плоскости пересекаются по бесконечно удаленной — несобственной прямой. Ранее было установлено, что множество несобственных точек пространства пересекаются прямой в одной несобственной точке. Теперь мы показали, что это же множество имеет с плоскостью одну общую несобственную прямую.

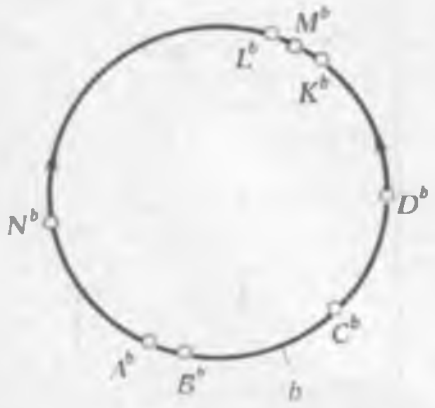


Рис. 3

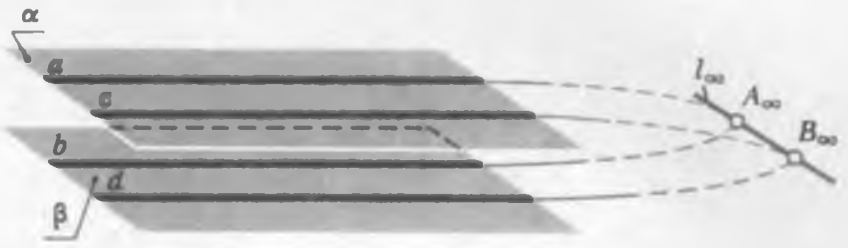


Рис. 4

Естественно считать множество несобственных точек пространства несобственной (бесконечно удаленной) плоскостью*.

Итак, для реконструкции евклидова пространства достаточно: дополнить множество точек прямой несобственной точкой, что приводит к дополнению евклидовой плоскости несобственной прямой, а трехмерное пространство — несобственной плоскостью.

Дополненные несобственными элементами евклидовы плоскость и пространство называют соответственно *проективной плоскостью* и *проективным пространством*.

Отмеченные ранее в пп. 5, 6, 7 (см. § 1, с. 14) свойства евклидова пространства для проективного пространства могут быть сформулированы иначе:

п. 5 — две прямые, принадлежащие одной плоскости, *всегда* принадлежат одной и той же и только одной точке;

п. 6 — две различные плоскости *всегда* принадлежат одной и той же и только одной прямой;

п. 7 — плоскость и не принадлежащая ей прямая *всегда* принадлежат одной и той же и только одной точке.

Во всех рассмотренных случаях точка и прямая могут быть как собственными, так и несобственными.

§ 3. ЦЕНТРАЛЬНОЕ ПРОЕЦИРОВАНИЕ

Сущность центрального проецирования заключается в следующем: пусть даны плоскость π_1 и точка S ($S \notin \pi_1$ рис. 5). Возьмем произвольную точку A ($A \notin \pi_1$, $A \neq S$). Через заданную точку S и точку A проводим прямую (SA) и отмечаем точку A', в которой эта прямая пересекает плоскость π_1. Плоскость π_1 называют *плоскостью проекции*, точку S — *центром проекции***, полученную точку A' — *центральной проекцией точки* A на плоскость π_1, прямую (SA) — *проецирующей прямой*. Положения плоскости π_1 и центра S определяют аппарат центрального проецирования. Если он задан, то всегда имеется возможность определить положение центральной проекции любой точки пространства на плоскости проекции.

Действительно, пусть дана произвольная точка B (см. рис. 5); проведя проецирующую прямую (SB) и найдя точку ее встречи (пересечения) с плоскостью π_1, определяем центральную проекцию B' точки

---

* По аналогии с плоскостью евклидова пространства, в котором плоскость можно рассматривать как множество точек (собственных), которые пересекаются прямой в одной (собственной) точке и плоскостью по одной (собственной) прямой.

** В некоторых учебниках встречается определение точки S как полюса проекции или как вершины конической поверхности. В этих случаях проекции называют соответственно полярными или коническими.

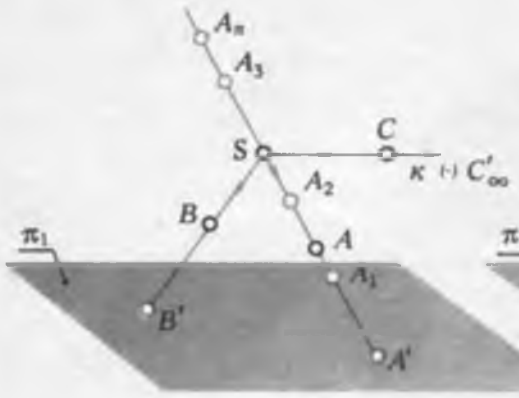


Рис. 5

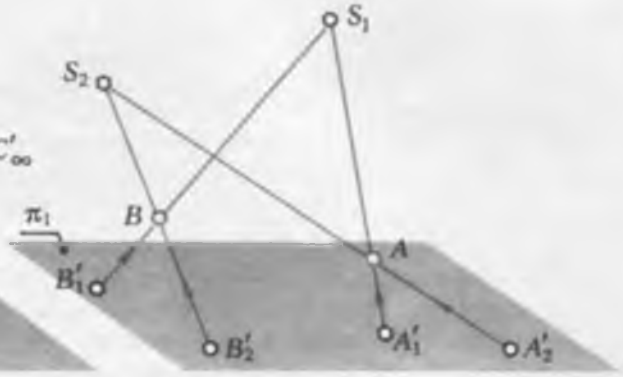


Рис. 6

B при данном аппарате проецирования (фиксированном положении π_1 и S).

В том случае, когда точка C принадлежит плоскости, проходящей через центр проекции и параллельной плоскости π_1, проецирующая прямая (SC) пересечет плоскость проекции в несобственной точке C'_∞. Таким образом, можно сделать вывод, что *при заданном аппарате проецирования каждая точка пространства имеет только одну центральную проекцию.* Это утверждение вытекает из того, что через две различные точки можно провести только одну прямую. К сожалению, обратное утверждение — каждой центральной проекции точки однозначно соответствует точка, не имеет места.

Из рис. 5 видно, что точка A' может быть центральной проекцией любой точки A_1, A_2, A_3, ... , A_n, принадлежащей прямой $(A'S)$. Поэтому *одна центральная проекция точки не дает возможности судить о положении самой точки в пространстве.*

Для определения положения точки необходимо иметь две ее центральные проекции, полученные из двух различных центров. Имея две центральные проекции точки A'_1 и A'_2, полученные из центров S_1 и S_2 (рис. 6), можно определить положение точки A в пространстве. Для этого достаточно провести прямые (A'_1S_1) и (A'_2S_2) и отметить точку их пересечения.

На рис. 6 показано также определение положения точки B по заданным проекциям B'_1 и B'_2.

§ 4. ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ПРОЕЦИРОВАНИЕ

Рассмотрим частный случай центрального проецирования, когда центр проекции помещен в несобственной точке S_∞*. В этом случае проекцией точки A на плоскость π_1 будет точка A', в которой проецирующая прямая $(S_\infty A)$ пересекает плоскость проекции π_1 (рис. 7).

Для нахождения проекции точки B следует провести прямую $(S_\infty B) \parallel (S_\infty A)$ и определить точку ее пересечения с плоскостью π_1. Очевидно, что при таком положении центра проекции и все остальные проецирующие прямые будут также параллельны $(S_\infty A)$. Множество всех прямых пространства, имеющих несобственную точку, образуют связ-

* На чертеже несобственная точка указывается направлением s.

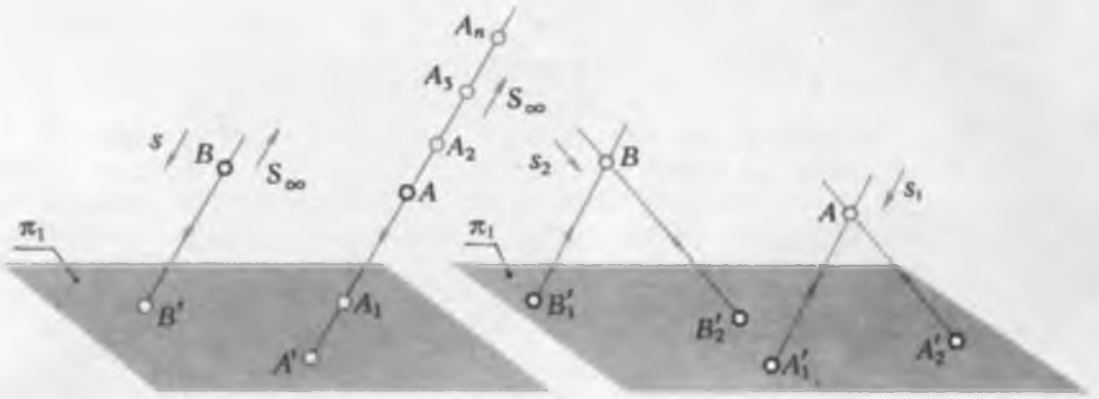


Рис. 7

Рис. 8

ку, центр которой — несобственная точка, совпадающая с центром проекции.

В связи с параллельностью проецирующих прямых рассматриваемый способ проецирования называется *параллельным*, а полученные с его помощью проекции — *параллельными проекциями*.

Аппарат параллельного проецирования полностью определяется положением плоскости проекции π_1 и направлением проецирования s.

Отмеченное раньше свойство центрального проецирования сохраняется и в данном случае. Применительно к параллельному проецированию оно может быть сформулировано:

каждая точка пространства, при заданном аппарате проецирования, будет иметь только одну параллельную проекцию.

Обратное утверждение, как и в случае центрального проецирования, не имеет места.

Действительно, точка A' (см. рис. 7) может быть параллельной проекцией любой точки A_1, A_2, A_3, ... , A_n, принадлежащей прямой $(A'S_\infty)$, поэтому одна параллельная проекция точки не позволяет судить о положении самой точки в пространстве.

Для определения положения точки в пространстве необходимо иметь две ее параллельные проекции, полученные при двух различных направлениях проецирования.

В этом случае положение точки A определяется пересечением прямых, проведенных через A_1' и A_2' параллельно соответствующим направлениям s_1 и s_2 (рис. 8).

На рис. 8 показано также нахождение положения в пространстве точки B по известным ее параллельным проекциям B_1' и B_2'.

§ 5. ОРТОГОНАЛЬНОЕ ПРОЕЦИРОВАНИЕ

Частный случай параллельного проецирования, при котором направление проецирования s перпендикулярно плоскости проекции, называется прямоугольным или ортогональным (от слова *orthogonios* — прямоугольный) проецированием.

Ортогональное проецирование находит широкое применение в инженерной практике для изображения геометрических фигур на плоскости.

Рис. 9 дает наглядное представление об ортогональном проецировании точки.

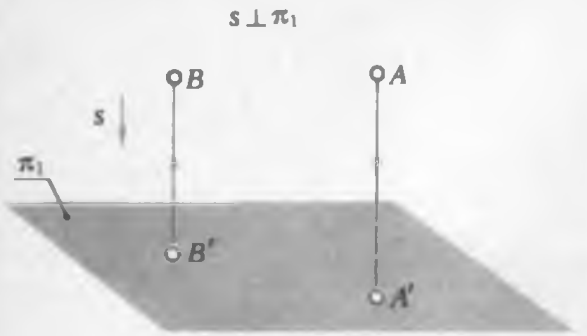


Рис. 9

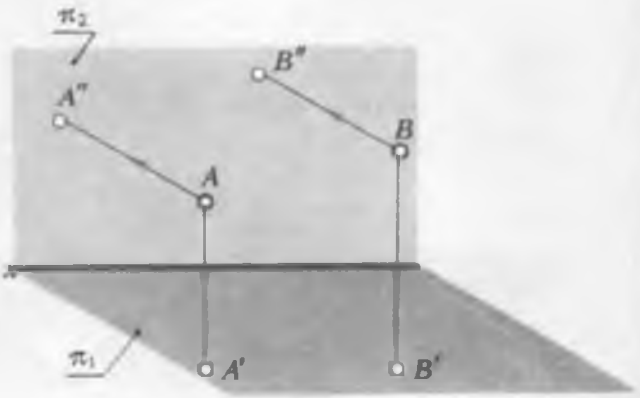


Рис. 10

Раньше отмечалось, что для решения обратной задачи — определения положения точки в пространстве по ее параллельным проекциям — необходимо иметь две параллельные проекции, полученные при двух направлениях проецирования.

Так как через точку можно провести только одну прямую, перпендикулярную к плоскости, то, очевидно, в отличие от центрального и параллельного (косоугольного) проецирования (см. рис. 5 и 7) при ортогональном проецировании для получения двух проекций одной точки необходимо иметь две не параллельные плоскости проекции.

Выделим в пространстве две взаимно перпендикулярные плоскости π_1 и π_2. Спроецируем ортогонально точки $\{K, \ldots\}$ пространства на плоскость π_1, получим множество проекций точек $\{K', \ldots\}$, образующих поле проекций точек $\{K, \ldots\}$, которое условимся называть горизонтальной плоскостью проекций. При ортогональном проецировании множества точек пространства $\{K, \ldots\}$ на плоскость π_2 получим множество проекций точек $\{K'', \ldots\}$, образующих поле проекций точек $\{K, \ldots\}$, которое будем называть фронтальной плоскостью проекций.

На рис. 10 показаны точки пространства A и B и их ортогональные проекции A', A'' и B', B''. Здесь, как и в ранее рассмотренных случаях центрального проецирования (см. рис. 5) и параллельного проецирования (см. рис. 7), одной точке пространства соответствуют две точки — ее проекции.

Если положение плоскостей π_1 и π_2 фиксировано, *то каждой точке пространства будет соответствовать упорядоченная пара точек на полях проекций.*

Справедливым оказывается и обратное утверждение — *упорядоченной паре точек полей проекций соответствует единственная точка пространства.*

Отмеченное свойство является фундаментальным — составляющим основу построения проекционного чертежа.

Ортогональное проецирование обладает рядом преимуществ перед центральным и параллельным (косоугольным) проецированием. К ним в первую очередь следует отнести:

а) простоту графических построений для определения ортогональных проекций точек;

б) возможность при определенных условиях сохранить на проекциях форму и размеры проецируемой фигуры.

Отмеченные преимущества обеспечили широкое применение ортогонального проецирования в технике, в частности, для составления машиностроительных чертежей.

§ 6. ИНВАРИАНТНЫЕ СВОЙСТВА ОРТОГОНАЛЬНОГО ПРОЕЦИРОВАНИЯ

Геометрические фигуры проецируются на плоскость проекции в общем случае с искажением. При этом характер искажений зависит от аппарата проецирования и положения проецируемой фигуры по отношению к плоскости проекции. В частности, при ортогональном проецировании, если проецируемая фигура занимает произвольное положение по отношению к плоскости проекции, ее проекция не сохраняет метрических характеристик оригинала — происходит искажение линейных и угловых величин.

Действительно, при ортогональном проецировании трапеции $ABCD$ на плоскость π_1, не параллельную плоскости трапеции (рис. 11), длины ее сторон, величины углов при вершинах, площадь и другие метрические характеристики оригинала на проекции $A'B'C'D'$ не сохраняются.

Наряду с этим между фигурой-оригиналом и ее ортогональной проекцией на плоскость существует определенная связь, заключающаяся в том, что некоторые свойства проецируемой фигуры Ф сохраняются и на ее проекции Ф′.

Из рис. 11 видно, что точки A, B, C, D — вершины проецируемой трапеции (фигура Ф) проецируются в точки A', B', C', D' — вершины трапеции-проекции (фигура Ф′); отрезки $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$ — стороны трапеции проецируются в отрезки $[A'B']$, $[B'C']$, $[C'D']$, $[D'A']$ — стороны трапеции-проекции.

Параллельным основаниям $[AB] \parallel [DC]$ проецируемой трапеции соответствуют также параллельные основания $[A'B'] \parallel [D'C']$ трапеции-проекции.

Свойства геометрических фигур, которые не изменяются в процессе проецирования, называются независимыми или инвариантными относительно выбранного способа проецирования.

Основу любой геометрии составляет система аксиом. Любое геометрическое определение и предложение (теорема), равно как и доказательства теорем, базируются на принятой системе аксиом.

При ортогональном проецировании — получении проекций геометрической фигуры по ее оригиналу или при решении обратной задачи — определении формы и размеров оригинала по его ортогональным проекциям базируются на инвариантных свойствах ортогонального проецирования:

1. *Ортогональная проекция точки есть точка:*

$$A \to A'$$

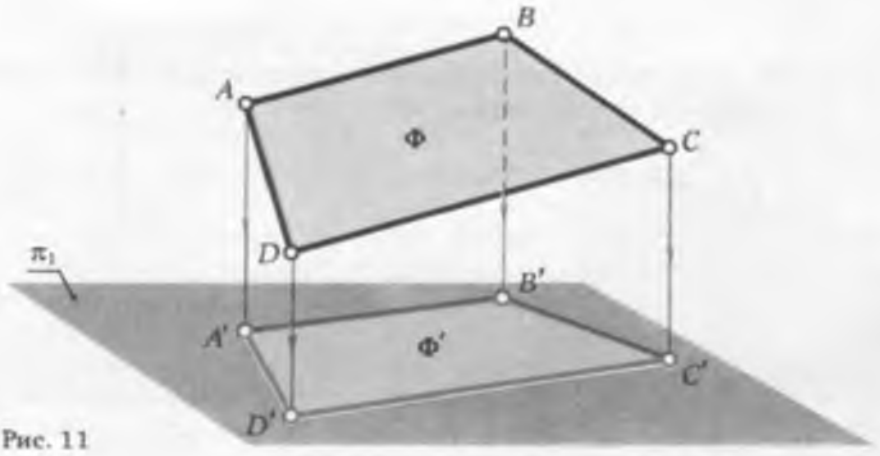


Рис. 11

2. *Если фигура* Φ_1 *принадлежит фигуре* Φ, *то ортогональная проекция фигуры* Φ_1' *принадлежит ортогональной проекции фигуры* Φ'*:

$$\Phi_1 \subset \Phi \Rightarrow \Phi_1' \subset \Phi'.$$

Из свойства 1 получаем:

1 а. *Ортогональная проекция прямой на плоскость есть прямая*, в частном случае, когда прямая перпендикулярна плоскости проекции, — точка (рис. 12 и 13):

$$(\forall l) \wedge (l \perp \pi_1) : l \to l'.$$

Действительно, возьмем на прямой l (рис. 12) ряд точек $1, 2, 3, \ldots, n$ и проведем через них проецирующие прямые $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, перпендикулярные плоскости π_1. Каждая из этих прямых пересечет плоскость π_1 в точках $1', 2', 3', \ldots, n'$.

Множество всех прямых $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$, проходящих через нетождественные точки прямой l перпендикулярно к плоскости π_1, образуют проецирующую плоскость α, которая пересекается с плоскостью π_1 по прямой, поэтому точки $1', 2', 3', \ldots, n'$ (ортогональные проекции точек $1, 2, 3, \ldots, n$ прямой l) принадлежат одной прямой l' — ортогональной проекции прямой l.

На рис. 13 показан случай, когда прямая $l \perp \pi_1$. Из чертежа видно, что все прямые $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$, проецирующие точки $1, 2, 3, \ldots, n$ прямой l, совпадают с этой прямой и пересекают плоскость π_1 в одной точке $1' \equiv 2' \equiv 3' \equiv \ldots \equiv n'$ — горизонтальной проекции прямой l'**.

Из свойства 2 следует:

2 а. *Если точка* A *принадлежит линии* l, *то ортогональная проекция точки* A' *принадлежит ортогональной проекции линии* l' (рис. 14):

$$A \in l \Rightarrow A' \in l'.$$

2 б. *Если линия* l *принадлежит поверхности* α, *то ортогональная проекция линии* l' *принадлежит ортогональной проекции поверхности* α' (рис. 15):

$$l \subset \alpha \Rightarrow l' \subset \alpha'.$$

---

* С позиции теории множеств это свойство можно сформулировать иначе: "если множество M принадлежит (является подмножеством) множеству N, то ортогональная проекция множества M' на плоскость принадлежит ортогональной проекции N' на эту же плоскость.

**На рис. 13 горизонтальная проекция прямой l' обозначена H_l, так как в этом случае $l' \equiv H_l$.

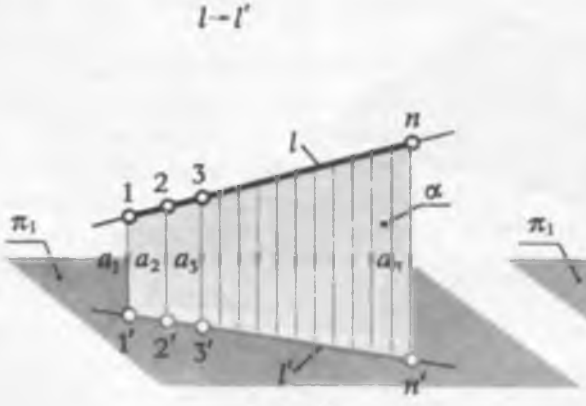


Рис. 12

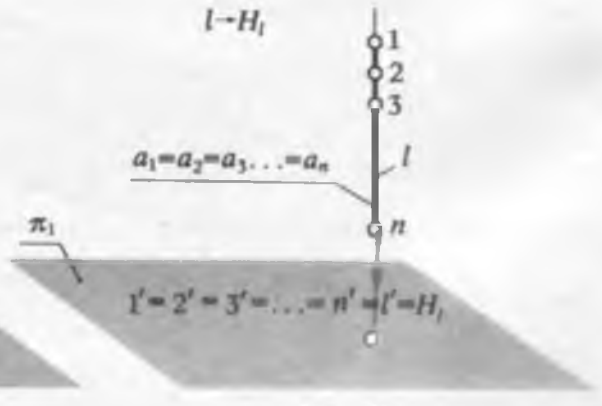


Рис. 13

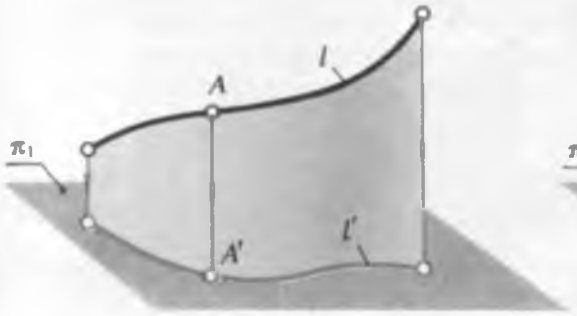


Рис. 14

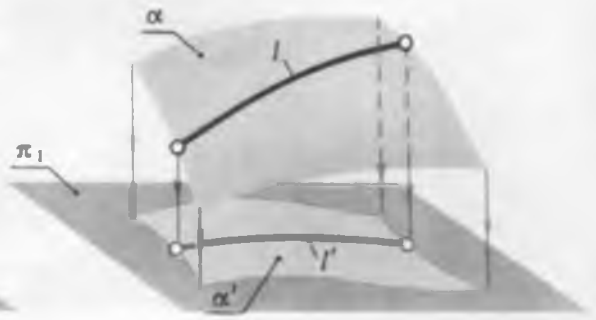


Рис. 15

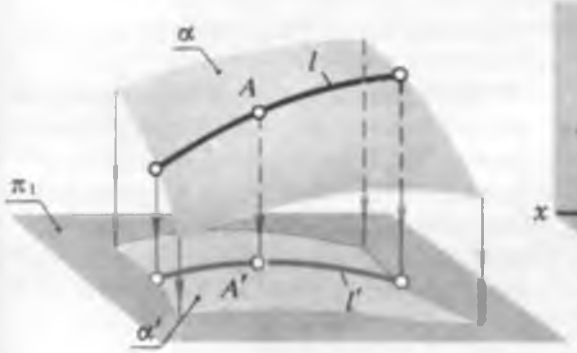


Рис. 16

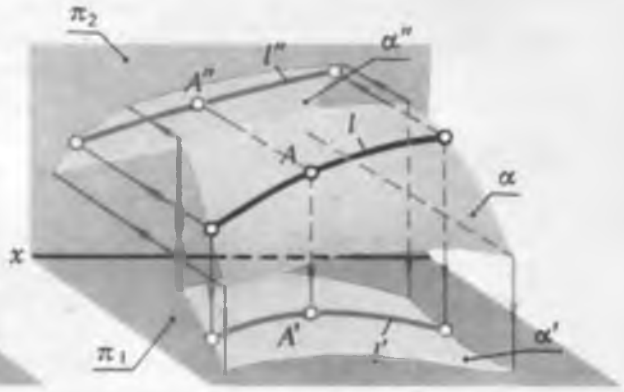


Рис. 17

2 в. *Если точка A принадлежит поверхности α, то ортогональная проекция точки A' находится на ортогональной проекции линии l', принадлежащей ортогональной проекции поверхности α'* (рис. 16):

$$A \in \alpha \Rightarrow A' \in l' \subset \alpha'.$$

В том случае, когда удовлетворяется условие принадлежности $A'' \in l''$ и $A'' \in l'' \subset \alpha''$ на другой плоскости проекции π_2 ($\pi_2 \nparallel \pi_1$), справедливы следующие утверждения:

$$A \in l \Leftrightarrow (A' \in l') \wedge (A'' \in l'');$$

$$A \in l \subset \alpha \Leftrightarrow (A' \in l' \subset \alpha') \wedge (A'' \in l'' \subset \alpha'').$$

Поставленные здесь знаки эквивалентности между левой и правой частями показывают, что справедливы и обратные утверждения:

— если ортогональные проекции точки A (A' и A'') принадлежат соответственно ортогональным проекциям линии l (l' и l''), то точка A принадлежит линии l;

— если ортогональные проекции точки A (A' и A'') принадлежат соответствующим ортогональным проекциям линии l (l' и l''), которые, в свою очередь, принадлежат одноименным ортогональным проекциям поверхности α (α' и α''), то точка A принадлежит поверхности α (рис. 17).

2 г. *Если фигура Φ принадлежит плоскости α, перпендикулярной плоскости проекции π_1, то ортогональная проекция этой фигуры принадлежит линии пересечения плоскости α с плоскостью π_1 — горизонталь-*

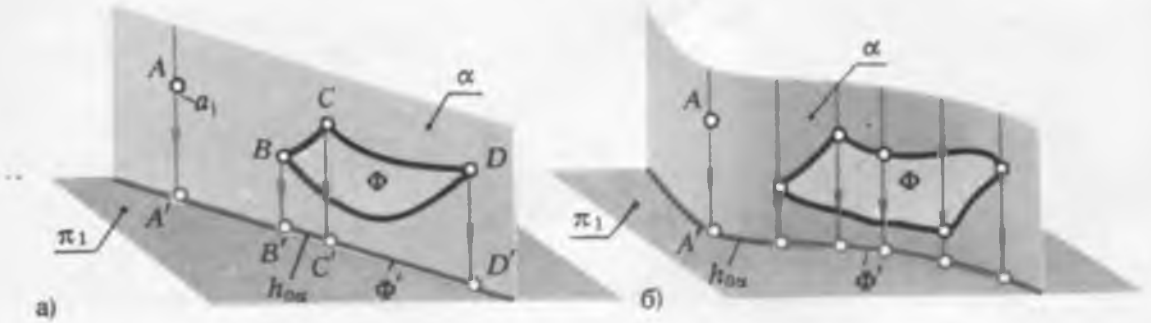


Рис. 18

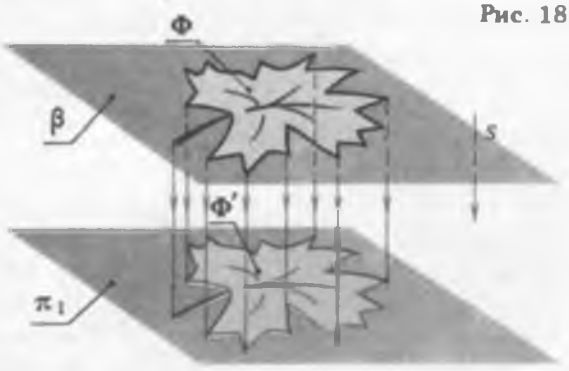


Рис. 19

ному следу $h_{0\alpha}$ плоскости α:

$$(\Phi \subset \alpha) \wedge (\alpha \perp \pi_1) \Rightarrow \Phi' \subset h_{0\alpha}.$$

В справедливости этого утверждения легко убедиться, рассматривая рис. 18, *а*. Пусть α — плоскость, перпендикулярная плоскости проекции π_1. Плоскость α можно рассматривать как состоящую из множества прямых $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$, перпендикулярных π_1, каждая из которых пересекает плоскость π_1 в точке, принадлежащей прямой $h_{0\alpha}$.

Допустим, что в плоскости α задана точка A ($A \in \alpha$). Очевидно, горизонтальная проекция может быть найдена как результат пересечения прямой a_j с плоскостью π_1 ($a_j \ni A$ и $a_j \subset \alpha$ и $a_j \perp \pi_1$), но из свойства 1а (см. рис. 13) следует, что $a_j \cap \pi_1 = A' \in h_{0\alpha}$.

Если в плоскости α будет задана какая-либо фигура Φ, то, проецируя точки B, C, D, ... этой фигуры на плоскость π_1, мы каждый раз будем получать горизонтальные проекции этих точек, принадлежащие следу $h_{0\alpha}$ плоскости α. Совокупность горизонтальных проекций точек B', C', D', ... укажет горизонтальную проекцию фигуры Φ', т. е. $\Phi' \subset h_{0\alpha}$.

Из рис. 18, *б* видно, что отмеченное свойство сохраняется и в том случае, когда вместо плоскости будет взята произвольная горизонтально проецирующая поверхность.

2 д. *Если фигура Φ принадлежит плоскости β, параллельной плоскости проекции π_1, то ортогональная проекция этой фигуры на плоскость π_1 конгруентна самой фигуре* (рис. 19):

$$(\Phi \subset \beta) \wedge (\beta \parallel \pi_1) \Rightarrow \Phi' \cong \Phi.$$

В справедливости этого свойства ортогонального проецирования легко убедиться путем следующих рассуждений: представим, что плоскость β совпадает с плоскостью проекций π_1 (частный случай параллельности). Не вызывает сомнений, что ортогональная проекция фигуры Φ' на плоскость π_1 ничем не будет отличаться от самой фигуры Φ.

Если плоскость β будет перемещаться вдоль проецирующего луча *s*, оставаясь при этом параллельной своему первоначальному положению (плоскости π_1), то это не повлечет за собой изменения формы и размеров проецируемой фигуры.

2 е. Следует иметь в виду, что в том случае, когда проецируемой фигурой является прямой угол, для получения неискаженной ортогональной проекции этого угла достаточно, чтобы только одна из его

сторон была параллельна плоскости проекции (при условии, что другая сторона угла не перпендикулярна плоскости проекции).

Это свойство может быть записано:

$$(\widehat{ABC} = 90^\circ) \wedge ([BC] \parallel \pi_1, [BA] \not\perp \pi_1) \Rightarrow \widehat{A'B'C'} = 90^\circ.$$

Если $\angle ABC$ прямой и сторона BC этого угла параллельна плоскости проекции π_1, а сторона BA не перпендикулярна плоскости π_1, то ортогональная проекция угла на плоскость π_1 — $\widehat{A'B'C'} = 90^\circ$.

В большинстве учебников по начертательной геометрии это инвариантное свойство ортогонального проецирования предлагается в виде теоремы о частном случае проецирования прямого угла. Ниже приводится одно из возможных доказательств этой теоремы, взятое нами из учебника В. О. Гордона и М. А. Семенцова-Огиевского.

Положим, что сторона BC прямого угла ABC (рис. 20) параллельна плоскости проекции π_1. В этом случае прямая BC параллельна $B'C'$.

Пусть вторая сторона прямого угла, наклонная AB, пересекает свою проекцию $A'B'$ в точке K. Проведем в плоскости проекции через точку K прямую KL параллельно $B'C'$. Прямая KL также параллельна BC и $\angle B'KL$ получается прямым. Согласно теореме о трех перпендикулярах $\angle KBC$ также прямой. Следовательно, и $\angle A'B'C'$ будет прямым.

Отмеченные инвариантные свойства имеют чрезвычайно важное значение при решении позиционных (свойства 2 а ... 2 г) и метрических (свойства 2 д и 2 е) задач.

2 ж. *Если точка K есть результат пересечения прямых a и b, то ортогональная проекция этой точки K' определяется пересечением ортогональных проекций прямых a' и b'* (рис. 21).

К этому свойству можно прийти путем следующих рассуждений. Допустим нам даны две фигуры Φ_1 и Φ_2. Обозначим фигуру, получающуюся в результате их пересечения, Φ_3. Тогда $\Phi_3 = \Phi_1 \cap \Phi_2$, но $\Phi_3 \subset \Phi_1$ и $\Phi_3 \subset \Phi_2$, на основании аксиомы 2 можно записать:

$$\Phi_3' \subset \Phi_1' \text{ и } \Phi_3' \subset \Phi_2',$$

т. е.

$$\Phi_3 = \Phi_1 \cap \Phi_2 \Rightarrow \Phi_3' = \Phi_1' \cap \Phi_2'.$$

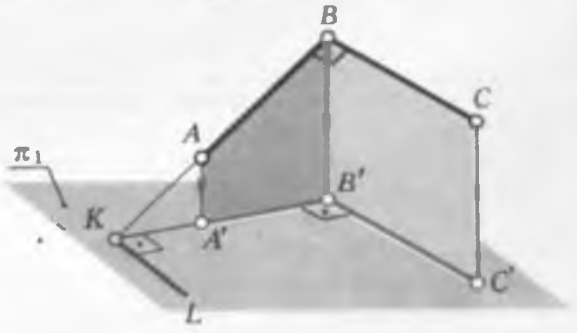


Рис. 20

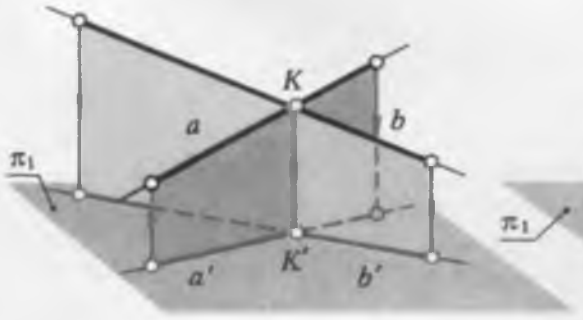


Рис. 21

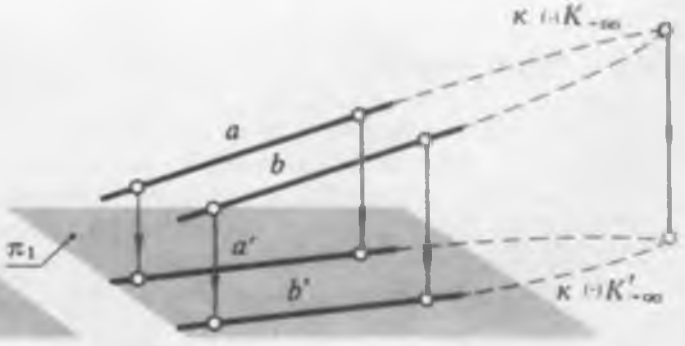


Рис. 22.

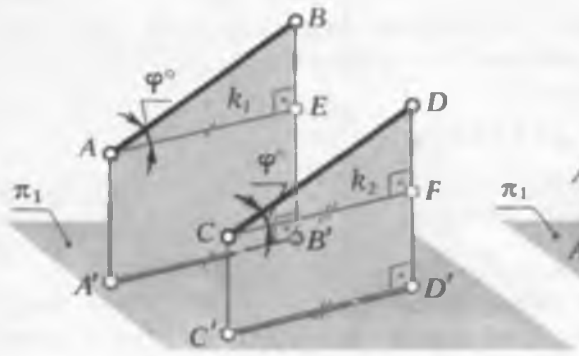


Рис. 23

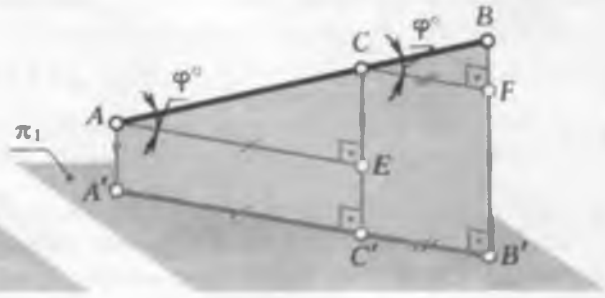


Рис. 24

Если в качестве фигуры Φ_1 будет задана прямая a, а вместо фигуры Φ_2 — прямая b (пересечение прямых a и b — точка K), то мы придем к заключению, которое требовалось доказать:

$$K = a \cap b \Rightarrow K' = a' \cap b'.$$

В том случае, когда $a \parallel b$, точкой пересечения прямых a и b будет бесконечно удаленная (несобственная) точка K_∞, которая при ортогональном проецировании на плоскость π_1 спроецируется также в несобственную точку K'_∞; следовательно, $a' \parallel b'$. Это свойство можно записать:

$$(a \parallel b) \wedge (a \not\perp \pi_1) \Rightarrow a' \parallel b'.$$

2 з. *Если прямые a и b параллельны между собой и не перпендикулярны плоскости проекции π_1, то параллельны и их ортогональные проекции на эту плоскость* (рис. 22). Приведенный инвариант позволяет сформулировать еще два свойства, инвариантные относительно ортогонального проецирования.

2 и. *Если отрезок $[AB]$ параллелен отрезку $[CD]$, то отношение длин отрезков равно отношению длин их ортогональных проекций* (рис. 23)*:

$$[AB] \parallel [CD] \Rightarrow \frac{|AB|}{|CD|} = \frac{|A'B'|}{|C'D'|}.$$

2 к. *Если точка C принадлежит отрезку $[AB]$, то отношение $[AC]$ к $[CB]$ равно отношению их проекций. Или иначе, если точка C делит отрезок в данном отношении, то и проекция C' (или C'') делит проекции отрезка в том же отношении* (рис. 24):

$$C \in [AB] \Rightarrow \frac{|AC|}{|CB|} = \frac{|A'C'|}{|C'B'|}.$$

Справедливость двух последних утверждений ясна из рис. 23 и 24 и не нуждается в доказательстве.

§ 7. ЭПЮР МОНЖА

В машиностроении для того чтобы иметь возможность по чертежу судить о форме и размерах изображаемых предметов (деталей, узлов, машин, агрегатов), при составлении чертежей, как правило, пользуются не двумя, а несколькими плоскостями проекций.

Наиболее часто используются три плоскости проекции. В связи с тем, что начертательная геометрия призвана передавать результаты своих

* Имеется в виду, что отрезки не перпендикулярны плоскости проекции.

теоретических исследований для практического использования, ортогональное проецирование целесообразно рассматривать также в системе трех плоскостей проекций.

Положение в пространстве точки, а следовательно, и любой геометрической фигуры может быть определено, если будет задана какая-либо координатная система отнесения. Наиболее удобной для фиксирования положения геометрической фигуры в пространстве и выявления ее формы по ортогональным проекциям является декартова система координат*, состоящая из трех взаимно перпендикулярных плоскостей.

Рис. 25 дает наглядное представление о макете, состоящем из трех взаимно перпендикулярных плоскостей проекций.

Условимся называть:

плоскость π_1 — горизонтальной плоскостью проекции;

плоскость π_2 — фронтальной плоскостью проекции;

плоскость π_3 — профильной плоскостью проекции.

Линии пересечения плоскостей проекции образуют оси координат. Ось x называют осью *абсцисс*, ось y — осью *ординат* и ось z — осью *аппликат*. Точка пересечения осей принимается за начало координат и обозначается буквой O (первая буква латинского слова *Origo* — начало).

В Советском Союзе, как и в большинстве европейских стран (в отличие от США и некоторых стран Латинской Америки), принята правая система расположения плоскостей проекций. При этом положительными направлениями осей считают: для оси x — влево от начала координат, для оси y — в сторону зрителя от плоскости π_2, для оси z — вверх от плоскости π_1; противоположные направления осей считают отрицательными.

Плоскости проекции делят пространство на восемь частей — *октантов*. Октанты условно принято нумеровать, как это показано римскими цифрами на рис. 25.

Каждый октант представляет собой прямоугольный трехгранник, у которого гранями служат части плоскостей проекций (называемые полами), а ребрами — оси координат.

---

* Декарт (1596—1650) — французский математик и философ, предложивший систему координат для определения положения системы точек в пространстве.

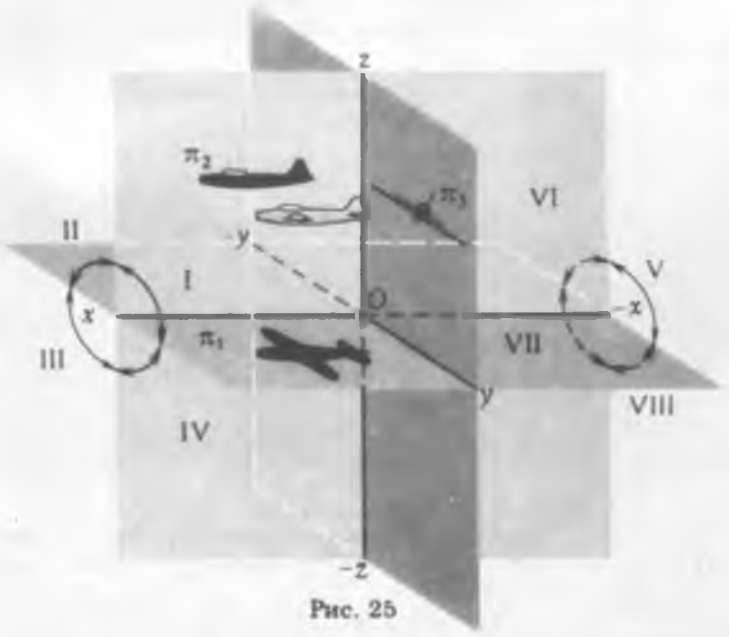


Рис. 25

Учитывая при отсчете координат точки отмеченные выше направления осей x, y и z, получим табл. 1 знаков координат.

Таблица 1

Октант	Знак координаты			Октант	Знак координаты		
	x	y	z		x	y	z
I	+	+	+	V	—	+	+
II	+	—	+	VI	—	—	+
III	+	—	—	VII	—	—	—
IV	+	+	—	VIII	—	+	—

Пользоваться пространственным макетом, показанным на рис. 25, для изображения ортогональных проекций геометрических фигур неудобно ввиду его громоздкости, а также из-за того, что на плоскостях π_1 и π_3 (показанных на макете) происходит искажение формы и размеров проецируемой фигуры.

Поэтому вместо изображения на чертеже пространственного макета пользуются *эпюром — чертежом, составленным из двух или трех связанных между собой ортогональных проекций геометрической фигуры**.

Преобразование пространственного макета в эпюр осуществляется путем совмещения плоскостей π_1 и π_3 с фронтальной плоскостью проекции π_2. Для совмещения плоскости π_1 с π_2 поворачиваем ее на 90° вокруг оси x в направлении движения часовой стрелки (рис. 26).

На рис. 26, для наглядности, плоскость π_1 повернута на угол, чуть меньший 90° После совмещения горизонтальной плоскости поворачиваем вокруг оси z также на угол 90° профильную плоскость в направлении, противоположном движению часовой стрелки. Вместе с полами

* Эпюр — от французского глагола *epurer* — улучшать, исправлять рисунок.

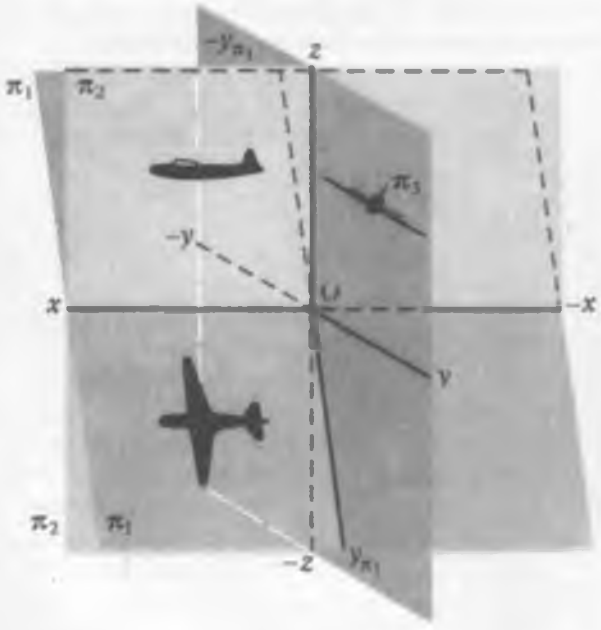


Рис. 26

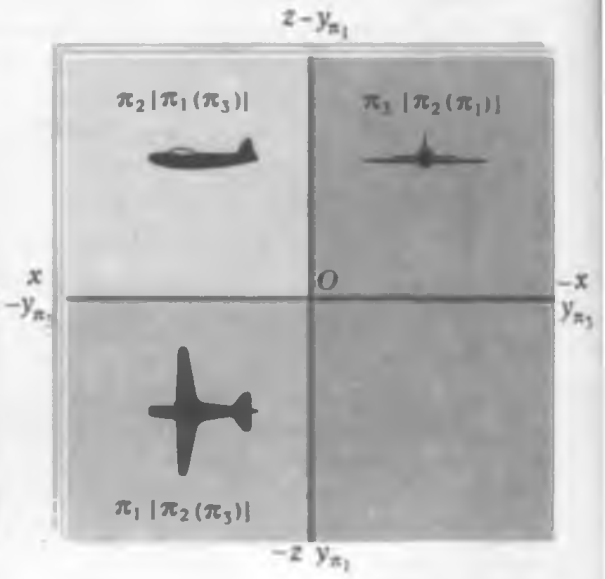


Рис. 27

плоскостей проекций будет перемещаться и ось y, при этом ось y, принадлежащая горизонтальной плоскости проекции, после поворота совпадает с осью z, а ось y профильной плоскости — с осью x. После преобразования пространственный макет примет вид, показанный на рис. 27. На этом рисунке указана также последовательность, в которой располагаются полы плоскостей проекций, так, запись $\pi_2\ [\pi_1\ (\pi_3)]$ указывает, что в этой части эпюра (ограниченного положительным направлением осей x и z) ближе к нам находится верхняя левая пола фронтальной плоскости проекции, за ней располагается задняя левая пола горизонтальной плоскости проекции, далее — верхняя задняя пола профильной плоскости проекции.

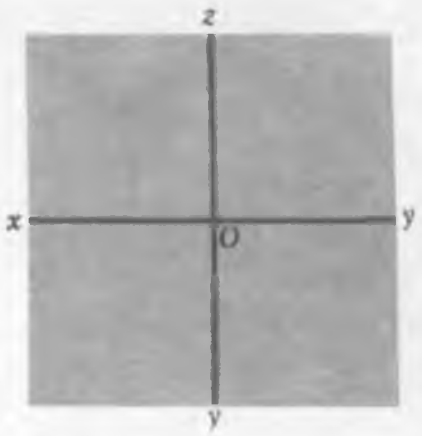


Рис. 28

Так как плоскости не имеют границ, в совмещенном положении (на эпюре) границы не показывают; нет необходимости оставлять надписи, указывающие положение пол плоскостей проекций; излишне также напоминать, где отрицательное направление осей проекций. Тогда, в окончательном виде, эпюр, заменяющий чертеж пространственного макета (см. рис. 25), примет вид, показанный на рис. 28. Плоская модель (эпюр) пространственного макета несет такую же информацию, какую содержит пространственный макет.

§ 8. НЕОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ ПОНЯТИЯ ГЕОМЕТРИИ; ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ ТОЧКИ, ПРЯМОЙ, ПЛОСКОСТИ

К основным — неопределяемым — понятиям геометрии относятся: точка, прямая, плоскость, расстояние и множество; они не могут быть определены с помощью других, более простых (элементарных) понятий.

В то же время с помощью системы аксиом возможно установить отношения между отмеченными основными понятиями, которые в дальнейшем служат основанием для формулировки различных геометрических предложений (теорем), составляющих теоретическую базу геометрии. Учитывая особую роль, которую играют в геометрии, в том числе и геометрии начертательной, основные понятия, целесообразно начать изложение курса начертательной геометрии, связанного с использованием метода проецирования, с рассмотрения ортогональных проекций точки, прямой, плоскости и определения длины отрезка прямой (являющегося мерой расстояния), заданного ортогональными проекциями*.

По этой же причине проекции точки, прямой, плоскости и определение длины отрезка прямой рассматриваются вместе, несмотря на

---

* Рассмотрение проекций множества теряет всякий смысл, так как в геометрии имеют дело с множествами, элементами которых являются точки. В общем случае множество не имеет границ — оно представляет собой пространство, заполненное точками. Проекция такого множества покроет все поле проекции. Поэтому речь может идти только о проекциях конечного множества, образующего конкретную геометрическую фигуру. Проекции геометрических фигур будут рассмотрены в гл. III и IV.

то, что прямая относится к разделу линия, плоскость является представителем поверхностей, о которых речь будет идти позже, в гл. III и IV, а определение расстояния составляет содержание § 55 гл. VI.

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ ТОЧКИ

Точка, как математическое понятие, не имеет размеров. Очевидно, если объект проецирования является нульмерным образом, то говорить о его проецировании бессмысленно.

В геометрии под точкой целесообразно понимать физический объект, имеющий линейные измерения. Условно за точку можно принять шарик с бесконечно малым радиусом. При такой трактовке понятия точки можно говорить о ее проекциях. Более того становится оправданным сделанное ранее (см. с. 13) определение геометрической фигуры как множества всех принадлежащих ей точек.

При построении ортогональных проекций точки следует руководствоваться первым инвариантным свойством ортогонального проецирования $A \to A'$.

Пусть даны в пространстве точка A и три взаимно перпендикулярные плоскости проекции (рис. 29,*а*). Положение точки в пространстве определяется тремя координатами (x, y, z), показывающими величины расстояний, на которые точка удалена от плоскостей проекций. Чтобы определить эти расстояния, достаточно через точку A провести прямые, перпендикулярные к плоскостям проекций, определить точки A', A'', A''' встречи этих прямых с плоскостями проекций и измерить величины отрезков $[AA']$, $[AA'']$, $[AA''']$, которые укажут соответственно значения аппликаты z, ординаты y и абсциссы x точки A.

Точки A', A'', A''' называют ортогональными проекциями точки A, при этом согласно принятым обозначениям (см. с. 9): A' — горизонтальная проекция точки A; A'' — фронтальная проекция точки A; A''' — профильная проекция точки A. Отрезки: $[AA'''] \cong [OA_x]$ — абсцисса точки A; $[AA''] \cong [OA_y]$ — ордината точки A; $[AA'] \cong [OA_z]$ — аппликата точки A. *

---

* Конгруентность отрезков $[AA'''] \cong [OA_x]$, $[AA''] \cong [OA_y]$, $[AA'] \cong [OA_z]$ следует из того, что параллелепипед $AA''A_zA'''A'A_xOA_y$ прямоугольный.

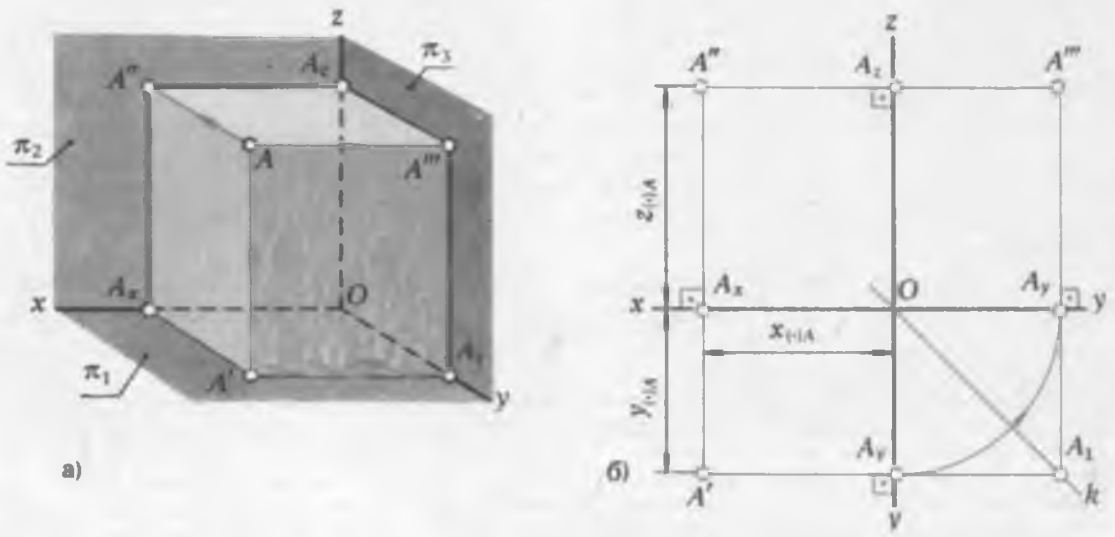


Рис. 29

Прямые (AA'), (AA''), (AA''') называются проецирующими прямыми.

При этом прямую (AA'), проецирующую точку A на горизонтальную плоскость проекций, называют *горизонтально проецирующей прямой*.

Аналогично: прямые (AA'') и (AA''') называют соответственно: *фронтально* (AA'') и *профильно* (AA''') *проецирующими прямыми*.

Две проецирующие прямые, проходящие через точку A, определяют плоскость, которую принято называть проецирующей.

Чтобы получить эпюр точки A, преобразуем пространственный макет, изображенный на рис. 29,*а*, так, как это было показано в предыдущем параграфе (см. рис. 26 и 27).

Фронтальная проекция точки A остается на месте, как принадлежащая плоскости π_2, которая не меняет своего положения при рассматриваемом преобразовании.

Горизонтальная проекция A' вместе с горизонтальной плоскостью проекции повернется по направлению движения часовой стрелки и расположится на одном перпендикуляре к оси x с фронтальной проекцией A''.

Профильная проекция A''' будет вращаться вместе с профильной плоскостью проекции и к концу преобразования займет положение, указанное на рис. 29,*б*. При этом A''' будет принадлежать перпендикуляру к оси z, проведенному через A'', и будет удалена от оси z на такое же расстояние, на какое горизонтальная проекция A' удалена от оси x.

Поэтому связь между горизонтальной и профильной проекциями точки может быть установлена с помощью двух ортогональных отрезков $[A'A_y]$ и $[A_yA''']$ и сопрягающей их дуги окружности с центром в точке пересечения осей x, y, z. Отмеченной связью пользуются для нахождения недостающей профильной (или горизонтальной) проекции.

Положение профильной (горизонтальной) проекции по заданным горизонтальной (профильной) и фронтальной проекциям может быть найдено и без проведения дуги окружности. В этом случае связь между горизонтальной и профильной проекциями может быть установлена с помощью ломаной линии $A'A_1A'''$ с вершиной A_1 на биссектрисе угла, образованного осями y, принадлежащими плоскостям π_1 и π_3.

Биссектрису OA_1 называют *постоянной прямой* k эпюра Монжа.

Чтобы определить положение точки A в пространстве, необходимо знать три ее координаты (x, y, z), равные длинам отрезков $[AA''']$, $[AA'']$, $[AA']$ (см. рис. 29,*а*). Величины этих отрезков могут быть легко определены на эпюре рис. 29,*б*:

$$[AA'''] \cong [A'A_y] \cong [A''A_z];$$
$$[AA''] \cong [A'A_x] \cong [A'''A_z];$$
$$[AA'] \cong [A''A_x] \cong [A'''A_y].$$

Попутно отметим, что горизонтальная проекция точки A определяется абсциссой x и ординатой y; ее фронтальная проекция — абсциссой x и аппликатой z, а профильная проекция — ординатой y и аппликатой z, т. е.

$$\left.\begin{array}{l} A'(x, y); \\ A''(x, z); \\ A'''(y, z). \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Из записи (1) следует:

1. *Точка в пространстве удалена:*

а) *от плоскости проекции* π_3 *на такую же величину, на какую горизонтальная проекция этой точки* A' *удалена от оси* y (или же фронтальная проекция A'' от оси z);

б) *от плоскости проекции* π_2 *на такую же величину, на какую горизонтальная проекция этой точки* A' *удалена от оси* x (или ее профильная проекция A''' от оси z);

в) *от плоскости проекции* π_1 *на такую же величину, на какую ее фронтальная проекция* A'' *удалена от оси* x (или ее профильная проекция A''' удалена от оси y).

2. *Две проекции любой точки принадлежат одному перпендикуляру (одной линии связи):*

а) *горизонтальная и фронтальная — перпендикуляру к оси* x;

б) *горизонтальная и профильная — перпендикуляру к оси* y;

в) *фронтальная и профильная — перпендикуляру к оси* z.

3. Для ортогонального проецирования отмеченное ранее свойство (см. с. 19) может быть сформулировано: *положение точки в пространстве вполне определяется положением ее двух ортогональных проекций.* Как следствие из этого — по двум любым заданным ортогональным проекциям точки всегда можно построить недостающую ее третью ортогональную проекцию.

Действительно, сочетание любых двух ортогональных проекций точки всегда дает нам значения всех трех ее координат.

Пользуясь табл. 1, помещенной в § 7, и зная положительное и отрицательное направление осей, а также принимая во внимание свойства проекций точки (пп. 1, 2, 3), можно указать на эпюре проекции точки, если известны ее координаты, или определить, в каком октанте расположена точка и на какие расстояния она удалена от плоскостей проекций, если заданы хотя бы две ее ортогональные проекции.

ПРИМЕР. Даны координаты точек A $(-20, -20, +15)$ и B $(+15, +5, -10)$. Требуется найти положение проекций этих точек и определить, в каких октантах они находятся (рис. 30).

Для определения положения горизонтальной проекции A' точки A откладываем от начала координат на отрицательном направлении оси x (от точки O вправо) значение $x = -20$ мм и определяем точку A_x, а на отрицательном направлении оси y откладываем значение $y = -20$ (для плоскости π_1 отрицательное направление оси y совпадает с положительным направлением оси z) и определяем положение точки A_y.

Пересечение перпендикуляров, восставленных из точек A_x и A_y к соответствующим осям x и y, укажет положение горизонтальной проекции A' точки A.

Мы знаем, что фронтальная A'' и горизонтальная A' проекции точки принадлежат одному перпендикуляру к оси x (см. п. 2, с. 22) и то, что фронтальная проекция удалена от оси x на величину аппликаты z (в данном случае $z = +15$). Поэтому для определения положения A'' откладываем от точки A_x на перпендикуляре к оси x значение аппликаты $z = +15$.

Аналогично находим положение горизонтальной и фронтальной проекций точки B. Для этого на положительных направлениях осей x и y откладываем соответственно 15 и 5 мм. Эти координаты определяют положение B'. Фронтальная проекция принадлежит прямой линии связи, проходящей через B' перпендикулярно к оси x, и удалена от этой оси на заданное значение $z = -10$.

Приведенная в § 7 табл. 1 знаков координат точек, расположенных в разных октантах, позволяет легко определять, какому октанту принадлежит точка, если известны хотя бы две ее проекции.

Точка A находится в VI октанте пространства, так как она располагается за фронтальной плоскостью проекции (в зоне отрицательных значений ординаты y) выше горизонтальной (аппликата z — положительна) и правее профильной плоскости проекции (абсцисса x — отрицательна), т. е. в части пространства, ограниченной верхней правой полой плоскости π_2, задней правой полой плоскости π_1 и задней верхней полой профильной плоскости проекции π_3

Чтобы найти профильную проекцию точки, достаточно из A'' провести пря-

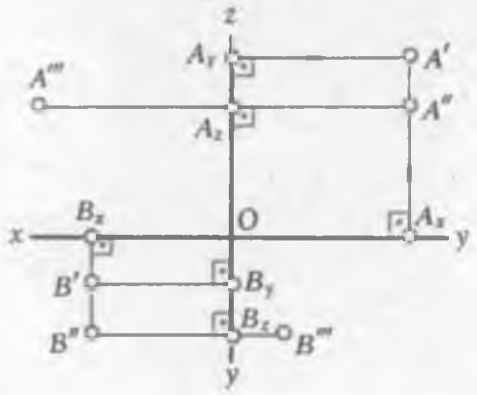


Рис. 30

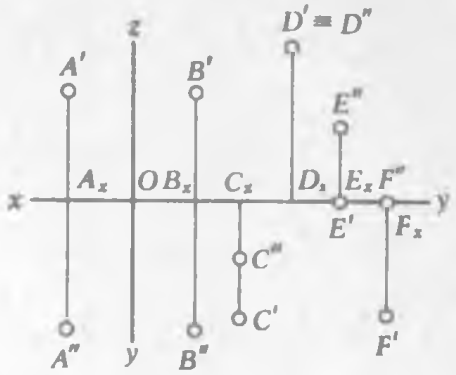


Рис. 31

мую, перпендикулярно к оси z, и отложить на ней от этой оси влево (по отрицательному направлению оси y, принадлежащей профильной плоскости проекции) значение $y = -20$ мм.

Точка B расположена в IV октанте, в котором координаты x и y — положительны, а координата z — отрицательна. На рис. 30 указано также положение профильной B''' проекции этой точки.

На рис. 31 показаны горизонтальные и фронтальные проекции точек A, B, C, D, E, F. Зная положительные и отрицательные направления осей, можно без труда определить октант, которому принадлежит точка; так, точка A находится в третьем октанте пространства, а точка B, симметричная точке A относительно плоскости π_3, принадлежит седьмому октанту. Точка C находится в восьмом октанте, так как значения абсциссы x и аппликаты z — отрицательны, а значение ординаты y — положительно.

На рис. 31 показаны проекции D' и D'' точки D. Для этой точки характерно равенство аппликаты z и ординаты y, поэтому точка D удалена на одинаковое расстояние от плоскостей π_1 и π_2 ($|D'D_x| = |D''D_x|$), т. е. она принадлежит биссекторной плоскости шестого и восьмого октантов. На рис. 31 указаны также проекции точек E и F. Точка E принадлежит фронтальной плоскости проекции π_2 (ордината $y_{(\cdot)E} = 0$), а точка F — горизонтальной плоскости проекции π_1 ($z_{(\cdot)F} = 0$).

В тех случаях, когда нет необходимости в определении положения точки (или любой геометрической фигуры) относительно системы плоскостей проекций, можно не указывать на эпюре осей проекций. Иными словами, для безосного чертежа плоскости проекции принимаются неопределенными до параллельного переноса (т. е. могут перемещаться параллельно самим себе).

В инженерной практике при составлении чертежей, когда требуется определить форму и размеры геометрической фигуры или взаимное расположение совокупности геометрических фигур, обычно оси проекций не указывают. Отсутствие на чертеже осей не мешает определять третью проекцию любой точки по двум ее заданным проекциям, если указаны три проекции какой-либо другой точки.

ПРИМЕР. Даны три проекции точки A (A', A'', A'''), а также горизонтальная и фронтальная проекции точки B (B' и B''). Требуется найти профильную проекцию B''' (рис. 32). Через горизонтальную проекцию точки A' проводим прямую, параллельную линии связи ($A''A'''$), а через профильную проекцию A''' проводим прямую, параллельную линии связи ($A'A''$), и отмечаем точку их пересечения A_1. Через точку A_1 проводим постоянную прямую k. Прямая k проводится как биссектриса угла $A'A_1A'''$.

Зная положение постоянной прямой, легко найти недостающую профильную

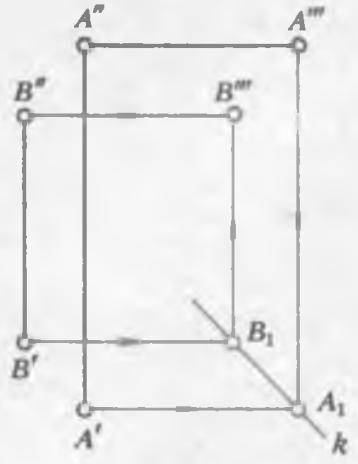


Рис. 32

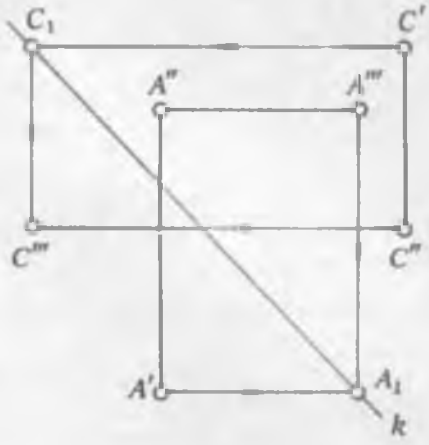


Рис. 33

проекцию точки B. Для этого через B' проводим горизонтальную прямую, отмечаем точку B_1 ее пересечения с постоянной прямой k. Через точку B_1 проводим вертикальную прямую. Точка ее пересечения с горизонтальной прямой, проведенной через B'', определяет искомую профильную проекцию B'''.

Постоянная прямая позволяет решать задачу по определению третьей проекции точки по двум заданным независимо от того, в каком октанте находится точка.

ПРИМЕР. Даны три проекции точки $A(A', A'', A''')$, а также горизонтальная и фронтальная проекции точки $C(C'$ и $C'')$, расположенной в VI октанте (рис. 33). Требуется определить C'''.

Через данную проекцию A' проводим горизонтальную прямую и отмечаем точку A_1 пересечения ее с вертикальной прямой, проведенной через A'''. Через точку A_1 проводим постоянную прямую k.

Для определения третьей проекции точки C достаточно через точку C' провести горизонтальную прямую, а из точки C_1 пересечения ее с постоянной прямой k — вертикальную прямую. Точка пересечения этой вертикали с горизонтальной прямой, проведенной через C'', укажет положение искомой проекции C'''. Если на безосном чертеже потребуется указать оси, то это всегда можно сделать (с точностью до параллельного переноса). Для этого одну из осей, например x, проводим произвольно, следя лишь за тем, чтобы она была перпендикулярна линии связи, соединяющей горизонтальную и фронтальную проекции точки. Тогда ось z определится как прямая, перпендикулярная к оси x в точке пересечения оси x с постоянной прямой k.

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ ПРЯМОЙ

При построении проекции прямой следует исходить из инвариантного свойства 1а (см. § 6) ортогонального проецирования:

$$(\forall l)\wedge(l \not\perp \pi_1) : l \to l'.^*$$

При ортогональном проецировании на плоскость прямая, не перпендикулярная плоскости проекции, проецируется в прямую.

Поэтому для определения проекции прямой достаточно знать проекции двух не тождественных точек, принадлежащих этой прямой.

$[AB]$, определяющий прямую l (рис. 34,*а*), занимает произвольное (общее) положение по отношению к плоскостям проекций (углы нак-

---

* Естественно, будут справедливы и следующие утверждения:

$$1)\ (\forall l)\wedge(l \not\perp \pi_2) : l \to l';\quad 2)\ (\forall l)\wedge(l \not\perp \pi_3) : l \to l''.$$

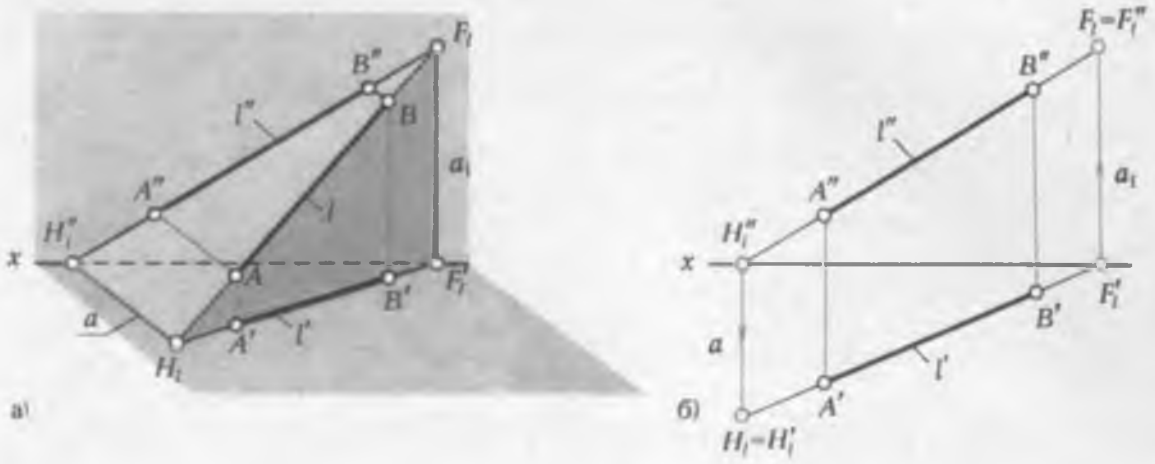


Рис. 34

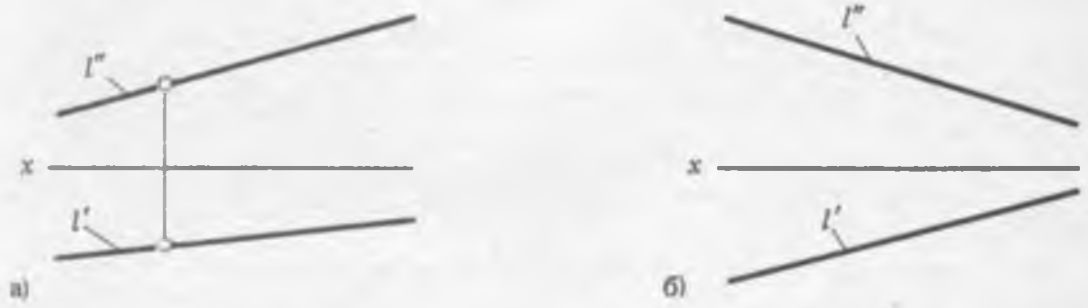


Рис. 35

лона прямой l к плоскостям проекций — произвольные, но отличные от 0 и 90°). Такая прямая называется *прямой общего положения*.

На эпюре проекции прямой общего положения составляют с осями проекций также произвольные углы (рис. 34,*б*). Прямую на эпюре можно задать не только проекциями ее отрезка (см. рис. 34,*б*), но и проекциями некоторой произвольной части прямой, не указывая концевых точек этой части. При этом можно ограничиться обозначением проекции только одной буквой, отнеся ее к какой-либо точке прямой (рис. 35,*а*) или к прямой (точнее ее проекции) в целом (рис. 35,*б*).

Следы прямой

Прямая общего положения пересекает все основные плоскости проекции. *Точку пересечения* (встречи) *прямой с плоскостью проекции называют следом прямой*.

В зависимости от того, с какой плоскостью проекции происходит встреча прямой l, следы обозначают и называют: H_l — горизонтальный след прямой l; F_l — фронтальный след прямой l. H_l', H_l'', F_l', F_l'' — соответственно горизонтальная и фронтальная проекции следов H_l и F_l. Следует иметь в виду, что $H_l \equiv H_l'$; $F_l \equiv F_l''$.

Установим правило нахождения следов прямой. Для примера рассмотрим определение H_l (см. рис. 34,*б*). Горизонтальный след — точка, принадлежащая как прямой l, так и плоскости проекции π_1 ($H_l = l \cap \pi_1$), поэтому $H_l'' \in l''$ и $H_l'' \in x$, следовательно, $H_l'' = l'' \cap x$. Горизонтальная проекция $H_l' \in l'$ (так как $H_l \in l$). Поэтому для нахождения горизонтального следа прямой необходимо:

1) отметить точку пересечения фронтальной проекции прямой с осью x ($l'' \cap x = H_l''$);

2) через полученную точку провести прямую a, перпендикулярную оси x ($a \perp x$);

3) пересечение перпендикуляра a с горизонтальной проекцией прямой укажет положение горизонтального следа H_l ($a \cap l' = H_l$).

Таким образом, алгоритм определения горизонтального следа прямой l может быть записан: $H_l = (l'' \cap x = H_l'')$; $(a \perp x,\ a \ni H_l'')$; $a \cap l'$.

Для определения фронтального следа прямой вместо $l'' \cap x$ выполняется операция $l' \cap x = F_l'$, а прямая $a_1 \perp x$ проводится через точку F_l'. Последняя операция заключается в нахождении $F_l'' = a_1 \cap l''$.

Частные случаи расположения прямой

Кроме рассмотренного общего случая (см. рис. 34,*а, б*), существуют следующие частные случаи расположения прямой по отношению к заданной системе плоскостей проекций:

А. Прямая параллельна плоскости проекции.

Б. Прямая перпендикулярна плоскости проекции.

В. Прямая принадлежит плоскости проекции (частный случай параллельности).

Рассмотрим каждый из этих случаев.

А. *Прямая, параллельная плоскости проекции* (горизонталь, фронталь) *.

1. *Горизонталь — прямая, параллельная горизонтальной плоскости проекции:* $h \parallel \pi_1$.

Все точки горизонтали удалены на одинаковые расстояния от плоскости π_1. Поэтому фронтальная проекция любой горизонтали параллельна оси x. Горизонтальная проекция может занимать любое положение (рис. 36,*а* и *б*). $\forall A \in h$; $z_{(\ )A}$ — const, поэтому $h'' \parallel x$.

2. *Фронталь — прямая, параллельная фронтальной плоскости проекции:* $f \parallel \pi_2$.

Все точки фронтали удалены на одинаковое расстояние от фронтальной плоскости π_2. Поэтому горизонтальная проекция любой фронтали параллельна оси x. Фронтальная проекция может занимать любое положение (рис. 37,*а* и *б*). $\forall B \in f$; $y_{(\cdot)B}$ — const, поэтому $f' \parallel x$.

Б. *Прямая, перпендикулярная плоскости проекции* (проецирующая прямая).

---

* Горизонталь и фронталь называют также линиями уровня.



Рис. 36.

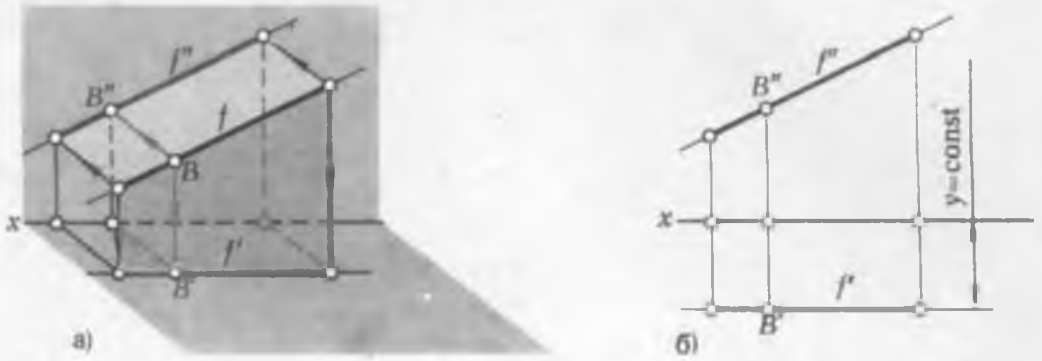


Рис. 37



Рис. 38

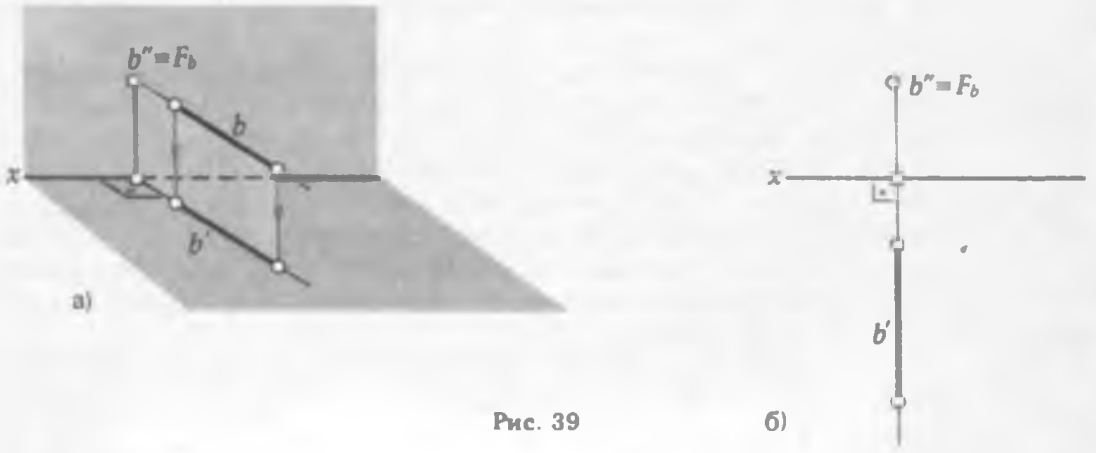


Рис. 39

1. *Горизонтально проецирующая прямая — прямая, перпендикулярная горизонтальной плоскости проекции:* $a \perp \pi_1$.

Такая прямая проецируется на плоскость π_1 в точку; ее фронтальная проекция перпендикулярна оси x (рис. 38,*а* и *б*): a' — точка, a'' — прямая $\perp x$.

2. *Фронтально проецирующая прямая — прямая, перпендикулярная фронтальной плоскости проекции:* $b \perp \pi_2$.

Эта прямая проецируется на плоскость π_2 в точку, а ее горизонтальная проекция перпендикулярна оси x (рис. 39,*а* и *б*): b'' — точка, b' — прямая $\perp x$. Прямые a и b являются частными случаями соответственно фронтали и горизонтали.

В. *Прямая, принадлежащая плоскости проекции.*

Характерным признаком для эпюра, на котором изображена такая прямая, будет принадлежность одной из проекций прямой оси.

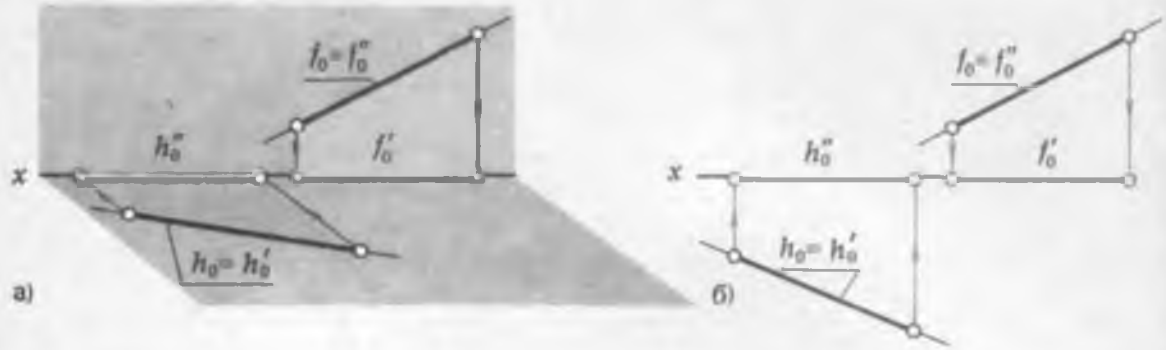


Рис. 40

На рис. 40,*а* и *б* показаны проекции прямых h_0 и f_0. Прямая h_0 принадлежит горизонтальной плоскости проекции: $h_0 \subset \pi_1$. Прямая f_0 принадлежит фронтальной плоскости проекции: $f_0 \subset \pi_2$. Прямые h_0 и f_0 являются нулевыми горизонталью и фронталью.

ОРТОГОНАЛЬНАЯ ПРОЕКЦИЯ ПЛОСКОСТИ

Плоскость является простейшей поверхностью. Положение плоскости в пространстве однозначно определяется тремя различными точками A, B, C, не принадлежащими одной прямой. Поэтому для задания плоскости на эпюре Монжа достаточно указать проекции:

а) трех различных, не принадлежащих одной прямой точек (рис. 41,*а*);

б) прямой и не принадлежащей ей точки (рис. 41,*б*);

в) двух прямых, пересекающихся в собственной (рис. 41,*в*) или несобственной (рис. 41,*г*) точке.

Плоскость может быть задана также проекциями отсека плоской фигуры Ф (рис. 41,*д*). В некоторых случаях бывает целесообразным задавать плоскость не произвольными пересекающимися прямыми, а прямыми, по которым эта плоскость пересекает плоскости проекции. Такой вариант задания плоскости называют заданием плоскости следами. На рис. 42,*а* показана плоскость α. Эта плоскость пересекает ось проекции в точке X_α, а плоскости проекции по прямым $h_{0\alpha}$, $f_{0\alpha}$. Прямую, по которой плоскость пересекает плоскость проекции, называют следом плоскости. При этом различают:

$h_{0\alpha} = \alpha \cap \pi_1$ — *горизонтальный след плоскости* α;

$f_{0\alpha} = \alpha \cap \pi_2$ — *фронтальный след плоскости* α.

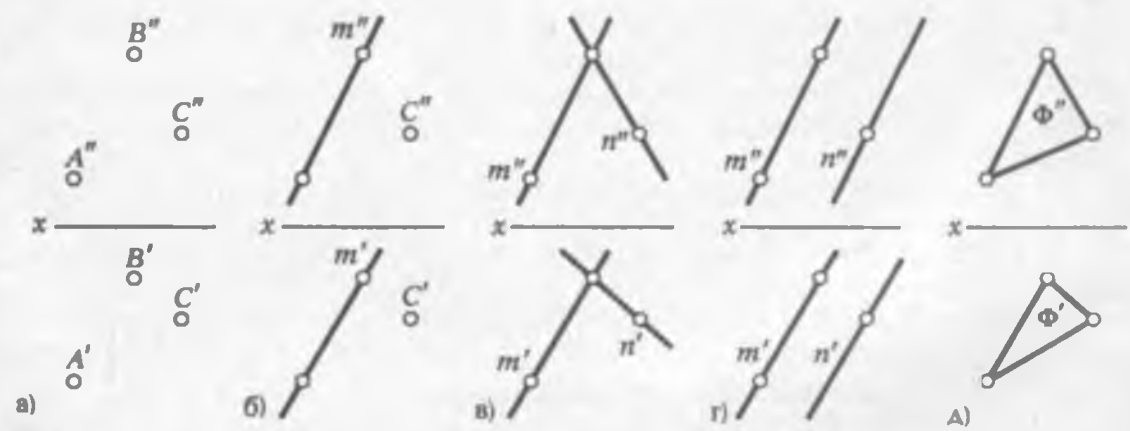


Рис. 41

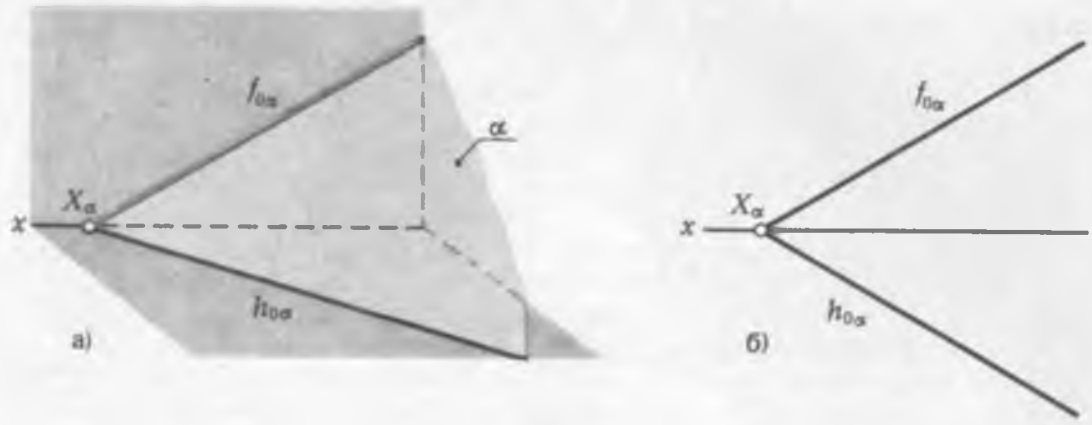


Рис. 42

Точку $X_\alpha = x \cap \alpha$ пересечения оси x с плоскостью α называют точкой схода следов (в этой точке сходятся два следа).

На рис. 42,*б* показано задание плоскости следами. Сопоставляя между собой наглядное изображение (рис. 42,*а*) и его плоскостную модель — эпюр Монжа (рис. 42,*б*), мы видим, что задание плоскости следами обладает преимуществом перед другими вариантами ее изображения на эпюре:

во-первых, сохраняется наглядность изображения, что позволяет легко представить положение плоскости в пространстве;

во-вторых, при задании плоскости следами требуется указать только две прямые вместо четырех (см. рис. 41,*в*, *г*) или шести (см. рис. 41,*д*).

Показанная на рис. 42 плоскость α занимает общее (произвольное) положение по отношению к плоскостям проекций (углы наклона этой плоскости к плоскостям проекций — произвольные, но отличные от 0 и 90°). Такая плоскость называется *плоскостью общего положения*.

Из рис. 42,*б* видно, что на эпюре Монжа следы плоскости общего положения составляют с осью проекции также произвольные углы.

Частные случаи расположения плоскости

Кроме рассмотренного общего случая (см. рис. 42), плоскость по отношению к плоскостям проекций может занимать следующие частные положения:

А. Перпендикулярное к плоскости проекции.

Б. Параллельное плоскости проекции.

Рассмотрим эти случаи.

А. *Плоскость, перпендикулярная к плоскости проекции.* Такие плоскости называют *проецирующими*, при этом различают:

1. *Горизонтально проецирующую плоскость* $\beta \perp \pi_1$.

2. *Фронтально проецирующую плоскость* $\gamma \perp \pi_2$.

Рис. 43, 44 дают наглядное представление о проецирующих плоскостях и их задании на эпюре Монжа, причем плоскость β задана следами, γ — параллельными прямыми (m и n).

Б. *Плоскость, параллельная плоскости проекции.*

Эти плоскости называют плоскостями уровня, причем *плоскость* $\delta \parallel \pi_1$ *называют горизонтальной*, а *плоскость* $\epsilon \parallel \pi_2$ — *фронтальной*. Рис. 45,*а* дает представление о горизонтальной плоскости δ, а на рис. 46,*а* показана фронтальная плоскость ϵ. На рис. 45,*б* и 46,*б* эти плоскости заданы на эпюре Монжа.

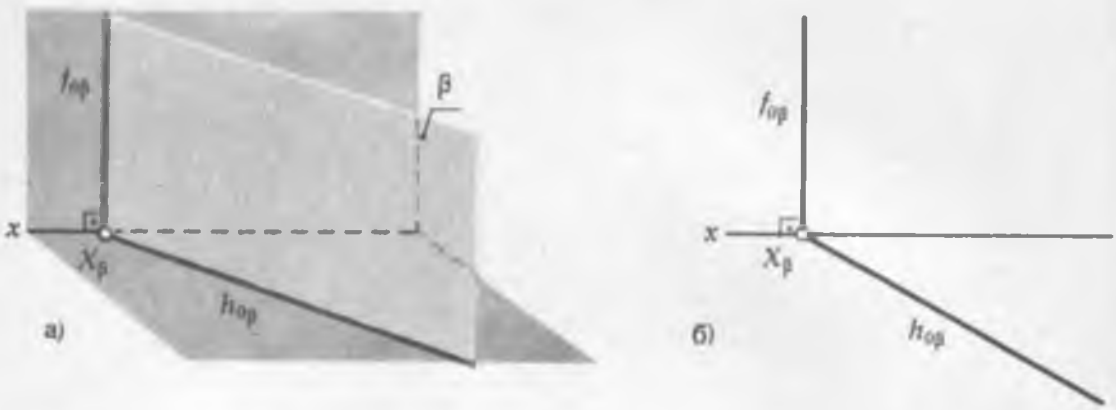


Рис. 43

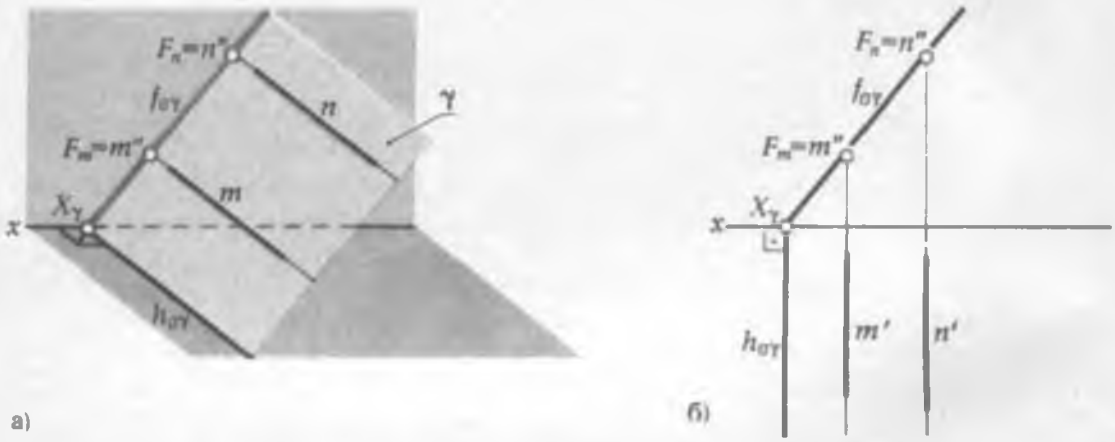


Рис. 44

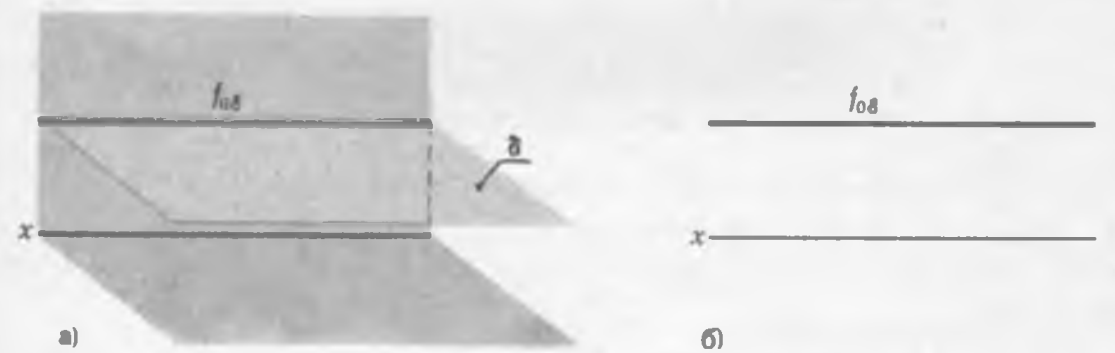


Рис. 45

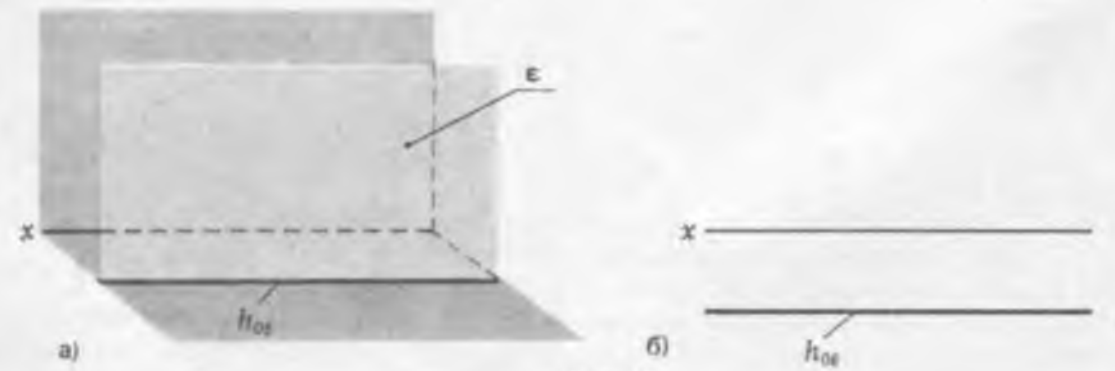


Рис. 46.

Главные линии плоскости

Главными линиями плоскости называют:

1. *Горизонталь — прямую, принадлежащую плоскости и параллельную горизонтальной плоскости проекции.*

2. *Фронталь — прямую, принадлежащую плоскости и параллельную фронтальной плоскости проекции.*

3. *Линию наибольшего наклона — прямую, принадлежащую плоскости и перпендикулярную к горизонтали или фронтали этой плоскости.*

На рис. 47,*а* показаны горизонталь h и фронталь f плоскости α. Рис. 47,*б* и *в* иллюстрируют задание этих линий на эпюре Монжа. Из рис. 47,*б*, *в* видно, что горизонталь плоскости параллельна ее горизонтальному, а фронталь — фронтальному следу.

Характерные особенности проекций горизонтали и фронтали приведены ниже:

	Проекция:	
	горизонтальная	фронтальная
Горизонталь	Параллельна $h_{0\alpha}$	Параллельна оси x
Фронталь	Параллельна оси x	Параллельна $f_{0\alpha}$

Представление о линии наибольшего наклона плоскости дает рис. 48, на котором показана прямая c — линия наибольшего наклона плоскости α к горизонтальной плоскости проекции. В некоторых учебниках ее называют также линией наибольшего ската.

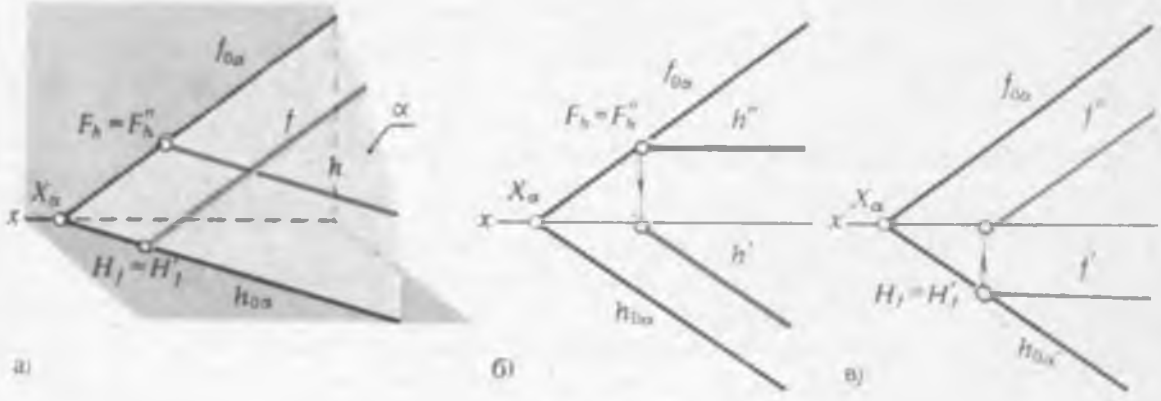


Рис. 47

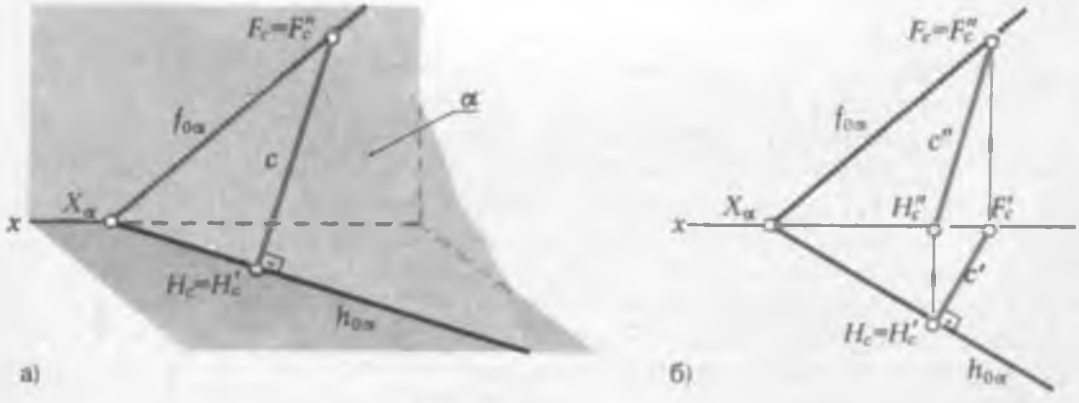


Рис. 48

Отличительной особенностью линии наибольшего наклона прямой к плоскости π_1 является перпендикулярность ее горизонтальной проекции горизонтали h' плоскости α или ее горизонтальному следу $h_{0\alpha}$.

У прямой d — линии наибольшего наклона плоскости α к плоскости проекции π_2 — фронтальная проекция перпендикулярна фронтальной проекции фронтали плоскости f' или ее фронтальному следу $f_{0\alpha}$. Рис. 48,*а* показывает прямую c — линию наибольшего ската плоскости α; на рис. 48,*б* эта линия задана на эпюре Монжа. На рис. 49 показана прямая d — линия наибольшего наклона плоскости β ($a \parallel b$) к плоскости проекции π_2. Так как плоскость β задана параллельными прямыми и направление фронтального следа плоскости $f_{0\beta}$ нам не известно, то для определения направления фронтальной проекции прямой d необходимо построить фронтальный след плоскости $f_{0\beta}$ или фронтальную проекцию фронтали этой плоскости.

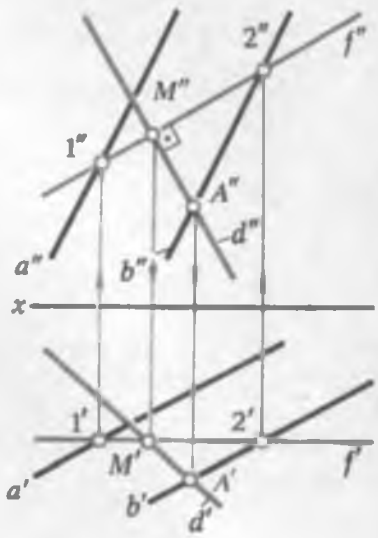


Рис. 49

На рис. 49 проведена фронталь f (f', f'') плоскости β (ее построение проще, чем определение фронтального следа плоскости β). Затем через произвольную точку A'' ($A \in \beta$) проведена фронтальная проекция d'' ($d'' \perp f''$). Отмечена точка $M'' = d'' \cap f''$. По A'' и M'' найдены A' и M'. Эти две точки указывают положение горизонтальной проекции прямой d' — линии наибольшего наклона плоскости β к плоскости проекции π_2.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАССТОЯНИЯ МЕЖДУ ДВУМЯ ТОЧКАМИ

Расстояние между двумя точками A и B определяется длиной отрезка прямой, заключенного между этими точками.

Из инвариантных свойств ортогонального проецирования следует, что ортогональная проекция отрезка будет конгруентна оригиналу лишь в том случае, когда он параллелен плоскости проекции (см. § 6, свойство 2д):

$$([AB] \parallel \pi_1) \Leftrightarrow [A'B'] \cong [AB].$$

Аналогично:

$$([AB] \parallel \pi_2) \Leftrightarrow [A''B''] \cong [AB].$$

Во всех остальных случаях отрезок проецируется на плоскость проекции с искажением. При этом ортогональная проекция отрезка всегда будет меньше его длины.

Для установления зависимости между длиной отрезка прямой и длиной его проекций рассмотрим рис. 50,*а*. В прямоугольной трапеции $ABB'A'$ (углы при вершинах A' и B' — прямые) боковыми сторонами являются отрезок AB и его горизонтальная проекция $A'B'$, а основаниями — отрезки AA' и BB', по величине равные удалениям концов A и B отрезка от горизонтальной плоскости проекции π_1.

Проводим в плоскости трапеции $ABB'A'$ через точку A прямую AB_1, параллельную горизонтальной проекции отрезка AB. Получим прямоугольный треугольник ABB_1, у которого катет $AB_1 \cong A'B'$, а катет BB_1 равен разности аппликат концов отрезка ($|BB'| - |AA'|$). Гипо-

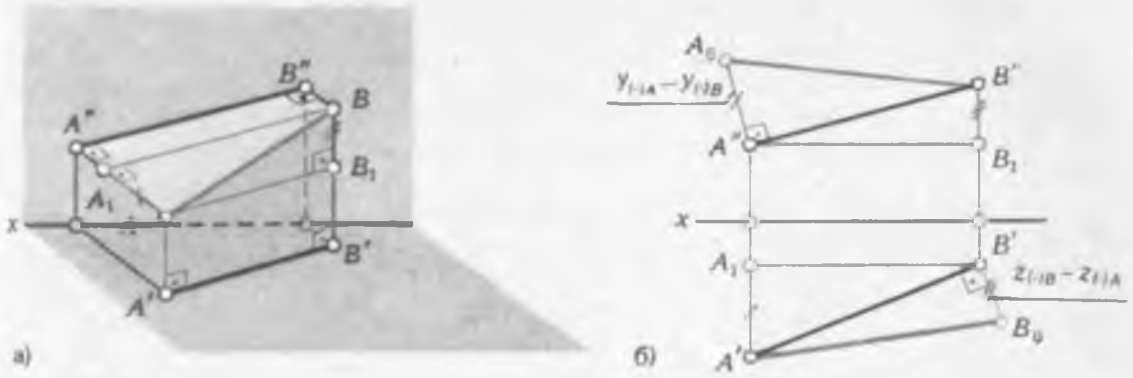


Рис. 50

тенуза этого треугольника равна длине отрезка AB.

$$|AB|^2 = |A'B'|^2 + (|BB'| - |AA'|)^2 .$$

Зависимость между длиной отрезка и его фронтальной проекцией может быть установлена с помощью треугольника AA_1B, в котором гипотенуза равна длине отрезка, один из катетов — фронтальной проекции отрезка, а другой — разности удалений концов отрезка от фронтальной плоскости проекции:

$$|AB|^2 = |A''B''|^2 + (|AA''| - |BB''|)^2 .$$

Приведенные примеры показывают, что для графического определения на эпюре Монжа длины отрезка достаточно построить прямоугольный треугольник, взяв за один его катет горизонтальную (фронтальную) проекцию отрезка, а за другой катет — разность удалений концов отрезка от горизонтальной (фронтальной) проекции.

На рис. 50,*б* показано определение действительной величины отрезка AB с помощью построения треугольника $A'B'B_0$. На этом же чертеже приведен второй вариант решения задачи — путем построения треугольника $A''B''A_0$ на базе фронтальной проекции отрезка.

Построение прямоугольного треугольника не единственный графический способ определения длины отрезка. В дальнейшем будут показаны различные способы преобразования ортогональных проекций, с помощью которых можно получить более экономичные решения.

С помощью прямоугольного треугольника можно решать задачу на построение на эпюре проекции отрезка наперед заданной длины.

ПРИМЕР. На прямой общего положения a отложить от точки A вправо отрезок длиной 25 мм (рис. 51).

РЕШЕНИЕ:

1. Отмечаем на прямой a произвольную точку 1 $(1', 1'')$;
2. Определяем длину отрезка $[A1]$;
3. На прямой $(A'1_0)$ от точки A откладываем отрезок $A'B_0$ длиной 25 мм.
4. Из точки B_0 опускаем перпендикуляр на прямую a'. $[AB]$ является горизонтальной проекцией отрезка заданной длины.

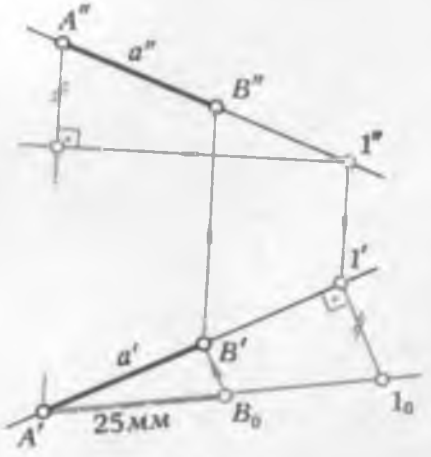


Рис. 51

При последующем изложении материала нам часто придется обращаться к параллельным прямым и плоскостям. В связи с этим целесообразно не только показать задание на эпюре Монжа точки, прямой, плоскости, но и выяснить условия, которые должны быть выполнены для изображения параллельных прямых, плоскостей, прямой и плоскости.

В расширенном евклидовом пространстве (пространстве, дополненном несобственными точками и прямыми) две прямые, прямая и плоскость, две плоскости всегда пересекаются. Различие по сравнению с обычным евклидовым пространством состоит лишь в том, что точка пересечения прямых или прямой и плоскости и прямая, являющаяся результатом пересечения двух плоскостей, могут быть как собственными, так и несобственными. В последнем случае прямые, прямая и плоскость, плоскости считаются параллельными.

Изображение на эпюре Монжа параллельных прямых, прямой и плоскости, плоскостей базируется на инвариантном свойстве 2з (см. § 6) ортогонального проецирования.

1. Параллельные прямые.

Если $a \parallel b$, то $a \cap b$ в несобственной точке K_∞, следовательно, ее проекции K'_∞ и K''_∞ будут также несобственными. Поэтому $a' \parallel b'$ и $a'' \parallel b''$, т. е. у параллельных прямых параллельны их одноименные проекции.

2. Параллельность прямой и плоскости.

Если $a \cap \alpha = K_\infty$ — несобственная точка (иначе $a \parallel \alpha$), то ее проекции будут также несобственными точками K'_∞ и K''_∞. Поэтому $a' \parallel \alpha'$ и $a'' \parallel \alpha''$.

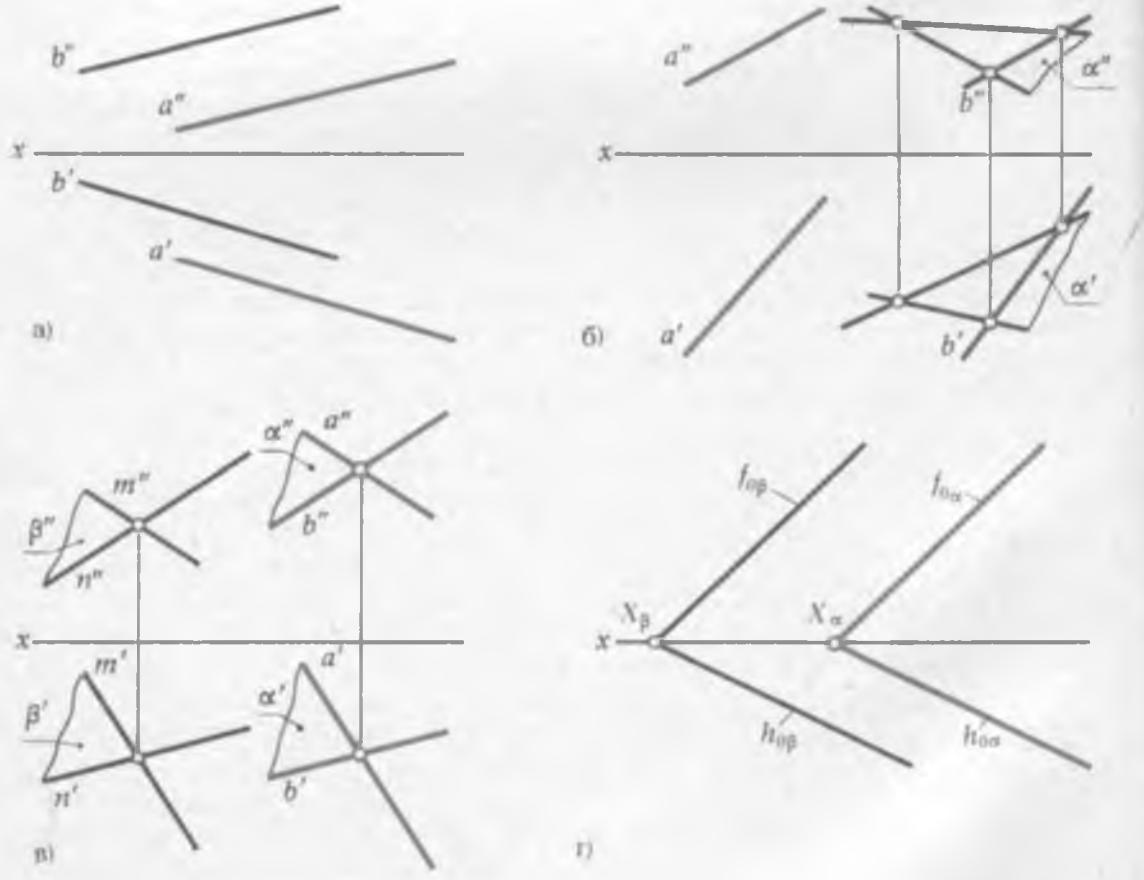


Рис. 52

Известно, что прямая, параллельная плоскости, должна быть параллельна какой-либо прямой, принадлежащей этой плоскости. Поэтому, чтобы задать на эпюре Монжа прямую a, параллельную плоскости α, необходимо и достаточно в плоскости α "взять" произвольную прямую b и провести $a \parallel b$ по правилу, изложенному в п. 1.

3. Параллельные плоскости.

Две плоскости параллельны, если в одной из них можно провести две пересекающиеся прямые, параллельные двум пересекающимся прямым другой плоскости. Поэтому, чтобы задать на эпюре Монжа плоскость $\alpha\,(a \cap b)$, параллельную плоскости $\beta\,(m \cap n)$, достаточно указать проекции пересекающихся прямых a и b, соответственно параллельных прямых m и n.

В частности, если плоскости заданы следами, то у параллельных плоскостей будут параллельны их одноименные следы. На рис. 52 показаны эпюры: параллельных прямых $a \parallel b$ (рис. 52,*а*); параллельных прямой a и плоскости α (рис. 52,*б*); параллельных плоскостей α и β (рис. 52,*в* и *г*). На рис. 52,*в* плоскость $\alpha\,(a \cap b)$, плоскость $\beta\,(m \cap n)$, на рис. 52,*г* плоскости заданы следами.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. В чем состоит реконструкция трехмерного евклидова пространства?
2. Что такое несобственные элементы пространства?
3. Сформулируйте основные отношения принадлежности между элементами евклидова пространства.
4. Перечислите основные способы метода проекции.
5. Какие преимущества присущи ортогональному проецированию по сравнению с косоугольным проецированием?
6. Укажите основные инвариантные свойства ортогонального проецирования.
7. Каким образом пространственная фигура из трех взаимно перпендикулярных плоскостей преобразуется в плоскую модель?
8. Какой октант имеет отрицательное направление всех осей?
9. Какими полами плоскостей проекций ограничены II, III, VI, VII октанты?
10. Как обозначаются проекции точки, прямой, плоскости на плоскостях проекций?
11. Как по отношению к осям проекций располагаются проекции точек, находящихся в I, II, III, ... , VIII октантах?
12. Какие знаки имеют координаты x, y, z точки, находящейся в I, II, III, ... , VIII октанте?
13. Какие координаты на эпюре определяют горизонтальную и фронтальную проекции точки?
14. В каких октантах значения координат точки отрицательны, в каких положительны?
15. Как определить положение третьей проекции точки на безосном чертеже, если известны две ее проекции и три проекции другой точки?
16. Дайте определение и способы нахождения следов прямой и плоскости.
17. Какие линии плоскости называются главными, перечислите характерные особенности проекций этих линий на эпюре Монжа.
18. Какие прямые и плоскости называются проецирующими, в чем состоит отличительная особенность их ортогональных проекций?

ГЛАВА II

СПОСОБЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПРОЕКЦИЙ

ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Трудоемкость и, как следствие, точность графического решения задач часто зависят не только от сложности задач, но и от того, какое положение занимают геометрические фигуры, входящие в условия задачи, по отношению к плоскостям проекций.

Проиллюстрируем сказанное примерами.

ПРИМЕР 1. Требуется определить точку пересечения ("встречи") линии l с плоскостью α (рис. 53).

Так как и линия l, и плоскость α занимают произвольное положение как по отношению друг к другу, так и относительно плоскостей проекций, то ответить на поставленный вопрос непосредственно по пространственному изображению или по ортогональным проекциям (эпюру Монжа) без дополнительных графических построений не представляется возможным.

В то же время ситуация, заданная на рис. 54,а, позволяет сразу, без каких-либо дополнительных построений, получить ответ.

Для решения задачи используем инвариантное свойство 2г (см. § 6).

Точка K, в которой линия l пересекает плоскость α, как принадлежащая горизонтально проецирующей плоскости, будет иметь горизонтальную проекцию K' на горизонтальном следе плоскости $h_{0\alpha}$: $K' = l' \cap h_{0\alpha}$. Зная положение K', определяем K''.

На рис. 54,б приведено решение этой задачи на эпюре Монжа.

ПРИМЕР 2. Определить длины сторон ΔABC и величины углов при его вершинах.

Очевидно, если плоскость ΔABC (плоскость α) занимает произвольное положение относительно плоскостей проекций (рис. 55), или перпендикулярное к какой-либо плоскости (рис. 56), то для решения поставленной задачи необходимо выполнить определенные графические построения. В то же время ответ на поставленные вопросы может быть получен без каких-либо графических построений непосредственно из ортогональных проекций, если плоскость ΔABC параллельна плоскости проекции (рис. 57,а,б). Это утверждение базируется на инвариантном свойстве 2д (см. § 6).

Приведенные примеры показывают, что проецируемая фигура может занимать по отношению к плоскости проекции или произвольное, или частное положение. В первом случае, как правило, получаются проекции, неудобные для решения задач. В то же время решение задачи значительно упрощается, когда мы имеем дело с частным расположением геометрических фигур относительно плоскости проекции (см. рис. 54 и 57). Наиболее выгодным частным положением проецируемой фигуры (в случае ортогонального проецирования), при котором получаются проекции фигуры, удобные для решения задач, следует считать:

а) положение, *перпендикулярное* к плоскости проекции, — при решении позиционных задач (см. рис. 54) *;

---

* Определения и деление задач на позиционные и метрические см. в гл. V и VI.

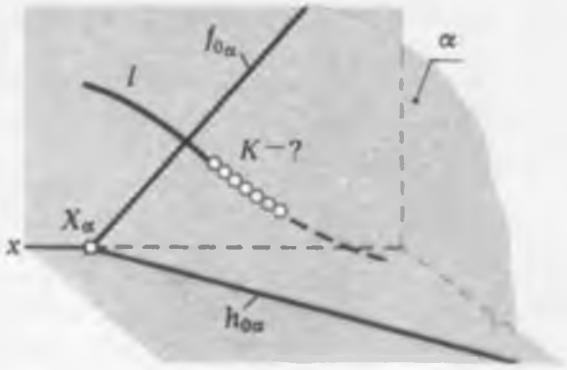
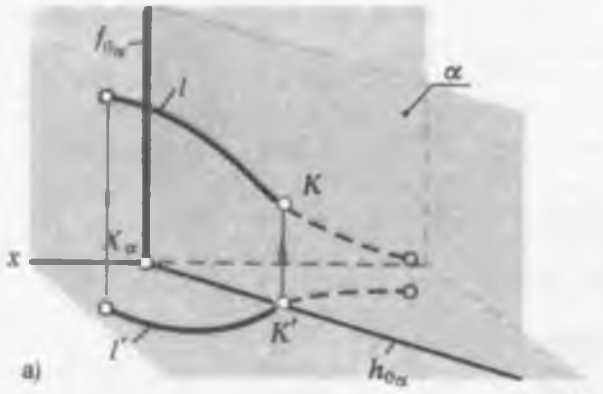


Рис. 53



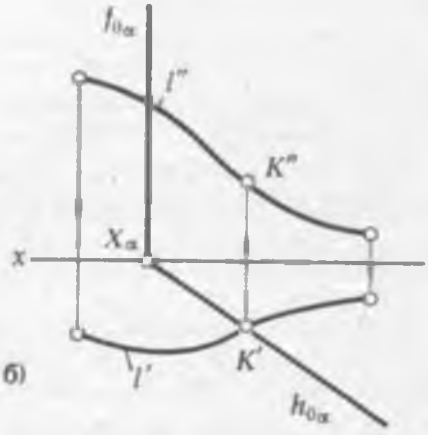


Рис. 54

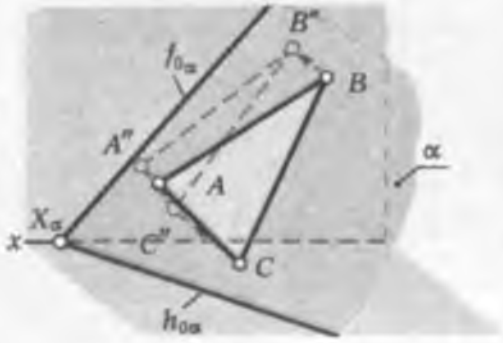


Рис. 55

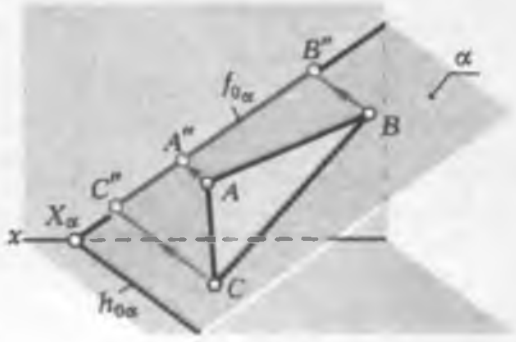
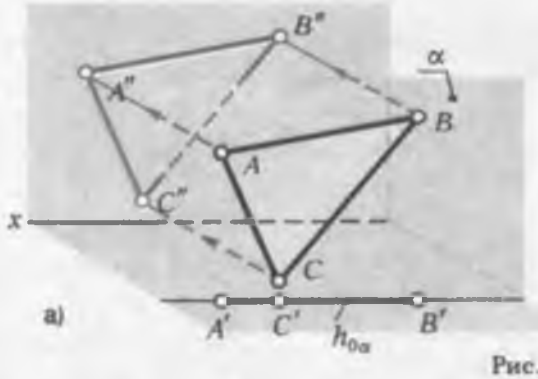


Рис. 56



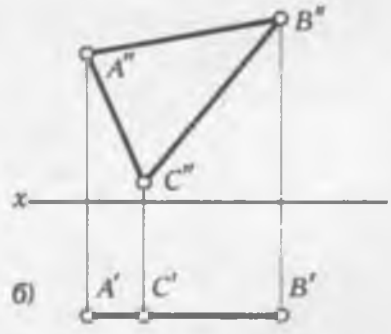


Рис. 57

б) положение, *параллельное* плоскости проекции, — для решения метрических задач (см. рис. 57).

В связи с этим, естественно, возникает вопрос, каким путем можно получить удобные проекции для решения поставленной задачи по заданным неудобным ортогональным проекциям?

Переход от общего положения геометрической фигуры к частному можно осуществить изменением взаимного положения проецируемой фигуры и плоскости проекции. При ортогональном проецировании это может быть достигнуто двумя путями:

во-первых, перемещением в пространстве проецируемой фигуры так, чтобы она заняла частное положение относительно плоскостей проекций, которые при этом не меняют своего положения в пространстве;

во-вторых, выбором новой плоскости проекции, по отношению к которой проецируемая фигура, не меняющая своего положения в пространстве, окажется в частном положении.

Первый путь лежит в основе способа *плоскопараллельного перемещения;* второй — составляет теоретическую базу способа *замены плоскостей проекций*. Рассмотрим каждый из этих способов в отдельности.

I. СПОСОБ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕЩЕНИЯ

Изменение взаимного положения проецируемой фигуры и плоскостей проекций способом плоскопараллельного перемещения осуществляется путем перемещения геометрической фигуры в новое положение так, чтобы траектории перемещения ее точек находились в параллельных плоскостях.

В зависимости от положения этих плоскостей по отношению к плоскостям проекций и вида кривой (траектории перемещения точки) различают несколько способов плоскопараллельного перемещения:

1. Способ параллельного перемещения.

Плоскости — носители траекторий перемещения точек параллельны плоскости проекции. Траектория — произвольная плоская линия.

2. Способ вращения вокруг оси, перпендикулярной к плоскости проекции.

Плоскости — носители траекторий перемещения точек параллельны плоскости проекции. Траектории — дуги окружностей, центры которых находятся на оси, перпендикулярной плоскости проекции.

3. Способ вращения вокруг оси, параллельной плоскости проекции (вращение вокруг линий уровня).

4. Способ вращения вокруг оси, принадлежащей плоскости проекции (вращение вокруг следа плоскости).

Рассмотрим каждый из этих способов в отдельности.

§ 9. СПОСОБ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕЩЕНИЯ

Для параллельного перемещения (переноса) справедливо утверждение, которое может быть выражено в виде следующей теоремы:

при параллельном переносе геометрической фигуры относительно плоскости проекции проекция фигуры на эту плоскость хотя и ме-

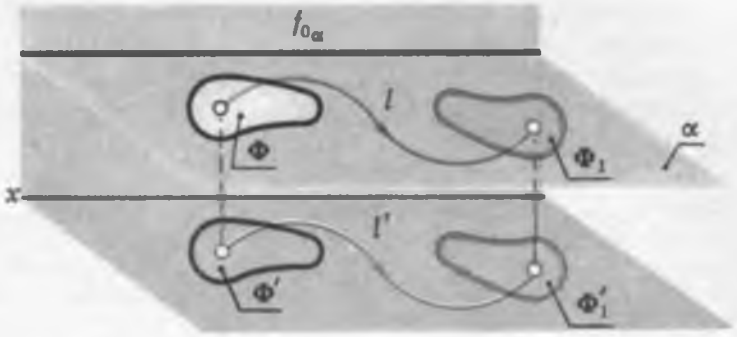


Рис. 58

няет свое положение, но остается конгруентной проекции фигуры в ее исходном положении.

Докажем эту теорему для случая, когда проецируемая фигура плоская и ее плоскость принадлежит плоскости уровня $\Phi \subset \alpha$, плоскость $\alpha \parallel \pi_1$ (рис. 58). В этом случае на основании инвариантного свойства 2д (см. § 6) горизонтальная проекция Φ' будет конгруентна самой фигуре Φ ($\Phi' \cong \Phi$).

При перемещении фигуры Φ в новое положение Φ_1 фигура Φ_1 будет конгруентна Φ, так как:

а) расстояние между точками фигуры не меняется;

б) в процессе перемещения фигура Φ все время остается в плоскости α.

В силу параллельности плоскостей α и π_1 $\Phi_1' \cong \Phi_1$, но $\Phi_1 \cong \Phi$, а $\Phi \cong \Phi'$, следовательно, $\Phi_1' \cong \Phi'$. Доказанная теорема будет справедлива и в случае, когда геометрическая фигура занимает произвольное положение относительно плоскости проекции.

Отметим еще два свойства параллельного перемещения:

1. При всяком перемещении точки в плоскости, параллельной плоскости проекции π_1, ее фронтальная проекция перемещается по прямой, параллельной оси x.

2. В случае произвольного перемещения точки в плоскости, параллельной π_2, ее горизонтальная проекция перемещается по прямой, параллельной оси x.

Справедливость отмеченных свойств может быть легко показана на простом примере.

Возьмем плоскость α, параллельную горизонтальной плоскости проекции π_1 (рис. 59). Пусть точка $A \in \alpha$ переместится из положения A в A_1 ($A \to A_1$), двигаясь в плоскости α по произвольной траектории (l_1, l_2 или l_3). Очевидно, фронтальная проекция точки A'' переместится в A_1'', при этом $[A''A_1'']$ принадлежит следу $f_{0\alpha}$, который параллелен оси x ($[A''A_1''] \subset f_{0\alpha} \parallel x$).

На рис. 59,*б* показано перемещение точки $B \in \beta \parallel \pi_2$. Из чертежа видно, что горизонтальная проекция траектории перемещения точки B из первоначального положения в новое B_1 представляет $[B'B_1'] \subset h_{0\beta} \parallel x$ и не зависит от вида линии — траектории перемещения точки из положения B в B_1.

Пользуясь приведенной теоремой и отмеченными своиствами, легко построить новые проекции геометрической фигуры по заданным ее ортогональным проекциям, и, в частности, такие ее проекции, которые

соответствуют отмеченным выше (см. с. 48) частным положениям проецируемой фигуры по отношению к плоскости проекции.

Проследим на примерах использование способа параллельного перемещения для перевода произвольно расположенной геометрической фигуры в частное положение.

ПРИМЕР 1. $[AB]$ прямой общего положения a перевести в положение, параллельное плоскости π_2 (рис. 60).

У $[AB]$, параллельного плоскости π_2, горизонтальная проекция должна быть параллельна оси x. Поэтому переводим $[A'B']$ в новое положение $[A'_1B'_1]$, параллельное оси x. Перемещение отрезка в новое положение осуществляем так, чтобы любые его точки двигались в плоскостях, параллельных плоскости π_1. При таком перемещении новая горизонтальная проекция конгруентна исходной $[A'_1B'_1] \cong [A'B']$ (на основании теоремы с. 49).

Фронтальные проекции точек отрезка $[A''B'']$ будут перемещаться в новое положение по прямым, параллельным оси x (свойство 1, с. 49).

На рис. 60 графические построения выполнены в указанной ниже последовательности:

1) через произвольную точку A'_1 провели прямую a'_1, параллельную оси x;

2) отложили на ней от точки A'_1 отрезок $[A'_1B'_1] \cong [A'B']$;

3) из точек A'_1 и B'_1 восставили перпендикуляры к оси x и нашли точки пересечения их с соответствующими горизонтальными прямыми, проведенными через точки A'' и B''.

Полученные точки A''_1, B''_1 являются концами фронтальной проекции отрезка $[A_1B_1]$, параллельного плоскости π_2.

Для перевода отрезка прямой, произвольно расположенной в пространстве, в положение, параллельное плоскости π_2, потребовалось выполнить только одно перемещение отрезка параллельно плоскости проекции. Для перевода отрезка из общего положения в проецирую-

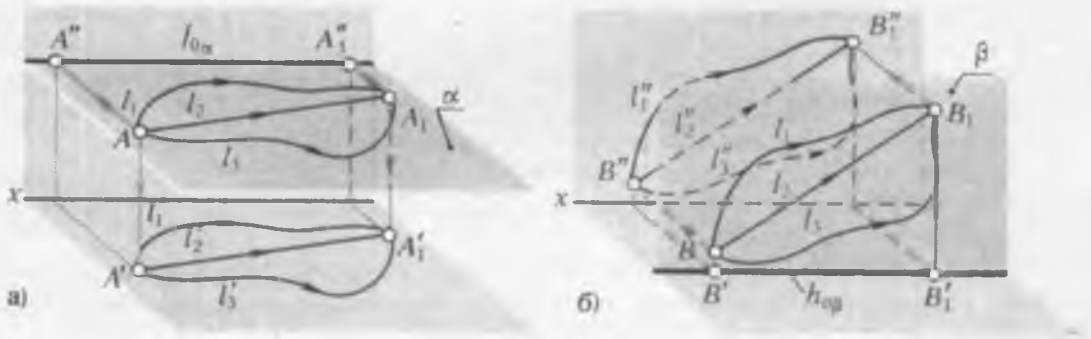


Рис. 59

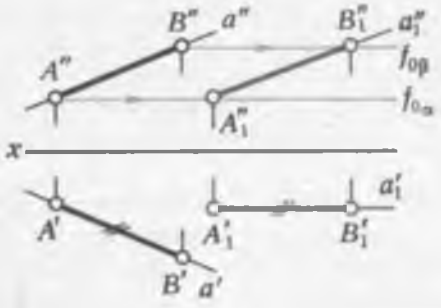


Рис. 60

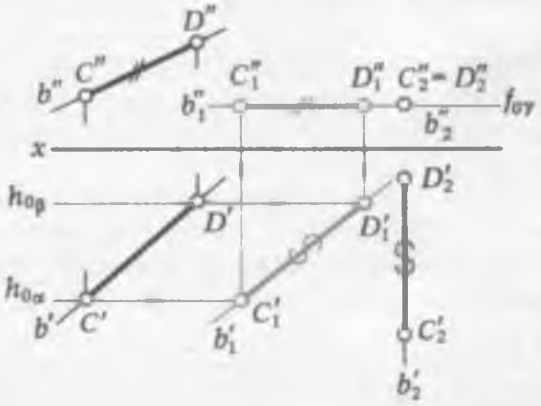


Рис. 61

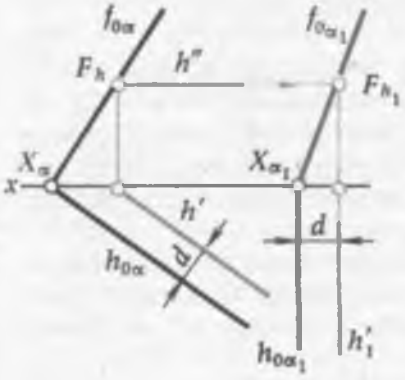


Рис. 62

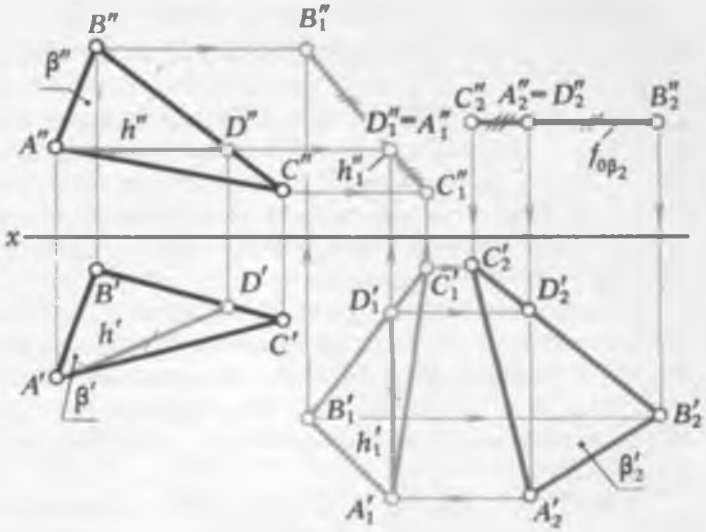


Рис. 63

щее необходимо последовательно выполнить два его перемещения параллельно плоскостям проекции: вначале перевести отрезок в положение, параллельное плоскости π_1 (или π_2) путем перемещения параллельно плоскости π_2 (или π_1), затем перевести отрезок в положение, перпендикулярное π_2 (или π_1).

ПРИМЕР 2. $[CD]$ прямой общего положения b перевести в положение $\perp \pi_2$ (рис. 61).

На рис. 61 $[CD]$ вначале переведен в положение $\| \pi_1$ ($[C_1D_1]$), затем перемещением параллельно плоскости π_1 — в положение $\perp \pi_2$ ($[C_2D_2]$).

Зная характер геометрических построений, которые необходимо выполнить для перемещения отрезка из общего положения в проецирующее, можно легко перевести плоскость, произвольно расположенную в пространстве, в частное положение (параллельное или перпендикулярное плоскости проекции).

На рис. 62 показан перевод плоскости общего положения α ($h_{0\alpha}$, $f_{0\alpha}$) в новое α_1 ($h_{0\alpha_1}$, $f_{0\alpha_1}$), при этом $\alpha_1 \perp \pi_2$.

Как видно из чертежа, перевод плоскости α в положение α_1 осуществлен с помощью горизонтали h, которая переведена в положение $h_1 \perp \pi_2$, поэтому и $\alpha_1 \perp \pi_2$. Следует обратить внимание на то, что расстояние d остается постоянным:

$$|h_{0\alpha}h'| = |h_{0\alpha_1}h'_1|.$$

Рис. 63 дает представление о преобразовании ортогональных проекций ΔABC, определяющего плоскость общего положения β, в проекции $\Delta A_2B_2C_2$, задающего плоскость $\beta_2 \| \pi_1$.

Геометрические построения выполнены в последовательности, указанной индексами, поставленными у проекций точек справа внизу. Выполненные на эпюре построения соответствуют перемещению плоскости в пространстве вначале $\| \pi_1$ во фронтально-проецирующее положение ($\Delta A_1B_1C_1$), затем перемещением $\| \pi_2$ плоскость треугольника переведена в положение $\| \pi_1$ ($\Delta A_2B_2C_2$).

§ 10. СПОСОБ ВРАЩЕНИЯ ВОКРУГ ОСИ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОЙ К ПЛОСКОСТИ ПРОЕКЦИИ

Вращение вокруг оси, перпендикулярной к плоскости проекции, является частным случаем параллельного перемещения. Отличие от общего случая состоит лишь в том, что за траекторию перемещения точки берется не произвольная линия, а дуга окружности, центр которой находится на оси вращения, а радиус равен расстоянию между точкой и осью вращения.

Проследим, как будет изменяться положение точки A при ее вращении вокруг оси i, перпендикулярной плоскости π_2 (рис. 64). Точка A перемещается по дуге окружности в плоскости α ($\alpha \perp i$ и, следовательно, $\alpha \parallel \pi_2$), поэтому эта окружность проецируется на плоскость π_2 без искажения, а на плоскость π_1 — в отрезок прямой, параллельной оси x (рис. 64,*б*).

Таким образом, при вращении точки вокруг оси, перпендикулярной к фронтальной плоскости проекции, фронтальная проекция точки перемещается по окружности с центром на фронтальной проекции оси вращения, а горизонтальная — по прямой, параллельной оси x.

Вращение точки вокруг оси $i \perp \pi_1$ иллюстрирует рис. 65,*а*. Точка B перемещается в новое положение B_1 по окружности, принадлежащей

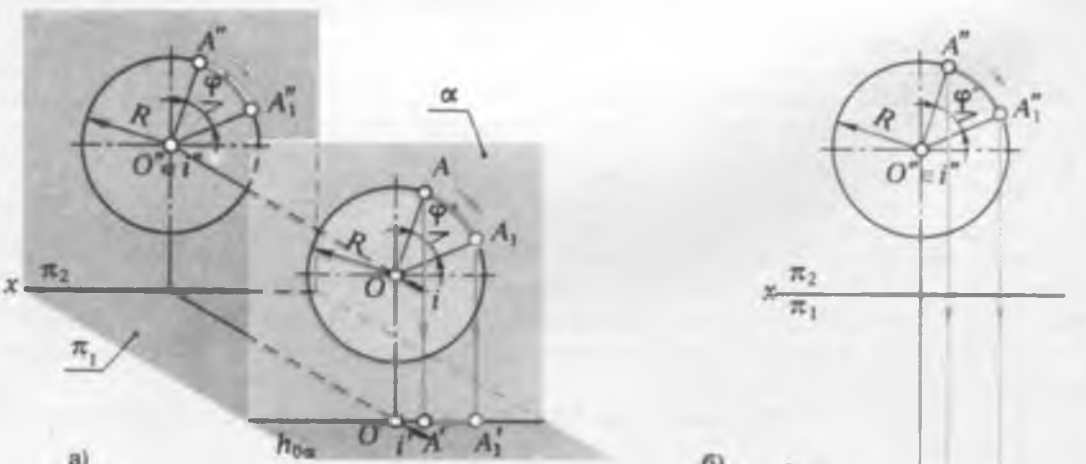


Рис. 64

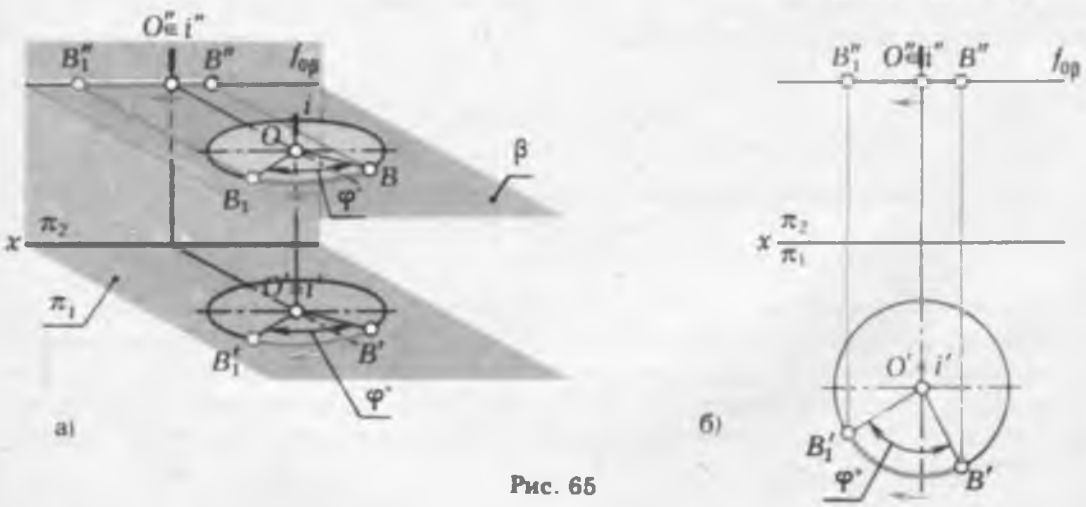


Рис. 65

плоскости $\beta \perp i$. Так как $i \perp \pi_1$, то $\beta \parallel \pi_1$. Поэтому при вращении точки вокруг оси, перпендикулярной к горизонтальной плоскости проекции, ее горизонтальная проекция перемещается по окружности, центр которой принадлежит горизонтальной проекции оси вращения, а фронтальная проекция точки — по прямой, параллельной оси x (рис. 65,*б*).

Выяснив характер проекций траекторий перемещения точки при ее вращении вокруг оси, перпендикулярной плоскости проекции, легко осуществить перемещение любой геометрической фигуры из заданного положения в частное путем ее поворота вокруг оси $i \perp \pi_1$ (или π_2).

В качестве примера покажем на эпюре Монжа, как осуществляется перемещение отрезка произвольной прямой в частное положение путем вращения вокруг оси, перпендикулярной плоскости проекции.

ПРИМЕР 1. $[AB]$ прямой общего положения a перевести в положение, параллельное π_2 (рис. 66).

Чтобы осуществить такое перемещение, достаточно повернуть $[AB]$ вокруг оси $i \perp \pi_1$ на $\angle\varphi^\circ$.

Величину угла φ° выбирают такой, чтобы после поворота $[A'_1B'_1]$ занял положение $\parallel$ оси x.

Так как точка B принадлежит оси вращения, то она не будет менять своего положения в процессе преобразования. $B_1 \equiv B$, следовательно, $B'_1 \equiv B'$ и $B''_1 \equiv B''$. Для нахождения точки A''_1 необходимо из A'_1 восставить перпендикуляр к оси x и отметить точку его пересечения с горизонтальной прямой, проведенной через A''.

ПРИМЕР 2. $[CD]$ прямой общего положения b перевести в положение $\perp \pi_2$ (рис. 67).

Чтобы осуществить перемещение отрезка из общего положения в проецирующее, необходимо последовательно выполнить два вращения вокруг осей, перпендикулярных к плоскостям проекций.

После первого вращения отрезок переводится в положение, параллельное плоскости π_1 (или π_2), и лишь после этого вращением вокруг оси, перпендикулярной плоскости проекции π_1 (или π_2) перемещают отрезок в положение, перпендикулярное плоскости π_2 (или π_1).

На рис. 67 $[CD]$ вначале вращением вокруг $i_1 \perp \pi_2$ переведен в положение $\parallel \pi_1$ ($[C''_1D''_1] \parallel x$), затем вращением вокруг $i_2 \perp \pi_1$ $[C_1D_1]$ перемещен во фронтально проецирующее положение ($[C'_2D'_2] \perp x$)*.

---

* Для упрощения геометрических построений здесь, как и во всех других случаях использования способа вращения, ось вращения следует выбирать так, чтобы она пересекала вращаемую прямую.

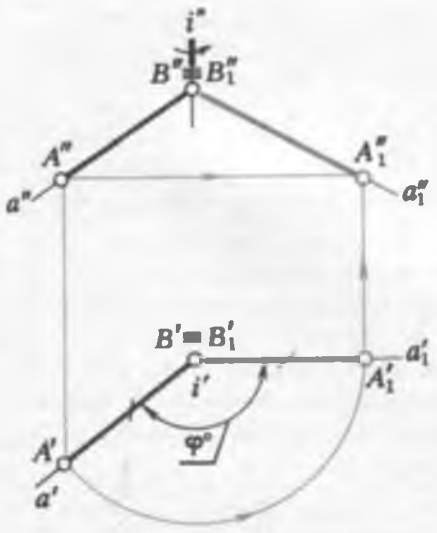


Рис. 66

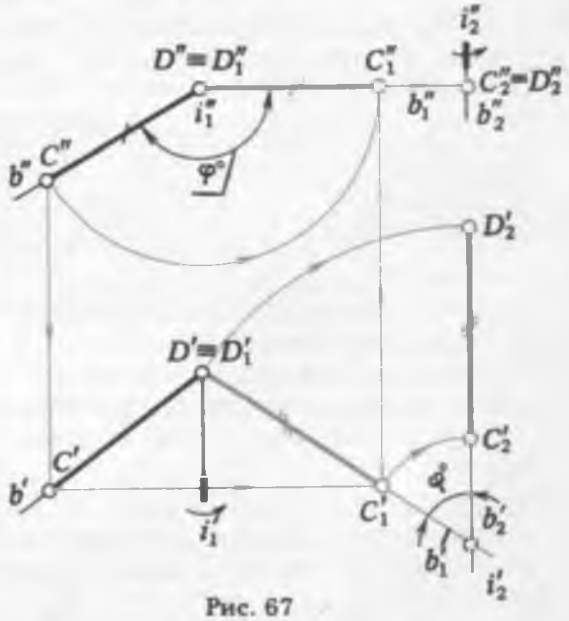


Рис. 67

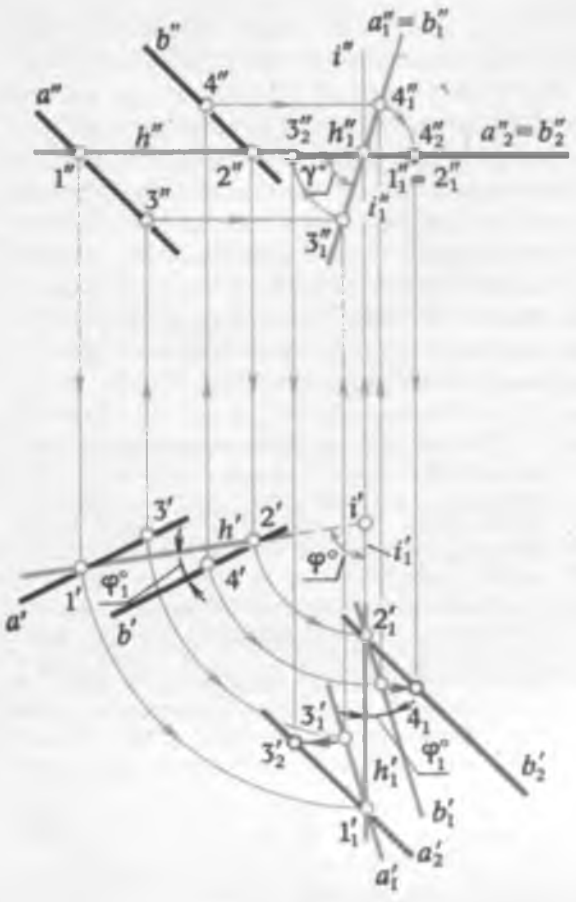


Рис. 68

В случае перевода плоскости общего положения в частное задача решается аналогично только что рассмотренным примерам.

Чтобы плоскость, произвольно расположенная в пространстве, заняла проецирующее положение, достаточно вращением перевести прямую, принадлежащую этой плоскости, в положение, перпендикулярное плоскости проекции. Количество графических построений, которые необходимо выполнить для такого перемещения, может быть сокращено, если взять не произвольную прямую, а горизонталь или фронталь плоскости. Уменьшение графических построений в этом случае происходит благодаря тому, что перевод горизонтали или фронтали в проецирующее положение можно осуществить за один поворот, а не за два, как это пришлось бы делать, если поворачивать прямую общего положения.

На рис. 68 плоскость общего положения α, заданная параллельными прямыми a и b, поворотом вокруг оси $i \perp \pi_1$ переведена во фронтально проецирующее положение. Новые проекции прямых a_1 и b_1 найдены с помощью горизонтали h.

Геометрические построения, приведенные на рис. 68, выполняем в следующем порядке:

1. В плоскости α проводим горизонталь h (h', h'').

2. Вращением вокруг оси i, проходящей через горизонталь h и перпендикулярную плоскости π_1, переводим h (h', h'') в положение h_1 $(h'_1, h''_1) \perp \pi_2$.

3. При повороте горизонтали на $\angle \varphi°$ на такой же угол повернется все множество точек этой плоскости, поэтому для определения нового положения проекций прямых a_1 и b_1 достаточно повернуть вокруг оси i точки $1, 3$ и $2, 4$ $(3 \in a, 4 \in b)$ на тот же $\angle \varphi°$*.

4. По горизонтальным проекциям $1'_1$, $3'_1$ и $2'_1$, $4'_1$ определяем их фронтальные проекции.

Если необходимо перевести плоскость в положение $\parallel \pi_1$, то это легко сделать, повернув фронтальные проекции прямых a''_1 и b''_1 вокруг оси $i_1 \perp \pi_2$ на угол $\gamma°$ так, чтобы a''_2 и b''_2 заняли положение, параллельное оси x.

---

* Новое положение a'_1 и b'_1 можно определить и иначе: через $1'_1$ и $2'_1$ провести прямые a'_1 и b'_1, составляющие с прямой h'_1 такой же угол, какой a' и b' составляют с h'.

§ 11. СПОСОБ ВРАЩЕНИЯ ВОКРУГ ОСИ, ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ ПРОЕКЦИИ (ВРАЩЕНИЕ ВОКРУГ ЛИНИИ УРОВНЯ)

Эффективным приемом, упрощающим решение задач, связанных с определением метрических характеристик плоских фигур, является способ вращения этих фигур вокруг их линий уровня. Путем такого вращения можно плоскость, которой принадлежит рассматриваемая фигура, повернуть в положение, параллельное плоскости проекции. В этом случае ортогональная проекция любой принадлежащей плоскости фигуры будет конгруентна оригиналу и, следовательно, позволит определить все метрические характеристики проецируемой фигуры непосредственно по ее проекции без каких-либо дополнительных построений.

Очевидно, вращая плоскость вокруг горизонтали, можно перевести ее в положение, параллельное плоскости π_1, и получить неискаженный вид горизонтальной проекции. Вращение плоскости вокруг фронтали позволяет перевести ее в положение, параллельное плоскости π_2, что обеспечит получение неискаженного вида фронтальной проекции.

Каждая точка плоскости при ее вращении перемещается по окружности, принадлежащей плоскости, перпендикулярной к оси вращения. Центр окружности будет находиться на оси вращения, а величина радиуса вращения равна расстоянию от точки до оси вращения. Если за ось вращения взята горизонталь, то окружность, представляющая траекторию движения точки, будет проецироваться на плоскость π_1 в отрезок прямой, перпендикулярной горизонтальной проекции горизонтали. На плоскость π_2 окружность проецируется в эллипс, построение которого можно не делать. Точка пересечения горизонтальных проекций горизонтали и горизонтальной проекции окружности определяет горизонтальную проекцию центра вращения.

Аналогично, при вращении плоскости вокруг фронтали любая точка, принадлежащая плоскости, перемещается по окружности, которая проецируется на плоскость π_2 в отрезок прямой, перпендикулярной фронтальной проекции фронтали. Фронтальная проекция центра вращения определяется пересечением фронтальных проекций фронтали и окружности.

Вращение точки вокруг горизонтали показано на рис. 69. Точка A при вращении вокруг горизонтали h будет перемещаться по окружности c, плоскость которой β перпендикулярна оси вращения h. Чтобы переместить точку в новое положение путем поворота ее вокруг h, необходимо найти положение центра вращения и определить величину радиуса вращения. Центр вращения O находится в точке пересечения оси вращения h с плоскостью β. Чтобы определить величину радиуса вращения OA, необходимо построить в плоскости π_1 прямоугольный $\Delta O'A'A_0^*$. Для этого принимаем горизонтальную проекцию $O'A'$ за катет прямоугольного треугольника; второй катет должен быть равен разности аппликат концов отрезка OA: $|z_{(\cdot)A} - z_{(\cdot)O}| = |A1|$. Гипотенуза $\Delta O'A'A_0$ $O'A_0 = R$. Новое, после поворота, положение точки A_1' находится в месте пересечения дуги окружности, проведенной из горизонтальной

---

* Величину отрезка $[OA]$ можно определить и другим путем, например, вращением его вокруг оси, перпендикулярной плоскости проекции; плоскопараллельным перемещением или, как это будет показано в § 13, с помощью замены плоскости проекции.

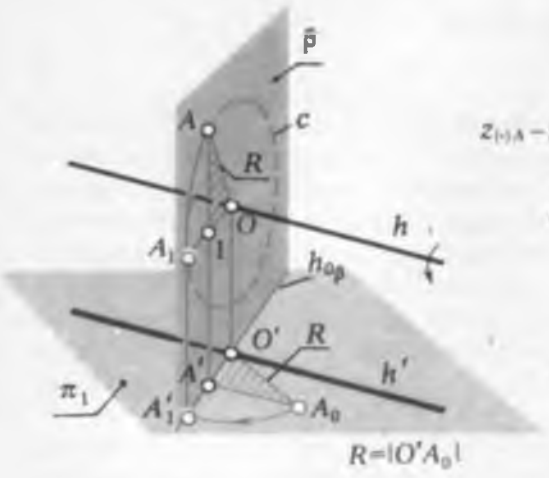


Рис. 69



Рис. 70

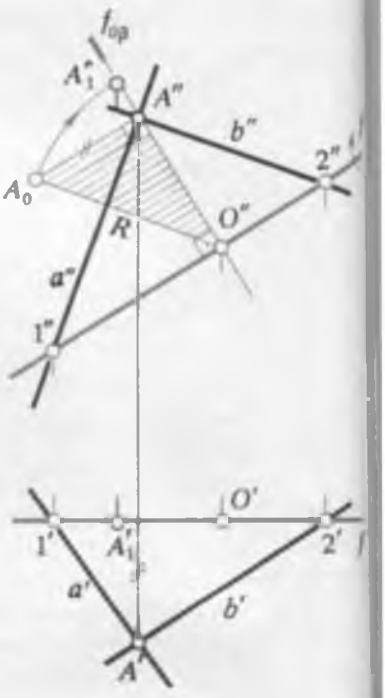


Рис. 71

проекции центра вращения O' радиусом, равным $|O'A_0|$, с горизонтальным следом $h_{0\beta}$ плоскости β.

На рис. 70 описанные выше построения выполнены на эпюре Монжа. Характер и последовательность геометрических построений, которые необходимо выполнить для перемещения плоскости, произвольно расположенной в пространстве, в положение, параллельное плоскости проекции π_2, вращением вокруг линии уровня, показаны на рис. 71, на котором плоскость α, заданная пересекающимися прямыми a и b, переведена вращением вокруг своей фронтали f в положение, параллельное плоскости π_2.

Плоскость α однозначно определяется также тремя точками *1*, *2* и A. Так как точки *1* и *2* принадлежат фронтали f, которая принята за ось вращения, то они не меняют своего положения в процессе преобразования. Поэтому, чтобы задать новое положение плоскости $\alpha_1 \parallel \pi_2$, достаточно осуществить поворот только одной точки A. Ниже приводится последовательность геометрических построений, которые необходимо выполнить для поворота точки A:

1) провести горизонтальную проекцию фронтали плоскости α — $f'(1', 2')$;

2) пользуясь точками $1'$, $2'$, найти точки $1''$, $2''$, определяющие фронтальную проекцию фронтали f'';

3) найти проекции центра вращения (O', O''), для чего через A'' провести прямую, перпендикулярную к f'', и отметить точку пересечения перпендикуляра с f'' — точку O'';

4) определить величину радиуса вращения, как гипотенузу прямоугольного треугольника $O''A''A_0$, у которого катет $A''A_0 = |y_{(\cdot)A} - y_{(\cdot)O}|$;

5) из центра O'' провести дугу радиусом $O''A_0$, точка пересечения которой с прямой $O''A''$ укажет положение A_1''.

Точка A_1 совместно с прямой f (точками *1*, *2*) определяет плоскость $\alpha_1 \parallel \pi_2$.

§ 12. СПОСОБ ВРАЩЕНИЯ ВОКРУГ ОСИ, ПРИНАДЛЕЖАЩЕЙ ПЛОСКОСТИ ПРОЕКЦИИ (СОВМЕЩЕНИЕ)

Совмещение является частным случаем вращения плоскости вокруг горизонтали и фронтали. При совмещении за ось вращения принимается не произвольная горизонталь или фронталь плоскости, а ее горизонтальный или фронтальный след (нулевые горизонталь или фронталь). В этом случае в результате поворота плоскости она совпадает (совмещается) с плоскостью проекции π_1, если вращение осуществляется вокруг горизонтального следа плоскости, либо с π_2 при вращении вокруг ее фронтального следа.

Совмещение так же, как и вращение вокруг горизонтали или фронтали, применяется, когда требуется определить истинный вид фигур, принадлежащих плоскости, или построить в плоскости общего положения фигуру заданной формы и размеров.

Сущность способа совмещения можно уяснить из рассмотрения рис. 72,*а*. Плоскость общего положения α вращается вокруг следа $h_{0\alpha}$ до совпадения ее с горизонтальной плоскостью проекции. При этом преобразовании след $h_{0\alpha}$, как ось вращения, останется на месте. Поэтому для нахождения совмещенного положения плоскости достаточно найти совмещенное положение только одной принадлежащей ей точки (не лежащей на следе $h_{0\alpha}$).

В качестве такой точки целесообразно (для упрощения графических построений) взять точку A, принадлежащую фронтальному следу.

Точка A ($A'A''$) при вращении вокруг оси $h_{0\alpha}$ будет перемещаться по дуге окружности, принадлежащей плоскости β, перпендикулярной к оси вращения.

Графические построения, которые необходимо выполнить на эпюре Монжа для определения положения точки A, приведены на рис. 72,*а* (как видно из рисунка, они аналогичны построениям, выполненным на рис. 70). Совмещенное с плоскостью проекции положение фронтального следа $f_{0\alpha_1}$ определяется точками X_α и A'_1.

Следует иметь в виду, что любая геометрическая фигура плоскости α при ее совмещении с плоскостью проекции π_1 проецируется в конгруентную фигуру. Поэтому $[X_\alpha A'']$, указывающий расстояние от точки схода следов X_α до A'', принадлежащей фронтальному следу, конг-

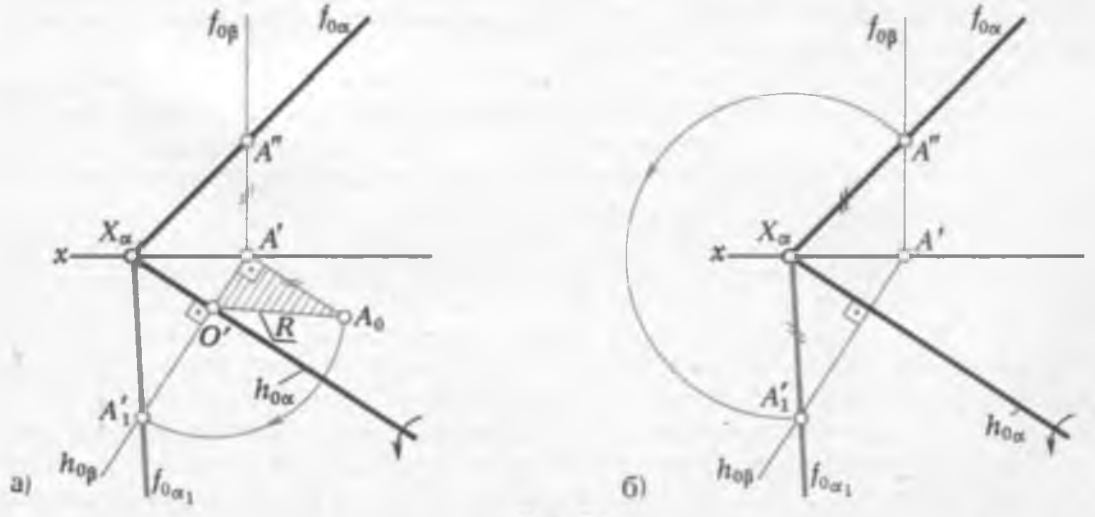


Рис. 72

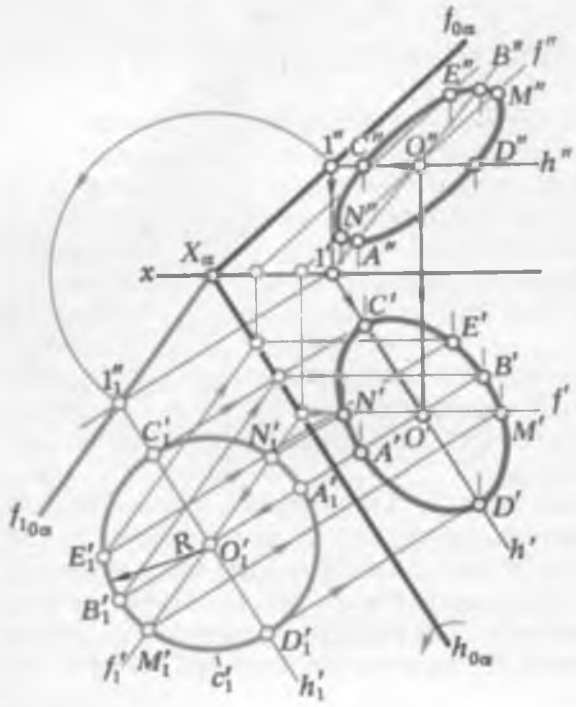


Рис. 73

руентен $[X_\alpha A_1']$ на совмещенном положении следа $f_{0\alpha_1}$. В связи с этим положение точки A_1', а следовательно, и следа $f_{0\alpha_1}$ можно определить, не пользуясь центром и радиусом вращения. Для этого достаточно из точки X_α (рис. 72,*б*) описать дугу радиусом, равным расстоянию $|X_\alpha A''|$, до ее пересечения с прямой (горизонтальным следом $h_{0\beta}$ плоскости β, в которой будет перемещаться точка A), проведенной через A' перпендикулярно к $h_{0\alpha}$. Через полученную точку пройдет фронтальный след плоскости $f_{0\alpha_1}$ при совмещении его с плоскостью π_1.

В § 9 ... 12 мы познакомились с различными способами перевода геометрической фигуры, занимающей общее положение в пространстве, в частное положение. Иногда приходится решать обратную задачу, связанную с построением проекций плоской фигуры заданной формы и размеров, принадлежащей плоскости общего положения.

Решение такой задачи можно выполнить, используя способ совмещения.

План решения задачи следующий:

1) совмещаем плоскость, которой должна принадлежать фигура, с какой-либо плоскостью проекции;

2) строим (вычерчиваем) на совмещенном положении плоскости требуемую фигуру;

3) "поднимаем" (поворачиваем) плоскость вместе с изображенной на ней фигурой в пространство.

Графические построения, которые надо выполнить, чтобы "поднять" плоскость в пространство, аналогичны построениям, выполняемым при совмещении плоскости с плоскостью проекции, только выполняются они в обратной последовательности.

В качестве иллюстрации покажем решение задачи на построение проекций окружности c, принадлежащей плоскости общего положения α, если известно положение ее центра O и величина радиуса R (рис. 73).

Графические построения осуществляем в последовательности, указанной в приведенном выше плане решения.

Плоскость α совмещаем с плоскостью π_1 так же, как это было сделано на рис. 72,*б*. Затем через точку O (O', O'') проводим фронталь f (f', f'') и горизонталь h (h', h'') плоскости α и находим их совмещенное положение f_1' $(f_1' \parallel f_{1\,0\alpha})$ и h_1' $(h_1' \parallel h_{0\alpha})$. Центр окружности $O \in f$, поэтому для определения положения центра достаточно через горизонтальную проекцию O' провести прямую, перпендикулярную оси вращения $h_{0\alpha}$, и отметить точку ее пересечения с совмещенной фронталью (горизонталью).

Из центра O_1' проводим окружность c_1' заданным радиусом R. Отмечаем точки N_1', M_1', C_1', D_1', в которых f_1' и h_1' пересекают окружность c_1'. По M_1' находим M' ($M \in f$, следовательно, $M' \in f'$); M_1' перехо-

дит в M' по дуге окружности, плоскость которой перпендикулярна к оси вращения $h_{0\alpha}$. Дуга этой окружности проецируется на π_1 в $[M_1'M']$.

Аналогично находим точки N', C', D' — концы двух диаметров окружности. На рис. 73 показано также нахождение произвольных точек A', B', E'.

II. СПОСОБ ЗАМЕНЫ ПЛОСКОСТЕЙ ПРОЕКЦИЙ

Изменение взаимного положения проецируемой фигуры и плоскостей проекций способом замены плоскостей проекций достигается путем перехода от заданных плоскостей проекций к новым. Новая плоскость проекции выбирается перпендикулярной к одной из старых. Проецируемые геометрические фигуры при этом не меняют своего положения в пространстве.

При выборе положения новой плоскости проекции следует руководствоваться тем, что по отношению к новой плоскости проецируемая фигура должна занимать частное положение, обеспечивающее получение проекций, наиболее удобных для решения поставленной задачи. В некоторых случаях бывает достаточно заменить только одну плоскость проекции π_1 на π_3 или π_2 на π_3. Если замена одной плоскости проекции не обеспечивает требуемого вида вспомогательной проекции, производят замену двух плоскостей. При этом переход от исходной системы плоскостей проекций $x\,\frac{\pi_2}{\pi_1}$ к новой $x_2\,\frac{\pi_4}{\pi_3}$ может быть осуществлен по одной из следующих схем:

$$x\,\frac{\pi_2}{\pi_1} \to x_1\,\frac{\pi_2}{\pi_3} \to x_2\,\frac{\pi_4}{\pi_3}$$

или

$$x\,\frac{\pi_2}{\pi_1} \to x_1\,\frac{\pi_3}{\pi_1} \to x\,\frac{\pi_3}{\pi_4}.$$

Приведенные схемы показывают, что мы одновременно можем менять только одну плоскость проекций π_1 (или π_2), другая плоскость π_2 (или π_1) остается неизменной. После того как будут определены новые фронтальные (или горизонтальные) проекции, можно переходить ко второй системе, заменяя плоскость π_2 (или π_1) новой плоскостью. Наличие одной плоскости проекции, которая не меняет своего положения, позволяет использовать ее как связующее звено между старыми (исходными) проекциями и новыми*.

§ 13. ЗАМЕНА ОДНОЙ ПЛОСКОСТИ ПРОЕКЦИИ

Пусть в системе плоскостей $x\,\frac{\pi_2}{\pi_1}$ дана точка A и указаны ее проекции A' и A'' (рис. 74,*а*). Проследим, как изменится положение проекций точки A, если плоскость π_2 заменить новой плоскостью π_3, перпендикулярной к π_1. Горизонтальная плоскость проекции не меняет

---

* Следует иметь в виду, что В. Л. Тороховым предложен способ замены плоскостей π_1 и π_2 одновременно двумя взаимно перпендикулярными плоскостями π_3 и π_4, что позволяет осуществить непосредственный переход от $x\,\frac{\pi_2}{\pi_1}$ к $x_2\,\frac{\pi_3}{\pi_4}$, минуя промежуточное звено $x_1\,\frac{\pi_3}{\pi_1}$ или $x_1\,\frac{\pi_2}{\pi_3}$. Подробно с этим способом можно познакомиться в книге С. А. Фролова "Методы преобразования ортогональных проекций". М.: Машиностроение, 1970.

своего положения, т. е. мы осуществляем переход от системы $x\ \frac{\pi_2}{\pi_1}$ к новой системе $x_1\ \frac{\pi_3}{\pi_1}$. Плоскость π_3 пересекается с плоскостью π_1 по прямой x_1, которая определяет новую ось проекции. Положение горизонтальной проекции A' точки A остается без изменения, так как точка A и плоскость π_1 не меняли своего положения в пространстве.

Для нахождения новой фронтальной проекции точки A''' достаточно спроецировать ортогонально точку A на плоскость π_3. Из чертежа видно, что расстояние от новой фронтальной проекции A''' точки A до новой оси x_1 равно расстоянию от старой фронтальной проекции A'' до старой оси x ($|A'''A_{x_1}| = |A''A_x|$).

Чтобы перейти от пространственного макета к эпюру, необходимо совместить плоскость π_3 с плоскостью чертежа. Метод замены плоскостей проекций предусматривает совмещение новой плоскости с той из старых плоскостей, к которой она перпендикулярна. В рассматриваемом случае ввиду перпендикулярности плоскостей π_3 и π_1 плоскость π_3 совмещена с π_1. За ось вращения принята новая ось проекций x_1. Направление поворота не оказывает никакого влияния на результат преобразования. Поворот следует делать в таком направлении, при котором новые проекции не накладываются на старые и не затрудняют чтения чертежа. На рис. 74,*а* совмещение плоскости π_3 с π_1 осуществлено вращением ее по направлению движения часовой стрелки.

Равенство аппликат новой A''' и старой A'' фронтальных проекций точки A и использование в обоих случаях прямоугольного проецирования делают построение новой фронтальной проекции чрезвычайно простым. Оно состоит в том, что через старую горизонтальную проекцию точки проводят прямую, перпендикулярную к новой оси, и откладывают на ней от точки пересечения с осью отрезок, равный расстоянию от старой фронтальной проекции до старой оси (рис. 74,*б*).

Замена горизонтальной плоскости π_1 новой плоскостью π_3 и построение новых проекций точки A в системе $x_1\ \frac{\pi_2}{\pi_3}$ осуществляется аналогично только что рассмотренному случаю, с той лишь разницей, что теперь остается без изменения фронтальная проекция точки, а для нахождения новой горизонтальной проекции A''' точки A необходимо из старой фронтальной проекции точки опустить перпендикуляр на новую ось x_1 и отложить на нем от точки пересечения с осью x_1 отрезок, равный расстоянию от старой горизонтальной проекции до старой оси x.

Построения, выполненные по этому правилу, приведены на рис. 75. На рис. 76 показан отрезок $[AB]$, произвольно расположенный в про-

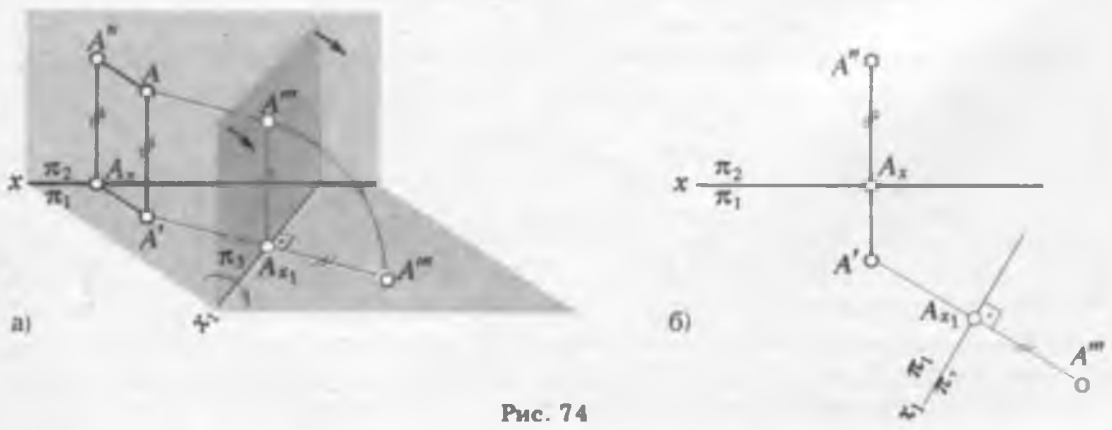


Рис. 74

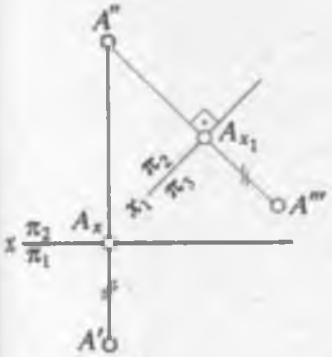


Рис. 75

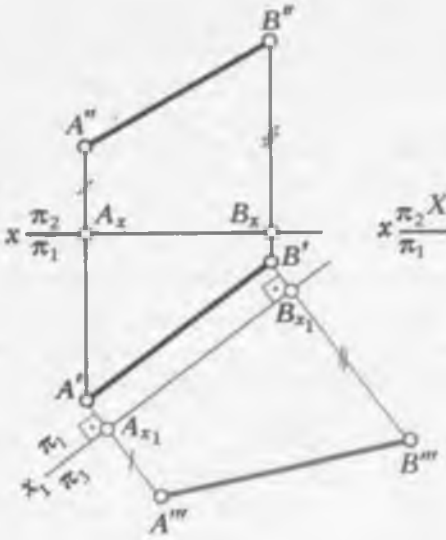


Рис. 76

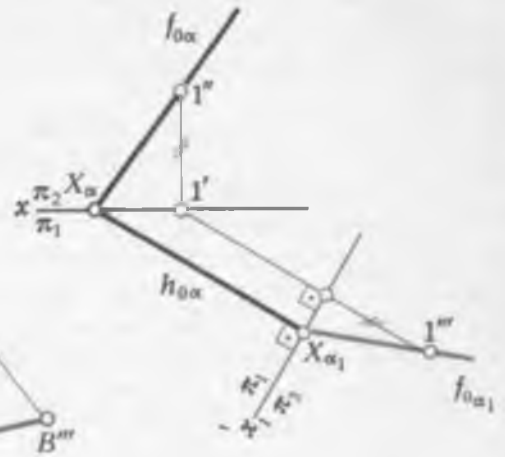


Рис. 77

странстве, и его новая фронтальная проекция на плоскость π_3, которой он параллелен. Все построения ясны из чертежа и не требуют пояснения.

На рис. 77 приведено решение задачи, при котором плоскость общего положения α оказалась фронтально проецирующей относительно плоскости π_3. Известно, что горизонтальный след фронтально проецирующей плоскости перпендикулярен к оси x, следовательно, чтобы плоскость α заняла фронтально проецирующее положение, необходимо новую ось x_1 провести перпендикулярно к $h_{0\alpha}$. Через точку X_{α_1}, в которой $h_{0\alpha} \cap x_1$, пройдет фронтальный след $f_{0\alpha_1}$. Для определения его направления достаточно найти одну точку. В качестве такой точки можно взять произвольную точку $1'' \in f_{0\alpha}$ и указать ее фронтальную проекцию $1'''$ на новой плоскости π_3. Через X_{α_1} и $1'''$ проводим $f_{0\alpha_1}$.

§ 14. ЗАМЕНА ДВУХ ПЛОСКОСТЕЙ ПРОЕКЦИЙ

Часто при определении действительной величины какой-либо геометрической фигуры или для получения более полного (наглядного) ее изображения замены одной плоскости проекций бывает недостаточно. В таких случаях приходится осуществлять замену двух плоскостей проекций.

Рассмотрим, как определяются новые ортогональные проекции точки в новой системе плоскостей проекций $x_2 \frac{\pi_3}{\pi_4}$, если известны ее проекции в старой системе плоскостей $x \frac{\pi_2}{\pi_1}$. Пусть A' и A'' — проекции точки A на исходных плоскостях проекций $x \frac{\pi_2}{\pi_1}$ (рис. 78). Для того чтобы определить положение новых проекций A''' и A'''' в системе $x_2 \frac{\pi_3}{\pi_4}$, заменяем вначале плоскость π_1 новой плоскостью π_3. Точку, через которую проводится новая ось, и направление оси можно выбирать произвольно. Следует следить лишь за тем, чтобы не происходило накладывания новых проекций на старые и чтобы геометрические фигуры, расположенные в первой четверти пространства, оставались в нем и после замены плоскости проекции.

Новая горизонтальная проекция A''' точки A будет принадлежать одной линии связи, проходящей через старую фронтальную проекцию A''

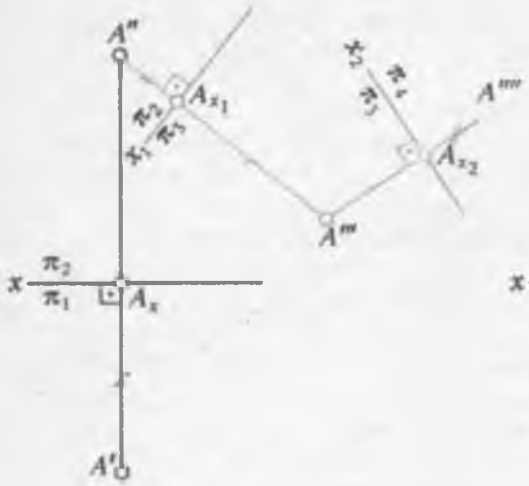


Рис. 78

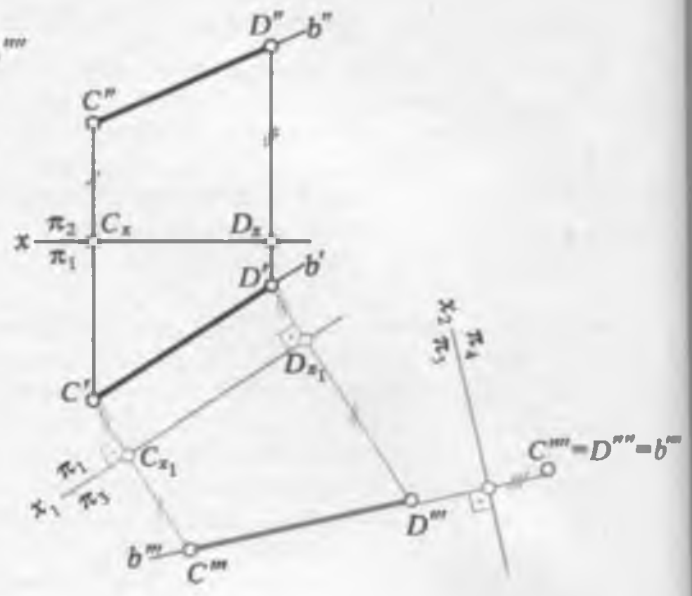


Рис. 79

и перпендикулярную к новой оси x_1, и будет удалена от новой оси на такое же расстояние, на какое старая горизонтальная проекция точки была удалена от старой оси x. Поэтому для определения положения проекции A''' достаточно от точки A_{x_1} на продолжении перпендикуляра $A''A_{x_1}$ отложить $[A_{x_1}A''']$, равный отрезку $[A_xA']$.

Положение новой фронтальной проекции точки в системе плоскостей проекций $x_2\ \frac{\pi_3}{\pi_4}$ определяется аналогично только что рассмотренному случаю с той лишь разницей, что теперь за исходную (старую) систему будем принимать систему $x_1\ \frac{\pi_2}{\pi_3}$ и от нее переходить к системе $x_2\ \frac{\pi_3}{\pi_4}$. В этом случае плоскость π_3 не меняет своего положения в пространстве, следовательно, не изменится положение и горизонтальной проекции A'''. Фронтальная проекция A'''' будет определена, если из A''' восставить перпендикуляр к оси x_2 и отложить на нем от точки A_{x_2} $[A_{x_2}A'''']$, равный расстоянию от точки A'' до оси x_1 — $[A_{x_1}A'']$.

Зная правила построения проекций одной точки в новой системе плоскостей проекций, можно построить новые проекции любого числа точек, а следовательно, и любой геометрической фигуры.

На рис. 79 показан пример перевода отрезка $[CD]$ прямой общего положения b в положение $[O''''D'''']$ отрезка фронтально проецирующей прямой $b\,(b''', b'''')$. Вначале заменой плоскости π_2 плоскостью π_3 переводим отрезок $[CD]$ в положение $\parallel \pi_3$, затем, заменив π_1 плоскостью π_4, ставим отрезок по отношению к плоскости π_4 в проецирующее положение $([C''''D''''], [C'''D'''])$.

§ 15. СОЧЕТАНИЕ СПОСОБА ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕЩЕНИЯ СО СПОСОБОМ ЗАМЕНЫ ПЛОСКОСТЕЙ ПРОЕКЦИИ

Пользуясь только одним способом плоскопараллельного перемещения или только одним способом замены плоскостей проекций, всегда можно перейти от произвольного расположения геометрической

фигуры к частному, обеспечивающему получение удобного вида проекций. Однако иногда бывает целесообразно применять не один какой-либо способ, а использовать сочетание двух способов — плоскопараллельное перемещение и замену плоскостей проекций.

Существенным преимуществом способа замены плоскостей проекций является построение только одной вспомогательной проекции (при замене одной плоскости проекции), в то время как способ плоскопараллельного перемещения требует построения двух вспомогательных проекций (при перемещении параллельно одной плоскости) *.

В то же время способ замены плоскостей проекций обладает недостатком, заключающимся в том, что при замене плоскостей проекций трудно заранее предусмотреть на чертеже место расположения вспомогательных проекций. Применяя способ параллельного перемещения, всегда можно выбрать наиболее удобное положение вспомогательных проекций на поле чертежа. Решение задач этим способом значительно облегчается при использовании кальки. В этом случае одну из двух дополнительных (вспомогательных) проекций не строят, а перечерчивают на кальку, которую затем прикладывают в наиболее удобном месте чертежа. Следующую вспомогательную проекцию строят с помощью проекции, изображенной на кальке, и одной из предшествующих проекций.

Естественно, возникает вопрос, каким путем можно сочетать достоинства обоих способов: удобное расположение вспомогательных проекций (характерное для способа плоскопараллельного перемещения) и построение при каждом последовательном преобразовании только одной проекции (как в способе замены плоскостей проекций).

Возможность совместного применения способов плоскопараллельного перемещения и замены плоскостей проекций была указана еще В. И. Курдюмовым в 1893 г. Сочетание этих способов известно под названием *способа сложных перемещений*, причем сложные перемещения подразделяют на два вида.

Первый вид сложных перемещений состоит в том, что построение новых проекций достигается путем последовательного применения сначала способа замены плоскостей проекций, затем способа вращения вокруг оси, перпендикулярной к плоскости проекции.

Второй вид сложных перемещений заключается в замене плоскости проекции с последующим совмещением новой плоскости с той из первоначальных плоскостей, которую она заменила **.

Рассмотрим решение задач с использованием первого (задача 1) и второго (задача 2) видов сложных перемещений.

ЗАДАЧА 1. Точку A повернуть против часовой стрелки вокруг фронтали f на $\angle\varphi^\circ$ (рис. 80).

Решение этой задачи способом вращения представляет определенные трудности, так как при вращении вокруг фронтали траектория перемещения точки проецируется на горизонтальную плоскость проекции с искажением, в виде эллипса, с искажением будет проецироваться и $\angle\varphi^\circ$.

Решение можно значительно упростить, если применить способ сложных перемещений. Ход решения задачи в этом случае состоит в следующем: вначале с помощью способа замены плос-

---

* Исключение составляет только способ вращения вокруг линий уровня, при котором строится только одна вспомогательная проекция.

** Как вариант второго вида сложных перемещений можно рекомендовать на втором этапе преобразования вместо совмещения с первоначальной плоскостью выполнить совмещение с плоскостью, параллельной ей.

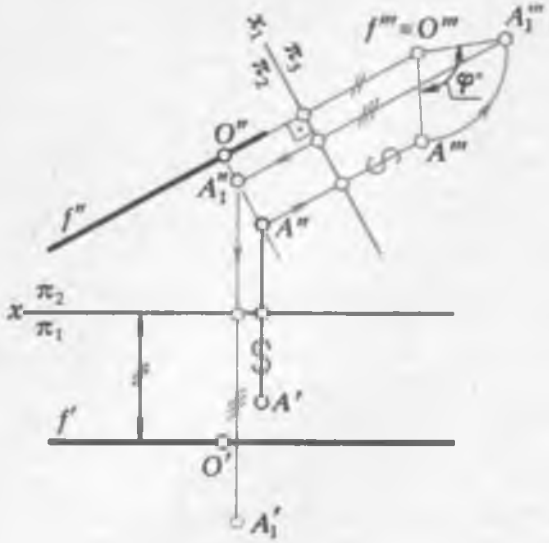


Рис. 80

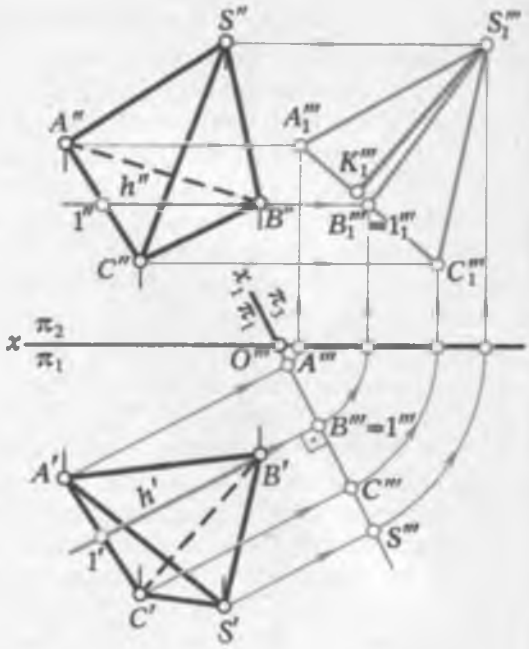


Рис. 81

кости проекции переводим фронталь в положение, перпендикулярное плоскости π_3, затем, используя способ вращения вокруг оси, перпендикулярной плоскости π_3, поворачиваем точку A''' вокруг оси f''' на заданный $\angle\varphi°$.

Отмеченный ход решения задачи определяет перечисленную ниже последовательность геометрических построений:

1) проводим новую ось $x_1 \perp f''$;

2) определяем новые горизонтальные проекции фронтали f'' и точки A''';

3) поворачиваем точку A''' вокруг фронтали f''' (точки $f''' \equiv O'''$) на $\widehat{\varphi°}$ и определяем положение точки A_1''';

4) построениями, выполненными в обратной последовательности, определяем новые ортогональные проекции точки A_1'' и A_1'.

ЗАДАЧА 2. Определить высоту четырехгранной пирамиды $SABC$ (рис. 81). Для решения этой задачи заменяем плоскость проекции π_2 на π_3 с последующим совмещением ее с плоскостью π_2. Чтобы определить направление новой оси x_1, в плоскости основания пирамиды ABC проводим горизонталь h (ось $x_1 \perp h'$). Совмещаем новую плоскость π_3 с плоскостью π_2 и строим на ней совмещенную проекцию пирамиды $S_1'''A_1'''B_1'''C_1'''$. Отрезок перпендикуляра $S_1'''K_1'''$, опущенного из вершины пирамиды S_1''' на основание $A_1'''B_1'''C_1'''$, определяет высоту пирамиды.

Из приведенных примеров видно, что для получения ответа с помощью сочетания двух способов потребовалось построить только одну вспомогательную проекцию вместо двух, необходимых при решении этих задач способами плоскопараллельного перемещения или замены плоскостей проекции.

Используя сочетание двух способов, можно существенно упростить решение целого ряда задач, особенно в тех случаях, когда в ходе решения необходимо повернуть плоскую фигуру или пространственное тело вокруг прямой общего положения.

Следует иметь в виду, что количество графических построений будет уменьшаться только в том случае, когда мы заменяем плоскопараллельное перемещение (в частности, вращение) заменой плоскостей проекций, а не наоборот.

§ 16. ДРУГИЕ СПОСОБЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПРОЕКЦИЙ

Кроме плоскопараллельного перемещения и замены плоскостей проекций начертательная геометрия располагает большим количеством различных способов получения новых, наиболее удобных для решения задач проекций по заданным неудобным.

В тридцатые годы вышла в свет книга С. М. Колотова "Вспомогательное проектирование"*, в которой были изложены основные принципы получения неискаженного вида прямоугольных проекций на специально выбранную плоскость, а также построения косоугольных и центральных проекций на заданные плоскости проекции.

В последующие годы появилась серия работ, посвященных созданию новых и усовершенствованию ранее предложенных способов вспомогательного проецирования.

Особое место среди этих работ занимают работы, посвященные криволинейному вспомогательному проецированию. Их авторы использовали для получения вспомогательных проекций в качестве проецирующих кривые линии, пространственные или плоские.

В настоящее время имеется много хорошо разработанных и доведенных до практического использования способов, которые могут быть объединены под общим названием вспомогательное проецирование.

Рис. 82 ... 85 дают наглядное представление о получении проекций, удобных для решения задач с помощью вспомогательного проецирования. Так, на рис. 82 решена задача по определению расстояния между скрещивающимися прямыми a и b путем ортогонального проецирования этих прямых на вспомогательную плоскость $\alpha \perp a$. При этом направление проецирования $s \parallel a$.

Рис. 83 показывает целесообразность использования косоугольного проецирования на заданную плоскость проекции при решении задачи по определению точки встречи прямой с плоскостью.

Известно, что точка встречи прямой с плоскостью определяется элементарно просто, если плоскость занимает проецирующее положение. В случае, изображенном на рис. 83, плоскость общего положения α переведена во фронтально проецирующее положение путем проецирования α на плоскость проекции π_2 в направлении горизонтали этой плоскости.

На рис. 84 для определения точек встречи прямой a с произвольной конической поверхностью применено центральное проецирование. За центр проекций принята вершина конической поверхности S. В этом случае коническая поверхность оказывается проецирующей, что значительно упрощает решение поставленной задачи.

На рис. 85 приведен пример решения задачи по определению точек встречи прямой с поверхностью кольца. Для упрощения решения этой задачи использовано криволинейное (в частности, окружностное) проецирование. При таком способе проецирования поверхность кольца оказывается горизонтально проецирующей. Все построения для нахождения положения точек M и N ясны из чертежа и не требуют пояснений.

Использование теорем проективной геометрии и свойств коллинеарных преобразований дало толчок к созданию различных способов

---

* Колотов С. М. Вспомогательное проектирование. Киев, 1933.

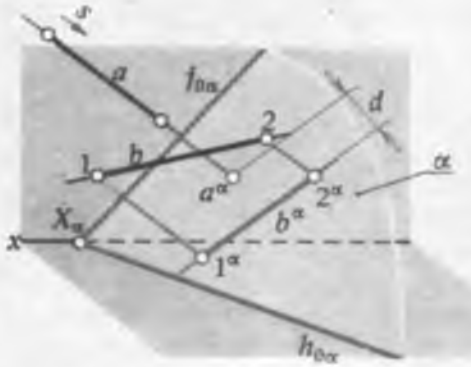


Рис. 82

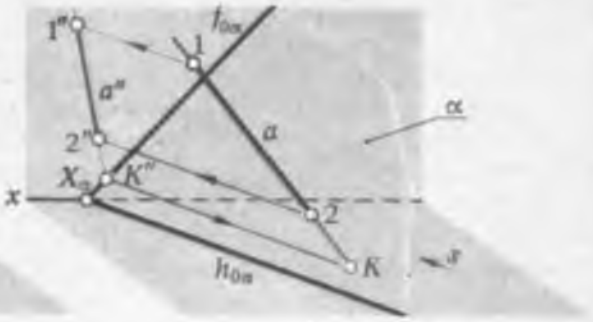


Рис. 83

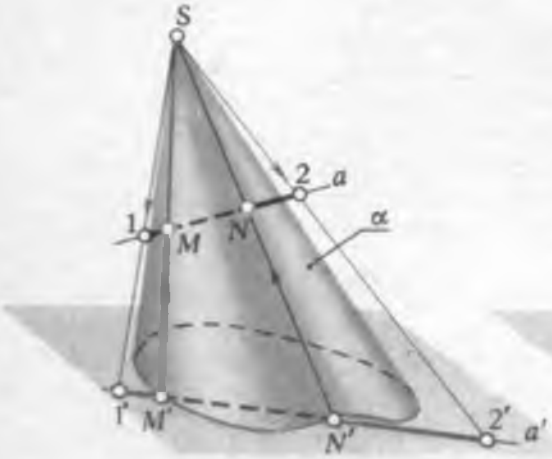


Рис. 84

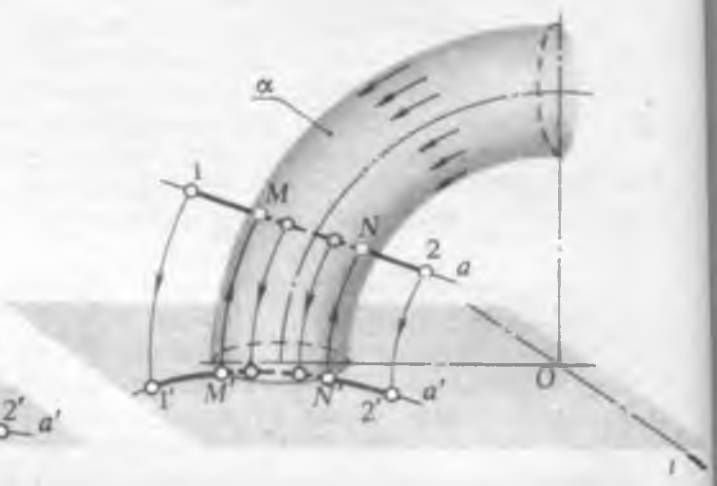


Рис. 85



Рис. 86

перспективно-аффинных и гомологических преобразований ортогональных проекций, составляющих основу проективных преобразований.

На рис. 86 показано *перспективно-аффинное* преобразование эллиптического параболоида в параболоид вращения. Рис. 87 дает наглядное представление о преобразовании поверхности гиперболоида вращения α в сферу α_1 путем *гомологических преобразований*. Не вызы-

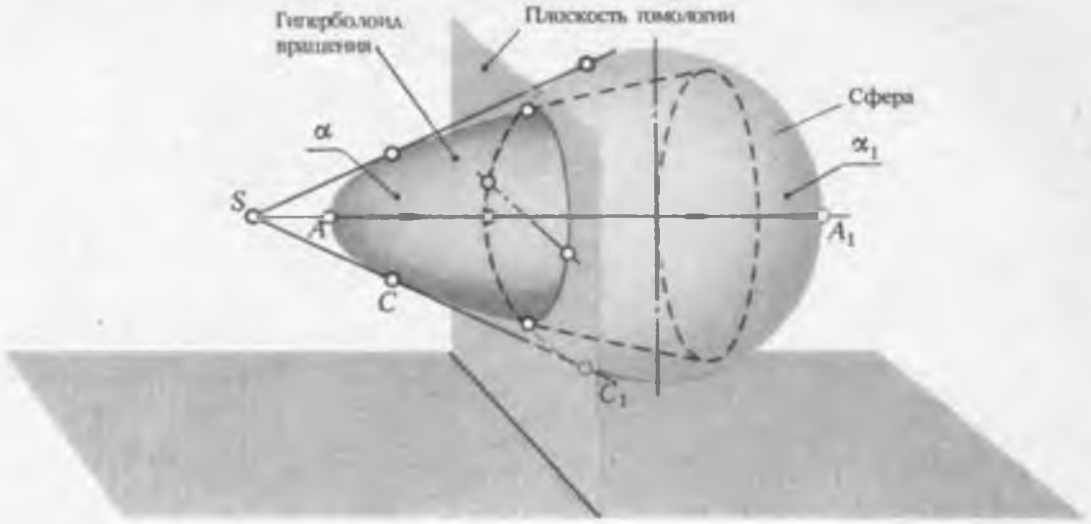


Рис. 87

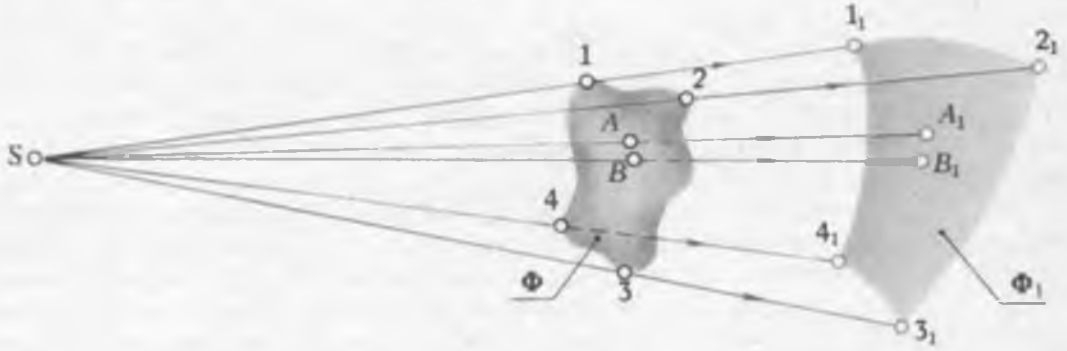


Рис. 88

вает сомнения целесообразность таких преобразований. Действительно, при решении позиционных задач лучше иметь дело с поверхностью вращения, чем с эллиптическим параболоидом (рис. 86), и со сферой, чем с поверхностью гиперболоида вращения (рис. 87). И, наконец, применение топологических преобразований пространства и погруженных в него геометрических фигур привело к созданию чрезвычайно гибкого способа, позволяющего осуществить преобразование сложных нелинейчатых поверхностей, ограничивающих геометрические тела, в простые цилиндрические поверхности и даже плоскости.

В основе рассматриваемых преобразований лежат топологические свойства:

а) *взаимная однозначность* — каждой точке исходной фигуры Ф соответствует одна и только одна точка преобразованной фигуры $Ф_1$;

б) *взаимная непрерывность* — бесконечно близким точкам исходной фигуры Ф соответствуют также бесконечно близкие точки преобразованной фигуры $Ф_1$. На рис. 88 бесконечно близким точкам A и B фигуры Ф соответствуют две бесконечно близкие точки A_1 и B_1 фигуры $Ф_1$.

Преобразования, обеспечивающие сохранение топологических свойств составляют теоретическую базу способа топологических преобразований.

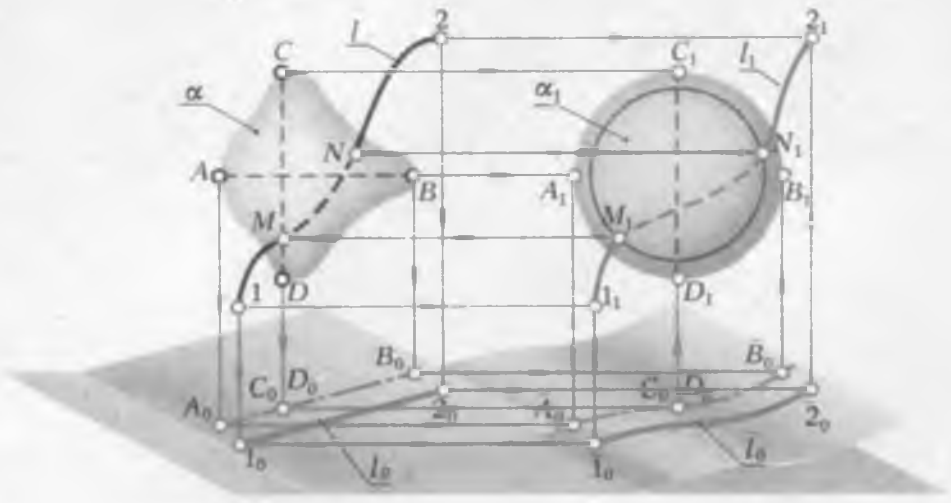


Рис. 89

На рис. 89 показано решение задачи по определению точек встречи плоской кривой l с произвольной поверхностью вращения α. Топологическим преобразованием фигура Ф, ограниченная произвольной поверхностью вращения α, преобразована в шар α_1. Указанными преобразованиями задача сведена к простейшей — определению точек встречи плоской кривой с поверхностью сферы. Зная положение точек M_1 и N_1, с помощью линий связи (прямых, параллельных оси x) определяем M и N.

Изучение отмеченных выше способов преобразования ортогональных проекций выходит за рамки учебной программы курса начертательной геометрии для втузов. Мы остановились на них лишь для того, чтобы читатель имел в виду, что кроме классических способов (см. § 9 ... 14) в арсенале начертательной геометрии имеются и другие, подчас более мощные, способы преобразования ортогональных проекций*.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. В чем состоит принцип преобразования ортогональных проекций способом плоскопараллельного перемещения?
2. В чем состоит отличие способа вращения вокруг осей, перпендикулярных к плоскости проекции, от способа параллельного перемещения?
3. Как определяется положение центра вращения и величина радиуса вращения точки при ее повороте вокруг горизонтали и фронтали?
4. Как можно определить совмещенное с плоскостью $\pi_1(\pi_2)$ положение фронтального (горизонтального) следа плоскости без нахождения центра и радиуса вращения?
5. Как перемещаются проекции точки при ее вращении вокруг оси, перпендикулярной к плоскости проекции $\pi_1(\pi_2)$?
6. Сколько параллельных перемещений и в какой последовательности необходимо выполнить, чтобы перевести отрезок прямой общего положения в отрезок горизонтально (фронтально) проецирующей прямой?
7. В чем состоит сущность преобразования ортогональных проекций способом замены плоскостей проекций?
8. Сколько перемен плоскостей проекций и в какой последовательности необходимо выполнить, чтобы перевести отрезок прямой общего положения в отрезок фронтально (горизонтально) проецирующей прямой?

---

* Более подробные сведения о перечисленных способах преобразования читатель найдет в книге С. А. Фролова "Методы преобразования ортогональных проекций". М.: Машиностроение, 1970.

ГЛАВА III

ЛИНИЯ

Линии занимают особое положение в начертательной геометрии. Используя линии, можно создать наглядные модели многих процессов и проследить их течение во времени. Линии позволяют установить и исследовать функциональную зависимость между различными величинами. С помощью линий удается решать многие научные и инженерные задачи, решение которых аналитическим путем часто приводит к использованию чрезвычайно громоздкого математического аппарата.

Линии широко используются при конструировании поверхностей различных технических форм. Умело подбирая линии, дизайнер имеет возможность придать изящные эстетические формы конструируемым изделиям.

ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

В § 8 отмечалось, что при определении геометрических фигур в геометрии принято исходить из основных (неопределяемых) понятий — *точка*, *прямая*, *плоскость* и *расстояние*, а в современном представлении также понятия *множество*.

Базируясь на этих элементарных понятиях, линию целесообразно трактовать как траекторию перемещения точки (рис. 90). Такое представление линии позволяет получить определение линии, используя такие основные понятия геометрии, как точка и множество. В этом случае линию можно рассматривать как непрерывное множество всех принадлежащих ей точек.

Если учесть, что положение точки при ее движении по заданной траектории будет зависеть от непрерывно меняющейся величины d (расстояние до точки от начала координат*), то можно утверждать, что положение точки, принадлежащей линии, определяется непрерывно меняющейся величиной d. Тогда, окончательно приняв d за параметр, приходим к следующему определению — *линия есть непрерывное однопараметрическое множество точек*.

В этом определении словом *непрерывное* подчеркивается, что двум бесконечно близким значениям параметра соответствуют две также бесконечно близкие точки.

Следует иметь в виду, что данное определение линии является условным. В действительности положение точки будет зависеть не только от вектора d (определяющего величину расстояния), но и от углов его наклона к плоскостям проекций.

Мы останавливаемся на нем лишь потому, что в дальнейшем, при изложении гл. IV "Поверхность", оно позволяет получить определение поверхности, основанное также на понятиях точка и множество и, что более важно, подойти к этому определению с точки зрения кинематического способа получения поверхности.

---

* В случае окружности начало координат не должно совпадать с ее центром.

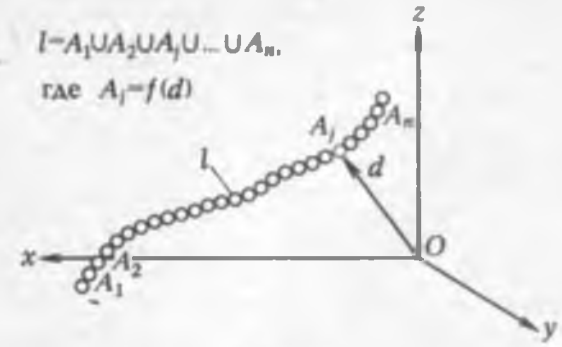


Рис. 90

Рассматривая поверхность как след, который оставляет геометрическая фигура при своем перемещении в пространстве, можно ввести понятие определитель, которое играет весьма важную роль в теории поверхностей.

Линии подразделяются на *алгебраические**, если в декартовой системе координат они определяются алгебраическими уравнениями, и *трансцендентные***, если они описываются трансцендентными уравнениями.

Линии могут быть *пространственными* и *плоскими*.

Пространственными или линиями двоякой кривизны называют линии, все точки которых не принадлежат одной плоскости.

Линии, у которых все точки принадлежат одной плоскости, называют *плоскими*.

Если алгебраическое уравнение, описывающее линию, n-й степени, то алгебраическая кривая считается n-го порядка. Порядок алгебраической кривой определяется также числом точек ее пересечения с плоскостью (для пространственной линии) или прямой (для плоской линии). При этом следует иметь в виду, что в число точек пересечения включаются точки с действительными и мнимыми координатами.

Простейшей линией является прямая. Так как свойства прямой и задание ее на эпюре Монжа уже известны читателю (см. гл. I, § 8), в настоящей главе речь будет идти о характеристиках и свойствах кривых линий (пространственных и плоских) и построении их ортогональных проекций.

I. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ КРИВЫЕ ЛИНИИ

Было отмечено, что пространственными кривыми называются линии, все точки которых не принадлежат одной плоскости. Рис. 91 дает наглядное представление о произвольной пространственной кривой линии.

§ 17. КАСАТЕЛЬНЫЕ И НОРМАЛИ К ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КРИВОЙ

На рис. 92 показана пространственная кривая l. Возьмем на ней произвольную точку M и проведем через нее секущие $[MA)$ и $[MB)$.

При приближении точки A к точке M $[MA)$ будет поворачиваться вокруг точки M, и когда точка A совпадет с точкой M, $[MA)$ достигнет своего предельного положения (луч t_1).

Предельное положение секущей в точке M называется полукасательной к кривой l в точке M.

---

* К алгебраическим линиям, в частности, относятся окружность, эллипс, парабола, гипербола, астроида, кардиоида и др.

** К трансцендентным линиям относятся синусоида, спираль архимеда, циклоида и др.

$[MB)$ при совпадении точки B с точкой M займет предельное положение t_2. Из чертежа видно, что в точке M к кривой l проведены две полукасательные, направленные в противоположные стороны. Полукасательные t_1 и t_2 образуют прямую, которую называют касательной к кривой в данной точке (t_M).

Через касательную к пространственной кривой в данной точке можно провести пучок плоскостей*. Одна из плоскостей этого пучка, называемая *соприкасающейся плоскостью*, играет особую роль при исследовании свойств пространственных кривых.

Подойти к понятию соприкасающейся плоскости можно путем следующих рассуждений: пусть дана пространственная кривая l (рис. 93). Возьмем на ней произвольную точку M и укажем полукасательные t_1 и t_2 к кривой l в этой точке. Через точку M проведем две секущие $[MA)$ и $[MB)$. Обозначим полуплоскость, заданную полукасательной t_1 и секущей $[MA)$, α_1, а плоскость, определяемую полукасательной t_2 и $[MB)$, — α_2. При приближении точек A и B к точке M плоскости α_1 и α_2 будут проворачиваться вокруг полукасательных. Когда секущие займут положение полукасательных, плоскости α_1 и α_2 займут предельное положение.

Так как полукасательные принадлежат одной прямой, то плоскости α_1 и α_2 совпадут, образуя одну плоскость α, которую называют *соприкасающейся плоскостью пространственной кривой в данной точке*.

Соприкасающаяся плоскость может быть определена так же, как предельное положение плоскости, проходящей через три бесконечно близкие точки пространственной кривой линии.

Соприкасающаяся плоскость неразрывно связана с движущейся по кривой точкой. Так как каждая точка кривой имеет свою касательную (кроме особых точек), то соприкасающаяся плоскость при перемещении по кривой будет все время менять свое положение. При этом она будет не только следовать за касательной к кривой, но, одновременно, и вращаться вокруг нее.

К пространственной кривой линии l в любой ее точке (за исключением некоторых особых точек) можно провести пучок перпендикулярных к ней прямых (рис. 94)**. Множество этих перпендикуляров (нормалей) определяют плоскость, которую называют *нормальной плоскостью* β. Одна из нормалей этого множества, принадлежащая соприкасающейся плоскости, называется *главной нормалью* n_α.

---

*Пучком плоскостей называется множество всех плоскостей, проходящих через одну и ту же прямую a; прямая a называется осью этого пучка.

**Пучком прямых называется множество всех прямых плоскости, проходящих через данную точку M; точка M называется центром пучка.



Рис. 91

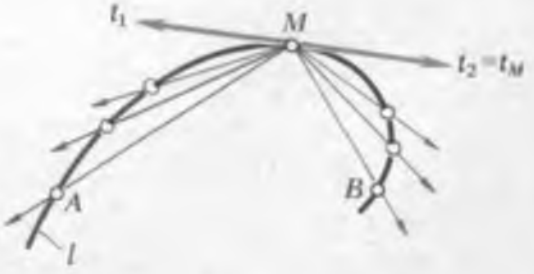


Рис. 92

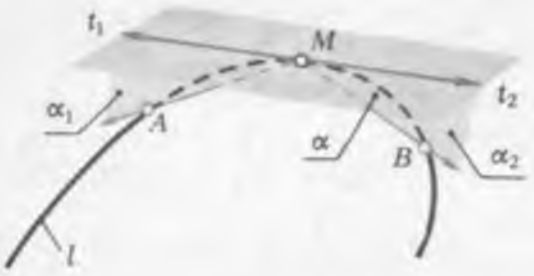


Рис. 93

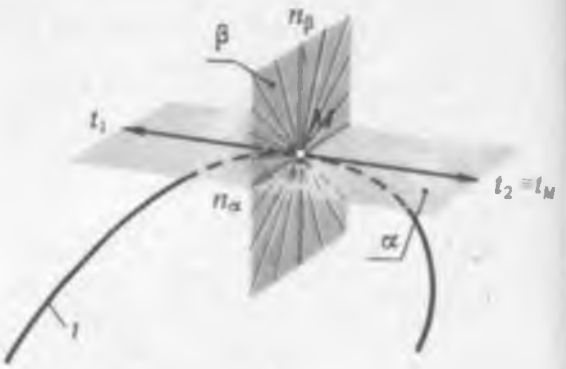


Рис. 94

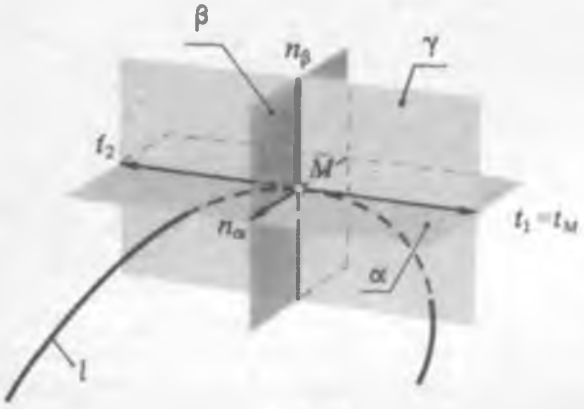


Рис. 95

Другую нормаль этого множества, перпендикулярную к соприкасающейся плоскости, называют *бинормалью* n_β. Бинормаль n_β и касательная t_M определяют плоскость γ, которую называют *спрямляющей плоскостью кривой* (рис. 95).

Трехгранник Френе. Три взаимно перпендикулярные плоскости α, β и γ (рис. 95), проходящие через одну точку пространственной кривой, образуют прямоугольный трехгранник, называемый *основным* или *подвижным трехгранником*. Его называют также трехгранником Френе *.

Трехгранник Френе используется в качестве системы плоскостей проекций, на которые проецируют пространственную кривую для изучения ее свойств. При этом плоскость α принимают за горизонтальную, плоскость γ за фронтальную и плоскость β за профильную плоскость проекции.

Дифференциальные свойства пространственной кривой исследуют по ее плоским проекциям на гранях трехгранника Френе.

II. ПЛОСКИЕ КРИВЫЕ ЛИНИИ

Кривая линия называется плоской, если все ее точки принадлежат одной плоскости.

Основные понятия и определения, приведенные на с. 69 для пространственных кривых, сохраняются с некоторыми изменениями и для плоских кривых линий; плоские кривые могут быть также *алгебраическими* и *трансцендентными*.

В первом случае уравнение кривой в декартовых координатах может быть представлено в форме $f(x, y) = 0$, где $f(x, y)$ — целый многочлен от x и y.

Определения полукасательной и касательной в точке плоской кри-

* По имени французского математика Жана Фредерика Френе, предложившего его в 1847 г.

вой также совпадают с аналогичными определениями для пространственной кривой.

В отличие от пространственной кривой, для каждой точки которой может быть проведено множество перпендикулярных к ней прямых, образующих нормальную плоскость, плоская кривая в каждой ее точке имеет только одну нормаль — прямую, перпендикулярную к касательной в данной точке кривой и принадлежащую плоскости кривой.

В инженерной практике часто приходится проводить касательные и нормали к плоским кривым. Рассмотрим графические способы построения этих линий.

§ 18. ПРИБЛИЖЕННЫЕ СПОСОБЫ ПОСТРОЕНИЯ КАСАТЕЛЬНОЙ И НОРМАЛИ К ПЛОСКОЙ КРИВОЙ

Графический способ построения касательной и нормали к плоской кривой базируется на использовании "кривой ошибок". Для построения этой кривой из точки, через которую должна проходить искомая касательная, проводим лучи, пересекающие заданную кривую. Отмечаем концы хорд, по которым лучи пересекают кривую, и с помощью этих хорд строим "кривую ошибок".

Сущность способа проследим на конкретных примерах.

ПРИМЕР 1. **Построение касательной к кривой, проходящей через точку, не принадлежащую кривой (рис. 96).**

Пусть даны кривая l и точка A $(A \in \alpha \supset l) \wedge (A \notin l)$.

Проведем через точку A ряд секущих a_1, a_2, a_3, a_4. Отметим точки 1, 1_1, 2, 2_1, 3, 3_1, 4, 4_1, в которых эти секущие пересекают кривую l. Через середины полученных хорд проведем плавную кривую m (линию m называют "кривой ошибок").

Пересечение линии m с заданной кривой l определит точку касания M. (AM) — искомая касательная t к кривой l, проведенная из точки A.

ПРИМЕР 2. **Построение касательной к кривой параллельно заданному направлению** s (рис. 97).

Для определения точки касания M проведем ряд секущих a_1, a_2, a_3, a_4 параллельно заданному направлению s. Через середины хорд $[1\ 1_1]$, $[2\ 2_2]$, $[3\ 3_3]$, $[4,\ 4_4]$ проведем плавную кривую m и отметим точку M ее пересечения с заданной кривой l. Точка M будет точкой касания, а прямая t, проходящая через эту точку параллельно s, искомой касательной.

ПРИМЕР 3. **Построение касательной к кривой в данной точке касания** M (рис. 98).

Проведем произвольную прямую b, примерно перпендикулярную к искомой касательной, а через точку M ряд секущих a_1, a_2, a_3, a_4 так, чтобы они пересекали и кривую l и прямую b. От точек пересечения секущих с прямой b отложим (на секущих) отрезки, равные хордам $[M1]$, $[M2]$, $[M3]$, $[M4]$, при этом длины хорд, расположенных по разные стороны от точки касания M, отложим с разных сторон от прямой b. Полученные точки соединим плавной кривой m.

Пересечение кривой m с прямой b укажет точку 1_1, принадлежащую касательной. Соединив A с M прямой линией, получим искомую касательную t.

ПРИМЕР 4. **Построение нормали к кривой, проходящей через точку, не принадлежащую данной кривой (рис. 99).**

В плоскости даны кривая l и точка A, не принадлежащая кривой l. Примем точку A за центр окружностей разных радиусов, эти окружности пересекут данную кривую в точках 1, 1_1, 2, 2_1, 3, 3_1, 4, 4_1, которые примем за концы хорд. Из концов хорд восставим перпендикуляры. При этом перпендикуляры, восставленные из точек 1, 2, 3, 4, будут иметь противоположное направление перпендикулярам, восставленным из точек 1_1, 2_1, 3_1, 4_1. На этих перпендикулярах отложим отрезки, равные длине соответствующих хорд.

Полученные точки соединим плавной кривой m. Пересечение m с l укажет положение точки M, через которую пройдет искомая нормаль $n (n \perp [1, 1_1])$. Для проведения нормали к кривой линии параллельно заданному направлению или через данную на кривой точку предварительно надо построить касательную к кривой (см. примеры 1 и 3 на с. 73). Определив положение точки касания (первый случай) и направление касательной (второй случай), легко провести нормаль к кривой.

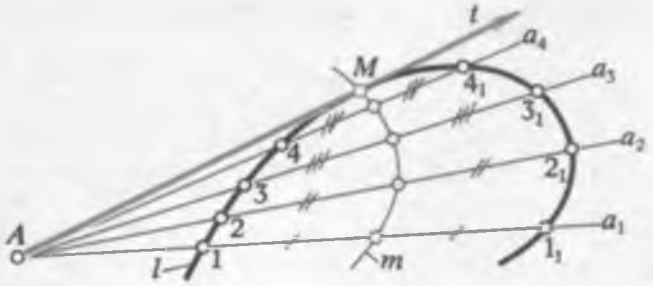


Рис. 96

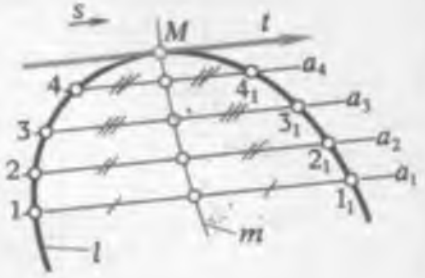


Рис. 97

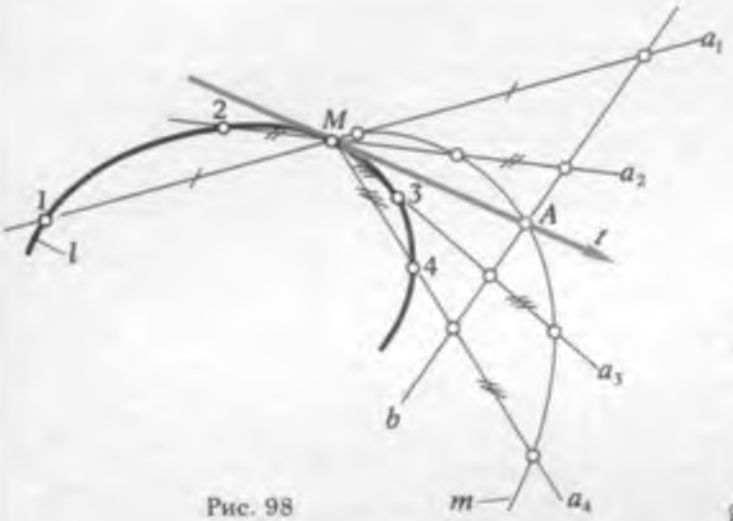


Рис. 98

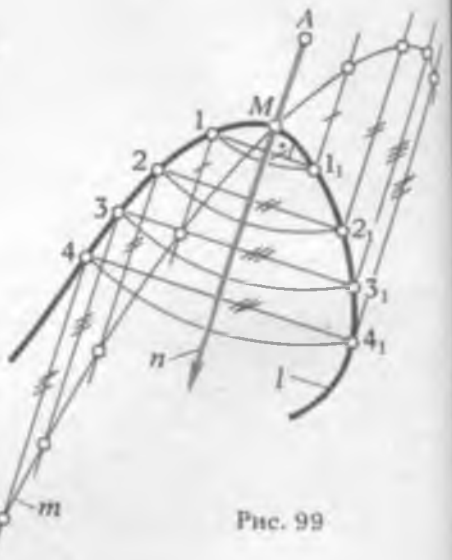


Рис. 99

§ 19. КРИВИЗНА ПЛОСКОЙ КРИВОЙ

Величина угла α° между полукасательными в двух бесконечно близких точках, отнесенная к длине дуги s, заключенной между этими точками, характеризует степень искривленности кривой линии. Чем больше угол α°, тем большую кривизну имеет линия. Обозначив кривизну k, можно записать $k = \lim \frac{\Delta\alpha^\circ}{\Delta s}$ (при $\Delta s \to 0$), т. е. *кривизна — предел отношения угла между полукасательными к соответствующей дуге.*

В общем случае кривизна в каждой точке плоской кривой будет различной (исключение составляют только окружность и прямая, для которых кривизна в любой их точке постоянна; для прямой она равна нулю). Графически определить величину кривизны в данной точке кривой можно с помощью *окружности (круга) кривизны.*

Окружностью кривизны в данной точке A кривой l называют предельное положение окружности, проведенной через точку A и две другие бесконечно близкие ей точки A_1 и A_2, также принадлежащие кривой l (рис. 100). Радиус такой окружности r называют *радиусом кривизны*, а ее центр O — *центром кривизны.* Чем меньше величина радиуса кривизны, тем больше искривлена линия. Поэтому количественная характеристика кривизны определяется величиной, обратной радиусу кривизны $k = \frac{1}{r}$.

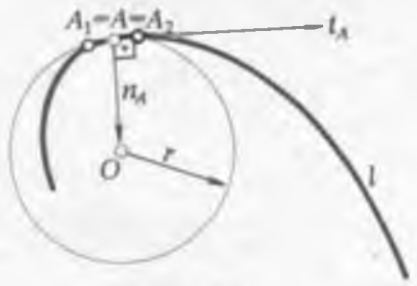


Рис. 100

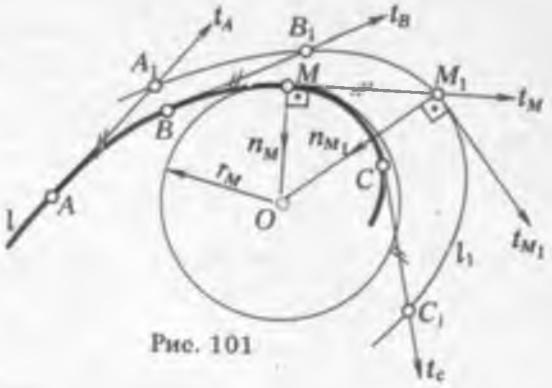


Рис. 101

§ 20. ПРИБЛИЖЕННЫЙ СПОСОБ ПОСТРОЕНИЯ ЦЕНТРА КРИВИЗНЫ КРИВОЙ В ЗАДАННОЙ ТОЧКЕ

Из рис. 100 видно, что окружность кривизны в точке соприкасания имеет общую с кривой l касательную t_A и нормаль n_A. Этим свойством можно воспользоваться для графического определения центра кривизны кривой в данной точке.

Пусть даны кривая l и точка M, принадлежащая этой кривой (рис. 101). Возьмем на кривой l ряд произвольных точек A, B, C. Проведем через них полукасательные t_A, t_B, t_C и отложим на них равные отрезки произвольной длины. Через полученные точки A_1, B_1, C_1 проведем плавную кривую l_1. Касательная t_M к кривой l в точке M пересечет кривую l_1 в точке M_1 (кривую l_1 называют *эквитангенциальной* относительно l, а кривую l относительно l_1 называют *трактрисой*). Проведем через M нормаль n_M к кривой l, а через точку M_1 — нормаль n_{M_1} к кривой l_1 и найдем пересечение нормалей n_M и n_{M_1}; точка пересечения O укажет положение центра кривизны для точки M кривой l. $[OM]$ равен радиусу кривизны r_M, а отношение $k = \frac{1}{r_M}$ — кривизне кривой l в данной точке M.

§ 21. ЭВОЛЮТА И ЭВОЛЬВЕНТА

Определение эволюты и эвольвенты неразрывно связано с понятием кривизны кривой линии. Если определить положение центров кривизны O_1, O_2, ... , O_n ряда, принадлежащих данной кривой l (рис. 102), точек A_1, A_2, ... , A_n и соединить их плавной кривой, то получим кривую m, называемую *эволютой* кривой l. Итак, *эволюта есть множество точек, являющихся центрами кривизны линии*.

Кривая l по отношению к кривой m (своей эволюте) называется эвольвентой. Образование эвольвенты можно представить из рассмотрения рис. 103. Отметим на кривой m ряд точек M, M_1, M_2, ... , M_n. Примем их за вершины ломаной линии. Из точки M_1 как из центра проведем дугу окружности ML_1 радиусом $r_1 = |M_1M|$ (точка $L_1 \in M_2M_1$). Затем из точки M_2 проведем дугу радиусом $r_2 = |M_2L_1|$ и отметим точку ее пересечения с продолжением звена M_3M_2 ломаной линии $M_1M_2M_3$: $L_2 = \overset{\frown}{L_1L_2} \cap (M_3M_2)$. Далее проведем дугу радиусом $r_3 = |M_3L_2|$ и определим положение точки L_3 — $L_3 = \overset{\frown}{L_2L_3} \cap (M_4M_3)$. Следуя описанным путем, можно определить точки L_1, ... , L_n. Множество точек L_1, L_2, ... , L_n образуют центровую кривую l. Если число сторон ломаной линии M, M_1, M_2, ... , M_n неограниченно возрастает, то в пределе получим кривую m и соответственно кривую l, состоящую из после-

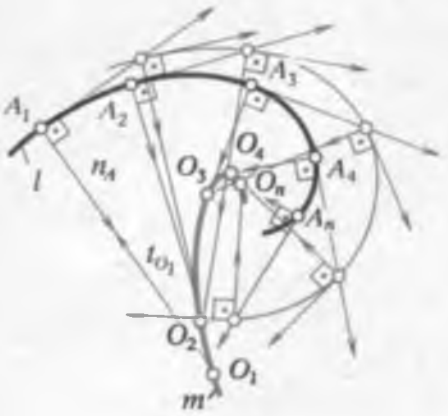


Рис. 102

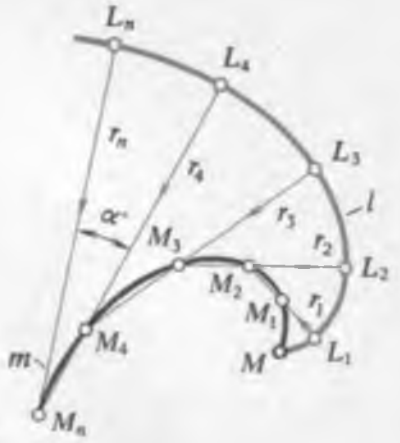


Рис. 103

довательных дуг окружностей монотонно изменяющихся радиусов. Кривая l есть эвольвента кривой m.

Эвольвенты находят широкое применение в технике. В частности, профили зубьев различных зубчатых передач имеют форму эвольвенты окружности. Ввиду широкого использования эволют и эвольвент в инженерной практике целесообразно отметить некоторые их свойства, вытекающие непосредственно из рассмотренных способов построения.

1. Эволюта представляет собой множество точек, являющихся центрами кривизны всех точек эвольвенты.

2. Касательные эволюты являются нормалями эвольвенты.

3. Всякая плоская кривая линия имеет бесчисленное множество эвольвент.

4. Через каждую точку касательной к эволюте проходит одна и только одна эвольвента.

5. Длина дуги эволюты равна абсолютному значению разности радиусов кривизны эвольвенты в концах ее дуг.

§ 22. КЛАССИФИКАЦИЯ ТОЧЕК ПЛОСКОЙ КРИВОЙ

Вид кривой l вблизи некоторой точки M с единственной касательной t зависит от характера движения точки вдоль касательной и направления поворота касательной. Поясним это утверждение на примерах.

Пусть по кривой l движется точка M (рис. 104). Перемещение точки M_0 ($M_0 \in l$) в положение M_1 ($M_1 \in l$) можно рассматривать как движение точки по дуге кривой l в направлении, указанном зеленой стрелкой.

Проведем через точки M_0 и M_1 касательные к кривой l. Точку M_0 можно рассматривать не только с позиции ее принадлежности к кривой l, но и как принадлежащую касательной t_0. В этом случае перемещение точки M_0 ($M_0 \in t_0$) в положение M_1 ($M_1 \in t_1$) следует трактовать как движение точки по касательной в направлении, указанном зеленой стрелкой. Причем для того чтобы точка $M_0 \in t_0$ заняла положение $M_1 \in t_1$, необходимо, чтобы касательная t_0 при переходе в положение t_1 поворачивалась в направлении, указанном стрелкой.

При перемещении точки M_1 в положение M_2 направление ее движения вдоль кривой (касательной) по сравнению с участком M_0M_1 не меняется; не меняется и направление поворота касательной t_1.

Из рассмотрения рис. 104 видно, что характер движения точки по кривой l, выявленный для участков M_0M_1, M_1M_2, сохранится и на других участках M_2M_3, ... , $M_{n-1}M_n$. Все рассмотренные точки (M_0, M_1, M_2, ... , M_n) кривой l и проведенные через них касательные (t_0, t_1, t_2, ... , t_n) обладают общим свойством: направление движения точки вдоль кривой (и касательной) и направление поворота касательной не меняются.

Такие точки и проведенные через них касательные к кривой называют соответственно: *обыкновенной (регулярной) точкой* и *обыкновенной (регулярной) касательной*. Кривую l, состоящую только из регулярных точек, называют *плавной кривой*. На рис. 105 изображена плавная кривая и указаны принадлежащая ей регулярная точка M и проведенные через нее касательная и нормаль к кривой l.

Если направление движения точки или поворота касательной меняется, то мы будем иметь дело с *особой точкой* и *особой касательной*.

На рис. 106 показана кривая l и указаны принадлежащие ей точки M_0, M_1, M, M_2, M_3 с проведенными через них касательными t_0, t_1, t, t_2, t_3. Мы видим, что ни в одной из указанных точек направление их движения вдоль кривой не меняется. Что касается направления вращения касательной, то оно меняется на противоположное в точке M. Такую точку называют *точкой перегиба*. В точках перегиба касательная меняет вместе с направлением вращения и сторону кривой. Две ветви кривой расположены по разные стороны от общей касательной t и по разные стороны от нормали n.

На рис. 107 показана кривая l с особой точкой M, которая называется *точкой возврата первого рода или заостренной точкой*. В точках возврата первого рода две ветви кривой располагаются по одну сторону от нормали и по разные стороны от касательной.

Рис. 108 дает представление *о точке возврата второго рода**. Мы видим, что в точках возврата второго рода две ветви кривой расположены по одну сторону от общей для обеих ветвей касательной и по одну сторону от нормали. В точках возврата второго рода изменяется не только направление движения точки по кривой, но и направление вращения касательной.

Кроме отмеченных, к особым точкам кривой относятся:

а) *угловая точка* (рис. 109). В угловой точке (ее называют также точкой излома) направление кривой и касательной к ней изменяется "скачком", и поэтому кривая имеет в точке M две касательные и, соответственно, две различные нормали;

---

* Точку возврата второго рода называют также "клюв".

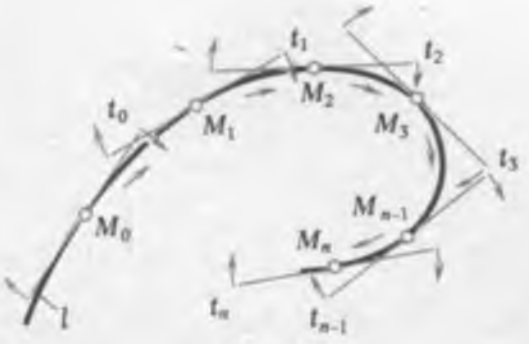


Рис. 104

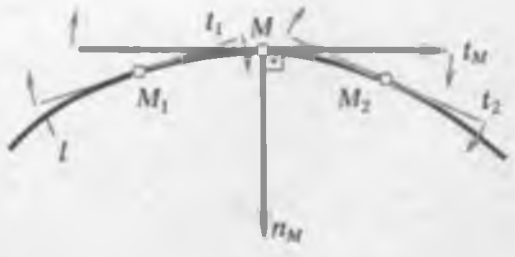


Рис. 105

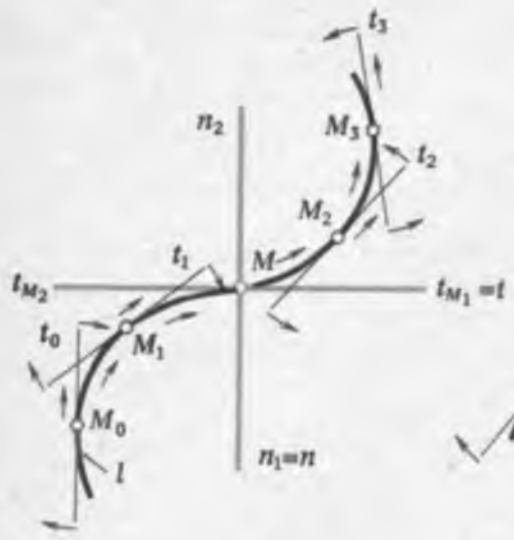


Рис. 106

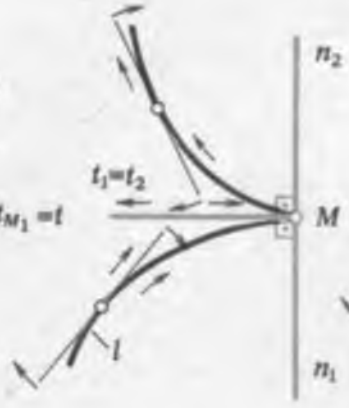


Рис. 107

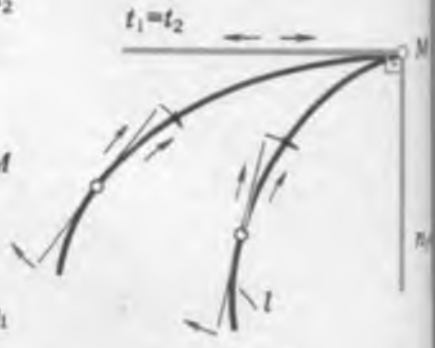
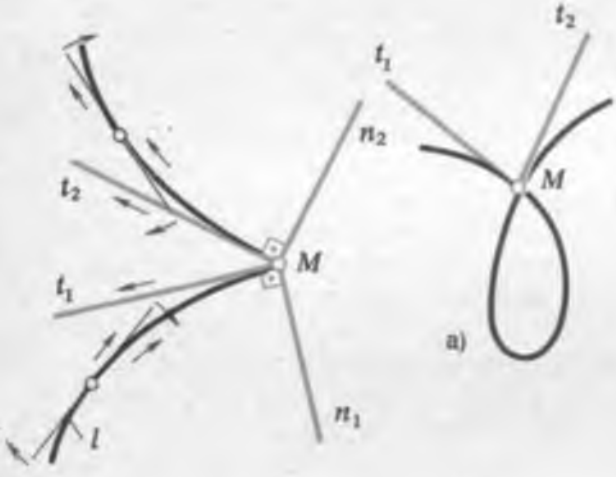


Рис. 108



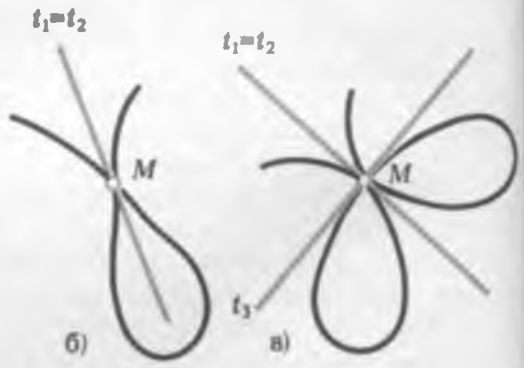


Рис. 109

Рис. 110

б) *узел, или многократная точка* (рис. 110). В узловой точке кривая пересекает саму себя. В зависимости от числа самопересечений узловые точки могут быть: двойными, тройными и т. д. На рис. 110,*а* и *б* показаны двойные, на рис. 110,*в* — тройная точка.

§ 23. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ ЛИНИИ

Для построения ортогональных проекций кривой (пространственной или плоской) необходимо построить проекции ряда точек, принадлежащих этой кривой, и соединить между собой одноименные проекции в той же последовательности, в какой они располагались на оригинале. При задании кривой ее проекциями необходимо указать по крайней мере проекции одной точки, принадлежащей кривой. Действительно, если на проекциях кривой l (рис. 111) не указать проекции точки A (A', A''), то по одним только проекциям l' и l'' нельзя судить о форме кривой.

Следует также иметь в виду, что по двум ортогональным проекциям кривой нельзя сразу ответить на вопрос о том, какой кривой (плоской или пространственной) соответствуют данные проекции. Чтобы

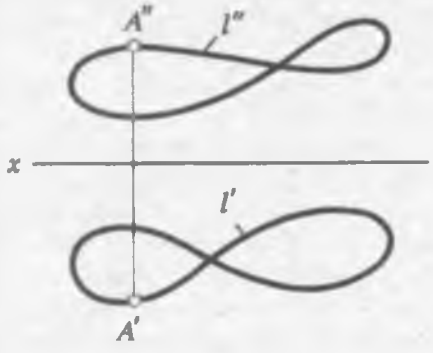


Рис. 111

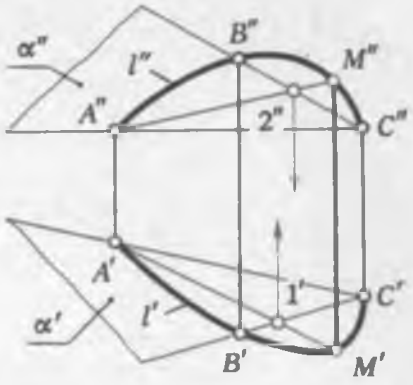


Рис. 112

установить, какая (плоская или пространственная) кривая линия задана на эпюре, необходимо выяснить, принадлежат ли все точки кривой одной плоскости: если принадлежат — кривая плоская, в противном случае — пространственная. Заданная на рис. 112 кривая l — пространственная, так как точка M, взятая на кривой, не принадлежит плоскости α, определяемой тремя другими точками A, B, C этой кривой.

СВОЙСТВА КРИВЫХ, ИНВАРИАНТНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ОРТОГОНАЛЬНОГО ПРОЕЦИРОВАНИЯ

При построении ортогональных проекций кривых необходимо знать те свойства этих кривых, которые сохраняются (инвариантны) при проецировании. К таким свойствам относятся:

1. Касательные к кривой проецируются в касательные к ее проекциям.

2. Несобственным точкам кривой соответствуют несобственные точки ее проекции.

При проецировании плоских кривых в дополнение к отмеченным будут справедливы следующие свойства:

3. Порядок проекции алгебраической кривой равен порядку самой кривой.

4. Число узловых точек (точек, в которых кривая пересекает саму себя) на проекции кривой равно числу узловых точек самой кривой*.

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ ВИНТОВОЙ ЛИНИИ

Из пространственных кривых в технике находят широкое применение винтовые линии. Винтовую линию можно рассматривать как результат перемещения точки по поверхности вращения.

Если зафиксировать положение точки на поверхности прямого кругового цилиндра острием хорошо заточенного карандаша, а затем начать вращать цилиндр вокруг его оси и равномерно перемещать карандаш вдоль оси цилиндра, то острие карандаша опишет на цилиндрической поверхности пространственную кривую, называемую цилиндрической винтовой линией**. Ось цилиндрической поверхности будет

---

* Случаи, когда касательная проецируется в точку (свойство 1), а плоская кривая в прямую (свойства 3 и 4), не учитываются.

** Если движение точки будет происходить по поверхности вращения другого вида, например конической или сферической, то получим соответственно коническую и сферическую винтовые линии.

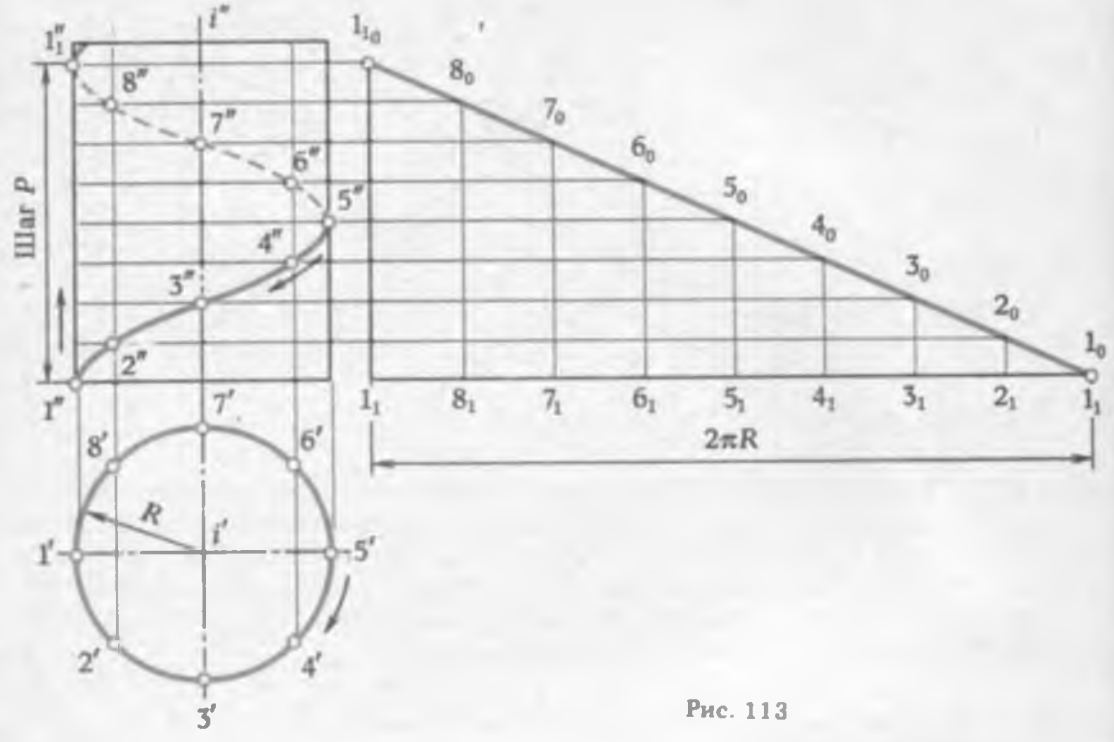


Рис. 113

осью винтовой линии, а радиус цилиндрической поверхности — радиусом винтовой линии.

Если вращение цилиндра и прямолинейное перемещение карандаша равномерны, то получим цилиндрическую винтовую линию, называемую *гелисой*, т. е. гелиса является траекторией движения точки, равномерно вращающейся вокруг оси и одновременно перемещающейся с постоянной скоростью вдоль этой оси. Величину P перемещения точки в направлении оси, соответствующую одному ее обороту вокруг оси, *называют шагом винтовой линии*.

Для построения проекции винтовой линии, в частности гелисы, предварительно строим проекции прямого кругового цилиндра (рис. 113). Окружность основания цилиндра (горизонтальная проекция гелисы) делим на одинаковое число равных частей. На такое же число частей делим шаг (на фронтальной проекции). Из точек деления окружности проводим линии связи, а через соответствующие точки деления шага —

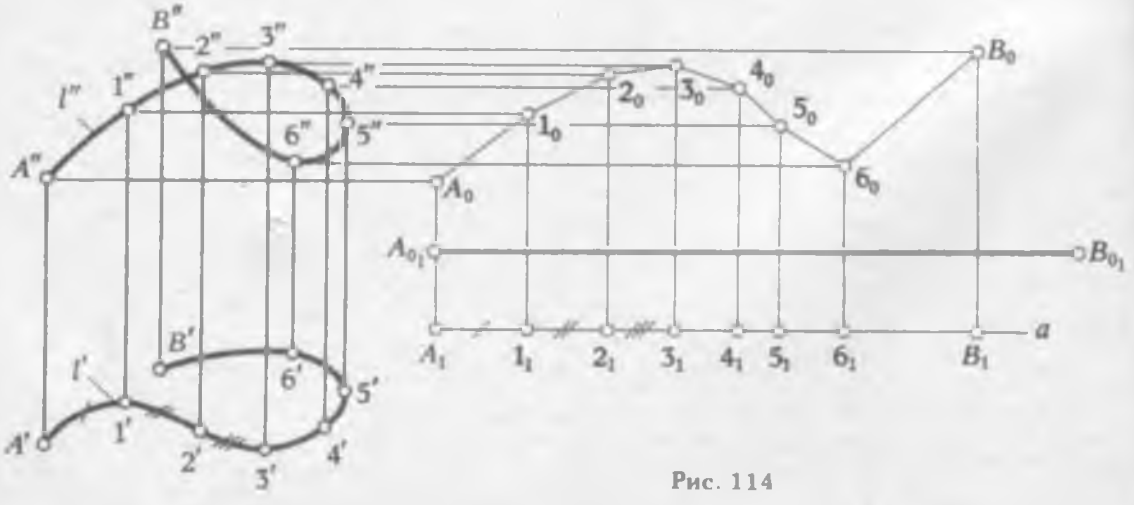


Рис. 114

горизонтальные прямые. Отмечаем точки $1''$, $2''$, $3''$, ... , $8''$, в которых пересекаются соответственные прямые. Соединив полученные точки ($1''$, $2''$, $3''$, ... , $8''$) плавной кривой, получим фронтальную проекцию винтовой линии. Цилиндрические винтовые линии подразделяют на правые и левые (с правым или левым ходом). Основанием для такого деления служит направление движения точки, "спускающейся" по винтовой линии. Если проекция этого направления на плоскость, перпендикулярную к оси винтовой линии, совпадает с направлением движения часовой стрелки, то винтовая линия — правого хода, в противном случае винтовую линию считают левой. На рис. 113 показана правая винтовая линия.

Гипотенуза треугольника $1_{11}1_{10}1_0$, изображенного на рис. 113 справа, является разверткой гелисы на протяжении ее шага. Цилиндрическая винтовая линия вполне определяется радиусом, шагом и ходом.

§ 24. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЛИНЫ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КРИВОЙ ПО ЕЕ ОРТОГОНАЛЬНЫМ ПРОЕКЦИЯМ

На рис. 114 даны две проекции пространственной кривой l. Чтобы определить длину кривой, необходимо осуществить ее спрямление. Спрямление пространственной кривой, заданной ортогональными проекциями, осуществляется следующим путем:

1. Спрямляем горизонтальную проекцию кривой $A'B'$ в $[A_1B_1]$. Для этого намечаем на l' ряд точек $1'$, $2'$, $3'$, ... так, чтобы дуги, заключенные между этими точками, мало отличались по длине от стягивающих их хорд. Откладываем длины хорд $|A'1'|$, $|1'2'|$, $|2'3'|$, ... , $|6'B'|$ на горизонтальной прямой a в последовательности, которую они занимали на проекции кривой.

2. Из точек A_1, 1_1, 2_1, 3_1, ... , B_1 прямой a восставляем перпендикуляры и отмечаем точки их пересечения с горизонтальными прямыми, проведенными через соответствующие фронтальные проекции точек A'', $1''$, $2''$, $3''$, ... , B''.

3. Полученные точки пересечения A_0, 1_0, 2_0, 3_0, ... , B_0 укажут вершины ломаной линии, выпрямив которую, получим отрезок $[A_0{}_1B_0{}_1]$, равный длине пространственной кривой с точностью аппроксимации дуг кривой их хордами.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Дайте определение пространственной и плоской кривой.
2. Что называется порядком алгебраической кривой и как можно определить его, если кривая (плоская или пространственная) задана графически?
3. Перечислите свойства кривой линии, инвариантные относительно параллельного проецирования.
4. Назовите "особые точки" кривой и дайте их определение.
5. Что такое соприкасающаяся плоскость?
6. Дайте определение трехгранника Френе.
7. Расскажите, как можно построить касательную к плоской кривой:
   а) проходящую через заданную точку, не принадлежащую кривой,
   б) проходящую через точку, заданную на кривой;
   в) параллельную заданному направлению.
8. Что такое эвольвента и эволюта плоской кривой? Дайте определения и укажите основные свойства этих кривых.
9. Что называется кривизной плоской кривой в данной точке? Как можно определить ее графически?
10. Что такое шаг винтовой линии?
11. Как построить на чертеже цилиндрическую винтовую линию?
12. Как можно определить длину дуги пространственной кривой по ее ортогональным проекциям?

ГЛАВА IV

ПОВЕРХНОСТЬ

Мир поверхностей разнообразен и безграничен. Он простирается от элементарной, отличающейся простотой и математической строгостью плоскости, до сложнейших, причудливых форм криволинейных поверхностей, не поддающихся точному математическому описанию.

Без преувеличения можно сказать, что по разнообразию форм и свойств, по своему значению при формировании различных геометрических фигур, по той роли, которую они играют в науке, технике, архитектуре, изобразительном искусстве, поверхности не имеют себе равных среди других геометрических фигур.

Естественно, что начертательная геометрия как наука, передающая результаты своих теоретических исследований в распоряжение инженера для их практического использования, не может обойти вниманием такие важные геометрические фигуры, какими являются поверхности.

ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

В математике *под поверхностью подразумевается непрерывное множество точек, между координатами которых может быть установлена зависимость, определяемая в декартовой системе координат уравнением вида* $F(x, y, z) = 0$, *где* $F(x, y, z)$ — *многочлен n-й степени, или в форме какой-либо трансцендентной функции.* В первом случае поверхности называют *алгебраическими*, во втором — *трансцендентными*.

Если алгебраическая поверхность описывается уравнением n-й степени, то поверхность считается n-го порядка. Любая произвольно расположенная секущая плоскость пересекает поверхность по кривой того же порядка (иногда распадающейся или мнимой), какой имеет сама поверхность. Порядок поверхности может быть определен также числом точек ее пересечения с произвольной прямой, не принадлежащей целиком поверхности, считая все точки (действительные и мнимые).

В начертательной геометрии геометрические фигуры задаются графически, поэтому целесообразно рассматривать поверхность как совокупность всех последовательных положений некоторой перемещающейся в пространстве линии. Образование поверхности с помощью линии позволяет дать иное определение поверхности, базирующееся на основных элементарных геометрических понятиях, таких, как точка и множество. Действительно, если принять, что положение движущейся в пространстве линии будет непрерывно меняться с течением времени t, и принять t за параметр, то поверхность можно рассматривать как непрерывное однопараметрическое множество линий. В свою очередь, линия определяется как непрерывное однопараметрическое множество точек, поэтому можно дать следующее определение поверхности: *поверхностью называется непрерывное двупараметрическое множество точек.*

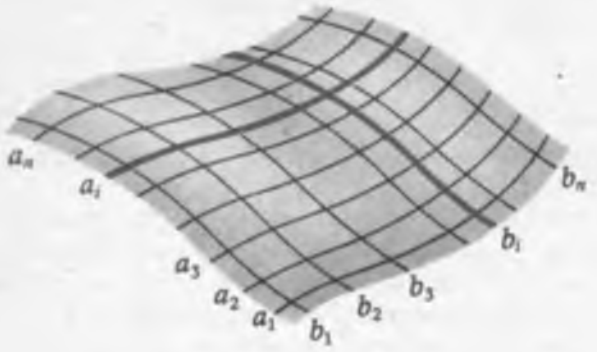


Рис. 116

В зависимости от того, чем задается каркас поверхности, точками или линиями, каркасы подразделяют на *точечные* и *линейные*. Линейным каркасом называется множество линий, имеющих единый закон образования и связанных между собой определенной зависимостью. Условия, устанавливающие связь между линиями каркаса, называют *зависимостью каркаса*. Эта зависимость характеризуется некоторой изменяющейся величиной, называемой *параметром каркаса*. Линейный каркас считается *непрерывным*, если параметр каркаса — непрерывная функция, в противном случае он называется *дискретным*.

В качестве линий, образующих каркас, обычно берут семейство плоских кривых, полученных в результате сечения поверхности пучком параллельных плоскостей. В основе теории каркаса лежит положение о том, что *непрерывное однопараметрическое множество линий в пространстве задает поверхность, и, наоборот, всякая поверхность может быть представлена однопараметрическим множеством линий, свойства которых и закон их распределения в пространстве определяют свойства поверхности.*

Для того чтобы по каркасу можно было судить о форме поверхности и иметь возможность осуществлять расширение дискретного каркаса до непрерывного, поверхности следует задавать каркасом, образованным двумя семействами плоских сечений.

На рис. 116 показан каркас поверхности, состоящий из двух ортогонально расположенных семейств линий $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$. При необходимости заданный каркас может быть расширен путем проведения дополнительных линий a_i и b_i в интервале между соседними линиями семейства $\{a \ldots\}$ и $\{b \ldots\}$ соответственно.

§ 26. ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ ПОВЕРХНОСТИ

Поверхность с позиции кинематического способа ее образования рассматривают как множество всех положений движущейся линии (или поверхности). При таком подходе к образованию поверхности можно утверждать, что поверхность будет задана (определена), если в любой момент движения образующей будут известны ее положение и форма, а это, в свою очередь, позволит однозначно ответить на вопрос, принадлежит ли точка пространства данной поверхности или нет.

Кинематический способ образования поверхности подводит нас к понятию *определителя*, под которым мы будем подразумевать *необходимую и достаточную совокупность геометрических фигур и связей между ними, которые однозначно определяют поверхность.* В число условий, входящих в состав определителя, должны быть включены:

1. Перечень геометрических фигур, участвующих в образовании поверхности.

2. Алгоритмическая часть, указывающая на взаимосвязь между этими фигурами.

§ 25. ОБРАЗОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТИ И ЕЕ ЗАДАНИЕ НА ЭПЮРЕ МОНЖА

Ранее отмечалось, что поверхность можно рассматривать как совокупность последовательных положений некоторой линии g_j, перемещающейся в пространстве по определенному закону.

Для получения наглядного изображения поверхности на чертеже (эпюре Монжа) закон перемещения линии g_j целесообразно задавать графически в виде совокупности линий $\{d, \ldots\}$ и указаний о характере перемещения линии g_j, при этом указания могут быть заданы также графически, в частности с помощью направляющей поверхности γ.

В процессе образования поверхности линия g_j может оставаться неизменной или менять свою форму. Подвижная линия g_j* называется *образующей*, неподвижные линии $\{d, \ldots\}$ ** и поверхность γ — *направляющими*.

Процесс образования поверхности может быть легко уяснен на примере, показанном на рис. 115. Здесь в качестве образующей взята плоская кривая $\tilde{g}_j$. Закон перемещения кривой $\tilde{g}_j$ задан двумя направляющими $\tilde{d}_1$ и $\tilde{d}_2$ и плоскостью γ, при этом имеется в виду, что образующая $\tilde{g}_j$ скользит по направляющим $\tilde{d}_1$ и $\tilde{d}_2$, все время оставаясь параллельной плоскости γ, а точка A, принадлежащая образующей $\tilde{g}_j$, перемещается по кривой $\tilde{d}_1$. Описанный способ образования поверхности называется *кинематическим*. Кинематическим способом можно образовать и с его помощью задать на чертеже разнообразные поверхности.

Каркас поверхности

Другим способом образования поверхности и ее изображения на чертеже является задание поверхности множеством принадлежащих ей точек или линий, при этом точки или линии выбираются так, чтобы они давали возможность с достаточной степенью точности определять форму поверхности и решать на ней различные задачи.

Упорядоченное множество точек или линий, принадлежащих поверхности, называется ее каркасом.

---

* g — образующая, от латинского слова *genero* — образую, порождаю.
** d — направляющая, от латинского слова *dirigo* — направляю.



Рис. 115

Итак, определитель поверхности состоит из двух частей: из совокупности геометрических фигур (первая часть) и дополнительных сведений о характере изменения формы образующей и законе ее перемещения (вторая часть). Чтобы отличить первую (геометрическую) часть определителя от второй (алгоритмической) части, условимся заключать первую — в круглые, а вторую — в квадратные скобки; тогда в общем случае определитель поверхности будет иметь следующую структурную форму:

$$\Phi\,(\Gamma);\ [A]\,,$$

где (Г) — геометрическая часть, $[A]$ — алгоритмическая часть.

Для того чтобы определитель относился к конкретному виду поверхности, необходимо в каждую часть определителя вложить конкретное содержание.

Следует иметь в виду, что при задании поверхности можно в ряде случаев вместо геометрических элементов задавать числовые параметры. Например, любая сфера будет отличаться от всех других сфер только величиной радиуса R, поэтому, задавая число, указывающее значение R, мы определяем одну единственную сферу. Очевидно, числовым параметром конической поверхности вращения может служить $\angle\varphi^\circ$ — угол между образующей и осью конической поверхности*.

Параметры поверхности бывают двух видов: параметры формы и параметры положения.

Параметры, изменение которых вызывает изменение формы поверхности, называют параметрами формы.

Параметры, изменение которых приводит к изменению положения поверхности в пространстве, называют параметрами положения.

Сумма условий, определяющих совокупность всех независимых параметров поверхности, называется ее параметрическим числом.

Параметры формы. В только что рассмотренных случаях параметр R для сферы и $\angle\varphi^\circ$ для конической поверхности относятся к параметрам формы. Число параметров, изменяющих форму поверхности, может быть любым целым положительным числом, начиная с нуля. Так, например: число параметров формы для плоскости равно нулю; для сферы — единице. Если поверхность задана своим уравнением в канонической форме, все параметры формы входят в это уравнение.

Параметры положения. Число параметров, характеризующих положение поверхности в пространстве, не может быть меньше трех и больше шести. Так, например: для плоскости оно равно трем, для трехосного эллипсоида — шести.

Если уравнение, определяющее поверхность, составлено для произвольного положения поверхности, то оно содержит не только все параметры формы, но и все параметры положения, т. е. число независимых параметров уравнения в этом случае равно параметрическому числу поверхности.

Чтобы найти (установить) определитель поверхности, следует исходить из кинематического способа ее образования. Так как поверхность может быть образована различными путями, очевидно одна и та же поверхность может иметь различные определители, например, поверхность прямого кругового цилиндра (цилиндрическую поверхность вращения) с кинематической точки зрения можно представить:

а) как след, оставляемый в пространстве прямой $\bar{g}$ при ее вращении вокруг оси i (рис. 117,*а*); при этом определитель цилиндрической поверхности вращения будет иметь вид

$$\Phi\,(\bar{g},\ i);\ [\bar{g}_j = R_i\,(\bar{g})\,];$$

* В обоих случаях положение поверхности в пространстве не учитывалось.

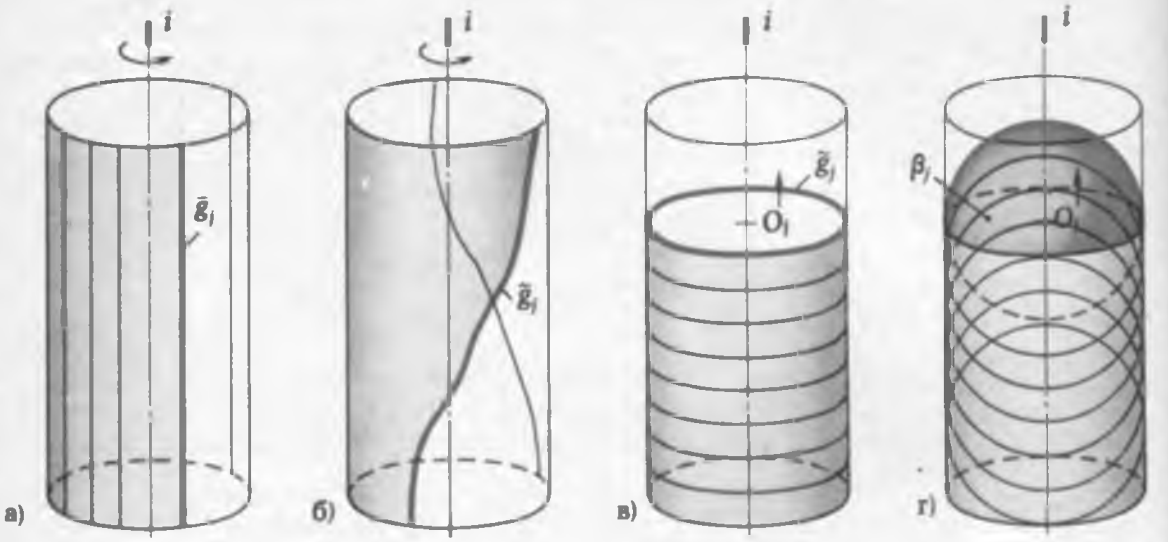


Рис. 117

б) как след от вращения кривой $\bar{g}$, принадлежащей поверхности прямого кругового цилиндра, вокруг оси i (рис. 117,*б*); в этом случае определитель поверхности можно записать:

$$\Phi(\bar{g};\ i);\ [\bar{g}_j = R_i(\bar{g})]^*;$$

в) как результат поступательного перемещения окружности $\bar{g}$, при этом центр окружности O перемещается вдоль оси i, а ее плоскость α все время остается перпендикулярной к этой оси (рис. 117,*в*); тогда определитель поверхности можно записать:

$$\Phi(\bar{g}, i);\ [\bar{g}_j = T_i(\bar{g}) \wedge (O \in i) \wedge (\bar{g} \subset \alpha \perp i)]^{**};$$

г) как огибающую всех положений сферической поверхности β, центр O которой перемещается по оси i (рис. 117,*г*); определитель в этом случае примет вид

$$\Phi(\beta, i);\ [\beta_j = T_i(\beta) \wedge (O \in i)].$$

Из множества определителей поверхности обычно выбирают наиболее простой; в рассматриваемом случае таким определителем будет

$$\Phi(\bar{g}, i);\ [\bar{g}_j = R_i(\bar{g})].$$

§ 27. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ ПОВЕРХНОСТИ

Вы уже знаете, что две ортогональные проекции на две непараллельные плоскости однозначно определяют положение точки и положение и вид линии. Переходя к рассмотрению ортогональных проек-

---

* R_i — преобразование (рассматривается как вращение вокруг оси i), переводящее любые точки A и B в такие точки A_1 и B_1, что $|AB| = |A_1B_1|$.

** T_i — преобразование (рассматривается как параллельное перемещение), переводящее точки A и B в такие точки A_1 и B_1, что $|AB| = |A_1B_1|$.

ций поверхностей, мы обнаруживаем, что некоторые поверхности не могут быть заданы своими проекциями. В справедливости этого утверждения можно убедиться на примере проецирования простейшей поверхности — плоскости. Действительно, если мы будем проецировать все точки плоскости, занимающей произвольное положение по отношению к плоскостям проекций, то проекции множества точек плоскости покроют полностью все плоскости проекций. Это произойдет потому, что плоскость является незамкнутой поверхностью — она может быть безгранично продлена в любом направлении.

Не только незамкнутые поверхности невозможно задать проекциями всех принадлежащих им точек, но и ряд замкнутых поверхностей при определенной ориентации их к плоскостям проекций не могут быть определены (заданы) ортогональными проекциями их точек, например, если ось поверхности кольца занимает положение, перпендикулярное к плоскости проекции, то кольцевую поверхность можно задать ее двумя ортогональными проекциями (рис. 118,*а*), но стоит только перевести ось кольца в наклонное положение, как задание этой поверхности двумя ортогональными проекциями (на те же плоскости проекций) становится невозможным (рис. 118,*б*).

Чтобы задать поверхность на чертеже, достаточно указать проекции не всего множества точек или линий, принадлежащих поверхности, а только некоторых из них, с помощью которых может быть установлено взаимно однозначное соответствие между образом (проекцией) и прообразом (объектом проецирования). Такими точками или линиями могут быть точки или линии, входящие либо в состав определителя поверхности, либо в ее каркас (точечный или линейный). В первом случае поверхность задается определителем, во втором — каркасом.

Задание поверхности проекциями ее определителя не всегда обеспечивает наглядность, а это, в свою очередь, затрудняет чтение чертежа, поэтому для получения наглядного изображения поверхности на эпюре

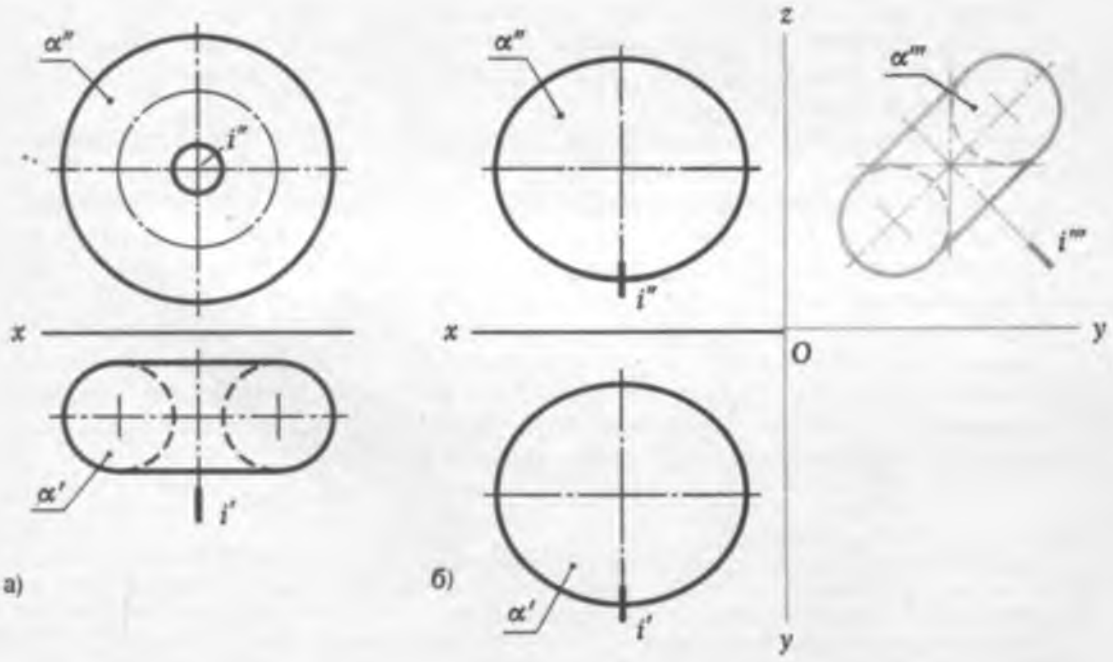


Рис. 118

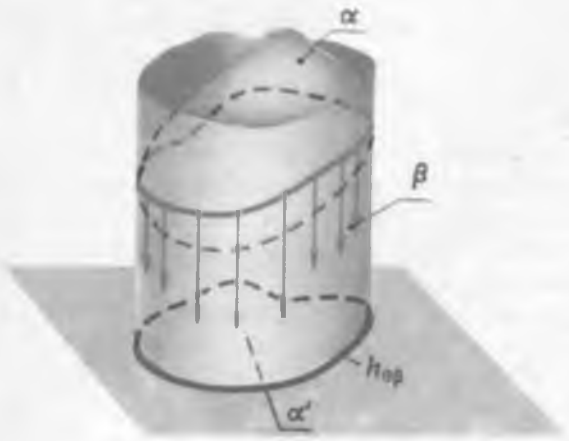


Рис. 119

Монжа в ряде случаев следует указывать *очерк* (очертание) этой поверхности.

Очерком поверхности (при ортогональном проецировании) *называют след на плоскости проекции проецирующей цилиндрической поверхности, которая огибает заданную поверхность.*

Рис. 119 дает наглядное представление о том, как получается очерк произвольной замкнутой поверхности α на горизонтальную плоскость проекции.

§ 28. КЛАССИФИКАЦИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ*

Многообразие форм поверхностей создает большие трудности при их изучении. Для того чтобы облегчить процесс изучения поверхностей, целесообразно осуществить их систематизацию, распределив все поверхности по классам, подклассам, группам и подгруппам.

При делении поверхностей на классы, подклассы, группы, подгруппы следует к одной классификационной категории относить поверхности, обладающие характерным признаком, который у поверхностей, входящих в другую категорию, отсутствует. Таким признаком может служить, в частности, единство способов образования поверхностей, т. е. тех условий, которые входят в определитель поверхности. Поэтому в основу систематизации поверхностей может быть положен их определитель.

Будем считать, что поверхности принадлежат одному классу, если они имеют одинаковое содержание геометрической части определителя. Используя этот критерий, все многообразие поверхностей можно отнести к двум классам:

класс I составляют поверхности, образующие $\bar{g}_j$ которых — кривые линии;

класс II объединяет поверхности, образованные прямой линией, т. е. $\bar{g}_i$ — прямая.

Поверхности, входящие в класс I, называются *нелинейчатыми* в отличие от поверхностей класса II, которые считаются *линейчатыми*.

При отнесении поверхностей к классам I или II во внимание принималась геометрическая часть определителя — вид линии, образующей поверхность. Условия алгоритмической части определителя, характеризующие закон движения образующей, позволяют выделить из классов I и II поверхностей три подкласса (рис. 120).

---

* Следует иметь в виду, что многообразие поверхностей и способов их получения не имеет предела, поэтому создать строгую систему для классификации поверхностей не представляется возможным. Более того, с геометрической точки зрения классификация поверхностей не может иметь научного обоснования. Что касается методики, используемой в процессе обучения, то здесь, напротив, всякая попытка систематизации материала, в том числе и рассматриваемого вопроса о классификации поверхностей, заслуживает самого серьезного внимания.

Подкласс 1 содержит поверхности, образованные поступательным перемещением образующей линии. Такие поверхности называют *поверхностями параллельного переноса*. Их определитель — $\Phi(g, d)$; $[g_j = T_d(g)]$ *.

Подкласс 2 составляют поверхности, образованные вращением образующей линии — *поверхности вращения*. Их определитель — $\Phi(g, i)$; $[g_j = R_i(g)]$ *.

Подкласс 3 включает поверхности, образованные винтовым перемещением образующей, — *винтовые поверхности*. Их определитель — $\Phi(g, i)$; $[g_j = T_i(g) \circ R_i(g)]$ **.

Поверхности подклассов 1, 2 и 3 имеют одинаковую геометрическую часть определителя. В зависимости от вида образующей (кривая или прямая) поверхности параллельного переноса, вращения и винтовые могут быть отнесены как к первому ($\tilde{g}$ — кривая) ***, так и ко второму ($\bar{g}$ — прямая) классам (см. рис. 120).

Каждый из классов I и II делится на группы А, Б, ... , которые могут быть подразделены на подгруппы а, б, ... В свою очередь, подгруппы состоят из отдельных видов поверхностей α, β, ... Критерии для деления на группы, подгруппы и виды также берутся из определителя по-

---

* Выражения $T_d(g)$ и $R_i(g)$ указывают на характер движения образующей g, так $T_d(g)$ — поступательное перемещение вдоль d, $R_i(g)$ — вращение вокруг i.

** Здесь $T_i(g) \circ R_i(g)$ — композиция из двух движений: параллельного перемещения вдоль оси и вращения вокруг оси i.

***Следует помнить, что образующая кривая $\tilde{g}$ не меняет своей формы.

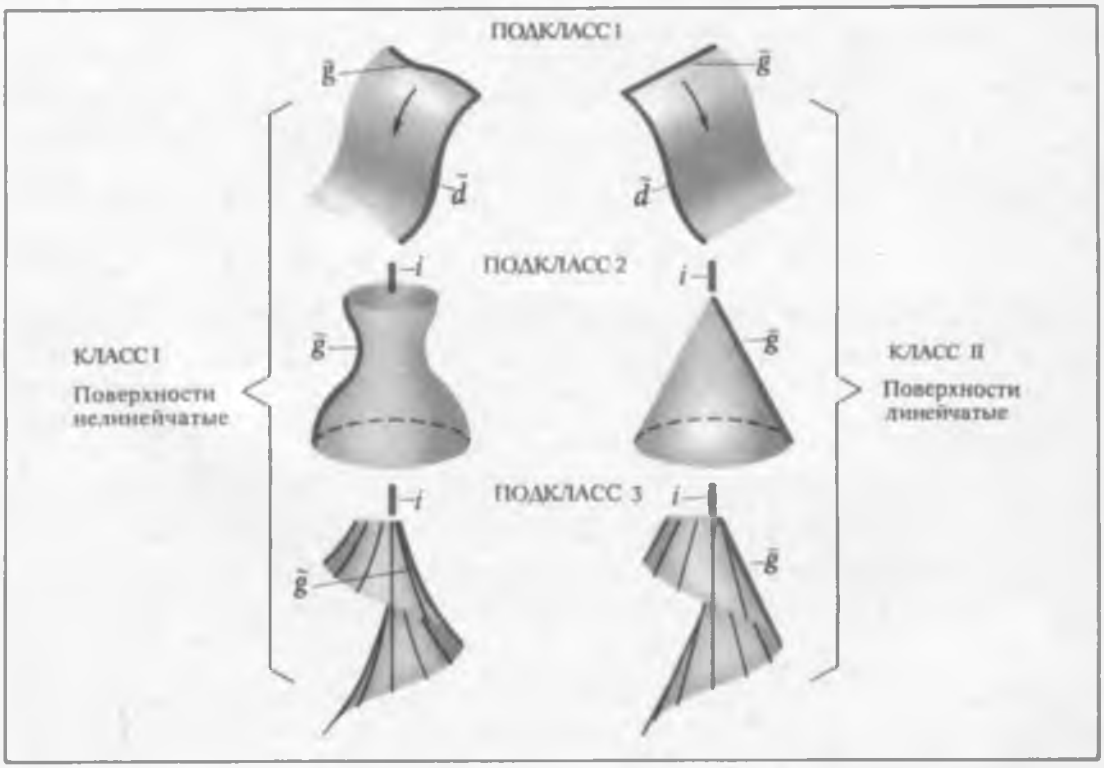


Рис. 120

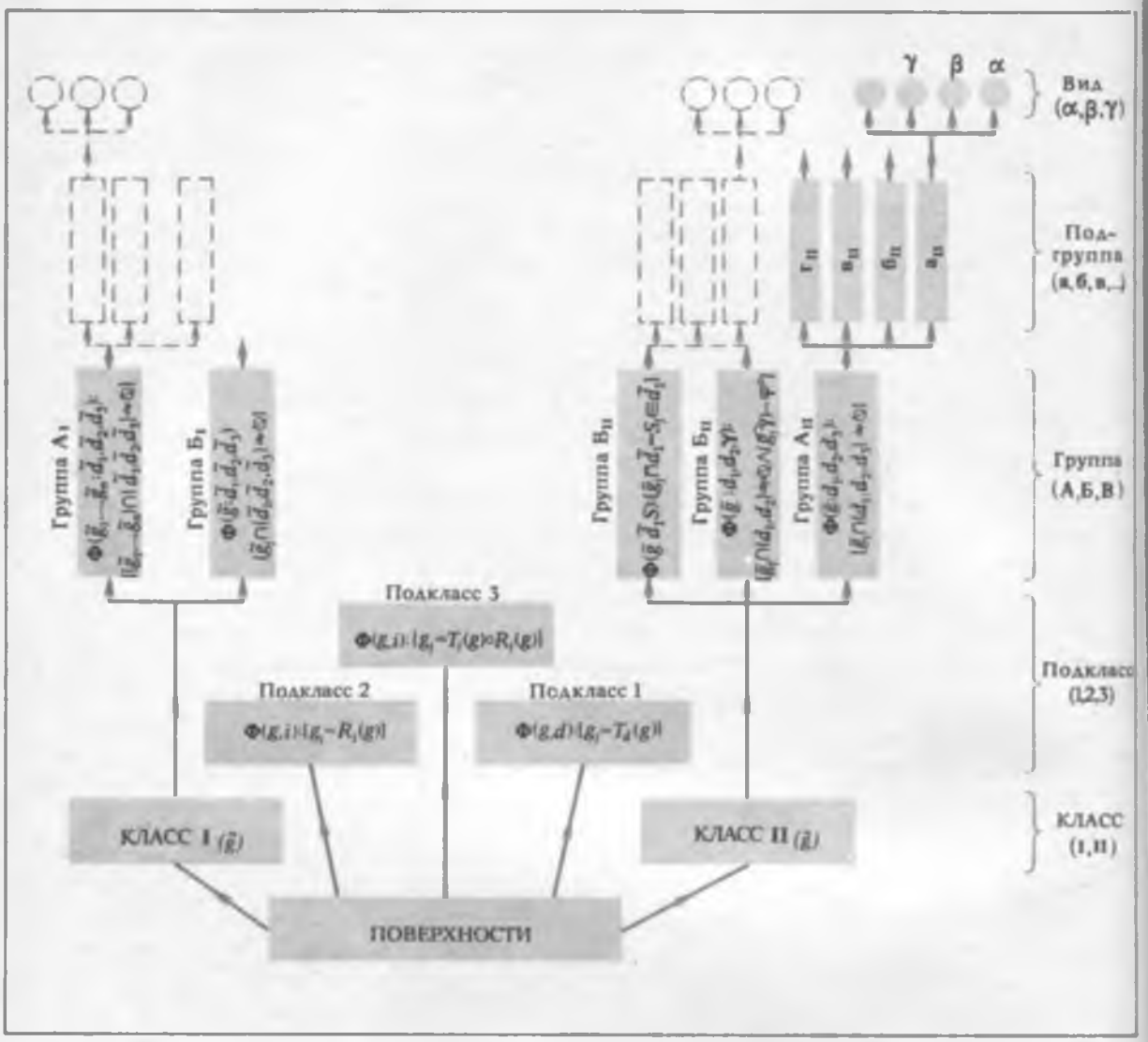


Рис. 121

верхности. На рис. 121 показана общая структура отнесения поверхностей к классам, подклассам, группам, подгруппам и видам. Из рис. 121 видно, что класс II (линейчатые поверхности) содержит три группы $А_{II}$, $Б_{II}$, $В_{II}$. Признаком для такого деления служит число направляющих линий:

группа $А_{II}$ — линейчатые поверхности с тремя направляющими

$$\Phi(\bar{g};\ d_1, d_2, d_3);\ [\bar{g}_j \cap \{d_1, d_2, d_3\} \neq \varnothing];$$

группа $Б_{II}$ — линейчатые поверхности с двумя направляющими (функции третьей направляющей выполняет направляющая плоскость γ)

$$\Phi(\bar{g};\ d_1, d_2, \gamma);\ [\bar{g}_j \cap \{d_1, d_2\} \neq \varnothing \wedge (\widehat{\bar{g}_j\gamma}) = \varphi^\circ];$$

группа $В_{II}$ — линейчатые поверхности с одной направляющей (ребром возврата); в этом случае все три направляющие "совпадают" с ребром возврата $\tilde{d}_1\ |\tilde{d}_1 \equiv \tilde{d}_2 \equiv \tilde{d}_3|$

$$\Phi(\bar{g};\ \tilde{d});\ [\bar{g} \sqcap \{\tilde{d}_1 \equiv \tilde{d}_2 \equiv \tilde{d}_3\} \neq \varnothing].$$

В свою очередь, каждая группа подразделяется на подгруппы. Так, группа A_{II} содержит четыре подгруппы (см. рис. 121):

a_{II} — косой цилиндр с тремя направляющими

$$\Phi(\bar{g};\ \tilde{d}_1, \tilde{d}_2, \tilde{d}_3);\ [\bar{g}_j \cap \{\tilde{d}_1, \tilde{d}_2, \tilde{d}_3\} \nsim \mathbb{O}],$$

все три направляющие $\tilde{d}_1, \tilde{d}_2, \tilde{d}_3$ — кривые;

$б_{II}$ — дважды косой цилиндроид

$$\Phi(\bar{g};\ \tilde{d}_1, \tilde{d}_2, \bar{d}_3);\ [\bar{g}_j \cap \{\tilde{d}_1, \tilde{d}_2, \bar{d}_3\} \nsim \mathbb{O}],$$

две направляющие $\tilde{d}_1, \tilde{d}_2$ — кривые, $\bar{d}_3$ — прямая;

$в_{II}$ — дважды косой коноид

$$\Phi(\bar{g};\ \tilde{d}_1, \bar{d}_2, \bar{d}_3);\ [\bar{g}_j \cap \{\tilde{d}_1, \bar{d}_2, \bar{d}_3\} \nsim \mathbb{O}];$$

одна направляющая $\tilde{d}_1$ — кривая, две $\bar{d}_2, \bar{d}_3$ — прямые;

$г_{II}$ — однополостный гиперболоид

$$\Phi(\bar{g};\ \bar{d}_1, \bar{d}_2, \bar{d}_3);\ [\bar{g}_j \cap \{\bar{d}_1, \bar{d}_2, \bar{d}_3\} \nsim \mathbb{O}];$$

все три направляющие $\bar{d}_1, \bar{d}_2, \bar{d}_3$ — прямые.

Каждая из подгрупп включает отдельные виды поверхностей, например, в подгруппу $б_{II}$ входят: α — поверхность косого клина, β — поверхность дважды косого винтового цилиндроида и γ — поверхность косого перехода.

Рассмотрим более подробно поверхности, входящие в каждый из отмеченных классов и подклассов.

КЛАСС I

§ 29. НЕЛИНЕЙЧАТЫЕ ПОВЕРХНОСТИ С ОБРАЗУЮЩЕЙ ПЕРЕМЕННОГО ВИДА (ГРУППА A_I)

Эта группа поверхностей имеет единый по форме определитель

$$\Phi(\tilde{g}_1, \ldots, \tilde{g}_n;\ \tilde{d}_1, \tilde{d}_2, \tilde{d}_3);\ [\{\tilde{g}_1, \ldots, \tilde{g}_n\} \cap \{\tilde{d}_1, \tilde{d}_2, \tilde{d}_3\} \nsim \mathbb{O}]^*,$$

в котором $\tilde{g}_j$ — образующая переменного вида, d_1, d_2, d_3 — направляющие *.

Примечание. В ряде случаев закон перемещения образующей может быть задан не тремя, а двумя $(\tilde{d}_1, \tilde{d}_2)$ и даже одной $(\tilde{d}_1)$ направляющей. В двух последних случаях вместо отсутствующих направляющих указываются дополнительные условия.

В качестве примера можно привести поверхность α, показанную на рис. 115, у которой закон перемещения образующей g_j задан двумя направляющими $\tilde{d}_1$ и $\tilde{d}_2$ и плоскостью γ, которая выполняет функции третьей направляющей d_3. Определитель этой поверхности имеет вид

$$\Phi(\tilde{g};\ \tilde{d}_1, \tilde{d}_2, \gamma);\ [\tilde{g}_j \cap \{\tilde{d}_1, \tilde{d}_2.\} \nsim \mathbb{O} \wedge (\widehat{\tilde{g}_j \gamma} = 0^{-}) \wedge (\tilde{g}_j \ni A \in \tilde{d}_1)].$$

---

* Здесь, как и в определителе поверхностей групп $Б_I$, A_{II}, $Б_{II}$ (см. § 28, 30, 32, 33, 34), некоторые из направляющих d_1, d_2, d_3 могут быть не только кривыми $\tilde{d}$, но и прямыми $\bar{d}$ линиями.

Таблица 2. Нелинейчатые поверхности с образующей переменного вида. Группа A_I; $\Phi(\widetilde{g}_1, \ldots, \widetilde{g}_n; \widetilde{d}_1, \widetilde{d}_2, \widetilde{d}_3)$; $[\{\widetilde{g}_1, \ldots, \widetilde{g}_n\} \cap \{\widetilde{d}_1, \widetilde{d}_2, \widetilde{d}_3\} \neq \mathbb{Q}]$

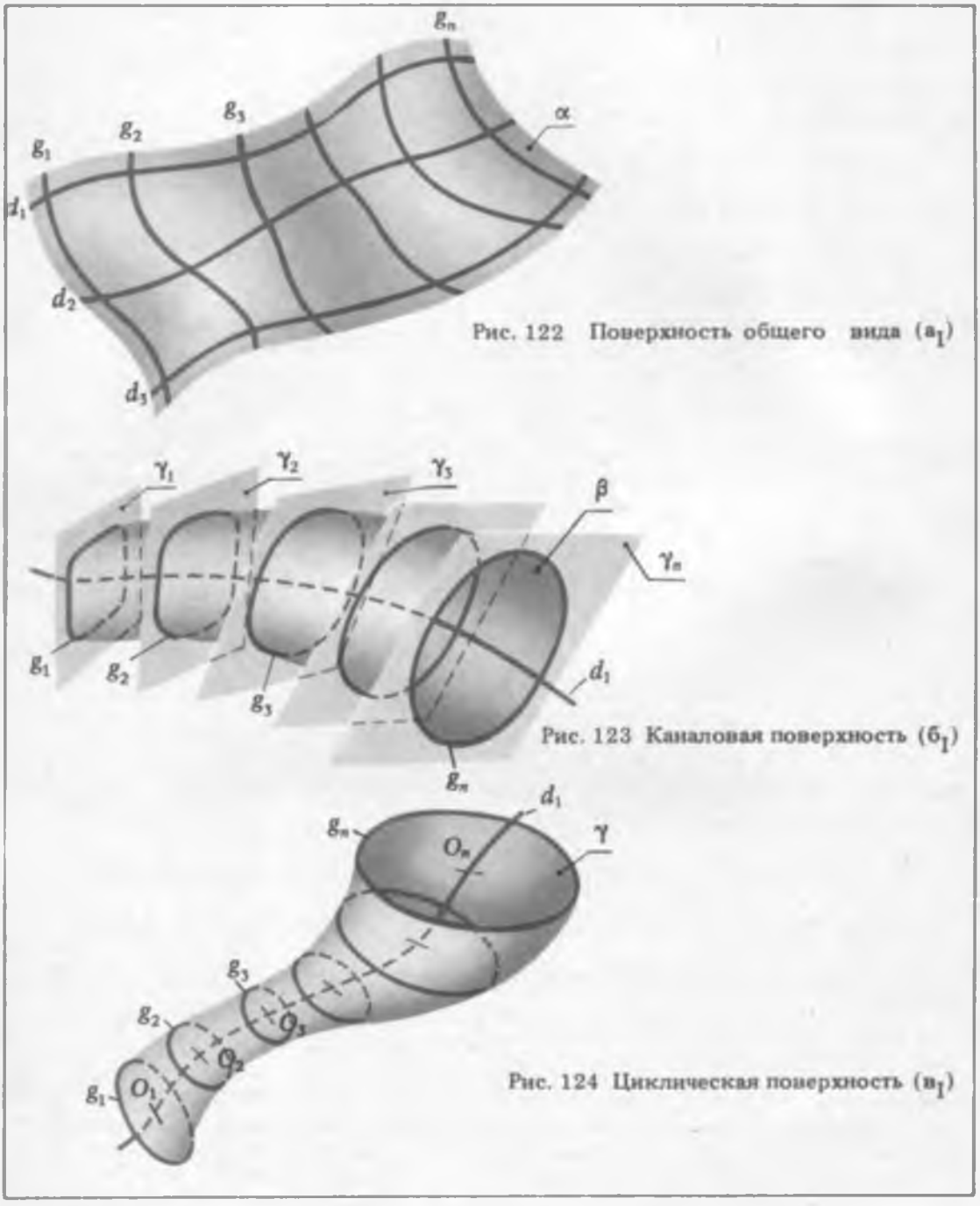


Рис. 122 Поверхность общего вида ($а_I$)

Рис. 123 Каналовая поверхность ($б_I$)

Рис. 124 Циклическая поверхность ($в_I$)

Смысловое значение алгоритмической части этого определителя может быть выражено следующим предложением: криволинейная образующая $(\widetilde{g})$ пересекает направляющие $\widetilde{d}_1$ и $\widetilde{d}_2$ (пересечение $\widetilde{g}_j$ с $\widetilde{d}_1$ и $\widetilde{d}_2$ является не пустым множеством $-\widetilde{g}_j \cap \{\widetilde{d}_1, \widetilde{d}_2\} \neq \mathbb{Q}$) и образующая $\widetilde{g}_j$ параллельна плоскости γ $(\widehat{\widetilde{g}_j \gamma} = 0^\circ)$, а точка A, принадлежащая образующей $\widetilde{g}_j$, скользит по направляющей $\widetilde{d}_1$ $(\widetilde{g}_j \ni A \in \widetilde{d}_1)$.

Другим примером может служить трубчатая поверхность β (см. рис. 126), у которой задана только одна направляющая $\widetilde{d}_1$. Отсутствие направляющих $\widetilde{d}_2$ и $\widetilde{d}_3$ компен-

сируется дополнительным условием, входящим в алгоритмическую часть определителя этой поверхности, которое заключается в том, что центр окружности O перемещается вдоль направляющей $\widetilde{d}_1$, а ее плоскость γ все время остается перпендикулярной к $\widetilde{d}_1$.

Рассматриваемая группа поверхностей включает в себя три подгруппы.

1. Подгруппа а$_I$ — *поверхность общего вида* α (табл. 2, рис. 122). *Такая поверхность может быть образована перемещением произвольной* (плоской или пространственной) *кривой* $\widetilde{g}_j$ *по направляющим* $\widetilde{d}_1$, $\widetilde{d}_2$, d_3. *В процессе движения образующая* $\widetilde{g}_j$ *все время меняет свою форму, принимая вид* $\widetilde{g}_1, \widetilde{g}_2, \widetilde{g}_3, \ldots, \widetilde{g}_n$;

2. Подгруппа б$_I$ — каналовая поверхность β (табл. 2, рис. 123). *Каналовой поверхностью называют поверхность, образованную непрерывным каркасом замкнутых плоских сечений, определенным образом ориентированных в пространстве.* Площади этих сечений могут оставаться постоянными или монотонно изменяться в процессе перехода от одного сечения к другому. В инженерной практике наибольшее распространение получили два способа ориентирования плоскостей образующих:

1) параллельно какой-либо плоскости — каналовые поверхности с плоскостью параллелизма;

2) перпендикулярно к направляющей линии — прямые каналовые поверхности.

Каналовая поверхность может быть использована для создания переходных участков между двумя поверхностями типа трубопроводов, имеющих:

а) различную форму, но одинаковую площадь нормального сечения;

б) одинаковую форму, но различные площади сечения;

в) различную форму и различные площади поперечных сечений.

3. Подгруппа в$_I$ — *циклическая поверхность* γ (табл. 2, рис. 124). Циклическую поверхность можно рассматривать как частный случай каналовой поверхности. *Она образуется с помощью окружности, центр которой перемещается по криволинейной направляющей. В процессе движения радиус окружности монотонно меняется.*

§ 30. НЕЛИНЕЙЧАТЫЕ ПОВЕРХНОСТИ С ОБРАЗУЮЩЕЙ ПОСТОЯННОГО ВИДА (ГРУППА Б$_I$)

Определитель таких поверхностей имеет вид

$$\Phi\,(\widetilde{g};\ \widetilde{d}_1, \widetilde{d}_2, \widetilde{d}_3);\ [\widetilde{g}_j \cap \{\widetilde{d}_1, \widetilde{d}_2, \widetilde{d}_3\} \neq \varnothing],$$

где $\widetilde{g}$ — образующая, $\widetilde{d}_1$, $\widetilde{d}_2$, $\widetilde{d}_3$ — направляющие.

Нелинейчатые поверхности с образующей постоянного вида (группа Б$_I$) содержит две подгруппы.

1. Подгруппа г$_I$ — поверхность общего вида (табл. 3, рис. 125) *образуется произвольной* (плоской или пространственной) *кривой* $\widetilde{g}$, *характер перемещения которой определяется формой и положением направляющей* d_1 *и дополнительным условием* (на рис. 125 оно состоит в том, что *точка* $A \in \widetilde{g}$ *скользит по направляющей* d_1, *а бинормаль кривой* $\widetilde{g}$ *в точке* A *принадлежит спрямляющей плоскости* γ *кривой* d_1).

Таблица 3. Нелинейчатые поверхности с образующей постоянного вида. Группа $Б_I$; $\Phi(\tilde{g};\ \tilde{d}_1, \tilde{d}_2, \tilde{d}_3)$; $[\tilde{g}_j \cap \{\tilde{d}_1, \tilde{d}_2, \tilde{d}_3\} \neq \varnothing]$

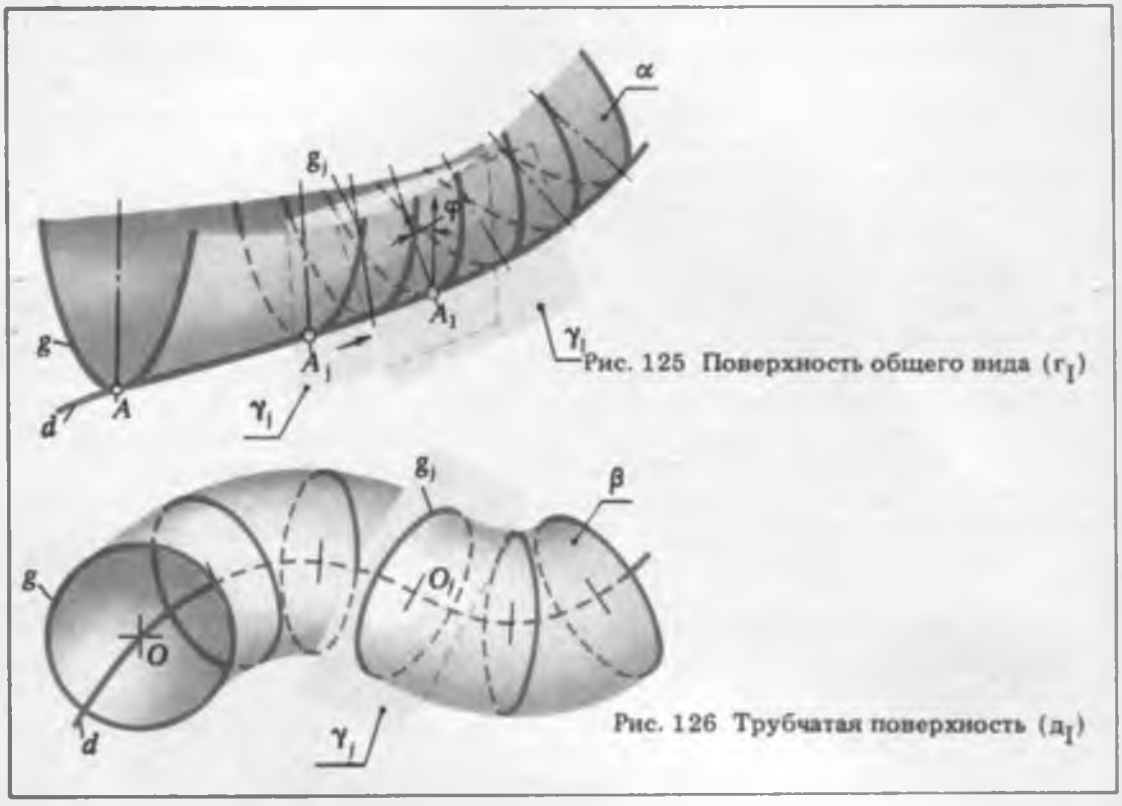


Рис. 125 Поверхность общего вида ($г_I$)

Рис. 126 Трубчатая поверхность ($д_I$)

2. Подгруппа $д_I$ — трубчатая поверхность (табл. 3, рис. 126). Трубчатая поверхность является частным случаем циклической и каналовой поверхностей. Она обладает свойствами, присущими этим видам поверхностей. У циклической поверхности она позаимствовала форму образующей, а у каналовой — закон движения этой образующей.

Итак, *трубчатая поверхность может быть получена при движении окружности постоянного радиуса по криволинейной направляющей; плоскость окружности все время остается перпендикулярной к направляющей.*

КЛАСС II

§ 31. ЛИНЕЙЧАТЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

Линейчатая поверхность в общем случае однозначно определяется тремя направляющими линиями. Действительно, пусть даны три пространственные кривые линии $\tilde{d}_1$, $\tilde{d}_2$ и $\tilde{d}_3$ (рис. 127). Возьмем на кривой $\tilde{d}_1$ произвольную точку M, примем ее за вершину конической поверхности α, а за направляющую этой поверхности примем дугу кривой $\tilde{d}_3$. Если N — точка пересечения дуги кривой $\tilde{d}_2$ с поверхностью α, то (MN) пересечет дугу кривой d_3 в точке L. То, что (MN) обязательно пересечет дугу кривой d_3, не вызывает сомнения, так как (MN) и кривая d_3 принадлежит одной и той же поверхности α. Из рис. 127 видно, что через точку M, взятую на направляющей d_1, проходит одна прямолиней-

ная образующая $\bar{g}$, пересекающая две другие направляющие $\tilde{d}_2$ и $\tilde{d}_3$*. Задавая другое положение точки $M \to M_1$ и принимая точку M_1 за вершину конической поверхности, мы получим при той же направляющей $\tilde{d}_3$ отсек новой конической поверхности α_1, которую дуга кривой $\tilde{d}_2$ пересечет в точке N_1. Точки M_1 и N_1 определяют прямую (M_1N_1), которая пересечет третью направляющую $\tilde{d}_3$ в точке L_1. (M_1L_1) — новая образующая g_1 линейчатой поверхности.

Описанным способом можно построить любое число прямолинейных образующих, которые выделят в пространстве одну единственную линейчатую поверхность. Следует иметь в виду, что нельзя за направляющие брать три различные по форме и произвольно расположенные линии. Произвольно можно задавать только две направляющие, форму и положение третьей направляющей выбирают так, чтобы она находилась внутри конгруенции** прямых, определяемой двумя уже взятыми направляющими.

Чтобы третья направляющая принадлежала линейчатой поверхности, она должна входить внутрь конгруенции, определяемой первыми двумя направляющими. Иными словами, задав дуги двух направляющих линей-

---

* Несмотря на то, что кривые $\tilde{d}_1$, $\tilde{d}_2$ и $\tilde{d}_3$, показанные на рис. 127, будут кратными (через точку M проходит не одна, а $n_2 \times n_3$ образующих, где n_2 — порядок кривой $\tilde{d}_2$, n_3 — порядок кривой $\tilde{d}_3$), мы рассматриваем случай, когда линия d_1 пересекает коническую поверхность α, заданную точкой M и направляющей $\tilde{d}_3$, только один раз. Такое допущение возможно в том случае, если рассматривать не всю поверхность α, а только ее отсек, в формировании которого принимает участие не вся кривая $\tilde{d}_3$, а только ее дуга $\overset{\frown}{1\ 2}$.

** Под конгруенцией прямых подразумевается множество прямых, зависящих от двух параметров. Например, если взять две произвольные кривые $\tilde{d}_1$ и $\tilde{d}_2$ (рис. 128) и на кривой $\tilde{d}_1$ отметить точку M, приняв ее за вершину конической поверхности с направляющей $\tilde{d}_2$, то мы получим множество прямых (образующих конической поверхности), проходящих через точку $M \in d_1$, и одну из точек, принадлежащих множеству, определяющему линию $\tilde{d}_2$. Если принять, что точка M будет перемещаться по кривой $\tilde{d}_1$, последовательно занимая положения M_1, M_2, M_3, ... , M_n, то мы получим новые конические поверхности α_1, α_2, α_3, ... , α_n, прямолинейные образующие которых заполнят некоторый отсек пространства. Множество всех прямых — образующих конических поверхностей, за вершины которых взяты последовательно все точки одной линии $\tilde{d}_1$ ($\tilde{d}_2$), а за направляющую принята вторая линия $\tilde{d}_2$ ($\tilde{d}_1$), является двупараметрическим множеством, т. е. конгруенцией.

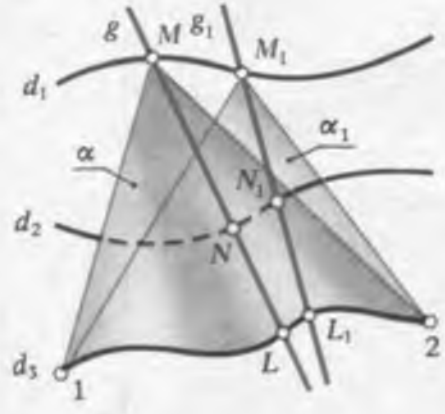


Рис. 127

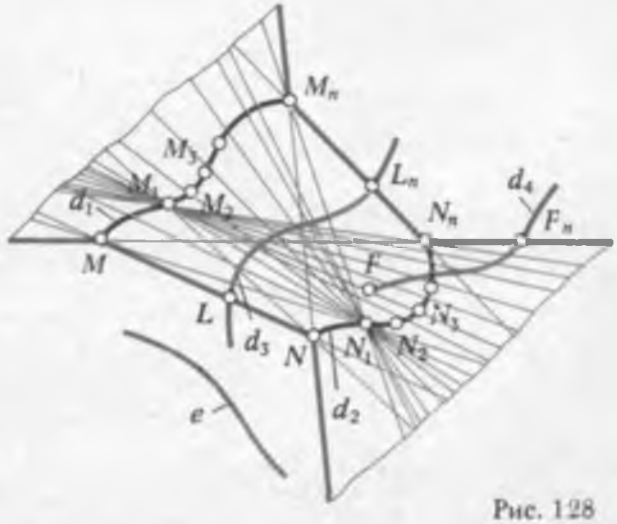


Рис. 128

чатой поверхности, мы определяем область ее существования. На рис. 128 эта область ограничена линиями красного цвета. Очевидно, дуга кривой $\tilde{d}_3$, ограниченная точками L и L_{n_2}, будет принимать участие совместно с дугами кривых $\tilde{d}_1$ ($\widehat{MM_n}$) и $\tilde{d}_2$ ($\widehat{NN_n}$) в образовании линейчатой поверхности ($\widehat{LL_n}$ лежит внутри конгруенции). Кривая $\tilde{d}_4$ может быть использована в качестве третьей направляющей только на участке $\widehat{FF_n}$ (т. е. в той части, которая лежит внутри конгруенции).

Кривая e, не погруженная в область конгруенции прямых, не будет принадлежать линейчатой поверхности и, следовательно, не может быть принята за третью направляющую*.

Теперь, после того как мы познакомились с требованием к заданию третьей направляющей линейчатой поверхности, можно перейти к рассмотрению различных групп этих поверхностей и, в частности, рассмотреть задание их на чертеже, а также возможности использования в технике.

§ 32. ЛИНЕЙЧАТЫЕ ПОВЕРХНОСТИ С ТРЕМЯ НАПРАВЛЯЮЩИМИ (ГРУППА A_{II})

Классификация линейчатых поверхностей и их распределение по группам и подгруппам в рамках общей схемы классификации поверхностей (см. рис. 121) в зависимости от вида определителя, содержащего информацию о числе направляющих, показаны на рис. 129.

---

* Мы рассматриваем случай, когда образующие будут действительными прямыми.

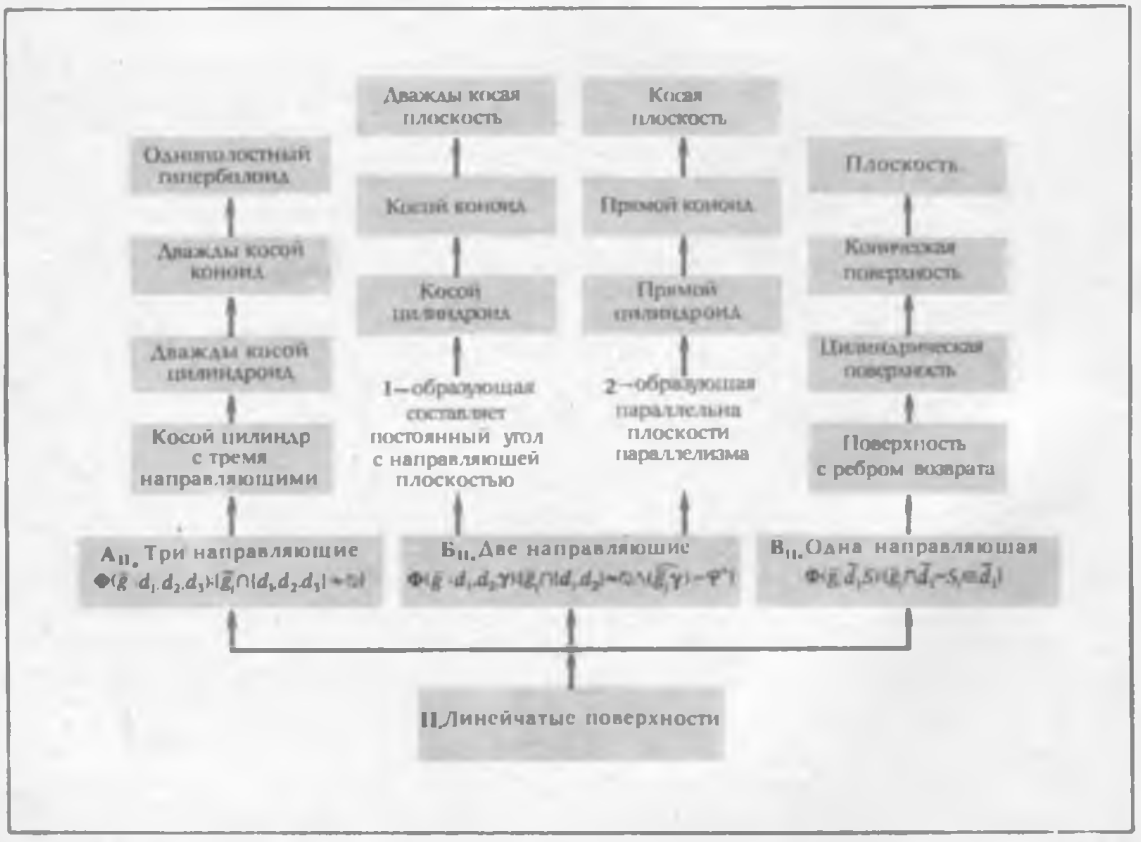


Рис. 129

Из рис. 129 видно, что все многообразие линейчатых поверхностей может быть отнесено к трем группам:

группа A_{II} — линейчатые поверхности с тремя направляющими;

группа $Б_{II}$ — линейчатые поверхности с двумя направляющими;

группа B_{II} — линейчатые поверхности с одной направляющей. Рассмотрение линейчатых поверхностей начнем с группы A_{II}. Определитель этой наиболее общей группы линейчатых поверхностей имеет вид

$$\Phi(\bar{g};\ d_1, d_2, d_3);\ [\bar{g}_j \cap \{d_1, d_2, d_3\} \neq \varnothing],$$

где $\bar{g}$ — прямая, образующая, d_1, d_2 и d_3 — направляющие.

Таблица 4. Линейчатые поверхности с тремя направляющими. Группа A_{II}; $\Phi(\bar{g};\ d_1, d_2, d_3);\ [\bar{g}_j \cap \{d_1, d_2, d_3\} \neq \varnothing]$

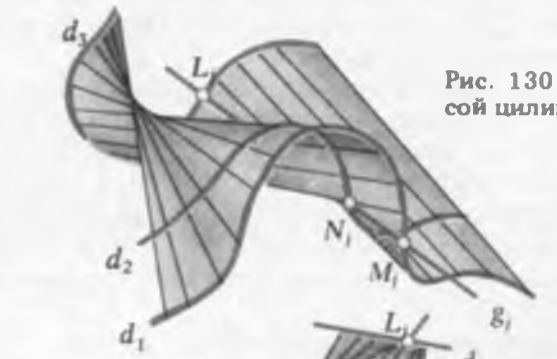


Рис. 130 Поверхность общего вида (косой цилиндр с тремя направляющими)

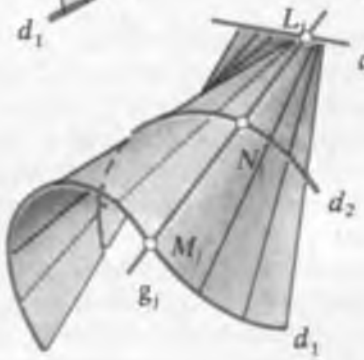


Рис. 131 Дважды косой цилиндроид

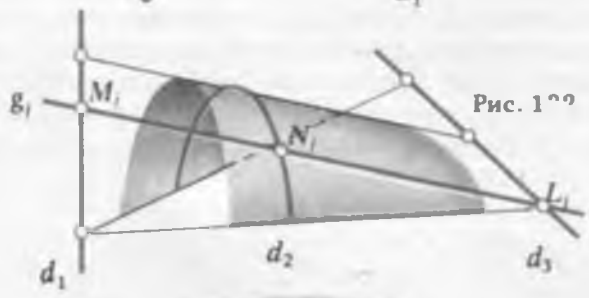


Рис. 132 Дважды косой коноид

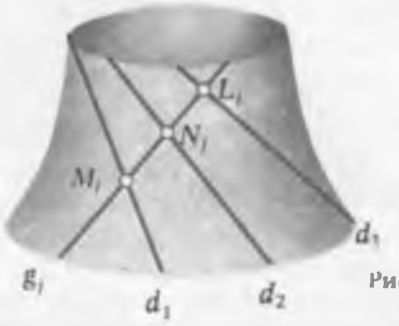


Рис. 133 Однополостный гиперболоид

В зависимости от формы направляющих и их расположения в пространстве можно получить различные поверхности этой группы, которые могут быть отнесены к четырем подгруппам (табл. 4, рис. 130 ... 133).

1. **Поверхность косого цилиндра с тремя направляющими** (см. табл. 4, рис. 130). Эта поверхность может быть задана на эпюре Монжа проекциями трех криволинейных направляющих и пересекающей их прямолинейной образующей.

2. **Поверхность дважды косого цилиндроида** (см. табл. 4, рис. 131). Она образуется в том случае, когда две из трех направляющих кривые, а третья — прямая линия. В инженерной практике находят применение частные случаи поверхностей этого вида.

Поверхность косого клина. Эта поверхность получается в том случае, когда все три направляющие расположены в параллельных плоскостях, причем криволинейные направляющие — гладкие кривые. Поверхность косого клина используется при конструировании поверхности крыла летательного аппарата (рис. 134). При этом достигаются хорошие технологические условия изготовления его каркаса.

Поверхность косого перехода. Для образования поверхности косого перехода в качестве криволинейных направляющих берут дуги окружностей одинакового радиуса, расположенные в параллельных плоскостях, а в качестве третьей направляющей — прямую, перпендикулярную к плоскостям окружностей и проходящую через середину отрезка, который соединяет центры окружностей (рис. 135). Поверхности косого перехода применяются в архитектуре и строительной практике.

3. **Поверхность дважды косого коноида** (см. табл. 4, рис. 132). Эта поверхность образуется в том случае, когда одна из трех направляющих кривая, а две другие — прямые линии.

4. **Поверхность однополостного гиперболоида** (см. табл. 4, рис. 133). Поверхность однополостного гиперболоида может быть получена при движении прямолинейной образующей по трем скрещивающимся прямым, не параллельным одной плоскости.

На рис. 136 поверхность однополостного гиперболоида задана прямыми направляющими $\bar{d}_1$, $\bar{d}_2$, $\bar{d}_3$ и показаны образующие $\bar{g}_1$, $\bar{g}_2$ и $\bar{g}_3$. Определение положения образующей рассмотрим на примере построения прямой $\bar{g}_1$. На направляющей $\bar{d}_1$ отмечаем произвольную точку *1* (*1'*, *1''*). Эта точка совместно с направляющей $\bar{d}_2$ (прямая $\bar{d}_2$ для упрощения геометрических построений принята горизонтально проецирующей) определяет плоскость β. Находим точку $2 = \bar{d}_3 \cap h_{0\beta}$. Точки *1* и *2* определяют образующую $\bar{g}_1$. Аналогично находят проекции прямых $\bar{g}_2$ и $\bar{g}_3$.

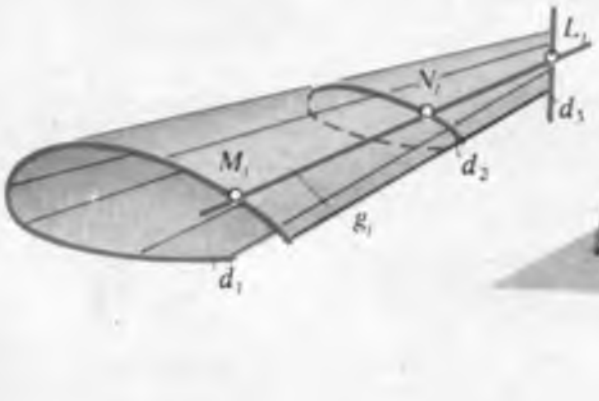


Рис. 134

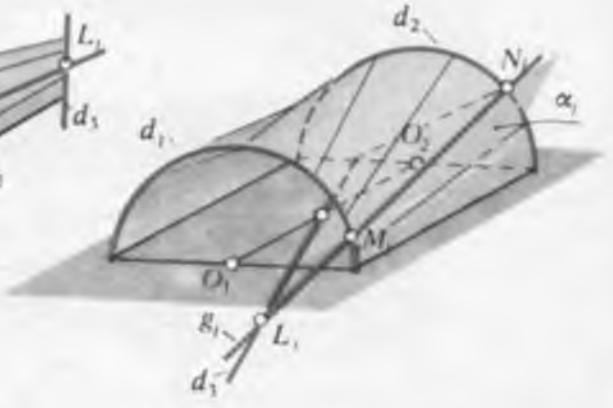


Рис. 135

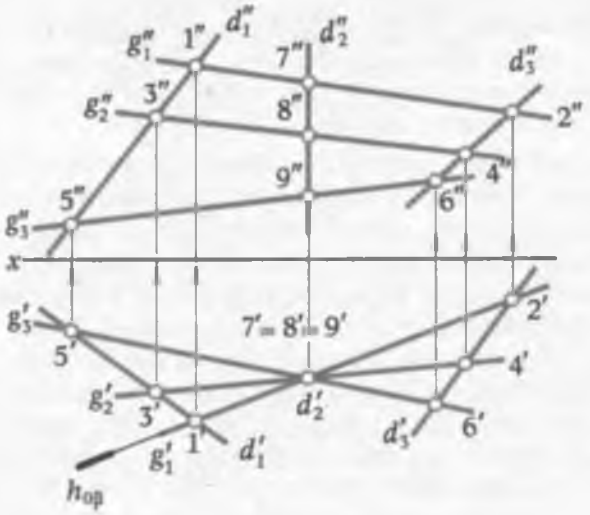


Рис. 136

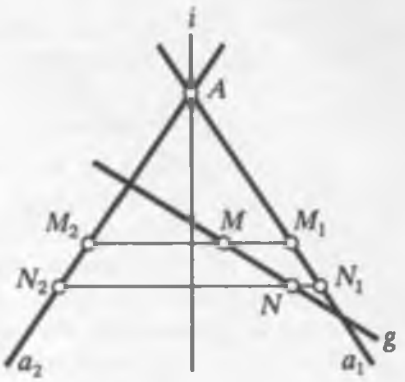


Рис. 137

Поверхность однополостного гиперболоида обладает одним замечательным свойством: направляющие d_1, d_2, d_3 можно принять за образующие, а образующие g_1, g_2, g_3 считать направляющими, при этом получится та же самая поверхность, т. е. определители

$$\Phi(g;\ d_1, d_2, d_3);\ |g_j \cap \{d_1, d_2, d_3\} \neq \varnothing|,$$
$$\Phi(d;\ g_1, g_2, g_3);\ |d_j \cap \{g_1, g_2, g_3\} \neq \varnothing|$$

тождественны. Иными словами, в однополостном гиперболоиде имеются два семейства прямолинейных образующих, причем образующие одного семейства не пересекаются между собой, но каждая из образующих одного семейства пересекает все образующие другого семейства.

Можно представить случай, когда три прямолинейные образующие могут быть совмещены друг с другом путем вращения вокруг некоторой оси. В этом случае вся поверхность может быть образована вращением только одной из трех образующих вокруг этой оси. Покажем, что при этом получается поверхность однополостного гиперболоида.

Пусть прямая g (рис. 137) вращается вокруг оси i (прямая g и ось i скрещивающиеся). Проведем прямую a, пересекающую ось i в точке A. Прямые a и i определяют меридиональную плоскость поверхности, которая образуется вращением прямой g. При вращении прямой a вокруг оси i образуется коническая поверхность вращения, заданная на чертеже двумя положениями образующей a_1, a_2 и осью i. Прямая g, не параллельная этой конической поверхности, пересечет ее в двух точках. Допустим, что этими точками будут M и N. При вращении прямая g пересечет прямые a_1 и a_2 в точках M_1, N_1 и M_2, N_2, т. е. произвольная прямая меридиональной плоскости пересекает меридиан поверхности в двух точках. Это говорит о том, что меридиан этой поверхности — кривая второго порядка.

Ось i меридиана не пересекает, но является для него осью симметрии. Это, в свою очередь, говорит о том, что меридиан поверхности — кривая второго порядка — гипербола, а прямая i — ее мнимая ось. Мы показали, что в частном случае линейчатая поверхность с тремя скрещивающимися прямолинейными направляющими пересекается плоскостью, проходящей через ось поверхности, по гиперболе; отсюда и произошло

название этой поверхности — *однополостный гиперболоид вращения**. Плоскость, перпендикулярная к оси однополостного гиперболоида, пересекает его по эллипсу, в частном случае — по окружности (при пересечении однополостного гиперболоида вращения).

Практически для построения проекций однополостного гиперболоида вращения необходимо: построить проекции двух окружностей, расположенных в двух параллельных плоскостях; разделить проекции окружностей на произвольное равное число частей (рис. 138); затем соединить прямой линией точку $1_1''$ нижней окружности с любой (кроме $1_2''$) точкой верхней окружности. На чертеже 138 точка $1_1'$ соединена с точкой $3_2''$, точка $2_1''$ с $4_2''$ и т. д. Соединив все точки деления нижней окружности с точками деления верхней окружности, получим проекции каркаса поверхности. Второе семейство линий каркаса этой поверхности может быть образовано, если соединить первую точку верхней окружности с третьей точкой нижней окружности ($1_2''$ с $3_1''$), точку $2_2''$ с точкой $4_1''$, $3_2''$ с $5_1''$ и т. д.

Поверхность однополостного гиперболоида вращения широко используется в технике, в частности, для передачи вращения при скрещивающихся осях с помощью зубчатых или фрикционных гипербоидальных колес. Особенно широкое применение эта поверхность нашла в строительстве. Одним из примеров может служить башня Шухова, построенная в Москве для установки антенны радиостанции "Коминтерн" — первой мощной радиостанции в Советском Союзе.

Гиперболический параболоид. В частном случае, когда прямолинейная образующая скользит по трем скрещивающимся прямым (направляющим), параллельным одной плоскости, получается поверхность, называемая гиперболическим параболоидом. Такому названию эта поверхность обязана тем, что при пересечении ее плоскостями в сечениях получаются гипербола и парабола.

Поверхность гиперболического параболоида обладает одним замечательным свойством, состоящим в том, что не только ее направляющие параллельны одной плоскости, но и образующие, скользящие по этим направляющим, также параллельны некоторой плоскости. Чтобы убедиться в справедливости этого высказывания, докажем следующую теорему.

Если прямая перемещается в пространстве по трем прямым, параллельным одной и той же плоскости, то она будет двигаться, все время оставаясь параллельной некоторой другой плоскости.

Пусть даны три скрещивающиеся направляющие прямые d_1, d_2 и d_3, параллельные горизонтально проецирующей плоскости γ (рис. 139). Чтобы не загромождать чертежа лишними геометрическими построениями, будем считать, что образующие гиперболического параболоида принадлежат фронтально проецирующим плоскостям β_1, β_2 и β_3. При таких условиях образующие g_1, g_2, g_3 определяются соответственно точками *1* и *2*, *3* и *4*, *5* и *6* пересечения направляющих с плоскостями β_1, β_2, β_3. Построим $[3'7']$, конгруентный и параллельный отрезку $[5'6']$, и проведем прямую $7'4'$. Из чертежа видно, что $\Delta\, 2'3'7' \cong \Delta\, 5'6'8'$, так как стороны этих треугольников параллельны, а сторона $3'7'$ $\Delta\, 3'2'7'$ конгруентна стороне $5'6'$ $\Delta\, 5'6'8'$.

Из конгруентности треугольников следует $[2'7'] \cong [5'8']$, но $[5'8'] \cong [1'4']$ (как параллельные между параллельными), следовательно, $[2'7'] \cong [1'4']$. Отсюда вытекает, что отрезки $[1'2']$ и $[4'7']$ конгруентны

---

* Поверхность однополостного гиперболоида вращения можно получить также вращением гиперболы вокруг ее мнимой оси.

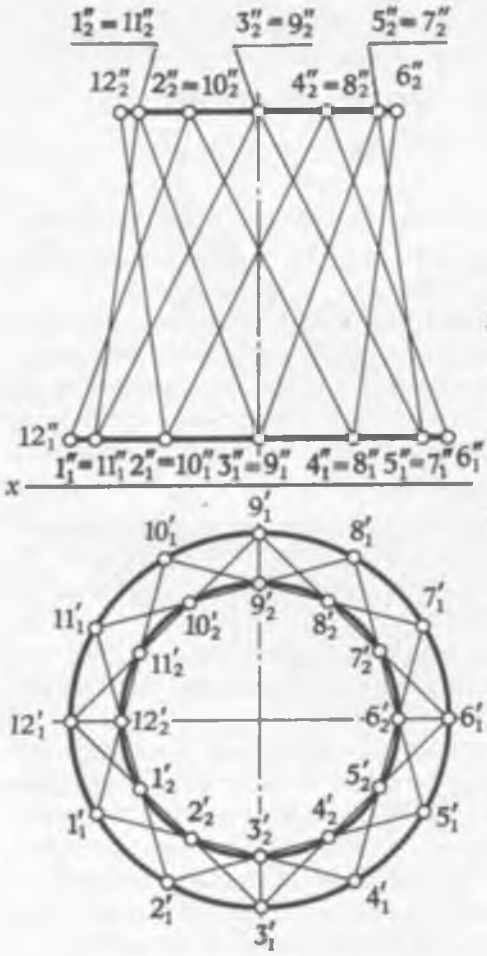


Рис. 138

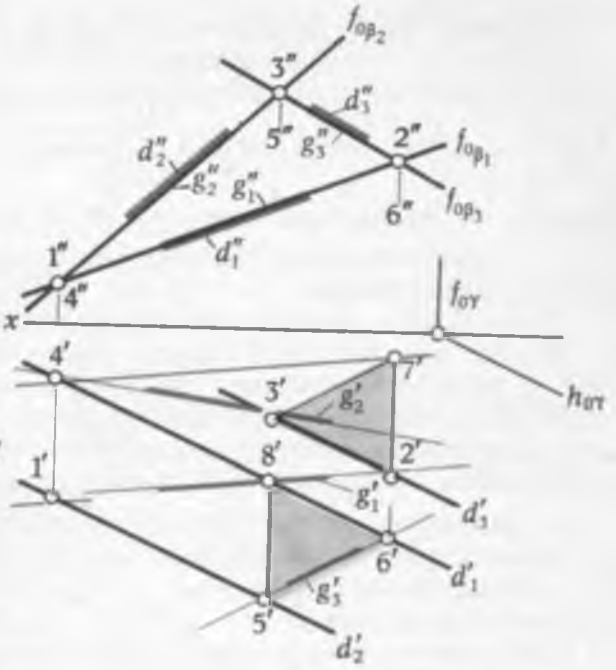


Рис. 139

и параллельны. Прямые g_1 и g_3 как параллельные соответствующим сторонам $\Delta\ 3'4'7'$ параллельны его плоскости; третья образующая g_2 принадлежит плоскости этого треугольника.

Из изложенного следует, что произвольно взятые образующие гиперболического параболоида параллельны некоторой плоскости. Это, в свою очередь, говорит о том, что на поверхности гиперболического параболоида имеется два семейства прямых линий, каждое из которых параллельно своей плоскости, т. е. эта поверхность так же, как и поверхность однополостного гиперболоида, имеет две плоскости параллелизма. Если плоскости параллелизма взаимно перпендикулярны, то гиперболический параболоид называют прямым, если не перпендикулярны, то поверхность называют наклонной. Для образования одной и той же поверхности безразлично, из какого семейства взяты прямые за направляющие. В рассматриваемом примере можно за направляющие принять скрещивающиеся прямые g_1, g_2, g_3, параллельные плоскости $\Delta\ 3'4'7'$, тогда образующими поверхности окажутся прямые d_1, d_2, d_3.

§ 33. ЛИНЕЙЧАТЫЕ ПОВЕРХНОСТИ С ДВУМЯ НАПРАВЛЯЮЩИМИ (ГРУППА $Б_{II}$)

Движение прямой — образующей по трем направляющим, не единственный способ образования линейчатой поверхности. Только что доказанная теорема убедительно подтверждает справедливость такого высказывания. Из этой теоремы вытекает важное следствие: *линей-*

чатая поверхность может быть однозначно определена двумя направляющими и плоскостью параллелизма.

В этом случае определитель линейчатой поверхности примет вид

$$\Phi\,(\bar{g};\ \widetilde{d}_1,\ \widetilde{d}_2,\ \gamma);\ [\bar{g}_j \cap \{\widetilde{d}_1,\ \widetilde{d}_2,\} \not\parallel \mathbb{Q} \wedge (\widehat{\bar{g}_j\gamma}) = \varphi^\circ)]\,.$$

Здесь γ — *направляющая плоскость*. В частном случае, если угол между $\widehat{\bar{g}_j\gamma} = 0^\circ$ (образующая параллельна плоскости γ), то γ называют плоскостью параллелизма.

Пусть будут заданы две произвольные кривые d_1 и d_2 и плоскость γ. Можно задать такой закон перемещения прмолинейной образующей g_j, при котором она, скользя по линиям d_1 и d_2, все время сохраняет постоянный $\angle\,\varphi^\circ$ с плоскостью γ. Плоскость γ заменяет ту третью направляющую, которая образуется множеством точек пересечения движущейся прямолинейной образующей g_j с плоскостью γ.

В рассматриваемую группу поверхностей входят три подгруппы: а) *цилиндроиды*, б) *коноиды*, в) *косые плоскости*.

Перечисленные подгруппы поверхностей могут быть отнесены к двум разновидностям:

поверхности, образованные с помощью направляющей плоскости;

поверхности, в создании которых принимала участие плоскость параллелизма.

К первой разновидности относятся косые линейчатые поверхности (косой цилиндроид, косой коноид, дважды косая плоскость); ко второй — прямые линейчатые поверхности (прямой цилиндроид, прямой коноид, косая плоскость). Поверхности с плоскостью параллелизма называются поверхностями Каталана*. Из линейчатых поверхностей с двумя направляющими рассмотрим только поверхности Каталана, так как именно эти поверхности находят широкое применение в технике.

§ 34. ЛИНЕЙЧАТЫЕ ПОВЕРХНОСТИ С ДВУМЯ НАПРАВЛЯЮЩИМИ И ПЛОСКОСТЬЮ ПАРАЛЛЕЛИЗМА (ПОВЕРХНОСТИ КАТАЛАНА)

При формировании линейчатой поверхности с помощью плоскости параллелизма образующие должны быть параллельны этой плоскости, поэтому они пересекаются с ней в несобственных точках, множество которых определяет несобственную прямую; эту прямую следует рассматривать как третью направляющую линейчатой поверхности, т. е. плоскость параллелизма является как бы собственным представителем несобственной прямой. Образование линейчатой поверхности с помощью плоскости параллелизма является частным случаем общего способа формирования линейчатой поверхности с двумя направляющими.

Определитель для группы поверхностей Каталана имеет вид

$$\Phi\,(\bar{g}\,;\ d_1,\ d_2,\ \gamma);\ [\bar{g}_j \cap \{d_1,\ d_2\} \not\parallel \mathbb{Q} \wedge (\widehat{\bar{g}_j\gamma} = 0^\circ)]\,.$$

Для задания поверхности этой группы на эпюре Монжа достаточно указать проекции направляющих d_1 и d_2 и положение плоскости параллелизма γ (табл. 5, рис. 140 ... 142).

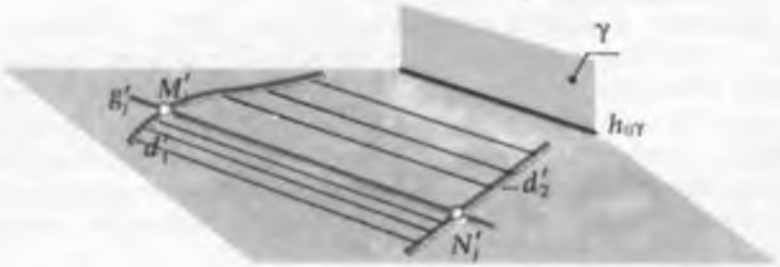
---

* По имени бельгийского математика Каталана (*Katalan*), исследовавшего свойства этих поверхностей.

Таблица 5. Линейчатые поверхности с двумя направляющими и плоскостью параллелизма. Группа $Б_{II}$; $\Phi(\bar{g};\ d_1, d_2, \gamma)$; $|g_j \cap \{d_1, d_2\} \nmid \nmid \Phi \wedge (\widehat{\bar{g}\gamma} = 0°)|$



Рис. 140 Поверхность прямого цилиндроида



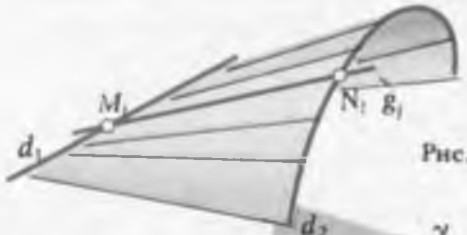


Рис. 141 Поверхность прямого коноида

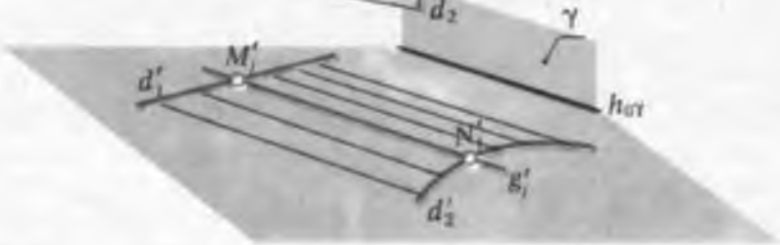
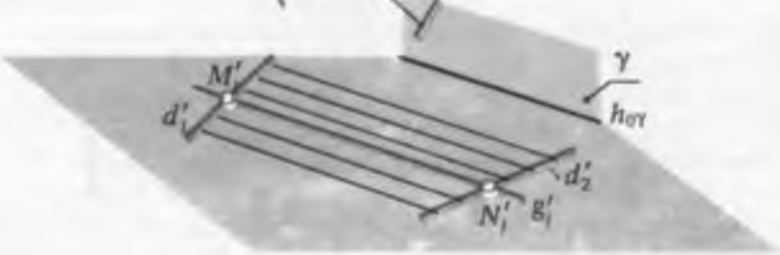




Рис. 142 Косая плоскость



1. **Поверхность прямого цилиндроида** (см. табл. 5, рис. 140). Поверхность прямого цилиндроида образуется в том случае, когда направляющие d_1 и d_2 гладкие кривые линии, причем одна из них должна принадлежать плоскости, перпендикулярной плоскости параллелизма.

Для определения проекций прямолинейных образующих поверхности прямого цилиндроида достаточно провести прямые, параллельные плоскости параллелизма. На рис. 143 показано построение образующей g_j.

Вначале проводим g_j, определяем точки M' и N', по ним находим M'' и N''. (MN) проводим параллельно плоскости параллелизма γ; для этого достаточно, чтобы $(M'N') \parallel h_{0\gamma}$.

Поверхность прямого цилиндроида находит применение в инженерной практике, в частности, она используется при изготовлении воздухопроводов большого диаметра.

2. **Поверхность прямого коноида** (см. табл. 5, рис. 141). Отличие поверхности коноида от цилиндроида состоит только в том, что одна из направляющих линий коноида — прямая. Поэтому для задания поверхности коноида на эпюре Монжа необходимо указать проекции: кривой d_2 (одна направляющая), прямой d_1 (вторая направляющая) и плоскости параллелизма γ. Если прямолинейная направляющая перпендикулярна плоскости параллелизма, то мы будем иметь дело с частным случаем поверхности, которая называется *прямым коноидом*.

Для получения проекционного чертежа (эпюра Монжа), обладающего наглядностью, следует указать проекции не одной, а ряда прямолинейных образующих этой поверхности. Для этого проводим несколько прямых, параллельных плоскости параллелизма γ и пересекающих направляющие d_1 и d_2. На рис. 144 показано построение произвольной образующей g_j. Чтобы прямая g_j была параллельна плоскости параллелизма γ, необходимо, чтобы она была параллельна прямой, принадлежащей плоскости γ. Так как плоскость γ горизонтально проецирующая, то горизонтальные проекции всех прямых, принадлежащих этой плоскости, совпадают с горизонтальным следом плоскости $h_{0\gamma}$. Поэтому построение частной образующей поверхности коноида начинаем

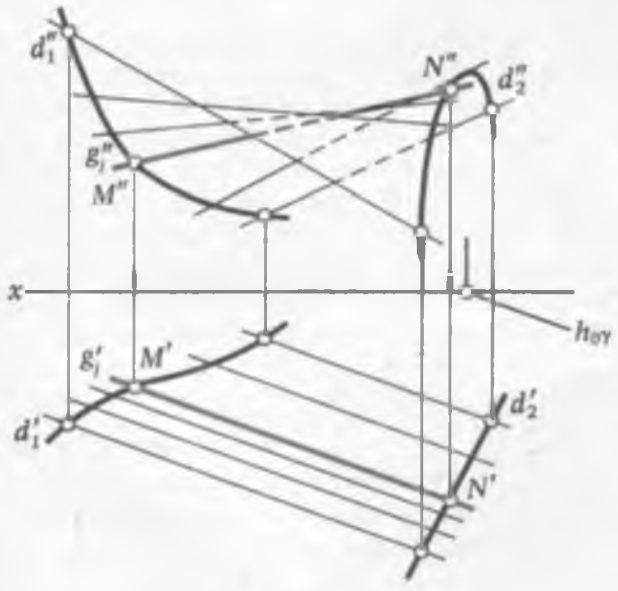


Рис. 143

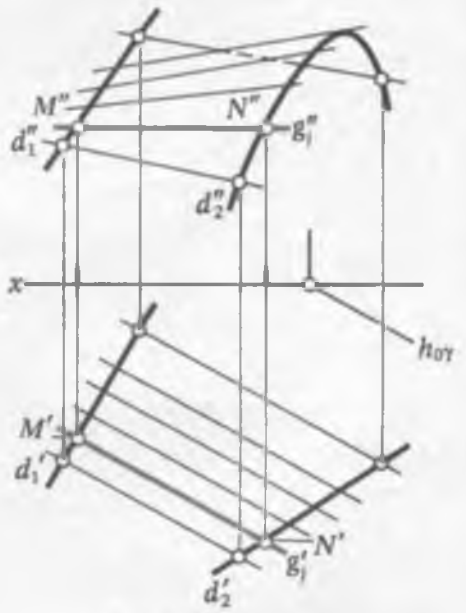


Рис. 144

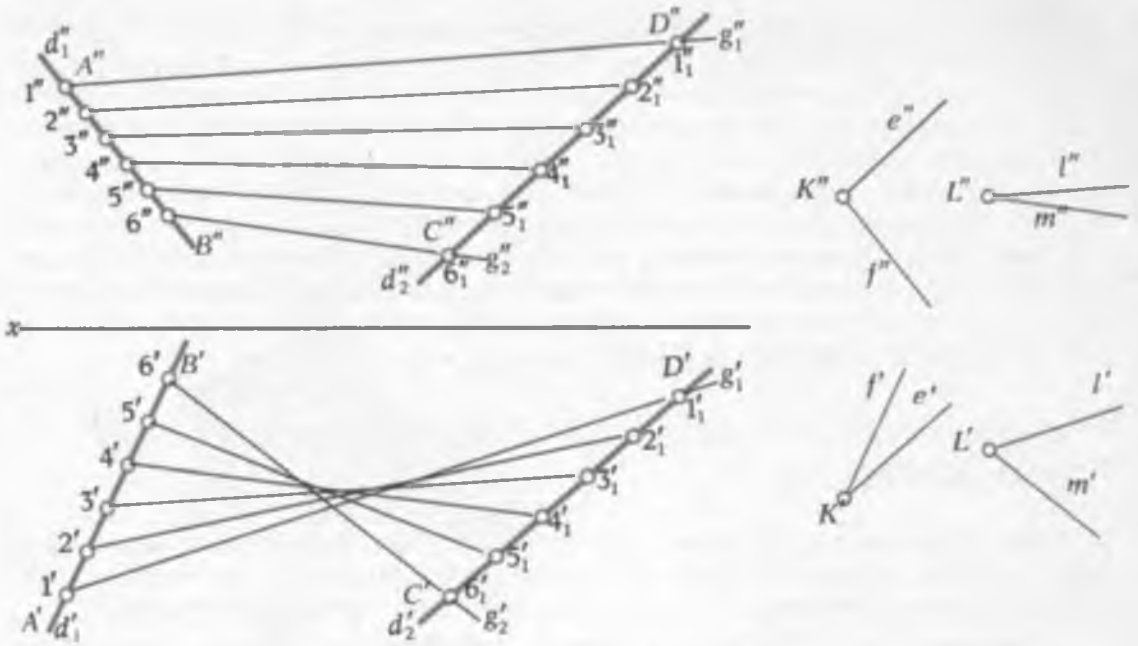


Рис. 145

с проведения ее горизонтальной проекции g'_j, причем $g'_j \parallel h_{0\gamma}$ [на основании инвариантного свойства 2г (см. § 6) ортогонального проецирования]. Отмечаем точки M' и N', в которых горизонтальная проекция образующей g'_j пересекает горизонтальные проекции направляющих d'_1 и d'_2, по M' и N' находим точки M'' и N'', которые определяют фронтальную проекцию прямой g''_j.

Поверхность прямого коноида используется в гидротехническом строительстве для формирования поверхности устоев мостовых опор.

3. **Поверхность гиперболического параболоида** — косая плоскость (см. табл. 5, рис. 142). Гиперболический параболоид может быть получен при скольжении прямой по двум скрещивающимся прямолинейным направляющим, при этом образующая все время остается параллельной плоскости параллелизма. Гиперболический параболоид имеет две плоскости параллелизма, соответствующие двум семействам прямолинейных направляющих. Если плоскости параллелизма перпендикулярны друг другу, то гиперболический параболоид называют прямым. В инженерной практике гиперболический параболоид часто называют *косой плоскостью*.

Для задания на чертеже косой плоскости достаточно указать проекции двух скрещивающихся прямых d_1 и d_2 и положение плоскости параллелизма γ. Для получения проекционного чертежа, обладающего наглядностью, обычно указывают проекции нескольких прямолинейных образующих, для этого:

1) на направляющих d_1 и d_2 выделяют отрезки $[AB]$ и $[CD]$;

2) делят проекции отрезков $[AB]$ и $[CD]$ на произвольное число равных частей (на рис. 145 проекции точек деления обозначены $1', \ldots, 6'$; $1'', \ldots, 6''$ и $1'_1, \ldots, 6'_1$; $1''_1, \ldots, 6''_1$);

3) одноименные проекции точек деления соединяют прямыми.

Задавая таким путем косую плоскость, мы не пользовались плоскостями параллелизма. Если требуется определить их положение, то достаточно через произвольную точку K провести прямые e и f, параллельные соответственно прямым d_2 и d_1. Вторая плоскость паралле-

лизма (для семейства направляющих g_1 и g_2) определяется пересекающимися прямыми l и m ($l \parallel g_1$, $m \parallel g_2$).

Косая плоскость находит широкое применение в инженерно-строительной практике для формирования поверхностей откосов насыпей железных и автомобильных дорог, набережных гидротехнических сооружений в местах сопряжения откосов, имеющих различные углы наклона.

4. **Плоскость.** Если направляющие прямые d_1 и d_2 пересекаются или параллельны, то при движении по ним прямолинейной образующей g получается плоскость. Изображение плоскости на эпюре Монжа и различные варианты ее расположения по отношению к плоскостям проекций были подробно рассмотрены в § 8 гл. I.

§ 35. ЛИНЕЙЧАТЫЕ ПОВЕРХНОСТИ С ОДНОЙ НАПРАВЛЯЮЩЕЙ — ТОРСЫ (ГРУППА B_{II})

Рассматриваемая в этом параграфе группа линейчатых поверхностей с одной криволинейной направляющей называется *торсами*, а криволинейная направляющая таких поверхностей — *ребром возврата**.

Поверхностью с ребром возврата (торсом) называют поверхность, описываемую движением прямой — образующей g, касающейся некоторой пространственной кривой — направляющей $\tilde{d}$.

Торсы обладают замечательным свойством — они могут быть совмещены с плоскостью без складок и разрывов, путем последовательных ее изгибов по прямолинейным образующим. В связи с этим можно дать и другое определение поверхности торса. *Торсом называют линейчатую поверхность, которую можно совместить всеми ее точками с плоскостью без складок и разрывов.* Такие поверхности называют также развертывающимися поверхностями.

Если ребро возврата вырождается в точку, то получается частный вид торса — *коническая поверхность* (если точка собственная) или *цилиндрическая поверхность* в случае вырождения ребра возврата в несобственную точку.

Итак, к рассматриваемой группе линейчатых поверхностей относятся:

1) поверхность с ребром возврата (табл. 6, рис. 146);
2) поверхность коническая (табл. 6, рис. 147);
3) поверхность цилиндрическая (табл. 6, рис. 148).

В частном случае торсовые поверхности преобразуются в плоскость. Для этого достаточно, чтобы ребро возврата $\tilde{d}_1$ преобразовалось в плоскую кривую, а направляющая d_1 конической или цилиндрической поверхности — в прямую линию. Определитель этой группы поверхностей имеет вид

$$\Phi\,(\bar{g};\ \tilde{d}_1, S);\ [\bar{g}_j \sqcap \tilde{d}_1 = S_j \in \tilde{d}_1].$$

Рассмотрим более подробно каждую из отмеченных поверхностей.

1. **Поверхность с ребром возврата.** Образование этой поверхности можно представить таким образом. Пусть даны плавная кривая d и точка S, причем $S \in \alpha \supset d$ (рис. 149). Разделим кривую d на n участков, границы которых отметим точками 1, 2, 3, ... , n. Проведем прямую $S1$ и отложим на ней от точки S вниз $[SS_1]$. Конец отрезка S_1 соединим прямой с точкой $2 \in d$, получим отсек конической поверхности $S_1\ 1\ 2$.

---

* Ребро возврата следует рассматривать как кривую, в которой "совпадают" все три криволинейные направляющие линейчатой поверхности $d_1 \equiv d_2 \equiv d_3$.

Таблица 6. Линейчатые поверхности с одной направляющей — торсы. Группа B_{II}; $\Phi(\bar{g};\ \tilde{d}_1, S)$; $[g_j \sqcap \tilde{d}_1 = S_j \in \tilde{d}_1]$

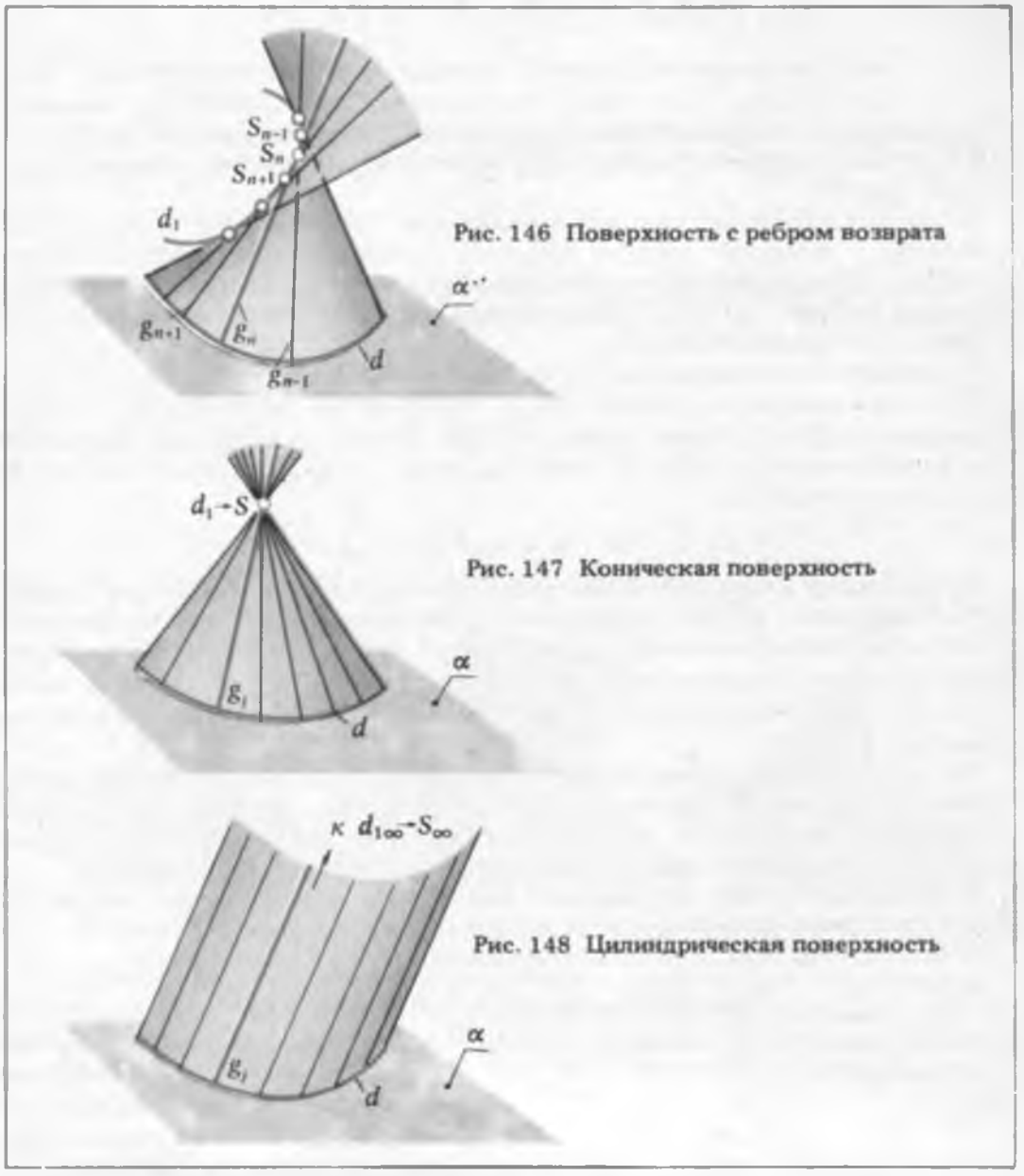


Рис. 146 Поверхность с ребром возврата

Рис. 147 Коническая поверхность

Рис. 148 Цилиндрическая поверхность

На прямой $(S_1 2)$ откладываем $[S_1 S_2]$ и конец отрезка S_2 соединяем с точкой $3 \in d$ — вновь получаем отсек конической поверхности $S_2 23$. Повторяя описанные операции n раз, мы получим n следующих один за другим отсеков конических поверхностей с вершинами в точках $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n$. Если уменьшить длину отрезков $[SS_1]$, $[S_1 S_2]$, $[S_2 S_3]$, ..., $[S_n - {}_1 S_n]$, то ломаная линия $SS_1 S_2 S_3 \ldots S_n$ в пределе превратится в плавную пространственную кривую d_1, называемую ребром возврата, а прямолинейные звенья этой ломаной линии перейдут в касательные к кривой d_1. Непрерывное множество этих касательных образует поверхность с ребром возврата (торс).

Из рис. 146 видно, что поверхность с ребром возврата имеет две полы. Ребро возврата служит границей этих пол. Так как в каждой точке плавной кривой можно провести только одну касательную, то

при задании поверхности с ребром возврата направляющую — кривую d можно не указывать. Поэтому определитель такой поверхности будет иметь вид

$$\Phi\,(\bar{g};\ \tilde{d}_1,\ S);\ [\bar{g}_j \pitchfork \tilde{d}_1 = S_j \in \tilde{d}_1\,],$$

где $\tilde{d}_1$ — пространственная плавная кривая — ребро возврата, $\bar{g}$ — прямая — образующая, S — точка, принадлежащая кривой $\tilde{d}_1$. Условие, отражающее закон движения прямолинейной образующей, состоит в том, что она, двигаясь вдоль ребра возврата, все время остается касательной к нему.

В машиностроении находит применение частный вид торсовой поверхности, у которой ребром возврата служит цилиндрическая винтовая линия. Полученную с помощью этой линии поверхность называют *винтовым торсом*. На рис. 150 показаны ортогональные проекции отсека поверхности винтового торса.

2. Коническая поверхность. Все прямолинейные образующие конической поверхности пересекаются в собственной точке S. Это условие соблюдается лишь в том случае, когда ребро возврата $\tilde{d}_1$ вырождается в собственную точку S (см. рис. 147). Определитель конической поверхности имеет вид

$$\Phi\,(\bar{g};\ \tilde{d}_1,\ S);\ [\bar{g}_j \cap \tilde{d}_1 \neq \varnothing \wedge \cap\, \bar{g}_j = S].$$

Приведенная символическая запись определителя конической поверхности показывает, что эта поверхность однозначно определяется прямолинейной образующей, кривой направляющей и точкой S, при этом прямолинейная образующая пересекает направляющую ($\bar{g}_j \cap \tilde{d} \neq \varnothing$ — пересечение g_j и $\tilde{d}$ не пустое множество) и все образующие пересекаются в одной точке ($\cap\, g_j = S$).

На рис. 151 показано задание конической поверхности на эпюре Монжа. Проекции образующих g_1, g_2, g_3, ... , g_n на рис. 151 указаны только для наглядности. Коническая поверхность однозначно задается проекциями ее образующей, направляющей и вершиной ($g_j d$, S).

3. Цилиндрическая поверхность получается в том случае, когда все прямолинейные образующие пересекаются в несобственной точке S_∞.

В этом случае определитель поверхности может быть записан:

$$\Phi\,(\bar{g};\ \tilde{d},\ S_\infty);\ [\bar{g}_j \cap \tilde{d} \neq \varnothing \wedge \cap\, \bar{g}_j = S_\infty].$$

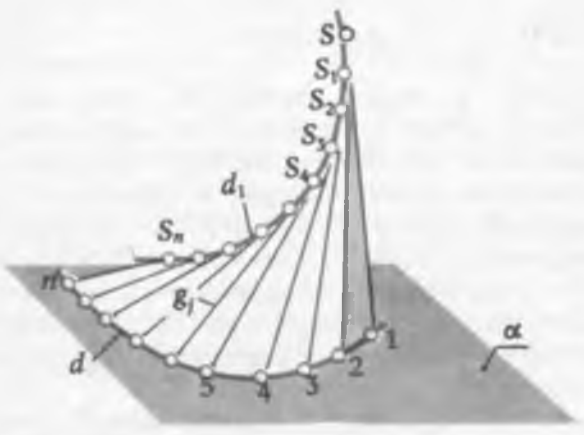


Рис. 149

Отличие определителя цилиндрической поверхности от определителя конической поверхности состоит лишь в том, что образующие цилиндрической поверхности параллельны (пересекаются в несобственной точке), в то время как для конической поверхности характерным является пересечение всех ее прямолинейных образующих в собственной точке.

На рис. 148 (табл. 6) показана произвольная цилиндрическая поверхность. Рис. 152 дает представление о ее задании на эпюре Монжа.

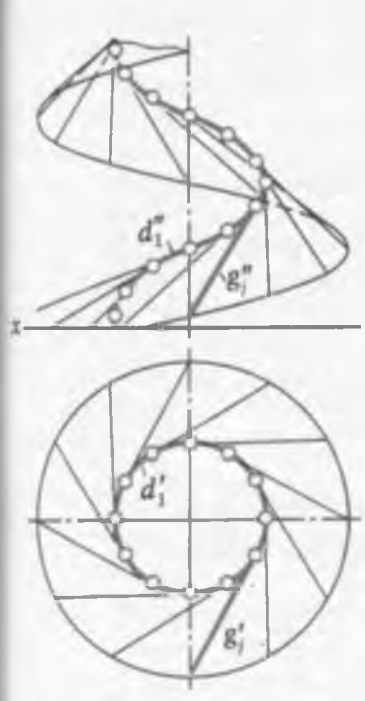


Рис. 150

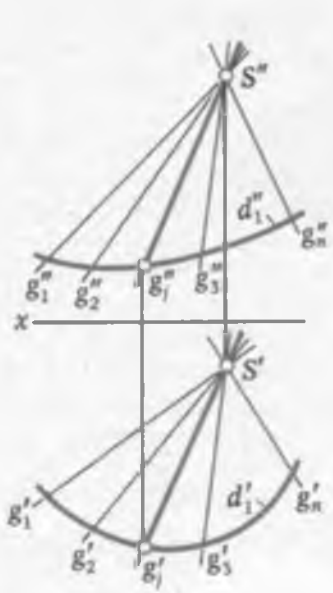


Рис. 151

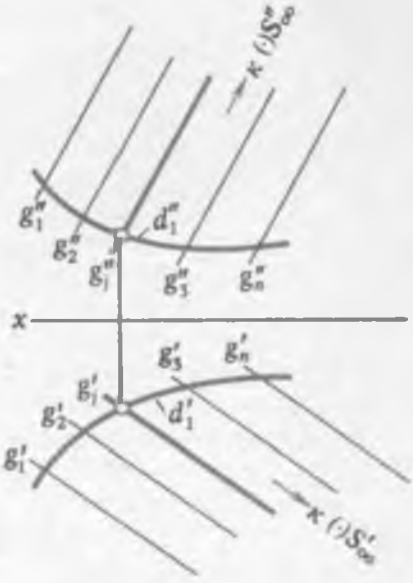


Рис. 152

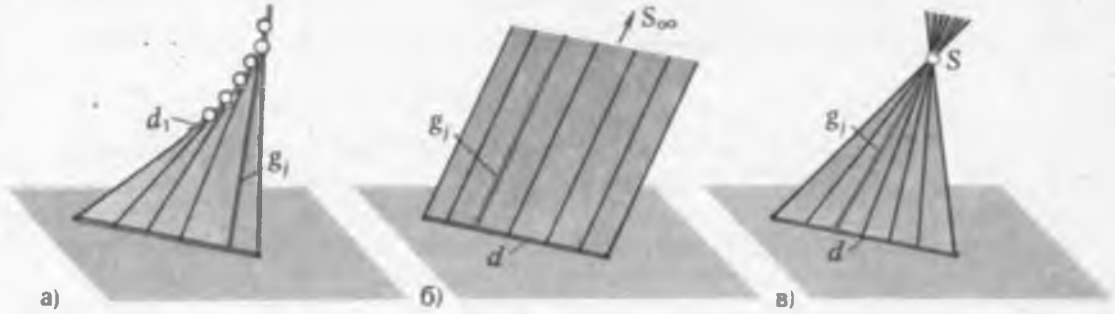


Рис. 153

4. Плоскость. Раньше было отмечено, что частным случаем торсовых поверхностей является плоскость, и указаны условия, при которых поверхность с ребром возврата, коническая и цилиндрическая преобразуются в плоскость. Рис. 153 дает наглядное представление об этих преобразованиях.

§ 36. ПОВЕРХНОСТИ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО ПЕРЕНОСА (ПОДКЛАСС 1)

Поверхностью параллельного переноса называется поверхность, образованная поступательным перемещением плоской линии, при этом образующие поверхности все время остаются параллельными между собой.

Рис. 154 дает представление об образовании такой поверхности. Ввиду того, что поверхности параллельного переноса несут на себе семейства параллельных кривых линий, уместно напомнить, какой смысл вкладывается в понятие параллельные кривые линии. Под параллельными кривыми линиями подразумеваются линии, получаемые одна из другой путем параллельного переноса принадлежащих им точек на некоторое одинаковое расстояние. Например, на рис. 155 кривая $\bar{g}$ парал-

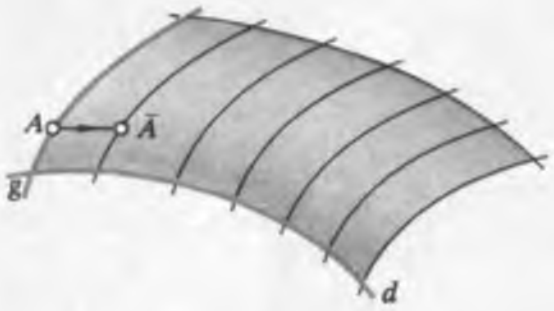


Рис. 154

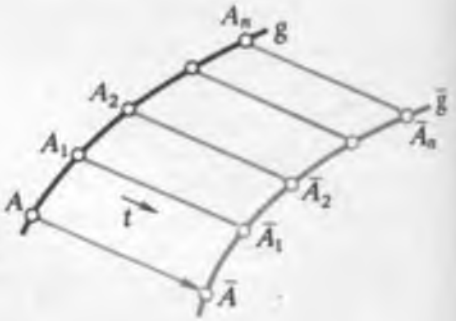


Рис. 155

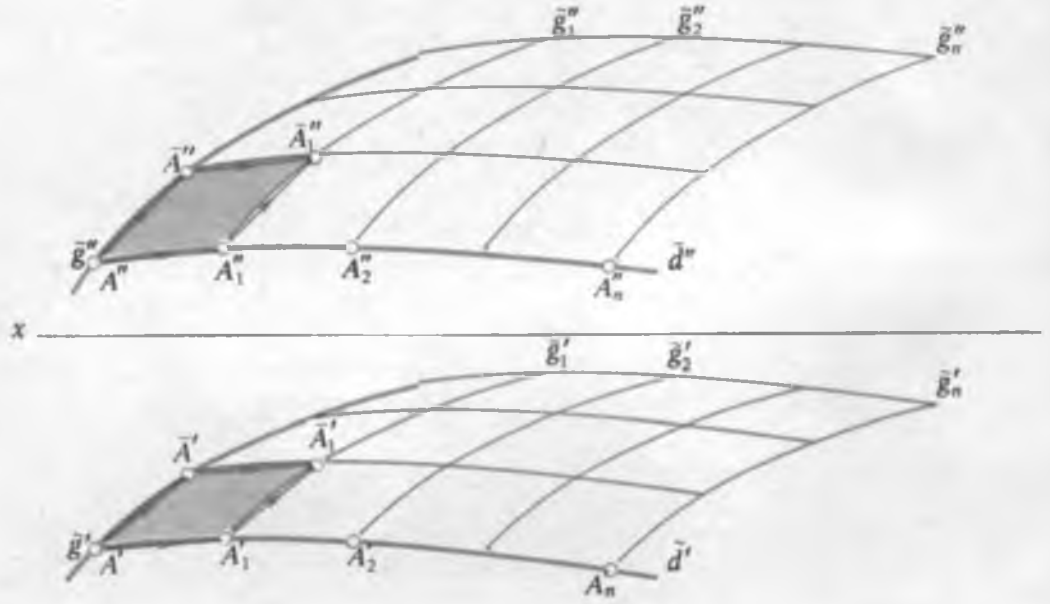


Рис. 156

лельна кривой g, так как точки $\bar{A}$, $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$, ... , $\bar{A}_n$ кривой $\bar{g}$ получены из точек A, A_1, A_2, ... , A_n кривой g путем переноса их по параллельным прямым $(A\bar{A})$, $(A_1\bar{A}_1)$, $(A_2\bar{A}_2)$, ... , $(A_n\bar{A}_n)$ на величину вектора t. В рассматриваемом примере мы получаем частный случай поверхности параллельного переноса — цилиндрическую поверхность. Для образования сложных криволинейных поверхностей параллельный перенос кривой линии следует осуществлять с помощью мгновенных векторов переноса, характер изменения направления которых может быть задан графически в виде кривой $\tilde{d}$ (направление мгновенных векторов переноса определяется хордами кривой $\tilde{d}$).

В общем случае определитель поверхности параллельного переноса имеет вид

$$\Phi(\tilde{g};\ \tilde{d});\ [\tilde{g}_j = T_d(\tilde{g})].$$

В геометрическую часть определителя входит образующая кривая $\tilde{g}$ и направляющая $\tilde{d}$. Алгоритмическая часть состоит из условия параллельного перемещения точек образующей $(\tilde{g}_j = T_d(\tilde{g}))$.

На рис. 156 поверхность параллельного переноса задана на эпюре Монжа. Для того чтобы перейти от задания поверхности проекциями ее определителя (красные линии) к заданию поверхности каркасом достаточно: на кривой $\widetilde{d}(\widetilde{d}', \widetilde{d}'')$ наметить ряд точек $A_1(A_1'A_1'')$, $A_2(A_2'A_2'')$, ... , $A_n(A_n'A_n'')$; через эти точки провести кривые $\widetilde{g}_1$, $\widetilde{g}_2$, ... , $\widetilde{g}_n$, параллельные кривой $\widetilde{g}$. Проведение проекций параллельных кривых сводится к проведению параллельных линий. Это следует из свойства параллельного проецирования, состоящего в том, что проекции равных и параллельных отрезков равны и параллельны. На рис. 156 такими отрезками являются стороны параллелограмма $A'A_1'\bar{A}'\bar{A}_1'$, аппроксимирующего участок криволинейной поверхности отсеком плоскости. Из чертежа видно, что образующую и направляющую можно поменять местами. Если за образующую взять кривую $\widetilde{d}$, а за направляющую кривую $\widetilde{g}$, то мы получим ту же самую поверхность параллельного переноса.

§ 37. ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ (ПОДКЛАСС 2)

А. Поверхности вращения общего вида (рис. 157).

Поверхностью вращения общего вида называют поверхность, которая образуется произвольной кривой (плоской или пространственной) *при ее вращении вокруг неподвижной оси.*

В состав определителя поверхности вращения входит образующая g, ось вращения i и условие о том, что эта образующая вращается вокруг оси i:

$$\Phi(g, i);\ [g_j = R_i(g)].$$

Каждая точка образующей (A, B, C, D, E) при вращении вокруг оси i описывает окружность с центром на оси вращения. Эти окружности называют *параллелями*. Наибольшую и наименьшую параллель называют соответственно *экватором и горлом* (шейкой).

Плоскости α, проходящие через ось поверхности вращения, называют *меридиональными*, а линии, по которым они пересекают поверхность, — *меридианами*.

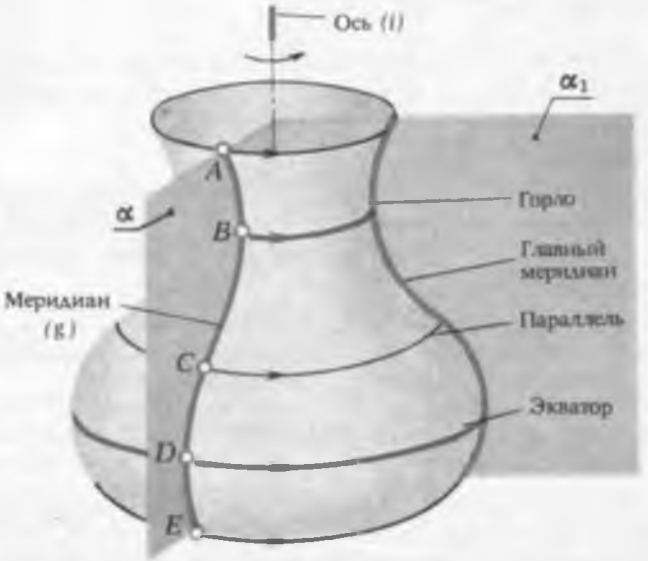


Рис. 157

Меридиональную плоскость α_1, параллельную плоскости проекции, принято называть *главной меридиональной плоскостью*, а линию ее пересечения с поверхностью вращения — *главным меридианом**.

Задание поверхности вращения на эпюре Монжа проекциями геометрических фигур, входящих в состав его определителя, хотя и однозначно определяет поверхность, но обладает одним недостатком, заключающимся в том, что при таком задании трудно представить форму поверхности. Поэтому при задании поверхности вращения обычно указывают проекции ее оси, главного меридиана и экватора (иногда указывают окружность, по которой поверхность вращения пересекается с плоскостью проекции).

При этом указывают только горизонтальную проекцию экватора (или параллели) и фронтальную проекцию главного меридиана**.

Б. Частные виды поверхностей вращения.

В технике, в частности в машиностроении, поверхности вращения находят широкое применение. Это объясняется распространенностью вращательного движения и простотой обработки поверхностей вращения на станках. Особенно распространены поверхности, имеющие в меридиональном сечении кривую второго порядка или две прямые, на которые распадается эта кривая.

Рассмотрим некоторые частные виды поверхностей вращения. Возьмем в качестве образующей окружность. В зависимости от взаимного расположения окружности (или ее дуги) и оси вращения можно получить различные поверхности.

1. Тор.

*Тором называется поверхность, которая может быть получена при вращении окружности g вокруг оси i, не проходящей через ее центр O****.

В зависимости от соотношения величин R — радиуса образующей окружности и расстояния t от центра окружности до оси вращения поверхности тора подразделяют на:

открытый тор (или кольцо) при $R < t$ — окружность не пересекает ось вращения (табл. 7, рис. 158,*а*);

закрытый тор при $R \geqslant t$ — окружность пересекает ось вращения или касается ее (табл. 7, рис. 158,*б*).

2. Сфера.

Сфера образуется в том случае, когда центр окружности принадлежит оси вращения $O \in i$, т. е. сферу можно рассматривать как частный случай тора, у которого $t = 0$ (табл. 7, рис. 158,*в*).

3. Глобоид.

Образующей этой поверхности является дуга окружности, плоскость которой может, в общем случае, не совпадать с осью вращения (табл. 7, рис. 158,*г*). Чертежи на рис. 162 дают представление об ор-

---

* На рис. 157 показаны не меридиональные плоскости α и α_1, а полуплоскости, расположенные по одну сторону от оси вращения i. Соответственно на рисунке показаны только половина меридиана и главного меридиана.

** Здесь речь идет о поверхности, ось вращения которой $i \perp \pi_1$. Если ось вращения $i \perp \pi_2$, то следует указывать фронтальную проекцию экватора и горизонтальную проекцию главного меридиана.

*** Поверхность тора может быть получена и в том случае, когда плоскость окружности пересекает ось поверхности. Следует иметь в виду, что в отличие от остальных поверхностей вращения, образующая которых — кривая второго порядка (или прямая), поверхность тора является поверхностью не второго, а четвертого порядка.

Таблица 7. Поверхности вращения; частные виды.
Подкласс 2. $\Phi\,(g;\ i)\,;\ [g_j = R_i\,(g)\,]$

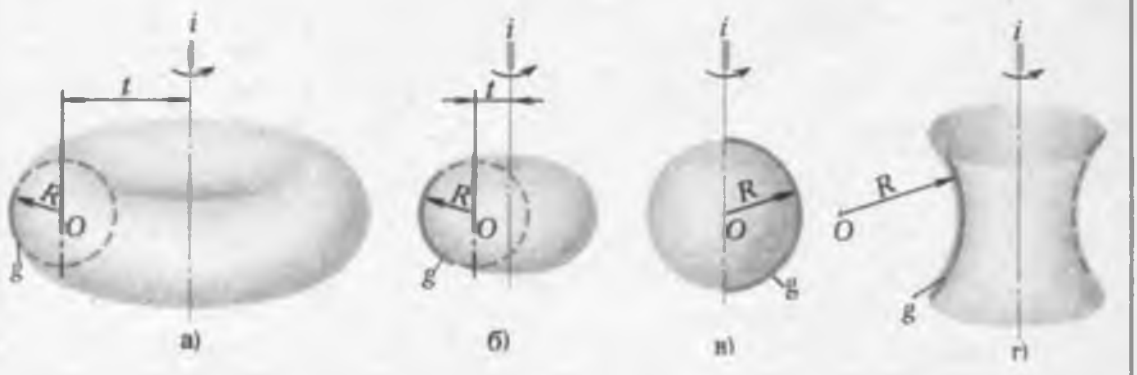


Рис. 158: а — открытый тор, б — закрытый тор, в — сфера, г — глобоид

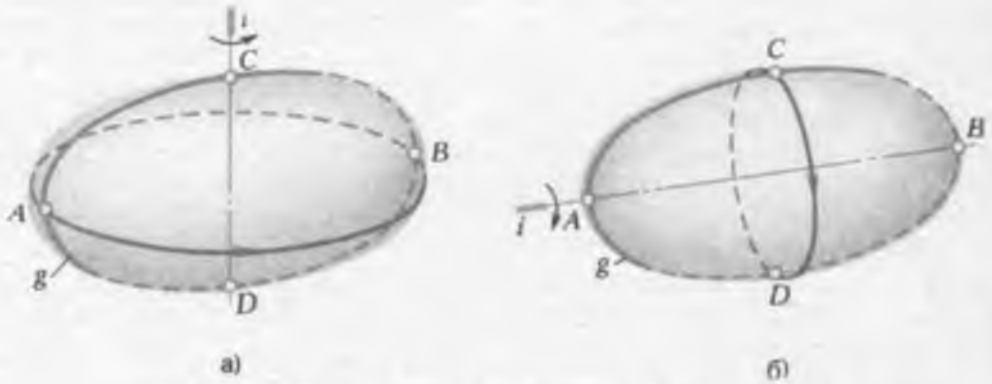


Рис. 159 Эллипсоид: а — сжатый, б — вытянутый

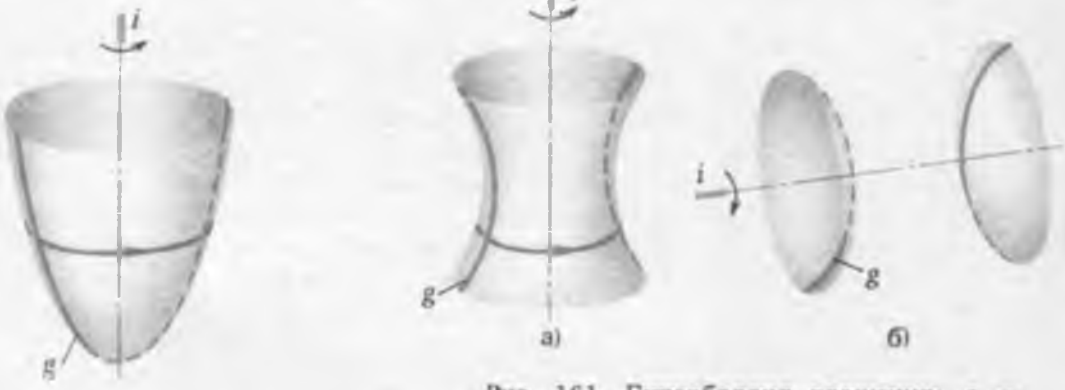


Рис. 160 Параболоид вращения

Рис. 161 Гиперболоид вращения: а — однополостный, б — двухполостный

тогональных проекциях тора (рис. 162,*а* и *б*), сферы (рис. 162,*в*), глобоида (рис. 162,*г*). Так как поверхности вращения, изображенные на рис. 162, симметричны относительно оси i, то при $i \perp \pi_1$ их горизонтальные проекции симметричны относительно горизонтальной оси; поэтому можно вычерчивать не всю горизонтальную проекцию, а лишь ее половину, как это сделано на рис. 162 (конечно, если условия задачи не требуют изображать ее полностью).

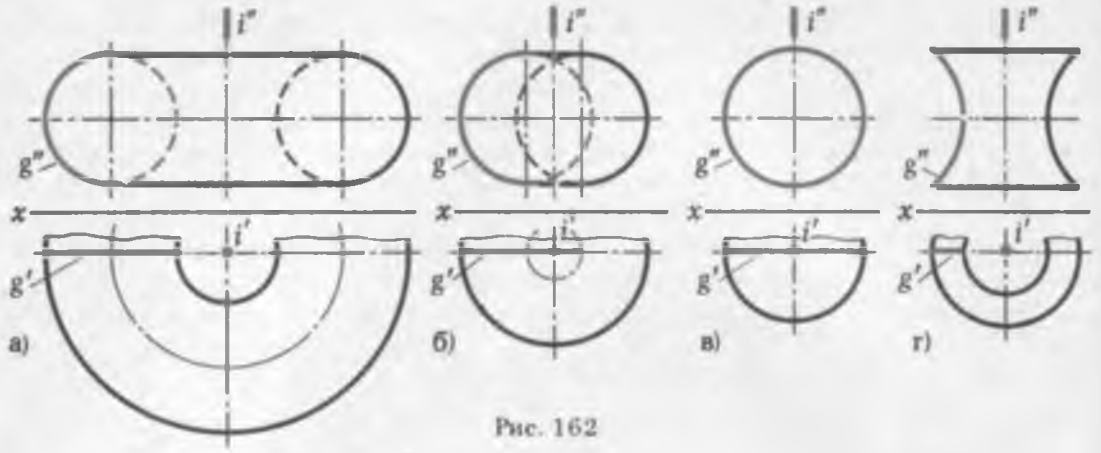


Рис. 162

4. Эллипсоид вращения.

Этот вид поверхности образуется при вращении эллипса вокруг его оси, при этом, если за ось вращения принять малую ось $[CD]$, то получим *сжатый эллипсоид вращения* (рис. 159,*а*); когда вращение осуществляется вокруг большой оси $[AB]$, образуется поверхность *вытянутого эллипсоида вращения* (рис. 159,*б*).

Рассмотренные поверхности вращения: тор, сфера, эллипсоид относятся к замкнутым поверхностям. Кроме замкнутых поверхностей вращения существуют незамкнутые поверхности, которые образуются, в частности, при вращении параболы, гиперболы и прямой (линий, имеющих несобственные точки).

5. Параболоид вращения.

Для того чтобы получить параболоид вращения, в определителе поверхности вращения за образующую g следует принять параболу, а за ось вращения i — ее ось (рис. 160). Для задания параболоида вращения на эпюре Монжа достаточно указать проекции образующей g и оси i.

6. Гиперболоид вращения.

При вращении гиперболы можно получить две различные поверхности:

а) **однополостный гиперболоид вращения***, образуется при вращении гиперболы g вокруг ее мнимой оси i_1 (рис. 161,*а*);

б) **двуполостный гиперболоид вращения**, образуется при вращении гиперболы вокруг ее действительной оси i (рис. 161,*б*).

7. Коническая и цилиндрическая поверхности вращения.

Эти поверхности можно получить путем вращения прямой g вокруг оси i. Коническая и цилиндрическая поверхности были подробно рассмотрены в § 35 (см. рис. 147, 151 и 148, 152).

§ 38. ВИНТОВЫЕ ПОВЕРХНОСТИ (ПОДКЛАСС 3)

Поверхность называется винтовой, если она получается винтовым перемещением образующей (рис. 163)**.

---

* Поверхность однополостного гиперболоида вращения относится также к классу линейчатых поверхностей. Она может быть получена путем вращения прямой вокруг оси, скрещивающейся с ней. Подробно однополостный гиперболоид рассматривался в § 32.

** Винтовое перемещение характеризуется вращением вокруг оси и одновременным поступательным движением, параллельным этой оси

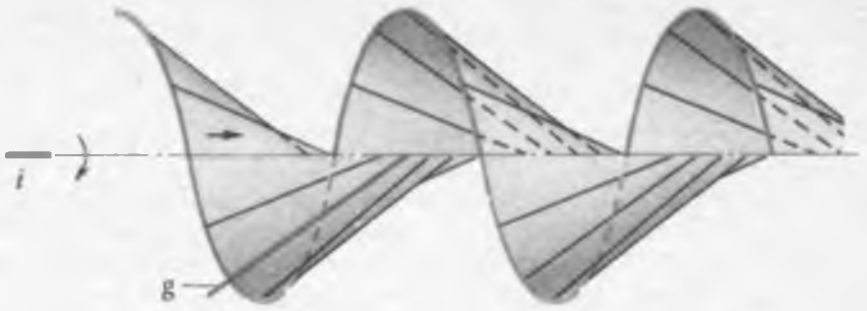


Рис. 163

В зависимости от формы образующей отдельные виды винтовых поверхностей могут быть отнесены как к классу линейчатых, так и нелинейчатых поверхностей. Выделение этих поверхностей в самостоятельный подкласс связано со стремлением подчеркнуть значение винтовых поверхностей в технике, архитектурно-строительной практике и, особенно, в машиностроении. Определитель винтовой поверхности имеет вид

$$\Phi\,(g,\,i)\,;\;|g_j = T_i\,(g) \circ R_i\,(g)\,|\,,$$

где g — образующая (кривая или прямая), i — ось винтовой линии, алгоритмическая часть определителя содержит указание, что образующая g_j совершает винтовое перемещение, которое можно рассматривать как композицию из двух перемещений; а) параллельного перемещения вдоль оси i и б) вращения вокруг этой оси.

А. Винтовые поверхности с криволинейной образующей.

На рис. 164 показана винтовая поверхность, образованная плоской кривой g, совершающей винтовое перемещение. Закон этого перемещения определяется видом винтовой линии d (ее диаметром, шагом и ходом) и характером расположения образующей g. В случае, показанном на рис. 164, он определен тем, что в процессе движения плоскость γ, которой принадлежит образующая, все время проходит через ось вращения i.

Б. Винтовые поверхности с прямолинейной образующей и направляющей — винтовой линией постоянного шага.

Все точки образующей при винтовом движении описывают винтовые линии, каждая из которых может служить направляющей поверхности. Такие линии называют также *винтовыми параллелями*. Все винтовые параллели имеют одинаковый шаг P, называемый *шагом винтовой поверхности*. Очевидно и единичный шаг P_0 у этих параллелей будет общий: $P_0 = P/2\pi$.

Характерной особенностью для винтовых поверхностей с постоянным шагом является постоянство угла φ° наклона прямолинейной образующей к направляющей плоскости, за которую принята плоскость, перпендикулярная оси винтовой поверхности.

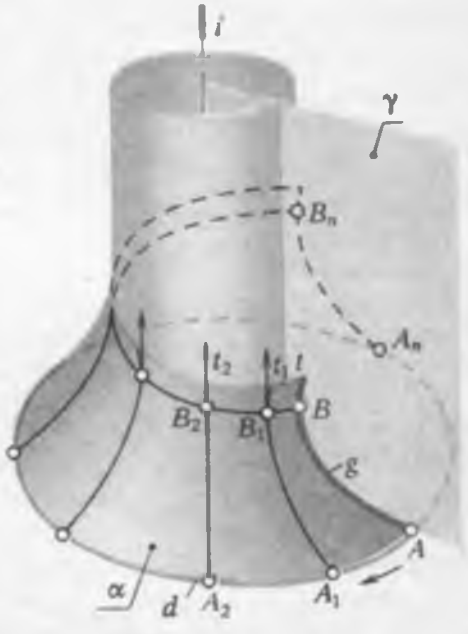


Рис. 164

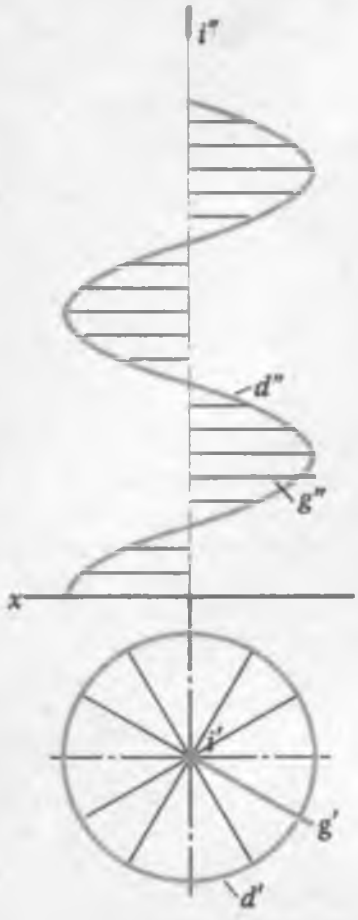


Рис. 165

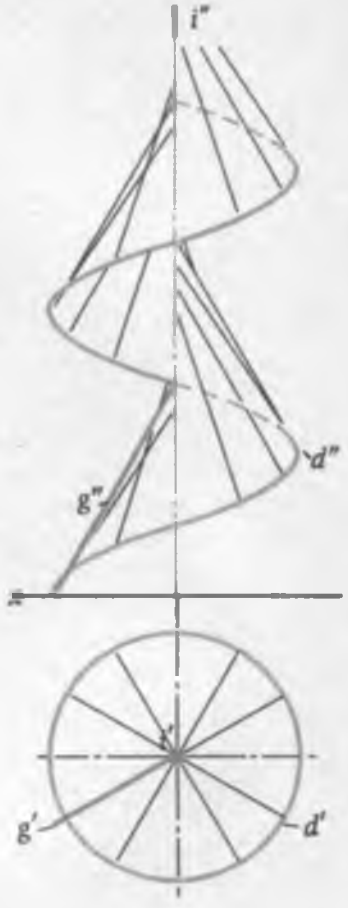


Рис. 166

Как уже неоднократно отмечалось, для получения наглядного изображения поверхности (в частности, винтовой) ее задание проекциями геометрической части определителя следует расширить до задания каркасом, состоящим из двух семейств линий: семейства направляющих (винтовых параллелей) * и семейства, составленного из последовательных положений прямолинейных образующих.

Винтовая линия постоянного шага, построенная на поверхности прямого кругового цилиндра, называется *гелисой*. Поэтому линейчатые винтовые поверхности, направляющая которых — гелиса, называются *геликоидами*. В зависимости от величины угла наклона образующей к оси геликоиды бывают *прямыми*, если этот угол равен 90°, и *косыми* (наклонными), если угол — произвольный, отличный от 0 и 90°.

Рис. 165 дает представление о прямом геликоиде. Изображенная на рис. 166 поверхность называется косым геликоидом. На рис. 165 и 166 поверхности указаны только частично, своими отсеками, заключенными между направляющей d и осью i.

В свою очередь, прямые и косые геликоиды подразделяются на *закрытые* и *открытые*. Признаком для такого деления служит взаимное расположение оси геликоида и его образующей. Если образующая и

* На эпюре Монжа, как правило, указывают только одну (или две) винтовые параллели, принадлежащие семейству направляющих.

ось пересекаются, геликоид называют *закрытым*, если скрещиваются – *открытым*.

Следует отметить одно важное свойство винтовых поверхностей, состоящее в том, что эти поверхности, так же как и поверхности вращения, могут сдвигаться, т. е., совершая винтовое перемещение, поверхность скользит вдоль самой себя. Это свойство обеспечивает винтовым поверхностям широкое применение в технике. Винты, шнеки, сверла, пружины, поверхности лопаток турбин и вентиляторов, рабочие органы судовых движителей, конструкции винтовых аппарелей и лестниц — вот далеко не полный перечень технического использования винтовых поверхностей.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. В чем сущность образования поверхностей кинематическим способом?
2. Что называется каркасом поверхности?
3. Чем отличается непрерывный каркас от дискретного?
4. Что такое определитель поверхности?
5. Что является содержанием геометрической и алгоритмической частей определителя?
6. Напишите определитель поверхностей: Каталана, вращения, геликоида, однополостного гиперболоида, коноида.
7. Как задается поверхность на эпюре Монжа?
8. Что такое очерк поверхности?
9. Какие поверхности называются поверхностями Каталана?
10. Дайте общую схему классификации поверхностей.
11. Приведите схему классификации линейчатых поверхностей.
12. Дайте определение различных видов линейчатых поверхностей.
13. Как образуются поверхности вращения?
14. Укажите основные свойства поверхности вращения.
15. Как образуются винтовые поверхности?
16. По какому признаку поверхности геликоида подразделяют на закрытые и открытые?

ГЛАВА V

ПОЗИЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ

ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Круг задач, ответы на которые могут быть получены графическим путем, чрезвычайно широк. При этом независимо от степени сложности их решения и характера вопросов, требующих ответа, все они могут быть отнесены всего лишь к одному из двух классов: 1-й класс — задачи позиционные; 2-й класс — задачи метрические.

Следует иметь в виду, что деление задач на позиционные и метрические является условным. Если из всего многообразия задач позиционную группу можно выделить, то чисто метрические задачи встречаются очень редко; как правило, при решении метрических задач предварительно приходится выяснять позиционные отношения между геометрическими фигурами, входящими в условия задачи или построенными в процессе решения, т. е. решать позиционную задачу.

Несмотря на это, распределение задач по отмеченным классам в методическом отношении имеет большой смысл, так как позволяет установить единые (обобщенные) алгоритмы, пригодные для решения широкого круга задач, входящих в один класс, и, как следствие, обеспечить простой и надежный поиск частного алгоритма для решения поставленной задачи.

В этой главе будут рассмотрены различные виды позиционных задач и указаны алгоритмы их решения. Под позиционными подразумеваются задачи, решение которых позволяет получить ответ о принадлежности элемента (точки) или подмножества (линии) множеству (поверхности). К позиционным относятся также задачи на определение общих элементов, принадлежащих различным геометрическим фигурам.

Первая группа задач может быть объединена под общим названием **задачи на принадлежность** (инцидентность). К ним, в частности, относятся задачи на определение:

1) принадлежности точки линии ($A \in l$);
2) принадлежности точки поверхности ($A \in \alpha$);
3) принадлежности линии поверхности ($l \subset \alpha$).

Ко второй группе относятся **задачи на пересечение**. Эта группа содержит также три типа задач:

1) на пересечение линии с линией ($l \cap m$);
2) на пересечение поверхности с поверхностью ($\alpha \cap \beta$);
3) на пересечение линии с поверхностью ($l \cap \alpha$).

С точки зрения единства принципа, положенного в основу решения позиционных задач, их можно не делить на две группы. Подходя к позиционным задачам с таких позиций, можно считать, что все многообразие позиционных задач может быть сведено к решению задач первой группы — задач на принадлежность: 1) $A \in l$, 2) $A \in \alpha$ и 3) $l \subset \alpha$. В справедли-

вости такого утверждения легко убедиться, перефразировав условия задач, входящих во вторую группу. Действительно:

1) задачу на определение точки пересечения линии с линией ($l \cap m$) можно заменить задачей 1 ($A \in l$) первой группы: "определить точку, принадлежащую как линии l, так и линии m";

2) условие "построить линию пересечения поверхностей α и β" ($\alpha \cap \beta$ — задача 2 второй группы) можно заменить задачей, относящейся к первой группе: "определить (построить) линию l, принадлежащую как поверхности α, так и β" ($l \subset \alpha$ — задача 3 первой группы);

3) задачу 3 второй группы "построить точку A пересечения линии l с поверхностью α ($l \cap \alpha$)" можно рассматривать как две задачи первой группы: $A \in l$ (задача 1) и $A \in \alpha$ (задача 2).

Если учесть, что линию можно рассматривать как множество принадлежащих ей точек, то задача третьего типа ($l \subset \alpha$) сводится к многократному решению задачи определения $A \in \alpha$. Тогда окончательно получим следующее определение:

к позиционным относятся задачи, решение которых, в конечном счете, сводится: 1) к построению точки, принадлежащей линии ($A \in l$), и 2) к построению точки, принадлежащей поверхности ($A \in \alpha$).

Решение таких задач базируется на инвариантном свойстве 2 (см. § 6) ортогонального проецирования, из которого вытекает:

$$A \in l \Leftrightarrow (A' \in l') \wedge (A'' \in l''); \qquad (2)$$

$$A \in \alpha \Leftrightarrow (A' \in l' \subset \alpha') \wedge (A'' \in l'' \subset \alpha''). \qquad (3)$$

Проследим на примерах, как решаются позиционные задачи.

§ 39. ПРИНАДЛЕЖНОСТЬ ТОЧКИ ЛИНИИ ($A \in l$)

При выяснении вопроса о принадлежности точки линии или при решении аналогичной задачи на построение точки, принадлежащей линии, достаточно использовать только свойство (2) из § 38.

Следует иметь в виду, что если линия занимает произвольное положение по отношению к плоскостям проекций, то решение может быть получено в системе двух заданных плоскостей проекций. В случае, когда линия принадлежит плоскости, перпендикулярной оси проекции, для решения следует пользоваться вспомогательной плоскостью проекции.

ПРИМЕР 1. На данной кривой l указать произвольную точку A, принадлежащую этой кривой (рис. 167).

РЕШЕНИЕ. Зная, что на основании свойства (2) $A' \in l'$ и $A'' \in l''$, а также, что A' и A'' принадлежат одной линии связи, перпендикулярной оси проекции x, отмечаем на какой-либо проекции линии l произвольную точку A, обозначаем ее тем же индексом, какой имеет проекция линии l. На рис. 167 точка A' взята на горизонтальной проекции линии l'. Для определения A'' через точку A' проводим прямую, перпендикулярную оси проекции, и отмечаем точку ее пересечения с фронтальной проекцией линии l''.

ПРИМЕР 2. Указать горизонтальную проекцию точки C по данной ее фронтальной проекции C'', если известно, что точка $C \in [AB]$ (рис. 168).

РЕШЕНИЕ. Так как отрезок $[AB]$ принадлежит плоскости, перпендикулярной оси проекции, то решить эту задачу в системе заданных плоскостей проекций не представляется возможным*. Для ее решения воспользуемся вспомогательной

---

* Имеется в виду графическое решение. Ответ на поставленную задачу может быть получен из условия деления отрезка в данном отношении (см. § 6, инвариант 2 к).

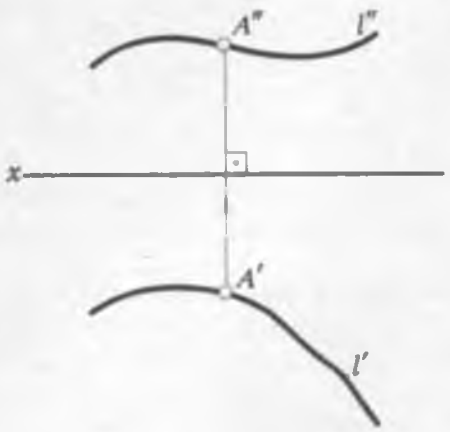


Рис. 167

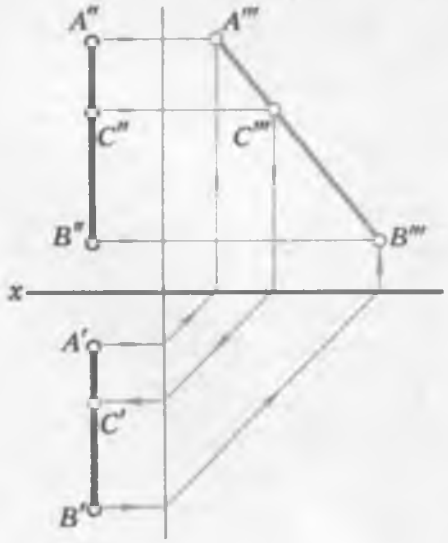


Рис. 168

плоскостью проекции. В качестве вспомогательной плоскости возьмем плоскость π_3, перпендикулярную оси проекции. На плоскости π_3 находим проекцию $A'''B'''$ отрезка $[AB]$ и на ней отмечаем вспомогательную проекцию C''' точки C. Зная C''', находим C'.

Все необходимые геометрические построения ясны из чертежа и не нуждаются в пояснении.

§ 40. ПРИНАДЛЕЖНОСТЬ ТОЧКИ ПОВЕРХНОСТИ ($A \in \alpha$)

При составлении алгоритма решения этой группы задач следует базироваться на свойстве (3) из § 38, т. е. для того чтобы на чертеже поверхности указать проекции принадлежащей ей точки, необходимо вначале построить проекции какой-либо линии, принадлежащей поверхности, а затем на этой линии отметить точку.

В качестве линии, как правило, выбирается образующая поверхности. Если поверхность может быть получена образующей различной формы, то предпочтение следует отдавать наиболее простым и удобным для построения линиям: окружностям для поверхностей вращения, прямым для линейчатых поверхностей (в частности, для плоскости целесообразно использовать линии уровня*).

ПРИМЕР 1. В плоскости $\alpha(a \parallel b)$ указать произвольную точку A (рис. 169).

РЕШЕНИЕ. В плоскости α проводим произвольную горизонталь h. При построении ее проекций следует иметь в виду, что прямая принадлежит плоскости в том случае, если она содержит две различные точки, принадлежащие плоскости. В качестве таких точек принимаем точки 1 и 2, принадлежащие соответственно прямым a и b, определяющим плоскость α.

На рис. 169 построение проекций горизонтали h выполнено в следующей последовательности:

а) на прямой a взяли произвольную точку 1, через фронтальную проекцию этой точки провели фронтальную проекцию горизонтали h'';

б) отметили точку $2'' = h'' \cap b''$;

в) определили горизонтальные проекции $1'$ и $2'$ точек 1 и 2;

г) через точки $1'$ и $2'$ провели горизонтальную проекцию горизонтали h'.

Горизонталь $h \subset \alpha$, так как h проходит через точки 1 и 2, принадлежащие плоскости α.

---

* Особенно целесообразно пользоваться линиями уровня в случае, когда плоскость задана следами.

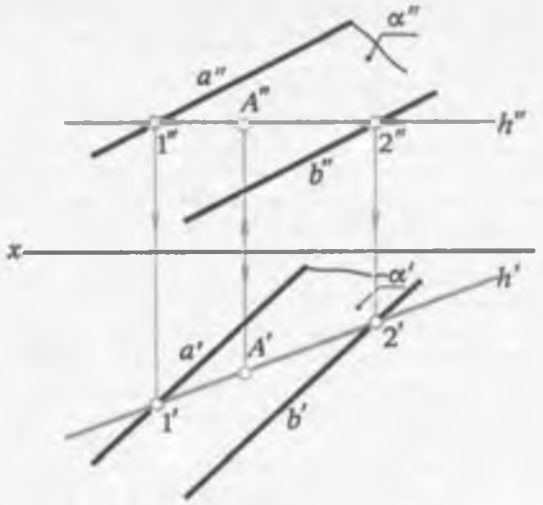


Рис. 169

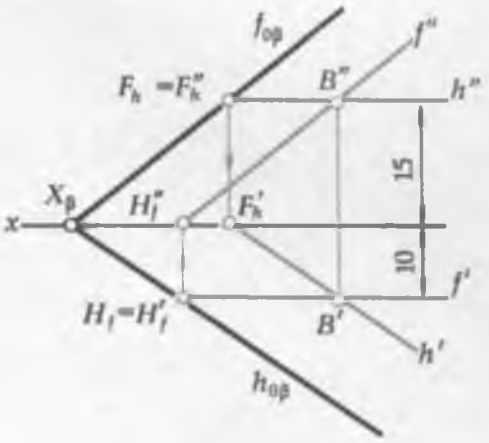


Рис. 170

На проекциях горизонтали h' и h'' отмечаем проекции точки A ($A' \in h'$ и $A'' \in h''$). Точка $A \subset \alpha$, так как $A \in l \subset \alpha$.

ПРИМЕР 2. В плоскости β указать точку B, удаленную от горизонтальной плоскости проекции на расстояние 15 мм и от фронтальной плоскости проекции на расстояние 10 мм (рис. 170).

РЕШЕНИЕ. Проводим в плоскости β фронталь f и горизонталь h, удаленные от плоскостей проекций соответственно на расстояния 10 и 15 мм. Пересечение одноименных проекций f и h укажет проекции искомой точки B ($B' = f' \cap h'$, $B'' = f'' \cap h''$).

ПРИМЕР 3. Определить фронтальную проекцию точки A, принадлежащей плоскости α, если известна ее горизонтальная проекция A' (рис. 171).

Мы знаем, что $A \in \alpha \Leftrightarrow (A' \in l' \subset \alpha') \wedge (A'' \in l'' \subset \alpha'')$, поэтому, чтобы получить ответ на поставленную задачу, достаточно через A' провести горизонтальную проекцию прямой, принадлежащей плоскости α, найти ее фронтальную проекцию и на ней отметить точку A''. Так как плоскость α задана следами, то целесообразно в качестве вспомогательной прямой использовать одну из главных линий плоскости. На рис. 171 проведена фронталь f плоскости α.

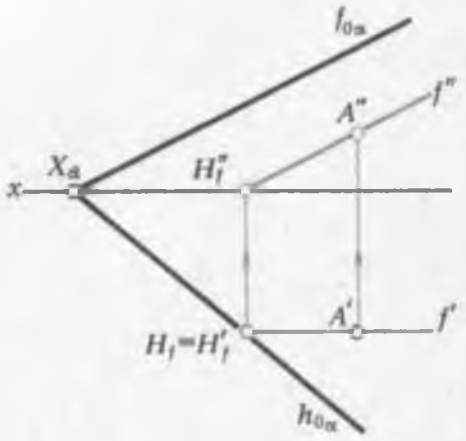


Рис. 171

ПРИМЕР 4. На цилиндрической поверхности α, заданной направляющей d и образующей g, указать произвольную точку A (рис. 172).

РЕШЕНИЕ. Проводим произвольную прямолинейную образующую g_j цилиндрической поверхности α. Для этого на кривой d отмечаем произвольную точку 1 ($1' \in d'$ и $1'' \in d''$). Через проекции точки 1 проводим проекции прямой g_j па-

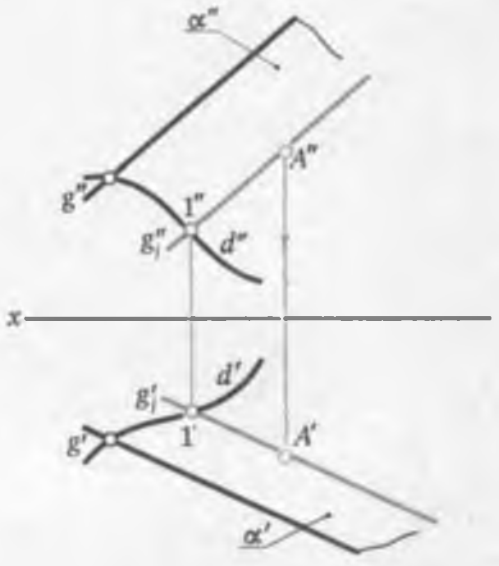


Рис. 172

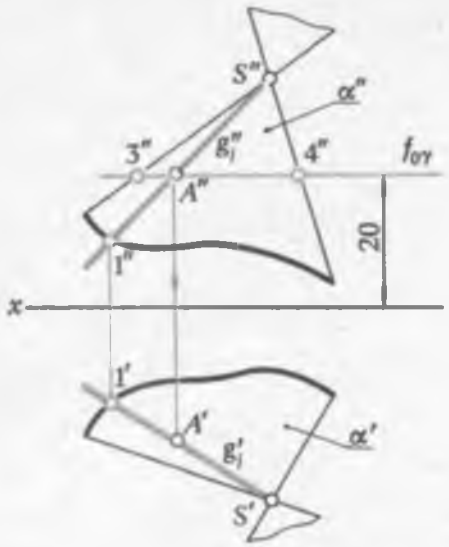


Рис. 173

раллельно соответствующим проекциям g' и g''. На прямой g_j отмечаем произвольную точку A:

$$A \in \alpha \Longleftrightarrow (A' \in g'_j \subset \alpha') \wedge (A'' \in g''_j \subset \alpha'').$$

ПРИМЕР 5. На конической поверхности α указать точку A, удаленную от горизонтальной плоскости проекции на расстояние 20 мм (рис. 173).

РЕШЕНИЕ. Проводим плоскость $\gamma \parallel \pi_1$ и удаленную от оси x на заданное расстояние 20 мм. На конической поверхности α отмечаем произвольную прямолинейную образующую g_j (g'_j, g''_j). Точка пересечения $g''_j \cap f_{0\gamma}$ укажет фронтальную проекцию A'' искомой точки A. По A'' находим A'.

Следует иметь в виду, что данная задача имеет бесчисленное множество решений: любая точка отрезка 3″, 4″ может быть принята за фронтальную проекцию точки, удовлетворяющей условию поставленной задачи.

ПРИМЕР 6. На поверхности наклонного геликоида α указать фронтальную проекцию точки A, если известна ее горизонтальная проекция A' (рис. 174).

РЕШЕНИЕ. Через горизонтальную проекцию точки A' проводим горизонтальную проекцию прямолинейной образующей g'. Фронтальная проекция g'' определяется из условия равенства углов наклона всех прямолинейных образующих к направляющей плоскости (в нашем случае за направляющую плоскость принята π_1).

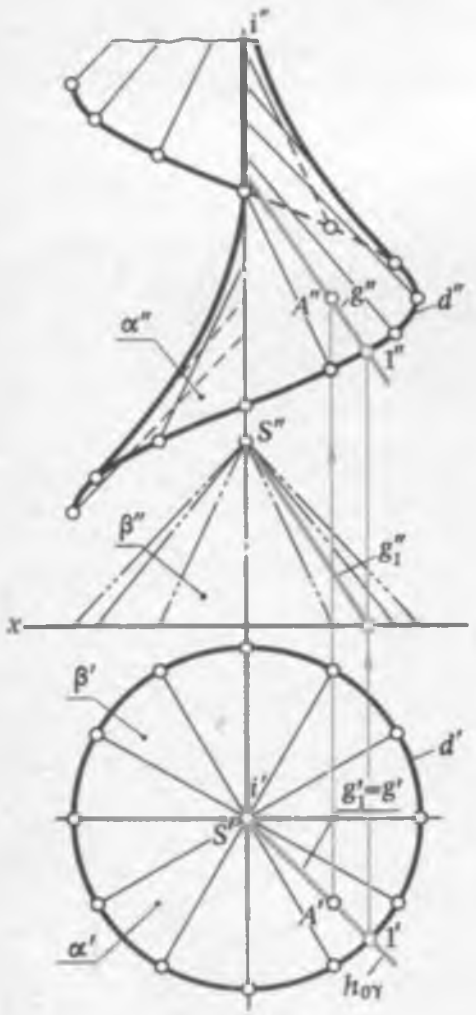


Рис. 174

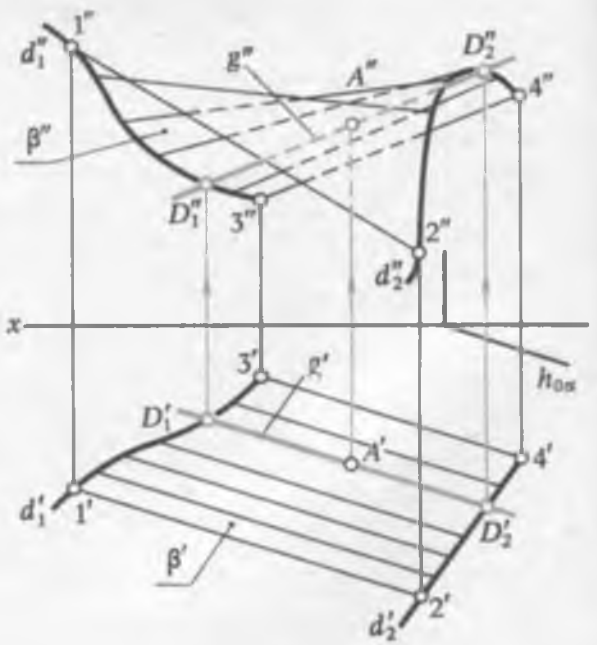


Рис. 175

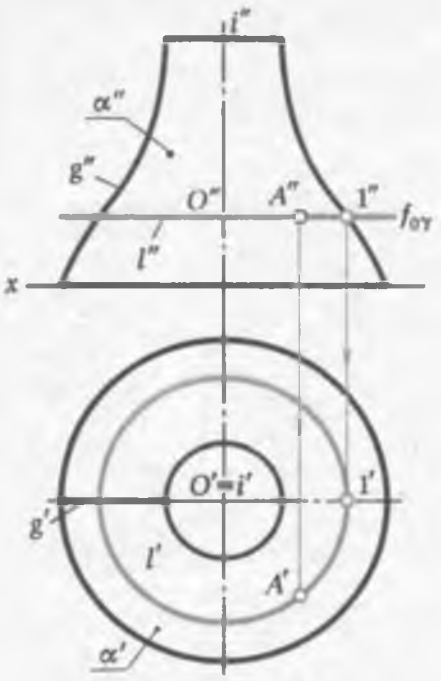


Рис. 176

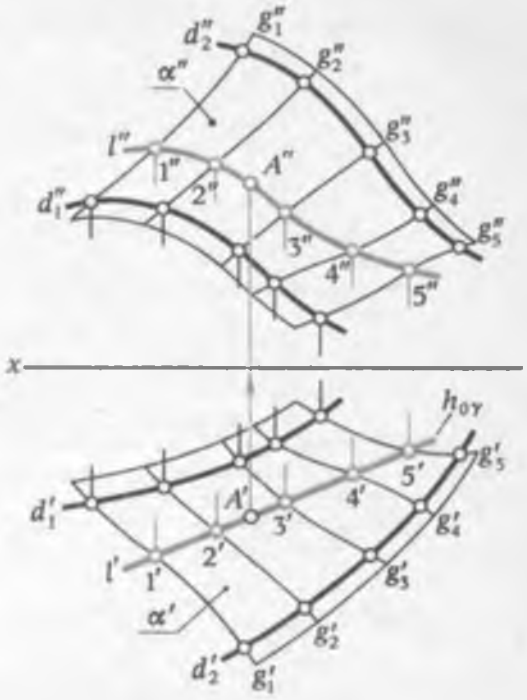


Рис. 177

Множество прямых, пересекающих ось винтовой поверхности i в точке S, образуют поверхность прямого кругового конуса β, прямолинейные образующие которого составляют заданный угол с плоскостью π_1. Поэтому для определения фронтальной проекции g'' проводим прямолинейную образующую g_1 конической поверхности β, по которой горизонтально проецирующая плоскость γ, проходящая через точку A и ось i, пересекает поверхность β. Фронтальная проекция g'' должна быть параллельна g_1''. Для ее построения на горизонтальной проекции d' отмечаем точку $1'$, в которой $h_{0\gamma} \cap d'$; по $1'$ определяем $1''$. Через $1''$ проводим $g'' \parallel g_1''$. Для построения фронтальной проекции A'' через A' проводим линию связи перпендикулярно оси x и отмечаем точку ее пересечения с g''.

ПРИМЕР 7. На поверхности цилиндроида β указать фронтальную проекцию точки A, если известна ее горизонтальная проекция A' (рис. 175).

РЕШЕНИЕ. Через горизонтальную проекцию точки A' проводим горизонтальную проекцию прямолинейной образующей g' поверхности β, для этого через A' проводим прямую $g' \parallel h_{0\alpha}$ и отмечаем точки D_1' и D_2', в которых прямая g' пересекает направляющие d_1' и d_2'.

По точкам D_1' и D_2' строим их фронтальные проекции D_1'' и D_2'', которые определяют фронтальную проекцию образующей g''. На g'' находим точку A''. Для ее построения через A' проводим линию связи перпендикулярно оси x и отмечаем точку ее пересечения с g''.

ПРИМЕР 8. Построить горизонтальную проекцию точки, принадлежащей поверхности вращения $\alpha(g, i)$, если известна ее фронтальная проекция A'' (рис. 176).

РЕШЕНИЕ. Через данную фронтальную проекцию точки A'' проводим фронтальную проекцию окружности l'', принадлежащей поверхности α. Строим горизонтальную проекцию этой окружности l'. Окружность l — параллель поверхности α, ее следует рассматривать как сечение поверхности α горизонтальной плоскостью γ. Длина отрезка $O''1''$ укажет величину радиуса окружности l'. На l' отмечаем A'. Для нахождения A' через A'' проводим линию связи перпендикулярно оси x и отмечаем точку ее пересечения с l'.

В рассмотренных примерах были заданы поверхности линейчатые или вращения. Это позволило для решения задачи на принадлежность точки поверхности использовать простые линии — прямые или окружности. Для нелинейчатых поверхностей, на которых невозможно провес-

ти такие линии, приходится строить кривые, принадлежащие поверхности.

Приведенный ниже пример показывает, как следует решать задачу на принадлежность точки поверхности в случае, когда поверхность нелинейчатая.

ПРИМЕР 9. Определить недостающую (фронтальную) проекцию точки A, принадлежащей нелинейчатой поверхности α, если известна ее горизонтальная проекция A' (рис. 177).

РЕШЕНИЕ. Определение недостающей проекции точки A осуществляется аналогично рассмотренным ранее случаям (см. примеры 1 ... 8). Вначале через точку A' проводим прямую l' — горизонтальную проекцию линии l. Чтобы линия l принадлежала поверхности α, необходимо, чтобы любые точки, взятые на этой линии, принадлежали поверхности α. В качестве таких точек принимаем точки $1', 2', 3', 4', 5'$, в которых l' пересекает горизонтальные проекции образующих $g_1', g_2', g_3', g_4', g_5'$; зная $1', 2', \ldots, 5'$, определяем $1'', 2'', \ldots, 5''$. Соединив эти точки плавной кривой, получим l''; на l'' отмечаем A''. Точка $A \in \alpha$, так как $A' \in l'$ и $A'' \in l''$, а $l \subset \alpha$.

Следует иметь в виду, что при решении подобных задач в качестве линии l целесообразно пользоваться плоской кривой, в частности, принадлежащей проецирующей плоскости (в рассмотренном случае кривая l принадлежит горизонтально проецирующей плоскости γ).

§ 41. ПРИНАДЛЕЖНОСТЬ ЛИНИИ ПОВЕРХНОСТИ ($l \subset \alpha$)

Построение линии, принадлежащей поверхности, принципиально не отличается от построения точки, принадлежащей поверхности (см. § 40, примеры 1 ... 9). Различие состоит лишь в том, что определяются проекции не одной, а n точек, принадлежащих линии.

ПРИМЕР 1. Построить фронтальную проекцию кривой l, принадлежащей поверхности гиперболического параболоида α, заданного направляющими d_1, d_2 и плоскостью параллелизма β, если известна горизонтальная проекция кривой l' (рис. 178).

РЕШЕНИЕ. Поверхность α представляет собой множество точек, а линия l, принадлежащая поверхности α, является подмножеством этого множества. Поэтому для соблюдения условия $l \subset \alpha$ необходимо, чтобы каждый элемент (точка) подмножества l принадлежал множеству α. Для обеспечения этого условия необходимо, чтобы любая точка $A_j \in l$ принадлежала линии $g_j \subset \alpha$.

Решение сводится к следующему:

1. На горизонтальной проекции поверхности α проводим горизонтальные проекции прямолинейных образующих $g_1', g_2', g_3', g_4', g_5'$ параллельно $h_{0\beta}$.

2. Находим фронтальные проекции этих образующих $g_1'', g_2'', g_3'', g_4'', g_5''$.

3. Отмечаем точки $1', 2', 3', 4', 5'$, в которых горизонтальная проекция кривой l' пересекает горизонтальные проекции образующих $g_1', g_2', g_3', g_4', g_5'$.

4. Находим фронтальные проекции точек $1'', 2'', 3'', 4'', 5''$ на соответствующих фронтальных проекциях образующих $g_1'', g_2'', g_3'', g_4'', g_5''$. Соединив их плавной кривой, получим искомую фронтальную проекцию l'' кривой $l \subset \alpha$.

Если необходимо определить проекцию прямой, принадлежащей плоскости, то решение задачи значительно упрощается.

ПРИМЕР 2. Построить фронтальную проекцию прямой m, принадлежащей плоскости α, если известна ее горизонтальная проекция m' (рис. 179).

РЕШЕНИЕ. Прямая однозначно определяется двумя не тождественными точками, поэтому для определения m'' необходимо и достаточно найти фронтальные проекции двух не тождественных точек 1 и 2, принадлежащих прямой m, т. е. дважды решить задачу по определению проекций точки, принадлежащей плоскости, если известна одна из ее проекций (см. § 40 пример 3).

На рис. 179 решение выполнено в следующем порядке:

1. Отметили на горизонтальной проекции прямой m' две различные точки $1'$ и $2'$.

2. Определили их фронтальные проекции $1''$ и $2''$. Положение точек $1''$ и $2''$ найдено с помощью фронталей $f_1 \ni 1$ и $f_2 \ni 2$.

3. Точки $1''$ и $2''$ определяют искомую фронтальную проекцию прямой m''.

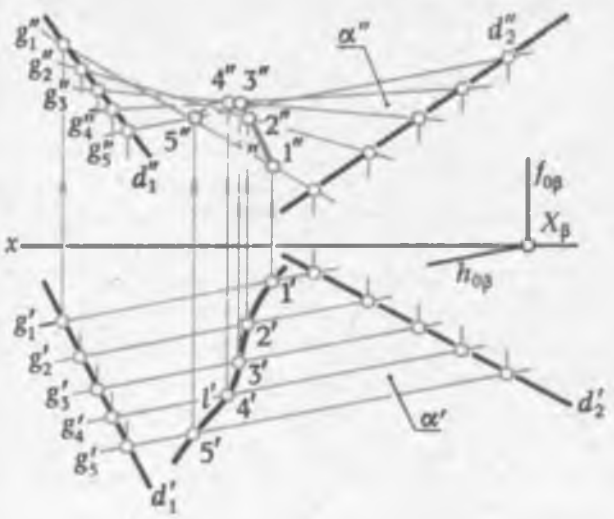


Рис. 178

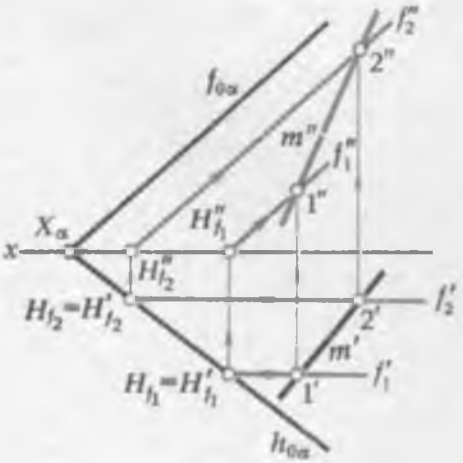


Рис. 179

§ 42. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ЛИНИИ С ЛИНИЕЙ ($l \cap m$)

Решение задач на определение общей точки, принадлежащей как линии l, так и линии m, или иначе, задач по определению точки пересечения двух линий, вытекает непосредственно из инварианта ортогонального проецирования

$$K = a \cap b \iff K' = a' \cap b' \wedge K'' = a'' \cap b''.$$

ПРИМЕР 1. Показать на эпюре Монжа две произвольные пересекающиеся линии m и n (рис. 180).

РЕШЕНИЕ. Пусть $K = m \cap n$, тогда $K \in m$ и $K \in n$. Из условия принадлежности $K \in m$ вытекает $K' \in m'$ и $K'' \in m''$. Так как $K \in n$, то $K' \in n'$ и $K'' \in n''$. Для того чтобы $m \cap n$, необходимо, чтобы K' и K'' принадлежали одному перпендикуляру к оси x. На рис. 180 показаны пересекающиеся кривые m и n.

ПРИМЕР 2. Данную кривую l пересечь горизонталью h, проходящей через точку A (рис. 181).

РЕШЕНИЕ. Через A'' проводим фронтальную проекцию горизонтали $h'' \parallel$ оси x. Отмечаем точку $K'' = h'' \cap l''$. Находим $K' \in l'$. Точки K' и A' определяют горизонтальную проекцию h' горизонтали h.

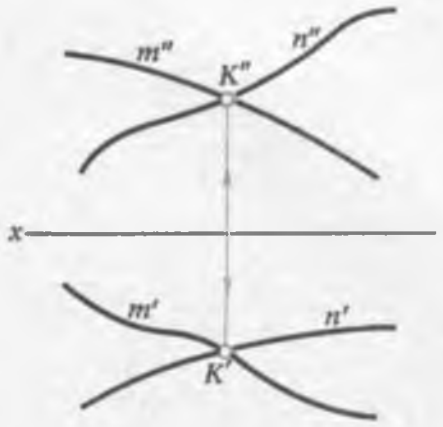


Рис. 180

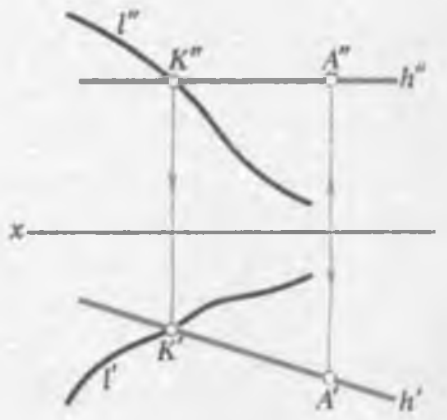


Рис. 181

§ 43. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ С ПОВЕРХНОСТЬЮ ($\alpha \cap \beta$)

Две поверхности пересекаются по линии, точки которой принадлежат каждой из пересекающихся поверхностей. Поэтому построение линии пересечения двух поверхностей α и β сводится к нахождению общих точек, принадлежащих как множеству точек, составляющему поверхность α, так и другому множеству точек, входящих в состав поверхности β.

Способ построения линии пересечения двух поверхностей состоит в следующем: заданные поверхности пересекают третьей, вспомогательной поверхностью (вид и расположение вспомогательной секущей поверхности выбирают с таким расчетом, чтобы можно было легко определить линии пересечения этой поверхности с заданными); находят линии, по которым эта вспомогательная секущая поверхность пересекает каждую из данных поверхностей. Далее отмечают точку (точки), в которой пересекаются полученные линии пересечения (рис. 182).

Построив отмеченные операции n раз, получим множество точек. Линия l, соединяющая эти точки, является искомой линией пересечения поверхностей.

Используя геометрический язык, ход решения задачи можно представить в виде формализованного алгоритма, записанного в символической форме.

В табл. 8 дано традиционное для начертательной геометрии словесное описание алгоритма (слева) и соответствующая ему символическая запись на геометрическом языке (справа).

Таблица 8. Описание алгоритма решения задачи по определению линии пересечения двух поверхностей

Словесное описание на традиционном языке начертательной геометрии	Символическая запись на геометрическом языке
1. Вводим вспомогательную секущую поверхность	Вводим γ_j
2. Определяем линии пересечения этой вспомогательной поверхности с каждой из заданных поверхностей	Определяем $m_j = \gamma_j \cap \alpha$ $n_j = \gamma_j \cap \beta$
3. Находим точки, в которых пересекаются полученные линии пересечения. Соединяем эти точки плавной линией	Находим $L_j = m_j \cap n_j$ $l = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup \ldots \cup L_n$*

* В некоторых случаях линия пересечения может распадаться на две и более линий, т. е. множество l может состоять из подмножеств $l_1, l_2, \ldots, l_n$. Эти линии могут быть как кривыми (пространственными или плоскими), так и прямыми. При этом линии могут быть как действительными, так и мнимыми.

Алгоритм нахождения точек, общих для двух заданных множеств точек — поверхностей α и β, можно записать в виде

$$l = (L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup \ldots \cup L_n);\ [L_j = (\gamma_j \cap \alpha) \cap (\gamma_j \cap \beta)]. \qquad (4)$$

Повторяя многократно последовательность операций, обозначенных в приведенном алгоритме (каждый раз, естественно, меняя положение вспомогательной секущей поверхности γ_j), можно получить любое число точек, принадлежащих искомой линии пересечения заданных поверхностей.

Рассматриваемый алгоритм определения точек, принадлежащих линии пересечения двух поверхностей, является универсальным, так как

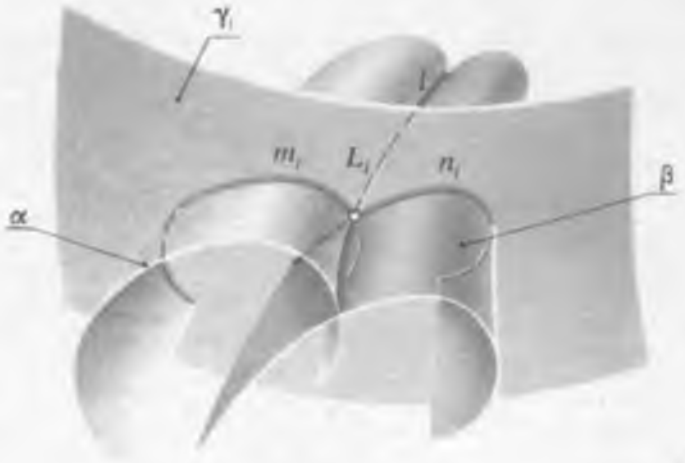


Рис. 182

под α и β могут подразумеваться любые поверхности, в том числе и плоскости. На выбор вида и расположения вспомогательной секущей поверхности γ_j в приведенном алгоритме также не накладывается никаких ограничений.

Вдумчивый читатель может задать вполне справедливый вопрос: "Что это за алгоритм, который предписывает решать задачи по определению точки (точек), принадлежащей линии пересечения двух поверхностей, путем решения двух задач, в каждой из которых также приходится строить линию пересечения поверхностей?".

Такое, на первый взгляд, нелогичное построение алгоритма становится вполне оправданным, если учесть, что данные поверхности α и β могут иметь любую форму и занимать произвольное положение в пространстве, что не позволяет непосредственно, по эпюру, определить линию их пересечения. А в качестве вспомогательной секущей поверхности γ_j мы можем выбрать поверхность удобной формы и так ориентировать ее относительно плоскостей проекций, чтобы получить простое решение для определения линии ее пересечения с каждой из заданных поверхностей.

Среди инвариантных свойств ортогонального проецирования находим $(\Phi \subset \gamma) \wedge (\gamma \perp \pi_1) \Rightarrow \Phi' \subset h_{0\gamma}$, т. е., если фигура Φ принадлежит поверхности $\gamma \perp$ плоскости π_1, то ортогональная проекция Φ' на эту плоскость принадлежит следу поверхности $h_{0\gamma}$ (см. § 6, свойство 2 г). Поэтому, если принять за вспомогательную секущую поверхность $\gamma_j \perp \pi_1$ (или π_2), то линии m_j и n_j пересечения этой поверхности с поверхностями α и β будут иметь горизонтальные (или фронтальные) проекции $m_j' \subset h_{0\gamma_j}$ и $n_j' \subset h_{0\gamma_j}$ ($m_j'' \subset f_{0\gamma_j}$ и $n_j'' \subset f_{0\gamma_j}$), т. е. решение подчас сложной задачи на построение линии пересечения поверхностей α и β мы заменяем решением двух простейших задач: 1) определить линию пересечения проецирующей поверхности γ_j с поверхностью α; 2) определить линию пересечения той же поверхности γ_j с поверхностью β. Очевидно, что каждая из этих задач сводится к построению второй проекции линии, принадлежащей поверхности, если известна одна из ее проекций. Решение последней задачи состоит из многократного определения недостающей проекции точки, принадлежащей поверхности, т. е. сводится к решению позиционной задачи второго вида $A \in \alpha$ (см. § 40).

§ 44. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПЛОСКОСТЕЙ

Использование универсального алгоритма для решения задач по определению линии пересечения поверхностей проследим вначале на наиболее простых примерах пересечения двух плоскостей.

Две плоскости пересекаются по прямой линии, для определения которой достаточно найти две точки, принадлежащие одновременно каждой из заданных плоскостей.

Чтобы найти такие точки, достаточно ввести две вспомогательные секущие плоскости γ_1 и γ_2, т. е. дважды выполнить последовательность операций, предусмотренных частью алгоритма (4), заключенной в квадратные скобки (см. § 43):

$$L_1 = (\gamma_1 \cap \alpha) \cap (\gamma_1 \cap \beta);$$
$$L_2 = (\gamma_2 \cap \alpha) \cap (\gamma_2 \cap \beta);$$
$$l = (L_1, L_2).$$

Рассмотрим общий случай пересечения плоскостей, когда обе плоскости — общего положения.

ПРИМЕР 1. Определить линию пересечения l плоскостей $\alpha(a \cap b)$ и $\beta(c \parallel d)$ (рис. 183).

РЕШЕНИЕ. Проводим вспомогательную горизонтально проецирующую плоскость $\gamma_1(h_{0\gamma_1})$. Определяем проекции прямых $m_1 = \gamma_1 \cap \alpha$ и $n_1 = \gamma_1 \cap \beta$. Так как плоскость $\gamma_1 \perp \pi_1$, то m_1' и n_1' совпадут с $h_{0\gamma_1}$. С помощью точек 1′, 2′ и 3′, 4′, принадлежащих прямым m_1' и n_1', определяем фронтальные проекции этих точек 1″, 2″ и 3″, 4″, которые определяют прямые m_1'' и n_1''. Отмечаем точку пересечения фронтальных проекций прямых $L_1'' = m_1'' \cap n_1''$. Горизонтальная проекция L_1' принадлежит горизонтальным проекциям m_1' и n_1'.

Для нахождения точки L_2 вводим плоскость $\gamma_2 \parallel \gamma_1$. Плоскость γ_2 пересечет заданные плоскости по прямым m_2 и n_2, соответственно параллельным прямым m_1 и n_1. Поэтому для определения их проекций достаточно найти проекции только одной точки, принадлежащей каждой из прямых m_2 и n_2. На рис. 183

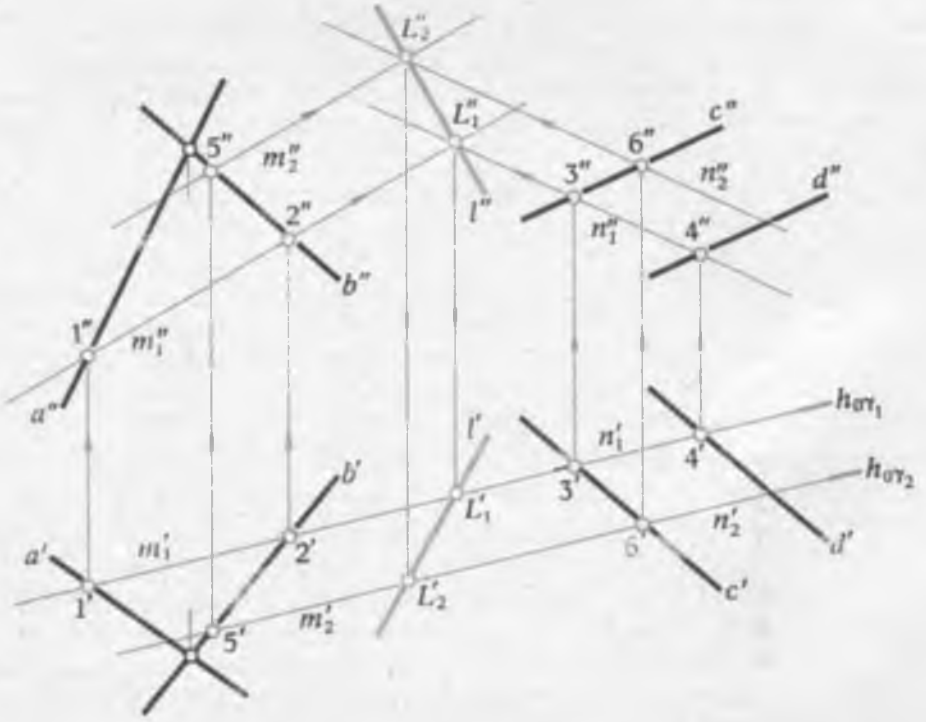


Рис. 183

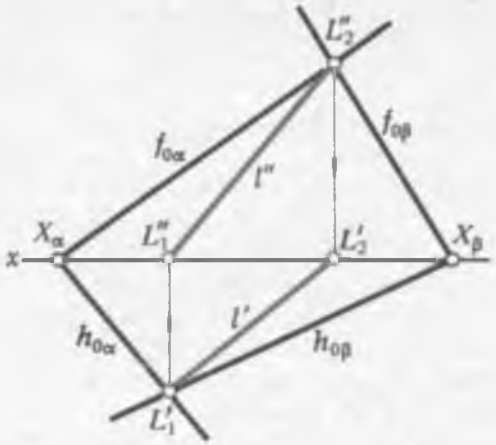


Рис. 184

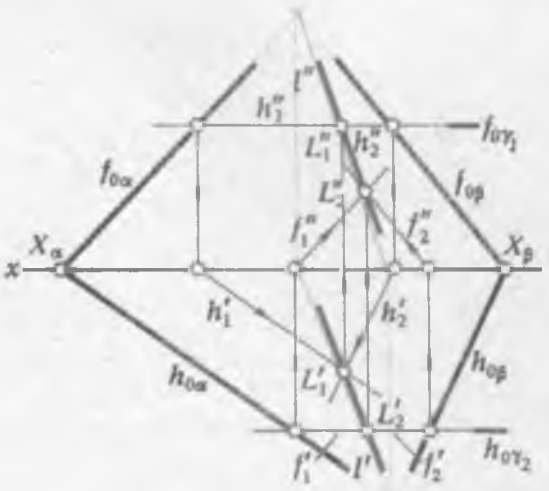


Рис. 185

за такие точки приняты 5 и 6. Пересечение $m_2 \cap n_2 = L_2$. Точки L_1 и L_2 определяют искомую прямую l.

ПРИМЕР 2. Определить линию пересечения плоскостей α и β, заданных следами (рис. 184).

РЕШЕНИЕ. В данном случае решение значительно упрощается в связи с тем, что отпадает необходимость в выполнении построений, предусмотренных первым и вторым пунктами алгоритма (см. § 43, табл. 8). Это происходит потому, что роль вспомогательных секущих плоскостей γ_1 и γ_2 при задании плоскости следами могут выполнять плоскости проекций π_1 и π_2, а соответствующие следы $h_{0\alpha}$, $h_{0\beta}$ и $f_{0\alpha}$, $f_{0\beta}$ несут функции проекций прямых m', n' и m'', n''. Следовательно, точки пересечения одноименных следов плоскостей α и β определяют положение проекций точек L_1 и L_2:

$$L_1' = h_{0\alpha} \cap h_{0\beta} \text{ и } L_2'' = f_{0\alpha} \cap f_{0\beta}.$$

Через одноименные проекции точек L_1 и L_2 проводим проекции искомой прямой l' и l''.

Если одноименные следы плоскостей не пересекаются в пределах чертежа, то не представляется возможным использовать плоскости проекций в качестве вспомогательных секущих плоскостей. В этих случаях приходится вводить секущие плоскости, которые целесообразно проводить параллельно плоскостям проекций. Поясним сказанное на примере решения задачи по определению линии пересечения плоскостей α и β.

ПРИМЕР 3. Определить линию пересечения плоскостей α и β (рис. 185).

РЕШЕНИЕ. Вводим вспомогательные секущие плоскости $\gamma_1 \parallel \pi_1$ и $\gamma_2 \parallel \pi_2$. Эти плоскости пересекают заданные α и β по горизонталям h_1 и h_2 (плоскость γ_1) и фронталям f_1 и f_2 (плоскость γ_2).

Находим точки L_1 и L_2: $L_1' = h_1' \cap h_2'$; $L_2'' = f_1'' \cap f_2''$. Зная L_1' и L_2'', определяем L_1'' и L_2'. Через одноименные проекции точек $L_1'L_2'$ и $L_1''L_2''$ проводим проекции l' и l'' искомой прямой пересечения плоскостей α и β.

Эту же задачу можно решить иначе. Вместо двух вспомогательных секущих плоскостей уровня взять одну плоскость γ общего положения, параллельную одной из заданных плоскостей α (или β). Такой вариант решения основан на том, что линии пересечения плоскости α двумя параллельными плоскостями β и γ параллельны между собой.

ПРИМЕР 4. Определить линию пересечения плоскостей α и β (рис. 186).

РЕШЕНИЕ. Проводим вспомогательную секущую плоскость $\gamma \parallel \beta$ ($h_{0\gamma} \parallel h_{0\beta}$ и $f_{0\gamma} \parallel f_{0\beta}$). Точку X_γ выбираем так, чтобы одноименные следы плоскостей α и γ пересекались в пределах чертежа. Находим l_1 — линию пересечения плоскостей α и γ. Проекции l_1' и l_1'' указывают направления проекций линии l пересечения плоскостей α и β.

Для определения точек, через которые пройдут эти проекции, рассмотрим $\Delta X_\alpha L_4'' X_\gamma \sim \Delta X_\alpha L_2'' X_\beta$. В $\Delta X_\alpha L_4'' X_\gamma$ $(L_4''L_3'') \parallel (L_2''L_1'')$ Δ $X_\alpha L_2'' X_\beta$, поэтому

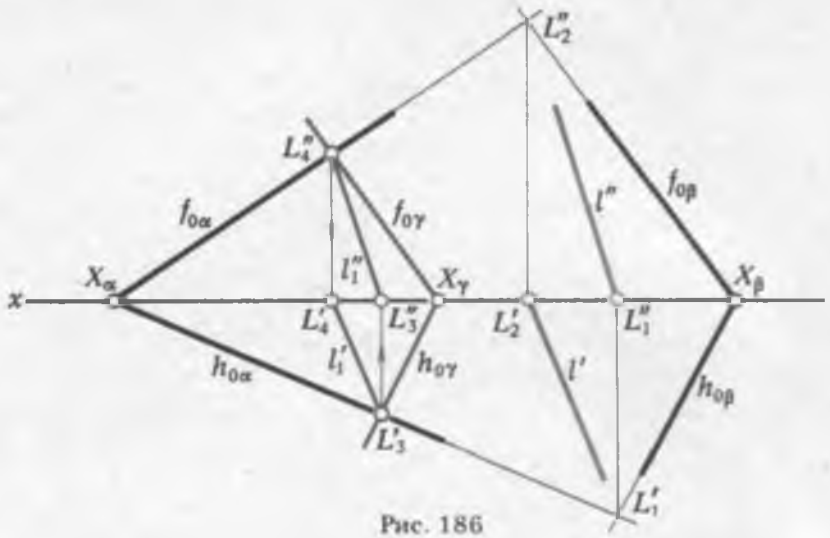


Рис. 186

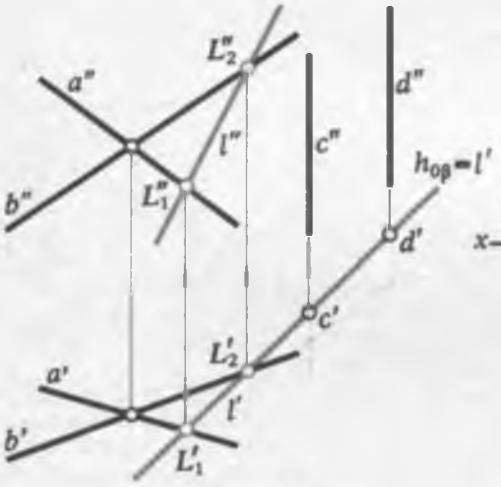


Рис. 187

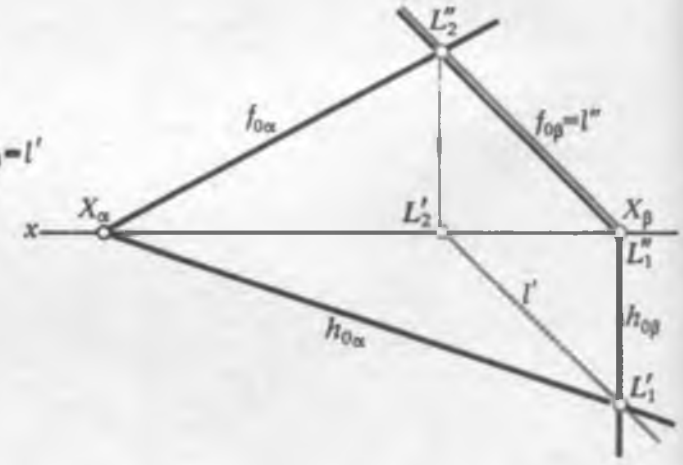


Рис. 188

$\frac{|X_\alpha X_\gamma|}{|X_\alpha X_\beta|} = \frac{|X_\alpha L_3''|}{|X_\alpha L_1''|}$. Из этой пропорции определяем $|X_\alpha L_1''|$ и через точку L_1'' проводим $l'' \parallel l_1''$.

Для нахождения горизонтальной проекции l' достаточно составить пропорцию:

$$\frac{|X_\alpha X_\gamma|}{|X_\alpha X_\beta|} = \frac{|X_\alpha L_4'|}{|X_\alpha L_1'|}.$$

Три отрезка из четырех заданы на чертеже, это дает возможность определить четвертый $[X_\alpha L_2']$. Через точку L_2' проводим $l' \parallel l_1'$.

Решение задачи по определению линии пересечения плоскостей значительно упрощается, если одна из плоскостей занимает проецирующее положение. Из рис. 187 и 188 видно, насколько проще решается задача, когда одна из пересекающихся плоскостей — проецирующая, по сравнению с задачей (см. пример 1, рис. 183), в которой обе плоскости занимают общее положение. В этих случаях появляется возможность воспользоваться инвариантом $(\Phi \subset \beta) \wedge (\beta \perp \pi_1) \Rightarrow \Phi' \subset h_{0\beta}$, поэтому одна из проекций линии пересечения (l' на рис. 187 и l'' на рис. 188) входит в состав исходных данных задачи ($l' \equiv h_{0\beta}$ на рис. 187 и $l'' \equiv f_{0\beta}$ на рис. 188). Решение сводится к определению недостающей проекции прямой, принадлежащей плоскости (см. § 41, пример 2, рис. 179).

§ 45. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ ПЛОСКОСТЬЮ (ПОСТРОЕНИЕ СЕЧЕНИЯ)

При пересечении поверхности или какой-либо геометрической фигуры плоскостью получается плоская фигура, которую называют *сечением*.

Сечение поверхности плоскостью в общем случае представляет собой кривую (или прямую, если пересекаются плоскости), принадлежащую секущей плоскости.

Определение проекций линий сечения следует начинать с построения опорных точек — точек, расположенных на очерковых образующих поверхности (точки, определяющие границы видимости проекций кривой); точек, удаленных на экстремальные (максимальное и минимальное) расстояния от плоскостей проекций. После этого определяют произвольные точки линии сечения.

Если произвольные точки определяются с помощью одного и того же приема, то для нахождения опорных точек, как правило, приходится пользоваться различными способами.

В дальнейшем при построении сечения поверхности и линии пересечения поверхностей будет показано нахождение как опорных так и произвольных точек сечения.

А. Построение сечения многогранников.

Многогранником называют пространственную фигуру, ограниченную замкнутой поверхностью, состоящей из отсеков плоскостей, имеющих форму многоугольников (в частном случае треугольников).

Стороны многоугольников образуют *ребра*, а плоскости многоугольников — *грани* многогранника.

Проекциями сечения многогранников, в общем случае, являются многоугольники, вершины которых принадлежат ребрам, а стороны — граням многогранника*. Поэтому задачу по определению сечения многогранника можно свести к многократному решению задачи по определению точки встречи прямой (ребер многогранника) с плоскостью или к задаче по нахождению линии пересечения двух плоскостей (грани многогранника и секущей плоскости).

Первый путь решения называют *способом ребер*, второй — *способом граней*. Какому из способов следует отдать предпочтение, надо решать в каждом конкретном случае.

ПРИМЕР 1. Определить сечение четырехгранной призмы $ABCDEFGH$ (рис. 189) плоскостью $\alpha(a \parallel b)$.

РЕШЕНИЕ. Решаем эту задачу способом ребер. Для этого заключаем ребра в горизонтально проецирующие плоскости $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$: $\gamma_1 \supset (AE)$; $\gamma_2 \supset (BF)$; $\gamma_3 \supset (CG)$; $\gamma_4 \supset (DH)$.

Находим проекции линий пересечения этих плоскостей с плоскостью α (прямые 1, 2; 3, 4; 5, 6; 7, 8). Отмечаем точки пересечения полученных прямых с соответствующими ребрами призмы $K = (1, 2) \cap (AE)$; $L = (3, 4) \cap (BF)$; $M = (5, 6) \cap (CG)$; $N = (7,8) \cap (DH)$. Четырехугольник $KLMN$ — искомое сечение.

Решение задачи значительно упрощается, если секущая плоскость или плоскости граней (если многогранник относится к призмам) занимает проецирующее положение.

ПРИМЕР 2. Определить сечение трехгранной пирамиды $SABC$ горизонтально проецирующей плоскостью α (рис. 190).

Для получения ответа на поставленную задачу не требуется никаких дополнительных построений. На основании инвариантного свойства 2г (§ 6) горизонтальная проекция сечения пирамиды плоскостью α должна принадлежать следу плоскости $h_{0\alpha}$. Поэтому достаточно отметить точки M', N', L', в которых горизонтальный след $h_{0\alpha}$ секущей плоскос-

*В частном случае многоугольник сечения может проецироваться в отрезок прямой (см. инвариантное свойство 2г, § 6).

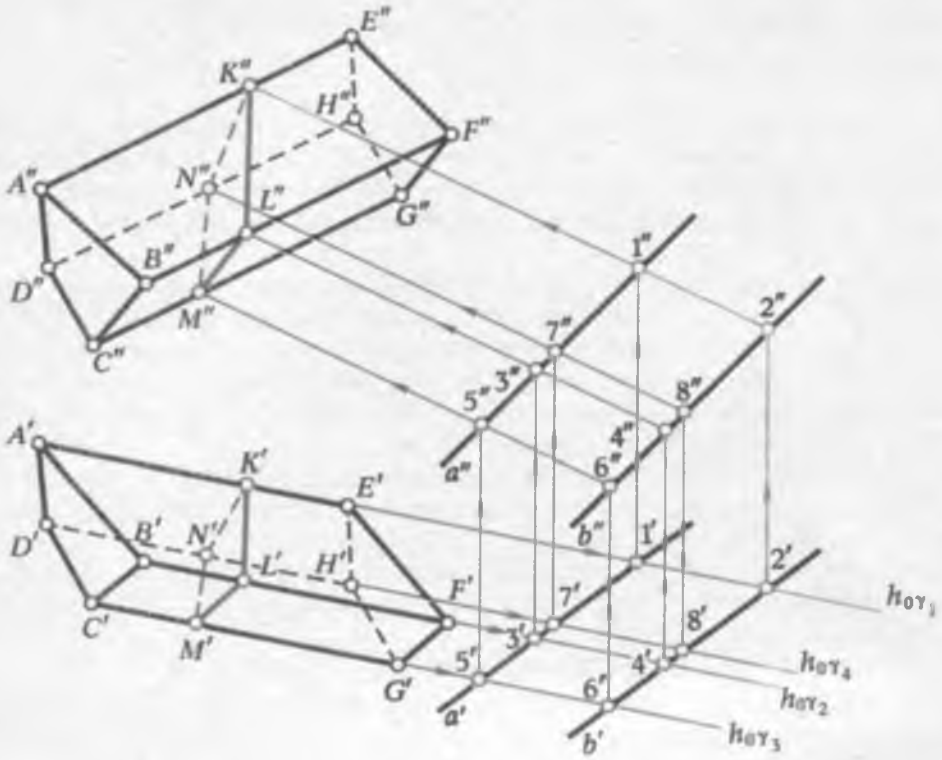


Рис. 189

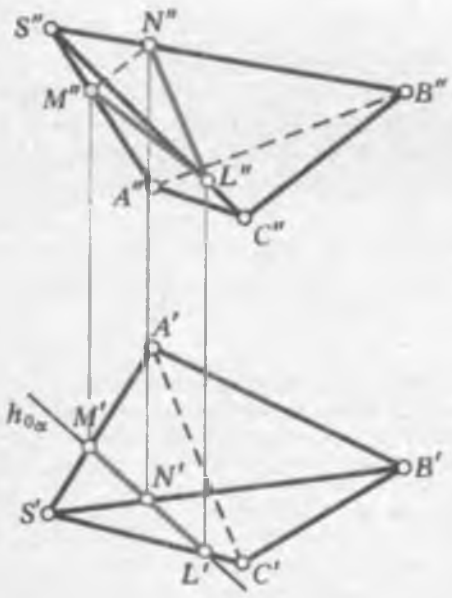


Рис. 190

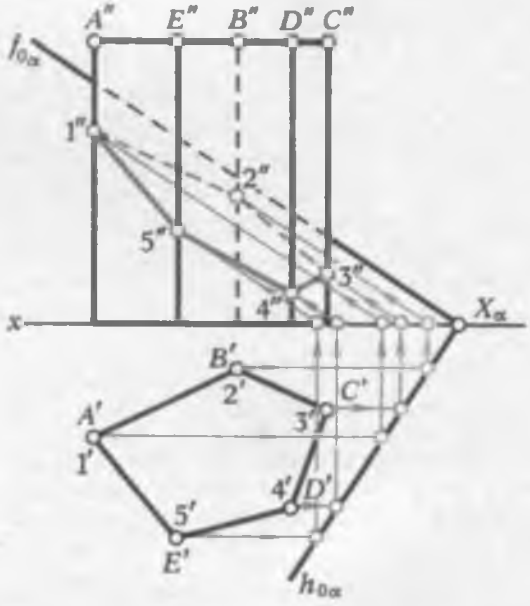


Рис. 191

ти α пересекает горизонтальные проекции ребер пирамиды.

Фронтальные проекции вершин треугольника сечения определяются по их горизонтальным проекциям. Для этого достаточно из точек M', N', L' провести линии связи — вертикальные прямые и отметить точки их пересечения с фронтальными проекциями ребер пирамиды.

ПРИМЕР 3. Определить сечение пятигранной призмы $ABCDE$, ребра которой перпендикулярны горизонтальной плоскости проекции, секущая плоскость α — общего положения (рис. 191).

Так как ребра призмы перпендикулярны плоскости π_1, то горизонтальные проекции точек пересечения этих ребер с плоскостью α (1′, 2′, 3′, 4′, 5′) совпада-

ют с горизонтальными проекциями ребер, т. е. точками A', B', C', D', E'.

Фронтальные проекции точек встречи определяем из условия принадлежности этих точек плоскости α. Решение сводится к нахождению недостающей проекции точки, принадлежащей плоскости, если известна хотя бы одна из ее проекций (см. § 40, пример 3, рис. 171). На рис. 191 фронтальные проекции точек $1''$, $2''$, $3''$, $4''$, $5''$ найдены с помощью фронтальной плоскости a.

Б. Построение сечения поверхности вращения.

Так как для рассматриваемого круга задач в алгоритме $l = (L_1 \cup \cup L_2 \cup L_3 \cup \ldots \cup L_n)$; $[L_j = (\gamma_j \cap \alpha) \cap (\gamma_j \cap \beta)]$ α — поверхность вращения, а β — плоскость, то для нахождения общих точек $L_j, \ldots$, принадлежащих как поверхности α, так и плоскости β, целесообразно в качестве вспомогательных секущих поверхностей γ_j принять плоскости, перпендикулярные к оси вращения; в этом случае плоскости γ_j будут пересекать поверхность α по окружностям, а плоскость β по линиям уровня*. Определение точек L_j сводится к нахождению точек пересечения прямой с окружностью.

ПРИМЕР. Определить сечения поверхности сферы α плоскостью общего положения β (рис. 192).

РЕШЕНИЕ. При сечении поверхности сферы плоскостью получается окружность. Если секущая плоскость общего положения, то эта окружность проецируется на плоскости проекций в виде эллипсов.

Построения начнем с определения опорных точек. Для нахождения низшей A и высшей B точки кривой сечения проводим через центр сферы O вспомогательную секущую плоскость $\gamma_1 \perp h_{0\beta}$. Точки A и B принадлежат линии пересечения плоскостей γ_1 и β. Эти точки находят в результате пересечения прямой $(1, 2) = \gamma_1 \cap \beta$ с поверхностью α. A и $B = (1, 2) \cap \alpha$. Для их определения воспользуемся способом замены плоскостей проекций. Перейдем от системы $x\frac{\pi_2}{\pi_1}$ к $x_1\frac{\pi_3}{\pi_1}$. Ось x_1 проводим перпендикулярно $h_{0\beta}$. По отношению к π_3 плоскость β занимает проецирующее положение, поэтому точки A_1'' и B_1'', в которых след $f_{0\beta_1}$ пересекает новую фронтальную проекцию очерка сферы α_1'', будут вспомогательными проекциями искомых точек. Обратными построениями определяем положение горизонтальных A', B', а затем и фронтальных A'', B'' проекций искомых точек.

$[A'B']$ является малой осью (диаметром) горизонтальной проекции эллипса. Для определения большого диаметра этого эллипса $[D'E']$ достаточно из вспомогательной проекции центра сферы O_1'' провести прямую, перпендикулярную к отрезку $[A_1''B_1'']$. Точка $C_1''(C', C'')$, в которой перпендикуляр пересекает $[A_1'', B_1'']$, является центром эллипса, через который пройдет сопряженный (большой) диаметр эллипса DE.

DE принадлежит горизонтали плоскости β. Для определения точек D и E вводим вспомогательную секущую плоскость γ_2, проходящую через точку C и параллельную плоскости проекций π_1. Эта плоскость пересекает поверхность сферы по окружности c, которая проецируется на плоскость π_1 без искажения в окружность радиуса $R = [6''\ 7'']$, проведенную из центра O'. Пересечение этой окружности с горизонтальной проекцией горизонтали h_2 определяет положение горизонтальных проекций точек D' и E'. Для нахождения точек F и G, являющихся граничными точками видимости для фронтальной проекции эллипса, воспользуемся плоскостью $\gamma_3 \parallel \pi_2$. Эта плоскость пересечет поверхность сферы по главному меридиану, который проецируется на π_2 во фронтальную проекцию очерка сферы, а плоскость β по фронтали f_3 (f_3' f_3''). Пересечение f_3'' с фронтальной проекции очерка сферы укажет положение точек F'' и G''.

Для нахождения точек M и N, указывающих границы видимости на горизонтальной проекции сечения, проводим плоскость $\gamma_4 \parallel \pi_1$ ($\gamma_4 \ni O$).

Плоскость $\gamma_4 \cap \beta = h_4$, а поверхность сферы — по окружности, которая проецируется на плоскость π_1 в горизонтальную проекцию очерка сферы.

---

*Имеется в виду, что ось поверхности вращения перпендикулярна плоскости проекции.

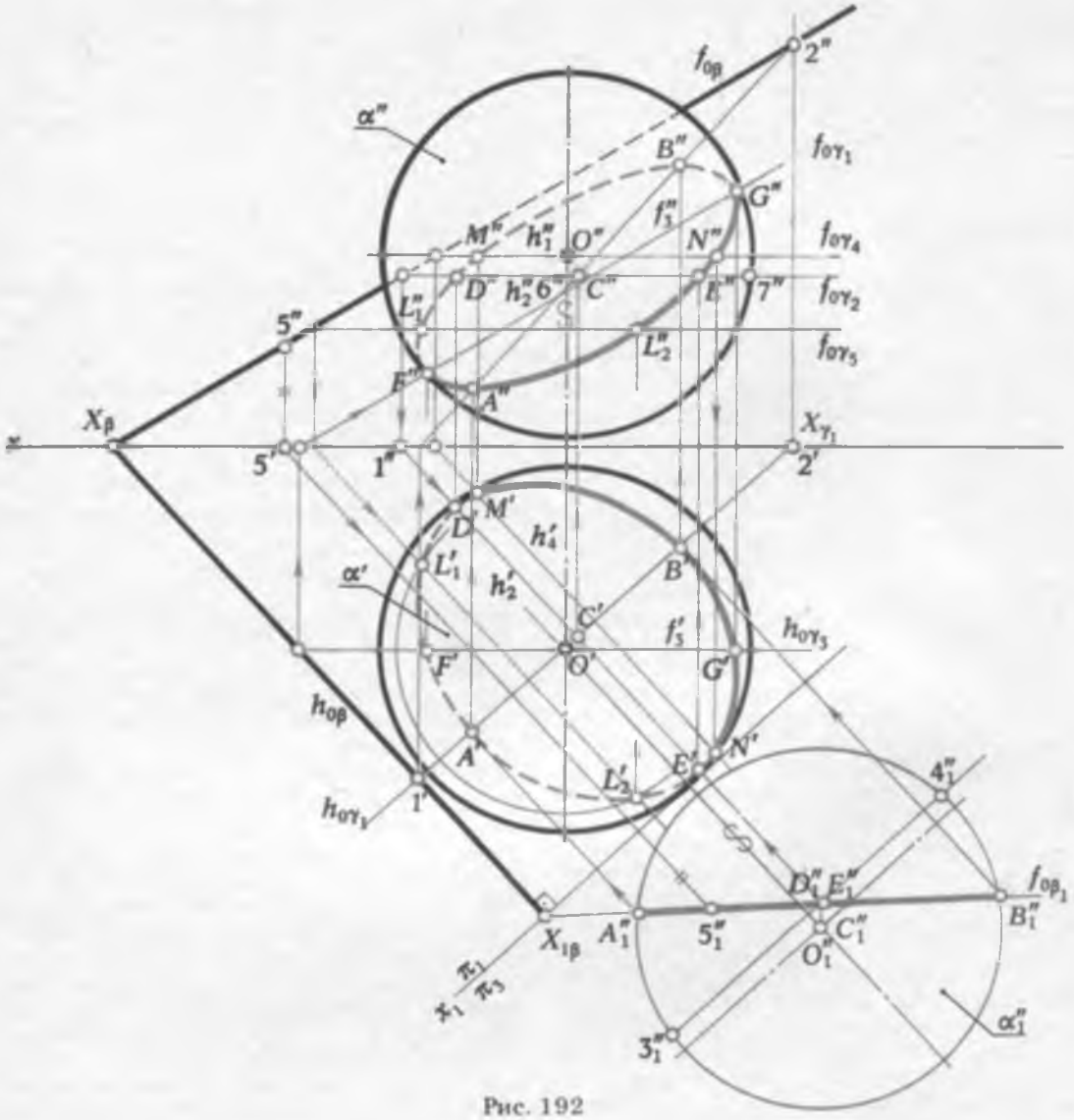


Рис. 192

Пересечение h_4' с горизонтальным очерком сферы α' определяет положение искомых горизонтальных проекций точек M' и N'

Для определения произвольных точек L_1 и L_2, принадлежащих линии сечения, как правило, целесообразно в качестве вспомогательной секущей плоскости использовать плоскости уровня

На рис. 192 показано построение точек L_1 и L_2 с помощью горизонтальной плоскости γ_5. Проведя плоскости $\gamma_j \parallel \pi_1$, мы каждый раз будем получать окружность в результате пересечения γ_j с α и прямую — горизонталь при пересечении γ_j с β. Пересечения окружностей и прямых укажут положение горизонтальных проекций точек, принадлежащих горизонтальной проекции линии сечения

Если задана произвольная поверхность вращения, то ход решения задачи и последовательность выполнения геометрических построений ничем не отличается от случая, рассмотренного на рис. 192.

На рис. 193 показано построение сечения произвольной поверхности вращения α плоскостью общего положения β. Как и в предыдущем примере, вначале определены опорные точки: низшая A и высшая B; точки C, D — границы видимости на фронтальной и точки E, F — на горизонтальной проекциях. На рис. 193 показано также построение произвольных точек L_1 и L_2.

Решение задачи по определению сечения поверхности вращения α плоскостью значительно упрощается, если секущая плоскость занимает проецирующее положение. В этом случае одна из проекций сечения — отрезок прямой, принадлежит следу плоскости.

Задача по определению второй проекции линии сечения сводится к многократному решению ранее рассмотренной задачи по нахождению второй проекции точки, принадлежащей плоскости, если известна хоти бы одна ее проекция (см. § 40, пример 3, рис. 171).

Рис. 194 дает представление о таком частном случае решения задачи. Из чертежа видно, что оно проще решений, рассмотренных на рис. 192 и 193. Поэтому целесообразно при решении задач на определение сечения поверхности плоскостью предварительно перевести секущую плоскость в проецирующее положение.

В. Построение сечения поверхности прямого кругового конуса. Поверхность прямого кругового конуса относится к поверхностям вращения, но мы рассматриваем ее отдельно, так как она занимает особое место среди других поверхностей вращения. Эта поверхность в своем роде уникальна, она служит носителем замечательных кривых второго порядка: окружности, эллипса, параболы и гиперболы. Роль и области использования этих кривых в науке и, особенно, технике невозможно переоценить.

Все перечисленные кривые являются плоскими и, следовательно, могут быть получены в результате сечения конической поверхности плоскостью. В связи с этим перечисленные кривые называют также коническими сечениями. В частных случаях при определенном положении секущих плоскостей α_3, β_2, γ_1 (см. рис. 195, 196, 197) кривые

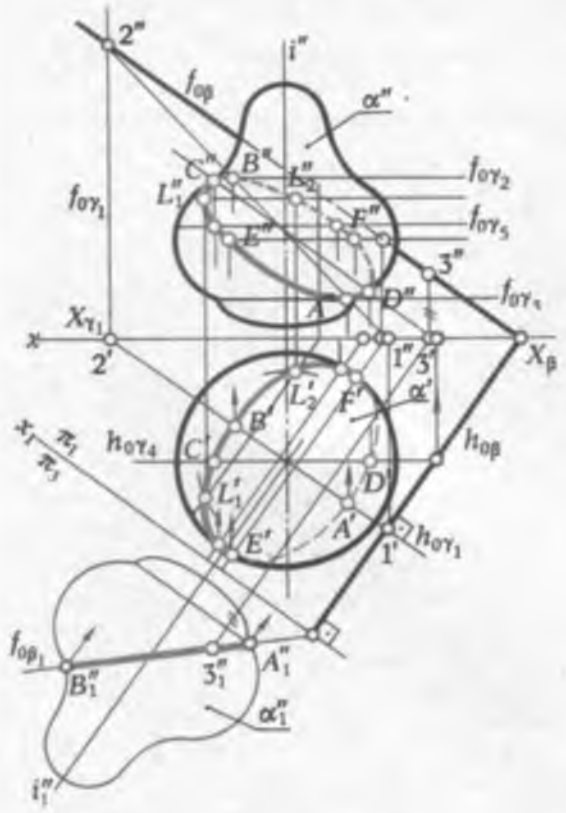


Рис. 193

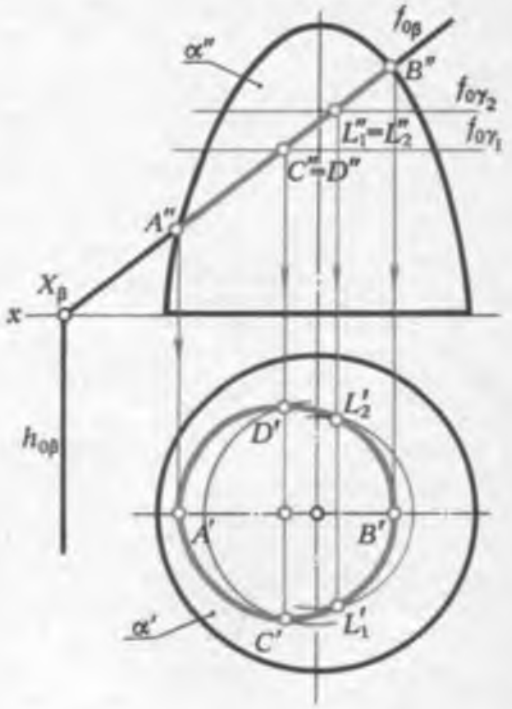


Рис. 194

второго порядка распадаются на две прямые (действительные или мнимые *).

Прежде чем говорить о построении ортогональных проекций сечения поверхности прямого кругового конуса, отметим существование теоремы, которой будем пользоваться при построении кривых второго порядка.

Т е о р е м а: *ортогональная проекция плоского сечения поверхности прямого конуса на плоскость, перпендикулярную к его оси, представляет собой кривую второго порядка и имеет одним из своих фокусов ортогональную проекцию на эту плоскость вершины конической поверхности.*

Условия, которые должны быть выполнены, чтобы получить ту или иную кривую второго порядка, при сечении конической поверхности плоскостью могут быть установлены из свойств кривых второго порядка.

Известно, что *эллипс представляет кривую второго порядка, не имеющую бесконечно удаленных (несобственных) точек.* Поэтому, чтобы получить в сечении конической поверхности эллипс, надо выбрать такую плоскость, которая пересекает все прямолинейные образующие этой поверхности. В частном случае, когда диаметры эллипса равны (секущая плоскость перпендикулярна к оси конической поверхности), в сечении получается окружность.

Из аффинной геометрии известно, что *параболой называется кривая второго порядка, касающаяся несобственной прямой*, или, что то же самое, кривая, имеющая одну несобственную точку. В связи с этим для получения параболы необходимо, чтобы секущая плоскость была параллельно одной образующей конической поверхности. В пределе, когда секущая плоскость переходит в касательную к поверхности, две симметричные дуги параболы преобразуются в две полупрямые, принадлежащие одной прямой.

---

*Плоскость α_3 (рис. 195) пересекает коническую поверхность по двум мнимым прямым, пересекающимся в собственной точке.



Рис. 195

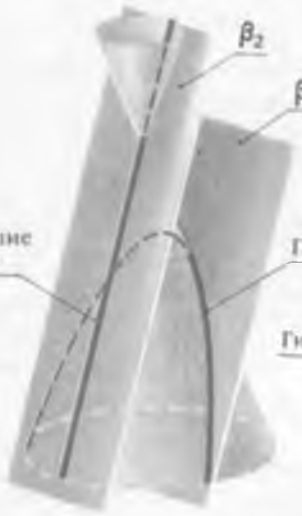


Рис. 196



Рис. 197

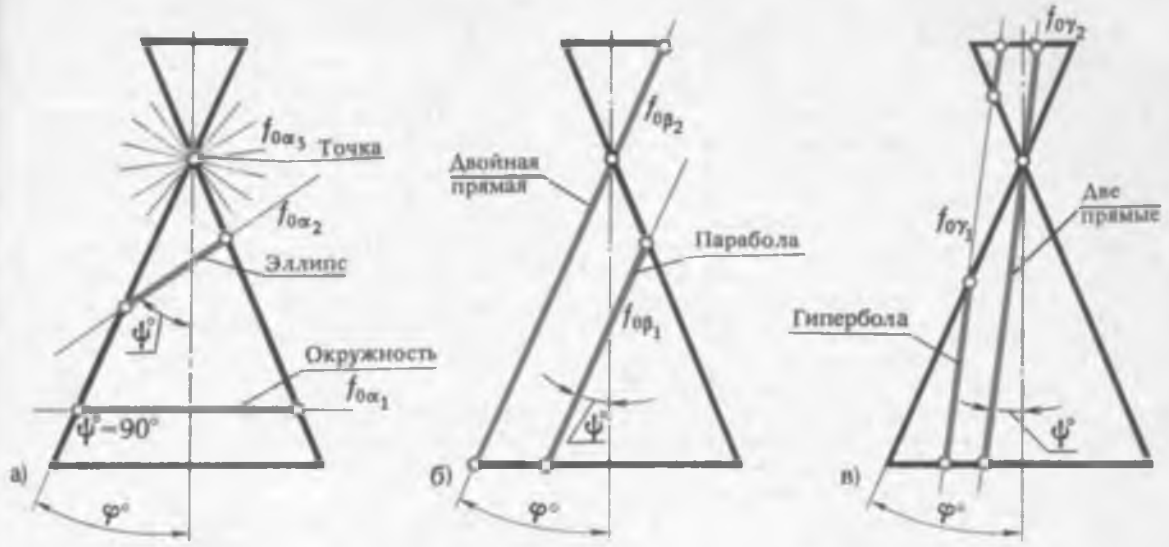


Рис. 198

И, наконец, *гипербола* с аффинной точки зрения *представляет собой кривую второго порядка, пересекающую несобственную прямую*, или, иначе, гипербола — кривая второго порядка, имеющая две несобственные точки, т. е. чтобы получить гиперболу, нужно секущую плоскость взять параллельной двум прямолинейным образующим. В частном случае, когда секущая плоскость проходит через вершину конической поверхности, гипербола распадается на две пересекающиеся прямые.

На рис. 195 показаны положение секущей плоскости для получения *эллипса* (плоскость α_1) и *окружности* (плоскость α_2) и одна из плоскостей, принадлежащих связке, проходящей через вершину конической поверхности, и пересекающих эту поверхность по двум мнимым прямым, пересекающимся в действительной точке (плоскость α_3). На рис. 196 показаны положение секущей плоскости для получения *параболы* (плоскость β_1) и плоскость β_2, имеющая с конической поверхностью общую прямую (точнее две совпавшие прямые). На рис. 197 изображены плоскость γ_1, пересекающая коническую поверхность по *гиперболе*, и плоскость γ_2, в сечении которой образуются *две пересекающиеся прямые*.

На рис. 198 приведены фронтальные проекции поверхности прямого кругового конуса, следы фронтально проецирующих секущих плоскостей и указан вид получаемой в сечении кривой. По рис. 198 можно установить признаки, обеспечивающие получение в сечении той или иной кривой второго порядка. Так, если обозначить угол наклона образующей конической поверхности к его оси через φ°, а угол между секущей плоскостью и той же осью через ψ°, то можно утверждать, что при $\psi^\circ > \varphi^\circ$ (рис. 198, *а*) в сечении получается эллипс (в частном случае, если $\psi^\circ = 90^\circ$, окружность), при $\varphi^\circ = \psi^\circ$ (рис. 198, *б*) — парабола и при $\psi^\circ < \varphi^\circ$ (рис. 198, *в*) — гипербола.

Проследим на примерах характер графических построений, которые должны быть выполнены для построения сечения поверхности прямого кругового конуса.

ПРИМЕР 1. Построить проекции сечения поверхности прямого кругового конуса ω плоскостью α (рис. 199).

РЕШЕНИЕ. Плоскость α фронтально проецирующая. Угол между секущей плоскостью и осью конической поверхности $\angle\,\psi^\circ$ больше угла наклона образующей конической поверхности к его оси, поэтому в сечении получим эллипс, большая ось которого $|AB|$ будет проецироваться на плоскость π_2 без искажения в $|A''B''|$, а малая ось эллипса CD спроецируется на плоскость π_2 в точку $C'' \equiv D''$, расположенную в середине отрезка $|A''B''|$. Величина малой оси $|CD|$ определяется на условия $(C,\ D) \in \alpha$. Проводим через $C''D''$ фронтальную проекцию параллели поверхности $\alpha - h''$. Для построения ее горизонтальной проекции из горизонтальной проекции фокуса эллипса S' проводим окружность радиусом $|1''2''|$ и отмечаем точки ее пересечения C' и D' с перпендикуляром, восставленным в середине $|A'B'|$ — горизонтальной проекции большой оси эллипса. Зная большой и малый диаметры эллипса, известным способом строим эллипс.

ПРИМЕР 2. На рис. 200 показаны проекции поверхности прямого кругового конуса ω и фронтально проецирующей плоскости β. Построить проекции линии сечения.

РЕШЕНИЕ. Угол наклона секущей плоскости β к оси конической поверхности равен углу наклона прямолинейной образующей к этой оси $\hat{\psi}^\circ = \hat{\varphi}^\circ$. Поэтому в сечении получится парабола, вершина которой спроецируется в точку A (A', A''), а горизонтальная проекция фокуса в точку S' (по теореме с. 136). Зная положение вершины A' и фокуса S', проводим директрису параболы. По данным директрисе и фокусу строим параболу. Фронтальная проекция дуги параболы проецируется в $|A''B''|$, совпадающий с $f_{0\beta}$.

ПРИМЕР 3. Построить проекции сечения поверхности прямого кругового конуса ω плоскостью γ (рис. 201).

РЕШЕНИЕ. Так как $\angle\,\psi^\circ$ наклона секущей плоскости γ к оси конической поверхности меньше угла наклона образующей конической поверхности $\angle\,\varphi^\circ$, то плоскость γ пересечет поверхность ω по гиперболе. Фокусы и вершины горизонтальной проекции ее ветвей определяются непосредственно из чертежа. С помощью фокусов и вершин строим асимптоты горизонтальной проекции гиперболы. Зная положение вершин, фокусов и асимптот, можно построить любое число точек, принадлежащих ветвям гиперболы.

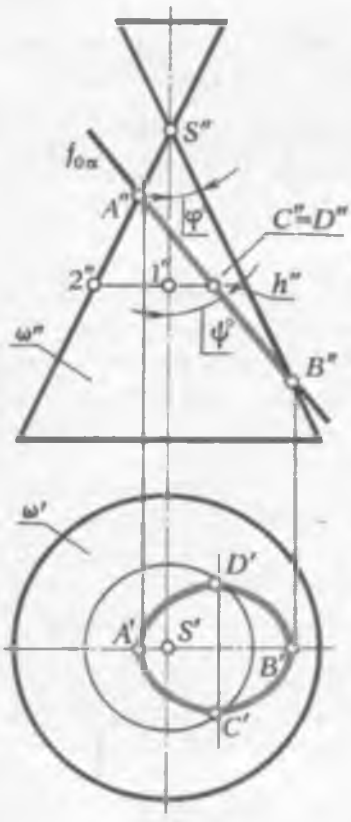


Рис. 199

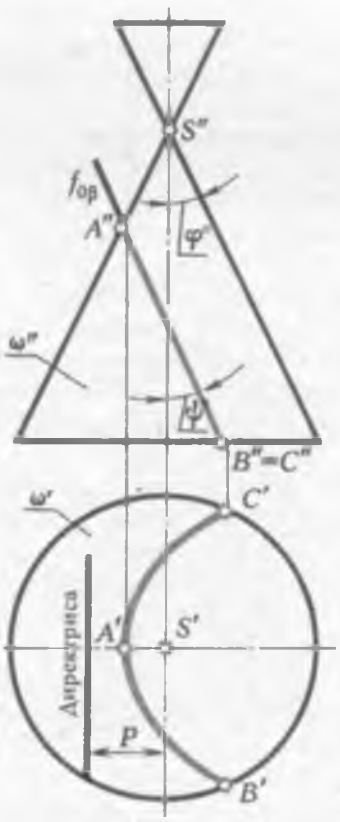


Рис. 200

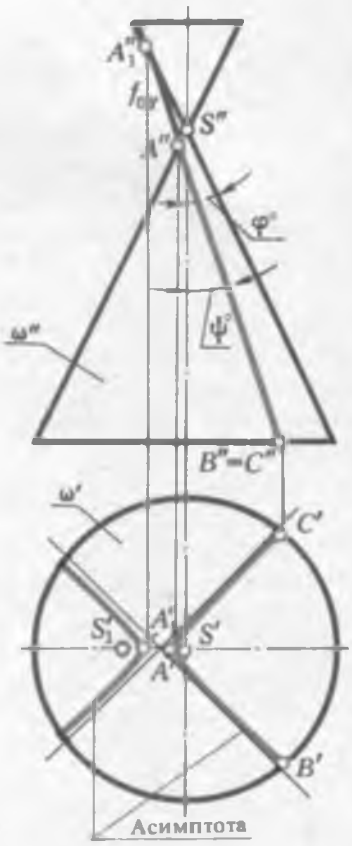


Рис. 201

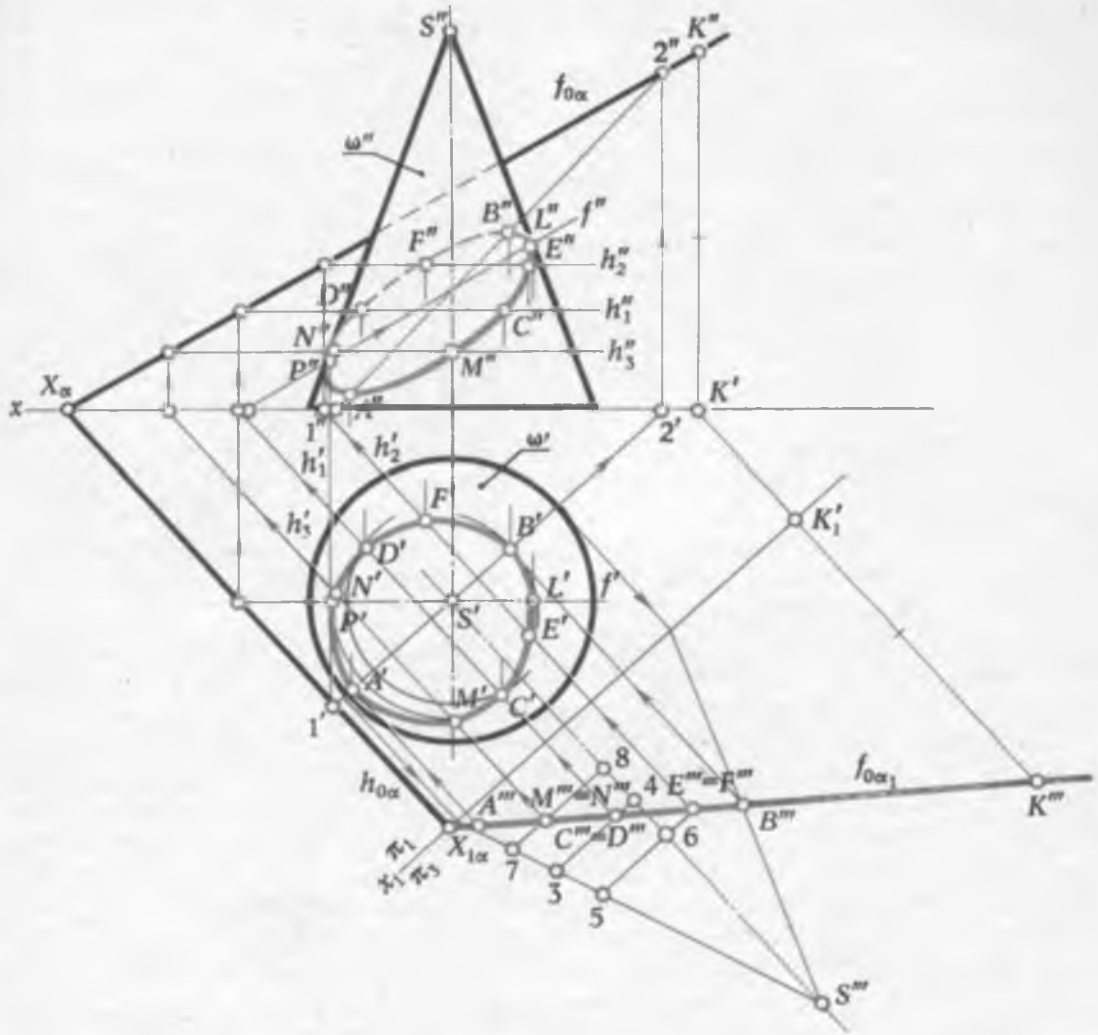


Рис. 202

В рассмотренных примерах пересекающая коническую поверхность плоскость занимала проецирующее положение. Если секущая плоскость общего положения, то целесообразно с помощью способов преобразования перевести ее в проецирующее положение. Это позволит свести задачу к простейшей — одному из рассмотренных случаев (рис. 199 ... 201).

ПРИМЕР 4. Построить проекции сечения конической поверхности ω плоскостью α (рис. 202).

РЕШЕНИЕ. Чтобы упростить решение задачи, осуществим замену плоскости π_2 новой плоскостью π_3. Плоскость π_3 выбираем так, чтобы по отношению к ней секущая плоскость α заняла проецирующее положение. Спроецируем на плоскость π_3 коническую поверхность ω. Выполненные преобразования позволили свести решение к случаю, рассмотренному ранее (см. пример 1, рис. 199).

Для построения фронтальной проекции эллипса сечения на рис. 202, кроме точек A, B и C, D, на вспомогательной проекции взяты точки E, F и M, N, горизонтальные и фронтальные проекции этих точек определены с помощью горизонталей h_2 и h_3. Кроме опорных точек A и B, являющихся высшей (B) и низшей (A) точками сечения, на рис. 202 показаны точки P и L, принадлежащие фронтальным проекциям очерковых образующих конической поверхности ω. Эти точки служат границей видимости для фронтальной проекции сечения. Для нахождения точек P'' и L'' пользуемся фронталью f.

§ 46. ПЛОСКОСТЬ, КАСАТЕЛЬНАЯ К ПОВЕРХНОСТИ

Касательные плоскости играют большую роль в геометрии. Построение касательных плоскостей в практическом отношении имеет важное значение, так как наличие их позволяет определить направление нормали к поверхности в точке касания. Эта задача находит широкое применение в инженерной практике. К помощи касательных плоскостей обращаются также для построения очерков геометрических фигур, ограниченных замкнутыми поверхностями. В теоретическом плане плоскости, касательные к поверхности, используются в дифференциальной геометрии при изучении свойств поверхности в районе точки касания.

Основные понятия и определения

Плоскость, касательную к поверхности, следует рассматривать как предельное положение секущей плоскости (по аналогии с прямой, касательной к кривой, которая также определяется как предельное положение секущей).

Плоскость, касательная к поверхности в заданной на поверхности точке, есть множество всех прямых — касательных, проведенных к поверхности через заданную точку.

В дифференциальной геометрии доказывается, что все касательные к поверхности, проведенные в обыкновенной точке, компланарны (принадлежат одной плоскости).

Выясним, как проводится прямая, касательная к поверхности. Касательная t к поверхности β в заданной на поверхности точке M (рис. 203) представляет предельное положение секущей l_n, пересекающей поверхность в двух точках (MM_1, MM_2, ..., MM_n), когда точки пересечения совпадают ($M \equiv M_n$, $l_n \equiv t_M$). Очевидно $\{M_1, M_2, ..., M_n\} \in g$, так как $g \subset \beta$. Из сказанного выше вытекает следующее определение:
касательной к поверхности называется прямая, касательная к какой-либо кривой, принадлежащей поверхности.

Так как плоскость определяется двумя пересекающимися прямыми, то для задания плоскости, касательной к поверхности в заданной точке, достаточно провести через эту точку две произвольные линии, принадлежащие поверхности (желательно простые по форме), и к каждой из них построить касательные в точке пересечения этих линий. Построенные касательные однозначно определяют касательную плоскость. Наглядное представление о проведении плоскости α, касательной к поверхности β в заданной точке M, дает рис. 204. На этом рисунке показана также нормаль n к поверхности β.

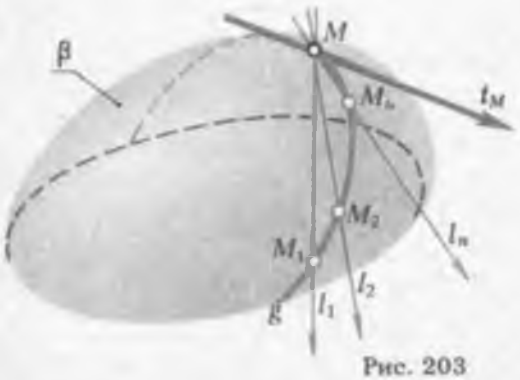


Рис. 203

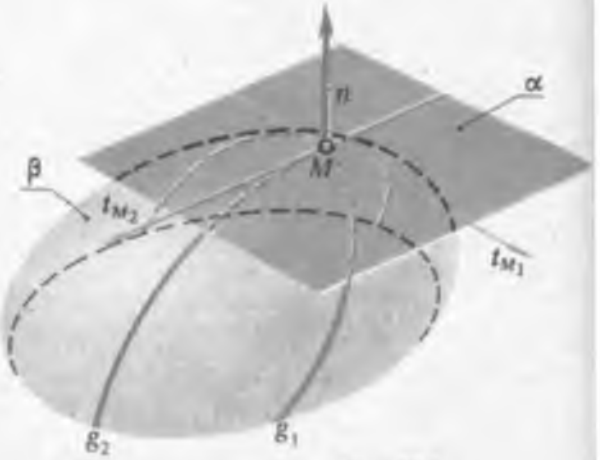


Рис. 204

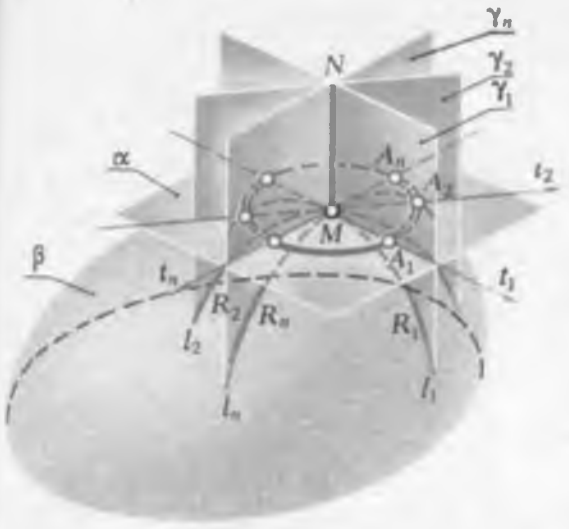


Рис. 205

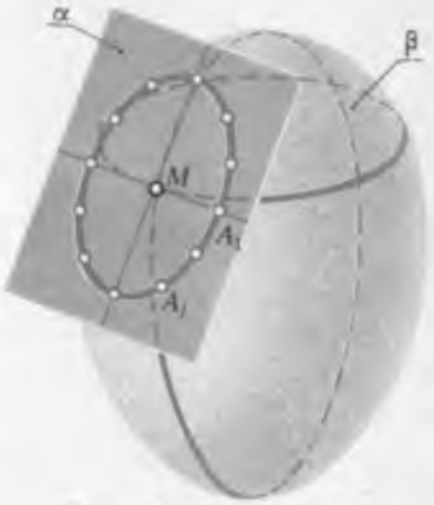


Рис. 206

Нормалью к поверхности в заданной точке называется прямая, перпендикулярная к касательной плоскости и проходящая через точку касания.

Линию пересечения поверхности плоскостью, проходящей через нормаль, называют нормальным сечением поверхности. В зависимости от вида поверхности касательная плоскость может иметь с поверхностью как одну, так и множество точек (линию). Линия касания может быть в то же время и линией пересечения поверхности с плоскостью.

Возможны также случаи, когда на поверхности имеются точки, в которых невозможно провести касательную к поверхности; такие точки называют особыми. В качестве примера особых точек можно привести точки, принадлежащие ребру возврата торсовой поверхности, или точку пересечения меридиана поверхности вращения с ее осью, если меридиан и ось пересекаются не под прямым углом.

Виды касания зависят от характера кривизны поверхности.

Кривизна поверхности

Вопросы кривизны поверхности были исследованы французским математиком Ф. Дюпеном (1784— 1873), который предложил наглядный способ изображения изменения кривизны нормальных сечений поверхности.

Для этого в плоскости, касательной к рассматриваемой поверхности в точке M (рис. 205, 206), на касательных к нормальным сечениям по обе стороны от данной точки откладываются отрезки, равные корням квадратным из величин соответствующих радиусов кривизны этих сечений. Множество точек — концов отрезков задают кривую, называемую *индикатрисой Дюпена*. Алгоритм построения индикатрисы Дюпена (рис. 205) можно записать:

1. $M \in \alpha,\ M \in \beta \wedge \alpha \pitchfork \beta$;
2. $[MN) \perp \alpha,\ [MN) \perp \beta$;
3. $[MN) \subset \gamma_1,\ [MN) \subset \gamma_2, \ldots, [MN) \subset \gamma_n$;
4. $\gamma_1 \cap \beta = l_1,\ \gamma_2 \cap \beta = l_2, \ldots, \gamma_n \cap \beta = l_n$;
5. $\gamma_1 \cap \alpha = t_1,\ \gamma_2 \cap \alpha = t_2, \ldots, \gamma_n \cap \alpha = t_n$;
6. $[MA_1] = \sqrt{R_{l_1}},\ [MA_2] = \sqrt{R_{l_2}}, \ldots, [MA_n] = \sqrt{R_{l_n}}$,

где R — радиус кривизны.

$(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)$ — индикатриса Дюпена.

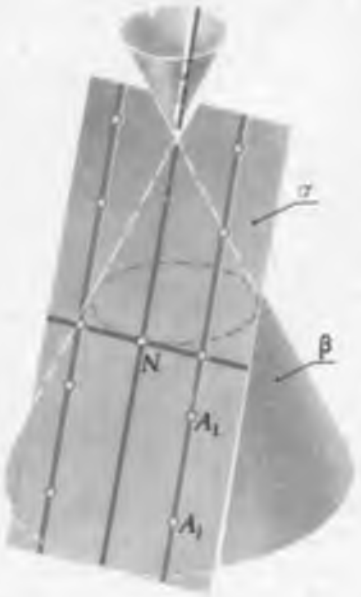


Рис. 207

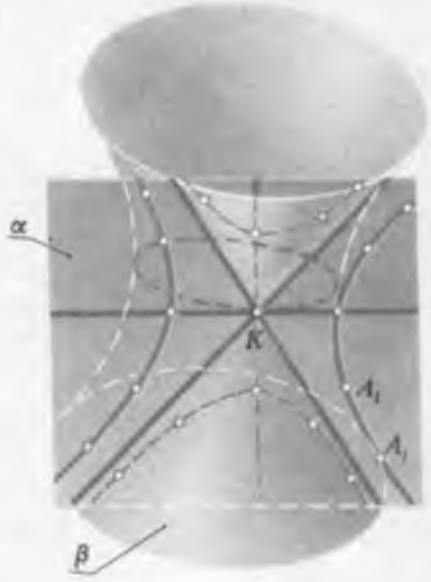


Рис. 208

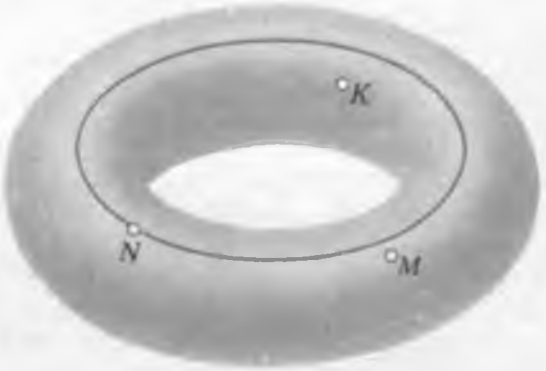


Рис. 209

Если индикатриса Дюпена поверхности — эллипс, то точка M называется эллиптической, а поверхность — поверхностью с эллиптическими точками (рис. 206). В этом случае касательная плоскость имеет с поверхностью только одну общую точку, а все линии, принадлежащие поверхности и пересекающиеся в рассматриваемой точке, расположены по одну сторону от касательной плоскости. Примером поверхностей с эллиптическими точками могут служить: параболоид вращения, эллипсоид вращения, сфера (в этом случае индикатриса Дюпена — окружность и др.).

При проведении касательной плоскости к торсовой поверхности плоскость будет касаться этой поверхности по прямой образующей. Точки этой прямой называются ***параболическими, а поверхность — поверхностью с параболическими точками.*** Индикатриса Дюпена в этом случае — две параллельные прямые (рис. 207*).

На рис. 208 показана поверхность, состоящая из точек, в кото-

*Кривая второго порядка — парабола — при определенных условиях может распадаться на две действительные параллельные прямые, две мнимые параллельные прямые, две совпадающие прямые. На рис. 207 мы имеем дело с двумя действительными параллельными прямыми.

рых касательная плоскость пересекает поверхность. Такая поверхность называется *гиперболической*, а принадлежащие ей точки — *гиперболическими точками. Индикатриса Дюпена в данном случае — гипербола.*

Поверхность, все точки которой являются гиперболическими, имеет форму седла (косая плоскость, однополостный гиперболоид, вогнутые поверхности вращения и др.).

Одна поверхность может иметь точки разных видов, например, у торсовой поверхности (рис. 209) точка M эллиптическая; точка N — параболическая; точка K — гиперболическая.

В курсе дифференциальной геометрии доказывается, что нормальные сечения, в которых величины кривизны $K_j = 1/R_j$ (где R_j — радиус кривизны рассматриваемого сечения) имеют экстремальные значения, расположены в двух взаимно перпендикулярных плоскостях.

Такие кривизны $K_1 = 1/R_{\max}$, $K_2 = 1/R_{\min}$ называются главными, а значения $H = (K_1 + K_2)/2$ и $K = K_1 K_2$ — соответственно средней кривизной поверхности и полной (гауссовой) кривизной поверхности в рассматриваемой точке. Для эллиптических точек $K > 0$, гиперболических $K < 0$, параболических $K = 0$.

Задание плоскости касательной к поверхности на эпюре Монжа

Ниже на конкретных примерах покажем построение плоскости, касательной к поверхности с эллиптическими (пример 1), параболическими (пример 2) и гиперболическими (пример 3) точками.

ПРИМЕР 1. Построить плоскость α, касательную к поверхности вращения β, с эллиптическими точками. Рассмотрим два варианта решения этой задачи: а) точка $M \in \beta$ и б) точка $M \notin \beta$.

Вариант а (рис. 210).

Касательная плоскость определяется двумя касательными t_1 и t_2, проведенными в точке M к параллели и меридиану поверхности β.

Проекции касательной t_1 к параллели h поверхности β будут $t_1' \perp (S'M')$ и $t_1'' \parallel$ оси x. Горизонтальная проекция касательной t_2' к меридиану d поверхности β, проходящему через точку M, совпадет с горизонтальной проекцией меридиана. Чтобы найти фронтальную проекцию касательной t_2'', меридиональную плоскость $\gamma (\gamma \ni M)$ путем вращения вокруг оси поверхности β переводим в положение γ_1, параллельное плоскости π_2. В этом случае точка $M \to M_1$ (M_1', M_1''). Проекция касательной $t_2'' \to t_{2_1}''$ определяется $(M_1''S'')$. Если мы теперь возвратим плоскость γ_1 в первоначальное положение, то точка S'' останется на месте (как принадлежащая оси вращения), а $M_1'' \to M''$ и фронтальная проекция касательной t_2'' определится $(M''S'')$.

Две пересекающиеся в точке $M \in \beta$ касательные t_1 и t_2 определяют плоскость α, касательную к поверхности β.

Вариант б (рис. 211)

Для построения плоскости, касательной к поверхности проходящей через точку, не принадлежащую поверхности, нужно исходить из следующих соображений: через точку вне поверхности, состоящей из эллиптических точек, можно провести множество плоскостей, касательных к поверхности. Огибающей этих поверхностей будет некоторая коническая поверхность. Поэтому, если нет дополнительных указаний, то задача имеет множество решений и в таком случае сводится к проведению конической поверхности γ, касательной к данной поверхности β.

На рис. 211 показано построение конической поверхности γ, касательной к сфере β. Любая плоскость α, касательная к конической поверхности γ, будет касательной к поверхности β.

Для построения проекций поверхности γ из точек M' и M'' проводим касательные к окружностям h' и f'' — проекциям сферы. Отмечаем точки касания 1 (1′ и 1″), 2 (2′ и 2″), 3 (3′ и 3″) и 4 (4′ и 4″). Горизонтальная проекция окружности — линия касания конической поверхности и сферы спроецируется в $[1'2']$. Для нахождения точек эллипса, в который эта окружность спроецируется на фронтальную плоскость проекций, воспользуемся параллелями сферы.

На рис. 211 таким способом определены фронтальные проекции точек E и F (E'' и F''). Имея коническую поверхность γ, строим к ней касательную плоскость α. Характер и последовательность графичес-

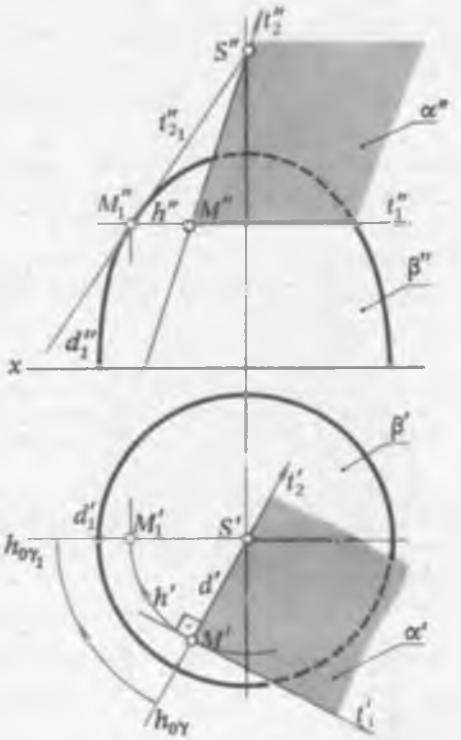


Рис. 210

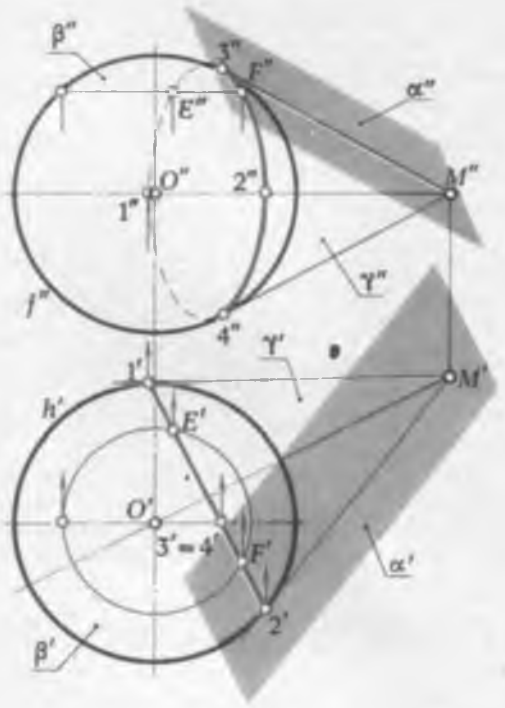


Рис. 211

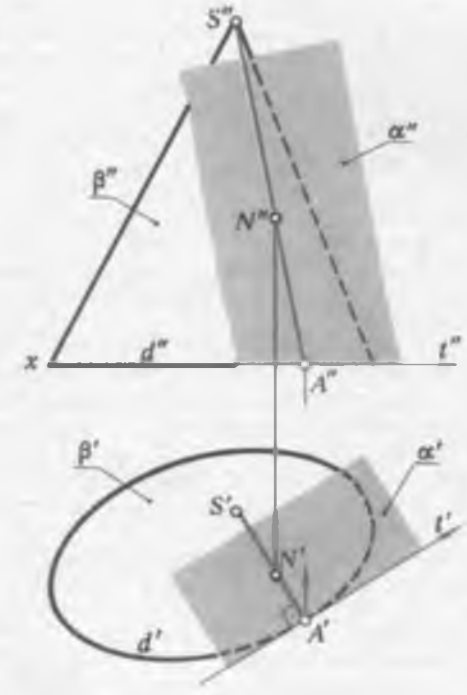


Рис. 212

ких построений, которые необходимо для этого выполнить, приведены в следующем примере.

ПРИМЕР 2. Построить плоскость α, касательную к поверхности β с параболическими точками.

Как в примере 1, рассмотрим два варианта решения: а) точка $N \in \beta$; б) точка $N \notin \beta$.

Вариант а (рис. 212).

Коническая поверхность относится к поверхностям с параболическими точками (см. рис. 207). Плоскость, касательная к конической поверхности, касается ее по прямолинейной образующей. Для ее построения необходимо:

1) через данную точку N провести образующую SN ($S'N'$ и $S''N''$);

2) отметить точку пересечения образующей (SN) с направляющей d: $(SN) \cap d = A$;

3) провести касательную t к d в точке A.

Образующая (SA) и пересекающая ее касательная t определяют плоскость α, касательную к конической поверхности β в данной точке N*.

Вариант б (рис. 213).

Для проведения плоскости α, касательной к конической поверхности β и проходящей через точку N, не принадле-

*Так как поверхность β состоит из параболических точек (кроме вершины S), то касательная к ней плоскость α будет иметь общую с ней не одну точку N, а прямую (SN).

жащую заданной поверхности, необходимо:

1) через данную точку N и вершину S конической поверхности β провести прямую a (a' и a'');

2) определить горизонтальный след этой прямой H_a;

3) через H_a провести касательные t_1' и t_2' к кривой $h_{0\beta}$ — горизонтальному следу конической поверхности;

4) точки касания A (A' и A'') и B (B' и B'') соединить с вершиной конической поверхности S (S' и S'').

Пересекающиеся прямые t_1, (AS) и t_2, (BS) определяют искомые касательные плоскости α_1 и α_2

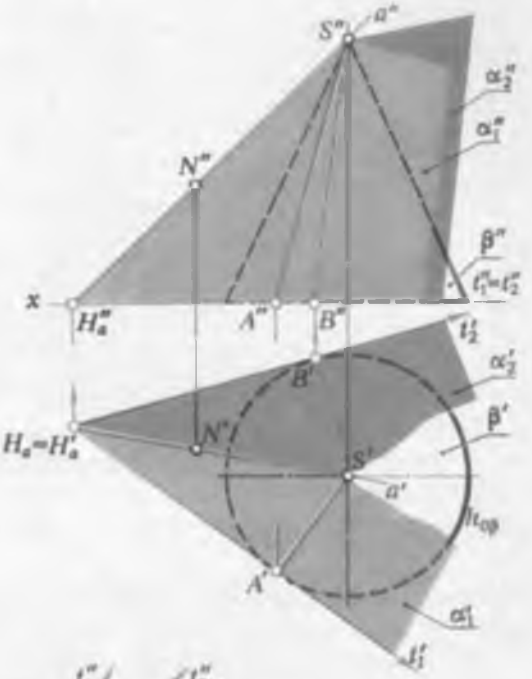


Рис. 213

ПРИМЕР 3. Построить плоскость α, касательную к поверхности β с гиперболическими точками.

Точка K (рис. 214) находится на поверхности глобоида (внутренняя поверхность кольца).

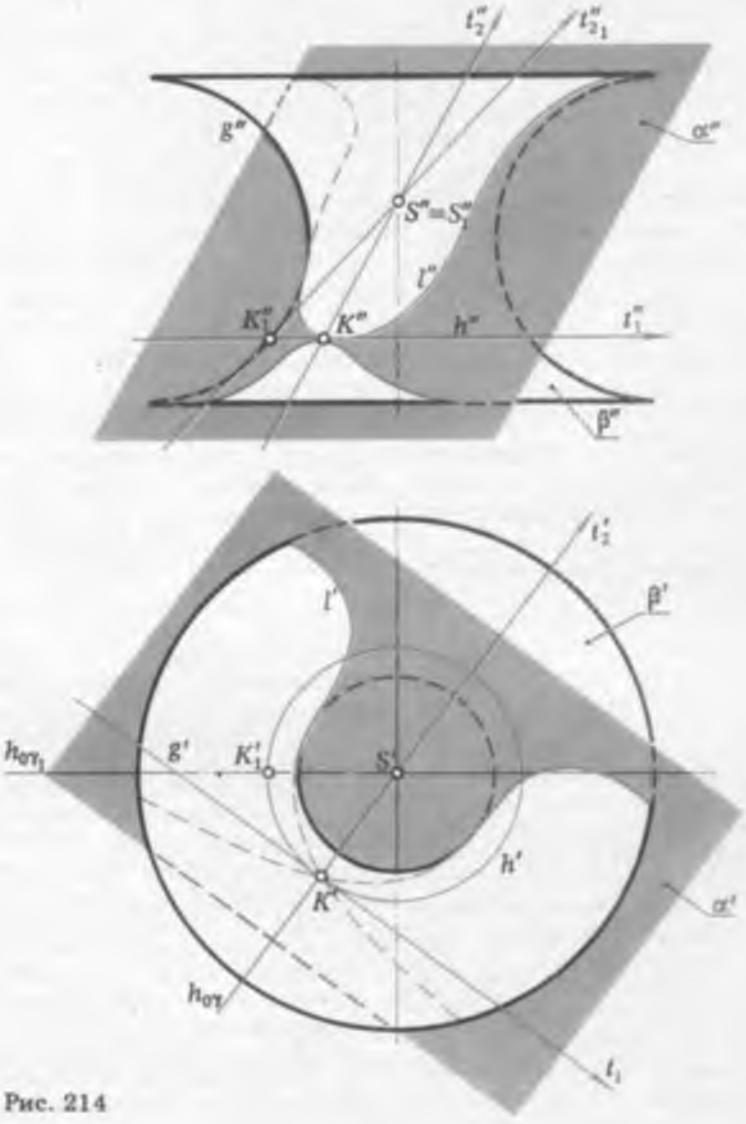


Рис. 214

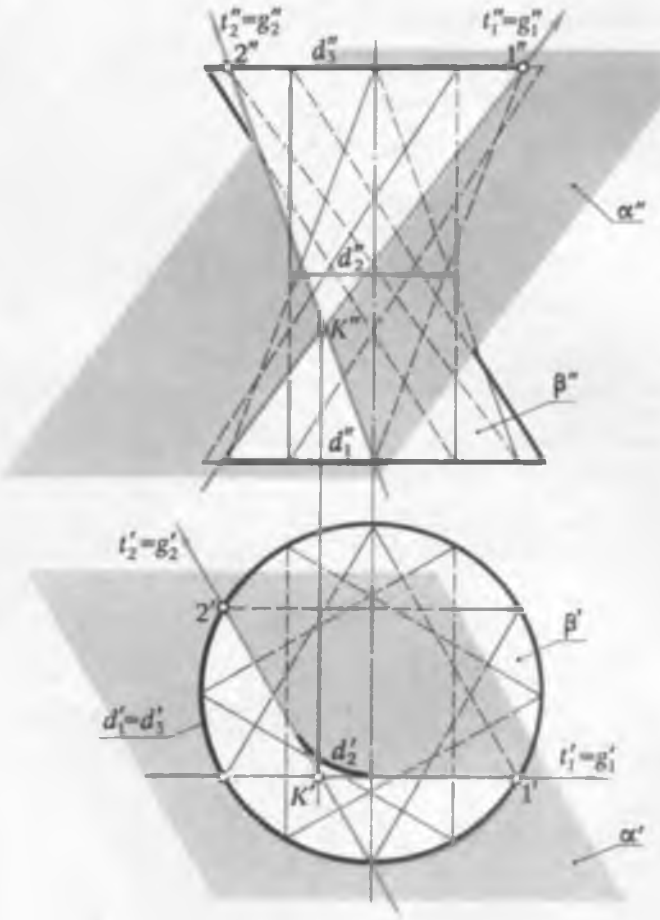


Рис. 215

Для определения положения касательной плоскости α необходимо:

1) провести через точку K параллель поверхности β $h(h', h'')$;

2) через точку K' провести касательную t_1' $(t_1'' \equiv h'')$;

3) для определения направлений проекций касательной к меридиональному сечению необходимо провести через точку K и ось поверхности плоскость γ, горизонтальная проекция t_2' совпадет с $h_{0\gamma}$; для построения фронтальной проекции касательной t_2'' предварительно переведем плоскость γ путем вращения ее вокруг оси поверхности вращения в положение $\gamma_1 \parallel \pi_2$. В этом случае меридиональное сечение плоскостью γ совместится с левой очерковой дугой фронтальной проекции — полуокружностью g''.

Точка K (K', K''), принадлежащая кривой меридионального сечения, переместится в положение K_1 (K_1', K_1''). Через K_1'' проводим фронтальную проекцию касательной t_{2_1}'' в совмещенном с плоскостью $\gamma_1 \parallel \pi_2$ положении и отмечаем точку ее пересечения с фронтальной проекцией оси вращения S_1''. Возвращаем плоскость γ_1 в исходное положение, точка $K_1'' \to K''$ (точка $S_1'' \equiv S''$). Фронтальная проекция касательной t_2'' определится точками K'' и S''.

Касательные t_1 и t_2 определяют искомую касательную плоскость α, которая пересекает поверхность β по кривой l.

ПРИМЕР 4. Построить плоскость α, касательную к поверхности β в точке K. Точка K находится на поверхности однополостного гиперболоида вращения (рис. 215).

Эту задачу можно решить, придерживаясь алгоритма, использованного в предыдущем примере, но учитывая, что поверхность однополостного гиперболоида вращения является линейчатой поверхностью, которая имеет два семейства прямолинейных образующих, причем каждая из образующих одного семейства пересекает все образующие другого семейства (см. § 32, рис. 138). Через каждую точку этой поверхности можно провести две пересекающиеся прямые — образующие, которые будут одновременно касательными к поверхности однополостного гиперболоида вращения.

Эти касательные определяют касательную плоскость, т. е. плоскость, касательная к поверхности однополостного гиперболоида вращения, пересекает эту поверхность по двум прямым k_1 и k_2. Для построения проекций этих прямых достаточно из горизонтальной проекции точки K провести касательные l_1' и l_2' к горизонтальной проекции окружности d_2' — горла поверхности однополостного гиперболоида вращения; определить точки $1'$ и $2'$, в которых l_1' и l_2' пересекают одну из направляющих поверхности d_1. По $1'$ и $2'$ находим $1''$ и $2''$, которые совместно с K'' определяют фронтальные проекции искомых прямых.

§ 47. ПОСТРОЕНИЕ ЛИНИИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ (ОБЩИЙ СЛУЧАЙ)

В алгоритме для решения задач на построение линии пересечения двух поверхностей $l = (L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup \ldots \cup L_n)$; $[(\gamma_j \cap \alpha) \cap (\gamma_j \cap \beta)]$ в качестве вспомогательной поверхности (посредника) γ_j следует выбирать поверхности, которые пересекали бы заданные поверхности α и β по наиболее простым для построения линиям — прямым или окружностям.

В качестве вспомогательных поверхностей — посредников наиболее часто используются плоскости и сферы; при решении некоторых задач бывает целесообразно обращаться за помощью к цилиндрическим и коническим поверхностям.

Ниже будет показано решение задач на определение линии пересечения поверхностей с помощью *вспомогательных секущих плоскостей* (§ 48), *цилиндрических* (§ 49), *конических* (§ 50), а также *сферических* (§ 51) *поверхностей*.

Прежде чем решить вопрос, какую вспомогательную секущую поверхность выбрать для построения линии пересечения поверхностей, следует выяснить, не занимает ли одна из пересекающихся поверхностей проецирующее положение, так как в данном случае решение поставленной задачи значительно упрощается. Это происходит из-за того, что одна из проекций линии пересечения будет совпадать со следом проецирующей поверхности, которая входит в условия поставленной задачи (см. инвариантное свойство 2г, § 6).

Поэтому решение сводится к определению недостающей проекции линии, принадлежащей поверхности, если известна одна ее проекция и указаны проекции поверхности (см. § 41, пример 1, рис. 178).

Рис. 216 иллюстрирует решение задачи по определению линии $l = \alpha \cap \beta$, при этом $\beta \perp \pi_1$. Зелеными линиями показано построение фронтальной проекции l'' — линии пересечения сферической поверхности α с поверхностью горизонтально проецирующего прямого кругового цилиндра β. Точка A, принадлежащая линии пересечения поверхностей и являющаяся ближайшей к вертикальной оси i поверхности сферы, одновременно будет высшей точкой A'' на фронтальной проекции кривой l''. Точка B'' — крайняя правая на линии пересечения является также границей видимости кривой l''.

На рис. 217 показано определение горизонтальной проекции l' — линии пересечения произвольной конической поверхности α с фронтально проецирующей цилиндрической поверхностью β. В этом случае, как и в предыдущем примере, задача на построение линии пересечения поверхностей сводится к определению недостающей проекции линии l, принадлежащей поверхности α. Все построения, необходимые для нахождения точек A', B', C', ... кривой l' по заданным точкам A'', B'', C'', ..., выполнены зелеными линиями и не нуждаются в дополнительных пояснениях.

Повернув вокруг прямой a плоскость γ_j на $\angle\ \varphi^\circ$, получим новое положение секущей плоскости γ_1. Плоскость γ_1 также пересечет поверхности α и β по прямым, которые, в свою очередь, пересекаются в точках, также принадлежащих линии пересечения. Поворачивая плоскость γ_j вокруг прямой a, мы будем получать различные положения секущих плоскостей и соответствующие им прямые линии их пересечения с заданными поверхностями*.

При построении проекций линий пересечения поверхностей на эпюре в первую очередь необходимо определить опорные точки, которые получаются при сечении поверхностей α и β плоскостями, касательными к одной, в частном случае к двум, пересекающимся поверхностям.

На рис. 218 показаны плоскость γ_2, проходящая через прямую a и касательная к поверхности α, и плоскость γ_3, также проходящая через прямую a и касательная к поверхности β.

Горизонтальные следы этих плоскостей $h_{0\gamma_2}$ и $h_{0\gamma_3}$ определяют $\angle\ h_{0\gamma_2} H_a h_{0\gamma_3}$, в пределах которого следует проводить горизонтальные следы вспомогательных секущих плоскостей. С помощью плоскостей γ_j и γ_1 можно определить четыре точки, принадлежащие линии пересечения. На рис. 218 показаны две точки E и F, полученные с помощью плоскости γ_j.

На рис. 219 приведен пример определения положения прямой a, через которую должны проходить вспомогательные секущие плоскости, с помощью которых можно найти точки, принадлежащие линии пересечения конической и цилиндрической поверхностей.

Решение этой задачи по существу не отличается от только что рассмотренного примера. Действительно, цилиндрическая поверхность отличается от конической тем, что точка S (вершина конической поверхности) у цилиндрической поверхности оказывается несобственной точкой S_∞. В этом случае прямая a, проходящая через точки S и S_∞,

*Поэтому описываемый способ называют также способом вращающейся плоскости.

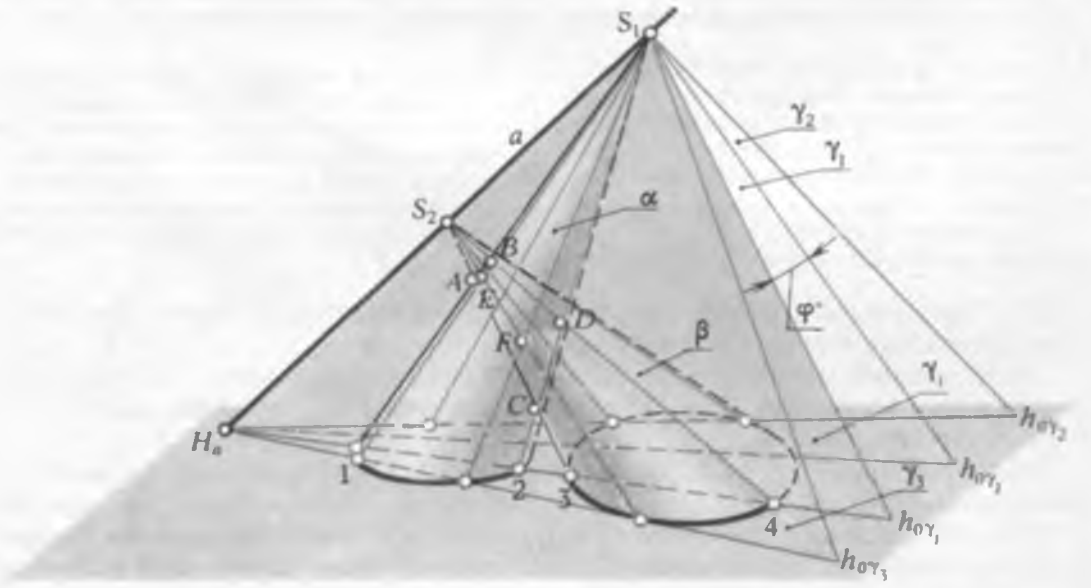


Рис. 218

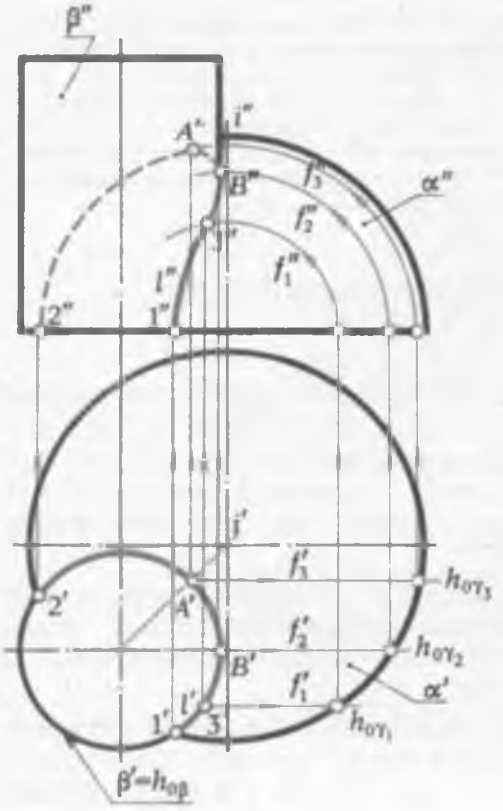


Рис. 216

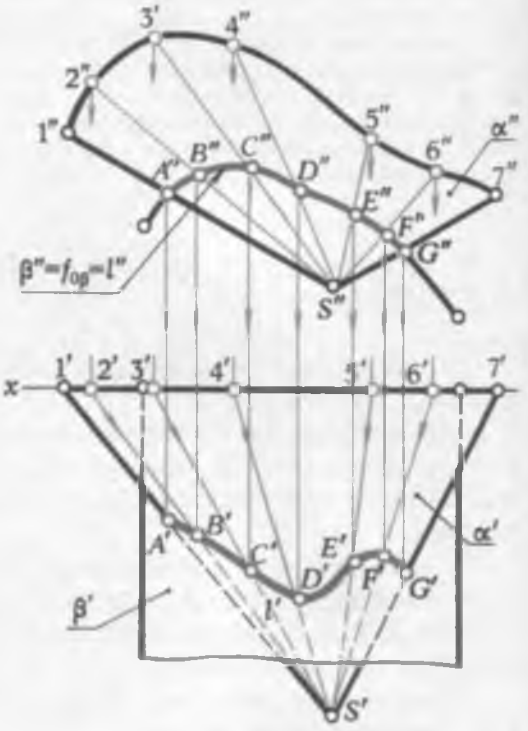


Рис. 217

§ 48. ПОСТРОЕНИЕ ЛИНИИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ С ПОМОЩЬЮ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ СЕКУЩИХ ПЛОСКОСТЕЙ

При определении линии пересечения поверхностей пользуются не отдельными плоскостями, а пучками плоскостей, причем ось пучка может быть как собственной, так несобственной прямой.

Рассмотрим каждый из этих вариантов в отдельности.

1. **Определение линии пересечения поверхностей с помощью пучка плоскостей, ось которого — собственная прямая.**

Этот способ применяется для построения линии пересечения:

а) двух конических поверхностей;

б) конической и цилиндрической поверхностей;

в) конической поверхности с поверхностью пирамиды или призмы;

г) двух цилиндрических поверхностей;

д) цилиндрической поверхности с поверхностью пирамиды или призмы.

Сущность способа легко проследить на примере решения задачи по определению линии пересечения двух произвольных конических поверхностей α и β (рис. 218).

Раньше (см. § 45, рис. 198,*в*) было установлено, что коническая поверхность пересекается плоскостью по двум пересекающимся прямым образующим в том случае, если секущая плоскость проходит через вершину конической поверхности. Поэтому, если через вершины S_1 и S_2 конических поверхностей α и β провести прямую a и заключить ее в плоскость γ_j, то эта плоскость пересечет поверхность α по прямым $(S_1\ 1)$, $(S_1\ 2)$ и поверхность β по прямым $(S_2\ 3)$, $(S_2\ 4)$. Эти прямые пересекаются в точках A, B, C, D, принадлежащих искомой линии пересечения.

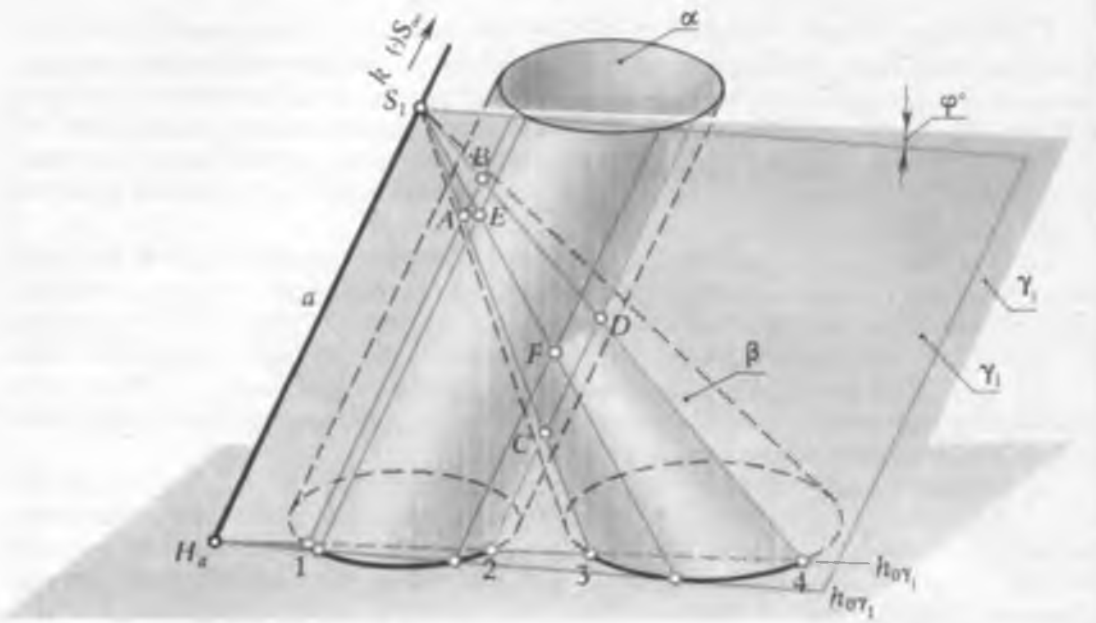


Рис. 219

будет параллельна образующей цилиндрической поверхности. Все остальные построения ничем не отличаются от рассмотренных в предыдущем примере (см. рис. 218).

В качестве примера использования пучка плоскостей для определения линии пересечения двух поверхностей по заданным их ортогональным проекциям рассмотрим следующую задачу.

ПРИМЕР. Построить линию пересечения двух конических поверхностей α и β (рис. 220).

РЕШЕНИЕ.

1. Через вершины конических поверхностей S_1 и S_2 проводим прямую a.

2. Определяем горизонтальный след прямой a — H_a.

3. Заключаем прямую a во вспомогательную секущую плоскость γ_1, касательную к конической поверхности α. Отмечаем прямые $(S_2\,2)$, $(S_2\,3)$ и $(S_1\,1)$, по которым эта плоскость пересекает поверхность β, и касается поверхности α.

4. Отмечаем точки M_1 и M_2, принадлежащие искомой линии пересечения $M_1 = (S_1\,1) \cap (S_2\,2)$ и $M_2 = (S_1\,1) \cap (S_2\,3)$.

5. Через прямую a проводим плоскость γ_2, касательную к конической поверхности β. Находим прямые $(S_1\,4)$, $(S_1\,5)$ и $(S_2\,6)$ и отмечаем точки L_1 и L_2 их взаимного пересечения.

На рис. 220 показано также определение точек K_1, K_2 и N_1, N_2 с помощью вспомогательной секущей плоскости γ_j. Соединив в определенной последовательности плавными линиями одноименные проекции точек, получим проекции искомой кривой пересечения данных поверхностей.

2. Определение линии пересечения поверхностей с помощью пучка плоскостей, ось которого — несобственная прямая.

Этот способ является частным случаем предыдущего. Отличие состоит лишь в том, что прямая a — несобственная, она проходит через несобственные точки $S_{1\infty}$ и $S_{2\infty}$.

Рис. 221 иллюстрирует наглядную геометрическую модель рассматриваемого способа. Чтобы выбрать наиболее рациональное положение вспомогательной секущей плоскости для определения линии пересечения двух произвольно расположенных цилиндрических поверхностей, достаточно представить заданные цилиндрические поверхности как образованные из конических поверхностей с вершинами в несобственных точках

$S_{1\infty}$ и $S_{2\infty}$. Поэтому семейство секущих плоскостей будет составлять пучок параллельных плоскостей, проходящих через несобственную прямую a_∞ ($S_{1\infty} S_{2\infty}$). Для определения направления горизонтальных следов плоскостей этого пучка достаточно из произвольной точки пространства T провести две прямые: s_1, параллельную образующей илиндрической поверхности α, и s_2, параллельную образующей цилиндрической поверхности β. Эти пересекающиеся прямые определят направление вспомогательных секущих плоскостей γ, которые пересекают поверхности α и β по прямым линиям.

Проведя плоскость γ_j, параллельную γ, мы получим две прямые, по которым плоскость γ_j пересекает поверхность α, и две прямые при ее пересечении с поверхностью β. Взаимное пересечение этих прямых укажет четыре точки A, B и C, D, принадлежащие линии пересечения.

Для нахождения опорных точек, как и в предыдущем примере, проводим плоскости γ_1 и γ_2 соответственно касательные к поверхностям α и β. С помощью этих плоскостей находим точки M_1, M_2 и N_1, N_2. Положение горизонтальных следов $h_{0\gamma_1}$ и $h_{0\gamma_2}$ определяют область (полосу), внутри которой следует проводить вспомогательные секущие плоскости для определения общих точек, принадлежащих линии пересечения.

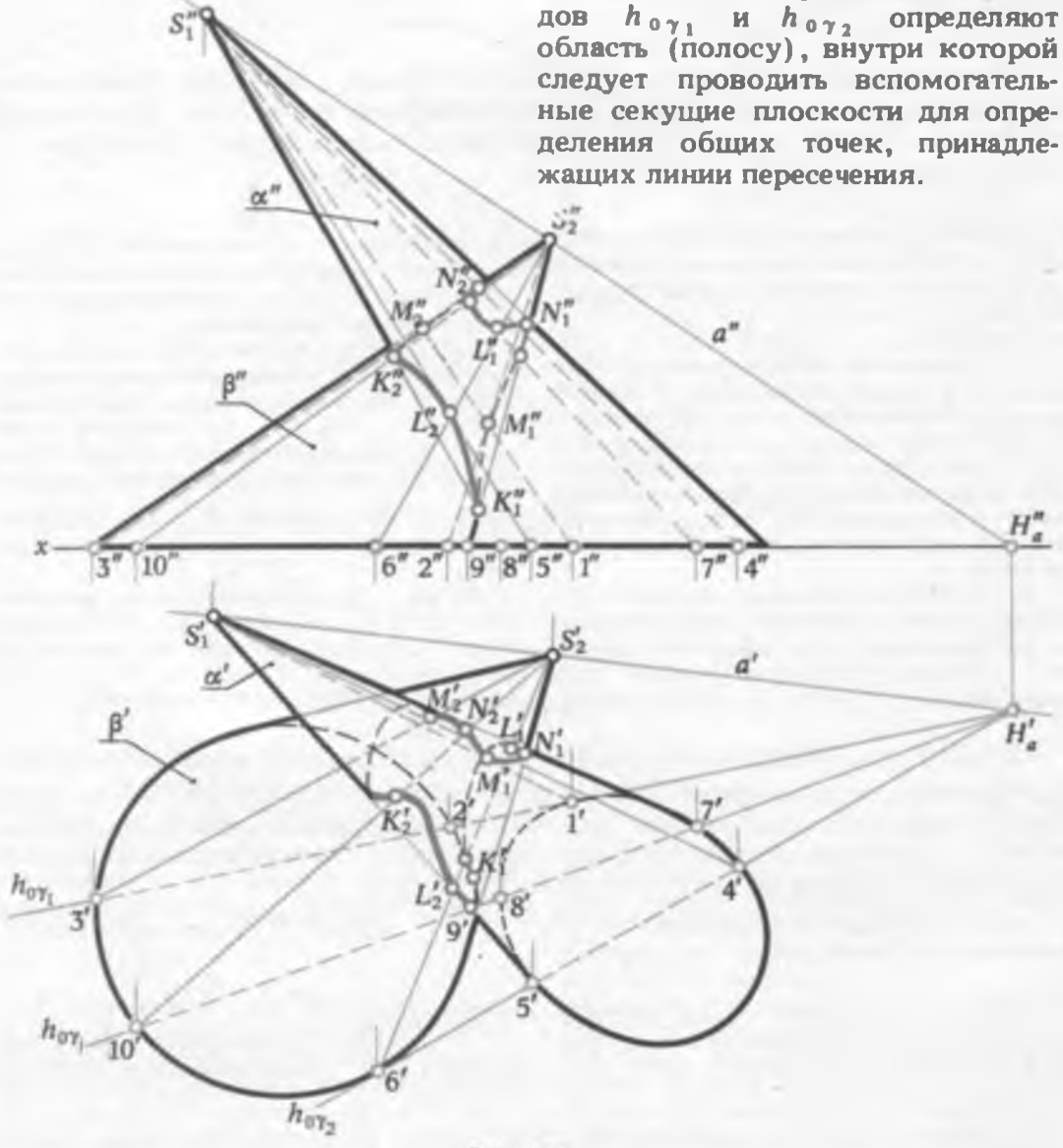


Рис. 220

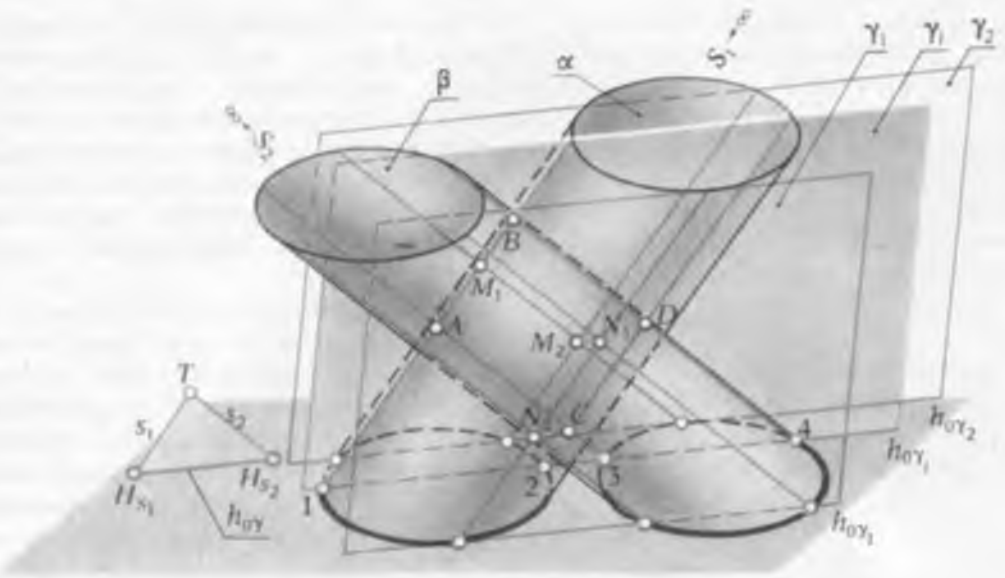


Рис. 221

Использование семейства вспомогательных секущих плоскостей, взятых из пучка плоскостей с несобственной осью, для определения на эпюре Монжа линии пересечения двух поверхностей проследим на следующем примере.

ПРИМЕР. Определить линию пересечения двух произвольно расположенных эллиптических цилиндрических поверхностей α и β (рис. 222).

РЕШЕНИЕ.

1. Определяем направление вспомогательных секущих плоскостей. Для этого через произвольную точку пространства T проводим прямые s_1 и s_2, параллельные образующим данных цилиндрических поверхностей α и β. Горизонтальные следы этих прямых H_{s_1} и H_{s_2} определяют след вспомогательной секущей плоскости γ.

2. Проводим секущую плоскость γ_1, параллельную плоскости γ и касательную к поверхности β. Эта плоскость пересечет цилиндрическую поверхность α по прямым $(S_1 - 1)$, $(S_1 - 2)$ и будет касаться поверхности β по прямой $(S_2 - 3)$. Взаимное пересечение этих прямых укажет точки M_1 и M_2, принадлежащие искомой линии пересечения.

3. Проводим плоскость γ_2, параллельную плоскости γ и касательную к поверхности α. Мы вновь получим две прямые $(S_2 - 5)$ и $(S_2 - 6)$, по которым плоскость γ_2 пересекает поверхность β. Плоскость γ_2 пересечет (коснется) поверхность α по прямой $(S_1 - 4)$. Полученные прямые пересекаются в точках N_1 и N_2.

На рис. 222 показано также построение точек K_1, K_2 и L_1, L_2 с помощью вспомогательной секущей плоскости γ_j и точек A_1, A_2, B_1, B_2 и C_1, C_2, D_1, D_2, найденных при помощи плоскостей γ_3 и γ_4.

Способ параллельных секущих плоскостей можно использовать для определения линии пересечения и в том случае, когда эти плоскости пересекают заданные поверхности не только по прямым, но и по окружностям или комбинации из этих линий (одну поверхность плоскость пересекает по прямой, другую — по окружности) *.

Примером может служить пересечение сферической и цилиндрической поверхностей.

ПРИМЕР. Определить линию пересечения поверхности эллиптического цилиндра α с поверхностью сферы β (рис. 223).

РЕШЕНИЕ.

1. Проводим в интервале между точками 1′ и 2′ вспомогательные секущие

*Плоскость можно использовать и в том случае, когда она пересекает поверхности по произвольным кривым линиям.

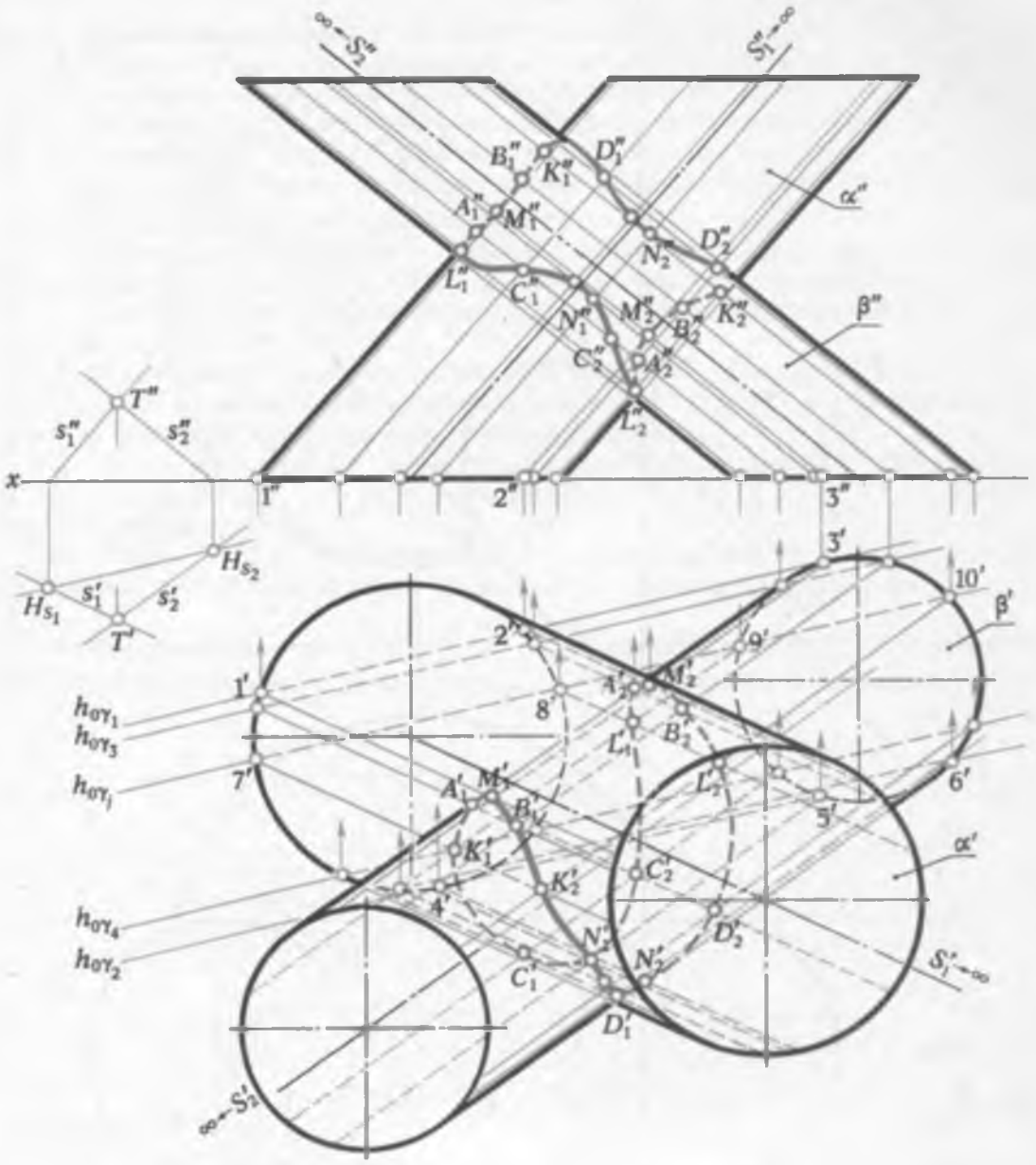


Рис. 222

плоскости γ_1, γ_2, γ_3, γ_4, γ_5, параллельные фронтальной плоскости проекции π_2. Каждая из этих плоскостей пересечет цилиндрическую поверхность по прямолинейным образующим, а поверхность сферы по окружностям.

2. Плоскости γ_1 и γ_5, параллельные π_2 и касательные к цилиндрической поверхности, укажут прямые a и b, которые будут содержать опорные точки A, A_1 и B, B_1 — дальние A, A_1 и ближние B, B_1 по отношению к плоскости π_2 точки кривой пересечения.

3. Для определения высшей M_1 и низшей N точек линии пересечения проводим плоскость γ_4, проходящую через центр поверхности сферы. Эта плоскость пересечет сферу по главному меридиану.

4. С помощью плоскости γ_3, проведенной через ось цилиндрической поверхности, определяем точки E, E_1 и F, F_1, указывающие границы видимости линии пересечения на фронтальной проекции.

На рис. 223 показано построение произвольных точек, принадлежащих линии пересечения, с помощью плоскости γ_2, проведенной в полосе, ограниченной плоскостями γ_1 и γ_5.

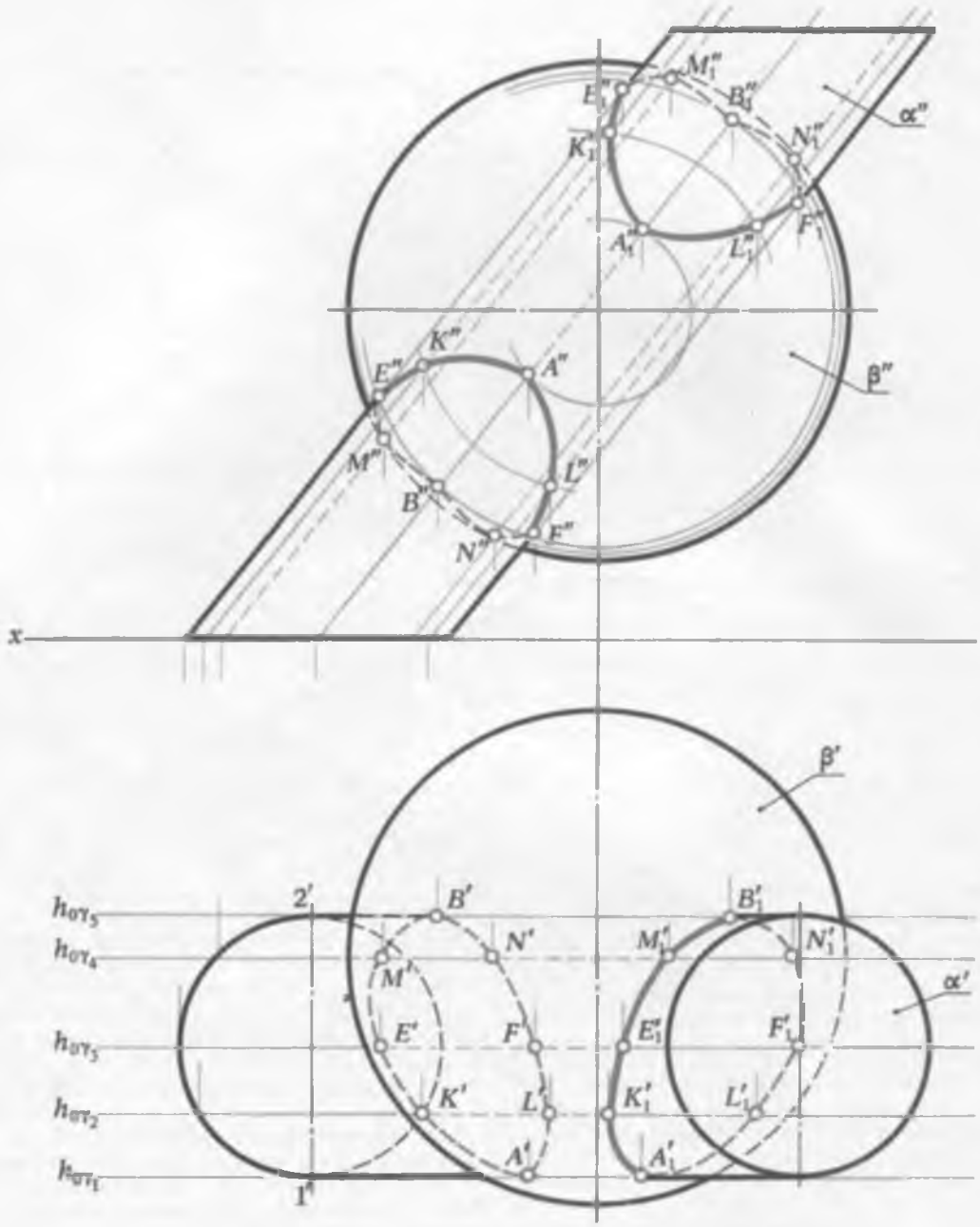


Рис. 223

§ 49. ПОСТРОЕНИЕ ЛИНИИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ С ПОМОЩЬЮ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

В тех случаях, когда требуется построить линию пересечения двух поверхностей, из которых одна — линейчатая цилиндрическая, а другая — произвольная поверхность вращения, целесообразно в качестве поверхностей-посредников использовать цилиндрические поверхности.

На рис. 224 показано решение задачи по определению линии пересечения поверхности эллиптического цилиндра α и поверхности коль-

ца β. В данном примере в качестве вспомогательных секущих поверхностей целесообразно использовать поверхности эллиптических цилиндров, оси которых параллельны оси заданной цилиндрической поверхности α. За направляющие цилиндрических поверхностей следует принять окружности — параллели кольцевой поверхности β.

Определение точек, принадлежащих линии пересечения поверхностей α и β, осуществляется следующим путем:

1. Пересекаем поверхность кольца плоскостями ϵ_1, ϵ_2, ϵ_3, ..., параллельными плоскости π_1. Полученные в сечении окружности c_1, c_2, c_3, ... принимаем за направляющие цилиндрических поверхностей γ_1, γ_2, γ_3, ...

2. Определяем горизонтальные следы этих поверхностей $h_{0\gamma_1}$, $h_{0\gamma_2}$, $h_{0\gamma_3}$, ... и отмечаем точки пересечения этих следов с горизонтальным следом заданной цилиндрической поверхности $h_{0\alpha}$.

3. Через полученные точки проводим прямолинейные образующие g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, по которым поверхности γ_1, γ_2, γ_3, ... пересекают данную поверхность α.

4. Точку i_2' принимаем за центр окружностей — горизонтальных проекций линий пересечения поверхности кольца плоскостями ϵ_1, ϵ_2, ϵ_3, ...

5. Отмечаем точки $1'$, $2'$, $3'$, $4'$, $5'$, $6'$ пересечения этих окружностей с соответствующими прямолинейными образующими цилиндрической

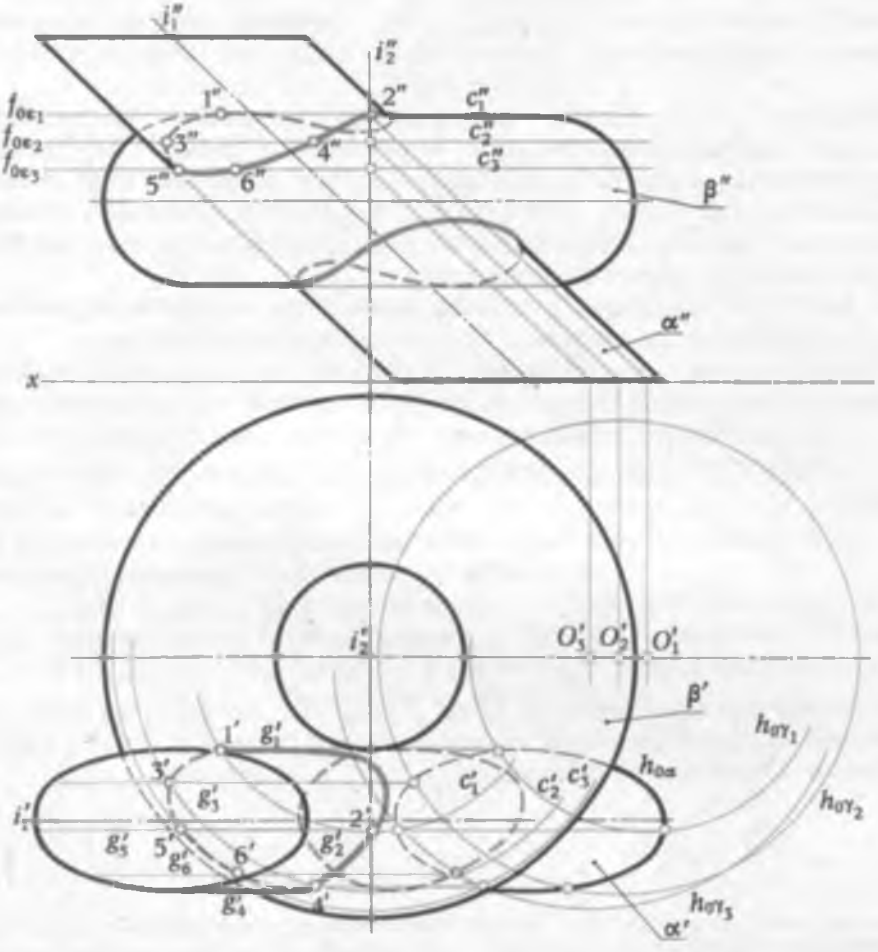


Рис. 224

поверхности α. Зная положение точек $1'$, $2'$ $3'$, ..., определяем их фронтальные проекции $1''$, $2''$, $3''$, ...

Отмеченным путем можно провести любое количество вспомогательных цилиндрических поверхностей и с их помощью определить достаточное число точек, необходимых для построения линии пересечения поверхностей α и β.

§ 50. ПОСТРОЕНИЕ ЛИНИИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ С ПОМОЩЬЮ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ КОНИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Использование вспомогательных конических поверхностей для упрощения построения линии пересечения двух поверхностей дает положительный эффект лишь в том случае, если мы для получения вспомогательной проекции воспользуемся центральным проецированием, приняв за центр проекции вершину конической поверхности S.

В этом случае любая коническая поверхность, принадлежащая связке конических поверхностей, вершины которых принадлежат точке S — центру связки, займет проецирующее положение относительно плоскости проекции, что даст возможность так же, как это было сделано при использовании плоскостей и цилиндрических поверхностей (§ 48 и 49), базироваться на инвариантном свойстве **2г*** $\Phi \subset \gamma \wedge (\gamma \perp \perp \pi_1) \Rightarrow \Phi' \subset h_{0\gamma}$ и благодаря этому упростить решение задачи.

Построение линии пересечения поверхностей с помощью конических поверхностей целесообразно в тех случаях, когда одна из пересекающихся поверхностей коническая, а другая поверхность вращения.

Например, если заданы поверхность вращения и произвольная коническая поверхность, то для определения линии их пересечения следует воспользоваться вспомогательными коническими поверхностями, вершины которых совпадают с вершиной заданной конической поверхности, а за направляющие этих поверхностей принять окружности, проведенные на поверхности вращения.

На рис. 225 показано решение задачи на построение линии пересечения поверхности вращения с конической поверхностью.

Геометрические построения, которые необходимо осуществить для определения линии пересечения, выполняем в следующем порядке:

1) на поверхности вращения α проводим ряд окружностей c_1, c_2, c_3, ..., которые можно рассматривать как результат пересечения поверхности α пучком плоскостей $\{\epsilon \ldots\}$, параллельных плоскости π_1;

2) принимаем эти окружности за направляющие конических поверхностей γ_1, γ_2, γ_3, ... с вершиной в точке S. Горизонтальными следами этих поверхностей будут окружности $h_{0\gamma_1}$, $h_{0\gamma_2}$, $h_{0\gamma_3}$, ..., проведенные из центров $2'$, $7'$, $12'$ ..., радиусами, соответственно равными фронтальным проекциям отрезков $|2'', 3''|$, $|7'', 8''|$, $|12'', 13''|$;

3) определяем прямые $(S'4')$, $(S'5')$, $(S'9')$, $(S'10')$, $(S'14')$, $(S'15')$, по которым вспомогательные секущие поверхности γ_1, γ_2, γ_3 пересекают заданную коническую поверхность β;

---

*Инвариантное свойство 2г, сформулированное относительно плоскости при ортогональном проецировании, будет справедливым и для конической поверхности, если использовать центральное проецирование.

4) отмечаем точки пересечения этих прямых с соответствующими окружностями. Точки A, B, C, D, E, F принадлежат искомой линии пересечения.

На рис. 225 показано также определение высшей L и низшей K точек, принадлежащих линии пересечения. Положение этих точек найдено с помощью горизонтально проецирующей плоскости ζ, проходящей через вершину конической поверхности S и ось i поверхности вращения α. Плоскость ζ пересечет коническую поверхность по образующей ST, а поверхность вращения по меридиану g. Для определения точек пересечения меридиана g с образующей ST вращаем плоскость ζ, которой принадлежат эти точки, вокруг оси, перпендикулярной к π_1 и проходящей через вершину конуса S, до положения, параллельного плоскости π_2. Находим фронтальные проекции точек K_1'' и L_1'', а затем K'' и L''. Зная положение K'' и L'', определяем их горизонтальные проекции K' и L'. Соединив одноименные проекции полученных точек плавной кривой, получим проекции линии пересечения заданных поверхностей.

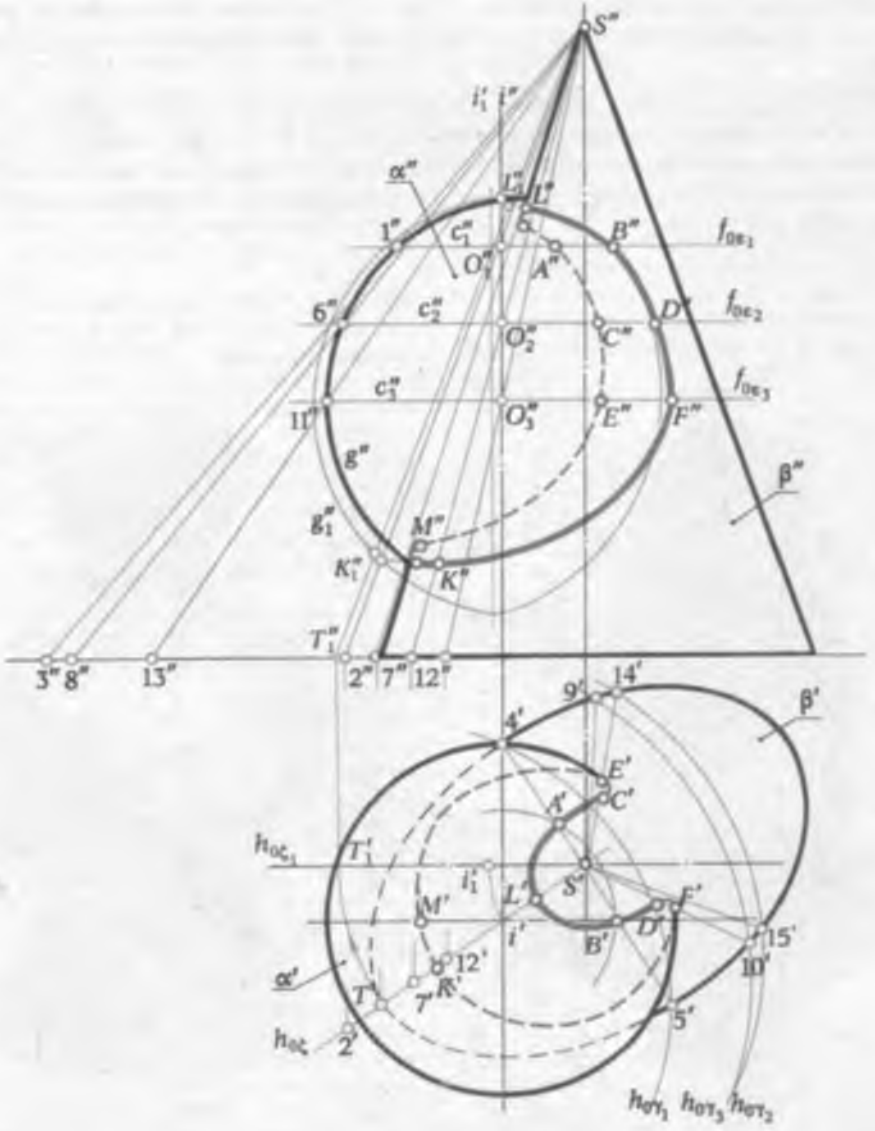


Рис. 225

§ 51. ПОСТРОЕНИЕ ЛИНИИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ С ПОМОЩЬЮ СЕМЕЙСТВА ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ СФЕРИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Для определения линии пересечения двух произвольных поверхностей вращения целесообразно воспользоваться одним свойством, присущим поверхностям вращения, которое состоит в том, что *две любые соосные поверхности вращения пересекаются по окружностям, проходящим через точки пересечения меридианов поверхностей* (рис. 226).

В частном случае, если одна из поверхностей вращения — сфера, приведенное выше предложение может быть сформулировано иначе: *если центр секущей сферы находится на оси поверхности вращения, то сфера пересечет данную поверхность по окружностям, число которых равно числу точек пересечения главных меридианов поверхностей* (рис. 227).

Если ось поверхности вращения перпендикулярна плоскости проекции π_1 (или π_2), то окружности проецируются на плоскость π_1 (или π_2) без искажения, а на плоскость π_2 (или π_1) в отрезки прямых, перпендикулярных фронтальной (горизонтальной) проекции оси вращения (см. рис. 226).

Поверхность сферы может пересекаться по окружности не только с соосной поверхностью вращения, но и с любой другой поверхностью, имеющей семейство окружностей, например, с циклической поверхностью, конической поверхностью второго порядка, имеющей в основании окружность, и др.

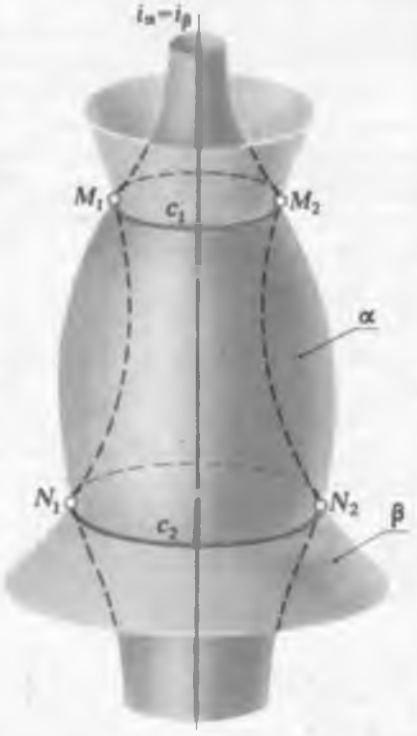


Рис. 226

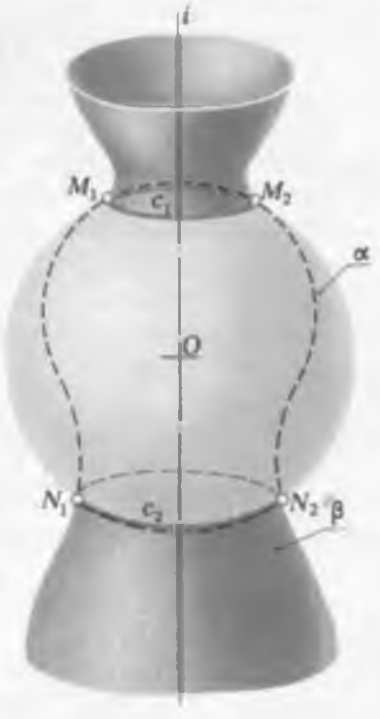


Рис. 227

Построить линии пересечения поверхностей с помощью вспомогательных секущих сфер можно двумя способами:

1) способом концентрических сфер;

2) способом эксцентрических сфер.

Особенности каждого из этих способов и условия его применения проследим на конкретных примерах.

1. Способ концентрических сфер.

Этот способ применяется для построения линии пересечения двух поверхностей вращения, оси которых пересекаются. Для упрощения графического решения необходимо, чтобы плоскость, определяемая осями поверхностей вращения, была параллельной какой-либо плоскости проекции.

ПРИМЕР 1. Построить линию пересечения двух конических поверхностей вращения с пересекающимися осями (рис. 228).

РЕШЕНИЕ.

Сфера, проведенная из точки O'' пересечения фронтальных проекций осей поверхностей вращения, пересечет поверхность α по окружности, которая проецируется на плоскость π_2 в отрезок $[1''2'']$, а поверхность β — по окружности, проецирующейся на π_2 в отрезок $[3''4'']$. На горизонтальную плоскость проекции эта окружность спроецируется без искажения в окружность радиуса $|O_1'', 3''|$, проведенную из центра в точке O'.

Пересечение отрезков $[1''2'']$ и $[3''4'']$ укажет фронтальные проекции двух точек L_1'' и $L_2''(L_1'' \equiv L_2'')$, принадлежащих линии пересечения поверхностей α и β. Величина радиуса вспомогательных сфер для определения линии l_1 изменяется в пределах от $R_{min} = |O''M''|$ до $R_{max} = |O''B''|$ (точка M'' определяется как точка касания окружности, проведенной к главному меридиану поверхности β из центра O''). Для определения точек линии l_2 $R_{max} = |O''C''|$, $R_{min} = |O''M''|$. На рис. 228 показано определение точек N_1'' и N_2'', принадлежащих линии l_2. Горизонтальная проекция линии пересечения может быть найдена из условия ее принадлежности поверхности β. Для ее построения необходимо через фронтальные проекции точек кривых l_1'' и l_2'' провести горизонтальные прямые — фронтальные проекции параллелей поверхности β, а из точки O' — окружности — горизонтальные проекции параллелей, на которых с помощью линий связи можно определить горизонтальные проекции точек, принадлежащих кривым l_1' и l_2'. Особые точки A, B, C, D определяются пересечением главных меридианов поверхностей α и β. Они же являются высшими (точки A и C) и низшими (точки B и D) точками линии пересечения поверхностей. Границы видимости линии на горизонтальной плоскости проекции определяются точками, принадлежащими горизонтальному очерку поверхности α (точки E_1' и E_2' для линии l_2 и F_1' и F_2' для линии l_1).

ПРИМЕР 2. Построить линию пересечения поверхности вращения α произвольного вида с поверхностью прямого кругового цилиндра β. Оси поверхностей пересекаются (рис. 229).

РЕШЕНИЕ.

1. Определяем центр вспомогательных сфер — точку пересечения осей поверхностей вращения $O = i_1 \cap i_2$.

2. Находим проекции опорных точек, принадлежащие линии пересечения l (A'', B'', C'', D''). Так как эти точки принадлежат плоскости главных меридианов поверхностей, которая параллельна плоскости π_2, то эти точки определяются пересечением фронтальных проекций главных меридианов поверхностей.

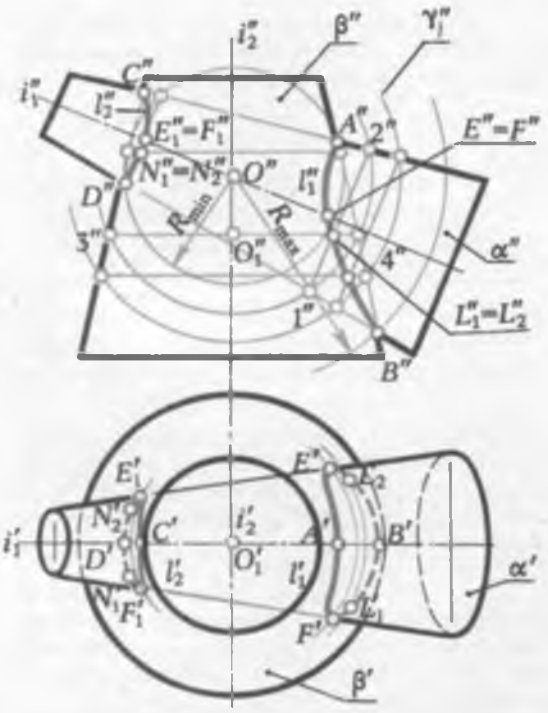


Рис. 228

3. Для определения произвольных (промежуточных) точек линии пересечения из точки O'' проводим семейство концентрических окружностей, являющихся фронтальными проекциями вспомогательных сфер.

Радиус максимальной сферы равен расстоянию от фронтальной проекции центра сферы O'' до наиболее удаленной проекции точки, принадлежащей линии пересечения — точки D''. Величина минимального радиуса вспомогательной секущей сферы равна радиусу окружности, касающейся цилиндра β''. На рис. 229 показано построение точек K, K_1 и L, L_1 с помощью вспомогательной сферы γ_j.

Горизонтальные проекции точек линии пересечения строятся при помощи параллелей поверхности вращения α, которые проецируются на плоскость π_1 без искажения.

ПРИМЕР 3. Построить линию пересечения поверхности тора α и сферы β, оси которых определяют плоскость, параллельную фронтальной плоскости проекции (рис. 230).

РЕШЕНИЕ.

Так как осью сферической поверхности может быть любая прямая, проходящая через центр этой поверхности, то за центр вспомогательных сферических поверхностей можно принять произвольную точку на оси поверхности вращения α. Поэтому графическое решение задачи по определению линии пересечения заданных поверхностей сводится к выполнению следующих геометрических построений:

1. Принимаем точку O'' за центр окружностей — фронтальных проекций вспомогательных секущих сфер.

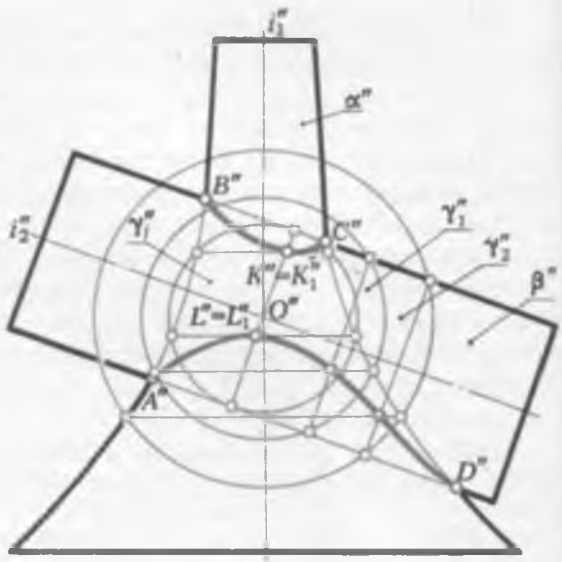


Рис. 229

2. Проводим фронтальную проекцию вспомогательной сферической поверхности γ_j.

3. Определяем отрезки $[1''2'']$ и $[3''4'']$ — фронтальные проекции окружностей, по которым $\gamma_j \cap \alpha$ и $\gamma_j \cap \beta$.

4. Точки пересечения окружностей (отрезков $[1''2'']$ и $[3''4'']$) M_1'' и M_2'' принадлежат искомой линии пересечения.

5. Фронтальные проекции опорных точек A'' и B'' определяются пересечением фронтальных проекций меридианов поверхностей α и β.

6. Горизонтальные проекции линии пересечения определяются с помощью параллелей поверхности β.

2. Способ эксцентрических сфер.

Способ эксцентрических сфер может быть использован для построения линии пересечения двух поверхностей, имеющих общую плоскость симметрии. При этом каждая поверхность должна иметь семейство окружностей. Как и в способе концентрических сфер, плоскость симметрии должна быть параллельна одной из плоскостей проекции. Сущность способа легко уяснить из следующих примеров.

ПРИМЕР 1. Построить линию пересечения поверхности кольца (открытого тора) α с поверхностью вращения β, имеющих общую плоскость симметрии (рис. 231).

РЕШЕНИЕ.

Хотя мы и имеем дело с поверхностями вращения, но применить здесь способ концентрических сфер не представляется возможным, так как оси поверхностей не пересекаются.

Возможность использования способа эксцентрических сфер обусловливается тем, что обе поверхности несут на себе семейства окружностей, по которым они могут пересекаться эксцентрическими сферами, причем на кольцевой поверхности имеется несколько семейств окружностей, в том числе и окружностей, принадлежащих пучку плоскостей, ось которого совпадает с осью кольца.

Решение задачи сводится к следующим графическим построениям:

1. Рассечем кольцевую поверхность фронтально проецирующей плоскостью ϵ, проходящей через ось кольца; эта плос-

кость пересечет кольцевую поверхность по окружности, фронтальная проекция которой — отрезок $[1''2'']$. Эта же окружность может быть получена, если кольцевую поверхность пересекать семейством эксцентрических сфер, центры которых расположены на перпендикуляре, проведенном через центр окружности к плоскости ϵ.

Для того чтобы вспомогательная сфера пересекала по окружности и поверхность вращения β, необходимо, чтобы ее центр принадлежал оси этой поверхности. Поэтому за центр вспомогательной сферы следует брать точку O_1 пересечения упомянутого перпендикуляра с осью поверхности β. В этом случае сфера, радиус которой равен расстоянию от точки O_1 до точки 1, пересекает обе поверхности по окружностям. Окружность c, по которой сфера пересекает поверхность β, является параллелью поверхности β; эта параллель проецируется на плоскость π_2 в отрезок $[3''4'']$. Окружности $1''$, $2''$ и $3''$, $4''$ пересекаются в точках L_1'' и L_2'' ($L_1'' \equiv L_2''$). Аналогично строятся и другие произвольные точки, принадлежащие искомой линии пересечения поверхностей α и β.

Фронтальные проекции опорных точек A'' и B'' определяются пересечением фронтальных проекций главных меридианов поверхностей α и β. Горизонтальные проекции (на рис. 231 не показаны) могут быть построены с помощью параллелей поверхности β так же, как это было сделано в примере 2.

Способ эксцентрических сфер можно применять и в тех случаях, когда одна из пересекающихся поверхностей не является поверхностью вращения. Необходимым условием является наличие на этой поверхности семейства окружностей, которые можно рассматривать как результат пересечения поверхности со сферой. В число условий входит также условие, чтобы перпендикуляры, восставленные из центров круговых сечений, пересекали ось поверхности вращения.

Задача, помещенная в следующем примере, иллюстрирует возможность использования эксцентрических сфер для построения линии пересечения двух поверхностей, когда одна из них не является поверхностью вращения.

ПРИМЕР 2. Построить линию пересечения поверхности вращения α с конической поверхностью второго порядка β, имеющей в основании окружность (рис. 232).

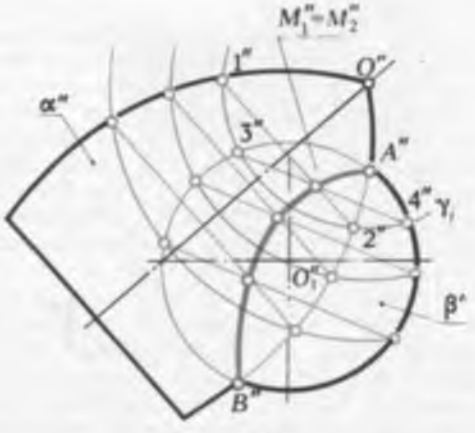


Рис. 230

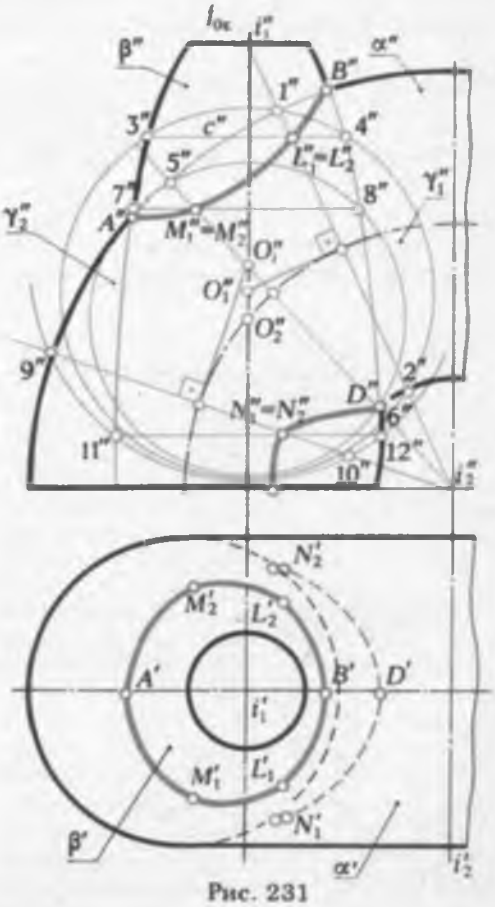


Рис. 231

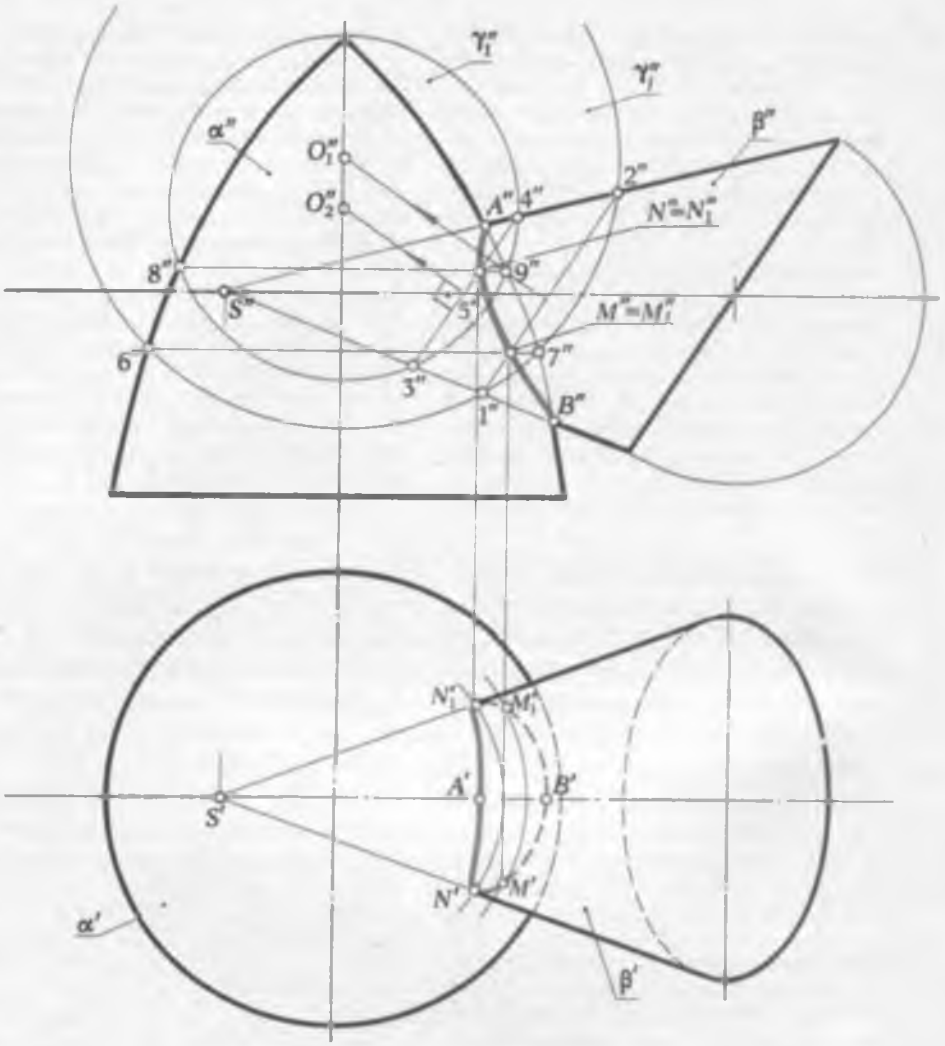


Рис. 232

РЕШЕНИЕ.

1. Выделим на конической поверхности β круговое сечение. Для этого пересечем поверхность β фронтально проецирующей плоскостью, параллельной основанию конуса. Эта плоскость пересечет коническую поверхность по окружности, которая проецируется на фронтальную плоскость проекции в виде отрезка $[1''2'']$.

2. Перпендикуляр, восставленный из центра этой окружности к ее плоскости, пересечет ось поверхности вращения в точке O_1, которую принимаем за центр вспомогательной секущей сферы γ_j. Центр другой эксцентрической сферы γ_j можно определить аналогично рассмотренному случаю. Построения начинаем с проведения прямой (3″4″), параллельной прямой (1″2″); из точки 5″ (середины отрезка $[3''4'']$) восставляем перпендикуляр к отрезку $[3''4'']$ и определяем точку O_2 пересечения его с осью поверхности вращения α.

3. Сферы, проведенные из центров O_1 и O_2 радиусами, соответственно равными $|O_1''1''|$ и $|O_2''3''|$, пересекают по окружностям не только поверхность β, но и поверхность вращения α. Отрезки $[6'', 7'']$ и $[8'', 9'']$ являются фронтальными проекциями этих окружностей. Пересечения отрезков $[1'', 2'']$ и $[6'', 7'']$, $[3'', 4'']$ и $[8'', 9'']$ укажут точки M'', M_1'' и N'', N_1'', принадлежащие линии пересечения поверхностей α и β.

Фронтальные проекции опорных точек A'' и B'' определяются пересечением фронтальных проекций главных меридианов поверхностей α и β. Горизонтальные проекции точек, принадлежащих линии пересечения, определяются известным способом (см. пример 1, рис. 228).

§ 52. ПОСТРОЕНИЕ ЛИНИИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА (ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ)

Рассмотрим некоторые частные случаи пересечения поверхностей второго порядка.

Известно, что порядок линии пересечения поверхностей равен произведению порядков поверхностей, поэтому две поверхности второго порядка всегда пересекаются по кривой четвертого порядка. При определенных условиях эта кривая распадается на несколько линий более низкого порядка. При этом сумма порядков линий, на которые распадается алгебраическая кривая, равна порядку самой линии. В частности, кривая четвертого порядка может распадаться на четыре прямые или две кривые второго порядка. Следует иметь в виду, что некоторые линии, на которые распадается кривая, могут быть мнимыми.

Случаи, когда кривая четвертого порядка распадается на четыре прямые (четыре линии первого порядка), можно проследить на примерах пересечения поверхностей двух цилиндров второго порядка с параллельными осями (рис. 233,*а*), а также двух конических поверхностей второго порядка, имеющих общую вершину (рис. 233,*б*).

Условия, при которых кривая четвертого порядка распадается на две кривые второго порядка, могут быть сформулированы следующими теоремами:

Т е о р е м а 1. *Если две поверхности второго порядка пересекаются по одной плоской кривой, то они пересекаются и еще по одной плоской кривой.*

В качестве иллюстрации этой теоремы на рис. 234 показаны фронтальные проекции l_1'' и l_2'' кривых второго порядка (в частности, окружностей), полученных при пересечении поверхностей сферы α и эллиптического цилиндра β.

Т е о р е м а 2. *Если две поверхности второго порядка имеют касание в двух точках, то линия их пересечения распадается на две кривые второго порядка, плоскости которых проходят через прямую, соединяющую точки касания.*

На рис. 235 показано пересечение двух поверхностей второго порядка: конической α и цилиндрической β. Поверхности α и β имеют две общие касательные плоскости ϵ и δ и соответственно две общие

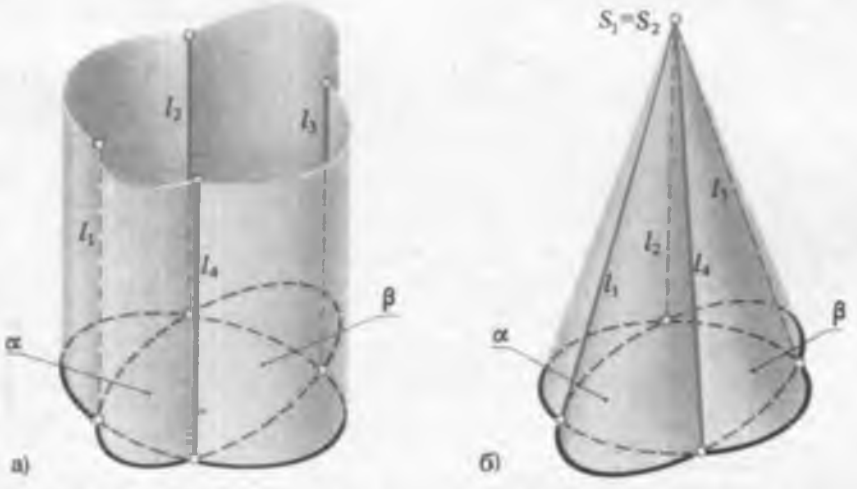


Рис. 233

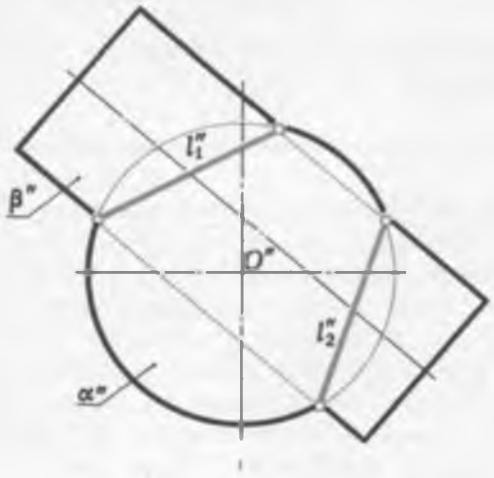


Рис. 234

точки касания A и B. Поэтому по теореме 2 они пересекаются по двум кривым второго порядка, расположенным в плоскостях ζ и η.

Плоскости ζ и η проходят через прямую (AB). Так как (AB) перпендикулярна плоскости проекции π_2, то плоскости ζ и η фронтально проецирующие, следовательно, принадлежащие им кривые проецируются на плоскость π_2 в отрезки $[C''D'']$ и $[E''F'']$, при этом $[C''D''] \subset f_{0\zeta}$, а $[E''F''] \subset f_{0\eta}$.

Теорема 2 может быть использована и для решения задачи на определение положения плоскостей, пересекающих поверхности второго порядка по окружностям.

ПРИМЕР. Определить положение плоскостей ζ и η, которые пересекают поверхность эллиптического цилиндра α по окружностям (рис. 236).

РЕШЕНИЕ. Проведем сферу β, имеющую две общие касательные плоскости с цилиндрической поверхностью (сфера β и цилиндр α имеют двойное соприкаса-

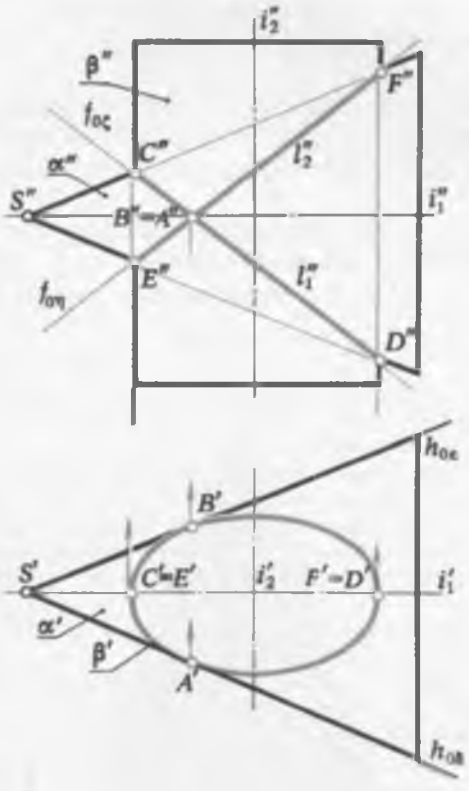


Рис. 235

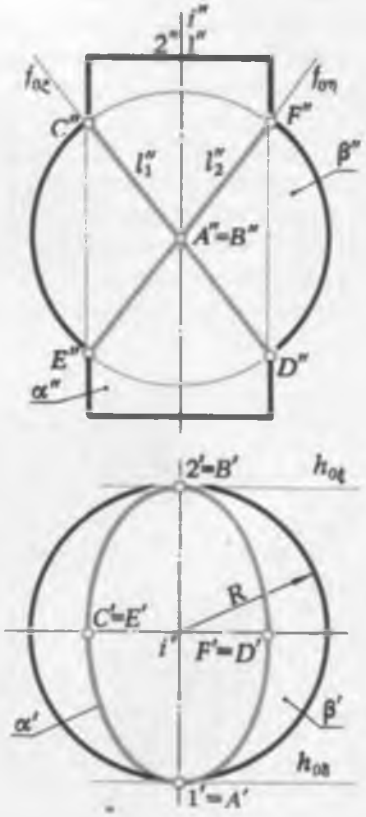


Рис. 236

ние). Для этого центр сферы должен находиться на оси i цилиндрической поверхности α, а ее радиус $R = |i'A'_1|$. Поверхности цилиндра и сферы соприкасаются в точках A и B. На основании теоремы 2 поверхности сферы и цилиндра пересекаются по двум кривым второго порядка, принадлежащим фронтально проецирующим плоскостям ζ и η. Эти кривые, проецирующиеся на плоскость π_2 в отрезки $[C''D'']$ и $[E''F'']$, являются окружностями, так как сопряженные диаметры замкнутой кривой второго порядка равны между собой $|AB| = |CD|$ и $|AB| = |EF|$.

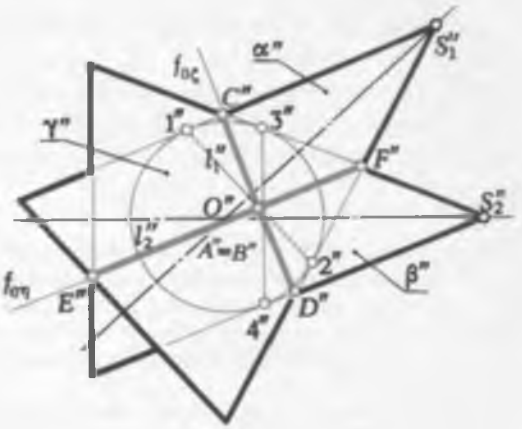


Рис. 237

Т е о р е м а 3. *Если две поверхности второго порядка описаны около третьей поверхности второго порядка или вписаны в нее, то линия их пересечения распадается на две кривые второго порядка, плоскости которых проходят через прямую, соединяющую точки пересечения линий касания**.

Эта теорема по существу является частным случаем теоремы 2. Практическое использование теоремы возможно в том случае, когда две поверхности вращения второго порядка могут быть описаны около сферы или вписаны в нее.

Рис. 237 дает представление о том, как можно определить линии пересечения двух конических поверхностей α и β, описанных около сферы γ. Поверхность α соприкасается со сферой γ по окружности, фронтальная проекция которой $[1''2'']$, а с поверхностью β — по окружности, проецирующейся в $[3''4'']$. Точки пересечения этих окружностей A и B являются точками соприкасания поверхностей α и β.

По теореме 3 плоскости кривых l_1 и l_2 должны проходить через прямую (AB). Так как $(AB) \perp \pi_2$, то плоскости $\zeta \supset l_1$ и $\eta \supset l_2$ фронтально проецирующие, а проекции кривых l_1 и l_2 проецируются в отрезки $[C''D'']$ и $[E''F'']$.

Показанные на рис. 237 конические поверхности α и β пересекаются по двум кривым, одна из которых l_1 — эллипс, другая l_2 — парабола (см. § 45, рис. 199, 200).

§ 53. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТОЧЕК ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ЛИНИИ С ПОВЕРХНОСТЬЮ

В общем случае для графического решения задачи по определению положения точек пересечения (встречи) линии с поверхностью необходимо выполнить ряд геометрических построений в приведенной ниже последовательности: заключить данную линию во вспомогательную поверхность; определить линию пересечения этой вспомогательной поверхности с заданной поверхностью; отметить точки, в которых пересекаются полученная линия с заданной (рис. 238).

---

* Эта теорема известна также как "теорема Монжа", по имени основоположника начертательной геометрии Гаспара Монжа, доказавшего эту теорему.

Запишем указанную последовательность решения в виде табл. 9 (как это сделано в § 43 при составлении алгоритма для решения задачи по определению линии пересечения двух поверхностей). В правой части таблицы приведена символическая запись, соответствующая смысловому содержанию отмеченных этапов решения.

Таблица 9

Словесное описание на традиционном языке начертательной геометрии	Символическая запись на геометрическом языке
1. Заключаем данную линию во вспомогательную поверхность	Заключаем $a \subset \gamma$
2. Определяем линию пересечения вспомогательной поверхности с заданной поверхностью	Определяем $l = \gamma \cap \alpha$
3. Отмечаем точки пересечения полученной линии пересечения с заданной	Отмечаем $\{K, \ldots\} = l \cap a$

Алгоритм для решения задачи определения точек пересечения линии с поверхностью в символической форме можно записать:

$$\{K, \ldots\} = (\gamma \cap \alpha) \cap a.$$

Здесь, как и у алгоритма определения линии пересечения двух поверхностей, в зависимости от порядка и взаимного расположения заданных кривой и поверхности множество искомых точек $\{K, \ldots\}$ может состоять из одной, двух и более точек.

Полученный алгоритм является универсальным, пригодным для решения задачи с любым вариантом задания исходных данных. Рассмотрим различные варианты решения задачи:

1. Пересечение кривой с поверхностью.
2. Пересечение кривой с плоскостью.
3. Пересечение прямой с поверхностью.
4. Пересечение прямой с плоскостью.

При решении всех этих задач, как правило, целесообразно для уменьшения графических построений и их упрощения пользоваться в качестве вспомогательной секущей поверхности γ — проецирующей цилиндричес-

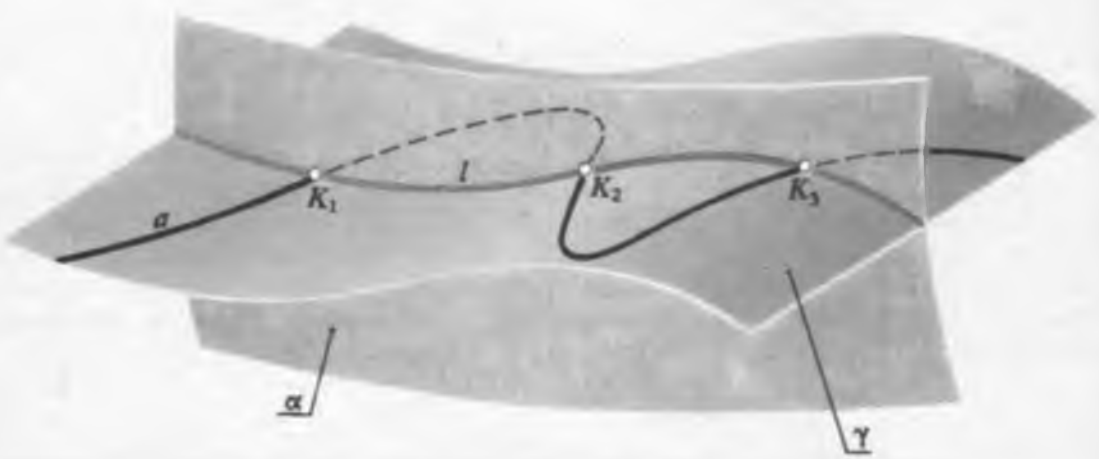


Рис. 238

кой поверхностью, в частности, если определяется точка пересечения прямой с поверхностью, — плоскостью. Упрощение решения достигается благодаря тому, что одна из проекций линии пересечения l автоматически определяется положением и формой следа проецирующей поверхности γ. Поэтому задача по определению точек встречи линии с поверхностью сводится к построению второй проекции линии, принадлежащей поверхности, если известна одна ее проекция, т. е. к задаче, которую мы неоднократно решали.

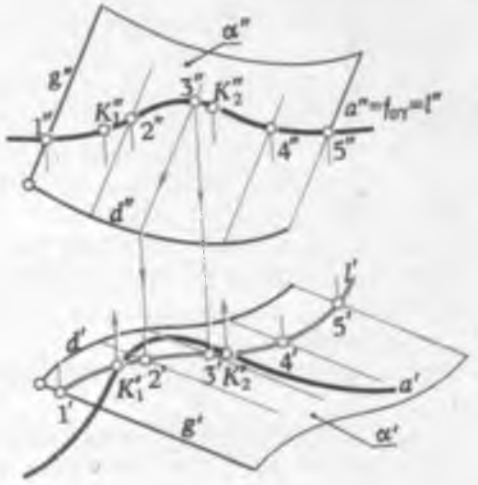


Рис. 239

1. Пересечение кривой с поверхностью.

При определении содержания и последовательности выполнения геометрических операций, входящих в состав алгоритма для решения задачи по определению точек пересечения кривой с поверхностью, мы пользовались наглядным чертежом, изображенным на рис. 238. Теперь проследим, как решается эта задача на эпюре Монжа.

ПРИМЕР. Определить точки пересечения кривой a с произвольной цилиндрической поверхностью α (рис. 239).

РЕШЕНИЕ.

1. Заключаем кривую a во фронтально проецирующую цилиндрическую поверхность γ.

2. Определяем линию пересечения поверхностей γ и α. Для этого отмечаем на $a'' \equiv f_{0\gamma} \equiv l''$ произвольные точки $1''$, $2''$, $3''$, $4''$, $5''$; зная фронтальные проекции точек, находим их горизонтальные проекции $1'$, $2'$, $3'$, $4'$, $5'$. Соединив эти точки плавной кривой, получим горизонтальную проекцию l' кривой l, по которой вспомогательная цилиндрическая поверхность γ пересекает данную поверхность α.

3. Отмечаем точки K'_1 и K'_2 пересечения кривых l' и a'. По горизонтальным проекциям определяем их фронтальные проекции K''_1 и K''_2.

2. Пересечение кривой с плоскостью.

Решение этой задачи аналогично только что рассмотренной, если и есть какое-либо отличие, то оно состоит лишь в том, что приходится определять вторую проекцию линии, принадлежащую не цилиндрической поверхности, как это было в приведенном выше примере, а плоскости.

ПРИМЕР. Определить точку встречи линии a с плоскостью α (рис. 240).

РЕШЕНИЕ.

1. Заключаем линию a в проецирующую цилиндрическую поверхность γ, безразлично какую $\gamma \perp \pi_1$ или $\gamma \perp \pi_2$ (на рис. 240 $\gamma \perp \pi_2$).

2. Обозначим линию пересечения $\gamma \cap \alpha = l$, тогда $l'' \subset f_{0\gamma}$.

3. Определяем горизонтальную проекцию l'. Для этого отмечаем на l'' ряд точек $1''$, $2''$, $3''$, ..., с помощью горизонталей (h_1, h_2, h_3, ...) плоскости α находим точки $1'$, $2'$, $3'$, ..., принадлежащие l'.

4. Отмечаем точку $K' = l' \cap a'$, по K' находим K''.

3. Пересечение прямой с поверхностью.

В алгоритме решения задачи для определения точек встречи прямой с поверхностью в качестве вспомогательной секущей поверхности следует брать плоскость.

Сложность решения рассматриваемой группы задач зависит от трудоемкости нахождения линии пересечения $\gamma \cap \alpha$, которая определяется видом поверхности α и расположением прямой a как относительно поверхности α, так и по отношению к плоскостям проекций.

Чтобы получить рациональное решение, следует пользоваться наиболее простым способом определения линии l ($l = \gamma \cap \alpha$). Этого можно достигнуть двумя путями: 1) соответствующим выбором положения вспомогательной секущей плоскости γ или 2) переводом секущей прямой a в частное положение. Рассмотрим каждый из этих вариантов решения.

Вариант 1.

а) Вспомогательная секущая плоскость — проецирующая.

ПРИМЕР. Определить точку пересечения прямой a с поверхностью торса (рис. 241).

РЕШЕНИЕ. Заключаем прямую a во фронтально проецирующую плоскость γ. Фронтальная проекция линии пересечения l'' совпадает с $f_{0\gamma} \equiv a''$. Отмечаем точку $1''$, в которой проекция l'' пересекает проекцию d'' ребра возврата d. Зная положение $1''$, определяем горизонтальную проекцию $1'$. Проводим ряд прямолинейных образующих торсовой поверхности (касательных к кривой d) и фиксируем точки $2''$, $3''$, в которых l'' пересекает фронтальные проекции этих образующих.

На горизонтальных проекциях соответствующих образующих определяем горизонтальные проекции $2'$, $3'$. Соединив эти точки плавной кривой, получим горизонтальную проекцию l'. $l' \cap a' = K'$ — горизонтальная проекция искомой точки встречи. По K' определяем K''.

б) Вспомогательная секущая плоскость — общего положения. Использование вспомогательной проецирующей плоскости не всегда упрощает решение, возможны случаи, когда целесообразно применять плоскость общего положения.

В качестве иллюстрации, подтверждающей эту мысль, может служить задача по определению точек пересечения прямой общего положения с конической поверхностью.

Плоскость пересекает коническую поверхность по кривой. Исключение составляет только плоскость, проходящая через вершину кони-

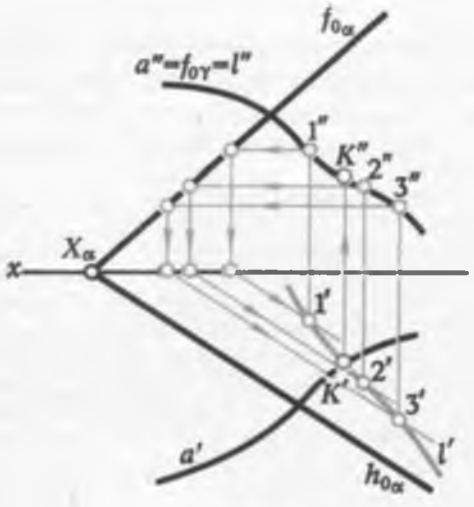


Рис. 240

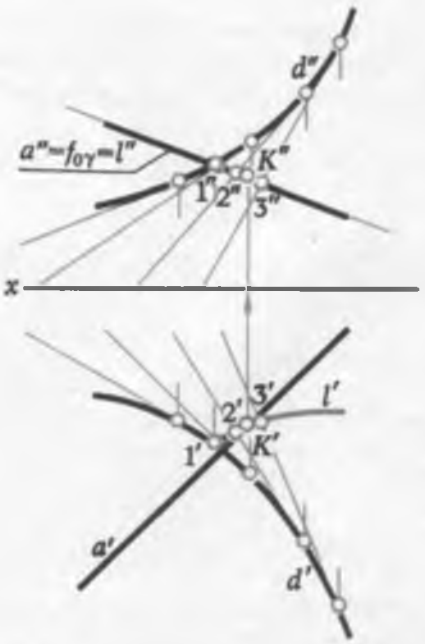


Рис. 241

ческой поверхности. В этом случае кривая второго порядка распадается на две прямые — образующие конической поверхности (см. § 45) *.

ПРИМЕР. Определить точки пересечения прямой a с поверхностью прямого кругового конуса α (рис. 242).

РЕШЕНИЕ. Заключаем прямую a в плоскость γ, проходящую через вершину конической поверхности S. На рис. 242 плоскость γ задана пересекающимися прямыми a и h, при этом h — горизонталь.

Определяем горизонтальный след плоскости γ; для этого находим горизонтальный след прямой H_a и через него проводим $h_{0\gamma}$ параллельно горизонтальной проекции горизонтали h'. Отмечаем точки $2'$ и $3'$, в которых $h_{0\gamma} \cap h_{0\alpha}$. $(S'2')$ и $(S'3')$ — образующие поверхности α, по которым она пересекается плоскостью γ.

Точки K_1' и K_2' ($K_1' = a' \cap (S'2')$ и $K_2' = a' \cap (S'3')$) — горизонтальные проекции искомых точек пересечения. Зная положение K_1' и K_2', определяем K_1'' и K_2''.

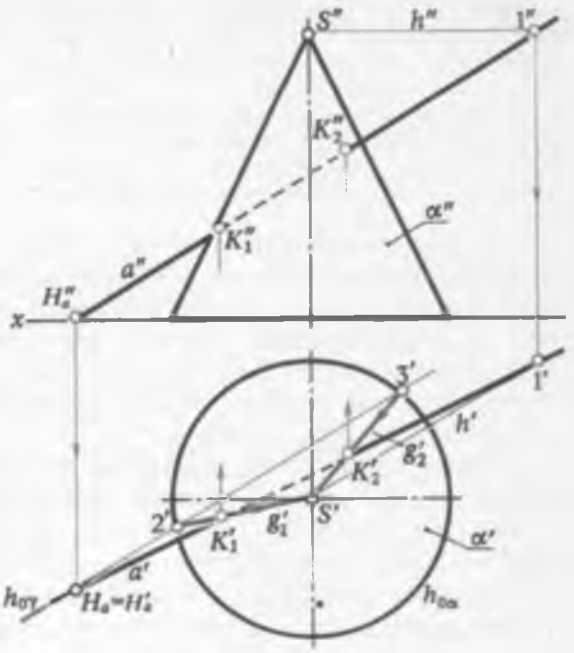


Рис. 242

Вариант 2. Перевод секущей прямой в частное положение.

При пересечении поверхности сферы плоскостью в сечении получается окружность, которая проецируется на плоскости проекции в общем случае в виде эллипсов или прямой и эллипса (если секущая плоскость проецирующая). В частном случае, когда секущая плоскость параллельна плоскости проекции, окружность проецируется на эту плоскость проекции без искажения. Поэтому, чтобы упростить решение задачи, следует произвольно расположенную прямую перевести в положение, параллельное какой-либо плоскости проекции. Тогда представляется возможность заключить прямую в плоскость, параллельную плоскости проекции.

ПРИМЕР 1. Определить точки встречи прямой a, заданной отрезком $[AB]$ с поверхностью сферы α (рис. 243).

РЕШЕНИЕ. Переводим прямую, произвольно расположенную в пространстве, в положение, параллельное плоскости проекции. Для этого переходим от системы $x\frac{\pi_2}{\pi_1}$ к системе $x_1\frac{\pi_3}{\pi_1}$, в которой $\pi_3 \parallel a$.

В этом случае горизонтально проецирующая плоскость $\gamma \supset a$ пересечет поверхность сферы по окружности c радиуса R (см. рис. 243), которая спроецируется на плоскость π_1 в $[1'2']$, а на плоскость π_3 в окружность c_1'' того же радиуса R. Точки K_{1_1}'' и K_{2_1}'' пересечения c_1'' с $[A_1''B_1'']$ — вспомогательные проекции искомых точек, по ним определяем вначале K_1' и K_2', а затем и K_1'' и K_2''.

Если прямая a, пересекающая поверхность вращения, проходит через ось i этой поверхности, то перевод прямой a в частное положение целесообразно осуществить путем вращения прямой вокруг оси i.

ПРИМЕР 2. Определить точки встречи прямой a с поверхностью вращения α (рис. 244).

---

*Если секущая плоскость проходит через вершину конической поверхности и составляет с ее осью угол больший, чем угол наклона к этой оси образующей конической поверхности, то сечение распадается на две мнимые прямые.

РЕШЕНИЕ. Горизонтально проецирующая плоскость γ, в которую заключаем прямую a, пересечет поверхность вращения по меридиану g_1.

Чтобы не строить искаженной фронтальной проекции меридионального сечения, поворачиваем плоскость γ и находящуюся в ней прямую a вокруг оси i до положения, параллельного π_2, тогда g_1' совпадает с g' — горизонтальной проекцией главного меридиана, а $h_{0\gamma}$ с $h_{0\gamma_1}$. После поворота прямая a займет положение a_1 (a_1', a_1''). С помощью точек K''_{1_1} и K''_{2_1}, в которых $a_1'' \cap g_1''$, определяем положение K_1'' и K_2'', а затем K_1' и K_2'.

4. Пересечение прямой с плоскостью.

Определение точки встречи прямой с плоскостью относится к элементарной задаче, но ее значение для решения самых различных, более сложных задач, трудно переоценить. Задача по нахождению точки встречи прямой с плоскостью входит как составная часть (фрагмент) в алгоритм решения широкого круга как позиционных, так и метрических задач.

Решение этой задачи даже в самом общем случае, когда и плоскость и прямая занимают произвольное положение в пространстве, легко сводится к простейшей задаче по определению линии пересечения двух плоскостей, из которых одна — проецирующая (см. § 44, рис. 187, 188), с последующим определением второй проекции точки, принадлежащей плоскости, если известна одна из ее проекций (см. § 40, примеры 1 ... 3, рис. 169 ... ... 171). Для этого достаточно прямую заключить во вспомогательную проецирующую плоскость.

ПРИМЕР 1. Определить точку встречи прямой a с плоскостью α (рис. 245).

РЕШЕНИЕ. Так как a — прямая, то в алгоритме $K = (\gamma \cap \alpha) \cap a$ в качестве секущей поверхности следует выбирать плоскость. Эта плоскость пересечет заданную α по прямой l. Поэтому в рассматриваемом случае предписываемая алго-

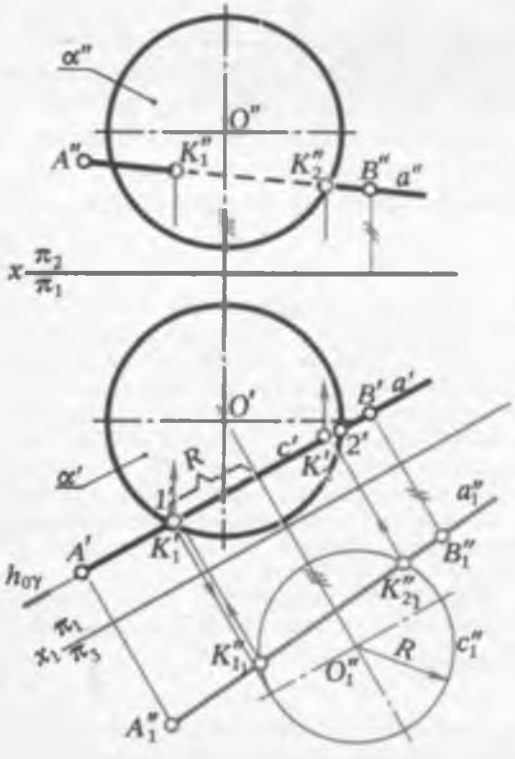


Рис. 243

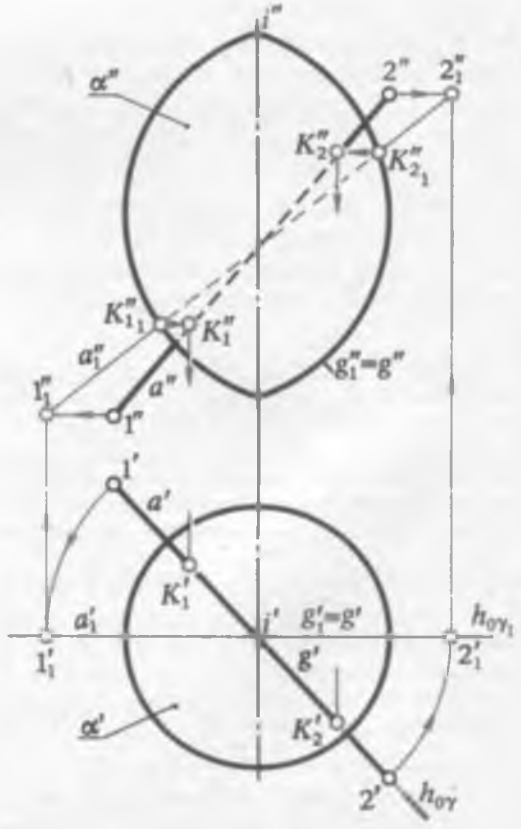


Рис. 244

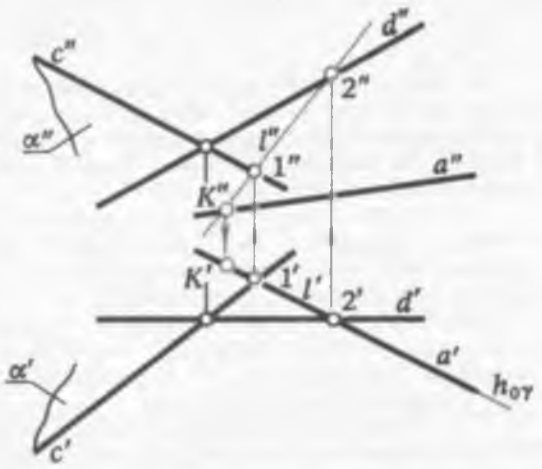


Рис. 245

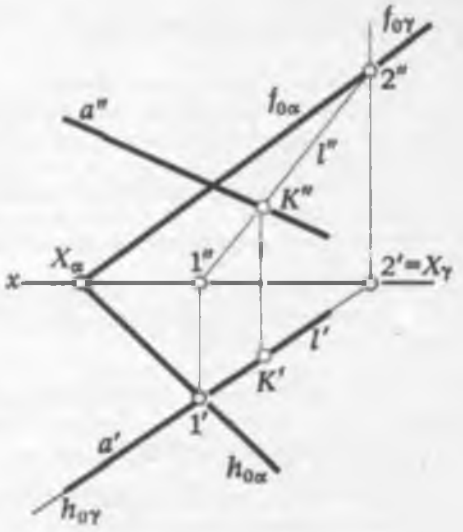


Рис. 246

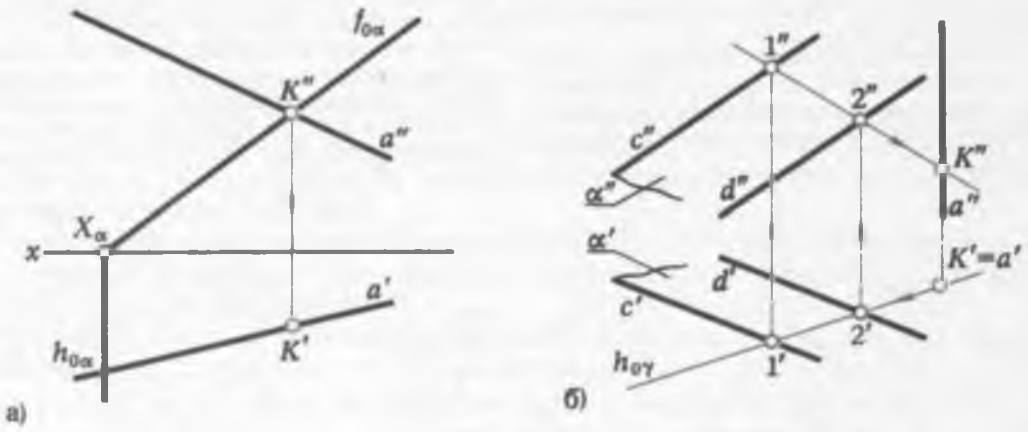


Рис. 247

ритмом последовательность выполнения геометрических построений будет иметь следующее содержание:

1) проводим через a' (или a'') горизонтальный (фронтальный) след горизонтально проецирующей (фронтально проецирующей) плоскости γ;

2) определяем фронтальную (горизонтальную) проекцию линии пересечения плоскости γ с данной плоскостью α $l'' = \gamma'' \cap \alpha''$ (или $l' = \gamma' \cap \alpha'$);

3) определяем $K'' = a'' \cap l''$ (или $K' = a' \cap l'$); зная K'', находим K' (или зная K', находим K'').

Алгоритм решения не меняется, если мы будем иметь дело с другим вариантом задания плоскости — параллельными прямыми или прямыми, по которым плоскость пересекает плоскости проекций (следами плоскости).

ПРИМЕР 2. Определить точку пересечения прямой a с плоскостью α (рис. 246).

РЕШЕНИЕ. Так же, как и в предыдущем примере, заключаем прямую a в проецирующую плоскость $\gamma \supset a$ ($h_{0\gamma} \equiv a'$). Строим линию пересечения плоскостей $\gamma \cap \alpha = l$. Отмечаем $K'' = l'' \cap a''$. По K'' находим K'.

Решение задачи упрощается, если одна из заданных фигур (прямая или плоскость) занимает проецирующее положение. Рис. 247, а и б иллюстрирует решение таких задач:

а) плоскость α — проецирующая, а прямая a — общего положения (рис. 247,а);

б) плоскость α — общего положения, а прямая a — проецирующая (рис. 247,б).

Решения задач настолько просты, что они ясны из чертежей и не требуют каких-либо пояснений.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Изложите общий принцип построения обобщенного алгоритма для решения задачи по определению линии пересечения поверхностей.

2. Сформулируйте возможные варианты решения задачи по определению линии пересечения многогранника плоскостью.

3. В каких случаях для определения линии пересечения двух поверхностей можно применять способ:

а) вращающихся плоскостей;

б) пучка плоскостей с несобственной прямой;

в) концентрических сфер;

г) эксцентрических сфер?

4. Какие точки линии пересечения поверхностей называются опорными?

5. Напишите и дайте пояснение алгоритма решения задачи по определению точки встречи прямой с плоскостью.

6. В чем заключается решение задач по определению сечения поверхности плоскостью с помощью способа граней и способа ребер?

7. В каких случаях плоскость пересекает поверхность прямого кругового конуса: по двум пересекающимся прямым, по окружности, эллипсу, параболе, гиперболе?

8. Что представляют собой фронтальные проекции линии пересечения двух поверхностей вращения второго порядка, имеющих общую плоскость симметрии, параллельную плоскости π_2?

9. Какая зависимость существует между порядком пересекающихся поверхностей и порядком линии, полученной в результате их пересечения?

10. Сформулируйте условия (теоремы), при которых кривая — линия пересечения поверхностей — распадается на две кривые второго порядка?

11. Приведите примеры, когда кривая — линия пересечения двух цилиндрических поверхностей — распадается на одну, две, три, четыре прямых.

12. В чем состоит содержание алгоритма решения задачи для определения точек пересечения линии с поверхностью?

13. Чем следует руководствоваться при выборе вспомогательной секущей поверхности при определении точек пересечения линии с поверхностью?

14. В каком случае можно для упрощения решения задачи по определению точек встречи прямой с поверхностью применять способ вращения вокруг оси, перпендикулярной плоскости проекции?

ГЛАВА VI

МЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

В § 6 гл. I отмечалось, что при параллельном, в частности ортогональном, проецировании геометрические фигуры, произвольно расположенные по отношению к плоскостям проекций, проецируются на эти плоскости с искажением их метрических характеристик (характеристик, которые могут быть получены путем измерения линейных и угловых величин). Для того чтобы иметь возможность по метрически искаженным проекциям судить о размерах и форме оригинала, необходимо знать способы решения задач по определению неискаженных линейных и угловых величин.

Метрическими называются задачи, решение которых связано с нахождением характеристик геометрических фигур, определяемых (измеряемых) линейными и угловыми величинами.

Все многообразие метрических задач, в конечном счете, сводится к двум видам: А — задачам на определение расстояния между двумя точками; Б — задачам на нахождение величины угла между двумя пересекающимися прямыми.

К метрическим относятся также задачи на построение отрезка и угла с наперед заданным значением соответственно линейной и градусной (радианной) величины.

Несмотря на то, что чисто метрические задачи встречаются редко, целесообразно выделить их в самостоятельную группу, включив в нее и те задачи, в которых на промежуточных этапах решения приходится выяснять позиционные отношения между геометрическими фигурами.

В основе алгоритма решения любой метрической задачи лежит инвариантное свойство ортогонального проецирования, заключающееся в том, что любая фигура, принадлежащая плоскости, параллельной плоскости проекции, проецируется на эту плоскость в конгруентную фигуру, т. е. $(\Phi \subset \beta) \wedge (\beta \parallel \pi_1) \Rightarrow \Phi' \cong \Phi$.

Рассмотрим возможные пути решения задач на определение метрических характеристик геометрических фигур.

А. Определение расстояний.

Решение задач на определение расстояния между точкой и прямой, двумя параллельными прямыми, точкой и плоскостью, прямой и плоскостью, двумя плоскостями, скрещивающимися прямыми, в конечном счете, сводится к нахождению расстояния между двумя точками.

Чертежи на рис. 248 подтверждают это утверждение. Из этих чертежей видно также, что, прежде чем приступить к решению задачи на определение расстояния между точкой и прямой или двумя параллельными прямыми (рис. 248, *а* и *б*), необходимо провести плоскость γ, перпендикулярную к прямой l, или опустить перпендикуляр из точки A ($A \in m$ или $A \in \beta$) на плоскость α (рис. 248, *в*, *г*, *д*, *е*). Поэтому, прежде чем решать задачи на определение расстояний, выясним характер и последо-

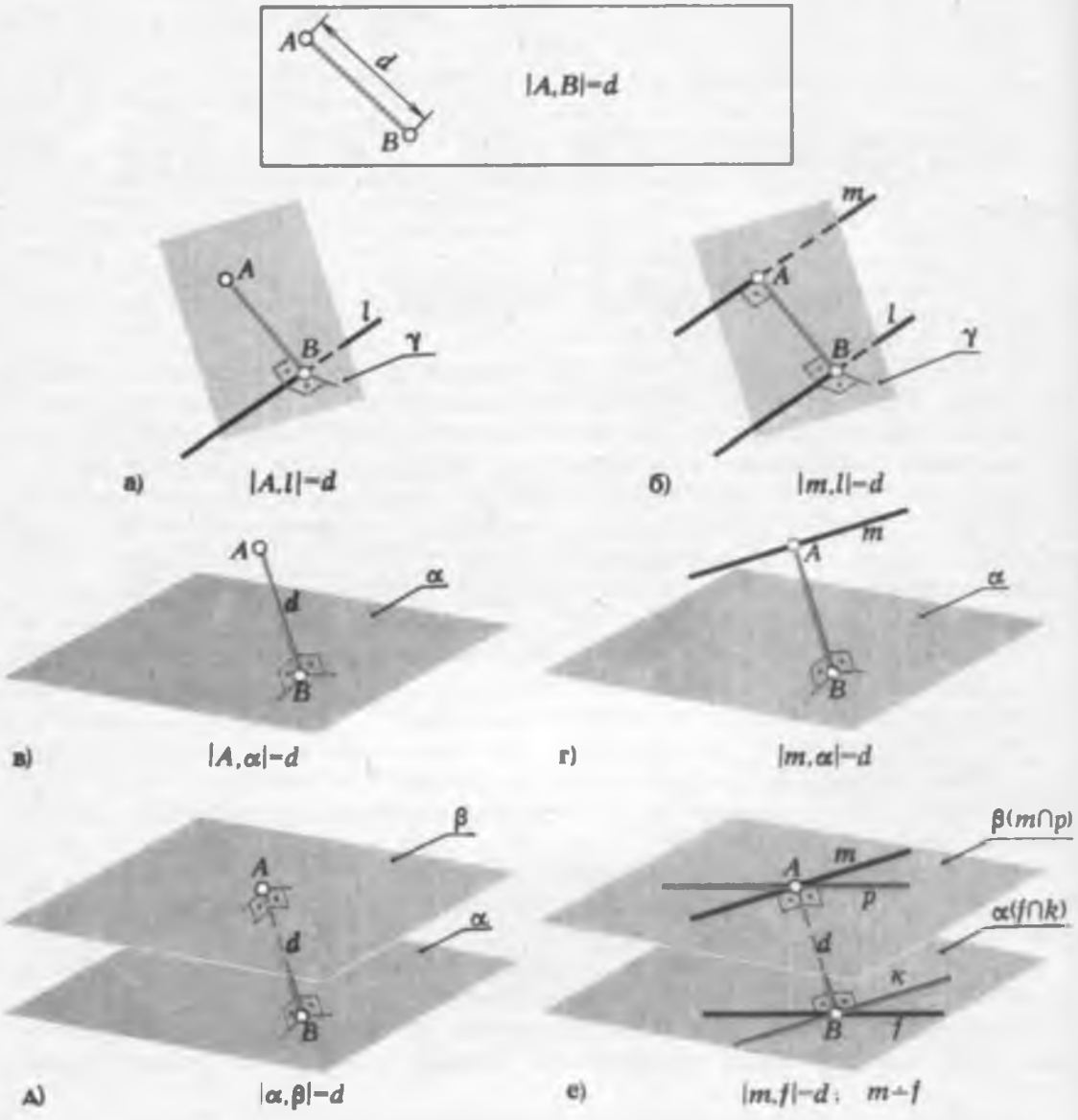


Рис. 248

вательность графических построений, которые должны быть выполнены для построения на эпюре взаимно перпендикулярных прямых, прямой и плоскости, плоскостей.

§ 54. ПОСТРОЕНИЕ ВЗАИМНО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХ ПРЯМЫХ, ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ, ПЛОСКОСТЕЙ

Не будет преувеличением утверждать, что построение взаимно перпендикулярных прямых и плоскостей наряду с определением расстояния между двумя точками являются основными графическими операциями при решении метрических задач.

Теоретической предпосылкой для построения на эпюре Монжа проекций прямых и плоскостей, перпендикулярных по отношению друг к другу в пространстве, служит отмеченное раньше (см. § 6) свойство

проекции прямого угла, одна из сторон которого параллельна какой-либо плоскости проекции:

$$(\widehat{ABC} = 90^\circ) \wedge ([BC] \parallel \pi_1, [BA] \not\perp \pi_1) \Rightarrow \widehat{A'B'C'} = 90^\circ.$$

1. Взаимно перпендикулярные прямые.

Чтобы можно было воспользоваться отмеченным свойством для построения на эпюре Монжа двух пересекающихся под углом 90° прямых, необходимо, чтобы одна из них была параллельна какой-либо плоскости проекции. Поясним сказанное на примерах.

ПРИМЕР 1. Через точку A провести прямую l, пересекающую горизонталь h под прямым углом (рис. 249).

Так как одна из сторон h прямого угла параллельна плоскости π_1, то на эту плоскость прямой угол спроецируется без искажения. Поэтому через A' проводим горизонтальную проекцию $l' \perp h'$. Отмечаем точку $M' = l' \cap h'$. Находим M'' ($M'' \in h''$). Точки A'' и M'' определяют l'' (см. рис. 249, а).

Если вместо горизонтали будет задана фронталь f, то геометрические построения по проведению прямой $l \perp f$ аналогичны только что рассмотренным с той лишь разницей, что построения неискаженной проекции прямого угла следует начинать с фронтальной проекции (см. рис. 249, б).

ПРИМЕР 2. Через точку A провести прямую l, пересекающую прямую a, заданную отрезком $[BC]$, под углом 90° (рис. 250).

Так как данный отрезок занимает произвольное положение по отношению к плоскостям проекций, мы не можем, как в предыдущем примере, воспользоваться свойством о частном случае проецирования прямого угла, поэтому вначале необходимо $[BC]$ перевести в положение, параллельное какой-либо плоскости проекции.

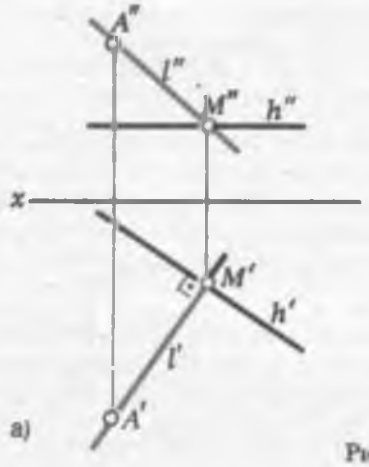
На рис. 250 $[BC]$ переведен в положение, параллельное плоскости π_3. Это сделано с помощью способа замены плоскостей проекции путем замены плоскости $\pi_1 \to \pi_3 \parallel [BC]$.

В результате такой замены в новой системе $x_1 \frac{\pi_2}{\pi_3}$ $[BC]$ определяет горизонтальную прямую, поэтому все дальнейшие простроения выполнены так же, как это было сделано в предыдущем примере: после того, как была найдена точка M_1', ее перевели на исходные плоскости проекции в положение M'' и M', эти точки совместно с A'' и A' определяют проекции прямой l.

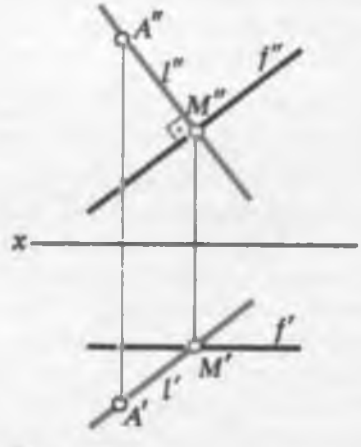
ПРИМЕР 3. Провести горизонтальную проекцию стороны $[BC]$ прямого угла ABC, если известны его фронтальная проекция $\angle A''B''C''$ и горизонтальная проекция стороны $[A'B']$ (рис. 251).

РЕШЕНИЕ:

1. Переводим сторону угла $[BA]$ в положение $\parallel \pi_3$ путем перехода от системы плоскостей проекций $x\frac{\pi_2}{\pi_1}$ к новой $x_1 \frac{\pi_3}{\pi_1}$.



а)



б)

Рис. 249

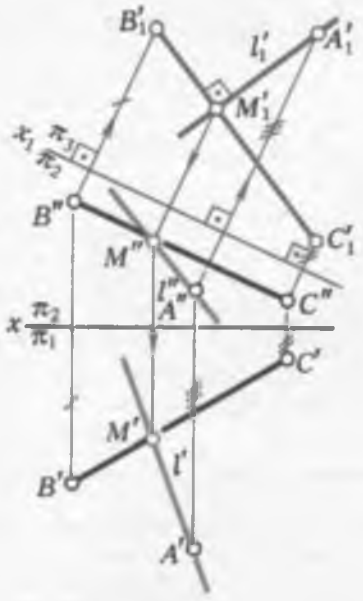


Рис. 250

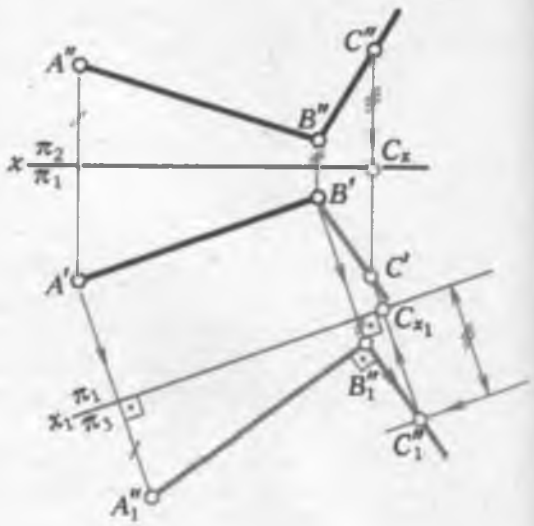


Рис. 251

2. Определяем новую фронтальную проекцию $[B_1''A_1'']$.

3. Из B_1'' восставляем перпендикуляр к $[B_1''A_1'']$. На этом перпендикуляре определяем точку C_1'' (C_1'' удалена от оси x_1 на расстояние $|C_{x_1}C_1''| = |C_xC''|$).

4. Горизонтальная проекция C' определяется как точка пересечения прямых $(C_1''C_{x_1}) \cap (C''C_x) = C'$.

2. Взаимно перпендикулярные прямая и плоскость.

Из курса стереометрии известно, что прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна хотя бы к двум пересекающимся прямым, принадлежащим этой плоскости.

Если в плоскости взять не произвольные пересекающиеся прямые, а ее горизонталь и фронталь, то открывается возможность воспользоваться свойством проекции прямого угла, как это было сделано в примере 1, рис. 249.

Рассмотрим следующий пример; пусть из точки $A \in \alpha$ требуется восставить перпендикуляр к плоскости α (рис. 252).

Через точку A проводим горизонталь h и фронталь f плоскости α. Тогда, по определению (AB), перпендикулярная к плоскости α, должна быть перпендикулярна к прямым h и f, т. е. $\widehat{BAM} = \widehat{BAK} = 90^\circ$. Но сторона $AM \angle BAM \parallel \pi_1$, поэтому $\angle BAM$ проецируется на плоскость π_1 без искажения, т. е. $\widehat{B'A'M'} = 90^\circ$. Сторона $AK \angle BAK \parallel \pi_2$ и, следовательно, на плоскость π_2 этот угол проецируется также без искажения, т. е. и $\widehat{B''A''K''} = 90^\circ$. Приведенные рассуждения можно сформулировать в виде следующей теоремы: *для того чтобы прямая в пространстве была перпендикулярна плоскости, необходимо и достаточно, чтобы на эпюре горизонтальная проекция прямой была перпендикулярна к горизонтальной проекции горизонтали плоскости, а фронтальная проекция — к фронтальной проекции фронтали этой плоскости.*

Если плоскость задана следами, то теорема может быть сформулирована иначе: *для того чтобы прямая в пространстве была перпендикулярна плоскости, необходимо и достаточно, чтобы проекции этой прямой были перпендикулярны к одноименным следам плоскости.*

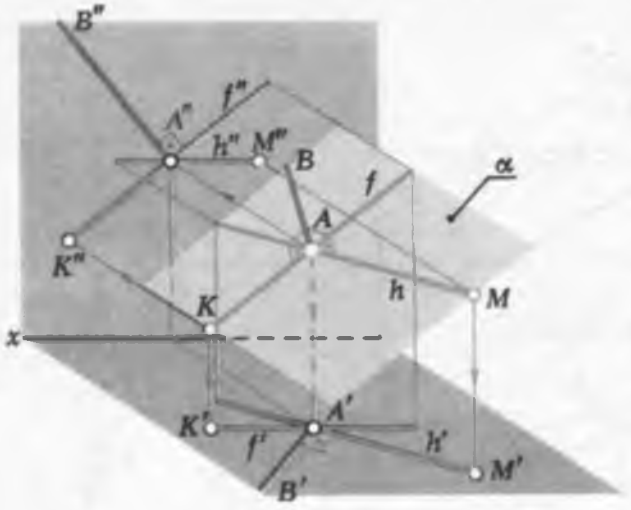


Рис. 252

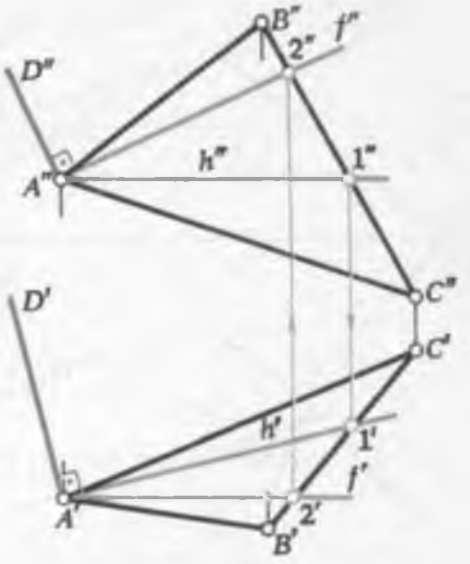


Рис. 253

Установленные теоремой зависимости между прямой в пространстве, перпендикулярной к плоскости, и проекциями этой прямой к проекциям линий уровня (следам) плоскости лежат в основе графического алгоритма решения задачи по проведению прямой, перпендикулярной к плоскости, а также построения плоскости, перпендикулярной к заданной прямой.

ПРИМЕР 1. Восставить в вершине A перпендикуляр AD к плоскости ΔABC (рис. 253).

Для того чтобы определить направление проекций перпендикуляра, проводим проекции горизонтали h и фронтали f плоскости ΔABC. После этого из точки A' восставляем перпендикуляр к h', а из A'' — к f''.

ПРИМЕР 2. Из точки A, принадлежащей плоскости α ($m \parallel n$), восставить перпендикуляр к этой плоскости (рис. 254).

РЕШЕНИЕ. Для определения направления проекций перпендикуляра l' и l'', как и в предыдущем примере, проводим через точку A (A', A'') горизонталь h (h', h''), принадлежащую плоскости α. Зная направление h', строим горизонтальную проекцию перпендикуляра l' ($l' \perp h'$). Для определения направления фронтальной проекции перпендикуляра через точку A (A', A'') проводим фронталь f (f', f'') плоскости α. В силу параллельности f фронтальной плоскости проекции прямой угол между l и f проецируется на π_2 без искажения, поэтому проводим $l'' \perp f''$.

На рис. 255 эта же задача решена для случая, когда плоскость α задана следами. Для определения направлений проекций перпендикуляра отпадает необходимость в проведении горизонтали и фрон-

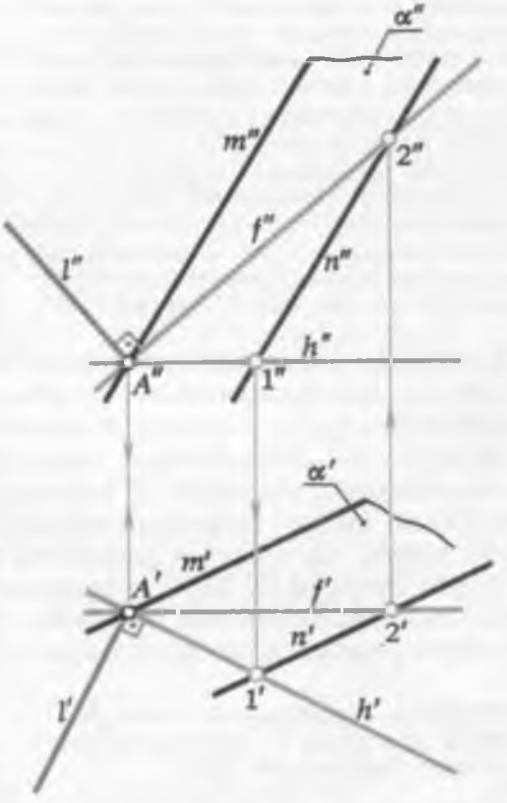


Рис. 254.

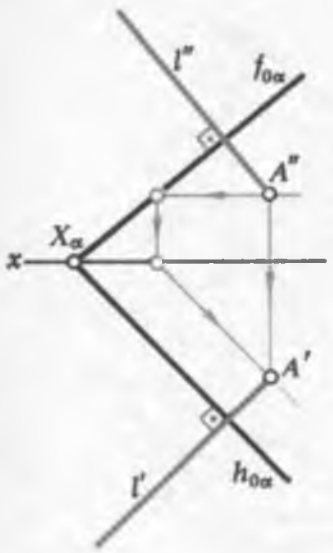


Рис. 255

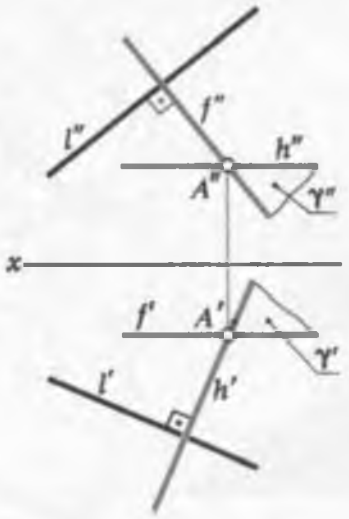


Рис. 256

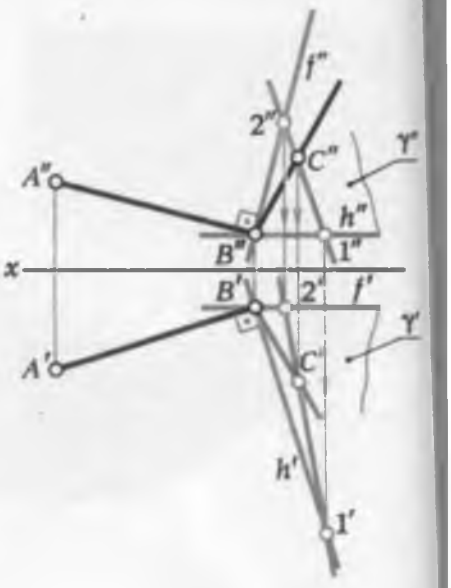


Рис. 257

тали, так как их функции выполняют следы плоскости $h_{0\alpha}$ и $f_{0\alpha}$. Как видно из чертежа, решение сводится к проведению через точки A' и A'' проекций $l' \perp h_{0\alpha}$ и $l'' \perp f_{0\alpha}$.

ПРИМЕР 3. Построить плоскость γ, перпендикулярную к данной прямой l и проходящую через заданную точку A (рис. 256).

РЕШЕНИЕ. Через точку A проводим горизонталь h и фронталь f. Эти две пересекающиеся прямые определяют плоскость; чтобы она была перпендикулярна к прямой l, необходимо, чтобы прямые h и f составляли с прямой l угол 90°. Для этого проводим $h' \perp l'$ и $f'' \perp l''$. Фронтальная проекция h'' и горизонтальная проекция f' проводятся параллельно оси x.

Рассмотренный случай позволяет по иному решать задачу, приведенную в примере 3 (с. 175 рис. 251). Сторона $[BC]$ $\angle ABC$ должна принадлежать плоскости $\gamma \perp [AB]$ и проходить через точку B (рис. 257).

Это условие и определяет ход решения задачи, который состоит в следующем: заключаем точку B в плоскость $\gamma \perp [AB]$, для этого через точку B проводим горизонталь и фронталь плоскости γ так, чтобы $h' \perp A'B'$ и $f'' \perp A''B''$.

Точка $C \in (BC)$, принадлежащей плоскости γ, поэтому для нахождения ее горизонтальной проекции проводим через C'' произвольную прямую $1''2''$, принадлежащую плоскости γ; определяем горизонтальную проекцию этой прямой $1'2'$ и на ней отмечаем точку C' (C' определяется пересечением линии связи — перпендикуляра, опущенного из C'', с горизонтальной проекцией прямой $1'2'$). C' совместно с B' определяют горизонтальную проекцию $(BC) \perp (AB)$.

3. Взаимно перпендикулярные плоскости.

Две плоскости перпендикулярны, если одна из них содержит прямую, перпендикулярную к другой плоскости.

Исходя из определения перпендикулярности плоскостей, задачу на построение плоскости β, перпендикулярной к плоскости α, решаем следующим путем: проводим прямую l, перпендикулярную к плоскости α; заключаем прямую l в плоскость β. Плоскость $\beta \perp \alpha$, так как $\beta \supset l \perp \alpha$.

Через прямую l можно провести множество плоскостей, поэтому задача имеет множество решений. Чтобы конкретизировать ответ, необходимо указать дополнительные условия.

ПРИМЕР 1. Через данную прямую a провести плоскость β, перпендикулярную к плоскости α (рис. 258).

РЕШЕНИЕ. Определяем направление проекций перпендикуляра к плоскости α, для этого находим горизонтальную проекцию горизонтали (h') и фронтальную проекцию фронтали (f''); из проекций произвольной точки $A \in a$ проводим проекции перпендикуляра $l' \perp h'$ и $l'' \perp f''$. Плоскость $\beta \perp \alpha$, так как $\beta \supset l \perp \alpha$.

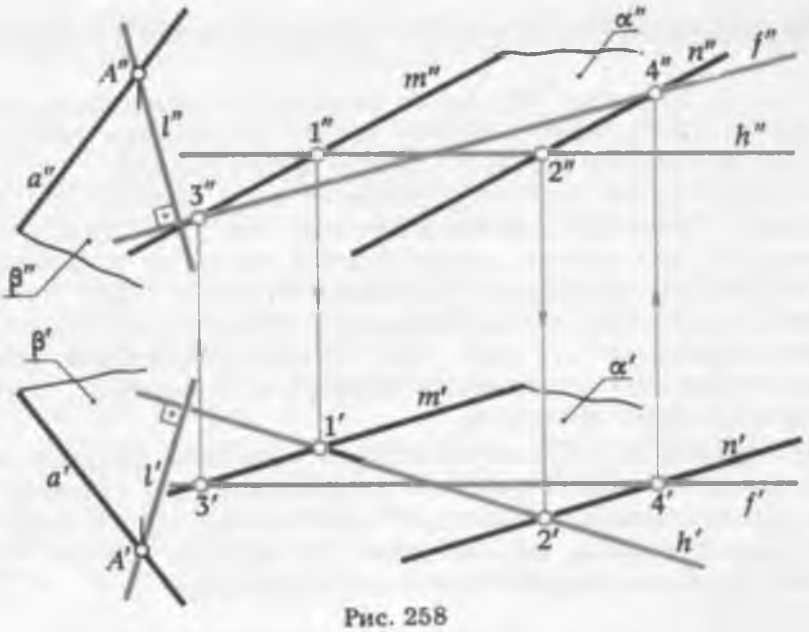


Рис. 258

ПРИМЕР 2. Через данную точку A провести горизонтально проецирующую плоскость γ, перпендикулярную к плоскости α, заданной следами (рис. 259, а).

Искомая плоскость γ должна содержать прямую, перпендикулярную плоскости α, или быть перпендикулярной к прямой, принадлежащей плоскости α. Так как плоскость γ должна быть горизонтально проецирующей, то прямая, перпендикулярная к ней, должна быть параллельна плоскости π_1, т. е. являться горизонталью плоскости α или (что то же самое) горизонтальным следом этой плоскости — $h_{0\alpha}$. Поэтому через горизонтальную проекцию точки A' проводим горизонтальный след $h_{0\gamma} \perp h_{0\alpha}$, фронтальный след $f_{0\gamma} \perp$ оси x.

На рис. 259, *б* показана фронтально проецирующая плоскость γ, проходящая через точку B и перпендикулярная к плоскости π_2.

Из чертежа видно, что отличительной особенностью эпюра, на котором заданы две взаимно перпендикулярные плоскости, из которых одна — фронтально проецирующая, является перпендикулярность их фронтальных следов $f_{0\gamma} \perp f_{0\alpha}$; горизонтальный след фронтально проецирующей плоскости перпендикулярен оси x.

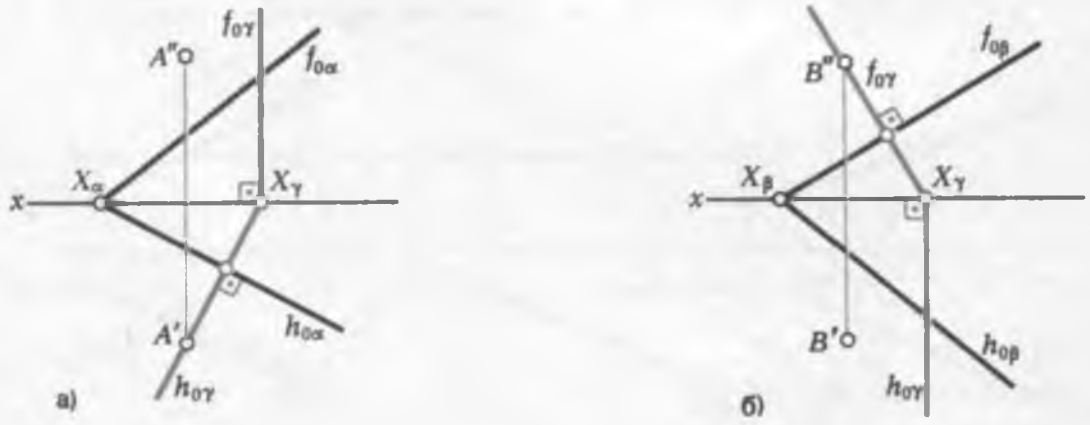


Рис. 259

§ 55. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАССТОЯНИЯ МЕЖДУ ДВУМЯ ТОЧКАМИ

В § 8 гл. I (см. рис. 50) было показано графическое определение длины отрезка $[AB]$, являющегося мерой расстояния между точками A и B, путем построения прямоугольного треугольника.

Рассмотрим другие варианты решения этой задачи. Мы знаем, что ортогональная проекция геометрической фигуры будет конгруентна оригиналу в том случае, когда фигура занимает положение, параллельное плоскости проекции. Поэтому отрезок $[AB]$ проецируется на плоскость π_1 (или π_2) без искажения лишь в том случае, когда он параллелен плоскости π_1 (или π_2). Поэтому решение рассматриваемой задачи сводится к переводу отрезка в положение, параллельное какой-либо плоскости проекции.

Перевод отрезка из общего положения в частное (параллельное плоскости проекции) можно осуществить, применив один из способов преобразования ортогональных проекций: или замену плоскости проекции, или плоскопараллельное перемещение (в частном случае — вращение вокруг оси, перпендикулярной плоскости проекции).

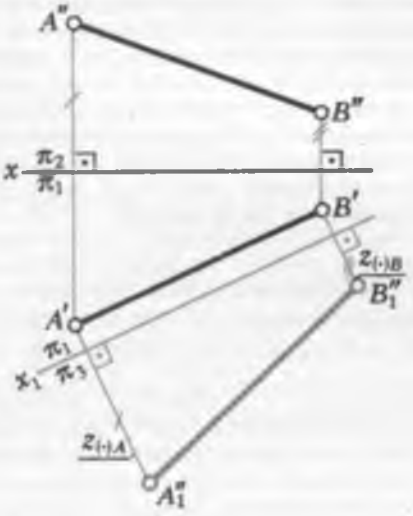


Рис. 260

ПРИМЕР 1. Определить расстояние между точками A и B (рис. 260). Решение задачи сводится к нахождению длины отрезка, концами которого являются точки A и B. Переводим отрезок $[AB]$ из общего положения в частное — параллельное плоскости π_3, используя для этого замену плоскости π_2 плоскостью π_3. Новую плоскость π_3 выбираем так, чтобы отрезок $[AB]$ оказался параллелен этой плоскости. Для этого новую ось x_1 проводим параллельно $[A'B']$. Длина отрезка $[A_1''B_1'']$ — новой проекции отрезка $[AB]$ — укажет искомое расстояние.

ПРИМЕР 2. На рис. 261 приведено решение этой же задачи путем перемещения отрезка AB параллельно плоскости π_1 в положение A_1B_1, параллельное горизонтальной плоскости проекции. В этом случае отрезок будет проецироваться на π_1 без искажения.

ПРИМЕР 3. На рис. 262 для определения длины отрезка AB его перевели в положение, параллельное плоскости π_1, путем вращения вокруг оси $i \perp \pi_2$.

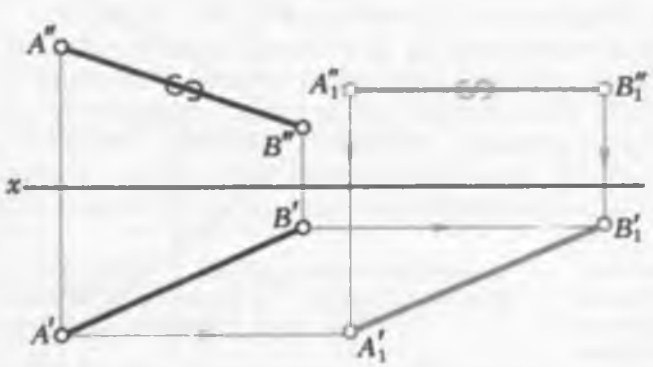


Рис. 261

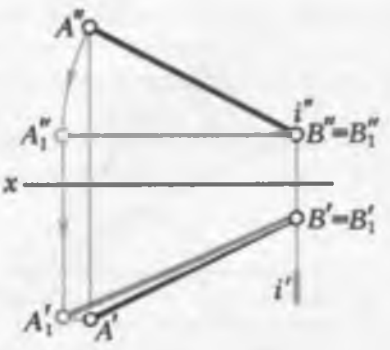


Рис. 262

§ 56. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАССТОЯНИЯ МЕЖДУ ТОЧКОЙ И ПРЯМОЙ, МЕЖДУ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПРЯМЫМИ

Расстояние от точки до прямой определяется длиной отрезка перпендикуляра, опущенного из точки на прямую.

Это определение может быть положено в основу составления алгоритма графического решения задачи определения расстояния от точки до прямой.

Рис. 263 дает наглядное представление о графическом решении задачи по определению расстояния от точки A до прямой a. Через точку A можно провести множество прямых $\{l_1, l_2, l_3, ..., l_n\}$, перпендикулярных к прямой a. Это множество прямых определяет плоскость γ. Чтобы выделить из $\{l_1, l_2, l_3, ..., l_n\}$ единственную прямую l_j, пересекающую прямую a, необходимо найти точку встречи прямой a с плоскостью $\gamma - M = a \cap \gamma$; определить длину отрезка $[AM]$.

Реализация этого алгоритма путем геометрических построений значительно упрощается, если прямая будет параллельна плоскости проекции.

В этом случае можно без каких-либо вспомогательных построений провести проекции прямой, перпендикулярной данной и проходящей через заданную точку. На рис. 264 показано решение такой задачи. Как видно из чертежа, решение достигается минимальным числом геометрических построений. Поэтому нет смысла решать эту задачу в общем виде, а следует предварительно с помощью способов преобразования ортогональных проекций перевести прямую в положение, параллельное плоскости проекции (см. рис. 260, 261, 262).

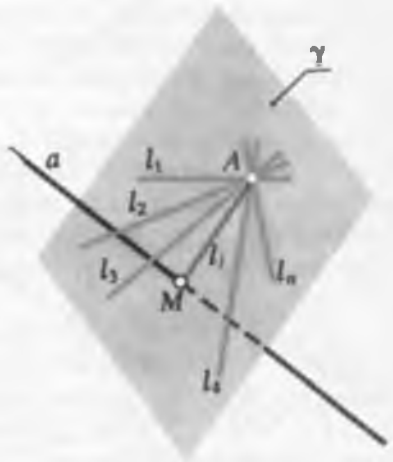


Рис. 263

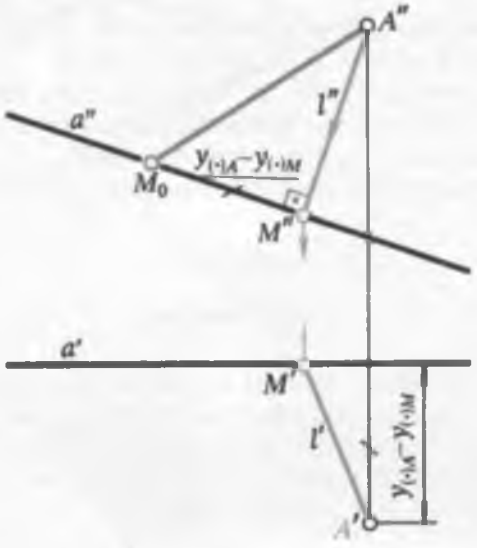


Рис. 264

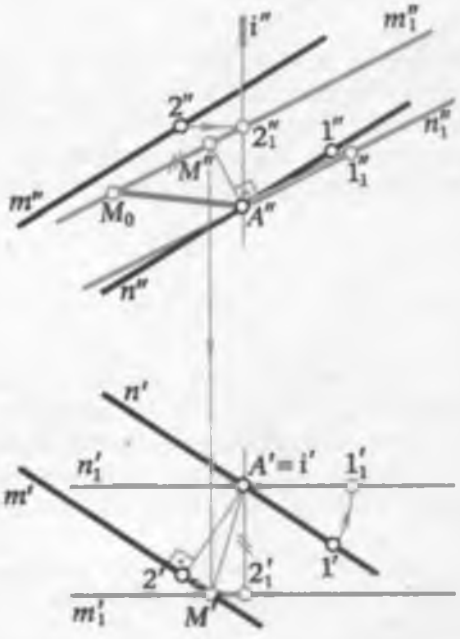


Рис. 265

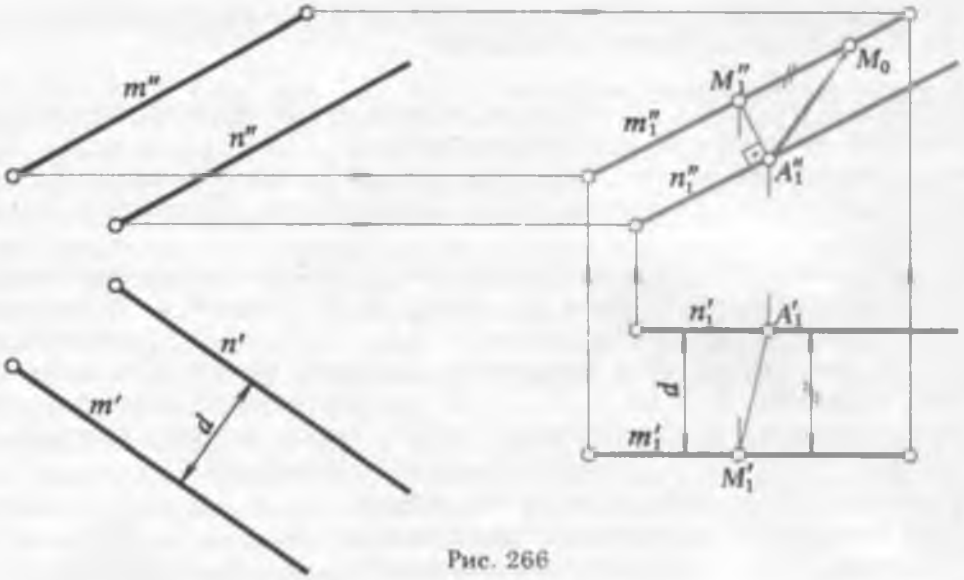


Рис. 266

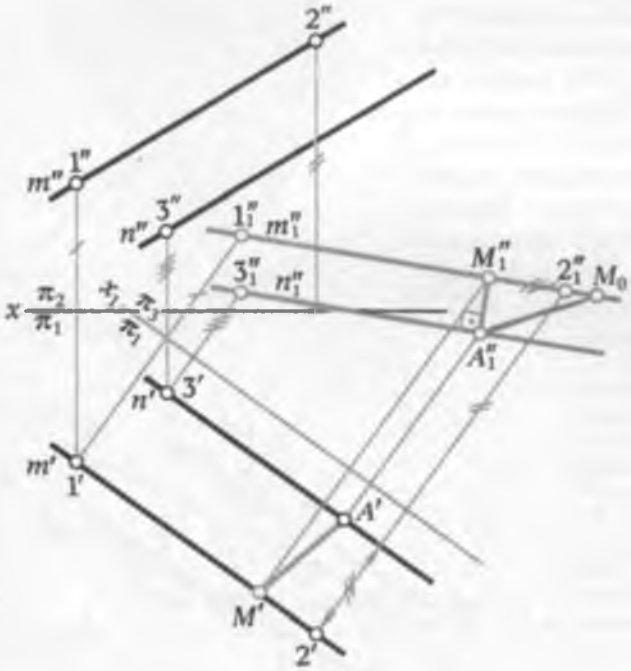


Рис. 267

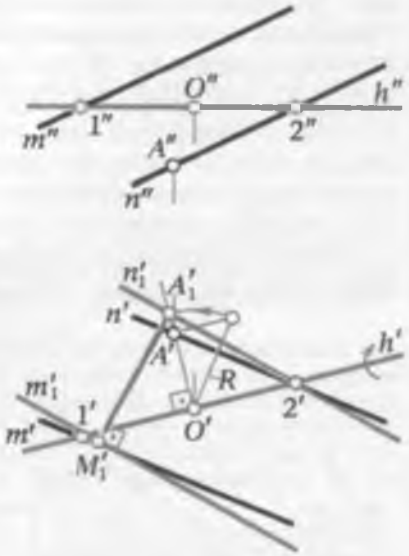


Рис. 268

Решение задачи на определение расстояния между параллельными прямыми ничем не отличается от только что рассмотренного примера. Это утверждение базируется на том, что расстояние между параллельными прямыми определяется величиной перпендикуляра, опущенного из точки, взятой на одной прямой, на другую прямую.

ПРИМЕР 1. Определить расстояние между параллельными прямыми m и n (рис. 265).

РЕШЕНИЕ. На прямой n отмечаем произвольную точку $A \in n$. Вращаем прямые m и n вокруг оси i ($i \ni A$, $i \perp \pi_1$) до положения $m_1 \parallel \pi_2$ и $n_1 \parallel \pi_2$. Из точки A'' опускаем перпендикуляр $A''M''$ на прямую m''_1. Определяем действительную величину $[AM]$.

На рис. 266 показан второй вариант решения этой задачи. С помощью способа параллельного перемещения прямые m и n переведены в положение, параллельное плоскости π_2. Дальнейшее решение сводится к определению расстояния от точки A, взятой на одной прямой, до другой прямой m_1.

Перевод прямых m и n из общего положения в частное можно осуществить путем замены плоскости π_2 новой плоскостью π_3, параллельной прямым m и n. Решение задачи этим способом приведено на рис. 267.

На рис. 268 рассматриваемая задача решена путем вращения прямых m и n вокруг горизонтали h до положения, параллельного плоскости π_1.

§ 57. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАССТОЯНИЯ МЕЖДУ ТОЧКОЙ И ПЛОСКОСТЬЮ, ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТЬЮ, МЕЖДУ ПЛОСКОСТЯМИ И СКРЕЩИВАЮЩИМИСЯ ПРЯМЫМИ

Определение расстояния между: 1 — точкой и плоскостью; 2 — прямой и плоскостью; 3 — плоскостями; 4 — скрещивающимися прямыми рассматривается совместно, так как алгоритм решения для всех этих задач по существу одинаков и состоит из геометрических построений, которые нужно выполнить для определения расстояния между заданными точкой A и плоскостью α. Если и есть какое-то различие, то оно состоит лишь в том, что в случаях 2 и 3 прежде чем приступить к решению задачи, следует на прямой m (случай 2) или плоскости β (случай 3) отметить произвольную точку A. При определении расстояния между скрещивающимися прямыми предварительно заключаем их в параллельные плоскости α и β с последующим определением расстояния между этими плоскостями.

Рассмотрим каждый из отмеченных случаев решения задач.

1. Определение расстояния между точкой и плоскостью.

Расстояние от точки до плоскости определяется длиной отрезка перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость.

Поэтому решение этой задачи состоит из последовательного выполнения следующих графических операций:

1) из точки A опускаем перпендикуляр a на плоскость α (рис. 269);

2) находим точку M пересечения этого перпендикуляра с плоскостью $M = a \cap \alpha$;

3) определяем длину отрезка $[AM]$.

Если плоскость α общего положения, то для того чтобы опустить на эту плоскость перпендикуляр, необходимо предварительно определить направление проекций горизонтали и фронтали этой плоскости. Нахождение точки встречи этого перпендикуляра с плоскостью также требует выполнения дополнительных геометрических построений.

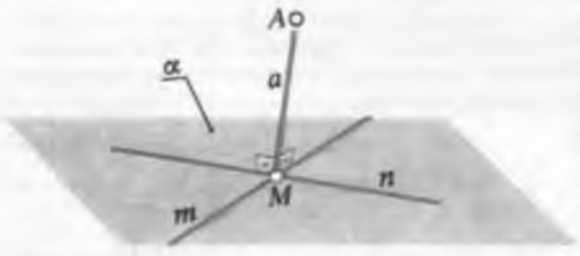


Рис. 269

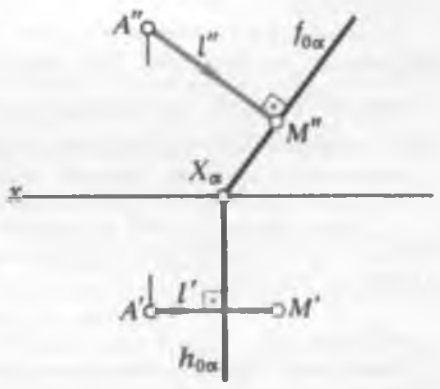


Рис. 270

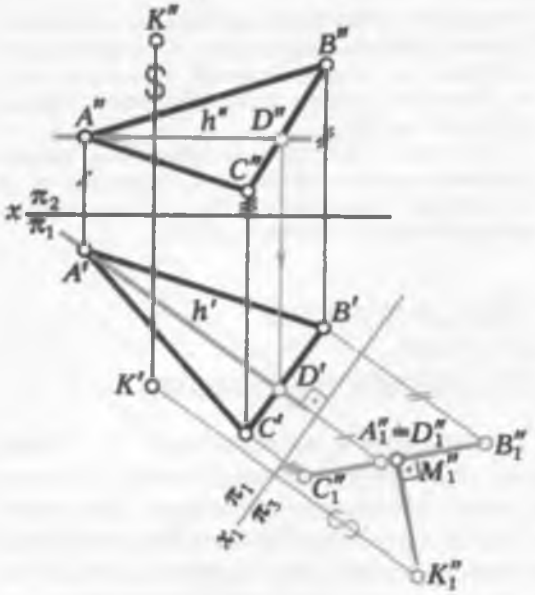


Рис. 271

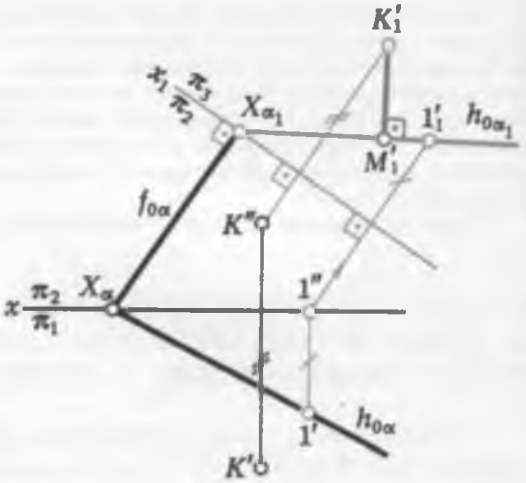


Рис. 272

Решение задачи упрощается, если плоскость α занимает частное положение относительно плоскостей проекций. В этом случае и проведение проекций перпендикуляра, и нахождение точки его встречи с плоскостью осуществляется без каких-либо дополнительных вспомогательных построений.

ПРИМЕР 1. Определить расстояние от точки A до фронтально проецирующей плоскости α (рис. 270).

РЕШЕНИЕ. Через A' проводим горизонтальную проекцию перпендикуляра $l' \perp h_{0\alpha_1}$, а через A'' — его фронтальную проекцию $l'' \perp f_{0\alpha}$. Отмечаем точку $M'' = l'' \cap f_{0\alpha}$. Так как $AM \parallel \pi_2$, то $[A''M''] = |AM| = d$.

Из рассмотренного примера видно, насколько просто решается задача, когда плоскость занимает проецирующее положение. Поэтому, если в исходных данных будет задана плоскость общего положения, то, прежде чем приступить к решению, следует перевести плоскость в положение, перпендикулярное к какой-либо плоскости проекции.

ПРИМЕР 2. Определить расстояние от точки K до плоскости, заданной ΔABC (рис. 271).

РЕШЕНИЕ.

1. Переводим плоскость ΔABC в проецирующее положение*. Для этого переходим от системы $x\frac{\pi_2}{\pi_1}$ к $x_1\frac{\pi_3}{\pi_1}$; направление новой оси x_1 выбирается перпендикулярным к горизонтальной проекции горизонтали плоскости треугольника.

2. Проецируем ΔABC на новую плоскость π_3 (плоскость ΔABC спроецируется на π_3 в $[C''_1B''_1]$).

3. Проецируем на ту же плоскость точку K ($K' \to K''_1$).

4. Через точку K''_1 проводим $(K''_1M''_1) \perp$ отрезку $[C''_1B''_1]$. Искомое расстояние $d = |K''_1M''_1|$.

Решение задачи упрощается, если плоскость задана следами, так как отпадает необходимость в проведении проекций линий уровня.

ПРИМЕР 3. Определить расстояние от точки K до плоскости α, заданной следами (рис. 272).

*Наиболее рациональным путем перевода плоскости треугольника в проецирующее положение является способ замены плоскостей проекций, так как в этом случае достаточно построить только одну вспомогательную проекцию.

РЕШЕНИЕ. Заменяем плоскость π_1 плоскостью π_3, для этого проводим новую ось $x_1 \perp f_{0\alpha}$. На $h_{0\alpha}$ отмечаем произвольную точку $1'$ и определяем ее новую горизонтальную проекцию на плоскости π_3 ($1'_3$). Через точки X_{α_1} ($X_{\alpha_1} = h_{0\alpha_1} \cap x_1$) и $1'_1$ проводим $h_{0\alpha_1}$. Определяем новую горизонтальную проекцию точки $K \to K'_1$. Из точки K'_1 опускаем перпендикуляр на $h_{0\alpha_1}$ и отмечаем точку его пересечения с $h_{0\alpha_1}$ — M'_1. Длина отрезка $K'_1M'_1$ укажет искомое расстояние.

2. Определение расстояния между прямой и плоскостью.

Расстояние между прямой и плоскостью определяется длиной отрезка перпендикуляра, опущенного из произвольной точки прямой на плоскость (см. рис. 248).

Поэтому решение задачи по определению расстояния между прямой m и плоскостью α ничем не отличается от рассмотренных в п. 1 примеров на определение расстояния между точкой и плоскостью (см. рис. 270 ... 272). В качестве точки можно брать любую точку, принадлежащую прямой m.

3. Определение расстояния между плоскостями.

Расстояние между плоскостями определяется величиной отрезка перпендикуляра, опущенного из точки, взятой на одной плоскости, на другую плоскость.

Из этого определения вытекает, что алгоритм решения задачи по нахождению расстояния между плоскостями α и β отличается от аналогичного алгоритма решения задачи по определению расстояния между прямой m и плоскостью α лишь тем, что прямая m должна принадлежать плоскостиα, т. е., чтобы определить расстояние между плоскостями α и β, следует:

1) взять в плоскости α прямую m;

2) выделить на прямой m произвольную точку A;

3) из точки A опустить перпендикуляр l на плоскость β;

4) определить точку M — точку встречи перпендикуляра l с плоскостью β;

5) определить величину отрезка $[AM]$.

На практике целесообразно пользоваться другим алгоритмом решения, который будет отличаться от приведенного лишь тем, что, прежде чем приступить к выполнению первого пункта, следует перевести плоскости в проецирующее положение.

Включение в алгоритм этой дополнительной операции упрощает выполнение всех без исключения остальных пунктов, что, в конечном счете, приводит к более простому решению.

ПРИМЕР 1. Определить расстояние между плоскостями α и β (рис. 273).

РЕШЕНИЕ. Переходим от системы $x\frac{\pi_2}{\pi_1}$ к $x_1\frac{\pi_1}{\pi_3}$. По отношению к новой плоскости π_3 плоскости α и β занимают проецирующее положение, поэтому расстояние между новыми фронтальными следами $f_{0\alpha_1}$ и $f_{0\beta_1}$ является искомым.

В инженерной практике часто приходится решать задачу на построение плоскости, параллельной данной и удаленной от нее на заданное расстояние. Приведенный ниже пример 2 иллюстрирует решение такой задачи.

ПРИМЕР 2. Требуется построить проекции плоскости β, параллельной данной плоскости α ($m \parallel n$), если известно, что расстояние между ними равно d (рис. 274).

РЕШЕНИЕ.

1. В плоскости α проводим произвольные горизонталь h (1, 3) и фронталь f (1, 2).

2. Из точки 1 восставляем перпендикуляр l к плоскости α ($l' \perp h'$, $l'' \perp f''$).

3. На перпендикуляре l отмечаем произвольную точку A.

4. Определяем длину отрезка $[1A]$ — $[1'A_0]$ (положение $[1'A_0]$ указывает на эпюре метрически неискаженное направление прямой l).

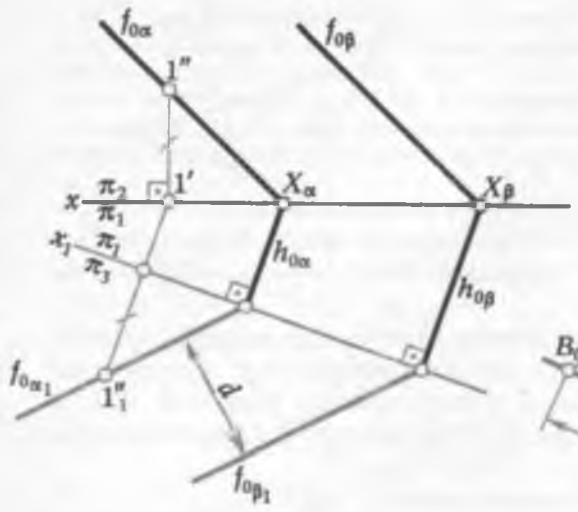


Рис. 273

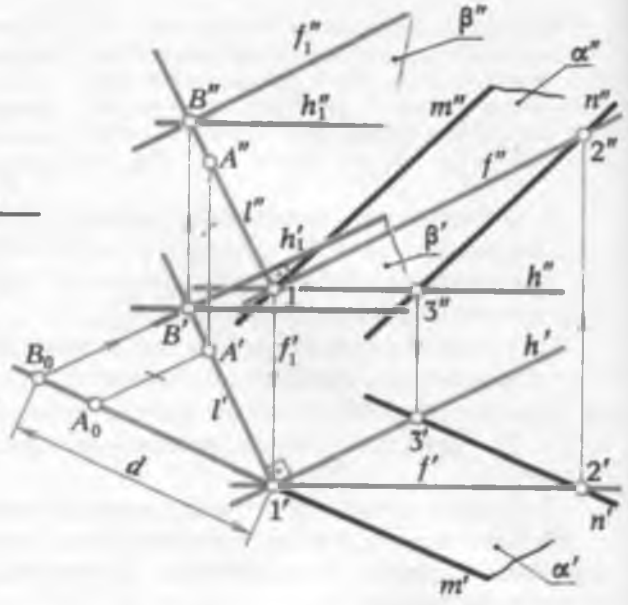


Рис. 274

5. Откладываем на прямой $(1'A_0)$ от точки $1'$ отрезок $[1'B_0] = d$.

6. Отмечаем на проекциях l' и l'' точки B' и B'', соответствующие точке B_0.

7. Через точку B проводим плоскость β $(h_1 \cap f_1)$. Чтобы $\beta \parallel \alpha$, необходимо соблюдать условие $h_1 \parallel h$ и $f_1 \parallel f$.

4. Определение расстояния между скрещивающимися прямыми. ***Расстояние между скрещивающимися прямыми определяется длиной перпендикуляра, заключенного между параллельными плоскостями, которым принадлежат скрещивающиеся прямые.***

Для того чтобы через скрещивающиеся прямые m и f провести взаимно параллельные плоскости α и β, достаточно через точку A $(A \in m)$ провести прямую p, параллельную прямой f, а через точку B $(B \in f)$ — прямую k, параллельную прямой m. Пересекающиеся прямые m и p, f и k определяют взаимно параллельные плоскости α и β (см. рис. 248, *е*). Расстояние между плоскостями α и β равно искомому расстоянию между скрещивающимися прямыми m и f.

Можно предложить и другой путь для определения расстояния между скрещивающимися прямыми, который состоит в том, что с помощью какого-либо способа преобразования ортогональных проекций одна из скрещивающихся прямых переводится в проецирующее положение. В этом случае одна проекция прямой вырождается в точку. Расстояние между новыми проекциями скрещивающихся прямых (точкой A'_2 и отрезком $C'_2D'_2$) является искомым.

На рис. 275 приведено решение задачи на определение расстояния между скрещивающимися прямыми a и b, заданными отрезками $[AB]$ и $[CD]$. Решение выполняют в следующей последовательности:

1. Переводят одну из скрещивающихся прямых (a) в положение, параллельное плоскости π_3; для этого переходят от системы плоскостей проекции $x\frac{\pi_2}{\pi_1}$ к новой $x_1\frac{\pi_1}{\pi_3}$, ось x_1 проводят параллельно горизонтальной проекции прямой a. Определяют a''_1 $[A''_1B''_1]$ и b''_1 $[C''_1D''_1]$.

2. Путем замены плоскости π_1 плоскостью π_4 переводят прямую

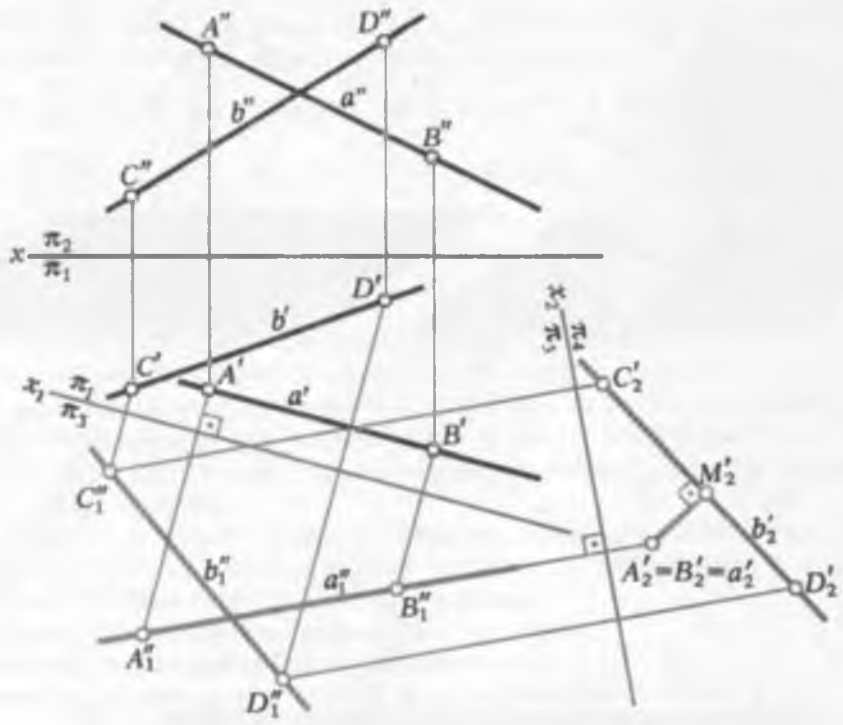


Рис. 275

a в положение a_2', перпендикулярное плоскости π_4 (новую ось x_2 проводят перпендикулярно a_1'').

3. Строят новую горизонтальную проекцию прямой $b_2' - [C_2'D_2']$.

4. Расстояние от точки A_2' до прямой $C_2'D_2'$ (отрезок $[A_2'M_2']$) является искомым.

Следует иметь в виду, что перевод одной из скрещивающихся прямых в проецирующее положение является ничем иным, как переводом плоскостей параллелизма, в которые можно заключить прямые a и b, также в проецирующее положение.

В самом деле, переведя прямую a в положение, перпендикулярное плоскости π_4, мы обеспечиваем перпендикулярность любой плоскости, содержащей прямую a, плоскости π_4, в том числе и плоскости α, определяемой прямыми a и m ($a \cap m$, $m \parallel b$). Если мы теперь проведем прямую n, параллельную a и пересекающую прямую b, то мы получим плоскость β, являющуюся второй плоскостью параллелизма, в которую заключены скрещивающиеся прямые a и b. Так как $\beta \parallel \alpha$, то и $\beta \perp \pi_4$.

§ 58. О ПРОЕКЦИЯХ ПЛОСКИХ УГЛОВ

Отметим ряд свойств ортогональных проекций плоских углов, знание которых поможет в дальнейшем правильно читать эпюр и решать задачи по определению величины угла, если известны его ортогональные проекции.

1. Если стороны угла не параллельны плоскости проекции, то угол проецируется на эту плоскость с искажением.

Следует иметь в виду, что проекции острого или тупого углов могут, при определенных условиях, проецироваться на плоскость проекции без искажения, будучи и не параллельными плоскости проекции.

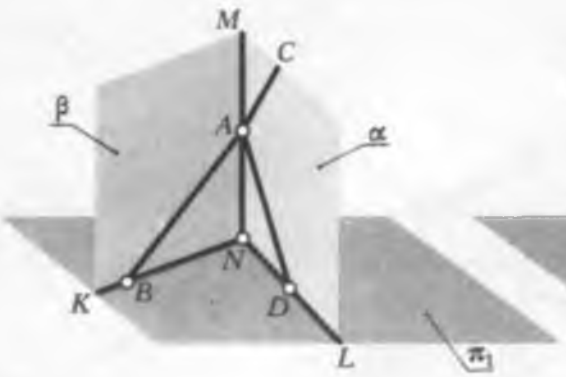


Рис. 276

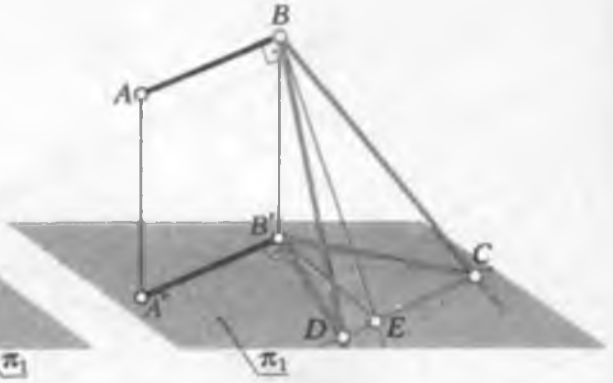


Рис. 277

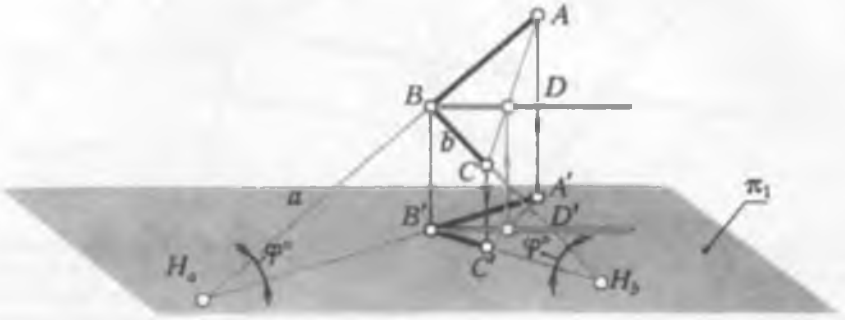


Рис. 278

Из рис. 276 видно, что все углы с вершиной на прямой (MN), стороны которых расположены в проецирующих плоскостях α и β, проецируются в $\angle KNL$; при этом проецируемые углы BAD и BAC могут изменяться в пределах от 0° до 180°. Естественно, что среди них будет угол, равный $\angle KNL$.

2. Если хотя бы одна сторона тупого, прямого или острого угла параллельна плоскости проекции, то проекцией угла на эту плоскость будет угол с тем же названием, что и сам угол (тупой, прямой, острый).

Убедиться в этом легко на примере, показанном на рис. 277. Пусть дан отрезок $[AB] \parallel \pi_1$, строим тупой $\angle ABC$ и острый $\angle ABD$. Сторону BD угла ABD проводим так, чтобы $[BD]$ принадлежал плоскости, определяемой точками A, B, C. Проводим в плоскости A, B, C отрезок $[BE] \perp [AB]$. Так как $\angle ABE$ прямой, а сторона угла $AB \parallel \pi_1$, то проекция этого угла на плоскость π_1 также будет равна 90°. Из чертежа видно, что $\angle A'B'D < 90^\circ$, а $\angle A'B'C > 90^\circ$.

3. Если обе стороны любого угла параллельны плоскости проекции, то на эту плоскость он проецируется без искажения.

Справедливость этого утверждения не вызывает сомнения — оно вытекает непосредственно из инвариантного свойства ортогонального проецирования $(\Phi \subset \beta) \wedge (\beta \parallel \pi_1) = \Phi' \overset{\cong}{=} \Phi$.

4. Если стороны угла параллельны плоскости проекции или одинаково наклонены к ней, то деление пополам проекции угла соответствует его делению пополам в пространстве (рис. 278).

Стороны $\angle ABC$ (рис. 278) наклонены под одинаковым углом к плоскости проекции π_1: $\overset{\frown}{AH_{0a}A'} = \overset{\frown}{BH_{0b}B'}$, $\angle A'B'C'$ — ортогональ-

ная проекция $\angle ABC$ на плоскость π_1, $[B'D']$ — биссектриса $\angle A'B'C'$. На основании свойства биссектрисы внутреннего угла в треугольнике $\frac{|A'D'|}{|D'C'|} = \frac{|B'A'|}{|B'C'|}$, но по свойству 2и (см. гл. I, § 6) $\frac{|AD|}{|DC|} = \frac{|A'D'|}{|D'C'|}$, следовательно, $\frac{|B'A'|}{|B'C'|} = \frac{|AD|}{|DC|}$. Но $|B'A'| = |BA| \cos\varphi°$ и $|B'C'| = |BC| \cos\varphi°$, откуда $\frac{|B'A'|}{|B'C'|} = \frac{|BA| \cos\varphi°}{|BC| \cos\varphi°} = \frac{|BA|}{|BC|}$. Следовательно, $\frac{|AD|}{|DC|} = \frac{|BA|}{|BC|}$, т. е. $[BD)$ — биссектриса $\angle ABC$.

В заключение следует еще раз заострить внимание читателя на частном случае проецирования прямого угла. Сформулируем его не в виде свойства, как это было сделано в гл. I, § 6, а в виде вытекающего из него следствия: *если проекция некоторого угла, у которого одна сторона параллельна плоскости проекции, равна прямому углу, то и проецируемый угол также прямой.*

Это следствие имеет весьма важное значение. Базируясь на нем, мы можем просто, с минимальным числом геометрических построений решать на эпюре Монжа задачи по построению:

а) прямых, перпендикулярных друг к другу;

б) прямой, перпендикулярной плоскости;

в) взаимно перпендикулярных плоскостей (см. гл. VI, § 54).

§ 59. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕЛИЧИНЫ ПЛОСКОГО УГЛА ПО ЕГО ОРТОГОНАЛЬНЫМ ПРОЕКЦИЯМ

В предыдущем параграфе было отмечено, что плоский угол проецируется на плоскость проекции без искажения в том случае, когда его стороны параллельны этой плоскости. Это свойство может быть принято за основу при составлении алгоритма решения задачи на определение величины угла по его искаженным ортогональным проекциям.

Решение задачи будет сводиться к перемещению плоскости общего положения, которой принадлежит угол, в положение, параллельное какой-либо плоскости проекции. Такое перемещение можно осуществить с помощью способов преобразования ортогональных проекций.

Наиболее рациональное решение задачи по переводу плоскости угла в положение, параллельное плоскости проекции, достигается путем вращения плоскости угла вокруг линии уровня. В этом случае для получения ответа на поставленную задачу достаточно произвести поворот только одной точки вокруг горизонтали или фронтали плоскости угла — построить только одну вспомогательную проекцию.

При использовании других способов преобразования нам пришлось бы дважды менять плоскости проекции, либо дважды осуществлять перемещение (или вращение), параллельное плоскости проекции, т. е. в обоих случаях потребовалось бы построение двух вспомогательных проекций.

Приведенные ниже примеры иллюстрируют использование способа вращения вокруг линии уровня для решения задачи по определению величины плоского угла.

ПРИМЕР 1. Определить угол между пересекающимися прямыми a и b (рис. 279).

РЕШЕНИЕ. Вращаем плоскость α, определяемую прямыми a и b, вокруг ее горизонтали h до нового положения, параллельного плоскости π_1. Точки A и B принадлежат оси вращения h, поэтому при вращении плоскости α вокруг оси h они не меняют своего положения. Следо-

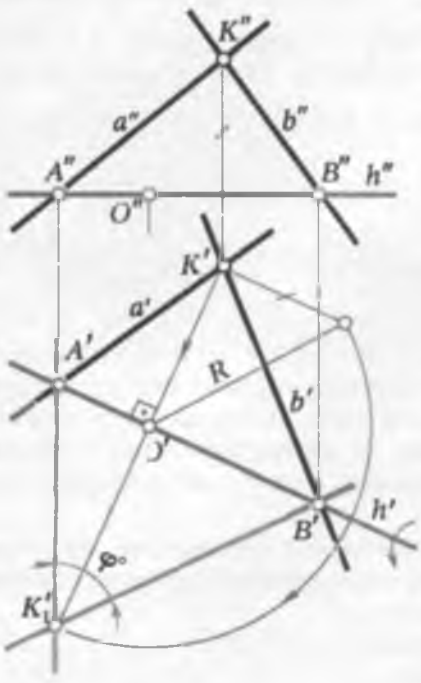


Рис. 279

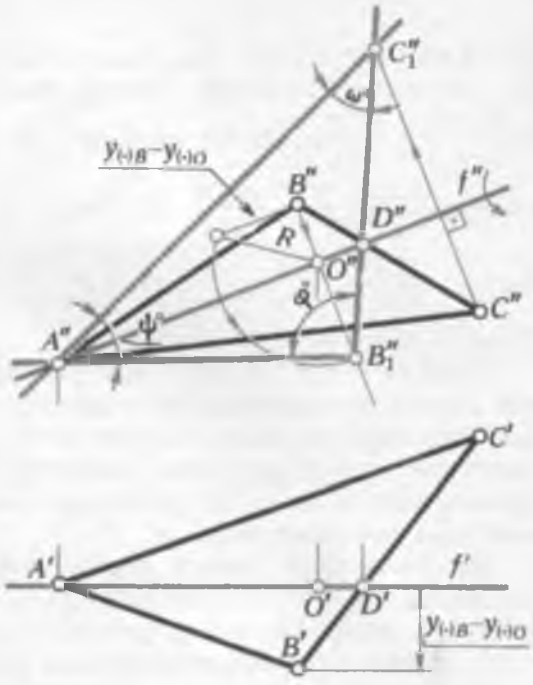


Рис. 280

вательно, для определения нового положения плоскости α_1 достаточно осуществить поворот только одной точки K. Для этого проводим через K' прямую, перпендикулярную h' (с этой прямой будет совпадать горизонтальная проекция окружности, по которой перемещается точка при ее вращении вокруг h). Далее определяем положение центра вращения O и величину радиуса вращения R для точки K (построения выполнены аналогично тому, как это было сделано на рис. 71, § 11). Положение точки K'_1 совместно с A' и B' определяет новые проекции прямых a'_1 и b'_1, задающих плоскость α_1. Поэтому $A'K'_1B'$ равен искомому углу φ°.

ПРИМЕР 2. Определить величину углов ΔABC (рис. 280).

РЕШЕНИЕ. Вращаем плоскость ΔABC вокруг фронтали f этого треугольника до положения, параллельного плоскости π_2. Через вершину A ΔABC проводим фронталь f (f', f''). Точки A и D как принадлежащие оси вращения не изменят своего положения в процессе преобразования. Поэтому, как и в предыдущем примере, достаточно повернуть только одну точку. На рис. 280 в качестве такой точки взята вершина B ΔABC.

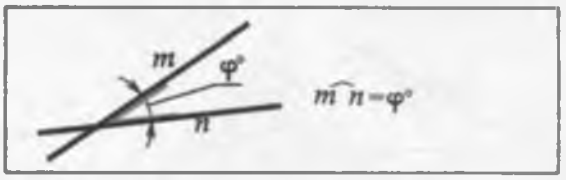
Вершина треугольника C при вращении вокруг фронтали будет перемещаться по дуге окружности, плоскость которой перпендикулярна оси вращения f; поэтому фронтальная проекция этой окружности перпендикулярна f'' и новое положение C''_1 определится в точке пересечения этого перпендикуляра с новым положением прямой B''_1D''. После такого поворота плоскость треугольника переводится в положение, параллельное плоскости π_2. Следовательно, на основании инвариантного свойства 2д (см. § 6) углы при вершинах A'', B''_1 и C''_1 проецируются без искажения.

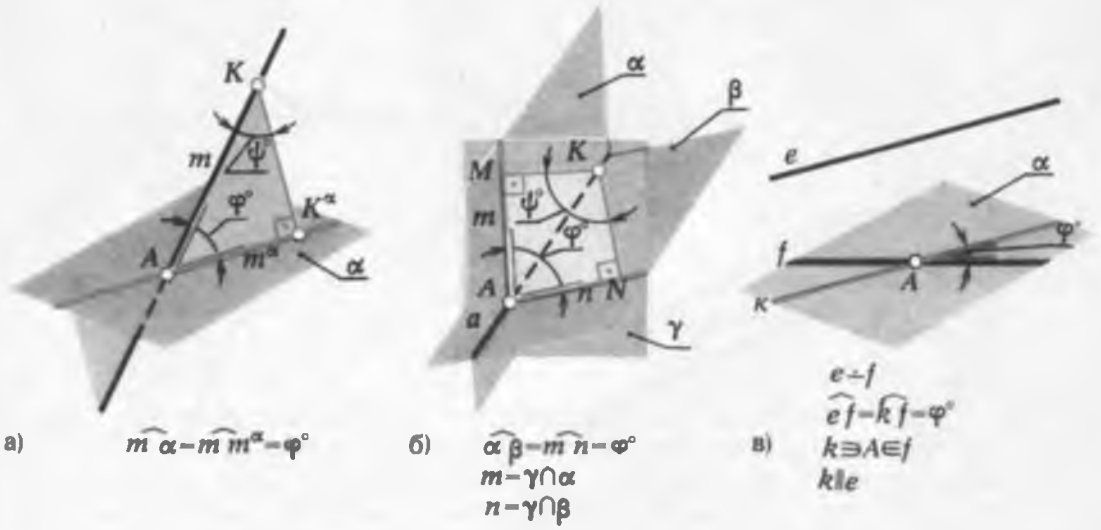
§ 60. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УГЛА МЕЖДУ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТЬЮ

Определение угла между прямой и плоскостью, двумя плоскостями, скрещивающимися прямыми, сводится к нахождению угла между двумя прямыми.

Чертежи на рис. 281 подтверждают это высказывание. Известно, что *углом между прямой и плоскостью называется угол между этой прямой и ее прямоугольной проекцией на данную плоскость**.

*Естественно, речь идет о случае, когда прямая не перпендикулярна плоскости.





а) б) в)

Рис. 281

Геометрическая интерпретация приведенного определения показана на рис. 281,*а*. План решения задачи может быть записан в следующем виде:

1. Из произвольной точки $K \in m$ опускаем перпендикуляр на плоскость α.
2. Определяем точку встречи этого перпендикуляра с плоскостью — K^α (точка K^α — ортогональная проекция K на плоскость α).
3. Находим точку A — пересечения прямой m с плоскостью α.
4. Проводим $(K^\alpha A)$ — проекцию прямой m на плоскость α.
5. Угол $\angle KAK^\alpha$ — искомый.

Решение этой задачи может быть значительно упрощено, если определять не угол между прямой и плоскостью ($\angle \varphi^\circ$), а дополнительный до 90° $\angle \psi^\circ$. В этом случае отпадает необходимость в определении точки K^α и проекции m^α. Зная величину $\widehat{\psi}^\circ$, вычисляем $\widehat{\varphi}^\circ = 90^\circ - \widehat{\psi}^\circ$.

ПРИМЕР 1. Определить угол между прямой a и плоскостью α ($m \parallel n$) (рис. 282).

РЕШЕНИЕ.

1. Определяем направление горизонтальной проекции горизонтали h' и фронтальной проекции фронтали f'' плоскости α.

2. Из произвольной точки K прямой a проводим прямую $l \perp \alpha$; для этого через K' проводим $l' \perp h'$ и через $K'' - l'' \perp f''$.

3. Определяем величину угла $\widehat{\psi}^\circ$ вращением его вокруг горизонтали до положения, параллельного плоскости π_1.

4. Вычисляем значение искомого угла $\widehat{\varphi}^\circ = 90^\circ - \widehat{\psi}^\circ$

Решение аналогичной задачи упрощается, если плоскость задана следами, так как в этом случае отпадает необходимость в определении проекций линий уровня.

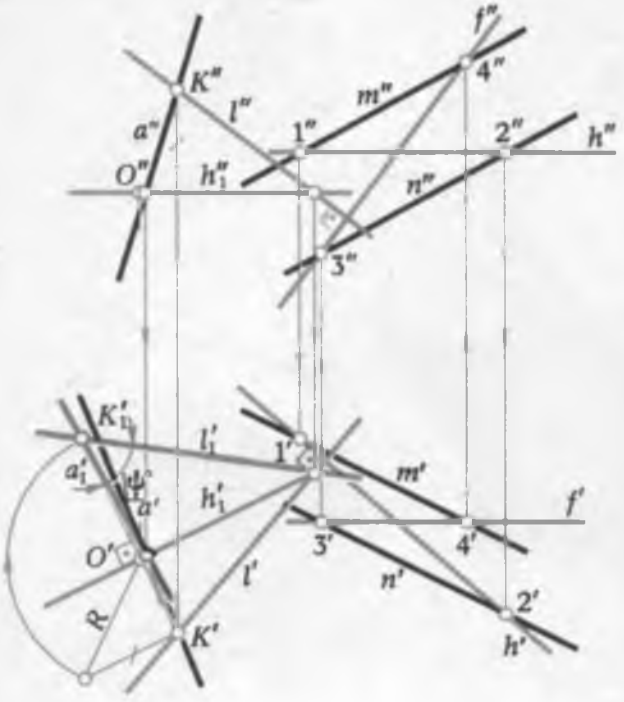


Рис. 282

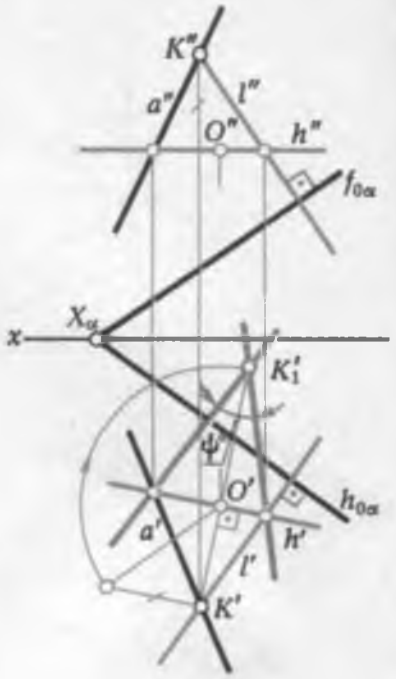


Рис. 283

ПРИМЕР 2. Определить угол между прямой a и плоскостью α, заданной следами (рис. 283).

РЕШЕНИЕ.

1. Из произвольной точки K прямой a опускаем перпендикуляр l на плоскость α ($l' \perp h_{0\alpha}, l'' \perp f_{0\alpha}$).

2. Определяем величину угла ψ°.

3. Вычисляем значение искомого угла $\widehat{\varphi}^\circ = 90^\circ - \widehat{\psi}^\circ$.

§ 61. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УГЛА МЕЖДУ ПЛОСКОСТЯМИ

Мерой угла между двумя плоскостями служит линейный угол, образованный двумя прямыми — сечениями граней этого угла плоскостью, перпендикулярной к их ребру.

Для построения линейного угла, являющегося мерой двугранного угла, необходимо выполнить следующие геометрические построения:

1. Определить прямую a — линию пересечения данных плоскостей α и β, $a = \alpha \cap \beta$ (рис. 284).

2. Провести плоскость γ ($\gamma \perp \alpha$ и $\gamma \perp \beta$).

3. Построить прямые $m = \gamma \cap \alpha$ и $n = \gamma \cap \beta$.

4. Найти величину угла $\widehat{\varphi}^\circ$ между прямыми m и n. Угол $\widehat{\varphi}^\circ$ — искомый.

Рассмотренный план решения задачи предусматривает выполнение большого числа геометрических построений, связанных с нахождением линии пересечения данных плоскостей ($a = \alpha \cap \beta$), проведением плоскости, перпендикулярной к найденной прямой ($\gamma \perp a$). Далее приходится еще дважды решать задачу по определению линии пересечения плоскостей ($m = \gamma \cap \alpha$ и $n = \gamma \cap \beta$) и лишь только после этого можно приступить к определению величины искомого угла $\widehat{\varphi}^\circ$.

Проследим, как можно упростить решение этой задачи. Дополним чертеж на рис. 284 точкой $K \in \gamma$ и опустим из этой точки перпендикуляры k и l на плоскости α и β (рис. 285). Точки M и N пересечения

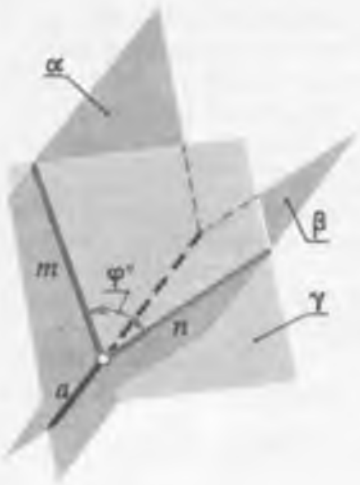


Рис. 284

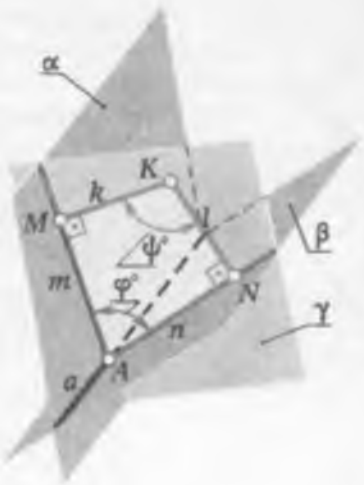


Рис. 285

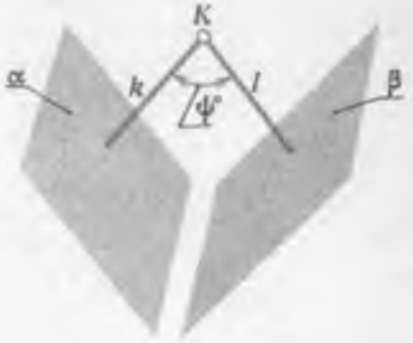


Рис. 286

этих перпендикуляров с плоскостями совместно с точками K и A ($A \in a$) являются вершинами плоского четырехугольника $KNAM$, у которого углы при вершинах M и N прямые. Следовательно, между углами при вершинах A и K существует зависимость, которую можно выразить следующим равенством: $\hat{\varphi}^\circ = 180^\circ - \psi^\circ$. Из рис. 285 видно, что вместо $\angle\, \varphi^\circ$ гораздо проще определять дополнительный до 180° $\angle\, \psi^\circ$. Все решение сводится к построению угла ψ° путем проведения из произвольной точки пространства K прямых k и l, перпендикулярных к заданным плоскостям, и определению угла ψ° между этими прямыми; после чего подсчитывается значение величины $\hat{\varphi}^\circ = 180^\circ - \hat{\psi}^\circ$ (рис. 286).

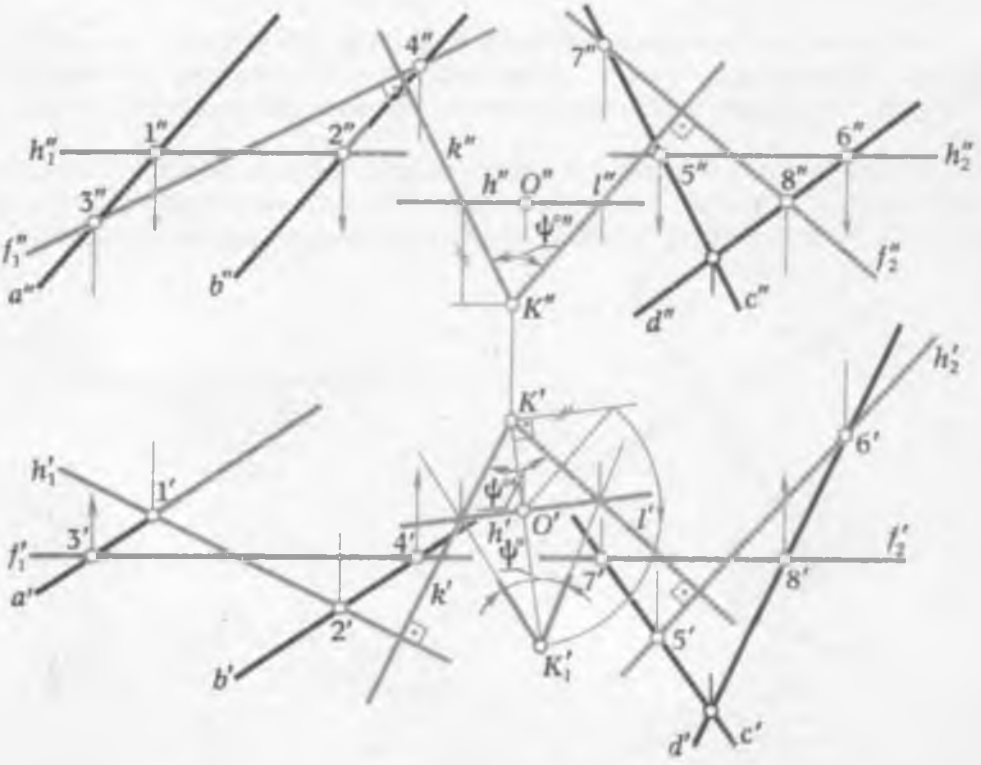


Рис. 287.

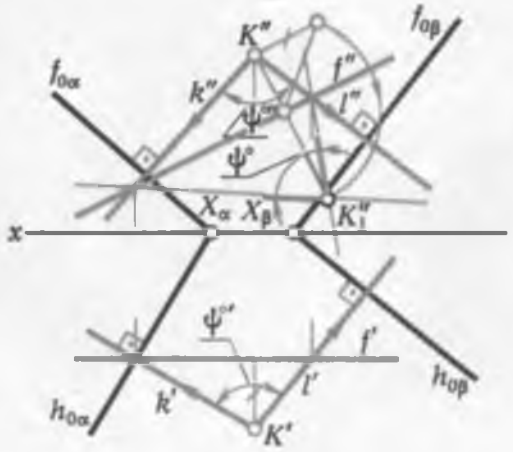


Рис. 288

ПРИМЕР 1. Определить угол между плоскостями α ($a \parallel b$) и β ($c \cap d$) (рис. 287).

РЕШЕНИЕ.

1. Определяем направление горизонтальных проекций горизонталей h_1' и h_2', фронтальных проекций фронталей f_1'' и f_2'' заданных плоскостей α и β.

2. Из произвольной точки K проводим проекции перпендикуляров k и l ($k' \perp h_1'$, $k'' \perp f_1''$ и $l' \perp h_2'$, $l'' \perp f_2''$).

3. Определяем величину $\widehat{\Psi}^\circ$.

4. Вычисляем значение $\widehat{\varphi}^\circ = 180^\circ - \widehat{\Psi}^\circ$.

Если плоскости, угол между которыми требуется определить, заданы следами, то решение упрощается еще больше, так как отпадает необходимость в выполнении п. 1 только что рассмотренного решения.

ПРИМЕР 2. Определить угол между плоскостями α и β, заданными следами (рис. 288).

РЕШЕНИЕ. Все геометрические построения сводятся к проведению через точку K прямых, перпендикулярных к следам плоскостей α и β ($k' \perp h_{0\alpha}$, $k'' \perp f_{0\alpha}$ и $l' \perp h_{0\beta}$, $l'' \perp f_{0\beta}$). Затем известным способом находим величину $\widehat{\Psi}^\circ$ (на рис. 288 угол $\widehat{\Psi}^\circ$ определен путем вращения вокруг фронтали). Зная $\widehat{\Psi}^\circ$, вычисляем значение $\widehat{\varphi}^\circ$.

§ 62. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УГЛА МЕЖДУ СКРЕЩИВАЮЩИМИСЯ ПРЯМЫМИ

Углом между скрещивающимися прямыми называется плоский угол, который образуется между прямыми, проведенными из произвольной точки пространства параллельно данным скрещивающимся прямым.

Поэтому решение задачи по определению величины угла между скрещивающимися прямыми по существу ничем не отличается от решения задачи по определению угла между пересекающимися прямыми (см.

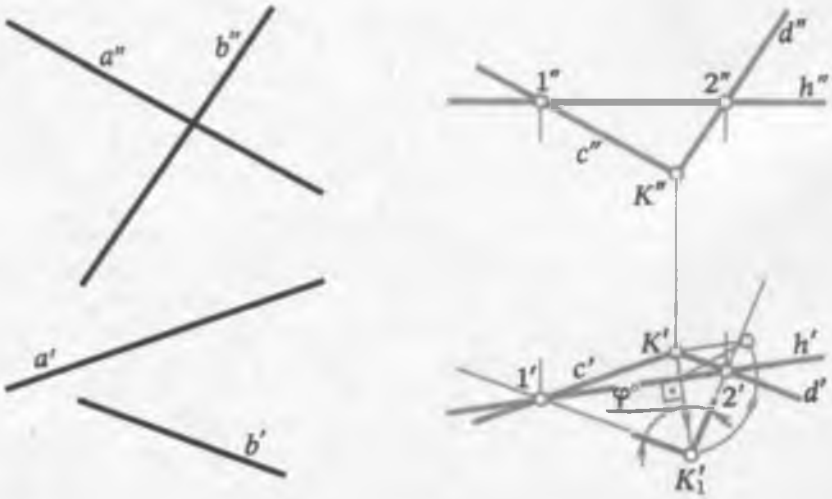


Рис. 289

§ 59). Единственное отличие состоит в том, что на первой стадии решения необходимо построить плоский угол, являющийся аналогом искомого угла. Для этого через произвольную точку, которую принимаем за вершину угла, проводим две прямые, параллельные заданным скрещивающимся прямым. Чтобы не происходило наложения линий вспомогательных построений на исходные данные задачи, точку, которую принимают за вершину угла, следует брать в свободном месте чертежа, как это сделано на рис. 289.

ПРИМЕР 1. Определить угол между скрещивающимися прямыми a и b (рис. 289).

РЕШЕНИЕ. Из произвольной точки K проводим прямые c и d ($c \parallel a$ и $d \parallel b$). Определяем величину угла $\widehat{\varphi}°$ (см. § 59, пример 1, рис. 279).

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Какие характеристики геометрических фигур называют метрическими?
2. В каких случаях угловые величины проецируются без искажения?
3. Как решается задача по определению величины угла между двумя прямыми, прямой и плоскостью, двумя плоскостями?
4. Что является мерой угла между скрещивающимися прямыми?
5. Как построить на эпюре Монжа проекции двух взаимно перпендикулярных прямых; прямой, перпендикулярной плоскости; двух взаимно перпендикулярных плоскостей?
6. Как определить величину отрезка прямой общего положения по его ортогональным проекциям?
7. Как определить расстояние от точки до плоскости; между плоскостями; между параллельными и скрещивающимися прямыми?

ГЛАВА VII

РАЗВЕРТКА ПОВЕРХНОСТЕЙ

ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Приступая к изучению развертки поверхности, последнюю целесообразно рассматривать как гибкую, нерастяжимую пленку. Некоторые из представленных таким образом поверхностей можно путем изгибания совместить с плоскостью. Если при этом отсек поверхности может быть совмещен с плоскостью без разрывов и склеивания, то такую поверхность называют развертывающейся, а полученную плоскую фигуру — ее разверткой. Поверхности, которые не могут быть совмещены с плоскостью, относятся к неразвертываемым поверхностям.

К группе развертывающихся поверхностей относятся только линейчатые поверхности и, в частности, те из них, которые имеют пересекающиеся смежные образующие. Точка пересечения может быть как собственной (поверхности с ребром возврата и конические), так и несобственной (цилиндрические поверхности).

Деформацию поверхности α для получения ее развертки можно представить как постепенное ее разгибание (совмещение с плоскостью β, касательной к этой поверхности). На рис. 290 задана коническая поверхность α и показана касательная к ней плоскость β. Образующая g — линия касания.

Отметим на направляющей конической поверхности d точку 2; проведем через нее образующую конической поверхности $(S2)$. Если расстояние между точками 1 и 2 мало, то отсек конической поверхности, заключенной между образующими $S1$ и $S2$, можно с определенной степенью точности отождествлять с $\Delta\, 1S2$. Если теперь мы повернем $\Delta\, 1S2$ вокруг стороны $1S$ до его совмещения с плокостью β, то получим $\Delta\, 1_0S2_0$, представляющий развертку отсека $1S2$ поверхности α на плоскость β.

При перемещении точки 2 в положение 2_0 направляющая конической поверхности d переместится в положение d_1, а точка $3 \in d$ займет положение $3_1 \in d_1$. Соединив точку 3_1 с вершиной S, получим отсек конической поверхности $2_0S3_1 \cong 2S3$, который, как и в предыдущем случае, можно с определенной степенью точности рассматривать как $\Delta\, 2_0S3_1$. Вращая этот треугольник вокруг стороны $S2_0$ до совмещения с плоскостью β, получим $\Delta\, 2_0S3_0$ — развертку отсека $2S3$ поверхности α на плоскость β.

Отметив на направляющей d точки $4, 5, \ldots, N$, принимая их за вершины треугольников $3S4$, $4S5$, ..., $(N-1)SN$ и осуществляя их последовательный поворот вокруг предварительно совмещенной стороны этих треугольников, можно получить приближенную развертку поверхности α на плоскость β.

Для выполнения показанных на рис. 290 построений необходимо, чтобы плоскость, касательная к поверхности, касалась ее по прямой

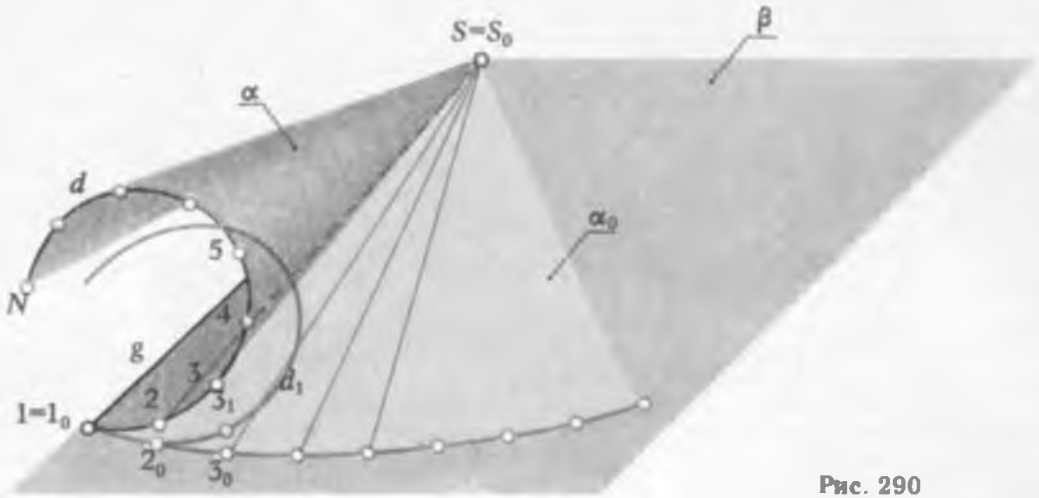


Рис. 290

образующей, которую принимаем за первоначальное положение оси вращения.

Если касательная плоскость касается поверхности в точках, принадлежащих линии, то такие точки называют параболическими (см. гл. V, § 46). При этом у торсовых поверхностей (конических, цилиндрических, с ребром возврата) линии, образованные параболическими точками, — прямые, которые можно принять за оси вращения (см. рис. 290). Поэтому ранее отмеченный признак для развертывающихся поверхностей может быть заменен следующим: ***к развертывающимся поверхностям относятся поверхности, имеющие только параболические точки****.

Построение разверток имеет большое практическое значение, так как позволяет изготавливать разнообразные изделия из плоского (листового) материала путем его изгибания.

§ 63. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА РАЗВЕРТКИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

С позиции теории множеств поверхность и ее развертку следует рассматривать как два точечных множества.

Так как по определению развертка поверхности представляет собой плоскую фигуру, образованную из поверхности без разрывов и склеивания, то между отмеченными двумя множествами устанавливается взаимно-однозначное соответствие:

каждой точке (фигуре) на поверхности соответствует точка (фигура) на развертке и наоборот.

Фигура $1S2$, образованная подмножеством точек, принадлежащих поверхности α, конгруентна фигуре $1S2_0$, принадлежащей развертке α_0. Аналогично $\Delta\, 2S3 \subset \alpha \cong 2_0S3_0 \subset \alpha_0$ и т. д. Отсюда следует, что расстояние между точками 1 и 2 или любыми другими точками, взятыми на фигуре $1S2$, равно расстоянию между точками 1_0 и 2_0 фигуры 1_0S2_0. На основании этого можно сформулировать следующие свойства:

1. ***Длины двух соответствующих линий поверхности и ее развертки равны между собой***, следствием чего является:

*К таким поверхностям относятся торсы, при этом особые точки, принадлежащие ребру возврата или вершине конической поверхности, во внимание не принимаются.

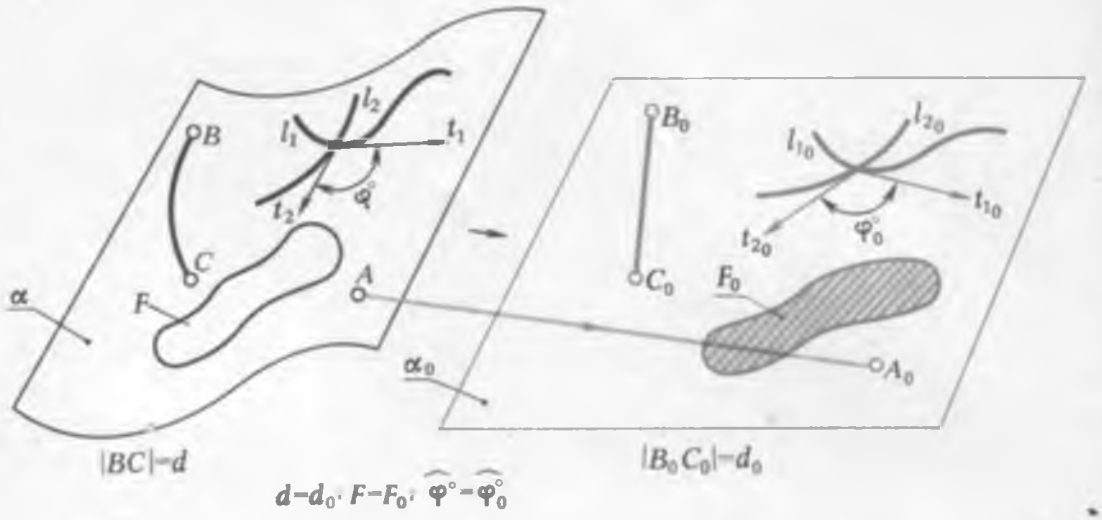


Рис. 291

замкнутая линия на поверхности и соответствующая ей линия на развертке ограничивают одинаковую площадь.

2. *Угол между линиями на поверхности равен углу между соответствующими им линиями на развертке*.*

Рис. 291 дает наглядное представление о развертке как взаимнооднозначном преобразовании, сохраняющем равенство:

а) расстояний между точками;

б) углов между линиями;

в) площадей фигур.

Кроме перечисленных свойств, следует отметить также:

3. *Прямой на поверхности соответствует также прямая на развертке* (обратное утверждение не имеет смысла).

4. *Параллельным прямым на поверхности соответствуют также параллельные прямые на развертке.*

5. *Если линии, принадлежащей поверхности и соединяющей две точки поверхности, соответствует прямая на развертке, то эта линия является геодезической**.*

§ 64. РАЗВЕРТКА ПОВЕРХНОСТИ МНОГОГРАННИКОВ

Развертка поверхности многогранников известна читателю из средней школы. Поэтому на этом вопросе мы останавливаемся кратко, только в плане повторения известных ранее сведений.

Под разверткой многогранной поверхности подразумевают плоскую фигуру, составленную из граней этой поверхности, совмещенных с одной плоскостью.

Существуют три способа построения развертки многогранных поверхностей:

1) способ нормального сечения;

---

* Геометрическое преобразование, при котором сохраняются величины углов, называется конформным, следовательно, построение разверток является конформным преобразованием, а поверхность и ее развертка конформны.

** Геодезической называется линия, принадлежащая поверхности и соединяющая кратчайшим путем две точки, также принадлежащие поверхности.

2) способ раскатки;

3) способ треугольников (триангуляции).

Первые два применяются для построения развертки призматических поверхностей, третий — для пирамидальных поверхностей. Рассмотрим каждый их этих способов.

1. Способ нормального сечения.

ПРИМЕР. Построить развертку наклонной трехгранной призмы $ABCDEF$ (рис. 292).

РЕШЕНИЕ. Пересечем призму $ABCDEF$ плоскостью γ, перпендикулярной к боковым ребрам призмы. Построим сечение заданной призмы этой плоскостью — $\Delta 123$. Определим длины сторон $\Delta 123$. В свободном месте чертежа проведем прямую a (на рис. 292 прямая a проведена горизонтально). От произвольной точки 1_0, взятой на этой прямой, отложим отрезки $[1_0 2_0]$, $[2_0 3_0]$, $[3_0 1_0]$, конгруентные сторонам $\Delta 123$. Через точки 1_0, 2_0, 3_0, 1_0 проведем прямые, перпендикулярные к прямой a, и отложим на них от точек 1_0, 2_0, 3_0, 1_0 отрезки, конгруентные соответствующим длинам боковых ребер ($[1A]$, $[1D]$, $[2B]$, $[2E]$, ...). Полученные точки $A_0 B_0 C_0 A_0$ и D_0 E_0 F_0 D_0 соединяем прямыми*. Плоская фигура $A_0 B_0 C_0 A_0 D_0 F_0 E_0 D_0$ представляет собой развертку боковой поверхности призмы.

Чтобы получить полную развертку призмы, необходимо к развертке боковой поверхности пристроить основания призмы — $\Delta A_0 B_0 C_0$ и $\Delta D_0 E_0 F_0$, предварительно определив их неискаженные размеры.

---

*На рис. 292 ребра AD, BE и CF параллельны плоскости π_1, поэтому они проецируются на эту плоскость без искажения. Если ребра призмы занимают произвольное положение, то прежде чем приступить к построению развертки, следует с помощью способов преобразования перевести их в положение, параллельное какой-либо плоскости проекции.

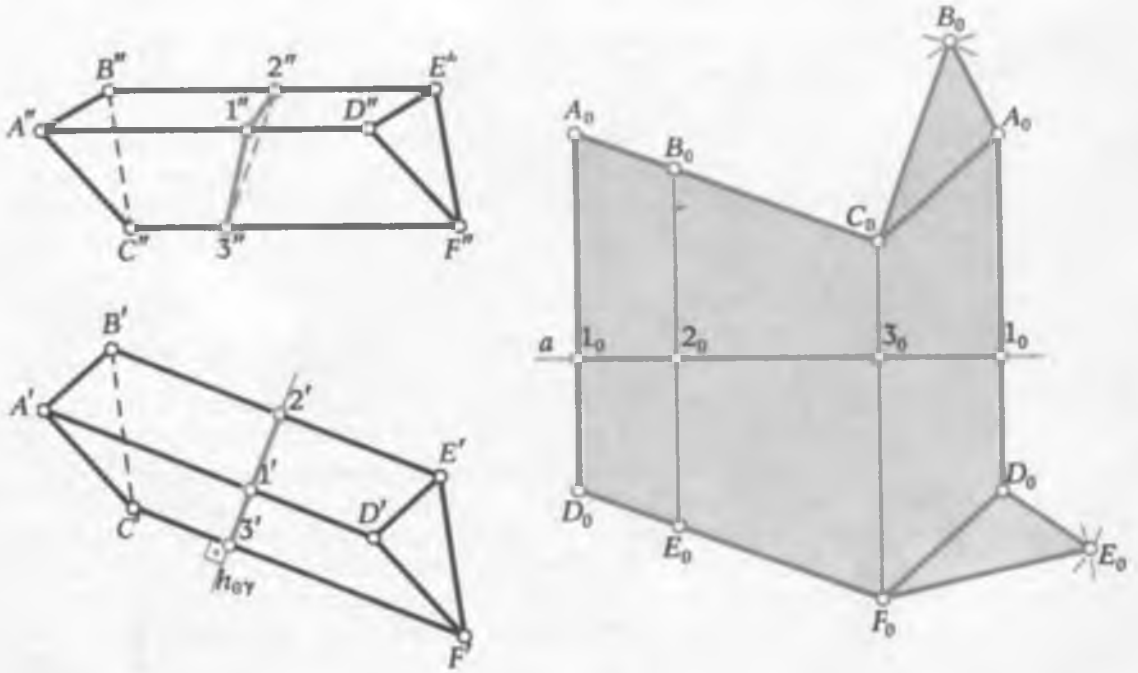


Рис. 292

2. Способ раскатки.

Этот способ целесообразно использовать для построения развертки поверхности призмы в том случае, когда основание призмы параллельно какой-либо одной плоскости проекции, а ее ребра параллельны другой плоскости проекции.

ПРИМЕР. Построить развертку боковой поверхности наклонной трехгранной призмы $ABCDEF$ (рис. 293).

РЕШЕНИЕ. Примем за плоскость развертки плоскость γ, проходящую через ребро AD, параллельную фронтальной плоскости проекции. Совместим грань $ADEB$ с плоскостью γ. Для этого мысленно разрежем боковую поверхность призмы по ребру AD, а затем осуществим поворот грани $ADEB$ вокруг ребра AD $(A''D'')$.

Для нахождения совмещенного с плоскостью γ положения ребра B_0E_0 из точки B'' проводим луч, перпендикулярный к $A''D''$, и засекаем на нем дугой радиуса $|A'B'|$, проведенной из центра A'', точку B_0. Через B_0 проводим прямую B_0E_0, параллельную $(A''D'')$.

Принимаем совмещенное положение ребра B_0E_0 за новую ось вращения и поворачиваем вокруг нее грань $BEFC$ до совмещения с плоскостью γ. Для этого из точки C'' проводим луч, перпендикулярный к совмещенному ребру B_0E_0, а из точки B_0 — дугу окружности радиусом, равным $|B'C'|$; пересечение дуги с лучом определит положение точки C_0. Через C_0 проводим C_0F_0 параллельно B_0E_0. Аналогично находим положение ребра A_0D_0. Соединив точки $A''B_0C_0A_0$ и $D''E_0F_0D_0$ прямыми, получим фигуру $A''B_0C_0A_0D_0F_0E_0D''$ — развертку боковой поверхности призмы. Для получения полной развертки призмы достаточно к какому-либо из звеньев ломаной линии $A''B_0C_0A_0$ и $D''E_0F_0D_0$ пристроить треугольники основания $A_0B_0C_0$ и $D_0E_0F_0$.

3. Способ треугольников (триангуляции).

ПРИМЕР. Построить развертку боковой поверхности пирамиды $SABC$ (рис. 294).

Развертка боковой поверхности пирамиды представляет собой плоскую фигуру, состоящую из треугольников — граней пирамиды.

На рис. 294 определение длин ребер пирамиды выполнено с помощью вращения их вокруг оси $i \ni S$ и $i \perp \pi_1$. Путем вращения ребра пирамиды совмещаются с плоскостью γ плоскость $\gamma \parallel \pi_2$ и $\gamma \supset i$. После того как определены длины ребер $|S''A_2|$, $|S''B_2|$, $|S''C_2|$, приступаем к пост-

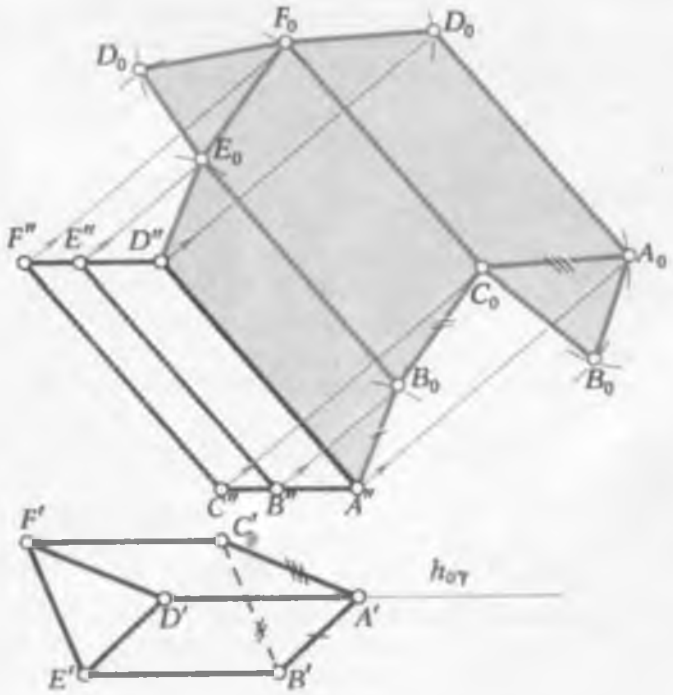


Рис. 293

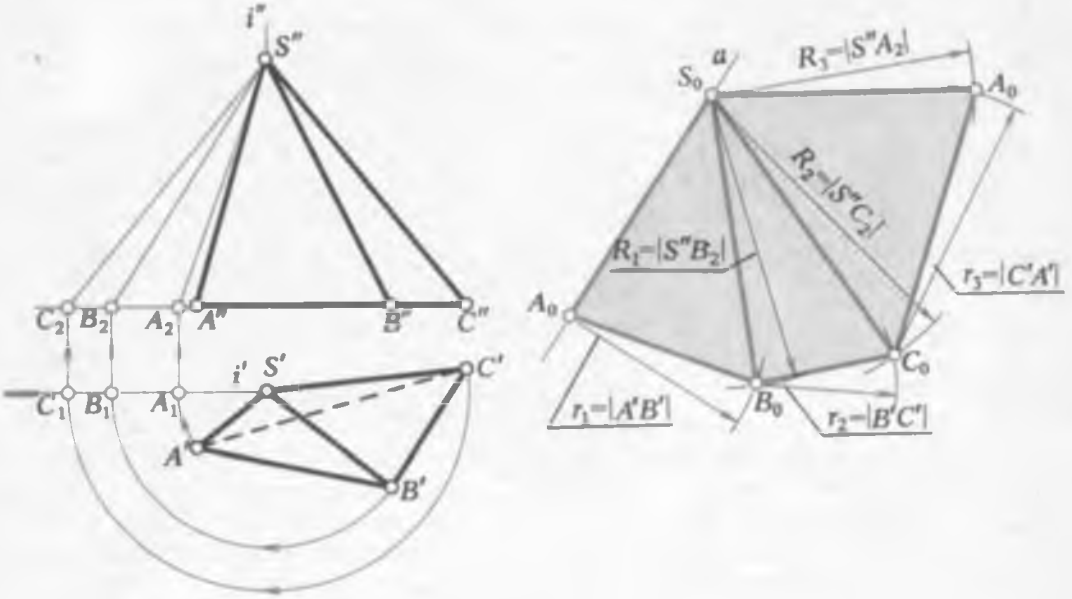


Рис. 294

роению развертки. Для этого через произвольную точку S_0 проводим прямую a. Откладываем на ней от точки S_0 $[S_0A_0] \cong [S''A_2]$. Из точки A_0 проводим дугу радиусом $r_1 = |A'B'|$, а из точки S_0 — дугу радиусом $R_1 = |S''B_2|$. Пересечение дуг укажет положение вершины B_0 $\Delta S_0A_0B_0$ ($\Delta S_0A_0B_0 \cong \Delta SAB$ — грани пирамиды). Аналогично находятся точки C_0 и A_0. Соединив точки $A_0B_0C_0A_0$, получим развертку боковой поверхности пирамиды $SABC$.

§ 65. ПОСТРОЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННЫХ РАЗВЕРТОК РАЗВЕРТЫВАЮЩИХСЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Мы уже указывали, что к развертывающимся поверхностям относятся только торсы (поверхности с ребром возврата, коническая и цилиндрическая поверхности).

Развертка любой развертывающейся поверхности (кроме гранных) является приближенной. Это объясняется тем, что при развертке поверхности последнюю аппроксимируют поверхностями вписанных или описанных многогранников, имеющих грани в форме прямоугольников или треугольников. Поэтому при графическом выполнении развертки поверхности всегда приходится производить разгибание или спрямление кривых линий, принадлежащих поверхности, что неизбежно приводит к потере точности.

Рассмотрим способы построения приближенных разверток поверхностей: цилиндрической, конической и с ребром возврата.

А. Построение развертки цилиндрической поверхности.

Для построения развертки цилиндрической поверхности используются те же способы нормального сечения и раскатки, которые применяются при развертывании боковой поверхности призмы.

В обоих случаях цилиндрическую поверхность заменяют призматической поверхностью, вписанной (или описанной) в данную цилиндрическую. Затем задачу решают так же, как это было показано в примерах 1 и 2 предыдущего параграфа. На рис. 295 и 296 показано построение боковой поверхности цилиндра способом нормального сечения (рис. 295) и способом раскатки (рис. 296).

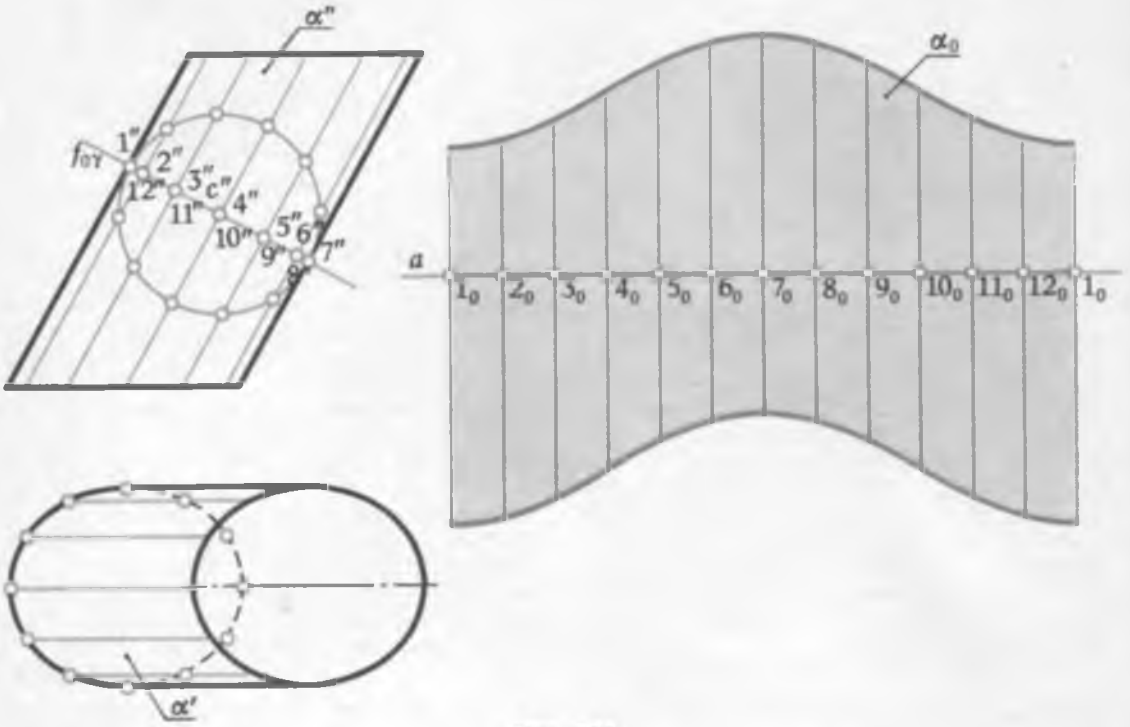


Рис. 295

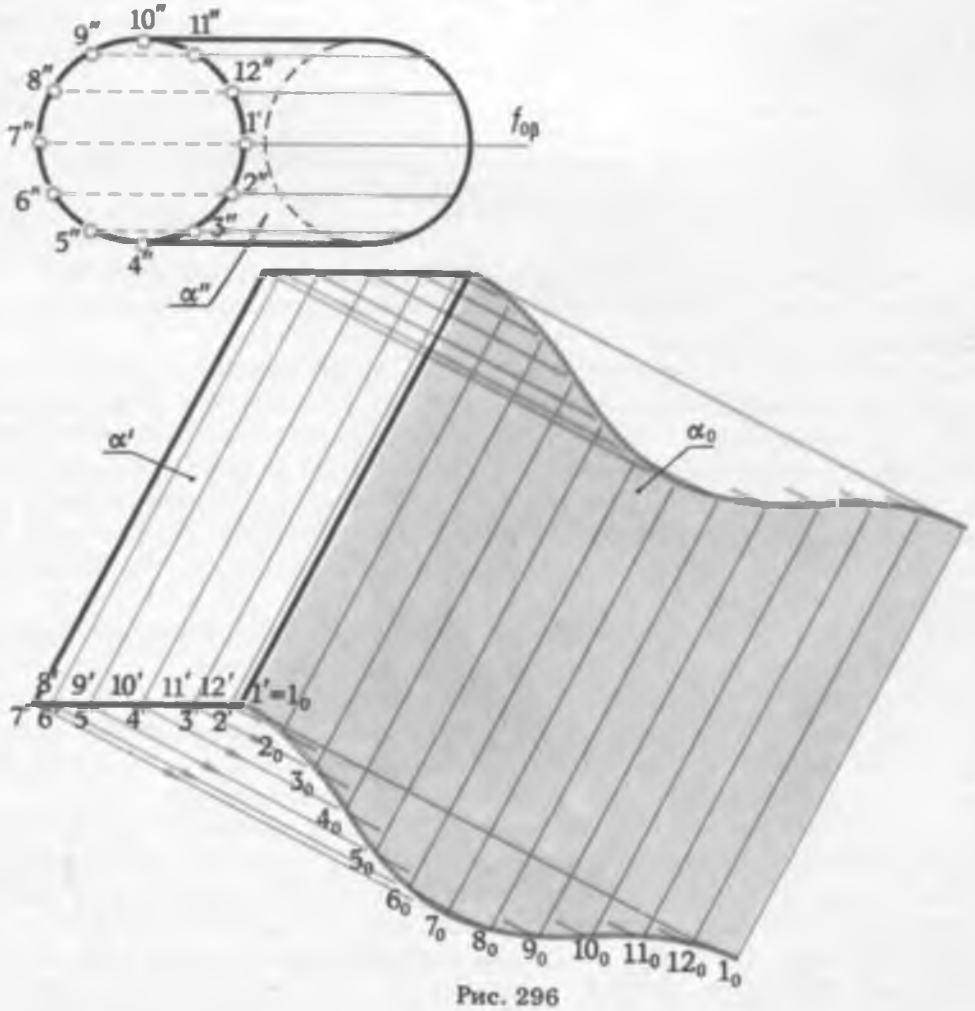


Рис. 296

При построении развертки поверхности цилиндра вращения предпочтение следует отдать способу нормального сечения, так как в этом случае можно не прибегать к замене цилиндрической поверхности призматической.

Для того чтобы построить развертку поверхности прямого кругового цилиндра, выполняем следующие геометрические построения:

1. Рассекаем цилиндрическую поверхность α плоскостью γ, перпендикулярной к прямолинейной образующей цилиндрической поверхности.

2. Делим окружность c — линию сечения $\alpha \cap \gamma$ на одинаковое число частей n.

3. Проводим в свободном месте чертежа прямую a и отмечаем на ней отрезок $1_0 1_0$, равный длине окружности сечения c.

4. Делим $[1_0 1_0]$ на такое же число одинаковых частей n, на которое была разделена окружность c.

5. Через точки деления 1_0, 2_0, 3_0, ..., 12_0, 1_0 проводим прямые, перпендикулярные к прямой a, и откладываем на них от точек 1_0, 2_0, 3_0, ..., 12_0, 1_0 отрезки, равные длине соответствующих образующих нижней и верхней частей цилиндрической поверхности.

6. Соединив концы образующих плавной кривой, получим развертку цилиндрической поверхности.

На рис. 296 приведен пример построения развертки боковой поверхности эллиптического цилиндра способом раскатки. Необходимые геометрические построения выполняем в следующем порядке:

1. Делим окружность основания цилиндра на n равных частей (на рис. 296 $n = 12$).

2. Через точки деления проводим прямолинейные образующие цилиндрической поверхности — ребра призмы, которой мы заменяем цилиндрическую поверхность α.

3. Принимаем за плоскость развертки горизонтальную плоскость β, проходящую через ребро 1 призмы, тождественное 1-й образующей цилиндрической поверхности.

Дальнейшие построения аналогичны выполненным на рис. 293 при построении развертки боковой поверхности призмы $ABCDEF$.

Б. Построение развертки конической поверхности.

Задача на построение развертки конической поверхности решается так же, как в случае построения развертки боковой поверхности пирамиды — способом треугольников (см. рис. 294). Для этого коническая поверхность аппроксимируется вписанной в нее пирамидальной поверхностью.

На рис. 297 показана развертка поверхности пирамиды $SABCDEF...$, вписанной в заданную коническую поверхность α. Фигуру $S_0A_0B_0C_0D_0E_0F_0 ... A_0$ принимаем за приближенную развертку конической поверхности. Чем больше число граней у вписанной пирамиды, тем меньше будет разница между действительной и приближенной развертками конической поверхности.

Если задана поверхность прямого кругового конуса (рис. 298), то развертка его боковой поверхности представляет круговой сектор, радиус которого равен длине образующей конической поверхности $l = |SA|$, а центральный угол $\hat{\varphi}^\circ = 2\pi r/l$, где r — радиус окружности основания конуса. Величина угла φ получается в радианах. На практике бывает целесообразно иметь его градусную величину. Это легко сделать, подставив в приведенное равенство значение величины l, выраженное через радиус основания конуса r и угол наклона образующей коничес-

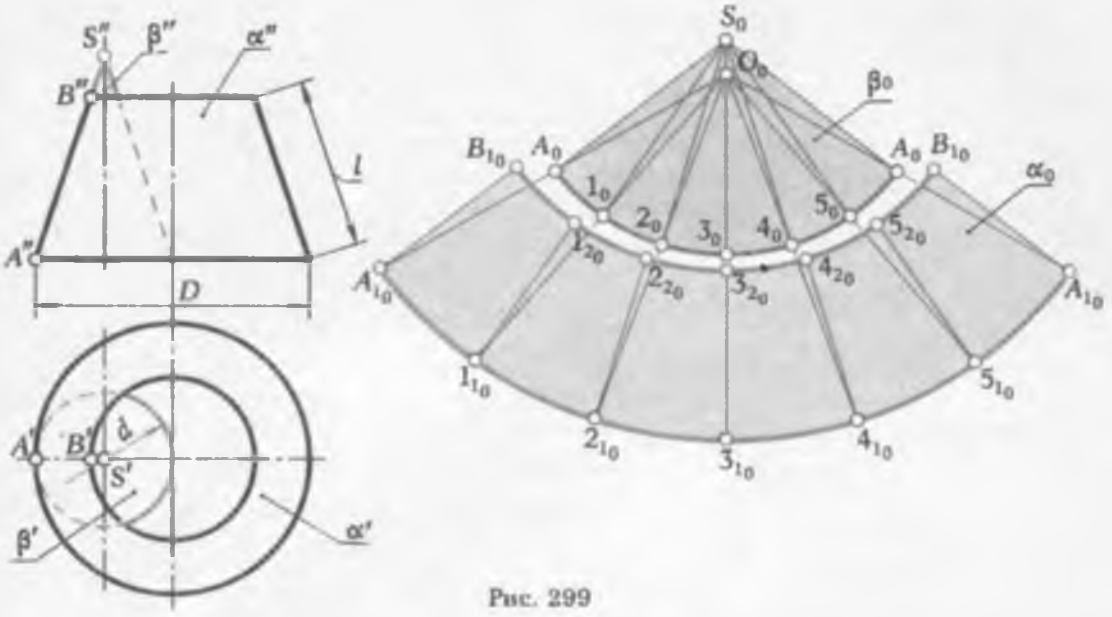


Рис. 299

3) из произвольной точки O_0, принадлежащей биссектрисе угла $A_0S_0A_0$, проводим лучи $[O_0A_0)$, $[O_01_0)$, $[O_02_0)$, ..., $[O_0A_0)$ и на них откладываем отрезки $[O_0A_{1_0}] = k[O_0A_0]$, $[O_01_{1_0}] = k[O_01_0]$, $[O_02_{1_0}] = k[O_02_0]$, ..., $[O_0A_{1_0}] = k[O_0A_0]$, где $k = D/d = 2$.

Для построения развертки поверхности α достаточно определить положение точки A_{1_0} и через нее провести дугу окружности радиусом, равным длине отрезка $[O_0A_{1_0}]$ из центра в точке O_0. Эта окружность пересечет лучи $[O_01_0)$, $[O_02_0)$, ... в точках 1_{1_0}, 2_{1_0}, ... Из точек A_{1_0}, 1_{1_0}, 2_{1_0}, ... проводим прямые $(A_{1_0}B_{1_0})$, $(1_{1_0}1_{2_0})$, $(2_{1_0}2_{2_0})$, параллельные соответствующим прямым (A_0S_0), (1_0S_0), (2_0S_0), ..., и на них откладываем отрезки $[A_{1_0}B_{1_0}]$, $[1_{1_0}1_{2_0}]$, $[2_{1_0}2_{2_0}]$, ..., равные l — длине образующей AB усеченного конуса α.

В. Построение развертки поверхности с ребром возврата.

Построение развертки поверхности с ребром возврата осуществляется путем аппроксимации ее отсеками конической поверхности с последующей заменой их плоскими треугольниками. В качестве иллюстрации решения такой задачи обратимся к следующему примеру:

пусть на эпюре Монжа заданы проекции поверхности с ребром возврата α; построить ее развертку (рис. 300).

На ребре возврата d отмечаем ряд точек 1, 2, 3, 4, 5 и через их проекции проводим касательные к проекциям d' и d'' — $[11_1]$, $[22_1]$, $[33_1]$, $[44_1]$, $[55_1]$. В отсеках поверхностей, ограниченных этими касательными, проводим диагонали 21_1, 32_1, ..., которые делят каждый из криволинейных четырехугольников на два "треугольника".

Если расстояния между точками 1 и 2, 2 и 3, 3 и 4, 4 и 5 будут достаточно малыми, то стороны "треугольников", противолежащие вершинам 1_1, 2_1, 3_1, 4_1 (и 1_{1_0}, 2_{1_0}, 3_{1_0}, 4_{1_0}), можно считать прямолинейными.

Для построения развертки многогранной поверхности, аппроксимирующей заданную поверхность α, определяем длины сторон этих треугольников. По трем сторонам строим треугольники, начиная с $\Delta\, 1_02_01_{1_0}$, к которому пристраиваем остальные в последовательности, указанной на рис. 300 римскими цифрами. Фигура $1_02_03_04_05_05_{1_0}4_{1_0}3_{1_0}2_{1_0}1_{1_0}$ — приближенная развертка поверхности α.

кой поверхности к плоскости π_1 ($\angle\psi^\circ$). В этом случае $l = r/\cos\psi^\circ$, тогда $\hat{\varphi}^\circ = 2\pi r\cos\psi^\circ/r = 360^\circ\cos\psi^\circ$.

На рис. 299 показано построение развертки поверхности прямого кругового усеченного конуса, вершина которого находится за пределами поля чертежа.

Решение этой задачи осуществляется следующим путем:

1) строим вспомогательный конус β, подобный данному конусу α, диаметр d основания конуса β следует выбирать так, чтобы отношение D/d (где D — диаметр окружности основания конуса α) выражалось целым числом (на рис. 299 оно равно 2);

2) строим развертку боковой поверхности вспомогательного конуса β — $S_0A_0l_02_0 \ldots 5_0A_0$;

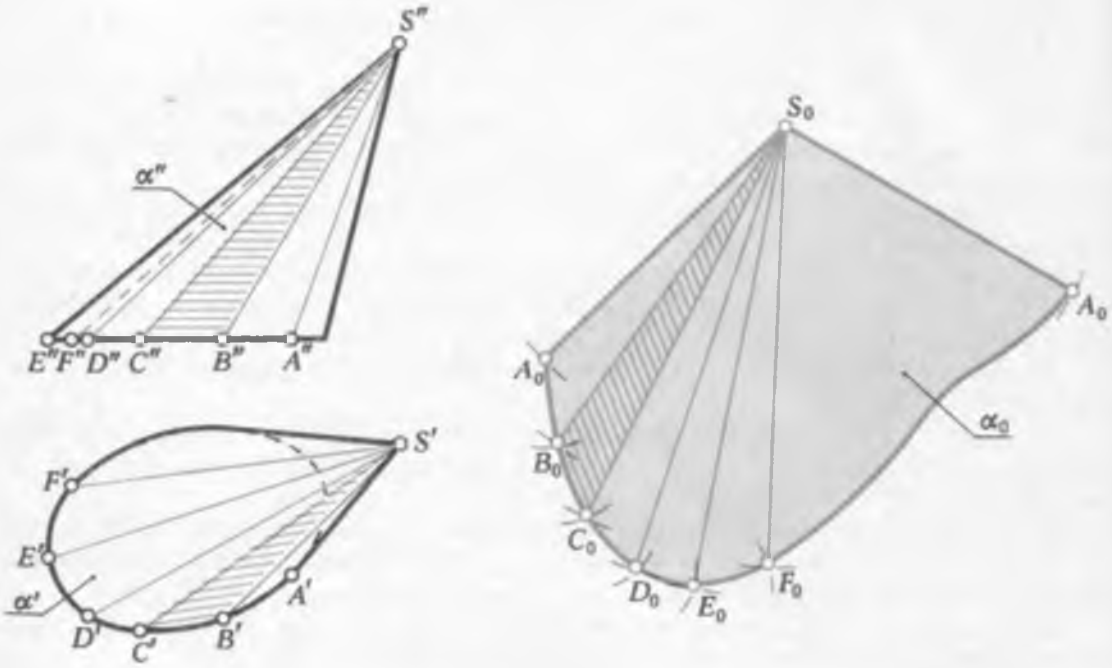


Рис. 297

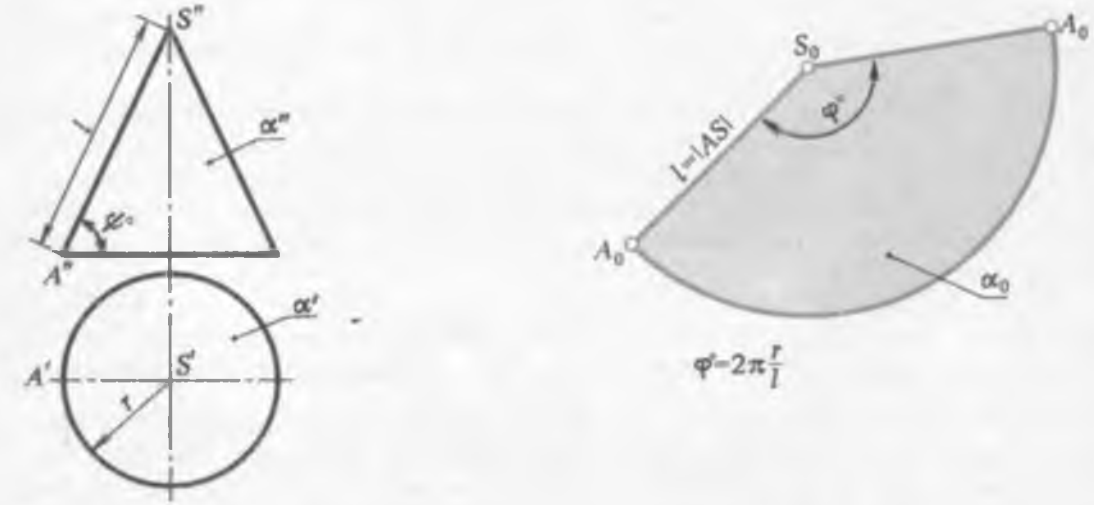


Рис. 298

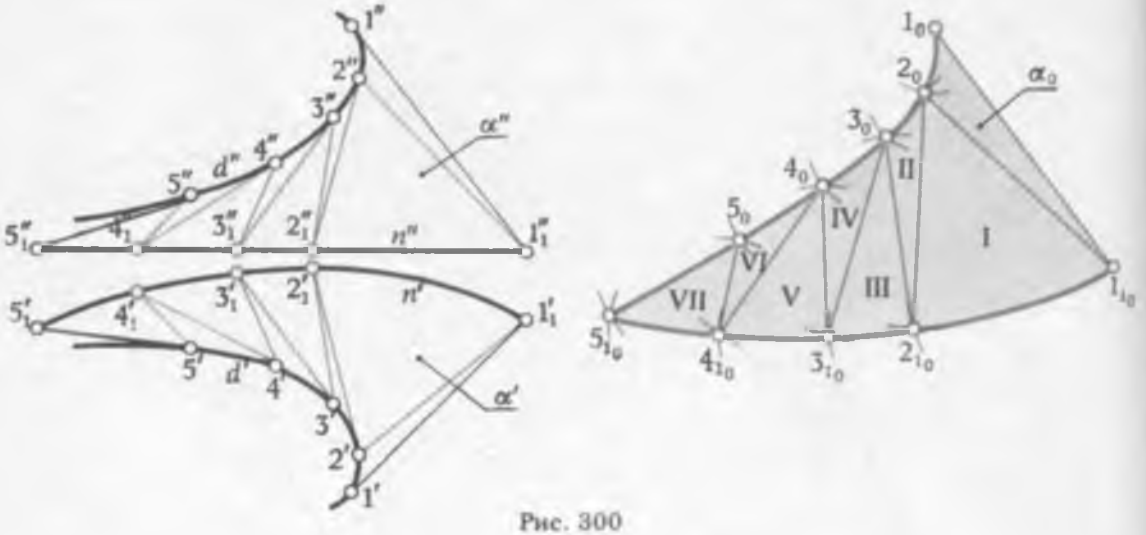


Рис. 300

§ 66. УСЛОВНАЯ РАЗВЕРТКА ПОВЕРХНОСТЕЙ

В двух предыдущих параграфах было показано построение разверток гранных и торсовых поверхностей. Все остальные поверхности относятся к неразвертываемым — они не могут быть совмещены с плоскостью без разрывов и склеивания, т. е. теоретически неразвертываемые поверхности не имеют своей развертки. Поэтому в дальнейшем мы будем говорить лишь об условном решении задачи по построению разверток неразвертываемых поверхностей.

При необходимости изготовить из листового материала неразвертываемую поверхность приходится кроме изгибания осуществлять также сжатие и растяжение определенных участков листа.

Общий прием решения задачи на построение условной развертки неразвертываемой поверхности состоит в том, что отсеки заданной поверхности аппроксимируются отсеками развертывающихся поверхностей — гранными, цилиндрическими или коническими.

Рассмотрим наиболее часто встречающиеся способы построения условных разверток.

Допустим, что требуется изготовить из листового материала поверхность цилиндроида α, сопрягающего две трубы одинакового диаметра (рис. 301). Решение сводится к следующему: заданную неразвертываемую поверхность цилиндроида аппроксимируем вписанными в нее отсеками конической поверхности, которые, в свою очередь, заменяем треугольниками.

Чтобы заменить поверхность цилиндроида отсеками конических поверхностей, проводим на поверхности цилиндроида семейство прямолинейных образующих, параллельных плоскости параллелизма. В рассматриваемом случае плоскостью параллелизма служит фронтальная плоскость проекции. На участке поверхности, заключенной между двумя смежными образующими *1A* и *2B*, проводим "диагональ" *2A*, полученные отсеки поверхности *1A2* и *A2B* принимаем за плоские треугольники. Также поступаем и со всеми остальными отсеками поверхности цилиндроида, заключенными между образующими. После этого осуществляем построение развертки многогранной поверхности, составленной из треугольников так же, как это было сделано на рис. 297.

Точки 1_0, 2_0, ... и A_0, B_0, ... соединяем плавными кривыми. На рис. 301 показана только половина развертки — вторая половина симметрична ей относительно прямой $N_0 n_0$.

При построении условных разверток поверхностей вращения можно в качестве вспомогательных (аппроксимирующих) поверхностей использовать развертывающиеся цилиндрические и конические поверхности.

Рис. 302 и 303 дают наглядное представление о графическом способе построения условной развертки с помощью этих поверхностей. На рис. 302 показана произвольная поверхность вращения α, состоящая из кусков α_1, α_2, α_3, ..., границами между которыми служат меридианы поверхности α.

Куски α_1, α_2, α_3, ... неразвертывающейся поверхности α заменяем кусками цилиндрических поверхностей β_1, β_2, β_3, ... (на рис. 302 указан только один кусок — отсек β_1). После этого осуществляем развертку составной цилиндрической поверхности $\beta = \beta_1 \cup \beta_2 \cup \beta_3 ...$

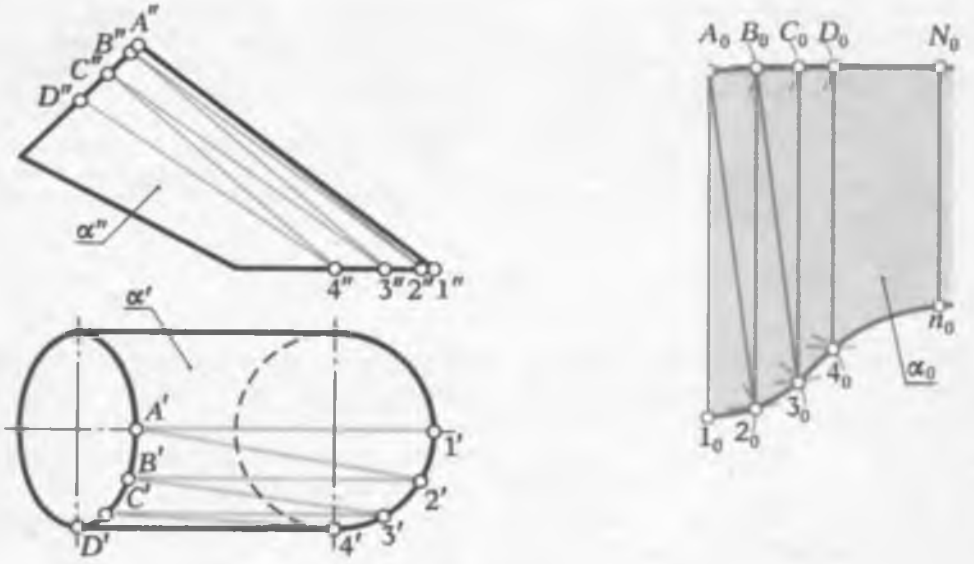
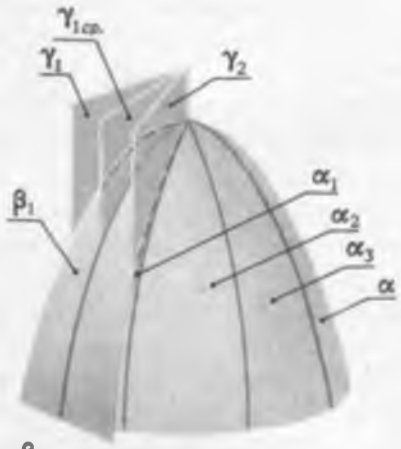
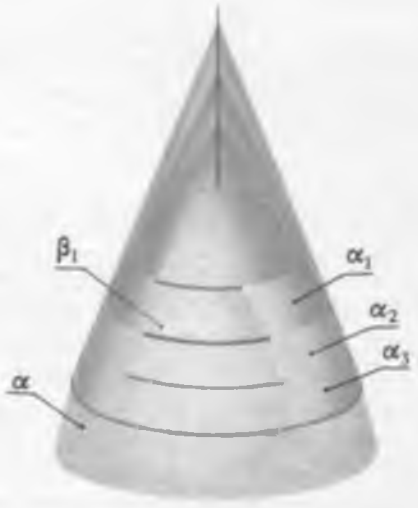


Рис. 301



β_1 — отсек цилиндрической поверхности

Рис. 302



β_1 — отсек конической поверхности

Рис. 303

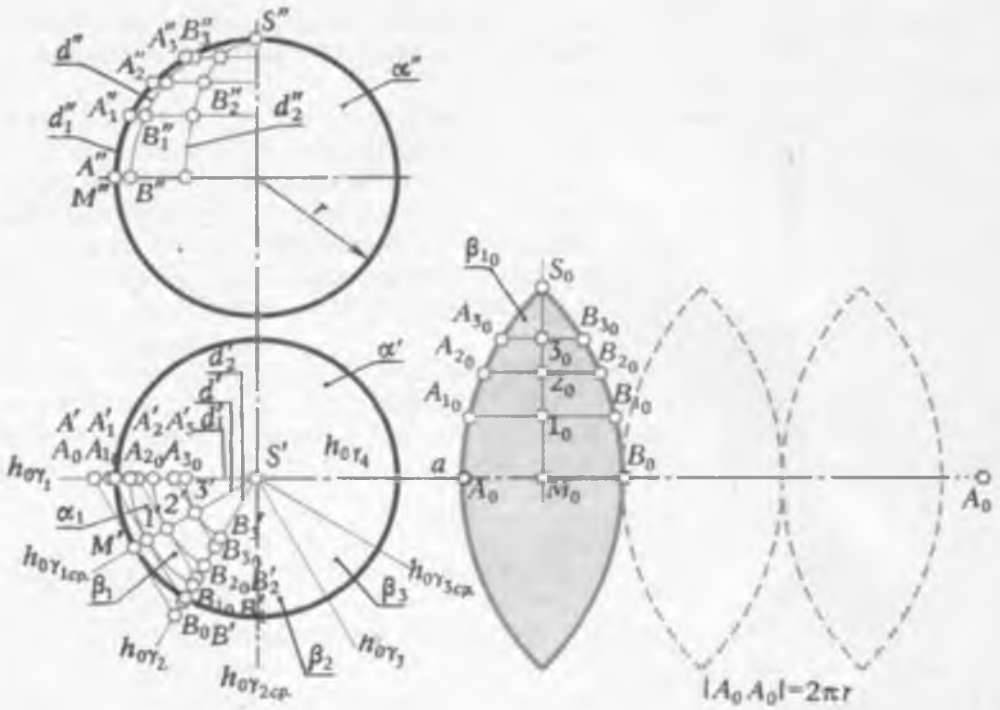


Рис. 304

На рис. 303 показан пример перехода от произвольной поверхности вращения α к поверхности β, составленной из отсеков конических поверхностей $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$, которыми заменяются куски $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ поверхности α; границами между этими кусками являются параллели поверхности α (на рис. 303 показан только один отсек β_1).

Развертка отсеков конических поверхностей β_j осуществляется по способу, изложенному на с. 204, рис. 299.

В качестве примера использования цилиндрической поверхности для построения условной развертки построим развертку поверхности сферы (рис. 304).

Для ее построения пересекаем поверхность сферы горизонтально проецирующими плоскостями $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots$, проходящими через центр сферы. Куски сферической поверхности $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$, заключенные между меридиональными сечениями $h_{0\gamma_1} - h_{0\gamma_2}$, $h_{0\gamma_2} - h_{0\gamma_3}$, $h_{0\gamma_3} - h_{0\gamma_4}$, заменяем кусками цилиндрических поверхностей $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, прямолинейные образующие которых перпендикулярны к плоскости средних меридиональных сечений $h_{0\gamma_{1ср}}, h_{0\gamma_{2ср}}, h_{0\gamma_{3ср}}, \ldots$

Длина образующих, в которые преобразуются дуги параллелей поверхности вращения, определяется отрезками прямых, заключенных между соседними меридиональными плоскостями $\overset{\frown}{AB} \to [A_0B_0]$.

Чтобы построить развертку куска цилиндрической поверхности β_1, аппроксимирующего участок сферы α_1, проводим горизонтальную прямую a. На ней откладываем $[A_0B_0]$. Через середину этого отрезка проводим вертикальную прямую, на которой откладываем спрямленное меридиональное сечение (на рис. 304 показана только его половина) и отмечаем на нем точки пересечения с параллелями сферы (M_0, 1_0, 2_0, 3_0). Через точки M_0, 1_0, 2_0, 3_0 проводим горизонтальные прямые и откладываем на них по обе стороны от вертикали M_0S_0 отрезки,

равные половине длин касательных, проведенных в точках M', $1'$, $2'$, $3'$ и заключенных между следами плоскостей $h_{0\gamma_1}$ и $h_{0\gamma_2}$.

Полученные точки A_0, A_{1_0}, A_{2_0}, A_{3_0} и B_0, B_{1_0}, B_{2_0}, B_{3_0} соединяем плавными кривыми. Фигура $A_0S_0B_0$ — условная развертка половины участка сферической поверхности α_1. Пристроив к ней другую половину, расположенную симметрично относительно прямой a, получим развертку β_{1_0} участка α_1. Для получения развертки всей сферической поверхности необходимо к участку β_{1_0} пристроить n (в нашем случае пять) фигур β_{2_0}, β_{3_0}, β_{4_0}, β_{5_0}, β_{6_0}, конгруентных фигуре β_{1_0}.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Что называется разверткой поверхности?
2. Какие поверхности относятся к развертывающимся?
3. Перечислите свойства поверхности, которые сохраняются на ее развертке.
4. Назовите способы построения разверток и сформулируйте содержание каждого из них.
5. В каких случаях для построения развертки используются способы: нормального сечения, раскатки, треугольников?
6. В чем состоит общий прием решения задачи на построение условной развертки неразвертываемых поверхностей?
7. Сформулируйте и дайте подробное объяснение способов построения условной развертки.
8. Как можно построить развертку усеченной конической поверхности с недоступной вершиной?
9. Какой способ целесообразно использовать для построения условной развертки поверхности сферы?

ГЛАВА VIII

АКСОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Рассмотренные в предыдущих главах ортогональные проекции находят широкое распространение в технике при составлении чертежей. Это объясняется тем, что выполнение чертежей с помощью ортогональных проекций достаточно просто, при этом можно получить проекции, сохраняющие метрические характеристики оригинала. С помощью чертежей, построенных в ортогональных проекциях, если их дополнить вспомогательными изображениями — видами, разрезами и сечениями, можно получить представление о форме изображаемого предмета (как о внешнем виде, так и о внутреннем строении) и его размерах.

Наряду с отмеченными достоинствами метод ортогонального проецирования имеет существенный недостаток. Для того чтобы получить представление о пространственном геометрическом образе, заданном его ортогональными проекциями, приходится одновременно рассматривать две, три, а иногда и больше проекций, что значительно затрудняет мысленное воспроизведение геометрической фигуры по ее проекциям.

В ряде случаев бывает необходимо наряду с чертежом геометрической фигуры, выполненным в ортогональных проекциях, иметь ее наглядное изображение. Такое изображение может быть получено путем проецирования оригинала на специально выбранную плоскость. Мы знаем, что одна центральная или параллельная проекция на одну плоскость проекции не определяет положения фигуры в пространстве и не позволяет установить ее форму. Чтобы устранить эту неопределенность и получить обратимый чертеж (чертеж, обеспечивающий взаимную однозначность между точками, принадлежащими проецируемой фигуре и ее проекции), необходимо иметь не одну, а две ее проекции.

Получить две взаимосвязанные проекции одной фигуры на одну плоскость можно следующим путем: пусть в пространстве задан отрезок $[AB]$ (рис. 305); чтобы получить параллельные проекции этого отрезка на произвольную плоскость α*, по которым можно определить расположение заданной фигуры в пространстве, следует взять какую-либо плоскость γ и найти на ней ортогональную проекцию заданной фигуры (отрезка). Затем надо спроецировать отрезок $[AB]$ и его ортогональную проекцию $[A'B']$ на плоскость α в направлении s. При таком способе проецирования каждой точке пространства соответствуют две ее проекции на плоскости α.

---

* Плоскость α называют картинной плоскостью.

В качестве плоскости γ можно взять не произвольную плоскость, а одну из координатных плоскостей, например xOy. Если теперь спроецировать координатные оси $Oxyz$ и горизонтальную проекцию A' точки A совместно с самой точкой A на плоскость α, то мы получим в плоскости α чертеж, который называют аксонометрическим, при этом проекцию точки A – A^0 называют аксонометрической (иногда главной) проекцией точки A, а точку A^{10} — вторичной проекцией точки A (рис. 306).

Таким образом, в аксонометрии имеются два поля проекций: поле главных и поле вторичных проекций. В этом отношении аксонометрические проекции не имеют принципиального отличия от ортогональных проекций.

Для того чтобы на аксонометрических проекциях можно было решать метрические задачи относительно изображенных геометрических фигур, на аксонометрическом чертеже указывают проекции координатных осей с изображенными на них отрезками e^0_{x0}, e^0_{y0}, e^0_{z0} — проекциями *натурального масштаба* e. Проекции e^0_{x0}, e^0_{y0}, e^0_{z0} натурального масштаба e_x, e_y, e_z называют *аксонометрическим масштабом* по осям x^0, y^0, z^0.

Положение точки A в пространстве относительно натуральной системы координат $Oxyz$ определяется пространственной координатной ломаной $OA_xA'A$ (рис. 306). Аксонометрическая проекция A^0 точки A определяется плоской координатной ломаной $O^0A^0_{x0}A^{10}A^0$, у которой звено $O^0A^0_{x0}$ совпадает по направлению с осью x^0, а $A^0_{x0}A^{10}$ и $A^{10}A^0$ параллельны соответственно осям y^0 и z^0.

В общем случае отрезки $O^0A^0_{x0}$, $A^0_{x0}A^{10}$, $A^{10}A^0$ не равны между собой и ни один из них не равен натуральному масштабу e. Отношения $k_{x0} = \dfrac{O^0A^0_{x0}}{OA_x}$; $k_{y0} = \dfrac{A^0_{x0}A^{10}}{A_xA'}$; $k_{z0} = \dfrac{A^{10}A^0}{A'A}$ называют показателями (коэффициентами) искажений по аксонометрическим осям.

Очевидно, принимая различное взаимное расположение натуральной системы координат и картинной плоскости и задавая разные направления проецирования, можно получить множество аксонометрических проекций, отличающихся друг от друга как направлением аксонометри-

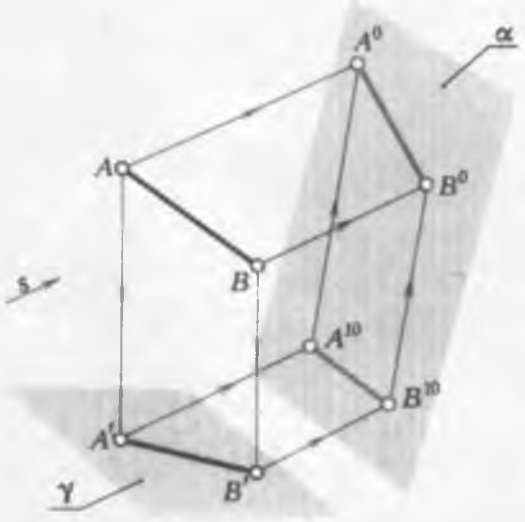


Рис. 305

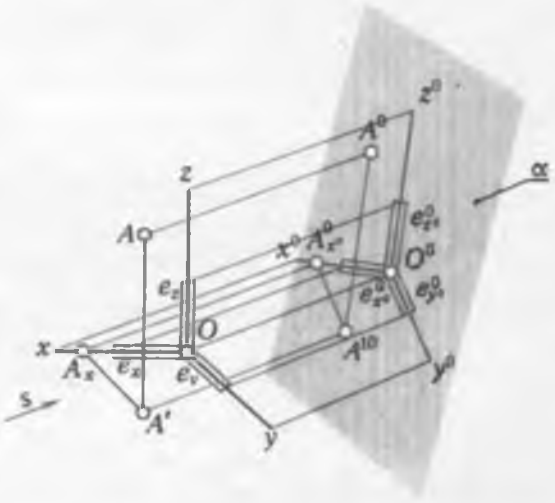


Рис. 306

ческих осей, так и величиной коэффициентов искажения вдоль этих осей. Справедливость этого утверждения была доказана немецким геометром Карлом Польке. Теорема Польке утверждает, *что три отрезка произвольной длины, лежащих в одной плоскости и выходящих из одной точки под произвольными углами друг к другу, представляют параллельную проекцию трех равных отрезков, отложенных на прямоугольных осях координат от начала.*

На основании этой теоремы аксонометрические оси и коэффициенты искажения по ним могут выбираться произвольно. При этом коэффициенты искажения по аксонометрическим осям можно принять: различными для всех аксонометрических осей ($k_{x^0} \neq k_{y^0} \neq k_{z^0}$); одинаковыми для каких-либо двух осей (например, $k_{x^0} = k_{y^0}$); равными для всех аксонометрических осей ($k_{x^0} = k_{y^0} = k_{z^0}$). В первом случае аксонометрическую проекцию называют *триметрической*, во втором — *диметрической* и в третьем — *изометрической*.

В зависимости от угла между направлением проецирования и картинной плоскостью аксонометрия может быть *прямоугольной* (ортогональной), если этот угол прямой; в противном случае ее считают *косоугольной*.

§ 67. СТАНДАРТНЫЕ АКСОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

В инженерной практике, в частности в машиностроении, наибольшее распространение получили прямоугольные диметрические и изометрические проекции. Отметим некоторые свойства этих проекций.

1. Зависимость коэффициентов искажения по аксонометрическим осям от направления проецирования.

Установление зависимости между коэффициентами искажения и направлением проецирования представляет определенный практический интерес.

Картинная плоскость пересекает координатные оси в точках $X_\alpha \equiv X^0_\alpha$, $Y_\alpha \equiv Y^0_\alpha$, $Z_\alpha \equiv Z^0_\alpha$, а плоскости проекций по прямым $X_\alpha Y_\alpha$, $X_\alpha Z_\alpha$, $Y_\alpha Z_\alpha$. Точки X_α, Y_α, Z_α определяют треугольник, называемый *треугольником следов* (рис. 307). Очевидно, $\Delta X_\alpha Y_\alpha Z_\alpha \equiv \Delta X^0_\alpha Y^0_\alpha Z^0_\alpha$.

Опустим из начала координат O перпендикуляр на плоскость α. Точка O^0, в которой этот перпендикуляр пересекает плоскость α, является прямоугольной проекцией точки O. Отрезки $O^0X^0_\alpha$, $O^0Y^0_\alpha$ и $O^0Z^0_\alpha$ — прямоугольные аксонометрические проекции отрезков координатных осей OX_α, OY_α, OZ_α. Треугольники $OO^0X^0_\alpha$, $OO^0Y^0_\alpha$, $OO^0Z^0_\alpha$ — прямоугольные, отрезки $O^0X^0_\alpha$, $O^0Y^0_\alpha$, $O^0Z^0_\alpha$ — их катеты, а отрезки OX^0_α, OY^0_α, OZ^0_α — гипотенузы этих треугольников. Отсюда

$$\frac{O^0X^0_\alpha}{OX^0_\alpha} = \cos\alpha^\circ, \quad \frac{O^0Y^0_\alpha}{OY^0_\alpha} = \cos\beta^\circ, \quad \frac{O^0Z^0_\alpha}{OZ^0_\alpha} = \cos\gamma^\circ,$$

где α°, β°, γ° — углы наклона осей x, y, z к картинной плоскости.

Так как $\frac{O^0X^0_\alpha}{OX^0_\alpha} = k_{x^0}$, $\frac{O^0Y^0_\alpha}{OY^0_\alpha} = k_{y^0}$, $\frac{O^0Z^0_\alpha}{OZ^0_\alpha} = k_{z^0}$, то $k_{x^0} = \cos\alpha^\circ$, $k_{y^0} = \cos\beta^\circ$, $k_{z^0} = \cos\gamma^\circ$.

В прямоугольной аксонометрии коэффициенты искажения связаны зависимостью $k^2_{x^0} + k^2_{y^0} + k^2_{z^0} = 2$.

Изометрическая проекция. В прямоугольной изометрической проекции коэффициенты искажения по всем осям одинаковы:

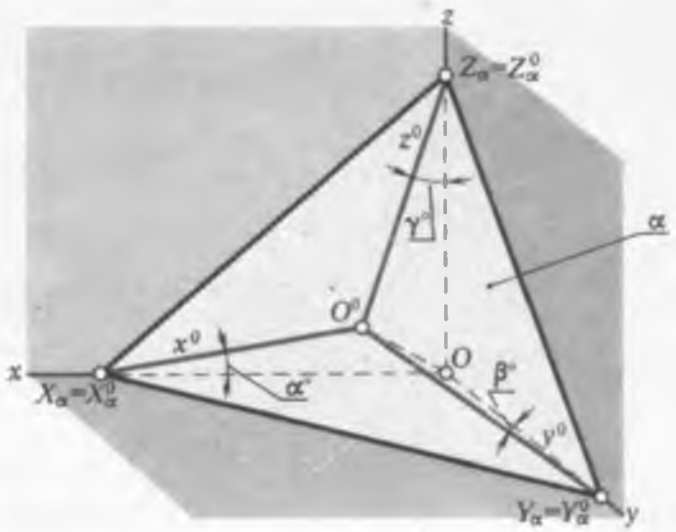


Рис. 307

$$k_{x^0}^2 = k_{y^0}^2 = k_{z^0}^2 = 2, \text{ т. е. } 3k^2 = 2,\ k = \sqrt{\frac{2}{3}},$$

следовательно, коэффициенты искажения по осям x^0, y^0, z^0 равны 0,82.

Изометрическую проекцию, как правило, выполняют без искажения (т. е. коэффициент искажения $k = 1$), что соответствует увеличению линейных размеров изображения по сравнению с действительными в 1,22 раза ($1/0{,}82 \approx 1{,}22$).

Диметрическая проекция. Для прямоугольной диметрической проекции характерно равенство коэффициентов искажения по двум осям $k_{x^0} = k_{z^0}$; коэффициент искажения по третьей оси $k_{y^0} = \frac{1}{2} k_{x^0}$ (или $k_{y^0} = \frac{1}{2} k_{z^0}$). Поэтому $2k^2 + \frac{k^2}{4} = 2$, $k^2 = \frac{8}{9}$, $k = \sqrt{\frac{8}{9}} = 0{,}94$, т. е. коэффициент искажения по осям x^0 и z^0 равен 0,94, а по оси $y^0 = 0{,}47$. Диметрическую проекцию, как и изометрию, выполняют, как правило, без искажения по осям x^0 и y^0 и с искажением $k_{y^0} = 0{,}5$ по оси y^0. В этом случае увеличение линейных размеров изображения по сравнению с действительными происходит в $1/0{,}94 = 1{,}06$ раза.

2. Определение углов между осями стандартных аксонометрических проекций.

Изометрическая проекция. Для прямоугольной (ортогональной) аксонометрии справедливо следующее утверждение: *коэффициенты искажения по аксонометрическим осям равны косинусам углов наклона координатных осей к картинной плоскости* (доказательство см. п. 1). Так как для изометрии $k_{x^0} = k_{y^0} = k_{z^0} = 1$, то отрезки $O^0 X_\alpha^0 = O^0 Y_\alpha^0 = O^0 Z_\alpha^0$. Это, в свою очередь, означает, что в прямоугольной аксонометрии треугольник следов равносторонний.

В теории ортогональных аксонометрических проекций доказывается, что аксонометрические оси являются высотами треугольника следов. Из элементарной геометрии известно, что в равностороннем треугольнике высоты попарно пересекаются между собой под углом в 120°. Поэтому совпадающие с ними аксонометрические оси в ортогональной изометрии образуют между собой углы в 120°. Обычно ось z^0 принимают вертикальной (рис. 308).

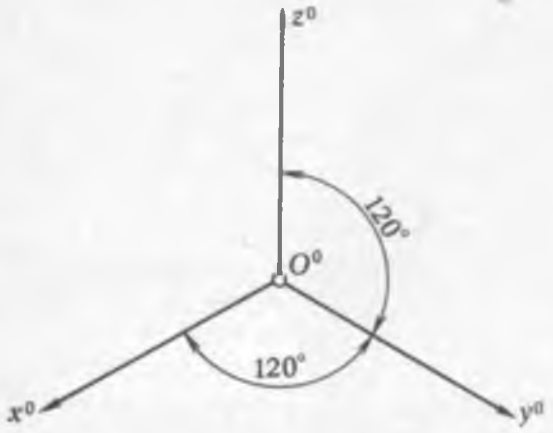


Рис. 308

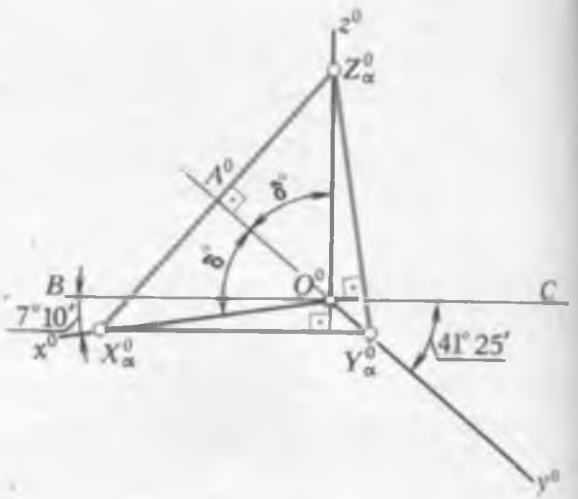


Рис. 309

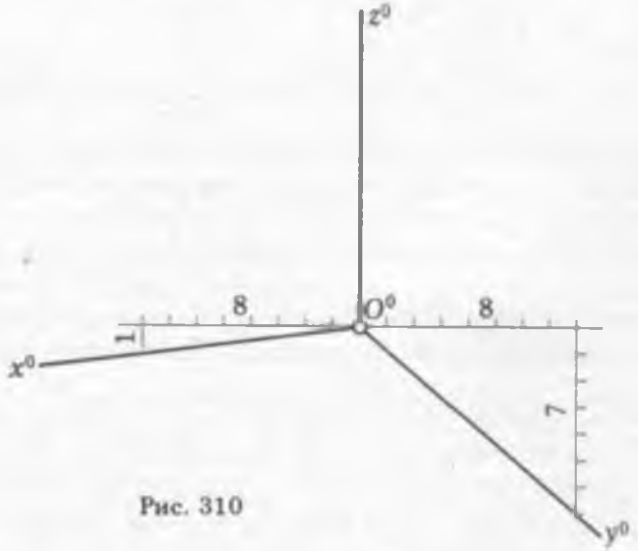


Рис. 310

Диметрическая проекция. Для диметрической проекции характерно равенство двух коэффициентов искажения по осям x^0 и z^0, коэффициент искажения по третьей оси равен их половине:

$$k_{x^0} = k_{z^0} = 2k_{y^0}.$$

Равенство $k_{x^0} = k_{z^0}$ обеспечивает конгруентность отрезков $O^0X_\alpha^0 = O^0Z_\alpha^0$, т. е. треугольник следов — равнобедренный (рис. 309). В этом треугольнике высота $Y_\alpha^0A^0$, совпадающая с направлением аксонометрической оси y^0, делит пополам сторону $X_\alpha^0Z_\alpha^0$; $|X_\alpha^0A^0| = |A^0Z_\alpha^0| = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Приняв $|O^0X_\alpha^0| = |O^0Z_\alpha^0| = 1$, имеем $X_\alpha^0Z_\alpha^0 = \sqrt{2}$. Из $\Delta\, O^0A^0Z_\alpha^0$ определяем $\sin\delta^\circ$:

$$\sin\delta^\circ = \frac{Z_\alpha^0A^0}{O^0Z^0} = \frac{\sqrt{2}}{2} : \frac{2\sqrt{2}}{3} = 0{,}75,$$

что соответствует равенству угла $\hat{\delta}^\circ = 48^\circ 35'$. Тогда

$$\angle X_\alpha^0O^0Z_\alpha^0 = 2\angle\delta^\circ = 97^\circ 10'.$$

Обычно при построении диметрических проекций ось z^0 располагают вертикально. Тогда треугольник следов и его высоты (аксонометрические оси) займут положение, показанное на рис. 309. В этом случае

$$\widehat{BO^0X_\alpha^0} = (\widehat{2\delta}^\circ - 90^\circ) = (97^\circ 10' - 90^\circ) = 7^\circ 10';$$

$$\widehat{BO^0A^0} = \widehat{CO^0Y_\alpha^0} = (\widehat{\delta}^\circ - 7^\circ 10') = (48^\circ 35' - 7^\circ 10') = 41^\circ 25'.$$

Приближенно аксонометрические оси стандартной диметрии можно построить, если принять $\operatorname{tg} 7^\circ 10' \approx 1/8$, а $\operatorname{tg} 41^\circ 25' = 7/8$. Тогда аксонометрические оси x^0 и y^0 проводят так, как это показано на рис. 310. Ось y^0 может быть проведена так же, как продолжение биссектрисы $\angle x^0 O^0 z^0$.

§ 68. ПРИМЕРЫ ПОСТРОЕНИЯ АКСОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР

При построении аксонометрических проекций пользоваться коэффициентами искажения неудобно. Поэтому обычно строят рекомендованные ГОСТ 2.317—69 (СТ СЭВ 1979—79) стандартные прямоугольные изометрию и диметрию, принимая соответствующие масштабы увеличения в 1,22 раза для изометрии и в 1,06 раза для диметрии. Введение этих масштабов позволяет строить аксонометрические проекции без сокращения размеров, откладываемых по аксонометрическим осям. Для диметрической проекции размеры по оси y^0 сокращают вдвое.

А. Построение аксонометрических проекций геометрических фигур, ограниченных отрезками прямых и отсеками плоскостей.

При параллельном проецировании на плоскость прямые проецируются в прямые (см. § 6, 1а), следовательно, для построения аксонометрического изображения прямой a достаточно определить аксонометрические проекции двух принадлежащих ей точек, которые однозначно определяют прямую a^0 — аксонометрическую проекцию прямой a.

Построение аксонометрических проекций многогранников, в частном случае многоугольников, сводится к определению аксонометрических проекций их вершин, которые затем соединяют между собой отрезками прямых линий.

На рис. 311, *б* показано построение стандартной изометрической проекции шестигранной пирамиды, ортогональные проекции которой заданы на рис. 311, *а*. Построение выполняем в следующей последовательности: проводим прямые x, y, z, которые принимаем за оси натуральной системы координат; за начало координат принимаем точку O (O', O''). Затем проводим аксонометрические оси x^0, y^0, z^0. Измерив на ортогональном чертеже натуральные координаты вершин основания пирамиды (точки *1*, *2*, *3*, *4*, *5*, *6*) и ее вершины (точка S), строим их аксонометрические проекции (точки 1^0, 2^0, 3^0, 4^0, 5^0, 6^0, S^0). Чтобы получить изометрическую проекцию пирамиды, соединяем полученные точки отрезками прямых линий в той же последовательности, в какой они соединены на ортогональных проекциях.

Б. Построение аксонометрических проекций геометрических фигур, ограниченных кривыми линиями и поверхностями.

В общем случае аксонометрической проекцией кривой линии (или поверхности) будет также кривая линия (поверхность).

Пример построения стандартной изометрии произвольной пространственной кривой l показан на рис. 312. Построение аксонометрических

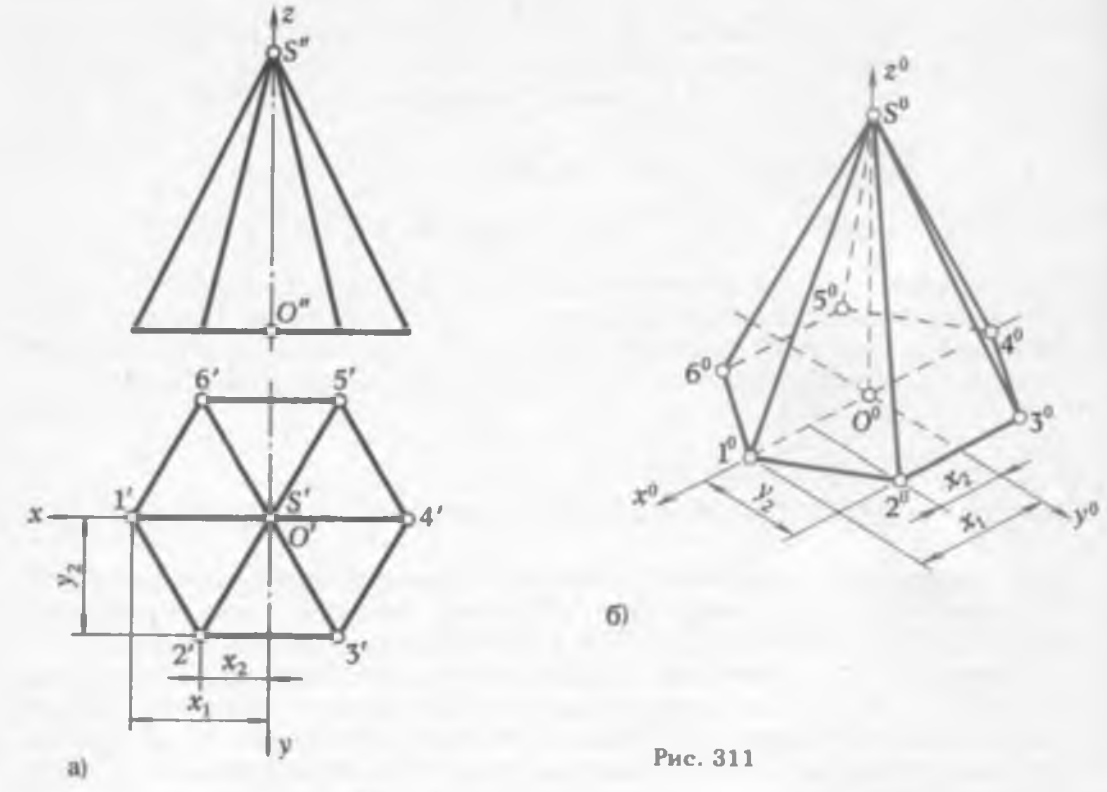


Рис. 311

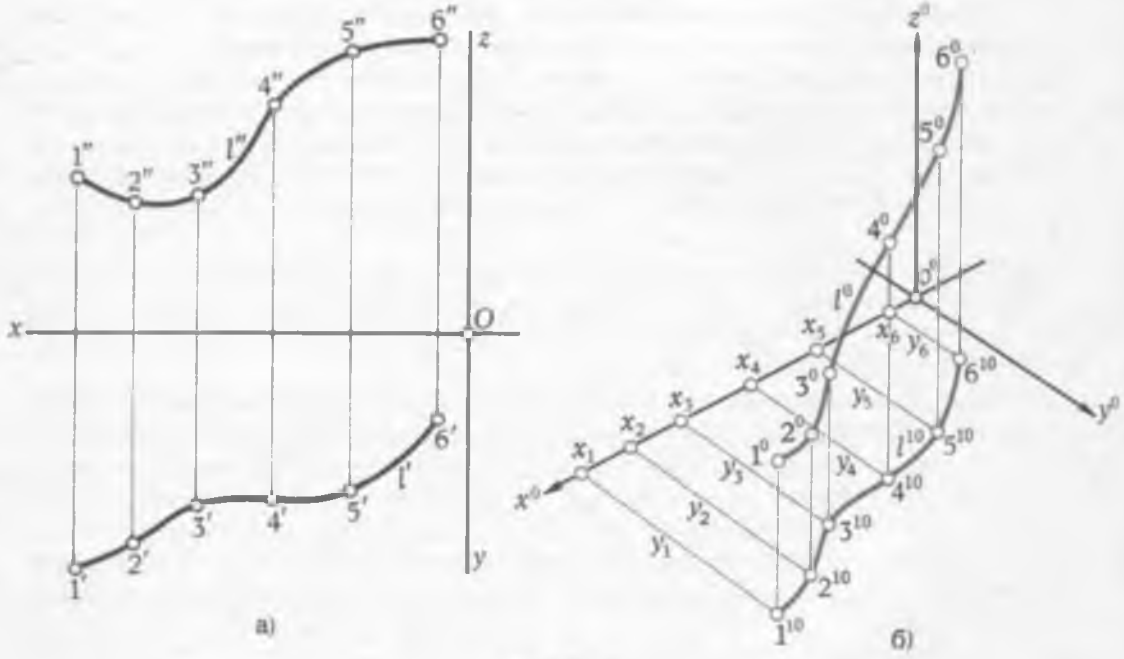


Рис. 312

проекций точек, принадлежащих кривой l, осуществляется в последовательности, указанной ниже.

1. Относим данную линию к некоторой натуральной системе координат $Oxyz$.

2. Отмечаем на кривой l точки 1, 2, 3, ... и определяем их ортогональные координаты (рис. 312,*а*).

3. По координатам точек *1*, *2*, *3*, ... строим их вторичные проекции 1^{10}, 2^{10}, 3^{10}, ... (рис. 312,*б*).

4. Через вторичные проекции точек проводим прямые, параллельные аксонометрической оси z^0, и откладываем на них отрезки, равные значению соответствующих аппликат точек (*1*, *2*, *3*, ...); находим точки 1^0, 2^0, 3^0, ...

5. Соединив найденные аксонометрические проекции точек 1^0, 2^0, 3^0, ... плавной линией, получим аксонометрическую проекцию кривой l^0.

В практике построения аксонометрических проекций машиностроительных деталей часто приходится строить аксонометрические проекции окружностей. В большинстве случаев плоскости окружностей бывают параллельны какой-либо из координатных плоскостей. Рассмотрим возможные варианты построения окружности в изометрической и диметрической проекциях.

Чтобы иметь более наглядное представление о расположении и величине осей эллипсов, в которые проецируются окружности, последние вписаны в грани куба. На рис. 313,*а* показана проекция куба в изометрии, а на рис. 313,*б* — в диметрии. Окружность, вписанная в грань куба, касается его ребер в их середине. Так как касание является инвариантом параллельного проецирования, то в аксонометрических проекциях точки касания эллипсов, в которые преобразуются окружности, будут находиться так же в серединах ребер куба. Кроме этих четырех точек можно указать еще четыре точки, принадлежащие концам большого и малого диаметров эллипса. В прямоугольных изометрических и диметрических проекциях направления больших осей эллипсов перпендикулярны свободным аксонометрическим осям, а малые оси эллипсов совпадают по направлению со свободными аксонометрическими осями.

Для прямоугольной (практической) изометрии величина большого диаметра эллипса равна 1,22*d* окружности, малого диаметра — 0,71*d* (см. рис. 313,*а*). В прямоугольной диметрии большой диаметр эллипса равен 1,06*d*, малый диаметр для эллипсов, расположенных в гранях куба, параллельных координатным плоскостям *Oxy* и *Oyz*, равен 0,35*d*. Для эллипса, принадлежащего грани куба, параллельной плоскости *Oxz*, малый диаметр равен 0,95*d* (см. рис. 313,*б*).

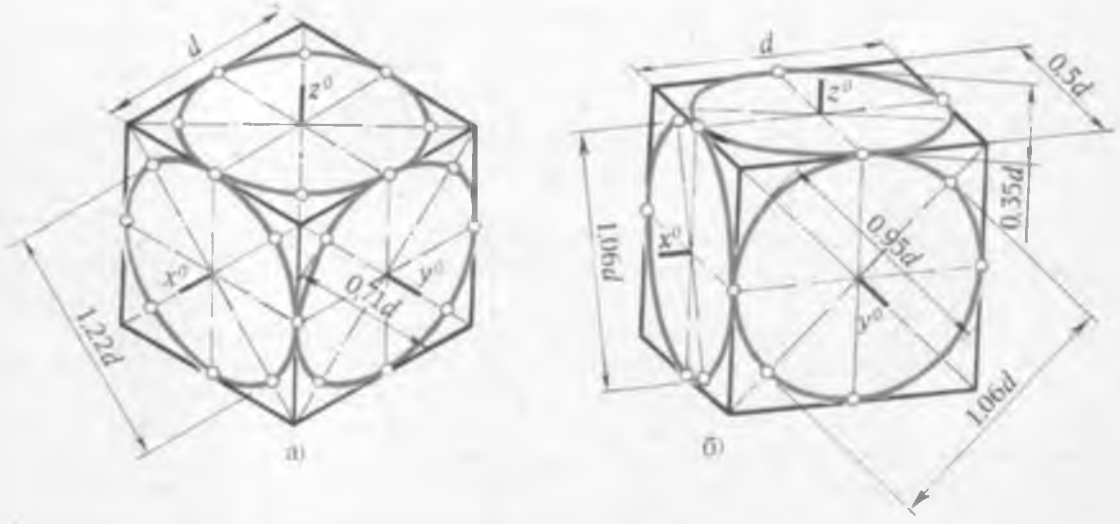


Рис. 313

Чтобы исключить арифметические подсчеты при определении длин отрезков, умноженных на величину масштаба искажения, следует пользоваться пропорциональным масштабом. Для его построения достаточно провести две взаимно перпендикулярные прямые a и b (рис. 314) и на одной из них от точки пересечения K отложить $[KO]$, равный 100 единицам, а на другой — отрезки $[KI]$, $[KII]$, $[KIII]$, $[KIV]$, $[KV]$, $[KVI]$, соответственно равные 35, 50, 71, 95, 106, 122 единицам измерения. Точки I, II, ... VI соединяем с точкой O. Если теперь от точки O на прямой OK отложить $[OB]$ заданной длины l и из конца B отрезка $[OB]$ восставить перпендикуляр к $[OK]$, то он пересечет прямые (OI), (OII), $(OIII)$, (OIV), (OV), (OVI) в точках 1, 2, 3, 4, 5, 6. Полученные отрезки $[B1]$, $[B2]$, $[B3]$, $[B4]$, $[B5]$, $[B6]$ будут равны соответственно $0{,}35l$, $0{,}5l$, $0{,}71l$, $0{,}95l$, $1{,}06l$, $1{,}22l$.

Если плоскость окружности занимает произвольное положение по отношению к координатным плоскостям, то построение аксонометрической проекции окружности осуществляется так же, как это делается при построении аксонометрической проекции кривой (см. с. 215 п. Б, рис. 312). Построение аксонометрических проекций поверхностей, ограничивающих геометрические фигуры, можно осуществить двумя способами:

1. **Способ сечений.** Этот способ заключается в следующем:

1) поверхность геометрической фигуры, аксонометрическую проекцию которой требуется построить, рассекаем плоскостями γ_1, γ_2, γ_3, ..., γ_n (рис. 315);

2) определяем линии пересечения заданной фигуры Ф плоскостями γ_j $(l_1, l_2, l_3, ..., l_n)$;

3) строим аксонометрические проекции линий l_1, l_2, l_3, ..., l_n → → l_1^0, l_2^0, l_3^0, ..., l_n^0; для упрощения определения линий l_j и построения их аксонометрических проекций секущие плоскости следует принимать параллельными какой-либо плоскости проекции;

4) кривая d^0, огибающая линии l_1^0, l_2^0, l_3^0, ..., l_n^0, является очерковой линией — линией видимого контура фигуры Φ^0.

2. **Способ вписывания сферических поверхностей.** Целесообразность применения этого способа основывается на том, что в прямо-

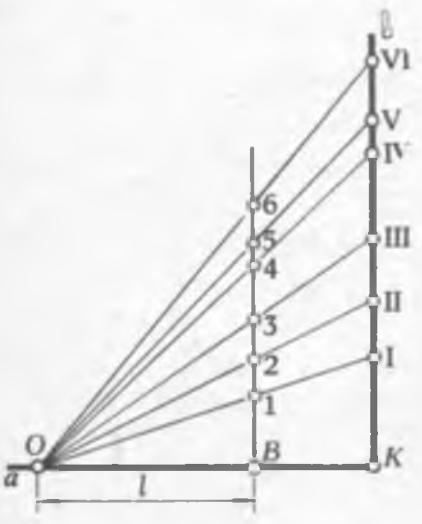


Рис. 314

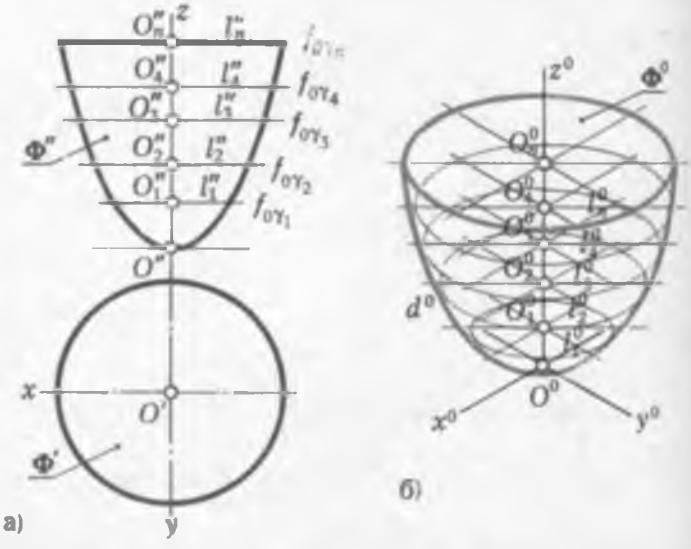


Рис. 315

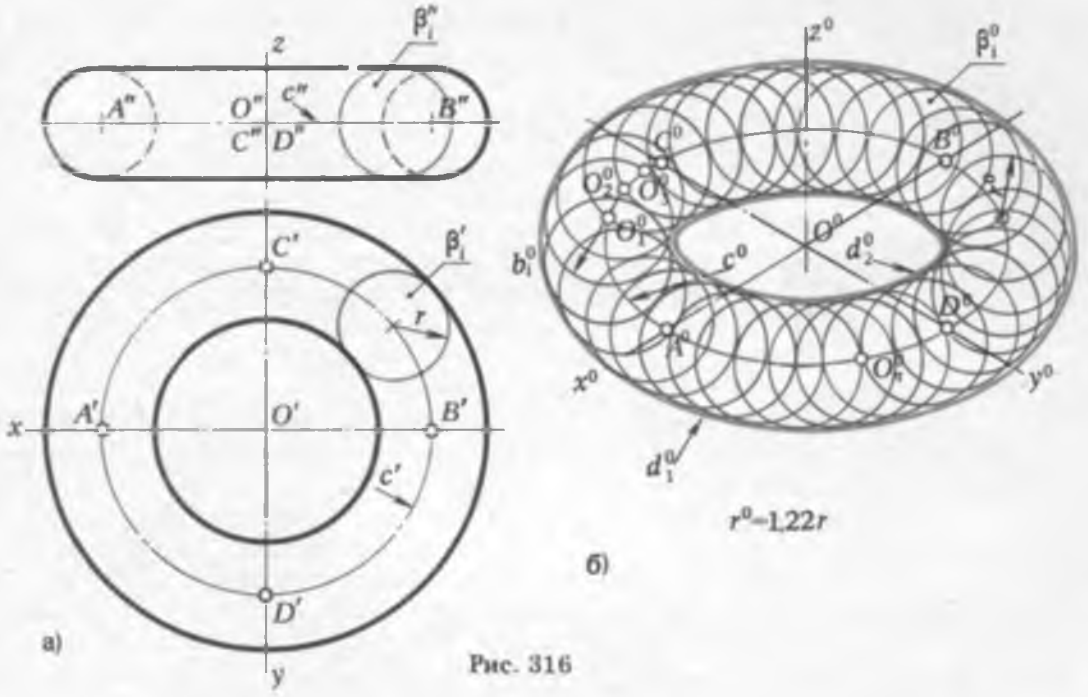


Рис. 316

угольной аксонометрии поверхность сферы проецируется на картинную плоскость в виде круга. Этот способ следует использовать в тех случаях, когда фигура ограничена поверхностью вращения. Так как в любую поверхность вращения могут быть вписаны сферические поверхности, то аксонометрическую проекцию поверхности вращения можно рассматривать как огибающую этих сфер.

Сущность способа покажем на конкретном примере. Пусть требуется построить аксонометрическую проекцию (прямоугольную изометрию) кольца (рис. 316,*а*). Построения выполняем в следующей последовательности:

1) строим эллипс c^0 — аксонометрическую проекцию окружности c $(ACBD)$;

2) из произвольных точек эллипса c^0, O_1^0, O_2^0, O_3^0, ..., O_n^0, $(\forall\, O_j^0;\ O_j^0 \in c^0)$ проводим окружности b_j радиусом r — аксонометрические проекции вписанных сферических поверхностей β;

3) огибающие d_1^0 и d_2^0 окружностей b_j являются видимым очерком аксонометрической проекции кольца (рис. 316,*б*).

§ 69. РЕШЕНИЕ ПОЗИЦИОННЫХ ЗАДАЧ НА АКСОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЯХ

Решение позиционных задач на аксонометрическом чертеже не отличается от решения этих задач в ортогональных проекциях на эпюре Монжа.

Алгоритмы решения задач для определения линии пересечения двух поверхностей (см. § 43, табл. 8) и нахождения точек встречи линии с поверхностью (см. § 53, табл. 9), составленные для ортогональных проекций, остаются без изменения при решении аналогичных задач в аксонометрических проекциях. Рассмотрим решение основных позиционных задач: определение точки встречи прямой с плоскостью и построение линии пересечения двух поверхностей.

ЗАДАЧА 1. Определить точку $K = m \cap \beta$ (рис. 317).

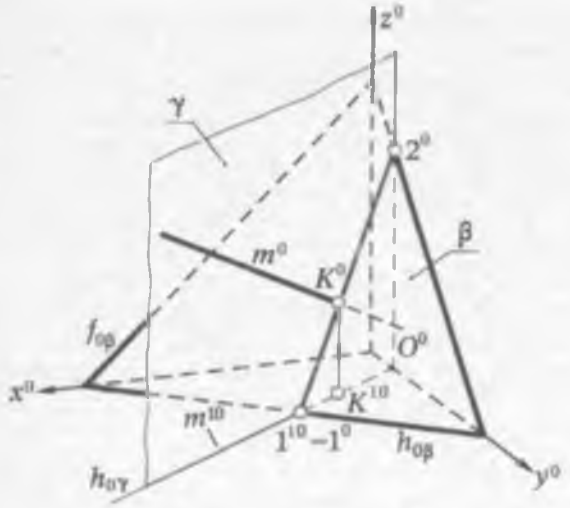


Рис. 317

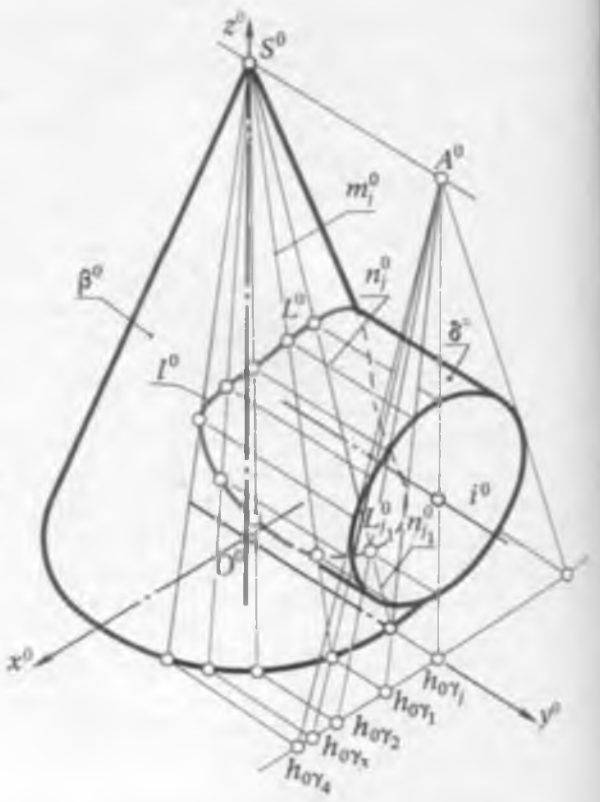


Рис. 318

РЕШЕНИЕ.

1. Заключаем данную прямую m во вспомогательную плоскость γ, перпендикулярную какой-либо координатной плоскости (на рис. 317 γ ⊥ плоскости $O^0x^0y^0$). Горизонтальный след $h_{0\gamma}$ плоскости γ совпадает со вторичной проекцией m^{10} прямой m.

2. Отмечаем $(1^0 2^0)$, по которой пересекаются плоскости γ и β: $(1^0 2^0) = \gamma \cap \beta$.

3. Находим $K^0 = m^0 \cap (1^0 2^0)$.

4. Зная K^0, определяем вторичную проекцию K^{10}.

ЗАДАЧА 2. Построить линию l^0 пересечения конической β и цилиндрической δ поверхностей $l^0 = \beta \cap \delta$ (рис. 318).

Эта задача может быть решена двумя способами.

Способ 1. Решают эту задачу в ортогональных проекциях, а затем строят аксонометрическую проекцию полученной линии пересечения.

Способ 2. Состоит в построении искомой линии пересечения непосредственно на аксонометрической проекции. При этом решение осуществляется по алгоритму, составленному для решения аналогичной задачи в ортогональных проекциях.

Решение приведено на рис. 318. Как видно из чертежа, для определения точек $(L_j^0$ и $L_{j_1}^0) \in l_j^0$ $(L_j^0 = m_j^0 \cap n_j^0)$ используются плоскости, принадлежащие пучку плоскостей, проходящих через прямую SA. Любая плоскость этого пучка пересекает поверхности β и δ по прямым m^0 и n^0.

Точки L_j^0 и $L_{j_1}^0$ принадлежат искомой линии пересечения поверхностей β и δ.

§ 70. РЕШЕНИЕ МЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА АКСОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЯХ

Между ортогональными и аксонометрическими проекциями существует зависимость, которая позволяет по ортогональным проекциям геометрической фигуры и заданному направлению аксонометрического проецирования построить треугольник следов и, наоборот, по заданной проекции треугольника следов определить направление аксонометрического проецирования. Связь между ортогональными и аксонометрическими проекциями позволяет преобразовать последние в проекции ортогональные и решать на них метрические задачи.

В тех случаях, когда геометрическая фигура Ф расположена в одной из координатных плоскостей или в плоскостях, параллельных координатным, для определения метрических характеристик фигуры Ф достаточно выполнить построения, переводящие плоскость фигуры в положение, совмещенное с плоскостью чертежа (или параллельное ей).

Геометрические построения, которые необходимо осуществить для совмещения координатной плоскости с плоскостью аксонометрической проекции, можно проследить на рис. 319. Пусть заданы аксонометрические оси x^0, y^0 и z^0. Строим треугольник следов, для чего на оси x^0 отмечаем произвольную точку X_α^0. Через X_α^0 проводим стороны треугольника $X_\alpha^0 Y_\alpha^0 \perp z^0$, $X_\alpha^0 Z_\alpha^0 \perp y^0$ и $Z_\alpha^0 Y_\alpha^0 \perp x^0$. Прямые $(X_\alpha^0 Y_\alpha^0)$, $(X_\alpha^0 Z_\alpha^0)$, $(Z_\alpha^0 Y_\alpha^0)$ являются следами картинной плоскости α на координатных плоскостях $(X_\alpha^0 Y_\alpha^0) \equiv h_{0\alpha}^0$, $(X_\alpha^0 Z_\alpha^0) \equiv f_{0\alpha}^0$ и $(Z_\alpha^0 Y_\alpha^0) \equiv w_{0\alpha}^0$. Для совмещения плоскости xOy с плоскостью α необходимо повернуть ее вокруг горизонтального следа $h_{0\alpha}^0$. При этом точки X_α^0 и Y_α^0 плоскости xOy, как принадлежащие оси вращения $h_{0\alpha}^0$, не меняют своего положения во время вращения. Поэтому для определения совмещенного положения плоскости xOy достаточно повернуть точку O до ее совмещения с плоскостью α. Точка O^0 при вращении вокруг оси $h_{0\alpha}^0$ будет перемещаться по окружности с центром в точке C^0. Эта окружность принадлежит плоскости $\gamma \perp \alpha$.

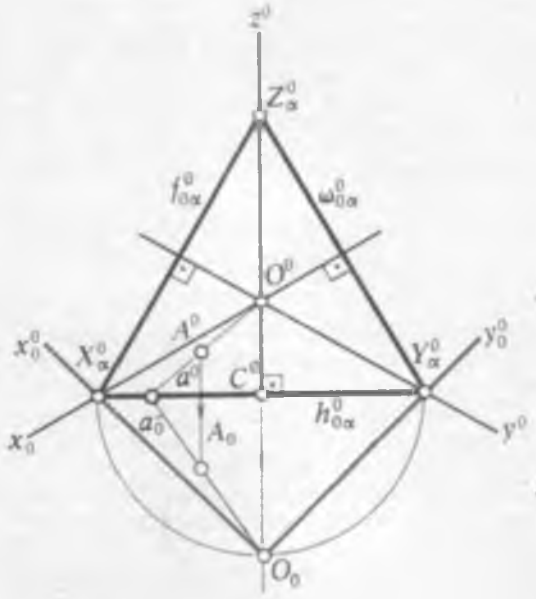


Рис. 319

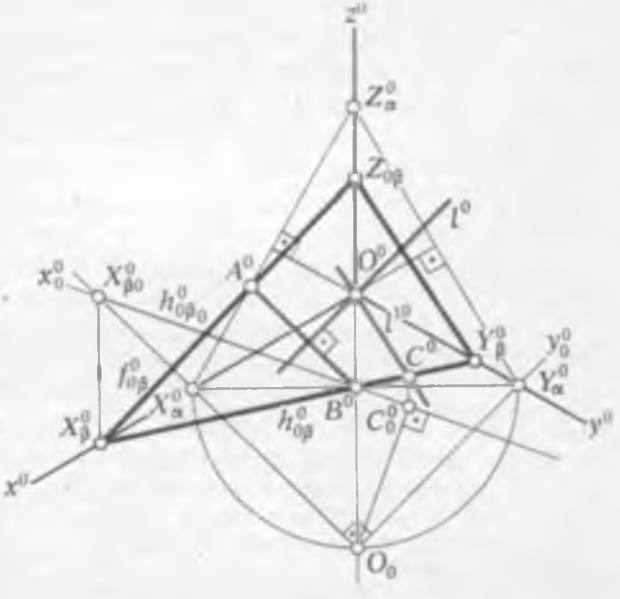


Рис. 320

Совмещенное положение точки O_0 находится в точке пересечения перпендикуляра к оси вращения $h^0_{0\alpha}$, проведенного через O^0, и дуги окружности с центром в точке C^0, радиусом $C^0X^0_\alpha$. Справедливость этого утверждения вытекает из того, что в натуре $\angle X^0_\alpha O_0 Y^0_\alpha = 90°$. Выполненные построения обеспечивают равенство $\angle X^0_\alpha O_0 Y^0_\alpha = 90°$, так как он образован хордами, опирающимися на диаметр. Для определения совмещенного с плоскостью α положения точки A, принадлежащей плоскости xOy, достаточно провести прямую $a^0 \supset (O^0A^0)$, найти ее совмещенное положение a_0 и на a_0 определить точку A_0.

Совмещенное положение плоскостей xOz и yOz с аксонометрической плоскостью α находится аналогично рассмотренному случаю с той лишь разницей, что вращение плоскостей осуществляется соответственно вокруг осей $f^0_{0\alpha}$ и $w^0_{0\alpha}$.

Проведение прямой, перпендикулярной к плоскости, является одной из основных метрических задач. Проследим, как может быть решена эта задача с помощью совмещения координатной плоскости с аксонометрической. Пусть требуется провести прямую l, перпендикулярную плоскости β и проходящую через точку O (рис. 320).

РЕШЕНИЕ.

1. Строим треугольник следов $X^0_\alpha Y^0_\alpha Z^0_\alpha$, для чего на оси x^0 отмечаем точку X^0_α. При выборе положения точки X^0_α необходимо следить за тем, чтобы две стороны треугольника следов пересекали следы заданной плоскости β.

2. Определяем (A^0B^0) — линию пересечения плоскости β с плоскостью аксонометрии α [$(A^0B^0) = \beta \cap \alpha$].

3. (A^0B^0) — след плоскости β на плоскости α, поэтому аксонометрическая проекция перпендикуляра l^0 будет перпендикулярна к (A^0B^0). Проводим l^0 так, чтобы $l^0 \perp (A^0B^0) \wedge (l^0 \ni O^0)$.

4. Чтобы построить вторичную проекцию перпендикуляра, совмещаем координатную плоскость xOy с плоскостью α (построения выполнены аналогично показанным на рис. 319). Совмещенное положение следа $h^0_{0\beta_0}$ определяется точками $X^0_{\beta_0}B^0$. Из точки O_0 опускаем перпендикуляр $O_0C^0_0$ на прямую $h^0_{0\beta_0}$. Зная положение C^0_0, находим C^0. Определяем вторичную аксонометрическую проекцию перпендикуляра $l^{1\,0}$.

Следует иметь в виду, что решение метрических задач на аксонометрических проекциях сопряжено с определенными трудностями. Поэтому целесообразно при выявлении метрических характеристик геометрической фигуры, заданной в аксонометрических проекциях, перейти к заданию этой фигуры в ортогональных проекциях и решать задачу так, как это было рекомендовано в гл. VI.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Какие проекции называются аксонометрическими?

2. Как производится переход от ортогональных координат к аксонометрическим?

3. Что такое треугольник следов?

4. Чему равны показатели искажения по аксонометрическим осям в прямоугольных изометрических и диметрических проекциях?

5. Как определить аксонометрические оси, если задан треугольник следов ортогональных аксонометрических (изометрических и диметрических) проекций?

6. Что такое аксонометрический масштаб?

7. Укажите коэффициенты искажения для большой и малой оси эллипса — аксонометрической проекции окружности, принадлежащей координатной плоскости (или параллельной ей) для изометрии и диметрии.

8. Сформулируйте теорему Польке.

9. В чем различие между прямоугольными и косоугольными аксонометрическими проекциями?

ГЛАВА IX

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЭЦВМ ДЛЯ ГРАФИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Всего лишь три десятилетия отделяют нас от того дня, когда первая ЭЦВМ решила первую задачу. Сейчас трудно найти область научной, инженерной и административно-хозяйственной деятельности, где бы ни использовались быстродействующие вычислительные машины и комплексы.

Начиная с 1963 г., в Советском Союзе ведутся работы по созданию машинных языков для описания графической информации и использованию ЭЦВМ для автоматизации процесса конструирования, в частности автоматизации процесса составления и чтения чертежей.

Несколько позже появились работы, посвященные решению проблемы комплексной автоматизации графического решения задач с использованием для этой цели электроники и вычислительной техники.

Приведенный ниже матриал познакомит вас с основными вопросами проблемы автоматизации процесса решения задач, исходные данные которых представлены в графической форме, и возможными путями их практической реализации. Вы освоите также технику программирования, точнее — составления управляющих программ (схем счета) и способы выбора наиболее рационального машинного алгоритма.

§ 71. О ВОЗМОЖНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ЭЦВМ ДЛЯ ГРАФИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Отметим сразу, что использование современной электронно-вычислительной машины является не только возможным, но, как это будет показано, вполне логичным путем для решения задач, исходные данные которых представлены в графической форме.

Возможность применения ЭЦВМ для аналитического решения задач сейчас ни у кого не вызывает сомнения.

Если мы обратимся к графическому решению задач, то легко убедиться, что между графическим и аналитическим способами решения имеется много общего. Эта общность вытекает из изоморфизма между алгеброй и геометрией.

Действительно, основными неопределяемыми понятиями математики являются точка и число. Многообразие (множество) точек определяют различные геометрические фигуры, которые являются предметом изучения в геометрии. Изучением многообразия (множества) чисел,

выраженных в символической форме, занимается алгебра. Любое теоретическое исследование в области точных наук осуществляется путем использования различных математических операций. Простейшей операцией в геометрии является движение, с помощью которого можно каждую точку (множество точек) перевести в некоторую другую точку (другое множество), установив взаимное соответствие между старым (исходным) и новым (преобразованным) положениями. Аналогичной операцией в алгебре служит преобразование, устанавливающее соответствие между числами и их многообразиями. Изоморфизм между алгеброй и геометрией позволяет алгебре приобретать геометрическую форму и наоборот.

Достаточно ввести понятие *гипоточка* (элемент пространства, точечность которого на единицу меньше точечности точки — пустое множество), чтобы записать элементы многомерного пространства в символике арабских цифр в виде конечного множества *0*, *1*, *2*, *3*, ..., *N*, полностью сходного с конечным множеством чисел *0*, *1*, *2*, *3*, ..., *N*.

Между операциями над элементами пространства и действиями над числами много общего. Так, например, пересечение элементов пространства, выраженное в аддитивной записи, напоминает сложение целых чисел. Аналитическое решение задач, выраженное в форме уравнений, сводится к операции исключения неизвестных.

Аналогичные приемы применяют и при графических решениях. Более того, в самой идее проецирования трехмерных объектов на плоскость проекции (основного метода начертательной геометрии) используется прием исключения одной из трех координат.

Соответствие между алгеброй и геометрией позволяет при решении математических задач не делать (с чисто формальной точки зрения) различия, каким способом оно осуществляется: аналитическим или графическим.

Различие между графическими построениями и алгебраическими преобразованиями, являющимися промежуточными операциями, которые приходится выполнять в процессе решения задачи, есть лишь формальная сторона вопроса. Она не может служить поводом для утверждения, что имеется принципиальное отличие между графическим и аналитическим методами решения. Более существенным оказывается не отличие двух методов решения, а то общее, что объединяет эти методы. Основанием для такого объединения является:

1) выполнение в определенной последовательности различных логических и арифметических (или графических) операций;

2) использование промежуточных результатов в ходе последующих операций;

3) необходимость изменять направление процесса решения в зависимости от результатов промежуточных операций.

Таким образом, для осуществления автоматизации процесса решения задач нужно иметь машину, которая должна:

— производить в определенной последовательности различные логические и арифметические операции, необходимые для решения задачи;

— иметь устройство для хранения исходных величин и промежуточных результатов;

— быть способной автоматически выбирать нужное продолжение дальнейшего процесса решения в зависимости от результатов промежуточных операций.

Всем этим требованиям отвечают электронные цифровые вычислительные машины. Что касается выполнения геометрических построений, то они необходимы, если решение задачи осуществляется вручную. При переходе к машинному решению оказывается возможным избежать таких построений (см. § 74). Последнее утверждение основано на богатом опыте, накопленном в результате механизации процесса ручного труда.

Известно, что машина выполняет какие-либо операции, взятые из сферы физической деятельности человека, не так, как это делает человек. В этом легко убедиться на простом примере: швейная машина, предназначенная для облегчения труда швеи, сшивает ткани лучше и быстрее, но не так, как это делает швея. Очевидно, машинизируя процессы, взятые из области умственной деятельности человека, мы встретимся с таким же явлением.

Можно показать, что использование ЭЦВМ для автоматизации процесса решения задачи графическим методом является не только возможным, но в ряде случаев и более логичным, чем применение таких машин для автоматизации процесса решения задач аналитическим способом.

В защиту такой постановки вопроса можно привести высказывание крупнейшего философа и математика Г. Лейбница (1646—1716), который впервые обратил внимание на перспективность использования двоичной системы счисления. Он писал, в частности, что "*... вычисление с помощью двоек, т. е. 0 и 1, в вознаграждение его длиннот является для науки основным и порождает новые открытия, которые оказываются полезными впоследствии даже в практике чисел, а особенно в геометрии, причиной чего служит то обстоятельство, что при сведении чисел к простейшим началам, каковы 0 и 1, всюду выявляется чудесный порядок*". Г. Лейбниц не имел в виду использование двоичной системы счисления в ЭЦВМ, но его прогноз был поистине гениальным. В ЭЦВМ применяется, как правило, двоичная система счисления.

И еще одно обстоятельство, на которое мы хотим обратить внимание читателя. Чертеж, являющийся формой задания исходных данных задачи, решение которой целесообразно осуществлять графическими методами, может быть расчленен на черные (принадлежащие линиям) и белые (определяющие свободное поле чертежа) элементарные площадки, т. е. любой чертеж может быть представлен в виде двоичных сигналов (черное — да, 1; белое — нет, 0), передаваемых в машину. Причем информацию о чертеже, выраженную в форме только двух резко отличающихся сигналов, можно получить и ввести в машину без участия человека. Это удобнее, чем трансформирование в такие же сигналы величин, входящих в качестве исходных данных в аналитические выражения.

Получив информацию об исходных данных задачи, ЭЦВМ может, по указанию человека, приступить к обработке этой информации по программе, составленной, в частности, и по алгоритму графического решения задач.

Все сказанное не оставляет сомнения в том, что имеется принципиальная возможность использовать ЭЦВМ для графического решения задач.

§ 72. ОСНОВНЫЕ ВОПРОСЫ ПРОБЛЕМЫ АВТОМАТИЗАЦИИ ПРОЦЕССА ГРАФИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Для выяснения вопросов, которые должны быть решены, чтобы полностью автоматизировать процесс решения задач, проследим за деятельностью человека, решающего задачу графическим путем. При решении задачи человек последовательно выполняет следующие операции:

1) выясняет требования поставленной задачи — какой вопрос следует решить;

2) знакомится с условиями задачи — видом и характером расположения геометрических фигур, входящих в исходные данные;

3) составляет и сохраняет в памяти (или записывает на бумаге) алгоритм решения;

4) на основании теорем и правил, хранящихся в памяти, осуществляет реализацию этого алгоритма путем выполнения необходимых геометрических построений;

5) убеждается в правильности полученного решения.

В выполнении всех перечисленных выше операций принимает участие головной мозг человека. При этом выполнение первой и второй операции немыслимо без связи головного мозга с внешним миром посредством органов чувств (зрения или слуха для выполнения первой операции и зрения — для второй операции). Третья операция, если не производится запись алгоритма, выполняется только головным мозгом. Четвертая операция выполняется рабочими органами (руками) под действием команд, поступающих от головного мозга и под его контролем. Пятая операция выполняется либо головным мозгом и органами зрения, либо головным мозгом, органами зрения и рабочими органами.

Проследим, в какой степени использование ЭЦВМ позволяет выполнить эти операции. Условия задачи, решаемой графическими методами, задаются в виде чертежа. Такая форма задания непосредственно не может быть использована машиной. Поэтому необходимо чертеж преобразовать в цифровой код и представить последний в "понятной" для машины форме. Для этого машина должна быть оборудована дополнительным устройством, которое могло бы самостоятельно, без участия человека, преобразовать чертеж в цифровой код.

Наиболее трудоемким является составление алгоритма решения задачи и его реализации на машине. Для автоматизации этого процесса необходимо разработать новый метод решения задач, учитывающий возможности ЭЦВМ, и на его основе составить программу работы машины.

Результаты решения на ЭЦВМ выдаются в цифровой форме. В связи с этим, чтобы получить ответ в виде чертежа, следует предусмотреть на выходе машины преобразователь цифровых величин в аналоговые (линии чертежа).

Таким образом, чтобы осуществить автоматизацию процесса графического решения задач, необходимо решить следующие вопросы:

1) создать конструкцию "читающего" устройства (преобразователя аналог — код);

2) разработать теорию обработки информации, полученной в результате преобразования чертежа в цифровой код;

3) разработать метод решения задач, учитывающий возможность его реализации на ЭЦВМ;

4) создать теоретическую базу для программирования графического решения задач, установив критерии, выполнение которых гарантирует получение правильного ответа;

5) создать конструкцию пишущего устройства (преобразователя код — аналог).

Если будут решены перечисленные выше вопросы, то три основные операции из пяти, которые выполняет человек при решении задачи графическими методами, могут быть выполнены техническими средствами без его участия. Несмотря на многообразие задач, решаемых графическими методами, каждое из таких решений состоит из комбинации небольшого числа однотипных операций, которые можно представить в виде стандартных подпрограмм (операторов); с помощью последних легко может быть составлена программа для решения любой задачи. Когда будут составлены программы, роль человека при решении задач сведется только:

1) к определению типа задачи;

2) к выбору необходимой программы или, в крайнем случае, составлению компилирующей программы из имеющегося набора операторов;

3) к установке чертежа, который содержит исходные данные задачи, в "читающее" устройство и чистого листа бумаги в преобразователь код — аналог ("пишущее" устройство).

Все остальные операции, связанные с чтением чертежа, решением задачи, проверкой правильности решения и графического изображения ответа, будут выполнены машиной без участия человека.

§ 73. МАШИННОЕ ЧТЕНИЕ ЧЕРТЕЖА

Независимо от того, решает ли задачу человек или ее решение будет поручено машине, первая операция процесса решения должна включать в себя ознакомление с исходными данными, т. е. чтение чертежа. Под выражением "прочесть чертеж" мы подразумеваем совершающийся в коре головного мозга процесс обработки информации о чертеже, полученной посредством органов зрения. В результате его выполнения мы получаем возможность представить, какие геометрические фигуры изображены на чертеже и каково их взаимное расположение.

Говоря о чтении чертежа машиной, мы вкладываем в это понятие иной смысл, а именно: *машина должна определить координаты полностью или частично черных растрэлементов и установить их принадлежность к каждой из заданных на чертеже линий или точке**. Такое определение основано на машинном методе графического решения задач, который будет изложен в следующем параграфе.

Так как ЭЦВМ может оперировать только с числами, представленными в виде электрических сигналов, то первым шагом на пути машинизации процесса чтения чертежа является:

1) выявление на поле чертежа элементарных площадок (растрэлементов), принадлежащих линии;

2) определение их координат;

3) преобразование последних из цифровой формы в электрическую.

Отмеченные выше преобразования могут быть реализованы аппаратурными средствами с помощью преобразователя аналог — код и счетчика координат. Выявление растрэлементов, принадлежащих линиям чертежа, может быть выполнено посредством развертки с помощью светового (или электронного) анализирующего луча, который, перемещаясь по определенному закону, последовательно, строка за строкой, "просматривает" (анализирует) все поле чертежа.

---

* Имеется в виду, что чертеж выполнен черными линиями.

Мы не будем останавливаться в рамках учебника по курсу начертательной геометрии на изложении теоретических основ и созданной на их базе программы "чтения" чертежа*

§ 74. МЕТОД МАШИННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Решение задач, исходные данные которых представлены в графической форме, целесообразно осуществлять графическими методами.

Для реализации процесса решения задач предполагается использовать цифровую электронно-вычислительную машину, принцип действия которой позволяет оперировать только с числами. Поэтому в процессе подготовки задачи для машинного решения необходимо осуществить ее арифметизацию, выбрать численный метод решения и составить расчетные формулы.

Таким образом, мы приходим к двум взаимно исключающим выводам: с одной стороны, форма задания исходных данных требует графического метода решения; с другой — реализация процесса решения на ЭЦВМ допускает применять только аналитический метод.

Использовать каждый из этих методов в том виде, в котором они обычно применяются, невозможно. Принцип действия и конструктивные особенности существующих ЭЦВМ не позволяют использовать их в качестве чертежной машины для выполнения всех тех геометрических построений, которые свойственны графическому методу решения. Трудности в использовании аналитического метода состоят в том, что для него необходимо иметь уравнения всех геометрических фигур, представленных на чертеже.

Для того чтобы составить (описать) уравнение геометрической фигуры, машина должна опознать ее. В настоящее время наука не располагает данными, которые необходимы для опознавания широкого круга материальных образов. Поэтому не представляется возможным составить алгоритм опознавания, а следовательно, и моделировать его на машине.

Из сказанного следует, что решение задачи, исходные данные которой представлены в графической форме, невозможно осуществить на ЭЦВМ, используя только аналитический или графический методы в их "чистом" виде. Необходимо разработать новый метод решения задач, учитывающий характер задания исходных данных и возможности вычислительной машины.

Этот метод должен отвечать двум основным требованиям: *во-первых*, решение должно осуществляться без каких-либо геометрических построений; *во-вторых*, обходиться без определения уравнений геометрических образов, заданных на чертеже (за исключением прямых и окружностей).

Для решения графическим методом не требуется знание уравнений геометрических образов; при аналитическом решении нет необходимости в геометрических построениях. Поэтому, если воспользоваться этими свойствами графического и аналитического методов, то можно с их помощью создать новый метод, удовлетворяющий отмеченным требованиям. Для этого достаточно, чтобы логика нового метода строилась на базе графического метода решения, а необходимые геометри-

---

*Подробно аспекты машинного "чтения" чертежа, а также другие вопросы автоматизации процесса графического решения задач изложены в книге С. А. Фролова "Кибернетика и инженерная графика". М.: Машиностроение, 1974.

ческие построения заменялись алгебраическими решениями, характерными для аналитического метода.

В новом методе фигурирует алгебра, но эта алгебра качественно отличается от той, с которой приходится иметь дело в аналитическом методе. Она заменяет собой геометрические построения, которые выполняются с помощью линейки и циркуля, т. е. в этом случае она ограничивается только операциями с уравнениями прямых и окружностей. Известно, что основу графического метода решения задач составляют различные геометрические построения, которые выполняются только для того, чтобы найти точки пересечения прямых и окружностей, проведенных в процессе решения задачи, как между собой, так и с линиями, заданными на чертеже. Иначе говоря, основной, наиболее существенной отличительной особенностью графического метода является выполнение в определенной логической последовательности операций по определению точки (точек) пересечения двух линий.

Решение задач на ЭЦВМ новым методом не противоречит принципам ее работы, так как этот метод позволяет использовать ее не в качестве чертежного агрегата, а как машину для определения координат точек пересечения двух линий, в общем случае заданных значением координат некоторой последовательности принадлежащих им точек (растрэлементов), выявленных в процессе автоматического "чтения" исходных данных.

Если при решении задачи по определению точки пересечения двух линий "вручную" не имеет значения, какие линии пересекаются, то для машинного решения мы должны четко различать следующие случаи:

1) пересечение двух прямых;
2) пересечение прямой с кривой (в частном случае с окружностью);
3) пересечение двух кривых (в частности, двух окружностей).

Иногда операция по нахождению координат точки пересечения двух прямых или прямой и кривой, если прямая занимает горизонтальное или вертикальное положение, может быть заменена определением на линии точки с заданным значением абсциссы (ординаты), если известна величина ее ординаты (абсциссы).

Итак, для автоматизации процесса графического решения задач с помощью ЭЦВМ ее функции могут быть сведены к выполнению арифметических операций по определению координат точки пересечения двух линий и решению логических задач, связанных с нахождением последовательности, в которой определяются координаты точек.

Если логическая схема решения (алгоритм) всецело зависит от условий поставленной задачи и вида исходных данных, то определение координат точек пересечения линий для всех задач одинаково. Отличие может состоять лишь в том, с каким из отмеченных выше случаев пересечения приходится иметь дело.

В отличие от человека для машины определение точки пересечения двух линий является не элементарной операцией, а задачей. Число и характер команд, которые должна выполнить машина для ее решения, во всех перечисленных выше случаях будут различными. Если для определения координат точки пересечения двух прямых (случай 1), или пересечения прямой и окружности, или двух окружностей (частные варианты случаев 2 и 3) машине достаточно решить систему уравнений, которыми описываются эти линии, то в общем варианте случая 2 (рис. 321) машина должна сначала на кривой выделить точки *1* и *2*, расположенные ближе к прямой (множество $M_1\ \{\ldots\}$), чем любые другие точки множества $M_2\ \{\ldots\}$; составить уравнение прямой, проходящей через эти точки, и лишь после этого приступить к определению координат точки

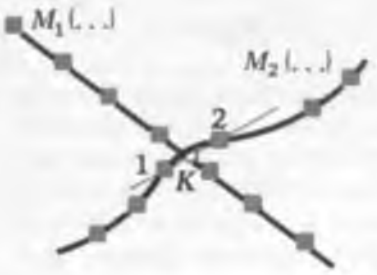


Рис. 321



Рис. 322

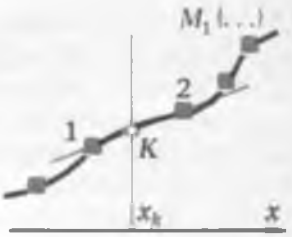


Рис. 323

пересечения K. В случае 3 (рис. 322) машина предварительно должна выделить две пары таких точек (по одной паре из каждого множества $M_1\{\ldots\}$ и $M_2\{\ldots\}$), чтобы расстояние между ними было наименьшим из всех возможных в данной ситуации, и только после этого приступить к составлению уравнений прямых, проходящих через эти точки *1*, *2* и *3*, *4*, и совместному решению этих уравнений.

Если одна из координат искомой точки известна, то в зависимости от того, на какой линии — прямой или кривой — определяется недостающая координата точки, возможны два варианта решения. В первом варианте (прямая линия) задача решается подстановкой значения x (или y) в уравнение прямой и решения этого уравнения относительно y (или x).

Во втором варианте (кривая линия) отыскания в множестве $M_1\{\ldots\}$ точки (растрэлемента) с абсциссой x является случайностью (рис. 323). Как правило, такой точки в $M_1\{\ldots\}$ не будет, поэтому можно говорить только о нахождении в $M_1\{\ldots\}$ точек *1* и *2*, у которых абсолютное значение разности $|x_K - x_1|$ и $|x_2 - x_K|$ меньше наперед заданной величины Δd. Затем машина составляет уравнение прямой, проходящей через выявленные точки *1* и *2*, и на ней определяет искомую точку (так, как это делается в первом варианте).

Геометрические построения при графическом способе решения задач выполняются с помощью линейки и циркуля, т. е. приведением простейших линий — прямых и окружностей.

Для ЭЦВМ "провести" прямую или окружность означает составить ее уравнение. Проведение прямых нужно для того, чтобы в дальнейшем выделить на них какие-либо точки (в частности, точки пересечения с другими линиями); проведение окружностей необходимо для решения таких задач, как:

1) определение на заданной линии точек, удаленных от данной точки на расстояние d;

2) определение на плоскости точек, удаленных от данной точки A на расстояние d_1 и от точки B на расстояние d_2.

При решении метрических задач машина должна уметь определять расстояние между двумя точками, делить отрезок в данном отношении.

Для того чтобы ЭЦВМ можно было поручить решать задачу, необходимо, чтобы она умела выполнять элементарные графические операции, входящие составной частью в решение этих задач.

В табл. 10 приведен перечень операций, которые должна "уметь" выполнять ЭЦВМ.

Запрограммировав перечисленные в табл. 10 операции, мы получим подпрограммы (операторы), с помощью которых можно составить компилирующую программу, пригодную для решения любой задачи, исходные данные которой представлены в графической форме.

Таблица 10

Содержание операции	Обозначение	Число команд
Определить уравнение прямой, проходящей через две данные точки	I	10
Определить уравнение прямой, параллельной данной, проходящей через заданную точку	II	7
Определить уравнение прямой, перпендикулярной данной, проходящей через заданную точку	III	9
Определить уравнение горизонтальной прямой, проходящей через заданную точку	IV	5
Найти точку пересечения двух заданных прямых	V	17
На данной прямой найти точку с заданным значением абсциссы	VI_a	11
На данной прямой найти точку с заданным значением ординаты	$VI_б$	10
Найти расстояние между двумя заданными точками	VII	8
Разделить заданный отрезок в данном отношении	VIII	5
На данной прямой найти точки, удаленные от данной точки, на заданное расстояние	IX_a	40
Определить уравнение прямой, проходящей через две точки, удаленные от двух данных точек на заданное расстояние	$IX_б$	11
Найти на заданной кривой две точки, ближайшие к данной прямой	X	23
Найти на двух заданных кривых по паре точек, чтобы две точки, выделенные на одной кривой, являлись ближайшими к двум выделенным точкам другой кривой	XI	26
Найти на заданной кривой точки, расстояние от которых до данной точки ближе всего к заданному расстоянию	XII_a	25
Найти точки пересечения кривой с окружностью, проведенной из заданного центра данным радиусом	$XII_б$	19
Определить уравнение прямой по совокупности ее точек	XIII	57

§ 75. СОСТАВЛЕНИЕ МАШИННЫХ АЛГОРИТМОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Простейший пример алгоритма — математическая формула, она указывает, над какими величинами и в какой последовательности необходимо выполнять арифметические операции для решения более сложных задач. Если при графическом методе процесс решения нельзя записать в виде формулы, то это можно сделать с помощью схемы счета, указывающей последовательность выполнения различных геометрических операций, реализуемых с помощью операторов, приведенных в табл. 10.

Установим алгоритм и запишем его в виде схемы счета, составленной из стандартных операторов для решения задачи по определению точки встречи прямой с плоскостью (рис. 324). Пусть заданы плоскость α ($a \parallel b$) и пересекающая ее прямая m. Требуется найти точку $K = m \cap \alpha$.

Мы знаем, что для решения этой задачи необходимо прямую m заключить в плоскость γ; найти прямую пересечения плоскостей $\gamma \cap \alpha = n$; отметить проекцию точки K, в которой пересекаются одноименные проекции заданной прямой m и полученной линии пересечения n. Все необходимые построения приведены на рис. 324. Индексация арабскими цифрами указывает на последовательность определения точек.

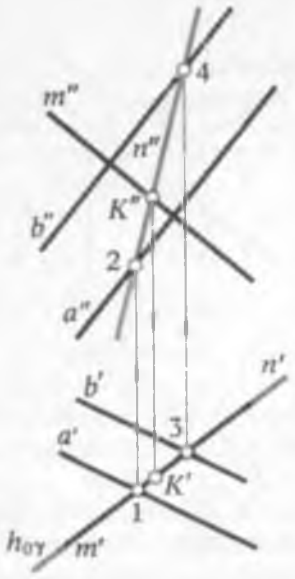


Рис. 324

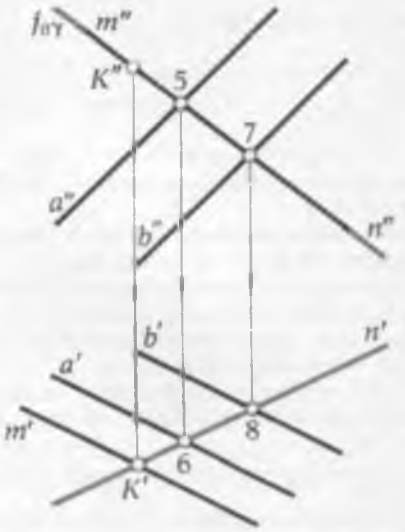


Рис. 325

В рассматриваемом случае схема счета, представляющая алгоритм решения задачи, записанный в символах стандартных операторов (табл. 10), примет вид

$$V_1\,III_2\,V_3\,V_4\,III_5\,V_6\,I_7\,V_8\,III_9\,V_{10}.$$

Выполнение двух операторов $III_n V_{n+1}$ можно заменить одним оператором VI_a*. Окончательно схема счета машинного алгоритма запишется

$$\begin{matrix} V_1 & VI_{a_2} & V_3 & VI_{a_4} & I_5 & V_6 & VI_{a_7}. \\ (1) & (2) & (3) & (4) & & (K')\,(K'') & \end{matrix} \qquad (5)$$

Арабские цифры и буквы в скобках указывают точку, обозначенную на чертеже, которая получается в результате выполнения оператора, под которым она поставлена.

Проследим, как будет изменяться схема счета, а следовательно, и алгоритм решения задачи в зависимости от взаимного расположения геометрических фигур как между собой, так и по отношению к плоскостям проекций.

Внесем изменение в эпюр, задающий исходные данные предыдущей задачи (см. рис. 324) так, чтобы горизонтальная проекция m' прямой m заняла положение, параллельное горизонтальным проекциям a' и b' прямых a и b (рис. 325).

В данном случае решить задачу так, как в предыдущем случае, не представляется возможным. Действительно, если мы заключим прямую m в горизонтально проецирующую плоскость γ, а затем будем определять с помощью оператора V точку *1*, то сделать это нам не удастся, так как пересечение a'' и b'' произойдет в несобственной точке ($a'' \cap b'' = 1_\infty$). По той же причине нельзя определить и точку *3*. Не имея точек *1* и *3*, мы не получим точек *2* и *4*, а следовательно, нам не удастся найти проекцию n'' прямой n. Но эта задача может быть решена по схеме счета (5), если решение начать с фронтальных проекций (см. рис. 325).

---

* Такая замена целесообразна, так как она уменьшает затраты машинного времени. На выполнение двух операторов III, V требуется 26 команд, оператор VI_a реализуется с помощью только 11 команд.

Как следует из рис. 325, схема счета по формальным признакам ничем не отличается от предыдущей:

$$\begin{matrix} \text{V}\ \ \text{VI}_{\text{а}}\ \ \text{V}\ \ \text{VI}_{\text{а}}\ \ \text{I}\ \ \text{V}\ \ \text{VI}_{\text{а}}. \\ (5)\ (6)\ (7)\ (8)\quad (K')(K'') \end{matrix} \qquad (6)$$

Условимся считать этот путь вторым вариантом решения в отличие от первого варианта, описанного схемой счета (5).

Когда одна из заданных геометрических фигур (прямая или плоскость) занимает проецирующее положение, решение задачи представляется следующими схемами счета:

а) прямая — проецирующая, плоскость общего положения задана параллельными прямыми (рис. 326, *а*):

$$\begin{matrix} \text{VI}_{\text{б}}\ \ \text{VI}_{\text{а}}\ \ \text{VI}_{\text{б}}\ \ \text{VI}_{\text{а}}\ \text{I}\ \ \text{V}\ \ \text{VI}_{\text{а}}; \\ (9)\ \ (10)\ (11)\ (12)\ \ (K')(K'') \end{matrix} \qquad (7)$$

б) прямая — проецирующая, плоскость общего положения задана следами (рис. 326, *б*):

$$\begin{matrix} \text{VI}_{\text{б}}\ \ \text{VI}_{\text{а}}\ \ \text{II}\ \ \text{V}; \\ (13)\ (14)\quad (K') \end{matrix} \qquad (8)$$

в) плоскость — проецирующая, прямая общего положения (рис. 326, *в*):

$$\begin{matrix} \text{V}\ \ \text{VI}_{\text{а}}. \\ (K')\ (K'') \end{matrix} \qquad (9)$$

Все многообразие случаев задания исходных данных задачи по определению точки встречи прямой с плоскостью может быть отнесено к семи альтернативным вариантам. Кроме схем счета (5), (6), (7), (8), (9) отметим еще:

$$\begin{matrix} \text{V}\ \ \text{VI}_{\text{а}}\ \ \text{II}\ \ \text{V}\ \ \text{VI}_{\text{а}} \\ (15)(16)\quad (K'')(K') \end{matrix} \qquad (10)$$

(рис. 327, *а*)

$$\begin{matrix} \text{VI}_{\text{б}}\ \ \text{VI}_{\text{а}}\ \ \text{VI}_{\text{б}}\ \ \text{VI}_{\text{а}} \\ (17)\ (18)\ (K'')\ \ (K') \end{matrix} \qquad (11)$$

(рис. 327, *б*)

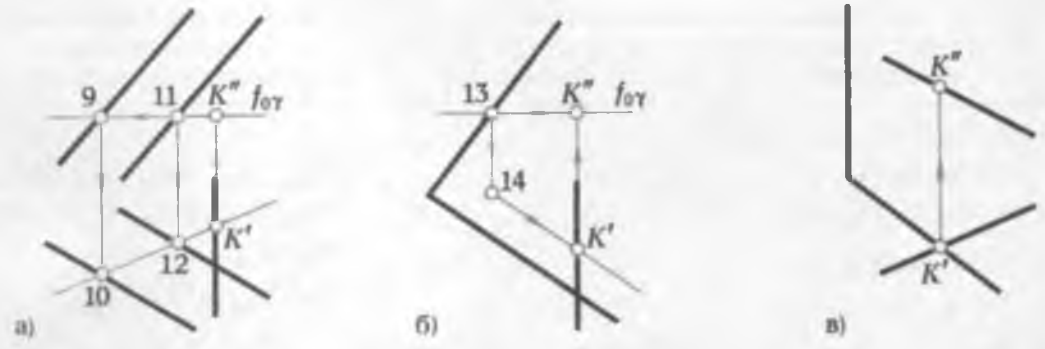


Рис. 326

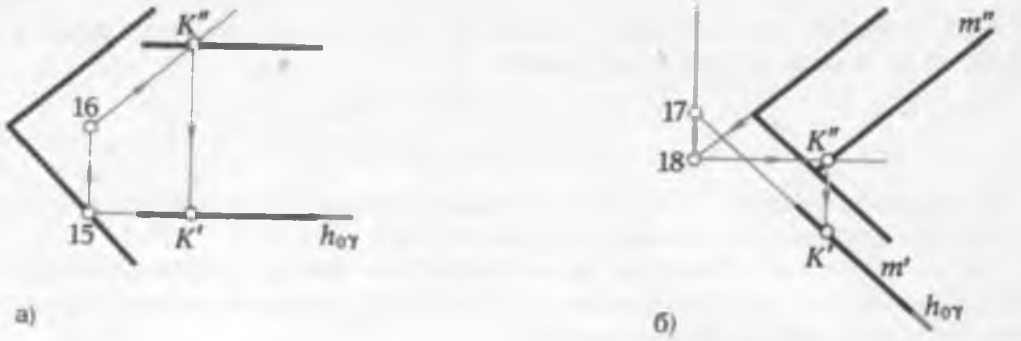


Рис. 327

Приведенные примеры иллюстрируют изменение алгоритма решения одной и той же задачи в зависимости от характера расположения геометрических фигур.

Программирование решения многих задач является трудоемким процессом. Поэтому, чтобы каждый раз, когда машина приступает к решению задачи с другими исходными данными, не составлять новую программу (схему счета, которая является управляющей программой), следует создать единый (обобщенный) алгоритм, запрограммировав который получим программу, пригодную для решения всех вариантов данной задачи. Чтобы выяснить логическую схему построения обобщенного алгоритма, выпишем составленные ранее схемы счета частных алгоритмов в виде табл. 11.

Из табл. 11 (строка 1) видно, что если после выполнения оператора V_1 точка пересечения найдена, то следует переходить к выполнению оператора $VI_{а_2}$, если и в этом случае точка определяется, то машина должна приступить к выполнению следующего оператора V_3 и т. д., пока не будет выполнен оператор $VI_{а_7}$, завершающий решение задачи.

Это решение соответствует исходным данным, показанным на рис. 324. Если при решении задачи по варианту I после выполнения оператора V_6 точку не получили (случай, изображенный на рис. 326,*а*), то следует переходить к выполнению группы операторов $VI_{б_{15}}\ VI_{а_{16}}\ VI_{б_{17}}\ VI_{а_{18}}\ I_{19}\ V_{20}$ (табл. 11, строка 2). Если в результате выполнения оператора $VI_{б_{17}}$ новой точки не будет, то следует переходить к выполнению операторов $II_{21}\ V_{22}$ (табл. 11, строка 3, рис. 326, *б*).

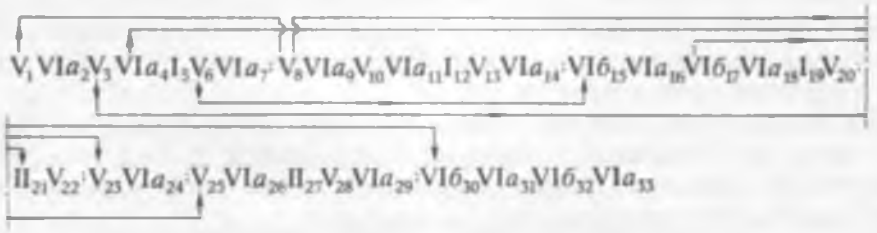
Таблица 11

№ строки	Схема счета общего случая		Необходимое добавление в основную схему для решения частных случаев
	Вариант I	Вариант II	
1	$V_1\ VI_{а_2}\ V_3\ VI_{а_4}\ I_5\ V_6\ VI_{а_7}$		
2	$V_1\ VI_{а_2}\ V_3\ VI_{а_4}\ I_5\ V_6$ . . .	. . . . .	$VI_{б_{15}}\ VI_{а_{16}}\ VI_{б_{17}}\ VI_{а_{18}}\ I_{19}\ V_{20}$
3	$V_1\ VI_{а_2}\ V_3\ VI_{а_4}\ I_5\ V_6$ . . .	. . . . .	$VI_{б_{15}}\ VI_{а_{16}}\ VI_{б_{17}}$ ..... $II_{21}\ V_{22}$
4	$V_1\ VI_{а_2}\ V_3\ VI_{а_4}$	. . . . .	$V_{23}\ VI_{а_{24}}$
5	$V_1\ VI_{а_2}\ V_3$	. . . . .	$V_{25}\ VI_{а_{26}}\ II_{27}\ V_{28}\ VI_{а_{29}}$
6	V_1	$V_8\ VI_{а_9}\ V_{10}\ VI_{а_{11}}\ I_{12}\ V_{13}\ VI_{а_{14}}$	
7	V_1	. . . . .	$VI_{б_{30}}\ VI_{а_{31}}\ VI_{б_{32}}\ VI_{а_{33}}$

Отсутствие новой точки после выполнения оператора VI_{a_4} может служить указанием для перехода к выполнению операторов V_{23} $VI_{a_{24}}$ (табл. 11, строка 4, рис. 326, *в*). В том случае, когда не найдена новая точка после выполнения оператора V_3, переходят к выполнению группы операторов V_{25} $VI_{a_{26}}$ II_{27} V_{28} $VI_{a_{29}}$ (табл. 11, строка 5, рис. 327, *а*).

Если при выполнении оператора V_1 точку не получили, переходят к выполнению варианта II решения (табл. 11, строка 6, рис. 325). И, наконец, если точку не получают при выполнении операторов V_1 и V_8, то необходимо переходить к выполнению участка подпрограммы, состоящего из операторов $VI_{б_{30}}$ $VI_{a_{31}}$ $VI_{б_{32}}$ $VI_{a_{33}}$ (табл. 11, строка 7, рис. 327, *б*).

Схемы счета для решения частных вариантов задачи, сведенные в табл. 11, могут быть объединены в одну схему счета, представляющую обобщенный алгоритм:



(12)

Для наглядности и выявления структуры построения обобщенного алгоритма для решения задачи по определению точки встречи прямой с плоскостью полученную схему счета целесообразно представить графически в виде "дерева", устанавливающего связь между исходными данными задачи и алгоритмом ее решения (рис. 328).

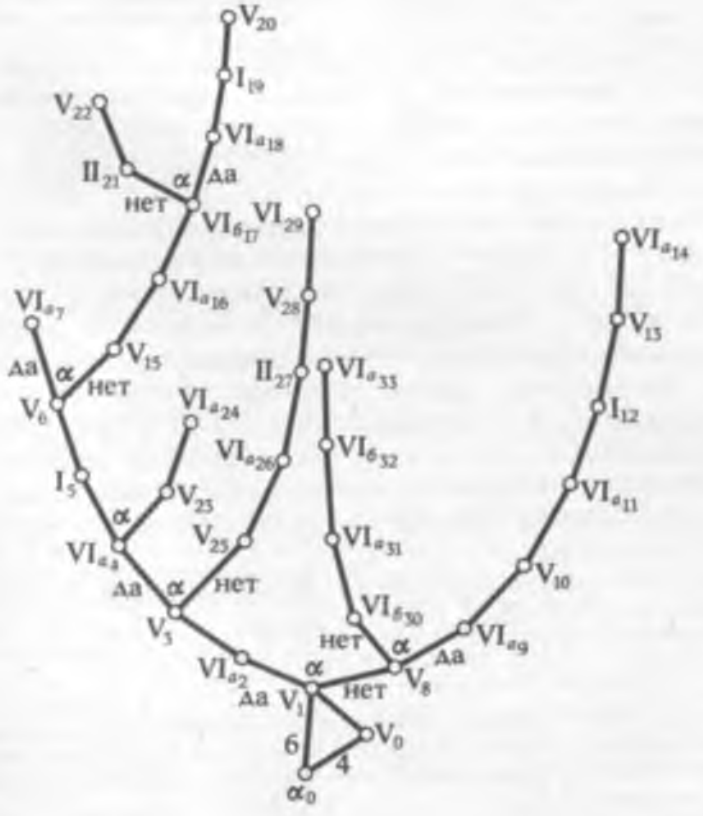


Рис. 328

Из приведенной схемы видно, что машина сможет самостоятельно выбрать правильный путь решения, если программа будет составлена так, чтобы она начала работать по "жесткой" подпрограмме (5) основного (вариант I) алгоритма. После выполнения оператора V_1 выполняется проба α, позволяющая выяснить, определяется ли точка в результате его выполнения*. Если да, то машина приступает к выполнению оператора VI_{a_2}, если нет, то ей следует выполнять оператор V_3. Аналогичные пробы выполняются и после операторов V_3, VI_{a_4}, V_6. По результатам этих проб машина либо продолжает решение по основной программе, если точка определена, либо приступает к выполнению другого участка программы, когда точка не получена. Выбор нового участка зависит от того, при выполнении какого оператора не получена новая точка пересечения.

Пользуясь схемой счета (12) обобщенного алгоритма, машина самостоятельно решает любую задачу по нахождению точки встречи прямой с плоскостью, независимо от характера расположения исходных данных и варианта задания плоскости **.

Нахождение точки встречи прямой с плоскостью является элементарной, но часто встречающейся задачей, входящей в состав алгоритма для решения более сложных задач, например, задач по определению линии сечения линейчатой поверхности плоскостью.

Обозначим через R схему счета (алгоритм) для решения задачи по нахождению точки встречи прямой с плоскостью. Тогда в общем случае алгоритм для решения задачи по определению линии сечения линейчатой поверхности плоскостью в символической форме может быть записан:

$$\Sigma_0(\alpha_i);\ \Sigma_1(P_i);\ \Sigma_2(S_i);\ \Sigma_3(RP_i), \qquad (13)$$

где $\Sigma_0(\alpha_i)$ — различные пробы, позволяющие выбрать правильный путь решения в зависимости от вида и характера расположения исходных данных; $\Sigma_1(P_i)$ — логическая последовательность элементарных операций для нахождения точки, через которую проходит прямолинейная образующая линейчатой поверхности; $\Sigma_2(S_i)$ — последовательность выполнения операторов I или II для нахождения проекций прямолинейных образующих; $\Sigma_3(RP_i)$ — вспомогательные операции.

Выполнение R для всех задач рассматриваемого типа одинаково, оно может меняться только в пределах вариантов задания и расположения секущей плоскости. При определении сечения линейчатой поверхности плоскостью задача сводится к многократному выполнению подпрограммы R — определению точки встречи прямой с плоскостью. Содержание (Σ_1, Σ_2, Σ_3) продиктовано задачей определения частных положений последовательности прямолинейных образующих линейчатой поверхности; очевидно, для различных поверхностей оно будет различным.

Проследим изменение Σ_1, Σ_2, Σ_3 в зависимости от вида линейчатой поверхности.

---

* На схеме (рис. 328) указаны также проба α_0 и оператор V_0, α_0 — проба на число геометрических образов, заданных на чертеже. Если $N = 4$, то прежде чем приступить к выполнению основной программы, необходимо определить координаты точки схода следов (оператор V_0).

** Исключение составляют два случая: если плоскость, проходящая через ось x, задана следами; если пересекающая плоскость прямая — профильная.

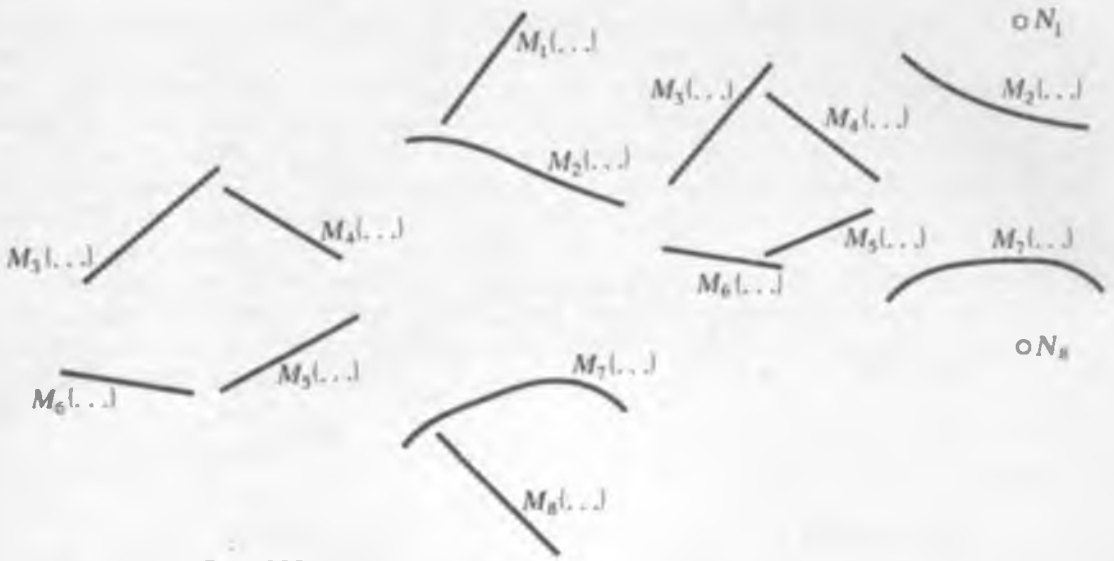


Рис. 329

Рис. 330

ПРИМЕР 1. Определить сечение цилиндрической поверхности плоскостью (рис. 329).

Для определения линии сечения произвольной цилиндрической поверхности плоскостью может быть рекомендован следующий план машинного решения задачи:

1) из массива ячеек памяти, где хранятся координаты растрэлементов, принадлежащих горизонтальной проекции криволинейной направляющей (множества $M_7\{\ldots\}$), выбрать точку $1'_1$, имеющую минимальное значение x;

2) найти на фронтальной проекции криволинейной направляющей $M_2\{\ldots\}$ точку $1''_1 \in x = x_{(\cdot)}1'_1$;

3) определить уравнение прямой $n \ni 1'_1$ и $\parallel$ прямой, определяемой множеством растрэлементов $M_8\{\ldots\}$;

4) определить уравнение прямой $n''_1 \ni 1''_1$ и $\parallel$ прямой $M_1\{\ldots\}$;

5) найти точку встречи прямой n_1 с плоскостью α, заданной пересекающимися прямыми, представленными множествами $M_3\{\ldots\}$, $M_4\{\ldots\}$ и $M_5\{\ldots\}$, $M_6\{\ldots\}$.

Чтобы найти вторую точку, принадлежащую искомой линии сечения, нужно определить уравнения проекции следующей прямолинейной образующей поверхности. Для этого повторяем операции, предусмотренные пп. 1...4. Для определения положения второй (n'_2) и всех последующих (n'_3, n'_4, ..., n'_n) проекций прямых берем на кривой $M_7\{\ldots\}$ следующую из записанных точку (растрэлемент). После того, как будут определены уравнения проекций n'_2 и n''_2 ($n'_2 \| n'_1$ и $n''_2 \| n''_1$), машина приступает к выполнению п. 5. Цикл из операций, предусмотренных в пп. 1... 5, выполняется до тех пор, пока на кривой $M_7\{\ldots\}$ не останется ни одной точки. Тогда в символике машинных операторов операции Σ_1, Σ_2, Σ_3 можно записать:

$$\Sigma_1(P_i) - \text{П III X I V};^* \qquad (14)$$

$$\Sigma_2(S_i) - \text{II II}; \qquad (15)$$

$$\Sigma_3(RP_i) - R. \qquad (16)$$

Схема счета программы для решения поставленной задачи примет вид

$$\text{П}_1\,\text{III}_2\,\text{X}_3\,\text{I}_4\,\text{V}_5\,\text{II}_6\,\text{II}_7\,\text{R}_8. \qquad (17)$$

Цикл П ... R_8 выполняется до тех пор, пока в $M_7\{\ldots\}$ не останется ни одной точки.

ПРИМЕР 2. Определить сечение конической поверхности плоскостью (рис. 330)

Отличие решения этой задачи от предыдущей будет состоять лишь в том, что выражение (15) может быть записано $\Sigma_2(S_i) -$ I I и схема счета примет вид

$$\underbrace{\text{П}_1\,\text{III}_2\,\text{X}_3\,\text{I}_4\,\text{V}_5\,\text{I}_6\,\text{I}_7\,R_8}. \qquad (18)$$

ПРИМЕР 3. Определить сечение однополостного гиперболоида плоскостью (рис. 331).

Для определения характера и последовательности выполнения операторов, входящих в Σ_1, Σ_2 и Σ_3, воспользуемся свойством направляющих рассматриваемой поверхности, состоящим в том, что если спроецировать точку, взятую на одной из трех направляющих (принад-

---

* П — операция обращения к первой записанной в $M_7\{\ldots\}$ массиве точке.

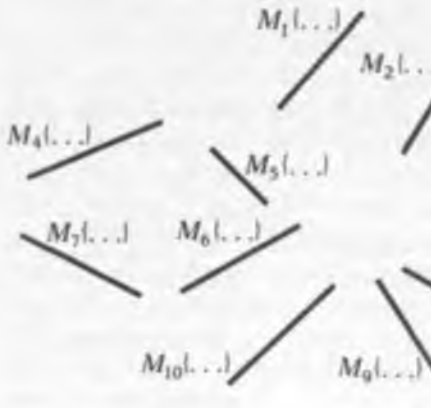


Рис. 331

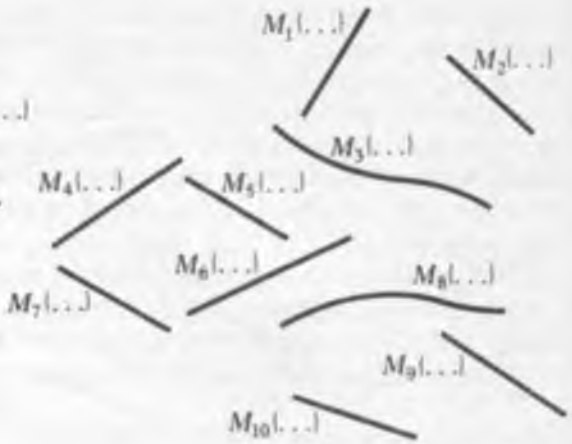


Рис. 332

лежащих одному семейству), на плоскость α в направлении двух других направляющих и полученные точки соединить с соответствующими проекциями (следами) двух других направляющих, то полученные прямые будут принадлежать второму семейству образующих.

Точки пересечения соответственных прямых, принадлежащих разным семействам, определяют кривую второго порядка — сечение однополосного гиперболоида плоскостью α. В этом случае выражения (14), (15) и (16) примут вид

$$\Sigma_1(P_i) - \text{П III V I V};$$

$$\Sigma_2(S_i) - \text{П II П II};$$

$$\Sigma_3(RP_i) - \text{R R R R I I V III V}$$

для первого цикла, а для всех последующих циклов

$$\Sigma_3(RP_i) - \text{R R I I V III V}.$$

Схема счета программы запишется в виде

$$\text{П}_1\text{III}_2\text{V}_3\text{I}_4\text{V}_5\text{II}_6\text{II}_7\text{II}_8\text{II}_9R_{10}R_{11}R_{12}R_{13}\text{I}_{14}\text{I}_{15}\text{V}_{16}\text{III}_{17}$$

$$\text{V}_{18}\text{П}_{19}\text{III}_{20}\text{V}_{21}\text{II}_{22}\text{II}_{23}\text{II}_{24}\text{II}_{25}R_{26}R_{27}\text{I}_{28}\text{I}_{29}\text{V}_{30}\text{III}_{31}\text{V}_{32}$$

(19)

ПРИМЕР 4. Определить сечение коноида плоскостью (рис. 332).

Решение этой задачи аналогично предыдущей с той лишь разницей, что точки следует брать на криволинейной направляющей и проецировать их на секущую плоскость в направлении прямолинейной направляющей коноида.

Схема счета в этом случае примет вид

$$\text{П}_1\text{III}_2\text{X}_3\text{I}_4\text{V}_5\text{II}_6\text{II}_7\text{II}_8\text{II}_9R_{10}R_{11}R_{12}R_{13}\text{I}_{14}\text{I}_{15}\text{V}_{16}\text{III}_{17}\text{V}_{18}$$

$$\text{П}_{19}\text{III}_{20}\text{X}_{21}\text{I}_{22}\text{V}_{25}\text{II}_{24}\text{II}_{25}\text{II}_{26}\text{II}_{27}R_{28}R_{29}\text{I}_{30}\text{I}_{31}\text{V}_{32}\text{III}_{33}\text{V}_{34}$$

(20)

Чтобы машина самостоятельно (без участия человека) могла выбрать правильный путь решения задачи, ей должна быть известна поверхность, линию пересечения с которой требуется определить. Признаками, с помощью которых машина сможет "распознать" по эпюру Монжа, с какой поверхностью она имеет дело при решении задачи, служат:

1) присутствие точечного образа;
2) отсутствие криволинейных образов;
3) число криволинейных образов.

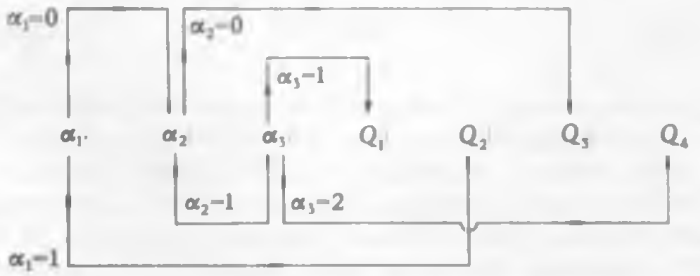
Эти признаки положены в основу проб, составляющих содержание $\Sigma_0(\alpha_i)$ [из выражения (13)], которые должна выполнить машина для выбора нужного варианта решения.

Обозначим:

а) схемы счета (17) — Q_1; (18) — Q_2; (19) — Q_3; (20) — Q_4;

б) пробы: α_1 — проба на наличие точечного образа, если точечный образ есть ($\alpha_1 = 1$), то выполняется массив Q_2, если нет ($\alpha_1 = 0$), то следует переходить к пробе α_2; α_2 — проба на наличие криволинейного образа, если такой образ есть ($\alpha_2 = 1$), то необходимо выполнять пробу α_3, если нет ($\alpha_2 = 0$), то машина должна приступить к выполнению массива Q_3; α_3 — проба на число криволинейных образов, если образ один ($\alpha_3 = 1$), то выполняется массив Q_1, если два ($\alpha_3 = 2$), то машина приступает к выполнению массива Q_4.

Вариант задания секущей плоскости не влияет на характер поиска, так как при составлении признаков прямолинейные образы не учитывались. В общем виде схема счета программы для решения рассмотренных задач примет вид



§ 76. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНОГО МАШИННОГО АЛГОРИТМА

Решение одной и той же задачи может быть осуществлено различными графическими способами, каждому из которых соответствует свой машинный алгоритм. Возникает вопрос, какому из них отдать предпочтение? Чтобы ответить на этот вопрос, достаточно сопоставить между собой "схемы счета" сравниваемых алгоритмов.

Сравнение осуществляется путем подсчета суммарного числа машинных операций (команд), которые необходимо выполнить для реализации алгоритма на ЭЦВМ. С этой целью в графе 3 табл. 10 указано число команд, которые должна выполнить машина для реализации перечисленных в таблице стандартных операторов.

Поясним сказанное на примере: пусть требуется определить расстояние от точки A до плоскости α (рис. 333).

Эта задача может быть решена различными способами, в том числе и теми, что представлены на рис. 334 и 335. В первом случае решение осуществляется без применения способов преобразования (рис. 334).

Во втором плоскость общего положения α переведена во фронтально проецирующее положение с помощью перемещения $\| \pi_1$ (рис. 335). Выясним, какое решение требует меньшей затраты машинного времени. Для этого составим схемы счета для каждого варианта решения.

Схема счета, отражающая логику графического решения задачи, без применения способов преобразования будет иметь вид

$$\underset{(1)}{\mathrm{III}_1}\ \underset{(2)}{\mathrm{V}_2}\ \underset{(3)}{\mathrm{VI}_{a_3}}\ \underset{(4)}{\mathrm{V}_4}\ \mathrm{VI}_{a_5}\ \mathrm{I}_6\ \underset{(5)}{\mathrm{III}_7}\ \underset{(6)}{\mathrm{V}_8}\ \mathrm{VI}_{a_9}\ \mathrm{II}_{10}\ \underset{(7)}{\mathrm{VI}_{6_{11}}}\ \mathrm{VII}_{12}\ \underset{(8)}{\mathrm{III}_{13}\ \mathrm{IX}_{a_{14}}\ \mathrm{VII}_{15}}.$$

Схема счета решения этой же задачи с применением способа параллельного перемещения может быть записана:

$$\underset{(1)}{\mathrm{VI}_{a_1}}\ \underset{(2)}{\mathrm{III}_2\ \mathrm{V}_3}\ \underset{(3)}{\mathrm{VII}_4}\ \underset{(4)}{\mathrm{IX}_{a_5}}\ \underset{(5)}{\mathrm{III}_6\ \mathrm{II}_7\ \mathrm{V}_8\ \mathrm{I}_9\ \mathrm{III}_{10}\ \mathrm{V}_{11}}\ \underset{(6)}{\mathrm{VII}_{12}\ \mathrm{IX}_{a_{13}}\ \mathrm{III}_{14}\ \mathrm{II}_{15}\ \mathrm{V}_{16}\ \mathrm{III}_{17}\ \mathrm{V}_{18}}\ \underset{(7)}{\mathrm{VII}_{19}}\ \underset{(8)}{}.$$

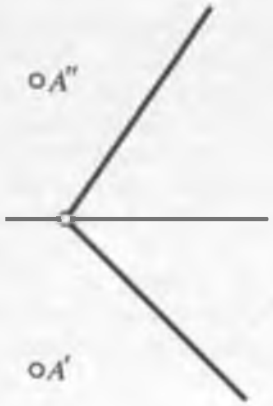


Рис. 333

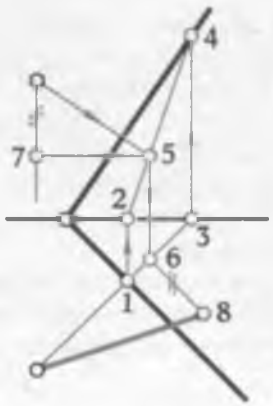


Рис. 334

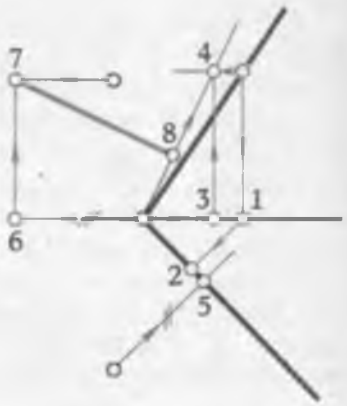


Рис. 335

Подставив число команд, которые необходимо выполнить для каждого оператора, и суммировав их, мы получим: для первого варианта — 195 команд, для второго варианта — 278. Если условно принять, что время выполнения одной команды одинаково для различных команд, то можно сделать вывод, что первый вариант решения лучше. Машина затратит на 30% меньше времени, чем решая эту же задачу по второму варианту. Что касается точности решения, то в обоих случаях она будет одинаковой (определяется точностью задания исходных данных).

Уместно отметить, что, переходя на машинный метод решения задач, мы обнаруживаем, что не все те способы решения, которым следовало отдать предпочтение при решении задачи "вручную", оказываются удобными для машины. И наоборот, громоздкий, нерациональный способ, если он выполняется с помощью линейки и циркуля, может дать весьма рациональное машинное решение, т. е., переходя на машинный способ решения, образно говоря, необходимо произвести "переоценку ценностей".

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Перечислите основные вопросы, которые должны быть решены для осуществления автоматизации процесса графического решения задач.
2. Нарисуйте структурную схему установки, включающую ЭЦВМ, которая обеспечивает комплексную автоматизацию процесса графического решения задач, и дайте объяснение назначения всех элементов, входящих в схему.
3. Что подразумевается под термином" машинное чтение чертежа"?
4. Каким образом осуществляется выявление растрэлементов, принадлежащих линии чертежа, и как определяется значение координат этих растрэлементов?
5. Каким требованиям должен отвечать машинный метод решения задач, исходные данные которых представлены в графической форме?
6. В чем сущность машинного метода решения задач?
7. Что такое стандартный оператор?
8. Что такое схема счета и что служит основанием для ее составления?
9. Составьте схему счета для машинного решения задач:

а) определить расстояние между двумя плоскостями;

б) определить точки встречи прямой с поверхностью прямого конуса, цилиндра, сферы;

в) найти линию пересечения поверхностей сферы и кругового цилиндра, ось которого не проходит через центр сферы.

10. Как определяется рациональный машинный алгоритм?
11. Определите, какой способ решения задачи по нахождению расстояния между скрещивающимися прямыми будет наиболее целесообразным для машины:

а) без способов преобразования;

б) с использованием способа замены плоскостей проекций;

в) способом параллельного перемещения.

С.А. ФРОЛОВ

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Глава I

Метод проекций

Глава II

Способы преобразования ортогональных проекций

Глава III

Линия

Глава IV

Поверхность

Глава V

Позиционные задачи

Глава VI

Метрические задачи

Глава VII

Развертка поверхностей

Глава VIII

Аксонометрические проекции

Глава IX

Использование ЭЦВМ для графического решения задач



1 р. 20 к.