МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН
ТАШКЕНТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
АБУ РАЙХАНА БЕРУНИ

Т.Д.Азимов

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ ПО НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Учебное пособие

Дополненное второе издание

ТАШКЕНТ – 2008

УДК 514.18

Конспект лекций по начертательной геометрии/ Т.Д.Азимов - Ташкент, ТашГТУ, 2008.

Настоящие лекции по начертательной геометрии составлены на основании типовой программы высшего профессионального образования и предназначены для образовательных направлений высшего образования: инженерия и инженерное дело, промышленность и обработка по отраслям, экология и природопользование, охрана жизнедеятельности, профессионально-педагогическая подготовка-В520000, В 540000, В 850000, В 860000, В160000.

При составлении курса лекций автор основывался на свой многолетний опыт по методике чтения лекций и на опыт профессорско-преподавательского состава кафедры.

Курс лекций предназначен для студентов механического, энергетического, нефти и газа, горно-геологического, электроники, автоматики и вычислительной техники, инженерно-педагогического факультетов.

Кроме того, настоящим курсом лекции могут пользоваться студенты инженерно-экономического факультета, В341100-менеджмент, В211200-дизайн (искусство), В34160-информационные системы в экономике.

Конспект лекции составлен доступно для студентов и в короткие сроки позволяет освоить темы курса. Он предназначен также для самостоятельного развития пространственного мышления при решении практических задач начертательной геометрии.

Печатается по решению научно-методического совета Ташкентского государственного технического университета.

Рецензенты: ст. преп. Надырова Н.А. (филиал РГУ «Нефть и газ» им.И.М.Губкина);

доц. Собирова Д.У.(ТашГТУ)

Обозначения и символы

Обозначения	Содержание
O x y z	Натуральная система координат.
$[ox)$	Ось абсцисса.
$[oy)$	Ось ордината.
$[oz)$	Ось аппликата.
H, V, W	Плоскости проекции.
H	Горизонтальная плоскость проекций.
V	Фронтальная плоскость проекций.
W	Профильная плоскость проекций.
Q_I , Q_{II}	Биссекто рные плоскости.
A, B, C,I, II, III	Точки пространства.
a, b, c, 1, 2, 3	Горизонтальные проекции точек.
a', b', c', $1'$, $2'$, $3'$	Фронтальные проекции точек.
a'', b'', c'' $1''$, $2''$, $3''$	Профильные проекции точек.
A (x, y, z)	Координаты точки A.
J	Ось вращения.
i	Горизонтальная проекция оси проекции.
i'	Фронтальная проекция оси вращения.
i''	Профильная проекция оси вращения.
(AB)	Прямая линия.
(a b)	Горизонтальная проекция прямой AB.
(a' b')	Фронтальная проекция прямой AB.
(a'' b'')	Профильная проекция прямой AB.
$\|AB\|$	Расстояние между точками A и B (длина отрезка AB)
$[AB)$	Луч с началом в точке A.
$[AB]$	Отрезок прямой линии.
M_H , N_V	Следы прямой линии.
$M_H = (AB) \cap H$	Горизонтальный след прямой линии.
$m_H \equiv M_H$	Горизонтальная проекция горизонтального следа прямой AB; причем m_H совпадает с M_H
m_H'	Фронтальная проекция горизонтального следа прямой линии
m_H''	Профильная проекция горизонтального следа прямой линии.
$N_V = (AB) \cap V$	Фронтальный след прямой линии.
n_V	Горизонтальная проекция фронтального следа

	прямой линии.
$n_V' \equiv N_V$	Фронтальная проекция фронтального следа прямой линии.
n_V''	Профильная проекция фронтального следа прямой линии.
P, Q, R, T	Плоскости в пространстве.
P_V, P_H, P_W	Горизонтальный, фронтальный и профильный следы плоскости P.

Символы.	Содержание.
$=$	Результат, равенство.
$\equiv$	Совпадение.
$\cong$	Конгруэнтность.
$\sim$	Подобие.
$\parallel$	Параллельность.
$\perp$	Перпендикулярность.
$\dot{-}$	Скрещивающиеся прямые.
$\in$	Принадлежит.
$\subset$ или $\supset$	Содержит, включает в себя, проходит через.
$\cap$	Пересекает (пересечение множества).
$\cup$	Объединяет (объединение множества).
$\underline{\cup}$	Касание.
$/$	Отрицание высказывания.
$\varnothing$	Пустое множество.
$\varnothing_к$	Коническая поверхность.
$\varnothing_ц$	Цилиндрическая поверхность.
$\wedge$	Союз «и» (« и при этом ») - конъюнкция предложения.
$\vee$	Союз «или» («либо») - дизъюнкция предложения.
$\Rightarrow$	«Если..., » то, «следовательно» - импликация.
$\Leftrightarrow$	«Если..., то ..., » - в обе стороны, эквивалентность.
$\forall$	«Для всякого», «для всех», для любого – квантор общности.
$\rightarrow$	Отображается (преобразуется).
(•)	Точка.
()	Вращение.
Δ	Треугольник.

Введение

К основным целям курса «Начертательная геометрия» относятся: развитие пространственного представления и конструктивно-геометрического мышления, развитие способности к анализу, синтезу и обобщению способов проектирования различных геометрических, а также технических объектов , изучение, составление чертежей.

Задача курса: изучение способов изображения пространственных форм на плоскости и применение его теоретических основ для решения проектируемых различных технических, конструкторских задач путём геометрических построений.

В основе изучения курса «Начертательная геометрия» лежат изучение и проецирование геометрических образов трехмерного пространства на координатные плоскости проекции: **X** -абсцисса, **Y** - ордината, **Z** – аппликата.

1 - ЛЕКЦИЯ. Предмет начертательной геометрии, её задачи и роль подготовки бакалавра. Методы проецирования. Метод Монжа.

ПРЕДМЕТ НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ, ЕЁ ЗАДАЧИ

Начертательная геометрия является специальным разделом математики, в котором рассматриваются следующие основные задачи:

1. Способы проецирования пространственных форм геометрических тел (точек, прямых плоскостей, поверхностей) на плоскость.
2. Изучение и анализ геометрических свойств форм пространственных тел по их эпюрам (плоским чертежам).
3. Решение пространственных геометрических задач графическими способами.

МЕТОДЫ ПРОЕЦИРОВАНИЯ

Проецирование - это мысленный процесс получения изображения предметов на плоскости при помощи пучка воображаемых проецирующих лучей.

В зависимости от направления проецирующих лучей различают два метода проецирования:

1. Центральное проецирование

Если проецирующие лучи исходят из одной точки, то такое проецирование называется **центральным.**

Сущность этого метода заключается в том, что задается центр проецирования **S** неподвижным и все проецирующие лучи исходят из этой неподвижной точки.

Например, в пространстве даны точки **A,B,C** (рис.1.), необходимо получить их проекции на плоскости **P**. Для этого из этих точек проводим проецирующие лучи, проходящие из центра проецирования **S**. Проецирующие лучи, пересекаясь с плоскостью проекции **P**, образуют точки **a,b,c**. Эти точки **a,b,c** являются проекциями пространственных точек **A,B,C** на плоскости проекции **P.**

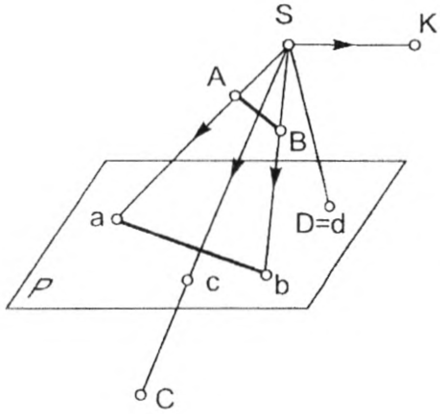


Рис.1.

P - плоскость проекций.
S - центр проецирования.
A,B,C - точки в трёхмерном пространстве.
[SA),[SB),[SC) - лучи проецирования.
[SA)∩P=a – центральная проекция пространственной точки **A** на плоскости **P**.
[SB)∩P=b - центральная проекция пространственной точки **B** на плоскости **P**.
[SC)∩P=c – центральная проекция пространственной точки **C** на плоскости **P**.

Если точка **D** принадлежит плоскости проецирования **P**, то проекция данной точки совпадает с положением самой точки **D**, т.е. $(\bullet)\ \mathbf{D} \in \mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{d} = \mathbf{D}$

Точки **A,B,C,D** - собственные точки плоскости **P**.

Если в пространстве выбрать точку **K** таким образом, что проецирующий луч, проходящий через него, будет параллельным плоскости проекции **P**, то в этом случае проекция точки **K** теоретически образуется в бесконечности.

$$[\mathbf{SK}) \parallel \mathbf{P} \Rightarrow [\mathbf{SK}) \cap \mathbf{P} = \mathbf{k}\ \infty$$

Отсюда точка **K** является несобственной точкой плоскости **P**. В заключение можно сказать, что метод центрального проецирования широко применяется в изобразительном искусстве (дизайне) и при проектировании архитектурно-строительных чертежей (в перспективе).

2. Параллельное проецирование

Если проецирующие лучи взаимно параллельны, то такое проецирование называется **параллельным проецированием**.

В этом методе предполагается, что центр проецирования находится в бесконечности и, следовательно, задается направление проецирования **S** (рис.2).

S - направление проецирования (обычно задано)

(Aa) || S

[Aa) ∩ P = a – параллельная проекция пространственной точки **A** на плоскости **P**.

[Bb) || S

[Bb)∩P=b - параллельная проекция пространственной точки **B** на плоскости **P**.

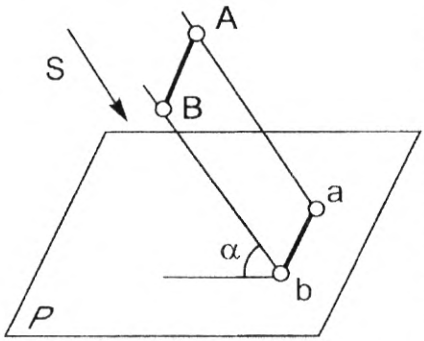


Рис.2.

α - угол наклона проецирующего луча к плоскости проекции **P**.

<α=P ^ (S)

При $\alpha \neq 90^0$, параллельное проецирование называется косоугольным проецированием.

При $\alpha = 90^0$ проецирование называется прямоугольным (ортогональным) проецированием.

Метод прямоугольного проецирования создал в конце XVIII века французский ученый Гаспар Монж (1746-1818) и положил основу науки – начертательная геометрия.

Основные свойства параллельного проецирования

1. Проекция точки на плоскости есть точка.
2. Проекция прямой на плоскости проекции есть прямая.
3. Если точка принадлежит прямой, то её проекция на плоскости проекции также принадлежит прямой.
4. Проекции параллельных прямых на плоскости проекции также взаимно параллельны.

2 - ЛЕКЦИЯ. Точка. Ортогональные проекции точки. Эпюр Монжа. Точки частного положения.

Ортогональные проекции точки

Перпендикулярное проецирование геометрических элементов на взаимно перпендикулярные две плоскости проекции называется ортогональным проецированием (метод Гаспар Монжа). Слово "ортогональное" означает смысл прямоугольное. С точки зрения геометрии, все геометрические образы можно разделить на геометрические части, т.е. всякое тело, состоит из поверхности, поверхность из плоскости, плоскость из прямых, прямая из геометрической совокупности точек. Поэтому проецирование целесообразно начинать с проецированием точки на плоскость проекции. Одна проекция всякого геометрического элемента не может определить все его размеры и положение в пространстве. Поэтому необходимо получение проекции на двух или трёх плоскостях проекции.

Следовательно, рассмотрим ортогональное проецирование точки **A**, **B** на двух взаимно перпендикулярных плоскостях проекции (рис.3).

Даны две перпендикулярные плоскости проекции **V⊥H.**

Проецирование точки на две, три взаимно перпендикулярные плоскости проекции называется ортогональным проецированием.

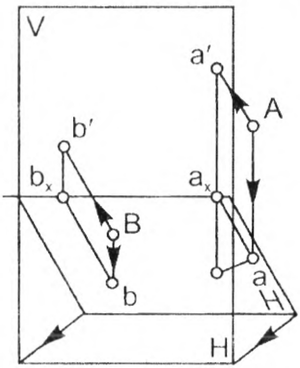


Рис.3

V-фронтальная плоскость проекций.
H-горизонтальная плоскость проекций.
[OX]-ось вращения
A – пространственная точка.
a′- фронтальная проекция пространственной точки **A.**
a – горизонтальная проекция пространственной точки **A**.
$\mathbf{a_x}$ – значение пространственной точки **A** по оси проекции **x** .

Если из пространственной точки **A** провести плоскость **Q** перпендикулярно к фронтальной и горизонтальной плоскостям проекций, то в этом случае пространственное положение точки **A** можно проанализировать следующим образом:

$$\mathbf{Q \perp V} \text{ и } \mathbf{Q \perp H}$$

Удаленность пространственной точки **A** относительно фронтальной плоскости проекции можно написать в следующем виде:

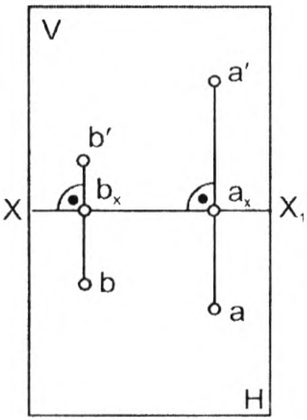
$$[\mathbf{Aa'}] = [\mathbf{a\ a_x}] = |\mathbf{AV}|$$

Удаленность пространственной точки **A** относительно горизонтальной плоскости проекции можно написать в следующем виде:

$$[\mathbf{Aa}] = [\mathbf{a'\ a_x}] = |\mathbf{AH}|$$

Для перехода из пространственного чертежа на эпюр горизонтальную плоскость проекции **H** вращаем вокруг оси проекции **[OX)** по направлению часовой стрелки на $\mathbf{90^0}$. В результате горизонтальная плоскость проекции **H** и фронтальная плоскость проекции **V** будут совмещены на одну плоскость. Такой чертёж называют эпюром Монжа (плоским чертежом).

Эпюр точки представлен на рис.4.



[a a′] - линия связи,
[a a′] ⊥ **[OX)**

Рис.4

Проекции точек на четырёх четвертях

Взаимно перпендикулярные фронтальная плоскость проекции и горизонтальная плоскость проекции - **V⊥H** - пространство делят на четыре части, **1/4** часть называют четвертью.

Рассмотрим пространственное положение точек **A,B,C,D,** принадлежащие четвертям (рис.5) и проанализируем их эпюры (рис.6).

V⊥H

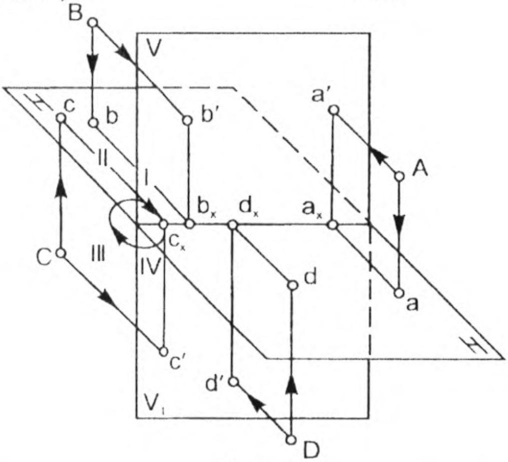


Рис.5

Если точка **A** принадлежит первой четверти пространства, то на эпюре её горизонтальная проекция **a** лежит ниже оси проекции **[OX)**, а фронтальная проекция **a′** выше оси проекции **[OX)**.

Если точка **B** принадлежит второй четверти пространства, то на эпюре её горизонтальная проекция **b** и фронтальная **b′** проекции лежит выше оси проекции **[OX)**.

Если точка **C** принадлежит третьей четверти пространства, то на эпюре её горизонтальная проекция c лежит выше оси проекции **[OX)**, а фронтальная проекция **c′** ниже оси проекции **[OX)**.

Если точка **D** принадлежит четвёртой четверти пространства, то на эпюре её горизонтальная **d** и фронтальная **d′** проекции лежит ниже оси проекции **[OX)**.

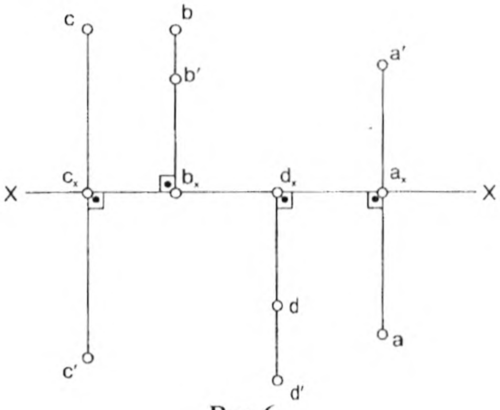


Рис.6.

Проецирование точки на три взаимно перпендикулярные плоскости проекции

Три взаимно перпендикулярные плоскости проекции **V⊥H**, **V⊥W**, **H ⊥W** делят трехмерное пространство на восемь частей, **1/8** часть называют октантом.

Пространственный чертёж точки **A** в первом октанте представлен на рис.7.

W - профильная плоскость проекций.

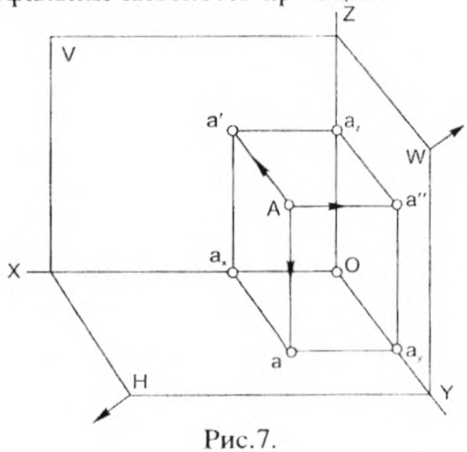


Рис.7.

Значения расстояния точки до плоскости проекции называют координатами точки.

Например: Даны координаты **(X,Y,Z)** точки **A**.

Для построения горизонтальной проекции точки **a** необходимо использовать координаты **(x,y)**, а для фронтальной проекции **a'** координаты **(x,z)**, для профильной проекции **a''** координаты **(y,z)**.

В этом случае удаленность точки **A** относительно профильной плоскости проекции:

$$[\,A\ a''] = |AW| = [o\ a_x] = X$$

Удаленность точки **A** относительно фронтальной плоскости проекции. $[A\ a'] = |AV| = [o\ a_y] = Y$

Удаленность точки **A** относительно горизонтальной плоскости проекции.

$$[A\ a] = |AH| = [o\ a_z] = Z$$

Для перехода из пространственного чертежа на эпюр горизонтальную плоскость проекции **H** вращаем вокруг оси проекции **[OX)** по направлению часовой стрелки на 90^0, а профильную плоскость проекции **W** вращаем вокруг оси проекции **[OZ)** против часовой стрелки на 90^0.

В результате горизонтальная, фронтальная, профильная плоскости проекции **H,V,W** будут совмещены на одну плоскость (рис.8.)

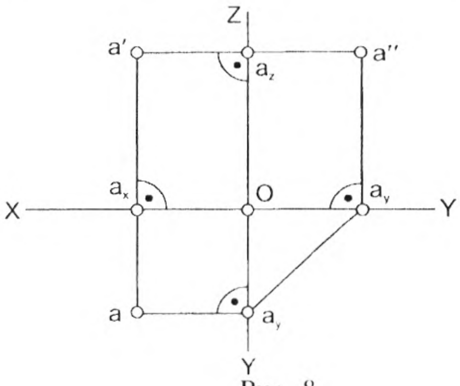


Рис. 8.

Для построения горизонтальной проекции точки **A** необходимо **a (x,y)**.

$$\mathbf{a(\bullet) \rightarrow a_x(\bullet) \parallel [oy) \cap a_y(\bullet) \parallel [ox)}$$

Для построения фронтальной проекции точки А необходимо **a′(x,z).**

$$\mathbf{a'(\bullet) \rightarrow a_x(\bullet) \parallel [oz) \cap a_z(\bullet) \parallel [ox)}$$

Горизонтальная и фронтальная проекции точки **А** лежит на одной вертикальной линии связи.

$$\mathbf{a'\ a]\ \perp [ox)}$$

Фронтальная и профильная проекции точки **А** лежит на одной горизонтальной линии связи.

$$\mathbf{[a'\ a'']\ \perp [oz)}$$

Знаки оси проекции восьми октантов приведены в таблице 1.

Таблица 1

№	X	y	Z
I	+	+	+
II	+	-	+
III	+	-	-
IV	+	+	-
V	-	+	+
VI	-	-	+
VII	-	-	-
VIII	-	+	-

Точки частного положения

Если одна из координат точки равна нулю, то тогда точка принадлежит одной из плоскостей проекции.

На рис.9. приведены точки частного положения, расположенные на первом октанте.

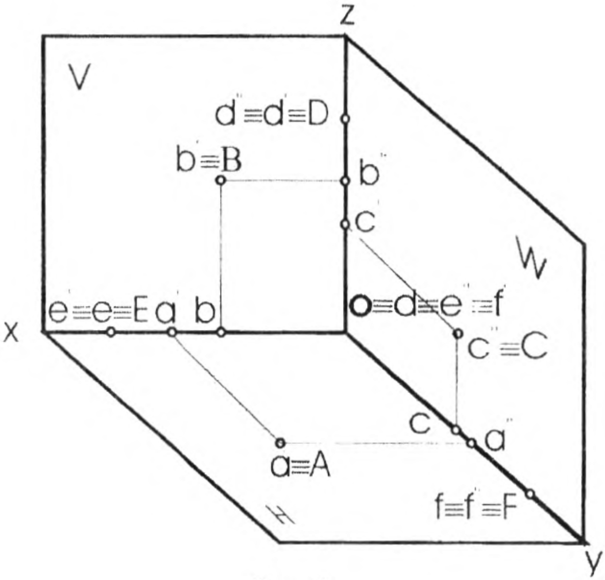


Рис. 9.

Если $X \neq O$, $Y = O$, $Z \neq O$, тогда точка $B \in V$

Если $X \neq O$, $Y \neq O$, $Z = O$, тогда точка $A \in H$

Если $X = O$, $Y \neq O$, $Z \neq O$, тогда точка $C \in W$

Одна проекция точки, расположенная на плоскости проекции, совпадает с самой точкой, а две проекции точки лежат на осях проекции.

Если две координаты точки равны нулю, то тогда точка принадлежит одной из осей проекции.

Если $X \neq O$, $Y = O$, $Z = O$, тогда точка $E \in [ox)$

Если $X = O$, $Y \neq O$, $Z = O$, тогда точка $F \in [oy)$

Если $X = O$, $Y = O$, $Z \neq O$, тогда точка $D \in [oz)$

Две проекции точки, расположенные на оси проекции, совпадают с самой точкой, а одна проекция лежит в начале координат.

Если все координаты точки равны нулю, тогда точка совпадает с самой точкой.

Если $\mathbf{X = O, Y = O, Z = O}$, тогда точка $\in \mathbf{O}$

Три проекции точки, расположенные в начале координат, совпадают с самой точкой.

Задача: Построить эпюр точек **C** и **D,** заданной координатами (рис.10.).

C(40,20, -30), D(20,15,0)

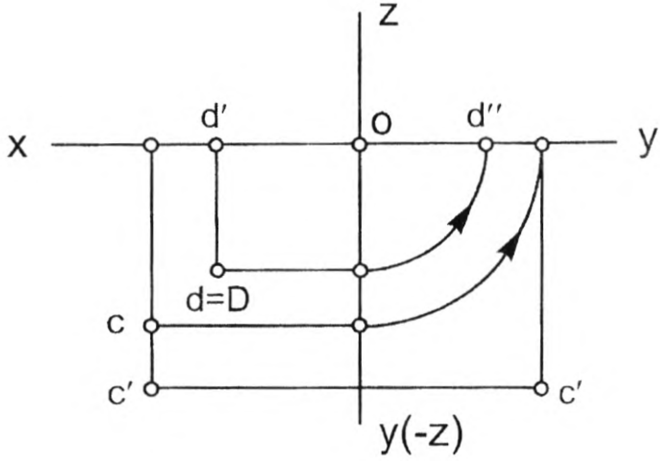


Рис. 10.

Отсюда следует, что точка **C** $\in$ **4** четверти, а точка **D** $\in$ **H** плоскости проекции.

3-ЛЕКЦИЯ. Прямая. Инвариантные свойства прямой в ортогональных проекциях. Определение натуральной величины отрезка прямой и углов наклона к плоскостям проекций.

Прямая

Кратчайшее расстояние между двумя точками прямой есть отрезок прямой.

Инвариантные свойства прямой в ортогональных проекциях.

Свойства геометрических фигур, которые не изменяются в процессе проецирования, называют независимыми или инвариантными относительно выбранного способа проецирования.

На рис.11 представлены пространственные чертежи отрезков: прямые **[AB],[CD],[EF]** и направление проецирования **[S).** Проецируя эти отрезки прямых на горизонтальную плоскость проекции **H**, рассмотрим инвариантные свойства прямых.

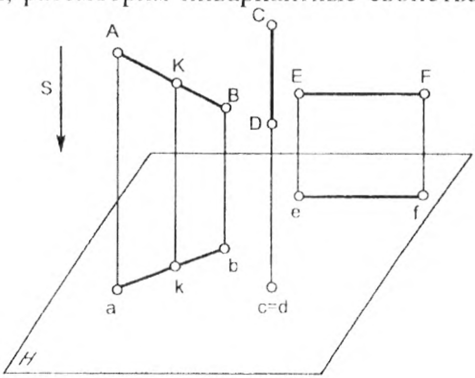


Рис. 11.

1. Если отрезок прямой**[AB]** не параллелен направлению проецирования **[S),** то это отрезок прямой **[AB]** проецируется на плоскость проекций H в виде отрезка прямой **[a b].**

$$[AB]\ \#\ [S) \Rightarrow [a\,b] < [AB]$$

2. Если отрезок прямой **[CD]** параллелен направлению проецирования **[S),** то это отрезок прямой **[CD]** проецируется на плоскость проекций в точку.

$$[CD] \parallel [S) \Rightarrow [c \equiv d]$$

3. Если отрезок прямой **[EF]** параллелен плоскости проекций H, то это отрезок прямой **[EF]** проецируется на эту плоскость проекций без изменений, т.е. в натуральную величину.

$$[EF] \parallel H \Rightarrow [e\,f] = |\,EF\,|$$

4. Если любая точка **K** принадлежит отрезку прямой **[AB]**, то проекция этой точки **K** также принадлежит проекции данного отрезка прямой.

$$\forall(\bullet)K \in [AB] \Rightarrow (\bullet)k \in [a\,b]$$

5. Отношение отрезков прямых равняется отношению их проекциям и плоскости проекций.

$$[AK] / [KB] = m / n, \quad [ak] / [kb] = m / n$$

Определение натуральной величины отрезка прямой и углов наклона плоскостям проекции

Прямая относительно плоскостей проекций **(H,V,W)** может располагатся в общем и частном положениях.

Если прямая не параллельна ни одной из плоскостей проекций, то такая прямая называется прямой общего положения. Проекции такой прямой наклонены к оси проекций **[ox).**

Рассмотрим пространственный чертеж прямой общего положения заданной координатами (рис.12).

A(10;15;40), B(60;35;10)

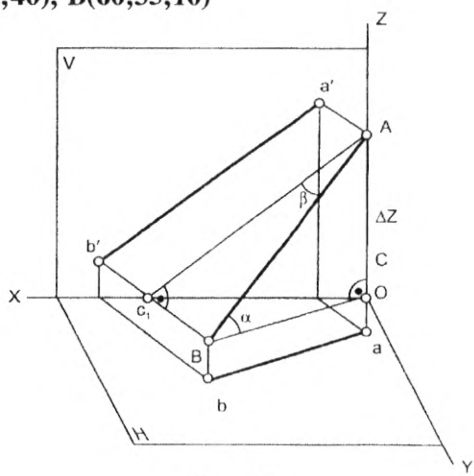


Рис. 12.

На проекционном чертеже построим прямоугольный треугольник **(ABC)**.

Отсюда 1 - катет **[BC] = [a b]**

2 - катет **[AC] = [Aa] - [Bb]**

Затем

$$[Aa] = |AH| = Za; \quad [Bb] = |BH| = Zb;$$

Следовательно:

$$[Ac] = Za - Zb = \Delta Z$$

Угол α наклона отрезка прямой **[AB]** относительно горизонтальной плоскости проекций **H**.

$$\angle\alpha = [AB] \hat{} H$$

Угол β наклона отрезка прямой **[AB]** относительно горизонтальной плоскости проекций **V.**

$$\angle\beta = [AB] \hat{} V$$

Поэтому горизонтальная и фронтальная проекции отрезка прямой **[AB]** меньше истинной величины.

$$[ab] < [AB] \quad \text{и} \quad [a'b'] < [AB]$$

Построим эпюр отрезка прямой **[AB]** заданной координатами (рис.13).

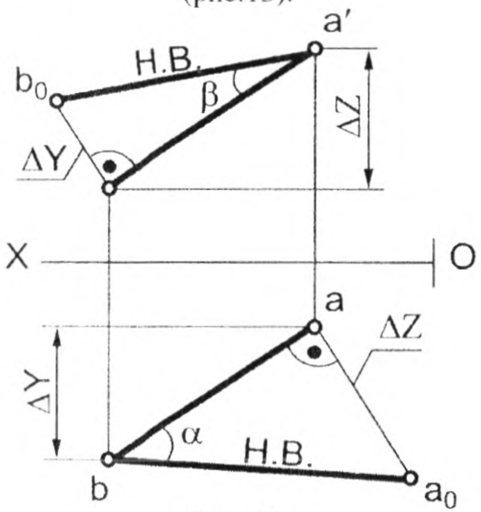


Рис. 13.

Определим натуральную величину отрезка прямой **[AB]** и углы наклона к **H** - горизонтальной, **V**- фронтальной плоскостям проекций.

Для определения натуральной величины отрезка прямой **[AB]** используется способ прямоугольного треугольника.

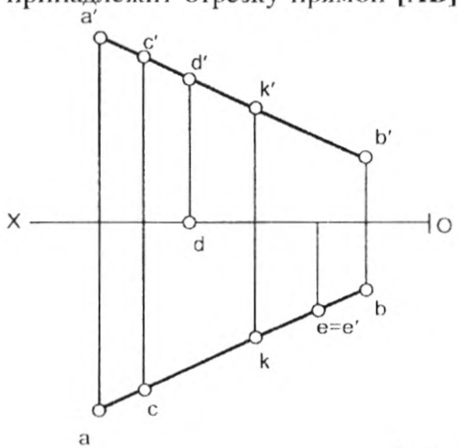
Для этого строится такой прямоугольный треугольник, у которого один катет равняется одной из проекций отрезка прямой **[AB]** (горизонтальная, фронтальная, профильная), а второй катет равняется алгебраической разности координат концов отрезка прямой **[AB]**
(Δ Z=Za-Zb), **(Δ Y=Yb-Ya)**, **(Δ X=Xb-Xa)**, а тогда гипотенуза прямоугольного треугольника будет равняться натуральной величине отрезка прямой **[AB]**.

Принадлежность точки прямой

Если точка **K** принадлежит отрезку прямой **[AB]**, то одноименные проекции этой точки на плоскостях проекции также принадлежат одноименным проекциям отрезка прямой **[AB]**.

Т.е. $(\bullet)K \in [AB] \Rightarrow (\bullet)k \in [a\ b] \wedge (\bullet)k' \in [a'b'] \wedge (\bullet)k'' \in [a''b'']$

Пример: Определить: какая из данных точек **C,D,K,E** принадлежит отрезку прямой **[AB]** (рис.14).



$(\bullet)\,C \notin AB$
$(\bullet)\,D \notin AB$
$(\bullet)\,K \in AB$
$(\bullet)\,E \notin AB$

Рис. 14.

Деление отрезка в заданном отношении

Пример: На отрезке прямой **[AB]** определить точку **K**, делящую его в отношении 2/3. (рис15).

Дано: **[AB] (a b, a’b’)**

Определить: **(•)K ∈ [AB] ∧ [AK] / [KB] = 2/3**

[a k] / [k b]=[a′k′] / [k′b′]=[AK] / [KB]=2/3

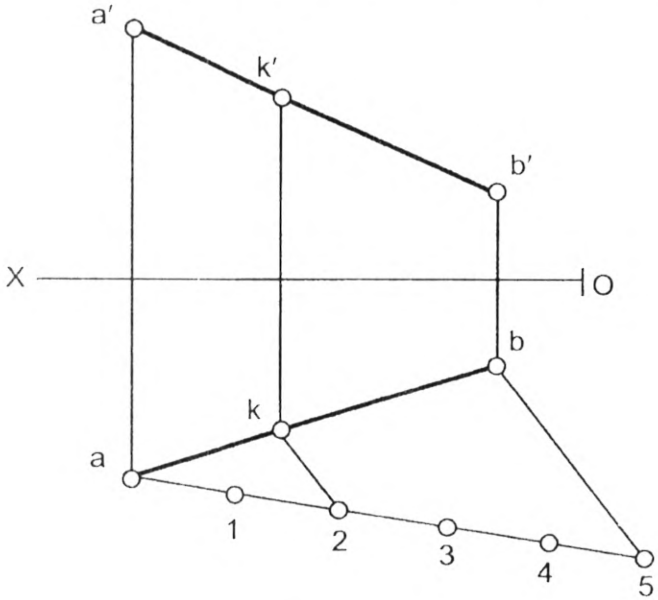


Рис. 15.

Этот пример решается на основании теоремы древнегреческого ученого Фалеса.

Теорема: Если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной его стороне равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой его стороне.

4-ЛЕКЦИЯ. Прямые частного положения. Следы прямой. Взаимное положение двух прямых.

Прямые частного положения

Прямые перпендикулярные или параллельные к плоскости проекций **V, H, W** называются прямыми частного положения.

1. Прямые параллельные одной из плоскостей проекций.
   a) **Если прямая параллельна горизонтальной плоскости проекций, то такая прямая называется горизонтальной прямой.**

[AB] || H - горизонтальная прямая.

Построим пространственный чертеж горизонтальной прямой **[AB]** по заданным координатам (рис.16).

A(20;10;30) B(50;30;30)

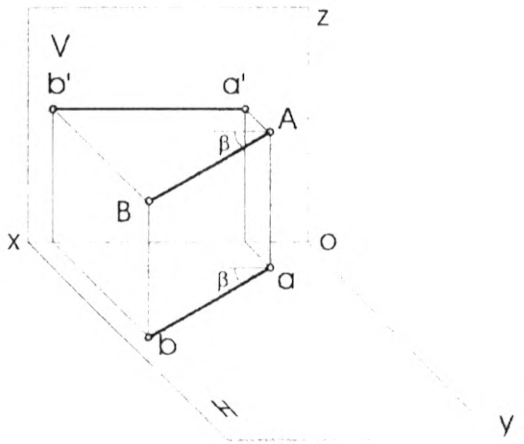


Рис. 16.

Построим эпюр этой горизонтальной прямой **[AB]**, заданной координатами (рис.17).

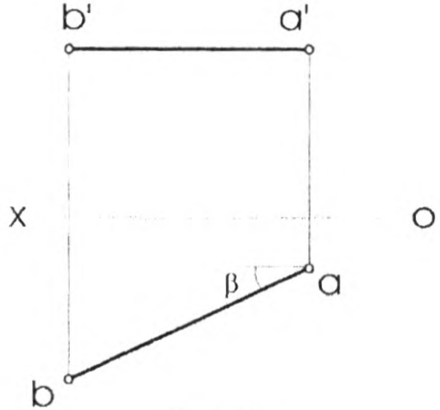


Рис. 17.

$$[AB] \parallel H \Rightarrow [a'b'] \parallel [ox) \wedge [a\,b] = |AB|$$

Горизонтальная проекция горизонтальной прямой есть её натуральная величина.

Угол наклона горизонтальной прямой к фронтальной плоскости проекций **V** есть угол β.

$$\angle \beta = [AB] \,\hat{}\, V$$

b) Если прямая параллельна фронтальной плоскости проекций, то такая прямая называется фронтальной прямой.

[AB] || V – фронтальная прямая.

Построим пространственный чертеж фронтальной прямой **[AB]** по заданным координатам (рис.18).

A(10;20;30) B(50;20;10)

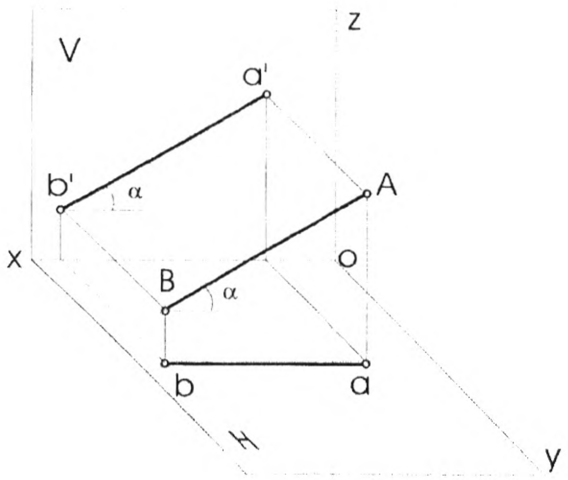


Рис. 18.

Построим эпюр этой фронтальной прямой **[AB],** заданной координатами. (рис.19).

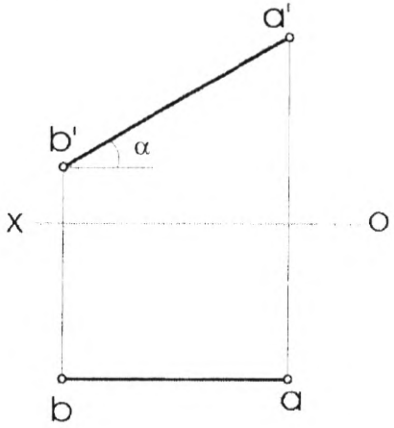


Рис. 19.

$$\mathbf{[AB] \parallel V \Rightarrow [a\ b] \parallel [ox) \wedge [a'b'] = |AB|}$$

Фронтальная проекция фронтальной прямой есть её натуральная величина.

Угол наклона фронтальной прямой к горизонтальной плоскости проекций **H** есть угол α.

$$\angle \alpha = [AB] \hat{\ } H$$

с) Если прямая параллельна профильной плоскости проекций, то такая прямая называется профильной прямой.

[AB] || W – профильная прямая.

Построим пространственный чертеж профильной прямой **[AB]** по заданным координатам (рис.20).

A(25;5;30) B(25;25;10)

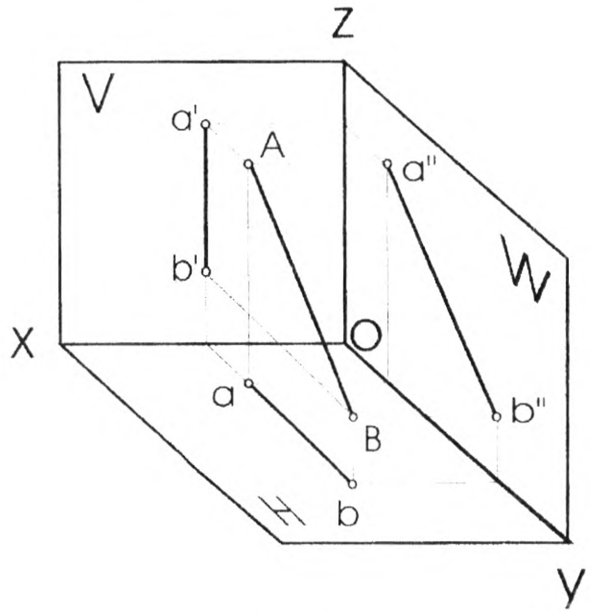


Рис. 20.

Построим эпюр этой профильной прямой **[AB],** заданной координатами (рис.21).

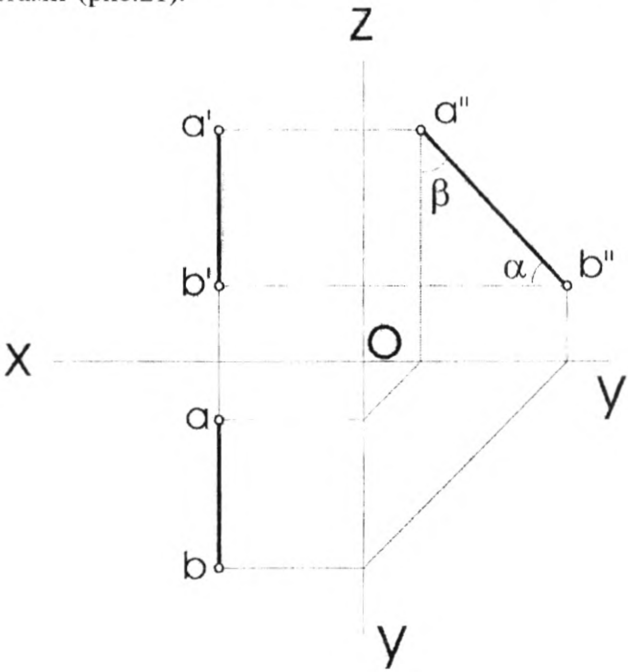


Рис. 21.

$$[AB] \parallel W \Rightarrow [a\,b] \perp [ox) \wedge [a'b'] \perp [ox) \wedge [a''b''] = |AB|$$

Профильная проекция профильной прямой есть её натуральная величина. Угол наклона профильной прямой к горизонтальной плоскости проекций **H** есть угол α.

$$\angle\, \alpha = [AB]\ \hat{}\ H$$

Угол наклона прямой к фронтальной плоскости проекций есть угол β.

$$\angle\, \beta = [AB]\ \hat{}\ V$$

2. Прямые, перпендикулярные одной из плоскостей проекций, называются проецирующими прямыми.

а) Если прямая перпендикулярна горизонтальной плоскости проекций, то такая прямая называется горизонтальной проецирующей прямой.

[AB] $\perp$ **H** – горизонтально- проецирующая прямая.

Построим пространственный чертеж горизонтально проецирующей прямой **[AB]** по заданным координатам (рис.22).

A(40;10;30) B(40;10;5)

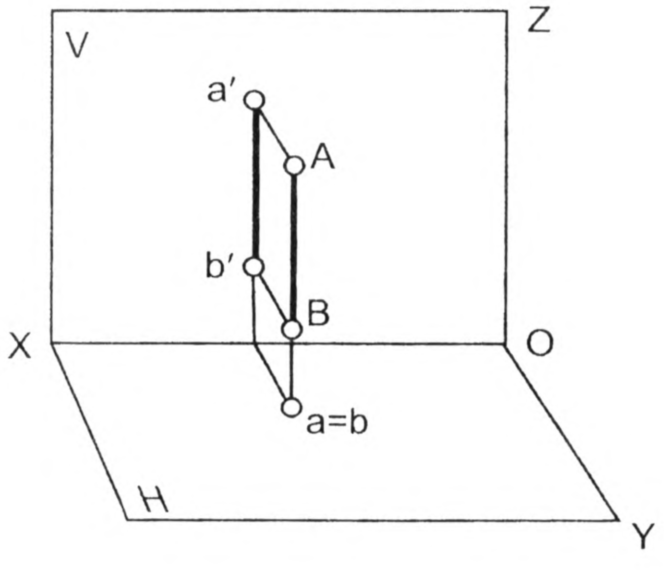


Рис. 22.

Построим эпюр этой горизонтальной проецирующей прямой **[AB]** по заданным координатам (рис.23).

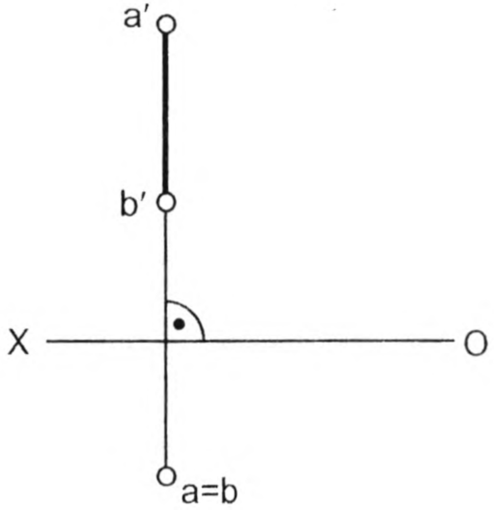


Рис. 23.

$$[AB] \perp H \Rightarrow [a'b'] \perp [ox) \wedge [a'b'] = |AB|$$

Фронтальная проекция горизонтальной проецирующей прямой есть её натуральная величина.

Горизонтальная проекция горизонтально проецирующей прямой есть точка **[a≡b].**

б) Если прямая перпендикулярна фронтальной плоскости проекций, то такая прямая называется фронтальной проецирующей прямой.

[CD] ⊥ **V** - фронтально проецирующая прямая.

Построим пространственный чертеж фронтально проецирующей прямой **[CD]** по заданным координатам (рис.24).

C(30;5;15) D(30;30;15)

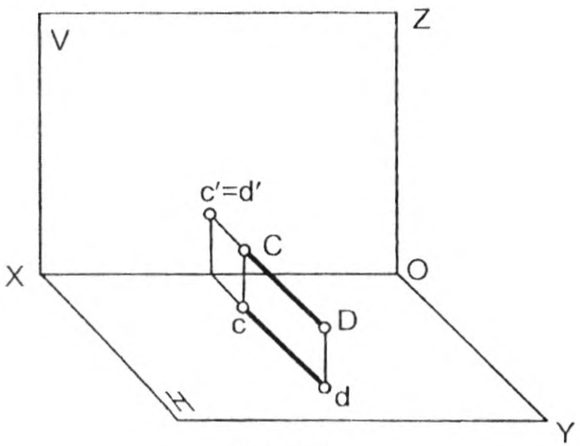


Рис. 24.

Построим эпюр фронтально проецирующей **[CD]** по заданным координатам (рис.25).

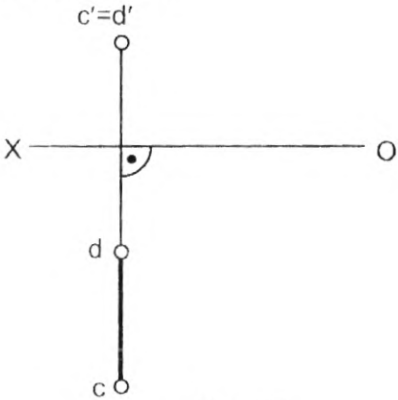


Рис. 25.

$$[\mathbf{CD}] \perp \mathbf{V} \Rightarrow [\mathbf{cd}] \perp [\mathbf{ox}) \wedge [\mathbf{cd}] = |\mathbf{CD}|$$

Горизонтальная проекция фронтально проецирующей прямой есть её натуральная величина.

Фронтальная проекция фронтально проецирующей прямой есть точка **[c′≡d′]**.

в) Если прямая перпендикулярна профильной плоскости проекций, то такая прямая называется профильно - проецирующей прямой.

[EF] ⊥ W - профильно - проецирующая прямая.

Построим пространственный чертеж профильно - проецирующей прямой **[EF]** по заданным координатам (рис.26).

E (25; 15; 5) F (5; 15; 5)

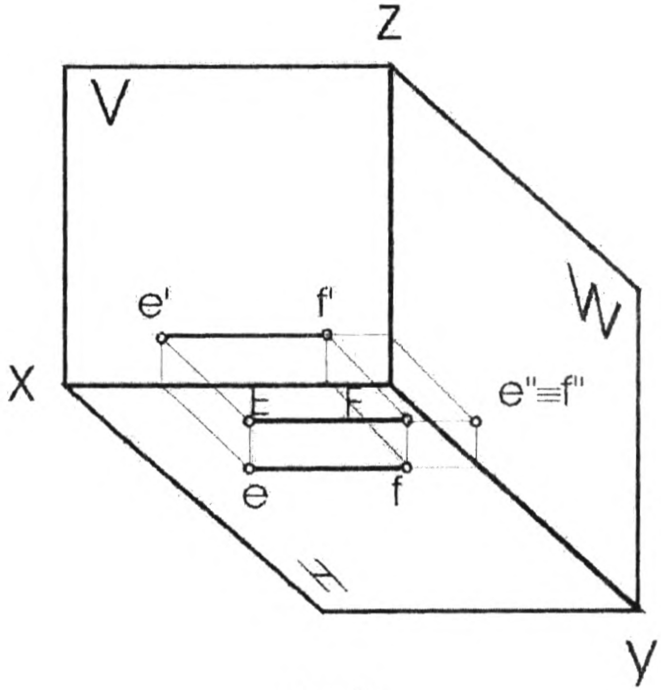


Рис. 26.

Построим эпюр этой профильно - проецирующей прямой **[EF]** по заданным координатам (рис.27).

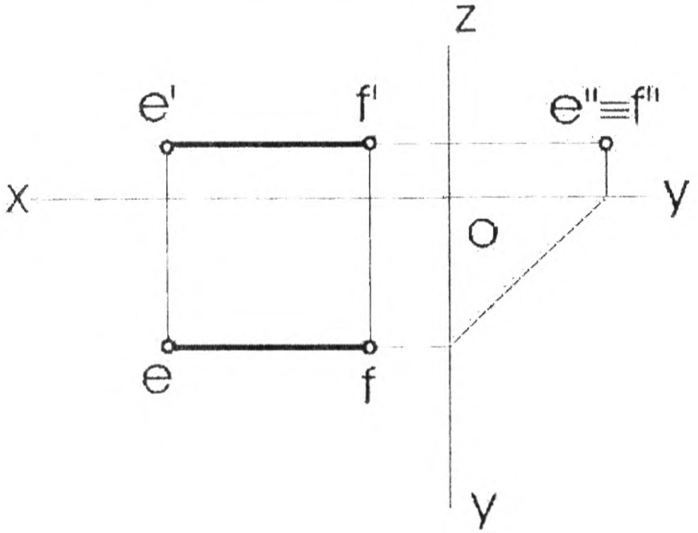


Рис. 27.

$$[EF] \perp W \Rightarrow [e'f'] \parallel [ox) \wedge [ef] \parallel [ox) \wedge [ef] = [e'f'] = |EF|$$

Фронтальная и горизонтальная проекции профильно - проецирующей прямой есть натуральная величина прямой.

Профильная проекция профильно - проецирущей прямой есть точка **[e''≡f'']**.

Следы прямой

Точки пересечения прямой с плоскостями проекций **V, H, W** называется **следами прямой.**

Построим пространственный чертеж прямой **(AB)** общего положения по заданным координатам (рис.28).

Дано: **A(45;15;5), B(20;5;30)**
Определить: $\mathbf{M_H}$ **- ?** $\mathbf{N_V}$ **- ?**

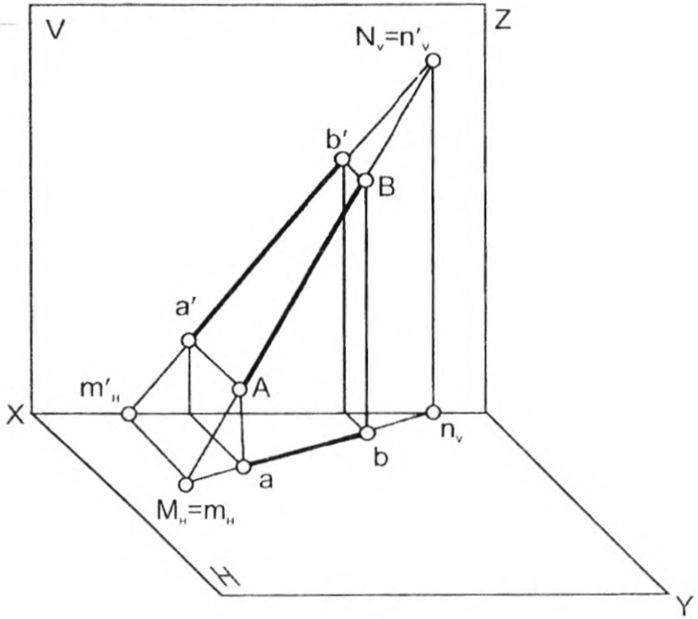


Рис. 28.

Если продолжить прямую **(AB)** до пересечения с горизонтальной плоскостью проекций **H,** то получаем горизонтальный след $\mathbf{M_H}$ данной прямой.

$\mathbf{(AB) \cap H = M_H\ (m_H\ ,\ m_H')}$ – горизонтальный след прямой.

Если продолжить прямую **(AB)** до пересечения с фронтальной плоскостью проекций **V**, то получаем фронтальный след $\mathbf{N_V}$ данной прямой.

$\mathbf{(AB) \cap V = N_V\ (n_V\ ,\ n_V')}$ – фронтальный след прямой.

Построим эпюр прямой **(AB)** общего положения по заданным координатам (рис.29).

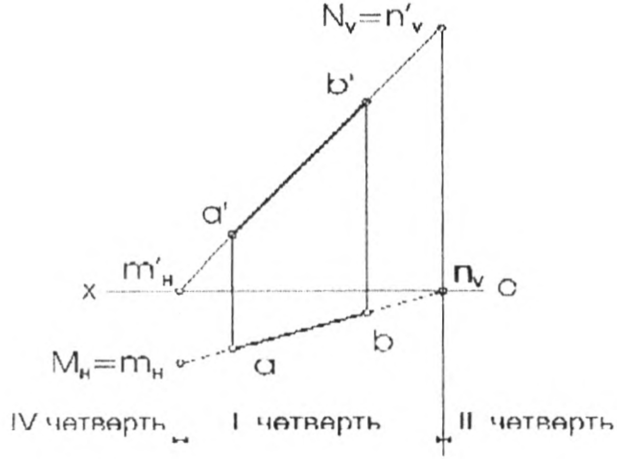


Рис. 29.

Для определения горизонтального следа $\mathbf{M_H}$ $(\mathbf{m_H}, \mathbf{m_H'})$ прямой продолжим фронтальную проекцию **(a'b')** до пересечения с осью проекций **[ox)**. Затем из точки пересечения $(\mathbf{m_H'})$ проводим перпендикуляр к оси проекций **[ox)** до пересечения его с продолжением горизонтальной проекции **(a b)** прямой точке $(\mathbf{m_H})$.

Для определения фронтального следа $\mathbf{N_V}$ $(\mathbf{n_V}, \mathbf{n_V'})$ прямой продолжим фронтальную проекцию **(a b)** до пересечения с осью проекций **[ox)**. Затем из точки пересечения $(\mathbf{n_V})$ проводим перпендикуляр к оси проекций **[ox)** до пересечения его с продолжением горизонтальной проекции **(a' b')** прямой точке $(\mathbf{n_V'})$.

В заключение можно сказать, что прямая **(AB)** после фронтального следа $\mathbf{N_V}$ $(\mathbf{n_V}, \mathbf{n_V'})$ переходит во **II** - четверть пространства, а после горизонтального следа $\mathbf{M_H}$ $(\mathbf{m_H}, \mathbf{m_H'})$ переходит в **IV** - четверть пространства.

Взаимное положение двух прямых

В пространстве две прямые могут располагаться в следующих положениях: 1) параллельно; 2) пересекаться; 3) скрещиваться.

1. На рис.30 приведен пространственный чертеж взаимно параллельных прямых **[AB] и [CD].**

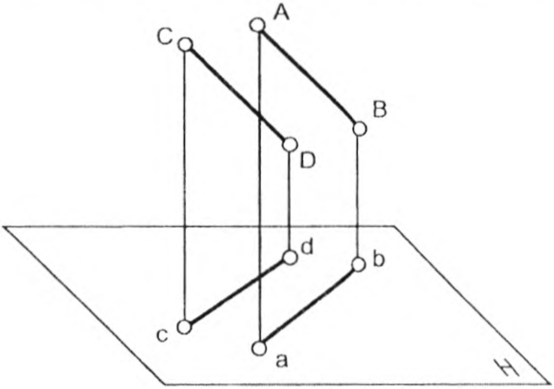


Рис. 30.

На рис.31 представлен эпюр взаимно - параллельных прямых **[AB] и [CD].**

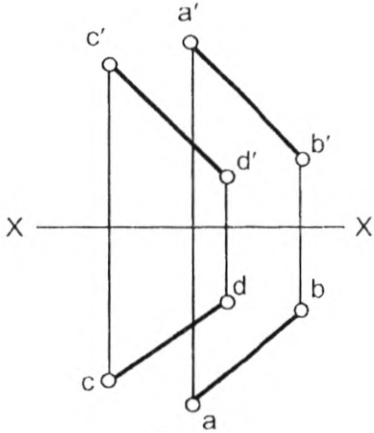


Рис. 31.

Если одноименные проекции двух прямых взаимно - параллельны, то такие прямые называются параллельными прямыми.

То есть:

$$\mathbf{(AB) \parallel (CD) \Rightarrow (ab) \parallel (cd) \wedge (a'b') \parallel (c'd') \wedge (a''b'') \parallel (c''d'')}$$

2. На рис.32 приведен пространственный чертеж пересекающихся прямых **[AB] и [CD].**

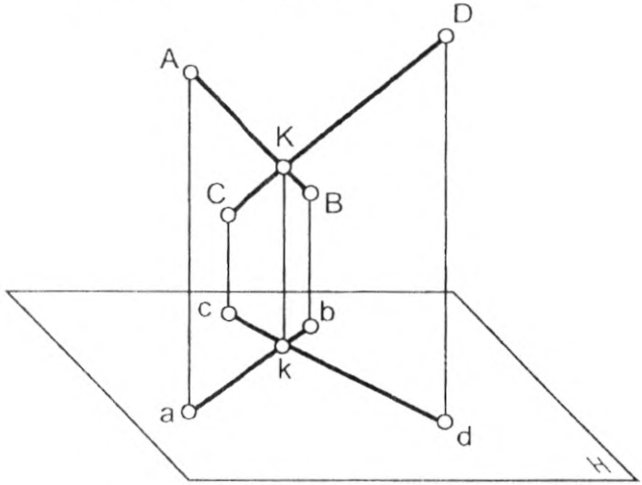


Рис. 32.

На рис.33 приведен эпюр двух пересекающихся прямых **[AB] и [CD].**

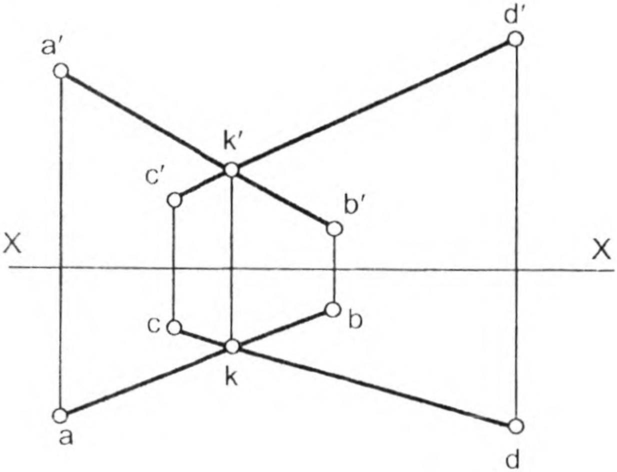


Рис. 33.

Если две прямые имеют одну общую точку, то такие прямые называются пересекающимися прямыми. На эпюре одноименные проекции пересекающихся прямых имеют одну общую точку **k k'**, проекции которой лежат на одной вертикальной линии связи, перпендикулярной к оси проекции **[ox),**

То есть:

$$\mathbf{(AB) \cap (CD) = (\bullet)K \Rightarrow (a\ b) \cap (c\ d) = (\bullet)k \wedge (a'b') \cap (c'd') =}$$

$$\mathbf{(\bullet)k' \wedge (a''b'') \cap (c''d'') = (\bullet)k''}$$

На рис. 34 приведен пространственный чертёж скрещивающихся прямых **[AB] и [CD].**

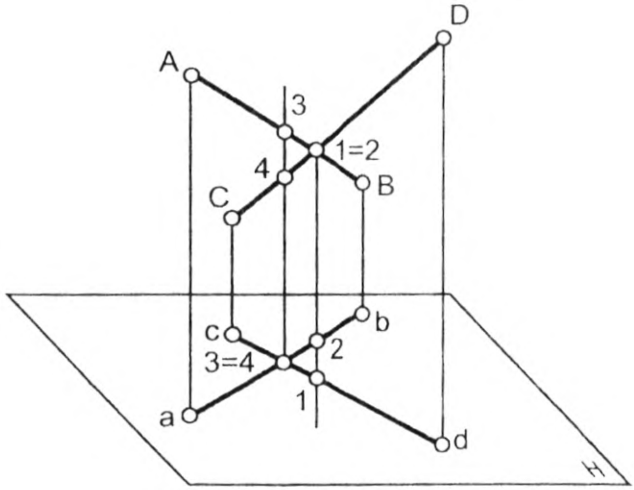


Рис. 34.

На рис.35 приведен эпюр скрещивающихся прямых **[AB]** и **[CD]**.

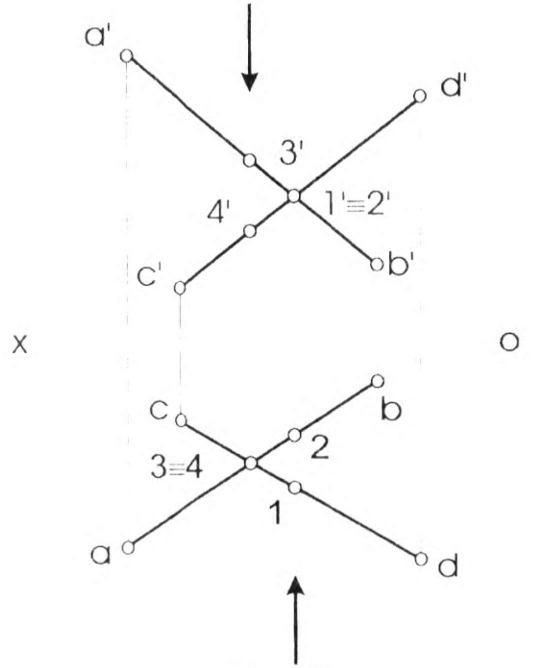


Рис. 35.

Если две прямые не пересекаются и не параллельны, то такие прямые называются скрещивающимся прямыми.

То есть:

$$\mathbf{(AB)\,\underline{\cdot}\,(CD) \wedge (AB) \cap (CD)}$$

Их одноименные проекции могут пересекаться в точках, не лежащих на одной линии связи.

Конкурирующие точки. Точки, у которых **совпадают** горизонтальные или фронтальные проекции двух прямых, называются конкурирующие. С помощью конкурирующих точек определяют видимость и невидимость геометрических элементов.

На чертеже точки 1 и 2, 3 и 4 – конкурирующие точки.

5 – ЛЕКЦИЯ. Проекции прямого угла. Плоскость. Способы задания плоскости на чертеже. Следы плоскости.

Если две стороны треугольника относительно плоскости проекции расположены в общем положении, то проекция прямого угла проецируется на эту плоскость проекции под острый или тупой угол.

На рис.36 приведен пространственный чертёж двух взаимно перпендикулярных прямых **(AB) и (BC).**

(AB) ⊥ (BC)

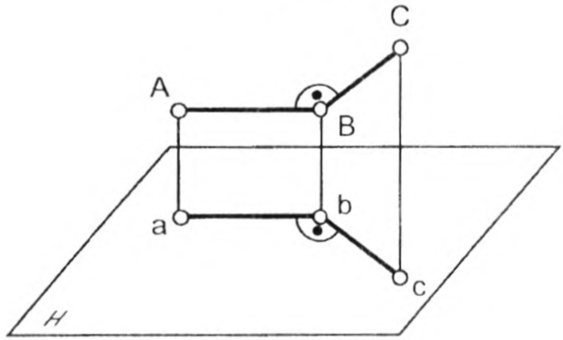


Рис. 36.

Теорема: Если одна сторона прямого угла параллельна плоскости, а другая сторона не перпендикулярна этой плоскости проекции, то этот угол проецируется на плоскость проекции без искажения, т.е. под прямым углом.

$$\mathbf{(AB) \parallel H \wedge (BC) \perp H \Rightarrow \angle abc = \angle ABC = 90^{\circ}}$$

Пример: Определить расстояние от точки C до прямой **(AB)** (рис.37).

Дано: **(AB) ∥ H ∧ (•)C**
Определить: **|(•)C,(AB)| - ? мм.**

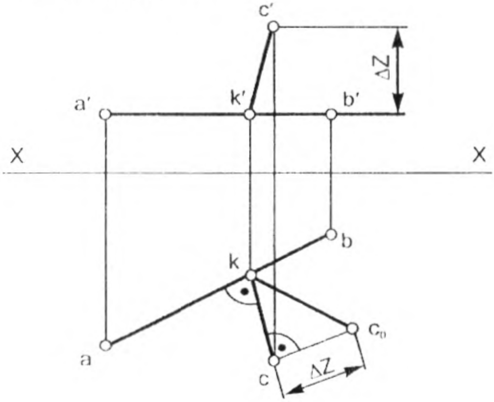


Рис. 37.

Плоскость. Способы задания плоскости на чертеже.

Плоскость – это совокупность множества точек и является непрерывной поверхностью.

Через три точки всегда можно провести две параллельные или две пересекающиеся прямые, поэтому плоскость проекции на чертеже в основном задается в следующих видах.

1. Проекциями трех точек, не лежащих на одной прямой **P(A,B,C)** (рис.38).

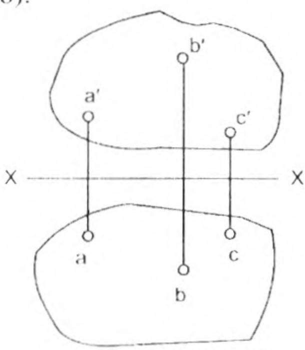


Рис. 38.

2. Проекциями прямой и точки, не лежащей на этой прямой.
P((AB) $\wedge$ (•)C), (•)C $\notin$(AB) (рис.39).

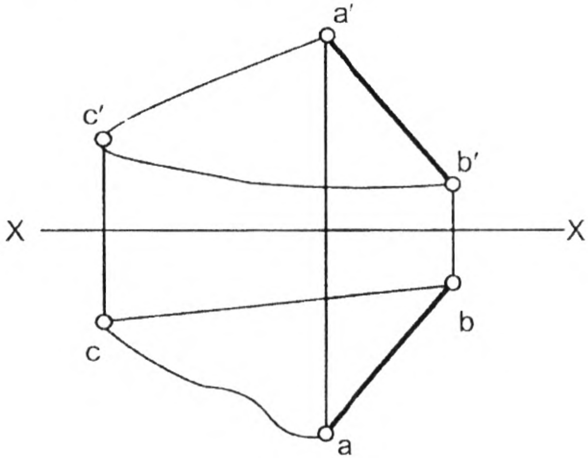


Рис. 39.

3. Проекциями пересекающихся двух прямых **P((AB) $\cap$ (BC))** (рис.40).

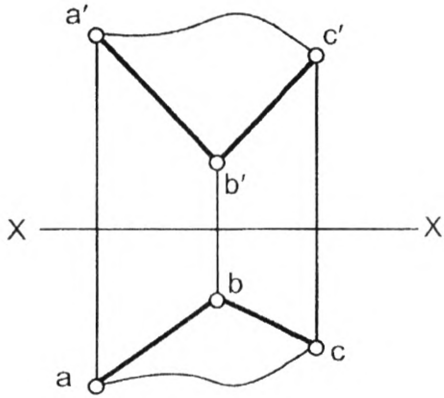


Рис. 40.

4. Проекциями двух взаимно – параллельных прямых **P((AB) ∥ (CD))** (рис.41).

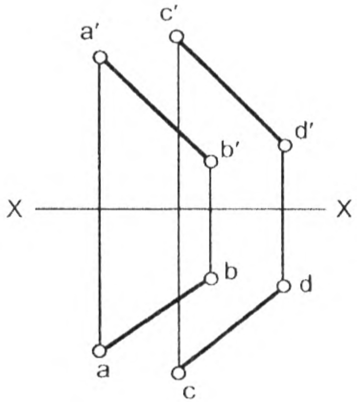


Рис. 41.

5. Плоскими геометрическими фигурами треугольника, четырёхугольника, ромба и т.д. **P(Δ ABC), P(□ABCD), P(◊ABCD)...**
6. Следами плоскости **P(P_H, P_V, P_W)** (рис.42).

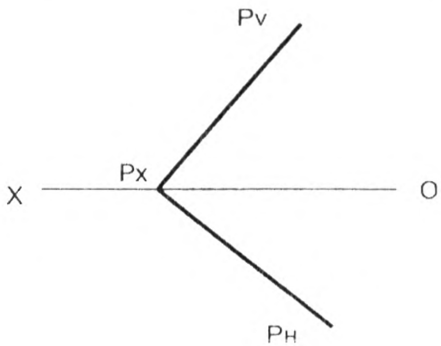


Рис. 42.

Следы плоскости

Линии пересечения плоскости с плоскостями проекции **H**, **V**, **W** называются **следами плоскости**.

Относительно плоскостей проекций плоскость может занимать различное положение.

Плоскость, не перпендикулярная ни одной из основных плоскостей проекции **H**, **V**, **W**, называется плоскостью общего положения.

На рис.43 приведен пространственный чертёж плоскости общего положения **P**.

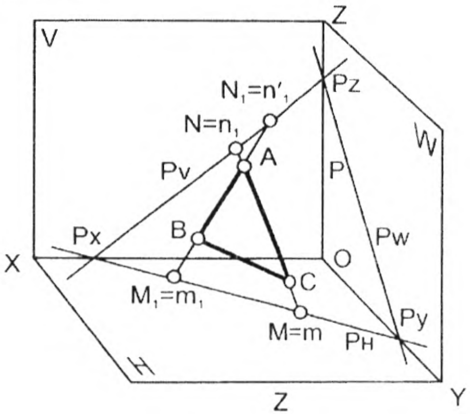


Рис. 43.

$\mathbf{P \cap H = P_H}$ – горизонтальный след плоскости **P**.

$\mathbf{P \cap V = P_V}$ - фронтальный след плоскости **P**.

$\mathbf{P \cap W = P_W}$ – профильный след плоскости **P**.

$$\mathbf{P_H \cap P_V = P_X,\ \ P_H \cap P_W = P_Y, P_V \cap P_W = P_Z}.$$

$\mathbf{P_X, P_Y, P_Z}$ **- P** точка схода следов плоскости **P**.

На плоскости общего положения ограничиваем тремя точками плоскость **ΔABC**. Определим горизонтальный и фронтальный следы сторон **(AC)** плоскости **ΔABC,** а затем горизонтальный и фронтальный следы сторон **(AB).**

Из чертежа видно: одноименные следы сторон **ΔABC** совпадают с одноименными следами плоскости **P**.

$$\mathbf{M_H\,(m_H, m_H') \in P_H \wedge N_V\,(n_V, n_V') \in P_V}$$

Пример: Построить следы **P_V и P_H** плоскости **P** заданной ΔABC (рис.44). Эта задача является домашне–графической работой (эпюр 1) студентов. Координаты **(X,Y,Z)** точек **A,B,C** задаются в миллиметрах согласно варианта.

Дано: **P(ΔABC);**
Определить: **$P(P_H\,,\,P_V)$ – ?**

№	X	Y	Z
A	65	20	10
B	35	10	40
C	10	45	20

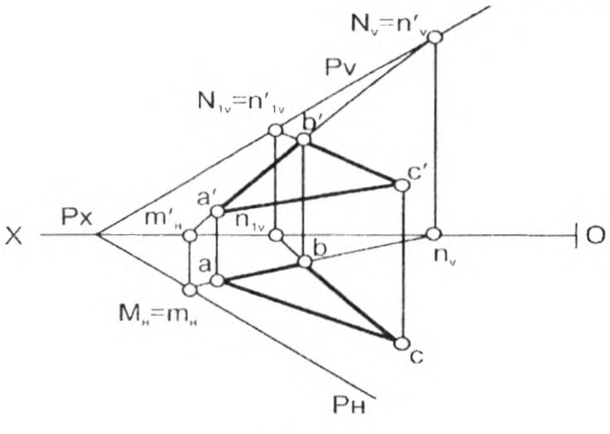


Рис. 44.

Алгоритм решения первого эпюра:

1. $\mathbf{(AB) \cap H = M_H(m_H, m_H')}$
2. $\mathbf{(AB) \cap V = N_V(n_V, n_V')}$
3. $\mathbf{(BC) \cap V = N_{1V}(n_{1V}, n_{1V}')}$
4. $\mathbf{N_V \cup N_{1V} = P_V}$
5. $\mathbf{P_V \cap [ox) = P_X}$
6. $\mathbf{P_X \cup M_H = P_H}$

6 - ЛЕКЦИЯ. Плоскости частного положения.

Плоскости перпендикулярные или параллельные к основным плоскостям проекций называются плоскостями **частного положения.**

1. Если плоскость параллельна горизонтальной плоскости проекций, то ее называют горизонтальной плоскостью **P || H**.

На рис. 45 приведен пространственный чертеж горизонтальной плоскости.

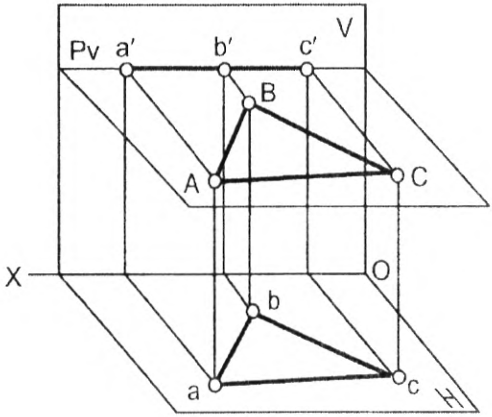


Рис. 45.

Как видно из чертежа, точка, прямая и плоскость **Δ ABC** принадлежат горизонтальной плоскости **P** и фронтальные проекции их проецированы на фронтальный след плоскости.

На рис. 46 приведен эпюр горизонтальной плоскости **P**.

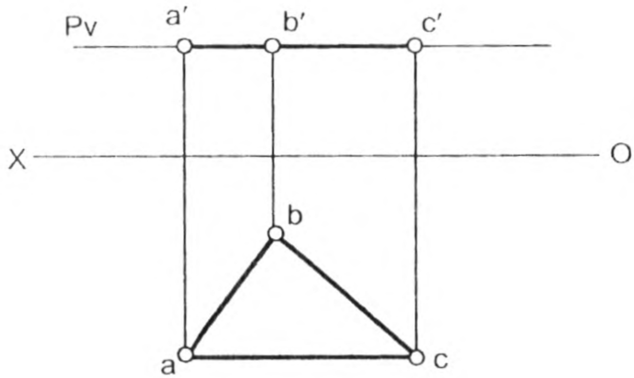


Рис. 46.

Фронтальный след P_V горизонтальной плоскости **P** параллелен оси проекций [ox).

$$P \parallel H \Rightarrow P_V \parallel [ox)$$

Свойство горизонтальной плоскости:

Если всякая точка, прямая, плоскость принадлежат горизонтальной плоскости **P**, то фронтальные проекции всякой точки, прямой, плоскости проецируются на фронтальный след горизонтальной плоскости.
То есть:

$$\forall (\bullet)\ A \in P \parallel H \Rightarrow a' \in P_V$$

В этом случае следует отметить, что плоскость **Λ ABC** проецируется на горизонтальную плоскость проекций в натуральную величину

$$(\Delta\ ABC) \in P \parallel H \Rightarrow (\Lambda\ abc) = |\Delta\ ABC|$$

2. Если плоскость параллельна фронтальной плоскости проекций, то ее называют **фронтальной плоскостью P ‖ V.**

На рис 47 приведен пространственный чертеж фронтальной плоскости.

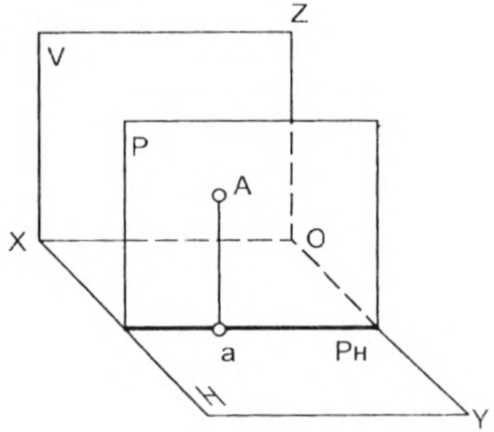


Рис. 47.

Как видно из чертежа, точка, прямая и плоскость **Δ ABC** принадлежат фронтальной плоскости **P** и горизонтальные проекции их проецированы на горизонтальный след фронтальной плоскости.

На рис. 48 приведен эпюр фронтальной плоскости Р.

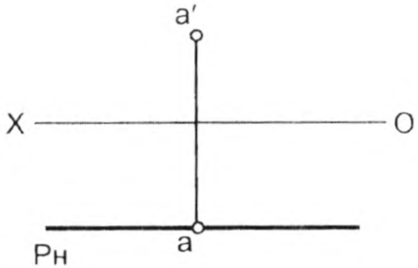


Рис. 48.

Горизонтальный след $\mathbf{P_H}$ фронтальной плоскости **P** параллелен оси проекции (ох) .

$$P \parallel V \Rightarrow P_H \parallel [ox)$$

Свойство фронтальной плоскости:

Если всякая точка, прямая, плоскость принадлежат фронтальной плоскости **P**, то горизонтальные проекции всякой точки, прямой, плоскости проецируются на горизонтальный след фронтальной плоскости .

То есть:

$$\forall (\bullet)\ A \in P \parallel V \Rightarrow a \in P_H$$

В этом случае следует отметить, что плоскость **Δ ABC** проецируется на фронтальную плоскость проекций в натуральную величину

$$(\Delta\ ABC) \in P \parallel V \Rightarrow (\Delta\ a'b'c') = |\Delta\ ABC|$$

3. Если плоскость параллельна профильной плоскости проекций, то ее называют **профильной плоскостью** **P || W.**

На рис.49. приведен пространственный чертеж профильной плоскости.

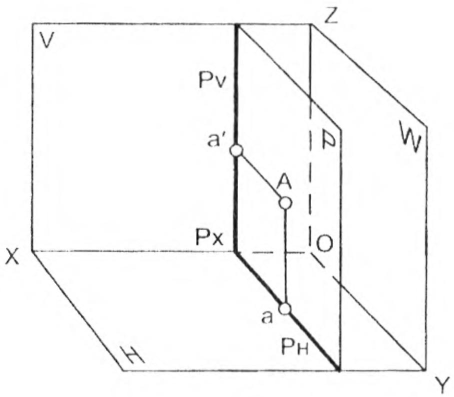


Рис. 49.

Как видно из чертежа, точка, прямая и плоскость **Δ ABC** принадлежат профильной плоскости **P,** и одноименные проекции их проецируются на одноименные следы профильной плоскости.

На рис. 50 приведен эпюр профильной плоскости **P.**

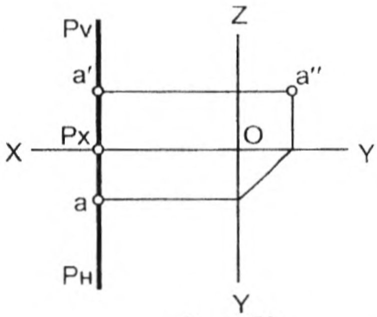


Рис. 50

Горизонтальный след P_H и фронтальный след P_V профильной плоскости перпендикулярны оси проекций **[ox)**.

$$P \parallel W \Rightarrow P_H \perp [ox) \wedge P_V \perp [ox)$$

Свойство профильной плоскости:

Если всякая точка, прямая, плоскость принадлежат профильной плоскости **P**, то горизонтальные и фронтальные проекции всякой точки, прямой, плоскости проецируются на горизонтальный и фронтальный следы профильной плоскости .

То есть:

$$\forall (\bullet)\, A \in P \parallel W \Rightarrow a \in P_H \wedge a' \in P_V$$

В этом случае следует отметить, что плоскость **Δ ABC** проецируется на профильную плоскость проекций в натуральную величину.

$$(\Delta\, ABC) \in P \parallel W \Rightarrow (\Delta\, a''b''c'') = |\Delta\, ABC|$$

Плоскости, перпендикулярные к плоскостям проекций **(H, V, W)**, называются **проецирующими плоскостями.**

1. Если плоскость перпендикулярна горизонтальной плоскости проекций, то ее называют **горизонтально - проецирующей плоскостью $P \perp H$.**

На рис.51 приведен пространственный чертеж горизонтально - проецирующей плоскости.

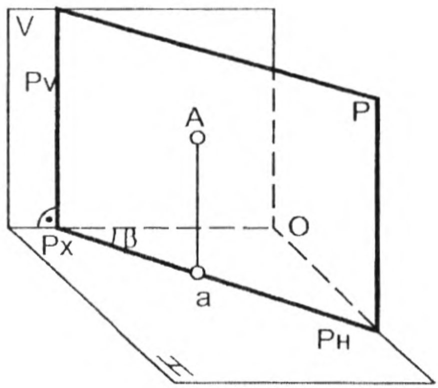


Рис. 51.

Как видно из чертежа, точка, прямая и плоскость **Δ ABC** принадлежат горизонтально - проецирующей плоскости **P** и горизонтальные проекции их проецируются на горизонтальный след плоскости

На рис. 52 приведен эпюр горизонтально - проецирующей плоскости P.

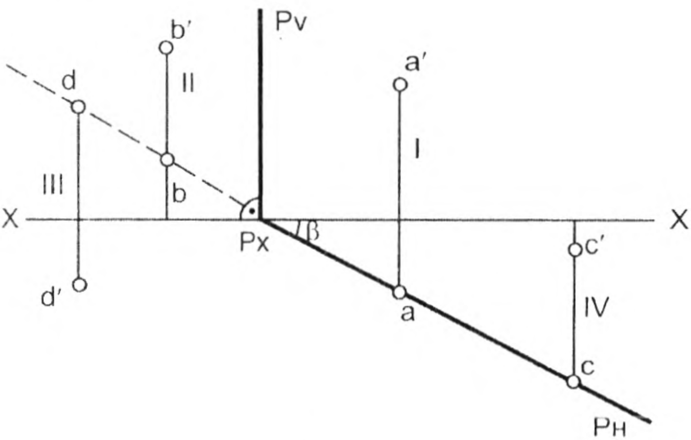


Рис.52.

Фронтальный след P_V горизонтально - проецирующей плоскости перпендикулярен к оси проекций **[ox).**

$$P \perp H \Rightarrow P_V \perp [ox)$$

Свойство горизонтально - проецирующей плоскости:

Если всякая точка, прямая, плоскость принадлежат горизонтально - проецирующей плоскости **P**, то горизонтальные проекции всякой точки, прямой, плоскости проецируются на горизонтальный след горизонтально - проецирующей плоскости.

То есть:

$$\forall (\bullet)\ A \in P \perp H \Rightarrow a \in P_H$$

Угол наклона горизонтально - проецирующей плоскости к фронтальной плоскости проекций **V** - есть угол β.

$$\angle \beta = P \wedge V$$

Выберем точки **A, B, C, D**, принадлежащие горизонтально-проецирующей плоскости.

$$(\bullet)\ A \in P \wedge (\bullet)\ A \in I$$

$$(\bullet)\ B \in P \wedge (\bullet)\ B \in II$$

$$(\bullet)\ D \in P \wedge (\bullet)\ D \in III$$

$$(\bullet)\ C \in P \wedge (\bullet)\ C \in IV$$

Заключение: горизонтально - проецирующая плоскость проходит через **I, II, III, IV** четверти пространства.

2. Если плоскость перпендикулярна фронтальной плоскости проекций, то ее называют **фронтально - проецирующей** плоскостью $P \perp V$.

На рис.53 приведен пространственный чертеж фронтально-проецирующей плоскости.

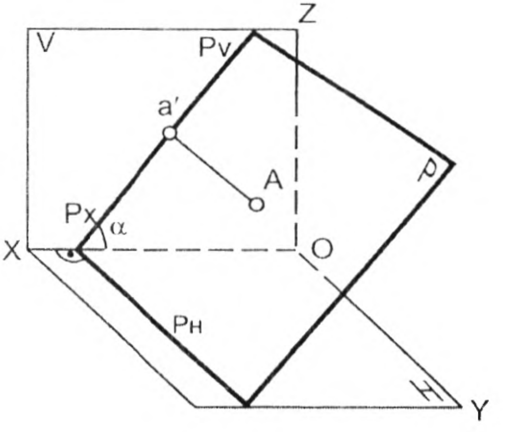


Рис.53.

Как видно из чертежа точка, прямая, плоскость **Δ ABC** принадлежат фронтально - проецирующей плоскости **P**, и фронтальные проекции их проецируются на фронтальный след плоскости.

На рис.54 приведен эпюр фронтально - проецирующей плоскости **P**.

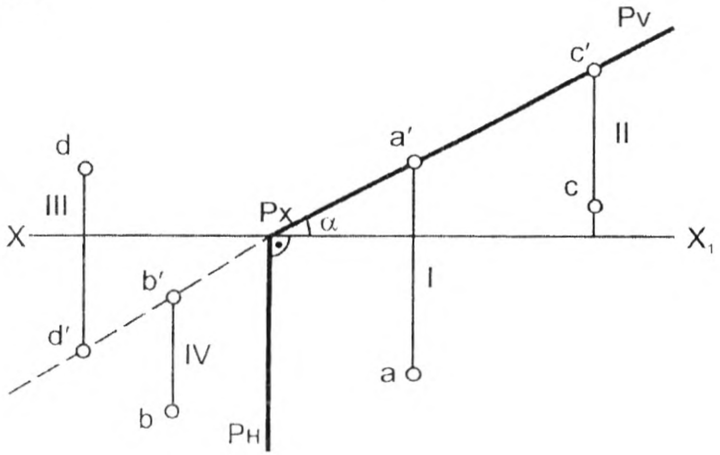


Рис.54.

Горизонтальный след P_H фронтально - проецирующей плоскости перпендикулярен к оси проекций **[ox).**

$$\mathbf{P} \perp \mathbf{V} \Rightarrow \mathbf{P_H} \perp [\mathbf{ox})$$

Свойство фронтально - проецирующей плоскости :

Если всякая точка, прямая, плоскость принадлежат фронтально - проецирующей плоскости **P**, то фронтальные проекции всякой точки, прямой, плоскости проецируются на фронтальный след фронтально - проецирующей плоскости **P**.

То есть:

$$\forall\ (\bullet)\ \mathbf{A} \in \mathbf{P} \perp \mathbf{V} \Rightarrow \mathbf{a'} \in \mathbf{P_V}$$

Угол наклона фронтально - проецирующей плоскости к горизонтальной плоскости проекций **H** - есть угол α.

$$\angle\ \alpha = \mathbf{P}\ \hat{}\ \mathbf{H}$$

Выберем точки **A, B, C, D**, принадлежащие фронтально-проецирующей плоскости **P**.

$$(\bullet)\ \mathbf{A} \in \mathbf{P} \wedge (\bullet)\ \mathbf{A} \in \mathbf{I}$$

$$(\bullet)\ \mathbf{C} \in \mathbf{P} \wedge (\bullet)\ \mathbf{C} \in \mathbf{II}$$

$$(\bullet)\ \mathbf{D} \in \mathbf{P} \wedge (\bullet)\ \mathbf{D} \in \mathbf{III}$$

$$(\bullet)\ \mathbf{B} \in \mathbf{P} \wedge (\bullet)\ \mathbf{B} \in \mathbf{IV}$$

Заключение: фронтально - проецирующая плоскость проходит через **I, II, III, IV** четверти пространства.

3. Если плоскость перпендикулярна профильной плоскости проекций, то ее называет **профильно - проецирующей** плоскостью $\mathbf{P} \perp \mathbf{W}$.

На рис 55 приведен пространственный чертеж профильно-проецирующей плоскости **P.**

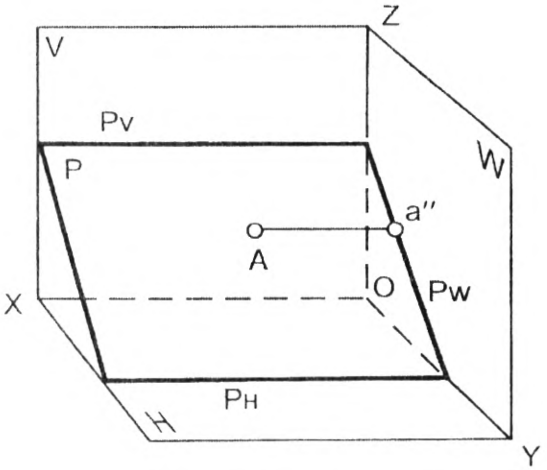


Рис.55.

Как видно из чертежа, точка, прямая, плоскость **Δ АВС** принадлежат профильно-проецирующей плоскости **Р** и профильные проекции их проецируются на профильный след плоскости **Р.**

На рис.56 приведен эпюр профильно-проецирующей плоскости **Р.**

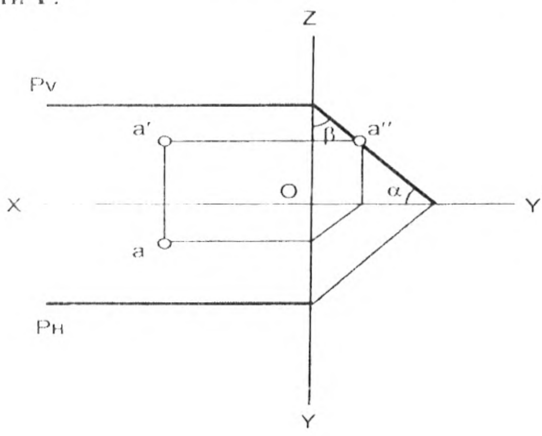


Рис.56.

Горизонтальный след $\mathbf{P_H}$ и фронтальный след $\mathbf{P_V}$ профильно-проецирующей плоскости параллельны к оси проекций **[ox)**.

$$\mathbf{P \perp W \Rightarrow P_H \parallel [ox) \wedge P_V \parallel [ox)}$$

Свойство профильно-проецирующей плоскости :

Если всякая точка, прямая, плоскость принадлежат профильно-проецирующей плоскости **P,** то профильные проекции всякой точки, прямой, плоскости проецируются на профильный след профильно-проецирующей плоскости **P**.

То есть:

$$\forall\ (\bullet)\ \mathbf{A \in P \perp W \Rightarrow a'' \in P_W}$$

Угол наклона профильно-проецирующей плоскости **P** к горизонтальной плоскости проекций **H** - есть угол α.

$$\angle\ \alpha = \mathbf{P\ \hat{}\ H}$$

Угол наклона профильно-проецирующей плоскости P к фронтальной плоскости проекций **V** - есть угол β.

$$\angle\ \beta = \mathbf{P\ \hat{}\ V}$$

Выберем точку **A**, принадлежащей профильно-проецирующей плоскости **P.**

$$(\bullet)\ \mathbf{A \in P \wedge (\bullet)\ A \in I}$$

Заключение: профильно-проецирующая плоскость проходит через **I, II, IV** четверти пространства.

Одна из проекций всякой точки, прямой, плоской фигуры, принадлежащих проецирующим плоскостям, лежит на соответствующих следах проецирующих плоскостей, т.е. проецирующие плоскости обладают свойством **сбора**.

Проецирующая плоскость, проходящая через ось проекций (OX) (рис.57)

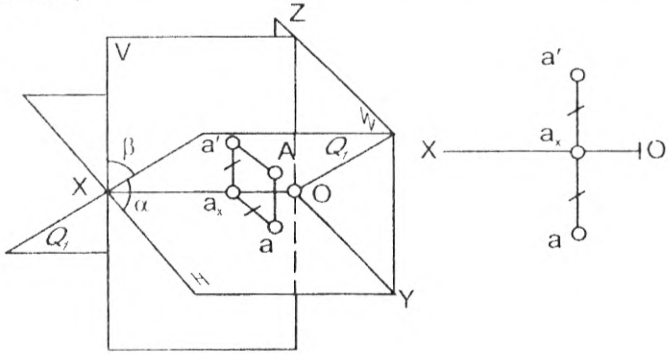


Рис.57.

Эта плоскость **Т** является частным случаем профильно-проецирующей плоскости. Если $\alpha = 45^o$, то плоскость **Т** называют биссекторным (рис.58).

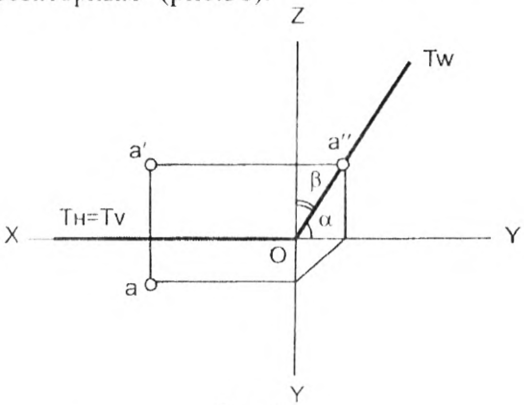


Рис.58.

Q_I – первая биссекторная плоскость – плоскость, проходящая через первый и третий углы пространства.

Q_{II} – вторая биссекторная плоскость – плоскость, проходящая через второй и четвертый углы пространства. Свойство: Если всякая точка **А** принадлежит биссекторной плоскости, то она равноудалена от горизонтальной и фронтальной плоскостей проекций.

7 – ЛЕКЦИЯ. Принадлежность прямой и точки плоскости. Главные линии плоскости.

Принадлежность прямой и точки плоскости основана на геометрию (рис.59).

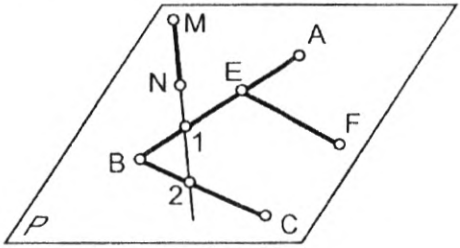


Рис.59.

1.Если прямая **(MN)** с плоскостью **P** имеет две **(1, 2)** общие точки, то она принадлежит данной плоскости **P. (MN)**$\subset$ **P**.

2. Если прямая **(EF)** проходит через точку **(E)**, принадлежащую плоскости **P** и параллельно некоторой прямой **(BC)** плоскости, то эта прямая **(EF)** также принадлежит данной плоскости **P.**

$$(FF) \cap (AB) = (\bullet)\ E \in P \wedge (EF) \parallel (BC) \Rightarrow (EF) \subset P$$

Пример: Определить недостающую проекцию прямой (MN), принадлежащей плоскости **P**, выраженной в виде двух пересекающих прямых **(AB)** и **(BC)** (рис.60).

Дано:

P((AB) $\cap$ **(BC))** $\wedge$ **(MN)** $\subset$ **P**

Определить:

(mn) - ?

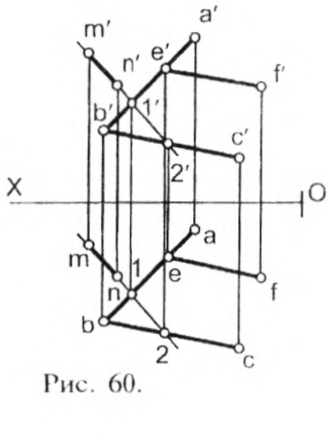


Рис. 60.

3. Если одноименные следы прямой **(AB)** принадлежат одноименным следам плоскости **P**, то эта прямая **(AB)** также принадлежит плоскости **P**.

$$\mathbf{(AB) \cap H = M_H \in P_H \wedge (AB) \cap V = N_V \in P_V \Rightarrow (AB) \subset P}$$

Пример: Определить горизонтальную проекцию прямой **(AB)**, принадлежащей плоскости **P**. (рис.61).

Дано:
$\mathbf{P(P_H\ , P_V) \wedge}$
$\mathbf{(AB) \subset P}$
Определить:
(ab) - ?

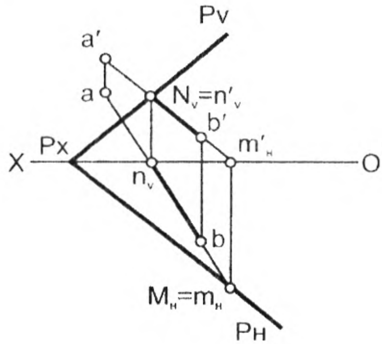


Рис. 61.

4. Если точка **(•)K** принадлежит некоторой прямой **(MN)** плоскости **P**, то точка **(•)K** также принадлежит плоскости **P**

$$\mathbf{(\bullet)K \in (MN) \subset P \Rightarrow (\bullet)\ K \in P}$$

Пример: Определить горизонтальную проекцию точки **K**, принадлежащей профильно - проецирующей плоскости **P** (рис.62)

Дано:
$\mathbf{P(P_H\ ,P_V) \perp W}$
$\mathbf{\wedge (\bullet)\ K \in P}$
Определить:
(k) - ?

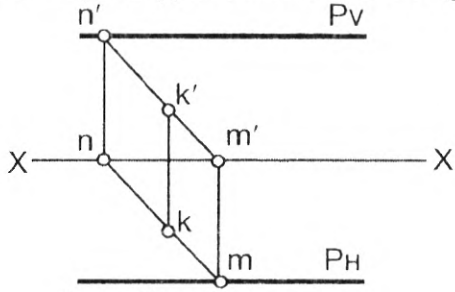


Рис. 62.

Главные линии плоскости

Прямые, принадлежащие плоскости и параллельные одной из плоскостей проекций **H, V, W,** называются **главными линиями** плоскости.

Рассмотрим пространственный чертеж плоскости общего положения **P** (рис.63).

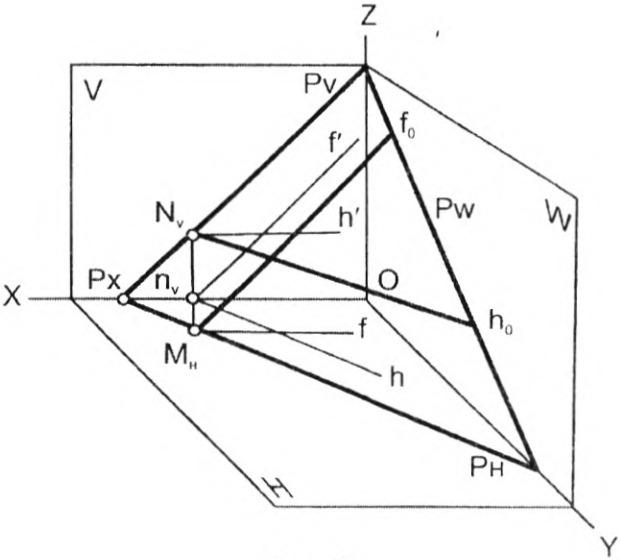


Рис. 63.

$\mathbf{h_0}$ – горизонталь плоскости.
$\mathbf{f_0}$ – фронталь плоскости.

Горизонталь плоскости - это прямая, принадлежащая плоскости **P** и параллельная плоскости проекций **H**

$$\mathbf{h_0 \subset P \wedge h_0 \parallel H}$$

Фронталь плоскости - это прямая, принадлежащая плоскости **P** и параллельная плоскости проекций

$$\mathbf{Vf_0 \subset P \wedge f_0 \parallel V}$$

Рассмотрим эпюр плоскости общего положения **P** (рис. 64).

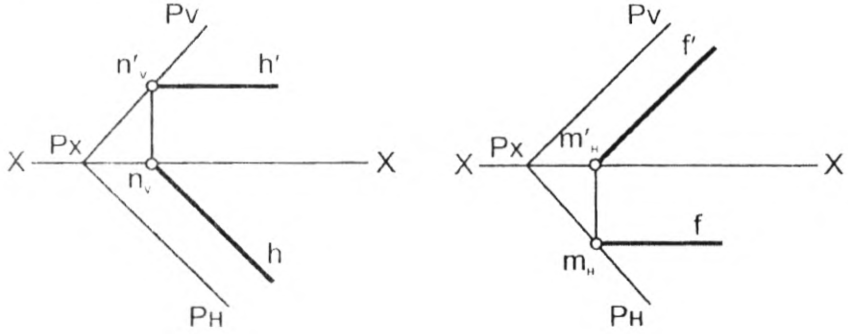


Рис.64.

Из рисунка видно, что фронтальная проекция горизонтали плоскости **P** параллельна оси проекций **[ox)** и горизонтальная проекция горизонтали параллельна горизонтальному следу данной плоскости **P**.

$$\mathbf{h_0 \subset P \wedge h_0 \parallel H \Rightarrow h' \parallel [ox) \wedge h \parallel P_H}$$

Из рисунка видно, что горизонтальная проекция фронтали плоскости **P** параллельна оси проекций **[ox)** и фронтальная проекция фронтали параллельна фронтальному следу данной плоскости **P**.

$$\mathbf{f_0 \subset P \wedge f_0 \parallel V \Rightarrow f \parallel [ox) \wedge f' \parallel P_V}$$

Линии ската плоскости

Линии, принадлежащие плоскости и перпендикулярные горизонталям и фронталям плоскости, называют **линиями ската** плоскости.

Рассмотрим пространственный чертеж линии ската плоскости **P** относительно горизонтальной плоскости проекции (рис.65)

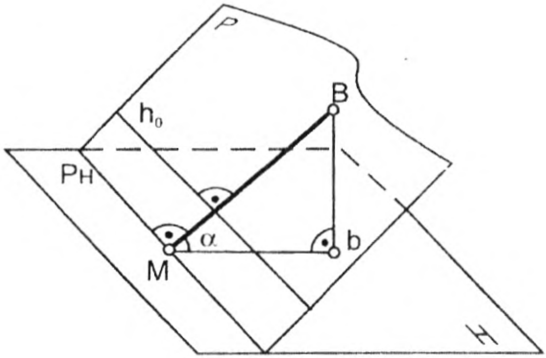


Рис.65.

(BM) – линия ската плоскости **P** относительно горизонтальной плоскости проекций **H**.

$$\mathbf{(BM) \subset P \wedge (BM) \perp h_0 \wedge (BM) \perp P_H}$$

Пример: Определить угол наклона плоскости **P** относительно горизонтальной плоскости проекции **H** (рис. 66)

Дано:
P (P_H ,P_V)
Определить:
$\angle \alpha = \mathbf{P} \,\hat{}\, \mathbf{H}$

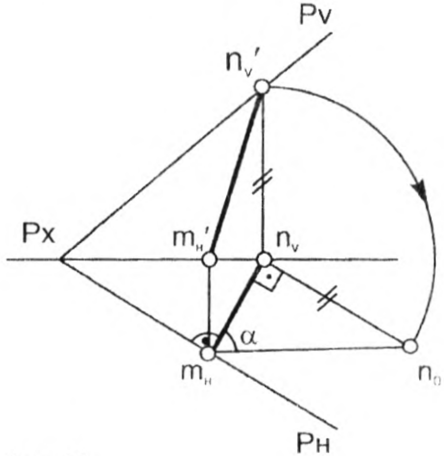


Рис.66.

8 - ЛЕКЦИЯ. Взаимное положение прямой и плоскости . Пересечение прямой с плоскостью частного положения. Пересечение плоскостей, одна из которых – частного положения.

Взаимное положение прямой и плоскости

В пространстве прямая и плоскость могут быть в следующих положениях:

1) Пересекаться в собственной точке.

$$(AB) \cap P = (\bullet)\ K$$

2) Пересекаться в несобственной точке.

$$(AB) \cap P = (\bullet)\ K\ \infty$$

В этом случае прямая параллельна плоскости.

Взаимное положение двух плоскостей

В пространстве две плоскости могут быть в следующих положениях:

1) Пересекаться в собственной прямой.

$$P \cap Q = (MN)$$

2) Пересекаться в несобственной прямой.

$$P \cap Q = (MN)\infty$$

В этом случае две плоскости параллельны.

Пересечение прямой с плоскостью частного положения

Рассмотрим пространственный чертеж горизонтально-проецирующей плоскости **P** и прямую **(AB)** общего положения (рис.67).

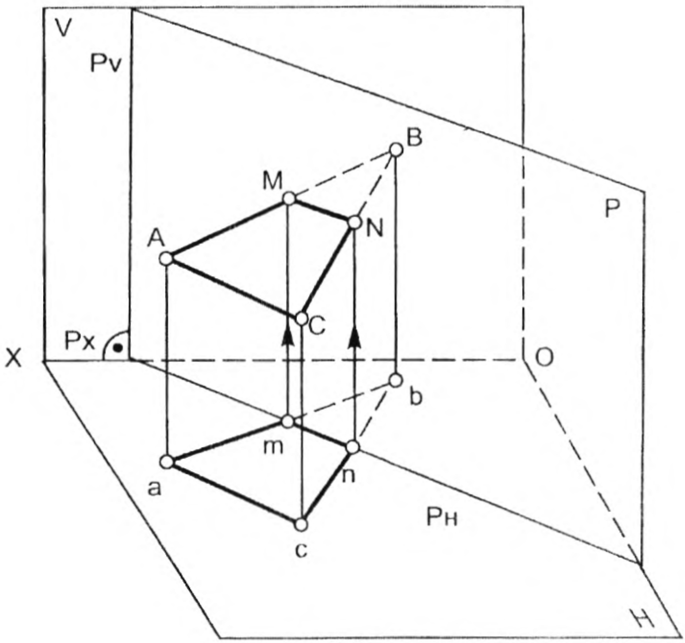


Рис.67.

Прямая **(AB)** с плоскостью **P** пересекается в одной точке.

$$\mathbf{(AB) \cap P = (\bullet)M}$$

Следует отметить, что точка пересечения прямой с плоскостью одновременно принадлежит и прямой, и плоскости. В случае, если плоскость частного положения, то решение задачи упрощается, т.к. одна проекция точки пересечения с такой плоскостью будет на соответствующем следе плоскости. Обозначив ее с помощью вертикальной линии связи, находим вторую проекцию точки пересечения прямой с проецирующей плоскостью **P**. (рис.68)

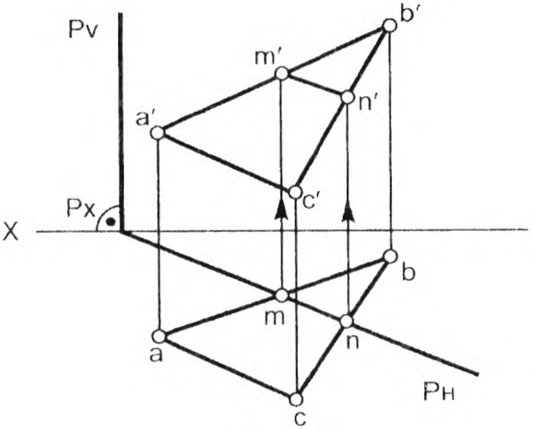


Рис.68.

Из точки B прямой **(AB)** проводим прямую общего положения **(BC)** и рассмотрим пересечение ее с плоскостью **P**. (рис.67,68).

$$\mathbf{(BC) \cap P = (\bullet)N}$$

Пересечения плоскостей, одна из которых–частного положения

Пересекающие прямые **(AB)** и **(BC)** образуют плоскость общего положения.

Плоскость общего положения - **Δ ABC** пересекается с плоскостью **P** частного положения по прямой линии.

$$\mathbf{(MN) \subset P \wedge (MN) \subset (\Delta\ ABC) \Rightarrow P \cap (\Delta\ ABC) = (MN)}$$

Горизонтальная проекция линии пересечения этих плоскостей проецируется на горизонтальный след горизонтально-проецирующей плоскости **P**.

Заключение: Если одна из пересекающихся плоскостей является плоскостью частного положения, то в этом случае одна проекция линии их пересечения будет известна. Обозначив его, находят вторую проекцию линии пересечения этих двух плоскостей.

Пример: Определить линию пересечения плоскости общего положения **Q(Δ ABC)** с горизонтальной плоскостью **P**. (рис.69).

Дано:
Q(Δ ABC) ∧
P(P_V), P ∥ H
Определить:
(MN) = P ∩ Q

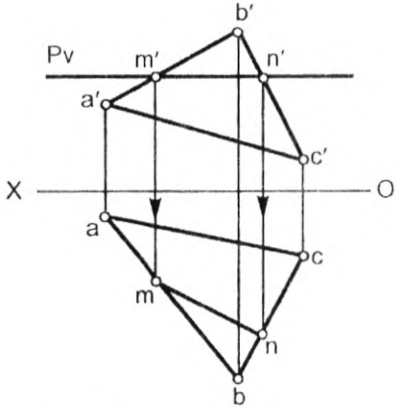


Рис.69.

Пример: Определить линию пересечения плоскости общего положения **P(P_H , P_V)**, с горизонтальной плоскостью **Q**. (рис.70).

Дано:
P(P_V P_H), ∧
Q(Q_V),
Q ∥ H
Определить:
P ∩ Q =
(MN) ∥ H

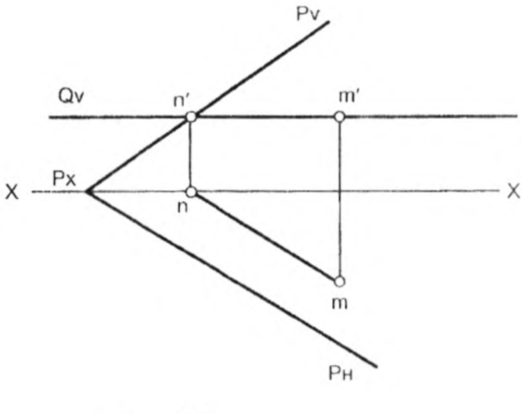


Рис.70.

Заключение: Когда одна из пересекающихся плоскостей общего положения, а другая - горизонтальная плоскость, следовательно, характер линии пересечения этих плоскостей - горизонтальная прямая.

9 - ЛЕКЦИЯ. Пересечение двух плоскостей общего положения. Пересечение прямой линии общего положения с плоскостью общего положения.

Пересечение двух плоскостей общего положения

Пространственный чертеж пересечения двух плоскостей общего положения $\mathbf{Q(Q_H\ ,\ Q_V)}$ **и** $\mathbf{P(P_H\ ,\ P_V)}$ приведен на рис.71.

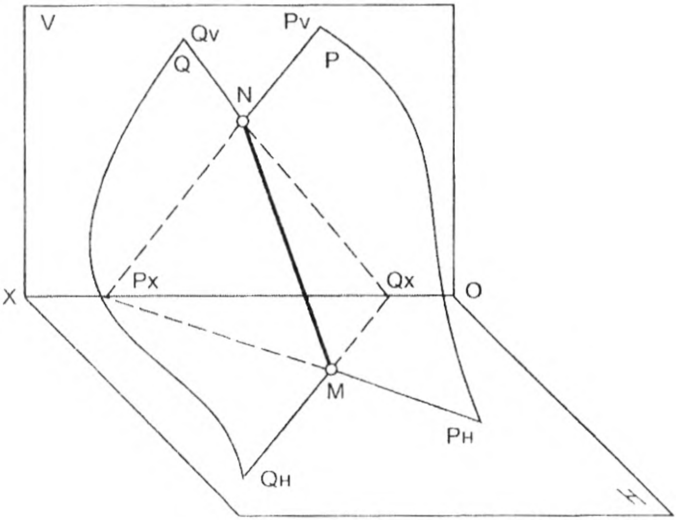


Рис.71.

Из чертежа видно, что две плоскости пересекаются по прямой линии **(MN)**, чтобы провести ее достаточно было обозначить точки пересечения одноименных следов заданных плоскостей.

$$\mathbf{Q_V \cap P_V\ = (\bullet)N(n\ ,\ n')\ ва\ Q_H \cap P_H\ = (\bullet)M(m,\ m')}$$

Построение линии пересечения плоскостей **Q** и **P** приведено на эпюре (рис.72).

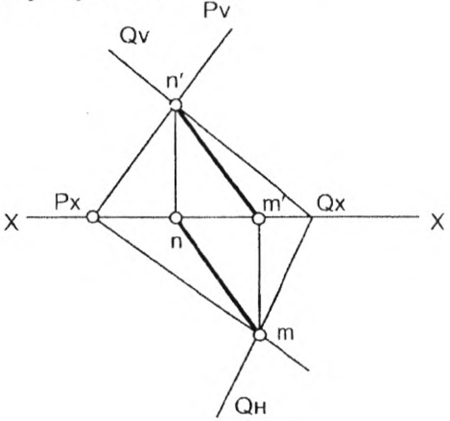


Рис.72.

Если одноименные следы двух пересекающихся плоскостей общего положения не пересекаются в пределах чертежа, то в этом случае для построения линии пересечения данных плоскостей используют вспомогательную плоскость и в качестве такой плоскости берут плоскости частного положения.

На рис. 73 приведен эпюр двух пересекающихся плоскостей общего положения.

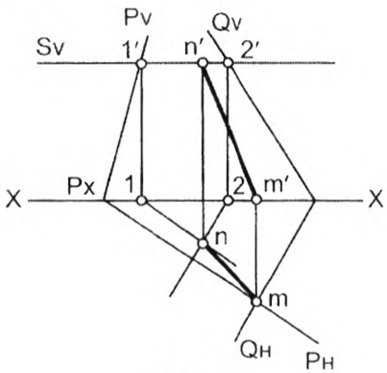


Рис.73.

Дано: $Q(Q_H , Q_V) \wedge P(P_H , P_V)$

Определить: $(MN) = Q \cap P$

Решение: 1) Для определения точки **M(m , m′)** отмечаем пересечения горизонтальных следов плоскостей **Q** и **P.**

2) для определения точки **N (n , n′)** проводим вспомогательную горизонтальную плоскость S.

$$(S \cap P) \cap (S \cap Q) = N(n\ ,\ n').$$

Вспомогательная горизонтальная плоскость **S**, пересекаясь данными двумя плоскостями, образует горизонтальную прямую (1,2) и, в свою очередь, горизонтальная прямая пересекается в точке **N(n , n′).**

Если одна из пересекающихся плоскостей общего положения выражена следами, а другая в виде треугольника, то также используют вспомогательную плоскость частного положения.

Пример: Определить линию пересечения двух плоскостей общего положения **Q (Δ ABC) и** $P(P_H , P_V)$ (рис.74).

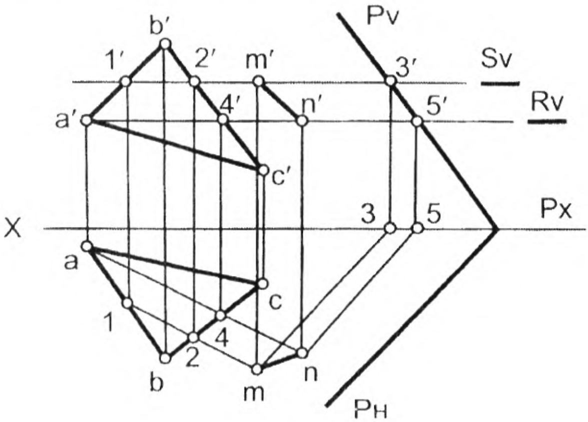


Рис.74.

Дано: $\mathbf{Q}\ (\Delta\ \mathbf{ABC}) \wedge \mathbf{P}(\mathbf{P}_H\ ,\mathbf{P}_V)$

Определить: $(\mathbf{MN}) = \mathbf{Q} \cap \mathbf{P}$

Решение: 1) Для определения точки **M (m, m′)** проводим вспомогательную горизонтальную плоскость **S.**

$$(\mathbf{S} \cap \mathbf{P}) \cap (\mathbf{S} \cap \mathbf{Q}) = \mathbf{M}(\mathbf{m}, \mathbf{m}')$$

2) для определения точки **N(n , n′)** проводим вспомогательную горизонтальную плоскость **R.**

$$(\mathbf{R} \cap \mathbf{P}) \cap (\mathbf{R} \cap \mathbf{Q}) = \mathbf{N}(\mathbf{n}\ , \mathbf{n}')$$

Заключение: Если из пересекающихся плоскостей обе общего положения, то характер линии их пересечения будет также общего положения.

Пересечение прямой общего положения с плоскостью общего положения

На рис. 75 приведен пространственный чертеж прямой **(AB)** и плоскости **P** общего положения.

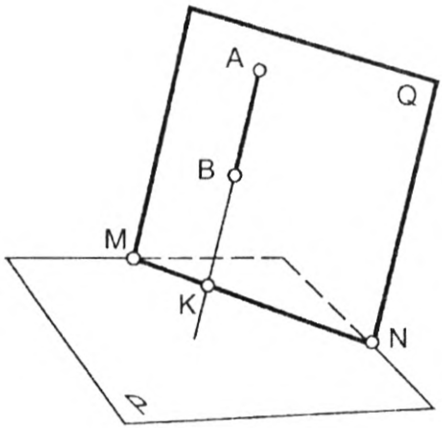


Рис.75.

Для построения точки пересечения прямой с плоскостью общего положения необходимо выполнить следующие три условия:

$$(AB) \cap P = (\bullet)\ K$$

1. Через данную прямую **(AB)** провести некоторую вспомогательную плоскость **Q** частного положения.

$$(AB) \subset Q$$

2. Построить прямую **(MN)** пересечения данной плоскости P со вспомогательной **Q**

$$Q \cap P = (MN)$$

3. Определить точку встречи **K** данной прямой **(AB)** с линией пересечения **(MN)** двух плоскостей **P** и **Q**.

$$(MN) \cap (AB) = (\bullet)\ K$$

Пример: Определить точку встречи прямой **(AB)** с плоскостью **P** общего положения (рис.76).

Дано:
$P(P_H, P_V) \wedge (AB)$
Определить:
$(\bullet)\ K = (AB) \cap P$

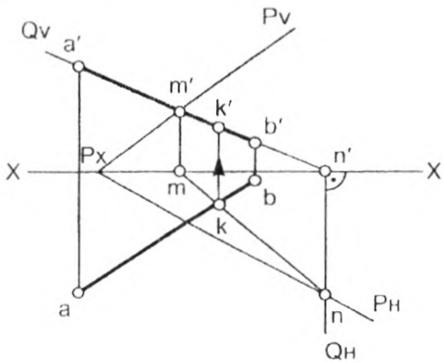


Рис.76.

Пример: Определить точку встречи прямой **(AB)** с плоскостью **P(Δ CDE)** общего положения (рис.77).

Дано: **P(Δ CDE) ∧ (AB)**

Определить: **(•) K = (AB) ∩ P**

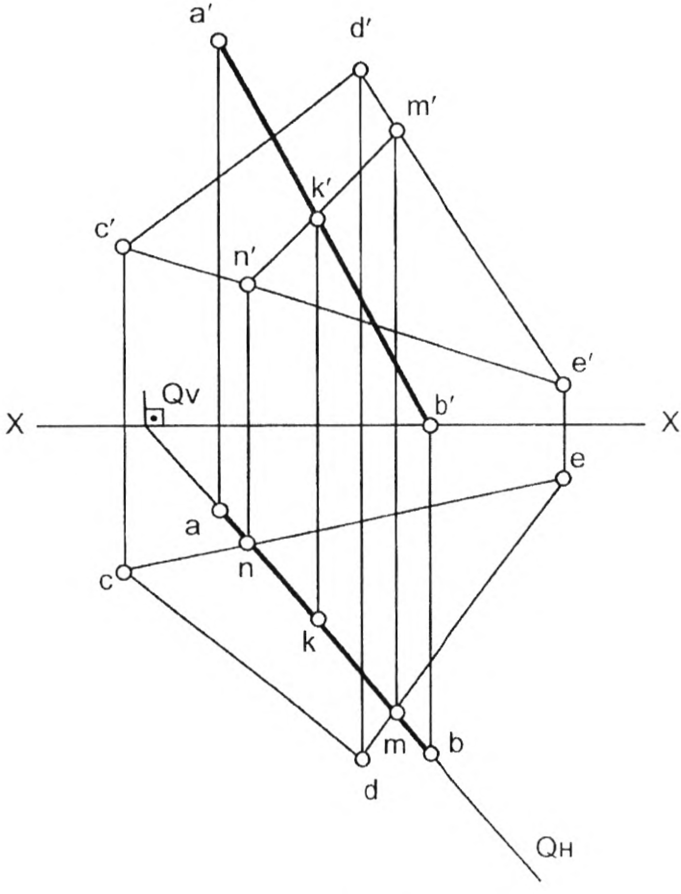


Рис. 77.

10-ЛЕКЦИЯ. Перпендикулярность прямой и плоскости. Алгоритмы решения задач. Перпендикулярность двух плоскостей.

Перпендикулярность прямой и плоскости

Расстояние от точки до плоскости определяется величиной перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную плоскость.

Прямая является перпендикуляром, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым, принадлежащих плоскости (рис.78)

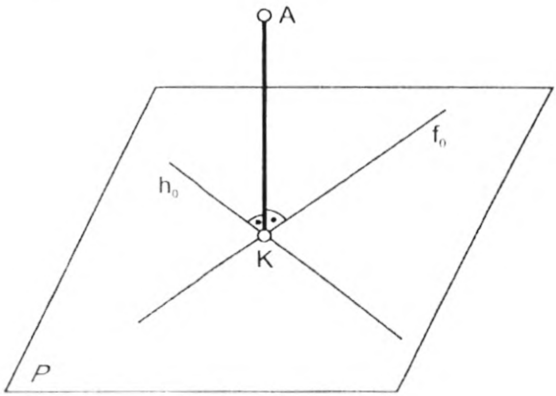


Рис. 78.

Из чертежа видно, что в качестве пересекающихся прямых использованы горизонталь **(h_0)** и фронталь **(f_0)** данной плоскости **P**.

1. Если прямая перпендикулярна плоскости, то горизонтальная проекция прямой перпендикулярна горизонтальной проекции горизонтали, а фронтальная проекция прямой перпендикулярна фронтальной проекции фронтали (рис.79, 80).

$$(AK) \perp P \Rightarrow (ak) \perp h \wedge (a'\ k') \perp f'$$

2. Если прямая перпендикулярна плоскости, то одноименные проекции прямой перпендикулярны одноименным следам плоскости.

$$\mathbf{(AK) \perp P \Rightarrow (ak) \perp P_H \wedge (a' \, k') \perp P_V}$$

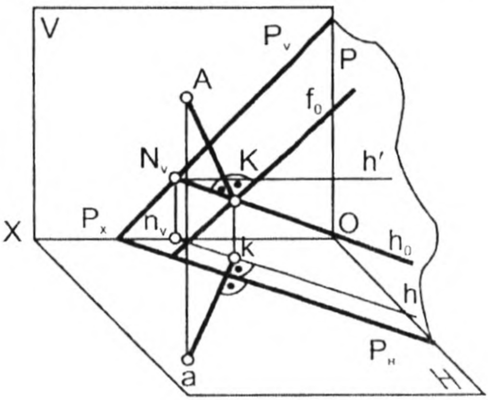


Рис.79.

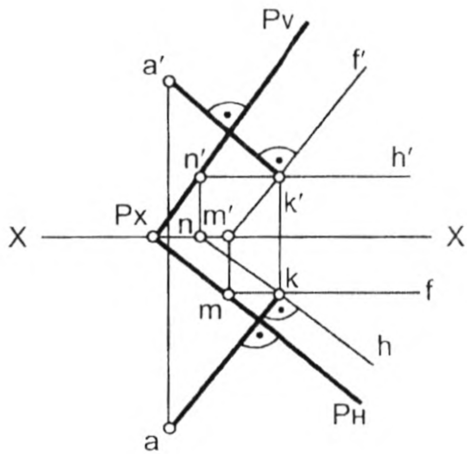


Рис. 80

Алгоритмы решения задачи

Пример: Определить расстояние от точки **S** до плоскости **Р(ΔАВС)** (рис.81). Эта задача является домашне - графической работой (эпюр 2) студентов. Координаты **(X,У,Z)** точки **S** и точек **А,В,С** задаются в миллиметрах согласно варианта.

Дано: **Р(Δ АВС) ∧ (•)S**
Определить: **| SP | - ?**

№	X	Y	Z
A	65	20	10
B	35	10	40
C	10	45	20
S	55	50	50

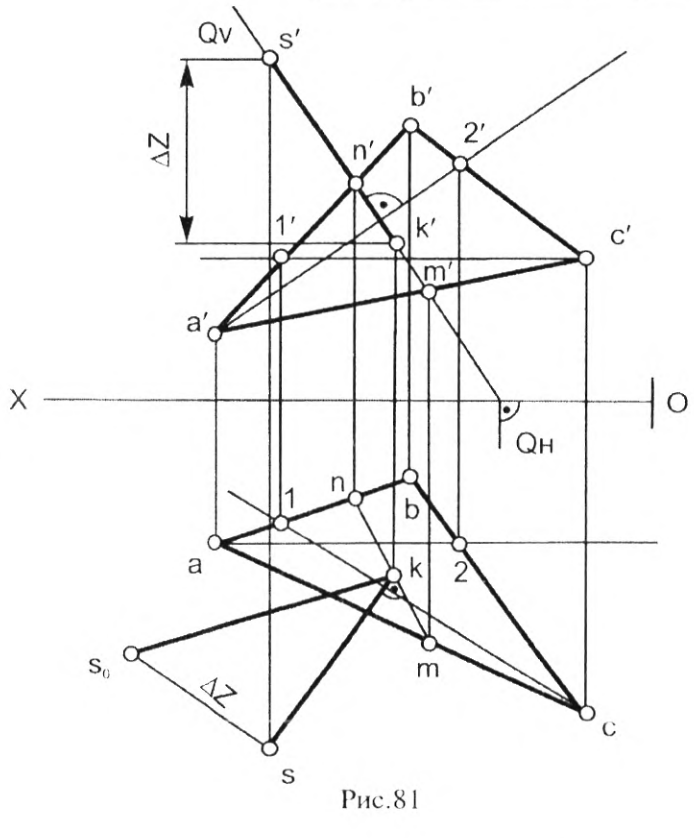


Рис.81

Алгоритм решения второго эпюра .

1) $\mathbf{h_0\,(h,\ h')} \subset \mathbf{(\bullet)C(c,\ c')}$, $\mathbf{f_0\,(f,\ f')} \subset \mathbf{(\bullet)A(a,\ a')}$

2) $\mathbf{s'} \perp \mathbf{(f')}$, $\mathbf{s} \perp \mathbf{(h)}$

3) $\perp_{(\bullet)S} \subset \mathbf{Q} \perp \mathbf{V}$

4) $\mathbf{Q} \cap \mathbf{P(\Delta\ ABC) = (MN)}$

5) $\mathbf{(MN)} \cap \perp_{(\bullet)S} = \mathbf{(\bullet)K(k,\ k')}$

6) $\mathbf{|\ SK\ | = [\ S_0\ k\ ] = ?\ mm}$

Пример: Построить плоскость $\mathbf{R(R_H\ ,R_V)}$, проходящую через точку **A**, перпендикулярной к прямой **(BC)** плоскости **P(ΔABC)** (рис.82). Эта задача является домашней графической работой (эпюр 3) студентов. Координаты **(X,У,Z)** точек **A,B,C** задаются в миллиметрах согласно варианта.

Дано: **P(Δ ABC)**

Определить:

$\mathbf{(\bullet)A \in R(R_H\ ,R_V) \perp (BC)}$ **- ?**

№	X	Y	Z
A	60	30	10
B	40	10	45
C	15	40	25

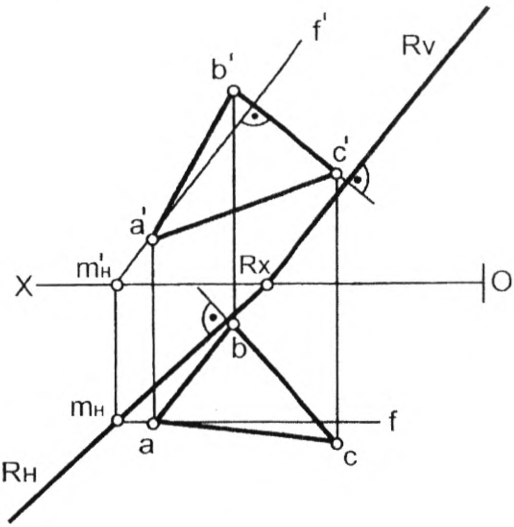


Рис.82.

Алгоритм решения третьего эпюра

1) $\mathbf{f_0\ (f,\ f\,') \subset (\bullet)A(a,\ a'),\ f\,' \perp (\ b',\ c') \wedge f \parallel [ox)}$

2) $\mathbf{f_0 \cap H = M_H(m_H\ ,\ m_H')}$

3) $\mathbf{M_H(m_H) \in R_H \perp (b,\ c)}$

4) $\mathbf{R_H \cap [ox) = R_X}$

5) $\mathbf{R_X \in R_V \perp (\ b',\ c') \wedge R_V \parallel f\,'}$

Перпендикулярность двух плоскостей

Если одна плоскость проходит через прямую перпендикулярную второй плоскости, то эти две плоскости взаимно перпендикулярны (рис.83).

$$\mathbf{(AK) \perp P \wedge (AK) \subset Q \Rightarrow Q \perp P}$$

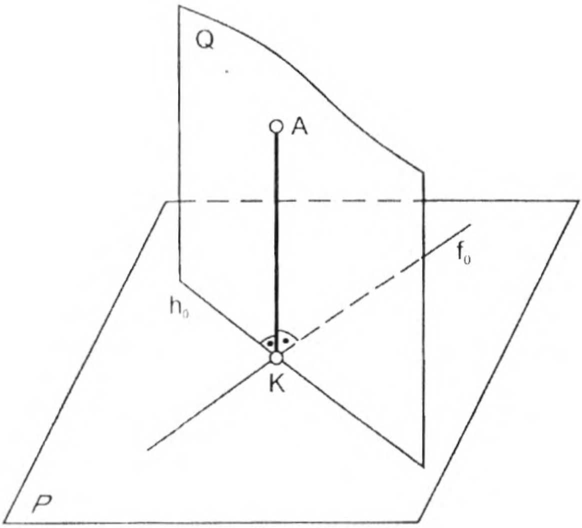


Рис. 83

Пример: Даны плоскость **P** следами, точка А и точка схода следов $\mathbf{Q_X}$, плоскости **Q**. Через точку **A** провести перпендикулярную плоскость **Q** к данной плоскости **P** (рис.84).

Дано:

$\mathbf{P(P_H\ ,\ P_V),\ (\bullet)A \wedge (\bullet)Q_X}$

Определить**:** $\mathbf{(\bullet)A \in Q \perp P}$

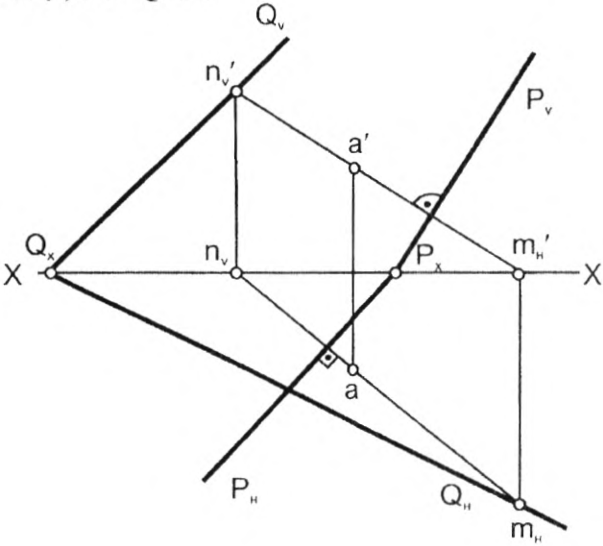


Рис. 84

Алгоритм решения задачи.

1) $\mathbf{(\bullet)A \perp P}$

2) $\perp_{(\bullet)A} \cap \mathbf{H = M_H(m_H\ ,\ m_H')}$

3) $\perp_{(\bullet)A} \cap \mathbf{V = N_V(n_V\ ,\ n_V')}$

4) $\mathbf{(\bullet)N_V(n_V') \cup (\bullet)Q_X = Q_V\ ,\ (\bullet)M_H(m_H) \cup (\bullet)Q_X = Q_H}$

11 - ЛЕКЦИЯ. Параллельность прямой и плоскости. Параллельность двух плоскостей. Алгоритмы решения задач.

Параллельность прямой и плоскости

Если пространственная прямая **(AB)** параллельна некоторой прямой **(MN),** принадлежащей плоскости **P**, то данная прямая **(AB)** параллельна плоскости **P**. (рис.85).

$$\mathbf{(AB) \parallel (MN) \subset P \Rightarrow (AB) \parallel P}$$

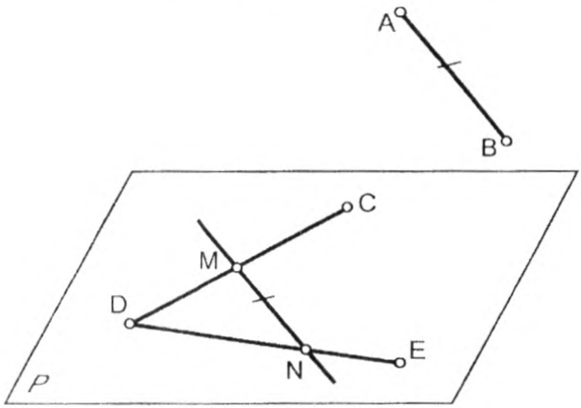


Рис. 85

Пример: Определить горизонтальную проекцию прямой **(AB)** параллельной плоскости **P((CD)$\cap$(DE))** (рис.86).

Дано:
P((CD)$\cap$(DE)),
(AB) $\parallel$ P
Определить:
(a b) - ?

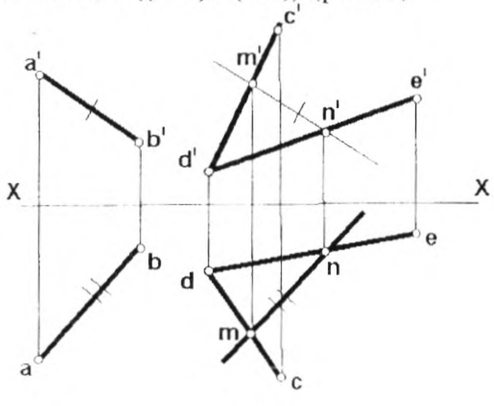


Рис. 86

Пример: Определить горизонтальную проекцию прямой (AB) параллельной профильно-проецирующей плоскости **P** (рис.87).

Дано:

$P(P_H, P_V) \perp W$, $(AB) \parallel P$

Определить:

(a b) - ?

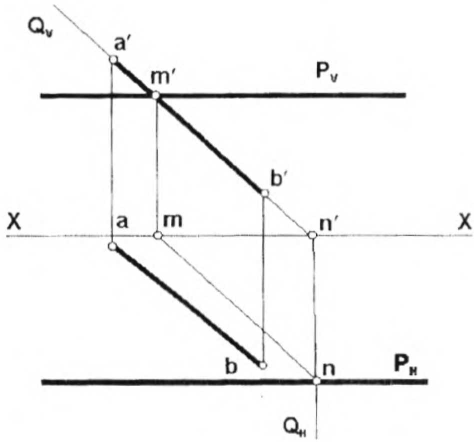


Рис. 87

Алгоритм решения задачи .

1) **$(AB) \subset Q \perp V$**

2) **$Q \cap P = (MN)$**

3) **$(AB) \parallel (MN)$**

Параллельность двух плоскостей

1. Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым второй плоскости, то эти две плоскости взаимно параллельны (рис.88) и (рис.89).

$$(AB) \parallel (A_1B_1) \wedge (BC) \parallel (B_1C_1) \Rightarrow P \parallel Q$$

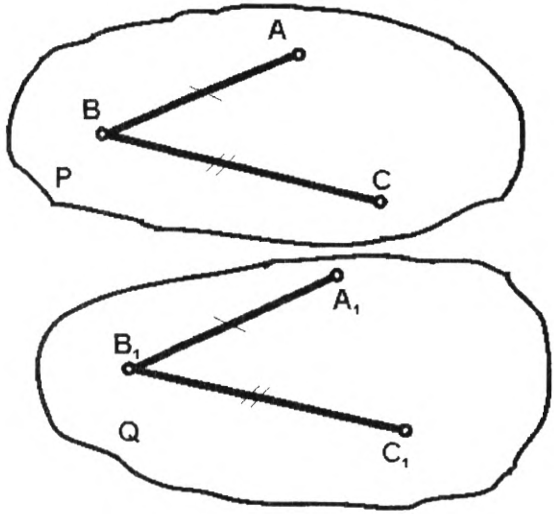


Рис.88

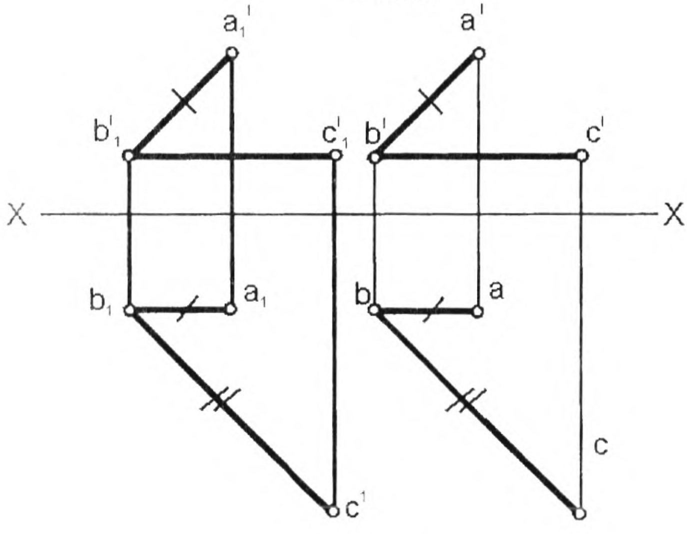


Рис.89

2. Если две плоскости параллельны, то одноименные следы плоскостей также взаимно параллельны (рис.90).

$$P_H \parallel Q_H \wedge P_V \parallel Q_V \Rightarrow P \parallel Q$$

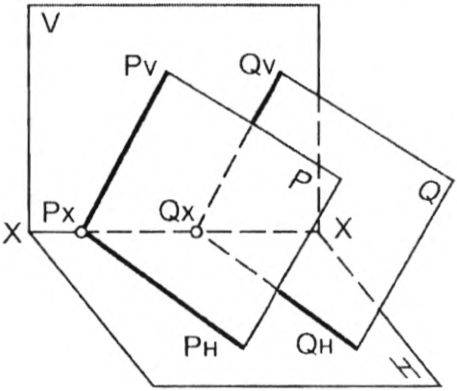


Рис. 90

Пример: Через точку **E** провести плоскость **Q** параллельной плоскости **P** (рис.91).

Дано:

$P(P_H, P_V) \wedge (\bullet)\, E$

Определить:

$E \in Q(Q_H, Q_V) \wedge Q \parallel P$

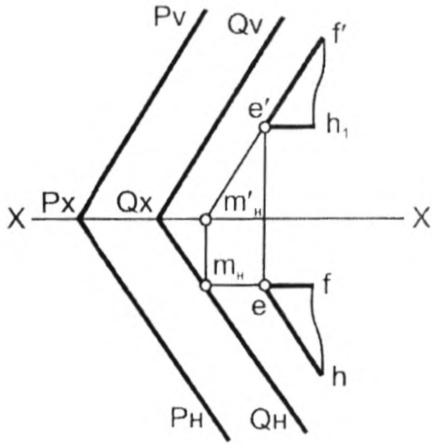


Рис. 91

Алгоритмы решения задачи

Пример: Построить плоскость **Q** следами параллельной данной **P(ΔABC)** на расстоянии 20 мм (рис.92). Эта задача является домашне-графической работой (эпюр 4) студентов. Координаты **(X,У,Z)** точек **A,B,C** задаются в миллиметрах согласно варианта.

Дано: **P(Δ ABC)**

Определить:

$\mathbf{Q(Q_H , Q_V) \parallel}$

$\mathbf{P \wedge |QP| = 20}$

№	X	Y	Z
A	65	20	10
B	35	10	40
C	10	45	20

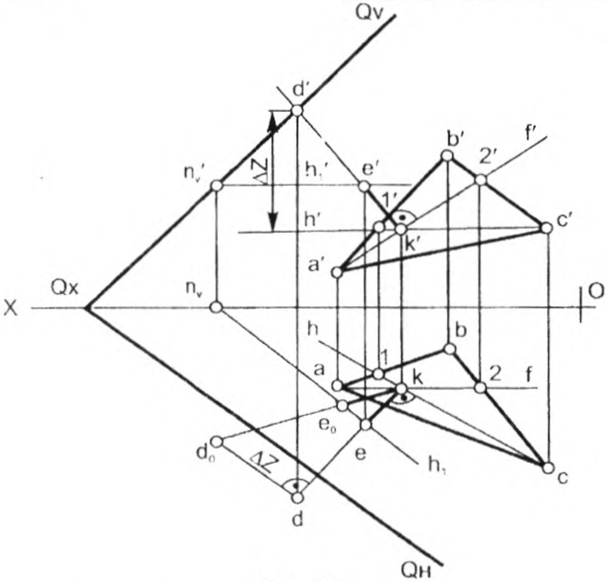


Рис.92

Алгоритм решения четвертого эпюра.

1) $\mathbf{h_0 (h, h') \subset (\bullet)C(c, c') , f_0 (f, f') \subset (\bullet)A(a, a')}$
2) $\mathbf{K (k ,k') = h_0 \cap f_0 ,\ (k , k') \perp [ox)}$
3) $\mathbf{(\bullet)K \perp P,\ (\bullet)k' \perp f' \wedge (\bullet)k \perp h}$
4) $\mathbf{|KD| = [\ kd_0]}$
5) $\mathbf{|KE| =[\ k\ e_0]}$
6) $\mathbf{(\bullet)E \in h_1 \cap V = N_V}$
7) $\mathbf{n_V' \in Q_V \parallel f' \wedge Q_H \parallel h}$
8) $\mathbf{Q \parallel P \wedge |QP| = 20\ mm.}$

12 - ЛЕКЦИЯ. Способы преобразования чертежа. Способ перемены плоскостей проекций. Алгоритмы решения задач.

Способы преобразования чертежа

Для перевода геометрических элементов из общего положения на частное с построением новых положении проекций называют преобразованием чертежа.

Преобразования могут быть выполнены следующими способами:

1. Переменой (заменой) плоскостей проекций с условием, что рассматриваемый объект или его элементы должны занимать одно из частных положений относительно новой плоскости проекций.

2. Перемещением (вращением) геометрического образа в пространстве так, чтобы он занимал определенное (согласно условию поставленной задачи) частное положение относительно плоскости проекций.

При способе совмещения плоскость общего положения, вращается вокруг одного из своих следов и его называют частным случаем способа вращения.

Способ перемены плоскостей проекций

Сущность этого способа заключается в том, что геометрический образ в пространстве сохраняет свое положение, а вместо **V, H** вводятся дополнительные плоскости проекций.

При замене обязательно сохраняется взаимная перпендикулярность двух плоскостей проекции.

Одна система заменяется второй системой по следующей схеме.

При одной замене:

$$\mathbf{X\ V/H \Rightarrow X_1\ V_1/H} \quad \textbf{или} \quad \mathbf{X\ V/H \Rightarrow X_1\ V/H_1}$$

Для перехода на новую систему берем фронтальную плоскость проекций с условием, что $\mathbf{V_1 \perp H}$ (рис.93).

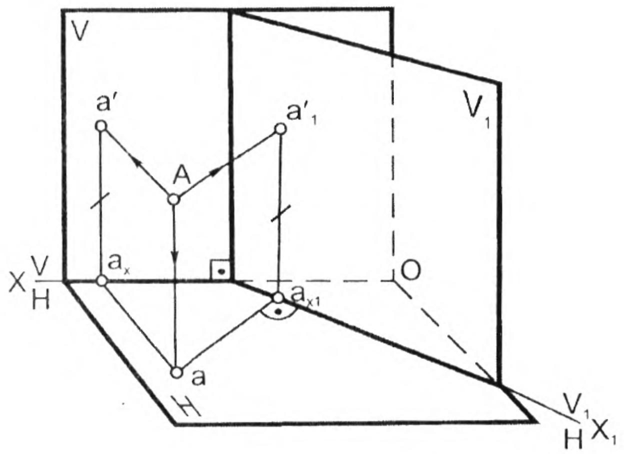


Рис. 93

Пространственную точку **A** проецируем на старую систему плоскости проекций, затем проецируем ее на новую фронтальную плоскость проекций.

X V/H – старая система.

X – старая ось проекций

$\mathbf{X_1}$ $\mathbf{V_1/H}$ – новая система.

$\mathbf{V_1}$ - новая фронтальная плоскость проекций.

$\mathbf{V_1 \cap H = X_1}$ – новая ось проекций.

(•)A – пространственная точка.

a – горизонтальная проекция точки **A**.

a′ – фронтальная проекция точки **A.**

$\mathbf{a_1'}$ – новая фронтальная проекция точки **A.**

На рис. 94 приведен эпюр точки **А**.

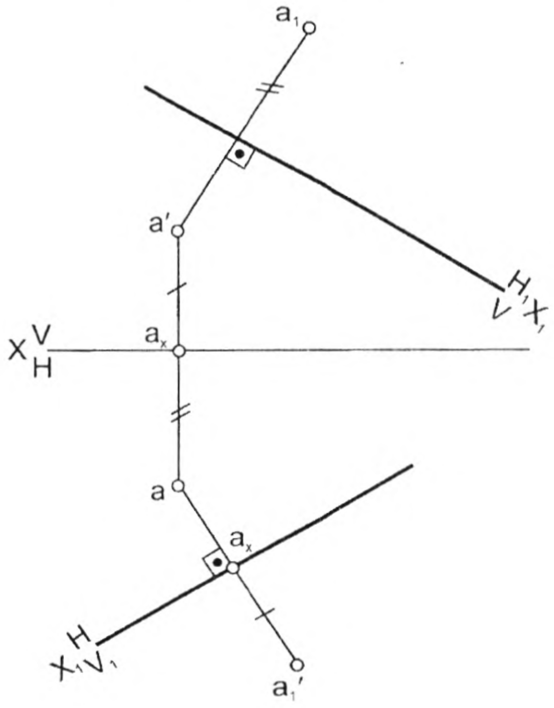


Рис. 94

Для определения новой фронтальной проекции точки **А** откладываем от новой оси проекций удаленность точки **А** относительно горизонтальной плоскости проекций

То есть: $[\mathbf{a_1'}, \mathbf{a_{X1}}] = [\mathbf{a'}, \mathbf{a_X}]$

Пример: Определить натуральную величину отрезка **|AB|** (рис.95).

Дано: **[AB]**

Определить: **|AB|**

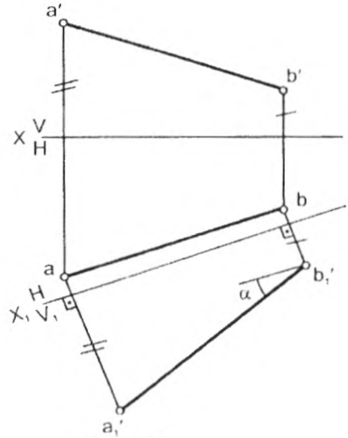


Рис.95

Алгоритм решения задачи.

1) $\mathbf{V \rightarrow V_1}$, $\mathbf{X_1 \parallel [\,a\,b\,]}$

2) $\mathbf{[\,a_1'\,b_1'\,] = [AB]}$, $\mathbf{[A_1B_1] \parallel V_1}$, $\mathbf{\angle\,\alpha = [AB]\ \hat{}\ H}$

Пример: Отрезок **[AB]** перевести в фронтально – проецирующее положение (рис.96).

Дано: **[AB]**

Определить:

$\mathbf{[A_1B_1] \perp V_1}$

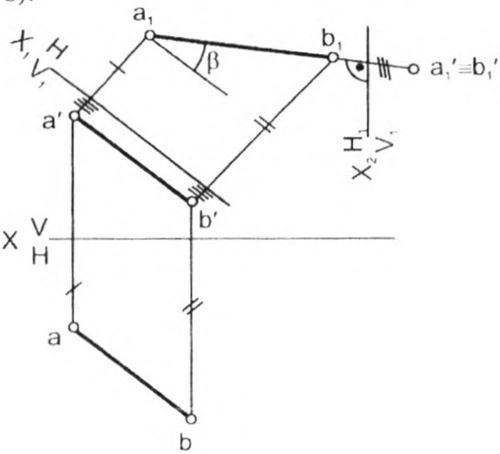


Рис. 96.

Алгоритм решения задачи.

1) $\mathbf{H \rightarrow H_1}$, $\mathbf{X_1 \parallel [\ a'\ b'\ ]}$, $\mathbf{[A_1B_1] \parallel H_1}$

2) $\mathbf{V \rightarrow V_1}$, $\mathbf{X_2 \perp [\ a_1\ b_1\ ]}$, $\mathbf{[A_1B_1] \perp V_1}$

Перед решением 5–эпюра целесообразно определить натуральную величину треугольной плоскости частного положения.

Алгоритм решения задачи

Пример: Определить натуральную величину треугольника **Δ ABC** (рис. 97). Эта задача является домашне-графической работой (эпюр 5) студентов. Координаты **(X,У,Z)** точек **A,B,C** задаются в миллиметрах согласно варианта.

Дано: **P(Δ ABC)**

Определить: **|Δ ABC |**

№	X	Y	Z
A	60	30	10
B	30	10	40
C	10	40	20

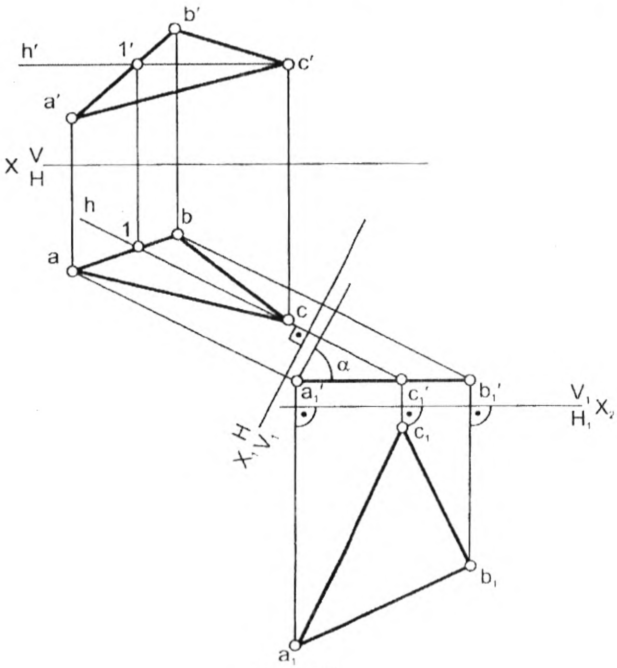


Рис.97

Алгоритм решения пятого эпюра

1) $\mathbf{h_0 (h, h') \subset (\bullet)C(c, c'), h' \parallel [ox)}$

2) $\mathbf{V \to V_1}$, $\mathbf{(\Delta A_1B_1C_1) \perp V_1}$,

3) $\mathbf{H \to H_1}$, $\mathbf{X_2 \parallel (a_1'b_1'c_1')}$

4) $\mathbf{(\Delta A_1B_1C_1) \parallel H}$, $\mathbf{(\Delta a_1b_1c_1) = |\Delta ABC|}$

Пример: Определить угол наклона плоскости **P** к плоскостям проекций фронтальной **V** и горизонтальной **H** (рис.98).

Дано:

$\mathbf{P(P_H , P_V)}$

Определить:

$\angle \alpha = \mathbf{P} \,\hat{}\, \mathbf{H}$,

$\angle \beta = \mathbf{P} \,\hat{}\, \mathbf{V}$

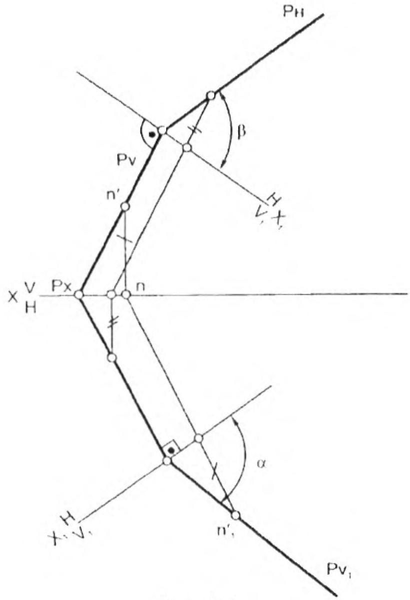


Рис.98

Алгоритм решения задачи.

1) $\mathbf{V \to V_1}$, $\mathbf{X_1 \perp P_H}$,

2) $\mathbf{N(n , n') \in P_V}$

3) $\mathbf{N \to N_1(n_1')}$

4) $\mathbf{P_{X1} \cup n_1' = P_{V1}}$

5) $\angle \alpha = \mathbf{P} \,\hat{}\, \mathbf{H}$,

1) $\mathbf{H \to H_1}$, $\mathbf{X_1 \perp P_V}$,

2) $\mathbf{M(m , m') \in P_H}$

3) $\mathbf{M \to M_1(m_1)}$

4) $\mathbf{P_{X1} \cup m_1 = P_{H1}}$

5) $\angle \beta = \mathbf{P} \,\hat{}\, \mathbf{V}$

13 – ЛЕКЦИЯ. Способ вращения. Алгоритмы решения задач.

Способ вращения

Сущность этого метода заключается в том, что плоскость проекций сохраняет свое положение, а пространственный геометрический образ подлежит вращению.

На рис. 99 приведен пространственный чертеж способа вращения точки **A**.

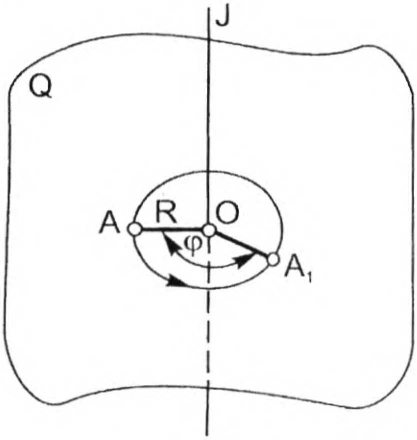


Рис. 99.

J – ось вращения, она может быть **J⊥H, J⊥V, J||H, J||V.**

Q – плоскость вращения, она может быть **Q⊥H, Q⊥V,Q||H, Q||V**.

Плоскость вращения и ось вращения всегда взаимно перпендикулярны **Q ⊥ J ва J ∩ Q = O**

O – центр вращения.

A – пространственная точка.

R – радиус вращения, **[OA) = R**

A_1 – новое положение точки **A**

φ - угол вращения точки **A**

$$(\bullet)A \circlearrowleft J_{\perp H} \rightarrow (\bullet)A_1$$

Эпюр способа вращения точки **A** приведен на рис.100.

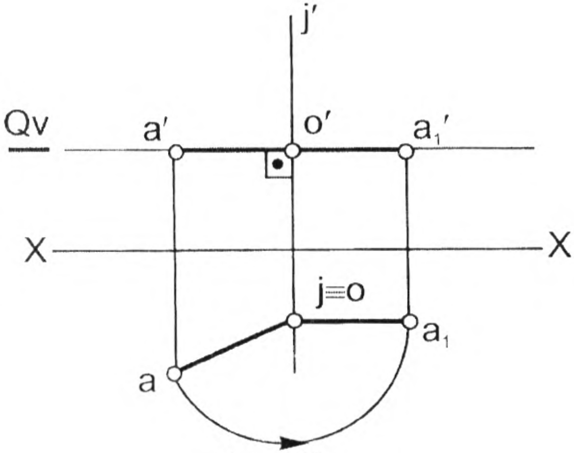


Рис. 100

Алгоритм решения задачи

1) $(\bullet)\mathbf{A} \in \mathbf{Q} \perp \mathbf{J} \wedge \mathbf{Q} \parallel \mathbf{H}$, $\mathbf{Q_V} \parallel [\mathbf{ox})$
2) $\mathbf{J} \cap \mathbf{Q} = \mathbf{O}(\mathbf{o}', \mathbf{o})$
3) $\mathbf{O} \cup \mathbf{A} = [\mathbf{OA}] = \mathbf{R} = [\mathbf{oa}]$

Если точка **A** вращается вокруг оси перпендикулярной горизонтальной плоскости проекций **H,** то горизонтальная проекция этой точки вращается по окружности, а фронтальная проекция точки перемещается по прямой параллельной оси проекций **[ox).**

Если точка **A** вращается вокруг оси перпендикулярной фронтальной плоскости проекций **V,** то фронтальная проекция этой точки вращается по окружности, а горизонтальная проекция точки перемещается по прямой параллельной оси проекций **[ox).**

Пример: Определить натуральную величину отрезка **[AB]** (рис.101).

Дано: **[AB]**
Определить:
|AB|

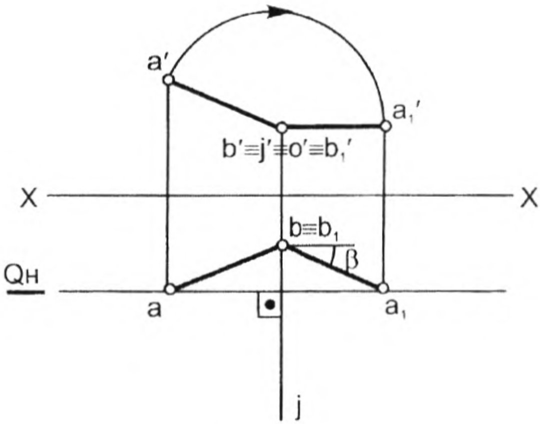


Рис. 101

Алгоритм решения задачи

$$\mathbf{J \perp V \ , \ Q \parallel V \ , \ \angle \beta = [AB] \ \hat{} \ V}$$

Пример: Вращением отрезок **[AB]** перевести в параллельное положение к оси проекции **[OZ)** (рис.102).

Дано: **[AB]**
Определить:
[AB] || [OZ)

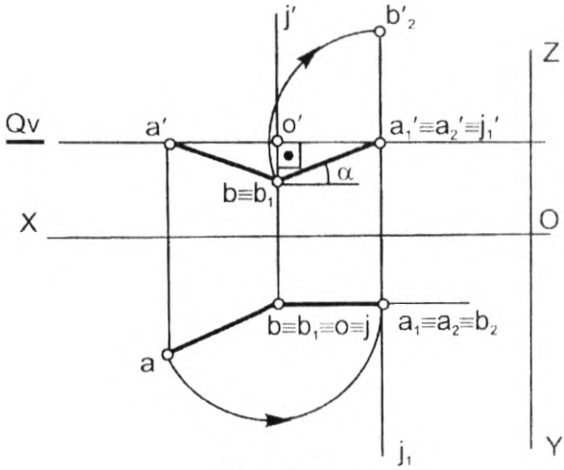


Рис. 102

Алгоритм решения задачи.

1) **[AB] ↻ $J_{\perp H}$ → [A_1B_1] ва [($a_1'b_1'$] = |AB|, ∠α= [AB] ^ H**

2) **[A_1B_1] ↻ $J_{1\perp V}$ → [A_2B_2] || [OZ)**

Пример: Вращением определить натуральную величину треугольника **ABC** (рис. 103).

Дано:

(Δ ABC) ⊥ V

Определить:

|Δ ABC|

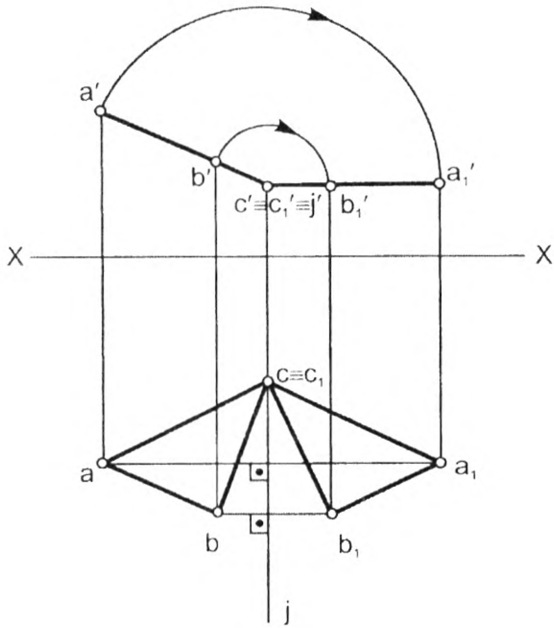


Рис. 103

Алгоритм решения задачи.

$$(\Delta\ ABC) \circlearrowright J_{\perp V} \rightarrow (\Delta\ A_1B_1C_1) \parallel H$$

Вращения вокруг горизонтали или фронтали

Поворотом вокруг горизонтали ввести точку **A** на уровень горизонтали (рис.104).

Дано:
J || H $\wedge$ (•)A
Определить:
(•)A ↻ $J_{||H}$
→ (•)A_1

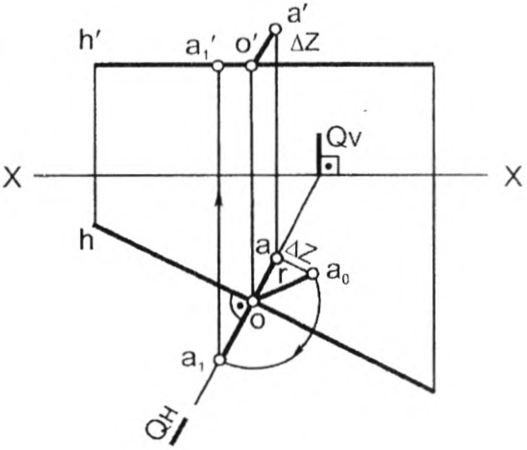


Рис. 104

Алгоритм решения задачи.

1) **(•)A $\in$ Q $\perp$ J**
2) **Q $\cap$ J = O**
3) **[o a_0] = R**

Пример: Вращением вокруг горизонтали или фронтали определить натуральную величину треугольника **Δ ABC** (рис. 105). Эта задача является домашне - графической работой (эпюр 6) студентов. Координаты **(X,У,Z)** точек **A,B,C** задаются в миллиметрах согласно варианта.

Дано: **P(Δ ABC)**
Определить: **|Δ ABC | - ?**

№	X	Y	Z
A	70	30	10
B	40	15	40
C	10	40	20

(Δ ABC) ↻ $J_{||H}$ → (Δ $A_1B_1C_1$) = |Δ ABC|

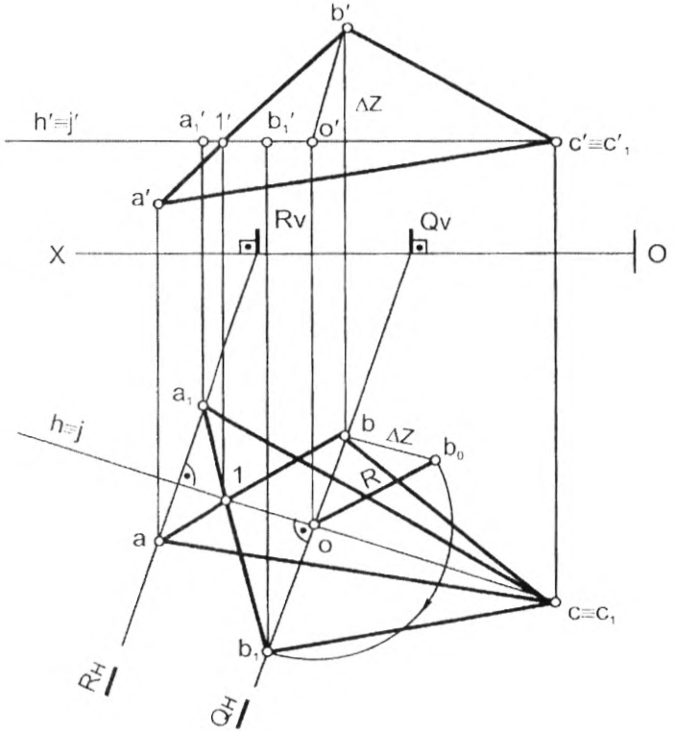


Рис.105.

Алгоритм решения шестого эпюра.

1) $\mathbf{h_0 (h, h') \subset (\bullet)C(c, c')}$, $\mathbf{h' \parallel [ox)}$
2) $(\bullet)C \in \mathbf{J_{\parallel H} \rightarrow C_1 \equiv C}$
3) $\mathbf{(\bullet)B} \in \mathbf{J_{\parallel H} \rightarrow B_1}$
4) $\mathbf{(\bullet)A} \subset \mathbf{J_{\parallel H} \rightarrow A_1}$
5) $\mathbf{(\bullet)A_1 \cup (\bullet)B_1 \cup (\bullet)C_1 \rightarrow (\Delta\ A_1B_1C_1) = |\Delta\ ABC|}$

14 - ЛЕКЦИЯ. Способ совмещения. Совмещения плоскостей частного положения.

Способ совмещения (Вращения вокруг следов плоскости)

При способе совмещения за ось вращения берется горизонтальный или фронтальный след плоскости

Если плоскость совмещается с горизонтальной плоскостью проекций H, то горизонтальный след плоскости является осью вращения (рис.106).

Если плоскость совмещается с фронтальной плоскостью проекций **V**, то фронтальный след плоскости является осью вращения (рис.107).

Совместить плоскость общего положения **P** с горизонтальной плоскостью проекций **H** (рис. 106).

$$\mathbf{P} \circlearrowright \mathbf{J_{PH}} \rightarrow \mathbf{P_1} \subset \mathbf{H}$$

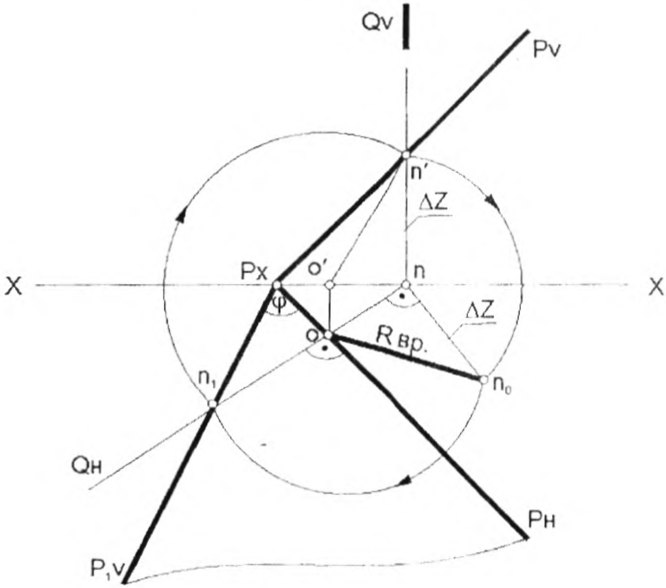


Рис.106

Алгоритм решения задачи.

1) $\mathbf{N\,(n,\,n') \in P_V}$
2) $\mathbf{(\bullet)N \circlearrowright J_{PH} \rightarrow (\bullet)N_1}$
3) $\mathbf{[P_X\; n'] = [P_X\; n_1]}$

Пример: Определить натуральную величину отрезка **[AB]** принадлежащей плоскости $\mathbf{P(P_H\,,\,P_V)}$ (рис.107).

Дано:
$\mathbf{P(P_H\,,\,P_V) \wedge}$
$\mathbf{[AB] \subset P}$
Определить:
$\mathbf{|AB|}$ - ?

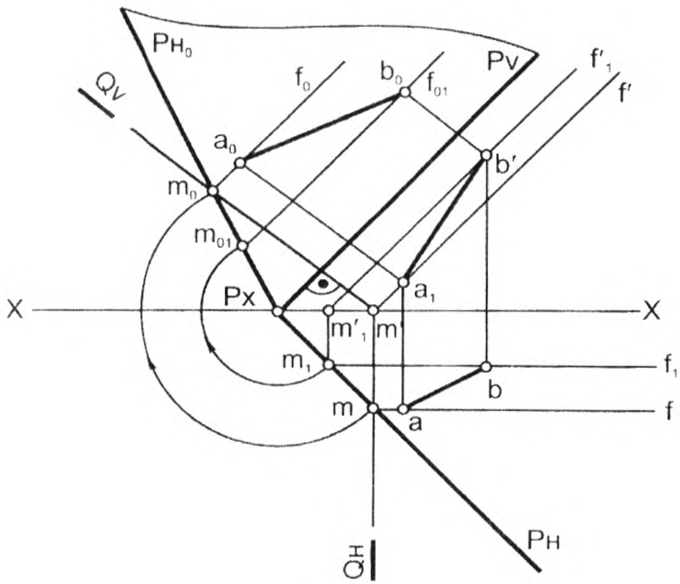


Рис.107

Алгоритм решения задачи

1) $\mathbf{f_0(f,\,f') \in (\bullet)A \Rightarrow a'}$, $\mathbf{f_1(f_1,\,f_1') \in (\bullet)B \Rightarrow b'}$
2) $\mathbf{P \circlearrowright J_{PV} \rightarrow P_1 \subset V}$
3) $\mathbf{(\bullet)M \circlearrowright J_{PV} \rightarrow (\bullet)M_0}$
4) $\mathbf{(\bullet)M_1 \circlearrowright J_{PV} \rightarrow (\bullet)M_{10}}$
5) $\mathbf{f_0 \parallel P_V}$, $\mathbf{[a_0\; b_0] = |AB|}$

Совмещение плоскостей частного положения

Совместить вращением вокруг горизонтального следа фронтально-проецирующую плоскость **P** с горизонтальной плоскостью проекций **H** (рис.108).

$$\mathbf{P} \circlearrowright \mathbf{J_{PH}} \rightarrow \mathbf{P_{V0}} \subset \mathbf{H}$$

Дано:

$\mathbf{P(P_H\ ,\ P_V) \perp V}$

Определить:

$\angle\ \varphi = \mathbf{P_V\ \hat{}\ P_H = 90^0}$

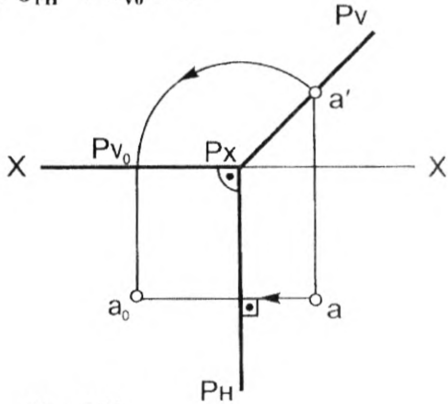


Рис.108

Совместить вращением вокруг горизонтального следа горизонтально - проецирующую плоскость **Q** с горизонтальной плоскостью проекций **H**. (рис.109).

$$\mathbf{Q} \circlearrowright \mathbf{J_{QH}} \rightarrow \mathbf{Q_{V0}} \subset \mathbf{H}$$

Дано:

$\mathbf{Q(Q_H\ ,\ Q_V) \perp H}$

Определить:

$\angle\ \varphi = \mathbf{Q_V\ \hat{}\ Q_H}$
$\mathbf{=90^0}$

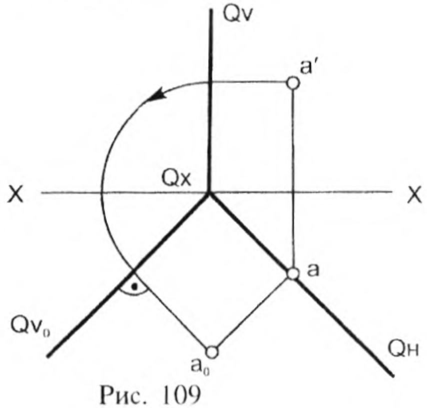


Рис. 109

Совместить вращением вокруг фронтального следа фронтально- проецирующую плоскость **P** с фронтальной плоскостью проекций **V**. (рис.110).

$$P \circlearrowright J_{PV} \rightarrow P_{H0} \subset V$$

Дано:

$P(P_H , P_V) \perp V$

Определить:

$\angle \varphi = P_V \, {}^\wedge \, P_H = 90^0$

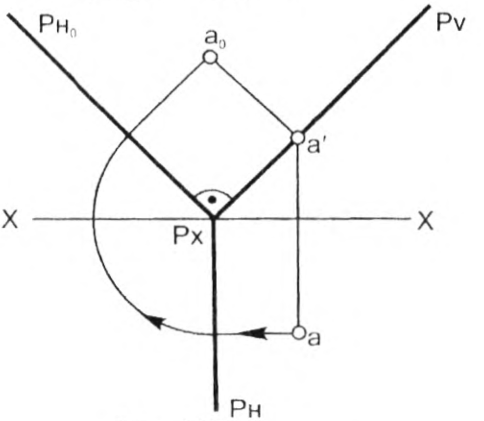


Рис. 110.

Совместить вращением вокруг фронтального следа горизонтально-проецирующую плоскость **Q** с фронтальной плоскостью проекций **V**. (рис.111).

$$Q \circlearrowright J_{QV} \rightarrow Q_{H0} \subset V$$

Дано:

$Q(Q_H , Q_V) \perp H$

Определить:

$\angle \varphi = Q_V{}^\wedge Q_H = 90^0$

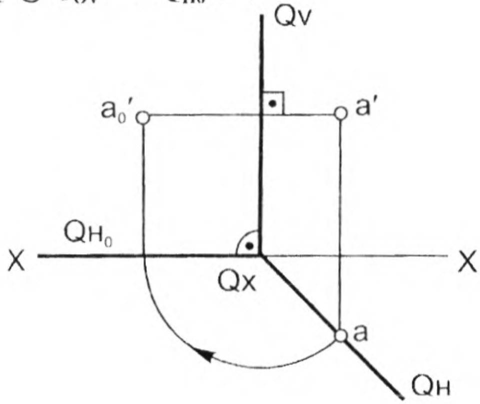


Рис.111

15–ЛЕКЦИЯ. Поверхности. Классификация поверхностей.

Поверхности

Поверхностью называется совокупность последовательных линий, движущихся в пространстве по определенному закону. Эту движущую линию называют образующей и она может постоянной или бесконечно меняющейся.

Линия, определяющая характер движения образующей, называется направляющей.

Классификация поверхностей

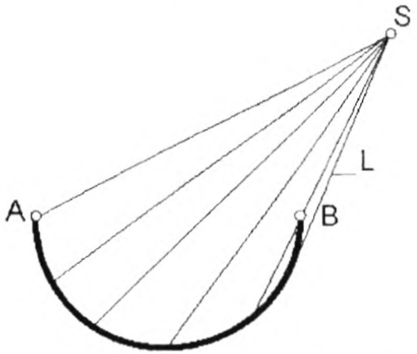
Поверхности по характеру образующей делят на два вида.

1. Прямолинейные поверхности
2. Криволинейные поверхности

Поверхности линейчатые могут быть образованы движением прямой линии. Линейчатые – поверхности, у которых образующие параллельные или пересекаются, являются развертывающимися. К ним относятся поверхности конуса, пирамиды, цилиндра и призмы.

Коническая поверхность

В общем случае коническая поверхность задается направляющей кривой линии и вершиной конуса (рис.112).



S – вершина конуса
L – образующая.
AB – направляющая.

Рис.112

Если направляющая ломаная линия, то образуется пирамида (рис.113).

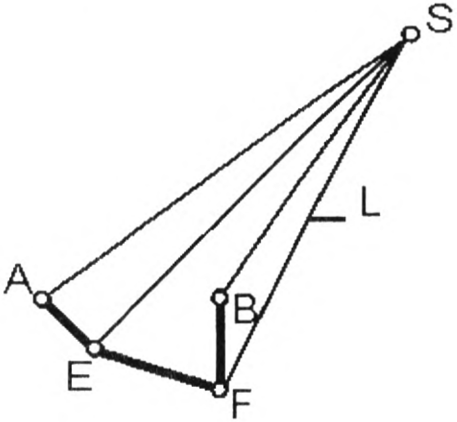
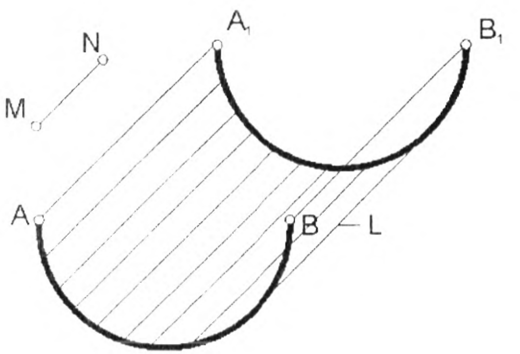


Рис.113

Цилиндрическая поверхность.

В общем случае цилиндрическая поверхность задается направляющей и направлением образующей (рис.114).



L - Образующая
MN – направление образующей
AB и A_1B_1 – направляющая кривая линия

Рис. 114

Если направляющая ломаная линия, то образуется призма (рис.115).

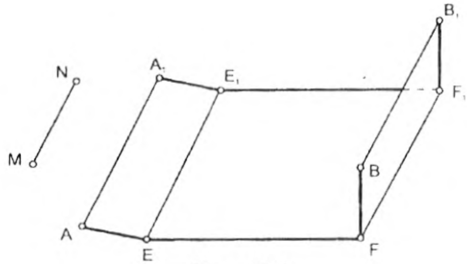


Рис.115

Линейчатые поверхности, образующие которых скрещиваются, называются не развертывающимися. **К** ним относятся цилиндроид, коноид, гиперболический параболоид или косая плоскость.

Поверхности с плоскостью параллелизма

Цилиндроид. Поверхность, называемая цилиндроидом, образуется при перемещении прямой линии, во всех своих положениях сохраняющей параллельность некоторой заданной плоскости (плоскости параллелизма) и пересекающей две кривые линии (две направляющие) (рис.116).

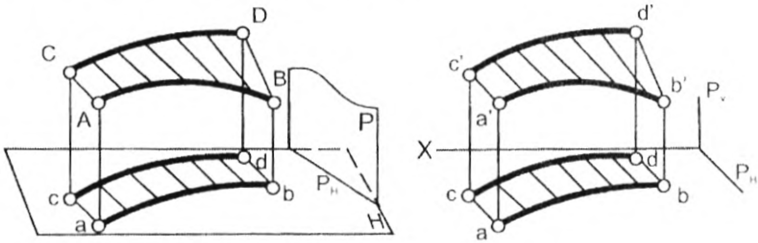


Рис. 116

Коноид. Поверхность, называемая коноидом, образуется при перемещении прямой линии, во всех своих положениях сохраняющей параллельность некоторой заданной плоскости (плоскости параллелизма) и пересекающей две направляющие, одна из которых – кривая, а другая – прямая линия (рис.117).

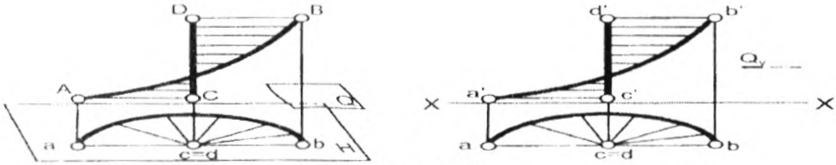


Рис. 117

Гиперболический параболоид или косая плоскость.

На рис. 118 даны рисунок и чертеж поверхности, называемой косой плоскостью или гиперболическим параболоидом. Образование этой поверхности можно рассматривать как результат перемещения прямолинейной образующей по двум направляющим– скрещивающимся прямым линиям – параллельно некоторой плоскости параллелизма. На рисунке плоскостью параллелизма является плоскость **R**, а направляющими–прямые **AB** и **CD**.

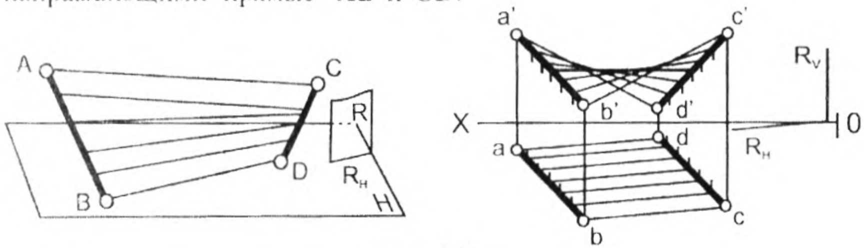


Рис.118

Итак, для рассматриваемых поверхностей – цилиндроида, коноида и косой плоскости образующей является прямая линия, которая должна одновременно пересекать две направляющие линии и оставаться постоянно параллельной некоторой плоскости, причем эти направляющие и плоскость параллелизма должны быть в неизменном положении между собой.

Криволинейные поверхности. Криволинейные поверхности образуются движением плоской или пространственной кривой. Они не могут быть образованы движением прямой линии. К кривым поверхностям относятся: поверхности вращения общего вида, не линейчатые поверхности второго порядка, циклические поверхности общего вида, поверхности переноса, каркасные поверхности, винтовые поверхности общего вида.

К поверхностям вращения относятся: сфера, тор, кольцо, эллипсоид вращения, параболоид вращения, однополосный гиперболоид вращения, двухполосный гиперболоид вращения.

Криволинейные поверхности развертываются приближенно.

Поверхности вращения

Поверхности вращения образуются вращательным перемещением производящей линии вокруг неподвижной оси. Обычно за ось вращения принимается вертикальная прямая.

Ходом любой точки **(А,В)** производящей линией поверхности вращения является окружность, которую называют **параллелью** поверхности вращения (рис. 119).

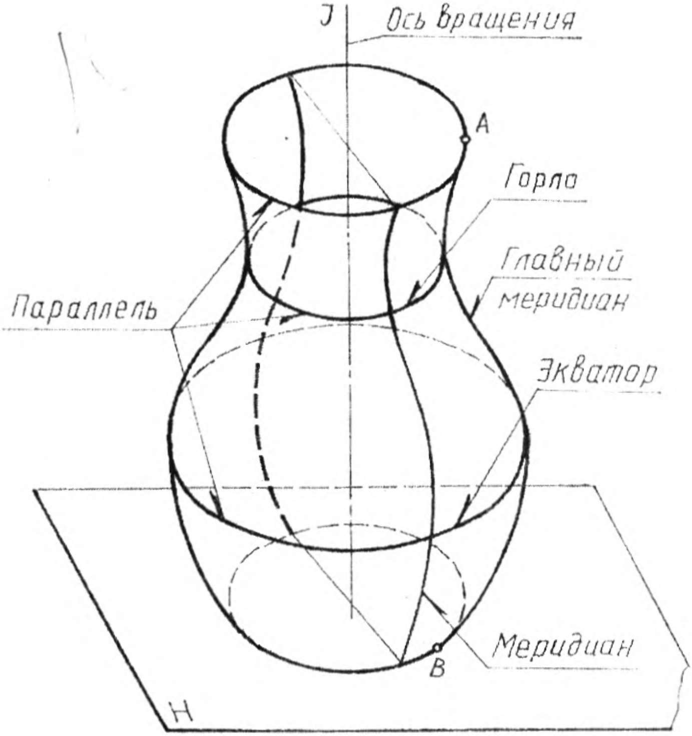


Рис. 119.

Плоскости параллелей перпендикулярны оси поверхности. Все параллели (окружности) без искажения проецируются (окружностями с общим центром) на плоскость, перпендикулярную оси.

Наибольшую из параллелей поверхности вращения называют **экватором** поверхности, а наименьшую – **горлом** (шейкой).

Плоскости, проходящие через ось поверхности вращения, называют **меридиональными,** а линии, по которым они пересекают поверхность, - **меридианами.**

Поверхность вращения называют **закрытой,** если меридиональное сечение поверхности является замкнутой кривой линией, пересекающей ось поверхности в двух точках.

Каркас поверхности вращения можно представить параллелями или меридианами поверхности, а также сетью, состоящей из параллелей и меридианов.

Ниже перечислены основные свойства поверхностей вращения:

если меридиан проходит через две точки поверхности, то его отрезок-кратчайщее расстояние (геодезическая линия) на поверхности между этими точками,

все меридианы равны между собой,

каждая из параллелей поверхности вращения пересекает меридианы под прямым углом, т.е. параллели и меридианы образуют прямоугольную сеть на поверхности вращения,

любая из нормалей к поверхности вращения пересекают ось поверхности.

Поверхность вращения можно представить заданной очертаниями (очерками). Фронтальным очерком является фронтальная проекция фронтального меридиана, а горизонтальным – горизонтальная проекция наибольшей параллели.

Критерием задания поверхности является принадлежность точки поверхности. Если на чертеже поверхности по известной одной проекцией точки определяется вторая ее проекция, то поверхность задана однозначно.

16 - ЛЕКЦИЯ. Пересечение поверхности с плоскостью частного положения. Пересечение поверхностей с плоскостью общего положения.

Пересечение поверхностей с плоскостью частного положения. Пересечение призмы с плоскостью частного положения

Линия пересечения многогранника с плоскостью определяется по точкам пересечения ребер многогранника или по линиям пересечения граней многогранника с данной плоскостью. Такая задача сводится к определению точек пересечения прямой с плоскостью или к определению линий пересечения двух плоскостей.

При пересечении многогранника с проецирующей плоскостью, многоугольник сечения определяется по точкам пересечения ребер многогранника с плоскостью и одна проекция фигуры сечения преобразуется в прямую, совпадающую со следом данной проецирующей плоскости.

Пример: Определить проекции сечения прямой призмы с плоскостью частного положения и натуральный вид фигуры сечения. (рис.120). Эта задача является домашне-графической работой (эпюр 7 и 8) студентов. Исходные чертежи, согласно варианта, студенты берут с наглядного стенда кафедры.

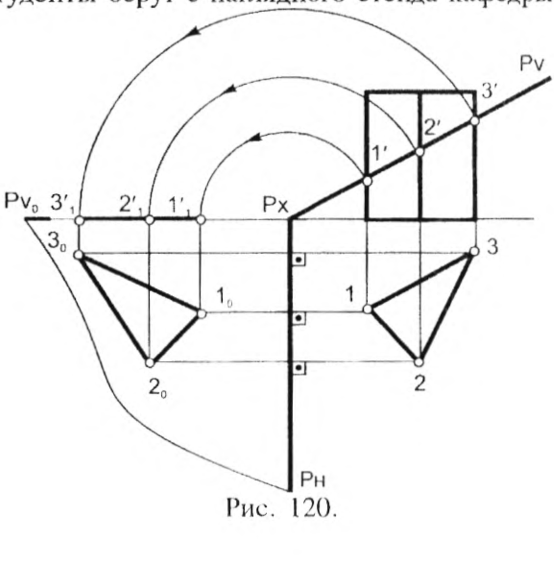


Рис. 120.

Пример: Определить проекции сечения прямой призмы с профильно-проецирующей плоскостью, не прибегая к помощи профильной проекции (рис.121).

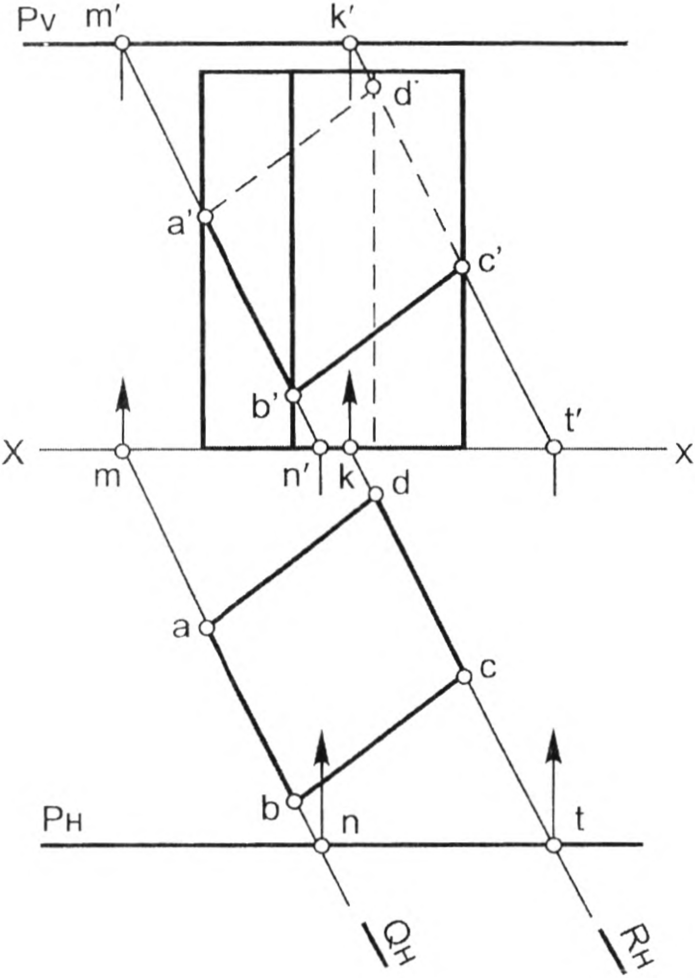


Рис.121

Сечения цилиндра с проецирующей плоскостью

При пересечении цилиндра с проецирующей плоскостью образуются следующие фигуры сечения (рис.122).

$\varnothing_{\text{ц}}$ – цилиндрическая поверхность.

J – ось цилиндра.

P – секущая плоскость.

1) $\mathbf{P} \perp \mathbf{J} \Rightarrow \mathbf{P} \cap \varnothing_{\text{ц}}$ – образуется окружность.
2) $\mathbf{P}$ ^ $\mathbf{J} \Rightarrow \mathbf{P} \cap \varnothing_{\text{ц}}$ – образуется эллипс .
3) $\mathbf{P}$ ^ $\mathbf{J} \Rightarrow \mathbf{P} \cap \varnothing_{\text{ц}}$ – образуется часть эллипса
4) $\mathbf{P} \parallel \mathbf{J} \Rightarrow \mathbf{P} \cap \varnothing_{\text{ц}}$ – образуются две параллельные прямые или прямоугольник.

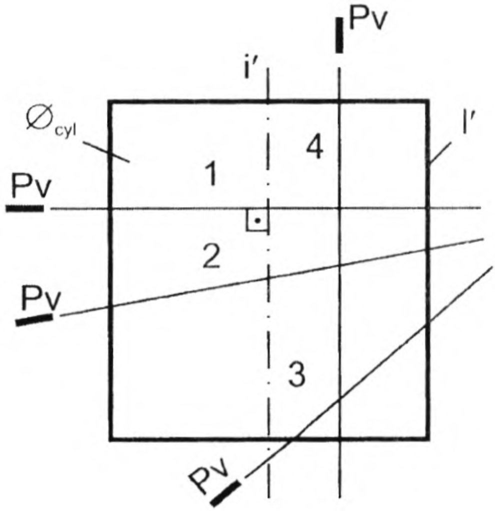


Рис.122.

Пример: Определить проекции сечения цилиндра с фронтально-проецирующей плоскостью **P** и натуральный вид фигуры сечения (рис.123).

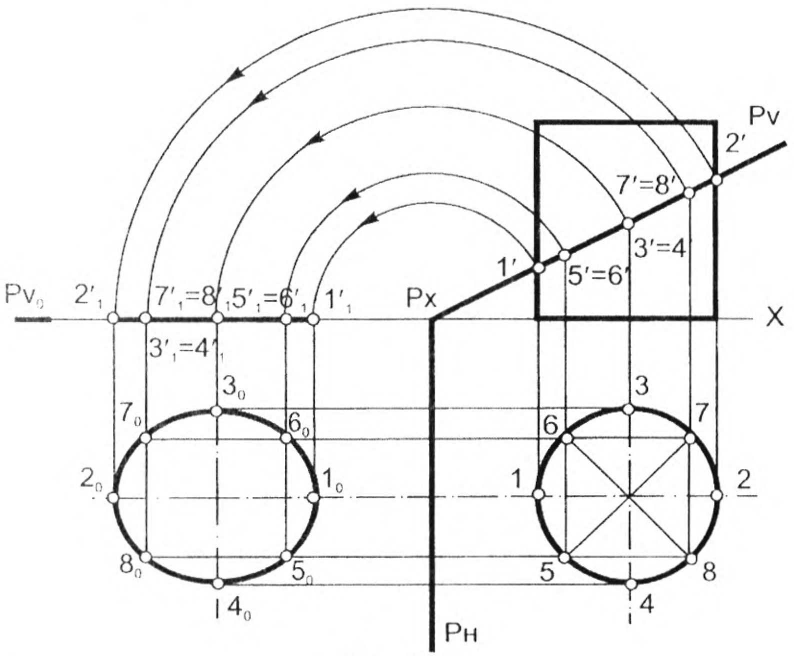


Рис. 123

1,2 – большая ось эллипса .

3.4 – малая ось эллипса.

Сечения конуса с проецирующей плоскостью

При пересечении конуса с проецирующей плоскостью образуются следующие фигуры сечения (рис.124).

$\varnothing_K$ – поверхность конуса.

J – ось конуса.

P – секущая плоскость

L – образующая конуса.

α - угол наклона, образующей к оси конуса

θ - угол наклона секущей плоскости к оси конуса

1) $\theta = \mathbf{90^0} \Rightarrow \mathbf{P} \cap \varnothing_{\mathbf{K}}$ – образуется окружность

2) $\theta > \alpha \;\Rightarrow \mathbf{P} \cap \varnothing_{\mathbf{K}}$ – образуется эллипс.

3) $\theta = \alpha \;\Rightarrow \mathbf{P} \cap \varnothing_{\mathbf{K}}$ – образуется парабола.

4) $\theta < \alpha \;\Rightarrow \mathbf{P} \cap \varnothing_{\mathbf{K}}$ – образуется гипербола.

5) $(\bullet)\mathbf{S} \subset \mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{P} \cap \varnothing_{\mathbf{K}}$ – образуются треугольник или пересекающиеся прямые.

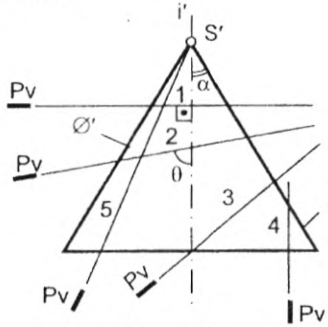


Рис. 124.

Пример: Определить проекции сечения конуса с фронтально-просцирующей плоскостью **P** и натуральный вид фигуры сечения (рис. 125).

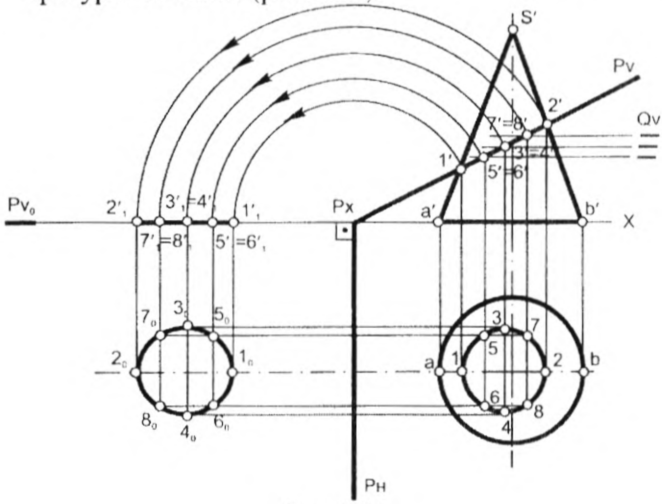


Рис.125.

1,2 – большая ось эллипса.
3,4 – малая ось эллипса.

Пример: Определить проекции сечения сферы с фронтально проецирующей плоскостью **P** и натуральный вид фигуры сечения (рис.126)

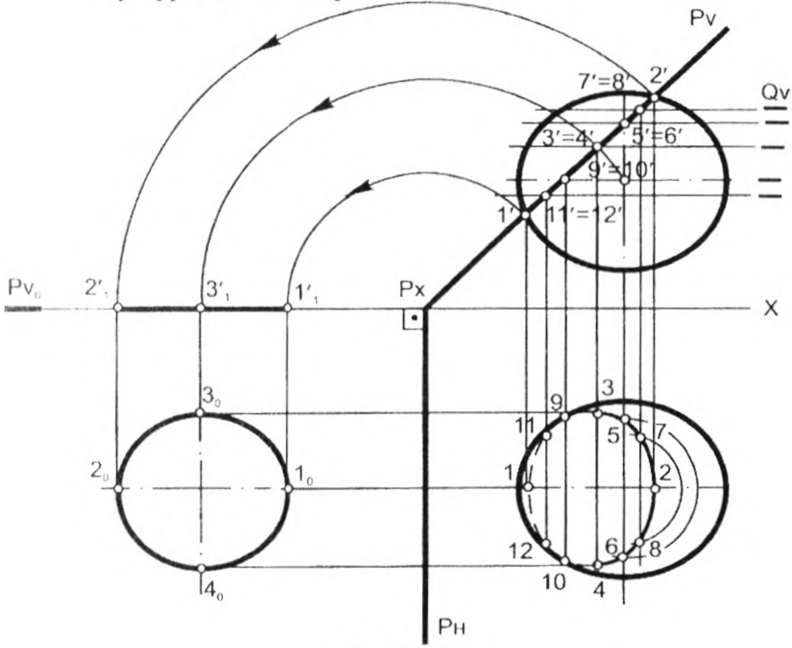


Рис.126

Пересечения поверхностей с плоскостью общего положения

Пересечение призмы с плоскостью общего положения

Если поверхность является многогранником, то в этом случае построение линии пересечения поверхности с плоскостью общего положения упрощается

Пример: Определить проекции сечения треугольной прямой призмы с плоскостью общего положения и натуральный вид фигуры сечения (рис.127, рис.128).

Эта задача является домашне–графической работой (эпюр 7 и 8) студентов механического направления образования. Исходные чертежи, согласно варианта, студенты берут с наглядного стенда кафедры.

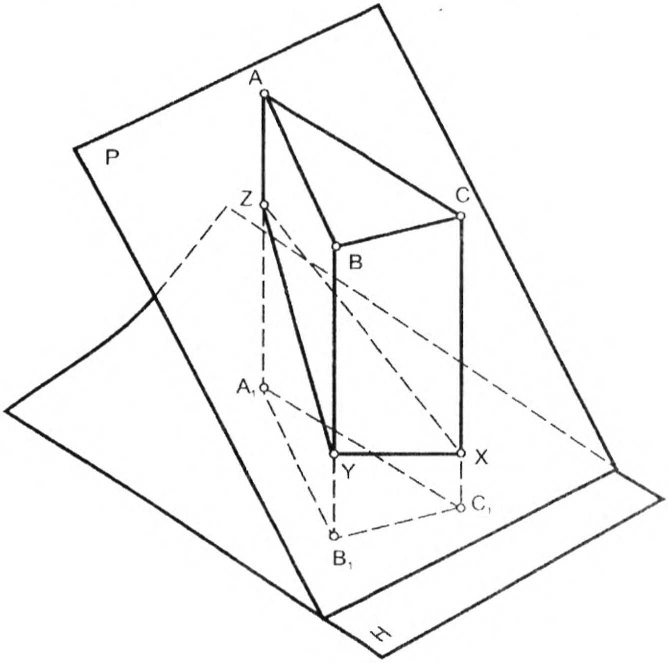


Рис.127

Задача решается в следующей последовательности

1) Определяют точки встречи плоскости с ребрами призмы.

2) Полученные точки соединяют между собой линией. Полученная фигура является результатом пересечения плоскости с призмой.

3) Способом совмещения определяют натуральный вид фигуры сечения.

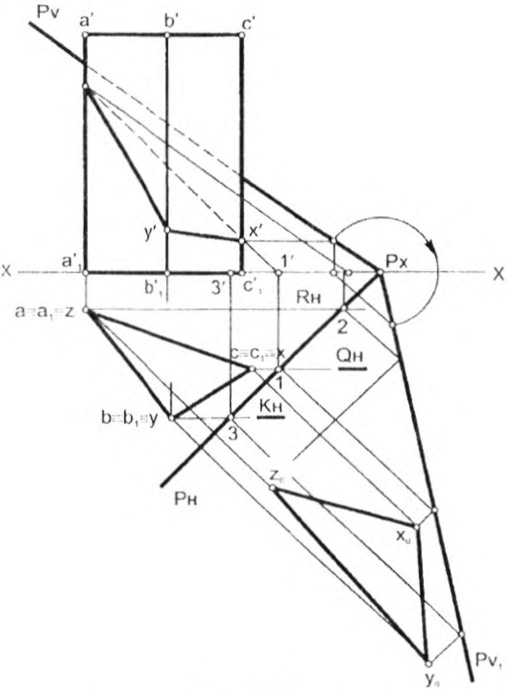


Рис.128.

Пересечение цилиндра с плоскостью общего положения

На рис.129 приведен пространственный чертеж пересечения цилиндра с плоскостью общего положения .

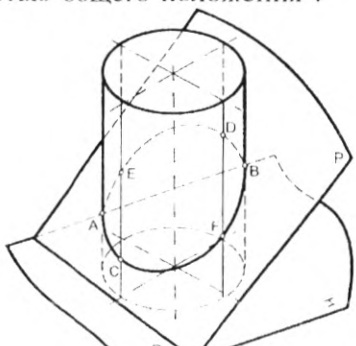


Рис.129.

Пересечение цилиндра с плоскостью общего положения определяется в следующей последовательности (рис.130)

1) На поверхности цилиндра проводят несколько характерных образующих.
2) Определяют точки встречи этих образующих с плоскостью **P**.
3) Соединяют найденные точки линией последовательно между собой и получают фронтальную проекцию фигуры сечения.
4) Способом совмещения определяют натуральный вид фигуры сечения.

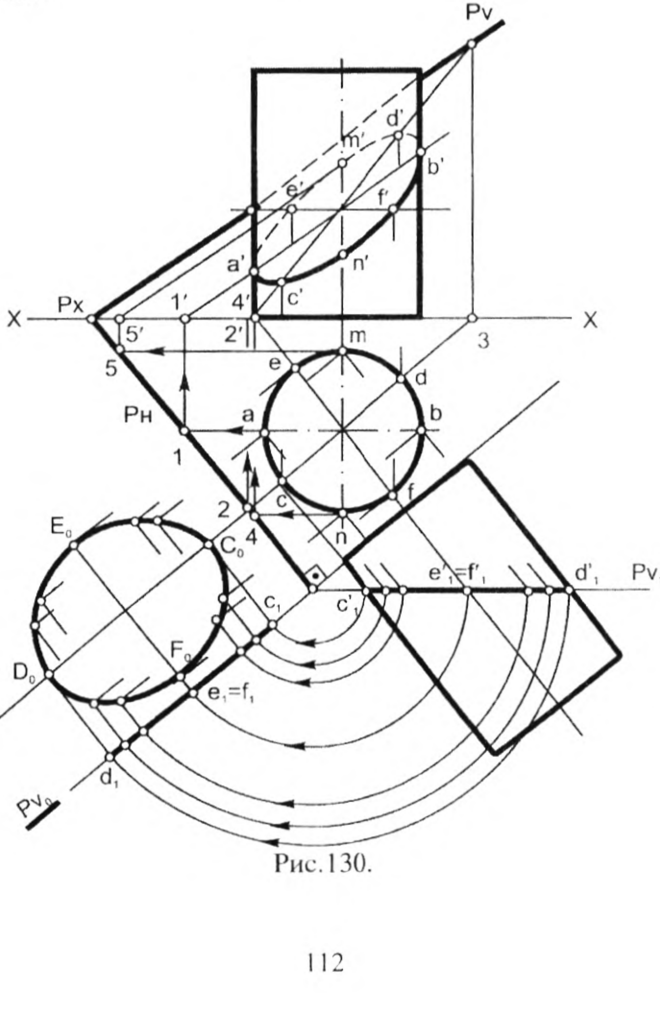


Рис.130.

17 - ЛЕКЦИЯ. Взаимное пересечение двух поверхностей. Способ вспомогательных секущих плоскостей.

Взаимное пересечение двух поверхностей

В общем случае пересекающиеся две поверхности образуют пространственную линию.

Линия, общая для двух пересекающихся поверхностей, называется линией пересечения (перехода). Чтобы определить проекции линии пересечения, необходимо найти проекции нескольких точек, общих для рассматриваемых поверхностей. Для определения точек, принадлежащих линии пересечения поверхностей, используют два способа:

1. Способ вспомогательных секущих плоскостей
2. Способ вспомогательных секуших сфер (шаров)

Использование каждого из этих способов зависит от видов данных поверхностей и от их взаимного расположения.

Способ вспомогательных секущих плоскостей

Этот способ применяют в случае, если две пересекающиеся поверхности являются многогранниками или одна из них многогранник, другая – поверхность вращения. И в случае, если две поверхности вращения оси их не пересекаются или параллельные

Сущность способа вспомогательных секущих плоскостей заключается в следующем:

1. Заданные две поверхности пересекают вспомогательной плоскостью.
2. Определяют линии пересечения двух поверхностей со вспомогательной плоскостью. (на каждой из заданных поверхностей в отдельности)
3. Находят точки пересечения полученных линий, которые и принадлежат искомой проекции линии пересечения двух поверхностей.

На линии пересечения двух поверхностей, в первую очередь, определяют опорные (характерные) точки, т.е. высшую и низшую, крайнее правую и левую, затем определяют промежуточные точки.

Для построения проекции линии пересечения двух поверхностей достаточно определить 7 или 9 точек. Полученные точки соединяют плавно с помощью линейки, лекало.

Наиболее просты случаи взаимного пересечения поверхностей, когда одна из является проецирующей, т.е прямолинейные образующей этой поверхности (призмы, цилиндра) перпендикулярны какой либо плоскости проекции.

Пример: Построить проекции линии пересечения прямого кругового конуса вращения с прямой призмой (рис.131). Эта задача является домашне-графической работой (эпюр 9) студентов. Исходные чертежи, согласно варианта, студенты берут с наглядного стенда кафедры.

Пусть конус вращения с вертикальной осью пересекается фронтально-проецирующей призмой.

Анализ условия задачи (рис.131) показывает, что одно из геометрических поверхности – конус, а второй – призма, образующие боковой поверхности которого перпендикулярно фронтальной плоскости проекции. Так как призма трехгранная, каждую грань можно считать фронтально – проецирующей плоскостью.

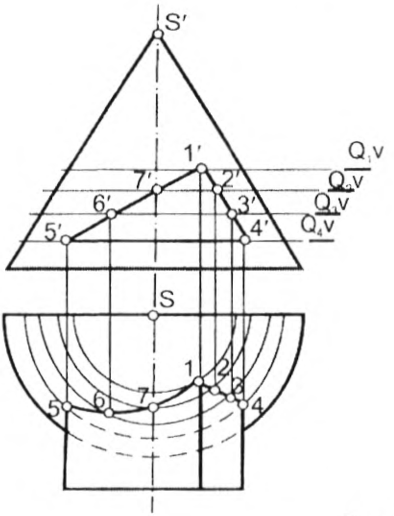


Рис.131.

Поэтому в задачах с участием проецирующей призмы одна из проекции линии пересечения совпадает с выраженной в ломаную линию проекций призмы в пределах очерка второй поверхности. Необходимые графические операции проводятся для построения недостающей проекции. Следовательно, из рисунка фронтальная проекция линии пересечения совпадает с фронтальной проекции призмы. Горизонтальные проекции точек линии пересечения определяются согласно «признаку принадлежности» точек поверхности конуса.

Прежде чем строить горизонтальную линию пересечения необходимо найти характерные (опорные) точки **1, 4, 5,** затем промежуточные точки **2, 3, 8, 7** линии пересечения.

Вспомогательные секущие горизонтальные плоскости пересекают конус с вращения по окружностям, а призму – по прямолинейным образующим, здесь любая боковая грань призмы пересекает конус вращения отрезком эллипса **(1, 7, 6, 5)** и правая боковая грань призмы пересекает конус вращения отрезком **(1, 2, 3, 4)** параболы. Нижняя горизонтальная грань призмы пересекает конус вращения по части окружности **(4, 5).**

Пример: Построить проекции линии пересечения полусферы с цилиндром вращения (рис.132).

Анализ условия задачи (рис 132) показывает, что одно из геометрических поверхностей – сфера, а второй – цилиндр, образующие боковой поверхности которого перпендикулярны горизонтальной плоскости проекции.

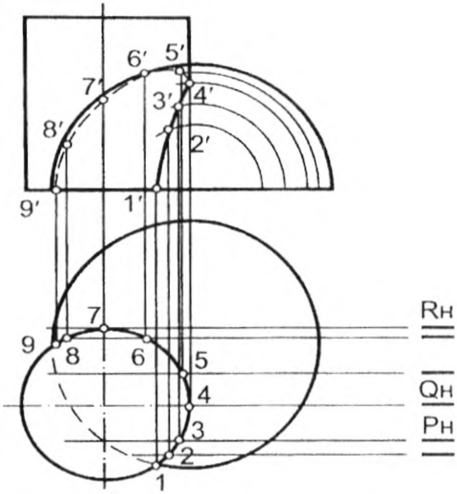


Рис.132

Следовательно, из рисунка горизонтальная проекция линии пересечения совпадает с горизонтальной проекцией цилиндра в пределах очерка поверхности сферы.

Фронтальные проекции точек линии пересечения определяются построением параллелей сферы.

Взаимное пересечение многогранников.

Линия пересечения двух многогранников может быть определена по точкам пересечения ребер одного многогранника с гранями другого: это – известная задача на определение точки пересечения прямой с плоскостью.

Линия пересечения многогранников может быть определена и как линия пересечения граней многогранников: задача на определение линии пересечения двух плоскостей. Преимущество отдается тому из способов, которое в зависимости от условия задачи даст более простое и наиболее точное решение. Это два способа построения линии пересечения двух многогранников часто комбинируют.

Линиями пересечения двух многогранников в общем случае являются пространственные замкнутые прямоугольники. В зависимости от вида многогранников и их взаимного расположения линиями пересечения могут быть один, два и более пространственных многоугольников.

Если один многогранник частично пересекается другим, как бы не полностью врезается в другой многогранник, то имеем одну замкнутую пространственную ломаную линию, но взаимное пересечение многогранников называют неполным прониканием или врезкой.

Пример: Построить проекции линии пересечения двух призм (рис.133).

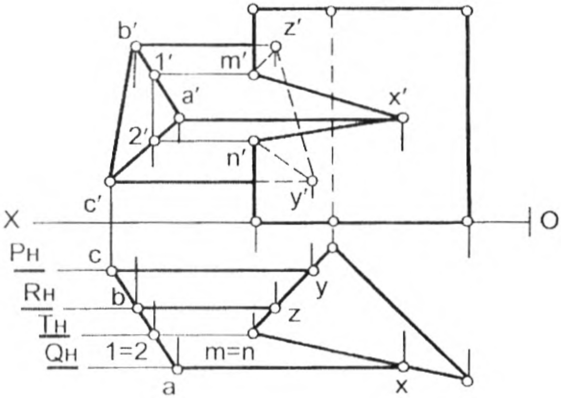


Рис.133.

Если один многогранник полностью пересекается вторым многогранником, получаем две линии их пересечения – линию входа одного многогранника в другой и линию выхода. Такая взаимное пересечение многогранников называют полным проникaнием.

Пример: Построить проекции линии пересечения прямой призмы с пирамидой (рис.134). Эта задача является домашне –

графической работой студентов механического направления образования. Координаты **(X,У,Z)** точек **A,B,C,D** пирамиды и **E,K,U,Q** призмы задаются в миллиметрах согласно варианта.

Призма своим основанием стоит на горизонтальной плоскости проекции Н. Горизонтальные проекции ее вертикальных ребер преобразуются в точки. Грани боковой поверхности призмы в горизонтальной их проекции преобразуются в отрезки прямых, т.е эти грани представляют собой отсеки горизонтально – проецирующих плоскостей.

Линии пересечения двух многогранников определяются по точкам пересечения ребер одного многогранника с гранями другого многогранника. Так, ребро **СД** пирамиды пересекает две грани призмы: одну - в точке 4 и вторую – в точке 3. Ребро **АД** пирамиды пересекает две грани призмы в точках 5 и 1, ребро **ВД** – в точках 7 и 2.

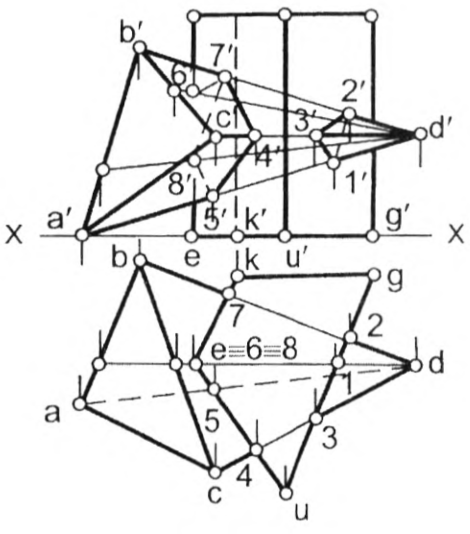


Рис.134.

Из четырех боковых ребер призмы только одно ребро **Е** пересекает пирамиду. Чтобы найти точки пересечения этого ребра

Е с гранями пирамиды, через ребро **Е** и вершину **Д** пирамиды проводим вспомогательную горизонтально – проецирующую плоскость **Р.** Она пересекает пирамиду по прямым линиям, которых пересекает ребро призмы в точках 6 и 8. Эти точки и являются точками пересечения ребра **Е** призмы с гранями пирамиды. Соединяя каждые пары таких точек одних и тех же граней отрезками прямых, получаем две линии пересечения многогранников. Одна из них представляет собой пространственный многоугольник 467854, другая – треугольник 3213. В проекциях видимы только те из отрезков многоугольников пересечения, которые принадлежат видимым граням многогранников; невидимые отрезки обозначают на чертеже штриховыми линиями.

Во фронтальной проекции отрезки 32 и 31 линии пересечения 3213 видимы. Они принадлежат видимым граням призмы и пирамиды. Отрезок 21 является невидимым во фронтальной проекции. Этот отрезок принадлежит видимым граням призмы и невидимым граням пирамиды. Во фронтальной проекции также видимы отрезки 46 и 45 второй линии пересечения, а отрезки 67, 78 и 85 этой линии – невидимы.

18 – ЛЕКЦИЯ. Взаимное пересечение поверхностей вращения. Способ вспомогательных секущих сфер.

При построении линии пересечения двух поверхностей вращения прежде всего определяют главные ее точки: точки пересечений главных меридианов, экваторов, высшую и низшую точки по отношению к плоскости уровня. После этого определяют другие промежуточные точки.

Для определения точек линии пересечения двух поверхностей вращения пользуются вспомогательными секущими поверхностями – посредниками, плоскими и сферическими. Их выбирают так, чтобы они пересекали каждую из поверхностей по простейшим линиям, т.е. параллелям поверхностей вращения.

Способ вспомогательных секущих сфер.

Этот способ применяют в случае, если две пересекающиеся поверхности являются поверхностями вращения, оси симметрии их пересекаются и параллельны одной из плоскостей проекций.

Различают два вида способа вспомогательных секущих сфер:

1. **Концентрических сфер** – т.е. вспомогательная сфера проводится с одного центра.
2. **Эксцентрических сфер** – т.е. вспомогательная сфера проводится с нескольких центров, лежащих на одной линии.

Сущность способа концентрических сфер заключается в том, что вспомогательная сфера проводится из точки пересечения осей вращения двух поверхностей

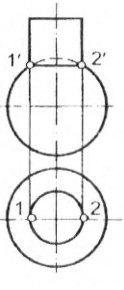
Вспомогательная "min" сфера пересекает одну поверхность по окружности, а со второй касается по окружности. В пересечении этих окружностей получаются точки, общие для обеих поверхностей, принадлежащие проекции их линии пересечения.

Построение начинают с проведения минимальной сферы. Кроме минимальной сферы проводят три и более сфер. Обычно для построения проекции линии пересечения достаточно определить 7 или 9 точек.

Пересечение соосных поверхностей вращения (частный случай пересечения)

Соосными поверхностями вращения называют поверхности, имеющие общую ось вращения. Если пересекающиеся поверхности имеют общую ось, то линия пересечения этих поверхностей будет окружностью перпендикулярной к оси вращения.

Пример: Пересечение сферы с цилиндром приведено на рис. 135. Пересечение сферы с конусом приведено на рис. 136



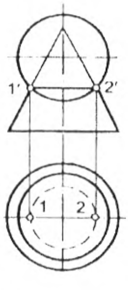


Рис.135 Рис.136

Особенности пересечения соосных поверхностей вращения позволяет в качестве вспомогательных поверхностей при построении проекции линии пересечения поверхностей использовать сферы, соосные с данными поверхностями.

Взаимное пересечение поверхностей 2-го порядка

Представляют значительный интерес и имеют большое практическое значение задачи на пересечение алгебраических поверхностей 2-го порядка.

Линией пересечения двух поверхностей 2-го порядка всегда является алгебраической кривой линией 4-порядка (в общем случае пространственная). Это следует из правила, что порядок линии пересечения двух алгебраических поверхностей равен произведению порядков этих поверхностей. Такие кривые 4-го порядка в отличие от других пространственных кривых такого же порядка называют биквадратными кривыми линиями. Они могут распадаться на кривые низших порядков. Имеются случаи распадения биквадратной кривой на две кривые 2-го порядка, на прямую и пространственную кривую 3-го порядка, на четыре прямые линии. Разнообразие форм биквадратной кривой и ее свойства описываются рядом теорем.

Теорема. Если две пересекающиеся алгебраические поверхности 2-го порядка имеют общую плоскость симметрии, то линия их пересечения проецируется на эту или другую ей параллельную плоскость в виде кривой 2-го порядка.

Рассмотрим примеры построения проекции линии пересечения двух поверхностей вращения 2-го порядка с пересекающимися осями на плоскость, параллельную плоскости симметрии этих поверхностей.

В качестве заданных поверхностей возьмем два цилиндра вращения радиусами **R_1 и R_2** с осями, пересекающимися под прямым углом (рис.137). Проекцию линии пересечения цилиндров вращения можно определить, используя вспомогательные секущие сферы – посредники с центром в точке **O**. С помощью окружности радиусом **R_{min}** , равным радиуса **R_1** большего цилиндра, определяем две точки проекции линии пересечения на оси меньшего цилиндра.

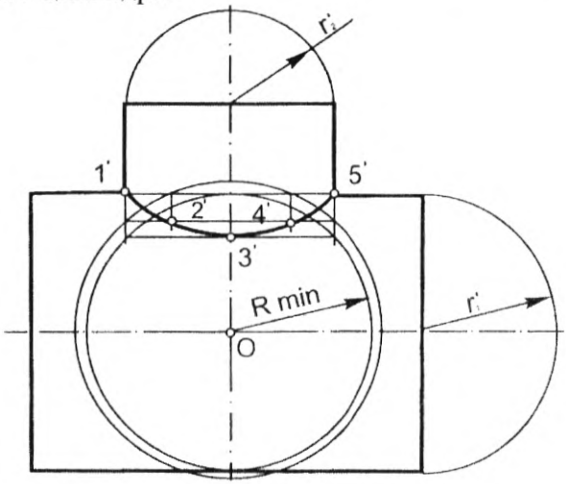


Рис.137.

С помощью ряда других окружностей радиусами больше **R_1** определяем проекции точек кривой пересечения.

Линии пересечения двух цилиндров вращения с пересекающимися осями проецируются на плоскость, параллельную их плоскости симметрии, в виде равносторонней гиперболы.

На рис.138 показаны построения проекции линии пересечения конуса вращения с цилиндром вращения. Оси поверхностей взаимно перпендикулярны и параллельны одной фронтальной плоскости проекции.

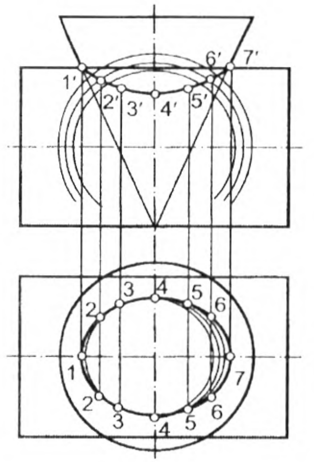


Рис.138.

Пример построения линии пересечения двух поверхностей вращения с общей плоскостью симметрии, где можно использовать вспомогательные секущие сферы – посредники показан на рис.139. Одна из поверхностей – конус, другая – сфера. Решим его способом секущих эксцентрических сфер. Такая задача может быть решена и с использованием вспомогательных секущих плоскостей уровня или способом концентрических сфер.

При построении линии пересечения поверхностей прежде всего определяем опорные точки 1 и 5 пересечения очерковых образующих поверхностей. Затем определяем промежуточные точки, принадлежащие линии пересечения поверхностей.

Любая вспомогательная секущая сфера – посредник радиусом $\mathbf{R}_{сф}$ с центром на оси конуса пересекает его и заданную сферу по окружностям. Окружности пересекаются в точках 2,3,4 линии пересечения поверхностей.

Выбирая секущие эксцентрические сферы других радиусов с различными положениями центров на оси поверхности вращения – конуса, получим ряд точек, принадлежащих искомой линии пересечения поверхностей.

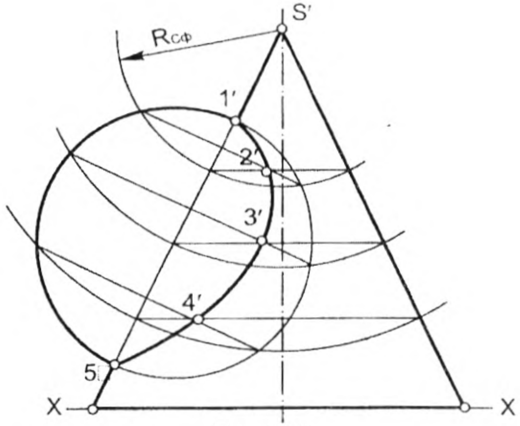


Рис.139.

Другой пример построения линии пересечения двух поверхностей вращения способом эксцентрических сфер рассмотрен на рис.140, где кольцо (открытый тор) пересекается с конусом вращения. Поверхности имеют одну общую плоскость симметрии. Оси пересекающихся поверхностей вращения между собой не пересекаются. Поверхности заданы их фронтальными очерками.

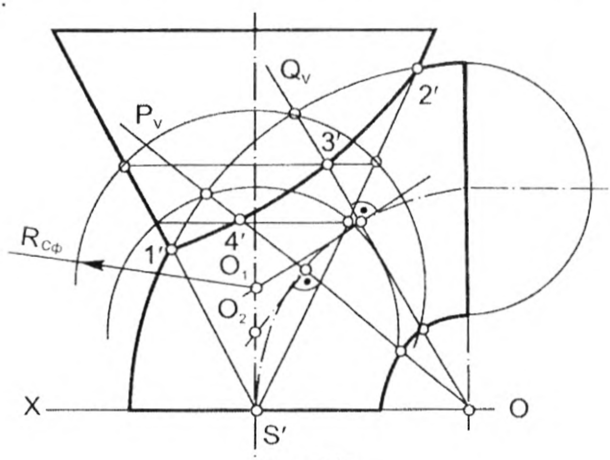


Рис.140.

Круговые сечения конуса вращения получаются при сечении его плоскостями уровня. Кольцо имеет три системы круговых сечений, двумя из них мы воспользуемся в решении задачи. Одна система круговых сечений тора находится в плоскостях, перпендикулярных оси тора. Другая система находится в проецирующих плоскостях, вращающих вокруг этой оси.

При построении линии пересечения поверхностей прежде всего определяем точки 1 и 2 пересечения очерковых образующих поверхностей. Затем через ось вращения тора проводим фронтально-проецирующую плоскость **R.** Она пересекает тор по окружности. Центр $\mathbf{O_2}$ сферы, пересекающей тор по этой окружности, находится на перессечении перпендикуляра, восстановленного в центре окружности к плоскости **R** с осью конуса вращения. Эта вспомогательная секущая сфера имеет радиус $\mathbf{R_{сф}}$. Она пересекает кольцо и конус вращения по окружностям, фронтальные проекции которых – отрезки прямых. Две точки 4 пересечения окружностей принадлежат искомой линии пересечения поверхностей.

Аналогично определяем другую промежуточную точку 3 линии пересечения поверхностей. При этом вспомогательная сфера имеет другой центр $\mathbf{O_1}$, находящийся на оси конуса вращения.

Горизонтальную проекцию линии пересечения определяют в проекционной связи с ее фронтальной проекцией.

19 - ЛЕКЦИЯ. Определение углов. Угол между прямой и плоскостью. Угол между двумя плоскостями .

Угол между прямой и плоскостью.

Угол между прямой и плоскостью определяется углом между прямой и ее ортогональной проекцией на плоскость. Угол между прямой и плоскостью можно определить, используя пространственный чертеж в следующей последовательности (рис.141)

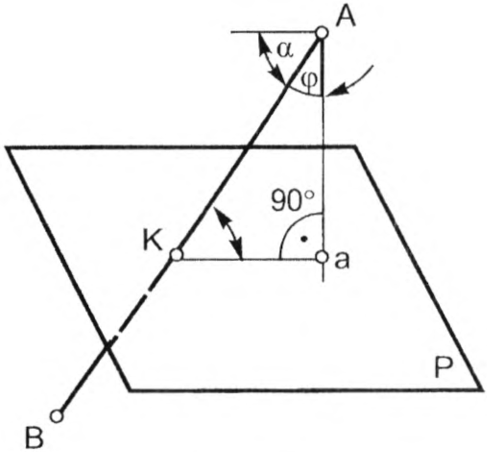


Рис.141.

1) Определяют точку встречи прямой **AB** с плоскостью P.

$$(\bullet)\mathbf{K} = (\mathbf{AB}) \cap \mathbf{P}$$

2) Из вершины **A** прямой **(AB)** проводят перпендикуляр на плоскость **P**, затем определяют точку встречи перпендикуляра с плоскостью **P.**

$$\perp_{(\bullet)A} \cap \mathbf{P} = \mathbf{a}$$

3) Соединяя точки **K** и a, определяют угол α - угол между прямой **(AB)** и плоскостью **P.**

$$(\bullet)\ a \cup (\bullet)\ K = (a\ K), \qquad \angle \alpha = (AB) \wedge P$$

$$\alpha + \varphi = 90^0\ ,\ \angle\alpha = 90^0 - \varphi$$

Эту задачу можно решить и вторым способом. В этом способе требуемый угол α определяется углом φ, т.е. углом, составленным между перпендикуляром, опущенным из вершины **A** на плоскость **P** и прямой **(AK).**

Пример: На рис. 142 приведен чертеж определения угла между прямой **(AB)** и плоскостью **P**.

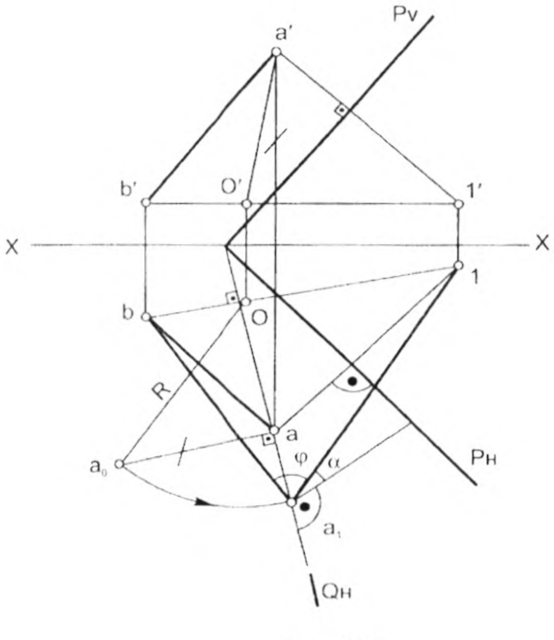


Рис.142.

Угол между двумя плоскостями

Угол между двумя плоскостями **P** и **Q** измеряется линейным углом α, полученным от пересечения данных плоскостей **P** и **Q.** Определение линейного угла между двумя плоскостями требует ряда геометрических построенией.

Угол между двумя плоскостями определяется следующим образом (рис.143).

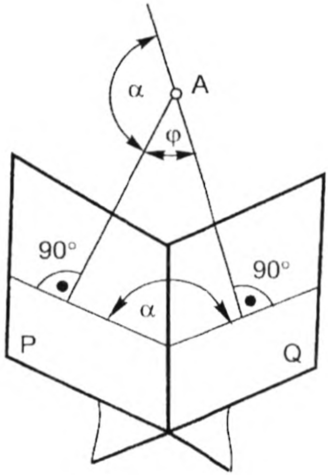


Рис.143.

Из произвольной точки **A** пространства проводим перпендикуляр к заданным плоскостям **Q** и **P**. Затем определяем натуральную величину угла φ и отсюда можно определить угол между двумя плоскостями α

$$\angle \alpha = \mathbf{180^0} - \varphi$$

Пример: Определить угол между двумя плоскостями $\mathbf{P(P_H\ ,\ P_V)}$ и $\mathbf{Q(Q_H\ ,\ Q_V)}$. (рис.144).

Дано:
$P(P_H, P_V) \wedge$
$Q(Q_H, Q_V)$
Определить:
$\angle \alpha = P \wedge Q$

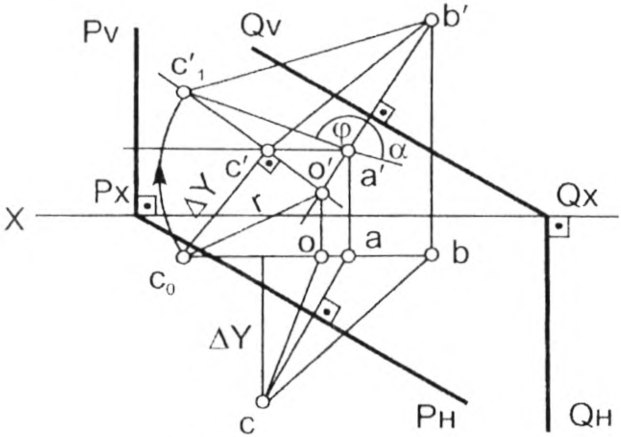


Рис. 144.

Определение углов между двумя пересекающимися прямыми

Пример: Определить угол между двумя пересекающимися прямыми **AB и BC** (рис. 145)

Дано:
$(AB) \cap (BC)$
Определить:
$|\angle BCA|$ - ?

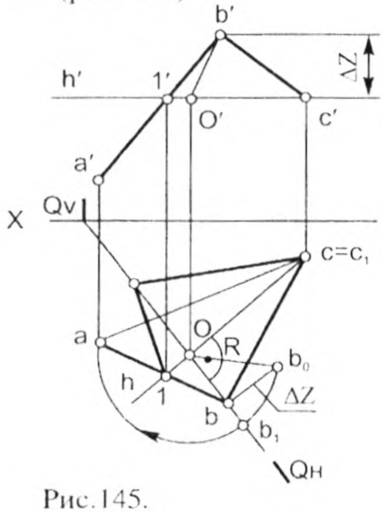


Рис.145.

Алгоритм решения задачи

1) $\mathbf{h_0(h, h') \subset (\bullet)C(c, c')}$

2) $\mathbf{(\bullet)B}$ ↻ $\mathbf{J_{\parallel H} \to (\bullet)B_1}$

Пример: Определить угол между двумя пересекающимися прямыми **AB** и **AC** (рис.146)

Дано:

$\mathbf{(AB) \cap (AC) \wedge}$

$\mathbf{(AB) \perp H}$

Определить:

$\mathbf{| \angle ABC |}$ **- ?**

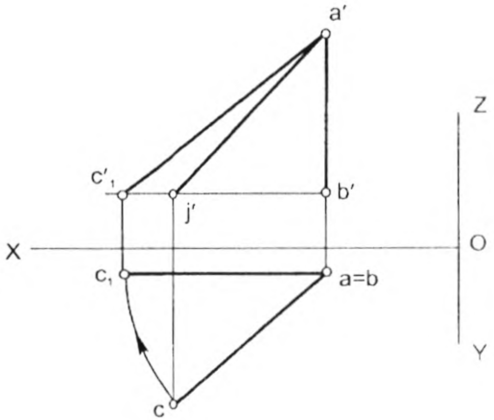


Рис.146

Алгоритм решения задачи

1) $\mathbf{(\bullet)C}$ ↻ $\mathbf{J_{\perp H} \to (\bullet)C_1}$

Пример задачи второй контрольной работы.

Пример: Через точку **A** провести прямую **AK**, параллельную заданной плоскости **P** и пересекающую прямую **BC** (рис.147)

Дано: $\mathbf{P(P_H , P_V) , (BC) \wedge (\bullet) A}$

Определить: $\mathbf{(\bullet) A \in (AK) \wedge (AK) \cap (BC) \wedge (AK) \parallel P}$ - ?

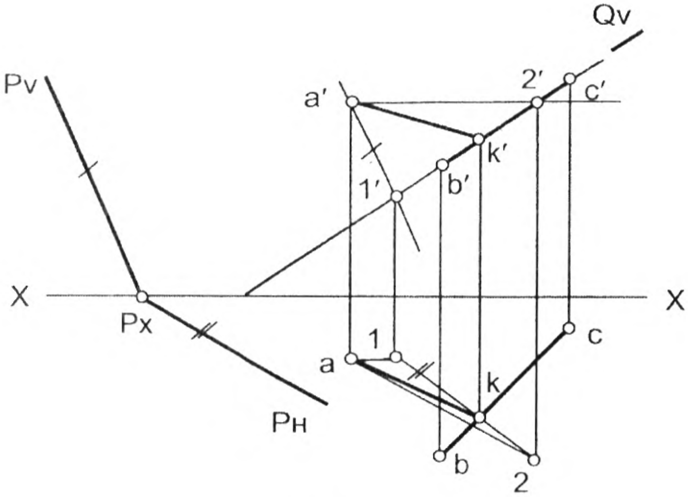


Рис.147

Алгоритм решения задачи

1) (•) A ∈ **R ∥ P**
2) (•) **K) = R ∩ (BC)**
a) **(BC) ⊂ Q**
b) **R ∩ Q = (1, 2)**
c) **(1, 2) ∩ (BC) = (•)K**

Пример: Через точку **A** провести прямую **AK**, параллельную заданной плоскости **P((DE) ∥ (FQ))** и пересекающую прямую **BC** (рис.148).

Дано: **P((DE) ‖ (FQ)), (BC) ∧ (•) A**
Определить: **(•) A ∈ (AK) ∧ (AK) ∩ (BC) ∧ (AK) ‖ P - ?**

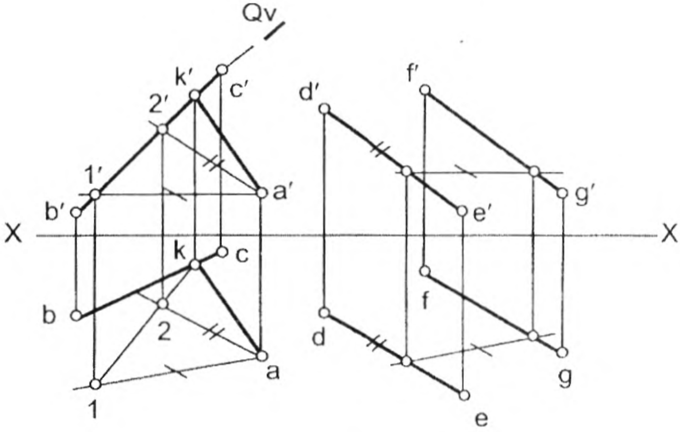


Рис.148.

Алгоритм решения задачи
1) **(•) A ∈ R ‖ P**
2) (•) K) = R ∩ (BC)
b) **(BC) ⊂ Q**
b) **R ∩ Q = (1, 2)**
c) **(1, 2) ∩ (BC) = (•)K**

Пример задачи итоговой письменной контрольной работы

Пример: 1. На отрезке **AC**, как на основании, построить равнобедренный треугольник так, чтобы его третья вершина располагалась на прямой BE (рис149).

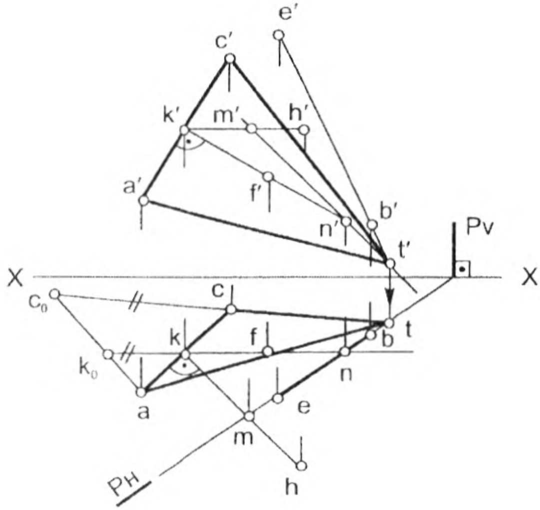


Рис. 149.

Алгоритм решения задачи

1. $(AC)/2 = (AK) = (KC)$
2. $(\bullet)\ K \in Q(h_o \cap f_o) \perp (AC)$
3. $(BE) \cap Q = (\bullet)\ T$

3.1 $(BE) \subset P(P_H\ ,\ P_V) \perp H$

3.2 $Q \cap P = (MN)$

3.3 $(MN) \cap (BE) = (\bullet)T$

4. $(\bullet)T \cup (\bullet)C \wedge (\bullet)T \cup (\bullet)A$

Пример: 2. Способом замены плоскостей проекций построить центр окружности, описанной вокруг треугольника **ABC**. (рис 150).

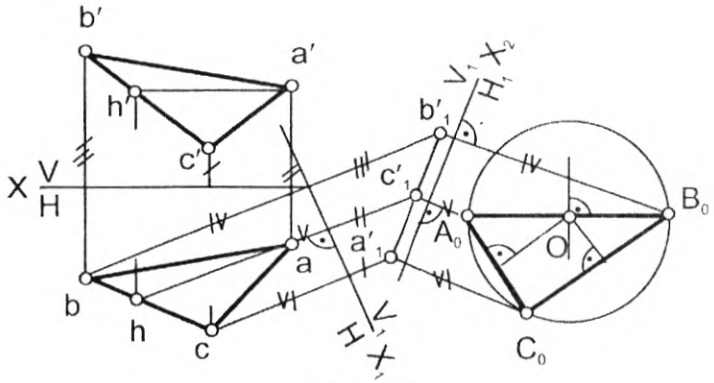


Рис 150.

Пример: 3. Построить проекции линии взаимного пересечения данных поверхностей. (рис 151).

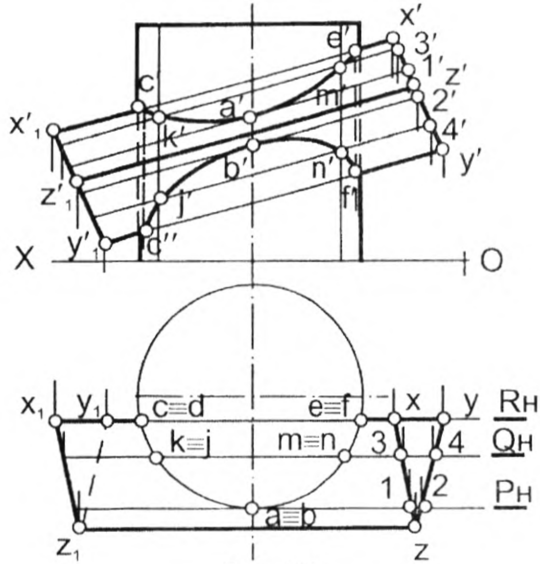


Рис 151.

Литература

1. Гордон В.О, Семенцов-Огиевский М.А. Курс начертательной геометрии. М.: Наука, 1988.

2. Бубенников А.В. Начертательная геометрия. М.: Высшая школа, 1985.

3. Фролов С.А. Начертательная геометрия. М.: Машиностроение, 1983.

4. Азимов Т.Д. Конспект лекции по начертательной геометрии. Т.: ТашГТУ, 2001.

5. Фролов С.А. Сборник задач по начертательной геометрии. М.: Машиностроение, 1986.

6. Арустамов Х.А. Сборник задач по начертательной геометрии с решением типовых задач. М.: Машиностроение, 1971.

7. Федоренко В.А. и Шошин А.И. Справочник по машиностроительному черчению. М.,1981.

8. Левицкий В.С. Машиностроительное черчение. М.,1988.

9. ГОСТы. ЕСКД. Основные правила выполнения чертежей. М.,1984.

10. Иванова А.М и др. Линии пересечения кривых поверхностей учебно-методические пособие по курсу «Инженерная графика» для всех специальностей.- Москва , 2004.

Приложения.

Опорные слова.

1. Проекция.
2. Ортогональная проекция.
3. Недостающая проекция.
4. Пространство.
5. Октант.
6. Четверть.
7. Квадрант.
8. Точка.
9. Точка частного положения.
10. Опорная точка.
11. Промежуточная точка.
12. Общая точка.
13. Прямая.
14. Отрезок.
15. Прямая общего положения.
16. Следы прямой.
17. Горизонтальный след прямой.
18. Фронтальный след прямой.
19. Натуральная величина прямой.
20. Угол наклона прямой.
21. Прямая частного положения.
22. Горизонтальная прямая.
23. Фронтальная прямая.
24. Профильная прямая.
25. Горизонтально – проецирующая прямая.
26. Фронтально – проецирующая прямая.
27. Профильно–проецирующая прямая.
28. Две прямые.
29. Параллельная прямая.
30. Пересекающая прямая.
31. Конкурентные точки.
32. Плоскость.
33. Ось абсциссы.
34. Ось ординаты.
35. Ось аппликаты.

36. Горизонтальная плоскость проекции.
37. Фронтальная плоскость проекции.
38. Профильная плоскость проекции.
39. Горизонтальный след плоскости.
40. Фронтальный след плоскости.
41. Профильный след плоскости.
42. Точка схода следов.
43. Плоскость общего положения.
44. Плоскость частного положения.
45. Горизонтально – проецирующая плоскость.
46. Фронтально – проецирующая плоскость.
47. Профильно – проецирующая плоскость.
48. Горизонтальная плоскость.
49. Фронтальная плоскость.
50. Профильная плоскость.
51. Биссекторная плоскость.
52. Главные линии плоскости.
53. Горизонталь плоскости.
54. Фронталь плоскости.
55. Линия наибольшего наклона.
56. Вспомогательная плоскость.
57. Прямой угол.
58. Угол.
59. Поверхность.
60. Характер.
61. Центр.
62. Ось.
63. Расстояние.
64. Ребро.
65. Боковая сторона.
66. Многогранник.
67. Верхнее основание.
68. Нижнее основание.
69. Призма.
70. Пирамида.
71. Цилиндр.
72. Конус.
73. Усеченный конус.
74. Сфера.
75. Вспомогательная сфера.

76. Минимальная сфера.
77. Максимальная сфера.
78. Тор.
79. Принадлежность.
80. Параллельность.
81. Перпендикулярность.
82. Скрещивающаяся.
83. Пересекающаяся.
84. Пересечение двух поверхностей.
85. Пересечение поверхности с плоскостью.
86. Треугольник.
87. Натуральная величина треугольника.
88. Четырехугольник.
89. Многоугольник.
90. Ромб.
91. Равносторонний треугольник.
92. Равнобедренный треугольник.
93. Образующая.
94. Направляющая.
95. Способ прямоугольного треугольника.
96. Перемена, замена.
97. Вращение.
98. Совмещение.
99. Диаметр.
100. Радиус.
101. Равно.
102. Центр сферы.
103. Касательная.
104. Вершина конуса.
105. Вершина пирамиды.
106. Окружность, вписанный в треугольник.
107. Окружность, описанный около треугольника.
108. Высота.
109. Длина.
110. Дальность.
111. Направление.
112. Сторона.
113. Катет.
114. Гипотенуза.
115. Овал.

116. Эллипс.
117. Парабола.
118. Гипербола.
119. Трапеция.
120. Концентрический.
121. Эксцентрический.
122. Симметрик.
123. Биссектриса.
124. Линия экватора.
125. Линия меридианы.
126. Очерковая образующая.
127. Прозрачный.
128. Плоскость вращения.
129. Ось вращения.
130. Центр вращения.
131. Радиус вращения.
132. Угол вращения.
133. Дуга окружности.
134. Относительно.
135. Двугранный угол.
136. Основная проекция.
137. Алгоритм.
138. Невидимая линия.
139. Линия связи.
140. Опорная точка.
141. Теорема.
142. Определение.
143. Свойство.
144. Луч.
145. Чертеж.
146. Периметр.
147. Подобный.
148. Представление.
149. Признак.
150. Сечение.
151. Символика.
152. Соосный.
153. Способ.
154. Условия.

Вопросы вариантов для итоговой оценки по «Начертательной геометрии».

Вариант № 1

1. На отрезке **CE**, как на стороне, построить прямоугольник, приняв за направление его диагонали прямую **BC**. (Рис 1)

2. Способом вращения определить величину угла между прямой **BE** и плоскостью **ABC.** (Рис.2).

3. Построить проекции линии взаимного пересечения данных поверхностей (Рис.3).

Вариант № 2

1. На прямой **CE** найти точку, удаленную от плоскости **ABC** на расстояние **40 мм**. (Рис. 1).

2. Способом вращения определить величину высоты треугольника **ABC,** проведенной через вершину **B** (Рис. 3).

3. Построить проекции линий взаимного пересечения данных поверхностей. (Рис. 3).

Вариант № 3

1. Построить точку, симметричную точке **B** относительно прямой **CA**. (Рис. 1).

2. Способом вращения построить центр и точки сопряжения сторон угла **ABC** дугою окружности радиуса в **15мм.** (Рис.2).

3. Построить проекции линии взаимного пересечения данной поверхности с плоскостью **ABC**. (Рис.3). Плоскость считать прозрачной.

Вариант № 4

1. Построить прямую призму высотой в **70 мм**, приняв за ее основание треугольник **ABC** (Рис 1).

2. Способом вращения построить точку пересечения высот треугольника **ABC** (Рис 2).

3. Построить фронтальную проекцию и истинный вид сечения данной поверхности плоскостью **P** (Рис 3). Плоскость считать прозрачной.

Вариант № 5

1. На отрезке **AE**, как на катете, построить прямоугольный треугольник, если вершина прямого угла находится в точке **A**, а третья вершина на прямой **CE**. (Рис 1).

2. Способом замены определить величину расстояния от точки **A** до прямой **BE** (Рис 2).

3. Построить проекции линии взаимного пересечения данных поверхностей. (Рис 3).

Вариант № 6

1. Построить точку симметричную точке **E** относительно плоскости **ABC**. (Рис.1).

2. Способом замены определить величину угла между прямой **BE** и плоскостью **ABC** (Рис.2).

3. Построить проекции линии взаимного пересечения данных поверхностей. (Рис.3).

Вариант № 7

1. На отрезке **AC**, как на основании, построить равнобедренный треугольник так, чтобы его третья вершина располагалась на прямой **BE** (Рис1)

2. Способом замены определить величину расстояния между скрещивающимися прямыми **AB** и **CE** (Рис.2).

3. Построить проекции линии взаимного пересечения данных поверхностей (Рис.3).

Вариант № 8

1. Определить величину расстояния от точки **A** до плоскости **BCE** (Рис.1).

2. Способом замены в плоскости **ABC**, на отрезке **AC** как на стороне, построить равносторонний треугольник (Рис 2).

3. Построить проекции линии пересечения данной поверхности с плоскостью **ABC** (Рис.3). Плоскость считать прозрачной.

Вариант № 9

1. Построить проекции линии пересечения плоскости **ABC** с плоскостью, проходящей через точку **E** перпендикулярно прямой **AE**. (Рис.1).

2. Способом замены на прямых **AB** и **CE** найти точки, наиболее близко расположенные между собой. (Рис 2).

3. Построить проекции линии пересечения данных поверхностей. (Рис.3).

Вариант № 10

1. Не прибегая к помощи профильной проекции, провести прямую, параллельную оси OX и пересекающую прямые **AB** и **CE** (Рис 1).

2. Способом замены построить прямую , удаленную на **15** мм от граней угла при ребре **AB** (Рис 2).

3. Построить проекции линии взаимного пересечения данных поверхностей (Рис 3)

Вариант № 11

1. Построить плоскость, параллельную плоскости **ABC** так, чтобы обе плоскости отсекали на прямой **AE** отрезок длиной в **40 мм** (Рис 1).

2. Способом замены на прямой **AB** найти точки, удаленные от прямой **CE** на **60 мм**. (Рис 2).

3. Построить проекции линии взаимного пересечения данных поверхностей (Рис 3).

Вариант № 12

1. Не прибегая к помощи профильной проекции, провести прямую, параллельную оси **OX** и пересекающую прямые **AB** и **CE** (Рис 1).

2. Способом замены построить прямую, удаленную на **15 мм** от граней угла при ребре **AB** (Рис.2).

3. Построить проекции линии взаимного пересечения данных поверхностей (Рис3)

Вариант № 13

1. Построить прямоугольную проекцию прямой **CE** на плоскость **ABC**. (Рис 1).

2. Способом замены определить величину расстояния от точки **E** до плоскости **ABC.** (Рис.2).

3. Построить проекции линии взаимного пересечения данных поверхностей (Рис 3).

Вариант № 14

1. Построить точку симметричную точке **C** относительно плоскости **ABE** (Рис1).

2. Способом замены построить плоскость на расстоянии **30 мм** от плоскости **ABC** (Рис 2).

3. Построить проекции линии взаимного пересечения данной поверхности с плоскостью. **ACE** (Рис3.). Плоскость считать прозрачной.

Вариант № 15

1. Через точку **E** провести плоскость, перпендикулярную плоскости **ABC** и параллельную прямой **AB** и найти проекции линии пересечения проведенной плоскости с плоскостью **ABC**. (Рис.1).

2. Способом замены построить истинный вид треугольника **ABE**. (Рис2).

3. Построить проекции линии взаимного пересечения данных поверхностей. (Рис 3).

Вариант № 16

1. Построить плоскость на расстоянии 60 мм от плоскости **ABC**. (Рис 1)

2. Способом замены построить равнобедренный треугольник, приняв за его боковую сторону отрезок **AB**, а за линию основания прямую **AE**. (Рис 2).

3. Построить проекции линии взаимного пересечения данной поверхности с плоскостью **ABC** (Рис 3). Плоскость считать прозрачной.

Вариант № 17

1. Определить величину расстояния от точки **А** до плоскости **ВСЕ**. (Рис1).

2. Способом замены построить центр и точки сопряжения сторон угла **АВЕ** дугою окружности радиуса в 15 мм. (Рис 2).

3. Построить проекции линии взаимного пересечения данных поверхностей. (Рис 3).

Вариант № 18

1. На отрезке **АВ**, как на стороне, построить ромб, приняв за направление его диагонали прямую **СА**. (Рис 1).

2. Способом вращения построить центр окружности, описанной вокруг треугольника **АВС**. (Рис 2).

3. Построить проекции линии взаимного пересечения данных поверхностей. (Рис 3).

Вариант № 19

1. На прямой **АЕ** найти точку, удаленную от плоскости **АВС** на расстоянии **40 мм**. (Рис 1).

2. Способом вращения определить величину угла между прямой **ВЕ** и плоскостью **АВС**. (Рис.2).

3. Построить проекции линии взаимного пересечения данной поверхности плоскостью **АВС**. Плоскость считать прозрачной. (Рис.3).

Вариант № 20

1. Вдоль прямой **СЕ** отложить от точки **Е** в обе стороны отрезки длиной в **40 мм**. (Рис 1).

2. Способом вращения определить величину угла между прямыми **АВ** и **СЕ**. (Рис. 2).

3. Построить проекции линии взаимного пересечения данных поверхностей. (Рис.3).

Вариант № 21

1. Через прямую **AE** провести плоскость перпендикулярную плоскости **ABC** и построить проекции линии взаимного пересечения проведенной плоскости с данной плоскостью . (Рис.1).

2. Способом замены определить величину угла между плоскостями **ABC** и **ABE** (Рис 2).

3. Построить проекции линии взаимного пересечения данных поверхностей (Рис 3).

Вариант № 22

1. Построить точку, симметричную точке **B** относительно прямой **CA**. (Рис 1).

2. Способом вращения построить центр окружности, вписанный в треугольник **ABC**. (Рис 2).

3. Построить фронтальную проекцию и истинный вид сечения данной поверхности с плоскостью **P**. (Рис 3). Плоскость считать прозрачной.

Вариант № 23

1. Определить величину высоты треугольника **ABC**, проведенной через вершину **B**. (Рис 1).

2. Способом вращения определить величину расстояния от точки **E** до плоскости **ABC**. (Рис 2).

3. Построить основные проекции линии взаимного пересечения данных поверхностей (Рис.3).

Вариант № 24

1. Построить плоскость на расстоянии **60 мм** от плоскости **ABC**. (Рис.1).

2. Способом вращения в плоскости **ABC** на отрезке **BC**, как на основании, построить равнобокую трапецию, если ее высота равна **20 мм**, а диагональ - **50 мм**. (Рис 2).

3. Построить проекции линии взаимного пересечения данной поверхности с плоскостью **ACE**. (Рис.3). Плоскость считать прозрачной.

Вариант № 25

1. Определить величину расстояния от точки **В** до прямой **СА** (Рис 1).

2. Способом вращения на прямой **АВ** найти точку, отстоящую от плоскости **ВСЕ** на расстоянии **30 мм**. (Рис.2).

3. Построить горизонтальную проекцию и истинный вид сечения данной поверхности с плоскостью **Р**. (Рис. 3). Плоскость считать прозрачной.

Вариант № 26

1. Построить прямую призму высотой в **70 мм**, приняв за ее основание треугольник **АВС**. (Рис 1).

2. Способом вращения построить плоскость на расстоянии 30 мм от плоскости **АВС**. (Рис.2).

3. Построить проекции линии взаимного пересечения данных поверхностей. (Рис3).

Вариант № 27

1. Определить величину расстояния от точки **В** до прямой **СА**. (Рис 1).

2. Способом вращения определить величину расстояния от точка **А** до прямой **ВА**. (Рис 2).

3. Построить проекции линии взаимного пересечения данных поверхностей. (Рис.3)

Вариант № 28

1. На отрезке **СЕ**, как на катете, построить прямоугольный треугольник, если гипотенуза лежит на прямой **СВ**. (Рис 1).

2. Способом вращения построить истинный вид треугольника **АВС**. (Рис2).

3. Построить горизонтальную проекцию и истинный вид сечения данной поверхности с плоскостью **Р**. (Рис 3). Плоскость считать прозрачной.

Вариант № 29

1. На отрезке **АС**, как на стороне, построить ромб, приняв за направление смежной стороны прямую **АВ**. (Рис 1).

2. Способом вращения определить величину угла между прямой **ВЕ** и плоскостью **АВС**. (Рис.2).

3. Построить проекции линии взаимного пересечения данных поверхностей. (Рис. 3).

Вариант № 30

1. Определить величину углов наклона плоскости **АВС** к плоскостям **Н** и **V**. (Рис.1).

2. Способом вращения определить величину расстояния от точки **А** до прямой **ВС**. (Рис 2).

3. Построить проекции линии взаимного пересечения данных поверхностей (Рис 3).

Вариант № 31

1. Построить проекции прямоугольного равнобедренного треугольника **АВС** с катетом **ВС** на прямой **m**, исходя из условия, что радиус окружности, описанной около треугольника, равен **0,5 АВ**. (Рис.1).

2. Способом вращения определить величину угла между прямой ВЕ и плоскостью **АВС**. (Рис.2).

3. Построить проекции линии взаимного пересечения данных поверхностей (Рис.3).

Вариант № 32

1. Провести через точку **А** прямую **АТ**, пересекающую заданные прямые **ВС** и **ЕД** . (Рис 1).

2. Способом замены построить центр и точки сопряжения сторон угла **АВС** дугою окружности радиуса в **15 мм**. (Рис 2).

3. Построить проекции линии взаимного пересечения данных поверхностей. (Рис 3).

Вариант № 33

1. Через точку **А** провести прямую **АК** параллельную плоскости **Р(ВС || ДЕ)** и пересекающую прямую **MN**. (Рис 1).

2. Способом замены определить действительную величину угла между плоскостями **АСВ** и **АЕВ**. (Рис 2).

3. Построить проекции линии пересечения данной поверхности с плоскостью **АВС**. (Рис 3).

Вариант № 34

1. Построить проекции прямоугольной трапеции **АВСД** с большим основанием **ВС** на прямой **m**, исходя из условия, что **АД=АВ ВС=1,5 АВ**, угол при вершине **В** равен **90°**. (Рис 1).

2. Способом вращения построить центр окружности, вписанный в треугольник **АВС**. (Рис 2).

3. Построить фронтальную проекцию и истинный вид сечения данной поверхности с плоскостью **Р**. (Рис 3). Плоскость считать прозрачной.

Вариант № 35

1. Построить проекции сферической поверхности, радиус которой **R=25мм**, касательной к плоскости **$P(P_H, P_V)$** в точке **$A \in P$**. (Рис.1).

2. Способом вращения в плоскости **АВС** на отрезке **ВС**, как на основании, построить равнобокую трапецию, если ее высота равна **20 мм**, а диагональ - **50 мм**. (Рис 2).

3. Построить проекции линии взаимного пересечения данных поверхностей (Рис.3).

Вариант № 36

1. Провести плоскость **$Q(Q_H, Q_V)$** касательную к сфере и параллельную заданной плоскости **$P(P_H, P_V)$**. (Рис.1).

2. Способом замены определить величину расстояния от точки **Е** до плоскости **АВС**. (Рис.2).

3. Не прибегая к помощи профильной проекции, построить основные проекции линии пересечения данной поверхности с плоскостью **$P(P_H, P_V)$**. Плоскость считать прозрачной. (Рис.3).

Вариант № 37

1. На отрезке **АС**, как на основании, построить равнобедренный треугольник так, чтобы его третья вершина располагалась на прямой **ВЕ** (Рис1)

2. Способом замены определить величину расстояния между скрещивающимися прямыми **АВ** и **СЕ** (Рис.2).

3. Построить проекции линии взаимного пересечения данных поверхностей (Рис.3).

Вариант № 38

1. Построить прямую призму высотой в **60 мм**, приняв за ее основание треугольник **СВА**. (Рис.1).

2. Способом замены определить натуральную величину расстояния от точки **А** до плоскости треугольника **ЕСВ**. (Рис.2).

3. Построить основные проекции линии пересечения данной поверхности с плоскостью **ВАС**. (Рис.3).

Вариант № 39

1. Определить натуральную длину высоты пирамиды при вершине **S** с основанием треугольника **АВС**. (Рис.1).
2. Способом замены определить натуральную величину расстояния между скрещивающимися прямыми **АВ** и **СЕ**. (Рис.2).
3. Построить проекции линии взаимного пересечения данных поверхностей. (Рис.3).

Вариант № 40

1. Построить прямоугольный треугольник, если известно, что один из катетов, равный в **50мм**, принадлежит плоскости треугольника **АВС**, а гипотенуза наклонена к данной плоскости под углом **45°**. (Рис 1)

2. Способом замены построить прямую , удаленную на **15 мм** от граней угла при ребре **АВ**. (Рис 2).

3. Построить проекции линии взаимного пересечения данных поверхностей. (Рис 3).

Вариант № 41

1. Построить проекции прямоугольного треугольника **АВС** с катетом **ВС** на прямой m и угол при вершине **А** равный **30°**, исходя из условия, что радиус окружности, описанной около треугольника, равен **0,5 АВ**. (Рис 1).

2. Способом вращения определить величину расстояния от точки **Е** до плоскости **АВС**. (Рис 2).

3. Построить основные проекции линии взаимного пересечения данных поверхностей (Рис.3).

Вариант № 42

1. Построить проекции прямоугольной трапеции **АВСД**, если известно, что **АВ=АД, ВС=2АВ** и **ВС** принадлежит прямой **m**. (Рис.1).

2. Способом вращения определить величину угла между прямой **ВЕ** и плоскостью **АВС**. (Рис.2).

3. Построить проекции линии взаимного пересечения данных поверхностей. (Рис. 3).

Вариант № 43

1. Построить проекции прямоугольника **АВС** с большой стороной **ВС** на прямой m, исходя из условия, что отношение его сторон равно **2**. (Рис 1).

2. Способом замены на прямой **АВ** найти точки, удаленные от прямой **СЕ** на **60 мм**. (Рис 2).

3. Построить проекции линии взаимного пересечения данных поверхностей (Рис 3).

Вариант № 44

1. Построить проекции квадрата **АВСД** с диагональю **ВД** на прямой **m**. (Рис 1).

2. Даны скрещивающиеся прямые **АВ** и **СД**. Способом замены построить прямую параллельную **СД** и отстающую от неё на расстоянии **20мм**, а также пересекающую прямую **АВ**. (Рис 2).

3. Построить проекции линии взаимного пересечения данных поверхностей (Рис 3).

Вариант № 45

1. Построить в плоскости **Р(а || в)** множество точек, равноудаленных от концов отрезка **СД**. (Рис.1).

2. Способом замены на прямой **АВ** найти точку, отстающую от прямой **СД** на расстоянии **40 мм**. (Рис.2).

3. Построить основные проекции линии пересечения данной поверхности с плоскостью **Р** . (Рис.3).

Вариант № 46

1. Построить точку симметричную точке **Е** относительно плоскости **АВС**. (Рис.1).

2. Способом замены определить величину угла между прямой ВЕ и плоскостью **АВС** (Рис.2).

3. Построить проекции линии взаимного пересечения данных поверхностей. (Рис.3).

Вариант № 47

1. Построить проекции сферической поверхности, центр которого находится в точке **А**, касательной к плоскости **$P(P_H, P_V)$** (Рис. 1).

2. Способом вращения построить центр и точки сопряжения сторон угла **АВС** дугою окружности. (Рис.2).

3. Построить проекции линии взаимного пересечения данных поверхностей. (Рис.3).

Вариант № 48

1. На отрезке **АВ**, как на стороне, построить ромб, приняв за направление его диагонали прямую **СА**. (Рис 1).

2. Способом вращения построить центр окружности, описанной вокруг треугольника **АВС**. (Рис 2).

3. Построить проекции линии взаимного пересечения данных поверхностей. (Рис 3).

Вариант № 49

1. **На прямой AE найти точку, удаленную от плоскости ABC** на расстоянии **40 мм**. (Рис 1).

2. Способом вращения определить величину угла между прямой **BE** и плоскостью **ABC**. (Рис.2).

3. Построить проекции линии взаимного пересечения данных поверхностей. (Рис.3).

Вариант № 50

1. Вдоль прямой **CE** отложить от точки **E** в обе стороны отрезки длиной в **40 мм**. (Рис 1).

2. Способом вращения определить величину угла между прямыми **AB** и **CE**. (Рис. 2).

3. Построить проекции линии взаимного пересечения данных поверхностей. (Рис.3).

Вариант № 51

1. Построить проекции прямоугольного треугольника **ABC** с катетом **BC** на прямой m и углом при вершине **A** равный **60°**, исходя из условия, что радиус окружности, описанной около треугольника, равен **0,5 AB**. (Рис 1)

2. Способом замены построить равнобедренный треугольник, приняв за его боковую сторону отрезок **AB**, а за линию основания прямую **AE**. (Рис 2).

3. Построить проекции линии взаимного пересечения данной поверхности с плоскостью **ABC** (Рис 3). Плоскость считать прозрачной.

Вариант № 52

1. Построить проекции сферической поверхности, центр которой находится в точке **A**, касательной к плоскости $\mathbf{P(P_H, P_V)}$ (Рис. 1).

2. Способом вращения построить центр и точки сопряжения сторон угла **ABC** дугою окружности радиуса в **15мм**. (Рис.2).

3. Построить проекции линии взаимного пересечения данных поверхностей. (Рис.3).

Вариант № 53

1. Построить проекции прямоугольника **АВС** с большей стороной **ВС** на прямой m, исходя из условия, что отношение его сторон равно **2**. (Рис.1).

2. Способом вращения построить плоскость на расстоянии **30 мм** от плоскости **АВС**. (Рис.2).

3. Построить проекции линии взаимного пересечения данных поверхностей. (Рис3).

Вариант № 54

1. Построить проекции квадрата **АВСД** со стороной **ВС** на прямой m, если известно положение вершины квадрата точки **А**. (Рис1).

2. Способом замены на прямой **АВ** найти точку, отстающую от прямой **СД** на расстоянии **40мм**. (Рис2).

3. Построить проекции линии взаимного пересечения данных поверхностей. (Рис3).

Вариант № 55

1. Провести через точку **А** прямую **АТ**, пересекающую заданные прямые **ВС** и **ЕД** . (Рис 1).

2. Способом замены построить истинный вид треугольника **АВЕ**. (Рис2).

3. Построить проекции линии взаимного пересечения данных поверхностей. (Рис 3).

Вариант № 56

1. Построить проекции сферической поверхности, радиус которой **R=25мм**, касательной к плоскости **P(P_H ,P_V)** в точке **A**$\in$**P**. (Рис.1).

2. Способом вращения в плоскости **АВС** на отрезке **ВС**, как на основании, построить равнобокую трапецию, если ее высота равна **20 мм**, а диагональ - **50 мм**. (Рис 2).

3. Не прибегая к помощи профильной проекции, построить основные проекции линии пересечения данной поверхности с плоскостью **P(P_H ,P_V)**. Плоскость считать прозрачной. (Рис.3).

Вариант № 57

1. Не прибегая к помощи профильной проекции, провести прямую, параллельную оси **ОХ** и пересекающую прямые **АВ** и **СЕ** (Рис 1).

2. Способом вращения определить натуральный вид треугольника **АВС**. (Рис 2).

3. Построить проекции линии взаимного пересечения данных поверхностей (Рис 3)

Вариант № 58

1. На отрезке **СЕ**, как на катете, построить прямоугольный треугольник, если гипотенуза лежит на прямой **СВ**. (Рис 1).

2. Способом вращения построить истинный вид треугольника **АВС**. (Рис2).

3. Построить горизонтальную проекцию и истинный вид сечения данной поверхности с плоскостью **Р**. (Рис 3). Плоскость считать прозрачной.

Вариант № 59

1. Определить величину высоты треугольника **АВС**, проведенной через вершину **В**. (Рис 1).

2. Способом вращения определить величину расстояния от точки **С** до плоскости **АВЕ**. (Рис 2).

3. Построить основные проекции линии пересечения данной поверхности с плоскостью **ЕАС**. (Рис 3).

Вариант № 60

1. Через прямую **АЕ** провести плоскость перпендикулярную плоскости **АВС** и построить проекции линии взаимного пересечения проведенной плоскости с данной плоскостью . (Рис.1).

2. Способом замены определить величину угла между плоскостями **АВС** и **АВЕ** (Рис 2).

3. Построить проекции линии взаимного пересечения данных поверхностей (Рис 3).

Содержание

Редактор Ахметжанова Г.М.

Подписано к печати 19.09.2008 г. Формат 60x84 1/16.
Объем 9,05 п.л. Тираж 50 экз. Заказ № 441.

Отпечатано в типографии ТГТУ. г.Ташкент,
ул.Талабалар 54. тел: 246-63-84.